



HAL
open science

OPTIMISATION DES STRUCTURES SELON DES CRITERES IMPOSES PAR LA DISCRETION ACOUSTIQUE DES NAVIRES

Pierre Lemerle

► **To cite this version:**

Pierre Lemerle. OPTIMISATION DES STRUCTURES SELON DES CRITERES IMPOSES PAR LA DISCRETION ACOUSTIQUE DES NAVIRES. Vibrations [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 1994. Français. NNT: . tel-00974024

HAL Id: tel-00974024

<https://theses.hal.science/tel-00974024>

Submitted on 7 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT

présentée

à l'ECOLE CENTRALE DE LYON

par Pierre LEMERLE
pour obtenir le grade de DOCTEUR
spécialité : Acoustique et Vibrations

sujet de la thèse

OPTIMISATION DES STRUCTURES SELON DES CRITERES IMPOSES PAR LA DISCRETION ACOUSTIQUE DES NAVIRES

soutenue le 28 septembre 1994
devant le jury composé de :

Mlle. COMTE-BELLOT
Mr. JEZEQUEL
Mr. PERULLI
Mr. RAVALARD
Mlle. GRANGIER
Mr. GIRARD
Mr. TROMPETTE

Président
Directeur
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur

LISTE DES PERSONNES HABILITEES A ENCADRER DES THESES

A. du 30.03.82 Art. 21 et A. du 23.11.88

Directeur : Etienne PASCAUD

Directeur Adjoint :

Directeur des Etudes : Jean ROZINOER

Directeur Administration de la Recherche : Francis LEBOEUF

DEPARTEMENT	NOM-PRENOM	FONCTION
ACOUSTIQUE	COMTE-BELLOT Geneviève JUVE Daniel	PROFESSEUR ---
	GALLAND Marie-Annick ROGER Michel	MAITRE DE CONFERENCES ---
	BLANC-BENON Philippe SUNYACH Michel	CHARGE DE RECHERCHE CNRS PROFESSEUR IUT LYON I
ELECTRONIQUE	BLANCHET Robert LE HELLEY Michel	PROFESSEUR ---
	HELLOUIN Yves	MAITRE DE CONFERENCES
	VIKTOROVITCH Pierre HOLLINGER Guy	DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS ---
	GENDRY Michel KRAWCZYK Stanislas TARDY Jacques	CHARGE DE RECHERCHE CNRS --- ---
ELECTROTECHNIQUE	AURIOL Philippe NICOLAS Alain	PROFESSEUR ---
	BEROUAL Abderrahmane ROJAT Gérard	MAITRE DE CONFERENCES ---
	NICOLAS Laurent	CHARGE DE RECHERCHE CNRS
MACHINES THERMIQUES	ARQUES Philippe BRUN Maurice CHAMPOUSSIN Jean-Claude	PROFESSEUR --- ---

<p>MATERIAUX MECANIQUE PHYSIQUE</p>	<p>GUIRALDENQ Pierre TREHEUX Daniel VANNES Bernard VINCENT Léo</p> <p>BLANC-BENON Jean BRUGIRARD Jean</p> <p>NGUYEN Du</p> <p>FAYEULLE Serge JUVE Denyse</p>	<p>- 2 -</p> <p>PROFESSEUR --- --- ---</p> <p>PROFESSEUR LYON I ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES</p> <p>CHARGE DE RECHERCHE CNRS INGENIEUR D'ETUDES</p>
<p>MATHEMATIQUES INFORMATIQUE SYSTEMES</p>	<p>DAVID Bertrand MARION Martine MAITRE Jean-François MOUSSAOUI Mohand Arezki THOMAS Gérard</p> <p>MUSY François ROZINOER Jean</p>	<p>PROFESSEUR --- --- --- ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES ---</p>
<p>MECANIQUE DES FLUIDES</p>	<p>MATHIEU Jean ALCARAZ Emilio JEANDEL Denis LEBOEUF Francis SCOTT Jean</p> <p>BATAILLE Jean GAY Bernard GENCE Jean-Noël LANCE Michel</p> <p>BEN HADID Hamda BUFFAT Marc HAMADICHE Mahmoud</p> <p>MOREL Robert</p> <p>CAMBON Claude</p> <p>BERTOGLIO Jean-Pierre ESCUDIE Dany FERRAND Pascal HENRY Daniel</p>	<p>PROFESSEUR EMERITE PROFESSEUR --- --- ---</p> <p>PROFESSEUR LYON I --- --- ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES LYON I --- ---</p> <p>PROFESSEUR INSA</p> <p>DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS</p> <p>CHARGE DE RECHERCHE CNRS --- --- --- ---</p>

<p>MECANIQUE DES SOLIDES</p>	<p>CAMBOU Bernard JEZEQUEL Louis SIDOROFF François</p> <p>SURRY Claude</p>	<p>- 3 -</p> <p>PROFESSEUR</p> <p>PROFESSEUR ENISE</p>
<p>PHYSICOCHIMIE DES INTERFACES</p>	<p>CLECHET Paul JOSEPH Jacques MARTELET Claude MARTIN Jean-René PORTE Louis</p> <p>ROBACH Yves STREMSDOERFER Guy</p> <p>JAFFREZIC Nicole</p> <p>SOUTEYRAND Elyane</p>	<p>PROFESSEUR</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES ...</p> <p>DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS</p> <p>CHARGE DE RECHERCHE CNRS</p>
<p>PHOTACATALYSE</p>	<p>PICHAT Pierre HERRMANN Jean-Marie HOANG-VAN Can</p>	<p>DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS ...</p>
<p>TECHNOLOGIE DES SURFACES</p>	<p>GEORGES Jean-Marie SABOT Jean MARTIN Jean-Michel</p> <p>MATHIA Thomas KAPSA Philippe</p> <p>LOUBET Jean-Luc</p> <p>LE BOSSE Jean-Claude</p> <p>LOPEZ Jacques</p> <p>ROUSSEAU Jacques</p>	<p>PROFESSEUR</p> <p>DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS ...</p> <p>CHARGE DE RECHERCHE CNRS</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES INSA</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES UCB</p> <p>PROFESSEUR ENISE</p>

A Christel et Faustine

Le présent travail a été effectué au centre d'étude de la DCN (CTSN / MDTC) à Toulon. Je tiens à remercier Monsieur AQUILINA Conseiller Scientifique et Technique du CTSN / MDTC et Mademoiselle GRANGIER, ingénieur CTSN / MDTC, pour l'accueil qu'ils m'ont réservé et pour les conditions dans lesquelles ils m'ont permis de préparer cette thèse.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers Monsieur JEZEQUEL, Directeur du Département de Mécanique des Solides de l'Ecole Centrale de Lyon, pour la qualité de son encadrement. Je lui suis reconnaissant quant à l'acquis personnel que j'en ai tiré.

Je remercie très sincèrement Mademoiselle COMTE-BELLOT, Directeur du Laboratoire d'Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur PERULLI, Professeur à l'université Pierre et Marie Curie (PARIS VI) et à Monsieur RAVALARD, Professeur à l'université de Valenciennes, qui ont acceptés d'être les rapporteurs de ce travail.

Je voudrais également remercier Monsieur TROMPETTE, Professeur à l'univeristé Claude Bernard et Directeur de l'I.S.T.I.L et Monsieur GIRARD, ingénieur de la société INTESPACE, d'avoir bien voulu examiner ce travail et participer à ce jury.

Mes remerciements vont également à tous les membres du groupe Discretion du CTSN / MDTC qui m'ont accompagné pendant mes études. Ils sont hélas trop nombreux pour être tous cités ici. Qu'ils me pardonnent et veuillent bien se reconnaître à travers leurs responsables nommés précédemment. Je leur exprime tous ma profonde reconnaissance.

RESUME

Dans cette étude, nous avons développé des stratégies d'optimisation adaptées au problème de la discrétion acoustique des navires. Nous rappelons dans un premier temps les critères imposés par la discrétion acoustique et les principes d'atténuation qui permettent de garantir leur application dans la pratique. Ces critères s'expriment en termes de flexibilité et transmissibilité dynamiques et concernent une large gamme fréquentielle. Nous montrons comment améliorer le comportement dynamique des structures, relativement aux critères précités : nous avons conçu deux méthodes qui permettent de dimensionner des absorbeurs dynamiques, à partir des données expérimentales. Nous développons ensuite une méthode d'optimisation de structures. L'objectif est alors de minimiser la masse de la structure avec des contraintes en flexibilités ponctuelles et transmissibilités. L'originalité de la méthode repose sur deux points : l'approche modale, en utilisant la notion de paramètres effectifs et la construction d'un algorithme fondé sur la condition d'optimalité de Kuhn-Tucker. Enfin, nous montrons comment étendre cette démarche à l'optimisation de structures composites (monocouches et sandwich), en prenant en compte l'amortissement par ajout de matériaux viscoélastiques dans une formulation en modes complexes. Tout au long de cette étude, de nombreux résultats numériques sont présentés pour illustrer les diverses stratégies d'optimisation.

ABSTRACT

In this study, some strategies of optimization have been conceived, for the problem of ship silencing. For this problem, criteria can be expressed and we present principles of attenuation which can ensure their satisfaction in practice. These criteria can be written in terms of dynamical flexibilities and transmissibilities over a wide range of frequency. We show how to improve the dynamical behaviour of structures with respect to the criteria : two methods are presented for the design of dynamic absorbers. Both can deal with experimental data. Then, we present one method of structural optimization. The *objective* is to minimize the mass of the structure with constraints on point flexibilities and transmissibilities. This method is based on two points : first, the modal approach with modal effective parameters and second the algorithm is built upon Kühn-Tucker optimality condition. At last, we show how this approach can be extended to the optimization of composite structures, by taking into account damping with a complex mode shapes formulation. Numerical results are presented.

SOMMAIRE

NOMENCLATURE.....	i
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I : ATTENUATION DE LA TRANSMISSION DES VIBRATIONS OBJECTIFS ET FORMULATION DE L'OPTIMISATION STRUCTURALE	4
I.1 INTRODUCTION	4
I.2 PRINCIPES D'ATTENUATION DE LA TRANSMISSION DES VIBRATIONS	5
I.2.1 Contraste d'impédance	5
I.2.1.1 Notions de perte d'insertion.....	5
I.2.1.2 Critères liés au principe de contraste d'impédance	6
I.2.2 Limitation de l'amplification dynamique	7
I.2.2.1 Notion d'amplification dynamique	7
I.2.2.2 Critère de limitation de l'amplification dynamique	8
I.2.3 Amortissement.....	8
I.2.4 Amortissement dynamique.....	9
I.2.5 Atténuation sélective en fréquence	10
I.3 OUTILS DE MODELISATION.....	11
I.3.1 Modèles éléments finis	11
I.3.2 Formulation des transferts dynamiques	14
I.3.2.1 Equation du mouvement.....	14
I.3.2.2 Résolution des équations	17
I.3.2.3 Paramètres effectifs	18
I.3.2.4 Effets de troncature.....	19
I.3.2.5 Cas d'une structure isostatique	20
I.3.2.6 Critères de Discrétion Acoustique	21
I.4 ENJEUX ET FONDEMENTS DE L'OPTIMISATION STRUCTURALE.....	22
I.4.1 Formulation générale du problème d'optimisation.....	25
I.4.2 Méthodes de résolution.....	26

CHAPITRE II : OPTIMISATION D'ABSORBEURS DYNAMIQUES AMORTIS	28
II.1 INTRODUCTION	28
II.2 BUT DE L'ETUDE	29
II.3 DESCRIPTION DES COUPLES	30
II.3.1 Modélisation du couple	31
II.3.2 Etude du déversement du couple	32
II.4 OPTIMISATION DE L'ABSORBEUR DYNAMIQUE AMORTI A UN DDL	32
II.4.1 Détermination de l'admittance du couple sous forme de fraction rationnelle	33
II.4.2 Raccordement impédantiel Couple - Absorbeur dynamique	34
II.4.2.1 Détermination de la flexibilité globale	35
II.4.2.2 Définition de la fonction coût	35
II.4.3 Analyse de sensibilité	37
II.4.3.1 Dérivées des maxima de la flexibilité	38
II.4.3.1.1 Calcul de $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial j\omega}\right)_{\omega=\omega_i}$	38
II.4.3.1.2 Calcul de $\frac{dj\omega_i}{dK}$ et $\frac{dj\omega_i}{d\zeta_c}$	39
II.4.3.1.3 Calcul de $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial K}\right)_{\omega=\omega_i}$ et $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta_c}\right)_{\omega=\omega_i}$	41
II.4.3.2 Gradient de la fonction coût	42
II.4.4 Algorithme d'optimisation	43
II.4.4.1 Principe de l'algorithme	43
II.4.4.2 Organigramme complet	44
II.4.5 Applications	45
II.4.5.1 Modèle éléments finis du couple	45
II.4.5.2 Mesures expérimentales	46
II.4.5.2.1 Résultats de l'optimisation	47
II.4.5.2.2 Etude paramétrique	49
II.4.5.2.3 Influence sur la pression rayonnée	49
II.4.6 Absorbeur avec amortissement hystérétique	51
II.4.7 Conclusion	52
II.5 DIMENSIONNEMENT OPTIMAL D'UN ABSORBEUR REEL	53
II.5.1 Description du modèle de l'absorbeur dynamique	54
II.5.1.1 Modélisation des plots	55
II.5.1.1.1 Loi de comportement des matériaux viscoélastiques	55

Sommaire

II.5.1.1.2	Modèle simplifié des plots.....	56
II.5.1.2	Matrice de flexibilité de la plaque d'acier.....	57
II.5.1.3	Raccordement de la plaque et des plots.....	58
II.5.2	Matrice de flexibilité dynamique du couple.....	60
II.5.3	Raccordement impédantiel de l'absorbeur au couple.....	61
II.5.3.1	Détermination de la matrice de flexibilité globale.....	61
II.5.3.2	Définition de la fonction coût.....	61
II.5.4	Algorithme d'optimisation.....	62
II.5.4.1	Réflexion.....	63
II.5.4.2	Réflexion et expansion.....	64
II.5.4.3	Contraction.....	64
II.5.4.4	Organigramme complet.....	65
II.5.5	Applications.....	65
II.5.6	Validation du modèle de l'absorbeur.....	66
II.5.7	Modèle double-plaque.....	68
II.5.7.1	Matrice de flexibilité de l'absorbeur double-plaque.....	68
II.5.7.2	Applications.....	70
II.5.8	Conclusion.....	72

CHAPITRE III : CONCEPTION OPTIMALE DES STRUCTURES..... 73

III.1	INTRODUCTION.....	73
III.2	DESCRIPTION DU CAS TEST.....	74
III.3	POSITION DU PROBLEME.....	75
III.4	CONDITION DE KUHN-TUCKER.....	76
III.5	ALGORITHME D'OPTIMISATION.....	78
III.5.1	Objectifs et formulation du problème.....	78
III.5.2	Etablissement de la récurrence.....	80
III.5.2.1	Récurrence pour les variables de conception.....	80
III.5.2.2	Récurrence pour les multiplicateurs de Lagrange.....	81
III.5.3	Critère d'arrêt.....	82
III.5.4	Analyse de sensibilité.....	82
III.5.4.1	Cas des modes simples.....	83
III.5.4.1.1	Sensibilité des valeurs propres.....	83
III.5.4.1.2	Sensibilité des formes propres.....	84
III.5.4.2	Cas des modes multiples.....	87
III.5.4.2.1	Sensibilité des valeurs propres.....	88
III.5.4.2.2	Sensibilité des formes propres.....	89

Sommaire

III.5.5 Comportement de la contrainte en transmissibilité	94
III.5.6 Organigramme complet	99
III.5.7 Applications.....	100
III.5.7.1 Cas de charge (A)	100
III.5.7.2 Cas de charge (B)	101
III.5.7.3 Cas de charge (C)	102
III.5.7.4 Gains en transmissibilités et flexibilités.....	103
III.5.7.5 Vitesse de convergence	103
III.7 CONCLUSION.....	107

CHAPITRE IV : OPTIMISATION DE REVETEMENTS AMORTISSANTS

108

IV.1 INTRODUCTION	108
IV.2 POSITION DU PROBLEME	109
IV.3 CARACTERISTIQUES EQUIVALENTES D'UNE POUTRE COMPOSITE MONOCOUCHE	109
IV.4 FORMULATION DES TRANSFERTS DYNAMIQUES	112
IV.4.1 Résolution des équations.....	113
IV.4.2 Paramètres effectifs	113
IV.5 ALGORITHME D'OPTIMISATION.....	114
IV.5.1 Définition des contraintes	114
IV.5.2 Condition de Kühn-Tucker	115
IV.5.3 Etablissement de la récurrence.....	115
IV.5.3.1 Récurrence pour les variables de conception.....	116
IV.5.3.2 Récurrence pour les multiplicateurs de Lagrange.....	115
IV.5.4 Critère d'arrêt.....	118
IV.5.5 Analyse de sensibilité.....	118
IV.5.6 Description des structures test	119
IV.5.7 Applications.....	120
IV.5.7.1 Poutre Cantilever	120
IV.5.7.1.1 Répartition optimale des matériaux constituant la poutre.....	121
IV.5.7.1.2 Vitesse de convergence	122
IV.5.7.2 Portique bi-encasté	122
IV.5.7.2.1 Répartition optimale des matériaux constituant le portique	124
IV.5.7.2.2 Vitesse de convergence	125

Sommaire

IV.6 CAS DE L'AMORTISSEMENT VARIABLE.....	125
IV.6.1 Interpolation linéaire des caractéristiques viscoélastiques	126
IV.6.2 Calcul des matrices élémentaires et assemblage	127
IV.6.3 Formulation des transferts dynamiques	128
IV.6.3.1 Résolution des équations	130
IV.6.4 Définition des contraintes	130
IV.6.5 Organigramme complet.....	131
IV.6.6 Applications.....	132
IV.6.6.1 Poutre Cantilever	132
IV.6.6.1.1 Répartition optimale des matériaux constituant la poutre.....	132
IV.6.6.2 Portique bi-encasté.....	132
IV.6.6.2.1 Répartition optimale des matériaux constituant le portique	133
IV.7 OPTIMISATION DE STRUCTURES SANDWICH	134
IV.7.1 Description de l'élément poutre.....	135
IV.7.2 Calcul des matrices de raideur élémentaires.....	135
IV.7.2.1 Contribution des peaux	135
IV.7.2.2 Contribution élastique du film	136
IV.7.2.3 Prise en compte des amortissements structuraux des matériaux	138
IV.7.3 Calcul des matrices de masse élémentaires.....	138
IV.7.4 Assemblage	139
IV.7.5 Optimisation	140
IV.7.6 Applications.....	141
IV.7.6.1 Portique.....	141
IV.7.6.1.1 Répartition optimale du matériau élastique	141
IV.7.6.1.2 Tableaux de résultats.....	142
IV.7.6.2 Plaque sandwich.....	142
IV.7.6.2.1 Profil optimal de la plaque.....	144
IV.7.6.2.2 Vitesse de convergence	145
IV.8 CONCLUSION	146
CONCLUSION	148
BIBLIOGRAPHIE.....	150
ANNEXE A1 : METHODE D'IDENTIFICATION DE DAT & MEURZEC	156
ANNEXE A2 : OPTIMISATION D'UNE PLAQUE	167
ANNEXE A3 : ELEMENT FINI PLAQUE SANDWICH QUAD4A.....	173

NOMENCLATURE

M	matrice de masse
K	matrice de raideur
C	matrice d'amortissement
q	vecteur des composantes nodales
q_i	composantes nodales des ddl libres
q_j	composantes nodales des ddl à déplacements imposés
F_i	forces imposées aux ddl libres
R_j	réaction aux ddl de jonction
φ	matrice des modes propres à jonction fixe
φ_k	mode propre n° k (vecteur colonne n° k de φ)
γ	matrice des modes propres normalisés à jonction fixe $\gamma^t M \gamma = 1$
γ_k	mode propre normalisé n° k (vecteur colonne n° k de γ)
Φ	matrice des modes statiques de jonction
ω_k	pulsation propre n° k
η_k	composante modale associée au mode n° k
m_k	masse modale n° k
k_k	raideur modale n° k
c_k	coefficient d'amortissement visqueux modal n° k
ξ_k	taux d'amortissement visqueux modal n° k
M_{ii}, K_{ii}	sous-matrices de masse et de raideur relatives aux ddl libres
M_{ij}, K_{ij}	sous-matrices de masse et de raideur relatives à la jonction
M_{ij}, K_{ij}	sous-matrices de masse et de raideur d'interaction ddl libres / jonction
$\bar{M}_{ij}, \bar{K}_{ij}$	matrices de masse et de raideur condensées à la jonction
L	matrice de couplage modes de jonction / modes propres
L_k	vecteur ligne n° k de L
$\tilde{G}_{ii}(\omega)$	matrice de flexibilité dynamique
$(\tilde{G}_{ii}(\omega))_{i_0 i_1}$	flexibilité dynamique entre le ddl i_0 et le ddl i_1
$\tilde{M}_{ij}(\omega)$	matrice de masse dynamique
$\tilde{T}_{ij}(\omega)$	matrice de transmissibilité dynamique
$(\tilde{T}_{ij}(\omega))_{i_0 j_0}$	transmissibilité dynamique entre le ddl i_0 et le ddl j_0
$\tilde{G}_{ii,k}$	matrice de flexibilité effective (mode n° k)
$(\tilde{G}_{ii,k})_{i_0 i_1}$	flexibilité effective entre le ddl i_0 et le ddl i_1
$\tilde{M}_{ij,k}$	matrice de masse effective (mode n° k)
$\tilde{T}_{ij,k}$	matrice de transmissibilité effective (mode n° k)
$(\tilde{T}_{ij,k})_{i_0 j_0}$	transmissibilité effective entre le ddl i_0 et le ddl j_0

Nomenclature

G_{ij}	matrice de flexibilité statique
H_k	amplification dynamique en transmissibilité (mode n° k)
T_k	amplification dynamique en flexibilité (mode n° k)
f	fonction coût ou objectif
r_i	variable de conception n° i
R	vecteur des variables de conception
m	nombres de variables de conception
R_0	minimum absolu du problème d'optimisation
R_1	minimum relatif du problème d'optimisation
p	nombre de contraintes de type égalité
q	nombre de contraintes de type inégalité
g_i	contrainte égalité n° i
h_j	contrainte inégalité n° j
D	domaine admissible
H	Hessien $\nabla^2 f(R)$
λ, μ	multiplicateurs de Lagrange
Ψ	fonction de Lagrange $\Psi(R, \lambda, \mu) = f(R) + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(R) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(R)$
S^i	direction de descente pour l'itération n° i
E, G	module d'Young réel, module de cisaillement réel
E^*, G^*	module d'Young complexe, module de cisaillement complexe
η	facteur de perte
J	moment d'inertie
g_f	contrainte en flexibilité
g_T	contrainte en transmissibilité
\hat{g}_f	valeur à assigner à la fonction des flexibilités effectives dans la contrainte g_f
\hat{g}_T	valeur à assigner à la fonction des transmissibilités effectives dans la contrainte g_T
α	paramètre de relaxation pour la récurrence sur les variables de conception
Z	matrice des formes propres différentiables
Γ	sous-matrice des formes propres associées à une pulsation propre de multiplicité supérieure à 1
h_1	épaisseur du matériau élastique (monocouche)
h_2	épaisseur du matériau viscoélastique (monocouche)
\tilde{K}	matrice de raideur complexe
\hat{q}	vecteur d'état
h^+	épaisseur de la peau supérieure (sandwich)
h^-	épaisseur de la peau inférieure (sandwich)

INTRODUCTION

Ce travail a été effectué pour le compte de la Direction des Constructions Navales au centre d'Etudes et de Recherche du CTSN/MDTC, en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique des Solides de L'Ecole Centrale de Lyon.

Les objectifs de Discretion Acoustique des navires conduisent à adopter des solutions technologiques visant à la réduction des bruits et des vibrations. La conception des carlingages et autres sous-systèmes doit répondre aux impératifs d'atténuation des vibrations. En théorie, ces impératifs se traduisent par l'expression de critères dynamiques liés aux notions de transmissibilité en forces et de flexibilité ponctuelle.

D'autre part, les structures embarquées sont également soumises à des contraintes de masse. En effet, dans le domaine de la construction navale, la masse est un paramètre de premier ordre. Elle implique des problèmes d'encombrement et conditionne la flottabilité et la stabilité d'un navire.

Tout l'art du concepteur consiste alors à prédire le comportement vibratoire de la structure a priori, c'est-à-dire grâce à des moyens de simulation numérique et à apporter des solutions technologiques dans le cas où la structure ne répondrait pas aux critères de la Discretion Acoustique cités plus haut. Dans ce cas, il opère généralement des modifications structurales locales, en ayant soin de respecter le cahier des charges concernant les contraintes liées à l'encombrement et la masse.

Parallèlement, lorsque les structures existantes ne satisfont pas les contraintes imposées par le besoin de Discretion Acoustique, on est amené à trouver des moyens supplémentaires pour modifier leur comportement vibratoire. Classiquement, une méthode consiste à ajouter des absorbeurs dynamiques.

D'une manière générale, l'ensemble de ces tâches est fastidieuse à mettre en œuvre et fait plus appel à l'expérience de l'ingénieur qu'à des méthodologies rigoureuses.

L'objectif du travail présenté dans ce rapport est de montrer comment, en utilisant des méthodes d'optimisation, on peut d'une part automatiser la démarche de conception ou d'amélioration de structures et d'autre part, sous certaines réserves, apporter des solutions "optimales", c'est-à-dire satisfaisant au mieux les critères que l'on aura établis.

Notre travail se décompose ainsi :

Dans le premier chapitre, nous explicitons les deux critères liés aux impératifs de Discrétion Acoustique et nous exposons les principes d'atténuation des vibrations qui permettent de garantir leur application dans la pratique.

Nous décrivons ensuite les différents outils de modélisation qui aident à prédire le comportement des structures. On introduit la notion de paramètres effectifs. Ces paramètres sont très utiles pour la synthèse modale car ils permettent de connaître la contribution de chaque mode dans une fonction de transfert donnée.

On définit alors les enjeux de l'optimisation structurale dans le contexte de l'atténuation des vibrations, puis on formule théoriquement le problème d'optimisation tel qu'il se pose dans le cadre plus général de la programmation mathématique. On présente les principales méthodes d'optimisation susceptibles d'être utilisées pour la résolution de ce problème.

Dans le deuxième chapitre, nous traitons du problème de l'optimisation des caractéristiques d'absorbeurs dynamiques dans le but d'améliorer le comportement de structures réelles. Nous mettons au point deux méthodes d'optimisation.

La première consiste à exploiter la flexibilité mesurée de la structure en utilisant une technique d'identification modale. L'absorbeur dynamique est modélisé par un système masse-ressort amorti. On détermine analytiquement la réponse du système global (structure + absorbeur) en effectuant un raccordement impédantiel. On cherche à atténuer cette réponse par une technique d'optimisation adaptée à cette formulation analytique, en jouant sur l'amortissement et la raideur de l'absorbeur idéalisé.

La deuxième démarche constitue une approche plus réaliste du même problème : l'absorbeur dynamique étudié est modélisé par une plaque reliée à la structure par des plots viscoélastiques. Les variables de conception sont alors des variables physiques (rapport de sections sur hauteurs de plots). Ce modèle, contrairement au précédent, est bi-dimensionnel. La formulation analytique des transferts n'étant plus possible, on doit utiliser une méthode d'optimisation d'ordre zéro.

Le troisième chapitre est consacré à la conception optimale des structures. On définit une méthodologie pour le dimensionnement des éléments composants une structure élastique. L'objectif du problème est de trouver la structure de masse minimale respectant des contraintes de transmissibilité et de flexibilité relatives aux critères de la Discrétion Acoustique. Nous développons une approche par critère d'optimalité, c'est-à-dire en établissant a priori des conditions quant à la nature de la solution optimale. A l'aide de ces conditions (conditions de Kühn-Tucker), on construit une relation récursive qui est appliquée itérativement jusqu'à l'obtention de la conception optimale.

Introduction

Dans le quatrième chapitre, nous étudions l'influence de matériaux amortissants utilisés en tant que revêtements. On adopte la même démarche que dans le chapitre précédent. Dans un premier temps, on définit des éléments de type monocouche (revêtement viscoélastique sur matériau élastique), puis des éléments sandwichs (film viscoélastique entre deux plaques de contraintes élastiques). L'amortissement ainsi ajouté est pris en compte dans la partie imaginaire des modes complexes. Tout comme précédemment, on construit l'algorithme d'optimisation en adoptant une approche par critère d'optimalité.

CHAPITRE I
ATTENUATION DE LA TRANSMISSION DES VIBRATIONS
OBJECTIFS ET FORMULATION DE L'OPTIMISATION
STRUCTURALE

I.1 INTRODUCTION

La discrétion acoustique d'un navire dépend des fluctuations de pression qu'il engendre dans l'eau, à grande distance. Le niveau de pression (autrement dit de bruit) est directement lié au niveau vibratoire de la coque, lui-même produit par les forces agissant à l'intérieur, sur la coque.

Ces forces prennent naissance au niveau des sources excitatrices (machines et équipements internes) et sont transmises à la coque par tout un réseau de structures et de liaisons. En général, dans les navires, les sources excitatrices sont installées sur des suspensions elles-mêmes fixées à un bâti appelé carlingage, qui tient le rôle d'interface entre les machines et la coque (voir figure 1.1).

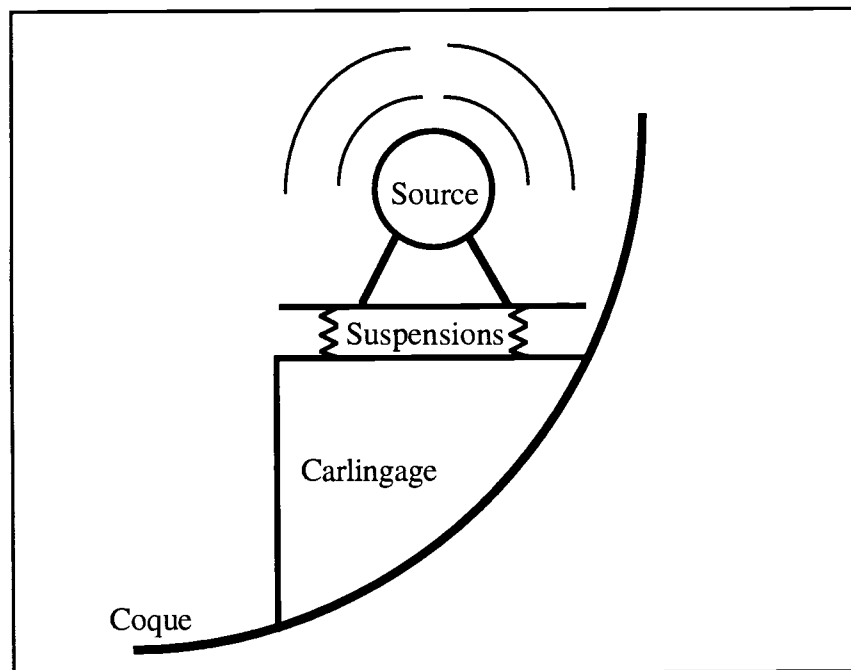


figure 1.1 : fixation des machines à la coque

Les principes d'atténuation des vibrations consistent à agir sur tous les maillons de ces chaînes de transfert de façon à réduire le niveau de bruit rayonné.

I.2 PRINCIPES D'ATTENUATION DE LA TRANSMISSION DES VIBRATIONS

I.2.1 CONTRASTE D'IMPEDANCE

Un enchaînement d'éléments présentant entre eux un contraste d'impédance ponctuelle, en leurs points de connexion, constitue un obstacle à la transmission des vibrations. Ce principe trouve son application dans l'utilisation de suspensions et de liaisons flexibles pour lier les sources de bruit à leurs structures d'accueil ou embases.

On peut schématiser l'application de ce principe par la figure suivante :

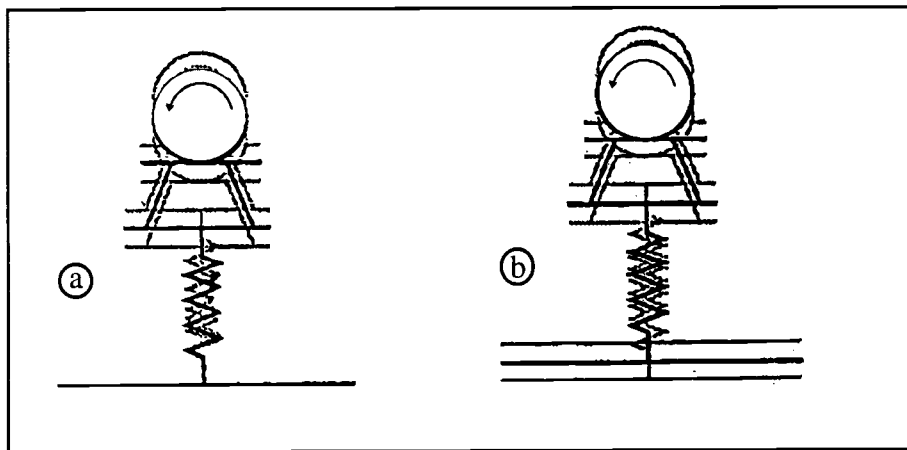


figure 1.2 : principe du contraste d'impédance

La figure 1.2.a illustre le cas où la machine et l'embase sont beaucoup plus raides que le plot : lorsque la machine impose un mouvement en haut du plot, ce dernier se déforme entre la machine et l'embase. Au contraire, si l'embase n'est pas plus raide que le plot (figure 1.2.b), la déformation est répartie entre le plot et l'embase : on transmet donc une vibration.

I.2.1.1 NOTIONS DE PERTE D'INSERTION

Si l'on schématise (figure 1.3)

- la source par une masse rigide supportée par un ressort K_S (suspension) et
- l'embase par une raideur K_E ,

L'introduction de la suspension produit, sur le rapport des forces transmises à l'embase, une perte d'insertion R_S/R_R qui tend vers $1/(1+K_E/K_S)$ pour les fréquences élevées

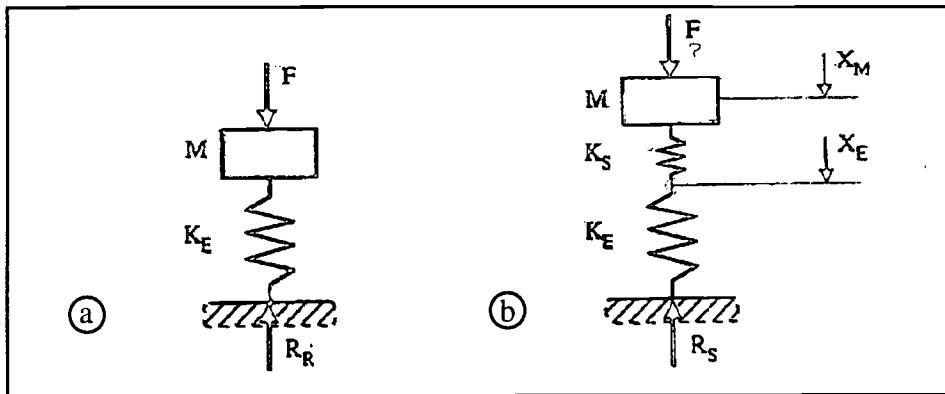


figure 1.3 : schématisation de la source et de la structure

La réponse de chacun des deux systèmes (figures 1.3.a et 1.3.b) a une seule résonance (voir figure 1.4). La résonance du système avec suspension est à une fréquence plus basse et, au delà de cette résonance, la réponse devient rapidement plus faible que celle du système sans suspension.

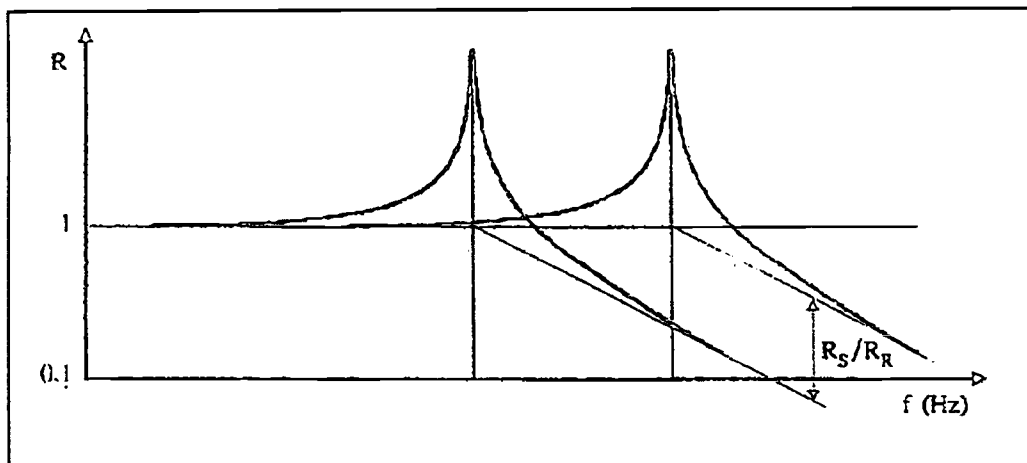


figure 1.4 : notion de perte d'insertion

1.2.1.2 CRITERES LIES AU PRINCIPE DE CONTRASTE D'IMPEDANCE

L'introduction d'une suspension permet donc d'atténuer la transmission des vibrations dans la mesure où :

- les fréquences de suspension sont suffisamment basses pour que les excitations délivrées par la source se situent au-delà.

Chapitre I

-la source (la masse) et l'embase peuvent être considérées comme rigides, dans toute la gamme de fréquence où les excitations délivrées par la source sont notables. En effet, la perte d'insertion obtenue est liée au rapport K_E/K_S : elle est d'autant plus grande que l'embase est raide par rapport à la suspension.

Pour vérifier que cette dernière condition est remplie,

on doit connaître les flexibilités dynamiques ponctuelles des structures en tous les points où l'on va venir fixer des éléments souples, selon toutes les directions.

Ceci suppose de contrôler les raideurs statiques en ces points. Elles devront respecter, par rapport aux raideurs des suspensions, un rapport défini selon les objectifs de discrétion assigné au navire.

D'autres critères permettent de se prémunir contre les "pertes de raideurs" inévitables sur les résonances pour des structures réelles.

I.2.2 LIMITATION DE L'AMPLIFICATION DYNAMIQUE

I.2.2.1 NOTION D'AMPLIFICATION DYNAMIQUE

Un autre aspect important pour la conception des structures est de limiter l'amplification dynamique qui intervient dans les transferts.

Si l'on considère une coque de navire, son comportement est assez neutre : la figure 1.5.a montre en particulier une pression mesurée en champ lointain pour une excitation directe de la coque (excitation radiale).

Si l'on excite la même coque à travers un carlingage, on voit alors apparaître en champ lointain certains modes du carlingage (figure 1.5.b).

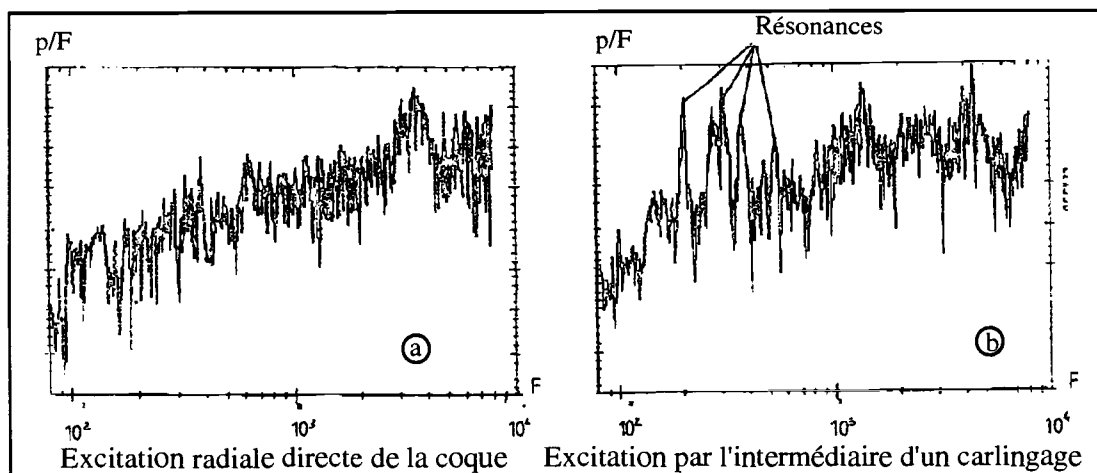


figure 1.5 : notion d'amplification dynamique

Chapitre I

Ceci est une règle générale : chaque fois que l'on superpose une structure à une autre, on amplifie les forces transmises entre l'amont et l'aval de la structure (c'est-à-dire, ici, entre les plots et la coque). La principale difficulté est de limiter cette amplification.

I.2.2.2 CRITERE DE LIMITATION DE L'AMPLIFICATION DYNAMIQUE

Pour les carlingages sur coque, le critère peut se formuler ainsi :

pour une excitation à travers le carlingage, dans les trois directions, aux points d'entrée des forces (ex : plans d'appuis de plots), la pression rayonnée ne dépasse pas plus d'un certain seuil la pression pour la situation de référence (maximum de p/F pour une excitation radiale de la coque).

Remarques :

1 - La vérification du critère sur un transfert acoustique p/F nécessite des mesures ou des calculs tout autour d'un navire. En effet, la pression ne sera pas la même selon la direction d'observation. La position des maxima dépendra du type d'excitation appliquée à la coque. Une structure complexe transmettra à la coque des combinaisons de ces sollicitations simples : on ne sait donc pas a priori où va se trouver le maximum pour une structure donnée.

2 - Ce critère étant d'accès difficile, on recherche souvent des critères de substitution plus simples. La mesure en eau sur un navire réel, en particulier, ne peut être réalisée de façon systématique. On peut estimer les surtensions sur les transferts à partir de mesures de ponctuels, pour une excitation dans la même direction. Ceci n'est qu'un pis-aller, nécessaire cependant pour une première détection des problèmes.

I.2.3 AMORTISSEMENT

Les deux principes d'atténuation précédents débouchaient sur la définition de critères que doivent respecter en particulier les structures. Nous envisageons maintenant des moyens correctifs qui peuvent aider à respecter ces critères, lorsque l'on ne parvient plus à s'en rapprocher en modifiant la conception mécanique de la structure.

Certains matériaux, incorporés aux structures métalliques, sont capables de transformer de l'énergie vibratoire en chaleur. Il s'agit en particulier des revêtements viscoélastiques, contraints ou non, et des matériaux granulaires.

Au lieu de localiser l'énergie de vibration dans les suspensions, on la dissipe lors de son cheminement dans les structures. D'une façon générale, ce phénomène tend à atténuer les surtensions aux résonances. Sur des transferts, on obtient en outre un abaissement des niveaux vibratoires moyens. L'efficacité augmente en même temps que la longueur des chemins vibratoires en termes de longueur d'ondes. Autrement dit, elle est meilleure pour les grandes structures et les fréquences élevées.

I.2.4 AMORTISSEMENT DYNAMIQUE

Il s'agit essentiellement ici d'agir sur les résonances. En multipliant le nombre de modes, on peut arriver à diminuer leur surtension. Ceci se pratique en rajoutant des systèmes qui font office de résonateurs, accordés à la fréquence des modes gênants dont on souhaite limiter l'influence (voir figure 1.6).

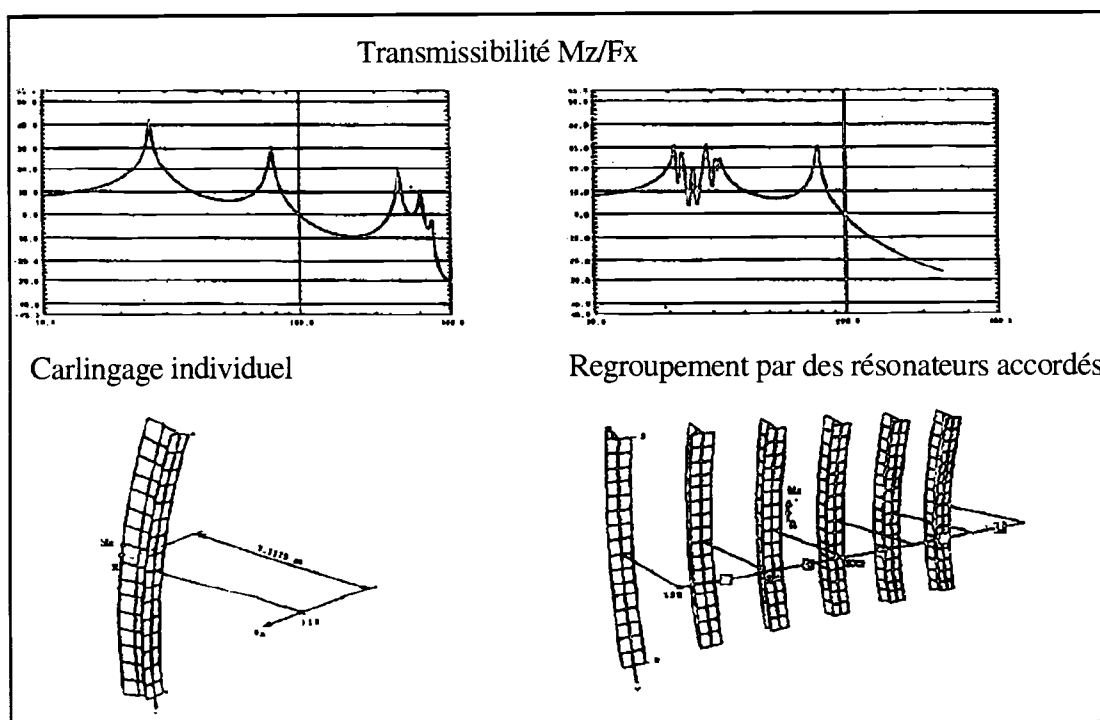


figure 1.6 : amortissement dynamique

Une partie de l'énergie de vibration se localise alors ici dans ces résonateurs rapportés.

Ce phénomène peut également être produit par l'apport d'autres structures, sur, ou à proximité de celle qu'on étudie (voir figure 1.7). Pour tirer des conclusions à partir de modèles d'expérimentations sur maquettes, on doit toujours s'interroger sur l'environnement de la structure, et essayer de reproduire au mieux ce qui existerait sur un navire achevé.

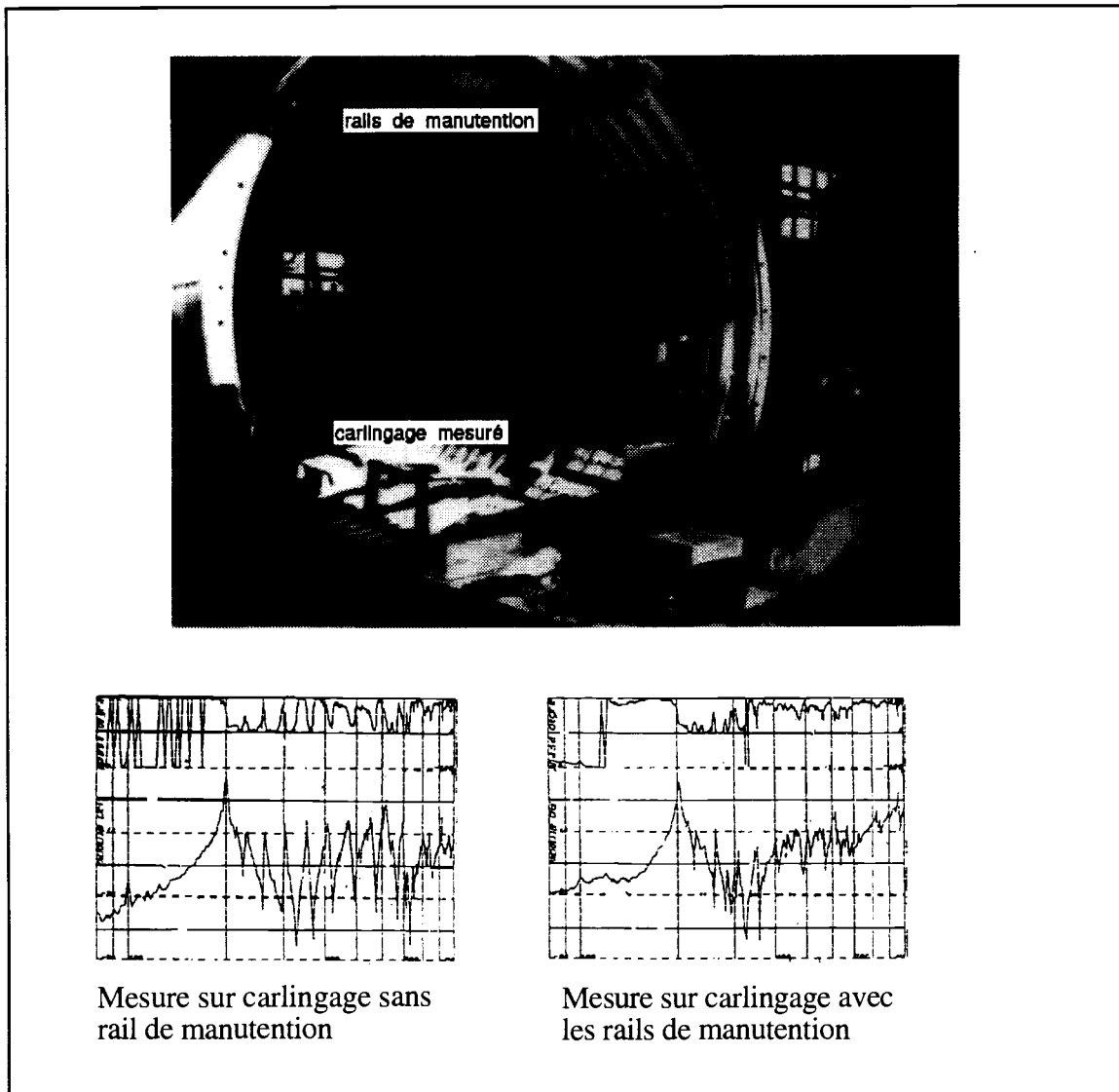


figure 1.7 : influence d'une structure proche

I.2.5 ATTENUATION SELECTIVE EN FREQUENCE

Il s'agit ici d'éviter la coïncidence de résonances d'une structure avec des raies d'excitation. Il faut pour cela connaître de façon extrêmement précise à la fois le comportement de la structure et les forces qui lui sont transmises.

De plus, on peut être confronté à plusieurs modes et surtout plusieurs raies d'excitation, ce qui rend le problème délicat.

L'utilisation de ce principe est donc limité à la suppression d'une coïncidence détectée sur un navire réel.

I.3 OUTILS DE MODELISATION

On peut déterminer expérimentalement le comportement dynamique d'un carlingage. Cette technique est utilisée assez rarement, car il s'agit d'expérimentations très lourdes : pour chaque point de la structure et chaque direction dont on souhaite observer le mouvement, on doit disposer d'un capteur. Ceci nécessite un très grand nombre de voies d'acquisition pour parvenir à une représentation suffisamment parlante des déformées.

Par ailleurs, à chaque modification de la structure il faut d'une part entreprendre la réalisation de ces modifications et d'autre part relancer tout le protocole expérimental, ce qui constitue une tâche extrêmement fastidieuse.

Les carlingages, qui existent en grand nombre (plusieurs centaines), doivent respecter les critères de la discrétion acoustique définis aux paragraphes I.2.1 et I.2.2. Il est nécessaire, pour le vérifier, et, au besoin rechercher les modifications possibles, de disposer de méthodes de conception assez légères et pouvant être appliquées de façon systématique.

Ceci est d'autant plus important qu'une fois les structures réellement construites et montées à bord, les modifications que l'on peut apporter sont très limitées : elles se heurtent aux contraintes d'aménagement et au devis de masse. Il est en particulier impossible de remettre en cause la géométrie d'ensemble de chaque structure, ce qui serait le plus susceptible d'apporter des améliorations.

Nous décrirons ci-dessous, sur un exemple de carlingages sur coque [A2], les principales méthodes qui sont mises en oeuvre pour aider à la qualification et à la conception des structures.

I.3.1 MODELES ELEMENTS FINIS

La figure 1.8 illustre l'exemple utilisé. Plus exactement, il s'agit d'une maquette de carlingage fixée sur les raidisseurs circonférentiels de coque appelés également couples.



figure 1.8 : maquette du carlingage

Ces types de structures sont modélisés par éléments finis. On représente avec la structure une partie de son environnement, suffisante pour que son comportement corresponde à la réalité. Ici, pour un carlingage sur coque, on doit représenter un panneau de coque et les portions de couples correspondants (voir figure 1.9).

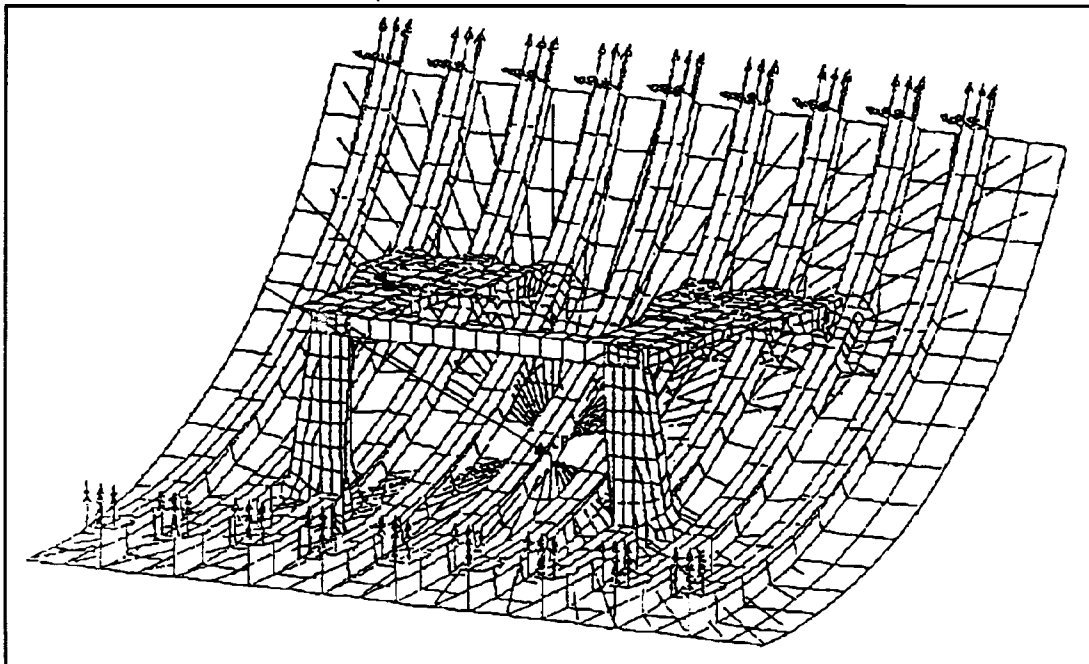


figure 1.9 : maillage du carlingage

Chapitre I

Dans un nombre limité de cas, on effectue, comme ici, une expérimentation sur maquette, ce qui permet de vérifier le réalisme des modélisations, pour adapter au besoin les méthodes.

On observe, pour une excitation selon la direction X (axe du navire), les inertances ponctuelles et un transfert vers une force (cas du calcul), ou vers une pression en champ lointain (cas des mesures). On peut remarquer l'émergence du mode n°9 issu des calculs.

On peut, en s'aidant des déformées, tester par calcul ou par essai l'effet de modifications. Pour la modification schématisée sur la figure 1.10, on observe en figure 1.11 l'effet sur la flexibilité ponctuelle et le transfert en transmissibilité.

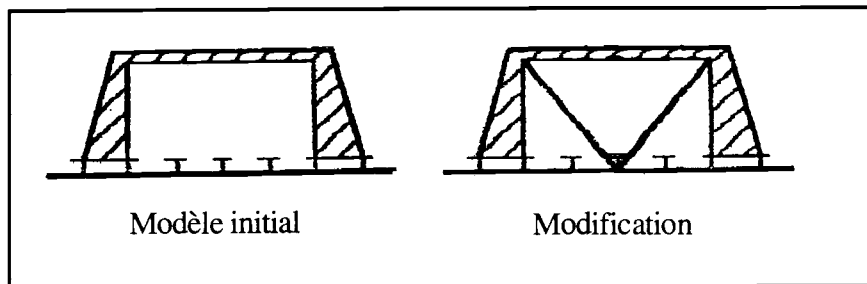


figure 1.10 : principe de la modification du carlingage de la verticale électrique

On doit noter que l'amélioration est beaucoup plus faible sur le transfert que sur la flexibilité. C'est un résultat général : il est en effet très difficile de modifier le transfert sans remettre en cause la géométrie d'une structure.

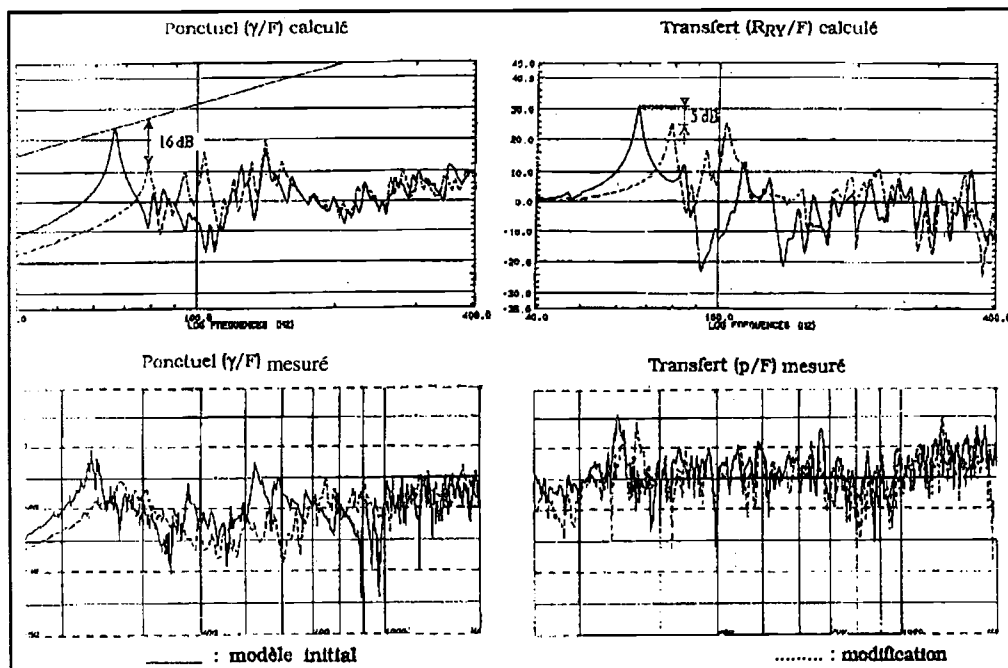


figure 1.11 : effets de la modification

On a pu voir, dans les paragraphes I.2.1 et I.2.2, que les deux critères relatifs aux objectifs de l'atténuation de la transmission des vibrations sont définis sur des fonctions de réponse en fréquence et sur une large gamme d'étude. On peut donc considérer qu'un carlingage est caractérisé, du point de vue de la discrétion acoustique, par l'amplitude des modes résonants prépondérants pour la flexibilité ponctuelle et la transmissibilité dynamiques. La formulation des transferts dynamiques à l'aide de la synthèse modale permet d'introduire la notion de paramètres effectifs. Ces derniers ont l'avantage de quantifier l'amplitude des modes. Ainsi, les critères pourront être exprimés en fonction des flexibilités effectives dans le cas du contraste d'impédance, et des transmissibilités effectives dans le cas de la limitation de l'amplification dynamique des transferts.

I.3.2 FORMULATION DES TRANSFERTS DYNAMIQUES

L'idée de base, dans la formulation des transferts dynamiques, est de ne retenir d'une réponse que l'information nécessaire à l'expression des critères large-bande, en l'occurrence l'amplitude des pics résonants prépondérants. Pour ce faire, J.F. Imbert et A. Girard [A3], [A4] ont introduit la notion de paramètre modal effectif. On montre, par la technique de la superposition modale, comment ces paramètres permettent, non seulement de reconstituer les transferts en flexibilité et transmissibilité dynamiques d'une structure, mais aussi d'estimer les effets de troncature.

I.3.2.1 EQUATION DU MOUVEMENT

Soit une structure linéaire discrète à n degrés de liberté (modélisée par éléments finis par exemple), c'est-à-dire dont l'état est défini par un vecteur déplacement q à n composantes. Pour de petits mouvements, les équations s'écrivent:

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = F \quad (I.1)$$

M , C et K étant respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur de la structure relativement aux ddl q , et F étant les forces appliquées.

Supposons cette structure soumise à certaines conditions aux limites, c'est-à-dire que certains déplacements q_j lui sont imposés (j comme jonction), d'où des réactions R_j , alors que les autres déplacements q_i sont libres (i comme interne) avec des forces imposées F_i , comme indiqué sur la figure 1.12 :

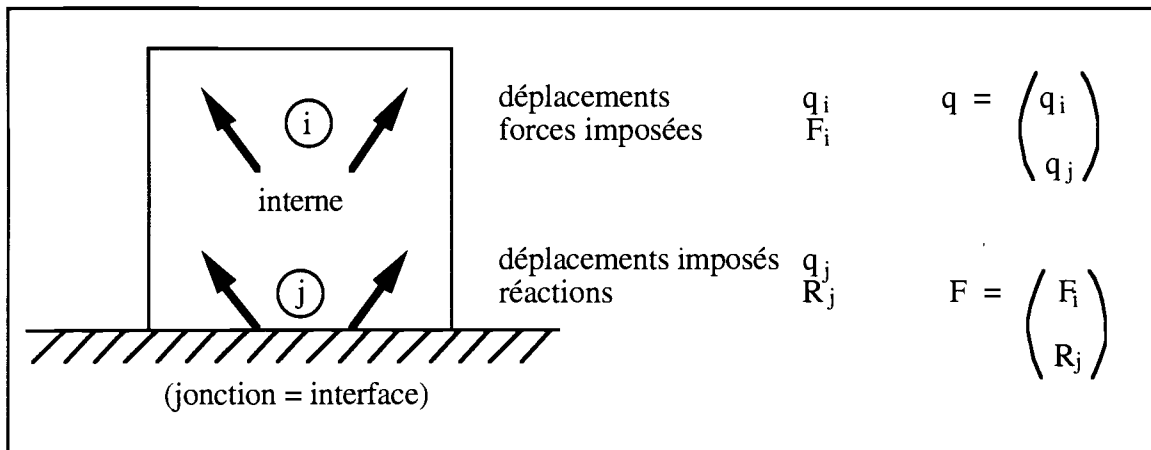


Figure 1.12 : notations pour les efforts et les déplacements

La matrice de transfert entre les déplacements (internes q_i et de jonction q_j) et les forces qui leur sont associées (respectivement F_i et R_j) peut être avantageusement exprimée à l'aide des modes de la structure. On distingue deux principales techniques de superposition modale :

La première, qui peut apparaître comme la plus naturelle, a été proposée par R.L. Goldman [A5]. Elle utilise la base des modes libres obtenus en libérant les jonctions. Afin de diminuer les effets de troncature, on utilise des "modes d'attache" résultant de l'application de forces unitaires aux points de jonction [A6]. Le système d'équations ainsi obtenu fait apparaître des termes de couplage en raideur entre les "modes libres" et les "modes d'attache".

La deuxième technique proposée par W.C. Hurty [A7] utilise les modes encastrés. Afin d'obtenir les déplacements à la jonction, on introduit des "modes contraints" obtenus en imposant des déplacements unitaires aux noeuds de jonction. Cette procédure fait apparaître des termes de couplage en masse entre les "modes contraints" et les "modes encastrés". C'est cette dernière technique que nous mettons en œuvre, dans le but d'aboutir de façon directe à la matrice de transfert reliant les déplacements internes q_i et les réactions d'appuis R_j aux forces appliquées F_i et déplacements de jonction q_j .

On exprime ainsi les déplacements internes sous la forme d'une somme de deux termes :

$$q_i = \Phi_{ij} q_j + \varphi_{ik} \eta_k \quad (I.2)$$

Φ_{ij} représente la matrice des "modes contraints" et φ_{ik} la matrice des modes encastrés.

Chapitre I

$\Phi_{ij} q_j$ correspond au mouvement d'entraînement dû à la jonction et $\varphi_{ik} \eta_k$ au mouvement relatif décomposé dans la base des modes propres φ_k :

$$\varphi : \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & & \varphi_k \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \varphi_{i1} & & & \varphi_{ik} \end{bmatrix}$$

Cette relation traduit en fait la décomposition des déplacements internes en une somme d'un terme provenant de l'entraînement de la jonction et d'un second terme dû au mouvement relatif de la structure encastrée.

En accord avec la méthode de R.R. Craig et M.C.C. Bampton [A8], les déplacements de la jonction sont de type statique. Dans le premier terme de l'équation (I.2) intervient donc la matrice Φ des modes "contraints" ou modes statiques de jonction vérifiant :

$$\begin{bmatrix} K_{jj} & K_{ji} \\ K_{ij} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I.3)$$

On peut donc en déduire l'expression de la matrice Φ :

$$\Phi = -K_{ii}^{-1} K_{ij} \quad (I.4)$$

Les déplacements de la structure encastrée sont décomposés sur la base des modes propres de la structure. Les modes vérifient l'équation du mouvement :

$$(-\omega_k^2 M_{ii} + K_{ii}) \varphi_k = 0 \quad (I.5)$$

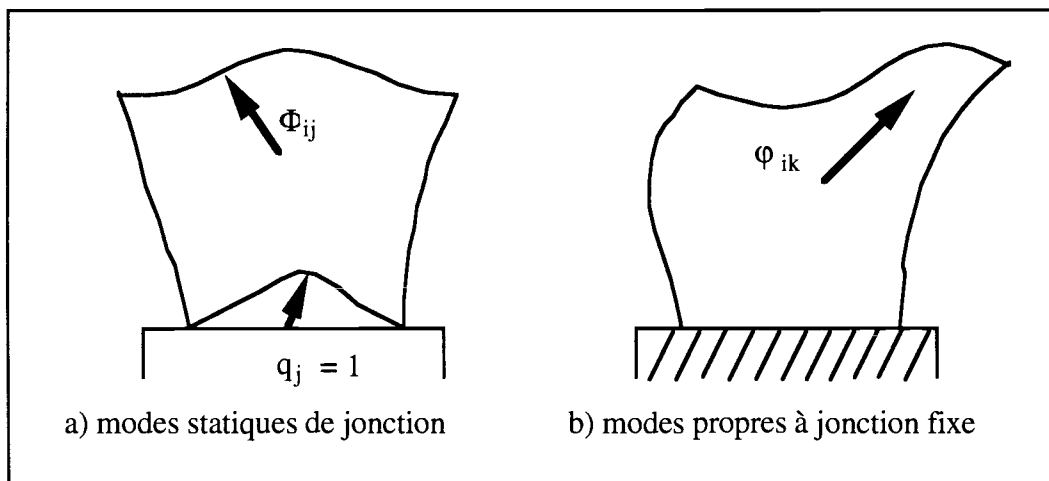


figure 1.13 : modes de structure

Il est intéressant, pour faciliter les calculs, de résoudre les équations du mouvement dans la base des modes décrits ci-dessus. Le passage de la description dans la base nodale à une description modale se fait par l'intermédiaire de la matrice de changement de base :

$$\begin{matrix} \text{jonction} \\ \text{interne} \end{matrix} \begin{bmatrix} q_j \\ q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \eta_k \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{jonction} \\ \text{modes} \end{matrix} \quad (I.6)$$

Selon les hypothèses classiques de découplage de la matrice d'amortissement, couramment appelées hypothèses de Basile (voir référence [A10] p 413), cette dernière est supposée être diagonale dans la nouvelle base.

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \overline{M}_{jj} & L^t \\ L & m_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_j \\ \ddot{\eta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_j \\ \dot{\eta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{K}_{jj} & 0 \\ 0 & k_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \eta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_j + \Phi^t F_i \\ \varphi^t F_i \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

avec : \overline{M}_{jj} , \overline{K}_{jj} matrices condensées à la jonction j
 L matrice de couplage modes de jonction/modes propres (ou facteurs de participation)
 $L = \varphi^t (M_{ii} \Phi + M_{ij})$
 $L_k = \varphi_k^t (M_{ii} \Phi + M_{ij})$ vecteur ligne n°k de L
 m_k, c_k, k_k matrices diagonales de masse, amortissement, raideur généralisées (amortissement introduit au niveau des modes propres) :
 $c_k = 2 \xi_k \sqrt{k_k m_k}$

I.3.2.2 RESOLUTION DES EQUATIONS

Par transformation de Fourier, on peut résoudre les équations précédentes dans l'espace des fréquences. On obtient alors des fonctions de transfert liant les excitations F_i et q_j et les réponses de la structure q_i et R_j :

$$\begin{bmatrix} q_i(\omega) \\ R_j(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_k H_k(\omega) \frac{\varphi_k \varphi_k^t}{\omega_k^2 m_k} & \sum_k T_k(\omega) \frac{\varphi_k L_k}{m_k} \\ \sum_k T_k(\omega) \frac{L_k^t \varphi_k^t}{m_k} & -\omega^2 \sum_k T_k(\omega) \frac{L_k^t L_k}{m_k} + \overline{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i(\omega) \\ q_j(\omega) \end{bmatrix} \quad (I.8)$$

L'écriture de la matrice de transfert fait intervenir trois fonctions de transfert fondamentales. La sommation traduit clairement la superposition modale :

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{ii}(\omega) &= \sum_k H_k(\omega) \frac{\varphi_k \varphi_k^t}{\omega_k^2 m_k} && \text{matrice de flexibilité dynamique} \\
 \tilde{M}_{jj}(\omega) &= \sum_k T_k(\omega) \frac{L_k^t L_k}{m_k} && \text{matrice de masse dynamique} \\
 \tilde{T}_{ij}(\omega) &= \sum_k T_k(\omega) \frac{\varphi_k L_k}{m_k} && \text{matrice de transmissibilité dynamique}
 \end{aligned} \tag{I.9}$$

T_k et H_k désignent les amplifications dynamiques associées au mode $n^\circ k$ respectivement en transmissibilité et en flexibilité :

$$\begin{aligned}
 H_k(\omega) &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 + 2j \xi_k \frac{\omega}{\omega_k}} && \text{amplification} \\
 T_k(\omega) &= \frac{1 + 2j \xi_k \frac{\omega}{\omega_k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 + 2j \xi_k \frac{\omega}{\omega_k}} && \text{du mode } n^\circ k
 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{en flexibilité} \\ \text{en transmissibilité} \end{array} \right. \tag{I.10}$$

Remarque :

On a négligé par commodité la contribution souvent faible de la jonction aux masses (M_{ij} et $M_{jj} = 0$).

La superposition modale implique un découplage entre les modes. Chaque mode se comporte alors comme un système à un ddl. La structure, qui comporte n ddl, est donc équivalente à n systèmes à un ddl.

I.3.2.3 PARAMETRES EFFECTIFS

La contribution de chaque mode propre est le produit d'un terme d'amplification dynamique T_k ou H_k par un terme que l'on qualifiera de paramètre effectif :

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{ii,k} &= \frac{\varphi_k \varphi_k^t}{\omega_k^2 m_k} && \text{matrice de flexibilité effective (mode } n^\circ k) \\
 \tilde{T}_{ij,k} &= \frac{\varphi_k L_k}{m_k} && \text{matrice de transmissibilité effective (mode } n^\circ k) \\
 \tilde{M}_{jj,k} &= \frac{L_k^t L_k}{m_k} && \text{matrice de masse effective (mode } n^\circ k)
 \end{aligned} \tag{I.11}$$

Ces paramètres sont indépendants du choix de normalisation des vecteurs propres. Ils permettent d'évaluer directement l'importance d'un mode dans le comportement global de la structure. Dans le cas des flexibilités effectives ponctuelles, tous ces paramètres étant de signe positif, on peut évaluer l'importance d'un mode en terme de pourcentage en exprimant le rapport de chaque flexibilité à la somme des flexibilités de chaque mode. Pour les transmissibilités qui peuvent être négatives ou positives, les paramètres effectifs peuvent être en module supérieurs à la somme de tous les paramètres.

D'autre part, tous ces paramètres vérifient les conditions de sommation suivantes, sommation qui correspond en fait à la valeur des fonctions de transfert pour $\omega = 0$:

$\sum_k \tilde{G}_{ii,k} = G_{ii} = K_{ii}^{-1}$	matrice de flexibilité statique	(I.12)
$\sum_k \tilde{T}_{ij,k} = \Phi$	matrice des modes statiques de jonction	
$\sum_k \tilde{M}_{jj,k} = \bar{M}_{jj} - \bar{m}_{jj}$	matrice de masse statique	

Ces propriétés sont illustrées par la figure 1.14 :

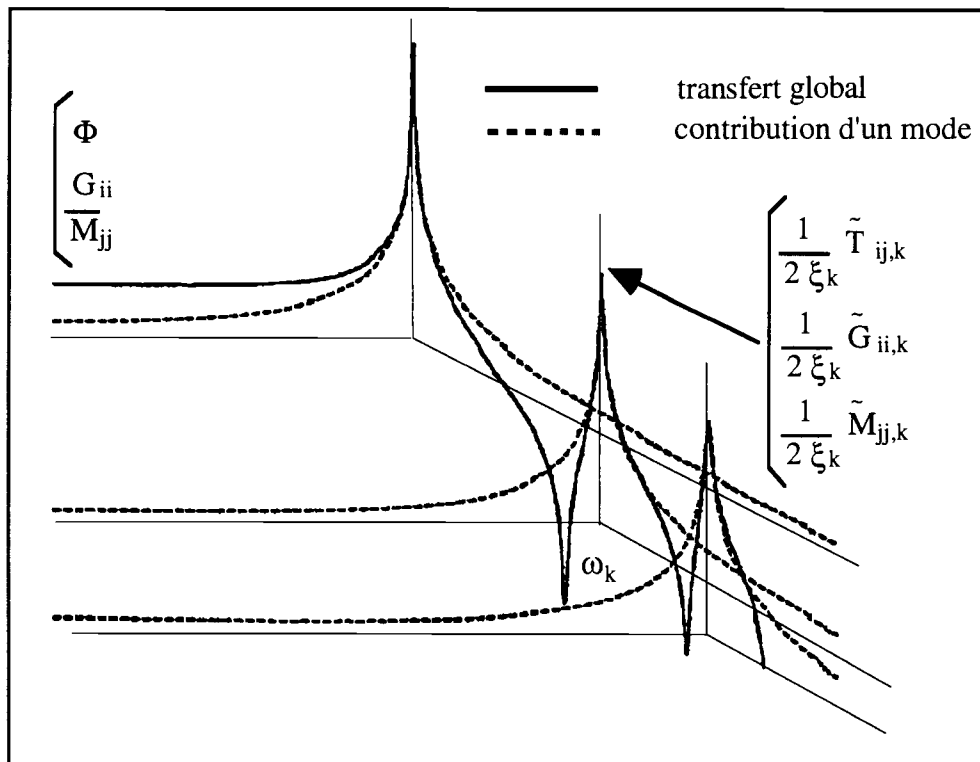


figure 1.14 : contribution des modes aux transferts dynamiques

I.3.2.4 EFFETS DE TRONCATURE

Lorsqu'on tronque la base modale pour le calcul des réponses, on peut déduire des relations (I.9) et (I.12) l'effet de la suppression des modes supérieurs. Si leurs fréquences propres sont nettement supérieures à la fréquence d'excitation, le terme ω/ω_k intervenant dans les amplifications dynamiques est négligeable devant 1. Dans ce cas, $T_k(\omega)$ et $H_k(\omega)$ sont pratiquement égaux à 1.

D'après les règles de sommation décrites précédemment, il en découle une expression de la contribution des modes tronqués à la réponse dynamique :

$$\begin{aligned}
 \Delta \tilde{G}_{ii}(\omega) &= \sum_{\text{modes supérieurs}} \tilde{G}_{ij,k} = K_{ii}^{-1} - \sum_{\text{modes pris en compte}} \tilde{G}_{ij,k} \\
 \Delta \tilde{T}_{ij}(\omega) &= \sum_{\text{modes supérieurs}} \tilde{T}_{ij,k} = \Phi - \sum_{\text{modes pris en compte}} \tilde{T}_{ij,k} \\
 \Delta \tilde{M}_{jj}(\omega) &= \sum_{\text{modes supérieurs}} \tilde{M}_{jj,k} = \bar{M}_{jj} - \bar{m}_{jj} - \sum_{\text{modes pris en compte}} \tilde{M}_{jj,k}
 \end{aligned} \tag{I.13}$$

La connaissance de la réponse statique et des paramètres effectifs calculés à partir de la base modale réduite permet donc d'évaluer l'erreur de troncature induite sur les calculs de réponses dynamiques.

I.3.2.5 CAS D'UNE STRUCTURE ISOSTATIQUE

Nous avons vu dans le paragraphe I.3.2.3 que la transmissibilité effective d'une structure pouvait s'exprimer de la manière suivante:

$$\tilde{T}_{ij,k} = \frac{\varphi_k L_k}{m_k} = \frac{\varphi_k (\varphi_k^t M_{ii} \Phi)}{m_k} \tag{I.14}$$

La matrice M_{ii} représente la matrice de masse associée aux ddl internes et la matrice Φ est la matrice des modes statiques de jonction. Elle est obtenue en imposant un déplacement unitaire au ddl n^o_j et des déplacements nuls aux ddl de liaison, et en calculant les déplacements aux noeuds internes.

Pour une structure isostatique, Φ peut être déterminée par des considérations cinématiques : si l'on impose une translation unité à l'encastrement, la structure se déplace suivant un mouvement de corps rigide, toutes les translations des noeuds internes dans la même direction valant 1, tous les autres ddl étant nuls. Si l'on impose une rotation unité à l'encastrement, la structure tourne autour de l'encastrement d'un angle unité, il est

alors aisé de déterminer les ddl internes en appliquant les propriétés d'équiprojectivité du champ des déplacements. Ces propriétés dues à l'isostaticité d'une structure sont illustrées par la figure 1.15 :

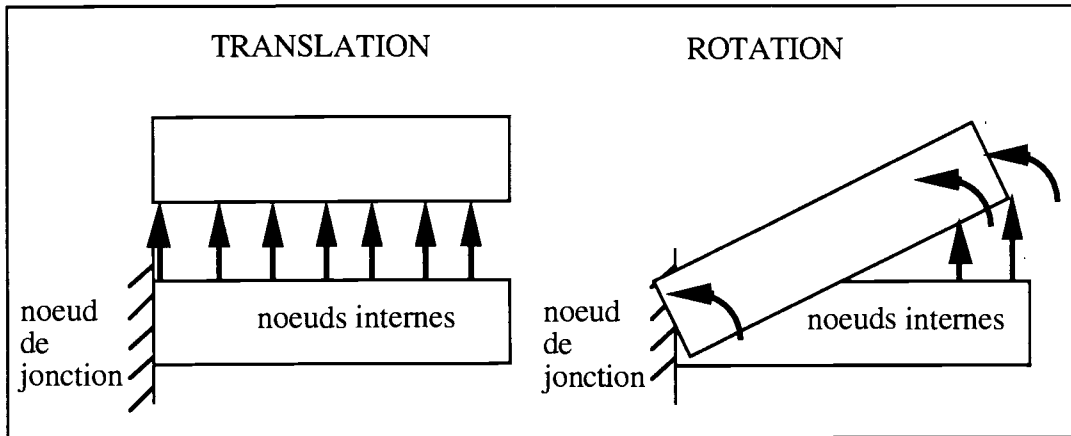


figure 1.15 : modes statiques de jonction d'une structure isostatique

Pour une structure isostatique, la transmissibilité statique est indépendante des caractéristiques géométriques de la structure. Elle vaut 1 dans le cas d'une force et le bras de levier dans le cas d'un moment. Etant données les propriétés de sommation (voir paragraphe I.3.2.3), on peut donc conclure que la somme des transmissibilités effectives est constante et indépendante des variables de conception de la structure.

I.3.2.6 CRITERES DE DISCRETION ACOUSTIQUE

On a vu dans le paragraphe I.3.1 qu'une structure est caractérisée du point de vue de la discrétion acoustique et pour une excitation donnée, par l'amplitude maximale de sa réponse dynamique en flexibilité ponctuelle, ainsi qu'en transmissibilité.

Pour un type de transfert donné, l'amplitude de la réponse de la structure à une excitation harmonique calée sur une fréquence propre est égale au produit du module du paramètre effectif par le facteur de surtension $1/2\xi_k$ (voir figure 1.14). L'amortissement est introduit sous forme modale. On considère également que le taux d'amortissement ξ_k est constant (indépendant de k) sur toute la bande fréquentielle d'étude. Sous cette hypothèse, l'amplitude de la réponse - pour une fréquence d'excitation égale à une fréquence propre - est proportionnelle au module du paramètre effectif associé à ce mode.

On peut donc dire qu'une structure est caractérisée du point de vue de la discrétion acoustique par la valeur du paramètre effectif maximal en module. Les modes associés à ces paramètres effectifs ne seront pas forcément les mêmes, si on s'intéresse à une transmissibilité dynamique ou bien à une flexibilité ponctuelle dynamique.

I.4 ENJEUX ET FONDEMENTS DE L'OPTIMISATION STRUCTURALE

L'optimisation structurale est un vaste domaine de la mécanique des structures. Elle a pris son essor dans les années soixante et, à l'heure actuelle, alimente un grand nombre de publications scientifiques. Nous examinerons ultérieurement en quoi son application au domaine de la discrétion acoustique peut être bénéfique. Mais tout d'abord, il convient d'explicitier brièvement les objectifs de cette théorie.

La réponse d'une structure se caractérise fondamentalement par deux groupes de paramètres :

- dans le premier, les paramètres structuraux tels que la masse, l'amortissement et la rigidité,
- la deuxième catégorie comprend les perturbations subies par la structure qui ont généralement une origine externe,

Le contrôle passif ou optimisation structurale consiste en une modification des paramètres structuraux. En principe, quand ces modifications concernent la rigidité ou la masse, cela se traduit par des variations des fréquences de résonance et des déformées de la structure, alors que lorsqu'elles portent sur l'amortissement, cela affecte la dissipation d'énergie du système. Nous verrons par la suite que ce type de contrôle s'inscrit naturellement dans la conception de structures et particulièrement de carlingages. Son domaine d'application peut également s'étendre à l'optimisation de systèmes secondaires, tels que des absorbeurs dynamiques, dans l'optique de l'atténuation des vibrations de structures déjà existantes.

Bien que le contrôle passif ait pu être appliqué à divers desseins (minimisations de réponses statiques, de fréquences propres, de concentrations de contraintes, etc ...), la formulation d'un problème d'optimisation conserve un caractère universel : nous dirons d'un problème de contrôle passif qu'il est bien formulé s'il répond à la double question : quel est l'objectif que l'on cherche à atteindre et quels sont les moyens que l'on se donne pour y parvenir ?

De manière générale, l'objectif du contrôle passif est de minimiser une fonction relative au comportement vibratoire de la structure, tout en respectant un certain nombre de conditions restrictives qui peuvent être de type statique (déplacement, contraintes limites admissibles ...), ou de type dynamique (fréquence de résonance, transferts en flexibilité ou transmissibilité dynamique ...). Cette fonction est appelée fonction objectif ou fonction coût et on appelle contraintes l'ensemble des conditions restrictives. Notons

toutefois que ces dernières n'ont pas toujours lieu d'être : on parlera alors d'optimisation sans contraintes.

Un système structural peut être décrit par un ensemble de grandeurs spécifiant par exemple les matériaux employés, les dimensions de divers composants, leur disposition, etc ... Parmi ces grandeurs, certaines sont prédéterminées et invariables. Ce sont les paramètres prescrits. Les autres seront des paramètres variables appelés variables de conception, qui seront autant de degrés de liberté d'action dans la recherche d'une structure optimale.

Selon le choix de la fonction coût et des contraintes, on peut distinguer deux classes de problèmes correspondant à des motivations différentes de la part de l'ingénieur.

Premièrement, on peut choisir la masse de la structure comme fonction coût et comme contraintes des grandeurs caractéristiques du comportement vibratoire (telles que la flexibilité ponctuelle par exemple). Cette option correspond au souci de réduire au maximum la masse de la structure, tout en lui assignant de respecter un critère dynamique. La motivation est en général d'ordre économique, car tout gain de matière réduit les coûts de production, mais, dans le domaine de la construction navale, la masse embarquée est une grandeur intrinsèquement déterminante, car elle implique des problèmes d'encombrement et conditionne la flottabilité et la stabilité d'un navire. Nous retiendrons donc cette formulation pour définir une méthodologie de conception de structures optimales, au sens où les contraintes seront des fonctions des flexibilités et transmissibilités effectives, traduisant de manière explicite les deux critères de la discrétion acoustique.

Mais, on peut également faire abstraction de la masse de la structure, en choisissant cette fois pour fonction coût la grandeur dynamique qu'il importe de minimiser. Cette méthode de contrôle passif sera plus particulièrement adaptée à l'atténuation des vibrations de structures déjà existantes, par raccordement de systèmes secondaires (absorbeurs dynamiques). En effet, la masse de ces derniers reste négligeable par rapport à celles des carlingages et autres structures embarquées. D'autre part, l'expérience montre que l'efficacité de tels systèmes est fonction croissante de leur masse. C'est pourquoi nous mettrons au point des méthodes permettant d'optimiser la raideur et l'amortissement d'absorbeurs dynamiques de masse donnée, de façon à minimiser le critère large-bande en flexibilité dynamique.

Chapitre I

L'optimisation structurale étant un processus itératif, à chaque itération sera effectuée une analyse dynamique, coûteuse en temps de calcul pour des structures importantes. Dans le cadre de la conception, le choix de la méthode d'optimisation s'avère donc être primordial.

En fait, deux grands groupes de méthodes de contrôle passif sont classiquement opposés depuis une vingtaine d'années : l'approche par programmation mathématique et celle par critère d'optimalité.

La première est fondée sur des techniques rigoureuses de la programmation non linéaire pour progresser dans l'espace de conception selon une trajectoire bien définie. Elle est tout à fait générale et conduit de manière certaine à une solution optimale. Malheureusement, cette approche requiert un grand nombre d'itérations, croissant en outre avec le nombre de variables de conception.

La seconde démarche utilise la notion de critère d'optimalité. Etant donnée sa convergence rapide et indépendante du nombre de variables de conception, elle s'adapte bien au dimensionnement de grands systèmes. Elle manque en revanche de généralité, est sujette aux phénomènes d'instabilité de convergence et ne garantit pas l'obtention d'un véritable optimum. De manière générale, l'approche par critère d'optimalité de la minimisation de la masse d'une structure consiste à établir a priori des conditions quant à la nature de la solution optimale. Ces conditions permettent alors la construction d'une relation récursive appliquée itérativement jusqu'à l'obtention de la conception optimale.

Nous étudierons donc les possibilités d'approche par critère d'optimalité pour optimiser la conception des structures, en présence de contraintes sur les flexibilités et transmissibilités effectives. En premier lieu, nous prendrons comme variables de conception les dimensions transversales des éléments constitutifs de la structure, puis nous introduirons des matériaux absorbants (matériaux viscoélastiques) dont les épaisseurs constitueront un second groupe de variables de conception.

En résumé, on peut d'ores et déjà mettre en évidence les principaux avantages de l'optimisation structurale :

- l'enjeu le plus important est le gain de temps dans la conception des structures, notamment lorsque le même code d'optimisation peut être utilisé pour différents carlingages.

- L'optimisation structurale permet de systématiser la procédure de conception en s'affranchissant de l'intuition ou de l'expérience de l'ingénieur.

Chapitre I

- On peut disposer d'un large éventail de variables de conception. Les études paramétriques peuvent se limiter à deux ou trois variables afin de visualiser graphiquement l'effet de modifications.

- Enfin, l'optimisation structurale conduit toujours à une amélioration des structures étudiées avec un minimum d'interactions homme-machine.

Afin de replacer les méthodes d'optimisation structurale que nous avons développées dans le cadre de l'atténuation de la transmission des vibrations dans un contexte plus global de méthodologie d'optimisation, nous formulerons mathématiquement l'énoncé d'un problème général d'optimisation, puis nous exposerons brièvement les principes des méthodes d'optimisation classiques, sans toutefois détailler les algorithmes spécifiques à chaque méthode.

I.4.1 FORMULATION GENERALE DU PROBLEME D'OPTIMISATION

Soit f une fonction scalaire de plusieurs variables réelles r_1, r_2, \dots, r_m appelée fonction coût ou fonction objectif. L'ensemble des variables de conception $r_i, i \in [1, m]$ peut être noté sous forme vectorielle. Nous appellerons R ce vecteur.

R est assujéti à appartenir à un domaine appelé domaine admissible $D \subset \mathbb{R}^m$ défini par l'ensemble des contraintes :

$$\begin{aligned} \text{contraintes de type égalité : } g_i(R) &= 0 & i &= 1, \dots, p \\ \text{contraintes de type inégalité : } h_j(R) &\leq 0 & j &= 1, \dots, q \end{aligned}$$

Nous dirons que h_j est saturée ou active si $h_j(R) = 0$.

L'objectif de la programmation non linéaire est de rechercher parmi les $R \in D$, ceux qui sont :

-soit des minimums absolus, c'est-à-dire tels que :

$$f(R_0) \leq f(R), \quad \forall R \in D$$

-soit des minimums relatifs, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de R_1 tel que:

$$f(R_1) \leq f(R), \quad \forall R \in D \cap V$$

Il est à noter que l'unicité du minimum absolu n'est pas toujours vérifiée. Le minimum est dit strict si l'inégalité est satisfaite strictement pour R différent de R_0 ou R_1 .

Suivant la nature de f et des contraintes qui définissent D , le problème de programmation correspondant porte des noms divers : si f et les contraintes sont linéaires on parle de programmation linéaire, si f est quadratique et les contraintes sont linéaires, on parle de programmation quadratique. Enfin, si f et les contraintes sont convexes, on parle de programmation convexe.

I.4.2 METHODES DE RESOLUTION

Dans le cadre de notre étude et pour l'ensemble des problèmes d'optimisation structurale, nous verrons que la fonction coût, ainsi que les contraintes, sont des fonctions non linéaires des variables de conception. Dans les ouvrages d'optimisation [A11]-[A13], les méthodes de programmation non linéaire sont généralement scindées en deux groupes, les méthodes d'optimisation sans contraintes et les méthodes avec contraintes.

Parmi les méthodes d'optimisation sans contraintes, on peut également distinguer deux classes, suivant le type d'approximation de la fonction coût sur laquelle elles sont fondées : linéaire pour les méthodes du premier ordre (méthode du gradient, méthode du gradient conjugué [A14]) et quadratique pour les méthodes du second ordre (méthode de Newton). Dans les méthodes quadratiques, les termes du second ordre demandent un effort de calcul important. En général, on se contente de les approximer (méthode de Davidon-Fletcher-Powell [A15]-[A16], méthode de Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno [A17]-[A20]).

Une multitude d'algorithmes ont été conçus afin de résoudre le problème d'optimisation avec contraintes. En règle générale, on les scinde en deux groupes, les méthodes directes ou primales [A21]-[A31], qui travaillent directement sur le problème posé et les méthodes duales qui le transforment en une suite de problèmes sans contraintes en exploitant les conditions théoriques d'optimalité que doivent satisfaire la fonction coût et les contraintes (conditions suffisantes du point-selle, voir [A32]). La méthode de linéarisation convexe (CONLIN) développée par C. FLEURY [A33] est certainement la plus célèbre des méthodes duales.

Enfin, dans le domaine de la dynamique des structures la tendance actuelle est au développement de l'approche par critères d'optimalité. Ces méthodes se caractérisent par la définition du critère qui peut être d'ordre mathématique comme le critère de Kühn-Tucker ou intuitif, par exemple lorsqu'il est établi à partir de considérations énergétiques. Les méthodes les plus célèbres sont la méthode du Fully Stressed Design (FSD) [A34], la méthode du critère de Gellatly et Berke [A35] et la méthode du critère de Taig et Kerr

[A36]. Les trois méthodes ont la propriété attrayante de fournir la solution en une seule itération si la structure est isostatique. Pour des structures hyperstatiques, leur application répétée conduit dans la plupart des cas à l'optimum en un petit nombre d'itérations, quel que soit le nombre de variables de conception. En effet, l'hypothèse d'isostaticité conduit à de telles simplifications du problème d'optimisation que l'on peut formuler des critères d'optimalité rigoureux. Ces critères sont alors étendus aux structures hyperstatiques, auquel cas les conditions d'optimalité deviennent approchées. Appliquées itérativement, elles convergent vers une conception optimale de la structure.

L'utilisation du principe de stationarité de Kuhn-Tucker pour construire un algorithme d'optimisation est de plus en plus répandue. En pratique, à partir de chaque problème d'optimisation classique, on peut construire autant d'approches par critères d'optimalité : on exprime les conditions théoriques de stationarité (condition nécessaire de Kuhn-Tucker, voir chapitre III) pour les contraintes et la fonction coût de notre problème mécanique, ce qui permet d'établir des relations de récurrence pour les variables de conception. Cette méthode a été présentée sous forme analytique par Venkayya, Khot et Reddy [A37].

CHAPITRE II

OPTIMISATION D'ABSORBEURS DYNAMIQUES AMORTIS

II.1 INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à l'amélioration des propriétés vibratoires de structures déjà existantes, relativement aux critères de discrétion acoustique définis précédemment. L'approche classique consiste à fixer sur la structure un système masse-ressort amorti, dont les caractéristiques (masse, raideur, taux d'amortissement) sont déterminées de façon à atténuer de manière optimale la réponse de la structure à une excitation donnée.

Une multitude de travaux concernant l'optimisation d'absorbeurs dynamiques amortis ont été publiés ces trente dernières années. Il nous est bien évidemment impossible de tous les mentionner.

La première étude théorique concernant l'optimisation des paramètres de l'absorbeur dynamique remonte à 1928 avec les travaux de J. Ormondroyd et J.P. Den Hartog [B1]. Elle traite du problème où le système initial est non amorti (masse m_1 et raideur k_1) et est décrit par un ddl unique. L'absorbeur est défini par sa masse m_2 , sa raideur k_2 et son taux d'amortissement critique ζ_c (amortissement de type visqueux). Les auteurs ont montré que pour une valeur constante de k_2 et du rapport m_1 / m_2 , si l'on fait varier ζ_c , les courbes de réponse passent toutes par deux points fixes. Ils proposent alors de déterminer k_2 afin que ces deux points fixes soient à la même hauteur, puis de calculer ζ_c pour que la courbe de réponse passe par l'un de ces deux points avec une tangente horizontale.

G.B. Warburton [B2] étendit cette procédure d'optimisation au cas d'une structure à deux ddl, en minimisant le maximum de la réponse. F.M. Lewis [B3] généralisa la même méthode au cas de structures à n ddl. J.C. Snowdon [B4] modifia l'absorbeur en ajoutant un ressort en série et montra que ce système est efficace sur une plus grande plage de fréquence. R. Plunkett [B5] généralisa la technique de Den Hartog au cas de structures continues en montrant l'existence de deux points invariants pour la réponse de la structure initiale raccordée à un absorbeur à un ddl. Il exploita cette propriété pour déterminer l'efficacité optimale de tels absorbeurs. Une technique similaire a été appliquée par A. Henney et J.P. Rahey [B6] au cas d'une poutre uniforme. Les deux auteurs ont également étudié la sensibilité de la réponse au voisinage de la solution optimale. Enfin Snowdon [B7] montra, en utilisant la même démarche des points fixes, comment des absorbeurs pouvaient réduire les forces transmises à l'encastrement d'une

poutre cantilever non amortie. Il montra également l'intérêt d'utiliser deux absorbeurs afin d'atténuer deux modes distincts.

L. Kitis *et al* [B8] ont mis au point un algorithme pour minimiser la réponse d'une structure sur une bande de fréquence et ont montré que leur méthode pouvait être appliquée aux structures de grande taille. A.F. Vakakis et S.A. Paipetis [B9] ont également étudié l'effet d'un absorbeur dynamique avec amortissement visqueux sur une structure à n ddl non amortie.

Certains auteurs comme R.E. Roberson [B10] ou L.A. Pipes [B11] ont inclus une non-linéarité pour décrire le comportement de l'absorbeur. Dans chacune de ces deux références, les auteurs se sont intéressés à des structures non amorties. En revanche A. Soom et M. Lee [B12] ont traité le cas de structures amorties en utilisant des techniques de programmation non-linéaire.

Citons enfin l'ouvrage de J.C. Snowdon [B13] qui fait référence dans le domaine de l'atténuation des vibrations des poutres et l'étude d'absorbeurs dynamiques amortis.

II.2 BUT DE L'ETUDE

Le but de cette étude est de déterminer le dimensionnement optimal d'un absorbeur dynamique amorti destiné à être fixé sur une structure existante, un raidisseur circonférentiel de coque (appelé également couple). Les procédures d'optimisation auront pour but de minimiser les flexibilités ponctuelles de ces couples aux points d'attache d'éventuels carlingages, en vue de satisfaire au principe de contraste d'impédance (voir chapitre I.2.1). Contrairement aux méthodes généralement présentées dans les publications, la structure à amortir est caractérisée expérimentalement et non pas d'après un modèle éléments finis.

Dans un premier temps, nous modélisons l'absorbeur par un système masse-ressort à un ddl avec un amortissement de type visqueux puis avec un amortissement de type hystérétique. Un modèle analytique du comportement vibratoire du couple est déduit des données expérimentales : une technique d'identification modale est utilisée et appliquée à la flexibilité ponctuelle du couple. Ceci permet, après raccordement avec l'absorbeur, d'obtenir une expression analytique des résonances de la structure couplée. L'intérêt de connaître une expression analytique de la fonction de transfert globale réside dans le fait que l'on peut par la suite calculer les sensibilités de ces résonances par rapport aux caractéristiques de l'absorbeur (raideur et taux d'amortissement critique). Enfin, nous utilisons une méthode classique (méthode de quasi-Newton) pour résoudre ce problème d'optimisation.

Chapitre II

Dans une seconde étape, notre objectif est de dimensionner un absorbeur dynamique réel (2D). Cet absorbeur est constitué d'une plaque d'acier sur laquelle sont fixés deux plots en matériaux viscoélastiques. Nous exprimons son comportement vibratoire à l'aide d'un modèle équivalent à trois ddl. Nous utilisons pour cela les caractéristiques mesurées (module de cisaillement et facteur de perte) de matériaux viscoélastiques non-linéaires. Les flexibilités ponctuelles du système couple/absorbeur dans les deux dimensions du plan d'excitation seront obtenues après raccordement avec la matrice de transfert du couple. L'avantage d'un modèle 2D de l'absorbeur est de prendre en compte ses mouvements dans les deux dimensions, c'est-à-dire son cisaillement ainsi que son balancement. Cependant, le raccordement impédantiel rend impossible l'écriture de formules analytiques pour la réponse globale et a fortiori pour les sensibilités de la réponse par rapport aux variables de dimensionnement (rapport de la surface sur la hauteur des plots). Nous utilisons donc la méthode du simplexe afin de résoudre ce problème d'optimisation.

II.3 DESCRIPTION DES COUPLES

Les couples sont des structures longues dont la section droite est en forme de T. Leur rôle est de rigidifier la coque. Ils constituent un système mécanique dont le comportement dépend beaucoup de l'environnement (emménagement, liaisons...) et peut affecter une large gamme de fréquence (de 40 Hz à plusieurs centaines de Hz). L'expérience a montré que les résonances des couples en déversement sont responsables d'amplifications dynamiques conséquentes se traduisant par des dépassements importants du transfert acoustique autorisé.

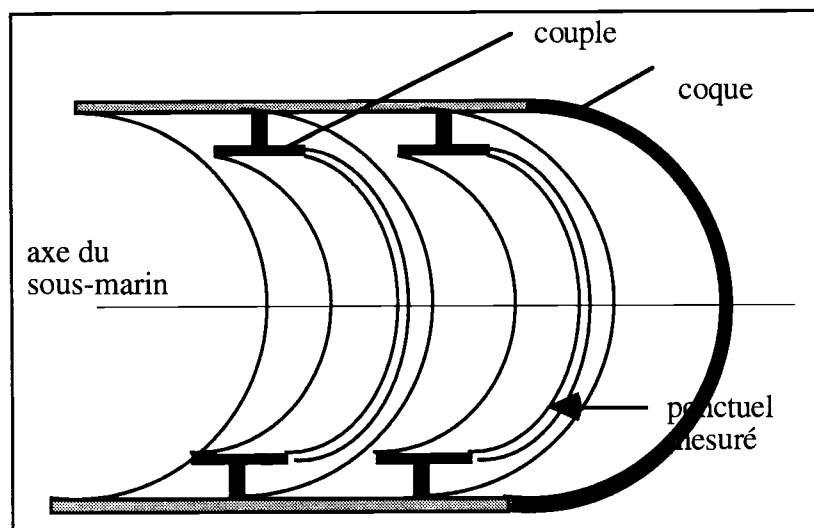


figure 2.1 : mesures sur couples

Des mesures d'inertances ponctuelles et transferts acoustiques ont été réalisées par la Division Essais et Mesures du CERDAN sur un tronçon de coque de sous-marin immergé (PEGASE). Pour cela, un couple a été excité sur sa semelle parallèlement à l'axe du sous-marin (voir figure 2.1). Nous ne disposons malheureusement pas de mesures suivant la direction perpendiculaire à l'axe du sous-marin.

En ce qui concerne les transferts acoustiques, les mesures de bruit rayonné dans l'eau ont été réalisées à trois mètres de la coque et ont été normalisées en multipliant le rapport pression mesurée sur force d'excitation par la distance $d=3m$.

II.3.1 MODELISATION DU COUPLE

Parallèlement aux mesures, une étude dynamique par éléments finis du déversement du couple a été menée par le groupe Coques et Structures du CERDAN [B14].

Le modèle est un tronçon axisymétrique de coque raidi par trois couples équidistants. Le bordé de coque et deux des couples sont représentés sans masse. Le tronçon de coque est encasturé sur ses deux circonférences d'extrémité.

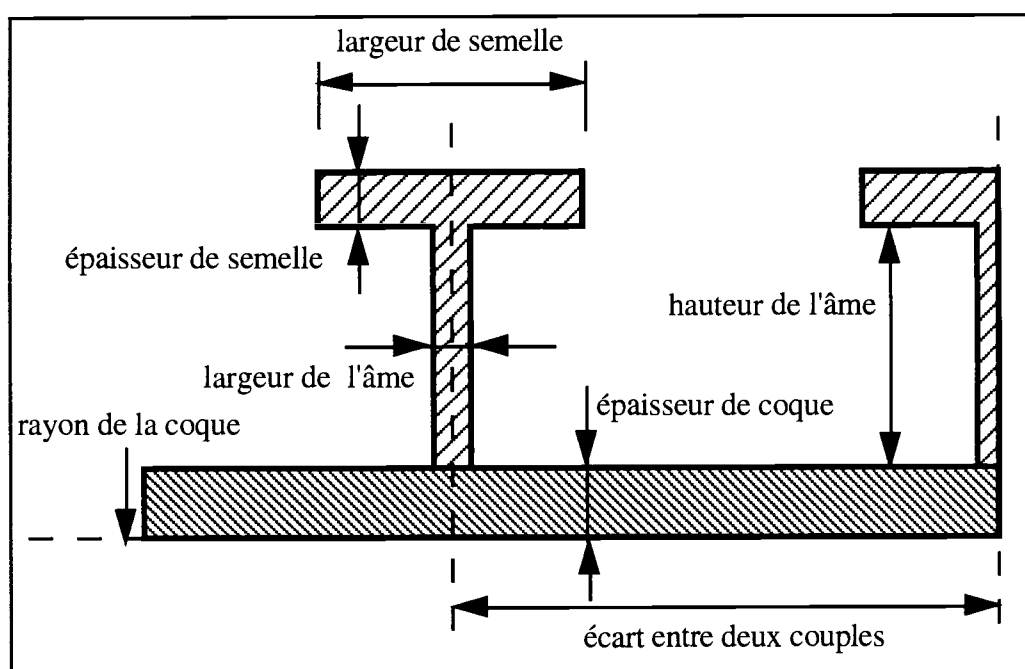


figure 2.2 : éléments constitutifs d'un couple

Le maillage en éléments finis de coque à 4 noeuds a été défini de la façon suivante:

- 2 éléments dans la largeur de la semelle du couple
- 2 éléments dans la hauteur de l'âme du couple

- 3 éléments entre deux couples
- 3 éléments entre une extrémité encastrée de la coque et le couple voisin
- 72 éléments dans la circonférence

Il comprend donc 1728 éléments et 1801 noeuds, et a été réalisé avec le mailleur SUPERTAB (logiciel I-DEAS).

II.3.2 ETUDE DU DEVERSEMENT DU COUPLE

Les calculs par éléments finis ont été réalisés à l'aide du code MSC/NASTRAN. Pour le calcul de flexibilité dynamique, le couple est excité par une force unitaire située au bord de la semelle, c'est à dire au noeud N1:

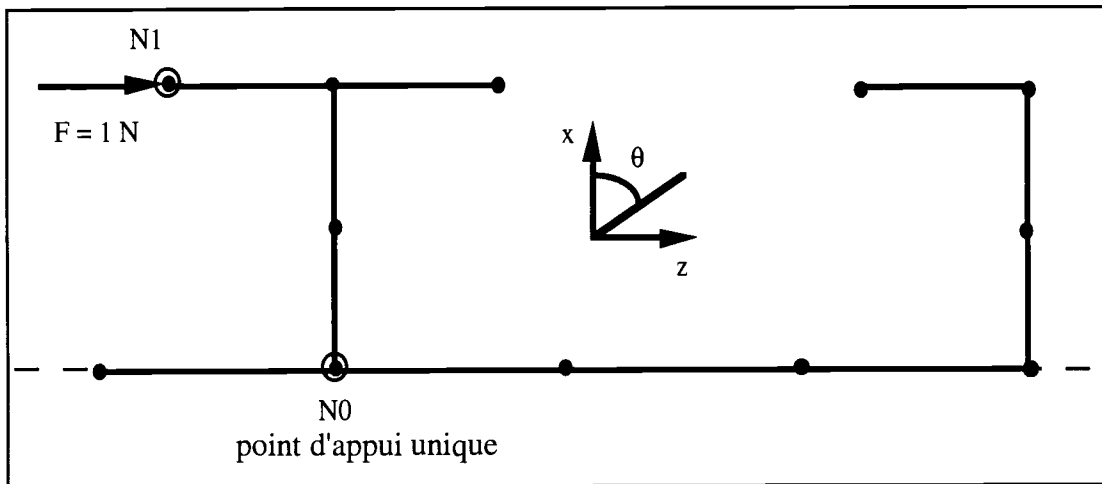


figure 2.3 : modèle éléments finis du couple

La flexibilité dynamique a été calculée avec un amortissement structural de 2%. Les deux premiers modes de la courbe d'inertance ponctuelle sont un mode de déversement du couple complet (39.17 Hz, ordre circonférentiel $n=0$) et un mode double de déversement à une onde (40.55 Hz, ordre circonférentiel $n=1$). Les fréquences propres des modes sont régulièrement réparties sur une échelle logarithmique et sont suffisamment proches pour que leurs contributions à la réponse dynamique présentent de forts recouvrements.

II.4 OPTIMISATION DE L'ABSORBEUR DYNAMIQUE AMORTI A UN DDL

Pour calculer les dérivées des flexibilités ponctuelles du système raccordé

couple/absorbeur, ceci afin de les inclure dans une démarche d'optimisation, nous devons connaître une expression analytique de la flexibilité du couple.

Cette expression est déduite par identification des mesures expérimentales. Les techniques classiques d'identification modale [B15] consistent à caractériser mode par mode la structure, ce qui permet dans un second temps d'exprimer analytiquement la fonction de transfert. Nous préférons utiliser une approche moins lourde en calculant directement une expression analytique de la réponse, quitte à ce que certains termes de cette expression n'aient pas une signification physique explicite.

La réponse sera identifiée par une fraction rationnelle de $(j\omega)$. Il nous sera également utile de connaître les pôles de cette fraction (car ils correspondent aux maxima de la fonction de transfert), à l'aide desquels nous exprimerons la fonction objectif du problème d'optimisation. Nous présenterons donc dans une seconde étape un algorithme de calcul de ces pôles.

II.4.1 DETERMINATION DE L'ADMITTANCE DU COUPLE SOUS FORME DE FRACTION RATIONNELLE

L'hypothèse de linéarité d'un système mécanique implique que son admittance peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle de polynômes de $(j\omega)$. Le but de la méthode d'identification de DAT & MEURZEC [B16] est de déterminer l'ensemble des coefficients de ces deux polynômes afin d'obtenir une expression analytique de l'admittance de la structure.

PRINCIPE DE LA METHODE

Après avoir choisi m (degré du numérateur) et n (degré du dénominateur), le problème est de déterminer les coefficients réels des polynômes P et Q qui permettent à la fraction rationnelle $A(j\omega)$ d'approcher au mieux les valeurs expérimentales :

$$A(j\omega) = \frac{P_0 + P_1(j\omega) + \dots + P_m(j\omega)^m}{Q_0 + Q_1(j\omega) + \dots + Q_n(j\omega)^n} \quad (\text{II.1})$$

Pour ce faire, on résout le problème d'optimisation dont la fonction objectif n'est autre que l'erreur $\varepsilon = \sum_k |A(j\omega_k) - A^*(j\omega_k)|^2$, $A^*(j\omega_k)$ représentant la mesure de l'admittance pour la pulsation ω_k . Les variables d'optimisation sont les vecteurs des coefficients de P et Q . Le vecteur $(A(j\omega_k) - A^*(j\omega_k))$ n'étant pas fonction linéaire des

variables d'optimisation, on procède, à chaque itération, à la détermination du minimum de l'erreur pour le problème linéarisé (voir le détail de la méthode en annexe A1).

Une fois les coefficients des polynômes P et Q déterminés, si l'on désire connaître les résonances et antirésonances de la fonction de transfert, il reste à calculer les pôles et racines. On utilise alors l'algorithme de BAIRSTOW [B17] (voir annexe A1).

A ce stade, nous avons obtenu une expression analytique de la fonction de transfert, ainsi que la valeur de ses fréquences propres complexes. Il nous faut maintenant introduire un système secondaire, l'absorbeur dynamique, et déterminer ses caractéristiques (masse, raideur, amortissement), afin que couplé à la structure initiale, c'est-à-dire le couple, il puisse atténuer les pics résonants de la fonction de transfert.

II.4.2 RACCORDEMENT IMPEDANTIEL COUPLE-ABSORBEUR DYNAMIQUE

Le but de ce paragraphe est d'établir une formule analytique pour la flexibilité ponctuelle du couple raccordé à un absorbeur dynamique et de calculer les fréquences propres complexes de la structure globale.

Les caractéristiques physiques de l'absorbeur sont sa masse M, sa raideur K et sa constante d'amortissement C (de type visqueux). Avant raccordement, le système masse-ressort amorti est libre. Il a donc pour flexibilité ponctuelle la fonction de transfert :

$$\text{Flexibilité}_{\text{absorbeur}}(j\omega) = \frac{1}{K + j C \omega} - \frac{1}{m \omega^2} \quad (\text{II.2})$$

Le point de raccordement des deux sous-systèmes est le point d'excitation du couple seul en bout de semelle :

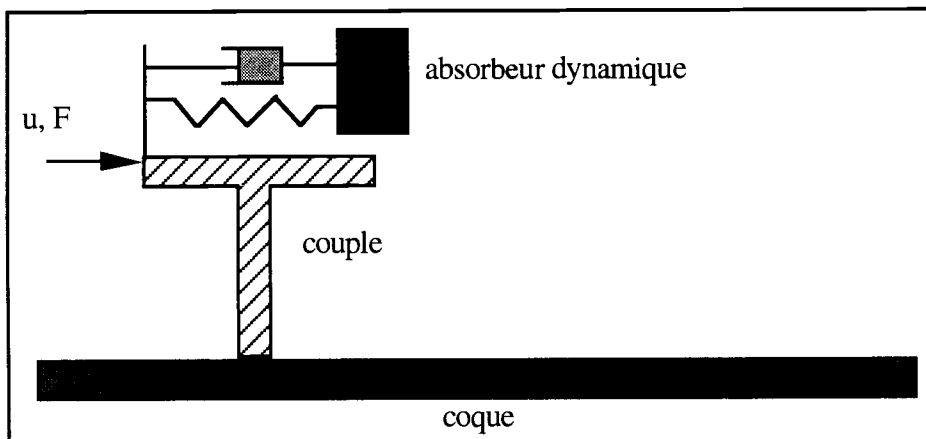


figure 2.4 : raccordement des deux sous-structures

Chapitre II

II.4.2.1 DETERMINATION DE LA FLEXIBILITE GLOBALE

Avant raccordement, les deux sous-structures ont pour impédances :

$$Z^I = \frac{(K + j C \omega) m \omega^2}{m \omega^2 - (K + j C \omega)} \quad \text{pour l'absorbeur} \quad (\text{II.3})$$

$$Z^{II} = \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} \quad \text{pour le couple} \quad (\text{II.4})$$

Les conditions de raccordement sont l'égalité des déplacements au point de liaison et l'équilibre des forces :

$$\begin{aligned} u &= u^I = u^{II} \\ F &= F^I + F^{II} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Or, $F^I = Z^I u^I$ et $F^{II} = Z^{II} u^{II}$, donc nous pouvons en déduire l'expression de la flexibilité ponctuelle globale :

$$F = F^I + F^{II} = Z^I u^I + Z^{II} u^{II} = Z^I u + Z^{II} u = (Z^I + Z^{II}) u \quad (\text{II.6})$$

$$\Rightarrow \text{Flexibilité}_{\text{globale}}(j\omega) = \frac{1}{Z^I + Z^{II}} \quad (\text{II.7})$$

La flexibilité ponctuelle de la structure raccordée s'exprime donc en fonction de P, Q, M, K et C :

$\text{Flexibilité}_{\text{globale}}(j\omega) = \frac{P(j\omega) (m \omega^2 - (K + j C \omega))}{Q(j\omega) (m \omega^2 - (K + j C \omega)) + P(j\omega) m \omega^2 (K + j C \omega)} \quad (\text{II.8})$

Il apparaît donc clairement que cette fonction de transfert est une fraction rationnelle de deux polynômes de $(j\omega)$ que nous noterons $P'(j\omega)$ pour le numérateur et $Q'(j\omega)$ pour le dénominateur. Pour connaître ses pôles et racines, il suffit d'appliquer l'algorithme de BAIRSTOW au numérateur et au dénominateur.

II.4.2.2 DEFINITION DE LA FONCTION COUT

Nous connaissons analytiquement la flexibilité ponctuelle du système raccordé couple+absorbeur. Notre objectif est de déterminer les caractéristiques physiques de l'absorbeur afin que les résonances maximales soient atténuées. Nous pourrions poser

notre problème d'optimisation ainsi : minimiser la fonction qui, aux caractéristiques de l'absorbeur, associe la valeur de la résonance maximale de la fonction de transfert. Cependant, cette fonction n'étant pas différentiable par rapport à ces caractéristiques, il nous serait impossible de réaliser une étude de sensibilité et donc de calculer des gradients nécessaires à la procédure d'optimisation proprement dite. C'est pourquoi, nous lui substituerons une fonction différentiable, dont le comportement, c'est à dire ses variations, sera très proche. On peut montrer mathématiquement que la fonction :

$$f : x \rightarrow \sqrt[p]{(A_1(x))^p + (A_2(x))^p + \dots + (A_n(x))^p}$$

où $A_i(x)$, $i \in [1, n]$, sont des fonctions positives de x

tend, au sens de la convergence uniforme des espaces fonctionnels, vers la fonction $\text{MAX}(A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x))$. La fonction qui à x associe $\sqrt[p]{x}$ est croissante sur l'ensemble des réels strictement positifs, donc f a les mêmes variations que g :

$$g : x \rightarrow (A_1(x))^p + (A_2(x))^p + \dots + (A_n(x))^p$$

où $A_i(x)$, $i \in [1, n]$, sont des fonctions positives de x

En conclusion, la fonction g admettra un ou des minima voisins de ceux de la fonction $\text{MAX}(A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x))$. L'avantage de la fonction g est sa différentiabilité par rapport à la variable x .

Pour le problème qui nous intéresse, nous définirons donc la fonction coût, comme la somme de toutes les résonances, élevées à la puissance p . Le nombre p ne doit pas être trop faible, pour que la participation des modes les plus résonants à la somme, soit amplifiée, mais il ne doit pas être trop grand, pour ne pas engendrer des difficultés d'ordre numérique. En pratique, nous choisirons p égal à 6.

D'autre part, pour que la valeur de la fonction coût ainsi que ses variations aient des ordres de grandeur non négligeables, nous avons choisi de minimiser non pas la somme des résonances élevées à la puissance 6, mais le logarithme décimal de cette somme.

En ce qui concerne le choix des variables d'optimisation, nous avons décidé de ne retenir que la raideur et l'amortissement de l'absorbeur dynamique. En fait, nous pouvons supposer qu'il n'existe pas d'optimum pour la masse de l'absorbeur sur le gain

en flexibilité : en effet, il semblerait qu'a priori, plus la masse augmente, plus la flexibilité ponctuelle de la structure raccordée tend à diminuer. Cette évolution sera vérifiée a posteriori dans les chapitres suivants.

Les deux variables de conception de notre problème d'optimisation sont donc la raideur de l'absorbeur et son taux d'amortissement critique. L'avantage de choisir le taux d'amortissement critique ($\zeta_c = C/2\sqrt{KM}$) plutôt que le coefficient d'amortissement visqueux C réside dans le fait que cette grandeur est sans dimension et qu'elle est directement liée aux contraintes technologiques imposées par la réalisation d'absorbeurs réels: pour notre étude, nous supposons que les taux d'amortissement critique des systèmes masse-ressort amortis physiquement réalisables doivent être inférieurs à 0.25.

En résumé, notre problème d'optimisation se pose ainsi :

minimiser la fonction :

$$\psi(K, \zeta_c) = \log \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{P'(j\omega_i)}{Q'(j\omega_i)} \right|^6 \right) = \log \left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{P'(j\omega_i)}{Q'(j\omega_i)} \right) \overline{\left(\frac{P'(j\omega_i)}{Q'(j\omega_i)} \right)} \right)^3 \right)$$

où n représente le nombre de modes identifiés,
et ω_i les fréquences propres réelles de ces modes.

(II.9)

La contrainte étant $\zeta_c < 0.25$

Pour résoudre ce problème d'optimisation, il est nécessaire de réaliser une étude de sensibilité, afin de connaître les valeurs des gradients de la fonction ψ en fonction des variables K et ζ_c . Connaissant ψ sous forme analytique, nous sommes capables de déterminer une expression analytique de son gradient. Nous verrons dans le prochain paragraphe comment y parvenir.

II.4.3 ANALYSE DE SENSIBILITE

Nous désirons calculer les deux grandeurs $d\psi(K, \zeta_c)/dK$ et $d\psi(K, \zeta_c)/d\zeta_c$. Etant donné l'expression de ψ , il nous est impératif de connaître les dérivées des termes $P'(j\omega_i)/Q'(j\omega_i)$ par rapport à K et ζ_c . Précisons que nous nous attacherons à n'utiliser que des formulations mathématiquement exactes des dérivées, sans faire appel à des approximations ou des méthodes de type différences finies, et ce, dans le but d'acquérir la précision numérique la meilleure possible. La justesse des résultats de l'optimisation proprement dite dépend fortement de la précision des sensibilités calculées.

II.4.3.1 DERIVEES DES MAXIMA DE LA FLEXIBILITE

Nous noterons $\Gamma(j\omega_i)$ les amplitudes modales $P'(j\omega_i)/Q'(j\omega_i)$ de la flexibilité ponctuelle. Nous cherchons à exprimer les termes $d\Gamma(j\omega_i)/dK$ et $d\Gamma(j\omega_i)/d\zeta_c$. Nous notons ω_i la $i^{\text{ème}}$ fréquence propre réelle de la structure raccordée et Ω_i sa $i^{\text{ème}}$ fréquence propre complexe. La fréquence ω_i est égale à la partie réelle de Ω_i . C'est aussi une fonction des variables K et ζ_c . Il serait donc préférable, du point de vue des notations, de réécrire les dérivées partielles sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Gamma(j\omega_i(K, \zeta_c), K, \zeta_c)}{dK} \\ \frac{d\Gamma(j\omega_i(K, \zeta_c), K, \zeta_c)}{d\zeta_c} \end{array} \right. \quad (\text{II.10})$$

Explicitons ces deux dérivées partielles en considérant $\Gamma(j\omega_i(K, \zeta_c), K, \zeta_c)$ comme une fonction réelle de deux variables K et ζ_c :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Gamma(j\omega_i(K, \zeta_c), K, \zeta_c)}{dK} = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial j\omega} \right)_{\omega=\omega_i} \left(\frac{dj\omega_i}{dK} \right) + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial K} \right)_{\omega=\omega_i} \\ \frac{d\Gamma(j\omega_i(K, \zeta_c), K, \zeta_c)}{d\zeta_c} = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial j\omega} \right)_{\omega=\omega_i} \left(\frac{dj\omega_i}{d\zeta_c} \right) + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta_c} \right)_{\omega=\omega_i} \end{array} \right. \quad (\text{II.11})$$

Nous allons, dans les paragraphes suivants expliciter chacune des trois dérivées partielles à droite des égalités (II.11).

II.4.3.1.1 CALCUL DE $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial j\omega} \right)_{\omega=\omega_i}$

P' et Q' sont deux polynômes dont nous connaissons tous les coefficients. Soit un polynôme quelconque noté P :

$$P(j\omega) = \sum_{i=0}^r p_i (j\omega)^i \quad (\text{II.12})$$

Nous pouvons alors aisément calculer $\partial P/\partial j\omega$ en fonction de ses coefficients p_i :

$$\frac{\partial P}{\partial j\omega} = \sum_{i=1}^r i p_i (j\omega)^{i-1} \quad (\text{II.13})$$

Nous calculons de la même manière $\partial P'/\partial j\omega$ et $\partial Q'/\partial j\omega$ et nous pouvons ainsi exprimer la dérivée partielle de $\Gamma(j\omega, K, \zeta_c)$ par rapport à $j\omega$:

$$\Gamma(j\omega, K, \zeta_c) = \frac{P'(j\omega)}{Q'(j\omega)} \Rightarrow \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial j\omega} \right)_{\omega=\omega_i} = \frac{\left(\frac{\partial P'}{\partial j\omega} \right)_{\omega=\omega_i} Q'(j\omega_i) - \left(\frac{\partial Q'}{\partial j\omega} \right)_{\omega=\omega_i} P'(j\omega_i)}{(Q'(j\omega_i))^2} \quad (\text{II.14})$$

II.4.3.1.2 CALCUL DE $\frac{dj\omega_i}{dK}$ ET $\frac{dj\omega_i}{d\zeta_c}$

$$\omega_i = RE(\Omega_i) \Rightarrow j\omega_i = IM(j\Omega_i) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dj\omega_i}{dK} = \frac{dIM(j\Omega_i)}{dK} = IM\left(\frac{dj\Omega_i}{dK}\right) \\ \frac{dj\omega_i}{d\zeta_c} = \frac{dIM(j\Omega_i)}{d\zeta_c} = IM\left(\frac{dj\Omega_i}{d\zeta_c}\right) \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

$j\Omega_i$ est une des racines du polynôme Q' . On peut donc factoriser Q' :

$Q'(j\omega) = (j\omega - j\Omega_i) R(j\omega)$, où ω est complexe et R est un polynôme de $j\omega$

Dérivons cette expression par rapport à $j\omega$:

$$\frac{\partial Q'}{\partial j\omega} = R(j\omega) + (j\omega - j\Omega_i) \frac{\partial R}{\partial j\omega} \quad (\text{II.16})$$

Dérivons maintenant cette même expression par rapport à la raideur complexe $\bar{K} = K + 2j\omega\zeta_c\sqrt{KM}$:

$$\frac{\partial Q'}{\partial \bar{K}} = -\frac{\partial j\Omega_i}{\partial \bar{K}} R(j\omega) + (j\omega - j\Omega_i) \frac{\partial R}{\partial \bar{K}} \quad (\text{II.17})$$

Pour la valeur $\omega = \Omega_i$, les deux dérivées partielles calculées précédemment deviennent :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial Q'}{\partial j\omega} \right)_{\omega=\Omega_i} = R(j\Omega_i) \\ \left(\frac{\partial Q'}{\partial \bar{K}} \right)_{\omega=\Omega_i} = -\left(\frac{\partial j\Omega_i}{\partial \bar{K}} \right) R(j\Omega_i) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Chapitre II

Divisons membre à membre ces deux égalités, nous obtenons :

$$\frac{\partial j\Omega_i}{\partial \bar{K}} = - \frac{\left(\frac{\partial Q'}{\partial \bar{K}}\right)_{\omega=\Omega_i}}{\left(\frac{\partial Q'}{\partial j\omega}\right)_{\omega=\Omega_i}} \quad (\text{II.19})$$

Le terme $\left(\frac{\partial Q'}{\partial j\omega}\right)_{\omega=\Omega_i}$ se calcule simplement à l'aide des coefficients de Q' . Le calcul a été explicité dans le paragraphe précédent pour la fréquence propre réelle ω_i . Il nous reste à déterminer $\left(\frac{\partial Q'}{\partial \bar{K}}\right)_{\omega=\Omega_i}$:

$$Q'(j\omega) = Q(j\omega) (m \cdot \omega^2 - \bar{K}) + P(j\omega) m \omega^2 \bar{K} \Rightarrow \frac{\partial Q'}{\partial \bar{K}} = -Q(j\omega) + P(j\omega) m \omega^2 \quad (\text{II.20})$$

La dérivée partielle de la fréquence propre complexe Ω_i par rapport à \bar{K} s'écrit donc :

$$\frac{\partial j\Omega_i}{\partial \bar{K}} = \frac{Q(j\Omega_i) - P(j\Omega_i) m \Omega_i^2}{\left(\frac{\partial Q'}{\partial j\omega}\right)_{\omega=\Omega_i}} \quad (\text{II.21})$$

Cependant, nous désirons connaître la valeur de cette dérivée partielle non pas par rapport à \bar{K} , mais par rapport à K et ζ_c . Les variables K et ζ_c n'interviennent dans $\Gamma(j\omega)$ que sous la forme $(K + 2j\sqrt{KM}\zeta_c\omega) = \bar{K}$. Nous cherchons à exprimer les termes $dj\Omega_i/dK$ et $dj\Omega_i/d\zeta_c$, qui peuvent s'écrire respectivement $(\partial j\Omega_i/\partial \bar{K})(d\bar{K}/dK)$ et $(\partial j\Omega_i/\partial \bar{K})(d\bar{K}/d\zeta_c)$, en utilisant la dérivation des fonctions composées. Nous avons donc, dans un premier temps, exprimé le terme $\partial j\Omega_i/\partial \bar{K}$. Nous en déduisons les dérivées partielles de $j\Omega_i$ par rapport à K et ζ_c après avoir explicité les deux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\bar{K}}{dK}\right)_{\omega=\Omega_i} = 1 + \frac{j\Omega_i \zeta_c \sqrt{M}}{\sqrt{K}} \\ \left(\frac{d\bar{K}}{d\zeta_c}\right)_{\omega=\Omega_i} = 2j\Omega_i \sqrt{MK} \end{array} \right. \quad (\text{II.22})$$

En découle désormais une expression de la dérivée partielle de la fréquence propre réelle :

$$\frac{dj\omega_i}{dK} = IM \left(\frac{\partial j\Omega_i}{\partial \bar{K}} \left(\frac{d\bar{K}}{dK} \right)_{\omega=\Omega_i} \right) = IM \left(\frac{\left(Q(j\Omega_i) - P(j\Omega_i) m \Omega_i^2 \right)}{\left(\frac{\partial Q'}{\partial j\omega} \right)_{\omega=\Omega_i}} \left(1 + \frac{j \Omega_i \zeta_c \sqrt{M}}{\sqrt{K}} \right) \right)$$

$$\frac{dj\omega_i}{d\zeta_c} = IM \left(\frac{\partial j\Omega_i}{\partial \bar{K}} \left(\frac{d\bar{K}}{d\zeta_c} \right)_{\omega=\Omega_i} \right) = IM \left(\frac{\left(Q(j\Omega_i) - P(j\Omega_i) . m . \Omega_i^2 \right)}{\left(\frac{\partial Q'}{\partial j\omega} \right)_{\omega=\Omega_i}} \left(2 j \Omega_i \zeta_c \sqrt{M K} \right) \right)$$

(II.23)

II.4.3.1.3 CALCUL DE $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{K}} \right)_{\omega=\omega_i}$ ET $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta_c} \right)_{\omega=\omega_i}$

Tout comme dans le paragraphe précédent, nous allons chercher à évaluer la dérivée partielle de Γ par rapport à \bar{K} puis en déduire les deux dérivées partielles que nous désirons déterminer, en utilisant la dérivation des fonctions composées :

$$\Gamma(j\omega_i) = \frac{P(j\omega_i) \left(m \omega_i^2 - \bar{K} \right)}{Q(j\omega_i) \left(m \omega_i^2 - \bar{K} \right) + P(j\omega_i) m \omega_i^2 \bar{K}}$$

(II.24)

Nous dérivons cette expression en considérant les termes m et $j\omega_i$ comme étant constants. Il vient :

$$\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{K}} \right)_{\omega=\omega_i} = - \frac{P(j\omega_i)^2 m^2 \omega_i^4}{Q'(\omega_i)^2}$$

(II.25)

Nous obtenons ainsi les dérivées partielles de Γ par rapport à K et ζ_c :

$$\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{K}} \right)_{\omega=\omega_i} = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{K}} \right)_{\omega=\omega_i} \left(\frac{d\bar{K}}{dK} \right)_{\omega=\omega_i} = - \frac{P(j\omega_i)^2 m^2 \omega_i^4}{Q'(\omega_i)^2} \left(1 + \frac{j\omega_i \zeta_c \sqrt{M}}{\sqrt{K}} \right)$$

$$\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta_c} \right)_{\omega=\omega_i} = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{K}} \right)_{\omega=\omega_i} \left(\frac{d\bar{K}}{d\zeta_c} \right)_{\omega=\omega_i} = - \frac{P(j\omega_i)^2 m^2 \omega_i^4}{Q'(\omega_i)^2} (2 j \omega_i \sqrt{M K})$$

(II.26)

Ainsi avons nous donc exprimé chacun des trois termes à droite de l'égalité (II.11). Nous connaissons désormais les dérivées partielles des maxima de la flexibilité $\Gamma(j\omega_i)$ par rapport aux variables de conception K et ζ_c .

II.4.3.2 GRADIENT DE LA FONCTION COÛT

La fonction coût prend en compte l'ensemble des maxima de la flexibilité issus de l'identification. Son gradient tiendra lui aussi compte de la sensibilité de chacun de ces maxima par rapport aux variables de conception. Les calculs de dérivées partielles développés ci-avant seront donc exécutés pour chacune des fréquences propres de la structure. Puis, nous pourrions exprimer le gradient de ψ en fonction de toutes ces dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(K, \zeta_c) = \log \left(\sum_{i=1}^n \left(\Gamma(j\omega_i) \overline{\Gamma(j\omega_i)} \right)^3 \right) \\ \frac{\partial \psi(K, \zeta_c)}{\partial K} = \frac{\sum_{i=1}^n 3 \left(\Gamma(j\omega_i) \overline{\Gamma(j\omega_i)} \right)^2 \left(\frac{\partial \Gamma(j\omega_i)}{\partial K} \overline{\Gamma(j\omega_i)} + \overline{\left(\frac{\partial \Gamma(j\omega_i)}{\partial K} \right)} \Gamma(j\omega_i) \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\Gamma(j\omega_i) \overline{\Gamma(j\omega_i)} \right)^3} \\ \frac{\partial \psi(K, \zeta_c)}{\partial \zeta_c} = \frac{\sum_{i=1}^n 3 \left(\Gamma(j\omega_i) \overline{\Gamma(j\omega_i)} \right)^2 \left(\frac{\partial \Gamma(j\omega_i)}{\partial \zeta_c} \overline{\Gamma(j\omega_i)} + \overline{\left(\frac{\partial \Gamma(j\omega_i)}{\partial \zeta_c} \right)} \Gamma(j\omega_i) \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\Gamma(j\omega_i) \overline{\Gamma(j\omega_i)} \right)^3} \end{array} \right. \quad (II.27)$$

Remarque :

En pratique, les variables de conception K et ζ_c ne sont pas très bien adaptées au problème d'optimisation. En effet, les ordres de grandeur de ces deux variables sont totalement différents. Nous avons la même disparité d'ordres de grandeur pour les deux dérivées partielles de ψ . Si nous essayons de résoudre le problème d'optimisation tel quel, l'algorithme tend à résoudre un problème à une seule variable, au détriment de la variable de conception dont les variations sont les plus faibles. Il est donc nécessaire d'opérer ce que l'on pourrait appeler une mise à l'échelle des variables. Pour cela, nous allons effectuer le changement de variables suivant:

$$K \rightarrow e(20.K) \quad (II.28)$$

Le problème est alors beaucoup mieux conditionné et nous verrons par la suite que l'algorithme d'optimisation converge sans aucune difficulté vers un minimum qui semble être unique.

II.4.4 ALGORITHME D'OPTIMISATION

Nous n'avons pas développé d'algorithme d'optimisation, préférant utiliser un algorithme issu d'une bibliothèque mathématique (IMSL-MATH LIBRARY) [B18] [B19] [B20]. La partie purement optimisation du problème sera donc réalisée en "boîte noire". L'intérêt et l'originalité de la méthode décrite dans toute cette étude ne résident pas en l'élaboration d'un programme de minimisation de ψ ultra performant, car nous verrons, avec les applications ultérieures, que le temps CPU passé dans la partie optimisation est très faible. Nous décrivons cependant le principe de la méthode, pour information.

II.4.4.1 PRINCIPE DE L'ALGORITHME

La bibliothèque mathématique employée utilise une méthode quasi-Newtonienne avec une stratégie d'ensemble de variables actives, pour résoudre un problème de minimisation sur des variables bornées. Le problème se pose ainsi :

minimiser $\psi(K, \zeta_c)$ où $0 < \zeta_c \leq 0.25$ et $0 < K$

A partir de données initiales pour K_0 et ζ_{c0} , on détermine si ces deux variables sont actives, c'est à dire si elles sont sur les frontières de leur domaine de validité. Les variables qui ne sont pas actives sont appelées variables libres. Initialement, les variables de conception sont choisies comme étant libres.

L'algorithme détermine ensuite une direction de descente pour les variables libres selon la formule :

$$S = - H^{-1} \nabla \psi(K_0, \zeta_{c0}) \quad (\text{II.29})$$

H est une approximation définie positive du Hessien et $\nabla \psi(K_0, \zeta_{c0})$ est le gradient de ψ évalué au couple (K_0, ζ_{c0}) . Ces deux grandeurs sont évaluées en fonction des variables libres, uniquement. Les composantes du vecteur de descente correspondant aux variables actives sont nulles.

Il faut ensuite minimiser ψ sur la droite vectorielle définie par la direction de descente, c'est à dire trouver les nouvelles variables de conception (K_1, ζ_{c1}) telles que :

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ \zeta_{c1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_0 \\ \zeta_{c0} \end{pmatrix} + \lambda S, \lambda \in [0, 1] \quad \lambda \text{ étant choisi de telle manière que :} \quad (\text{II.30})$$

$$\psi(K_1, \zeta_{c1}) \leq \psi(K_0, \zeta_{c0}) + \alpha \nabla \psi(K_0, \zeta_{c0}) S, \alpha \in [0, 0.5]$$

On teste alors si les conditions d'optimalité sont bien respectées :

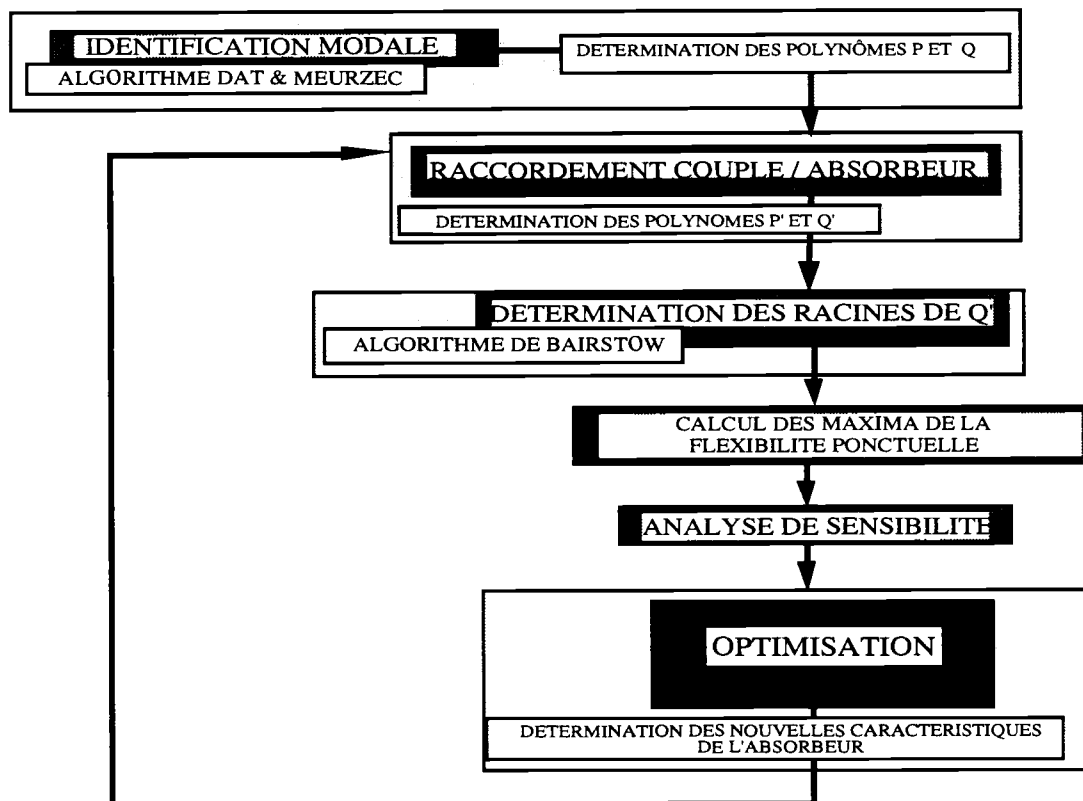
$$\left\{ \begin{array}{l} |\nabla\psi(K_1, \zeta_{c1})| \leq \varepsilon \\ 0 < \zeta_{c1} \leq 0.25, 0 < K_1 \\ \frac{\partial\psi(K_1, \zeta_{c1})}{\partial\zeta_{c1}} < 0 \text{ si } \zeta_{c1} = 0.25 \end{array} \right. \quad (\text{II.31})$$

Le nombre ε représente la tolérance que l'on veut accorder à la solution. Si l'optimum n'est pas atteint, on réactualise la matrice H selon la formule :

$$H \leftarrow H - \frac{H p p^t H}{p^t H p} + \frac{y y^t}{y^t p} \text{ où } p = \begin{pmatrix} K_1 \\ \zeta_{c1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_0 \\ \zeta_{c0} \end{pmatrix} \text{ et } y = \nabla\psi(K_1, \zeta_{c1}) - \nabla\psi(K_0, \zeta_{c0}) \quad (\text{II.32})$$

Puis on recommence les opérations décrites précédemment jusqu'à convergence des variables de conception. L'ensemble des variables actives est modifié à chaque fois qu'une variable libre atteint une de ses bornes, ou quand le critère d'optimalité est respecté pour toutes les variables libres, mais pas pour les variables actives.

II.4.4.2 ORGANIGRAMME COMPLET



II.4.5 APPLICATIONS

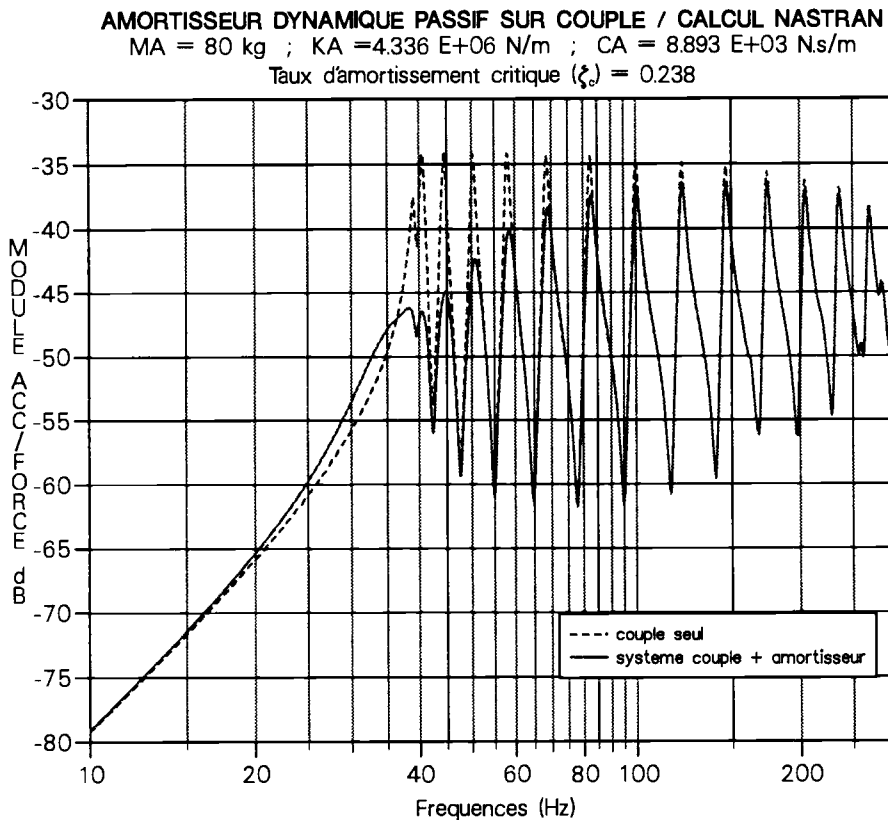
Nous avons testé la méthode d'optimisation de structures décrite dans cette étude, dans un premier temps, sur le calcul de réponse éléments finis issu du code NASTRAN, puis sur une courbe de mesure expérimentale.

II.4.5.1 MODELE ELEMENTS FINIS DU COUPLE

L'identification de l'inertance ponctuelle ne pose évidemment aucune difficulté, la réponse NASTRAN étant obtenue par superposition modale. L'inertance du couple est caractérisée par 32 pôles.

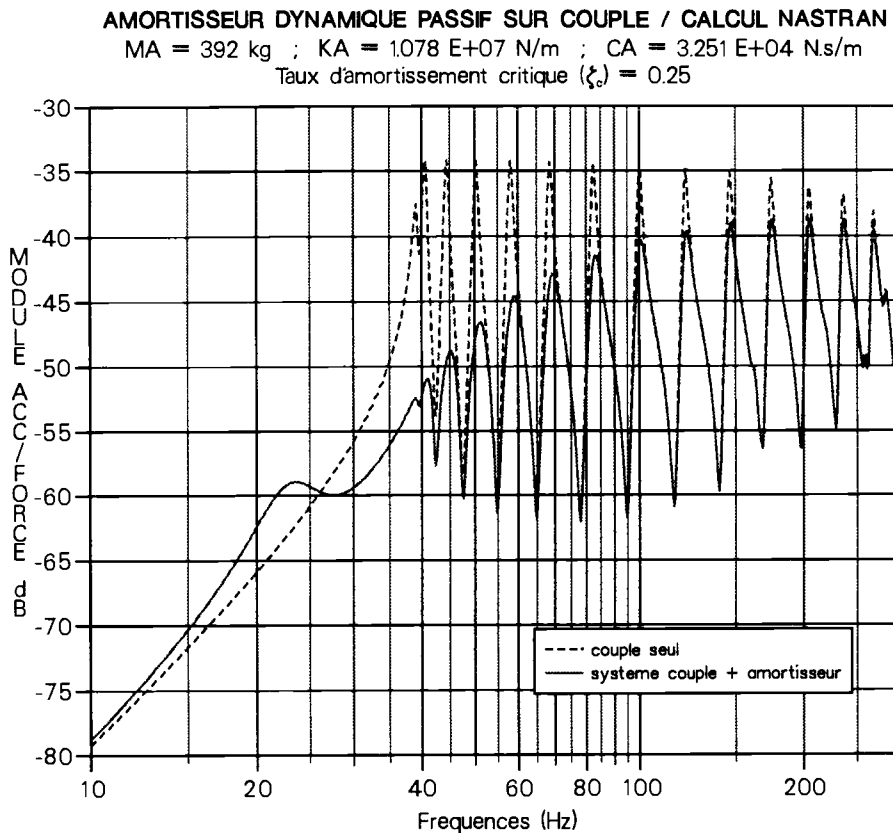
Nous avons effectué deux calculs d'optimisation, le premier avec la masse de l'absorbeur égale à 80 kg et le second avec une masse de 392 kg.

Nous pouvons remarquer, dans la première courbe, que la fréquence propre de l'absorbeur est très proche de la première fréquence propre du couple, si bien qu'il existe un important couplage entre les deux modes. Cela tend à réduire l'amplitude des deux résonances et à créer un palier à flexibilité constante dans l'intervalle de fréquence les séparant. Nous pouvons également remarquer que les cinq modes suivants sont alignés à peu près sur le même niveau de réponse. Le gain sur la flexibilité est de 12 dB.



Chapitre II

Pour la seconde optimisation (la masse de l'absorbeur est alors fixée à 392kg), le mode de l'amortisseur dynamique se détache mieux des autres modes, mais nous pouvons également observer que les sept premiers modes ont sensiblement le même niveau. Le gain est alors de 15 dB.



II.4.5.2 MESURES EXPERIMENTALES

L'intérêt de cette méthode n'étant pas d'optimiser la conception de structures, mais plutôt d'apporter les modifications optimales à des structures déjà existantes, afin d'améliorer leurs caractéristiques modales, nous avons testé notre méthode d'optimisation sur des mesures d'inertances de couple.

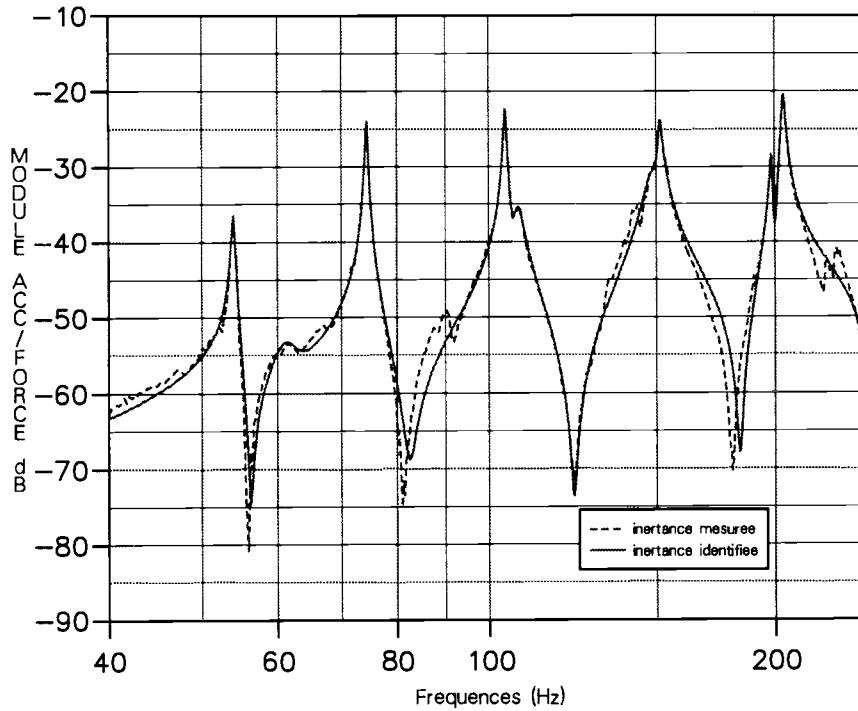
Les mesures ont été réalisées par la Division Essais et Mesures du CERDAN sur un couple du tronçon de sous-marin immergé PEGASE.

Nous avons représenté sur la même figure, la courbe de mesure et son identification. Nous observons qu'au voisinage des résonances, la courbe de mesure est très bien identifiée. En revanche, au voisinage des antirésonances, quelques modes semblent avoir échappé à la procédure d'identification. Cependant ces modes ont une influence négligeable par rapport aux pics dominants. C'est pourquoi il n'est pas nécessaire d'affiner l'analyse modale.

Chapitre II

IDENTIFICATION DE L'INERTANCE MESUREE

Nombres de poles = 22



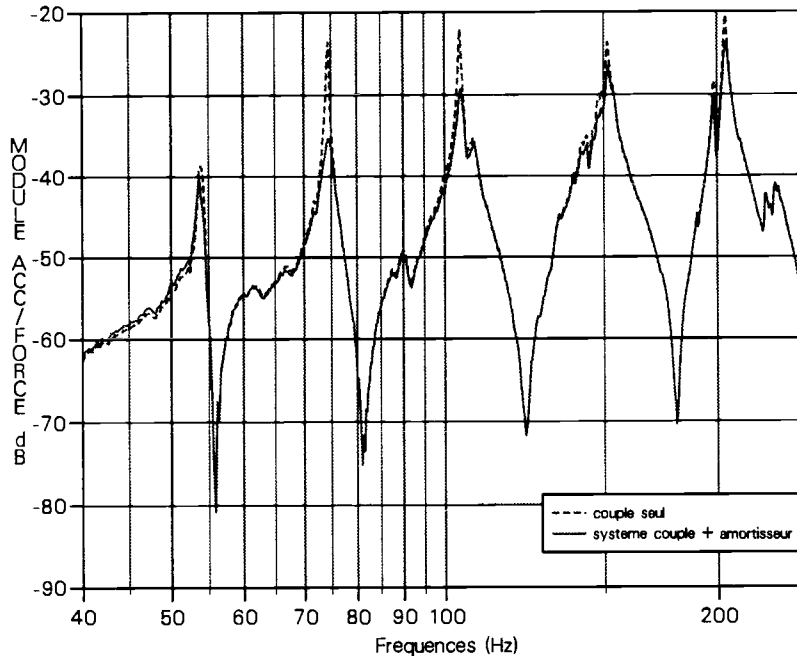
II.4.5.2.1 RESULTATS DE L'OPTIMISATION

Nous avons procédé à trois optimisations, la première pour une masse de 30 kg, la deuxième pour une masse de 80 kg et la troisième pour une masse de 392 kg. Les gains sur la flexibilité sont respectivement de 11 dB, 16 dB et 24 dB.

AMORTISSEUR DYNAMIQUE PASSIF SUR COUPLE / MESURE

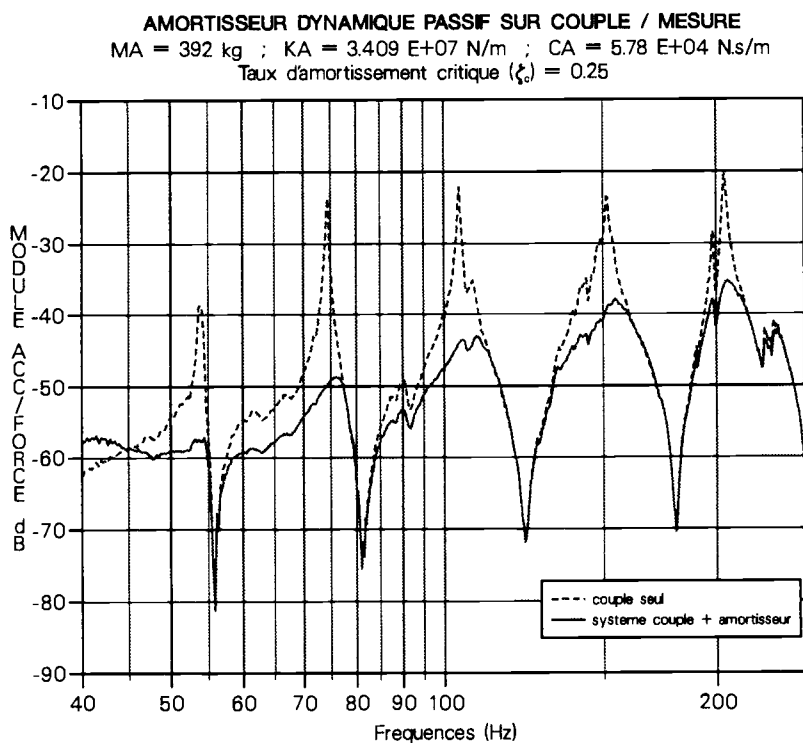
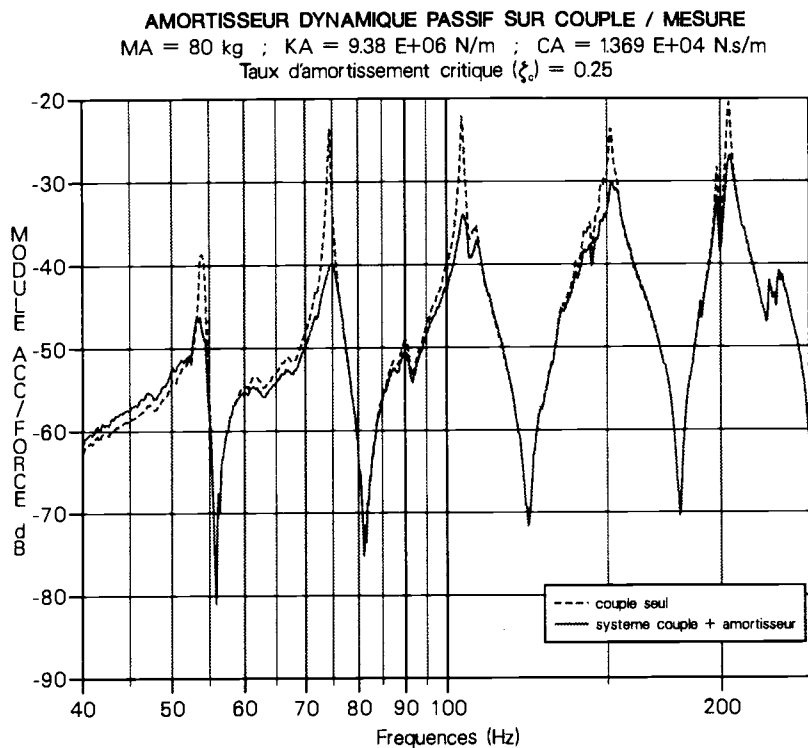
MA = 30 kg ; KA = 4.282 E+06 N/m ; CA = 5.293 E+03 N.s/m

Taux d'amortissement critique (ζ_c) = 0.2335



Chapitre II

Nous remarquons que pour une masse de 30 kg, la première résonance n'a absolument pas été modifiée, l'optimisation n'ayant fait qu'aligner sur sa valeur, les niveaux des pics dominants suivants. Précisons que les tracés ont été réalisés en raccordant l'absorbeur optimal (K et ζ_c résultant du calcul d'optimisation) sur le couple réel, c'est à dire en utilisant la flexibilité ponctuelle mesurée et non pas la flexibilité identifiée.



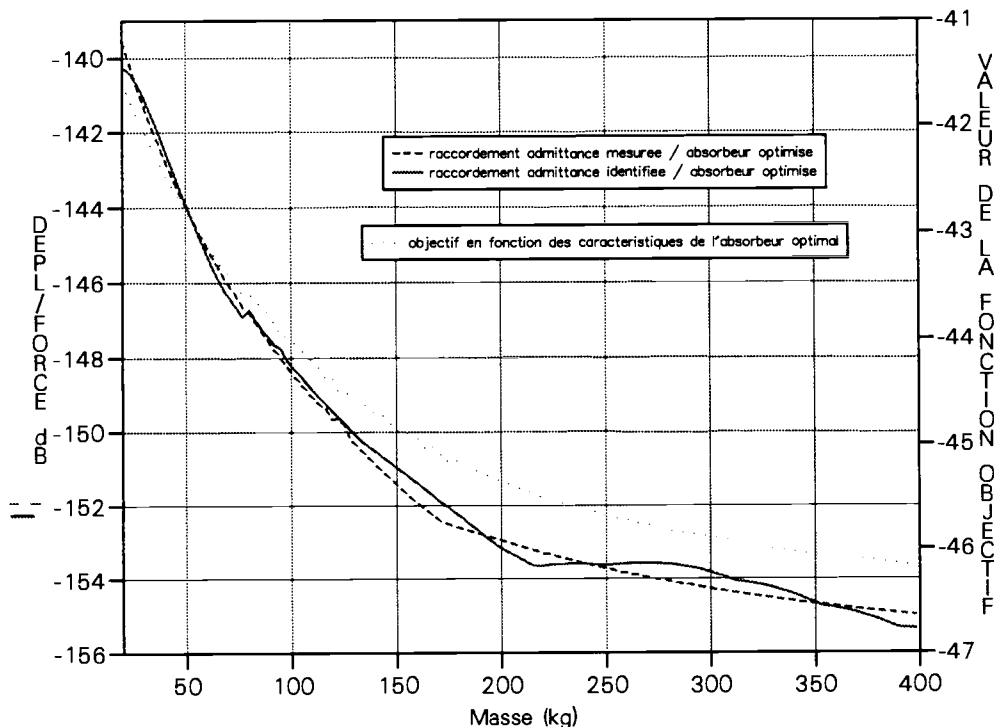
Chapitre II

II.4.5.2.2 ETUDE PARAMETRIQUE

Nous remarquons en observant les trois courbes précédentes, que l'influence de la masse sur les gains est bien celle que nous avons supposée dans le paragraphe II.4.2.2. Pour le vérifier a posteriori, nous avons réalisé une étude paramétrique sur la masse : à chaque valeur de la masse de l'absorbeur, nous avons procédé à une optimisation, puis nous avons relevé la valeur de la flexibilité dynamique maximale du couple optimisé. Dans un cas, nous avons relevé ces maxima sur la courbe issue du raccordement - inertance du couple mesurée / inertance de l'absorbeur - et dans l'autre, sur la courbe issue du raccordement - inertance du couple identifiée / inertance de l'absorbeur -.

Par ailleurs, pour chaque valeur de la masse, nous avons tracé la valeur atteinte par la fonction ψ en son optimum. Nous vérifions ainsi que la fonction coût que nous avons choisie, a un comportement qui est très proche de celui du maximum des résonances.

RESONANCE MAXIMALE DU COUPLE OPTIMISE EN FONCTION DE LA MASSE DE L'ABSORBEUR



II.4.5.2.3 INFLUENCE SUR LA PRESSION RAYONNEE

Nous avons déterminé la pression rayonnée dans l'eau pour un absorbeur de 392 kg optimisé. Pour cela, il nous a fallu raccorder les deux sous-structures couple/absorbeur, non plus en flexibilité dynamique, mais en pression.

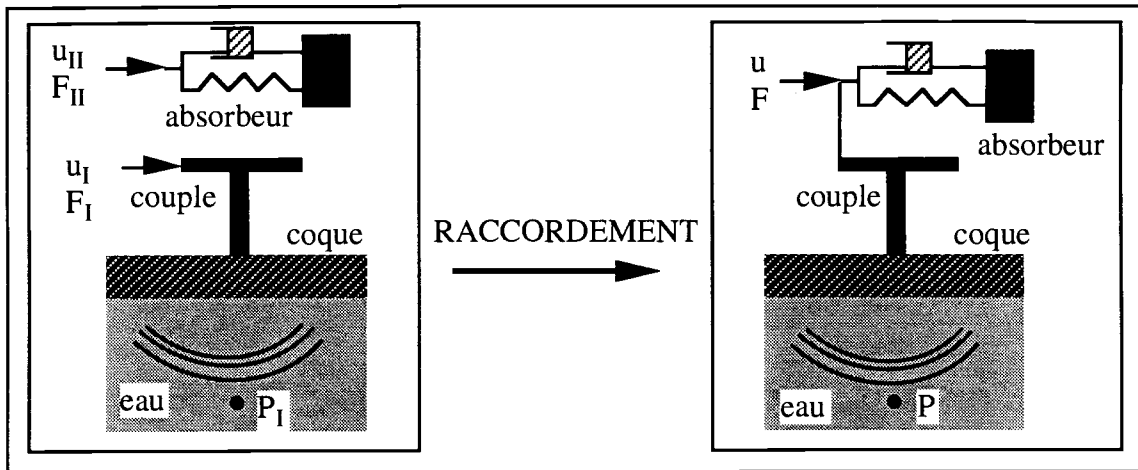


figure 2.5 : raccordement en pression

Ecrivons les équations de raccordement :

Avant raccordement, pour le couple, nous avons :

$$\begin{bmatrix} u_I \\ P_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_I \\ T \end{bmatrix} F_I \quad (\text{II.33})$$

La courbe de transfert T, de la pression en fonction de la force d'excitation, tout comme celle de la flexibilité dynamique, a été mesurée expérimentalement.

Pour l'absorbeur, nous avons :

$$u_{II} = Y_{II} F_{II} \quad (\text{II.34})$$

Après raccordement, nous écrivons que la force d'excitation globale F est égale à la somme des deux forces F_I et F_{II} et que les déplacements u_I et u_{II} sont égaux. Il vient alors :

$$\begin{aligned} u_{II} &= Y_{II} F_{II} = Y_{II} (F - F_I) \\ &= u_I = Y_I F_I \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

D'où nous pouvons déduire F_I :

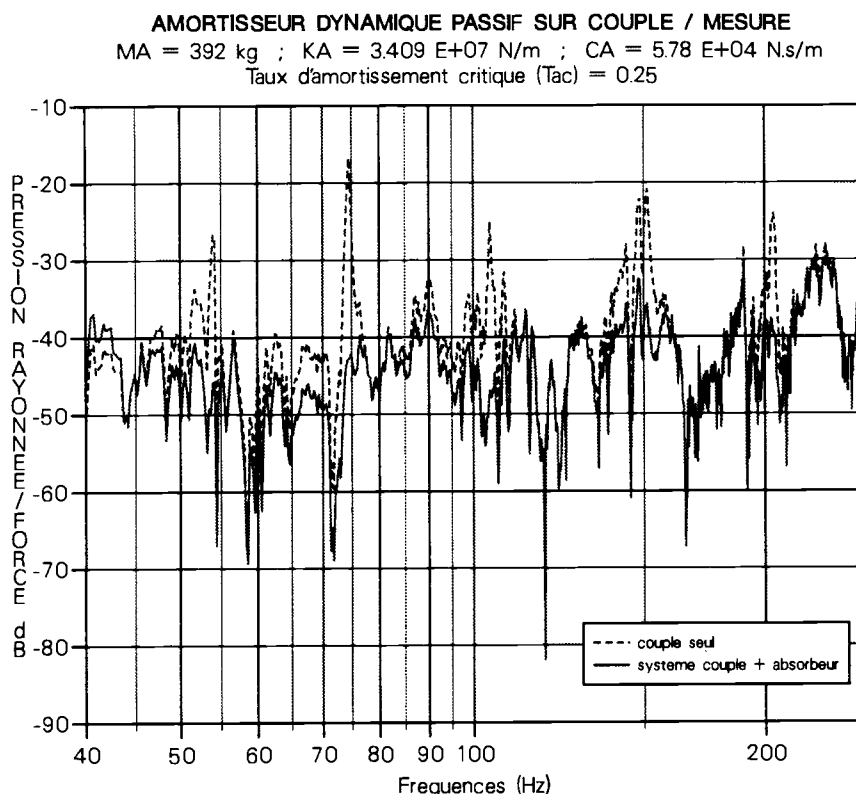
$$F_I = \frac{Y_{II}}{Y_I + Y_{II}} F \quad (\text{II.36})$$

La pression rayonnée par la structure globale s'écrit donc :

$$P = T F_I = T \frac{Y_{II}}{Y_I + Y_{II}} F \quad \text{où} \quad Y_{II} = \frac{1}{K + j C \omega} - \frac{1}{m \omega^2} \quad (\text{II.37})$$

Chapitre II

Nous avons obtenu un gain de 13 dB acoustiques. Ce résultat était prévisible, car généralement nous retrouvons, dans un spectre en pression, les résonances des structures internes qui sont souvent amplifiées.



II.4.6 ABSORBEUR AVEC AMORTISSEMENT HYSTERETIQUE

Dans toute cette étude, nous avons considéré que la loi d'amortissement de l'absorbeur dynamique était de type visqueux. Nous pouvons également traiter le cas où l'amortissement est de type hystérétique, sans pour autant introduire de modifications importantes dans la méthode exposée.

Pour le cas visqueux, la raideur complexe de l'absorbeur s'écrivait $\bar{K} = K + j C \omega$, pour le cas hystérétique, elle s'écrit $\bar{K} = K (1 + j \tau)$. Le raccordement impédantiel de l'absorbeur au couple s'obtient à partir des polynômes P et Q de façon similaire à l'équation (II.8) :

$$\text{Flexibilité}_{\text{globale}}(j\omega) = \frac{P(j\omega) (m \omega^2 - (K + j \tau))}{Q(j\omega) (m \omega^2 - (K + j \tau)) + P(j\omega) m \omega^2 (K + j \tau)} \quad (\text{II.38})$$

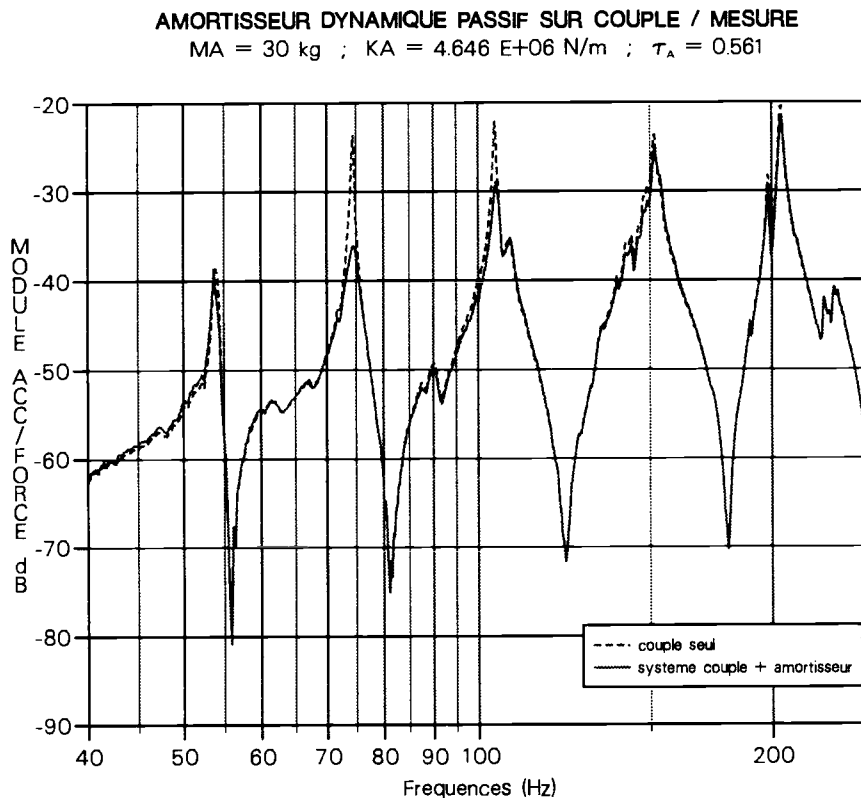
Notons toutefois que la flexibilité globale s'écrit sous forme de fraction rationnelle de polynômes de $(j\omega)$ dont les coefficients sont des termes complexes. Cependant,

l'algorithme de BAIRSTOW peut être très facilement adapté au cas de coefficients complexes et l'on peut ainsi déterminer les pôles de cette fraction rationnelle.

Quant à l'analyse de sensibilité, les formules de dérivation sont identiques à celles du cas visqueux, car auparavant, nous avons pris soin d'exprimer toutes les dérivées par rapport à la variable muette \bar{K} . Il reste alors à exprimer les deux dérivées $d\bar{K}/dK$ et $d\bar{K}/d\tau$:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{K}}{dK} = (1 + j \tau) \\ \frac{d\bar{K}}{d\tau} = j K \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Les deux variables de conception sont alors K et τ . Nous avons repris pour exemple l'optimisation de l'absorbeur de masse égale à 30 kg :



II.4.7 CONCLUSION

Nous avons développé dans cette étude une méthode d'optimisation, destinée à améliorer le comportement vibratoire de structures déjà existantes. Nous avons mis en évidence ses avantages :

- Facilité de mise en oeuvre

L'utilisateur n'a besoin que d'une mesure expérimentale (une inertance ponctuelle) pour procéder à une optimisation.

- Peu d'intervention de la part de l'utilisateur

En fait, il n'intervient que pour le choix de la bande de fréquence d'étude et le choix du nombre de pôles de la fonction de transfert, dans la procédure d'identification de DAT & MEURZEC. De plus, il serait possible d'automatiser totalement cette procédure et faire en sorte qu'elle puisse déterminer elle-même le nombre de pôles.

- Rapidité des calculs

La partie identification est très peu coûteuse en temps CPU (quelques minutes), quant à la partie optimisation, elle est quasi-instantanée. Précisons que tous les calculs ont été effectués sur calculateur CONVEX C220.

- Gain important sur les réponses

Nous avons vu qu'en théorie il pouvait aller jusqu'à plus de 20 dB.

Cependant, dans la pratique, c'est-à-dire en réalisant de tels absorbeurs, il ne faut pas s'attendre à de tels gains. A cela de nombreuses raisons et en particulier l'idéalisation du comportement vibratoire de l'absorbeur dynamique.

Si une modélisation plus raffinée de l'amortissement peut nuire à la souplesse d'emploi de la méthode, en revanche, une modélisation de l'absorbeur avec plusieurs ddl permettrait à la théorie de mieux prendre en compte les réalités de l'expérimentation.

II.5 DIMENSIONNEMENT OPTIMAL D'UN ABSORBEUR REEL

Dans la méthode d'optimisation décrite dans le paragraphe II.4, l'absorbeur dynamique est modélisé par un ddl unique et l'amortissement qui lui est associé est linéaire. On a vu que ces deux caractéristiques permettent d'établir pour le modèle global couple/absorbeur des expressions analytiques de la flexibilité ponctuelle. Cependant ce modèle théorique de l'absorbeur n'en demeure pas moins irréaliste. En effet, la réduction du modèle à un ddl unique est inexacte, en particulier pour notre cas d'étude où le déversement du couple engendre un mouvement dans les deux directions du plan. D'autre part, l'hypothèse de linéarité de l'amortissement n'est bien évidemment jamais vérifiée dans la réalité.

Nous nous attachons ici à construire un modèle d'absorbeur dynamique (2D) plus réaliste, c'est-à-dire en prenant en compte tous ses mouvements dans le plan et en utilisant les lois de comportement expérimentales de matériaux viscoélastiques afin de prédire le comportement dynamique global du modèle. Nous intégrons ce modèle dans un

processus d'optimisation où les variables de conception sont en fait des variables de dimensionnement physiques.

II.5.1 DESCRIPTION DU MODELE DE L'ABSORBEUR DYNAMIQUE

L'absorbeur dynamique est constitué d'une plaque d'acier (de longueur $2d = 30$ cm, de largeur $h = 10$ cm, et d'une épaisseur $2a$ telle que sa masse soit égale à 30 kg, $2a = 13.23$ cm), sur laquelle sont fixés deux plots viscoélastiques (voir figure 2.6).

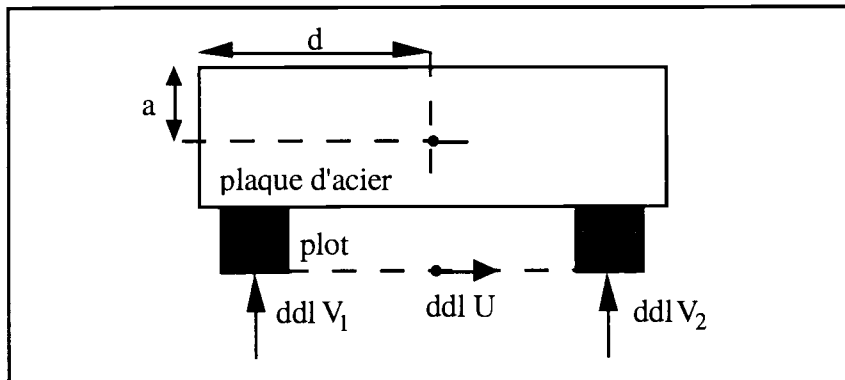


figure 2.6 : modélisation de l'absorbeur dynamique

On fait les hypothèses suivantes sur les plots : tout d'abord, on néglige leur masse, en considérant que leurs premiers modes propres sont situés à des fréquences beaucoup plus élevées que celles des modes du couple que l'on désire atténuer. De plus, on suppose qu'ils ne travaillent qu'en cisaillement et traction-compression en négligeant leur flexion.

Cette dernière hypothèse nous incite à ne considérer que trois ddl pour décrire le mouvement de l'absorbeur dynamique, deux ddl pour rendre compte des tractions-compressions des deux plots et un ddl pour le cisaillement des plots sous la plaque. Ces ddl permettent de décrire à eux-seuls les trois mouvements caractéristiques de l'absorbeur complet, la traction-compression, le balancement et le cisaillement (voir figure 2.7). S'il y a symétrie, c'est à dire si les plots sont identiques, le mouvement de traction-compression ne sera jamais sollicité, car les modes de déversement du couple sont antisymétriques.

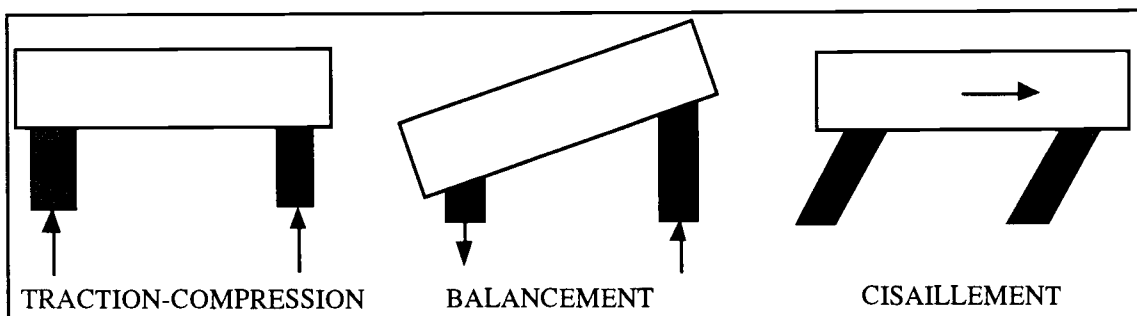


figure 2.7 : mouvements de l'absorbeur décrits par les trois ddl

Chapitre II

II.5.1.1 MODELISATION DES PLOTS

II.5.1.1.1 LOI DE COMPORTEMENT DES MATERIAUX VISCOELASTIQUES

Expérimentalement, la température est le facteur qui a le plus d'effet sur les caractéristiques des matériaux viscoélastiques. En général, on observe trois bandes de températures. La première, appelée "zone vitreuse", correspond à un fort module d'Young et un très faible facteur de perte. Plus la température augmente, plus le module d'Young diminue et plus le facteur de perte augmente, jusqu'à une valeur maximum (qui peut atteindre 1 ou 2). On est alors dans la zone de transition. Enfin, si l'on augmente encore la température, les deux grandeurs tendent à devenir stable ("zone caoutchouc").

Le principal effet de la fréquence est de faire augmenter le module d'élasticité. Ces variations sont plus rapides lorsque l'on se trouve en zone de transition.

Il existe de nombreux modèles empiriques pour décrire l'évolution des modules d'Young et facteur de perte en fonction de la fréquence [B21]-[B24]. L'effet conjugué de la température est pris en compte en se ramenant à une fréquence réduite $\alpha_t \omega$, où le paramètre α_t est une fonction de la température T. Cependant, nous travaillerons par la suite directement avec les courbes expérimentales fournissant les parties réelles et imaginaires du module de cisaillement de plusieurs matériaux viscoélastiques (voir figure 2.11). Ces mesures ont été effectuées à la température de 20° C, sur trois groupes de matériaux réalisés par trois fournisseurs différents.

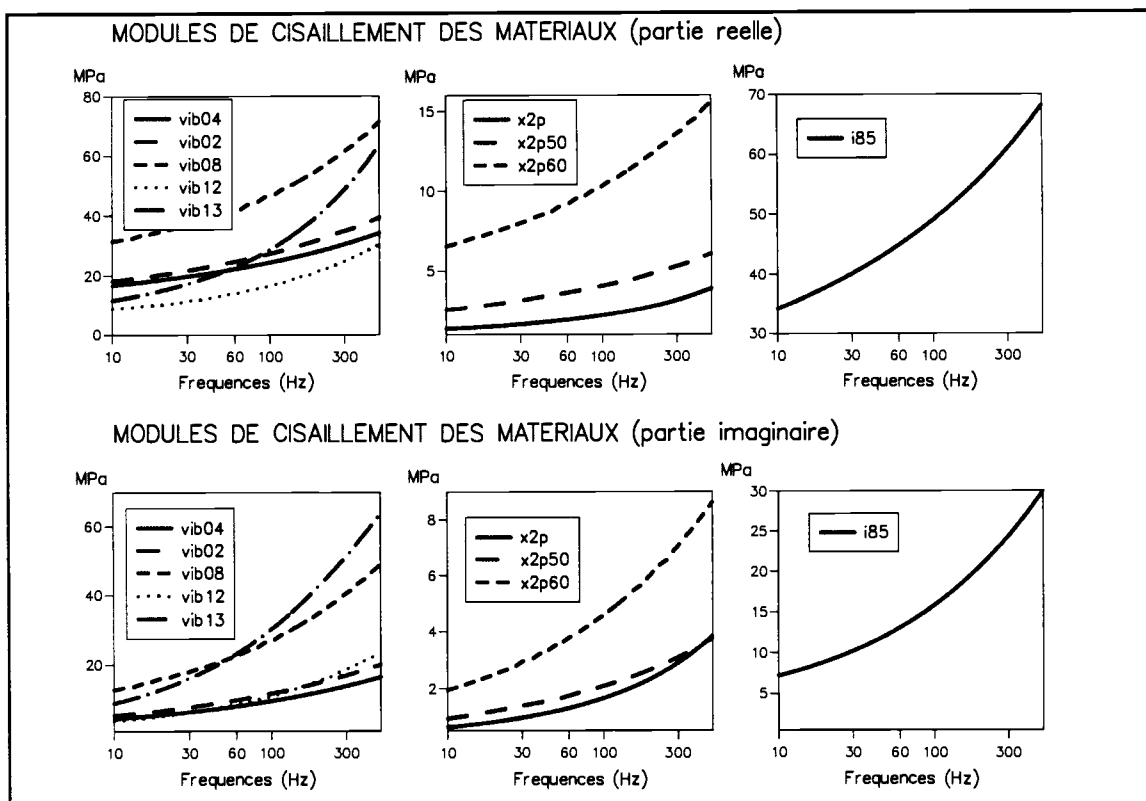


figure 2.11 : mesures de modules de cisaillement de matériaux viscoélastiques

Chapitre II

II.5.1.1.2 MODELE SIMPLIFIE DES PLOTS

On a choisi de décrire le comportement de chaque plot comme celui d'un volume élémentaire de matériau viscoélastique. Cela signifie que l'on écrira la matrice de flexibilité d'un plot directement à partir de la loi de comportement du matériau viscoélastique :

$$\begin{cases} F_{v_p} = K_L v_p & \text{avec } K_L = \frac{E^* S}{L} \\ F_{u_p} = K_T u_p & \text{avec } K_T = \frac{G^* S}{L} \text{ et } G^* = \frac{E^*}{3} \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

S représente la section de chaque plot et L est leur hauteur.

En pratique, cette approximation est rendue valide en introduisant un facteur de forme rendant compte de la dilatation locale de la section lors de la compression du plot (effet de profil en tonneau). Cependant nous verrons par la suite qu'elle induit une erreur négligeable par rapport au comportement réel du plot.

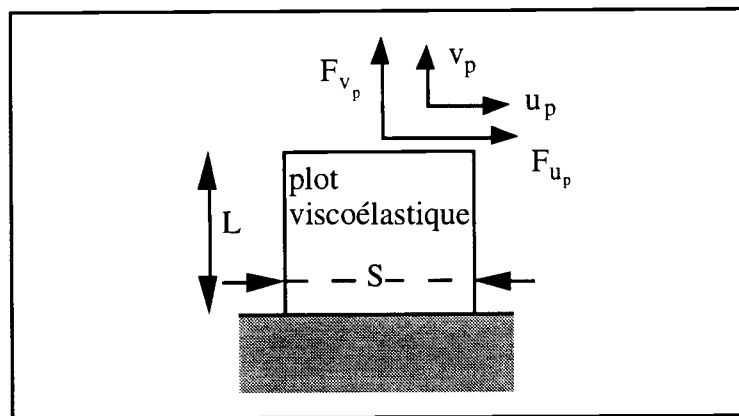


figure 2.12 : notations pour les excitations des plots

Nous supposons le matériau viscoélastique incompressible, ce qui justifie le rapport 1/3 entre le module de cisaillement G^* et le module d'élasticité E^* . Ces deux grandeurs sont complexes et dépendent de la fréquence et de la température. On définit le facteur de perte η :

$$\begin{cases} E^*(\omega, T) = E(\omega, T) (1 + j \eta(\omega, T)) \\ G^*(\omega, T) = G(\omega, T) (1 + j \eta(\omega, T)) \end{cases} \quad \text{avec } G(\omega, T) = \frac{E(\omega, T)}{3} \quad (\text{II.41})$$

II.5.1.2 MATRICE DE FLEXIBILITE DE LA PLAQUE D'ACIER

Sur la bande de fréquence étudiée [0 Hz , 500 Hz], la plaque d'acier se comporte comme un corps rigide, qui peut donc être décrit par les deux ddl de translation de son centre d'inertie, v et w et par la rotation θ autour du centre d'inertie.

L'expression de la matrice de flexibilité dynamique par rapport aux ddl u , v_1 et v_2 s'obtient donc en écrivant les équations fondamentales de la dynamiques par rapport à v , w et θ , puis à effectuer le changement de variables $(v,w,\theta) \rightarrow (u,v_1,v_2)$. Ce changement de variables est légitime dans la mesure où nous faisons l'hypothèse classique des petits déplacements.

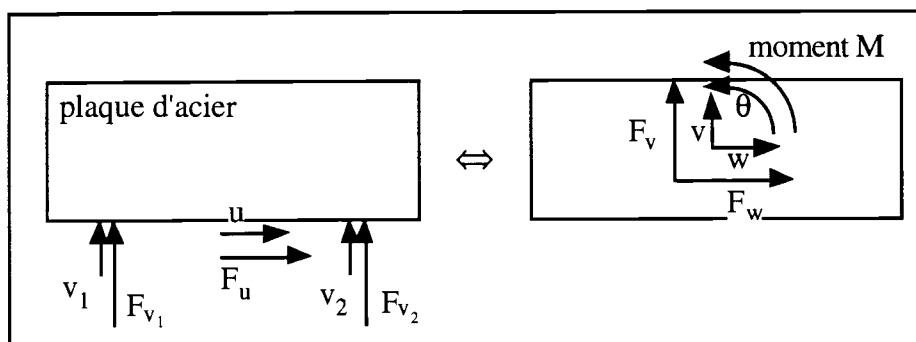


figure 2.13 : changement de variables $(v,w,\theta) \rightarrow (u,v_1,v_2)$

Les équations fondamentales de la dynamique donnent :

$$\begin{cases} m \frac{d^2 v}{dt^2} = -m \omega^2 v = F_v \\ m \frac{d^2 w}{dt^2} = -m \omega^2 w = F_w \\ J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -J \omega^2 \theta = M \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

m représente la masse de la plaque et J son moment d'inertie ($J = m (a^2 + d^2)/3$).

De (II.42), on tire l'expression de la matrice de flexibilité H :

$$\begin{bmatrix} w \\ v \\ \theta \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} F_w \\ F_v \\ M \end{bmatrix}, \text{ avec } H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m \omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J \omega^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

Chapitre II

On écrit les formules de changement de variables linéarisées, c'est-à-dire en considérant que $\sin\theta$ est proche de θ pour des petites rotations. On obtient :

$$\begin{cases} v = \frac{v_1 + v_2}{2} & F_v = F_{v_1} + F_{v_2} \\ w = u - a \theta & F_w = F_u \\ \theta = \frac{v_2 - v_1}{2d} & M = d F_{v_2} - d F_{v_1} + a F_u \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

Les relations de corps rigide (II.44) peuvent s'écrire :

$$\begin{bmatrix} u \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} F_w \\ F_v \\ M \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} F_u \\ F_{v_1} \\ F_{v_2} \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -d \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

En multipliant la matrice H à gauche par P et à droite par P^t, nous pouvons déduire l'expression de la matrice de flexibilité dynamique de la plaque d'acier :

$$\begin{bmatrix} u \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} F_u \\ F_{v_1} \\ F_{v_2} \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m\omega^2} - \frac{a^2}{J\omega^2} & \frac{ad}{J\omega^2} & -\frac{ad}{J\omega^2} \\ \frac{ad}{J\omega^2} & -\frac{1}{m\omega^2} - \frac{d^2}{J\omega^2} & -\frac{1}{m\omega^2} + \frac{d^2}{J\omega^2} \\ -\frac{ad}{J\omega^2} & -\frac{1}{m\omega^2} + \frac{d^2}{J\omega^2} & -\frac{1}{m\omega^2} - \frac{d^2}{J\omega^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

II.5.1.3 RACCORDEMENT DE LA PLAQUE ET DES PLOTS

On raccorde entre eux les deux plots encastés à leur base en considérant qu'ils ont le même déplacement horizontal u_p . On étudie le cas où les deux plots sont constitués du même matériau viscoélastique. On calcule ainsi la matrice de raideur dynamique K_{plot} de l'ensemble formé des deux plots d'après les équations (II.40) :

$$\begin{bmatrix} F_{u_p} \\ F_{v_{p1}} \\ F_{v_{p2}} \end{bmatrix} = K_{\text{plot}} \begin{bmatrix} u_p \\ v_{p1} \\ v_{p2} \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad K_{\text{plot}} = \begin{bmatrix} 2 K_T & 0 & 0 \\ 0 & K_L & 0 \\ 0 & 0 & K_L \end{bmatrix}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} K_T = \frac{E^* S}{3L} \\ K_L = \frac{E^* S}{L} \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

On déduit de l'équation (II.47) l'expression de la matrice de transfert dynamique des plots libres-libres :

$$\begin{bmatrix} F_{u_p} \\ F_{v_{p1}} \\ F_{v_{p2}} \\ F_U \\ F_{V_1} \\ F_{V_2} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} u_p \\ v_{p1} \\ v_{p2} \\ U \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \text{ avec } K = \begin{bmatrix} K_{\text{plot}} & -K_{\text{plot}} \\ -K_{\text{plot}} & K_{\text{plot}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.48})$$

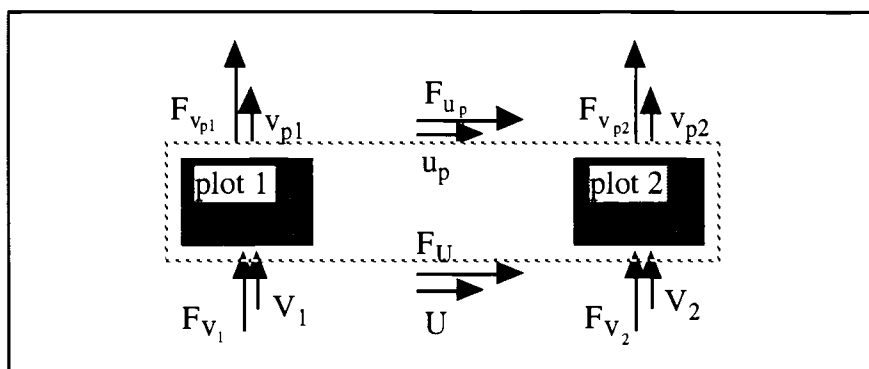


figure 2.14 : ddl relatifs aux plots viscoélastiques

Les conditions de raccordement impédantiel des plots à la plaque imposent aux forces F_{u_p} , $F_{v_{p1}}$, $F_{v_{p2}}$ d'être opposées aux forces F_U , F_{V_1} , F_{V_2} , alors que les déplacements u , v_1 , v_2 et u_p , v_{p1} , v_{p2} sont égaux. On déduit alors des équations (II.46) et (II.48) :

$$\begin{bmatrix} F_U \\ F_{V_1} \\ F_{V_2} \end{bmatrix} = K_{\text{plot}} \begin{bmatrix} U \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} - K_{\text{plot}} \begin{bmatrix} u \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = K_{\text{plot}} \begin{bmatrix} U \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} - K_{\text{plot}} D \begin{bmatrix} F_u \\ F_{v_1} \\ F_{v_2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.49})$$

D'autre part, on a considéré que les plots ont une masse nulle (on néglige leur masse par rapport à celle de la plaque d'acier). En écrivant les équations du mouvement des plots, on en conclut donc que les forces d'excitation à leur base F_U , F_{V_1} , F_{V_2} sont opposées aux forces d'excitation à leur sommet F_{u_p} , $F_{v_{p1}}$, $F_{v_{p2}}$. Elles sont donc égales aux forces F_u , F_{v_1} , F_{v_2} . On déduit ainsi de l'équation (II.49) la matrice de flexibilité dynamique A de l'ensemble plots + plaque d'acier :

$$\begin{bmatrix} U \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_U \\ F_{V_1} \\ F_{V_2} \end{bmatrix}, \text{ avec :} \quad A = D + K_{\text{plot}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2 K_T} - \frac{1}{m \omega^2} - \frac{a^2}{J \omega^2} & \frac{a d}{J \omega^2} & -\frac{a d}{J \omega^2} \\ \frac{a d}{J \omega^2} & \frac{1}{K_L} - \frac{1}{m \omega^2} - \frac{d^2}{J \omega^2} & -\frac{1}{m \omega^2} + \frac{d^2}{J \omega^2} \\ -\frac{a d}{J \omega^2} & -\frac{1}{m \omega^2} + \frac{d^2}{J \omega^2} & \frac{1}{K_L} - \frac{1}{m \omega^2} - \frac{d^2}{J \omega^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

II.5.2 MATRICE DE FLEXIBILITE DYNAMIQUE DU COUPLE

Faute de disposer de mesures complètes pour la matrice de flexibilité dynamique, on utilise, pour cette nouvelle procédure d'optimisation, des flexibilités calculées par éléments finis. On a repris le modèle décrit au paragraphe II.3.1. Le calcul éléments finis permet d'obtenir les trois transferts en flexibilité (en bout de semelle) $f_{XX}(\omega)$, $f_{ZZ}(\omega)$ et $f_{ZX}(\omega)$ correspondant à des excitations et réponses suivant la direction longitudinale (Z) et la direction radiale (X) (voir figure 2.15).

La flexibilité $f_{ZZ}(\omega)$ est celle qui a été étudiée dans le paragraphe II.4.5.1. La flexibilité $f_{XX}(\omega)$ elle, a une résonance maximale aux alentours de 165 Hz. L'amplitude correspondante est beaucoup plus faible que pour $f_{ZZ}(\omega)$ (-143 dB au lieu de -130 dB), ce qui était prévisible, car le déversement du couple est dû à la flexion de son âme, la semelle restant pratiquement rigide dans la bande de fréquence étudiée. L'absorbeur dynamique devra donc être conçu afin d'atténuer en premier lieu $f_{ZZ}(\omega)$.

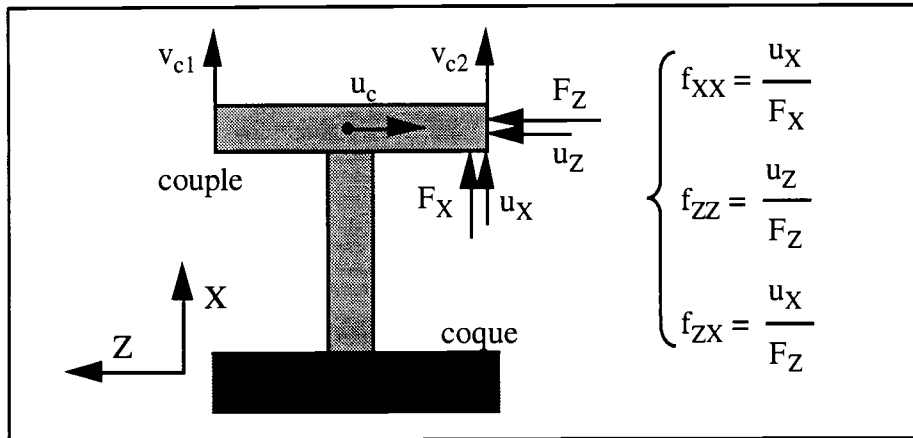


figure 2.15 : définition des ddl d'excitation du couple

Nous disposons de la matrice de flexibilité dynamique liant les deux ddl de l'extrémité de la semelle associés aux directions (X) et (Y). Or, le raccordement impédantiel de l'absorbeur au couple nous impose de connaître la matrice de transfert des trois ddl de raccordement u_{c1} , v_{c1} , v_{c2} .

La symétrie du couple ainsi que l'hypothèse de rigidité de la semelle (par rapport à son âme) permettent de déduire des trois flexibilités $f_{XX}(\omega)$, $f_{ZZ}(\omega)$ et $f_{ZX}(\omega)$ la matrice de transfert relative à ces ddl, matrice que l'on notera B :

$$\begin{bmatrix} u_c \\ v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} F_{u_c} \\ F_{v_{c1}} \\ F_{v_{c2}} \end{bmatrix}, \text{ avec } B = \begin{bmatrix} f_{ZZ}(\omega) & f_{ZX}(\omega) & -f_{ZX}(\omega) \\ f_{ZX}(\omega) & f_{XX}(\omega) & -f_{XX}(\omega) \\ -f_{ZX}(\omega) & -f_{XX}(\omega) & f_{XX}(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

II.5.3 RACCORDEMENT IMPEDANTIEL DE L'ABSORBEUR AU COUPLE

II.5.3.1 DETERMINATION DE LA MATRICE DE FLEXIBILITE GLOBALE

Les conditions du raccordement de l'absorbeur dynamique au couple sont l'égalité des déplacements U , V_1 , V_2 et u_c , v_{c1} , v_{c2} . En ce qui concerne les forces, si l'on appelle $F_{U_{tot}}$, $F_{V_{tot1}}$, $F_{V_{tot2}}$ les forces d'excitation de l'ensemble couple + absorbeur, suivant les trois ddl de raccordement, on a alors :

$$\begin{cases} F_{U_{tot}} = F_U + F_{u_c} \\ F_{V_{tot1}} = F_{V_1} + F_{v_{c1}} \\ F_{V_{tot2}} = F_{V_2} + F_{v_{c2}} \end{cases} \quad (II.52)$$

Ecrivons les équations du mouvement dans les deux sous-structures tout en égalant les déplacements aux noeuds de raccordement. Nous pouvons en déduire une relation entre les forces $F_{U_{tot}}$, $F_{V_{tot1}}$, $F_{V_{tot2}}$ et les forces F_U , F_{V_1} , F_{V_2} :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_U \\ F_{V_1} \\ F_{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_c \\ v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} F_{u_c} \\ F_{v_{c1}} \\ F_{v_{c2}} \end{bmatrix} &\Rightarrow A \begin{bmatrix} F_U \\ F_{V_1} \\ F_{V_2} \end{bmatrix} = B \left(\begin{bmatrix} F_{U_{tot}} \\ F_{V_{tot1}} \\ F_{V_{tot2}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_U \\ F_{V_1} \\ F_{V_2} \end{bmatrix} \right) \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} F_U \\ F_{V_1} \\ F_{V_2} \end{bmatrix} = (A+B)^{-1} B \begin{bmatrix} F_{U_{tot}} \\ F_{V_{tot1}} \\ F_{V_{tot2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (II.53)$$

On obtient ainsi la matrice de flexibilité dynamique Y de l'ensemble couple + absorbeur :

$$\boxed{\begin{bmatrix} U \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} F_{U_{tot}} \\ F_{V_{tot1}} \\ F_{V_{tot2}} \end{bmatrix}, \text{ avec } Y = A (A+B)^{-1} B} \quad (II.54)$$

II.5.3.2 DEFINITION DE LA FONCTION COUT

Nous avons vu que $f_{ZZ}(\omega)$ est la flexibilité dynamique qui présente le plus fort niveau, c'est-à-dire près de 10 dB de plus que $f_{XX}(\omega)$ et $f_{ZX}(\omega)$. On s'efforcera donc d'atténuer la flexibilité ponctuelle selon le ddl U . Pour cela, on définira la fonction coût ψ comme étant le maximum de la fonction de transfert Y_{11} (premier terme de la matrice Y) sur la bande de fréquence d'étude :

$$\psi\left(\frac{S}{L}\right) = \text{MAX}_{0 \text{ Hz} < \text{fréquence} < 500 \text{ Hz}} \left(Y_{11}\left(\frac{S}{L}, \text{fréquence}\right) \right) \quad (II.55)$$

Chapitre II

Le rapport S/L de la section des plots sur leur hauteur (les deux plots ont même hauteur et même section) est la variable de conception de notre problème d'optimisation.

Les trois flexibilités f_{ZZ} , f_{XX} et f_{ZX} sont évaluées sur un échantillonnage de la bande de fréquence [0 Hz, 500 Hz]. On détermine donc ψ en calculant Y_{11} pour chaque valeur de fréquence de cet échantillonnage. Préalablement, les valeurs expérimentales de G^* auront été interpolées, car l'échantillonnage des mesures ne coïncide pas avec celui de f_{ZZ} , f_{XX} et f_{ZX} .

La fonction ψ n'étant évidemment pas différentiable, nous utilisons donc l'algorithme du simplexe afin de résoudre le problème d'optimisation ainsi formulé.

Remarque :

Nous aurions pu, tout comme pour la méthode exposée dans le paragraphe II.4, rechercher une expression analytique pour les transferts f_{ZZ} , f_{XX} et f_{ZX} et utiliser un modèle analytique approchant les lois de comportement des matériaux viscoélastiques. Cependant, l'expression du transfert global Y_{11} mettant en jeu des produits matriciels de matrices 3×3 plus une inversion (voir formule (II.54)), opérations extrêmement complexes à effectuer de manière littérale, il serait alors impossible d'en obtenir une formulation analytique.

II.5.4 ALGORITHME D'OPTIMISATION

L'algorithme du simplexe [B25] est une méthode heuristique qui permet de trouver les minima d'une fonction de plusieurs variables et qui ne nécessite que des évaluations de la fonctionnelle, sans avoir besoin de calculer ses dérivées. Cette méthode a un fondement géométrique, elle consiste à faire "cheminer" une figure géométrique appelée simplexe, dans l'espace des variables de la fonctionnelle à minimiser. Si la dimension de l'espace de conception est n , le simplexe est une figure à $n+1$ sommets. Par la suite, nous considérerons le cas où $n=2$ pour illustrer la méthode. Le simplexe sera alors un triangle.

A chaque itération de l'algorithme, on évalue la fonction coût $\psi(r_1, r_2)$ (r_1 et r_2 étant les deux variables de conception) aux 3 sommets du simplexe. Puis en fonction des deux points les plus hauts (point d'indice IHI : highest et point d'indice INHI : next_highest) et du point le plus bas (d'indice ILO : lowest), on modifie le simplexe pour qu'il s'achemine vers un minimum de la nappe $\{\psi(r_1, r_2), r_1, r_2\}$ (voir figure 2.16).

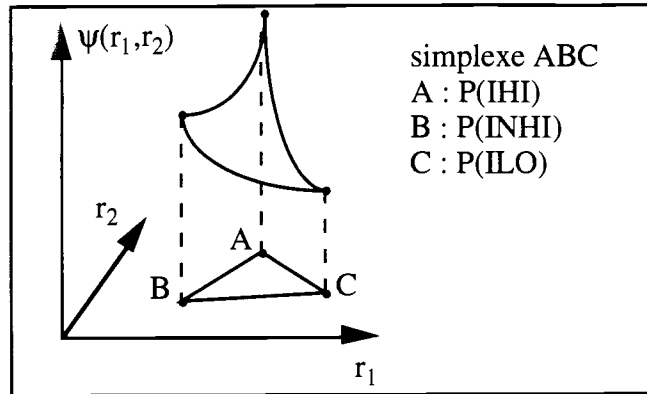


figure 2.16 : description du simplexe

On opère différents types de transformations du simplexe. Elles consistent toujours à remplacer au moins le point le plus haut (P(IHI)) par un nouveau point, situé plus bas.

II.5.4.1 REFLEXION

La réflexion consiste à remplacer P(IHI) par son symétrique par rapport au barycentre des sommets (à l'exception du point le plus haut P(IHI)). Dans le cas où $n=2$, le barycentre est simplement le milieu de P(ILO) P(INHI).

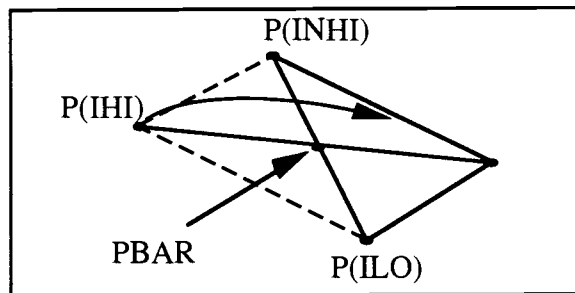


figure 2.17 : principe de la réflexion

Cette transformation a pour but de laisser le simplexe descendre les pentes de la nappe, comme on peut le voir sur la figure 2.18.

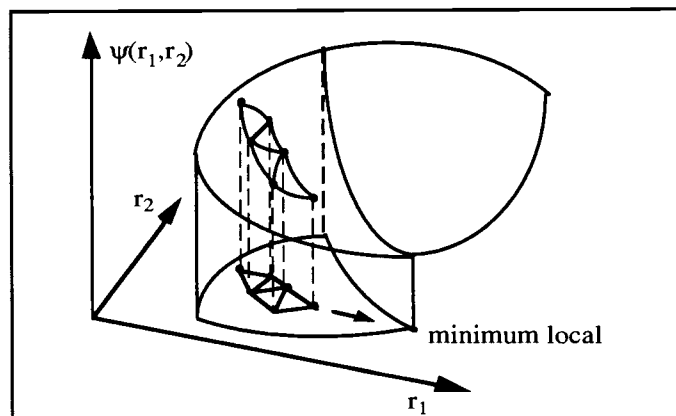


figure 2.18 : cheminement du simplexe vers le minimum local

II.5.4.2 REFLEXION ET EXPANSION

Tout comme précédemment, cette transformation a pour but de laisser le simplexe glisser le long de la pente, c'est-à-dire à l'opposé du point le plus haut. L'expansion permet en outre d'allonger le pas des réflexions et donc de descendre plus vite la pente.

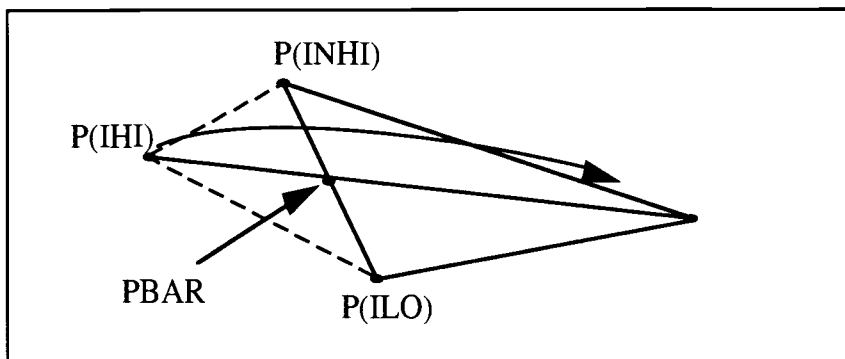


figure 2.19 : réflexion et expansion du simplexe

II.5.4.3 CONTRACTION

Lorsque la réflexion de $P(IHI)$ fait remonter trop haut (au dessus du niveau de $P(INHI)$), on opère alors une contraction. Ce cas se produit typiquement lorsqu'un minimum local se retrouve à l'intérieur du simplexe. La contraction permet alors aux sommets du simplexe de converger vers ce minimum local.

Il existe deux sortes de contractions, la contraction suivant une direction qui tend à rapprocher $P(IHI)$ de $P(INHI)$ et $P(ILO)$ et la contraction suivant deux directions qui modifie à la fois $P(IHI)$ et $P(INHI)$ de manière à obtenir un simplexe homothétique de taille inférieure.

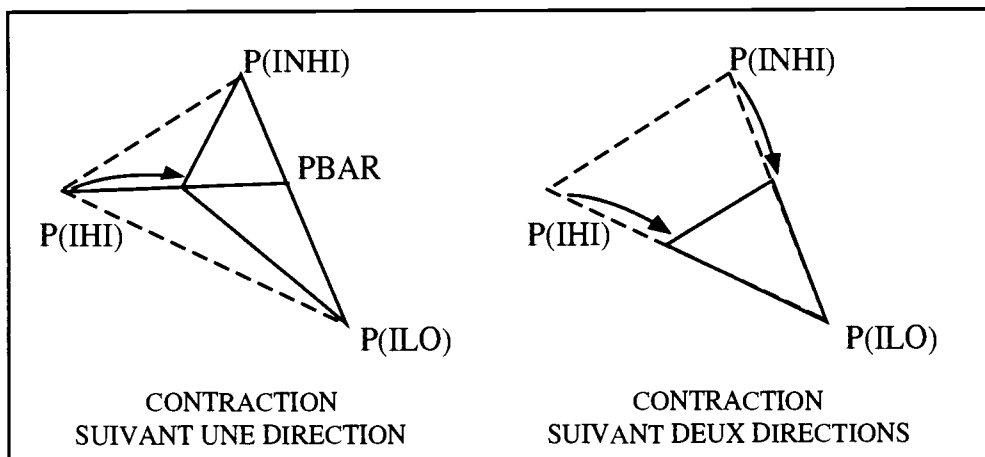
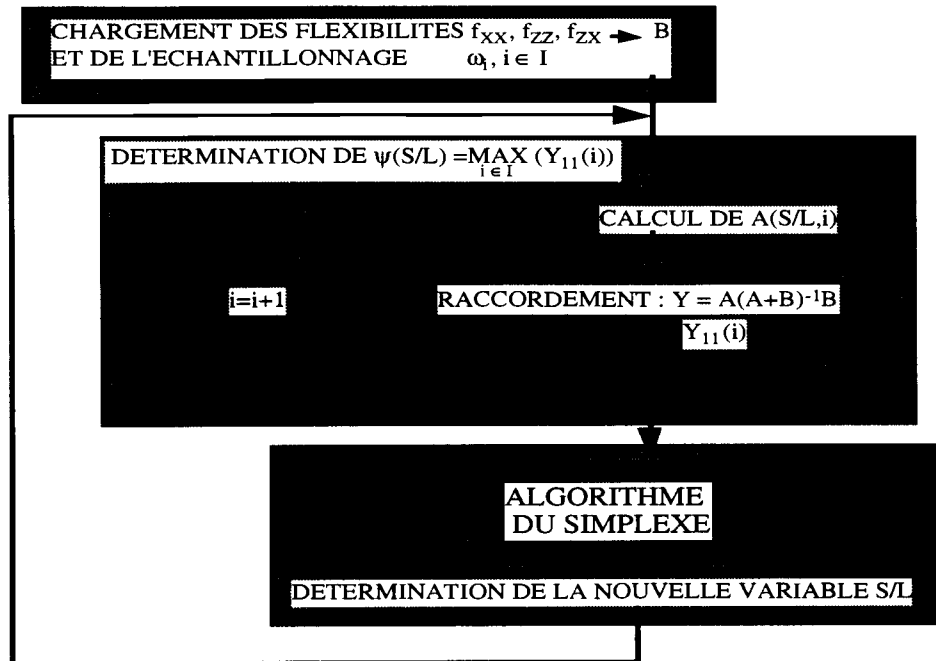


figure 2.20 : principe des deux types de contraction

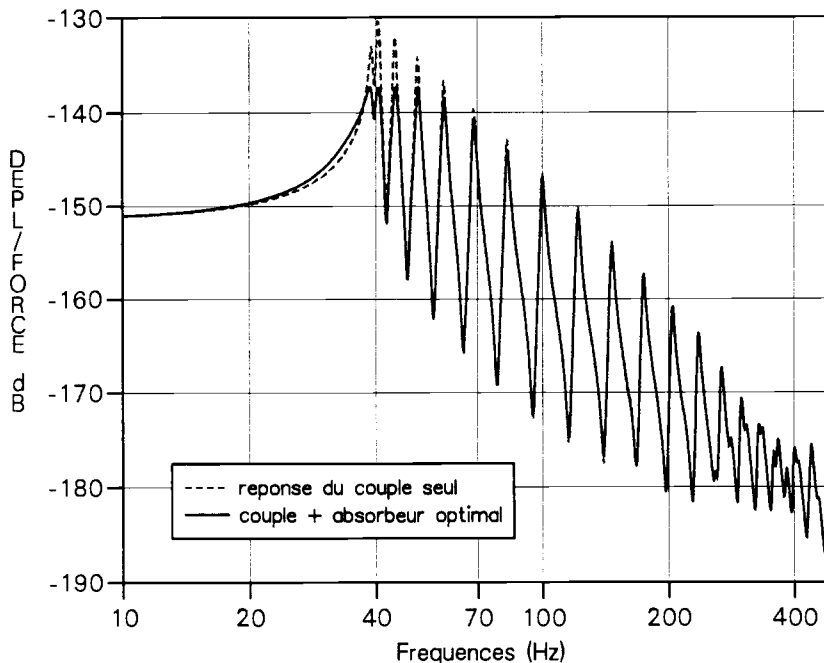
II.5.4.4 ORGANIGRAMME COMPLET



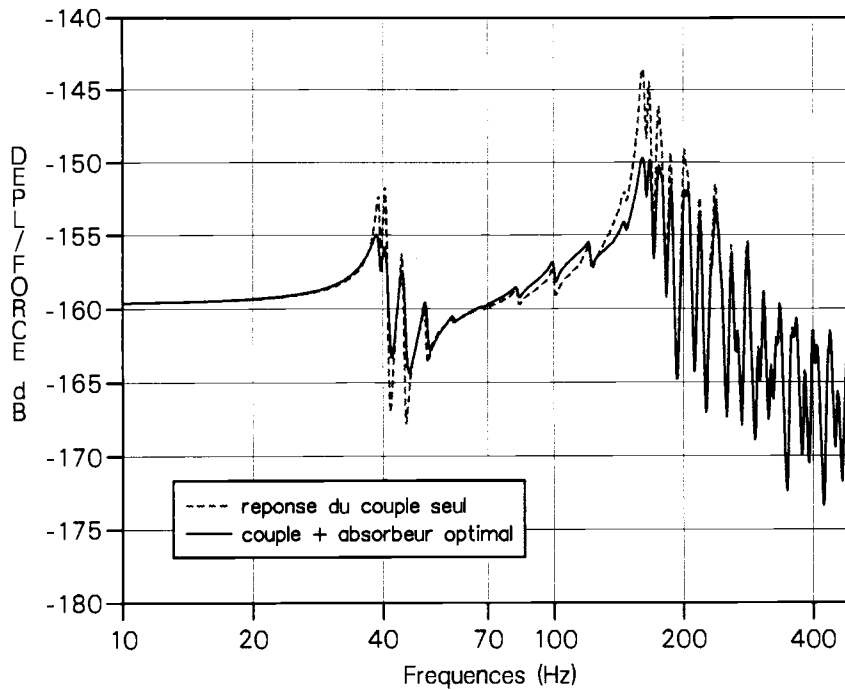
II.5.5 APPLICATIONS

Nous avons testé l'algorithme d'optimisation en utilisant les caractéristiques des matériaux viscoélastiques présentées au paragraphe II.5.1. Nous présentons les courbes de flexibilités dynamiques du couple avant et après raccordement avec l'absorbeur optimisé, les plots étant constitués du matériau vib04. Quant aux autres matériaux, nous rassemblons dans un tableau les gains obtenus sur le transfert f_{zz} après optimisation.

FLEXIBILITE PONCTUELLE (direction Z)



FLEXIBILITE PONCTUELLE (direction X)



On peut remarquer que la résonance maximale du transfert f_{XX} (aux alentours de 165 Hz) a également été atténuée. Le gain vaut 7.4 dB.

Matériau viscoélastique employé	vib02	vib04	vib08	vib12	vib13
S/L optimal (m)	3.96 E-02	4.44 E-02	2.23 E-02	6.91 E-02	3.9 E-02
gain en dB sur le transfert f_{ZZ}	6.55	6.94	5.43	5.05	3.6

Matériau viscoélastique employé	x2p	x2p50	x2p60	i85
S/L optimal (m)	0.487	0.264	0.107	2.38 E-02
gain en dB sur le transfert f_{ZZ}	4.83	5.91	6.54	7.18

II.5.6 VALIDATION DU MODELE DE L'ABSORBEUR

Nous désirons ici vérifier la validité du modèle de description des plots viscoélastiques. La principale approximation a consisté à exprimer leur matrice de flexibilité dynamique en homogénéisant leur loi de comportement (voir formule (II.40)), et par conséquent à négliger les déformations locales de leur profil.

Pour confronter notre modèle à une description plus "fine" des plots, nous avons maillé ces derniers en éléments finis.

Pour le matériau viscoélastique vib04, nous avons trouvé la valeur de $4.44 \cdot 10^{-2}$ m pour le rapport S/L optimal. Si l'on considère des plots de longueur 2 cm et de largeur 1.25 cm, leur hauteur vaut donc 5.68 mm.

Chaque plot est maillé avec 80 éléments 2D rectangulaires de taille égale (10 sur la longueur et 8 sur la hauteur). La plaque d'acier est modélisée en éléments poutre. Les liaisons plaque-plots font intervenir des offsets pour tenir compte de l'épaisseur de la plaque (excentrement de son axe neutre par rapport aux ddls de liaison).

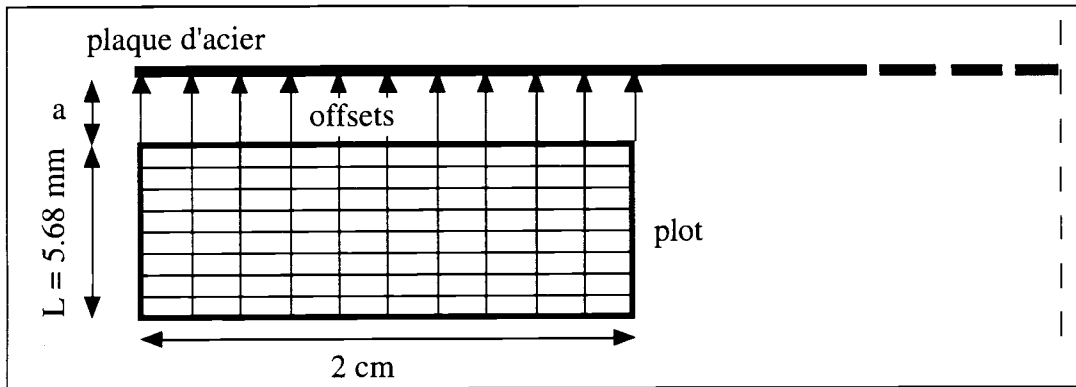
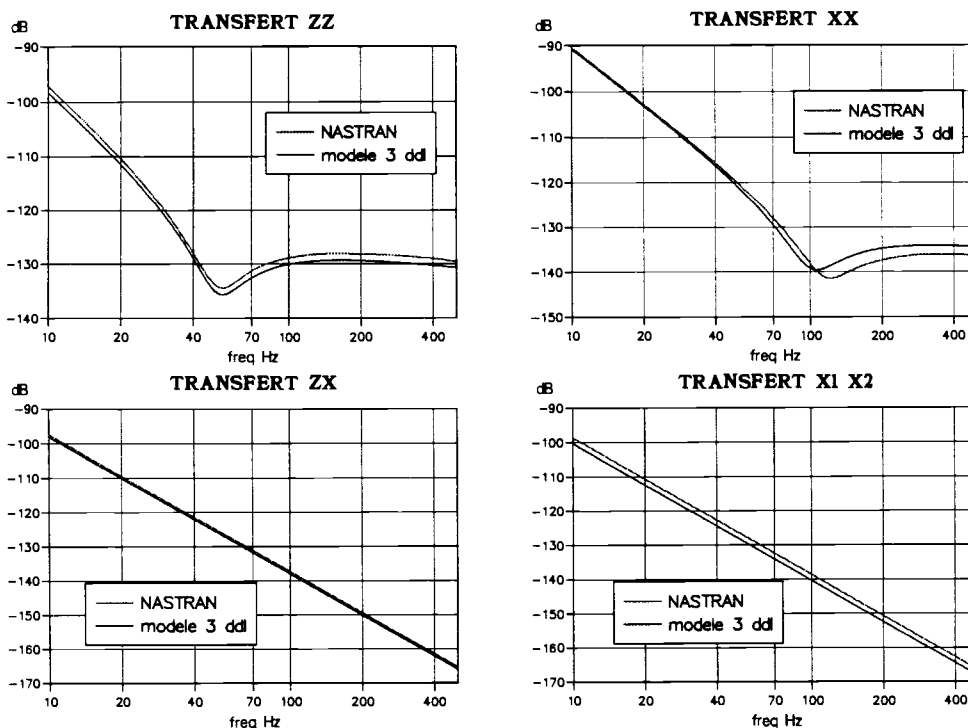


figure 2.21 : discrétisation des plots viscoélastiques

Les calculs ont été effectués avec le code de calcul NASTRAN. On peut ainsi comparer les différents transferts de la matrice de flexibilité pour le modèle à trois ddl et pour le modèle NASTRAN :

TRANSFERTS EN FLEXIBILITE DE L'ABSORBEUR DYNAMIQUE COMPARAISON MODELE TROIS DDL / MODELE NASTRAN



On remarque que les deux modèles donnent des flexibilités dynamiques très semblables. On retrouve les mêmes antirésonances aux mêmes fréquences et l'écart entre les deux calculs de réponses est de l'ordre du dB. Après raccordement avec le couple on trouve un gain identique pour le transfert f_{ZZ} entre le modèle à trois ddl et le modèle NASTRAN. Pour le transfert f_{XX} , le gain obtenu avec le modèle NASTRAN est supérieur de 1.2 dB à celui obtenu avec le modèle à trois ddl.

En conclusion, on a vérifié la fiabilité de la modélisation de l'absorbeur dynamique à l'aide de trois ddl, c'est-à-dire une bonne cohérence entre le comportement vibratoire du modèle et le comportement réel de l'absorbeur.

II.5.7 MODELE DOUBLE-PLAQUE

Nous avons signalé dans le paragraphe II.5.1 que le mouvement de traction-compression de l'absorbeur n'était jamais sollicité du fait de l'antisymétrie des modes de déversement de couple. On pourrait espérer augmenter l'efficacité de l'absorbeur en le disymétrisant afin de faire participer les modes de traction-compression à la réponse globale. Pour ce faire, deux possibilités sont envisageables : la première consiste à choisir pour chaque plot un matériau viscoélastique différent et une variable de dimensionnement S/L indépendante. Les applications numériques n'apportent cependant aucune amélioration par rapport aux résultats exposés au paragraphe II.5.5. La seconde possibilité consiste à incliner l'absorbeur dynamique par rapport à la semelle du couple, mais on montre alors que le rapport des fréquences du mode de traction-compression et du mode de cisaillement est constant [B26]. Il est donc impossible de faire coïncider ces deux modes pour conjuguer leur effet d'atténuation.

On peut également accroître l'efficacité de l'absorbeur en augmentant le nombre de modes, donc en augmentant le nombre de ddl. Nous étudions ici le cas d'un absorbeur constitué de deux plaques d'acier montées sur des plots viscoélastiques. Il résulte en fait d'un assemblage en série de deux absorbeurs du même type que celui décrit précédemment.

La masse de l'absorbeur étant toujours fixée à 30 kg, l'épaisseur de chacune des deux plaques est telle que leur somme vaut $(2 a_1 + 2 a_2) = 2a = 13.23$ cm, les autres dimensions restant inchangées.

II.5.7.1 MATRICE DE FLEXIBILITE DE L'ABSORBEUR DOUBLE-PLAQUE

Considérons l'absorbeur dynamique étudié auparavant (plaque sur plots). Si l'on appelle U , V_1 , V_2 les ddl d'excitation des plots viscoélastiques et U' , V'_1 , V'_2 les ddl d'excitation de la plaque (voir figure 2.22).

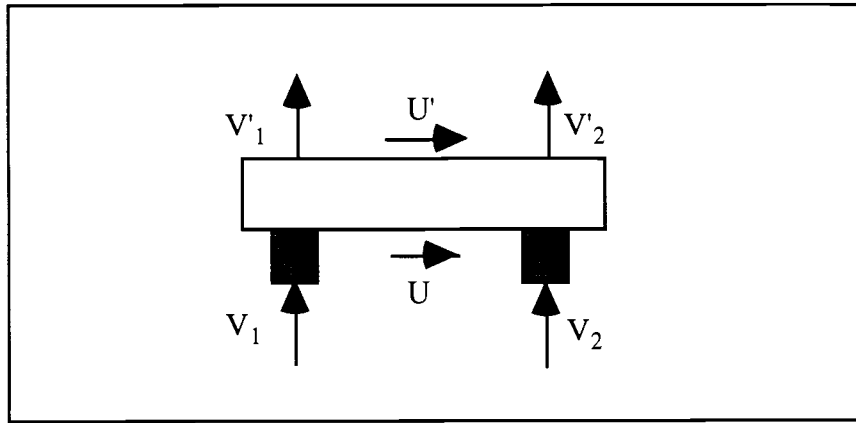


figure 2.22 : définition des ddl de la plaque

De même qu'au paragraphe II.5.1, on va exprimer les transferts entre les ddl U' , V'_1 et V'_2 et les ddl w , v et θ par des relations de corps rigides. En faisant l'hypothèse des petits déplacements, on a :

$$\begin{bmatrix} U' \\ V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} w \\ v \\ \theta \end{bmatrix}, \text{ avec } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -d \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix} \quad (\text{II.56})$$

La matrice de Flexibilité de l'absorbeur dynamique s'écrit alors (en conservant la même signification que précédemment pour les notations A, H et P) :

$$\begin{bmatrix} U \\ V_1 \\ V_2 \\ U' \\ V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & P H Q^t \\ Q H P^t & Q H Q^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_U \\ F_{V_1} \\ F_{V_2} \\ F_{U'} \\ F_{V'_1} \\ F_{V'_2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.57})$$

On raccorde les deux sous-systèmes plaque sur plots en égalant les déplacements U^I , V_1^I , V_2^I et U^{II} , V_1^{II} , V_2^{II} et en considérant que les forces F_{U^I} , $F_{V_1^I}$, $F_{V_2^I}$ et $F_{U^{II}}$, $F_{V_1^{II}}$, $F_{V_2^{II}}$ sont opposées (les indices supérieurs I et II servant à distinguer les deux sous-systèmes, voir figure 2.23).

On obtient ainsi la matrice de flexibilité dynamique C de l'ensemble formé des deux sous-systèmes :

$$\begin{bmatrix} U^I \\ V_1^I \\ V_2^I \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} F_{U^I} \\ F_{V_1^I} \\ F_{V_2^I} \end{bmatrix}, \text{ avec } C = (A^I - P H Q^t (A^{II} + Q H Q^t)^{-1} Q H P^t) \quad (\text{II.58})$$

La matrice C étant déterminée à l'aide de l'équation (II.58), on peut alors calculer la matrice de transfert de l'ensemble couple + absorbeur en appliquant la formule de raccordement (II.54) (dans laquelle on aura substitué C à A).

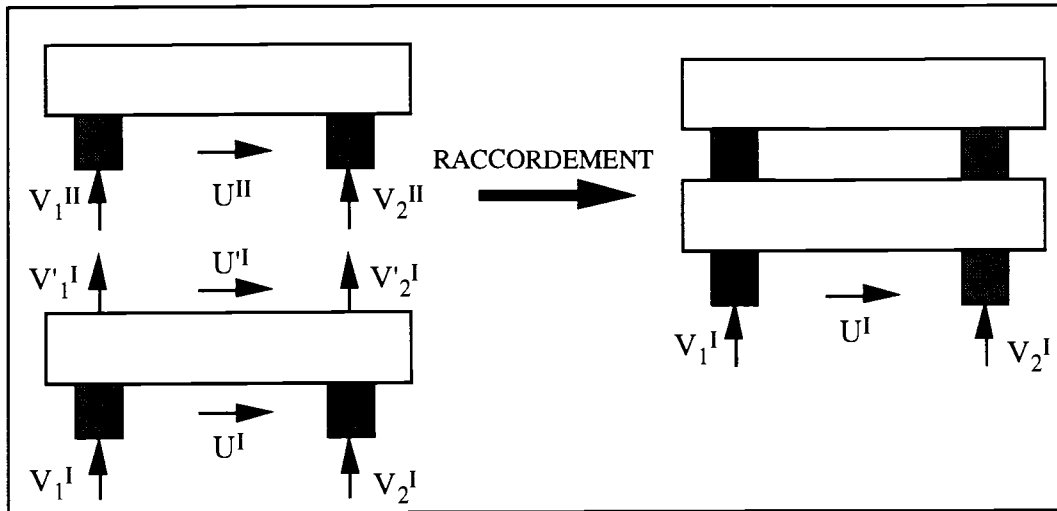


figure 2.23 : raccordement des deux absorbeurs dynamiques

II.5.7.2 APPLICATIONS

La démarche d'optimisation est identique à celle précédemment exposée, à la seule différence que les variables de conception sont désormais au nombre de trois, deux variables de dimensionnement S/L , une pour chaque sous-système plaque - plots, la troisième variable de conception étant le rapport des épaisseurs des deux plaques d'acier (épaisseur de la plaque inférieure sur épaisseur de la plaque supérieure).

Dans un premier temps, la fonction coût sera définie comme le maximum de la flexibilité ponctuelle selon la direction (Z), puis nous essaierons de minimiser à la fois le ponctuel selon la direction (Z) et le ponctuel selon la direction (X). Nous définirons alors la fonction coût comme la somme du maximum de la flexibilité ponctuelle suivant (Z) et du maximum de la flexibilité ponctuelle suivant (X).

Nous rassemblons les gains obtenus après optimisation dans les tableaux ci-dessous. La première variable de dimensionnement correspond aux plots inférieurs de l'absorbeur et la deuxième variable correspond aux plots supérieurs.

Chapitre II

OPTIMISATION SUIVANT (Z) :

matériau viscoélastique 1	vib02	vib04	i85	vib02
matériau viscoélastique 2	vib02	vib04	i85	vib04
variable S/L n° 1 (m)	5.52 E-02	6.41 E-02	3.40 E-02	5.55 E-02
variable S/L n° 2 (m)	0.427	0.438	1.21	0.464
rapport des épaisseurs	0.637	0.620	0.591	0.596
gain en dB sur le transfert f_{ZZ}	7.53	7.76	7.93	7.54
gain en dB sur le transfert f_{XX}	7.3	7.67	8.49	7.34

matériau viscoélastique 1	vib04	vib02
matériau viscoélastique 2	i85	i85
variable S/L n° 1 (m)	6.31 E-02	5.43 E-02
variable S/L n° 2 (m)	0.471	0.715
rapport des épaisseurs	0.493	0.543
gain en dB sur le transfert f_{ZZ}	7.73	7.54
gain en dB sur le transfert f_{XX}	7.88	7.45

OPTIMISATION SUIVANT (Z) ET (X) :

matériau viscoélastique 1	vib02	vib04	i85	vib02
matériau viscoélastique 2	vib02	vib04	i85	vib04
variable S/L n° 1 (m)	5.52 E-02	6.41 E-02	3.36 E-02	5.54 E-02
variable S/L n° 2 (m)	0.427	0.466	0.51	0.512
rapport des épaisseurs	0.637	0.607	0.592	0.557
gain en dB sur le transfert f_{ZZ}	7.53	7.75	7.93	7.54
gain en dB sur le transfert f_{XX}	7.3	7.70	8.80	7.37

matériau viscoélastique 1	vib04	vib02
matériau viscoélastique 2	i85	i85
variable S/L n° 1 (m)	6.31 E-02	5.46 E-02
variable S/L n° 2 (m)	0.471	0.611
rapport des épaisseurs	0.493	0.558
gain en dB sur le transfert f_{ZZ}	7.73	7.54
gain en dB sur le transfert f_{XX}	7.88	7.46

Chapitre II

Les résultats précédents montrent qu'en pratique, il est inutile de tenir compte du ponctuel selon la direction (X) de manière explicite, c'est-à-dire de l'introduire dans la fonction coût. En effet, les deux procédures d'optimisation conduisent à des résultats très semblables, voire identiques pour certains choix de matériaux absorbants.

Quant au gain sur le ponctuel dans la direction (Z), on constate qu'il est guère supérieur à celui trouvé avec un absorbeur constitué d'une seule plaque (1 à 1.5 dB en moyenne). Précisons toutefois que la masse de l'absorbeur (30 kg) est extrêmement petite en comparaison avec celle du couple (plusieurs tonnes). C'est pourquoi la différence entre les deux modèles est relativement faible.

II.5.8 CONCLUSION

Nous avons montré, dans cette étude, la possibilité de modéliser simplement le comportement global d'un absorbeur dynamique réel, sans avoir recours à un calcul éléments finis. Cela se traduit par un coût CPU très faible pour le calcul des flexibilités, qui justifie l'utilisation d'un algorithme d'optimisation rudimentaire mais très robuste (algorithme du simplexe).

L'intérêt de la méthode proposée se résume en trois points importants :

- Rapidité des calculs

La vitesse d'exécution de la méthode d'optimisation est indépendante de la complexité de la structure initiale, cette dernière n'étant caractérisée que par la matrice de transfert au point d'excitation (matrice B) déterminée une fois pour toutes.

- Simplicité d'utilisation

L'utilisateur peut utiliser l'application en "boîte noire".

Aucun paramètre de réglage.

- Application directe

Contrairement à la méthode précédente (paragraphe II.4), les variables d'optimisation sont des variables de dimensionnement directement exploitables pour la réalisation d'un absorbeur dynamique : en sortie, l'utilisateur possède les caractéristiques de l'absorbeur optimal pour un choix de matériau absorbant.

CHAPITRE III

CONCEPTION OPTIMALE DES STRUCTURES

III.1 INTRODUCTION

La recherche sur l'optimisation des structures fait l'objet de nombreuses publications scientifiques. Un grand nombre d'études ont été réalisées sur le problème d'optimisation avec des contraintes statiques (flèches statiques, contraintes limites admissibles, etc ...). En ce qui concerne les critères dynamiques, on peut constater que les recherches sont, en général, ciblées sur des critères liés aux fréquences propres ou aux modes propres. Très peu de publications ont trait à l'optimisation avec des critères de réponses dynamiques et encore moins au cas plus spécifique de critères large-bande. Signalons toutefois les travaux récents de T. Dahlberg [C1] et T.J.S Abrahamsson [C2]. Les difficultés majeures de ce type de problème résident d'une part, dans la description et la modélisation des structures dans le cas de géométries complexes et d'autre part dans l'introduction de contraintes dynamiques qui sont sources d'instabilité lors de l'utilisation d'algorithmes classiques d'optimisation.

L'idée de base de la méthode exposée dans cette étude est de ne retenir d'un transfert dynamique que l'information nécessaire à l'expression du critère large-bande, en l'occurrence l'amplitude des pics résonants prépondérants. Pour ce faire, nous exploiterons la notion de paramètre modal effectif, définie par J.F Imbert et A. Girard. Dans le chapitre I, nous avons montré par la technique de la superposition modale, comment ces paramètres permettent, non seulement de reconstituer les transferts en flexibilité et transmissibilité dynamiques d'une structure, mais aussi d'estimer les effets de troncature.

La mise en oeuvre d'une méthode d'optimisation avec de tels critères rend délicat l'emploi des algorithmes classiques d'optimisation non linéaire avec contraintes, notamment du point de vue de la vitesse de convergence. C'est pourquoi on fait appel de plus en plus fréquemment à des approches par critère d'optimalité (voir paragraphe I.4.2) et plus particulièrement à des algorithmes fondés sur le principe de stationarité de Kühn-Tucker, principe qui sera explicité par la suite. M.P. Kamat, V.B. Venkayya, N.S. Khot [C3] et I.W. Suweca [C4] ont montré l'efficacité de telles méthodes pour des problèmes d'optimisation avec des contraintes sur des fréquences propres. Dans cette

étude, nous nous proposons d'étendre cette démarche à un problème d'optimisation avec des critères de flexibilités et transmissibilités effectives.

L'algorithme d'optimisation proposé dans cette étude sera appliqué à un cas test (treillis de poutres 2D) pour deux configurations d'excitations.

III.2 DESCRIPTION DU CAS TEST

Le cas test est un portique 2D (2 m de longueur sur 1 m de hauteur) constitué de poutres de sections circulaires simulant le carlingage de la verticale électrique (voir paragraphe I.3.1), auquel on a ajouté six raidisseurs diagonaux et un raidisseur vertical (voir figure 3.1). Le tout est encastré sur une poutre horizontale représentant la coque, elle-même encastrée en un point par l'intermédiaire de deux éléments rigides de masse nulle, pour préserver à l'ensemble de la structure son caractère isostatique.

On étudiera les transferts suivants :

a - Force d'excitation verticale au point P1

- Flexibilité ponctuelle au point P1
- Transmissibilité en force à l'encastrement suivant la direction verticale

b - Force d'excitation horizontale au point P2

- Flexibilité ponctuelle au point P2
- Transmissibilité en force à l'encastrement suivant la direction horizontale

c - Force d'excitation horizontale au point P2

- Flexibilité ponctuelle au point P2
- Transmissibilité en moment à l'encastrement

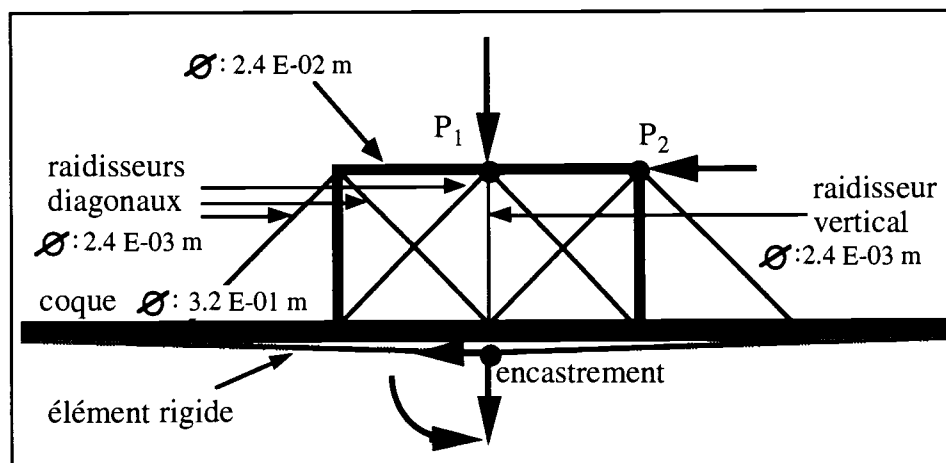


figure 3.1 : définition du cas test

La poutre horizontale de longueur égale à 6 m, est supposée sans masse, pour que les modes de la coque n'interfèrent pas avec ceux de la structure encastree.

III.3 POSITION DU PROBLEME

Le problème d'optimisation que nous nous proposons de traiter ici, a pour objectif de minimiser le poids total de la structure, en jouant sur la répartition des masses, tout en assignant cette même structure à respecter les critères de la discrétion acoustique. Nous avons vu dans le paragraphe I.3.2.6 que l'on pouvait exprimer ces critères à l'aide des paramètres effectifs. Nous définirons donc les contraintes de notre problème comme des fonctions des flexibilités et des transmissibilités effectives.

La structure sera modélisée par éléments finis (6 éléments par poutre, 189 ddl au total). Les variables de conception seront des variables physiques des éléments, les rayons des sections circulaires des poutres élémentaires. On considèrera que la section de chaque poutre composant le treillis est uniforme sur toute sa longueur. D'autre part, pour conserver la symétrie de la structure, deux poutres symétriques auront même section. Nous définirons donc 6 variables de conception, deux pour les poutres constituant le portique initial (r_1 et r_2), trois pour les raidisseurs diagonaux (r_3 , r_4 , r_5) et une pour le raidisseur vertical (r_6).

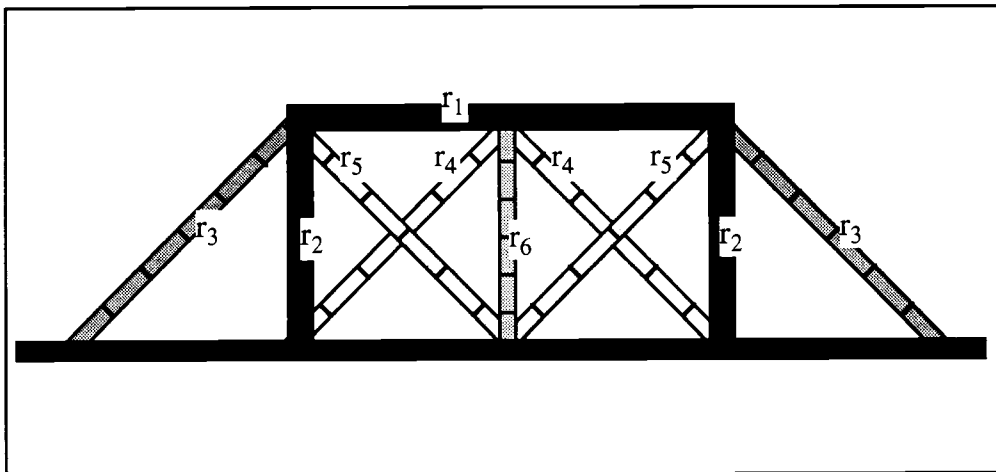


figure 3.2 : définition des variables de conception

L'algorithme d'optimisation sera construit en déduisant des conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker liant les contraintes à la fonction coût, des relations de récurrence pour les variables de conception. Auparavant, nous établissons ces conditions dans le cas général, c'est-à-dire pour une fonction objectif et des contraintes quelconques, puis nous les illustrons afin d'en montrer la signification géométrique.

III.4 CONDITION DE KUHN-TUCKER

Revenons au problème général d'optimisation tel qu'il a été défini dans le chapitre I :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } f(\mathbf{R}), \mathbf{R} = [r_1, r_2, \dots, r_m] \\ \text{sous les contraintes :} \\ g_i(\mathbf{R}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ h_j(\mathbf{R}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, q \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

Dans un premier temps, nous n'allons considérer que des contraintes du type égalité, dans le but de définir la condition de Kuhn-Tucker caractérisant qu'un point \mathbf{R}_1 est la solution du problème. Nous montrerons, lors de la résolution numérique, comment passer des contraintes égalités aux contraintes inégalité.

Soient donc la fonction coût f et les contraintes g_i que nous supposons être continues et continûment dérivables par rapport aux variables de conception.

On appellera point régulier tout point \mathbf{R} de l'espace de conception tel que les contraintes y soient indépendantes. Cela implique que la matrice $G_{\mathbf{R}}$ des termes $\partial g_i / \partial r_j$ soit de rang p . On remarque que la matrice $G_{\mathbf{R}}$ est de dimension (p, m) .

Développons f jusqu'au premier ordre :

$$f(\mathbf{R} + \partial\mathbf{R}) = f(\mathbf{R}) + \nabla f(\mathbf{R})^t \partial\mathbf{R} + o(|\partial\mathbf{R}|) \quad (\text{III.2})$$

Pour qu'un point régulier soit un minimum relatif, on doit considérer toutes les variations de \mathbf{R} compatibles avec les contraintes. En développant ces dernières au premier ordre, on obtient :

$$g_i(\mathbf{R} + \partial\mathbf{R}) = g_i(\mathbf{R}) + \nabla g_i(\mathbf{R})^t \partial\mathbf{R} + o(|\partial\mathbf{R}|) \quad (\text{III.3})$$

Soit pour les p contraintes, en introduisant la matrice $G_{\mathbf{R}}$:

$$g(\mathbf{R} + \partial\mathbf{R}) = g(\mathbf{R}) + G_{\mathbf{R}} \partial\mathbf{R} \quad (\text{III.4})$$

Comme \mathbf{R} est supposé être régulier, $\nabla g_i(\mathbf{R})$ n'est pas nul, ce qui justifie de limiter ce développement au premier ordre. Donc, si \mathbf{R} appartient à D , on a :

$$(\mathbf{R} + \partial\mathbf{R}) \in D \quad \text{si} \quad \nabla g_i^t(\mathbf{R}) \partial\mathbf{R} = 0 \quad (\text{III.5})$$

il vient alors pour les p contraintes :

$$G_R \partial R = 0 \quad (III.6)$$

Ceci définit pour ∂R un espace vectoriel $E \subset \mathbb{R}^m$, à $(p-m)$ dimensions car G_R est supposé être de rang p .

Si R_1 est un minimum relatif, cela implique :

$$f(R_1) \leq f(R_1 + \partial R) \approx f(R_1) + \nabla f'(R_1) \partial R \quad \forall \partial R \in E \quad (III.7)$$

Or si $\partial R \in E$, $-\partial R \in E$. L'inégalité (III.7) ne peut donc être satisfaite que sous forme d'égalité, et donc :

$$\nabla f'(R_1) \partial R = 0 \quad \forall \partial R \in E \quad (III.8)$$

Géométriquement, on interprète ce résultat en disant que le gradient $\nabla f(R_1)$ est normal à E . Il appartient donc à son complémentaire qui est de dimension p et qui est engendré par les p vecteurs indépendants $\nabla g_i(R_1)$. $\nabla f(R_1)$ est donc une combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\nabla f(R_1) + \sum_p \lambda_i \nabla g_i(R_1) = 0 \quad (III.9)$$

La figure 3.3 illustre dans le cas d'une contrainte unique la colinéarité entre le gradient de la fonction coût et le gradient de la contrainte au minimum relatif.

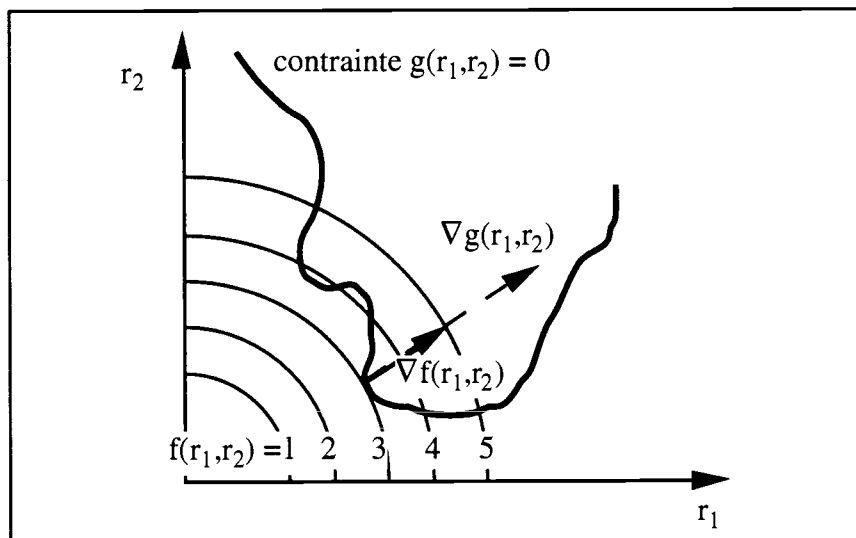


figure 3.3 : interprétation géométrique de la condition d'optimalité

On pose :

$$\Psi(\mathbf{R}, \lambda) = f(\mathbf{R}) + \sum_p \lambda_i g_i(\mathbf{R}) \quad (\text{III.10})$$

Soit sous forme matricielle :

$$\Psi(\mathbf{R}, \lambda) = f(\mathbf{R}) + \lambda^t \mathbf{g}(\mathbf{R}) \quad (\text{III.11})$$

On peut alors vérifier que :

$\nabla_{\lambda} \Psi(\mathbf{R}, \lambda) = 0$	qui correspond à $\mathbf{g}(\mathbf{R}) = 0$	(III.12)
$\nabla_{\mathbf{R}} \Psi(\mathbf{R}, \lambda) = 0$	qui correspond à la condition (III.9)	

Ceci permet donc d'énoncer la condition nécessaire de stationarité :

Si $f(\mathbf{R})$ et les contraintes $g_i(\mathbf{R})$ satisfont aux conditions de continuité, pour qu'un point régulier soit un extremum local, il est nécessaire qu'il existe des paramètres λ_i tels que la fonction $\Psi(\mathbf{R}, \lambda)$ soit stationnaire par rapport à \mathbf{R} et λ .

Cette condition porte le nom de théorème des extrema liés ou condition de Kuhn-Tucker. Les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange. L'intérêt d'introduire ces paramètres est de transformer le problème d'optimisation avec des contraintes en un problème d'optimisation sans contraintes.

Si $f(\mathbf{R})$ et les contraintes $g_i(\mathbf{R})$ sont supposées être deux fois continûment dérivables par rapport aux variables de conception, on peut alors établir une condition nécessaire pour que \mathbf{R} soit un minimum local. La démonstration figure dans la référence [C5], p 18. Cependant, nous exploitons uniquement la condition du premier ordre pour élaborer l'algorithme d'optimisation.

III.5 ALGORITHME D'OPTIMISATION

III.5.1 OBJECTIFS ET FORMULATION DU PROBLEME

Nous avons défini la fonction objectif comme étant la masse totale de la structure. Dans le cas d'une structure 2D résultant d'un assemblage de poutres à section circulaire, sa masse peut s'exprimer simplement en fonction des variables de conception :

$$f(r_1, r_2, \dots, r_m) = \sum_{i=1, m} \rho n_i L_i \pi r_i^2 = \sum_{i=1, m} V_i r_i^2 \quad \text{avec } V_i = \rho n_i \pi L_i \quad (\text{III.13})$$

Chapitre III

r_i désigne la $i^{\text{ème}}$ variable de conception (rayon des sections des n_i éléments poutres correspondants), L_i désigne la longueur de chacun de ces éléments et ρ la masse volumique. Les variables V_i ont été introduites par souci de simplification des notations.

La condition d'optimalité de Kühn-Tucker impose aux contraintes d'être différentiables par rapport aux variables de conception. Nous avons également signalé dans le paragraphe I.3.2.6 que les critères caractérisant une structure du point de vue de la discrétion acoustique pouvaient s'écrire :

$$\begin{cases} (r_1, r_2, \dots, r_m) \rightarrow \text{MAX}_k \left| \tilde{T}_{ij,k}(r_1, r_2, \dots, r_m) \right| \\ (r_1, r_2, \dots, r_m) \rightarrow \text{MAX}_k \left| \tilde{G}_{ii,k}(r_1, r_2, \dots, r_m) \right| \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Or, la fonction $\text{MAX}_k |X_k|$ n'étant pas différentiable, ces critères ne le sont également pas. C'est pourquoi, tout comme dans le paragraphe II.3.3.2, nous introduisons l'estimateur différentiable de la fonction $\text{MAX}_k |X_k|$, à savoir $\sqrt[p]{|X_k|^p}$ ($p = 4$). Les critères de la discrétion acoustique s'écriront alors :

$$\begin{aligned} (r_1, \dots, r_m) &\rightarrow \log \left(\sqrt[4]{\sum_k (\tilde{G}_{ii,k}(r_1, \dots, r_m))^4} \right) = \frac{1}{4} \log \left(\sum_k (\tilde{G}_{ii,k}(r_1, \dots, r_m))^4 \right) \\ (r_1, \dots, r_m) &\rightarrow \log \left(\sqrt[4]{\sum_k (\tilde{T}_{ij,k}(r_1, \dots, r_m))^4} \right) = \frac{1}{4} \log \left(\sum_k (\tilde{T}_{ij,k}(r_1, \dots, r_m))^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

L'intérêt de la fonction logarithmique est, d'une part, de nous affranchir du calcul de la racine quatrième (induisant une certaine lourdeur dans l'expression des dérivées des deux fonctions) et d'autre part, d'effectuer une mise à l'échelle des valeurs, de telle manière que ces estimateurs aient un ordre de grandeur proche de l'unité. Ainsi les sensibilités des contraintes par rapport aux variables de conception seront moins aigües, ce qui, a priori, est un avantage pour ce qui concerne les problèmes de stabilité numérique. Nous définissons donc les contraintes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g_f(r_1, r_2, \dots, r_m) &= \frac{1}{4} \log \left(\sum_{k=1, n} (\tilde{G}_{ii,k}(r_1, r_2, \dots, r_m))^4 \right) - \hat{g}_f \\ g_T(r_1, r_2, \dots, r_m) &= \frac{1}{4} \log \left(\sum_{k=1, n} (\tilde{T}_{ij,k}(r_1, r_2, \dots, r_m))^4 \right) - \hat{g}_T \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Les termes \hat{g}_f et \hat{g}_T désignent les valeurs que l'on souhaite assigner aux deux estimateurs. Lorsqu'une contrainte est atteinte, c'est-à-dire lorsque $g_f = 0$ dans le cas de la flexibilité, l'estimateur du critère en flexibilité vaut alors \hat{g}_f .

Nous avons vu précédemment que le problème d'optimisation avec contraintes pouvait se réduire à un problème sans contraintes en introduisant la fonction Ψ qui s'exprime alors de la manière suivante :

$$\Psi(r_1, \dots, r_m, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1,m} V_i r_i^2 + \lambda_1 g_T(r_1, \dots, r_m) + \lambda_2 g_f(r_1, \dots, r_m) \quad (\text{III.17})$$

Les conditions de stationarité de Ψ , $\nabla_{\lambda_i} \Psi(r_1, r_2, \dots, r_m, \lambda_1, \lambda_2) = 0$ et $\nabla_{r_i} \Psi(r_1, r_2, \dots, r_m, \lambda_1, \lambda_2) = 0$ deviennent alors :

$$\begin{aligned} 2 V_i r_i + \lambda_1 \frac{\partial g_T}{\partial r_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_f}{\partial r_i} &= 0 \quad i = 1, \dots, m \\ g_T(r_1, r_2, \dots, r_m) &= \frac{1}{4} \log \left(\sum_{k=1,n} (\tilde{T}_{ij,k})^4 \right) - \hat{g}_T = 0 \\ g_f(r_1, r_2, \dots, r_m) &= \frac{1}{4} \log \left(\sum_{k=1,n} (\tilde{G}_{ii,k})^4 \right) - \hat{g}_f = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

III.5.2 ETABLISSEMENT DE LA RECURRENCE

Les variables de conception solutions du problème d'optimisation doivent satisfaire les conditions (III.18). En transformant ces conditions, nous allons établir une relation de récurrence sur les variables de conception. Cette approche a été exploitée dans les références [C3] et [C4] pour le problème d'optimisation avec des contraintes sur les fréquences propres. Le succès de cette technique repose sur la convergence de la récurrence.

III.5.2.1 RECURRENCE POUR LES VARIABLES DE CONCEPTION

Revenons à la première des deux conditions (III.18) et multiplions la par $(1-\alpha)$, α étant un scalaire réel compris entre 0 et 1. Il vient :

$$2 (1-\alpha) V_i r_i = -(1-\alpha) \left(\lambda_1 \frac{\partial g_T}{\partial r_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_f}{\partial r_i} \right) \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{III.19})$$

ou bien, sous une forme équivalente :

$$r_i = \alpha r_i - (1-\alpha) \left(\frac{\lambda_1}{2V_i} \frac{\partial g_T}{\partial r_i} + \frac{\lambda_2}{2V_i} \frac{\partial g_f}{\partial r_i} \right) \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{III.20})$$

A partir de l'équation (III.20), nous obtenons une relation de récurrence en identifiant le terme r_i à gauche de l'égalité à r_i^{v+1} qui est la valeur à la $v+1^{\text{ème}}$ itération de

la variable de conception r_i^v , et en identifiant de même le terme r_i à droite de l'égalité à r_i^v :

$$r_i^{v+1} = \alpha r_i^v - (1 - \alpha) \left(\frac{\lambda_1}{2V_i} \frac{\partial g_T}{\partial r_i^v} + \frac{\lambda_2}{2V_i} \frac{\partial g_f}{\partial r_i^v} \right) \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{III.21})$$

Le paramètre α est appelé paramètre de relaxation. Son choix détermine la stabilité et la vitesse de convergence de l'algorithme. L'obtention de cette relation de récurrence peut paraître tout à fait artificielle. Cependant si la suite des r_i^v converge, sa limite satisfera les conditions de Kuhn-Tucker.

III.5.2.2 RECURRENCE POUR LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

Afin de pouvoir utiliser l'équation de récurrence pour les variables de conception, il est nécessaire tout d'abord de calculer les multiplicateurs de Lagrange. Pour cela, calculons les variations des contraintes après un incrément de la variable r_i :

$$\begin{aligned} \Delta g_f(r_1, r_2, \dots, r_m) &= g_f(r_1 + \Delta r_1, r_2 + \Delta r_2, \dots, r_m + \Delta r_m) - g_f(r_1, r_2, \dots, r_m) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_f}{\partial r_i} \Delta r_i \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

On peut écrire la même égalité pour la contrainte g_T . L'incrément $(\Delta r_1, \Delta r_2, \dots, \Delta r_m)$ est choisi de telle sorte que :

$$\begin{aligned} g_T(r_1 + \Delta r_1, r_2 + \Delta r_2, \dots, r_m + \Delta r_m) &= 0 \\ g_f(r_1 + \Delta r_1, r_2 + \Delta r_2, \dots, r_m + \Delta r_m) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

D'autre part, il est possible d'exprimer $(\Delta r_1, \Delta r_2, \dots, \Delta r_m)$ à l'aide de la relation de récurrence sur les variables de conception :

$$\Delta r_i = r_i^{v+1} - r_i^v = (\alpha - 1) \left(r_i^v + \frac{\lambda_1}{2V_i} \frac{\partial g_T}{\partial r_i} + \frac{\lambda_2}{2V_i} \frac{\partial g_f}{\partial r_i} \right) \quad (\text{III.24})$$

En substituant l'équation (III.24) dans l'équation (III.22), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2V_i} \left(\frac{\partial g_T}{\partial r_i} \right)^2 & \sum_{i=1}^m \frac{1}{2V_i} \left(\frac{\partial g_T}{\partial r_i} \right) \left(\frac{\partial g_f}{\partial r_i} \right) \\ \sum_{i=1}^m \frac{1}{2V_i} \left(\frac{\partial g_T}{\partial r_i} \right) \left(\frac{\partial g_f}{\partial r_i} \right) & \sum_{i=1}^m \frac{1}{2V_i} \left(\frac{\partial g_f}{\partial r_i} \right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_T}{(1 - \alpha)} - \sum_{i=1}^m r_i^v \left(\frac{\partial g_T}{\partial r_i} \right) \\ \frac{g_f}{(1 - \alpha)} - \sum_{i=1}^m r_i^v \left(\frac{\partial g_f}{\partial r_i} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Chapitre III

En résolvant le système linéaire (III.25), on obtient les multiplicateurs de Lagrange et en appliquant la récurrence (III.21) pour les variables de conception, la structure est ainsi réanalysée à chaque itération. La recherche des variables de conception à chaque itération donne donc lieu à la résolution d'un système linéaire 2×2 .

Pour ce qui est des contraintes de type inégalité, la procédure est la même, à la seule différence qu'il faut tester à chaque itération le signe de chaque multiplicateur de Lagrange. S'il est négatif, on l'annule et on calcule les nouvelles variables de conception à l'aide de la récurrence (III.21).

Pour le problème qui nous intéresse, nous traiterons les deux contraintes comme des contraintes égalités. Cependant, nous introduirons des limitations sur les variables de conception. Nous leur imposerons d'être supérieure à la valeur de 10^{-2} mm. Si, lors d'une itération, une variable de conception est inférieure à cette borne, on lui assignera cette valeur limite et pour l'itération suivante on supprimera l'indice correspondant dans les sommations définissant les coefficients du système linéaire (III.25). Cette limitation est indispensable, car, a priori, rien n'empêche l'algorithme de converger vers une solution (r_1, r_2, \dots, r_m) dont certaines de ces composantes seraient négatives.

III.5.3 CRITERE D'ARRET

En théorie, l'algorithme a convergé lorsque la condition de Kühn-Tucker (III.18) est satisfaite, c'est-à-dire lorsque les deux vecteurs $(2 V_1 r_1, 2 V_2 r_2, \dots, 2 V_m r_m)$ et $\lambda_1 \nabla g_T + \lambda_2 \nabla g_f$ sont opposés.

En pratique, on testera la colinéarité de ces deux vecteurs, après chaque itération, en calculant le cosinus de l'angle qui les sépare (le cosinus étant égal au produit scalaire des deux vecteurs sur le produit de leur norme). On arrêtera le processus itératif quand le cosinus sera inférieur à $-1 + \epsilon$, avec $\epsilon \ll 1$.

III.5.4 ANALYSE DE SENSIBILITE

Pour le problème d'optimisation, le calcul des variables de conception nécessite de connaître à chaque itération les dérivées des contraintes, donc des flexibilités et transmissibilités effectives, par rapport aux variables de conception.

Dans ce paragraphe, nous avons choisi de normaliser les formes propres ϕ_k de telle sorte que leur masse modale soit égale à 1. Nous noterons γ_k les formes propres ainsi normalisées. Ce choix de normalisation s'avère être le plus judicieux pour la

simplification des calculs. De ce fait, les termes m_k ont disparu des expressions des paramètres effectifs (voir équations (I.11) et (I.14)).

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_{ij,k} = \gamma_k \left(\gamma_k^t M_{ii} \Phi \right) \\ \tilde{G}_{ii,k} = \frac{\gamma_k \gamma_k^t}{\omega_k^2} \end{array} \right.$$

↓

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{T}_{ij,k}}{\partial r_i} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial r_i} \left(\gamma_k^t M_{ii} \Phi \right) + \gamma_k \left(\gamma_k^t \frac{\partial M_{ii}}{\partial r_i} \Phi \right) + \gamma_k \left(\frac{\partial \gamma_k^t}{\partial r_i} M_{ii} \Phi \right) \\ \frac{\partial \tilde{G}_{ii,k}}{\partial r_i} = \frac{1}{\omega_k^2} \frac{\partial \gamma_k}{\partial r_i} \gamma_k^t + \frac{1}{\omega_k^2} \gamma_k \frac{\partial \gamma_k^t}{\partial r_i} - \frac{1}{\omega_k^4} \frac{\partial \omega_k^2}{\partial r_i} \gamma_k \gamma_k^t \end{array} \right. \quad (III.26)$$

L'équation (III.26) montre que le calcul de sensibilité des paramètres effectifs nécessite de connaître les dérivées des formes propres et des valeurs propres ω_k^2 par rapport aux variables de conception. La matrice des modes statiques de jonction Φ étant indépendante des variables de conception, d'après l'hypothèse d'isostaticité de la structure, les calculs de sensibilité des transmissibilités effectives en sont pour autant simplifiés.

III.5.4.1 CAS DES MODES SIMPLES

On désire obtenir une expression analytique de la dérivée des modes et des valeurs propres. On suppose dans un premier temps que les modes en question sont simples, ce qui signifie qu'il n'existe pas deux modes distincts associés à une même fréquence propre.

III.5.4.1.1 SENSIBILITE DES VALEURS PROPRES

Soit γ_{k0} le mode dont on cherche la dérivée par rapport à une variable de conception r_i . On a supposé γ_{k0} normalisé de telle sorte que :

$$\gamma_{k0}^t M_{ii} \gamma_{k0} = 1 \quad (III.27)$$

Le vecteur γ_{k0} est la solution du problème aux valeurs propres, il vérifie donc :

$$\left(K_{ii} - \omega_{k0}^2 M_{ii} \right) \gamma_{k0} = 0 \quad (\text{III.28})$$

Par la suite, on notera respectivement M et K les matrices M_{ii} et K_{ii} afin qu'il n'y ait pas de confusion avec l'indice i des variables de conception.

Dérivons l'équation (III.28) par rapport à la variable r_i , il vient alors :

$$\left(\frac{\partial K}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial M}{\partial r_i} - \frac{\partial \omega_{k0}^2}{\partial r_i} M \right) \gamma_{k0} + \left(-\omega_{k0}^2 M + K \right) \frac{\partial \gamma_{k0}}{\partial r_i} = 0 \quad (\text{III.29})$$

Prémultiplions maintenant l'équation (III.29) par γ_{k0}^t , on obtient :

$$\gamma_{k0}^t \left(\omega_{k0}^2 \frac{\partial M}{\partial r_i} - \frac{\partial K}{\partial r_i} \right) \gamma_{k0} + \frac{\partial \omega_{k0}^2}{\partial r_i} \gamma_{k0}^t M \gamma_{k0} = \gamma_{k0}^t \left(-\omega_{k0}^2 M + K \right) \frac{\partial \gamma_{k0}}{\partial r_i} = 0 \quad (\text{III.30})$$

De l'équation (III.30) et d'après le choix de normalisation (III.27), on peut alors déduire l'expression de la dérivée de la valeur propre :

$$\frac{\partial \omega_{k0}^2}{\partial r_i} = \gamma_{k0}^t \left(\frac{\partial K}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial M}{\partial r_i} \right) \gamma_{k0} \quad (\text{III.31})$$

III.5.4.1.2 SENSIBILITE DES FORMES PROPRES

Désormais nous connaissons la dérivée de la valeur propre. On peut alors calculer celle de la forme propre en résolvant le système linéaire (III.29). Pour cela, on calcule tout d'abord le vecteur f défini par :

$$f = \left(\omega_{k0}^2 \frac{\partial M}{\partial r_i} - \frac{\partial K}{\partial r_i} + \frac{\partial \omega_{k0}^2}{\partial r_i} M \right) \gamma_{k0} \quad (\text{III.32})$$

Le système linéaire (III.29) s'écrit donc :

$$\left(K - \omega_{k0}^2 M \right) \frac{\partial \gamma_{k0}}{\partial r_i} = f \quad (\text{III.33})$$

On peut remarquer que la matrice $K - \omega_{k0}^2 M$ est de rang $n - 1$ et a pour noyau γ_{k0} . Cela implique que si un vecteur v satisfait le système (III.33), alors le vecteur $v + c \gamma_{k0}$

est aussi solution, quel que soit le réel c . On cherchera donc une solution particulière v puis on trouve la constante c de manière à ce que $v + c \gamma_{k0} = \partial \gamma_{k0} / \partial r_i$.

Une méthode simple pour rechercher une solution particulière est d'annuler une composante de v et de résoudre le système inversible résultant pour les $n - 1$ autres composantes. En effet, il existe toujours une solution v ayant sa $l^{\text{ème}}$ composante nulle (l étant l'indice d'une composante non nulle de γ_{k0}) : si la solution $\partial \gamma_{k0} / \partial r_i$ a sa $l^{\text{ème}}$ composante nulle, on pose $v = \partial \gamma_{k0} / \partial r_i$, sinon on choisit $c = (\partial \gamma_{k0} / \partial r_i) / \gamma_{k0}$.

On peut alors montrer que la détermination de cette solution particulière peut se faire en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \\ K - \omega_{k0}^2 M \end{array} & \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \end{array} \quad (III.34)$$

Les lignes et colonnes d'indice l sont remplacées par des zéros dans la matrice $K - \omega_{k0}^2 M$ et les composantes $n^\circ l$ sont annulées dans les vecteurs v et f .

Démonstration :

On cherche à résoudre l'équation (III.33) sachant que la composante $n^\circ l$ de v est nulle, ce qui revient à éliminer la colonne $n^\circ l$ de la matrice $K - \omega_{k0}^2 M$. Il reste donc à éliminer la ligne $n^\circ l$. Pour cela, il faut donc démontrer que cette ligne est une combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur w tel que la composante $n^\circ l$ de w soit non nulle et que $w^t (K - \omega_{k0}^2 M)$ soit un vecteur nul. Or $K - \omega_{k0}^2 M$ étant symétrique, la dernière condition est équivalente à $(K - \omega_{k0}^2 M)w = 0$. Nous avons montré plus haut qu'il existait un vecteur v satisfaisant cette condition, on peut donc choisir w égal à v et ainsi montrer que le système réduit que l'on cherche à résoudre peut s'écrire sous la forme de l'équation (III.34).

Remarque :

En pratique et pour des raisons numériques, l'indice l est choisi de telle sorte que la composante $n^\circ l$ de γ_{k0} soit maximale en module.

Chapitre III

Une fois la solution v déterminée, il reste à chercher la constante c . Pour cela, dans un premier temps, nous dérivons l'équation (III.27) par rapport à r_i , puis remplacer $\partial\gamma_{k0}/\partial r_i$ par $c + \gamma_{k0}$. Il vient :

$$\left(c \gamma_{k0}^t + v^t \right) M \gamma_{k0} + \gamma_{k0}^t \frac{\partial M}{\partial r_i} \gamma_{k0} + \gamma_{k0}^t M (v + c \gamma_{k0}) = 0 \quad (\text{III.35})$$

L'équation (III.35) donne après simplifications :

$$c = - v^t M \gamma_{k0} - 0.5 \gamma_{k0}^t \frac{\partial M}{\partial r_i} \gamma_{k0} \quad (\text{III.36})$$

Connaissant v et c , nous connaissons désormais $\partial\gamma_{k0}/\partial r_i$.

En résumé, cet algorithme de calcul de sensibilité conçu par R. B. Nelson en 1976 [C6], se décompose de la façon suivante :

- 1 - Calculer $\frac{\partial \omega_{k0}^2}{\partial r_i} = \gamma_{k0}^t \left(\frac{\partial K}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial M}{\partial r_i} \right) \gamma_{k0}$
- 2 - Calculer $f = \left(\omega_{k0}^2 \frac{\partial M}{\partial r_i} - \frac{\partial K}{\partial r_i} + \frac{\partial \omega_{k0}^2}{\partial r_i} M \right) \gamma_{k0}$ et $G = K - \omega_{k0}^2 M$
- 3 - Trouver l tel que $|\gamma_{kl}| = \|\gamma_{k0}\|_\infty$
- 4 - Construire \bar{G} en annulant la colonne n° l , la ligne n° l et en remplaçant le $l^{\text{ième}}$ élément diagonal de G par 1.
- 5 - Construire \bar{f} en annulant le $l^{\text{ième}}$ élément de f .
- 6 - Résoudre $\bar{G} v = \bar{f}$
- 7 - Calculer $c = - v^t M \gamma_{k0} - 0.5 \gamma_{k0}^t \frac{\partial M}{\partial r_i} \gamma_{k0}$
- 8 - $\partial\gamma_{k0}/\partial r_i = v + c \gamma_{k0}$

L'algorithme de Nelson n'est plus valide dans le cas où plusieurs formes propres sont associées à une même fréquence propre (modes doubles, triples ...), en particulier car le système (III.33) est de rang strictement inférieur à $n - 1$.

Or, la symétrie de la structure étudiée et le fait que certains de ses éléments (comme les raidisseurs diagonaux) sont identiques, impliquent l'existence de modes

multiples. Nous verrons dans le paragraphe suivant comment prendre en compte la multiplicité des modes dans le calcul de leurs sensibilités.

III.5.4.2 CAS DES MODES MULTIPLES

Considérons tout d'abord le cas d'une valeur propre double associée à des formes propres γ_{k0} et γ_{k1} . Plusieurs situations peuvent alors se présenter :

a - les deux formes propres sont associées à des valeurs propres identiques, mais dont les dérivées par rapport à la variable de conception sont différentes :

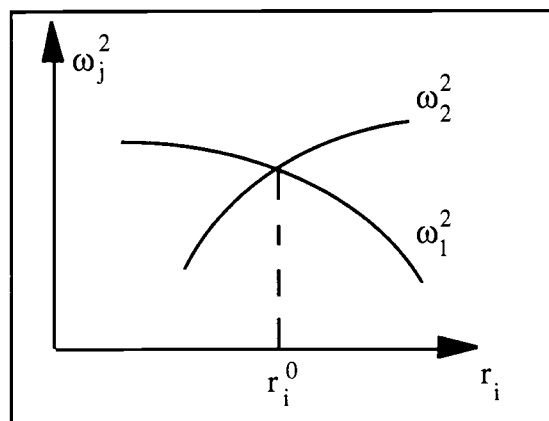


figure 3.4 : premier type de fréquence double

b - Les deux formes propres sont associées à des valeurs propres identiques ayant même dérivée par rapport à la variable de conception mais des dérivées secondes différentes :

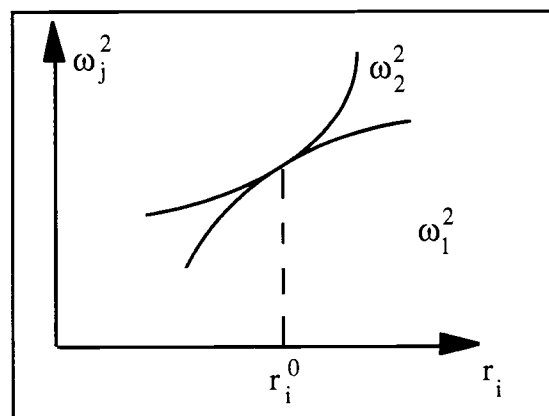


figure 3.5 : deuxième type de fréquence double

c - Les deux formes propres sont associées à des valeurs propres identiques dont les dérivées à l'ordre n sont égales et ceci quelque soit n :

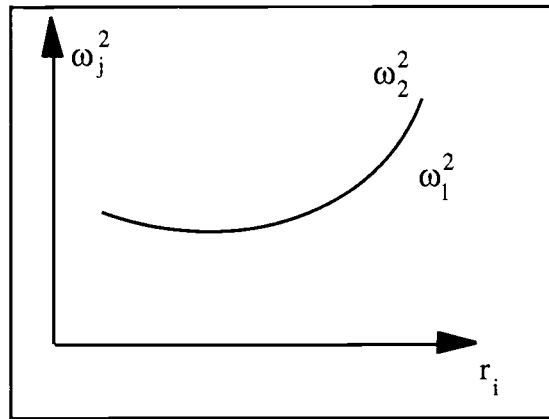


figure 3.6 : troisième type de fréquence double

III.5.4.2.1 SENSIBILITE DES VALEURS PROPRES

Revenons au cas général où une pulsation propre ω_{k0} est associée à p formes propres $\gamma_{k0}, \gamma_{k1}, \dots, \gamma_{kp-1}$. On appellera Γ la matrice de dimension $n \times p$ constituée de ces p formes propres. Γ vérifie l'équation du mouvement :

$$K \Gamma = M \Gamma \Lambda \quad \text{avec } \Lambda = \omega_{k0}^2 I \quad (\text{III.37})$$

On suppose les formes propres normalisées par rapport à la masse selon la formule (III.27).

Le sous-espace vectoriel engendré par les formes propres associées à ω_{k0} est de dimension p , donc le choix des p formes propres est a priori totalement arbitraire, cependant la condition de dérivabilité lève cette indétermination. Les formes propres dérivables sont écrites dans la base des formes propres γ_{ki} directement issues du calcul. On note Z la matrice constituée des formes propres dérivables et Δ la matrice de changement de base :

$$Z = \Gamma \Delta \quad \text{avec } \Delta^t \Delta = 1 \quad (\text{III.38})$$

Remarquons que la condition de normalisation (III.38) est respectée pour Z :

$$Z^t M Z = \Delta^t \Gamma^t M \Gamma \Delta = \Delta^t \Delta = 1 \quad (\text{III.39})$$

Dans un premier temps, nous allons déterminer la matrice Z , en dérivant l'équation (III.37) (qui est bien évidemment vérifiée par Z) par rapport à la variable de conception r_i :

$$\left(\mathbf{K} - \omega_{k0}^2 \mathbf{M} \right) \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial r_i} = \left(\omega_{k0}^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_i} \right) \mathbf{Z} + \mathbf{M} \mathbf{Z} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} \quad (\text{III.40})$$

Prémultiplions maintenant l'équation (III.40) par Γ^t et substituons $(\Gamma \Delta)$ à \mathbf{Z} . Nous obtenons, en remarquant que $\Gamma^t (\mathbf{K} - \omega_{k0}^2 \mathbf{M}) = 0$:

$$\left(\Gamma^t \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \right) \Gamma \right) \Delta = \mathbf{D} \Delta = \left(\Gamma^t \mathbf{M} \Gamma \right) \Delta \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} = \Delta \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} \quad (\text{III.41})$$

Pour obtenir simultanément les formes propres dérivables et les dérivées des valeurs propres, il nous faut diagonaliser la matrice \mathbf{D} . Il ne nous reste plus alors qu'à déterminer les dérivées des formes propres.

III.5.4.2.2 SENSIBILITE DES FORMES PROPRES

De même que précédemment, nous allons calculer les dérivées des formes propres en résolvant le système linéaire (III.40). Posons :

$$\mathbf{F} = \left(\omega_{k0}^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_i} \right) \mathbf{Z} + \mathbf{M} \mathbf{Z} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} \quad (\text{III.42})$$

Le système (III.40) s'écrit alors :

$$\left(\mathbf{K} - \omega_{k0}^2 \mathbf{M} \right) \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial r_i} = \mathbf{F} \quad (\text{III.43})$$

On peut remarquer que le système (III.43) est de rang $n - p$ et son noyau est le sous-espace vectoriel engendré par les formes propres associés à la pulsation propre ω_{k0} . Ceci nous suggère d'utiliser la méthode précédente, c'est-à-dire de trouver une solution particulière \mathbf{v} , puis de déterminer la matrice \mathbf{C} de dimension $p \times p$ telle que $\mathbf{v} + \mathbf{Z} \mathbf{C} \partial \mathbf{Z} / \partial r_i$.

Nous allons chercher une solution \mathbf{v} qui possède p composantes nulles. Cette solution existe si les p indices des composantes retenues correspondent à des composantes non nulles des formes propres dérivables. En pratique, nous déterminons l_1 , qui est la composante maximale en module de la première forme propre de \mathbf{Z} et nous annulons la composante l_1 de \mathbf{v} . De même, nous déterminons l_2 , qui est la composante maximale en module de la deuxième forme propre de \mathbf{Z} , si $l_2 = l_1$, on choisit l_2 comme

Chapitre III

l'indice suivant l_1 dans le classement par ordre décroissant des indices des modules des composantes, puis nous annulons la composante l_2 de v et ainsi de suite jusqu'à l_p .

On peut démontrer de la même manière que précédemment que v est solution du système linéaire (III.44), où les lignes et colonnes d'indices l_i , $1 \leq i \leq p$, de $K - \omega_{k0}^2 M$ sont annulées, exceptés les termes diagonaux qui sont remplacés par 1 et les composantes d'indices l_i , $1 \leq i \leq p$, de v et f sont annulées.

$$\begin{array}{c} \vdots \\ l_2 \\ l_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} & l_1 & l_2 & \dots & & \\ \hline & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ l_1 & 0 & -1 & 0 & & \\ \hline & 0 & & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & & & & \\ & & & & & K - \omega_{k0}^2 M \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ v \end{array} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ f \end{array} \quad (III.44)$$

Il nous reste à calculer la matrice C . Pour cela, dérivons l'équation (III.39) :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial Z}{\partial r_i} \right)^t M Z + Z^t \frac{\partial M}{\partial r_i} Z + Z^t M \left(\frac{\partial Z}{\partial r_i} \right)^t = \\ \left(C^t Z^t + v^t \right) M Z + Z^t \frac{\partial M}{\partial r_i} Z + Z^t M (v + Z C) = 0 \end{cases} \quad (III.45)$$

L'équation (III.45) donne après simplifications :

$$C + C^t = -v^t M Z + Z^t \frac{\partial M}{\partial r_i} Z - Z^t M v = Q \quad (III.46)$$

On remarque que l'équation (III.46) permet de déterminer les termes diagonaux de C , mais contrairement au cas des modes simples, elle ne suffit pas pour connaître les termes non diagonaux. Certains auteurs comme I. U. Ojalvo [C7] proposent d'étendre arbitrairement la formule de détermination des termes diagonaux aux termes non diagonaux. Nous préférons utiliser la méthode rigoureuse de R. L. Dailey [C8] (voir aussi [C9]) qui parvient à lever l'indétermination en dérivant deux fois l'équation du mouvement (III.37), c'est-à-dire en dérivant l'équation (III.40) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial r_i^2} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial r_i^2} \right) \mathbf{Z} + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \right) \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial r_i} + \left(\mathbf{K} - \omega_{k0}^2 \mathbf{M} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial r_i^2} \\ - 2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \mathbf{Z} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} - 2 \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial r_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} - \mathbf{M} \mathbf{Z} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r_i^2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.47})$$

En prémultipliant l'équation (III.47) par \mathbf{Z}^t , puis en utilisant la condition de normalisation (III.39) et la propriété $\mathbf{Z}^t (\mathbf{K} - \omega_{k0}^2 \mathbf{M}) = 0$ issue de l'équation du mouvement, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Z}^t \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial r_i^2} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial r_i^2} \right) \mathbf{Z} + 2 \mathbf{Z}^t \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \right) \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial r_i} \\ - 2 \mathbf{Z}^t \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \mathbf{Z} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} - 2 \mathbf{Z}^t \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial r_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r_i^2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.48})$$

Si l'on remplace $\partial \mathbf{Z} / \partial r_i$ par $\mathbf{v} + \mathbf{Z} \mathbf{C}$ dans l'équation (III.48), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Z}^t \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial r_i^2} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial r_i^2} \right) \mathbf{Z} + 2 \mathbf{Z}^t \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \right) \mathbf{v} + 2 \mathbf{Z}^t \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \right) \mathbf{Z} \mathbf{C} \\ - 2 \mathbf{Z}^t \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \mathbf{Z} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} - 2 \mathbf{Z}^t \mathbf{M} \mathbf{v} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} - 2 \mathbf{Z}^t \mathbf{M} \mathbf{Z} \mathbf{C} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r_i^2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.49})$$

En utilisant l'équation (III.40) prémultipliée par \mathbf{Z}^t et la condition de normalisation (III.39), l'équation (III.49) se simplifie notablement et devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Z}^t \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial r_i^2} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial r_i^2} \right) \mathbf{Z} + 2 \mathbf{Z}^t \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \right) \mathbf{v} + 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} \mathbf{C} \\ - 2 \mathbf{Z}^t \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \mathbf{Z} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} - 2 \mathbf{Z}^t \mathbf{M} \mathbf{v} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} - 2 \mathbf{C} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r_i^2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.50})$$

Après regroupements de certains termes, nous avons le résultat suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} - \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} \mathbf{C} + 0.5 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r_i^2} = \\ 0.5 \mathbf{Z}^t \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial r_i^2} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial r_i^2} \right) \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^t \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \right) \mathbf{v} - \mathbf{Z}^t \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r_i} \mathbf{Z} + \mathbf{M} \mathbf{v} \right) \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} = \mathbf{R} \end{array} \right. \quad (\text{III.51})$$

Chapitre III

Remarquons que $\partial^2 \Lambda / \partial r_i^2$ est une matrice diagonale, alors que $C \partial \Lambda / \partial r_i - \partial \Lambda / \partial r_i C$ a toujours des zéros sur la diagonale. Ceci nous permet de séparer C et $\partial^2 \Lambda / \partial r_i^2$ et de déduire les termes non diagonaux de C .

En pratique, on calcule la matrice R et on identifie tous ses termes :

$$R_{qr} = \begin{cases} C_{qr} \left(\frac{\partial \Lambda_{rr}}{\partial r_i} - \frac{\partial \Lambda_{qq}}{\partial r_i} \right) & \text{si } q \neq r \\ 0.5 \frac{\partial^2 \Lambda_{qq}}{\partial r_i^2} & \text{si } q = r \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

En conclusion, $C_{qr} = R_{qr} / (\partial \Lambda_{rr} / \partial r_i - \partial \Lambda_{qq} / \partial r_i)$ si $\partial \Lambda_{rr} / \partial r_i \neq \partial \Lambda_{qq} / \partial r_i$. Pour $q = r$, nous avons déjà le résultat $C_{qq} = 0.5 Q_{qq}$ grâce à l'équation (III.46). Dans le cas où pour $q \neq r$, on a $\partial \Lambda_{rr} / \partial r_i = \partial \Lambda_{qq} / \partial r_i$, c'est-à-dire le cas correspondant aux situations b et c décrites précédemment (voir figures 3.5 et 3.6), la valeur de C_{qr} est arbitraire : ce phénomène signifie que le sous-espace vectoriel associé à ω_{k0}^2 et à la variable de conception r_i ne se sépare pas en p sous-espaces distincts lorsque r_i varie. Certaines de ses dimensions restent "collées" entre-elles. Dans ce cas, les dérivées des formes concernées ne sont pas uniques. Cela nous impose de déterminer les paramètres C_{qr} et C_{rq} de manière arbitraire, en respectant cependant la condition $C_{qr} + C_{rq} = Q_{qr} = Q_{rq}$. Le choix le plus simple est de poser $C_{qr} = C_{rq} = 0.5 Q_{qr}$ dans le cas où l'on a $\partial \Lambda_{rr} / \partial r_i = \partial \Lambda_{qq} / \partial r_i$.

Finalement, l'algorithme de calcul des sensibilités dans le cas où les modes sont multiples se décompose de la manière suivante :

$$1 - \text{Calcul de } D = \Gamma^t \left(\frac{\partial K}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial M}{\partial r_i} \right) \Gamma$$

2 - Résoudre le problème aux valeurs propres :

$$D Z = Z \frac{\partial Z}{\partial r_i} \quad \text{et normaliser } Z : Z^t Z = 1$$

3 - Les colonnes de Z sont les nouveaux vecteurs propres

$$4 - \text{Calculer } G = K - \omega_{k0}^2 M \quad \text{et} \quad F = \left(\omega_{k0}^2 \frac{\partial M}{\partial r_i} - \frac{\partial K}{\partial r_i} \right) Z + M Z \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i}$$

5 - Trouver les p lignes de Z contenant les plus grands éléments en module et annuler les lignes et les colonnes de G correspondantes. Remplacer les éléments diagonaux associés par 1. Idem pour les lignes de F . Appeler les matrices résultantes \bar{G} et \bar{F} .



6 - Résoudre $\bar{G} v = \bar{F}$

7 - Calculer $Q = -v^t M Z + Z^t \frac{\partial M}{\partial r_i} Z - Z^t M v$

8 - Calculer $R = 0.5 Z^t \left(\frac{\partial^2 K}{\partial r_i^2} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial^2 M}{\partial r_i^2} \right) Z +$

$Z^t \left(\frac{\partial K}{\partial r_i} - \omega_{k0}^2 \frac{\partial M}{\partial r_i} \right) v - Z^t \left(\frac{\partial M}{\partial r_i} Z + M v \right) \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i}$

9 - Construire la matrice C de dimension $p \times p$:

$$C_{qr} = \begin{cases} \frac{R_{qr}}{\left(\frac{\partial \Lambda_{rr}}{\partial r_i} - \frac{\partial \Lambda_{qq}}{\partial r_i} \right)} & \text{si } \frac{\partial \Lambda_{rr}}{\partial r_i} \neq \frac{\partial \Lambda_{qq}}{\partial r_i} \\ 0.5 Q_{qr} & \text{sinon} \end{cases}$$

10 - $\frac{\partial Z}{\partial r_i} = v + Z C$

Remarque :

Dans le cas où l'on dérive les formes propres par rapport à plusieurs variables de conception, c'est-à-dire dans le cas où on les différentie, il est à noter que les matrices Z des formes propres dérivables associées à des modes multiples dépendent de la variable de conception par rapport à laquelle on effectue les dérivations. Si l'on veut observer les variations d'une fonction des formes propres, il est donc nécessaire de s'assurer que cette fonction est indépendante du choix des formes propres multiples dans leur sous-espace vectoriel. Cette remarque justifie la modification que nous allons opérer sur les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_f(r_1, r_2, \dots, r_m) = \frac{1}{4} \log \left(\sum_k (\text{flexibilités modales})^4 \right) - \hat{g}_f \\ g_T(r_1, r_2, \dots, r_m) = \frac{1}{4} \log \left(\sum_k (\text{transmissibilités modales})^4 \right) - \hat{g}_T \end{array} \right. \quad \text{(III.53)}$$

en appelant flexibilités et transmissibilités modales les termes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flexibilité modale associée au mode n}^\circ \text{ k : } \sum_{s \text{ tel que } \omega_s = \omega_k} \tilde{G}_{ii,s} \\ \text{Transmissibilité modale associée au mode n}^\circ \text{ k : } \sum_{s \text{ tel que } \omega_s = \omega_k} \tilde{T}_{ij,s} \end{array} \right. \quad (\text{III.54})$$

Dans le cas de modes multiples, la valeur des transmissibilités effectives associées à ces modes dépend du choix des formes propres. En revanche, la somme des transmissibilités effectives associées à une même pulsation propre (ce que l'on a appelé transmissibilité modale) est indépendante du choix des formes propres engendrant le sous-espace vectoriel, ce qui explique que l'on ait additionné les transmissibilités associées au même sous-espace avant d'effectuer l'élévation à la puissance 4. Les réponses aux résonances sont le résultat du produit entre les paramètres effectifs et l'amplification dynamique. Or, dans le cas d'une pulsation d'ordre multiple, les transmissibilités effectives correspondent à une même amplification dynamique (car cette dernière ne dépend que de ω_k et de l'amortissement modal). C'est pourquoi, dans ce cas, le terme caractérisant l'amplitude de la résonance est bien la somme de ces transmissibilités effectives. Le raisonnement est bien entendu identique pour les flexibilités effectives.

Remarque :

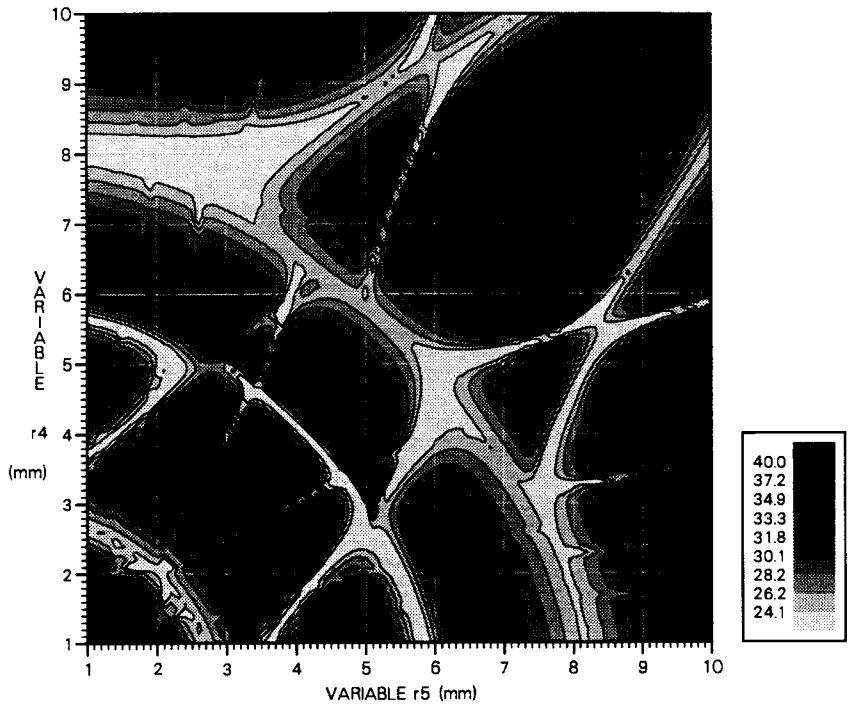
Les formules de dérivation des formes propres font intervenir les dérivées de la matrice de raideur par rapport aux variables de conception r_i . On les calcule aisément car chaque terme de K est une fonction polynômiale des variables de conception. K est obtenue par assemblage de matrices élémentaires de raideur, de même, $\partial K/\partial r_i$ est obtenue par assemblage des dérivées des matrices élémentaires (on procède de la même manière pour déterminer $\partial M/\partial r_i$).

III.5.5 COMPORTEMENT DE LA CONTRAINTE EN TRANSMISSIBILITE

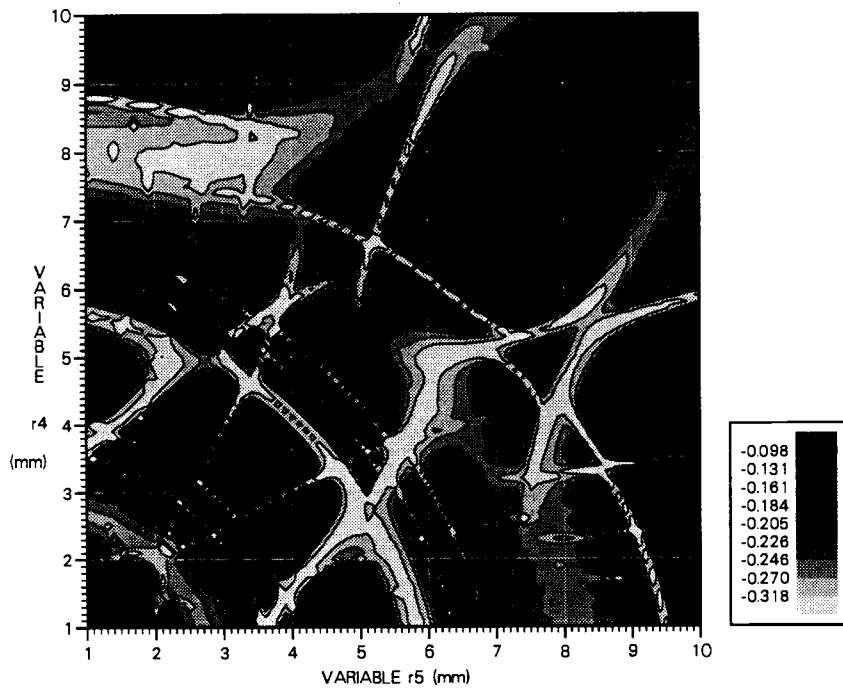
Après avoir effectué une première série de calculs d'optimisation sur le cas-test, nous avons constaté que les solutions trouvées n'étaient pas satisfaisantes, certains modes ayant tendance à se rapprocher et leur couplage a pour effet de faire remonter le niveau en transmissibilité : la contrainte sur la transmissibilité telle qu'elle a été définie n'est pas un bon estimateur de la réponse maximale réelle, ceci à cause des recouvrements de modes. En effet, quand deux modes sont voisins, la réponse à chacune des fréquences propres n'est plus proportionnelle à la transmissibilité effective. Il faut alors prendre en compte la réponse résiduelle due à l'interaction du mode proche. Pour s'en convaincre, nous avons fait varier r_4 et r_5 , puis nous avons comparé les courbes de niveau du

maximum de la transmissibilité dynamique et de la contrainte en transmissibilité ($r_1 = r_2 = 1.2 \text{ E-}02 \text{ m}$, $r_3 = r_6 = 1.2 \text{ E-}03 \text{ m}$, excitation horizontale).

MAXIMUM DE LA TRANSMISSIBILITE DYNAMIQUE



CONTRAINTE EN TRANSMISSIBILITE



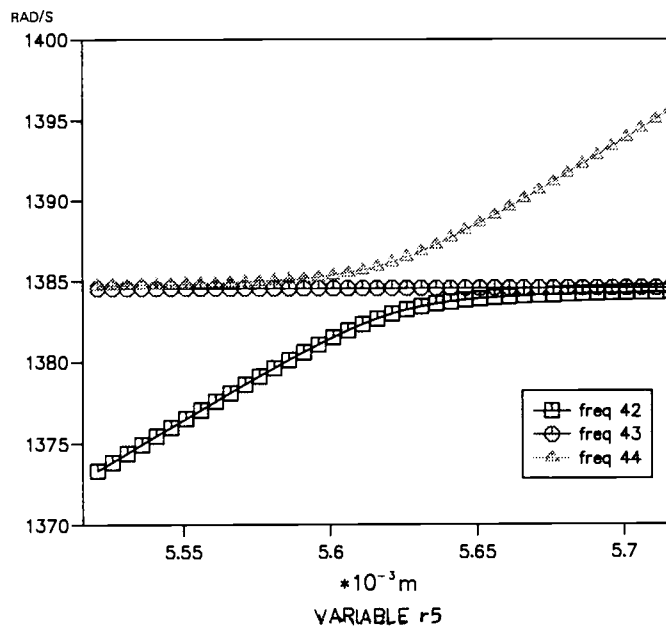
En comparant les deux figures nous remarquons que la contrainte a une allure semblable au maximum de la transmissibilité dynamique, hormis la présence de profonds

Chapitre III

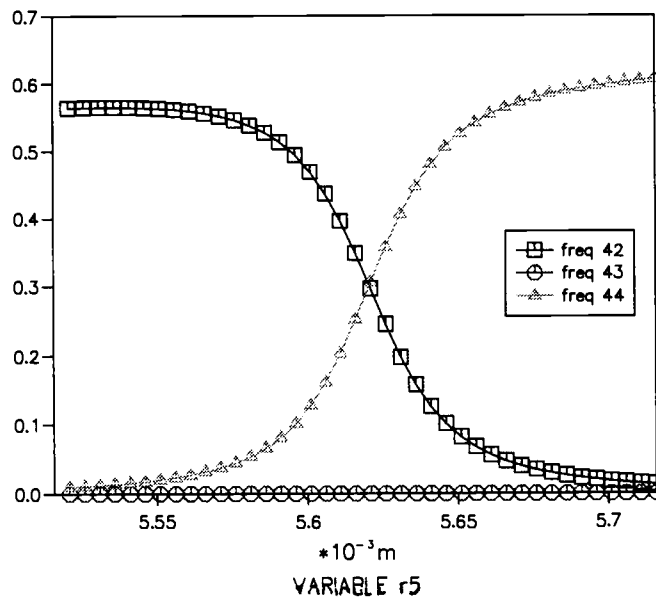
sillons. La multitude de ces sillons accroît le nombre de minima locaux, qui peuvent sembler artificiels, puisqu'ils ne reflètent pas l'existence de minima pour l'autre courbe. En fait l'algorithme d'optimisation tend à converger au fond de ces sillons.

Les sillons sont dûs au phénomène de recouvrement des réponses modales : ils sont générés par le fait de la proximité de deux fréquences propres. Faisons varier uniquement r_5 et observons l'allure des transmissibilités effectives associées à deux fréquences propres qui se rapprochent l'une de l'autre :

PULSATIONS PROPRES



TRANSMISSIBILITES EFFECTIVES



Chapitre III

Sur la première courbe, on observe que les fréquences propres des modes n°42 et n°44 tendent à se rapprocher de celle du mode n°43 apparemment constante sur le domaine de variation de r_5 considéré. Pour les valeurs inférieures de r_5 (5.52 E-03 m), les fréquences propres n°43 et n°44 se confondent alors que pour les valeurs supérieures de r_5 (5.72 E-03 m), ce sont les fréquences n°42 et n°43 qui sont confondues. Entre les deux, les fréquences propres n°42 et n°44 sont très proches l'une de l'autre. L'écart est de l'ordre de 0.5 Hz.

Si l'on observe maintenant la deuxième courbe, on remarque que le mode n°42 vaut approximativement 0.6 pour les valeurs inférieures de r_5 puis diminue lorsque r_5 croît, jusqu'à devenir nul. Pour le mode n°44, il se produit le phénomène inverse. Pour $r_5 = 5.62$ E-03 m, chacun des deux modes a une transmissibilité effective qui vaut à peu près 0.3. Pour les valeurs extrêmes de r_5 , la contrainte sur la transmissibilité vaut donc $\frac{1}{4} \log(T_0 + (0.6)^4)$, où T_0 représente la contribution des autres modes dans la contrainte (T_0 est faible devant $(0.55)^4$ et est quasiment constant sur l'intervalle d'étude de r_5). Pour $r_5 = 5.62$ E-03 m, la contrainte vaut $\frac{1}{4} \log(T_0 + 2 (0.3)^4)$. Or $\frac{1}{4} \log(T_0 + 2 (0.3)^4) < \frac{1}{4} \log(T_0 + (0.6)^4)$, d'où l'apparition d'un minimum local.

Dans le calcul de la réponse, le fort couplage entre les modes n°42 et n°44 aux environs de $r_5 = 5.62$ E-03 m contrebalance la diminution des transmissibilités effectives, si bien qu'il n'existe pas, pour le maximum de la réponse en transmissibilité, de minimum local en cette valeur de r_5 .

Cet exemple illustre le fait que lorsque deux fréquences propres sont très proches l'une de l'autre (tout en étant distinctes, phénomène de "**curve veering**", voir références [C10], [C11], [C12]), cela induit un couplage entre les modes associés.

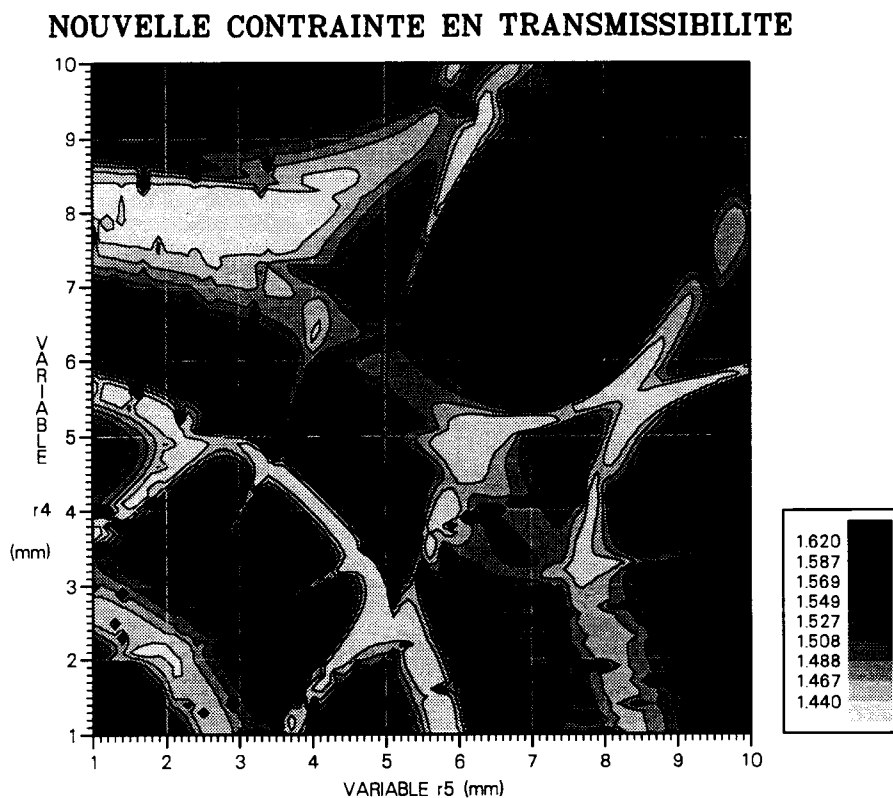
La contrainte sur la transmissibilité telle qu'elle a été définie précédemment, ne tient pas du tout compte de l'effet induit sur la réponse par la proximité de plusieurs fréquences propres. Nous allons donc modifier la définition de la contrainte : l'idée est de substituer aux transmissibilités modales (voir équation (III.53)) les réponses en transmissibilité dynamique calculées aux fréquences propres. Nous définirons ainsi la nouvelle contrainte en transmissibilité :

$$g_T(r_1, r_2, \dots, r_m) = \frac{1}{4} \log \left(\sum_k \left((\text{transmissibilité dynamique})_{\text{mode n° } k} \right)^4 \right) - \widehat{g}_T \quad (\text{III.55})$$

La transmissibilité dynamique est complexe et s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
 (\text{transmissibilité dynamique})_{\text{mode } n^{\circ} k} &= \sum_{l=1}^n T_l(\omega_k) \tilde{T}_{ij,l} \\
 &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{1 + 2j \xi_l \frac{\omega_k}{\omega_l}}{1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_l}\right)^2 + 2j \xi_l \frac{\omega_k}{\omega_l}} \tilde{T}_{ij,l} \right)
 \end{aligned} \tag{III.56}$$

Comme précédemment, nous avons tracé les courbes de niveau de la nouvelle contrainte en fonction des variables r_4 et r_5 :



On vérifie que les sillons ont bien disparu. La nouvelle contrainte semble donc être un meilleur estimateur du maximum de la réponse en transmissibilité dynamique.

Remarques :

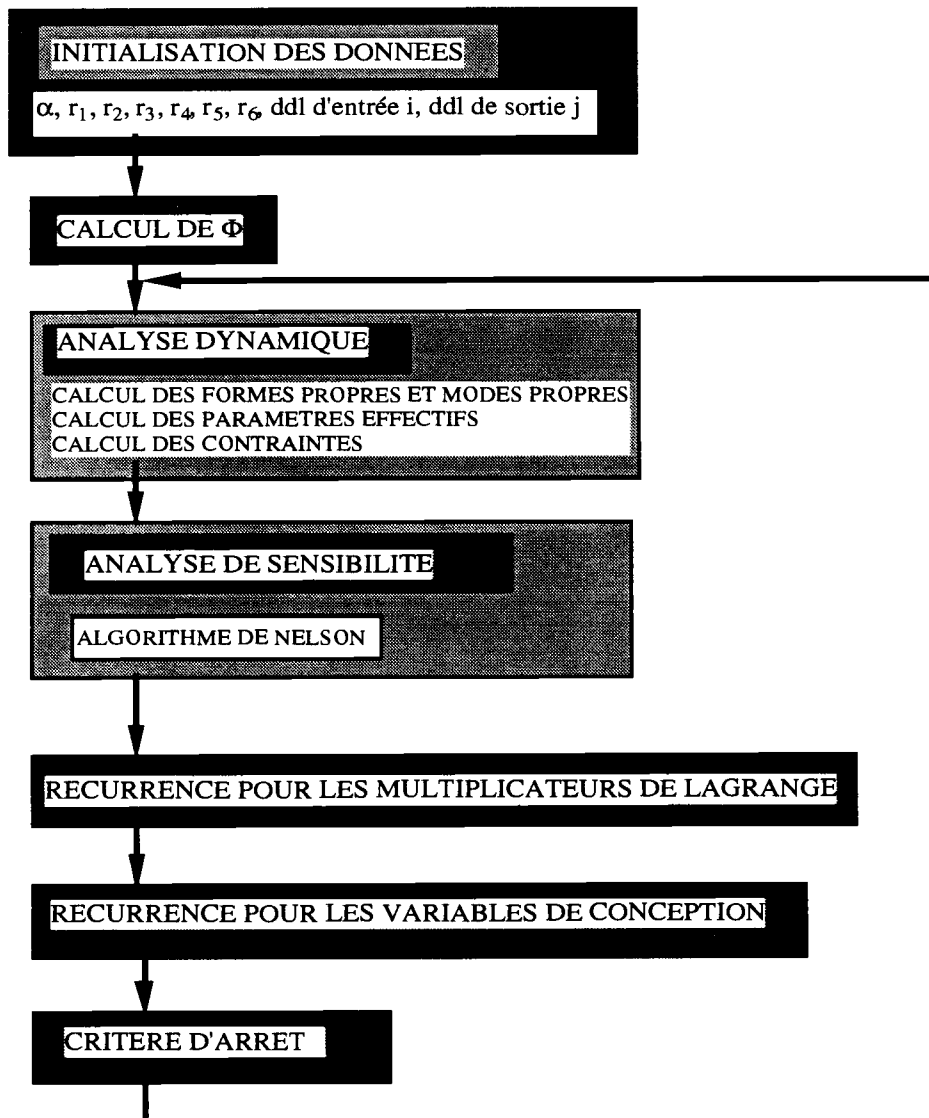
- On définira de même la contrainte en flexibilité, même si les phénomènes de "veering" ont une influence moindre en flexibilité qu'en transmissibilité.

- En pratique, il est très difficile de différencier une fréquence double de deux fréquences très proches l'une de l'autre, compte-tenu des erreurs numériques lors de la diagonalisation. Or, il n'est pas légitime d'utiliser l'algorithme de Dailey pour deux fréquences propres voisines mais cependant théoriquement distinctes. Les auteurs cités en

référence [C10] ont développé des critères afin de prédire si deux fréquences propres se croisent (voir figure 3.4) ou se rapprochent l'une de l'autre sans se croiser.

Cependant, nous avons préféré considérer a priori tous les modes comme étant distincts les uns des autres, c'est-à-dire n'utiliser que l'algorithme de Nelson pour l'analyse de sensibilité. En théorie, il existe des modes multiples, mais ce sont des modes du troisième type (voir figure 3.6). L'expérience montre que leur participation dans le calcul des contraintes est alors négligeable et leurs sensibilités sont quasi nulles, qu'elles soient déterminées à partir de l'algorithme de Nelson d'emploi illicite dans ce cas, ou celui de Dailey d'emploi licite mais extrêmement plus coûteux. D'autre part, on constate que l'algorithme d'optimisation ne converge jamais vers une solution comportant des modes multiples du premier type (voir figure 3.4) ou du deuxième type (voir figure 3.5).

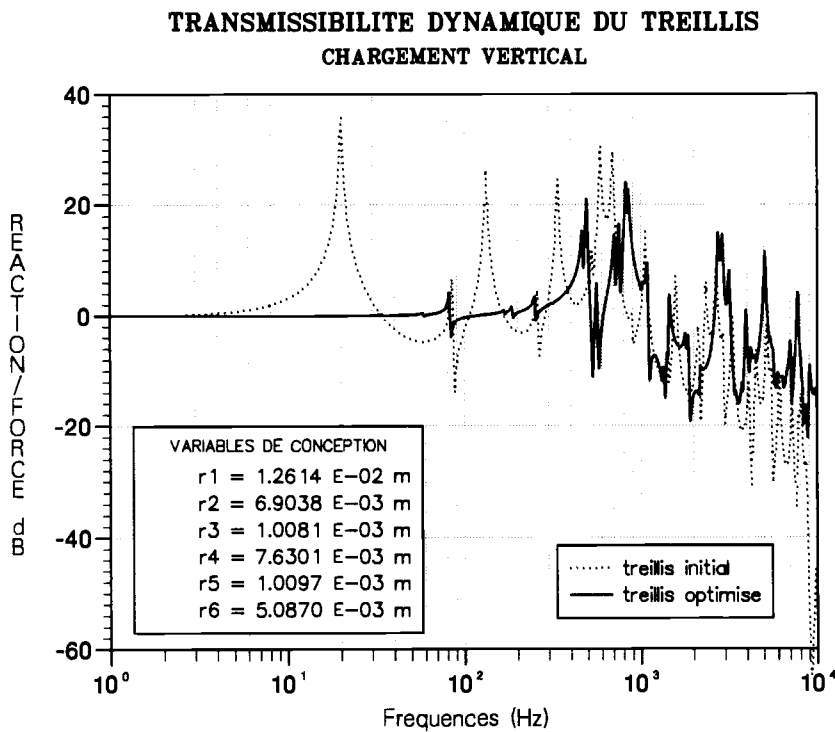
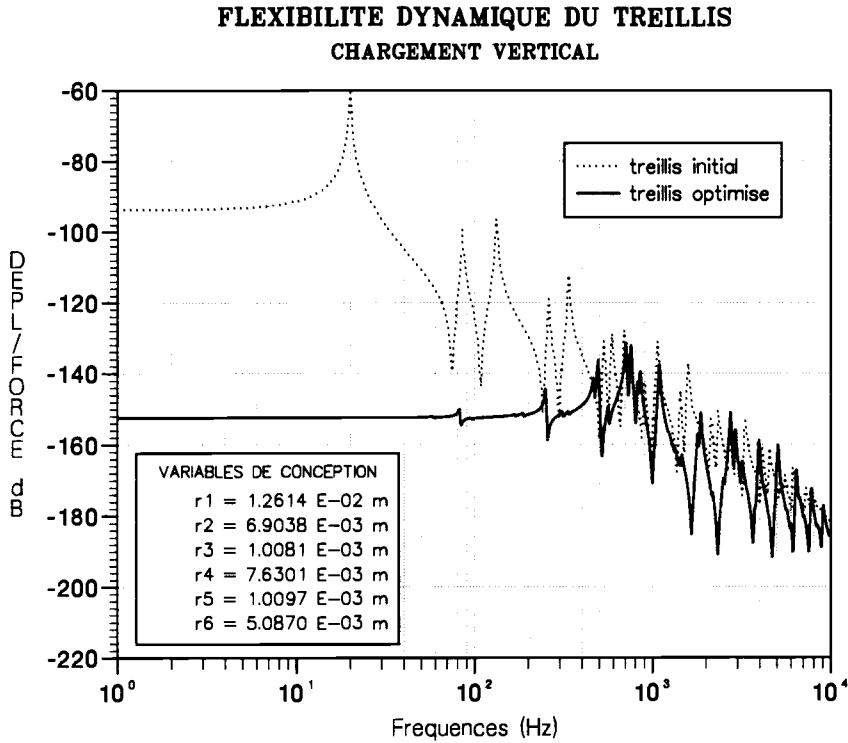
III.5.6 ORGANIGRAMME COMPLET



III.5.7 APPLICATIONS

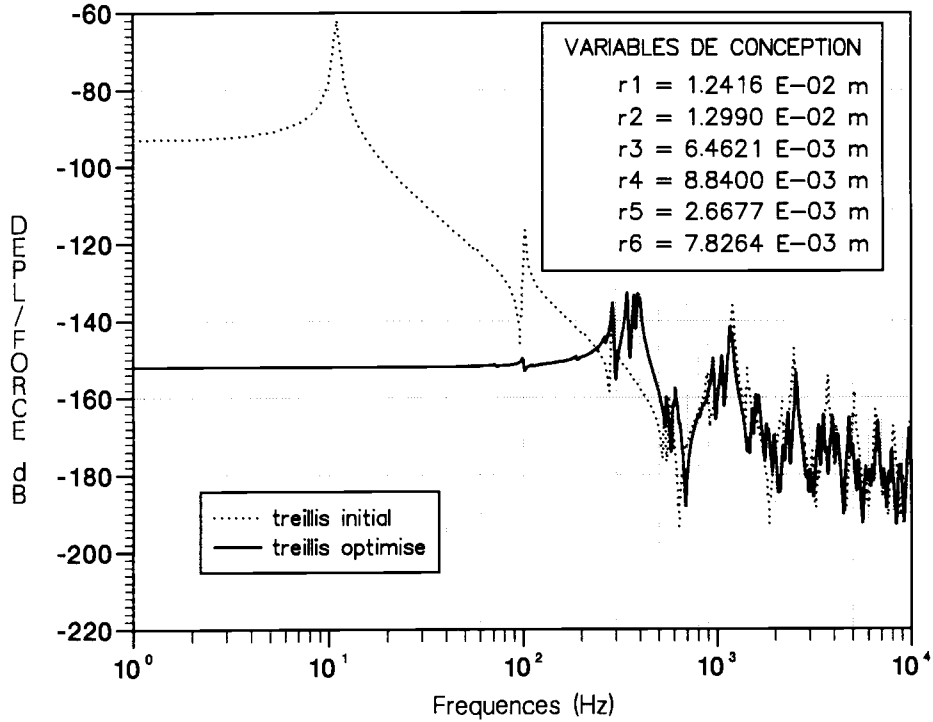
Nous avons effectué trois calculs d'optimisation correspondant aux cas de charges a, b et c définis dans le paragraphe III.2. Nous présentons les réponses des cas-test optimisés comparées au cas-test initial.

III.5.7.1 CAS DE CHARGE (A)

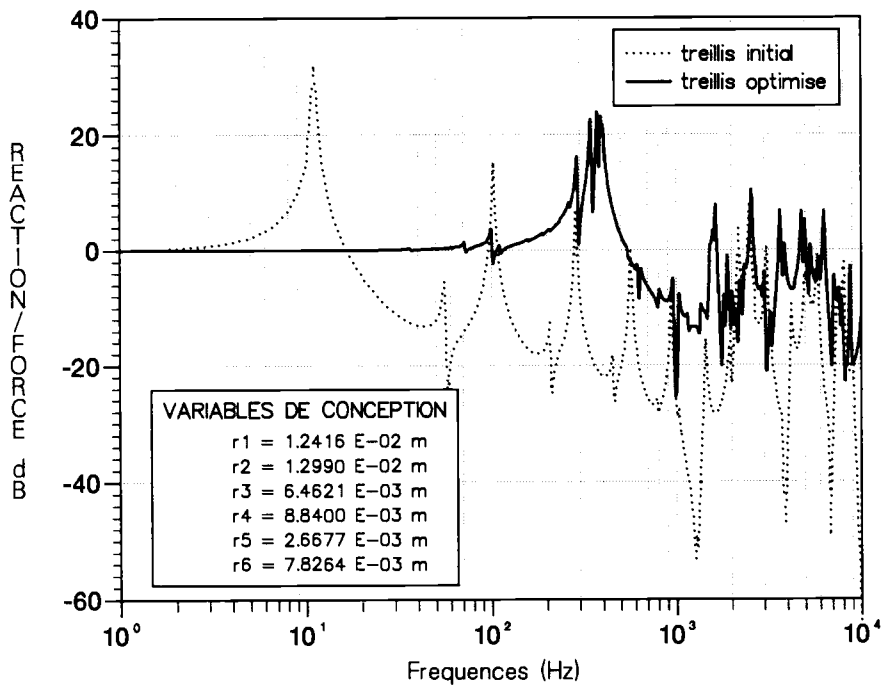


III.5.7.2 CAS DE CHARGE (B)

**FLEXIBILITE DYNAMIQUE DU TREILLIS
CHARGEMENT HORIZONTAL**

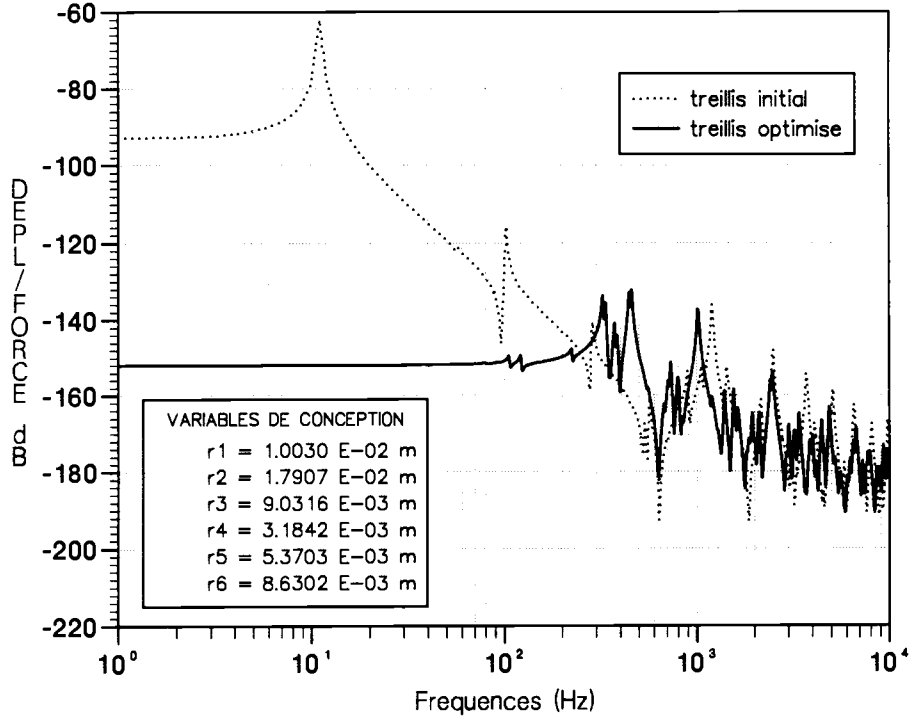


**TRANSMISSIBILITE DYNAMIQUE DU TREILLIS
CHARGEMENT HORIZONTAL**

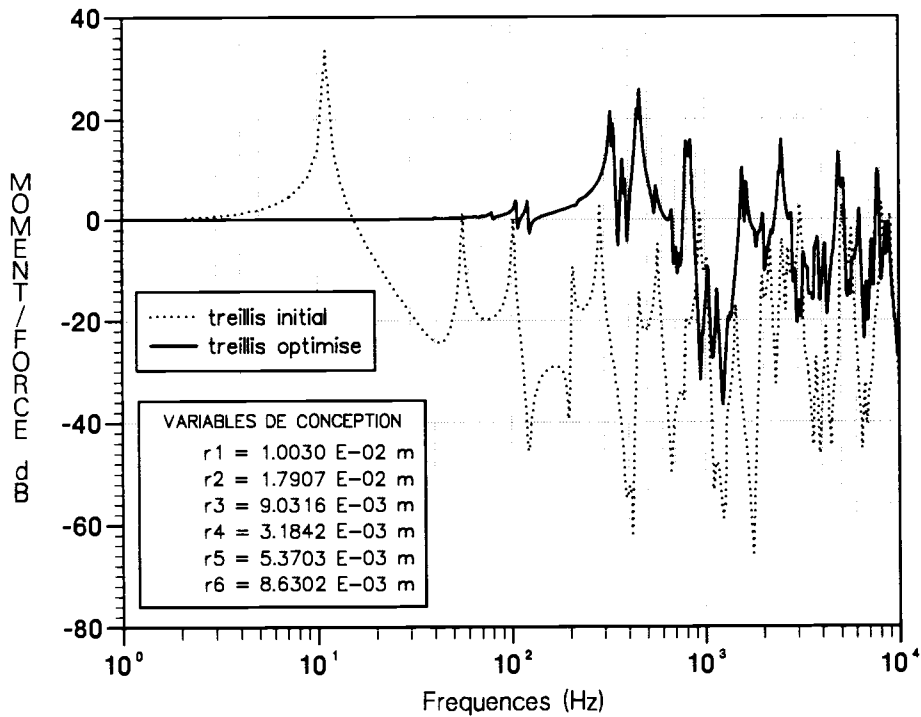


III.5.7.3 CAS DE CHARGE (C)

FLEXIBILITE DYNAMIQUE DU TREILLIS
CHARGEMENT HORIZONTAL



TRANSMISSIBILITE DYNAMIQUE EN MOMENT DU TREILLIS
CHARGEMENT HORIZONTAL



Chapitre III

III.5.7.4 GAINS EN TRANSMISSIBILITES ET FLEXIBILITES

CAS DE CHARGE (A)

\hat{g}_T	\hat{g}_f	g_T initiale	g_f initiale	masse initiale (kg)	masse après optimisation (kg)	gain en transmissibilité (dB)	gain en flexibilité (dB)
1.3	-6.5	0.327	1.650	14.45	14.94	11.55	70.87

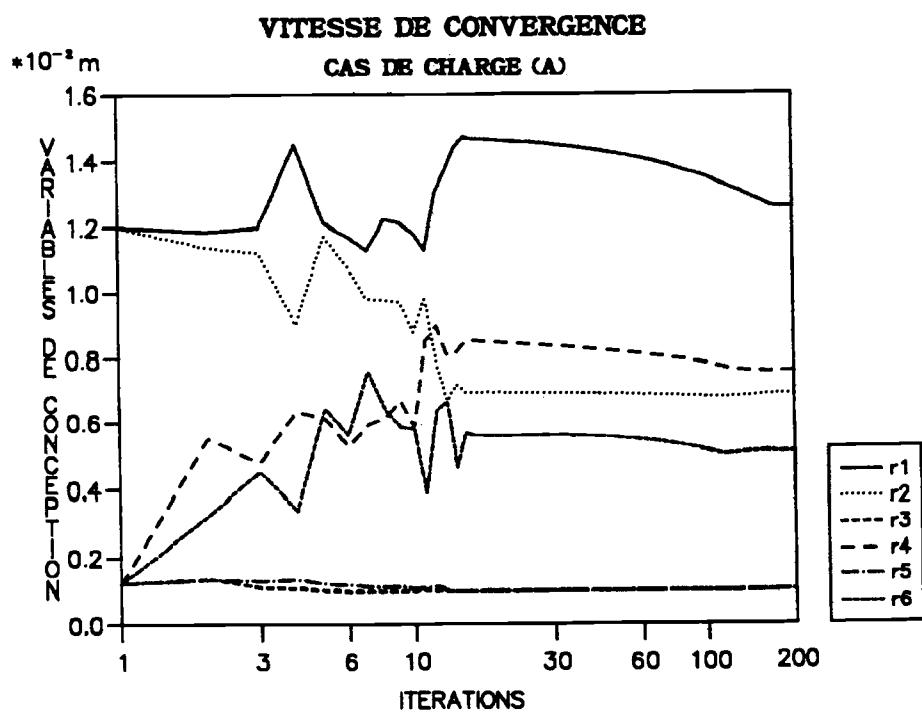
CAS DE CHARGE (B)

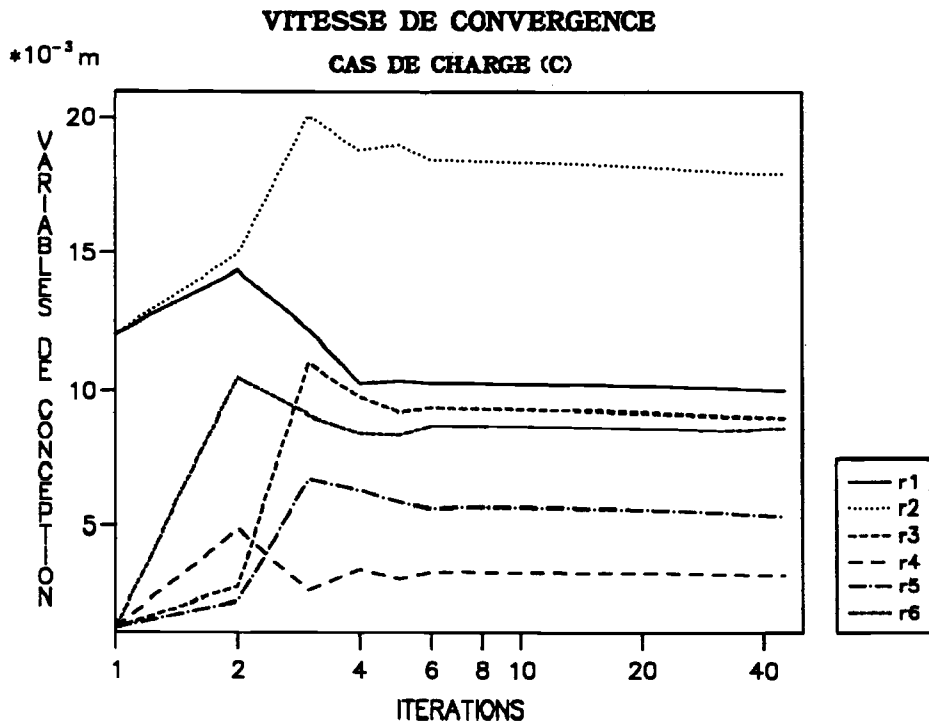
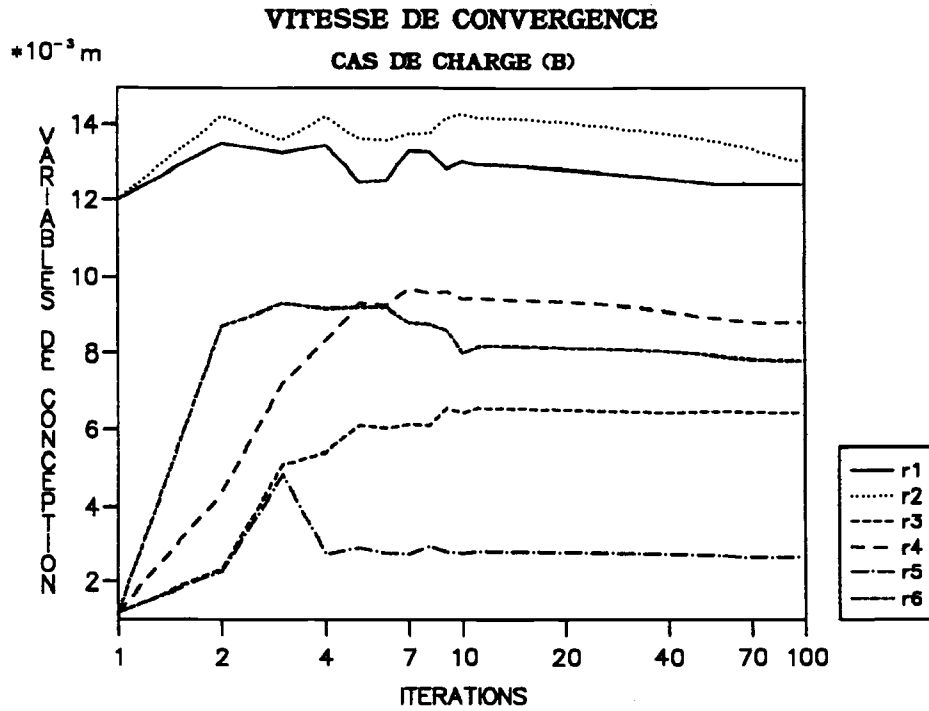
\hat{g}_T	\hat{g}_f	g_T initiale	g_f initiale	masse initiale (kg)	masse après optimisation (kg)	gain en transmissibilité (dB)	gain en flexibilité (dB)
1.3	-6.5	0.382	1.824	14.45	26.13	8.13	70.89

CAS DE CHARGE (C)

\hat{g}_T	\hat{g}_f	g_T initiale	g_f initiale	masse initiale (kg)	masse après optimisation (kg)	gain en transmissibilité (dB)	gain en flexibilité (dB)
1.33	-6.5	0.229	1.824	14.45	30.83	7.83	70.39

III.5.7.5 VITESSE DE CONVERGENCE

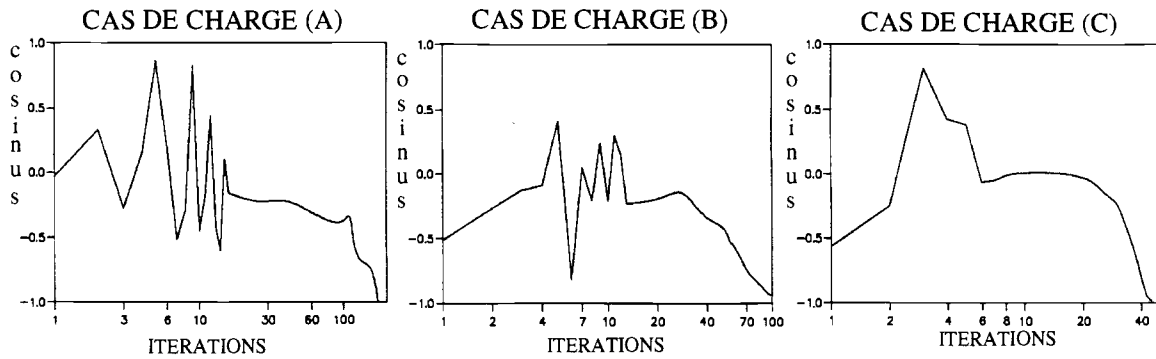




A priori, la vitesse de convergence peut sembler faible (180 itérations pour le cas de charge (A), 80 itérations pour le cas de charge (B) et 40 itérations pour le cas de charge (C)). Cependant, on remarque que les variables de conception varient très peu à partir d'une quinzaine d'itérations. En fait, l'algorithme atteint très rapidement des variables de conception proches des valeurs optimales, mais il lui faut ensuite un certain

nombre d'itérations pour que les conditions de Kuhn-Tucker soient vérifiées (soulignons que le critère d'arrêt est sévère : $\varepsilon = 0.05$, voir paragraphe III.5.3).

EVOLUTION DU CRITERE D'ARRET



Ceci est dû à la valeur que nous avons pris pour le paramètre de relaxation α ($\alpha = 0.999$). Le paramètre de relaxation joue le rôle de régulateur entre la fonction objectif et les contraintes : plus α est faible et plus l'algorithme privilégie la minimisation de la masse par rapport à la satisfaction des contraintes, inversement, plus α est élevé et plus l'algorithme tend à satisfaire les contraintes au détriment de la fonction coût (voir équation (III.21)). En théorie, la vitesse de convergence sera d'autant plus rapide que le paramètre de relaxation est faible. Ce dernier conditionne en fait l'amplitude du pas de descente. Cependant, si α est trop faible, l'algorithme ne converge pas, il oscille autour de l'optimum local : on sait que si un point de l'espace de conception est un optimum local, il a alors la propriété d'être un point-selle (voir paragraphe I.4.3.2). L'algorithme converge si l'amplitude du pas de descente est telle qu'à chaque itération, le nouveau point calculé se trouve dans le voisinage de l'optimum où les conditions de convexité par rapport aux variables de conception et de concavité par rapport aux multiplicateurs de Lagrange (conditions de point-selle) sont satisfaites. Cela signifie en fait que plus les contraintes auront des variations "brusques", plus l'amplitude du pas devra être faible et donc plus α devra être élevé. Le profil assez tourmenté des contraintes et en particulier de la contrainte en transmissibilité nous impose de choisir α proche de 1.

Nous avons comparé les variables de conception calculées à la quinzième itération aux variables optimales.

CAS DE CHARGE (A)

variables de conception (mm)	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
15 ^{ème} itération	14.67	6.970	1.000	8.541	1.000	5.581
valeurs optimales	12.26	6.903	1.008	7.630	1.009	5.087
erreur : $ 1 - r_i^{15\text{ème itér}} / r_i^{\text{opt}} $ (%)	16.3	0.96	0.81	11.9	0.96	9.72

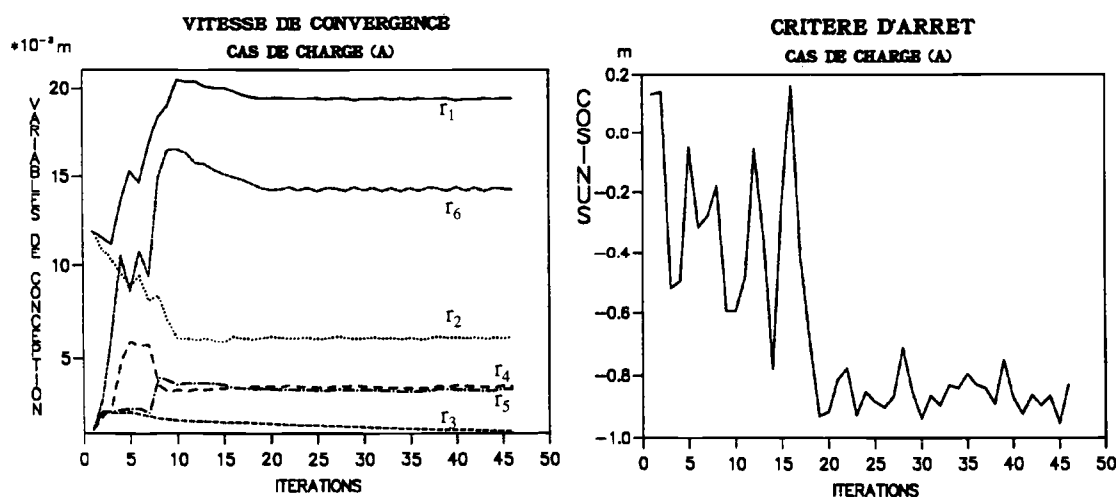
CAS DE CHARGE (B)

variables de conception (mm)	r ₁	r ₂	r ₃	r ₄	r ₅	r ₆
15 ^{ème} itération	12.87	14.13	6.550	9.350	2.803	8.152
valeurs optimales	12.42	12.99	6.462	8.840	2.668	7.826
erreur : $ 1 - r_i^{15\text{ème itér}}/r_i^{\text{opt}} $ (%)	3.64	8.76	1.36	5.77	5.08	4.16

CAS DE CHARGE (C)

variables de conception (mm)	r ₁	r ₂	r ₃	r ₄	r ₅	r ₆
15 ^{ème} itération	10.23	18.25	9.225	3.278	5.621	8.658
valeurs optimales	10.03	17.91	9.032	3.184	5.370	8.630
erreur : $ 1 - r_i^{15\text{ème itér}}/r_i^{\text{opt}} $ (%)	2.04	1.91	2.14	2.93	4.68	0.32

Nous montrons par un exemple l'importance du choix du paramètre de relaxation α . Nous avons repris le calcul d'optimisation du cas de charge (A), avec $\alpha = 0.99$. On remarque tout d'abord que l'algorithme semble converger plus vite (une vingtaine d'itérations), mais en fait il se produit un phénomène d'oscillation. Ceci illustre ce que nous avons expliqué précédemment : localement, les variations de la contrainte en transmissibilité sont tellement "brusques" par rapport au pas de descente (quand les contraintes sont atteintes, le pas de descente a un ordre de grandeur de $(1-\alpha) |R|$), que les gradients des contraintes évoluent très rapidement d'une itération à la suivante (voir l'évolution du critère d'arrêt), ce qui explique l'instabilité de l'algorithme. En fait, il y a un contraste entre l'échelle des variations des contraintes et l'échelle des pas de descente définie par le paramètre α .



D'autre part, on remarque que l'algorithme oscille autour d'une solution différente de celle trouvée pour $\alpha = 0.999$ (solution de masse plus grande). Il n'y a pas unicité de l'optimum, ce qui était à prévoir étant donné l'allure fortement non quadratique des contraintes, mais, de plus, le choix du paramètre α a des répercussions très importantes sur le cheminement de l'algorithme vers tel ou tel optimum local.

III.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons développé une méthode d'optimisation de structures avec des contraintes en transmissibilité et flexibilité dynamiques. Cette méthode est fondée sur l'utilisation des paramètres effectifs comme estimateurs des amplitudes des résonances et sur une approche par critère d'optimalité.

L'exemple du cas-test a montré que l'on pouvait considérablement atténuer les réponses en flexibilité et en transmissibilité, sans pour autant avoir un surcroît de masse important.

Cependant, les phénomènes de "curve veering" provoqués par la symétrie de la structure et la présence de nombreux modes locaux induisent un mauvais conditionnement du problème : des petites variations des variables de conception entraînent des grandes variations des contraintes. On a longtemps cru que ces phénomènes étaient dus à la discrétisation de la structure, mais des publications récentes ont montré qu'on pouvait les observer dans le cas de structures continues.

Cela implique une forte instabilité de l'algorithme et nous avons montré le rôle primordial du paramètre de relaxation α pour la convergence. Si α est trop faible, l'algorithme diverge ou oscille, si α est trop fort, l'algorithme converge lentement et tout se passe comme s'il s'était contenté d'atteindre les contraintes en faisant abstraction de la masse de la structure. Nous avons également remarqué que le paramètre α conditionne fortement le cheminement de l'algorithme.

Bien évidemment, la méthode présentée dans ce chapitre peut être étendue au cas des plaques. Nous montrons en annexe A2 un exemple d'application pour une plaque encadrée en deux de ses côtés. Cette structure étant "bien-conditionnée", c'est-à-dire ne possédant pas de nombreuses symétries ni de modes localisés, il en résulte une plus grande efficacité de l'algorithme, en particulier du point de vue de la vitesse de convergence (moins de 50 itérations).

CHAPITRE IV

OPTIMISATION DE REVETEMENTS AMORTISSANTS

IV.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étendre la méthode d'optimisation de structures au cas des structures composites. Auparavant, nous avons supposé que la structure était caractérisée par un amortissement modal constant. Nous étudions ici l'influence des revêtements en matériaux absorbants sur les amortissements modaux, afin d'intégrer la répartition de leur masse dans un processus d'optimisation.

Les matériaux composites sont utilisés dans un domaine d'application de plus en plus vaste, essentiellement pour des raisons de rapport poids sur performances mécaniques. La multitude des paramètres, (comme le nombre de fibres, leur orientation, le nombre de couches, l'épaisseur de ces couches ...) constitue une ressource notable pour le concepteur, mais le problème consiste à contrôler de manière efficace l'influence de toutes ces variables. Pour cette raison, les techniques d'optimisation peuvent constituer des outils extrêmement efficaces pour le dimensionnement.

Durant ces vingt dernières années, de nombreux travaux ont porté sur la modélisation des structures composites et l'optimisation suivant des critères statiques ou dynamiques, comme le flambement [D1]-[D2] ou le déplacement de fréquences propres [D3]-[D5]. En revanche, peu de publications traitent de l'amortissement. Des chercheurs se sont intéressés aux capacités de dissipation de l'énergie vibratoire de telles structures [D6]-[D11]. Ils ont montré comment on peut influencer sur l'amortissement par le choix des matériaux utilisés, de leur répartition (fibre / matrice ou revêtement / plaque de base) et d'autres paramètres géométriques comme l'orientation des fibres. D. A. Saravanos et C. C. Chamis ont également montré l'importance de la forme de la structure et de ses déformées [D12]. Les deux auteurs ont intégré la notion d'amortissement modal dans une stratégie d'optimisation multi-objectif, en utilisant une méthode de résolution classique, la méthode des directions admissibles [D13].

I. W. Suweca [C4] a montré comment prendre en compte l'amortissement modal par une formulation en modes complexes. Il a développé une approche par critère d'optimalité en choisissant pour contraintes les amortissements modaux de modes sélectionnés (partie imaginaires de fréquences propres complexes). Dans le cas de

structures complexes, cette méthode peut être rendue inefficace par le fait que les modes dominants ne sont pas toujours les mêmes au cours du processus d'optimisation. Tout comme dans le chapitre précédent, il faut alors considérer un critère large bande tenant compte de tous les modes dans la gamme de fréquence.

IV.2 POSITION DU PROBLEME

Nous traitons en premier de la conception de structures composées de poutres composites monocouches. Les composites sont constitués d'un matériau de base du type purement élastique et d'une couche de matériau viscoélastique.

Le problème d'optimisation que nous nous proposons d'étudier, a pour objectif de minimiser le poids total de la structure, en jouant sur la répartition des épaisseurs des deux composants du monocouche, avec des contraintes en transmissibilité et flexibilité dynamiques.

Dans un premier temps, nous caractérisons l'amortissement du matériau viscoélastique à l'aide d'un facteur de perte et d'un module d'Young constants, puis nous étudions le cas où ces deux valeurs dépendent de la fréquence. On détermine alors les caractéristiques équivalentes d'une poutre composite monocouche élémentaire. Le problème aux valeurs propres étant complexe (matrice de raideur complexe), on étend la notion de paramètres effectifs au cas complexe. Tout comme dans le chapitre précédent, on s'efforce de réduire les niveaux des réponses en flexibilité et transmissibilité en atténuant les paramètres effectifs prépondérants. En outre, nous avons un moyen d'action supplémentaire, l'amortissement modal qui, contrairement au cas des modes réels, est une fonction des variables de conception.

De même que dans le chapitre III, nous construirons un algorithme d'optimisation en déduisant les formules de récurrence pour les variables de conception de la condition de stationarité de Kühn-Tucker.

IV.3 CARACTERISTIQUES EQUIVALENTES D'UNE POUTRE COMPOSITE MONOCOUCHE

Considérons un élément de poutre composé d'un matériau de base du type purement élastique et d'une couche de matériau viscoélastique (voir figure 4.1). Si l'on

applique une force $F(x) e^{j\omega t}$ dans la direction transversale, l'équation du mouvement pour le déplacement dans cette direction $u(x) e^{j\omega t}$, s'écrit :

$$\left[E_2 (1 + j \eta_2) I_2 + E_1 I_1 \right] \frac{d^4 u(x)}{dx^4} - b (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \omega^2 u(x) = F(x) \quad (IV.1)$$

où I_1 et I_2 sont respectivement les moments d'inertie par rapport à l'axe neutre de la poutre composite, du matériau élastique et du matériau viscoélastique. E_1 est le module d'Young du matériau élastique. E_2 est la partie réelle du module d'Young complexe du matériau viscoélastique et η_2 est son facteur de perte. Le facteur de perte du matériau élastique η_1 est très petit devant η_2 et on supposera qu'il peut être négligé. ρ_1 , ρ_2 et h_1 , h_2 sont les densités et les épaisseurs des matériaux élastiques et viscoélastiques respectivement et b est la largeur des sections.

L'équation (IV.1) peut s'écrire sous la forme :

$$(E_1 I_1 + E_2 I_2) \left[1 + j \eta_2 \frac{E_2 I_2}{(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \right] \frac{d^4 u(x)}{dx^4} - b (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \omega^2 u(x) = F(x) \quad (IV.2)$$

ce modèle structural suppose que les sections droites de la poutre restent droites et perpendiculaires à la fibre moyenne.

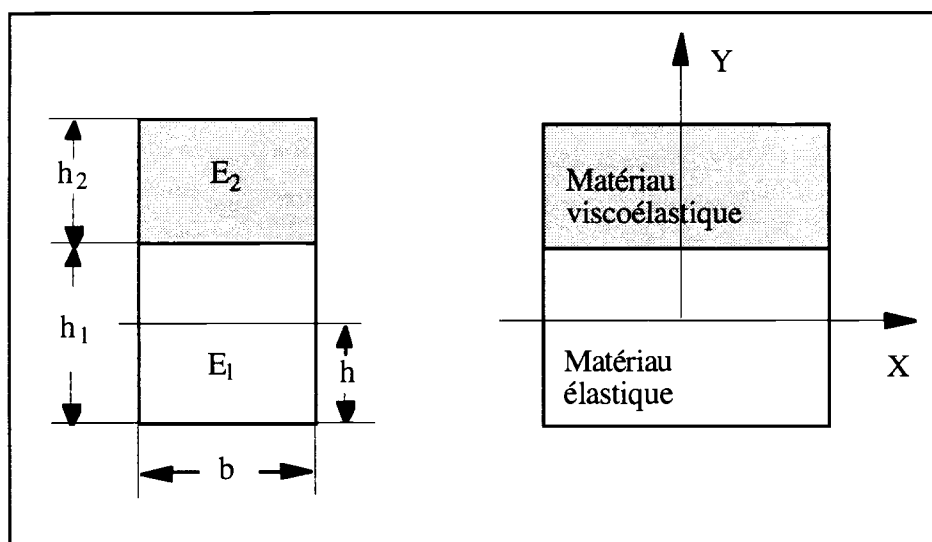


figure 4.1 : élément en matériau composite

Si l'on définit la rigidité équivalente $E I$, le facteur de perte η et la densité ρ de la poutre composite [D14], l'équation (IV.2) peut encore s'écrire :

$$E I (1 + j \eta) \frac{d^4 u(x)}{dx^4} - b \rho (h_1 + h_2) \omega^2 u(x) = F(x) \quad (IV.3)$$

Chapitre IV

La comparaison entre l'équation (IV.2) et l'équation (IV.3) nous donne les identités suivantes :

$$E I = E_1 I_1 + E_2 I_2 \quad (IV.4a)$$

$$\eta = \eta_2 \frac{E_2 I_2}{E I} \quad (IV.4b)$$

$$\rho = \frac{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{(h_1 + h_2)} \quad (IV.4c)$$

C'est par l'intermédiaire de ces trois caractéristiques équivalentes que nous allons décrire le comportement dynamique de la structure en fonction des variables de conception h_1 et h_2 . Pour exprimer les moments d'inertie I_1 et I_2 en fonction des variables de h_1 et h_2 , nous avons besoin de connaître l'expression de l'axe neutre de la poutre composite en fonction de ces variables.

Si l'on suppose, en accord avec la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, que les sections droites restent droites et perpendiculaires à la fibre moyenne et qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre le matériau de base et la couche de viscoélastique, l'axe neutre de la poutre composite s'obtient en écrivant que la rigidité de couplage membrane-flexion $\int_S y E(y) dS$ est nulle [D15], il vient alors :

$$h(h_1, h_2) = \frac{(E_1 h_1^2 + E_2 h_2^2 + 2 E_2 h_1 h_2)}{2 (E_1 h_1 + E_2 h_2)} \quad (IV.5)$$

On obtient alors l'expression suivante des moments d'inertie I_1 et I_2 en fonction de h_1 et h_2 .

$$\begin{cases} I_1 = \frac{b h_1^3}{12} + b h_1 [h - 0.5 h_1]^2 \\ I_2 = \frac{b h_2^3}{12} + b h_2 [h_1 + 0.5 h_2 - h]^2 \end{cases} \quad (IV.6)$$

Dans notre étude, nous ne développerons pas l'optimisation à partir des équations d'équilibre continues, mais nous étudierons un problème d'optimisation discret. Ainsi nous utiliserons la méthode des éléments finis pour l'analyse structurale et on supposera comme pour le chapitre III que la topologie de la structure est prédéfinie.

La matrice de raideur complexe élémentaire (du type poutre) est la somme des matrices élémentaires de chacun des deux matériaux :

$$\begin{aligned} [K_e] &= [K_e]^1_{(h_1, h_2)} + [K_e]^2_{(h_1, h_2)} (1 + j \eta_2) \\ &\approx \left[[K_e]^1_{(h_1, h_2)} + [K_e]^2_{(h_1, h_2)} \right] (1 + j \eta) \end{aligned} \quad (IV.7)$$

Nous avons établi l'expression du facteur de perte équivalent pour le mouvement de flexion. Or la matrice de raideur élémentaire est exprimée dans la base des ddl de flexion et de traction-compression. En théorie, il n'y a pas proportionnalité entre les matrices de raideur élémentaires des deux matériaux et on ne peut donc pas définir un facteur de perte équivalent, ce qui justifie la présence du signe \approx dans l'équation (IV.7). Dans la pratique, nous n'utiliserons pas cette approximation, mais la comparaison des résultats avec les travaux de Suweca [C4], [D16] montrent qu'elle a peu d'influence sur les calculs de réponse.

On définit de même la matrice de masse élémentaire :

$$[M_e] = [M_e]^1_{(h_1)} + [M_e]^2_{(h_2)} \quad (IV.8)$$

On assemble $[K_e]$ et $[M_e]$ pour obtenir les matrices de raideur complexe et de masse de la structure globale.

IV.4 FORMULATION DES TRANSFERTS DYNAMIQUES

Les équations du mouvement de la structure s'écrivent :

$$M \ddot{q} + \tilde{K} q = F \quad , \quad \text{avec } \tilde{K} = K_1 + K_2 (1 + j \eta_2) \quad (IV.9)$$

Soit en scindant les ddl q en ddl de jonction q_j et ddl internes q_i :

$$\begin{bmatrix} M_{jj} & M_{ji} \\ M_{ij} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_j \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{K}_{jj} & \tilde{K}_{ji} \\ \tilde{K}_{ij} & \tilde{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_j \\ F_i \end{bmatrix} \quad (IV.10)$$

Tout comme pour le calcul des paramètres effectifs (voir chapitre I, paragraphe I.3.2), on exprime le mouvement de la structure en le décomposant en un mouvement d'entraînement dû à la jonction et un mouvement relatif dans la base des modes propres (voir figure 1.13). Notons toutefois que les modes propres ϕ_k sont ici complexes :

$$q_i = \Phi_{ij} q_j + \varphi_{ik} \mu_k \quad (IV.11)$$

Φ_{ij} désigne toujours la matrice des modes statiques de jonction, indépendante des épaisseurs des éléments de la structure et réelle dans le cas isostatique.

Après avoir effectué le changement de base $q_i, q_j \rightarrow \mu_k, q_j$, les équations du mouvement (IV.10) deviennent :

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{jj} & L^t \\ L & m_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_j \\ \ddot{\mu}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}_{jj} & \\ 0 & \tilde{k}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \mu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_j + \Phi^t F_i \\ \varphi^t F_i \end{bmatrix} \quad (IV.12)$$

avec : $\bar{M}_{jj}, \bar{K}_{jj}$ matrices condensées à la jonction j
 L matrice de couplage modes de jonction / modes propres (ou facteurs de participation)
 $L = \varphi^t (M_{ii} \Phi + M_{ij})$
 $L_k = \varphi_k^t (M_{ii} \Phi + M_{ij})$ vecteur ligne n°k de L
 m_k, \tilde{k}_k matrices diagonales de masse et raideur généralisées

IV.4.1 RESOLUTION DES EQUATIONS

Tout comme dans le chapitre I (paragraphe I.3.2), on exprime les déplacements internes et réactions à la jonction en fonction des forces d'excitation et déplacements de jonction, à l'aide de l'équation (IV.12). Finalement, on obtient la matrice de transfert :

$$\begin{bmatrix} q_i(\omega) \\ R_j(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_k H_k(\omega) \frac{\varphi_k \varphi_k^t}{\omega_k^2 m_k} & \sum_k H_k(\omega) \frac{\varphi_k L_k}{m_k} \\ \sum_k H_k(\omega) \frac{L_k^t \varphi_k^t}{m_k} & -\omega^2 \sum_k H_k(\omega) \frac{L_k^t L_k}{m_k} + \bar{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i(\omega) \\ q_j(\omega) \end{bmatrix} \quad (IV.13)$$

IV.4.2 PARAMETRES EFFECTIFS

Pour chaque transfert, la superposition modale fait intervenir le produit des paramètres effectifs et des amplifications dynamiques qui leurs sont associées. L'expression des paramètres effectifs est formellement identique au cas de l'amortissement visqueux modal (voir formule (I.11)), mais n'oublions pas que ces paramètres sont ici des grandeurs complexes :

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{ii,k} &= \frac{\varphi_k \varphi_k^t}{\omega_k^2 m_k} \quad \text{matrice de flexibilité effective (mode } n^\circ k) \\
 \tilde{T}_{ij,k} &= \frac{\varphi_k L_k}{m_k} \quad \text{matrice de transmissibilité effective (mode } n^\circ k) \\
 \tilde{M}_{jj,k} &= \frac{L_k^t L_k}{m_k} \quad \text{matrice de masse effective (mode } n^\circ k)
 \end{aligned} \tag{IV.14}$$

Les paramètres effectifs complexes respectent les propriétés énoncées au paragraphe I.3.2.3. Ils sont indépendants du choix de normalisation des vecteurs propres et ils vérifient les conditions de sommation (I.12).

Quant à l'amplification dynamique, contrairement au cas des modes réels, son taux d'amortissement n'est pas constant, il est fonction de la partie imaginaire des pulsations propres, elle-même fonction des variables de conception.

$$H_k(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} = \frac{\omega_{kR}^2 - \omega_{kI}^2 + 2j \omega_{kR} \omega_{kI}}{(\omega_{kR}^2 - \omega_{kI}^2 - \omega^2) + 2j \omega_{kR} \omega_{kI}} \tag{IV.15}$$

avec : ω_{kR} partie réelle de ω_k
 ω_{kI} partie imaginaire de ω_k

IV.5 ALGORITHME D'OPTIMISATION

IV.5.1 DEFINITION DES CONTRAINTES

Nous définirons les contraintes en transmissibilité et en flexibilité de manière analogue au chapitre III, c'est-à-dire que l'on exprimera ces contraintes comme des fonctions différentiables (par rapport aux variables de conception h_{1i} et h_{2i} , $1 \leq i \leq m$) donnant une estimation de la valeur maximale de la fonction de transfert :

$$\left\{ \begin{aligned}
 g_T(h_{1i}, h_{2i}) &= \frac{1}{4} \log \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n \left| \sum_{l=1}^n H_l(RE(\omega_k)) \tilde{T}_{ij,l} \right|^4}_{\text{réponse à la pulsation propre } RE(\omega_k)} \right) - \hat{g}_T \\
 g_f(h_{1i}, h_{2i}) &= \frac{1}{4} \log \left(\sum_{k=1}^n \left| \sum_{l=1}^n H_l(RE(\omega_k)) \tilde{G}_{ii,l} \right|^4 \right) - \hat{g}_f
 \end{aligned} \right. \tag{IV.16}$$

IV.5.2 CONDITION DE KUHN-TUCKER

La fonction coût de notre problème d'optimisation est la masse de la structure. Dans le chapitre III, la masse était une fonction quadratique des variables de conception, ici, elle s'exprime linéairement en fonction des variables de conception :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(h_{1i}, h_{2i}) = \sum_{i=1}^m b L_i (\rho_1 h_{1i} + v \rho_2 h_{2i}) = \sum_{i=1}^m (V_{1i} h_{1i} + V_{2i} h_{2i}) \\ \text{avec : } V_{1i} = b L_i \rho_1 \quad \text{et} \quad V_{2i} = v b L_i \rho_2 \end{array} \right. \quad (\text{IV.17})$$

où L_i représente la longueur du $i^{\text{ème}}$ élément poutre monocouche et v un coefficient de pondération, qui a pour rôle de plus ou moins privilégier la minimisation de la masse de tel ou tel matériau composant le monocouche. Si $v > 1$, on privilégiera la minimisation du matériau viscoélastique et inversement si $v < 1$.

On définit la fonction de Lagrange à l'aide de la fonction coût et des contraintes :

$$\Psi(h_{1i}, h_{2i}, \lambda_1, \lambda_2) = f(h_{1i}, h_{2i}) + \lambda_1 g_T(h_{1i}, h_{2i}) + \lambda_2 g_f(h_{1i}, h_{2i}) \quad (\text{IV.18})$$

où λ_1 et λ_2 sont les multiplicateurs de Lagrange. La condition nécessaire d'optimalité de Kuhn-Tucker s'obtient en dérivant la fonction de Lagrange (IV.18) par rapport à h_{1i} et h_{2i} et aux multiplicateurs de Lagrange, ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{1i} + \lambda_1 \frac{\partial g_T}{\partial h_{1i}} + \lambda_2 \frac{\partial g_f}{\partial h_{1i}} = 0 \\ V_{2i} + \lambda_1 \frac{\partial g_T}{\partial h_{2i}} + \lambda_2 \frac{\partial g_f}{\partial h_{2i}} = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_T = 0 \\ g_f = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.19})$$

On obtient ainsi un système de $2m + 2$ équations non-linéaires qui doivent être vérifiées par les $2m$ variables de conception et les 2 multiplicateurs de Lagrange.

IV.5.3 ETABLISSEMENT DE LA RECURRENCE

Ce paragraphe est consacré à la résolution du système (IV.19). Nous suivons la même démarche que dans le chapitre III, nous construisons un algorithme itératif fondé sur l'utilisation de deux récurrence, la première pour déterminer les multiplicateurs de Lagrange et la seconde pour calculer les variables de conception.

IV.5.3.1 RECURRENCE POUR LES VARIABLES DE CONCEPTION

Nous proposons ici des relations récursives de type linéaire pour modifier les variables de conception au fil des itérations. Les critères d'optimalité des équations (IV.19) peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} -\frac{\lambda_1}{V_{1i}} \frac{\partial g_T}{\partial h_{1i}} - \frac{\lambda_2}{V_{1i}} \frac{\partial g_f}{\partial h_{1i}} = 1 \\ -\frac{\lambda_1}{V_{2i}} \frac{\partial g_T}{\partial h_{2i}} - \frac{\lambda_2}{V_{2i}} \frac{\partial g_f}{\partial h_{2i}} = 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (IV.20)$$

En multipliant la première et la deuxième ligne de l'équation (IV.20) respectivement par $h_{1i}(1-\alpha)$ et $h_{2i}(1-\alpha)$, il vient :

$$\begin{cases} h_{1i} = h_{1i} \left(\alpha + (1-\alpha) \left[-\frac{\lambda_1}{V_{1i}} \frac{\partial g_T}{\partial h_{1i}} - \frac{\lambda_2}{V_{1i}} \frac{\partial g_f}{\partial h_{1i}} \right] \right) \\ h_{2i} = h_{2i} \left(\alpha + (1-\alpha) \left[-\frac{\lambda_1}{V_{2i}} \frac{\partial g_T}{\partial h_{2i}} - \frac{\lambda_2}{V_{2i}} \frac{\partial g_f}{\partial h_{2i}} \right] \right) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (IV.21)$$

L'équation (IV.21) nous suggère les récurrences suivantes sur les variables de conception :

$$\begin{cases} h_{1i}^{v+1} = h_{1i}^v \left(\alpha + (\alpha - 1) \left[\frac{\lambda_1}{V_{1i}} \frac{\partial g_T}{\partial h_{1i}} + \frac{\lambda_2}{V_{1i}} \frac{\partial g_f}{\partial h_{1i}} \right] \right)^v \\ h_{2i}^{v+1} = h_{2i}^v \left(\alpha + (\alpha - 1) \left[\frac{\lambda_1}{V_{2i}} \frac{\partial g_T}{\partial h_{2i}} + \frac{\lambda_2}{V_{2i}} \frac{\partial g_f}{\partial h_{2i}} \right] \right)^v \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (IV.22)$$

où α est un paramètre de relaxation.

IV.5.3.2 RECURRENCE POUR LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

Les récurrences sur les multiplicateurs de Lagrange se déterminent à partir des contraintes. Un système d'équations linéaires avec λ_1 et λ_2 comme inconnues peut être obtenu en considérant la variation des contraintes causée par une modification des variables de conception. Les variations Δg_T et Δg_f peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \Delta g_T = g_T(h_{1i} + \Delta h_{1i}, h_{2i} + \Delta h_{2i}) - g_T(h_{1i}, h_{2i}) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g_T}{\partial h_{1i}} \Delta h_{1i} + \frac{\partial g_T}{\partial h_{2i}} \Delta h_{2i} \right) \\ \Delta g_f = g_f(h_{1i} + \Delta h_{1i}, h_{2i} + \Delta h_{2i}) - g_f(h_{1i}, h_{2i}) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g_f}{\partial h_{1i}} \Delta h_{1i} + \frac{\partial g_f}{\partial h_{2i}} \Delta h_{2i} \right) \end{cases} \quad (IV.23)$$

Chapitre IV

En choisissant les incréments Δh_{1i} et Δh_{2i} de telle sorte que :

$$g_T(h_{1i} + \Delta h_{1i}, h_{2i} + \Delta h_{2i}) = 0 \quad \text{et} \quad g_f(h_{1i} + \Delta h_{1i}, h_{2i} + \Delta h_{2i}) = 0 \quad (\text{IV.24})$$

Les équations (IV.23) deviennent alors :

$$\begin{cases} -g_T(h_{1i}, h_{2i}) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g_T}{\partial h_{1i}} \Delta h_{1i} + \frac{\partial g_T}{\partial h_{2i}} \Delta h_{2i} \right) \\ -g_f(h_{1i}, h_{2i}) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g_f}{\partial h_{1i}} \Delta h_{1i} + \frac{\partial g_f}{\partial h_{2i}} \Delta h_{2i} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

En utilisant la récurrence (IV.22), on peut calculer les variations Δh_{1i} et Δh_{2i} :

$$\begin{cases} \Delta h_{1i} = h_{1i}^{\nu+1} - h_{1i}^{\nu} = (\alpha - 1) h_{1i}^{\nu} \left(1 + \left[\frac{\lambda_1}{V_{1i}} \frac{\partial g_T}{\partial h_{1i}} + \frac{\lambda_2}{V_{1i}} \frac{\partial g_f}{\partial h_{1i}} \right]^{\nu} \right) \\ \Delta h_{2i} = h_{2i}^{\nu+1} - h_{2i}^{\nu} = (\alpha - 1) h_{2i}^{\nu} \left(1 + \left[\frac{\lambda_1}{V_{2i}} \frac{\partial g_T}{\partial h_{2i}} + \frac{\lambda_2}{V_{2i}} \frac{\partial g_f}{\partial h_{2i}} \right]^{\nu} \right) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{IV.26})$$

En injectant les équations (IV.26) dans la formule (IV.25) on obtient finalement un système d'équations linéaires avec comme inconnues les multiplicateurs de Lagrange :

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} A_1 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{h_{1i}}{V_{1i}} \left(\frac{\partial g_T}{\partial h_{1i}} \right)^2 + \frac{h_{2i}}{V_{2i}} \left(\frac{\partial g_T}{\partial h_{2i}} \right)^2 \right) \\ A_2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{h_{1i}}{V_{1i}} \left(\frac{\partial g_T}{\partial h_{1i}} \right) \left(\frac{\partial g_f}{\partial h_{1i}} \right) + \frac{h_{2i}}{V_{2i}} \left(\frac{\partial g_T}{\partial h_{2i}} \right) \left(\frac{\partial g_f}{\partial h_{2i}} \right) \right) \\ A_3 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{h_{1i}}{V_{1i}} \left(\frac{\partial g_f}{\partial h_{1i}} \right)^2 + \frac{h_{2i}}{V_{2i}} \left(\frac{\partial g_f}{\partial h_{2i}} \right)^2 \right) \\ B_1 = -\sum_{i=1}^m \left(h_{1i} \frac{\partial g_T}{\partial h_{1i}} + h_{2i} \frac{\partial g_T}{\partial h_{2i}} \right) + \frac{g_T}{(\alpha - 1)} \\ B_2 = -\sum_{i=1}^m \left(h_{1i} \frac{\partial g_f}{\partial h_{1i}} + h_{2i} \frac{\partial g_f}{\partial h_{2i}} \right) + \frac{g_f}{(\alpha - 1)} \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

Chapitre IV

A chaque itération, on résout le système (IV.27). On obtient ainsi les nouveaux multiplicateurs de Lagrange, puis on calcule les variables de conception à l'aide de la récurrence (IV.22).

Nous imposerons aux variables de conception des limitations inférieures et supérieures. Comme précédemment, nous ne traiterons pas ces limitations comme des contraintes inégalités. Simplement si lors d'une itération, une variable de conception dépasse une de ces bornes inférieures et supérieures, on lui assignera la valeur limite et pour l'itération suivante on supprimera l'indice correspondant dans les sommes définissant les coefficients du système linéaire (IV.27).

IV.5.4 CRITERE D'ARRET

On définit le critère d'arrêt à partir des conditions d'optimalité (IV.20). On testera à la fin de chaque itération si les 2 m valeurs $\left| \frac{(-\lambda_1(\partial g_T/\partial h_{1i}) - \lambda_2(\partial g_f/\partial h_{1i}))}{V_{1i}} \right|$ et $\left| \frac{(-\lambda_1(\partial g_T/\partial h_{2i}) - \lambda_2(\partial g_f/\partial h_{2i}))}{V_{2i}} \right|$ sont proches de 1. En pratique, on arrêtera le processus si toutes ces grandeurs sont comprises entre $1 + \varepsilon$ et $1 - \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$.

IV.5.5 ANALYSE DE SENSIBILITE

Le calcul des sensibilités des contraintes fait intervenir les dérivées des formes propres et pulsations propres par rapport aux variables de conception. Nous utiliserons l'algorithme de Nelson introduit dans le chapitre III (voir paragraphe III.5.4.1). L'algorithme de Nelson étant fondé sur les propriétés d'orthogonalité des modes, il est parfaitement légitime de l'appliquer au cas des modes complexes, car ils vérifient également ces propriétés. Nous normaliserons les modes par rapport à la matrice de masse :

$$\varphi^t M \varphi = I \quad (IV.28)$$

Dans l'expression des contraintes interviennent également les parties réelles et imaginaires des pulsations propres. Signalons la relation entre la dérivée des pulsations propres et la dérivée de leurs parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_k}{\partial h_{1i}} = \frac{\partial \omega_{kR}}{\partial h_{1i}} + j \frac{\partial \omega_{kI}}{\partial h_{1i}} \\ \frac{\partial \omega_k}{\partial h_{2i}} = \frac{\partial \omega_{kR}}{\partial h_{2i}} + j \frac{\partial \omega_{kI}}{\partial h_{2i}} \end{cases} \quad (IV.29)$$

IV.5.6 DESCRIPTION DES STRUCTURES TEST

Nous n'avons pas repris l'exemple du cas-test pour ne pas introduire de problèmes liés au phénomène de "curve veering" propre à des structures comportant de nombreuses symétries. Nous traiterons dans ce chapitre de deux structures, une poutre cantilever et un portique bi-encasté. Ces deux structures sont constituées d'un assemblage d'éléments poutres monocouches dont les variables h_{1i} et h_{2i} valent initialement 3 mm et 1.5 mm ($b = 2.4$ cm). Pour la poutre, la force d'excitation est située à l'extrémité libre et dirigée verticalement (voir figure 4.2). Pour le portique on définit deux cas de charge, une excitation dans le plan de symétrie et une excitation horizontale à l'angle supérieur gauche (voir figure 4.3).

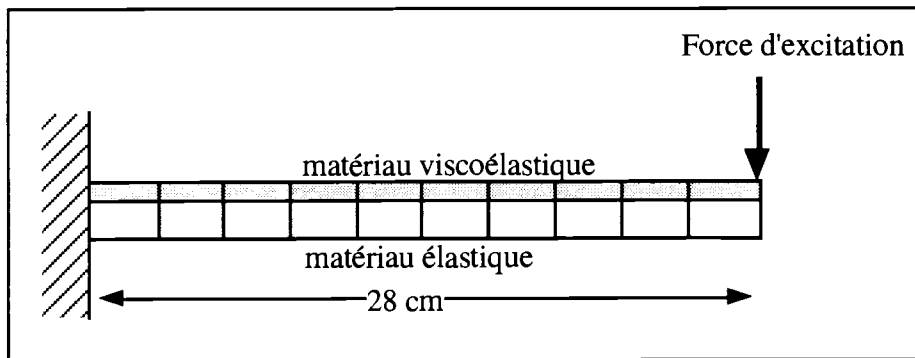


figure 4.2 : poutre cantilever

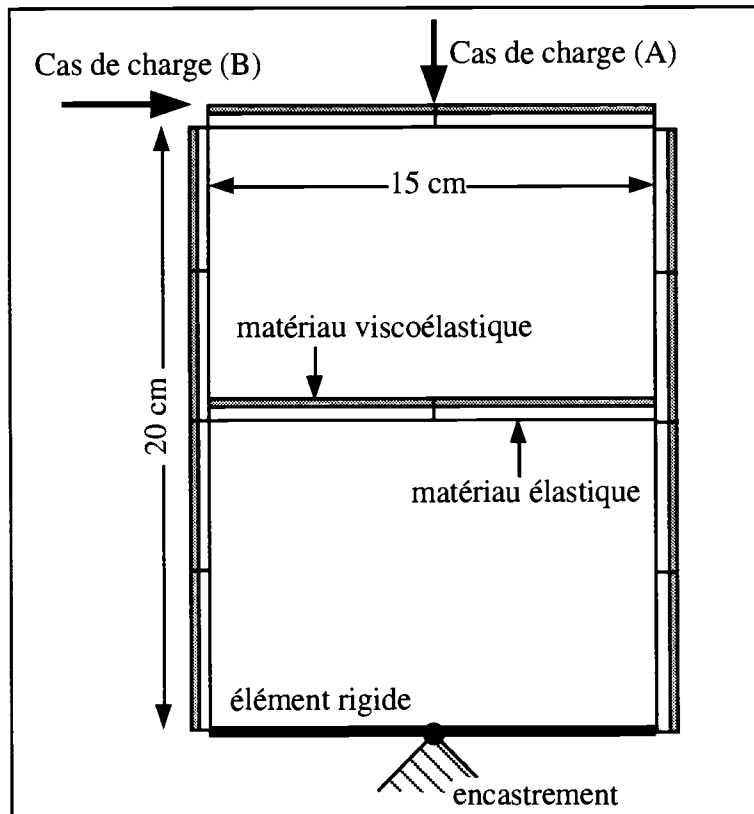


figure 4.3 : portique bi-encasté

Caractéristiques	Elastique	Viscoélastique
Module d'élasticité (N/m ²)	7.0 E+10	2.0 E+09
Densité (kg/m ³)	2700.	1750.
Facteur de perte	0.	0.5

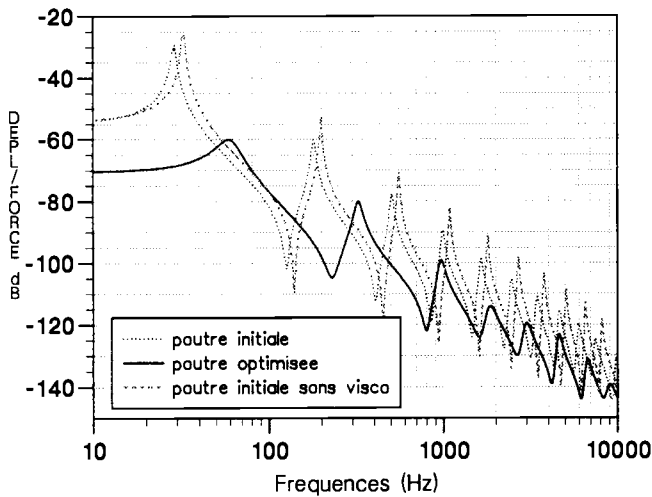
IV.5.7 APPLICATIONS

IV.5.7.1 POUTRE CANTILEVER

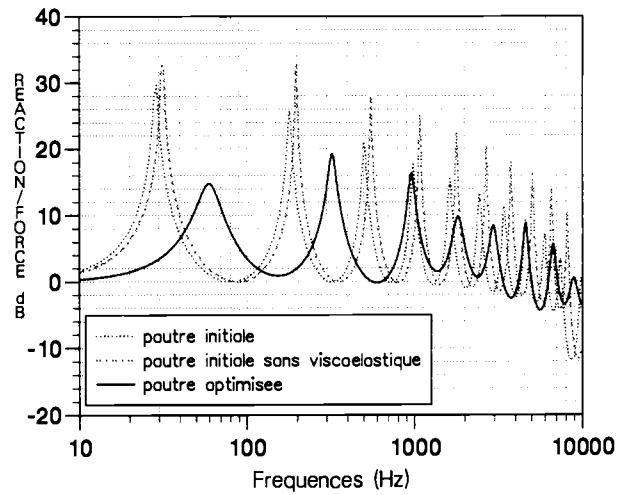
On a procédé à trois optimisations avec des valeurs différentes pour \hat{g}_T et \hat{g}_f , ce qui signifie que l'on a exercé des contraintes plus ou moins fortes sur la transmissibilité et la flexibilité.

- OPTIMISATION 1 : $\hat{g}_T = 1$. $\hat{g}_f = -3$.

FLEXIBILITE DYNAMIQUE DE LA POUTRE

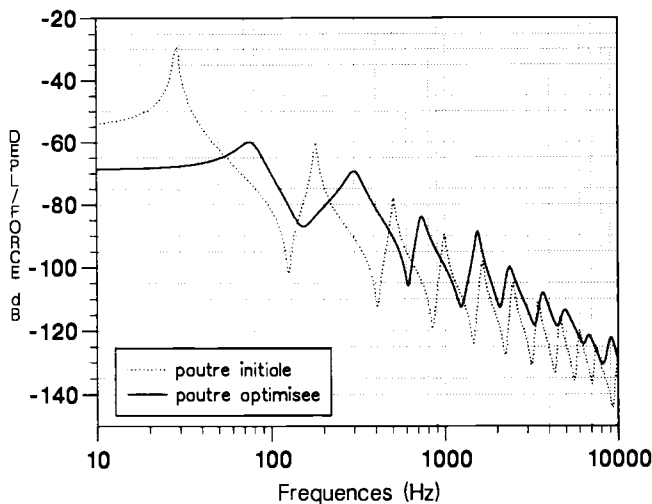


TRANSMISSIBILITE DYNAMIQUE DE LA POUTRE CHARGEMENT VERTICAL

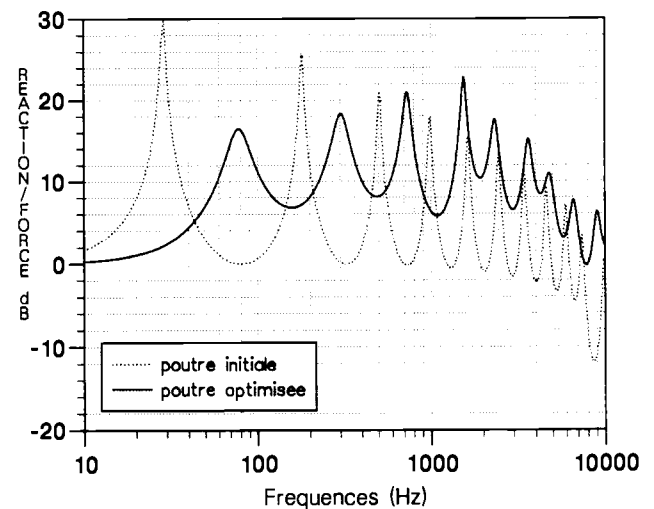


- OPTIMISATION 2 : $\hat{g}_T = 1.2$ $\hat{g}_f = -3$.

FLEXIBILITE DYNAMIQUE DE LA POUTRE



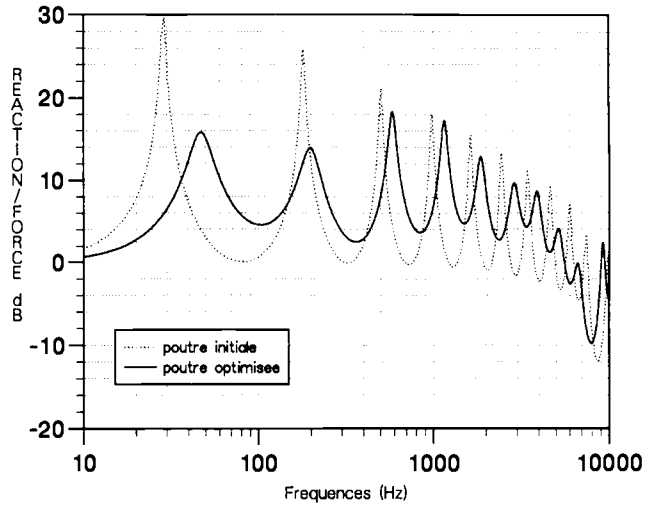
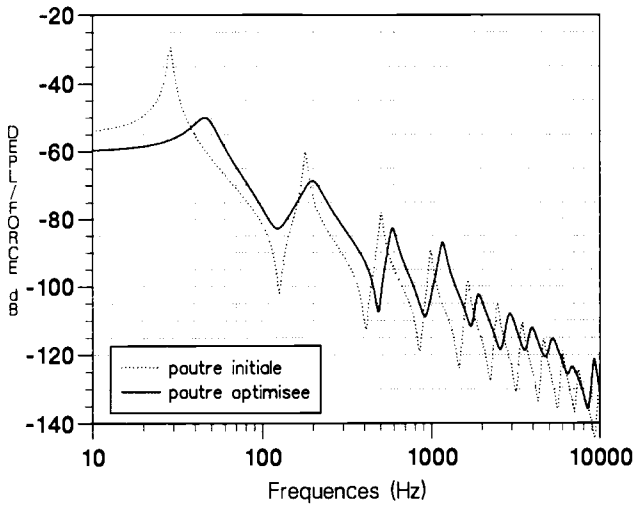
TRANSMISSIBILITE DYNAMIQUE DE LA POUTRE



- OPTIMISATION 3 : $\hat{g}_T = 1$, $\hat{g}_f = -2.5$

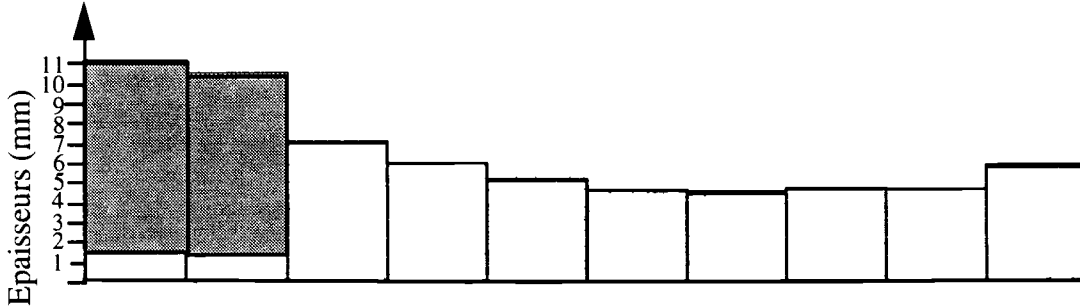
FLEXIBILITE DYNAMIQUE DE LA POUTRE

TRANSMISSIBILITE DYNAMIQUE DE LA POUTRE



IV.5.7.1.1 REPARTITION OPTIMALE DES MATERIAUX CONSTITUANT LA POUTRE

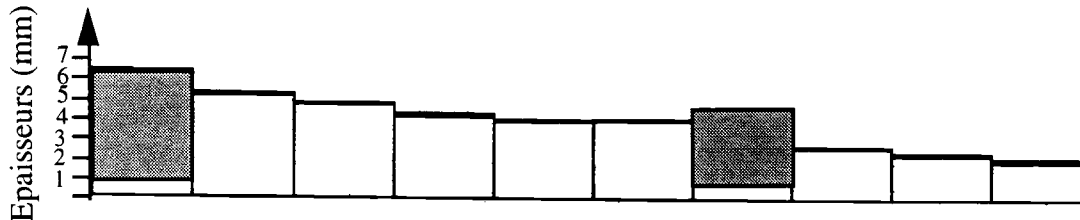
- OPTIMISATION 1



- OPTIMISATION 2

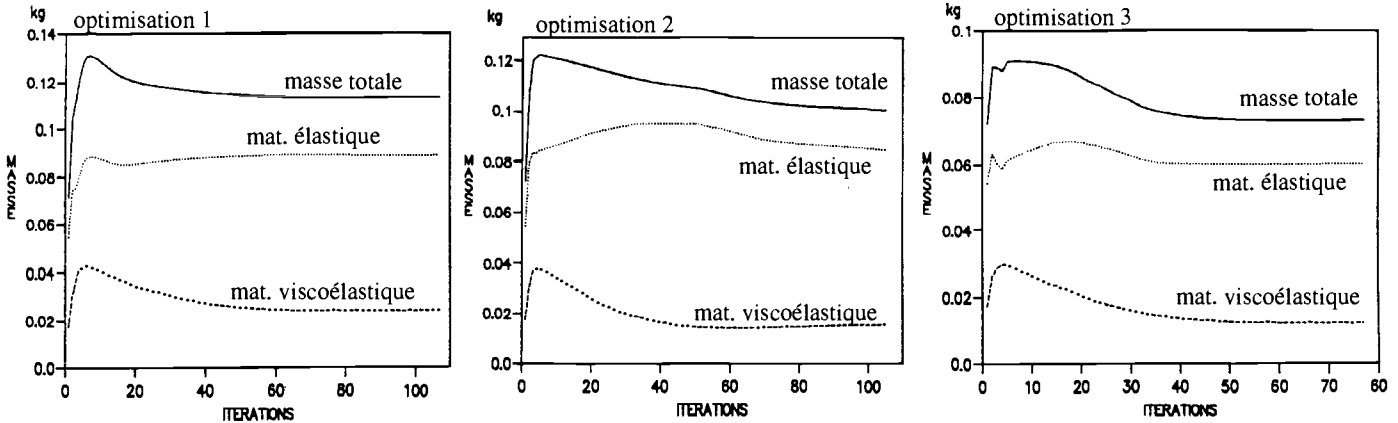


- OPTIMISATION 3



IV.5.7.1.2 VITESSE DE CONVERGENCE

EVOLUTION DE LA MASSE TOTALE DE LA POUTRE



L'optimisation n° 1 correspond à des contraintes draconiennes par rapport aux deux autres calculs d'optimisation (g_T initial = 0.56 , g_f initial = 1.59 pour l'optimisation 1, g_T initial = 0.36 , g_f initial = 1.59 pour l'optimisation 2, g_T initial = 0.56 , g_f initial = 1.09 pour l'optimisation 3) : même si les grandeurs \hat{g}_T et \hat{g}_f n'ont pas de signification purement physique, on sait a priori que plus elles seront faibles plus les niveaux en flexibilité et transmissibilité seront atténués (voir équation (IV.16)). C'est pourquoi, pour le cas d'optimisation n°1, le profil optimal correspond à une masse supérieure aux deux autres cas.

En ce qui concerne le transfert en transmissibilité dynamique, les résultats montrent que pour le cas d'optimisation n° 1, le mode dominant est le deuxième mode, alors que pour les deux autres cas, ce sont les troisièmes et quatrièmes modes qui sont prépondérants. A priori chaque modes est susceptible d'avoir une participation importante pour le transfert en transmissibilité, ce qui justifie le fait de prendre en compte tous les modes dans l'expression de la contrainte en transmissibilité.

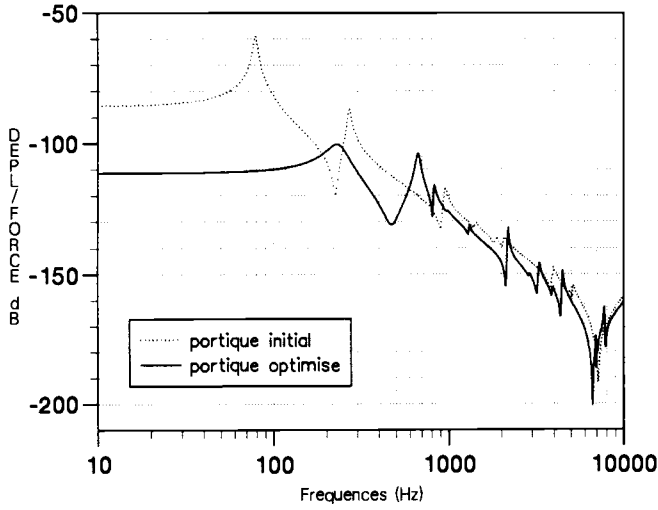
En règle générale, on observe que l'algorithme d'optimisation tend à concentrer toute la masse du matériau viscoélastique à l'encastrement et parallèlement à réduire l'épaisseur du matériau élastique du premier élément.

IV.5.7.2 PORTIQUE BI-ENCASTRE

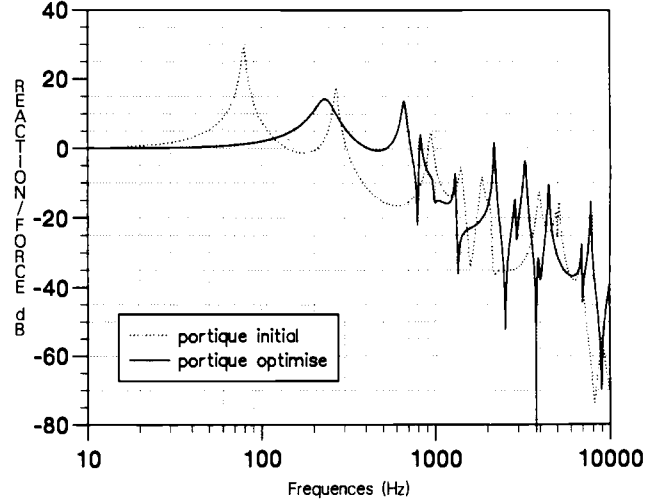
On a procédé à trois optimisations, une pour le cas de charge horizontal et deux pour le cas de charge vertical, correspondant à des valeurs différentes de \hat{g}_T et \hat{g}_f .

- OPTIMISATION 1 : $\hat{g}_T = 0.8$ $\hat{g}_f = -5$.

FLEXIBILITE DYNAMIQUE DU PORTIQUE
CHARGEMENT HORIZONTAL

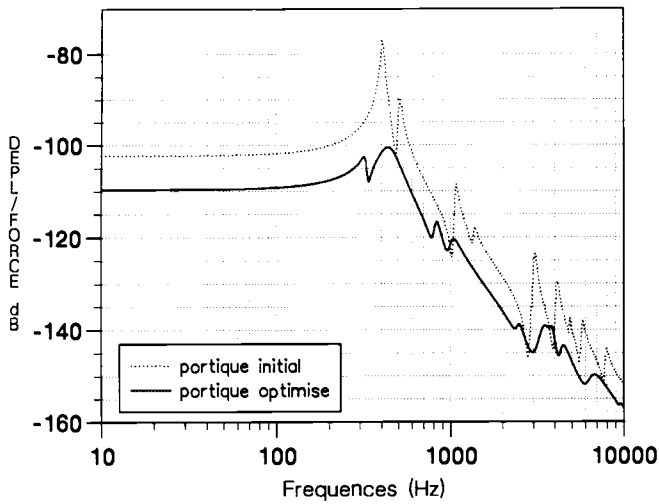


TRANSMISSIBILITE DYNAMIQUE DU PORTIQUE
CHARGEMENT HORIZONTAL

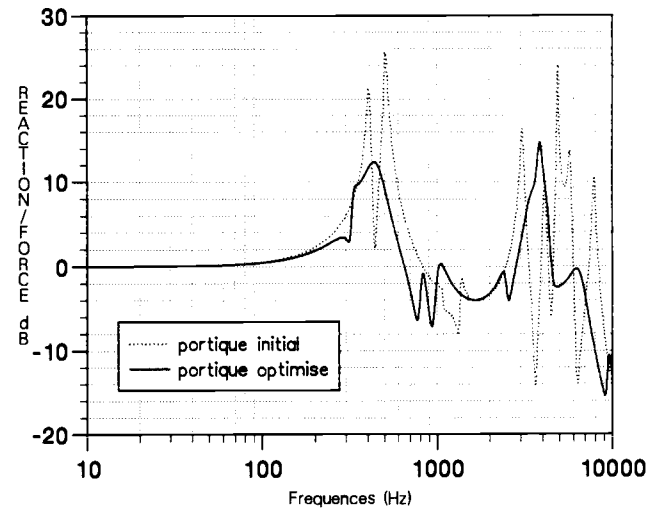


- OPTIMISATION 2 : $\hat{g}_T = 0.8$ $\hat{g}_f = -5$.

FLEXIBILITE DYNAMIQUE DU PORTIQUE
CHARGEMENT VERTICAL

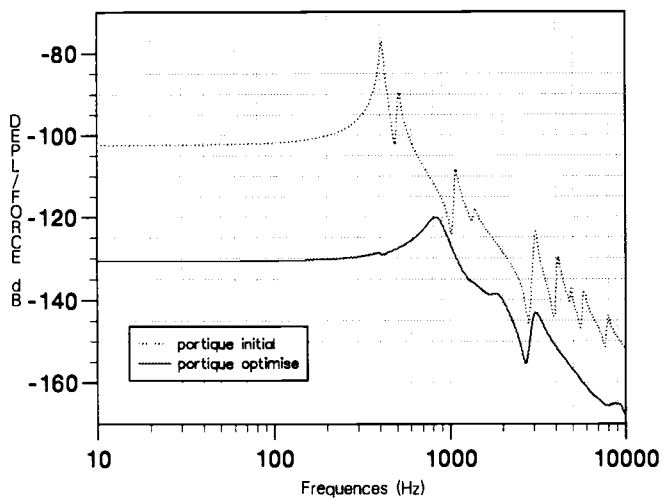


TRANSMISSIBILITE DYNAMIQUE DU PORTIQUE
CHARGEMENT VERTICAL

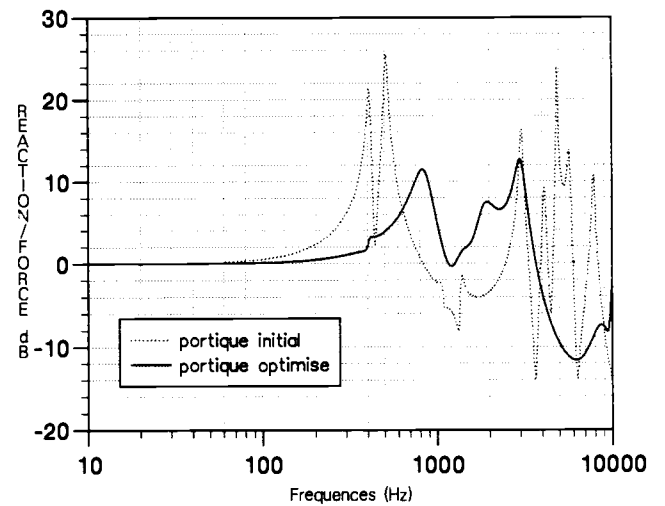


- OPTIMISATION 3 : $\hat{g}_T = 0.7$ $\hat{g}_f = -6$.

FLEXIBILITE DYNAMIQUE DU PORTIQUE
CHARGEMENT VERTICAL

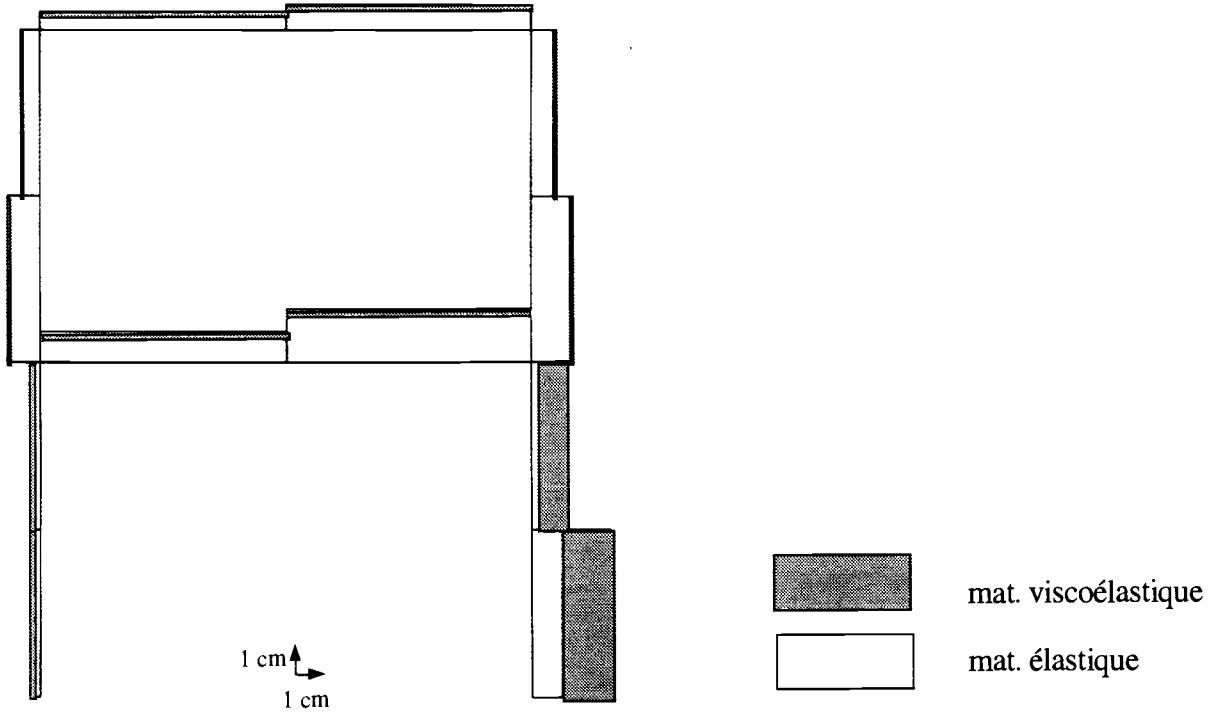


TRANSMISSIBILITE DYNAMIQUE DU PORTIQUE
CHARGEMENT VERTICAL

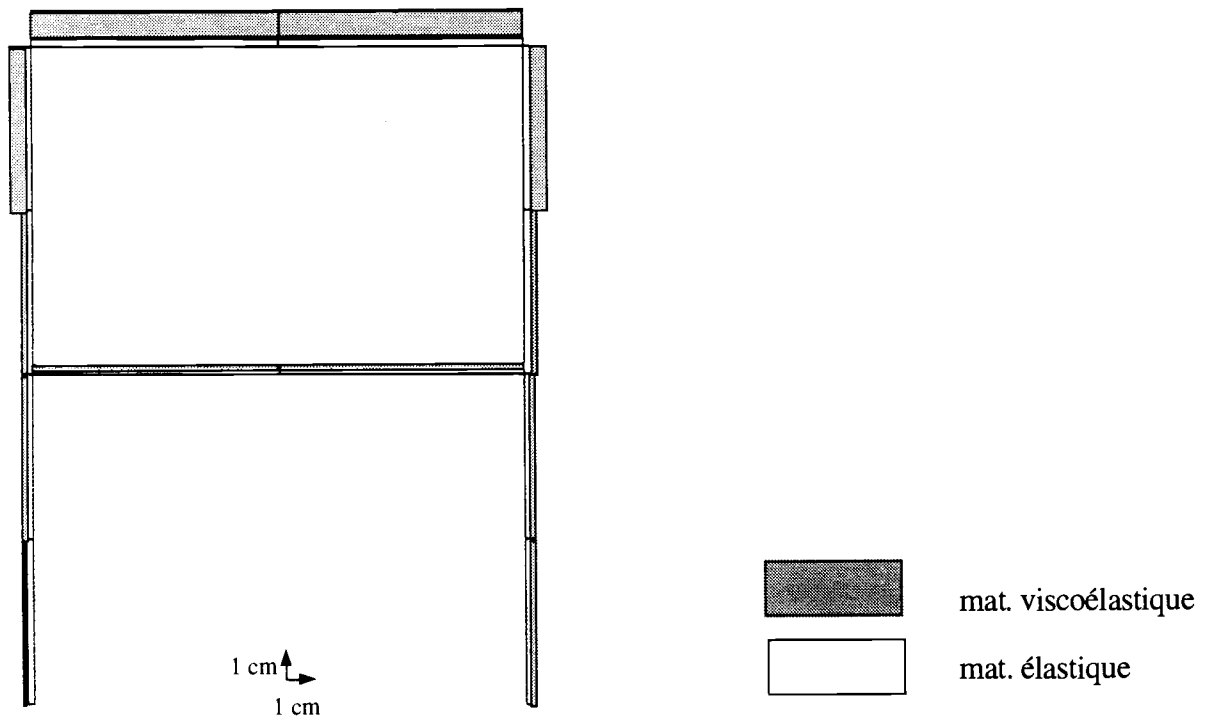


IV.5.7.2.1 REPARTITION OPTIMALE DES MATERIAUX CONSTITUANT LE PORTIQUE

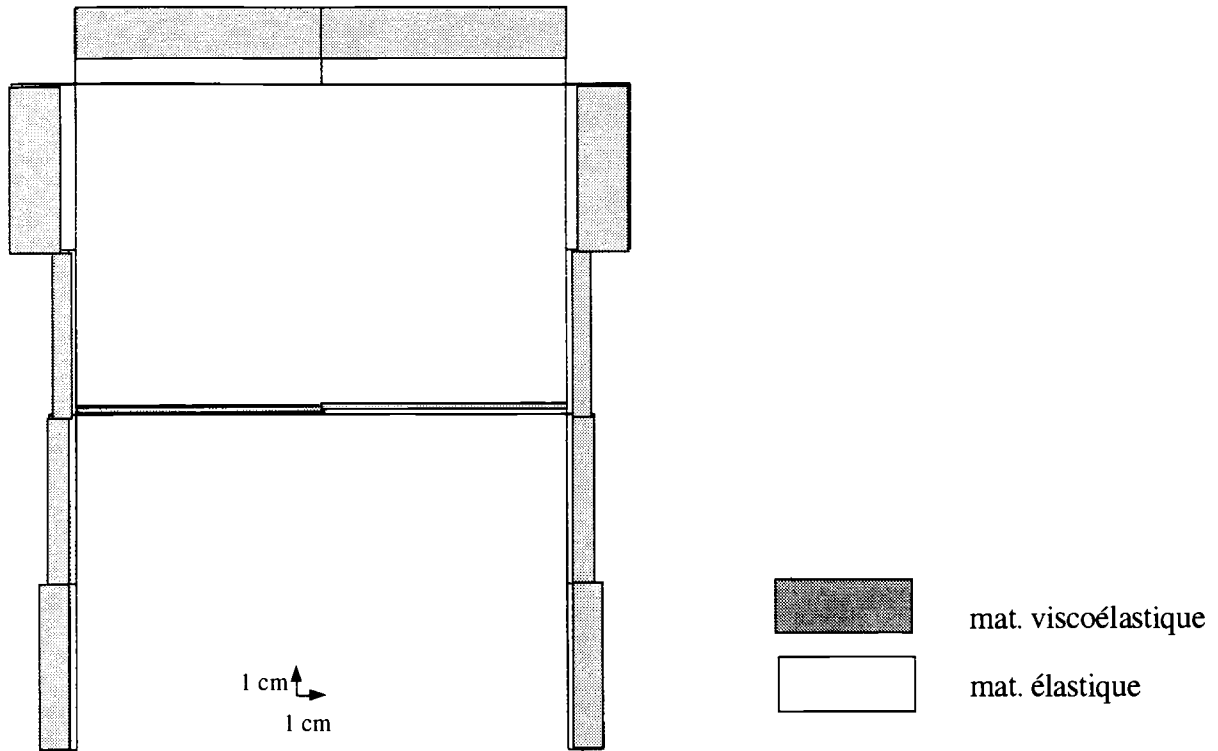
- OPTIMISATION 1



- OPTIMISATION 2

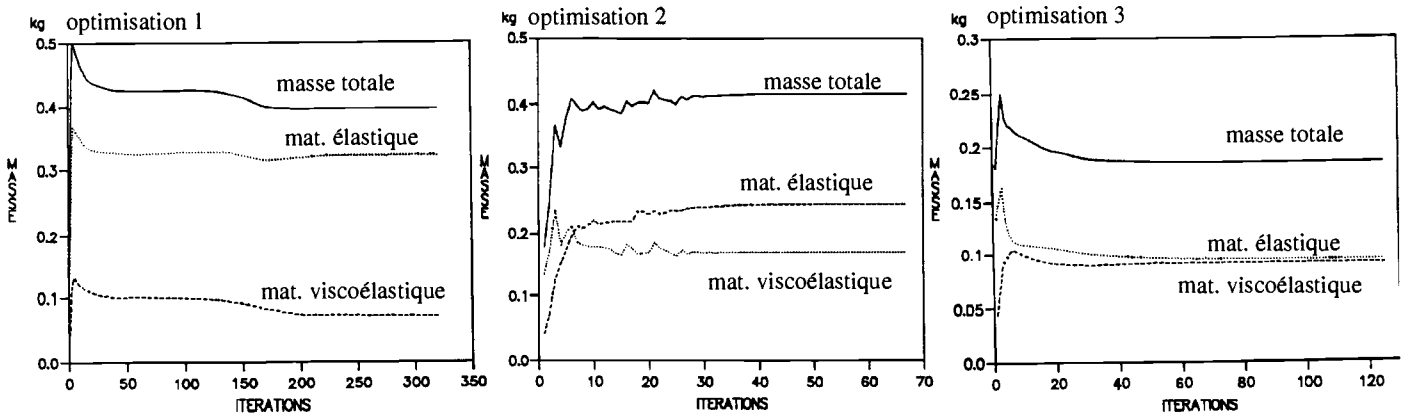


- OPTIMISATION 3



VI.5.7.2.2 VITESSE DE CONVERGENCE

EVOLUTION DE LA MASSE TOTALE DU PORTIQUE



IV.6 CAS DE L'AMORTISSEMENT VARIABLE

Jusqu'ici, nous avons considéré que le matériau viscoélastique était modélisé par un module d'Young et un facteur de perte indépendants de la fréquence. Dans la réalité, ces deux grandeurs sont bien évidemment fonctions de la fréquence (voir figure 4.1).

Nous montrerons dans ce paragraphe comment prendre en compte par une approche modale les lois d'évolution en fonction de la fréquence des caractéristiques des matériaux amortissants.

IV.6.1 INTERPOLATION LINEAIRE DES CARACTERISTIQUES VISCOELASTIQUES

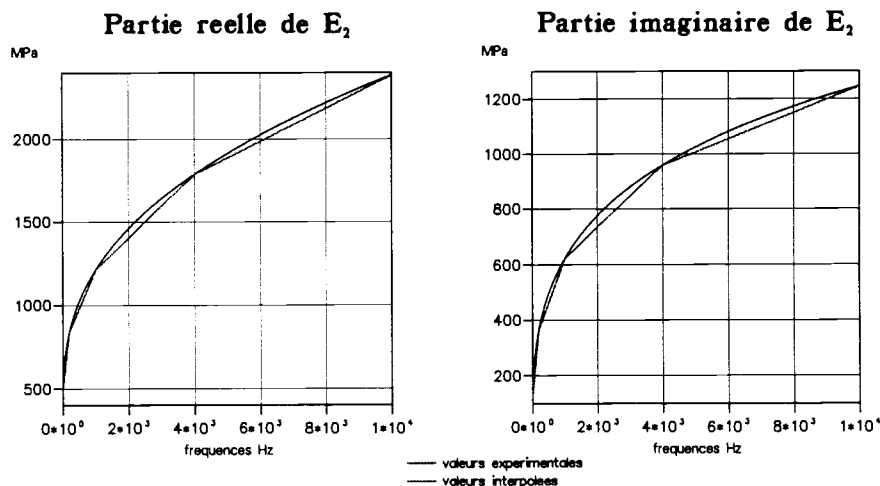
Nous exploiterons les courbes expérimentales du module d'Young et du facteur de perte d'un matériau viscoélastique en interpolant linéairement les valeurs mesurées sur quatre bandes de fréquences : [0 Hz, 200 Hz], [200 Hz, 1000 Hz], [1000 Hz, 4000 Hz], [4000 Hz, 10000 Hz]. On appellera f_{inf} et f_{sup} les fréquences délimitant chaque bande (ω_{inf} et ω_{sup} pour les pulsations). Les modules d'Young et facteur de perte s'écriront alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{2R}(\omega) = \left[E_{2R}(\omega_{inf}) - \omega_{inf} \frac{E_{2R}(\omega_{sup}) - E_{2R}(\omega_{inf})}{\omega_{sup} - \omega_{inf}} \right] + \omega \left[\frac{E_{2R}(\omega_{sup}) - E_{2R}(\omega_{inf})}{\omega_{sup} - \omega_{inf}} \right] \\ E_{2I}(\omega) = \left[E_{2I}(\omega_{inf}) - \omega_{inf} \frac{E_{2I}(\omega_{sup}) - E_{2I}(\omega_{inf})}{\omega_{sup} - \omega_{inf}} \right] + \omega \left[\frac{E_{2I}(\omega_{sup}) - E_{2I}(\omega_{inf})}{\omega_{sup} - \omega_{inf}} \right] \end{array} \right. \quad (IV.30)$$

où l'on note E_{2R} et E_{2I} les parties réelles et imaginaires du module d'Young complexe \overline{E}_2 :

$$\overline{E}_2 = E_2 (1 + j \eta_2) = E_{2R} + j E_{2I} \quad (IV.31)$$

CARACTERISTIQUES DU MATERIAU AMORTISSANT



Remarques :

Les matériaux viscoélastiques utilisés pour les revêtements ont des caractéristiques différentes de ceux utilisés en cisaillement soit pour la fabrication d'absorbeurs dynamiques amortis comme nous avons pu le voir dans le chapitre II, soit pour la réalisation de structures sandwichs. En général, ils ont un module d'Young plus élevé car on montre que le rapport η / η_2 dépend non seulement de l'épaisseur relative du revêtement, mais également du contraste de module d'élasticité de la poutre de base et du matériau amortissant : η / η_2 est une fonction croissante de E_2/E_1 (voir référence [D17]).

La dernière bande de fréquence a peu d'intérêt pour les modèles que nous allons étudier. En effet, le maillage de la poutre et du portique ne permettent pas de calculer de manière fiable, du point de vue physique, des fréquences propres aussi élevées. Mais comme nous n'avons pas effectué de troncature modale, il se peut que l'on trouve des modes dans ces domaines fréquentiels. Toutefois leur contribution aux fonctions de transfert est toujours très faible.

IV.6.2 CALCUL DES MATRICES ELEMENTAIRES ET ASSEMBLAGE

Si l'on considère que l'axe neutre d'un élément de poutre monocouche vaut à peu près $0.5 h_1$, ce qui est a priori légitime compte tenu de la différence d'ordre de grandeur entre E_1 et $|\overline{E}_2|$ ($|\overline{E}_2| \ll E_1$), les matrices de raideur élémentaires relatives aux deux matériaux sont alors linéaires par rapport aux modules d'Young. La formule (IV.6) donnant l'expression des moments d'inertie I_1 et I_2 devient :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{b h_1^3}{12} \\ I_2 = \frac{b h_2^3}{12} + \frac{b h_2 [h_1 + h_2]^2}{4} \end{cases} \quad (IV.32)$$

On peut factoriser les termes E_1 et \overline{E}_2 dans les matrices de raideur élémentaires :

$$\begin{cases} [K_e]_{(E_1, h_1, h_2)}^1 = E_1 [S_e]_{(h_1, h_2)}^1 \\ [K_e]_{(E_2, h_1, h_2)}^2 = \overline{E}_2 [S_e]_{(h_1, h_2)}^2 \end{cases} \quad (IV.33)$$

En assemblant les matrices élémentaires $[S_e]^1$ et $[S_e]^2$ qui donneront $[S_1]$ et $[S_2]$ et compte tenu de la dépendance fréquentielle de \overline{E}_2 , on obtient l'équation du mouvement de la structure

$$-\omega^2 M q + A q + B \omega q + j C q + j D \omega q = F$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = E_1 [S_1] + \left[E_{2R}(\omega_{inf}) - \omega_{inf} \left(\frac{E_{2R}(\omega_{sup}) - E_{2R}(\omega_{inf})}{\omega_{sup} - \omega_{inf}} \right) \right] [S_2] \\ B = \left(\frac{E_{2R}(\omega_{sup}) - E_{2R}(\omega_{inf})}{\omega_{sup} - \omega_{inf}} \right) [S_2] \\ C = \left[E_{2I}(\omega_{inf}) - \omega_{inf} \left(\frac{E_{2I}(\omega_{sup}) - E_{2I}(\omega_{inf})}{\omega_{sup} - \omega_{inf}} \right) \right] [S_2] \\ D = \left(\frac{E_{2I}(\omega_{sup}) - E_{2I}(\omega_{inf})}{\omega_{sup} - \omega_{inf}} \right) [S_2] \end{array} \right. \quad (IV.34)$$

L'équation du mouvement (IV.34) n'est valable que sur la bande fréquentielle d'étude $[f_{inf}, f_{sup}]$. Si l'on s'intéresse à la réponse large bande de la structure, il faudra alors écrire quatre équations du mouvement pour lesquelles les matrices A, B, C et D dépendront des valeurs ω_{inf} , ω_{sup} .

IV.6.3 FORMULATION DES TRANSFERTS DYNAMIQUES

En effectuant le changement de variable :

$$q \rightarrow \begin{bmatrix} q \\ j \omega q \end{bmatrix} \quad (IV.35)$$

l'équation (IV.34) s'écrit :

$$j \omega \begin{bmatrix} D - j B & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ j \omega q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A + j C & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ j \omega q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (IV.36)$$

Si le nombre de ddl est p, le problème dynamique est alors de dimension 2p. Pour simplifier les notations on appellera \widehat{M} et \widehat{K} les matrices $2p \times 2p$ intervenant dans l'équation (IV.36) et \widehat{q} le vecteur déplacement de dimension 2p :

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} D - j B & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} A + j C & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}, \quad \widehat{q} = \begin{bmatrix} q \\ j \omega q \end{bmatrix} \quad (IV.37)$$

Distinguons les ddl de jonction \hat{q}_j et les ddl libres \hat{q}_i , L'équation du mouvement (IV.36) s'écrit alors :

$${}^j \omega \begin{bmatrix} \widehat{M}_{jj} & \widehat{M}_{ji} \\ \widehat{M}_{ij} & \widehat{M}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_j \\ \hat{q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{K}_{jj} & \widehat{K}_{ji} \\ \widehat{K}_{ij} & \widehat{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_j \\ \hat{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_j \\ F_i \end{bmatrix} \quad (IV.38)$$

Comme précédemment, on exprime le mouvement de la structure en le décomposant en un mouvement d'entraînement dû à la jonction et un mouvement relatif dans la base des modes propres φ_k qui sont complexes et de dimension $2n$ (n étant le nombre de ddl libres, $n < p$) :

$$\hat{q}_i = \Phi_{ij} \hat{q}_j + \varphi_{ik} \mu_k \quad (IV.39)$$

Φ_{ij} désigne toujours la matrice réelle des modes statiques de jonction, indépendante des épaisseurs des éléments de la structure dans le cas isostatique.

On résout l'équation du mouvement (IV.38) en effectuant le changement de base classique :

$$\begin{bmatrix} \hat{q}_j \\ \hat{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_j \\ \mu_k \end{bmatrix} \quad (IV.40)$$

L'équation du mouvement s'écrit alors dans la base des modes à jonction fixe :

$${}^j \omega \begin{bmatrix} \overline{M}_{jj} & L^t \\ L & \widehat{m}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_j \\ \mu_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{K}_{jj} & 0 \\ 0 & \widehat{k}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_j \\ \mu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_j + \Phi^t F_i \\ \varphi^t F_i \end{bmatrix} \quad (IV.41)$$

avec : $\overline{M}_{jj}, \overline{K}_{jj}$ matrices condensées à la jonction j
 L matrice de couplage modes de jonction/modes propres (ou facteurs de participation)
 $L = \varphi^t (\widehat{M}_{ii} \Phi + \widehat{M}_{ij})$
 $L_k = \varphi_k^t (\widehat{M}_{ii} \Phi + \widehat{M}_{ij})$ vecteur ligne n°k de L
 $\widehat{m}_k, \widehat{k}_k$ matrices diagonales de masse et raideur généralisées

IV.6.3.1 RESOLUTION DES EQUATIONS

Nous n'exposons pas le détail des calculs, le principe de résolution étant le même qu'au paragraphe IV.4.1. On obtient ainsi la matrice de transfert écrite sous forme analytique :

$$\begin{bmatrix} \hat{q}_i(\omega) \\ R_j(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_k H_k(\omega) j \frac{\varphi_k \varphi_k^t}{\omega_k \hat{m}_k} & \sum_k H_k(\omega) \frac{\varphi_k L_k}{\hat{m}_k} \\ \sum_k H_k(\omega) \frac{L_k^t \varphi_k^t}{\hat{m}_k} & j \omega \sum_k H_k(\omega) \frac{L_k^t L_k}{\hat{m}_k} + \overline{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i(\omega) \\ \hat{q}_j(\omega) \end{bmatrix} \quad (IV.42)$$

où l'amplification dynamique modale H_k s'écrit en fonction des pulsations propres complexes ω_k :

$$H_k(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega}{\omega_k}} = \frac{\omega_{kR} + j \omega_{kI}}{(\omega_{kR} - \omega) + j \omega_{kI}} \quad (IV.43)$$

avec : ω_{kR} partie réelle de ω_k
 ω_{kI} partie imaginaire de ω_k

De même que précédemment, on définit des paramètres effectifs complexes :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ii,k} &= j \frac{\varphi_k \varphi_k^t}{\omega_k \hat{m}_k} \quad \text{matrice de flexibilité effective (mode } n^\circ k) \\ \tilde{T}_{ij,k} &= \frac{\varphi_k L_k}{\hat{m}_k} \quad \text{matrice de transmissibilité effective (mode } n^\circ k) \\ \tilde{M}_{jj,k} &= \frac{L_k^t L_k}{\hat{m}_k} \quad \text{matrice de masse effective (mode } n^\circ k) \end{aligned} \quad (IV.44)$$

IV.6.4 DEFINITION DES CONTRAINTES

Les contraintes en transmissibilité et flexibilité sont définies comme pour le paragraphe IV.5.1, en n'oubliant pas de ne calculer que les réponses modales correspondant aux fréquences propres appartenant à la gamme fréquentielle d'étude. Du point de vue numérique, la synthèse modale est beaucoup plus lourde qu'auparavant puisque d'une part on diagonalise des matrices de taille $2n \times 2n$ et d'autre part on réitère les mêmes calculs pour chaque gamme. On peut cependant réduire ce coût en opérant une troncature modale, c'est-à-dire en ne calculant à chaque fois que les modes dans la bande

fréquentielle retenue et quelques autres en dehors pour une meilleure approximation des termes de réponses résiduels (voir paragraphe I.3.2.4).

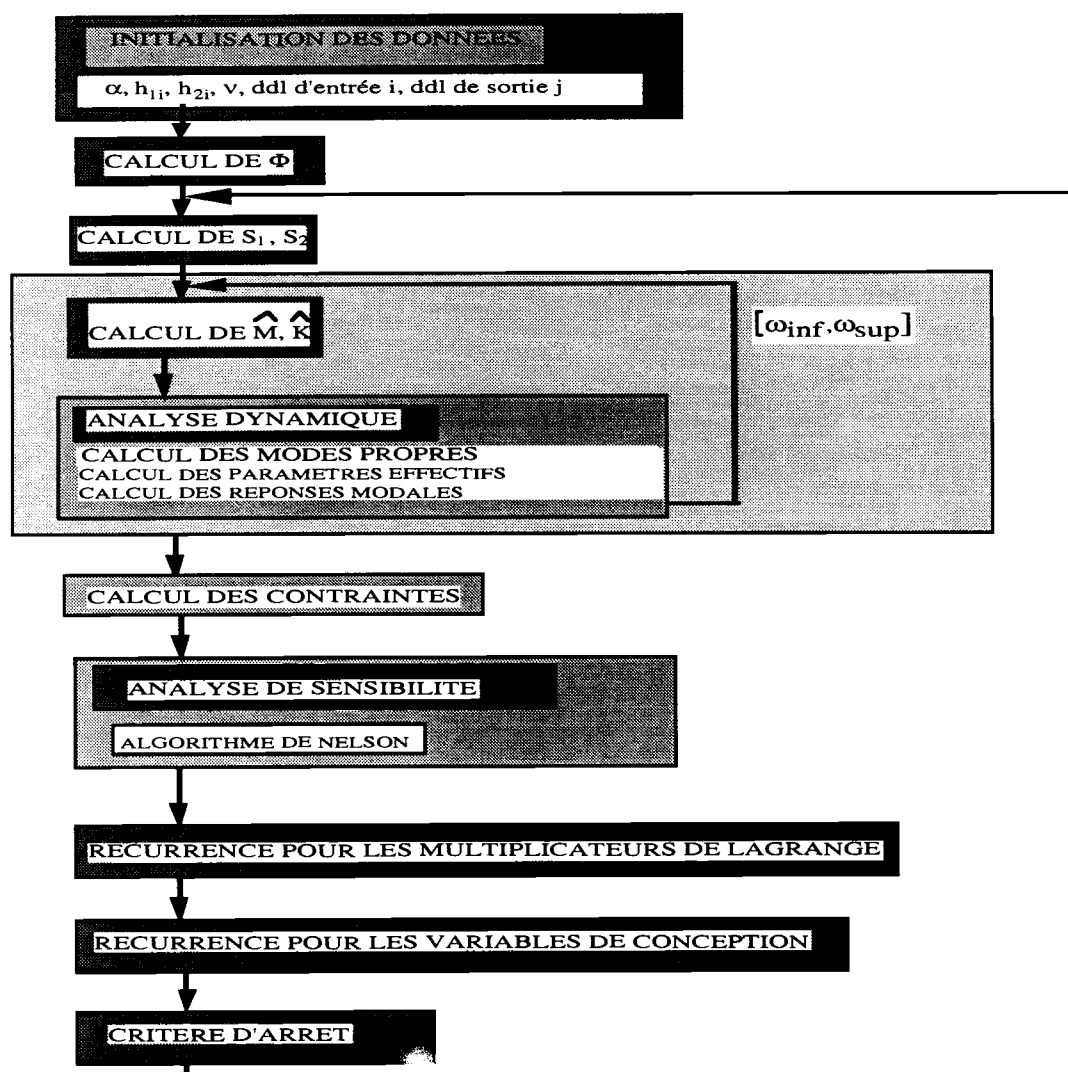
$$g_T(h_{1i}, h_{2i}) = \frac{1}{4} \log \left[\sum_{\substack{\text{gammes} \\ \text{fréquentielles} \\ [\omega_{inf}, \omega_{sup}]}} \left(\sum_{\substack{RE(\omega_k) < RE(\omega_{sup}) \\ RE(\omega_{inf}) < RE(\omega_k)}} \left| \sum_{l=1}^n H_l(RE(\omega_k), \omega_{inf}, \omega_{sup}) \tilde{T}_{ij,l}(\omega_{inf}, \omega_{sup}) \right|^4 \right) \right] - \hat{g}_T$$

réponse à la pulsation propre $RE(\omega_k)$
dans la gamme $[\omega_{inf}, \omega_{sup}]$

idem pour g_f (IV.45)

En ce qui concerne le problème d'optimisation, on applique l'algorithme d'optimisation exposé dans le paragraphe IV.5, en particulier les relations de récurrence (IV.22) pour les variables de conception et (IV.27) pour les multiplicateurs de Lagrange.

IV.6.5 ORGANIGRAMME COMPLET

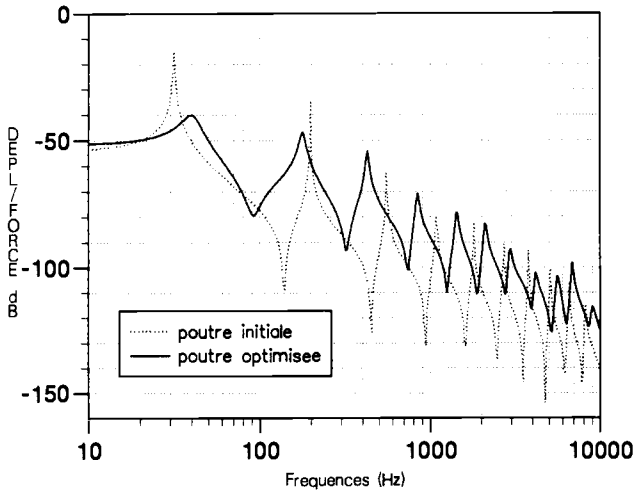


IV.6.6 APPLICATIONS

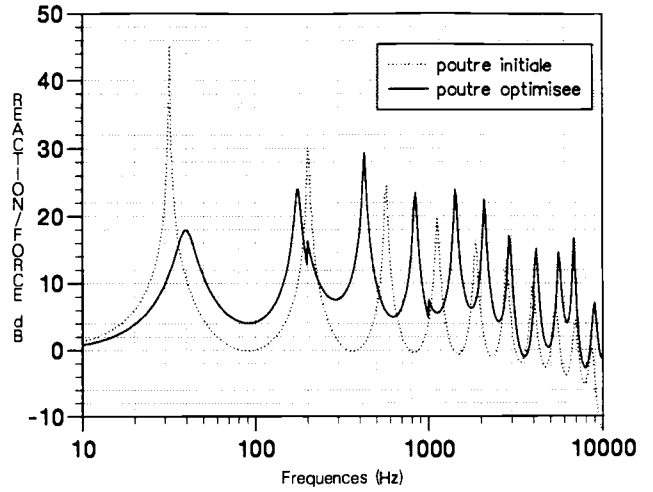
Nous avons appliqué l'algorithme d'optimisation aux deux structures déjà définies auparavant, la poutre cantilever et le portique bi-encasté.

IV.6.6.1 POUTRE CANTILEVER

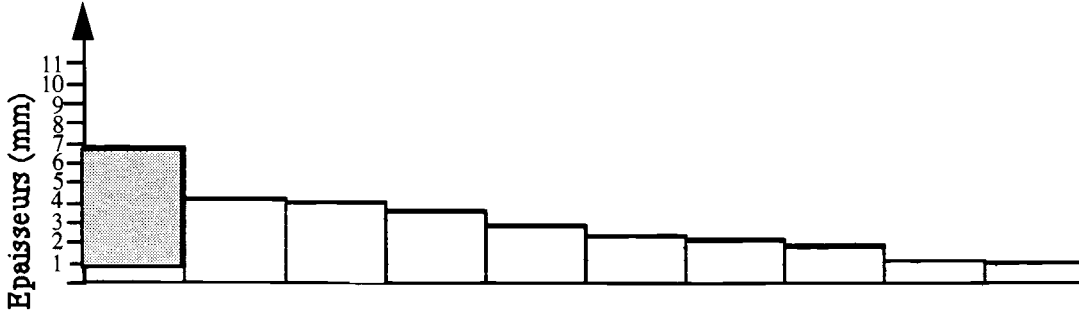
FLEXIBILITE DYNAMIQUE DE LA POUTRE



TRANSMISSIBILITE DYNAMIQUE DE LA POUTRE

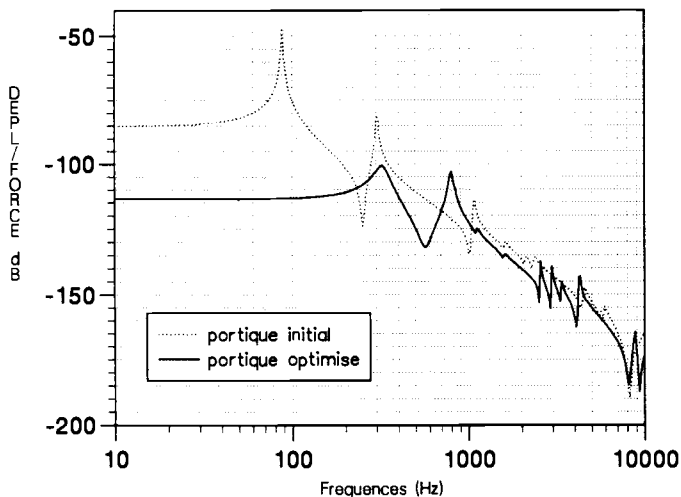


IV.6.6.1.1 REPARTITION OPTIMALE DES MATERIAUX CONSTITUANT LA POUTRE

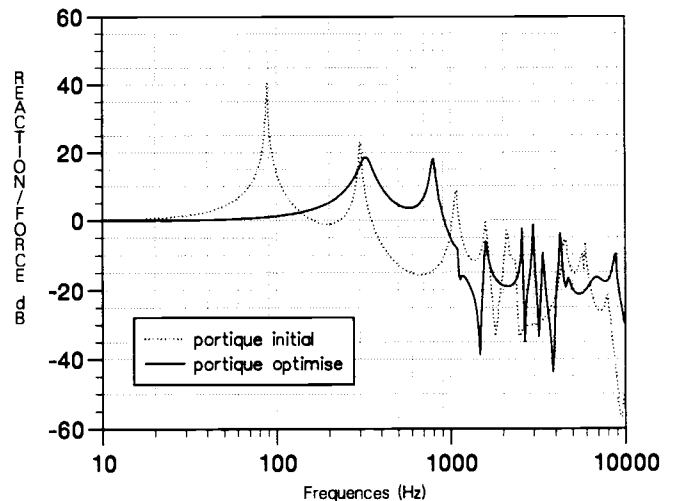


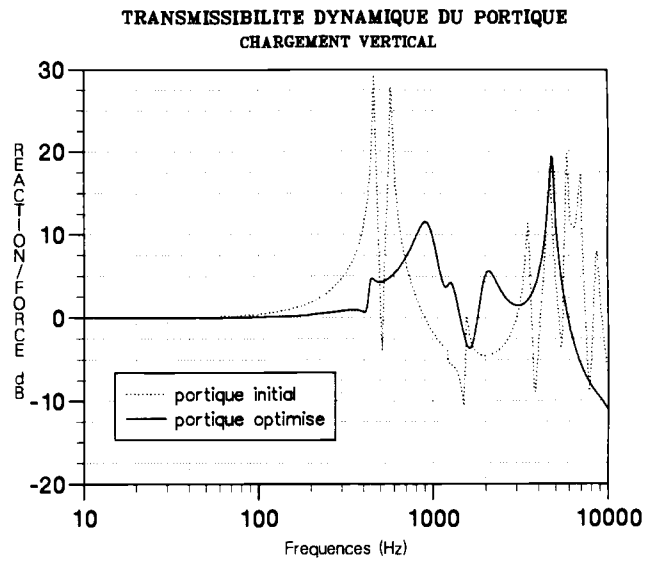
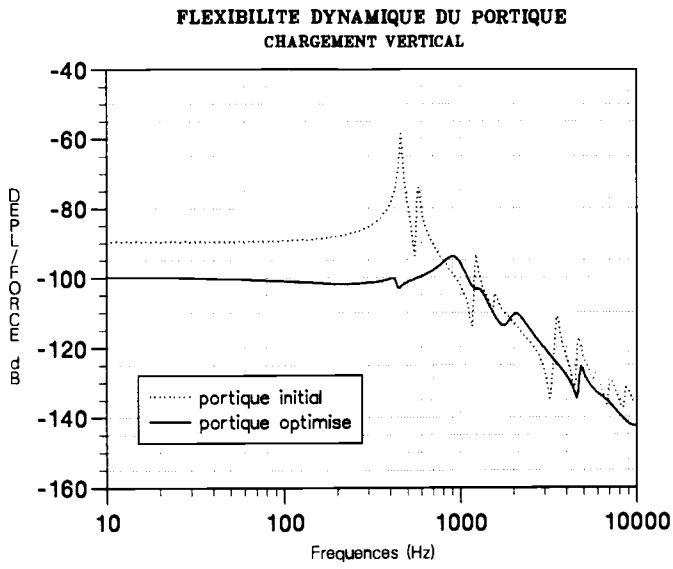
IV.6.6.2 PORTIQUE BI-ENCASTRE

FLEXIBILITE DYNAMIQUE DU PORTIQUE
CHARGEMENT HORIZONTAL



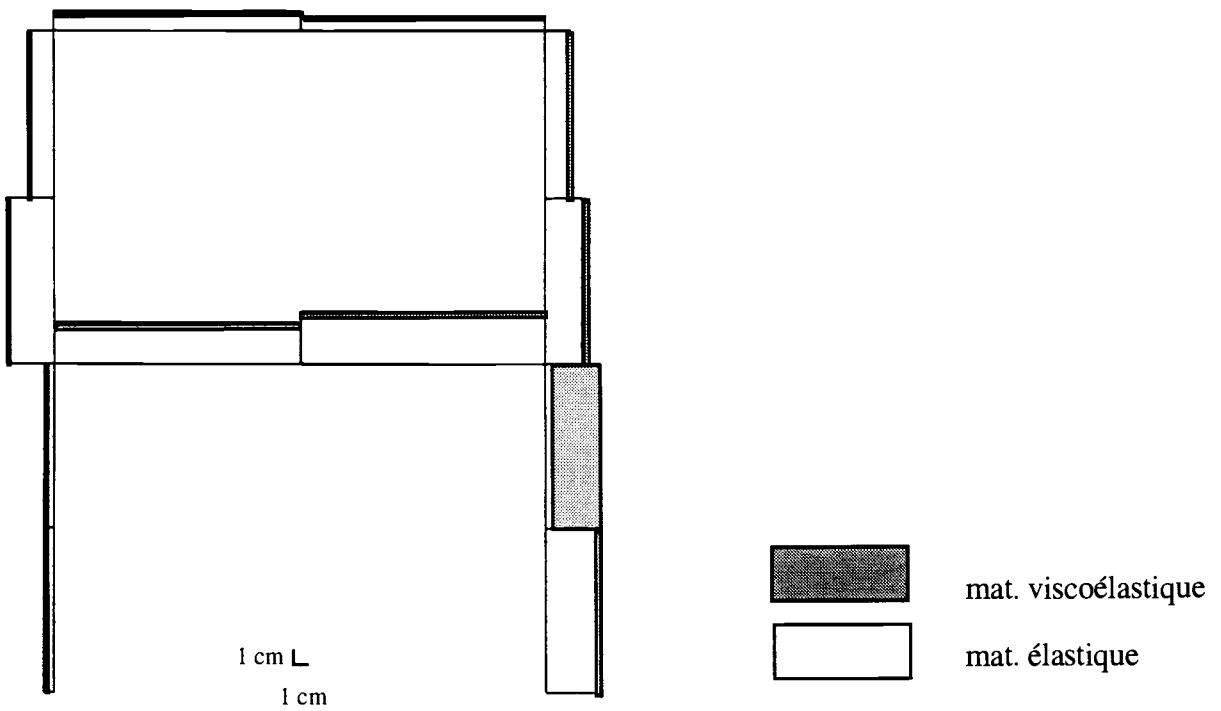
TRANSMISSIBILITE DYNAMIQUE DU PORTIQUE
CHARGEMENT HORIZONTAL



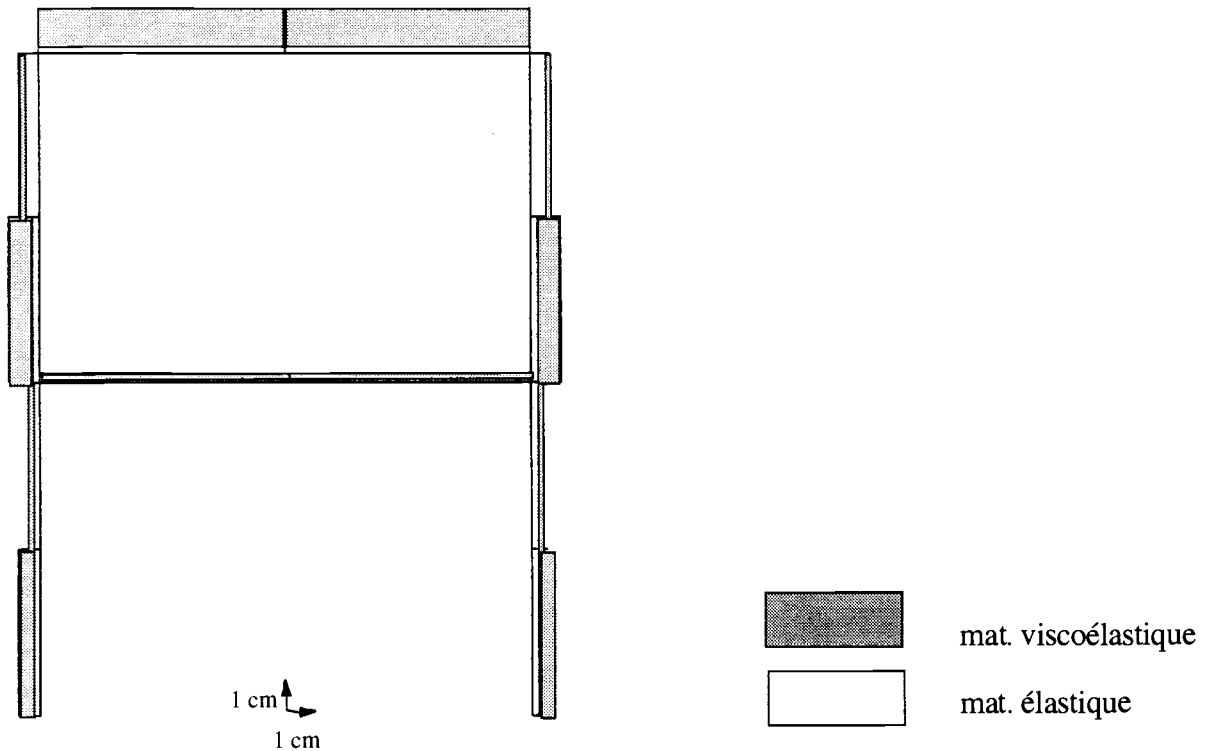


IV.6.6.2.1 REPARTITION OPTIMALE DES MATERIAUX CONSTITUANT LE PORTIQUE

- EXCITATION HORIZONTALE



- EXCITATION VERTICALE



IV.7 OPTIMISATION DE STRUCTURES SANDWICH

L'utilisation de matériaux viscoélastique comme revêtement nécessite de leur part un module d'Young relativement élevé (voir remarque paragraphe IV.6.1). Or, en général plus un matériau viscoélastique a un module d'élasticité élevé, plus il a un coefficient d'amortissement faible.

Pour tirer profit des forts coefficients d'amortissement à faible module d'Young, on a été conduit à imaginer un autre processus d'utilisation du matériau viscoélastique qui repose sur l'idée de contraindre la couche visco-élastique par une plaque élastique collée à sa partie supérieure (voir figure 4.4). Considérant toujours le cas d'une poutre sollicitée en flexion, on peut montrer que le matériau viscoélastique va cette fois travailler au cisaillement.

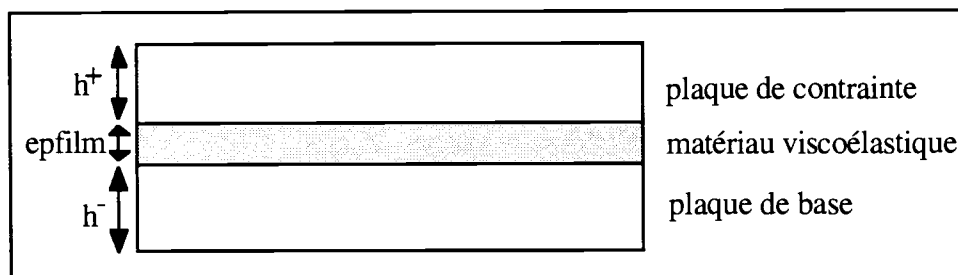
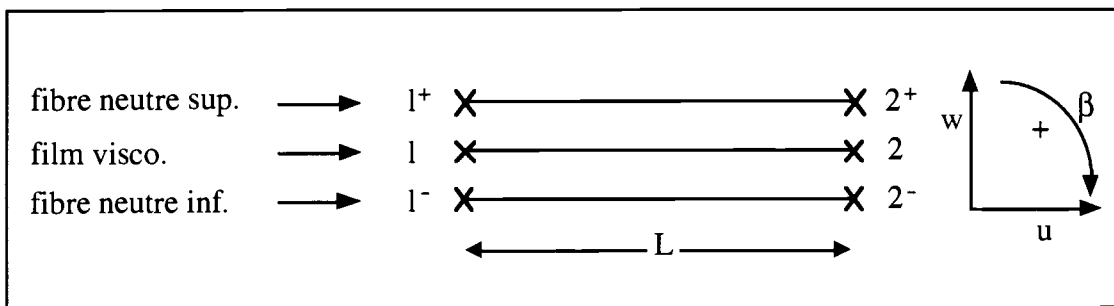


figure 4.4 : élément poutre sandwich

Nous présentons dans ce paragraphe une méthode d'optimisation de l'épaisseur des couches élastiques d'une structure sandwich suivant des contraintes en transmissibilité et flexibilité dynamiques.

IV.7.1 DESCRIPTION DE L'ELEMENT POUTRE

Nous reprenons dans cette étude l'élément de poutre amortie à deux noeuds développé par M. Macé [D18]. Nous considérerons que la plaque de base et la plaque de contrainte sont constituées du même matériau. Nous appellerons indifféremment "peau" chacune de ces deux plaques.



A chaque noeud, sont associés les 4 ddl suivants :

$u^+(i)$: déplacement longitudinal de la fibre neutre de la peau supérieure	
$u^-(i)$: déplacement longitudinal de la fibre neutre de la peau inférieure	
$w(i)$: déplacement transversal (constant dans l'épaisseur)	
$\beta(i)$: rotation de la normale (supposée égale pour les deux peaux)	$i = 1 \text{ ou } 2$

IV.7.2 CALCUL DES MATRICES DE RAIDEUR ELEMENTAIRES

La matrice de raideur élémentaire est obtenue par assemblage consistant à ajouter les matrices de contribution des peaux épaisses (matériau élastique) d'une part et de glissement (cisaillement transversal), correspondant au film viscoélastique d'autre part.

IV.7.2.1 CONTRIBUTION DES PEAUX

La matrice de raideur élémentaire élastique correspondant aux peaux est notée K_p . Elle résulte des effets de membrane et de flexion avec prise en compte du cisaillement transversal. Ces effets sont découplés car les peaux sont supposées homogènes dans cette étude.

Chapitre IV

En ce qui concerne les effets de flexion, M. Macé a modélisé les peaux en prenant en compte le cisaillement transversal de façon "exacte" au sens de Timoshenko [D19], sans verrouillage ("locking phenomenon"). Cependant, le cisaillement des peaux est négligeable par rapport au cisaillement global dû au film de viscoélastique. C'est pourquoi nous avons préféré modélisé les peaux comme des poutres du type Euler-Bernoulli.

Nous exhibons ci-dessous la matrice de raideur des deux peaux issue de l'assemblage des matrices de raideur individuelles de chacune des deux peaux :

MATRICE DE RAIDEUR ELEMENTAIRE DES PEAUX EPAISSES (K_p)

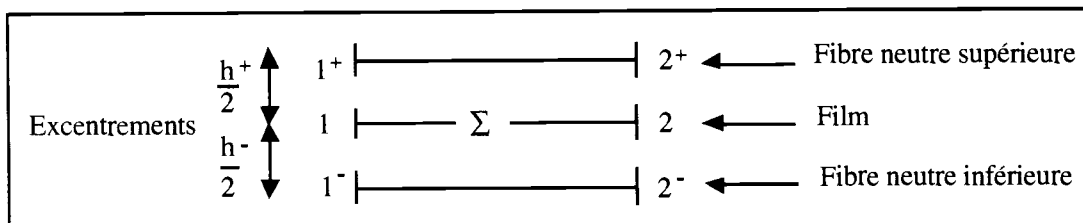
$u^+(1)$	$u^-(1)$	$w(1)$	$\beta(1)$	$\bar{u}^+(2)$	$\bar{u}^-(2)$	$w(2)$	$\beta(2)$
$\frac{ES^+}{L}$	0	0	0	$-\frac{ES^+}{L}$	0	0	0
	$\frac{ES^-}{L}$	0	0	0	$-\frac{ES^-}{L}$	0	0
		$\frac{12(D^+ + D^-)}{L^3}$	$\frac{6(D^+ + D^-)}{L^2}$	0	0	$-\frac{12(D^+ + D^-)}{L^3}$	$\frac{6(D^+ + D^-)}{L^2}$
			$\frac{4(D^+ + D^-)}{L}$	0	0	$\frac{6(D^+ + D^-)}{L^2}$	$\frac{2(D^+ + D^-)}{L}$
				$\frac{ES^+}{L}$	0	0	0
					$\frac{ES^-}{L}$	0	0
						$\frac{12(D^+ + D^-)}{L^3}$	$\frac{6(D^+ + D^-)}{L^2}$
							$\frac{4(D^+ + D^-)}{L}$

Sym.

Avec $D^\pm = E_p I_p^\pm$, $S^\pm = b h^\pm$, $I_p^\pm = \frac{b}{12} (h^\pm)^3$ (IV.46)

b étant la largeur de l'élément poutre.

IV.7.2.2 CONTRIBUTION ELASTIQUE DU FILM



Dans la formulation variationnelle du problème, la contribution élastique du film viscoélastique à l'énergie de déformation est l'intégrale :

$$\mathcal{J} = \int_{\Sigma} k [[\vec{u}_T]]^2 d\Sigma = b k \int_0^L (u^+ - u^-)_{\Sigma}^2 dx \quad (\text{IV.47})$$

On choisit pour $u_{\Sigma}^{\pm}(x)$ (valeurs des déplacements longitudinaux aux deux interfaces Σ^{\pm} au point d'abscisse x) une interpolation linéaire (représentation isoparamétrique) :

$$u_{\Sigma}^{\pm}(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_{\Sigma}^{\pm}(1) + \left(\frac{x}{L}\right) u_{\Sigma}^{\pm}(2)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} u_{\Sigma}^+(i) &= u^+(i) - \frac{h^+}{2} \beta(i) \\ u_{\Sigma}^-(i) &= u^-(i) + \frac{h^-}{2} \beta(i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.48})$$

On calcule la matrice de raideur K_f analytiquement. Tous calculs faits, on obtient l'expression suivante sous forme explicite :

$$\mathcal{J} = \left(\frac{b k L}{6}\right) U^t \begin{bmatrix} 2C & C \\ C & 2C \end{bmatrix} U = U^t K_f U \quad (\text{IV.49})$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} U^t &= \left\{ u^+(1), u^-(1), w(1), \beta(1), u^+(2), u^-(2), w(2), \beta(2) \right\} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -d \\ -1 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & d & 0 & d^2 \end{bmatrix} \\ \text{où } d &= \frac{h^+ + h^-}{2} \text{ (distance des deux fibres neutres)} \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.50})$$

Remarques :

La matrice C peut être interprétée comme une matrice de couplage entre les deux peaux.

Chapitre IV

La matrice K_f tient compte des excentrement des peaux par rapport à Σ égaux respectivement à $\pm h^\pm/2$. On constate que l'élément de film viscoélastique peut être assimilé à un ensemble d'éléments ressorts parallèles à l'axe de la poutre ($b k L/6$ étant homogène à une raideur).

On identifie le coefficient k en écrivant la loi de comportement du matériau viscoélastique isotrope :

$$\sigma_T = G_f(1 + j \eta_f) \gamma \quad (IV.51)$$

On a supposé un profil linéaire des déplacements de membrane dans le film mince Σ . On a donc :

$$\gamma = \frac{[[u]]}{e_{\text{film}}} \quad (IV.52)$$

où $[[u]]$ désigne le saut de déplacement membranaire complexe aux interfaces Σ^+ et Σ^- , e_{film} est l'épaisseur du film Σ . Finalement, on obtient l'expression de k :

$k = \frac{G_f}{e_{\text{film}}} \quad (IV.53)$

IV.7.2.3 PRISE EN COMPTE DES AMORTISSEMENTS STRUCTURAUX DES MATERIAUX

On désigne respectivement par η_f et η_p les amortissements structuraux du film viscoélastique et des peaux. La matrice de raideur élémentaire résultante (de dimension 8×8) est alors :

$$K_e = (1 + j \eta_f) K_f + (1 + j \eta_p) K_p \approx (1 + j \eta_f) K_f + K_p \quad (IV.54)$$

On négligera l'amortissement structural des peaux par rapport à celui du film viscoélastique.

IV.7.3 CALCUL DES MATRICES DE MASSE ELEMENTAIRES

On ne tiendra pas compte des effets d'inertie dans le film viscoélastique, car d'une part le matériau viscoélastique est plus léger que les peaux et d'autre part son épaisseur est très faible.

Pour les peaux, le calcul de la matrice de masse élémentaire est effectué en tenant compte des masses inférieures et supérieures (m^\pm). La matrice de masse ainsi calculée est le résultat de l'assemblage des matrices de masse individuelles élémentaires des deux peaux.

MATRICE DE MASSE ELEMENTAIRE

$u^+(1)$	$u^-(1)$	$w(1)$	$\beta(1)$	$\bar{u}^+(2)$	$\bar{u}^-(2)$	$w(2)$	$\beta(2)$
$\frac{2m^+}{6}$	0	0	0	$\frac{m^+}{6}$	0	0	0
	$\frac{2m^-}{6}$	0	0	0	$\frac{m^+}{6}$	0	0
		$\frac{156 m}{420}$	$-\frac{22 L m}{420}$	0	0	$\frac{54 m}{420}$	$\frac{13 m}{420}$
			$\frac{4 L^2 m}{420}$	0	0	$-\frac{13 m}{420}$	$-\frac{3 L^2 m}{420}$
				$\frac{2m^+}{6}$	0	0	0
					$\frac{2m^-}{6}$	0	0
						$\frac{156 m}{420}$	$\frac{22 L m}{420}$
							$\frac{4 L^2 m}{420}$

Sym.

Avec $m^\pm = b \rho h^\pm L$ et $m = m^+ + m^-$ (IV.55)

IV.7.4 ASSEMBLAGE

L'élément poutre sandwich est, comme on l'a vu plus haut, constitué à partir d'un assemblage de 2 éléments poutre classiques, correspondant chacun à une peau.

Par ailleurs, pour un nœud situé entre 2 éléments pour lesquels les hauteurs (variables de conception) sont différentes, les fibres neutres de chaque peau sont discontinues comme le montre la figure 4.5.

Pour tenir compte de ce décalage entre les fibres neutres, on introduit des relations de corps rigide entre les ddl des nœuds A et B, d'une part, et C et D, d'autre part.

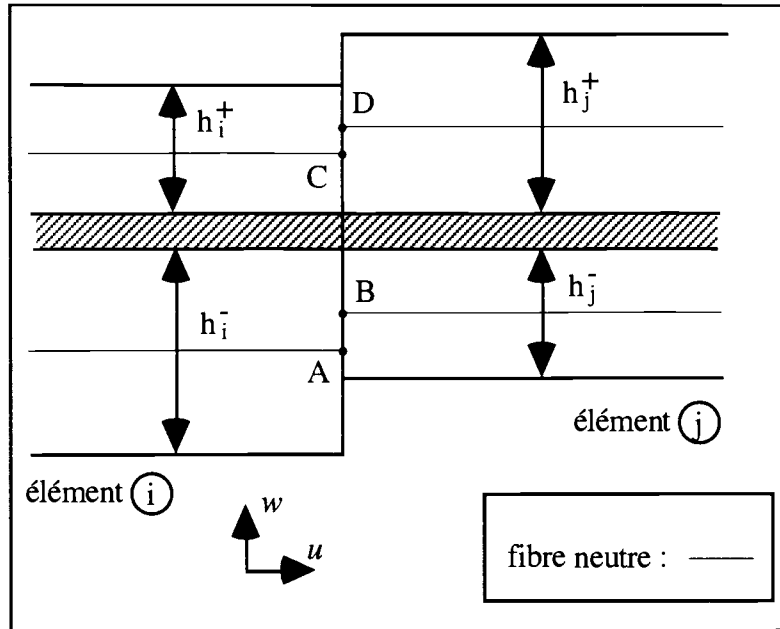


Figure 4.5 : connexion de 2 éléments sandwich

Ainsi, on aura entre les ddl des nœuds A et B, la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} u^-(A) \\ w(A) \\ \beta(A) \end{bmatrix} = [R^-] \begin{bmatrix} u^-(B) \\ w(B) \\ \beta(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{h_i^- - h_j^-}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^-(B) \\ w(B) \\ \beta(B) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.56})$$

En pratique, les nœuds A et B d'une part, C et D de l'autre étant confondus, on introduira ces relations linéaires en prémultipliant à droite par $[R^-]$ (respectivement $[R^+]$) et à gauche par $[R^-]^T$ (respectivement $[R^+]^T$) les matrices de raideurs et de masses de la peau inférieure (respectivement supérieure) de l'élément i.

IV.7.5 OPTIMISATION

Le problème d'optimisation est identique à celui du paragraphe IV.6 à la seule différence que les variables de conception sont les épaisseurs des deux peaux de chaque élément poutre. L'épaisseur du film viscoélastique est constante (1 mm). Initialement les peaux ont une épaisseur de 2 mm. La largeur des éléments poutres est $b = 2.4$ cm.

On a choisi comme matériau constitutif du film le matériau amortissant vib04 utilisé auparavant pour la réalisation d'absorbeurs dynamiques (voir paragraphe II.5.1.1.1). Nous traiterons les courbes de mesures du module de cisaillement complexe

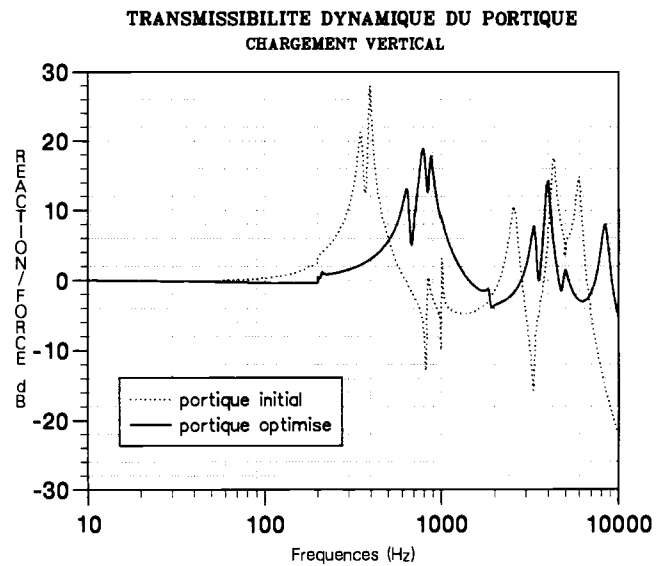
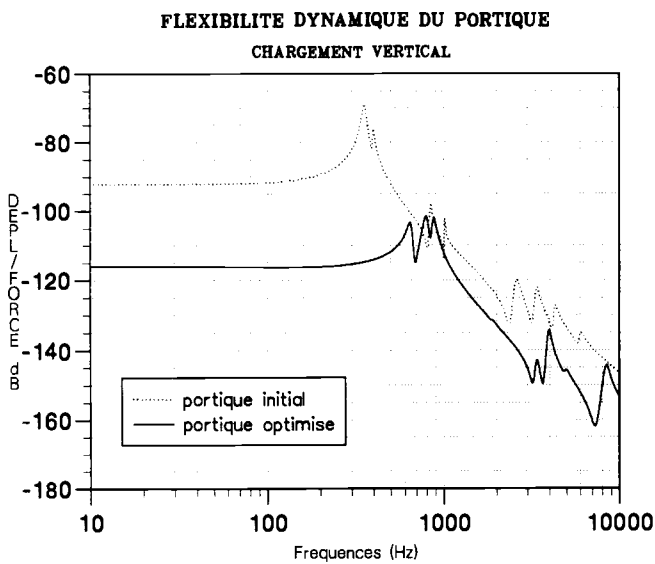
comme il a été expliqué dans le paragraphe IV.6, c'est-à-dire en faisant des interpolations linéaires sur des gammes fréquentielles successives.

On appliquera l'algorithme du paragraphe IV.5, les relations de récurrence (IV.22) pour les variables de conception et (IV.27) pour les multiplicateurs de Lagrange.

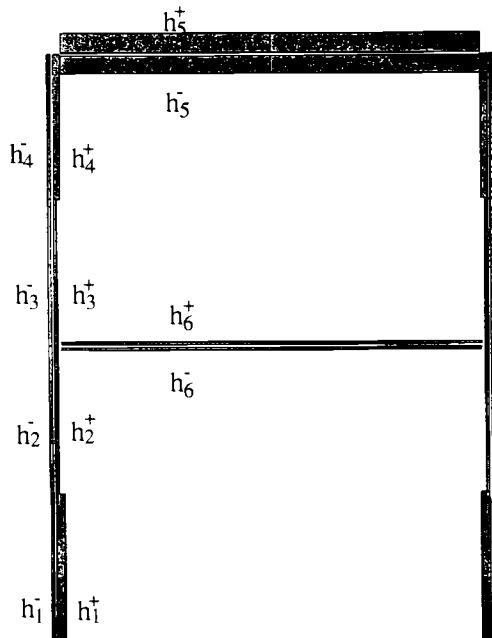
IV.7.6 APPLICATIONS

IV.7.6.1 PORTIQUE

Dans un premier temps, nous avons repris l'exemple du portique bi-encasté, avec le cas de charge vertical (excitation dans le plan de symétrie).



IV.7.6.1.1 REPARTITION OPTIMALE DU MATERIAU ELASTIQUE



IV.7.6.1.2 TABLEAUX DE RESULTATS

élément poutre	1	2	3	4	5	6
h^+ (mm)	2.8	1	1	2.22	6.45	1
h^- (mm)	1	1	1	1	6.3	1

g_T initiale = 0.42

g_f initiale = 1.56

$\hat{g}_T = 1$

$\hat{g}_f = -5$

masse initiale = 9.07 E-02 kg

masse après optimisation = 0.107 kg

$\alpha = 0.99$

IV.7.6.2 PLAQUE SANDWICH

Nous avons traité ensuite le cas d'une plaque sandwich encadrée en deux de ses côtés et excitée en son coin libre. Nous essaierons d'atténuer la flexibilité ponctuelle par ajout de matériau absorbant : la plaque initiale sera recouverte d'un film viscoélastique lui-même surmonté d'une plaque de contrainte. Nous optimiserons l'épaisseur des plaques de contrainte élémentaires (les épaisseurs du film viscoélastique et de la plaque de base seront fixées).

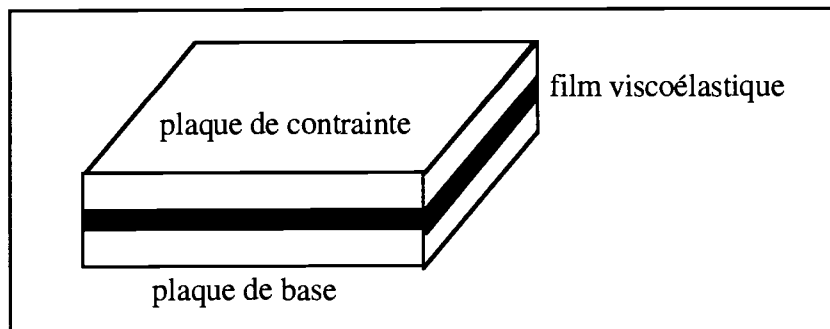


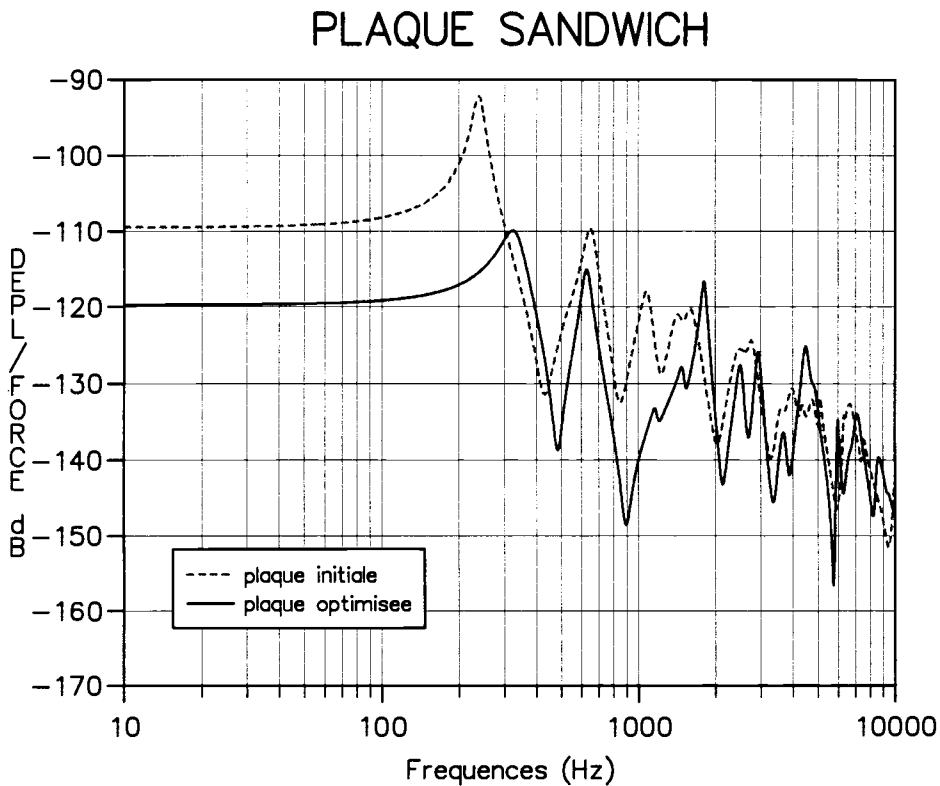
figure 4.6 : élément plaque sandwich

Les dimensions de la plaque et le nombre d'éléments finis seront identiques au cas étudié dans le chapitre III (voir Annexe A2).

Afin de modéliser la plaque encastree, on utilisera l'élément plaque développé par M. Macé (voir référence [D18]). L'auteur a créé un élément fini quadrangle baptisé QUAD4A pour tenir compte de la présence du film viscoélastique entre les deux peaux (plaque de base et plaque de contrainte). Le principe de modélisation de l'élément plaque sandwich est similaire à celui explicité pour l'élément poutre : il fait intervenir une matrice de couplage C entre les deux peaux. L'élément QUAD4A est présenté en détail dans l'annexe A2.

- OPTIMISATION 1

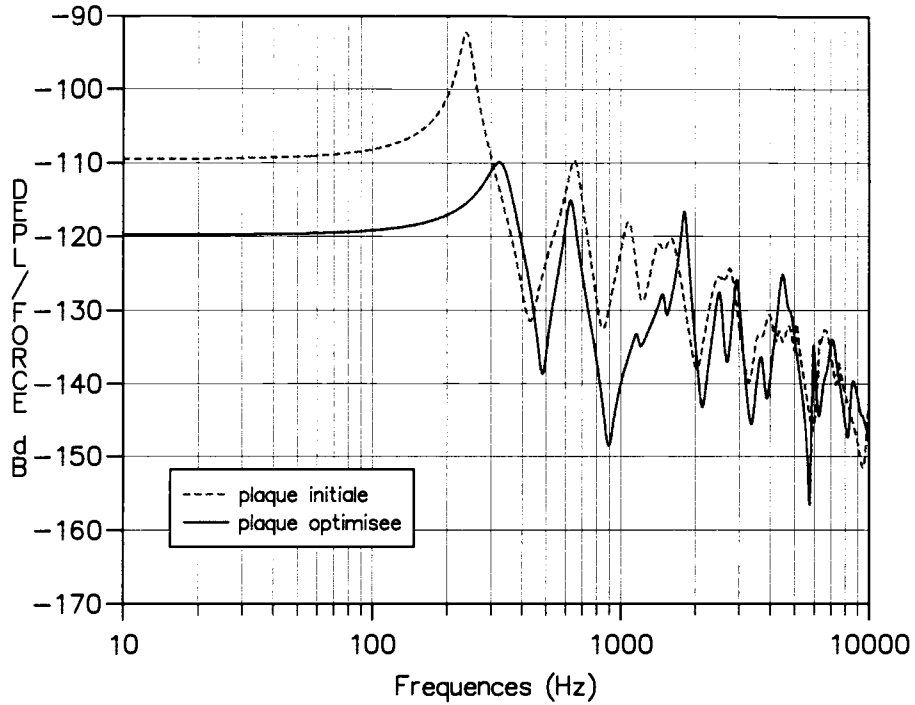
$\hat{g}_{f_{\text{initiale}}} = 0.886$ $e_{\text{film}} = 1 \text{ mm}$ $\alpha = 0.9$ lim inf sur les variables h_i : 1 mm
 $\hat{g}_f = -5.5$ $\rho_{\text{plaque}} = 2700 \text{ kg/m}^3$ $G_{\text{film}} = 50 \text{ MPa}$ lim sup sur les variables h_i : 3 cm



- OPTIMISATION 2

$g_{f_initiale} = 1.386$ $e_{film} = 1 \text{ mm}$ $\alpha = 0.9$ lim inf sur les variables h_i : 1 mm
 $\hat{g}_f = -6$ $\rho_{plaque} = 2700 \text{ kg/m}^3$ $G_{film} = 50 \text{ MPa}$ lim sup sur les variables h_i : 3 cm

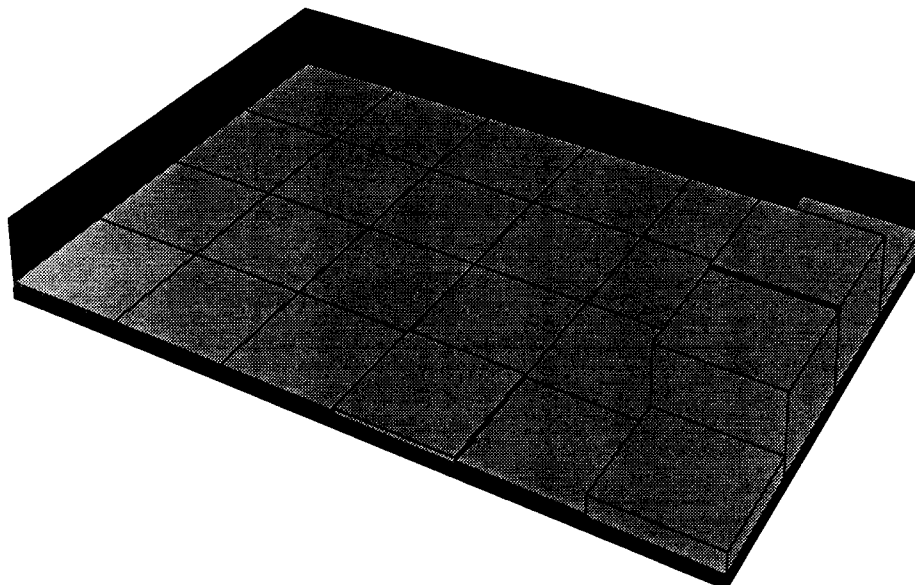
PLAQUE SANDWICH



IV.7.6.2.1 PROFIL OPTIMAL DE LA PLAQUE

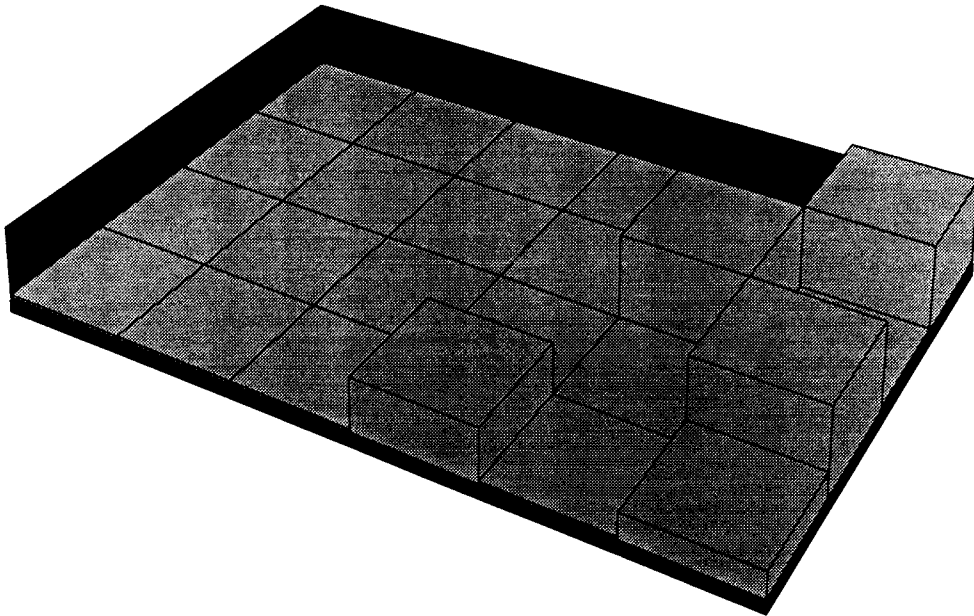
- OPTIMISATION 1

ENCASTREMENT



- OPTIMISATION 2

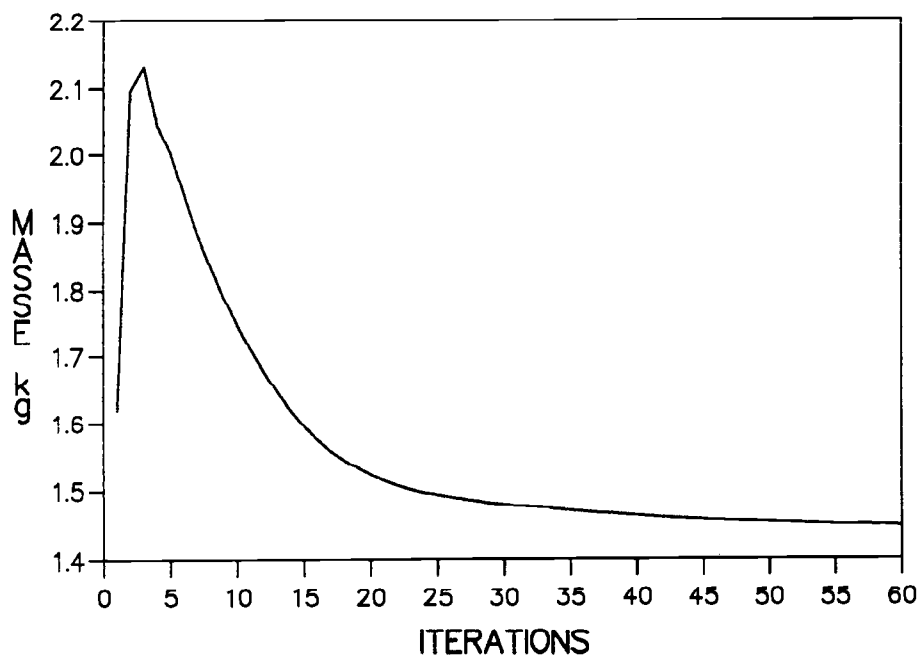
ENCASTREMENT



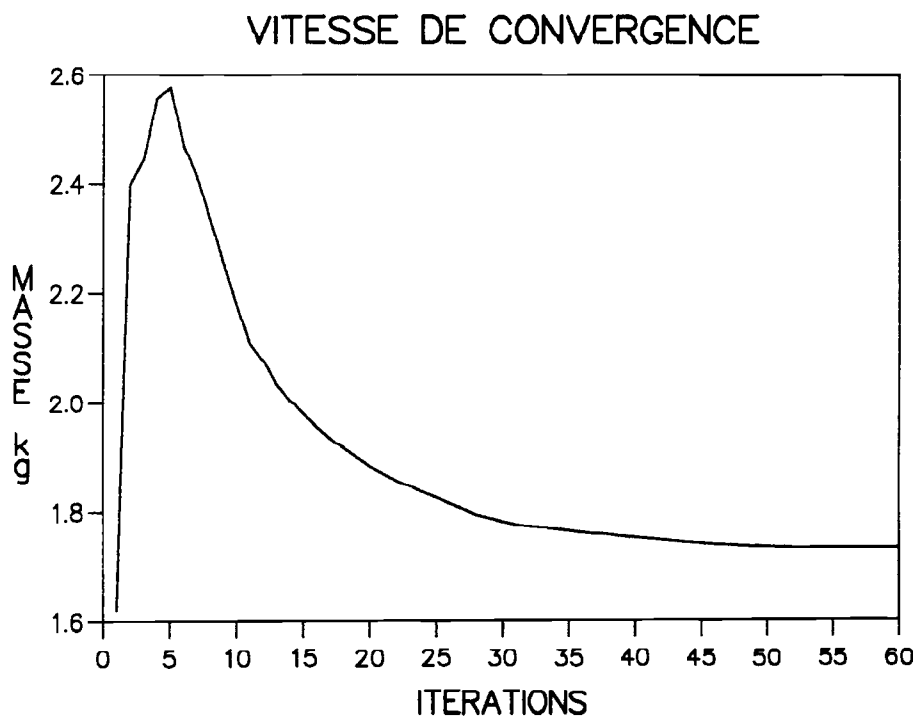
IV.7.6.2.2 VITESSE DE CONVERGENCE

- OPTIMISATION 1

VITESSE DE CONVERGENCE



- OPTIMISATION 2



IV.8 CONCLUSION

Nous avons vu dans ce chapitre comment intégrer l'apport de matériaux absorbants dans une démarche d'optimisation fondée sur la condition de Kühn-Tucker. Dans cette étude, nous avons considéré les épaisseurs de poutres élastiques et les épaisseurs de revêtements viscoélastiques comme des variables de conception, mais dans la pratique (amélioration des caractéristiques vibratoires de carlingages existants), la structure initiale est figée. On ne peut donc pas modifier les dimensions transversales des éléments la constituant. On peut simplement optimiser l'épaisseur du revêtement viscoélastique. Bien évidemment, cela ne change en rien le principe de la méthode. Il suffit alors de ne considérer, dans l'algorithme d'optimisation, que les variables h_2 pour les structures de type monocouche, ou les variables h^+ pour les structures sandwichs.

D'une manière générale, la méthode d'optimisation met en oeuvre une recherche systématique de modes propres complexes. La précision de l'algorithme de diagonalisation est primordiale pour la convergence de la méthode. Ainsi, pour le cas du portique en poutre sandwichs, avons nous été contraints d'utiliser la symétrie de la structure. Nous avons étudié le demi-modèle, afin de diminuer la taille des matrices de masse et de raideur et par là même, d'une part améliorer la précision sur les modes et

d'autre part garantir la symétrie de la structure. En effet, si l'on étudie le modèle entier, les erreurs numériques s'accumulent au cours des itérations, la structure a tendance à se disymétriser.

Les résultats montrent que l'utilisation de matériaux viscoélastiques permet d'obtenir de bons gains sur les réponses en transmissibilité et flexibilité : plus de 10 dB sur les réponses en transmissibilité.

En ce qui concerne les revêtements de type monocouche, on constate que l'efficacité du matériau viscoélastique est optimale lorsque celui-ci est concentré aux points d'encastrement de poutres travaillant en flexion. Ce résultat était prévisible, car le matériau viscoélastique est d'autant plus efficace qu'il agit sur une zone présentant une importante énergie de déformation. Or, dans le cas d'une poutre encastree, l'énergie de flexion est maximale à son encastrement.

CONCLUSION

Au terme de ce travail, nous avons mis en évidence l'apport que peut constituer l'optimisation structurale pour des problèmes d'atténuation de la transmission des vibrations liés aux contraintes de la Discrétion Acoustique.

Dans un premier temps, nous avons développé deux méthodes d'optimisation d'absorbeurs dynamiques amortis. La première permet de déterminer les caractéristiques d'un absorbeur idéal (raideur et taux d'amortissement), afin d'atténuer de manière optimale la flexibilité ponctuelle d'une structure donnée. Dans la pratique, cette méthode peut être utilisée pour régler les paramètres technologiques de l'absorbeur dynamique employé.

Avec la deuxième méthode d'optimisation, nous avons fait le choix d'une solution technologique pour l'absorbeur, ce dernier étant constitué d'une plaque rigide montée sur des plots viscoélastiques. Cette méthode consiste en fait en un dimensionnement optimal des plots.

Dans les deux cas, ces stratégies d'optimisation ont montré leur efficacité sur des exemples concrets (gains importants sur les réponses, faible coût numérique) et peuvent constituer des outils utiles pour l'ingénieur.

Nous nous sommes ensuite intéressés au problème de la conception des structures embarquées, à savoir, comment intégrer les contraintes de la Discrétion Acoustique à la phase de conception. Pour cela, nous avons introduit la notion de paramètres effectifs, très importante pour l'expression des contraintes en transmissibilité et flexibilité. Nous avons construit un algorithme en adoptant une approche par critère d'optimalité, c'est-à-dire en déduisant de la condition d'optimalité (condition de Kühn-Tucker) des équations de récurrence pour les variables de conception.

Nous avons mis en évidence des problèmes de convergence liés au phénomène de "curve veering", provenant des nombreuses symétries de la structure étudiée.

Du point de vue de la vitesse de convergence, nous avons montré le rôle important du critère d'arrêt. Numériquement, il faut un relativement grand nombre d'itérations afin

Conclusion

que l'optimum (au sens mathématique du terme) soit atteint, cependant ce nombre peut être considérablement réduit si l'on considère que les variations des variables de conception sont très faibles et donc physiquement insignifiantes, au bout d'une quinzaine d'itérations.

Nous avons remarqué la présence de nombreux optimums locaux. En théorie, plus les contraintes sont sévères, plus le domaine admissible se restreint et donc plus le nombre d'optimums locaux diminue. En pratique, il faut donc fixer des contraintes assez sévères (ce qui se traduit par des faibles valeurs de \hat{g}_T et \hat{g}_f) tout en s'assurant que ces contraintes soient susceptibles d'être atteintes, c'est-à-dire que le domaine admissible soit non vide. Cette procédure peut être automatisée en programmant des optimisations successives pour lesquelles les valeurs de \hat{g}_T et \hat{g}_f décroissent.

L'intérêt de cette méthode d'optimisation structurale est qu'elle peut facilement s'intégrer à un code éléments finis : la programmation est réduite et de nombreux codes sont capables d'effectuer des analyses de sensibilités de modes propres.

Enfin, nous avons pris en compte dans une méthode d'optimisation l'apport d'amortissement sous formes de revêtements viscoélastiques. Tout comme précédemment, nous avons adopté une approche par critère d'optimalité fondée sur la condition de Kuhn-Tucker. Nous avons étendu la notion de paramètres effectifs au cas des modes complexes.

Nous avons montré que l'utilisation des matériaux viscoélastiques sous forme de monocouches ou de structures sandwichs et surtout la manière dont ces matériaux sont répartis sur la structure pouvait considérablement atténuer les réponses en transmissibilités et flexibilités.

Cette méthode peut également aisément s'intégrer à un code éléments finis. Elle peut constituer par là même un outil supplémentaire d'aide à la conception.

BIBLIOGRAPHIE

- [A1] Critères de Conception des Carlingages. Rapport CERDAN n° 3056 ET/DN-RE/DR/90 du 18 juin 1990.
- [A2] M. LAPI 1989 Calcul du Carlingage Support de la Verticale Electrique. Rapport CERDAN n° 3039 ET/DN-RE/DR/89.
- [A3] L.P. BUGEAT, A. GIRARD et P. SERGENT Etude de détermination de paramètres significatifs de transmission de vibrations - Rapports INTESPACE : rapport de phase 1 (21 janvier 1987) - rapport de phase 2 (17 avril 1987).
- [A4] A. GIRARD et J.F. IMBERT Paramètres modaux effectifs et effets de troncature en dynamique des structures - Proceedings of a conference : "Spacecraft Structures", CNES Toulouse, 3-6 décembre 1985 (ESA SP-238, avril 1986)
- [A5] R.L. GOLDMAN 1968 Vibration Analysis by Dynamic Partitioning - AIAA Journal, vol. 7, p 1152 - 1154.
- [A6] R.R. CRAIG et C.J. CHANG 1977 On the Use of Attachment Modes in Substructure Coupling for Dynamic Analysis. AIAA-ASME 18th Struc. Dyn. and Mat. Conference, San Diego.
- [A7] W.C. HURTY 1965 Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes. AIAA Journal, vol.3, p 678 - 685.
- [A8] R.R. CRAIG et M.C.C. BAMPTON 1976 Coupling of Substructures for Dynamic Analysis. AIAA Journal, vol. 14, p 1163 - 1165.
- [A9] M. LAPI et H. GRANGIER Modal Effective Parameters : an Application to Shipboard Support Structures to Reduce Vibrations Transmission - 17th MSC European User's conference - Royal Monceau hotel, Paris (27, 28 septembre 1990) - MacNeal Schwender GmbH / p 5.1 - 5.14
- [A10] J.F. IMBERT 1979 Analyse des Structures par Eléments Finis. Ecole Nationale de l'Aeronautique et de l'Espace. Cepadues editions.
- [A11] G.N. VANDERPLAATS 1984 Numerical Optimization Techniques for Engineering Design : with Applications. Mc Graw-Hill series in mechanical engineering.
- [A12] R.T. HAFTKA, Z. GURDAL et M.P. KAMAT 1990 Elements of Structural Optimization. 2nd revised edition, Solid mechanics and its applications, Kluwer academic publishers Dordrecht / Boston / London.
- [A13] P. TROMPETTE, P. FLEURY et C. KNOPF-LENOIR 1987 Optimisation des Structures, (Approche de l'Ingénieur), présenté au Séminaire de l'institut pour la promotion des sciences de l'ingénieur, Paris, 9-11 septembre 1987.
- [A14] R. FLETCHER et C.M. REEVES 1964 Function Minimization by Conjugate Gradients, Br. Computer J., vol. 7, n°2, p 149-154
- [A15] W.C. DAVIDON 1959 Variable Metric Method for Minimization. Argonne National Laboratory ANL-5990 Rev., University of Chicago.

Bibliographie

- [A16] R. FLETCHER et M.J.D. POWELL 1963 A Rapidly Convergent Method for Minimization, *Computer J.*, vol. 6, n°2, p 163-168.
- [A17] C.G. BROYDON 1970 The Convergence of a Class of Double Rank Minimization Algorithms, parts I & II, *J. Inst. Math. Appl.*, vol. 6, p 76-90, 222-231.
- [A18] R. FLETCHER 1970 A New Approach to variable Metric Algorithms, *Computer J.*, vol. 13, p 317-322.
- [A19] D. GOLDFARB 1970 A Family of Variable Metric Methods Derived by Variational Means, *Math. Comput.*, vol. 24, p 23-36.
- [A20] D.F. SHANNO 1970 Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization, *Math. Comput.*, vol. 24, p 647-656.
- [A21] J.E. KELLEY 1960 The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs. *J. SIAM*, vol. 8, p 702-712.
- [A22] R. BALDUR 1972 Structural Optimization by Inscribed Hyperspheres. *J. Engin. Mech.*, ASCE, vol. 98, n° EM3, p 503-508, juin 1972.
- [A23] G. ZOUTENDIJK 1960 *Methods of Feasible Directions*. Elsevier, Amsterdam.
- [A24] J.B. ROSEN 1960 The Gradient Projection Method for Non-Linear Programming. Part I, linear constraints, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 8, p 181-217.
- [A25] P. WOLFE 1963 *Methods of Non-Linear Programming*, in "Recent Advances in Mathematical Programming", R.L GRAVES et P. WOLFE, éditions McGraw-Hill, New York, p 76-77.
- [A26] M.J.D. POWELL 1977 A Fast Algorithm for Non-Linearly Constrained Optimization Calculations. n° DAMPTP77/NA 2, University of Cambridge.
- [A27] J.C.G BOOT 1964 *Quadratic Programming*, "Studies in Mathematical and Managerial Economics", H.TEIL (ed.), vol. 2, North Holland.
- [A28] A.V. FIACCO et G.P. McCORMICK 1968 *Non-Linear Programming : Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. John Wiley & Sons, New York.
- [A29] D. KAVLIE et J. MOE 1971 Automated Design of Frame Structures, *ASCEJ. Struct. Div.*, vol. 97 n° ST1, p 33-62, janvier 1971.
- [A30] R.T. HAFTKA et J.H. STARNES 1976 Applications of Quadratic Extended Interior Penalty Function for Structural Optimization. *AIAA Journal*, vol. 14, n° 6, p 718-724, juin 1976.
- [A31] B.A. PRASAD 1981 A Class of Generalized Variable Penalty Methods for Non-Linear Programming. *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 35, n° 2, p 159-182, octobre 1981.
- [A32] P.G. CIARLET 1988 *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise sous la direction de P.G CIARLET et J.L. LIONS. éditions Masson.
- [A33] C. FLEURY, V.H. NGUYEN et J.J. STRODIOT 1987 A Mathematical Convergence Analysis of the convex Linearization Method for Engineering design Optimization. *Engineering optimization*, vol. 11, p 195-216.

Bibliographie

[A34] R. RAZANI 1965 Behaviour of Fully Stressed Design and its Relationship to Minimum Weight Design. AIAA Journal, vol. 3, n°12, p 2262.

[A35] R.A. GELLATLY et L. BERKE 1971 Optimum Structural Design. USAF technical report AFFDL-TR-70-165.

[A36] I.C. TAIG et R.I. KERR 1973 Optimization of Aircraft Structures with Multiple Stiffness Requirements. AGARD second symposium on structural optimization, paper 6, Milan, avril 1973.

[A37] G.N. VANDERPLAATS 1982 Structural Optimization. Past, Present and Future. AIAA journal, vol. 20, p 992-1000, juillet 1982.

=====

[B1] J. OMONDROYD et J.P. DEN HARTOG 1928 Transactions of the American Society of Mechanical Engineers vol. 50, p 9-22. Theory of the dynamic vibration absorber.

[B2] G.B. WARBURTON 1981 Earth-quake Engineering and Structural Dynamics vol. 9, p 251-262. Optimum absorber parameters for minimizing vibration response.

[B3] F.M. LEWIS 1955 Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics vol. 22, p 377-382, Extended theory of the viscous vibration damper.

[B4] J.C. SNOWDON 1974 Journal of Engineering for Industry vol. 96, p 940-945. Dynamic vibration absorbers that have increased effectiveness

[B5] R. PLUNKETT 1958 Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics vol. 25, p 219-224. The calculation of optimum concentrated damping for continuous systems.

[B6] A. HENNEY et J.P. RAHEY 1963 Journal of Engineering for Industry vol. 85, p 259-264. The optimization of damping of four configurations of a vibrating beam.

[B7] J.C. SNOWDON 1966 Journal of the Acoustical Society of America vol. 39, p 878-886. Vibration of cantilever beams to which dynamic absorbers are attached.

[B8] L. KITIS, B.P. WANG et W.D. PILKEY 1983 Journal of Sound and Vibration vol. 89, p 559-569. Vibration reduction over a frequency range.

[B9] A.F VAKAKIS et S.A. PAIPETIS 1986 Journal of Sound and Vibration vol. 105, p 45-60. The effect of a viscously damped dynamic absorber on a linear multi degree of freedom system.

[B10] R.E. ROBERSON 1952 Journal of the Franklin Institute vol. 254, p 205-220. Synthesis of a non-linear dynamic vibration absorber.

[B11] L.A. PIPES 1953 Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics vol. 20, p 515-518. Analysis of a non-linear dynamic vibration absorber.

[B12] A. SOOM ET M. LEE 1983 Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design vol. 105, p 112-119. Optimal design of linear and non-linear vibration absorbers.

Bibliographie

- [B13] J.C. SNOWDON 1968 *Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems*, New York : John Willey & sons.
- [B14] L. BADUEL 1992 *Calcul Dynamique sur un Amortisseur Dynamique Passif* . Rapport CERDAN n° 3036 ET/DN-RE/DR/92 du 4 mai 1992.
- [B15] D. J. EWINS 1984 *Modal Testing : Theory and Practice*. Editions research studies press - ISBN 086380 0173.
- [B16] R. DAT et J. L. MEURZEC 1972 *Exploitation par Lissage Mathématique des Mesures d'Admittance d'un Système Linéaire*. La recherche aérospatiale, n° 4, p 209-215 (07/08/72).
- [B17] D. GARDELLA, M. HUDAVERT, C. STRUBERT et F. VILLEROT 1982 *Projet de Deuxième Année de L'Ecole Centrale de Lyon*.
- [B18] IMSL MATH LIBRARY / FORTRAN. Subroutines for mathematical applications, vol. 3, chap 8, p 853-858
- [B19] R. B. SCHNABEL et DENNIS 1983 *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall, englewood cliffs, New-Jersey.
- [B20] W. MURRAY et GILL 1976 *Minimization Subject to Bounds on the Variables*. NPL report NAC 72, national physical laboratory, Angleterre.
- [B21] M. E. GURTIN 1962 *Linear Elasticity*, Hanbuch der Physik, bd Via 2, Berlin, Springer Verlag.
- [B22] J. MANDEL 1966 *Cours de Mécanique des Milieux Continus*. Tomes 1 et 2, Paris, Gauthiers-Villars.
- [B23] F. SIDOROFF 1979 *Cours de Mécanique des Solides*. Cours ECL.
- [B24] A. D. NASHIF, D. I. G. JONES et J. P. HENDERSON 1985 *Vibration Damping*. Editions Wiley-Interscience.
- [B 25] J.A. NELDER et R. MEAD 1965 *A Simplex Method for Function Minimization*. Computer journal, vol. 7, p 308-313.
- [B26] H. WILLIAMS 1993 *Optimisation d'un Absorbeur Dynamique pour la Minimisation de la Flexibilité Ponctuelle d'un Raidisseur Circonférentiel de Coque*. Rapport CERDAN n° 3003 ET/DN-RE/DR/93 du 13 janvier 1993.
- =====
- [C1] T. DAHLBERG 1988 *On the Optimal Use of Continuous Beam Structures as Broad-Band Vibration Absorbers*. Rapport F109, division of solid mechanics, Chalmers university of technology, Gothenburg, Suède.
- [C2] T.J.S. ABRAHMSSON 1991 *Constrained Minimization of Vibrational Magnitudes Using a Modal Reduction Method*. International journal for numerical methods in engineering, vol. 31, p 1585-1604.
- [C3] M.P. KAMAT, V.B. VENKAYYA, N.S. KHOT 1983 *Optimization with Frequency Constraints Limitations*. Journal of sound and vibration vol. 91, n°1, p 147-154 février 1983.
- [C4] I.W. SUWECA 1990 *Controle Vibratoire des Structures*. These de doctorat.

Bibliographie

- [C5] P. LEMERLE 1991 Optimisation d'une Structure avec des Critères de Flexibilité et de Transmissibilité Effectives. Rapport CERDAN n° 3051 ET/DN-RE/91 du 22 mai 1991.
- [C6] R.B. NELSON 1976 Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives. AIAA journal, vol. 14, n° 9, septembre 1976.
- [C7] I. U. OJALVO 1986 Gradients for Large Structural Models with Repeated Frequencies. Society of automotive engineers, Warrendale, PA, paper 861789, octobre 1986.
- [C8] R. L. DAILEY 1989 Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues. AIAA journal, vol. 27, n°4, p 486-491, avril 1989.
- [C9] W. C. MILLS-CURRAN 1988 Calculation of Eigenvector Derivatives for Structures with Repeated Eigenvalues. AIAA journal, vol. 26, n°7, p867-871, juillet 1988.
- [C10] N.C. PERKINS et C.D. MOTE 1986 Comments on Curve Veering in Eigenvalue Problems. Journal of sound and vibration vol.106, n°3, p 451-463 mai 1986.
- [C11] C. PIERRE 1988 Mode Localization and Eigenvalue Loci Veering Phenomena in Disordered Structures. Journal of sound and vibration vol. 126, n° 3 p 485-502 novembre 1988.
- [C12] T. IGUSA 1993 Critical Configurations of Systems Subjected to Wide-Band Input. Journal of sound and vibration vol. 168, n° 3 p 525-541 décembre 1993.
- [C13] R. H. MACNEAL 1978 A Simple Quadrilateral Shell Element. Computers & Structures, vol. 8, p 175-183, Pergamon Press 1978.
- =====
- [D1] L. A. SCHMIT et B. FARSHI 1977 Optimum Design of Laminated Fibre Composite Plates. Int. J. Num. Meth. Engng. 11, p 623-640.
- [D2] P. PEDERSEN 1987 On Sensitivity Analysis and Optimal Design of Specially Orthotropic Laminates. Eng. Opt. 11, p 305-316.
- [D3] C. W. BERT 1977 Optimal Design of a Composite-Material Plate to Maximize its Fundamental Frequency. Journal of sound and vibration, 50 (2), p 229-237.
- [D4] S. S. RAO et K. SINGH 1979 Optimum Design of Laminates with Natural Frequency Constraints. Journal of sound and vibration, 67 (1), p 101-112.
- [D5] L. MESQUITA et M. P. KAMAT 1987 Optimization of Stiffened Laminated Composite Plates with Frequency Constraints. Eng. Opt. 11, p 77-88.
- [D6] D. A. SARAVANOS et C. C. CHAMIS 1990 Unified Micromechanics of Damping for Unidirectional Fiber Composites. Journal of composites technology and research, vol 12, n° 1, Spring 1990, in press.
- [D7] D. A. SARAVANOS et C. C. CHAMIS 1989 Mechanics of Damping for Fiber Composite Laminates Including Hygro-Thermal Effects. Proceedings, 30 th AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC structures, structural dynamics and material conference, paper n° 89-1191-CP, Mobile, Alabama, 3-5 avril 1989.

Bibliographie

- [D8] R. D. ADAMS et D. G. C. BACON 1973 Effect of Fiber Orientation and Laminate Geometry on the Dynamic Properties of CFRP. *Journal of composite materials*, vol. 7, octobre, p 402-428.
- [D9] R. G. NI et R. D. ADAMS 1984 The Damping and Dynamic Moduli of Symmetric Laminated Composite Beams - Theoretical and Experimental Results. *Journal of composite materials*, vol. 18, mars, p 104-121.
- [D10] C. C. SIU et C. W. BERT 1974 Sinusoidal Response of Composite Material Plates with Material Damping. *ASME journal of Engineering for Industry*, mai, p 603-610.
- [D11] S. A. SUAREZ, R. F. GIBSON, C. T. SUN et S. K. CHATURVEDI 1986 The Influence of Fiber Length and Fiber Orientation on Damping and Stiffness of Polymer Composite Materials. *Experimental mechanics*, vol. 26, n° 2, p 175-184.
- [D12] D. A. SARAVANOS et C. C. CHAMIS Computational Simulation of Structural Composite Damping. NASA TM à paraître.
- [D13] D. A. SARAVANOS et C. C. CHAMIS 1990 Multi-Objective Shape and Material Optimization of Composite Structures Including Damping. NASA TM 102579 31 th AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC structures, structural dynamics and material conference, Long Beach, California, 2-4 avril 1990.
- [D14] A. D. NASHIF New Methods for Determining Damping Properties of Viscoelastic Materials. University of Dayton, Ohio.
- [D15] J. L. BATOZ et G. DHATT 1990 Modélisation des Structures par Eléments Finis. vol. 2, poutres et plaques. Editions Hermes.
- [D16] I.W. SUWECA 1992 Optimal Structural Design with Damping Constraint Limitations. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 35, p 21-35.
- [D17] J. MARTINAT Reduction des Vibrations de Structures par Accroissement d'Amortissement. Société METRAVIB. Extrait de la revue générale de thermique, 2 rue des Tanneries 75013 Paris.
- [D18] M. MACE 1991 Modélisation de Structures Amorties par Film Viscoélastique. Thèse de doctorat de l'université Paris 6, spécialité mécanique des solides et des structures. soutenue le 17 décembre 1991.
- [D19] TIMOSHENKO 1921 On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars. *Phil. mag.* (41) p 744.

ANNEXE A1
METHODE D'IDENTIFICATION
DE DAT & MEURZEC

AI.1 PRINCIPE DE LA METHODE

L'hypothèse de linéarité d'un système mécanique implique que son admittance peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle de pôlynomes P et Q de (j ω). Après avoir choisi m (degré du numérateur) et n (degré du dénominateur), le problème est de déterminer les coefficients réels des polynômes P et Q qui permettent à la fraction rationnelle A(j ω) d'approcher au mieux les valeurs expérimentales :

$$A(j\omega) = \frac{P_0 + P_1(j\omega) + \dots + P_m(j\omega)^m}{Q_0 + Q_1(j\omega) + \dots + Q_n(j\omega)^n} \quad (A1.1)$$

Afin d'obtenir une solution unique on normalise Q(j ω), en choisissant arbitrairement son terme constant égal à un :

$$A(j\omega) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + \dots + a_m(j\omega)^m}{1 + b_1(j\omega) + \dots + b_n(j\omega)^n} \quad (A1.2)$$

Nous avons donc à présent n+m+1 inconnues, b₁, ..., b_n, a₀, a₁, ..., a_m.

Expérimentalement, nous avons pu déterminer p mesures de l'admittance (pour p pulsations différentes). Pour une pulsation ω_k , nous obtenons A*(j ω_k).

AI.2 EXPRESSION DE L'ERREUR

La valeur de l'admittance identifiée pour une pulsation j ω_k est A(j ω_k) = P(j ω_k) / Q(j ω_k). La valeur expérimentale associée à cette même pulsation étant A*(j ω_k), l'erreur pour j ω_k est donc $\epsilon_k = A(j\omega_k) - A^*(j\omega_k)$ c'est à dire :

$$\epsilon_k = \frac{1}{Q(j\omega_k)} (P(j\omega_k) - A^*(j\omega_k) Q(j\omega_k)) \quad (A1.3)$$

Soient X le vecteur des coefficients P(j ω_k) et Y le vecteur des coefficients de R(j ω_k) = Q(j ω_k) - 1, ϵ_k s'écrit alors :

$$\epsilon_k = \frac{1}{Q(j\omega_k)} (P(j\omega_k) - A^*(j\omega_k) R(j\omega_k) - A^*(j\omega_k)) \quad (A1.4)$$

En notation matricielle, pour p mesures nous avons :

$$\varepsilon = S X - T Y - B^* \quad (A1.5)$$

avec :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(j\omega_1) \\ \vdots \\ \varepsilon_p(j\omega_p) \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} b_n \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (A1.6)$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{(j\omega_1)^m}{Q(j\omega_1)} & \cdots & \frac{(j\omega_1)^0}{Q(j\omega_1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(j\omega_i)^{m+1-k}}{Q(j\omega_i)} & \cdots & \frac{(j\omega_i)^0}{Q(j\omega_i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(j\omega_p)^m}{Q(j\omega_p)} & \cdots & \frac{(j\omega_p)^0}{Q(j\omega_p)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ i \\ \\ \downarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} k \in [1, m+1], i \in [1, p] \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (A1.7)$$

← k →

$$T = \begin{bmatrix} \frac{A^*(j\omega_1)(j\omega_1)^n}{Q(j\omega_1)} & \cdots & \frac{A^*(j\omega_1)(j\omega_1)^1}{Q(j\omega_1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A^*(j\omega_i)(j\omega_i)^{n+1-k}}{Q(j\omega_i)} & \cdots & \frac{A^*(j\omega_i)(j\omega_i)^1}{Q(j\omega_i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A^*(j\omega_p)(j\omega_p)^n}{Q(j\omega_p)} & \cdots & \frac{A^*(j\omega_p)(j\omega_p)^1}{Q(j\omega_p)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ i \\ \\ \downarrow \end{matrix} \quad (A1.8)$$

← k →

$k \in [1, n], i \in [1, p]$

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{A^*(j\omega_1)}{Q(j\omega_1)} \\ \vdots \\ \frac{A^*(j\omega_i)}{Q(j\omega_i)} \\ \vdots \\ \frac{A^*(j\omega_p)}{Q(j\omega_p)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ i \\ \\ \downarrow \end{matrix}, i \in [1, p] \quad (A1.9)$$

Dans les matrices S, T et B*, interviennent les termes Q(j ω_i). S, T et B* dépendent donc de Y. Le problème de minimisation est donc non linéaire. Pour transformer ce problème en un problème linéaire, nous allons introduire des coefficients de pondération D(j ω_i). Nous poserons D(j ω_i) = 1/Q(j ω_i), les D(j ω_i) seront donc considérés comme des constantes complexes à chaque itération. La procédure de détermination des coefficients de P et Q consistera à minimiser l'erreur ε correspondant au système linéarisé puis à chaque itération recalculer les termes D(j ω_i) pour obtenir une nouvelle linéarisation à partir des coefficients de Q précédemment déterminés. Pour la première itération, les D(j ω_i) seront pris égaux à 1.

Considérons l'erreur quadratique E : $E = \bar{\varepsilon}^t \varepsilon$

$$\varepsilon = [S \ -T] \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} - B^* \quad (A1.10)$$

$$\bar{\varepsilon}^t = \left(\overline{[S \ -T] \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}} \right)^t - \bar{B}^{*t} = \begin{bmatrix} \bar{X}^t & \bar{Y}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S}^t \\ -\bar{T}^t \end{bmatrix} - \bar{B}^{*t} \quad (A1.11)$$

Posons $Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, l'équation (II.11) s'écrit alors :

$$E = \left(\bar{Z}^t \begin{bmatrix} \bar{S}^t \\ -\bar{T}^t \end{bmatrix} - \bar{B}^{*t} \right) \left([S \ -T] Z - B^* \right) \quad (A1.12)$$

En développant (II.12), on obtient :

$$\begin{aligned} E &= \bar{Z}^t \begin{bmatrix} \bar{S}^t \\ -\bar{T}^t \end{bmatrix} \left([S \ -T] Z \right) - \bar{B}^{*t} [S \ -T] Z - \bar{Z}^t \begin{bmatrix} \bar{S}^t \\ -\bar{T}^t \end{bmatrix} B^* + \bar{B}^{*t} B \\ &= \bar{Z}^t \begin{bmatrix} \bar{S}^t S & -\bar{S}^t T \\ -\bar{T}^t S & \bar{T}^t T \end{bmatrix} Z - \bar{B}^{*t} [S \ -T] Z - \bar{Z}^t \begin{bmatrix} \bar{S}^t \\ -\bar{T}^t \end{bmatrix} B^* + \bar{B}^{*t} B^* \end{aligned} \quad (A1.13)$$

Posons $E = E_0 - E_1 - E_2 + \bar{B}^{*t} B$

Nous voulons qu'à chaque itération, Z calculé corresponde à la solution du système linéarisé, c'est à dire $dE/dZ = 0$.

AI.3 CALCUL DE dE_0/dz_k

Nous appelons A_1 la matrice :
$$\begin{bmatrix} \bar{S}^t S & -\bar{S}^t T \\ -\bar{T}^t S & \bar{T}^t T \end{bmatrix}$$

On note α_{ij} le terme général de la matrice complexe A_1 et z_{ij} le terme général réel du vecteur Z . Il vient donc :

$$E_0 = \sum_{l=1}^{m+n+1} z_l \left(\sum_{i=1}^{m+n+1} \alpha_{li} z_i \right) \quad (A1.14)$$

Nous obtenons donc dE_0/dz_k en dérivant l'expression précédente :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dE_0}{dz_k} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m+n+1} \alpha_{ki} z_i + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m+n+1} \alpha_{kl} z_l + 2 \alpha_{kk} z_k \\ &= \sum_{i=1}^{m+n+1} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki}) z_i \end{aligned} \right. \quad (A1.15)$$

D'où l'on déduit l'expression matricielle de dE_0/dZ :

$$\frac{dE_0}{dZ} = (A_1 + A_1^t) Z \quad (A1.16)$$

AI.4 CALCUL DE dE_1/dz_k

Nous notons A_2 la matrice $[S \ -T]$ de terme général β_{ij} complexe et b_i le terme général complexe de \bar{B}^{*t} .

E_1 peut donc s'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} E_1 &= \bar{B}^{*t} A_2 Z = \sum_{l=1}^p b_l \sum_{i=1}^{m+n+1} \beta_{li} z_i \\ \frac{dE_1}{dz_k} &= \sum_{l=1}^p b_l \beta_{lk} = \sum_{l=1}^p \alpha_{kl} b_l, \text{ si } \alpha_{kl} = \beta_{li} \text{ est le terme général de } A_2^t \end{aligned} \right. \quad (A1.17)$$

D'où l'on déduit l'expression matricielle de dE_1/dZ :

$$\frac{dE_1}{dZ} = A_2^t B^* \quad (A1.18)$$

AI.5 CALCUL DE dE_2/dz_k

Nous notons A_3 la matrice $\begin{bmatrix} \bar{S}^t \\ -\bar{T}^t \end{bmatrix}$ de terme général δ_{ij} .

$$\begin{cases} E_2 = \bar{z}^t A_3 B^* = \sum_{l=1}^{m+n+1} z_l \left(\sum_{j=1}^p \delta_{lj} b_j \right) \\ \frac{dE_2}{dz_k} = \sum_{j=1}^p \delta_{kj} b_j \end{cases} \quad (A1.19)$$

d' où l' on déduit l'expression matricielle de dE_2/dZ :

$$\frac{dE_2}{dZ} = A_3 B^* \quad (A1.20)$$

A chaque itération $\bar{B}^{*t} B^*$ est constant, donc $d(\bar{B}^{*t} B^*)/dZ = 0$. Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dZ} &= (A_1 + A_1^t) Z - A_2^t \bar{B}^* - A_3 B^* \\ \text{avec :} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} \bar{S}^t S & -\bar{S}^t T \\ -\bar{T}^t S & \bar{T}^t T \end{bmatrix} \\ A_2 &= [S \quad -T] \\ A_3 &= \begin{bmatrix} \bar{S}^t \\ -\bar{T}^t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A1.21)$$

A_1 étant hermitienne, c'est à dire $\bar{A}_1^t = A_1$, si on la décompose en partie réelle et partie imaginaire, $A_1 = A_{1R} + A_{1I}$, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A_{1R} &= A_{1R}^t \\ A_{1I} &= -A_{1I}^t \end{aligned} \quad (A1.22)$$

Ainsi pouvons nous simplifier l'expression $A_1 + A_1^t$:

$$A_1 + A_1^t = A_{1R} + j A_{1I} + A_{1R}^t + j A_{1I}^t = 2 A_{1R} \quad (A1.23)$$

D'autre part, la somme $A_2^t \bar{B}^* + A_3 B^*$ peut également être simplifiée :

$$\left\{ \begin{aligned} A_2^t \overline{B}^* + A_3 B^* &= A_2^t \overline{B}^* + \overline{A_2}^t B^* \\ &= \overline{A_2}^t B^* + \overline{A_2}^t B^* \\ &= 2 RE (\overline{A_2}^t B^*) \end{aligned} \right. \quad (A1.24)$$

En conclusion, la méthode DAT & MEURZEC nécessite à chaque itération la résolution d'un système linéaire :

$$\frac{dE}{dZ} = 0 \Leftrightarrow [A_{1R}] Z = RE (\overline{A_2}^t B^*)$$

avec :

$$[A_{1R}] = RE \left(\begin{array}{cc} \overline{S}^t S & -\overline{S}^t T \\ -\overline{T}^t S & \overline{T}^t T \end{array} \right) \begin{array}{c} m+1 \\ n \end{array}$$

et $RE (\overline{A_2}^t B^*) = RE \left(\begin{array}{c} \overline{S}^t \\ -\overline{T}^t \end{array} \right) B^*$

Z est le vecteur des coefficients cherchés

(A1.25)

Le vecteur Z des coefficients des polynômes P et Q est ainsi déterminé à chaque itération. On utilise les coefficients de Q pour calculer les termes de pondération $D(j\omega_i)$ qui serviront à la linéarisation du problème de minimisation de l'erreur pour l'itération suivante. L'algorithme prend fin quand la déviation de la courbe identifiée par rapport à la courbe expérimentale est inférieure à une valeur ε fixée.

L'utilisateur n'intervient que pour fixer les degrés des polynômes P et Q. Dans le cas d'une flexibilité, chaque mode s'écrit comme l'inverse d'un polynôme de degré 2 en $(j\omega)$, donc après superposition de tous les modes, la fonction de transfert globale s'écrit comme une fraction rationnelle ayant pour numérateur un polynôme de degré $2(n-1)$ et pour dénominateur un polynôme de degré $2n$, n étant le nombre total de modes. Dans le cas d'une inertance, il suffit de multiplier le numérateur par $(-\omega^2)$, donc son degré devient égal à $2n$.

A ce stade, nous avons exprimé sous une forme analytique la courbe de transfert (flexibilité ponctuelle), il nous reste à en calculer les pôles et racines afin de connaître les résonances et antirésonances.

AI.6 CALCUL DES RACINES DU NUMERATEUR ET DU DENOMINATEUR

Dans ce chapitre, nous supposons que la structure possède un amortissement de type visqueux : cette hypothèse apparaît de manière implicite lorsque nous supposons que

les racines des polynômes, c'est à dire les fréquences complexes, sont deux à deux conjuguées.

AI.6.1 ALGORITHME DE BAIRSTOW

Le but de cet algorithme est de déterminer la partie réelle x_i , et la partie imaginaire y_i , des racines d'un polynôme, connaissant ses coefficients réels [B17]. Notons K ce polynôme, et X la variable ($j\omega$) :

$$K(X) = K_{r+1} X^r + K_r X^{r-1} + \dots + K_2 X + K_1 \quad (A1.26)$$

Etudions dans un premier temps les deux cas $r = 1$ et $r = 2$:

r = 1 On résout $K_2 X + K_1 = 0$

Cette équation possède une racine unique : $x_1 = -\frac{K_1}{K_2}$, $y_1 = 0$

r = 2 On résout $K_3 X^2 + K_2 X + K_1 = 0$

Cette équation du second degré a pour discriminant : $\Delta = K_2^2 - 4.K_3 K_1$

si $\Delta < 0$, il existe deux racines conjuguées :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{K_2}{2 K_3} & y_1 = \frac{j\sqrt{\Delta}}{2 K_3} \\ x_2 = -\frac{K_2}{2 K_3} & y_2 = -\frac{j\sqrt{\Delta}}{2 K_3} \end{cases}$$

si $\Delta = 0$, il n'existe qu'une racine réelle double : $x_1 = x_2 = -\frac{K_2}{2 K_3}$ $y_1 = y_2 = 0$

si $\Delta > 0$, il existe deux racines réelles distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-K_2 + j\sqrt{\Delta}}{2 K_3} & y_1 = 0 \\ x_2 = \frac{-K_2 - j\sqrt{\Delta}}{2 K_3} & y_2 = 0 \end{cases}$$

Dans le cas général où $r > 2$, nous pouvons alors diviser le polynôme K par le trinôme $X^2 - s X + q$. Le quotient s'écrit alors :

$$L_{r+1} X^{r-2} + L_r X^{r-1} + \dots + L_4 X + L_3 \quad (A1.27)$$

Le reste vaut :

$$L_2 (X - s) + L_1 \quad (A1.28)$$

Par identification, nous obtenons l'expression des coefficients L_i en fonction des coefficients du polynôme K :

$$\begin{cases} L_{r+1} = K_{r+1} \\ L_r = K_r + s L_{r+1} \\ L_i = K_i + s L_{i+1} - q L_{i+2} \quad , \quad i \in [1, r-1] \end{cases} \quad (\text{A1.29})$$

Donc, si L_1 et L_2 sont nuls, cela signifie que le polynôme K est divisible par $X^2 - sX + q$. Les racines du trinôme sont donc aussi racines de K . Pour trouver deux racines de K , nous sommes donc amenés à résoudre une simple équation du second degré. Par une méthode itérative, nous déterminons les valeurs de s et q conduisant à un reste nul.

En résumé, pour déterminer les racines d'un polynôme de degré r , on calcule deux de ses racines en le divisant par un trinôme déterminé. On se ramène à un polynôme de degré $r-2$, dont on calculera de la même façon deux racines, et ceci jusqu'à ce que l'on aboutisse à un polynôme de degré strictement inférieur à trois.

A1.6.2 METHODE D'ITERATION

Si s et q ont des valeurs quelconques, le reste n'a aucune raison d'être nul, L_1 et L_2 sont alors des fonctions de s et q . On pose :

$$\begin{aligned} L_2 &= F(s,q) \\ L_1 - s L_2 &= G(s,q) \end{aligned} \quad (\text{A1.30})$$

En développant ces fonctions en série de Taylor, au voisinage d'un point (s_0, q_0) , nous trouvons :

$$\begin{aligned} F(s,q) &= F(s_0, q_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial s_0} \right)_{s=s_0} ds + \left(\frac{\partial F}{\partial q_0} \right)_{q=q_0} dq \\ G(s,q) &= G(s_0, q_0) + \left(\frac{\partial G}{\partial s_0} \right)_{s=s_0} ds + \left(\frac{\partial G}{\partial q_0} \right)_{q=q_0} dq \end{aligned} \quad (\text{A1.31})$$

Si s et q sont racines des fonctions F et G , nous avons $F(s,q) = G(s,q) = 0$, en notation matricielle, cela devient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial s_0} & \frac{\partial F}{\partial q_0} \\ \frac{\partial G}{\partial s_0} & \frac{\partial G}{\partial q_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ds \\ dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(s_0, q_0) \\ -G(s_0, q_0) \end{bmatrix} \quad (\text{A1.32})$$

D'où l'on déduit les variations ds et dq :

$$\begin{bmatrix} ds \\ dq \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial G}{\partial s_0} \frac{\partial F}{\partial q_0} - \frac{\partial F}{\partial s_0} \frac{\partial G}{\partial q_0}} \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial q_0} & \frac{\partial F}{\partial q_0} \\ \frac{\partial G}{\partial s_0} & \frac{\partial F}{\partial s_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(s_0, q_0) \\ G(s_0, q_0) \end{bmatrix} \quad (A1.33)$$

AI.6.3 CALCUL DES DERIVEES PARTIELLES

Dérivons les expressions donnant les coefficients L_i :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L_{r+1}}{\partial s} = 0 ; \frac{\partial L_{r+1}}{\partial q} = 0 \\ \frac{\partial L_r}{\partial s} = L_{r+1} ; \frac{\partial L_r}{\partial q} = 0 \\ \frac{\partial L_{r-1}}{\partial s} = L_r + s \frac{\partial L_r}{\partial s} ; \frac{\partial L_{r-1}}{\partial q} = -L_{r+1} \\ \frac{\partial L_{i-1}}{\partial s} = L_i + s \frac{\partial L_i}{\partial s} - q \frac{\partial L_{i+1}}{\partial s} \\ \frac{\partial L_{i-1}}{\partial q} = -L_{i+1} + s \frac{\partial L_i}{\partial q} - q \frac{\partial L_{i+1}}{\partial q} \end{array} \right\} \quad i \in [2, r-1] \quad (A1.34)$$

Il apparaît donc, d'après ces formules, que l'on puisse déterminer tous les coefficients $\frac{\partial L_i}{\partial s}$ et $\frac{\partial L_i}{\partial q}$ de manière récurrente. Nous allons construire deux suites récurrentes (Q_i) , $1 < i < r+2$, et (Q'_i) , $2 < i < r+2$, dont les termes seront fonctions de ces coefficients et qui permettront d'exprimer simplement les dérivées partielles de F et G.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_i = \frac{\partial L_{i-1}}{\partial s} \quad \text{pour } i \in [3, r+1] \\ Q_2 = \frac{\partial L_1}{\partial s} - L_2 \quad Q_1 \text{ n'existent pas} \end{array} \right. \quad (A1.35)$$

$$Q'_i = \frac{\partial L_{i-2}}{\partial q} \quad \text{pour } i \in [3, r+1], \quad Q'_1 \text{ et } Q'_2 \text{ n'existent pas}$$

Nous avons alors pour la suite des (Q_i) :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{r+1} = L_{r+1} \\ Q_r = L_r + s L_{r+1} = L_r + s Q_{r+1} \\ \vdots \\ Q_i = L_i + s Q_{i+1} - q Q_{i+2} \quad , \quad i \in [3, r-1] \\ \vdots \\ Q_2 = s Q_3 - q Q_4 \end{array} \right. \quad (A1.36)$$

Pour la suite des (Q'_i) :

$$\begin{cases} Q'_{r+1} = L_{r+1} \\ Q'_r = L_r - s \frac{\partial L_{r-1}}{\partial q} = L_r + s Q'_{r+1} \\ \vdots \\ Q'_i = L_i + s Q'_{i+1} - q Q'_{i+2} \quad , \quad i \in [3, r-1] \end{cases} \quad (A1.37)$$

On constate alors que la suite des (Q_i) est égale à celle des (Q'_i) . De plus, les dérivées partielles de F et G s'expriment uniquement en fonction de $\partial L_1/\partial s$, $\partial L_2/\partial s$, $\partial L_1/\partial q$, $\partial L_2/\partial q$ et L_2 , donc de Q_3 , Q_4 , Q_2 et Q_3 . Les deux suites étant égales, il ne nous suffit de connaître que trois termes Q_2 , Q_3 et Q_4 issus d'une seule récurrence. Les dérivées partielles de F et G s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial L_2}{\partial s} = Q_3 \\ \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial L_2}{\partial q} = -Q_4 \\ \frac{\partial G}{\partial s} = \frac{\partial L_1}{\partial s} - L_2 - s \frac{\partial L_2}{\partial s} = Q_2 - s Q_3 \\ \frac{\partial G}{\partial q} = \frac{\partial L_1}{\partial q} - s \frac{\partial L_2}{\partial q} = -Q_3 + s Q_4 \end{cases} \quad (A1.38)$$

Remplaçons F et G et leurs dérivées par leurs expressions en fonction des coefficients L_i et Q_i dans l'équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} ds \\ dq \end{bmatrix} = \frac{1}{Q_3^2 - Q_2 Q_4} \begin{bmatrix} -Q_3 + s Q_4 & Q_4 \\ -Q_2 + s Q_3 & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ L_1 - s L_2 \end{bmatrix} \quad (A1.39)$$

D'où nous déduisons les formules de récurrence pour les variables s_k et q_k :

$$\begin{cases} s_{k+1} = s_k + \frac{L_1 Q_4 - L_2 Q_3}{Q_3^2 - Q_2 Q_4} \\ q_{k+1} = q_k + \frac{L_1 Q_3 - L_2 Q_2}{Q_3^2 - Q_2 Q_4} \end{cases} \quad (A1.40)$$

Les valeurs initiales pour s_0 et q_0 sont arbitraires, on peut par exemple les choisir égales à 0. Nous définissons des suites s_i et q_i , telles que les fonctions $F(s,q)$ et $G(s,q)$

soient nulles, donc telles que les termes L_2 et L_1 soient nuls au bout d'un certain nombre d'itérations. Nous choisissons comme test de fin de boucle, de comparer à ε la valeur $\frac{|s_{k+1} - s_k| + |q_{k+1} - q_k|}{|s_{k+1}| + |q_{k+1}|}$. Dans certains cas, on peut ne pas converger après la première itération à partir de $s_0 = q_0 = 0$. En effet, nous avons alors :

$$\begin{cases} L_1 = K_1 \\ L_2 = K_2 \end{cases} \quad \begin{cases} Q_2 = 0 \\ Q_3 = K_3 \\ Q_3 = K_3 \end{cases} \quad (A1.41)$$

ce qui implique :

$$s_1 = \frac{K_1 K_4 - K_2 K_3}{K_3^2} \quad \text{et} \quad q_1 = \frac{K_1}{K_3} \quad (A1.42)$$

Si $K_3 = 0$, ou si $s_1 = q_1 = 0$, soit on ne peut pas calculer s_1 et q_1 , soit $s_1 = q_1 = 0$. Il faut alors modifier les valeurs de s_0 et q_0 .

Nous connaissons désormais une expression analytique de la courbe de transfert ainsi que la valeur de ses fréquences propres complexes.

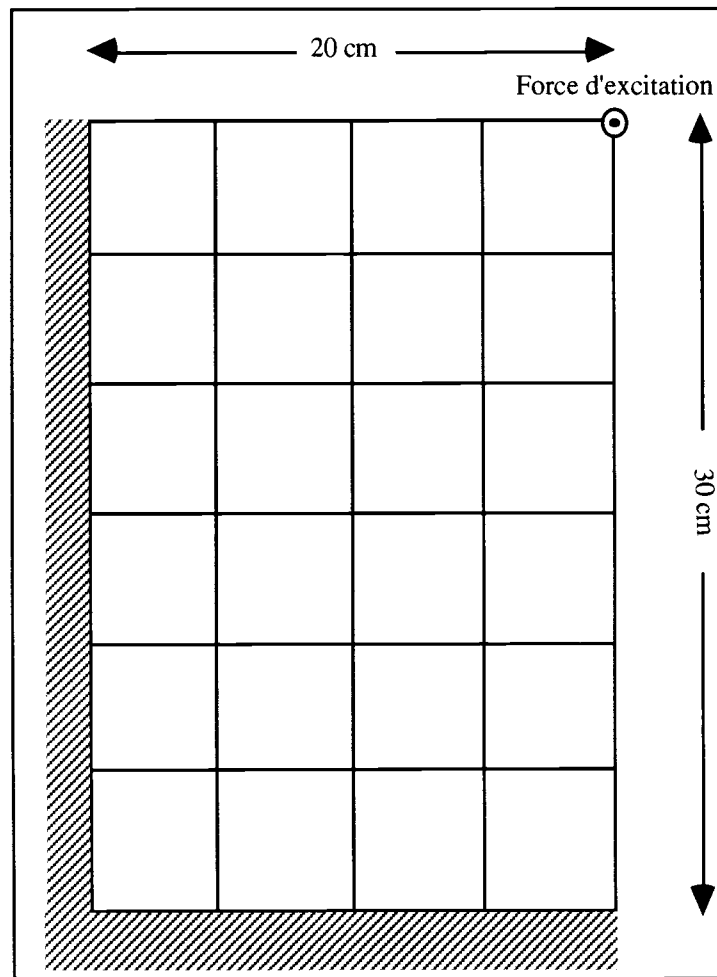
ANNEXE A2

OPTIMISATION D'UNE PLAQUE

AII.1 CALCUL DES SENSIBILITES

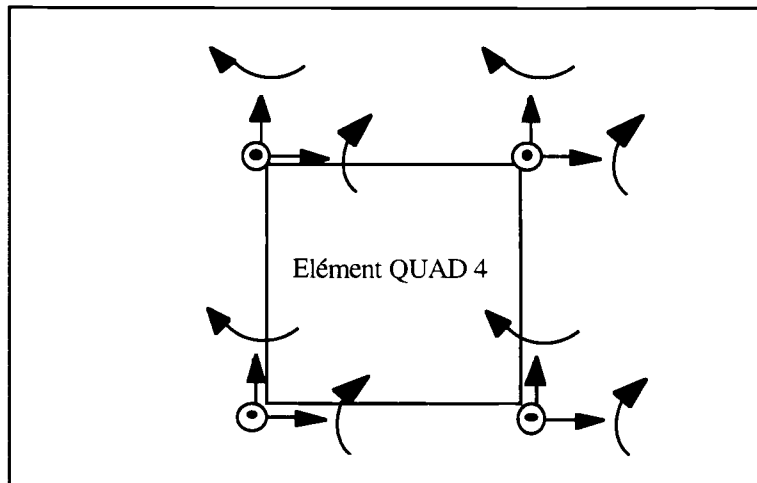
Nous désirons montrer comment étendre la méthode d'optimisation structurale développée dans le chapitre III et pour des structures composées d'éléments poutres au cas des plaques. Nous optimiserons l'épaisseur des éléments d'une plaque encadrée en deux de ses côtés, conformément à la méthode exposée dans le présent chapitre. Nous ne traiterons que la contrainte en flexibilité ponctuelle.

La plaque est modélisée en éléments finis. Elle comprend 24 éléments carrés de type QUAD4 (voir référence [C13]). Initialement, les éléments QUAD4 ont une épaisseur de 5 mm.



modèle de la plaque encadrée

L'élément QUAD4 comprend 20 ddl, soit 5 ddl par noeud :



Comme dans le cas des poutres, les coefficients des matrices élémentaires de masse et de raideur sont proportionnels à des puissances entières de l'épaisseur de l'élément plaque. Cependant, dans la matrice élémentaire de masse, les termes associés aux rotations sont tous nuls. Après assemblage, il est donc nécessaire d'effectuer une condensation statique de type condensation de Guyan. Nous montrons ci-dessous comment tenir compte de la condensation dans le calcul analytique de sensibilité de la matrice de raideur réduite.

Nous appelons ddl esclaves les ddl de rotation de la plaque encastree et les ddl maîtres les autres ddl. L'équation de la dynamique s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{me} \\ \mathbf{K}_{em} & \mathbf{K}_{ee} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mm} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.1})$$

La deuxième ligne permet d'exprimer les ddl \mathbf{q}_e en fonction des ddl \mathbf{q}_m :

$$\mathbf{q}_e = -\mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{em} \mathbf{q}_m \quad (\text{A2.2})$$

En réinjectant l'expression des ddl \mathbf{q}_e dans la première ligne de l'équation du mouvement, on obtient l'équation réduite du mouvement :

$$\left(\mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{me} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{em} \right) - \omega^2 \mathbf{M}_{mm} \mathbf{q}_m = \mathbf{F}_m \quad (\text{A2.3})$$

La matrice de raideur réduite s'écrit donc :

$$\mathbf{K}_r = \left[\mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{me} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{em} \right] \quad (\text{A2.4})$$

La sensibilité des formes propres et des pulsations propres impose de connaître les dérivées des matrices de masse et de raideur par rapport aux variables de conception. Connaissant les expressions analytiques de K_{ee} , K_{me} et K_{mm} , nous en déduisons l'expression de la dérivée de K_r :

$$\frac{\partial K_r}{\partial h_i} = \frac{\partial K_{mm}}{\partial h_i} - \frac{\partial K_{me}}{\partial h_i} K_{ee}^{-1} K_{em} - K_{me} \frac{\partial K_{ee}^{-1}}{\partial h_i} K_{em} - K_{me} K_{ee}^{-1} \frac{\partial K_{em}}{\partial h_i} \quad (A2.5)$$

h_i représentant la variable de conception (épaisseur de l'une des plaques élémentaires) par rapport à laquelle on effectue la différentiation. Le seul terme inconnu dans l'expression précédente est la dérivée de K_{ee}^{-1} . Par définition, on a :

$$K_{ee}^{-1} K_{ee} = I \quad (A2.6)$$

Dérivons cette égalité par rapport à h_i :

$$\frac{\partial K_{ee}^{-1}}{\partial h_i} K_{ee} + K_{ee}^{-1} \frac{\partial K_{ee}}{\partial h_i} = 0 \quad (A2.7)$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{\partial K_{ee}^{-1}}{\partial h_i} = - K_{ee}^{-1} \frac{\partial K_{ee}}{\partial h_i} K_{ee}^{-1} \quad (A2.8)$$

Finalement, on obtient l'expression de la dérivée de la matrice de raideur réduite :

$$\frac{\partial K_r}{\partial h_i} = \frac{\partial K_{mm}}{\partial h_i} - 2 \frac{\partial K_{me}}{\partial h_i} K_{ee}^{-1} K_{em} + K_{me} K_{ee}^{-1} \frac{\partial K_{ee}}{\partial h_i} K_{ee}^{-1} K_{em} \quad (A2.9)$$

On effectue alors l'analyse de sensibilité grâce aux formules du chapitre III (paragraphe III.5.4).

En ce qui concerne l'algorithme d'optimisation, on établit des formules de récurrence analogues à (III.21) et (III.25). En effet, on peut adopter la même démarche que pour le cas des structures composées de poutres, c'est-à-dire une approche par critère d'optimalité fondée sur la condition de Kühn-Tucker, car la masse de la plaque est une fonction linéaire des variables de conception.

AII.2 RESULTATS

- OPTIMISATION 1

$g_{f_{initiale}} = 0.683$

$\xi_k = 0.02$

$\alpha = 0.95$

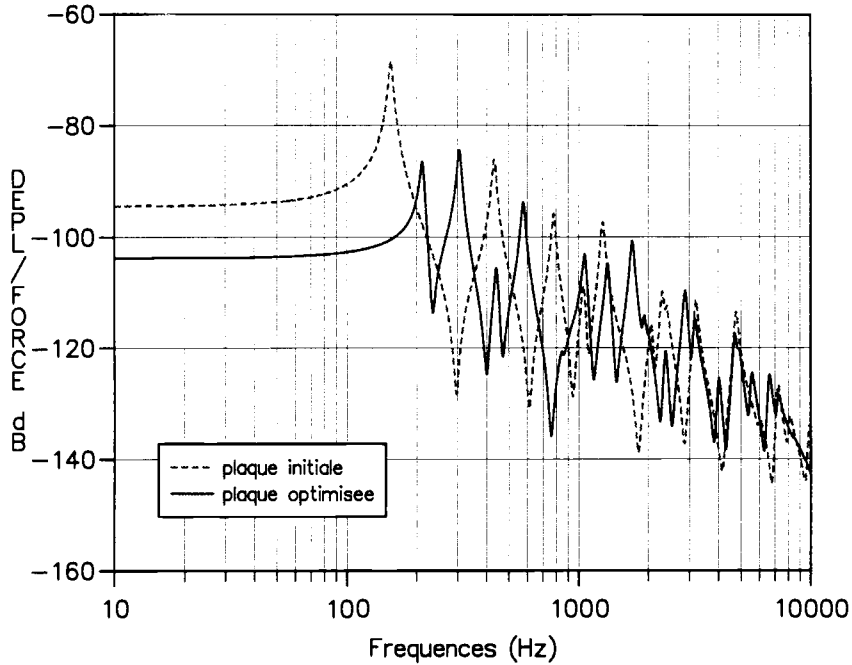
lim inf sur les variables h_j : 1 mm

$\hat{g}_f = - 5.5$

$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$

lim sup sur les variables h_j : 1 cm

PLAQUE



- OPTIMISATION 2

$g_{f_{initiale}} = 1.683$

$\xi_k = 0.02$

$\alpha = 0.95$

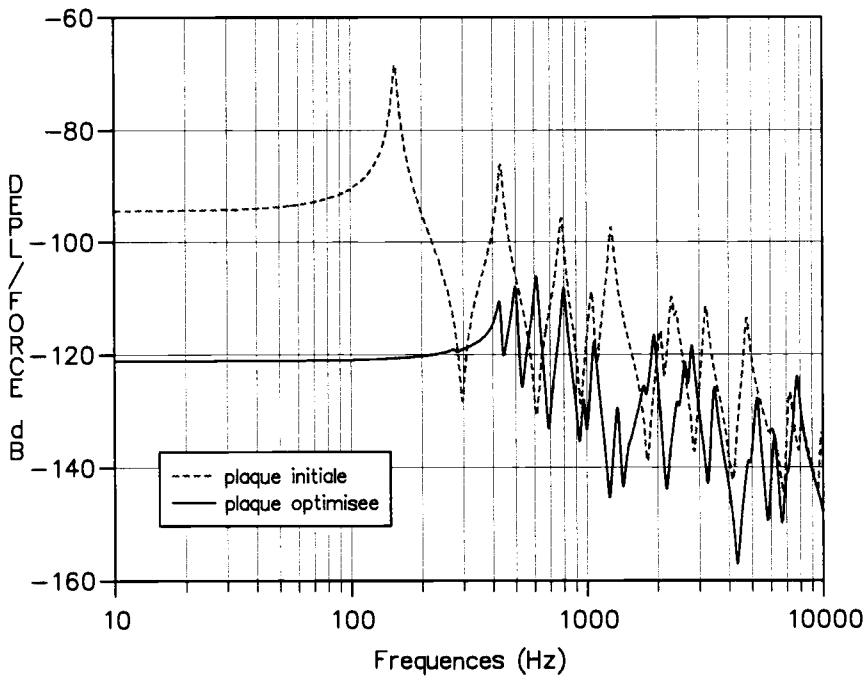
lim inf sur les variables h_j : 1 mm

$\hat{g}_f = - 6.5$

$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$

lim sup sur les variables h_j : 3 cm

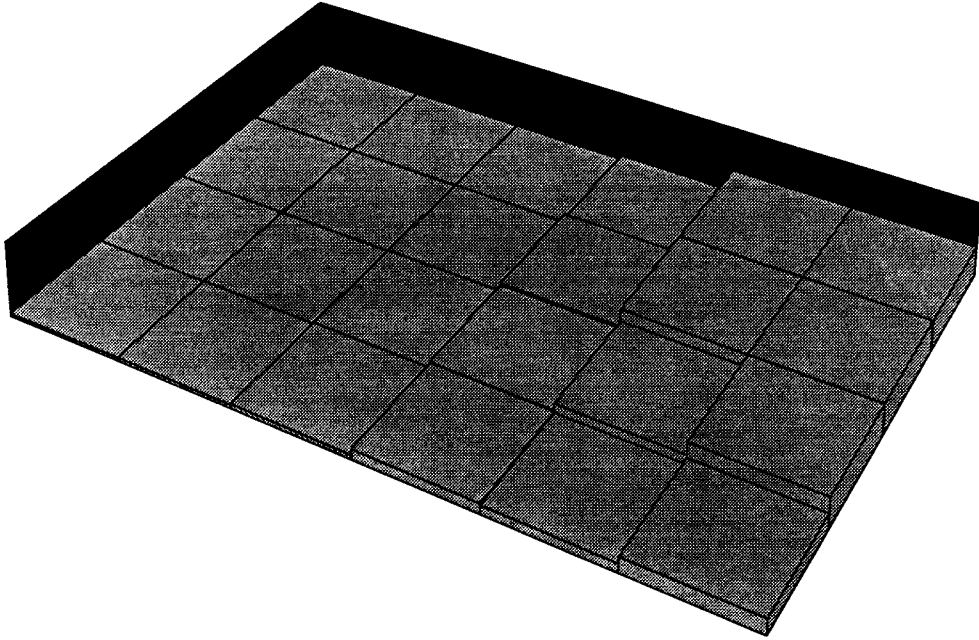
PLAQUE



AII.3 PROFIL OPTIMAL DE LA PLAQUE

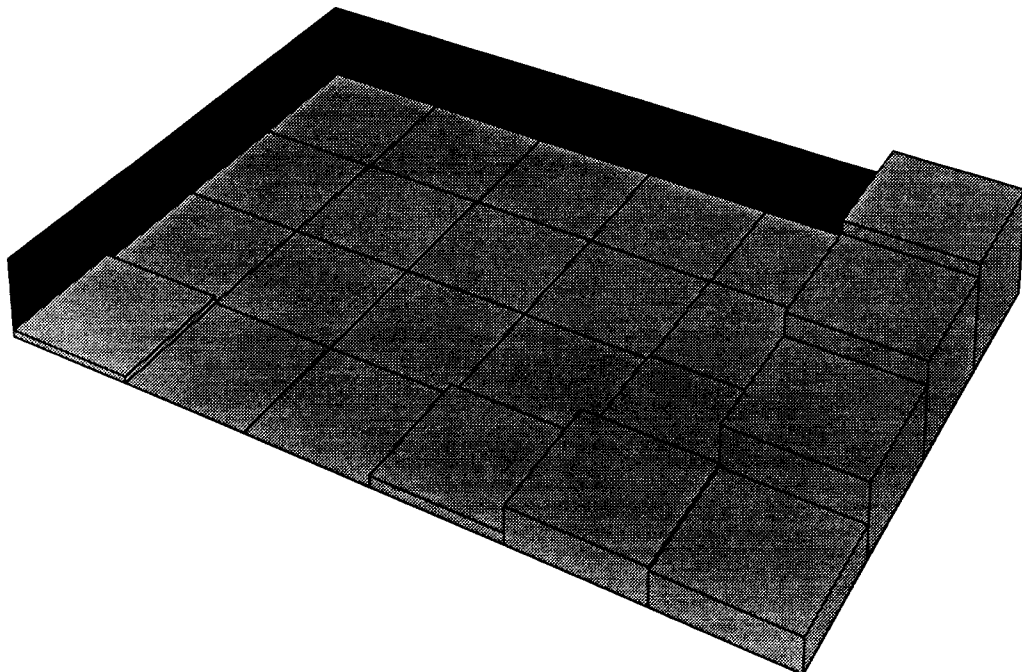
- OPTIMISATION 1

ENCASTREMENT



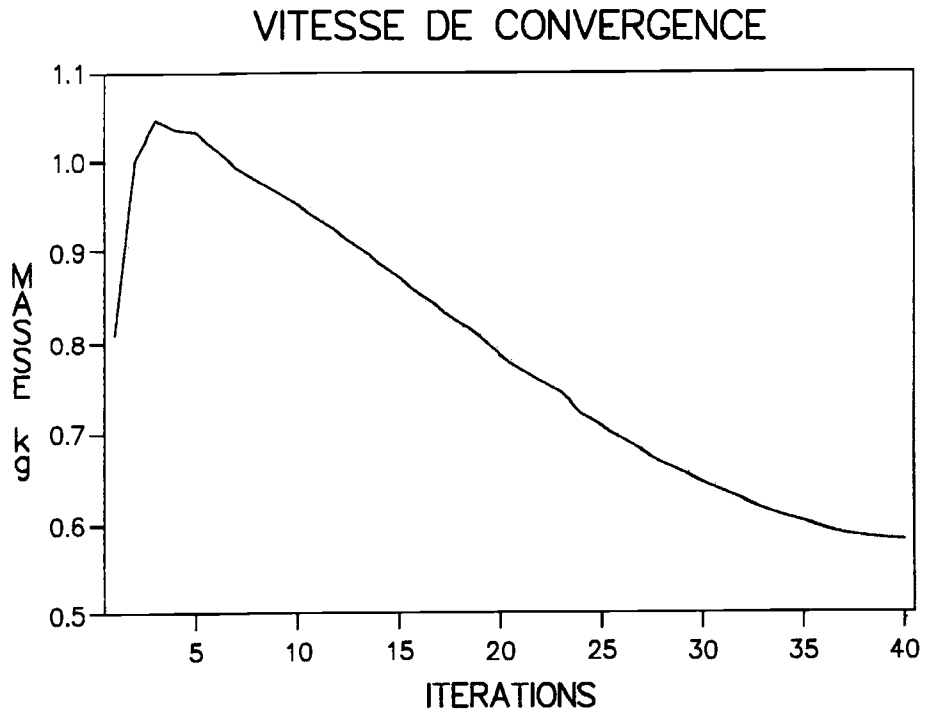
- OPTIMISATION 2

ENCASTREMENT

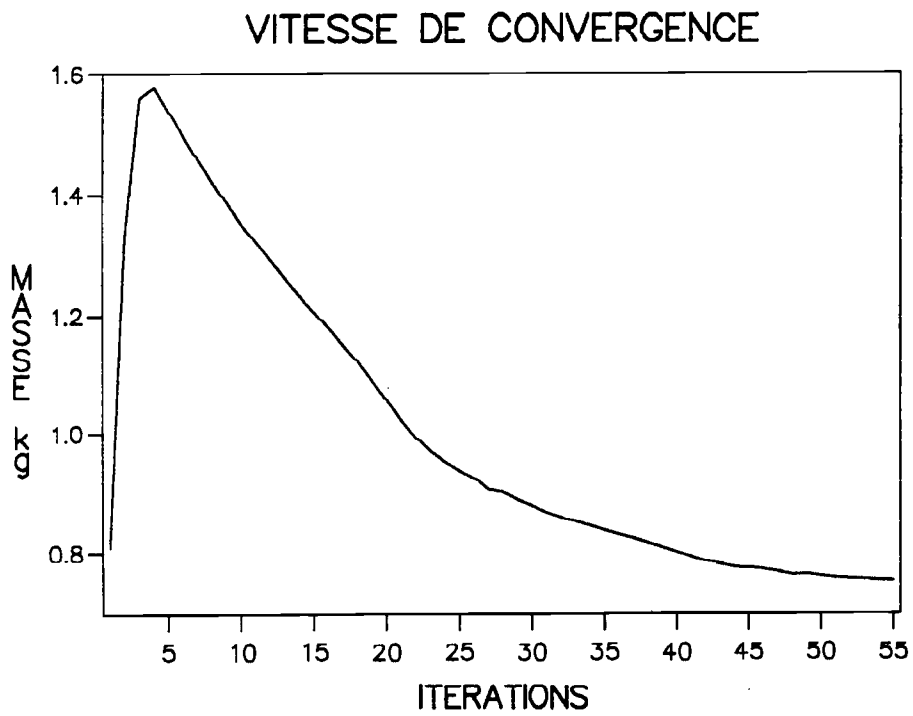


AII.4 VITESSE DE CONVERGENCE

- OPTIMISATION 1



- OPTIMISATION 2



ANNEXE A3
ELEMENT FINI PLAQUE SANDWICH
QUAD4A

AIII.1 DESCRIPTION DE L'ELEMENT PLAQUE SANDWICH

L'élément plaque sandwich développé par M. Macé est constitué de deux plaques de type QUAD4, la plaque de base (ou peau inférieure) et la plaque de contrainte (ou peau supérieure), entre lesquelles est intercalé un élément volumique viscoélastique.

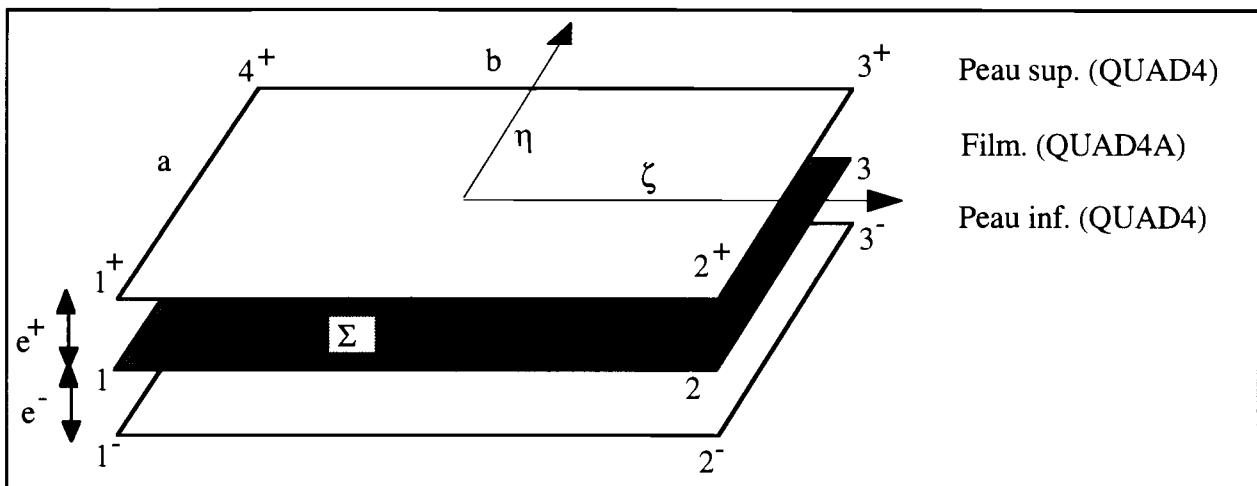


figure a3.1 : représentation de l'élément de film QUAD4A

AIII.2 CALCUL DE LA MATRICE DE COUPLAGE EN RAIDEUR FILM-PEAUX

Dans la formulation variationnelle de la plaque, la contribution élastique du film Σ est l'intégrale :

$$\mathcal{J} = \int_{\Sigma} [[\vec{u}_T]] \cdot [[\vec{v}_T]] d\Sigma \quad (A3.1)$$

où $[[\vec{u}_T]]$ et $[[\vec{v}_T]]$ sont les sauts de déplacements tangentiels aux interfaces du film (notées Σ^{\pm}) avec les peaux Ω^{\pm} .

On effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \zeta = \frac{2x_1}{a} - 1 & (0 \leq x_1, x_2 \leq a, b) \\ \eta = \frac{2x_2}{b} - 1 & (-1 \leq \zeta, \eta \leq 1) \end{cases} \quad (\text{A3.2})$$

On choisit pour les déplacements longitudinaux (tangentiels) des interfaces au point (ζ, η) et exprimés dans le repère tangent, une interpolation bilinéaire :

$$u_{\alpha\Sigma^\pm}(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\zeta, \eta) u_{\alpha\Sigma^\pm}(i) \quad \text{où } \alpha = 1 \text{ et } 2 \quad (\text{A3.3})$$

avec :

$$N_i(\zeta, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \zeta_i \zeta) (1 + \eta_i \eta) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 4 \quad (\text{A3.4})$$

où $u_{\alpha\Sigma^\pm}(i)$ est le déplacement au noeud numéro i du maillage de la structure, sommet de l'élément (ζ_i, η_i) , les coordonnées réduites de ce noeud prenant leurs valeurs dans $[-1, 1]$. Une représentation graphique de ces fonctions d'interpolation est donnée ci-dessous :

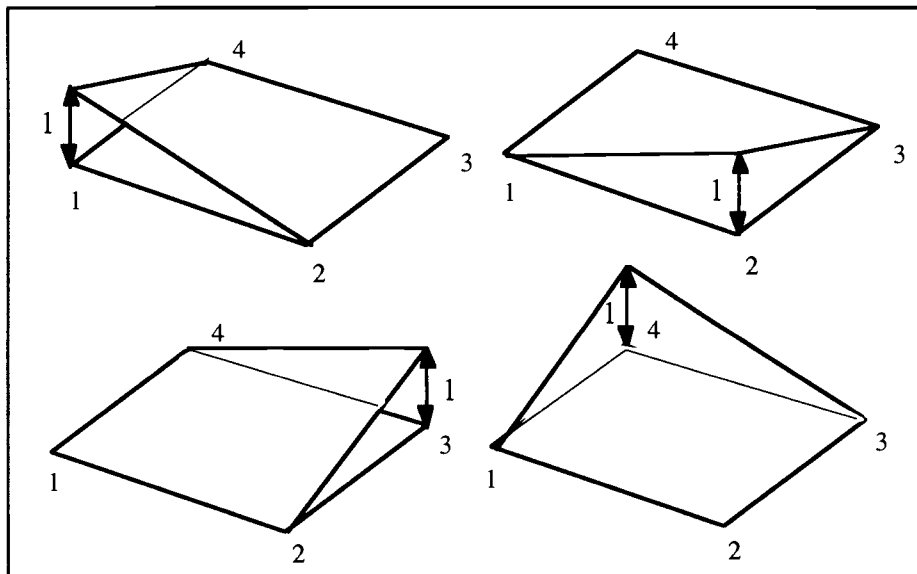


figure a3.2 : fonctions d'interpolation

De manière générale, (c'est-à-dire avec un excentrement e^\pm des peaux supérieures et inférieures Ω^\pm), nous avons : $u_{\alpha\Sigma^\pm}(i) = u_\alpha^\pm(i) \pm e^\pm \beta_\alpha(i)$ où $e^\pm = \frac{h^\pm}{2}$.

$\beta_\alpha(i)$ est la rotation de la normale au noeud i (on suppose que $\beta_\alpha^+ = \beta_\alpha^-$).

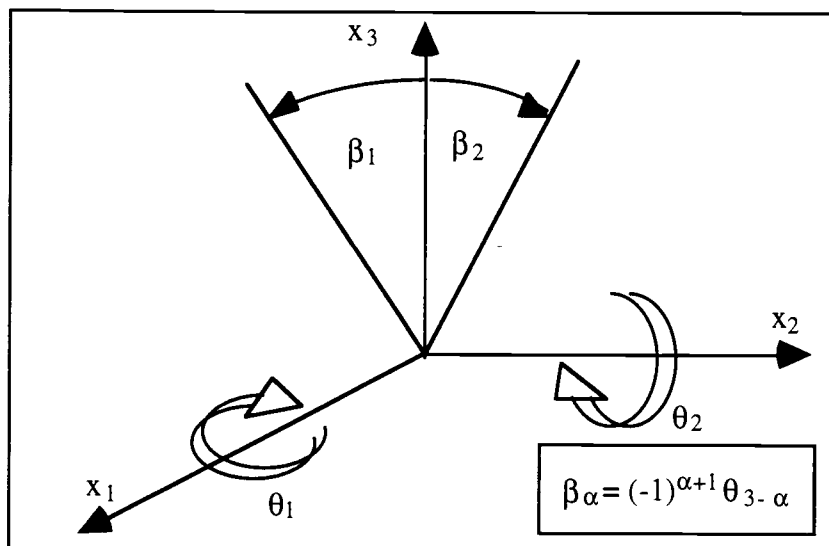


figure a3.3 : conventions pour les rotations

idem pour les déplacements \vec{v}_T .

Le calcul de la matrice de rigidité est effectué en utilisant la formule :

$$\int_{-1}^{+1} N_i(\zeta, \eta) \cdot N_j(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = \frac{1}{36} (3 + \zeta_i \zeta_j) (3 + \eta_i \eta_j) \quad (A3.5)$$

Le jacobien de l'élément rectangulaire est $J = \frac{ab}{4}$.

Tous calculs faits, on trouve que la matrice de raideur élémentaire du film est égale à l'hypermatrice :

$$\frac{k \cdot ab}{36} \begin{bmatrix} 4C & 2C & C & 2C \\ & 4C & 2C & C \\ & & 4C & 2C \\ \text{Sym.} & & & 4C \end{bmatrix} \quad (A3.6)$$

$$\text{où } C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ & & 1 & -1 & 0 & d & 0 \\ & & & 1 & 0 & -d & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & d^2 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & & d^2 \end{bmatrix}, \quad d = \frac{h^+ + h^-}{2} \quad (A3.7)$$

relativement aux ddl :

$$\{u_1^+(i), u_1^-(i), u_2^+(i), u_2^-(i), w(i), \theta_1(i), \theta_2(i)\}$$

La matrice C peut être interprétée comme une matrice de couplage entre les deux peaux épaisses.

AIII.3 ASSEMBLAGE

Les matrices de raideur élémentaires correspondant au film Σ sont ensuite assemblées au niveau global. La matrice de raideur globale du film, notée K_{film} est alors proportionnelle au paramètre k de la loi de comportement du matériau viscoélastique ($k = \frac{G}{e_{\text{film}}}$).

La matrice de raideur de l'ensemble des deux peaux et du film vaut alors après assemblage :

$$K = K_p^+ + K_p^- + K_{\text{film}}$$

En ce qui concerne les matrices de masse, la technique d'assemblage est identique, sauf que la contribution du film est considérée comme négligeable. Tout comme pour le cas des plaques simples, dans la matrice de masse, les termes associés aux ddl de rotation sont tous nuls. On opère alors, comme précédemment, une condensation statique (voir Annexe A2).

Remarque :

Nous n'avons pas tenu compte de l'excentrement des fibres neutres dû aux différences d'épaisseurs entre les plaques élémentaires (voir figure 4.5). Nous supposons que ces excentrement ont des effets négligeables sur les réponses.

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par l'arrêté du 21 Mars 1988 et l'arrêté du 23 Novembre 1988,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Mr L. JEZEQUEL Professeur - Mécanique des Solides - ECOLE CENTRALE DE LYON,

et les rapports de

Mr M. PERULLI Professeur - UNIVERSITE PARIS VI - B.P. 162 - 75252 PARIS Cedex 05,

Mr Y. RAVALARD Professeur - Université de Valenciennes - ENSIMEV - Le Mont Houy - VALENCIENNES,

Monsieur **LE MERLE Pierre**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du titre de **DOCTEUR**

Spécialité : **ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 23 septembre 1994

P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur
de l'Administration de la
Recherche



F. LEBOEUF

