



Contributions à l'étude de la stabilité d'écoulements autosemblables d'onde thermique pour la fusion par confinement inertiel

Laurent Dastugue

► To cite this version:

Laurent Dastugue. Contributions à l'étude de la stabilité d'écoulements autosemblables d'onde thermique pour la fusion par confinement inertiel. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2013. Français. NNT : . tel-00975215

HAL Id: tel-00975215

<https://theses.hal.science/tel-00975215>

Submitted on 8 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Présentée par

Laurent DASTUGUE

Pour obtenir le grade de :

Docteur de l'université Pierre et Marie CURIE

Spécialité

MÉCANIQUE DES FLUIDES

Sujet de la thèse :

**Contributions à l'étude de la stabilité d'écoulements
autosemblables d'onde thermique pour la fusion par
confinement inertiel**

Soutenue le 18 octobre 2013, devant le jury composé de :

M. Jean-Marie CLARISSE	Expert senior au CEA CEA/Bruyères-le-Châtel	Encadrant de thèse
M. Serge GAUTHIER	Directeur de recherche au CEA CEA/Bruyères-le-Châtel	Directeur de thèse
M. Serge HUBERSON	Professeur des universités Université de Poitiers	Rapporteur
M. Boniface NKONGA	Professeur des universités Université de Nice Sophia-Antipolis	Rapporteur
M. Sergey GAVRILYUK	Professeur des universités Université Aix Marseille III	Président du jury
M. Pierre SAGAUT	Professeur des universités Université Pierre et Marie Curie/Paris 6	Examineur

Remerciements

En 2009, j'ai accepté le projet de thèse qui m'était proposé. Mon objectif, en plus de continuer le travail entamé en stage de fin d'études, était de m'impliquer dans un projet et de tester mes limites. En 2013, je peux dire que les objectifs sont remplis.

Je remercie très sincèrement Serge GAUTHIER et Jean-Marie CLARISSE, qui m'ont proposé ce projet, après avoir accepté ma candidature en stage. Ces années à vos côtés ont été très agréables. J'ai appris tous les jours à votre contact et votre conviction, votre recul quand c'est nécessaire ou encore votre capacité d'analyse sont des modèles inaccessibles que je n'aurais de cesse de viser. La confiance et le respect qui se sont instaurés entre nous ont été importants pour la réussite de cette thèse, y compris lorsque les problèmes (légers) de santé, les fractures ou les mauvaises nouvelles d'ordre personnel sont apparus.

Il est parfois difficile de s'intégrer dans un groupe déjà formé. Pas dans mon cas, grâce à l'accueil des anciens tels que Franck, Emeric, Aude, Xavier ou Micka, cette intégration fut rapide. Je dois remercier également ceux sans qui mon passage au centre n'aurait pas été aussi agréable. Je pense à Clotilde (la tornade mais aussi et surtout la bonne humeur du couloir), Gauthier (au moins aussi cinglé que moi), Daniel (parfait mélange entre charisme et susceptibilité), Cédric (un petit match de rugby ?), Thibaut, Quentin, mais aussi aux stagiaires et aux nouveaux thésards comme Alexandra, Gregory, Anaïs (nos pause-clopes philosophiques me manquent), Guillaume (le crocodile), Nicolas (l'américain), Gontran (Leclercq Colombes t'attend toujours), Quentin (raid-man). Enfin, merci aux représentants de DPTA qui permettaient de varier les discussions du midi, à savoir Zohra (wesh cousine, bien ou bien ?), Sarah, Déborah, Alex, Jérémy, Julien, Romain, Julie. Merci également à tous ceux que j'oublie.

Merci Maman, merci Papa, merci pour tout. Beaucoup de monde a été surpris quand j'ai choisi de faire une thèse, pas vous. Vous avez pris le parti de me soutenir quoi qu'il arrive. Si je suis arrivé là, c'est aussi grâce à vous. Merci frangine pour ton soutien lointain mais important. Et j'inclus dans ce paragraphe la famille Préher. Merci pour tous ces moments qui ont fait de nous cinq des gens biens.

Merci Caro, ou devrais-je dire pardon Caro de t'avoir imposé cette thèse. Même si l'impatience a parfois pointé le bout de son nez tu es restée calme face à tout ça. Pour ce que tu as enduré et pour le livre d'or magnifique que tu as fait, tu mériterais aussi un diplôme. Merci enfin à tous mes amis, que notre amitié remonte à l'enfance à Rambouillet (Fouiiiiizzz!!! et Bandédéban forever), à l'internat ou à Poitiers. J'ai entendu un jour que l'on pouvait juger quelqu'un en regardant les gens qui sont là pour lui les jours importants, les messages, les appels et les gens présents pour ma soutenance m'ont fait penser que ce proverbe était bien trop flatteur pour moi.

J'ai une pensée pour les bouts de chou qui ont vu le jour au cours de ce projet ou juste avant comme Axel (tu seras fier de ton parrain), Raphaël, Syrielle, Quentin ou Maël et pour Malik, parti trop tôt, comme cela est d'usage pour les meilleurs d'entre nous.

Table des matières

Introduction	9
I Généralités	13
1 Mise en équation du phénomène physique d'ablation thermique	17
1.1 La fusion par confinement inertiel	17
1.1.1 Principe de la FCI	19
1.1.2 Motivation d'une telle étude	22
1.2 Équations de l'hydrodynamique avec conduction thermique non-linéaire	22
1.3 Phénoménologie du chauffage de la cible	25
1.3.1 Analogie avec le bain thermique	25
1.4 Instabilités hydrodynamiques en FCI	27
1.4.1 Instabilité de Rayleigh–Taylor	27
1.4.2 Instabilité de Richtmyer–Meshkov	28
1.4.3 Instabilité du front d'ablation	28
1.5 Les difficultés rencontrées dans l'étude de stabilité des écoulements instationnaires	32
2 Formulation autosemblable des systèmes différentiels	33
2.1 Formulation autosemblable de l'écoulement de base	33
2.1.1 Travaux antérieurs sur des solutions autosemblables en FCI	33
2.1.2 Formulation du système d'équations en coordonnée de Lagrange	36
2.1.3 Adimensionnement des équations	37
2.1.4 Formulation autosemblable	38
2.2 Perturbations linéaires de la solution autosemblable	41
2.2.1 Perturbations de l'écoulement de base	41
2.2.2 Transformation de Fourier et décomposition de Helmholtz	42
2.2.3 Passage en variable autosemblable	43
2.2.4 Conditions initiales	44
2.2.5 Conditions aux limites	44
2.2.6 Relations de saut au choc isotherme	46
3 Outils et méthodes numériques	47
3.1 Systèmes d'équations résolus	47
3.1.1 Système d'équations aux dérivées ordinaires pour l'écoulement de base . . .	48
3.1.2 Système d'équations aux dérivées partielles pour les perturbations linéaires	48
3.2 Méthodes spectrales	50
3.2.1 Méthode des résidus pondérés	51
3.2.2 Méthode de collocation	51
3.2.3 Adaptation dynamique de maillage	54

3.3	Méthodes de relaxation avec préconditionnement	55
3.3.1	Méthode itérative	56
3.3.2	Relaxation de Richardson	56
3.3.3	Accélération de Chebyshev	58
3.3.4	Critères d'arrêt de la procédure de relaxation	58
3.4	Méthodes propres à la résolution numérique de l'écoulement de base	59
3.4.1	Interpolation	60
3.4.2	Décomposition en valeurs singulières	60
3.5	Méthodes propres à la résolution numérique des perturbations en multidomaine	62
3.5.1	Méthode de la matrice d'influence	62
3.5.2	Méthode de Thompson	63
II	Vers d'autres écoulements	65
4	Analyse théorique du système autosemblable d'équations aux dérivées ordi- naires	69
4.1	Formulation autonome	70
4.1.1	Invariance par changement d'échelle	70
4.1.2	Forme équidimensionnelle en ξ	71
4.1.3	Forme autonome	72
4.2	Forme différentielle et identification des singularités	72
4.2.1	Écriture sous forme canonique du système	73
4.2.2	Identification des singularités	74
4.3	Comportement de la solution au voisinage des singularités	76
4.3.1	Relations de Rankine–Hugoniot dans le cas d'un choc isotherme — singu- larité $D_{\ln \xi} = 0$	76
4.3.2	Approximation locale de la solution au niveau du pied du front thermique — singularité $\bar{\Theta}^n = 0$	77
5	Contrainte de stabilité temporelle du système aux perturbations	85
5.1	Notions préliminaires	86
5.1.1	Travaux de référence	86
5.1.2	Rappels sur la stabilité des schémas numériques	87
5.1.3	Domaines de définition et transformations de coordonnées	88
5.2	Raisonnement suivant les coordonnées cartésiennes	89
5.2.1	Sous-système de la dynamique des gaz	90
5.2.2	Prise en compte de la conduction thermique	91
5.3	Étude dans le système de coordonnées (ξ, y, z, t)	94
5.3.1	Système hyperbolique de la dynamique des gaz	94
5.3.2	Équation parabolique de la conduction thermique	95
6	Améliorations techniques apportées à l'outil numérique	99
6.1	Explications préliminaires	99
6.1.1	Changement du type de préconditionnement de différences finies à éléments finis	99
6.1.2	Formalisation de la méthode de relaxation des perturbations	101
6.2	Optimisation de la procédure de relaxation des perturbations	101
6.2.1	Valeur de référence du résidu	102
6.2.2	Calcul dynamique du paramètre de relaxation α_{opt}	104

6.2.3	Conditions initiales des sous-problèmes élémentaires de la méthode de la matrice d'influence	107
III	Conduction radiative sans précurseur thermique	113
7	Discussion sur les écoulements radiatifs	117
7.1	Définition des grandeurs caractéristiques	117
7.1.1	Points particuliers	118
7.1.2	Position d'un point et longueurs caractéristiques	118
7.1.3	Vitesse et accélération	120
7.1.4	Nombres sans dimension	120
7.2	Variation des paramètres $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_\varphi$	121
7.2.1	Abaque	121
7.2.2	Variation de la condition limite en pression	123
7.2.3	Variation de la condition limite en flux	125
7.3	Choix des écoulements traités	129
8	Écoulement d'ablation radiative à détente subsonique	137
8.1	Choix de la configuration perturbée	137
8.1.1	Rappels sur le régime autosemblable des perturbations	137
8.1.2	Perturbation du flux radiatif de frontière	138
8.2	Définition des conditions de calcul	138
8.2.1	Critères de définition de la grille de calcul	138
8.2.2	Détermination de la plage temporelle des calculs	140
8.2.3	Élaboration de la grille de calcul	140
8.3	Réponses en perturbations linéaires	147
8.3.1	Régime transitoire	150
8.3.2	Régime autosemblable	158
9	Écoulement d'ablation radiative à détente supersonique	169
9.1	Élaboration de la grille de calcul	169
9.2	Réponses en perturbations linéaires	172
9.2.1	Régime transitoire	175
9.2.2	Régime autosemblable	183
IV	Écoulements avec précurseur thermique	195
10	Intégration numérique de l'écoulement de base	199
10.1	Formulation du système au voisinage du front	200
10.1.1	Changement de variables dépendantes et indépendantes	201
10.1.2	Formulation des matrices et vecteurs utilisés au pied du front thermique	203
10.2	Méthode de résolution	205
10.2.1	Domaine adjacent au front thermique	206
10.2.2	Domaines du précurseur thermique	212
10.2.3	Domaines en aval du choc isotherme	216
10.2.4	Procédure de résolution globale	216
10.3	Conclusion	219

11 Exploration de différents régimes d'écoulements de base en conduction électronique	221
11.1 Rappels sur les solutions sans précurseur thermique	222
11.2 Solutions avec précurseur thermique	222
11.2.1 Définition des grandeurs caractéristiques	223
11.2.2 Régime ablatif	223
11.2.3 Comportement au niveau du choc et du front thermique	236
11.2.4 Impact de la prise en compte du précurseur pour un écoulement à $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ fixé	236
11.2.5 Autres régimes	236
12 Formulation des équations aux perturbations au front thermique	241
12.1 Conditions aux limites au front thermique	241
12.2 Système de la dynamique des gaz en variables $(\check{\xi}, \check{Q}, \check{\tilde{Q}})$	242
12.3 Équations de la conduction thermique en $(\check{\xi}, \check{Q}, \check{\tilde{Q}})$	245
13 Méthode d'intégration numérique des équations aux perturbations	247
13.1 Résolution du système de la dynamique des gaz	248
13.1.1 Zone aval	248
13.1.2 Zone amont	250
13.2 Résolution des équations de la conduction thermique	252
13.2.1 Zone aval	253
13.2.2 Zone amont	253
13.2.3 Méthode de la matrice d'influence	255
13.3 Contrainte de stabilité temporelle du système aux perturbations en variables $(\check{\xi}, \check{Q}, \check{\tilde{Q}})$	259
13.3.1 Système de la dynamique des gaz	260
13.3.2 Équation de la conduction thermique	261
13.4 Test de la solution exacte de translation	262
Conclusion	265
A Les différents systèmes de coordonnées utilisés	269
A.1 Quantités de base	269
A.1.1 Relations de passage de la représentation eulérienne à la représentation lagrangienne	269
A.1.2 Relations de passage de la représentation lagrangienne à la représentation réduite	269
A.1.3 Relations de passage de la représentation réduite à la représentation réduite régularisée	270
A.1.4 Relations de passage de la représentation réduite à la représentation réduite autonome	270
A.1.5 Écriture des quantités dans le repère du laboratoire	271
A.2 Perturbations	271
A.2.1 Relations de passage de la représentation lagrangienne à la représentation réduite	271
A.2.2 Relations de passage de la représentation réduite à la représentation réduite régularisée	271
A.2.3 Relations de passage de la représentation réduite à la représentation réduite régularisée en perturbation	272

A.3	Récapitulatif des différentes notations	272
B	Formulation autosemblable	275
B.1	Similitudes	275
B.2	Variables réduites	276
C	Schéma semi-implicite d'ordre 2 à trois étapes	277
D	Relations de Rankine–Hugoniot	279
D.1	Perturbation d'une relation de saut sur une surface perturbée	279
D.2	Relations de Rankine–Hugoniot	279
D.3	Relations de Rankine–Hugoniot dans le cadre de notre étude	280
D.4	Linéarisation des relations de Rankine–Hugoniot perturbées	280
D.5	Dissociation des termes temporels et spatiaux	283
E	Contrainte de stabilité du schéma RK3 en coordonnée de Lagrange	285
E.1	Conservation de la masse	285
E.2	Conservation de la quantité de mouvement	285
E.2.1	Partie longitudinale	286
E.2.2	Partie transversale	286
E.3	Équation d'évolution de la pression	286
E.4	Sous-système hyperbolique	286
E.5	Partie liée à la dynamique des gaz	287
E.6	Partie diffusive	287
F	Détermination des constantes présentes dans la formulation du pas de temps critique	289
F.1	Équation d'advection, discrétisation de Fourier	289
F.2	Équation de diffusion, discrétisation de Fourier	290
F.3	Équation d'advection, discrétisation de Chebyshev	290
F.4	Équation de diffusion, discrétisation de Chebyshev	291
G	Méthode de Thompson dans le cas d'une perturbation de pression nulle à l'origine	293
H	Solution exacte de translation pour $k_{\perp} = 0$	295
H.1	Solution exacte pour $k_{\perp} = 0$	295
H.2	Preuve	295
I	Fichiers pour les configurations d'écoulements, en conduction radiative, avec détente subsonique et supersonique RFA	299
I.1	Écoulement subsonique RFA	299
I.1.1	Fichier « parametres-definition-calcul.nml »	299
I.1.2	Fichier « parametres-resol-base-ablation.nml »	301
I.2	Écoulement supersonique RFA	302
I.2.1	Fichier « parametres-definition-calcul.nml »	302
I.2.2	Fichier « parametres-resol-base-ablation.nml »	304
	Glossaire	307

Introduction

L'être humain et son histoire sont étroitement liés à l'histoire de la production d'énergie. Que ce soit pour se nourrir, avec l'énergie issue des aliments à sa disposition, ou se chauffer, l'homme a rapidement compris l'importance de se constituer des réserves d'énergie. Il a ainsi stocké du bois pour se chauffer ou s'éclairer, cultivé pour se nourrir, élevé des animaux domestiques pour les travaux nécessitant beaucoup d'efforts. De nos jours, après des millénaires, la place de l'énergie n'a cessé de croître. Cela s'est notamment accéléré au dix-neuvième siècle avec la révolution industrielle et l'explosion de la consommation et par conséquent, de la productivité. L'énergie est devenue non seulement la base de notre société, le sujet principal des recherches autour du globe mais aussi la clé de voûte des relations internationales. L'humanité consomme tous les jours de plus en plus d'énergie et les mises en garde des écologistes ne peuvent que ralentir cette conséquence du progrès. Aujourd'hui, la situation est particulièrement préoccupante. Différents experts prévoient que la population mondiale dépassera les 10 milliards d'individus autour de 2100, contre un peu plus de 6,5 milliards en 2013, et pourrait ensuite stagner autour de ce chiffre. Ces personnes consommeront de l'énergie pour se nourrir et se chauffer pour la quasi-totalité d'entre eux. Les plus favorisés consommeront également pour se déplacer ou se divertir. Les sources d'énergie dites traditionnelles telles que le charbon ou le pétrole, dont les réserves sont épuisables et surtout bien entamées, ne pourront certainement pas subvenir aux besoins d'une telle population. C'est pourquoi de nombreux pays, en parallèle avec leur recherche d'indépendance énergétique, misent beaucoup sur les sources d'énergie alternatives pour dénicher l'énergie de demain. Il est important de se concentrer sur des énergies ne produisant pas de dioxyde de carbone telles que les énergies solaire, éolienne, hydraulique ou encore la biomasse, la fission ou la fusion nucléaire.

Ce projet de thèse s'inscrit plus particulièrement dans le domaine de la production d'énergie nucléaire. Deux types de réactions sont possibles pour produire cette énergie. À ce jour, les centrales fonctionnent avec la technique de la fission des noyaux. Mais au niveau des étoiles, l'énergie dégagée est issue de réactions thermonucléaires de fusion. Les mécanismes de cette réaction ayant été observés et compris dans le cadre de son déroulement continu dans le soleil, l'objectif de la communauté des chercheurs est aujourd'hui de s'en inspirer pour la reproduire à notre échelle. Pour atteindre le but ambitieux d'une fusion contrôlée, il est question d'amener un milieu fusible, actuellement constitué de Deutérium (D) et de Tritium (T), à des conditions de température et de densité extrêmes mais nécessaires au déclenchement de ces réactions thermonucléaires. L'intérêt de ces recherches réside dans la grande quantité d'énergie qui se dégage lors de la combinaison de noyaux légers en éléments plus lourds. Toutes deux positives, les charges électriques des deux noyaux entraînent une répulsion qu'il faut surmonter pour atteindre la fusion. On appelle ce phénomène la barrière coulombienne. Un critère existe pour définir la condition d'allumage du milieu fusible, il s'agit du critère de Lawson (Lindl, 1998) :

$$\rho \tau \geq 10^{14} \text{s cm}^{-3}, \quad (1)$$

avec ρ la densité du combustible et τ le temps de confinement. Le confinement est en effet très im-

portant dans ce type de réactions pour augmenter la probabilité de fusion. Au niveau des étoiles, ce rôle est joué par la force gravitationnelle. À notre échelle, deux méthodes existent actuellement pour confiner la matière : la fusion par confinement magnétique (FCM) comme dans le projet ITER, pour laquelle un champ magnétique toroïdal est utilisé pour confiner le plasma, et la fusion par confinement inertiel (FCI) pour laquelle le plasma est chauffé et comprimé fortement à l'intérieur d'un petit volume. La FCI est au coeur de deux projets d'envergure en cours. Aux États-Unis, l'installation « National Ignition Facility » (NIF) est opérationnelle depuis 2010 et en France se construit le laser Méga-Joule (LMJ). Les deux techniques sont discutées plus en détail dans la suite de ce mémoire, mais le travail effectué au cours de cette thèse est motivé par la FCI. La compression de la cible n'est en effet, pas complètement sphérique. Des instabilités hydrodynamiques se développent alors, causées principalement par des défauts d'éclairement ou des irrégularités de la surface du micro-ballon. Le contrôle de ces instabilités joue un rôle central dans le succès de l'implosion. Il s'agit d'instabilités de Rayleigh-Taylor, Richtmyer-Meshkov et du front d'ablation. Celles-ci peuvent notamment empêcher les conditions de température et de densité indispensables à la fusion d'être atteintes. Les connaissances sur ces instabilités croissent sans cesse et les équipes du CEA/DAM profitent de l'arrivée de moyens de calcul puissants pour développer des codes de simulation d'hydrodynamique radiative 1D, 2D et 3D. Cependant un même modèle ne peut traiter toutes les phases de l'implosion.

L'approche suivie au cours de ce projet, qui l'a été précédemment par Boudesocque-Dubois (2000), Abeguilé (2004) et Lombard (2008) est basée sur le fait que, en FCI, les écoulements d'ablation ont des comportements plus proches de l'autosimilarité que de la stationnarité. La méthode consiste à utiliser une configuration idéalisée, à l'aide de solutions autosemblables, pour résoudre le système d'équations du mouvement de la façon la plus précise possible, donc sans objectif de dimensionnement. La différence entre cette approche et celle des codes 1D, 2D et 3D de dimensionnement existants réside dans la fiabilité des conclusions. En effet, les modèles existants d'instabilités hydrodynamiques en FCI sont des modèles *ad hoc* qui s'appuient sur des hypothèses de départ très restrictives telles que la stationnarité, la quasi-incompressibilité ou la modélisation quasi-discontinue de modèles continus. En fonction des données expérimentales de simulation, ces modèles restituent les phénomènes observés après coup. Au contraire de ceux-ci, l'approche suivie au cours de ce projet, basée sur une méthode de résolution numérique en adéquation avec la modélisation physique, est prédictive dans le cadre particulier des écoulements d'ablation autosemblables. Elle peut donc renseigner qualitativement sur l'influence des différents mécanismes. Dans son travail de thèse, Boudesocque-Dubois (2000) considère les solutions exactes autosemblables de l'hydrodynamique avec conduction thermique non-linéaire. Ces solutions sont caractéristiques d'écoulements d'ablation unidimensionnels et instationnaires relatifs à la phase de déflagration, pour des conditions initiales et aux limites particulières. Dans l'objectif de mener une étude de stabilité linéaire d'écoulements d'ablation, une méthode de résolution de grande précision des équations aux perturbations linéaires a été développée par Boudesocque-Dubois (2000), généralisée par Abeguilé (2004) puis optimisée par Lombard (2008), permettant de mener une étude physique (Lombard *et al.*, 2008). Pour un nombre d'onde nul et des non-uniformités du flux laser, les évolutions spatio-temporelles des perturbations ont montré une instabilité maximale (Abeguilé *et al.*, 2006; Clarisse *et al.*, 2008). La solution, après une phase transitoire, atteint l'état stable d'une autres solution de la même famille. Pour un nombre d'onde non-nul, les temps longs voient les perturbations s'atténuer jusqu'à ce que l'écoulement revienne à l'état stable. Lombard (2008) a poursuivi cette approche en analysant, sans hypothèses simplificatrices, les perturbations selon les modes de Kôvasznay (Chu et Kovâsznay, 1958). Ces modes permettent de décomposer les petites perturbations du mouvement d'un fluide. En analysant et en comparant des écoulements du type de ceux rencontrés au LMJ, Lombard (2008) a pu notamment mesurer les effets de la

compressibilité sur les perturbations.

Les équations d'Euler avec conduction thermique non-linéaire conduisent à un choc d'épaisseur finie. Les différents travaux mentionnés jusqu'à présent utilisent une hypothèse de choc dit parfait qui néglige cette épaisseur. L'examen de cette classe particulière d'écoulements a permis d'éprouver la méthode de résolution, multidomaine, spectrale et adaptative, utilisée. Grâce à cet outil, le code RAMSES, de nombreuses configurations d'écoulements ont pu être analysées. L'une des premières étapes de cette thèse a été d'optimiser encore l'outil numérique, dans l'hypothèse de choc parfait, de manière à atteindre des écoulements inaccessibles jusqu'alors. Par ailleurs, les travaux précédents s'étaient principalement intéressés à des écoulements avec conduction électronique. L'objectif recherché était donc d'effectuer une étude de perturbations pour quelques configurations d'écoulements avec conduction radiative en lien avec les expériences prévues sur l'installation LMJ. Ceux-ci étant par définition plus raides et donc plus complexes, un travail d'optimisation du code RAMSES s'est avéré indispensable. La deuxième partie, qui est aussi la plus importante, de cette thèse a consisté, toujours dans une idée d'élargissement de la gamme d'écoulements accessibles et donc d'un approfondissement de nos connaissances sur les écoulements de type FCI, à prendre en compte et décrire le précurseur thermique supersonique en amont du choc, lui-même désormais isotherme. Ce travail s'accompagne évidemment d'une étude approfondie du nouvel écoulement de base et des opérateurs associés. Une fois ce travail réalisé, l'outil numérique adapté aux diverses spécificités et singularités de ce type d'écoulements, de nombreuses configurations de base ont été atteintes et discutées. La dernière étape de ce projet a consisté à poser les fondations d'une future étude de perturbations linéaires d'un écoulement avec précurseur thermique. Pour cela, l'indispensable examen théorique a été effectué, tout comme le travail de préparation de la méthode numérique à accueillir les perturbations.

Ce mémoire est divisé en quatre parties dont la première concerne les fondamentaux à connaître avant de se lancer dans la lecture de la suite de celui-ci. On y trouve une brève histoire des recherches sur ce sujet, les équations du système considéré, à savoir les équations de l'hydrodynamique avec conduction non-linéaire, l'histoire et la mise en place de la formulation autosemblable de celles-ci ainsi que la présentation des différentes méthodes numériques utilisées au cours de ce projet. La seconde partie est une partie transitoire vers l'analyse de nouvelles configurations d'écoulements. L'étude détaillée de l'écoulement de base avec précurseur thermique y est présente, tout comme la formulation d'une contrainte de stabilité temporelle du système aux perturbations, élément essentiel d'un tel travail, ou les différentes améliorations apportées à l'outil numérique. La troisième partie, quant à elle, traite d'écoulements avec conduction radiative et de l'étude des perturbations linéaires qui y sont appliquées. Dans cette partie, des configurations autosemblables sont utilisées, y compris pour les perturbations. Les calculs qui y sont effectués vont par paire puisque pour chacun d'entre eux, on considère une longueur d'onde finie de perturbations et le cas de la longueur d'onde infinie. On attend de l'analyse des résultats quelques différences et similitudes entre la conduction radiative et la conduction électronique mais aussi entre les réponses à longueur d'onde finie et infinie. La dernière partie, enfin, traite des écoulements avec précurseur thermique supersonique en amont d'un choc isotherme. La méthode numérique relative à l'écoulement de base y est détaillée et ses résultats examinés. Pour finir, les deux derniers chapitres concernent l'étude prospective de la méthode numérique de traitement de l'écoulement perturbé.

Première partie

Généralités

Ce mémoire a pour objectif de rendre compte des résultats obtenus au cours de cette thèse. Afin d'en faciliter la compréhension, il est indispensable de prendre le temps d'expliquer la genèse du projet dans lequel celle-ci s'inscrit. Les études réalisées par les différentes personnes qui ont travaillé sur la physique de la fusion par confinement inertiel ont permis à ce projet de voir le jour. En effet, à travers le monde, les équipes de chercheurs ont employé différentes méthodes, diverses hypothèses et ont obtenu de nombreux résultats dont les travaux actuels profitent.

Les équations prises en compte pour l'étude dont il est question ici sont celles de l'hydrodynamique avec conduction non-linéaire de la chaleur. Elles sont traitées sous forme autosemblable. Pour mener à bien la résolution du système régissant l'écoulement non-perturbé, mais aussi pour analyser les réponses en perturbations linéaires de cet écoulement, des méthodes numériques interviennent. Qu'elles soient classiques ou non, une partie de ces techniques est antérieure à ce travail de thèse, c'est pourquoi la description de celles-ci apparaît dans cette première partie.

Chapitre 1

Mise en équation du phénomène physique d'ablation thermique

La maîtrise de la fusion thermonucléaire¹, qui consiste à faire fusionner deux noyaux d'atomes pour récupérer l'énergie issue de la réaction, est un des objectifs majeurs de la recherche internationale en physique depuis de nombreuses années. L'objectif à atteindre est de réussir à comprimer mécaniquement une cible pour obtenir la température nécessaire au déclenchement de la réaction. Un des moyens envisagés pour y parvenir est la fusion par confinement inertiel. Cette méthode consiste à chauffer et comprimer une cible sphérique, contenant un mélange fusible, de façon isotrope afin de provoquer l'implosion de la cible. Cette implosion crée les conditions de densité et de température extrêmes nécessaires au déclenchement de la réaction de fusion proprement dite. Cependant, plusieurs types d'instabilités hydrodynamiques sont susceptibles de dégrader les performances de l'implosion. De nombreuses études tentent de décrire au mieux le comportement de ces instabilités. Le front d'ablation est le théâtre de l'instabilité dite « du front d'ablation », déjà étudiée sous différentes hypothèses. La phase de détonation, aux premiers instants, est très importante dans le déroulement de la suite des événements et nécessite également d'être étudiée. Pour l'étude de ce type d'écoulement, il est possible d'utiliser un système basé sur les équations de la dynamique des gaz avec conduction thermique non-linéaire. C'est la voie choisie pour cette étude.

1.1 La fusion par confinement inertiel

La fusion est, avec la fission, un des deux principaux types de réactions nucléaires. On sait qu'il se produit ce type de réaction de fusion thermonucléaire dans les étoiles et notamment dans le Soleil. La volonté de reproduction de la fusion thermonucléaire est en partie liée aux armes nucléaires. Son attractivité provient de la forte quantité d'énergie potentiellement produite au cours de la réaction. Concrètement, atteindre la fusion thermonucléaire consiste à vaincre la répulsion des noyaux de deux éléments légers, afin qu'ils mettent en commun leurs nucléons pour former un élément plus lourd (Fig. 1.1). On observe alors que la masse du noyau créé est inférieure à la somme des masses des noyaux légers utilisés lors de la fusion. La relation d'Einstein entre la variation de masse et la variation d'énergie, à savoir :

$$\Delta E = \Delta m c^2, \quad (1.1)$$

1. Au cours de ce mémoire, certaines notions sont soulignées, elles sont alors définies dans le glossaire présent en fin de rapport.

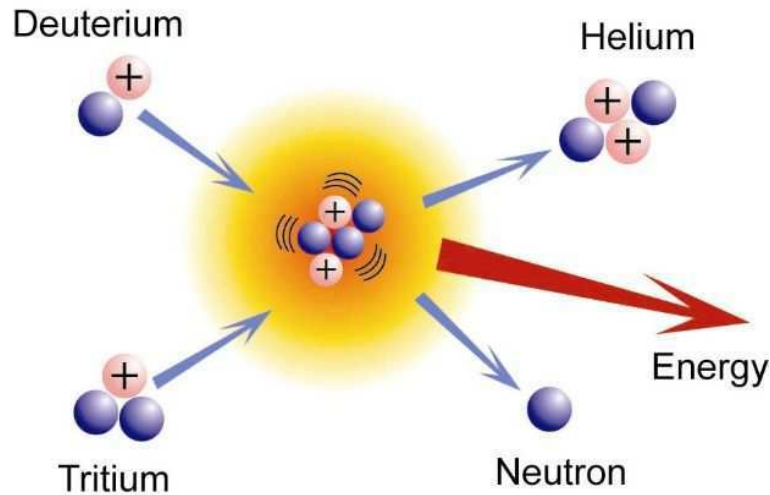


FIGURE 1.1 – Figure explicative de la réaction de fusion entre du Deutérium et du Tritium (<http://www.iter.org/fr/sci/whatisfusion>).

avec E l'énergie, m la masse et c la vitesse de la lumière, traduit le dégagement d'énergie qui explique cette différence. Si dans le cas des armes, l'emballement de la réaction est recherché, l'objectif, à terme, est de parvenir à une fusion contrôlée pour produire de l'énergie. Réaliser une fusion contrôlée implique un dégagement d'énergie plus faible, et donc, par conséquent, des réserves de combustible réduites. Le seuil critique de fonctionnement est ainsi inévitablement approché, d'où la difficulté du projet.

Le temps durant lequel les conditions élevées de densité et de température sont maintenues doit être suffisamment long pour que se déclenche le processus. Or ces conditions impliquent une vitesse des particules très importante et donc un grand volume de répartition de la matière. La probabilité de fusion s'atténuant fortement avec ce volume, une des questions primordiales qu'il faut se poser concerne le confinement de la matière. C'est pourquoi un critère existe pour évaluer la faisabilité de la réaction : le critère de Lawson (1957). Celui-ci donne une relation entre la masse volumique ρ , le temps de confinement τ et une constante C qui dépend elle-même de plusieurs paramètres comme la nature du combustible choisi et la température. Il s'écrit :

$$\rho \tau > C. \quad (1.2)$$

La fusion est permise dans les étoiles grâce à la température, de l'ordre de plusieurs dizaines de millions de degrés, qui règne en leur cœur. Cette chaleur, associée à une forte pression, va permettre de venir à bout de la répulsion électrique qui existe naturellement entre deux noyaux chargés positivement. De plus, le nombre élevé de particules et la grande échelle temporelle augmentent la probabilité de rencontre entre deux noyaux légers. Enfin, la très forte gravité présente sur ces astres permet de confiner la matière et d'éviter l'explosion.

Dans les années 1960, se rapprocher des conditions extrêmes rencontrées essentiellement dans les milieux astrophysiques, mais aussi dans les explosions nucléaires, est devenu un objectif abordable. L'utilisation de la puissance laser sur des durées courtes peut, en effet, amener la matière à atteindre ces conditions de densité et de température. Plus sûre que la fission nucléaire et produisant des corps radioactifs moins problématiques à traiter, cette réaction n'est cependant pas encore maîtrisée, ce qui empêche d'envisager l'industrialisation de réacteurs à fusion nucléaire.

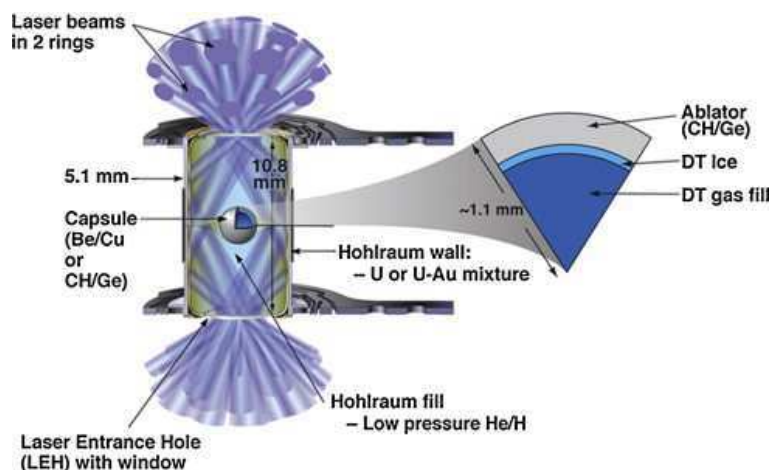


FIGURE 1.2 – Schéma d'une installation de FCI (Moses, 2010) et composition de la cible.

Les connaissances sur le sujet sont néanmoins suffisantes pour que la fusion soit utilisée dans les bombes thermonucléaires.

1.1.1 Principe de la FCI

À notre échelle, deux techniques existent pour assurer le confinement de la matière et jouer le rôle que joue la force gravitationnelle pour notre soleil ou pour les étoiles. Il s'agit de la fusion par confinement inertiel (FCI) et de celle par confinement magnétique (FCM).

Dans le cas de la FCI, le principe est de se servir de l'énergie cinétique communiquée au matériau et de l'inertie de celui-ci pour assurer le confinement tandis que dans celui de la FCM, un champ magnétique est utilisé afin de forcer les ions et les électrons du plasma à se rassembler autour des lignes de champ. Le critère de Lawson (1.2) illustre bien les différences entre ces deux méthodes. En effet, en FCI, nous avons affaire à des masses volumiques importantes et à de petits temps de confinement, le cas inverse correspondant à la FCM. Ces deux techniques sont relativement gourmandes en énergie. Un moyen de limiter la dépense d'énergie est de ne mener aux conditions optimales pour la fusion qu'une portion du combustible située au centre du micro-ballon. Par combustion auto-entretenue, la zone centrale de la cible enflamme alors le reste du combustible à la manière d'une allumette. On appelle ce principe l'allumage « par point chaud ».

Notre étude traite d'un confinement inertiel, nous détaillons donc spécifiquement cette manière de procéder. En FCI, une cible sphérique, dont la taille est de l'ordre du millimètre, est chauffée et comprimée, de façon isotrope, par un rayonnement laser ou un rayonnement X. Ce chauffage va provoquer une suite d'événements menant à l'implosion de la cible. C'est cette implosion qui permet les fortes conditions de densité et de température indispensables au déclenchement des réactions de fusion. La méthode utilisée pour parvenir à ces conditions peut être soit une méthode d'allumage par point chaud (analogie avec le moteur à essence) soit une méthode d'allumage par compression du combustible (analogie avec le moteur Diesel). Deux différentes méthodes de chauffage sont étudiées. L'attaque directe est la plus intuitive. Il s'agit d'irradier un micro-ballon à l'aide de plusieurs faisceaux lasers. Pour assurer l'isotropie de l'irradiation, le nombre de faisceaux doit être très grand et ceux-ci doivent être très précisément pointés, synchronisés et équilibrés

en puissance. Un défaut, qu'il s'agisse d'un défaut de densité, d'éclairement ou de rugosité, peut conduire l'allumage du combustible fluide à être trop dissymétrique (sans symétrie) et l'allumage peut alors échouer. Le problème consiste à définir les écarts tolérables pour assurer à la fois l'allumage et la combustion.

Une alternative pour assurer une meilleure isotropie est l'attaque indirecte. Le micro-ballon est alors placé dans une cavité de l'ordre du centimètre, constituée d'un matériau opaque et appelée « hohlraum » (qui signifie « cavité » en allemand). Cette cavité est irradiée avec les faisceaux laser. L'énergie déposée sur celle-ci est convertie en rayonnement X qui recircule à son tour dans la cavité. Ce rayonnement irradie donc le micro-ballon avec une bonne isotropie. Certes, le fait de convertir le rayonnement laser en rayonnement X diminue le rendement du processus, mais cette perte est compensée par le gain potentiel en symétrie d'implosion. Ce type d'attaque est assimilable au chauffage appliqué dans un four.

Les noyaux légers envisagés pour cette réaction sont des isotopes de l'Hydrogène (Fig. 1.1) : le Tritium, qui peut être produit artificiellement en irradiant le Lithium présent dans l'écorce terrestre, et le Deutérium, présent en grande quantité dans les océans, mais dont la production, par hydrolyse de l'eau, est très coûteuse. Cependant, ces matériaux présentent l'avantage d'un risque de pénurie nul. Le Tritium est certes radioactif mais sa radioactivité est faible et sa période ne dépasse pas 13 ans.

Des études sont actuellement en cours sur les deux méthodes de confinement, inertiel ou magnétique. Aux États-Unis, au Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL) de Californie, l'installation NIF (National Ignition Facility), achevée en 2009, est en fonctionnement depuis 2010 et concerne la FCI. Sur cette installation à 192 faisceaux, la vitesse d'implosion de 300 km s^{-1} a été atteinte (pour un objectif de 370 km s^{-1}). Une masse surfacique équivalente à 85% de la valeur attendue a été atteinte (LLNL, 2012). Les tirs effectués au NIF ont surtout mis en évidence l'importance des instabilités plasma et des instabilités hydrodynamiques. En effet, les résultats sur la vitesse d'implosion sont très différents des résultats attendus suite aux simulations. Ces résultats mettent en évidence l'absence actuelle de maîtrise quant aux instabilités hydrodynamiques. Le laser Méga-Joule (LMJ), en construction à Bordeaux, devrait permettre des expériences de FCI quand le processus sera bien maîtrisé.

Afin de mieux comprendre les mécanismes qui permettent de lancer l'implosion, il est utile de fournir quelques ordres de grandeur. Le micro-ballon, d'un diamètre de l'ordre du millimètre, contient un mélange Deutérium-Tritium (DT) cryogénique en périphérie et gazeux au centre, avec une densité $\rho = 0,2 \text{ g cm}^{-3}$ dans le cas de l'allumage par point chaud et totalement gazeux dans le cas de l'allumage par compression de masse. La partie externe, de forte densité, s'appelle l'ablateur. Cette partie de la cible sert à contenir le combustible et doit s'ablater, sous l'effet du rayonnement incident, afin d'engendrer l'implosion du micro-ballon. Cette couche doit donc remplir plusieurs conditions. Elle doit en effet être opaque au rayonnement incident pour en convertir l'énergie en énergie cinétique et favoriser l'implosion. Afin de supporter la pression interne de la cible, la résistance mécanique de cette couche doit être suffisante.

Nous allons, dans ce paragraphe, décrire les différentes phases de l'implosion dans le cadre de la FCI (Fig. 1.3). On considère valable la description de la mécanique des milieux continus. Il s'agit d'une approximation très schématique par rapport à la situation réelle rencontrée en attaque directe ou en attaque indirecte. Étant donné les températures mises en jeu, la matière est très rapidement à l'état de plasma, ce qui justifie l'emploi de cette approximation. Ces différentes phases sont les suivantes :

Énergie fournie par le laser	1,8 MJ
Puissance fournie par le laser	500 TW
Longueur d'onde laser	0,35 μm
Vitesse d'implosion maximale	$3 - 4 \cdot 10^7 \text{ cm s}^{-1}$
Pression à la stagnation	200 Gbar
Masse surfacique à la stagnation	3 g cm^{-2}
Température d'allumage du point chaud	10 keV
Rapport d'aspect en vol (RAV)	30
Rapport de convergence de la capsule	25 – 45
Température initiale	19 K
Température du plasma d'ablation	23 keV
Temps d'implosion	20 ns

TABLE 1.1 – Tableau recensant les valeurs numériques des principaux paramètres de l'implosion d'une cible en FCI (Lindl, 1998).

1. un grand nombre de faisceaux envoie sur la cible une intensité laser de l'ordre de 10^{14} à $10^{15} \text{ W cm}^{-2}$. La puissance fournie par la source d'énergie est proche du mégajoule (MJ) (Tab. 1.1) et le temps d'exposition du micro-ballon n'excède pas la dizaine de nanosecondes (Fig. 1.3, étape 1).
2. sous l'effet du rayonnement, la partie externe de l'ablateur est vaporisée et les premiers électrons apparaissent dans le plasma de température 23 keV, sachant que 1 keV correspond à 11,6 millions de Kelvin. Le front thermique ainsi créé est supersonique.
3. dans l'ablateur, l'élévation de la température provoque l'augmentation de la pression. La vitesse du son à l'intérieur de l'ablateur s'en trouve modifiée et le front devient subsonique. Ce changement de régime donne naissance à un front thermique précédé d'une onde de choc plus rapide : c'est ce qu'on appelle la séparation hydrodynamique et qui désigne la transition du régime de détonation au régime de déflagration.
4. c'est alors que débute le régime de déflagration, appelé aussi régime d'ablation dans le cadre de la FCI. Le matériau ablaté est éjecté et crée une couronne de plasma de faible densité et de haute pression, qui va accélérer le matériau non-ablaté de façon centripète par « effet fusée ». L'onde thermique ablate la partie externe de la cible et l'onde de choc traverse la partie froide de celle-ci.
5. ce choc va interagir avec l'interface (ablateur/DT solide cryogénique dans le cas de l'allumage par point chaud, ablateur/DT gazeux sinon), avec pour conséquence la mise en mouvement de cet interface, comme le montre le diagramme de marche (Fig. 1.4).
6. le choc se sépare, à ce moment-là, en un choc transmis et une détente réfléchi (Fig. 1.3, étape 2). Les va-et-vient d'ondes de compression/détente et l'accroissement progressif de l'énergie laser déposée entraînent une augmentation de l'accélération de la cible. C'est la phase d'accélération. Elle dure jusqu'à ce que la surface de la cible atteigne la vitesse d'implosion (Tab. 1.1). Les énergies mises en jeu conduisent à des vitesses d'implosion de l'ordre de $4 \cdot 10^7 \text{ cm s}^{-1}$.
7. le mélange DT est alors comprimé au centre de la cible, c'est la fin de l'implosion, les réactions propres à la fusion se déclenchent alors (Fig. 1.3, étape 4).

Le tableau (1.1) présente différentes valeurs numériques propres à la configuration expérimentale de l'implosion d'une cible en FCI telle qu'elle est visée au NIF, afin de donner une idée plus précise

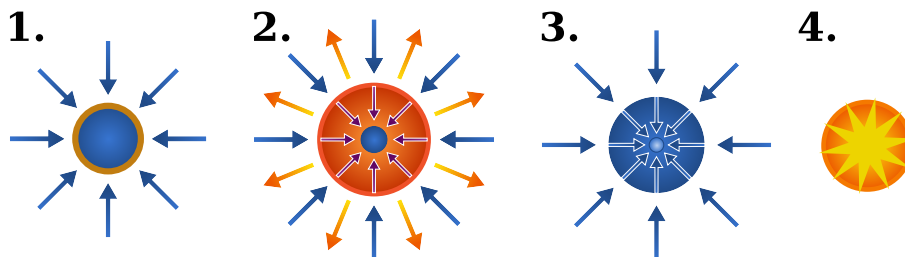


FIGURE 1.3 – **Principe de l'implosion d'une cible de FCI** : dans un premier temps a lieu l'irradiation de la cible (étape 1), qui provoque l'expansion du plasma et la compression de la cible (étape 2). L'ignition commence alors à partir d'un point chaud central (étape 3) avant la combustion du mélange combustible en fusion par confinement inertiel (étape 4).

des ordres de grandeurs en jeu dans ce type d'expérience. La valeur du rapport d'aspect en vol (RAV) (« IFAR » en anglais pour « in-flight aspect ratio ») est par exemple très importante pour les expérimentateurs, notamment pour le dimensionnement des composants de l'expérience.

1.1.2 Motivation d'une telle étude

Si la plupart des travaux sur la FCI se sont concentrés sur la phase de déflagration, l'existence d'une phase de détonation aux premiers instants de l'irradiation de la cible a depuis longtemps été remarquée. Un diagramme de marche est une représentation des trajectoires des particules fluides au cours du temps lors de l'implosion d'une cible. Il permet de suivre le comportement de la cible et les différentes étapes de l'implosion. L'utilisation de la densité permet de visualiser les contrastes associés aux différences de milieux, au choc ou au front d'ablation. L'intervalle de temps où un front thermique est en avance sur le front de choc, intervalle de temps sur lequel se concentre notre étude, se situe sur celui-ci (Fig. 1.4) aux premiers instants, près de l'axe des ordonnées. Il faudrait effectuer un agrandissement pour espérer voir cette configuration d'écoulement sur ce diagramme. Si certaines études s'y sont intéressées, comme on le voit dans le chapitre suivant, aucune n'a vraiment cherché à traiter de façon précise cet état de base ni à le perturber afin d'étudier sa stabilité comme il a été choisi de le faire au cours de ce projet.

1.2 Équations de l'hydrodynamique avec conduction thermique non-linéaire

La quantité et la complexité des phénomènes qui interviennent sont un frein à l'utilisation d'un modèle unique pour toute la phase d'implosion. Dans le cadre de cette étude, un modèle est retenu, il s'agit de celui d'un fluide non-visqueux, régi par l'équation d'état des gaz parfaits (Lindl, 1998). On utilise les équations de l'hydrodynamique non-visqueux dans lesquelles les trois modes fondamentaux sont mentionnés (Landau et Lifchitz, 1989; Lombard, 2008). On considère une température ionique et une température électronique identiques. Enfin, la pression et l'énergie radiative sont négligées. Ainsi, l'écoulement étudié vérifie les équations de la dynamique des gaz avec conduction thermique non-linéaire. La description retenue est une description fluide hydrodynamique et monotempérature. On exprime ces équations, dans un premier temps, dans

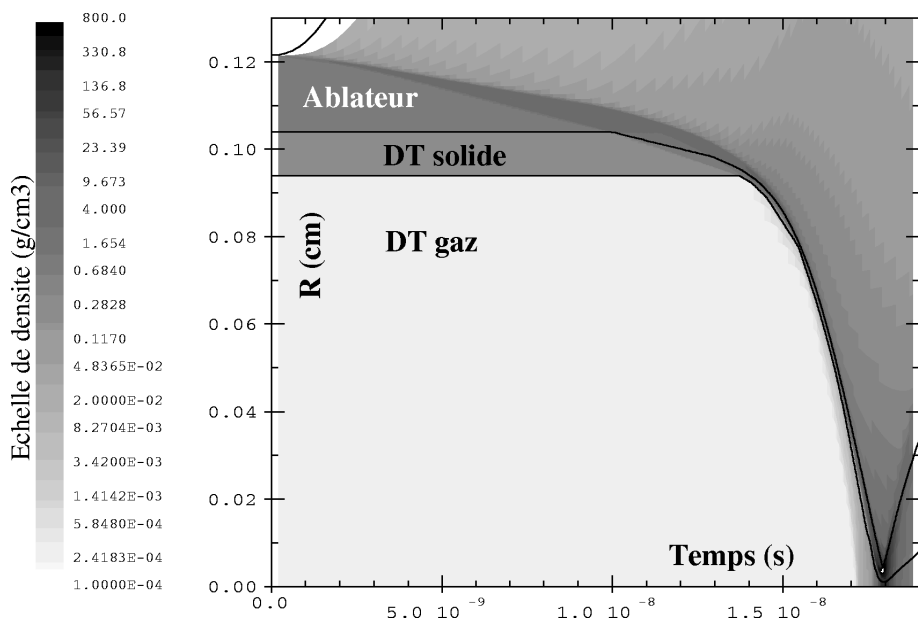


FIGURE 1.4 – **Fusion par confinement inertiel** : diagramme de marche d'une cible de FCI. La cible considérée est une cible à trois couches : l'ablateur, la couche de DT solide et la couche de DT gazeux (Saillard, 2000).

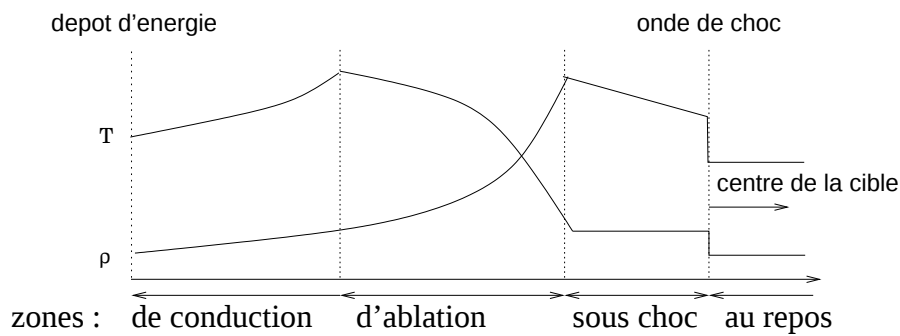


FIGURE 1.5 – **Fusion par confinement inertiel** : les différentes zones de l'écoulement d'ablation.

un repère cartésien (x, y, z) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \gamma \varepsilon \right) + \vec{\varphi} \right] = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

avec $\vec{v}$ la vitesse du fluide telle que $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$, $\vec{\varphi}$ le flux de conduction thermique, ρ la densité, p la pression et ε l'énergie interne spécifique. Ces quantités dépendent toutes de l'espace et du temps t . γ est le rapport des capacités calorifiques. On définit le flux thermique par :

$$\vec{\varphi}(\rho, T) = -\kappa \vec{\nabla} T, \quad (1.4)$$

avec T la température et κ la conductivité thermique issue de la loi de puissance suivante :

$$\kappa = \chi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^m \left(\frac{T}{T_0} \right)^n. \quad (1.5)$$

Dans cette expression, χ , m et n sont des constantes réelles propres au fluide telles que $\chi > 0$, $m \leq 0$ et $n > 0$. Pour être complet, ρ_0 et T_0 sont respectivement la masse volumique et la température de référence. Pour fermer ce système, on utilise l'équation d'état des gaz parfaits, dans laquelle R est la constante des gaz parfaits :

$$p = \rho R T, \quad (1.6a)$$

$$\varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1} T, \quad (1.6b)$$

$$\gamma = C_p / C_v, \quad (1.6c)$$

avec C_v la chaleur spécifique à volume constant :

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (1.7)$$

La valeur de R se déduit de la constante universelle des gaz R ($= 8,3144621 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$) par la formule :

$$R = \frac{R}{\text{masse molaire}}. \quad (1.8)$$

La symétrie utilisée dans cette étude est une symétrie plane. Ce choix de symétrie s'explique par la forme de la cible. Localement, il est en effet possible de considérer que l'extérieur de la coquille, sur la zone où l'énergie est déposée, est plane et que l'écoulement se propage perpendiculairement à celle-ci. Cependant, l'utilisation de ce type de symétrie n'est possible que lorsque la longueur d'onde des perturbations est faible devant la circonférence de la cible. Pour information, la longueur d'onde des lasers pointés vers la cavité est de l'ordre de 350 nm. Il est à préciser que les hypothèses citées jusqu'ici sont les seules utilisées dans la totalité de l'étude. La résolution de ce système, qui n'admet, semble-t-il, pas de solution analytique, exige le recours aux méthodes numériques. L'utilisation de telles méthodes pour traiter une formulation aussi complexe peut s'avérer problématique, une alternative consiste à se tourner vers les solutions autosemblables du système. Le principe de cette approche est de définir un groupe de transformations par lesquelles les équations aux dérivées partielles du système sont invariantes. Les invariants de la transformation sont ensuite utilisés comme variables du nouveau système, qui est alors à dérivées ordinaires.

1.3 Phénoménologie du chauffage de la cible

La phénoménologie du chauffage de la cible peut être appréhendée en faisant l'analogie avec la mise en contact de la surface externe de la cible avec un bain thermique (Zel'dovich et Raizer, 1967). Cette manière de voir la cible plongée dans l'énergie laser est en effet très réaliste et permet de clarifier la chronologie des étapes du début de l'implosion.

1.3.1 Analogie avec le bain thermique

On peut facilement imaginer que la cible irradiée de toutes parts par le rayonnement incident se comporte comme un solide froid, plongé subitement dans un bain thermique chaud (Fig. 1.6, a). Cette analogie nous permet d'explicitier le comportement de la cible aux premiers instants de l'irradiation. Soit une température T_0 au bord de la cible dont le comportement serait régi par la loi de puissance du temps suivante :

$$T_0 = C t^q, \quad q > 0, \quad (1.9)$$

avec C une constante. Il est possible de calculer la profondeur x_f à laquelle la chaleur serait transmise à l'intérieur du milieu, par un mécanisme de conduction thermique, avec la relation :

$$x_{ft} \propto (\chi t)^{1/2} \propto T^{n/2} t^{1/2} \propto t^{(nq+1)/2}, \quad \chi \propto T^n. \quad (1.10)$$

Par la relation de proportionnalité qui suit, on peut donc évaluer le comportement de la vitesse du front thermique V_{ft} :

$$V_{ft} = \frac{dx_{ft}}{dt} \propto \frac{x_{ft}}{t} \propto t^{(nq-1)/2}. \quad (1.11)$$

Le flux d'énergie mécanique se déplace dans le milieu depuis le lieu de dépôt d'énergie, à la frontière extérieure de la cible, vers le centre de celle-ci. Sa vitesse, la vitesse de l'onde de compression V_{oc} , est de l'ordre de la vitesse du son dans le milieu chauffé, c'est-à-dire :

$$V_{oc} \propto \sqrt{T} \propto t^{q/2}. \quad (1.12)$$

On a donc toutes les informations pour comparer les vitesses du front thermique et du choc en fonction de l'évolution du temps. On distingue trois cas :

1. cas où $(nq - 1)/2 < q/2$, c'est-à-dire $q < 1/(n - 1)$.

Dans ce cas de figure, au départ, la vitesse du front thermique est supérieure à la vitesse du front de choc. Le front thermique est donc en avance sur le front de choc (Fig. 1.6, b). Ce n'est qu'à partir d'un certain temps que V_{oc} devient plus grand que V_{ft} . Le choc va alors rattraper le front thermique et le dépasser. On passe alors en régime de déflagration (Fig. 1.6, c).

2. cas où $(nq - 1)/2 > q/2$, c'est-à-dire $q > 1/(n - 1)$.

La situation est alors l'inverse de celle précédemment détaillée. Aux premiers instants, la vitesse du choc est supérieure à la vitesse du front thermique. Le front thermique se déplace alors dans un milieu en mouvement, en retrait du front de choc (Fig. 1.6, c). Cette fois, le front thermique passe devant le front de choc après quelques instants et se propage donc dans un milieu statique (Fig. 1.6, b).

3. cas où $(nq - 1)/2 = q/2$, c'est-à-dire $q = 1/(n - 1)$.

Le dernier cas est le cas intermédiaire entre les deux précédents. Les vitesses respectives du front thermique et du choc évoluent de la même façon au cours du temps. Le comportement du milieu peut alors correspondre à l'un ou à l'autre des deux régimes décrits précédemment.

Solide plongé dans un bain thermique :

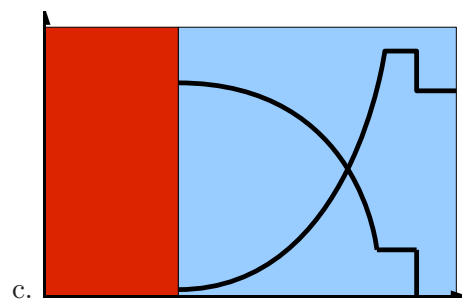
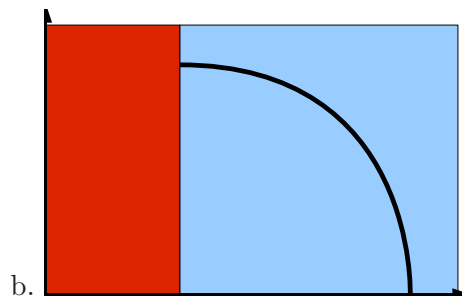
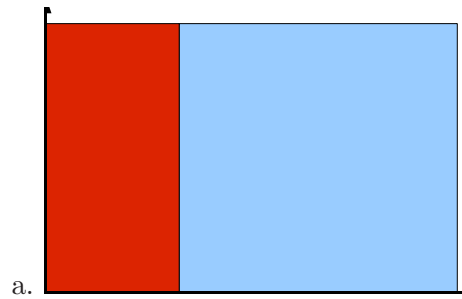


FIGURE 1.6 – Solide (en bleu) mis en contact sur une de ses surfaces avec un milieu plus chaud (en rouge) (a). Un front thermique supersonique se propage d'abord dans le milieu immobile (régime de détonation) (b). L'onde de compression prend ensuite de l'avance par rapport au front thermique subsonique, ou « front d'ablation » (régime de déflagration) (c).

1.4 Instabilités hydrodynamiques en FCI

Les instabilités hydrodynamiques font partie des phénomènes qui sont critiques dans la réussite d'une implosion de cible. Les causes de celles-ci peuvent être multiples. Des rugosités de surface, des défauts d'éclairement ou encore d'épaisseur de la coquille peuvent engendrer des perturbations qui provoqueront à leur tour une rupture de symétrie. Durant le processus, deux périodes sont particulièrement propices au développement de ces instabilités : la phase d'accélération (Sec. 1.1.1, item 6) et la phase de décélération (Sec. 1.1.1, item 7).

Parmi les instabilités hydrodynamiques présentes dans ce type d'implosion, trois sont dominantes. L'instabilité de Rayleigh–Taylor (IRT) est l'une d'entre elles, tout comme celle de Richtmyer–Meshkov (IRM) qui se développe à la suite des passages successifs d'ondes de choc au niveau de l'interface entre l'ablateur et le DT solide. Enfin, dès les premiers moments de l'ablation, se produit l'instabilité dite « du front d'ablation » (IFA). En reprenant la chronologie de l'implosion et en s'appuyant sur le diagramme de marche de l'implosion d'une cible FCI (Fig. 1.4), on peut illustrer et décrire le développement de ces instabilités. Le rayonnement incident provoque l'ablation de la coquille. Quand le choc, engendré par cette ablation, traverse la première discontinuité (ablateur / DT solide), une partie de celui-ci est transmise et une onde de détente est réfléchiée. Le choc transmis va alors atteindre la deuxième discontinuité (DT solide / DT gaz). Ces deux discontinuités sont des zones de développement parfaites pour l'IRM. Là-encore, une partie du choc est transmise et des ondes de détente repartent vers l'aval. Cette phase d'accélération, visible sur le diagramme de marche jusqu'à des temps de 17,5 ns, est le théâtre de l'IRM et de l'IFA. L'IRT se produit pour sa part au niveau des discontinuités, pendant la phase de décélération.

1.4.1 Instabilité de Rayleigh–Taylor

L'instabilité de Rayleigh–Taylor (Chandrasekhar, 1961) est la plus critique des instabilités hydrodynamiques citées ci-dessus. Elle correspond à un non-alignement des gradients de pression et de densité. Pour illustrer cette instabilité, il est utile de rappeler l'équation d'évolution de la vorticité dans le cas général :

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right) + u_l \partial_{x_l} \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right) = & \frac{\omega_j}{\rho} D_{ij} + \frac{\epsilon_{ijk}}{\rho^3} \partial_{x_j} \rho \partial_{x_k} p \\ & + \frac{\epsilon_{ijk}}{\rho} \partial_{x_j} \left(\frac{1}{\rho} \partial_{x_m} \sigma_{km} \right) + \frac{\epsilon_{ijk}}{\rho} \partial_{x_j} \left(\frac{f_k}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

où ω_i est la vorticité, D_{ij} le tenseur des taux de déformations, ϵ_{ijk} le tenseur complètement antisymétrique et σ_{km} le tenseur des contraintes. Dans notre cas, celui d'un écoulement bidimensionnel invariant par rotation autour de l'axe des x , non-visqueux et soumis à aucune force extérieure f_j , l'équation (1.13) se simplifie et devient :

$$\partial_t \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right) + u_l \partial_{x_l} \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right) = \frac{\epsilon_{ijk}}{\rho^3} \partial_{x_j} \rho \partial_{x_k} p. \quad (1.14)$$

L'instabilité de Rayleigh–Taylor se développe lorsque deux fluides incompressibles, non-miscibles entre eux et de densités différentes, sont séparés par une interface plane et que celle-ci est soumise à un champ de gravité $\vec{g}$ orienté du fluide lourd vers le fluide le plus léger. Son action devient stabilisante dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque le champ de force est orienté du fluide léger vers le fluide lourd. On définit le nombre d'Atwood par :

$$A_T = \frac{\rho_L - \rho_l}{\rho_L + \rho_l}, \quad (1.15)$$

avec ρ_L et ρ_l les densités respectives du fluide lourd et du fluide léger. On définit également $k = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde du mode de Fourier caractérisant la perturbation de longueur d'onde λ .

Grâce au nombre d'Atwood et à ce nombre d'onde, on peut exprimer le taux de croissance théorique de l'IRT en phase linéaire :

$$\sigma = \sqrt{A_T g k}. \quad (1.16)$$

Cette loi nous montre l'effet stabilisateur des petits nombres d'onde. En réalité, plusieurs facteurs peuvent influencer la croissance de l'IRT : la viscosité, la conduction thermique, la diffusion (thermique ou d'espèces), la compressibilité, la tension de surface, la stratification ou encore l'épaisseur finie des fluides.

1.4.2 Instabilité de Richtmyer–Meshkov

L'instabilité de Richtmyer–Meshkov (IRM) se produit quand une interface entre fluides de densités différentes est accélérée par une impulsion, par exemple le passage d'une onde de choc. L'instabilité se développe alors en commençant par des perturbations d'amplitude faible qui se développent d'abord linéairement avec le temps. Cet état est suivi d'un régime non-linéaire où apparaissent des bulles dans le cas d'un fluide léger pénétrant un fluide lourd, et des pointes lorsqu'un fluide lourd pénètre un fluide léger. Ensuite, un régime chaotique est atteint et les deux fluides se mélangent. L'IRM peut être considérée comme un cas particulier de l'IRT, surtout dans le cas d'écoulements à bas nombre de Mach. Dans ce cas de figure, l'interface entre les deux milieux infinis incompressibles subit, sous l'effet d'une onde de choc, une accélération impulsionnelle (Richtmyer, 1960). Dans une configuration avec une accélération dirigée du fluide léger vers le fluide lourd, le non-alignement des gradients de pression et densité crée de la vorticité destabilisante. Dans la configuration contraire, la vorticité est dirigée dans le sens inverse et tend d'abord à stabiliser la perturbation avant de provoquer l'inversion de la perturbation et la croissance de l'amplitude. Cette instabilité est donc différente de l'IRT dans le sens où l'écoulement est instable quel que soit le sens de l'accélération.

1.4.3 Instabilité du front d'ablation

L'instabilité du front d'ablation est un des principaux processus susceptibles de dégrader les performances de l'implosion. Cette instabilité se développe lorsqu'un front sépare un milieu froid, dense et   basse pression d'un milieu chaud, léger, à plus forte pression. La stabilité du front d'ablation est comparable à la stabilité du front de flamme. Le front d'ablation est en effet un front thermique séparant une zone froide d'une zone chaude.

1.4.3.1 Années 1970 : où l'on parle de l'IFA

Dans les années 1970, une première publication traite de l'IFA (Nuckolls *et al.*, 1972). Le taux de croissance qui ressort de cette étude est le suivant :

$$\sigma = \sqrt{k g - \frac{k^2 P_a}{\rho}}, \quad (1.17)$$

avec g l'accélération définie par :

$$g = \frac{P_a}{\rho \Delta x}, \quad (1.18)$$

Δ_x étant l'épaisseur du micro-ballon, k le nombre d'onde, P_a la pression d'ablation et ρ la masse volumique. Cette étude met en évidence l'existence d'un nombre d'onde de coupure k_c , au-dessous duquel l'écoulement est instable. Autrement dit, l'écoulement est stable pour des longueurs d'onde inférieures à la longueur d'onde de coupure λ_c telle que $k_c = 2\pi / \lambda_c$.

En 1974, Bodner (1974) propose un modèle analytique pour lequel le front d'ablation est assimilé à une surface de discontinuité. L'écoulement de base est stationnaire. De part et d'autre du front d'ablation, les fluides sont de densité uniforme. Le taux de croissance obtenu est :

$$\sigma = \sqrt{k g} - k v_a, \quad (1.19)$$

avec v_a la vitesse d'ablation, c'est-à-dire la vitesse du fluide au travers du front d'ablation. D'après Bodner, deux phénomènes expliquent les mécanismes de stabilisation : le flux de matière à travers le front et l'érosion thermique. En 1982, Baker (1982) aboutit au même type de résultat. Cependant, Baker ne prend pas en compte le mouvement du fluide.

1.4.3.2 Modélisations quasi-isobares

Dans les années 1980, Takabe *et al.* (1983, 1985) ont travaillé avec l'hypothèse d'incompressibilité. L'état de base qu'ils ont considéré est à géométrie sphérique et stationnaire. Dans ces études, ils utilisent les modes normaux pour résoudre un problème aux valeurs propres et supposent nulle la divergence de la vitesse perturbée. Ils aboutissent au résultat suivant, qui correspond à un lissage de la formule de Bodner (1974) :

$$\sigma = \alpha \sqrt{k g} - \beta k v_a, \quad (1.20)$$

avec $\alpha = 0.9$ et $\beta = 3$ ou 4 . Ces valeurs numériques sont issues d'interpolations de résultats numériques. Cette formule traduit le fait que la stabilisation est due à la vitesse d'ablation aux grands nombres d'onde. Ils expriment également le même nombre d'onde de coupure k_c que Bodner :

$$k_c = \frac{\alpha^2 g}{\beta^2 v_a}. \quad (1.21)$$

Kull et Anisimov (1986) travaillent sur un écoulement d'ablation quasi-isobare en faisant l'hypothèse d'un bas nombre de Mach. En utilisant un modèle plan, stationnaire, discontinu en densité et en supposant les variations de pression négligeables devant les variations de température dans l'équation d'énergie, ils obtiennent de façon analytique une relation de dispersion :

$$\sigma = \sqrt{A_T g k} - k v_a. \quad (1.22)$$

Ils mettent aussi en évidence l'importance de l'exposant de la température dans la loi de conduction thermique.

1.4.3.3 Modèles discontinus dits « auto-consistants »

Les années 1990 voient l'arrivée de modèles dits « auto-consistants ». Il s'agit de modèles où l'utilisation d'une relation de fermeture n'est pas nécessaire, l'isothermie du front d'ablation étant utilisée pour fermer le système. Bychkov *et al.* (1994) développent ainsi un modèle par analogie

avec l'étude de la stabilité des fronts de flamme. Ils introduisent une hypothèse quasi-isobare :

$$\begin{aligned} M^2 &\ll 1, \\ \frac{M^2}{Fr^2} &\ll 1, \end{aligned} \quad (1.23)$$

avec M le nombre de Mach et Fr le nombre de Froude² tels que :

$$M = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad Fr = \frac{v}{\sqrt{g L_\rho}}, \quad (1.24)$$

avec v la vitesse et L_ρ la longueur caractéristique choisie comme étant égale à la longueur de gradient de masse volumique, c'est-à-dire le rapport de la masse volumique ρ sur son gradient :

$$L_\rho = \frac{\rho}{\Delta \rho}.$$

L'approche, basée sur l'hypothèse de front discontinu, nécessite une condition à la limite, au niveau du front. Le problème est donc similaire à celui rencontré en théorie de la combustion. Dans cette étude, le cas des petites longueurs d'onde est traité séparément de celui des grandes longueurs d'onde. Pour celles qui sont grandes devant L_ρ , la masse surfacique est, par hypothèse, discontinue au niveau du front d'ablation. Cela implique une nouvelle condition limite et une nouvelle expression du taux de croissance :

$$\sigma = \sqrt{A_T g k} - b k v_a, \quad (1.25)$$

avec b un coefficient qui dépend des masses volumiques de part et d'autre du front. La même formule est utilisée pour les petites longueurs d'onde, à la différence près que b est pris dans l'intervalle $[2,5, 3,2]$.

Pour résoudre le cas isobare, Betti et Goncharov développent, dans le courant des années 1990, un modèle auto-consistant linéaire (Betti *et al.*, 1995, 1996; Goncharov *et al.*, 1996a,b). En partant d'hypothèses identiques à celles utilisées par Kull et Anisimov (1986), ils expriment l'équation pour l'énergie interne de façon simplifiée. Ils calculent également le taux de croissance de manière analytique, en tenant compte des dépendances de celui-ci à l'épaisseur relative du front d'ablation, à l'exposant en température dans la définition du flux (loi de conduction thermique) et au nombre de Froude. Les taux de croissance obtenus sont :

$$\sigma = \alpha_1(Fr, \nu) \sqrt{k g} - \beta_1(Fr, \nu) k v_a, \quad (1.26)$$

pour $Fr \gg 1$,

$$\sigma = \alpha_2(Fr, \nu) \sqrt{\frac{k g}{1 + k L_m}} - \beta_2(Fr, \nu) k v_a, \quad (1.27)$$

pour $Fr \ll 1$.

Dans cette expression, où sont identifiés différents effets stabilisateurs (l'ablation, la diffusion thermique, la conduction et le gradient de masse volumique), L_m dépend de n et de L_0 qui est la longueur caractéristique du front d'ablation. Tout comme Bychkov *et al.* (1994), Betti et Goncharov ont travaillé avec un champ d'accélération $\vec{g}$ constant et uniforme, et avec l'hypothèse quasi-isobare.

2. Le nombre de Mach et le nombre de Froude représentent respectivement le rapport de la vitesse locale du fluide sur la vitesse du son et l'importance relative des effets d'inertie sur les effets d'accélération.

1.4.3.4 Front d'ablation continu

Kull (1989) utilise l'hypothèse quasi-isobare et, sans l'approximation de front discontinu, effectue la même étude que Kull et Anisimov (1986) par une résolution numérique. Plus tard, Sanz (1994, 1996) étudie également un front d'ablation continu. Par rapport à la longueur d'onde des perturbations, la région d'absorption est à une distance respectable de la zone d'ablation. Le terme de dépôt est donc absent de l'équation d'énergie. À la manière de Kull et Anisimov (1986), il effectue aussi l'hypothèse « bas nombre de Mach ». Le taux de croissance qui résulte de son étude est :

$$\sigma \simeq \left[1 - \left(\frac{k}{k_c} \right)^\tau \right] \sqrt{k g} - k v_a. \quad (1.28)$$

Cette formulation suggère une stabilisation due essentiellement à la conduction thermique, via le terme en k_c . Si de nombreuses études utilisent l'hypothèse de front discontinu, Piriz *et al.* (1997) revisitent le « sharp boundary model » (SBM). Le front d'ablation est alors considéré comme une surface en mouvement, d'épaisseur infime, dont l'accélération est dirigée du fluide léger vers le fluide lourd. Une telle étude nécessite cependant la connaissance des caractéristiques de l'écoulement devant le front d'ablation. Finalement, le taux de croissance s'écrit :

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{2 k v_a}{1 + r_d} \right)^2 - k g \left(\frac{k v_a^2}{g r_d} - A_T \right)}, \quad (1.29)$$

avec r_d le rapport de la masse volumique du fluide léger sur celle du fluide lourd. Ce moyen de procéder offre plusieurs avantages. Il permet par exemple d'analyser les différents mécanismes qui conduisent à une réduction du taux de croissance et à l'obtention d'une stabilisation complète de l'écoulement, pour des longueurs de perturbation relativement petites. L'utilisation de ce modèle analytique simplifié se justifie par la complexité mathématique du problème de l'IFA. Sanz *et al.* (2002) développent un SBM non-linéaire de l'IRT qui prend en compte les effets de l'ablation dans le cas d'un front discontinu.

1.4.3.5 Affranchissement de l'instationnarité

Depuis quelques années, l'étude de modèles stationnaires prenant en compte l'hypothèse quasi-isobare a beaucoup progressé. Goncharov *et al.* (2000) montrent que le fait de négliger l'instationnarité de l'écoulement de base est une source majeure de contradictions avec les résultats expérimentaux. Goncharov *et al.* (2006) tentent d'atténuer ce défaut en introduisant dans leur modèle une dépendance linéaire en temps de la longueur caractéristique du front d'ablation.

1.4.3.6 Remise en question de l'hypothèse d'incompressibilité

Dans le cadre des hypothèses de stationnarité et de quasi-incompressibilité, nous avons vu que de nombreuses études de stabilité ont été effectuées. Cependant, les écoulements rencontrés en FCI ne répondent habituellement à aucune de ces deux hypothèses. Ces écoulements se comportent en réalité de manière très proche des comportements étudiés par Velikovich *et al.* (1998). Boudesocque-Dubois *et al.* (2008) montrent par exemple que les solutions autosemblables telles que celles qui décrivent les écoulements présents dans le LMJ ne respectent pas les conditions de l'approximation « bas nombre de Mach », souvent utilisée dans l'analyse de stabilité du front d'ablation en FCI. En effet, les nombres de Mach de ces écoulements ne sont pas assez faibles et la stratification ne peut pas être négligée dans la zone chauffée.

Abeguilé *et al.* (2006); Clarisse *et al.* (2008) présentent une approche physique et numérique pour l'étude de la stabilité linéaire d'écoulements d'ablation autosemblables, en tenant compte de l'instationnarité, de la compressibilité et de la stratification. L'étude de Gauthier *et al.* (2008) traite en particulier des effets de la compressibilité sur les instabilités dans le cas d'écoulements d'ablation autosemblables. Cette étude met en évidence les effets contradictoires de la compressibilité et de la stratification sur le taux de croissance de l'IRT. À travers l'étude des effets de la compressibilité sur l'évolution des modes de Kovásznay, les auteurs montrent que l'instabilité maximale est atteinte pour les grandes échelles. D'autres études ont cherché à s'affranchir de l'hypothèse de quasi-incompressibilité telles que celles de Velikovich *et al.* (1998) et Piriz et Portugues (2003) qui ont montré l'importance de la stratification et de la compressibilité lors du début de l'irradiation de la cible. Or cette phase précoce de l'écoulement est critique dans le sens où elle fixe les conditions initiales pour l'évolution de l'instabilité de Rayleigh–Taylor ablative qui se développe ultérieurement. Celle-ci exige donc d'être traitée avec une grande précision au vu de l'évolution de l'écoulement ablatif perturbé (Aglitskiy *et al.*, 2002; Metzler *et al.*, 2003).

1.5 Les difficultés rencontrées dans l'étude de stabilité des écoulements instationnaires

Plusieurs notions présentes dans ce mémoire nécessitent quelques précisions pour éviter toute confusion. Tout d'abord, le milieu choisi pour l'étude de l'écoulement est un milieu semi-infini. Il s'agit d'une paroi d'épaisseur suffisamment grande pour que la perturbation appliquée sur une face ne soit pas ressentie par l'autre face. Un tel système représente l'évolution d'un milieu fini pendant un temps très court, afin que tout changement appliqué sur une face n'ait pas eu le temps d'atteindre l'autre face.

Il va, dans cette étude, être régulièrement question d'écoulement de base. En dynamique des fluides, un écoulement fluide est décomposable en un écoulement moyen et en écarts par rapport à celui-ci. On appelle écoulement de base cet écoulement moyen. L'étude de la stabilité hydrodynamique d'un écoulement concerne en réalité la stabilité et surtout les instabilités pouvant caractériser cet écoulement. Une étude de stabilité consiste à définir un écoulement particulier et à le perturber par des conditions initiales et aux limites. Les perturbations appliquées dans cette étude sont des perturbations linéaires. On parle de perturbations linéaires lorsque chaque quantité de l'écoulement est perturbée et que les équations ainsi obtenues sont linéarisées. On obtient ainsi un système aux perturbations linéaires à coefficients non-constants. De plus, ce type de formulation permet de négliger les termes issus des perturbations, faibles par définition, qui n'influent pas significativement sur l'écoulement.

Pour l'étude de ces perturbations, la méthode des modes normaux ne peut pas être utilisée car les coefficients du système ne sont pas constants. Cette méthode est une méthode perturbative décrivant un plasma au voisinage d'un équilibre. Si une analyse en modes normaux peut s'appliquer à ces modèles stationnaires basés sur l'hypothèse quasi-isobare, ce n'est pas le cas pour le cas instationnaire. L'opérateur des petits mouvements, déduit de la linéarisation des équations aux perturbations, permet de caractériser les différentes ondes qui se propagent dans le plasma. Enfin, au cours de cette étude, deux configurations d'écoulement sont utilisées. Il est notamment question d'une onfiguration dans laquelle un choc isotherme est précédé d'un précurseur thermique. Mais il est aussi question d'un autre cas figure, étudié précédemment (Boudesocque-Dubois, 2000; Boudesocque-Dubois *et al.*, 2008, 2003; Clarisse *et al.*, 2008; Lombard, 2008). Dans cette autre configuration, la taille du précurseur thermique est négligée. Le choc est alors dit « parfait » en raison de la discontinuité des quantités.

Chapitre 2

Formulation autosemblable des systèmes différentiels

Le système étudié est le système d'équations d'Euler avec conduction non-linéaire de la chaleur. La température est tellement élevée que le coefficient de conduction dépend de celle-ci. Physiquement, le rôle principal dans le mécanisme de compression est joué par la viscosité plus que par la conduction de chaleur puisque c'est le mécanisme visqueux qui cause la conversion de chaleur en énergie mécanique. La conduction de chaleur affecte cependant indirectement la conversion d'énergie mécanique à travers la redistribution de pression. C'est pourquoi elle est présente dans le système (Zel'dovich et Raizer, 1967). Au cours de cette étude, le système d'équations est traité en formulation autosemblable. Ce type de formulation est, depuis longtemps, le sujet de nombreuses études dans le monde. Afin d'étudier la stabilité de l'écoulement, on introduit des perturbations linéaires à l'écoulement de base. Il est donc nécessaire de déterminer des conditions aux limites ainsi que des conditions initiales pour ces perturbations.

2.1 Formulation autosemblable de l'écoulement de base

De Marshak (1958) jusqu'à aujourd'hui, de nombreuses études ont été réalisées sur les solutions autosemblables des équations de l'hydrodynamique avec conduction thermique non-linéaire. Ces différents travaux ont permis de mieux connaître ce type de solution. Pour formuler le système de cette façon, puisqu'il sera écrit ainsi tout au long de notre étude, le passage par la formulation en variable de Lagrange est préférable. L'introduction de notations propres à la formulation autosemblable est indispensable pour éviter tout risque de confusion (Annexe A).

2.1.1 Travaux antérieurs sur des solutions autosemblables en FCI

2.1.1.1 Mise en évidence de l'existence de solutions autosemblables

Marshak (1958) a été le premier à effectuer la transformation du système (1.3) à une dimension en un système réduit et à mettre en évidence la possibilité de solutions autosemblables pour ce système dans le cas de la conduction radiative (c'est-à-dire avec $m = -2$ et $n = 13/2$ dans la loi de puissance (1.5)). Son étude porte sur des configurations planes, à densité et à pression constantes, pour lesquelles la frontière entre le milieu froid et le milieu chaud subit une loi de température en puissance du temps. Au cours de son étude, il utilise une description lagrangienne de l'écoulement. En utilisant le même type de solutions, Anisimov (1970) travaille sur le cas d'une onde thermique dans un plasma bi-température (températures ionique et électronique différentes). Sous la forme de lois de puissance en temps, il exprime les variations de densité, de vitesse et de

température.

Au CEA, des études pour les équations d'Euler avec conduction non-linéaire de chaleur sont menées. Bajac (1973) met en évidence le comportement autosemblable des solutions des équations de l'hydrodynamique avec conduction. Travaillant en symétrie plane, il utilise une description lagrangienne. Son étude, qui repose sur l'hypothèse d'une loi de température sous la forme d'une puissance du temps, aboutit à l'obtention de lois de comportement en temps des grandeurs physiques. Son travail a été poursuivi quelques années plus tard par Brun *et al.* (1977). En partant de conditions initiales et aux limites particulières, ils établissent les lois d'autosimilarité pour les équations unidimensionnelles de l'hydrodynamique avec transfert thermique (1.3) dans le cas de la conduction électronique, c'est-à-dire avec :

$$m = 0 \quad \text{et} \quad n = 5/2. \quad (2.1)$$

Dans cette étude, l'énergie et la pression radiatives sont négligées. Les auteurs considèrent également que la température ionique et la température électronique sont égales. Les conditions initiales et aux limites s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} \rho(x, t = 0) &= 1, \\ T(x, t = 0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

et :

$$\begin{aligned} \varphi(x = 0, t) &= t \varphi_0, \\ p(x = 0, t) &= t^{2/3} p_0, \quad \text{pour} \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

avec φ_0 et p_0 les valeurs des coefficients respectifs du flux thermique et de la pression. En notant ξ la variable de similitude employée, les solutions numériques qu'ils obtiennent obéissent aux lois suivantes :

$$\begin{aligned} \rho &= G(\xi), \\ v_x &= t^{1/3} V_x(\xi), \\ T &= t^{2/3} \Theta(\xi). \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.1.1.2 Études avec des configurations d'écoulements plus élaborées

À la fin des années 1970, Barrero et Sanmartín (1977) et Sanmartín et Barrero (1978a,b) se sont intéressés à un modèle de plasma à deux températures, avec des températures ionique et électronique différentes, en imposant un terme de dépôt d'énergie évoluant linéairement avec le temps. Leur étude est basée sur une description eulérienne et une géométrie plane. Ils modélisent d'abord un plasma initialement au repos de densité ρ_0 , qui occupe tout l'espace (Barrero et Sanmartín, 1977). Un flux laser croissant en temps est déposé à $t = 0$ le long du plan $x = 0$, tel que :

$$\Phi(t) = \Phi_0 t / \tau, \quad \text{avec} \quad 0 < t < \tau, \quad (2.5)$$

où τ est un temps caractéristique. Le résultat de cette étude est un écoulement autosemblable, régi par un nombre sans dimension α tel que :

$$\alpha \propto (\rho_0^2 \tau / \Phi_0)^{2/3}.$$

Des résultats asymptotiques sont obtenus :

- pour $\alpha \ll 1$, la convection et la température ionique sont négligeables, une onde thermique transporte l'énergie,
- pour $\alpha \gg 1$, ils traitent de manière analytique les régions isentropique et de conduction et démontrent que les températures ionique et électronique sont quasiment identiques.

Plus tard, Sanmartín et Barrero (1978a,b) cherchent à travailler sur une configuration plus réaliste de l'irradiation d'un plasma par un laser. Pour cela, ils introduisent deux nouveaux paramètres sans dimension : ϵ qui caractérise l'opacité du plasma vis-à-vis du laser et Z_i la charge ionique. Ils étudient ensuite différentes zones de l'écoulement définies par diverses valeurs de α et de ϵ .

Au CEA, Saillard (1983) a repris les résultats de similitude (2.4) de Brun *et al.* (1977) et a poussé encore plus loin cette étude en formulant les transformées de similitude. Parmi ses résultats, il a obtenu le système d'équations aux dérivées ordinaires vérifié par les fonctions de forme des grandeurs physiques. Ce problème est résolu par une méthode numérique de résolution basée sur une méthode de différences finies. Reinicke et Meyer-Ter-Vehn (1991) étudient l'influence de la conduction thermique non-linéaire pour une explosion ponctuelle dans un gaz à température ambiante. En configuration sphérique, ce travail est fondé sur une description eulérienne. L'interaction de deux ondes sphériques est étudiée : une onde de choc représentant le transport hydrodynamique d'une part et une onde thermique qui provient du transport par diffusion non-linéaire d'autre part. Le cas autosemblable est traité plus particulièrement. La position relative des deux ondes reste alors inchangée avec le temps. Dans cet article, les auteurs présentent les solutions exactes à partir d'intégrations numériques. Ils observent que l'autosimilarité disparaît au moment t_1 auquel la position relative de ces deux fronts est modifiée, dans le cas où la densité du gaz est uniforme. Ils en concluent que le front amont est soumis à de la conduction thermique et qu'un front de choc isotherme se forme à l'intérieur de l'onde thermique. Pour des temps $t \gg t_1$, un front thermique de très faible épaisseur est formé à l'intérieur de la région choquée. Finalement, leur étude montre que l'onde thermique finit par devenir autosemblable.

Sanz *et al.* (1992), dont l'étude est basée sur une configuration plane et une description eulérienne, traitent le problème de l'irradiation radiative d'un plasma à une seule température, initialement au repos, de manière asymptotique. Ils utilisent la même loi de flux que Barrero et Sanmartín (1977) et une condition à la limite en vitesse nulle en $x = 0$. La configuration de l'écoulement est définie par un seul paramètre β qui représente l'inverse du nombre de Péclet. Dans le cas où $\beta \ll 1$, la conduction est dominante, la configuration de l'écoulement est celle qui suit la séparation hydrodynamique. La zone de conduction est une zone où l'écoulement est subsonique et le flux d'énergie cinétique négligé. Dans la zone sous-choc, au contraire, c'est la conduction thermique qui est négligée. Les solutions qu'ils obtiennent (Sanz *et al.*, 1992) ne sont plus valables au voisinage du front d'ablation. Après un redimensionnement des grandeurs, ils démontrent que les échelles de longueur des zones sous-choc et de conduction sont du même ordre.

2.1.1.3 Travaux récents

Plus récemment, plusieurs études (Boudesocque-Dubois, 2000; Gauthier *et al.*, 2005; Abeguilé *et al.*, 2006; Boudesocque-Dubois *et al.*, 2008; Lombard, 2008) ont travaillé sur une approche permettant de calculer les ondes thermiques d'ablation sous forme autosemblable dans le cas de l'approximation de choc parfait avec un niveau de précision compatible avec une analyse de stabilité hydrodynamique. Au cours de ces travaux, une étude paramétrique du système d'équations autosemblables aux dérivées ordinaires est effectuée.

Murakami *et al.* (2007) traitent le problème d'un plasma ablaté d'une feuille accélérée par de la conduction thermique. Dans cette étude, les auteurs montrent que le système hydrodynamique admet une solution autosemblable qui décrit le processus d'ablation instationnaire. Ils étudient le problème de transfert de chaleur avec des solutions autosemblables mais leur travail se démarque de la littérature existante (Marshak, 1958; Anisimov, 1970; Sanz *et al.*, 1992) en s'intéressant à un problème physique différent : une feuille accélérée avec une masse finie, soumise à de la conduction non-linéaire. Ce travail a été l'occasion pour les auteurs de présenter une nouvelle solution autosemblable dont le modèle décrit de façon explicite l'évolution temporelle du système. De plus, le profil spatial de la coquille accélérée présente un pic de densité fini et une limite entre la coquille et le vide distincte, où la pression et la densité tendent vers zéro. L'origine des temps est choisie au moment où débute l'effondrement de la coquille, c'est-à-dire au moment de sa focalisation. Un nouveau problème à deux dimensions est alors résolu par Murakami *et al.* (2007).

2.1.2 Formulation du système d'équations en coordonnée de Lagrange

Pour la description du mouvement d'un fluide, deux approches existent. D'une part, l'approche eulérienne, employée dans de nombreux travaux et utilisée dans (1.3), exprime les caractéristiques du fluide en un point donné de l'espace. D'autre part, l'approche lagrangienne permet d'exprimer ces caractéristiques pour une même particule fluide que l'on suit au cours du temps, en différents points de sa trajectoire dans l'espace. Le choix entre ces deux formalismes est justifié. En effet, dans le travail de Saillard (1983), les deux formalismes sont présents. La frontière matérielle rend plus naturel le fait de travailler en lagrangien. Dans le cas de notre écoulement de base, de grands déplacements se produisent. C'est pourquoi il s'agit du formalisme utilisé. Dans la suite du mémoire, les quantités « barres » ($\bar{q}$) représentent les quantités dans le cas d'un mouvement unidimensionnel dans la direction x .

Afin d'obtenir, dans le cas d'un écoulement à une dimension, les équations de la dynamique des gaz avec conduction thermique non-linéaire (1.3) en coordonnée de Lagrange, avec m cette coordonnée de Lagrange, définie par :

$$dm = \bar{\rho} dx, \quad (2.6)$$

les formules de changement de système de coordonnées à appliquer sont les suivantes :

$$\begin{cases} \partial_x \rightarrow \bar{\rho} \partial_m, \\ \partial_t \rightarrow \partial_t - \bar{\rho} \bar{v}_x \partial_m. \end{cases} \quad (2.7)$$

En appliquant ces formules au système (1.3), on obtient le système suivant en coordonnées de Lagrange :

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\rho} + \bar{\rho}^2 \partial_m \bar{v}_x = 0, \\ \partial_t \bar{v}_x + \partial_m \bar{p} = 0, \\ \partial_t \left(\frac{1}{2} \bar{v}_x^2 + \bar{\varepsilon} \right) + \partial_m (\bar{p} \bar{v}_x + \bar{\varphi}_x) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Dans ce système, la densité $\bar{\rho}$, la vitesse $\bar{v}_x$, la pression $\bar{p}$, l'énergie interne $\bar{\varepsilon}$ (1.6b) définie par :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{R}{\gamma - 1} \bar{T}, \quad (2.9)$$

et le flux $\bar{\varphi}_x$ sont des fonctions de la variable de Lagrange m et du temps t . $\bar{T}(m, t)$ représente la température du fluide. Le flux (1.4,1.5) est redéfini comme suit :

$$\bar{\varphi}_x = -\chi \bar{\rho} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right)^m \left(\frac{\bar{T}}{T_0} \right)^n \partial_m \bar{T}. \quad (2.10)$$

L'équation d'état des gaz parfaits (1.6a) reformulée ferme le système :

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}. \quad (2.11)$$

2.1.3 Adimensionnement des équations

Ce système, constitué d'équations aux dérivées partielles, peut être adimensionné afin de ne plus dépendre de l'échelle de l'étude (Boudesocque-Dubois, 2000; Boudesocque-Dubois *et al.*, 2008). Dans ce problème précis, sept grandeurs peuvent nous permettre d'adimensionner toutes les autres. Il s'agit de : R , χ , ρ_0 , γ , $t_\star$, $p_\star$ et $\varphi_\star$. Le théorème de Vashy-Buckingham (Sedov, 1977) assure que, disposant de sept grandeurs physiques qui dépendent elles-mêmes de quatre unités fondamentales (masse, longueur, temps et température), il est possible de définir trois constantes sans dimension. Ces constantes, choisies arbitrairement, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_p &= \frac{\bar{p}_\star}{t_\star^{-1} \chi R^{-1}}, \\ \mathcal{B}_\varphi &= \frac{\bar{\varphi}_\star}{t_\star^{-3/2} \chi^{3/2} R^{-3/2} \rho_0^{-1/2}}, \\ \mathcal{B}_\gamma &= \gamma. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le choix de ces constantes est réfléchi. En effet, $\mathcal{B}_p$ exprime le rapport de la pression limite sur la pression de référence. $\mathcal{B}_\varphi$, qui est l'inverse d'un nombre de Péclet, est égal au rapport du flux limite sur le flux de référence. $\mathcal{B}_\gamma$, enfin, représente le rapport des capacités calorifiques. Le fait que les conditions limites du système étudié concernent le flux et la pression a guidé le choix de ces constantes. Les grandeurs de référence ρ_0 , $t_\star$, χ , et R permettent de définir l'ensemble des dimensions présentes dans l'étude de la manière suivante :

$$\begin{aligned} [t] &= t_\star, \\ [x] &= \rho_0^{-1/2} t_\star^{1/2} \chi^{1/2} R^{1/2}, \\ [v_x] &= \rho_0^{-1/2} t_\star^{-1/2} \chi^{1/2} R^{-1/2}, \\ [p] &= t_\star^{-1} \chi R^{-1}, \\ [\varphi_x] &= \rho_0^{-1/2} t_\star^{-3/2} \chi^{3/2} R^{-3/2}, \\ [T] &= \rho_0^{-1} t_\star^{-1} \chi R^{-2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dans la suite, les quantités utilisées sont adimensionnées, bien que les notations ne soient pas modifiées. On peut donc réécrire le système (2.8) après cet adimensionnement :

$$\begin{cases} \partial_t \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) - \partial_m \bar{v}_x = 0, \\ \partial_t \bar{v}_x + \partial_m \bar{p} = 0, \\ \partial_t \left(\frac{1}{2} \bar{v}_x^2 + \bar{\varepsilon} \right) + \partial_m (\bar{p} \bar{v}_x + \bar{\varphi}_x) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Le flux, sous sa forme adimensionnée, s'écrit :

$$\overline{\varphi}_x = -\overline{\rho}^{m+1} \overline{T}^n \partial_m \overline{T}. \quad (2.15)$$

Enfin, l'équation des gaz parfaits (2.11) devient :

$$\overline{p} = \overline{\rho} \overline{T} \quad \text{et} \quad \overline{\varepsilon} = \frac{\overline{T}}{\gamma - 1}. \quad (2.16)$$

2.1.4 Formulation autosemblable

Dans le but de formuler les équations de l'hydrodynamique sous forme autosemblable, la définition des conditions initiales et des conditions aux limites s'impose. Plusieurs combinaisons de conditions initiales et aux limites sont possibles pour être compatibles avec une formulation autosemblable (Brun *et al.*, 1977; Boudesocque-Dubois *et al.*, 2008). Les solutions compatibles avec les conditions aux limites du système, en notant ξ la variable de similitude, sont telles que :

$$\begin{aligned} \overline{\rho}(m, t = 0) &= C_{\overline{\rho}}^I m^{(\alpha-\beta)/\alpha} \longrightarrow \lim_{\xi \rightarrow \infty} \overline{G}(\xi) \xi^{-(\alpha-\beta)/\alpha} = C_{\overline{\rho}}^I, \\ \overline{v}_x(m, t = 0) &= C_{\overline{v}_x}^I m^{(\beta-1)/\alpha} \longrightarrow \lim_{\xi \rightarrow \infty} \overline{V}_x(\xi) \xi^{-(\beta-1)/\alpha} = C_{\overline{v}_x}^I, \\ \overline{T}(m, t = 0) &= C_{\overline{T}}^I m^{2(\beta-1)/\alpha} \longrightarrow \lim_{\xi \rightarrow \infty} \overline{\Theta}(\xi) \xi^{-2(\beta-1)/\alpha} = C_{\overline{T}}^I, \\ \overline{\varphi}_x(m, t = 0) &= C_{\overline{\varphi}_x}^I m^{(\alpha-\beta+3(\beta-1))/\alpha} \longrightarrow \lim_{\xi \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_x(\xi) \xi^{-(\alpha-\beta+3(\beta-1))/\alpha} = C_{\overline{\varphi}_x}^I, \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec le choix particulier suivant de conditions initiales :

$$C_{\overline{\rho}}^I = 1, \quad C_{\overline{v}_x}^I = 0, \quad C_{\overline{T}}^I = 0, \quad C_{\overline{p}}^I = 0, \quad C_{\overline{\varphi}_x}^I = 0. \quad (2.18)$$

Ces solutions doivent enfin être compatibles avec le choix de conditions aux limites, définies comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{\rho}(m = m_L, t) &= C_{\overline{\rho}}^L m^{\alpha-\beta} \longrightarrow \overline{G}(\xi = m_L t^{-\alpha}) = C_{\overline{\rho}}^L, \\ \overline{v}_x(m = m_L, t) &= C_{\overline{v}_x}^L m^{\beta-1} \longrightarrow \overline{V}_x(\xi = m_L t^{-\alpha}) = C_{\overline{v}_x}^L, \\ \overline{T}(m = m_L, t) &= C_{\overline{T}}^L m^{2(\beta-1)} \longrightarrow \overline{\Theta}(\xi = m_L t^{-\alpha}) = C_{\overline{T}}^L, \\ \overline{\varphi}_x(m = m_L, t) &= C_{\overline{\varphi}_x}^L m^{3(\beta-1)} \longrightarrow \overline{\Phi}_x(\xi = m_L t^{-\alpha}) = C_{\overline{\varphi}_x}^L, \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec :

$$C_{\overline{\rho}}^L = C_{\overline{\rho}}^L C_{\overline{T}}^L = \mathcal{B}_p, \quad C_{\overline{\varphi}_x}^L = \mathcal{B}_\varphi. \quad (2.20)$$

Dans le cas étudié ici, lorsque $t = 0$, à l'instant initial, le fluide est au repos. Il occupe alors le demi-espace $m \geq 0$. Les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{cases} \overline{\rho}(m, t = 0) = \rho_0, \\ \overline{v}_x(m, t = 0) = 0, \quad \text{pour } m \geq 0. \\ \overline{T}(m, t = 0) = 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

Quant aux conditions limites du système, il s'agit des conditions en flux et en pression suivantes, en $m = 0$:

$$\begin{aligned}\bar{p}(m = 0, t) &= \bar{p}_* \left(\frac{t}{t_*} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \\ \bar{\varphi}_x(m = 0, t) &= \bar{\varphi}_* \left(\frac{t}{t_*} \right)^{\frac{3}{2n-1}},\end{aligned}\tag{2.22}$$

avec $\bar{p}_*$, $\bar{\varphi}_*$ et t_* des grandeurs caractéristiques des conditions aux limites relatives respectivement à la pression, au flux thermique et au temps (Boudesocque-Dubois, 2000; Boudesocque-Dubois *et al.*, 2008).

Ces conditions aux limites permettent la formulation du système sous la forme autosemblable. Pour cela, la méthode d'autosimilarité est utilisée (Sedov, 1977). Ces calculs ont déjà été effectués dans le cas des équations de l'hydrodynamique radiative (Marshak, 1958; Pakula et Sigel, 1985). La méthode (Annexe B) consiste à déterminer les similitudes qui laissent invariantes les équations de conservation (2.14) et l'équation du flux (2.16). L'idée est ensuite de trouver une variable de similitude ξ telle que les quantités ne dépendent plus que de cette seule variable. Dans le cadre de cette étude, le choix de la variable de similitude s'est porté sur :

$$\xi = \frac{m}{t^\alpha}, \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2n-1}{2n-2}, \quad n > 1.\tag{2.23}$$

Ce choix permet de passer de deux variables indépendantes m et t à une seule entité. À chaque quantité dépendant de m et t va être associée une « fonction de forme » dépendant de ξ telle que :

$$\begin{aligned}\bar{p}(m, t) &= \bar{G}(\xi), \\ \bar{v}_x(m, t) &= t^{\alpha-1} \bar{V}_x(\xi), \\ \bar{T}(m, t) &= t^{2(\alpha-1)} \bar{\Theta}(\xi), \\ \bar{p}(m, t) &= t^{2(\alpha-1)} \bar{P}(\xi), \\ \bar{\varphi}_x(m, t) &= t^{3(\alpha-1)} \bar{\Phi}_x(\xi).\end{aligned}\tag{2.24}$$

Pour réécrire le système d'équations avec ce nouveau formalisme, il faut utiliser les formules de transformation suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{q}(m, t) &= t^\beta \bar{Q}(\xi), \\ \partial_m \bar{q}(m, t) &= t^{\beta-\alpha} d_\xi \bar{Q}(\xi), \\ \partial_t \bar{q}(m, t) &= t^{\beta-1} ((\alpha + \beta) \bar{Q}(\xi) - \alpha d_\xi (\xi \bar{Q}(\xi))).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Ces formules illustrent bien le fait que le changement de variable permet de passer d'équations aux dérivées partielles à des équations aux dérivées ordinaires. On peut donc reformuler le système (2.14) comprenant les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale :

$$\begin{cases} d_\xi \bar{V}_x + \alpha \xi d_\xi \bar{\Upsilon} = 0, \\ (\alpha - 1) \bar{V}_x - \alpha \xi d_\xi \bar{V}_x + \bar{G} d_\xi \bar{\Theta} + \bar{\Theta} d_\xi \bar{G} = 0, \\ 2(\alpha - 1) \left(\frac{1}{2} \bar{V}_x^2 + \frac{\bar{\Theta}}{\gamma - 1} \right) - \alpha \xi d_\xi \left(\frac{1}{2} \bar{V}_x^2 + \frac{\bar{\Theta}}{\gamma - 1} \right) + d_\xi (\bar{G} \bar{V}_x \bar{\Theta} + \bar{\Phi}_x) = 0, \end{cases}\tag{2.26}$$

avec :

$$\overline{\Phi}_x = -\overline{G}^{m+1} \overline{\Theta}^n d_\xi \overline{\Theta}, \quad (2.27)$$

et avec $\overline{\Upsilon} = 1/\overline{G}$. Soit, en remplaçant la loi de conservation de l'énergie totale par celle de la température :

$$\begin{cases} d_\xi \overline{V}_x + \alpha \xi d_\xi \overline{\Upsilon} = 0, \\ (\alpha - 1) \overline{V}_x - \alpha \xi d_\xi \overline{V}_x + d_\xi \overline{P} = 0, \\ 2(\alpha - 1) \frac{\overline{\Theta}}{(\gamma - 1)} - \alpha \xi \frac{d_\xi \overline{\Theta}}{(\gamma - 1)} + \overline{\Upsilon}^{-1} \overline{\Theta} \overline{V}_x + d_\xi \overline{\Phi}_x = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

À ce stade, le système peut s'écrire sous la forme d'un problème aux valeurs propres non-linéaire (Saillard, 1983; Boudesocque-Dubois, 2000) :

$$\begin{cases} d_\xi \overline{G} = \overline{G}^2 (N/D), \\ d_\xi \overline{V}_x = \alpha \xi (N/D), \\ d_\xi \overline{\Theta} = F, \\ d_\xi \overline{\Phi}_x = \frac{1}{(\gamma - 1)} (\alpha \xi F - 2(\alpha - 1) \overline{\Theta}) - \alpha \xi \overline{G} \overline{\Theta} \frac{N}{D}, \end{cases} \quad (2.29)$$

avec :

$$\begin{aligned} N &= (\alpha - 1) \overline{V}_x + \overline{G} F, \\ D &= \alpha^2 \xi^2 - \overline{G}^2 \overline{\Theta}, \\ F &= -\frac{\overline{\Phi}_x}{\overline{G}^{m+1} \overline{\Theta}^n}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

L'expression (2.23) de $\xi(m, t)$ implique que les conditions aux limites (2.22) deviennent :

$$\begin{aligned} (\overline{G} \overline{\Theta}) (\xi = 0) &= \mathcal{B}_p, \\ \overline{\Phi}_x (\xi = 0) &= \mathcal{B}_\varphi, \end{aligned} \quad (2.31)$$

tandis que les conditions initiales (2.21) deviennent des conditions aux limites à l'infini :

$$\begin{aligned} \overline{G} (\xi \rightarrow +\infty) &= 1, \\ \overline{V}_x (\xi \rightarrow +\infty) &= 0, \\ \overline{\Theta} (\xi \rightarrow +\infty) &= 0, \\ \overline{\Phi}_x (\xi \rightarrow +\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

La formulation (2.29) du système révèle qu'une singularité est présente lorsque $D = 0$. Or D est clairement négatif pour $\xi = 0$, et puisque $\overline{G}$ et $\overline{\Theta}$ sont bornés, D est positif lorsque $\xi \rightarrow +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un ξ_c pour lequel $D = 0$. Marshak (1958) et Brun *et al.* (1977) avaient déjà décelé cette singularité et avaient observé, pour des flux de chaleur imposés à la frontière extérieure suffisamment faibles, un comportement de choc isotherme avec la présence d'un précurseur thermique négligeable. Dans des travaux

ultérieurs (Boudesocque-Dubois, 2000), l'épaisseur du précurseur thermique est aussi négligée. Le choc ainsi obtenu est une configuration particulière de choc isotherme dans laquelle la discontinuité est parfaite. Au niveau de ce choc parfait, les relations de conservation du flux de matière, du flux d'impulsion et du flux d'énergie se traduisent par, en notant $\overline{Q}_-$ la valeur de la quantité $\overline{Q}$ en aval du choc :

$$\begin{cases} \overline{G}_- = \frac{(\gamma + 1) \overline{W}_x^2}{\gamma \overline{W}_x^2 - R_\xi}, \\ \overline{V}_{x-} = \frac{\overline{W}_x^2 + R_\xi}{(\gamma + 1) \overline{W}_x}, \\ \overline{P}_- = \frac{\overline{W}_x^2 + R_\xi}{(\gamma + 1)}, \end{cases} \quad (2.33)$$

avec :

$$R_\xi = \sqrt{\overline{W}_x^4 - 2(\gamma - 1)(\gamma + 1)\overline{W}_x\overline{\Phi}_x},$$

et $\overline{W}_x$ la vitesse du choc exprimée en variable autosemblable. Les valeurs en amont du choc sont alors les valeurs limites, à savoir (Boudesocque-Dubois, 2000; Lombard, 2008) :

$$(\overline{G}_+, \overline{V}_{x+}, \overline{P}_+) = (1, 0, 0).$$

Au cours de l'étude présentée ici, une partie du travail consiste à travailler avec un précurseur thermique d'épaisseur non négligeable. Il est alors question de choc isotherme avec des relations de Rankine-Hugoniot différentes.

2.2 Perturbations linéaires de la solution autosemblable

Le principe d'une étude de stabilité est de prendre un écoulement de base, unidimensionnel dans notre cas, et de lui appliquer des perturbations. Au cours de cette étude, l'écoulement de base que nous considérons est celui régi par le système d'équations (2.26). Les sources de croissance des perturbations susceptibles d'interagir sur le système sont de deux types : les défauts d'éclairement et les défauts de rugosité de la coquille. En effet, en pratique, la cible ne peut pas être éclairée de façon parfaitement uniforme de même que la coquille de la cible ne peut être complètement lisse.

2.2.1 Perturbations de l'écoulement de base

Pour obtenir le système aux perturbations, le système des équations associées à l'écoulement de base est perturbé, puis linéarisé. Dans la suite de cette étude, nous considérerons des perturbations non-stationnaires et en trois dimensions. Le formalisme eulérien est utilisé pour les perturbations (Boudesocque-Dubois, 2000). En effet, une description lagrangienne des perturbations compliquerait encore la définition des conditions initiales : la position initiale des perturbations devrait être ajoutée aux conditions initiales déjà requises dans le formalisme eulérien. Afin de projeter les perturbations eulériennes sur l'écoulement de base lagrangien, un changement de variable $(x, y, z) \rightarrow (m, y, z)$ est utilisé :

$$\partial_x \rightarrow \overline{\rho} \partial_m, \quad \partial_t \rightarrow \partial_t - \overline{\rho} \overline{v}_x \partial_m. \quad (2.34)$$

Dans la formulation qui va désormais être utilisée, toutes les quantités de l'écoulement sont, par hypothèse, fonction d'un paramètre de perturbation ϵ . Le cas $\epsilon = 0$ correspond ainsi à l'écoulement

de base. La perturbation linéaire de la quantité quelconque q est donc, par définition, égale à la dérivée partielle suivante (Boudesocque-Dubois *et al.*, 2003) :

$$q(m, y, z, t) = \left. \frac{\partial q}{\partial \epsilon}(m, y, z, t; \epsilon) \right|_{\epsilon=0}, \quad (2.35)$$

Pour obtenir le système aux perturbations, il suffit donc de dériver par rapport à ϵ les équations formulées en (m, y, z, t) , en considérant m, y, z, t et ϵ comme étant les variables indépendantes. Le système aux perturbations peut alors être écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right) + \partial_m (\bar{\rho} v_x) + d_{\perp} = 0, \\ \partial_t v_x + \bar{\rho} v_x \partial_m \bar{v}_x + \partial_m p - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \partial_m \bar{p} = 0, \\ \partial_t \mathbf{v}_{\perp} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_{\perp} p = \mathbf{0}, \\ \partial_t \varepsilon + \bar{\rho} v_x \partial_m \bar{\varepsilon} = \bar{p} \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \partial_m \bar{v}_x - \partial_m v_x \right) - p \partial_m \bar{v}_x + \frac{\rho}{\bar{\rho}} \partial_m \varphi_x \\ \quad - \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{p} d_{\perp} + \nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\perp}), \end{array} \right. \quad (2.36)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{T}{(\gamma - 1)}, \\ d_{\perp} = \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp}, \\ p = \bar{\rho} T + \rho \bar{T}, \\ \varphi_x = -\bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n \left[\partial_m T + \left(m \frac{\rho}{\bar{\rho}} + n \frac{T}{\bar{T}} \right) \partial_m \bar{T} \right], \\ \boldsymbol{\varphi}_{\perp} = -\bar{\rho}^m \bar{T}^n \nabla_{\perp} T. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Dans ce système, $\nabla_{\perp}$ représente l'opérateur gradient dans la direction transverse au sens de l'écoulement et les vecteurs $\mathbf{v}_{\perp}$ et $\boldsymbol{\varphi}_{\perp}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\perp} &= v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z, \\ \boldsymbol{\varphi}_{\perp} &= \varphi_y \vec{e}_y + \varphi_z \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.2.2 Transformation de Fourier et décomposition de Helmholtz

On peut formuler la solution comme une combinaison linéaire de solutions exponentielles du type $e^{i(k_y y + k_z z)}$ avec k_y et k_z les nombres d'onde selon les directions des axes (Oy) et (Oz) . En effet, les coefficients dans les équations des perturbations ne dépendent pas des coordonnées transverses (y, z) . Une décomposition de Fourier est alors appliquée au système (2.36) en écrivant, pour chaque quantité f :

$$f(m, y, z, t) = \sum_{k_{\perp}} \hat{f}(m, t; k_{\perp}) e^{i(k_y y + k_z z)}, \quad (2.39)$$

où $k_{\perp} = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ est appelé le « nombre d'onde transverse ». Une décomposition de Helmholtz sur la vitesse transverse nous permet de simplifier encore les équations aux perturbations linéarisées.

La partie irrotationnelle de cette décomposition s'écrit sous la forme du taux de dilatation transverse :

$$\hat{d}_\perp = i(k_y v_y + k_z v_z). \quad (2.40)$$

Le système aux perturbations s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \left(\frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} \right) + \partial_m (\bar{\rho} \hat{v}_x) + \hat{d}_\perp = 0, \\ \partial_t \hat{v}_x + \bar{\rho} \hat{v}_x \partial_m \bar{v} + \partial_m \hat{p} - \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} \partial_m \bar{p} = 0, \\ \partial_t \hat{d}_\perp - k_\perp^2 \frac{\hat{p}}{\bar{\rho}} = 0, \\ \frac{1}{\gamma - 1} \left(\partial_t \hat{T} + \bar{\rho} \hat{v}_x \partial_m \bar{T} \right) = \bar{p} \left(\frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} \partial_m \bar{v}_x - \partial_m \hat{v}_x \right) - \hat{p} \partial_m \bar{v}_x + \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} \partial_m \bar{\varphi}_x \\ \quad - \partial_m \hat{\varphi}_x - \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \hat{d}_\perp - k_\perp^2 \bar{\rho}^{m-1} \bar{T}^n \hat{T}, \end{array} \right. \quad (2.41)$$

avec l'expression du flux (2.37) qui devient :

$$\hat{\varphi}_x = -\bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n \left[\partial_m \hat{T} + \left(m \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} + n \frac{\hat{T}}{\bar{T}} \right) \partial_m \bar{T} \right]. \quad (2.42)$$

2.2.3 Passage en variable autosemblable

De même que l'écoulement de base, le système aux perturbations est exprimé à l'aide de la variable autosemblable ξ . On définit les nouvelles quantités $\hat{G}, \hat{V}_x, \hat{D}_\perp, \hat{P}, \hat{\Theta}$ et $\hat{\Phi}_x$ de la manière suivante (Annexe A) :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(m, t; k_\perp) &= \hat{G}(\xi, t; k_\perp), \\ \hat{v}_x(m, t; k_\perp) &= \hat{V}_x(\xi, t; k_\perp), \\ \hat{d}_\perp(m, t; k_\perp) &= \hat{D}_\perp(\xi, t; k_\perp), \\ \hat{p}(m, t; k_\perp) &= \hat{P}(\xi, t; k_\perp), \\ \hat{T}(m, t; k_\perp) &= \hat{\Theta}(\xi, t; k_\perp), \\ \hat{\varphi}_x(m, t; k_\perp) &= \hat{\Phi}_x(\xi, t; k_\perp). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pour le passage en équations aux dérivées partielles par rapport aux variables (ξ, t) à partir d'équations aux dérivées partielles en (m, t) , on utilise les formules de changement de variable suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{f}(m, t; k_\perp) &= \partial_t \hat{F}(\xi, t; k_\perp) - \frac{\alpha \xi}{t} \partial_\xi \hat{F}(\xi, t; k_\perp), \\ \partial_m \hat{f}(m, t; k_\perp) &= t^{-\alpha} \partial_\xi \hat{F}(\xi, t; k_\perp). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ainsi, en variable autosemblable, le système d'équations aux perturbations devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \hat{G} = t^{-1} (\alpha \xi \partial_\xi - \overline{G} d_\xi \overline{V}_x) \hat{G} - t^{-\alpha} \overline{G} \partial_\xi (\overline{G} \hat{V}_x) - \overline{G} \hat{D}_\perp, \\ \partial_t \hat{V}_x = t^{-1} (\alpha \xi \partial_\xi - \overline{G} d_\xi \overline{V}_x) \hat{V}_x + t^{\alpha-2} d_\xi \overline{P} \frac{\hat{G}}{\overline{G}} - t^{-\alpha} \partial_\xi \hat{P}, \\ \partial_t \hat{D}_\perp = t^{-1} \alpha \xi \partial_\xi \hat{D}_\perp + k_\perp^2 \frac{\hat{P}}{\overline{G}}, \\ \partial_t \hat{\Theta} = t^{-1} (\alpha \xi \partial_\xi - (\gamma - 1) \overline{G} d_\xi \overline{V}_x) \hat{\Theta} - t^{\alpha-2} ((\gamma - 1) \overline{P} \partial_\xi + \overline{G} d_\xi \overline{\Theta}) \hat{V}_x \\ \quad - (\gamma - 1) (t^{2\alpha-2} \overline{\Theta} \hat{D}_\perp + t^{2\alpha-1} k_\perp^2 \overline{G}^{(m-1)} \overline{\Theta}^n \hat{\Theta} \\ \quad - t^{2\alpha-3} \frac{d_\xi \overline{\Phi}_x}{\overline{G}} \hat{G} + t^{-\alpha} \partial_\xi \hat{\Phi}_x), \end{array} \right. \quad (2.45)$$

où les dérivées partielles en temps sont prises à ξ constant et avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Phi}_x = -\overline{G}^{m+1} \overline{\Theta}^n \left(t^{\alpha-1} \left[\partial_\xi \hat{\Theta} + \frac{n}{\overline{\Theta}} \hat{\Theta} d_\xi \overline{\Theta} \right] + t^{3(\alpha-1)} m \frac{1}{\overline{G}} \hat{G} d_\xi \overline{\Theta} \right), \\ \hat{P} = \overline{G} \hat{\Theta} + t^{2\alpha-2} \overline{\Theta} \hat{G}. \end{array} \right. \quad (2.46)$$

2.2.4 Conditions initiales

Afin de modéliser les défauts de surface, une déformation initiale de la surface matérielle est introduite (Fig. 2.1). Une perturbation en flux est choisie pour modéliser les défauts d'éclairement (Fig. 2.2). Nous considérons des perturbations pour lesquelles le nombre d'onde transverse $k_\perp$ est fixé. Le problème qui se pose lors de la formulation des conditions initiales réside dans la singularité du système d'équations en $t = 0$. Ces conditions doivent par conséquent être formulées en un temps t_0 petit mais non-nul. On a donc :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(0, t_0) &= \hat{\rho}_I, \\ \hat{v}_x(0, t_0) &= \hat{v}_{x,I}, \\ \hat{T}(0, t_0) &= \hat{T}_I, \\ \hat{d}_\perp(0, t_0) &= \hat{d}_{\perp,I}, \\ \hat{\varphi}_x(0, t_0) &= \hat{\varphi}_{x,I}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

avec $\hat{\rho}_I, \hat{v}_{x,I}, \hat{T}_I, \hat{d}_{\perp,I}$ et $\hat{\varphi}_{x,I}$ les valeurs initiales de ces perturbations.

2.2.5 Conditions aux limites

2.2.5.1 Conditions appliquées à la surface extérieure de la cible

En formulation lagrangienne, la zone où l'énergie est déposée peut être considérée comme une ligne matérielle définie par $m = 0$. C'est sur cette ligne matérielle, frontière de notre domaine d'étude, que nous allons appliquer les conditions aux limites relatives à la surface extérieure (Boudesocque-Dubois, 2000). Cette ligne matérielle nous impose les conditions aux limites suivantes :

- **Condition cinématique** : la surface d'équation $m = 0$ étant une surface matérielle, il y a équivalence entre la vitesse normale du fluide et la vitesse normale de déplacement de la

Illustration des deux types de perturbation

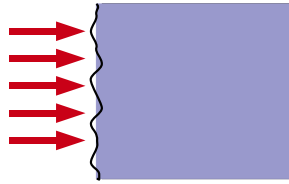


FIGURE 2.1 – Schéma de la perturbation de rugosité.

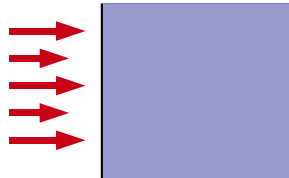


FIGURE 2.2 – Schéma de la perturbation d'éclairement.

surface.

- **Perturbation de la masse volumique ou pression nulle** : l'hypothèse d'une perturbation de masse volumique nulle en $m = 0$ est valable dans le cas de l'attaque directe en raison de l'assimilation de la zone de dépôt d'énergie à une zone de densité critique. Dans le cas du rayonnement X, la condition à l'origine est une condition de pression nulle.
- **Continuité du flux de conduction** : au niveau de la surface $m = 0$, la composante normale du flux de conduction longitudinal Φ_{x*} est continue.

2.2.5.2 Conditions à l'origine

Les conditions aux limites pour $m = 0$ deviennent aisément des conditions aux limites pour $\xi = 0$ avec un changement de variable approprié. Enfin, il faut définir des conditions limites au niveau du choc. À ce niveau, lorsque $\xi = \xi_{fc}$, les perturbations, tout comme l'écoulement de base, subissent un saut. Afin de décrire ce phénomène, les relations de Rankine–Hugoniot 3D complètes sont perturbées puis linéarisées dans le cas de l'écoulement avec l'approximation de choc parfait (Boudesocque-Dubois, 2000). En amont de l'onde de choc, on considère que l'écoulement n'est pas perturbé.

Au cours de cette étude, la prise en compte d'un précurseur thermique va impliquer un changement de formulation des relations de Rankine–Hugoniot au niveau du front de choc et l'apparition de conditions aux limites au pied du front thermique. Un changement de variable permet d'écrire les

conditions aux limites correspondant aux conditions en $m = 0$, c'est-à-dire en $\xi = 0$:

$$\widehat{G}(0, t) + t^{-\alpha} \overline{G}(0) d_\xi \overline{G}(0) \widehat{\eta}_0(t) = 0,$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_{x*} = & -t^{\alpha-1} \overline{G}^{m+1}(0) \overline{\Theta}^n(0) \partial_\xi \widehat{\Theta}(0, t) + t^{3(\alpha-1)} \left(m \frac{\widehat{G}(0, t)}{\overline{G}(0)} + t^{2(1-\alpha)} n \frac{\widehat{\Theta}(0, t)}{\overline{\Theta}(0)} \right) \overline{\Phi}_x(0) \\ & + t^{2\alpha-3} \overline{G}(0) \widehat{\eta}_0(t) d_\xi \overline{\Phi}_x(0), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$d_t \widehat{\eta}_0(t) = \widehat{V}_x(0, t) + t^{-1} \overline{G}(0) d_\xi \overline{V}_x(0) \widehat{\eta}_0(t).$$

2.2.6 Relations de saut au choc isotherme

Sur une surface perturbée, les équations de Rankine–Hugoniot traduisent la conservation du flux de matière, du flux d'implosion et du flux d'énergie. La forme générale de ces relations dans le cas d'un écoulement à trois dimensions est la suivante :

$$\begin{aligned} [\rho u_a n_a]_-^+ &= 0, \\ [(\rho v_b u_a - p \delta_{ba}) n_a]_-^+ &= 0, \\ \left[\left(\rho \left(\epsilon + \frac{v_c^2}{2} \right) u_a - p v_a - \varphi_a \right) n_a \right]_-^+ &= 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

avec $\vec{n}$ le vecteur unitaire représentant la direction normale au choc, $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ la vitesse du front de choc par rapport à la vitesse matière et $\vec{w}$ la vitesse du front dans le référentiel choisi. Les indices a, b et c correspondent aux composantes spatiales avec la convention d'Einstein pour les indices répétés. Enfin, les indices « $-$ » et « $+$ » indiquent respectivement les quantités en aval et en amont du choc. La mise en place des relations applicables à notre étude découle d'une méthode bien connue détaillée en Annexe D. Ces relations de saut, au niveau du choc isotherme peuvent ainsi être formulées comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[t^{\alpha-1} (\overline{W} - \overline{V}_x) \widehat{G} + \overline{G} (\widehat{W} - \widehat{V}_x) + t^{-1} \overline{G} \widehat{\eta} d_\xi [\overline{G} (\overline{W} - \overline{V}_x)] \right]_-^+ = 0, \\ & \left[t^{2(\alpha-1)} \overline{V}_x (\overline{W} - \overline{V}_x) \widehat{G} + t^{\alpha-1} \overline{G} (\widehat{W} - 2 \widehat{V}_x) \widehat{V}_x - \widehat{P} \right. \\ & \quad \left. + t^{\alpha-1} \overline{G} \overline{V}_x \widehat{W} + t^{\alpha-2} \widehat{\eta} d_\xi [\overline{G} \overline{V}_x (\overline{W} - \overline{V}_x) - \overline{P}] \right]_-^+ = 0, \\ & \left[\widehat{D}_\perp - t^{\alpha-1} \widehat{\eta} k_\perp^2 \overline{V}_x \right]_-^+ = 0, \\ & \left[t^{3(\alpha-1)} \frac{1}{2} \overline{V}_x^2 (\overline{W} - \overline{V}_x) \widehat{G} + t^{2(\alpha-1)} \left(\overline{G} \overline{V}_x (\overline{W} - \frac{3}{2} \overline{V}_x) - \frac{\gamma}{\gamma-1} \overline{P} \right) \widehat{V}_x \right. \\ & \quad \left. + t^{\alpha-1} \frac{1}{\gamma-1} (\overline{W} - \gamma \overline{V}_x) \widehat{P} + t^{2(\alpha-1)} \left(\frac{1}{\gamma-1} \overline{P} + \frac{1}{2} \overline{G} \overline{V}_x^2 \right) \widehat{W} \right. \\ & \quad \left. + t^{2\alpha-3} \widehat{\eta} \overline{G} d_\xi \left[\overline{G} \left(\frac{1}{\gamma-1} \overline{\Theta} + \frac{1}{2} \overline{V}_x^2 \right) (\overline{W} - \overline{V}_x) - \overline{P} \overline{V}_x - \overline{\Phi}_x \right] \right]_-^+ = 0. \end{aligned} \right. \quad (2.50)$$

Chapitre 3

Outils et méthodes numériques

La résolution numérique d'équations aux dérivées partielles non-linéaires est utilisée pour modéliser de nombreux processus physiques. Que ce soit dans le cadre d'études de stabilité ou en simulation numérique d'écoulements turbulents, en mécanique des fluides ou en acoustique, il est important de travailler avec une grande précision de résolution. Il est donc nécessaire de faire appel à des schémas de discrétisation d'ordre élevé. D'autant plus précises que la solution est régulière, les méthodes spectrales (Gottlieb et Orszag, 1977; Canuto *et al.*, 1988; Peyret, 2003; Gauthier *et al.*, 2005) sont théoriquement d'excellents outils. Elles peuvent cependant être mises en défaut lorsque la solution recherchée présente des zones à fort gradient ou des discontinuités. En effet, au vu du nombre de polynômes requis, des simulations très coûteuses en mémoire et en temps de calcul seraient nécessaires. Ce souci est propre aux méthodes d'ordre élevé. C'est la raison pour laquelle des transformations de coordonnées ont été introduites (Guillard et Peyret, 1988; Bayliss et Turkel, 1992; Guillard *et al.*, 1992; Peyret, 2003). Toutefois, pour la résolution de problèmes complexes, ce type d'algorithme n'est pas suffisant, c'est pourquoi on a recours à des méthodes multidomaines utilisant les transformations de coordonnées. Avec ce type de méthodes, il apparaît que la position des interfaces entre les domaines influe fortement sur la précision de la solution. Une procédure d'adaptation dynamique de maillage est donc nécessaire. La conséquence de l'application de cette adaptation est le regroupement des forts gradients sur les bords des domaines (Renaud, 1996; Renaud et Gauthier, 1997).

3.1 Systèmes d'équations résolus

Au cours de ce projet, l'outil numérique qui a été utilisé est le code d'étude RAMSES. Celui-ci résout les équations d'Euler avec des conditions initiales et aux limites particulières. Il permet de traiter un écoulement complet composé d'une solution autosemblable et de perturbations linéaires. Les méthodes numériques présentées au cours de ce chapitre sont utilisées pour traiter les systèmes d'équations qui régissent le comportement des quantités de l'écoulement. Plusieurs systèmes d'équations sont utilisés, chacun avec ses caractéristiques particulières. Un système d'équations aux dérivées ordinaires régit notamment le comportement de l'écoulement de base dans le repère autosemblable. Concernant le calcul des perturbations linéaires, un système d'équations aux dérivées partielles est utilisé.

3.1.1 Système d'équations aux dérivées ordinaires pour l'écoulement de base

Pour le comportement de l'écoulement de base, le système (2.28) est reformulé avec la densité $\overline{G}$. Il s'agit du système aux dérivées ordinaires suivant :

$$\begin{cases} d_\xi \overline{V}_x - \alpha \xi \overline{G}^{-2} d_\xi \overline{G} = 0, \\ (\alpha - 1) \overline{V}_x - \alpha \xi d_\xi \overline{V}_x + \overline{G} d_\xi \overline{\Theta} + \overline{\Theta} d_\xi \overline{G} = 0, \\ 2(\alpha - 1) \frac{\overline{\Theta}}{(\gamma - 1)} - \alpha \xi \frac{d_\xi \overline{\Theta}}{(\gamma - 1)} + \overline{G} \overline{\Theta} \overline{V}_x + d_\xi \overline{\Phi}_x = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec :

$$\overline{\Phi}_x = -\overline{G}^{m+1} \overline{\Theta}^n d_\xi \overline{\Theta}. \quad (3.2)$$

3.1.2 Système d'équations aux dérivées partielles pour les perturbations linéaires

Le système aux dérivées partielles utilisé pour le traitement des perturbations linéaires appliquées à l'écoulement de base est (2.45), soit :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{G} = t^{-1} (\alpha \xi \partial_\xi - \overline{G} d_\xi \overline{V}_x) \hat{G} - t^{-\alpha} \overline{G} \partial_\xi (\overline{G} \hat{V}_x) - \overline{G} \hat{D}_\perp, \\ \partial_t \hat{V}_x = t^{-1} (\alpha \xi \partial_\xi - \overline{G} d_\xi \overline{V}_x) \hat{V}_x + t^{\alpha-2} d_\xi \overline{P} \frac{\hat{G}}{\overline{G}} - t^{-\alpha} \partial_\xi \hat{P}, \\ \partial_t \hat{D}_\perp = t^{-1} \alpha \xi \partial_\xi \hat{D}_\perp + k_\perp^2 \frac{\hat{P}}{\overline{G}}, \\ \partial_t \hat{\Theta} = t^{-1} (\alpha \xi \partial_\xi - (\gamma - 1) \overline{G} d_\xi \overline{V}_x) \hat{\Theta} - t^{\alpha-2} ((\gamma - 1) \overline{P} \partial_\xi + \overline{G} d_\xi \overline{\Theta}) \hat{V}_x \\ - (\gamma - 1) (t^{2\alpha-2} \overline{\Theta} \hat{D}_\perp + t^{2\alpha-1} k_\perp^2 \overline{G}^{(m-1)} \overline{\Theta}^n \hat{\Theta} \\ - t^{2\alpha-3} \frac{d_\xi \overline{\Phi}_x}{\overline{G}} \hat{G} + t^{-\alpha} \partial_\xi \hat{\Phi}_x), \end{cases} \quad (3.3)$$

avec :

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_x = -\overline{G}^{m+1} \overline{\Theta}^n \left(t^{\alpha-1} \left[\partial_\xi \hat{\Theta} + \frac{n}{\overline{\Theta}} \hat{\Theta} d_\xi \overline{\Theta} \right] + t^{3(\alpha-1)} m \frac{1}{\overline{G}} \hat{G} d_\xi \overline{\Theta} \right), \\ \hat{P} = \overline{G} \hat{\Theta} + t^{2\alpha-2} \overline{\Theta} \hat{G}. \end{cases} \quad (3.4)$$

La dernière équation du système (3.3), qui concerne l'évolution de la perturbation en température, peut être remplacée par l'équation d'évolution de la perturbation en pression :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{P} = t^{-1} (\alpha \xi \partial_\xi - \gamma \overline{G} d_\xi \overline{V}_x) \hat{P} - t^{\alpha-2} \overline{G} (\gamma \overline{P} \partial_\xi + d_\xi \overline{P}) \hat{V}_x - t^{2\alpha-2} \gamma \overline{P} \hat{D}_\perp \\ - t^{2\alpha-1} ((\gamma - 1) \overline{G} k_\perp^2 \overline{G}^{m-1} \overline{\Theta}^n) \hat{\Theta} - t^{-\alpha} (\gamma - 1) \overline{G} \partial_\xi \hat{\Phi}_x, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pour résoudre ce système, une séparation est effectuée entre les équations propres à la dynamique des gaz et l'équation de la conduction thermique.

3.1.2.1 Sous-système de la dynamique des gaz

Pour décrire la dynamique des gaz, les équations du système (3.3) concernant la densité, la vitesse longitudinale et le taux de dilatation transverse sont utilisées. La quatrième équation prise

en compte est l'équation d'évolution de la pression dans laquelle les termes de perturbation de flux de chaleur sont éliminés :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{G} = t^{-1} (\alpha \xi \partial_\xi - \bar{G} d_\xi \bar{V}_x) \hat{G} - t^{-\alpha} \bar{G} \partial_\xi (\bar{G} \hat{V}_x) - \bar{G} \hat{D}_\perp, \\ \partial_t \hat{V}_x = t^{-1} (\alpha \xi \partial_\xi - \bar{G} d_\xi \bar{V}_x) \hat{V}_x + t^{\alpha-2} d_\xi \bar{P} \frac{\hat{G}}{\bar{G}} - t^{-\alpha} \partial_\xi \hat{P}, \\ \partial_t \hat{D}_\perp = t^{-1} \alpha \xi \partial_\xi \hat{D}_\perp + k_\perp^2 \frac{\hat{P}}{\bar{G}}, \\ \partial_t \hat{P} = t^{-1} (\alpha \xi \partial_\xi - \gamma \bar{G} d_\xi \bar{V}_x) \hat{P} - t^{\alpha-2} \bar{G} (\gamma \bar{P} \partial_\xi + d_\xi \bar{P}) \hat{V}_x - t^{2\alpha-2} \gamma \bar{P} \hat{D}_\perp. \end{cases} \quad (3.6)$$

En posant $\hat{\mathbf{V}}_\xi = {}^\top (\hat{G} \ \hat{V}_x \ \hat{D}_\perp \ \hat{P})$ le vecteur des perturbations, on peut réécrire ce système sous la forme vectorielle suivante :

$$\partial_t \hat{\mathbf{V}}_\xi + \hat{\mathbf{A}}_\xi \partial_\xi \hat{\mathbf{V}}_\xi + \hat{\mathbf{B}}_\xi \hat{\mathbf{V}}_\xi = 0, \quad (3.7)$$

avec :

$$\hat{\mathbf{A}}_\xi = \begin{pmatrix} -\alpha \xi t^{-1} & t^{-\alpha} \bar{G}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \xi t^{-1} & 0 & t^{-\alpha} \\ 0 & 0 & -\alpha \xi t^{-1} & 0 \\ 0 & t^{\alpha-2} (\bar{G} \bar{C})^2 & 0 & -\alpha \xi t^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

où :

$$\bar{C} = \sqrt{\gamma \frac{\bar{P}}{\bar{G}}}, \quad (3.9)$$

et :

$$\hat{\mathbf{B}}_\xi = \begin{pmatrix} t^{-1} \bar{G} d_\xi \bar{V}_x & t^{-\alpha} \bar{G} d_\xi \bar{G} & \bar{G} & 0 \\ -\frac{t^{\alpha-2}}{\bar{G}} d_\xi \bar{P} & t^{-1} \bar{G} d_\xi \bar{V}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_\perp^2}{\bar{G}} \\ 0 & t^{\alpha-2} \bar{G} d_\xi \bar{P} & t^{2\alpha-2} \gamma \bar{P} & \gamma t^{-1} \bar{G} d_\xi \bar{V}_x \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Boudesocque-Dubois (2000) a montré le caractère hyperbolique de ce système.

3.1.2.2 Sous-équation de la conduction thermique

Les termes de perturbation de flux de chaleur, absents du système de la dynamique des gaz (3.6), sont utilisés pour former l'équation de la conduction thermique :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Theta} &= t^{-1} (\gamma - 1) \bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n \partial_\xi^2 \hat{\Theta} - t^{2\alpha-1} (\gamma - 1) k_\perp^2 \bar{G}^{m-1} \bar{\Theta}^n \hat{\Theta} \\ &\quad - (\gamma - 1) t^{-1} \left[n d_\xi \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} \right) \hat{\Theta} + \left(2 n \frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} - m \bar{G}^m \bar{\Theta}^n d_\xi \bar{G} \right) \partial_\xi \hat{\Theta} \right] \\ &\quad - (\gamma - 1) t^{2\alpha-3} m \partial_\xi \left(\frac{\bar{\Phi}_x \hat{G}}{\bar{G}} \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

dont le caractère parabolique a été montré par Boudesocque-Dubois (2000). Cette équation est intégrée numériquement sous la forme :

$$\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial t} = \hat{\mathcal{F}}_\Theta + \hat{\mathcal{G}}_\Theta, \quad (3.12)$$

où $\hat{\mathcal{F}}_\Theta$ désigne les termes traités explicitement et $\hat{\mathcal{G}}_\Theta$ les termes traités implicitement. Ces deux contributions sont définies par :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}_\Theta &= -t^{2\alpha-3} (\gamma-1) \text{ m } \partial_\xi \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{G}} \hat{G} \right) \\ &\quad + t^{-1} \left(-2 \text{ n } (\gamma-1) \frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} + \text{ m } (\gamma-1) \bar{G}^{\text{m}} \bar{\Theta}^{\text{n}} d_\xi \bar{G} \right) \partial_\xi \hat{\Theta} \\ &\quad - t^{-1} (\gamma-1) (1-\chi) \text{ n } d_\xi \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} \right) \hat{\Theta}, \\ \hat{\mathcal{G}}_\Theta &= t^{-1} (\gamma-1) \bar{G}^{\text{m}+1} \bar{\Theta}^{\text{n}} \partial_{\xi^2}^2 \hat{\Theta} - t^{2\alpha-1} (\gamma-1) k_\perp^2 \bar{G}^{\text{m}-1} \bar{\Theta}^{\text{n}} \hat{\Theta} \\ &\quad - t^{-1} \chi (\gamma-1) \text{ n } d_\xi \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} \right) \hat{\Theta},\end{aligned}\tag{3.13}$$

avec χ le degré d'implicité du terme en $\hat{\Theta}$, ou terme de réaction, tel que $0 \leq \chi \leq 1$. Un schéma de Runge–Kutta semi-implicite d'ordre deux à trois étapes (Annexe C) est utilisé pour résoudre l'équation (3.11) de la conduction thermique. À chaque sous-itération en temps du schéma, le problème suivant doit être résolu :

$$\hat{\Theta}^{r+1} = \hat{\Theta}^r + a_r \hat{q}^r + b_r \Delta t_p \left(\hat{\mathcal{G}}_{\Theta^r}^r + \hat{\mathcal{G}}_{\Theta^{r+1}}^{r+1} \right), \quad r = 1, 2, 3,\tag{3.14}$$

avec r le numéro de l'étape considérée du schéma et p le numéro du pas en temps, dans lequel le terme $\hat{q}^r$ dépend de $\hat{\mathcal{F}}_{\Theta^r}$ ou des termes d'indices précédents tels que $\hat{\mathcal{F}}_{\Theta^{r-1}}$ si ils existent. L'équation (3.14) peut s'écrire sous la forme générale :

$$L^{r+1}(t_{r+1}, k_\perp) \hat{\Theta}^{r+1} = \hat{f}^r(\hat{\Theta}^r, \hat{q}^r),\tag{3.15}$$

avec :

$$L^{r+1}(t_{r+1}, k_\perp) = \partial_{\xi^2}^2 - \sigma^{r+1}(t_{r+1}, k_\perp),\tag{3.16}$$

et avec $\sigma(t_{r+1}, k_\perp)$ la partie diagonale de l'opérateur telle que :

$$\sigma^{r+1}(t_{r+1}, k_\perp) = t_{r+1}^{2\alpha} k_\perp^2 \bar{G}^{-2} + \chi \text{ n } \partial_\xi \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} \right) \bar{G}^{-(\text{m}+1)} \bar{\Theta}^{-\text{n}} + \frac{t_{r+1}}{b_r \Delta t_p} \frac{1}{(\gamma-1) \bar{G}^{\text{m}+1} \bar{\Theta}^{\text{n}}},\tag{3.17}$$

Le second membre $\hat{f}^r(\hat{\Theta}^r, \hat{q}^r)$ est défini par :

$$\begin{aligned}\hat{f}^r(\hat{\Theta}^r, \hat{q}^r) &= \frac{t_{r+1}}{t_r} \left[-\partial_{\xi^2}^2 + t_r^{2\alpha} k_\perp^2 \bar{G}^{-2} + \chi \text{ n } d_\xi \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} \right) \bar{G}^{-(\text{m}+1)} \bar{\Theta}^{-\text{n}} - \frac{t_r}{b_r \Delta t_p} \frac{1}{(\gamma-1) \bar{G}^{\text{m}+1} \bar{\Theta}^{\text{n}}} \right] \hat{\Theta}^r \\ &\quad - \left[a_r \frac{t_{r+1}}{b_r \Delta t_p} \frac{1}{(\gamma-1) \bar{G}^{\text{m}+1} \bar{\Theta}^{\text{n}}} \right] \hat{q}^r.\end{aligned}\tag{3.18}$$

À ce stade, les équations auxquelles vont être appliquées les différentes méthodes qui sont expliquées dans la suite de ce chapitre sont établies.

3.2 Méthodes spectrales

Les méthodes spectrales ont pour principe de développer les variables dépendantes sur une famille de polynômes orthogonaux qui occupent tout le domaine de calcul et ne s'annulent qu'en

un nombre très restreint de points du maillage. De manière générale, les polynômes utilisés pour ce type de méthode sont ceux de Chebyshev, ou encore de Legendre pour lesquels la convergence est plus rapide. Les méthodes spectrales appartiennent à la classe générale de la méthode des résidus pondérés dont les principaux éléments sont les fonctions de développement et les fonctions tests.

3.2.1 Méthode des résidus pondérés

Soit l'équation différentielle :

$$A(u(x)) = f \quad \text{pour} \quad x \in \Omega, \quad (3.19)$$

avec A un opérateur différentiel qui comporte des conditions aux limites sur $\partial\Omega$. Un opérateur de projection P_N est défini sur un ensemble de dimension finie par la relation :

$$u_N(x) = P_N(x) u(x) = \sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x). \quad (3.20)$$

Dans cette relation, les fonctions notées ϕ_i sont les fonctions de développement, et les coefficients c_i sont choisis de telle sorte que $R_N = A(u_N(x)) - f$ s'annule en moyenne, c'est-à-dire :

$$\langle R_N, \psi_j(x) \rangle = 0 \quad \text{pour} \quad j = 0, \dots, N, \quad (3.21)$$

avec ψ_j des fonctions tests. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ utilisé est défini par :

$$\langle u, v \rangle = \int_{x \in \Omega} u(x) v(x) p(x) dx, \quad (3.22)$$

où $p(x)$ représente la fonction poids.

3.2.2 Méthode de collocation

La méthode de collocation utilise des fonctions de développement issues d'une famille de polynômes orthogonaux de type Chebyshev. Ce choix de fonctions de développement est historique, celles-ci auraient en effet pu être de la famille des polynômes orthogonaux de type Legendre. Les fonctions tests utilisées sont les fonctions de Dirac centrées sur des points dits de « collocation ». La fonction poids est égale à $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ dans le cas des polynômes de Chebyshev. Elle serait égale à 1 dans le cas de l'utilisation de ceux de Legendre. Enfin, les conditions aux limites sont appliquées sur les points de collocation situés à la frontière des domaines qui parcellent notre écoulement.

Polynômes de Chebyshev : la méthode de relaxation que nous allons utiliser, utilisant l'accélération de Chebyshev, nécessite quelques précisions sur les polynômes dits « de Chebyshev ». Ces polynômes, nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe Pafnouli Chebyshev, constituent deux familles. La première espèce est notée $(T_n)_{n \geq 0}$ et la seconde est notée $(U_n)_{n \geq 0}$, n étant un entier correspondant au degré. Ces polynômes sont définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ par les relations trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} T_n(\cos \theta) &= \cos(n\theta), \\ U_n(\cos \theta) &= \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ces deux familles sont chacune constituées d'une suite de polynômes orthogonaux par rapport à un produit scalaire de fonctions assorti d'une pondération particulière. Dans les deux cas, la relation de récurrence suivante est vérifiée :

$$f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2x f_{n+1}(x). \quad (3.24)$$

Dans notre cas, ce sont les polynômes de la famille $(T_n)_{n \geq 0}$ qui sont concernés. Par définition, ce sont les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1-x^2} \frac{dT_n}{dx} \right) + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} T_n &= 0, \\ T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \quad \forall x \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si $(T_n)_{n \geq 0}$ vérifie $T_n(1) = 0$, alors ces polynômes s'écrivent :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad 0 \leq n \leq N. \quad (3.26)$$

On peut alors exprimer (3.24) par :

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (3.27)$$

En appliquant ces définitions à une décomposition en $\mathcal{N}$ sous-domaines et en posant $\mathcal{N}_i$ le nombre de points de chaque domaine et $[a_i, b_i]$ les bornes de ce domaine, on peut décomposer toute fonction $u(\xi)$ selon la base des polynômes de Chebyshev sur le domaine voulu :

$$u(\xi)|_{[a_i, b_i]} = u_i(\xi) \simeq u_{i, \mathcal{N}_i-1}(\xi) = P_{\mathcal{N}_i-1} u_i(\xi) = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_i} c_n^i T_n(\zeta(\xi)). \quad (3.28)$$

Points de collocation : les points de collocation sont choisis de sorte à définir un maillage proche du maillage idéal, soit celui qui minimise l'erreur d'interpolation. Les points utilisés sont les points de Gauss-Lobatto définis par :

$$\zeta_n = \cos \frac{\pi(n-1)}{\mathcal{N}_i-1}, \quad n = 1, \dots, \mathcal{N}_i. \quad (3.29)$$

Chaque domaine est ainsi assimilé à $[-1, 1]$. Cette définition impose une répartition préférentielle des points au niveau des bords du domaine.

Transformation de coordonnées : dans le cas général, les intervalles sur lesquels on cherche à résoudre notre problème diffèrent de $[-1, 1]$. L'idée est donc de recourir à des changements de coordonnées de l'espace de calcul vers $[-1, 1]$ qui apportent de la souplesse quant à la distribution des points de collocation. Dépendant des bornes de calcul, les fonctions utilisées doivent être bijectives. Les études de Renaud (1996) et de Renaud et Gauthier (1997) ont permis l'étude de plusieurs transformations de coordonnées. L'expérience a montré que la recherche de souplesse pousse à retenir la formulation suivante, qui ne dépend que d'un unique paramètre h_i :

$$\xi(\zeta) = \frac{a_i + b_i}{2} \frac{h_i \zeta}{\sqrt{1 + \left(\frac{2h_i}{b_i - a_i} \right)^2 - \zeta^2}}, \quad (3.30)$$

avec $[a_i, b_i]$ l'intervalle d'étude et $\zeta \in [-1, 1]$. Le paramètre h_i permet d'influer sur la répartition des points de collocation. Ainsi, un paramètre h_i proche de 0 resserrera les points autour du milieu de l'intervalle alors que le faire tendre vers l'infini impliquera une répartition de type Gauss–Lobatto. Pour $h_i = 0,3277 (b_i - a_i)$, les points sont répartis quasi-uniformément d'après Renaud (1996).

Dérivées spectrales : si on connaît $du_N/d\zeta(\zeta_j)$, on définit $du/dx(x_j)$ par la relation suivante :

$$\frac{du}{dx}(x_j) \simeq \frac{du_N}{d\zeta}(\zeta_j) \frac{d\zeta}{dx}(\zeta_j), \quad (3.31)$$

avec $du_N/d\zeta(\zeta_j)$ la différentiation de u_N sur les points de Gauss–Lobatto et $d\zeta/dx(\zeta_j)$ qui traduit la transformation de coordonnées.

La dérivée spectrale d'une fonction u peut être calculée sous forme matricielle. Les coefficients de cette matrice D_{jk} s'écrivent (Canuto et Quarteroni, 1985) :

$$(D_{\mathcal{N}_i})_{jk} = \begin{cases} \frac{c_j}{c_k} \frac{(-1)^{j+k}}{x_j - x_k}, & \forall j \neq k, \\ -\frac{1}{2} \frac{x_k}{1 - x_j^2}, & 2 \leq j = k \leq \mathcal{N}_i - 2, \\ \frac{2(\mathcal{N}_i - 1)^2 + 1}{6}, & j = k = 1, \\ \frac{-2(\mathcal{N}_i - 1)^2 + 1}{6}, & j = k = \mathcal{N}_i - 1, \end{cases} \quad (3.32)$$

avec

$$c_j = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 0 \text{ ou } j = \mathcal{N}_i - 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq j \leq \mathcal{N}_i - 2. \end{cases} \quad (3.33)$$

Pour un maillage composé des points de Gauss–Lobatto, les formules trigonométriques permettent de reformuler cette matrice de telle sorte que :

$$(D_{\mathcal{N}_i})_{jk} = \begin{cases} -2 \frac{c_j}{c_k} \frac{(-1)^{j+k}}{\sin \frac{(j+k-2)\pi}{2(\mathcal{N}_i-1)} \sin \frac{(j-k)\pi}{2(\mathcal{N}_i-1)}}, & \forall j \neq k, \\ -\frac{\cos \frac{(j-1)\pi}{\mathcal{N}_i-1}}{2 \sin^2 \frac{(j-1)\pi}{\mathcal{N}_i-1}}, & 2 \leq j = k \leq \mathcal{N}_i - 1. \end{cases} \quad (3.34)$$

La dérivée d'une constante étant nulle, la somme des éléments de chaque ligne de la matrice est nulle (Bayliss et Turkel, 1992). On prend en compte cette modification et le calcul de la diagonale s'effectue de la façon suivante :

$$(D_{\mathcal{N}_i})_{jj} = - \sum_{k=1, k \neq j}^{\mathcal{N}_i} (D_{\mathcal{N}_i})_{jk}. \quad (3.35)$$

Pour la dérivée seconde, il existe une formule similaire mais il est préférable d'utiliser l'expression :

$$D_{\mathcal{N}_i}^2 = D_{\mathcal{N}_i} D_{\mathcal{N}_i},$$

pour la calculer (Rothman, 1991).

3.2.3 Adaptation dynamique de maillage

La méthode de résolution utilisée lors de ce travail de thèse utilise un maillage multidomaine, il est donc important d'optimiser la distribution de ces sous-domaines. C'est pourquoi il est utile d'effectuer une procédure d'adaptation dynamique de maillage. Son principe réside dans le couplage de la méthode de transformation de coordonnées et de la décomposition du domaine d'étude Ω en plusieurs sous-domaines $(\Omega)_{1 \leq i \leq \mathcal{N}}$. Comme il est expliqué précédemment, la méthode de transformation de coordonnées permet à la solution d'être représentée par un polynôme de plus bas degré possible en utilisant une fonction dépendant du paramètre h_i pour modifier la distribution des points de collocation. En conséquence des conditions aux limites de l'équation aux dérivées partielles, la solution est soumise, à chaque interface, à des conditions de continuité qui concernent la fonction et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ si l'équation différentielle est d'ordre n (Canuto *et al.*, 1988). L'objectif de cette procédure d'adaptation dynamique de maillage est de déterminer une distribution de sous-domaines conférant une efficacité optimale aux transformations de coordonnées de chacun des sous-domaines. Il est donc nécessaire de mettre en place un critère. Pour cela, l'erreur entre la fonction et sa projection sur les bases des polynômes de Chebyshev est mesurée, et le cas échéant, un remaillage est imposé.

Critère d'adaptation : le procédé d'optimisation de la position des points du maillage et des interfaces entre domaines est basé sur le résultat classique de convergence suivant (Canuto *et al.*, 1988; Peyret, 2003) :

$$\|u - P_N u\|_{H_{\omega}^p(-1,1)} \leq C N^{2p-m-1/2} \|u\|_{H_{\omega}^m(-1,1)}, \quad \forall m \leq 1, \quad 1 \leq p \leq m, \quad (3.36)$$

avec $P_N u$ l'approximation d'ordre N en polynômes de Chebyshev de la fonction u . La norme de l'espace pondéré de Sobolev d'ordre p est définie par, en notant $u^{(k)}$ la dérivée k -ième de la fonction u :

$$\|u\|_{H_{\omega}^p(-1,1)} = \left(\sum_{k=0}^p \int_{-1}^{+1} |u^{(k)}(\zeta)|^2 \omega(\zeta) d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.37)$$

où la fonction de poids est $\omega(\zeta) = (1 - \zeta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Le résultat de convergence (3.36) montre que l'erreur de projection dans l'espace H_{ω}^p est bornée par la norme H_{ω}^m de la fonction.

L'optimisation consiste à minimiser une fonctionnelle définie à l'aide de la norme H_{ω}^m d'une fonction test u . Dans la pratique (Guillard *et al.*, 1992), de bons résultats sont atteints lorsque $m = 2$ et lorsque la fonctionnelle choisie est basée sur la dérivée de la fonction u . Dans une configuration multidomaine, avec $\mathcal{N}$ le nombre de domaines, cette fonctionnelle s'exprime ainsi :

$$J_2(u) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} J_{2,\omega}^i(u_i), \quad (3.38)$$

avec :

$$J_{2,\omega}^i(u_i) = \|u_i^{(1)}\|_{H_{\omega}^1(-1,1)}^2, \quad (3.39)$$

où u_i représente la restriction de la fonction u au i -ème domaine. Cette fonctionnelle dépend de $(2\mathcal{N} - 1)$ paramètres réels. Dans le cas qui nous intéresse, la combinaison linéaire :

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\left(\frac{G_i}{\|G_i\|_\infty}\right)^2 + \left(\frac{V_i}{\|V_i\|_\infty}\right)^2 + \left(\frac{\Theta_i}{\|\Theta_i\|_\infty}\right)^2 + \left(\frac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|_\infty}\right)^2 + \left(\frac{P_i}{\|P_i\|_\infty}\right)^2}, \quad (3.40)$$

est utilisée, avec la norme infinie qui désigne :

$$\|Q_i\|_\infty = \max_j |Q_i(\zeta_j)|. \quad (3.41)$$

Algorithme d'adaptation dynamique de maillage : la procédure d'adaptation balaye successivement chaque interface entre sous-domaines. La formule (3.38) est utilisée pour calculer la fonctionnelle sur plusieurs positions d'essai de l'interface en question, les autres interfaces restant figées. La valeur minimale calculée de la fonctionnelle est retenue et détermine la position optimale de l'interface. Cette procédure est répétée sur l'ensemble des interfaces et continue tant que la position de celles-ci ne converge pas vers une position figée ou que le nombre maximal autorisé de balayages, qui est un paramètre d'entrée du code variant de 4 à 20 selon les cas, soit atteint.

Chaque nouvelle application de cette procédure d'adaptation inverse le sens de balayage des interfaces et sélectionne celles dont la position doit être optimisée en se basant sur le critère suivant : la position d'une interface j requiert une adaptation si les inégalités :

$$\frac{J_{2,\omega}^i(u_i)}{\max_{1 \leq k \leq \mathcal{N}} J_{2,\omega}^k(u_k)} > \epsilon_{\text{adapt}}, \quad i = j, j + 1, \quad (3.42)$$

sont rencontrées, avec $0 < \epsilon_{\text{adapt}} < 1$ une constante liée au maillage. Un tel critère permet de ne pas modifier la position des interfaces qui ne le nécessitent pas.

3.3 Méthodes de relaxation avec préconditionnement

Les procédures de relaxation permettent d'approcher la solution d'un système d'équations via une méthode itérative. Parmi les différentes méthodes possibles pour réaliser cette relaxation, celles qui seront utilisées sont la relaxation de Richardson et l'accélération de Chebyshev. Ces méthodes sont efficaces mais coûteuses en nombre d'opérations.

On considère une approximation spectrale à $\mathcal{N}_i$ termes de l'équation différentielle $LU = f$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{L}_{\text{sp}} \mathbf{U}^i = \mathbf{f}^i, \quad (3.43)$$

où $\mathbf{f}^i$ est une approximation spectrale de f , dans le cas linéaire, telle l'équation (3.15), et :

$$\mathbf{L}_{\text{sp}} (\mathbf{U}^i) \mathbf{U}^i = \mathbf{f}^i, \quad (3.44)$$

pour un calcul non-linéaire, comme dans le cas du système d'équations aux dérivées ordinaires de l'écoulement de base (3.1). L'idée générale de la méthode d'itération est détaillée dans ce qui suit.

3.3.1 Méthode itérative

On suppose que l'on est capable de construire une approximation $\mathbf{L}_{\text{prec}}$ de l'opérateur spectral $\mathbf{L}_{\text{sp}}$ qui ait les propriétés suivantes :

- $\mathbf{L}_{\text{prec}}$ a une représentation matricielle creuse dont le nombre de composantes non-nulles est de l'ordre de $\mathcal{N}_i$,
- $\mathbf{L}_{\text{prec}}$ est efficacement inversible dans le sens où l'équation :

$$\mathbf{L}_{\text{prec}} \mathbf{U}^i = \mathbf{f}^i, \quad (3.45)$$

est soluble et l'inégalité suivante est vérifiée :

$$0 < m \leq \|\mathbf{L}_{\text{prec}}^{-1} \mathbf{L}_{\text{sp}}\| \leq M < \infty, \quad (3.46)$$

pour m et M qui sont respectivement le minimum et le maximum des modules de valeurs propres de $\mathbf{L}_{\text{prec}}^{-1} \mathbf{L}_{\text{sp}}$.

Il y a de nombreuses procédures itératives utilisant $\mathbf{L}_{\text{prec}}$ qui convergent efficacement vers la solution de $L U = f$. Afin d'obtenir une solution précise à notre écoulement, il nous faut trouver une méthode qui fonctionne avec des matrices non-symétriques. De plus, le problème associé au système d'équations aux dérivées ordinaires (3.1, 3.2) est non-linéaire, ce qui n'est pas usuel. La méthode choisie doit donc être une méthode robuste. L'expérience montre que l'utilisation de méthodes telles que la procédure de relaxation de Richardson ou l'accélération de Chebyshev fournit des résultats satisfaisants (Boudesocque-Dubois *et al.*, 2013). Ce type de méthode est néanmoins aussi utilisé pour des problèmes linéaires tels que le problème de Helmholtz lié à l'évolution de la perturbation en température.

3.3.2 Relaxation de Richardson

Dans cette partie, dans laquelle la procédure de relaxation selon Richardson est expliquée, les indices i et q désignent respectivement le numéro du domaine considéré et le numéro de l'itération. Les quantités utilisées sont les suivantes :

- $\mathbf{U}^{i(q)}$ le vecteur solution sur le domaine i à l'itération q ,
- $\mathbf{U}_{\text{CL}}^{i(q)}$ le vecteur $\mathbf{U}^{i(q)}$ modifié, pour la prise en compte des conditions aux limites, par la procédure suivante :
 - **condition de Dirichlet** : soit une condition de Dirichlet appliquée sur le premier point du domaine i à une des quantités considérées que l'on nommera ici Q , on note CL_{gQ} la valeur imposée à cette variable sur ce point. On définit également j_Q le numéro de la composante de $\mathbf{U}^{i(q)}$ propre à la quantité en question sur ce point :

$$\begin{cases} U_{\text{CL}j}^{i(q)} = U_j^{i(q)}, & \text{pour } j \neq j_Q, \\ U_{\text{CL}j_Q}^{i(q)} = \text{CL}_{gQ}. \end{cases} \quad (3.47)$$

- **condition de Neumann** : soit une condition de Neumann appliquée à la quantité Q sur le premier point du domaine i , on note CL_{gQ} la valeur imposée à la dérivée de la quantité Q sur ce point. Les composantes du vecteur solution $\mathbf{U}^{i(q)}$ ne sont pas modifiées :

$$\mathbf{U}_{\text{CL}}^{i(q)} = \mathbf{U}^{i(q)}. \quad (3.48)$$

- $\mathbf{L}_{\text{spCL}}$ l'opérateur spectral modifié pour la prise en compte des conditions aux limites :

- **condition de Dirichlet** : en reprenant les notations précédentes, la ligne j_Q de la matrice de l'opérateur spectral, qui correspond à la quantité en question et au point sur lequel est appliquée la condition, est remplacée par la ligne correspondante de la matrice identité :

$$\begin{cases} L_{\text{spCL}jk} = L_{\text{sp}jk}, & \text{pour } j \neq j_Q, \\ L_{\text{spCL}j_Qk} = (\text{Id}_{\mathcal{N}})_{j_Qk}. \end{cases} \quad (3.49)$$

- **condition de Neumann** : la ligne j_Q de la matrice de l'opérateur est remplacée par une ligne formée des composantes de la ligne correspondante de la matrice de l'opérateur de dérivée spectrale à la place des $\mathcal{N}_i$ composantes liées à la quantité Q et de 0 sur le reste de la ligne. Soit, en posant k_Q^1 et $k_Q^{\mathcal{N}_i}$ les indices extrêmes des composantes propres à cette quantité :

$$\begin{cases} L_{\text{spCL}jk} = L_{\text{sp}jk}, & \text{pour } j \neq j_Q, \\ L_{\text{spCL}j_Qk} = (D_{\mathcal{N}})_{j_Qk}, & \text{pour } k_Q^1 \leq k \leq k_Q^{\mathcal{N}_i}, \\ L_{\text{spCL}j_Qk} = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.50)$$

- $\mathbf{f}(\mathbf{U}^{i(q)})$ le second membre de l'équation à résoudre (3.44),
- $\mathbf{f}_{\text{CL}}(\mathbf{U}^{i(q)})$ le second membre modifié pour la prise en compte des conditions aux limites.

Il vaut $\mathbf{f}(\mathbf{U}^{i(q)})$ sur l'ensemble des points, sauf ceux où une condition, de Dirichlet ou de Neumann, est appliquée, auquel cas il est égal à cette condition.

Ces quantités permettent de définir le résidu par :

$$\mathbf{R}^{i(q)} = \mathbf{L}_{\text{spCL}}(\mathbf{U}^{i(q)}) \mathbf{U}_{\text{CL}}^{i(q)} - \mathbf{f}_{\text{CL}}(\mathbf{U}^{i(q)}). \quad (3.51)$$

La prise en considération des conditions aux limites permet de définir $\mathbf{R}_{\text{CL}}^{i(q)}$, pour lequel, si une condition à la limite est fixée pour une quantité et un point précis, alors en notant j_Q l'indice de la composante correspondante :

$$\begin{cases} (R_{\text{CL}}^{i(q)})_j = (R^{i(q)})_j, & \text{pour } j \neq j_Q, \\ (R_{\text{CL}}^{i(q)})_{j_Q} = 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

Une fois la valeur de ce résidu déterminée, l'étape suivante consiste à calculer $\mathbf{X}^{i(q)}$ tel que :

$$\mathbf{L}_{\text{prec}}^{i(q)} \mathbf{X}^{i(q)} = \mathbf{R}_{\text{CL}}^{i(q)}. \quad (3.53)$$

Enfin, on définit $\mathbf{X}_{\text{CL}}^{i(q)}$, de la même manière que $\mathbf{R}_{\text{CL}}^{i(q)}$, pour pouvoir effectuer le calcul de la valeur de la solution à l'itération suivante :

$$\mathbf{U}^{i(q+1)} = \mathbf{U}^{i(q)} - \alpha_{\text{relax}} \mathbf{X}_{\text{CL}}^{i(q)}. \quad (3.54)$$

Concernant la valeur du paramètre de relaxation α_{relax} , on sait que si $0 < \alpha_{\text{relax}} < 2/M$, alors $\mathbf{U}^{i(q)} \rightarrow \mathbf{U}^i$, lorsque $q \rightarrow \infty$, avec $\mathbf{U}^i$ solution de (3.43). La preuve est triviale :

Si $\epsilon^{(q)} = \mathbf{U}^{i(q)} - \mathbf{U}^i$ est l'erreur, alors :

$$\epsilon^{(q+1)} = \epsilon^{(q)} - \alpha_{\text{relax}} \mathbf{L}_{\text{prec}}^{-1} \mathbf{L}_{\text{sp}} \epsilon^{(q)}. \quad (3.55)$$

De plus, (3.46) nous donne :

$$\|\epsilon^{(q+1)}\| \leq \max(|1 - \alpha_{\text{relax}} m|, |1 - \alpha_{\text{relax}} M|) \|\epsilon^{(q)}\|. \quad (3.56)$$

Donc, on a bien : $\|\epsilon^{(q)}\| \rightarrow 0$ quand $q \rightarrow \infty$ si $0 < \alpha_{\text{relax}} < \frac{2}{M}$.

Le taux de convergence optimal de la relaxation de Richardson est obtenu en choisissant α_{relax} tel qu'il minimise le facteur $\max(|1 - \alpha_{\text{relax}} m|, |1 - \alpha_{\text{relax}} M|)$ qui apparaît dans (3.56). Cela donne :

$$\alpha_{\text{relax}}^{\text{opt}} = \frac{2}{m + M} \quad \text{et} \quad \frac{\|\epsilon^{(q+1)}\|}{\|\epsilon^{(q)}\|} \leq \frac{M - m}{M + m}. \quad (3.57)$$

3.3.3 Accélération de Chebyshev

Le taux de convergence de (3.54) peut être amélioré en utilisant l'accélération de Chebyshev. Le schéma correspondant est :

$$\mathbf{L}_{\text{prec}} \mathbf{U}^{i(q+1)} = \mathbf{L}_{\text{prec}} \left[\omega_q \mathbf{U}^{i(q)} + (1 - \omega_q) \mathbf{U}^{i(q-1)} \right] - \alpha_{\text{relax}} \omega_q \mathbf{R}^{(q)}, \quad (3.58)$$

avec $\omega_q = 2\beta T_q(\beta) / T_{q+1}(\beta)$ et $\beta = \min(|1 - \alpha_{\text{relax}} m|^{-1}, |1 - \alpha_{\text{relax}} M|^{-1})$.

Il faut enfin initialiser les deux premiers termes de la relation de récurrence. On pose donc :

$$T_0(\beta) = 1, \quad T_1(\beta) = \beta. \quad (3.59)$$

La mise en place des conditions aux limites est similaire à celle effectuée pour la méthode de relaxation dans le sens où le résidu est mis à zéro sur le point considéré. Cependant, dans le cas de l'accélération de Chebyshev, les conditions de Dirichlet sont appliquées directement à la solution à la fin de chaque itération de la procédure. On remarque avec l'expression (3.58) que l'égalité $\omega_q = 0$ fait dégénérer cette relation qui devient celle de la procédure de relaxation de Richardson (3.54).

3.3.4 Critères d'arrêt de la procédure de relaxation

Des critères existent évidemment pour mettre un terme à cette procédure (Lombard, 2008). Dans un premier temps, avant de rentrer dans la procédure itérative proprement dite, une valeur de référence du résidu $|R_j|^{\text{ref}}$ est calculée sur chaque composante j du vecteur $\mathbf{U}^i$ sur le domaine i considéré avec la formule :

$$|R_j|^{\text{ref}} = \max \left(|f_j|, \max_k |L_{\text{sp},j,k} U_j^i|, \epsilon \right), \quad (3.60)$$

avec ϵ un réel non-nul arbitraire destiné à empêcher la nullité de cette valeur de référence. À chaque itération, cette valeur de référence est recalculée avec les nouvelles valeurs des composantes de $\mathbf{U}^i$. Ainsi, les critères d'arrêt peuvent être testés et la relaxation suivie de près. Dans un souci de clarté, la partie de l'outil numérique consacrée au test sur le résidu est présentée sous la forme d'un algorithme. La valeur relative de la norme du résidu est d'abord calculée :

$$|R_j|^{\text{rel}} = \frac{|R_j|}{|R_j|^{\text{ref}}}, \quad (3.61)$$

avec $|R_j|$ la valeur absolue du résidu. Commence alors la phase de test sur ces valeurs du résidu.

Test de convergence :

- Si, pour un numéro d'itération fixé q , l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$\frac{|R_j^{(q)}|}{|R_j^{(q)}|_{\text{ref}}} \leq C_{\text{Tol}}, \quad (3.62)$$

avec C_{Tol} un critère de convergence fixé arbitrairement (dans notre étude sa valeur est de l'ordre de 10^{-14}), alors le test est concluant et la procédure de relaxation est arrêtée.

- Dans le cas inverse, il n'y a pas convergence et d'autres tests s'imposent.

Définition de nouvelles quantités : à partir des valeurs absolues des deux itérations précédentes, les valeurs relatives correspondantes sont définies par :

$$\begin{aligned} |R_j^{(q-2)}|_{\text{rel}} &= \frac{|R_j^{(q-2)}|}{|R_j^{(q)}|_{\text{ref}}}, \\ |R_j^{(q-1)}|_{\text{rel}} &= \frac{|R_j^{(q-1)}|}{|R_j^{(q)}|_{\text{ref}}}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Test de saturation :

- si l'inégalité suivante est vérifiée en tous points du domaine :

$$|R_j^{(q)}|_{\text{rel}} - |R_j^{(q-1)}|_{\text{rel}} < \min \left(C_{\text{SatAbs}}, C_{\text{SatRel}} |R_j^{(q)}|_{\text{rel}} \right), \quad (3.64)$$

avec C_{SatAbs} et C_{SatRel} respectivement les critères de saturation absolue et relative (respectivement de l'ordre de 10^{-9} et 10^{-2} dans notre étude), alors la saturation est détectée et cela provoque l'arrêt de la procédure.

Test de saturation avec oscillation :

- dans le cas où la saturation n'est pas détectée en utilisant l'itération $(q-1)$ alors le même test est appliqué aux valeurs de l'itération $(q-2)$ avec la relation :

$$|R_j^{(q)}|_{\text{rel}} - |R_j^{(q-2)}|_{\text{rel}} < \min \left(C_{\text{SatAbs}}, C_{\text{SatRel}} |R_j^{(q)}|_{\text{rel}} \right). \quad (3.65)$$

Si la saturation est détectée, la procédure itérative s'arrête et on parle de saturation avec oscillation.

Si aucun de ces critères n'est validé la relaxation continue jusqu'à, soit la validation de l'un de ces critères, soit le dépassement du nombre maximal autorisé d'itérations, l'un des paramètres d'entrée du code q_{max} , c'est-à-dire lorsque $q < q_{\text{max}}$.

3.4 Méthodes propres à la résolution numérique de l'écoulement de base

L'étude réalisée au cours de cette thèse peut se décomposer en deux parties distinctes qui sont l'analyse du système d'équations régissant le comportement de l'écoulement de base formulé sous la forme autosemblable (3.1) et celle des perturbations linéaires que l'on applique à celui-ci (3.3). Dans le cadre de l'étude de cet état de base, des méthodes numériques sont utilisées pour améliorer la précision de la solution établie. Dans le cas d'un choc isotherme précédé d'un front

thermique, il peut ainsi être question d'interpoler une solution sur un domaine d'étude à partir des valeurs de cette solution sur plusieurs domaines contenant celui qui nous intéresse. Au cours de l'étude de cette même configuration, l'utilisation de la méthode de décomposition en valeurs singulières peut s'avérer indispensable.

3.4.1 Interpolation

Nous allons dans ce paragraphe décrire les différentes étapes de la procédure d'interpolation d'une solution.

Calcul des coefficients de Chebyshev : les coefficients de Chebyshev sont les outils indispensables pour reconstruire la solution sur le nouveau domaine de définition de la solution. Afin de définir ces coefficients sur les points des domaines de définition de la solution avant l'interpolation, les matrices de passage de l'espace physique à l'espace spectral (et inversement) sont définies. Le raisonnement s'effectue de la même manière sur tous les domaines de l'ancien maillage. En posant $\mathcal{N}_i$ le nombre de points du domaine concerné, les matrices de passage de l'espace spectral à l'espace physique $\mathbf{M}_{C \rightarrow P}$ et de l'espace physique à l'espace spectral $\mathbf{M}_{P \rightarrow C}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} (M_{C \rightarrow P})_{j,k} &= \cos \left((k-1) \times \frac{(j-1)\pi}{\mathcal{N}_i-1} \right), \text{ avec } j = 1, \dots, \mathcal{N}_i \text{ et } k = 1, \dots, \mathcal{N}_i, \\ (M_{P \rightarrow C})_{j,k} &= \frac{2}{\mathcal{N}_i-1} (M_{C \rightarrow P})_{j,k}, \text{ si } j = 2, \dots, \mathcal{N}_i-1 \text{ et } k = 2, \dots, \mathcal{N}_i-1, \\ (M_{P \rightarrow C})_{j,k} &= \frac{1}{\mathcal{N}_i-1} (M_{C \rightarrow P})_{j,k}, \text{ si } j = 1 \text{ ou } \mathcal{N}_i \text{ et } k = 2, \dots, \mathcal{N}_i-1, \\ &\text{ou } k = 1 \text{ ou } \mathcal{N}_i \text{ et } j = 2, \dots, \mathcal{N}_i-1, \\ (M_{P \rightarrow C})_{j,k} &= \frac{1}{2(\mathcal{N}_i-1)} (M_{C \rightarrow P})_{j,k}, \text{ si } j = 1 \text{ ou } \mathcal{N}_i \text{ et } k = 1 \text{ ou } \mathcal{N}_i. \end{aligned} \quad (3.66)$$

En notant $\mathbf{U}_{\text{orig}}^i$ le vecteur de la solution sur le maillage original, le vecteur des coefficients de Chebyshev est donné par :

$${}^T \mathbf{C}_{\text{Cheb}} = \mathbf{M}_{P \rightarrow C} \times {}^T \mathbf{U}_{\text{orig}}^i. \quad (3.67)$$

Image de la solution dans le nouvel espace : à l'aide des formules classiques de transformation de coordonnées, l'image ζ de chaque point du nouveau maillage dans l'intervalle $[-1, 1]$ est définie. Enfin, on calcule en ce point la somme de développements en polynômes de Chebyshev associés à l'ancienne grille. Cette relation permet de définir la valeur de la solution $\mathbf{U}_{\text{nouv}}^i$ sur le point considéré du nouveau maillage. Soit en nommant (T_n) les polynômes de Chebyshev :

$$\mathbf{U}_{\text{nouv}}^i = \mathbf{c}_1 + T_1(\zeta) \mathbf{c}_2 + \dots + T_n(\zeta) \mathbf{c}_{n+1}. \quad (3.68)$$

La valeur des polynômes de Chebyshev est définie par la relation de récurrence (3.28).

3.4.2 Décomposition en valeurs singulières

Les matrices qui sont appelées à être manipulées au cours de cette étude ont quelquefois des spectres problématiques. Elles peuvent par exemple être non-inversibles, ou ne pas être diagonalisables. Nous avons donc besoin d'une méthode robuste pour inverser l'ensemble de ces matrices dont on ne connaît pas *a priori* les propriétés.

Une stratégie efficace et générale pour mettre en évidence les propriétés d'une matrice est de décomposer cette matrice en un produit de matrices plus simples et dont les caractéristiques

sont clairement identifiables. La décomposition la plus générale est la décomposition en valeurs singulières (SVD pour « Singular value decomposition »).

Énoncé : la décomposition en valeurs singulières s'énonce ainsi :

Soit $\mathbf{A}$ une matrice quelconque de taille $m \times n$ et de rang r . Alors il existe :

- une matrice orthogonale $\mathbf{U}$ d'ordre $m \times m$,
- une matrice orthogonale $\mathbf{V}$ d'ordre $n \times n$,
- une matrice « pseudo-diagonale » $\mathbf{\Sigma}$, dans le sens où tous les éléments hors de la diagonale principale sont nuls, mais la matrice n'est pas carrée, de dimension $m \times n$, c'est-à-dire de la même dimension que la matrice $\mathbf{A}$,

telles que, de façon équivalente :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}^T \mathbf{V} \quad \text{ou} \quad {}^T \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{\Sigma}. \quad (3.69)$$

Les colonnes de $\mathbf{U}$ sont donc les vecteurs singuliers à gauche de la matrice $\mathbf{A}$ tandis que les colonnes de la matrice $\mathbf{V}$ sont les vecteurs singuliers à droite de cette même matrice. Enfin, la matrice $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice des valeurs singulières de la matrice $\mathbf{A}$.

Application : pour résoudre le système suivant :

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad (3.70)$$

on calcule les matrices $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{\Sigma}$ pour pouvoir écrire :

$$\mathbf{U} \mathbf{\Sigma}^T \mathbf{V} \mathbf{X} = \mathbf{B}. \quad (3.71)$$

Les vecteurs auxiliaires suivants sont ensuite définis :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= {}^T \mathbf{V} \mathbf{X}, \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{\Sigma} \mathbf{Y}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Le système peut alors être résolu en résolvant successivement :

$$\mathbf{Z} = {}^T \mathbf{U} \mathbf{B}, \quad (3.73)$$

puis :

$$Y_k = \frac{Z_k}{\Sigma_{kk}}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq r, \quad (3.74)$$

avec r le rang de la matrice calculée par la procédure de décomposition en valeurs singulières, et :

$$Y_k = 0, \quad \text{pour } r+1 \leq k \leq \mathcal{N}_i. \quad (3.75)$$

Enfin :

$$\mathbf{X} = \mathbf{V} \mathbf{Y}. \quad (3.76)$$

Cette méthode peut donc être utilisée pour trouver la pseudo-inverse d'une matrice non-inversible en remplaçant la matrice $\mathbf{B}$ par la matrice identité.

3.5 Méthodes propres à la résolution numérique des perturbations en multidomaine

De la même manière que pour l'étude de l'écoulement de base, l'étude du système aux perturbations (3.3) nécessite la clarification des méthodes numériques utilisées. Pour suivre l'évolution des perturbations au cours du temps, une séparation est faite entre un sous-système propre à la dynamique des gaz (3.6) et une équation permettant de modéliser la conduction thermique (3.11). Dans certaines régions, en particulier la zone du précurseur thermique supersonique dans le cas de la configuration avec choc isotherme et la zone chaude pour le cas du régime ablatif, la partie parabolique du système est dominante. Pour l'étude de l'évolution du sous-système de la dynamique des gaz, une des difficultés réside dans la mise en place des conditions aux limites. En effet, la méthode étant multidomaine, il est nécessaire de fixer les conditions aux limites aux frontières de la zone d'études mais une méthode de raccord est également employée pour garantir la cohérence de la solution au niveau des interfaces entre domaines. Face à cette complexité, le choix a été fait d'utiliser la méthode de Thompson (1987, 1990) : Boudesocque-Dubois (2000), Boudesocque-Dubois *et al.* (2003).

3.5.1 Méthode de la matrice d'influence

Dans le cadre de l'étude des perturbations, un « splitting » est réalisé entre la dynamique des gaz (sous-système hyperbolique) et l'étude de la conduction thermique (équation parabolique). L'équation parabolique est mise sous la forme elliptique et résolue sur un maillage multidomaine par la méthode utilisant la technique de la matrice d'influence (Macareg et Streett, 1986; Pulicani, 1988). Le problème général s'écrit :

$$\begin{aligned} U''(x) - \sigma U(x) &= f(x) \quad \text{sur }]-1, 1[, \\ \alpha U(-1) + \beta U'(-1) &= g_-, \\ \gamma U(1) + \delta U'(1) &= g_+. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, g_-$ et g_+ sont appelés coefficients de Robin. Le domaine $\Omega =]-1, 1[$ est décomposé en $\mathcal{N}$ sous-domaines :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}} \Omega_i = \bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}}]a_i, b_i[. \quad (3.78)$$

La technique de la matrice d'influence consiste à découpler le problème linéaire en trois problèmes élémentaires sur chaque sous-domaine Ω_j :

$$U^i = \bar{U}^i + \lambda_{1i} U_1^i + \lambda_{2i} U_2^i, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}. \quad (3.79)$$

Les $\bar{U}^i$ sont solutions du problème formé de l'équation complète et des conditions aux limites homogènes :

$$\begin{aligned} \bar{U}^{i''}(x) - \sigma \bar{U}^i(x) &= f^i(x) \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}, \\ \alpha \bar{U}^i(a_i) &= 0, \\ \gamma \bar{U}^i(b_i) &= 0. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Les U_j^i sont solutions de l'équation homogène et de conditions aux limites fixées :

$$\begin{aligned}
U_j^{i''}(x) - \sigma U_j^i(x) &= 0 \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N} \quad j = 1, 2, \\
\alpha U_j^i(a_i) &= 2 - j, \\
\gamma U_j^i(b_i) &= j - 1.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Cette décomposition introduit $2\mathcal{N}$ paramètres : les λ_{ji} . Les conditions aux limites et les conditions de continuité de la solution ainsi que de ses dérivées fournissent un système de $2\mathcal{N}$ équations à résoudre. La matrice carrée ainsi formée, de dimension $2\mathcal{N}$, est appelée matrice d'influence.

3.5.2 Méthode de Thompson

Le sens de propagation de l'information est une information essentielle dans le traitement des conditions aux limites dans le cas de phénomènes de propagation d'ondes. Le domaine de calcul ne représentant qu'une partie du domaine physique global, les ondes générées à l'intérieur du domaine de calcul doivent être correctement évacuées. Si les ondes sortantes peuvent être définies à l'aide des informations internes au domaine de calcul, ce n'est pas le cas des ondes entrantes. Les conditions aux limites sont donc appliquées à ces dernières.

Afin de distinguer les ondes entrantes et sortantes, nous utilisons la méthode de Thompson (1987, 1990), basée sur la méthode des caractéristiques : le nombre de conditions aux limites requises en un point de la frontière d'un domaine d'étude doit correspondre au nombre d'ondes entrantes dans ce même domaine. Cette méthode est appliquée au système (3.7) avec les définitions (3.8 - 3.10). Les renseignements dont nous avons besoin résident dans la matrice $\hat{\mathbf{A}}_\xi$. Le nombre d'ondes entrantes va être déterminé par le signe des valeurs propres de la matrice $\hat{\mathbf{A}}_\xi$. Par exemple, si le raisonnement porte sur l'origine, le nombre d'ondes entrantes est égal au nombre de valeurs propres positives de cette matrice. Celle-ci, qui est diagonalisable puisque (3.7) est hyperbolique, peut s'écrire de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{A}}_\xi = \hat{\mathbf{S}}_\xi^{-1} \hat{\mathbf{\Lambda}}_\xi \hat{\mathbf{S}}_\xi, \tag{3.82}$$

où les lignes de la matrice de passage $\hat{\mathbf{S}}_\xi$ sont les vecteurs propres $(s_i)_{i=1..4}$ de $\hat{\mathbf{A}}_\xi$ et où $\hat{\mathbf{\Lambda}}_\xi$ est la matrice diagonale qui contient les valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1..4}$ de $\hat{\mathbf{A}}_\xi$. On peut donc écrire, en multipliant (3.7) par $\hat{\mathbf{S}}_\xi$:

$$\hat{\mathbf{S}}_\xi \partial_t \hat{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{\Lambda}}_\xi \hat{\mathbf{S}}_\xi \partial_\xi \hat{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{S}}_\xi \hat{\mathbf{B}}_\xi \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}. \tag{3.83}$$

En définissant une nouvelle fonction $\hat{\mathbf{F}}_\xi$ telle que :

$$d\hat{\mathbf{F}}_\xi = \hat{\mathbf{S}}_\xi d\hat{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{S}}_\xi \hat{\mathbf{B}}_\xi \hat{\mathbf{U}} dt, \tag{3.84}$$

et en reportant (3.84) dans (3.83), on obtient un système d'équations d'onde :

$$\partial_t \hat{\mathbf{F}}_\xi + \hat{\mathbf{\Lambda}}_\xi \partial_\xi \hat{\mathbf{F}}_\xi = \mathbf{0}. \tag{3.85}$$

On remarque que lorsque l'on considère $d\hat{F}_i = \partial_t \hat{F}_i + \partial_\xi \hat{F}_i d\xi$, si $d\xi = \lambda_i dt$ alors $d\hat{F}_i = 0$. Chaque composante $\hat{F}_i$ est donc constante sur les courbes de niveau décrites par $d_t \xi = \lambda_i$. Les valeurs propres $\lambda_{i,i=1..4}$ sont donc les vitesses caractéristiques des ondes solutions de ce système. À chaque valeur propre de $\hat{\mathbf{A}}_\xi$ est associée une onde dont le sens de propagation dépend du signe de cette valeur propre. La forme générale de (3.7) pour toutes les ondes est donnée par le système :

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{S}}_\xi^{-1} (\mathcal{L} + \mathcal{L}^*) + \hat{\mathbf{B}}_\xi \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \tag{3.86}$$

où :

$$(\mathcal{L} + \mathcal{L}^*) = \widehat{\mathbf{A}}_\xi \widehat{\mathbf{S}}_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \widehat{\mathbf{U}}. \quad (3.87)$$

Les composantes non-nulles de $\mathcal{L}$ (respectivement $\mathcal{L}^*$) correspondent aux ondes sortantes (respectivement entrantes). Les valeurs $\mathcal{L}_i$ sont définies à partir des valeurs et vecteurs propres. Quant aux valeurs $\mathcal{L}_i^*$, elles sont déterminées à partir des conditions aux limites. Il doit donc y avoir autant de conditions aux limites que d'ondes entrantes.

L'intérêt principal de cette méthode est de désigner les quantités sur lesquelles appliquer des conditions aux limites. Si toutes les ondes sont entrantes, alors les conditions aux limites concernent toutes les quantités et la méthode de Thompson perd de son attrait. Au cours de ce travail de thèse, les deux cas de figure vont se présenter à nous.

À ce niveau du mémoire, la présentation des méthodes et outils numériques utilisés au cours de cette thèse est achevée. Dans les cas où ces méthodes ont subi des modifications spécifiques propres à l'étude présentée ici, ces modifications sont expliquées dans le mémoire au moment opportun.

Deuxième partie

Vers d'autres écoulements

Un des objectifs principaux de ce travail de thèse est d'élargir la gamme des écoulements étudiés à l'aide de l'outil numérique mis en place au cours de travaux précédents (Boudesocque-Dubois, 2000; Boudesocque-Dubois *et al.*, 2003, 2008; Clarisse *et al.*, 2008; Lombard, 2008) et profondément remanié au cours de ce projet. Pour cela, il convient de résumer les différents écoulements pour lesquels l'étude des perturbations linéaires a déjà été effectuée.

Deux types de conduction ont été étudiés, la conduction électronique et la conduction radiative. Cependant, pour ces deux types de conduction, la même approximation de précurseur thermique de taille négligeable a été prise en compte. Une partie du travail de thèse a consisté à prendre en compte ce précurseur thermique. Considérer comme non-négligeable l'épaisseur de ce front thermique implique l'introduction d'un choc isotherme. Mais cette nouvelle hypothèse provoque aussi la présence de singularités différentes de celles présentes en approximation de choc parfait. L'inventaire de ces singularités constitue nécessairement la première étape de ce travail d'étude.

Les expériences des personnes qui ont travaillé sur ce projet avant le début du travail dont il est question dans ce mémoire ont permis de se faire une idée précise des points à améliorer sur l'outil numérique pour améliorer le rendement et la précision de celui-ci. Un point incontournable concerne la stabilité temporelle. En effet, les travaux précédents (Boudesocque-Dubois, 2000; Boudesocque-Dubois *et al.*, 2003, 2008; Clarisse *et al.*, 2008; Lombard, 2008) ont montré que l'expression utilisée pour la contrainte de stabilité temporelle n'était pas satisfaisante dans le sens où le critère CFL utilisé devait être ajusté à chaque configuration considérée. Autrement dit, les caractéristiques de l'écoulement n'étaient pas toutes prises en compte.

De plus, le travail d'optimisation de l'outil numérique se poursuit dans notre cas par un travail sur l'ensemble de la méthode numérique et sur l'algorithme utilisé pour la mettre en pratique. De meilleures performances du code numérique, notamment en termes de temps de calcul, permettraient en effet une meilleure résolution spatiale et donc des résultats obtenus avec une plus grande précision.

Chapitre 4

Analyse théorique du système autosemblable d'équations aux dérivées ordinaires

Une grande partie de ce travail de thèse a été consacrée à l'étude d'écoulements dans lesquels l'approximation du choc parfait est remplacée par un choc isotherme précédé d'un front thermique supersonique (Fig. 4.1). Cette configuration est en effet, plus générale et permet d'élargir la gamme d'écoulements concernés par notre étude. La première étape de l'introduction de ce précurseur thermique concerne logiquement l'écoulement non-perturbé, appelé écoulement de base, et dont l'analyse théorique fait l'objet de ce chapitre.

Le système d'équations aux dérivées ordinaires écrit sous forme autosemblable (3.1) a été le sujet de plusieurs travaux. Ceux-ci ont cherché à clarifier le comportement de la solution sur la zone d'étude. Sanmartín et Barrero (1978a), dans une étude paramétrique basée sur une symétrie plane et un formalisme eulérien, introduisent un choc isotherme au niveau de l'une des discontinuités présentes dans l'écoulement. Ils établissent dans une étude suivante (Sanmartín et Barrero, 1978b) le caractère sonique de cette singularité en utilisant les conditions de Chapman–Jouguet. Les comportements aux limites de la solution sont obtenues par raisonnement à la limite par Pakula et Sigel (1985), qui utilisent pour leur part une symétrie plane dans le formalisme lagrangien. Plus récemment, Murakami *et al.* (2007) ont effectué une étude systématique des singularités pouvant être présentes dans l'écoulement, en coordonnées sphériques, à la manière de Reinicke et Meyer-Ter-Vehn (1991) dont l'étude portait sur une explosion ponctuelle avec conduction thermique. Il existe en effet une théorie, applicable aux systèmes différentiels, présentée dans l'étude de Reinicke et Meyer-Ter-Vehn (1991). Cette théorie est basée sur une approche systématique de tous les cas de figure envisageables. Plutôt que de se contenter des résultats publiés dans la littérature, l'utilisation de cette approche systématique permet de ne passer à côté d'aucune singularité présente dans le système d'équations sous forme autosemblable (2.28), soit :

$$d_\xi \bar{V}_x + \alpha \xi d_\xi \bar{\Upsilon} = 0, \quad (4.1a)$$

$$(\alpha - 1) \bar{V}_x - \alpha \xi d_\xi \bar{V}_x + d_\xi \bar{P} = 0, \quad (4.1b)$$

$$2(\alpha - 1) \frac{\bar{\Theta}}{\gamma - 1} - \alpha \xi \frac{d_\xi \bar{\Theta}}{\gamma - 1} + \bar{\Upsilon}^{-1} \bar{\Theta} \bar{V}_x + d_\xi \bar{\Phi}_x = 0, \quad (4.1c)$$

$$\text{avec} \quad \bar{\Phi}_x = -\bar{\Upsilon}^{-m-1} \bar{\Theta}^n d_\xi \bar{\Theta}. \quad (4.2)$$

Cette démarche peut se décomposer en trois étapes. Dans un premier temps, la formulation autonome du système est exprimée (section 4.1). Il s'agit d'une formulation dans laquelle la vari-

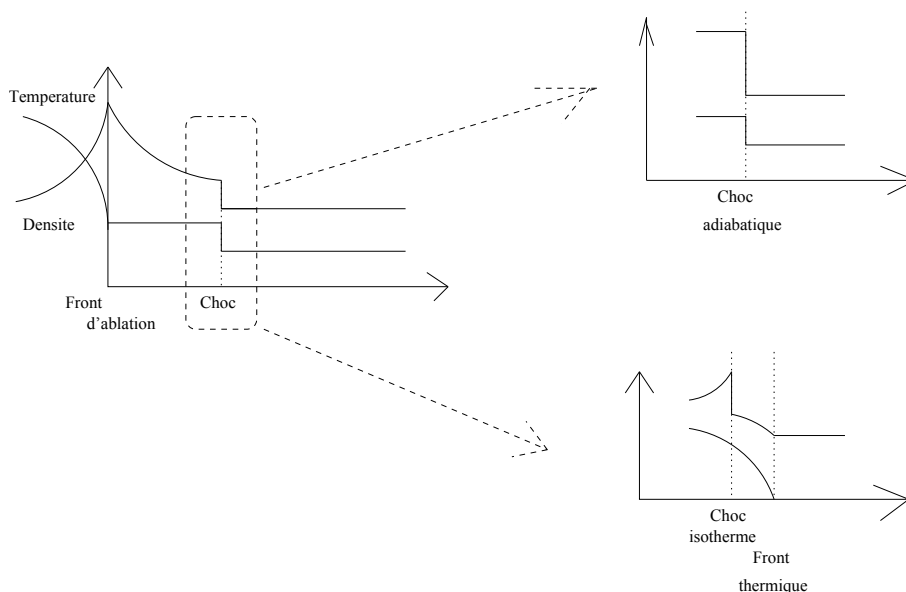


FIGURE 4.1 – **Configuration avec choc isotherme** : comparaison avec la configuration comprenant un choc parfait.

able indépendante ξ n'apparaît pas explicitement. La forme différentielle du système est ensuite écrite dans le but de permettre l'identification des singularités (section 4.2). L'existence de ces points critiques est discutée en fonction des caractéristiques physiques de l'écoulement. Enfin, le comportement de la solution au voisinage des singularités présentes dans l'écoulement est étudié (section 4.3).

4.1 Formulation autonome

Le but de cette partie de l'étude est d'écrire le système autosemblable d'équations en formulation autonome, c'est-à-dire sans que la variable autosemblable ξ n'apparaisse explicitement. En effet, ce type de formulation est nécessaire pour effectuer une analyse locale de la solution. La méthode pour obtenir cette formulation autonome est décrite par Bender et Orszag (1987). Tout d'abord, il faut trouver le jeu de coefficients permettant d'obtenir un système invariant par changement d'échelle. L'invariance par changement d'échelle est, en effet, une condition nécessaire et suffisante pour que la formulation autonome du système soit possible. Le jeu de coordonnées ainsi défini est ensuite utilisé pour écrire la forme équidimensionnelle en ξ du système, étape qui précède la formulation autonome. Le point de départ de cette procédure est la forme (4.1) du système d'équations sous forme autosemblable.

4.1.1 Invariance par changement d'échelle

L'invariance par changement d'échelle du système (4.1) s'obtient en définissant b, c, d et e des constantes telles que ce système soit invariant par le changement de variables suivant, en posant a un réel :

$$\begin{aligned}
\overline{V}_x &\rightarrow a^b \check{V}_x, \\
\overline{\Upsilon} &\rightarrow a^c \check{\Upsilon}, \\
\overline{\Theta} &\rightarrow a^d \check{\Theta}, \\
\overline{\Phi}_x &\rightarrow a^e \check{\Phi}_x.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Les équations du système (4.1) nous donnent les relations entre les inconnues b, c, d et e afin que la propriété d'invariance par changement d'échelle soit respectée. Ainsi, l'équation de conservation de la masse se traduit par :

$$c = b - 1. \tag{4.4}$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement nous fournit la relation suivante :

$$b = d - c - 1. \tag{4.5}$$

La conservation de l'énergie nous donne, quant à elle :

$$d = e - 1. \tag{4.6}$$

Enfin, l'expression du flux impose la relation :

$$e = -c(m + 1) + d(n + 1) - 1. \tag{4.7}$$

Le système à résoudre est alors un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues. La résolution est donc possible et fournit le résultat suivant : le système est invariant par changement d'échelle si, et seulement si :

$$\begin{aligned}
b &= \frac{m - 1}{m - 2n + 1}, \\
c &= \frac{2n - 2}{m - 2n + 1} = b - 1, \\
d &= \frac{2m - 2}{m - 2n + 1} = 2b, \\
e &= \frac{3m - 2n - 1}{m - 2n + 1} = 2b + 1.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.1.2 Forme équidimensionnelle en ξ

L'étape suivante pour l'obtention de la forme autonome du système d'équations est l'écriture de celui-ci sous forme équidimensionnelle. Pour écrire la forme équidimensionnelle en ξ , on utilise le changement de variables défini en (4.8) en remplaçant la variable a par la variable autosemblable ξ . On pose donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\Upsilon} \rightarrow \xi^{b-1} \check{\Upsilon}, \\ \overline{V}_x \rightarrow \xi^b \check{V}_x, \\ \overline{\Theta} \rightarrow \xi^{2b} \check{\Theta}, \\ \overline{\Phi}_x \rightarrow \xi^{2b+1} \check{\Phi}_x. \end{array} \right. \tag{4.9}$$

On reformule les équations de notre système avec le changement de variables (4.9) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \xi d_\xi \check{V}_x + b \check{V}_x + \alpha \xi d_\xi \check{\Upsilon} + (b-1) \alpha \check{\Upsilon} &= 0, \\ (\alpha-1) \check{V}_x - \alpha \xi d_\xi \check{V}_x - \alpha \check{V}_x b + \xi \check{\Upsilon}^{-1} d_\xi \check{\Theta} + 2b \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} \\ - \xi \check{\Upsilon}^{-2} \check{\Theta} d_\xi \check{\Upsilon} - (b-1) \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\alpha-1}{\gamma-1} \check{\Theta} - \frac{\alpha}{\gamma-1} \xi d_\xi \check{\Theta} - 2b \frac{\alpha}{\gamma-1} \check{\Theta} + \xi \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} d_\xi \check{V}_x \\ + b \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} \check{V}_x + \xi d_\xi \check{\Phi}_x + (2b+1) \check{\Phi}_x &= 0, \end{aligned}$$

avec :

$$\check{\Phi}_x + \xi \check{\Upsilon}^{-(m+1)} \check{\Theta}^n d_\xi \check{\Theta} + 2b \check{\Upsilon}^{-(m+1)} \check{\Theta}^{n+1} = 0. \quad (4.11)$$

4.1.3 Forme autonome

Pour obtenir enfin la formulation autonome de (4.10), le changement de variable $\xi \rightarrow \ln \xi$ est effectué. En utilisant la relation :

$$\frac{d}{d\xi} = \xi^{-1} \frac{d}{d \ln \xi}, \quad (4.12)$$

on obtient, à partir de (4.10) et (4.11), le système suivant :

$$\begin{aligned} \check{V}_x' + b \check{V}_x + \alpha \check{\Upsilon}' + (b-1) \alpha \check{\Upsilon} &= 0, \\ (\alpha-1) \check{V}_x - \alpha \check{V}_x' - \alpha \check{V}_x b + \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta}' + 2b \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} - \check{\Upsilon}^{-2} \check{\Theta} \check{\Upsilon}' \\ - (b-1) \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} &= 0, \\ 2 \frac{\alpha-1}{\gamma-1} \check{\Theta} - \frac{\alpha}{\gamma-1} \check{\Theta}' - 2b \frac{\alpha}{\gamma-1} \check{\Theta} + \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} \check{V}_x' + b \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} \check{V}_x \\ + \check{\Phi}_x' + (2b+1) \check{\Phi}_x &= 0, \\ \check{\Phi}_x + \check{\Upsilon}^{-(m+1)} \check{\Theta}^n \check{\Theta}' + 2b \check{\Upsilon}^{-(m+1)} \check{\Theta}^{n+1} &= 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec $Q' = dQ / d \ln \xi$.

On observe que la variable de similitude n'apparaît plus de façon explicite dans les équations de conservation. Le système (4.13) est donc, par définition, la forme autonome du système (2.28) réécrit en (4.1).

4.2 Forme différentielle et identification des singularités

L'identification des singularités est nécessaire à toute tentative de détermination d'une solution, qu'elle soit analytique, approchée ou numérique. L'analyse décrite dans cette partie doit permettre de les localiser et d'étudier le comportement de la solution au voisinage de celles-ci. Le procédé qui nous permet de les localiser consiste à mettre le système sous forme différentielle puis à inverser la matrice qui en découle. Les valeurs singulières de cette matrice à inverser posent

un problème car cette matrice n'est alors plus inversible et le système dégénère. Ces valeurs singulières correspondent aux singularités de l'écoulement étudié. Le comportement de la solution au voisinage de ces points remarquables peut être déterminé de plusieurs manières. La différence entre ces différentes méthodes réside dans la précision des résultats.

4.2.1 Écriture sous forme canonique du système

Pour identifier les singularités, on écrit le système sous la forme :

$$\check{\mathbf{A}}(\check{\mathbf{V}}) \check{\mathbf{V}}' = \check{\mathbf{F}}(\check{\mathbf{V}}), \quad (4.14)$$

avec $\check{\mathbf{V}} = {}^T(\check{\Upsilon} \quad \check{V}_x \quad \check{\Theta} \quad \check{\Phi})$ le vecteur des quantités de l'écoulement de base dans le système autonome. La première étape de cette partie de l'étude consiste à inverser $\check{\mathbf{A}}(\check{\mathbf{V}})$ de sorte à pouvoir écrire :

$$\check{\mathbf{V}}' = \check{\mathbf{A}}^{-1}(\check{\mathbf{V}}) \check{\mathbf{F}}(\check{\mathbf{V}}). \quad (4.15)$$

D'après la formulation autonome du système (4.13), la matrice $\check{\mathbf{A}}(\check{\mathbf{V}})$ s'écrit :

$$\check{\mathbf{A}}(\check{\mathbf{V}}) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -\check{\Upsilon}^{-2} \check{\Theta} & -\alpha & \check{\Upsilon}^{-1} & 0 \\ 0 & \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} & -\frac{\alpha}{\gamma-1} & 1 \\ 0 & 0 & \check{\Upsilon}^{-(m+1)} \check{\Theta}^n & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

tandis que le vecteur $\check{\mathbf{F}}(\check{\mathbf{V}})$ est exprimé par :

$$\check{\mathbf{F}}(\check{\mathbf{V}}) = \begin{pmatrix} \check{F}_1(\check{\mathbf{V}}) \\ \check{F}_2(\check{\mathbf{V}}) \\ \check{F}_3(\check{\mathbf{V}}) \\ \check{F}_4(\check{\mathbf{V}}) \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

avec :

$$\begin{cases} \check{F}_1(\check{\mathbf{V}}) = -b \check{V}_x + (1-b) \alpha \check{\Upsilon}, \\ \check{F}_2(\check{\mathbf{V}}) = (1-\alpha(1-b)) \check{V}_x - (b+1) \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta}, \\ \check{F}_3(\check{\mathbf{V}}) = \frac{1}{\gamma-1} (2-\alpha(2-2b)) \check{\Theta} - b \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} \check{V}_x - (2b+1) \check{\Phi}_x, \\ \check{F}_4(\check{\mathbf{V}}) = -2b \check{\Upsilon}^{-(m+1)} \check{\Theta}^{n+1} - \check{\Phi}_x. \end{cases} \quad (4.18)$$

Après calcul, le déterminant de la matrice $\check{\mathbf{A}}(\check{\mathbf{V}})$ vaut :

$$\det \check{\mathbf{A}}(\check{\mathbf{V}}) = \check{\Upsilon}^{-(m+1)} \check{\Theta}^n (\alpha^2 - \check{\Upsilon}^{-2} \check{\Theta}) = \check{\Upsilon}^{-(m+1)} \check{\Theta}^n D_{\ln \xi}, \quad (4.19)$$

avec :

$$D_{\ln \xi} = \alpha^2 - \check{\Upsilon}^{-2} \check{\Theta}. \quad (4.20)$$

Les racines de ce déterminant impliquent des singularités dans l'écoulement. Or, plusieurs racines apparaissent ici. En effet, le déterminant s'annule pour :

$$\check{\Upsilon}^{-(m+1)} = 0 \quad \text{ou} \quad \check{\Theta}^n = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha^2 = \check{\Upsilon}^{-2} \check{\Theta}. \quad (4.21)$$

Le caractère singulier de ces trois égalités peut s'expliquer en regardant de plus près la forme de la matrice $\check{\mathbf{A}}(\check{\mathbf{V}})$ (4.16). Les égalités $\check{\Upsilon}^{-(m+1)} = 0$ et $\check{\Theta}^n = 0$ ont le même effet. Leur application rend la dernière ligne de $\check{\mathbf{A}}(\check{\mathbf{V}})$ nulle en tous ses points. Par conséquent, une équation disparaît et le système dégénère. Une conséquence commune à ces deux hypothèses est l'égalité $\check{\Phi}_x = 0$ donnée par (4.18). La singularité $\alpha^2 = \check{\Upsilon}^{-2} \check{\Theta}$ provoque elle aussi une dégénérescence du système d'équations qui se remarque en manipulant les colonnes de la matrice $\check{\mathbf{A}}(\check{\mathbf{V}})$. En effet, cette hypothèse implique que le fait de multiplier la deuxième colonne de cette matrice par α puis de soustraire la première colonne de la matrice à la colonne obtenue donne une colonne dont les composantes sont des multiples des composantes de la quatrième colonne.

Afin de confirmer ces données et d'être certain de traiter toutes les singularités, la matrice $\check{\mathbf{A}}(\check{\mathbf{V}})$ est inversée pour aboutir à l'écriture de (4.15) sous forme différentielle. Le calcul de l'inverse de la matrice $\check{\mathbf{A}}(\check{\mathbf{V}})$ nous conduit à l'expression suivante :

$$\check{\mathbf{A}}^{-1}(\check{\mathbf{V}}) = \frac{1}{D_{\ln \xi}} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & -\check{\Upsilon}^m \check{\Theta}^{-n} \\ -\check{\Upsilon}^{-2} \check{\Theta} & -\alpha & 0 & \alpha \check{\Upsilon}^m \check{\Theta}^{-n} \\ 0 & 0 & 0 & D_{\ln \xi} \check{\Upsilon}^{m+1} \check{\Theta}^{-n} \\ -\check{\Upsilon}^{-3} \check{\Theta}^2 & \alpha \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} & 1 & A_{44}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

avec $A_{44}^{-1} = \frac{\alpha}{\gamma - 1} D_{\ln \xi} \check{\Upsilon}^{m+1} \check{\Theta}^{-n} - \alpha \check{\Upsilon}^{m-1} \check{\Theta}^{1-n}$.

4.2.2 Identification des singularités

Pour chaque quantité Q , on cherche D_Q tel que :

$$\frac{dQ}{d \ln \xi} = \frac{D_Q}{D_{\ln \xi}}. \quad (4.23)$$

Pour cela, on explicite les coordonnées du vecteur $\check{\mathbf{A}}^{-1}(\check{\mathbf{V}}) \check{\mathbf{F}}(\check{\mathbf{V}})$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \check{\Upsilon}' &= (\check{\mathbf{A}}^{-1}(\check{\mathbf{V}}) \check{\mathbf{F}}(\check{\mathbf{V}}))_1 = \frac{D_{\check{\Upsilon}}}{D_{\ln \xi}}, \\ \check{V}_x' &= (\check{\mathbf{A}}^{-1}(\check{\mathbf{V}}) \check{\mathbf{F}}(\check{\mathbf{V}}))_2 = \frac{D_{\check{V}_x}}{D_{\ln \xi}}, \\ \check{\Theta}' &= (\check{\mathbf{A}}^{-1}(\check{\mathbf{V}}) \check{\mathbf{F}}(\check{\mathbf{V}}))_3 = \frac{D_{\check{\Theta}}}{D_{\ln \xi}}, \\ \check{\Phi}_x' &= (\check{\mathbf{A}}^{-1}(\check{\mathbf{V}}) \check{\mathbf{F}}(\check{\mathbf{V}}))_4 = \frac{D_{\check{\Phi}_x}}{D_{\ln \xi}}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

avec :

$$\begin{aligned} D_{\check{\Upsilon}} &= \check{\Upsilon} (b - 1) D_{\ln \xi} + D_2, \\ D_{\check{V}_x} &= b \check{V}_x D_{\ln \xi} - \alpha D_2, \\ D_{\check{\Theta}} &= (2b \check{\Theta} + \check{\Upsilon}^{m+1} \check{\Theta}^{-n} \check{\Phi}_x) D_{\ln \xi}, \\ D_{\check{\Phi}_x} &= \left(\frac{\alpha}{\gamma - 1} \check{\Upsilon}^{m+1} \check{\Theta}^{-n} + 1 + 2b \right) \check{\Phi}_x D_{\ln \xi} + \alpha \check{\Upsilon}^{-1} \check{\Theta} D_2, \end{aligned} \quad (4.25)$$

où on a posé :

$$D_2 = -\check{V}_x (\alpha - 1) + \check{\Upsilon}^m \check{\Theta}^{-n} \check{\Phi}_x. \quad (4.26)$$

Le système (4.15) peut alors être reformulé sous la forme différentielle suivante :

$$\frac{d \ln \xi}{D_{\ln \xi}} = \frac{d\check{\Upsilon}}{D_{\check{\Upsilon}}} = \frac{d\check{V}_x}{D_{\check{V}_x}} = \frac{d\check{\Theta}}{D_{\check{\Theta}}} = \frac{d\check{\Phi}_x}{D_{\check{\Phi}_x}}. \quad (4.27)$$

Nous allons maintenant regarder plus en détails chacune des singularités présentes dans cet écoulement.

Point sonique : le système (4.27) met clairement en évidence une singularité. Il existe un point dans l'écoulement où $D_{\ln \xi} = 0$. Sur ce point critique, la relation suivante est vérifiée :

$$\check{\Theta} = \check{\Upsilon}^2 \alpha^2. \quad (4.28)$$

En appliquant la transformation inverse de (4.9) pour revenir à la formulation autosemblable des quantités, on obtient, après simplifications :

$$\bar{\Theta} = \xi^2 \bar{\Upsilon}^2 \alpha^2. \quad (4.29)$$

La valeur de ξ pour laquelle (4.29) est vérifiée est une caractéristique isotherme de l'écoulement. Si $D_{\ln \xi} < 0$ alors l'écoulement est subsonique isotherme tandis que le cas $D_{\ln \xi} > 0$ conduit à un écoulement supersonique isotherme. Or, puisque :

$$\bar{\Upsilon} > 0 \text{ et } \bar{\Theta} \geq 0, \quad (4.30)$$

alors $D_{\ln \xi}(\xi = 0) \leq 0$, et, puisque au pied du front thermique :

$$\bar{\Upsilon} = 1 \text{ et } \bar{\Theta} = 0, \quad (4.31)$$

alors $D_{\ln \xi}(\xi = \xi_{ft}) > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure ainsi la présence de cette singularité dans l'écoulement étudié. Pour déterminer le comportement de la solution au voisinage de cette singularité, les incidences de l'égalité $D_{\ln \xi} = 0$ sur les autres quantités de (4.24) sont importantes. Par définition, la quantité $d \ln \xi$ est finie. On sait donc que pour chacun des autres quotients de l'égalité, le numérateur est soit infini, auquel cas le dénominateur est fini, soit fini et alors le dénominateur est nul.

Les relations (4.24) et (4.25) indiquent qu'en un point, sur lequel $D_{\ln \xi} = 0$, les dérivées $d\check{\Upsilon}$, $d\check{V}_x$ et $d\check{\Phi}_x$ sont infinies si $D_2 \neq 0$, alors que $d\check{\Theta}$ reste finie pour des valeurs finies de $\check{\Upsilon}$, $\check{\Theta}$ et $d\check{\Phi}_x$. Ceci constitue le cas de figure d'un choc isotherme. Par contre, si $D_2 = 0$, alors toutes les dérivées $d\check{\Upsilon}$, $d\check{V}_x$, $d\check{\Theta}$ et $d\check{\Phi}_x$ peuvent être finies. Ce cas de figure est envisagé par Murakami *et al.* (2007).

Front d'ablation dans un milieu de densité infinie : la singularité $\check{\Upsilon}^{-(m+1)} = 0$ n'est, par hypothèse, pas présente dans cette étude. En effet, si $m > -1$, cette condition mène à une densité nulle et le cas où $m < -1$ conduit à une densité infinie. Or, par hypothèse, la densité est finie et non nulle. Dans leur approche systématique des singularités du système, Reinicke et Meyer-Ter-Vehn (1991) évoquent le cas d'un front d'ablation dans un milieu de densité infinie. Cependant, lors de l'intégration du système, la singularité est contournée par un choc isotherme. Pakula et Sigel (1985), pour leur part, utilisent ce front d'ablation dans un milieu de densité infinie, pression finie et flux thermique négligeable.

Front thermique : le cas $\check{\Theta}^n = 0$ correspond à la position du pied du front thermique supersonique. en effet, en formulation autosemblable, cette égalité s'écrit :

$$\xi^{2bn} \bar{\Theta} = 0. \quad (4.32)$$

Or, par hypothèse, $\xi > 0$ et $n > 1$. La seule possibilité pour que cette relation soit vérifiée est donc l'égalité $\bar{\Theta}^n = 0$. Le pied du front thermique, sur lequel on impose :

$$\begin{cases} \bar{\Upsilon} \rightarrow 1^-, \\ \bar{V}_x \rightarrow 0^+, \\ \bar{\Theta} \rightarrow 0^+, \\ \bar{\Phi}_x \rightarrow 0^+, \end{cases} \quad (4.33)$$

avec des dérivées non nulles pour se démarquer de la solution constante, répond à cette condition. Les deux points singuliers de notre système se situent donc aux points ξ_{fc} (pour front de choc), sur lequel un choc isotherme est introduit, et ξ_{ft} (pour front thermique), sur lequel les conditions initiales sont appliquées.

4.3 Comportement de la solution au voisinage des singularités

Il est nécessaire de faire une étude approfondie pour connaître le comportement de la solution au voisinage de chaque point singulier. Un choc isotherme est introduit au point sonique. Des relations de saut sont donc indispensables pour le passage de cette discontinuité. La deuxième singularité, au pied du front thermique nécessite une attention particulière. Le comportement de la solution au voisinage de cette singularité est en effet une donnée essentielle pour l'allure de la solution sur le reste de l'écoulement. Pour obtenir une solution rigoureuse, il faut déterminer la pente de celle-ci sur les abscisses proches du pied du front thermique supersonique. Or, les pentes des profils des différentes quantités tendent vers l'infini près de ce point critique¹. L'étude de ce précurseur thermique a déjà été réalisée de manière théorique (Bajac, 1973; Reinicke et Meyer-Ter-Vehn, 1991; Saillard, 2000). Une rupture de pente est présente entre les dérivées nulles des quantités en amont du pied du front thermique et les pentes non nulles des profils de ces quantités en aval. Cette rupture de pente légitime l'utilisation d'une condition de Neumann afin de distinguer la solution de la solution constante.

4.3.1 Relations de Rankine–Hugoniot dans le cas d'un choc isotherme — singularité $D_{\ln \xi} = 0$

Nous avons vu que pour contourner la singularité présente lorsque $D_{\ln \xi} = 0$, qui correspond à un point sonique et qui est localisée en ξ_{fc} , un choc isotherme est introduit. Les relations de Rankine–Hugoniot doivent donc être formulées dans ce cadre d'étude. Afin de formuler les relations de Rankine–Hugoniot dans le cas d'un choc isotherme, on part du système d'équations

1. Nous ne tenons pas compte dans ce mémoire du cas particulier d'un écoulement au repos, pour lequel ces pentes sont nulles

(2.26). On peut réécrire celui-ci de la façon suivante :

$$\begin{cases} d_\xi (\bar{V}_x + \alpha \xi_{fc} \bar{\Upsilon}) = 0, \\ d_\xi (\bar{G} \bar{\Theta} - \alpha \xi_{fc} \bar{V}_x) = (1 - \alpha) \bar{V}_x, \\ d_\xi \left(\alpha \xi_{fc} \left(\frac{\bar{V}_x^2}{2} + \frac{\bar{\Theta}}{\gamma - 1} \right) - \bar{G} \bar{V}_x \bar{\Theta} + \bar{\Phi}_x \right) = 2(\alpha - 1) \left(\frac{\bar{V}_x^2}{2} + \frac{\bar{\Theta}}{\gamma - 1} \right). \end{cases} \quad (4.34)$$

Au front de choc, la masse, l'impulsion et l'énergie sont conservées. On obtient immédiatement les relations de saut :

$$\begin{cases} [\bar{V}_x + \alpha \xi_{fc} \bar{G}^{-1}]_-^+ = 0, \\ [\bar{G} \bar{\Theta} - \alpha \xi_{fc} \bar{V}_x]_-^+ = 0, \\ \left[\alpha \xi_{fc} \left(\frac{\bar{V}_x^2}{2} + \frac{\bar{\Theta}}{\gamma - 1} \right) - \bar{G} \bar{V}_x \bar{\Theta} + \bar{\Phi}_x \right]_-^+ = 0, \end{cases} \quad (4.35)$$

auxquelles on ajoute la condition de continuité de la température :

$$[\bar{\Theta}]_-^+ = 0, \quad (4.36)$$

qui constituent la définition d'un choc isotherme. Dans ces relations de saut, les indices « $-$ » et « $+$ » indiquent respectivement qu'il est question de quantités en aval et en amont du choc isotherme. En résolvant ce système de quatre équations à quatre inconnues, on obtient les relations de saut au choc, c'est-à-dire les relations entre les quantités en aval du choc isotherme et celles en amont de celui-ci :

$$\begin{aligned} \bar{G}_- &= \frac{\alpha^2 \xi_{fc}^2}{\bar{G}_+ \bar{\Theta}_+}, \\ \bar{V}_- &= \bar{V}_+ - \frac{\bar{G}_+^2 \bar{\Theta}_+ - \alpha^2 \xi_{fc}^2}{\alpha \xi_{fc} \bar{G}_+}, \\ \bar{\Theta}_- &= \bar{\Theta}_+, \\ \bar{\Phi}_{x-} &= \bar{\Phi}_{x+} + \frac{\bar{G}_+^4 \bar{\Theta}_+^2 - \alpha^4 \xi_{fc}^4}{2 \alpha \xi_{fc} \bar{G}_+^2}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

4.3.2 Approximation locale de la solution au niveau du pied du front thermique — singularité $\bar{\Theta}^n = 0$

Anticiper le comportement d'une solution au voisinage d'une singularité est une procédure habituelle pour fournir un point de départ à une intégration du système d'équations. Cependant, dans notre cadre d'étude, au voisinage du pied du front thermique, les dérivées des quantités de base tendent vers l'infini. Cette zone a donc une influence considérable sur le reste de l'écoulement. C'est pourquoi il est primordial d'approcher la solution de manière précise afin de subir le moins possible les conséquences de ce comportement singulier. Pour cela, plusieurs méthodes existent. Nous en détaillons deux dans ce mémoire.

4.3.2.1 Développement asymptotique jusqu'à l'ordre $(1 - \xi/\xi_{\text{ft}})^{k/n}$, $k = 1, 2$

La méthode choisie dans notre étude est la méthode de l'approximation par un développement asymptotique. Elle consiste à déterminer une décomposition des quantités en termes d'ordre de moins en moins dominant. Cette section du mémoire explique le principe de cette méthode ainsi que son application au système étudié.

Développement à l'ordre $(1 - \xi/\xi_{\text{ft}})^{1/n}$: les conditions aux limites imposées au pied du front thermique sont des conditions de type Dirichlet (4.33). Afin d'approcher les quantités au voisinage de la singularité, une loi de puissance est posée pour chacune des quantités, à savoir, en considérant une quantité quelconque de l'écoulement de base $\overline{Q}$:

$$\overline{Q} = Q_{\text{ft}} + Q_{\beta} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_{\text{ft}}}\right)^{\beta_Q}, \quad (4.38)$$

avec $\beta_Q > 0$ (avec $Q = \Upsilon, V, \Theta$ ou Φ) et Q_{ft} la valeur de la quantité au pied du front thermique ($\xi = \xi_{\text{ft}}$), déterminée par les conditions aux limites (4.33). On obtient donc :

$$\begin{cases} \overline{\Upsilon} = 1 + \Upsilon_{\beta} X^{\beta_{\Upsilon}}, \\ \overline{V}_x = V_{\beta} X^{\beta_V}, \\ \overline{\Theta} = \Theta_{\beta} X^{\beta_{\Theta}}, \\ \overline{\Phi}_x = \Phi_{\beta} X^{\beta_{\Phi}}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad X = 1 - \frac{\xi}{\xi_{\text{ft}}}. \quad (4.39)$$

Les différentes quantités sont remplacées par ces approximations dans le système d'équations (4.1) afin de déterminer les expressions de $\Upsilon_{\beta}, V_{\beta}, \Theta_{\beta}, \Phi_{\beta}, \beta_{\Upsilon}, \beta_V, \beta_{\Theta}$ et β_{Φ} . L'équation de conservation de la masse (4.1a) permet alors d'écrire :

$$d_{\xi} (V_{\beta} X^{\beta_V}) + \alpha \xi d_{\xi} (1 + \Upsilon_{\beta} X^{\beta_{\Upsilon}}) = 0. \quad (4.40)$$

En développant l'expression des dérivées et en tenant compte de la relation :

$$d_{\xi}(X^{\beta}) = -\frac{1}{\xi_{\text{ft}}} \beta X^{\beta-1}, \quad (4.41)$$

on obtient :

$$-\frac{V_{\beta}}{\xi_{\text{ft}}} \beta_V X^{\beta_V-1} - \alpha \xi \frac{\Upsilon_{\beta}}{\xi_{\text{ft}}} \beta_{\Upsilon} X^{\beta_{\Upsilon}-1} = 0. \quad (4.42)$$

Or puisque :

$$-\frac{\xi}{\xi_{\text{ft}}} = X - 1, \quad (4.43)$$

on peut écrire :

$$\frac{V_{\beta}}{\xi_{\text{ft}}} \beta_V X^{\beta_V-1} - \alpha \Upsilon_{\beta} \beta_{\Upsilon} X^{\beta_{\Upsilon}} + \alpha \Upsilon_{\beta} \beta_{\Upsilon} X^{\beta_{\Upsilon}-1} = 0. \quad (4.44)$$

La puissance qui nous intéresse dans cette équation est celle qui domine. Les puissances β_Q étant positives et X tendant vers 0 au voisinage du front thermique, la puissance dominante est soit $\beta_{\Upsilon} - 1$, soit $\beta_V - 1$. Nous verrons par la suite que choisir une unique puissance dominante entre ces deux possibilités mène à une solution qui ne nous intéresse pas, nous décidons donc de prendre en compte l'égalité :

$$\beta_{\Upsilon} - 1 = \beta_V - 1. \quad (4.45)$$

Ainsi, nous obtenons deux premières relations entre les inconnues :

$$\beta_V = \beta_\Upsilon, \quad (4.46)$$

et :

$$V_\beta = -\alpha \xi_{ft} \Upsilon_\beta. \quad (4.47)$$

Le remplacement des différentes quantités de la loi de conservation de la quantité de mouvement (4.1b) par leurs approximations au pied du front thermique donne :

$$\begin{aligned} (\alpha - 1) \left(1 + \Upsilon_\beta X^{\beta_\Upsilon}\right)^2 V_\beta X^{\beta_V} - \alpha \xi \left(1 + \Upsilon_\beta X^{\beta_\Upsilon}\right)^2 d_\xi \left(V_\beta X^{\beta_V}\right) \\ + \left(1 + \Upsilon_\beta X^{\beta_\Upsilon}\right) d_\xi \left(\Theta_\beta X^{\beta_\Theta}\right) - \Theta_\beta X^{\beta_\Theta} d_\xi \left(1 + \Upsilon_\beta X^{\beta_\Upsilon}\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Après développement, en suivant le même raisonnement que pour la conservation de la masse, les deux relations obtenues sont les suivantes :

$$\beta_V = \beta_\Theta, \quad (4.49)$$

$$\Theta_\beta = \alpha \xi_{ft} V_\beta. \quad (4.50)$$

Enfin, l'insertion des approximations au pied du front thermique dans l'équation de conservation de l'énergie (4.1c) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} 2 \frac{\alpha - 1}{\gamma - 1} \left(1 + \Upsilon_\beta X^{\beta_\Upsilon}\right) \Theta_\beta X^{\beta_\Theta} - \frac{\alpha}{\gamma - 1} \xi \left(1 + \Upsilon_\beta X^{\beta_\Upsilon}\right) d_\xi \left(\Theta_\beta X^{\beta_\Theta}\right) \\ + \Theta_\beta X^{\beta_\Theta} d_\xi \left(V_\beta X^{\beta_V}\right) + \left(1 + \Upsilon_\beta X^{\beta_\Upsilon}\right) d_\xi \left(\Phi_\beta X^{\beta_\Phi}\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

De même que pour les deux premières équations, deux relations sont données par le développement de cette équation et l'identification des puissances dominantes. Ces deux relations sont :

$$\beta_\Theta = \beta_\Phi, \quad (4.52)$$

$$\Phi_\beta = \frac{\alpha}{\gamma - 1} \xi_{ft} \Theta_\beta. \quad (4.53)$$

À ce stade, nous disposons de l'égalité :

$$\beta = \beta_\Upsilon = \beta_V = \beta_\Theta = \beta_\Phi, \quad (4.54)$$

et de trois équations pour les quatre inconnues restantes Υ_β , V_β , Θ_β et Φ_β . La quatrième équation, indispensable à la résolution de notre système, est la définition du flux (4.2). En effectuant la même démarche pour cette relation que pour les lois de conservation, on obtient :

$$0 = \left(\Phi_\beta X^{\beta_\Phi}\right)^{-\frac{1}{m+1}} - \left(1 + \Upsilon_\beta X^{\beta_\Upsilon}\right) \left(\frac{\beta_\Theta}{\xi_{ft}}\right)^{\frac{-1}{m+1}} \Theta_\beta^{\frac{-1-n}{m+1}} X^{-\frac{1-\beta_\Theta(n+1)}{m+1}}. \quad (4.55)$$

La première relation qui découle de cette équation, après développement et identification, est :

$$1 - (n + 1) \beta_\Theta = -\beta_\Phi, \quad (4.56)$$

qui, conjuguée à (4.54), donne :

$$\beta = \frac{1}{n}. \quad (4.57)$$

Dans un second temps, l'analyse des termes de puissance dominante nous donne :

$$\Phi_\beta = \frac{\beta}{\xi_{ft}} \Theta_\beta^{n+1}. \quad (4.58)$$

Cette relation, ainsi que celles déterminées plus haut nous permettent d'exprimer les différentes inconnues de notre système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Upsilon_\beta = 1 - \left(\frac{\alpha^{1-2n}}{\gamma-1} \xi_{ft}^{2-2n} n \right)^{1/n}, \\ V_\beta = \left(\frac{\alpha^{1-n}}{\gamma-1} \xi_{ft}^{2-n} n \right)^{1/n}, \\ \Theta_\beta = \left(\frac{\alpha}{\gamma-1} \xi_{ft}^2 n \right)^{1/n}, \\ \Phi_\beta = \left(\left(\frac{\alpha}{\gamma-1} \right)^{n+1} \xi_{ft}^{2+n} n \right)^{1/n}. \end{array} \right. \quad (4.59)$$

Démonstration de la pertinence du choix d'ordre dominant : on montre dans ce paragraphe que le choix effectué dans notre étude, concernant les termes d'ordre dominant, est le seul choix compatible avec nos hypothèses. Dans le cas de la loi de conservation de la masse (4.44), écrite avec les décompositions asymptotiques des différentes quantités, faisons une autre hypothèse que celle effectuée. On suppose maintenant que :

$$\beta_V - 1 > \beta_\Upsilon - 1, \quad (4.60)$$

auquel cas le terme d'ordre dominant est le terme de puissance $\beta_\Upsilon - 1$. Les résultats qui découlent immédiatement de ce choix d'ordre dominant sont les suivants :

$$\begin{aligned} \alpha \Upsilon_\beta \beta_\Upsilon &= 0, \\ \text{donc } \Upsilon_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Si, à l'inverse, on suppose que :

$$\beta_V - 1 < \beta_\Upsilon - 1, \quad (4.62)$$

alors le terme d'ordre dominant est le terme de puissance $\beta_V - 1$. De la même manière que pour le cas précédent, ce choix conduit à l'égalité :

$$V_\beta = 0. \quad (4.63)$$

Le même type de raisonnement sur les autres équations de conservation aboutit au même type de résultat. Or, pour éviter la solution constante, $V_\beta, \Upsilon_\beta, \Theta_\beta$ et Φ_β doivent impérativement être non-nuls. Par l'absurde, on vient de démontrer la pertinence de nos choix au paragraphe précédent.

Développement à l'ordre $(1 - \xi/\xi_{ft})^{2/n}$: il est possible d'augmenter la précision des décompositions des quantités pour essayer de se rapprocher du comportement exact de ces quantités au

voisinage du front thermique. Pour cela, il faut déterminer les coefficients $\Upsilon_\varepsilon, V_\varepsilon, \Theta_\varepsilon, \Phi_\varepsilon, \varepsilon_\Upsilon, \varepsilon_V, \varepsilon_\Theta$ et ε_Φ tels que :

$$\begin{cases} \overline{\Upsilon} = 1 + \Upsilon_\beta X^{\beta_\Upsilon} + \Upsilon_\varepsilon X^{\varepsilon_\Upsilon}, \\ \overline{V}_x = V_\beta X^{\beta_V} + V_\varepsilon X^{\varepsilon_V}, \\ \overline{\Theta} = \Theta_\beta X^{\beta_\Theta} + \Theta_\varepsilon X^{\varepsilon_\Theta}, \\ \overline{\Phi}_x = \Phi_\beta X^{\beta_\Phi} + \Phi_\varepsilon X^{\varepsilon_\Phi}. \end{cases} \quad (4.64)$$

Avec la même méthode que pour déterminer les coefficients relatifs à l'ordre dominant, des équations sont formées à partir des termes d'ordre immédiatement supérieur. Le résultat final de cette étude est donné par :

$$\begin{cases} \frac{2}{n} = \varepsilon_\Upsilon = \varepsilon_V = \varepsilon_\Theta = \varepsilon_\Phi, \\ \Upsilon_\varepsilon = - \left(\frac{\alpha^{1-2n}}{\gamma-1} \xi_{ft}^{2-2n} n \right)^{1/n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{2n+nm-\gamma}{\gamma-1} \right), \\ V_\varepsilon = \left(\frac{\alpha^{1-n}}{(\gamma-1)^{(n+1)}} \xi_{ft}^{2-n} n \right)^{1/n} ((2+2n+m)n - \gamma - 2), \\ \Theta_\varepsilon = - \left(\frac{\alpha^{1-n}}{\gamma-1} \xi_{ft}^{2-n} n \right)^{2/n}, \\ \Phi_\varepsilon = \left(\frac{\alpha^{2-n}}{(\gamma-1)^{(n+2)}} \xi_{ft}^{4-n} n^{n+2} \right)^{1/n} (2+2n+m). \end{cases} \quad (4.65)$$

Nous observons que l'identification des termes d'ordre directement supérieur aboutit à l'obtention de termes d'ordre $(2/n)$ en plus des termes déjà calculés d'ordre $(1/n)$. Étant donné que nous utilisons une valeur de n supérieure à 1 par hypothèse, persévérer dans la recherche de termes d'ordres supérieurs n'est pas judicieux. Trop d'étapes sont en effet nécessaires pour que l'amélioration de l'approximation soit significative. Nous décidons donc de nous contenter de l'ordre dominant pour approcher les quantités au pied du précurseur thermique supersonique. Historiquement, les équipes qui ont travaillé sur le sujet (Bajac, 1973; Saillard, 2000) se sont contentées de développements asymptotiques à un terme pour ensuite effectuer l'intégration du système en différences finies. L'article de Reinicke et Meyer-Ter-Vehn (1991) mentionne que, pour le problème spécifique étudié dans l'article en question, différent du système étudié dans notre cas, cette approximation à un terme n'est pas assez fiable. Les auteurs suggèrent donc des approximations à un ordre supérieur. Cependant, comme nous l'avons montré en (4.65) sur notre système, augmenter l'ordre de l'approximation est fastidieux et cette opération demande à être réalisée plusieurs fois avant d'obtenir une amélioration significative de la précision de l'approximation.

4.3.2.2 Approximation de la solution à l'ordre $(1 - \xi/\xi_{ft})$

Reinicke et Meyer-Ter-Vehn (1991) suggèrent une autre méthode pour approcher les quantités de l'écoulement de base au voisinage du front thermique. Nous détaillons dans cette partie du

mémoire cette méthode alternative. Si la première méthode nécessite de connaître la position du point où celle-ci est appliquée afin de déterminer la valeur des quantités, la deuxième méthode, utilisant les valeurs aux limites, demande de connaître la valeur d'une quantité pour déterminer les valeurs des autres ainsi que le point où ces valeurs sont appliquées. Dans cette partie, nous appliquons cette méthode à nos équations, différentes de celles étudiées par Reinicke et Meyer-Ter-Vehn (1991).

Prenons la loi de conservation de la masse, la première étape de la mise en place de cette méthode consiste à exprimer $\overline{G}$ en fonction de $\overline{V}_x$. Dans un premier temps, l'équation de conservation de la masse (2.26) est reformulée en $\overline{G}$. Cette loi de conservation devient donc :

$$-\alpha \xi \frac{d_\xi \overline{G}}{\overline{G}} + \overline{G} d_\xi \overline{V}_x = 0. \quad (4.66)$$

On peut ainsi écrire :

$$d_\xi \left(\frac{1}{\overline{G}} \right) = -\frac{1}{\alpha \xi} d_\xi \overline{V}_x. \quad (4.67)$$

À ce stade, et dans le cadre de cette étude au voisinage du pied du front thermique, on définit $\overline{G}_0$ et $\overline{V}_{x,0}$ tels que :

$$\begin{aligned} \overline{G}(\xi) &= \overline{G}_0(\xi) + o\left(1 - \frac{\xi}{\xi_{ft}}\right), \\ \overline{V}_x(\xi) &= \overline{V}_{x,0}(\xi) + o\left(1 - \frac{\xi}{\xi_{ft}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, en insérant ces expressions dans l'équation (4.67) et en intégrant, on obtient :

$$\frac{1}{\overline{G}_0(\xi_{ft})} - \frac{1}{\overline{G}_0(\xi) + o\left(1 - \frac{\xi}{\xi_{ft}}\right)} = \frac{1}{\alpha \xi_{ft}} \left[-\overline{V}_{x,0}(\xi_{ft}) + \overline{V}_{x,0}(\xi) + o\left(1 - \frac{\xi}{\xi_{ft}}\right) \right]. \quad (4.68)$$

On remplace $\overline{G}_0(\xi_{ft})$ et $\overline{V}_{x,0}(\xi_{ft})$ par leurs valeurs, ce qui permet d'écrire :

$$\overline{G}_0(\xi) + o\left(1 - \frac{\xi}{\xi_{ft}}\right) = \frac{1}{1 - \frac{\overline{V}_{x,0}(\xi) + o\left(1 - \frac{\xi}{\xi_{ft}}\right)}{\alpha \xi_{ft}}}. \quad (4.69)$$

Finalement, au voisinage du pied du front thermique supersonique, puisque :

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_{ft}} \left(\overline{V}_{x,0}(\xi) + o\left(1 - \frac{\xi}{\xi_{ft}}\right) \right) = 0, \quad (4.70)$$

alors :

$$\overline{G} = 1 + \frac{\overline{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}. \quad (4.71)$$

On a ainsi une approximation du comportement de $\overline{G}$ au voisinage du front thermique en fonction de $\overline{V}_x$. Les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie nous permettent d'obtenir les expressions semblables de $\overline{\Theta}$ et de $\overline{\Phi}_x$ en fonction de $\overline{V}_x$:

$$\begin{aligned} \overline{\Theta} &= \alpha \xi_{ft} \overline{V}_x \left(1 - \frac{\overline{V}_x}{\alpha \xi_{ft}} \right), \\ \overline{\Phi}_x &= -\frac{(\xi_{ft} \alpha)^2}{\gamma - 1} \overline{V}_x. \end{aligned} \quad (4.72)$$

À partir de ces relations, il suffit donc de choisir une valeur de $\bar{V}_x$ proche de 0 pour obtenir les valeurs des autres quantités de l'écoulement de base. Plus la valeur choisie pour $\bar{V}_x$ est petite, meilleure est la précision. Reste alors à trouver la valeur de ξ à laquelle seront appliquées ces valeurs. Pour déterminer cette coordonnée, la relation à utiliser est la définition du flux dans laquelle on remplace les quantités par leurs expressions en fonction de $\bar{V}_x$. L'expression du flux s'écrit :

$$\bar{\Phi}_x = -\bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n d_\xi \bar{\Theta}. \quad (4.73)$$

Les relations (4.71) et (4.72) modifient l'expression de cette définition qui devient :

$$-\frac{(\xi_{ft} \alpha)^2}{\gamma - 1} \bar{V}_x = -\left(1 + \frac{\bar{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}\right)^{m+1} (\alpha \xi_{ft} \bar{V}_x)^n \left(1 - \frac{\bar{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}\right)^n d_\xi \left[\alpha \xi_{ft} \bar{V}_x \left(1 - \frac{\bar{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}\right)\right]. \quad (4.74)$$

On développe cette expression :

$$-\frac{(\xi_{ft} \alpha)^2}{\gamma - 1} \bar{V}_x = -\left(1 + \frac{\bar{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}\right)^{m+1} (\alpha \xi_{ft} \bar{V}_x)^n \left(1 - \frac{\bar{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}\right)^n [\alpha \xi_{ft} d_\xi \bar{V}_x - 2 d_\xi \bar{V}_x \bar{V}_x], \quad (4.75)$$

puis on utilise :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^a = 1 + ax,$$

afin de pouvoir écrire :

$$1 = \frac{\gamma - 1}{(\alpha \xi_{ft})^2} \bar{V}_x^{-1} \left(1 + (m+1) \frac{\bar{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}\right) (\alpha \xi_{ft} \bar{V}_x)^n \left(1 - n \frac{\bar{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}\right) \times (\alpha \xi_{ft} - 2 \bar{V}_x) d_\xi \bar{V}_x. \quad (4.76)$$

Désormais, on est capable d'exprimer $d\xi$:

$$d\xi = \frac{\gamma - 1}{(\alpha \xi_{ft})^2} \left(1 + (m+1) \frac{\bar{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}\right) (\alpha \xi_{ft})^n \bar{V}_x^{n-1} \left(1 - n \frac{\bar{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}\right) \times (\alpha \xi_{ft} - 2 \bar{V}_x) d\bar{V}_x. \quad (4.77)$$

L'intégration de cette relation donne :

$$\begin{aligned} \xi - \xi_{ft} &= \frac{(\gamma - 1)}{(\alpha \xi_{ft})^{2-n}} \\ &\times \int_{\xi}^{\xi_{ft}} \left(1 + (m+1) \frac{\bar{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}\right) \bar{V}_x^{n-1} \left(1 - n \frac{\bar{V}_x}{\alpha \xi_{ft}}\right) (\alpha \xi_{ft} - 2 \bar{V}_x) d\bar{V}_x. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Le calcul de l'intégrale présente dans cette relation nous donne enfin la possibilité d'écrire la définition de la coordonnée ξ en fonction de la valeur choisie de $\bar{V}_x$:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_{ft} + (1 - \gamma) \left[\frac{2n(m+1)}{n+3} (\alpha \xi_{ft})^{n-4} \bar{V}_x^{n+3} \right. \\ &\quad + \frac{2n - (2+n)(m+1)}{n+2} (\alpha \xi_{ft})^{n-3} \bar{V}_x^{n+2} \\ &\quad \left. + \frac{m-n-1}{n+1} (\alpha \xi_{ft})^{n-2} \bar{V}_x^{n+1} + \frac{(\alpha \xi_{ft})^{n-1}}{n} \bar{V}_x \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Maintenant que le système d'équations a été étudié de manière théorique, nous disposons du nécessaire pour franchir la singularité au front de choc isotherme. Nous avons également les informations nécessaires pour définir les conditions aux limites au pied du front thermique en utilisant des conditions de type Neumann, si nécessaire, à l'aide des informations fournies par (4.59). Les

singularités ont été identifiées, il est désormais acquis que deux de celles-ci sont présentes dans l'écoulement étudié. Enfin, la première formulation autonome du système d'équations aux dérivées ordinaires sous forme autosemblable est écrite. Si, dans des études précédentes (Boudesocque-Dubois *et al.*, 2003, 2008; Clarisse *et al.*, 2008), le problème de la singularité du front thermique était éludé par l'hypothèse d'une épaisseur de précurseur thermique nulle et donc l'introduction d'un choc parfait, ce n'est pas le cas de cette étude. Il est question ici d'être capable de traiter une gamme plus large d'écoulements, y compris des écoulements avec précurseur thermique d'épaisseur conséquente. Ce choix implique l'introduction d'un choc isotherme en lieu et place du choc parfait et a de sérieuses conséquences sur la méthode numérique. En effet, le comportement singulier des quantités au voisinage du pied du précurseur thermique supersonique rend impossible l'application de la méthode numérique mise au point lors des études précédentes. Afin d'envisager la mise en place d'une méthode numérique permettant de traiter les configurations d'écoulements avec choc isotherme et précurseur thermique supersonique, mais également d'élargir la gamme d'écoulements abordables avec l'approximation du choc parfait et la méthode numérique existante, il est indispensable de réaliser une étude pour déterminer la contrainte de stabilité temporelle propre au système aux perturbations (3.3, 3.4). C'est l'objet du chapitre suivant de ce mémoire.

Chapitre 5

Contrainte de stabilité temporelle du système aux perturbations

Garant de la stabilité de notre schéma numérique, le pas de temps critique nécessite une étude approfondie et détaillée. Guillard *et al.* (1992) effectuent une étude de cette contrainte de stabilité temporelle dans une configuration d'étude spécifique. Le système d'équations utilisé par cette équipe est le système des équations de Navier–Stokes à deux dimensions auxquelles les auteurs ont appliqué une discrétisation de type Chebyshev dans la direction longitudinale mais également dans les directions transverses. Pour être précis, le schéma d'intégration employé est un schéma Euler–Crank–Nicholson en coordonnées cartésiennes. L'objectif de l'étude présentée dans ce chapitre du mémoire est de définir un tel critère pour les équations d'Euler avec conduction thermique non-linéaire (3.1) résolues dans le système de variables (ξ, t) avec une méthode spectrale utilisant une discrétisation de type Chebyshev dans la direction de l'écoulement, une décomposition monomode de Fourier dans le plan transverse et un schéma d'intégration Runge–Kutta semi-implicite à trois étapes.

Dans l'étude de Lombard (2008), une première tentative est effectuée. Cependant, le critère est, dans ce travail, traduit par analogie avec le raisonnement de Guillard *et al.* (1992) sans être déterminé à nouveau avec les caractéristiques propres à l'écoulement considéré. À l'issue de cette étude, le critère de pas de temps utilisé s'est révélé ne pas correspondre au domaine de stabilité du schéma. En effet, le coefficient CFL placé devant ce pas de temps critique devait être modifié pour chaque écoulement de base, sans qu'une valeur de celui-ci ne s'impose réellement. Le travail effectué dans le cadre de cette thèse consiste donc à repartir des coordonnées cartésiennes afin d'appliquer la méthode de Guillard *et al.* (1992) à notre système. Dans chaque système de coordonnées, le système sera scindé en un sous-système propre à la dynamique des gaz et une équation d'advection/diffusion d'évolution de la température. Dans le cas du système de la dynamique des gaz, nous allons chercher à obtenir un système linéaire :

$$\partial_t \hat{\mathbf{V}} + \mathbf{A}_x \partial_x \hat{\mathbf{V}} + \mathbf{A}_y \partial_y \hat{\mathbf{V}} + \mathbf{A}_z \partial_z \hat{\mathbf{V}} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

avec $\hat{\mathbf{V}}$ le vecteur des perturbations tel que $\hat{\mathbf{V}} = {}^T (\hat{\rho} \ \hat{v}_x \ \hat{v}_y \ \hat{v}_z \ \hat{p})$. Pour résoudre ce système à cinq inconnues, il faut donc cinq équations. En ce qui concerne l'équation d'évolution de la température, il s'agit d'exprimer la variation d'énergie interne due aux échanges de chaleur.

5.1 Notions préliminaires

5.1.1 Travaux de référence

D'après MacCormack (1971), qui utilise dans son étude les résultats de Courant *et al.* (1928), une expression du critère de stabilité pour une équation d'advection est :

$$\Delta t_{\text{hyp}} \leq \alpha_{\text{CFL}} \min \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} + c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}. \quad (5.2)$$

Dans notre cas, $|v|$ et $|w|$ sont nuls et il faut prendre en compte la transformation de coordonnées concernée par le domaine d'étude. Enfin, la discrétisation utilisée dépend de la direction considérée. Ainsi, la discrétisation longitudinale (en x) est une discrétisation de Chebyshev tandis que la direction transversale (en y) est décomposée selon Fourier. Ces différences nous incitent à travailler séparément suivant la direction longitudinale et la direction transversale. Cette distinction est caractérisée par l'insertion de la vitesse du son dans les termes liés à chacune des directions au lieu de la mettre en facteur. Ainsi, (5.2) devient :

$$\Delta t_{\text{hyp}} \leq \alpha_{\text{CFL}} \min \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} + \sqrt{\frac{c_x^2}{\Delta x^2} + \frac{c_y^2}{\Delta y^2} + \frac{c_z^2}{\Delta z^2}}}. \quad (5.3)$$

Guillard *et al.* (1992) ont proposé une condition de stabilité. Selon leurs hypothèses, la direction de l'écoulement est la direction selon x , les équations régissant l'écoulement sont les équations de Navier-Stokes et la discrétisation de Chebyshev est utilisée dans toutes les directions. La condition de stabilité qu'ils énoncent est la suivante, avec Δt_c le pas de temps critique sachant que pour une quantité quelconque Q la notation suivante : $Q_{ij} = Q(x_i, y_j)$ est utilisée avec i et j les indices des points considérés respectivement dans la direction longitudinale et dans la direction transverse :

$$\Delta t_c = \min_{ij} \left(C / \left(\frac{2|u_{ij}|}{L_x K_0} N_x^2 + \frac{\chi_{ij} N_y^2}{K_0} + \frac{c_{ij}}{K_0} \sqrt{\frac{4 N_x^4}{L_x^2} + \frac{N_y^4}{f'(a, \eta_j)^2}} \right) \right), \quad (5.4)$$

avec :

$$\chi_{ij} = \frac{|v_{ij}|}{|f'(a, \eta_j)|} + \frac{4}{3 \text{Re } \rho_{ij}} \frac{|f''(a, \eta_j)|}{|(f'(a, \eta_j))^3|}. \quad (5.5)$$

Les différents termes de cette formule sont explicités ci-dessous :

- N_x correspond au nombre de points suivant la direction longitudinale,
- N_y correspond au nombre de points suivant la direction transversale,
- L_y est la longueur transversale du domaine,
- c est la vitesse du son,
- K est un coefficient qui dépend du type de l'équation d'évolution des perturbations dans la direction considérée, du type de discrétisation utilisée et des conditions aux limites,
- f est la transformée de coordonnées pour passer de l'espace physique à l'espace spectral.

Elle n'est appliquée qu'aux coordonnées longitudinales.

La formulation (5.4) s'écrit, si la contribution des termes diffusifs est prise en compte (Guillard *et al.*, 1992) :

$$\Delta t_c = \min_{ij} \left(C / \left(\frac{2|u_{ij}|}{L_x K_0} N_x^2 + \frac{\chi_{ij} N_y^2}{K_0} + \frac{c_{ij}}{K_0} \sqrt{\frac{4 N_x^4}{L_x^2} + \frac{N_y^4}{f'(a, \eta_j)^2}} + \sigma \frac{1}{\text{Re } \rho_{ij}} \left(\frac{4 N_x^4}{L_x^2} + \frac{N_y^4}{f'(a, \eta_j)^2} \right) \right) \right), \quad (5.6)$$

avec :

$$\sigma = \max \left(\frac{4}{3 K_1}, \frac{1}{\text{Pr} M_\infty^2 K_2} \right). \quad (5.7)$$

Dans cette expression, Re , M et Pr sont respectivement les nombres sans dimension de Reynolds, de Mach et de Prandtl. Avec nos hypothèses, cette expression devient :

$$\begin{aligned} \Delta t_c = \min_i & \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \left| \frac{\bar{v}_{x_i}}{f'_i} \right| + \sqrt{\bar{c}_i^2 \left(\frac{N_x^2}{f'_i K_{A/D}^C} \right)^2 + \bar{c}_i^2 \left(\frac{N_y}{2 L_y K_A^F} \right)^2} \right. \\ & \left. + M_{\text{diff},i} \left[\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \left| \frac{f''_i}{f'^3_i} \right| + \frac{k_\perp^2}{K_D^F \pi^2} + \frac{N_x^4}{K_{D/D}^C f'^2_i} \right] \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

avec $M_{\text{diff},i}$ le coefficient multiplicateur des termes diffusifs dans l'équation d'advection/diffusion de l'évolution de la température. Dans ces expressions, la valeur des constantes K est dépendante du choix de discrétisation spatiale effectué, des conditions aux limites et du type d'équation. Les notations choisies pour ces coefficients permettent de les différencier en fonction de leur domaine d'application. Ainsi, si la décomposition est de type Fourier, le coefficient se note K^F alors que les coefficients qui se rapportent à une discrétisation de Chebyshev se notent K^C . Les indices de ces coefficients donnent d'autres informations sur le cas particulier considéré. La première lettre indique ainsi le type d'équation, D pour une équation de diffusion et A pour une équation d'advection. Enfin, la deuxième lettre de l'indice désigne le type de conditions aux limites, avec D pour des conditions de Dirichlet et N pour des conditions de Neumann. Dans le cadre de notre étude, il est nécessaire de donner une valeur numérique à ces coefficients.

5.1.2 Rappels sur la stabilité des schémas numériques

Soit une discrétisation spatiale du domaine i , borné par $[a_i, b_i]$, utilisant $\mathcal{N}_i$ points, la forme discrète du système (3.7) à (3.10) est :

$$\partial_t \hat{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0}, \quad (5.9)$$

où $\hat{\mathbf{V}}$ est un vecteur composé des $\mathcal{N}_i$ valeurs de la densité, suivies des $\mathcal{N}_i$ valeurs de la vitesse longitudinale, puis de celles de la vitesse transversale et enfin de la pression. $\hat{\mathbf{S}}$ est un opérateur de dimension $4\mathcal{N}_i \times 4\mathcal{N}_i$, qui ne dépend que de l'écoulement de base et qui est défini par :

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{D}}_{\mathcal{N}_i} \mathbf{I}_{4\mathcal{N}_i} + \hat{\mathbf{B}}, \quad (5.10)$$

avec :

- $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ les représentations discrètes de $\hat{\mathbf{A}}_\xi$ et $\hat{\mathbf{B}}_\xi$ définies respectivement en (3.8) et (3.10).
- $\hat{\mathbf{D}}_{\mathcal{N}_i}$ est la matrice de la dérivée spatiale du premier ordre .
- $\mathbf{I}_{4\mathcal{N}_i}$ est la matrice identité de dimension $4\mathcal{N}_i$.

Soit un schéma de Runge-Kutta du troisième ordre (RK3) qui modélise (5.9), avec p le numéro du pas en temps :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}^{(p+1)} &= \left(\mathbf{I}_{4\mathcal{N}_i} - \Delta t \hat{\mathbf{S}} + \frac{1}{2} (\Delta t \hat{\mathbf{S}})^2 - \frac{1}{6} (\Delta t \hat{\mathbf{S}})^3 \right) \hat{\mathbf{V}}^{(p)} \\ &\equiv \hat{\mathbf{K}}(\Delta t) \hat{\mathbf{V}}^{(p)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Une condition suffisante de stabilité est :

$$R(\hat{\mathbf{K}}(\Delta t)) = \max_{\lambda_K} |\lambda_K| \leq \left\| \hat{\mathbf{K}}(\Delta t) \right\| \leq 1 + \kappa \Delta t, \quad (5.12)$$

où R et λ_K sont, respectivement, le rayon spectral et les valeurs propres de la matrice d'amplification $\hat{\mathbf{K}}(\Delta t)$, κ est une constante finie positive et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Cependant, les conditions de stabilité impliquant seulement les valeurs propres sont, en pratique, plus aisées à manipuler que la condition précédente. Cela nous amène à considérer la condition de von Neumann, c'est-à-dire :

$$R(\hat{\mathbf{K}}(\Delta t)) \leq 1 + \kappa \Delta t, \quad (5.13)$$

qui n'est qu'une condition nécessaire de stabilité. Nous adoptons donc le plus restrictif des cas, à savoir :

$$R(\hat{\mathbf{K}}(\Delta t)) \leq 1. \quad (5.14)$$

Cette condition correspond, pour un schéma de Runge-Kutta du troisième ordre, à l'inégalité :

$$|1 - \lambda \Delta t + \frac{1}{2}(\lambda \Delta t)^2 - \frac{1}{6}(\lambda \Delta t)^3|^2 \leq 1, \quad (5.15)$$

pour toutes les valeurs propres λ de $\hat{\mathbf{S}}$.

L'étude réalisée par Gauthier (2011), présentée en annexe (Annexe F), répertorie les différents cas de figure et donne les valeurs des différents coefficients en fonction du type de discrétisation. Ainsi dans le cas d'une décomposition de Fourier, le critère de stabilité qui s'applique à une équation d'advection s'écrit :

$$\Delta t \leq K_A^F \frac{1}{c} \frac{L}{N_x/2}, \quad (5.16)$$

d'où :

$$K_A^F = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \simeq 0,2757. \quad (5.17)$$

Avec cette formulation, $N_x/2$ est le nombre de modes. Si l'équation étudiée est une équation de diffusion, ce critère devient :

$$\Delta t \leq \frac{K_D^F}{\mathcal{N}_i} \frac{L^2}{(N_x/2)^2}, \quad \text{avec} \quad K_D^F = \frac{C_{RK3}}{4\pi^2} \simeq 0,0636. \quad (5.18)$$

Si la discrétisation est de type Chebyshev, les critères sont modifiés. En effet, le critère de stabilité du schéma devient, dans le cas d'une équation d'advection et de conditions aux limites de Dirichlet :

$$\Delta t_c = \frac{L}{2(\mathcal{N}_i - 1)^2} \frac{1}{|c|} K_{A/D}^C, \quad (5.19)$$

avec :

$$K_{A/D}^C = 9,917 \times 2 = 19,834. \quad (5.20)$$

Pour finir, en se plaçant dans les mêmes conditions mais en étudiant l'équation de diffusion, on obtient :

$$\Delta t \leq \frac{K_{D/D}^C}{N_z^4}, \quad \text{avec} \quad K_{D/D}^C = \frac{2,51}{0,047} \simeq 53,4. \quad (5.21)$$

5.1.3 Domaines de définition et transformations de coordonnées

Dans le cadre de l'écriture du pas de temps critique, il est nécessaire de connaître l'expression des transformations de coordonnées qui permettent de passer d'un domaine à l'autre, ainsi que l'expression de leurs dérivées premières. De plus, dans le cas de la contribution des termes diffusifs dans ce pas de temps critique, l'expression des dérivées secondes de ces transformations de coordonnées est utile. Les différents domaines de définition utilisés dans cette étude sont les suivants :

- $E_1 = [-1, 1]$ est le domaine de départ, la variable liée à ce domaine est η . Il est le domaine dans lequel se situent les points de Gauss-Lobatto.
- $E_2 = [0, L_x]$ est le domaine des coordonnées cartésiennes, la variable liée à ce domaine est x . La fonction f permet de passer de E_1 à E_2 .
- $E_3 = [0, \Delta m]$ est le domaine Lagrangien, la variable liée à ce domaine est m . Pour passer de E_1 à E_3 on utilise la transformation de coordonnées g .
- $E_4 = [0, \Delta \xi]$ est le domaine final, celui dans lequel on travaille en variable autosemblable, la variable liée à celui-ci est ξ . La dernière transformation de coordonnées dont nous aurons besoin pour travailler dans ce domaine sera nommée h .

Schématiquement, on a :

$$\begin{aligned} E_1 &\xrightarrow{f} E_2, \\ E_1 &\xrightarrow{g} E_3, \\ E_1 &\xrightarrow{h} E_4. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Dans la suite de l'étude, ces transformations de coordonnées vont se révéler utiles, notamment au moment de formuler l'expression du pas de temps critique.

5.2 Raisonnement suivant les coordonnées cartésiennes

On raisonne avec le système d'équations avec conduction thermique non-linéaire (1.3) propre à la dynamique des gaz, soit en négligeant les termes de flux d'ordre 1 à la manière de ce qui est fait pour la mise en place de (3.6), l'équivalent en variable autosemblable. L'équation d'évolution de la pression devient donc :

$$\partial_t p(x, y, z, t) + \vec{v}(x, y, z, t) \cdot \vec{\nabla} p(x, y, z, t) + \gamma p(x, y, z, t) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(x, y, z, t) = 0. \tag{5.23}$$

On va travailler séparément sur chaque équation même si on verra que les trois résolutions sont liées. L'écoulement de base est, par hypothèse, unidimensionnel à symétrie plane donc $\bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$. De plus, les dérivées spatiales des quantités de base selon les directions transversales y et z sont nulles. Dans la suite de l'étude, les notations seront définies par : $Q = \bar{Q} + \delta Q$, avec $\bar{Q}$ désignant la quantité de base et δQ représentant la perturbation linéaire de cette même quantité. Après la linéarisation, la quantité $\delta Q = Q - \bar{Q}$ sera notée $\hat{Q}$.

La méthode pour obtenir les équations de perturbation consiste à appliquer des perturbations aux équations du système (1.3) et à l'équation de la pression (5.23), à linéariser les expressions obtenues et, enfin, à enlever les termes satisfaisant l'équation régissant le comportement de l'écoulement de base. On peut ainsi écrire l'équation en perturbation de densité :

$$\partial_t \hat{\rho} + \hat{\rho} \partial_x \bar{v}_x + \bar{v}_x (\partial_x \hat{\rho}) + \bar{\rho} (\partial_x \hat{v}_x + \partial_y \hat{v}_y + \partial_z \hat{v}_z) + \bar{v}_x \partial_x \hat{\rho} = 0. \tag{5.24}$$

De même, la forme finale de la conservation de la quantité de mouvement dans la direction longitudinale est la suivante :

$$\partial_t \hat{v}_x = -\bar{v}_x \partial_x \hat{v}_x - \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{v}_x \partial_x \hat{p} - \hat{v}_x \partial_x \bar{v}_x + \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}^2} \partial_x \bar{p}. \tag{5.25}$$

La conservation de la quantité de mouvement dans les directions transverses s'écrit :

$$\partial_t \widehat{v}_y = -\bar{v}_x \bar{\rho} \partial_x \widehat{v}_y - \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_y \widehat{p}, \quad (5.26)$$

$$\partial_t \widehat{v}_z = -\bar{v}_x \bar{\rho} \partial_x \widehat{v}_z - \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_z \widehat{p}. \quad (5.27)$$

Enfin, on perturbe (5.23), on enlève les termes de l'équation satisfaite par les quantités de base et on linéarise pour obtenir l'équation d'évolution de la perturbation en pression :

$$\partial_t \widehat{p} + \bar{v}_x \partial_x \widehat{p} + \widehat{v}_x \partial_x \bar{p} + \gamma \bar{p} \vec{\nabla} \cdot \widehat{\vec{v}} + \gamma \widehat{p} \partial_x \bar{v}_x = 0. \quad (5.28)$$

On a donc désormais les cinq équations que nous recherchions dans le repère cartésien, on peut maintenant écrire le système de la dynamique des gaz et étudier sa stabilité.

5.2.1 Sous-système de la dynamique des gaz

Le système de la dynamique des gaz est donc constitué de cinq équations que nous allons mettre sous la forme vectorielle (5.1). Les équations d'évolution de la pression selon la direction y (5.26) et selon la direction z (5.27) sont indépendantes l'une de l'autre, on se ramène donc à une équation scalaire pour une composante transverse de la vitesse et nous décidons que cette direction sera notée y . Le système :

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{p} + \widehat{p} \partial_x \bar{v}_x + \widehat{v}_x (\partial_x \bar{\rho}) + \bar{\rho} (\partial_x \widehat{v}_x + \partial_y \widehat{v}_y + \partial_z \widehat{v}_z) + \bar{v}_x \partial_x \widehat{p} = 0, \\ \partial_t \widehat{v}_x + \bar{v}_x \partial_x \widehat{v}_x + \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{v}_x \partial_x \widehat{p} + \widehat{v}_x \partial_x \bar{v}_x - \frac{\widehat{p}}{\bar{\rho}^2} \partial_x \bar{p} = 0, \\ \partial_t \widehat{v}_y + \bar{v}_x \partial_x \widehat{v}_y + \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_y \widehat{p} = 0, \\ \partial_t \widehat{p} + \bar{v}_x \partial_x \widehat{p} + \widehat{v}_x \partial_x \bar{p} + \gamma \bar{p} \vec{\nabla} \cdot \widehat{\vec{v}} + \gamma \widehat{p} \partial_x \bar{v}_x = 0. \end{cases} \quad (5.29)$$

peut se mettre sous la forme (5.1) avec :

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} \bar{v}_x & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{v}_x & 0 & \bar{\rho}^{-1} \\ 0 & 0 & \bar{v}_x & 0 \\ 0 & \bar{p} \gamma & 0 & \bar{v}_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\rho}^{-1} \\ 0 & 0 & \bar{p} \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \mathbf{B}_x = \begin{pmatrix} \partial_x \bar{v}_x & \partial_x \bar{\rho} & 0 & 0 \\ \frac{\partial_x \bar{p}}{\bar{\rho}^2} & \partial_x \bar{v}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x \bar{p} & 0 & \gamma \partial_x \bar{v}_x \end{pmatrix}.$$

Dans ce système, $\widehat{\mathbf{V}} = (\widehat{p} \ \widehat{v}_x \ \widehat{v}_y \ \widehat{p})$ est le vecteur des perturbations. Le calcul des valeurs propres des matrices $\mathbf{A}_x$ et $\mathbf{A}_y$ donne les résultats suivants :

- les valeurs propres de $\mathbf{A}_x$ sont $(\bar{v}_x \ \bar{v}_x \ (\bar{v}_x - \bar{c}) \ (\bar{v}_x + \bar{c}))$,
- les valeurs propres de $\mathbf{A}_y$ sont $(0 \ 0 \ -\bar{c} \ \bar{c})$,

avec $\bar{c}^2 = \gamma \bar{p} / \bar{\rho}$.

Ces résultats nous donnent une information importante : la vitesse d'advection des perturbations est $\bar{v}_x$. On peut maintenant écrire la contribution de la partie hyperbolique dans l'expression du pas de temps critique.

Dans le cas de notre écoulement, nos hypothèses modifient l'expression (5.4) qui devient :

$$\Delta t_{c,\text{hyp}} = \min_i \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \left| \frac{\bar{v}_{x_i}}{f'_i} \right| + \bar{c}_i \sqrt{\left(\frac{N_x^2}{f'_i K_{A/D}^C} \right)^2 + \left(\frac{N_y^2}{2 L_y K_A^F} \right)^2} \right)^{-1}, \quad (5.30)$$

c'est-à-dire :

$$\Delta t_{c,\text{hyp}} = \min_i \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \left| \frac{\bar{v}_{x_i}}{f'_i} \right| + \sqrt{\bar{c}_i^2 \left(\frac{N_x^2}{f'_i K_{A/D}^C} \right)^2 + \bar{c}_i^2 \left(\frac{N_y}{2 L_y K_A^F} \right)^2} \right)^{-1}. \quad (5.31)$$

Dans le cas de l'expression (5.31), une décomposition de Fourier est utilisée dans la direction transverse. Dans la suite, un seul mode de Fourier va être conservé, il s'agit donc d'exprimer $k_\perp$. Par définition, $k_\perp = 2\pi/\lambda_\perp$. Or la plus petite longueur d'onde que l'on peut représenter sur un maillage est $\lambda_\perp = 2\Delta_\perp$ avec $\Delta_\perp = L_y/N_y$, où L_y est la longueur du domaine dans la direction transversale et N_y le nombre de points de collocation. On a donc :

$$k_\perp = \frac{2\pi}{\lambda_\perp} = \frac{\pi}{\Delta_\perp} = \frac{\pi}{L_y} N_y. \quad (5.32)$$

En utilisant ce nombre d'onde transverse, l'expression du pas de temps critique devient :

$$\Delta t_{c,\text{hyp}} = \min_i \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \left| \frac{\bar{v}_{x_i}}{f'_i} \right| + \sqrt{\bar{c}_i^2 \left(\frac{N_x^2}{f'_i K_{A/D}^C} \right)^2 + \bar{c}_i^2 \left(\frac{k_\perp}{2\pi K_A^F} \right)^2} \right)^{-1}. \quad (5.33)$$

Si les points de discrétisation sont les points de Gauss-Lobatto, il suffit de remplacer la transformation de coordonnées f_i par le produit de l'identité par la demi-longueur de l'écoulement $L_x/2$. Le passage à la formulation autosemblable se fait par l'intermédiaire d'une formulation en coordonnées lagrangiennes détaillée dans l'annexe E.

5.2.2 Prise en compte de la conduction thermique

Le point de départ de la mise en place de la contribution de la conduction thermique au pas de temps critique est l'équation de conservation de l'énergie issue du système (1.3) écrite en fonction de la température :

$$\partial_t \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + C_v T \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \gamma C_v T \right) + \vec{\varphi} \right] = 0. \quad (5.34)$$

On effectue les mêmes manipulations que pour les autres quantités en perturbant l'équation de l'écoulement de base, en linéarisant et en supprimant de l'expression les termes qui satisfont déjà à l'équation d'évolution du flux thermique de base. On obtient ainsi :

$$\hat{\varphi}_x = -\bar{\rho}^m \bar{T}^n \partial_x \hat{T} + (n \bar{\rho}^m \bar{T}^{n-1} \hat{T} + m \bar{\rho}^{m-1} \bar{T}^n \hat{\rho}) \partial_x \bar{T}, \quad (5.35)$$

$$\hat{\varphi}_y = -\bar{\rho}^m \bar{T}^n \partial_y \hat{T}. \quad (5.36)$$

Il nous faut maintenant dériver dans l'espace ces quantités :

$$\begin{aligned}\partial_x \hat{\varphi}_x &= - \left[\bar{\rho}^m \bar{T}^n \partial_{x^2}^2 \hat{T} + (\partial_x (\bar{\rho}^m \bar{T}^n) - n \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T}}) \partial_x \hat{T} - m \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \partial_x \hat{\rho} \right. \\ &\quad \left. - n \partial_x \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T}} \right) \hat{T} - m \partial_x \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \right) \hat{\rho} \right], \\ \partial_y \hat{\varphi}_y &= - \bar{\rho}^m \bar{T}^n \partial_{y^2}^2 \hat{T}.\end{aligned}\tag{5.37}$$

Finalement, on obtient une équation de la forme :

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{T} - A_{\text{parab}} \bar{\rho}^{-1} &\left\{ \bar{\rho}^m \bar{T}^n \partial_{x^2}^2 \hat{T} + \bar{\rho}^m \bar{T}^n \partial_{y^2}^2 \hat{T} \right. \\ &\quad + \left[\partial_x (\bar{\rho}^m \bar{T}^n) - n \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T}} - \frac{\bar{v}_x \bar{\rho}}{A_{\text{parab}}} \right] \partial_x \hat{T} - m \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \partial_x \hat{\rho} \\ &\quad \left. - n \partial_x \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T}} \right) \hat{T} - m \partial_x \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \right) \hat{\rho} \right\} + \hat{v}_x \partial_x \bar{T} = 0,\end{aligned}\tag{5.38}$$

avec $A_{\text{parab}} = 1/C_v$. En appliquant une transformation de coordonnées f telle que : $x = f(\eta)$, on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{f'} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{f'^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{f''}{f'^3} \frac{\partial u}{\partial \eta}.\end{aligned}\tag{5.39}$$

En appliquant ces transformations à (5.38), on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{T} - A_{\text{parab}} \bar{\rho}^{-1} &\left\{ \frac{\bar{\rho}^m \bar{T}^n}{f'^2} \partial_{\eta^2}^2 \hat{T} + \bar{\rho}^m \bar{T}^n \partial_{y^2}^2 \hat{T} \right. \\ &\quad + \mathcal{W}_{\text{adv},f} \partial_{\eta} \hat{T} - m \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \frac{1}{f'} \partial_{\eta} \hat{\rho} \\ &\quad \left. - n \partial_{\eta} \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T}} \right) \hat{T} - m \partial_{\eta} \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \right) \hat{\rho} \right\} + \hat{v}_x \partial_{\eta} \bar{T} = 0.\end{aligned}$$

On appelle M_{diff} le coefficient multiplicateur des termes diffusifs de l'équation d'advection/diffusion de l'évolution de la température, c'est-à-dire :

$$M_{\text{diff}} = \frac{1}{C_v} \bar{\rho}^{m-1} \bar{T}^n.\tag{5.40}$$

On remarque dans cette équation un terme convectif qui nous donne une nouvelle vitesse d'advection :

$$\mathcal{W}_{\text{adv},f} = -A_{\text{parab}} \bar{\rho}^{-1} \left\{ \frac{1}{f'} \partial_{\eta} (\bar{\rho}^m \bar{T}^n) - n \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T} f'} - \frac{\bar{v}_x \bar{\rho}}{A_{\text{parab}} f'} - \bar{\rho}^m \bar{T}^n \frac{f''}{f'^3} \right\}.\tag{5.41}$$

Il faut donc la prendre en compte dans la partie du pas de temps critique correspondant à l'advection et ce même si la partie diffusive est négligée. Notre expression du pas de temps critique dépend maintenant de deux vitesses d'advection :

- $\bar{v}_x / f'$ qui est la vitesse d'advection liée au système hyperbolique et qui est dominante lorsque la diffusion est négligeable ;
- $\mathcal{W}_{\text{adv},f}$ qui est celle liée à l'équation d'advection/diffusion et qui est dominante dans les cas où la diffusion est prédominante dans l'écoulement.

Ces deux vitesses d'advection ont des origines différentes, $\mathcal{W}_{\text{adv},f}$ vient de la nature de l'équation d'advection/diffusion tandis que $\bar{v}_x / f'$ est liée au système de la dynamique des gaz. En prenant en considération ces deux vitesses, l'objectif est de tenir compte du fait que l'on résout un système dynamique avec conduction non-linéaire. Pour cela, on considère le système modèle suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + v_x \partial_x \rho + \rho \partial_x v_x &= 0, \\ \partial_t v_x + v_x \partial_x v_x + \rho^{-1} \partial_x p &= 0, \\ \partial_t p + \rho c^2 \partial_x v_x + (v_x + \omega) \partial_x p &= 0, \end{aligned} \quad (5.42)$$

soit, sous forme matricielle :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 \\ 0 & v_x & \rho^{-1} \\ 0 & \rho c^2 & v_x + \omega \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ p \end{pmatrix} = 0.$$

Les valeurs propres de la matrice du système sont :

$$v_x, v_x + \frac{\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + c^2} \text{ et } v_x + \frac{\omega}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + c^2}.$$

Nous disposons donc d'une vitesse d'advection qui combine les vitesses définies précédemment et d'une vitesse du son dans la direction longitudinale qui prend en compte l'apport de l'équation d'advection/diffusion de la température. La vitesse d'advection vaut $v_x + \omega/2$ tandis que la vitesse du son dans la direction longitudinale vaut $\sqrt{(\omega/2)^2 + c^2}$. Dans notre cas, nous avons :

$$\omega = \mathcal{W}_{\text{adv},f}. \quad (5.43)$$

On peut maintenant écrire le pas de temps critique de notre système en tenant compte des termes diffusifs et de la contribution advective liée à l'évolution de la température :

$$\begin{aligned} \Delta t_c = \min_i \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \left| \frac{\bar{v}_{x,i}}{f'_i} + \frac{1}{2} \mathcal{W}_{\text{adv},f,i} \right| \right. \\ \left. + \sqrt{\left\{ \left(\frac{\mathcal{W}_{\text{adv},f,i}}{2} \right)^2 + \frac{\bar{c}_i^2}{f_i'^2} \right\} \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \right)^2 + \bar{c}_i^2 \left(\frac{k_\perp}{2\pi K_A^F} \right)^2} \right. \\ \left. + \tau M_{\text{diff},i} \mathcal{H}_{\text{diff},i} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

avec :

- τ un coefficient de pondération qui permet de tenir compte ou non de la contribution des termes diffusifs ;
- $\mathcal{H}_{\text{diff},i} = \left[\frac{k_\perp^2}{K_D^F \pi^2} + \frac{N_x^4}{K_{D/D}^C f_i'^2} \right]$.

Dans le cas particulier où l'étude porte sur les points de Gauss-Lobatto, il suffit de prendre la transformation de coordonnées f_i égale à l'identité. Le passage à la formulation autosemblable se fait par l'intermédiaire d'une formulation en coordonnées lagrangiennes (m, t) détaillée dans l'annexe E.

5.3 Étude dans le système de coordonnées (ξ, y, z, t)

5.3.1 Système hyperbolique de la dynamique des gaz

L'écoulement de base étant traité selon la variable autosemblable ξ , il est indispensable d'exprimer le système aux perturbations à l'aide de cette même variable. On utilise pour cela les formules de changement de repère (A.4). On transforme donc le système (E.6) obtenu dans le repère (m, y, z, t) pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \widehat{G} - t^{-1} (-\bar{G} d_\xi \bar{V}_x + \alpha \xi \partial_\xi) \widehat{G} + t^{-\alpha} \bar{G} \partial_\xi (\bar{G} \widehat{V}_x) + \bar{G} \partial_y \widehat{V}_y = 0, \\ \partial_t \widehat{V}_x - t^{-1} (-\bar{G} d_\xi \bar{V}_x + \alpha \xi \partial_\xi) \widehat{V}_x - t^{\alpha-2} \bar{G}^{-1} \widehat{G} d_\xi \bar{P} + t^{-\alpha} \partial_\xi \widehat{P} = 0, \\ \partial_t \widehat{V}_y - \alpha \xi t^{-1} \partial_y \widehat{V}_y + \bar{G}^{-1} \partial_y \widehat{P} = 0, \\ \partial_t \widehat{P} - t^{-1} (-\gamma \bar{G} d_\xi \bar{V}_x + \alpha \xi \partial_\xi) \widehat{P} + t^{\alpha-2} \bar{G} (d_\xi \bar{P} + \gamma \bar{P} \partial_\xi) \widehat{V}_x \\ \quad + \gamma t^{2\alpha-2} \bar{P} \partial_y \widehat{V}_y = 0, \end{array} \right. \quad (5.45)$$

soit, sous une forme matricielle :

$$\partial_t \widehat{\mathbf{V}} + \widehat{\mathbf{A}}_\xi \partial_\xi \widehat{\mathbf{V}} + \widehat{\mathbf{A}}_{\xi,y} \partial_y \widehat{\mathbf{V}} + \widehat{\mathbf{B}}_\xi \widehat{\mathbf{V}} = 0, \quad (5.46)$$

avec $\widehat{\mathbf{A}}_\xi$ et $\widehat{\mathbf{B}}_\xi$ tels qu'elles sont exprimées dans (3.8) et (3.10) et $\widehat{\mathbf{A}}_{\xi,y}$ définie par :

$$\widehat{\mathbf{A}}_{\xi,y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{G}^{-1} \\ 0 & 0 & \gamma t^{2(\alpha-1)} \bar{P} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\widehat{\mathbf{A}}_\xi$ sont :

$$-\alpha \xi t^{-1}, \quad -\alpha \xi t^{-1}, \quad -\alpha \xi t^{-1} - t^{-1} \bar{G} \bar{C} \quad \text{et} \quad -\alpha \xi t^{-1} + t^{-1} \bar{G} \bar{C}, \quad (5.47)$$

tandis que celles de $\widehat{\mathbf{A}}_{\xi,y}$ sont :

$$0 \quad 0 \quad -\bar{C} t^{\alpha-1} \quad \text{et} \quad \bar{C} t^{\alpha-1}, \quad (5.48)$$

avec $\bar{C}$ la vitesse du son exprimée dans le repère autosemblable (3.9). La vitesse d'advection des perturbations est donc égale à $-\alpha \xi t^{-1}$. On peut maintenant écrire le pas de temps critique issu de la partie hyperbolique dans le système de coordonnées (ξ, y, t) :

$$\Delta t_{c,\text{hyp}} = \min_i \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \frac{\alpha \xi_i t^{-1}}{|h'_i|} + t^{\alpha-1} \sqrt{(t^{-\alpha} \bar{G}_i \bar{C}_i)^2 \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C h'_i} \right)^2 + (\bar{C}_i)^2 \left(\frac{k_\perp}{2\pi K_A^F} \right)^2} \right)^{-1}. \quad (5.49)$$

Dans le cas de l'utilisation des points de Gauss-Lobatto, il faut remplacer la transformation de coordonnées h_i par l'identité.

5.3.2 Équation parabolique de la conduction thermique

Dans le cas de l'utilisation du système de coordonnées (ξ, y, t) , les changements de coordonnées, évoqués en (A.4), nous permettent d'écrire les perturbations linéaires $\hat{\Phi}_x$ et $\hat{\Phi}_y$:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_x = & - \left(t^{\alpha-1} \bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n \partial_\xi \hat{\Theta} \right. \\ & + \left(n t^{\alpha-1} \bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^{n-1} \hat{\Theta} \right. \\ & \left. \left. + m t^{3(\alpha-1)} \bar{G}^m \bar{\Theta}^n \hat{G} \right) d_\xi \bar{\Theta} \right),\end{aligned}\quad (5.50)$$

$$\hat{\Phi}_y = -t^{2\alpha-1} \bar{G}^m \bar{\Theta}^n \partial_y \hat{\Theta}. \quad (5.51)$$

En dérivant dans l'espace ces quantités, on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_\xi \hat{\Phi}_x = & - t^{\alpha-1} \bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n \partial_{\xi^2}^2 \hat{\Theta} \\ & - \left[t^{\alpha-1} d_\xi (\bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n) - n t^{\alpha-1} \frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} \right] \partial_\xi \hat{\Theta} \\ & + m t^{3(\alpha-1)} \frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{G}} \partial_\xi \hat{G} \\ & + n t^{\alpha-1} d_\xi \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} \right) \hat{\Theta} \\ & + m t^{3(\alpha-1)} d_\xi \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{G}} \right) \hat{G},\end{aligned}\quad (5.52)$$

et :

$$\partial_y \hat{\Phi}_y = -t^{2\alpha-1} \bar{G}^m \bar{\Theta}^n \partial_{y^2}^2 \hat{\Theta}. \quad (5.53)$$

L'équation d'advection/diffusion de la température devient quant à elle :

$$\partial_t \hat{\Theta} - \frac{\alpha \xi}{t} \partial_\xi \hat{\Theta} + \bar{G} \hat{V}_x t^{\alpha-1} d_\xi \bar{\Theta} + \frac{1}{C_v} t^{-\alpha} \partial_\xi \hat{\Phi}_x + \frac{1}{\bar{G} C_v} \partial_y \hat{\Phi}_y = 0, \quad (5.54)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{\Theta} - A_{\text{parab}} \left\{ t^{-1} \bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n \partial_{\xi^2}^2 \hat{\Theta} + t^{2\alpha-1} \bar{G}^m \bar{\Theta}^n \partial_{y^2}^2 \hat{\Theta} \right. \\ + \left[t^{-1} d_\xi (\bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n) - n t^{-1} \frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} \right] \partial_\xi \hat{\Theta} - m t^{2\alpha-3} \frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{G}} \partial_\xi \hat{G} \\ - n t^{-1} d_\xi \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} \right) \hat{\Theta} - m t^{2\alpha-3} d_\xi \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{G}} \right) \hat{G} \Big\} \\ + t^\alpha \bar{G} \hat{V}_x d_\xi \bar{\Theta} = 0.\end{aligned}\quad (5.55)$$

Comme précédemment, on considère une transformation de coordonnées h telle que $\xi = h(\eta)$ et on obtient les formules équivalentes à (5.39). L'équation (5.55) devient donc :

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{\Theta} - A_{\text{parab}} \left\{ \frac{1}{h'^2} t^{-1} \bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n \partial_{\eta^2}^2 \hat{\Theta} + t^{2\alpha-1} \bar{G}^m \bar{\Theta}^n \partial_{y^2}^2 \hat{\Theta} \right. \\ + \mathcal{W}_{\text{adv}, \xi, h} \partial_\eta \hat{\Theta} \\ - m t^{2\alpha-3} \frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{G}} \frac{1}{h'} \partial_\eta \hat{G} - n t^{-1} d_\eta \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta}} \right) \hat{\Theta} - m t^{2\alpha-3} d_\eta \left(\frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{G}} \right) \hat{G} \Big\} \\ + t^\alpha \bar{G} \hat{V}_x d_\eta \bar{\Theta} = 0.\end{aligned}\quad (5.56)$$

Le terme multiplicateur de la dérivée seconde, selon la variable de similitude ξ , de la perturbation linéaire en température de l'équation de conservation de l'énergie, est issu de l'expression de $\partial_\xi \hat{\Phi}_x$ et vaut :

$$\begin{aligned} M_{\text{diff},\xi} &= \frac{1}{C_v} t^{-1} \bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n, \\ &= t^{-1} \bar{M}_{\text{diff},\xi}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Dans la direction transverse, l'expression de la dérivée transverse de $\hat{\Phi}_y$ nous donne :

$$\begin{aligned} M_{\text{diff},\perp} &= \frac{1}{C_v} t^{2\alpha-1} \bar{G}^{m-1} \bar{\Theta}^n, \\ &= t^{2\alpha-1} \bar{M}_{\text{diff},\perp}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Comme lors des études précédentes, il y a un terme convectif dans notre expression. La vitesse d'advection induite par celui-ci est ¹ :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{adv},\xi,h} &= \mathcal{V}_{\text{adv},\xi,h} - M_{\text{diff},\xi} \frac{h''}{h'^3}, \\ &= t^{-1} \left[A_{\text{parab}} \frac{1}{h'} d_\eta (\bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n) - A_{\text{parab}} n \frac{\bar{\Phi}_x}{\bar{\Theta} h'} + \frac{\alpha \xi}{h'} - A_{\text{parab}} \frac{h''}{h'^3} \bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n \right], \\ \mathcal{W}_{\text{adv},\xi,h} &= t^{-1} \bar{\mathcal{W}}_{\text{adv},\xi,h}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Ce terme doit être pris en compte, que la contribution diffusive soit considérée ou non. Par analogie avec l'étude menée en coordonnées cartésiennes, nous pouvons définir une vitesse d'advection égale à :

$$\text{Vitesse d'advection} = \frac{\alpha \xi t^{-1}}{h'} + \frac{1}{2} \mathcal{W}_{\text{adv},\xi,h}, \quad (5.60)$$

et une vitesse du son dans la direction longitudinale :

$$\text{Vitesse du son} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \mathcal{W}_{\text{adv},\xi,h} \right)^2 + (t^{-1} \bar{G} \bar{C})^2}. \quad (5.61)$$

On définit également le nombre d'onde réduit :

$$\varkappa_\perp = t^\alpha k_\perp. \quad (5.62)$$

Ainsi l'expression du pas de temps critique est :

$$\begin{aligned} \Delta t_c &= t \min_i \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \left| \frac{\alpha \xi_i}{h'_i} + \frac{\bar{\mathcal{W}}_{\text{adv},\xi,h_i}}{2} \right| \right. \\ &\quad + \sqrt{\left\{ \left(\frac{\bar{\mathcal{W}}_{\text{adv},\xi,h_i}}{2} \right)^2 + \frac{(\bar{G}_i \bar{C}_i)^2}{h'^2_i} \right\} \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \right)^2 + \bar{C}_i^2 \left(\frac{\varkappa_\perp}{2\pi K_A^F} \right)^2} \\ &\quad \left. + \tau \bar{M}_{\text{diff},\xi_i} \frac{N_x^4}{K_{D/D}^C h'^2_i} + \tau \bar{M}_{\text{diff},\perp_i} \frac{\varkappa_\perp^2}{K_D^F \pi^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

De même que pour les travaux précédents, dans le cas où les points de Gauss-Lobatto sont utilisés, h_i est remplacée par l'identité.

1. $\mathcal{V}_{\text{adv},\xi,h}$ et $M_{\text{diff},\xi}$ sont les quantités utilisées dans notre code de calcul

Primordiale pour de bonnes performances de calcul, l'expression du pas de temps critique est désormais exprimée dans les trois différents systèmes de variables : en eulérien, en lagrangien et enfin en variable autosemblable. Seule l'expression adaptée au maillage autosemblable est utilisée, les deux autres expressions étant des étapes intermédiaires. Prenant en compte les contributions à la fois de la partie liée à la dynamique des gaz et de celle ayant trait à la conduction thermique, cette expression permet de rendre compte des spécificités de l'écoulement selon les hypothèses de départ. De manière concrète, cette étude de la contrainte de stabilité temporelle a été validée par les résultats de calcul. En effet, tous les calculs de perturbations linéaires essayés jusqu'à ce jour ont pu l'être avec un coefficient α_{CFL} de 0,5, selon la règle $\Delta t \leq \alpha_{\text{CFL}} \Delta t_c$, y compris des écoulements étudiés par le passé, sans que ce coefficient n'ait été pris à défaut. Ce résultat est important car il signifie que les phénomènes importants de l'écoulement sont désormais mieux pris en compte dans l'expression du pas de temps critique. Le chapitre suivant montre que d'autres aspects de l'outil numérique ont été optimisés pour ouvrir encore plus de perspectives telles que raffiner le maillage, augmenter le temps final visé par le calcul des perturbations ou encore améliorer les diagnostics de l'état de l'écoulement à un instant donné.

Chapitre 6

Améliorations techniques apportées à l'outil numérique

Si le temps nécessaire à l'outil numérique pour effectuer un calcul de l'écoulement de base est raisonnable, de l'ordre de quelques minutes, le processus de calcul des perturbations est très long. En effet, lors des travaux précédents, un calcul de perturbations demandait plus de 500 heures pour un maillage constitué de 15 domaines de 50 points et un nombre de pas de temps de l'ordre de 10 à 15 millions (Boudesocque-Dubois *et al.*, 2008; Lombard, 2008). Ce temps est trop élevé pour envisager de travailler sur plusieurs écoulements et pour utiliser un maillage plus serré. Bien que les modifications à apporter dans le cadre de cette thèse, dans le but de rendre possible le traitement d'autres configurations d'écoulements que celles déjà accessibles, modifient le fonctionnement de l'outil, il est important de veiller à l'optimisation de l'algorithme utilisé. C'est pourquoi nous avons procédé à des investigations afin de cibler les parties de l'étude les plus consommatrices de ressources et pour faire en sorte d'optimiser leur fonctionnement. La procédure de relaxation des perturbations, la plus coûteuse de l'algorithme, puisqu'à elle seule elle représente plus de 80% du temps de calcul, a nécessité plus d'attention que le reste des procédures utilisées.

6.1 Explications préliminaires

Regroupant à elle seule la quasi-totalité des modifications introduites dans l'outil numérique durant cette période d'optimisation, la procédure de relaxation des perturbations, c'est-à-dire la résolution itérative des problèmes de Helmholtz associés à l'équation de température, détaillée dans le chapitre 3 (section 3.3) nécessite quelques explications avant de préciser les modifications réalisées. Le changement de préconditionnement est tout de même présenté dans cette section de l'étude pour faciliter la description de la procédure.

6.1.1 Changement du type de préconditionnement de différences finies à éléments finis

Pour garantir le bon fonctionnement de la méthode de relaxation, un préconditionnement est appliqué à la matrice de l'opérateur pour que les valeurs propres soient plus proches les unes des autres. Concrètement, l'objectif est de réduire le spectre de cette matrice. En effet, en l'absence de ce préconditionnement, la gamme de valeurs est beaucoup trop étendue. Plusieurs types de préconditionnements sont alors possibles.

Dans le cas de l'étude des perturbations, comme dans celui de l'étude de l'écoulement de base, un problème non-linéaire de la forme (3.44) est considéré. Concernant les perturbations, dans

chaque procédure de relaxation, si l'opérateur $\mathbf{L}$ est fixe, ce n'est pas le cas de la solution $\mathbf{U}$. Répéter la procédure appliquée pour le cas de l'écoulement de base à chaque pas de temps, pour chaque sous-problème, et par conséquent calculer l'inverse $\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{U})$ à chaque fois, serait bien trop coûteux. En effet, la matrice de l'opérateur appliqué à la solution $\mathbf{L}(\mathbf{U})$ est pleine. Après avoir longtemps été du type différences finies, le préconditionnement utilisé est aujourd'hui du type éléments finis, les résultats et les performances étant meilleurs.

Il est nécessaire pour clarifier l'explication de ce préconditionnement de donner la définition de la matrice de masse $\mathbf{M}^{\text{masse}}$. Celle-ci utilise, dans le cadre de sa définition, les fonctions de forme qui sont les fonctions élémentaires ω_i de la base de Lagrange, définies par :

$$\omega_i(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi_i - \xi}{\xi_i - \xi_{i-1}}, & \text{si } \xi \in [\xi_{i-1}, \xi_i], \\ \frac{\xi_i - \xi}{\xi_i - \xi_{i+1}}, & \text{si } \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}], \\ 0, & \text{si } \xi \notin [\xi_{i-1}, \xi_{i+1}], \end{cases} \quad (6.1)$$

avec i le numéro du domaine en question. Cette définition nous permet d'écrire l'expression des composantes de la matrice de masse :

$$M_{i,j}^{\text{masse}} = \int_{\xi_i}^{\xi_j} \omega_i(\xi) \omega_j(\xi) d\xi, \quad (6.2)$$

avec i et j appartenant à l'intervalle $[1, N]$, N étant le nombre de points de la distribution. Le résultat est donc une matrice tridiagonale. En posant :

$$\Delta\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i, \quad (6.3)$$

on peut définir les valeurs des composantes de la matrice de masse $\mathbf{M}^{\text{masse}}$:

$$\begin{aligned} M_{i,i-1}^{\text{masse}} &= \frac{1}{6} \Delta\xi_{i-1}, \\ M_{i,i}^{\text{masse}} &= \frac{1}{3} (\Delta\xi_{i-1} + \Delta\xi_i), \\ M_{i,i+1}^{\text{masse}} &= \frac{1}{6} \Delta\xi_i. \end{aligned} \quad (6.4)$$

La matrice de préconditionnement, tridiagonale également, est une approximation éléments finis de la matrice de l'opérateur dont les composantes sont définies par :

$$\begin{aligned} L_{\text{prec},i,i-1} &= \frac{1}{\Delta\xi_{i-1}} - \sigma_{i-1} M_{i,i-1}^{\text{masse}}, \\ L_{\text{prec},i,i} &= -\frac{1}{\Delta\xi_{i-1}} - \frac{1}{\Delta\xi_i} - \sigma_i M_{i,i}^{\text{masse}}, \\ L_{\text{prec},i,i+1} &= \frac{1}{\Delta\xi_i} - \sigma_{i+1} M_{i,i+1}^{\text{masse}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Finalement, la matrice de l'opérateur préconditionné utilisée s'écrit :

$$\mathbf{L}_{\text{util}} = \mathbf{L}_{\text{prec}}^{-1} \mathbf{L}_{\text{sp}}. \quad (6.6)$$

6.1.2 Formalisation de la méthode de relaxation des perturbations

Il est nécessaire à ce stade de donner des détails sur la procédure de relaxation telle qu'elle est appliquée lors du calcul des perturbations. Dans un premier temps, on nomme m et M les valeurs propres extrêmes de la matrice de l'opérateur préconditionné $\mathbf{L}_{\text{util}}$ et on définit le paramètre optimal de relaxation par la relation :

$$\alpha^{\text{opt}} = \frac{2}{m + M}. \quad (6.7)$$

Les premiers termes de la suite des polynômes de Chebyshev sont ensuite initialisés à la manière de (3.59). La relation de récurrence suivante est par la suite appliquée, en notant q le numéro de l'itération :

$$T_{q+1} = 2\beta T_q - T_{q-1}. \quad (6.8)$$

Sur chaque domaine i , le résidu $\mathbf{R}^{i(q)}$ est évalué en tous points par la relation (3.51). Les valeurs de la solution aux extrémités du domaine d'étude étant fixées par l'application de conditions aux limites de Dirichlet, le résidu en ces points est mis à zéro. La valeur maximale parmi les composantes de ce vecteur représentant le résidu est ensuite soumise à un test de convergence pour déterminer l'utilité d'une nouvelle itération. Pour cela, la valeur de référence du résidu est utilisée.

Dans le cas où les critères d'arrêt de la relaxation ne sont pas satisfaits, le produit de la matrice de masse par le résidu est effectué à l'aide, pour le point d'indice j , de la relation suivante :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M}^{i\text{masse}} \mathbf{R}^i\right)_j^{(q)} &= \Delta\xi_{j-1} \left(\frac{1}{6} R_{j-1}^{i(q)} + \frac{1}{3} R_j^{i(q)}\right) + \Delta\xi_j \left(\frac{1}{6} R_{j+1}^{i(q)} + \frac{1}{3} R_j^{i(q)}\right), \\ \left(\mathbf{M}^{i\text{masse}} \mathbf{R}^i\right)_1^{(q)} &= \left(\mathbf{M}^{i\text{masse}} \mathbf{R}^i\right)_N^{(q)} = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le produit (6.6) peut alors être calculé, de même que la nouvelle valeur du résidu. La valeur de la solution est alors obtenue par la relation :

$$\mathbf{L}_{\text{prec}} \mathbf{U}^{i(q+1)} = \mathbf{L}_{\text{prec}} \left[\omega_q \mathbf{U}^{i(q)} + (1 - \omega_q) \mathbf{U}^{i(q-1)} \right] - \alpha_{\text{relax}} \omega_q \mathbf{M}^{i\text{masse}} \mathbf{R}^{i(q)}. \quad (6.10)$$

Cette procédure se répète jusqu'à ce que la solution atteigne la précision souhaitée ou que le nombre maximal d'itérations autorisé soit atteint. Il faut noter que les opérations sur les matrices, notamment les inversions, sont effectuées grâce à des routines de la bibliothèque « LAPACK ».

6.2 Optimisation de la procédure de relaxation des perturbations

La procédure de relaxation, à cause de son coût en temps de calcul, a nécessité l'essentiel du temps passé à l'amélioration des performances de l'outil de calcul, même si l'examen de cet outil a révélé d'autres points à modifier afin d'augmenter les effets de cette période d'optimisation. Le pas de temps critique, dont l'étude est détaillée au chapitre précédent en fait partie.

L'analyse dont nous discutons nécessite une méthode robuste pour obtenir une solution, c'est pourquoi une méthode itérative est retenue. Cependant, comme nous venons de le voir, la majeure partie du temps de calcul est dépensée par cette procédure de relaxation des perturbations. Les principales actions réalisées dans ce sens concernent, outre le préconditionnement appliqué à la matrice de l'opérateur du système aux perturbations expliqué au début de ce chapitre, la valeur optimale du paramètre de relaxation α_{opt} , la valeur de référence du résidu sur laquelle l'outil se base pour décider ou non de l'arrêt de la procédure et les données initiales de la méthode de la matrice d'influence.

6.2.1 Valeur de référence du résidu

Pour les méthodes itératives, la définition de la valeur de référence du résidu est très importante. En effet, la convergence de la solution ne peut être déterminée par la seule contribution du résidu absolu, qui ne tient pas compte de l'ordre de grandeur de la solution attendue. Un résidu relatif, égal au rapport entre le résidu absolu et la valeur de référence du résidu (3.61), est donc calculé pour vérifier cette convergence. Dans le cas qui nous intéresse, le second membre peut s'annuler, ce qui provoque des difficultés à définir ce résidu de référence. Dans cette sous-section, la manière de définir cette valeur de référence du résidu est expliquée.

Principe sous-jacent à l'expression de la valeur de référence du résidu : lors d'un calcul de perturbations, il est question de résoudre l'équation vectorielle (3.44). En symbolisant par les indices d'itération q les dépendances éventuelles vis-à-vis de la solution de l'opérateur $\mathbf{L}_{\text{sp}}$ et du second membre $\mathbf{f}$ et en raisonnant en termes de composantes, cette équation devient :

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{N}_i} L_{\text{sp}j\,k}^{(q)} U_k^{(q)} - f_j^{(q)} = 0, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{N}_i. \quad (6.11)$$

Dans la suite, on note ϵ le plus petit nombre décimal non négligeable devant l'unité dans la représentation des nombres à virgule flottante choisie pour les calculs numériques et $E[Q]$ l'erreur absolue maximale qui peut être commise lors de l'évaluation numérique d'une quantité quelconque Q . On a alors les minoration suivantes :

$$\begin{aligned} E[L_j \cdot U - f_j] &\geq E[L_{j\,k} U_k], \quad \forall k, \quad 1 \leq k \leq \mathcal{N}_i, \\ E[L_j \cdot U - f_j] &\geq E[f_j], \end{aligned} \quad (6.12)$$

car l'erreur maximale qui peut être commise sur la combinaison linéaire de (6.11) est au moins aussi grande que celles qui peuvent être commises sur chacun de ses termes. On en déduit donc que :

$$E[L_j \cdot U - f_j] \geq \max \left\{ \max_k E[L_{j\,k} U_k], E[f_j] \right\}. \quad (6.13)$$

D'autre part, la plus petite erreur détectable commise sur la valeur d'une quantité Q est $\epsilon|Q|$. L'erreur effectivement commise sur Q peut cependant être plus petite ou plus grande que cette valeur. On fait alors l'hypothèse que l'erreur maximale qui peut être commise, soit $E[Q]$ varie essentiellement linéairement avec Q , soit :

$$E[Q] = K_Q |Q|, \quad (6.14)$$

avec K_Q une constante qui dépend de la manière dont Q est évaluée numériquement. En accord avec cette hypothèse, on suppose qu'il existe une constante K telle que :

$$E[L_j \cdot U - f_j] \geq K \max \left\{ \max_k |L_{j\,k} U_k|, |f_j| \right\}. \quad (6.15)$$

Le résidu est l'erreur effectivement commise lors du calcul de la combinaison linéaire au membre de gauche de (6.11). On suppose que son comportement est du même type que celui du membre de droite de l'équation (6.15), c'est-à-dire :

$$|R_j| \propto \max \left\{ \max_k |L_{j\,k} U_k|, |f_j| \right\}, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{N}_i. \quad (6.16)$$

On retient donc comme forme du critère de convergence :

$$|R_j| \leq C_{\text{Tol}} \max \left\{ \max_k |L_{jk} U_k|, |f_j| \right\}, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{N}_i, \quad (6.17)$$

où C_{Tol} est la tolérance que l'on souhaite atteindre sur la valeur relative du résidu. On formule ce critère à l'itération courante q sous la forme :

$$\left| R_j^{(q)} \right| \leq C_{\text{Tol}} \left| R_j^{(q)} \right|^{\text{ref}}, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{N}_i, \quad (6.18)$$

en introduisant la valeur absolue ponctuelle de référence du résidu, soit :

$$\left| R_j^{(q)} \right|^{\text{ref}} = \max \left\{ \max_k \left| L_{\text{sp}jk}^{(q)} U_k^{(q)} \right|, \left| f_j^{(q)} \right| \right\}, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{N}_i. \quad (6.19)$$

Le cas $U_k^{(q)} = f_j^{(q)} = 0$ peut avoir lieu, c'est pourquoi il est nécessaire d'introduire une valeur seuil non-nulle dans la définition de la valeur de référence du résidu, soit :

$$\left| R_j^{(q)} \right|^{\text{ref}} = \max \left\{ \max_k \left| L_{\text{sp}jk}^{(q)} U_k^{(q)} \right|, \left| f_j^{(q)} \right|, \text{SEUIL} \right\}, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{N}_i. \quad (6.20)$$

La valeur de SEUIL est fixée de telle façon que le produit $\text{SEUIL} \times C_{\text{Tol}}$ ne soit pas inférieur au plus petit nombre TINY admis par la représentation des nombres à virgule flottante choisie. La valeur de ϵ étant une valeur raisonnable, on utilise :

$$\text{SEUIL} = \text{TINY}/\epsilon. \quad (6.21)$$

En pratique : de la définition du critère de convergence dépendent la précision des solutions calculées et l'optimisation du coût de calcul des procédures de relaxation. Un critère trop lâche entraîne une perte de précision tandis qu'un critère trop contraignant peut conduire à un nombre excessif d'itérations d'une procédure de relaxation. Le critère adopté précédemment (Lombard (2008), éq. 3.83) avait montré la nécessité d'une détection de la saturation des résidus, telle qu'elle est rappelée en (3.64), afin de limiter le nombre d'itérations des relaxations. Ceci nous a incité à reconsidérer la définition d'un critère de convergence adapté aux équations qui doivent être traitées.

Les systèmes d'équations discrètes que l'on doit résoudre dans le cadre de la méthode de la matrice d'influence (éqs. 3.80 et 3.81) s'écrivent de manière générique sous la forme du système linéaire (3.43). Dans cette équation, le vecteur second membre $\mathbf{f}$ peut être nul ou prendre des valeurs arbitrairement petites. C'est notamment le cas lors de l'introduction de perturbations par le biais des conditions aux limites à partir de conditions initiales en perturbation identiquement nulles. L'expression (6.20) retenue pour la valeur de référence du résidu dans le critère de convergence (6.18) avec le choix de (6.21) pour la valeur de SEUIL, a l'avantage de garantir une valeur relative maximale du résidu à la convergence qui est constante pour la gamme d'ordre de grandeur de $\mathbf{U}$ la plus large possible. L'évaluation de :

$$\max_k \left| L_{\text{sp}jk}^{(q)} U_k^{(q)} \right|, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{N}_i, \quad (6.22)$$

dans l'expression (6.20) a cependant l'inconvénient d'être coûteuse en temps de calcul si elle est menée à chaque itération q . Pour cette raison, l'expression (6.20) de la valeur de référence du résidu n'est effectivement calculée à l'itération courante q que lorsque le critère (6.18) est vérifié mais avec, à la place de (6.20), l'expression suivante :

$$\left| R_j^{(q)} \right|^{\text{ref}} = \max \left\{ \|\mathbf{L}_{\text{sp}}\|_{\text{est}} \|\mathbf{U}^{(q)}\|_{\infty}, |f_j|, \text{SEUIL} \right\}, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{N}_i, \quad (6.23)$$

où $\|\mathbf{L}_{\text{sp}}\|_{\text{est}}$ est une estimation de la norme de l'opérateur $\mathbf{L}_{\text{sp}}$, égale à son rayon spectral, soit le maximum des modules de ses valeurs propres, et où la norme infinie est celle définie en (3.41). On procède ainsi à un nombre limité d'évaluations de (6.22) tout en assurant, lors de la convergence, le strict respect du critère (6.18). Lors de la première évaluation de ce critère (6.18), pour $q = 0$, et seulement à cette occasion, on utilise comme valeur de référence $\left|R_j^{(0)}\right|^{\text{ref}}$, soit son expression (6.20) si $\|\mathbf{U}\|_{\infty} \neq 0$, soit la formule :

$$\left|R_j^{(0)}\right|^{\text{ref}} = \max \{ \|\mathbf{L}_{\text{sp}}\|_{\text{est}}, |f_j|, \text{SEUIL} \}, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{N}_i. \quad (6.24)$$

Ce travail sur la définition de la valeur de référence a permis de tenir compte des propriétés de la matrice de l'opérateur dans le déroulement de la relaxation. Le tableau (6.1) répertorie, pour un calcul de perturbations limité à un pas de temps dans le cas d'une conduction radiative $(m, n) = (-2, 13/2)$, le nombre d'itérations nécessaires à la procédure de relaxation pour obtenir une solution aux trois sous-problèmes élémentaires de la méthode de la matrice d'influence (3.79).

6.2.2 Calcul dynamique du paramètre de relaxation α_{opt}

La procédure de relaxation utilisée au cours de ce travail de thèse, expliquée dans le chapitre relatif aux méthodes numériques, utilise, dans le cas du système aux perturbations, l'accélération de Chebyshev (3.58). Le paramètre α_{opt} joue un rôle important dans cette procédure puisqu'il intervient directement dans la vitesse de convergence de la solution vers la solution exacte. La méthode de relaxation utilisée auparavant (Lombard (2008), Sec. 3.3.2) était la relaxation de Richardson avec une valeur constante de α_{relax} prise en général égale à 0,6. Afin d'optimiser l'efficacité de cette procédure de relaxation, et particulièrement de l'accélération de Chebyshev, une amélioration a été apportée à la valeur de ce paramètre.

Principe : le point de départ de ce travail est l'expression de l'opérateur $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$, approximation spectrale de $\mathbf{L}^{r+1}$, définie par (13.24) :

$$\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1} = \mathbf{D}_{\xi}^2 - \sigma^{r+1}, \quad (6.25)$$

où σ^{r+1} est l'opérateur diagonal dont l'expression, donnée par (3.17), dépend :

- du temps t_{r+1} et du coefficient b_r associés à l'étape r du schéma de Runge–Kutta ;
- du pas de temps Δt_p de l'intégration en temps ;
- du nombre d'onde transverse $k_{\perp}$;
- des valeurs, sur le sous-domaine considéré, de $\overline{G}$ et $\overline{\Theta}$.

On remarque que :

1. pour des valeurs de $\overline{G}\overline{\Theta}^n$, Δt_p ou $1/t_{r+1}$ suffisamment petites, l'opérateur diagonal σ^{r+1} peut être dominant par rapport à l'opérateur de dérivée seconde spectrale $\mathbf{D}_{\xi}^2$ qui est plein.
2. le même cas de figure se produit pour des valeurs suffisamment grandes de $t^{2\alpha}k_{\perp}^2 (= \varkappa_{\perp}^2)$ ou de $\overline{G}^{-2}$.

Dans ces deux cas, le préconditionnement défini par (6.5) est particulièrement adapté et on peut s'attendre à ce que les *extrema* m et M des modules des valeurs propres de l'opérateur préconditionné (3.46) soient très proches l'un de l'autre et de l'unité. On peut également prévoir que le taux de convergence de la méthode de relaxation soit des plus élevés si on prend pour le paramètre de relaxation α_{relax} la valeur de $\alpha_{\text{relax}}^{\text{opt}}$ donnée par (3.46). On qualifiera alors l'opérateur $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$ d'opérateur à diagonale dominante. Dans le cas contraire, $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$ sera dit à diagonale non-dominante et le préconditionnement, bien moins adapté, sera moins efficace avec pour conséquence un taux de convergence plus faible. Il en découle que selon :

domaine	type de sous-problème		
	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)
1	14	22	22
2	14	22	22
3	14	22	22
4	14	22	22
5	14	20	20
6	14	21	21
7	13	22	22
8	13	22	22
9	13	22	22
10	14	22	22
11	14	20	20
12	14	21	21
13	13	19	19
14	11	16	16
15	9	14	14
16	7	10	10
17	6	9	9
18	6	9	9
19	5	8	8
20	5	8	8
21	5	8	8
22	5	8	8
23	5	8	8

TABLE 6.1 – Tableau indiquant le nombre d’itérations nécessaires en moyenne pour obtenir les solutions des sous-problèmes élémentaires dans le cas d’un écoulement avec conduction radiative au premier pas en temps. La première colonne parmi les trois de la droite du tableau est propre à la solution du sous-problème élémentaire de la méthode de la matrice d’influence avec second membre définie par (3.80) et les deux dernières colonnes sont liées aux solutions des sous-problèmes élémentaires sans second membre définies par (3.81). On remarque que la convergence des solutions nécessite de moins en moins d’itérations à mesure que l’on se rapproche du front de choc. L’absence de conduction sur la zone sous-choc explique cette baisse du nombre d’itérations en rendant diagonale la matrice de l’opérateur.

- l'écoulement de base qui est traité,
- les zones de l'écoulement,
- l'instant considéré,
- le nombre d'onde de la perturbation choisie,
- l'étape du schéma de Runge–Kutta,

l'opérateur $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$ peut être ou non à diagonale dominante et la méthode de relaxation converger plus ou moins rapidement. Ces constats incitent à particulariser la valeur du paramètre de relaxation α_{relax} selon chaque sous-domaine et selon l'instant t .

Avant le processus itératif : on détermine au cours du premier pas de temps, que l'on associe à t_{ref} , d'une exécution de RAMSES, pour chaque domaine et pour chaque étape r du schéma de Runge–Kutta :

1. le rayon spectral de l'opérateur diagonal σ^{r+1} , soit $\rho(\sigma^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}$,
2. le rayon spectral de l'opérateur $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$, soit $\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}$,
3. les *extrema* m et M des modules des valeurs propres de l'opérateur préconditionné (3.46).

Les valeurs de $\rho(\sigma^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}$ et $\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}$ sont comparées afin de déterminer si $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$ peut être considéré à diagonale dominante ou non, en l'occurrence :

$$|\rho(\sigma^{r+1})|_{t_{\text{ref}}} - \rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}| \begin{cases} \leq 0,1 \rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}, & \text{diagonale dominante.} \\ > 0,1 \rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}, & \text{diagonale non-dominante.} \end{cases} \quad (6.26)$$

Les calculs correspondants aux déterminations en 2) et 3) ci-dessus étant coûteux, on vise à ne les mener que lorsque c'est nécessaire. Toutes les valeurs obtenues, y compris celles de (6.26) sont stockées pour pouvoir être réutilisées au cours du calcul. En particulier, pour chacune des exécutions ultérieures de la méthode de relaxation, et pour une étape r du schéma de Runge–Kutta :

- Les valeurs de m et M sont utilisées pour calculer la valeur optimale du paramètre de relaxation $\alpha_{r+1}^{\text{opt}}$ qui est assignée à $\alpha_{r+1}^{\text{relax}}$,
- La valeur de $\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}$ est utilisée comme valeur de $\|\mathbf{L}_{\text{sp}}\|_{\text{est}}$ dans (6.23),(6.24).

Pendant le processus itératif : on calcule à chaque temps t_r et pour chaque domaine, la valeur de $\rho(\sigma^{r+1})|_{t_r}$. On compare alors cette valeur à $\rho(\sigma^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}$ en distinguant les cas de figure suivants :

1. $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$ est à diagonale dominante.

(a) Si :

$$|\rho(\sigma^{r+1})|_{t_r} - \rho(\sigma^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}| \geq 0,1 \rho(\sigma^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}, \quad (6.27)$$

alors on calcule $\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_r}$ et on évalue, avec ces nouvelles valeurs, le statut de $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$ selon (6.26). On a alors deux possibilités :

- i. $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$ est toujours à diagonale dominante On considère alors que les valeurs stockées de m et M sont toujours pertinentes.
- ii. $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$ n'est plus à diagonale dominante On procède à un nouveau calcul des extremas m et M et à la mise à jour suivante :

$$\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_{\text{ref}}} = \rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_r}. \quad (6.28)$$

Enfin, les mises à jour suivantes sont effectuées :

$$\begin{aligned}\rho(\sigma^{r+1})|_{t_{\text{ref}}} &= \rho(\sigma^{r+1})|_{t_r}, \\ ||\mathbf{L}_{\text{sp}}||_{\text{est}} &= \rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_r}.\end{aligned}\tag{6.29}$$

- (b) Dans le cas contraire, la variation de $\rho(\sigma^{r+1})$ ne nécessite pas une actualisation de $\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})$, m , M et du statut diagonale dominante de $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$. En revanche, on tient compte de cette variation dans $||\mathbf{L}_{\text{sp}}||_{\text{est}}$:

$$||\mathbf{L}_{\text{sp}}||_{\text{est}} = \rho(\sigma^{r+1})|_{t_r}.\tag{6.30}$$

2. $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$ est à diagonale non-dominante.

- (a) Si :

$$|\rho(\sigma^{r+1})|_{t_r} - \rho(\sigma^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}| \geq 0,1 \rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_{\text{ref}}},\tag{6.31}$$

alors on calcule $\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_r}$.

- i. Si :

$$|\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_r} - \rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_{\text{ref}}}| \geq 0,1 \rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_{\text{ref}}},\tag{6.32}$$

alors on procède au calcul de m et M et à la mise à jour :

$$\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_{\text{ref}}} = \rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_r}.\tag{6.33}$$

- ii. Dans le cas contraire, la variation de $\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})$ ne nécessite pas une actualisation de m et M .

On évalue le statut de $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$ selon (6.26) avec les valeurs de $\rho(\sigma^{r+1})|_{t_r}$ et $\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})|_{t_r}$, et on complète par les mises à jour (6.29).

- (b) Dans le cas contraire, la variation de $\rho(\sigma^{r+1})$ ne nécessite pas une actualisation de $\rho(\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1})$, m , M et du statut diagonale non-dominante de $\mathbf{L}_{\text{sp}}^{r+1}$.

Ce calcul justifié du paramètre α_{opt} permet une convergence plus rapide de la solution vers la solution exacte. Les tests montrent que cette accélération du processus compense largement le temps de calcul passé à recalculer les valeurs propres de la matrice de l'opérateur. Le tableau (6.2) est issu d'un calcul de perturbations dans le cas de la conduction radiative avec une distribution de 23 domaines de 50 points, dans le cadre de l'approximation de choc parfait. On remarque grâce au tableau (6.2) que l'utilisation de la formule (6.6) donne des paramètres de relaxation α_{opt} proches de 1. Le préconditionnement remplit donc parfaitement son rôle qui consiste à resserrer le spectre de la matrice. On remarque également que l'opérateur est à diagonale dominante sur les domaines les plus proches du choc. Cela est dû à la faible conduction dans la zone sous-choc. Le cas d'étude étant le même que celui illustré par le tableau (6.1), il est aisé de se rendre compte que les domaines sur lesquels la matrice de l'opérateur est à diagonale dominante voient la résolution être plus rapide. Cela confirme le bien-fondé de nos modifications et les améliorations au niveau du temps de calcul qui en découlent.

6.2.3 Conditions initiales des sous-problèmes élémentaires de la méthode de la matrice d'influence

La méthode de la matrice d'influence, utilisée pour la résolution de l'équation de la température et détaillée dans la partie (3.5.1) de ce mémoire, a subi elle aussi certaines modifications pour améliorer les performances générales de l'outil numérique.

domaine	diagonale dominante			α_{opt}		
	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$
1	F	F	F	1,114	1,117	1,111
2	F	F	F	1,112	1,115	1,108
3	F	F	F	1,108	1,112	1,103
4	F	F	F	1,101	1,106	1,095
5	F	F	F	1,086	1,091	1,078
6	F	F	F	1,108	1,111	1,102
7	F	F	F	1,119	1,122	1,118
8	F	F	F	1,132	1,137	1,124
9	F	F	F	1,127	1,133	1,120
10	F	F	F	1,114	1,116	1,110
11	F	F	F	1,069	1,076	1,062
12	F	F	F	1,083	1,088	1,076
13	F	F	F	1,060	1,066	1,053
14	F	F	F	1,040	1,045	1,034
15	F	F	F	1,025	1,028	1,020
16	F	F	F	1,007	1,009	1,005
17	V	V	V	1,004	1,004	1,003
18	V	V	V	1,003	1,003	1,002
19	V	V	V	1,002	1,002	1,001
20	V	V	V	1,002	1,002	1,001
21	V	V	V	1,002	1,002	1,001
22	V	V	V	1,002	1,002	1,001
23	V	V	V	1,002	1,002	1,001

TABLE 6.2 – Tableau illustrant le caractère diagonal ou non de la matrice de l'opérateur spectral et de la valeur du paramètre optimal de relaxation α_{opt} dans le cas d'un écoulement avec conduction radiative et d'une distribution de 23 domaines de 50 points. Les triplets de colonnes représentent les trois étapes du schéma de Runge–Kutta. Les cas pour lesquels la matrice de l'opérateur est à diagonale dominante sont désignés par la lettre V (vrai). Inversement, les matrices qui ne le sont pas sont désignés par la lettre F (faux). Le critère utilisé pour déterminer si la matrice est à diagonale dominante est défini en (6.26).

Le schéma de Runge–Kutta utilisé étant un schéma à trois étapes (Annexe C), à chaque pas de temps et pour chaque solution de sous-problème élémentaire, présentées dans (3.79), la procédure de relaxation est effectuée trois fois. Au lieu d’initialiser ces solutions sur chaque domaine avec leurs valeurs arbitraires du début de l’étude :

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{U}}^{(0)}|_{t_p}^r &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}_1^{(0)}|_{t_p}^r &= {}^\top(1 \ 3/5 \ 1/3 \ 1/10 \ 0 \ \dots \ 0), \\ \mathbf{U}_2^{(0)}|_{t_p}^r &= {}^\top(0 \ \dots \ 0 \ 1/10 \ 1/3 \ 3/5 \ 1),\end{aligned}\tag{6.34}$$

pour chaque passage dans la procédure de la matrice d’influence, et donc de ne pas profiter des avancées vers la solution exacte effectuées lors des passages précédents, il est préférable de tenir compte des résultats précédents.

C’est pourquoi une nouvelle procédure d’initialisation de ces solutions a été introduite. Cette nouvelle façon de faire consiste à initialiser la valeur de chaque solution de sous-problème, pour un pas de temps et une étape de Runge–Kutta spécifiques, sur un domaine précis, à l’aide des valeurs de cette même solution au moment de l’état final, après relaxation, à la même étape de Runge-Kutta au pas de temps précédent. La nouvelle initialisation se résume à :

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{U}}^{(0)}|_{t_p}^r &= \overline{\mathbf{U}}^{i*}|_{t_{p-1}}^r, \\ \mathbf{U}_1^{(0)}|_{t_p}^r &= \mathbf{U}_1^{i*}|_{t_{p-1}}^r, \\ \mathbf{U}_2^{(0)}|_{t_p}^r &= \mathbf{U}_2^{i*}|_{t_{p-1}}^r,\end{aligned}\tag{6.35}$$

où l’exposant * identifie les solutions obtenues à la convergence de la méthode de relaxation. La vitesse de convergence de la solution est ainsi améliorée. Les tableaux 6.3 et 6.4, qui recensent les nombres moyens d’itérations pour arriver à convergence des solutions des sous-problèmes élémentaires pour un nombre élevé de pas de temps (4 millions pour le cas $k_\perp = 0$ et 12 millions pour le cas $k_\perp = 1$) illustrent cette rapidité de convergence. On observe que pour les deux cas, la convergence des solutions aux sous-problèmes sans second membre est quasiment immédiate. Par rapport au tableau 6.1, ces résultats indiquent un véritable progrès dans l’efficacité de la procédure de relaxation.

Au cours de ce chapitre, les modifications réalisées sur les procédures importantes de l’algorithme, et notamment la procédure de relaxation, la plus coûteuse en temps de calcul, sont expliquées en détail. Le résultat de ces nouvelles manipulations est très parlant. Si pour chaque domaine, avant ces améliorations, la relaxation nécessitait de 15 à 40 itérations par domaine pour arriver à convergence de la solution (Lombard (2008), Fig. 3.5), entre 4 et 15 sont désormais nécessaires. Le gain sur le temps de calcul atteint, avec toutes ces modifications, un facteur 20. À ce stade, une meilleure résolution spatiale et donc le traitement d’écoulements plus raides devient envisageable dans la configuration de choc parfait et de précurseur thermique négligeable. C’est le sujet de la prochaine partie de ce mémoire.

domaine	type de sous-problème		
	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)
1	9,1	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$
2	9,2	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$
3	9,2	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$
4	9,2	$5,2 \cdot 10^{-6}$	$5,3 \cdot 10^{-6}$
5	9,2	$4,8 \cdot 10^{-6}$	$4,7 \cdot 10^{-6}$
6	9,6	$5,2 \cdot 10^{-6}$	$5,3 \cdot 10^{-6}$
7	9,5	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$
8	9,4	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$
9	9,9	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$
10	9,4	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$
11	9,5	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$
12	9,6	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$
13	6,1	$3,3 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-6}$
14	7,0	$3,8 \cdot 10^{-6}$	$3,8 \cdot 10^{-6}$
15	5,9	$3,3 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-6}$
16	4,4	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$
17	3,9	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-6}$
18	3,8	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$
19	3,3	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$
20	3,3	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$
21	3,3	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$
22	3,3	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$
23	3,3	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$

TABLE 6.3 – Tableau indiquant le nombre d'itérations nécessaires en moyenne pour obtenir les solutions des sous-problèmes élémentaires dans le cas d'un écoulement avec conduction radiative au bout de $4 \cdot 10^6$ de pas de temps pour $k_{\perp} = 0$. La première colonne parmi les trois de la droite du tableau est propre à la solution du sous-problème élémentaire de la méthode de la matrice d'influence avec second membre définie par (3.80) et les deux dernières colonnes sont liées aux solutions des sous-problèmes élémentaires sans second membre définies par (3.81). On remarque que le nombre d'itérations est de manière générale décroissant en s'approchant du front de choc. La raison de cette tendance est l'absence de conduction sur la zone sous-choc.

domaine	type de sous-problème		
	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)
1	9,0	0,73	0,59
2	9,0	0,59	0,46
3	9,0	0,45	0,36
4	9,0	0,35	0,23
5	8,7	0,24	0,11
6	9,0	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$9,8 \cdot 10^{-3}$
7	9,0	$6,8 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$
8	8,7	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$6,0 \cdot 10^{-4}$
9	8,0	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$
10	8,3	$1,9 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}
11	9,0	10^{-4}	$7,1 \cdot 10^{-5}$
12	8,3	$7,3 \cdot 10^{-5}$	$6,8 \cdot 10^{-5}$
13	5,7	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$
14	6,7	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
15	5,7	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$
16	4,0	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$
17	3,7	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$
18	3,3	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$
19	3,0	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$
20	3,0	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$
21	3,0	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$
22	3,0	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$
23	3,0	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$

TABLE 6.4 – Tableau indiquant le nombre d’itérations nécessaires en moyenne pour obtenir les solutions des sous-problèmes élémentaires dans le cas d’un écoulement avec conduction radiative au bout de $12 \cdot 10^6$ de pas de temps pour $k_{\perp} = 1$. La première colonne parmi les trois de la droite du tableau est propre à la solution du sous-problème élémentaire de la méthode de la matrice d’influence avec second membre définie par (3.80) et les deux dernières colonnes sont liées aux solutions des sous-problèmes élémentaires sans second membre définies par (3.81). Comme pour le cas $k_{\perp} = 0$, le nombre d’itérations décroît à l’approche du front de choc.

Troisième partie

Conduction radiative sans précurseur thermique

Le LMJ, en construction à Bordeaux, est prévu pour fonctionner en attaque indirecte. C'est pourquoi l'étude de la conduction radiative présente beaucoup d'intérêt. En effet, dans le cas de l'attaque indirecte, le rayonnement X implique un transport important de photons. Le modèle utilisé pour traiter le cas de la conduction radiative est inspiré du modèle de gaz totalement ionisé de Kramers (Zel'dovich et Raizer (1967), Vol.1, Chap.V, parag. 3). L'approximation utilisée, pour laquelle la pression radiative P_{rad} et l'énergie radiative E_{rad} sont négligeables, ne peut être effectuée que sous certaines conditions. Tout d'abord, il faut que le matériau soit opaque, comme l'est l'ablateur, et la température assez élevée pour que la conduction radiative soit dominante. Toutefois, pour pouvoir négliger P_{rad} et E_{rad} , la température ne peut pas être trop élevée.

Au cours des travaux précédents, le code de calcul RAMSES utilisé dans ce projet a permis de traiter un certain nombre d'écoulements. Une approximation de choc parfait a été prise en compte et plusieurs configurations d'écoulements ont pu être analysées. Cependant, les études de stabilité avec l'introduction de perturbations linéaires se sont concentrées sur le cas de la conduction électronique (Boudesocque-Dubois, 2000; Clarisse *et al.*, 2008; Lombard, 2008). Lombard (2008) a néanmoins étudié deux écoulements radiatifs. Les conditions aux limites de ces écoulements étaient déterminés à partir d'implosions de cibles MégaJoule. Ces deux écoulements étaient remarquables par leur grande raideur. Mais les calculs de perturbation effectués au cours de ce travail l'avaient été pour des écoulements avec conduction électronique. L'objectif est ici de reproduire le même type de résultats en conduction radiative. Les résultats obtenus par Vauvy (2007) constituent une base importante de notre travail. En effet, celui-ci a effectué un travail rigoureux sur l'étude de la conduction radiative. Il a répertorié de nombreux résultats de calcul de l'écoulement de base dans ce cas de figure. En comparant les comportements des profils des quantités en fonction des valeurs des différents paramètres physiques, particulièrement les valeurs à l'origine de la pression et du flux thermique, son étude est précieuse pour envisager le calcul de perturbations en conduction radiative. Nous allons voir que les contraintes numériques ne nous permettent pas, dans le cadre de cette thèse, de traiter les écoulements avec des raideurs trop importantes. Cependant, l'aspect physique de notre étude n'en pâtit pas puisque la conduction radiative que nous prenons en compte est une approximation bien plus raide que la réalité. Ce modèle a toutefois un intérêt scientifique certain, comme l'ont montré Saillard *et al.* (2010).

Il est important de bien choisir les configurations d'écoulements que l'on décide de traiter. Dans les études réalisées en conduction électronique, des résultats ont été obtenus avec l'analyse d'un écoulement subsonique par rapport au front d'ablation et d'un second, supersonique (Lombard, 2008). Ces études ont effectivement montré que dans le cas supersonique, la perturbation en $k_{\perp} = 0$ est la plus amplifiée. Dans le cas subsonique, au contraire, il existe un $k_{\perp}$ non-nul pour lequel l'amplification est maximale. Connaissant ce résultat, il est tentant de savoir s'il est valable en conduction radiative. Ainsi, deux configurations d'écoulement sont étudiées, afin d'analyser à la fois le cas subsonique et le cas supersonique avec, pour chacun, la distinction entre $k_{\perp} = 0$ et $k_{\perp}$ non-nul.

Chapitre 7

Discussion sur les écoulements radiatifs

Dans le cadre des expériences du LMJ, il est question d'attaque indirecte et donc de conduction à dominante radiative. Le modèle utilisé pour le cas de la conduction radiative est constitué du modèle de gaz totalement ionisé de Kramers (Zel'dovich et Raizer, 1967) et de l'approximation de la diffusion pour le rayonnement, conséquence de l'équilibre thermodynamique local (Zel'dovich et Raizer, 1967). Les constantes m et n valent alors respectivement -2 et $13/2$. Ce modèle ne reflète pas exactement la réalité par rapport aux installations du LMJ ou du NIF mais Saillard *et al.* (2010) montrent que les données issues d'un tel modèle sont pertinentes pour les implosions en attaque indirecte. Les auteurs donnent également des résultats quantitatifs tels que la vitesse moyenne d'implosion ou la puissance d'ablation.

Si l'outil numérique, dans l'état où il se trouvait à l'aube de cette thèse, permettait de traiter des configurations d'écoulements sans précurseur thermique et dans le cadre de la conduction électronique, avec des raideurs de l'ordre de 10^{-4} pour les cas les plus raides (Boudesocque-Dubois *et al.*, 2013), les modifications apportées à cet outil permettent désormais de traiter des écoulements soumis à la conduction radiative avec un temps de calcul raisonnable. La raideur exige tout de même un compromis, les raideurs extrêmes étant toujours très difficiles à atteindre. Le travail de Vauvy (2007) permet de disposer d'un éventail de combinaisons de paramètres pour lesquelles les profils des quantités de base sont connus. Le travail effectué au cours de ce chapitre consiste à déterminer les écoulements que nous allons choisir afin d'effectuer une étude des perturbations linéaires. Nous avons choisi de traiter deux types d'écoulements, à savoir un écoulement supersonique par rapport au front d'ablation et un autre qui soit subsonique par rapport au front. Le travail préalable au choix de ces écoulements a consisté à faire des rapports de longueurs caractéristiques de manière systématique, en naviguant dans les résultats de Vauvy (2007), pour déterminer les caractéristiques de ces écoulements, telle la raideur. Afin d'expliquer les raisons qui nous ont guidés dans notre choix des configurations retenues, une analyse rapide des écoulements de base de configurations avec conduction radiative est importante. Pour cela, de nombreuses grandeurs caractéristiques doivent être définies.

7.1 Définition des grandeurs caractéristiques

Avant de commencer à analyser les écoulements avec une conduction radiative, il est préférable de donner les définitions ainsi que les expressions des diverses grandeurs qui permettent de décrire et de caractériser un écoulement de base autosemblable. L'écoulement de base représenté par la

Point particulier	Caractérisation
ξ_0	Origine
ξ_T	Minimum de la longueur de gradient en température
ξ_ρ	Minimum de la longueur de gradient en densité
ξ_a	Maximum en densité
ξ_{fc}	Position du front de choc
ξ_f	Paramètre numérique de la méthode d'intégration

TABLE 7.1 – Tableau récapitulatif des points particuliers rencontrés dans le cas de l'étude de la conduction radiative avec l'approximation « choc parfait ». La deuxième colonne du tableau contient la caractérisation de chacun de ces points particuliers.

figure 1.5 est composé de quatre régions distinctes. Il s'agit de la zone de conduction, la zone d'ablation, la zone sous-choc et la zone au repos, en amont du choc. Dans la zone d'ablation se trouve l'onde de déflagration, que l'on appelle front d'ablation dans ce mémoire. La position de ce front d'ablation, notée ξ_T , est identifiée par le lieu du minimum de la longueur de gradient en x en température. La définition des longueurs caractéristiques et des nombres sans dimension utilisés permettra de disposer des outils nécessaires à cette étude.

7.1.1 Points particuliers

Plusieurs points particuliers sont présents dans cette configuration d'écoulement. Le plus évident, qui est commun à tous les écoulements est le point situé à l'origine, soit en $\xi = 0$ et noté ξ_0 . La zone d'ablation comprend également trois points particuliers. Le point localisé en ξ_T , dont nous avons déjà parlé, caractérise le minimum de la longueur de gradient en température. On note également ξ_ρ le point où se situe le minimum de la longueur de gradient en densité et ξ_a celui sur lequel on trouve le maximum en densité. Les tracés des quantités de l'écoulement de base (Fig. 7.2) révèlent la présence d'un front continu que l'on considère comme provoqué par un front de température et que l'on situe à l'aide du point particulier ξ_T . Mais il s'agit également d'un front de masse volumique que l'on pourrait caractériser à l'aide du point localisé en ξ_ρ . Un choix est nécessaire car ces deux options possibles peuvent donner, dans certains cas, des caractérisations très différentes. ξ_T nous servira donc de référence pour la suite de cette étude. La méthode numérique pour obtenir une première approximation de la solution de base (Boudesocque-Dubois *et al.*, 2013) utilise le paramètre numérique ξ_f qui détermine la forme de cette approximation. Le couple (ξ_f, ξ_{fc}) est directement lié à la solution numérique, par opposition au couple des valeurs à l'origine de la pression et du flux thermique $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ qui fait référence à la solution physique. Pour relier entre eux ces deux couples, on peut construire un abaque (Vauvy, 2007; Boudesocque-Dubois *et al.*, 2008). L'ensemble des points caractéristiques évoqués dans ce paragraphe est réuni dans le tableau récapitulatif 7.1.

7.1.2 Position d'un point et longueurs caractéristiques

La position d'un point à ξ fixé ($\xi = \xi_d$), correspondant au point de coordonnée lagrangienne $m = \xi_d t^\alpha$, est définie par $\bar{x}_d$ dans le repère du laboratoire avec :

$$x(m = \xi_d t^\alpha, t^\alpha) = \bar{x}_d(t). \quad (7.1)$$

Pour déterminer l'expression de $\bar{x}_d$, la vitesse du point considéré dans le repère du laboratoire est exprimée, puis intégrée en temps (Abeguilé, 2004). On obtient ainsi :

$$\bar{x}_d(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha} \left(\frac{\alpha \xi_d}{\bar{G}(\xi_d)} + \bar{V}_x(\xi_d) \right) + \bar{x}(0, 0). \quad (7.2)$$

Finalement, en utilisant l'abscisse réduite $\bar{X}$ (A.12), on peut écrire :

$$\bar{x}_d(t) = t^\alpha \bar{X}(\xi_d) + \bar{x}(0, 0). \quad (7.3)$$

La longueur l_{de} entre deux points ξ_d et ξ_e est donc donnée par :

$$\begin{aligned} l_{de} &\equiv x(m = \xi_e t^\alpha, t^\alpha) - x(m = \xi_d t^\alpha, t^\alpha), \\ &= \frac{t^\alpha}{\alpha} \left(\frac{\alpha \xi_e}{\bar{G}(\xi_e)} + \bar{V}_x(\xi_e) \right) - \frac{t^\alpha}{\alpha} \left(\frac{\alpha \xi_d}{\bar{G}(\xi_d)} + \bar{V}_x(\xi_d) \right), \\ &= t^\alpha (\bar{X}(\xi_e) - \bar{X}(\xi_d)), \\ &\equiv t^\alpha L_{de}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Grâce à la relation (7.4), nous sommes capables de définir un certain nombre de longueurs caractéristiques utiles pour décrire l'écoulement. Dans toutes ces expressions, l désigne une longueur et L la variable réduite associée. Les longueurs caractéristiques utiles sont les suivantes (Lombard, 2008; Boudesocque-Dubois *et al.*, 2008) :

- la longueur totale : distance entre l'origine et le pied du front thermique :

$$\begin{aligned} l_{TOT} &= |\bar{x}(\xi_{ft}) - \bar{x}(0)|, \\ &= t^\alpha L_{TOT}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

- la longueur caractéristique du front d'ablation : distance définie à partir du gradient de température :

$$\begin{aligned} l_{\nabla T} &= \min \left[\left| \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right|^{-1} \right], \\ &= t^\alpha \min \left[\left| \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi} \right|^{-1} \frac{\bar{\Theta}}{\bar{G}} \right], \\ &= t^\alpha L_{\nabla T}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

La raideur de la solution est définie par le rapport entre la longueur du front d'ablation et la longueur totale de l'écoulement¹.

- la longueur de conduction : distance entre l'origine et le front d'ablation localisé en ξ_T :

$$\begin{aligned} l_{COND} &= |\bar{x}(\xi_T) - \bar{x}(0)|, \\ &= t^\alpha L_{COND}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

- la longueur de la zone sous-choc : distance entre le front d'ablation et l'onde de choc :

$$\begin{aligned} l_{SSC} &= |\bar{x}(\xi_{fc}) - \bar{x}(\xi_T)|, \\ &= t^\alpha L_{SSC}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Les longueurs caractéristiques évoluent toutes à la manière de t^α . On définit la dilatation de l'écoulement entre un instant initial t_i et un temps quelconque t comme :

$$\mathcal{D} = \left(\frac{t}{t_i} \right)^\alpha. \quad (7.9)$$

1. Plus le rapport $L_{\nabla T}/L_{TOT}$ est petit, plus la raideur est grande.

7.1.3 Vitesse et accélération

Au cours du processus, de la matière est advectée à travers le front d'ablation à une vitesse $\bar{v}_a(m, t)$, communément appelée vitesse d'ablation. Cette vitesse est un des éléments caractéristiques d'un front d'ablation, au même titre, par exemple, que le flux de masse à travers un front d'évaporation ou un front de choc. Cette vitesse joue un rôle majeur dans la maîtrise du mécanisme d'ablation pour mettre en vitesse un matériau, et par conséquent dans le processus d'implosion d'une cible FCI par ablation. Elle est considérée comme un facteur d'amortissement ou de stabilisation des écoulements d'ablation (Bodner, 1974; Takabe *et al.*, 1983, 1985; Piriz *et al.*, 1997). Pour évaluer cette vitesse, il est indispensable de connaître l'expression de la vitesse du front d'ablation. On définit en ξ_T la vitesse matière relative au front par :

$$\begin{aligned}\bar{v}_{Tx}(m, t) &\equiv \bar{v}_x(m, t) - \left(\frac{\partial x}{\partial t}(m = \xi t^\alpha, t) \right)_{\xi_T}, \\ &= t^{\alpha-1} \left(\bar{V}_x(\xi) - \bar{V}_x(\xi_T) - \alpha \frac{\xi_T}{\bar{G}(\xi_T)} \right), \\ &\equiv t^{\alpha-1} \bar{V}_T(\xi).\end{aligned}\tag{7.10}$$

On peut donc exprimer la vitesse d'ablation de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\bar{v}_a(t) &= t^{\alpha-1} \left(-\alpha \frac{\xi_T}{\bar{G}(\xi_T)} \right), \\ &\equiv t^{\alpha-1} \bar{V}_a.\end{aligned}\tag{7.11}$$

Dans le cas général, l'accélération matérielle s'écrit :

$$\begin{aligned}\bar{a}_x(m, t) &\equiv \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}_x(m, t), \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (t^{\alpha-1} \bar{V}_x) |_{m=\text{cste}}, \\ &= t^{\alpha-2} \left((\alpha-1) \bar{V}_x - \alpha \xi \frac{d\bar{V}_x}{d\xi} \right), \\ &\equiv t^{\alpha-2} \bar{A}(\xi).\end{aligned}\tag{7.12}$$

L'accélération du front d'ablation, pour sa part, s'écrit :

$$\begin{aligned}\bar{a}_a(t) &\equiv (\alpha-1) t^{\alpha-2} \left(\alpha \frac{\xi_T}{\bar{G}(\xi_T)} + \bar{V}_x(\xi_T) \right), \\ &\equiv t^{\alpha-2} \bar{A}_a.\end{aligned}\tag{7.13}$$

7.1.4 Nombres sans dimension

Pour caractériser les différentes zones de l'écoulement, trois nombres sans dimension sont utilisés. Il s'agit du nombre de Mach M , du nombre de Froude Fr et du nombre de Péclet Pe . Il convient de donner les définitions retenues pour ces trois nombres (Boudesocque-Dubois *et al.*, 2008).

Le nombre de Mach : caractérise les effets de la compressibilité dans l'écoulement. On définit ainsi dans le repère de référence un nombre de Mach par le rapport entre la vitesse relative au front et la vitesse du son isentropique, soit par :

$$M = \frac{\bar{v}_{Tx}}{\bar{c}_S} = \frac{|\bar{V}_T(\xi)|}{\sqrt{\gamma \bar{\Theta}(\xi)}},\tag{7.14}$$

avec $\bar{c}_S$ la vitesse du son isentropique.

On peut également définir un nombre de Mach M_{abs} basé sur la vitesse du fluide dans la direction de l'écoulement $\bar{v}_x$. Celui-ci s'exprime par :

$$M_{\text{abs}} = \frac{\bar{v}_x}{\bar{c}_S} = \frac{|\bar{V}_x(\xi)|}{\sqrt{\gamma \bar{\Theta}(\xi)}}. \quad (7.15)$$

Le nombre de Froude : mesure les effets relatifs de l'inertie et de la gravité. On le définit avec :

$$Fr = \frac{\bar{v}_{Tx}}{\sqrt{g l}} = \frac{|\bar{V}_T(\xi)|}{\sqrt{\bar{A}(\xi) L(\xi)}}. \quad (7.16)$$

Dans cette expression, L peut être l'une des trois longueurs suivantes (Boudesocque-Dubois *et al.*, 2008) :

- le minimum de la longueur de gradient de température : $L_{\nabla T}$ (7.6),
- la longueur de conduction : L_{COND} (7.7),
- la longueur de la zone sous-choc : L_{SSC} (7.8).

Le nombre de Péclet : caractérise les effets relatifs des transferts de chaleur par convection et par diffusion au sein de l'écoulement. Son expression est :

$$Pe = \frac{l \bar{v}_{Tx}}{\kappa \rho C_p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{|L_T \bar{V}_T(\xi)|}{\bar{G}^{m-1}(\xi) \bar{\Theta}^n(\xi)}. \quad (7.17)$$

7.2 Variation des paramètres $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_\varphi$

7.2.1 Abaque

Il existe une dualité entre les quantités physiques $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$, soit les valeurs de la pression et du flux thermique à l'origine, et les paramètres numériques (ξ_f, ξ_{fc}) utilisés par la méthode de résolution. Si la résolution numérique nécessite ces derniers, la définition d'une configuration expérimentale dépend du choix des premières. Un abaque (Fig. 7.1), élaboré au cours du stage de Vauvy (2007) et constitué de plus de 850 écoulements, permet, à partir des valeurs des conditions aux limites $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$, de définir les paramètres (ξ_f, ξ_{fc}) utiles au calcul des solutions. Sur cet abaque, les courbes bleues correspondent à des valeurs constantes de la position ξ_{fc} du choc. Quant aux courbes de couleur orange, elles représentent les isovaleurs de ξ_f . Trois zones sont à distinguer sur cet abaque. Dans un premier temps, on constate que la partie gauche des courbes bleues, pour laquelle les valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$ sont les plus petites, est caractérisé par un plateau quasi-horizontale. Autrement dit, c'est la condition limite de pression qui va déterminer la position du front de choc. La valeur du flux thermique à l'origine influera donc essentiellement sur la position du front d'ablation. Une zone de transition apparaît ensuite. Sur celle-ci, les deux valeurs aux limites que nous considérons varient. Enfin, lorsqu'on atteint les plus grandes valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$, on observe une zone asymptotique. Concernant les isovaleurs de ξ_f , on observe les mêmes zones, moins discernables, et les mêmes commentaires en échangeant $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_\varphi$. Enfin, sur cet abaque est tracée une droite d'équation :

$$\mathcal{B}_p = 0,4437451 \mathcal{B}_\varphi^{0,604794}. \quad (7.18)$$

Cette droite représente les écoulements dont la vitesse à l'origine est nulle et sépare, par conséquent, les écoulements pour lesquels la vitesse à l'origine est positive, au-dessus de cette droite,

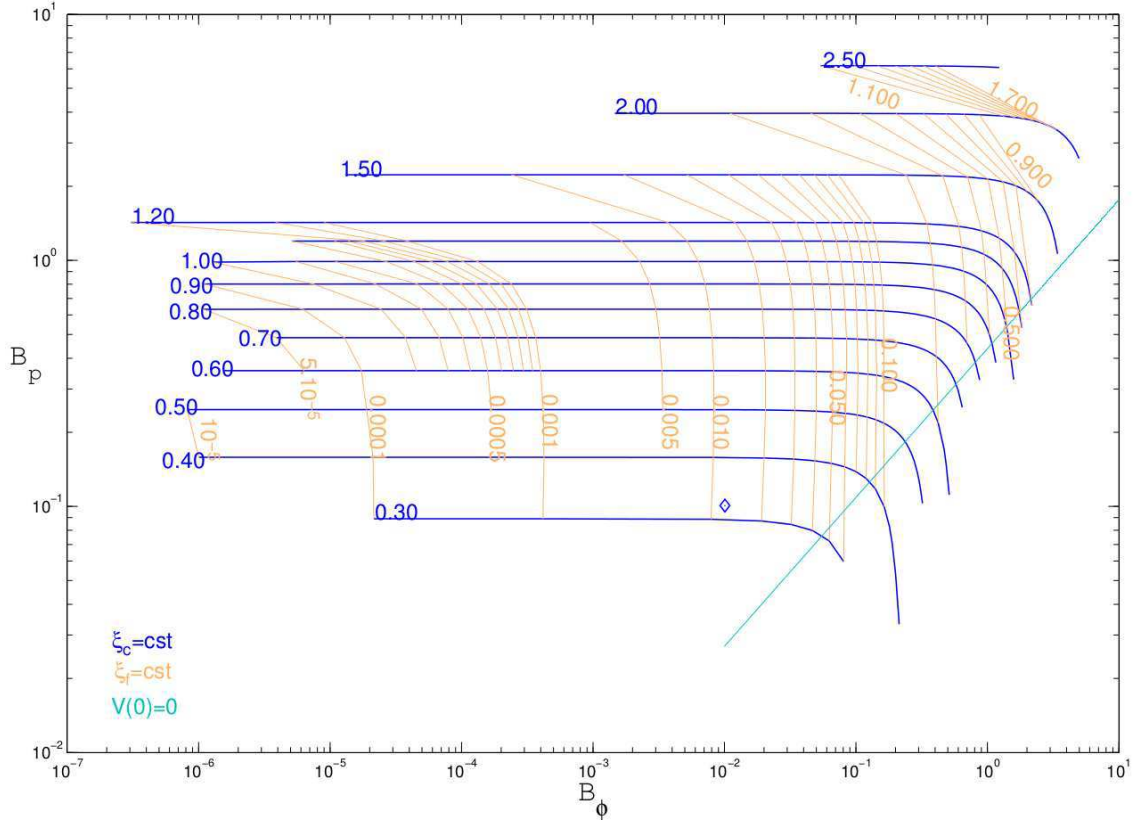


FIGURE 7.1 – Abaque donnant la correspondance entre les paramètres numériques (ξ_f , ξ_{fc}) et les conditions aux limites ($\mathcal{B}_p$, $\mathcal{B}_\varphi$) définissant un écoulement dans le cas de la conduction radiative ($m = -2$, $n = 6,5$) pour un rapport des chaleurs spécifiques constant et égal à $5/3$.

de ceux pour lesquels elle est négative, en dessous.

L'abaque, ainsi construit, est un outil important dans l'étude de la stabilité de tels écoulements. En effet, il renferme pour cela une quantité considérable d'informations. Pour les compléter, la connaissance des tendances d'évolution, en fonction des valeurs des conditions aux limites, des différentes quantités caractérisant les écoulements est incontournable. Afin d'obtenir ces informations, on fixe l'une des deux quantités du couple $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ et les calculs correspondants sont menés pour plusieurs valeurs de la seconde quantité. Les valeurs retenues de ξ_f et de ξ_{fc} pour obtenir des variations intéressantes de $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_\varphi$ l'ont été grâce à l'abaque, de manière à obtenir un nombre raisonnable d'écoulements, soit une dizaine. Si, en fixant la valeur de $\mathcal{B}_\varphi$, de nombreux écoulements sont disponibles, le nombre d'écoulements accessibles pour une valeur de $\mathcal{B}_p$ fixée est limité. Ceci est lié au fait que la représentation en coordonnées logarithmiques occulte le fait que ces plateaux sont constitués de valeurs trop différentes au regard de la précision requise. L'ensemble des écoulements rencontrés au cours de notre analyse, que ce soit en faisant varier $\mathcal{B}_p$ ou $\mathcal{B}_\varphi$, est classé dans le tableau 7.2, qui permet de récapituler les couples $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ et (ξ_f, ξ_{fc}) propres à chacun de ces écoulements.

7.2.2 Variation de la condition limite en pression

Dans cette partie de l'étude, la valeur du flux à l'origine $\mathcal{B}_\varphi$ est fixée et nous faisons varier la condition limite en pression $\mathcal{B}_p$. L'abaque de la figure 7.1 montre que le lieu du front d'ablation et la position ξ_{fc} croissent avec la valeur de la pression appliquée à l'origine. Le tracé des quantités caractéristiques de ce type de configuration d'écoulements (Fig. 7.2) nous permet d'avoir une idée plus précise de l'évolution de celles-ci en fonction de $\mathcal{B}_p$. On y voit notamment que la valeur de la densité $\overline{G}$ au niveau du front de choc ne dépend pas de la valeur de la pression à l'origine. Les relations de Rankine–Hugoniot expliquent cette absence de corrélation. En effet, pour un flux de chaleur faible et une pression nulle en amont du front de choc, comme c'est le cas ici, il s'agit d'une configuration de choc fort et cette valeur dépend exclusivement de γ :

$$\overline{G}(\xi_{fc}) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (7.19)$$

Nous remarquons également que le gradient en densité diminue lorsque la pression à l'origine augmente. Le tracé du flux thermique sur la figure 7.2 montre peu de différences entre les différentes configurations, excepté le tracé de la configuration caractérisée par $\mathcal{B}_p = 3,949$ qui présente une raideur bien moins importante que les autres tracés. On remarque également qu'un transfert de chaleur s'effectue du choc vers l'aval pour l'ensemble des configurations. Le tracé du flux de conduction $\overline{\Phi}_x$ nous apprend enfin que la valeur de cette quantité est négative en amont du front d'ablation pour toutes les configurations illustrées ici.

Le tracé du coefficient de conduction $\overline{G}^{m+1} \overline{\Theta}^n$ (Fig. 7.3) montre des contrastes importants entre les différentes zones de l'écoulement, quelque soit la valeur de $\mathcal{B}_p$, et désigne la zone de détente comme la zone où la conduction est la plus élevée. La pression varie peu dans l'écoulement. Il est donc possible, à partir de la valeur de celle-ci à l'origine, d'avoir une bonne idée de l'ordre de grandeur de la pression dans l'ensemble du matériau. Ces observations sont illustrées par la figure 7.4, regroupant les tracés de quantités de base en fonction de la variable $\overline{X}$, qui permet de visualiser de manière plus concrète la raideur relative des écoulements les uns par rapport aux autres, ou encore de comparer la taille relative des zones caractéristiques des écoulements.

L'évaluation du nombre de Mach utilisant la vitesse relative au front permet de savoir si les écoulements sont supersoniques ou subsoniques par rapport à ce front. Si on considère le nombre de Mach formé à partir de la vitesse relative au front (Fig 7.5), les différentes configurations d'écoulements traitées ici apparaissent subsoniques, sauf le cas de la plus petite valeur de $\mathcal{B}_p$ pour lequel l'écoulement est sonique au voisinage de l'origine. On note au niveau du choc que le nombre de Mach augmente lorsque $\mathcal{B}_p$ diminue. Cela s'explique par la croissance de la température au choc avec $\mathcal{B}_p$, alors que dans le même temps, dans le repère du front d'ablation, la vitesse en ξ_{fc} est quasi-constante. La valeur élevée du nombre de Froude à l'origine indique une prédominance des effets d'inertie. On observe cependant que cette valeur varie considérablement avec la pression à l'origine. De manière générale, il faut noter que les effets d'inertie sont moins influents en aval du front d'ablation. La plus grande valeur de $\mathcal{B}_p$ souligne même une prépondérance des effets d'accélération. Enfin, le nombre de Péclet nous apprend que, dans tous les cas, la conduction thermique est négligeable dans la zone sous-choc. Ce nombre de Péclet atteint son maximum au niveau du front d'ablation, la zone d'ablation est donc susceptible d'être perturbée par des instabilités d'origine thermique, ce qui confirme les observations que nous avons faites du tracé du coefficient de conduction en figure 7.3.

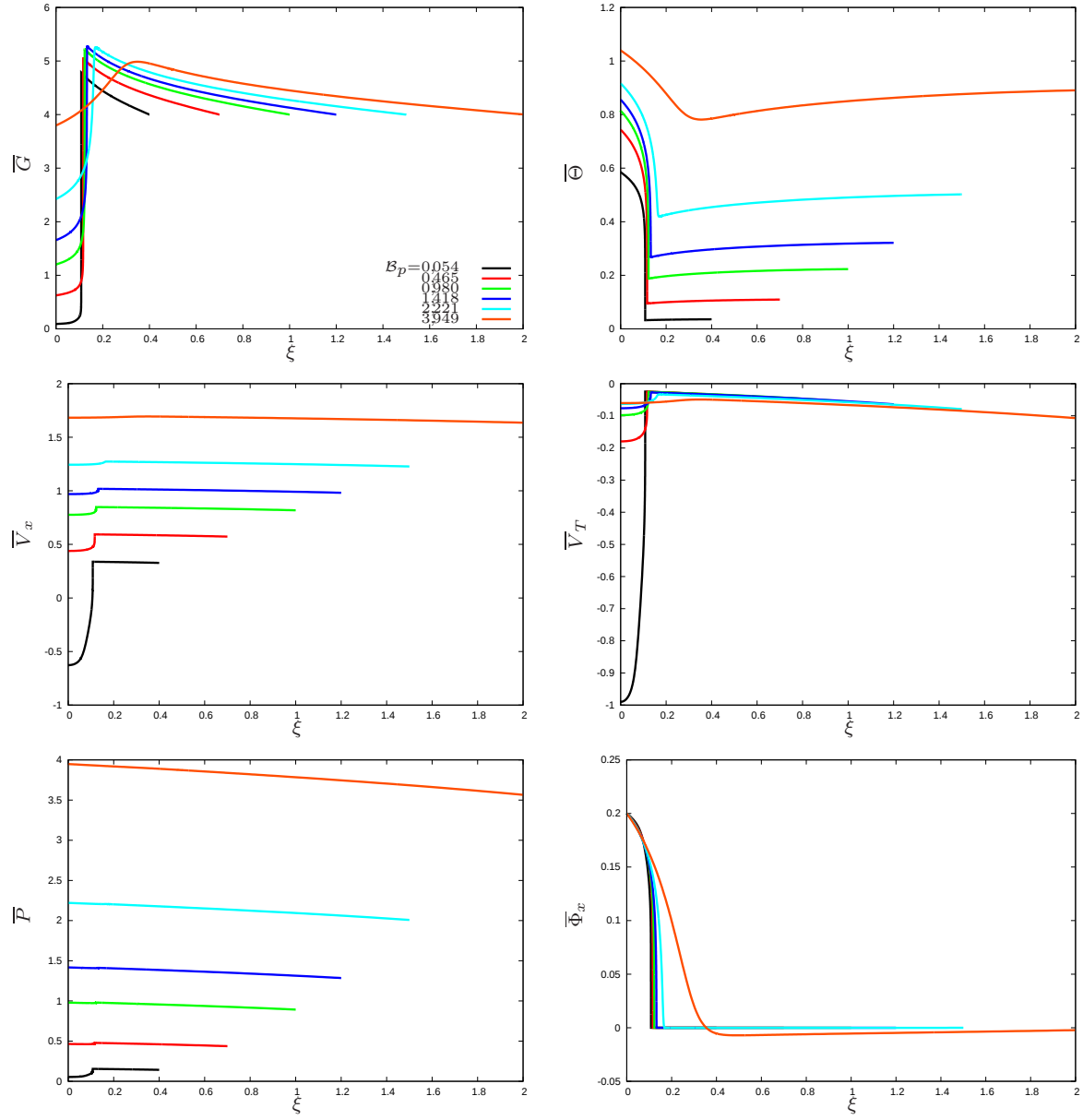


FIGURE 7.2 – **Variations de la valeur de B_p** : fonctions de forme pour 6 valeurs de B_p avec $B_\varphi = 0,20$. Les quantités présentes sont la densité $\bar{G}$, la température $\bar{\Theta}$, la vitesse longitudinale $\bar{V}_x$, la vitesse relative au front d'ablation $\bar{V}_T$, la pression $\bar{P}$ et le flux thermique $\bar{\Phi}_x$.

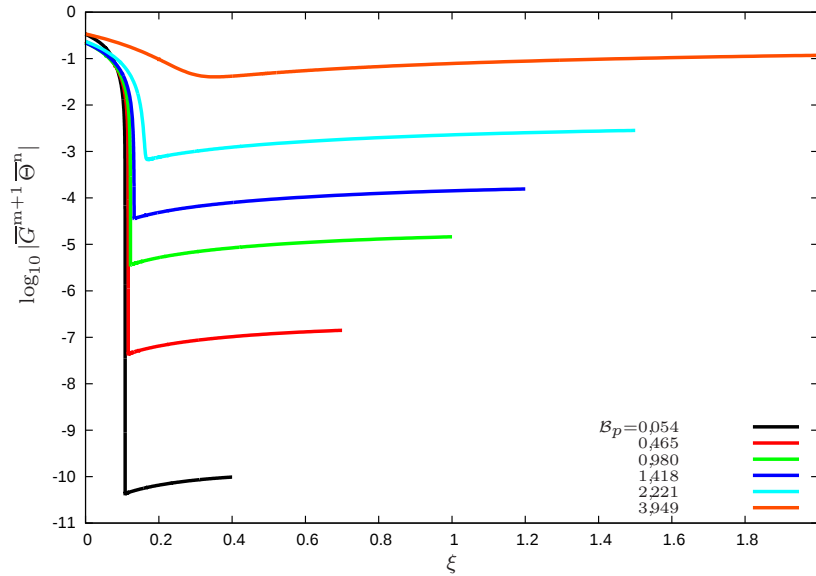


FIGURE 7.3 – **Variations de la valeur de $\mathcal{B}_p$** : tracé du coefficient de conduction $\overline{G}^{m+1}\overline{\Theta}^n$, en échelle logarithmique, pour 6 valeurs de $\mathcal{B}_p$ avec $\mathcal{B}_\varphi = 0,20$. La conduction est plus importante sur la zone de détente que sur la zone sous-choc.

7.2.3 Variation de la condition limite en flux

On fixe maintenant $\mathcal{B}_p = 0,9$ et on fait varier la valeur $\mathcal{B}_\varphi$ de la condition limite en flux. Les tracés de la figure 7.6 permettent d'illustrer les profils des quantités dans cette configuration pour différentes valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$.

On remarque que la pression, la température, le flux et les positions respectives du front d'ablation et du choc augmentent avec $\mathcal{B}_\varphi$. Inversement, la valeur de la densité au front d'ablation et à l'origine décroît. Le coefficient de conduction augmente sur l'ensemble de l'écoulement, bien que cette augmentation soit beaucoup plus importante sur la zone de conduction, lorsque $\mathcal{B}_\varphi$ augmente (Fig. 7.7). La figure 7.8, représentant les tracés des quantités de base selon la variable $\overline{X}$, permet de se rendre compte de la taille relative des zones de l'écoulement et notamment de voir que la taille de la zone de conduction diminue avec la valeur du flux thermique imposée à l'origine. Le tracé du nombre de Mach calculé avec la vitesse relative au front (Fig. 7.9) montre que les trois écoulements traités restent subsoniques. La valeur de $\mathcal{B}_\varphi$ semble hiérarchiser les courbes de ce tracé. Il semble envisageable d'obtenir un écoulement supersonique à proximité de l'origine en augmentant encore la valeur de $\mathcal{B}_\varphi$. Le tracé du nombre de Froude nous indique que les effets d'inertie sont dominants, en particulier dans la zone d'ablation. En ce qui concerne le nombre de Péclet, les remarques formulées lors de l'étude à $\mathcal{B}_\varphi$ fixé sont toujours valables.

Si l'étude de ces écoulements de base dans le cas d'une conduction radiative a été réalisée (Vauvy, 2007), l'étude des perturbations linéaires de tels écoulements reste à faire. Pour cela, la première étape est de choisir méthodiquement les écoulements que l'on souhaite étudier. Ce choix fait l'objet de la prochaine partie de ce chapitre.

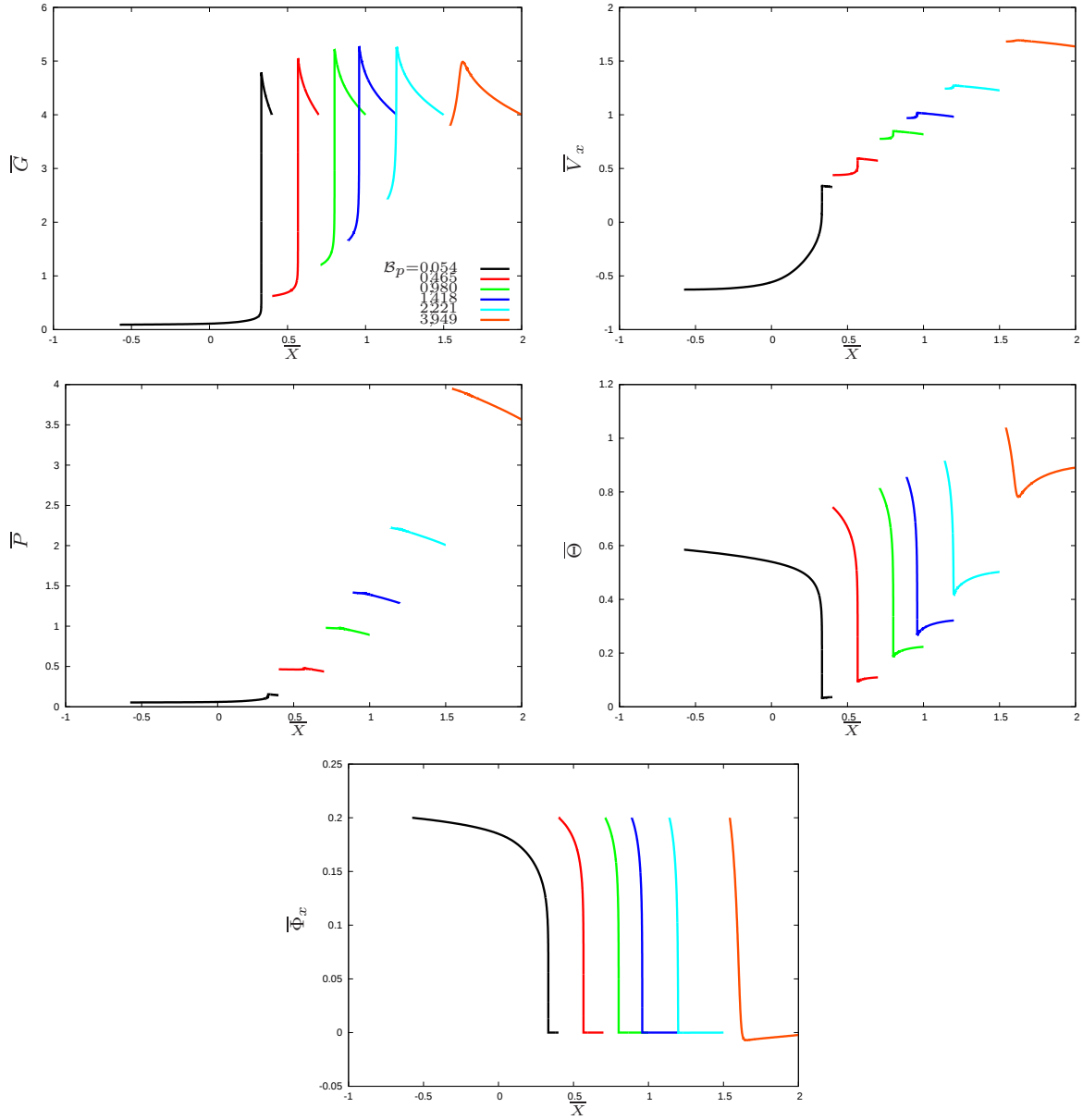


FIGURE 7.4 – **Variations de la valeur de B_p** : tracés de la densité $\bar{G}$, de la vitesse longitudinale $\bar{V}_x$, de la pression $\bar{P}$, de la température $\bar{\Theta}$ et du flux thermique $\bar{\Phi}_x$ en fonction de $\bar{X}$ pour 6 valeurs de B_p avec $B_\varphi = 0,20$. On remarque que dans ce système de coordonnées, le support des solutions n'est pas identique.

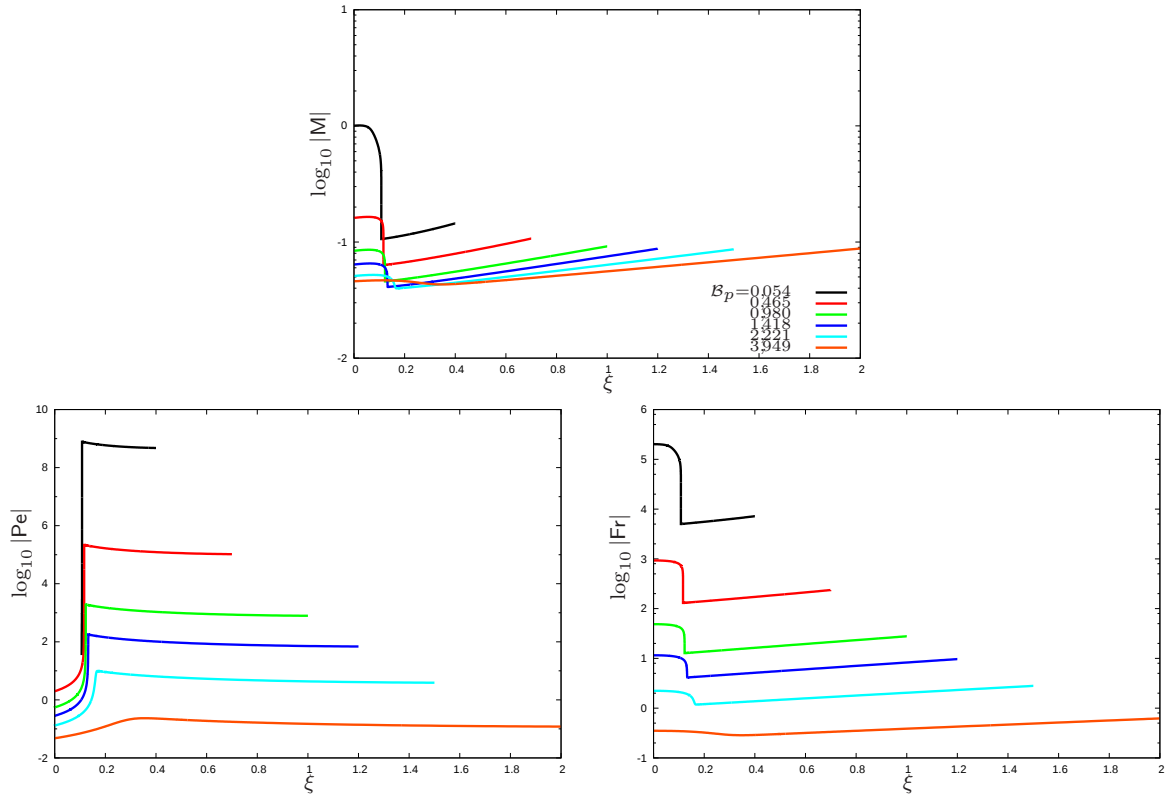


FIGURE 7.5 – **Variations de la valeur de $\mathcal{B}_p$** : tracés en fonction de la variable autosemblable ξ du logarithme du nombre de Mach construit avec la vitesse relative au front d'ablation, du nombre de Péclet et du nombre de Froude construits avec la vitesse relative au front et la longueur de gradient en densité pour 6 valeurs de $\mathcal{B}_p$ avec $\mathcal{B}_\varphi = 0,20$.

$\mathcal{B}_\varphi$	$\mathcal{B}_p$	ξ_f	ξ_{fc}
0,200	0,054	0,1079894	0,4
0,200	0,465	0,1165030	0,7
0,200	0,980	0,1228300	1,0
0,200	1,418	0,1339800	1,2
0,200	2,221	0,1776900	1,5
0,200	3,949	0,4987700	2,0
0,673	0,900	0,3042700	1,0
1,352	0,900	0,5145200	1,1
1,911	0,900	0,6653600	1,2

TABLE 7.2 – Tableau récapitulatif des écoulements rencontrés lors des essais de variation des valeurs limites à l'origine de la pression $\mathcal{B}_p$ et du flux de conduction $\mathcal{B}_\varphi$. Figurent dans ce tableau les valeurs de la pression et du flux appliqués à la limite ($\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi$) et les valeurs des paramètres (ξ_f, ξ_{fc}).

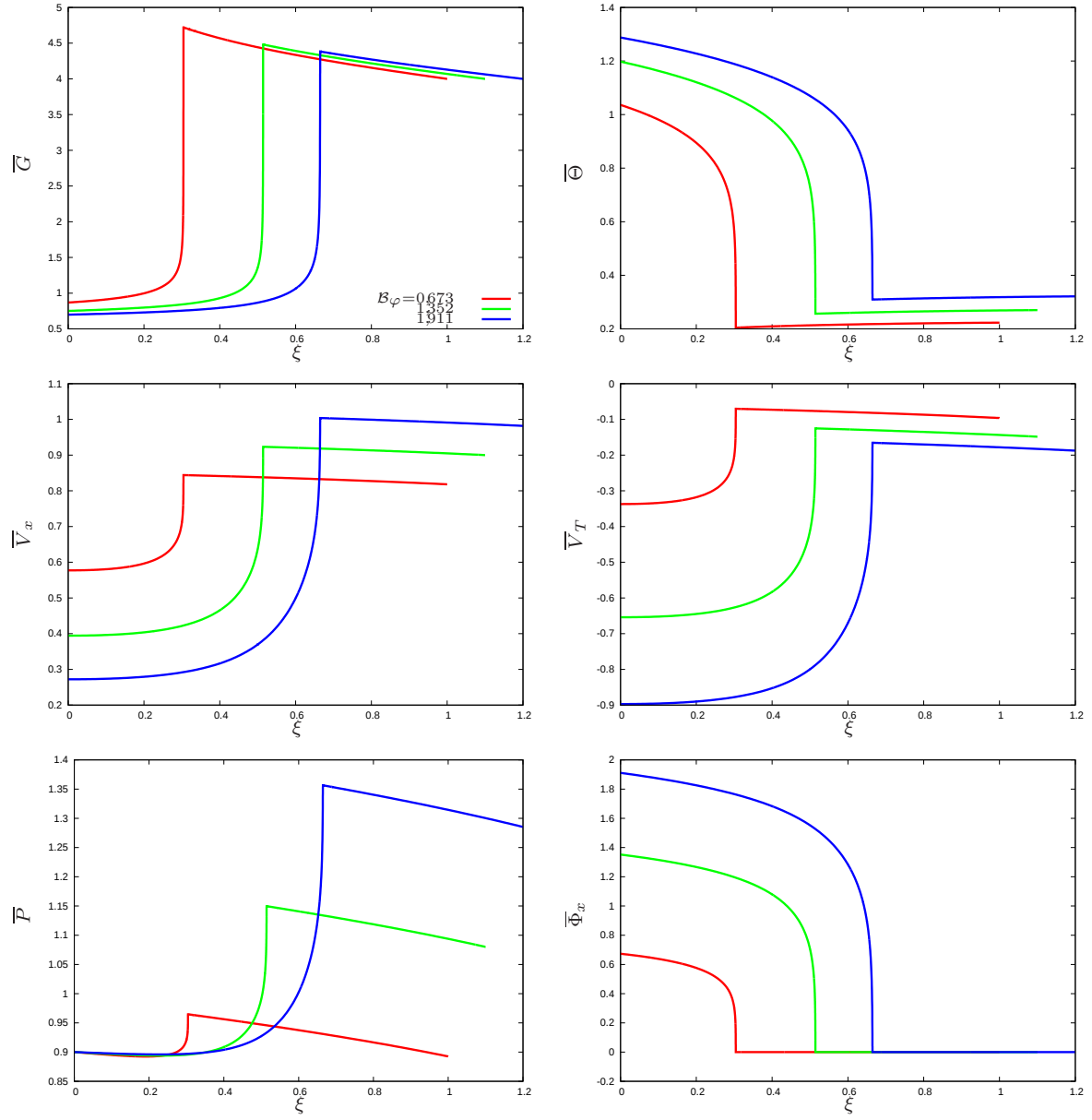


FIGURE 7.6 – **Variations de la valeur de $\mathcal{B}_\varphi$** : fonctions de forme pour trois valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$ avec $\mathcal{B}_p = 0,90$. Les quantités présentes sont la densité $\overline{G}$, la température $\overline{\Theta}$, la vitesse longitudinale $\overline{V}_x$, la vitesse relative au front d'ablation $\overline{V}_T$, la pression $\overline{P}$ et le flux thermique $\overline{\Phi}_x$.

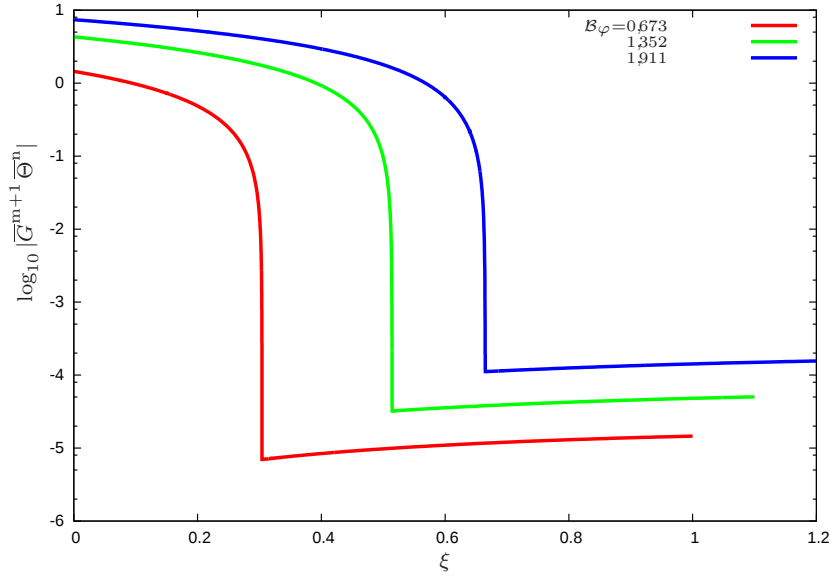


FIGURE 7.7 – **Variations de la valeur de B_φ** : tracé logarithmique du coefficient de conduction $\overline{G}^{m+1} \overline{\Theta}^n$ pour trois valeurs de B_φ avec $B_p = 0,90$.

7.3 Choix des écoulements traités

Plusieurs critères nous guident dans le choix des écoulements que nous souhaitons soumettre à une analyse approfondie des réponses en perturbations linéaires. Deux configurations d'écoulements seront traitées au cours de ce travail de thèse. Il est en effet intéressant de disposer à la fois d'un cas avec une détente subsonique relativement au front d'ablation (expression que l'on notera désormais RFA) et d'une autre configuration avec une détente subsonique RFA afin de pouvoir comparer nos résultats à ceux obtenus par Lombard (2008) en conduction électronique.

Écoulement supersonique : l'écoulement que nous souhaitons étudier en priorité se doit d'être supersonique par rapport au front d'ablation. En effet, ce type d'écoulements, particulièrement critique, est le même type d'écoulements que ceux que l'on peut retrouver au sein du LMJ. Au cours des essais de Vauvy (2007), plusieurs écoulements avec conduction radiative se sont révélés être supersoniques au voisinage de l'origine. La figure 7.10 illustre les profils des quantités de base pour ces différents écoulements. On remarque sur ces tracés que, pour les quantités autres que la densité, si la condition à l'origine est supérieure à celle d'une autre configuration, cette hiérarchie se retrouve au niveau du front d'ablation. Cependant, l'effet inverse s'applique à l'évolution de la densité. Au niveau du choc, on fait la même observation. Mais cette fois, la valeur de la densité est constante. Cela s'explique par la relation de Rankine–Hugoniot propre à la densité que nous avons déjà évoquée en (7.19). Dans la zone sous-choc, on vérifie bien grâce aux profils du flux thermique que celui-ci est quasi-nul.

Ayant décidé de traiter un écoulement supersonique par rapport au front d'ablation, le tracé du nombre de Mach calculé à partir de la vitesse du front d'ablation est indispensable. Le tracé de la figure 7.11 confirme que nous avons bien affaire à des écoulements répondant à nos critères. En effet, ces configurations d'écoulements disposent d'un nombre de Mach supérieur à 1 au voisinage de l'origine. Le dernier critère à satisfaire pour choisir l'écoulement en question, et non des

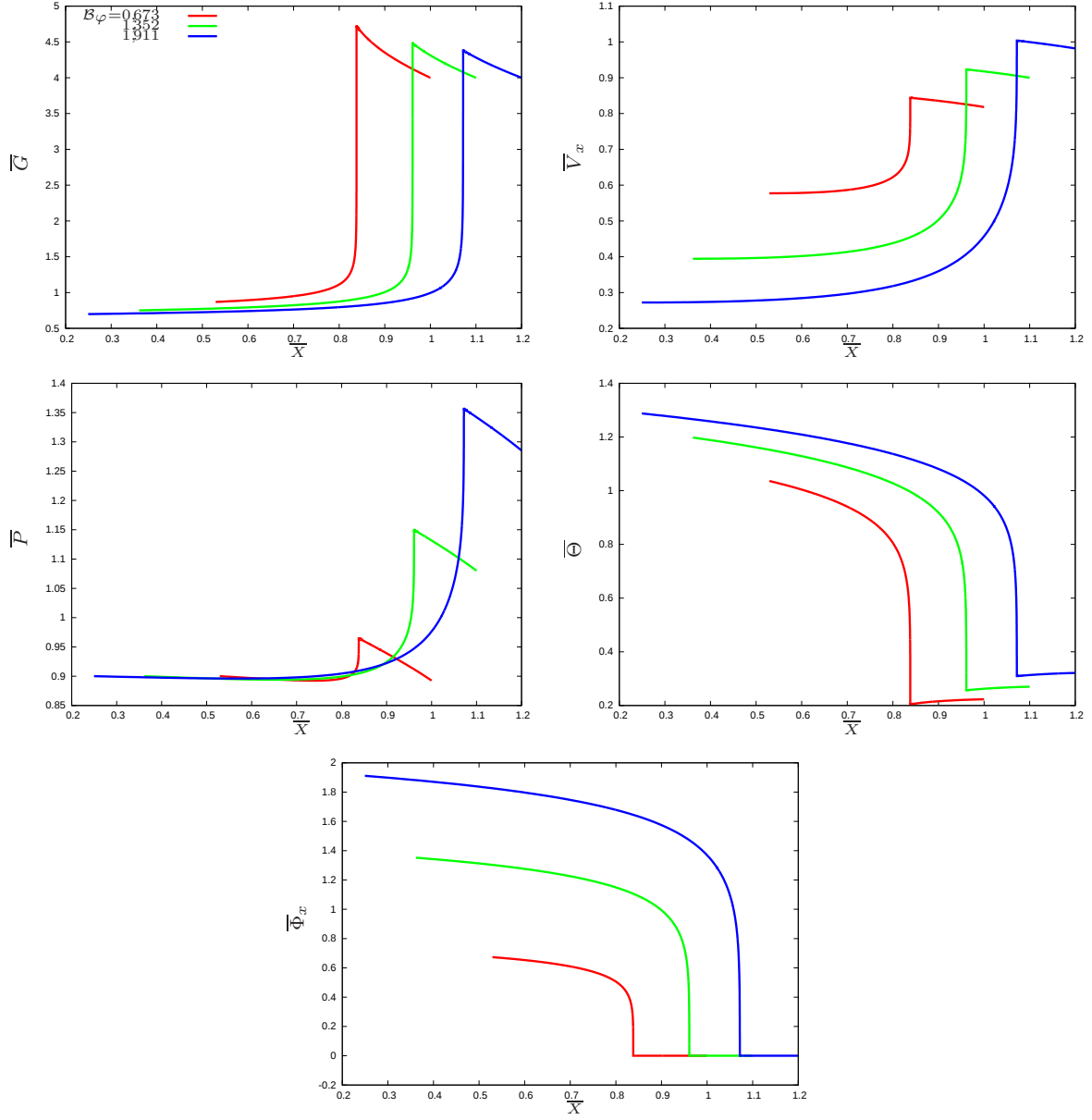


FIGURE 7.8 – **Variations de la valeur de $\mathcal{B}_\varphi$** : tracés de la densité $\bar{G}$, de la vitesse longitudinale $\bar{V}_x$, de la pression $\bar{P}$, de la température $\bar{\Theta}$ et du flux thermique $\bar{\Phi}$ en fonction de $\bar{X}$ pour trois valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$ avec $\mathcal{B}_p = 0,90$.

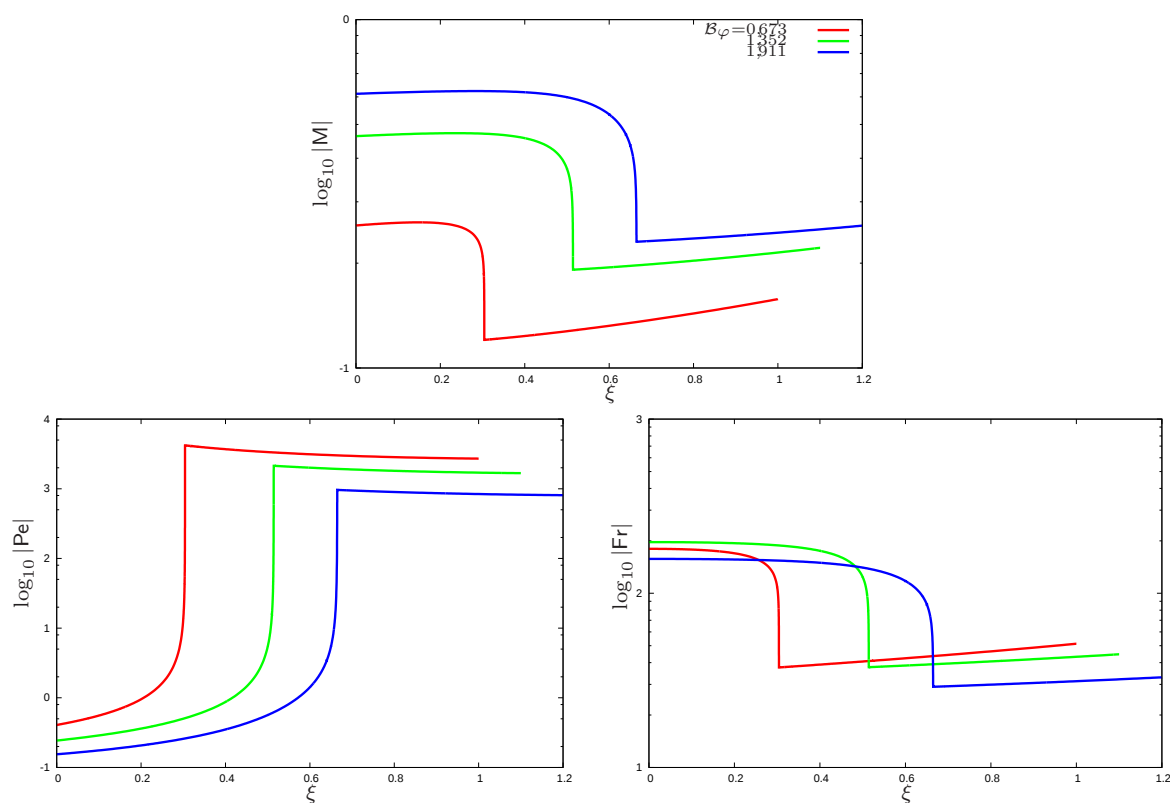


FIGURE 7.9 – **Variations de la valeur de B_φ** : logarithme du nombre de Mach construit avec la vitesse relative au front, du nombre de Péclet et du nombre de Froude construits avec la vitesse relative au front d'ablation et la longueur de gradient en densité pour 3 valeurs de B_φ avec $B_p = 0,90$.

moindres, concerne la faisabilité de son étude. C'est pourquoi nous avons, pour chacune de ces configurations d'écoulements, calculé la raideur. Les résultats, consignés dans le tableau 7.3 nous montrent que deux de ces écoulements ont une raideur extrêmement importante. En revanche, l'écoulement caractérisé par les valeurs à l'origine $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi) = (0,32765, 1,58672)$ a une raideur de l'ordre de 10^{-5} , ce qui est plus abordable. Répondant à nos attentes, cet écoulement est donc d'abord choisi pour effectuer une étude de stabilité vis-à-vis des perturbations linéaires au cours du temps. Avant de valider définitivement ce choix, une étude est faite sur l'écoulement de base et sur le nombre de pas de temps à effectuer avant de visualiser l'évolution des perturbations linéaires sur un intervalle de temps suffisant pour disposer de la gamme de longueurs d'onde la plus large possible. Cette vérification est indispensable pour disposer d'une configuration d'écoulement pour laquelle le temps de calcul nécessaire est raisonnable. Les étapes de l'étude de l'écoulement de base permettant d'estimer le temps de calcul nécessaire sont décrites dans les chapitres suivants consacrés à l'étude des écoulements choisis. Le résultat de ces investigations est rédhibitoire dans le sens où 500 millions de pas de temps sont nécessaires pour traiter l'écoulement considéré, soit plusieurs mois de calcul. Un quatrième écoulement est donc soumis au même type de vérification. Il s'agit de l'écoulement caractérisé par $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi) = (1,06338, 3,41515)$. Celui-ci est un bon compromis par rapport à nos critères puisque son caractère supersonique par rapport au front d'ablation est avéré, sa raideur est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-2}$ et le nombre de pas de temps estimé pour son étude ne dépasse pas 30 millions, soit un temps de calcul équivalent à quelques jours. Dans le tableau récapitulatif 7.3, les données relatives à cet écoulement sont repérées par du violet.

Écoulement subsonique : l'étude de Vauvy (2007) nous fournit des informations sur plusieurs écoulements subsoniques. La figure 7.9 nous indique par exemple trois configurations pour lesquelles le nombre de Mach reste inférieur à 1. Le choix va donc d'abord se faire parmi ces trois écoulements. Pour cela, de la même manière que nous l'avons fait pour le choix du premier écoulement, la raideur est calculée pour chacune des configurations. Les résultats sont consignés dans le tableau 7.3. Ces trois écoulements ont une valeur commune de condition à l'origine en pression ($\mathcal{B}_p = 0.90$). La discrimination entre ceux-ci s'effectue donc à l'aide de la valeur de la condition à l'origine en flux $\mathcal{B}_\varphi$.

L'étude de ce tableau nous montre que la raideur de ces écoulements, moindre que celle calculée dans le cas des configurations supersoniques est tout de même importante. Dans un premier temps, l'écoulement que nous retenons est celui caractérisé par $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi) = (0,90, 1,911)$. En effet, parmi les trois configurations, il s'agit de celle pour laquelle la raideur est la moins élevée. Malheureusement, pour la même raison que pour le choix du premier écoulement, la configuration choisie ne correspond pas à nos critères de temps de calcul. Un écoulement subsonique pour lequel la position ξ_{fc} du front de choc est identique à celle du premier écoulement est donc choisi après plusieurs essais. Il s'agit de l'écoulement déterminé par le couple de paramètres numériques $(\xi_f, \xi_{fc}) = (0,80, 1,50)$ et le couple de valeurs à l'origine $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi) = (1,89972, 2,01543)$. Celui-ci, de raideur raisonnable, satisfait à tous les critères que l'on s'est fixé. La figure 7.12 permet de visualiser les profils des quantités de base et des nombres sans dimensions dans la configuration choisie.

Après avoir étudié les incidences sur l'écoulement de variations de la condition en pression à l'origine ou de la condition en flux à l'origine, plusieurs configurations d'écoulement donnant lieu à des profils supersoniques ont été retenues. La raideur et l'abaque de la figure 7.1 nous ont permis de faire un choix pour l'écoulement que nous avons choisi d'étudier dans le cadre de perturbations linéaires. L'examen du temps de calcul nécessaire pour obtenir des résultats significatifs avec la configuration choisie nous a poussé à revoir notre choix et à décider de traiter un autre écoulement, à détente supersonique par rapport au front d'ablation lui aussi. Un deuxième

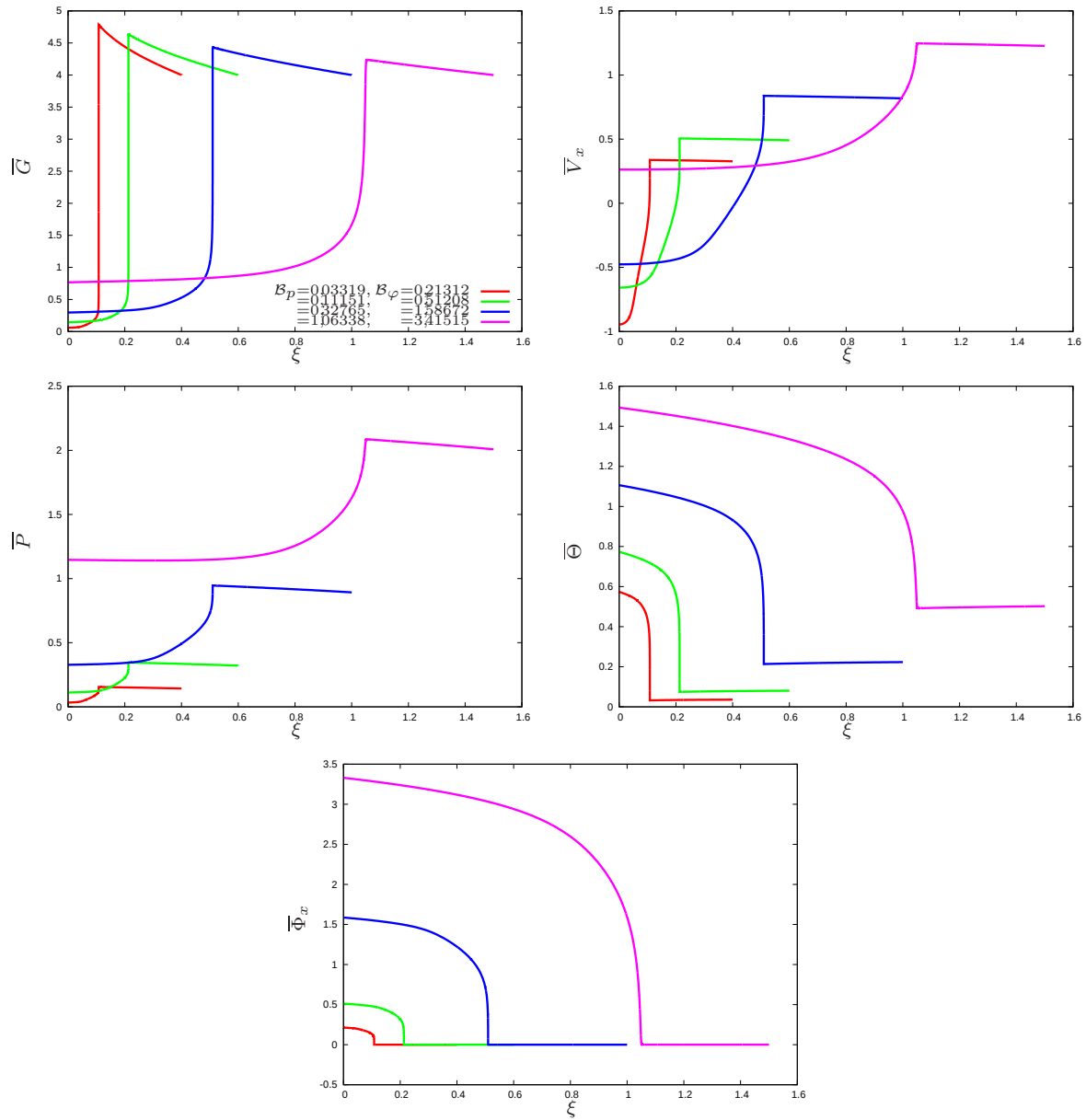


FIGURE 7.10 – **Écoulements avec détente supersonique RFA** : tracés de la densité $\bar{G}$, de la vitesse longitudinale $\bar{V}_x$, de la pression $\bar{P}$, de la température $\bar{\Theta}$ et du flux thermique $\bar{\Phi}$ en fonction de la variable autosemblable ξ pour quatre couples de valeurs de $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$, correspondant aux quatre premières lignes du tableau 7.3. Ces écoulements sont à détente supersonique par rapport au front d'ablation. Les courbes violettes correspondent à la configuration choisie pour l'étude des perturbations linéaires.

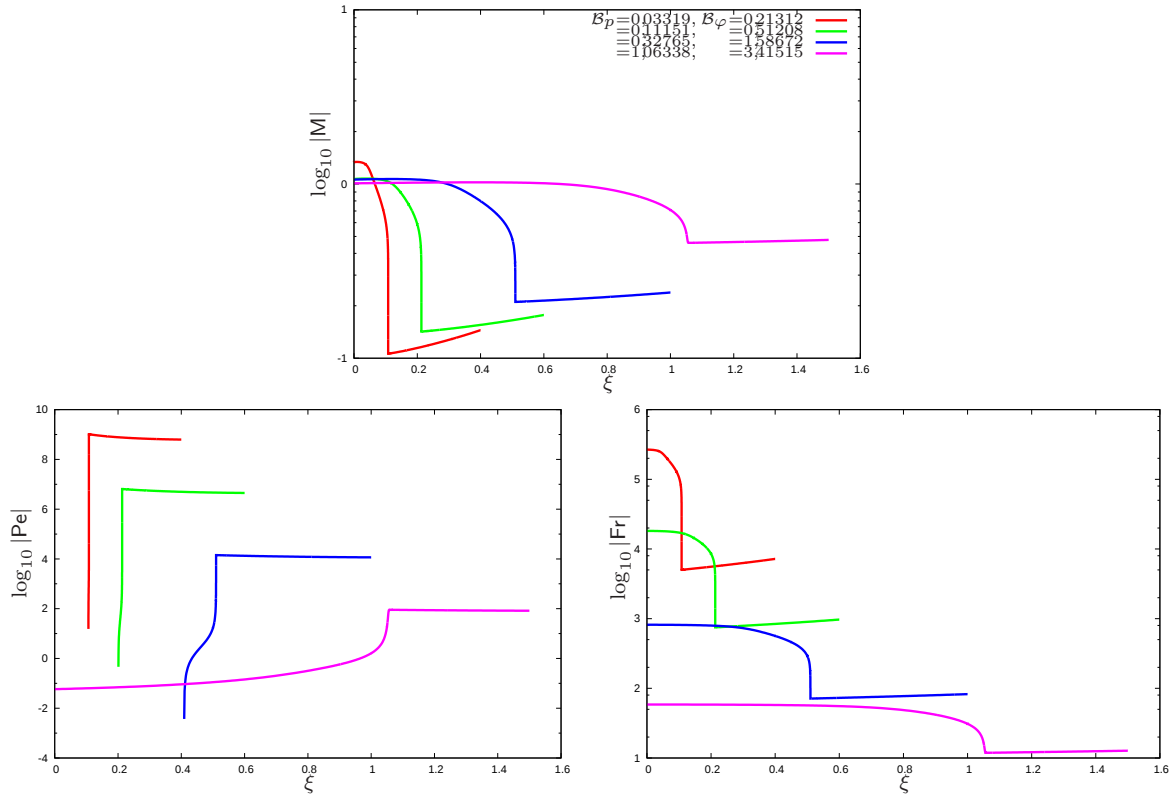


FIGURE 7.11 – **Écoulements avec détente supersonique RFA** : logarithme du nombre de Mach calculé avec la vitesse relative au front, du nombre de Péclet et du nombre de Froude construits avec la vitesse relative au front d’ablation et la longueur de gradient en densité pour trois couples de valeurs de $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$, tracé en fonction de ξ . Ces configurations conduisent à une détente supersonique par rapport au front d’ablation. La courbe violette correspond à la configuration choisie pour l’étude des perturbations linéaires.

$\mathcal{B}_\varphi$	$\mathcal{B}_p$	ξ_f	ξ_{fc}	L_{TOT}	$L_{\nabla T}$	Raideur
0,21312	0,03319	0,108101	0,40	1,265922	0,745873 10^9	5,89 10^{-10}
0,51208	0,11151	0,213000	0,60	1,202852	0,917617 10^{-7}	7,63 10^{-8}
1,58672	0,32765	0,510000	1,00	1,436395	0,386523 10^{-4}	2,69 10^{-5}
3,41515	1,06338	1,060000	1,50	1,259354	3,016260 10^{-2}	2,39 10^{-2}
0,67300	0,90000	0,304270	1,00	0,470856	0,433778 10^{-4}	9,00 10^{-5}
1,35200	0,90000	0,514520	1,10	0,738464	0,124767 10^{-3}	1,60 10^{-4}
1,91100	0,90000	0,665360	1,20	0,950488	0,338758 10^{-3}	3,50 10^{-4}
2,01543	1,89972	0,800000	1,50	0,688919	3,517722 10^{-2}	5,10 10^{-2}

TABLE 7.3 – Tableau récapitulatif des écoulements rencontrés lors du choix des configurations que nous soumettons à un calcul de perturbations. Figurent les couples $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ et (ξ_f, ξ_{fc}) ainsi que la longueur totale de l’écoulement, la longueur de gradient en température et la raideur. Les écoulements finalement choisis sont repérés par du violet pour le cas supersonique et du bleu pour le cas subsonique.

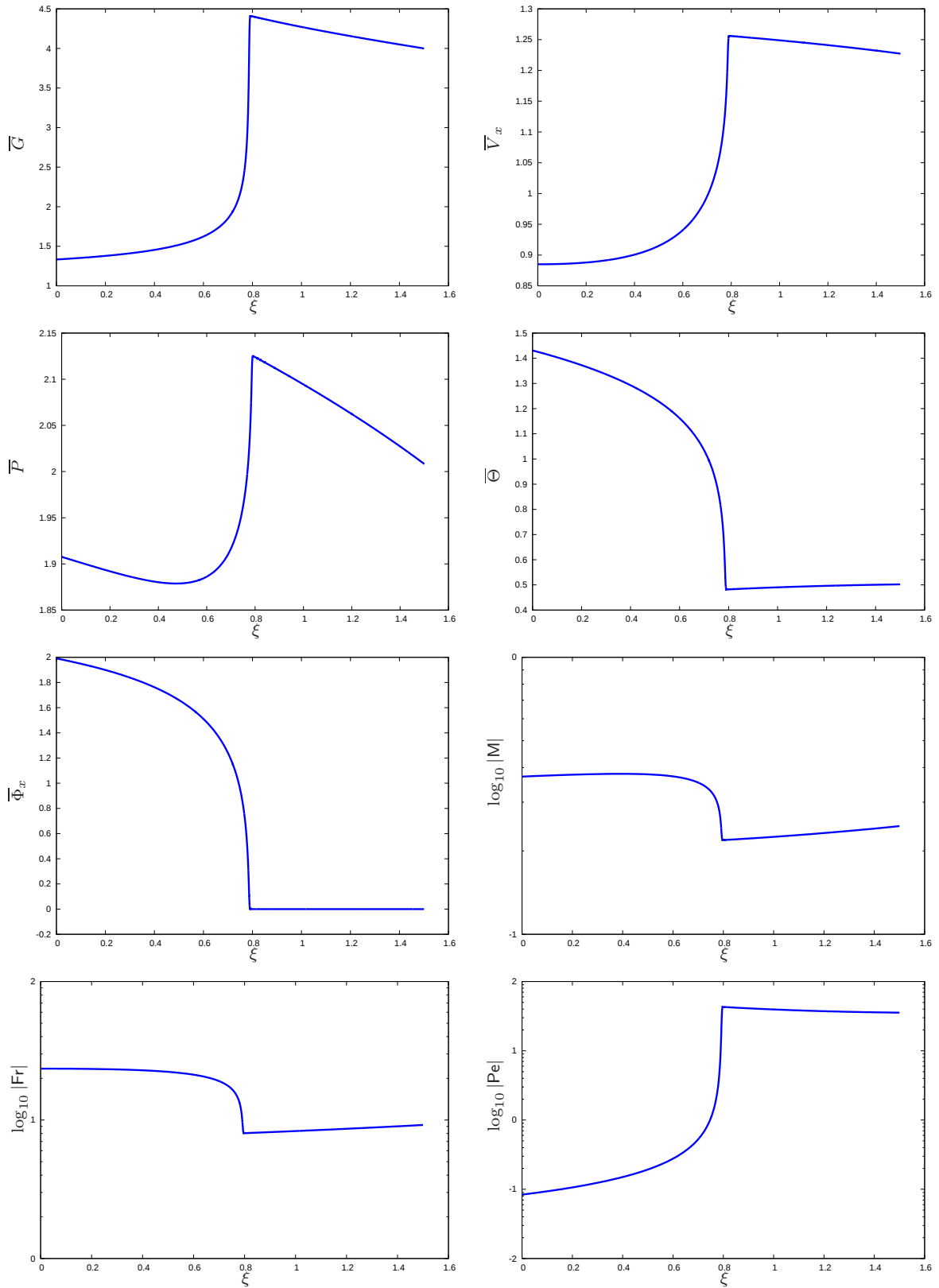


FIGURE 7.12 – **Écoulement avec détente subsonique RFA** : Tracés des quantités de base et des nombres sans dimensions relatifs à l'écoulement avec détente subsonique RFA choisi pour l'étude des réponses en perturbation linéaires. Les nombres de Mach, de Froude et de Péclet sont tracés en échelle logarithmique.

écoulement, à détente subsonique pour sa part, a été sélectionné pour le même type d'études. Ces deux écoulements sont mis en évidence dans le tableau par la couleur de leurs données, du violet pour le cas supersonique et du bleu pour le cas avec détente subsonique. L'analyse des réponses en perturbations linéaires de ces deux configurations fait l'objet des deux prochains chapitres.

Chapitre 8

Écoulement d'ablation radiative à détente subsonique

L'écoulement à détente subsonique relativement au front d'ablation (RFA), dans le cadre de la conduction radiative, est le premier écoulement des deux précédemment choisis auquel nous appliquons les perturbations linéaires. L'écoulement en question est défini par ses valeurs de pression et de flux à l'origine, $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi) = (1,89972, 2,01543)$, et les paramètres de la méthode de résolution numérique, $(\xi_f, \xi_{fc}) = (0,80, 1,50)$. La perturbation appliquée à l'écoulement est une perturbation de flux. L'objectif de ce chapitre est de déterminer le comportement des différentes quantités primitives de perturbation en fonction du temps et de l'espace. L'examen des modes de Kovàsznay ajoute des informations à celles fournies par les quantités primitives. De plus, si le régime autosemblable est le régime qui nous intéresse particulièrement, l'étude des temps courts est également très instructive. Elle permet en effet de connaître les mécanismes de transfert dans les différentes zones de l'écoulement. Cette analyse du régime transitoire des perturbations amène aussi à la détermination du temps d'établissement du régime autosemblable des perturbations t_{erasp} .

Pour effectuer toutes ces observations, la mise en place d'une distribution de points, à soumettre à la procédure d'adaptation, est une étape indispensable. De ce maillage va dépendre la réussite du calcul des perturbations mais aussi la précision des résultats. Une fois le choix du maillage arrêté, les résultats du calcul des perturbations permettent de déterminer les phénomènes en jeu lors de l'irradiation de la cible.

Clarisse *et al.* (2008) et Lombard (2008) ont déjà effectué ce type d'étude pour des écoulements d'ablation avec conduction électronique. L'étude que nous réalisons ici, outre le fait qu'elle concerne une autre configuration d'écoulement, permet de comparer les observations faites sur les uns ou les autres des écoulements et d'en apprendre encore sur les instabilités hydrodynamiques.

8.1 Choix de la configuration perturbée

8.1.1 Rappels sur le régime autosemblable des perturbations

Clarisse *et al.* (2008) ont travaillé sur le régime autosemblable des perturbations dans le cadre de la conduction électronique et de l'attaque directe. Ils ont alors obtenu plusieurs résultats théoriques. La possibilité de formuler les perturbations sous la forme autosemblable a notamment été démontrée (Clarisse *et al.* (2008), Sec. 3.2). Les auteurs mettent également en évidence l'avantage à considérer ces régimes. En particulier, en régime autosemblable, il est possible d'obtenir une réponse spectrale par un calcul de réponse temporelle pour un seul nombre d'onde non-nul.

Pour obtenir ces régimes, les conditions initiales et les conditions aux limites doivent être formulées de sorte à respecter les conditions de compatibilité énoncées par Clarisse *et al.* (2008). D'autre part, le travail d'analyse des réponses de perturbations linéaires qui suit, dans le cas de la conduction radiative, s'appuie sur l'expérience acquise par Clarisse *et al.* (2008) avec des calculs en configuration de perturbation de flux de frontière proportionnelle au flux de base, dans le cadre de la conduction électronique et de l'attaque directe. On sait en effet désormais qu'il est possible de déterminer la réponse spectrale en perturbations linéaires, sur une large gamme $[\varkappa_{\perp \min}, \varkappa_{\perp \max}]$, $\varkappa_{\perp \min} > 0$, du nombre d'onde réduit $\varkappa_{\perp} \equiv k_{\perp} t^{4/3}$ dans le cas de la conduction électronique et donc, dans le cas de la conduction radiative $\varkappa_{\perp} \equiv k_{\perp} t^{12/11}$, en ne se servant que d'un unique calcul de réponse temporelle pour un $k_{\perp}$ fixé et non-nul et à l'aide d'un calcul suffisamment long avec des longueurs d'onde de perturbations infinies $k_{\perp} = 0$.

8.1.2 Perturbation du flux radiatif de frontière

Lors de l'analyse des perturbations dans le cadre de l'implosion d'une cible par le rayonnement X d'un hohlraum, le choix le plus pertinent consiste à considérer des perturbations du flux radiatif de frontière. Clarisse *et al.* (2008) montrent en effet que cette configuration permet d'obtenir un comportement de perturbation autosemblable. Les conditions initiales appliquées aux perturbations sont celles écrites en (2.47). Pour ne pas subir la singularité du système d'équations en $t = 0$, celles-ci sont appliquées à un temps petit, mais non-nul.

La perturbation en flux est appliquée en $m = 0$. Les conditions aux limites de la solution autosemblable (2.48) imposent l'augmentation linéaire du flux de conduction $\overline{\varphi}_x$ avec le temps. Les réponses des écoulements relatifs à l'empreinte laser sont évaluées en considérant des perturbations de flux de conduction dépendant du temps, de la forme :

$$\widehat{\varphi}_x(t) = t^{3(\alpha-1)} \mathcal{B}_{\varphi}, \quad t \geq t_{\text{ini}}. \quad (8.1)$$

Contrairement au cas de la conduction électronique où elle porte sur le flux incident, cette perturbation, en conduction radiative, est appliquée à la différence entre flux incident et flux émis.

Enfin, dans le cas de l'attaque indirecte, en conduction radiative, la condition de surface libre doit être appliquée. Cette condition se traduit par une perturbation de pression nulle à la frontière, par opposition à la condition de densité nulle à la frontière dans le cas de la conduction électronique (2.48) :

$$\widehat{P}(0, t) + t^{\alpha-2} \overline{G}(0) \widehat{\eta}_0(t) \partial_{\xi} \overline{P}(0) = 0. \quad (8.2)$$

En annexe G, la manière dont est prise en compte cette condition de perturbation de pression nulle à la frontière dans le cadre de l'utilisation de la méthode de Thompson (Thompson, 1990) est détaillée.

8.2 Définition des conditions de calcul

8.2.1 Critères de définition de la grille de calcul

La méthode d'adaptation mentionnée au chapitre 3 (Sec. 3.2.3) permet d'obtenir une distribution optimale des sous-domaines et des points qui se situent sur chacun d'entre eux. Cependant, des choix sont effectués pour les paramètres de contrôle de cette procédure d'adaptation. Ces choix, qui concernent le seuil de convergence, le nombre de positions de l'interface qui sont testées, le nombre de fois où l'ensemble des interfaces est balayé ou encore le nombre de résolutions spectrales, ont une influence plus ou moins grande sur le résultat de la procédure selon la raideur de

l'écoulement considéré et la définition initiale de la grille à optimiser. C'est pourquoi les critères choisis pour la résolution de l'écoulement de base dans le cas de l'écoulement considéré ici, soit l'écoulement à détente subsonique RFA, sont détaillés et expliqués dans cette section.

8.2.1.1 Critères de résolution de l'écoulement de base

Les critères utilisés pour le calcul des quantités de base ont été établis par Boudesocque-Dubois *et al.* (2013) qui ont travaillé sur la méthode d'adaptation dynamique utilisée. Les critères associés à la résolution de l'écoulement de base, notés CRB, sont :

- (CRB1) la valeur des résidus obtenus à la convergence de la méthode de relaxation.
- (CRB2) le niveau de convergence des développements en polynômes de Chebyshev.
- (CRB3) les valeurs des raccords des dérivées aux interfaces entre sous-domaines.

D'autres critères ont été ajoutés à ceux établis par Boudesocque-Dubois *et al.* (2013) et nous ont guidé dans la définition des grilles, il s'agit de :

- (CRB2bis) le taux de convergence des coefficients de Chebyshev.
- (CRB4) les valeurs des paramètres de transformations de coordonnées.

Le critère (CRB1) est directement inclus dans la méthode de résolution puisque le critère d'arrêt de la relaxation prend en compte ce critère, fixé arbitrairement. De plus, le critère (CRB3) peut être satisfait comme sous-produit de l'optimisation de la fonctionnelle. En revanche, les autres critères sont évalués après la résolution et leur degré de satisfaction dépend fortement de la donnée initiale de la grille.

8.2.1.2 Critères liés à la résolution des perturbations

D'autres critères existent, ils sont liés à la résolution des perturbations qui est visée après le calcul des quantités de base. On note ces critères CRP :

- (CRP1) le rapport maximal entre tailles de sous-domaines adjacents.
- (CRP2) la taille maximale des sous-domaines.

La différence de tailles entre deux sous-domaines adjacents ne doit pas être trop grande pour ne pas dégrader de manière rédhibitoire les spectres Chebyshev lors de l'advection des perturbations d'un sous-domaine à l'autre. C'est pourquoi le critère (CRP1) est utilisé. Quant à (CRP2), il se justifie par la dilatation de l'écoulement dans le repère du laboratoire au cours du temps. En effet, celle-ci impose une taille maximale du pas d'espace en coordonnée cartésienne x par rapport à la plus petite longueur caractéristique longitudinale des perturbations. Si les critères de résolution de l'écoulement de base sont suffisants pour garantir un pas d'espace maximal dans les zones de fort gradients, il est nécessaire d'appliquer une contrainte supplémentaire pour le reste de l'écoulement. Ceci se traduit par des tailles maximales de sous-domaines selon les zones de l'écoulement, d'autant plus réduites que la dilatation locale de l'écoulement est grande, et donc par une sur-résolution de l'écoulement de base dans ces zones, pour lesquelles la procédure d'adaptation doit être localement neutralisée. Il est important de préciser que pour l'heure, aucun de ces deux critères n'est pris en compte dans la procédure numérique d'adaptation. Mais les ajouter dans l'outil numérique est envisagé.

8.2.2 Détermination de la plage temporelle des calculs

Pour établir la plage temporelle sur laquelle les calculs vont avoir lieu, l'expérience de calculs de réponses spectrales passés (Clarisse *et al.*, 2008; Lombard, 2008) permet de définir des critères à respecter que nous nommerons CT. Certains de ces critères sont évalués *a priori*, soit avant même d'essayer de lancer un calcul de perturbations :

- (CT1) le temps initial du calcul, t_{ini} , doit être tel que la longueur totale associée de l'écoulement soit beaucoup plus petite que la longueur d'onde transverse $\lambda_{\perp}$ de la perturbation.
- (CT2) le temps final du calcul, t_{fin} , doit être, si possible, tel que la longueur de gradient en température soit comparable, si ce n'est égale ou plus grande, à $\lambda_{\perp}$.
- (CT3) (critère de résolution spatiale minimale admissible) t_{fin} doit être inférieur ou égal au temps pour lequel le pas d'espace maximal de la grille, soit $\Delta x_{\text{max}} = t^{\alpha} \Delta \bar{X}_{\text{max}}$, vaut $\lambda_{\perp} / 2$. On remarque que l'application de (CT3) en rapport avec (CT2) impose la valeur de $\Delta \xi_{\text{max}}$ du critère (CRP2).

Il faut ajouter à ces critères d'autres critères vérifiés *a posteriori* :

- (CT4) le temps d'établissement du régime autosemblable des perturbations, noté t_{erasp} , doit être tel que la longueur totale associée de l'écoulement soit un ou deux ordres de grandeur plus petite que $\lambda_{\perp}$. Ce critère remplace alors (CT1).
- (CT5) le temps final de la partie exploitable des calculs, soit t_{finex} , correspond au temps le plus grand pour lequel la résolution spatiale des perturbations est acceptable. Plus précisément, ce temps est le temps maximal pour lequel les spectres Chebyshev des perturbations répondent aux critères équivalents à (CRB2) et (CRB2bis).

Ainsi, on a $t_{\text{ini}} < t_{\text{erasp}} < t_{\text{finex}} \leq t_{\text{fin}}$ avec, idéalement :

- t_{ini} compatible avec (CT4).
- t_{finex} défini par (CT5), compatible, si possible, avec (CT2).

On distingue alors les sous-plages temporelles :

- $[t_{\text{ini}}, t_{\text{erasp}}[$ qui définit le régime transitoire d'établissement du régime autosemblable des perturbations.
- $[t_{\text{erasp}}, t_{\text{finex}}]$ qui définit le régime autosemblable des perturbations effectivement décrit par le calcul.

La dernière contrainte qui dicte le choix de la plage temporelle des calculs nécessite, avec la distribution de sous-domaines et de points déterminé avec les critères CRB et CRP, le lancement d'un calcul de perturbations sur une seule itération en temps. En effet, la valeur du produit du pas de temps Δt calculé par le coefficient r_{CFL} utilisé est alors connue et permet d'estimer le nombre n_{pdt} de pas de temps nécessaires pour parcourir l'intervalle de temps $[t_{\text{ini}}, t_{\text{finex}}]$ par la formule :

$$n_{\text{pdt}} = \frac{\ln(t_{\text{finex}}) - \ln(t_{\text{ini}})}{\ln\left(1 + \frac{\Delta t_i r_{\text{CFL}}}{t_{\text{ini}}}\right)}. \quad (8.3)$$

Le nombre n_{pdt} de pas en temps nécessaires permet de valider ou non une grille de discrétisation ou de caractériser un écoulement comme pouvant raisonnablement être traité ou non.

8.2.3 Élaboration de la grille de calcul

Dans cette partie, nous nous intéressons plus particulièrement à notre configuration d'écoulement, à savoir l'écoulement en détente subsonique RFA, en conduction radiative, et à la démarche

qui a permis de sélectionner la grille retenue.

Tout d'abord, un premier maillage (MB1-sub) est mis en place, quasiment « à l'aveugle » puisque seul le couple de paramètres numériques (ξ_f, ξ_{fc}) est connu. Un calcul de l'écoulement de base permet d'obtenir un profil grossier des quantités de base (Fig. 8.1) et de définir un second maillage (MB2-sub), de manière plus réfléchie. En effet, les résultats obtenus avec (MB1-sub) permettent de placer les sous-domaines de sorte à densifier la distribution de points de collocation au niveau des zones de gradients. Le critère (CRB1) est fixé à la valeur souhaitée et la validation des critères (CRB2) à (CRB4) se fait alors au moyen de plusieurs essais de discrétisation. En effet, l'évaluation de ces critères se fait après la procédure. En fonction des valeurs de ces critères, les positions des interfaces ou le nombre de sous-domaines sont modifiés jusqu'à ce que l'ensemble des critères de type (CRB) soit satisfait.

Dans l'optique du calcul des perturbations linéaires appliquées à l'écoulement de base, et donc en rapport avec (CRP1) et (CRP2), on procède à une densification de l'échantillonnage spatial dans la zone de conduction en détente et dans la zone sous-choc en compression. La figure 8.2 qui représente le profil de la densité selon la variable réduite $\bar{X}$ montre que le maillage respecte les contraintes de densification de la distribution sur la zone de détente et la zone sous-choc. Pour éviter que la procédure d'adaptation ne force les domaines des deux zones nouvellement densifiées à se rapprocher de la zone de gradient, et ainsi annuler complètement les effets souhaités lors de l'élaboration des critères (CRP), les procédures d'adaptation dynamique et de résolution spectrale finales sont réalisées avec neutralisation de la procédure d'adaptation dans ces zones.

L'étape suivante de cette méthode de validation de la grille est un calcul de perturbations. La procédure est en effet testée en perturbations sur la grille élaborée et avec la configuration « solution exacte de translation » détaillée en Annexe H. On obtient finalement une distribution spatiale et une plage temporelle qui correspondent aux critères précédemment définis à l'aide d'une méthode de résolution dont on synthétise les principales caractéristiques dans le tableau 8.1 et dans lequel :

- « Seuil Conv. MR » représente le seuil de convergence utilisé pour la méthode de relaxation,
- « Nbre pos. int. MA » représente le nombre de positions d'interfaces testées par la méthode d'adaptation,
- « Nbre bal. int. MA » représente le nombre de balayages de l'ensemble des interfaces lors de la méthode d'adaptation,
- « Nbre adapt./rés. » représente le nombre d'adaptations-résolutions spectrales.

L'ensemble des données fournies en entrée à l'outil numérique de résolution figure sous sa forme brute en Annexe I. Pour matérialiser ces explications, le tableau 8.2 est fourni. Celui-ci détaille les positions initiales des interfaces ainsi que les positions de ces mêmes interfaces à la fin de la procédure d'adaptation dynamique. La figure 8.3 illustre la qualité du maillage finalement élaboré en affichant des valeurs de coefficients de Chebyshev, pour chaque quantité de l'écoulement de base, qui ont des niveaux bas et qui sont très réguliers sur l'ensemble de la distribution de sous-domaines.

La position des points de collocation sur chaque domaine dépend du paramètre de transformation de coordonnées h_i , déjà rencontré en (3.30). Souhaitant utiliser une distribution proche de celle de Gauss-Lobatto, ce paramètre est initialisé à 1000. Cependant, les manipulations effectuées sur les positions des interfaces et donc sur les positions des points du maillage changent la valeur de ce paramètre. Il est important de surveiller sa valeur pour s'assurer d'une distribution de type Gauss-Lobatto en fin d'adaptation. Les différents essais effectués ont démontré que lorsque un paramètre h_i correspondant au domaine i tend vers zéro, la solution pour y remédier est

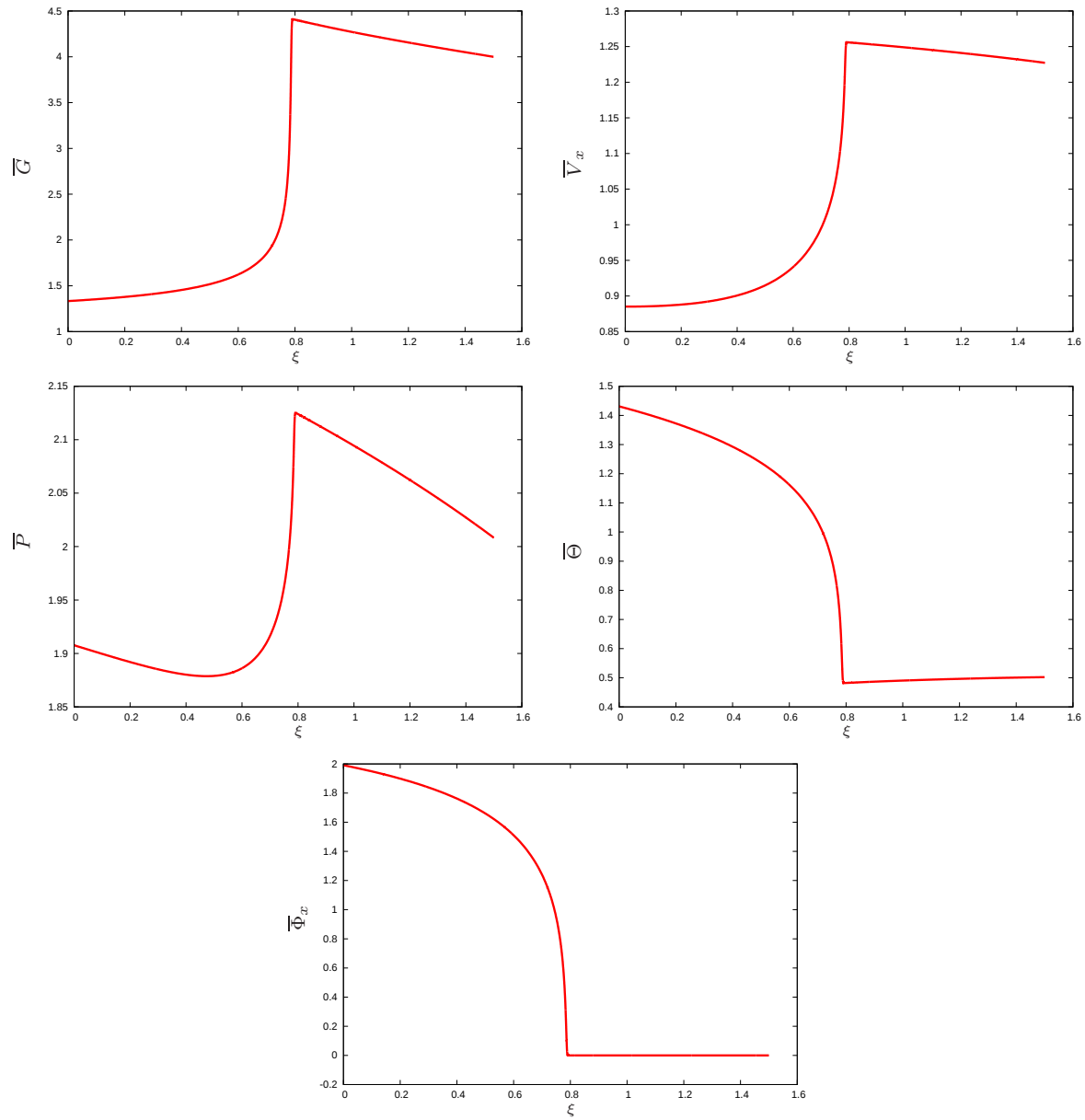


FIGURE 8.1 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,8$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tracés des quantités de base préalables à l'élaboration de la discrétisation spatiale et de la plage temporelle utilisées pour l'analyse des réponses en perturbations linéaires. La densité $\bar{\rho}$, la vitesse longitudinale $\bar{V}_x$, la pression $\bar{P}$, la température $\bar{\Theta}$ et le flux thermique $\bar{\Phi}_x$ sont tracés à l'aide d'un maillage arbitraire de 13 domaines de 50 points. Ces profils sont visualisés à titre informatif et permettent la mise en place de la discrétisation qui sera soumise à la procédure d'adaptation.

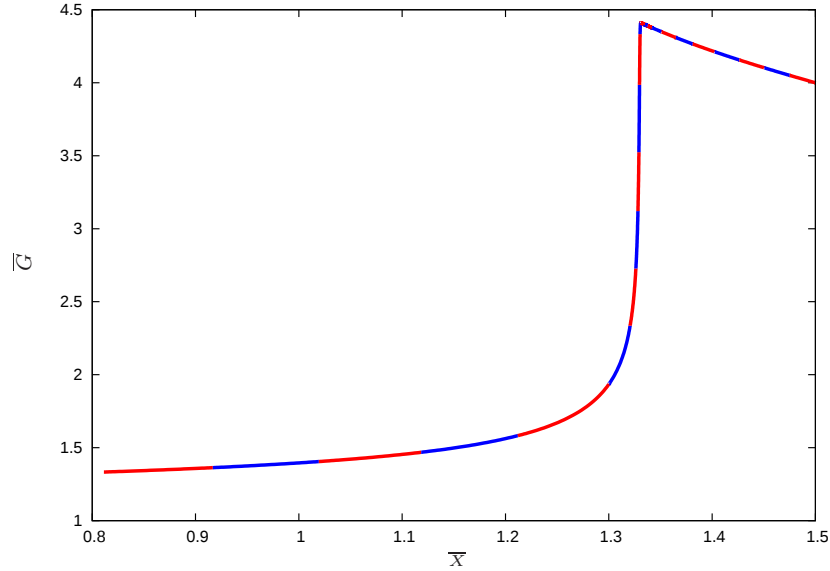


FIGURE 8.2 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) **et** ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : profil de la densité de base $\overline{G}$ en fonction de la variable $\overline{X}$ dans le cadre de l'élaboration de la distribution de points. La coloration différente appliquée sur chaque sous-domaine de la distribution met en évidence la sur-résolution imposée à la zone de détente et à la zone sous-choc.

Seuil Conv. MR	Nbre pos. int. MA	Nbre bal. int. MA	Nbre adapt./rés.
10^{-14}	250	10	20

TABLE 8.1 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) **et** ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tableau effectuant la synthèse des choix effectués pour la méthode d'adaptation-résolution de l'écoulement de base.

Position des interfaces		-	-
initiale	finale	Rapport entre domaines adjacents	Paramètre de transformation de coordonnées
0,142	0,142	1	9999,913
0,284	0,284	1	9999,913
0,426	0,426	1	9999,946
0,568	0,568	1,067	9999,913
0,7195	0,7195	3,590	9999,719
0,7641	0,7617	3,058	9999,405
0,7770	0,7755	2,334	9999,324
0,7822	0,7814	1,967	9999,175
0,7851	0,7844	1,304	9835,779
0,7874	0,7867	1,045	8878,494
0,7897	0,7889	1,5	9455,743
0,7940	0,7922	11,87	9691,581
0,810	0,810	1,483	9993,402
0,822	0,822	1,5	9982,746
0,840	0,840	2,222	9990,881
0,880	0,880	1,5	9999,178
0,940	0,940	1,167	9999,037
1,010	1,010	1,286	9999,004
1,100	1,100	1,111	9999,492
1,200	1,200	1	9999,405
1,300	1,300	1	9998,355
1,400	1,400	1	9999,545
1,500	1,500	-	9998,195

TABLE 8.2 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) **et** ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tableau récapitulatif de l'effet de la procédure d'adaptation sur la distribution des sous-domaines. Le paramètre de transformation de coordonnées garde une valeur importante, assurant ainsi une distribution de points de collocation proche de celle de Gauss-Lobatto.

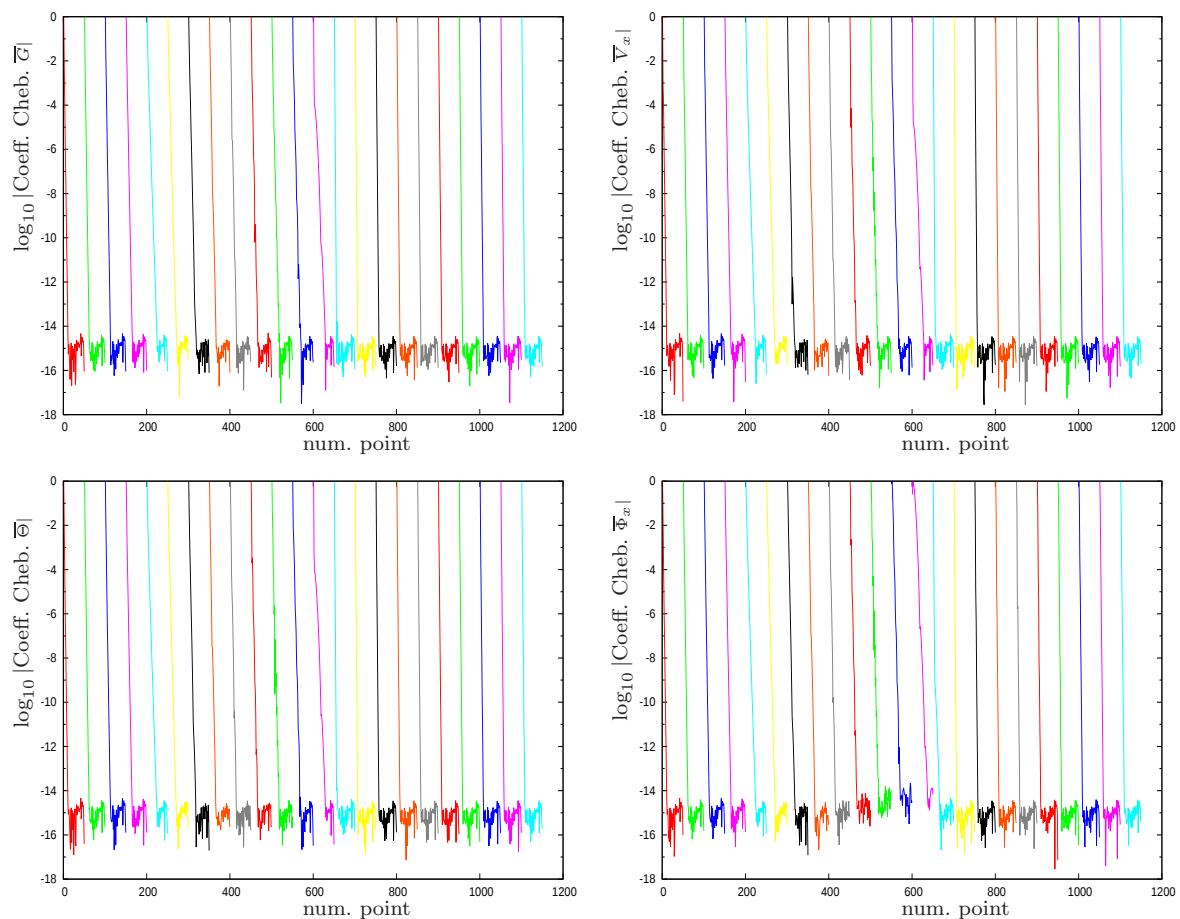


FIGURE 8.3 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tracé logarithmique des valeurs des coefficients de Chebyshev par quantité et par domaine à l'issue de la procédure d'adaptation-résolution. Cette figure est concluante dans le sens où les valeurs basses du spectre affichées et leur régularité confirment la bonne tenue de la procédure d'adaptation.

Nombre de domaines	Points par domaines	Temps initial t_{ini}	Temps final t_{fin}	Nombre de pas en temps
23	50	10^{-5}	194	$1,9 \cdot 10^7$

TABLE 8.3 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tableau récapitulatif de la plage temporelle et de la discrétisation spatiale utilisées ainsi que du nombre de pas en temps effectués au cours du calcul.

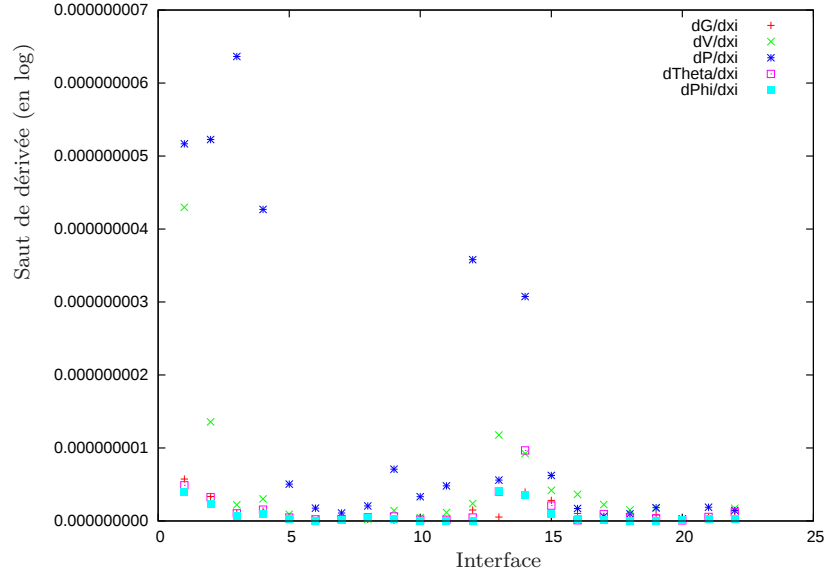


FIGURE 8.4 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tracé logarithmique des valeurs des sauts de dérivée première des quantités de base à l'issue de la procédure d'adaptation-résolution. Les valeurs de ces sauts restent à des valeurs raisonnables, confirmant ainsi la qualité du maillage élaboré.

de densifier la distribution de points sur ce domaine en le divisant en domaines plus petits. Le tout est de continuer à respecter les autres critères et notamment celui limitant la taille relative des domaines par rapport à leurs domaines voisins (CRP1). Le tableau 8.2 montre que pour le maillage choisi, le paramètre h_i a des valeurs finales de l'ordre de 10^4 , ce qui correspond bien à ce qui est attendu. Pour compléter ces informations, la figure 8.4 souligne les valeurs tout à fait convenables des sauts de dérivées à la fin de la procédure d'adaptation-résolution, puisque ces valeurs ne dépassent pas 10^{-8} . On note que le maximum de ces valeurs est majoritairement atteint par la pression. Enfin, la volonté de satisfaire aux critères (CT) nous amène à prendre en compte la plage temporelle suivante :

$$t_{\text{ini}} = 10^{-5}, \quad t_{\text{fin}} = 194. \quad (8.4)$$

Le tableau 8.3 résume la grille temporelle, la discrétisation spatiale ainsi que le nombre de pas en temps du calcul pour le cas de la configuration avec détente subsonique RFA.

8.3 Réponses en perturbations linéaires

Maintenant que la distribution des points de collocation et la plage temporelle utilisées sont établies, il est temps de passer à l'analyse des réponses en perturbations linéaires pour l'écoulement considéré. Avant de procéder à cette analyse, définissons les différents types de tracés qui vont être exploités :

- les tracés en fonction de la variable de calcul ξ et du temps t , soit les tracés en $(\xi, t, \hat{Q})$ avec $\hat{Q}$ une variable quelconque de perturbation,
- les tracés en fonction de la coordonnée de Lagrange m , soit en $(m, t, \hat{Q})$,
- les tracés en fonction de la fonction réduite d'espace $\bar{X}$, c'est-à-dire en $(\bar{X}, t, \hat{Q})$.

De plus, au cours de cette analyse, certains profils sont tracés en échelle logarithmique. Cette échelle est en effet utile dans certains cas pour un meilleur rendu des amplitudes.

Le choix de la valeur non-nulle de $k_{\perp}$ est effectué dans un souci de commodité. Clarisse *et al.* (2008) ayant montré qu'une seule valeur non-nulle de ce nombre d'onde est suffisante pour obtenir la réponse spectrale en perturbations linéaires, ce qui a guidé notre choix est la simplicité d'utilisation de $k_{\perp}$ qui est notamment utilisé pour la validation des critères (CT). La valeur choisie est donc $k_{\perp} = 1$, soit $\lambda_{\perp} = 2\pi$.

À la vue des tracés en échelle logarithmique des perturbations de toutes les quantités primitives pour les deux valeurs de $k_{\perp}$ (Figs. 8.5 et 8.6), soit la densité $\hat{G}$, la vitesse longitudinale $\hat{V}_x$, la température $\hat{T}$, la pression $\hat{P}$ et, dans le cas où $k_{\perp}$ n'est pas nul, la divergence transverse de la vitesse transverse $\hat{D}_{\perp}$, on peut déjà distinguer les zones caractéristiques de l'écoulement. Ainsi le front d'ablation délimite clairement la zone de conduction de la zone sous-choc. Les comportements des perturbations diffèrent d'ailleurs entre ces deux zones, en plus de se comporter différemment selon la valeur de $k_{\perp}$. En effet, la conduction est quasiment inexistante sur la zone sous-choc.

Dans le cas des longueurs d'onde de perturbations infinies (Fig. 8.5) les quantités évoluent principalement par plateaux même si les profils sont moins uniformes dans la zone du front d'ablation. L'ensemble des quantités tracées décroissent légèrement en valeur absolue avec le temps pour $k_{\perp}$ non-nul, c'est-à-dire pour les longueurs d'onde de perturbations finies. De plus, la pression, la vitesse longitudinale et la température, outre un pic au niveau du front d'ablation au temps initial, présentent des oscillations qui ont un niveau moins élevé sur la zone de conduction que sur la zone sous-choc. Cette remarque exclut l'origine, où toutes les figures montrent un pic spatial qui se maintient au cours du temps. Ce maximum est du niveau des valeurs atteintes sur la zone de conduction pour la perturbation en densité et celle en température et va jusqu'à les dominer pour celles en vitesse longitudinale et en pression.

Enfin, en suivant l'évolution temporelle des quantités qui sont tracées, on observe une zone, aux premiers instants qui suivent la phase d'établissement des perturbations, durant laquelle les quantités se comportent autrement que sur le reste de la plage temporelle où leur comportement est plus régulier. Il s'agit d'une première indication sur la limitation du régime d'amplification des perturbations dans le cas des longueurs d'onde finies. Les lignes à ξ constant, qui sont particulièrement visibles sur le tracé du logarithme de la densité de la figure 8.6, suggèrent que la résolution numérique n'est plus suffisamment performante pour que les résultats soient exploitables. La valeur de t_{finex} qui découle de cette observation est $t_{\text{finex}} = 100$.

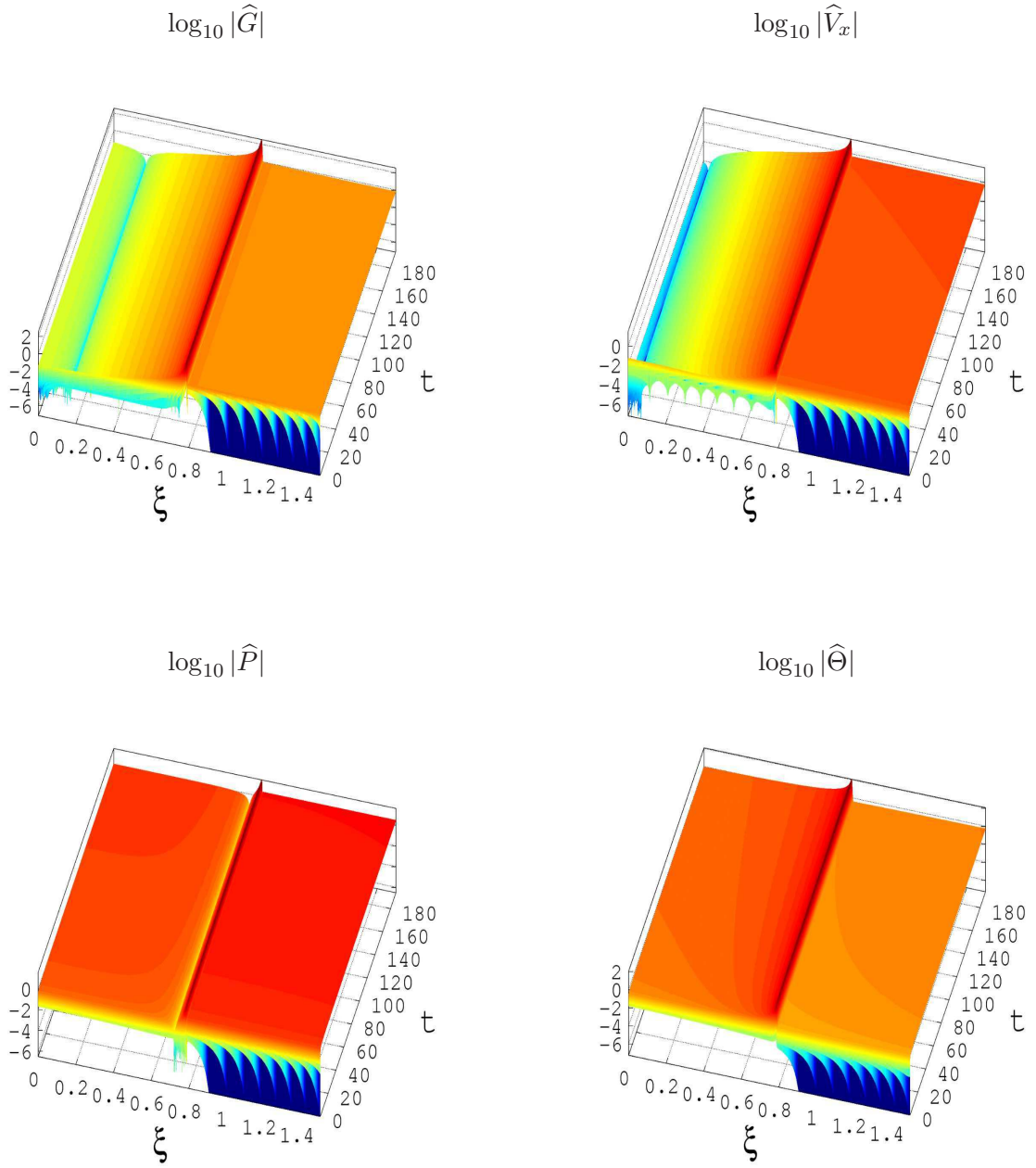


FIGURE 8.5 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{ic} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$), pour $k_\perp = 0$: profils spatio-temporels du logarithme de la densité $\hat{G}$, de la vitesse longitudinale $\hat{V}_x$, de la pression $\hat{P}$ et de la température $\hat{\Theta}$ dans le système de variables (ξ, t) avec $\xi \in [0, 1,50]$ et $t \in [10^{-5}, 194]$.

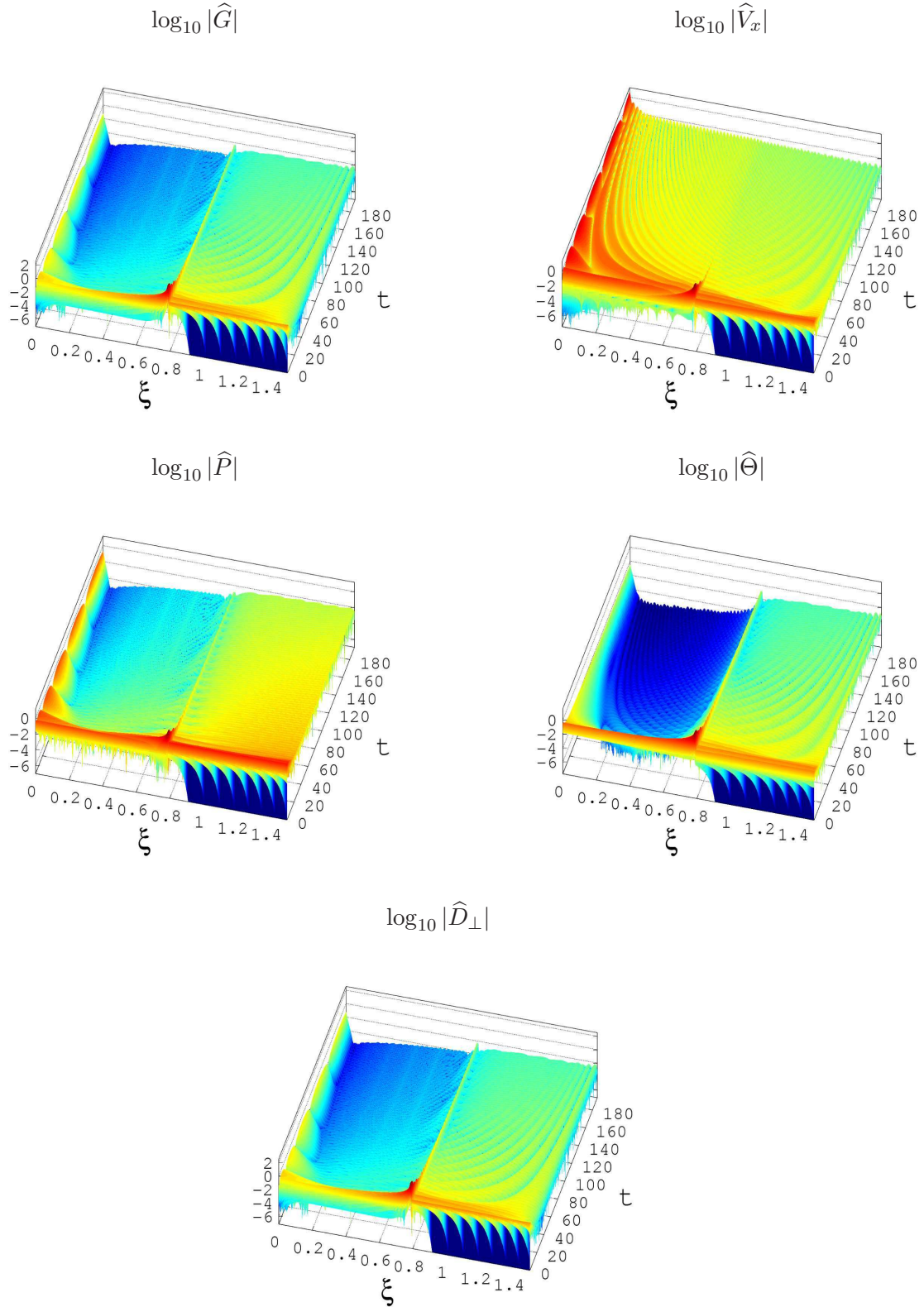


FIGURE 8.6 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$), **pour** $k_\perp = 1$: profils spatio-temporels du logarithme de la densité $\hat{G}$, de la vitesse longitudinale $\hat{V}_x$, de la pression $\hat{P}$, de la température $\hat{\Theta}$ et de la divergence transverse de la vitesse transverse $\hat{D}_\perp$ dans le système de variables (ξ, t) avec $\xi \in [0, 1,50]$ et $t \in [10^{-5}, 194]$. Une différence de comportement est observable entre les temps courts et le reste de la plage temporelle. En effet, le niveau des quantités s'affaïsse après quelques instants.

8.3.1 Régime transitoire

Il est important de bien comprendre la nature et l'influence des phénomènes en jeu dès l'irradiation de la cible. En effet, Emery *et al.* (1991) montrent que la génération du premier choc est une phase déterminante pour le succès de l'implosion. À ce stade, nous pouvons donner des éléments de réponse quant aux différents phénomènes qui jouent un rôle dans le processus. Dans la zone de détente, où le régime de conduction domine, la diffusion est le mode de transmission dominant. Introduites depuis l'origine, les perturbations sont ensuite diffusées jusqu'au front d'ablation. Dans la zone sous-choc, où nous avons vu que la conduction est très faible, quasi-inexistante, la transmission des perturbations jusqu'à l'onde de choc se fait via les ondes acoustiques. Nous allons justifier ces affirmations dans la suite de cette section.

En plus de l'analyse des vitesses de transfert des perturbations dans les premiers instants de l'application de la perturbation de flux de frontière, le second objectif de cette analyse du régime transitoire est d'établir la plage temporelle correspondant à l'établissement du régime autosemblable des perturbations, que nous noterons désormais le régime ASP. De manière concrète, nous allons chercher à déterminer la valeur de t_{erasp} .

8.3.1.1 Analyse aux temps courts

8.3.1.1.1 Mécanisme de transfert dans la zone de conduction Dans ce paragraphe, il est question de montrer que le mécanisme permettant aux perturbations de traverser la zone de conduction est la diffusion. Cela a déjà été démontré dans le cas de la conduction électronique dans le travail de Lombard (2008). Le principe est de comparer l'ordre de grandeur des vitesses des quantités perturbées à la vitesse matière, la vitesse du son et la vitesse de diffusion.

Vitesse de transfert des perturbations : pour commencer, l'évolution de la vitesse pour une quantité Q est présentée de manière générale. Soit $v_{(O \rightarrow T)}^Q$ cette vitesse, définie entre l'instant t_0 pour lequel la perturbation est en l'origine et t_T^Q pour lequel la perturbation a atteint le front d'ablation en ξ_T . Il est important de rappeler que par hypothèse, la perturbation a atteint le front lorsqu'elle dépasse la valeur seuil arbitrairement fixée à 10^{-7} . La vitesse de la quantité Q s'écrit donc :

$$v_{(O \rightarrow T)}^Q = \frac{d_{(O \rightarrow T)}^Q}{t_T^Q - t_0} = \frac{x(\xi = \xi_T, t = t_T^Q) - x(\xi = 0, t = t_0)}{t_T^Q - t_0}. \quad (8.5)$$

L'expression générale d'une longueur (7.4) et les données du tableau 8.4 nous permettent d'obtenir les valeurs de ces vitesses pour la pression et l'entropie (Tab. 8.5). Ces deux vitesses sont du même ordre de grandeur. Il semble donc que leur transfert dans la zone de conduction ait la même origine physique.

Vitesse matière : en raison des forts gradients de vitesse dans la zone de conduction, un encadrement de la vitesse matière est donné. De même que pour la vitesse des quantités perturbées, celle-ci est évaluée à t_0 en $\xi = 0$ et à t_T en ξ_T pris pour une quantité, la pression par exemple. Ainsi, les données du tableau 8.4 et l'expression de la vitesse matière dans (2.24) donnent :

$$v_{\text{matiere}}(\xi = 0, t = t_0^P) \simeq 0,31075, \quad (8.6)$$

et :

$$v_{\text{matiere}}(\xi = \xi_T, t = t_T^P) \simeq 0,43026. \quad (8.7)$$

α	12/11		
ξ_0	0	ξ_T	0,78576
$\overline{G}(\xi = 0)$	1,33303	$\overline{G}(\xi = \xi_T)$	3,77891
$\overline{V}_x(\xi = 0)$	0,88505	$\overline{V}_x(\xi = \xi_T)$	1,22354
$\overline{\Theta}(\xi = 0)$	1,43107	$\overline{\Theta}(\xi = \xi_T)$	0,55515

TABLE 8.4 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) **et** ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tableau récapitulatif des grandeurs nécessaires au calcul de la distance entre l'origine et le front d'ablation.

	t_0^Q	t_T^Q	$v_{(O \rightarrow T)}^Q$
Pression	10^{-5}	$0,10168 \cdot 10^{-4}$	11,34041
Entropie	10^{-5}	$0,10168 \cdot 10^{-4}$	11,34041

TABLE 8.5 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) **et** ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tableau récapitulatif des temps de départ et d'arrivée des perturbations depuis l'origine jusqu'au front d'ablation, ainsi que leur vitesse pour $k_\perp = 0$.

Nous en concluons donc que les perturbations ne se déplacent pas à la vitesse matière de l'écoulement de base à l'intérieur de la zone de conduction. En effet, les ordres de grandeur sont différents de ceux de la vitesse de transfert des perturbations du tableau 8.5.

Vitesse de groupe acoustique : le principe est identique à celui utilisé dans le cas de la vitesse matière. La vitesse du son s'écrit :

$$c(\xi, t) = t^{\alpha-1} \sqrt{\gamma \overline{\Theta}(\xi)}. \quad (8.8)$$

Avec les données du tableau 8.4, on obtient comme vitesse du son aux deux points caractéristiques, en prenant les temps se rapportant à la pression :

$$c(\xi = 0, t = t_0^P) \simeq 0,59168, \quad (8.9)$$

et :

$$c(\xi = \xi_T, t = t_T^P) \simeq 0,36903. \quad (8.10)$$

La vitesse de groupe acoustique définie par $v_{\text{matiere}} \pm c$ n'a pas, elle non plus, le même ordre de grandeur que la vitesse des quantités. Dans la zone de conduction, on peut donc affirmer que les perturbations ne se déplacent pas à la vitesse de groupe acoustique.

Vitesse de diffusion : dans un premier temps, l'objectif est d'écrire une équation de diffusion en première approximation. Pour cela, nous partons de l'équation de perturbation en énergie interne que nous avons écrite en température T selon la variable de Lagrange m . Les différentes hypothèses que nous prenons en compte telles que la nullité des travaux des forces de pression, le

fait que l'écoulement soit considéré comme figé et $k_{\perp} = 0$ nous permettent d'obtenir l'équation de diffusion approchée suivante :

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = (\gamma - 1) \bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial m^2}. \quad (8.11)$$

La résolution de cette équation s'inspire directement des travaux de Hateau (2001). On se place dans le cas particulier d'un milieu semi-infini avec condition aux limites en flux dépendant linéairement du temps. Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial m^2}, & m > 0, \\ \hat{T}(m, 0) = 0, \\ \hat{\varphi}(0, t) = \mathcal{B}_{\varphi} t = -\kappa \frac{\partial \hat{T}}{\partial m}(0, t), \end{cases} \quad (8.12)$$

avec $\kappa = (\gamma - 1) \bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n$ le coefficient de diffusion. La solution $\hat{T}_{sol}(m, t)$ dont l'obtention est détaillée dans (Lombard, 2008) est donnée par :

$$\hat{T}_{sol}(m, t) = \frac{\mathcal{B}_{\varphi}}{3} \left[\left(2t - \frac{m^2}{\kappa} \right) \sqrt{\frac{t}{\pi \kappa}} \exp \left(-\frac{m^2}{4\kappa t} \right) + \frac{m^3}{2\kappa^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{m}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right], \quad (8.13)$$

où κ est supposé constant.

L'idée, dans ce qui suit, est de donner un encadrement de la vitesse de diffusion, évaluée à partir de l'équation (8.13) et des données numériques au front d'ablation et à l'origine (Tabx. 8.4 et 8.5).

Le coefficient de diffusion κ est d'abord évalué pour les deux couples de valeurs ($m = 0, t = t_0$) et (m_T, t_T). Son expression en fonction des fonctions de forme $\overline{G}$ et $\overline{\Theta}$ est :

$$\kappa(0, t_0) \simeq 6,33539 \cdot 10^{-6}, \quad (8.14)$$

et :

$$\kappa(m_T, t_T) \simeq 4,83804 \cdot 10^{-9}. \quad (8.15)$$

Ensuite, il faut déterminer le temps à partir duquel la solution de l'équation de diffusion $\hat{T}_{sol}$ atteint le seuil de 10^{-7} . Cette détermination est effectuée pour $\kappa(0, t_0)$ et $\kappa(m_T, t_T)$ aux positions $m = 0$ et m_T . Ces valeurs de temps permettent alors d'évaluer la position physique x correspondante. Finalement, la vitesse de diffusion est, pour un κ fixé, égale au rapport des distances entre ces deux positions et les deux temps. Pour le cas particulier de $\kappa(0, t_0)$, on peut résumer ainsi la procédure :

- évaluation de $\kappa(0, t_0)$ en $m = 0$ et $t = t_0$,
- t_0^0 temps pour lequel $\hat{T}_{sol}(m = 0) = 10^{-7}$,
- la position x_0^0 est calculée pour t_0^0 en $m = 0$,
- t_T^0 temps pour lequel $\hat{T}_{sol}(m = m_T) = 10^{-7}$,
- la position x_T^0 est calculée pour t_T^0 en $m = m_T$,
- la vitesse de diffusion s'écrit pour $\kappa(0, t_0)$: $v_{\text{diffusion}}^0 = \frac{x_T^0 - x_0^0}{t_T^0 - t_0^0}$,
- de manière identique, la vitesse de diffusion s'écrit pour $\kappa(m_T, t_T)$: $v_{\text{diffusion}}^T = \frac{x_T^T - x_0^T}{t_T^T - t_0^T}$.

Les applications numériques présentes dans le tableau 8.6 permettent de conclure que le mode de transport des perturbations dans la zone de conduction est la diffusion. En effet, les deux vitesses présentes dans le tableau 8.6 sont du même ordre de grandeur.

	κ_0
t_0^0	4,79527 10 ⁻⁷
t_T^0	4,82000 10 ⁻⁷
x_0^0	1,03638 10 ⁻⁷
x_T^0	1,70793 10 ⁻⁷
$v_{\text{diffusion}}^0$	27,15537
$v_{(O \rightarrow T)}^P$	11,34041

TABLE 8.6 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : évaluation de la vitesse de diffusion pour un coefficient de diffusion évalué en $m = 0$ et rappel de la vitesse de la perturbation en pression dans la zone de conduction.

8.3.1.1.2 Mécanisme de transfert dans la zone sous-choc Il est question ici de comparer deux distances : celle parcourue par le signal en perturbations entre le front d’ablation et le front de choc et celle parcourue par le son pendant une durée équivalente. Le but de cette comparaison est de voir si le temps de passage des perturbations entre le front d’ablation et le choc est comparable au temps de propagation de l’onde acoustique. On note t_T et t_{fc} les instants respectifs pour lesquels le signal perturbé atteint le front d’ablation et le front de choc.

Distance parcourue par le signal : la distance parcourue par le signal entre (ξ_T, t_T) et (ξ_{fc}, t_{fc}) s’écrit à l’aide de l’expression générale d’une longueur (7.4) :

$$d_{TC} = \frac{t_{fc}^\alpha}{\alpha} \left(\frac{\alpha \xi_{fc}}{\overline{G}(\xi_{fc})} + \overline{V}_x(\xi_{fc}) \right) - \frac{t_T^\alpha}{\alpha} \left(\frac{\alpha \xi_T}{\overline{G}(\xi_T)} + \overline{V}_x(\xi_T) \right). \quad (8.16)$$

Vitesse de groupe acoustique : la vitesse de groupe, notée $v_{\text{acoustique}}$ est la somme algébrique de la vitesse matière et de la vitesse du son. Dans le repère du laboratoire, la distance parcourue par les ondes acoustiques, pour un transfert du front vers le choc, s’écrit comme l’intégrale de cette vitesse de propagation acoustique prise entre les instants t_T et t_{fc} :

$$d_{\text{acoustique}}(\xi, t) = \int_{t_T}^{t_{fc}} v_{\text{acoustique}}(\xi, t) dt = \int_{t_T}^{t_{fc}} [c(\xi, t) + v_{\text{matiere}}(\xi, t)] dt, \quad (8.17)$$

avec c donnée par (8.8) et v_{matiere} par (2.24). Afin de simplifier l’intégration, la moyenne spatiale de $v_{\text{acoustique}}$, notée $\underline{v}_{\text{acoustique}}$ est utilisée. Celle-ci est définie par $\underline{v}_{\text{acoustique}} = 0.9386 t^{\alpha-1}$. Cette moyenne est déterminée en utilisant la valeur de la vitesse au front d’ablation et au front de choc ainsi que la distance entre ces deux fronts.

Applications numériques : configuration avec nombre d’onde nul $k_\perp = 0$

Le calcul d’un écoulement complet pour $k_\perp = 0$ et des temps compris entre $t = 10^{-5}$ et $t = 10^{-4}$ nous a permis d’évaluer les temps d’arrivée de la perturbation en pression au front d’ablation puis au choc. Connaissant les valeurs de ξ_T , de ξ_{fc} et des quantités de base, il est désormais possible de vérifier si le signal se propage bien à la vitesse de groupe acoustique dans la zone sous-choc.

	$k_{\perp} = 0$	$k_{\perp} = 1$		$k_{\perp} = 0$	$k_{\perp} = 1$
ξ_T	0,78576	0,78576	ξ_{fc}	1,500	1,500
$t_T^{\Omega_{\perp}}$	-	$1,0168 \cdot 10^{-5}$	$t_{fc}^{\Omega_{\perp}}$	-	$1,3277 \cdot 10^{-5}$
t_T^P	$1,0168 \cdot 10^{-5}$	$1,0168 \cdot 10^{-5}$	t_{fc}^P	$1,3277 \cdot 10^{-5}$	$1,3277 \cdot 10^{-5}$
t_T^S	$1,0168 \cdot 10^{-5}$	$1,0168 \cdot 10^{-5}$	t_{fc}^S	$1,3277 \cdot 10^{-5}$	$1,3277 \cdot 10^{-5}$
$\overline{G}(\xi_T)$	3,77891	3,77891	$\overline{G}(\xi_{fc})$	3,9998	3,9998
$\overline{V}_x(\xi_T)$	1,22354	1,22354	$\overline{V}_x(\xi_{fc})$	1,22726	1,22726
$\overline{\Theta}(\xi_T)$	0,55515	0,55515	$\overline{\Theta}(\xi_{fc})$	0,50208	0,50208

TABLE 8.7 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 2,01543$) : tableau récapitulatif des grandeurs nécessaires au calcul de la distance entre le front d'ablation et le choc pour $k_{\perp} = 0$ et $k_{\perp} = 1$.

	$\hat{P}$	$\hat{S}$
d_{TC}^Q	$2,375 \cdot 10^{-6}$	$2,375 \cdot 10^{-6}$
$d_{\text{acoustique}}^Q$	$1,039 \cdot 10^{-6}$	$1,039 \cdot 10^{-6}$

TABLE 8.8 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 2,01543$) : applications numériques des distances parcourues par les signaux et par une onde acoustique pour $k_{\perp} = 0$.

	$\Omega_{\perp}$	$\hat{P}$	$\hat{S}$
d_{TC}^Q	$2,375 \cdot 10^{-6}$	$2,375 \cdot 10^{-6}$	$2,375 \cdot 10^{-6}$
$d_{\text{acoustique}}^Q$	$1,039 \cdot 10^{-6}$	$1,039 \cdot 10^{-6}$	$1,039 \cdot 10^{-6}$

TABLE 8.9 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 2,01543$) : applications numériques des distances parcourues par les signaux et par une onde acoustique pour $k_{\perp} = 1$.

Dans ce cas, les informations issues du calcul sont fournies dans le tableau 8.7, en posant ξ_T la position du front d'ablation. Le calcul de la distance parcourue par le signal (8.16) donne les valeurs du tableau 8.8. La distance parcourue par une onde acoustique entre t_T et t_{fc} est finalement donné par le tableau 8.8. Cette valeur concorde avec la distance parcourue par le signal. Quelque soit la quantité étudiée, on a d_{TC}^Q du même ordre de grandeur que $d_{acoustique}^Q$. Ainsi, les variations de la pression se propagent dans la zone sous-choc principalement à la vitesse de groupe acoustique.

configuration avec nombre d'onde non-nul $k_{\perp} = 1$

De même que pour le cas $k_{\perp} = 0$, les informations issues du calcul pour les fronts d'ablation et de choc sont réunies dans le tableau 8.7. Les applications numériques des distances sont données dans le tableau 8.9. Les résultats concordent avec la distance parcourue par le signal.

Finalement, l'application numérique de la distance parcourue par les ondes acoustiques pour $k_{\perp} = 1$ confirme les conclusions fournies pour le cas du nombre d'onde nul. De plus, quel que soit la valeur de $k_{\perp}$, il semble que toutes les perturbations se propagent à la même vitesse dans la zone sous-choc.

8.3.1.1.3 Conclusion de l'étude aux temps courts L'étude approfondie du comportement des perturbations aux temps courts nous a permis de cibler et de comprendre les premiers phénomènes physiques mis en jeu. Ainsi, nous savons désormais que les perturbations, introduites à l'origine, transitent dans la zone de conduction avec la diffusion. Après le passage du front d'ablation, le phénomène en action est la vitesse du groupe acoustique. La fin des temps courts est marquée par l'atteinte du choc par les perturbations. Sur la figure 8.7, les nappes représentées correspondent aux valeurs des perturbations pour les quantités de perturbation communes aux deux cas de figure concernant la valeur de $k_{\perp}$. Le fait que la colonne de gauche, qui regroupe les nappes établies à $k_{\perp} = 0$, et la colonne de droite, pour $k_{\perp} = 1$, semblent identiques indique que la phase transitoire des perturbations linéaires est indépendante de la valeur de $k_{\perp}$.

8.3.1.2 Transition vers le régime autosemblable

Le but de cette partie est d'identifier le temps t_{erasp} pour lequel les perturbations deviennent autosemblables. Pour cela, nous traçons les profils en ξ de chacune des variables réduites de perturbations (VRP) en différents instants. Ces variables réduites sont obtenues en divisant la perturbation par la puissance du temps de son comportement autosemblable (Clarisse *et al.*, 2008), on définit ainsi :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{G}} &= \widehat{G}, \\ \widehat{\mathcal{V}}_x &= \widehat{V}_x t^{1-\alpha}, \\ \widehat{\mathcal{T}} &= \widehat{\Theta} t^{2(1-\alpha)}, \\ \widehat{\mathcal{P}} &= \widehat{P} t^{2(1-\alpha)}, \\ \widehat{\mathcal{D}}_{\perp} &= \widehat{D}_{\perp} t.\end{aligned}\tag{8.18}$$

La figure 8.8, sur laquelle les profils sont tracés avec les quantités issues du calcul pour $k_{\perp} = 0$, nous donne des indications sur la valeur de t_{erasp} . Pour la recherche de t_{erasp} , cette configuration est préférable car le palier atteint par les quantités se maintient dans le temps. Sur ces courbes, les profils des solutions semblent atteindre le régime autosemblable autour de $t = 10^{-2}$. En effet, à partir de cet instant, les profils des perturbations réduites se confondent. Pour avoir

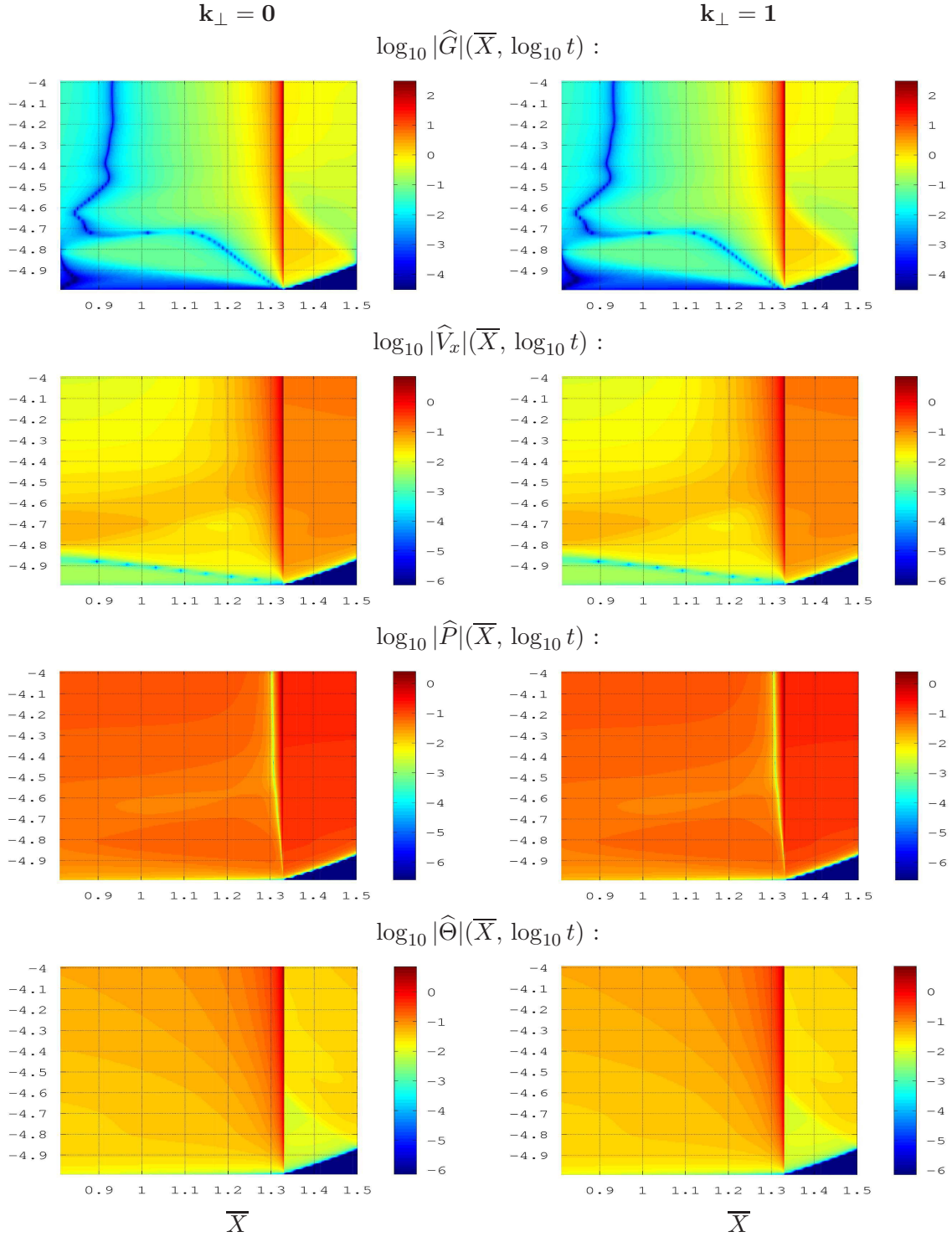


FIGURE 8.7 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tracés du logarithme de la perturbation en densité $\hat{G}$, vitesse longitudinale $\hat{V}_x$, pression $\hat{P}$ et température $\hat{\Theta}$ en fonction de la variable réduite d'espace $\bar{X}$ et du logarithme du temps, pour $k_{\perp} = 0$ (colonne de gauche) et $k_{\perp} = 1$ (colonne de droite). La plage temporelle $[10^{-5}, 10^{-4}]$ permet de visualiser l'intégralité du temps nécessaire aux perturbations pour atteindre le front de choc. L'absence de différences entre les deux colonnes souligne l'indépendance du régime transitoire des perturbations vis-à-vis du nombre d'onde.

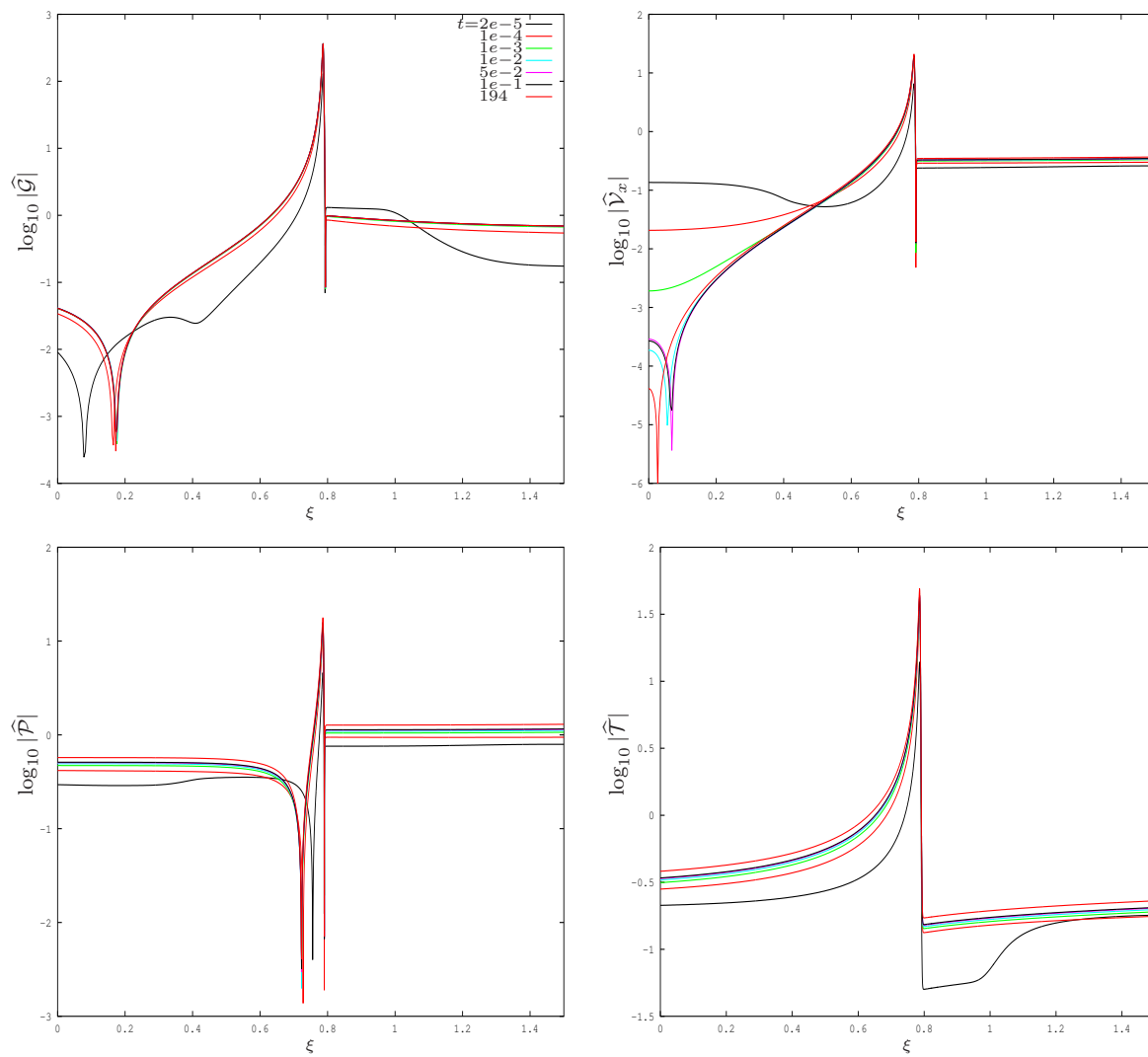


FIGURE 8.8 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tracés des profils logarithmiques des variables réduites de perturbation en fonction de ξ pour différentes valeurs du temps afin de déterminer le temps t_{erasp} nécessaire à l'établissement du régime autosemblable des perturbations. Celui-ci se caractérise par une superposition des profils selon la variable ξ .

plus d'informations sur les profils au temps t_{erasp} , une autre figure est examinée. Il s'agit de la superposition des profils des variables réduites de perturbation avec $k_{\perp} = 0$ et $k_{\perp} = 1$ au temps $t = 10^{-2}$. Sur cette figure 8.9, les solutions se confondent parfaitement. Bien que cette quantité ne soit pas définie dans le cas pour lequel $k_{\perp} = 0$, le tracé de la figure 8.10 permet de se faire une idée du profil autosemblable et du niveau de la divergence transverse de la vitesse transverse pour $k_{\perp} = 1$ et $t_{\text{erasp}} = 10^{-2}$.

8.3.2 Régime autosemblable

Dans cette partie de l'étude, il est question de décrire l'évolution des perturbations sur l'ensemble de l'intervalle de temps choisi pour l'étude, soit $[10^{-5}, 194]$. Selon les hypothèses de notre calcul, les perturbations ont toutes un niveau nul au moment du temps initial t_{ini} sauf le flux à l'origine. C'est seulement ensuite que ces perturbations se propagent jusqu'au choc, chacune avec son mode de transmission et sa vitesse. Outre les quantités primitives des perturbations, il est intéressant de regarder le comportement des modes de Kovásznay, soit le mode tourbillonnaire, le mode acoustique et le mode entropique. Au cours de cette partie, le nombre d'onde réduit est utilisé. Il s'agit d'un nombre d'onde mesuré relativement à une échelle de longueur réelle de l'écoulement de base. Il inclut ainsi l'information de la dilatation de l'écoulement de base au cours du temps. Celui-ci intervient lorsqu'on souhaite comparer les longueurs d'onde de perturbations aux longueurs de l'écoulement de base.

8.3.2.1 Réponses globales et en variables réduites

Le tracé de la figure 8.11 montre l'évolution du maximum de la perturbation de densité en fonction du temps. Les deux courbes correspondent aux deux valeurs utilisés du nombre d'onde transverse $k_{\perp}$. Une fois atteint, le maximum de perturbation en densité est conservé dans le cas des longueurs d'onde infinies. Le comportement de ce maximum est différent pour les longueurs d'onde finies, puisque ce maximum est conservé un certain temps avant de diminuer. Le choix du temps initial est justifié par la figure 8.11 dans le sens où les deux configurations d'écoulement atteignent le régime autosemblable à des instants comparables, rendant possible l'étude couplée de celles-ci. Concrètement, cette figure indique que pour un nombre d'onde nul, la solution tend vers une solution de la même famille alors que pour un nombre d'onde non-nul, les perturbations finissent par décroître aux temps longs et l'écoulement devient stable à nouveau. Dans le cadre de l'étude d'une implosion de cible en FCI, la partie intéressante est la phase transitoire qui précède cet état stable.

Au niveau du front d'ablation, la figure 8.12 montre l'évolution de la perturbation en densité en fonction du logarithme du nombre d'onde réduit. Après une mise en place illustrée par une croissance, cette perturbation suit ensuite un régime oscillatoire amorti. Dans le cadre de cette discussion, la valeur de $k_{\perp}$ est fixée, on observe donc l'évolution temporelle de la perturbation en densité. On peut aussi regarder 8.12 en la considérant comme une figure pour laquelle le temps t serait fixé et où la valeur de $k_{\perp}$ varierait, ce qui nous donne des informations utiles sur le spectre.

La déformation au front d'ablation est tracée sur la figure 8.13a en fonction du logarithme du nombre d'onde transverse réduit défini en (5.62) dans le cas où $k_{\perp} = 1$. Rapidement à son maximum, la déformation considérée se comporte ensuite de manière oscillatoire dans le sens où la figure 8.13 révèle un enchaînement de croissance et de décroissance de la valeur de cette déformation. De manière générale, un amortissement de la valeur de la déformation est observé. Le tracé de la figure 8.13b montre l'évolution de la valeur absolue de cette déformation aux

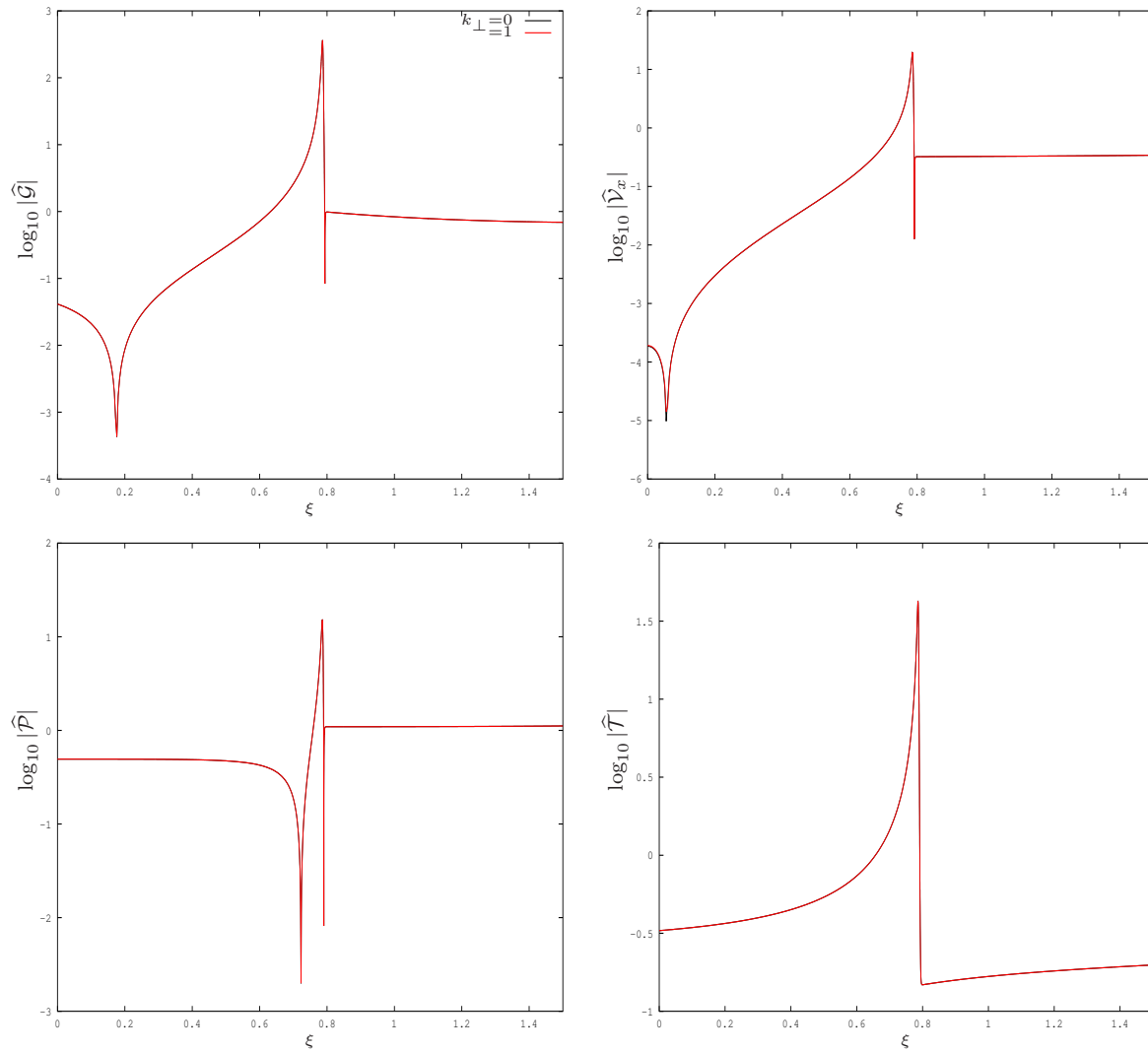


FIGURE 8.9 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : superposition des profils en échelle logarithmique des variables réduites de perturbation en fonction de ξ pour $k_{\perp} = 0$ et $k_{\perp} = 1$ au temps $t_{\text{erasp}} = 10^{-2}$.

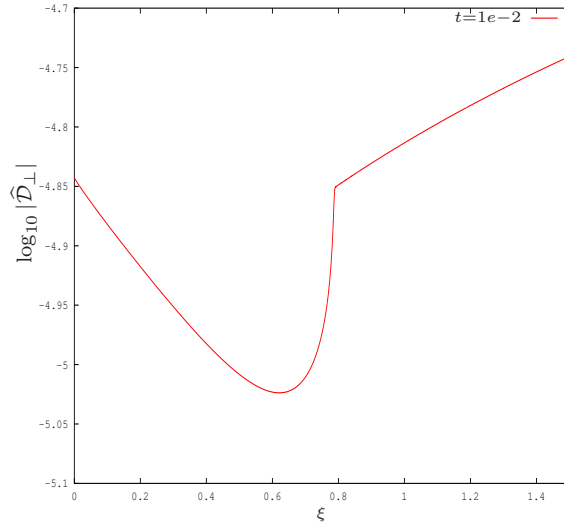


FIGURE 8.10 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : profil en échelle logarithmique de la divergence transverse de la vitesse transverse en fonction de ξ au temps $t_{\text{erasp}} = 10^{-2}$. Cette quantité n'étant définie que pour $k_\perp$ non-nul, la comparaison des profils avec longueurs d'onde de perturbations finies et infinies n'est pas possible.

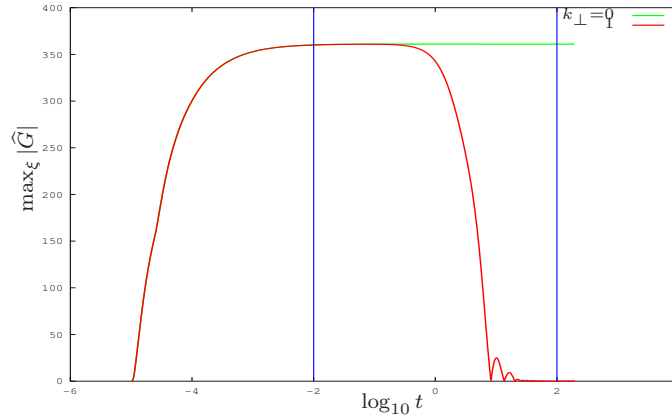


FIGURE 8.11 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tracé en fonction du temps de l'évolution du maximum de la perturbation en densité pour la valeur choisie du temps initial, soit $t_{\text{ini}} = 10^{-5}$. Les lignes bleues correspondent aux logarithmes des temps t_{erasp} , pour lequel le régime autosemblable est considéré comme établi, et t_{finex} , à partir duquel les résultats ne sont plus exploitables. Cette figure nous apprend que le cas $k_\perp = 0$ amène à l'obtention d'une solution de la même famille alors que dans le cas $k_\perp = 1$, la perturbation s'affaïsse, à partir de temps de l'ordre 10^0 .

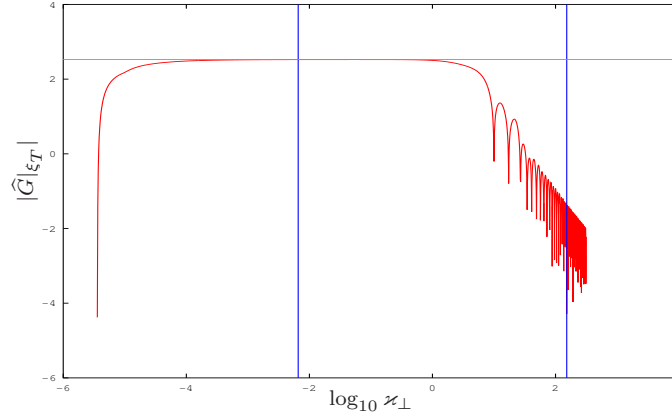


FIGURE 8.12 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 2,01543$) : tracé de la perturbation de densité au front d’ablation en fonction du logarithme du nombre d’onde réduit $\kappa_{\perp} = t^{\alpha} k_{\perp}$ dans le cas $k_{\perp} = 1$. Les lignes bleues correspondent aux logarithmes des nombres d’onde réduits calculés avec le temps t_{erasp} , pour lequel le régime autosemblable est considéré comme établi, et t_{finex} , à partir duquel les résultats ne sont plus exploitables. La ligne verte est placée de sorte à représenter la valeur de la réponse en perturbation de densité au front pour $k_{\perp} = 0$. Il ressort de ce tracé que pour les grandes longueurs d’onde relatives à l’écoulement de base, la perturbation en densité au front d’ablation est constante au cours du temps, suivie d’une limite à partir de laquelle cette perturbation décroît en oscillant.

premiers instants. Celle-ci se développe ainsi de façon linéaire avant d’atteindre son maximum et de décroître.

Pour conclure ces observations générales sur l’ensemble de la plage temporelle, la figure 8.14 donne un autre point de vue sur l’évolution dans le temps des quantités perturbées. En effet, ce tracé des profils de perturbations réduites en fonction de la variable réduite d’espace $\bar{X}$ et du logarithme du nombre d’onde réduit $\kappa_{\perp}$ retranscrit l’évolution des perturbations réduites en tenant compte des proportions des différentes zones de l’écoulement. Un palier est clairement visible pour les plus grandes longueurs d’onde, soit pour les temps courts. Celui-ci est suivi d’oscillations, en accord avec la figure 8.11, qui confirment que pour les plus petites longueurs d’onde, soit pour les temps longs, les perturbations atteignent un régime oscillatoire amorti.

8.3.2.2 Analyse des modes de Kovászny

Pour cette partie du mémoire dans laquelle l’évolution des modes tourbillonnaire, acoustique et entropique sont analysés, deux figures sont utilisées. La figure 8.15 représente les valeurs du logarithme de la perturbation en vorticité transverse $\log_{10} |\hat{\Omega}_{\perp}/\bar{G}|$, en pression $\log_{10} |\hat{P}|$ et en entropie $\log_{10} |\hat{S}|$ en fonction du temps t et de la variable autosemblable ξ , sur une plage temporelle intermédiaire $[10^{-5}, 40]$ afin de mieux faire ressortir les structures qui se dégagent de tels tracés. Les mêmes logarithmes apparaissent sur la figure 8.16 mais sont tracés en fonction de la variable de Lagrange m et du temps t .

Mode tourbillonnaire : la vorticité est, par définition, nulle dans le cas où $k_{\perp} = 0$. Intéressons-nous donc au cas $k_{\perp} = 1$. Les tracés des figures 8.15 et 8.16 laissent voir des structures hyperboliques sur l’ensemble du domaine, même si elles sont légèrement plus marquées en aval du front

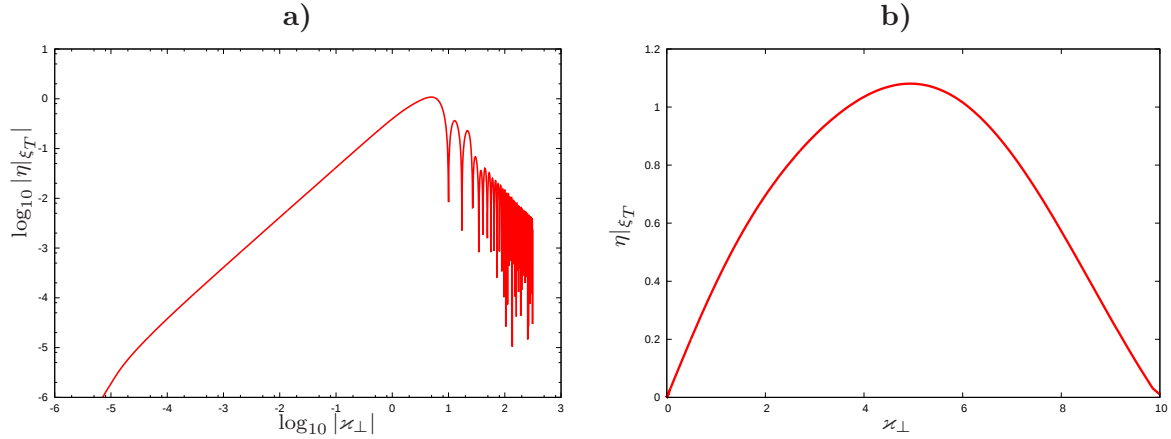


FIGURE 8.13 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 2,01543$) : tracé de la déformation du front d'ablation en fonction du logarithme du nombre d'onde réduit $\kappa_{\perp} = t^{\alpha} k_{\perp}$, en échelle logarithmique pour l'ensemble de la gamme temporelle (Fig. a) et en valeur absolue pour les temps courts (Fig. b). En parallèle avec la figure 8.12, on observe que la déformation du front d'ablation atteint rapidement un maximum avant de décroître et de suivre un régime oscillatoire amorti, en accord avec la figure 8.12. Le tracé en valeur absolue indique une croissance quasi-linéaire de la déformation.

d'ablation. On observe deux périodes temporelles, déjà remarquées par Lombard (2008), à savoir les temps courts pendant lesquels la vorticité atteint ses valeurs extrêmes alors que les temps intermédiaires semblent propices à une vorticité plus basse en valeur absolue.

Mode acoustique :

longueurs d'onde infinies : la perturbation en pression dans le cas d'une longueur d'onde finie (Fig. 8.15) se comporte par plateaux. Cette évolution est cohérente avec l'autosimilarité des perturbations après une phase transitoire. On distingue clairement les trois zones principales de l'écoulement. La perturbation atteint un niveau plus élevé dans la zone sous-choc. Excepté l'incontournable phase transitoire, les temps courts ne laissent pas apparaître de comportement particulier de la perturbation.

longueurs d'onde finies : le fait d'introduire une perturbation transverse change de façon certaine le tracé de la pression en fonction de la variable autosemblable ξ et du temps t . Des structures rectilignes apparaissent notamment dans la zone sous-choc, Dans la région proche de l'origine, on observe un maximum au niveau de l'origine suivi d'un minimum de perturbation en pression à partir de temps intermédiaires. On peut donc en déduire une amplification de la perturbation à l'origine vraisemblablement due aux conditions aux limites.

Mode entropique :

longueurs d'onde infinies : la perturbation en entropie, dans le cas de longueurs d'onde de perturbations infinies, présente un extremum au niveau du front d'ablation. La zone de conduction laisse paraître une amplification progressive de cette perturbation jusqu'au front d'ablation. Sur la zone sous-choc, excepté quelques structures apparaissant pour les temps courts, la perturbation semble atteindre un plateau. En revanche, l'évolution temporelle de cette perturbation est quasi-nulle.

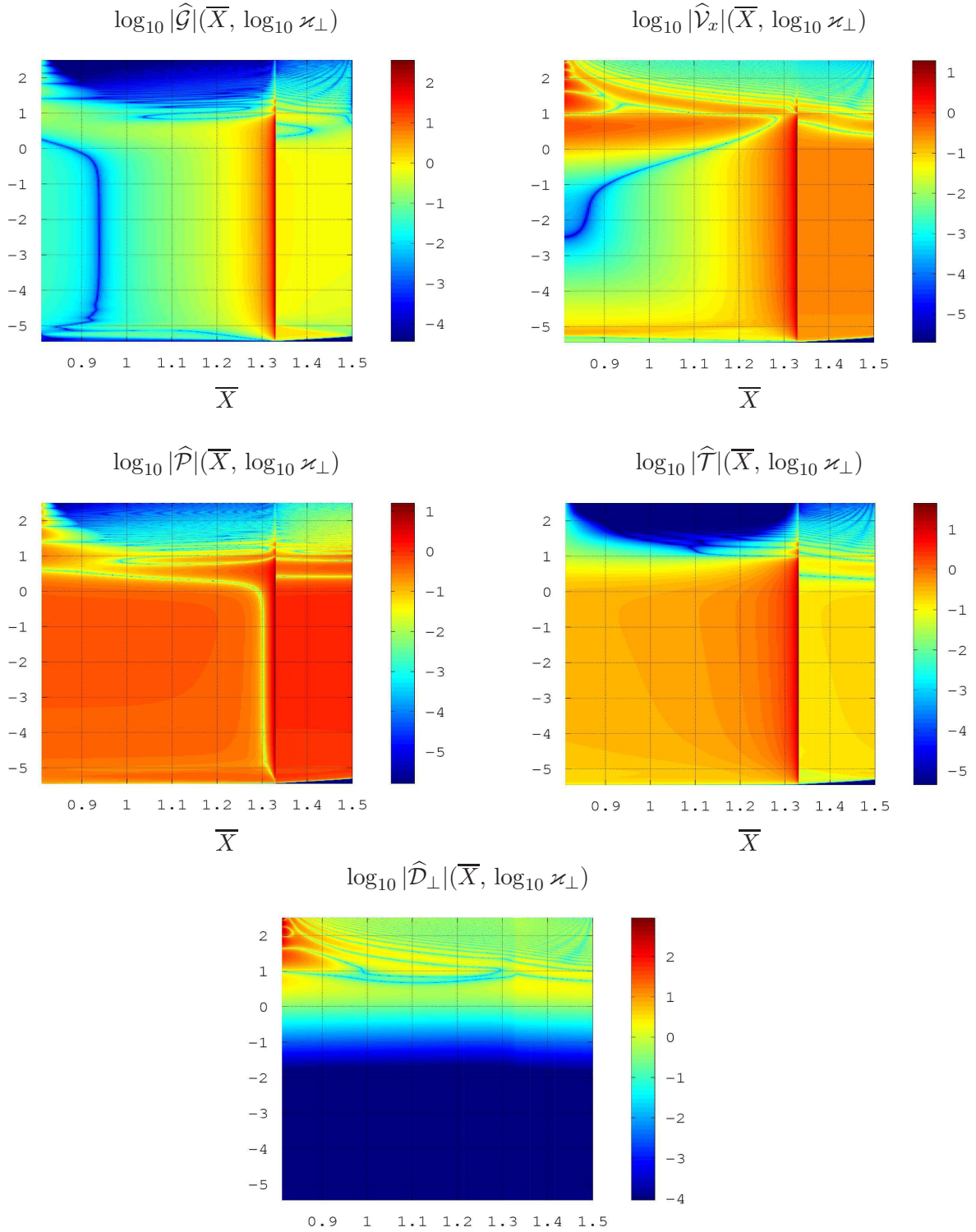


FIGURE 8.14 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 2,01543$) : tracés des perturbations réduites de densité $\hat{\mathcal{G}}$, de vitesse longitudinale $\hat{\mathcal{V}}_x$, de pression $\hat{\mathcal{P}}$, de température $\hat{\mathcal{T}}$ et de divergence transverse $\hat{\mathcal{D}}_{\perp}$ en fonction de la variable réduite d'espace $\bar{X}$ et du logarithme du nombre d'onde réduit $\kappa_{\perp}$. En parallèle avec la figure 8.12, on observe qu'un palier apparaît aux plus grandes longueurs d'onde, soit aux temps courts, suivi du régime oscillatoire amorti.

longueurs d'onde finies : lorsque la même quantité est observée avec l'introduction d'une perturbation transverse, l'évolution temporelle est plus marquée. On retrouve ainsi les formes hyperboliques de la perturbation en vorticité dans la zone sous-choc. Il est possible d'y voir un lien avec le même phénomène dominant pour les deux modes. Cependant, les hyperboles n'ont pas la même structure. On remarque également une amplification de la perturbation au niveau du front d'ablation.

8.3.2.3 Analyse par zone

  présent, nous allons regarder spécifiquement chaque zone de l'écoulement, à savoir la zone sous-choc, la zone de conduction et la zone du front d'ablation pour essayer de comprendre les mécanismes en jeu pour le transport des perturbations sur chacune d'entre elles.

Zone sous-choc : la zone sous-choc est particulièrement intéressante parce qu'elle est la première touchée par la réponse du choc.

VORTICITÉ : la figure 8.16 indique que les isovalues de vorticité sont des droites $m = \text{cste}$. Cela signifie que pour m fixé, la quantité $\omega_{\perp}/\bar{p}$ est constante. Nous pouvons traduire cela par une advection de la vorticité des particules du fluide par l'écoulement de base. Les oscillations présentes sur le tracé selon ξ de la figure 8.15 suggèrent quant à elles une production de vorticité sur la zone sous-choc. Cependant, le tracé de la figure 8.16 ne montrant pas d'évolution temporelle en valeur absolue de la vorticité à m constant, on peut en déduire que la production observée sur la figure 8.15 est un effet du transport par advection.

PRESSION : en amont du front d'ablation, le signal produit au front d'ablation se superpose au signal issu du front de choc. Ces deux signaux se rencontrent et se superposent pour former un réseau d'ondes acoustiques visible sur la figure 8.15. Sur la figure 8.16, les structures dominantes forment un angle très faible avec l'axe des m . Les ondes acoustiques se propagent donc rapidement. C'est la trace d'interférences entre le front et la zone aval.

ENTROPIE : les figures 8.15 et 8.16 présentent, concernant l'entropie sur la zone sous-choc, les mêmes caractéristiques que celles observées pour la vorticité. Pour les mêmes raisons, nous pouvons donc affirmer qu'il y a production d'entropie sur la zone-choc et que le mécanisme principal de transport de cette quantité est l'advection. De la même manière que pour la vorticité, l'examen de la figure 8.16 nous montre que la production observée est en réalité due au transport par advection.

Zone de conduction : dans un second temps, intéressons-nous   la zone de conduction.

VORTICITÉ : le comportement de la vorticité sur la zone de conduction est similaire à son comportement sur la zone sous-choc. Les mêmes constats sont donc applicables.

PRESSION : contrairement à la vorticité, le passage du front d'ablation change radicalement le comportement de la perturbation en pression. La figure 8.15 montre que le maximum de pression est atteint au niveau de l'origine. La zone de conduction est critique pour la pression puisque le minimum est aussi atteint sur cette zone.

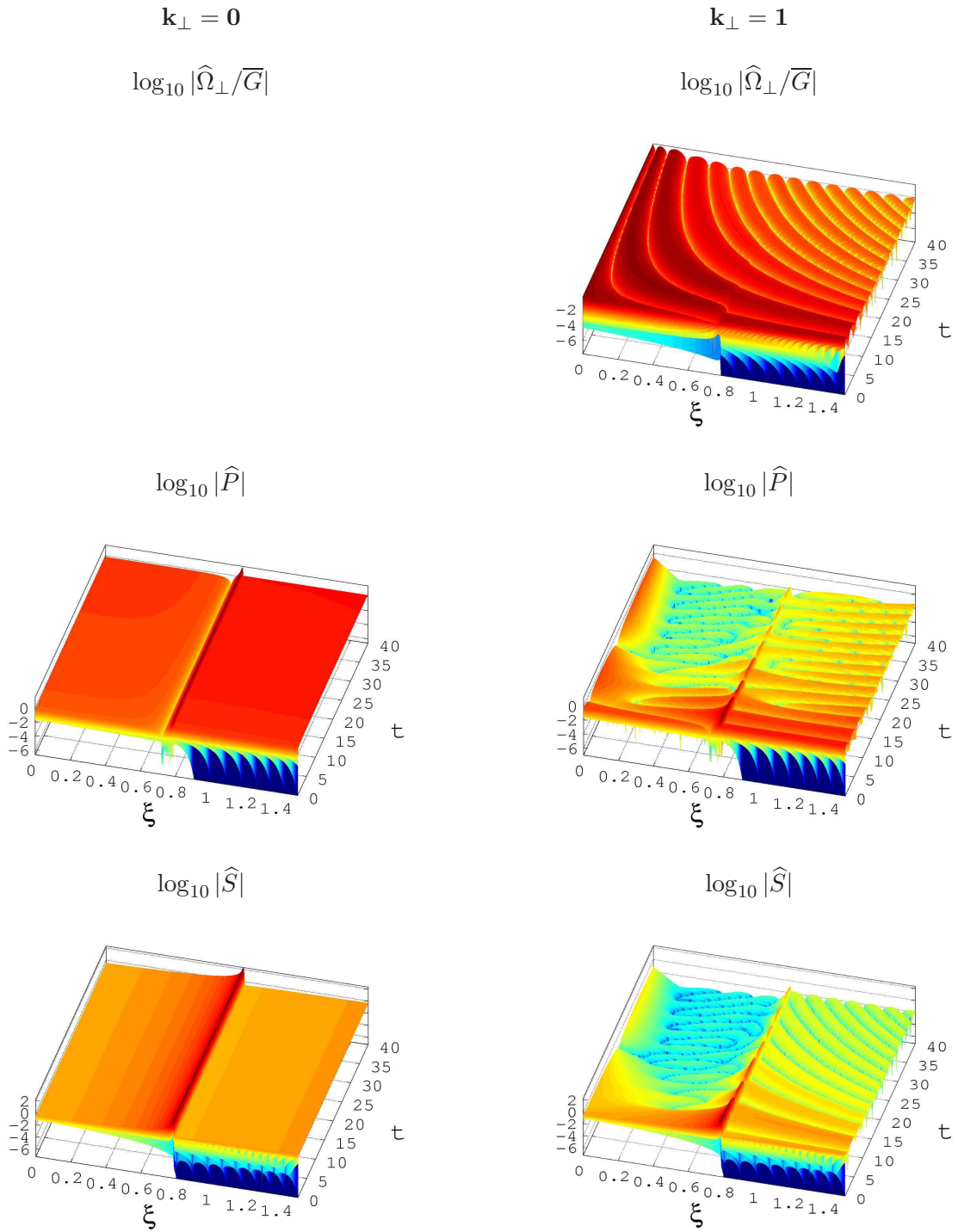


FIGURE 8.15 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : profils spatio-temporels en fonction de la variable auto-similaire ξ du logarithme de la vorticité transverse $\log_{10} |\hat{\Omega}_\perp / \overline{G}|$, de la pression $\log_{10} |\hat{P}|$ et de l'entropie $\log_{10} |\hat{S}|$. Les tracés sont limités à $t = 40$ pour se concentrer sur les instants durant lesquels les perturbations sont non-négligeables pour $k_\perp = 1$ (Fig. 8.11).

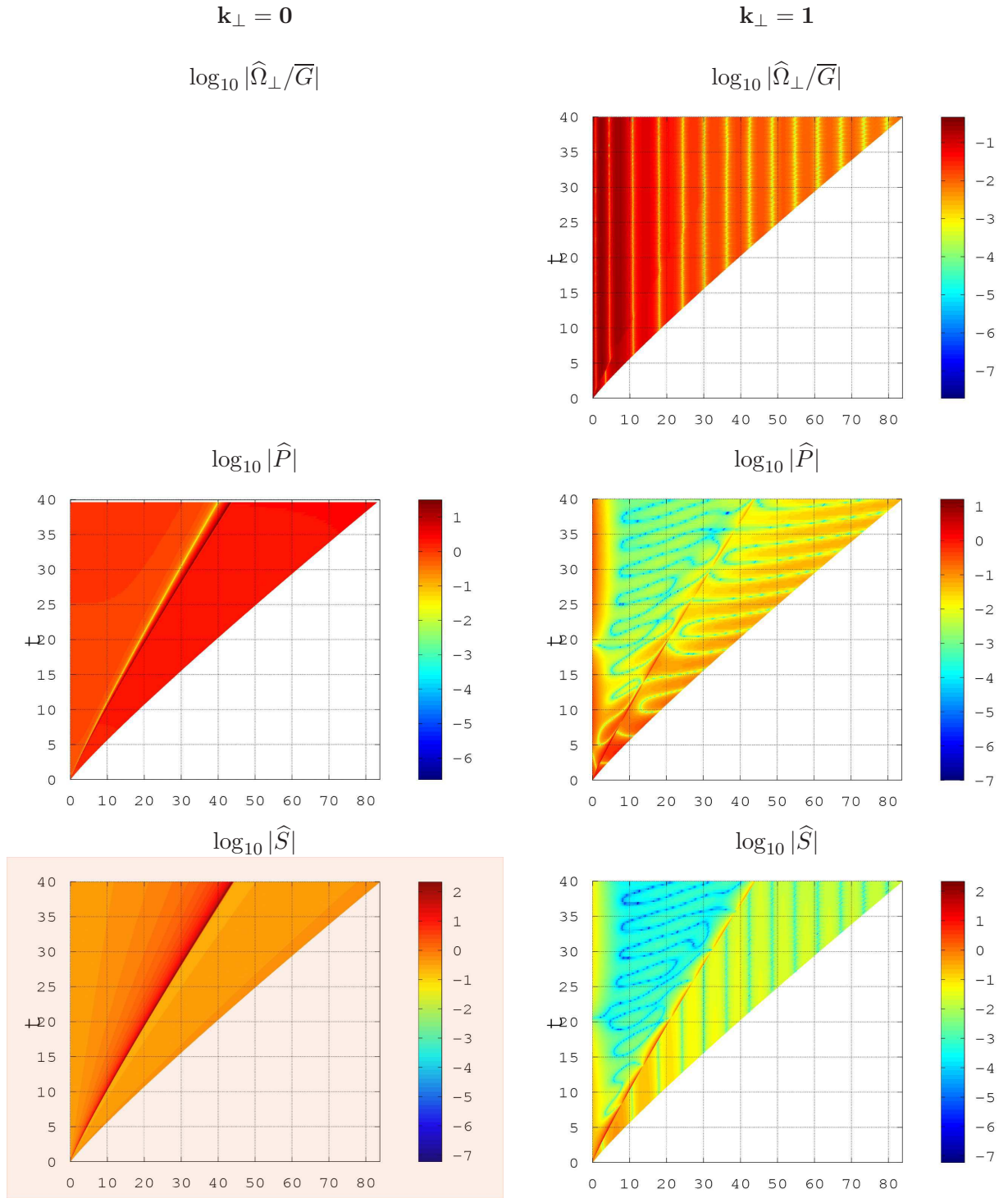


FIGURE 8.16 – **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : profils spatio-temporels en fonction de la variable de Lagrange m du logarithme de la vorticité transverse $\log_{10} |\hat{\Omega}_\perp / \overline{G}|$, de la pression $\log_{10} |\hat{P}|$ et de l'entropie $\log_{10} |\hat{S}|$, sur les temps intermédiaires, soit de 10^{-5} à 40. Ces structures nous permettent de discuter du comportement des modes de Kov sznay de façon concrète

ENTROPIE : si le comportement de l'entropie et de la vorticit  taient très semblables sur la zone sous-choc, la zone de conduction présente des similarités importantes de comportement entre l'entropie et la pression. Le minimum et le maximum sont ainsi atteints tous deux sur la zone en question. On n'observe plus d'advection, ce qui est un signe d'une production d'entropie. En effet, en l'absence de termes sources, l'entropie est advectée. Il y a donc des sources physiques d'entropie dans la zone de conduction.

Zone du front d'ablation : enfin, nous regardons la zone du front d'ablation et le changement de comportement que provoque le passage des perturbations par celle-ci.

VORTICITÉ : l'absence de changement visible de comportement de la vorticité au niveau du passage par le front d'ablation indique que le front d'ablation influe peu sur le mode tourbillonnaire.

PRESSION : l'analyse des figures 8.15 et 8.16 montre que le front d'ablation a un effet certain sur la propagation des ondes de pression. Le signal acoustique produit au front se propage vers l'origine mais est fortement atténué par la diffusion.

ENTROPIE : au front d'ablation, l'entropie est amplifiée. En réalité, l'entropie advectée dans la zone sous-choc finit par atteindre le front d'ablation et rencontre alors des termes sources qui vont l'amplifier (Lombard, 2008).

Cette étude détaillée de l'écoulement à détente subsonique RFA s'est faite en plusieurs étapes. D'abord, la discrétisation spatiale a été mise en place de manière méthodique et justifiée. Cette grille a nécessité de détailler les étapes de la construction de celle-ci. Dans le cas de l'écoulement avec conduction radiative et détente subsonique RFA, la mise en place de ce maillage est primordiale pour espérer se rapprocher de la précision spectrale souhaitée. Les critères élaborés pour le choix des paramètres de cette grille permettent de définir les positions des interfaces et des points de collocation qui composent les sous-domaines de sorte à s'adapter au mieux aux caractéristiques de l'écoulement. La discrétisation finalement élaborée est une grille de 23 domaines de 50 points. Celle-ci permet, pour cette configuration particulière d'écoulement, de balayer l'ensemble de la plage temporelle utile à notre étude en une cinquantaine d'heures de calcul (Tab. 8.3). Dans l'avenir, elle devra encore être améliorée pour avoir la possibilité de traiter toujours plus de configurations différentes d'écoulement avec des temps de calcul raisonnables. Mais le résultat de la méthode employée ici est remarquable puisque l'étude complète de l'écoulement auquel est consacré ce chapitre a pu être réalisée.

L'analyse des résultats en sortie de l'outil numérique a permis de distinguer les caractéristiques de l'écoulement à détente subsonique RFA. Ainsi, l'examen du régime transitoire des perturbations linéaires a montré que la valeur du nombre d'onde transverse n'influe pas sur la propagation des perturbations aux premiers instants de l'irradiation (Fig. 8.7). La diffusion domine pour le transport de ces perturbations sur la zone de conduction alors qu'elles se propagent dans la zone sous-choc avec la vitesse de groupe acoustique. Le temps d'établissement du régime autosemblable des perturbations $t_{\text{erasp}} = 10^{-2}$ donne une indication sur la taille relative de cette phase transitoire sur l'ensemble de la plage temporelle. De plus, les résultats de ce chapitre ont permis de mettre en évidence le régime d'amplification des perturbations aux temps précoces, soit aux grandes longueurs d'onde relatives ainsi que le régime oscillatoire amorti qui intervient à partir des temps intermédiaires, soit aux petites longueurs d'onde relatives. L'amplification maximale des perturbations est observée pour $k_{\perp} = 0$.

L'analyse du régime autosemblable, enfin, indique à la fois le comportement des quantités primi-

tives de perturbation mais également les spécificités de chaque zone de l'écoulement. Le transport par advection sur la zone sous-choc de l'entropie et de la vorticité est un résultat important. De même, l'amplification de l'entropie au passage du front d'ablation est intéressante pour la compréhension de ce type d'écoulement. L'étude de l'écoulement avec détente supersonique RFA, effectuée au prochain chapitre, va permettre de comparer les profils des solutions des deux écoulements.

Chapitre 9

Écoulement d'ablation radiative à détente supersonique

Afin de compléter les informations obtenues au chapitre précédent dans l'étude de l'écoulement avec détente subsonique RFA, un deuxième écoulement est soumis ici aux perturbations linéaires. Il s'agit de l'écoulement avec détente supersonique RFA en conduction radiative, défini par les valeurs de pression et de flux à l'origine, $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi) = (1,06338, 3,41515)$, soit les paramètres de la méthode de résolution numérique, $(\xi_f, \xi_{fc}) = (1,060, 1,50)$. La perturbation appliquée à l'écoulement est une perturbation de flux à l'origine (Sec. 8.1.2).

9.1 Élaboration de la grille de calcul

De la même manière que pour l'étude de l'écoulement à détente subsonique RFA, les critères mis en place au chapitre précédent (Sec. 8.1) sont utilisés pour élaborer la discrétisation spatiale et la plage temporelle sur lesquelles va s'appuyer l'analyse de l'écoulement à détente supersonique RFA. Certains détails nécessaires à la compréhension et déjà explicités dans le cadre de la première configuration considérée seront toutefois passés sous silence.

L'utilisation d'un premier maillage (MB1-sup), établi arbitrairement en ne s'appuyant que sur le couple de paramètres numériques $(\xi_f, \xi_{fc}) = (1,060, 1,500)$ permet d'obtenir un aperçu des profils des quantités de base (Fig. 9.1). Ce profil nous donne un point de départ pour les essais de discrétisation qui nous amènent à respecter les critères de la famille (CRB) (Sec. 8.1). Afin d'être en accord avec les critères basés sur le calcul des perturbations linéaires qui vont être appliquées à l'écoulement de base, c'est-à-dire les critères de la famille (CRP), la zone de conduction et la zone sous-choc sont densifiées et la procédure d'adaptation des positions des interfaces sur ces deux zones est neutralisée. La figure 9.2 illustre la densification de ces deux zones où les gradients sont les moins importants. La solution exacte de translation (Annexe H) est employée pour tester cette grille en perturbations et la valider. Le nombre final de domaines constituant ce maillage est plus élevé que pour l'écoulement à détente subsonique RFA puisque 27 domaines sont nécessaires pour satisfaire l'ensemble des critères détaillés dans la section 8.1 de ce mémoire.

Le tableau 9.1 résume les différents paramètres imposés à la procédure numérique d'adaptation et qui ont permis d'aboutir à une discrétisation cohérente. Les valeurs des paramètres présents dans ce tableau sont identiques à celles utilisées pour le calcul avec détente subsonique RFA (Tab. 8.1), sauf pour le nombre de balayages de l'ensemble des interfaces durant la procédure d'adaptation qui vaut ici 20, soit le double du nombre autorisé au cas précédent. Ce tableau 9.1 contient les

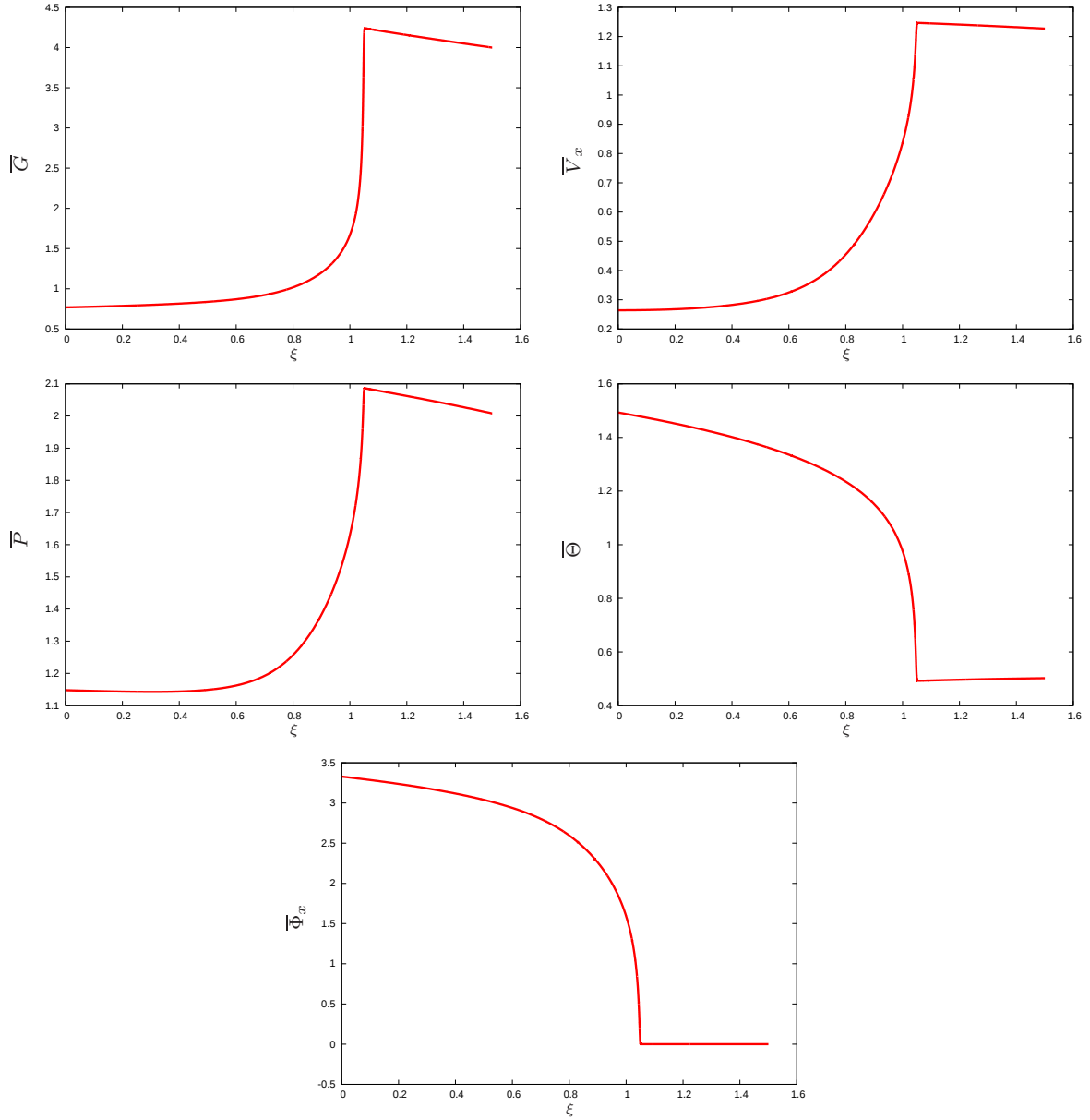


FIGURE 9.1 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracés des quantités de base préalables à l'élaboration de la discrétisation spatiale et de la plage temporelle utilisées pour l'analyse des réponses en perturbations linéaires. La densité $\overline{G}$, la vitesse longitudinale $\overline{V}_x$, la pression $\overline{P}$, la température $\overline{\Theta}$ et le flux thermique $\overline{\Phi}_x$ sont tracés à l'aide d'un maillage arbitraire de 15 domaines de 50 points. Ces profils sont visualisés à titre informatif et permettent la mise en place de la discrétisation qui sera soumise à la procédure d'adaptation.

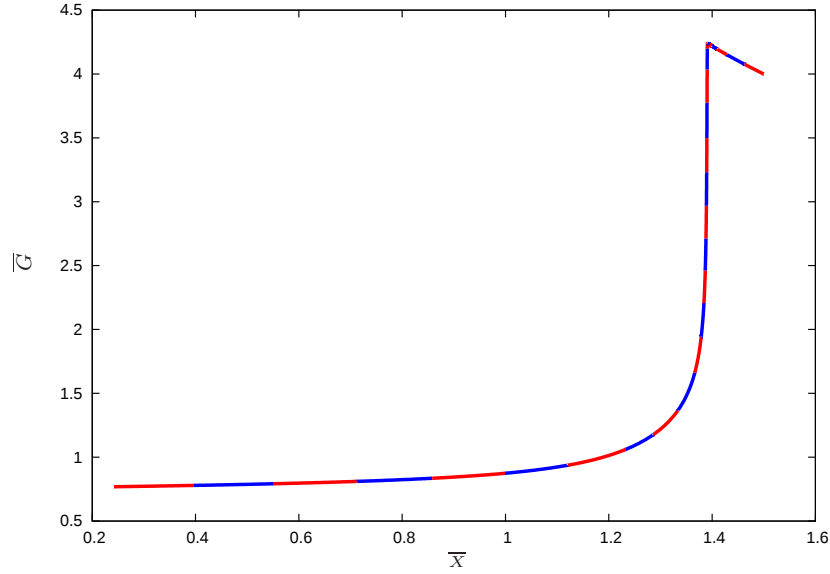


FIGURE 9.2 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : profil de la densité de base $\overline{G}$ en fonction de la variable $\overline{X}$ dans le cadre de l'élaboration de la distribution de points. La coloration différente appliquée sur chaque sous-domaine de la distribution met en évidence la sur-résolution imposée aux zones de détente et sous-choc. Le nombre final de domaines du maillage, ici égal à 27, est plus important que pour le cas avec détente subsonique RFA détaillé au chapitre précédent.

données principales de paramétrage de la procédure d'adaptation mais toutes les données fournies en entrée du code sont disponibles sous leur forme brute dans l'annexe I.

L'effet de la procédure d'adaptation des interfaces entre sous-domaines est mis en évidence par le tableau 9.3. Dans celui-ci, les positions initiales et finales des interfaces sont détaillées, ainsi que le rapport de taille entre domaines adjacents et la valeur du paramètre de transformation de coordonnées h_i à la fin de la procédure. Les variations des positions des interfaces sont minimales, ce qui signifie que la distribution fournie initialement à la procédure de relaxation est proche de la distribution optimale. La valeur finale du paramètre h_i de transformation de coordonnées, de l'ordre de 10^4 sur l'ensemble des domaines est représentatif d'une distribution proche de celle de Gauss–Lobatto. Pour finir d'illustrer la procédure d'adaptation propre à cet écoulement avec détente supersonique RFA, deux figures viennent confirmer la bonne tenue de cette procédure. D'abord,

Seuil Conv. MR	Nbre pos. int. MA	Nbre bal. int. MA	Nbre adapt./rés.
10^{-14}	250	20	20

TABLE 9.1 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau effectuant la synthèse des choix effectués pour la méthode d'adaptation-résolution de l'écoulement de base. Les notations sont expliquées à la section 8.2.3 du mémoire. Les valeurs de ce tableau sont toutes identiques à celles utilisées pour le calcul avec détente subsonique RFA, sauf le nombre de balayages de l'ensemble des interfaces durant la procédure d'adaptation qui est ici plus important.

Nombre de domaines	Points par domaines	Temps initial t_{ini}	Temps final t_{fin}	Nombre de pas en temps
27	50	10^{-7}	440	$5,7 \cdot 10^7$

TABLE 9.2 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau récapitulatif de la plage temporelle et de la discrétisation spatiale utilisées ainsi que du nombre de pas en temps effectués au cours du calcul.

la figure 9.3 nous montre des coefficients de Chebyshev pour chaque quantité de l'écoulement de base qui affichent des profils logarithmiques très satisfaisants puisque les valeurs affichées, en plus d'être basses en valeurs absolue, sont régulières sur l'ensemble du domaine d'étude. De plus, la figure 9.4 confirme ces constatations avec le tracé des valeurs de saut des dérivées premières pour chaque quantité et à chaque interface. En effet, ces valeurs sont au maximum de l'ordre de 10^{-8} . Il est à noter que certaines valeurs dépassent le seuil de 10^{-8} , ce qui n'était pas le cas lors de l'étude de l'écoulement avec détente subsonique RFA du chapitre précédent. La plus grande raideur de la configuration considérée ici est une cause plausible de cette légère augmentation du maximum de saut de dérivée aux interfaces. La discrétisation spatiale étant maintenant fixée, les critères de la famille (CT) (Sec. 8.1) nous permettent enfin de définir la gamme temporelle du calcul des perturbations :

$$t_{\text{ini}} = 10^{-7}, \quad t_{\text{fin}} = 440. \quad (9.1)$$

À la manière du tableau 8.3 au chapitre précédent, le tableau 9.2 permet d'effectuer une synthèse de la grille temporelle, la discrétisation spatiale ainsi que le nombre de pas de temps du calcul pour le cas de la configuration avec détente supersonique RFA.

9.2 Réponses en perturbations linéaires

Les tracés des quantités de perturbation effectués en échelle logarithmique dans le cas $k_\perp = 0$ (Fig. 9.5) et dans le cas $k_\perp = 1$ (Fig. 9.6) donnent un premier aperçu du comportement de celles-ci. La première constatation que l'on peut faire concerne les zones caractéristiques de l'écoulement. Si la conduction est toujours quasiment inexistante dans la zone sous-choc, la taille relative de celle-ci par rapport au reste de l'écoulement dans le système de coordonnées autosemblable est plus restreinte que dans le cas de l'écoulement subsonique RFA (Fig. 8.5).

Les perturbations évoluent principalement par plateaux pour des longueurs d'onde infinies de perturbations (Fig. 9.5). Cependant, des différences apparaissent avec le comportement de ces mêmes quantités dans la configuration avec détente subsonique illustré en figure 8.5. En effet, il n'apparaît plus de minimum de perturbation en vitesse longitudinale $\hat{V}_x$ au niveau de l'origine. De plus, le minimum de perturbation en densité $\hat{G}$ est atteint plus en amont sur la zone de conduction, au contraire du minimum de perturbation en pression $\hat{P}$ qui lui est atteint plus en aval du front d'ablation.

Un maximum de perturbation apparaît pour l'ensemble des quantités perturbées, aux temps longs et dans la zone de conduction, dans le cadre de longueurs d'onde de perturbations finies (Fig. 9.6). Celui-ci s'ajoute au maximum atteint à l'origine et déjà observé pour le cas avec détente subsonique RFA (Fig. 8.6). En outre, si pour le cas subsonique, les profils logarithmiques de perturbation montraient une décroissance en valeur absolue au cours du temps principalement visible sur la zone de conduction, le constat est ici différent. Les profils de la figure 9.6 affichent en

Position des interfaces		-	-
initiale	finale	Rapport entre domaines adjacents	Paramètre de transformation de coordonnées
0,1200	0,1200	1,000	9999,910
0,2400	0,2400	1,083	9999,674
0,3700	0,3700	1,083	9999,146
0,4900	0,4900	1,000	9999,764
0,6100	0,6100	1,091	9999,910
0,7200	0,7200	1,000	9999,854
0,8300	0,8300	1,833	9999,708
0,8900	0,8900	1,000	9999,180
0,9502	0,9502	1,229	9999,674
0,9997	0,9992	2,207	9999,618
1,0214	1,0214	2,056	9999,639
1,0321	1,0322	1,800	9999,618
1,0381	1,0382	1,714	9999,021
1,0416	1,0417	1,522	9999,382
1,0440	1,0440	1,353	9987,140
1,0457	1,0457	1,417	9966,435
1,0469	1,0469	1,091	9999,146
1,0480	1,0480	1,000	9441,831
1,0491	1,0491	1,364	9786,841
1,0506	1,0506	1,867	9999,326
1,0534	1,0534	5,929	9999,146
1,0700	1,0700	1,205	9999,292
1,0900	1,0900	2,000	9999,146
1,1300	1,1300	2,000	9999,013
1,2100	1,2100	1,750	9999,528
1,3500	1,3500	1,071	9999,438
1,5000	1,5000	—	9999,910

TABLE 9.3 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) **et** ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau récapitulatif de l'effet de la procédure d'adaptation sur la distribution des sous-domaines. Les positions des interfaces sont très peu modifiées. Cela signifie que la distribution fournie en entrée du code de calcul RAMSES est proche de la distribution idéale.

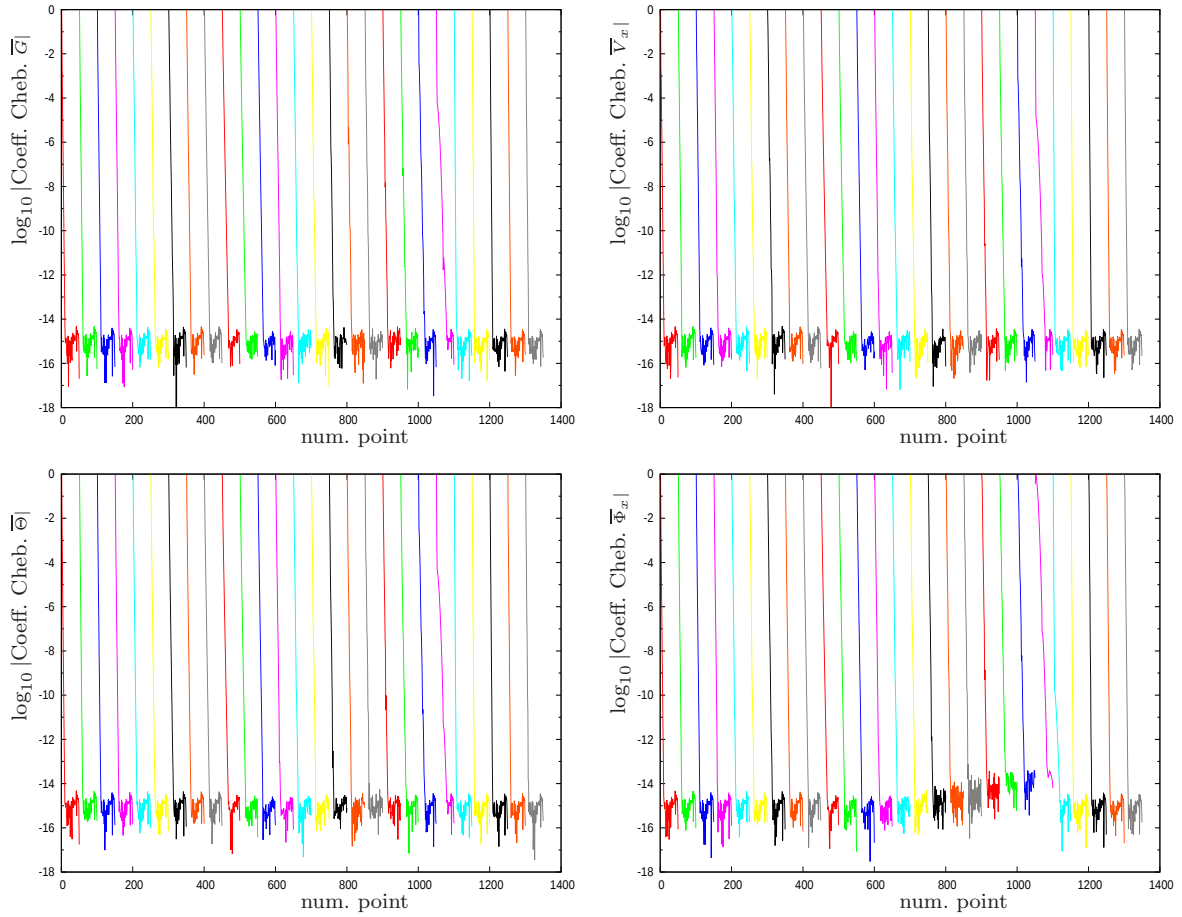


FIGURE 9.3 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracé logarithmique des valeurs des coefficients de Chebyshev par quantité et par domaine à l'issue de la procédure d'adaptation-résolution. Ces spectres, constitués de valeurs basses, sont réguliers, comme on l'attend d'une telle procédure.

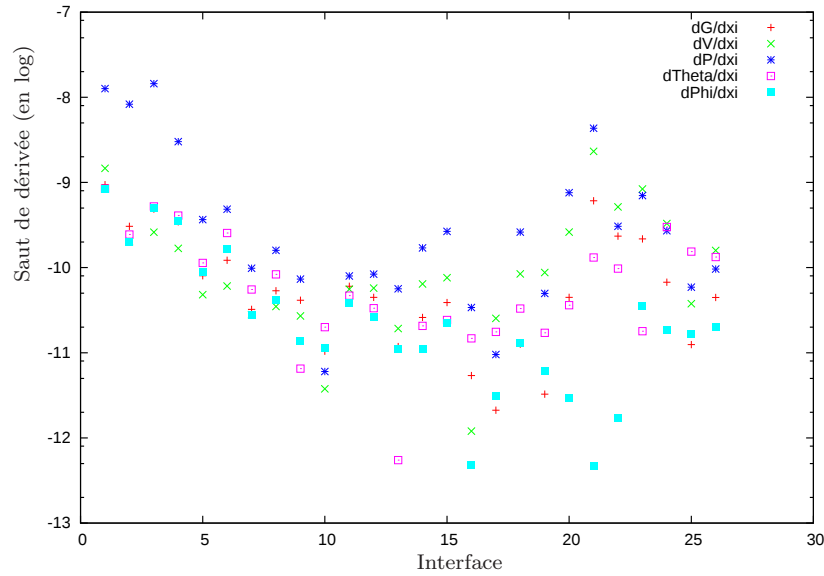


FIGURE 9.4 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracé logarithmique des valeurs des sauts de dérivée première des quantités de base à l'issue de la procédure d'adaptation-résolution. Comme pour le cas avec détente subsonique RFA étudié au chapitre précédent (Fig. 8.4), les sauts de dérivées au niveau des interfaces à la fin de la procédure d'adaptation sont très raisonnables. Cependant, ces valeurs dépassent, pour les plus élevées, le seuil de 10^{-8} , ce qui n'arrivait pas au cas précédent.

effet une décroissance des perturbations, mais celle-ci est particulièrement prononcée sur la zone sous-choc. Cette figure nous donne également une indication importante sur la plage temporelle pour laquelle les résultats sont exploitables. En effet, à partir du temps $t_{\text{finex}} \simeq 90$, les lignes à ξ constants qui apparaissent sur les tracés des logarithmes des quantités montrent que la résolution numérique n'est plus fiable. Le temps final choisi est donc trop élevé par rapport au temps initial. Une caractéristique importante apparaît cependant dans la plage temporelle exploitable. On observe effectivement un déplacement du maximum de perturbation du front d'ablation vers la zone de conduction. La zone la plus instable de l'écoulement se déplace donc. Enfin, pour les deux cas de figure évoqués ici, à savoir $k_\perp = 0$ et $k_\perp = 1$, la phase transitoire est visible et se caractérise par une croissance brusque des perturbations sur l'ensemble de l'écoulement.

9.2.1 Régime transitoire

Nous avons vu au chapitre précédent (Sec. 8.3.1) que pour la configuration avec conduction radiative et détente subsonique RFA, la diffusion est dominante dans la zone de conduction et que la transmission des perturbations jusqu'au front de choc s'effectue grâce aux ondes acoustiques. Nous allons ici effectuer le même type d'analyse pour vérifier si ces constatations s'appliquent au cas supersonique. De plus, cette partie du mémoire est l'occasion de déterminer la plage temporelle, caractérisée par le temps final t_{erasp} , nécessaire à l'établissement du régime ASP.

9.2.1.1 Analyse aux temps courts

9.2.1.1.1 Mécanisme de transfert dans la zone de conduction Afin d'établir le mécanisme permettant aux perturbations de traverser la zone de conduction, située entre l'origine et le

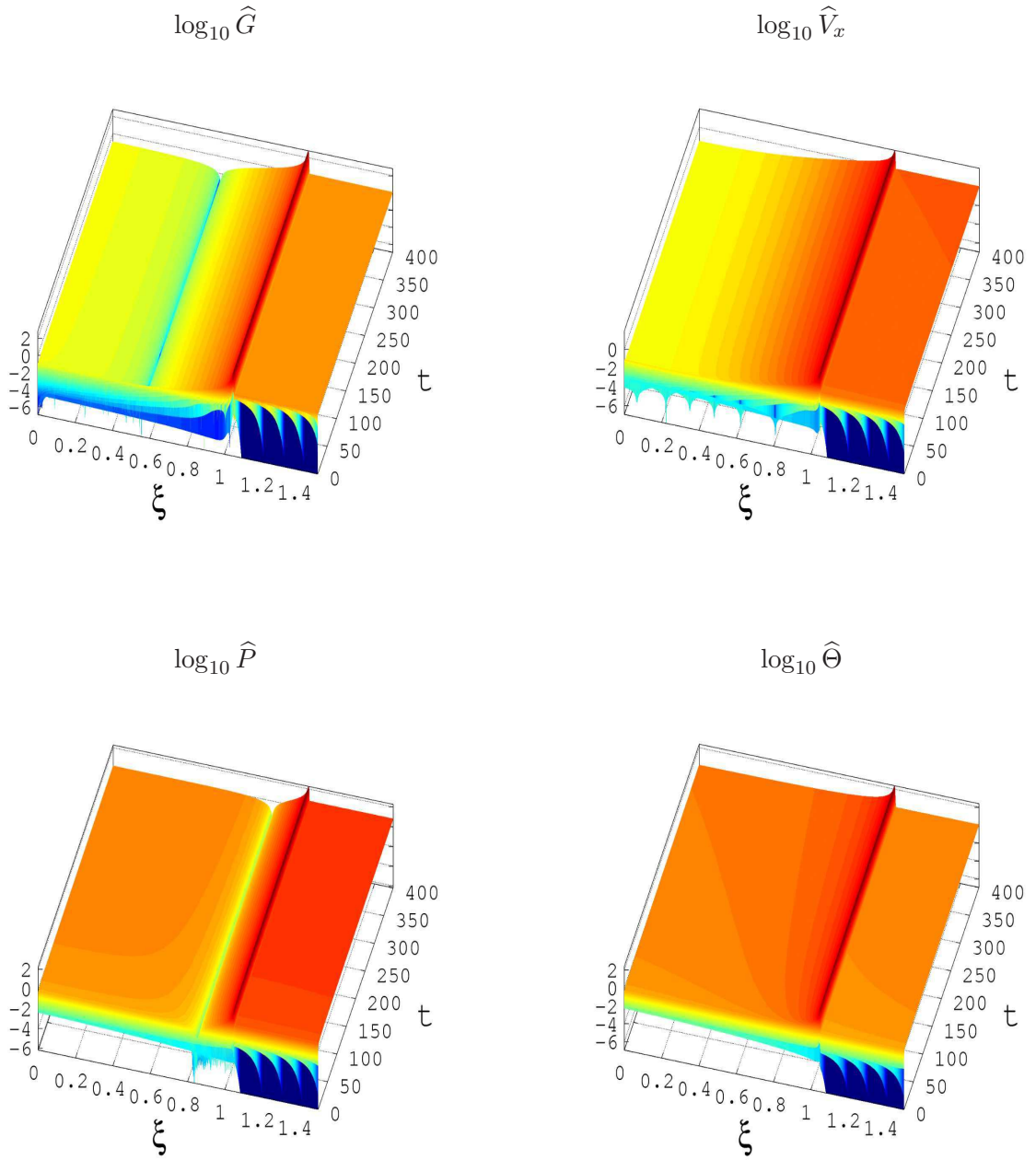


FIGURE 9.5 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$), pour $k_\perp = 0$: profils spatio-temporels du logarithme de la densité $\hat{G}$, de la vitesse longitudinale $\hat{V}_x$, de la pression $\hat{P}$ et de la température $\hat{\Theta}$ dans le système de variables (ξ, t) avec $\xi \in [0, 1,50]$ et $t \in [10^{-7}, 440]$. Les quantités évoluent principalement par plateaux au cours du temps. Le front d'ablation, caractérisé par un maximum de perturbation, sépare la zone de conduction, plus importante que dans le cas subsonique RFA (Fig. 8.5), et la zone sous-choc.

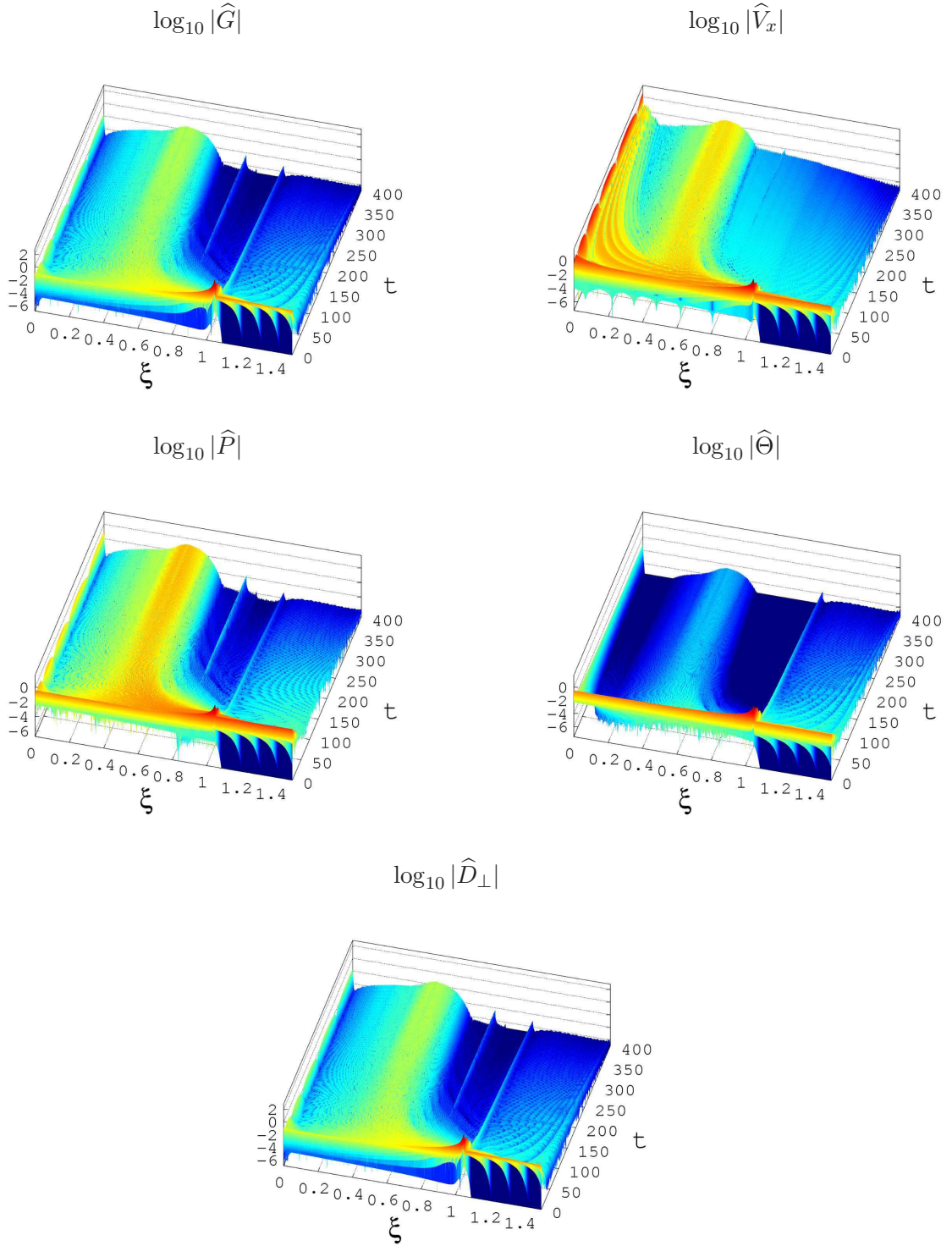


FIGURE 9.6 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$), **pour** $k_\perp = 1$: profils spatio-temporels du logarithme de la densité $\hat{G}$, de la vitesse longitudinale $\hat{V}_x$, de la pression $\hat{P}$, de la température $\hat{\Theta}$ et de la divergence transverse de la vitesse transverse $\hat{D}_\perp$ dans le système de variables (ξ, t) avec $\xi \in [0, 1,50]$ et $t \in [10^{-7}, 440]$. Les perturbations atteignent un maximum spatial au coeur de la zone de conduction pour les petites longueurs d'onde, en plus de celui présent à la frontière extérieure de la cible, ce qui traduit un déplacement de la zone la plus instable de l'écoulement. De plus, des structures à ξ constants indiquent que la résolution numérique fournit des résultats insuffisamment fiables à partir de $t_{\text{erasp}} \simeq 90$.

α	12/11		
ξ_0	0	ξ_T	1,04726
$\overline{G}(\xi = 0)$	0,76858	$\overline{G}(\xi = \xi_T)$	3,58591
$\overline{V}_x(\xi = 0)$	0,26398	$\overline{V}_x(\xi = \xi_T)$	1,19773
$\overline{\Theta}(\xi = 0)$	1,49333	$\overline{\Theta}(\xi = \xi_T)$	0,56625

TABLE 9.4 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau récapitulatif des grandeurs nécessaires au calcul de la distance entre l'origine et le front d'ablation.

	t_0^Q	t_T^Q	$v_{(O \rightarrow T)}^Q$
Pression	10^{-7}	$0,10226 \cdot 10^{-6}$	12,08514
Entropie	10^{-7}	$0,10226 \cdot 10^{-6}$	12,08514

TABLE 9.5 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau récapitulatif des temps de départ et d'arrivée des perturbations depuis l'origine jusqu'au front d'ablation, ainsi que leur vitesse pour $k_\perp = 0$.

front d'ablation, et de savoir s'il s'agit de la diffusion comme c'est le cas dans le cas subsonique ou dans le cas de la conduction électronique (Lombard, 2008), une comparaison est effectuée entre les diverses vitesses présentes dans l'écoulement. Ces vitesses sont la vitesse matière v_{matiere} , la vitesse du son c et la vitesse de diffusion $v_{\text{diffusion}}$.

Vitesse de transfert des perturbations : pour déterminer la vitesse de transfert des perturbations, définie au chapitre précédent (Sec. 8.3.1.1), il est nécessaire de disposer des grandeurs disponibles dans les tableaux 9.4 et 9.5. Ces tableaux regroupent les valeurs de la densité $\overline{G}$, la vitesse longitudinale $\overline{V}_x$ et la température $\overline{\Theta}$ de l'écoulement de base au niveau de l'origine et du front d'ablation (Tab. 9.4) et les instants auxquels on peut considérer que la perturbation en pression et en entropie a atteint le front d'ablation (Tab. 9.5). Le critère utilisé pour estimer ce temps est fixé à une valeur de perturbation de 10^{-7} . Il suffit ensuite d'utiliser l'expression générale d'une longueur dans l'espace physique (7.4) et les données de ces deux tableaux pour obtenir la valeur des vitesses de transfert de la pression et de l'entropie dans la zone de conduction. Cette valeur est signifiée en dernière colonne du tableau 9.5.

Vitesse matière : de la même manière que ce qui a été effectué dans le cas de l'écoulement avec détente subsonique RFA, la vitesse matière est donnée pour la pression par un encadrement en raison des gradients importants de vitesse dans la zone de conduction. On utilise la définition de la vitesse matière (2.24) et les données des tableaux 9.4 et 9.5 pour écrire :

$$v_{\text{matiere}}(\xi = 0, t = t_0^P) \simeq 0,06098, \quad (9.2)$$

et :

$$v_{\text{matiere}}(\xi = T, t = t_T^P) \simeq 0,27725. \quad (9.3)$$

On remarque une vitesse matière à l'origine très inférieure à celle évaluée au front d'ablation. Cette différence s'explique par le profil de la vitesse longitudinale de l'écoulement de base (Fig. 9.1). Ces valeurs de la vitesse matière calculée avec la pression à l'origine et au front d'ablation nous indiquent que les perturbations se déplacent à une vitesse différente de la vitesse matière dans la zone de conduction.

Vitesse de groupe acoustique : les données des tableaux 9.4 et 9.5 et la définition de la vitesse du son écrite en (8.8) sont mises à profit pour calculer la vitesse du son à l'origine et au front d'ablation, en considérant les données relatives à la pression :

$$c(\xi = 0, t = t_0^P) \simeq 0,36445, \quad (9.4)$$

et :

$$c(\xi = T, t = t_T^P) \simeq 0,22488. \quad (9.5)$$

Les perturbations ne se déplacent donc pas non plus sur la zone de conduction à la vitesse de groupe acoustique définie par $v_{\text{matiere}} \pm c$.

Vitesse de diffusion : l'écriture en première approximation de l'équation de diffusion et l'expression de la solution de cette équation obtenue par Lombard (2008) sont détaillées au chapitre précédent (Sec. 8.3.1.1), nous n'y revenons donc pas ici. À partir de l'équation (8.13) et des données numériques issues des tableaux 9.4 et 9.5, il est possible de donner un encadrement de la vitesse de diffusion.

Tout d'abord, le coefficient de diffusion κ est évalué pour les deux couples de valeurs ($m = 0, t = t_0$) et (m_T, t_T) , à l'aide des fonctions de forme $\overline{G}$ et $\overline{\Theta}$:

$$\kappa(0, t_0) \simeq 6,27343 \cdot 10^{-8}, \quad (9.6)$$

et :

$$\kappa(m_T, t_T) \simeq 2,52700 \cdot 10^{-11}. \quad (9.7)$$

En raisonnant de manière semblable au chapitre précédent, on obtient les applications numériques du tableau 9.6. Ces valeurs, de même ordre de grandeur, permettent de conclure que le mécanisme de transport des perturbations au sein de la zone de conduction est la diffusion. Le résultat obtenu lors de l'analyse de l'écoulement avec détente subsonique RFA et lors de l'étude de Lombard (2008) portant sur la conduction électronique et utilisant l'approximation de choc parfait est donc valable pour cette configuration également.

9.2.1.1.2 Mécanisme de transfert dans la zone sous-choc La méthode utilisée au chapitre précédent est réutilisée ici. Elle consiste à comparer la distance parcourue par la perturbation de pression entre le front d'ablation et le front de choc à celle parcourue par le son pendant une durée équivalente. Si le résultat est concluant, nous pourrions en conclure que les perturbations se déplacent dans la zone sous-choc avec les ondes acoustiques.

La définition de la distance parcourue par un signal (8.16) et l'expression de la distance parcourue par les ondes acoustiques (8.17) entre deux instants sont réutilisées dans cette partie de l'analyse. De plus, les données numériques nécessaires à cette analyse sont regroupées dans le tableau 9.7.

Configuration avec nombre d'onde nul $k_{\perp} = 0$

	κ_0
t_0^0	$7,24446 \cdot 10^{-8}$
t_T^0	$7,48424 \cdot 10^{-8}$
x_0^0	$3,93877 \cdot 10^{-9}$
x_T^0	$2,34071 \cdot 10^{-8}$
$v_{\text{diffusion}}^0$	8,11925
$v_{(O \rightarrow T)}^P$	12,063

TABLE 9.6 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : évaluation de la vitesse de diffusion pour un coefficient de diffusion évalué en $m = 0$ et rappel de la vitesse de la perturbation en pression dans la zone de conduction.

	$k_\perp = 0$	$k_\perp = 1$		$k_\perp = 0$	$k_\perp = 1$
ξ_T	1,04726	1,04726	ξ_{fc}	1,500	1,500
$t_T^{\Omega_\perp}$	-	$0,10226 \cdot 10^{-6}$	$t_{fc}^{\Omega_\perp}$	-	$0,12226 \cdot 10^{-6}$
t_T^P	$0,10226 \cdot 10^{-6}$	$0,10226 \cdot 10^{-6}$	t_{fc}^P	$0,12226 \cdot 10^{-6}$	$0,12226 \cdot 10^{-6}$
t_T^S	$0,10226 \cdot 10^{-6}$	$0,10226 \cdot 10^{-6}$	t_{fc}^S	$0,12226 \cdot 10^{-6}$	$0,12226 \cdot 10^{-6}$
$\overline{G}(\xi_T)$	3,58591	3,58591	$\overline{G}(\xi_{fc})$	3,99991	3,99991
$\overline{V}_x(\xi_T)$	1,19773	1,19773	$\overline{V}_x(\xi_{fc})$	1,22726	1,22726
$\overline{\Theta}(\xi_T)$	0,56625	0,56625	$\overline{\Theta}(\xi_{fc})$	0,50208	0,50208

TABLE 9.7 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau récapitulatif des grandeurs nécessaires au calcul de la distance entre le front d'ablation et le choc pour $k_\perp = 0$ et $k_\perp = 1$.

	$\hat{P}$	$\hat{S}$
d_{TC}^Q	$1,01599 \cdot 10^{-8}$	$1,01599 \cdot 10^{-8}$
$d_{acoustique}^Q$	$4,38193 \cdot 10^{-9}$	$4,38193 \cdot 10^{-9}$

TABLE 9.8 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : application numérique des distances parcourues par les signaux et par une onde acoustique pour $k_\perp = 0$.

	$\Omega_\perp$	$\hat{P}$	$\hat{S}$
d_{TC}^Q	$1,01599 \cdot 10^{-8}$	$1,01599 \cdot 10^{-8}$	$1,01599 \cdot 10^{-8}$
$d_{acoustique}^Q$	$4,38193 \cdot 10^{-9}$	$4,38193 \cdot 10^{-9}$	$4,38193 \cdot 10^{-9}$

TABLE 9.9 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : application numérique des distances parcourues par les signaux et par une onde acoustique pour $k_\perp = 1$.

Les données numériques du tableau 9.7 et la définition (8.16) de la distance parcourue par le signal permettent de donner les valeurs de cette distance, écrites dans le tableau 9.8. Pour obtenir ces valeurs, l'approximation de la vitesse acoustique utilisée est sa moyenne spatiale définie par $\underline{v}_{acoustique} = 0.9386 t^{\alpha-1}$. Les valeurs de ces distances concordent, nous pouvons donc en conclure que les perturbations se propagent dans la zone sous-choc grâce aux ondes acoustiques.

Configuration avec nombre d'onde non-nul $k_\perp = 1$

L'analyse identique est faite dans le cas de longueurs d'onde finies de perturbation. Les données du tableau 9.7 sont à nouveau utilisées et les résultats sont consignés dans le tableau 9.9. La conclusion de cette seconde partie de cette analyse est une confirmation quant à la prédominance du rôle des ondes acoustiques dans le transport des perturbations sur la zone sous-choc.

9.2.1.1.3 Conclusion de l'étude aux temps courts L'examen des mécanismes de transport des perturbations sur les deux zones principales de l'écoulement confirme les résultats obtenus précédemment lors de l'étude de la configuration avec détente subsonique RFA. La figure 9.7 représente les quantités perturbées en échelle logarithmique en fonction du logarithme du temps et de la variable réduite d'espace $\overline{X}$. La plage temporelle utilisée pour ces graphes est choisie de sorte à visualiser l'intégralité du temps nécessaire aux perturbations pour atteindre le front de choc. L'absence de différences entre les deux colonnes représentant respectivement les quantités pour $k_\perp = 0$ et $k_\perp = 1$ souligne l'indépendance du déroulement de la phase transitoire par rapport au nombre d'onde. Ce résultat avait déjà été souligné au chapitre précédent lors de l'étude de l'écoulement avec détente subsonique RFA.

9.2.1.2 Transition vers le régime autosemblable

À la manière de ce qui est fait au chapitre précédent, il est maintenant question de déterminer la valeur du temps t_{erasp} qui caractérise la durée nécessaire pour l'établissement du régime

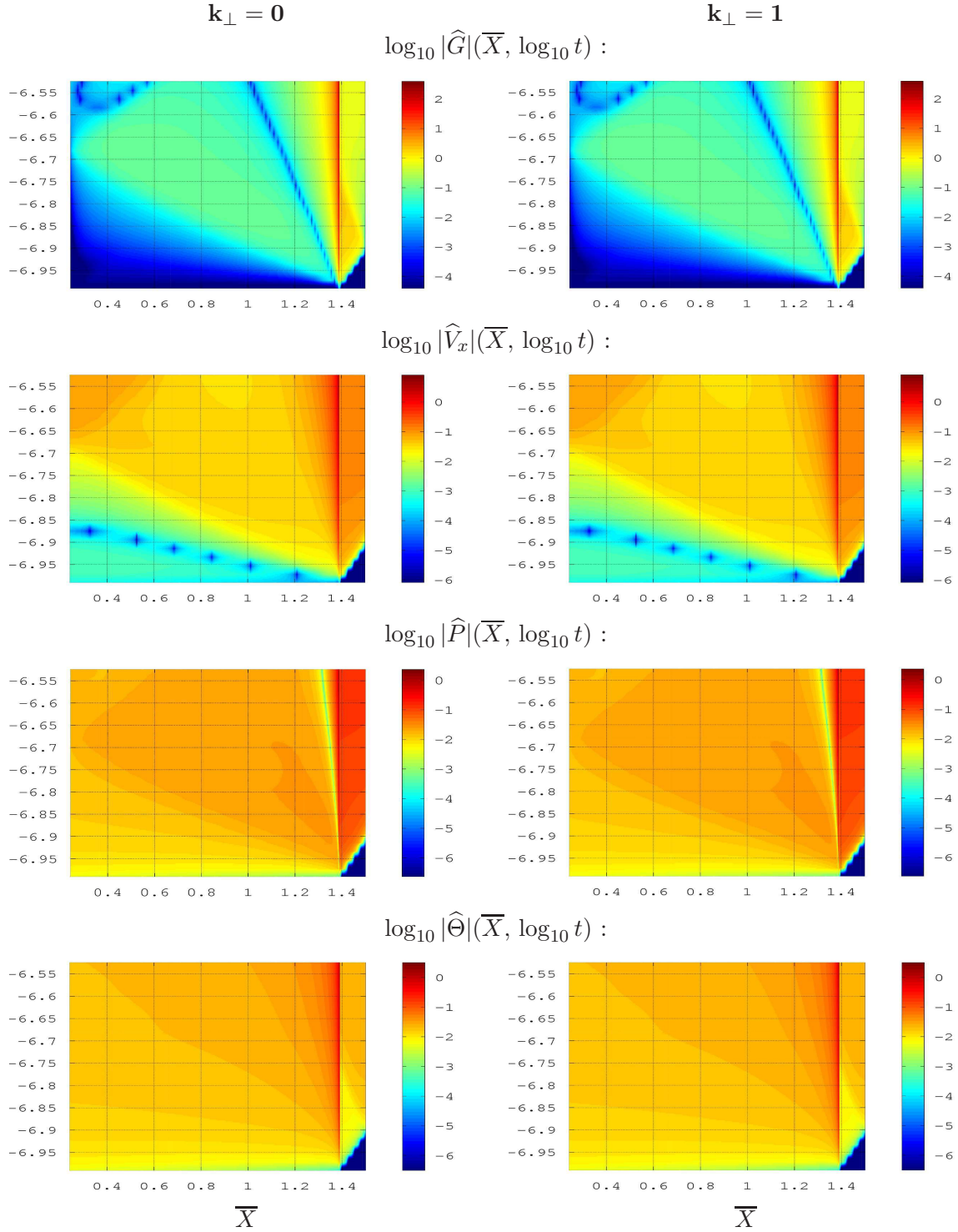


FIGURE 9.7 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracés du logarithme de la perturbation en densité $\hat{G}$, vitesse longitudinale $\hat{V}_x$, pression $\hat{P}$ et température $\hat{\Theta}$ en fonction de la variable réduite d'espace $\bar{X}$ et du logarithme du temps, pour $k_{\perp} = 0$ (colonne de gauche) et $k_{\perp} = 1$ (colonne de droite). La plage temporelle $[10^{-7}, 3 \cdot 10^{-7}]$ permet de visualiser l'intégralité du temps nécessaire aux perturbations pour atteindre le front de choc. L'absence de différences entre les deux colonnes souligne l'indépendance du régime transitoire des perturbations vis-à-vis du nombre d'onde. La même constatation avait été faite lors de l'étude de la configuration avec détente subsonique RFA.

autosemblable des perturbations. Les variables réduites de perturbation, définies en (8.18) sont à nouveau utilisées pour cette caractérisation. La figure 9.8 représente les profils des variables réduites de perturbation, à $k_{\perp} = 0$, en fonction de la variable autosemblable ξ , à plusieurs instants. t_{erasp} peut être estimé à partir de cette figure. En effet, à partir de l'instant $t_{\text{erasp}} = 10^{-3}$, les profils, à une tolérance près ici fixée à 10 %, sont confondus. Cette tolérance élevée s'explique par la mauvaise convergence de la position des différentes courbes. Il s'agit d'un premier indice quant à la valeur trop élevée du temps initial. La figure 9.9 représente les profils de ces perturbations réduites, pour les deux valeurs considérées du nombre d'onde à l'instant t_{erasp} . Ces profils se confondent. Enfin, la figure 9.10 permet d'avoir un aperçu du profil de la variable réduite liée à la divergence transverse de la vitesse transverse et du niveau de cette quantité au temps t_{erasp} . En effet, la comparaison entre les profils propres aux deux valeurs de $k_{\perp}$ n'est pas possible avec cette quantité, exclusivement définie pour les longueurs d'onde finies de perturbations.

9.2.2 Régime autosemblable

Excepté la perturbation de flux à l'origine, les perturbations sont, par hypothèse, nulles au temps initial. Nous allons dans cette partie analyser le comportement des quantités de perturbation sur l'ensemble de la plage temporelle décrite, soit $[10^{-7}, 440]$. L'étude des modes de Kovászay complète cette analyse.

9.2.2.1 Réponses globales et en variables réduites

Sur le tracé de la figure 9.11, une constatation identique à celle réalisée au moment de l'examen des réponses en perturbations de l'écoulement avec détente subsonique RFA est effectuée. En effet, cette figure indique qu'une solution de la même famille finit par être obtenue aux temps particulièrement longs, pour des longueurs d'onde infinies de perturbation. Au contraire, les perturbations de longueurs d'onde finies amènent les perturbations à faiblir pour rendre l'écoulement à nouveau stable. Enfin, cette figure fournit une information utile à la lecture des autres graphiques de ce chapitre en indiquant que le temps à partir duquel s'affaissent les perturbations pour $k_{\perp} = 1$ est de l'ordre de 10^0 . Nous n'observons pas sur cette figure de zone de plateau sur laquelle le maximum de perturbation en densité serait constant au cours du temps. Nous avons donc affaire à un exemple d'écoulement pour lequel le calcul de la réponse autosemblable n'est pas aussi aisé que pour le cas subsonique RFA. Une des différences entre ces écoulements, qui pourrait expliquer cette difficulté, concerne la détente, plus importante dans le cas supersonique RFA.

La figure 9.12 présente l'évolution de la perturbation de densité, à l'endroit du front d'ablation, en fonction du logarithme du nombre d'onde réduit. Très rapidement à son maximum, cette perturbation est constante sur une large gamme de nombres d'onde. Cette figure peut être lue comme une évolution temporelle de cette perturbation, auquel cas il est à noter que celle-ci s'affaisse pour les temps longs, ou comme l'évolution de celle-ci en fonction du spectre de longueurs d'onde. En se plaçant dans ce second point de vue, on peut conclure que la perturbation en densité au front d'ablation décroît pour les petites longueurs d'onde relatives. Cette perturbation provoque une déformation au niveau du front d'ablation. Celle-ci est tracée en fonction du logarithme du nombre d'onde réduit sur la figure 9.13a. Une décroissance importante de la valeur de la déformation apparaît directement après l'atteinte du maximum. Elle précède une phase oscillatoire amortie de la déformation. Cette décroissance soudaine s'explique à l'aide de la figure 9.11 qui montre la tendance des perturbations à s'effondrer à partir des valeurs de $\kappa_{\perp}$ de l'ordre de 10^0 . Le tracé de la figure 9.13b, qui est un zoom sur l'évolution de la valeur absolue de cette déformation aux premiers instants montre que celle-ci évolue d'abord linéairement avant d'atteindre son maximum et d'entamer une première décroissance. Il est à noter que le maximum de déformation arrive plus

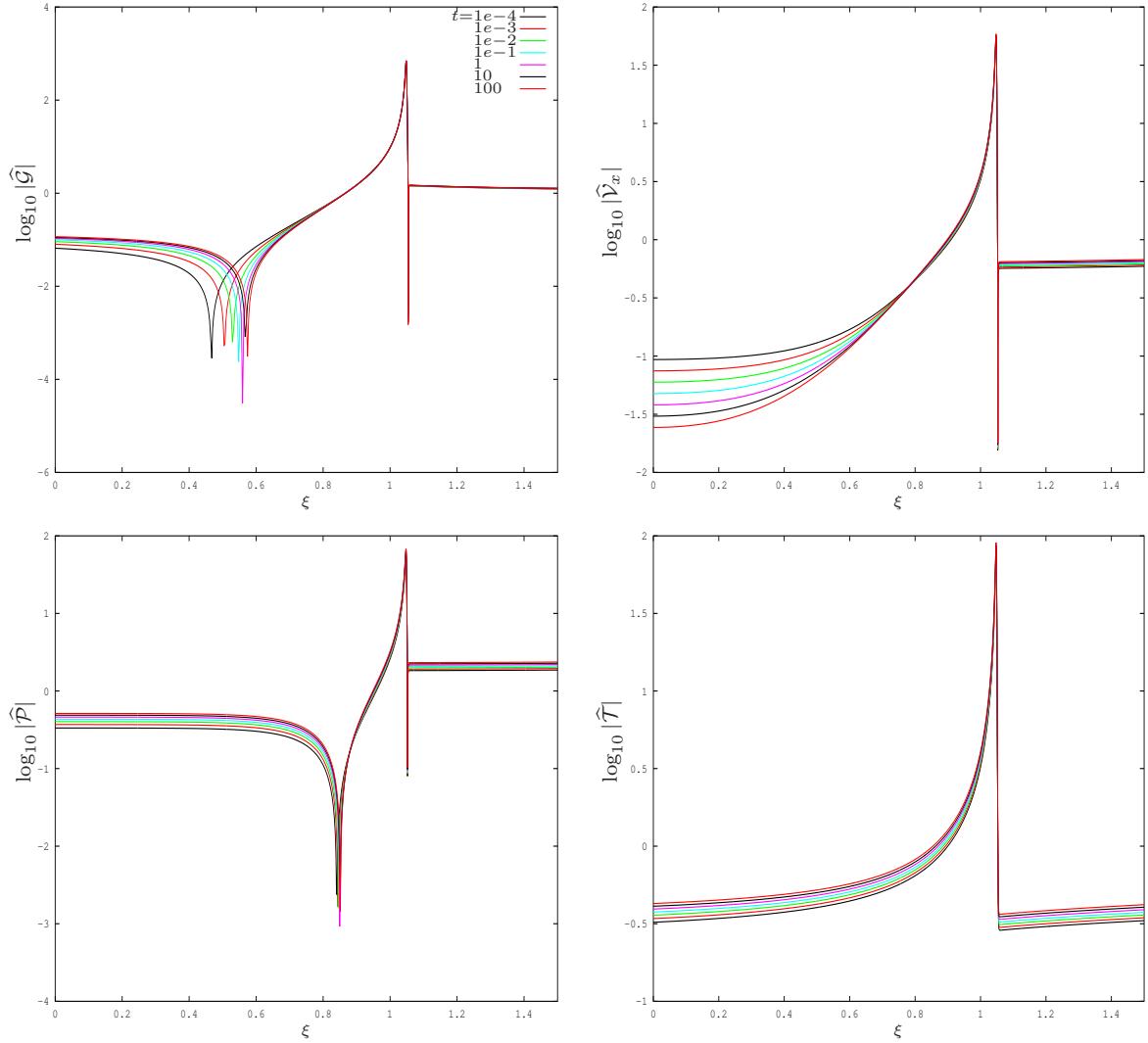


FIGURE 9.8 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracés des profils logarithmiques des variables réduites de perturbation, à $k_\perp = 0$, en fonction de ξ pour différentes valeurs du temps afin de déterminer le temps t_{erasp} nécessaire à l'établissement du régime autosemblable des perturbations. Celui-ci se caractérise par une superposition des profils selon la variable ξ . Les différentes courbes de ce tracé restant distinctes, nous supposons le régime autosemblable atteint lorsque la superposition a lieu avec une tolérance de 10 %. Malgré un temps initial très faible, le régime autosemblable n'est donc pas atteint, ce qui indique que ce temps initial est encore trop élevé. Diminuer encore sa valeur serait très coûteux mais semble indispensable dans l'avenir.

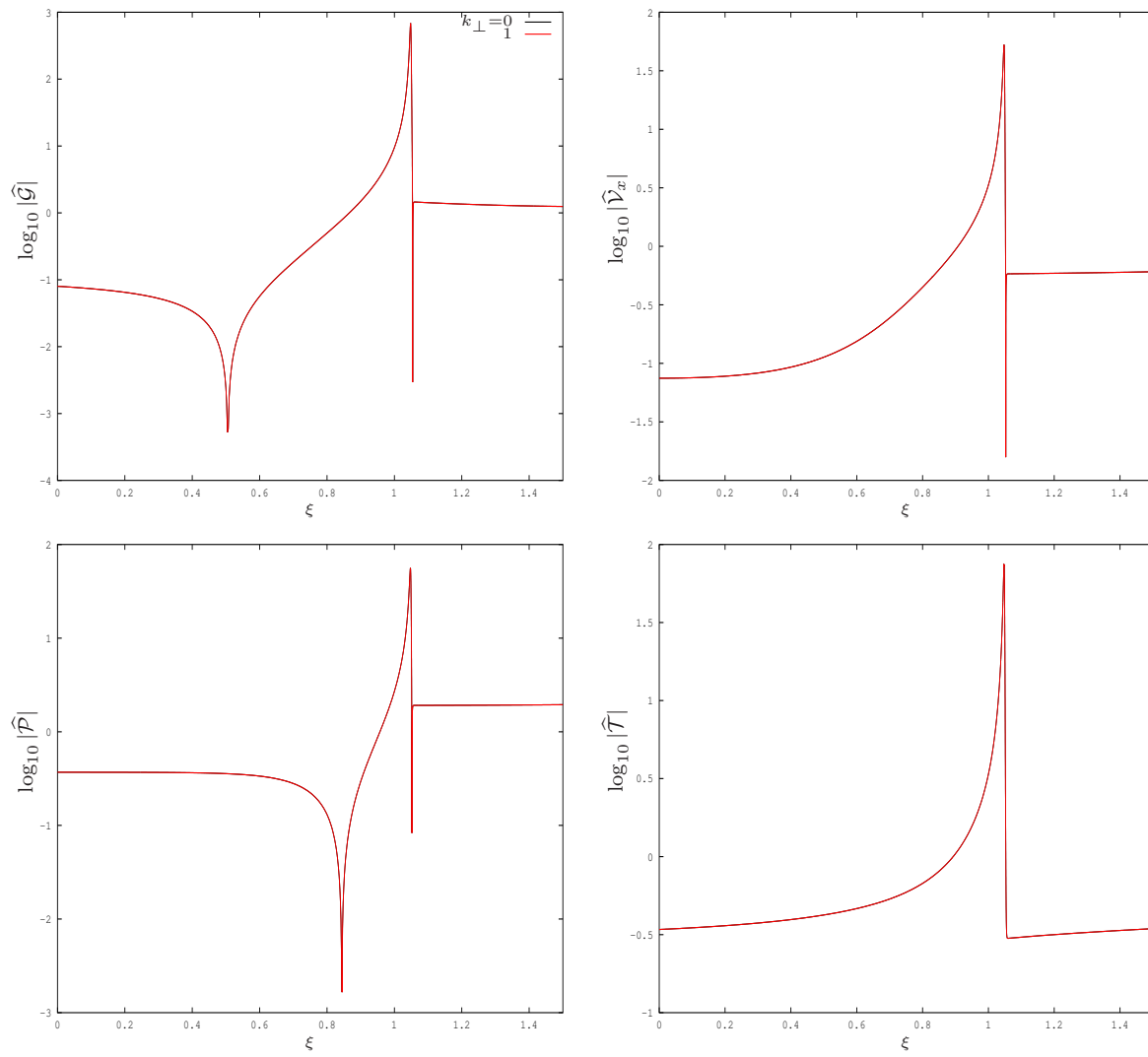


FIGURE 9.9 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : superposition des profils en échelle logarithmique des variables réduites de perturbation en fonction de ξ pour $k_\perp = 0$ et $k_\perp = 1$ au temps $t_{\text{erasp}} = 10^{-3}$. Ces tracés montrent une superposition des deux solutions.

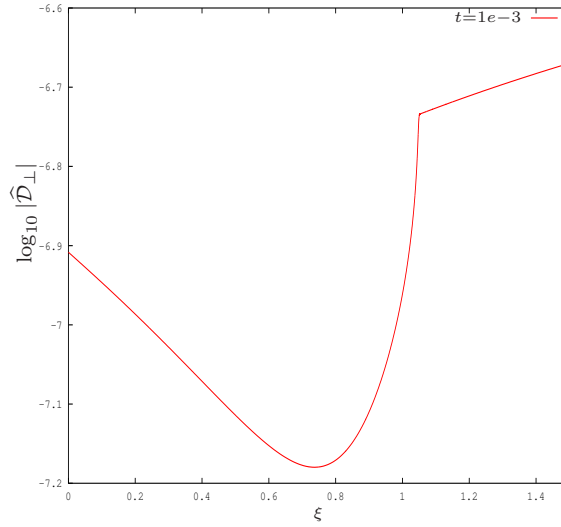


FIGURE 9.10 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : profil en échelle logarithmique de la divergence transverse de la vitesse transverse en fonction de ξ au temps $t_{\text{erasp}} = 10^{-3}$. Cette quantité n'étant définie que pour $k_\perp$ non-nul, la comparaison des profils avec longueurs d'onde finies de perturbation et avec longueurs d'onde infinies ne peut pas s'effectuer.

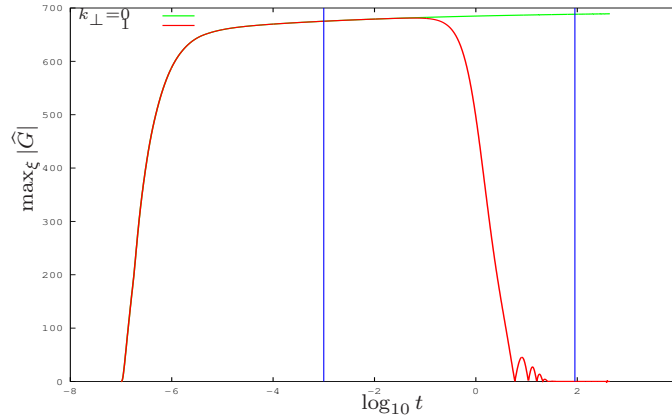


FIGURE 9.11 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracé en fonction du temps de l'évolution du maximum de la perturbation en densité pour la valeur choisie du temps initial, soit $t_{\text{ini}} = 10^{-7}$. Les lignes bleues correspondent aux logarithmes des temps t_{erasp} , pour lequel le régime autosemblable est considéré comme établi, avec la tolérance fixée ici, et t_{finex} , à partir duquel les résultats ne sont plus exploitables. La constatation effectuée lors de l'examen de 8.11 sur la différence entre les cas $k_\perp = 0$ et $k_\perp = 1$ est toujours valable. En effet, nous pouvons voir que le maximum de la perturbation en densité se maintient pour $k_\perp = 0$ et tend vers 0 pour les temps longs dans le cas $k_\perp = 1$. Cette figure fournit une information qualitative puisqu'elle indique que les perturbations suivent un régime oscillatoire amorti à partir des temps de l'ordre 10^0 dans le cas $k_\perp = 1$. Le plateau sur lequel le maximum de perturbation en densité est constant n'apparaît pas ici, ce qui indique clairement que le temps initial t_{ini} , bien que faible, ne l'est pas suffisamment.

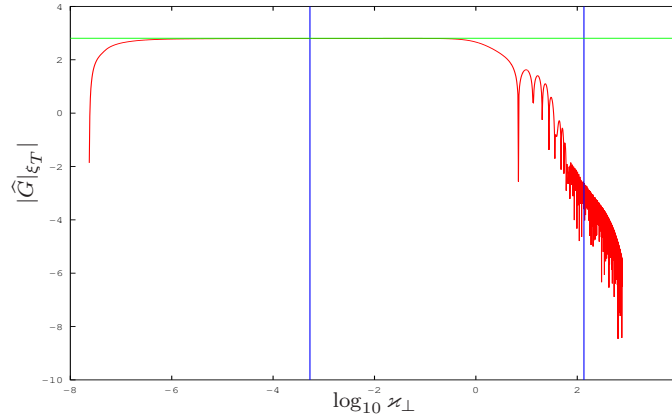


FIGURE 9.12 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracé de la perturbation de densité au front d’ablation en fonction du logarithme du nombre d’onde réduit $\varkappa_{\perp} = t^\alpha k_{\perp}$ dans le cas $k_{\perp} = 1$. Les lignes bleues correspondent aux logarithmes des nombres d’onde réduits calculés avec le temps t_{erasp} , pour lequel le régime autosemblable est considéré comme établi, avec la tolérance fixée ici à 10%, et t_{finex} , à partir duquel les résultats ne sont plus exploitables. La ligne verte est placée de sorte à représenter la valeur de la réponse en perturbation de densité au front pour $k_{\perp} = 0$.

tôt que pour le cas subsonique.

Pour compléter cette analyse des perturbations primitives et de leur évolution sur l’ensemble de la plage temporelle, il est intéressant de regarder le tracé des nappes de perturbations réduites en fonction de la variable réduite d’espace $\bar{X}$ et du logarithme du nombre d’onde réduit $\varkappa_{\perp}$ (Fig. 9.14). Cette figure est l’équivalente de la figure 8.14 tracée au moment de l’écoulement subsonique. Les zones caractéristiques y sont mises en évidence et on observe, à partir des valeurs de $\varkappa_{\perp}$ de l’ordre de 10^0 , un effondrement des valeurs.

9.2.2.2 Analyse des modes de Kovàsznay

Dans cette partie, nous nous appuyons sur les figures 9.15 et 9.16 qui représentent les tracés des modes de Kovàsznay en fonction du temps t et respectivement en fonction de la variable autosemblable ξ et de la variable de Lagrange m , sur une gamme de temps intermédiaire pour ne pas voir nos observations faussées par l’affaissement des perturbations pour $k_{\perp} = 1$ aux temps longs, mais également par la mauvaise précision des résultats au-delà de t_{finex} .

Mode tourbillonnaire : nulle par définition dans le cas $k_{\perp} = 0$, la vorticité est maximale aux temps courts sur tout l’écoulement mais également à l’origine au cours du temps. En revanche, le reste de la figure 9.15 montre que cette quantité décroît à la fois en espace en se rapprochant du front de choc mais aussi en temps. Elle atteint donc son minimum au niveau du front de choc et des temps longs. Cette décroissance est plus marquée que lors de l’analyse du cas avec détente subsonique RFA.

Mode acoustique :

longueurs d’onde infinies : la perturbation en pression se comporte par plateaux dans le cas

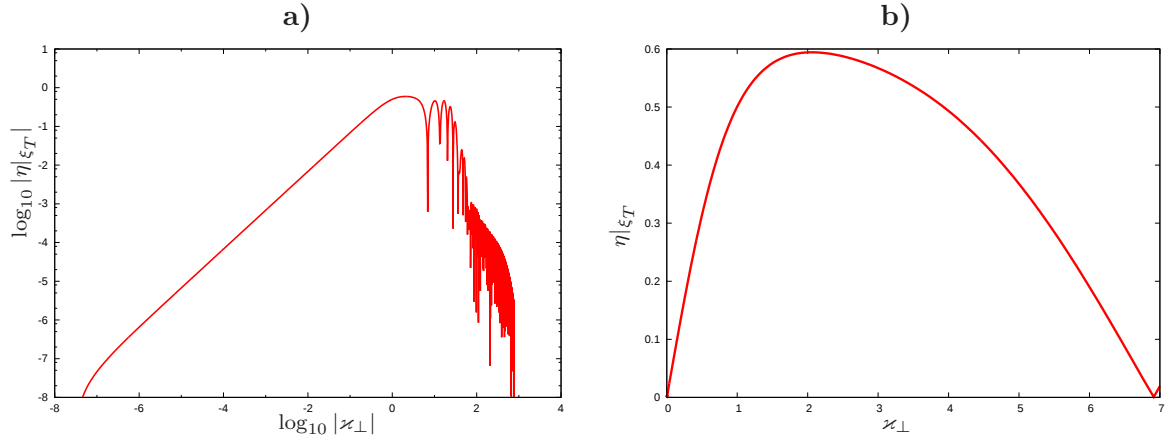


FIGURE 9.13 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 3,41515$) : tracé de la déformation du front d'ablation en fonction du logarithme du nombre d'onde réduit $\kappa_{\perp} = t^{\alpha} k_{\perp}$, en échelle logarithmique pour l'ensemble de la gamme temporelle (Fig. a) et en valeur absolue pour les temps courts (Fig. b). Après avoir atteint son maximum, cette déformation suit un régime oscillatoire amorti. Celui-ci est à mettre en relation avec la figure 9.11 qui montre le même type de régime. La figure de droite (Fig. b) montre que le maximum de la déformation est atteint plus vite que dans le cas subsonique (Fig. 8.13).

$k_{\perp} = 0$. Seule la phase d'établissement des perturbations, ou phase transitoire, montre un comportement différent. La distinction entre les différentes zones et le fait que la perturbation acoustique atteigne un palier plus élevé sur la zone sous-choc que sur la zone de conduction, ce qui avait déjà été remarqué pour le cas subsonique, est mis en évidence par la figure 9.15.

longueurs d'onde finies : le tracé de la perturbation en pression (Fig. 9.15) souligne une particularité de cette configuration par rapport à la configuration à détente subsonique RFA. Celle-ci concerne la présence dans la zone de conduction d'une zone sur laquelle la perturbation est maximale. Cette constatation s'effectue pour les temps suffisamment longs, c'est-à-dire après l'instant illustré par la figure 9.11 pour lequel les valeurs des perturbations s'effondrent. En plus du maximum de perturbation observé au front d'ablation, un maximum à l'origine est observé. Celui-ci est dû aux hypothèses de l'étude qui stipulent que les perturbations doivent être appliquées à la frontière extérieure de la cible.

Mode entropique :

longueurs d'onde infinies Le comportement de l'entropie est semblable à celui observé en configuration avec détente subsonique RFA. Des plateaux sont en effet observables sur les zones de conduction et sous-choc et le front d'ablation est le lieu du maximum en perturbation.

longueurs d'onde finies le cas $k_{\perp} = 1$ traduit l'évolution de la perturbation en entropie, dans le cas de l'introduction d'une perturbation transverse. La principale différence avec la configuration à détente subsonique RFA concerne le lieu du maximum de perturbation. Celui-ci se déplace en effet vers l'intérieur de la zone de conduction, ce qui est particulièrement visible sur le tracé en ξ de la figure 9.15.

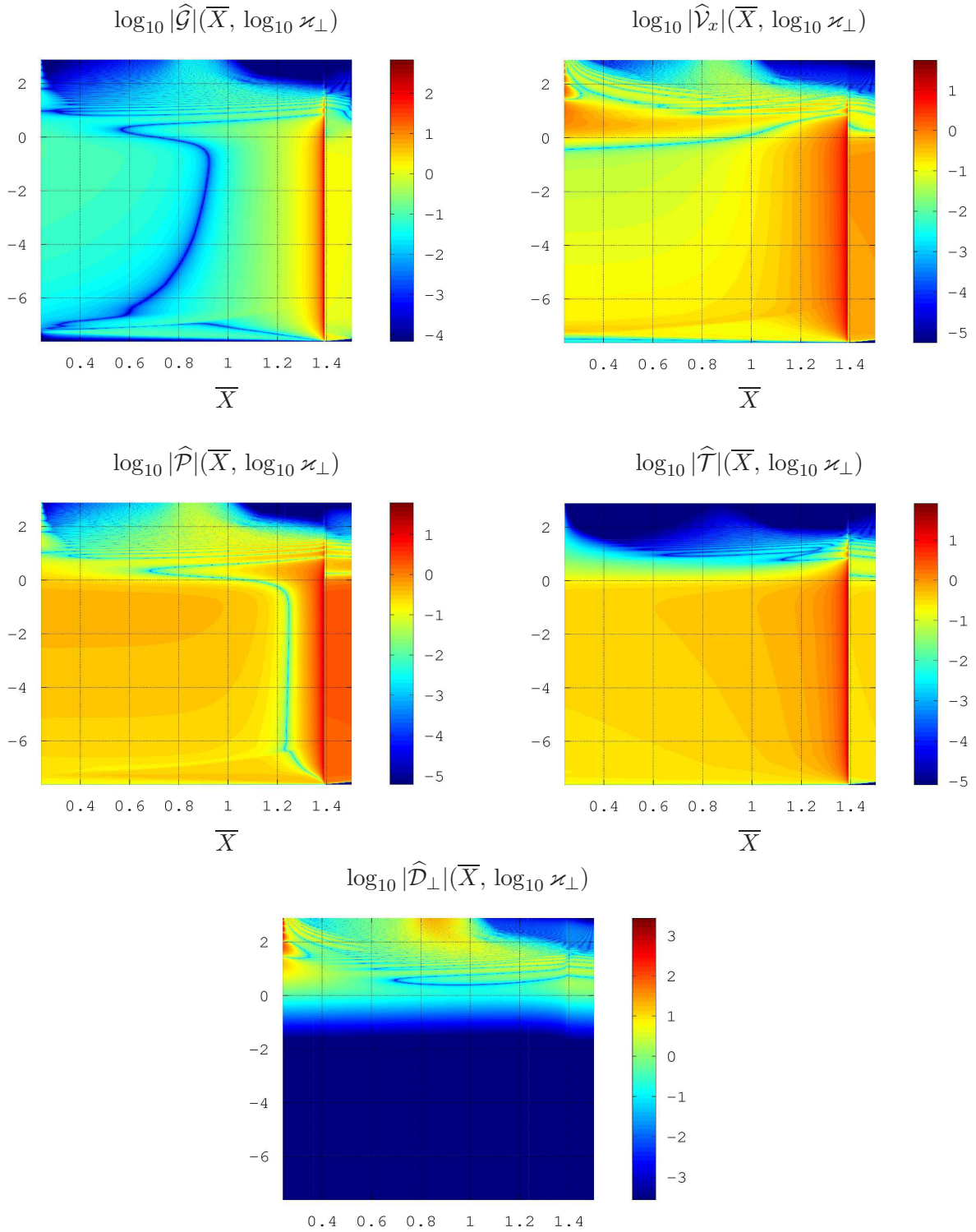


FIGURE 9.14 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 3,41515$) : tracés des perturbations réduites de densité $\hat{\mathcal{G}}$, de vitesse longitudinale $\hat{\mathcal{V}}_x$, de pression $\hat{\mathcal{P}}$, de température $\hat{\mathcal{T}}$ et de divergence transverse de la vitesse transverse $\hat{\mathcal{D}}_{\perp}$ en fonction de la variable réduite d'espace $\bar{X}$ et du logarithme du nombre d'onde réduit $\kappa_{\perp}$. Aux temps longs, la décroissance des valeurs des perturbations est visible.

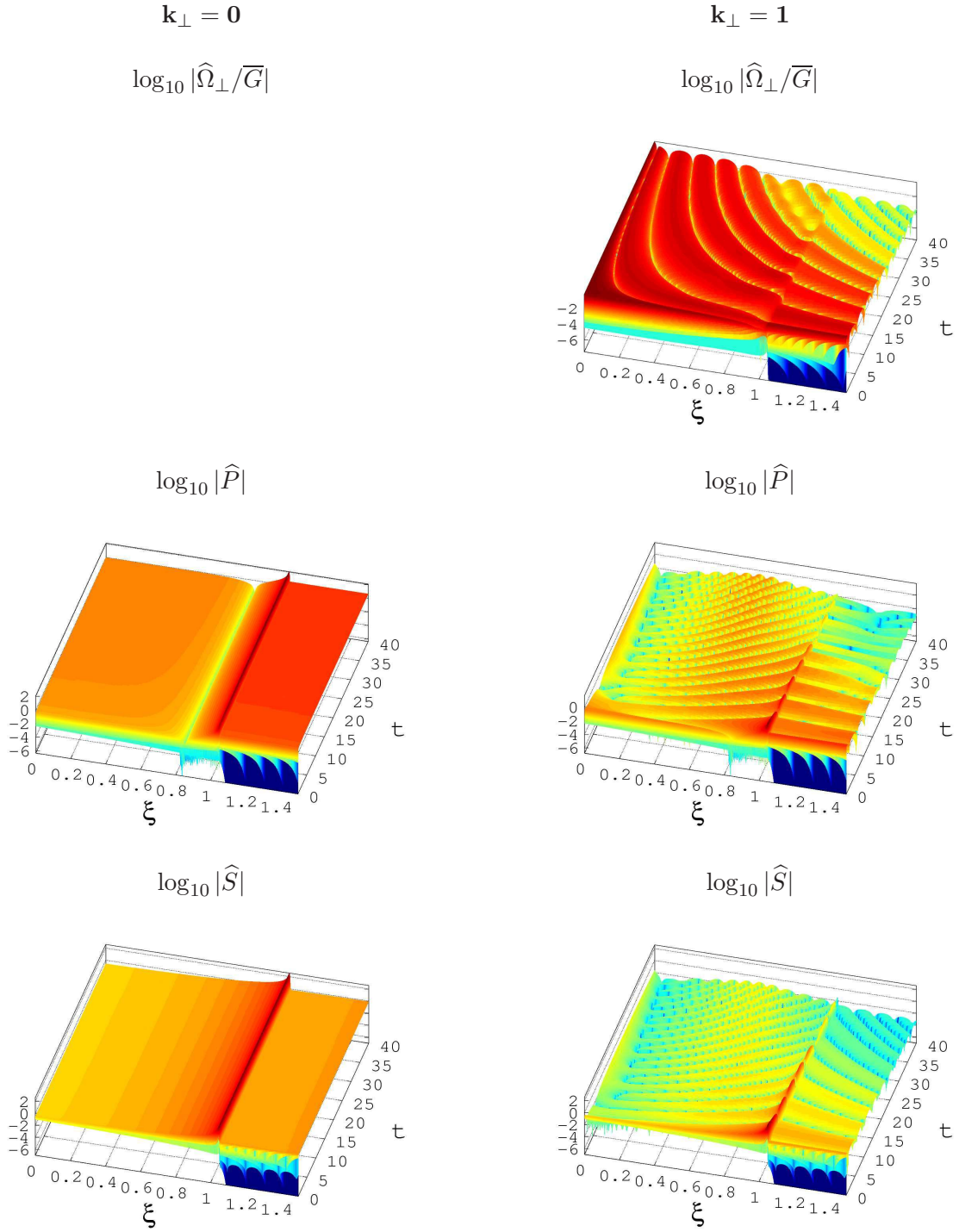


FIGURE 9.15 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 3,41515$) : Profils spatio-temporels en fonction de la variable autosemblable ξ du logarithme de la vorticité transverse $\log_{10} |\hat{\Omega}_{\perp}/\overline{G}|$, de la pression $\log_{10} |\hat{P}|$ et de l'entropie $\log_{10} |\hat{S}|$. Les tracés pour sont limités à $t = 40$ pour se concentrer sur les instants durant lesquels les perturbations sont non-négligeables (Fig. 9.11). Sur ces figures et pour $k_{\perp} = 1$, apparaît une zone dans laquelle les quantités, aux instants considérés, sont maximales et qui n'était pas présente dans le cas subsonique. Les figures qui correspondent au cas des longueurs d'onde infinies confirment la présence de plateaux.

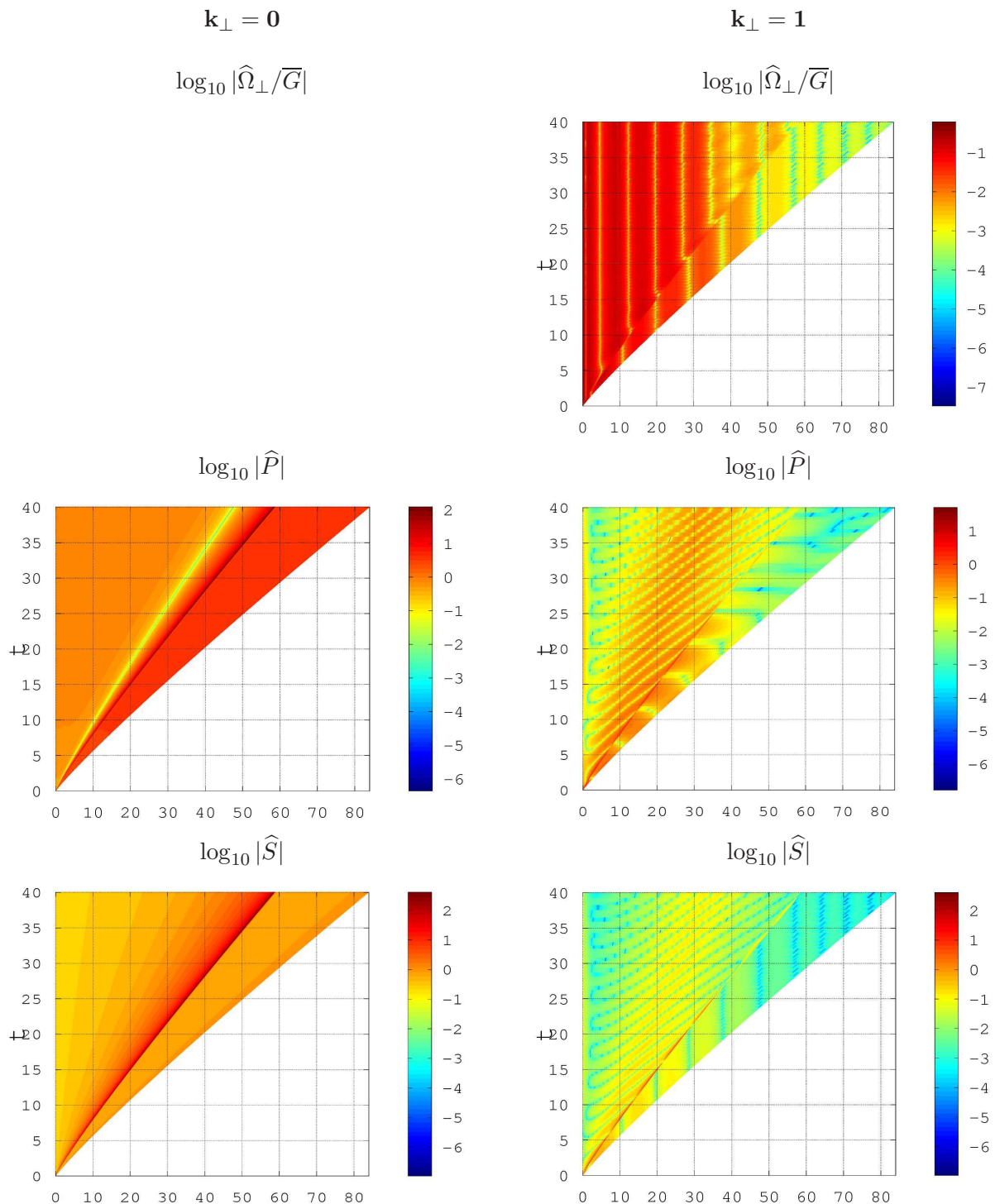


FIGURE 9.16 – **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : Profils spatio-temporels en fonction de la variable de Lagrange m du logarithme de la vorticité transverse $\log_{10} |\Omega_\perp / \overline{G}|$, de la pression $\log_{10} |\hat{P}|$ et de l'entropie $\log_{10} |\hat{S}|$, sur les temps intermédiaires, soit de 10^{-7} à 40. En effet, la gamme temporelle complète, soit jusqu'à $t = 440$, ne permet pas de visualiser les mécanismes à l'oeuvre. Des structures légèrement différentes de celles observées dans le cas subsonique apparaissent. Ces structures nous permettent de discuter du comportement des modes de Kovásznyai de façon concrète.

9.2.2.3 Analyse par zone

Dans cette partie, nous allons analyser spécifiquement chacune des trois zones caractéristiques de notre écoulement, à savoir la zone sous-choc, la zone de conduction et la zone d'ablation. L'objectif est de comprendre les mécanismes mis à profit pour le transport des perturbations sur ces zones.

Zone sous-choc :

VORTICITÉ : sur la figure 9.16, les isovalues de vorticité observées sont du même type que celles aperçues dans le cas subsonique (Fig. 8.16), c'est-à-dire des droites $m = \text{cste}$. De même, les structures hyperboliques présentes sur la figure 8.15 sont encore visibles sur la figure 9.15. Le niveau restant constant à m constant, on peut conclure que la production observée sur le tracé en ξ est caus e par le transport par advection.

PRESSION : la pression se comporte comme lors de l'étude du cas subsonique. En effet, des isovalues formant un angle faible avec l'axe des m sont visibles. La perturbation acoustique se déplace donc rapidement dans la zone sous-choc. La propagation de la perturbation en pression est quasi-libre.

ENTROPIE : de même que pour la vorticité, les figures 9.16 et 9.15 indiquent un transport par advection ainsi qu'une production d'entropie observée sur la zone sous-choc, mais qui est la trace du transport par advection. En effet, des structures hyperboliques apparaissent sur la figure 9.15 tandis que la figure 9.16 est caractérisée par la présence de droites $m = \text{cste}$ sans variations de niveau.

Zone de conduction :

VORTICITÉ : la vorticité se comporte différemment sur la zone de conduction que sur la zone sous-choc. En effet, des structures apparaissent sur le tracé de la figure 9.16, visibles également sur celui de la figure 9.15, indiquant un comportement diff rent du simple transport par advection. Une production de vorticité a donc lieu sur la zone de conduction. Le maximum de la perturbation en vorticité est compris dans la zone de conduction puisqu'il se situe à l'origine.

PRESSION : concernant la pression, le comportement sur la zone de conduction est très diff rent de celui observé sur la zone sous-choc. La structure propre au cas supersonique sur laquelle la pression atteint son maximum est par exemple visible sur la figure 9.15 aux temps longs. La figure 9.16 montre également que la perturbation ne se propage pas aussi librement que sur la zone sous-choc.

ENTROPIE : sur la zone de conduction, l'entropie se comporte comme la pression. Si la zone sous-choc est caractérisée par un couplage entre la vorticité et l'entropie, ce couplage implique l'entropie et la pression sur la zone de conduction. Un déplacement de la zone la plus instable du lieu du front d'ablation vers la zone de conduction est également visible.

Zone du front d'ablation :

VORTICITÉ : si aucun changement n'est à signaler entre les comportements de la perturbation en vorticité sur la zone sous-choc et la zone de conduction sur la figure 9.16 ni sur la figure 9.15, un sursaut en valeur absolue à l'endroit précis du front est observable.

PRESSION : le passage du front d'ablation est critique en ce qui concerne la pression. En effet, le comportement de celle-ci change complètement entre la zone de conduction et la zone sous-

choc. Les raisons évoquées lors de l'étude du cas subsonique pour expliquer ce changement de comportement semblent valables ici également (Sec. 8.3.2.3). On observe en effet les mêmes structures formant un réseau d'ondes acoustiques.

ENTROPIE : au front d'ablation, l'amplification de l'entropie est due à sa rencontre, après un transport par advection dans la zone sous-choc, avec les termes sources (Lombard, 2008).

Au cours de ce chapitre, l'analyse des réponses en perturbation d'un écoulement avec détente supersonique RFA a été effectuée. Nécessitant une grille de discrétisation plus dense que le cas avec détente subsonique RFA, soit 27 domaines de 50 points, cet écoulement a permis de compléter les connaissances acquises au chapitre précédent sur les écoulements avec conduction radiative. Ainsi, nous sommes désormais capable d'affirmer que la diffusion est le mode de transport des perturbations dans la zone de conduction, que l'on se situe en conduction radiative ou en conduction électronique (Lombard, 2008), dans le cas d'une détente subsonique, ou celui d'une détente supersonique RFA. De même, il est acquis que la zone sous-choc voit les perturbations se propager grâce aux ondes acoustiques.

De même que pour la configuration avec détente subsonique RFA, une amplification maximale des perturbations est observée pour un nombre d'onde nul. De plus, les temps précoces, donc les grandes longueurs d'onde relatives, sont caractérisés par un régime d'amplification des perturbations alors qu'un régime oscillatoire amorti intervient à partir des temps intermédiaires. Le fait que le régime autosemblable ne soit pas complètement atteint en dépit du très petit temps initial souligne la difficulté de traitement de cette configuration. Une des explications avancées concerne la détente, plus forte dans cette configuration que dans celle avec détente subsonique RFA. Dans l'objectif de traiter des écoulements radiatifs plus raides, il sera très coûteux d'atteindre le régime autosemblable.

Plusieurs voies sont à explorer dans l'avenir. Un régime intermédiaire avec une croissance des perturbations a notamment été mis en évidence dans certains cas en conduction électronique avec détente subsonique (Lombard, 2008). Il serait intéressant de voir à quoi peut être reliée la présence ou non de ce régime intermédiaire et s'il est possible de le rencontrer en régime de conduction radiative. Pour éviter que la détente ne soit trop forte, comme c'est peut-être déjà le cas, il est tentant de raisonner avec des valeurs de la pression à l'origine $\mathcal{B}_p$ plus élevées. Enfin, diminuer la puissance de la température dans le coefficient de conduction thermique pourrait permettre d'atténuer la non-linéarité et de se rapprocher d'écoulements réalistes.

Quatrième partie

Écoulements avec précurseur thermique

Pour la première fois, au cours de ce travail de thèse, une étude systématique et détaillée des singularités présentes dans les configurations d'écoulements avec précurseur thermique a été réalisée. La méthode numérique pour utiliser ces résultats et étudier le profil des différentes quantités de base rencontre cependant un obstacle.

Il est en effet impossible d'éviter la singularité présente au pied du front thermique, caractérisée par des dérivées infinies. La mise en place d'une méthode spécifique au cas d'un écoulement avec précurseur thermique supersonique est donc inévitable. Cette méthode permettra ensuite d'obtenir les solutions de plusieurs configurations d'écoulements distinctes et donc d'étudier le comportement des différentes quantités dans cette configuration.

L'étude des perturbations linéaires dans le cadre des écoulements avec choc isotherme nécessite le même type d'approche. Ainsi, une étude théorique est d'abord réalisée afin de déterminer l'ensemble des caractéristiques importantes de l'écoulement utiles à la mise en place d'une méthode numérique.

La méthode numérique permettant d'obtenir la solution du système aux perturbations (3.4) avec l'hypothèse de la présence d'un front thermique supersonique en amont d'un choc isotherme est à créer quasiment intégralement à cause de la présence de nouvelles variables d'espace, due à la singularité du front thermique. Au cours de ce projet, les bases de cette méthode ont été posées. Ces bases permettront à de futures études de finaliser cette méthode pour observer le comportement de l'écoulement en présence de perturbations linéaires.

Chapitre 10

Intégration numérique de l'écoulement de base

Le système d'équations aux dérivées ordinaires (3.1), avec les conditions aux limites (2.32) constitue un problème aux valeurs propres non-linéaire qui n'admet pas de solution analytique connue, il est donc nécessaire d'avoir recours à une intégration numérique. De plus, bien que les solutions autosemblables connues aujourd'hui le soient depuis des décennies (Marshak, 1958), leur intégration numérique avec une précision compatible avec une étude de stabilité n'a été effectuée que récemment (Boudesocque-Dubois, 2000; Gauthier *et al.*, 2005; Clarisse *et al.*, 2008). Dans le cas de l'étude de l'écoulement avec précurseur thermique supersonique, ce niveau de précision n'a pas encore été atteint. C'est pourquoi la méthode numérique utilisée mérite une attention particulière.

Le système d'équations aux dérivées ordinaires (3.1) présente deux singularités importantes au niveau du point sonique et du pied du front thermique. Le passage de la singularité du point sonique est effectué grâce à l'introduction d'un choc isotherme. Jusqu'à présent, pour s'affranchir de la singularité du front thermique, la méthode, utilisée notamment par Bajac (1973), Saillard (1983) ou encore Reinicke et Meyer-Ter-Vehn (1991), consistait à utiliser un développement local puis une intégration en différences finies à partir d'un point distant du front. L'inconvénient de cette façon de procéder est la faible précision liée au développement local et qui est d'autant plus faible que la distance au front pour le début de l'intégration en différences finies est grande. Cependant, cette distance ne peut pas non plus être trop petite sous peine de provoquer des difficultés d'intégration voire de l'empêcher. Reinicke et Meyer-Ter-Vehn (1991) ont montré la sensibilité des solutions obtenues vis-à-vis de l'ordre du développement local mais également de cette distance.

Ce travail ayant pour objectif, à terme, de permettre le calcul des perturbations, s'affranchir de cette sensibilité est primordial pour atteindre une grande précision. Ce souci de précision justifie l'emploi d'une méthode spectrale. En s'éloignant du front thermique, il est alors possible de recourir à une méthode classique de résolution d'un problème aux conditions limites, soit une méthode de tir en différences finies suivie d'une résolution spectrale effectuée à partir de cette première approximation.

10.1 Formulation du système au voisinage du front

On formule le système non-linéaire (3.1) sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{E}(\bar{\mathbf{Y}}) \, d_\xi \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{Y}}), \quad (10.1)$$

avec le vecteur $\bar{\mathbf{Y}}$ défini par :

$$\bar{\mathbf{Y}} = {}^\top (\bar{G} \, \bar{V}_x \, \bar{\Theta} \, \bar{\Phi}_x). \quad (10.2)$$

Dans cette relation, la matrice $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{Y}})$ et le vecteur $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{Y}})$ sont définis par :

$$\mathbf{E}(\bar{\mathbf{Y}}) = \begin{pmatrix} -\bar{G}^{-2} & 1 & 0 & 0 \\ \bar{\Theta} & -\alpha \xi & \bar{G} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha \xi}{\gamma-1} & 1 \\ 0 & 0 & -\bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.3)$$

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{Y}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\alpha-1) \bar{V}_x \\ -2(\alpha-1) \frac{\bar{\Theta}}{\gamma-1} - \bar{G}^{-1} \bar{\Theta} \bar{V}_x \\ \bar{\Phi}_x \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Lorsque $\bar{\Theta} \neq 0$, c'est-à-dire sur la totalité de l'écoulement excepté le front thermique ξ_{ft} , ce système matriciel peut être mis sous la forme :

$$\mathbf{L}(\bar{\mathbf{Y}}) \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{Y}}), \quad (10.5)$$

où la matrice $\mathbf{L}(\bar{\mathbf{Y}})$ a pour définition :

$$\mathbf{L}(\bar{\mathbf{Y}}) = -d_\xi + \begin{pmatrix} \bar{G} \frac{N}{D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D} \alpha (\alpha-1) \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{\bar{\Theta}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha \xi}{\bar{G}^{m+1} \bar{\Theta}^n} \left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{\bar{G}^2 \bar{\Theta}}{D} \right) \end{pmatrix}, \quad (10.6)$$

où N , F et D sont définis par les relations (2.30) et où le vecteur $\mathbf{g}$ est défini par :

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{Y}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha \xi}{D} \bar{G} F \\ 0 \\ (\alpha-1) \bar{\Theta} \left(\frac{2}{\gamma-1} + \frac{\alpha \xi}{D} \bar{G} \bar{V}_x \right) \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

La formulation (10.5) est analogue à la formulation utilisée pour la résolution de l'écoulement de base sans précurseur thermique. Cependant, au niveau du pied du front thermique, pour lequel les conditions aux limites des quantités de l'écoulement de base sont celles énoncées en (2.32), la matrice $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{Y}})$ dégénère à cause de la valeur nulle de la température. La formulation (10.5) n'est donc pas possible. Il est alors indispensable de mettre en place une procédure spécifique pour traiter cette zone de l'écoulement. De plus, les dérivées des quantités de base ($\bar{G}$, $\bar{V}_x$, $\bar{\Theta}$, $\bar{\Phi}_x$ et $\bar{P}$) sont infinies au voisinage de la singularité du front thermique, comme on peut le voir sur le tracé de la figure 10.1 illustrant les profils des quantités de base en fonction de la variable autosemblable. Dans un premier temps, l'objectif est donc de définir un nouveau système de coordonnées qui permette de régulariser les profils des quantités de base au voisinage du front thermique.

10.1.1 Changement de variables dépendantes et indépendantes

La volonté de régulariser les profils des quantités solutions du système (3.1, 3.2) passe par la définition d'une nouvelle variable d'espace. Cette variable d'espace doit permettre d'obtenir des pentes finies au voisinage proche du pied du précurseur thermique supersonique tout en n'insérant pas de nouvelles singularités.

La recherche d'un système de coordonnées idoine est facilitée par l'étude théorique de ce système d'équations effectuée au chapitre 4. Le comportement (4.38) des quantités de base au voisinage du front thermique suggère d'utiliser la variable $\check{\xi}$ telle que :

$$\check{\xi} = \left(1 - \frac{\xi}{\xi_{\text{ft}}}\right)^{1/n}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \xi = \xi_{\text{ft}} (1 - \check{\xi}^n). \quad (10.8)$$

Les variables ξ et $\check{\xi}$ ne balayent pas l'écoulement dans le même sens, on remarque en effet que $\check{\xi} = 0$ correspond au front thermique (Annexe A). La formule de changement de variable suivante permet de passer du système d'équations (3.1) exprimées dans le système de coordonnées (ξ, t) au système d'équations formulées en variable $\check{\xi}$:

$$d_\xi = -\frac{1}{n \xi_{\text{ft}}} \check{\xi}^{1-n} d_{\check{\xi}}. \quad (10.9)$$

Avec la notation :

$$\check{Q}(\check{\xi}) = \overline{Q}(\xi), \quad (10.10)$$

pour une variable dépendante quelconque Q avec ξ et $\check{\xi}$ liés entre eux par la relation (10.8), le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} d_{\check{\xi}} \check{V}_x - \alpha \xi_{\text{ft}} (1 - \check{\xi}^n) \check{G}^{-2} d_{\check{\xi}} \check{G} = 0, \\ (\alpha - 1) \check{\xi}^{n-1} n \xi_{\text{ft}} \check{V}_x + \alpha \xi_{\text{ft}} (1 - \check{\xi}^n) d_{\check{\xi}} \check{V}_x - \check{G} d_{\check{\xi}} \check{\Theta} - \check{\Theta} d_{\check{\xi}} \check{G} = 0, \\ \frac{2(\alpha - 1)}{\gamma - 1} n \xi_{\text{ft}} \check{\xi}^{n-1} \check{\Theta} + \frac{\alpha}{\gamma - 1} \xi_{\text{ft}} (1 - \check{\xi}^n) d_{\check{\xi}} \check{\Theta} - \check{\Theta} \check{G} d_{\check{\xi}} \check{V}_x - d_{\check{\xi}} \check{\Phi}_x = 0, \\ n \xi_{\text{ft}} \check{\xi}^{n-1} \check{\Phi}_x - \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n d_{\check{\xi}} \check{\Theta} = 0. \end{cases} \quad (10.11)$$

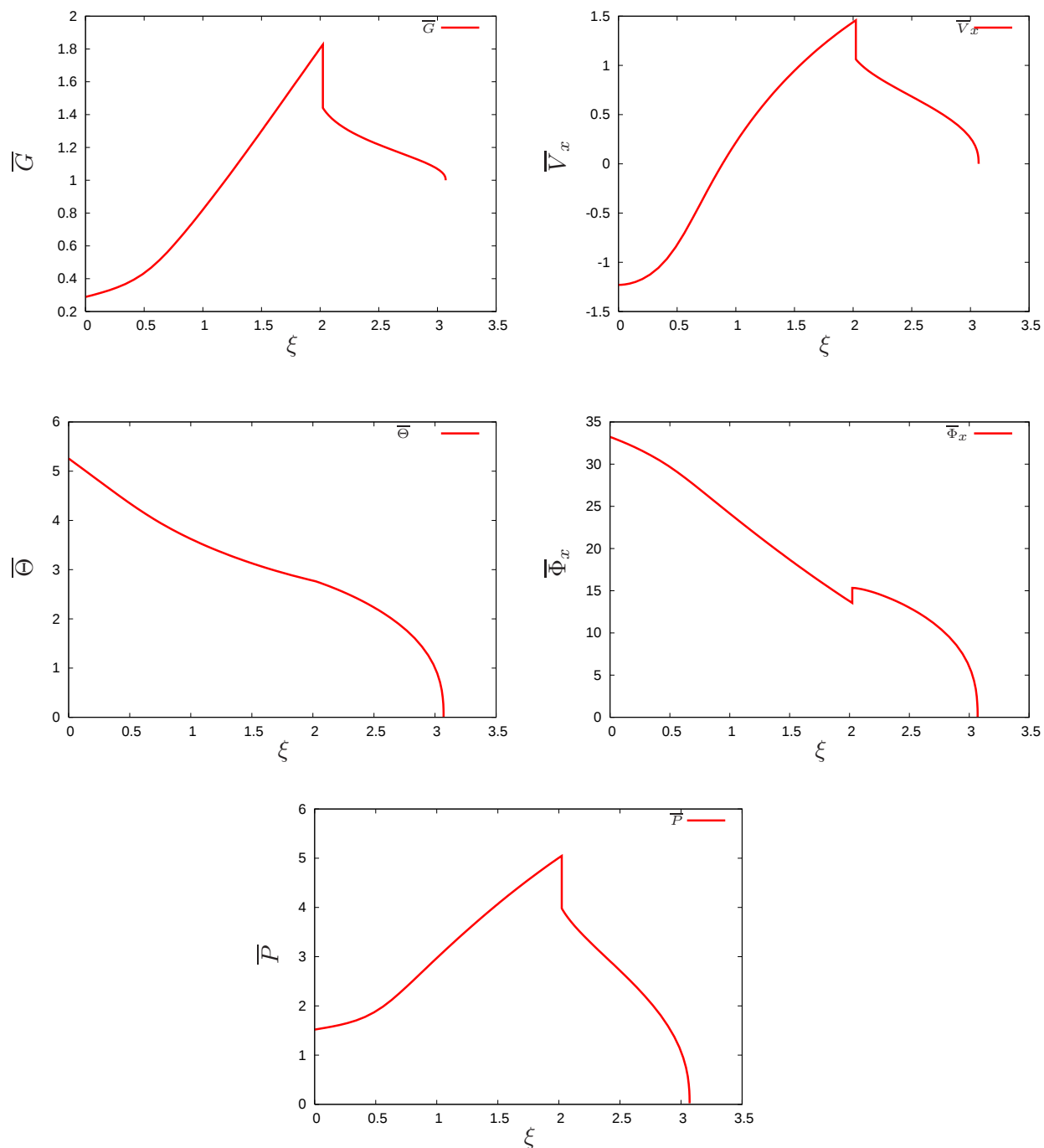


FIGURE 10.1 – Tracés des quantités de base (respectivement la densité $\bar{\rho}$, la vitesse longitudinale $\bar{V}_x$, la température $\bar{\Theta}$, le flux thermique $\bar{\Phi}_x$ et la pression $\bar{P}$) après une première intégration sur un maillage multidomaine avec $\xi_{fc} = 2,025$ et $\xi_{ft} = 3,07$.

Le flux thermique s'exprime donc désormais de la façon suivante :

$$\check{\Phi}_x = \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \xi_{ft}} \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n d_{\check{\xi}} \check{\Theta}. \quad (10.12)$$

La coordonnée $\check{\xi}$ tend vers 0^+ à l'approche du front thermique. Or, puisque le coefficient n est, par hypothèse, supérieur à 1, cette coordonnée est présente avec une puissance négative dans la définition du flux. Si cette puissance négative est compensée par le terme $\check{\Theta}^n$, le problème persiste numériquement par l'intermédiaire de la matrice qui en découle. En effet, la matrice $\mathbf{E}(\check{\mathbf{Y}})$ dégénère lorsque ξ tend vers ξ_{ft} . Il faut donc définir une nouvelle variable dépendante qui va mieux se comporter au voisinage du front thermique.

Une nouvelle quantité est donc créée à partir du flux thermique $\check{\Phi}_x$. Cette quantité, notée $\check{J}$, est définie comme suit :

$$\check{J} = -n \xi_{ft} \check{\xi}^{n-1} \check{\Phi}_x, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \check{\Phi}_x = -\frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \xi_{ft}} \check{J}. \quad (10.13)$$

Pour pouvoir reformuler notre système d'équations avec cette nouvelle quantité, la formule de changement de variables suivante est utilisée :

$$d_{\check{\xi}} \check{\Phi}_x = -\frac{1}{n \xi_{ft}} \check{\xi}^{-n} \left(\check{\xi} d_{\check{\xi}} \check{J} + (1-n) \check{J} \right). \quad (10.14)$$

Le système (10.11) peut alors être réécrit dans le système $(\check{\xi}, \check{Q})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{\check{\xi}} \check{V}_x - \alpha \xi_{ft} \left(1 - \check{\xi}^n \right) \check{G}^{-2} d_{\check{\xi}} \check{G} = 0, \\ (\alpha - 1) \check{\xi}^{n-1} n \xi_{ft} \check{V}_x + \alpha \xi_{ft} \left(1 - \check{\xi}^n \right) d_{\check{\xi}} \check{V}_x - \check{G} d_{\check{\xi}} \check{\Theta} - \check{\Theta} d_{\check{\xi}} \check{G} = 0, \\ \frac{2(\alpha - 1)}{\gamma - 1} n^2 \xi_{ft}^2 \check{\xi}^{2n-1} \check{\Theta} + \frac{\alpha n}{\gamma - 1} \xi_{ft}^2 \left(1 - \check{\xi}^n \right) \check{\xi}^n d_{\check{\xi}} \check{\Theta} \\ \quad - n \xi_{ft} \check{\xi}^n \check{\Theta} \check{G} d_{\check{\xi}} \check{V}_x + \check{\xi} d_{\check{\xi}} \check{J} + (1-n) \check{J} = 0, \\ \check{J} + \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n d_{\check{\xi}} \check{\Theta} = 0. \end{array} \right. \quad (10.15)$$

La quantité $\check{J}$, ainsi définie, se comporte numériquement de manière régulière, y compris au pied du front thermique. La figure 10.2 qui représente les profils des approximations locales appliquées aux quantités de l'écoulement de base $\check{G}, \check{V}_x, \check{\Theta}$ et $\check{J}$ dans le nouveau système de coordonnées (points rouges) montre l'intérêt du nouveau système de variables indépendantes puisque ces profils suivent des pentes finies au pied du front thermique ($\check{\xi} = 0$).

10.1.2 Formulation des matrices et vecteurs utilisés au pied du front thermique

Dans le système de variables $(\check{\xi}, \check{Q})$, un nouveau vecteur solution $\check{\mathbf{Y}}$ est défini :

$$\check{\mathbf{Y}} = {}^T \left(\check{G} \quad \check{V}_x \quad \check{\Theta} \quad \check{J} \right), \quad (10.16)$$

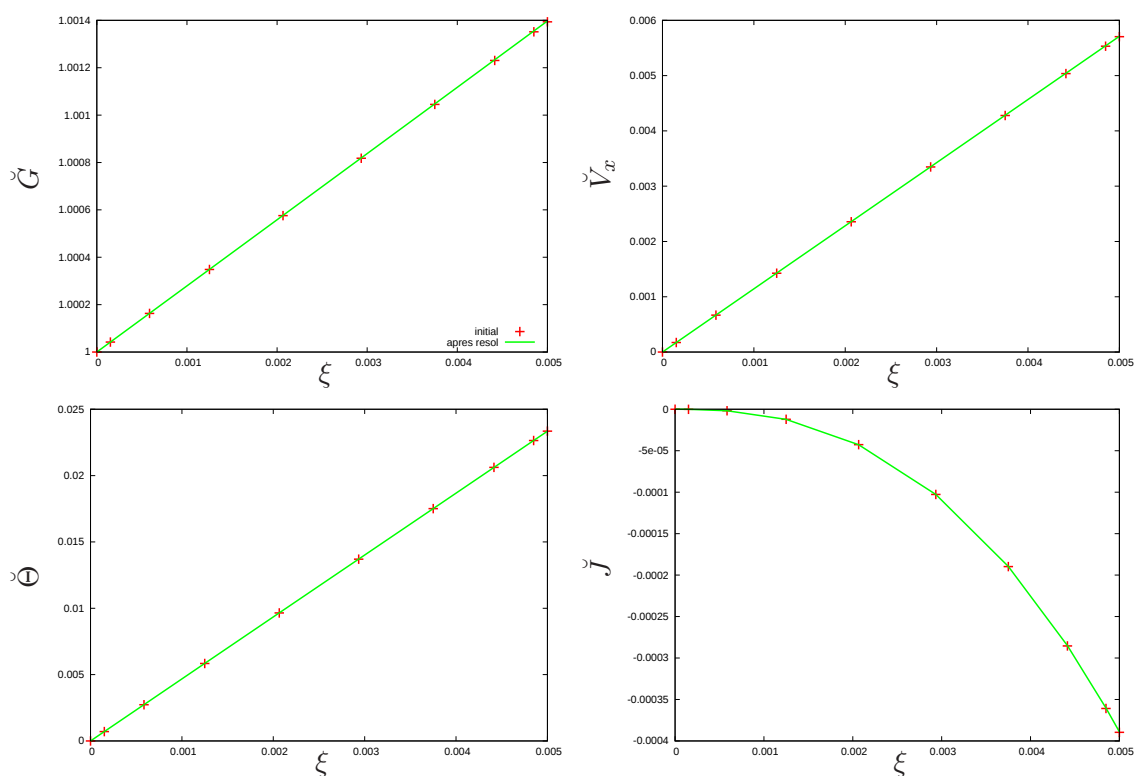


FIGURE 10.2 – Tracés des quantités de base dans le système de coordonnées $(\check{\xi}, \check{Q})$ (respectivement la densité $\check{G}$, la vitesse longitudinale $\check{V}_x$, la température $\check{\Theta}$ et la quantité $\check{J}$) sur le domaine qui contient le pied du front thermique avec $\xi_{fc} = 2,025$ et $\xi_{ft} = 3,07$. Les croix rouges correspondent à l'approximation locale appliquée sur les dix points du micro-domaine tandis que les courbes vertes illustrent le profil des quantités après la résolution spectrale.

et le système non-linéaire prend la forme matricielle suivante sur le modèle de (10.5) :

$$\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}}) \check{\mathbf{Y}} = 0. \quad (10.17)$$

L'expression complète de la matrice $\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}})$ est :

$$\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}}) = \begin{pmatrix} \check{\mathbf{m}}_{11} & \check{G}^2 d_{\check{\xi}} & 0 & 0 \\ -\check{\Theta} d_{\check{\xi}} & \check{\mathbf{m}}_{22} & -\check{G} d_{\check{\xi}} & 0 \\ 0 & -n \check{\xi}_{ft} \check{\xi}^n \check{G} \check{\Theta} d_{\check{\xi}} & \check{\mathbf{m}}_{33} & \check{\xi} d_{\check{\xi}} + 1 - n \\ 0 & 0 & \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n d_{\check{\xi}} & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.18)$$

où :

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{m}}_{11} &= -\alpha \check{\xi}_{ft} (1 - \check{\xi}^n) d_{\check{\xi}}, \\ \check{\mathbf{m}}_{22} &= \alpha \check{\xi}_{ft} (1 - \check{\xi}^n) d_{\check{\xi}} + (\alpha - 1) n \check{\xi}_{ft} \check{\xi}^{n-1}, \\ \check{\mathbf{m}}_{33} &= \frac{\alpha n}{\gamma - 1} \check{\xi}_{ft}^2 \check{\xi}^n (1 - \check{\xi}^n) d_{\check{\xi}} + \frac{2(\alpha - 1)}{\gamma - 1} n^2 \check{\xi}_{ft}^2 \check{\xi}^{2n-1}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Un regard sur cette matrice révèle que sa troisième et sa quatrième ligne deviennent colinéaires lorsque $\check{\xi} = 0$. En effet, ces deux lignes valent alors respectivement $(000(1-n))$ et (0001) . De plus, deux « vecteurs propres » associés à la « valeur propre » nulle de la matrice $\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}})$ sont identifiables.

– Le vecteur $\check{\mathbf{Y}}_{\check{G}_0}$ tel que :

$$\check{\mathbf{Y}}_{\check{G}_0} = {}^T (\check{G}_0 \ 0 \ 0 \ 0), \quad (10.20)$$

avec $\check{G}_0$ une constante, est un vecteur propre de $\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}})$ pour $\check{\mathbf{Y}}$ quelconque associé à la valeur propre 0, c'est-à-dire :

$$\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}}) \check{\mathbf{Y}}_{\check{G}_0} = \mathbf{0}, \quad \forall \check{\mathbf{Y}}. \quad (10.21)$$

– Le vecteur $\check{\mathbf{Y}}_{f_{\check{\Theta}}}$ défini par :

$$\check{\mathbf{Y}}_{f_{\check{\Theta}}} = {}^T (0 \ 0 \ f_{\check{\Theta}} \ 0), \quad (10.22)$$

avec pour condition nécessaire et suffisante :

$$\left[\alpha (1 - \check{\xi}^n) \check{\xi}^n d_{\check{\xi}} + 2(\alpha - 1) n \check{\xi}^{2n-1} \right] f_{\check{\Theta}} = 0, \quad (10.23)$$

donne :

$$\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}}_{f_{\check{\Theta}}}) \check{\mathbf{Y}}_{f_{\check{\Theta}}} = \mathbf{0}. \quad (10.24)$$

La résolution de (10.23) amène à l'expression de $f_{\check{\Theta}}$ suivante :

$$f_{\check{\Theta}} = \check{\Theta}_0 (1 - \check{\xi}^n) \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha}. \quad (10.25)$$

10.2 Méthode de résolution

Point central des objectifs de cette thèse, la méthode de résolution de l'écoulement de base dans le cadre des configurations d'écoulements avec précurseur thermique supersonique a été mise en place. Dans cette partie, les différentes procédures appliquées aux domaines, selon leur position dans l'écoulement et surtout leur proximité avec la singularité du front thermique, sont détaillées.

10.2.1 Domaine adjacent au front thermique

Le domaine adjacent au pied du front thermique, en tant que point de départ de la méthode de résolution et lieu de la singularité la plus problématique, est doublement critique dans le cadre de cette étude. Avant de rentrer véritablement dans l'explication de la méthode de résolution telle qu'elle est utilisée pour ce domaine spécifique, il est important de préciser comment est obtenue la solution initiale fournie à cette procédure.

Condition initiale : comme nous l'avons vu précédemment, le domaine contenant le front thermique ne peut pas être traité comme les autres domaines. Le changement de variables indépendantes indiqué par la relation (10.8) est utilisé pour éviter de devoir manipuler les dérivées infinies des quantités de l'écoulement de base. La nouvelle variable dépendante $\check{J}$ issue du flux est également utilisée.

La méthode de tir en différences finies ne peut plus être utilisée sur ce domaine pour initialiser la solution. En effet, le mauvais conditionnement des matrices diminue grandement la précision de cette méthode. Le procédé utilisé pour donner une valeur à cette solution au début de la procédure de relaxation utilise les développements asymptotiques (4.59). Sur chaque point du domaine adjacent au front thermique, les quantités sont donc définies initialement comme suit :

$$\begin{cases} \check{G}(\check{\xi}) = 1 + \left(\frac{\alpha^{1-2n}}{\gamma-1} \xi_{ft}^{2-2n} n \right)^{1/n} \check{\xi}, \\ \check{V}_x(\check{\xi}) = \left(\frac{\alpha^{1-n}}{\gamma-1} \xi_{ft}^{2-n} n \right)^{1/n} \check{\xi}, \\ \check{\Theta}(\check{\xi}) = \left(\frac{\alpha}{\gamma-1} \xi_{ft}^2 n \right)^{1/n} \check{\xi}, \\ \check{J}(\check{\xi}) = - \left(\left(\frac{\alpha}{\gamma-1} \right)^{n+1} \xi_{ft}^{2+2n} n^{n+1} \right)^{1/n} \check{\xi}^n. \end{cases} \quad (10.26)$$

Cette méthode donnant une approximation de la solution exacte qui perd en précision à mesure que le point sur lequel elle est appliquée s'éloigne du front thermique (le terme négligé étant de l'ordre de $\check{\xi}^2$), la taille du domaine adjacent au front thermique est limitée. L'objectif est d'atteindre la précision spectrale. Ce domaine que nous appellerons micro-domaine, a une taille de l'ordre du centième de la taille des autres domaines de la distribution. Il permet de limiter dans l'espace l'utilisation de méthodes dont seule la présence de la singularité du front thermique justifie l'emploi. À ce stade, la solution est approchée sur les points du micro-domaine et la méthode de relaxation peut être effectuée à partir de cette solution initiale.

Résolution spectrale appliquée au micro-domaine : concernant les conditions limites appliquées au point singulier, l'utilisation des conditions de Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} \check{G}(\check{\xi} = 0) = 1, \\ \check{V}_x(\check{\xi} = 0) = 0, \\ \check{\Theta}(\check{\xi} = 0) = 0, \\ \check{J}(\check{\xi} = 0) = 0, \end{cases} \quad (10.27)$$

a montré, lors d'essais réalisés, l'attraction extrême de la solution constante, qui prend sur tout l'écoulement les valeurs définies en (10.27), ce qui est en accord avec les propriétés de la matrice

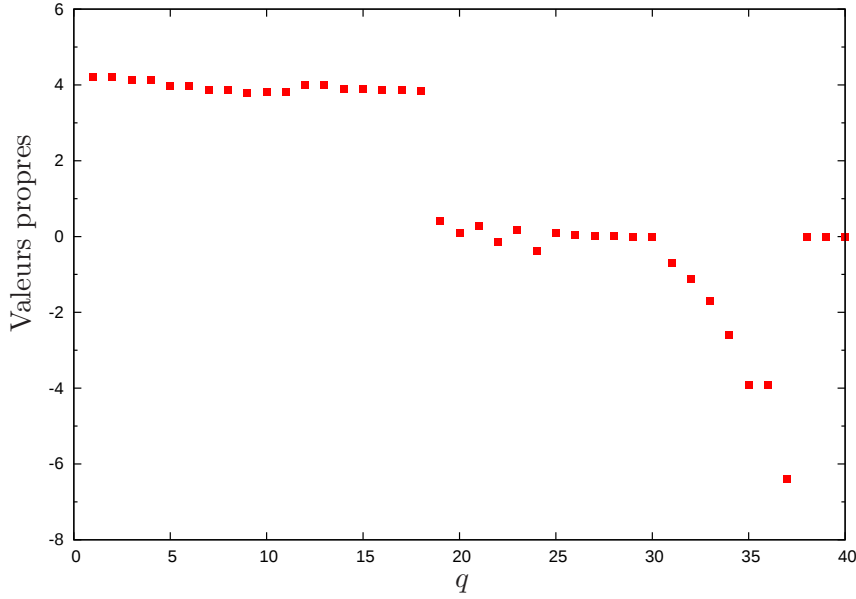


FIGURE 10.3 – Tracé en échelle logarithmique des valeurs propres de l’approximation spectrale de l’opérateur $\check{\mathbf{M}}_{\text{CL}}(\check{\mathbf{Y}})$ sur le micro-domaine avec une condition de Neumann appliquée à la vitesse longitudinale et une condition de Dirichlet appliquée aux autres quantités. On remarque que même en supprimant les valeurs propres les plus basses, le spectre est très large ($[10^{-4}, 10^4]$).

$\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}})$ et notamment le « vecteur propre » $\check{\mathbf{Y}}_{\check{G}_0}$ (10.20). C’est pourquoi une condition à la limite de Neumann est introduite. Provoquant une dégradation du spectre de la matrice $\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}})$ (Fig. 10.3), l’utilisation de cette condition de Neumann a été précédée de nombreux essais pour déterminer la quantité sur laquelle l’appliquer. L’expérience de toutes les combinaisons possibles de conditions aux limites a montré que l’application sur la vitesse $\overline{V}_x$ était le meilleur choix quant au spectre de $\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}})$. Cependant, le calcul de la différence entre le produit de $\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}})$ par son inverse et la matrice identité fournit un résultat médiocre :

$$\|\check{\mathbf{M}}_{\text{CL}}(\check{\mathbf{Y}}) \check{\mathbf{M}}_{\text{CL}}^{-1}(\check{\mathbf{Y}}) - \mathbf{I}\|_{\infty} \simeq 1,1718, \quad (10.28)$$

au lieu de 0 dans le cas idéal¹. Pour déterminer la valeur de cette condition, le calcul effectué lors du chapitre sur l’étude théorique de l’écoulement de base (4.59) est réutilisé :

$$d_{\xi} \check{V}_x(\xi_{\text{ft}}) = \left(\frac{\alpha^{1-n}}{\gamma - 1} \xi_{\text{ft}}^{2-n} n \right)^{1/n}. \quad (10.29)$$

Dans un souci de clarté, il est nécessaire de prendre le temps d’expliquer, étape par étape, le déroulement de la procédure de relaxation telle qu’elle est appliquée sur le micro-domaine. Dans un premier temps, le vecteur des inconnues est défini sous la forme propice à l’application de la relaxation. On définit donc le vecteur des inconnues $\check{\mathbf{Y}}$ de telle sorte que, avec $\mathcal{N}_i$ le nombre de points du domaine en question :

$$\check{\mathbf{Y}} = {}^{\top} \left(\check{G}_1 \dots \check{G}_{\mathcal{N}_i} \check{V}_{x1} \dots \check{V}_{x\mathcal{N}_i} \check{\Theta}_1 \dots \check{\Theta}_{\mathcal{N}_i} \check{J}_1 \dots \check{J}_{\mathcal{N}_i} \right). \quad (10.30)$$

1. L’inversion est effectuée à l’aide de la routine DGETRI de la bibliothèque LAPACK. Cette routine utilise la factorisation LU fournie par la routine DGETRF pour le calcul de l’inverse.

La matrice $\check{\mathbf{M}}(\check{\mathbf{Y}})$ (10.18) est modifiée en fonction des conditions aux limites selon la procédure détaillée au chapitre 3, à la section 3.3.2. La matrice de préconditionnement utilisée est définie par :

$$\check{\mathbf{M}}_{\text{prec}}^{(q)} = \check{\mathbf{M}}_{\text{CL}}^{(q)}. \quad (10.31)$$

Puis, toujours sur le modèle de la section 3.3.2, l'équation suivante est résolue :

$$\check{\mathbf{M}}_{\text{prec}}^{(q)} \check{\mathbf{X}}^{(q)} = \check{\mathbf{R}}_{\text{CL}}^{(q)}. \quad (10.32)$$

Pour calculer la valeur de $\check{\mathbf{X}}$, la méthode utilisée est une méthode des moindres carrés utilisant la procédure de décomposition en valeurs singulières (SVD), évoquée à la section 3.4.2.

Résultats : concernant la procédure de SVD (effectuée à l'aide de la routine DGELSS de la bibliothèque LAPACK), le critère choisi arbitrairement, en-dessous duquel les valeurs propres sont considérées comme nulles, est placé à 10^{-11} . C'est en effet avec ce critère que les meilleurs résultats ont été obtenus au cours de nos essais. Cette valeur est réfléchie puisqu'elle permet d'atteindre un rang de la matrice égal à $4N_i - 2$ lorsque la procédure se sépare des valeurs singulières qui ne correspondent pas au critère. Or le spectre des valeurs singulières de la matrice est très large et le filtrage de certaines valeurs est indispensable (Fig. 10.4). Concernant la matrice $\check{\mathbf{M}}$, son spectre, tracé en 10.3, montre la présence d'une valeur propre triple qui confirme la mauvaise qualité de l'inversion au regard du critère (10.28). Les résultats de la procédure de SVD démontrent la difficulté de traitement des opérateurs sur le micro-domaine

De manière concrète, le micro-domaine utilisé est un domaine de 10 points dont la taille, $5 \cdot 10^{-3}$ en variable autosemblable pour l'écoulement $(\xi_{\text{fc}}, \xi_{\text{ft}}) = (2,025, 3,07)$, est équivalente au centième de la taille du domaine directement adjacent et des autres domaines. Illustrant les performances de la méthode de relaxation, le tableau 10.1 montre l'effet de ce processus sur le résidu, qu'il soit absolu ou relatif, pour chaque quantité. On remarque que le résidu absolu est amélioré pour toutes les quantités sauf $\check{J}$. Cette particularité s'explique par la définition de la quantité $\check{J}$ qui est initialement calculée de manière exacte. La figure 10.5 illustre la valeur du résidu final par point pour chaque quantité à la sortie de la méthode de relaxation. Elle permet de remarquer que le point sur lequel la solution est la moins bien décrite est le second point en partant du front thermique. Très proche de la singularité, ce point n'est cependant pas soumis à l'application des conditions aux limites, c'est pourquoi la méthode de résolution pêche à son niveau. Cette figure 10.5 indique également une saturation des valeurs qui explique pourquoi le critère d'arrêt de la procédure lié à la convergence ne se déclenche pas. La méthode s'arrête en effet d'elle-même pour cause de dépassement du nombre d'itérations autorisé, ici fixé à 500. La figure 10.6, sur laquelle on observe l'évolution des résidus absolus ponctuels en fonction des itérations pour chaque quantité de l'écoulement de base, montre que la méthode est performante puisque ces résidus diminuent tous fortement, bien que leurs vitesses de convergence soient différentes.

Si le résidu absolu est amélioré lors du passage de la relaxation, le résidu relatif maximal sur le micro-domaine pour chaque quantité l'est également. On remarque sur la figure 10.7 que la densité et la vitesse ont des résidus qui continuent de décroître bien plus longtemps. Cependant, le seuil fixé à 10^{-14} n'est pas atteint. Des tests ont été réalisés pour justifier ou non l'emploi de la relaxation sur le micro-domaine. Les figures 10.8 et 10.9 sont ici tracées pour montrer le résultat de ces essais. Dans un premier temps, la figure 10.8 montre l'effet de l'application de la procédure de relaxation sur la partie de la solution située sur le micro-domaine. On voit sur ce tracé qui représente la différence entre procédure avec relaxation et procédure sans relaxation que l'effet est significatif puisque les valeurs de la densité et de la vitesse longitudinale subissent des variations

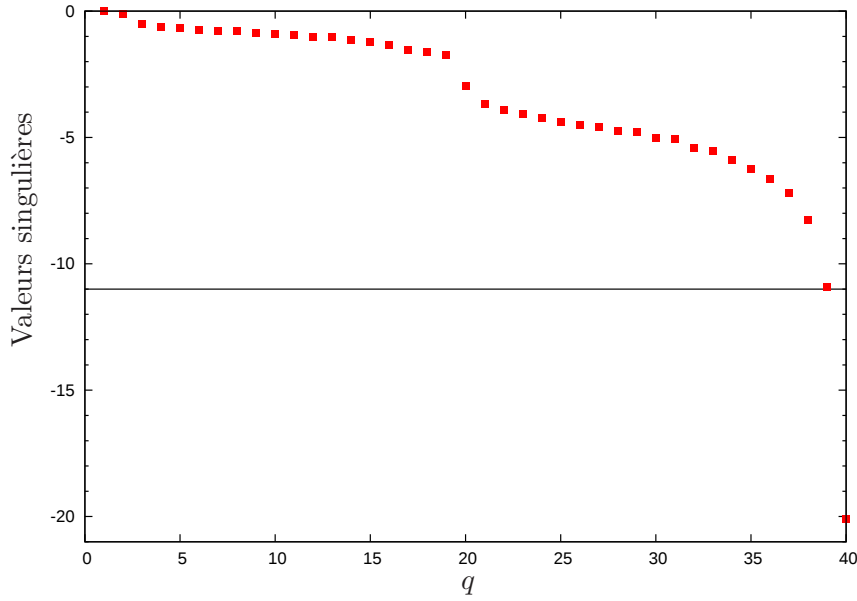


FIGURE 10.4 – Tracé, en échelle logarithmique, des valeurs singulières issues de la procédure de décomposition en valeurs singulières pour la première itération sur le micro-domaine. Le filtre de la procédure est fixé à 10^{-11} , ce qui permet d'obtenir un rang de matrice égal à $4\mathcal{N}_i - 2$, sachant que pour l'exemple $\mathcal{N}_i = 10$.

de l'ordre de 10^{-6} . Le deuxième tracé 10.9 est encore plus criant puisque ce tracé, illustrant les profils de la densité et de la vitesse longitudinale à l'origine pour les cas avec relaxation sur le micro-domaine et sans cette relaxation, montre un écart indéniable entre les deux profils, ce qui confirme l'effet significatif de l'application de la procédure de relaxation sur le micro-domaine, directement adjacent au pied du front thermique.

La méthode d'intégration sur ce micro-domaine reste perfectible et l'amélioration peut venir d'une meilleure adaptation de la méthode aux propriétés de l'opérateur. L'utilisation de la décomposition en valeurs singulières donne des résultats satisfaisants mais de meilleures voies peuvent exister.

Quantité considérée	max résidu absolu initial	max résidu absolu final	max résidu relatif initial	max résidu relatif final
$\tilde{G}$	$0,318 \cdot 10^{-2}$	$0,888 \cdot 10^{-11}$	$0,584 \cdot 10^{-7}$	$3,318 \cdot 10^{-16}$
$\tilde{V}_x$	$0,130 \cdot 10^{-1}$	$0,265 \cdot 10^{-10}$	$0,419 \cdot 10^{-4}$	$1,647 \cdot 10^{-11}$
$\tilde{\Theta}$	$0,148 \cdot 10^{-5}$	$0,106 \cdot 10^{-7}$	$0,594 \cdot 10^{-4}$	$9,202 \cdot 10^{-4}$
$\tilde{J}$	$0,412 \cdot 10^{-17}$	$0,339 \cdot 10^{-8}$	$0,165 \cdot 10^{-15}$	$4,083 \cdot 10^{-2}$

TABLE 10.1 – Tableau illustrant les performances de la méthode de relaxation sur le micro-domaine. Les résidus absolus et relatifs maximaux sur le domaine pour chaque quantité avec leur valeur initiale ainsi que leur valeur finale y sont consignés. On remarque que le seuil de convergence visé, fixé à 10^{-14} , n'est pas atteint.

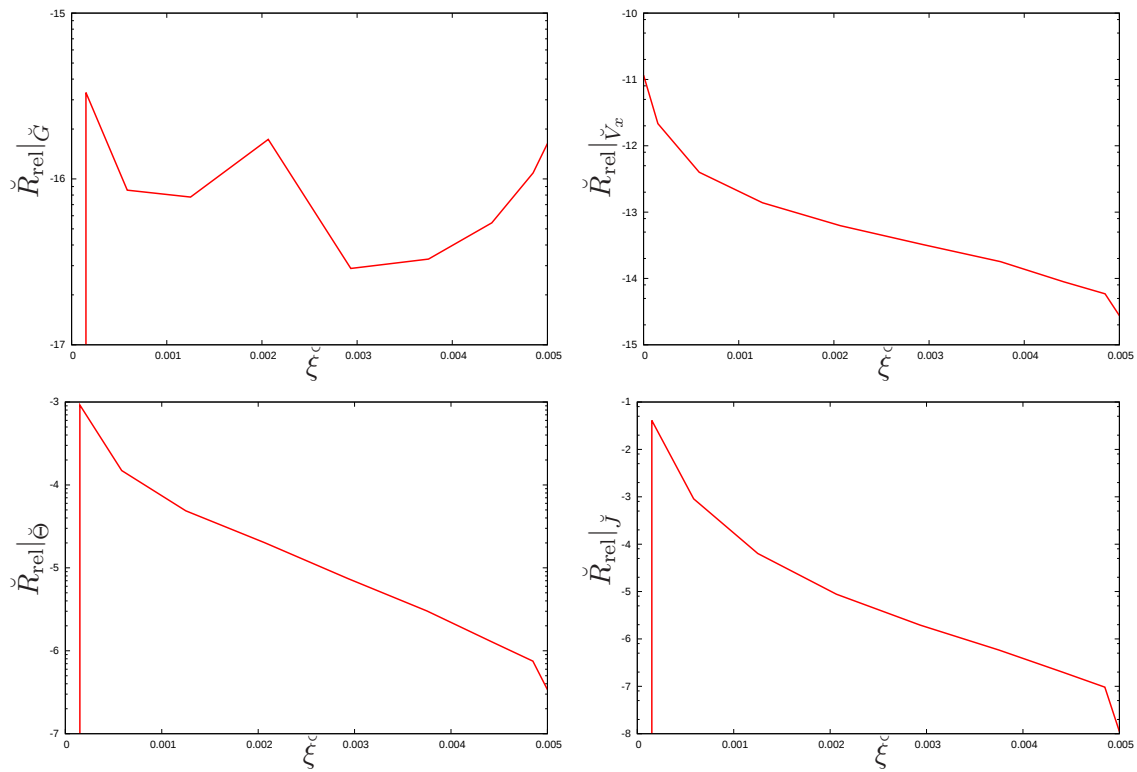


FIGURE 10.5 – Tracés du résidu relatif final, en échelle logarithmique, pour chaque quantité de base dans le système $(\xi, \check{Q})$, sur chaque point de collocation du micro-domaine. On observe que le point sur lequel la solution est la moins bien décrite est le second point en partant du front thermique.

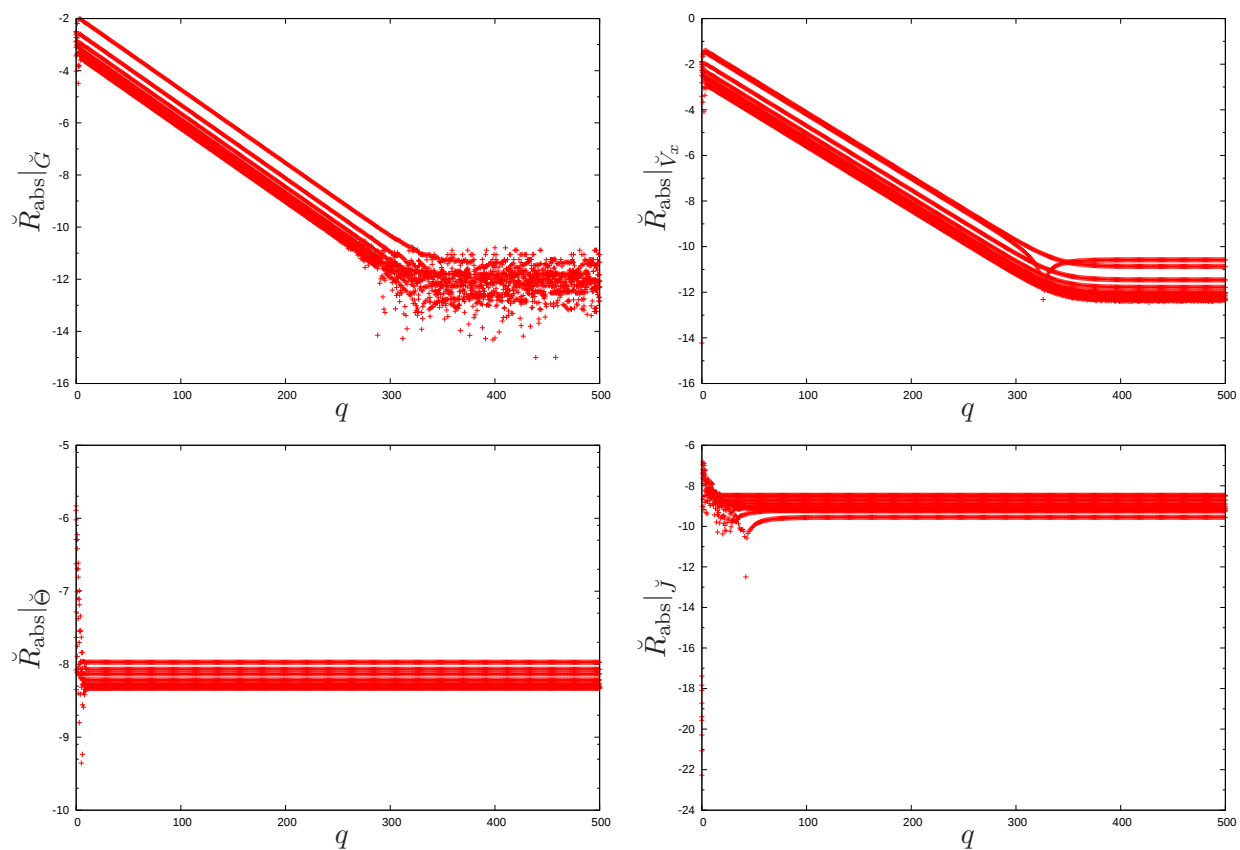


FIGURE 10.6 – Tracés, en échelle logarithmique, de l'évolution des résidus absolus ponctuels pour la méthode de résolution spectrale sur le micro-domaine, comprenant 10 points de collocation. Avec des vitesses de convergence différentes, l'ensemble des quantités voient le résidu absolu ponctuel diminuer fortement. Ces tracés confirment le bon fonctionnement de la méthode de résolution appliquée.

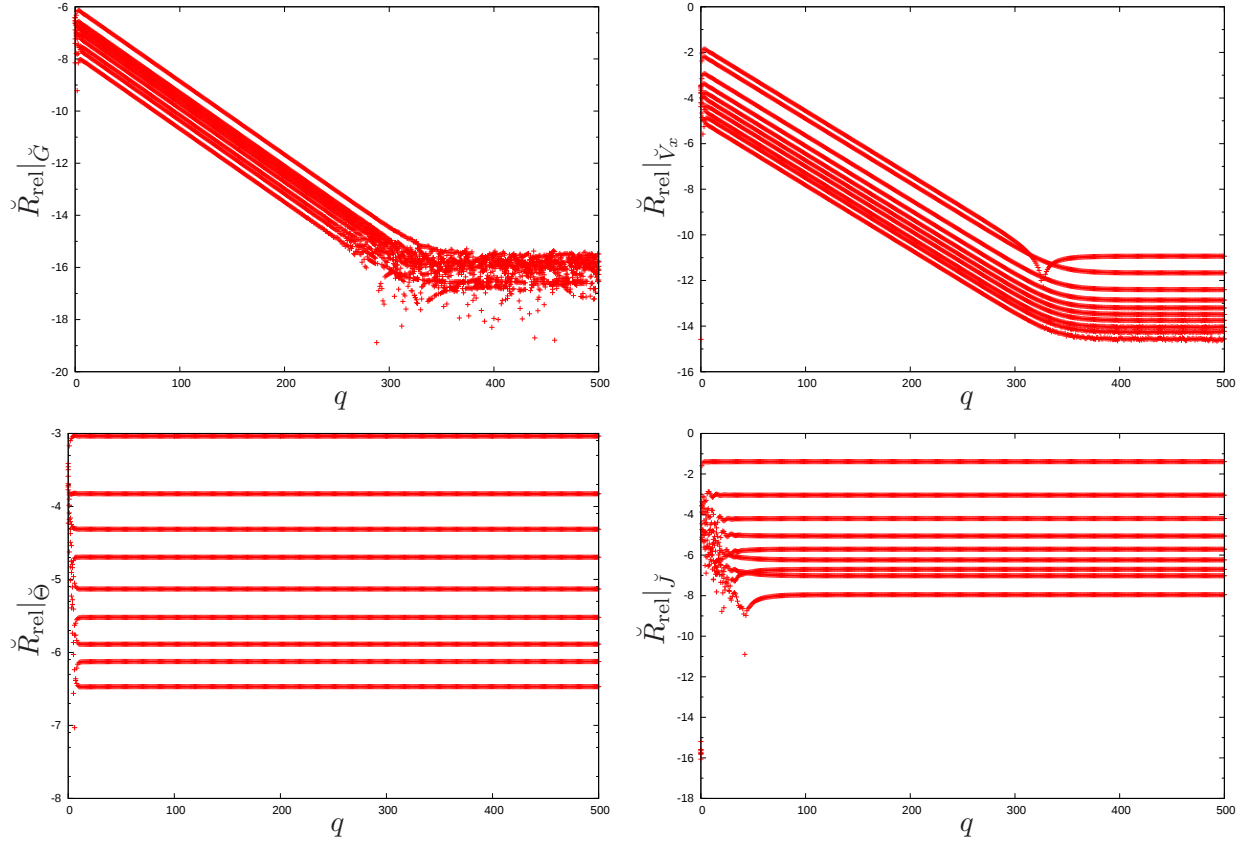


FIGURE 10.7 – Tracés, en échelle logarithmique, des résidus relatifs pour chacune des quantités « brève » en fonction du nombre d'itérations de la relaxation pour le micro-domaine, comprenant 10 points de collocation. Sur ces tracés, on observe des résidus ponctuels, les lignes de symboles que l'on voit correspondent à l'évolution de ce résidu ponctuel en fonction du nombre d'itérations. On observe une saturation des valeurs, immédiatement atteinte pour $\check{\Theta}$ et $\check{J}$, et atteinte au bout de plus de 300 itérations pour $\check{G}$ et $\check{V}_x$ pour lesquels la convergence, bien que lente, est exponentielle.

10.2.2 Domaines du précurseur thermique

Les domaines du précurseur thermique, autres que le domaine du front thermique, sont également traités avec le nouveau système de variables $(\xi, \check{Q})$ (Annexe A). Ce choix n'a pas semblé immédiatement évident car la procédure de traitement de l'écoulement de base ne l'exigeait pas. En effet, le domaine directement adjacent au micro-domaine ne subit pas autant les effets de la singularité et la procédure peut se réaliser en variables $(\xi, \overline{Q})$. Cependant, la suite de ce projet a montré que le traitement des perturbations, pour sa part, exige de traiter la zone amont dans son intégralité avec le même système de coordonnées et de variables dépendantes. Cependant, la matrice de l'opérateur $\check{\mathbf{M}}$ n'a pas les mêmes propriétés que celle formée sur le micro-domaine.

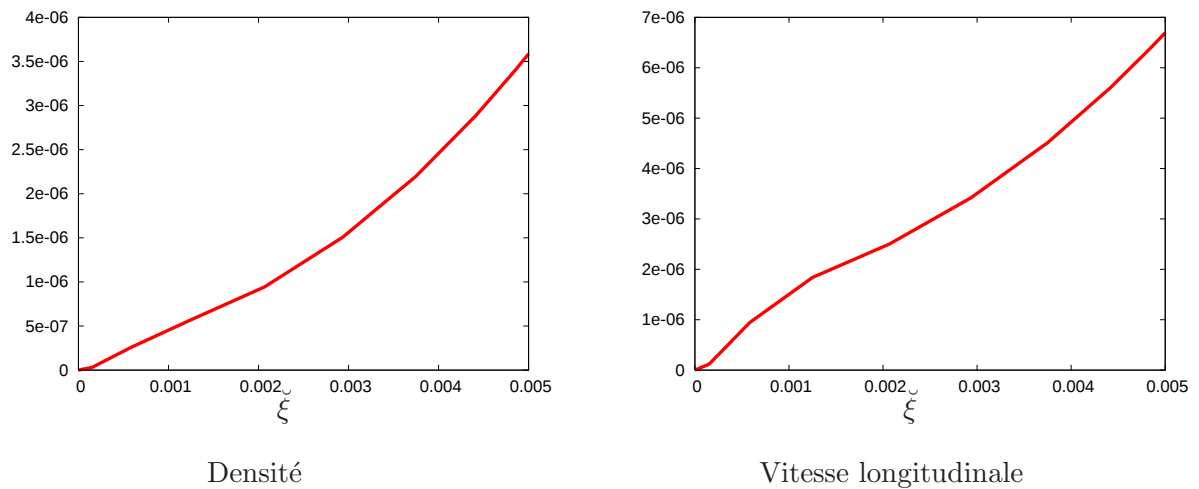


FIGURE 10.8 – Tracés des différences relatives entre la solution sur le micro-domaine pour laquelle une procédure de relaxation a été appliquée et celle pour laquelle cette procédure n'est pas effectuée pour les quantités de base (respectivement la densité $\check{G}$, la vitesse longitudinale $\check{V}_x$) avec $\xi_{fc} = 2,025$ et $\xi_{ft} = 3,07$.

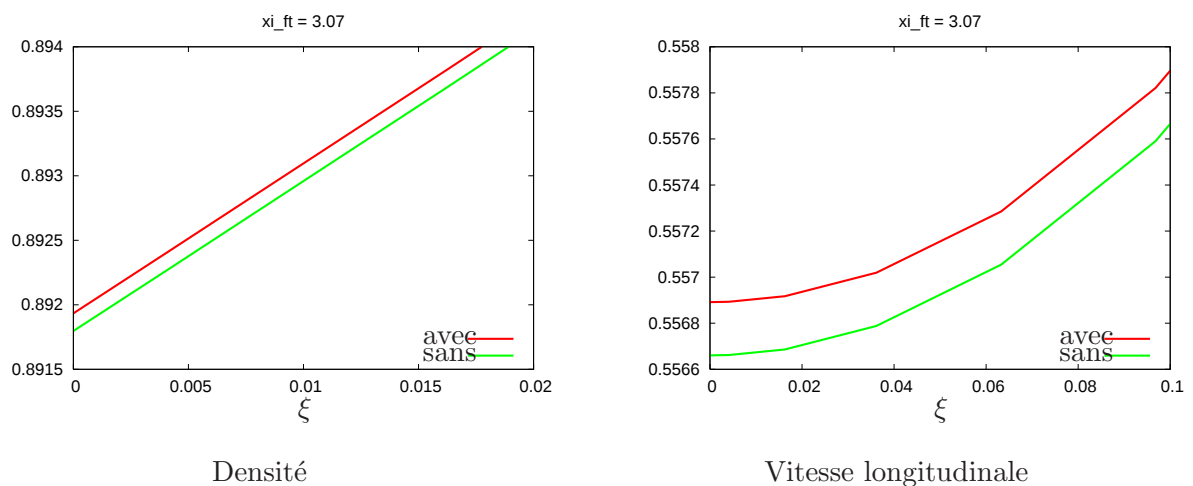


FIGURE 10.9 – Tracés des profils des quantités de base à l'origine pour le cas avec relaxation sur le micro-domaine et le cas où celle-ci n'est pas effectuée (respectivement la densité $\bar{G}$ et la vitesse longitudinale $\bar{V}_x$ avec $\xi_{fc} = 2,025$ et $\xi_{ft} = 3,07$).

Quantité considérée	max résidu absolu initial	max résidu absolu final	max résidu relatif initial	max résidu relatif final
$\check{G}$	$0,523 \cdot 10^{-11}$	$0,637 \cdot 10^{-11}$	$0,194 \cdot 10^{-15}$	$0,237 \cdot 10^{-15}$
$\check{V}_x$	$0,337 \cdot 10^{-10}$	$0,140 \cdot 10^{-10}$	$0,344 \cdot 10^{-14}$	$0,143 \cdot 10^{-14}$
$\check{\Theta}$	$0,105 \cdot 10^{-5}$	$0,146 \cdot 10^{-10}$	$0,467 \cdot 10^{-10}$	$0,649 \cdot 10^{-15}$
$\check{J}$	$0,116 \cdot 10^{-11}$	$0,393 \cdot 10^{-9}$	$0,494 \cdot 10^{-16}$	$0,167 \cdot 10^{-13}$

TABLE 10.2 – Tableau illustrant les performances de la méthode de relaxation sur le domaine adjacent au micro-domaine. Les résidus absolus et relatifs maximaux sur le domaine pour chaque quantité avec leur valeur initiale ainsi que leur valeur finale y figurent. Le domaine en question est un domaine issu d'une distribution de 5 domaines de 50 points.

Un nouvel algorithme de relaxation est donc mis en place spécifiquement pour ces domaines du précurseur thermique.

Condition initiale : comme pour le micro-domaine, la procédure de relaxation sur les domaines du précurseur thermique nécessite une solution initiale pour démarrer. Pour cela, une intégration en différences finies est effectuée par une méthode de tir. Le schéma numérique utilisé est un schéma de Runge-Kutta d'ordre 5 à pas adaptatif. Sur ces domaines, l'intégration ne souffre plus de la proximité avec le front thermique, cette intégration donne donc des résultats convenables au niveau des résidus comme nous le verrons au moment de la description quantitative de cette partie du calcul. Ces résidus seront de toute façon améliorés grâce à la procédure de relaxation que nous allons décrire maintenant.

Résolution spectrale : le principe de la méthode de relaxation appliquée aux domaines présents sur la zone du précurseur thermique supersonique est similaire ce qui est fait sur le micro-domaine jusqu'à l'expression du résidu. Ensuite, les deux méthodes se différencient.

Sur les domaines de la zone amont, la matrice $\check{\mathbf{M}}_{\text{CL}}$ est numériquement inversible, ce qui permet d'utiliser le préconditionnement par l'inverse. Cependant, la matrice inverse $(\check{\mathbf{M}}_{\text{prec}}^q)^{-1}$ n'est pas calculée. En effet, le système :

$$\check{\mathbf{M}}_{\text{prec}}^q \check{\mathbf{X}}^{(q)} = \check{\mathbf{M}}^{(q)} \check{\mathbf{X}}^{(q)} = \check{\mathbf{R}}_{\text{CL}}^{(q)}, \quad (10.33)$$

est résolu par une méthode directe.

Résultats : les domaines de la zone amont comportent 50 points dans les configurations que nous avons utilisées. Le tableau 10.2 montre, de la même manière que celui concernant le micro-domaine (Tab. 10.1), l'effet de la relaxation sur les résidus relatifs et absolus. On observe une nette amélioration confirmée par les tracés des résidus relatifs de la figure 10.10 qui montrent bien l'historique de convergence du résidu. De même que sur le micro-domaine, la seule quantité dont le résidu ne s'améliore pas est la variable $\check{J}$ issue du flux thermique. Cela s'explique par la définition exacte de cette quantité. Les valeurs finales des résidus relatifs sont très satisfaisantes, si l'on tient compte de la complexité de l'écoulement. La voie choisie a permis de s'éloigner du front thermique mais celui-ci est encore proche, comme le montre l'historique de convergence de la figure 10.10. Le critère (10.28) a été testé et donne un résultat satisfaisant, puisque de l'ordre de 10^{-8} , ce qui prouve la plus grande régularité de l'opérateur par rapport au micro-domaine.

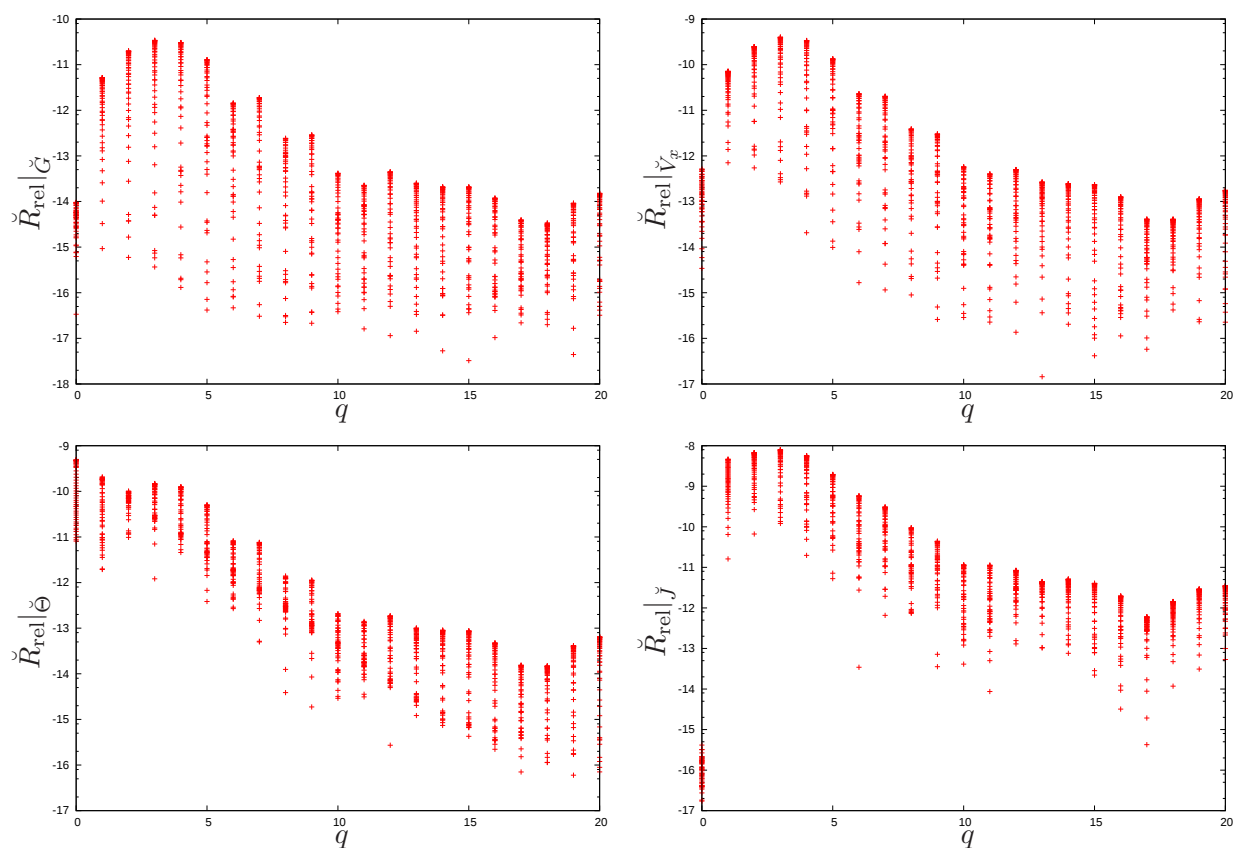


FIGURE 10.10 – Tracés, en échelle logarithmique, des résidus relatifs pour chacune des quantités « brève » en fonction du nombre d'itérations de la relaxation sur les domaines du précurseur thermique autres que le micro-domaine, qui comprennent ici 50 points de collocation. Sur ces tracés, on observe des résidus ponctuels. Les lignes verticales de symboles représentent l'ensemble des résidus ponctuels à une itération donnée. Comme pour le micro-domaine, une saturation est observée. Cependant, dans le cas des domaines du précurseur, les résidus relatifs sont décroissants pour l'ensemble des quantités. Malgré tout, la convergence, fixée au seuil de 10^{-14} , n'est pas atteinte.

10.2.3 Domaines en aval du choc isotherme

Sur les domaines en aval du choc isotherme, la méthode employée est celle développée précédemment par Boudesocque-Dubois (2000) et Lombard (2008) et détaillée dans l'article de Boudesocque-Dubois *et al.* (2013). C'est pourquoi la présentation est brève. Sur ces domaines, le système de variables dépendantes et indépendantes utilisé est celui en $(\xi, \overline{Q})$.

Conditions de raccord au choc isotherme : au niveau du choc isotherme, afin de fournir les conditions limites des quantités en vue de l'intégration en différences finies du système d'équations sur le domaine situé à l'aval du front de choc, des relations de Rankine–Hugoniot sont utilisées. Un changement de variables :

$$\begin{pmatrix} \check{G} \\ \check{V}_x \\ \check{\Theta} \\ \check{J}_x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \overline{G} \\ \overline{V}_x \\ \overline{\Theta} \\ \overline{\Phi}_x \end{pmatrix} \quad (10.34)$$

est appliqué afin d'obtenir les valeurs des quantités en amont du choc dans le système de coordonnées $(\xi, \overline{Q})$. Ces relations de Rankine–Hugoniot sont énoncées en (4.37).

Résolution spectrale : la méthode de relaxation utilisée sur la zone aval de l'écoulement est déjà détaillée dans le Chapitre 3, à la section 3.3.2 et dans le travail de Boudesocque-Dubois *et al.* (2013). Il faut seulement préciser que dans le problème à résoudre :

$$\mathbf{L}(\overline{\mathbf{Y}}) \overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{g}(\overline{\mathbf{Y}}), \quad (10.35)$$

avec $\mathbf{L}$ définie en (10.6), le vecteur des inconnues est :

$$\overline{\mathbf{Y}} = {}^\top (\overline{G}_1 \dots \overline{G}_{\mathcal{N}_i} \overline{V}_1 \dots \overline{V}_{\mathcal{N}_i} \overline{\Theta}_1 \dots \overline{\Theta}_{\mathcal{N}_i} \overline{\Phi}_1 \dots \overline{\Phi}_{\mathcal{N}_i}). \quad (10.36)$$

Résultats : cette méthode de relaxation, bien qu'éprouvée par le passé a elle aussi été testée et jugée sur les configurations d'écoulements tels que ceux que nous étudions. Les résidus relatifs finaux obtenus étant satisfaisants, cette méthode est restée en l'état. La figure 10.11 illustre le résidu relatif sur les quantités à la fin de la relaxation sur les points en aval du choc isotherme. Ces résidus atteignent un palier autour de 10^{-16} .

Concernant la distribution utilisée pour les tableaux et les figures présentés ici, les domaines de la zone aval comportent 50 points et les trois domaines de la zone aval portent le total de domaines à 5, sans compter le micro-domaine. Il s'agit cependant d'une discrétisation parmi d'autres.

10.2.4 Procédure de résolution globale

Les paragraphes précédents ont permis de rentrer en détail dans la méthode numérique appliquée aux différents types de sous-domaines. Le paragraphe suivant a pour objectif de décrire comment ces méthodes s'enchaînent pour aboutir à la solution de l'écoulement de base recherchée.

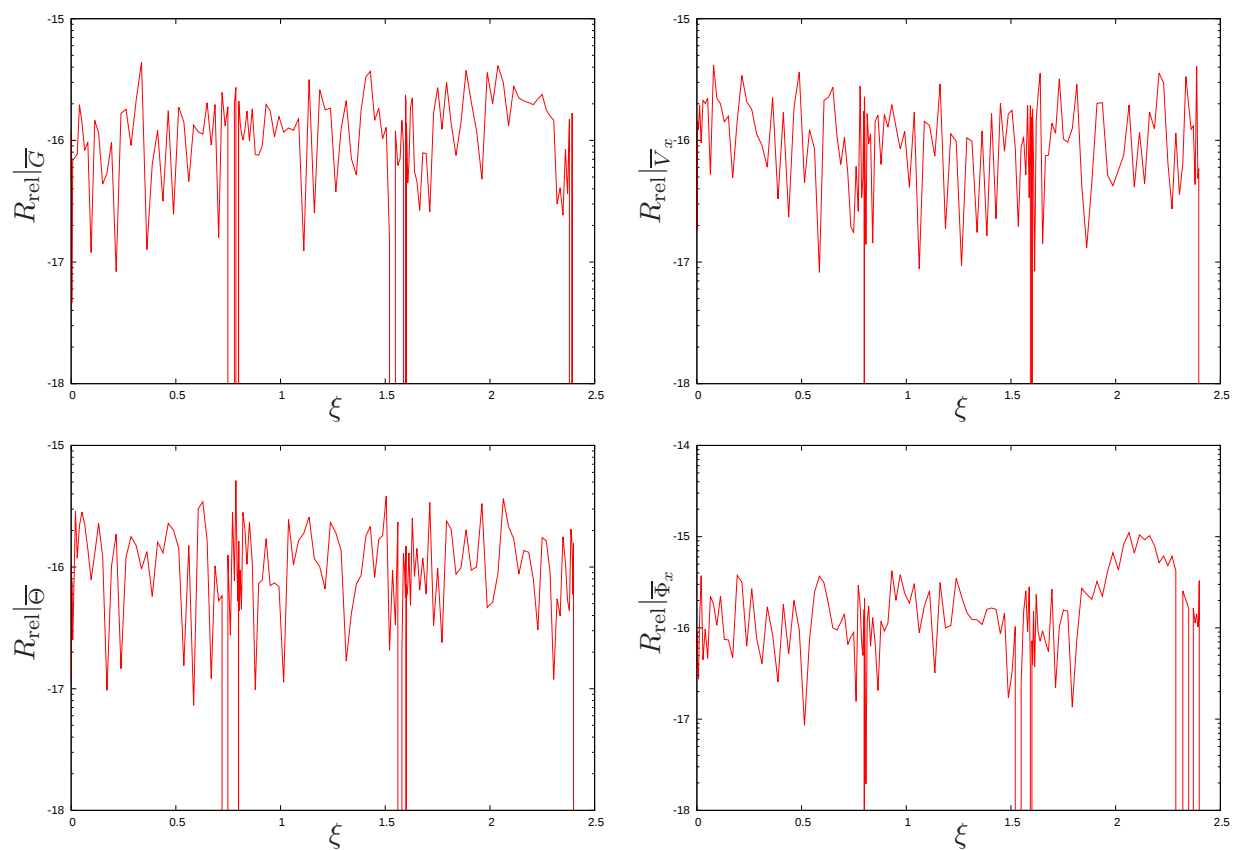


FIGURE 10.11 – Tracés, en échelle logarithmique, des résidus relatifs pour chacune des quantités sur les points de la zone aval, à la fin de la relaxation. Le résultat est concluant puisque aucune valeur ne dépasse 10^{-15} .

Position du front thermique	3,07	1,25	0,75
Limite aval	2,023193	1,20541	0,74498232414986
Limite amont	2,740	1,21717	0,744982766318

TABLE 10.3 – Tableau donnant les positions extrêmes, en amont et en aval, admissibles de la position du choc isotherme.

Logique de la procédure : la procédure de résolution globale consiste à calculer une condition initiale sur un domaine puis à effectuer la résolution spectrale sur ce domaine pour obtenir une solution proche de la solution exacte. Seulement à ce moment-là, le processus se répète au domaine suivant, on nomme cette méthode la méthode particulière de résolution (MPR). Si le choix est fait de déterminer la solution initiale sur l'ensemble de l'écoulement avant de procéder aux relaxations par domaine, méthode que l'on nomme méthode globale de résolution (MGR), l'expérience montre que la méthode n'aboutit pas forcément. Plusieurs raisons peuvent provoquer cet échec :

- la condition initiale sur un domaine ne peut pas être calculée, la méthode de tir ne converge pas,
- la méthode de tir converge mais la position du choc isotherme pose problème.

Ces constatations s'expliquent par la complexité du traitement de la solution sur le précurseur thermique. En effet, la solution initiale y est beaucoup moins précise que sur les autres domaines. Plusieurs types de sensibilités ont été constatées. Nous allons les décrire ici.

Position du choc isotherme : la position du choc isotherme, bien qu'elle permette une certaine latitude, doit être définie de manière judicieuse. Pour une position du front donnée, Reinicke et Meyer-Ter-Vehn (1991) ont montré que toutes les positions du choc ne sont pas accessibles, il existe un intervalle de positions du choc admissibles. En effet, ce choc isotherme est introduit pour éviter la singularité du point sonique. En ce point sonique, la quantité $D_{\ln \xi}$ est nulle, ce qui se caractérise par la relation (4.28). Le fait de placer le choc isotherme fait changer de signe cette quantité. Si le choc isotherme est placé trop en aval, cette quantité passe par la valeur nulle et la singularité présente empêche la procédure de continuer. En revanche, si le choc isotherme est fixé sur un point trop en amont, le choc ne provoque pas le changement de signe de $D_{\ln \xi}$ qui intervient alors plus tard pour les mêmes conséquences. Pour illustrer ce propos, le tableau 10.3 donne les valeurs extrêmes possibles pour la position du choc d'après nos essais. On remarque que plus la position du front thermique est proche de l'origine selon la variable autosemblable, plus la zone d'admissibilité de la position du choc est restreinte.

Sensibilité à la précision de la solution issue du micro-domaine : dans ce type de méthode, les résultats sur chaque domaine sont dépendants de la qualité des résultats obtenus sur les domaines en amont. C'est d'autant plus vrai dans notre cas car le premier domaine à être traité, le micro-domaine, est placé si près de la singularité qu'il subit un traitement très spécifique. Il a été montré au cours de cette thèse que de la qualité de la solution initiale calculée sur le micro-domaine dépend l'aboutissement ou non de la méthode dans son intégralité. C'est pourquoi la taille de ce domaine est si petite. Le développement asymptotique utilisé pour approcher la solution au départ de la procédure perd effectivement en précision à mesure que l'on s'éloigne du front thermique.

Les efforts déployés pour réduire au maximum l'ordre de grandeur du résidu sur ce micro-domaine, dont fait par exemple partie l'utilisation de la SVD, sont motivés par l'expérience. On a constaté

que la précision de la solution au niveau de la frontière entre le micro-domaine et le domaine qui lui est adjacent joue un rôle important dans la précision de la solution globale.

Sensibilité des perturbations à la précision de la solution de base : le travail effectué à la suite du traitement de cet écoulement de base a montré que pour effectuer un calcul de perturbations, il est nécessaire d'atteindre une grande précision lors du calcul de l'écoulement de base. De plus, l'utilisation du micro-domaine, justifiée dans le cadre du calcul de la solution de base, perd de son intérêt lors du calcul des perturbations. C'est pourquoi une procédure d'absorption du micro-domaine par son domaine adjacent a été mise en place². Sur ce nouveau domaine, la solution ayant déjà été soumise à la procédure de relaxation sur le maillage duquel elle est issue, la procédure de relaxation est rapide. Cependant, la proximité du front thermique oblige là-encore à utiliser la SVD, pour effectuer une relaxation telle que celle appliquée au micro-domaine.

10.3 Conclusion

Point central de ce travail de thèse, la méthode numérique élaborée pour le traitement de l'écoulement de base peut encore être améliorée. En effet, les derniers mois de la thèse ont montré que le calcul des perturbations, qui est un objectif à terme, nécessite une précision de la solution de base qui n'a pas encore été atteinte. De plus, certaines configurations d'écoulements résistent encore au passage par cette procédure.

Deux obstacles principaux rendent difficile le bon fonctionnement d'une résolution spectrale de l'écoulement de base. D'abord, le système d'équations aux dérivées ordinaires dégénère au voisinage du front thermique. Ensuite, un front infiniment raide caractérise les profils des quantités au niveau de ce même front thermique. On arrive pourtant à atteindre une précision largement supérieure à ce que donnerait une méthode de tir en différences finies, notamment en contournant la raideur infinie à l'aide d'un changement de variables, mais le système dégénère toujours. L'objectif est d'obtenir une précision encore supérieure. En effet, nous avons une exigence spectrale au niveau de la précision, ce qui est particulièrement difficile à obtenir.

Plusieurs pistes existent pour améliorer encore les performances de cet outil numérique. Un opérateur global pourrait par exemple être mis en place. Celui-ci prendrait en compte l'ensemble des points de la distribution et par conséquent, toutes les conditions aux limites. L'idée est de compenser les effets de la singularité par le nombre d'informations présentes dans cette matrice globale. Les propriétés de la matrice qui serait alors créée au front thermique permettraient de savoir rapidement si cette méthode a un avenir. Un autre moyen de se rapprocher de la précision spectrale consisterait en une qualification plus fine de la singularité présente au pied du front thermique.

Malgré les limites que nous venons d'énoncer et auxquelles nous avons essayé de donner des idées d'amélioration, le bilan de cette méthode numérique est tout de même très satisfaisant. En effet, de nombreuses configurations d'écoulements, complètement inaccessibles jusqu'alors, ont été atteintes. La gamme d'écoulements désormais accessibles par l'outil numérique s'est considérablement agrandie, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

2. La procédure d'interpolation d'une solution est détaillée dans le chapitre 3 à la section 3.4.1

Chapitre 11

Exploration de différents régimes d'écoulements de base en conduction électronique

L'attaque directe en FCI se caractérise par des écoulements avec conduction électronique dominante, soit $(m, n) = (0, 5/2)$ pour le modèle de Spitzer-Harm, au contraire de l'attaque indirecte pour laquelle la conduction dominante est radiative, soit $(m, n) = (-2, 13/2)$. Il est donc intéressant de considérer les écoulements d'un gaz monoatomique ($\gamma = 5/3$) avec conduction électronique dominante. Certains de ces écoulements ont été étudiés à l'aide de solutions autosemblables et de l'hypothèse de front thermique négligeable par Boudesocque-Dubois *et al.* (2008). La procédure numérique mise en place pour traiter les écoulements avec précurseur thermique supersonique permet de revenir à ces configurations d'écoulements.

Le calcul des solutions de ces écoulements, sans l'approximation d'une taille de précurseur thermique négligeable, est important pour valider cette approximation et les résultats ainsi obtenus, mais aussi pour mieux les comprendre. La procédure numérique mise en place nous donne surtout la possibilité de traiter une gamme d'écoulements plus large. Cette gamme comprend les écoulements avec un précurseur thermique de taille négligeable ($\xi_{ft} = 0,75$) mais également ceux avec des fronts thermiques de taille plus significative ($\xi_{ft} = 3,07$). Cette procédure permet donc de couvrir l'éventail de configurations présentes entre les régimes ablatifs et ceux à front thermique supersonique. Ainsi, d'autres régimes que celui de l'ablation, ou déflagration thermique, peuvent être décrits. Le régime de détonation, pour lequel un front thermique supersonique est en avance sur une onde de choc et qui est le régime qui prévaut durant la phase précoce de l'illumination de la cible (Zel'dovich et Raizer, 1967), peut désormais être traité.

Au cours de ce chapitre, plusieurs positions ξ_{ft} du front thermique vont être testées. Les positions ξ_{fc} du front de choc isotherme vont, quant à elles, faire l'objet de variations pour étudier le comportement des quantités de base et discuter, du point de vue physique, des informations qui nous sont fournies par les grandeurs de ces différentes configurations d'écoulements de base. De plus, la gamme d'écoulements, caractérisés par les paramètres numériques (ξ_{fc}, ξ_{ft}) , accessibles par le calcul s'est élargie par rapport aux couples de paramètres admissibles lors des études précédentes. En effet, il est dorénavant possible, à une position fixée du front de choc, de décrire des configurations d'écoulements avec de plus grandes valeurs du flux appliqué à l'origine, ou encore des valeurs de la pression à l'origine moins élevées.

11.1 Rappels sur les solutions sans précurseur thermique

Dans le cas de la conduction électronique, l'abaque de la figure 11.1 permet de visualiser l'ensemble des solutions accessibles en régime ablatif. Cet abaque (Boudesocque-Dubois *et al.*, 2008) donne la correspondance entre le couple de conditions aux limites ($\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi$) et la position du front de choc ξ_{fc} dans la configuration avec précurseur thermique de taille négligeable. Pour figurer dans cet abaque, les solutions doivent répondre à certaines conditions. En effet, le code RAMSES fournit, à partir des variables de similitude, les fonctions de forme. Cependant, ce code ne tient pas compte de l'aspect physique des écoulements de base. Il est donc nécessaire d'introduire un certain nombre de critères d'admissibilité (Boutboul, 2006). Ainsi, certaines solutions sont numériquement accessibles mais ne sont pas physiquement acceptables, elles sont donc éliminées. En particulier, le profil de densité ne peut pas être négatif. Le premier critère d'admissibilité est donc le suivant :

$$\overline{G}(\xi) > 0. \quad (11.1)$$

De plus, un second critère nous permet de restreindre la gamme d'écoulements acceptables aux cas où le flux à l'origine est positif afin de rester dans le cadre du régime ablatif. Le second critère d'admissibilité s'énonce donc ainsi :

$$\overline{\Phi}(\xi = 0) \geq 0. \quad (11.2)$$

Enfin, par hypothèse, la présence d'un gradient de densité est souhaitée. Le dernier critère concerne donc la position du front d'ablation ξ_T . Celui-ci ne doit en effet pas être confondu avec la frontière extérieure de la cible. C'est l'objet du troisième et dernier critère :

$$\xi_T > 0. \quad (11.3)$$

À ces trois critères, mis en place par Boutboul (2006), s'ajoute une dernière donnée. L'approximation d'une conduction de chaleur dominée par la conduction électronique n'est légitime que si la température du gaz est suffisamment élevée. Les écoulements calculés avec de trop faibles températures à l'origine ne sont donc pas physiquement acceptables.

L'abaque de la figure 11.1 permet de faire quelques commentaires sur la région de l'espace des conditions aux limites à la surface externe en flux et en pression qui est balayée par l'ensemble des solutions accessibles et acceptables. On voit ainsi que la gamme d'écoulements accessibles se réduit avec l'augmentation de la valeur de ξ_{fc} . Pour les plus grandes valeurs de ξ_{fc} , la valeur du flux de conduction à la surface externe semble limitée. C'est pourquoi il est intéressant d'explorer les solutions avec précurseur thermique afin de tenter de décrire des écoulements pour lesquels cette valeur $\mathcal{B}_\varphi$ est plus élevée. D'après l'abaque présenté en figure 11.1, cela revient à considérer des points de celui-ci correspondant à des valeurs de ξ_{fc} élevées. Il est alors naturel de reprendre certaines valeurs des courbes de ξ_{fc} présentes dans l'abaque pour ensuite se diriger vers des valeurs plus élevées.

11.2 Solutions avec précurseur thermique

Les solutions autosemblables avec précurseur thermique sont entièrement caractérisées par les valeurs de ξ_{ft} et ξ_{fc} . En tant qu'objet mathématique, ces valeurs sont les abscisses des singularités de l'écoulement. En tant que représentant d'écoulement autosemblable, celles-ci désignent les positions respectives du front thermique et du front de choc isotherme. Ces deux valeurs sont également des paramètres de la méthode numérique énoncée au chapitre précédent. Au cours de cette section, le couple de positions (ξ_{fc}, ξ_{ft}) est utilisé pour différencier les écoulements analysés. Ainsi, diverses configurations sont atteintes et différents régimes nous apparaissent.

11.2.1 Définition des grandeurs caractéristiques

Afin de décrire au mieux les quantités de base, relatives aux différentes configurations d'écoulements présentant un choc isotherme précédé d'un front thermique supersonique et étudiées au cours de ce travail de thèse, un certain nombre de grandeurs caractéristiques doivent être préalablement définies. Si une majorité d'entre elles est déjà explicitée dans le chapitre 7 (Sec. 7.1) de ce mémoire portant sur les résultats propres aux écoulements avec conduction radiative, pour lesquels l'approximation de choc parfait est utilisée, d'autres, propres au cas avec précurseur thermique, doivent encore être définies. L'étude de ces grandeurs caractéristiques permettra des comparaisons entre les différentes solutions liées aux multiples configurations d'écoulements que nous avons étudiées et les résultats des simulations issues des études précédentes (Boudesocque-Dubois, 2000; Lombard, 2008).

Dans la configuration qui nous intéresse ici, illustrée par la figure 4.1, certaines zones se rajoutent aux zones déjà définies. En effet, désormais la zone au repos ne se situe plus directement après le choc mais après le pied du précurseur thermique supersonique qui devance ce choc. La zone occupée par ce front thermique est appelée zone amont. Par opposition, on appelle zone aval la zone reliant l'origine au choc isotherme et qui englobe les zones de conduction, d'ablation et sous-choc définies précédemment. Par conséquent de nouvelles longueurs caractéristiques et positions de points particuliers sont définies de manière cohérente avec la configuration avec précurseur thermique supersonique.

Points particuliers : en plus des points remarquables cités plus tôt dans ce mémoire, deux points particuliers sont rajoutés dans le but de délimiter la zone du précurseur thermique. Ces points, situés au niveau du choc isotherme ξ_{fc} et du pied du front thermique ξ_{ft} , sont très importants puisqu'ils sont utilisés comme paramètres numériques pour différencier les différents écoulements.

Longueurs caractéristiques : enfin, afin d'établir une distinction entre la partie supersonique de l'écoulement et la partie subsonique, deux longueurs caractéristiques sont introduites spécialement dans le cas de l'étude de configurations avec précurseur thermique, il s'agit de :

- la longueur de la zone amont : distance entre le choc isotherme et le pied du précurseur thermique supersonique définie par :

$$\begin{aligned} l_{Am} &= |\bar{x}(\xi_{ft}) - \bar{x}(\xi_{fc})|, \\ &= t^\alpha L_{Am}, \end{aligned} \quad (11.4)$$

- la longueur de la zone aval : distance entre l'origine et le choc isotherme :

$$\begin{aligned} l_{Av} &= |\bar{x}(\xi_{fc}) - \bar{x}(0)|, \\ &= t^\alpha L_{Av}, \end{aligned} \quad (11.5)$$

11.2.2 Régime ablatif

Afin d'atteindre des valeurs plus élevées du flux de conduction incident que ce qui était accessible lors de l'étude avec l'approximation de choc parfait, l'idée est de faire varier la position ξ_{ft} du front thermique. Les premières valeurs visées pour la position de ce précurseur thermique sont les valeurs de ξ_{fc} les plus élevées qui ont été atteintes lors de l'étude de Boudesocque-Dubois (2000). En effet, pour ces valeurs, l'abaque de la figure 11.1 montre une limitation de la valeur du flux incident. L'utilisation d'une configuration avec choc isotherme et précurseur thermique

ξ_{ft}	ξ_{fc}	$\mathcal{B}_\varphi$	$\mathcal{B}_p$
0,75	0,74498232414986	2,116	0,184
0,75	0,74498233	1,971	0,278
0,75	0,7449824	1,639	0,474
0,75	0,7449827	0,951	0,776
0,75	0,74498275	0,670	0,862
0,75	0,744982765	0,334	0,941
0,75	0,744982766	0,207	0,963
0,75	0,744982766315	0,0109	0,987
1,00	0,984339	4,079	0,244
1,00	0,98434	3,887	0,358
1,00	0,98435	3,531	0,565
1,00	0,9844	3,094	0,802
1,00	0,9845	2,704	0,991
1,00	0,985	1,338	1,487
1,00	0,9851	0,754	1,627
1,00	0,98513	0,140	1,728
1,25	1,20541	6,234	0,486
1,25	1,20542	6,012	0,608
1,25	1,20545	5,747	0,754
1,25	1,2055	5,531	0,870
1,25	1,206	4,810	1,240
1,25	1,207	4,228	1,512
1,25	1,21	3,230	1,914
1,25	1,215	1,684	2,383
1,25	1,2171	0,1077	2,675
1,25	1,21713	0,0208	2,684
1,25	1,21717	-0,155	2,700
3,07	2,023193	32,988	1,621
3,07	2,0232	32,163	1,975
3,07	2,025	27,731	3,903
3,07	2,05	24,309	5,387
3,07	2,20	18,603	7,726
3,07	2,40	11,675	10,197
3,07	2,60	2,496	12,851
3,07	2,63	0,724	13,285
3,07	2,65	-0,555	13,581
3,07	2,70	-4,263	14,356

TABLE 11.1 – Tableau récapitulatif des différents paramètres propres aux écoulements étudiés avec précurseur thermique supersonique. Les données en vert correspondent à l'écoulement utilisé pour la comparaison, à $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_\varphi$ constants, entre les résultats issus de la configuration avec précurseur thermique et ceux obtenus avec l'approximation choc parfait (Sec. 11.2.4).

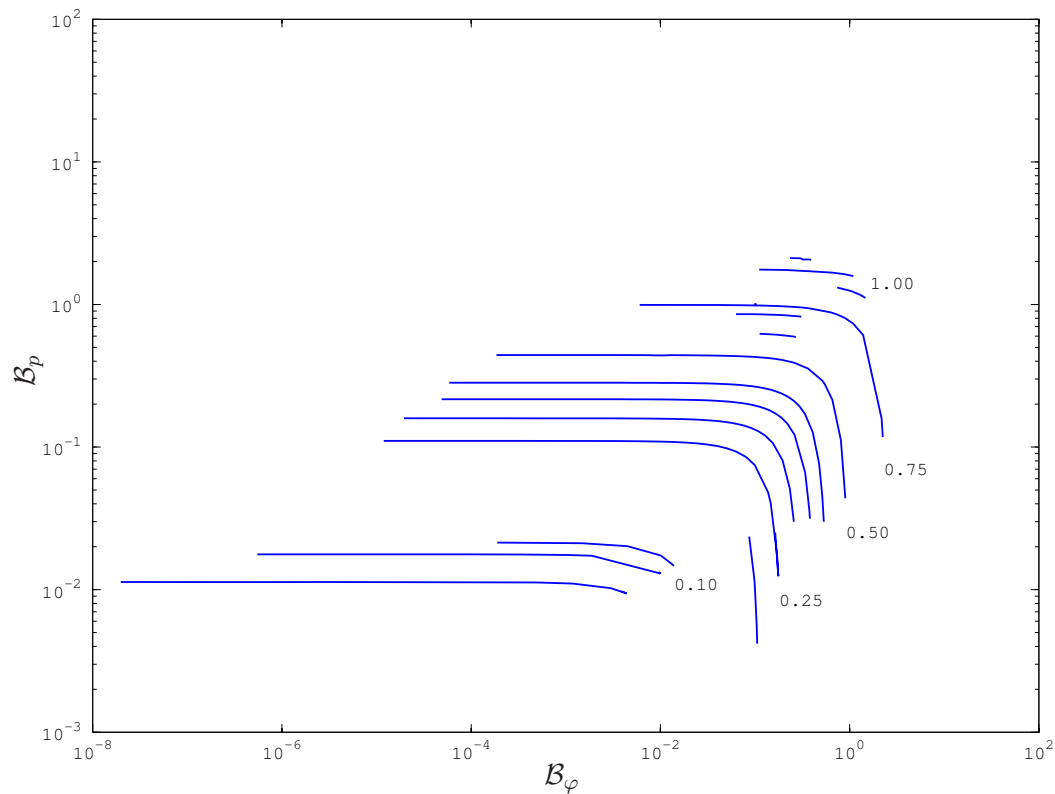


FIGURE 11.1 – Abaque donnant la correspondance entre le couple de conditions aux limites $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ et la position du front de choc ξ_{fc} pour un précurseur thermique de taille négligeable. Les courbes bleues correspondent à des configurations pour lesquelles la valeur de ξ_{fc} est constante. L'augmentation de la valeur de $\mathcal{B}_p$ réduit le nombre d'écoulements accessibles. Cet abaque nous apprend notamment que pour des petites valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$, la position du front de choc est directement liée à la valeur de $\mathcal{B}_p$.

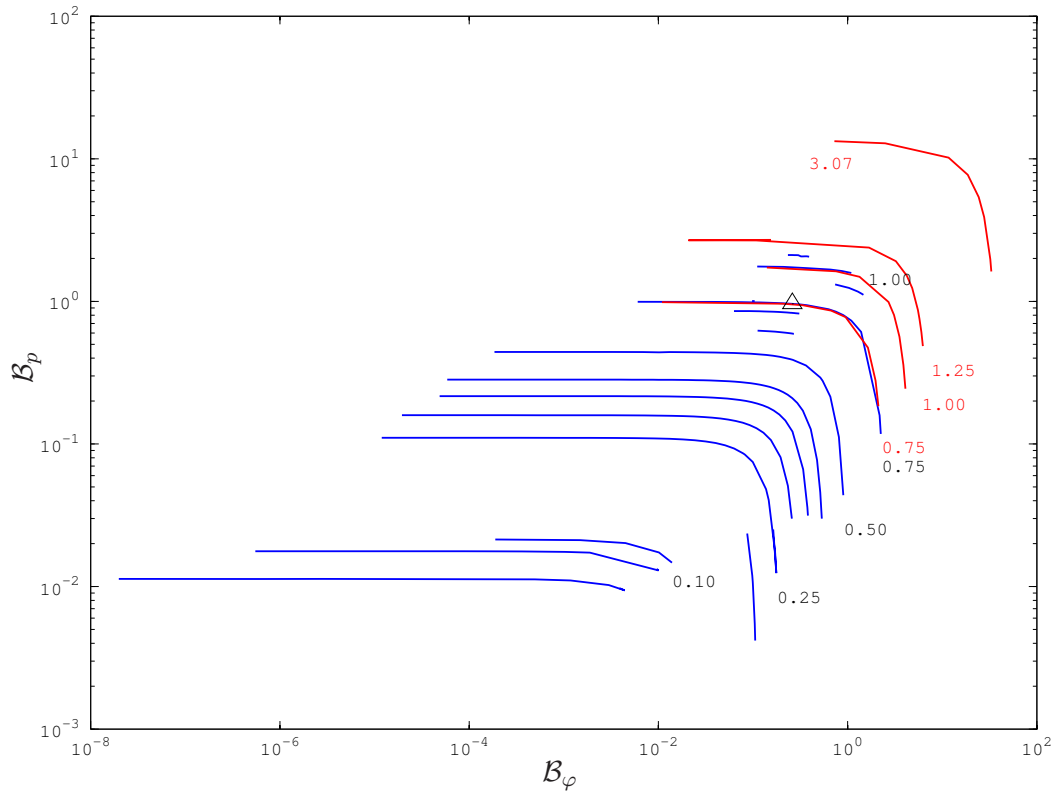


FIGURE 11.2 – Abaque donnant la correspondance entre le couple de conditions aux limites $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ et la position du front de choc ξ_{fc} dans la configuration avec précurseur thermique de taille négligeable (lignes bleues) et la position du pied du front thermique ξ_{ft} dans la configuration avec précurseur thermique précédant un choc isotherme (lignes rouges). Les lignes rouges correspondent à des configurations pour lesquelles la valeur de ξ_{ft} est constante. La superposition des lignes bleues et rouges suggère que pour des précurseurs de petite taille, les écoulements avec précurseur thermique et avec choc parfait ont des comportements similaires. La fenêtre de visualisation est volontairement identique à celle de l'abaque 11.1 pour illustrer l'avancée vers de plus grandes valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$ qui a été réalisée.

supersonique nous permet de dépasser cette limitation et également d'atteindre des valeurs de ξ_{ft} plus importantes.

L'abaque de la figure 11.2 montre les courbes d'isovaleurs de ξ_{ft} atteintes en tenant compte de la présence d'un précurseur thermique. L'objectif annoncé d'accéder à des valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$ plus importantes que celles atteintes en configuration choc parfait est atteint. Cela confirme notre hypothèse selon laquelle la limitation de la gamme d'écoulements accessibles, observée en approximation de choc parfait, nécessite l'introduction d'un front thermique pour être franchie. Le tableau 11.1 récapitule, pour l'ensemble des écoulements atteints avec cette configuration, les positions respectives du front de choc et du front thermique ainsi que les valeurs de la pression et du flux thermique sur la surface externe de l'ablateur.

Les tracés des quantités de l'écoulement de base en fonction de la variable autosemblable ξ ou de la variable réduite $\bar{X}$ (Figs. 11.3 à 11.10) nous permettent de réaliser une analyse assez complète de ce type d'écoulements du fait de la large gamme de couples de paramètres (ξ_{fc}, ξ_{ft}) prise en compte. La présence de tracés selon la variable $\bar{X}$ permet d'approfondir cette analyse en donnant les proportions réelles, bien que les grandeurs soient adimensionnées, des différentes zones des écoulements ainsi qu'une idée précise de la raideur des fronts, qu'il s'agisse du front de choc ou du front thermique. On remarque que pour une valeur de ξ_{ft} donnée, toutes les valeurs de ξ_{fc} ne sont pas admissibles. Ce constat ressort particulièrement de l'abaque de la figure 11.2. On y voit que les lignes rouges, représentant les isovaleurs de la position du pied du front thermique, sont limitées. Les tracés des quantités de base (Figs. 11.3 à 11.10) montrent pourtant qu'une large gamme de régimes différents est atteinte. L'examen de l'abaque de la figure 11.2 nous permet d'aller plus loin dans cette constatation puisque celui-ci démontre que l'intervalle admissible de valeurs de la position du front de choc est d'autant plus restreint que l'abscisse du front thermique dans le système autosemblable, soit ξ_{ft} , est élevée. Les profils des solutions de base selon la variable physique $\bar{X}$ (Figs. 11.4, 11.6, 11.8 et 11.10) nous apprennent que la taille du précurseur thermique, ou zone amont, croît avec la position du front thermique. Enfin, un dernier constat peut s'appliquer à l'ensemble des configurations atteintes ici. Le tableau 11.1 révèle que la position du front thermique est directement liée au flux de conduction incident $\mathcal{B}_\varphi$ puisque ces deux quantités augmentent en parallèle.

L'examen particulier des profils relatifs aux différentes positions du front thermique donne de plus amples indications sur les caractéristiques de ce type de configuration. Ainsi, en définissant le régime ablatif par l'existence d'un front thermique subsonique en aval d'un front de choc et en amont de l'origine, auquel est associé un front de densité, on remarque que toutes les positions de front thermique ne donne pas les mêmes gammes de solutions. Ainsi les figures 11.3 et 11.5 indiquent que tous les écoulements propres à ces valeurs de ξ_{ft} ne sont pas dans le régime ablatif, cependant cela reste le cas pour la majorité. Toujours avec ces valeurs de ξ_{ft} , le tracé de la vitesse longitudinale, que ce soit en ξ ou en $\bar{X}$ montre un minimum local au niveau de l'origine, ce qui est caractéristique de la présence d'une détente. On observe également, pour les écoulements dont la taille du précurseur thermique est la plus petite, que la vitesse à l'origine est négative. On est alors dans le cas d'une éjection de matière vers l'extérieur de la cible.

Les tracés des solutions pour des valeurs de ξ_{ft} plus élevées, à savoir $\xi_{ft} = 1,25$ (Figs. 11.7 et 11.8) et $\xi_{ft} = 3,07$ (Figs. 11.9 et 11.10) semblent se situer à une frontière physique entre différents régimes. Effectivement, pour les tailles les plus élevées du précurseur relativement au reste de l'écoulement, on observe que les écoulements n'appartiennent plus au régime ablatif. Le nombre de configurations appartenant à d'autres régimes est donc plus important à mesure que la position du front thermique augmente. Le comportement de ces solutions nécessite une attention particulière et sera l'objet de la dernière section de ce chapitre.

Tracés selon ξ pour $\xi_{\text{ft}} = 0,75$

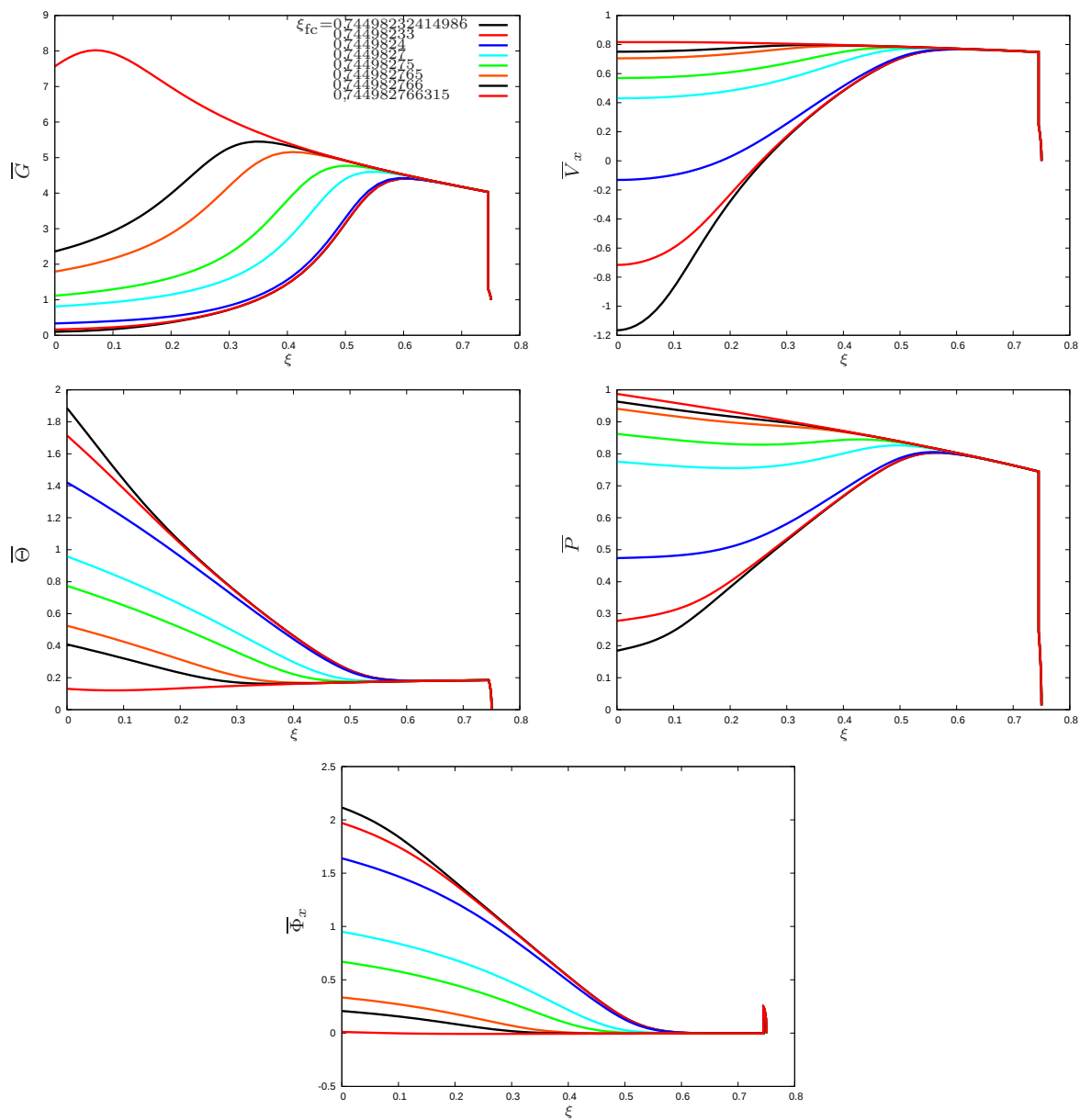


FIGURE 11.3 – **Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 0,75$** : quantités de l'écoulement de base en fonction de la variable autosemblable ξ , pour un précurseur thermique supersonique. Sont tracés la densité $\overline{G}$, la vitesse longitudinale $\overline{V}_x$, la température $\overline{\Theta}$, la pression $\overline{P}$ et le flux thermique longitudinal $\overline{\Phi}_x$.

Tracés selon $\bar{X}$ pour $\xi_{ft} = 0,75$

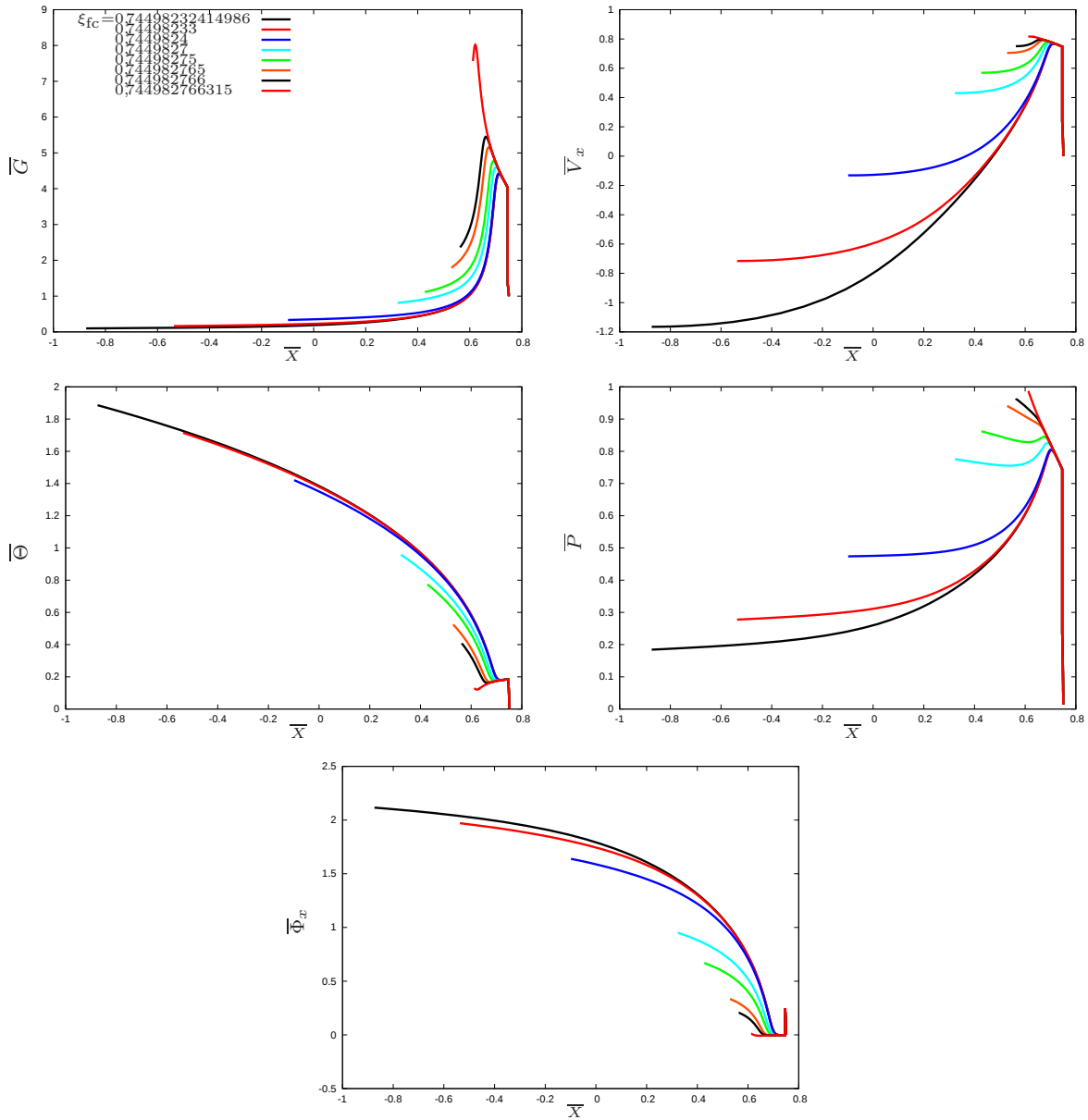


FIGURE 11.4 – **Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 0,75$** : quantités de l'écoulement de base en fonction de la coordonnée dans l'espace physique $\bar{X}$, pour un précurseur thermique supersonique. Sont tracés la densité $\bar{G}$, la vitesse longitudinale $\bar{V}_x$, la température $\bar{\Theta}$, la pression $\bar{P}$ et le flux thermique longitudinal $\bar{\Phi}_x$. Les solutions présentes sur cette figure sont celles déjà illustrées par la figure 11.3.

Tracés selon ξ pour $\xi_{ft} = 1,00$

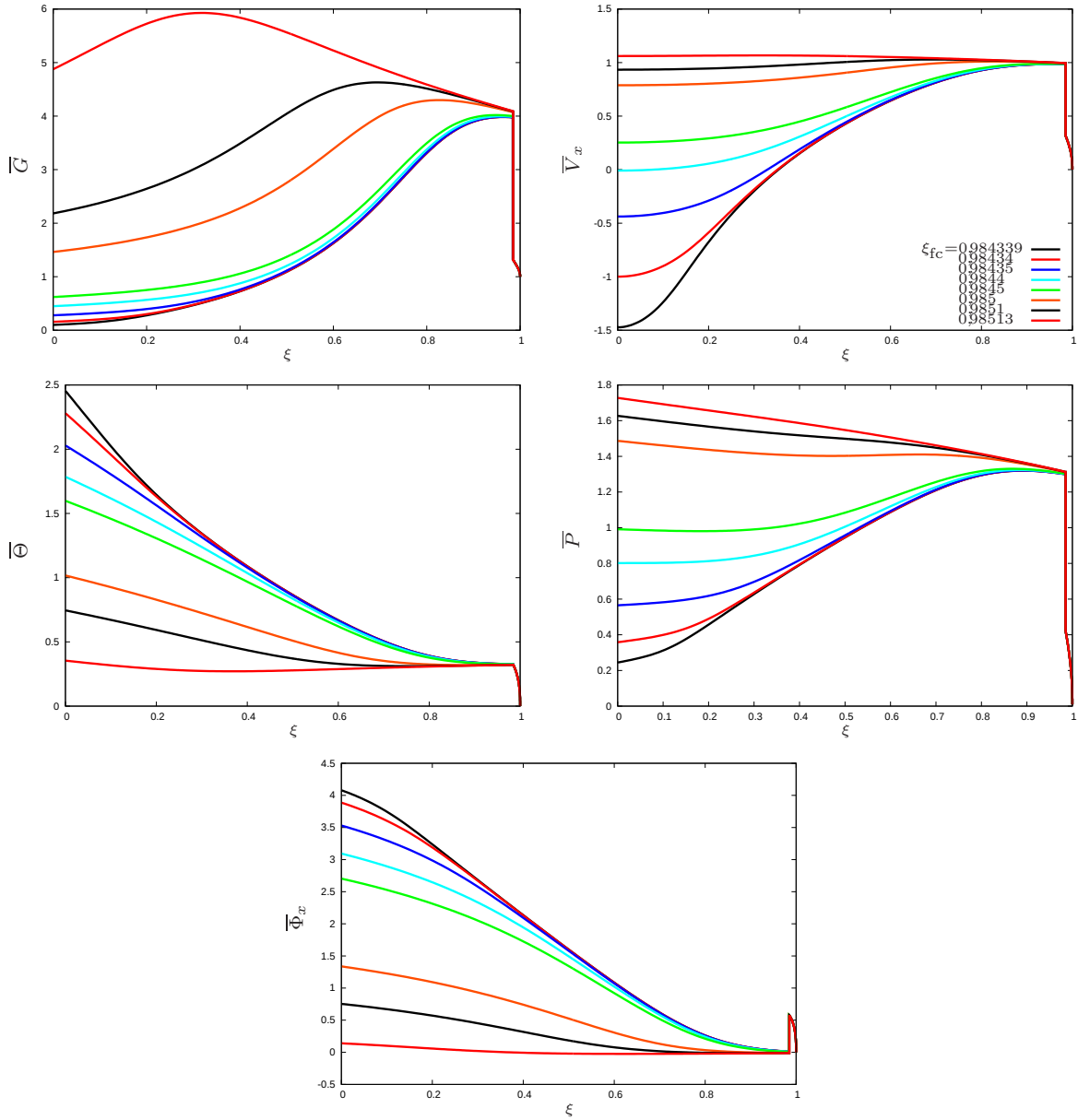


FIGURE 11.5 – **Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 1,00$** : quantités de l'écoulement de base en fonction de la variable autosemblable ξ , pour un précurseur thermique supersonique. Sont tracés la densité $\bar{G}$, la vitesse longitudinale $\bar{V}_x$, la température $\bar{\Theta}$, la pression $\bar{P}$ et le flux thermique longitudinal $\bar{\Phi}_x$.

Tracés selon $\bar{X}$ pour $\xi_{ft} = 1,00$

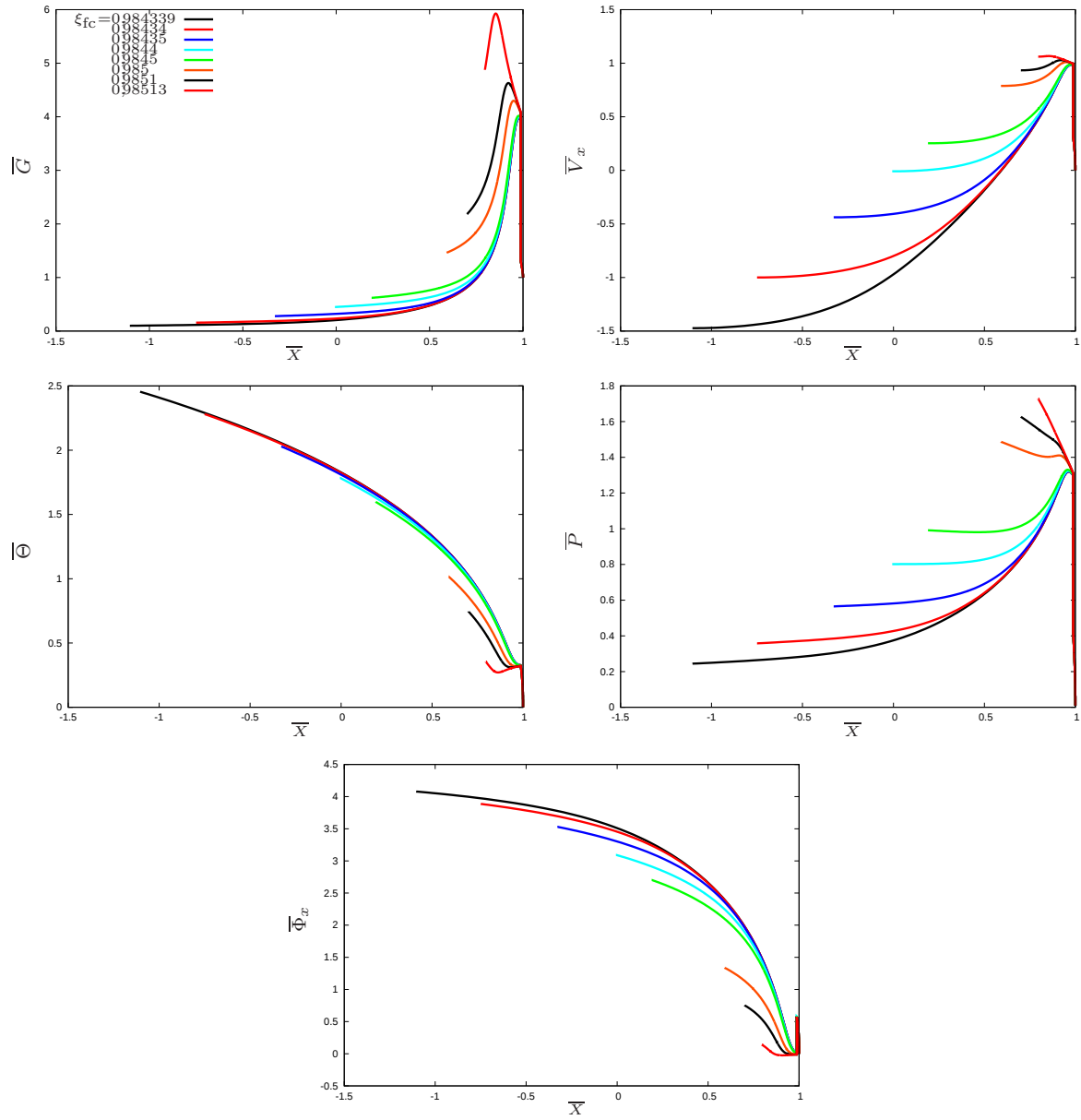


FIGURE 11.6 – **Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 1,00$** : quantités de l'écoulement de base en fonction de la coordonnée dans l'espace physique $\bar{X}$, pour un précurseur thermique, supersonique puisqu'il précède le choc. Sont tracés la densité $\bar{G}$, la vitesse longitudinale $\bar{V}_x$, la température $\bar{\Theta}$, la pression $\bar{P}$ et le flux thermique longitudinal $\bar{\Phi}_x$. Les solutions présentes sur cette figure sont celles déjà illustrées par la figure 11.5.

Tracés selon ξ pour $\xi_{ft} = 1,25$

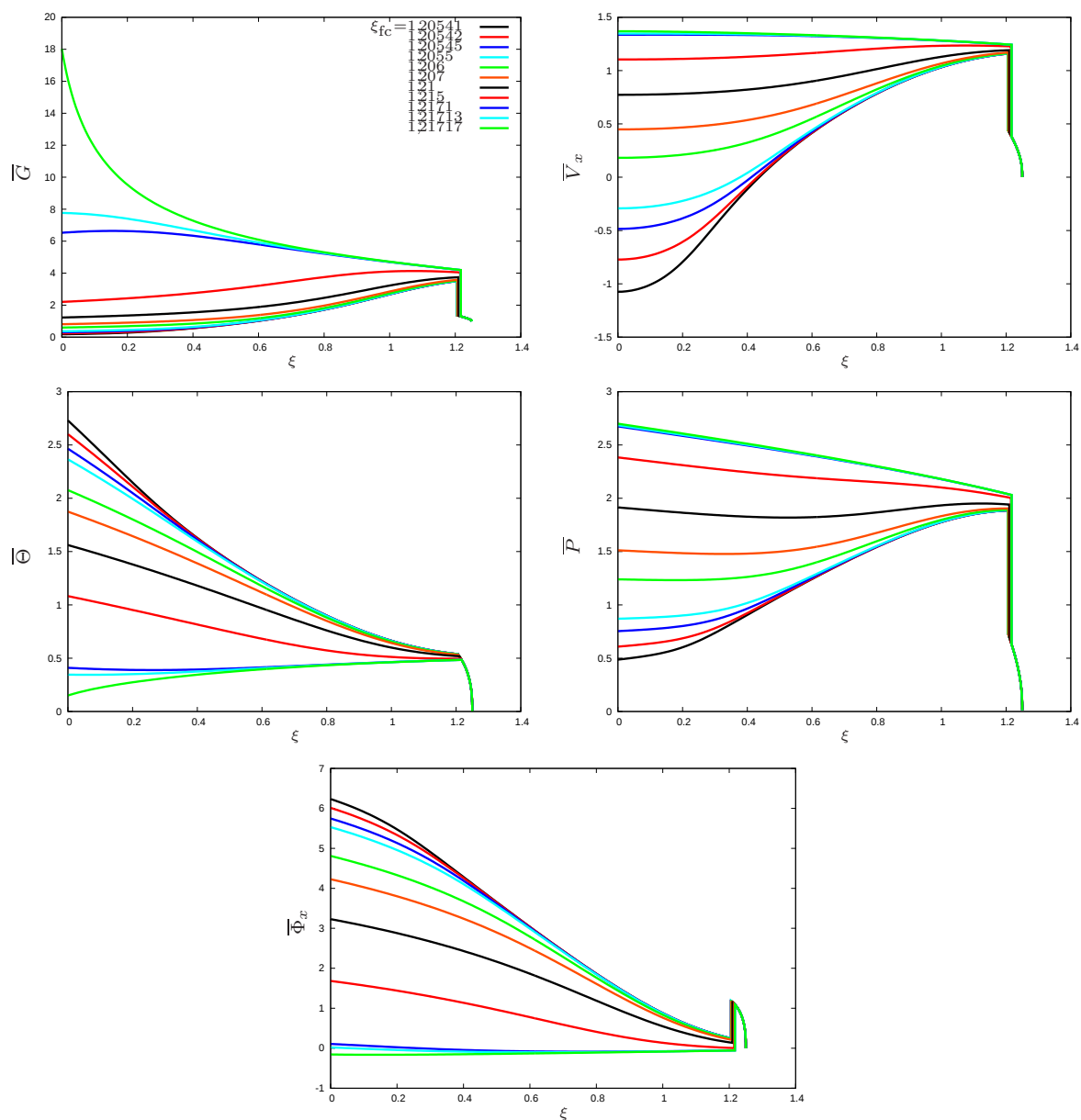


FIGURE 11.7 – **Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 1,25$** : quantités de l'écoulement de base en fonction de la variable autosemblable ξ , pour un précurseur thermique supersonique. Sont tracés la densité $\overline{G}$, la vitesse longitudinale $\overline{V}_x$, la température $\overline{\Theta}$, la pression $\overline{P}$ et le flux thermique longitudinal $\overline{\Phi}_x$.

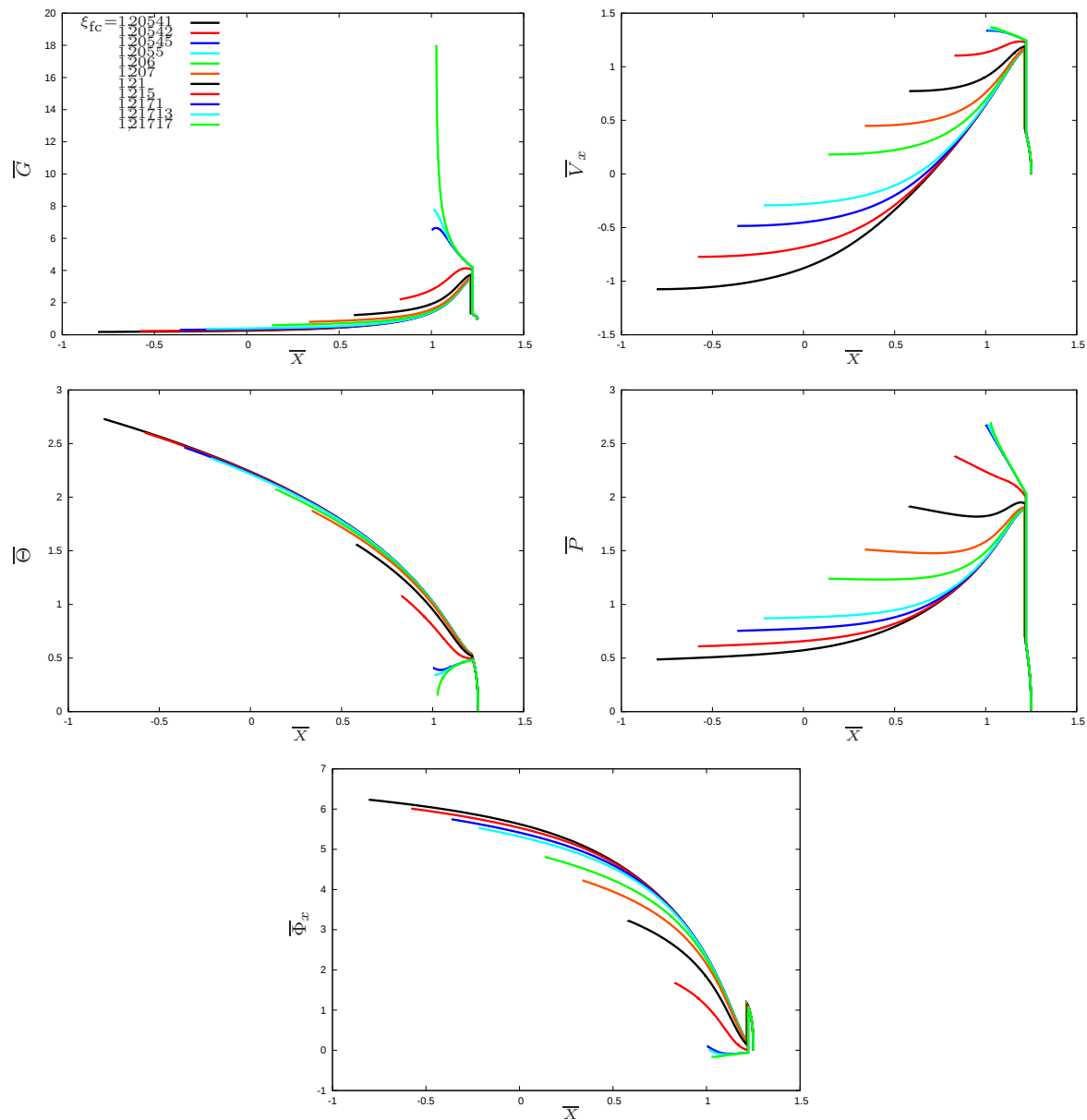
Tracés selon $\bar{X}$ pour $\xi_{ft} = 1,25$ 

FIGURE 11.8 – **Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 1,25$** : quantités de l'écoulement de base en fonction de la coordonnée dans l'espace physique $\bar{X}$, pour un précurseur thermique supersonique. Sont tracés la densité $\bar{G}$, la vitesse longitudinale $\bar{V}_x$, la température $\bar{\Theta}$, la pression $\bar{P}$ et le flux thermique longitudinal $\bar{\Phi}_x$. Les solutions présentes sur cette figure sont celles déjà illustrées par la figure 11.7. La présence de solutions appartenant à des régimes autres que l'ablation apparaît clairement sur ces tracés, notamment en ce qui concerne la densité.

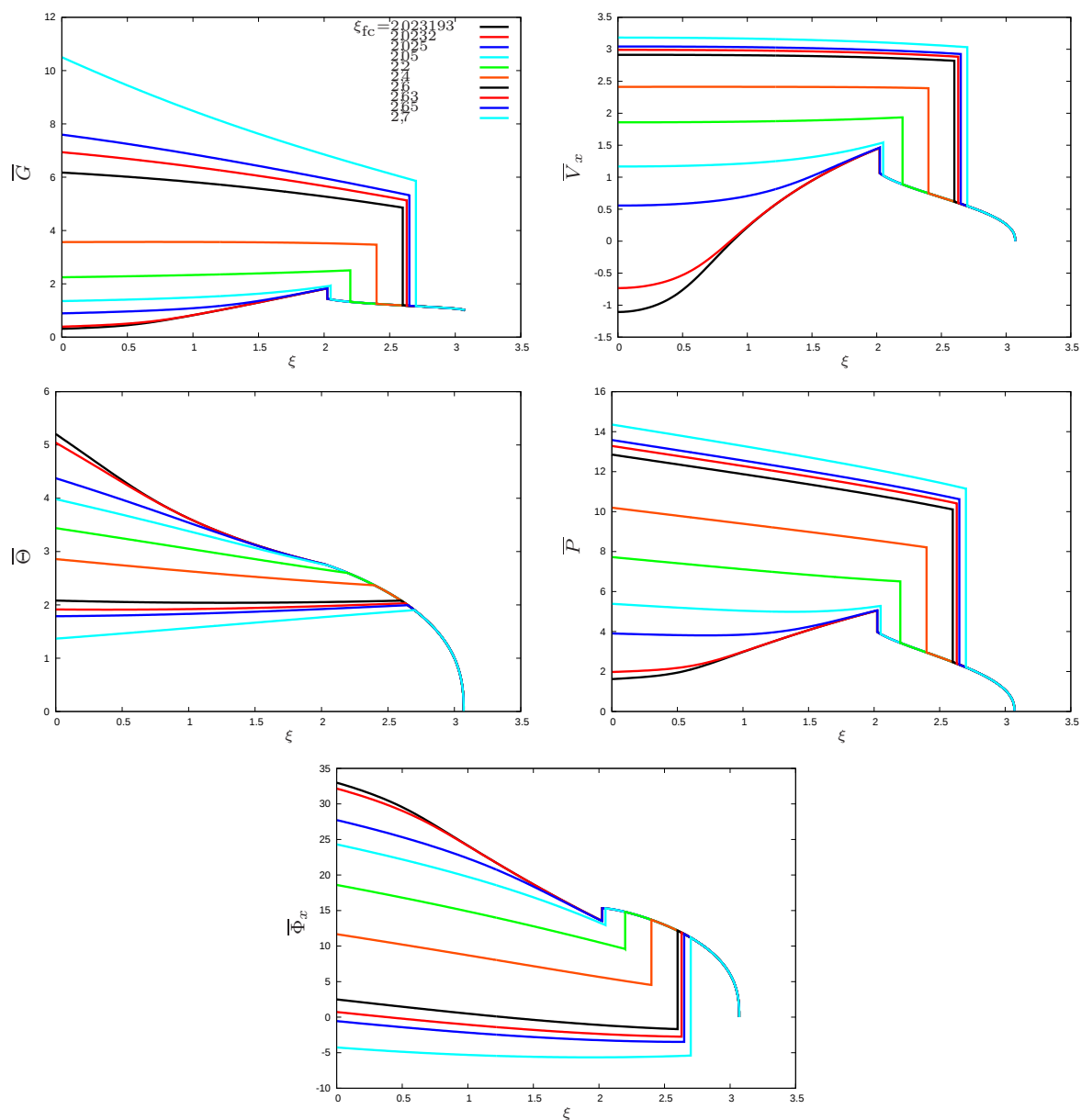
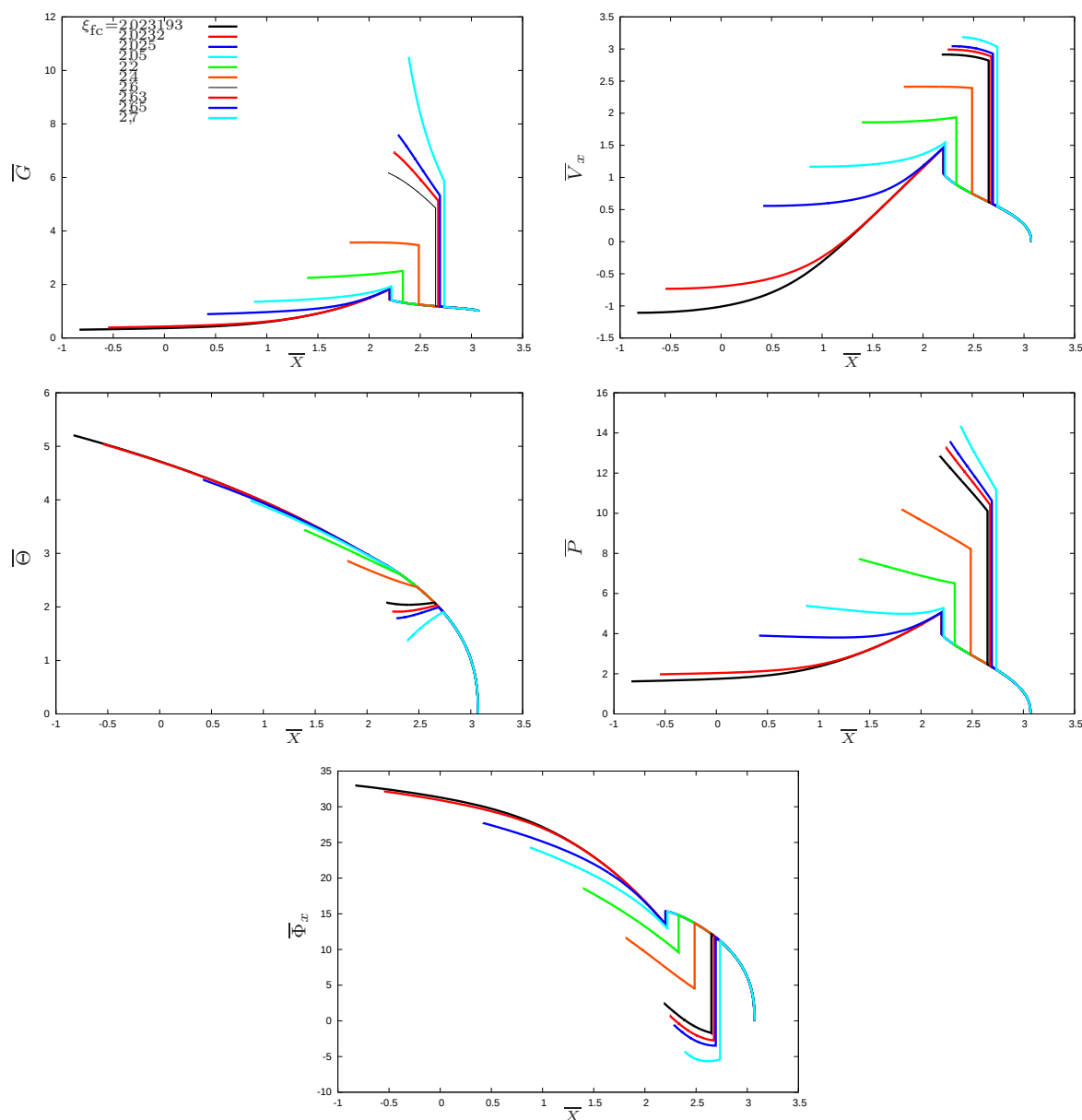
Tracés selon ξ pour $\xi_{ft} = 3,07$ 

FIGURE 11.9 – **Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 3,07$** : quantités de l'écoulement de base en fonction de la variable autosemblable ξ , pour un précurseur thermique supersonique. Sont tracés la densité $\overline{G}$, la vitesse longitudinale $\overline{V}_x$, la température $\overline{\Theta}$, la pression $\overline{P}$ et le flux thermique longitudinal $\overline{\Phi}_x$.

Tracés selon $\bar{X}$ pour $\xi_{ft} = 3,07$ 

11.2.3 Comportement au niveau du choc et du front thermique

Les tracés de la figure 11.11 illustrent les sauts de densité au niveau du choc isotherme (colonne de gauche) et au niveau du front thermique (colonne de droite). On y voit notamment que, à ξ_{ft} fixé, les différentes configurations se comportent de la même manière au voisinage du pied du front thermique. Les profils des différentes solutions se confondent donc sur ces tracés. Au contraire, au niveau du choc isotherme, on remarque que les écoulements avec les tailles de précurseur thermique les plus petites subissent les sauts de quantités les plus importants. Le tracé de la solution pour les solutions avec $\xi_{ft} = 3,07$ est assez parlant puisque les solutions en dehors du régime ablatif montrent un saut bien plus marqué que pour les autres quantités.

11.2.4 Impact de la prise en compte du précurseur pour un écoulement à $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ fixé

Les courbes rouges de la figure 11.12 représentent les profils des quantités de base dans le cas du précurseur thermique de taille négligeable, soit dans le cas de l'approximation choc parfait, avec une configuration d'écoulement qui est caractérisée par le couple de valeurs à l'origine de la pression et du flux de conduction $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi) = (0,260, 0,962)$. Ces deux valeurs, qui situent l'écoulement en question au niveau du triangle noir sur l'abaque 11.2, permettent une comparaison, à valeurs à l'origine de la pression et du flux thermique semblables, entre les configurations avec précurseur thermique supersonique négligeable et avec front thermique supersonique. L'écoulement, parmi ceux analysés avec choc isotherme et front thermique supersonique, le plus proche de celui utilisé pour la comparaison est repéré par la couleur verte dans le tableau 11.1. Sur les tracés de la figure 11.12, la courbe représentative de l'écoulement en question est tracée en couleur verte. On peut donc comparer les deux solutions.

Le comportement des quantités de base d'une configuration à l'autre est très semblable. Exceptée la différence fondamentale présente au niveau du front de choc, parfait dans un cas et isotherme dans l'autre, rien ne distingue vraiment le comportement de l'un et de l'autre de ces deux écoulements en aval du choc. Certes, les courbes ne sont pas confondues mais les valeurs des conditions à l'origine n'étant pas strictement identiques, on peut conclure à des profils similaires. D'un point de vue physique, cette comparaison est importante puisque les résultats obtenus avec l'approximation de choc parfait sont ainsi validés par les calculs avec précurseur thermique, du moins pour la zone en aval du choc. D'autres comparaisons de ce genre seraient bien sûr les bienvenues pour confirmer cette tendance.

11.2.5 Autres régimes

Comme nous l'avons souligné précédemment, les profils des solutions relatifs aux valeurs les plus élevées de ξ_{ft} (égal ici à 1,25 et 3,07) révèlent une gamme d'écoulements quasiment absente des profils relatifs aux valeurs les plus faibles de cette grandeur (alors égal à 0,75 et 1,00). En effet, les tracés 11.7, 11.8, 11.9 et 11.10 soulignent la présence d'écoulements pour lesquels le minimum de la température en aval du choc est atteint à l'origine. Ces écoulements ont également la particularité de subir une compression maximale obtenue via un refroidissement de la zone aval. Le flux incident est d'ailleurs négatif pour les configurations en question. Le régime atteint est alors un régime de propagation d'un choc avec conduction thermique qui ne relève pas de la FCI.

Enfin, un dernier régime est révélé par les profils des quantités de base dans le cas des plus grandes valeurs de la position du front thermique, il s'agit du régime d'onde thermique super-

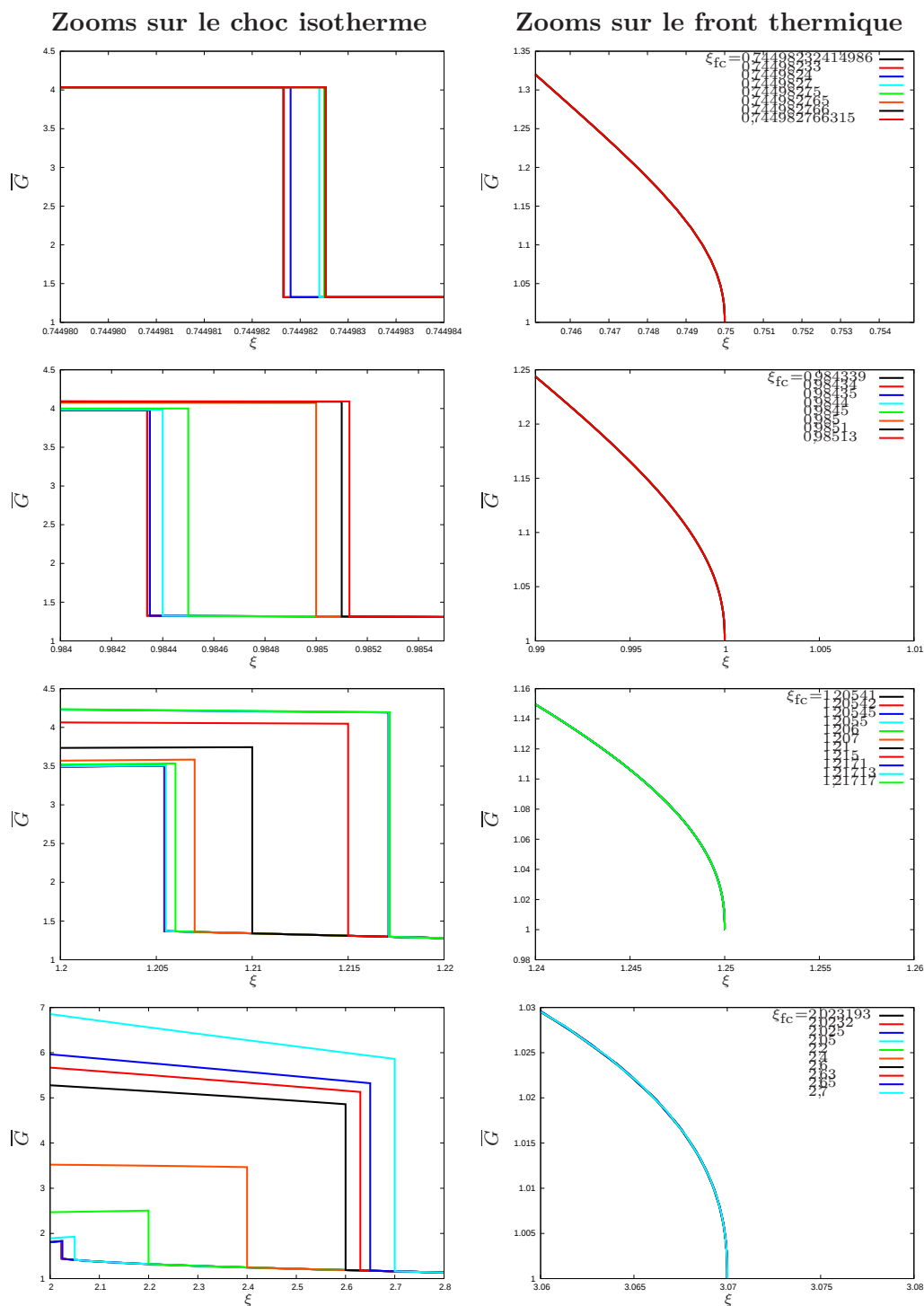


FIGURE 11.11 – Tracé du saut de densité au niveau du choc isotherme et du pied du front thermique pour les différentes positions du front thermique analysées, soit de haut en bas $\xi_{ft} = 0,75, 1,00, 1,25$ ou $3,07$, chaque ligne correspondant à une position du front thermique. Les figures observées sont des zooms sur le choc isotherme et le front thermique, c'est pourquoi l'échelle de chaque élément d'un couple de figures est différente. Les zooms sur le choc isotherme montrent des différences de comportement qui n'apparaissent pas au niveau du front thermique où les tracés se confondent.

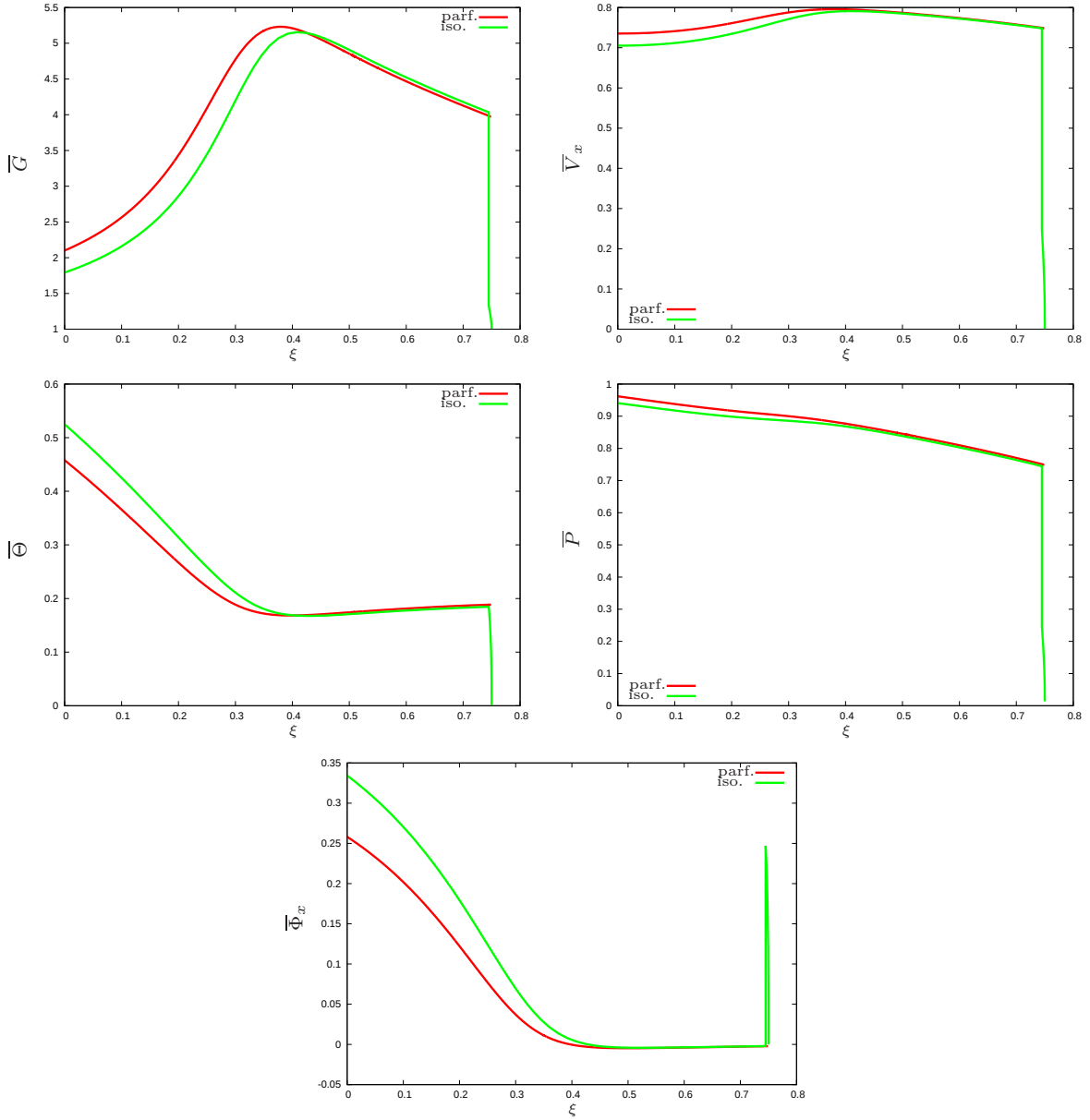


FIGURE 11.12 – Comparaison entre les résolutions avec front thermique et avec choc parfait pour les profils des quantités de l'écoulement de base en fonction de la variable autosemblable ξ . Les solutions choisies ont des couples de valeurs à l'origine de la pression et du flux de conduction $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ semblables, respectivement égaux à $(0,941, 0,334)$ et $(0,962, 0,458)$. La position du front de choc dans le cas du choc parfait est identique à celle du front thermique dans le cas de l'écoulement avec précurseur thermique et vaut 0,75. L'écoulement avec choc parfait est identifié sur l'abaque de la figure 11.2 par le symbole $\triangle$. les quantités tracées sont la densité $\overline{G}$, la vitesse longitudinale $\overline{V}_x$, la température $\overline{\Theta}$, la pression $\overline{P}$ et le flux thermique longitudinal $\overline{\Phi}_x$. Cette figure est en elle-même un résultat important de cette thèse puisqu'elle montre que les profils des deux configurations sont quasiment identiques, la différence venant du fait que les couples de valeurs appliquées à l'origine $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ ne sont pas strictement identiques. Les résultats obtenus avec l'hypothèse de front thermique de taille négligeable sont donc validés par cette comparaison avec une configuration prenant en compte ce précurseur. Le lien physique entre les deux configurations est ainsi effectué.

sonique. La température croît alors du front thermique à l'origine sans passer par un minimum. Il est à remarquer que les sauts au travers du choc diminuent alors d'autant plus que le flux incident croît et donc que la valeur de la position du choc diminue. La présence de ces régimes différents est révélatrice de l'extension du domaine des solutions accessibles que la prise en compte du précurseur thermique supersonique a permise.

Cette exploration de différents écoulements de base en conduction électronique avec la prise en compte du précurseur thermique supersonique a tenu ses promesses. En effet, non seulement l'objectif d'atteindre des valeurs du flux de conduction à l'origine plus élevées que ce que ne le permettait les travaux précédents est tenu mais les solutions atteintes ont dévoilé de nombreux aspects de ce type d'écoulements. Les relations entre les valeurs des quantités à l'origine et la taille du précurseur thermique ont notamment pu être observées. Les tracés des différentes solutions auxquelles la méthode numérique nous a permis d'accéder ont révélé la présence d'autres régimes que ceux étudiés dans le cadre de la FCI. Ainsi, le régime de propagation d'un choc avec conduction thermique ou celui de l'onde thermique supersonique ont été atteints. De plus, la comparaison avec une solution semblable obtenue avec l'approximation du choc parfait a démontré une forte concordance entre les résultats et ainsi donné plus de poids aux résultats obtenus avec l'une et l'autre des méthodes.

Pour aller plus loin, il est possible de chercher de façon plus systématique les limites de la zone d'admissibilité de la position du choc isotherme pour une position du front thermique fixée. En, effet, ce travail permettrait de connaître exactement les propriétés de cette zone d'admissibilité et peut-être de pouvoir prévoir les limites de celles-ci pour d'autres valeurs de ξ_{ft} . En termes physiques, cette zone d'admissibilité signifie que toutes les combinaisons de valeurs à l'origine de la pression et du flux thermique longitudinal $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ ne sont pas accessibles, ce qui est cohérent avec un problème aux valeurs propres non-linéaire. Il serait également possible de procéder à de nouvelles comparaisons, à $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$ fixé entre les deux configurations d'étude.

La méthode numérique permettant de traiter l'écoulement de base a fourni des résultats concluants. Bien que la précision atteinte par une telle méthode soit toujours perfectible, les résultats présentés dans ce chapitre montrent que cette méthode est performante dans le cadre de l'étude de l'écoulement de base. L'étude théorique du système aux perturbations peut donc être effectuée.

Chapitre 12

Formulation des équations aux perturbations au front thermique

Dans ce chapitre, l'objectif est de mettre en équations le système aux perturbations ainsi que les sous-systèmes de la dynamique des gaz et de la conduction thermique issus de celui-ci dans le cadre de la configuration avec front thermique. De la même manière que l'écoulement de base, ce système va être résolu en fonction de la variable autosemblable ξ sur la zone aval de l'écoulement et en fonction de la variable $\check{\xi}$, issue de ξ et définie en (10.8), sur la zone amont. Deux raisons expliquent ce choix de variables. D'abord, les quantités de base, à savoir la densité $\overline{G}$, la vitesse longitudinale $\overline{V}_x$, la pression $\overline{P}$, la température $\overline{\Theta}$ et le flux thermique suivant la direction longitudinale $\overline{\Phi}_x$ sont explicitement impliquées dans le système aux perturbations, de même que leurs dérivées spatiales. Or ces quantités ont été évaluées en fonction de ces mêmes variables ξ et $\check{\xi}$. De plus, sur la zone amont, de nouvelles variables dépendantes de perturbation vont devoir être définies dans la perspective d'une meilleure évaluation du comportement de l'écoulement. Ce changement de variables va induire une nouvelle formulation du système aux perturbations ainsi que des conditions aux limites à l'origine, au choc et au pied du front thermique.

12.1 Conditions aux limites au front thermique

Les conditions limites utilisées pour les perturbations au niveau du front thermique ξ_{fc} sont les relations de Rankine–Hugoniot (D.19) :

$$\widehat{\mathbf{V}}_{\xi,-}^{\text{ft}} = \mathbf{M}_{-}^{\text{ft}-1} \left(\mathbf{N}^{\text{ft}} \widehat{\mathbf{W}} + \mathbf{P}^{\text{ft}} \widehat{\eta}_{\text{ft}} - [\widehat{\Phi}_x]_- \vec{E}_4 \right), \quad (12.1)$$

avec les matrices $\mathbf{M}^{\text{ft}-1}$, $\mathbf{N}^{\text{ft}}$ et $\mathbf{P}^{\text{ft}}$ définies à la section D.4. Ces relations font appel aux dérivées premières des grandeurs de base en aval du front thermique. Or celles-ci sont singulières, c'est pourquoi un traitement particulier de cette zone de l'écoulement s'impose. L'utilisation du changement de variable et des notations correspondantes introduits en (10.8), (10.9) et (10.10), conduit

aux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\check{G}_{-} \check{V}_{x-} + t^{\alpha-1} \check{W} \check{G}_{-} - t^{-1} \check{G}_{-} \check{\eta}_{ft} \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \check{\xi}_{ft}} d_{\check{\xi}} \left[\check{G} (\check{W} - \check{V}_x) \right]_{-} = 0, \\ t^{\alpha-1} \check{G}_{-} \check{W} \check{V}_{x-} - \check{P}_{-} - t^{\alpha-2} \check{G}_{-} \check{\eta}_{ft} \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \check{\xi}_{ft}} d_{\check{\xi}} \left[\check{G} \check{V}_{-} (\check{W} - \check{V}_x) - \check{P} \right]_{-} = 0, \\ \check{D}_{\perp-} = 0, \\ t^{\alpha-1} \frac{\check{W}}{\gamma-1} \check{P}_{-} - \check{\Phi}_{x-} - t^{2\alpha-3} \check{G}_{-} \check{\eta}_{ft} \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \check{\xi}_{ft}} d_{\check{\xi}} \left[\left(\frac{\check{P}}{\gamma-1} + \frac{\check{G} \check{V}_x^2}{2} \right) (\check{W} - \check{V}_x) - \check{P} \check{V}_x - \check{\Phi}_x \right]_{-} = 0, \end{array} \right. \quad (12.2)$$

avec les notations (A.15). On observe un facteur $\check{\xi}^{1-n}$ devant le terme de déformation. Or, par définition de la variable autosemblable réduite $\check{\xi}$, celle-ci vaut zéro au niveau du pied du front thermique. Les dérivées des quantités de base selon la variable $\check{\xi}$ étant finies, le terme $\check{\xi}^{1-n}$ implique des perturbations qui tendent vers l'infini pour une déformation au front finie. C'est pourquoi de nouvelles variables dépendantes de perturbation sont utilisées. Les nouvelles quantités de perturbation sont formulées de la manière suivante, de sorte à régulariser le système (12.2) :

$$\check{\check{Q}} = \check{\xi}^{n-1} \check{Q}, \quad (12.3)$$

pour chacune des variables dépendantes, hormis le flux. Les formules de changement de variables correspondantes sont disponibles en Annexe (éqs. A.18, A.19). Si les variables de perturbations $\check{Q}$ sont singulières en $\check{\xi}^{1-n}$, les variables de perturbation $\check{\check{Q}}$ sont *a priori* finies au front.

Les conditions aux limites des variables de perturbation au front thermique (12.2) sont ainsi reformulées :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\check{G}_{-} \check{\check{V}}_{x-} + t^{\alpha-1} \check{\check{W}} \check{\check{G}}_{-} - t^{-1} \check{G}_{-} \check{\eta}_{ft} \frac{1}{n \check{\xi}_{ft}} d_{\check{\xi}} \left[\check{G} (\check{W} - \check{V}_x) \right]_{-} = 0, \\ t^{\alpha-1} \check{G}_{-} \check{\check{W}} \check{\check{V}}_{x-} - \check{\check{P}}_{-} - t^{\alpha-2} \check{G}_{-} \check{\eta}_{ft} \frac{1}{n \check{\xi}_{ft}} d_{\check{\xi}} \left[\check{G} \check{\check{V}}_{-} (\check{W} - \check{V}_x) - \check{P} \right]_{-} = 0, \\ \check{\check{D}}_{\perp-} = 0, \\ t^{\alpha-1} \frac{\check{\check{W}}}{\gamma-1} \check{\check{P}}_{-} - \check{\check{\Phi}}_{x-} \\ - t^{2\alpha-3} \check{G}_{-} \check{\eta}_{ft} \frac{1}{n \check{\xi}_{ft}} d_{\check{\xi}} \left[\left(\frac{\check{P}}{\gamma-1} + \frac{\check{G} \check{V}_x^2}{2} \right) (\check{W} - \check{V}_x) - \check{P} \check{V}_x - \check{\Phi}_x \right]_{-} = 0. \end{array} \right. \quad (12.4)$$

12.2 Système de la dynamique des gaz en variables $(\check{\xi}, \check{Q}, \check{\check{Q}})$

Sur la zone amont de l'écoulement, entre l'abscisse ξ_{fc} du front de choc isotherme et l'abscisse ξ_{ft} du front thermique, le système est donc étudié dans le nouveau système constitué des variables indépendantes écrites en fonction de $\check{\xi}$ et des variables dépendantes de perturbation issues du

changement de variable (12.3). La nouvelle formulation du système d'équations de la dynamique de gaz est alors la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \check{\check{G}} = \frac{t^{-1}}{n} \check{\xi}^{-n} \check{\check{G}} \left(-\alpha (1 - \check{\xi}^n) (1 - n) + \frac{\check{\xi}}{\xi_{ft}} \check{G} d_{\check{\xi}} \check{V} \right) - \frac{\alpha t^{-1}}{n} (1 - \check{\xi}^n) \check{\xi}^{1-n} \partial_{\check{\xi}} \check{\check{G}} \\ \quad - \check{G} \check{\check{D}}_{\perp} + \frac{t^{-\alpha}}{n \xi_{ft}} \check{G} \check{\xi}^{-n} \left[(1 - n) \check{G} \check{V} + \check{\xi} \partial_{\check{\xi}} (\check{G} \check{V}) \right], \\ \partial_t \check{\check{V}} = \frac{t^{-1}}{n} \check{\xi}^{-n} \check{\check{V}} \left(-\alpha (1 - \check{\xi}^n) (1 - n) + \frac{\check{\xi}}{\xi_{ft}} \check{G} d_{\check{\xi}} \check{V} \right) - \frac{\alpha t^{-1}}{n} (1 - \check{\xi}^n) \check{\xi}^{1-n} \partial_{\check{\xi}} \check{\check{V}} \\ \quad + \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \xi_{ft}} t^{-\alpha} \partial_{\check{\xi}} \check{\check{P}} + \frac{t^{-\alpha}}{n \xi_{ft}} (1 - n) \check{\xi}^{-n} \check{\check{P}} - \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \xi_{ft}} t^{\alpha-2} \frac{\partial_{\check{\xi}} \check{\check{P}}}{\check{G}} \check{\check{G}}, \\ \partial_t \check{\check{D}}_{\perp} = -\frac{\alpha t^{-1}}{n} (1 - \check{\xi}^n) (1 - n) \check{\xi}^{-n} \check{\check{D}}_{\perp} - \frac{\alpha t^{-1}}{n} (1 - \check{\xi}^n) \check{\xi}^{1-n} \partial_{\check{\xi}} \check{\check{D}}_{\perp} + k_{\perp}^2 \frac{\check{\check{P}}}{\check{\check{G}}}, \\ \partial_t \check{\check{P}} = \frac{t^{-1}}{n} \check{\xi}^{-n} \check{\check{P}} \left(-\alpha (1 - \check{\xi}^n) (1 - n) + \frac{\gamma \check{\xi}}{\xi_{ft}} \check{G} d_{\check{\xi}} \check{V} \right) - \frac{\alpha t^{-1}}{n} (1 - \check{\xi}^n) \check{\xi}^{1-n} \partial_{\check{\xi}} \check{\check{P}} \\ \quad + t^{\alpha-2} \frac{\check{G} \check{\xi}^{-n}}{n \xi_{ft}} \left[\gamma \check{\xi} \check{P} \partial_{\check{\xi}} \check{V} + \left(\gamma \check{P} (1 - n) + \check{\xi} d_{\check{\xi}} \check{P} \right) \check{V} \right] - t^{2\alpha-2} \gamma \check{P} \check{\check{D}}_{\perp}, \end{array} \right. \quad (12.5)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\check{P}} = \check{G} \check{\check{\Theta}} + t^{2\alpha-2} \check{\check{\Theta}} \check{\check{G}}, \\ \check{\check{\Phi}}_x = \check{G}^{m+1} \check{\check{\Theta}}^n \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \xi_{ft}} \left[t^{\alpha-1} \left(\check{\xi}^{1-n} \partial_{\check{\xi}} + (1 - n) \check{\xi}^{-n} + n \check{\check{\Theta}}^{-1} d_{\check{\xi}} \check{\check{\Theta}} \check{\xi}^{1-n} \right) \check{\check{\Theta}} \right. \\ \quad \left. + t^{3(\alpha-1)} m d_{\check{\xi}} \check{\check{\Theta}} \check{\xi}^{1-n} \frac{\check{\check{G}}}{\check{\check{G}}} \right]. \end{array} \right. \quad (12.6)$$

Le domaine le plus en amont de la zone d'étude de l'écoulement, à cause de sa proximité avec le pied du front thermique, présente des caractéristiques qui nécessitent un traitement particulier. Pour éviter des opérations algébriques qui seraient sources d'erreurs d'un point de vue numérique, il est nécessaire, si ce n'est indispensable, de reformuler le système (12.5) de sorte à atténuer les différences d'ordres de grandeurs entre les différents termes de ce système. Celui-ci est donc

reformulé en regroupant les termes par ordre apparent de singularité :

$$\begin{aligned}
\partial_t \check{\check{G}} &= \check{\xi}^{-n} \left[-\frac{\alpha}{t n} (1 - \check{\xi}^n) (1 - n) \check{\check{G}} + \frac{t^{-\alpha}}{n \xi_{ft}} (1 - n) \check{G}^2 \check{\check{V}}_x \right] \\
&+ \check{\xi}^{1-n} \left[\frac{1}{t n \xi_{ft}} \check{G} d_{\check{\xi}} \check{V}_x \check{\check{G}} - \frac{\alpha}{t n} (1 - \check{\xi}^n) \partial_{\check{\xi}} \check{\check{G}} + \frac{t^{-\alpha}}{n \xi_{ft}} \check{G} \partial_{\check{\xi}} (\check{G} \check{\check{V}}_x) \right] \\
&- \check{G} \check{\check{D}}_{\perp}, \\
\partial_t \check{\check{V}}_x &= \check{\xi}^{-n} \left[-\frac{\alpha}{t n} (1 - \check{\xi}^n) (1 - n) \check{\check{V}}_x + \frac{t^{-\alpha}}{n \xi_{ft}} (1 - n) \check{\check{P}} \right] \\
&+ \check{\xi}^{1-n} \left[\frac{1}{t n \xi_{ft}} \check{G} d_{\check{\xi}} \check{V}_x \check{\check{V}}_x - \frac{\alpha}{t n} (1 - \check{\xi}^n) \partial_{\check{\xi}} \check{\check{V}}_x + \frac{t^{-\alpha}}{n \xi_{ft}} \partial_{\check{\xi}} \check{\check{P}} - \frac{t^{\alpha-2}}{n \xi_{ft}} \frac{d_{\check{\xi}} \check{\check{P}}}{\check{G}} \check{\check{G}} \right], \\
\partial_t \check{\check{D}}_{\perp} &= \check{\xi}^{-n} \left[-\frac{\alpha}{t n} (1 - \check{\xi}^n) (1 - n) \check{\check{D}}_{\perp} \right] \\
&+ \check{\xi}^{1-n} \left[-\frac{\alpha}{t n} (1 - \check{\xi}^n) \partial_{\check{\xi}} \check{\check{D}}_{\perp} \right] \\
&+ k_{\perp}^2 \frac{\check{\check{P}}}{\check{G}}, \\
\partial_t \check{\check{P}} &= \check{\xi}^{-n} \left[-\frac{\alpha}{t n} (1 - \check{\xi}^n) (1 - n) \check{\check{P}} + t^{\alpha-2} \frac{\gamma}{n \xi_{ft}} \check{G} \check{P} (1 - n) \check{\check{V}}_x \right] \\
&+ \check{\xi}^{1-n} \left[\frac{\gamma t^{-1}}{n \xi_{ft}} \check{G} \partial_{\check{\xi}} \check{\check{P}} - \frac{\alpha}{t n} (1 - \check{\xi}^n) \partial_{\check{\xi}} \check{\check{P}} + \frac{\gamma t^{\alpha-2}}{n \xi_{ft}} \check{G} \check{P} \partial_{\check{\xi}} \check{\check{V}}_x + \frac{t^{\alpha-2}}{n \xi_{ft}} \check{G} d_{\check{\xi}} \check{\check{P}} \check{\check{V}}_x \right] \\
&- t^{2\alpha-2} \gamma \check{\check{P}} \check{\check{D}}_{\perp}.
\end{aligned} \tag{12.7}$$

Même si l'optique d'une résolution numérique nous a guidé dans cette reformulation des équations, celle-ci permet également de mettre en évidence la singularité de ces relations au pied du front thermique, en $\check{\xi} = 0$. Les singularités de degrés différents présents au second membre de ces équations d'évolution laissent présager de sérieuses difficultés pour l'élaboration d'une méthode numérique d'intégration.

L'utilisation de nouvelles variables dépendantes sur la zone amont de l'écoulement implique la formulation correspondante du système matriciel de la partie du système aux perturbations correspondant à la dynamique des gaz (12.7) :

$$\partial_t \check{\check{\mathbf{V}}}_{\check{\xi}} + \check{\check{\mathbf{A}}}_{\check{\xi}} \partial_{\check{\xi}} \check{\check{\mathbf{V}}}_{\check{\xi}} + \check{\check{\mathbf{B}}}_{\check{\xi}} \check{\check{\mathbf{V}}}_{\check{\xi}} = 0, \tag{12.8}$$

avec :

$$\check{\check{\mathbf{A}}}_{\check{\xi}} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha t^{-1}}{n} \check{\xi}^{1-n} (1 - \check{\xi}^n) & -\frac{t^{-\alpha}}{n \xi_{ft}} \check{\xi}^{1-n} \check{G}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha t^{-1}}{n} \check{\xi}^{1-n} (1 - \check{\xi}^n) & 0 & -\frac{t^{-\alpha}}{n \xi_{ft}} \check{\xi}^{1-n} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha t^{-1}}{n} \check{\xi}^{1-n} (1 - \check{\xi}^n) & 0 \\ 0 & -\frac{t^{\alpha-2}}{n \xi_{ft}} \check{\xi}^{1-n} (\check{G} \check{C})^2 & 0 & \frac{\alpha t^{-1}}{n} \check{\xi}^{1-n} (1 - \check{\xi}^n) \end{pmatrix}, \tag{12.9}$$

où :

$$\check{C} = \sqrt{\gamma \frac{\check{P}}{\check{G}}}, \quad (12.10)$$

et :

$$\check{\mathbf{B}}_{\check{\xi}} = \begin{pmatrix} \check{\tilde{B}}_{11} & \check{\tilde{B}}_{12} & \check{\tilde{B}}_{13} & 0 \\ \check{\tilde{B}}_{21} & \check{\tilde{B}}_{22} & 0 & \check{\tilde{B}}_{24} \\ 0 & 0 & \check{\tilde{B}}_{33} & \check{\tilde{B}}_{34} \\ 0 & \check{\tilde{B}}_{42} & \check{\tilde{B}}_{43} & \check{\tilde{B}}_{44} \end{pmatrix}, \quad (12.11)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\tilde{B}}_{11} = \frac{t^{-1}}{n} \check{\xi}^{-n} \left[\alpha (1 - n) (1 - \check{\xi}^n) - \check{\xi} \frac{\check{G}}{\check{\xi}_{\text{ft}}} d_{\check{\xi}} \check{V}_x \right], \\ \check{\tilde{B}}_{12} = -\frac{t^{-\alpha}}{n \check{\xi}_{\text{ft}}} \check{\xi}^{-n} \check{G} \left[\check{\xi} d_{\check{\xi}} \check{G} + (1 - n) \check{G} \right], \\ \check{\tilde{B}}_{13} = \check{G}, \\ \check{\tilde{B}}_{21} = \frac{t^{\alpha-2}}{n \check{\xi}_{\text{ft}}} \check{\xi}^{1-n} \check{G}^{-1} d_{\check{\xi}} \check{P}, \\ \check{\tilde{B}}_{22} = \check{\tilde{B}}_{11}, \\ \check{\tilde{B}}_{24} = - (1 - n) \frac{t^{-\alpha}}{n \check{\xi}_{\text{ft}}} \check{\xi}^{-n}, \\ \check{\tilde{B}}_{33} = t^{-1} \frac{\alpha (1 - n)}{n} \check{\xi}^{-n} (1 - \check{\xi}^n), \\ \check{\tilde{B}}_{34} = -k_{\perp}^2 \check{G}^{-1}, \\ \check{\tilde{B}}_{42} = -\frac{t^{\alpha-2}}{n \check{\xi}_{\text{ft}}} \check{\xi}^{-n} \check{G} \left[\check{\xi} d_{\check{\xi}} \check{P} + (1 - n) \gamma \check{P} \right], \\ \check{\tilde{B}}_{43} = t^{2(\alpha-1)} \gamma \check{P}, \\ \check{\tilde{B}}_{44} = \frac{t^{-1}}{n} \check{\xi}^{-n} \left[\alpha (1 - n) (1 - \check{\xi}^n) - \frac{\check{\xi}}{\check{\xi}_{\text{ft}}} \gamma \check{G} d_{\check{\xi}} \check{V}_x \right]. \end{array} \right. \quad (12.12)$$

12.3 Équations de la conduction thermique en $(\check{\xi}, \check{Q}, \check{\tilde{Q}})$

Pour former le sous-système de la dynamique des gaz, les termes de l'équation de conservation de l'énergie liés au flux ont été supprimés. Ces termes sont utilisés pour former une équation dite « de la conduction thermique » qui exprime l'évolution de la perturbation en température au cours du temps. Cette équation, (3.11), est elle aussi écrite dans le système $(\check{\xi}, \check{Q}, \check{\tilde{Q}})$ qui permet

d'avoir une déformation finie au pied du front thermique :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma-1} \partial_t \check{\Theta} &= t^{-1} \frac{\gamma-1}{n^2 \xi_{ft}^2} \check{\xi}^{1-n} \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n \left(\check{\xi}^{1-n} \partial_{\check{\xi}}^2 \check{\Theta} + 3(1-n) \check{\xi}^{-n} \partial_{\check{\xi}} \check{\Theta} + (1-2n)(1-n) \check{\xi}^{-1-n} \check{\Theta} \right) \\
&\quad - t^{2\alpha-1} k_{\perp}^2 \check{G}^{m-1} \check{\Theta}^n \check{\Theta} + t^{-1} \left[\frac{\check{\xi}^{1-n}}{\xi_{ft}} d_{\check{\xi}} \left(\frac{\check{\Phi}_x}{\check{\Theta}} \right) \check{\Theta} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2 \check{\Phi}_x}{\xi_{ft} \check{\Theta}} + \frac{m+1}{n^2 \xi_{ft}^2} \check{\xi}^{1-n} \check{G}^m \check{\Theta}^n d_{\check{\xi}} \check{G} \right) \left(\check{\xi}^{1-n} \partial_{\check{\xi}} \check{\Theta} + (1-n) \check{\xi}^{-n} \check{\Theta} \right) \right] \\
&\quad + t^{2\alpha-3} \frac{m}{n \xi_{ft}} \left(\check{\xi}^{1-n} \partial_{\check{\xi}} \left(\frac{\check{\Phi}_x \check{G}}{\check{G}} \right) + (1-n) \check{\xi}^{-n} \frac{\check{\Phi}_x \check{G}}{\check{G}} \right).
\end{aligned} \tag{12.13}$$

La singularité présente au front thermique complique le traitement de cette partie de l'écoulement. Un changement de variables dépendantes et indépendantes est donc instauré pour contourner cette singularité. Cependant, des facteurs singuliers demeurent au second membre des équations d'évolution des nouvelles variables de perturbation. Le fait que ces facteurs soient de degrés de singularité différents va provoquer des difficultés numériques au voisinage du front thermique. Afin de tenir compte de ces particularités mais aussi du changement de variables opéré sur la zone amont, une méthode de résolution numérique adaptée doit être élaborée. C'est l'objet du dernier chapitre de ce mémoire.

Chapitre 13

Méthode d'intégration numérique des équations aux perturbations

Après avoir défini les différentes relations permettant de décrire l'évolution du système aux perturbations, celles-ci doivent être utilisées pour l'intégration numérique de ce système. La complexité de l'écoulement avec précurseur thermique supersonique impose de mettre en place une méthode adaptée pour permettre à la résolution numérique de se dérouler sans subir les effets de la singularité présente au pied du front thermique. Dans ce chapitre, la méthode élaborée au cours de ce travail de thèse est détaillée. Une méthode d'intégration du système aux perturbations a été conçue lors de travaux précédents (Boudesocque-Dubois, 2000; Lombard, 2008). Élaborée dans le cas de l'écoulement avec choc parfait, elle a permis d'obtenir des résultats ayant fait l'objet de plusieurs publications (Boudesocque-Dubois *et al.*, 2003; Clarisse *et al.*, 2008; Gauthier *et al.*, 2008). Cependant, celle-ci ne peut être appliquée à la configuration étudiée ici. La méthode de Thompson, par exemple, n'a plus d'utilité sur la partie de l'écoulement correspondant au précurseur thermique. L'étude de la stabilité temporelle du système, indispensable à l'expression du pas de temps critique, doit être effectuée dans le nouveau système de coordonnées et de variables de perturbation. De plus, l'utilisation parallèle de plusieurs systèmes de variables, dépendantes et indépendantes, oblige à une certaine gymnastique pour conserver la cohérence de l'ensemble de la méthode. La méthode de splitting mise en place au niveau de l'équation de l'énergie permet une méthode adaptée à la fois à la dynamique des gaz et à la conduction thermique. À ce propos, avant de donner de plus amples détails sur la méthode de résolution du système de la dynamique des gaz et sur celle de l'équation de la conduction thermique, il est préférable de fournir un aperçu général du schéma utilisé. Il est à noter que ce récapitulatif rapide, par souci de clarté, utilise le système original de variables $(\xi, \bar{Q}, \hat{Q}, t)$.

Connaissant le vecteur des perturbations $\hat{V}_\xi^r$ à l'étape r du schéma de Runge-Kutta, l'objectif de cette méthode de résolution est de connaître le vecteur $\hat{V}_\xi^{r+1}$ à l'étape $r + 1$. Pour cela, la procédure employée est la suivante :

- première étape :
 - le système de la dynamique des gaz, prenant en compte les conditions aux limites adéquates, est intégré afin d'obtenir les quantités $\hat{G}^{r+1}$, $\hat{V}_x^{r+1}$, $\hat{D}_\perp^{r+1}$ et $\hat{P}^*$,
 - une valeur intermédiaire de la température $\hat{\Theta}^*$ est définie à partir de l'équation linéarisée :

$$\hat{\Theta}^* = \frac{\hat{P}^*}{\bar{G}} - \frac{\bar{\Theta}}{\bar{G}} \hat{G}^{r+1} t_{r+1}^{2(\alpha-1)}, \quad (13.1)$$

- seconde étape :

- la résolution de l'équation de la conduction thermique avec conditions aux limites fournit la valeur de $\hat{\Theta}^{r+1}$,
- l'équation d'état linéarisée est utilisée à nouveau afin de définir $\hat{P}^{r+1}$.

La procédure de résolution des systèmes d'équations de la dynamique des gaz et de la conduction thermique utilise deux systèmes de variables distincts. La zone aval est en effet traitée avec le système $(\xi, \overline{Q}, \hat{Q})$ alors que la zone amont, celle du précurseur thermique, l'est avec le système $(\check{\xi}, \check{Q}, \check{\hat{Q}})$. Il s'agit de la principale différence avec la méthode de résolution existante et utilisée dans le cadre de l'approximation choc parfait. Cependant, cette différence implique la reformulation des équations et des conditions aux limites.

13.1 Résolution du système de la dynamique des gaz

La méthode employée pour la résolution du système de la dynamique des gaz étant utilisable sur tout l'écoulement comme sur un nombre limité de domaines de celui-ci, elle permet une séparation entre la zone amont et la zone aval du domaine d'étude. Ainsi, la méthode existante au début de ce projet, et déjà éprouvée dans le cadre de l'étude de l'écoulement avec choc parfait, peut être utilisée sur la zone aval. Cette zone est en effet vide de toute nouvelle singularité et n'exige aucune manipulation sur le système de variable. Inversement, la zone amont est par définition la zone sur laquelle se trouve le pied du front thermique. Elle nécessite donc la création d'une nouvelle méthode de résolution qui sera détaillée dans cette partie du mémoire.

13.1.1 Zone aval

La méthode employée pour le traitement des conditions aux limites (Budesocque-Dubois *et al.*, 2003) du système (3.7) est inspirée de la méthode développée par Thompson (1987, 1990). Basée sur la méthode des caractéristiques, son principe est le suivant : le nombre de conditions aux limites, dont on a besoin pour le traitement du système, en un point donné de la frontière du domaine doit être égal au nombre d'ondes entrantes dans le domaine par cette frontière. Pour appliquer cette méthode, il est nécessaire de connaître les valeurs propres du système et surtout leur signe. Au cours de cette étude, quatre frontières vont être traitées, avec les particularités suivantes, en posant n_{OE} le nombre d'ondes entrantes dans le domaine considéré :

- à l'origine, en $\xi_0 = 0$, n_{OE} est égal au nombre de valeurs propres positives,
- en aval du choc, en $\xi = \xi_{fc}^-$, n_{OE} est égal au nombre de valeurs propres négatives,
- en amont du choc, en $\xi = \xi_{fc}^+$, n_{OE} est égal au nombre de valeurs propres positives,
- au pied du front thermique, en $\xi = \xi_{ft}$, n_{OE} est égal au nombre de valeurs propres négatives.

On décompose la matrice $\hat{\mathbf{A}}_\xi$ (3.8) du système (3.7) de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{A}}_\xi = \hat{\mathbf{S}}_\xi \hat{\mathbf{\Lambda}}_\xi \hat{\mathbf{S}}_\xi^{-1}, \quad (13.2)$$

avec $\hat{\mathbf{S}}_\xi$ la matrice des vecteurs propres à droite et $\hat{\mathbf{\Lambda}}_\xi$ la matrice diagonale contenant les valeurs propres λ_ξ^i de $\hat{\mathbf{A}}_\xi$. Ces valeurs propres ont pour expressions :

$$\begin{aligned} \lambda_\xi^1 &= \frac{-\overline{G}\overline{C} - \alpha\xi}{t}, \\ \lambda_\xi^2 &= \lambda_\xi^3 = -\frac{\alpha\xi}{t}, \\ \lambda_\xi^4 &= \frac{\overline{G}\overline{C} - \alpha\xi}{t}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Les matrices de passage $\widehat{\mathbf{S}}_\xi$ et $\widehat{\mathbf{S}}_\xi^{-1}$ sont définies par :

$$\widehat{\mathbf{S}}_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{t^{2-2\alpha}}{\overline{C}^2} \\ 0 & -\frac{1}{2}t^{\alpha-1}\overline{C}\overline{G} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}t^{\alpha-1}\overline{C}\overline{G} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (13.4)$$

$$\widehat{\mathbf{S}}_\xi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{t^{2-2\alpha}}{\overline{C}^2} & \frac{t^{2-2\alpha}}{\overline{C}^2} \\ 0 & 0 & -\frac{t^{1-\alpha}}{\overline{C}\overline{G}} & \frac{t^{1-\alpha}}{\overline{C}\overline{G}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13.5)$$

On vérifie que $\widehat{\mathbf{A}}_\xi = \widehat{\mathbf{S}}_\xi^{-1} \widehat{\mathbf{A}}_\xi \widehat{\mathbf{S}}_\xi$ et que le produit de $\widehat{\mathbf{S}}_\xi$ par $\widehat{\mathbf{S}}_\xi^{-1}$ donne l'identité. La méthode consiste alors à remplacer le système hyperbolique (3.7) par le système suivant :

$$\partial_t \widehat{\mathbf{V}}_\xi + \widehat{\mathbf{S}}_\xi^{-1} (\mathcal{L} + \mathcal{L}^*) + \widehat{\mathbf{B}}_\xi \widehat{\mathbf{V}}_\xi = 0, \quad (13.6)$$

avec :

$$(\mathcal{L} + \mathcal{L}^*) = \widehat{\mathbf{A}}_\xi \widehat{\mathbf{S}}_\xi \partial_\xi \widehat{\mathbf{V}}_\xi. \quad (13.7)$$

Dans la pratique, les composantes non-nulles de $\mathcal{L}$ (respectivement $\mathcal{L}^*$) correspondent aux ondes sortantes (respectivement entrantes). Les valeurs de $\mathcal{L}$ sont définies en fonction des valeurs et vecteurs propres par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{2} \lambda_\xi^1 \left(t^{\alpha-1} \overline{G} \overline{C} \partial_\xi \widehat{V}_x - \partial_\xi \widehat{P} \right), \\ \mathcal{L}_2 &= \lambda_\xi^2 \left(\partial_\xi \widehat{G} - \frac{1}{(t^{\alpha-1} \overline{C})^2} \partial_\xi \widehat{P} \right), \\ \mathcal{L}_3 &= \lambda_\xi^3 \partial_\xi \widehat{D}_\perp, \\ \mathcal{L}_4 &= \frac{1}{2} \lambda_\xi^4 \left(t^{\alpha-1} \overline{G} \overline{C} \partial_\xi \widehat{V}_x + \partial_\xi \widehat{P} \right). \end{aligned} \quad (13.8)$$

Les conditions aux limites (2.48) et les équations du système (3.7) permettent de déterminer les composantes $(\mathcal{L}_i^*)_{i=1..4}$.

Dans la suite de l'application de la méthode, la matrice $\widehat{\mathbf{A}}_\xi$ est décomposée en une somme de deux matrices : $\widehat{\mathbf{A}}_\xi^+$ et $\widehat{\mathbf{A}}_\xi^-$ qui sont deux décompositions complémentaires puisque dans l'une, la matrice $\widehat{\mathbf{A}}_\xi^+$ comprend les valeurs propres positives de $\widehat{\mathbf{A}}_\xi$ tandis que dans l'autre, la matrice $\widehat{\mathbf{A}}_\xi^-$ contient ses valeurs propres négatives.

Étude à l'origine : la condition à la frontière $\xi = 0$ est une condition de perturbation de densité nulle. En $\xi = 0$, les valeurs définies en (13.3) sont facilement comparables à 0. Ainsi, une seule valeur propre est positive à l'origine, il s'agit de λ_ξ^4 . Il existe donc une onde entrante et une seule condition à la limite est nécessaire. Le système (13.6) devient alors :

$$\partial_t \widehat{\mathbf{V}}_\xi + \widehat{\mathbf{S}}_\xi^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{L}_4^* \end{pmatrix} + \widehat{\mathbf{B}}_\xi \widehat{\mathbf{V}}_\xi = 0. \quad (13.9)$$

À partir de la première ligne de (13.6) et de (2.48), on obtient l'expression de $\mathcal{L}_4^*$:

$$\mathcal{L}_4^* = -\mathcal{L}_1 - (t^{\alpha-1}\overline{C}|_+)^2 \left(\mathcal{L}_2 + \widehat{D}_\perp \overline{G} + t^{-(\alpha+1)} \eta \overline{G} \overline{G}' (\alpha - 2\overline{G} \overline{V}') \right). \quad (13.10)$$

Étude en aval du choc isotherme : au choc isotherme, le nombre d'ondes entrantes, et donc de conditions aux limites nécessaires, est égal au nombre de valeurs propres négatives. Il vient facilement :

$$\begin{cases} \lambda_\xi^1 \leq 0, \\ \lambda_\xi^2 \leq 0, \\ \lambda_\xi^3 \leq 0. \end{cases} \quad (13.11)$$

En revanche, pour savoir le signe de λ_ξ^4 , une réflexion s'impose. On sait que sur l'intervalle considéré, la zone aval, la quantité :

$$D = \alpha^2 \xi^2 - \overline{G}^2 \overline{\Theta} \quad (13.12)$$

est inférieure à zéro. Donc :

$$\alpha^2 \xi^2 - \overline{G}^2 \overline{C}^2 \gamma^{-1} \leq 0.$$

On remarque, dans cette inégalité, l'identité remarquable $a^2 - b^2$, donc :

$$\left(\alpha \xi - \frac{\overline{G} \overline{C}}{\sqrt{\gamma}} \right) \left(\alpha \xi + \frac{\overline{G} \overline{C}}{\sqrt{\gamma}} \right) \leq 0, \quad \text{i.e.} \quad \left(\alpha \xi - \frac{\overline{G} \overline{C}}{\sqrt{\gamma}} \right) \leq 0. \quad (13.13)$$

Or, puisque $\gamma \geq 1$, alors $\overline{G} \overline{C} \geq \alpha \xi$. Ainsi :

$$\lambda_\xi^4 \geq 0.$$

Il y a donc trois conditions limites à appliquer au choc sur le domaine aval, ce qui est cohérent avec la seule condition nécessaire à l'origine. Le système (13.6) devient :

$$\partial_t \widehat{\mathbf{V}}_\xi + \widehat{\mathbf{S}}_\xi^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^* \\ \mathcal{L}_2^* \\ \mathcal{L}_3^* \\ 0 \end{pmatrix} + \widehat{\mathbf{B}}_\xi \widehat{\mathbf{V}}_\xi = 0. \quad (13.14)$$

Les valeurs de $\mathcal{L}_1^*$, $\mathcal{L}_2^*$, $\mathcal{L}_3^*$ sont définies de la même manière que $\mathcal{L}_4^*$ pour le voisinage de l'origine :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^* &= -\mathcal{L}_4 - \partial_t \widehat{P}|_- \left(\widehat{\mathbf{B}}_\xi \widehat{\mathbf{V}}_\xi|_- \right)_4, \\ \mathcal{L}_2^* &= -(\mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_1^*) (t^{\alpha-1} \overline{C}|_-)^{-2} - \partial_t \widehat{G}|_- - \left(\widehat{\mathbf{B}}_\xi \widehat{\mathbf{V}}_\xi|_- \right)_1, \\ \mathcal{L}_3^* &= -\partial_t \widehat{D}_\perp|_- - \left(\widehat{\mathbf{B}}_\xi \widehat{\mathbf{V}}_\xi|_- \right)_3. \end{aligned} \quad (13.15)$$

13.1.2 Zone amont

Sur la zone amont de l'écoulement, la singularité présente au pied du front thermique change considérablement la procédure à employer pour traiter le système de la dynamique des gaz. Dans cette partie, l'écriture des relations propres à la méthode de Thompson montre que l'utilisation de cette technique n'est pas aussi pertinente que dans le cas de la zone aval. Les conditions aux limites sur cette partie du domaine d'étude sont donc appliquées directement. D'une manière générale, la méthode de résolution de la dynamique des gaz est presque entièrement remodelée par rapport à la méthode employée sur la zone aval ou dans le cas de l'écoulement avec choc parfait. Celle-ci est détaillée dans cette partie du chapitre.

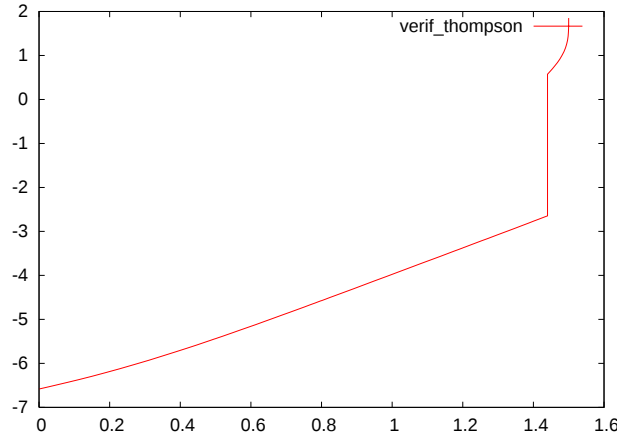


FIGURE 13.1 – Tracé de la quantité $(\overline{G}\overline{C} - \alpha\xi)$ utile à la détermination du signe de la valeur propre λ_ξ^4 . Sur cette figure, le front thermique est localisé en $\xi_{ft} = 1,5$ et le choc isotherme est localisé en $\xi_{fc} = 1,42$.

Conditions aux limite au choc isotherme : au choc isotherme, sur le domaine amont, le nombre d'ondes entrantes est égal au nombre de valeurs propres positives parmi les λ_ξ^i . Il vient facilement que :

$$\begin{aligned}\lambda_\xi^1 &\leq 0, \\ \lambda_\xi^2 &\leq 0, \\ \lambda_\xi^3 &\leq 0.\end{aligned}\tag{13.16}$$

Cependant le signe de λ_ξ^4 est moins évident et nécessite une étude plus approfondie. Sur le domaine amont, la quantité définie par l'expression (13.12) est positive, ce qui revient à dire, sur le même modèle que l'étude sur le domaine aval :

$$\left(\alpha\xi - \frac{\overline{G}\overline{C}}{\sqrt{\gamma}}\right) \left(\alpha\xi + \frac{\overline{G}\overline{C}}{\sqrt{\gamma}}\right) \geq 0, \quad \text{i.e.} \quad \left(\alpha\xi - \frac{\overline{G}\overline{C}}{\sqrt{\gamma}}\right) \geq 0.\tag{13.17}$$

Puisque $\gamma > 1$, le signe de λ_ξ^4 n'apparaît pas clairement. On trace donc la quantité égale à $\overline{G}\overline{C} - \alpha\xi$ pour se convaincre du signe de cette valeur propre. On voit sur la figure 13.1 que cette quantité est positive sur le domaine amont. Il y a donc quatre ondes sortantes du côté du choc isotherme, donc en $\xi = \xi_{fc}$, sur le domaine amont. Aucune condition limite n'est alors appliquée à cet endroit de l'écoulement. En conséquence, toutes les conditions aux limites sont appliquées au pied du front thermique ξ_{ft} . Ce résultat est indépendant du système de variables utilisé. Dans ce cas de figure particulier, l'utilisation de la méthode de Thompson perd de son intérêt. En effet, il n'est plus nécessaire d'établir un lien entre les conditions aux limites à chacune des extrémités de la zone amont. Cette technique n'est donc pas utilisée dans la méthode de résolution des perturbations sur la zone amont.

Conditions aux limite au front thermique : compte tenu de l'impact limité qu'aurait l'utilisation de la méthode de Thompson sur la zone amont, les valeurs des quantités au pied du front thermique doivent être imposées d'une autre manière. Pour cela, les relations de saut au niveau de la singularité du précurseur thermique (12.4) sont utilisées. Elles sont reformulées de

sorte à exprimer les quantités souhaitées, à savoir $\check{\check{G}}_-$, $\check{\check{V}}_-$, $\check{\check{P}}_-$ et $\check{\check{D}}_{\perp-}$, en fonction de quantités connues :

$$\begin{cases} \check{\check{D}}_{\perp-} = 0, \\ \check{\check{P}}_- = t^{\alpha-2} \frac{\gamma-1}{n \xi_{ft}} \check{W}^{-1} \check{G}_- \eta_{ft} d_{\xi} \left[\left(\frac{\check{P}}{\gamma-1} + \frac{\check{G} \check{V}_x^2}{2} \right) (\check{W} - \check{V}_x) - \check{P} \check{V}_x - \check{\Phi}_x \right]_- + \frac{(\gamma-1)t^{1-\alpha}}{\check{W}} \check{\Phi}_{x-}, \\ \check{\check{V}}_{x-} = \frac{1}{t^{\alpha-1} \check{W}} \check{G}_-^{-1} \check{\check{P}}_- + t^{-1} \frac{1}{n \xi_{ft}} \check{W}^{-1} \eta_{ft} d_{\xi} \left[\check{G} \check{V}_- (\check{W} - \check{V}_x) - \check{P} \right]_-, \\ \check{\check{G}}_- = \frac{1}{t^{\alpha-1} \check{W}} \check{\check{V}}_- + t^{-\alpha} \frac{1}{n \xi_{ft}} \check{W}^{-1} \eta_{ft} \check{G}_- d_{\xi} \left[\check{G} (\check{W} - \check{V}_x) \right]_-. \end{cases} \quad (13.18)$$

Il s'agit d'un système linéaire. Toutefois, dans la mise en place de ces conditions aux limites, l'ordre des relations est important. En effet, disposées de la sorte, chacune d'entre elles peut être résolue directement à l'aide des précédentes.

Méthode de résolution : sur la zone amont, la méthode employée pour la résolution du système de la dynamique des gaz à chaque instant est propre à ce type d'écoulements. En effet, la présence de dérivées infinies de quantités de base au pied du front thermique oblige à quelques ajustements de cette méthode par rapport à celle utilisée sur la zone située en aval du choc isotherme et déjà détaillée dans le chapitre 3 (Section 3.3) et dans de précédents travaux (Boudesocque-Dubois, 2000; Lombard, 2008) et, concernant les modifications qu'elle a subies au cours de cette thèse, dans le chapitre 6. La manière la plus simple de présenter cette méthode est de le faire sous une forme proche de l'algorithme qui est utilisé :

- dans un premier temps, les matrices $\check{\check{\mathbf{A}}}_{\xi}$ et $\check{\check{\mathbf{B}}}_{\xi}$ (12.9, 12.11) du système (12.8) sont définies. Elles constituent en effet la base du problème à résoudre,
- à l'aide des relations de saut au niveau du pied du précurseur thermique (13.18), les valeurs des quantités en $\check{\xi} = 0$ sont calculées,
- ensuite, pour chaque quantité $\check{\check{Q}}$, le second membre de l'équation :

$$\partial_t \check{\check{Q}} = 2^{\text{nd}} \text{membre} \quad (13.19)$$

est défini en utilisant les expressions de $\check{\check{\mathbf{A}}}_{\xi}$ et de $\check{\check{\mathbf{B}}}_{\xi}$.

- enfin, en chaque point et pour chaque quantité $\check{\check{Q}}$, $\check{\check{Q}}^{\check{r}+1}$ est défini en fonction de $\check{\check{Q}}^{\check{r}}$ à l'aide d'un schéma de Runge–Kutta (Annexe C). Concernant les conditions aux limites, elles sont appliquées à chaque instant t_r du schéma de Runge–Kutta.

13.2 Résolution des équations de la conduction thermique

Dans un second temps, comme nous l'avons précisé dans le paragraphe introductif de ce chapitre, la méthode numérique de résolution des perturbations se concentre sur l'équation de la conduction thermique. La méthode utilisée consiste à obtenir, à l'aide d'une procédure de relaxation utilisant l'accélération de Chebyshev (3.58) et optimisée au cours de cette thèse (Chapitre 6), les solutions des sous-problèmes élémentaires sur chaque domaine avant de reformer la solution en résolvant le problème de Helmholtz sur l'ensemble de l'écoulement par la méthode de la

matrice d'influence. Ce schéma donne la possibilité de traiter chaque domaine selon le système de variables propre à sa position par rapport au choc isotherme. Cependant, une autre conséquence de ce schéma est l'obligation de choisir l'un de ces systèmes pour l'application de la méthode de la matrice d'influence. En effet, celle-ci ne fait pas de différence entre domaines et s'applique sur l'ensemble de la zone d'études. La méthode de résolution du problème de Helmholtz est, de ce fait, particulière et exige une explication claire et détaillée.

13.2.1 Zone aval

La méthode de formulation des équations de la conduction thermique sur la zone aval de l'écoulement est identique à celle utilisée sur l'ensemble de l'écoulement dans le cas d'un précurseur thermique de taille négligeable. Les termes pris en compte dans cette méthode sont détaillés et expliqués dans le Chapitre 3 de ce mémoire. Le système de variables $(\xi, \overline{Q}, \hat{Q})$ est en effet utilisé sur cette zone de l'écoulement. Les expressions des termes traités explicitement $\hat{\mathcal{F}}_\Theta$ et de ceux traités implicitement $\hat{\mathcal{G}}_\Theta$ formulées en (3.13) sont donc toujours valables ici.

13.2.2 Zone amont

Le raisonnement sur la zone amont de l'écoulement est identique à celui appliqué à la zone aval, mais dans le nouveau système $(\check{\xi}, \check{Q}, \check{\hat{Q}})$. L'équation de conduction thermique formulée dans ce système (12.13) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \check{\Theta}}{\partial t} = \check{\mathcal{F}}_\Theta + \check{\mathcal{G}}_\Theta, \quad (13.20)$$

où $\check{\mathcal{F}}_\Theta$ représente la contribution des termes traités explicitement et $\check{\mathcal{G}}_\Theta$ celle des termes traités implicitement. Celles-ci sont définies par :

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{F}}_\Theta &= t^{2\alpha-3} (\gamma - 1) \frac{m}{n\xi_{ft}} \left(\xi^{1-n} \partial_{\check{\xi}} \left(\frac{\check{\Phi}_x \check{G}}{\check{G}} \right) + (1-n) \xi^{-n} \frac{\check{\Phi}_x \check{G}}{\check{G}} \right) \\ &+ t^{-1} (\gamma - 1) \left[\left(\frac{2\check{\Phi}_x}{\xi_{ft} \check{\Theta}} + \frac{m+1}{n^2 \xi_{ft}^2} \check{G}^m \check{\Theta}^n \xi^{1-n} d_{\check{\xi}} \check{G} \right) \left(\xi^{1-n} \partial_{\check{\xi}} \check{\Theta} + (1-n) \xi^{-n} \check{\Theta} \right) \right] \\ &+ t^{-1} \frac{\gamma-1}{\xi_{ft}} (1-\chi) d_{\check{\xi}} \left(\frac{\check{\Phi}_x}{\check{\Theta}} \right) \xi^{1-n} \check{\Theta}, \\ \check{\mathcal{G}}_\Theta &= t^{-1} \frac{\gamma-1}{n^2 \xi_{ft}^2} \xi^{1-n} \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n \left(\xi^{1-n} \partial_{\check{\xi}}^2 \check{\Theta} + 3(1-n) \xi^{-n} \partial_{\check{\xi}} \check{\Theta} + (1-2n)(1-n) \xi^{-1-n} \check{\Theta} \right) \\ &- t^{2\alpha-1} (\gamma-1) k_{\perp}^2 \check{G}^{m-1} \check{\Theta}^n \check{\Theta} \\ &+ t^{-1} \frac{\gamma-1}{\xi_{ft}} \chi d_{\check{\xi}} \left(\frac{\check{\Phi}_x}{\check{\Theta}} \right) \xi^{1-n} \check{\Theta}. \end{aligned} \quad (13.21)$$

De manière analogue au raisonnement sur la zone aval, le schéma de Runge-Kutta semi-implicite d'ordre deux à trois étapes est mis à contribution pour résoudre l'équation (12.13). Le problème suivant doit être résolu à chaque sous-itération en temps du schéma :

$$\check{\Theta}^{r+1} = \check{\Theta}^r + a_r \check{q}^r + b_r \Delta t_p \left(\check{\mathcal{G}}_{\check{\Theta}^r} + \check{\mathcal{G}}_{\check{\Theta}^{r+1}} \right). \quad (13.22)$$

Dans cette expression, le terme $\check{q}^r$ dépend de $\check{\mathcal{F}}_{\check{\Theta}}^{\check{r}}$ ou des termes d'indices précédents $\check{\mathcal{F}}_{\check{\Theta}}^{\check{r}-1}$. L'équation (13.22) peut s'écrire sous la forme générale :

$$\check{L}^{\check{r}+1}(t_{r+1}, k_{\perp}) \check{\Theta}^{\check{r}+1} = \check{f}^{\check{r}}(\check{\Theta}^{\check{r}}, \check{q}^{\check{r}}), \quad (13.23)$$

avec :

$$\check{L}^{\check{r}+1}(t_{r+1}, k_{\perp}) = \partial_{\xi^2}^2 + (1-n) \left(2\check{\xi} - t^{-1}\check{\xi}^{-n} \right) \partial_{\check{\xi}} - \check{\sigma}^{\check{r}+1}(t_{r+1}, k_{\perp}), \quad (13.24)$$

et avec $\sigma(t_{r+1}, k_{\perp})$ la partie diagonale de l'opérateur telle que :

$$\begin{aligned} \check{\sigma}^{\check{r}+1}(t_{r+1}, k_{\perp}) = & n(1-n)\check{\xi}^2 + t_{r+1}^{2\alpha} k_{\perp}^2 \check{G}^{-2} \check{\xi}^{2n-2} - t_{r+1}^{-1} (1-n)^2 \check{\xi}^{-1-n} \\ & - n^2 \xi_{\text{ft}} \chi d_{\check{\xi}} \left(\frac{\check{\Phi}_x}{\check{\Theta}} \right) \check{\xi}^{n-1} \check{G}^{-m-1} \check{\Theta}^{-n} \\ & + \frac{t_{r+1}}{b_r \Delta t_p} \frac{n^2 \xi_{\text{ft}}^2 \check{\xi}^{2n-2}}{(\gamma-1) \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n}. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Le second membre $\check{f}^{\check{r}}(\check{\Theta}^{\check{r}}, \check{q}^{\check{r}})$ est défini par :

$$\begin{aligned} \check{f}^{\check{r}}(\check{\Theta}^{\check{r}}, \check{q}^{\check{r}}) = & \frac{t_{r+1}}{t_r} \left[-\partial_{\xi^2}^2 - (1-n) 3\check{\xi}^{-1} \partial_{\check{\xi}} \right. \\ & - (1-2n)(1-n)\check{\xi}^{-2} + t_{r+1}^{2\alpha} k_{\perp}^2 \check{G}^{-2} \check{\xi}^{2n-2} \\ & - n^2 \xi_{\text{ft}} \chi d_{\check{\xi}} \left(\frac{\check{\Phi}_x}{\check{\Theta}} \right) \check{\xi}^{n-1} \check{G}^{-m-1} \check{\Theta}^{-n} \\ & \left. - \frac{t_{r+1}}{b_r \Delta t_p} \frac{n^2 \xi_{\text{ft}}^2 \check{\xi}^{2n-2}}{(\gamma-1) \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n} \right] \check{\Theta}^{\check{r}} \\ & - \left[a_r \frac{t_{r+1}}{b_r \Delta t_p} \frac{n^2 \xi_{\text{ft}}^2 \check{\xi}^{2n-2}}{(\gamma-1) \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n} \right] \check{q}_r. \end{aligned} \quad (13.26)$$

Le problème à résoudre, contrairement aux configurations étudiées jusqu'ici, n'est pas de type Helmholtz dans le sens strict du terme, puisqu'on note la présence d'une dérivée première dans l'opérateur (13.24). De plus, le caractère singulier de l'écoulement au niveau du pied du front thermique peut provoquer des difficultés numériques à cause de la présence simultanée de termes d'ordres de grandeur très différents. Pour éviter de trop grandes approximations de calcul, les quantités représentant la partie traitée explicitement et celle traitée implicitement de l'équation de la conduction thermique, respectivement $\check{\mathcal{F}}_{\check{\Theta}}$ et $\check{\mathcal{G}}_{\check{\Theta}}$, sont reformulées en regroupant les termes

par puissances de $\check{\xi}$:

$$\begin{aligned}
\frac{n^2 \xi_{\text{ft}}^2 \check{\xi}^{2n-2}}{(\gamma-1) \check{G}^{\check{m}+1} \check{\Theta}^n} \check{\mathcal{F}}_{\Theta} &= \check{\xi}^{-1} [2 t^{-1} n (1-n) \check{\Theta}^{-1} d_{\check{\xi}} \check{\Theta} \check{\Theta} + t^{-1} (m+1) (1-n) \check{G}^{-1} d_{\check{\xi}} \check{G} \check{\Theta} \\
&\quad + 2 t^{2\alpha-3} m (1-n) \check{G}^{-1} d_{\check{\xi}} \check{\Theta} \check{G} + t^{-1} (1-\chi) n (1-n) \check{\Theta}^{-1} d_{\check{\xi}} \check{\Theta} \check{\Theta}] \\
&\quad + [2 t^{-1} n \check{\Theta}^{-1} d_{\check{\xi}} \check{\Theta} \partial_{\check{\xi}} \check{\Theta} + t^{-1} (m+1) \check{G}^{-1} d_{\check{\xi}} \check{G} \partial_{\check{\xi}} \check{\Theta} \\
&\quad + t^{2\alpha-3} m \check{G}^{-m-1} \check{\Theta}^{-n} \partial_{\check{\xi}} (\check{G}^m \check{\Theta}^n \partial_{\check{\xi}} \check{\Theta} \check{G}) \\
&\quad + t^{-1} (1-\chi) n \check{G}^{-m-1} \check{\Theta}^{-n} d_{\check{\xi}} (\check{G}^{-m-1} \check{\Theta}^{n-1} d_{\check{\xi}} \check{\Theta}) \check{\Theta}], \\
\frac{n^2 \xi_{\text{ft}}^2 \check{\xi}^{2n-2}}{(\gamma-1) \check{G}^{\check{m}+1} \check{\Theta}^n} \check{\mathcal{G}}_{\Theta} &= [t^{-1} \partial_{\check{\xi}}^2 \check{\Theta}_r] + \check{\xi}^{-1} [3 t^{-1} (1-n) \partial_{\check{\xi}} \check{\Theta}_r] \\
&\quad + \check{\xi}^{-2} [t^{-1} (1-2n) (1-n) \check{\Theta}_r] \\
&\quad + \check{\xi}^{n-1} [t^{-1} \chi n^2 \xi_{\text{ft}} \check{G}^{-m-1} \check{\Theta}^{-n} d_{\check{\xi}} \frac{\check{\Phi}_x}{\check{\Theta}} \check{\Theta}_r] \\
&\quad - \check{\xi}^{2n-2} [t^{2\alpha-1} n^2 k_{\perp}^2 \xi_{\text{ft}}^2 \check{G}^{-2} \check{\Theta}_r].
\end{aligned} \tag{13.27}$$

13.2.3 Méthode de la matrice d'influence

Comme il est précisé dans le paragraphe introductif de cette section, l'équation de la conduction thermique est résolue sur un maillage multidomaine par la méthode de la matrice d'influence. La résolution des sous-problèmes élémentaires ne nécessitant pas de méthode globale, chaque domaine est traité dans le système de variables propres à sa position dans l'écoulement. Mais la reconstruction de la solution sur l'ensemble de la zone d'étude impose un choix de système. Le système en $(\xi, \overline{Q}, \hat{Q})$ ne convenant pas aux points proches de la singularité du front thermique, le système choisi est celui mis en place au cours de ce travail de thèse, utilisant la variable indépendante $\check{\xi}$ et les variables dépendantes de perturbation $\check{\hat{Q}}$. Le problème général (3.77) est donc traité sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\check{\check{U}}''(x) - \check{\check{\sigma}} \check{\check{U}}(x) &= \check{\check{f}}(x) \quad \text{sur }]-1 : 1[, \\
\check{\check{\alpha}} \check{\check{U}}(-1) + \check{\check{\beta}} \check{\check{U}}'(-1) &= \check{\check{g}}_-, \\
\check{\check{\gamma}} \check{\check{U}}(1) + \check{\check{\delta}} \check{\check{U}}'(1) &= \check{\check{g}}_+.
\end{aligned} \tag{13.28}$$

L'étape suivante consiste à formuler les relations qui permettront de relier entre eux les coefficients de Pulicani $\check{\lambda}_{ij}$ afin de déterminer les coefficients de la matrice d'influence.

13.2.3.1 Conditions aux frontières des sous-domaines

Condition à l'origine : dans un premier temps, les coefficients de Robin doivent être formulés. Pour cela, les conditions aux limites à l'origine et au pied du front thermique sont utilisées. L'expression de la condition à la limite au niveau de l'origine, soit en $\check{\xi} = 1$:

$$\left(d_{\check{\xi}} + n \frac{d_{\check{\xi}} \check{\Theta}}{\check{\Theta}} + (1-n) \check{\xi}^{-1} \right) \check{\Theta} = d_{\check{\xi}} \check{\Theta} \left(t^{-(\alpha-1)} \frac{\check{\Phi}_x}{\check{\Phi}_x} - m t^{2(\alpha-1)} \frac{\check{G}}{\check{G}} + t^{\alpha-2} \frac{\check{G}}{\xi_{\text{ft}}} \frac{d_{\check{\xi}} \check{\Phi}_x}{\check{\Phi}_x} \right). \tag{13.29}$$

permet d'écrire :

$$\begin{cases} \check{\check{\alpha}} = n \frac{d_{\xi} \check{\check{\Theta}}}{\check{\check{\Theta}}} + (1 - n) \check{\check{\xi}}^{-1}, \\ \check{\check{\beta}} = 1, \\ \check{\check{g}}_- = d_{\xi} \check{\check{\Theta}} \left(t^{-(\alpha-1)} \check{\check{\xi}}^{n-1} \frac{\check{\check{\Phi}}_x}{\check{\check{\Phi}}_x} - m t^{2(\alpha-1)} \frac{\check{\check{G}}}{\check{\check{G}}} + t^{\alpha-2} \eta \frac{\check{\check{G}}}{\check{\check{\xi}}_{ft}} \frac{d_{\xi} \check{\check{\Phi}}_x}{\check{\check{\Phi}}_x} \right). \end{cases} \quad (13.30)$$

Condition au pied du front thermique : la relation de saut en pression au niveau de la singularité présente au pied du précurseur thermique (13.18) permet d'obtenir les coefficients de Robin à cet endroit de l'écoulement. Pour cela, il faut effectuer la décomposition de la pression en fonction de la température afin d'obtenir :

$$\begin{cases} \check{\check{\gamma}} = \check{\check{G}} - \left(\check{\check{\mathbf{M}}}_{\xi}^{-1} \mathbf{E}_4 \right)_4 \frac{\check{\check{G}}^{m+1}}{n \check{\check{\xi}}_{ft}} (d_{\xi} \check{\check{\Theta}})^n \\ \check{\check{\delta}} = 0, \\ \check{\check{g}}_+ = t^{\alpha-2} \left(\check{\check{\mathbf{M}}}_{\xi}^{-1} \check{\check{\mathbf{P}}}_{\xi} \right)_4 \eta_{ft} - t^{2\alpha-2} \check{\check{\Theta}} \check{\check{G}}. \end{cases} \quad (13.31)$$

Continuité de la solution : au niveau de chaque interface entre deux domaines, excepté au niveau du choc isotherme pour lequel des relations spécifiques seront appliquées, il faut veiller à la continuité de la solution. Cette contrainte se traduit par la relation suivante :

$$\check{\check{U}}_i(\check{\check{\xi}}_i) = \check{\check{U}}_{i+1}(\check{\check{\xi}}_i). \quad (13.32)$$

En termes de coefficients de Pulicani, cette relation s'exprime ainsi :

$$\check{\check{\lambda}}_{1 \ i} = \check{\check{\lambda}}_{2 \ i+1} \quad (13.33)$$

Continuité de la dérivée sur la zone amont : à ces mêmes interfaces, il faut également faire attention à ce que la dérivée de la solution ne subisse pas de discontinuité. Les opérateurs de dérivée spectrale étant définies par rapport au système de coordonnées utilisé sur les domaines en question, cette relation se décline en deux versions. Sur la zone amont de l'écoulement, elle s'écrit :

$$\check{\check{U}}'_i(\check{\check{\xi}}_i) = \check{\check{U}}'_{i+1}(\check{\check{\xi}}_i), \quad (13.34)$$

soit :

$$\left(\check{\check{U}}'_{1 \ i}(\check{\check{\xi}}_i) - \check{\check{U}}'_{2 \ i+1}(\check{\check{\xi}}_i) \right) \check{\check{\lambda}}_{1 \ i} - \check{\check{U}}'_{1 \ i+1}(\check{\check{\xi}}_j) \check{\check{\lambda}}_{1 \ i+1} + \check{\check{U}}'_{2 \ i}(\check{\check{\xi}}_i) \check{\check{\lambda}}_{2 \ i} = \check{\check{U}}'_{0 \ i+1}(\check{\check{\xi}}_i) - \check{\check{U}}'_{0 \ i}(\check{\check{\xi}}_i) \quad (13.35)$$

Continuité de la dérivée sur la zone aval : au niveau des interfaces entre deux domaines présents en aval du choc isotherme, la relation (13.35) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left[n \xi_{ft} \check{\check{\xi}}_i^{2(n-1)} \left(\widehat{U}'_{2 \ i_2-1}(\xi(\check{\check{\xi}}_i)) - \widehat{U}'_{1 \ i_2}(\xi(\check{\check{\xi}}_i)) \right) \right] \check{\check{\lambda}}_{1 \ i} + n \xi_{ft} \check{\check{\xi}}_i^{2(n-1)} \widehat{U}'_{1 \ i_2-1}(\xi(\check{\check{\xi}}_i)) \check{\check{\lambda}}_{1 \ i+1} \\ & - n \xi_{ft} \check{\check{\xi}}_i^{2(n-1)} \widehat{U}'_{2 \ i_2}(\xi(\check{\check{\xi}}_i)) \check{\check{\lambda}}_{2 \ i} = n \xi_{ft} \check{\check{\xi}}_i^{2(n-1)} \left(\widehat{U}'_{0 \ i_2}(\xi(\check{\check{\xi}}_i)) - \widehat{U}'_{0 \ i_2-1}(\xi(\check{\check{\xi}}_i)) \right), \end{aligned} \quad (13.36)$$

avec i_2 le numéro du domaine considéré dans le sens des ξ croissants. Ainsi, $i_2 = \mathcal{N} + 1 - i$.

Condition au choc isotherme : le choc, par hypothèse, est isotherme dans cette configuration d'écoulement. Cette isothermie constitue donc une condition à vérifier. Elle s'exprime par :

$$\check{\check{\Theta}}_- - \check{\check{\Theta}}_+ = \left[\check{G} \eta_{ft} t^{\alpha-2} \frac{1}{n \xi_{ft}} d_{\xi} \check{\check{\Theta}} \right]_-^+, \quad (13.37)$$

c'est-à-dire, en posant $\mathcal{N}_{am}$ le nombre de domaines de la zone amont et $\mathcal{N}_{av}$ le nombre de domaines de la zone aval :

$$\check{\check{\lambda}}_1 \mathcal{N}_{am} - \check{\check{\lambda}}_2 \mathcal{N}_{am+1} \check{\xi}_{fc}^{n-1} = \left[\check{G} \eta_{ft} t^{\alpha-2} \frac{1}{n \xi_{ft}} d_{\xi} \check{\check{\Theta}} \right]_-^+. \quad (13.38)$$

Afin de disposer d'un nombre égal d'inconnues et de relations à satisfaire, une deuxième condition doit être appliquée au choc isotherme. La relation utilisée est la relation de saut en pression issue des relations de Rankine–Hugoniot (13.18) :

$$\left[t^{\alpha-1} \frac{\check{W}}{\gamma-1} \check{P} - \check{\Phi}_x \check{\xi}^{n-1} - \eta_{ft} \check{G} \frac{t^{2\alpha-3}}{n \xi_{ft}} d_{\xi} \left[\left(\frac{\check{P}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \check{G} \check{V}_x^2 \right) (\check{W} - \check{V}_x) - \check{P} \check{V}_x - \check{\Phi}_x \right] \right]_-^+ = 0. \quad (13.39)$$

On définit les coefficients suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = t^{\alpha-1} \left(\frac{\check{W} \check{G}}{\gamma-1} - \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n \frac{\check{\xi}^{1-n}}{\xi_{ft}} \left(\frac{1-n}{n} + \frac{\check{\xi}}{\check{\Theta}} d_{\xi} \check{\check{\Theta}} \right) \right)_-, \\ B = -t^{\alpha-1} \check{G}_-^{m+1} \check{\Theta}_-^n \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \xi_{ft}}, \\ C = t^{\alpha-1} \left(\frac{\check{W} \check{G}}{\gamma-1} - \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n \frac{\check{\xi}^{1-n}}{\xi_{ft}} \left(\frac{1-n}{n} + \frac{\check{\xi}}{\check{\Theta}} d_{\xi} \check{\check{\Theta}} \right) \right)_+, \\ D = -t^{\alpha-1} \check{G}_+^{m+1} \check{\Theta}_+^n \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \xi_{ft}}, \\ E = -\eta_{ft} \frac{t^{2\alpha-3}}{n \xi_{ft}} \check{G} d_{\xi} \left[\left(\frac{\check{P}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \check{G} \check{V}_x^2 \right) (\check{W} - \check{V}_x) - \check{P} \check{V}_x - \check{\Phi}_x \right]_-^+ \\ + t^{3(\alpha-1)} \left[\frac{\check{W}}{\gamma-1} \check{\Theta} \check{G} - \frac{m \check{\xi}^{1-n}}{n \xi_{ft}} \check{G}^m \check{\Theta}^n d_{\xi} \check{\check{\Theta}} \check{G} \right]_-^+, \end{array} \right. \quad (13.40)$$

qui permettent d'écrire la relation :

$$\begin{aligned} & \check{\check{\lambda}}_1 \mathcal{N}_{am} \left[-C - D \check{U}'_1 \mathcal{N}_{am} (\check{\xi}_{fc}) \right] \\ & + \check{\check{\lambda}}_1 \mathcal{N}_{am+1} \left[-B n \xi_{ft} \check{\xi}^{2(n-1)} \widehat{U}'_1 \mathcal{N}_{av} (\xi(\check{\xi}_{fc})) \right] \\ & + \check{\check{\lambda}}_2 \mathcal{N}_{am} \left(-D \check{U}'_2 \mathcal{N}_{am} (\check{\xi}_{fc}) \right) \\ & + \check{\check{\lambda}}_2 \mathcal{N}_{am+1} \left[A \check{\xi}_{fc}^{n-1} + B \left(-n \xi_{ft} \check{\xi}_{fc}^{2(n-1)} \widehat{U}'_2 \mathcal{N}_{av} (\xi(\check{\xi}_{fc})) + (n-1) \check{\xi}_{fc}^{n-2} \right) \right] \\ & = E + D \check{U}'_0 \mathcal{N}_{am} (\check{\xi}_{fc}) + B n \xi_{ft} \check{\xi}_{fc}^{2(n-1)} \widehat{U}'_0 \mathcal{N}_{av} (\xi(\check{\xi}_{fc})). \end{aligned} \quad (13.41)$$

13.2.3.2 Définition de la matrice d'influence

À ce niveau de l'étude, toutes les relations sont disponibles pour la formation de la matrice d'influence. La matrice d'influence s'écrit, dans le cas particulier où le maillage est tel que trois domaines composent la zone aval et trois domaines composent la zone amont, sous la forme :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & M_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{54} & M_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{65} & M_{66} & M_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{76} & M_{77} & M_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{87} & M_{88} \end{pmatrix} \quad (13.42)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_{11} &= \check{\gamma} + \check{\delta} \check{\tilde{U}}'_{21}(\check{\xi} = 0), \\ M_{12} &= \check{\delta} \check{\tilde{U}}'_{11}(\check{\xi} = 0), \\ M_{21} &= \check{\tilde{U}}'_{21}(\check{\xi}_{12}), \\ M_{22} &= \check{\tilde{U}}'_{11}(\check{\xi}_{12}) - \check{\tilde{U}}'_{22}(\check{\xi}_{12}), \\ M_{23} &= -\check{\tilde{U}}'_{12}(\check{\xi}_{12}), \\ M_{32} &= \check{\tilde{U}}'_{22}(\check{\xi}_{23}), \\ M_{33} &= \check{\tilde{U}}'_{12}(\check{\xi}_{23}) - \check{\tilde{U}}'_{23}(\check{\xi}_{23}), \\ M_{34} &= -\check{\tilde{U}}'_{13}(\check{\xi}_{23}), \\ M_{43} &= D \check{\tilde{U}}'_{23}(\check{\xi}_{fc}), \\ M_{44} &= -C - D \check{\tilde{U}}'_{13}(\check{\xi}_{fc}), \\ M_{45} &= A \check{\xi}_{fc}^{n-1} + B \left(-n \check{\xi}_{ft} \check{\xi}_{fc}^{2(n-1)} \hat{U}'_{23}(\xi(\check{\xi}_{fc})) + (n-1) \check{\xi}_{fc}^{n-2} \right), \\ M_{46} &= -B n \check{\xi}_{ft} \check{\xi}_{fc}^{2(n-1)} \hat{U}'_{13}(\xi(\check{\xi}_{fc})), \\ M_{54} &= 1, \\ M_{55} &= -\check{\xi}_{fc}^{n-1}, \\ M_{65} &= -n \check{\xi}_{ft} \check{\xi}_{45}^{2(n-1)} \hat{U}'_{23}(\xi(\check{\xi}_{45})), \\ M_{66} &= n \check{\xi}_{ft} \check{\xi}_{45}^{2(n-1)} \left(\hat{U}'_{22} - \hat{U}'_{13} \right) (\xi(\check{\xi}_{45})), \\ M_{67} &= n \check{\xi}_{ft} \check{\xi}_{45}^{2(n-1)} \hat{U}'_{12}(\xi(\check{\xi}_{45})), \\ M_{76} &= -n \check{\xi}_{ft} \check{\xi}_{56}^{2(n-1)} \hat{U}'_{22}(\xi(\check{\xi}_{56})), \\ M_{77} &= n \check{\xi}_{ft} \check{\xi}_{56}^{2(n-1)} \left(\hat{U}'_{21} - \hat{U}'_{12} \right) (\xi(\check{\xi}_{56})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{78} &= n_{\xi_{ft}} \check{\xi}_{56}^{2(n-1)} \widehat{U}'_{11}(\xi(\check{\xi}_{56})), \\
 M_{87} &= -\check{\beta} n_{\xi_{ft}} \widehat{U}'_{21}(\xi = 0), \\
 M_{88} &= \check{\alpha} - \check{\beta} n_{\xi_{ft}} \widehat{U}'_{11}(\xi = 0) + \check{\beta}(n - 1),
 \end{aligned}$$

avec $\check{\xi}_{ij}$ la valeur de $\check{\xi}$ à l'interface entre les domaines i et j . Cette matrice d'influence est appliquée au vecteur $\check{\mathbf{V}}$ des inconnues tel que :

$$\check{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \check{\lambda}_{21} \\ \check{\lambda}_{22} = \check{\lambda}_{11} \\ \check{\lambda}_{23} = \check{\lambda}_{12} \\ \check{\lambda}_{13} \\ \check{\lambda}_{24} \\ \check{\lambda}_{25} = \check{\lambda}_{14} \\ \check{\lambda}_{26} = \check{\lambda}_{15} \\ \check{\lambda}_{16} \end{pmatrix}. \quad (13.43)$$

Il reste à écrire la matrice $\widehat{\mathbf{SM}}$ du second membre du problème à résoudre qui vaut :

$$\widehat{\mathbf{SM}} = \begin{pmatrix} \check{g}_+ - \check{\delta} \check{U}'_{01}(\xi = 0) \\ \check{U}'_{02}(\xi(\check{\xi}_{12})) - \check{U}'_{01}(\xi(\check{\xi}_{12})) \\ \check{U}'_{03}(\xi(\check{\xi}_{23})) - \check{U}'_{02}(\xi(\check{\xi}_{23})) \\ E + D \check{U}'_{03}(\xi(\check{\xi}_{fc})) + B n_{\xi_{ft}} \check{\xi}_{fc}^{2(n-1)} \widehat{U}'_{03}(\xi(\check{\xi}_{fc})) \\ \left[\frac{\eta_{ft}}{n_{\xi_{ft}}} t^{\alpha-2} d_{\xi} \check{\Theta} \right]_+^+ \\ n_{\xi_{ft}} \check{\xi}_{45}^{2(n-1)} \left(\widehat{U}'_{03}(\xi(\check{\xi}_{45})) - \widehat{U}'_{02}(\xi(\check{\xi}_{45})) \right) \\ n_{\xi_{ft}} \check{\xi}_{56}^{2(n-1)} \left(\widehat{U}'_{02}(\xi(\check{\xi}_{56})) - \widehat{U}'_{01}(\xi(\check{\xi}_{56})) \right) \\ \check{g}_- + \check{\beta} n_{\xi_{ft}} \widehat{U}'_{01}(\xi = 0) \end{pmatrix} \quad (13.44)$$

Le problème linéaire :

$$\mathbf{M} \check{\mathbf{V}} = \widehat{\mathbf{SM}} \quad (13.45)$$

est ensuite résolu à l'aide d'une décomposition LU de la matrice pentadiagonale $\mathbf{M}$. Cette résolution fournit les valeurs des coefficients de Pulicani $\check{\lambda}_{ji}$ qui permettent de reconstruire la solution de l'équation de la conduction thermique sur l'ensemble de la zone d'études. Il est alors temps de calculer la valeur de la pression au temps considéré selon le schéma présenté dans le paragraphe introductif de ce chapitre.

13.3 Contrainte de stabilité temporelle du système aux perturbations en variables $(\check{\xi}, \check{Q}, \check{\bar{Q}})$

Indispensable au bon déroulement d'une intégration, l'étude du pas de temps critique dans le cas de ce type d'écoulements est primordiale. En suivant les étapes qui ont jaloné l'étude de ce

pas de temps dans le cas de l'écoulement avec choc parfait, dont la méthode est détaillée dans le Chapitre 5 de ce mémoire, une nouvelle estimation de ce pas de temps critique est réalisée dans le nouveau système de variables indépendantes et de variables de perturbation.

13.3.1 Système de la dynamique des gaz

L'étude sur la zone amont ayant mis en évidence la nécessité d'utiliser un nouveau système de coordonnées selon la variable $\check{\xi}$, le système matriciel (5.46) doit être reformulé de la façon suivante afin d'étudier la stabilité temporelle du système d'équations, avec $\check{\mathbf{B}}_{\check{\xi}}$ définie par (12.11) :

$$\partial_t \check{V} + \check{\mathbf{A}}_{\check{\xi}} \partial_{\check{\xi}} \check{V} + \check{\mathbf{A}}_y \partial_y \check{V} + \check{\mathbf{B}}_{\check{\xi}} \check{V} = 0. \quad (13.46)$$

La matrice qui nous intéresse pour le calcul de la vitesse d'advection des perturbations, $\check{\mathbf{A}}_{\check{\xi}}$, s'écrit :

$$\check{\mathbf{A}}_{\check{\xi}} = \begin{pmatrix} t^{-1} \frac{\alpha \check{\xi}^{1-n}}{n} (1 - \check{\xi}^n) & -t^{-\alpha} \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \check{\xi}_{ft}} \check{G}^2 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} \frac{\alpha \check{\xi}^{1-n}}{n} (1 - \check{\xi}^n) & 0 & -t^{-\alpha} \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \check{\xi}_{ft}} \\ 0 & 0 & t^{-1} \frac{\alpha \check{\xi}^{1-n}}{n} (1 - \check{\xi}^n) & 0 \\ 0 & -t^{\alpha-2} \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n \check{\xi}_{ft}} (\check{C} \check{G})^2 & 0 & t^{-1} \frac{\alpha \check{\xi}^{1-n}}{n} (1 - \check{\xi}^n). \end{pmatrix} \quad (13.47)$$

La matrice $\check{\mathbf{A}}_y$, pour sa part, a pour expression :

$$\check{\mathbf{A}}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \check{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{n t} (1 - n) \frac{1 - \check{\xi}^n}{\check{\xi}^n} \check{G}^{-1} & \check{G}^{-1} \\ 0 & 0 & t^{2(\alpha-1)} \gamma \check{P} & 0. \end{pmatrix} \quad (13.48)$$

Les valeurs propres de $\check{\mathbf{A}}_{\check{\xi}}$ sont :

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{n t} \check{\xi}^{1-n} (1 - \check{\xi}^n), \quad \frac{\alpha}{n t} \check{\xi}^{1-n} (1 - \check{\xi}^n) - \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n t \check{\xi}_{ft}} \check{G} \check{C}, \\ & \frac{\alpha}{n t} \check{\xi}^{1-n} (1 - \check{\xi}^n) \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{n t} \check{\xi}^{1-n} (1 - \check{\xi}^n) + \frac{\check{\xi}^{1-n}}{n t \check{\xi}_{ft}} \check{G} \check{C}, \end{aligned} \quad (13.49)$$

tandis que celles de $\check{\mathbf{A}}_y$ sont :

$$\begin{aligned} & 0, \quad \frac{\alpha}{2 n t} (\check{\xi}^{-n} - 1) (1 - n) - \frac{1}{2 \check{G}} \left(\check{G}^2 \left(\frac{\alpha}{n t} \right)^2 (\check{\xi}^{-n} - 1)^2 (1 - n)^2 + 4 t^{2(\alpha-1)} \gamma \check{P} \check{G} \right)^{1/2}, \\ & 0 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{2 n t} (\check{\xi}^{-n} - 1) (1 - n) + \frac{1}{2 \check{G}} \left(\check{G}^2 \left(\frac{\alpha}{n t} \right)^2 (\check{\xi}^{-n} - 1)^2 (1 - n)^2 - 4 t^{2(\alpha-1)} \gamma \check{P} \check{G} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (13.50)$$

Avant de poursuivre, il est nécessaire de rappeler l'expression de la vitesse du son isentropique en variable $\check{\xi}$:

$$\overline{C}(x, t) = \sqrt{\gamma \overline{T}(\xi)} = t^{\alpha-1} \overline{C}(\xi) = t^{\alpha-1} \check{C}(\check{\xi}). \quad (13.51)$$

On peut maintenant écrire le pas de temps critique issu de la contribution du sous-système de la dynamique des gaz :

$$\Delta t_{c, \text{hyp}} = \alpha_{\text{CFL}} \min_i \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \frac{1}{|h'_i|} \frac{\alpha}{\text{tn}} \check{\xi}^{1-n} (\check{\xi}^n - 1) \right. \\ \left. + t^{-1} \sqrt{\left(\frac{\check{\xi}^{1-n} \check{G}_i \check{C}_i}{n \xi_{\text{ft}}} \right)^2 \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C h'_i} \right)^2 + (\bar{C}_i)^2 \left(\frac{k_{\perp}}{2 \pi K_A^F} \right)^2} \right)^{-1}. \quad (13.52)$$

13.3.2 Équation de la conduction thermique

On travaille maintenant sur la partie parabolique du système aux perturbations, comprenant les termes liés à la conduction thermique. Le terme multiplicateur devant la dérivée seconde en température dans l'équation d'évolution de la température (12.13) est issu de l'expression de $\partial_{\check{\xi}}$ et vaut :

$$\check{\widehat{M}}_{\text{diff}, \check{\xi}} = \frac{\gamma - 1}{n^2 \xi_{\text{ft}}^2} \check{\xi}^{2(1-n)} \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n. \quad (13.53)$$

Dans la direction transverse, on a :

$$\partial_y \widehat{\Phi}_y = -t^{2\alpha-1} \overline{G}^m \overline{\Theta}^n \partial_{y^2}^2 \widehat{\Theta}. \quad (13.54)$$

Or, $\check{\Theta} = \widehat{\Theta} \check{\xi}^{n-1}$, donc $\widehat{\Theta} = \check{\xi}^{1-n} \check{\Theta}$. On peut donc écrire :

$$\partial_y \check{\Phi}_y = -t^{2\alpha-1} \check{G}^m \check{\Theta}^n \check{\xi}^{1-n} \partial_{y^2}^2 \check{\Theta}. \quad (13.55)$$

Ainsi, dans la direction transverse de l'écoulement :

$$M_{\text{diff}, \perp} = \check{G}^{m-1} \check{\Theta}. \quad (13.56)$$

Enfin, notre expression comprend un terme convectif. La vitesse d'advection induite par celui-ci est à formuler. Dans l'équation d'évolution de la température (12.13), le facteur devant $\partial_{\check{\xi}} \check{\Theta}$ est le suivant :

$$\text{Facteur} = \frac{3(\gamma - 1)(1 - n)}{tn^2 \xi_{\text{ft}}^2} \check{\xi}^{1-2n} \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^n \\ + \frac{\gamma - 1}{tn^2 \xi_{\text{ft}}^2} \left(2n \check{\xi}^{2(1-n)} \check{G}^{m+1} \check{\Theta}^{n-1} d_{\check{\xi}} \check{\Theta} + (m+1) \check{\xi}^{2(1-n)} \check{G}^m \check{\Theta}^n d_{\check{\xi}} \check{G} \right). \quad (13.57)$$

On définit alors $\check{\mathcal{W}}_{\text{adv}, \check{\xi}, h}$ tel que :

$$\check{\mathcal{W}}_{\text{adv}, \check{\xi}, h} = h'^{-1} \left(\check{\mathcal{W}}_{\text{adv}, \check{\xi}} + h'^{-2} h'' \check{\widehat{M}}_{\text{diff}, \check{\xi}} \right), \quad (13.58)$$

avec $\check{\mathcal{W}}_{\text{adv}, \check{\xi}} = -\text{Facteur}$.

Il s'agit maintenant de formuler l'expression du pas de temps critique. Nous définissons une vitesse du son dans la direction longitudinale égale à :

$$\check{V}_{\text{son}} = \left[\left(\frac{\check{W}_{\text{adv},\check{\xi},h}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\check{G} \check{C} \check{\xi}^{1-n}}{n \check{\xi}_{\text{ft}}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (13.59)$$

et une vitesse d'advection s'exprimant par :

$$\check{V}_{\text{adv}} = \frac{\check{W}_{\text{adv},\check{\xi},h}}{2} + \frac{\alpha \check{\xi}^{1-n}}{n h'} (1 - \check{\xi}^n). \quad (13.60)$$

Enfin, on utilise $\kappa_{\perp}$ (5.62) pour écrire :

$$\begin{aligned} \Delta t_c = t \alpha_{\text{CFL}} \min_i & \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \left| \frac{\alpha \check{\xi}_i^{1-n}}{n h'_i} (1 - \check{\xi}_i^n) + \frac{\check{W}_{\text{adv},\check{\xi},h_i}}{2} \right| \right. \\ & + \sqrt{\left\{ \left(\frac{\check{W}_{\text{adv},\check{\xi},h_i}}{2} \right)^2 + \frac{(\check{\xi}_i^{1-n} \check{G}_i \check{C}_i)^2}{n \check{\xi}_{\text{ft}} h'^2_i} \right\} \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \right)^2 + \check{C}_i^2 \left(\frac{\kappa_{\perp}}{2 \pi K_A^F} \right)^2} \\ & \left. + \tau \check{M}_{\text{diff},\check{\xi},i} \frac{N_x^4}{K_{D/D}^C h'^2_i} + \tau \check{M}_{\text{diff},\perp,i} \frac{\kappa_{\perp}^2}{K_D^F \pi^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (13.61)$$

Pour l'étude d'un tel écoulement, l'expression du pas de temps critique est très importante. Tous les aspects de l'écoulement doivent être pris en compte. La marche à suivre se doit d'être extrêmement méthodique. Le pas de temps critique est donc calculé à la fois sur la zone aval à l'aide de l'expression mise en place au cours de ce projet (5.63) et sur la zone amont en utilisant la relation écrite dans le nouveau système de coordonnées et de variables dépendantes (13.61). Le pas de temps critique utilisé pendant le déroulement du calcul est celui des deux qui a la valeur minimale.

13.4 Test de la solution exacte de translation

La solution exacte de translation, détaillée en annexe H, est le moyen que nous avons choisi pour estimer les manques de cette étude prospective de la méthode numérique à mettre en place pour le traitement des perturbations linéaires dans le cadre des écoulements avec front thermique. En effet, l'évolution de cette solution au cours du temps est connue et peut être comparée aisément aux résultats de perturbation fournis par l'outil RAMSES.

Le premier constat qui ressort de cette vérification est le caractère divergent des quantités sur le point voisin du front thermique. La figure 13.2 illustre parfaitement ce comportement. Celle-ci est un tracé de la perturbation en vitesse sur le micro-domaine, en fonction du nombre de points. Les profils correspondent à autant d'itérations en temps du schéma. Le second point, soit le plus proche du front thermique qui ne soit traité par des conditions aux limites, dénonce une mauvaise approximation du second membre au voisinage du front thermique. La méthode numérique subit donc la proximité du front thermique. Les mauvais résultats observés sur ce point voisin du front sont à relier à la mauvaise précision avec laquelle ce point est décrit lors du calcul de l'écoulement de base, comme nous l'avons vu à la section 10.2.1. Le facteur $\check{\xi}^{1-n}$ amplifie en effet l'erreur

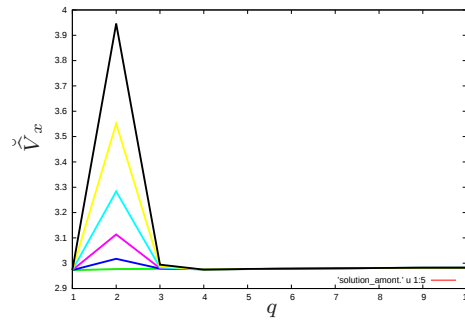


FIGURE 13.2 – Tracé de la perturbation en vitesse $\tilde{V}_x$ en fonction du nombre de points pour la solution exacte de translation. Les profils de cette quantité sont tracés à chaque pas de temps. Le point voisin du front thermique est mal traité, ces profils montrent la mauvaise approximation du second membre au voisinage du front thermique.

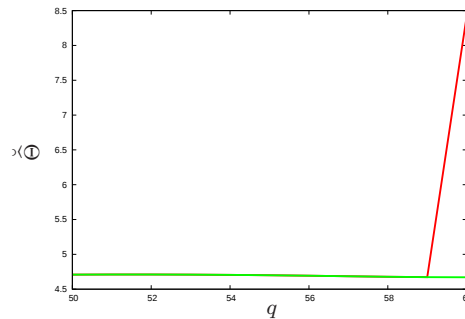


FIGURE 13.3 – Tracé de la perturbation en température $\tilde{\Theta}$ en fonction du nombre de points pour la solution exacte de translation, sur les points du précurseur thermique les plus proches du choc isotherme. Le profil de couleur verte correspond au tracé de la solution exacte tandis que celui de couleur rouge correspond à la perturbation de température au premier pas de temps. Les conditions de choc isotherme ne sont pas respectées et semblent montrer une répercussion de la singularité du front thermique à l'autre extrémité de la zone amont.

commise sur l'écoulement de base.

Une deuxième remarque peut être faite au vu de la figure 13.3. Celle-ci compare le profil de la perturbation de température sur la zone amont $\tilde{\Theta}$ issu de la solution exacte de translation et celui fourni par le code de calcul RAMSES, sur les points du précurseur thermique proches du choc isotherme. Les comportements des deux solutions diffèrent au voisinage du choc isotherme. À ce stade, il est difficile de justifier ce comportement. L'hypothèse la plus plausible concerne une influence de la divergence du point voisin du front thermique sur les autres points du précurseur qui serait amplifiée par l'application des conditions de choc isotherme.

La singularité présente à l'extrémité amont de l'écoulement, dans le cas d'une configuration avec choc isotherme et précurseur thermique supersonique, étant particulièrement problématique du point de vue de la résolution numérique, une méthode nouvelle de résolution doit être mise en place. La méthode utilisée dans le cadre des écoulements avec choc parfait (Boudesocque-Dubois *et al.*, 2003; Lombard, 2008) est en effet inadaptée à ce type de configuration. Si lors de l'étude du système hyperbolique de la dynamique des gaz, seule la méthode appliquée sur la zone amont est

modifiée, toute la résolution de l'équation parabolique de la conduction thermique est repensée. L'étude de la stabilité temporelle est également remaniée pour tenir compte des spécificités du précurseur thermique. Mise en place au cours de cette thèse, cette méthode n'a pu être validée par l'essai par manque de temps. Néanmoins, des essais réalisés avec la solution exacte de translation ont permis de mettre en évidence des manques de cette méthode. Les conditions limites de la zone amont focalisent ces manques. Le comportement de la solution au choc isotherme est symptomatique d'un mauvais traitement du système d'équations. La divergence de la solution sur le point voisin du front thermique pourrait être la cause indirecte de ce comportement.

Une première piste est avancée pour remédier au problème de divergence de la solution au voisinage du front thermique. La valeur de $\hat{\Theta}^*$ issue du traitement de la dynamique des gaz est employée dans la procédure numérique d'application des conditions aux limites au système de la conduction thermique. Or, cette valeur de la perturbation de la température est calculée avec l'hypothèse de perturbations nulles en amont du front thermique. Cette quantité est donc très contrainte. Des pistes sont à explorer dans l'avenir telles que l'utilisation dès le calcul de la solution de base d'un domaine qui comprendrait le micro-domaine et le domaine qui lui est directement adjacent. Cette piste a déjà en partie été suivie (Chapitre 10, Sec. 10.2.4) et la façon d'obtenir la solution interpolée sur le nouveau domaine est expliquée dans le chapitre 3, à la Sec. 3.4.1. Le but de cette manoeuvre est d'éloigner le point voisin du front thermique de la singularité et ainsi de faciliter le traitement de l'opérateur et du second membre. Les premiers résultats liés à l'exploration de cette voie ne nous permettent pas de conclure sur son efficacité. Selon le scénario le plus optimiste, une meilleure résolution de l'écoulement de base pourrait suffire pour que la méthode, mise en place ici pour traiter les perturbations linéaires, fonctionne.

Conclusion

Le projet sur lequel travaille l'équipe qui a accueilli ce travail de thèse a débuté il y a plusieurs années. Son objectif est d'améliorer la compréhension des mécanismes à l'oeuvre lors des premiers instants de l'ablation d'une cible de fusion par confinement inertiel (FCI). Les perturbations qui se propagent dans l'écoulement lors de cette phase critique sont au coeur de ce projet. Une famille de solutions exactes autosemblables, représentative d'un écoulement d'ablation instationnaire par ses conditions initiales et ses conditions aux limites est utilisée. Boudesocque-Dubois (2000) a fourni des solutions de référence aux équations aux perturbations et développé un outil numérique de grande précision pour leur calcul. Abeguilé (2004) a ensuite généralisé la méthode numérique employée, ce qui a permis de disposer de résultats numériques pour une large gamme de profils réalistes d'ablation (Abeguilé *et al.*, 2006; Clarisse *et al.*, 2008). Après avoir corrigé quelques faiblesses du code RAMSES, Lombard (2008) a procédé à une analyse physique de différents écoulements d'ablation, par l'intermédiaire des modes de Kovàsznay. Donnant accès à une grande quantité d'informations sur ce type d'écoulements, ce travail s'est néanmoins limité à l'examen de configurations avec précurseur thermique de taille négligeable. De plus, les réponses en perturbations linéaires obtenues l'ont toutes été avec une hypothèse de conduction électronique. Cette thèse s'inscrit dans la continuité de ces travaux et a pour objectif d'élargir le domaine d'application de la méthode numérique à d'autres configurations d'écoulements rencontrés en FCI d'une part, et d'améliorer la précision des résultats d'autre part. L'objectif d'élargissement de la gamme d'écoulements accessibles est en fait un double objectif puisque deux voies sont suivies au cours de ce travail. D'une part, l'hypothèse de choc parfait est conservée afin d'observer les réponses en perturbations linéaires de configurations avec conduction radiative. Cette approche est motivée par l'attaque indirecte qui sera utilisée dans le cadre du LMJ. Les résultats obtenus par Vauvy (2007), lors de calculs d'écoulements de base en conduction radiative, sont la base de cette partie du travail. D'autre part, un précurseur thermique est introduit en amont du front de choc, désormais isotherme, pour la seconde partie de ce travail de thèse. En effet, les résultats de Boudesocque-Dubois *et al.* (2008) ont montré une limitation des écoulements accessibles pour les plus grandes valeurs du flux appliqué à l'origine. L'idée directrice de notre travail consiste à considérer que l'introduction d'un front thermique fera tomber cette limitation.

Des résultats ont été obtenus dans le cadre d'études de réponses en perturbation linéaires dans le cadre de l'approximation du choc parfait en conduction radiative. De sorte à pouvoir établir des comparaisons avec les résultats de choc parfait avec conduction électronique de Lombard (2008), deux écoulements, à détente subsonique et à détente supersonique, ont été analysés. Les résultats permettent notamment d'identifier les mécanismes de transport des perturbations dans les diverses zones caractéristiques de l'écoulement. Ils montrent que la diffusion est dominante dans la zone de conduction, tandis que la zone choquée est dominée par les ondes acoustiques. Ces résultats sont communs aux cas subsonique et supersonique mais également au cas de la conduction électronique. D'autres points communs entre ces configurations sont à noter. Ainsi, les écoulements sont stables pour les temps longs, aux petites échelles spatiales. Il apparaît un phénomène transitoire,

constitué d'une phase de croissance puis d'oscillations amorties. Cependant, aux grands nombres d'onde, soit aux petites échelles spatiales (ou encore aux temps longs, la variable pertinente étant $\kappa_{\perp} = k_{\perp} t^{\alpha}$), la phase de croissance est fortement atténuée. Le phénomène d'implosion en FCI étant très instationnaire et bref, ce type d'analyse est néanmoins intéressant, malgré la stabilité aux temps longs atteinte par l'écoulement. Dans le cas de la configuration avec détente supersonique RFA, un déplacement de la zone la plus instable de l'écoulement du front d'ablation vers la zone de conduction est observé. Enfin, dans le cas de la conduction radiative avec détente subsonique RFA, on obtient un comportement différent de celui observé en conduction électronique par Lombard (2008). En effet, un régime intermédiaire avec une croissance des perturbations était alors observé. Ce régime est absent dans le cadre précis de notre étude.

La résolution du problème aux valeurs propres non-linéaire complet est effectuée sans approximation, contrairement aux travaux existants, ce qui permet de prendre en compte l'onde supersonique amont. La procédure de résolution aboutit à une bonne précision même si la précision spectrale n'est pas atteinte sur l'onde amont. Ainsi, la gamme de solutions obtenues est élargie, ce qui se concrétise par l'enrichissement de l'abaque formé par Boudesocque-Dubois *et al.* (2008). Le lien physique est effectué avec les solutions en choc parfait présentes sur cet abaque. Ce raccord apparaît au niveau des petites tailles de précurseur thermique. Ceci a fait l'objet d'une communication (Dastugue *et al.*, 2012). Une comparaison entre la configuration choc parfait et celle tenant compte du front thermique, avec valeurs à l'origine de la pression et du flux comparables, permet de rendre compte de la cohérence des résultats et donc de la possibilité de traiter les écoulements avec précurseur thermique de taille négligeable de deux manières différentes. Désormais, la gamme de solutions disponibles permet de traiter les différentes phases de l'implosion, à savoir les temps courts avec la présence d'un front thermique supersonique et les temps longs pour lesquels le choc est en avance sur le front thermique. D'autres régimes que celui d'ablation ont également été atteints. Cette thèse a permis d'aller encore plus loin puisque, dans le cadre des perturbations, les équations régularisées au front thermique et les conditions aux limites correspondantes ont pu être formulées. Enfin, une analyse de stabilité temporelle du schéma numérique a permis de montrer que les caractéristiques de ce type d'écoulements sont désormais bien connues. Les analyses de réponses en perturbation effectuées en choc parfait ont confirmé la pertinence de la contrainte CFL déterminée.

Pour aboutir à ces résultats, la première étape a consisté à optimiser les performances de l'outil de calcul RAMSES. La procédure de relaxation utilisée dans la résolution de l'équation de l'énergie a notamment été améliorée. Le calcul des perturbations linéaires en conduction radiative a nécessité une étude systématique des configurations d'écoulements de base fournies par le travail de Vauvy (2007) afin de choisir les écoulements les plus pertinents vis-à-vis de notre analyse. Pour les deux écoulements choisis, l'élaboration de la discrétisation spatiale et de la gamme temporelle des calculs a été effectuée en accord avec un certain nombre de critères mis en place par Boudesocque-Dubois *et al.* (2013). L'élaboration précédente d'un outil de post-traitement des résultats de perturbation (Dastugue, 2009) a permis l'examen des sorties numériques et un grand nombre de conclusions physiques. La prise en compte du précurseur thermique a considérablement modifié les caractéristiques de l'écoulement. Deux singularités sont en effet apparues et ont nécessité un examen approfondi. Les dérivées infinies des quantités de base au niveau du front thermique n'ont laissé d'autre choix que de régulariser les équations et de mettre en place une procédure de résolution du problème aux valeurs propres non-linéaire spécifique à cette configuration. Une analyse théorique a également été appliquée au système aux perturbations pour les mêmes raisons. La méthode numérique utilisée pour traiter ces perturbations est d'ailleurs mise en place.

Pour la suite de ce projet, un des premiers objectifs sera d'atteindre la précision spectrale pour la solution de base sur l'ensemble du domaine d'étude. À cet égard, une meilleure compréhension de la structure de l'opérateur sera sans doute nécessaire. Une telle analyse peut aussi permettre de surmonter la difficulté du front thermique et à la procédure numérique mise en place pour les perturbations d'aboutir. L'objectif étant bien sûr de procéder à un calcul de perturbations dans le cas de la conduction radiative, avec précurseur thermique non-négligeable.

Annexe A

Les différents systèmes de coordonnées utilisés

Au cours de ce projet, plusieurs systèmes de variables indépendantes et dépendantes ont été utilisés. Cette annexe a pour but de faire un récapitulatif des différentes notations employées selon les systèmes de coordonnées ainsi que des relations entre les différentes valeurs d'une même quantité. Un tableau est présent pour résumer les notations et les motivations propres à chaque système dans le cas des quantités de base ainsi que dans celui des perturbations.

A.1 Quantités de base

Pour l'étude des quantités propres à l'écoulement de base, ce travail et ceux qui le précèdent (Boudesocque-Dubois, 2000; Boudesocque-Dubois *et al.*, 2003; Lombard, 2008; Clarisse *et al.*, 2008) utilisent la formulation autosemblable. Le passage intermédiaire par la formulation en variable de Lagrange permet de se placer dans le cas d'un mouvement unidimensionnel selon la direction x . Au cours de ce travail de thèse, de nouvelles variables dépendantes ont été définies pour faciliter le traitement de la singularité du front thermique, ou encore pour exprimer le système d'équations de l'hydrodynamique avec conduction non-linéaire de façon autonome.

A.1.1 Relations de passage de la représentation eulérienne à la représentation lagrangienne

De grands déplacements se produisant dans notre écoulement, la formulation lagrangienne, qui exprime les caractéristiques du fluide pour une particule fluide donnée, est adéquate. Les relations de passage de la formulation eulérienne à la formulation lagrangienne sont les suivantes :

$$\begin{cases} \partial_x \rightarrow \bar{\rho} \partial_m, \\ \partial_t \rightarrow \partial_t - \bar{\rho} \bar{v}_x \partial_m. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

A.1.2 Relations de passage de la représentation lagrangienne à la représentation réduite

La formulation autosemblable des équations impose la définition de relations de passage entre la formulation en variable de Lagrange et celle en variable autosemblable :

$$\xi = \frac{m}{t^\alpha}, \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2n-1}{2n-2}, \quad n > 1. \quad (\text{A.2})$$

Ce choix de formulation permet d'associer à chaque quantité de l'écoulement de base dépendant de m et de t une fonction de forme dépendant pour sa part de ξ :

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(m, t) &= \bar{G}(\xi), \\ \bar{v}_x(m, t) &= t^{\alpha-1} \bar{V}_x(\xi), \\ \bar{T}(m, t) &= t^{2(\alpha-1)} \bar{\Theta}(\xi), \\ \bar{p}(m, t) &= t^{2(\alpha-1)} \bar{P}(\xi), \\ \bar{\varphi}_x(m, t) &= t^{3(\alpha-1)} \bar{\Phi}_x(\xi).\end{aligned}\tag{A.3}$$

Des formules de changement de variables sont également nécessaires pour exprimer les dérivées spatiales des quantités. Ces relations s'écrivent, pour $\bar{f}(m, t) = t^\beta \bar{F}(\xi)$:

$$\begin{aligned}\partial_t \bar{f} &\longrightarrow \partial_t \bar{F} - \frac{\alpha \xi}{t} \partial_\xi \bar{F}, \\ \partial_m \bar{f} &\longrightarrow t^{\beta-\alpha} \partial_\xi \bar{F}.\end{aligned}\tag{A.4}$$

A.1.3 Relations de passage de la représentation réduite à la représentation réduite régularisée

La présence de la singularité du front thermique nous a obligés à définir une variable indépendante qui permette le traitement numérique de l'écoulement de base. C'est dans ce but qu'a été introduite la variable $\check{\xi}$:

$$\check{\xi} = \left(1 - \frac{\xi}{\xi_{ft}}\right)^{1/n},\tag{A.5}$$

c'est-à-dire :

$$\xi = \xi_{ft} \left(1 - \check{\xi}^n\right),\tag{A.6}$$

et la notation :

$$\check{Q}(\check{\xi}) = \bar{Q}(\xi).\tag{A.7}$$

La relation de suivante est alors appliquée lors du changement de coordonnées :

$$\partial_\xi \bar{Q}(\xi) = -\frac{1}{n \xi_{ft}} \check{\xi}^{1-n} \partial_{\check{\xi}} \check{Q}(\check{\xi})\tag{A.8}$$

A.1.4 Relations de passage de la représentation réduite à la représentation réduite autonome

Au cours de l'étude théorique de l'écoulement de base, la formulation autonome du système d'équations (2.26) a été utilisée. Afin d'exprimer les équations sous cette forme, de nouvelles quantités ont été définies à partir des quantités exprimées en variable autosemblable :

$$\begin{aligned}\bar{T} &\rightarrow \xi^{b-1} \check{T}, \\ \bar{V}_x &\rightarrow \xi^b \check{V}_x, \\ \bar{\Theta} &\rightarrow \xi^{2b} \check{\Theta}, \\ \bar{\Phi}_x &\rightarrow \xi^{2b+1} \check{\Phi}_x.\end{aligned}\tag{A.9}$$

avec la constante b définie par :

$$b = \frac{m-1}{m-2n+1}.\tag{A.10}$$

A.1.5 Écriture des quantités dans le repère du laboratoire

La variable d'espace x , citée précédemment, est la variable d'espace dans le repère du laboratoire. On définit au cours de ce mémoire la quantité $\overline{X}$ telle que :

$$x = t^\alpha \overline{X}, \quad (\text{A.11})$$

qui représente la variable d'espace pour laquelle la dilatation spatiale de l'écoulement en fonction du temps n'est pas prise en compte. On peut également définir la variable $\overline{X}$ à l'aide de la relation (Abeguile (2004), Annexe B) :

$$\overline{X} = \frac{\xi}{G} + \frac{\overline{V}_x}{\alpha}. \quad (\text{A.12})$$

A.2 Perturbations

De la même manière que pour les quantités de l'écoulement de base, la formulation autosemblable est utilisée pour l'étude des quantités liées aux perturbations linéaires de l'écoulement de base.

A.2.1 Relations de passage de la représentation lagrangienne à la représentation réduite

Une notation différente est introduite pour désigner les quantités étudiées en variable autosemblable :

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(m, t; k_\perp) &= \widehat{G}(\xi, t; k_\perp), \\ \widehat{v}_x(m, t; k_\perp) &= \widehat{V}_x(\xi, t; k_\perp), \\ \widehat{d}_\perp(m, t; k_\perp) &= \widehat{D}_\perp(\xi, t; k_\perp), \\ \widehat{p}(m, t; k_\perp) &= \widehat{P}(\xi, t; k_\perp), \\ \widehat{T}(m, t; k_\perp) &= \widehat{\Theta}(\xi, t; k_\perp), \\ \widehat{\varphi}_x(m, t; k_\perp) &= \widehat{\Phi}_x(\xi, t; k_\perp), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

avec les formules de transformation :

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{f}(m, t; k_\perp) &= \partial_t \widehat{F}(\xi, t; k_\perp) - \frac{\alpha \xi}{t} \partial_\xi \widehat{F}(\xi, t; k_\perp), \\ \partial_m \widehat{f}(m, t; k_\perp) &= t^{-\alpha} \partial_\xi \widehat{F}(\xi, t; k_\perp). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

A.2.2 Relations de passage de la représentation réduite à la représentation réduite régularisée

Le traitement numérique des perturbations est lui aussi affecté par la présence de dérivées infinies au pied du front thermique. La variable $\check{\xi}$ est donc utilisée à nouveau pour rendre finies ces dérivées. Celles-ci font en effet partie intégrante des équations aux perturbations. L'égalité suivante est donc prise en compte :

$$\widehat{Q}(\check{\xi}(\xi)) = \widehat{Q}(\xi). \quad (\text{A.15})$$

A.2.3 Relations de passage de la représentation réduite à la représentation réduite régularisée en perturbation

Enfin, la formulation des équations dans le nouveau système de variables indépendantes nous incite à créer de nouvelles quantités dépendantes de perturbation afin de répondre à l'hypothèse de perturbation finie au pied du front thermique, via la relation :

$$\widehat{Q} = \check{\xi}^{1-n} \widehat{Q}, \quad (\text{A.16})$$

c'est-à-dire :

$$\check{\check{Q}} = \check{\xi}^{n-1} \widehat{Q}, \quad (\text{A.17})$$

quelle que soit la quantité Q appartenant au groupe de quantités (G, V_x, Θ, P) . Les formules de passage d'un système à l'autre sont exprimées par :

$$\partial_{\check{\xi}} \widehat{Q}(\check{\xi}) = \check{\xi}^{1-n} \partial_{\check{\xi}} \check{\check{Q}}(\check{\xi}) + (1 - n) \check{\xi}^{-n} \check{\check{Q}}(\check{\xi}), \quad (\text{A.18})$$

$$\partial_{\check{\xi}}^2 \widehat{Q}(\check{\xi}) = \check{\xi}^{1-n} \partial_{\check{\xi}}^2 \check{\check{Q}}(\check{\xi}) + 2 (1 - n) \check{\xi}^{-n} \partial_{\check{\xi}} \check{\check{Q}}(\check{\xi}) - n (1 - n) \check{\xi}^{-n-1} \check{\check{Q}}(\check{\xi}). \quad (\text{A.19})$$

A.3 Récapitulatif des différentes notations

Dans cette dernière partie de cette annexe, les tableaux (A.1) et (A.2) résument les informations nécessaires afin d'avoir rapidement accès à celles-ci.

Représentation	Euler 1D	Lagrange 1D	Réduite	Réduite régularisée	Réduite autonome
Coordonnées	x, t	m, t $dm = \bar{\rho} dx$	ξ $= m/t^\alpha$	$\check{\xi}$ $= (1 - \frac{\xi}{\xi_{ft}})^{1/n}$	ξ
Densité	$\rho(x, t)$	$\bar{\rho}(m, t)$	$\bar{G}(\xi)$ $= \bar{\rho}(m, t)$	$\check{G}(\check{\xi})$ $= \bar{G}(\xi(\check{\xi}))$	$\check{G}(\xi)$ $= \xi^{b-1} \bar{G}(\xi)$
Vitesse longitudinale	$v_x(x, t)$	$\bar{v}_x(m, t)$	$\bar{V}_x(\xi)$ $= t^{1-\alpha} \bar{v}_x(m, t)$	$\check{V}_x(\check{\xi})$ $= \bar{V}_x(\xi(\check{\xi}))$	$\check{V}_x(\xi)$ $= \xi^{-b} \bar{V}_x(\xi)$
Température	$T(x, t)$	$\bar{T}(m, t)$	$\bar{\Theta}(\xi)$ $= t^{2(1-\alpha)} \bar{T}(m, t)$	$\check{\Theta}(\check{\xi})$ $= \bar{\Theta}(\xi(\check{\xi}))$	$\check{\Theta}(\xi)$ $= \xi^{-2b} \bar{\Theta}(\xi)$
Pression	$p(x, t)$	$\bar{p}(m, t)$	$\bar{P}(\xi)$ $= t^{2(1-\alpha)} \bar{p}(m, t)$	$\check{P}(\check{\xi})$ $= \bar{P}(\xi(\check{\xi}))$	$\check{P}(\xi)$ $= \xi^{-b-1} \bar{P}(\xi)$
Flux thermique	$\varphi_x(x, t)$	$\bar{\varphi}_x(m, t)$	$\bar{\Phi}_x(\xi)$ $= t^{3(1-\alpha)} \bar{\varphi}_x(m, t)$	$\check{\Phi}_x(\check{\xi})$ $= \bar{\Phi}_x(\xi(\check{\xi}))$	$\check{\Phi}_x(\xi)$ $= \xi^{1-2b} \bar{\Phi}_x(\xi)$
Motivation	Espace physique	Représ. lagrangienne	Autosemblable	Rendre finies les dérivées	Repérer les singularités

TABLE A.1 – Tableau définissant les notations utilisées pour chaque quantité de l'écoulement de base suivant le système de coordonnées utilisé.

Représentation	Lagrangienne 1D	Réduite	Réduite régularisée	Réduite, pert. régularisée
Coordonnées	m, t	ξ, t	$\check{\xi}, t$	$\check{\xi}, t$
Densité	$\hat{\rho}(m, t; k_{\perp})$	$\hat{G}(\xi, t; k_{\perp})$	$\hat{G}(\check{\xi}, t; k_{\perp})$	$\check{\check{G}}(\check{\xi}, t; k_{\perp})$ $= \check{\xi}^{n-1} \hat{G}(\check{\xi}, t; k_{\perp})$
Vitesse longitudinale	$\hat{v}_x(m, t; k_{\perp})$	$\hat{V}_x(\xi, t; k_{\perp})$	$\hat{V}_x(\check{\xi}, t; k_{\perp})$	$\check{\check{V}}_x(\check{\xi}, t; k_{\perp})$ $= \check{\xi}^{n-1} \hat{V}_x(\check{\xi}, t; k_{\perp})$
Température	$\hat{T}(m, t; k_{\perp})$	$\hat{\Theta}(\xi, t; k_{\perp})$	$\hat{\Theta}(\check{\xi}, t; k_{\perp})$	$\check{\check{\Theta}}(\check{\xi}, t; k_{\perp})$ $= \check{\xi}^{n-1} \hat{\Theta}(\check{\xi}, t; k_{\perp})$
Pression	$\hat{p}(m, t; k_{\perp})$	$\hat{P}(\xi, t; k_{\perp})$	$\hat{P}(\check{\xi}, t; k_{\perp})$	$\check{\check{P}}(\check{\xi}, t; k_{\perp})$ $= \check{\xi}^{n-1} \hat{P}(\check{\xi}, t; k_{\perp})$
Flux thermique	$\hat{\varphi}_x(m, t; k_{\perp})$	$\hat{\Phi}_x(\xi, t; k_{\perp})$	$\hat{\Phi}_x(\check{\xi}, t; k_{\perp})$	$\check{\check{\Phi}}_x(\check{\xi}, t; k_{\perp})$ $= \check{\check{\Phi}}_x(\check{\check{G}}, \check{\check{\Theta}})$
Motivation	Représ. lagrangienne	Autosemblable	Rendre finies les dérivées de base	Rendre finies les perturbations au front

TABLE A.2 – Tableau définissant les notations utilisées pour chaque quantité de l'écoulement perturbé suivant le système de coordonnées utilisé.

Annexe B

Formulation autosemblable

B.1 Similitudes

Dans cette annexe, la méthode pour exprimer les équations de l'hydrodynamique sous forme autosemblable est expliquée. Soient les similitudes, de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \rightarrow x'_0 = A x_0, \\ t \rightarrow t' = B t, \\ v \rightarrow v' = C v, \\ \rho \rightarrow \rho' = D \rho, \\ T \rightarrow T' = E T, \\ \varphi \rightarrow \varphi' = F \varphi. \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

Ce type de similitude dépend de six paramètres. L'objectif d'une méthode de recherche de solutions autosemblables est la détermination de similitudes (B.1) qui laissent invariantes les équations de conservation (2.14), l'équation du flux (2.15) et la loi de diffusion (1.5). On peut d'ores et déjà écrire :

$$A = \lambda^a, \quad B = \lambda^b, \quad C = \lambda^c, \quad D = \lambda^d, \quad E = \lambda^e, \quad F = \lambda^f. \quad (\text{B.2})$$

Cette formulation introduit un paramètre supplémentaire λ . Par la suite, l'un des exposants pourra donc être fixé. Le fait que les équations doivent être invariantes par cette similitude impose certaines relations entre les coefficients. L'équation de conservation de la masse présente dans le système (2.14) impose la condition suivante :

$$a = b + c + d. \quad (\text{B.3})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement issue du même système (2.14) impose :

$$e = 2c, \quad (\text{B.4})$$

alors que l'équation du flux (2.15) combinée à la loi de diffusion (1.5) impose :

$$b = (m - 1)d + (n - 1)e. \quad (\text{B.5})$$

La similitude (B.1) dépend de six paramètres (à savoir six exposants et le coefficient λ , mais l'un des coefficients sera fixé dans le paragraphe suivant). Or les équations du système imposent

quatre relations que nous venons d'énoncer. Les exposants sont donc exprimés en fonction de c et de d :

$$\begin{cases} a = (2n - 1)c + md, \\ b = 2(n - 1)c + (m - 1)d, \\ e = 2c, \\ f = 3c + d. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Les similitudes laissant invariantes les équations du problème étudié forment donc un groupe à deux paramètres $G_{c,d}$.

B.2 Variables réduites

Le paramètre supplémentaire introduit dans le paragraphe précédent peut être fixé. Or, pour tout réel λ , les grandeurs ρ , v , T et φ peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$H = H(x_0, t) = \lambda^h H(\lambda^{-a} x_0, \lambda^{-b} t), \quad (\text{B.7})$$

quelque soit le couple (H, h) appartenant à $\{(\rho, d), (v, c), (T, e), (\varphi, f)\}$. Le but est de fixer λ tel que la grandeur H ne dépende plus que d'une seule variable. Le paramètre λ est choisi de sorte que :

$$\lambda^{-b} t = 1. \quad (\text{B.8})$$

H se réécrit alors :

$$H = t^{h/b} H(t^{-a/b} x_0). \quad (\text{B.9})$$

H est alors uniquement fonction de la variable de similitude ξ telle que :

$$\xi = \frac{x_0}{t^\alpha}, \quad (\text{B.10})$$

où α est la constante qui apparaît dans la définition des conditions aux limites et qui s'exprime en fonction de n , sa valeur est donc $\alpha = a/b$. Pour ce choix de λ , les expressions suivantes pour ρ , v , T et φ sont obtenues :

$$\begin{aligned} \rho &= t^{d/b} G(\xi), \\ v &= t^{c/b} V(\xi), \\ T &= t^{e/b} \Theta(\xi), \\ \varphi &= t^{f/b} \Phi(\xi). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Les quantités V , G , Θ et Φ sont appelées les fonctions de forme ou fonctions réduites.

Annexe C

Schéma semi-implicite d'ordre 2 à trois étapes

Ce schéma permet de résoudre des problèmes du premier ordre s'écrivant sous la forme :

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathcal{F}(\vec{y}, t) + \mathcal{G}(\vec{y}, t), \quad (\text{C.1})$$

où $\mathcal{F}$ désigne les termes traités explicitement et $\mathcal{G}$ les termes traités implicitement.

Un schéma de Runge–Kutta d'ordre 2 à trois étapes (noté ici RK3) dans sa formulation à faible encombrement de mémoire (Williamson, 1980; Renaud, 1996) est utilisé pour résoudre (C.1) (Canuto et Quarteroni, 1985; Canuto *et al.*, 1988). Le schéma de Runge–Kutta semi implicite d'ordre deux (Gear, 1971) est utilisé sous la forme (Renaud, 1996) :

$$\begin{aligned} q_1 &= \Delta t_p \mathcal{F}(y_p, t_p), \\ y_1 &= y_p + \frac{1}{3} q_1 + \frac{1}{6} \Delta t_p \left(\mathcal{G}(y_p, t_p) + \mathcal{G}\left(y_p, t_p + \frac{1}{3} \Delta t_p\right) \right), \\ q_2 &= \Delta t_p \mathcal{F}\left(y_1, t_p + \frac{1}{3} \Delta t_p\right) - \frac{5}{9} q_1, \\ y_2 &= y_1 + \frac{15}{16} q_2 + \frac{5}{24} \Delta t_p \left(\mathcal{G}\left(y_1, t_p + \frac{1}{3} \Delta t_p\right) + \mathcal{G}\left(y_2, t_p + \frac{3}{4} \Delta t_p\right) \right), \\ q_3 &= \Delta t_p \mathcal{F}\left(y_2, t_p + \frac{3}{4} \Delta t_p\right) - \frac{153}{128} q_2, \\ y_{n+1} &= y_2 + \frac{8}{15} q_3 + \frac{1}{8} \Delta t_p \left(\mathcal{G}\left(y_2, t_p + \frac{3}{4} \Delta t_p\right) + \mathcal{G}(y_{p+1}, t_{p+1}) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

où y_p désigne la valeur de y à l'instant $t_p = p \Delta t_p$. Au cours de ce travail de thèse, lorsqu'une étape quelconque du schéma est utilisée, l'indice utilisé pour la désigner est r .

Annexe D

Relations de Rankine–Hugoniot

D.1 Perturbation d’une relation de saut sur une surface perturbée

Une relation de saut le long d’une surface perturbée d’équation $x_1 = \eta_\epsilon(x_2)$ s’écrit :

$$[f]_{\eta_\epsilon}^{\eta_\epsilon^+} = 0. \quad (\text{D.1})$$

À l’ordre zéro des perturbations, cette équation se simplifie :

$$\bar{f}_+ = \bar{f}_-, \quad (\text{D.2})$$

avec $\bar{f}_+$ (respectivement $\bar{f}_-$) qui est la valeur de $\bar{f}$ en $\bar{\eta}_+$ (respectivement $\bar{\eta}_-$). Au premier ordre des perturbations, (D.1) devient :

$$f_+ + \vec{\eta} \cdot (\vec{\nabla}_x \bar{f})_+ = f_- + \vec{\eta} \cdot (\vec{\nabla}_x \bar{f})_- . \quad (\text{D.3})$$

D.2 Relations de Rankine–Hugoniot

Les relations de Rankine–Hugoniot traduisent les relations de continuité de la masse, de la quantité de mouvement et de l’énergie au niveau d’une discontinuité de l’écoulement :

$$\begin{aligned} [\rho u_a n_a]_-^+ &= 0, \\ [(\rho v_b u_a - p \delta_{ba}) n_a]_-^+ &= 0, \\ \left[\left(\rho \left(\epsilon + \frac{v_c^2}{2} \right) u_a - p v_a - \varphi_a \right) n_a \right]_-^+ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

avec $\vec{n}$ le vecteur unitaire représentant la direction normale au choc, $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ la vitesse du front de choc par rapport à la matière, $\vec{w}$ la vitesse du front dans le référentiel choisi. Les indices a, b et c correspondent aux composantes spatiales avec la convention d’Einstein pour les indices répétés. Enfin, les indices « $-$ » et « $+$ » indiquent respectivement les quantités en aval et en amont du choc. Les relations de Rankine–Hugoniot linéarisées, le plus souvent en l’absence de flux de chaleur, sont proposées dans de nombreux travaux.

D.3 Relations de Rankine–Hugoniot dans le cadre de notre étude

En considérant un écoulement de base unidimensionnel dans la direction x et le caractère isotherme du choc présent dans l'écoulement, les relations de Rankine–Hugoniot s'écrivent à l'ordre zéro :

$$\begin{aligned} [\bar{\rho} \bar{u}_x]_-^+ &= 0, \\ [\bar{\rho} \bar{u}_x \bar{v}_x - \bar{p}]_-^+ &= 0, \\ \left[\left(\frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{v}_x^2 \right) \bar{u}_x - \bar{p} \bar{v}_x \right]_-^+ + [\bar{\varphi}_x]_-^+ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

avec $\bar{u}_x = \bar{w}_x - \bar{v}_x$.

D.4 Linéarisation des relations de Rankine–Hugoniot perturbées

Formulation en variable de Lagrange : en remplaçant les vitesses tangentielles par le taux de dilatation transverse $d_\perp (= \Delta_\perp \cdot \vec{v}_\perp)$, les relations de Rankine–Hugoniot linéarisées s'écrivent, pour un mode de Fourier transverse des perturbations :

$$\begin{aligned} [\hat{\rho} \bar{u}_x + \bar{\rho} \hat{u}_x + \bar{\rho} \eta \partial_m (\bar{\rho} \bar{u}_x)]_-^+ &= 0, \\ [\bar{\rho} \bar{v}_x \hat{u}_x + \bar{\rho} \hat{v}_x \bar{u}_x + \hat{\rho} \bar{v}_x \bar{u}_x - \hat{p} + \bar{\rho} \eta \partial_m (\bar{\rho} \bar{v}_x \bar{u}_x - \bar{p})]_-^+ &= 0, \\ [\hat{d}_\perp - k_\perp^2 \eta \bar{v}_x]_-^+ &= 0, \\ \left[\left(\frac{\hat{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \hat{\rho} \bar{v}_x^2 + \bar{\rho} \bar{v}_x \hat{v}_x \right) \bar{u}_x + \left(\frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{v}_x^2 \right) \hat{u}_x - \bar{p} \hat{v}_x - \hat{p} \bar{v}_x \right. \\ \left. + \bar{\rho} \eta \partial_m \left(\left(\frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{v}_x^2 \right) \bar{u}_x - \bar{p} \bar{v}_x \right) \right]_-^+ + \bar{\varphi}_{x-} + \bar{\rho}_- \eta \partial_m \bar{\varphi}_{x-} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

avec m la variable de Lagrange. Les relations de saut linéarisées peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\hat{V}_- = \mathcal{M}_-^{-1} \left(\mathcal{M}_+ \hat{V}_+ + \mathcal{N} w_x + \mathcal{P} \eta - [\hat{\varphi}_x]_-^+ \vec{E}_4 \right). \quad (\text{D.7})$$

Les matrices $\mathcal{M}_+$ et $\mathcal{M}_-^{-1}$ se déduisent des expressions :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \bar{u}_x & -\bar{\rho} & 0 & 0 \\ \bar{v}_x \bar{u}_x & \bar{\rho} (\bar{u}_x - \bar{v}_x) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\bar{v}_x^2 \bar{u}_x}{2} & \bar{\rho} \bar{v}_x \left(\bar{u}_x - \frac{\bar{v}_x^2}{2} \right) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \bar{p} & 0 & \frac{\bar{w}_x - \gamma \bar{v}_x}{\gamma - 1} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.8})$$

et :

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & 0 & m_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & 0 & m_{44} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.9})$$

avec :

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{2\gamma\bar{p} - \bar{\rho}\bar{v}_x^2(\gamma-1) - 2\bar{\rho}\bar{u}_x(\bar{u}_x - \bar{v}_x)}{2\bar{u}_x\mathcal{Q}}, \\
m_{12} &= \frac{\bar{\rho}((\gamma-1)\bar{v}_x - \bar{u}_x)}{\bar{u}_x\mathcal{Q}}, \\
m_{14} &= \frac{\bar{\rho}(1-\gamma)}{\bar{u}_x\mathcal{Q}}, \\
m_{21} &= \frac{\bar{v}_x((1-\gamma)\bar{v}_x + 2\bar{u}_x)}{2\mathcal{Q}}, \\
m_{22} &= \frac{\bar{v}_x(\gamma-1) - \bar{u}_x}{\mathcal{Q}}, \\
m_{24} &= \frac{1-\gamma}{\mathcal{Q}}, \\
m_{41} &= \frac{\bar{v}_x(2\gamma\bar{p} - \bar{\rho}\bar{v}_x\bar{u}_x(\gamma-1))}{2\mathcal{Q}}, \\
m_{42} &= \frac{\bar{\rho}\bar{v}_x\bar{u}_x(\gamma-1) - \gamma\bar{p}}{\mathcal{Q}}, \\
m_{44} &= \frac{\bar{\rho}\bar{u}_x(1-\gamma)}{\mathcal{Q}},
\end{aligned} \tag{D.10}$$

avec $\mathcal{Q} = -\bar{\rho}\bar{u}_x^2 + \gamma\bar{p}$. Les expressions des vecteurs $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$ sont :

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_+ - \bar{\rho}_- \\ [\bar{\rho}\bar{v}_x]_-^+ \\ 0 \\ \left[\frac{\bar{p}}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{v}_x^2\right]_-^+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} [\bar{\rho}\mathcal{X}]_-^+ \\ [\bar{\rho}\mathcal{Y}]_-^+ \\ -k_\perp^2 [\bar{v}_x]_-^+ \\ [\bar{\rho}\mathcal{Z}]_-^+ \end{pmatrix}, \tag{D.11}$$

où les quantités $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ sont les sauts de dérivées par rapport à la coordonnée de Lagrange m au niveau du choc isotherme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} &= \partial_m [\bar{\rho}\bar{u}_x], \\
\mathcal{Y} &= \partial_m [\bar{\rho}\bar{v}_x\bar{u}_x - \bar{p}], \\
\mathcal{Z} &= \partial_m \left[\bar{\rho} \left(\frac{\bar{T}}{\gamma-1} + \frac{\bar{v}_x^2}{2} \right) \bar{u}_x - \bar{p}\bar{v}_x - \bar{\varphi}_x \right].
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Formulation en variable autosemblable : les relations de saut linéarisées peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\widehat{\mathbf{V}}_{\xi,-} = \mathbf{M}_-^{-1} \left(\mathbf{M}_+ \widehat{\mathbf{V}}_{\xi,+} + \mathbf{N} \widehat{\mathbf{W}} + \mathbf{P} \widehat{\eta} - [\widehat{\Phi}]_-^+ \vec{E}_4 \right). \tag{D.13}$$

Les matrices $\mathbf{M}_-^{-1}$ et $\mathbf{M}_+$ se déduisent des expressions :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} t^{\alpha-1} \bar{U}_x & -\bar{G} & 0 & 0 \\ t^{2(\alpha-1)} \bar{V}_x \bar{U}_x & t^{\alpha-1} \bar{G} (\bar{U}_x - \bar{V}_x) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^{3(\alpha-1)} \left(\frac{\bar{U}_x \bar{V}_x^2}{2} \right) & t^{2(\alpha-1)} \left(\bar{G} \bar{V}_x \left(\bar{U}_x - \frac{\bar{V}_x}{2} \right) - \frac{\gamma}{\gamma-1} \bar{P} \right) & 0 & t^{\alpha-1} \frac{\bar{W}_x - \gamma \bar{V}_x}{\gamma-1} \end{pmatrix}, \tag{D.14}$$

et :

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} t^{1-\alpha} m_{11} & t^{2(1-\alpha)} m_{12} & 0 & t^{3(1-\alpha)} m_{14} \\ m_{21} & t^{1-\alpha} m_{22} & 0 & t^{2(1-\alpha)} m_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^{\alpha-1} m_{41} & m_{42} & 0 & t^{1-\alpha} m_{44} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.15})$$

avec :

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{2\gamma \bar{P} - \bar{G} \bar{V}_x^2 (\gamma - 1) - 2\bar{G} \bar{U}_x (\bar{U}_x - \bar{V}_x)}{2\bar{U}_x \mathcal{Q}_\xi}, \\ m_{12} &= \frac{\bar{G} ((\gamma - 1) \bar{V}_x - \bar{U}_x)}{\bar{U}_x \mathcal{Q}_\xi}, \\ m_{14} &= \frac{\bar{G} (1 - \gamma)}{\bar{U}_x \mathcal{Q}_\xi}, \\ m_{21} &= \frac{\bar{V}_x ((1 - \gamma) \bar{V}_x + 2\bar{U}_x)}{2\mathcal{Q}_\xi}, \\ m_{22} &= \frac{\bar{V}_x (\gamma - 1) - \bar{U}_x}{\mathcal{Q}_\xi}, \\ m_{24} &= \frac{1 - \gamma}{\mathcal{Q}_\xi}, \\ m_{41} &= \frac{\bar{V}_x (2\gamma \bar{P} - \bar{G} \bar{V}_x \bar{U}_x (\gamma - 1))}{2\mathcal{Q}_\xi}, \\ m_{42} &= \frac{\bar{G} \bar{U}_x \bar{V}_x (\gamma - 1) - \gamma \bar{P}}{\mathcal{Q}_\xi}, \\ m_{44} &= \frac{\bar{G} \bar{U}_x (1 - \gamma)}{\mathcal{Q}_\xi}, \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

et avec $\mathcal{Q}_\xi = -\bar{G} \bar{U}_x^2 + \gamma \bar{P}$. Les expressions des vecteurs $\mathbf{N}$ et $\mathbf{P}$ sont :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \bar{G}_+ - \bar{G}_- \\ t^{\alpha-1} [\bar{G} \bar{V}_x]_-^+ \\ 0 \\ t^{2(\alpha-1)} \left[\frac{\bar{P}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \bar{G} \bar{V}_x^2 \right]_-^+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} t^{-1} [\bar{G} \mathcal{X}_\xi]_-^+ \\ t^{\alpha-2} [\bar{G} \mathcal{Y}_\xi]_-^+ \\ -t^{\alpha-1} k_\perp^2 [\bar{V}_x]_-^+ \\ t^{2\alpha-3} [\bar{G} \mathcal{Z}_\xi]_-^+ \end{pmatrix} \quad (\text{D.17})$$

où les quantités $\mathcal{X}_\xi$, $\mathcal{Y}_\xi$ et $\mathcal{Z}_\xi$ sont les sauts de dérivées des grandeurs non perturbées suivantes au niveau du choc isotherme :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\xi &= d_\xi [\bar{G} \bar{U}_x], \\ \mathcal{Y}_\xi &= d_\xi [\bar{G} \bar{V}_x \bar{U}_x - \bar{P}], \\ \mathcal{Z}_\xi &= d_\xi \left[\bar{G} \left(\frac{\bar{\Theta}}{\gamma-1} + \frac{\bar{V}_x^2}{2} \right) \bar{U}_x - \bar{P} \bar{V}_x - \bar{\Phi}_x \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Formulation autosemblable dans le cas d'un front thermique : le cas particulier d'un front thermique pénétrant dans un milieu au repos implique la nullité des quantités et de leurs dérivées en amont de ce front. Par conséquent, l'expression (D.13) devient :

$$\widehat{\mathbf{V}}_{\xi,-}^{\text{ft}} = \mathbf{M}_{-}^{\text{ft}-1} \left(\mathbf{N}^{\text{ft}} \widehat{\mathbf{W}} + \mathbf{P}^{\text{ft}} \widehat{\boldsymbol{\eta}} - [\widehat{\Phi}]_- \vec{E}_4 \right). \quad (\text{D.19})$$

Les matrices $\mathbf{M}_{-}^{\text{ft}-1}$ et $\mathbf{M}_{+}^{\text{ft}}$ sont définies par les relations énoncées en (D.14), (D.15) et (D.16). En revanche, les expressions des matrices $\mathbf{N}^{\text{ft}}$ et $\mathbf{P}^{\text{ft}}$ sont propres à la configuration avec front thermique et s'écrivent :

$$\mathbf{N}^{\text{ft}} = \begin{pmatrix} -\overline{G}_{-} \\ t^{\alpha-1} [\overline{G} \overline{V}_x]_{-} \\ 0 \\ t^{2(\alpha-1)} \left[\frac{\overline{P}}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \overline{G} \overline{V}_x^2 \right]_{-} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}^{\text{ft}} = \begin{pmatrix} t^{-1} [\overline{G} \mathcal{X}_{\xi}]_{-} \\ t^{\alpha-2} [\overline{G} \mathcal{Y}_{\xi}]_{-} \\ -t^{\alpha-1} k_{\perp}^2 [\overline{V}_x]_{-} \\ t^{2\alpha-3} [\overline{G} \mathcal{Z}_{\xi}]_{-} \end{pmatrix} \quad (\text{D.20})$$

avec les quantités $\mathcal{X}_{\xi}$, $\mathcal{Y}_{\xi}$ et $\mathcal{Z}_{\xi}$ définies par les relations (D.18).

D.5 Dissociation des termes temporels et spatiaux

Dans cette partie, nous nous concentrons sur les relations de Rankine–Hugoniot dans le cas d'un choc isotherme. Lors du traitement des conditions aux limites sur la zone aval de l'écoulement, au niveau de l'onde de choc, les valeurs $\widehat{\mathbf{V}}_{\xi,-}$ ainsi que leurs dérivées temporelles apparaissent dans les définitions des termes $\mathcal{L}_i^*$ utilisés lors de l'application de la méthode de Thompson. Il est utile de dissocier les termes dépendant du temps de ceux dépendant de la variable de similitude ξ dans l'équation (D.13). On introduit donc les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_N &= \begin{pmatrix} t^{1-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{\alpha-1} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}_P &= t^{-1} \mathbf{T}_N, \\ \mathbf{T}_{\Phi_x} &= t^{2(1-\alpha)} \mathbf{T}_N. \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

Expression de la dérivée temporelle de l'équation (D.13) : la dérivée temporelle de l'équation (D.13) s'écrit :

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{V}_{\xi} &= d_t \left(\mathbf{M}_{-}^{-1} \mathbf{M}_{+} \widehat{\mathbf{V}}_{\xi,+} \right) + \mathbf{T}_N \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \mathbf{N}_{\xi} \ddot{\eta} \\ &+ \left(\mathbf{T}_P \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \mathbf{P}_{\xi} + \dot{\mathbf{T}}_N \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \mathbf{N}_{\xi} \right) \dot{\eta} + \dot{\mathbf{T}}_P \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \mathbf{P}_{\xi} \eta \\ &+ \mathbf{T}_{\Phi_x} \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \Phi_{x,-} \mathbf{E}_4 + \dot{\mathbf{T}}_{\Phi_x} \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \Phi_{x,-} \mathbf{E}_4, \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

avec les matrices $\mathbf{M}_{\xi}$, $\mathbf{M}_{\xi}^{-1}$, $\mathbf{N}_{\xi}$ et $\mathbf{P}_{\xi}$ ne dépendant que de ξ et se déduisant respectivement des expressions de $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^{-1}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{M}_{\xi} = \begin{pmatrix} \overline{U}_x & -\overline{G} & 0 & 0 \\ \overline{V}_x \overline{U}_x & \overline{G} (\overline{U}_x - \overline{V}_x) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\overline{U}_x \overline{V}_x^2}{2} & \overline{G} \overline{V}_x \left(\overline{U}_x - \frac{\overline{V}_x}{2} \right) - \frac{\gamma}{\gamma-1} \overline{P} & 0 & \frac{\overline{W}_x - \gamma \overline{V}_x}{\gamma-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.23})$$

et :

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & 0 & m_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & 0 & m_{44} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.24})$$

où les coefficients $m_{j\,k}$ sont donnés par (D.16). Les matrices $\mathbf{N}_\xi$ et $\mathbf{P}_\xi$ ont pour expression :

$$\mathbf{N}_\xi = \begin{pmatrix} \overline{G}_+ - \overline{G}_- \\ [\overline{G}\overline{V}_x]_-^+ \\ 0 \\ \left[\frac{\overline{P}}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\overline{G}\overline{V}_x^2 \right]_-^+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_\xi = \begin{pmatrix} [\overline{G}\mathcal{X}_\xi]_-^+ \\ [\overline{G}\mathcal{Y}_\xi]_-^+ \\ -k_\perp^2 [\overline{V}_x]_-^+ \\ [\overline{G}\mathcal{Z}_\xi]_-^+ \end{pmatrix} \quad (\text{D.25})$$

dans lesquelles $\mathcal{X}_\xi, \mathcal{Y}_\xi$ et $\mathcal{Z}_\xi$ sont données par (D.18).

Expression des coefficients $\mathcal{K}$ de l'équation : les coefficients $\mathcal{K}_{\ddot{\eta}}, \mathcal{K}_{\dot{\eta}}, \mathcal{K}_\eta, \mathcal{K}_{\dot{\Phi}_x}$ et $\mathcal{K}_{\Phi_x}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\ddot{\eta}} &= \mathbf{T}_N \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \mathbf{N}_\xi, \\ \mathcal{K}_{\dot{\eta}} &= \dot{\mathbf{T}}_N \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \mathbf{N}_\xi + \mathbf{T}_P \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \mathbf{P}_\xi, \\ \mathcal{K}_\eta &= \mathbf{T}_P \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \mathbf{P}_\xi, \\ \mathcal{K}_{\dot{\Phi}_x} &= \mathbf{T}_{\Phi_x} \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \mathbf{E}_4, \\ \mathcal{K}_{\Phi_x} &= \dot{\mathbf{T}}_{\Phi_x} \mathbf{M}_{\xi,-}^{-1} \mathbf{E}_4, \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

où les matrices $\mathbf{M}_\xi$ et $\mathbf{M}_\xi^{-1}$ et les vecteurs $\mathbf{N}_\xi$ et $\mathbf{P}_\xi$ sont donnés dans le paragraphe précédent.

Annexe E

Contrainte de stabilité du schéma RK3 en coordonnée de Lagrange

Pour raisonner dans le système de coordonnées (m, y, z, t) , les équations sont réécrites dans le cas d'un mouvement unidimensionnel dans la direction x . Les équations de départ pour l'analyse dans le repère (m, y, z, t) sont toujours celles du système (5.23). La partie hyperbolique de ces équations est équivalente au système suivant, plus approprié à l'étude incluant la coordonnée de Lagrange :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \rho (\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) + \nabla p = \vec{0}, \\ \partial_t p + \vec{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{v} = 0. \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Ce système va devoir être adapté aux coordonnées du système $(\bar{m}, y, z, t)$. Pour cela, les formules de changement de variable (A.1) vont être utilisées. De même que pour l'étude en coordonnées cartésiennes, les trois équations seront traitées séparément. Les équations d'évolution selon la direction y et selon la direction z sont indépendantes l'une de l'autre, il est donc possible de se ramener à une équation scalaire pour une composante transverse de la vitesse, direction notée arbitrairement y .

E.1 Conservation de la masse

On perturbe l'équation de conservation de la masse issue du système en variable de Lagrange (2.8), on retire les termes de l'équation satisfaite par les quantités de base et, enfin, on linéarise pour obtenir :

$$\partial_t \hat{\rho} + \bar{\rho}^2 \partial_m \hat{v}_x + \bar{\rho} (\hat{v}_x \partial_m \bar{\rho} + \hat{\rho} \partial_m \bar{v}_x + \partial_y \hat{v}_y) = 0. \quad (\text{E.2})$$

E.2 Conservation de la quantité de mouvement

Pour cette partie, il est nécessaire de séparer les contributions en deux afin de traiter séparément la partie longitudinale et la partie transversale. L'équation de départ est, comme pour la conservation de la masse, issue de (5.23).

E.2.1 Partie longitudinale

En perturbant l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.23), en enlevant les termes de l'équation satisfaite par les quantités de base et en faisant en sorte de faire apparaître le coefficient unité devant la dérivée temporelle, on arrive à :

$$\partial_t \hat{v}_x + \partial_m \hat{p} - \bar{\rho}^{-1} \hat{\rho} \partial_m \bar{p} + \bar{\rho} \hat{v}_x \partial_m \bar{v}_x = 0. \quad (\text{E.3})$$

E.2.2 Partie transversale

Les mêmes manipulations sont appliquées à la composante transversale de la conservation de la quantité de mouvement pour obtenir :

$$\partial_t \hat{v}_y + \bar{\rho}^{-1} \partial_y \hat{p} = 0. \quad (\text{E.4})$$

E.3 Équation d'évolution de la pression

Enfin, l'équation d'évolution de la pression, soumise à un traitement identique, devient :

$$\partial_t \hat{p} + \gamma \bar{p} (\bar{\rho} \partial_m \hat{v}_x + \partial_y \hat{v}_y) + \bar{\rho} (\hat{v}_x \partial_m \bar{p} + \gamma \hat{p} \partial_m \bar{v}_x) = 0. \quad (\text{E.5})$$

E.4 Sous-système hyperbolique

Pour le sous-système hyperbolique en coordonnées du système (m, y, z, t) , toutes les informations nécessaires sont désormais disponibles et nous pouvons écrire le système aux perturbations :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\rho} + \bar{\rho}^2 \partial_m \hat{v}_x + \bar{\rho} (\hat{v}_x \partial_m \bar{\rho} + \hat{\rho} \partial_m \bar{v}_x + \partial_y \hat{v}_y) = 0, \\ \partial_t \hat{v}_x + \partial_m \hat{p} - \bar{\rho}^{-1} \hat{\rho} \partial_m \bar{p} + \bar{\rho} \hat{v}_x \partial_m \bar{v}_x = 0, \\ \partial_t \hat{v}_y + \bar{\rho}^{-1} \partial_y \hat{p} = 0, \\ \partial_t \hat{p} + \gamma \bar{p} (\bar{\rho} \partial_m \hat{v}_x + \partial_y \hat{v}_y) + \bar{\rho} (\hat{v}_x \partial_m \bar{p} + \gamma \hat{p} \partial_m \bar{v}_x) = 0. \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

Et donc, le système à résoudre est, avec $\hat{\mathbf{V}} = (\hat{\rho} \ \hat{v}_x \ \hat{v}_y \ \hat{p})$:

$$\partial_t \hat{\mathbf{V}} + \mathbf{A}_m \partial_m \hat{\mathbf{V}} + \mathbf{A}_{ym} \partial_y \hat{\mathbf{V}} + \mathbf{B}_m \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0}, \quad \text{avec :} \quad (\text{E.7})$$

$$\mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\rho}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \bar{p} \bar{\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{ym} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\rho}^{-1} \\ 0 & 0 & \bar{p} \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \mathbf{B}_m = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \partial_m \bar{v}_x & \bar{\rho} \partial_m \bar{p} & 0 & 0 \\ \bar{\rho}^{-1} \partial_m \bar{p} & \bar{\rho} \partial_m \bar{v}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \partial_m \bar{p} & 0 & \gamma \bar{\rho} \partial_m \bar{v}_x \end{pmatrix}.$$

Le calcul des valeurs propres de $\mathbf{A}_m$ nous donne : $(0 \ 0 \ -\bar{\rho} \bar{c} \ \bar{\rho} \bar{c})$, tandis que celui de $\mathbf{A}_{ym}$ donne $(0 \ 0 \ -\bar{c} \ \bar{c})$. Les différences entre ce système matriciel et celui de l'étude en coordonnées cartésiennes (5.29) sont claires :

- les termes diagonaux de la matrice $\mathbf{A}_m$ sont nuls ;
- il y a un facteur $\bar{\rho}$ entre $\mathbf{A}_m$ et $\mathbf{A}_x$ qui n'apparaît pas entre les deux matrices $\mathbf{A}_y$.

La vitesse d'advection est donc nulle et le terme dépendant de la vitesse du son c est scindé en deux parties, transversale et longitudinale, différenciées par un facteur $\bar{\rho}$.

E.5 Partie liée à la dynamique des gaz

Une fois encore, on s'appuie sur la formule (5.31). On exprime la contribution de la partie hyperbolique à l'expression du pas de temps critique dans le système de coordonnées (m, y, z, t) , avec g_i la transformation de coordonnées utilisée :

$$\Delta t_{c,\text{hyp}} = \alpha_{\text{CFL}} \min_i \left(\sqrt{(\bar{\rho}_i \bar{c}_i)^2 \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C g'_i} \right)^2 + \bar{c}_i^2 \left(\frac{N_y}{2 L_y K_A^F} \right)^2} \right)^{-1}. \quad (\text{E.8})$$

En utilisant le nombre d'onde transverse défini en (5.32), cette expression du pas de temps critique devient :

$$\Delta t_{c,\text{hyp}} = \alpha_{\text{CFL}} \min_i \left(\sqrt{(\bar{\rho}_i \bar{c}_i)^2 \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C g'_i} \right)^2 + \bar{c}_i^2 \left(\frac{k_\perp}{2 \pi K_A^F} \right)^2} \right)^{-1}. \quad (\text{E.9})$$

Dans l'hypothèse où les points traités sont ceux de Gauss-Lobatto, il faut alors remplacer g_i par l'identité.

E.6 Partie diffusive

En formulation lagrangienne, et avec les manipulations détaillées lors de leur application aux équations de conservation, les quantités φ_x et $\varphi_\perp$ deviennent :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_x &= - \left(\bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n \partial_m \hat{T} + (\text{n} \bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^{n-1} \hat{T} + (\text{m} + 1) \bar{\rho}^m \bar{T}^n \hat{\rho}) \partial_m \bar{T} \right), \\ \hat{\varphi}_y &= - \bar{\rho}^m \bar{T}^n \partial_y \hat{T}. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

On dérive ensuite dans l'espace ces quantités afin de pouvoir écrire :

$$\begin{aligned} \partial_m \hat{\varphi}_x &= - \bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n \partial_{m^2}^2 \hat{T} - [\partial_m (\bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n) - \text{n} \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T}}] \partial_m \hat{T} \\ &\quad + (\text{m} + 1) \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \partial_m \hat{\rho} + \text{n} \partial_m \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T}} \right) \hat{T} + (\text{m} + 1) \partial_m \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \right) \hat{\rho}, \\ \partial_y \hat{\varphi}_y &= - \bar{\rho}^m \bar{T}^n \partial_{y^2}^2 \hat{T}. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

On perturbe l'équation d'évolution de la température, on développe, on retire les termes de l'équation satisfaite par l'écoulement de base et enfin, on linéarise pour obtenir :

$$\partial_t \hat{T} = - \bar{\rho} \hat{v}_x \partial_m \bar{T} - C_v^{-1} \partial_m \hat{\varphi}_x - \frac{1}{\bar{\rho} C_v} \partial_y \hat{\varphi}_y. \quad (\text{E.12})$$

En combinant (E.12) et (E.11), on trouve :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{T} - A_{\text{parab}} \left[\bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n \partial_{m^2}^2 \hat{T} + \bar{\rho}^{m-1} \bar{T}^n \partial_{y^2}^2 \hat{T} \right. \\ \left. + \left[\partial_m (\bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n) - \text{n} \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T}} \right] \partial_m \hat{T} - (\text{m} + 1) \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \partial_m \hat{\rho} \right. \\ \left. - \text{n} \partial_m \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T}} \right) \hat{T} - (\text{m} + 1) \partial_m \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \right) \hat{\rho} \right] + \bar{\rho} \hat{v}_x \partial_m \bar{T} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

avec A_{parab} qui vaut $1/C_v$. En utilisant une transformation de coordonnées g de la même manière que pour le système de coordonnées (x, y, z, t) avec $m = g(\eta)$, on obtient les formules équivalentes à (5.39). L'équation (E.13) devient alors :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{T} - A_{\text{parab}} & \left[\frac{1}{g'^2} \bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n \partial_{\eta^2}^2 \hat{T} \right. \\ & + [\mathcal{W}_{\text{adv},m,g}] \frac{1}{g'} \partial_{\eta} \hat{T} - (m+1) \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \frac{1}{g'} \partial_{\eta} \hat{\rho} \\ & \left. - n \partial_m \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T}} \right) \hat{T} - (m+1) \partial_m \left(\frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{\rho}} \right) \hat{\rho} + \bar{\rho}^{m-1} \bar{T}^n \partial_{y^2}^2 \hat{T} \right] + \bar{\rho} \hat{v}_x \partial_m \bar{T} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Cette formulation nous donne le coefficient multiplicateur des termes diffusifs et on se rend compte que, comme pour la partie hyperbolique, les directions longitudinale et transversale présentent des différences. On définit donc, pour différencier les deux directions, $M_{\text{diff},m}$ et $M_{\text{diff},\perp}$ qui valent respectivement :

$$\begin{aligned} M_{\text{diff},m} &= -\frac{1}{C_v} \bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n, \\ M_{\text{diff},\perp} &= -\frac{1}{C_v} \bar{\rho}^{m-1} \bar{T}^n. \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Comme lors de l'étude en coordonnées cartésiennes, le terme facteur de $\partial_{\eta} T$, à savoir :

$$\mathcal{W}_{\text{adv},m,g} = -A_{\text{parab}} \left[\frac{1}{g'} d_{\xi}(\bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n) - n \frac{\bar{\varphi}_x}{\bar{T}} \frac{1}{g'} - \bar{\rho}^{m+1} \bar{T}^n \frac{g''}{g'^3} \right], \quad (\text{E.16})$$

doit être pris en compte, y compris dans le cas où la partie diffusive de l'expression du pas de temps critique est ignorée. La vitesse d'advection liée à la partie hyperbolique étant nulle, dans ce système de coordonnées, la seule vitesse d'advection à contraindre le système est celle issue de l'équation d'advection/diffusion d'évolution de la température. Par analogie avec l'étude en coordonnées cartésiennes, nous utilisons une vitesse d'advection égale à $0 + \frac{1}{2} \mathcal{W}_{\text{adv},m,g}$ et une célérité qui vaut :

$$\text{Célérité} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \mathcal{W}_{\text{adv},m,g} \right)^2 + (\bar{\rho} \bar{c})^2}.$$

L'expression du pas de temps critique est donc :

$$\begin{aligned} \Delta t_c &= \alpha_{\text{CFL}} \min_i \left(\left| \frac{\mathcal{W}_{\text{adv},m,g_i}}{2} \right| \frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \right. \\ & + \sqrt{\left\{ \left(\frac{\mathcal{W}_{\text{adv},m,g_i}}{2} \right)^2 + \frac{(\bar{\rho}_i \bar{c}_i)^2}{g_i'^2} \right\} \left(\frac{N_x^2}{K_{A/D}^C} \right)^2 + \bar{c}_i^2 \left(\frac{k_{\perp}}{2\pi K_A^F} \right)^2} \\ & \left. + \tau M_{\text{diff},m_i} \left[\frac{N_x^4}{K_{D/D}^C g_i'^2} \right] + \tau M_{\text{diff},\perp_i} \left[\frac{k_{\perp}^2}{K_D^F \pi^2} \right] \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Dans le cas où l'étude porte sur les points de Gauss-Lobatto, la transformation de coordonnées g_i est remplacée par l'identité.

Annexe F

Détermination des constantes présentes dans la formulation du pas de temps critique

L'expression du pas de temps critique que nous utilisons met en jeu les coefficients K_A^F , K_D^F , $K_{D/D}^C$ et $K_{A/D}^C$ que nous allons expliciter ici, grâce à l'étude de cas simples (Gauthier, 2011).

F.1 Équation d'advection, discrétisation de Fourier

Soit l'équation d'advection hyperbolique linéaire du premier ordre :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{F.1})$$

En posant $\lambda = i k c$, la condition de stabilité (5.14) pour le schéma RK3 s'écrit :

$$\left| 1 - \lambda \Delta t + \frac{1}{2} (\lambda \Delta t)^2 - \frac{1}{6} (\lambda \Delta t)^3 \right|^2 \leq 1, \quad (\text{F.2})$$

c'est-à-dire :

$$1 + \frac{1}{12} (k c \Delta t)^4 \left(\frac{1}{3} (k c \Delta t)^2 - 1 \right) \leq 1. \quad (\text{F.3})$$

Il faut donc imposer :

$$\frac{1}{3} (k c \Delta t)^2 \leq 1, \quad \text{soit} \quad \Delta t \leq \frac{\sqrt{3}}{k_{max} c}. \quad (\text{F.4})$$

De plus, $\lambda_{min} = 2 \Delta x$ est la plus petite longueur d'onde qu'il est possible de représenter sur le maillage, avec $\Delta x = L/N_x$, où L est la longueur du domaine et N_x le nombre de points de collocation. On a donc :

$$k_{max} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}} = \frac{\pi}{\Delta x} = \frac{\pi}{L} N_x. \quad (\text{F.5})$$

La condition de stabilité (F.4) s'écrit donc :

$$\Delta t \leq \frac{1}{c} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{L}{N_x}, \quad \text{avec} \quad \frac{\sqrt{3}}{\pi} \simeq 0,551. \quad (\text{F.6})$$

Le coefficient K_A^F est défini tel que :

$$\Delta t \leq K_A^F \frac{1}{c} \frac{L}{N_x/2}, \quad (\text{F.7})$$

d'où :

$$K_A^F = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \simeq 0,2757. \quad (\text{F.8})$$

Avec cette formulation, $N_x/2$ est le nombre de modes.

F.2 Équation de diffusion, discrétisation de Fourier

L'équation de la chaleur parabolique s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (\text{F.9})$$

Si k est défini comme le nombre d'onde, les valeurs propres de l'opérateur de dérivation du second ordre pour une discrétisation de type Fourier sont de la forme $-k^2$. La condition de stabilité est donc celle énoncée en (5.15). D'après Gauthier (2011), la courbe représentant la fonction $f(\lambda) - 1$ s'annule pour $\lambda \Delta t_c \equiv C_{RK3} \simeq 2,51$, ce qui nous donne la condition de stabilité suivante :

$$\Delta t \leq \frac{C_{RK3}}{|\lambda|} = \frac{1}{\nu} \frac{C_{RK3}}{k_{max}^2}, \quad (\text{F.10})$$

où k_{max} est toujours celui défini en (F.5). On obtient donc :

$$\Delta t \leq \frac{K_D^F}{\nu} \frac{L^2}{(N_x/2)^2}, \quad \text{avec} \quad K_D^F = \frac{C_{RK3}}{4\pi^2} \simeq 0,0636. \quad (\text{F.11})$$

F.3 Équation d'advection, discrétisation de Chebyshev

Si on pose :

$$f(\lambda) = |1 - \lambda \Delta t + \frac{1}{2} (\lambda \Delta t)^2 - \frac{1}{6} (\lambda \Delta t)^3|^2 \leq 1, \quad (\text{F.12})$$

alors, la fonction $f(\lambda) - 1$ s'annule pour :

$$\begin{aligned} \lambda \Delta t &= C_{RK3}^1 = 1 - (4 + \sqrt{17})^{-1/3} + (4 + \sqrt{17})^{1/3}, \\ \text{ou} \quad \lambda \Delta t &= C_{RK3}^2 = \sqrt{3}. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Le critère de stabilité est, d'après Boudesocque-Dubois *et al.* (2003), de la forme :

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\widehat{\Re\lambda}}{C_{RK3}^1}\right)^2 + \left(\frac{\widehat{\Im\lambda}}{C_{RK3}^2}\right)^2}} = \Delta t_c, \quad (\text{F.14})$$

avec :

$$\widehat{\Re\lambda} = \max_j |\Re \lambda_j| = \max_j |c \Re d_j| = |c| \max_j |\Re d_j|, \quad (\text{F.15})$$

$$\widehat{\Im\lambda} = \max_j |\Im \lambda_j| = \max_j |c \Im d_j| = |c| \max_j |\Im d_j|. \quad (\text{F.16})$$

Or, d'après Boudesocque-Dubois *et al.* (2003), pour des conditions aux limites de type Dirichlet :

$$\begin{aligned} \max_j |\Re d_j| &\simeq \frac{2}{L} (N_x - 1)^2 \beta_{Dir}^R, \\ \max_j |\Im d_j| &\simeq \frac{2}{L} (N_x - 1)^2 \beta_{Dir}^I, \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

avec $\beta_{Dir}^R = 0,022$ et $\beta_{Dir}^I = 0.086$, et pour $N_x \gg 1$. Finalement :

$$\Delta t_c = \frac{L}{2(N-1)^2} \frac{1}{|c|} K_{A/D}^C, \quad (\text{F.18})$$

avec :

$$K_{A/D}^C = \frac{C_{RK3}^1 C_{RK3}^2}{((C_{RK3}^2 \beta_{Dir}^R)^2 + (C_{RK3}^1 \beta_{Dir}^I)^2)^{1/2}}. \quad (\text{F.19})$$

On a donc :

$$K_{A/D}^C = 9,917 \times 2 = 19,834. \quad (\text{F.20})$$

Il faut savoir que la valeur présente dans Gauthier (2011), à savoir $K_{A/D}^C = 7,398$, est calculée avec les équations purement scalaires, ce qui correspond à notre étude. Cependant la valeur $K_{A/D}^C = 9,917$, calculée à l'aide du système complet, nous permet de retrouver la valeur définie dans le travail de Budesocque-Dubois *et al.* (2003). Le facteur 2 vient du fait que la longueur, notée L dans notre cas, correspond en réalité à la demi-longueur $L/2$, ce facteur permet donc de prendre en compte la longueur exacte de l'écoulement dans notre calcul.

F.4 Équation de diffusion, discrétisation de Chebyshev

La condition de stabilité est toujours celle énoncée en (5.15). Comme précédemment, la courbe représentant la fonction $f(\lambda) - 1$ s'annule pour :

$$\lambda \Delta t_c \equiv K_D^C \simeq 2,51. \quad (\text{F.21})$$

La condition de stabilité peut donc s'écrire sous la forme :

$$\Delta t \leq \frac{K_D^C}{|\lambda|}. \quad (\text{F.22})$$

Pour des conditions aux limites de type Dirichlet, d'après Gauthier (2011), on obtient :

$$\Delta t \leq \frac{K_{D/D}^C}{n_z^4}, \quad \text{avec} \quad K_{D/D}^C = \frac{2,51}{0,047} \simeq 53,4. \quad (\text{F.23})$$

Annexe G

Méthode de Thompson dans le cas d'une perturbation de pression nulle à l'origine

Si la condition à l'origine est une condition de perturbation de pression nulle, la relation qui est appliquée est la suivante (8.2) :

$$\hat{P}(0, t) + t^{\alpha-2} \overline{G}(0) \hat{\eta}_0(t) d_\xi \overline{P}(0) = 0. \quad (\text{G.1})$$

Si on dérive par rapport au temps cette condition, on obtient :

$$\partial_t \hat{P}(0, t) = -(\alpha - 2) t^{\alpha-3} \overline{G}(0) \hat{\eta}_0(t) d_\xi \overline{P}(0) - t^{\alpha-2} \overline{G}(0) d_\xi \overline{P}(0) d_t \hat{\eta}_0(t). \quad (\text{G.2})$$

On utilise maintenant la condition cinématique, à savoir :

$$d_t \hat{\eta}_0(t) = \hat{V}_x(0, t) + t^{-1} d_\xi \overline{V}_x(0) \overline{G}(0) \hat{\eta}_0(t). \quad (\text{G.3})$$

L'utilisation de (G.3) dans (G.2) permet d'écrire :

$$\partial_t \hat{P}(0, t) = t^{\alpha-3} \left[\overline{G} d_\xi \overline{P} \left(-(\alpha - 2) \hat{\eta}_0 - t \hat{V}_x - \overline{G} d_\xi \overline{V}_x \hat{\eta}_0 \right) \right]_{\xi=0}. \quad (\text{G.4})$$

Or la dernière ligne du système (3.86) s'écrit :

$$\mathcal{L}_4^* = -\partial_t \hat{P} - \mathcal{L}_3 - t^{\alpha-2} \overline{G} d_\xi \overline{P} \hat{V}_x - \gamma t^{2(\alpha-1)} \overline{P} \hat{D}_\perp - \gamma t^{-1} \overline{G} d_\xi \overline{V}_x \hat{P}. \quad (\text{G.5})$$

En insérant l'expression de $\partial_t \hat{P}$ déterminée en (G.4) dans la relation (G.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^* = & -\mathcal{L}_3 - t^{\alpha-1} \left[\overline{G} d_\xi \overline{P} t^{-2} \left(-(2\alpha - 1) \hat{\eta}_0 - t \hat{V}_x - \overline{G} d_\xi \overline{V}_x \hat{\eta}_0 \right) + t^{-1} \overline{G} d_\xi \overline{P} \hat{V}_x \right. \\ & \left. + \gamma t^{2(\alpha-1)} \overline{P} \hat{D}_\perp + \gamma t^{-1} \overline{G} d_\xi \overline{V}_x \hat{P} \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

Cette expression de $\mathcal{L}_4^*$ est utile dans le cas de l'application de la méthode de Thompson en conduction radiative.

Annexe H

Solution exacte de translation pour $k_{\perp} = 0$

La définition de la solution exacte de translation pour $k_{\perp} = 0$, définie par une translation de l'écoulement de base (Fig. H.1), a été présentée par Vallet (2011) dans son rapport de stage. Nous reprenons ici cette partie dans laquelle la preuve que cette solution vérifie le système d'équations aux perturbations est apportée.

H.1 Solution exacte pour $k_{\perp} = 0$

Dans le cas où la longueur d'onde de la perturbation est infinie, soit pour $k_{\perp} = 0$, on peut vérifier que les fonctions suivantes sont solutions du problème aux perturbations :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\rho}(x, t; k_{\perp}) &= -\partial_x \bar{\rho} \delta x_0 = -t^{-\alpha} \bar{G}(\xi) \bar{G}'(\xi) \delta x_0, \\
 \widehat{v}_x(x, t; k_{\perp}) &= -\partial_x \bar{v}_x \delta x_0 = -t^{-1} \bar{G}(\xi) \bar{V}'_x(\xi) \delta x_0, \\
 \widehat{T}(x, t; k_{\perp}) &= -\partial_x \bar{T} \delta x_0 = -t^{\alpha-2} \bar{G}(\xi) \bar{\Theta}'(\xi) \delta x_0, \\
 \widehat{p}(x, t; k_{\perp}) &= -\partial_x \bar{p} \delta x_0 = -t^{\alpha-2} \bar{G}(\xi) \bar{P}'(\xi) \delta x_0, \\
 \widehat{\varphi}_x(x, t; k_{\perp}) &= -\partial_x \bar{\varphi}_x \delta x_0 = -t^{2\alpha-3} \bar{G}(\xi) \bar{\Phi}'_x(\xi) \delta x_0, \\
 \widehat{d}_{\perp}(x, t; k_{\perp}) &= 0, \\
 \widehat{\varphi}_{\perp}(x, t; k_{\perp}) &= 0,
 \end{aligned} \tag{H.1}$$

où δx_0 représente la valeur algébrique de la translation de l'écoulement de base (Fig. H.1).

H.2 Preuve

Tout d'abord nous remplaçons les quantités $\widehat{\rho}$ et $\widehat{v}_x$ dans le premier membre de l'équation de conservation de la masse perturbée (2.36) :

$$\partial_t \left(\frac{\widehat{\rho}}{\bar{\rho}} \right) + \partial_m (\bar{\rho} \widehat{v}_x) = -\delta x_0 \left[\partial_m \partial_t \bar{\rho} + \partial_m (\bar{\rho}^2 \partial_m \bar{v}_x) \right]. \tag{H.2}$$

En utilisant la première équation du système d'équations de l'écoulement de base (1.3) nous avons la relation suivante :

$$\partial_t \bar{\rho} = -\bar{\rho}^2 \partial_m \bar{v}_x. \tag{H.3}$$

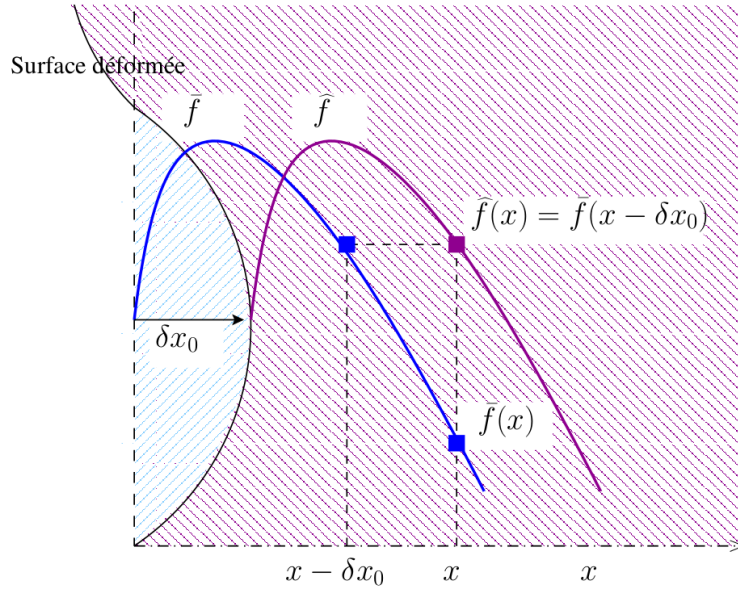


FIGURE H.1 – Représentation 2D, l’axe vertical étant l’axe des y , d’une déformation de l’écoulement de base qui est obtenue localement par translation longitudinale de la solution de base. Le long de chaque ligne $y = \text{cte}$, la perturbation, soit $\hat{f}(x) = \bar{f}(x - \delta x_0)$, conduit aux perturbations linéaires données par les expressions (H.1).

Nous remplaçons (H.3) dans (H.2) et nous retrouvons bien l’équation complète (2.36) :

$$\partial_t \left(\frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} \right) + \partial_m (\bar{\rho} \hat{v}_x) = -\delta x_0 \partial_m (\partial_t \bar{\rho} + \bar{\rho}^2 \partial_m \bar{v}_x) = 0 \quad (\text{H.4})$$

De même nous remplaçons les quantités $\hat{p}$ et $\hat{v}_x$ dans le premier membre de la seconde équation du système d’équations de l’écoulement perturbé (2.36) :

$$\partial_t \hat{v}_x + \bar{\rho} \hat{v}_x \partial_m \hat{v}_x + \partial_m \hat{p} - \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} \partial_m \bar{p} = -\delta x_0 [\partial_t (\bar{\rho} \partial_m \hat{v}_x) + \bar{\rho}^2 \partial_m \hat{v}_x \partial_m (\bar{\rho} \partial_m \bar{p}) - \partial_m \bar{\rho} \partial_m \bar{p}]. \quad (\text{H.5})$$

Nous utilisons la seconde équation du système d’équations de l’écoulement de base (1.3) et obtenons la relation suivante :

$$\partial_t \hat{v}_x = -\partial_m \bar{p}. \quad (\text{H.6})$$

En remplaçant (H.3) et (H.6) dans (H.5) nous retrouvons l’équation de conservation de la quantité de mouvement perturbée (2.36) :

$$\partial_t \hat{v}_x + \bar{\rho} \hat{v}_x \partial_m \hat{v}_x + \partial_m \hat{p} - \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} \partial_m \bar{p} = -\delta x_0 [\partial_m \hat{v}_x (\partial_t \bar{\rho} + \bar{\rho}^2 \partial_m \bar{v}_x) + \bar{\rho} \partial_m (\partial_t \hat{v}_x + \partial_m \bar{p})] = 0. \quad (\text{H.7})$$

Pour finir nous remplaçons les quantités $\hat{T}$, $\hat{\rho}$, $\hat{v}_x$ et $\hat{\varphi}_x$ dans le premier membre de la quatrième équation du système d’équations de l’écoulement perturbé (2.36),

$$\frac{1}{\gamma - 1} (\partial_t \hat{T} + \bar{\rho} \hat{v}_x \partial_m \bar{T}) = -\frac{\delta x_0}{\gamma - 1} [\partial_t \bar{\rho} \partial_m \bar{T} + \bar{\rho} \partial_m \partial_t \bar{T} + \bar{\rho}^2 \partial_m \hat{v}_x \partial_m \bar{T}], \quad (\text{H.8})$$

puis dans le second membre de cette même équation,

$$\begin{aligned}
 \bar{p} \left(\frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} \partial_m \hat{v}_x - \partial_m \hat{v}_x \right) - \hat{p} \partial_m \hat{v}_x + \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}} \partial_m \bar{\varphi}_x - \partial_m \hat{\varphi} - k_{\perp}^2 \bar{\rho}^{m-1} \bar{T}^n \hat{T} \\
 = -\delta x_0 [\bar{p} \partial_m \bar{\rho} \partial_m \hat{v}_x - \partial_m (\bar{p} \bar{\rho} \hat{v}_x) + \partial_m \bar{\rho} \partial_m \hat{\varphi}_x - \partial_m (\bar{\rho} \partial_m \hat{\varphi}_x)] \\
 = -\delta x_0 \bar{\rho} \partial_m (\bar{p} \partial_m \hat{v}_x + \partial_m \hat{\varphi}_x).
 \end{aligned} \tag{H.9}$$

Nous utilisons la troisième équation du système d'équations de l'écoulement de base (1.3) et obtenons la relation suivante :

$$\frac{1}{\gamma - 1} \partial_t \bar{T} + \hat{v}_x \partial_t \hat{v}_x + \partial_m (\hat{v}_x \bar{p}) + \partial_m \bar{\varphi}_x = 0. \tag{H.10}$$

En remplaçant (H.6) et (H.10) dans (H.5), nous retrouvons l'expression (H.9) du second membre de l'équation :

$$\frac{1}{\gamma - 1} (\partial_t \hat{T} + \bar{\rho} \hat{v}_x \partial_m \bar{T}) = -\delta x_0 \bar{\rho} \partial_m (\bar{p} \partial_m \hat{v}_x + \partial_m \hat{\varphi}_x). \tag{H.11}$$

Ainsi les expressions des perturbations¹, données par (H.1), vérifient bien le système d'équations de l'écoulement perturbé (1.3).

1. Vallet (2011) a également vérifié à l'aide du logiciel Mathematica que les expressions données aux perturbations en variable autosemblable constituent bien une solution du système d'équations (3.3)

Annexe I

Fichiers pour les configurations d'écoulements, en conduction radiative, avec détente subsonique et supersonique RFA

I.1 Écoulement subsonique RFA

I.1.1 Fichier « parametres-definition-calcul.nml »

```
&PARAMETRE_PHYSIQUE
GAMMA    =   1.666666666666667      ,
M        =  -2.000000000000000      ,
N        =   6.500000000000000
/
&OPTION_CALCUL
CALCUL_ABLATION = T,
CALCUL_BASE     = F,
CALCUL_MODE_KOV = F,
CALCUL_PERTURBATION = T,
CALCUL_SPECTRE  = F,
TYPE_TEST       = "indifferent"
/
&DUREE_CALCUL
ETAT_CALCUL     = "termine",
NBRE_PAS_MAX    =           0,
TEMPS_DEBUT     =  1.000000000000000E-005,
TEMPS_FIN       =  194.0000000000000      ,
TEMPS_CPU_MAX   =  86400.00000000000      ,
TEMPS_CPU_GARDE =  600.0000000000000
/
&PERTURBATION
K_T          =  1.000000000000000      ,
CL_GAUCHE    = "P^_=_0",
CL_DROITE    = "choc_ parfait",
COEFF_FLUX_GAUCHE      =  1.000000000000000      ,
COEFF_RUGOSITE_INIT    =  0.000000000000000E+000,
TYPE_CI = "inconnu"
/
&INTEGRATION_TEMPS
COEFFICIENT_CFL =  0.500000000000000      ,
```

```

COEFFICIENT_PDT_DIFFUSION      = 0.0000000000000000E+000,
COEFFICIENT_CROISSANCE_PAS     = 1.0001000000000000      ,
CRITERE_DE_STABILITE           = "inoperant",
PAS_DE_TEMPS_CONSTANT          = 0.0000000000000000E+000,
CHI_OP2_D0                     = 0.0000000000000000E+000
/
&SAUVEGARDE
NUMERO_REPRISE                 = 7,
NBRE_PAS_SAUVEGARDE           = 4000000
/
&RESULTAT
NBRE_PAS_STOCKAGE              = 19000,
INTERVALLE_TEMPS_STOCKAGE      = 0.1939500000000000
/
&ADAPTATION
ADAPT_ECLT_PERT = F,
AMPLI_PERT          = 1.0000000000000000E-002,
CRITERE_REMAILLAGE_BASE = 0.1000000000000000      ,
CRITERE_REMAILLAGE_PERT = 1.0000000000000000      ,
INTERVALLE_TEMPS_ADAPTATION = 100000000.0000000      ,
NBRE_ADAPTATION_INTERFACE = 10,
NBRE_POSITION_INTERFACE = 250,
SEUIL_DEPLACEMENT_INTERFACE = 1.0000000000000000E-005
/
&SPECTRAL_RELAXATION
RELAXATION_BASE%METHODE = "Richardson",
RELAXATION_BASE%NBRE_ITERATION = 50,
RELAXATION_BASE%DIAGNOSTIC_DETAILLE = F,
RELAXATION_BASE%CRITERE_CONVERGENCE = 1.0000000000000000E-014,
RELAXATION_BASE%CRITERE_SATURATION_VARABS = 1.0000000000000000E-009,
RELAXATION_BASE%CRITERE_SATURATION_VARREL = 1.0000000000000000E-002,
RELAXATION_BASE%PARAMETRE_RICHARDSON = 0.6000000000000000      ,
RELAXATION_BASE%SEUIL_RESIDU_SATURE = 1.0000000000000000E-006,
RELAXATION_PERT%METHODE = "Chebyshev",
RELAXATION_PERT%NBRE_ITERATION = 50,
RELAXATION_PERT%DIAGNOSTIC_DETAILLE = F,
RELAXATION_PERT%CRITERE_CONVERGENCE = 1.0000000000000000E-014,
RELAXATION_PERT%CRITERE_SATURATION_VARABS = 1.0000000000000000E-009,
RELAXATION_PERT%CRITERE_SATURATION_VARREL = 1.0000000000000000E-002,
RELAXATION_PERT%PARAMETRE_RICHARDSON = 0.6000000000000000      ,
RELAXATION_PERT%SEUIL_RESIDU_SATURE = 1.0000000000000000E-006
/
&SPECTRAL_DOMAINE
NBRE_DOMAINE = 23
/
&SPECTRAL_INTERFACE_DOMAINE
INTERFACE = 0.0000000000000000E+000,
           0.1420000000000000      ,
           0.2840000000000000      ,
           0.4260000000000000      ,
           0.5680000000000000      ,
           0.7194799999999999      ,
           0.761712366759135      ,
           0.775547173282465      ,
           0.781394390175862      ,
           0.784449105032381      ,
           0.786704313871933      ,
           0.788906137898148      ,
           0.792184504150070      ,
           0.8100000000000000      ,

```

```

0.8220000000000000 ,
0.8400000000000000 ,
0.8800000000000000 ,
0.9400000000000000 ,
1.0100000000000000 ,
1.1000000000000000 ,
1.2000000000000000 ,
1.3000000000000000 ,
1.4000000000000000 ,
1.5000000000000000 ,
5*0.0000000000000000E+000
/
&SPECTRAL_VARIATION_INTERFACE
INTERVALLE = 5*0.0000000000000000E+000, 15*5.0000000000000000E-002,
9*0.0000000000000000E+000
/
&SPECTRAL_TAILLE_MIN_DOMAINE
TAILLE = 23*5.0000000000000000E-006 , 7*0.0000000000000000E+000
/
&SPECTRAL_POINT_DOMAINE
NBRE_POINT = 23*50, 7*0
/
&SPECTRAL_MAPPING
PARAMETRE_MAPPING_MIN = 23*1.0000000000000000E-003 , 7*0.0000000000000000E+000
,
PARAMETRE_MAPPING_MOY = 23*1000.000000000000 , 7*0.0000000000000000E+000
,
PARAMETRE_MAPPING_MAX = 23*10000.000000000000 , 7*0.0000000000000000E+000
,
TYPE_MAPPING = 23*3, 7*0
/

```

I.1.2 Fichier « parametres-resol-base-ablation.nml »

```

&droite_gauche_domaine
  nbre_points(1:2) = 1000, 2000,
  nbre_equations(1:2) = 3, 4
/
&droite_gauche_frontiere
  xi_choc = 1.50000,
  xi_frontiere = 0.8000000
/
&droite_gauche_mth_integration
  choix_integration = "RK_NumRec",
  type_methode_RKNAG = 3,
  bascule_erreur_abs_rel(1:4) = 4*1.0e-06,
  niveau_erreur_relative = 1.0e-013
/
&gauche_droite_domaine
  nbre_points_dom_fixe = 1000,
  nbre_points_min_dom_variable = 200,
  nbre_points_max_dom_variable = 1200
/
&gauche_droite_frontiere
  xi_frontiere = 1.490,
  xi_choc_max = 1.50000
/
&gauche_droite_optimisation_choc
  erreur_max_RH = 1.0e-5
/
&gauche_droite_mth_integration

```

4

I.2 Écoulement supersonique RFA

I.2.1 Fichier « parametres-definition-calcul.nml »

```

NBRE_PAS_MAX=          1,
TEMPS_DEBUT= 5.00000000000000028E-002,
TEMPS_FIN= 440.000000000000000,
TEMPS_CPU_MAX= 0.0000000000000000,
TEMPS_CPU_GARDE= 0.0000000000000000,
/
&PERTURBATION
K_T= 0.0000000000000000,
CL_GAUCHE="P^_0",
CL_DROITE="choc_parfait",
COEFF_FLUX_GAUCHE= 1.0000000000000000,
COEFF_RUGOSITE_INIT= 0.0000000000000000,
TYPE_CI="inconnu",
/
&INTEGRATION_TEMPS
COEFFICIENT_CFL= 0.5000000000000000,
COEFFICIENT_PDT_DIFFUSION= 0.0000000000000000,
COEFFICIENT_CROISSANCE_PAS= 1.0001000000000000,
CRITERE_DE_STABILITE="inoperant",
PAS_DE_TEMPS_CONSTANT= 0.0000000000000000,
CHI_OP2_D0= 0.0000000000000000,
/
&SAUVEGARDE
NUMERO_REPRISE= 0,
NBRE_PAS_SAUVEGARDE= 200000,
/
&RESULTAT
NBRE_PAS_STOCKAGE=          1,
INTERVALLE_TEMPS_STOCKAGE= 0.43995000000000001,
/
&ADAPTATION
ADAPT_ECLT_PERT=F,
AMPLI_PERT= 1.00000000000000002E-002,
CRITERE_REMAILLAGE_BASE= 0.10000000000000001,
CRITERE_REMAILLAGE_PERT= 1.0000000000000000,
INTERVALLE_TEMPS_ADAPTATION= 10000000.00000000,
NBRE_ADAPTATION_INTERFACE=          20,
NBRE_POSITION_INTERFACE=          250,
SEUIL_DEPLACEMENT_INTERFACE= 1.00000000000000008E-005,
/
&SPECTRAL_RELAXATION
RELAXATION_BASE%METHODE="Richardson",
RELAXATION_BASE%NBRE_ITERATION= 50,
RELAXATION_BASE%DIAGNOSTIC_DETAILLE=F,
RELAXATION_BASE%CRITERE_CONVERGENCE= 9.999999999999999E-015,
RELAXATION_BASE%CRITERE_SATURATION_VARABS= 1.00000000000000006E-009,
RELAXATION_BASE%CRITERE_SATURATION_VARREL= 1.00000000000000002E-002,
RELAXATION_BASE%PARAMETRE_RICHARDSON= 0.5999999999999998,
RELAXATION_BASE%SEUIL_RESIDU_SATURE= 9.999999999999995E-007,
RELAXATION_PERT%METHODE="Chebyshev",
RELAXATION_PERT%NBRE_ITERATION=50,
RELAXATION_PERT%DIAGNOSTIC_DETAILLE=F,
RELAXATION_PERT%CRITERE_CONVERGENCE= 9.999999999999999E-015,
RELAXATION_PERT%CRITERE_SATURATION_VARABS= 1.00000000000000006E-009,
RELAXATION_PERT%CRITERE_SATURATION_VARREL= 1.00000000000000002E-002,
RELAXATION_PERT%PARAMETRE_RICHARDSON= 0.5999999999999998,
RELAXATION_PERT%SEUIL_RESIDU_SATURE= 9.999999999999995E-007,
/
&SPECTRAL_DOMAINE
NBRE_DOMAINE= 27,

```

```

/
&SPECTRAL_INTERFACE_DOMAINE
INTERFACE= 0.0000000000000000 ,
           0.1200000000000000 ,
           0.2399999999999999 ,
           0.3700000000000000 ,
           0.4899999999999999 ,
           0.6099999999999999 ,
           0.72 ,
           0.83 ,
           0.89 ,
           0.9502 ,
           0.99972779683399959 ,
           1.0214137763237698 ,
           1.0320921987434315 ,
           1.0380566022318920 ,
           1.0416212597280936 ,
           1.0440156323430609 ,
           1.0456625496268572 ,
           1.0468994763508468 ,
           1.0479766149747622 ,
           1.0490987634741327 ,
           1.0505824893964080 ,
           1.0533783421654341 ,
           1.07000000000000001 ,
           1.09000000000000001 ,
           1.1299999999999999 ,
           1.2100000000000000 ,
           1.35000000000000001 ,
           1.5000000000000000 ,
/
&SPECTRAL_VARIATION_INTERFACE
INTERVALLE= 9*0.0 , 12*5.0e-2 , 5*0.0 ,
/
&SPECTRAL_TAILLE_MIN_DOMAINE
TAILLE= 27*5.0e-6
/
&SPECTRAL_POINT_DOMAINE
NBRE_POINT= 27*50
/
&SPECTRAL_MAPPING
PARAMETRE_MAPPING_MIN= 27*1.0
PARAMETRE_MAPPING_MOY= 27*9999.0
PARAMETRE_MAPPING_MAX= 27*10000.0
TYPE_MAPPING= 27*3
/

```

I.2.2 Fichier « parametres-resol-base-ablation.nml »

```

&droite_gauche_domaine
  nbre_points(1:2) = 1000 , 2000 ,
  nbre_equations(1:2) = 3 , 4
/
&droite_gauche_frontiere
  xi_choc = 1.50000 ,
  xi_frontiere = 1.0600000
/
&droite_gauche_mth_integration
  choix_integration = "RK_NumRec" ,
  type_methode_RKNAG = 3 ,
  bascule_erreur_abs_rel(1:4) = 4*1.0e-06 ,

```

```
niveau_erreur_relative = 1.0e-013
/
&gauche_droite_domaine
  nbre_points_dom_fixe = 1000,
  nbre_points_min_dom_variable = 200,
  nbre_points_max_dom_variable = 1200
/
&gauche_droite_frontiere
  xi_frontiere = 1.490,
  xi_choc_max = 1.50000
/
&gauche_droite_optimisation_choc
  erreur_max_RH = 1.0e-5
/
&gauche_droite_mth_integration
  choix_integration = "RK_NumRec",
  type_methode_RKNAG = 3,
  bascule_erreur_abs_rel(1:4) = 4*1.0e-06,
  niveau_erreur_relative = 1.0e-13
/
&spectral_methode_integration
  choix_integration_domaine = 30*"RK_NumRec"
  type_methode_RKNAG_spe = 3,
  bascule_erreur_abs_rel_spe(1:4) = 4*1.0e-06,
  niveau_erreur_relative_spe = 1.0e-012
/
&spectral_optimisation_RH
  nbre_ajustement_origine = 0,
  diviseur_composante_ecart_RH(1:4) = 3*-150.0, 1000.0
/
&spectral_resolution
  nbre_resolution = 20
/
```


Glossaire

Choc parfait : approximation appliquée au front de choc dans le cas où l'épaisseur du front thermique est négligée. L'ensemble des quantités subit alors une discontinuité, 30

Diagramme de marche : représentation des trajectoires des particules fluides au cours du temps lors de l'implosion d'une cible. Il permet de suivre le comportement de la cible et les différentes étapes de l'implosion, 20

Étude de stabilité : une étude de stabilité consiste à définir un écoulement particulier et à le perturber par des conditions initiales et aux limites, 30

Fission thermonucléaire : phénomène par lequel le noyau d'un atome lourd est divisé en plusieurs nucléides plus légers, 15

Fusion thermonucléaire : processus durant lequel deux noyaux atomiques légers fusionnent pour former un noyau plus lourd, tel que cela se passe dans le Soleil ou dans la plupart des étoiles de l'univers, 15

Modes de Kovàsznay : la décomposition selon les modes de Kovàsznay (Chu et Kovàsznay, 1958) est une décomposition selon les modes propres des équations des perturbations linéaires du mouvement de fluides compressibles pour des fluides non-conducteurs de chaleur et des écoulements uniformes. Ces modes sont les modes tourbillonnaire, acoustique et entropique, 30

Perturbations linéaires : on parle de perturbations linéaires lorsque chaque quantité de l'écoulement est perturbée et que les équations ainsi obtenues sont linéarisées, 30

Plasma : état de la matière constitué de particules chargées (ions et électrons), 17

Rapport d'aspect en vol (RAV) : ce rapport représente le rapport du rayon de la cible à son épaisseur au cours de l'implosion. En moyenne, ce rapport RAV a une valeur proche de 30, 20

Solution autosemblable : on appelle autosemblable une fonction qui est invariante par un changement d'échelle en temps. Ce type de fonction est très important en physique car elles modélisent des phénomènes qui sont indépendants de l'échelle de mesure, 22

Table des figures

1.1	Figure explicative de la réaction de fusion entre du Deutérium et du Tritium . . .	18
1.2	Schéma d'une installation de FCI et composition de la cible	19
1.3	Principe de l'implosion d'une cible de FCI	22
1.4	Diagramme de marche d'une cible de FCI	23
1.5	Les différentes zones de l'écoulement d'ablation	23
1.6	Analogie avec le bain thermique	26
2.1	Schéma de la perturbation de rugosité	45
2.2	Schéma de la perturbation d'éclairement	45
4.1	Définition de la configuration « choc isotherme »	70
7.1	Abaque donnant la correspondance entre les paramètres numériques et les conditions aux limites définissant un écoulement dans le cas de la conduction radiative .	122
7.2	Variations de la valeur de $\mathcal{B}_p$: fonctions de forme pour 6 valeurs de $\mathcal{B}_p$ avec $\mathcal{B}_\varphi = 0,20$	124
7.3	Variations de la valeur de $\mathcal{B}_p$: tracé du coefficient de conduction $\overline{G}^{m+1}\overline{\Theta}^n$, en échelle logarithmique, pour 6 valeurs de $\mathcal{B}_p$ avec $\mathcal{B}_\varphi = 0,20$	125
7.4	Variations de la valeur de $\mathcal{B}_p$: tracés de la densité $\overline{G}$, de la vitesse longitudinale $\overline{V}_x$, de la pression $\overline{P}$, de la température $\overline{\Theta}$ et du flux thermique $\overline{\Phi}$ en fonction de $\overline{X}$ pour 6 valeurs de $\mathcal{B}_p$ avec $\mathcal{B}_\varphi = 0,20$	126
7.5	Variations de la valeur de $\mathcal{B}_p$: tracés en fonction de la variable autosemblable ξ du logarithme du nombre de Mach construit avec la vitesse relative au front d'ablation, du nombre de Péclet et du nombre de Froude construits avec la vitesse relative au front et la longueur de gradient en densité pour 6 valeurs de $\mathcal{B}_p$ avec $\mathcal{B}_\varphi = 0,20$	127
7.6	Variations de la valeur de $\mathcal{B}_\varphi$: fonctions de forme pour trois valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$ avec $\mathcal{B}_p = 0,90$	128
7.7	Variations de la valeur de $\mathcal{B}_\varphi$: tracé logarithmique du coefficient de conduction $\overline{G}^{m+1}\overline{\Theta}^n$ pour trois valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$ avec $\mathcal{B}_p = 0,90$	129
7.8	Variations de la valeur de $\mathcal{B}_\varphi$: tracés de la densité $\overline{G}$, de la vitesse longitudinale $\overline{V}_x$, de la pression $\overline{P}$, de la température $\overline{\Theta}$ et du flux thermique $\overline{\Phi}$ en fonction de $\overline{X}$ pour trois valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$ avec $\mathcal{B}_p = 0,90$	130
7.9	Variations de la valeur de $\mathcal{B}_\varphi$: logarithme du nombre de Mach construit avec la vitesse relative au front, du nombre de Péclet et du nombre de Froude construits avec la vitesse relative au front d'ablation et la longueur de gradient en densité pour 3 valeurs de $\mathcal{B}_\varphi$ avec $\mathcal{B}_p = 0,90$	131

7.10	Écoulements avec détente supersonique RFA : tracés de la densité $\overline{G}$, de la vitesse longitudinale $\overline{V}_x$, de la pression $\overline{P}$, de la température $\overline{\Theta}$ et du flux thermique $\overline{\Phi}$ en fonction de la variable autosemblable ξ pour quatre couples de valeurs de $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$	133
7.11	Écoulements avec détente supersonique RFA : logarithme du nombre de Mach calculé avec la vitesse relative au front, du nombre de Péclet et du nombre de Froude construits avec la vitesse relative au front d'ablation et la longueur de gradient en densité pour trois couples de valeurs de $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi)$	134
7.12	Écoulement avec détente subsonique RFA : Tracés des quantités de base et des nombres sans dimensions relatifs à l'écoulement avec détente subsonique RFA choisi pour l'étude des réponses en perturbation linéaires	135
8.1	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543)$: tracés des quantités de base préalables à l'élaboration de la discrétisation spatiale et de la plage temporelle utilisées pour l'analyse des réponses en perturbations linéaires	142
8.2	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543)$: profil de la densité de base $\overline{G}$ en fonction de la variable $\overline{X}$ dans le cadre de l'élaboration de la distribution de points	143
8.3	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543)$: tracé logarithmique des valeurs des coefficients de Chebyshev par quantité et par domaine à l'issue de la procédure d'adaptation-résolution	145
8.4	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543)$: tracé logarithmique des valeurs des sauts de dérivée première des quantités de base à l'issue de la procédure d'adaptation-résolution	146
8.5	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543)$, pour $k_\perp = 0$: profils spatio-temporels du logarithme de la densité $\widehat{G}$, de la vitesse longitudinale $\widehat{V}_x$, de la pression $\widehat{P}$ et de la température $\widehat{\Theta}$ dans le système de variables (ξ, t)	148
8.6	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543)$, pour $k_\perp = 1$: profils spatio-temporels du logarithme de la densité $\widehat{G}$, de la vitesse longitudinale $\widehat{V}_x$, de la pression $\widehat{P}$, de la température $\widehat{\Theta}$ et de la divergence transverse de la vitesse transverse $\widehat{D}_\perp$ dans le système de variables (ξ, t)	149
8.7	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543)$: tracés du logarithme de la perturbation en densité $\widehat{G}$, vitesse longitudinale $\widehat{V}_x$, pression $\widehat{P}$ et température $\widehat{\Theta}$ en fonction de la variable réduite d'espace $\overline{X}$ et du logarithme du temps, pour $k_\perp = 0$ (colonne de gauche) et $k_\perp = 1$ (colonne de droite)	156
8.8	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543)$: tracés des profils logarithmiques des variables réduites de perturbation en fonction de ξ pour différentes valeurs du temps	157
8.9	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543)$: superposition des profils en échelle logarithmique des variables réduites de perturbation en fonction de ξ pour $k_\perp = 0$ et $k_\perp = 1$ au temps $t_{\text{erasp}} = 10^{-2}$	159
8.10	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543)$: profil en échelle logarithmique de la divergence transverse de la vitesse transverse en fonction de ξ au temps $t_{\text{erasp}} = 10^{-2}$	160

- 8.11 **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tracé en fonction du temps de l'évolution du maximum de la perturbation en densité pour la valeur du temps initial choisie, soit $t_{ini} = 10^{-5}$ 160
- 8.12 **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tracé de la perturbation de densité au front d'ablation en fonction du logarithme du nombre d'onde réduit $\varkappa_\perp = t^\alpha k_\perp$ dans le cas $k_\perp = 1$. . 161
- 8.13 **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tracé de la déformation du front d'ablation en fonction du logarithme du nombre d'onde réduit $\varkappa_\perp = t^\alpha k_\perp$, en échelle logarithmique pour l'ensemble de la gamme temporelle et en valeur absolue pour les temps courts . . . 162
- 8.14 **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tracés des perturbations réduites en fonction de la variable réduite d'espace $\bar{X}$ et du logarithme du nombre d'onde réduit $\varkappa_\perp$, en vue de dessus. 163
- 8.15 **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : profils spatio-temporels en fonction de la variable autosemblable ξ du logarithme de la vorticité transversale $\log_{10} |\hat{\Omega}_\perp / \bar{G}|$, de la pression $\log_{10} |\hat{P}|$ et de l'entropie $\log_{10} |\hat{S}|$ 165
- 8.16 **Écoulement à détente subsonique RFA** ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : profils spatio-temporels en fonction de la variable de Lagrange m du logarithme de la vorticité transversale $\log_{10} |\hat{\Omega}_\perp / \bar{G}|$, de la pression $\log_{10} |\hat{P}|$ et de l'entropie $\log_{10} |\hat{S}|$, sur les temps intermédiaires, soit de 10^{-5} à 40 . 166
- 9.1 **Écoulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracés des quantités de base préalables à l'élaboration de la discrétisation spatiale et de la plage temporelle utilisées pour l'analyse des réponses en perturbations linéaires 170
- 9.2 ** coulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : profil de la densité de base $\bar{G}$ en fonction de la variable $\bar{X}$ dans le cadre de l'élaboration de la distribution de points 171
- 9.3 ** coulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracé logarithmique des valeurs des coefficients de Chebyshev par quantité et par domaine à l'issue de la procédure d'adaptation-résolution 174
- 9.4 ** coulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracé logarithmique des valeurs des sauts de dérivée première des quantités de base à l'issue de la procédure d'adaptation-résolution . . 175
- 9.5 ** coulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$), pour $k_\perp = 0$: profils spatio-temporels du logarithme de la densité $\hat{G}$, de la vitesse longitudinale $\hat{V}_x$, de la pression $\hat{P}$ et de la température $\hat{\Theta}$ dans le système de variables (ξ, t) 176
- 9.6 ** coulement à détente supersonique RFA** ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$), pour $k_\perp = 1$: profils spatio-temporels du logarithme de la densité $\hat{G}$, de la vitesse longitudinale $\hat{V}_x$, de la pression $\hat{P}$, de la température $\hat{\Theta}$ et de la divergence transversale de la vitesse transversale $\hat{D}_\perp$ dans le système de variables (ξ, t) 177

9.7	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracés du logarithme de la perturbation en densité $\widehat{G}$, vitesse longitudinale $\widehat{V}_x$, pression $\widehat{P}$ et température $\widehat{\Theta}$ en fonction de la variable réduite d'espace $\overline{X}$ et du logarithme du temps, pour $k_\perp = 0$ (colonne de gauche) et $k_\perp = 1$ (colonne de droite)	182
9.8	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracés des profils logarithmiques des variables réduites de perturbation, à $k_\perp = 0$, en fonction de ξ pour différentes valeurs du temps	184
9.9	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : superposition des profils en échelle logarithmique des variables réduites de perturbation en fonction de ξ pour $k_\perp = 0$ et $k_\perp = 1$ au temps $t_{\text{erasp}} = 10^{-3}$	185
9.10	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : profil en échelle logarithmique de la divergence transverse de la vitesse transverse en fonction de ξ au temps $t_{\text{erasp}} = 10^{-3}$	186
9.11	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracé en fonction du temps de l'évolution du maximum de la perturbation en densité pour la valeur choisie du temps initial, soit $t_{\text{ini}} = 10^{-7}$	186
9.12	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracé de la perturbation de densité au front d'ablation en fonction du logarithme du nombre d'onde réduit $\varkappa_\perp = t^\alpha k_\perp$ dans le cas $k_\perp = 1$	187
9.13	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracé de la déformation du front d'ablation en fonction du logarithme du nombre d'onde réduit $\varkappa_\perp = t^\alpha k_\perp$, en échelle logarithmique pour l'ensemble de la gamme temporelle et en valeur absolue pour les temps courts	188
9.14	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tracés des perturbations réduites en fonction de la variable réduite d'espace $\overline{X}$ et du logarithme du nombre d'onde réduit $\varkappa_\perp$, en vue de dessus	189
9.15	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : profils spatio-temporels en fonction de la variable autosemblable ξ du logarithme de la vorticité transverse $\log_{10} \widehat{\Omega}_\perp / \overline{G} $, de la pression $\log_{10} \widehat{P} $ et de l'entropie $\log_{10} \widehat{S} $	190
9.16	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : profils spatio-temporels en fonction de la variable de Lagrange m du logarithme de la vorticité transverse $\log_{10} \Omega_\perp / \overline{G} $, de la pression $\log_{10} \widehat{P} $ et de l'entropie $\log_{10} \widehat{S} $, sur les temps intermédiaires, soit de 10^{-7} à 40	191
10.1	Tracés des quantités de base après une première intégration sur un maillage multidomaine avec $\xi_{fc} = 2,025$ et $\xi_{ft} = 3,07$	202
10.2	Tracés des quantités de base dans le système de coordonnées $(\check{\xi}, \check{Q})$ sur le domaine qui contient le pied du front thermique avec $\xi_{fc} = 2,025$ et $\xi_{ft} = 3,07$	204
10.3	Tracé en échelle logarithmique des valeurs propres de l'approximation spectrale de l'opérateur $\check{\mathbf{M}}_{\text{CL}}(\check{\mathbf{Y}})$ sur le micro-domaine avec une condition de Neumann appliquée à la vitesse longitudinale et une condition de Dirichlet appliquée aux autres quantités	207
10.4	Tracé, en échelle logarithmique, des valeurs singulières issues de la procédure de décomposition en valeurs singulières pour la première itération sur le micro-domaine	209
10.5	Tracés du résidu relatif final, en échelle logarithmique, pour chaque quantité de base dans le système $(\check{\xi}, \check{Q})$, sur chaque point de collocation du micro-domaine	210

10.6	Tracés, en échelle logarithmique, de l'évolution des résidus absolus ponctuels pour la méthode de résolution spectrale sur le micro-domaine, comprenant 10 points de collocation	211
10.7	Tracés, en échelle logarithmique, des résidus relatifs pour chacune des quantités « brève » en fonction du nombre d'itérations de la relaxation pour le micro-domaine, comprenant 10 points de collocation	212
10.8	Tracés des différences relatives entre la solution sur le micro-domaine pour laquelle une procédure de relaxation a été appliquée et celle pour laquelle cette procédure n'est pas effectuée pour les quantités de base	213
10.9	Tracés des profils des quantités de base à l'origine pour le cas avec relaxation sur le micro-domaine et le cas où celle-ci n'est pas effectuée	213
10.10	Tracés, en échelle logarithmique, des résidus relatifs pour chacune des quantités « brève » en fonction du nombre d'itérations de la relaxation sur les domaines du précurseur thermique autres que le micro-domaine, qui comprennent ici 50 points de collocation	215
10.11	Tracés, en échelle logarithmique, des résidus relatifs pour chacune des quantités sur les points de la zone aval, à la fin de la relaxation	217
11.1	Abaque donnant la correspondance entre le couple de conditions aux limites ($\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi$) et la position du front de choc ξ_{fc} pour un précurseur thermique de taille négligeable	225
11.2	Abaque donnant la correspondance entre le couple de conditions aux limites ($\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_\varphi$) et la position du front de choc ξ_{fc} dans la configuration avec précurseur thermique de taille négligeable et la position du pied du front thermique ξ_{ft} dans la configuration avec précurseur thermique précédant un choc isotherme	226
11.3	Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 0,75$: quantités de l'écoulement de base en fonction de la variable autosemblable ξ , pour un précurseur thermique supersonique	228
11.4	Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 0,75$: quantités de l'écoulement de base en fonction de la coordonnée dans l'espace physique $\overline{X}$, pour un précurseur thermique supersonique	229
11.5	Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 1,00$: quantités de l'écoulement de base en fonction de la variable autosemblable ξ , pour un précurseur thermique supersonique	230
11.6	Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 1,00$: quantités de l'écoulement de base en fonction de la coordonnée dans l'espace physique $\overline{X}$, pour un précurseur thermique supersonique	231
11.7	Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 1,25$: quantités de l'écoulement de base en fonction de la variable autosemblable ξ , pour un précurseur thermique supersonique	232
11.8	Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 1,25$: quantités de l'écoulement de base en fonction de la coordonnée dans l'espace physique $\overline{X}$, pour un précurseur thermique supersonique	233
11.9	Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 3,07$: quantités de l'écoulement de base en fonction de la variable autosemblable ξ , pour un précurseur thermique supersonique	234
11.10	Front thermique localisé en $\xi_{ft} = 3,07$: quantités de l'écoulement de base en fonction de la coordonnée dans l'espace physique $\overline{X}$, pour un précurseur thermique supersonique	235
11.11	Tracé du saut de densité au niveau du choc isotherme (colonne de gauche) et du pied du front thermique (colonne de droite) pour les différentes positions du front thermique analysées	237

11.12	Comparaison entre les résolutions avec front thermique et avec choc parfait pour les profils des quantités de l'écoulement de base en fonction de la variable auto-similaire ξ	238
13.1	Tracé selon ξ de la quantité $(\overline{C}\overline{G} - \alpha\xi)$ utile à la détermination du signe de la valeur propre λ_ξ^4	251
13.2	Tracé de la perturbation en vitesse $\check{\check{V}}_x$ en fonction du numéro de point de collocation sur le micro-domaine pour la solution exacte de translation	263
13.3	Tracé de la perturbation en température $\check{\check{\Theta}}$ en fonction du nombre de points pour la solution exacte de translation, sur les points du pré-cuseur thermique les plus proches du choc isotherme	263
H.1	Représentation 2D, l'axe vertical étant l'axe des y , d'une déformation de l'écoulement de base qui est obtenue localement par translation longitudinale de la solution de base	296

Liste des tableaux

1.1	Tableau recensant les valeurs numériques des principaux paramètres de l'implosion d'une cible en FCI	21
6.1	Tableau indiquant le nombre d'itérations nécessaires en moyenne pour obtenir les solutions des sous-problèmes élémentaires dans le cas d'un écoulement avec conduction radiative au premier pas en temps	105
6.2	Tableau illustrant le caractère diagonal ou non de la matrice de l'opérateur spectral et de la valeur du paramètre optimal de relaxation α_{opt} dans le cas d'un écoulement avec conduction radiative et d'une distribution de 23 domaines de 50 points	108
6.3	Tableau indiquant le nombre d'itérations nécessaires en moyenne pour obtenir les solutions des sous-problèmes élémentaires dans le cas d'un écoulement avec conduction radiative au bout d'un nombre conséquent de pas de temps pour $k_{\perp} = 0$.	110
6.4	Tableau indiquant le nombre d'itérations nécessaires en moyenne pour obtenir les solutions des sous-problèmes élémentaires dans le cas d'un écoulement avec conduction radiative au bout d'un nombre conséquent de pas de temps pour $k_{\perp} = 1$.	111
7.1	Tableau récapitulatif des points particuliers rencontrés dans le cas de l'étude de la conduction radiative avec l'approximation « choc parfait »	118
7.2	Tableau récapitulatif des écoulements rencontrés lors des essais de variation des valeurs limites à l'origine de la pression $\mathcal{B}_p$ et du flux de conduction $\mathcal{B}_{\varphi}$	127
7.3	Tableau récapitulatif des écoulements rencontrés lors du choix des configurations que nous soumettons à un calcul de perturbations. Figurent les couples $(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_{\varphi})$ et (ξ_f, ξ_{fc}) ainsi que la longueur totale de l'écoulement, la longueur de gradient en température et la raideur	134
8.1	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 2,01543)$: tableau effectuant la synthèse des choix effectués pour la méthode d'adaptation-résolution de l'écoulement de base	143
8.2	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 2,01543)$: tableau récapitulatif de l'effet de la procédure d'adaptation sur la distribution des sous-domaines	144
8.3	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 2,01543)$: tableau récapitulatif de la plage temporelle et de la discrétisation spatiale utilisées ainsi que du nombre de pas en temps effectués au cours du calcul	146
8.4	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et $(\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_{\varphi} = 2,01543)$: tableau récapitulatif des grandeurs nécessaires au calcul de la distance entre l'origine et le front d'ablation	151

8.5	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tableau récapitulatif des temps de départ et d'arrivée des perturbations depuis l'origine jusqu'au front d'ablation, ainsi que leur vitesse pour $k_\perp = 0$	151
8.6	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : évaluation de la vitesse de diffusion pour un coefficient de diffusion évalué en $m = 0$ et rappel de la vitesse de la perturbation en pression dans la zone de conduction	153
8.7	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : tableau récapitulatif des grandeurs nécessaires au calcul de la distance entre le front d'ablation et le choc pour $k_\perp = 0$ et $k_\perp = 1$	154
8.8	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : applications numériques des distances parcourues par les signaux et par une onde acoustique pour $k_\perp = 0$	154
8.9	Écoulement à détente subsonique RFA ($\xi_f = 0,80$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,89972$, $\mathcal{B}_\varphi = 2,01543$) : applications numériques des distances parcourues par les signaux et par une onde acoustique pour $k_\perp = 1$	154
9.1	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau effectuant la synthèse des choix effectués pour la méthode d'adaptation-résolution de l'écoulement de base	171
9.2	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau récapitulatif de la plage temporelle et de la discrétisation spatiale utilisées ainsi que du nombre de pas en temps effectués au cours du calcul	172
9.3	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau récapitulatif de l'effet de la procédure d'adaptation sur la distribution des sous-domaines	173
9.4	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau récapitulatif des grandeurs nécessaires au calcul de la distance entre l'origine et le front d'ablation	178
9.5	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau récapitulatif des temps de départ et d'arrivée des perturbations depuis l'origine jusqu'au front d'ablation, ainsi que leur vitesse pour $k_\perp = 0$	178
9.6	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : évaluation de la vitesse de diffusion pour un coefficient de diffusion évalué en $m = 0$ et rappel de la vitesse de la perturbation en pression dans la zone de conduction	180
9.7	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : tableau récapitulatif des grandeurs nécessaires au calcul de la distance entre le front d'ablation et le choc pour $k_\perp = 0$ et $k_\perp = 1$	180
9.8	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : application numérique des distances parcourues par les signaux et par une onde acoustique pour $k_\perp = 0$	181
9.9	Écoulement à détente supersonique RFA ($\xi_f = 1,06$, $\xi_{fc} = 1,50$) et ($\mathcal{B}_p = 1,06338$, $\mathcal{B}_\varphi = 3,41515$) : application numérique des distances parcourues par les signaux et par une onde acoustique pour $k_\perp = 1$	181

10.1	Tableau illustrant les performances de la méthode de relaxation sur le micro-domaine	209
10.2	Tableau illustrant les performances de la méthode de relaxation sur le domaine adjacent au micro-domaine	214
10.3	Tableau donnant les positions extrêmes, en amont et en aval, admissibles de la position du choc isotherme	218
11.1	Tableau récapitulatif des différents paramètres propres aux écoulements étudiés avec précurseur thermique supersonique	224
A.1	Tableau définissant les notations utilisées pour chaque quantité de l'écoulement de base suivant le système de coordonnées utilisé	273
A.2	Tableau définissant les notations utilisées pour chaque quantité de l'écoulement perturbé suivant le système de coordonnées utilisé	274

Bibliographie

- ABEGUILÉ, F. (2004). *Étude de l'instabilité hydrodynamique d'écoulements autosemblables d'ablation*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- ABEGUILÉ, F., BOUDESOCQUE-DUBOIS, C., CLARISSE, J.-M. et GAUTHIER, S. (2006). Linear perturbation amplification in ICF self-similar ablation flows. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :035002.
- AGLITSKIY, Y., VELIKOVICH, A. L., KARASIK, M., SERLIN, V., PAWLEY, C. J., SCHMITT, A. J., OBENSCHAIN, S. P., MOSTOVYCH, A. N., GARDNER, J. H. et METZLER, N. (2002). Direct observation of mass oscillations due to ablative Richtmyer–Meshkov-like instability and feedout in planar plastic targets. *Phys. Plasmas*, 9(5).
- ANISIMOV, S. I. (1970). Self-similar thermal wave in a two-temperature plasma heated by a laser pulse. *JETP Lett*, 12:287–289.
- BAJAC, J. (1973). Étude d'une classe de solutions des écoulements plans compressibles avec transfert radiatif. *Rapport CEA - R - 4482*.
- BAKER, L. (1982). Propagation and smoothing of nonuniform thermal fronts. *Phys. Rev. A*, 26:461–469.
- BARRERO, A. et SANMARTÌN, J. R. (1977). Self-similar motion of laser fusion plasma. Absorption in an unbounded plasma. *Phys. Fluids*, 20(7):1155–1163.
- BAYLISS, A. et TURKEL, E. (1992). Mappings and accuracy for Chebyshev pseudo-spectral approximations. *J. Comput. Phys.*, 101:349–358.
- BENDER, C. M. et ORSZAG, S. A. (1987). *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill International Editions.
- BETTI, R., GONCHAROV, V. N., MCCRORY, R. L., SOROTOKIN, P. et VERDON, C. P. (1996). Self-consistent stability analysis of ablation fronts in inertial confinement fusion. *Phys. Plasma*, 3(5):2122–2128.
- BETTI, R., GONCHAROV, V. N., MCCRORY, R. L. et VERDON, C. P. (1995). Self-consistent cutoff wave number of the ablative Rayleigh–Taylor instability. *Phys. Plasma*, 2(10):3844–3851.
- BODNER, S. E. (1974). Rayleigh–Taylor instability and laser-pellet fusion. *Phys. Rev. Lett.*, 33(13):761–764.
- BOUDESOCQUE-DUBOIS, C. (2000). *Perturbations linéaires d'une solution autosemblable de l'hydrodynamique avec conduction non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.

- BOUDESOCQUE-DUBOIS, C., CLARISSE, J.-M. et GAUTHIER, S. (2003). A spectral Chebyshev method for linear stability analysis of one-dimensional exact solutions of gas dynamics. *J. Comput. Phys.*, 184:592–618.
- BOUDESOCQUE-DUBOIS, C., CLARISSE, J.-M. et GAUTHIER, S. (2008). Self-similar solutions of unsteady ablation flows in inertial confinement fusion. *J. Fluid Mech.*, 603:151–178.
- BOUDESOCQUE-DUBOIS, C., LOMBARD, V., GAUTHIER, S. et CLARISSE, J.-M. (2013). An adaptive multidomain Chebyshev method for nonlinear eigenvalue problems : Application to self-similar solutions of gas dynamics equations with nonlinear heat conduction. *J. Comput. Phys.*, 235:723–741.
- BOUTBOUL, A. (2006). Étude de solutions autosemblables d'écoulements d'ablation instationnaires. Rapport de stage, École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, Université de Poitiers.
- BRUN, L., DAUTRAY, R., DELOBEAU, F., PATOU, C., PERROT, F., REISSE, J.-M., SITT, B. et WATTEAU, J.-P. (1977). Physical models and mathematical simulation of laser-driven implosion and their relations with experiments.
- BYCHKOV, V. V., GOLDBERG, S. M. et LIBERMAN, M. A. (1994). Self-consistent model of Rayleigh–Taylor instability in ablatively accelerated plasma. *Phys. Plasmas.*, 1(9):2976–2986.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M., QUARTERONI, A. et ZANG, T. A. (1988). Spectral methods in fluids dynamics. Springer-Verlag.
- CANUTO, C. et QUARTERONI, A. (1985). Preconditioned minimal residual methods for Chebyshev spectral calculations. *J. Comput. Phys.*, 60:315–337.
- CHANDRASEKHAR, S. (1961). Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford Univ. Press.
- CHU, B.-T. et KOVÁSZNAY, L. S. G. (1958). Nonlinear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *J. Fluid Mech.*, 3:494–518.
- CLARISSE, J.-M., GAUTHIER, S. et BOUDESOCQUE-DUBOIS, C. (2008). Linear perturbation response of self-similar ablative flows relevant to ICF. *J. Fluid Mech.*, 609:1–48.
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K. et LEWY, H. (1928). On the partial difference equations of Mathematical Physics. *Mathematische Annalen*, 100:32–74.
- DASTUGUE, L. (2009). Interprétation d'une expérience de fusion par confinement inertiel. Rapport de stage, Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées, Université de Poitiers.
- DASTUGUE, L., CLARISSE, J.-M. et GAUTHIER, S. (2012). Hydrodynamic stability of self-similar supersonic heat waves related to inertial confinement fusion. In *Proceedings of the 2012 Conference of the European Physical Society (EPS)*, Stockholm, Suède.
- EMERY, M. H., GARDNER, J. H., LEHMBERG, R. H. et OBENSCHAIN, S. P. (1991). Hydrodynamic target response to an induced spatial incoherence-smoothed laser beam. *Phys. Fluids B*, 3(9): 2640–2651.
- GAUTHIER, S. (2011). Critères de stabilité temporelle pour des discrétisations spectrales. Communication privée.

- GAUTHIER, S., CREURER, B. L., ABEGUILÉ, F., BOUDESOCQUE-DUBOIS, C. et CLARISSE, J.-M. (2005). A self-adaptative domain decomposition method with Chebyshev method. *Intl J. Pure Appl. Maths*, 24:553–577.
- GAUTHIER, S., LAFAY, M.-A., LOMBARD, V., BOUDESOCQUE-DUBOIS, C., CLARISSE, J.-M. et CREURER, B. L. (2008). Compressibility effects in some buoyant flows. *Physica Scripta*, T132: 014017.
- GEAR, C. (1971). Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Prentice-Hall.
- GONCHAROV, V. N., BETTI, R. et MCCRORY, R. L. (1996a). Self-consistent stability analysis of ablation fronts with small Froude numbers. *Phys. Plasmas*, 3(12):4665–4676.
- GONCHAROV, V. N., BETTI, R., MCCRORY, R. L., SOROTOKIN, P. et VERDON, C. P. (1996b). Self-consistent stability analysis of ablation fronts with large Froude numbers. *Phys. Plasmas*, 3(4):1402–1414.
- GONCHAROV, V. N., GOTCHEV, O. V., VIANELLO, E., BOEHLY, T. R., KNAUER, J. P., MCKENTY, P. W., RADHA, P. B., REGAN, S. P., SANGSTER, T. C., SKUPSKY, S., SMALYUK, V. A., BETTI, R., MCCRORY, R. L., MEYERHOFER, D. D. et CHERFILS-CLÉROUIN, C. (2006). Early stage of implosion in inertial confinement fusion : shock timing and perturbation evolution. *Phys. Plasmas*, 13:012702.
- GONCHAROV, V. N., SKUPSKY, S., BOEHLY, T. R., KNAUER, J. P., MCKENTY, P. W., SMALYUK, V. A., TOWN, R. P. J., GOTCHEV, O. V., BETTI, R. et MEYERHOFER, D. D. (2000). A model of laser imprinting. *Phys. Plasmas*, 7(5):2062–2068.
- GOTTLIEB, D. et ORSZAG, S. A. (1977). Numerical analysis of spectral methods : theory and applications. SIAM-CBMS, Philadelphia.
- GUILLARD, H., MALÉ, J.-M. et PEYRET, R. (1992). Adaptative spectral methods with applications to mixing layer computations. *J. Comput. Phys.*, (102):114–127.
- GUILLARD, H. et PEYRET, R. (1988). On the use of spectral methods for the numerical solution of stiff problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, (66):17–43.
- HATEAU, D. (2001). *Modélisation mathématique et simulation numérique d'instabilités hydrodynamiques en présence de conduction de chaleur non-linéaire, application à l'instabilité du front d'ablation*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- KULL, H. J. (1989). Incompressible description of Rayleigh–Taylor instabilities in laser-ablated plasmas. *Phys. Fluids B*, 1(1):170–182.
- KULL, H. J. et ANISIMOV, S. I. (1986). Ablative stabilization in the incompressible Rayleigh–Taylor instability. *Phys. Fluids B*, (7):2067–2075.
- LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. (1989). Physique théorique - Mécanique des fluides. volume 6. Mir, Moscou.
- LAWSON, J. D. (1957). Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. *Proc. Phys. Soc. B*, 70(6).
- LINDL, J. D. (1998). Inertial confinement fusion.

- LLNL (2012). *Workshop on Science of fusion ignition on NIF*, San Ramon, Californie. Lawrence Livermore National Laboratory. LLNL-TR-570412.
- LOMBARD, V. (2008). *Modes de Kovàsznay pour l'étude de la stabilité linéaire d'écoulements d'ablation autosemblables*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- LOMBARD, V., GAUTHIER, S., CLARISSE, J.-M. et BOUESOCQUE-DUBOIS, C. (2008). Kovàsznay modes in stability of self-similar ablation flows in ICF. *Europhysics Letters*, 84:25001.
- MACAREG, M. G. et STREETT, C. L. (1986). Improvements in spectral collocation discretization through a multiple domain technique. *Applied Numerical Mathematics* 2, pages 95–108.
- MACCORMACK, R. (1971). Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer. In *Lecture Notes in Physics*, volume 8/1971, pages 151–163. Springer Berlin / Heidelberg.
- MARSHAK, R. (1958). Effect of radiation on shock wave behavior. *Phys. Fluids*, 1(1):24–29.
- METZLER, N., VELIKOVICH, A. L., SCHMITT, A. J., KARASIK, M., SERLIN, V., MOSTOVYCH, A. N., OBENSCHAIN, S. P., GARDNER, J. H. et AGLITSKIY, Y. (2003). Laser imprint reduction with a shaping pulse, oscillatory Richtmyer–Meshkov to Rayleigh–Taylor transition and other coherent effects in plastic-foam targets. *Phys. Plasmas*, 10:1897–1905.
- MOSES, E. I. (2010). Advances in inertial confinement fusion at the National Ignition Facility (NIF). *Fusion Engineering and Design*, 85:983–986.
- MURAKAMI, M., SAKAIYA, T. et SANZ, J. (2007). Self-similar ablative flow of nonstationary accelerating foil due to nonlinear heat conduction. *Phys. Plasmas*, 14:022707.
- NUCKOLLS, J., WOOD, L., THIESSEN, A. et ZIMMERMAN, G. (1972). Laser compression of matter to super-high densities : thermonuclear applications. *Nature*, 239:139–142.
- PAKULA, R. et SIGEL, R. (1985). Self-similar expansion of dense matter due to heat transfer by nonlinear conduction. *Phys. Fluids*, 28(1):232–244.
- PEYRET, R. (2003). Spectral methods for incompressible viscous flows. Springer.
- PIRIZ, A. R. et PORTUGUES, R. F. (2003). Landau–Darrieus instability in an ablation front. *Phys. Plasmas*, 10:2449–2456.
- PIRIZ, A. R., SANZ, J. et IBÁÑEZ, F. (1997). Rayleigh–Taylor instability of steady ablation fronts : the discontinuity model revisited. *Phys. Plasmas*, 4(4):1117–1126.
- PULICANI, J. P. (1988). A spectral multi-domain method for the solution of 1D-Helmholtz and Stokes-type equations. *Comput. and Fluids*, 16:207–215.
- REINICKE, P. et MEYER-TER-VEHN, J. (1991). The point explosion with heat conduction. *Phys. Fluids A*, 3(7):1807–1818.
- RENAUD, F. (1996). *Méthode spectrale de décomposition dynamique de domaines : application aux écoulements compressibles de Rayleigh–Bénard et Kelvin–Helmholtz*. Thèse de doctorat.
- RENAUD, F. et GAUTHIER, S. (1997). A dynamical pseudo-spectral domain decomposition technique : application to viscous compressible flows. *J. Comput. Phys.*, 131:89–108.

- RICHTMYER, R. D. (1960). Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13:297–319.
- ROTHMAN, E. E. (1991). Reducing round-off error in Chebyshev pseudospectral computations. *High performance computing II*, pages 4423–439.
- SAILLARD, Y. (1983). Solutions exactes de l’ablation induite par une onde thermique. Communication privée.
- SAILLARD, Y. (2000). Hydrodynamique de l’implosion d’une cible FCI. *C. R. Acad. Sci. Paris*, pages 705–718.
- SAILLARD, Y., ARNAULT, P. et SILVERT, V. (2010). Principles of the radiative ablation modeling. *Phys. Plasmas*, 17:123302.
- SANMARTÌN, J. R. et BARRERO, A. (1978a). Self-similar motion of laser half-space plasmas. i. deflagration regime. *Phys. Fluids*, 21(11):1957–1966.
- SANMARTÌN, J. R. et BARRERO, A. (1978b). Self-similar motion of laser half-space plasmas. ii. thermal wave and intermediate regimes. *Phys. Fluids*, 21(11):1967–1971.
- SANZ, J. (1994). Self-consistent analytical model of the Rayleigh–Taylor instability in inertial confinement fusion. *Phys. Rev. Lett.*, 73(20):2700–2703.
- SANZ, J. (1996). Self-consistent analytical model of the Rayleigh–Taylor instability in inertial confinement fusion. *Phys. Rev. E*, 53(4):4026–4045.
- SANZ, J., PIRIZ, A. R. et TOMASEL, F. (1992). Self-similar model for tamped ablation driven by thermal radiation. *Phys. Fluids B*, 4(3):683–692.
- SANZ, J., RAMIREZ, J., RAMIS, R., BETTI, R. et TOWN, R. P. (2002). Nonlinear theory of the ablative Rayleigh–Taylor instability. *Phys. Rev. Lett.*, 89:195002.
- SEDOV, L. (1977). Similitude et dimensions en mécanique. Mir, Moscou.
- TAKABE, H., MIMA, K., MONTIERTH, L. et MORSE, R. L. (1985). Self consistent growth rate of the Rayleigh–Taylor instability in an ablatively accelerating plasma. *Phys. Fluids*, 28(12):3676–3682.
- TAKABE, H., MONTIERTH, L. et MORSE, R. L. (1983). Self consistent eigenvalue analysis of Rayleigh–Taylor instability in an ablating plasma. *Phys. Fluids*, 26(8):2299–2307.
- THOMPSON, K. (1987). Time dependant boundary conditions for hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.*, 68:1–24.
- THOMPSON, K. (1990). Time dependant boundary conditions for hyperbolic systems, II. *J. Comput. Phys.*, 89:439–461.
- VALLET, A. (2011). Instabilités induites par une rugosité initiale dans des écoulements autosembles d’ablation en fusion par confinement inertiel. Rapport de stage, École Nationale Supérieure des Mines de Douai, Université de Lille Nord de France.
- VAUVY, J. (2007). Études de solutions autosembles d’écoulements d’ablation instationnaires en conduction radiative. Rapport de stage, École Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aérotechnique, Université de Poitiers.

- VELIKOVICH, A. L., DAHLBURD, J. P., GARDNER, J. H. et TAYLOR, R. J. (1998). Saturation of perturbation growth in ablatively driven planar laser targets. *Physics of Plasmas*, 5:1491–1505.
- WILLIAMSON, J. H. (1980). Low-storage Runge–Kutta schemes. *J. Comput. Phys.*, 35:48–56.
- ZEL'DOVICH, Y. B. et RAIZER, Y. P. (1967). Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena. volume 2, pages 676–678. Academic Press.

Contributions à l'étude de la stabilité d'écoulements autosemblables d'onde thermique pour la fusion par confinement inertiel

Les solutions exactes autosemblables de l'hydrodynamique, avec conduction thermique non-linéaire, pour des gaz parfaits en milieu semi-infini, constituent une approche possible pour l'étude de la stabilité d'écoulements en fusion par confinement inertiel. Ces solutions et leurs perturbations linéaires, calculées à l'aide d'une méthode spectrale de Chebyshev multidomaine, permettent de rendre compte, sans autre approximation, du caractère compressible et instationnaire de ces écoulements. Suite aux résultats (Clarisse *et al.*, 2008; Lombard, 2008) représentatifs de l'ablation précoce d'une cible par un flux laser non-uniforme (conduction électronique, front thermique subsonique précédé d'un choc quasi-parfait), nous explorons ici d'autres configurations. Pour cette même phase d'ablation, mais avec un rayonnement X incident non-uniforme (conduction radiative), nous traitons un écoulement compressible et un autre faiblement compressible. Dans les deux cas, nous retrouvons les comportements des écoulements compressibles obtenus en conduction électronique avec une instabilité maximale pour un nombre d'onde nul. D'autre part, la méthode spectrale est étendue au calcul de solutions autosemblables en tenant compte de l'onde thermique supersonique en amont du choc. Basée sur une analyse des singularités des équations réduites (front infiniment raide), cette méthode permet d'accéder au régime d'onde thermique supersonique propre à l'irradiation initiale d'une cible et de retrouver les solutions ablatives calculées antérieurement dans l'approximation de précurseur thermique négligeable.

Mots Clés : instabilité linéaire, onde thermique, solution autosemblable, méthode spectrale, compressibilité, instationnarité.

Contributions to the stability analysis of self-similar supersonic heat waves related to inertial confinement fusion

Exact self-similar solutions of gas dynamics equations with nonlinear heat conduction for semi-infinite slabs of perfect gases are used for studying the stability of flows in inertial confinement fusion. Both the similarity solutions and their linear perturbations are computed with a multidomain Chebyshev pseudo-spectral method, allowing us to account for, without any other approximation, compressibility and unsteadiness. Following previous results (Clarisse *et al.*, 2008; Lombard, 2008) representative of the early ablation of a target by a nonuniform laser flux (electronic conduction, subsonic heat front downstream of a quasi-perfect shock front), we explore here other configurations. For this early ablation phase, but for a nonuniform incident X-radiation (radiative conduction), we study a compressible and a weakly compressible flow. In both cases, we recover the behaviours obtained for compressible flows with electronic heat conduction with a maximal instability for a zero wavenumber. Besides, the spectral method is extended to compute similarity solutions taking into account the supersonic heat wave ahead of the shock front. Based on an analysis of the reduced equations singularities (infinitely stiff front), this method allows us to describe the supersonic heat wave regime proper to the initial irradiation of the target and to recover the ablative solutions which were obtained under a negligible fore-running heat wave approximation.

Key words : linear instability, heat wave, self-similar solution, spectral method, compressibility, unsteadiness.