



HAL
open science

Généricité et prévalence des propriétés multifractales de traces de fonctions

Delphine Maman

► **To cite this version:**

Delphine Maman. Généricité et prévalence des propriétés multifractales de traces de fonctions. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT : 2013PEST1090 . tel-00974540

HAL Id: tel-00974540

<https://theses.hal.science/tel-00974540>

Submitted on 7 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale Mathématiques et Sciences et Technologies de
l'Information et de la Communication – MSTIC

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme
de docteur de l'université de Paris-Est
Spécialité : Mathématiques

Généricité et prévalence des propriétés multifractales de traces de fonctions

présentée par

Delphine MAMAN,

soutenue publiquement le 24 octobre 2013

Jury :

Julien BARRAL	Université Paris 13	Examineur
Zoltàn BUCZOLICH	Université Eotvos Hongrie	Examineur
Maarten DE HOOP	Université Purdue USA	Examineur
Stéphane JAFFARD	Université Paris - Est Créteil	Examineur
Philippe JAMING	Université Bordeaux I	Rapporteur
Stéphane SEURET	Université Paris - Est Créteil	Directeur de Thèse
Claude TRICOT	Université Blaise Pascal	Rapporteur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Stéphane Seuret. Je le remercie pour le sujet intéressant qu'il m'a proposé, pour m'avoir fait partager ses idées et pour tout le temps que nous avons passé ensemble sur cette thèse.

Je tiens à remercier également Jean-Marie Aubry pour son aide au début de ma thèse et pour sa participation à l'article que nous avons écrit avec Stéphane Seuret.

Je remercie également Stéphane Jaffard qui m'a fait découvrir l'analyse multifractale lors de mon Master 2, m'a présenté S. Seuret et a accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie Philippe Jaming et Claude Tricot d'avoir accepté d'écrire un rapport sur ma thèse et d'être membre du jury. Je remercie également Julien Barral, Zoltan Buczolich et Maarten de Hoop d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Enfin, je remercie Sophie pour son aide lorsqu'il a fallu que je présente mes travaux en anglais à Esneux et mon mari pour son soutien tout au long de cette thèse.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Régularité locale.	6
1.2	Formalisme multifractal	9
1.3	Les ondelettes	11
1.4	Caractérisation de l'exposant par ondelettes.	13
1.5	Espace de Besov.	13
1.6	La prévalence et la généricité au sens de Baire.	16
1.7	Présentation des travaux des chapitres 3 et 4.	18
1.8	Travaux du chapitre 5.	23
2	Prévalence et Mesurabilité universelle	27
2.1	Introduction	27
2.2	Ensemble timide.	28
2.3	Ensemble universellement mesurable.	30
2.4	Ensemble Haar-nul	30
3	Local behavior of traces of Besov functions : Prevalent results	37
3.1	Introduction	37
3.2	Preliminaries	43
3.2.1	Dimensions	43
3.2.2	Wavelets	44
3.2.3	Localization of the problem	46
3.2.4	Characterization of local and global regularity properties	47
3.2.5	Traces	48
3.2.6	Dyadic approximation	50
3.2.7	Prevalence, universal measurability, analytic sets	51
3.3	Proof of Theorem 3.2.1	51
3.3.1	A first property of the wavelet	51

3.3.2	Prevalence property of an ancillary set	53
3.3.3	Prevalent upper bound	53
3.3.4	Prevalent lower bound	54
3.4	Proof of Theorem 3.3.1 : prevalence of \mathcal{F}_α	55
3.4.1	Measurability of $\mathcal{O}_{\gamma,N}^\varepsilon$	56
3.4.2	Probe space	58
3.4.3	Shyness of $\mathcal{O}_{\gamma,N}^\varepsilon$	62
3.5	Proof of Theorem 3.1.1 : Lebesgue-almost every trace of every function	65
3.6	Traces on submanifolds of \mathbb{R}^D	68

4	Propriétés génériques au sens de Baire des fonctions dans des espaces de Besov	73
4.1	Introduction	73
4.2	Preliminaires	76
4.2.1	Notations dimensionnelles.	76
4.2.2	La généricité au sens de Baire	76
4.2.3	Décomposition sur une base d'ondelette.	77
4.2.4	Exposants de Hölder et spectre.	79
4.2.5	Coefficients d'ondelette de la trace.	79
4.2.6	Première propriété des ondelettes.	80
4.2.7	L'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$	81
4.2.8	Approximation par des dyadiques.	82
4.3	Etude d'une fonction particulière.	85
4.3.1	Propriétés de la trace de g	87
4.3.2	Calcul d'un exposant de Hölder de g_α en un point d'exposant dyadique α	88
4.3.3	Calcul du spectre de singularités	91
4.4	Le Théorème 4.1.1	91
4.4.1	Majoration de l'exposant de Hölder de la trace d'une fonction f de \mathcal{D}	92
4.4.2	Exposants de Hölder de la trace de f	97
4.4.3	Calcul du spectre de singularités.	99
4.5	Intersection d'espaces de Besov	99
4.5.1	L'espace V^D	102
4.5.2	Un premier résultat sur l'espace V^D	103
4.5.3	Un exposant particulier.	104
4.6	Etude d'une fonction particulière.	104
4.6.1	Propriétés de la trace de g	107

4.6.2	Calcul de l'exposant de Hölder de g_a en un point α -approximable.	109
4.6.3	Calcul du spectre de singularités	111
4.7	Le premier point du Théorème 4.5.1.	111
4.7.1	Propriétés des coefficients d'ondelette de la trace d'une fonction $f \in \mathcal{D}$	112
4.7.2	Exposant de Hölder de la trace de f	113
4.7.3	Calcul du spectre de singularités.	114
4.8	Second point du Théorème 4.5.1	115
5	A function which is its own multifractal spectrum	117
5.1	Introduction	117
5.2	Functions with increasing visibility	119
5.2.1	First properties of functions with increasing visibility	121
5.2.2	Construction of a discontinuous function with increasing visibility on \mathbb{R}	124
5.3	Construction of the function f	127
5.3.1	Construction of f_2	127
5.3.2	Construction of Φ_{n+1} and f_{n+1}	130
5.3.3	Properties of the limit of f_n	132
5.4	Upper bound for the spectrum of f	133
5.5	Lower bound for the spectrum of f	139

Chapitre 1

Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons principalement à l'analyse multifractale des fonctions.

L'analyse multifractale consiste en l'étude des propriétés locales des ensembles, des mesures, ou, comme c'est le cas principalement dans cette thèse, des fonctions. C'est un domaine récent des mathématiques, dont l'importance est apparue pour les fonctions en particulier suite à son émergence dans le contexte de la turbulence pleinement développée : dans les souffleries comme celle de Modane [33], des expériences ont montré que la vitesse mesurée d'un écoulement turbulent présentait des fortes irrégularités qui dépendaient du temps. Ainsi, les exposants qui décrivent le comportement local du signal correspondant varient en fonction du temps, c'est le comportement multifractal typique. Il est également conjecturé par ailleurs que l'énergie d'un fluide turbulent se dissipe de façon hétérogène sur des ensembles de points de dimension de Hausdorff petite, qui pourraient correspondre à certains types de singularités répartis sur tout le domaine.

Parallèlement, G. Parisi et U. Frish [32] introduisirent l'analyse multifractale pour étudier la turbulence pleinement développée d'un fluide, et expliquer la non-concavité d'une certaine fonction d'échelle (qui est une quantité globale calculée sur l'ensemble du signal considéré) grâce à la multifractalité de ce signal (voir aussi [2, 3] pour des travaux liant multifractale et turbulence).

L'analyse multifractale est également utilisée dans le cadre du traitement du signal ou de l'image [54] par exemple pour la classification d'images, ou dans l'étude des propriétés locales des trajectoires de processus stochastiques [42, 5, 12, 13].

Benoît Mandelbrot est l'instigateur de cette notion de multifractale (même s'il ne l'a pas nommée explicitement comme telle). Au début des années 1970 [59, 60], il introduisit l'objet mathématique maintenant très répandu de cascade multiplicative,

qui sont des mesures aléatoires pouvant servir comme modèle de dissipation d'énergie [61]. Ces cascades ont été étudiées par J-P Kahane et J. Peyriere [50] et s'avéreront être des mesures multifractales, au sens ou localement, la réalisation de la mesure peut avoir des dimensions locales qui dépendent de l'endroit autour duquel on se focalise.

Nous étudierons principalement dans cette thèse la caractérisation du comportement local d'une fonction autour d'un point x_0 . Cette caractérisation est, en effet, nécessaire dans les différentes applications citées plus haut. On obtiendra donc des résultats de régularité locale qui compléteront les informations fournies par la régularité globale.

1.1 Régularité locale.

La régularité ponctuelle est une façon de quantifier, à l'aide d'un nombre positif α , le fait que le graphe d'une fonction est plus ou moins "rugueux" en un point x_0 donné.

La régularité ponctuelle autour d'un point x_0 d'une fonction f est le plus souvent mesurée par l'exposant ponctuel de Hölder défini de la façon suivante :

Définition 1.1.1. *Soit $D \geq 1$ un entier (fixé tout le reste du manuscrit). Soit une fonction $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^D)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^D$, on dit que f appartient à $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$, pour $\alpha \geq 0$, si il existe un polynôme P de degré au plus $\lfloor \alpha \rfloor$, et une constante $C > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout x proche de x_0 au sens où $|x - x_0| \leq M$, on ait :*

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha. \quad (1.1)$$

La régularité locale de f en x_0 est mesurée par l'exposant ponctuel de Hölder :

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)\}.$$

Si (1.1) a lieu pour un $\alpha > 0$, f est bornée au voisinage de x_0 , c'est pourquoi l'exposant de Hölder peut seulement être défini pour des fonctions localement bornées.

La norme choisie dans \mathbb{R}^D n'a pas d'importance.

L'exposant de Hölder est défini point par point et décrit les variations locales de régularité de f .

Certaines fonctions ont un exposant de Hölder constant et fini : on les appelle des fonctions mono-höldériennes. C'est le cas de la fonction de Weierstrass, définie par

$$W_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

pour $a < 1 < ab$ qui a partout le même exposant de Hölder fini : $\frac{-\log a}{\log b}$.

Même si l'exposant ponctuel de Hölder décrit effectivement le comportement local, il possède certaines lacunes. En effet, il ne prend pas en compte le comportement oscillant de la fonction au voisinage du point étudié :

Ainsi la fonction "cusp", définie par $x \mapsto |x|^\gamma$, où γ est un réel positif ($\gamma \notin 2\mathbb{N}$), a un exposant ponctuel de Hölder en 0 égal à γ , mais ne présente pas de phénomènes d'oscillations en 0. La fonction "chirp", définie par $x \mapsto |x|^\gamma \sin(\frac{1}{|x|^\beta})$, où γ et β sont deux réels positifs, a également un exposant de Hölder égal à γ en 0 mais présente de rapides oscillations autour de 0. Ainsi, $h_f(x)$ ne distingue pas ces deux comportements, pourtant de nature très différente.

De façon plus générale, il n'est pas stable sous l'action d'opérateurs pseudo-différentiels.

Il arrive donc parfois que l'on cherche à compléter l'information fournie par $h_f(x)$ avec l'étude d'autres exposants locaux (comme l'exposant local [71], l'exposant d'oscillation [47] ou encore plus précisément avec la frontière 2-microlocale [37, 8, 72, 55] (cette frontière connaît actuellement un regain d'intérêt pour ses applications aux processus stochastiques). Même si ce n'est pas notre propos dans cette thèse, il serait intéressant d'étudier les résultats génériques pour ces exposants.

L'analyse multifractale étudie des fonctions dont, a priori, l'exposant de Hölder peut varier fortement d'un point à un autre. Aussi, en complément de la détermination de la valeur prise par l'exposant ponctuel de Hölder en chaque point, on va chercher à décrire la distribution des singularités, et leur importance relative, notamment en termes de dimension. On va donc s'intéresser à la dimension de Hausdorff des ensembles de points ayant un exposant de Hölder donné.

L'objet d'étude dans ce cadre est le spectre de singularité, aussi appelé spectre multifractal, défini comme suit.

Définition 1.1.2. *Soit f une fonction localement bornée sur \mathbb{R}^D . Le spectre de singularité, ou spectre multifractal, de f est l'application notée d_f définie par :*

$$d_f : h \in [0, \infty] \longmapsto \dim_{\mathcal{H}} E_f(h),$$

où l'ensemble iso-höldérien $E_f(h)$ est

$$E_f(h) := \{x_0 \in \mathbb{R}^D : h_f(x_0) = h\}.$$

Ici $\dim_{\mathcal{H}}$ est la dimension de Hausdorff.

Nous rappellerons ce qu'est la dimension de Hausdorff dans le chapitre 3. Par convention nous choisissons que $\dim_{\mathcal{H}} \emptyset = -\infty$.

Définition 1.1.3. *Si h_f prend au moins deux valeurs finies, on dit que la fonction f est multifractale. De façon équivalente, cela signifie que $d_f(h) \geq 0$ pour au moins deux valeurs de h .*

Si h_f prend une seule valeur finie, on dit que f est monofractale, c'est par exemple le cas de l'escalier du diable dont l'exposant de Hölder vaut $\frac{\log 2}{\log 3}$ sur l'ensemble de Cantor et vaut $+\infty$ ailleurs.

Remarquons également que l'on peut distinguer deux types de fonctions multifractales :

- des fonctions qui sont plus régulières dans certaines "régions" que d'autres, ce qui est souvent le cas des images, dans lesquelles on peut distinguer des régions à l'intérieur desquelles les régularités sont homogènes, mais cette régularité n'est pas la même suivant la région (cela correspond par exemple à des textures différentes à l'intérieur d'une même image),
- des fonctions multifractales "homogènes", qui présentent les mêmes caractéristiques partout [45, 20], au sens où pour tout ouvert Ω inclus dans l'ensemble de définition de la fonction, le spectre multifractal de la fonction f restreinte à Ω est le même que le spectre multifractal de f sur tout son support. Nous construirons d'ailleurs une telle fonction dans le chapitre 5.

On pourra par moment s'intéresser à la régularité locale d'une mesure positive borélienne. Dans ce cas, le comportement local est quantifié via une dimension locale définie de la manière suivante :

Définition 1.1.4. *Soit μ une mesure borélienne positive finie à support dans \mathbb{R}^D . La dimension locale de μ en $x \in \text{Supp}(\mu)$ est définie par*

$$h_\mu(x) = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r},$$

où $B(x, r)$ désigne la boule de centre x et de rayon r .

Comme pour les fonctions, les dimensions locales de mesures varient typiquement fortement d'un point à un autre. On définit alors les ensembles de niveau $E_\mu(h) = \{x : h_\mu(x) = h\}$ et le spectre multifractal de μ par

$$d_\mu(h) := \dim\{x : h_\mu(x) = h\}.$$

1.2 Formalisme multifractal

Les méthodes d'ondelettes pour le calcul numérique des spectres de singularités ont été développées notamment par P. Abry, A. Arneodo, E. Bacry et J-F Muzy [3, 4], et sont évidemment fondamentales pour les applications. En réalité il est inutile d'essayer de calculer directement le spectre multifractal d'un signal ou d'une image, trois ou quatre limites sont nécessaires avant d'arriver au résultat, et les erreurs d'approximation successives mèneraient probablement à des résultats dénués de sens. L'estimation se fait via le formalisme multifractal, qui permet d'affirmer que pour des fonctions ou des mesures possédant des propriétés d'auto-similarité (déterministe ou statistique), le spectre multifractal coïncide avec la transformée de Legendre d'une fonction d'échelle qui, elle, est accessible numériquement (comme nous l'avions expliqué au début de cette thèse). Donnons ici une idée de la façon dont cette formule a été pressentie par Frisch et Parisi.

Leur intuition était que la non-linéarité de la fonction d'échelle vient de la présence de différents comportements locaux (ainsi la vitesse serait multifractale). Depuis les années 1940 et Kolmogorov, on s'intéresse aux moments de la vitesse v d'un écoulement dans un domaine borné Ω , qui est défini par

$$M(p, \xi) = \int_{\Omega} |v(x + \xi) - v(x)|^p dx.$$

On s'attend à ce que $M(p, \xi) \sim \xi^{\zeta_f(p)}$ lorsque $\xi \rightarrow 0$. La fonction $p \mapsto \zeta_f(p)$ est appelée la fonction d'échelle. Beaucoup de modèles de turbulence prévoyaient une fonction d'échelle linéaire en p , mais les estimations numériques calculées sur les données réelles démontrent que $\zeta_f(p)$ est en fait une fonction non-linéaire, concave croissante. Intuitivement Frisch et Parisi ont compris que cela devait résulter de la multifractalité de v .

Supposons que plusieurs exposants h existent pour la vitesse, en différents points $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Pour tous les points $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $h_v(x) = h$, on a approximativement

$$|v(x + \xi) - v(x)| \sim |\xi|^h.$$

En supposant que $\dim_{\mathcal{H}} E_v(h) = d_v(h) > 0$, alors en confondant dimension de Hausdorff et dimension de boîte, et en supposant les limites atteintes, il y a environ $|\xi|^{-d_v(h)}$ cubes de taille $|\xi|$ (i.e. de volume $|\xi|^3$) contenant des x dont l'exposant est h . Donc

$$M(p, \xi) \sim \int_{\Omega} |v(x + \xi) - v(x)|^p dx \sim \int_h |\xi|^{ph} |\xi|^{-d_v(h)} |\xi|^3 dh \sim \int_h |\xi|^{p h - d_v(h) + 3} dh.$$

Lorsque ξ tend vers 0, la contribution la plus importante est celle obtenue avec l'exposant

$$\zeta_f(p) = \inf_h (ph - d_v(h) + 3). \quad (1.2)$$

qui expliquerait la concavité de la fonction ζ_f qui est obtenue par transformée de Legendre (une telle fonction est toujours concave). Par transformée de Legendre inverse, on a aussi la formule

$$d_v(h) = \inf_{p \in \mathbb{R}} (ph - \zeta(p) + 3), \quad (1.3)$$

qui nous dit qu'il serait naturel d'obtenir une forme concave pour les spectres d'objets ayant de bonnes propriétés d'invariance d'échelle (pour lesquels la fonction ζ est, on l'espère, plus facile à calculer).

Définition 1.2.1. *On appelle formalisme multifractal la formule (1.3), ou toute formule semblable, liant par une transformée de Legendre le spectre de singularités à une fonction d'échelle calculée sur la fonction. Lorsqu'il y a égalité entre le spectre multifractal d'une fonction f en $h \geq 0$ et la transformée de Legendre associée, on dit que le formalisme multifractal est vérifié en h par f .*

Remarquons qu'un segment (qui est la forme du spectre que nous obtiendrons pour les fonctions prévalentes ou typiques d'un espace de Besov) est une courbe concave dégénérée.

Pour une mesure de probabilité, on peut également définir plusieurs formalismes multifractals. Un des plus communs est le suivant :

Définition 1.2.2. *La fonction d'échelle $\tau_\mu(q)$ associée à μ , parfois appelée fonction de partition ou L^q -spectrum en anglais, se définit ainsi : pour tout $q \in \mathbb{R}$*

$$\tau_\mu(q) := \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{-j} \log_2 \left(\sum \mu(I)^q \right), \quad (1.4)$$

la somme étant prise sur tous les cubes dyadiques I de génération j de \mathbb{R}^d et de μ -masse non-nulle.

Le formalisme multifractal est vérifié pour μ en h lorsque $d_\mu(h)$ se retrouve comme la transformée de Legendre de la fonction d'échelle :

$$d_\mu(h) = (\tau_\mu)^*(h) := \inf(qh - \tau_\mu(q) : q \in \mathbb{R}). \quad (1.5)$$

Là encore, le formalisme a été vérifié pour beaucoup de mesures, notamment les cascades de Mandelbrot (presque sûrement), ou les mesures typiques, ou des mesures autosimilaires [11, 14, 17, 27, 19].

1.3 Les ondelettes

Tout au long de cette thèse, nous utiliserons la décomposition des fonctions sur les bases d'ondelettes. En effet les coefficients d'ondelettes permettent de caractériser facilement l'exposant ponctuel de Hölder ou l'appartenance à un espace de Besov.

La première construction d'une base orthonormée d'ondelettes a été effectuée par Haar en 1909 (sans qu'il appelle ça des ondelettes évidemment !). Les premières bases orthonormées d'ondelettes de régularité arbitrairement grande ont été construites par Stömberg en 1981 et, de façon plus générale par P-G Lemarié et Y. Meyer en 1986 [53]. La méthode de construction des bases d'ondelettes à l'aide d'une analyse multirésolution (que nous allons présenter ici) a été introduite par S. Mallat et Y. Meyer en 1989, puis I. Daubechies réussit enfin, en 1992, à construire des ondelettes à support compact [25].

Nous rappelons rapidement les fondements de l'analyse multi-résolution et de la construction des bases d'ondelettes.

Une base orthonormée d'ondelettes est construite à l'aide d'une analyse multi-résolution [58, 66, 24], c'est-à-dire à l'aide d'une suite V_j ($j \in \mathbb{Z}$) de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R}^D)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$.
- $\forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$.
- il existe $\psi^0(x) \in V_0$ telle que les $\psi^0(x - k)$ ($k \in \mathbb{Z}^D$) forment une base orthonormée de V_0 .
- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^D)$.

L'analyse multirésolution est dite r -régulière si la fonction ψ^0 est \mathcal{C}^r , et si les $\partial^\alpha \psi^0$, pour $|\alpha| \leq r$, sont toutes à décroissances rapides.

On définit W_j comme le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} . On montre alors qu'il existe $2^D - 1$ fonctions, notées $\psi^{(i)}$ ($i \in \{1; \dots; 2^D - 1\}$), vérifiant les mêmes propriétés de régularité que ψ^0 et telles que les $\psi^{(i)}(x - k)$ ($k \in \mathbb{Z}^D$) forment une base orthonormée de W_0 .

Alors, le résultat fondamental est que sous certaines hypothèses sur ψ^0 et ψ^1 , l'ensemble des fonctions $2^{Dj/2} \psi^{(i)}(2^j x - k)$, (où $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^D$ et $i \in \{1, \dots, 2^D - 1\}$), forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^D)$.

En posant $\lambda := (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^D \times \{1, \dots, 2^D - 1\}$, on obtient que tout fonction

de $L^2(\mathbb{R}^D)$ peut être écrite de la façon suivante :

$$f = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^D \times \{1, \dots, 2^D - 1\}} d_\lambda \psi_\lambda$$

où

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(x) &= \psi^{(1)}(2^j x - \mathbf{k}) \\ \text{et } d_\lambda &= 2^{Dj} \int f(x) \psi_\lambda(x) dx. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on ne choisit pas une normalisation L^2 mais une normalisation L^∞ plus pratique pour étudier la régularité Höldérienne.

Souvent, et ce sera le cas dans cette thèse, on suppose que l'analyse multirésolution est du type produit tensoriel, c'est-à-dire :

$$\text{Si } x = (x_1, x_2, \dots, x_D) \text{ alors } \psi^0(x) = \Psi^0(x_1) \dots \Psi^0(x_D),$$

où Ψ^0 est associé à une analyse multirésolution de dimension 1.

En notant alors Ψ^1 l'ondelette associée à Ψ^0 , on choisit, pour ondelettes en dimension D , les fonctions Ψ_λ définies pour tout $\lambda := (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^D \times \{0, 1\}^D$, par :

$$\Psi_\lambda(x) := \prod_{i=1}^D \Psi_{j, k_i}^{l_i}(x_i),$$

avec $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_D)$ et $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_D)$.

Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^D)$ peut être écrite (l'égalité étant vraie dans $L^2(\mathbb{R}^D)$) :

$$f = \sum_{\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^D \times L^D} d_\lambda \Psi_\lambda,$$

avec $L^D := \{0, 1\}^D \setminus 0^D$ et

$$d_\lambda := 2^{jD} \int_{\mathbb{R}^D} f(x) \Psi_\lambda(x) dx.$$

Dans la suite, on considérera que les fonctions Ψ^0 et Ψ^1 auront été construites telles que :

- elles soient toutes deux à support compact,
- pour un entier $N \geq 1$ bien choisi selon le contexte (par exemple plus grand que les exposants de régularité auxquels on s'intéresse), on ait : $\Psi^0 \in C^N(\mathbb{R})$, $\Psi^1 \in C^N(\mathbb{R})$,
- Ψ^1 ait au moins $N+1$ moments nuls (i.e. $\int_{\mathbb{R}} x^n \Psi^1(x) dx = 0$ pour $n \in \{0, \dots, N\}$).

1.4 Caractérisation de l'exposant par ondelettes.

Présentons maintenant, les deux principaux résultats, qui lient la régularité en un point et les coefficients d'ondelettes et qui seront à la base des démonstrations réalisées respectivement dans les chapitres 3 et 4.

Théorème 1.4.1. [36] Soit $\gamma > 0$ et l'ondelette Ψ^1 au moins $[\gamma + 1]$ -régulière. Soit $f : [0, 1]^D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement bornée de coefficient d'ondelettes $\{d_\lambda\}$, et $x \in [0, 1]^D$.

Si $f \in C^\gamma(x)$, alors il existe une constante $M < \infty$ telle que pour tout $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \mathbb{N}^* \times \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}^D \times L^D$,

$$|d_\lambda| \leq M(2^{-j\gamma} + |x - \mathbf{k}2^{-j}|^\gamma). \quad (1.6)$$

avec $L^D := \{0, 1\}^D \setminus 0^D$

Réciproquement, si (1.6) a lieu et si $f \in \bigcup_{\varepsilon > 0} C^\varepsilon([0, 1]^D)$, alors $f \in C^{\gamma-\eta}(x)$, pour tout $\eta > 0$.

Remarquons que (1.6) est équivalent à ce que

$$|d_\lambda| \leq M(2^{-j} + |x - \mathbf{k}2^{-j}|)^\gamma.$$

Proposition 1.4.1. [37] Soit $\gamma > 0$. Si $f \in C^\gamma(\mathbb{R}^D)$ alors l'exposant de Hölder de f en chaque point x est donné par la formule :

$$h_f(x) = \liminf_{\lambda \rightarrow x} \frac{\log(|d_\lambda|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)}$$

sous réserve que $|d_\lambda| \neq 0$.

Les fonctions que nous étudierons appartiendront à un espace de Besov. Nous allons donc, dans un premier temps, donner la caractérisation d'un espace de Besov à l'aide d'ondelettes, puis rappeler les différentes propriétés de ces ensembles.

1.5 Espace de Besov.

On a la caractérisation suivante des espaces de Besov grâce aux ondelettes [65].

Définition 1.5.1. Soit $0 < s < \infty$, $0 < p < \infty$ et $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ pour $q \in (0, +\infty]$ si et seulement si la suite dont le terme général vaut

$$\forall j \geq 1, \quad A_j := \left(2^{j(ps-D)} \sum_{\mathbf{k} \in \{0;1;\dots;2^j-1\}^D, \mathbf{l} \in L^D} |d_\lambda|^p \right)^{1/p}$$

est dans ℓ^q ,

avec $\lambda := (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ et $L^D := \{0, 1\}^D \setminus 0^D$.

Si $p = \infty$ et $0 < q < \infty$ alors $f \in B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^D)$ si et seulement si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^D} |d_\lambda 2^{sj}| < c$$

L'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ est un espace métrique complet, normé quand $p, q \geq 1$, séparable quand p et q sont finis [75, 69].

Remarquons que lorsque $p < 1$, la Définition 1.5.1 ne permet plus d'obtenir une norme : l'inégalité triangulaire n'est plus vérifiée qu'à une constante près. On peut cependant définir une métrique sur cet espace pour laquelle $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ soit complet :

Définition 1.5.2. [24] Soit $0 < p, q < \infty$.

On définit une distance sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ de la façon suivante : soit $f, g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ de coefficients d'ondelettes respectives d_λ et g_λ ,

$$\begin{aligned} \text{Si } p \geq 1 \quad d(f, g) &= \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\mathbf{k} \in \{0;1;\dots;2^j-1\}^D} |d_\lambda - g_\lambda|^p 2^{(sp-D)j} \right)^{q/p} \right)^{1/q}. \\ \text{Si } p < 1 \quad d(f, g) &= \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\mathbf{k} \in \{0;1;\dots;2^j-1\}^D} |d_\lambda - g_\lambda|^p 2^{(sp-D)j} \right)^{q/p} \right)^{\min(p,q)/q}. \end{aligned}$$

Muni de cette distance, $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ est un espace métrique complet séparable.

De même, si $0 < p < \infty$ et $q = \infty$, on définit une distance sur $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^D)$ par

$$d(f, g) = \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\mathbf{k} \in \{0;1;\dots;2^j-1\}^D} |d_\lambda - g_\lambda|^p 2^{(sp-D)j} \right) \right)^p.$$

Rappelons maintenant les différentes injections entre espaces de Besov [73] :

Proposition 1.5.1. *Pour tout $0 < s < \infty, 0 < p, q \leq \infty$, on a :*

$$\text{Si } p' \leq p \text{ alors } B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D) \hookrightarrow B_{p',q}^s(\mathbb{R}^D).$$

$$\text{Si } p' \geq p, s \leq s' \text{ alors } B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D) \hookrightarrow B_{p',q}^{s'}(\mathbb{R}^D) \text{ si } s - \frac{D}{p} = s' - \frac{D}{p'}.$$

$$\text{Si } q < q' \text{ alors } B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D) \hookrightarrow B_{p,q'}^s(\mathbb{R}^D).$$

De plus, on a une information sur l'exposant de Hölder d'une fonction d'un espace de Besov, grâce aux injections de Sobolev :

$$\text{si } s - \frac{D}{p} > 0 \text{ alors } B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D) \hookrightarrow C^{s-\frac{D}{p}}(\mathbb{R}^D).$$

Ainsi si $s - \frac{D}{p} > 0$ et $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, f ne peut avoir un exposant de Hölder inférieur à $s - \frac{D}{p}$ (en particulier, elle est partout continue).

De nombreux résultats sur la régularité en un point de fonctions appartenant à des espaces classiques tels que les espaces de Besov ont été obtenus récemment [6, 30, 31, 41, 43]. Ces résultats sont de deux types :

- majoration du spectre de singularité de toutes les fonctions de l'espace considéré. Par exemple, S. Jaffard [41] montra que :

Théorème 1.5.1. *Soit $0 < p < \infty, D/p < s < \infty$. Pour tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ et $q \in (0, +\infty]$, on a :*

$$\text{pour tout } h \geq s - D/p, \quad d_f(h) \leq \min(ph - sp + D, D)$$

et $E_f(h) = \emptyset$ si $h < s - D/p$.

En fait on a même mieux :

$$\text{pour tout } h \geq s - D/p, \quad \dim_{\mathcal{H}}\{x \in \mathbb{R}^D : h_f(x) \leq h\} \leq \min(ph - sp + D, D).$$

- détermination du spectre de singularité de presque toute ou quasi-toute fonction dans un espace fonctionnel donné. Par exemple, un résultat de Buczolich et Seuret [19] donne la généricité des propriétés multifractales pour les mesures.

Théorème 1.5.2. *Dans l'ensemble des mesures de probabilités supportées par le cube $[0, 1]^D$, une mesure générique est multifractale et a pour spectre*

$$d_\mu(h) = h \quad \text{pour tout } h \in [0, D],$$

et $E_\mu(h) = \emptyset$ sinon. De plus, ces mesures vérifient le formalisme multifractal pour les mesures.

Avant de présenter ces résultats, nous allons expliquer ce que l'on entend par presque toute ou quasi-toute fonction. Lorsque l'on parle de ces notions, on fait référence à un "grand" sous-ensemble de l'espace au sens de la prévalence ou de Baire.

1.6 La prévalence et la généricité au sens de Baire.

Définition 1.6.1 (Généricité au sens de Baire). *Soit X un espace métrique complet, et $A \subset X$. On dit qu'un ensemble A est de première catégorie quand il peut s'écrire $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, où pour tout $n \geq 1$, A_n est inclus dans un ensemble fermé d'intérieur vide de X .*

On appelle ensemble résiduel, un ensemble dont le complémentaire est de première catégorie, c'est-à-dire un ensemble qui contient une intersection dénombrables d'ouverts denses.

On parle de propriété quasi-sûre (ou typique) dans l'ensemble X quand elle est vérifiée pour tous les éléments d'un ensemble résiduel A .

L'étude des propriétés de quasi-toutes fonctions ayant un régularité donnée remonte au début des années 30 avec les travaux de Banach [9], Mazurkiewicz [64], Jarnik [48] et Saks [70]. Par exemple, il est connu depuis cette époque que quasi-toute fonction de $C([0, 1])$ est nulle part dérivable.

Puis Z. Buczolich et J. Nagy [18] remirent ce type de résultats en avant en prouvant que quasi-toute fonction continue et monotone est multifractale de spectre $d(h) = h$. S. Jaffard s'intéressa au spectre de singularité de quasi-toutes fonctions dans un espace de Besov [46] et démontra le Théorème suivant :

Théorème 1.6.1. *Soit $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $0 < s - D/p < \infty$. Pour quasi-toute fonction $g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, on a*

$$d_g(h) = \begin{cases} D + (h - s)p & \text{si } h \in [s - D/p, s] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

et pour tout x dans un ensemble de mesure de Lebesgue pleine de \mathbb{R}^D , $h_g(x) = s$.

C'est ce Théorème qui sera le point d'appui des travaux réalisés dans le chapitre 4 sur les traces de fonctions.

Remarquons que la notion d'ensemble de première catégorie correspond dans certains cas à la notion de mesure nulle. Par exemple, dans \mathbb{R}^n , l'ensemble des nombres rationnels est de mesure nulle et est de première catégorie. Mais ces deux notions ne

correspondent pas toujours : ainsi l'ensemble des nombres de Liouville est résiduel mais est de mesure de Lebesgue nulle [34]. A contrario, l'ensemble des nombres diophantiens est de première catégorie mais de mesure de Lebesgue pleine dans chaque intervalle [34], pour d'autres exemples voir [68] par exemple.

Afin d'étendre ou d'obtenir un équivalent à la notion d'ensemble de mesure de Lebesgue nulle à la dimension infinie, il existe la notion de prévalence. Cette notion a été introduite par J. Christensen en 1972 dans [23] puis réintroduite par B.Hunt, T. Sauer et J. Yorke en 1992 dans [34].

Définition 1.6.2. *Soit X un espace métrique complet. Un borélien $A \subset X$ est dit timide s'il existe une mesure μ à support compact telle que :*

$$\forall x \in X, \mu(x + A) = 0.$$

Plus généralement, un ensemble est dit timide s'il est inclus dans un borélien timide. On appelle ensemble prévalent le complémentaire d'un ensemble timide.

Dans le chapitre 2, nous détaillerons cette notion de prévalence, en l'étendant à des ensembles universellement mesurables.

En effet, dans la suite de cette thèse, les ensembles que nous étudierons ne seront pas forcément inclus dans des boréliens de certains espaces fonctionnels (donc de dimension infinie), mais simplement dans des ensembles universellement mesurables. Dans le chapitre 2, nous montrerons donc que l'on peut étendre la notion d'ensembles timides aux ensembles universellement mesurables.

Dans certains cas, les propriétés prévalentes sont différentes des propriétés génériques [52], dans d'autres au contraire ce sont les mêmes. Par exemple, Hunt [35] montra que presque toute fonction continue est nulle part différentiable. On a également le résultat suivant démontré par A. Fraysse et S. Jaffard [30] qui sera le point d'appui des travaux du chapitre 3 de cette thèse :

Théorème 1.6.2. *Soit $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $0 < s - D/p < \infty$. Au sens de la prévalence, pour presque toute fonction $g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, on a*

$$d_g(h) = \begin{cases} D + (h - s)p & \text{si } h \in [s - D/p, s] \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour tout x dans un ensemble de mesure de Lebesgue pleine de \mathbb{R}^D , $h_g(x) = s$.

Remarque 1.6.1. *Observons que le Théorème 1.6.2 (resp 1.6.1) montre que presque toute (resp. quasi-toute) fonction d'un espace de Besov est multifractale.*

De plus, on peut voir que les fonctions ont le pire comportement possible du point de vue régularité locale. En effet, si on regarde le Théorème 1.5.1, on peut penser que les fonctions vont avoir une régularité supérieure à s mais, en fait presque toute (resp. quasi-toute) fonction a une régularité inférieure à s en chaque point. La régularité locale est la pire au sens où la dimension des ensembles iso-höldériens $E_f(h)$, pour $h \in [s - D/p, s]$ est la plus grande possible pour les fonctions typiques ou prévalentes.

1.7 Présentation des travaux des chapitres 3 et 4.

Jusqu'à maintenant, nous avons rappelé des résultats concernant le comportement local des fonctions d'espaces de Besov. Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à l'étude du comportement local des traces de fonctions d'espaces de Besov. En fait, nous allons "transposer" les Théorèmes 1.6.1 et 1.6.2 aux traces de fonctions. Le chapitre 3 présentera une approche par la prévalence de ce comportement et le chapitre 4 présentera une approche par la généralité au sens de Baire.

Commençons par expliquer ce que l'on entend par traces de fonctions.

Si l'on considère une fonction f continue sur \mathbb{R}^2 telle que :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, x') &\longmapsto f(x, x') \end{aligned}$$

et $a \in \mathbb{R}$ alors la fonction f_a définie par :

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x, a) \end{aligned}$$

est la trace de f sur la droite $x' = a$.

Rappelons le résultat suivant [40] : si $s > \frac{1}{2}$ et f appartient à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, sa trace f_a appartient à l'espace de Sobolev $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

De façon générale, on définit la trace d'une fonction de la façon suivante :

Définition 1.7.1. *Soit $0 < d < D$ deux entiers fixés, $d' := D - d$ et $(x, x') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} = \mathbb{R}^D$. Pour $a \in \mathbb{R}^{d'}$ on note $\mathcal{H}_a := \{(x, a)\}$ le sous-espace affine de dimension d de \mathbb{R}^D .*

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}^D . Sa trace sur \mathcal{H}_a est

$$\begin{aligned} f_a &:= f|_{\mathcal{H}_a} : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x, a). \end{aligned}$$

Si f n'est pas continue, sa trace peut être définie par transformée de Fourier : f_a sera définie par $\lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{|\xi| \leq N} \mathcal{F}f))_a$, quand cette limite existe.

Dans le cas où la fonction f n'est pas continue, ce qui est en particulier le cas pour les fonctions de l'espace L^p , on utilise un résultat classique en analyse fonctionnelle : le passage par la transformée de Fourier. Cela permet de tronquer la fonction en enlevant les hautes fréquences.

Les traces de fonctions jouent un rôle important en analyse multifractale. En effet, l'analyse multifractale est issue de la turbulence pleinement développée tridimensionnelle [32]. Mais dans ce cas, l'expérimentateur n'a pas accès à la vitesse en tout point du fluide mais seulement à sa valeur en un point (où est placé le capteur) en fonction du temps. Dans ce cas, on ne mesure donc pas la fonction vitesse du fluide :

$$\begin{aligned} v &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, x') &\longmapsto v(t, x, x') \end{aligned}$$

mais seulement la trace de cette vitesse :

$$\begin{aligned} v_{(a, a')} &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t, a, a') \end{aligned}$$

où $(a, a') \in \mathbb{R}^2$ sont fixés.

Il est donc intéressant de déterminer la régularité locale de la trace de fonctions, mais on désire accéder aux propriétés multifractales de la vitesse (donc au signal tridimensionnel). Ainsi, comme notre étude nous donne des résultats de régularité de presque toutes les traces d'une fonction appartenant à un espace de Besov donné, en mesurant la régularité d'une trace prise "au hasard", on peut espérer avoir une intuition sur les espaces de Besov auxquels appartiennent la fonction initiale. S. Jaffard avait commencé cette étude dans [40].

Pour commencer, il faut étudier à quels espaces fonctionnels appartiennent presque-toutes les traces. Dans le chapitre 3, nous démontrerons le Théorème suivant :

Théorème 1.7.1. Soit $0 < p, s < \infty$, avec $s - d/p > 0$, et $q \in (0, \infty]$. Si $f \in B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^D)$, pour Lebesgue presque tout $a \in \mathbb{R}^{d'}$, $f_a \in \bigcap_{s' < s} B_{p,\infty}^{s'}(\mathbb{R}^D)$.

De plus, si $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ et $q < p$ (resp. $q = p$), presque toute trace f_a appartient à $B_{p,q/(p-q)}^s(\mathbb{R}^D)$ (resp. $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^D)$).

Puis nous nous intéresserons au spectre de singularités des traces de fonctions et montrerons :

Théorème 1.7.2. Soit $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $0 < s - d/p < +\infty$. Pour presque tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, pour Lebesgue presque tout $a \in \mathbb{R}^{d'}$:

1. le spectre de singularités de f_a est

$$d_{f_a}(h) = \begin{cases} d + (h - s)p & \text{si } h \in [s - d/p, s] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, l'ensemble $E_{f_a}(s) \cap \Omega$ est de mesure de Lebesgue pleine dans Ω .

Remarquons que, d'après le Théorème 1.6.2, presque toute fonction admet des exposants de Hölder compris entre $s - \frac{D}{p}$ et $s - \frac{d}{p}$ mais que les exposants de Hölder compris entre $s - \frac{D}{p}$ et $s - \frac{d}{p}$ "ne sont pas vus" par Lebesgue presque toute trace f_a . Afin de comprendre pourquoi, il faut s'intéresser aux ensembles de niveau $E_f(h)$ pour $s - \frac{D}{p} \leq h < s - \frac{d}{p}$. Ces ensembles ont une dimension de Hausdorff inférieure à $d' = D - d$, d'après le Théorème 1.5.1.

Intéressons nous, maintenant, à ce que cela donne en terme de traces. Soit $a \in \mathbb{R}^{d'}$ fixé, alors l'ensemble

$$E_a = E_f(h) \cap \{(x, a) : x \in \mathbb{R}^D\}$$

aurait intuitivement une dimension $d(E_f(h)) - d'$. Comme $d(E_f(h)) < d'$, on se retrouve avec le phénomène que B. Mandelbrot appelle dimension négative [62].

On peut tenter d'interpréter ce phénomène ainsi : si l'on regarde le Théorème 1.6.2 : presque toute fonction de $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ a un exposant de Hölder compris entre $s - \frac{D}{p}$ et $s - \frac{d}{p}$, mais ces singularités forment un ensemble de dimension trop petite pour intersecter une grande quantité d'hyperplan \mathcal{H}_a de dimension inférieure à $d' = D - d$.

Remarquons également que si l'on se place à nouveau dans le cadre de la turbulence pleinement développée tridimensionnelle, lorsqu'on applique l'analyse multifractale à un signal monodimensionnelle (ici la vitesse que l'on peut mesurer), on obtient pour certaines valeurs de h une dimension négative de l'ensemble de niveau de ce

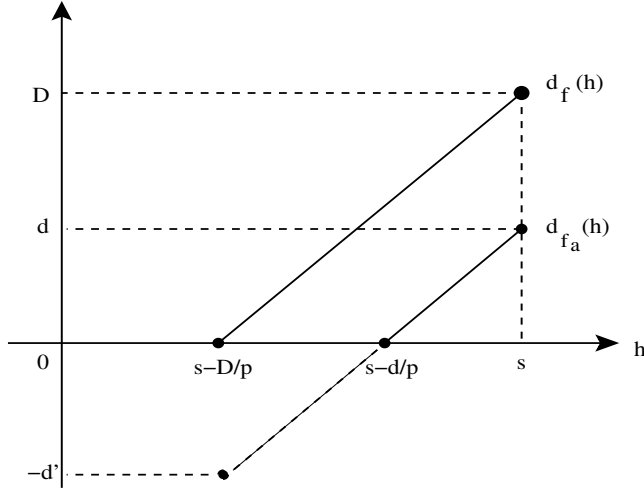


FIGURE 1.1 – Spectre de singularités de presque toute fonction $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ et de sa trace f_a pour Lebesgue presque tout $a \in \mathbb{R}^d$.

signal monodimensionnel [21]. Ceci est dû au fait que dans le cas d'un écoulement turbulent, des hypothèses d'ergodicité impliquent que si une fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ a un spectre de singularités de valeurs $d(h)$, alors les traces monodimensionnelles auront des spectres de valeurs $d(h) - 2$.

Dans le chapitre 3, nous expliquerons également comment étendre le Théorème 1.7.2 à des sous-variétés de \mathbb{R}^D . Plus précisément :

Soit $E \subset \mathbb{R}^D$, $a = (a_1, \dots, a_{d'}) \in \mathbb{R}^{d'}$ et $X = (X_1, \dots, X_D) \in E$, pour tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, on notera :

$$f_{E+(0,a)} : \begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto f(X_1, \dots, X_d, X_{d+1} + a_1, \dots, X_D + a_{d'}). \end{aligned}$$

et on démontrera le Théorème suivant :

Théorème 1.7.3. *Soit $S \subset \mathbb{R}^D$, une C^∞ sous-variété compact, bornée, de dimension $d < D$, supposée transverse à $\mathbb{R}^{d'}$. Soit $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $0 < s - d/p < +\infty$.*

Pour presque tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, pour Lebesgue presque tout $a \in \mathbb{R}^{d'}$:

1. *le spectre de singularités de $f_{S+(0,a)}$ est*

$$d_{f_{S+(0,a)}}(h) = \begin{cases} d + (h - s)p & \text{si } h \in [s - d/p, s] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, l'ensemble $E_{f_{S+(0,a)}}(s) \cap \Omega$ est de mesure de Lebesgue pleine dans Ω .

Le chapitre 3 est un article écrit avec S. Seuret et J-M Aubry.

Le chapitre 4 reprend en détaillant davantage les notions du chapitre 3 et s'intéresse cette fois à la genericité au sens de Baire. Comme nous l'avons dit précédemment, prévalence et genericité au sens de Baire ne coïncide pas toujours. Nous commencerons donc par démontrer que le Théorème 1.7.2 reste valable dans le cas de la genericité au sens de Baire.

Nous nous intéresserons ensuite à la validité du formalisme multifractal appliquée aux traces de fonctions dans une intersection d'espace de Besov. Rappelons que ce formalisme est fondamental pour les applications car il relie le spectre de singularités à des quantités plus facilement calculables numériquement. Pour une fonction vérifiant le formalisme, on a une formule du type (1.2), où la fonction ζ_f est appelée la fonction échelle de f .

Plutôt que la formulation donnée par Frisch et Parisi, Arnéodo, Jaffard et leurs co-auteurs ont démontré que la formule pertinente pour $\zeta_f(p)$ était, lorsque $p \geq 1$ (voir [46]),

$$\zeta_f(p) = \sup \left\{ s : f \in B_{p,\infty,loc}^{s/p} \right\}.$$

Comme les espaces de Besov sont définis pour tout s et p positifs, la fonction :

$$\eta_f(p) = \sup \left\{ s \geq 0 : f \in B_{p,\infty,loc}^{s/p} \right\}$$

est une extension naturelle de la fonction ζ_f et est définie sans aucune restriction sur son domaine de définition. Par conséquent, la fonction η_f s'appelle également la fonction échelle. Il est alors naturel de conjecturer que :

$$d_f(H) = \inf_{p>0} (pH - \eta_f(p) + D).$$

On peut également chercher, un ensemble générique de mesure pour lequel le formalisme multifractal est vérifié. C'est ce que firent Buczolicz et Nagy [18], qui montrèrent qu'au sens de Baire quasi-toute mesure continue sur $[0,1]$ vérifie le formalisme multifractal puis, Buczolicz et Seuret, qui prouvèrent que quasi-toute mesure borélienne définie sur un cube unité de \mathbb{R}^D vérifie le formalisme multifractal.

En ce qui concerne les fonctions, J. Jaffard dans [46] montra le Théorème suivant :

Théorème 1.7.4. Soit $D > 0$ un entier, et soit η une fonction vérifiant certaines conditions que l'on détaillera plus tard. Au sens de Baire, pour quasi-toute fonction f de l'espace

$$V^D = \bigcap_{\epsilon > 0, 0 < p < \infty} B_{p,p}^{(\eta(p)-\epsilon)/p}([0, 1]^D).$$

1. le spectre de singularités de f est défini sur $\left[s(0), \frac{D}{p_c}\right]$ par

$$d_f(h) = \inf_{p \geq p_c} (ph - \eta(p) + D)$$

où p_c est le seul point critique tel que $\eta(p_c) = D$ et la fonction s est définie par $s(q) = q\eta(1/q)$, $q \in \mathbb{R}^+$.

2. $\forall p > 0$, $\eta_f(p) = \eta(p)$.

A. Fraysse montra un résultat similaire en terme de prévalence [28].

Dans le chapitre 4, nous démontrons un Théorème analogue sur les traces :

Théorème 1.7.5. Soient $0 < d < D$ deux entiers, et soit η vérifiant certaines conditions que l'on détaillera plus tard.

Au sens de Baire, pour quasi-toute fonction f de V^D , pour Lebesgue-presque tout $a \in [0, 1]^d$, les propriétés suivantes sont vraies :

1. f_a possède le spectre de singularités suivant :

$$d_{f_a}(h) = \begin{cases} \inf_{p \geq p_c} (ph - \eta(p) + d) & \text{si } h \in \left[s(0), \frac{d}{p_c}\right] \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où p_c est défini comme au Théorème précédent.

2. $\forall p > 0$, $\eta_{f_a}(p) = \eta(p)$.

1.8 Travaux du chapitre 5.

Dans le chapitre 5, nous construirons une fonction f continue, définie sur $[0, 1]$ qui est son propre spectre multifractal.

La motivation pour ce travail est double :

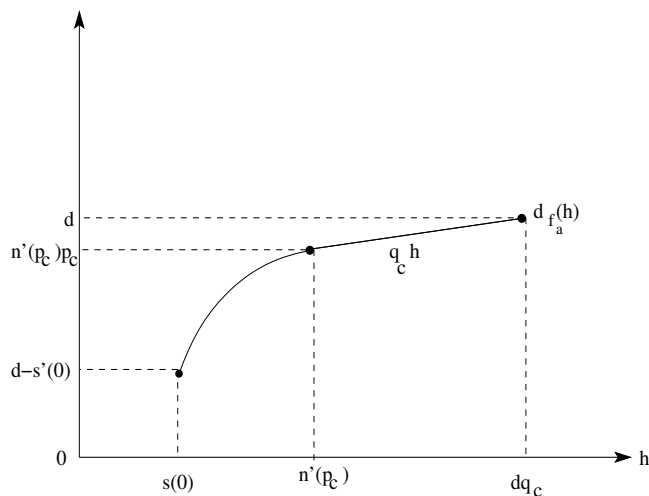


FIGURE 1.2 – Spectre de singularités de la trace, pour Lebesgue presque tout a , de quasi-toute fonction de V^D .

- Tout d’abord, il est naturel de se demander quelles sont les formes possibles d’un spectre multifractal. En effet, on sait par exemple que la fonction $x \mapsto h_f(x)$ est nécessairement la limite inférieure d’une suite de fonctions continues (c’est une condition nécessaire et suffisante [39]), mais on peut se demander quelle est la forme la plus générale pour un spectre. Des réponses sont apportées dans [38, 20].
- Pour toute application d’un ensemble E sur lui-même (comme pour la transformée de Fourier par exemple), il est naturel de chercher ses points fixes, et de tenter de les caractériser.

La fonction que nous construisons aura une forme très spécifique : elle sera continue, bijective croissante sur $[0, 1]$, et "visible" : pour tout $x \in (0, 1)$, pour tout $0 < y < x$,

$$\frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(x)}{x}.$$

Autrement dit, un observateur placé en l’origine $(0, 0)$ pourrait voir tout point du graphe $\{(x; f(x)) : x \in [0; 1]\}$ de la fonction f . Cette propriété est imposée par le calcul du spectre multifractal de la fonction que nous construisons.

La fonction f sera définie comme la superposition d’un nombre infini de fonctions C^1 par morceaux, dont les oscillations à différentes échelles seront bien contrôlées.

Une autre caractéristique de f est qu'elle est homogène multifractale (voir [13] et [12]) : sa restriction sur n'importe quel intervalle de $[0, 1]$ a le même spectre de singularités que la fonction elle-même. En revanche, évidemment, la restriction de f à un sous-intervalle n'est plus son propre spectre multifractal !!

Chapitre 2

Prévalence et Mesurabilité universelle

Résumé :

En mathématiques, on utilise souvent des espaces de dimension infinie sur lesquels on aimerait pouvoir distinguer les ensembles en fonction de leur "taille", comme on le fait grâce à la mesure de Lebesgue en dimension finie. C'est pourquoi nous avons besoin d'une notion qui étend la notion de "Lebesgue presque partout" à la dimension infinie. Cette notion est la notion de prévalence.

Comme il n'existe pas de mesure en dimension infinie qui ait les mêmes propriétés que celle de Lebesgue, on définit directement des ensembles, dit timides, qui seront les analogues en dimension infinie des ensembles de mesures de Lebesgue nulle.

Dans un premier temps, nous présenterons les résultats sur les ensembles timides, les ensembles étudiés étant inclus dans des boréliens. Puis nous montrerons que l'on peut étendre ces résultats lorsque les ensembles sont inclus dans des ensembles universellement mesurables.

2.1 Introduction

Nous nous intéressons dans cette partie à la notion de presque partout. Sur \mathbb{R}^n , on dit qu'une propriété a lieu presque partout si l'ensemble des points où elle n'a pas lieu est de mesure de Lebesgue nulle. En dimension finie, la notion de presque partout fait donc référence à la mesure de Lebesgue, qui a la particularité d'être la seule mesure σ finie et invariante par translation.

Les ensembles de mesure de Lebesgue nulle ont certaines propriétés, que l'on voudrait conserver en dimension infinie :

1. un ensemble de mesure nulle a un intérieur vide (donc presque partout implique dense).

2. chaque sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.
3. une union dénombrable d'ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.
4. chaque translaté d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

Qu'en est-il en dimension infinie ?

Comme il n'existe pas de mesure en dimension infinie qui ait les mêmes propriétés que celle de Lebesgue, plutôt que de chercher une mesure, Hunt *et al.* [34] cherchèrent directement comment définir des analogues de cette notion d'ensembles de mesure nulle en dimension infinie. Pour cela, ils utilisèrent un résultat qui permet de caractériser les ensembles de mesure de Lebesgue nulle de \mathbb{R}^n sans utiliser explicitement la mesure de Lebesgue :

Lemme 2.1.1. *Soit S un borélien de \mathbb{R}^n . Si il existe une mesure de probabilité μ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu(x + S) = 0$ alors S a une mesure de Lebesgue nulle.*

A partir de ce Lemme, ils définirent des ensembles timides qui vérifient les propriétés des ensembles de mesure de Lebesgue nulle.

2.2 Ensemble timide.

Dans toute la suite on considère V un espace vectoriel métrique complet.

Définition 2.2.1. *Une mesure μ est dite transverse à un borélien $S \subset V$ si :*

- (i) *Il existe un compact $K \subset V$ tel que $0 < \mu(K) < \infty$*
- (ii) *$\mu(S + v) = 0$ pour tout $v \in V$.*

Définition 2.2.2. *Un borélien $S \subset V$ est dit timide s'il existe une mesure transverse à S .*

Plus généralement, un sous-ensemble de V est dit timide s'il est contenu dans un borélien timide.

Le complémentaire d'un ensemble timide est appelé ensemble prévalent.

Cette définition revient à dire qu'un borélien S est timide s'il existe une mesure μ à support compact telle que $\mu(S + v) = 0$ pour tout $v \in V$.

On en déduit immédiatement les Propositions suivantes :

Proposition 2.2.1. *Si S est timide alors tout sous-ensemble de S est timide.*

Proposition 2.2.2. *Si S est timide alors $\forall x \in V$, $x + S$ est timide.*

Ainsi un ensemble prévalent est invariant par translation.

On dira alors qu'une propriété a lieu presque partout si elle a lieu sur un ensemble prévalent.

Proposition 2.2.3. *Chaque borélien S timide a une mesure transverse à S qui est finie et à support compact. De plus, le support de cette mesure peut être pris de diamètre arbitrairement petit.*

Une conséquence de cette Proposition est que tout ensemble timide est d'intérieur vide et donc que tout ensemble prévalent est dense.

Proposition 2.2.4. *Une réunion dénombrable d'ensembles timides est timide.*

Par passage au complémentaire, on obtient qu'une intersection dénombrable d'ensembles prévalents est prévalent.

Proposition 2.2.5. *Si V est de dimension finie, S est timide si et seulement si S est de mesure de Lebesgue nulle.*

Cette Proposition implique qu'en dimension finie, la mesure de Lebesgue est la meilleur candidate pour être une mesure transverse à un borélien donné. Ainsi, en dimension infinie, lorsqu'on va chercher une mesure transverse à un ensemble donné, on essaie la mesure de Lebesgue restreinte à un sous-espace de dimension finie :

Définition 2.2.3. *Un sous-espace de dimension finie P d'un espace de dimension infinie V est dit espace sonde pour un ensemble T de V si la mesure de Lebesgue restreinte à P est transverse au complémentaire de T .*

Ainsi une condition suffisante pour que T soit prévalent est qu'il ait un espace sonde.

Dans le chapitre suivant, les ensembles que nous allons étudier ne seront pas nécessairement des boréliens mais seront inclus dans des ensembles universellement mesurables. Aussi il va nous falloir remplacer, dans la définition des ensembles timides, boréliens par ensembles universellement mesurables. Ces ensembles ainsi définis seront appelés ensemble universellement mesurable Haar-nul par Christensen [23].

Dans la suite, nous donnerons une définition d'un ensemble Haar-nul et vérifierons que ces ensembles vérifient les propriétés des ensembles timides.

Ainsi, on pourra utiliser le concept de prévalence également dans le cas d'ensemble Haar-nul.

Dans un premier temps, nous rappelons ce qu'est un ensemble universellement mesurable.

2.3 Ensemble universellement mesurable.

Ces notions sont étudiées dans [1].

Définition 2.3.1. Soit X et X' deux espaces vectoriels.

Une fonction $f : (X, \mathbb{B}) \mapsto (X', \mathbb{B}')$ est mesurable si pour tout $A \in \mathbb{B}'$, $f^{-1}(A) \in \mathbb{B}$.

Définition 2.3.2. Soit une mesure m sur (X, \mathbb{B}) . On complète la mesure, en posant pour tout sous ensemble $A \subset X$ $m(A) = m(B)$ si $B \in \mathbb{B}$ et $A \Delta B \subset D$ où $D \in \mathbb{B}$ est tel que $m(D) = 0$.

On appelle alors mesure complète, la mesure obtenue.

Définition 2.3.3. Un espace polonais est un espace métrique complet et séparable. Un espace mesurable standard (X, \mathbb{B}) est un espace polonais X muni d'une tribu borélienne \mathbb{B} .

Définition 2.3.4. Un sous ensemble A d'un espace polonais X est universellement mesurable s'il est mesurable pour toute mesure de probabilité complète sur X .

Par la suite, les ensembles que l'on va étudier vont être définis par des formules compliquées, il sera alors difficile de montrer directement que ces ensembles sont universellement mesurables. En revanche, on pourra constater que ces ensembles sont les images de boréliens par des fonctions continues. On pourra alors conclure que ce sont des ensembles universellement mesurables grâce aux résultats suivants :

Définition 2.3.5. Soit (X, \mathbb{B}) un espace mesurable standard.

Un sous ensemble $A \subset X$ est dit analytique si il existe un autre ensemble mesurable standard (X', \mathbb{B}') , une fonction mesurable $f : X' \rightarrow X$ et un ensemble $A' \in \mathbb{B}'$ tel que $f(A') = A$.

On remarque que les boréliens sont des ensembles analytiques [1].

Théorème 2.3.1. [22]. Dans un espace polonais, tout ensemble analytique est universellement mesurable.

2.4 Ensemble Haar-nul

Dans [23], Christensen montra que le concept d'ensembles de mesure de Haar nulle pouvait être généralisé au groupe abélien polonais sans qu'il soit localement compact. Cela lui permis d'étendre des résultats d'analyse harmonique à ces ensembles. Pour cela, il caractérisa les ensembles de mesure de Haar nulle sans utiliser la mesure de Haar et donna la Définition suivante :

Définition 2.4.1. Soit $(G, +)$ un groupe abélien polonais et $A \subseteq G$ un ensemble universellement mesurable.

A est un ensemble Haar-nul s'il existe une mesure μ tel que $\mu(A + v) = 0$ pour tout $v \in G$.

Dans toute la suite on considère V un espace polonais. Nous allons donc prendre la Définition suivante d'ensemble de Haar-nul.

Définition 2.4.2. Un ensemble universellement mesurable S est Haar nul s'il existe une mesure μ telle que $\mu(S + v) = 0$ pour tout $v \in V$.

Plus généralement, un sous-ensemble de V est dit Haar-nul s'il est contenu dans un ensemble universellement mesurable Haar-nul.

On déduit immédiatement de cette Définition, les Propositions suivantes :

Proposition 2.4.1. Si S est Haar-nul alors tout sous-ensemble de S est Haar-nul.

Proposition 2.4.2. Si S est Haar-nul alors $\forall x \in V$, $x + S$ est Haar-nul.

Nous allons montrer que l'on peut étendre les propriétés des ensembles timides aux ensembles Haar-nul.

Remarquons tout d'abord qu'un ensemble timide est un ensemble Haar-nul.

En effet, soit T un ensemble timide, alors T est inclus dans un borélien timide S . Comme les boréliens sont des ensembles analytiques, on déduit du Théorème 2.3.1 que S est un ensemble universellement mesurable.

De plus, selon la Définition 2.2.2, comme S est timide, il existe une mesure μ telle que $\mu(S + v) = 0$ pour tout $v \in V$. On conclut en utilisant la Définition 2.4.2.

Le fait que les ensembles Haar-nul vérifient les propriétés des ensembles timides repose sur le Théorème suivant prouvé dans [74] :

Définition 2.4.3. Une mesure μ est tendue si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact C_ϵ tel que $\mu(V - C_\epsilon) < \epsilon$.

Théorème 2.4.1. Si V est un espace polonais, alors chaque mesure sur V est tendue.

On en déduit la Proposition suivante :

Proposition 2.4.3. Soit S un ensemble Haar-nul alors il existe une mesure μ finie, à support compact K , telle que $\mu(S + v) = 0$ pour tout $v \in V$.

De plus, le support de cette mesure peut être pris de diamètre arbitrairement petit.

Démonstration. Comme S est Haar-nul, il existe une mesure ν telle que $\nu(S + v) = 0$ pour tout $v \in V$.

Or V est un espace polonais donc ν est tendue.

Ainsi pour $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact C_ϵ tel que $\nu(V - C_\epsilon) < \epsilon$.

On définit μ_ϵ par

$$\mu_\epsilon(A) = \nu(A \cap C_\epsilon) \quad \forall A \subseteq V.$$

Pour tout $0 < \epsilon < \nu(V)$, μ_ϵ est donc une mesure à support compact satisfaisant $\mu_\epsilon(S + v) = 0$ pour tout $v \in V$.

Reste à montrer la deuxième partie de la Proposition.

Soit $0 < \epsilon < \nu(V)$ fixé.

Pour tout $\epsilon' > 0$, comme C_ϵ est compact ; il peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ϵ' et il existe au moins une boule B_0 de rayon ϵ' telle que $0 < \nu(C_\epsilon \cap B_0) < +\infty$.

Comme $C_\epsilon \cap \overline{B_0}$ est compact, $\nu|_{C_\epsilon \cap \overline{B_0}}$ est finie, à support compact et transverse à S . □

Nous allons démontrer que les ensembles Haar-nul vérifient les propriétés des ensembles timides. En l'absence de référence sur ce sujet, nous allons démontrer cela en s'appuyant sur les démonstration de Hunt *et al.* [34] concernant les ensembles timides et utiliser la Proposition 2.4.3.

Proposition 2.4.4. *Tout ensemble Haar-nul est d'intérieur vide.*

Démonstration. Comme tout ensemble Haar-nul est inclus dans un ensemble universellement mesurable Haar-nul, il suffit de montrer que tout ensemble universellement mesurable Haar-nul est d'intérieur vide.

Soit S un ensemble universellement mesurable Haar-nul.

On raisonne par l'absurde.

Supposons que S n'est pas d'intérieur vide.

Il existe alors $x \in S$ et $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset S$.

D'après la Proposition 2.4.3, il existe une mesure μ finie, transverse à S et dont le support, est un compact K , inclus dans une boule de diamètre ϵ .

Il existe donc $y \in V$ tel que :

$$K \subset B(x + y, \epsilon) \subset S + y$$

et

$$0 < \mu(K) \leq \mu(S + y).$$

Or μ est transverse à S donc $\mu(S + y) = 0$.

On en déduit que S est d'intérieur vide. □

Notation : Soit μ et ν deux mesures sur V et $\mu \times \nu$ la mesure produit sur l'espace produit $V \times V$. Pour tout ensemble universellement mesurable S , on pose :

$$S^\Sigma = \{(x; y) \in V \times V : x + y \in S\}.$$

Lemme 2.4.1. *Pour tout ensemble universellement mesurable S , S^Σ est universellement mesurable.*

Démonstration. Soit :

$$\begin{aligned} f : V \times V &\longrightarrow V \\ (x; y) &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

f est une fonction continue et S est universellement mesurable donc $S^\Sigma = f^{-1}(S)$ est universellement mesurable. □

Notation : On pose

$$\begin{aligned} \mu * \nu(S) &= \mu \times \nu(S^\Sigma) \\ &= \int_V \int_V \mathbf{1}_S(x + y) d\mu(x) d\nu(y). \end{aligned}$$

Proposition 2.4.5. *Soit μ et ν deux mesures finies à support compact alors $\mu * \nu$ est une mesure finie à support compact. De plus si μ est transverse à un ensemble universellement mesurable S alors $\mu * \nu$ est transverse à S .*

Démonstration. Soit :

$$\begin{aligned} f : V \times V &\longrightarrow V \\ (x; y) &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

Soit K et K' les supports respectifs de μ et ν , alors le support de $\mu * \nu$ est $f(K, K')$.

Comme la fonction f est continue, on en déduit que le support de $\mu * \nu$ est compact. De plus, si μ et ν sont deux mesures finies, alors $\mu \times \nu$ est une mesure finie, la fonction caractéristique de S^Σ est intégrable par rapport à $\mu \times \nu$ et on a, d'après le Théorème de Fubini :

$$\mu * \nu(S) = \int_V \mu(S - y) d\nu(y) = \int_V \nu(S - y) d\mu(y).$$

Comme ν est finie et μ est transverse à S , on en déduit que $\mu * \nu$ est transverse à S . □

On en déduit qu'une union finie d'ensembles Haar-nuls est Haar-nulle.

On va maintenant s'intéresser à une réunion dénombrable d'ensembles Haar-nuls. Pour cela, nous avons besoin des notations suivantes :

Notation : Soit (μ_n) une suite de mesures sur V à support compact K_n . On pose :

$$\mu^\Pi = \mu_1 \times \mu_2 \times \dots$$

la mesure produit sur l'espace produit :

$$K^\Pi = K_1 \times K_2 \times \dots$$

Pour tout ensemble universellement mesurable S , on pose :

$$S^\Sigma = \{(v_1; v_2; \dots) \in K^\Pi : v_1 + v_2 + \dots \in S\}$$

et

$$\mu_*(S) = \mu^\Pi(S^\Sigma).$$

Proposition 2.4.6. *Une réunion dénombrable d'ensembles Haar-nuls est un ensemble Haar-nul.*

Démonstration. Soit (T_n) une suite d'ensembles Haar-nuls, (S_n) une suite d'ensembles universellement mesurables Haar-nuls tel que T_n soit inclus dans S_n et $S = \bigcup_n S_n$.

D'après la Proposition 2.4.3, pour tout n , il existe une mesure μ_n finie, transverse à S_n , et dont le support est un compact K_n de diamètre inférieur à 2^{-n} .

En normalisant et en translatant ces mesures, on peut également supposer que, pour tout n , $\mu_n(V) = 1$ et que K_n contient l'origine.

On a alors $\mu^\Pi(K^\Pi) = 1$ et d'après le Théorème de Tychonoff, K^Π est un compact. Soit :

$$\begin{aligned} f : K^\Pi &\longrightarrow V \\ (v_1; v_2; \dots) &\longmapsto v_1 + v_2 + \dots \end{aligned}$$

Comme le diamètre des K_n est inférieur à 2^{-n} et que chaque K_n contient l'origine, l'application f est définie et continue, $K = f(K^\Pi)$ est un compact, $S^\Sigma = f^{-1}(S)$ est universellement mesurable et μ_* est une mesure finie à support compact K .

Pour démontrer la Proposition, il s'agit donc de montrer que μ_* est transverse à chaque ensemble universellement mesurable S_n .

Soit n fixé.

On pose :

$$K_n^\Pi = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_{n-1} \times K_{n+1} \dots,$$

pour tout ensemble universellement mesurable S , on pose :

$$S_n^\Sigma = \{(v_1; v_2; \dots; v_{n-1}; v_{n+1} \dots) \in K_n^\Pi : v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_{n+1} + \dots \in S\}.$$

Pour tout $x_n \in V$, on pose :

$$S_n^\Sigma - x_n = \{(v_1; v_2; \dots; v_{n-1}; v_{n+1} \dots) \in K_n^\Pi : v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_{n+1} + \dots \in S - x_n\}.$$

$$\nu^\Pi = \mu_1 \times \mu_2 \times \dots \mu_{n-1} \times \mu_{n+1} \times \dots$$

et

$$\nu_*(S) = \nu^\Pi(S_n^\Sigma)$$

En utilisant un raisonnement similaire à celui fait pour μ^Π et μ_* , on déduit que ν^Π et ν_* sont des mesures finies et à support compact.

Comme μ_n est également finie et à support compact, en utilisant le Théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \mu_n * \nu_*(S) &= \int_V \int_V \mathbf{1}_S(x_n + y) d\mu_n(x_n) d\nu_*(y) \\ &= \int_V \nu_*(S - x_n) d\mu_n(x_n) \\ &= \int_V \mu_1 \times \mu_2 \times \dots \mu_{n-1} \times \mu_{n+1} \times \dots (S_n^\Sigma - x_n) d\mu_n(x_n). \end{aligned}$$

Comme, pour tout i , μ_i est fini et à support compact, en appliquant le Théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_n * \nu_*(S) &= \int_V \dots \int_V \dots \mathbf{1}_S(x_1 + x_2 + \dots) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) \dots \\ &= \mu_*(S) \end{aligned}$$

En appliquant la Proposition 2.4.5, μ_* est alors transverse à S_n d'où le résultat. \square

Proposition 2.4.7. *Si V est de dimension finie, S est Haar-nul si et seulement si S est de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Comme tout ensemble de mesure de Lebesgue nulle est inclus dans un borélien de mesure de Lebesgue nulle, et qu'un borélien est un ensemble universellement mesurable, on démontre la Proposition dans le cas des ensembles universellement mesurables uniquement.

Soit S un ensemble universellement mesurable de mesure de Lebesgue nulle. Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, alors elle est transverse à S et donc S est Haar-nul.

Réciproquement, soit S un ensemble universellement mesurable Haar-nul et \mathcal{L} la mesure de Lebesgue.

Selon la Proposition 2.4.3, il existe une mesure finie, positive μ à support compact K qui soit transverse à S . On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \mu(x + S) d\mathcal{L}(x) \\ &= \int_V \mathcal{L}(x + S) d\mu(x) \\ &= \mathcal{L}(S)\mu(V), \end{aligned}$$

où on a utilisé le Théorème de Fubini et le fait que la mesure de Lebesgue est invariante par translation.

On en déduit donc que S est de mesure de Lebesgue nulle. □

Ainsi, dans le cas d'espaces polonais, étendre la définition des ensembles timides aux ensembles Haar-nuls ne change aucun résultat sur les ensembles timides.

Dans la suite, on ne fera plus de différence entre Haar-nul et timide et on ne parlera plus que d'ensembles timides.

Chapitre 3

Local behavior of traces of Besov functions : Prevalent results

Let $1 \leq d < D$ and (p, q, s) satisfying $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < s - d/p < \infty$. In this article we study the global and local regularity properties of traces, on affine subsets of \mathbb{R}^D , of functions belonging to the Besov space $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$. Given a d -dimensional subspace $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^D$, for almost all functions in $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ (in the sense of prevalence), we are able to compute the singularity spectrum of the traces f_a of f on affine subspaces of the form $a + \mathcal{H}$, for Lebesgue-almost every $a \in \mathbb{R}^{D-d}$. In particular, we prove that for Lebesgue-almost every $a \in \mathbb{R}^{D-d}$, these traces f_a are more regular than what could be expected from standard trace theorems, and that f_a enjoys a multifractal behavior.

3.1 Introduction

Investigating regularity properties of traces of functions belonging to some Besov or Sobolev spaces is a longstanding issue. For instance, such questions arise from PDE's theory, where the Dirichlet condition imposes some regularity properties of the trace of the solution on the frontier of the domain (see the seminal works of Lions-Magenes [56, 57], and many classical books [75]). In this article, we study the multifractal behavior of traces of functions belonging to the Besov space $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ on d -dimensional affine subspaces of \mathbb{R}^D . Multifractal properties and their relevance in physics, especially in fluid mechanics, goes back to the 1980's. At this time, physicists have been able to measure the velocity of a turbulent fluid along one direction (in the famous Modane's blower), and they observed that their signals exhibited very different local behaviors at different times. This variability was proposed by Frisch

and Parisi as a possible explanation for the strict concavity of the scaling function associated with the velocity (see [32] and several references on the subject). These works are an important motivation for this article, since only the one-dimensional trace of the fluid's velocity is measured in practice. Hence, to infer some results on the regularity properties of the three-dimensional velocity, it is key to investigate the possible local behavior of traces of Sobolev or Besov functions.

As said above, not only concerned with global smoothness properties (i.e. to which Sobolev and Besov spaces the traces belong), we will especially focus on the local behavior of such traces. The notion of pointwise regularity we discuss in the sequel is the following. Given a real function $f \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^D)$ and $x_0 \in \mathbb{R}^D$, f is said to belong to $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$, for some $\alpha \geq 0$, if there exists a polynomial P of degree at most $\lfloor \alpha \rfloor$ and a constant $C > 0$ such that locally around x_0 :

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha. \quad (3.1)$$

The local regularity of f at x_0 is measured by the *pointwise Hölder exponent* :

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)\}.$$

As will be observed soon, this exponent $h_f(x_0)$ may vary rather erratically with x_0 , and the relevant information is then provided by the *spectrum of singularities* d_f of f , which is the function :

$$d_f : h \in [0, \infty] \mapsto \dim_{\mathcal{H}} E_f(h), \quad \text{where } E_f(h) := \{x_0 \in \mathbb{R}^D : h_f(x_0) = h\}.$$

Here $\dim_{\mathcal{H}}$ stands for the Hausdorff dimension. We adopt the convention that $\dim_{\mathcal{H}} \emptyset = -\infty$. The spectrum of singularities d_f describes the geometrical repartition of the singularities of f .

Precise results on the pointwise regularity of functions belonging to classical spaces such as Besov $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^D)$ spaces have recently been obtained [6, 30, 31, 41, 43]. These results are of two kinds : universal upper bounds for the spectrum of singularities (valid for any element of the space) and almost-sure spectrum (valid for a “large” subset of the space, in the sense of prevalence or Baire categories). We detail these results, as well as ours, now.

In all that follows, $0 < d < D$ are two fixed integers. Let $d' := D - d$ and $(x, x') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} = \mathbb{R}^D$. For $a \in \mathbb{R}^{d'}$ we shall denote by $\mathcal{H}_a := \{(x, a)\}$ the d -dimensional affine subspace of \mathbb{R}^D .

Let f be a continuous function on \mathbb{R}^D . Its trace on \mathcal{H}_a is

$$\begin{aligned} f_a &:= f|_{\mathcal{H}_a} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x, a) \end{aligned}$$

If f is not continuous, its trace can be defined by Fourier regularization : we shall again write f_a for $\lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{|\xi| \leq N} \mathcal{F}f))_a$, whenever that limit exists.

Standard trace theorems inevitably involve a loss of regularity, for instance it is well known that when $s > 1/2$, the trace of $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$ on any one-dimensional subspace belongs to $H^{s-1/2}(\mathbb{R})$. Similar results hold for Besov spaces (see § 3.2.4) : it can easily be shown that the trace operator $f \mapsto f_a$ maps $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ to $B_{p,q}^{s-d'/p}(\mathbb{R}^d)$. However, most of the traces f_a have better properties than expected. Indeed, we will use and prove the following theorem :

Theorem 3.1.1. *Let $D \in \mathbb{N}^*$, $0 < p, s < \infty$, with $s - D/p > 0$, and let $q \in (0, \infty]$. If $f \in B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^D)$, then for Lebesgue-almost all $a \in \mathbb{R}^{d'}$ $f_a \in \bigcap_{s' < s} B_{p,\infty}^{s'}(\mathbb{R}^d)$.*

Moreover, if $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ and $q < p$ (resp. $q = p$), almost every trace f_a belongs to $B_{p,qp/(p-q)}^s(\mathbb{R}^d)$ (resp. $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^d)$).

We present a short proof of Theorem 3.1.1 in Section 3.5 using wavelets. In particular, when $s > d/p$, the inclusion $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{s-d/p}(\mathbb{R}^d)$ implies that Lebesgue-almost all traces f_a exist and are uniform Hölder functions. Jaffard also studied traces of Besov functions in [40] : he was interested in the set of a 's for which $f_a \notin B_{p,\infty}^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$.

By another result of Jaffard [41], belonging to a Besov space yields an upper bound on the spectrum of singularities :

Theorem 3.1.2. *Let $0 < p < \infty$ and $d/p < s < \infty$. For any $g \in B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^d)$, for all $h \geq s - d/p$,*

$$d_g(h) \leq \min(d, d + (h - s)p),$$

and $E_f(h) = \emptyset$ if $h < s - d/p$.

Remark 3.1.1. *The results so far have been stated for Besov spaces $B_{p,q}^s$ with $q = \infty$ but it is clear from classical Besov embeddings (see equation (3.10) below) that they hold identically for any $q > 0$.*

Not only is Theorem 3.1.2 optimal, the upper bound is actually an *almost sure* equality in $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ (Theorem 3.1.3) in the sense of prevalence, as explained below.

Prevalence theory is used to supersede the notion of Lebesgue measure in any real or complex topological vector space E . This notion was proposed by Christensen [23]

and independently by Hunt *et al.* [34]. The space E is endowed with its Borel σ -algebra $\mathcal{B}(E)$ and all Borel measures μ on $(E, \mathcal{B}(E))$ will be automatically *completed*, that is we put $\mu(A) := \mu(B)$ if $B \in \mathcal{B}(E)$ and the symmetric difference $A\Delta B$ is included in some $D \in \mathcal{B}(E)$ with $\mu(D) = 0$. A set is said to be *universally measurable* if it is measurable for any (completed) Borel measure.

Definition 3.1.1. *A universally measurable set $A \subset E$ is called shy if there exists a Borel measure μ that is positive on some compact subset K of E and such that*

$$\text{for every } x \in E, \quad \mu(A + x) = 0.$$

More generally, a set that is included in a shy universally measurable set is also called shy.

Finally, the complement in E of a shy subset is called prevalent.

The measure μ used to show that some subset is shy or prevalent is called a *probe*. It can be for instance the Lebesgue measure carried by some finite-dimensional subspace of E : this is the technique that will be used in § 3.4.2.

When a set B is prevalent, it is dense in E , $B + x$ is also prevalent for any $x \in E$ and if $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of prevalent sets then so is $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Finally, when E has finite dimension, B is prevalent in E if and only if it has full Lebesgue measure. This justifies that a prevalent set B is a “large” set in E and extends reasonably the notion of full Lebesgue measure to infinite dimensional spaces.

From now on, without any possible confusion, the term “almost all” will be indiscriminately used to describe elements in a prevalent subset of an infinite-dimensional space, or in a subset having full Lebesgue measure in a finite-dimensional space.

The use of prevalence in function spaces was pioneered by Hunt [35]. Further developing the technique, Jaffard and Fraysse [30] proved the following :

Theorem 3.1.3. *Let $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ and $0 < s - D/p < \infty$. For almost all $g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$,*

$$d_g(h) = \begin{cases} D + (h - s)p & \text{if } h \in [s - D/p, s] \\ -\infty & \text{else} \end{cases}$$

and for x in a set of full Lebesgue measure in \mathbb{R}^D , $h_g(x) = s$.

Remark 3.1.2. *Another notion of genericity is given by Baire’s theory : a property is said to be quasi-sure in a complete metric space E if this property is realized on a residual (comeagre) set in E . We choose to work within the prevalence framework, but Baire’s genericity is also worthy of interest and will be studied in a subsequent paper.*

In this paper we prove the following result on the singularity spectrum of traces of almost all Besov functions.

Theorem 3.1.4. *Let $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ and $0 < s - d/p < +\infty$. For almost all f in $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, for Lebesgue-almost all $a \in \mathbb{R}^{d'}$, the following holds :*

(i) *the spectrum of singularities of f_a is*

$$d_{f_a}(h) = \begin{cases} d + (h - s)p & \text{if } h \in [s - d/p, s] \\ -\infty & \text{else.} \end{cases} \quad (3.2)$$

(ii) *for every open set $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, the level set $E_{f_a}(s) \cap \Omega$ has full Lebesgue measure in Ω .*

Let us make some remarks on Theorem 3.1.4 :

- In a given Besov space $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ (Theorem 3.1.3), as well as in $C^\alpha(\mathbb{R}^D)$ [44] or for Borel measures supported by $[0, 1]^D$ [19], the almost-sure regularity is often the “worst possible”, i.e. the upper bound on the spectrum valid for all elements of the considered space turns out to be an equality for almost all functions or measures. This is not the case in Theorem 3.1.4, for which the almost sure spectrum does not coincide with the *a priori* upper bound, and thus the traces are more regular than what could be expected *a priori*.
- Compared to [35] and [30], the consideration of traces implies that the prevalent set can only be indirectly defined, which makes the question of its (universal) measurability nontrivial, especially in the nonseparable case.
- Observe that the singularities with Hölder exponent h less than $s - d/p$ are “not seen” by Lebesgue-almost every traces f_a . This corresponds to the level sets $E_f(h)$ of Hausdorff dimension less than d' . B. Mandelbrot referred to this phenomenon as *negative dimensions* : Heuristically, each set $E \subset \mathbb{R}^D$ of dimension \tilde{d} has a dimension $\tilde{d} - d'$ when intereseected with a set of dimension $d = D - d'$ (one loses d' dimensions). For sets of Hausdorff dimension \tilde{d} less than d , the intuitive result leads to a negative dimension. We interpret these negative values by the fact that almost every function $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ possesses singularities with exponent $s - D/p \leq h < s - d/p$, but these singularities form a set of too small a dimension to intersect a large quantity among the hyperplanes \mathcal{H}_a of dimension $d' = D - d$.
- In Section 3.6, we explain how one can extend these results to traces of f on sub-manifolds of \mathbb{R}^D (instead of sup-spaces). We get the following result.

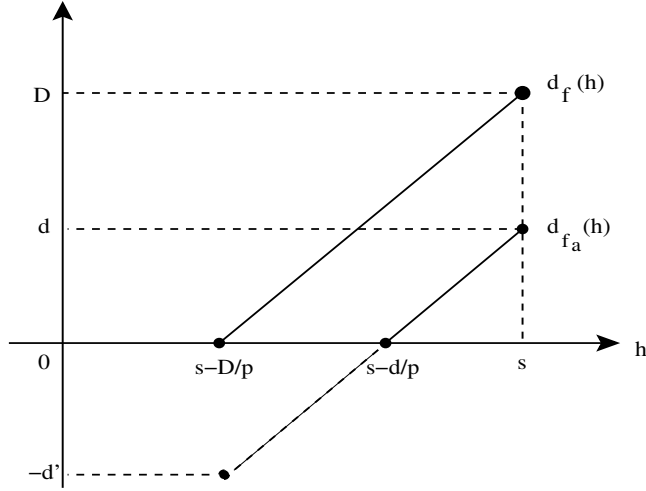


FIGURE 3.1 – Singularity spectrum of almost all $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ and its trace f_a for Lebesgue almost every $a \in \mathbb{R}^d$.

Theorem 3.1.5. *Let $S \subset \mathbb{R}^D$ be a compact C^∞ -submanifold of dimension $d < D$ with boundary, which is supposed to be transverse to \mathbb{R}^d .*

The same conclusions as in Theorem 3.1.4 hold for the traces of f on the translates $(S + (0, a))_{a \in \mathbb{R}^d}$ of S along the direction of \mathbb{R}^d .

- It is certainly worth investigating the local properties of traces of other objects : stochastic fields, or 2-dimensional multiplicative cascades.

Remark 3.1.3. *Theorem 3.1.4 and the above remark are reminiscent of classical results of P. Mattila [63] on the Hausdorff dimensions of intersection of fractal subset of \mathbb{R}^D with Lebesgue-almost all d -dimensional hyperplanes, or of sliced measures [63, 49]. In these cases, Lebesgue-almost every slice also has the maximal possible dimensions.*

In this theorem, all the hyperplanes \mathcal{H}_a on which the traces are taken are parallel (to the d first coordinates axes). Since the Besov spaces are invariant by unitary transformation of the coordinates, the result remains valid in any fixed direction. Thanks to the stability of prevalence by countable intersection, we thus obtain :

Corollary 3.1.1. *Let Δ be a countable subset of the Grassmannian $\text{Gr}_d(D)$, the set of d -dimensional subspaces of \mathbb{R}^D [63]. Under the same hypotheses on p, q, s , for*

almost all f in $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, for any $\mathcal{H} \in \Delta$, for Lebesgue-almost all $a \in \mathcal{H}^\perp$, the trace of f on $\mathcal{H} + a$ has the properties stated in Theorem 3.1.4.

Unfortunately no Fubini theorem holds for prevalence, so we cannot directly deduce from this the natural generalization below, which we leave for subsequent studies.

Conjecture 3.1.1. *Consider the Grassmannian $\text{Gr}_d(D)$ and its Haar measure $\mu_{d,D}$. For almost all f in $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, for $\mu_{d,D}$ -almost all $\mathcal{H} \in \text{Gr}_d(D)$, for Lebesgue-almost all $a \in \mathcal{H}^\perp$, the trace of f on $\mathcal{H} + a$ has the properties stated in Theorem 3.1.4.*

The paper is organized as follows. Our method is based on wavelets, and requires various notions of real and functional analysis. Section 3.2 provides all the definitions and important results needed to complete the proof of Theorem 3.2.1. In Section 3.3, we prove the upper bound for the singularity spectrum for all functions in $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, and the lower bound for all functions in a set that we call \mathcal{F} . Then, in Section 3.4, we show that this set \mathcal{F} is prevalent, the main difficulties lying in the measurability properties of \mathcal{F} . Section 3.5 contains the proof of Theorem 3.1.1, and in Section 3.6 we quickly explain how to adapt the results to traces on sub-manifolds of \mathbb{R}^D . Appendix 3.6 deals with the universal measurability of \mathcal{F} in the case $q = +\infty$ (which differs from the case $q < +\infty$ since $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^D)$ is not separable).

3.2 Preliminaries

3.2.1 Dimensions

Two notions of dimensions of sets in \mathbb{R}^d will be used below : the Hausdorff dimension and the upper box dimension. We recall them quickly.

Let E be a bounded set in \mathbb{R}^d . For every $\varepsilon > 0$, denote by $N_\varepsilon(E)$ the minimal number of cubes of size ε needed to cover the set E . The upper box dimension of E , denoted by $\overline{\dim}_B(E)$, is the real number $\in [0, d]$ defined as

$$\overline{\dim}_B(E) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\varepsilon(E)}{-\log \varepsilon}. \quad (3.3)$$

For the reader's convenience we also recall the definition of the Hausdorff dimension.

Definition 3.2.1. Let $s \geq 0$. The s -dimensional Hausdorff measure of a set E , $\mathcal{H}^s(E)$, is defined as

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{r \searrow 0} \mathcal{H}_r^s(E), \quad \text{with } \mathcal{H}_r^s(E) = \inf \left\{ \sum_i |E_i|^s \right\},$$

the infimum being taken over all the countable families of sets E_i such that $|E_i| \leq r$ and $E \subset \bigcup_i E_i$. Then, the Hausdorff dimension of E , $\dim_{\mathcal{H}} E$, is defined as

$$\dim_{\mathcal{H}} E = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(E) = +\infty\}.$$

For a bounded set $E \subset \mathbb{R}^d$, we have

$$0 \leq \dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \overline{\dim}_B(E) \leq d.$$

3.2.2 Wavelets

We recall very briefly the basics of multiresolution wavelet analysis (for details see for instance [26]). For an arbitrary integer $N \geq 1$ one can construct compactly supported functions $\Psi^0 \in C^N(\mathbb{R})$ (called the scaling function) and $\Psi^1 \in C^N(\mathbb{R})$ (called the mother wavelet), with Ψ^1 having at least $N + 1$ vanishing moments (i.e. $\int_{\mathbb{R}} x^n \Psi^1(x) dx = 0$ for $n \in \{0, \dots, N\}$), and such that the set of functions

$$\Psi_{j,k}^1 : x \mapsto \Psi^1(2^j x - k)$$

for $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ form an orthogonal basis of $L^2(\mathbb{R})$ (note that we choose the L^∞ normalization, not L^2). In this case, the wavelet is said to be N -regular.

Let us introduce the notations

$$0^d := (0, 0, \dots, 0), \quad 1^d := (1, 1, \dots, 1), \quad L^d := \{0, 1\}^d \setminus 0^d.$$

An orthogonal basis of $L^2(\mathbb{R}^d)$ is then obtained by tensorization. For every $\lambda := (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d \times \{0, 1\}^d$, let us define the tensorized wavelet

$$\Psi_\lambda(x) := \prod_{i=1}^d \Psi_{j, k_i}^{l_i}(x_i),$$

with obvious notations that $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d)$ and $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_d)$.

Any function $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ can be written (the equality being true in $L^2(\mathbb{R}^d)$)

$$f = \sum_{\lambda=(j,\mathbf{k},\mathbf{l}): j \in \mathbb{Z}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{l} \in L^d} c_\lambda \Psi_\lambda(x), \quad (3.4)$$

where

$$c_\lambda := 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Psi_\lambda(x) dx. \quad (3.5)$$

It is implicit in (3.5) that the wavelet coefficients depend on f . Observe that in the wavelet decomposition (3.4), no wavelet Ψ_λ such that $\mathbf{l} = 0^d$ (where $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$) appears.

Similar notations (e.g. $\lambda^D := (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}')) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^D \times \{0, 1\}^D$) with the straightforward modifications will produce an orthogonal basis of $L^2(\mathbb{R}^D)$. The wavelets and the corresponding wavelet coefficients in $L^2(\mathbb{R}^D)$ will be denoted respectively by Ψ_{λ^D} and c_{λ^D} .

In 3.4.2 we shall need to consider the 1-periodic function

$$G : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi^1(t - k). \quad (3.6)$$

and make the technical hypothesis on Ψ^1 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \Psi^1 \text{ is } N\text{-regular,} \\ \text{(ii)} & \text{The set } Z := G^{-1}(\{0\}) \cap [0, 1] \text{ is finite,} \\ \text{(iii)} & \text{For every } t \in Z, |G'(t)| > 0. \end{array} \right. \quad (\mathcal{H}_N)$$

This condition \mathcal{H}_N is verified by a suitable Meyer's wavelet, for every $N \geq 1$.

Lemma 3.2.1. *Let $\alpha > 0$, and consider $r_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, an even function supported by $-I_\alpha \cup I_\alpha$, where $I_\alpha := [\pi - \alpha, 2\pi + \alpha]$, satisfying in addition that $r_\alpha(\xi) = 1$ if $|\xi| \in [1, 2]$. Then the Meyer's wavelet ψ defined by $\hat{\psi} = r_\alpha$ satisfies \mathcal{H}_N , for every $N \geq 1$.*

Proof : From Meyer's book [65], the function ψ as constructed in the lemma can serve as a wavelet. By the Poisson formula,

$$G(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2\pi m) e^{2\pi m t} = e^{-2i\pi t} + e^{2i\pi t} = 2 \cos(t).$$

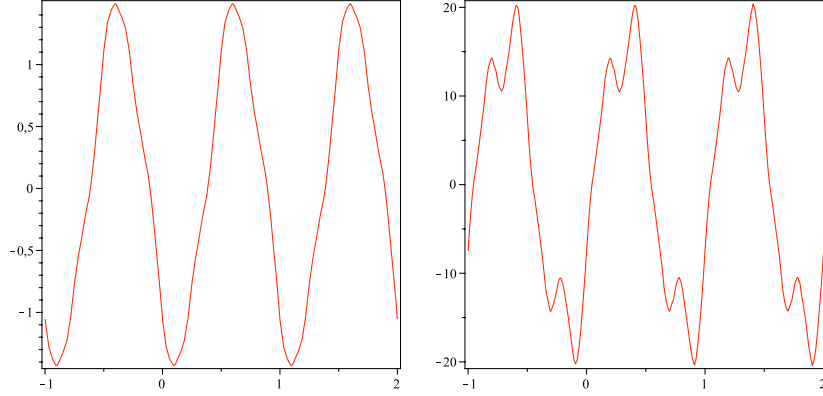


FIGURE 3.2 – Plot of the periodized Daubechies wavelet with eight vanishing moments, and its derivative. The approximation is precise enough to ensure that G and its derivative do not vanish at the same time.

It is then obvious that G and G' cannot both be equal to zero. □

Numerical simulations (see figure 3.2) indicate that (\mathcal{H}_N) is verified for suitable choices of regular wavelets, including in particular Daubechies's compactly supported wavelets [26]. In Figure 2, the simulations of Ψ^1 and $(\Psi^1)'$ (computed using the associated wavelet filters) are precise enough to guarantee that G' does not vanish around the zeros of G . It would be interesting to prove such properties for compactly supported wavelets.

3.2.3 Localization of the problem

We will be first focusing on the local behavior of traces on $(0, 1)^d \times \{a\}$, $a \in (0, 1)^{d'}$. As Proposition 3.2.1 shows, if f is written as (3.4), only the coefficients c_λ^D such that $j \geq 0$ and $(\mathbf{k}2^{-j}, \mathbf{k}'2^{-j}) \in [0, 1]^D$ can play a role in the value of the pointwise exponent $h_{f_a}(x)$. For our purpose, we can identify functions that have the same wavelet coefficients c_λ^D when $(\mathbf{k}2^{-j}, \mathbf{k}'2^{-j}) \in [0, 1]^D$. Hence we will consider functions f of the form

$$f = \sum_{\lambda^D \in \Lambda^D \times L^D} c_{\lambda^D} \Psi_{\lambda^D}(x), \quad (3.7)$$

where

$$\begin{aligned} \text{for } j \geq 1, \quad \mathbb{Z}_j &= \{0, 1, \dots, 2^j - 1\} \quad \text{and} \quad \Lambda_j^D = \{j\} \times \mathbb{Z}_j^D \\ \Lambda^D &= \bigcup_{j \geq 1} \Lambda_j^D. \end{aligned}$$

If we prove Theorem 3.1.4 on $[0, 1]^D$ instead of \mathbb{R}^D , then by dilation it will be true on any cube $[-N, N]^D$. Prevalence results being stable by countable intersection on $N \in \mathbb{N}$, Theorem 3.1.4 will thus be obtained.

We shall present our results in this framework, and we will effectively prove the following :

Theorem 3.2.1. *Let $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Assuming that $s > d/p$, for almost all f in $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$, for almost all $a \in [0, 1]^{d'}$, the following holds :*

(i) *the spectrum of singularities of f_a is*

$$d_{f_a}(h) = \begin{cases} d + (h - s)p & \text{if } h \in [s - d/p, s] \\ -\infty & \text{else.} \end{cases} \quad (3.8)$$

(ii) *the level set $E_{f_a}(s)$ has full Lebesgue measure in $[0, 1]^d$.*

3.2.4 Characterization of local and global regularity properties

Let $0 < s < \infty$, $0 < p, q \leq \infty$. Assume that the wavelet Ψ is at least $[s+1]$ -regular. The $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$ Besov norm (quasi-norm when $p < 1$ or $q < 1$) of a distribution f on $[0, 1]^D$ having wavelet coefficients c_{λ^D} is defined as

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \left(\sum_{j \geq 1} \left(2^{(sp-D)j} \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbb{Z}_j^D} |c_{\lambda^D}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.9)$$

with the obvious modifications when $p = \infty$ or $q = \infty$. The Besov space $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$ is naturally the set of functions with finite (quasi-)norm. It is a complete metrizable space, normed when p and $q \geq 1$, separable when both are finite.

The following standard embeddings are easy to deduce from (3.9) : For any $0 < s < \infty$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q < q' \leq \infty$, $\varepsilon > 0$,

$$B_{p,q}^s([0, 1]^D) \hookrightarrow B_{p,q'}^s([0, 1]^D) \hookrightarrow B_{p,q}^{s-\varepsilon}([0, 1]^D) \quad (3.10)$$

Remark 3.2.1. *In contrast with Theorems 3.1.1 and 3.1.2, the prevalence result for a given $q < \infty$ cannot simply be deduced from the result for $q = \infty$ (nor the other way round). Indeed it can be shown that in (3.10) each included space is shy in the next one.*

Let us finally recall the fundamental result linking pointwise regularity and the size of wavelet coefficients, which justifies our approach.

Proposition 3.2.1. *[36] Suppose that $\gamma > 0$ and the wavelet Ψ is at least $[\gamma + 1]$ -regular. Let $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ be a locally bounded function with wavelet coefficients $\{c_\lambda\}$, and let $x \in [0, 1]^d$.*

If $f \in C^\gamma(x)$, then there exists a constant $M < \infty$ such that for all $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times L^d$,

$$|c_\lambda| \leq M(2^{-j} + |x - \mathbf{k}2^{-j}|)^\gamma = M2^{-j\gamma}(1 + |2^j x - \mathbf{k}|)^\gamma \quad (3.11)$$

Conversely, if (3.11) holds true and if $f \in \bigcup_{\varepsilon > 0} C^\varepsilon([0, 1]^d)$, then $f \in C^{\gamma-\eta}(x)$, for every $\eta > 0$.

Finally, the notion of cone of influence will be needed later.

Definition 3.2.2. *Let $L > 0$. The cone of influence of width L above $x \in \mathbb{R}^d$ is the set of cubes $(j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d$ such that*

$$|x - \mathbf{k}2^{-j}| \leq L2^{-j}.$$

3.2.5 Traces

Recall that for $a \in [0, 1]^{d'}$ and f continuous on $[0, 1]^D$, the function f_a is simply defined as $f_a(x) := f(x, a)$. Moreover, recall that $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ with $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_j^d$ and $\mathbf{l} \in \{0, 1\}^d$ and that $\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}'))$ with $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_j^d$, $\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}$, $\mathbf{l} \in \{0, 1\}^d$ and $\mathbf{l}' \in \{0, 1\}^{d'}$. Using the expansion (3.7) of f in the tensorized wavelet basis $\{\Psi_{\lambda^D}\}$, we have

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \sum_{\lambda^D \in \Lambda^D \times L^D} c_{\lambda^D} \prod_{i=1}^d \Psi_{j, k_i}^{l_i}(x_i) \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{l'_i}(a_i) \\ &= G_a(x) + F_a(x) \end{aligned} \quad (3.12)$$

where

$$G_a(x) := \sum_{\lambda \in \Lambda^d \times 0^d} d_\lambda(a) \Psi_\lambda(x) \quad (3.13)$$

$$F_a(x) := \sum_{\lambda \in \Lambda^d \times L^d} d_\lambda(a) \Psi_\lambda(x) \quad (3.14)$$

and for $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times \{0, 1\}^d$,

$$\text{if } \mathbf{l} = 0^d, \quad d_\lambda(a) := \sum_{\substack{\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (0^d, \mathbf{l}')) \\ \mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}, \mathbf{l}' \in L^{d'}}} c_{\lambda^D} \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{\mathbf{l}'_i}(a_i). \quad (3.15)$$

$$\text{if } \mathbf{l} \in L^d, \quad d_\lambda(a) := \sum_{\substack{\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}')) \\ \mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}, \mathbf{l}' \in \{0, 1\}^{d'}}} c_{\lambda^D} \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{\mathbf{l}'_i}(a_i). \quad (3.16)$$

Formula (3.14) indeed yields a wavelet decomposition of the function F_a , since the wavelets appearing in (3.14) form a wavelet basis of $L^2([0, 1]^d)$ (if completed by the function $\Psi_{0,0^d,0^d}$). This is not the case for the function G_a with formula (3.13), since only the scaling function Ψ^0 is used in this decomposition. Fortunately, we have the following standard result for the Besov properties of a function G_a defined through a formula like (3.13).

Proposition 3.2.2. [40] *If $s_0 > 0$, and $g(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda^d \times 0^d} d_\lambda \Psi_\lambda(x)$ with $\{d_\lambda\}$ satisfying*

$$\sup_{j \geq 1} 2^{j(p_0 s_0 - d)} \left(\sum_{\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}): \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_j^d, \mathbf{l} = 0^d} |d_\lambda|^p \right) < +\infty, \quad (3.17)$$

then $g \in B_{p_0, \infty}^{s_0}([0, 1]^d)$.

Proposition 3.2.2 entails that the same Besov characterization as (3.9) when one considers only scaling functions. The proof of Proposition 3.2.2, that we do not reproduce here, consists of decomposing each scaling function Ψ_λ , for $\lambda = (j, \mathbf{k}, 0^d)$ on the wavelets of smaller frequencies, i.e. on $\Psi_{\tilde{\lambda}}$ with $\tilde{\lambda} = (\tilde{j}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{l}})$ such that $\tilde{j} \leq j$ and $\tilde{\mathbf{l}} \in L^d$.

As a conclusion, the trace f_a can be written

$$f_a = \sum_{\lambda \in \Lambda^d \times \{0, 1\}^d} d_\lambda(a) \Psi_\lambda(x) \quad (3.18)$$

where for $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times \{0, 1\}^d$, $d_\lambda(a)$ is given by (3.15) and (3.16). For such a decomposition, the Besov characterization (3.9) holds true, the difference with (3.4) is that the sum over $\lambda \in L^d$ is replaced by $\lambda \in \{0, 1\}^d$.

Recalling now Theorem 3.1.1 (proved in Section 3.5), $f_a \in \bigcap_{\varepsilon>0} B_{p,\infty}^{s-\varepsilon}([0, 1]^d)$ for Lebesgue-almost every $a \in [0, 1]^d$. Hence, still for almost every a , we can consider the *effective* wavelet decomposition of f_a on the wavelet basis provided by (3.4), and we write

$$f_a = c_{0,0^d,0^d} \Psi_{0,0^d,0^d}(x) + \sum_{\lambda \in \Lambda^d \times L^d} c_\lambda(a) \Psi_\lambda(x). \quad (3.19)$$

We will use both forms (3.18) and (3.19).

3.2.6 Dyadic approximation

Let $B(x, r)$ denote the closed l^∞ ball of radius r around x in $[0, 1]^d$. For $\alpha \geq 1$ and $j \in \mathbb{N}$, let

$$\mathcal{X}_j^\alpha := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_j^d} B(k2^{-j}, 2^{-j\alpha}) \quad (3.20)$$

$$\text{and } \mathcal{X}^\alpha := \limsup_{j \rightarrow \infty} \mathcal{X}_j^\alpha$$

The set \mathcal{X}^α is constituted by points in $[0, 1]^d$ that are approached at rate at least α by dyadics. In other words, $x \in \mathcal{X}^\alpha$ if and only if there exists a sequence $(J_n, K_n)_{n \geq 1} \in \Lambda^d$ such that $J_n \rightarrow +\infty$ and for all $n \in \mathbb{N}$

$$|x - K_n 2^{-J_n}| \leq 2^{-\alpha J_n}. \quad (3.21)$$

Observe that $\mathcal{X}^1 = [0, 1]^d$ and if $\alpha \leq \alpha'$ then $\mathcal{X}^{\alpha'} \subset \mathcal{X}^\alpha$. Observe also that if $x \in \mathcal{X}^\alpha$ is not itself a dyadic, then the sequence (J_n, K_n) can be chosen so that for every n the fraction $\frac{K_n}{2^{J_n}}$ is irreducible. We call $(J_n, K_n)_{n \geq 1}$ an *irreducible* sequence.

About the dimension of \mathcal{X}^α , a well known result (for instance proved in [27]) states :

Theorem 3.2.2. *There exists a positive σ -finite measure m_α carried by \mathcal{X}^α and such that any set E having Hausdorff dimension $\dim_{\mathcal{H}}(E) < \frac{d}{\alpha}$ has measure $m_\alpha(E) = 0$.*

In particular, $m_\alpha(\mathcal{X}^\alpha) > 0$ and $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{X}^\alpha = d/\alpha$.

The set \mathcal{X}^α will play a key role in the following. It is well-adapted to our study, since the wavelet coefficients are naturally encoded with a dyadic tree structure. It is likely that any set with the form of a limsup set (where the dyadic balls in (3.20) are replaced by balls $B(x_n, l_n)$ that are sufficiently well-distributed in the cube $[0, 1]^d$) could also be used.

3.2.7 Prevalence, universal measurability, analytic sets

In the Definition 3.1.1 of the prevalence in a complete metric space E , a set $B \subset E$ needs to be universally measurable to be shy or prevalent (this includes the Borel sets). One main difficulty occurring in the proof of Theorem 3.1.4 lies in the universal measurability property of subsets of E for which we aim to prove a prevalence property. Indeed, these sets will be defined through complicated formulas, not easily tractable. In particular, these subsets of E can often be viewed as continuous images of Borel sets.

When E is a Polish space (this is the case for $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ when $q < \infty$), such sets are called *analytic*, and we have the following theorem [22].

Theorem 3.2.3. *Every analytic set in a Polish space is universally measurable.*

When E is not Polish (in our context, when $E = B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^D)$), continuous images of Borel sets need not be universally measurable. Hence, in order to obtain the universal measurability for our specific sets, the definition of an analytic set has to be modified and is more complicated (see § 3.6). Once this second definition is adopted, the same result as Theorem 3.2.3 holds, i.e. analyticity implies universal measurability. The fact that the sets we will meet indeed satisfy this second definition of analytic set is proved in 3.6.

3.3 Proof of Theorem 3.2.1

3.3.1 A first property of the wavelet

Recall the definition (3.6) of the periodized wavelet G and let us introduce its d' -dimensional version $G_{d'}$ defined as

$$G_{d'} : x \in \mathbb{R}^{d'} \longmapsto G(x_1) \cdot G(x_2) \cdots G(x_{d'}). \quad (3.22)$$

We start with the following proposition. It asserts that the multi-dimensional wavelet can not be too small on a big set. This will be useful when finding a lower bound for the wavelet coefficients of the traces of prevalent functions (see Lemma 3.4.1).

Proposition 3.3.1. *If Ψ satisfies (\mathcal{H}_N) , then the set*

$$\mathcal{A}_1 := \left\{ a \in [0, 1]^{d'} : \exists j_a \in \mathbb{N} \text{ such that } \forall j \geq j_a, |G_{d'}(2^j a)| > j^{-2d'} \right\}$$

has full Lebesgue measure.

Remark that Proposition 3.3.1 holds in fact for any function $G \in C^N(\mathbb{R})$ satisfying assumptions (ii) and (iii) of (\mathcal{H}_N) .

Proof : Obviously, if we are able to prove that the set

$$\mathcal{A}'_1 := \{a_1 \in [0, 1] : \exists j_a \in \mathbb{N} \text{ such that } \forall j \geq j_a, |G(2^j a_1)| > j^{-2}\}$$

has full Lebesgue measure in $[0, 1]$, then Proposition 3.3.1 will be proved since we have the inclusion $(\mathcal{A}'_1)^d \subset \mathcal{A}_1$.

By (\mathcal{H}_N) , there is a finite number, say y_1, y_2, \dots, y_p , of zeros of G on the interval $[0, 1]$, and G' does not vanish at these real numbers.

Let $M = \min(|G'(y_1)|, |G'(y_2)|, \dots, |G'(y_p)|)$. For each y_i there is a small interval $[y_i - r_i, y_i + r_i]$ around y_i on which $|G(a)| \geq M|a - y_i|/2$.

Let $r = \min(r_i : i = 1, \dots, p)$.

Let us denote by m the minimum of G on the compact set $[0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^p (y_i - r, y_i + r)$. We now choose an integer n_1 such that $1/n_1 \leq \min(m, r)$.

The above construction guarantees that for every integer $n \geq n_1$, for every $a \notin \bigcup_{i=1}^p [y_i - \frac{2}{M \cdot n}, y_i + \frac{2}{M \cdot n}]$, we have $|G(a)| \geq 1/n$. In other words, $|G(a)| < 1/n$ on a set of Lebesgue measure at most $\sum_{i=1}^p 2 \frac{2}{M \cdot n} = C/n$, for some constant $C > 0$. This immediately implies that for every j large enough, the set

$$\tilde{\mathcal{A}}(j) := \{a \in [0, 1] : |G(a)| \leq j^{-2}\}$$

has a Lebesgue measure less than Cj^{-2} .

Remarking the 1-periodicity of G , we deduce that the Lebesgue measure of the set

$$\mathcal{A}'(j) := \{a \in [0, 1] : |G(2^j a)| \leq j^{-2}\}$$

is also equal Cj^{-2} (the same as that of $\tilde{\mathcal{A}}(j)$). Obviously,

$$\sum_{j \geq 1} \mathcal{L}(\mathcal{A}'(j)) < +\infty.$$

Thus, applying the Borel-Cantelli lemma to the sets $\mathcal{A}'(j)$, we deduce that the limsup set

$$\bigcap_{J \geq 1} \bigcup_{j \geq J} \mathcal{A}'(j)$$

has zero Lebesgue measure. This set is the complement of the set \mathcal{A}'_1 , which by deduction is of full Lebesgue measure in $[0, 1]$. □

3.3.2 Prevalence property of an ancillary set

The key result to obtain the prevalence of the singularity spectrum of Theorem 3.2.1 is the following theorem.

Theorem 3.3.1. *Suppose that $0 < s - D/p < \infty$ and $0 < q \leq \infty$. Let $\alpha \geq 1$ and let us defined the exponent*

$$H(\alpha) := s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p}. \quad (3.23)$$

The set

$$\mathcal{F}_\alpha := \left\{ f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D) : \exists \mathcal{A}(f) \text{ of full Lebesgue measure such that} \right. \\ \left. a \in \mathcal{A}(f) \implies \forall x \in \mathcal{X}^\alpha, h_{f_a}(x) \leq H(\alpha) \right\}$$

is prevalent in $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$.

The proof of Theorem 3.3.1 is postponed to § 3.4. We admit it for the moment, and we explain how we conclude once Theorem 3.3.1 is proved. Our main result, Theorem 3.2.1, is a direct consequence of Propositions 3.3.2–3.3.4 below.

From now on, let $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a dense sequence in $[1, \infty)$ such that $\alpha_0 = 1$. Using the fact that a countable intersection of prevalent (resp. full Lebesgue measure) sets is prevalent (resp. of full Lebesgue measure), it follows immediately that :

Corollary 3.3.1. *The set*

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D) : \exists \mathcal{A}(f) \text{ of full Lebesgue measure such that} \right. \\ \left. a \in \mathcal{A}(f) \implies \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{X}^{\alpha_n}, h_{f_a}(x) \leq H(\alpha_n) \right\}$$

is prevalent in $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$.

3.3.3 Prevalent upper bound

We first find an upper bound for the singularity spectrum of Lebesgue almost traces of f , for **every** $f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D)$.

Proposition 3.3.2. *For every $f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D)$, for almost all $a \in [0, 1]^{d'}$, we have*

$$\text{for every } h \geq s - d/p, \quad d_{f_a}(h) \leq \min(d, d + (h - s)p). \quad (3.24)$$

Proof: Let $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$. By Theorem 3.1.1, there is a set $\mathcal{A}(f)$ of full Lebesgue measure in $[0, 1]^{d'}$ such that for every $a \in \mathcal{A}(f)$, the trace f_a belongs to $\bigcap_{s-\varepsilon < s} B_{p,\infty}^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$.

Then, by Theorem 3.1.2, for every $h \geq s - d/p$, for every $\varepsilon > 0$,

$$d_{f_a}(h) \leq \min(d, d + (h - s)p + \varepsilon p).$$

Moreover, for every $\varepsilon > 0$, since $f_a \in B_{p,\infty}^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$ for every $a \in \mathcal{A}(f)$, there is no point $x \in [0, 1]^d$ such that $h_{f_a}(x) < s - d/p - \varepsilon$.

Letting $\varepsilon > 0$ yields exactly the upper bound (3.24). □

One can obtain more precise informations for **almost all** $f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D)$, i.e. on a prevalent set in $f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D)$.

Proposition 3.3.3. *For almost all $f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D)$, for Lebesgue-almost all $a \in [0, 1]^{d'}$, for all $x \in [0, 1]^d$, $h_{f_a}(x) \leq s$.*

Proof: We apply Corollary 3.3.1 with $\alpha_n = \alpha_0 = 1$: if f belongs to the prevalent set \mathcal{F} , then for any $a \in \mathcal{A}(f)$, for any $x \in \mathcal{X}^{\alpha_0} = \mathcal{X}^1 = [0, 1]^d$, $h_{f_a}(x) \leq H(\alpha_0) = s$. □

3.3.4 Prevalent lower bound

Proposition 3.3.4. *For almost all $f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D)$, for almost all $a \in [0, 1]^{d'}$, for any $h \in [s - d/p, s]$, $d_{f_a}(h) \geq d + (h - s)p$ and furthermore, $E_{f_a}(s)$ has full Lebesgue measure.*

Proof: Consider a function f in the prevalent set \mathcal{F} . Let $h \in (s - d/p, s]$. This exponent can be written

$$h = H(\alpha) = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p} \tag{3.25}$$

for some given $\alpha \geq 1$.

Consider a subsequence $(\alpha_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ of $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ which is nondecreasing and converges to α (for $\alpha = 1$ this would just be $\phi = 0$).

Let us first assume that $\alpha > 1$, i.e. $H(\alpha) \in (s - d/p, s)$. Remark that $\mathcal{X}^\alpha \subset \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{X}^{\alpha_{\phi(n)}}$. Since $f \in \mathcal{F}$, it follows that for all $a \in \mathcal{A}(f)$ and $x \in \mathcal{X}^\alpha$, $h_{f_a}(x) \leq H(\alpha)$. Hence $\mathcal{X}^\alpha \subset \{x : h_{f_a}(x) \leq H(\alpha)\}$.

Recall that Theorem 3.2.2 provides us with a measure m_α which is supported by \mathcal{X}^α , and which gives measure 0 to every set of dimension strictly less than d/α .

Let us introduce the set $\mathcal{Y}^\alpha := \{x : h_{f_a}(x) < H(\alpha)\}$. Clearly,

$$\mathcal{Y}^\alpha = \bigcup_{n \geq 1} \{x : h_{f_a}(x) \leq H(\alpha) - 1/n\}.$$

By (3.24), each set $\{x : h_{f_a}(x) \leq H(\alpha) - 1/n\}$ has Hausdorff dimension strictly less than d/α . The scaling properties and the σ -additivity of the measure m_α yield that $m_\alpha(\mathcal{Y}^\alpha) = 0$.

Remembering that $m_\alpha(\mathcal{X}^\alpha) > 0$, we have $m_\alpha(\mathcal{X}^\alpha \setminus \mathcal{Y}^\alpha) > 0$. This means equivalently that $m_\alpha(\{x \in \mathcal{X}^\alpha : h_{f_a}(x) = H(\alpha)\}) > 0$.

This implies that the set $\{x \in \mathcal{X}^\alpha : h_{f_a}(x) = H(\alpha)\}$ has Hausdorff dimension greater than d/α , and thus

$$d_{f_a}(h) = d_{f_a}(H(\alpha)) = \dim_{\mathcal{H}}\{x : h_{f_a}(x) = H(\alpha)\} \geq d/\alpha = p(h - s) + d,$$

the last equality following from (3.25).

When $\alpha = 1$, the same reasoning using the d -dimensional Lebesgue measure \mathcal{L}_d instead of m_α yields $E_{f_a}(s) \supset [0, 1]^d \setminus \mathcal{Y}^1$ with $\mathcal{L}_d(\mathcal{Y}^1) = 0$. Hence $\mathcal{L}_d(E_{f_a}(s)) = 1$.

Finally, it remains us to treat the case of the smallest exponent $h = s - d/p$. Remembering the definition of \mathcal{F} , observe that at any element x of $\mathcal{X}^\infty := \bigcap_{\alpha \geq 1} \mathcal{X}^\alpha = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{X}^{\alpha_n}$, one necessarily has $h_f(x) \leq s - d/p$. Since the converse inequality holds true for any x , we have proved that $\mathcal{X}^\infty \subset E_{f_a}(s - d/p)$. We conclude by noting that \mathcal{X}^∞ is certainly not empty (and uncountable), since it is a dense G_δ set in \mathbb{R}^d . \square

Theorem 3.2.1 is now proved, provided that we can establish Theorem 3.3.1.

3.4 Proof of Theorem 3.3.1 : prevalence of \mathcal{F}_α

We simplify the problem by including the complement of \mathcal{F}_α in a countable union of simpler ancillary sets. Let N be an integer, $\alpha > 1$, $0 < \varepsilon < 1/2$, $\gamma > H(\alpha)$ and

$$\mathcal{O}_{\gamma, N}^\varepsilon := \{f \in B_{p, q}^s([0, 1]^D) : \mathcal{L}^{d'}(\mathcal{A}_{\gamma, N}(f)^\varepsilon) > 0\}$$

where

$$\mathcal{A}_{\gamma, N}(f)^\varepsilon = \left\{ a \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^{d'} : \begin{array}{l} \exists x \in \mathcal{X}^\alpha, \forall \lambda = (j, \mathbf{k}, l) \in \Lambda^d \times L^d, \\ |c_\lambda(a)| \leq N 2^{-\gamma j} (1 + |2^j x - \mathbf{k}|)^\gamma \end{array} \right\}.$$

Remark that the conditions on the wavelet coefficients that appear in the definition of $\mathcal{A}_{\gamma,N}(f)^\varepsilon$ implies that f_a has exponent greater than γ at x .

Recall the definition of \mathcal{F}_α

$$\mathcal{F}_\alpha := \left\{ f \in B_{p,q}^s([0,1]^D) : \exists \mathcal{A}(f) \text{ of full Lebesgue measure in } [0,1]^{d'} \right. \\ \left. \text{such that } a \in \mathcal{A}(f) \implies \forall x \in \mathcal{X}^\alpha, h_{f_a}(x) \leq H(\alpha) \right\}.$$

Proposition 3.4.1. *For any sequence $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictly decreasing to $H(\alpha)$, we have*

$$B_{p,q}^s([0,1]^D) \setminus \mathcal{F}_\alpha \subset \bigcup_{\tilde{n} \geq 2} \bigcup_{n, N \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\gamma_n, N}^{1/\tilde{n}} \quad (3.26)$$

Proof : We write that $\mathcal{F}_\alpha = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{\alpha, \gamma_n}$, where for any $\gamma > H(\alpha)$ we put

$$\mathcal{F}_{\alpha, \gamma} = \left\{ f \in B_{p,q}^s([0,1]^D) : \begin{array}{l} \exists \mathcal{A}_\gamma(f) \text{ of full Lebesgue measure in } [0,1]^{d'} \\ \text{such that } a \in \mathcal{A}_\gamma(f) \implies \forall x \in \mathcal{X}^\alpha, f_a \notin C^\gamma(x) \end{array} \right\}.$$

When $f \notin \mathcal{F}_{\alpha, \gamma}$, the set $\{a \in [0,1]^{d'} : \exists x \in \mathcal{X}^\alpha, f_a \in C^\gamma(x)\}$ has positive Lebesgue measure. This means that for some $\tilde{n} > 0$, the set of a 's defined by

$$\left\{ a \in [1/\tilde{n}, 1 - 1/\tilde{n}]^{d'} : \exists x \in \mathcal{X}^\alpha, f_a \in C^\gamma(x) \right\}$$

has also positive Lebesgue measure. But by (3.11) of Proposition 3.2.1 which gives the characterization of $C^\gamma(x)$ in terms of wavelet coefficients, this last set is included in $\mathcal{A}_{\gamma, N}(f)^{1/\tilde{n}}$, for some $N \geq 1$. Hence (3.26) holds true. \square

To prove Theorem 3.3.1, it suffices now to show that each set $\mathcal{O}_{\gamma, N}^\varepsilon$ is universally measurable (Proposition 3.4.2) and shy (Proposition 3.4.4).

From now on we fix $N \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > 1$ and $\gamma > H(\alpha)$.

3.4.1 Measurability of $\mathcal{O}_{\gamma, N}^\varepsilon$

First we deal here only with the case $q < \infty$, that is when $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ is a Polish space. The case $q = \infty$ is proved in Appendix 3.6, Proposition 3.6.1.

Proposition 3.4.2. *The set $\mathcal{O}_{\gamma, N}^\varepsilon$ is universally measurable in $B_{p,q}^s([0,1]^D)$.*

Proof : We prove it for $\varepsilon = 0$ (the value of $\varepsilon > 0$ does not influence the proof), and we denote $\mathcal{O}_{\gamma,N} = \mathcal{O}_{\gamma,N}^0$. Let

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(f, a, x) &:= N2^{-\gamma j}(1 + |2^j x - k|)^\gamma - |c_\lambda(a)| \\ \Phi(f, a, x) &:= \inf_{\lambda \in \Lambda^d \times L^d} \Phi_\lambda(f, a, x)\end{aligned}$$

and

$$\tilde{\Phi}(f) := \mathcal{L}_{d'} \left(\left\{ a \in [0, 1]^{d'} : \exists x \in \mathcal{X}^\alpha, \Phi(f, a, x) \geq 0 \right\} \right)$$

so that

$$\mathcal{O}_{\gamma,N} = \tilde{\Phi}^{-1}((0, +\infty)).$$

To obtain Proposition 3.4.2, we just have to prove that $\tilde{\Phi}$ is universally measurable as a map : $B_{p,q}^s([0, 1]^D) \rightarrow \mathbb{R}^+$. For this, let us fix a complete Borel measure μ on $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$.

First observe that each Φ_λ is continuous on $B_{p,q}^s([0, 1]^D) \times [0, 1]^{d'} \times [0, 1]^d$. The problem may come only from the map $(f, a, x) \mapsto c_\lambda(a)$. Recall that $s - D/p > 0$, hence we deal with continuous functions. Since the convergence in Besov norm implies the uniform convergence in the $\|\cdot\|_\infty$ norm on the space of continuous functions on $[0, 1]^d$, the map $(f, a) \mapsto f_a$ is a continuous map. Finally, it is obvious that $f_a \mapsto c_\lambda(a)$ is continuous, since $c_\lambda(a)$ is simply the scalar product between f_a and the fixed wavelet Ψ_λ . As a countable infimum of continuous functions, Φ is Borel on the Polish space $B_{p,q}^s([0, 1]^D) \times [0, 1]^{d'} \times [0, 1]^d$.

Clearly $\mathcal{X}^\alpha \in \mathcal{B}([0, 1]^d)$, so the set

$$\tilde{\mathcal{T}} := \Phi^{-1}([0, \infty)) \cap \left(B_{p,q}^s([0, 1]^D) \times [0, 1]^{d'} \times \mathcal{X}^\alpha \right)$$

is also Borel and its projection along the third coordinate

$$\Pi(\tilde{\mathcal{T}}) := \left\{ (f, a) \in B_{p,q}^s([0, 1]^D) \times [0, 1]^{d'} : \exists x \in \mathcal{X}^\alpha, (f, a, x) \in \tilde{\mathcal{T}} \right\}$$

is analytic in the space $(B_{p,q}^s([0, 1]^D) \times [0, 1]^{d'}, \mathcal{B}(B_{p,q}^s([0, 1]^D) \times [0, 1]^{d'}))$. By the universal measurability Theorem 3.2.3, $\Pi(\tilde{\mathcal{T}})$ is then $\mu \otimes \mathcal{L}_{d'}$ -measurable.

To conclude, we notice that $\tilde{\Phi}$ can be written as

$$\tilde{\Phi} : f \mapsto \int_{[0,1]^{d'}} \mathbf{1}_{\Pi(\tilde{\mathcal{T}})}(f, a) da.$$

Since $\Pi(\tilde{\mathcal{T}})$ is $\mu \otimes \mathcal{L}_{d'}$ -measurable, we can apply Fubini's theorem, so that we conclude that $\tilde{\Phi}$ is μ -measurable, for any complete Borel measure μ on $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$. \square

3.4.2 Probe space

In this section $q \in (0, \infty)$, with the obvious modifications when $q = \infty$.

We use the following notation : to each $(j, \mathbf{k}) \in \Lambda^d$ we associate the unique (J, \mathbf{K}) , $J \in \mathbb{N}$ and $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}_j^d \setminus 2\mathbb{Z}_j^d$ satisfying $\mathbf{K}2^{-J} = \mathbf{k}2^{-j}$ ($\mathbf{K}2^{-J}$ is the irreducible version of the dyadic point $\mathbf{k}2^{-j}$). Obviously, with the preceding notations, $J \leq j$.

Proposition 3.4.3. *Let us define, for every $\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}')) \in \Lambda^D$*

$$e_{\lambda^D} := \begin{cases} j^{-\frac{q+2}{qp}} 2^{(\frac{d}{p}-s)j} 2^{-\frac{d}{p}J} & \text{if } \mathbf{l} \neq 0^d \text{ and } \mathbf{l}' = 1^{d'}, \\ 0 & \text{if } \mathbf{l} = 0^d \text{ or } \mathbf{l}' \neq 1^{d'}. \end{cases} \quad (3.27)$$

The function $g := \sum_{\lambda^D \in \Lambda^D} e_{\lambda^D} \psi_{\lambda^D}$ belongs to $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$.

Proof : Observe that e_{λ^D} does not depend on $\mathbf{l} \in L^d$. Using the wavelet characterization (3.9) of $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$, the proof boils down to studying for all integers $j \geq 1$ the quantity

$$A_j := 2^{j(sp-D)} \sum_{\lambda^D=(j,(\mathbf{k},\mathbf{k}'),(\mathbf{l},\mathbf{l}')):(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbb{Z}_j^D, (\mathbf{l},\mathbf{l}') \in \{0,1\}^D} |e_{\lambda^D}|^p.$$

By construction, e_{λ^D} is the same for all \mathbf{k}' and all \mathbf{l} , and equals zero except when $\mathbf{l}' = 1^{d'}$ and $\mathbf{l} \neq 0^d$. Thus,

$$\begin{aligned} A_j &= (2^d - 1) 2^{j(sp-D+d')} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_j^d} |e_{\lambda^D}|^p \leq 2^{d+j(sp-d)} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_j^d} j^{-p\frac{q+2}{qp}} 2^{(d-sp)j} 2^{-dJ} \\ &\leq 2^d j^{-\frac{q+2}{q}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_j^d} 2^{-dJ}. \end{aligned}$$

where one should not forget that J depends on \mathbf{k} . For a given integer $1 \leq J \leq j$, the number of multi-integers $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_j^d$ such that its irreducible version can be written $\mathbf{K}2^{-J}$ (for some \mathbf{K}) is exactly $2^{d(J-1)}$. Hence

$$A_j \leq 2^d j^{-\frac{q+2}{q}} \sum_{J=1}^j 2^{d(J-1)-dJ} = j^{-\frac{2}{q}}$$

which is an l^q sequence. □

Remark 3.4.1. *Although we did not prove it here, the singularity spectrum of g (and of the functions $g^{(i)}$ below) can be explicitly computed : for every $h \in [s - d/p, s]$, $d_g(h) = ph - ps + D$, and $d_g(h) = -\infty$ else. It is noticeable that g does not enjoy the generic spectrum in $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$ (the generic spectrum has the same formula but the range of h is $[s - D/p, s]$, not $[s - d/p, s]$). Nevertheless its traces will be shown to have the typical spectrum in $B_{p,q}^s([0, 1]^d)$.*

Let $J_0 \geq 1$ to be fixed later and $d_1 := 2^{dJ_0}$. For each d -dimensional dyadic cube $\lambda \in \Lambda^d$ at scale j , we enumerate in an arbitrary fashion $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(d_1)}$ its d_1 sub-cubes at scale $j + J_0$.

Definition 3.4.1. *We set the probe space \mathcal{P} to be the d_1 -dimensional subspace of $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$ spanned by the functions $g^{(i)}$, whose wavelet coefficients $e_{\lambda^D}^{(i)}$ are defined in the following way : for each $\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}')) \in \Lambda^D$, let $\lambda := (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ and*

$$e_{\lambda^D}^{(i)} = \begin{cases} e_{\tilde{\lambda}^D} & \text{if } \lambda = \tilde{\lambda}^{(i)} \text{ for some } \tilde{\lambda}^D := (j - J_0, (\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{k}}'), (\tilde{\mathbf{l}}, \tilde{\mathbf{l}}')) \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \quad (3.28)$$

In the definition above, $\tilde{\lambda}^{(i)}$ is the sub-cube associated with $\tilde{\lambda} = (j - J_0, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{l}})$ (which is the restriction to $[0, 1]^d$ of $\tilde{\lambda}^D$).

In particular, recalling (3.27), as soon as $\mathbf{l}' \neq \mathbf{1}^{d'}$, $e_{\lambda^D}^{(i)} = 0$, and this coefficient is the same for all $\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}$. By the same proof as Proposition 3.4.3, each $g^{(i)}$ also belongs to $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$.

Heuristically, the wavelet coefficients of g at generation j are dispatched in wavelet coefficients at generation $j + J_0$ for the functions $g^{(i)}$, the distribution being organized so that for any cube λ^D , there is only one $g^{(i)}$ such that $e_{\lambda^D}^{(i)} \neq 0$.

Let us now consider their traces $g_a^{(i)}$ on the affine subspace \mathcal{H}_a .

Lemma 3.4.1. *Let $\varepsilon > 0$, and let $a \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^{d'}$. For every $i \in \{1, \dots, d_1\}$, for every $j \geq 1$ large enough, for every $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ with $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_j^d$ and $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}^d$, we have*

$$\begin{aligned} & e_{(j, (\mathbf{k}, \mathbf{1}^{d'}), (\mathbf{1}^d, \mathbf{1}^{d'}))}^{(i)} \left(G_{d'}(2^j a) - \frac{1}{j^{4d'}} \right) \\ & \leq e_{\lambda}^{(i)}(a) \leq e_{(j, (\mathbf{k}, \mathbf{1}^{d'}), (\mathbf{1}^d, \mathbf{1}^{d'}))}^{(i)} \left(G_{d'}(2^j a) + \frac{1}{j^{4d'}} \right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

where $G_{d'}$ was defined in (3.22).

Moreover, if $\mathbf{l} = \mathbf{0}^d$, then $e_{\lambda}^{(i)}(a) = 0$.

Proof : Following (3.15) and (3.16), the wavelet coefficients of these traces are : for all $j \geq 1$, for all $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \{j\} \times \mathbb{Z}_j^d \times \{0, 1\}^d$,

$$\text{if } \mathbf{l} = 0^d, \quad e_\lambda^{(i)}(a) := \sum_{\substack{\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (0^d, \mathbf{l}')) : \\ \mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}, \mathbf{l}' \in L^{d'}}} e_{\lambda^D}^{(i)} \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{l'_i}(a_i). \quad (3.30)$$

$$\text{if } \mathbf{l} \in L^d, \quad e_\lambda^{(i)}(a) := \sum_{\substack{\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}')) : \\ \mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}, \mathbf{l}' \in \{0, 1\}^{d'}}} e_{\lambda^D}^{(i)} \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{l'_i}(a_i). \quad (3.31)$$

By definition of $e_{\lambda^D}^{(i)}$, the coefficients (3.30) all vanish. Now, remember that by construction $e_{\lambda^D}^{(i)}$ does not depend on \mathbf{k}' , nor on $\mathbf{l} \in L^d$, and that they all have the same values as one of them, say the one with $\mathbf{l} = 1^d$. Thus, as soon as $\mathbf{l} \neq 0^d$, formula (3.31) can be simplified into

$$\begin{aligned} e_\lambda^{(i)}(a) &= e_{(j, \mathbf{k}, 1^d)}^{(i)}(a) = \sum_{\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (1^d, 1^{d'})) : \mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}} e_{\lambda^D}^{(i)} \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^1(a_i) \\ &= e_{(j, (\mathbf{k}, 1^{d'}), (1^d, 1^{d'}))}^{(i)} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}} \prod_{i=1}^{d'} \Psi^1(2^j a_i - k'_i). \end{aligned}$$

Recall that $a \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^d$, and that we use the Meyer's wavelet Ψ^1 of Lemma 3.2.1, which belongs to the Schwartz class. Recall the definition (3.22) of $G_{d'}(2^j a)$. We have

$$\begin{aligned} \left| G_{d'}(2^j a) - \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}} \prod_{i=1}^{d'} \Psi^1(2^j a_i - k'_i) \right| &\leq \left| \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}^{d'} : |k'_i 2^{-j} - a_i| \geq \varepsilon} \prod_{i=1}^{d'} \Psi^1(2^j a_i - k'_i) \right| \\ &\leq \prod_{i=1}^{d'} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}^{d'} : |k'_i 2^{-j} - a_i| \geq \varepsilon} |\Psi^1(2^j a_i - k'_i)| \\ &\leq \prod_{i=1}^{d'} \sum_{\mathbf{k}'' \in \mathbb{Z}^{d'} : |k''_i| \geq \varepsilon 2^j} |\Psi^1(-k''_i)|, \end{aligned}$$

where $k''_i := k'_i - a_i 2^j$. Since the wavelet Ψ^1 belongs to the Schwartz class, the sum

$\sum_{\mathbf{k}'' \in \mathbb{Z}^{d'}: |k_i''| \geq \varepsilon 2^j} |\Psi^1(-k_i'')|$ is less than $1/j^4$ when j becomes large.

$$\left| G_{d'}(2^j a) - \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}} \prod_{i=1}^{d'} \Psi^1(2^j a_i - k_i') \right| \leq \prod_{i=1}^{d'} 1/j^4 = j^{-4d'},$$

hence (3.29) holds true. \square

Let $x \in \mathcal{X}^\alpha$ not a dyadic element of $[0, 1]^d$, and consider the irreducible sequence (J_n, \mathbf{K}_n) associated to x as in (3.21), i.e.

$$|x - \mathbf{K}_n 2^{-J_n}| \leq 2^{-\alpha J_n}.$$

Let $a \in \mathcal{A}_1$ and let j_a be the associated integer constructed in Proposition 3.3.1. Let n be such that $j_n := [\alpha J_n] \geq j_a$ and such that (3.29) holds. Let us denote by $\lambda_n := (j_n, \mathbf{k}_n, \mathbf{l})$ the unique dyadic node (unique in the sense that \mathbf{l} varies in L^d) such that $\mathbf{K}_n 2^{-J_n} = \mathbf{k}_n 2^{-j_n}$. With each λ_n can be associated its sub-cubes $\lambda_n^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, d_1\}$.

Lemma 3.4.2. *Let $\varepsilon > 0$ and $a \in \mathcal{A}_1 \cap [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^{d'}$. For all $1 \leq i \leq d_1$, $\lambda_n^{(i)}$ lies within the cone of influence of width 2^{J_0+2} above x , and*

$$\left| e_{\lambda_n^{(i)}}^{(i)}(a) \right| \geq C j_n^{-(2d' + \frac{q+2}{qp})} 2^{-H(\alpha)j_n} \quad (3.32)$$

the constant C depending only on J_0 .

Proof : Remark that $\lambda_n^{(i)}$ can be written $\lambda_n^{(i)} = (j_n + J_0, \mathbf{k}_n^{(i)}, \mathbf{l})$ for some integer $\mathbf{k}_n^{(i)} \in \mathbb{Z}_{j_n+J_0}^d$. By construction,

$$|\mathbf{k}_n^{(i)} 2^{-(j_n+J_0)} - \mathbf{K}_n 2^{-J_n}| = |\mathbf{k}_n^{(i)} 2^{-(j_n+J_0)} - \mathbf{k}_n 2^{-j_n}| \leq 2^{-j_n}.$$

Using (3.21) we deduce that

$$\begin{aligned} |x - \mathbf{k}_n^{(i)} 2^{-(j_n+J_0)}| &\leq |x - \mathbf{K}_n 2^{-J_n}| + |\mathbf{k}_n^{(i)} 2^{-(j_n+J_0)} - \mathbf{K}_n 2^{-J_n}| \\ &\leq 2^{-\alpha J_n} + 2^{-j_n} \leq 32^{-j_n} \leq (2^{J_0+2}) 2^{-(j_n+J_0)}. \end{aligned}$$

This shows the first part of Lemma 3.4.2.

Recall now Proposition 3.3.1. The fact that $a \in \mathcal{A}_1$ guarantees that $|G_{d'}(2^j a)| \geq j^{-2d'}$ as soon as $j \geq j_a$. Combining this with (3.29), we obtain that when j is large,

$$\begin{aligned} \left| e_{(\lambda_n)^{(i)}}^{(i)}(a) \right| &\geq \left((j_n + J_0)^{-2d'} - (j_n + J_0)^{-4d'} \right) \left| e_{(j_n + J_0, (\mathbf{k}_n^{(i)}, 1^{d'}), (1^d, 1^{d'}))}^{(i)} \right| \\ &\geq \frac{1}{2} (j_n + J_0)^{-2d'} \left| e_{(j_n + J_0, (\mathbf{k}_n^{(i)}, 1^{d'}), (1^d, 1^{d'}))}^{(i)} \right|. \end{aligned}$$

Remembering now how we chose the coefficients of $g^{(i)}$ in (3.28), we see that

$$\begin{aligned} \left| e_{(\lambda_n)^{(i)}}^{(i)}(a) \right| &\geq \frac{1}{2} (j_n + J_0)^{-2d'} \cdot \left| e_{(j_n, (\mathbf{k}_n, 1^{d'}), (1^d, 1^{d'}))} \right| \\ &\geq \frac{1}{2} (j_n + J_0)^{-2d'} \cdot (j_n)^{-\frac{q+2}{qp}} 2^{(\frac{d}{p}-s)j_n - \frac{d}{p}J_n} \\ &\geq C j_n^{-(2d' + \frac{q+2}{qp})} 2^{-H(\alpha)j_n} \end{aligned}$$

where we used that $\alpha J_n \leq j_n + 1$. □

3.4.3 Shyness of $\mathcal{O}_{\gamma, N}^\varepsilon$

Recall that $\gamma > H(\alpha)$.

Take an arbitrary $f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D)$ with wavelet coefficients c_λ^D , and for each $\beta \in \mathbb{R}^{d_1}$ define

$$f^\beta := f + \sum_{i=1}^{d_1} \beta_i g^{(i)}.$$

As usual now, f_a^β will denote its trace at level $x' = a$ and $c_\lambda^\beta(a)$ the wavelet coefficients of that trace. Now we choose J_0 large enough so that

$$d - d_1(\gamma - H(\alpha)) < 0 \tag{3.33}$$

Our goal is to prove :

Proposition 3.4.4. *For any $f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D)$, the set $\{\beta \in \mathbb{R}^{d_1} : f^\beta \in \mathcal{O}_{\gamma, N}^\varepsilon\}$ has d_1 -dimensional Lebesgue measure \mathcal{L}_{d_1} equal to 0.*

This will show that $\mathcal{O}_{\gamma, N}^\varepsilon$ is shy. Let us quickly explain this fact.

Let us denote by μ the measure \mathcal{L}_{d_1} carried by \mathcal{P} . Assume that Proposition 3.4.4 holds true, and fix any $f \in B_{p,q}^s([0,1]^D)$. For μ -almost $F \in \mathcal{P}$, we know that $f + F \notin \mathcal{O}_{\gamma,N}^\varepsilon$. Hence the set $\{f + \mathcal{O}_{\gamma,N}^\varepsilon\} \cap \mathcal{P}$ has a μ -measure equal to 0, i.e.

$$\mu(\{f + \mathcal{O}_{\gamma,N}^\varepsilon\}) = 0.$$

Since this is true for any $f \in B_{p,q}^s([0,1]^D)$, by Definition 3.1.1, the set $\mathcal{O}_{\gamma,N}^\varepsilon$ is shy.

Before that, two intermediary lemmas are necessary. Let us introduce

$$\mathcal{B}_a := \left\{ \beta \in \mathbb{R}^{d_1} : \begin{array}{l} \exists x_\beta \in \mathcal{X}^\alpha, \forall \lambda \in \Lambda^d, \\ \left| c_\lambda^\beta(a) \right| \leq N2^{-\gamma j} (1 + |2^j x_\beta - \mathbf{k}|)^\gamma \end{array} \right\}$$

Lemma 3.4.3. *The application $(a, \beta) \mapsto \mathbf{1}_{\mathcal{B}_a}(\beta)$ is Lebesgue-measurable as an application from $[0,1]^{d'} \times \mathbb{R}^{d_1}$ to \mathbb{R} .*

Proof : Let $\phi : (a, \beta, x) \mapsto \inf_{\lambda \in \Lambda^d} N2^{-\gamma j} (1 + |2^j x - \mathbf{k}|)^\gamma - \left| c_\lambda^\beta(a) \right|$. By an argument similar to the one used in proving Proposition 3.4.2, ϕ is Borel on $[0,1]^{d'} \times \mathbb{R}^{d_1} \times [0,1]^d$. Remark then that $\mathbf{1}_{\mathcal{B}_a}(\beta)$ can be written as $\mathbf{1}_{\mathcal{B}_a}(\beta) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}}(a, \beta)$, where

$$\mathcal{G} := \left\{ (a, \beta) \in [0,1]^{d'} \times \mathbb{R}^{d_1} : \exists x \in \mathcal{X}^\alpha, \phi(a, \beta, x) \geq 0 \right\}.$$

This set can be written as

$$\pi \left(\phi^{-1}([0, \infty)) \cap \left([0,1]^{d'} \times \mathbb{R}^{d_1} \times \mathcal{X}^\alpha \right) \right), \quad (3.34)$$

where $\pi(a, \beta, x) = (a, \beta)$ is the (continuous) canonical projection on the two first coordinates. Since the set between brackets in (3.34) is clearly a Borel set, \mathcal{G} is analytic and in particular, by Theorem 3.2.3, it is Lebesgue-measurable. By a Fubini argument, we deduce Lemma 3.4.3. \square

Lemma 3.4.4. *For each $a \in \mathcal{A}_1 \cap [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^{d'}$, the set \mathcal{B}_a has Lebesgue measure zero.*

Proof : For any $\lambda_0 := (j_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{l}_0) \in \Lambda^d$ we put

$$\mathcal{B}_{a,\lambda_0} := \left\{ \beta \in \mathbb{R}^{d_1} : \begin{array}{l} \exists x_\beta \in B(\mathbf{k}_0 2^{-j_0}, 2^{-\alpha j_0}), \forall \lambda \in \Lambda^d, \\ \left| c_\lambda^\beta(a) \right| \leq N2^{-\gamma j} (1 + |2^j x_\beta - \mathbf{k}|)^\gamma \end{array} \right\}$$

so that

$$\mathcal{B}_a = \limsup_{j_0 \rightarrow \infty} \bigcup_{\mathbf{k}_0 \in \mathbb{Z}_{j_0}^d} \mathcal{B}_{a, \lambda_0} = \bigcap_{j \geq 1} \bigcup_{j_0 \geq j} \bigcup_{\mathbf{k}_0 \in \mathbb{Z}_{j_0}^d} \mathcal{B}_{a, \lambda_0}$$

We want to show that $\mathcal{L}_{d_1}(\mathcal{B}_a) = 0$ by bounding from above each $\mathcal{L}_{d_1}(\mathcal{B}_{a, \lambda_0})$. Suppose that β and $\tilde{\beta}$ both belong to some $\mathcal{B}_{a, \lambda_0}$, where j_0 is large enough so that $j_1 := \lfloor \alpha j_0 \rfloor \geq j_a$ (cf. Proposition 3.3.1).

Applying Lemma 3.4.2, there exists $\lambda_1 = (j_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{l}_1)$ such that for all $1 \leq i \leq d_1$,

- (i) $\lambda_1^{(i)}$ is in the cone of influence of width 2^{J_0+1} above x_β and $x_{\tilde{\beta}}$,
- (ii) $\left| e_{\lambda_1^{(i)}}^{(i)}(a) \right| \geq C j_1^{-(2d' + \frac{q+2}{qp})} 2^{-H(\alpha)j_1}$,

From (i) we deduce that

$$\left| c_{\lambda_1^{(i)}}^\beta(a) \right| = \left| c_{\lambda_1^{(i)}}(a) + \sum_{i=1}^{d_1} \beta_i e_{\lambda_1^{(i)}}^{(i)}(a) \right| \leq \frac{C}{2} 2^{-\gamma j_1}$$

(C depending on N, J_0, γ) and the same for $\tilde{\beta}$. On the other hand, by construction of the functions $g^{(i)}$, we have $e_{\lambda_1^{(i)}}^{(i')}(a) = 0$ for any $i \neq i'$. Thus

$$\begin{aligned} \left| (\beta_i - \tilde{\beta}_i) e_{\lambda_1^{(i)}}^i(a) \right| &= \left| \left(c_{\lambda_1^{(i)}}(a) + \sum_{i=1}^{d_1} \beta_i e_{\lambda_1^{(i)}}^i(a) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(c_{\lambda_1^{(i)}}(a) + \sum_{i=1}^{d_1} \tilde{\beta}_i e_{\lambda_1^{(i)}}^i(a) \right) \right| \\ &\leq \left| c_{\lambda_1^{(i)}}(a) + \sum_{i=1}^{d_1} \beta_i e_{\lambda_1^{(i)}}^i(a) \right| + \left| c_{\lambda_1^{(i)}}(a) + \sum_{i=1}^{d_1} \tilde{\beta}_i e_{\lambda_1^{(i)}}^i(a) \right| \\ &\leq C 2^{-\gamma j_1}. \end{aligned}$$

Recall that $\gamma > H(\alpha)$. Combining this with (ii), we deduce that

$$\left| \beta_i - \tilde{\beta}_i \right| \leq C 2^{-(\gamma - H(\alpha))j_1} j_1^{2d' + \frac{q+2}{qp}}$$

hence

$$\mathcal{L}_{d_1}(\mathcal{B}_{a, \lambda_0}) \leq C 2^{-d_1(\gamma - H(\alpha))j_1} j_1^{d_1(2d' + \frac{q+2}{qp})}$$

Summing over all 2^{dj_0} nodes λ_0 at scale j_0 we conclude that

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{d_1} \left(\bigcup_{k_0 \in \mathbb{Z}_{j_0}^d} \mathcal{B}_{a, \lambda_0} \right) &\leq C 2^{dj_0 - d_1(\gamma - H(\alpha))j_1} j_1^{(2d' + \frac{q+2}{qp})d_1} \\ &\leq C 2^{j_0(d - d_1\alpha(\gamma - H(\alpha)))} (\alpha j_0)^{(2d' + \frac{q+2}{qp})d_1} \end{aligned}$$

whose series converges because of our choice (3.33) for J_0 . The Borel-Cantelli lemma implies that $\mathcal{L}_{d_1}(\mathcal{B}_a) = 0$. □

Proof : [Proof of Proposition 3.4.4] We can rewrite the result of Lemma 3.4.4 as

$$\int_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]^{d'}} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}_a}(\beta) d\beta da = 0$$

Applying Fubini's theorem (measurability being guaranteed by Lemma 3.4.3),

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \int_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]^{d'}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}_a}(\beta) da d\beta = 0$$

In other words, for almost all $\beta \in \mathbb{R}^{d_1}$, there exists a set $\mathcal{A}_\beta(f)$ of full Lebesgue measure in $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]^{d'}$ such that $a \in \mathcal{A}_\beta(f)$ implies $\beta \notin \mathcal{B}_a$. This in turn implies $f^\beta \notin \mathcal{O}_{\gamma, N}^\varepsilon$ and the announced result follows by complementarity in \mathbb{R}^{d_1} . □

Our proof is now complete.

3.5 Proof of Theorem 3.1.1 : Lebesgue-almost every trace of every function

Recall that $f_a = F_a + G_a$, where F_a and G_a are defined in (3.13) and (3.14). Recall also that the wavelet coefficients of f_a are denoted by $d_\lambda(a)$ in its wavelet decomposition (3.18), while those of f are denoted by c_λ^D .

First, we are going to apply Proposition 3.2.2. Recalling the definition (3.15) of

the wavelet coefficients of G_a , we need to bound from above the sum

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \Lambda_j^d \times 0^d} |d_\lambda(a)|^p &= \sum_{\lambda \in \Lambda_j^d \times 0^d} \left| \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}, \mathbf{l}' \in L^{d'}} c_{\lambda^D} \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{\mathbf{l}'_i}(a_i) \right|^p \\
&\leq C \sum_{\lambda^D \in \Lambda_j^D \times \{0^d \times L^{d'}\}} |c_{\lambda^D}|^p \left| \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{\mathbf{l}'_i}(a_i) \right|^p \\
&\leq C \sum_{\lambda^D \in \Lambda_j^D \times \{0^d \times \{0,1\}^{d'}\}} |c_{\lambda^D}|^p \left| \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{\mathbf{l}'_i}(a_i) \right|^p \tag{3.35}
\end{aligned}$$

for some constant C that depends only on Ψ^0 and Ψ^1 . Indeed, since Ψ^0 and Ψ^1 are compactly supported, for each a only a finite number (independent of j or a) of terms in the second sum are non zero.

Now, using definition (3.16) for the wavelet coefficients of F_a , we find that

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \Lambda_j^d \times L^d} |d_\lambda(a)|^p &= \sum_{\lambda \in \Lambda_j^d \times L^d} \left| \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}, \mathbf{l}' \in \{0,1\}^{d'}} c_{\lambda^D} \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{\mathbf{l}'_i}(a_i) \right|^p \\
&\leq C \sum_{\lambda^D \in \Lambda_j^D \times \{L^d \times \{0,1\}^{d'}\}} |c_{\lambda^D}|^p \left| \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{\mathbf{l}'_i}(a_i) \right|^p \tag{3.36}
\end{aligned}$$

again for some constant C that depends only on Ψ^0 and Ψ^1 .

We now consider the sum of all wavelet coefficients of f_a , and we integrate it over $a \in [0, 1]^{d'}$. Using (3.35) and (3.36), and recalling that $L^d \cup 0^d = \{0, 1\}^d$, we get

$$\int_{[0,1]^{d'}} \sum_{\lambda \in \Lambda_j^d \times \{0,1\}^d} |d_\lambda(a)|^p da \leq C \sum_{\lambda^D \in \Lambda_j^D \times \{0,1\}^D} |c_{\lambda^D}|^p \int_{[0,1]^{d'}} \left| \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{\mathbf{l}'_i}(a_i) \right|^p da.$$

Observe that there is no wavelet coefficient associated with the index $l^D = 0^D$ for the function f , hence the sum of λ^D over $\Lambda_j^D \times \{0, 1\}^D$ is the same as the sum of λ^D over $\Lambda_j^D \times L^D$.

Since the functions $\Psi_{j, k'_i}^{\mathbf{l}'_i}$ are bounded uniformly in j , \mathbf{k}' and \mathbf{l}' , and has support width $\leq K2^{-j}$,

$$\int_{[0,1]^{d'}} \sum_{\lambda \in \Lambda_j^d \times \{0,1\}^d} |d_\lambda(a)|^p da \leq C \sum_{\lambda^D \in \Lambda_j^D \times L^D} |c_{\lambda^D}|^p 2^{-jd'} = C 2^{j(d-sp)} \varepsilon_j, \tag{3.37}$$

where C depends on Ψ and where

$$\varepsilon_j := \sum_{\lambda^D \in \Lambda_j^D \times L^D} |c_{\lambda^D}|^p 2^{j(sp-D)}.$$

By the definition of Besov norm (3.9), the sequence $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$ belongs to $l^{q/p}$.

If no assumption is made on p and q , then we only know that (ε_j) is a bounded sequence, which implies that

$$\int_{[0,1]^{d'}} \sum_{\lambda \in \Lambda_j^d \times \{0,1\}^d} |d_\lambda(a)|^p da \leq C' 2^{(d-sp)j} \quad (3.38)$$

for some other constant C' . Then, we define

$$\mathcal{A}_j := \left\{ a \in [0,1]^{d'} : \sum_{\lambda \in \Lambda_j^d \times \{0,1\}^d} |d_\lambda(a)|^p > C' j^2 2^{(d-sp)j} \right\}.$$

By Markov's inequality, from (3.38) it follows that

$$\mathcal{L}_{d'}(\mathcal{A}_j) \leq \frac{C' 2^{(d-sp)j}}{C' j^2 2^{(d-sp)j}} = j^{-2}.$$

Thus, applying the Borel-Cantelli lemma, $\mathcal{L}_{d'}(\limsup_j \mathcal{A}_j) = 0$. By construction, we proved that for any $a \in [0,1]^{d'} \setminus \limsup_j \mathcal{A}_j$, there exists j_0 such that $j \geq j_0$ implies

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j^d \times \{0,1\}^d} |d_\lambda(a)|^p \frac{2^{(sp-d)j}}{j^2} \leq C'. \quad (3.39)$$

In particular, recalling the characterization (3.9), such a trace f_a belongs to $B_{p,\infty}^{s'}([0,1]^d)$, for every $s' < s$. The factor j^2 in (3.39) explains the loss of a logarithmic order of the Besov regularity mentioned in the introduction.

Assume now that, in addition, $q \leq p < +\infty$. In this case, let

$$\mathcal{A}_j := \left\{ a \in [0,1]^{d'} : \sum_{\lambda \in \Lambda_j^d \times \{0,1\}^d} |d_\lambda(a)|^p > C 2^{(d-sp)j} (\varepsilon_j)^{1-q/p} \right\}.$$

Applying again Markov's inequality and using (3.37), we get

$$\mathcal{L}_{d'}(\mathcal{A}_j) \leq \frac{C 2^{(d-sp)j} \varepsilon_j}{C 2^{(d-sp)j} (\varepsilon_j)^{1-q/p}} = (\varepsilon_j)^{q/p}.$$

Since $(\varepsilon_j)_{j \geq 1} \in l^{q/p}$, the series $\sum_j \mathcal{L}_{d'}(\mathcal{A}_j)$ converges, and the Borel-Cantelli lemma yields $\mathcal{L}_{d'}(\limsup_j \mathcal{A}_j) = 0$. Hence, for any $a \in [0, 1]^{d'} \setminus \limsup_j \mathcal{A}_j$, there exists j_0 such that $j \geq j_0$ implies

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j^{d'} \times \{0,1\}^d} |d_\lambda(a)|^p 2^{(sp-d)j} \leq C(\varepsilon_j)^{1-q/p}.$$

When $p = q$, we deduce that for Lebesgue-a.e a , $f_a \in B_{p,\infty}^s([0, 1]^{d'})$.

When $p > q$, the sequence $((\varepsilon_j)^{1-q/p})_{j \geq 1}$ belongs to $l^{qp/(p-q)}$ which implies that $f_a \in B_{p,qp/(p-q)}^s([0, 1]^{d'})$. \square

3.6 Traces on submanifolds of \mathbb{R}^D

We quickly explain how to obtain similar results for traces of almost all functions $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ on submanifolds of dimension d , in order to obtain Theorem 3.1.5.

Proof: The transversality property of S ensures that the translates $\{S + (0, a)\}_{a \in \mathbb{R}^{d'}}$ of S do not overlap. By compactity of S , and using the inverse function theorem, one can find a finite set of open sets $(U_i)_{i=1,\dots,N}$ such that

- $S \subset \bigcup_{i=1}^N \phi_i(U_i)$,
- for every $i \in \{1, \dots, N\}$, there exists a C^∞ diffeomorphisms $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ such that for every $a \in \mathbb{R}^{d'}$ small enough,

$$\phi_i : \begin{cases} U_i & \longrightarrow & V_i \subset \mathbb{R}^D \\ (x, a) & \longmapsto & u_i(x) + (0, a) \end{cases}$$

and such that $\phi_i(U_i \cap (\mathbb{R}^d \otimes \{0_{d'}\})) = S \cap V_i$.

We recall two useful properties :

- Besov spaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ are stable under the action of C^{s+1} diffeomorphisms.
- Hausdorff dimensions are preserved by diffeomorphisms.
- Prevalent sets of functions in $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ are preserved by diffeomorphisms.

It is now easy to deduce Theorem 3.1.5 from Theorem 3.1.4.

For each $i \in \{1, \dots, N\}$, Theorem 3.1.4 yields the spectrum of Lebesgue almost every trace of almost every function $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, hence, composing by ϕ_i , and one obtains that there exists a prevalent set of functions function $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ such that the multifractal spectrum of Lebesgue almost every trace $f_{S+(0,a)} \cap V_i$ (for $a \in \mathbb{R}^{d'}$) satisfies (3.2).

This can be achieved simultaneously for all $i \in \{1, \dots, N\}$, and by considering the concatenation for the (finite set of) V_i . The result hold for a finite intersection of prevalent sets, hence on a prevalent set. Noticing that the multifractal spectrum of the concatenation of a finite number of functions is the supremum of the multifractal spectra of the functions, we obtain the results for Lebesgue almost every trace $f_{S+(0,a)}$.

□

Appendix

Proof of Proposition 3.4.2, case $q = \infty$

The only serious difference is due to the fact that $B_{p,\infty}^s([0, 1]^D)$ is no longer separable, so the argument for universal measurability of the ancillary set

$$\mathcal{O}_{\gamma,N} := \{f \in B_{p,\infty}^s([0, 1]^D) : \mathcal{L}_{d'}(\mathcal{A}_{\gamma,N}(f)) > 0\}$$

has to use a different definition of analyticity.

A1 - Analytic sets in non-Polish spaces

Analytic sets were previously defined in Polish spaces as continuous images of Borel sets : this cannot apply to $B_{p,\infty}^s([0, 1]^D)$. However we can use the following more general definition, adapted from [22], for any Hausdorff topological space X endowed with its Borel σ -algebra $\mathcal{B}(X)$. First, for a compact topological space K we write \mathcal{K} the collection of its closed subsets and $(\mathcal{B}(X) \times \mathcal{K})_{\sigma\delta}$ the collection of countable intersection of countable unions of sets that are Cartesian products of a Borel set in X and a closed set in K and $\pi : X \times K \rightarrow X$ is the canonical projection map $\pi(x, y) = x$.

Definition 3.6.1. *A set $A \subset X$ is said to be analytic if there exists a compact space K and $S \in (\mathcal{B}(X) \times \mathcal{K})_{\sigma\delta}$ such that*

$$A = \pi(S).$$

It is easy to check that this definition coincides with the previous one when X is Polish. Furthermore, in this framework, Theorem 3.2.3 (based on Choquet's capacitability theorem) now holds in any Hausdorff topological space (see [22]).

A2 - Measurability

Proposition 3.6.1. *The set $\mathcal{O}_{\gamma, N}$ is universally measurable in $B_{p, \infty}^s([0, 1]^D)$.*

Proof : We use the same notations Φ_λ , Φ , $\tilde{\mathcal{T}}$ and Π as in the proof of Proposition 3.4.2. We will show that the set $\Pi(\tilde{\mathcal{T}})$ is analytic in the sense of Definition 3.6.1, with $X := B_{p, \infty}^s([0, 1]^D) \times [0, 1]^{d'}$ and $K := [0, 1]^d$. For short let us put $\Delta_j := \mathbb{Z}_j^{d'} \times \{0, 1\}^{d'}$. Given $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}^{\Delta_j}$ and $m' \in \mathbb{Z}^{d'}$ we write

$$\begin{aligned} Q(n, m) &:= 2^{-n} \prod_{(k', l') \in \Delta_j} [m_{k', l'}, m_{k', l'} + 1] \\ Q'(n, m') &:= 2^{-n} \prod_{1 \leq i \leq d'} [m'_i, m'_i + 1] \\ Q(n, m, m') &:= Q(n, m) \times Q'(n, m') \end{aligned}$$

Having fixed $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times L^d$ and considering $\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}'))$, any $f \in B_{p, \infty}^s([0, 1]^D)$ induces a map $s_\lambda : (\mathbf{k}', \mathbf{l}') \mapsto c_{\lambda^D}$ that we identify to an element of \mathbb{R}^{Δ_j} . Then we define

$$\Theta(s_\lambda, a, x) := N2^{-\gamma j} (1 + |2^j x - \mathbf{k}|)^\gamma - |c_\lambda(a)|$$

as well as

$$X_\lambda(n, m, m') := \left\{ x \in [0, 1]^d : \sup_{(s_\lambda, a) \in Q(n, m, m')} \Theta(s_\lambda, a, x) \geq 0 \right\}$$

The dependency of $c_\lambda(a)$ on s_λ and a is given in (3.15), (3.16) and (3.19) and it is continuous. So is the function Θ . Since $Q(n, m, m')$ is compact, it follows that $X_\lambda(n, m, m')$ is closed (Lemma 3.6.1). Furthermore, if we put

$$F_\lambda(n, m) := \{f \in B_{p, \infty}^s([0, 1]^D) : s_\lambda \in Q(n, m)\}$$

then it is clear by continuity of Φ_λ that

$$\Phi_\lambda^{-1}([0, \infty)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{(m, m') \in \mathbb{Z}^{\Delta_j} \times \mathbb{Z}_j^{d'}}$$

This proves that $\Phi_\lambda^{-1}([0, \infty)) \in (\mathcal{B}(X) \times \mathcal{K})_{\sigma\delta}$. We deduce that $\Phi^{-1}([0, \infty)) = \bigcap_\lambda \Phi_\lambda^{-1}([0, \infty))$ and the set $\tilde{\mathcal{T}}$ belong to $(\mathcal{B}(X) \times \mathcal{K})_{\sigma\delta}$ as well because $B_{p, \infty}^s([0, 1]^D) \times$

$[0, 1]^{d'} \times \mathcal{X}^\alpha$ is obviously in $(\mathcal{B}(X) \times \mathcal{K})_{\sigma\delta}$. Its projection $\Pi(\tilde{\mathcal{T}})$ is thus analytic and we conclude in the same way as for Proposition 3.4.2.

□

Lemma 3.6.1. *Let A and B be topological spaces, A compact and B locally compact. If f is continuous : $A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, then $f_s : b \mapsto \sup_{a \in A} f(a, b)$ is continuous on B .*

Proof : Recall that a Hausdorff space-valued function defined on a compact set is continuous if and only if its graph is compact. Continuity being a local property, we can suppose without loss of generality that B is also compact. The graph Γ of f is then compact and so is its image by the projection $\varpi : (a, b, y) \mapsto (b, y)$. As a supremum of continuous functions, f_s is lower semi-continuous, so its epigraph E is closed. But the graph of f_s is precisely $E \cap \varpi(\Gamma)$, so it is compact ; it follows that f_s is continuous.

□

Acknowledgments

The authors are thankful to Basarab Matei for his simulations and pictures of Daubechies' wavelets.

Chapitre 4

Propriétés génériques au sens de Baire des fonctions dans des espaces de Besov

Résumé : Soit $1 \leq d < D$ et (p, q, s) tels que $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 < s - d/p < \infty$. Nous continuons à nous intéresser aux traces de fonctions. Nous commencerons par détailler les notions évoquées dans le chapitre précédent puis montrons que, pour quasi-toute fonction de $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ (au sens de Baire), on peut également déterminer le spectre de singularité de sa trace f_a pour Lebesgue-presque tout $a \in \mathbb{R}^{D-d}$.

Nous nous intéresserons ensuite, pour quasi-toute fonction f dans une intersection d'espace de Besov, à la validité du formalisme multifractal appliquée aux traces f_a pour Lebesgue-presque toute $a \in \mathbb{R}^{D-d}$.

4.1 Introduction

Considérons deux entiers $0 < d < D$. On notera $d' = D - d$.

Dans tout ce qui suit on notera $X = (x, x') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} = \mathbb{R}^D$.

Pour $a \in \mathbb{R}^{d'}$, on note \mathcal{H}_a , le sous-espace affine de dimension d de \mathbb{R}^D , défini par

$$\mathcal{H}_a = \{X \in \mathbb{R}^D : X = (x, a)\}.$$

On va s'intéresser à la régularité locale des traces de fonctions, définies sur \mathbb{R}^D , sur les sous-espaces de la forme \mathcal{H}_a . Plus précisément, pour toute fonction f continue sur \mathbb{R}^D , on regardera la fonction

$$f_a := f|_{\mathcal{H}_a} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x, a).$$

Si f n'est pas continue, sa trace peut être définie par transformée de Fourier : f_a sera définie par $\lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{|\xi| \leq N} \mathcal{F}f))_a$, quand cette limite existe.

Quand on parlera de régularité locale, on fera référence à l'exposant de Hölder et au spectre de singularité.

Rappelons donc ces différentes notions.

Soit $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^D)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^D$, f est $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$, pour $\alpha \geq 0$, si il existe un polynôme P de degré au plus $\lfloor \alpha \rfloor$ et une constante $C > 0$ telle que au voisinage de x_0 :

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha. \quad (4.1)$$

La régularité locale de f en x_0 est mesurée par l'exposant de Hölder :

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)\}.$$

On déterminera également le spectre de singularité de la fonction f , donné par :

$$d_f : h \in [0, \infty] \longmapsto \dim_{\mathcal{H}} E_f(h), \quad \text{où } E_f(h) := \{x_0 \in \mathbb{R}^D : h_f(x_0) = h\}.$$

Ici $\dim_{\mathcal{H}}$ est la dimension de Hausdorff . Par convention, $\dim_{\mathcal{H}} \emptyset = -\infty$. On a une majoration du spectre de singularités pour toutes les fonctions de $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$:

Proposition 4.1.1. [41] Soit $0 < p < \infty$, $d/p < s < \infty$ et $q \in (0, +\infty]$. Pour tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$\text{pour tout } h \geq s - d/p, \quad d_f(h) \leq \min(ph - sp + d, d). \quad (4.2)$$

et $E_f(h) = \emptyset$ si $h < s - d/p$.

En fait on a même mieux :

$$\text{pour tout } h \geq s - d/p, \quad \dim_{\mathcal{H}}\{x \in \mathbb{R}^d : h_f(x) \leq h\} \leq \min(ph - sp + d, d). \quad (4.3)$$

La majoration (4.3) implique (4.2).

Nous allons chercher à déterminer le même type de résultats pour les traces de fonctions. Lorsque l'on cherche des propriétés de régularité dans un espace fonctionnel donné, on trouve des fonctions qui ont des propriétés de régularité ponctuelle différentes.

Par exemple, dans l'espace des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R} , la fonction de Weierstrass, définie par $W_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ pour $a < 1 < ab$, a partout le même exposant de Hölder fini, alors que, la fonction de Riemann, définie par $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$, a un exposant de Hölder qui varie. Aussi, quand on veut déterminer des résultats de régularité, on peut penser à chercher ces résultats pour un ensemble générique de fonctions.

Lorsque l'on s'intéresse à des résultats génériques, on peut faire appel à deux notions différentes :

- la prévalence
- la généricité au sens de Baire.

Rappelons la notion de prévalence (détaillée au chapitre 2) :

Définition 4.1.1. *Soit E un espace métrique complet.*

Un borélien $A \subset E$ est dit timide s'il existe une mesure μ à support compact telle que :

$$\forall x \in E, \mu(x + A) = 0.$$

Plus généralement, un ensemble est dit timide s'il est inclus dans un borélien timide. On appelle ensemble prévalent le complémentaire d'un ensemble timide.

Ces notions ont été présentées par Christensen [23] et indépendamment par Hunt et al. [34].

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à la notion de généricité au sens de Baire :

Définition 4.1.2. *La généricité au sens de Baire :*

On dit qu'un ensemble est de première catégorie quand il peut s'écrire comme une union dénombrable de A_n , où pour tout n , A_n est inclus dans un ensemble fermé d'intérieur vide.

On appelle ensemble résiduel, un ensemble dont le complémentaire est de première catégorie, c'est-à-dire un ensemble qui contient une intersection dénombrables d'ouverts denses.

On parle de propriété quasi-sûre quand elle est vérifiée sur un ensemble résiduel.

Certaines propriétés quasi-sûres sont également vraies au sens de la prévalence. Par exemple, quasi-toute fonction continue sur \mathbb{R} n'est nulle part dérivable [29].

Mais ce n'est pas toujours le cas, par exemple, lorsque l'on observe les images d'un ensemble de Cantor fixé, ou d'une mesure fixée par des applications continues (ou plus régulières) [29] :

- au sens de Baire, les ensembles génériques obtenus sont très petits et les mesures génériques très singulières,

- au sens prévalent, les ensembles génériques sont alors grands (ils contiennent au moins un intervalle) et les mesures génériques ont des densités régulières.

Dans le chapitre précédent [7], nous avons établi un résultat sur les traces de fonctions dans le cadre prévalent.

Dans ce chapitre, nous allons démontrer que l'on obtient le même résultat dans le cadre de Baire, c'est-à-dire :

Théorème 4.1.1. *Soient $0 < d < D$ deux entiers, $0 < q < \infty$, et soient $s > 0$, $0 < p < \infty$ deux réels tels que $\infty > s - D/p > 0$.*

Au sens de Baire, pour quasi-toute fonction f dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$, pour Lebesgue-presque tout $a \in \mathbb{R}^d$, les propriétés suivantes sont vraies :

(i) f_a possède le spectre de singularité suivant :

$$d_{f_a}(h) = \begin{cases} d + (h - s)p & \text{si } h \in [s - d/p, s] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *Pour tout ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, l'ensemble $E_{f_a}(s) \cap \Omega$ est de mesure de Lebesgue pleine dans Ω .*

4.2 Préliminaires

4.2.1 Notations dimensionnelles.

Dans tout ce qui suit on notera $X = (x, x') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} = \mathbb{R}^D$.

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{k}' = (k'_1, k'_2, \dots, k'_{d'}) \in \mathbb{Z}^{d'}$.

$\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_d) \in \{0, 1\}^d$, $\mathbf{l}' = (l'_1, l'_2, \dots, l'_{d'}) \in \{0, 1\}^{d'}$.

4.2.2 La généricité au sens de Baire

Définition 4.2.1. *On dit qu'un espace topologique X est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est une partie dense.*

Par passage au complémentaire, il est équivalent de dire qu'une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est un ensemble d'intérieur vide.

Théorème 4.2.1. *(Baire)*

Tout espace métrique complet est de Baire.

Tout espace topologique localement compact est un espace de Baire.

Proposition 4.2.1. *Soit V un espace de Baire :*

- *Si A est de première catégorie alors tout sous-ensemble de A est de première catégorie.*
- *Une union dénombrable d'ensembles de première catégorie est de première catégorie.*
- *$\forall x \in V$, si A est de première catégorie alors $x + A$ est de première catégorie.*

Définition 4.2.2. *Soit V un espace de Baire.*

On dira qu'une propriété a lieu génériquement au sens de Baire ou que quasi-tout élément de V satisfait cette propriété si l'ensemble des éléments de V qui satisfont cette propriété contient une intersection dénombrable d'ouverts denses de V .

4.2.3 Décomposition sur une base d'ondelette.

Rappelons brièvement la construction d'une base d'ondelette (pour les détails voir [26] par exemple).

Pour un entier $N \geq 1$, on construit deux fonctions à support compact, une fonction $\Psi^0 \in C^N(\mathbb{R})$ et une fonction $\Psi^1 \in C^N(\mathbb{R})$ (appelée fonction "mère"), telle que Ψ^1 ait au moins $N + 1$ moments nuls (i.e. $\int_{\mathbb{R}} x^n \Psi^1(x) dx = 0$ pour $n \in \{0, \dots, N\}$) et telle que l'ensemble des fonctions :

$$\Psi_{j,k}^1 : x \mapsto \Psi^1(2^j x - k)$$

pour $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ forme une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ (remarquons que l'on a choisi ici une normalisation L^∞ et non L^2). Dans ce cas, l'ondelette est dite N -régulière.

On note :

$$0^d := (0, 0, \dots, 0), \quad 1^d := (1, 1, \dots, 1), \quad L^d := \{0, 1\}^d \setminus 0^d.$$

Une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^d)$ est obtenue par tensorisation. Pour tout $\lambda := (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d \times \{0, 1\}^d$, on définit une ondelette Ψ_λ par :

$$\Psi_\lambda(x) := \prod_{i=1}^d \Psi_{j,k_i}^{l_i}(x_i),$$

avec $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d)$ et $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_d)$.

Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ peut être écrite (l'égalité étant vraie dans $L^2(\mathbb{R}^d)$) :

$$f = \sum_{\lambda=(j,\mathbf{k},\mathbf{l}): j \in \mathbb{Z}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{l} \in L^d} d_\lambda \Psi_\lambda(x), \quad (4.4)$$

où

$$d_\lambda := 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Psi_\lambda(x) dx. \quad (4.5)$$

Il est clair que dans (4.5) le coefficient d'ondelette dépend de f . Observons que, dans la décomposition sur une base d'ondelette (4.4), aucune ondelette Ψ_λ telle que $\mathbf{l} = 0^d$ n'apparaît (où $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$).

Pour $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$, on pose $|\lambda| = j$.

On obtiendra, de même, une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^D)$ avec des notation similaires

(ie $\lambda^D := (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}')) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^D \times \{0, 1\}^D$). Les ondelettes et les coefficients correspondants dans $L^2(\mathbb{R}^D)$ seront notés respectivement Ψ_{λ^D} et d_{λ^D} .

On va, dans un premier temps, s'intéresser au comportement local des traces sur $(0, 1)^d \times \{a\}$, $a \in (0, 1)^{d'}$ où $d' = D - d$.

Si on considère la décomposition (4.4) de f , pour déterminer l'exposant de Hölder $h_{f_a}(x)$, seuls les coefficients d_λ^D tels que $j \geq 0$ et $(\mathbf{k}2^{-j}, \mathbf{k}'2^{-j}) \in [0, 1]^D$ interviennent. Aussi dans la suite, on considérera comme égale, les fonctions qui ont les même coefficients d'ondelette d_λ^D quand $(\mathbf{k}2^{-j}, \mathbf{k}'2^{-j}) \in [0, 1]^D$. Ainsi, on considérera les fonctions f de la forme :

$$f = \sum_{\lambda^D \in \Lambda^D \times L^D} d_{\lambda^D} \Psi_{\lambda^D}(x), \quad (4.6)$$

où

$$\begin{aligned} \text{pour } j \geq 1, \quad \mathbb{Z}_j &= \{0, 1, \dots, 2^j - 1\} \quad \text{et} \quad \Lambda_j^D = \{j\} \times \mathbb{Z}_j^D \\ \Lambda^D &= \bigcup_{j \geq 1} \Lambda_j^D. \end{aligned}$$

Pour démontrer le Théorème 4.1.1, il suffit de le démontrer sur $[0, 1]^D$ au lieu de \mathbb{R}^D . En effet, la démonstration proposée est indépendante du cube choisi, donc si le Théorème 4.1.1 est vrai sur $[0, 1]^D$ alors il sera vrai sur tout cube $[-N, N]^D$.

Ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble résiduel $\Upsilon_n \subset B_{p,q}^s([-N, N]^D)$ et un ensemble de mesure de Lebesgue pleine $A_N \subset [-N, N]^{d'}$ tels que pour tout $f \in \Upsilon_n$ et tout $a \in A_n$, f_a vérifie les propriétés du Théorème 4.1.1.

Comme une intersection d'ensembles résiduels est résiduel et qu'une intersection d'ensembles de mesure de Lebesgue pleine est de mesure de Lebesgue pleine, on en déduit le Théorème 4.1.1.

4.2.4 Exposants de Hölder et spectre.

On utilisera la Proposition suivante démontrée dans [37] permettant de relier l'exposant de Hölder et les coefficients d'ondelette, ce qui justifie notre approche du problème :

Proposition 4.2.2. *Soit $\gamma > 0$. Si $f \in C^\gamma(\mathbb{R}^d)$ alors l'exposant de Hölder de f en chaque point x est donné par la formule :*

$$h_f(x) = \liminf_{\lambda \rightarrow x} \frac{\log(|d_\lambda|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)}$$

sous réserve que $|d_\lambda| \neq 0$.

Cette Proposition est à la base de la démonstration du Théorème 4.1.1.

4.2.5 Coefficients d'ondelette de la trace.

Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_{d'}) \in [0, 1]^{d'}$, et f une fonction continue sur $[0, 1]$ dont la décomposition sur la base d'ondelette est donnée par (4.4).

La trace f_a de f sur \mathcal{H}_a est :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1]^d, \quad f_a(x) &= \sum_{\lambda^D \in \Lambda^D \times L^D} d_{\lambda^D} \prod_{i=1}^d \Psi_{j, k_i}^{l_i}(x_i) \prod_{i=1}^{d'} \Psi_{j, k'_i}^{l'_i}(a_i) \\ &= f_a^0(x) + f_a^1(x) \end{aligned} \quad (4.7)$$

où

$$\begin{aligned} f_a^0(x) &= \sum_{\lambda \in \Lambda^d \times 0^d} d_\lambda^1(a) \Psi_\lambda(x), \\ f_a^1(x) &= \sum_{\lambda \in \Lambda^d \times L^d} d_\lambda^1(a) \Psi_\lambda(x) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda &= (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times \{0, 1\}^d, \\ \Psi_\lambda(x) &= \Psi^1(2^j x - \mathbf{k}) = \Psi^{l_1}(2^j x_1 - k_1) \cdots \Psi^{l_d}(2^j x_d - k_d), \\ d_\lambda^1(a) &= \sum_{\lambda^D: \mathcal{H}_a \cap \lambda^D = \lambda} d_{\lambda^D} \Psi_{j, k'_1}^{l'_1}(a_1) \cdots \Psi_{j, k'_{d'}}^{l'_{d'}}(a_{d'}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$= \sum_{\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}')) : (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = \lambda} d_{\lambda^D} \Psi_{j, k'_1}^{l'_1}(a_1) \cdots \Psi_{j, k'_{d'}}^{l'_{d'}}(a_{d'}). \quad (4.9)$$

Remarquons que (4.7) ne donne pas une décomposition dans une base d'ondelette d -dimensionnelle de la fonction f_a , en effet si l'on observe la fonction f_a^0 , seule la fonction Ψ^0 est utilisée.

On notera $d_\lambda(a)$ le coefficient d'ondelette de la fonction f_a , on a

$$d_\lambda(a) = d_\lambda^0(a) + d_\lambda^1(a)$$

où $d_\lambda^0(a)$ est le coefficients d'ondelette de la fonction f_a^0 , défini par :
pour tout $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times L^d$

$$d_\lambda^0(a) = 2^{dj} \sum_{\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d : |\lambda'| \geq j} d_{\lambda'}^1(a) \langle \Psi_{\lambda'}, \Psi_\lambda \rangle . \quad (4.10)$$

On utilisera également la notation suivante :

$$\text{pour tout } \lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}')) \in \Lambda^D \times L^D, \quad \lambda^D \cap \mathcal{H}_a = \lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times L^d.$$

4.2.6 Première propriété des ondelettes.

Dans la suite, on utilisera la fonction 1-périodique G défini par :

$$G : t \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi^1(t - k). \quad (4.11)$$

On supposera que Ψ^1 est telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \Psi^1 \text{ is } N\text{-régulière,} \\ \text{(ii)} \quad \text{l'ensemble } Z := G^{-1}(\{0\}) \cap [0, 1] \text{ est fini,} \\ \text{(iii)} \quad \text{Pour tout } t \in Z, |G'(t)| > 0 . \end{array} \right. \quad (\mathcal{H}_N)$$

L'existence de Ψ^1 a été démontrée dans le chapitre précédent ([7]).

On introduit alors la version d' dimensionnelle de G , notée $G_{d'}$ et définie par :

$$G_{d'} : x \in \mathbb{R}^{d'} \longmapsto G(x_1) \cdot G(x_2) \cdots G(x_{d'}). \quad (4.12)$$

Proposition 4.2.3. [7]

Si Ψ^1 satisfait (\mathcal{H}_N) , alors l'ensemble

$$\mathcal{A}_1 := \left\{ a \in [0, 1]^{d'} : \exists j_a \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall j \geq j_a, |G_{d'}(2^j a)| > j^{-2d'} \right\}$$

est de mesure de Lebesgue pleine dans $[0, 1]^{d'}$.

Remarque 4.2.1. Comme Ψ^1 est à support compact, à chaque génération j , il y a au plus un nombre fini K indépendant de j d'indices $(\mathbf{k}', \mathbf{l}')$ pour lequel le produit $\Psi_{j, k'_1}^{\mathbf{l}'_1}(a_1) \cdots \Psi_{j, k'_{d'}}^{\mathbf{l}'_{d'}}(a_{d'})$ est non nul. On en déduit qu'il existe $C'_1 > 0$ tel que, $\forall j$

$$\sum_{\mathbf{k}', \mathbf{l}': |\lambda^D|=j} \left| \Psi_{j, k'_1}^{\mathbf{l}'_1}(a_1) \cdots \Psi_{j, k'_{d'}}^{\mathbf{l}'_{d'}}(a_{d'}) \right| \leq C'_1. \quad (4.13)$$

De même, il existe $C_1 > 0$ tel que, $\forall j$

$$|G_{d'}(2^j a)| \leq C_1. \quad (4.14)$$

4.2.7 L'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$

Définition 4.2.3. Soit $0 < p < \infty$, $0 < s < \infty$ et $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ pour $q \in (0, +\infty]$ si et seulement si

$$\forall j \geq 1, \quad A_j := (2^{j(ps-D)}) \sum_{\lambda: |\lambda|=j} |d_\lambda|^p)^{1/p} \quad (4.15)$$

est dans ℓ^q . L'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ est un espace métrique complet, normé quand $p, q \geq 1$, séparable quand les deux sont finis. Il est connu que :

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D) \hookrightarrow B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^D). \quad (4.16)$$

Définition 4.2.4. Soit $0 < p, q < \infty$.

On définit une distance sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ de la façon suivante :

Soit $f, g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ de coefficients d'ondelette respectives d_{λ^D} et g_{λ^D} ,

$$\begin{aligned} \text{Si } p \geq 1 \quad d(f, g) &= \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\lambda^D} |d_{\lambda^D} - g_{\lambda^D}|^p 2^{(sp-D)j} \right)^{q/p} \right)^{1/q}. \\ \text{Si } p < 1 \quad d(f, g) &= \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\lambda^D} |d_{\lambda^D} - g_{\lambda^D}|^p 2^{(sp-D)j} \right)^{q/p} \right)^{\min(p,q)/q}. \end{aligned}$$

Muni de cette distance, $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ est un espace métrique complet séparable.

On a une information sur l'exposant de Hölder d'une fonction d'un espace de Besov, grâce aux injections de Sobolev : si $s - \frac{d}{p} > 0$ alors

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{s - \frac{d}{p}}(\mathbb{R}^d). \quad (4.17)$$

Proposition 4.2.4. [7]

Soient $0 < d < D$ deux entiers, $0 < q < \infty$, et soient $s > 0$, $0 < p < \infty$ deux réels tels que $\infty > s - D/p > 0$.

Soit $f \in B_{p,q}^s([0,1]^D)$ et soit $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0, l'ensemble

$$\mathcal{A}_2(f) = \left\{ a \in [0,1]^{d'} : f_a \in \bigcap_n B_{p,q}^{s-\epsilon_n}([0,1]^d) \right\} \quad (4.18)$$

est de mesure de Lebesgue pleine dans $[0,1]^{d'}$.

La Proposition 4.2.4 et (4.17) impliquent les deux Corollaires suivants :

Corollaire 4.2.1. Soient $0 < d < D$ deux entiers, $0 < q < \infty$, et soient $s > 0$, $0 < p < \infty$ deux réels tels que $\infty > s - D/p > 0$.

Soit $\epsilon > 0$, si $f \in B_{p,q}^s([0,1]^D)$ alors il existe un ensemble $\mathcal{A}_2(f)$ de mesure de Lebesgue pleine dans $[0,1]^{d'}$ tel que pour tout $a \in \mathcal{A}_2(f)$,

$$f_a \in C^{s-\epsilon-\frac{d}{p}}([0,1]^d).$$

Corollaire 4.2.2. Soient $0 < d < D$ deux entiers, $0 < q < \infty$, et soient $s > 0$, $0 < p < \infty$ deux réels tels que $\infty > s - D/p > 0$.

Si $f \in B_{p,q}^s([0,1]^D)$ alors il existe un ensemble $\mathcal{A}_2(f)$ de mesure de Lebesgue pleine tel que pour tout $a \in \mathcal{A}_2(f)$, on a

$$\forall h < s - \frac{d}{p}, E_{f_a}(h) = \emptyset.$$

4.2.8 Approximation par des dyadiques.

Soit $\alpha \geq 1$.

Dans la suite, nous allons déterminer l'exposant de Hölder en des points particuliers : les points α -approximables. Grâce aux propriétés des ensembles de points α -approximables, on pourra alors déterminer la dimension de l'ensemble des points ayant un exposant de Hölder donné.

Définition 4.2.5. Un point $x \in \mathbb{R}^d$ est dit α -approximable (par des dyadiques) si il existe une suite $(J_n, \mathbf{K}_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$J_n \in \mathbb{N}, \quad J_n \rightarrow +\infty, \quad \mathbf{K}_n \in \mathbb{Z}^d, \quad \text{et} \quad |x - \mathbf{K}_n 2^{-J_n}| \leq 2^{-\alpha J_n}. \quad (4.19)$$

Dès que x n'est pas un point dyadique, on considérera une suite $(J_n, \mathbf{K}_n)_{n \geq 1}$ pour laquelle $\mathbf{K}_n \notin \mathbb{Z}^d - 2\mathbb{Z}^d$.

On note

$$\mathcal{X}^\alpha = \{x \in [0, 1]^d, \text{ tels que } x \text{ est } \alpha\text{-approximable}\}.$$

On peut également définir \mathcal{X}^α de la façon suivante : soit $(n_m)_m$ une suite d'entiers, à cette suite, on associe :

$$\mathcal{X}^\alpha = \left\{ x \in [0, 1]^d : \text{il existe une infinité de } m \text{ tel que } \exists \mathbf{K}_{n_m} \in \mathbb{Z}^d - 2\mathbb{Z}^d : \begin{array}{l} |x - \frac{\mathbf{K}_{n_m}}{2^{\lfloor n_m/\alpha \rfloor}}| \leq \frac{1}{2^{n_m}} \end{array} \right\}. \quad (4.20)$$

Dans toute la suite, lorsque l'on parlera d'un point α -approximable, on considérera que ce point n'est pas un dyadique.

On a les Propositions suivantes sur cet ensemble [46] :

Proposition 4.2.5. *Il existe une mesure σ finie positive m_α portée par \mathcal{X}^α telle que :*

- (i) *pour tout ensemble E , si $\dim_{\mathcal{H}} E < \frac{d}{\alpha}$ alors $m_\alpha(E) = 0$.*
- (ii) *En particulier, $m_\alpha(\mathcal{X}^\alpha) > 0$ et $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{X}^\alpha = \frac{d}{\alpha}$*
- (iii) *De plus, pour tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$,*

$$m_\alpha \left\{ x \in \mathbb{R}^d : h_f(x) < s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p} \right\} = 0.$$

Voyons comment (i) implique (iii).

Soit $\alpha \geq 1$. On pose $H(\alpha) = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p}$. Remarquons tout d'abord que, pour tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$:

$$\{x \in \mathcal{X}^\alpha : h_f(x) < H(\alpha)\} = \bigcap_N \bigcup_{n > N} \left\{ x \in \mathcal{X}^\alpha : h_f(x) \leq H(\alpha) - \frac{1}{n} \right\}.$$

Or en utilisant la Proposition 4.1.1, on a pour tout $n > 0$

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x \in \mathbb{R}^d : h_f(x) \leq H(\alpha) - \frac{1}{n} \right\} \leq \frac{d}{\alpha} - \frac{p}{n} < \frac{d}{\alpha}$$

donc
$$\dim_{\mathcal{H}} \bigcap_N \bigcup_{n > N} \left\{ x \in \mathbb{R}^d : h_f(x) \leq H(\alpha) - \frac{1}{n} \right\} < \frac{d}{\alpha}.$$

En appliquant le point (i), on en déduit alors le point (iii).

Remarque 4.2.2. $\mathcal{X}^1 = [0, 1]^d$.

On note

$$\alpha(x) = \sup \{ \alpha \geq 1 \text{ tels que } x \text{ est } \alpha\text{-approximable} \}.$$

Le réel $\alpha(x)$ est appelé exposant dyadique de x et on a la Proposition suivante [46] :

Proposition 4.2.6. *Pour $\alpha \geq 1$*

$$\dim_{\mathcal{H}} \{ x \in [0, 1]^d, \alpha(x) = \alpha \} = \frac{d}{\alpha}.$$

Afin de faire le lien entre les points α -approximables et les cubes dyadiques, on définit des cubes dit irréductibles :

Définition 4.2.6. *Soit $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ un cube dyadique. À λ on peut associer un unique cube $\Lambda = (J, \mathbf{K}, \mathbf{l})$, dit irréductible, de la façon suivante : $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_d)$ est l'unique d -uplet d'entiers de $\mathbb{Z}^d \setminus 2\mathbb{Z}^d$ tel qu'il existe une autre génération $J \leq j$ satisfaisant*

$$\frac{\mathbf{K}}{2^J} = \frac{\mathbf{k}}{2^j}.$$

En d'autres mots, il existe un indice $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ tel que \mathbf{K}_i soit impair.

On utilisera également le Lemme suivant :

Lemme 4.2.1. *Soit $\alpha \geq 1$, $x \in [0, 1]^d$ tel que $\alpha(x) = \alpha$. Soit $\epsilon > 0$ et $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times L^d$ fixés. Il existe J_0 tel que, pour les couples (J, \mathbf{K}) avec :*

$$j \geq J \geq J_0, \quad \frac{\mathbf{K}}{2^J} = \frac{\mathbf{k}}{2^j}, \text{ et } \mathbf{K} \in \mathbb{Z}^d - 2\mathbb{Z}^d,$$

on a :

- (i) *si $\left| x - \frac{\mathbf{k}}{2^j} \right| \leq 2^{-j}$, alors $\frac{1}{(\alpha(x)+\epsilon)} \leq \frac{J}{j}$.*
- (ii) *si $\left| x - \frac{\mathbf{k}}{2^j} \right| > 2^{-j}$ alors $\frac{1}{\alpha(x)+\epsilon} \leq \frac{J \log 2}{-\log|x-\lambda|}$.*

Démonstration. Observons tout d'abord qu'il existe J_0 tel que pour tout $J \geq J_0$, on ait

$$\left| x - \frac{\mathbf{k}}{2^j} \right| = \left| x - \frac{\mathbf{K}}{2^J} \right| > \frac{1}{2^{(\alpha(x)+\epsilon)J}}. \quad (4.21)$$

En effet, deux cas sont possibles pour les couples (J, \mathbf{K}) :

- (J, \mathbf{K}) n'est pas un élément d'une des suites (J_n, \mathbf{K}_n) rendant x $(\alpha(x) - \epsilon)$ -approximable et on a :

$$\left| x - \frac{\mathbf{K}}{2^J} \right| > \frac{1}{2^{(\alpha(x)-\epsilon)J}} > \frac{1}{2^{(\alpha(x)+\epsilon)J}}.$$

- (J, \mathbf{K}) est un élément d'une suite (J_n, \mathbf{K}_n) .

Par définition de $\alpha(x)$, il existe J_0 tel que si $J \geq J_0$

$$\left| x - \frac{\mathbf{K}}{2^J} \right| > \frac{1}{2^{(\alpha(x)+\epsilon)J}}.$$

Voyons maintenant comment de (4.21), on en déduit le Lemme :

Si $\left| x - \frac{\mathbf{k}}{2^j} \right| \leq 2^{-j}$, selon (4.21) on a

$$\frac{1}{2^{(\alpha(x)+\epsilon)J}} \leq 2^{-j} \text{ d'où } j \leq (\alpha(x) + \epsilon)J.$$

Si $\left| x - \frac{\mathbf{k}}{2^j} \right| > 2^{-j}$ selon (4.21), on a

$$2^{-(\alpha(x)+\epsilon)J} \leq |x - \lambda| \text{ d'où } \frac{1}{(\alpha(x) + \epsilon)J \log 2} \leq \frac{1}{-\log |x - \lambda|}.$$

□

4.3 Etude d'une fonction particulière.

Pour démontrer le Théorème 4.1.1, on va s'intéresser à un ensemble \mathcal{P} , qui est l'ensemble des fonctions vérifiant le Théorème, c'est-à-dire :

Définition 4.3.1. *On définit \mathcal{P} de la façon suivante :*

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D) : \\ \text{sur un ensemble } \mathcal{A}(f) \text{ de valeurs de mesure de Lebesgue pleine de } [0, 1]^{d'}, \\ \text{l'exposant de Hölder de } f_a \text{ prend ses valeurs dans } \left[s - \frac{d}{p}, s \right] \text{ et} \\ \forall H \in \left[s - \frac{d}{p}, s \right], d_{f_a}(H) = Hp - sp + d \end{array} \right\}.$$

Remarque 4.3.1. *L'idée de la preuve, est de construire une intersection dénombrable d'ouverts denses \mathcal{D} dans $B_{p,q}^s[0, 1]^D$, telle que toute fonction de \mathcal{D} ait ses*

coefficients d'ondelette suffisamment proches des coefficients d'ondelette d'une fonction $g \in B_{p,q}^s([0, 1]^D)$, qui aura des propriétés spécifiques.

En utilisant alors les propriétés des coefficients d'ondelette de g , on arrivera à trouver un encadrement des coefficients d'ondelette des fonctions de \mathcal{D} suffisamment précis, pour pouvoir faire l'analyse multifractale des fonctions de \mathcal{D} et en déduire le Théorème 4.1.1.

Dans un premier temps, on va donc construire cette fonction g .

Pour démontrer le Théorème 4.1.1, il sera inutile de démontrer que $g \in \mathcal{P}$, les propriétés de ses coefficients d'ondelette suffisent. Cependant, au vu du raisonnement qui nous permet de construire l'intersection dénombrable d'ouverts denses (créer des fonctions proches de la fonction g), il paraît nécessaire d'étudier en détail cette fonction g .

Définition 4.3.2. On définit la fonction g à l'aide de ses coefficients d'ondelette de la façon suivante :

$$g_{\lambda^D} = \begin{cases} j^{-b} 2^{(\frac{d}{p}-s)j} 2^{-\frac{d}{p}J} & \text{si } \mathbf{l}' = 1^{d'} \text{ et } \mathbf{l} \neq 0^d, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.22)$$

avec $b > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Pour $\mathbf{l} \neq 0^d$, lorsque $\mathbf{l}' = (1, 1, \dots, 1)$, à j fixé, g_{λ^D} prend $(2^d - 1)2^{d'j}$ fois la même valeur. En effet la valeur de g_{λ^D} ne dépend ni de la valeur de $\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}_j^{d'}$ (qui apparaît donc $2^{d'j}$ fois), ni de la valeur de $\mathbf{l} \in L^d$ (qui apparaît donc $2^d - 1$ fois).

Lemme 4.3.1. La fonction g appartient à $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$.

Démonstration. On utilise la caractérisation de $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$ par ses coefficients d'ondelette donnée par la Définition (4.2.3).

Comme remarqué précédemment, pour $\mathbf{l} \neq 0^d$, à chaque multi-entier \mathbf{k}_0 fixé, $(2^d - 1)2^{d'j}$ coefficients g_{λ^D} ont la même valeur (ceux pour lesquels $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ et $\mathbf{l}' = 1^{d'}$). C'est par exemple la valeur du coefficient g_{λ^D} pour $\lambda^D = (j, (\mathbf{k}_0, 1^{d'}), (1^d, 1^{d'}))$.

On peut donc écrire, en utilisant (4.15) que :

$$\begin{aligned}
(A_j)^p &= 2^{j(sp-D)}(2^d - 1)2^{jd'} \sum_{\lambda^D: |\lambda^D|=j, \mathbf{k}'=1^{d'}, \mathbf{l}=1^d, \mathbf{l}'=1^{d'}} |g_{\lambda^D}|^p \\
&= 2^{j(sp-D)}(2^d - 1)2^{jd'} j^{-bp} 2^{(d-sp)j} \sum_{\lambda^D: |\lambda^D|=j, \mathbf{k}'=1^{d'}, \mathbf{l}=1^d, \mathbf{l}'=1^{d'}} 2^{-dJ} \\
&= (2^d - 1)j^{-bp} \sum_{\lambda^D: |\lambda^D|=j, \mathbf{k}'=1^{d'}, \mathbf{l}=1^d, \mathbf{l}'=1^{d'}} 2^{-dJ}.
\end{aligned}$$

Reste à compter, pour chaque génération $J \in \{1, \dots, j\}$ le nombre de cubes dyadiques de dimension d dont au moins une des coordonnées est impaire. C'est exactement $2^{d(J-1)}$. Donc

$$(A_j)^p = (2^d - 1)j^{-bp} \sum_{J=1}^j 2^{d(J-1)} 2^{-dJ} \leq Cj^{-bp+1}.$$

Comme b a été choisi de sorte que $-bq + \frac{q}{p} < -1$, on en déduit que $A_j \in \ell^q$ et donc que $g \in B_{p,q}^s([0, 1]^D)$. \square

4.3.1 Propriétés de la trace de g .

Observons tout d'abord que, par définition des coefficients d'ondelette de la fonction g , la fonction g_a^0 définie par (4.7) est nulle et que l'on a ainsi $g_\lambda(a) = g_\lambda^1(a)$.

Proposition 4.3.1. *Pour tout cube $\lambda \in \Lambda^d \times L^d$ avec $|\lambda| = j$, on a*

$$g_\lambda(a) = j^{-b} 2^{\left(\frac{d}{p}-s\right)j} 2^{-\frac{d}{p}J} G_{d'}(2^j a)$$

où $G_{d'}$ est définie par (4.12). De (4.14), on déduit donc que

$$|g_\lambda(a)| \leq C_1 j^{-b} 2^{\left(\frac{d}{p}-s\right)j} 2^{-\frac{d}{p}J}. \quad (4.23)$$

Démonstration. On a par la formule (4.8)

$$g_\lambda(a) = \sum_{\lambda^D: \mathcal{H}_a \cap \lambda^D = \lambda} g_{\lambda^D} \Psi_{j, \mathbf{k}'_1}^{l'_1}(a_1) \cdots \Psi_{j, \mathbf{k}'_{d'}}^{l'_{d'}}(a_{d'}).$$

Or si $\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}'))$, g_{λ^D} est non-nul si et seulement si $\mathbf{l}' = 1^{d'}$ et $\mathbf{l} \neq 0^d$ et dans ce cas g_{λ^D} ne dépend ni de \mathbf{k}' ni de \mathbf{l} .

On peut donc prendre la valeur du coefficient en le cube particulier $(j, (\mathbf{k}, 1^{d'}), (1^d, 1^{d'}))$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} g_\lambda(a) = g_{(j, \mathbf{k}, \mathbf{l})}(a) &= g_{(j, (\mathbf{k}, 1^{d'}), (1^d, 1^{d'}))} \times \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}^{d'}} \Psi_{j, k'_1}^1(a_1) \Psi_{j, k'_2}^1(a_2) \cdots \Psi_{j, k'_d}^1(a_{d'}) \\ &= g_{((j, (\mathbf{k}, 1^{d'}), (1^d, 1^{d'}))} G_{d'}(2^j a) \\ &= j^{-b} 2^{\left(\frac{d}{p} - s\right)j} 2^{-\frac{d}{p}J} G_{d'}(2^j a). \end{aligned} \tag{4.24}$$

□

Corollaire 4.3.1. *Pour $a \in A_1$, il existe j_a tel que, pour tout cube $\lambda \in \Lambda^d \times L^d$ tel que $|\lambda| = j \geq j_a$, on a :*

$$|g_\lambda(a)| \geq j^{-b-2d'} 2^{\left(\frac{d}{p} - s\right)j} 2^{-\frac{d}{p}J}. \tag{4.26}$$

Comme $0 \leq J \leq j$, on a, de plus,

$$|g_\lambda(a)| \geq j^{-b-2d'} 2^{-sj}. \tag{4.27}$$

Démonstration. Comme $a \in A_1$ et $j \geq j_a$ selon la Proposition 4.2.3, on a :

$$|G_{d'}(2^j a)| > \frac{1}{j^{2d'}}.$$

En utilisant la Proposition 4.3.1, on obtient le résultat. □

Lemme 4.3.2. *Pour tout $a \in \mathcal{A}_1$, la fonction g_a appartient à $B_{p,q}^s([0, 1]^d)$.*

Démonstration. On procède comme pour le Lemme 4.3.1. □

Remarque 4.3.2. *De (4.17), on en déduit que, pour tout $a \in \mathcal{A}_1$, $g_a \in C^{s-d/p}([0, 1]^d)$. Ainsi g_a ne peut avoir d'exposant de Hölder inférieur à $s - \frac{d}{p}$.*

4.3.2 Calcul d'un exposant de Hölder de g_a en un point d'exposant dyadique α .

Proposition 4.3.2. *Soit $a \in A_1$, $\alpha \geq 1$ et $x \in [0, 1]^d$ tel que $\alpha(x) = \alpha$. Alors*

$$h_{g_a}(x) = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p}.$$

Majoration de l'exposant de Hölder.

On va commencer par montrer que :

$$h_{g_a}(x) \leq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha(x)p}.$$

Pour obtenir cette majoration de l'exposant de Hölder, il suffit d'exhiber une suite de coefficients d'ondelette $g_\lambda(a)$ telle que :

$$\frac{\log(|g_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} \leq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha(x)p} \quad (4.28)$$

et d'appliquer la Proposition 4.2.2. Pour tout $\epsilon > 0$, comme x est $(\alpha(x) - \epsilon)$ -approximable, il existe une suite (J_n, \mathbf{K}_n) telle que :

$$\left| x - \frac{\mathbf{K}_n}{2^{J_n}} \right| \leq \frac{1}{2^{(\alpha(x) - \epsilon)J_n}}.$$

On va considérer la suite des coefficients d'ondelette pour lesquels, on a

$$j = [(\alpha(x) - \epsilon)J_n] \quad \text{et} \quad \frac{\mathbf{k}}{2^j} = \frac{\mathbf{K}_n}{2^{J_n}}.$$

En utilisant l'équation (4.26), quand $j \rightarrow \infty$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\log(|g_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} &\leq \frac{\log \left| j^{-b-2d'} 2^{(\frac{d}{p}-s)j} 2^{-\frac{d}{p}J_n} \right|}{-j \log 2} (1 + o(1)) \\ &\leq \left(\frac{(b + 2d') \log(j)}{j \log 2} + \left(s - \frac{d}{p} \right) \frac{j \log 2}{j \log 2} + \frac{d J_n \log 2}{p j \log 2} \right) (1 + o(1)) \\ &\leq \left(\frac{(b + 2d') \log(j)}{j \log 2} + s - \frac{d}{p} + \frac{d}{p} \frac{j + 1}{(\alpha(x) - \epsilon)j} \right) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du fait que $(\alpha(x) - \epsilon)J_n \leq j + 1$.

En faisant tendre j vers l'infini, on trouve que $h_{g_a}(x) \leq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{p} \frac{1}{\alpha(x) - \epsilon}$, puis en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient (4.28).

Minoration de l'exposant de Hölder.

On va maintenant montrer que :

$$h_{g_a}(x) \geq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha(x)p}.$$

Cette fois, il va falloir démontrer que pour tous les coefficients d'ondelette à partir d'un certains rang j , on a :

$$\frac{\log(|g_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} \geq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha(x)p}. \quad (4.29)$$

Pour cela, on classera les coefficients d'ondelette en deux catégories et on montrera que l'on obtient la minoration voulue pour chaque catégorie.

Soit $\epsilon > 0$.

Considérons tout d'abord, les cubes $\lambda = (j, \mathbf{l}, \mathbf{k}) \in \Lambda^d \times L^d$, tels que $|x - \frac{\mathbf{k}}{2^j}| \leq 2^{-j}$. Soit $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ fixé. On considérera désormais les coefficients pour lesquels $J \geq J_0$ où J_0 est défini par le Lemme 4.2.1.

En utilisant (4.23), quand $\lambda \rightarrow x$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\log(|g_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} &\geq \frac{\log \left| C_1 j^{-b} 2^{\left(\frac{d}{p}-s\right)j} 2^{-\frac{d}{p}J} \right|}{-j \log 2} (1 + o(1)) \\ &\geq \frac{\log C_1}{-j \log 2} + \frac{b \log(j)}{j \log 2} + \left(s - \frac{d}{p}\right) \frac{j \log 2}{j \log 2} + \frac{d J \log 2}{p j \log 2} (1 + o(1)) \\ &\geq \left(\frac{\log C_1}{-j \log 2} + \frac{b \log j}{j \log 2} + s - \frac{d}{p} + \frac{d}{p} \frac{1}{\alpha(x) + \epsilon} \right) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (4.30)$$

La dernière minoration provient du Lemme 4.2.1.

Considérons maintenant les autres cubes, c'est-à-dire, ceux pour lesquels $|x - \frac{\mathbf{k}}{2^j}| > 2^{-j}$.

En utilisant (4.23), quand $j \rightarrow +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\log(|g_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} &\geq \frac{\log \left| C_1 j^{-b} 2^{\left(\frac{d}{p}-s\right)j} 2^{-\frac{d}{p}J} \right|}{\log(|x - \lambda|)} (1 + o(1)) \\ &\geq \left(\frac{\log C_1}{\log(|x - \lambda|)} + \frac{b \log(j)}{-\log(|x - \lambda|)} + \left(s - \frac{d}{p}\right) \frac{j \log(2)}{-\log(|x - \lambda|)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{p} \frac{J \log(2)}{\log(|x - \lambda|)} \right) (1 + o(1)) \\ &\geq \left(\frac{\log C_1}{\log(|x - \lambda|)} + \frac{b \log(j)}{j \log 2} + s - \frac{d}{p} + \frac{d}{p} \frac{1}{\alpha(x) + \epsilon} \right) \\ &\quad \times (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (4.31)$$

La dernière minoration provient du fait que $|x - \lambda| \geq 2^{-j}$ et du Lemme 4.2.1.

En faisant tendre j vers l'infini dans (4.30) et λ vers x donc j vers l'infini dans (4.31),

on obtient $h_{g_a}(x) \geq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{p(\alpha(x)+\epsilon)}$. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient alors (4.29).

Remarque 4.3.3. *Comme, pour tout $x \in [0, 1]^d$, $\alpha(x) \geq 1$ en appliquant la Proposition 4.3.2, on obtient donc le résultat suivant :*

$$\forall a \in \mathcal{A}_1, \forall x \in [0, 1]^d, h_{g_a}(x) \leq s.$$

En utilisant alors la Remarque 4.3.2, on a :

Pour Lebesgue presque tout $a \in [0, 1]^{d'}$, pour $H \notin [s - \frac{d}{p}, s]$, $E_{g_a}(H) = \emptyset$.

4.3.3 Calcul du spectre de singularités

Proposition 4.3.3. *Pour Lebesgue presque tout $a \in [0, 1]^{d'}$, l'exposant de Hölder de g_a prend ses valeurs dans $[s - \frac{d}{p}, s]$ et*

$$\forall H \in \left[s - \frac{d}{p}, s \right], d_{g_a}(H) = Hp - sp + d.$$

Démonstration.

Soit $a \in \mathcal{A}_1$, $\alpha \geq 1$. On pose $H(\alpha) = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p}$.

Des Propositions 4.3.2 et 4.2.6, on déduit :

$$d_{g_a}(H(\alpha)) \geq \frac{d}{\alpha}.$$

Et par définition de $H(\alpha)$,

$$d_{g_a}(H(\alpha)) \geq H(\alpha)p - sp + d.$$

De plus, comme $g_a \in B_{p,q}^s([0, 1]^d)$ et $H(\alpha) \geq s - \frac{d}{p}$, on déduit de la Proposition 4.1.1 que :

$$d_{g_a}(H(\alpha)) \leq H(\alpha)p - sp + d.$$

□

4.4 Le Théorème 4.1.1

On va construire une intersection dénombrable d'ouverts denses, appelée \mathcal{D} . Rappelons que l'on note g_{λ^D} les coefficients d'ondelette de la fonction g . On suppose

$p \neq \infty$ et $q \neq \infty$. L'espace $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$ est séparable, on peut considérer une suite $(f_n)_n$ dense dans $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$.

Définition 4.4.1. On définit une suite de fonctions $(g_n)_n$ de la façon suivante :

- (i) On note g_{n,λ^D} les coefficients d'ondelette de g_n .
- (ii) Si $j < n$ les coefficients d'ondelette de g_n sont ceux de f_n .
- (iii) Si $j \geq n$ les coefficients d'ondelette de g_n sont ceux de la fonction g .

Remarque 4.4.1. $\|f_n - g_n\|_{B_{p,q}^s([0,1]^D)} \rightarrow 0$ donc $(g_n)_n$ est dense dans $B_{p,q}^s([0, 1]^D)$

Définition 4.4.2. On définit l'intersection dénombrable d'ouverts denses \mathcal{D} de la façon suivante :

$$\mathcal{D} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geq N} B(g_n, r_n) \right) \text{ où } \bigcup_{n \geq N} B(g_n, r_n) \text{ est clairement un ouvert dense}$$

avec

$$\begin{aligned} \text{si } p \geq 1 & \quad r_n = \frac{2^{-\frac{D}{p}n}}{4Rn^{b+2d'}}, \\ \text{si } p < 1 & \quad r_n = \left(\frac{2^{-\frac{D}{p}n}}{4Rn^{b+2d'}} \right)^{\min(p,q)}, \end{aligned}$$

où R sera défini ultérieurement.

On va maintenant montrer que $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ pour un choix convenable de R .

4.4.1 Majoration de l'exposant de Hölder de la trace d'une fonction f de \mathcal{D} .

Soit $f \in \mathcal{D}$. On va commencer par chercher une estimation des coefficients d'ondelette de la trace de la fonction f , pour pouvoir ensuite utiliser la Proposition 4.2.2.

Propriétés des coefficients d'ondelette de la trace de f .

On notera d_{λ^D} les coefficients d'ondelette de f .

Si $f \in B(g_n, r_n)$ remarquons tout d'abord que, si $p \geq 1$, alors

$$\left(\sum_j \left(\sum_{\lambda^D} |d_{\lambda^D} - g_{n,\lambda^D}|^p 2^{(sp-D)j} \right)^{q/p} \right)^{1/q} \leq r_n \quad (4.32)$$

et que si $p \leq 1$

$$\left(\sum_j \left(\sum_{\lambda^D} |d_{\lambda^D} - g_{n,\lambda^D}|^p 2^{(sp-D)j} \right)^{q/p} \right)^{\min(p,q)/q} \leq r_n. \quad (4.33)$$

Dans toute la suite, on considérera $p \geq 1$. En effet, on trouvera exactement les mêmes résultats dans le cas $p < 1$ il suffira d'effectuer les mêmes démonstrations, en utilisant au départ (4.33) au lieu de (4.32).

Nous allons déterminer une minoration des coefficients d'ondelette $d_\lambda(a)$ de f_a . Pour cela, il faudra déterminer une estimation des coefficients $d_\lambda^0(a)$ et $d_\lambda^1(a)$.

Rappelons les notations de la partie 4.2.5 :

Pour tout $\lambda \in \Lambda^d \times L^d$, $d_\lambda(a) = d_\lambda^0(a) + d_\lambda^1(a)$ où :

Pour tout $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times \{0, 1\}^d$,

$$d_\lambda^1(a) = \sum_{\lambda^D=(j,(\mathbf{k},\mathbf{k}'),(\mathbf{l},\mathbf{l}')):(j,\mathbf{k},\mathbf{l})=\lambda} d_{\lambda^D} \Psi_{j,k'_1}^{l'_1}(a_1) \cdots \Psi_{j,k'_{d'}}^{l'_{d'}}(a_{d'}).$$

Et pour tout $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times L^d$

$$d_\lambda^0(a) = 2^{dj} \sum_{\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d : |\lambda'| \geq j} d_{\lambda'}^1(a) < \Psi_{\lambda'}, \Psi_\lambda > .$$

On va poser une condition sur R de façon à vérifier le Lemme suivant :

Lemme 4.4.1. *Soit $R \geq C'_1$, (C'_1 est défini par (4.13)). Si $f \in B(g_n, r_n)$, alors, pour $\lambda = (n, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ avec $\mathbf{l} \in L^d$, on a :*

$$|d_\lambda^1(a) - g_\lambda(a)| \leq \frac{2^{-sn}}{4n^{b+2d'}}.$$

Démonstration. Par construction de g_n , pour $|\lambda^D| = n$, on a $g_{n,\lambda^D} = g_{\lambda^D}$. En appliquant (4.8), pour $\lambda = (n, \mathbf{k}, \mathbf{l})$, on a :

$$\begin{aligned} |d_\lambda^1(a) - g_\lambda(a)| &= \left| \sum_{\lambda^D \cap \mathcal{H}_a = \lambda} (d_{\lambda^D} - g_{\lambda^D}) \Psi_{n,k'_1}^{l'_1}(a_1) \cdots \Psi_{n,k'_{d'}}^{l'_{d'}}(a_{d'}) \right| \\ &\leq \sum_{\lambda^D \cap \mathcal{H}_a = \lambda} |d_{\lambda^D} - g_{\lambda^D}| \left| \Psi_{n,k'_1}^{l'_1}(a_1) \cdots \Psi_{n,k'_{d'}}^{l'_{d'}}(a_{d'}) \right|. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Or, pour tout λ^D tel que $|\lambda^D| = n$ et $\mathbf{1} \in L^d$, on déduit de (4.32) que :

$$|d_{\lambda^D} - g_{\lambda^D}| \leq r_n 2^{-(s-\frac{D}{p})n} \leq \frac{2^{-sn}}{4Rn^{b+2d'}},$$

d'où

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda^D \cap \mathcal{H}_a = \lambda} |d_{\lambda^D} - g_{\lambda^D}| \left| \Psi_{n,k'_1}^{l'_1}(a_1) \dots \Psi_{n,k'_{d'}}^{l'_{d'}}(a_{d'}) \right| \\ & \leq \frac{2^{-sn}}{4Rn^{b+2d'}} \sum_{\lambda^D \cap \mathcal{H}_a = \lambda} \left| \Psi_{n,k'_1}^{l'_1}(a_1) \dots \Psi_{n,k'_{d'}}^{l'_{d'}}(a_{d'}) \right| \\ & \leq \frac{2^{-sn}}{4n^{b+2d'}}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Pour obtenir la dernière inégalité, on utilise la condition posée sur R : $R \geq C'_1$.
En utilisant (4.34), on obtient le résultat. \square

Lemme 4.4.2. *Soit $R \geq C'_1$, (C'_1 est défini par (4.13)). Pour $a \in A_1$, il existe j_a tel que si $f \in B(g_n, r_n)$, avec $n \geq j_a$ pour tout λ tel que $|\lambda| = n$ et $\mathbf{1} \neq 0^d$ on a :*

$$\frac{3}{4} \frac{2^{-sn}}{n^{b+2d'}} \leq \frac{3|g_\lambda(a)|}{4} \leq |d_\lambda^1(a)|.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq j_a$, pour tout λ tel que $|\lambda| = n$, selon l'équation (4.27),

$$|g_\lambda(a)| \geq \frac{2^{-sn}}{n^{b+2d'}}. \tag{4.36}$$

En appliquant le Lemme 4.4.1, on a

$$|g_\lambda(a)| - \frac{2^{-sn}}{4n^{b+2d'}} \leq |d_\lambda^1(a)|.$$

En appliquant (4.36), on obtient le résultat. \square

On va poser une deuxième condition sur R , afin de vérifier le Lemme suivant :

Lemme 4.4.3. *Il existe R tel que pour $a \in A_1$, il existe j_a , tel que : si $f \in B(g_n, r_n)$ avec $n \geq j_a$, pour tout λ tel que $|\lambda| = n$, on a :*

$$|d_\lambda^0(a)| \leq \frac{2^{-sn}}{4n^{b+2d'}}. \tag{4.37}$$

Démonstration. Pour démontrer ce Lemme, on utilisera la définition de $d_\lambda^0(a)$ donnée par (4.10). Comme $d_\lambda^0(a)$ dépend de $d_{\lambda'}^1(a)$ pour $\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d$, on va dans un premier temps s'intéresser à $d_{\lambda'}^1(a)$.

Par construction de g_n , pour $|\lambda^D| \geq n$,

$$g_{n,\lambda^D} = g_{\lambda^D},$$

et par construction de g , $g_{\lambda^D} = 0$ si $\mathbf{l} = 0^d$.

On déduit de (4.32) que, pour tout $j \geq n$,

$$\sum_{\lambda^D \in \Lambda^D \times 0^d \times L^{d'} : |\lambda^D| = j} |d_{\lambda^D}|^p 2^{(sp-D)j} \leq r_n^p \quad (4.38)$$

Pour tout $j \geq n$, en utilisant l'équation (4.8) et le fait que $\forall \lambda$, $C'_1 \geq |\Psi_\lambda|$ selon (4.13), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d : |\lambda'| = j} |d_{\lambda'}^1(a)|^p 2^{(sp-D)j} &= \sum_{\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d : |\lambda'| = j} \left| \sum_{\lambda^D \cap \mathcal{H}_a = \lambda'} d_{\lambda^D} \Psi_{\lambda'}(a) \right|^p 2^{(sp-D)j} \\ &\leq C_2 (C'_1)^p \sum_{\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d : |\lambda'| = j} \sum_{\lambda^D \cap \mathcal{H}_a = \lambda'} |d_{\lambda^D}|^p 2^{(sp-D)j} \\ &\leq C_2 (C'_1)^p \sum_{\lambda^D \in \Lambda^D \times 0^d \times L^{d'} : |\lambda^D| = j} |d_{\lambda^D}|^p 2^{(sp-D)j} \\ &\leq C_2 (C'_1)^p r_n^p \end{aligned} \quad (4.39)$$

avec C_2 indépendant de j , la dernière inégalité provient de (4.38).

On va maintenant pouvoir montrer (4.37). Soit $\lambda = (n, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ avec $\mathbf{l} \neq 0^d$.

Par (4.10), on a :

$$|d_\lambda^0(a)| = 2^{dn} \left| \sum_{j \geq n} \sum_{\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d : |\lambda'| = j} d_{\lambda'}^1(a) \langle \Psi_{\lambda'}, \Psi_\lambda \rangle \right|.$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski, on obtient :

$$\begin{aligned}
|d_\lambda^0(a)| &\leq 2^{dn} \sum_{j \geq n} \left(\sum_{\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d : |\lambda'|=j} |d_{\lambda'}^1(a)|^p 2^{(sp-D)j} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\sum_{\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d : |\lambda'|=j} |\langle \Psi_{\lambda'}, \Psi_\lambda \rangle|^{\frac{p}{p-1}} 2^{-(s-\frac{D}{p})j \frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{dn} C_2 C_1' r_n \sum_{j \geq n} \left(\sum_{\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d : |\lambda'|=j} |\langle \Psi_{\lambda'}, \Psi_\lambda \rangle|^{\frac{p}{p-1}} 2^{-(s-\frac{D}{p})j \frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

La dernière majoration provient de (4.39). Il reste donc à majorer la somme des $\langle \Psi_{\lambda'}, \Psi_\lambda \rangle$.

Soit $\lambda = (n, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times L^d$ fixé et $\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d$ avec $|\lambda'| = j \geq n$.

Comme la taille du support de $\Psi_{\lambda'}$ est $c2^{-j}$, on a :

$$|\langle \Psi_{\lambda'}, \Psi_\lambda \rangle| \leq c' 2^{-dj}$$

avec c' indépendant de λ et λ' .

Il y a au plus $c'' 2^{d(j-n)}$ cubes λ' tels que $\langle \Psi_{\lambda'}, \Psi_\lambda \rangle \neq 0$ où c'' indépendant de λ et λ' .

D'où

$$2^{-(s-\frac{D}{p})j} \left(\sum_{\lambda' \in \Lambda^d \times 0^d : |\lambda'|=j} |\langle \Psi_{\lambda'}, \Psi_\lambda \rangle|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq 2^{d(j-n)(1-\frac{1}{p})} C_2^{-dj} 2^{-(s-\frac{D}{p})j}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|d_\lambda^0(a)| &\leq 2^{dn} C_2 C C_1' r_n 2^{-dn(1-\frac{1}{p})} \sum_{j \geq n} 2^{-(s-\frac{d'}{p})j} \\
&\leq 2^{dn/p} C_2 C C' C_1' r_n 2^{-(s-\frac{d'}{p})n} \\
&\leq C_2 C' C C_1' r_n 2^{-(s-\frac{D}{p})n}.
\end{aligned}$$

Comme C' est indépendant de n , on choisit $R \geq C_2 C C' C_1'$, on obtient alors la majoration voulue par définition de r_n . \square

Dorénavant $R = \max(C_1', C_2 C C' C_1')$.

Proposition 4.4.1. *Pour $a \in A_1$, il existe j_a tel que si $f \in B(g_n, r_n)$, avec $n \geq j_a$ pour tout $\lambda = (n, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times L^d$, on a :*

$$|d_\lambda(a)| \geq \frac{1}{2} n^{-b-2d'} 2^{(\frac{d}{p}-s)n} 2^{-\frac{d}{p}J}.$$

Démonstration. Pour tout λ tel que $|\lambda| = n$, on a ;

$$|d_\lambda(a)| = |d_\lambda^0(a) + d_\lambda^1(a)| \geq \left| |d_\lambda^1(a)| - |d_\lambda^0(a)| \right|.$$

Des Lemmes 4.4.2 et 4.4.3, on a : $|d_\lambda^1(a)| > |d_\lambda^0(a)|$, d'où :

$$\begin{aligned} |d_\lambda(a)| &\geq |d_\lambda^1(a)| - |d_\lambda^0(a)| \\ &\geq \frac{3|g_\lambda(a)|}{4} - \frac{2^{-sn}}{4n^{b+2d'}}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat en utilisant (4.27) puis (4.26). □

4.4.2 Exposants de Hölder de la trace de f .

Rappelons tout d'abord que \mathcal{D} est défini par la Définition 4.4.2 de la façon suivante :

$$\mathcal{D} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geq N} B(g_n, r_n) \right) \text{ où } \bigcup_{n \geq N} B(g_n, r_n)$$

Soit $\alpha \geq 1$, $f \in \mathcal{D}$, d_{λ^D} ses coefficients d'ondelette. La fonction f appartient à une infinité de boules $B(g_n, r_n)$. On note (B_{n_m}) , $m \in \mathbb{N}$, la suite de ces boules.

A cette suite $(n_m)_m$ on associe $\mathcal{X}^\alpha(f)$ défini par (4.20), c'est-à-dire :

$$\mathcal{X}^\alpha(f) = \left\{ x \in [0, 1]^d : \text{il existe une infinité de } m \text{ tel que : } \exists \mathbf{K}_{n_m} \in \mathbb{Z}^d - 2\mathbb{Z}^d : \left| x - \frac{\mathbf{K}_{n_m}}{2^{\lfloor n_m/\alpha \rfloor}} \right| \leq \frac{1}{2^{n_m}} \right\}$$

On pose : $\mathcal{A}(f) = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2(f)$ (\mathcal{A}_1 et $\mathcal{A}_2(f)$ sont donnés par les Propositions 4.2.3 et 4.2.4). $\mathcal{A}(f)$ est de mesure de Lebesgue pleine dans $[0, 1]^d$.

Proposition 4.4.2. *Soit $f \in \mathcal{D}$, $a \in \mathcal{A}(f)$, $x \in \mathcal{X}^\alpha(f)$ alors,*

$$h_{f_a}(x) \leq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p}.$$

Démonstration. Comme $x \in \mathcal{X}^\alpha(f)$, il existe une infinité de couple (n_m, \mathbf{K}_{n_m}) tels que :

$$\left| x - \frac{\mathbf{K}_{n_m}}{2^{\lfloor n_m/\alpha \rfloor}} \right| \leq \frac{1}{2^{n_m}}. \quad (4.40)$$

Grace au Corollaire 4.2.1 et à la Proposition 4.2.2, pour obtenir la Proposition 4.4.2, il suffit de majorer :

$$\frac{\log(|d_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)}$$

pour une suite de coefficients d'ondelette bien choisis.

On va considérer les cubes $\lambda_m = (n_m, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ tel que :

$$n_m \geq j_a \text{ et } \frac{\mathbf{k}}{2^{n_m}} = \frac{\mathbf{K}_{n_m}}{2^{\lfloor n_m/\alpha \rfloor}} \quad (4.41)$$

où j_a est défini par la Proposition 4.4.1. Grâce à (4.40), pour $m \rightarrow \infty$, on a :

$$\frac{1}{\log(2^{-n_m} + |x - \lambda_m|)} = \frac{1}{-n_m \log 2} (1 + o(1)).$$

A l'aide de la Proposition 4.4.1, on a alors, pour $\lambda \rightarrow x$:

$$\begin{aligned} \frac{\log(|d_{\lambda_m}(a)|)}{\log(2^{-n_m} + |x - \lambda_m|)} &\leq \frac{\log(\frac{1}{2} n_m^{-b-2d'} 2^{(\frac{d}{p}-s)n_m} 2^{-\frac{d}{p}J})}{-n_m \log 2} (1 + o(1)) \\ &\leq \left(\frac{\log 2}{n_m \log 2} + (b + 2d') \frac{\log n_m}{n_m \log 2} + \left(s - \frac{d}{p}\right) + \frac{d}{p} \frac{J}{n_m} \right) (1 + o(1)) \\ &\leq \left(\frac{1}{n_m} + (b + 2d') \frac{\log n_m}{n_m \log 2} + \left(s - \frac{d}{p}\right) + \frac{d}{p} \frac{1}{\alpha} \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

La dernière inégalité se déduit de (4.41) : on a $J = \lfloor n_m/\alpha \rfloor$ et donc $\frac{J}{n_m} \leq \frac{1}{\alpha}$.

On obtient la majoration voulue, en faisant tendre m vers l'infini. \square

Corollaire 4.4.1. *Pour quasi-toute fonction $f \in B_{p,q}^s([0, 1]^D)$, pour Lebesgue presque tout $a \in [0, 1]^d$,*

$$\text{si } H \notin \left[s - \frac{d}{p}, s\right] \text{ alors } E_f(H) = \emptyset.$$

Démonstration. Soit $f \in D$ et $a \in \mathcal{A}(f)$.

En prenant $\alpha = 1$ dans la Proposition 4.4.2, on a : $\forall x \in [0, 1]^d$ $h_{f_a}(x) \leq s$.

On conclut en utilisant le Corollaire 4.2.2. \square

4.4.3 Calcul du spectre de singularités.

Proposition 4.4.3. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, pour Lebesgue presque tout $a \in [0, 1]^{d'}$,*

$$\text{si } H \in [s - \frac{d}{p}, s] \text{ alors } d_{f_a}(H) = Hp - sp + d.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}$, $a \in \mathcal{A}(f)$.

$\forall \alpha \geq 1$, on pose $H(\alpha) = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p}$.

En utilisant successivement les Propositions 4.4.2 et 4.2.5, on obtient :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{H}} \{x \in \mathcal{X}^\alpha(f), h_{f_a}(x) \leq H(\alpha)\} &= \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{X}^\alpha(f) \\ &= \frac{d}{\alpha}. \end{aligned}$$

En utilisant la Proposition 4.2.5, on a :

$$\dim_{\mathcal{H}} \{x \in \mathcal{X}^\alpha(f), h_{f_a}(x) \leq H(\alpha)\} = \dim_{\mathcal{H}} \{x \in \mathcal{X}^\alpha(f), h_{f_a}(x) = H(\alpha)\}.$$

On obtient ainsi une minoration de $d_{f_a}(H)$. En appliquant la Proposition 4.1.1, on obtient alors l'égalité cherchée. \square

Remarque 4.4.2. *En utilisant la Proposition 4.4.2, pour $f \in \mathcal{D}$ et pour $a \in \mathcal{A}(f)$, on a :*

$$\forall x \in [0, 1]^d = \mathcal{X}^1(f), h_{f_a}(x) \leq s.$$

En appliquant la Proposition 4.2.5, avec m_1 , la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , on en déduit le dernier point du Théorème 4.1.1.

4.5 Intersection d'espaces de Besov

On va s'intéresser maintenant au comportement de la trace d'une fonction dans une intersection d'espaces de Besov et vérifier la validité du formalisme multifractal pour des traces de fonctions définies sur \mathbb{R}^D sur les sous-espaces de la forme \mathcal{H}_a . Le spectre de singularités de nombreuses fonctions mathématiques peut être déterminé directement. Mais pour beaucoup de signaux issus de mesure physique, comme la vitesse d'écoulement d'un fluide turbulent par exemple, on ne peut déterminer leur régularité höldérienne. Dans ce cas, on cherche un moyen détourné pour estimer $d(H)$: c'est le formalisme multifractal qui va fournir un lien entre le spectre de singularités d'une fonction et des quantités "globales" plus facilement calculables. Deux

physiciens Frisch et Parisi ont émis la conjecture suivante, sous certaines conditions :

$$d(H) = \inf_{p \neq 0} (pH - \zeta_f(p) + D)$$

ζ_f est appelée la fonction échelle de f .

De plus, si $p \geq 1$ et $\zeta_f(p) \in [0, 1]$ alors $\zeta_f(p) = \sup \left\{ s : f \in B_{p, \infty, loc}^{s/p} \right\}$ (voir [46]).
Comme les espaces de Besov sont définis pour tout s et p positifs, la fonction :

$$\eta_f(p) = \sup \left\{ s \geq 0 : f \in B_{p, \infty, loc}^{s/p} \right\}$$

est une extension naturelle de la fonction ζ_f et est définie sans aucune restriction sur son domaine de définition.

Par conséquent, la fonction η_f s'appelle également la fonction échelle. Il est alors naturel de conjecturer que :

$$d(H) = \inf_{p > 0} (pH - \eta_f(p) + D). \quad (4.42)$$

Quand on obtient cette égalité, on dit que le formalisme multifractal est vérifié. Nous allons trouver ici, une forme du spectre légèrement différente de celui du formalisme multifractal. On utilisera les Définitions suivantes [46].

Définition 4.5.1. *Soit f une fonction semi-continue inférieurement définie sur un espace vectoriel normé E . La transformée de Legendre de f est :*

$$f^*(x) = \sup_{y \in E} (f(y) - x \cdot y).$$

Définition 4.5.2. *Soit $d > 0$. Une fonction η (définie sur \mathbb{R}^+) sera dite d -admissible si la fonction s définie par :*

$$s(q) = q\eta(1/q)$$

est concave et vérifie $0 \leq s'(q) \leq d$.

Elle sera dite fortement d -admissible si $s(0) > 0$.

Remarque 4.5.1. *Si η est fortement d -admissible, de la concavité de $s(q)$, on déduit qu'il existe un q_c tel que*

- $s(q_c) = dq_c$
- si $q < q_c$ alors $s(q) > dq$
- si $q > q_c$ alors $s(q) < dq$.

Ce q_c existe sauf dans le cas où $s(q) = dq + s(0)$ (dans ce cas, on posera $q_c = 0$).
 Dans toute la suite, on considérera des fonctions η qui sont telles que $s(q) \neq dq + s(0)$.
 On pose $p_c = \frac{1}{q_c}$ et on a :

- $\eta(p_c) = d$
- si $p > p_c$ alors $\eta(p) > d$
- si $p < p_c$ alors $\eta(p) < d$.

On supposera dans toute la suite que la transformée de Legendre de s est deux fois différentiable et que $s'(0) \neq d$.

Notation : On associe à η , les espaces suivants : soit $d < D$, on pose

$$V^D = \bigcap_{\epsilon > 0, 0 < p < \infty} B_{p,p}^{(\eta(p)-\epsilon)/p}([0, 1]^D).$$

$$V = \bigcap_{\epsilon > 0, 0 < p < \infty} B_{p,p}^{(\eta(p)-\epsilon)/p}([0, 1]^d).$$

Il a été montré par S. Jaffard (dans [46]) qu'au sens de Baire, il existe un ensemble générique de fonctions de V^D tel que toute fonction de cet ensemble vérifie $d(H) = \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta_f(p) + D)$ pour $H \in [s(0); \frac{d}{p_c}]$. Nous allons ici nous intéresser aux traces des fonctions de l'espace V^D et observer si elles vérifient cette égalité. On démontrera le Théorème suivant :

Théorème 4.5.1. *Soient $0 < d < D$ deux entiers, et soit η fortement d -admissible.*

Au sens de Baire, pour quasi-toute fonction f de V^D , pour Lebesgue-presque tout $a \in [0, 1]^{d'}$, les propriétés suivantes sont vraies :

(i) f_a possède le spectre de singularité suivant :

$$d_{f_a}(h) = \begin{cases} \inf_{p \geq p_c} (ph - \eta(p) + d) & \text{si } h \in \left[s(0), \frac{d}{p_c} \right] \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où p_c est le seul point critique tel que $\eta(p_c) = d$.

(ii) $\forall p > 0, \eta_{f_a}(p) = \eta(p)$.

Dans toute la suite, on supposera η fortement d -admissible.

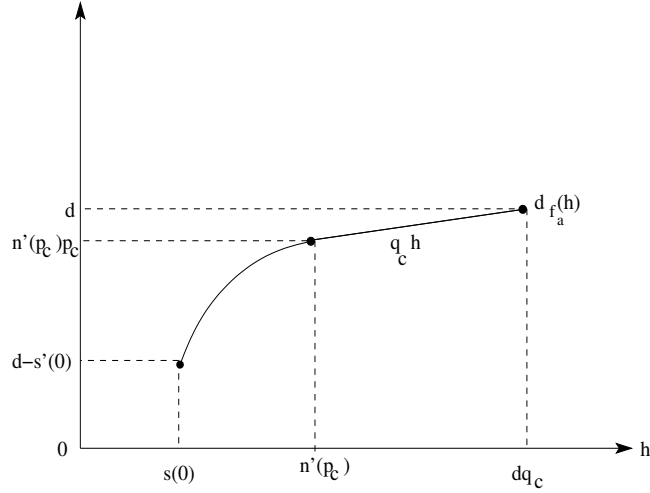


FIGURE 4.1 – Spectre de singularités de la trace, pour Lebesgue presque tout a , de quasi-toute fonction de V^D .

4.5.1 L'espace V^D .

Cet espace a déjà été étudié et on a les Propositions suivantes : (voir [46] ou [28]).

Proposition 4.5.1. *L'espace V^D est séparable et est un espace de Baire. Il peut être écrit comme une intersection dénombrable : soit $(p_n)_n$ une suite dense dans $[0, \infty]$ et $\epsilon_n \rightarrow 0$ alors,*

$$V^D = \bigcap_{n \geq 1} B_n, \text{ où } B_n = B_{p_n, p_n}^{(\eta(p_n) - \epsilon_n)/p_n}([0, 1]^D).$$

De plus, on obtient une distance sur V^D par la formule suivante :

$$\forall f, g \in V^D \quad d(f, g) = \sum_n 2^{-n} \frac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)}$$

où d_n est la distance sur B_n .

Si $f \in V^D$ alors

$$d(H) \leq \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta(p) + D). \quad (4.43)$$

Remarque 4.5.2. *Remarquons que si $d(f, g) \leq C$ et qu'il existe n tel que $C < 2^{-n}$, alors :*

$$d_n(f, g) \leq \frac{C2^n}{1 - C2^n}. \quad (4.44)$$

4.5.2 Un premier résultat sur l'espace V^D .

On va démontrer que pour toute fonction $f \in V^D$, Lebesgue presque toute trace sur \mathcal{H}_a est un élément de l'espace V , c'est-à-dire :

Proposition 4.5.2. *Soient $0 < d < D$ deux entiers, et soit η fortement d -admissible. Si $f \in V^D$, alors l'ensemble*

$$\mathcal{A}_3(f) = \left\{ a \in [0, 1]^{d'} : f_a \in V \right\} \quad (4.45)$$

est de mesure de Lebesgue pleine dans $[0, 1]^{d'}$.

Démonstration. Soit $f \in V^D$, selon la Proposition 4.5.1 : $\forall n, f \in B_{p_n, p_n}^{(\eta(p_n) - \epsilon_n)/p_n}([0, 1]^D)$, avec $(p_n)_n$ une suite dense dans $[0, \infty]$ et $\epsilon_n \rightarrow 0$.

Soit $(\xi_m)_m$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 tel que pour tout $n, m, \xi_m < \frac{\eta(p_n) - \epsilon_n}{p_n}$.

Alors par la Proposition 4.2.4, $\forall n$,

$$A_{2,n}(f) = \left\{ a \in [0, 1]^{d'} : f_a \in \bigcap_m B_{p_n, p_n}^{\frac{\eta(p_n) - \epsilon_n}{p_n} - \xi_m}([0, 1]^d) \right\}$$

est de mesure de Lebesgue pleine.

On pose $A_3(f) = \bigcap_n A_{2,n}(f)$. Comme une intersection dénombrable d'ensemble de mesure de Lebesgue pleine est de mesure de Lebesgue pleine, $A_3(f)$ est de mesure de Lebesgue pleine.

Soit m fixé, $\forall n$, on pose $\epsilon'_n = \epsilon_n + \xi_m p_n$.

On a alors $\forall a \in A_3(f)$:

$$\forall n, f_a \in B_{p_n, p_n}^{(\eta(p_n) - \epsilon'_n)/p_n}([0, 1]^d).$$

En appliquant la Proposition 4.5.1, on obtient le résultat. \square

De cette Proposition, on va pouvoir obtenir que, pour toute fonction $f \in V^D$, pour Lebesgue presque tout $a \in [0, 1]^{d'}$, l'exposant de Hölder de la trace est supérieur à $s(0)$, ce qui se traduit par les deux Corollaires suivants :

Corollaire 4.5.1. *Soient $0 < d < D$ deux entiers, et soit η fortement d -admissible. Soit $\epsilon > 0$, si $f \in V^D$, il existe un ensemble $\mathcal{A}_3(f)$ de mesure de Lebesgue pleine dans $[0, 1]^{d'}$, tel que pour tout $a \in \mathcal{A}_3(f)$, $\forall q \leq q_c$,*

$$f_a \in C^{s(q) - \epsilon q - dq}([0, 1]^d).$$

Démonstration. Soit $f \in V^D$, $\forall a \in \mathcal{A}_3(f)$, on a $f_a \in V$. Ainsi, $\forall q > 0$, $\forall \epsilon > 0$,

$$f_a \in B_{1/q, 1/q}^{s(q)-\epsilon q}([0, 1]^d)$$

où s définie par la Définition 4.5.2.

Si $q < q_c$, $s(q) - dq > 0$, on peut alors utiliser (4.17), on a :

$$B_{1/q, 1/q}^{s(q)-\epsilon q}([0, 1]^d) \subset C^{s(q)-\epsilon q-dq}([0, 1]^d).$$

□

Corollaire 4.5.2. *Soient $0 < d < D$ deux entiers, et soit η fortement d -admissible. Pour $f \in V^D$, il existe un ensemble $\mathcal{A}_3(f)$ de mesure de Lebesgue pleine dans $[0, 1]^d$ tel que, pour tout $a \in \mathcal{A}_3(f)$, on a :*

$$\forall h < s(0), \quad E_{f_a}(h) = \emptyset. \quad (4.46)$$

Démonstration. La fonction $q \mapsto s(q) - dq$ étant décroissante sur $[0, q_c]$, en utilisant le Corollaire précédent, on obtient la minoration de l'exposant de Hölder. □

4.5.3 Un exposant particulier.

Soit $\alpha \geq 1$. Nous allons démontrer que l'exposant de Hölder de la trace de quasi-toute fonction de V^D est égal à $H(\alpha)$, où

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \inf_{\omega \geq \alpha} \left(\omega \sup_{q > 0} (s(q) - d(1 - \frac{1}{\omega})q) \right). \quad (4.47)$$

Pour cela, on utilisera différentes propriétés de $H(\alpha)$:

Proposition 4.5.3. [28] *Pour $\alpha \geq 1$, $H(\alpha) \in [s(0), dq_c]$, $H(1) = dq_c$ et*

$$\forall H \in [s(0), dq_c], \quad \inf_{p \geq p_c} (Hp - \eta(p) + d) \leq \frac{d}{\alpha}.$$

4.6 Etude d'une fonction particulière.

Tout comme pour la partie 4.3, pour démontrer le premier point du Théorème 4.5.1, on va s'intéresser à un ensemble \mathcal{P} , qui est l'ensemble des fonctions vérifiant le Théorème 4.5.1 c'est-à-dire :

Définition 4.6.1. On définit \mathcal{P} de la façon suivante :

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} f \in V^D : \\ \text{sur un ensemble } \mathcal{A}(f) \text{ de valeurs de mesure de Lebesgue pleine de } [0, 1]^{d'}, \\ \text{l'exposant de Hölder de } f_a \text{ prend ses valeurs dans } \left[s(0), \frac{d}{p_c} \right] \text{ et} \\ \forall H \in \left[s(0), \frac{d}{p_c} \right], d_{f_a}(H) = \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta(p) + d). \end{array} \right\}$$

Là aussi, on construira une intersection dénombrable d'ouverts denses \mathcal{D} , telle que toute fonction de \mathcal{D} ait ses coefficients d'ondelette suffisamment proches des coefficients d'ondelette d'une fonction $g \in \mathcal{P}$ que l'on choisira bien précisément.

En utilisant alors les propriétés des coefficients d'ondelette de g , on arrivera à trouver un encadrement des coefficients d'ondelette des fonctions de \mathcal{D} et on pourra en déduire le Théorème 4.5.1.

Dans un premier temps, on va donc construire cette fonction g . Pour cela, on aura besoin de la définition suivante :

Définition 4.6.2. [46] Pour tout cube $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$, on définit :

$$b(j, \mathbf{k}) = \inf_{p > 0} \left(\frac{d(j - J) - \eta(p)j}{p} \right), \quad (4.48)$$

où J est la génération du cube irréductible Λ associé à $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$. (Donné par la Définition 4.2.6).

Faisons plusieurs remarques sur $b(j, \mathbf{k})$. Tout d'abord, il peut également s'écrire :

$$b(j, \mathbf{k}) = \inf_{q \geq 0} (dq(j - J) - s(q)j) \text{ avec } q = \frac{1}{p}.$$

De plus, si on pose :

$$\rho = d\left(1 - \frac{J}{j}\right), \quad (4.49)$$

comme $0 \leq J \leq j$, ρ prend ses valeurs dans $[0, d]$, celles-ci sont espacées de $\frac{d}{j}$ et on a :

$$b(j, \mathbf{k}) = j \inf_q (\rho q - s(q)).$$

Comme η est fortement d - admissible, on déduit alors :

- Si $0 \leq \rho \leq s'(+\infty)$ le minimum est atteint en $q = +\infty$ et vaut $-\infty$.
- Si $s'(+\infty) < \rho < s'(0)$, le minimum est atteint pour $q \in (0, \infty)$.

— Si $\rho \geq s'(0)$ le minimum est atteint pour $q = 0$ et

$$b(j, \mathbf{k}) = -s(0)j. \quad (4.50)$$

De plus, soit $q_0 > 0$ et $\beta > s(q_0)$, à partir d'un certain j_0 , à toute échelle j , on peut trouver des cubes $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ tels que :

$$\exists \epsilon > 0, \forall q, b(j, \mathbf{k}) \geq j(\epsilon - \beta) + d(j - J)q_0.$$

Ce que l'on peut traduire par le Lemme suivant :

Lemme 4.6.1. *Soit $q_0 > 0$ et $\beta > s(q_0)$.*

Il existe j_0 tel que pour tout $j \geq j_0$, il existe J_1 tel que tous les cubes $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$, dont le cube irréductible associé est $\Lambda = (J_1, \mathbf{K}, \mathbf{L})$, vérifient :

$$\exists \epsilon > 0, \forall q, b(j, \mathbf{k}) \geq j(\epsilon - \beta) + d(j - J_1)q_0.$$

Démonstration. Soit $q_0 > 0$ et $\beta > s(q_0)$. Comme s est concave, on a : $\forall q, s(q_0) + (q - q_0)s'(q_0) \geq s(q)$. Or $0 \leq s'(q_0) \leq d$ et ρ , défini par (4.49) prend également ses valeurs dans $[0, d]$ et les valeurs prises par ρ sont espacées de $\frac{d}{j}$. On peut donc trouver, pour j plus grand qu'un certain j_0 , un ρ (et donc un J_1) tel que :

$$\exists \epsilon > 0, \forall q, \beta + (q - q_0)\rho \geq s(q) + \epsilon.$$

Ainsi il existe ϵ tel que :

$$b(j, \mathbf{k}) \geq j(\epsilon - \beta + \rho q_0) \geq j(\epsilon - \beta) + d(j - J_1)q_0.$$

□

Nous allons maintenant construire la fonction g .

Définition 4.6.3. *On définit la fonction g à l'aide de ses coefficients d'ondelette de la façon suivante : pour tout cube dyadique $\lambda^D = (j, (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), (\mathbf{l}, \mathbf{l}'))$, on pose*

$$g_{\lambda^D} = \begin{cases} 2^{b(j, \mathbf{k})} & \text{si } \mathbf{l}' = (1, 1, \dots, 1) \text{ et } \mathbf{l} \neq (0, \dots, 0), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.51)$$

où $b(j, \mathbf{k})$ est donné par (4.48).

Par un raisonnement similaire au Lemme 4.3.1, en utilisant le fait qu'à p fixé, $b(j, \mathbf{k})p \leq d(j - J) - \eta(p)j$, où J est la génération du cube irréductible Λ associé à $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$, on obtient :

Lemme 4.6.2. *La fonction g appartient à V^D .*

4.6.1 Propriétés de la trace de g .

Observons tout d'abord que, par définition des coefficients d'ondelette de la fonction g , la fonction g_a^0 définie par (4.7) est nulle et que l'on a ainsi $g_\lambda(a) = g_\lambda^1(a)$. Par un raisonnement similaire à la Proposition 4.3.1, on obtient :

Proposition 4.6.1. *Pour tout cube $\lambda \in \Lambda^d \times L^d$ avec $|\lambda| = j$, on a*

$$g_\lambda(a) = 2^{b(j,\mathbf{k})} G_{d'}(2^j a),$$

où $G_{d'}$ est défini par (4.12).

Proposition 4.6.2. *Soit $a \in \mathcal{A}_1$. Pour tout cube $\lambda \in \Lambda^d \times L^d$ avec $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$*

$$|g_\lambda(a)| \leq C_1 2^{b(j,\mathbf{k})}.$$

Démonstration. On utilise la Proposition 4.6.1 et l'équation (4.14). \square

Proposition 4.6.3. *Pour $a \in A_1$, il existe j_a tel que, pour tout cube $\lambda \in \Lambda^d \times L^d$ tel que $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ et $j \geq j_a$, on a :*

$$|g_\lambda(a)| \geq j^{-2d'} 2^{b(j,\mathbf{k})}. \quad (4.52)$$

De plus, si $\Lambda = (J, \mathbf{K}, \mathbf{L})$ est le cube irréductible associé à λ avec :

$$\frac{j}{J} \geq \frac{d}{d - s'(0)}$$

alors :

$$\forall \alpha \geq 1, |g_\lambda(a)| \geq j^{-2d'} 2^{-H(\alpha)j}. \quad (4.53)$$

Démonstration. Comme $a \in A_1$ et $j \geq j_a$ selon la Proposition 4.2.3, on a :

$$|G_{d'}(2^j a)| > \frac{1}{j^{2d'}}.$$

En utilisant la Proposition 4.6.1, on obtient (4.52).

De plus, selon la Proposition 4.5.3, $H(\alpha) \geq s(0)$. Or comme $\frac{j}{J} \geq \frac{d}{d - s'(0)}$, on a $\rho = d(1 - \frac{J}{j}) \geq s'(0)$ et donc, selon (4.50), $b(j, \mathbf{k}) = -s(0)j$. Ainsi $H(\alpha) \geq \frac{-b(j,\mathbf{k})}{j}$. En utilisant alors (4.52), on obtient (4.53). \square

Lemme 4.6.3. $\forall a \in \mathcal{A}_1, \forall 0 < q < \infty, \forall \delta > 0$, on a $g_a \in V$ et $g_a \notin B_{p,\infty^p}^{\frac{\eta(p)+\delta}{j}}([0, 1]^d)$.

Démonstration. Soit $a \in \mathcal{A}_1$. Pour démontrer que $g_a \in V$, on utilise un raisonnement similaire au Lemme 4.3.2 et le fait qu'à p fixé, $b(j, \mathbf{k})p \leq d(j - J) - \eta(p)j$. Pour démontrer le second point du Lemme, il suffit de montrer que, pour tout $q_0 \geq 0$ et $\beta > s(q_0)$, on a

$$g_a \notin B_{\frac{1}{q_0}, \infty}^\beta([0, 1]^d).$$

On utilise la caractérisation de $B_{\frac{1}{q_0}, \infty}^\beta([0, 1]^d)$ donnée par la Définition 4.2.3.

Soit $j \geq \max(j_0, j_a)$ (définis respectivement dans le Lemme 4.6.1 et par la Proposition 4.2.3). On pose :

$$A_j := 2^{j(\beta/q_0 - d)} \sum_{\lambda \in \Lambda^d \times L^d: |\lambda|=j} |g_\lambda(a)|^{1/q_0}.$$

En utilisant (4.52) puis le Lemme 4.6.1, il existe ϵ tel que :

$$\begin{aligned} A_j &\geq 2^{j(\beta/q_0 - d)} \sum_{\lambda \in \Lambda^d \times L^d: |\lambda|=j} \left| j^{-2d'} 2^{b(j, \mathbf{k})} \right|^{1/q_0} \\ &\geq j^{-2d'/q_0} 2^{j(\beta/q_0 - d)} \sum_{\lambda \in \Lambda^d \times L^d: |\lambda|=j: |\Lambda|=J_1} (2^{j(\epsilon - \beta) + d(j - J_1)q_0})^{1/q_0} \\ &\geq j^{-2d'/q_0} \sum_{\lambda \in \Lambda^d \times L^d: |\lambda|=j: |\Lambda|=J_1} 2^{\epsilon j/q_0 - dJ_1}. \end{aligned}$$

Or à j fixé, il y a $\frac{2^{J_1 d}}{2^d}$ cubes $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ tel que le cube irréductible associé soit de la forme (J_1, \mathbf{K}) d'où :

$$A_j \geq C j^{-2d'/q_0} 2^{\epsilon j/q_0},$$

qui tend vers l'infini quand j tend vers l'infini. Comme ce résultat est vrai pour tout q_0 , on en déduit le Lemme. \square

Remarque 4.6.1. Par le même raisonnement qu'au Corollaire 4.5.1, on en déduit que $\forall \epsilon > 0, \forall q < q_c, g_a \in C^{s(q) - \epsilon q - dq}([0, 1]^d)$.

Proposition 4.6.4. $\forall a \in \mathcal{A}_1, \forall 0 < p < \infty, \eta_{g_a}(p) = \eta(p)$.

Démonstration. $\forall a \in \mathcal{A}_1, \forall 0 < p < \infty$.

En utilisant le Lemme précédent, on a :

$$\forall \delta > 0, \eta_{g_a}(p) \leq \eta(p) + \delta$$

De plus, comme $g_a \in V$ et que $B_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p,\infty}^s$, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \eta_{g_a}(p) \geq \eta(p) - \epsilon.$$

En faisant tendre δ et ϵ vers 0, on obtient le résultat. \square

4.6.2 Calcul de l'exposant de Hölder de g_a en un point α -approximable.

Proposition 4.6.5. *Soit $a \in A_1$, $\alpha \geq 1$ et $x \in [0, 1]^d$ tel que $\alpha(x) = \alpha$ alors*

$$h_{g_a}(x) = H(\alpha(x)).$$

Majoration de l'exposant de Hölder.

On va commencer par montrer que $h_{g_a}(x) \leq H(\alpha)$.

Pour cela, il suffit d'exhiber une suite de coefficients d'ondelette $g_\lambda(a)$ telle que :

$$\frac{\log(|g_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} \leq H(\alpha)$$

et d'appliquer la Proposition 4.2.2.

On va, pour cela, considérer la suite des coefficients d'ondelette pour lesquels, on a

$$\left| x - \frac{\mathbf{k}}{2^j} \right| \leq \frac{1}{2^j}$$

et tels que, de plus, $\frac{j}{J} \geq \frac{d}{d-s'(0)}$, J étant l'échelle du cube irréductible associé. En utilisant (4.53), quand $\lambda \rightarrow x$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\log(|g_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} &\leq \frac{\log \left| j^{-2d'} 2^{-H(\alpha)j} \right|}{-j \log 2} (1 + o(1)) \\ &\leq \left(\frac{2d' \log(j)}{j \log 2} + \frac{H(\alpha)j \log 2}{j \log 2} \right) (1 + o(1)) \\ &\leq \left(\frac{2d' \log(j)}{j \log 2} + H(\alpha) \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

En faisant tendre j vers l'infini, on a alors $h_{g_a}(x) \leq H(\alpha)$.

Minoration de l'exposant de Hölder.

On va maintenant montrer que $h_{g_a}(x) \geq H(\alpha)$. Cette fois, il va falloir que, pour tous les coefficient d'ondelette à partir d'un certain rang j , on ait :

$$\frac{\log(|g_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} \geq H(\alpha)$$

puis appliquer la Proposition 4.2.2. Pour cela, on classera les coefficients d'ondelette en deux catégories et on montrera que l'on obtient la minoration voulue pour chaque catégorie.

Soit $\epsilon > 0$.

Considérons tout d'abord, les cubes $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ tels que $|x - \frac{\mathbf{k}}{2^j}| \leq 2^{-j}$.

Soit $\lambda = (j, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ fixé. On considérera désormais les coefficients pour lesquels $J \geq J_0$ où J_0 est défini par le Lemme 4.2.1.

En utilisant la Proposition 4.6.2, quand $\lambda \rightarrow x$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\log(|g_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} &\geq \frac{\log C_1 2^{b(j,k)}}{-j \log 2} (1 + o(1)) \\ &\geq \left(\frac{\log C_1}{-j \log 2} + \sup_q (dq(\frac{J}{j} - 1) + s(q)j) \right) (1 + o(1)) \\ &\geq \left(\frac{\log C_1}{-j \log 2} + \sup_q (dq(\frac{1}{\alpha(x) + \epsilon} - 1) + s(q)) \right) \\ &\quad \times (1 + o(1)). \end{aligned} \tag{4.54}$$

La dernière minoration provient du Lemme 4.2.1.

Considérons maintenant les autres cubes, c'est-à-dire, ceux pour lesquels $|x - \frac{\mathbf{k}}{2^j}| > 2^{-j}$.

En utilisant la Proposition 4.6.2, quand $j \rightarrow +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\log(|g_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} &\geq \frac{\log C_1 2^{b(j,k)}}{\log(|x - \lambda|)} (1 + o(1)) \\ &\geq \left(\frac{\log C_1}{\log(|x - \lambda|)} + \frac{\sup_q (dq(J - j) + s(q)j) \log 2}{-\log(|x - \lambda|)} \right) (1 + o(1)) \\ &\geq \left(\frac{\log C_1}{\log(|x - \lambda|)} + \sup_q (dq(\frac{1}{\alpha(x) + \epsilon} - 1) + s(q)) \right) \\ &\quad \times (1 + o(1)). \end{aligned} \tag{4.55}$$

La dernière minoration provient du fait que $|x - \lambda| \geq 2^{-j}$ et du Lemme 4.2.1.

En faisant tendre j vers l'infini dans (4.54) et λ vers x donc j vers l'infini dans (4.55),

on obtient $h_{g_a}(x) \geq \sup_q (dq(\frac{1}{\alpha(x)+\epsilon} - 1) + s(q))$. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient alors,

$$h_{g_a}(x) \geq \sup_q (dq(\frac{1}{\alpha(x)} - 1) + s(q)),$$

qui est plus grand que $H(\alpha)$ (défini par (4.47)), puisque cela correspond au cas $\omega = \alpha(x)$.

4.6.3 Calcul du spectre de singularités

Proposition 4.6.6. *Pour Lebesgue presque tout $a \in [0, 1]^{d'}$,*

$$\forall H \in [s(0), dq_c], \quad d_{g_a}(H) = \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta(p) + d).$$

Démonstration. La majoration du spectre est déjà donnée par (4.43).

Soit $a \in \mathcal{A}_1$ et $\alpha \geq 1$, des Propositions 4.6.5 et 4.2.6, on a :

$$d(H(\alpha)) \geq \frac{d}{\alpha}.$$

La minoration voulue est alors obtenue en utilisant la Proposition 4.5.3. □

4.7 Le premier point du Théorème 4.5.1.

On va construire une intersection dénombrable d'ouverts denses, appelée \mathcal{D} . Rappelons que l'on note g_{λ^D} les coefficients d'ondelette de la fonction g . Comme V^D est séparable (Proposition 4.5.1), on peut prendre une suite $(f_n)_n$ dense dans V^D .

Définition 4.7.1. *On définit une suite de fonctions $(g_n)_n$ de la façon suivante :*

- (i) *On note g_{n,λ^D} les coefficients d'ondelette de g_n .*
- (ii) *Si $j < n$ les coefficients d'ondelette de g_n sont ceux de f_n .*
- (iii) *Si $j \geq n$ les coefficients d'ondelette de g_n sont ceux de la fonction g .*

Remarque 4.7.1. $\|f_n - g_n\|_{V^D} \rightarrow 0$ donc $(g_n)_n$ est dense dans V^D .

Définition 4.7.2. *On définit l'intersection dénombrable d'ouverts denses \mathcal{D} de la façon suivante :*

$$\mathcal{D} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geq N} B(g_n, r_n) \right) \quad \text{où} \quad \bigcup_{n \geq N} B(g_n, r_n) \text{ est un ouvert dense,}$$

avec r_n tel que

$$R_n = \frac{2^n r_n}{1 - 2^n r_n} = \frac{2^{-\frac{\epsilon_n + D}{p_n} n}}{4Rn^{2d'}},$$

où ϵ_n et p_n sont définis par la Proposition 4.5.1, et R défini comme dans la partie 4.4.

On va maintenant montrer que $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$.

4.7.1 Propriétés des coefficients d'ondelette de la trace d'une fonction $f \in \mathcal{D}$.

Soit $f \in \mathcal{D}$. On notera d_{λ^D} les coefficients d'ondelette de f . Remarquons tout d'abord que si $f \in B(g_n, r_n)$, alors, en utilisant (4.44), on a : $\forall n$ tel que $p_n \geq 1$

$$\left(\sum_j \left(\sum_{\lambda^D} |d_{\lambda^D} - g_{n,\lambda^D}|^{p_n} 2^{(\eta(p_n) - \epsilon_n - D)j} \right) \right)^{1/p_n} \leq R_n. \quad (4.56)$$

On considérera dans la suite les n tels que $p_n \geq 1$ et on pose $q_n = \frac{1}{p_n}$. On se retrouve alors avec le même type d'inégalité que dans le cas d'un espace de Besov, à l'aide de la Proposition 4.6.3 par les mêmes raisonnements que dans la partie 4.4, on obtient :

Proposition 4.7.1. $\forall \alpha \geq 1$. Pour $a \in A_1$, il existe j_a tel que, si $f \in B(g_n, r_n)$ avec $n \geq j_a$ pour tout cube $\lambda = (n, \mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda^d \times L^d$ on a :

$$|d_\lambda(a)| \geq \frac{|g_\lambda(a)|}{2}.$$

De plus si $\Lambda = (J, \mathbf{K}, \mathbf{L})$ est le cube irréductible associé à λ avec :

$$\frac{n}{J} \geq \frac{d}{d - s'(0)}$$

on a :

$$|d_\lambda(a)| \geq \frac{1}{2} n^{-2d'} 2^{-H(\alpha)n}.$$

4.7.2 Exposant de Hölder de la trace de f .

Soit $\alpha \geq 1$, $f \in D$, d_{λ^D} ses coefficients d'ondelette. La fonction f appartient à une infinité de boules $B(g_n, r_n)$. On note $(B_{n_m})_m$, la suite de ces boules.

A cette suite $(n_m)_m$ on associe $\mathcal{X}^\alpha(f)$ défini par (4.20) c'est-à-dire :

$$\mathcal{X}^\alpha(f) = \left\{ x \in [0, 1]^d : \text{il existe une infinité de } m \text{ tel que : } \exists \mathbf{K}_{n_m} \in \mathbb{Z}^d - 2\mathbb{Z}^d : \left| x - \frac{\mathbf{K}_{n_m}}{2^{\lfloor n_m/\alpha \rfloor}} \right| \leq \frac{1}{2^{n_m}} \right\}.$$

On pose $\mathcal{A}(f) = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3(f)$ (\mathcal{A}_1 et $\mathcal{A}_3(f)$ sont données par les Propositions 4.2.3 et 4.5.2). $\mathcal{A}(f)$ est de mesure de Lebesgue pleine dans $[0, 1]^d$.

Proposition 4.7.2. *Soit $f \in D$, $a \in \mathcal{A}(f)$, $x \in \mathcal{X}^\alpha(f)$ alors,*

$$h_{f_a}(x) \leq H(\alpha).$$

Démonstration. Comme $x \in \mathcal{X}^\alpha(f)$, il existe une infinité de couple (n_m, \mathbf{K}_{n_m}) tels que :

$$\left| x - \frac{\mathbf{K}_{n_m}}{2^{\lfloor n_m/\alpha \rfloor}} \right| \leq \frac{1}{2^{n_m}}. \quad (4.57)$$

Grâce aux Propositions 4.5.2 et 4.2.2, pour obtenir la Proposition 4.7.2 il suffit de majorer

$$\frac{\log(|d_\lambda(a)|)}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)}$$

pour une suite de coefficients d'ondelette bien choisis.

On va considérer les cubes $\lambda_m = (n_m, \mathbf{k}, \mathbf{l})$ tels que :

$$n_m \geq j_a, \quad \frac{\mathbf{k}}{2^{n_m}} = \frac{\mathbf{K}_{n_m}}{2^{\lfloor n_m/\alpha \rfloor}} \text{ et } \frac{n_m}{J} \geq \frac{d}{d - s'(0)}, \quad (4.58)$$

où j_a est défini par la Proposition 4.7.1.

Grâce à (4.57), pour $\lambda_m \rightarrow x$:

$$\frac{1}{\log(2^{-n_m} + |x - \lambda_m|)} = \frac{1}{-n_m \log 2} (1 + o(1)).$$

A l'aide de la Proposition 4.7.1, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{\log(|d_{\lambda_m}|)}{\log(2^{-n_m} + |x - \lambda_m|)} &\leq \frac{\log(\frac{1}{2} n_m^{-2d'} 2^{-H(\alpha)n_m})}{-n_m \log 2} (1 + o(1)) \\ &\leq \left(\frac{1}{n_m} + 2d' \frac{\log n_m}{n_m \log 2} + H(\alpha) \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

On obtient la majoration voulue, en faisant tendre m vers l'infini. \square

Corollaire 4.7.1. *Pour quasi-toute fonction $f \in V^D$, pour Lebesgue presque tout $a \in [0, 1]^{d'}$*

$$\text{si } H \notin [s(0), dq_c], \text{ alors } E_f(H) = \emptyset.$$

Démonstration. Soit $f \in D$ et $a \in \mathcal{A}(f)$.

En prenant $\alpha = 1$ dans la Proposition 4.7.2, on a :

$$\forall x \in [0, 1]^d, h_{f_a}(x) \leq dq_c.$$

car $H(1) = dq_c$ selon la Proposition 4.5.3.

On conclut en utilisant le Corollaire 4.5.2. □

4.7.3 Calcul du spectre de singularités.

Proposition 4.7.3. *Pour quasi-toute fonction $f \in V^D$, pour Lebesgue presque tout $a \in [0, 1]^{d'}$,*

$$\text{si } H \in [s(0), \frac{d}{p_c}] \text{ alors } d_{f_a}(H) = \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta(p) + d).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}$, $a \in \mathcal{A}(f)$.

En utilisant successivement les Propositions 4.7.2, 4.2.5 et 4.5.3, on obtient :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{H}} \{x \in \mathcal{X}^\alpha(f), h_{f_a}(x) \leq H(\alpha)\} &= \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{X}^\alpha(f) \\ &= \frac{d}{\alpha} \\ &\geq \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta(p) + d). \end{aligned}$$

De plus, par la Proposition 4.2.5, on a :

$$\dim_{\mathcal{H}} \{x \in \mathcal{X}^\alpha(f), h_{f_a}(x) \leq H(\alpha)\} = \dim_{\mathcal{H}} \{x \in \mathcal{X}^\alpha(f), h_{f_a}(x) = H(\alpha)\}.$$

On obtient ainsi une minoration du spectre de singularités, on déduit alors le résultat de (4.43). □

4.8 Second point du Théorème 4.5.1

Soit $f \in D$, on va montrer que, pour Lebesgue presque tout $a \in [0, 1]^{d'}$, $\forall p > 0$, $\eta_{f_a}(p) = \eta(p)$.

Comme $f \in V^D$, selon la Proposition 4.5.2, pour Lebesgue presque tout a , $f_a \in V$. Grâce aux injections entre espace de Besov (voir (4.16)), on déduit que $\eta_{f_a}(p) \geq \eta(p)$. En utilisant la Proposition 4.7.1 et le Lemme 4.6.3, on a, si $f \in D$, pour Lebesgue presque tout $a \in [0, 1]^{d'}$, $f_a \notin B_{p, \infty}^{\frac{\eta(p)+\epsilon}{p}}$ et donc $\eta_{f_a}(p) \leq \eta(p)$, d'où le résultat.

Chapitre 5

A function which is its own multifractal spectrum

Abstract : We will construct a function which is its own multifractal spectrum ie $f = d_f$.

It will be obtained as an infinite superposition of C^1 -by part functions.

The function f has a very specific form, that we call *visible* : from the origin $(0, 0)$, one can see every point of the graph $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ of f where $0 \leq a < b \leq +\infty$. Moreover, the function f we build is homogeneously multifractal, i.e. its restriction on any subinterval of $[0, 1]$ has the same multifractal spectrum as the function f itself.

5.1 Introduction

The goal of this part is to investigate the possible forms that a multifractal spectrum can take. We will construct a function which is a fixed point for the multifractal spectrum application $f \mapsto d_f$, i.e. $f = d_f$. It is a natural question to ask for the existence of such a function : it has been asked for the Fourier transformation or many other operators. The fixed point f will be obtained as an infinite superposition of C^1 -by part functions. We do not obtain a characterization of the functions f satisfying this property, but this could certainly be studied.

Let us start by recalling the notions of local regularity and multifractal analysis for functions.

Definition 5.1.1. *Let $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ and $\alpha \geq 0$. The function f is said to belong to the space $C^\alpha(x_0)$, if there exists a polynomial P of degree at most $[\alpha]$ and a*

constant $C > 0$ such that locally around x_0 :

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C |x - x_0|^\alpha. \quad (5.1)$$

The local regularity of f at x_0 is measured by the pointwise Hölder exponent :

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)\}.$$

If α is an integer, we use the (unusual) convention : $[\alpha] = \alpha - 1$. Remark that if $\alpha \leq 1$ the condition (5.1) is, in fact :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C |x - x_0|^\alpha. \quad (5.2)$$

Given a function f , this exponent $h_f(x_0)$ typically varies erratically with x_0 , and the relevant information is then provided by the multifractal spectrum d_f of f , defined as the mapping

$$d_f : h \in [0, \infty] \longmapsto \dim E_f(h),$$

where $E_f(h)$ is the iso-Hölder set

$$E_f(h) := \{x_0 \in \mathbb{R}^D : h_f(x_0) = h\}.$$

In the definition of the multifractal spectrum, \dim stands for the Hausdorff dimension, and by convention $\dim \emptyset = -\infty$. The spectrum of singularities d_f describes the geometrical distribution of the singularities of f .

The main result is then easy to state.

Theorem 5.1.1. *There exists a continuous function $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfying*

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = d_f(x). \quad (5.3)$$

The function we build is monotone increasing, satisfying $f(0) = 0$ and $f(1) = 1$, thus it can also be viewed as a measure on $[0, 1]$. In particular, it is known [17] that for such functions, one necessarily has $d_f(h) \leq h$ for every $h \in [0, 1]$. This in turn implies that the graph of f itself is below the diagonal. The function f has also a very specific form, that we call *visible*. This shape is due to its construction : f is obtained as series of monotone increasing functions, which are affine by part. Each finite sum is thus affine by part, but the infinite sum, though Lebesgue almost-differentiable by the Lebesgue theorem, is multifractal, and exhibits a whole range of exponents between 0 and 1. On top of that, the function f we build is homogeneously multifractal in

the sense of [13] or [12], i.e. its restriction on any sub interval of $[0, 1]$ has the same multifractal spectrum as the function f itself. But, of course, the restriction does not satisfy (5.3) any more!

As said before, we do not obtain a characterization of the functions f satisfying (5.3), and this does not seem reachable nor reasonable. Being a fixed point for the multifractal spectrum application is extremely unstable, and we do not hope to find general answers to such questions. But our work is a part of a general scheme of investigation of the possible shapes that a multifractal spectrum can take, see for instance [20].

5.2 Functions with increasing visibility

We are going to build a function which enjoys a specific property, that we call *increasing-visibility*.

Definition 5.2.1. *Let $0 \leq a < b \leq +\infty$. A function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ is with increasing-visibility if f is continuous at a and for every $x \in (a, b]$, the function*

$$x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

is increasing.

We call $V_{a,b}$ the set of functions with increasing visibility on the interval $[a, b]$.

Remark that a function with increasing visibility is increasing and such that for every $x \in (a, b]$,

$$\frac{f(x)}{x} \geq \sup_{a < x' \leq x} \frac{f(x')}{x'}.$$

It explains, geometrically why this functions are called visible :

the functions in $V_{a,b}$ are called visible, because from the origin $(0, 0)$, one can see every point of the graph $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ of f .

Remark that functions such that $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ is decreasing verify this geometrical propertie too.

To have a first idea of the form of function with increasing visibility, we give an example using piecewise affine function.

First, set $0 \leq a < b \leq +\infty$ and remark that if $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ is an affine function such that :

$$f(x) = \alpha(x - a) + \beta.$$

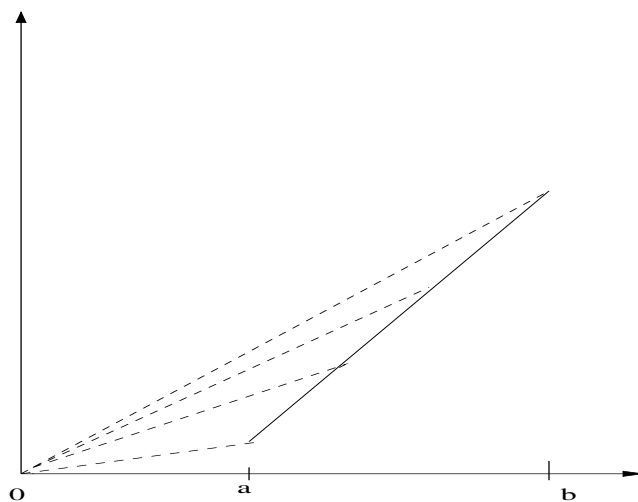


FIGURE 5.1 – Allure of an affine function f with increasing visibility.

One has :

$$f \in V_{a,b} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \geq 0 \text{ and } \beta \geq 0 & \text{since } f \geq 0 \\ \alpha a \geq \beta & \text{since } x \mapsto \frac{\alpha(x-a)+\beta}{x} \text{ is increasing.} \end{cases}$$

See the Figure 5.1

Now, set $0 \leq a < b < c \leq +\infty$ and $g : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^+$ a piecewise affine function such that :

$$g(x) = \begin{cases} \alpha(x-a) + \beta & \text{if } x \in [a; b] \\ \alpha'(x-b) + \beta' & \text{if } x \in [b; c]. \end{cases}$$

One has :

$$g \in V_{a,b} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha, \beta, \alpha', \beta' \geq 0 \\ \alpha a \geq \beta \text{ and } \alpha' b \geq \beta' \\ \text{the jump between the pieces is non negative} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha, \beta, \alpha', \beta' \geq 0 \\ \alpha a \geq \beta \text{ and } \alpha' b \geq \beta' \\ \alpha(b-a) + \beta \leq \beta'. \end{cases}$$

See the Figure 5.2.

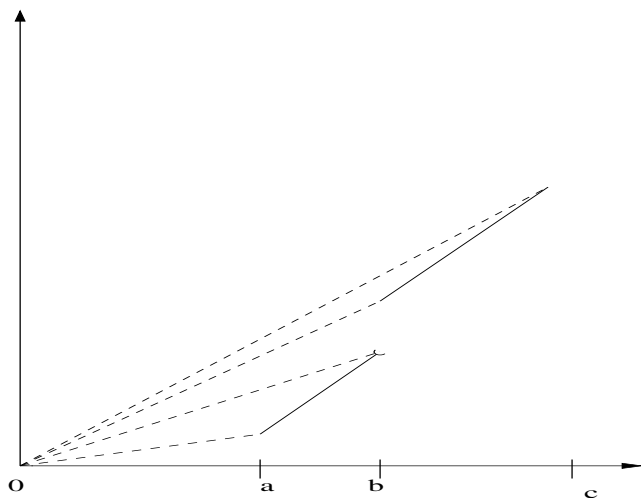


FIGURE 5.2 – Allure of a piecewise affine function g with increasing visibility.

Thus, in the general case, for any piecewise affine function, to be a function with increasing visibility, the previous condition has to be fulfilled on every two consecutive pieces.

In the next, we will need to construct continuous function with increasing visibility. To obtain that, we will use piecewise affine function with increasing visibility. For example, in using the function g , $x_1 \in [a, b)$ and $x_2 \in [b, c)$, we obtain a continuous function h , with increasing visibility, define by

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } x \notin [x_1; x_2] \\ \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + g(x_1) & \text{else.} \end{cases}$$

Geometrically, we use a piecewise affine function with increasing visibility, two consecutive pieces, a point of the graph of each piece and we draw a segment joining this two points : see the Figure 5.3

5.2.1 First properties of functions with increasing visibility

Observe that if $a = 0$, then every $f \in V_{0,b}$ satisfies $f(0) = 0$.

A natural way to construct functions with increasing visibility is the following.

Lemma 5.2.1. *Let $0 \leq a < b \leq +\infty$. For every function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$, let us*

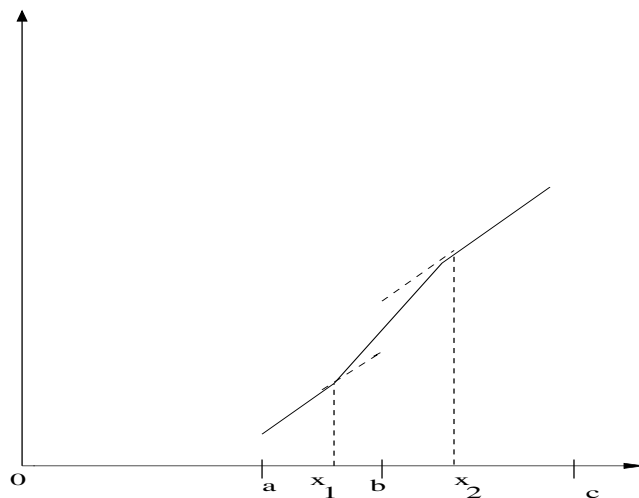


FIGURE 5.3 – Allure of a piecewise affine continuous function h with increasing visibility.

construct the function $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ as follows : $\tilde{f}(a) = f(a)$ and

$$\forall x \in (a, b], \quad \tilde{f}(x) = x \sup_{a < x' \leq x} \frac{f(x')}{x'}.$$

The function \tilde{f} is non-decreasing on its support, and one always has $f \leq \tilde{f}$. Then

$$V_{a,b} = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ such that } f = \tilde{f} \right\}.$$

The proof is immediate.

Lemma 5.2.2. *Let $f \in V_{0,b}$ then f is differentiable at 0.*

Proof :

The ratio $\frac{f(x)}{x}$ is positive and non-decreasing, hence it has a limit when $x \rightarrow 0$. □

Lemma 5.2.3. *For any a, b , the set $V_{a,b}$ is stable under addition, positive multiplication and max , and $V_{0,b}$ is also stable under positive dilation. It is closed using the supremum norm.*

Proof : Let $f, g \in V_{a,b}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. One uses that $f = \tilde{f}$ and $g = \tilde{g}$.

Set $s = f + g$. On one side, one always has $s \leq \tilde{s}$, hence $s = f + g = \tilde{f} + \tilde{g} \leq \tilde{s}$. On the other side, for every x ,

$$\begin{aligned} s(x) &= f(x) + g(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x) = x \left(\sup_{a < x' \leq x} \frac{f(x')}{x'} + \sup_{a < x' \leq x} \frac{g(x')}{x'} \right) \\ &\geq x \sup_{a < x' \leq x} \frac{f(x') + g(x')}{x'} = \tilde{s}(x). \end{aligned}$$

Hence $s = \tilde{s}$.

It is obvious that if $t(x) = \lambda f(x)$, $t \in V_{a,b}$.

Set $m = \max(f, g)$, since $f, g \in V_{a,b}$, by Lemma 5.2.2, the mapping $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ and the mapping $x \mapsto \frac{g(x)}{x}$ are non-decreasing on $[a, b]$. So, one has, for every x :

$$\tilde{m}(x) = x \sup_{a < x' \leq x} \frac{\max(f(x'), g(x'))}{x'} = \frac{\max(f(x), g(x))}{x} = m(x)$$

Hence $m = \tilde{m}$.

Now, set $u(x) = f(\lambda x)$, where $f \in V_{0,b}$. One has :

$$\tilde{u}(x) = x \sup_{0 < x' \leq x} \frac{u(x')}{x'} = x \sup_{0 < x' \leq x} \frac{f(\lambda x')}{x'} = \lambda x \sup_{0 < x' \leq \lambda x} \frac{f(x')}{x'} = f(\lambda x) = u(x).$$

Set (f_n) a sequence of $V_{a,b}$ converging to a function f .

For every $x \in (a, b]$, one sets a' such that $a < a' < x$, one has

$$\begin{aligned} \left| \tilde{f}(x) - f(x) \right| &= \left| x \sup_{0 < x' \leq x} \frac{f(x')}{x'} - f(x) \right| \\ &\leq \left| x \sup_{a < x' \leq x} \frac{f(x') - f_n(x')}{x'} \right| + \left| x \sup_{a < x' \leq x} \frac{f_n(x')}{x'} - f(x) \right| \\ &= \left| x \sup_{a < x' \leq x} \frac{f(x') - f_n(x')}{x'} \right| + \left| \tilde{f}_n(x) - f(x) \right| \\ &\leq \left| x \sup_{a < x' \leq a'} \frac{f(x') - f_n(x')}{x'} \right| + \left| x \sup_{a' < x' \leq x} \frac{f(x') - f_n(x')}{x'} \right| \\ &\quad + |f_n(x) - f(x)| \text{ as } \tilde{f}_n = f_n \end{aligned}$$

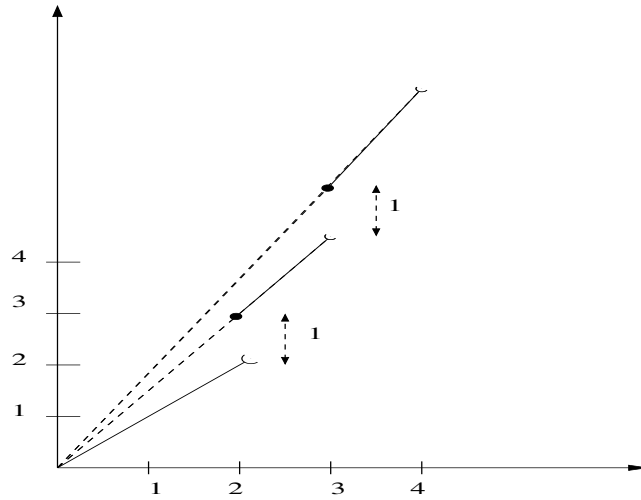


FIGURE 5.4 – Allure of the function $\widehat{\xi}$.

To conclude, we do n converging to $+\infty$ and a' converging to a .
Hence $f = \tilde{f}$.

□

5.2.2 Construction of a discontinuous function with increasing visibility on \mathbb{R}

Definition 5.2.2. Let $\widehat{\xi} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ be the function defined as follows. We set $\widehat{\xi}(0) = 0$, $\widehat{\xi}(1) = 1$, and for every $n \geq 2$,

$$\frac{\widehat{\xi}(n)}{n} = \frac{\widehat{\xi}(n-1)}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Then, for every $n \in \mathbb{N}$ and $x \in (n, n+1)$, we set

$$\widehat{\xi}(x) = \begin{cases} x & \text{if } n = 0 \\ \frac{\widehat{\xi}(n)}{n} \times x & \text{if } n \geq 1. \end{cases}$$

Geometrically, $\widehat{\xi}$ is a piecewise affine function which jump between two pieces of size 1. See Figure 5.4.

Observe that $\widehat{\xi}$ is left-discontinuous exactly at each integer $n \geq 1$, with a positive jump of size 1.

Lemma 5.2.4. *The function $\widehat{\xi}$ is with increasing visibility on \mathbb{R}^+ ,*

$$\frac{\widehat{\xi}(n)}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

and

$$n \ln n \leq \widehat{\xi}(n) \leq n(1 + \ln n).$$

Proof : By construction,

$$\frac{\widehat{\xi}(n)}{n} - \frac{\widehat{\xi}(n-1)}{n-1} = \frac{1}{n}$$

Since $\widehat{\xi}$ is affine on each interval, one has :

$$\frac{\widehat{\xi}(n)}{n} = \frac{\widehat{\xi}(1)}{1} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{\widehat{\xi}(k)}{k} - \frac{\widehat{\xi}(k-1)}{k-1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

To conclude, we use :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &\leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} \\ &\leq 1 + \ln n, \end{aligned}$$

and :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &\geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \\ &\geq \ln n. \end{aligned}$$

□

In order to prove Theorem 5.1.1, we are going to use a sequence of functions $\xi_n \in V_{0,1}$ built from $\widehat{\xi}$ as follows.

Definition 5.2.3. *Let $(j_n)_{n \geq 1}$ be an increasing sequence of integers (that will be fixed later on). We set for every $n \geq 1$*

$$\forall x \in [0, 1], \quad \xi_n(x) = \frac{\widehat{\xi}(2^{j_n} x)}{\widehat{\xi}(2^{j_n}) 2^n}.$$

Obviously, by the properties of functions with increasing visibility, $\xi_n \in V_{0,1}$, and one has

$$\xi_n(x) \leq \frac{x}{2^n}, \quad \forall x \in [0, 1],$$

the inequality being strict when $x \in (0, 1)$. In fact, it is easy to see that $\xi_n(x) \sim \frac{x}{2^n} + \frac{x \log x}{2^n j_n \log 2}$.

Moreover, since $\widehat{\xi}$ has a jump of size 1 at every integer, ξ_n has a jump of size $\frac{1}{\widehat{\xi}(2^{j_n})2^n}$ at every dyadic number $k2^{-j_n}$.

Lemma 5.2.5. *For every $n \geq 1$, for every $k \in \{0, \dots, 2^{j_n} - 1\}$, one has*

$$\frac{\ln k}{2^{j_n+n}(1+j_n)} \leq \xi_n((k+1)2^{-j_n}) - \xi_n(k2^{-j_n}) \leq \frac{9}{2^{j_n+n}}.$$

Proof : One has, for $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \xi_n((k+1)2^{-j_n}) - \xi_n(k2^{-j_n}) &= \frac{\widehat{\xi}(k+1) - \widehat{\xi}(k)}{\widehat{\xi}(2^{j_n})2^n} \\ &= \frac{\frac{\widehat{\xi}(k)}{k}(k+1) + 1 - \widehat{\xi}(k)}{\widehat{\xi}(2^{j_n})2^n} \\ &= \frac{\frac{\widehat{\xi}(k)}{k} + 1}{\widehat{\xi}(2^{j_n})2^n} \end{aligned}$$

Using Lemma 5.2.4, one has :

$$\begin{aligned} \frac{\ln k + 1}{2^{j_n}(1 + \ln 2^{j_n})2^n} &\leq \xi_n((k+1)2^{-j_n}) - \xi_n(k2^{-j_n}) \leq \frac{1 + \ln k + 1}{2^{j_n} \ln 2^{j_n} 2^n} \\ \frac{\ln k + 1}{2^{j_n+n}(1 + j_n \ln 2)} &\leq \xi_n((k+1)2^{-j_n}) - \xi_n(k2^{-j_n}) \leq \frac{2}{2^{j_n+n} \ln 2} + \frac{\ln k}{2^{j_n+n} \ln 2^{j_n}}. \end{aligned}$$

Hence, one has

$$\frac{\ln k}{2^{j_n+n}(1+j_n)} \leq \xi_n((k+1)2^{-j_n}) - \xi_n(k2^{-j_n}) \leq \frac{9}{2^{j_n+n}}, \quad (5.4)$$

where we used $k \leq 2^{j_n}$.

□

5.3 Construction of the function f

As said in the introduction, the function f will be obtained as a sum of an infinite positive functions Φ_n , which will be defined iteratively.

We start our induction with $j_1 = 1$, and the function $f_1(x) = \Phi_1(x) = \frac{x}{2}$. We explain how to construct f_2 , and then one proves the induction by constructing the functions f_n .

5.3.1 Construction of f_2 .

We set $\alpha_{2,1} = \frac{1}{2}$ and choose $j_2 \gg j_1$ so that

$$2^{\left\lceil j_2 \left(1 - \frac{f_1(\alpha_{2,1})}{\alpha_{2,1}}\right) \right\rceil} \geq 2^2. \quad (5.5)$$

Definition 5.3.1. *The set $\mathcal{A}_{2,1}$ is the set of those integers $k \in \{1, \dots, 2^{j_2}\}$ of the form*

$$k = 1 + p 2^{\left\lceil j_2 \left(1 - \frac{f_1(\alpha_{2,1})}{\alpha_{2,1}}\right) \right\rceil}, \text{ where } p \in \left\{1, \dots, 2^{\left\lceil j_2 \frac{f_1(\alpha_{2,1})}{\alpha_{2,1}} \right\rceil} - 1\right\}.$$

The dyadic numbers $k2^{-j_2}$, where $k \in \mathcal{A}_{2,1}$, are uniformly distributed in the interval $[0, 1]$. This is key in our construction.

Definition 5.3.2. *For every $k \in \{0, \dots, 2^{j_2}\}$ and every $\alpha \in (0, 1)$ one sets*

$$\begin{aligned} I_{j,k} &= [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}], \\ x_{j,k}(\alpha) &= (k+1)2^{-j} - 2^{-\frac{j}{\alpha}}, \\ I_{j,k}(\alpha) &= [x_{j,k}(\alpha), (k+1)2^{-j}]. \end{aligned}$$

Definition 5.3.3. *One introduces the function Φ_2 as follows :*

1. *If $k \in \mathcal{A}_{2,1}$, then*
 - *when $x \in I_{j_2,k} \setminus I_{j_2,k}(\alpha_{2,1})$, $\Phi_2(x) = \xi_2(x)$,*
 - *when $x \in I_{j_2,k}(\alpha_{2,1})$, one sets*

$$\Phi_2(x) = \frac{\xi_2((k+1)2^{-j_2}) - \xi_2(x_{j_2,k}(\alpha_{2,1}))}{2^{-j_2/\alpha_{2,1}}}(x - (k+1)2^{-j_2}) + \xi_2((k+1)2^{-j_2}).$$

2. *If $k \notin \mathcal{A}_{2,1}$, then Φ_2 is affine on $I_{j_2,k}$ and satisfies*

$$\Phi_2(k2^{-j_2}) = \xi_2(k2^{-j_2}) \quad \text{and} \quad \Phi_2((k+1)2^{-j_2}) = \xi_2((k+1)2^{-j_2}).$$

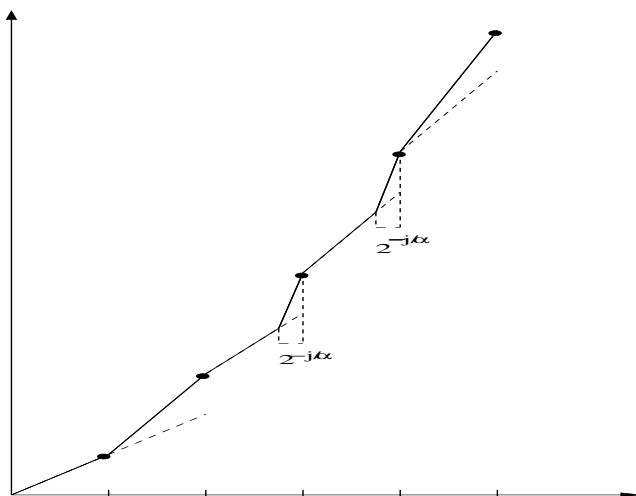


FIGURE 5.5 – Allure of the function Φ_2 .

Geometrically, Φ_2 is a piecewise affine function that we construct using ξ_2 as follow :

1. If $k \in \mathcal{A}_{2,1}$, then
 - on $[k2^{-j_2}; x_{j_2,k}(\alpha_{2,1})]$, Φ_2 is equal to the function ξ_2 ,
 - on $[x_{j_2,k}(\alpha_{2,1}); (k+1)2^{-j_2}]$, we draw the segment joining two points of the graph of the function ξ_2 : the point of abscissa $x_{j_2,k}(\alpha_{2,1})$ and the point of abscissa $(k+1)2^{-j_2}$.
2. If $k \notin \mathcal{A}_{2,1}$, we draw the segment joining two points of the graph of the function ξ_2 : the point of abscissa $k2^{-j_2}$ and the point of abscissa $(k+1)2^{-j_2}$.

See the Figure 5.5.

Heuristically, Φ_2 is a continuous version of ξ_2 , where the jumps at the dyadics $k2^{-j_2}$ are either erased if $k \notin \mathcal{A}_{2,1}$, or replaced by a rapid increasing affine map on the small interval $I_{j_2,k}(\alpha_{2,1})$ when $k \in \mathcal{A}_{2,1}$. Observe that by construction, when $k \in \mathcal{A}_{2,1}$, the

oscillation of the increasing function Φ_2 is

$$\begin{aligned}
\Phi_2((k+1)2^{-j_2}) - \Phi_2(x_{j_2,k}(\alpha_{2,1})) &= \xi_2((k+1)2^{-j_2}) - \xi_2(x_{j_2,k}(\alpha_{2,1})) \\
&= \frac{\widehat{\xi}(k+1) - \widehat{\xi}(x_{j_2,k}(\alpha_{2,1})2^{j_2})}{\widehat{\xi}(2^{j_2})2^2} \\
&= \frac{1}{\widehat{\xi}(2^{j_2})2^2} \left(\frac{\widehat{\xi}(k)}{k}(k+1) + 1 - \frac{\widehat{\xi}(k)}{k}(x_{j_2,k}(\alpha_{2,1})2^{j_2}) \right) \\
&= \frac{1}{\widehat{\xi}(2^{j_2})2^2} \left(\frac{\widehat{\xi}(k)}{k}(k+1 - x_{j_2,k}(\alpha_{2,1})2^{j_2}) + 1 \right) \\
&= \frac{1}{\widehat{\xi}(2^{j_2})2^2} \left(\frac{\widehat{\xi}(k)}{k}(2^{-j_2/\alpha_{2,1}}2^{j_2}) + 1 \right) \\
&\geq \frac{1}{\widehat{\xi}(2^{j_2})2^2} \\
&\geq \frac{1}{2^{j_2+2}(1 + \ln 2^{j_2})} \\
&\geq \frac{1}{4(1 + j_2)} |(k+1)2^{-j_2} - x_{j_2,k}(\alpha_{2,1})|^{\alpha_{2,1}}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\Phi_2((k+1)2^{-j_2}) - \Phi_2(x_{j_2,k}(\alpha_{2,1})) &\leq \xi_2((k+1)2^{-j_2}) - \xi_2(k2^{-j_2}) \\
&\leq \frac{9}{2^{j_2}2^2} \\
&\leq \frac{9}{2^2} |(k+1)2^{-j_2} - x_{j_2,k}(\alpha_{2,1})|^{\alpha_{2,1}},
\end{aligned}$$

where the upper bound (5.4) has been used in the second line. To summarize the above, one has

$$\frac{1}{4(j_2+1)} \leq \frac{\Phi_2((k+1)2^{-j_2}) - \Phi_2(x_{j_2,k}(\alpha_{2,1}))}{|(k+1)2^{-j_2} - x_{j_2,k}(\alpha_{2,1})|^{\alpha_{2,1}}} \leq \frac{9}{4}. \quad (5.6)$$

Remark that, by construction of Φ_2 , using ξ_2 , which is a function with increasing visibility, one has $\Phi_2(x) \leq \xi_2(1)x \leq \frac{x}{2^2}$.

One is now able to define the next step in the construction.

Definition 5.3.4. *The function f_2 is simply $f_2 = f_1 + \Phi_2$.*

Remark that f_2 is a function with increasing visibility as sum of two functions with increasing visibility and that $f_2(x) = f_1(x) + \Phi_2(x) \leq \frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} \leq (1 - \frac{1}{2^2})x$.

5.3.2 Construction of Φ_{n+1} and f_{n+1} .

Definition 5.3.5. One introduces for every $n \geq 2$, for every $l \in \{1, \dots, n\}$,

$$\alpha_{n+1,l} = \frac{l}{n+1}.$$

Assume that f_1, f_2, \dots, f_n have been constructed, as well as integers $j_1 < j_2 < \dots < j_n$ satisfying the following properties :

— for every $p \in \{2, \dots, n\}$, for every $l \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$2^{\left\lceil j_p \left(1 - \frac{f_{p-1}(\alpha_{p,l})}{\alpha_{p,l}}\right) \right\rceil} \geq 2^p, \quad j_{n+1} > j_n n^2 \quad \text{and} \quad 2^{(p-1)j_{p-1}} \leq \frac{j_p}{p^2}. \quad (5.7)$$

— for every $p \in \{2, \dots, n\}$, $f_p(x) \leq (1 - 2^{-p})x$ on $[0, 1]$, and the inequality is strict when $x \in (0, 1)$.

— for every $p \in \{2, \dots, n\}$, $f_p = f_{p-1} + \Phi_p$, where Φ_p is build from the procedure described Definitions 5.3.3 and 5.3.7.

Let $j_{n+1} \gg j_n$ be such that (5.7) is satisfied for $p = n+1$.

Definition 5.3.6. For every $i \in \{1, \dots, n\}$, the set $\mathcal{A}_{n+1,i}$ is the set of those integers $k \in \{1, \dots, 2^{j_{n+1}}\}$ of the form

$$k = i + p 2^{\left\lceil j_{n+1} \left(1 - \frac{f_n(\alpha_{n+1,i})}{\alpha_{n+1,i}}\right) \right\rceil}, \quad \text{where } p \in \left\{1, \dots, 2^{\left\lceil j_{n+1} \frac{f_n(\alpha_{n+1,i})}{\alpha_{n+1,i}} \right\rceil} - 1\right\}.$$

As for $\mathcal{A}_{2,1}$, the dyadic numbers $k2^{-j_n}$, where $k \in \mathcal{A}_{n,i}$, are uniformly distributed in the interval $[0, 1]$.

Lemma 5.3.1. If $i \neq j$, then $\mathcal{A}_{n,i} \cap \mathcal{A}_{n,j} = \emptyset$.

Proof: Assume towards a contradiction that there is a k belongs at $\mathcal{A}_{n,i} \cap \mathcal{A}_{n,j}$ with $i < j$. Then

$$k = i + p 2^{\left\lceil j_{n+1} \left(1 - \frac{f_n(\alpha_{n+1,i})}{\alpha_{n+1,i}}\right) \right\rceil} = j + p' 2^{\left\lceil j_{n+1} \left(1 - \frac{f_n(\alpha_{n+1,j})}{\alpha_{n+1,j}}\right) \right\rceil},$$

where p and p' are two integers. Assume that $2^{\left\lceil j_{n+1} \left(1 - \frac{f_n(\alpha_{n+1,i})}{\alpha_{n+1,i}}\right) \right\rceil} \geq 2^{\left\lceil j_{n+1} \left(1 - \frac{f_n(\alpha_{n+1,j})}{\alpha_{n+1,j}}\right) \right\rceil}$. Then

$$j - i = 2^{\left\lceil j_{n+1} \left(1 - \frac{f_n(\alpha_{n+1,i})}{\alpha_{n+1,i}}\right) \right\rceil} \left(p - p' 2^{\left\lceil j_{n+1} \left(1 - \frac{f_n(\alpha_{n+1,j})}{\alpha_{n+1,j}}\right) \right\rceil} - \left\lceil j_{n+1} \left(1 - \frac{f_n(\alpha_{n+1,i})}{\alpha_{n+1,i}}\right) \right\rceil \right),$$

which is impossible since $j-i \leq n$ while our assumption (5.7) implies $2^{\lfloor j_{n+1} \left(1 - \frac{f_n(\alpha_{n+1,i})}{\alpha_{n+1,i}}\right) \rfloor} \geq 2^{n+1}$. □

Next we construct the function whose oscillations around the dyadic numbers are controlled as follows.

Definition 5.3.7. *One introduces the function Φ_{n+1} as follows :*

1. for all $k \in \{0, 1, \dots, 2^{j_{n+1}}\}$,

$$\Phi_{n+1}(k2^{-j_{n+1}}) = \xi_{n+1}(k2^{-j_{n+1}}).$$

2. If $k \in \mathcal{A}_{n+1,l}$ for some $l \in \{1, \dots, n\}$, then

— when $x \in I_{j_{n+1},k} \setminus I_{j_{n+1},k}(\alpha_{n+1,l})$, $\Phi_{n+1}(x) = \xi_{n+1}(x)$,

— when $x \in I_{j_{n+1},k}(\alpha_{n+1,l})$, one sets

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(x) &= \frac{\xi_{n+1}((k+1)2^{-j_{n+1}}) - \xi_{n+1}(x_{j_{n+1},k}(\alpha_{n+1,l}))}{2^{-j_{n+1}/\alpha_{n+1,l}}} \times (x - (k+1)2^{-j_{n+1}}) \\ &\quad + \xi_{n+1}((k+1)2^{-j_{n+1}}). \end{aligned}$$

3. If k does not belong to any $\mathcal{A}_{n+1,l}$, then Φ_{n+1} is affine on $I_{j_{n+1},k}$. Where $\xi_{n+1}(x)$ is given in Definition 5.2.3.

Again, heuristically, Φ_{n+1} is a continuous version of ξ_{n+1} , where the jumps at the dyadics $k2^{-j_{n+1}}$ are either erased if $k \notin \mathcal{A}_{n+1,l}$ for any l , or replaced by a rapid increasing affine map on the small interval $I_{j_{n+1},k}(\alpha_{n+1,l})$ when $k \in \mathcal{A}_{n+1,l}$ and where the slope on this interval depends on the value of $\alpha_{n+1,l}$.

The same considerations as those developed for Φ_2 induce that, by construction, when $k \in \mathcal{A}_{n+1,l}$, the oscillation of the increasing function Φ_{n+1} on the small interval $I_{j_{n+1},k}(\alpha_{n+1,l})$ satisfies

$$\frac{1}{2^{n+1}(j_{n+1} + 1)} \leq \frac{\Phi_{n+1}((k+1)2^{-j_{n+1}}) - \Phi_{n+1}(x_{j_{n+1},k}(\alpha_{n+1,l}))}{|(k+1)2^{-j_{n+1}} - x_{j_{n+1},k}(\alpha_{n+1,l})|^{\alpha_{n+1,l}}} \leq \frac{9}{2^{n+1}}. \quad (5.8)$$

Moreover, since

$$\Phi_{n+1}((k+1)2^{-j_{n+1}}) - \Phi_{n+1}(k2^{-j_{n+1}}) = \xi_{n+1}((k+1)2^{-j_{n+1}}) - \xi_{n+1}(k2^{-j_{n+1}})$$

Using Lemma 5.2.5, the oscillation of Φ_{n+1} on the interval $I_{j_{n+1},k}$ satisfies

$$\frac{1}{2^{n+1}(j_{n+1} + 1)} \leq \frac{\Phi_{n+1}((k+1)2^{-j_{n+1}}) - \Phi_{n+1}(k2^{-j_{n+1}})}{|(k+1)2^{-j_{n+1}} - k2^{-j_{n+1}}|} \leq \frac{9}{2^{n+1}}, \quad (5.9)$$

The main idea here is that the oscillations of Φ_{n+1} essentially take place on the small intervals $I_{j_{n+1},k}(\alpha_{n+1,l})$.

One is now able to define the next step in the construction.

Definition 5.3.8. *The function f_{n+1} is defined as $f_{n+1} = f_n + \Phi_{n+1}$.*

The function f_{n+1} is with increasing visibility, as sum of two functions with increasing visibility.

Remark that, by construction,

$$\Phi_{n+1}(x) \leq \xi_{n+1}(1)x \leq \frac{x}{2^{n+1}} \quad (5.10)$$

and by assumption, $f_n(x) \leq (1 - \frac{1}{2^n})x$.

Hence, one has, $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \Phi_{n+1}(x) \leq (1 - \frac{1}{2^{n+1}})x$.

5.3.3 Properties of the limit of f_n

By construction, the sequence $(f_n)_{n \geq 1}$ is a sequence of functions defined on $[0, 1]$ such that :

- for all n , $\frac{x}{2} \leq f_n(x) \leq (1 - 2^{-n})x$.
- the sequence is monotone increasing, i.e., for all n and $x \in (0, 1)$, $f_n(x) < f_{n+1}(x)$.
- each f_n is continuous and with increasing visibility, as finite sum of continuous functions with increasing visibility.

Proposition 5.3.1. *The sequence of functions $(f_n)_{n \geq 1}$ converges uniformly to a continuous function $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfying $0 \leq f(x) \leq x$ with increasing visibility, and the inequalities are strict when $x \in (0, 1)$. By construction,*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi_n(x).$$

Proof : The convergence follows from the monotonicity and the uniform boundedness of the sequence $(f_n)_{n \geq 1}$. Hence the limit exists and is continuous. The fact that it is with increasing visibility follows from the closeness of $V_{0,1}$.

□

5.4 Upper bound for the spectrum of f .

The aim of this section is to prove next proposition.

Proposition 5.4.1. *For every $h \geq 0$, let*

$$E_f^{\leq}(h) = \{x : h_f(x) \leq h\}.$$

The function f satisfies : for every $h \in [0, 1]$,

$$\dim E_f^{\leq}(h) \leq f(h).$$

In particular,

$$d_f(h) \leq f(h).$$

To prove that, any $x \in E_f^{\leq}(h)$ must belong to an infinite number of intervals that we describe now.

Proposition 5.4.2. *Let $0 < h < 1$, $x \in [0, 1]$, and $r > 0$.*

We assume that $n \geq 2$ is so large that

$$\alpha_{n,n-2} > h, \quad \max\left(\frac{2\pi^2}{3}, 9j_n\right) < 2^{\frac{jn}{n}}. \quad (5.11)$$

Let n be the unique integer such that

$$2^{-j_{n+1}} \leq r < 2^{-j_n}. \quad (5.12)$$

Let $i_{n,h} \in \{1, \dots, n-1\}$ be the unique integer such that

$$\alpha_{n,i_{n,h}-1} < h \leq \alpha_{n,i_{n,h}}. \quad (5.13)$$

Assume that

$$f(x+r) - f(x) > r^h. \quad (5.14)$$

Then, necessarily,

$$2^{-j_n/(\alpha_{n,1}(1-\alpha_{n,n-1}))} < r < 2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h}+1}} \quad (5.15)$$

and

$$x \in \bigcup_{i:i \leq i_{n,h}+1} \bigcup_{k \in \mathcal{A}_{n,i}} I_{j_n,k}(i, r), \quad (5.16)$$

where

$$I_{j_n,k}(i, r) = I_{j_n,k}(\alpha_{n,i}) + B(0, r).$$

Proof : Observe that our assumptions imply that $i_{n,h} \leq n - 2$, hence $h + 1/n \leq 1 - 1/n$.

If (5.14) holds, then

$$\sum_{m \geq 1} (\Phi_m(x+r) - \Phi_m(x)) \geq r^h \text{ since } f(x) = \sum_{m \geq 1} \Phi_m(x).$$

Each Φ_n being an increasing function, all the contributions $\Phi_m(x+r) - \Phi_m(x)$ are positive.

• **Case $m < n$** : By assumption, Φ_m is continuous, increasing, affine by parts. The greatest slope appearing in the formulas giving Φ_m are given in item 2. of Definition 5.3.7, and it has the form

$$\frac{\xi_m((k+1)2^{-j_m}) - \xi_m(x_{j_m,k}(\alpha_{m,l}))}{2^{-j_m/\alpha_{m,l}}}, \quad l \in \{1; \dots; m-1\}$$

One has by Lemma 5.2.5, by using the fact that $\frac{1}{m} = \alpha_{m,1} \leq \alpha_{m,l}$ and by equations (5.7) and (5.11)

$$\begin{aligned} \frac{\xi_m((k+1)2^{-j_m}) - \xi_m(x_{j_m,k}(\alpha_{m,l}))}{2^{-j_m/\alpha_{m,l}}} &\leq \frac{9 \cdot 2^{-j_m-m}}{2^{-j_m/\alpha_{m,1}}} \leq 9 \cdot 2^{mj_m} \leq 9 \frac{j_{m+1}}{(m+1)^2} \\ &\leq 9 \frac{j_n}{(m+1)^2} \leq \frac{r^{-1/n}}{(m+1)^2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

The case where $\Phi_m(x+r) - \Phi_m(x)$ is the greatest is when the whole interval $[x, x+r]$ is contained in a part of the interval of $[0, 1]$ where the slope of Φ_m is maximal, then

$$\Phi_m(x+r) - \Phi_m(x) \leq \frac{r^{1-1/n}}{(m+1)^2}.$$

Summing over all $m \in \{1, \dots, n-1\}$, one obtains

$$\sum_{m=1}^{n-1} \Phi_m(x+r) - \Phi_m(x) \leq \frac{\pi^2}{6} r^{1-1/n} < \frac{r^{-1/n}}{4} r^{1-1/n} < \frac{r^h}{4},$$

where we have used (5.11) and $h \leq 1 - \frac{2}{n}$.

• **Case $m > n$** :

In this case, $r \geq 2^{-j_m}$. The interval $[x, x+r]$ intersects at most $r2^{j_m} + 2$ dyadic intervals of generation j_m . The oscillation of Φ_m on each dyadic interval $I_{j_m,k}$ is the

same as the one of the function ξ_m , which is estimated as follows. Using Lemma 5.2.5, one has

$$\begin{aligned}\Phi_m(x+r) - \Phi_m(x) &\leq \sum_{i=1}^{r2^{j_m}+2} 9 \cdot 2^{-j_m-m} \\ &\leq 3 \cdot 9r2^{-m} \text{ since } r \geq 2^{-j_m} \\ &\leq \frac{r^{1-1/n}}{2^m},\end{aligned}$$

where we used (5.11) to get the final step.

Summing all contributions for $m \geq n+1$, we get

$$\sum_{m \geq n+1} \Phi_m(x+r) - \Phi_m(x) \leq 2^{-n} r^{1-1/n} < \frac{r^h}{4},$$

where we used $n \geq 4$ and $h < 1 - \frac{1}{n}$.

• **Case $m = n$** : Finally, from the above we deduce that, in order to have (5.14) realized, it is necessary that

$$\Phi_n(x+r) - \Phi_n(x) \geq \frac{r^h}{2}. \quad (5.18)$$

If $\frac{2^{-j_n}}{2} \leq r < 2^{-j_n}$, then by construction $\Phi_n(x+r) - \Phi_n(x)$ is less than the oscillation of Φ_n on two consecutive dyadic intervals of generation j_n , which is at most

$$\Phi_n(x+r) - \Phi_n(x) \leq 2 \cdot 22^{-j_n-n} \leq 9r2^{-n+2} \leq \frac{r^{1-\frac{1}{n}}}{4} \leq \frac{r^h}{4},$$

where we used (5.9), $n \geq 4$, and (5.11). Hence (5.14) cannot be realized.

Moreover, if the interval $[x, x+r]$ does not meet any interval $I_{j_n, k}(\alpha_{n, i})$ with $k \in \mathcal{A}_{n, i}$, a similar computation yields that (5.14) cannot be realized either.

Hence, we assume that there exists a unique interval $I_{j_n, k}(\alpha_{n, i})$, i.e. a unique $i \in \{1, \dots, n\}$ and a unique $k \in \mathcal{A}_{n, i}$ such that $I_{j_n, k}(\alpha_{n, i}) \cap [x, x+r] \neq \emptyset$.

Recall the definition (5.13) of the integer $i_{n, h}$.

First case : $2^{\frac{-j_n}{\alpha_{n, (i_{n, h}+1)}}} \leq r < \frac{2^{-j_n}}{2}$.

In this case, $\Phi_n(x+r) - \Phi_n(x)$ is less than the oscillation of Φ_n on two consecutive intervals. One has

$$\begin{aligned}\Phi_n(x+r) - \Phi_n(x) &\leq 2 \cdot 9 \cdot 2^{-jn-n} \leq \frac{2 \cdot 9}{2^n} r^{\alpha_n, (i_n, h+1)} \leq \frac{r^{-\frac{1}{n}}}{4} r^{\alpha_n, (i_n, h+1)} \\ &< \frac{r^{-\frac{1}{n}}}{4} r^{h+1/n} < \frac{r^h}{4},\end{aligned}$$

where we used $n \geq 4$, (5.11), $h \leq \alpha_{n, i_n, h}$ and $\alpha_{n, (i_n, h+1)} = \alpha_{n, i_n, h} + \frac{1}{n}$. Hence (5.14) cannot be realized.

Second case : $r < 2^{-jn/\alpha_{n, i_n, h+1}}$.

First subcase : $r < 2^{-jn/(\alpha_{n, 1} \cdot (1 - \alpha_{n, n-1}))} = 2^{-jn n^2}$.

As was shown in (5.17), the slope in the affine part corresponding to $I_{j_n, k}(\alpha_{n, i})$ is bounded above . One deduces that

$$\begin{aligned}\Phi_n(x+r) - \Phi_n(x) &\leq 9 \cdot 2^{jn} r \\ &\leq 9r^{-1/n} r \quad \text{since } r < 2^{-jn n^2} \\ &< \frac{r^h}{4}.\end{aligned}$$

Again, this makes (5.14) impossible.

Second subcase : $2^{-jn/(\alpha_{n, 1} \cdot (1 - \alpha_{n, n-1}))} < r < 2^{-jn/\alpha_{n, i_n, h+1}}$ **and** $i \geq i_n, h + 2$.

The slope in the affine part corresponding to $I_{j_n, k}(\alpha_{n, i})$ is bounded above by $\frac{9 \cdot 2^{-jn-n}}{2^{-jn/\alpha_{n, i}}}$ (as done in the cas $m < n$). One deduces that

$$\begin{aligned}\Phi_n(x+r) - \Phi_n(x) &\leq \frac{9 \cdot 2^{-jn-n}}{2^{-jn/\alpha_{n, i}}} r \leq 9 \cdot 2^{-n} 2^{jn(\frac{1}{\alpha_{n, i}} - 1)} r \\ &\leq 9 \cdot 2^{-n} r^{1 - \alpha_{n, i_n, h+1}(\frac{1}{\alpha_{n, i}} - 1)} \leq 9 \cdot 2^{-n} r^{\alpha_{n, i_n, h+1} + (1 - \frac{\alpha_{n, i_n, h+1}}{\alpha_{n, i}})} \\ &\leq 9 \cdot 2^{-n} r^{h + \frac{1}{n} + (1 - \frac{i_n, h+1}{i})} < \frac{r^h}{4}.\end{aligned}$$

Once more, in this case, (5.14) is not realized.

Third subcase : $2^{-jn/(\alpha_{n, 1} \cdot (1 - \alpha_{n, n-1}))} < r < 2^{-jn/\alpha_{n, i_n, h+1}}$ **and** $i \leq i_n, h + 1$.

It is enough for our purpose to notice that (5.14) is possible only if r and x satisfy these assumptions, i.e. $B(x, r) \cap I_{j_n, k}(\alpha_{n, i}) \neq \emptyset$ with r satisfying (5.15) and $i \leq i_n, h + 1$.

This yields the result.

□

Proposition 5.4.2 allows us to prove the upper bound for the multifractal spectrum of f . *Proof*: [Proof of Proposition 5.4.1].

Let $\varepsilon > 0$. If $h_f(x) \leq h \leq 1$, then for an infinite number of integers j_n , one has $f(x+r) - f(x) > r^{h+\varepsilon}$ with $2^{-j_{n+1}} \leq r < 2^{-j_n}$. By Proposition 5.4.2, one has $2^{-j_n/(\alpha_{n,1}(1-\alpha_{n,n-1}))} < r < 2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}+1}}$, and

$$x \in \bigcup_{i:i \leq i_{n,h+\varepsilon}+1} \bigcup_{k \in \mathcal{A}_{n,i}} I_{j_n,k}(i, r),$$

where $i_{n,h+\varepsilon} \in \{1, \dots, n-1\}$ is the integer such that

$$\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}-1} < h \leq \alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}}$$

is satisfied. In particular, necessarily,

$$x \in \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \bigcup_{i:i \leq i_{n,h+\varepsilon}+1} \bigcup_{k \in \mathcal{A}_{n,i}} I_{j_n,k}(i, 2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}+1}}).$$

Let $1 > \delta > f(h+3\varepsilon)$, and let $\eta > 0$ be small. We can choose $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ so that for $n \geq N$, $2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}+1}} < \eta$. For such an integer N , using the above inclusion, one deduces that the set $\bigcup_{n \geq N} \bigcup_{i:i \leq i_{n,h+\varepsilon}+1} \bigcup_{k \in \mathcal{A}_{n,i}} I_{j_n,k}(i, 2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}+1}})$ forms a covering of $E_f^{\leq}(h)$ by sets of diameter less than η . One can then estimate the \mathcal{H}_η^δ -Hausdorff pre-measure of $E_f^{\leq}(h)$ computed using sets of diameters less than η as follows :

$$\mathcal{H}_\eta^\delta(E_f^{\leq}(h)) \leq \sum_{n \geq N} \sum_{i:i \leq i_{n,h+\varepsilon}+1} \sum_{k \in \mathcal{A}_{n,i}} \left| I_{j_n,k}(i, 2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}+1}}) \right|^\delta.$$

Since

$$\begin{aligned} \left| I_{j_n,k}(i, 2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}+1}}) \right|^\delta &= \left| I_{j_n,k}(\alpha_{n,i}) + B(0, 2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}+1}}) \right|^\delta \\ &\leq (2^{-j_n/\alpha_{n,i}} + 2 \cdot 2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}+1}})^\delta \\ &\leq 4^\delta 2^{-\delta j_n/\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}+1}}, \end{aligned}$$

one has

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\eta^\delta(E_f^{\leq}(h)) &\leq \sum_{n \geq N} \sum_{i:i \leq i_{n,h+\varepsilon}+1} \sum_{k \in \mathcal{A}_{n,i}} 4^\delta 2^{-\delta j_n/\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}+1}} \\ &\leq 4^\delta \sum_{n \geq N} \sum_{i:i \leq i_{n,h+\varepsilon}+1} 2^{\left[j_n \frac{f_{n-1}(\alpha_{n,i})}{\alpha_{n,i}} \right]} 2^{-\delta j_n/\alpha_{n,i_{n,h+\varepsilon}+1}}, \end{aligned}$$

where we used Definition 5.3.6.

We can choose N so large that $\alpha_{n,i_n,h+\varepsilon+1} \leq h + 2\varepsilon$. By the properties of the sequence (f_n) (increasing visibility and monotonicity), one has :

$$\frac{f_{n-1}(\alpha_{n,i})}{\alpha_{n,i}} \leq \frac{f(\alpha_{n,i})}{\alpha_{n,i}} \leq \frac{f(\alpha_{n,i_n,h+\varepsilon+1})}{\alpha_{n,i_n,h+\varepsilon+1}} \leq \frac{f(h+2\varepsilon)}{h+2\varepsilon}.$$

Combining this with the fact that $\delta > f(h + 3\varepsilon)$, one obtains

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\eta^\delta(E_f^{\leq}(h)) &\leq 4^\delta \sum_{n \geq N} \sum_{i: i \leq i_n, h+\varepsilon+1} 2^{j_n \left(\frac{f(\alpha_{n,i_n,h+\varepsilon+1})}{\alpha_{n,i_n,h+\varepsilon+1}} - \frac{f(h+3\varepsilon)}{h+3\varepsilon} \right)} \\ &\leq 4^\delta \sum_{n \geq N} \sum_{i: i \leq i_n, h+\varepsilon+1} 2^{j_n \left(\frac{f(h+2\varepsilon)}{h+2\varepsilon} - \frac{f(h+3\varepsilon)}{h+3\varepsilon} \right)} \\ &\leq 4^\delta \sum_{n \geq N} n 2^{j_n \left(\frac{f(h+2\varepsilon)}{h+2\varepsilon} - \frac{f(h+3\varepsilon)}{h+3\varepsilon} \right)}. \end{aligned}$$

Since f is increasing, the exponent after j_n is strictly negative. Subsequently, the above series converges. Letting η go to zero (hence N to infinity), one deduces that

$$\mathcal{H}^\delta(E_f^{\leq}(h)) = 0,$$

i.e.

$$\dim(E_f^{\leq}(h)) \leq \delta.$$

Since this holds for any $\delta > f(h + 3\varepsilon)$ and any $\varepsilon > 0$, we get the result by right continuity of f . □

We took care of the exponents less than 1. In order to complete the upper bound, one needs to prove the following proposition.

Proposition 5.4.3. *For every $h > 1$, $E_f(h) = \emptyset$.*

Proof : It suffices to show that for every $x \in [0, 1]$ and every $\varepsilon > 0$, there exists a sequence r_n converging to zero such that

$$f(x + r_n) - f(x) > r_n^{1+\varepsilon}.$$

Observe that the smallest slope appearing for the function Φ_n has the form :

$$\frac{\Phi_n(x_{j_n,k}(\alpha_{n,l})) - \Phi_n(k2^{-j_n})}{x_{j_n,k}(\alpha_{n,l}) - k2^{-j_n}}, \quad l \in \{1, \dots, n-1\}.$$

and one has :

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_n(x_{j_n,k}(\alpha_{n,l})) - \Phi_n(k2^{-j_n})}{x_{j_n,k}(\alpha_{n,l}) - k2^{-j_n}} &= \frac{\xi_n(x_{j_n,k}(\alpha_{n,l})) - \xi_n(k2^{-j_n})}{x_{j_n,k}(\alpha_{n,l}) - k2^{-j_n}} \\
&= \frac{\widehat{\xi}(x_{j_n,k}(\alpha_{n,l})2^{j_n}) - \widehat{\xi}(k)}{\widehat{\xi}(2^{j_n})2^n(x_{j_n,k}(\alpha_{n,l}) - k2^{-j_n})} \\
&= \frac{\frac{\widehat{\xi}(k)}{k}x_{j_n,k}(\alpha_{n,l})2^{j_n} - \widehat{\xi}(k)}{\widehat{\xi}(2^{j_n})2^n(x_{j_n,k}(\alpha_{n,l}) - k2^{-j_n})} \\
&= \frac{\widehat{\xi}(k)2^{j_n}(x_{j_n,k}(\alpha_{n,l}) - k2^{-j_n})}{k\widehat{\xi}(2^{j_n})2^n(x_{j_n,k}(\alpha_{n,l}) - k2^{-j_n})} \\
&= \frac{\widehat{\xi}(k)2^{j_n}}{k\widehat{\xi}(2^{j_n})2^n} \\
&\geq \frac{2^{j_n}}{\widehat{\xi}(2^{j_n})2^n} \\
&\geq \frac{2^{j_n}}{2^{j_n+n}(j_n \ln 2 + 1)} \\
&\geq \frac{1}{2^n(1 + j_n)}
\end{aligned}$$

where increasing visibility and Lemma 5.2.4 were used.

Set N such that $\forall n \geq N$, one has $1 + \epsilon > 1 + \frac{1}{n}$ and $\frac{1}{2^n(1+j_n)} \geq 2^{-j_n}$.
We put $r_n = 2^{-j_n}$, one has :

$$\begin{aligned}
f(x + r_n) - f(x) &\geq \Phi_n(x + r_n) - \Phi_n(x) \geq \frac{r_n}{2^n(1 + j_n)} \\
&\geq \frac{r_n}{2^{j_n}} \geq r_n^{1+1/n} \\
&\geq r_n^{1+\epsilon}.
\end{aligned}$$

□

5.5 Lower bound for the spectrum of f .

Now that we know that $d_f(h) \leq h$ for every $h \in [0, 1]$, in order to complete the proof it is enough to establish the converse inequality. This is achieved thanks to the

mass transference principle by Beresnevich and Velani [15, 16](actually this can be done directly by constructing a Cantor set within $E_f^{\leq}(h)$).

Let $h \in (0, 1)$. For every $n \geq 1$, recall that $i_{n,h}$ is the integer satisfying (5.13). Obviously, due to our construction, if a point x belongs to an interval $I_{j_n,k}(\alpha_{n,i_{n,h}})$, with $k \in \mathcal{A}_{n,i_{n,h}}$, then for $r_n = \pm \frac{2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h}}}}{2}$.

One has, for n so large that $\frac{2^{\alpha_{n,i_{n,h}}}}{2^{n+1}(j_n+1)} > |r|^{1/n}$:

$$\begin{aligned}
|f(x+r_n) - f(x)| &> |\Phi_n(x+r_n) - \Phi_n(x)| \\
&> |r_n| \frac{\Phi_n((k+1)2^{-j_n}) - \Phi_n(x_{j_n,k}(\alpha_{n,i_{n,h}}))}{2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h}}}} \\
&> \frac{|r_n|}{2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h}}}} \cdot \frac{1}{2^{j_n+n}(j_n+1)} \text{ where we use (5.8)} \\
&> \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{-j_n}}{2^n(j_n+1)} \\
&> \frac{|r_n|^{\alpha_{n,i_{n,h}}} 2^{\alpha_{n,i_{n,h}}}}{2^{n+1}(j_n+1)}.
\end{aligned}$$

Now, if n is large enough, one has :

$$|f(x+r_n) - f(x)| > |r_n|^{\alpha_{n,i_{n,h}}} |r_n|^{1/n}.$$

Hence, if x belongs an infinite number of intervals $I_{j_n,k}(\alpha_{n,i_{n,h}})$, the convergence of $\alpha_{n,i_{n,h}}$ towards h yields $h_f(x) \leq h$.

From these considerations, it is natural to investigate the Hausdorff dimension of the set of those points belonging an infinite number of intervals $I_{j_n,k}(\alpha_{n,i_{n,h}})$. This is where the mass transference principle intervenes.

Let us denote by $([x_j - l_j, x_j + l_j] = B(x_j, l_j))_{j \geq 1}$ the sequence of the intervals $(I_{j_n,k}(\alpha_{n,i_{n,h}}))_{n \geq 1, k \in \mathcal{A}_{n,i_{n,h}}}$, where the sequence is re-arranged so that l_j is decreasing and goes to zero. Every l_j can be written $1/2 \cdot 2^{-j_n/\alpha_{n,i_{n,h}}}$ for some integer n . From the above remarks one deduces that

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} B(x_j, l_j) \subset E_f^{\leq}(h). \quad (5.19)$$

Observe that for every fixed integer $n \geq 1$, the dyadic numbers $\{(k+1)2^{-j_n} : k \in \mathcal{A}_{n,i_{n,h}}\}$ is very well distributed in $[0, 1]$. Indeed, recalling Definition 5.3.6, one clearly has

$$[0, 1] \subset \bigcup_{k \in \mathcal{A}_{n,i_{n,h}}} B \left((k+1)2^{-j_n}, 2^{-j_n \frac{j_n-1(\alpha_{n,i_{n,h}})}}{\alpha_{n,i_{n,h}}} \right).$$

This holds true for every integer n , hence every real number $x \in [0, 1]$ belongs to an infinite number of balls of the form

$$B \left((k+1)2^{-jn}, 2^{-jn \frac{f_{n-1}(\alpha_{n,i_{n,h}})}{\alpha_{n,i_{n,h}}}} \right).$$

This implies in turn, since every center x_j is very close to a dyadic $(k+1)2^{-jn}$ such that $k \in \mathcal{A}_{n,i_{n,h}}$, that every real number $x \in [0, 1]$ belongs to an infinite number of balls of the form $B \left(x_j, (2l_j)^{f_{n-1}(\alpha_{n,i_{n,h}})} \right)$, where n is the unique integer so that $l_j = 1/2 \cdot 2^{-jn/\alpha_{n,i_{n,h}}}$. By our choice for $i_{n,h}$, one has

$$(2l_j)^{f_{n-1}(\alpha_{n,i_{n,h}})} \leq (l_j)^{f(h)}.$$

To see that, observe that, one has :

$$\begin{aligned} f(h) &\leq f(\alpha_{n,i_{n,h}}) \\ &\leq f_{n-1}(\alpha_{n,i_{n,h}}) + \sum_{k=n}^{\infty} \Phi_k(\alpha_{n,i_{n,h}}) \\ &\leq f_{n-1}(\alpha_{n,i_{n,h}}) + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{n,i_{n,h}}}{2^k} \text{ by (5.10)} \\ &\leq f_{n-1}(\alpha_{n,i_{n,h}}) + \frac{\alpha_{n,i_{n,h}}}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Hence :

$$\begin{aligned} (2l_j)^{f_{n-1}(\alpha_{n,i_{n,h}})} &\leq 2^{f_{n-1}(\alpha_{n,i_{n,h}})} (l_j)^{f(h) - \frac{\alpha_{n,i_{n,h}}}{2^{n-1}}} \\ &\leq 2^{f_{n-1}(\alpha_{n,i_{n,h}})} \left(\frac{2^{-jn/\alpha_{n,i_{n,h}}}}{2} \right)^{\frac{\alpha_{n,i_{n,h}}}{2^{n-1}}} (l_j)^{f(h)} \\ &\leq 2^{f_{n-1}(\alpha_{n,i_{n,h}}) - \frac{\alpha_{n,i_{n,h}} + jn}{2^{n-1}}} (l_j)^{f(h)} \\ &\leq (l_j)^{f(h)}. \end{aligned}$$

Finally, we deduce that every $x \in [0, 1]$ belongs to an infinite number of balls of the form $B \left(x_j, (l_j)^{f(h)} \right)$, i.e.

$$[0, 1] \subset \limsup_{j \rightarrow +\infty} B \left(x_j, (l_j)^{f(h)} \right). \quad (5.20)$$

We use now the Mass transference principle proved by Beresnevich and Velani [15, 16] :

Theorem 5.5.1 (Mass transference principle). *Let $(y_j)_{j \geq 1}$ be a sequence of points in $[0, 1]$, and let $(m_j)_{j \geq 1}$ be a sequence of positive real numbers, non-increasing and converging to zero. If the Lebesgue measure of*

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} B(y_j, m_j)$$

is 1, then for any $\delta > 1$, the $1/\delta$ -Hausdorff measure of

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} B(y_j, (m_j)^\delta)$$

is infinite, i.e. $\mathcal{H}^{1/\delta}(\limsup_{j \rightarrow +\infty} B(y_j, (m_j)^\delta)) = +\infty$.

Equation (5.20) guarantees us that the condition in Theorem 5.5.1 is realized for our sequence $(x_j, (l_j)^{f(h)})_{j \geq 1}$. Choosing $\delta = 1/f(h)$, one deduces that

$$\mathcal{H}^{f(h)} \left(\limsup_{j \rightarrow +\infty} B(x_j, l_j) \right) = +\infty.$$

Recalling (5.19), this implies

$$\mathcal{H}^{f(h)}(E_f^{\leq}(h)) = +\infty.$$

The conclusion follows now from two facts. Obviously,

$$E_f^{\leq}(h) = E_f(h) \cup \bigcup_{i \geq 1} E_f^{\leq}(h - 1/i).$$

Since we proved that $\dim_{\mathcal{H}} E_f^{\leq}(h - 1/i) \leq f(h - 1/i) < f(h)$, one has

$$\forall i \geq 1, \quad \mathcal{H}^{f(h)}(E_f^{\leq}(h - 1/i)) = 0.$$

The last three equations imply that

$$\mathcal{H}^{f(h)}(E_f(h)) = +\infty,$$

i.e.

$$\dim_{\mathcal{H}} E_f(h) \geq f(h).$$

Hence the result.

Bibliographie

- [1] AARONSON, J. An Introduction to infinite ergodic theory *Proceedings of the american mathematical society Vol 129, 2 (1997)*, 451-457.
- [2] ABRY, P. Ondelettes et turbulences. *Nouveaux essais.Paris : Diderot(1997)*.
- [3] ARNEODO, A., ARGOUL, F., BACRY, E., ELEZGARAY, J. AND MUZY, J-F. Ondelettes, Multifractales et Turbulences. *Diderot, Paris(1995)*.
- [4] ARNEODO, A., BACRY, E. AND MUZY, J-F. The thermodynamics of fractals revisited with wavelet. *Phys. A*, Vol. 213 (1995), 232-275.
- [5] AUBRY, J-M. AND JAFFARD, S. Random wavelet series. *Comm. Math. Phys*, Vol. 227 (2002), 483-514.
- [6] AUBRY, J.-M., BASTIN, F. AND DISPA, S. Prevalence of multifractal functions in S^p spaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, Vol. 13, 2 (2007), 175-185.
- [7] AUBRY, J.-M., MAMAN, D. AND SEURET, S. Local behavior of traces of functions : prevalent results *J. Func. Anal.*, Vol.264, 3 (2013), 631-660.
- [8] BALANÇA, P. Fine regularity of Lévy processes and linear (multi)fractional stable motion *arXiv :1302.3140*, 2013.
- [9] BANACH, S. Uber die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen. *Studia Math*, Vol. 3 (1931), 174-173.
- [10] BARRAL, J. Moments, continuité et analyse multifractale des martingales de Mandelbrot. *Probab. Theory Related Fields*, Vol. 113 (1999), 535-570.
- [11] BARRAL, J. Continuity of the multifractal spectrum of a random statistically self-similar measures. *J. Theor. Probab.*, Vol. 13 (2000), 1027-1060.
- [12] BARRAL, J., DURAND, A., JAFFARD, S. AND SEURET, S. Local multifractal analysis, *To appear in "Applications of Fractals and Dynamical Systems in Science and Economics"*, *Contemporary Mathematics*, edited by D. Carfi, M. L. Lapidus, E. J. Pearse, and M. van Frankenhuijsen.

- [13] BARRAL, J., FOURNIER, N., JAFFARD, S. AND SEURET, S. A pure jump Markov process with a random singularity spectrum, *Ann. Proba.*, Vol. 38, 5 (2010), 1924-194.
- [14] BARRAL, J. AND MANDELBROT, B. M. Random multiplicative multifractal measures *Fractal Geaometry and Applications, Proc. Symp. Pure Math.*, AMS, Providence, RI, 2004.
- [15] BERESNEVICH, V. AND VELANI, S. A mass transference principle and the Duffin-Schaeffer conjecture for Hausdorff measures, *Ann. of Math. (2)*, Vol.164, 3(2006), 971-992.
- [16] BERESNEVICH, V. AND VELANI, S. Measure theoretic laws for lim sup sets, *Mem. of the AMS*, Vol. 179, 846 (2006).
- [17] BROWN, G., MICHON, G. AND PEYRIÈRE, J. On the multifractal analysis of measures. *J. Stat. Phys.*, Vol. 66 (1992), 775-790.
- [18] BUCZOLICH, Z. AND NAGY, J. Hölder spectrum of typical monotone continuous functions. *Real Anal. Exchange*, Vol. 26 (2000/01), 133-156.
- [19] BUCZOLICH, Z. AND SEURET, S. Typical Borel measures on $[0, 1]^d$ satisfy a multifractal formalism. *Nonlinearity* Vol. 23, 11 (2010).
- [20] BUCZOLICH, Z. AND SEURET, S. Measures and Functions with prescribed singularity spectrum, Preprint, 2013.
- [21] CHHABRA, A. AND SREENIVASAN, K. Probabilistic multifractals and negative dimensions. *New perspectives in turbulence*, Springer, 1991.
- [22] CHOQUET, G. Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, Vol. 5 (1954), 131-295.
- [23] CHRISTENSEN, J. P. R. On sets of Haar measure zero in Abelian Polish groups. *Israel J. Math.*, Vol.13 (1972), 255-260.
- [24] COHEN, A. Numerical analysis of wavelet methods. *Studies in mathematics and applications* (2003).
- [25] DAUBECHIES, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 41 (1988), 909-996.
- [26] DAUBECHIES, I. Ten Lectures on Wavelets, Vol. 61 of *CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics*. SIAM, 1992.
- [27] FALCONER, K. J., *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, (1990).
- [28] FRAYSSE, A. Generic validity of the multifractal formalism *SIAM Journal on mathematical analysis*, Vol 39, 2 (2008), 593-607.

- [29] FRAYSSE, A., JAFFARD, S. AND KAHANE, J.P. Quelques propriétés génériques en analyse *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, Vol. 340 (2005), 645-651.
- [30] FRAYSSE, A. AND JAFFARD, S. How smooth is almost every function in a Sobolev space? *Rev. Mat. Iberoamericana*, Vol.22, 2(2006), 663-683.
- [31] FRAYSSE, A. Regularity criteria for almost every function in Sobolev spaces, *J. Func. Anal.*, Vol. 258 (2010), 1806-1821.
- [32] FRISCH, U. AND PARISI, G., Fully developed turbulence and intermittency, *Proc. International Summer school Phys., Enrico Fermi, 84-88, North Holland*, (1985).
- [33] GAGNE, Y. Etude expérimentale de l'intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence pleinement développée *Ph.D. thesis, Université de Grenoble*, (1987).
- [34] HUNT, B. R., SAUER, T. AND YORKE, J. A. Prevalence : a translation-invariant "almost every" on infinite-dimensional spaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, Vol.27, 2 (Oct. 1992), 217-238.
- [35] Hunt, B. R. The prevalence of continuous nowhere differentiable functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol.122, 3 (1994), 711-717.
- [36] JAFFARD, S. Exposants de Hölder en des points donnés et coefficients d'ondelettes , *C.R.A.S.*, Vol. 308, 1 (1989), 79-81.
- [37] JAFFARD, S. Pointwise Smoothness, Two-Microlocalisation and Wavelet Coefficients *Pub. Mat.* Vol 34 (1990).
- [38] JAFFARD, S. Construction de fonctions multifractales ayant un spectre de singularités prescrit, *C.R.A.S.*, Vol. 315, 1 (1992), 19-24.
- [39] JAFFARD, S. Functions with prescribed Hölder exponent, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 2 (1995), 400-401.
- [40] JAFFARD, S. Théorèmes de trace et dimensions négatives . *C. R. A. S*, Vol. 320, 1 (1995), 409-413.
- [41] JAFFARD, S. Multifractal formalism for functions Part I : results valid for all functions. *SIAM J. Math. Anal.*, Vol.28, 4 (July 1997), 944-970.
- [42] JAFFARD, S. The multifractal nature of Lévy process. *Probab. Theory Related Fields*, Vol. 114 (1999), 207-227.
- [43] JAFFARD, S. AND MEYER, Y. On the pointwise regularity of functions in critical Besov spaces. *J. Funct. Anal.*, Vol. 175 (2000), 415-434.

- [44] JAFFARD, S. Wavelet tools in multifractal analysis *Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoit Mandelbrot, Proc. Symp. Pure Math. (AMS)* Vol. 72, 2 (2004), 91-151.
- [45] JAFFARD, S. Wavelet Techniques in Multifractal Analysis. *Proceedings of SYmposia in Pure Mathematics*, Vol. 72,2 (2004), 91-151.
- [46] JAFFARD, S. On the Frisch-Parisi conjecture *J. Maths Pures Appl.* 79, Vol. 6 (2000), 525-552.
- [47] JAFFARD, S. AND MEYER, Y. Wavelet Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions *Memoirs of the A.M.S.* Vol. 123, 587 (1996).
- [48] JARNIK, V. Über die differentierbarkeit stetiger Funktionen. *Fund. Math.*, Vol. 21 (1933), 48-58.
- [49] JÄRVENPÄÄ, E., JÄRVENPÄÄ, M. AND LLORENTE M., Local dimensions of sliced measures and stability of packing dimensions of sections of sets, *Adv. Maths.* Vol. 183, 1 (2004), 127-154 .
- [50] KAHANE, J-P. AND PEYRIÈRE, J. Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot. *Adv. Math.*, Vol. 22 (1976), 131-145.
- [51] KAHANE, J-P. AND LEMARIÉ, P-G. Fourier Series and Wavelets. *Gordon and Breach* (1996).
- [52] KAHANE, J-P. Propriétés prévalentes, versus génériques, des images continues. *Bull. Sci. math.*, Vol. 130 (2006), 97-109.
- [53] LEMARIÉ, P-G. AND MEYER, Y. Ondelettes et bases hilbertiennes. *Rev. Math. Iberoamericana*, Vol. 1 (1986), 1-18.
- [54] LÉVY-VÉHEL, J. Introduction to the multifractal analysis of images. *Fractal image encoding and analysis*, Springer (1998), 299-341.
- [55] LÉVY VÉHEL, J. AND SEURET, S. 2-microlocal analysis *Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoit Mandelbrot, Proc. Symp. Pure Math., AMS, Providence RI*, (2004).
- [56] LIONS, J.-L. AND MAGENES, E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. *Travaux et Recherches Mathématiques*, Vol. 2, 17 (1968) Dunod.
- [57] LIONS, J.-L. AND MAGENES, E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. *Travaux et Recherches Mathématiques*, Vol. 2, 18 (1968) Dunod.
- [58] MALLAT, S. A Wavelet Tour of Signal Processing. *Academic Press* (1998).
- [59] MANDELBROT, B. Les Objets Fractals : Forme, Hasard et Dimension. *Flammarion* (1975).

- [60] MANDELBROT, B. The Fractal Geometry of Nature. *W.H. Freeman* (1982).
- [61] MANDELBROT, B. Intermittent turbulences in selfsimilar cascades : divergence of high moments and dimention of the carrier. *J. Fluid Mech.* , Vol 62 (1974), 331-358.
- [62] MANDELBROT, B. Random Multifractals : negative dimensions and the reulting limitations of the thermodynamic formalism. *Proceedings of the Royal Society of London A*, Vol. 434 (1991), 79-88.
- [63] MATTILA, P. Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersections with planes. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, Vol. 1 (1975), 227-244.
- [64] MAZURKIEWICZ,S. Sur les fonctions non dérivables. *Studia Math.*, Vol. 3 (1931), 92-94.
- [65] MEYER, Y. Ondelettes et Opérateurs, *Hermann* (1990).
- [66] MEYER, Y. Wavelets, Vibrations and Scaling. *CRM Ser. Amer. Math. Soc.*, *Presses de l'Université de Montréal.*, Vol. 9 (1998).
- [67] MEYER, Y. Ondelettes et opérateurs *Hermann, Vol. 2 (1990)*.
- [68] OTT, W. AND YORKE, J.A.. Prevalence *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 42, 3 (2005), 263-290.
- [69] RUNST, T. AND SICKEL, W. Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and non-linear partial differential equations. *Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*, Vol. 3 (1996).
- [70] SAKS, S. On the function of Besicovitch in the space of continuous functions. *Fund. Math*, Vol. 19 (1932), 211-219.
- [71] SEURET, S. AND LÉVY VÉHEL, J. The local Holder function of a continuous function *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, Vol. 13, 3 (2002), 263-276.
- [72] SEURET, S. AND LÉVY VÉHEL, J. A time domain characterization of 2-microlocal spaces *J. Four. Anal. App.*, Vol. 9, 5 (2003), 473-495.
- [73] STEIN, E. Singular integrals and differentiability properties of functions. *Princeton University Press* (1970).
- [74] STINCHCOMBE, M. The gap between probability and prevalence : loneliness in vector spaces *Proceedings of the american mathematical society* ,Vol. 129, 2 (2000), 451-457.
- [75] TRIEBEL, H. Theory of functions spaces II. *Birkhäuser, Basel*, (1992).

Généricité et prévalence des propriétés multifractales de traces de fonctions

Résumé : L'analyse multifractale est l'étude des propriétés locales des mesures ou des fonctions. Son importance est apparue dans le cadre de la turbulence pleinement développée. Dans ce cadre, l'expérimentateur n'a pas accès à la vitesse en tout point d'un fluide mais il peut mesurer sa valeur en un point en fonction du temps. On ne mesure donc pas directement la fonction vitesse du fluide, mais sa trace. Cette thèse est essentiellement consacrée à l'étude du comportement local de traces de fonctions d'espaces de Besov : nous déterminerons la dimension de Hausdorff des ensembles de points en lesquels une trace de fonction a un exposant de Hölder donné (spectre multifractal). Afin de caractériser l'exposant de Hölder et l'appartenance à un espace de Besov, on utilise la décomposition de fonctions sur les bases d'ondelettes.

Nous n'obtenons pas la valeur du spectre de la trace de toute fonction d'un espace de Besov mais sa valeur pour un ensemble générique de fonctions. On fait alors appel à deux notions de généricité différentes : la prévalence et la généricité au sens de Baire. Ces notions ne coïncident pas toujours, mais ici, on obtiendra les mêmes résultats.

Enfin, afin d'illustrer les diverses formes que peut prendre un spectre multifractal, on construira une fonction qui est son propre spectre multifractal.

Mots clés : Fractales et Multifractales, Traces de fonctions, Prévalence, Généricité de Baire, Dimension et mesure de Hausdorff, Ondelettes.

Genericity and prevalence of multifractal properties of function traces

Abstract : Multifractal analysis consists in the study of local properties of measures and functions. Its importance appeared in the frame of fully developed turbulence. In this area, physicists do not know the velocity of a fluid at all points but they can measure its value in one point in function of time. Hence, they do not measure the velocity function of the fluid but its trace. This thesis is mainly dedicated to the study of local behavior of traces of Besov functions : we will determine the Hausdorff dimension of sets of points at which the traces of a function has a given Hölder exponent (the so-called multifractal spectrum). In order to easily characterize Hölder exponent and Besov spaces, we will use wavelet decomposition.

We do not get the value of the multifractal spectrum of the trace of all functions of a Besov space, but its value for a generic set of functions. We use two notions of genericity : prevalence and Baire's genericity. Even if generic and prevalent properties can be different, here they coincide.

In the last part, in order to illustrate the various shapes that a multifractal spectrum can take, we will construct a function which is its own multifractal spectrum.

Keywords : Fractals and multifractals, Functions traces, Prevalence, Baire genericity, Hausdorff measures and dimensions, Wavelets.