



HAL
open science

Calcul à l'échelle méso avec interface non locale des composites stratifiés

Felipe Eduardo Bordeu Weldt

► **To cite this version:**

Felipe Eduardo Bordeu Weldt. Calcul à l'échelle méso avec interface non locale des composites stratifiés. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012. Français. NNT : 2012DENS0001 . tel-00975428

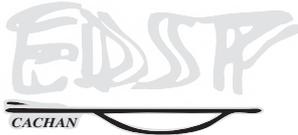
HAL Id: tel-00975428

<https://theses.hal.science/tel-00975428v1>

Submitted on 8 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-20XX/XXX



**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Felipe Eduardo Bordeu Weldt

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse

**Calcul à l'échelle méso avec interface non locale des
composites stratifiés**

Soutenue à Cachan le 06 janvier 2012 devant le jury composé de :

M. Pierre-Alain Boucard	ENS Cachan	Directeur de thèse
M. Daniel Coutellier	Université de Valenciennes	Examineur
M. Frédéric Feyel	ONERA	Rapporteur
M. Christian Hochard	Université de Provence	Rapporteur
M. Gilles Lubineau	KAUST	Co-encadrant
M. Stéphane Mahdi	Airbus	Examineur

LMT-Cachan

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris
61 avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX, France

Je tiens tout d'abord à remercier Pierre-Alain Boucard de m'avoir proposé ce sujet de thèse riche et passionnant. Sa grande culture scientifique m'a permis d'élargir considérablement ma connaissance sur divers domaines scientifiques et a rendu ces quatre années aussi productives qu'agréables. Merci également à Gilles Lubineau de ses conseils précieux, et sa manière très pragmatique d'affronter les problèmes.

Je tiens à remercier Daniel Coutellier de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury, et également Stéphane Mahdi d'avoir apporté une expertise industrielle à ce travail de thèse. Je souhaite remercier Christian Hochard pour ses nombreuses remarques et suggestions sur mon travail. Un merci particulièrement chaleureux à Frédéric Feyel pour toutes ses réflexions sur mon travail, à la fois dans son rapport et pendant la soutenance, qui m'ont permis de prendre du recul par rapport à mes travaux.

Je voudrais remercier l'ensemble du personnel du LMT de m'avoir permis de réaliser ma thèse dans les meilleures conditions. Plus particulièrement Lydia et Françoise qui font un travail remarquable en nous déchargeant des toutes considérations administratives.

Je remercie toute l'équipe du centre de calcul, qui fait du laboratoire un endroit si convivial.

Je ne terminerai pas sans adresser un immense merci à ma famille qui m'a toujours encouragé dans mes études. Enfin, un grand merci à ma femme Farah pour l'aide précieuse apportée pendant l'écriture du manuscrit.

Table des matières

Table des matières	i
Table d'illustrations	v
Notations	1
Introduction	5
1 Structures composites stratifiées	11
1 La microstructure de composites à matrice organique	12
1.1 Le renfort	12
1.2 La matrice	12
1.3 Le pli unidirectionnel	13
1.4 Le stratifié	13
2 Mécanismes de dégradation	13
3 Prédiction de la ruine des structures composites stratifiées	16
3.1 Modèles à grande échelle	16
3.2 Modèles à l'échelle fine	19
3.3 Modèles à l'échelle méso	19
2 Méso-modèle amélioré pour composites stratifiés	21
1 Introduction	22
2 Méso-constituant pli	22
2.1 Loi d'état	24
2.2 Loi d'évolution	25
2.2.1 Endommagement diffus	25
2.2.2 Endommagement sens fibre	27
2.2.3 Fissuration transverse	27
2.2.4 Déformation anélastique	30
3 Méso-constituant interface	32
3.1 Loi d'état	33
3.2 Loi d'évolution	33
4 Effet retard	35
5 Améliorations apportées	37

Table des matières

5.1	Loi d'évolution pour la rupture fibre compatible avec l'effet retard	37
5.2	Réorientation de fibres due à la déformation	38
6	Bilan	41
3	Méthodes de résolution	43
1	Problème mécanique de référence et notations	44
2	Méthode des éléments finis	45
3	Résolution de problèmes de grande taille	45
3.1	Méthodes descendantes	46
3.2	Méthodes multigrilles	47
3.3	Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement . . .	48
3.3.1	Sous-structuration	48
3.3.2	Condensation	49
3.3.3	Approche primale	51
3.3.4	Préconditionneur et problème grossier	52
3.3.5	Approche duale	54
3.3.6	Approche mixte	55
4	Méthodes de résolution de problèmes non linéaires	56
4.1	Méthodes de Newton	57
5	Les méthodes Newton-Krylov-Schur	59
6	Bilan	60
4	Mise en œuvre numérique	63
1	Le calcul haute performance	64
2	Développements informatiques	64
2.1	Librairie LMTpp	65
2.2	Librairies externes	66
2.3	Structure générale du code	67
2.4	Discrétisation temporelle	68
2.5	Discrétisation spatiale	69
2.6	Partitionnement	72
2.7	Post-traitement	75
3	Bilan	76
5	Mise en œuvre : lois de comportement	77
1	Loi de comportement pli	78
1.1	Réorientation de fibres due à la déformation	79
1.2	Hyperélasticité direction fibre	80
1.3	Plasticité	80
1.3.1	Direction d'écoulement plastique	81
1.3.2	Direction d'évolution des variables d'écrouissage . . .	81
1.3.3	Retour itératif sur le convexe d'élasticité	82
1.3.4	Algorithme	83

1.4	Endommagement sens fibre	86
1.5	Endommagement diffus	86
1.6	Fissuration transverse	88
2	Interface	89
3	Effet retard	90
4	Bilan	94
6	Mise en œuvre : méthodes de résolution	95
1	Résolution d'un problème linéaire	96
1.1	Traitement des conditions de bords	96
2	Résolution d'un problème non linéaire	99
2.1	Le contact	100
3	Non linéaire en décomposition de domaine	101
3.1	Solveur linéaire	102
3.1.1	Projection	102
3.1.2	Préconditionnement	105
3.2	Solveur non linéaire	105
3.3	Localisation non linéaire	107
4	Bilan	109
7	Exemples de prévision des dégradations dans les structures composites	111
1	Problème élastique en parallèle	112
2	Réorientation de fibres	114
3	Petit choc	115
4	Traction sur une plaque trouée	117
5	DCB <i>Double Cantilever Beam</i>	121
	Conclusion	125
A	Hypothèse d'un matériau isotrope transverse	129
B	Propriétés standards du méso-modèle pour CFRP	131
	Bibliographie	135

Table des matières

Table d'illustrations

Figures

1.1	Composite laminé : fibre et matrice, pli, empilement	13
1.2	Mécanismes de dégradation au sein du composite.	14
1.3	Critère de Puck : Rupture en mode IFF	18
2.1	Composite et méso-constituants	22
2.2	Repère local du pli	23
2.3	Décohésions fibre matrice (d'après Sjögren et Berglund (2000))	24
2.4	Endommagement en cisaillement du matériau M55J/M18	26
2.5	Volume élémentaire pour le calcul de l'énergie	28
2.6	Repère local de l'interface	33
2.7	Modes de chargement de l'interface	34
2.8	Évolution de l'endommagement sens fibre (loi de retard classique)	38
2.9	Évolution de l'endommagement sens fibre (loi de retard modifiée)	39
2.10	Réorientation de fibres due à la déformation (1)	39
2.11	Réorientation de fibres due à la déformation (2)	39
2.12	Variation de l'orientation de fibres pour un empilement de $[\pm\theta]_{ns}$	41
3.1	Problème mécanique de référence	44
3.2	Principe des méthodes multigrilles	47
3.3	Problème mécanique partitionné en deux sous-domaines	48
3.4	Problème mécanique partitionné en n sous-domaines (avec point triple)	50
3.5	Schéma de la méthode LaTin	56
3.6	Comportement adoucissant d'une structure	58
3.7	Étapes de résolution des stratégies NKS	59
3.8	Étapes de résolution des stratégies NKS avec relocalisation non linéaire	61
4.1	Schématization d'un cluster de machines à mémoire partagées	64
4.2	Structure interne de COFFEE : Données et Actions	68
4.3	Discretisation de l'intervalle d'étude : intervalles et pas	69
4.4	Classe gérant les temps	69

Table d'illustrations

4.5	Discrétisation du composite, caractère non-local (schématisation 2D) . . .	70
4.6	Classe Domain et SubDomain	72
4.7	Partitionnement du maillage	73
4.8	Étapes du partitionnement	73
4.9	Repères d'orthotropie par élément	74
4.10	Partition du maillage	75
4.11	Nombre d'éléments par sous-domaine	75
5.1	Comportement sens fibre pour un chargement monotone	81
5.2	Comportement en cisaillement	85
5.3	Comportement sens transverse cyclique	87
5.4	Comportement sens transverse cyclique avec effet retard	89
5.5	Fonction f_{22} identifié du modèle micro	90
5.6	Comportement sens Transverse avec Diffus, Plasticité et Fissurations (1) .	91
5.7	Comportement sens Transverse avec Diffus, Plasticité et Fissurations (2) .	92
6.1	Barre en traction	98
6.2	Erreur en fonction de la pénalisation	98
6.3	Indentation sur plaque composite	100
6.4	Surface du composite sous l'influence d'un indenteur sphérique rigide . .	101
6.5	Sous-domaine avec un délaminage partiel	104
6.6	Exemple de partitionnement d'une éprouvette DCB	104
6.7	Résidu par itération selon le coefficient de régularisation (κ)	106
6.8	Éprouvette et partition utilisée	108
6.9	Localisation non linéaire, nombre d'itérations par pas de chargement . . .	108
7.1	Maillage et sous-domaines	112
7.2	<i>Speed up</i> et temps de calcul en fonction du nombre de processeurs	113
7.3	Nombre d'itérations du solveur de Krylov	113
7.4	Plaque composite $[\pm 45]_s$	114
7.5	Éprouvette déforme et champs de déformation ϵ_x	114
7.6	Réorientations de fibres a) modèle proposé, b) modèle classique	115
7.7	Indentation sur plaque composite	115
7.8	Maillage utilisé pour l'indentation	116
7.9	Maillage utilisé pour l'indentation (zoom)	116
7.10	Montage essai indentation (EADS IW) et réponse globale essai	117
7.11	Endommagement sous la zone de contact (armoçage de la fissuration) . .	118
7.12	Endommagement sous la zone de contact (rupture fibre)	119
7.13	Plaque trouée en traction	120
7.14	Maillage utilisé pour la simulation	120
7.15	Endommagement dans la zone du trou (déplacement imposé : 0,52mm) .	121
7.16	Essai DCB (<i>Double Cantilever Beam</i>)	121
7.17	Essai DCB (<i>Double Cantilever Beam</i>)	122
7.18	DCB, réponse force/déplacement	123

Tableaux

4.1	Librairies externes utilisé par COFFEE	67
4.2	Description des principales classes dans COFFEE	68
4.3	Types d'éléments et quadrature de Gauss	71
B.1	Propriétés typiques du méso-constituant pli pour un CFRP	132
B.2	Propriétés typiques du méso-constituant interface pour un CFRP	133

Algorithmes

3.1	Approche Schur primal avec problème grossier et préconditionnement	54
3.2	Méthode Newton-Krylov-Schur	60
3.3	Méthode Newton-Krylov-Schur avec relocalisation non linéaire	60
5.1	Intégration loi comportement méso-constituant pli	79
5.2	Calcul de la reorientation des fibres	80
5.3	Calcul de la hyperélasticité	80
5.4	Calcul de la plasticité	84
5.5	Calcul de l'endommagement sens fibre (d_f)	86
5.6	Calcul de l'endommagement diffus (d et d')	87
5.7	Calcul de l'endommagement dû à la fissuration transverse ($\bar{d}_{22}, \bar{d}_{12}, \bar{d}_{23}$)	90
5.8	Intégration loi comportement méso-constituant interface	93
6.1	Algorithme du gradient conjugué préconditionné projeté	103
6.2	Newton-Krylov-Shur	106
6.3	Newton-Krylov-Shur avec relocalisation non linéaire	107

Table d'illustrations

Notations

Chapitre	Symbole	
1	σ	Tenseur de contraintes
	$\sigma_{1t}^r, \sigma_{2t}^r, \sigma_{3t}^r$	Contrainte à rupture en traction dans les 3 directions principales du pli
	$\sigma_{1c}^r, \sigma_{2c}^r, \sigma_{3c}^r$	Contrainte à rupture en compression dans les 3 directions principales du pli
	$\tau_{12}^r, \tau_{13}^r, \tau_{23}^r$	Contrainte à rupture en cisaillement dans les 3 directions principales du pli
	σ_{ij}	Composante ij du tenseur de contraintes σ
	f_i, f_{ij}	Coefficients du critère de Tsai-Wu
	$R_{\parallel}^t, R_{\parallel}^c, R_{\perp\perp}^A,$ $R_{\perp\parallel}^A, R_{\perp}^A$	Contrainte à rupture (\parallel direction parallèle aux fibres, \perp direction perpendiculaire aux fibres)
	θ	Angle définissant le plan de rupture
2 ¹	$N_1^{\text{pli}}, N_2^{\text{pli}}, N_3^{\text{pli}}$	Direction : parallèle aux fibres, transverse dans le plan et normale au plan dans un pli élémentaire
	d_f	Endommagement sens fibre
	d	Endommagement diffus transverse
	d'	Endommagement diffus en cisaillement
	$\bar{d}_{22}, \bar{d}_{12}, \bar{d}_{23}$	Endommagement dû à la fissuration transverse
	e_d	Densité d'énergie de déformation
	S	Tenseur de souplesse
	$\langle \cdot \rangle_+$	Partie positive
	$\langle \cdot \rangle_-$	Partie négative
	$[\cdot]^+$	Fonction <i>Heaviside</i> (\cdot)
	$[\cdot]^-$	Fonction <i>Heaviside</i> ($-\cdot$)
	ϵ	Tenseur de déformation
	$\hat{\epsilon}$	Notation vectorielle du tenseur ϵ
	ϵ_{ij}	Composante ij du tenseur de déformation
	Y_{d_f}	Force thermodynamique associé à d_f
	Y_d	Force thermodynamique associé à d
	$Y_{d'}$	Force thermodynamique associé à d'
	$\langle\langle \cdot \rangle\rangle_H$	Opérateur moyenne dans l'épaisseur du pli élémentaire
	\bar{Y}	Force thermodynamique équivalente
	w	Variable de pilotage de l'endommagement
	E_d	Énergie potentielle dans un VER dégradé

¹La liste exhaustive des propriétés matériaux pour le méso-modèle se trouve dans l'annexe B

Notations

ρ	Taux de fissuration transverse
$Y_{\bar{d}_{22}}, Y_{\bar{d}_{12}}, Y_{\bar{d}_{23}}$	Forces thermodynamiques associé à ρ
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Tenseur de déformations effectives
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$	Tenseur de contraintes effectives
p	Plasticité cumulée
Θ	Opérateur reliant les quantités vraies aux quantités effectives
θ	Angle d'orientation des fibres dans un pli
$N_1^{\text{int}}, N_2^{\text{int}}, N_3^{\text{int}}$	Direction principale, secondaire et normale d'une interface
$\llbracket U \rrbracket$	Saut de déplacement entre les faces supérieures et inférieures de l'interface
S^{int}	Tenseur de souplesse de l'interface
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{int}}$	Tenseur de contrainte dans l'interface
d_I	Endommagement d'interface mode I
d_{II}	Endommagement d'interface mode II
d_{III}	Endommagement d'interface mode III
Y_{d_I}	Force thermodynamique associée à d_I
$Y_{d_{II}}$	Force thermodynamique associée à d_{II}
$Y_{d_{III}}$	Force thermodynamique associée à d_{III}
$\bar{\rho}$	Moyenne des taux de fissuration de deux plis adjacents
θ'	Angle d'orientation des fibres dans un pli après déformation
$\nabla_{xyz} u$	Gradient du champ déplacement dans le repère global
$\nabla_{123} u$	Gradient du champ déplacement dans le repère local
\mathbb{P}	Matrice de passage du repère global $(_{xyz})$ au repère local $(_{123})$
Π	Projecteur pour l'extraction de la partie plane
<hr/>	
3	Ω Domaine d'étude
	$U(M, t)$ Champ de déplacement
	f_d Forces volumiques
	F_d Effort surfacique
	$\partial_2 \Omega$ Frontière de Ω à force imposée
	U_d Déplacements imposés
	$\partial_1 \Omega$ Frontière de Ω à déplacement imposé
	$\mathbb{L}(\boldsymbol{\varepsilon})$ Relation de comportement
	u Champ de déplacement discretisé
	Γ Interface entre deux sous-domaines
	K Matrice de rigidité
	f Vecteur de forces généralisé
	S_p Complément de Schur primal
	b_p Second membre condensé
	S_d Complément de Schur dual
	R_b Noyau de l'opérateur S_d local
	$A^{(s)}$ Opérateur d'assemblage du sous-domaine (s)
	W Matrice de pondération
	C Base de mouvement de corps rigide des sous-domaines
	P Projecteur d'extraction des mouvements de corps rigide
	f' Opérateur tangent
<hr/>	
5	$\Delta \cdot$ Incrément de la variable \cdot dans le pas courant

	u^{old}	Solution au pas de chargement précédent
	$\boldsymbol{\varepsilon}^{old}$	Déformation associé à la solution du pas précédent
6	$\Pi(u)$	Fonctionnelle de référence
	$\bar{\Pi}(u)$	Fonctionnelle modifiée par des multiplicateurs de Lagrange
	$\bar{\bar{\Pi}}(u)$	Fonctionnelle modifiée par pénalisation
	λ	Multiplicateur de Lagrange
	α	Facteur de pénalisation
	α_{relax}	Facteur de relaxation
	κ	Facteur de régularisation
	\tilde{S}_p^{-1}	Préconditionneur

Notations

Introduction

Depuis plus de vingt-cinq ans, dans l'industrie aéronautique et aérospatiale, les matériaux composites stratifiés à matrice organique (CMO) ont commencé à remplacer les alliages métalliques légers. Composés par un assemblage d'au moins deux matériaux non miscible à l'échelle microscopique (matrice et renfort), ils possèdent des propriétés que les constituants seuls ne possèdent pas. De plus, la nature hétérogène de ces matériaux permet d'inclure des fonctionnalités inatteignables pour un matériau homogène (alliage métallique). Avec un ratio résistance/masse supérieur aux alliages métalliques, et une tolérance aux chargements cycliques non négligeable, ces matériaux constituent une véritable alternative afin de diminuer le poids des aéronefs.

Mais, la certification des structures en composite est une procédure lourde et complexe. Elle implique une série d'essais qui sont souvent très coûteux. Par exemple, la certification d'un aéronef commercial nécessite deux essais sur des fuselages complets. Par ailleurs, l'utilisation de ces matériaux dans des pièces critiques est actuellement limitée par la capacité de simulation et de prédiction de l'évolution des différents mécanismes de dégradation.

La ruine d'une structure composite complexe met en jeu différents mécanismes de dégradation à plusieurs échelles. En réponse à un chargement mécanique, une structure composite peut développer principalement trois types de dégradations. À l'échelle microscopique, on peut ainsi observer des mécanismes de dégradation reliés aux propriétés du matériau, par exemple la décohérence fibre-matrice et la déformation anélastique de la matrice. Si l'on se place à l'échelle du pli, on peut observer une autre famille de mécanismes, cette famille est un mélange de comportements structuraux et matériaux. La fissuration transverse, qui est la coalescence de la décohérence fibre-matrice à l'échelle du pli en est un bon exemple. Elle dépend des propriétés du matériau (taux de restitution d'énergie), ainsi que de la microstructure du composite (les fissures s'arrêtent à l'interface entre deux plis élémentaires d'orientations différentes). Une dernière famille, celle des phénomènes structuraux, peut être présente à toutes les échelles (flambage local ou global, grande déformation, redistribution des efforts) et ne peut pas être négligée si l'on s'intéresse au comportement de pièces composite de taille industrielle.

Les propriétés du matériau peuvent évoluer en présence d'un environnement agressif (par exemple, changement de température, atmosphère oxydante). Il est clair que la présence d'un mécanisme de dégradation peut avoir une influence non négligeable sur un autre mécanisme. Par exemple, la topologie des fissures (dû au chargement mécanique) peut faciliter la propagation de l'oxygène à l'intérieur du matériau et ainsi accélérer la

Introduction

dégradation de la matière.

L'idée du *Virtual Testing* qui consiste à remplacer une grande partie des essais réels par des simulations numériques afin de diminuer la quantité d'essais physiques nécessaires pour la certification n'est pas nouvelle. Cependant, les modèles ainsi que les méthodes de calcul utilisées pour les simulations doivent avoir la confiance des ingénieurs et des autorités de contrôle.

Dans la littérature, on peut trouver une vaste collection de modèles permettant de simuler les différents mécanismes de dégradation (délaminage, décohésion fibre-matrice, bandes de cisaillement, etc.), mais peu d'entre eux permettent de prendre en compte l'ensemble des phénomènes pour une prédiction correcte de la ruine dans un cas de complexité industrielle. Les modèles industriels actuels donnent surtout des prédictions à première rupture, suffisantes pour le dimensionnement de pièces aéronautique. Cela pose de problèmes concernant l'optimisation des structures, car la tenue résiduelle d'une structure composite peut être très acceptable même avec un niveau de dommage élevé. D'autre part, les différents phénomènes ont lieu à des échelles très différentes, donc pour capturer l'ensemble des phénomènes il n'est pas suffisant d'avoir un modèle cohérent, il faut avoir aussi une stratégie de calcul capable de gérer la complexité du problème.

Actuellement, en matière de modèle plusieurs choix existent. Il y a des modèles dits *micro*, qui ont comme but la modélisation du matériau à l'échelle fine. Ce type de modélisation permet de prendre en compte une grande partie de la physique de manière directe (par exemple, la structure hétérogène fibre-matrice d'un composite). Par contre, à cause de l'échelle à laquelle ces modèles sont définis, leur utilisation est restreinte à de petits volumes de matière. Il y a aussi des modèles à l'échelle de la structure, dits *macro*. Ces types de modèles permettent de prendre en compte le comportement global d'une structure complexe (par exemple le flambage global) très facilement. Puis il existe toute une famille des critères de rupture, qu'utilisent ces données macroscopiques, pour la prévision de la première rupture. Même si ces critères sont suffisants pour le dimensionnement des structures aéronautique, ils sont incapables de représenter correctement des quantités locales (concentration de contrainte en point de microfissures), qui sont responsables de l'amorçage et de l'évolution de la dégradation, donc de prévoir l'évolution de la rupture jusqu'à la ruine finale. Une autre solution est de choisir une échelle intermédiaire, de façon à avoir un compromis entre la taille des modèles numériques et la finesse du modèle du matériau.

Le « méso-modèle d'endommagement des composites stratifiés » introduit par Ladevèze et Allix semble être un bon compromis entre ces deux échelles. Ce méso-modèle se base sur l'idée que toute structure composite peut être modélisée à partir de deux méso-constituants ; le pli élémentaire et l'interface. Basé sur la mécanique continue de l'endommagement, il traite les mécanismes de dégradation aux échelles inférieures de manière continue. Un point important est le caractère non local dans l'épaisseur du pli élémentaire (couche de fibres orientées dans la même direction).

Ce modèle a été fortement amélioré en lui injectant des informations issues de travaux d'homogénéisation des modèles à l'échelle inférieure. Le modèle résultant, appelé « méso-modèle amélioré d'endommagement des composites stratifiés » (*Enhanced Da-*

mage Mesomodel en anglais), est donc en accord avec les phénomènes de dégradations aux échelles inférieures. Les travaux d'homogénéisation ont révélé que, à l'échelle mésoscopique, le comportement de l'interface entre deux plis adjacents dépend de l'état de dégradation de ces derniers. Une modélisation non locale de la loi d'évolution de l'interface permet de prendre en compte cette dépendance. Ainsi, le délaminage, un phénomène très important dans la ruine d'une structure, peut être prédit correctement.

Mais, l'utilisation du méso-modèle amélioré dans des cas industriels demande une attention particulière en matière de stratégie de résolution. En effet, bien qu'une échelle intermédiaire soit introduite, la taille des problèmes à résoudre reste importante (quantité de degrés des libertés d'une pièce industrielle). De plus, la gestion des aspects non locaux du méso-modèle génère des difficultés supplémentaires.

En ce qui concerne la stratégie de résolution, une grande gamme d'algorithmes est disponible dans la littérature. Le développement d'approches multiéchelles capables de faire communiquer différents modèles à différentes échelles permettant la simulation de structures complexes entières à l'échelle fine s'avère indispensable. Ces approches ne sont pas nouvelles. Cependant, les ingénieurs des bureaux d'études réalisent, dans la plupart des cas, seulement des analyses descendantes. C'est-à-dire d'un premier calcul grossier sur toute la structure avec un modèle simple, suivi d'une analyse locale sur une petite zone d'intérêt avec un modèle plus complexe. À cause du dialogue limité entre les échelles, cette démarche pose des problèmes quand les non-linéarités des phénomènes à l'échelle fine ont une influence importante sur le reste de la structure.

Un autre point important au moment de la sélection de la stratégie de résolution est le type de calculateur disponible. Historiquement, la démarche pour obtenir une machine de calcul plus puissante était d'augmenter la vitesse des processeurs. Actuellement, la tendance est de rassembler plusieurs processeurs dans une même puce électronique (machines *multicore*), ou encore de rassembler plusieurs machines pour obtenir des supercalculateurs (*clusters*). Il est clair que pour pouvoir profiter au maximum des capacités informatiques de ces machines, la stratégie de résolution doit être hautement parallélisable, et la stratégie de parallélisation doit être compatible avec l'architecture *hardware*.

L'objectif des travaux présentés ici est double : améliorer la confiance accordée à ces modèles et proposer des solutions numériques permettant de traiter une structure composite de complexité moyenne. Dans ce mémoire, nous présentons une démarche cohérente permettant d'intégrer les dernières avancées réalisées sur le méso-modèle au sein d'un environnement de calcul performant dédié au traitement de structures stratifiées composites de taille industrielle.

Dans le premier chapitre, nous commençons par la présentation du problème physique. Le composite stratifié et les différents mécanismes de dégradation présentent dans ce matériau. Nous pouvons constater que selon l'échelle d'observation, certains phénomènes peuvent être traités soit de manière discrète, soit de manière continue. C'est pour cette raison que le choix de l'échelle de modélisation est primordial. Nous proposons ensuite de revenir de manière synthétique sur les différentes approches existantes pour la modélisation, et les échelles d'études associées.

Le deuxième chapitre présente le modèle retenu pour le reste de l'étude. Le méso-

Introduction

modèle amélioré des composites stratifiés propose de modéliser l'ensemble des dégradations à l'échelle du pli, appelé échelle méso. Des travaux récents ont permis d'effectuer des liens rigoureux entre méso- et micro-mécanique de la dégradation des CMO, permettant au méso-modèle d'endommagement des stratifiés d'être reconstruit comme une homogénéisation systématique des modèles micromécaniques ayant un sens physique fort. Le stratifié est alors modélisé à partir de deux mésos constituants ; le pli élémentaire, qui est une entité volumique, et l'interface, qui est une entité surfacique reliant deux plis élémentaires adjacents. Quelques améliorations apportées au modèle sont présentées, permettant ainsi de modéliser une large gamme de composite soumis à tout type de cas de chargement.

Le troisième chapitre présente une bibliographie non exhaustive des différentes stratégies de résolution des problèmes non linéaires non locaux d'évolution de grande taille. Ensuite, la stratégie retenue pour l'implémentation est exposée en détail. Le caractère non local du modèle implique que chaque point récupère un certain nombre d'informations des points voisins afin d'intégrer correctement la loi de comportement. Cette restriction doit être traitée avec soin au moment de l'implémentation de la stratégie de résolution. La présence de non-linéarités fortes comme la rupture fibre et la micro-fissuration peuvent mener à un mauvais conditionnement des opérateurs de la stratégie de calcul. Dans le cadre d'un calcul en parallèle, la présence de non-linéarités localisées permet, dans certains cas, l'introduction d'un solveur non linéaire indépendant par sous-domaine. Cette stratégie appelée « relocalisation non linéaire » permet d'accélérer énormément la résolution du problème. Par contre, les paramètres utilisés pour configurer la méthode de résolution peuvent avoir un impact sur la qualité de la solution.

Le quatrième chapitre est consacré à la mise en œuvre numérique. L'objectif est de présenter l'outil de calcul développé durant la thèse. Afin de profiter au maximum des capacités de calcul des nouveaux calculateurs, une implémentation utilisant des technologies adaptées est nécessaire. L'utilisation de MPI² et du Multithreading³ rend l'utilisation optimale des nouveaux calculateurs possible. Cependant, ils ajoutent des difficultés supplémentaires. La mise en œuvre en parallèle de toutes les étapes d'une simulation (préparation du calcul, maillage et partitionnement, résolution en parallèle, sauvegarde de résultats, post-traitement) n'est pas toujours évidente. L'utilisation des outils de programmation modernes a permis le développement d'un code très hiérarchisé capable de traiter de manière cohérente toutes les étapes d'une simulation en parallèle.

Le cinquième chapitre est consacré à la mise en œuvre du modèle. Le méso-modèle propose de modéliser chaque phénomène de dégradation de manière indépendante, c'est-à-dire que chaque phénomène a ses propres équations. Cette approche permet d'incorporer facilement de nouveaux phénomènes et de nouvelles relations de couplage. De la même manière, elle permet l'activation et la désactivation de phénomènes à volonté, permettant de constater l'influence d'un phénomène particulier sur la réponse de la structure. L'implémentation du modèle dans un code de calcul pose des problèmes dus au fait que

²*Message Passing Interface*, norme définissant une bibliothèque de fonctions. Elle permet d'exploiter des ordinateurs distants ou multiprocesseurs par passage de messages.

³Habilité d'avoir plusieurs fils d'exécution au sein d'un même processus informatique.

l'ensemble des équations doit être résolu simultanément. Les équations du modèle ont été triées, en fonction des différents couplages, afin d'obtenir un ordre et un algorithme optimal pour la résolution. Ceci a permis de résoudre de manière très robuste les équations locales du modèle.

Le sixième chapitre présente la mise en œuvre de la méthode de résolution. Même si la méthode de résolution choisie est très robuste, elle a dû subir de modifications pour l'adapter au méso-modèle. Des méthodes particulières ont été développées pour le traitement correct du caractère non local du méso-modèle. Un point très important a été la capacité de faire évoluer les variables d'endommagement jusqu'à la rupture finale.

Le septième chapitre est dédié aux illustrations. Le premier exemple, un problème élastique linéaire est résolu en parallèle pour montrer la performance de la mise en œuvre de la méthode de décomposition de domaine. Ensuite la simulation d'une éprouvette $[\pm 45]_s$ en utilisant le modèle de réorientation de fibres proposé est présentée. Par la suite, un DCB (de l'anglais *Double Cantilever Beam*) a comme objectif de montrer les capacités de prédiction pour un cas classique. Finalement, un exemple d'impact à basse vitesse et une plaque trouée en traction sont présentés pour démontrer les capacités globales de la stratégie proposée.

Introduction

Chapitre 1

Structures composites stratifiées

Ce chapitre présente le cadre phénoménologique général caractérisant une famille particulière de matériaux composites : les stratifiés à fibres longues. La description des constituants permet la compréhension des mécanismes de dégradation possibles au sein du matériau. Le cadre de l'étude est ensuite présenté. Enfin, une revue non exhaustive des modèles existants pour la prédiction de la ruine des structures composites est proposée.

Sommaire

1	La microstructure de composites à matrice organique	12
1.1	Le renfort	12
1.2	La matrice	12
1.3	Le pli unidirectionnel	13
1.4	Le stratifié	13
2	Mécanismes de dégradation	13
3	Prédiction de la ruine des structures composites stratifiées	16
3.1	Modèles à grande échelle	16
3.2	Modèles à l'échelle fine	19
3.3	Modèles à l'échelle méso	19

Structures composites stratifiées

L'idée de construire un assemblage de matériaux différents pour obtenir une structure plus résistante que chacun des matériaux n'est pas nouvelle. La conception de l'arc en composite, composé de deux types de bois, 2000 av. J.-C., a permis d'augmenter la distance de tir de manière considérable (Rerrill, 1997). 4000 ans sont passés, mais le concept reste le même. Aujourd'hui, les matériaux composites à fibre longue ont permis à l'industrie aéronautique et aérospatiale de réduire de manière importante le poids des structures. Un des matériaux les plus utilisés est le composite à matrice organique thermodur (CMO) (par exemple le caisson central de l'Airbus 380).

§ 1 La microstructure de composites à matrice organique

À petite échelle, les deux phases sont très clairement visibles. Les composites fibreux sont des matériaux dans lesquels une phase (le renfort ou les fibres) joue le rôle de renfort de la deuxième phase (la matrice). Quand les fibres sont longues par rapport à la taille de la structure, on parle de composite à fibres longues. La matrice joue le rôle de support pour les fibres, et elle permet le transfert d'effort entre les fibres. Il est clair que pour obtenir une efficacité maximale du composite, la liaison fibre-matrice doit être optimale.

1.1 Le renfort

Une grande variété de fibres est disponible sur le marché. Les principaux types de fibres sont le verre, le carbone, le Kevlar, le PBO (pour *Polypara-phenylene-Benzo-bis-Oxazole*), le polyéthylène, le Bore, etc. Les plus utilisés dans l'industrie aéronautique et aérospatiale sont les fibres de carbone, Kevlar et verre. Habituellement, les fibres de carbone ont des diamètres compris entre 5-10 μm , les fibres de verre entre 6-14 μm et les fibres Kevlar ont un diamètre d'environ 12 μm .

Plusieurs formats de renforts existent sur le marché, des torons de 3000 jusqu'à 24000 fibres, des tissus tressés avec différents ratios de tissage, des plis unidirectionnels, des renforts 3D entre autres. Chaque type d'arrangement a ses avantages et inconvénients. Par exemple, les tissages 3D sont très résistants au déchirement, mais le processus de fabrication est extrêmement cher.

En général dans l'industrie les formats les plus répandus sont les plis unidirectionnels préimprégnés de matrice non polymérisée et les plis tissés. Dans ces travaux, nous nous intéressons plus particulièrement aux plis unidirectionnels. La quasi-absence de distorsions dans l'orientation des fibres permet de maximiser les propriétés mécaniques dans la direction des fibres.

1.2 La matrice

La majorité des matrices sont des polymères issus du pétrole. Le processus de polymérisation peut être contrôlé afin de générer des chaînes linéaires, linéaires avec ramifications, ou des réseaux tridimensionnels. Les différentes structures créées vont donner

Mécanismes de dégradation

les propriétés finales de la matrice. Deux groupes sont clairement identifiables ; les thermoplastiques et les thermodurcissables. Les thermoplastiques avec une structure simple (chaînes linéaires avec et sans ramifications) souffrent d'une dépendance à la température non négligeable, ils peuvent être réchauffés pour les rendre à l'état liquide. Par contre, la structure tridimensionnelle des thermodurcissables confère à la matrice un état irréversible.

1.3 Le pli unidirectionnel

Un pli unidirectionnel est un ensemble des fibres longues arrangées dans une même orientation (figure 1.1.b). Les plis unidirectionnels préimprégnés sont les plus communs. L'épaisseur des plis peut varier entre 0,1 mm et 0,6 mm. La matrice non polymérisée permet d'apporter un support physique aux fibres et de faciliter la manipulation pendant la mise en forme de la pièce.

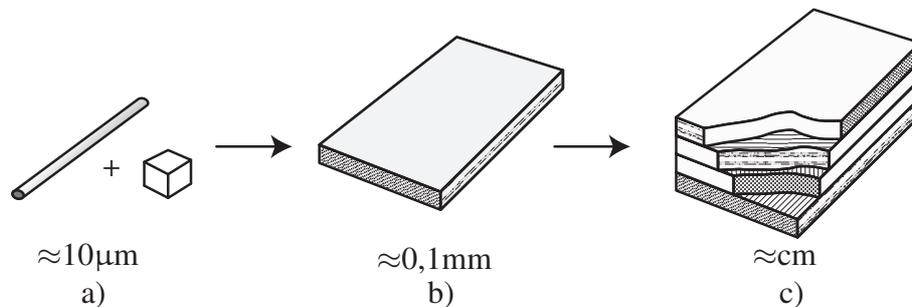


FIG. 1.1: Composite laminé, a) fibre et matrice b) pli unidirectionnel c) empilement

1.4 Le stratifié

Le stratifié est composé par un ensemble de plis unidirectionnels empilés dans des orientations différentes (figure 1.1.c). Ensuite l'empilement est polymérisé dans un autoclave à 180°C et 7 bars pendant 3 heures approximativement (Hexcel Corporation, 2009). Les conditions de polymérisation dépendent du type de polymère. Les propriétés finales du stratifié dépendent des propriétés de la matrice et des fibres, de la liaison entre la fibre et la matrice, de la distribution des deux constituants, et du processus de fabrication et polymérisation (Olivier et Cavarero, 2000).

§ 2 Mécanismes de dégradation

En service, une pièce composite peut souffrir des sollicitations très différentes (des chargements mécaniques, thermiques, chimiques, de rayonnement). Dans cette étude, nous nous intéressons aux chargements mécaniques provenant de sollicitations extérieures et de la dilatation thermique due aux changements de température. Malgré l'existence

Structures composites stratifiées

d'une vaste gamme de types de fibres et de matrices, ainsi que de processus de fabrication, tous les stratifiés laminés composés de couches unidirectionnelles partagent la même famille de mécanismes de dégradation. Sous sollicitation thermomécanique, statique ou cyclique, nous pouvons observer, au moins, sept mécanismes de dégradation principaux.

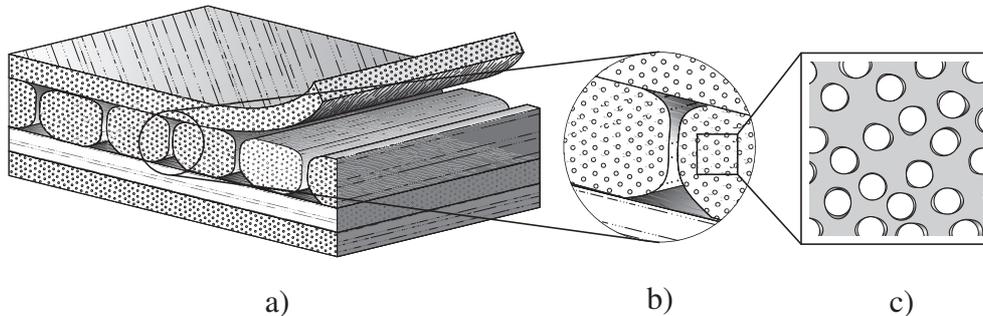


FIG. 1.2: Mécanismes de dégradation au sein du composite. a) échelle macro, b) échelle méso, c) échelle micro

Décohésion fibre-matrice : ce phénomène est associé à une échelle très petite (de l'ordre du diamètre des fibres), c'est le premier à apparaître au sein du composite (figure 1.2). Il est associé directement à la liaison existant entre la fibre et la matrice, différents types de produits pouvant être ajoutés à la matrice pour modifier les propriétés de l'interface (Gamstedt et Sjögren, 1999; Sjögren et Berglund, 2000; Lagattu et Lafarie-Frenot, 2000).

Déformation anélastique de la matrice : les polymères thermoplastiques sont très dépendants de la température ; au fur et à mesure que la température augmente, ce type de polymères présente un comportement viscoplastique. Ce phénomène peut être très important et il ne doit pas être négligé.

Certains types de thermodurcissables sont très sensibles à l'humidité. Ce type de composites peut absorber jusqu'à 2% de son poids en eau (Perreux et al., 2002). Ils présentent à saturation (tenure en eau maximale) un comportement élastoplastique (Murray et Schwer, 1990). Une autre source de déformation anélastique est le frottement des lèvres de fissures de la décohésion fibre-matrice.

Rupture de matrice : le caractère hétérogène du composite à l'échelle micro favorise le développement d'un champ de contraintes non régulier. En conséquence, la contrainte locale peut dépasser la résistance à la rupture de la matrice.

Délaminage local : l'interface entre deux plis adjacents est une zone riche en résine. Elle peut être dégradée par la surcontrainte locale en pointe des fissures générée par la fissuration transverse (Nairn et Hu, 1992; Ogihara et Takeda, 1995). Le refroidissement de la pièce après polymérisation peut aussi générer des contraintes résiduelles importantes dans cette zone.

Fissuration transverse : ce mécanisme correspond à la percolation de la décohésion fibre-matrice et de la rupture de matrice. Ces fissures sont parallèles aux fibres,

Mécanismes de dégradation

et traversent l'épaisseur entière du pli (Boniface et al., 1997; Crossman et Wang, 1982; Parvizi et al., 1978).

Délaminage macroscopique : au fur et à mesure que le chargement externe se développe, des contraintes hors plan peuvent devenir importantes et venir dégrader totalement la zone de résine entre deux plis.

Rupture fibre : normalement, c'est le dernier phénomène avant la ruine finale du composite. L'évolution du délaminage macroscopique empêche le bon transfert des efforts entre les plis, en conséquence certains plis supportent une fraction de la charge de plus en plus importante jusqu'à la rupture.

Normalement pour un chargement en traction monotone, l'enchaînement des mécanismes de dégradation est le suivant : la chute de température subie par la pièce à la sortie de l'autoclave est d'approximativement 150°C. Les contraintes résiduelles peuvent provoquer de la décohé sion fibre-matrice et du délaminage local. Une fois la pièce en service, la décohé sion fibre-matrice et le délaminage local se développent progressivement avec la charge. En pratique, à ce stade, le délaminage local est assez limité (une pièce bien conçue limite le développement du délaminage local). L'accumulation de la décohé sion fibre-matrice est suivie par la coalescence des fissures, générant de la fissuration transverse et du délaminage local. La compétition entre ces deux phénomènes finit par la saturation de la fissuration transverse. Le délaminage macroscopique se développe donc aux bords et autour des accidents géométriques (trous...). La rupture fibre, en traction comme en compression, se produit lorsque la contrainte maximale est atteinte dans les fibres.

Cette schématisation de l'enchaînement des mécanismes peut varier d'un cas à l'autre. Par exemple, pour une plaque composite avec un empilement de $[\pm 45]_{ns}$ la ruine arrive sans rupture fibre et presque sans fissuration transverse (Lagattu et Lafarie-Frenot, 2000). Le développement de la décohé sion fibre-matrice, ainsi que des contraintes hors plan générées par les effets de bord conduisent au macrodélaminage qui se propage dans toute la largeur de l'éprouvette.

Un aspect important est la non-linéarité en traction et compression observée pour des éprouvettes unidirectionnelles. Dû au processus de fabrication, l'alignement des fibres n'est pas parfait, la variation dans l'orientation des fibres peut atteindre des valeurs de $\pm 2^\circ$. Sous un chargement en compression, ce phénomène est renforcé, et nous pouvons observer un comportement hyperélastique adoucissant (Yokozeki et al., 2005). Au contraire, un chargement en traction a tendance à aligner les fibres dans la direction de la charge, en conséquence, une rigidification du matériau est alors observée (Weeks et Sun, 1998). Pour des fibres en carbone, la rigidification peut également être causée par le réarrangement de la structure atomique des cristaux de carbone dans la direction des fibres (Donnet et al., 1998; Sauder et al., 2004).

À l'échelle micro la totalité des phénomènes, sauf la déformation anélastique, sont des phénomènes discrets. Si nous nous plaçons à l'échelle du pli, la décohé sion fibre-matrice et le délaminage local peuvent être homogénéisés, et traités comme des phénomènes continus. Voire, à l'échelle de la structure, la fissuration transverse peut également

être homogénéisée et traitée de manière continue.

Le choix de l'échelle de modélisation est donc très important, il permettra de définir la complexité du modèle. D'une part, il va déterminer l'effort numérique nécessaire pour la résolution d'un problème à l'échelle structure, d'autre part, les méthodes d'identification nécessaires pour la caractérisation des paramètres matériau sont étroitement liées à l'échelle du modèle.

§ 3 Prédiction de la ruine des structures composites stratifiées

La définition de la ruine d'une structure composite est un point délicat. Est-ce la rupture de la première fibre, ou bien le moment où la pièce ne peut plus supporter une augmentation du chargement ? Plusieurs définitions sont possibles. Par exemple, les réservoirs sous pression en composite doivent assurer l'étanchéité, or la fissuration transverse peut créer des fuites. Il est clair que dans ce cas l'intégrité structurale du réservoir n'est pas compromise, mais sa fonction n'est plus assurée.

La capacité de prévoir l'évolution des mécanismes de dégradation est plus importante que la définition de la ruine. Ensuite, en fonction de l'état de dégradation, on peut décider si la structure continue à assurer ou non sa fonction (intégrité structurale, étanchéité...).

3.1 Modèles à grande échelle

La modélisation à grande échelle permet d'avoir des solutions à faible coût numérique. Généralement, la structure laminée est modélisée avec une approche de plaque ou coque. L'objectif de ces théories est de réduire la dimension du problème à un problème bidimensionnel. Le domaine de validité reste assez restreint, car le ratio entre l'épaisseur et les autres dimensions de la plaque (coque) doit être grand (un rapport de 10 minimum).

Les différentes orientations des plis sont prises en compte par l'introduction d'un modèle élastique anisotrope. La différence primordiale entre les différents modèles existants est la forme donnée à priori au champ déplacement dans l'épaisseur de la plaque (coque). Pour l'utilisation dans le cadre de composites, de nombreuses théories prenant en compte les différentes couches du stratifié ont été mises en place (Caron et et A. Diaz, 1999; Reddy, 1984). Tous ces modèles imposent une forme du champ de déplacement à priori dans l'épaisseur du stratifié ou dans l'épaisseur de chaque pli. Ces hypothèses ne sont donc valides que pour des sollicitations relativement douces dans l'épaisseur du stratifié. Un des points faibles de ces théories est donc la très mauvaise capacité à capter les effets de bord, donc l'influence des accidents géométriques (trous, reprise de plis...) qui sont assez souvent à l'origine des mécanismes de dégradation.

Pour la plupart des cas, une analyse à cette échelle se déroule de la manière suivante : d'abord, une simulation élastique est réalisée sur l'ensemble de la structure avec un modèle de plaque (ou coque). Une reconstruction des quantités locales est effectuée à posteriori à partir des quantités calculées. Ensuite, un critère de rupture est appliqué à

Prédiction de la ruine des structures composites stratifiées

l'échelle du pli pour évaluer le ou les points les plus critiques, et évaluer la ruine de la structure.

Différents critères de rupture sont proposés dans la littérature. La manière la plus simple de construire un critère est de déterminer la contrainte de rupture d'un pli élémentaire en compression et traction ($\sigma_{1t}^r, \sigma_{2t}^r, \sigma_{3t}^r, \sigma_{1c}^r, \sigma_{2c}^r, \sigma_{3c}^r, \tau_{12}^r, \tau_{13}^r, \tau_{23}^r$) dans les trois directions principales du matériau. La comparaison de la contrainte locale par rapport aux contraintes de rupture permettra la détermination du point de défaillance de la structure. La même démarche peut être appliquée en utilisant comme quantités d'intérêt la déformation à rupture dans les trois directions principales. Un des points faibles de cette approche est qu'elle ne prend pas en compte l'interaction entre les différents modes de ruptures, et elle peut mener à une surestimation de la contrainte de défaillance.

Le critère de Tsai-Wu proposé par (Tsai et Wu, 1971) est une simplification de la théorie généralisée de Gol'denblat et Kapnov pour les matériaux anisotropes.

Le critère est défini par l'équation 1.1

$$f_i \sigma_{ii} + f_{ij} \sigma_{ii} \sigma_{jj} = 1 \quad \text{avec} \quad i = 1, \dots, 6 \quad (1.1)$$

Le développement de l'équation 1.1 en prenant en compte que la défaillance par cisaillement est indépendante du signe, fait disparaître les termes de cisaillement et donne comme résultat l'équation générale du critère de Tsai-Wu :

Critère de Tsai-Wu

$$f_1 \sigma_{11} + f_2 \sigma_{22} + f_3 \sigma_{33} + 2f_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} + 2f_{13} \sigma_{11} \sigma_{33} + 2f_{23} \sigma_{22} \sigma_{33} + f_{11} \sigma_{11}^2 + f_{22} \sigma_{22}^2 + f_{33} \sigma_{33}^2 + f_{44} \sigma_{23}^2 + f_{55} \sigma_{13}^2 + f_{66} \sigma_{12}^2 = 1 \quad (1.2)$$

L'identification des coefficients f_i et f_{ij} de l'équation 1.2 est faite en utilisant les contraintes de rupture d'un pli unidirectionnel dans les trois axes d'orthotropie, en traction et en compression en plus de la contrainte à rupture en cisaillement. L'identification des coefficients f_{12} , f_{13} et f_{23} pose des difficultés supplémentaires par rapport aux autres coefficients, elle implique des essais de traction biaxial très difficiles à exécuter et par défaut sont fixés en fonction d'autres coefficients.

Un autre critère très utilisé dans l'industrie est le critère de Puck (Puck et Schneide, 1969). Il propose de décomposer la rupture en deux familles, la rupture des fibres (FF pour *fiber failure*), et la rupture entre fibres (IFF pour *interfiber failure*). La rupture des fibres est évaluée en utilisant un critère simple en contrainte, les équations 1.3 et 1.4 résument la condition de défaillance.

Structures composites stratifiées

Critère de Puck, mode FF :

$$\frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^t} = 1 \quad \text{si} \quad \sigma_1 > 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^c} = 1 \quad \text{si} \quad \sigma_1 < 0 \quad (1.4)$$

R_{\parallel}^t et R_{\parallel}^c sont les contraintes à rupture en traction et compression dans la direction des fibres d'un pli élémentaire. Dans (Puck et Schürmann, 1998; Edge, 1994) des couplages sont introduits pour prendre en compte l'influence des chargements combinés sur le mode de rupture IFF, comme l'influence du cisaillement dans la contrainte maximale de rupture en compression.

La condition de rupture IFF est basée sur le critère de rupture de Mohr pour des matériaux fragiles. Comme Mohr, Puck fait l'hypothèse que la rupture dépend exclusivement des efforts sur le plan de rupture. En raison de la présence des fibres, le plan de rupture ne peut pas avoir une orientation quelconque, et il est supposé parallèle aux fibres. La figure 1.3 représente l'état de contrainte d'un VER (volume élémentaire représentatif) de matière du pli élémentaire.

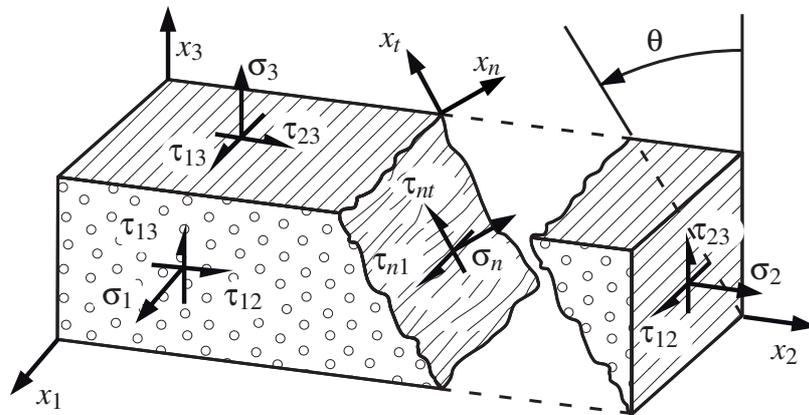


FIG. 1.3: Critère de Puck : Rupture en mode IFF

Selon l'état de contrainte locale, le critère de rupture IFF est défini par les équations 1.5 et 1.6. $R_{\perp\perp}^A$ et $R_{\perp\parallel}^A$ correspondant à la contrainte de rupture en cisaillement dans les deux plans ($\perp\perp$ et $\perp\parallel$)^{1,2}, et R_{\perp}^A la contrainte normale de rupture en traction sur le plan de rupture définie par l'angle θ . La difficulté de ce critère réside dans la détermination du plan de rupture, qui n'est pas défini à priori.

¹ $\perp\perp$: plan perpendiculaire aux fibres

² $\perp\parallel$: plan aligné avec la direction des fibres

Prédiction de la ruine des structures composites stratifiées

Critère de Puck, mode IFF :

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{tA}}\right)^2 = 1 \quad \text{si } \sigma_n \geq 0 \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A - P_{\perp\perp}^c \sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A - P_{\perp\parallel}^c \sigma_n}\right)^2 = 1 \quad \text{si } \sigma_n < 0 \quad (1.6)$$

Les critères présentés précédemment sont insuffisants si nous nous intéressons à l'évolution des mécanismes de dégradation jusqu'à la rupture finale, même s'ils ont suivi, au cours des dernières années, plusieurs améliorations qui leur permettent de prendre en compte de mieux en mieux les phénomènes physiques.

L'une d'entre elles est proposée par (Laurin et al., 2007). Basée sur l'idée de deux modes de rupture (FF et IFF), elle étend le critère en ajoutant des couplages entre les différents modes de chargement. En plus, un modèle d'endommagement est utilisé pour modéliser la dégradation progressive des constituants, après que le critère de rupture est atteint.

3.2 Modèles à l'échelle fine

L'échelle fine (de l'ordre du micromètre) est adéquate pour comprendre le sens physique de chaque phénomène. À cette échelle, les phénomènes comme la rupture des fibres et la décohésion fibre-matrice peuvent être traités de manière discrète.

Le traitement du problème micro nécessite deux étapes : le calcul du champ solution sur la microstructure dégradée (microfissures), puis l'application des critères d'initiation et de propagation pour évaluer l'évolution des mécanismes.

La simulation de la ruine d'une structure composite à cette échelle pose deux problèmes majeurs. D'une part, l'identification des quantités physiques à cette échelle engendre des problèmes techniques considérables (par exemple la mesure du module d'élasticité radial d'une fibre, la mesure de la distribution des fibres dans un pli) d'autre part, la puissance de calcul actuelle ne permet que la simulation de petits volumes de matière. Les méthodes de calcul actuelles ainsi que la puissance de calcul requise pour la simulation d'une structure complète à cette échelle ne sont pas encore disponibles.

La variabilité est une question importante des problèmes à l'échelle fine. L'analyse d'un petit volume de matière peut ne pas être représentative de toute la structure. De plus, la description des caractères aléatoires, aussi bien géométriques que matériaux, peut s'avérer difficile.

3.3 Modèles à l'échelle méso

L'échelle méso, comme son nom le dit, est l'échelle intermédiaire entre l'échelle de la structure (macro) et l'échelle du matériau (micro). Elle est tout à fait appropriée à la

Structures composites stratifiées

modélisation, de manière homogénéisée, des mécanismes de dégradation du matériau des échelles inférieures (par exemple la décohésion fibre-matrice et la plasticité de la matrice). Mais elle permet également de garder l'hétérogénéité structurale (par exemple les plis à différentes orientations, les trous...), qui est très importante pour une description correcte des phénomènes où la redistribution de contrainte joue un rôle majeur (macrodélamination).

De très nombreux travaux ont été menés dans le cadre de la mécanique continue de l'endommagement. Les microfissures à l'intérieur d'un matériau ne sont plus décrites comme des discontinuités du milieu, mais par un abaissement de la raideur. Cette idée, originale de Rabotnov et Kachanov, a été développée par Lemaître et Chaboche pour les matériaux métalliques, et par Mazars et Pijaudier-Cabot pour les matériaux du génie civil. Dans le cadre de matériaux anisotropes et en particulier des composites, une solution est proposée par Ladevèze (1983). Il s'agit d'utiliser un minimum de variables internes pour caractériser l'état du matériau et la construction d'une cinématique d'endommagement appropriée au type de matériau étudié.

Une des mises en œuvre de cette théorie est le méso-modèle pour les composites stratifiés (Ladevèze, 1986). Une de ses particularités est le traitement des dégradations de façon continue à l'échelle du pli. Ce modèle a été retenu pour le reste de l'étude, il est exposé en détail dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Méso-modèle amélioré pour composites stratifiés

Ce chapitre présente la description du modèle de composite retenu pour l'étude. Basé sur la mécanique de l'endommagement, le modèle traite chaque phénomène avec des variables indépendantes, permettant d'en introduire des nouveaux à volonté, ou de les coupler de manière directe. Enfin, des améliorations possibles seront présentées.

Sommaire

1	Introduction	22
2	Méso-constituant pli	22
2.1	Loi d'état	24
2.2	Loi d'évolution	25
2.2.1	Endommagement diffus	25
2.2.2	Endommagement sens fibre	27
2.2.3	Fissuration transverse	27
2.2.4	Déformation anélastique	30
3	Méso-constituant interface	32
3.1	Loi d'état	33
3.2	Loi d'évolution	33
4	Effet retard	35
5	Améliorations apportées	37
5.1	Loi d'évolution pour la rupture fibre compatible avec l'effet retard	37
5.2	Réorientation de fibres due à la déformation	38
6	Bilan	41

§ 1 Introduction

Les phénomènes de dégradation présentés précédemment font intervenir l'échelle du pli élémentaire, qui est très propice à l'étude de la ruine du composite. Le méso-modèle développé au LMT-Cachan depuis 1986 exploite cette échelle. Il permet de se placer dans une échelle intermédiaire entre l'échelle micro (siège de dégradations) et l'échelle macro (siège de comportements structuraux).

Le méso-modèle se base sur deux hypothèses fortes, a) toute structure composite stratifiée peut être modélisée à partir de deux méso-constituants, le pli élémentaire et l'interface (voir figure 2.1) (Ladevèze, 1986), et b) les différents mécanismes de dégradation restent constants dans l'épaisseur du pli (mais pas dans l'épaisseur du stratifié).

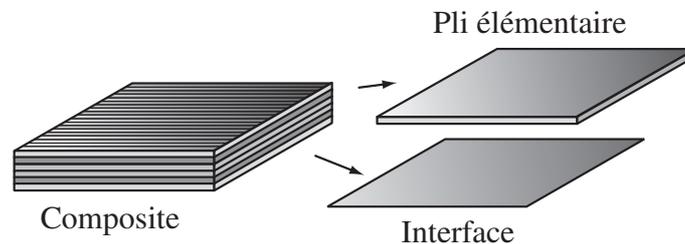


FIG. 2.1: Composite et méso-constituants

La structure stratifiée est donc représentée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces interlaminaire. Chacun de ces constituants, assimilables à un milieu continu, a un comportement propre indépendant de la structure dans laquelle il vient s'insérer.

L'interface va quant à elle gérer les phénomènes de délaminage plus ou moins progressifs entre plis (Allix et Ladevèze, 1992).

Le modèle a été fortement amélioré en lui incorporant des informations issues de travaux d'homogénéisation des modèles à l'échelle inférieure (Ladevèze et Lubineau, 2002). Ces travaux ont permis d'avoir un pont rigoureux entre la micro- et la méso-mécanique permettant ainsi l'équivalence entre les quantités micro (taux de fissuration) et les quantités méso (endommagement apparent).

Un autre point important est l'introduction de « l'effet retard » (Allix et al., 2003). Il permet de pallier la dépendance pathologique de la solution vis-à-vis du maillage donc souffrent tous les modèles avec un comportement adoucissant.

§ 2 Méso-constituant pli

La mécanique de l'endommagement, initié par Rabotnov et Kachanov, permet de décrire l'influence des microfissures sur le comportement du matériau à l'échelle supérieure. Les mécanismes de dégradation sont alors modélisés par une diminution de la rigidité en utilisant des variables internes appelées variables d'endommagements.

Méso-constituant pli

Le pli élémentaire est une entité volumique qui représente une ou plusieurs couches unidirectionnelles de matériaux composites. Il est homogène et son état d'endommagement est supposé constant dans l'épaisseur. Les mécanismes pris en compte, au sein du méso-constituant pli, sont la décohésion fibre-matrice, la rupture matricielle, la fissuration transverse et la rupture fibre.

La définition du comportement du pli élémentaire fait intervenir un repère local défini par la direction des fibres N_1^{pli} , la direction transverse dans le plan du pli N_2^{pli} , et la direction normale N_3^{pli} (voir figure 2.2).

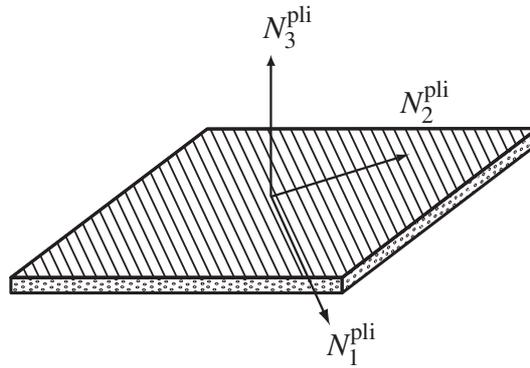


FIG. 2.2: Repère local du pli

Trois variables d'endommagement sont introduites pour relier l'évolution des mécanismes de dégradation à la chute de raideur.

- d_f : endommagement sens fibre (rupture des fibres)
- d' : endommagement diffus transverse (décohésion fibre-matrice)
- d : endommagement diffus en cisaillement (décohésion fibre-matrice)

Des développements récents ont permis d'effectuer des liens rigoureux entre méso-mécanique et micromécanique des CMO (Ladevèze et Lubineau, 2001, 2003b). Le méso-modèle standard peut ainsi être amélioré et reconstruit comme une homogénéisation systématique de modèles micromécaniques ayant un sens physique fort. Le méso-modèle, dans sa version améliorée, introduit trois variables d'endommagement supplémentaires (Lubineau et Ladevèze, 2008).

- \bar{d}_{22} , \bar{d}_{12} et \bar{d}_{23} : endommagement dû à la fissuration transverse

L'endommagement est lié directement au phénomène sous-jacent de microfissuration. Une contrainte négative sur le matériau referme ces fissures donnant au matériau des comportements différents en traction et en compression. Le caractère unilatéral des fermetures des fissures est modélisé par l'introduction de la notion de *partie positive* sur la contrainte, qui permet de séparer l'énergie de déformation en deux parties. La partie en traction endommageable, et la partie en compression où les fissures sont refermées et l'endommagement apparent est nul.

2.1 Loi d'état

L'énergie du pli élémentaire est définie par l'équation 2.1, $\boldsymbol{\sigma}$ étant le tenseur de contrainte et S le tenseur de souplesse (équation 2.2).

$$e_d = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} S \boldsymbol{\sigma} \quad (2.1)$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^0(1-d_f)} & \frac{-v_{12}^0}{E_1^0} & \frac{-v_{13}^0}{E_1^0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{12}^0}{E_1^0} & \frac{1}{E_2^0(1-[\sigma_{22}]^+d')(1-[\sigma_{22}]^+d_{22})} & \frac{-v_{23}^0}{E_2^0(1-[\sigma_{22}]^+d_{22})} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{13}^0}{E_1^0} & \frac{-v_{23}^0}{E_2^0(1-[\sigma_{22}]^+d_{22})} & \frac{1}{E_3^0(1-[\sigma_{33}]^+d')} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}^0(1-d)(1-d_{12})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}^0(1-d)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}^0(1-d_{23})(1-d_{23})} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

avec,

$$(1 - d_{23}) = \frac{1 - d'}{1 - \frac{v_{23}^0}{1+v_{23}^0}d'} \quad (2.3)$$

L'équation 2.3 dérive de l'hypothèse que le pli élémentaire, avec un endommagement diffus, a un comportement isotrope transverse. Cette hypothèse est fondée sur le type de phénomène sous-jacent. La décohésion fibre matrice (voir figure 2.3), activée par un effort transversal, se développe tout autour de fibres ayant un impact sur les propriétés dans le plan perpendiculaire aux fibres (*cf.* annexe A).

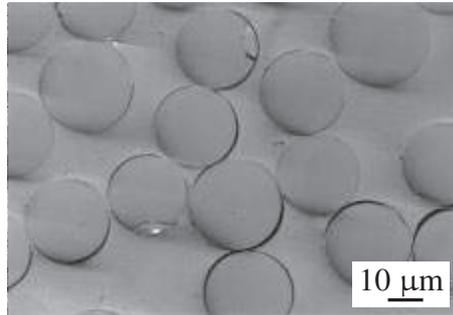


FIG. 2.3: Décohésions fibre matrice (d'après Sjögren et Berglund (2000))

L'opérateur $[\cdot]^+$ (fonction Heaviside), de l'équation 2.2, permet d'activer ou de désactiver l'endommagement selon le signe de la contrainte. L'exposant $(\cdot)^0$ désigne les propriétés matériau non endommagées.

Méso-constituant pli

La valeur des différentes variables d'endommagement peut varier entre 0 et 1. Mais si l'opérateur $[S]$ n'est plus défini positif, pour un état d'endommagement donné, nous pouvons considérer que le matériau est complètement endommagé.

Le processus de fabrication de plis unidirectionnels ne permet pas d'assurer l'alignement absolu des fibres dans une direction. En effet, une variation de $\pm\theta^\circ$ dans l'alignement des fibres est attendue. Pour un pli haute performance en carbone, la variation peut atteindre des valeurs de $\pm 2^\circ$ (Yokozeiki et al., 2006). À l'échelle méso-scopique, cela se traduit par un comportement hyperélastique dans le sens fibre.

En compression, une perte de rigidité est observée, à cause de l'amplification du phénomène de désalignement.

Au contraire, une rigidification est observée si le matériau est soumis à une contrainte de traction dans le sens fibre (réalignement des fibres à l'échelle micro). Les fibres en carbone présentent aussi une rigidification en traction causée par un alignement de la structure cristalline sous un chargement en traction (Donnet et al., 1998).

Ces deux phénomènes sont modélisés par un modèle hyperélastique quadratique. Ceci est introduit à travers une modification des propriétés élastiques du pli dans le sens fibre :

$$E_1^0 = E_1^0(\epsilon_{11}) = E_{INI} \left(1 + \langle \epsilon_{11} \rangle_+ E^+ + \langle \epsilon_{11} \rangle_- E^- \right) \quad (2.4)$$

Dans l'équation 2.4, les opérateurs $\langle \cdot \rangle_+$ et $\langle \cdot \rangle_-$ désignent les parties positives et négatives de (\cdot) respectivement, E_{INI} correspond à la rigidité d'un pli unidirectionnel à l'origine et E^+ et E^- la variation de la rigidité en fonction de la déformation.

2.2 Loi d'évolution

Les quantités duales des variables d'endommagement peuvent être déduites à partir du potentiel défini par l'équation 2.1. Les forces thermodynamiques ainsi calculées pilotent l'endommagement à travers les lois d'évolutions qui sont identifiées, à partir d'essais, pour chaque phénomène de dégradation.

2.2.1 Endommagement diffus

À l'échelle du pli la décohésion fibre-matrice peut être traitée de manière homogène. Les variables d'endommagement d et d' permettent de modéliser ce phénomène. Les forces thermodynamiques \bar{Y}_d et $\bar{Y}_{d'}$, quantités duales aux variables d'endommagement, sont calculées à partir de la définition de l'énergie :

$$Y_d = \left\langle \left\langle -\frac{\partial e_d}{\partial d} \Big|_{\sigma=cste} \right\rangle \right\rangle_H \quad Y_{d'} = \left\langle \left\langle -\frac{\partial e_d}{\partial d'} \Big|_{\sigma=cste} \right\rangle \right\rangle_H \quad (2.5)$$

Dans les équations 2.5, l'opérateur $\langle \cdot \rangle_H$ représente la moyenne dans l'épaisseur du pli élémentaire, de manière à rester cohérent avec l'hypothèse d'homogénéité des variables d'endommagement dans l'épaisseur du pli élémentaire.

Les équations 2.6 et 2.7 montrent les expressions complètes des forces thermodynamiques après différentiation.

Méso-modèle amélioré pour composites stratifiés

$$Y_d = \left\langle \left\langle \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}^0(1-d)^2(1-\bar{d}_{12})} + \frac{\sigma_{13}^2}{G_3^0(1-d)^2} \right\rangle \right\rangle_H \quad (2.6)$$

$$Y_{d'} = \left\langle \left\langle \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{2E_2^0(1-[\sigma_{22}]^+ \bar{d}_{22})(1-[\sigma_{22}]^+ d')^2} \right\rangle \right\rangle_H \quad (2.7)$$

$$+ \left\langle \left\langle \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{2E_3^0(1-[\sigma_{22}]^+ d')^2} \right\rangle \right\rangle_H + \left\langle \left\langle \frac{\sigma_{23}^2(1 - \frac{\nu_{23}}{1+\nu_{23}}(d' + d'^2 - 1))}{2G_{23}^0(1-d')^2(1-d_{23})} \right\rangle \right\rangle_H$$

Les forces thermodynamiques pilotent la loi d'évolution. La figure 2.4 montre l'évolution typique de l'endommagement dans un pli unidirectionnel. On peut observer une limite maximale de l'endommagement diffus. Quand la limite est atteinte (vers $d = 0,55$), on observe la coalescence de la décohésion fibre-matrice et cela se traduit par l'apparition de la fissuration transverse.

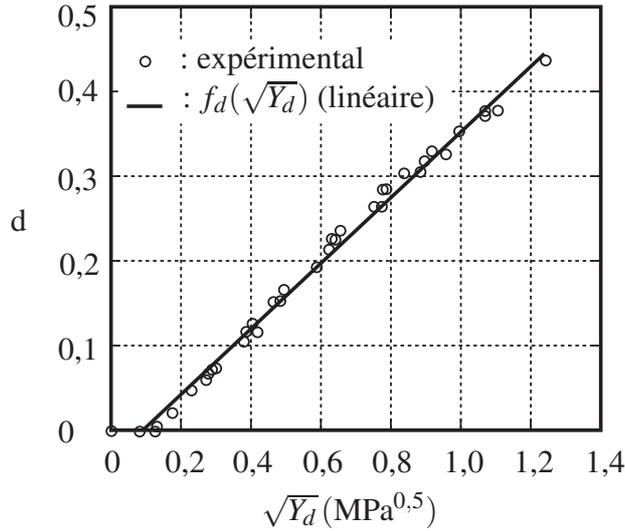


FIG. 2.4: Endommagement en cisaillement du matériau M55J/M18 et fonction $\sqrt{Y_d} \rightarrow f_d(\sqrt{Y_d})$ (Ladevèze et al., 2000)

À partir des essais expérimentaux, la loi d'évolution est définie par les équations suivantes :

$$\bar{Y} = Y_d + b_y Y_{d'} \quad (2.8)$$

$$w = \frac{\sqrt{\bar{Y}} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \quad (2.9)$$

$$d = \begin{cases} w & \text{si } \sup_{\tau \leq t}(w) < d_s \\ d_s & \text{si } \sup_{\tau \leq t}(w) \geq d_s \end{cases} \quad \text{et} \quad d' = b_d d \quad (2.10)$$

Méso-constituant pli

Dans les équations 2.8 et 2.10, les quantités b_y et b_d correspondent aux termes de couplages. Les quantités Y_0 et Y_c caractérisent le point d'initiation et la pente de la loi d'évolution, et d_s le point de saturation de la décohéssion fibre-matrice.

Remarque : dans la version classique du méso-modèle (Ladevèze et al., 2000), le phénomène de coalescence de fissures (fissuration transverse) était pris en compte par une variante de l'équation 2.10, fixant d égal à 1 dans le cas où d est supérieur à d_s . Ce comportement ne permet pas de prendre en compte le comportement homogénéisé d'un pli fissuré. Cette loi a été modifiée au moment de l'introduction du modèle de fissuration transverse (Ladevèze et Lubineau, 2001, 2003b).

2.2.2 Endommagement sens fibre

La rupture fibre en traction est modélisée en utilisant un critère en contrainte classique. En compression, un couplage avec l'endommagement en cisaillement (d) est mis en place pour prendre en compte l'influence du cisaillement. La force thermodynamique associée à d_f (équation 2.12) est calculée de manière classique :

$$Y_{d_f} = \left\langle \left\langle - \frac{\partial e_d}{\partial d_f} \Big|_{\sigma = \text{cste}} \right\rangle \right\rangle_H \quad (2.11)$$

$$Y_{d_f} = \left\langle \left\langle \frac{\sigma_{11}^2}{2E_1^0(1-d_f)^2} \right\rangle \right\rangle_H \quad (2.12)$$

Avec les forces thermodynamiques \bar{Y}_{d_f} et \bar{Y}_d , la loi d'évolution est :

$$w = \begin{cases} \frac{Y_{d_f}}{Y_{d_f}^T} & \text{si } \sigma_{11} > 0 \quad \text{traction} \\ \frac{Y_{d_f}}{Y_{d_f}^C} + k \frac{Y_d}{Y_c} & \text{si } \sigma_{11} < 0 \quad \text{compression} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$d_f = \begin{cases} 1 & \text{si } \sup_{\tau \leq t} (w) \geq 1 \\ 0 & \text{si } \sup_{\tau \leq t} (w) < 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Dans l'équation 2.13, $Y_{d_f}^T$ et $Y_{d_f}^C$ sont les seuils de rupture en traction et en compression respectivement. Le paramètre k permet de régler le couplage entre le mode de cisaillement et la rupture fibre en compression.

2.2.3 Fissuration transverse

Les développements réalisés par Ladevèze et Lubineau (2001, 2003b) permettent la construction d'un modèle de fissuration transverse en accord avec un modèle micromécanique. Ce modèle micromécanique se base sur deux hypothèses.

- L'évolution de la fissuration dépend du taux de restitution d'énergie.

$$G = - \frac{\partial E_p}{\partial A} \quad (2.15)$$

Méso-modèle amélioré pour composites stratifiés

Dans Ladevèze et al. (2006b), on montre que cette définition est une bonne approximation du taux de restitution discret utilisé dans la micromécanique.

- La fissuration transverse sature à un niveau ρ_s observé expérimentalement (Henaff-Gardin et Lafarie-Frenot, 1992).

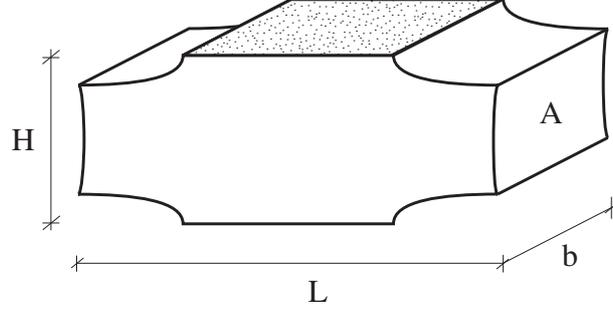


FIG. 2.5: Volume élémentaire pour le calcul de l'énergie

On considère l'intégrale de l'énergie sur un volume de matière (figure 2.5) de longueur L , épaisseur de pli H , et d'aire fissurée A :

$$E_d = LHe_d \quad (2.16)$$

À partir de l'énergie définie par l'équation 2.16, et G (équation 2.15) qui joue le rôle de force thermodynamique, on peut écrire :

$$\begin{aligned} Y_\rho &= -\frac{\partial E_d}{\partial A} \\ &= LH \left[\frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{2E_2^0(1-\bar{d}_{22})^2(1-d')} - \frac{\nu_{23} \langle \sigma_{22} \rangle_+ \sigma_{33}}{E_2^0(1-\bar{d}_{22})^2} \right] \frac{\partial \bar{d}_{22}}{\partial A} \\ &\quad + LH \left[\frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}^0(1-\bar{d}_{12})^2(1-d)} \right] \frac{\partial \bar{d}_{12}}{\partial A} \\ &\quad + LH \left[\frac{\sigma_{23}^2}{2G_{23}^0(1-\bar{d}_{23})^2(1-d)} \right] \frac{\partial \bar{d}_{23}}{\partial A} \end{aligned} \quad (2.17)$$

L'introduction de la notation suivante (équations 2.18, 2.19 et 2.20) permet de séparer les contributions des variables d'endommagement liées à la fissuration transverse (\bar{d}_{22} , \bar{d}_{12} et \bar{d}_{23}).

$$Y_{\bar{d}_{22}} = \left\langle \left\langle H \left[\frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{2E_2^0(1-\bar{d}_{22})^2(1-d')} - \frac{\nu_{23} \langle \sigma_{22} \rangle_+ \sigma_{33}}{E_2^0(1-\bar{d}_{22})^2} \right] \right\rangle \right\rangle_H \quad (2.18)$$

$$Y_{\bar{d}_{12}} = \left\langle \left\langle H \left[\frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}^0(1-\bar{d}_{12})^2(1-d)} \right] \right\rangle \right\rangle_H \quad (2.19)$$

Méso-constituant pli

$$Y_{\bar{d}_{23}} = \left\langle \left\langle H \left[\frac{\sigma_{23}^2}{2G_{23}^0(1-\bar{d}_{23})^2(1-d)} \right] \right\rangle \right\rangle_H \quad (2.20)$$

Dans les équations précédentes, H est l'épaisseur équivalente pour un pli intérieur. En conséquence si le pli est un pli de peau, la valeur H utilisée doit être deux fois la valeur réelle (Ladevèze et Lubineau, 2003a).

Les quantités $Y_{\bar{d}_{22}}$, $Y_{\bar{d}_{12}}$ et $Y_{\bar{d}_{23}}$ ne sont pas des forces thermodynamiques dans le sens strict du terme. Elles sont reliées au taux de fissuration transverse ρ .

$$\rho = \frac{A}{L} \quad (2.21)$$

L'expression 2.17 peut être réécrite de la manière suivante (Lubineau et Ladevèze, 2008) :

$$Y_\rho = \left[Y_{\bar{d}_{22}} \frac{\partial \bar{d}_{22}}{\partial \rho} + Y_{\bar{d}_{12}} \frac{\partial \bar{d}_{12}}{\partial \rho} + Y_{\bar{d}_{23}} \frac{\partial \bar{d}_{23}}{\partial \rho} \right] \quad (2.22)$$

Les taux de restitution d'énergie critique pour les trois modes de rupture G_I^C , G_{II}^C et G_{III}^C (respectivement mode I, mode II et mode III) permettent de définir l'enveloppe de rupture. La fissuration transverse est le résultat de la coalescence des microfissures (décohésion fibre-matrice). Pour prendre en compte l'aire déjà fissuré (présence d'endommagement diffus), les taux de restitution critique sont pondérés par l'endommagement diffus.

$$\left[\left(\frac{Y_{\bar{d}_{22}} \frac{\partial \bar{d}_{22}}{\partial \rho}}{G_I^C(1-d')} \right)^\alpha + \left(\frac{Y_{\bar{d}_{12}} \frac{\partial \bar{d}_{12}}{\partial \rho}}{G_{II}^C(1-d)} \right)^\alpha + \left(\frac{Y_{\bar{d}_{23}} \frac{\partial \bar{d}_{23}}{\partial \rho}}{G_{III}^C(1-\bar{d}_{23})} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} = 1 \quad (2.23)$$

Le paramètre α permet de contrôler la manière d'additionner les contributions des modes.

L'homogénéisation numérique du modèle micro (Ladevèze et Lubineau, 2001) a permis de définir une famille de fonctions capables d'associer un état endommagement à un état de fissuration donné. Les fonctions f_{22} , f_{12} et f_{23} (équation 2.24) permettent ainsi de transférer de l'information entre l'échelle micro (discontinue) et l'échelle méso.

$$\bar{d}_{22} = f_{22}(\rho) \quad \bar{d}_{12} = f_{12}(\rho) \quad \bar{d}_{23} = f_{23}(\rho) \quad (2.24)$$

Enfin, le modèle de fissuration se résume comme suit :

si $\rho < \rho_s$:

$$\rho = \sup_{\tau \leq t} \left[G \left\{ ((\gamma_I Y_{\bar{d}_{22}})^\alpha + (\gamma_{II} Y_{\bar{d}_{12}})^\alpha + (\gamma_{III} Y_{\bar{d}_{23}})^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \right] \quad (2.25)$$

avec,

Méso-modèle amélioré pour composites stratifiés

$$\mathcal{G} : x \rightarrow \left(\frac{\partial \bar{d}_{22}}{\partial \rho} \right)^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \quad (2.26)$$

$$\gamma_I = \frac{1}{G_I^C (1-d)} \quad (2.27)$$

$$\gamma_{II} = \frac{\frac{\partial \bar{d}_{12}}{\partial \rho}}{\frac{\partial \bar{d}_{22}}{\partial \rho} G_{II}^C (1-d)} \quad (2.28)$$

$$\gamma_{III} = \frac{\frac{\partial \bar{d}_{23}}{\partial \rho}}{\frac{\partial \bar{d}_{22}}{\partial \rho} G_{III}^C (1-d_{23})} \quad (2.29)$$

si non :

$$\rho = \rho_s \quad (2.30)$$

L'opérateur $\sup_{\tau \leq t} [\cdot]$ (équation 2.25) permet d'assurer que le taux de fissuration est croissant.

Pour vérifier que la dissipation est positive, il faut $\frac{dd}{dt} \geq 0$ (l'endommagement ne peut qu'augmenter). Cette condition est imposée aux variables d'endommagement d_f , d et d' , ainsi qu'au taux de fissuration ρ . Les variables d'endommagement \bar{d}_{22} , \bar{d}_{12} et \bar{d}_{23} quant à elles n'ont pas besoin d'être restreintes, elles sont directement liées à ρ .

2.2.4 Déformation anélastique

Ce phénomène, provenant de la plasticité de la matrice ainsi que du frottement des lèvres des fissures, peut être modélisé par un modèle de plasticité.

La notion de quantités effectives permet l'introduction d'un modèle de plasticité en s'affranchissant de l'influence de l'endommagement durant l'écriture de la loi d'évolution plastique.

La contrainte effective est définie comme suit :

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{(1-[\sigma_{22}]^+ d')} \\ \frac{\sigma_{22}}{(1-[\sigma_{33}]^+ d')} \\ \frac{\sigma_{33}}{(1-d)} \\ \frac{\sigma_{12}}{1-d} \\ \frac{\sigma_{13}}{1-d} \\ \frac{\sigma_{23}}{(1-d_{23})} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

La forme du taux de déformation effectif est déduite à partir de l'équation précédente et de la vérification de la dissipation de la déformation plastique vraie.

Méso-constituant pli

$$\Phi_p = Tr(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p) = Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \quad (2.32)$$

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p$ sont les conjuguées, au sens de la dissipation, des contraintes et déformations plastiques vraies respectivement. Nous introduisons l'opérateur Θ liant les quantités vraies et effectives, tel que :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \Theta \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.33)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\sigma_{22}]^- + \frac{[\sigma_{22}]^+}{(1-d')} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\sigma_{33}]^- + \frac{[\sigma_{33}]^+}{(1-d')} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-d)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-d)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_{23})} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Le taux de déformation plastique effective s'exprime alors par :

$$\hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11p} \\ \varepsilon_{22p}([\sigma_{22}]^+(1-d') + [\sigma_{22}]^+) \\ \varepsilon_{33p}([\sigma_{33}]^+(1-d') + [\sigma_{33}]^+) \\ \varepsilon_{12p}(1-d) \\ \varepsilon_{13p}(1-d) \\ \varepsilon_{23p}(1-d_{23}) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

De manière évidente, nous avons :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \Theta \cdot \hat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p \quad (2.36)$$

L'évolution plastique s'appuie sur un modèle de plasticité classique, mais portant sur les quantités effectives. Une loi plastique (pour des matériaux composites laminés carbone-époxyde) a été développé par Ladevèze et Le Dantec (1992). Dans le cadre de composites unidirectionnels, presque la totalité de la charge dans la direction des fibres est supporté par ces dernières, en conséquence dans modèle, il n'y a pas d'écoulement plastique dans la direction des fibres ($\varepsilon_{11p} = 0$),

Le domaine d'élasticité en 3D est donc défini par la fonction de charge :

$$f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p) = \sqrt{\tilde{\sigma}_{12}^2 + \tilde{\sigma}_{13}^2 + a^2(\tilde{\sigma}_{22}^2 + \tilde{\sigma}_{33}^2)} + \tilde{\sigma}_{23}^2 - R(p) - R_0 \leq 0 \quad (2.37)$$

Dans l'équation 2.37, a est un paramètre de couplage et R_0 la limite élastique. La fonction d'écrouissage (équation 2.38) est déterminée expérimentalement en fonction de la plasticité cumulée (Ladevèze, 1991). La fonction d'écrouissage utilisé dans l'étude a la forme suivante :

Méso-modèle amélioré pour composites stratifiés

$$R(p) = Kp^M \quad (2.38)$$

Les paramètres matériau K et M peuvent être identifiés à partir d'un essai $[\pm 45]_s$ par exemple (Herakovich et al., 2000).

L'utilisation d'un modèle de plasticité plus complexe (par exemple modèle à écrouissage cinématique) ne pose aucune difficulté supplémentaire. Dans les cas où la capture de boucles d'hystérésis est importante (cas d'un essai avec un chargement cyclique), un modèle de plasticité plus riche s'impose.

Le modèle de pli est finalement constitué de 25 paramètres (6 élasticité, 5 endommagement diffus, 3 rupture fibre, 5 fissuration transverse et 3 plasticité), en plus des trois fonctions provenant de l'homogénéisation numérique. L'identification des paramètres peut être effectuée de façon séquentielle. Quatre types d'éprouvette sont nécessaires pour l'identification de tous les paramètres matériaux ($[0]_8, [\pm 45]_{2s}, [\pm 67, 5]_{2s}, [0_n/90_m]_s$). Dans un premier temps, les paramètres élastiques sont identifiés à partir d'essais de traction et compression de plaques unidirectionnelles. Ensuite les paramètres d'endommagement diffus sont identifiés à partir du début de la courbe de traction sur une éprouvette $[\pm 45]_{2s}$. Des chargements cycliques sur la même éprouvette permet l'identification des paramètres du modèle de plasticité. L'éprouvette $[\pm 67, 5]_{2s}$, permet d'identifier E_2^0 et le terme de couplage (b_y). Enfin, une campagne d'essai sur des éprouvettes du type $[0_n/90_m]_s$ permet la caractérisation complète de la fissuration transverse. Plus de détails sur l'identification dans (Ladevèze et Le Dantec, 1992; Allix et al., 1996; Herakovich et al., 2000; Lubineau, 2002). La liste des valeurs typique pour les paramètres du pli c'est trouve dans annexe B.

§ 3 Méso-constituant interface

L'interface est introduite pour modéliser correctement le délaminage entre deux plis voisins (Allix et Ladevèze, 1992), et elle peut être interprétée comme la couche fine de matrice existant entre ces deux plis. La modélisation se fait en utilisant le concept d'interface cohésive introduit par Barenblatt (1962).

L'interface est introduite seulement dans les cas où les deux plis adjacents ont des directions différentes $\theta^+ \neq \theta^-$. Le cas θ/θ n'est pas considéré comme une interface méso-modèle principalement parce que le phénomène de fissuration transverse peut se propager sans difficulté d'un pli à l'autre.

Par conséquent, elle est modélisé comme une entité bidimensionnelle chargée du transfert des contraintes et déplacements d'un pli à l'autre. Elle permet la modélisation du délaminage.

Les directions principales de l'interface sont, N_3^i la direction normale à l'interface, et N_1^{int} et N_2^{int} les bissectrices des angles formés par les fibres du pli supérieur et inférieur (figure 2.6).

Le saut de déplacement (équation 2.39) entre la face supérieure et la face inférieure de l'interface est exprimé dans la base locale N_1^{int} , N_2^{int} et N_3^{int} .

Méso-constituant interface

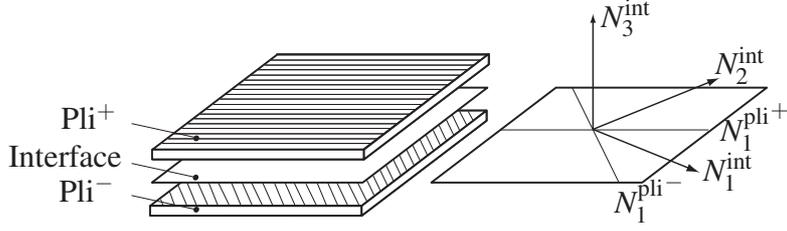


FIG. 2.6: Repère local de l'interface

$$\llbracket U \rrbracket = U^+ - U^- = \llbracket U_1 \rrbracket N_1^{\text{int}} + \llbracket U_2 \rrbracket N_2^{\text{int}} + \llbracket U_3 \rrbracket N_3^{\text{int}} \quad (2.39)$$

3.1 Loi d'état

Comme pour le pli, l'énergie de déformation de l'interface ($e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\text{int}t} \boldsymbol{S}^{\text{int}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{int}}$) est définie en utilisant le tenseur de souplesse $\boldsymbol{S}^{\text{int}}$ chargé de prendre en compte l'état de l'endommagement et le comportement unilatéral en mode I (équation 2.41).

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{int}t} = [\boldsymbol{\sigma}_{33} \ \boldsymbol{\sigma}_{13} \ \boldsymbol{\sigma}_{23}] \quad (2.40)$$

et

$$\boldsymbol{S}^{\text{int}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_3^0(1-[\boldsymbol{\sigma}_{33}]^+d_I)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_1^0(1-d_{II})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_2^0(1-d_{III})} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

avec

$$K_1^0 = \frac{2G_{13}}{e}, \quad K_2^0 = \frac{2G_{23}}{e}, \quad K_3^0 = \frac{E_3}{e} \quad (2.42)$$

Les paramètres G_{13} , G_{23} et E_3 sont les propriétés élastiques de la matrice, et e l'épaisseur physique de l'interface.

3.2 Loi d'évolution

La formulation de la loi d'évolution pour l'interface est similaire au pli. Les trois variables d'endommagement d_I , d_{II} et d_{III} sont associées aux trois modes d'excitation de l'interface (voir figure 2.7).

Les modes II et III sont équivalents, mais dans des directions différentes. Le mode III ne correspond donc pas au mode III classiquement utilisé dans la mécanique de la rupture.

Avec l'équation 2.39, l'expression de l'énergie peut être écrite en fonction de $\llbracket U \rrbracket$.

$$e_d = \frac{1}{2} (K_3 \llbracket U_3 \rrbracket^2 + K_1 \llbracket U_1 \rrbracket^2 + K_2 \llbracket U_2 \rrbracket^2) \quad (2.43)$$

Les forces thermodynamiques écrites dans la base d'orthotropie de l'interface deviennent :

Méso-modèle amélioré pour composites stratifiés

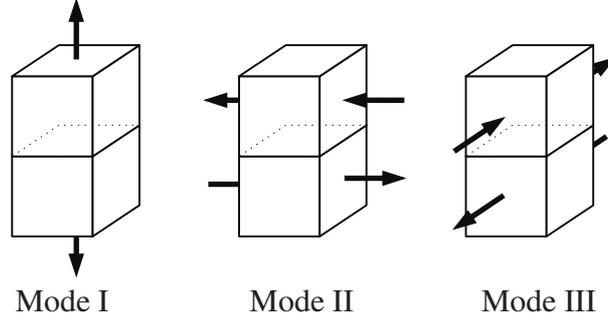


FIG. 2.7: Modes de chargement de l'interface

$$Y_{dI} = -\left. \frac{\partial e_d}{\partial d_I} \right|_{\sigma=\text{cste}} = \frac{\langle \sigma_{33}^0 \rangle_+ \llbracket U_3 \rrbracket}{2} = \frac{K_3^0 \langle \llbracket U_3 \rrbracket \rangle_+^2}{2} \quad (2.44)$$

$$Y_{dII} = -\left. \frac{\partial e_d}{\partial d_{II}} \right|_{\sigma=\text{cste}} = \sigma_{13}^0 \llbracket U_1 \rrbracket = \frac{K_1^0 \llbracket U_1 \rrbracket^2}{2} \quad (2.45)$$

$$Y_{dIII} = -\left. \frac{\partial e_d}{\partial d_{III}} \right|_{\sigma=\text{cste}} = \sigma_{23}^0 \llbracket U_2 \rrbracket = \frac{K_2^0 \llbracket U_2 \rrbracket^2}{2} \quad (2.46)$$

Les variables d'endommagement de l'interface sont pilotées par une force d'endommagement unique :

$$\bar{Y} = ((Y_{dI})^{\alpha_i} + (\gamma_{II} Y_{dII})^{\alpha_i} + (\gamma_{III} Y_{dIII})^{\alpha_i}) \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) \quad (2.47)$$

et

$$w = \left(\frac{n}{1+n} \frac{\langle \bar{Y} - Y_0 \rangle_+}{Y_c - Y_0} \right)^n \quad (2.48)$$

α , n et Y_0 sont des paramètres matériau.

L'équivalence énergétique par rapport à la mécanique de la rupture est assurée par les équations 2.49.

$$Y_c = G_I^C, \quad \gamma_{II} = \frac{G_I^C}{G_{II}^C}, \quad \gamma_{III} = \frac{G_I^C}{G_{III}^C} \quad (2.49)$$

Nous pouvons constater que l'arrêt des fissures de la fissuration transverse sur l'interface génère des concentrations de contraintes importantes, qui peuvent accélérer l'apparition du délaminage local (Crossman et Wang, 1982). L'introduction d'une équation de couplage dans la loi d'évolution de l'interface permet de prendre en compte ce phénomène. Ainsi, la loi d'évolution de l'interface est couplée à l'état d'endommagement de plis adjacents. Ce couplage est formulé à partir de la moyenne entre les taux de fissuration ($\bar{\rho} = \frac{\rho^+ + \rho^-}{2}$) des plis adjacents (équation 2.21).

Effet retard

Finalement, la définition des variables d'endommagement de l'interface fait intervenir un terme local (force thermodynamique) et un terme non local (taux de fissuration transverse des plis adjacents) (Ladevèze et al., 2006a; Lemauff et Martini, 2007).

$$d_I = w \quad (2.50)$$

$$d_{II} = d_I + (1 - d_I)2a_i\bar{\rho} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.51)$$

$$d_{III} = d_I + (1 - d_I)2a_i\bar{\rho} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.52)$$

Dans les équations 2.51 et 2.52, a_i est un paramètre de couplage et θ est l'angle formé par les directions fibre de deux plis adjacents ($\theta = \cos^{-1}(N_1^{pli+} \cdot N_1^{pli-})$). La valeur de a_i est calculée en même temps que l'homogénéisation numérique.

Dans le cas où le taux de fissuration des plis adjacents atteint la saturation (équation 2.30), on peut de manière pragmatique, dire que l'interface est complètement endommagée.

$$\text{si } \bar{\rho} = \rho_s$$

$$d_I = d_{II} = d_{III} = 1 \quad (2.53)$$

Le modèle d'interface est donc composé de 3 paramètres élastiques et 5 paramètres pour l'endommagement et 1 paramètre pour le couplage avec les plis adjacents. Les paramètres élastiques sont déduits des propriétés élastiques de la matrice pure. Les taux de restitution d'énergie sont identifiés à partir des essais DCB. La valeur de α est identifiée en mesurant la résistance de l'interface pour un chargement en mode mixte (Allix et al., 1998).

§ 4 Effet retard

Les solutions numériques des modèles adoucissants souffrent d'une dépendance pathologique vis-à-vis de la discrétisation éléments finis (Needleman, 1988). La solution éléments finis de problèmes standard d'endommagement ne semble pas converger vers une solution avec le raffinement du maillage. Dans ces cas, la déformation se localise dans une zone de la taille d'un élément. Au fur et à mesure que l'on raffine le maillage, la zone de localisation diminue et reste toujours de la taille d'un élément. Le cas le plus pathologique est observé lorsque la taille du maillage tend vers zéro. Dans ce cas, une rupture sans dissipation d'énergie peut être observée (Peerlings, 1999).

Différentes techniques de limitation de localisation (formulation intégrale, gradient implicite ou explicite, effet retard) peuvent être utilisées (Peerlings et al., 2002). Tous ces modèles introduisent la notion du non local, soit dans le gradient, soit dans une forme intégrale de la loi d'évolution. Dans notre cas, on utilise un limiteur de taux d'endommagement appelé effet retard (Needleman, 1988; Ladevèze et al., 2000). Basé sur l'idée que l'endommagement ne peut pas se développer de manière instantanée, il introduit un paramètre qui permet de régler la vitesse maximale d'endommagement.

Méso-modèle amélioré pour composites stratifiés

L'introduction de l'effet retard dans le modèle présenté précédemment mène à une modification des lois d'évolution. La forme générale de l'effet retard permet d'introduire la notion de vitesse d'endommagement dans le modèle. Dans l'équation 2.54, le point sur les variables représente la dérivée par rapport au temps.

$$\begin{aligned} \dot{d} &= \frac{1}{\tau_c} \left(1 - H(\langle w - d \rangle_+) \right) , \text{ si } d < 1 \\ \dot{d} &= 0 , \text{ si } d \geq 1 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Dans (Allix et al., 2003), l'auteur propose une forme exponentielle pour la fonction $H(x)$:

$$H(x) = e^{-ax} \quad (2.55)$$

Enfin, la loi retard s'écrit :

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \left(1 - e^{(-a\langle w - d \rangle_+)} \right) \quad (2.56)$$

Dans l'équation 2.56, τ_c permet de fixer le taux d'endommagement maximal, et a le caractère plus au moins fragile de la loi d'évolution.

L'utilisation de l'effet retard dans le méso-modèle amélioré mène à la modification de certaines équations.

L'état du méso-constituant pli est défini par trois variables internes d_f , d et ρ . Les variables d' , d_{23} , \bar{d}_{22} , \bar{d}_{12} et \bar{d}_{23} sont reliées aux autres variables à partir des équations 2.3, 2.10 et 2.24. L'effet retard ne s'applique donc qu'aux variables d_f , d et ρ .

Pour la rupture de fibres l'équation 2.14 est remplacée par :

$$\dot{d}_f = \begin{cases} \frac{1}{\tau_c} \left(1 - e^{(-a\langle 1 - d_f \rangle_+)} \right) & \text{si } w \geq 1 \\ 0 & \text{si } w < 1 \text{ ou } d_f \geq 1 \end{cases} \quad (2.57)$$

Pour l'endommagement diffus l'équation 2.10 est remplacée par :

$$\dot{d} = \begin{cases} \frac{1}{\tau_c} \left(1 - e^{(-a\langle w - d \rangle_+)} \right) & \text{si } d < d_s \\ 0 & \text{si } d = d_s \end{cases} \quad \text{et } \dot{d}' = bd \quad (2.58)$$

Pour la fissuration transverse ρ l'équation 2.25 est remplacée par :

$$\dot{\rho} = \begin{cases} \frac{1}{\tau_c} \left(1 - e^{(-a\langle G\{((\gamma_I \bar{Y}_{22})^\alpha + (\gamma_{II} \bar{Y}_{12})^\alpha + (\gamma_{III} \bar{Y}_{23})^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\} - \rho)_+} \right) & \text{si } \rho < \rho_s \\ 0 & \text{si } \rho = \rho_s \end{cases} \quad (2.59)$$

Améliorations apportées

L'état du méso-constituant interface est défini par deux variables d_I et $\bar{\rho}$. La variable $\bar{\rho}$ est définie à partir de l'état de deux plis adjacents, qui ont déjà l'effet retard inclus dans leur formulation. Donc pour l'interface, l'effet retard ne s'applique qu'à la variable interne d_I .

L'équation 2.50 est donc remplacée par :

$$\dot{d}_I = \frac{1}{\tau_c} \left(1 - e^{(-a(w-d)_+)} \right) \quad (2.60)$$

Il est clair que les quantités calculées (\dot{d}_f , \dot{d} , $\dot{\rho}$, \dot{d}_I) doivent être positives pour assurer la non-réversibilité des processus dissipatifs.

L'identification des paramètres du modèle d'interface requiert une campagne d'essai sur des éprouvettes du type DCB (*double cantilever beam*), ENF (*end notched flexure*), MMF (*Mmixed mode flexure*) (Allix et al., 1998). Le paramètre de couplage avec la fissuration transverse (a_i) est évalué à partir d'un modèle microscopique (Lemauff et Martini, 2007). La liste des valeurs typiques pour les paramètres d'interface se trouve dans l'annexe B.

§ 5 Améliorations apportées

Les moyens développés pendant la thèse ont permis le calcul de pièce avec le méso-modèle, permettant de mettre en évidence deux situations où le modèle n'avait pas la capacité de reproduire des essais expérimentaux.

5.1 Loi d'évolution pour la rupture fibre compatible avec l'effet retard

L'équation 2.57 permet d'incorporer l'effet retard à la loi d'évolution de la rupture fibre. La figure 2.8 montre la réponse, sur un point d'intégration (à paramètres matériau fixe), pour différentes vitesses de chargement dans la direction fibre.

Nous pouvons remarquer que la vitesse de chargement a un réel impact sur le comportement dans la zone endommageable, empêchant la localisation de la déformation. Mais on observe aussi que, quand l'endommagement s'approche de 1, la vitesse d'endommagement diminue considérablement (elle tend vers zéro). Cet effet a comme conséquence une réserve de contrainte non négligeable. La raison est que dans l'équation 2.57 l'effet retard est piloté par la valeur statique de l'endommagement ($d_f = 1$, si $w \geq 1$). C'est-à-dire que si w est supérieur à 1 la vitesse d'endommagement ne dépend plus de l'état de contrainte du matériau.

Nous proposons une variante de l'équation 2.57, que permet de prendre en compte l'état de contrainte dans la vitesse d'endommagement.

$$\dot{d}_f = \begin{cases} \frac{1}{\tau_c} \left(1 - e^{(-a(w-d)_+)} \right) & \text{si } w \geq 1 \\ 0 & \text{si } w < 1 \text{ ou } d_f = 1 \end{cases} \quad (2.61)$$

Méso-modèle amélioré pour composites stratifiés

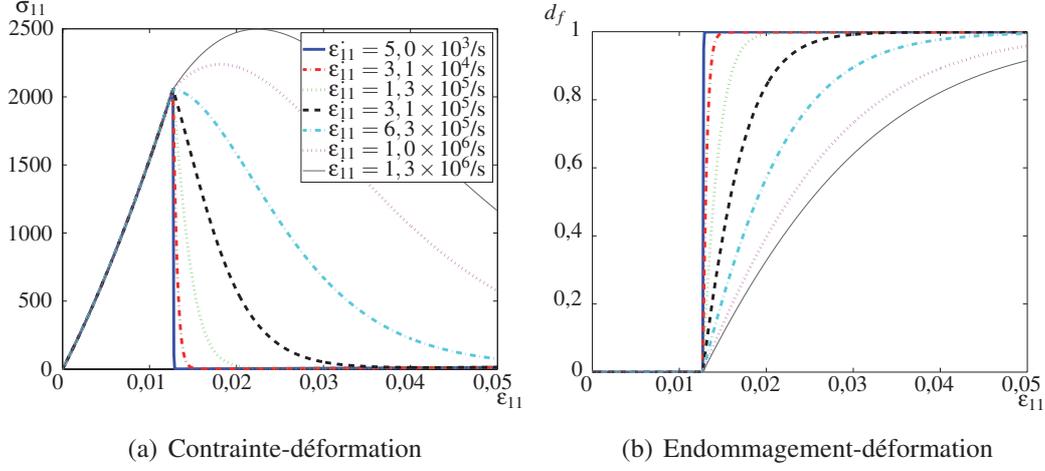


FIG. 2.8: Évolution de l'endommagement sens fibre et lois retard (loi de retard classique)

La différence est que l'effet retard est piloté par w et non par l'endommagement statique maximal $d_f = 1$. La figure 2.9 montre la réponse sur un point d'intégration pour de différentes vitesses de chargement dans la direction fibre, avec la nouvelle loi.

Nous constatons que la réserve de contrainte observée précédemment est éliminée, et nous pouvons atteindre le niveau maximal d'endommagement $d_f = 1$.

5.2 Réorientation de fibres due à la déformation

La réorientation de fibres est un phénomène qui apparaît dans des situations où la charge n'est pas principalement supportée par les fibres. L'empilement $[\pm 45]_{ns}$ en est un bon exemple. Dans ce cas, la charge est supportée par une contribution de contrainte dans la base locale des plis élémentaires (σ_{11} , σ_{22} et σ_{12}). Si l'on considère le cas d'une plaque composite avec un empilement de $[\pm \theta]_{ns}$, au fur et à mesure que le spécimen est chargé en traction, on observe un allongement dans la direction de la charge ainsi qu'une contraction dans le sens transverse. Comme résultat, l'orientation des fibres est altérée (voir figure 2.10).

Des travaux précédents (Sun et Zhu, 2000; Wisnom, 1995; Herakovich et al., 2000) montrent, pour des laminés avec des empilements de $[\pm 45]_s$ et $[\pm 67.5]_s$, que la variation de l'orientation des fibres peut être estimée analytiquement.

En 2D, la variation dans l'orientation de fibres peut être calculée en fonction de la déformation et de l'orientation initiale (équation 2.62 et 2.63).

$$\theta' = \arctan \left(\tan(\theta) \frac{1 + \epsilon_y}{1 + \epsilon_x} \right) \quad (2.62)$$

$$\Delta\theta = \theta - \theta' \quad (2.63)$$

Améliorations apportées

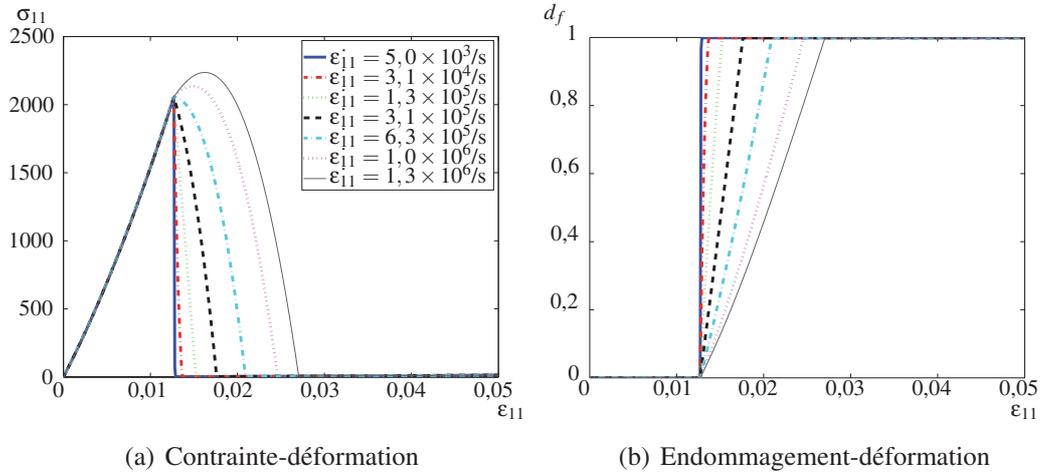


FIG. 2.9: Évolution de l'endommagement sens fibre et lois retard (loi de retard modifiée)

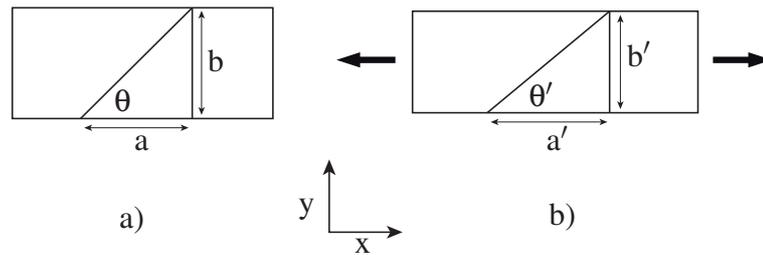


FIG. 2.10: Réorientation de fibres due à la déformation a) orientation initiale des fibres (θ), b) orientation des fibres après déformation (θ')

L'inconvénient de cette formulation est qu'elle s'exprime seulement en termes de ϵ_x et ϵ_y , donc la déformation de cisaillement n'est pas prise en compte. En conséquence, ce type de formulation n'est pas adaptée pour des spécimens non homogènes, par exemple des éprouvettes trouées. La présence de cisaillement peut altérer de manière non négligeable l'orientation des fibres.

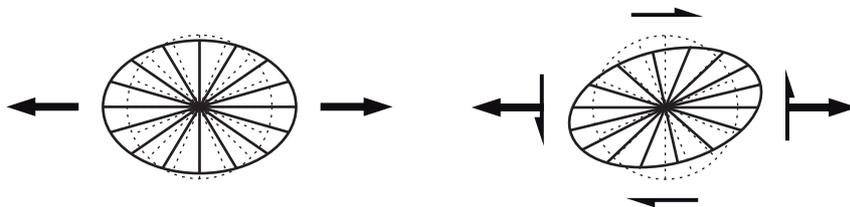


FIG. 2.11: Réorientation de fibres due à la déformation. Ligne pointillée : configuration initiale, Ligne continue : configuration déformée

La figure 2.11 schématise deux états de déformation. À gauche, la déformation est

Méso-modèle amélioré pour composites stratifiés

caractérisée seulement par les composantes normales, et la réorientation de fibres peut être calculée à partir des équations 2.62 et 2.63. À droite, pour un état de déformation général, la réorientation des fibres diffère si les termes en cisaillement sont négligés.

Pour traiter correctement ce phénomène, pour un état de déformation général et en 3D, une nouvelle formulation est proposée.

Pour un état de déformation donné, le gradient du déplacement est :

$$\nabla_{xyz} \mathbf{u} = \nabla_{xyz} \underline{\mathbf{u}}(x, t) \quad (2.64)$$

Le gradient du déplacement ($\nabla_{xyz} \mathbf{u}$) peut être écrit dans la base locale du pli (équation 2.66) en utilisant la matrice de rotation \mathbb{P} (équation 2.65).

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \dots & N_1^{pli} & \dots \\ \dots & N_2^{pli} & \dots \\ \dots & N_3^{pli} & \dots \end{bmatrix} = [N_1^{pli}, N_2^{pli}, N_3^{pli}]^T \quad (2.65)$$

$$\nabla_{123} \mathbf{u} = \mathbb{P}^t \nabla_{xyz} \mathbf{u} \mathbb{P} \quad (2.66)$$

Un point important de cette approche est que la déformation modifie l'orientation seulement dans le plan du composite. L'introduction du projecteur Π permet d'extraire la partie plane de la transformation :

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Ensuite, une transformation affine est construite :

$$\mathbb{T}_l = \Pi^t \nabla_{123} \mathbf{u} \Pi + I \quad (2.68)$$

Dans le cas où la déformation dans le plan est nulle, la transformation devient l'identité et les directions d'orthotropie initiales sont conservées. La dernière étape consiste à exprimer la transformation dans le repère global.

$$\mathbb{T} = \mathbb{P}^t \mathbb{T}_l \mathbb{P} \quad (2.69)$$

Ensuite, nous pouvons appliquer la transformation \mathbb{T} à la direction sens fibre N_1^{pli} pour calculer la nouvelle direction N_{1new}^{pli} :

$$N_{1new}^{pli} = \frac{\mathbb{T} N_1^{pli}}{\|\mathbb{T} N_1^{pli}\|} \quad (2.70)$$

La direction transverse N_{2new}^{pli} reste toujours orthogonale à N_{1new}^{pli} , en conséquence elle devient :

Bilan

$$N_{2\text{new}}^{\text{pli}} = \frac{N_2^{\text{pli}} - N_1^{\text{pli}} \langle N_{1\text{new}}^{\text{pli}}, N_2^{\text{pli}} \rangle}{\left\| N_2^{\text{pli}} - N_1^{\text{pli}} \langle N_{1\text{new}}^{\text{pli}}, N_2^{\text{pli}} \rangle \right\|} \quad (2.71)$$

Comme la transformation affine ne s'applique qu'aux vecteurs dans le plan du pli élémentaire, la direction hors plan reste inchangée :

$$N_{3\text{new}}^{\text{pli}} = N_3^{\text{pli}} \quad (2.72)$$

La figure 2.12 montre la variation d'angle pour une éprouvette élastique $[\pm\theta]_{ns}$, pour différents niveaux de déformation axiale. L'état de déformation dépend du chargement ainsi que de l'orientation des fibres, et la variation d'angle dépend de l'état de déformation. Ce système d'équations non linéaire s'ajoute aux équations de la loi de comportement, et doit être résolu en même temps que ce dernier. On observe que la variation d'angle maximale est atteinte pour un empilement de $\approx [\pm 30]_{ns}$, ce qui est confirmé expérimentalement par (Sun et Zhu, 2000).

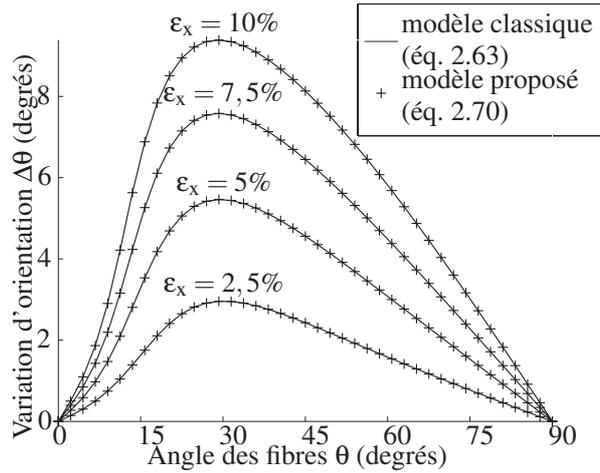


FIG. 2.12: Prédiction de la réorientation des fibres pour un empilement $[\pm\theta]_{ns}$ pour différents niveaux de chargement. Modèle 2D classique et modèle 3D proposé

§ 6 Bilan

Le méso-modèle propose de modéliser une structure composite à l'échelle du pli. Il permet notamment de séparer le comportement des plis du comportement des interfaces (délaminage). La modélisation de phénomènes de dégradation se fait en utilisant la mécanique de l'endommagement couplé avec un modèle de plasticité.

Un point important est que chaque phénomène de dégradation est formulé de manière indépendante. Ceci permet de simplifier le modèle et d'activer seulement les phénomènes qui ont un réel impact sur la solution numérique.

Méso-modèle amélioré pour composites stratifiés

La complexité du modèle est relative : même si la quantité de paramètres semble être exorbitante, il permet de traiter chaque phénomène de manière indépendante. L'identification des paramètres est donc réalisée de façon presque découplée, permettant d'activer un ensemble réduit de phénomènes.

La modification de la formulation de l'effet retard pour la rupture des fibres permet l'élimination de la réserve de contrainte pathologique observée classiquement.

La modélisation de la réorientation de fibres dans un cadre général permet le traitement des structures composites de forme quelconque.

Chapitre 3

Méthodes de résolution

L'un des objectifs de ce travail est la mise en œuvre du méso-modèle dans un code de calcul tridimensionnel. Après avoir rappelé le problème mécanique de référence, ce chapitre présente une synthèse des méthodes de résolution disponibles dans la littérature dans le cadre des éléments finis. Nous précisons ensuite les particularités et les choix effectués pendant l'implantation du méso-modèle dans un code de calcul recherche.

Sommaire

1	Problème mécanique de référence et notations	44
2	Méthode des éléments finis	45
3	Résolution de problèmes de grande taille	45
3.1	Méthodes descendantes	46
3.2	Méthodes multigrilles	47
3.3	Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement	48
3.3.1	Sous-structuration	48
3.3.2	Condensation	49
3.3.3	Approche primale	51
3.3.4	Préconditionneur et problème grossier	52
3.3.5	Approche duale	54
3.3.6	Approche mixte	55
4	Méthodes de résolution de problèmes non linéaires	56
4.1	Méthodes de Newton	57
5	Les méthodes Newton-Krylov-Schur	59
6	Bilan	60

§ 1 Problème mécanique de référence et notations

On considère une structure composite stratifiée Ω (voir figure 3.1). Cette structure est soumise à chaque instant t de l'intervalle de temps $[0, T]$ à des forces de volume f_d , à des efforts surfaciques F_d sur une partie de sa frontière notée $\partial_2\Omega$ et à des déplacements imposés U_d sur la partie complémentaire $\partial_1\Omega$. Les quantités f_d , F_d et U_d sont des fonctions données du temps.

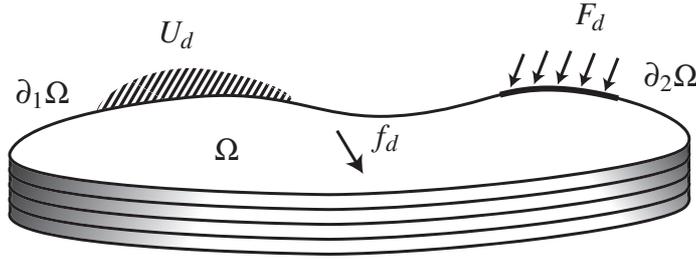


FIG. 3.1: Problème mécanique de référence

On se place ici sous l'hypothèse de petites perturbations et dans le cadre de chargements lents isotherme (cas où les vitesses de variation des actions mécaniques appliquées à la structure permettent de négliger les forces d'inertie). Les sollicitations f_d , F_d et U_d induisent un champ de déplacement $U(M, t)$ et un champ de contrainte $\sigma(M, t)$ définis en tout point de Ω et à tout instant de l'intervalle de temps $[0, T]$.

L'opérateur non linéaire \mathbb{L} est caractéristique du matériau étudié qui peut éventuellement être différent du méso-modèle présenté précédemment. Il permet d'exprimer la valeur du champ de contrainte en fonction de l'histoire des déformations.

$$\sigma(M, t) = \mathbb{L}(\epsilon(M, \tau), \tau < t) \quad (3.1)$$

Le problème mécanique de référence consiste à chercher $U(M, t)$ et $\sigma(M, t)$ définis sur $\Omega \times [0, T]$ vérifiant les conditions suivantes :

Conditions de bords :

$$U = U_d \quad \text{sur } \partial_1\Omega \quad (3.2)$$

$$\sigma \cdot n = F_d \quad \text{sur } \partial_2\Omega \quad (3.3)$$

Loi de comportement :

$$\sigma = \mathbb{L}(\epsilon(U)) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.4)$$

Équilibre :

$$\text{div}(\sigma) + f_d = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.5)$$

avec :

$$\epsilon(U) = \frac{1}{2} (\text{grad}(U) + \text{grad}(U)^T) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.6)$$

§ 2 Méthode des éléments finis

La résolution du problème de référence se fait classiquement par l'utilisation de la méthode des éléments finis (Zienkiewicz et Taylor, 1987). Pour cela, la structure est découpée en éléments auxquels sont associées des fonctions d'interpolation appelées « fonctions de forme ». Le champ de déplacement U en un point quelconque du maillage est alors fonction des déplacements nodaux u . Les quantités dérivées, comme la déformation, sont calculées à partir des déplacements nodaux et les fonctions d'interpolation à l'intérieur de chaque élément.

En général, pour rendre les calculs plus légers, le domaine d'étude est simplifié au maximum. La prise en compte des plans de symétrie, de l'axisymétrie et même de la périodicité du domaine d'étude permet de diminuer considérablement le nombre de degrés de liberté du maillage éléments finis.

Dans le cas des structures composites laminées, la présence de plis à des angles différents de 0° au 90° ou bien des accidents géométriques (trous, reprise de plis) fait que la simplification du domaine d'étude est rarement possible. Cela nous impose à se placer dans le cadre le plus général. Un calcul éléments finis tridimensionnel sans symétrie apparente.

Même si l'étude se place dans le cadre quasi statique (forces d'inertie négligeables), le problème de référence reste un problème d'évolution et des phénomènes liés à la vitesse, comme la viscosité, peuvent être incorporés au modèle.

Dans la formulation du méso-modèle, l'effet retard fait intervenir le temps. En conséquence, le comportement est dépendant du temps, c'est-à-dire de la vitesse de chargement.

La résolution numérique du problème de référence impose donc la discrétisation de l'intervalle d'étude $[0, T]$ en un nombre fini d'incrément $[t, t + \Delta t]$. Ainsi, connaissant l'état de la structure à l'instant t_i , nous chercherons à trouver la solution sur tout le domaine Ω à l'instant $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.

§ 3 Résolution de problèmes de grande taille

La complexité d'un problème éléments finis n'est pas définie simplement par le nombre de degrés de liberté. Par exemple, pour un calcul bidimensionnel sur une grille régulière, chaque nœud appartient à seulement quatre éléments. En conséquence, chaque nœud sera connecté, au maximum, à 8 nœuds voisins. Cela se traduit en un remplissage de la matrice de rigidité de $9(\text{nœuds}) \times 2(\text{deux degrés de liberté par nœud}) = 18$ termes par ligne.

Au contraire, pour un calcul tridimensionnel sur une grille régulière, chaque nœud appartient à 8 éléments, donc il est connecté aux 26 nœuds voisins. Le remplissage par ligne de la matrice de rigidité est donc de $27(\text{nœuds}) \times 3(\text{trois degrés de liberté par nœud}) = 81$ termes par ligne.

On peut constater que pour deux problèmes de la même taille (même nombre de degrés de liberté), l'effort numérique (CPU, stockage) nécessaire à la résolution peut être considérablement différent.

Un point important est aussi le niveau de non-linéarité du problème. Par exemple, la

Méthodes de résolution

résolution d'un problème linéaire nécessite d'inverser une seule fois l'opérateur tangent.

La discrétisation du problème de référence impose la taille des éléments utilisés (épaisseur du pli élémentaire). En conséquence, le nombre d'éléments nécessaires pour la discrétisation d'un composite n'est pas arbitraire, et il est directement reliée au nombre de plis et les dimensions dans le plan de la pièce. Par exemple, une plaque composite avec un empilement de 32 plis (épaisseur du pli $H = 0,125$ mm) et des dimensions 100×150 mm, discrétisée régulièrement avec des éléments hexaédriques de taille $0,125 \times 0,125 \times 0,125$ mm, mène à un problème éléments finis de taille 185×10^6 degrés de liberté !

Le développement des stratégies de résolution performantes capables de traiter des problèmes à grand nombre de degrés de liberté et non linéaire s'avère indispensable.

3.1 Méthodes descendantes

Les approches descendantes sont les stratégies principalement utilisées par les ingénieurs d'aujourd'hui pour le développement des structures complexes. Ce type d'approche permet d'intégrer le savoir-faire de différents modèles à différentes échelles au sein d'une même stratégie de résolution.

Prenons par exemple le calcul d'une structure aéronautique complète. D'abord, la structure est discrétisée de manière grossière avec des éléments de type poutre, plaque ou coques. Évidemment, ce type de discrétisation ne prend pas en compte la complexité totale de la structure, et simplifie de manière assez grossière tous les détails structuraux (trous, fixations, raidisseurs). Cependant, ces modèles peuvent rester de taille importante malgré les simplifications, ils permettent de calculer la réponse globale de la structure aux chargements externes (chargement aérodynamique, effort à l'atterrissage). L'évaluation du flux des efforts dans l'intérieur de la structure permet d'effectuer une analyse locale sur une partie restreinte du fuselage. L'analyse locale se fait avec un modèle plus raffiné en matière de discrétisation. Si la taille du problème le permet, des études non linéaires peuvent être réalisées. Ce type d'analyse utilise comme conditions limites la solution du calcul grossier de départ. On peut donc choisir soit les efforts soit les déplacements ou même une combinaison de deux (approche mixte).

L'approche peut être répétée, pour descendre dans les échelles d'étude, jusqu'à arriver à l'échelle désirée. La dernière échelle d'étude permettra l'incorporation de tous les détails structuraux nécessaires.

Le point faible de ce type approche est la difficulté à faire remonter les informations des échelles inférieures. En pratique, il ne s'agit que d'une transmission unidirectionnelle de l'information, du modèle grossier vers les modèles raffinés (d'où le nom d'approche descendante). L'incapacité de faire propager l'influence des phénomènes localisés dans le reste de la structure peut mener à des résultats très éloignés de la réalité. Au cours des années, des règles métier ont été créées pour assurer le conservatisme des solutions. Cette approche est limitée aux cas où les phénomènes à petite échelle n'ont pas une influence importante sur le reste de la structure.

3.2 Méthodes multigrilles

La performance des stratégies de résolution itérative (telles que le gradient conjugué, Jacobi, Gauss-Seidel...) pour des problèmes linéaires de grande taille repose sur le fait que ces méthodes captent rapidement les petites longueurs de variation. Malheureusement, elles ont des difficultés à capter les grandes variations. L'idée des méthodes multigrilles (Fedorenko, 1964) consiste à transporter le calcul sur une hiérarchie de grilles plus grossières que l'initiale (voire figure 3.2) pour capturer plus rapidement toutes les composantes fréquentielles de la solution discrète.

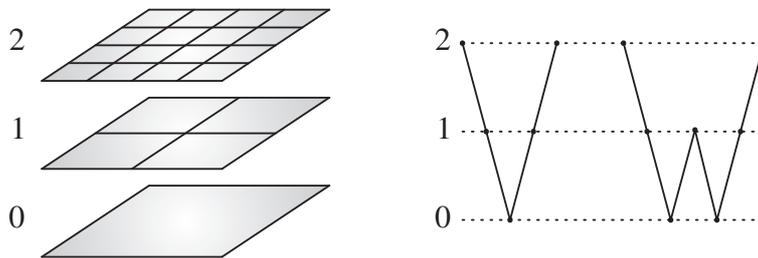


FIG. 3.2: Principe des méthodes multigrilles

Principe des méthodes multigrille : hiérarchie de grilles (à gauche) et cycles en V et en W (à droite)

Dans un premier temps, plusieurs itérations sont réalisées sur la grille fine (niveau 2 figure 3.2) de manière à lisser la solution en diminuant les hautes fréquences contenues dans l'erreur. Le résidu obtenu est alors restreint à la grille grossière par un opérateur restriction \mathbf{R} : $r_1 = \mathbf{R}r_2$. On résout ensuite le problème associé au maillage grossier où l'opérateur grossier (K_1) est la restriction de l'opérateur fin (K_2) : $e_1 = K_1^{-1}r_1$. Un opérateur de prolongement \mathbf{P} permet enfin le transfert d'information de la grille grossière à la grille fine permettant de corriger la solution sur la grille fine : $\tilde{q}_2 = \mathbf{P}e_1 + q_2$.

Les opérateurs de transfert (restriction et prolongement) employés correspondent souvent à des interpolations linéaires. La démarche est, assez souvent, mise en œuvre de manière récursive au sein de cycles en « V » ou en « W » (voir figure 3.2).

Pour des systèmes symétriques définis positifs, le nombre de V-cycles nécessaires pour atteindre une précision donnée est indépendant du nombre d'inconnues. Cela signifie que le coût global de la résolution est en $O(N)$, permettant d'accélérer fortement la convergence des méthodes itératives classiques pour la résolution des grands systèmes linéaires. Il peut être envisageable d'utiliser les méthodes multigrilles pour la résolution des problèmes linéaires obtenus au sein d'un processus itératif de Newton. Des versions plus récentes, comme la méthode FAS (de l'anglais *Full Approximation Storage*), proposent de traiter le problème non linéaire directement, sans l'étape de linéarisation, en plaçant les non-linéarités à l'intérieur des itérations multigrilles (Brand, 1977).

3.3 Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement

Les méthodes de décomposition de domaine se basent, comme leur nom l'indique, sur l'idée de la sous-structuration. Ces méthodes sont très adaptées pour chercher la solution fine sur l'ensemble du domaine d'étude Ω et non uniquement sur une zone déterminée à l'avance.

Elles reposent sur les techniques de condensation des inconnues et sur une décomposition de la structure étudiée en plusieurs domaines (sous-domaines). Idéalement la solution finale est obtenue à partir de calculs indépendants par sous-domaine.

Selon l'approche choisie, la résolution du problème condensé peut être directe ou itérative. Dans le premier cas, le problème condensé est assemblé et résolu de manière directe. Dans le second cas, le problème condensé n'est jamais assemblé et un processus itératif est mis en place pour assurer le transfert d'information entre sous-domaines, et ainsi obtenir une solution complète sur l'ensemble à convergence. La manière de faire propager l'information entre sous-domaines au cours des itérations va distinguer les différentes approches.

Quand le processus itératif porte sur les déplacements, et que ce sont les efforts qui sont transférés entre sous-domaines, on parle d'approches primales (Mandel, 1993). Dans le cas inverse, on parle d'approches duales (Farhat et Roux, 1991). La dernière famille travaille sur des quantités mixtes faisant intervenir en même temps les efforts et le déplacement (Fortin et Glowinski, 1983b; Ladevèze et Dureisseix, 2000).

3.3.1 Sous-structuration

Nous nous plaçons ici dans le cadre de méthodes de décomposition sans recouvrement, c'est-à-dire le chevauchement entre deux sous-domaines est nul. Ainsi, les interfaces entre sous-domaines se limitent au maximum à des surfaces (en 3D).

Le problème de référence présenté dans la partie 1 peut être décomposé en n sous-domaines. La figure 3.3 illustre une décomposition dans le cas de $n = 2$.

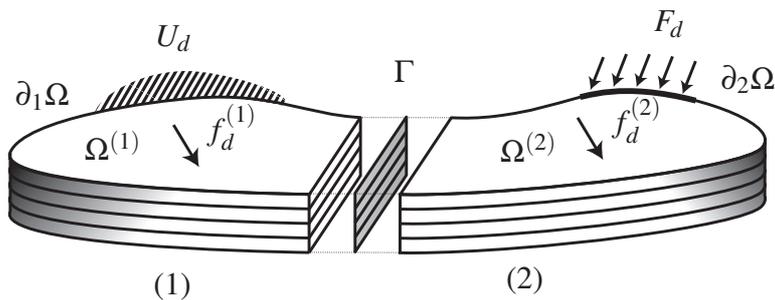


FIG. 3.3: Problème mécanique partitionné en deux sous-domaines

L'interface Γ entre deux sous-domaines est définie par :

$$\Gamma = \partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)} \quad (3.7)$$

Résolution de problèmes de grande taille

Le problème de référence peut alors s'écrire sur chacun des sous-domaines ($s = 1$ ou 2) :

Conditions des bords :

$$U^{(s)} = U_d^{(s)} \quad \text{sur} \quad \partial_1 \Omega \cap \partial \Omega^{(s)} \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(s)} \cdot \boldsymbol{n}^{(s)} = F_d^{(s)} \quad \text{sur} \quad \partial_2 \Omega \cap \partial \Omega^{(s)} \quad (3.9)$$

Loi de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(s)} = \mathbb{L}(\boldsymbol{\varepsilon}(U^{(s)})) \quad \text{dans} \quad \Omega^{(s)} \quad (3.10)$$

L'équilibre :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}^{(s)}) + f_d^{(s)} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^{(s)} \quad (3.11)$$

avec :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(U^{(s)}) = \frac{1}{2} \left(\text{grad}(U^{(s)}) + \text{grad}(U^{(s)})^T \right) \quad \text{dans} \quad \Omega^{(s)} \quad (3.12)$$

Plus la continuité de déplacement et l'équilibre des efforts sur l'interface :

Continuité de déplacement :

$$U^{(1)} = U^{(2)} \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad (3.13)$$

Équilibre des efforts :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad (3.14)$$

L'ensemble des équations de 3.8 à 3.14 est strictement équivalent au système global initial (équations 3.2 à 3.6).

L'extension à n sous-domaines exige une attention particulière aux « coins » (voir figure 3.4), c'est-à-dire aux points connectés à plus de deux sous-domaines. Les points multiples peuvent introduire des interfaces ponctuelles ou des interfaces en forme d'arête. Du point de vue du continu, ces interfaces, de mesure nulle, ne sont habituellement pas prises en compte. En pratique, après discrétisation, toutes les relations sont réécrites en fonction des nœuds, et le problème des interfaces avec une mesure nulle ne se pose plus.

3.3.2 Condensation

On considère un sous-domaine $\Omega^{(s)}$ ayant une interface Γ avec un sous-domaine voisin. L'opérateur de Steklov-Poincaré est l'opérateur qui associe au déplacement imposé sur l'interface l'effort de réaction résultant sur la même interface.

Après discrétisation, cet opérateur est appelé complément de Schur. Il est associé aux équations d'équilibre discrètes du sous-domaine considéré :

$$K^{(s)} \boldsymbol{u}^{(s)} = \boldsymbol{f}^{(s)} \quad (3.15)$$

Méthodes de résolution

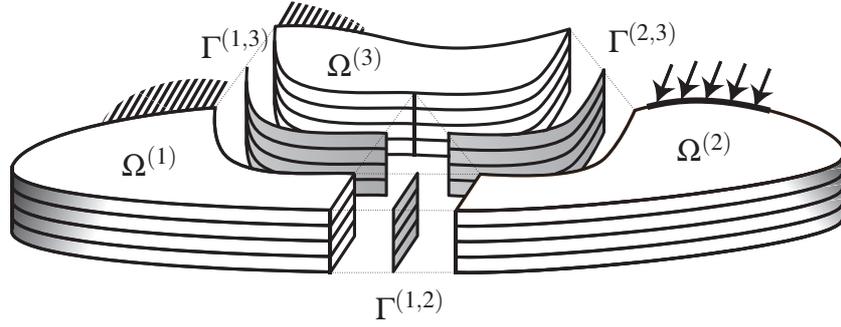


FIG. 3.4: Problem mécanique partitioné en n sous-domaines (avec point triple)

Si l'on note avec l'indice b les degrés de liberté d'interface, et avec l'indice i les degrés de liberté internes, on peut récrire l'équation 3.15 sous la forme :

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ib}^{(s)} \\ K_{bi}^{(s)} & K_{bb}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(s)} \\ u_b^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i^{(s)} \\ f_b^{(s)} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

À partir de la première ligne, on obtient :

$$u_i^{(s)} = K_{ii}^{(s)-1} \left(f_i^{(s)} - K_{ib}^{(s)} u_b^{(s)} \right) \quad (3.17)$$

La deuxième ligne donne alors :

$$\left(K_{bb}^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{ib}^{(s)} \right) u_b^{(s)} = f_b^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} f_i^{(s)} \quad (3.18)$$

Soit :

$$S_p^{(s)} u_b^{(s)} = b_p^{(s)} \quad (3.19)$$

L'opérateur $S_p^{(s)}$ s'exprime en termes des déplacements d'interface et il s'appelle complément de Schur primal local.

Le calcul de l'opérateur $S_p^{(s)}$ se fait généralement en utilisant une factorisation partielle de K (factorisation de $K_{ii}^{(s)}$). L'inversion de la sous-matrice $K_{ii}^{(s)}$ correspond à imposer des conditions de Dirichlet sur ensemble de l'interface de (s) , donc il est toujours bien posé et il conserve les propriétés de symétrie, positivité, et définition de l'opérateur original $K^{(s)}$.

Le complément de Schur dual local est défini comme l'opérateur linéaire qui retourne le déplacement d'interface pour un effort d'interface équilibré donné. L'utilisation de l'inverse généralisé¹ de l'opérateur $S_p^{(s)}$ impose que seulement l'image de $S_p^{(s)}$ soit excitée. Ainsi, le déplacement sur l'interface est composé de deux parties. La première reliée

¹L'inverse généralisée d'une matrice M (noté M^+) est une matrice que vérifie la propriété suivante : $MM^+y = y$, pour $y \in \text{Im}(M)$.

Résolution de problèmes de grande taille

aux déplacements déformants, et une deuxième partie reliée aux mouvements de corps rigides :

$$u_b^{(s)} = S_d^{(s)} f_b^{(s)} + R_b^{(s)} \alpha^{(s)} \quad (3.20)$$

Avec $R_b^{(s)}$ le noyau de l'opérateur $S_d^{(s)}$ (mouvements de corps rigides), et $\alpha^{(s)}$ l'amplitude des mouvements de corps rigide.

La résolution du problème original se ramène à la résolution d'un problème condensé sur l'interface, et une étape de localisation de la solution au moyen de l'équation 3.17.

Cette technique est largement utilisée pour la création de sous-structures condensées, appelées communément super-éléments. Elle permet de diminuer de manière importante la taille du problème, en éliminant tous les degrés de liberté internes à une zone. Des calculs initialement trop coûteux peuvent ainsi devenir accessibles. Cette technique permet de transférer le comportement de structures entre partenaires industriels sans dévoiler tous les détails structuraux. Cependant, cette technique est limitée au comportement linéaire des structures, et les matrices condensées sont très pleines donc coûteuses à factoriser (calcul explicite de $S_p^{(s)}$ ou $S_d^{(s)}$).

3.3.3 Approche primale

L'approche primale consiste à travailler sur le champ de déplacement de l'interface u_b vérifiant a priori la continuité de déplacement entre sous-domaines (équation 3.13).

Si l'on considère le système algébrique $Ku = f$, on peut le récrire, en réordonnant lignes et colonnes, sous la forme :

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & K_{ib}^{(1)} A^{(1)T} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & K_{ii}^{(n)} & K_{ib}^{(n)} A^{(n)T} \\ A^{(1)} K_{bi}^{(1)} & \cdots & \cdots & A^{(n)} K_{bi}^{(n)} & \sum_s A^{(s)} K_{bb}^{(s)} A^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i^{(n)} \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_i^{(n)} \\ \sum_s A^{(s)} f_b^{(s)} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

où $A^{(s)}$ est l'opérateur d'assemblage permettant de relier les degrés de liberté d'interface globaux aux degrés de liberté d'interface de chaque sous-domaine (s). Pour plus de détails à propos des opérateurs d'assemblage, le lecteur est invité à lire (Gosselet et Rey, 2006).

L'élimination des inconnues internes à chaque sous-domaine, au moyen de l'équation 3.17, mène à un système qui ne se pose que sur les degrés de liberté d'interface u_b :

$$S_p u_b = b_p \quad (3.22)$$

avec S_p le complément de Schur primal global défini par l'assemblage des compléments de Schur locaux :

Méthodes de résolution

$$S_p = \sum_s A^{(s)} S_p^{(s)} A^{(s)T} = \sum_s A^{(s)} \left(K_{bb}^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{ib}^{(s)} \right) A^{(s)T} \quad (3.23)$$

et le second membre condensé sur l'interface :

$$b_p = \sum_s A^{(s)} b_p^{(s)} = \sum_s A^{(s)} \left(f_b^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} f_i^{(s)} \right) \quad (3.24)$$

Après résolution du problème condensé, l'étape de localisation permet de calculer la solution à l'intérieur de chaque sous-domaine :

$$u_i^{(s)} = K_{ii}^{(s)-1} (f_i^{(s)} - K_{ib}^{(s)} A^{(s)T} u_b) \quad (3.25)$$

L'inversion de $K_{ii}^{(s)}$, comme dit précédemment, correspond à la résolution d'un problème avec des conditions de Dirichlet sur l'interface.

L'opérateur S_p (équation 3.23) est construit à partir de l'ensemble de contributions locales. Le calcul explicite de chaque contribution est extrêmement coûteux, elle passe par la factorisation de $K_{ii}^{(s)}$, des descentes remontées, et des assemblages. De plus, la matrice S_p est pleine, donc très coûteuse à stocker et à factoriser. Pour cette raison, on privilégie des solveurs itératifs de Krylov (type Gradient conjugué, GMRES), qui ne demandent que des produits matrice/vecteur. Les opérations de produit matrice/vecteur peuvent être réalisées en calculant la contribution de chaque sous-domaines (en parallèle), et en réalisant ensuite un assemblage des contributions.

Ainsi, le complément de Schur S_p n'est jamais calculé (ni assemblé) explicitement. Le produit par S_p revient donc à la résolution d'un système du type $K_{ii}^{(s)} x = b$ sur chaque sous-domaine.

Quand l'opérateur K du problème original est symétrique défini positif, une utilisation de l'algorithme du Gradient conjugué est envisageable. L'utilisation de la méthode GMRES permet de traiter des problèmes non symétriques.

3.3.4 Préconditionneur et problème grossier

La convergence du solveur itératif (Gradient conjugué) est étroitement liée au conditionnement du système à résoudre. L'utilisation d'un preconditionneur permet d'améliorer les propriétés du système et ainsi d'accélérer la convergence.

Un preconditionneur doit être une bonne approximation de l'inverse de l'opérateur du problème d'interface. Dans le cadre d'un calcul parallèle, il doit autant que possible consister en un assemblage de contributions locales. Un choix consiste ainsi à prendre la somme pondérée de l'inverse des contributions locales, ce qui conduit pour l'approche primale au preconditionneur suivant :

$$\tilde{S}_p^{-1} = \sum_s W^{(s)} A^{(s)} S_d^{(s)} A^{(s)T} W^{(s)T} \quad (3.26)$$

Résolution de problèmes de grande taille

où $S_d^{(s)}$ est le complément de Schur dual du sous-domaine (s) .

Le préconditionneur revient à résoudre des problèmes de Neumann pour chaque sous-structure (d'où l'appellation de préconditionneur Neumann-Neumann). Les matrices diagonales de pondération W permettent de prendre en compte l'hétérogénéité de la structure de chaque côté de l'interface (Rixen et Farhat, 1999).

L'utilisation de ce préconditionneur passe par l'inversion des matrices $K^{(s)}$. Or cette matrice correspond à l'équilibre du sous-domaine (s) soumis à un effort imposé sur son interface. Cette condition de Neumann peut conduire, dans le cas d'un sous-domaine flottant (c'est-à-dire d'un sous-domaine avec trop peu de conditions de Dirichlet sur son bord), à un problème mal posé. De manière à s'assurer que le problème soit bien posé, il suffit d'imposer que la matrice $K^{(s)+}$ ne multiplie que des vecteurs appartenant à $\text{Im}(K^{(s)})$.

L'introduction d'un problème dit « grossier » permet de séparer l'espace de déplacement du sous-domaine en deux parties. Une partie déformante $\text{Im}(K^{(s)})$, correspondant aux modes à énergie non nulle. Et une partie rigide $\text{Ker}(K^{(s)})$, correspondant aux modes à énergie nulle (c'est-à-dire aux mouvements de corps rigide).

Ainsi, l'algorithme itératif sera restreint, par projection, à chercher la solution seulement dans la partie déformante de l'espace d'approximation. Cela permet d'imposer, à l'étape de préconditionnement, des efforts équilibrés, c'est-à-dire des chargements qui n'excitent pas les déplacements de solide rigide.

La partie de la solution correspondant aux mouvements de corps rigide est calculée à travers le problème grossier à l'initialisation du solveur itératif.

Soit C le sous-espace de \mathbb{R}^n formé par les mouvements de corps rigide des sous-domaines, représenté par la matrice C de taille $n \times n_c$. Où n est le nombre de degrés de liberté d'interface, et n_c le nombre total de mouvements de corps rigide ([nombre de sous-domaines] \times [3 translations + 3 rotations] pour un problème tridimensionnel). Le projecteur P , qui permet de s'assurer que le solveur de Krylov cherche la solution dans le bon espace, est défini de la manière suivante :

$$P = I - C(C^T S_p C)^{-1} C^T S_p \quad (3.27)$$

L'approche primale résolue par un solveur de Krylov avec le préconditionneur défini précédemment, et le problème grossier associé est nommée BDD (de l'anglais *Balanced Domain Decomposition*) (Mandel et Brezina, 1996; Le Tallec, 1994). L'algorithme 3.1 résume les différentes étapes de l'approche.

L'approche primale est très robuste, il peut être implémenté sans l'étape de projection non plus l'étape de préconditionnement. Il est clair qu'une implémentation dégénérée (sans l'étape de projection) va fortement pénaliser la performance de la méthode, mais il permet d'aborder le problème de l'implémentation pas-à-pas, ainsi que l'expérimentation numérique avec différent type de préconditionneurs.

Méthodes de résolution

Algorithme 3.1 : BDD : Approche Schur primal avec problème grossier et préconditionnement

```

1  $P = I - C (C^T S_p C)^{-1} C^T S_p$  ; // Projecteur
2  $u_0 = C (C^T S_p C)^{-1} C^T b_p + P u_{00}$  ; // Initialisation
3  $r_0 = b_p - S_p u_0$  ; // Calcul du residu condensé
4  $z_0 = P \tilde{S}_p^{-1} r_0$  ; // Preconditionnement et projection
5  $w_0 = z_0$ 
6 pour  $i = 0, 1 \dots$  faire
7    $p_i = S_p w_i$ 
8    $\alpha_i = (z_i, r_i) / (p_i, w_i)$ 
9    $u_{i+1} = u_i + \alpha_i w_i$ 
10   $r_{i+1} = r_i - \alpha_i p_i$ 
11   $z_{i+1} = P \tilde{S}_p^{-1} r_{i+1}$  ; // Preconditionnement et projection
12  pour  $0 \leq j \leq i$  faire  $\beta_i^j = -(z_{i+1}, p_j) / (w_j, p_j)$ 
13   $w_{i+1} = z_{i+1} + \sum_{j=0}^i \beta_i^j w_j$  ; // Orthogonalisation
14 fin

```

3.3.5 Approche duale

Inversement à l'approche primale, les approches duales consistent à travailler sur le champ des efforts d'interface λ_Γ à priori équilibrés. On exprime alors les déplacements d'interface en fonction de λ_Γ à l'aide des équations d'admissibilité des sous-domaines. La difficulté est que, comme nous l'avons signalé précédemment, les matrices de rigidité des sous-domaines ne sont généralement pas inversibles. La technique utilisée pour le préconditionnement de l'approche primal (équation 3.20) est utilisée pour s'affranchir du problème.

La méthode FETI (Farhat et Roux, 1991) consiste à résoudre ce système à l'aide d'un algorithme itératif (gradient conjugué projeté). L'étape de projection permet d'assurer l'équilibre des sous-domaines à l'intérieur de la méthode itérative. L'approche duale se bénéficie aussi d'une étape de préconditionneur défini de la même manière que l'approche primale.

Par contre, l'approche duale a impérativement besoin de l'étape de projection, sans elle les problèmes locaux sont mal posés et l'algorithme ne converge pas. Dans le cadre de notre étude, un sous-domaine peut être divisé en deux morceaux (délaminage total à l'intérieur du sous-domaine), donnant lieu à une modification à la base comportant les mouvements de corps rigides des sous-domaine. Cette modification amène des actualisations lourdes au problème grossier, détection de la zone délaminée et génération de la nouvelle base. Cette procédure est lourde et complexe, et elle s'éloigne du cadre de cette étude.

3.3.6 Approche mixte

Les approches mixtes n'imposent ni la continuité de déplacement u_b ni l'équilibre Λ_Γ et ils formulent le problème, en même temps, en termes d'effort et de déplacements. Ils posent le problème comme une combinaison des déplacements et des efforts d'interface.

Plusieurs formalismes existent (Fortin et Glowinski, 1983a; Ladevèze et Dureisseix, 2000), mais l'idée essentielle de ces techniques est de réécrire les conditions d'interface en termes de nouvelles inconnues μ_Γ

La méthode LaTin, composé d'une approche multi-échelle et d'une méthode de réduction, est une méthode de décomposition mixte à deux échelles permettant de traiter des problèmes non linéaires de grande taille. Initialement conçue pour la résolution des problèmes d'assemblages des structures avec des interfaces de contact à comportement complexe Blanzé et al. (1993); Champaney et al. (1997). Aujourd'hui, la méthode donne un cadre extrêmement riche, elle est capable de prendre en compte des non-linéarités matériaux et des non-linéarités de surface présentent dans les sous-domaines ou dans les interfaces.

Le traitement du problème décomposé permet la définition d'interfaces de calcul. Ces interfaces sont considérées comme d'entités à part entière, avec ses propres équations. Ceci permet d'introduire de lois d'interface complexe comme du contact unilatéral ou de conditions de bord non linéaire.

La résolution du problème se base sur la séparation des équations en deux groupes : les équations locales et éventuellement non linéaires (Γ) et un deuxième groupe des équations linéaires et éventuellement globales (Ad) :

$$Ad \left\| \begin{array}{l} \text{Admissibilité statique des sous-domaines} \\ \text{Admissibilité cinématique des sous-domaines} \end{array} \right.$$

$$\Gamma \left\| \begin{array}{l} \text{Relation de comportement des sous-domaines} \\ \text{Relation de comportement des interfaces} \end{array} \right.$$

Ensuite à l'aide de deux directions de recherche notées E^+ et E^- , et une solution initiale, la solution est recherchée itérativement entre les deux groupes d'équations (voir figure 3.5).

De nombreux travaux ont permis en premier temps d'assurer l'extensibilité vis-à-vis de la décomposition par l'introduction d'un problème « macro » sur l'ensemble du domaine d'étude (Ladevèze et al., 2001; Ladevèze et Nouy, 2003). La méthode a déjà été utilisée sur une large famille de problèmes, par exemple des problèmes de fissuration (présence de discontinuités sur les interfaces) (Guidault et al., 2008), pour les équations de Navier-Stokes (Vergnault et al., 2009), et pour des interfaces endommageables avec contact unilatéral et frottement (Kerfriden et al., 2009).

Actuellement, la méthode est capable de résoudre efficacement une large famille de problèmes, mais son implémentation et calibrage demande une connaissance approfondie de la méthode (choix des variables d'interface, définition de la base du problème macro...). Étendre son utilisation dans un nouveau champ d'application est une tâche qui

Méthodes de résolution

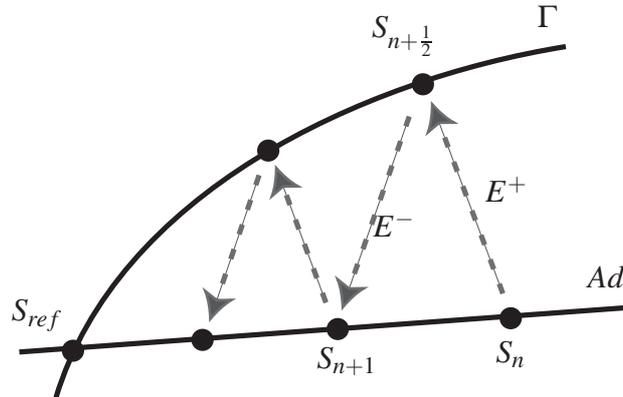


FIG. 3.5: Schéma de la méthode LaTin

demande un travail qui est hors de porte du cadre de notre étude. Même si les travaux de (Kerfriden et al., 2009) ont permis d'utiliser la méthode LaTin pour une version simplifiée du méso-modèle (comportement du méso-constituant pli parfaitement élastique linéaire). Des études supplémentaires sont nécessaires pour l'utilisation de la méthode LaTin avec une loi de comportement de complexité équivalente à celle du méso-modèle (élasto-plastique-endommageable et non local).

§ 4 Méthodes de résolution de problèmes non linéaires

Les méthodes présentées précédemment sont capables de résoudre très efficacement de système linéaire de grande taille. La résolution d'un problème non linéaire peut être traitée avec une méthode de type Newton-Raphson. Ainsi le problème non linéaire est traité par un algorithme de type Newton, et les problèmes linéaires seront traités par une méthode de décomposition de domaine.

Après discrétisation, en espace et en temps, le problème à résoudre peut s'écrire comme un système d'équations non linéaire :

$$f(u) = \mathbb{L}(u) - F_{\text{ext}} = 0 \quad (3.28)$$

Où \mathbb{L} représente les forces internes liées au matériau, et F_{ext} les forces externes liées aux conditions limites (c'est-à-dire les conditions de bord en effort F_d , en déplacement U_d et les forces volumiques f_d).

Ce système non linéaire peut ensuite être résolu par une méthode standard type Newton-Raphson. u_i étant la solution convergée à l'instant t_i , nous cherchons à calculer la solution u_{i+1} à la fin de l'incrément Δt . La solution à la fin de l'incrément peut s'exprimer comme suit :

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_{i+1} \quad (3.29)$$

Δu_{i+1} est l'incrément en déplacement à la fin de l'intervalle.

4.1 Méthodes de Newton

La méthode de Newton (cas 1D) ou Newton-Raphson (cas général) est un algorithme itératif pour trouver la solution d'une équation du type $f(x) = 0$. Elle a été proposée par Newton (1687), et repose sur la méthode du point fixe avec une fonction g particulière qui dépend de la dérivée de f :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (3.30)$$

Connaissant l'approximation de la solution x^n à l'itération n , x^{n+1} est déterminé par :

$$x^{n+1} = g(x^n) = x_n + \frac{f(x^n)}{f'(x^n)} \quad (3.31)$$

Le processus itératif est arrêté quand le résidu de l'équation 3.28 atteint une tolérance prédéfinie. On peut montrer que cette méthode converge de manière quadratique dans un voisinage de la solution x pour les racines simples de la fonction, et de manière linéaire pour de racines multiples. Par contre, la méthode peut diverger si le point de départ est trop éloigné de la solution exacte.

Dans le cadre des éléments finis, l'équation 3.30 devient :

$$g(u) = u - f'(u)^{-1} f(u) \quad (3.32)$$

L'opérateur tangent $f'(u)$ est une matrice (matrice de rigidité pour le cas élastique), normalement calculée à partir de la linéarisation de la fonction $f(x)$ autour de x^n .

Le calcul de l'inverse de la matrice $f'(x)$ est numériquement coûteux. Normalement, une factorisation type LU est utilisée pour le calcul de l'inverse. Cette factorisation peut être gardée en mémoire et être réutilisée dans les itérations suivantes. Assurément, l'utilisation d'un opérateur différent de la tangente courante ne permet pas d'assurer la convergence quadratique dans le voisinage de u . Cependant, le compromis entre le coût des itérations supplémentaires et le coût réduit de la non-actualisation de l'inverse à chaque itération peut se révéler avantageux. Le type de non-linéarité du problème traité, la taille des incréments en temps et la taille du problème éléments finis vont déterminer la pertinence de ce choix.

Dans le cas où l'opérateur tangent initial ($f'(x^0)$) est utilisé pendant plusieurs itérations, on parle de Newton modifié (pseudo-Newton). Si la matrice utilisée n'est pas l'opérateur tangent, on parle de quasi-Newton. Dans ce dernier cas, plusieurs techniques existent pour la construction de l'opérateur (BFGS, SR1, ...) (Matthies et Strang, 1979).

Dans notre cas, nous nous intéressons à l'évolution de mécanismes de dégradation. Les simulations sont paramétrées avec une résolution fine en temps (Δt petit), permettant d'assurer des évolutions faibles des variables d'endommagement entre les pas de temps. Étant donné que les incréments de chargement sont petits, l'état de la structure varie peu durant les itérations. Ceci valide le choix d'utiliser le même opérateur pendant les itérations du Newton. Dans les cas où l'on constate une perte considérable de la convergence

Méthodes de résolution

de la méthode, une actualisation de la factorisation est envisageable. En pratique l'actualisation de l'opérateur tangente est faite toutes les dix itérations.

Cependant, l'utilisation de l'algorithme de Newton-Raphson pour la résolution d'un problème de structure avec un comportement adoucissant (endommagement, plasticité avec écoulement négatif, flambage) pose de difficultés numériques.

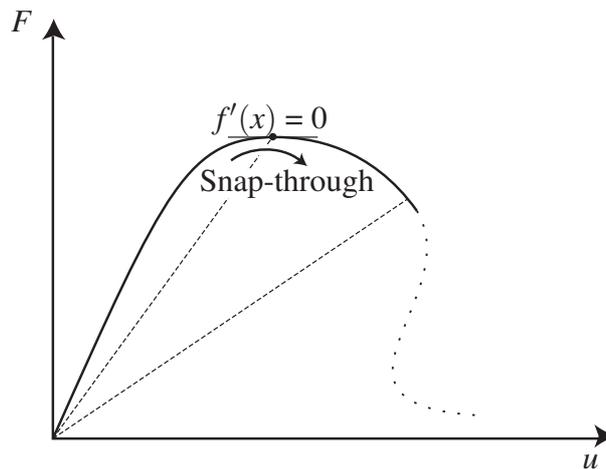


FIG. 3.6: Comportement adoucissant d'une structure

La figure 3.6 montre la courbe d'équilibre d'une structure (équation 3.28) avec un comportement endommageable adoucissant. Un point particulier de la courbe est le point où la charge maximale est atteinte. Sur ce point, l'opérateur $f'(u)$ s'annule et il n'est plus inversible. Ce comportement, passage d'une contrainte croissante à une contrainte décroissante, s'appelle *Snap-through*. À cause de la non-inversibilité de l'opérateur, l'algorithme de Newton-Raphson classique est incapable de dépasser ce point. La présence de l'endommagement localisé peut rendre l'opérateur non inversible bien avant d'attendre le point de charge maximal global. L'utilisation de la rigidité résiduelle permet de s'affranchir de cette difficulté (traits segmentés dans la figure 3.6). Il est clair que, dans ce cas, la convergence de la méthode est lourdement pénalisée.

Il faut remarquer qu'un pilotage en effort ne permet pas de capturer la partie droite de la solution après le point maximal. En conséquence, un pilotage en déplacement est nécessaire pour capturer cette partie de la solution.

Un deuxième type de comportement appelé *Snap-back* est observé principalement dans le calcul de structure avec des instabilités. Causé par des instabilités géométriques (flambage, claquage) ou par des instabilités dues au comportement (rupture) il est caractérisé par le retour de la courbe d'équilibre (pointillé). Dans ce cas, l'utilisation d'un pilotage en déplacement ne permet pas non plus de capturer toute la courbe d'équilibre. Des algorithmes dits de continuation sont nécessaires pour éviter les sauts dans la solution (Riks, 1972; Crisfield, 1981; Wempner, 1971).

Pendant cette étude, seuls des cas de *Snap-through* ont été rencontrés. La régularisation de la solution par l'effet retard empêche les sauts abrupts de la solution, et une

méthode type Newton modifiée suffit pour la résolution de ce type de problème.

§ 5 Les méthodes Newton-Krylov-Schur

La méthode de décomposition de domaine présentée précédemment permet la résolution de problèmes linéaires utilisant des calculateurs à architecture distribuée. Elle ouvre la voie à la résolution de problèmes linéaires de plusieurs millions de degrés de liberté.

Son utilisation à l'intérieur d'un schéma de Newton permet la résolution de problèmes non linéaires de grande taille, formant la famille des méthodes dites « Newton-Krylov-Schur », ou plus simplement NKS (Roeck et al., 1992). Ces méthodes doivent leur nom à :

- La méthode de Newton pour la linéarisation du problème non linéaire, et le schéma itératif pour la résolution du problème non linéaire.
- La sous-structuration et la condensation de Schur pour l'écriture du problème aux interfaces.
- Le solveur itératif de Krylov permettant une résolution en parallèle du problème linéaire condensé aux interfaces.

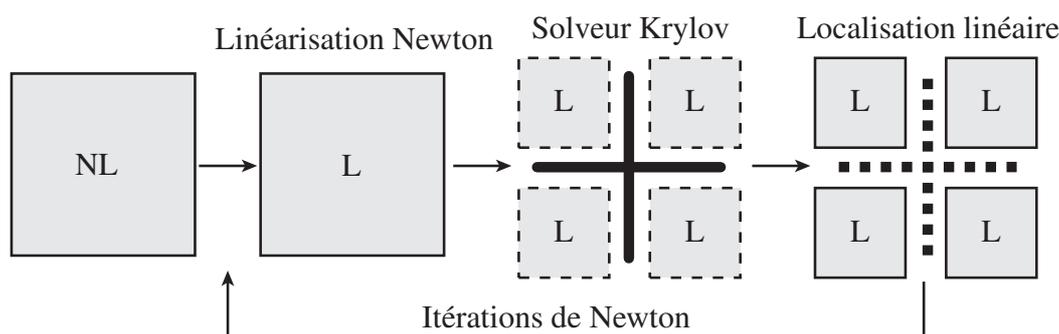


FIG. 3.7: Étapes de résolution des stratégies NKS

Les différentes étapes de la méthode NKS primale sont résumées dans l'algorithme 3.2.

En général, l'évolution du comportement non linéaire à l'intérieur d'une structure composite est loin d'être uniforme. En effet, dans la plupart des cas, les non-linéarités sont localisées dans une zone réduite (bord de trous, reprise de plis), ayant parfois peu d'influence sur le reste de la structure. Quand un algorithme du type NKS est utilisé, une petite non-linéarité conduit à des itérations non linéaires du Newton, donc à de nombreuses résolutions du système global (équation 3.22). Pour pallier ce problème, une stratégie dite de « relocalisation non linéaire » peut être utilisée (Pebrel et al., 2008). L'introduction d'une boucle Newton-Raphson à la place de l'équation 3.25 assure le comportement et l'équilibre à l'intérieur de chaque sous-domaine. Cette stratégie permet de traiter les non-linéarités locales à l'échelle du sous-domaine, et ainsi diminuer le nombre d'itérations du Newton-Raphson global. L'algorithme 3.3 résume la structure générale de la méthode.

Cette technique a été déjà utilisée pour le calcul des structures élancées (Cresta et al.,

Algorithme 3.2 : Méthode Newton-Krylov-Schur

```

1 répéter
2   Assemblage des opérateurs locaux tangent  $K^{(s)}$  par sous-domaine
3   Factorisation des  $K_{ii}^{(s)}$ 
4   Calcul du résidu condensé par sous-domaine
5   Résolution du problème condensé (Solveur itératif de Krylov)
6   Calcul des solutions intérieurs (localisation)
7   Mise à jour de  $u$ 
8   Calcul de l'erreur
9   si  $erreur < tol$  alors sortir
10 jusqu'à

```

Algorithme 3.3 : Méthode Newton-Krylov-Schur avec relocalisation non linéaire

```

1 répéter
2   Assemblage des opérateurs locaux tangent  $K^{(s)}$  par sous-domaine
3   Factorisation des  $K_{ii}^{(s)}$ 
4   Calcul du résidu condensé par sous-domaine
5   Résolution du problème condensé (Solveur itératif de Krylov)
6   répéter
7     Calcul de la solution intérieur (relocalisation)
8     Actualisation de  $u_i$ ,  $K_{ii}^{(s)}$ ,  $K_{ib}^{(s)}$  et  $r_i^{(s)}$ 
9   jusqu'à  $erreur < tol$ 
10  Mise à jour de  $u$ 
11  Calcul de l'erreur
12  si  $erreur < tol$  alors sortir
13 jusqu'à

```

2007), et pour des problèmes d'endommagement (Pebrel et al., 2008). La figure 3.8 schématise les étapes de la stratégie.

Dans le cas où, de fortes non-linéarités sont présentes au sein de sous-domaines, une étape de relocalisation non linéaire peut guider l'algorithme de résolution vers une solution non physique. Le manque de preuve d'unicité pour ce type d'algorithme est un point délicat dans son utilisation.

§ 6 Bilan

Les problèmes de référence peuvent finalement être décomposés en deux sous problèmes : un problème non linéaire et un problème de grande taille.

Ce découplage permet de simplifier énormément la façon d'aborder le problème de

Bilan

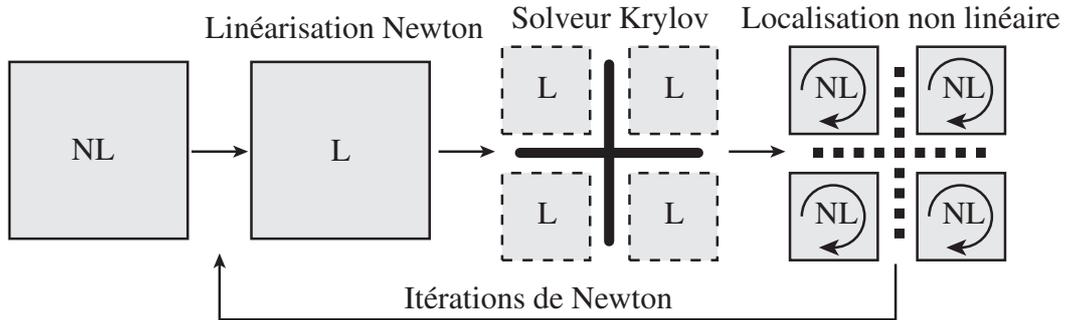


FIG. 3.8: Étapes de résolution des stratégies NKS avec relocalisation non linéaire

référence. Bien entendu, ce découplage ne permet pas de traiter le problème par une approche de type LaTin. Même si la méthode LaTin offre une nouvelle façon de voir le problème de référence, elle implique la réécriture de la loi comportement dans son formalisme.

L'utilisation d'une méthode de résolution dit « classique » (Newton-Krylov-Shur) nous permet de découpler les difficultés (pas toutes), et de traiter de manière indépendante le problème non linéaire et le problème de grande taille. La nature des équations (fortes non-linéarités) nous impose à choisir la stratégie de résolution la plus robuste.

Pour le problème de grande taille, l'utilisation du BDD (décomposition de domaine primale) nous donne une grande liberté. BDD converge même si le problème grossier n'est pas défini par l'ensemble des mouvements de corps rigide des sous-domaines. L'étape de préconditionnement peut être modifiée pour gérer cette situation, et retrouver une convergence presque optimale.

Classiquement la manière la plus robuste de résoudre un problème non linéaire est avec une méthode de type Newton. Elle assure une convergence quadratique autour de la solution pour les meilleurs des cas. L'utilisation d'une version dégénérée (pseudo-Newton, quasi-Newton) permet de diminuer le temps de calcul, mais en contrepartie on perd la convergence quadratique de la méthode.

Méthodes de résolution

Chapitre 4

Mise en œuvre numérique

Ce chapitre a pour objectif de présenter l'outil de calcul développé durant la thèse. L'utilisation d'outils de programmation modernes a permis le développement d'un code très hiérarchisé où chaque objet possède des fonctions très précises. La première partie sera consacrée à la description des capacités et limitations des calculateurs d'aujourd'hui, ainsi que des outils utilisés pour le développement. Le reste du chapitre se concentre essentiellement sur l'architecture du code développé et la manière d'aborder le problème de référence.

Sommaire

1	Le calcul haute performance	64
2	Développements informatiques	64
2.1	Librairie LMTpp	65
2.2	Librairies externes	66
2.3	Structure générale du code	67
2.4	Discretisation temporelle	68
2.5	Discretisation spatiale	69
2.6	Partitionnement	72
2.7	Post-traitement	75
3	Bilan	76

§ 1 Le calcul haute performance

La plupart de supercalculateurs d’aujourd’hui sont constitués d’un assemblage de machines à mémoire partagée (en anglais *SMP cluster*) (Meuer et al., 2009). Cela signifie qu’ils comprennent une série de machines avec plusieurs noyaux de calcul. La figure 4.1 montre, de manière schématisée, un cluster avec deux nœuds à double noyau chacun. Chaque nœud est une unité indépendante avec mémoire centrale (*RAM*), espace de stockage (*HDD*) et plusieurs unités de calcul (Cœurs). Les nœuds sont interconnectés par un réseau. Tous les cœurs, à l’intérieur d’un nœud, partagent les ressources (mémoire, bande passante) du nœud.

Les systèmes opératifs modernes permettent de traiter simultanément plusieurs fils d’exécution (en anglais *threads*) de manière à maximiser l’utilisation des noyaux. Dans le cadre d’un calcul parallèle (où le problème à résoudre est partitionné et traité par plusieurs *threads*), des transferts d’information entre *threads* sont nécessaires. On remarque donc deux niveaux de communication et synchronisation, à l’intérieur des nœuds et entre les nœuds.

Pour profiter au maximum des capacités de ce type de machines, une programmation adaptée proche de l’architecture de la machine est nécessaire.

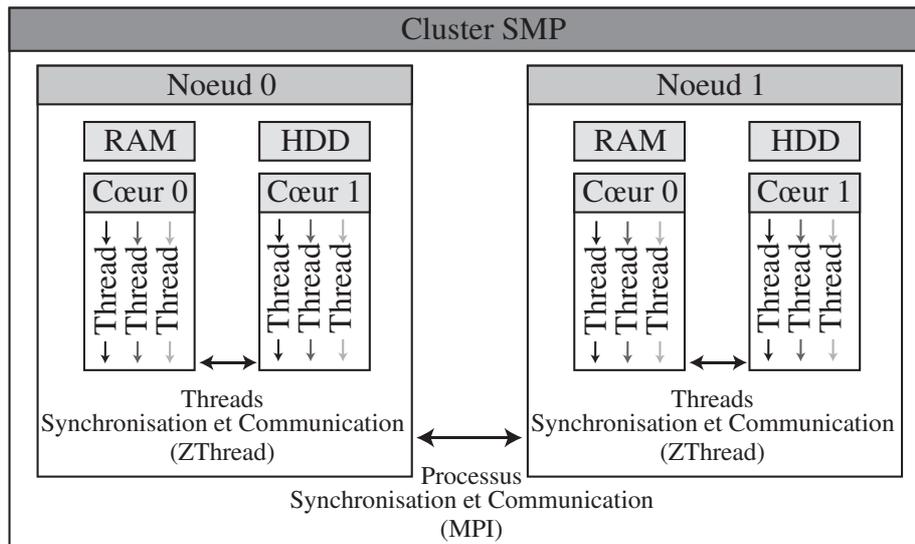


FIG. 4.1: Schématisation d’un cluster de machines à mémoire partagées

§ 2 Développements informatiques

Les développements réalisés durant la thèse ont mené à la création d’un code de calcul appelé **COFFEE** (de l’acronyme en anglais *Composites Failure by Finite Elements*). Il faut remarquer que, au début de l’étude, aucun code de calcul n’était capable de traiter le problème de référence complet. C’est pourquoi la solution choisie a été d’écrire un

Développements informatiques

code de calcul éléments finis propre au laboratoire, en utilisant la plate-forme logicielle développée au LMT-Cachan. Ceci permet d'avoir le contrôle complet sur l'architecture du code, ainsi que l'accès à toute l'information (contrairement aux codes commerciaux où l'architecture est prédéfinie et l'accès à l'information du calcul est restreint). La problématique de la mise en œuvre du méso-modèle dans un code de calcul industriel a été explorée dans Lubineau et Ladevèze (2008). Cette implémentation souffre de l'aspect non ouvert du code commercial Abaqus. Seul le méso continuant pli est implémenté, et l'aspect non local de la loi est traité de manière pragmatique avec un seul élément par pli et une intégration réduite (un point d'intégration par élément).

L'un des objectifs de ce travail est de proposer une solution numérique permettant de traiter une structure composite de complexité moyenne. Un rappel des caractéristiques du problème de référence va permettre la justification des choix faits durant la mise en œuvre. Les caractéristiques principales du problème à résoudre sont les suivantes.

Comportement non linéaire : Le caractère non linéaire nous impose d'utiliser une méthode de résolution type Newton. À cause de l'endommagement, la rigidité résiduelle ainsi que l'opérateur tangent peuvent devenir localement nuls. Un traitement adapté est nécessaire afin de maîtriser la robustesse de l'algorithme de Newton.

Comportement non local : L'intégration de la loi d'évolution du méso-constituant pli fait intervenir l'opérateur non local $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_H$ (moyenne dans l'épaisseur). Pour la prévision correcte du délaminage, le modèle d'interface nécessite l'accès à l'état d'endommagement de plis adjacents. En conséquence, l'intégration de la loi comportement ne peut pas se faire point d'intégration par point d'intégration.

Comportement d'évolution en temps : La formulation à variables internes du méso-modèle, requiert la conservation en mémoire de l'état d'endommagement sur tous les points d'intégration. Le stockage de toute cette information demande une quantité de mémoire non négligeable, équivalente à la quantité de mémoire nécessaire pour stocker l'opérateur tangent.

Grand nombre de degrés de liberté : Comme énoncée précédemment, la quantité d'éléments nécessaires pour traiter une pièce composite avec le méso-modèle, peut devenir très grande. L'algorithme de résolution ainsi que l'implémentation doivent être capables de gérer cette grande quantité d'information. Un point, non moins important, est le post-traitement. L'énorme quantité d'information générée par les simulations (de l'ordre de 250 Mo par pas de chargement, pour une simulation de taille 3×10^6 nœuds) doit être traitée de manière optimale.

2.1 Librairie LMTpp

La plate-forme logicielle LMTpp a été créée dans le but de pérenniser les développements internes au laboratoire, de faciliter la maintenance et de diminuer les développements redondants tout en offrant des outils adaptés aux besoins des chercheurs. Développée originalement par Leclerc (2007), elle est en constante évolution et amélioration. Tout

Mise en œuvre numérique

au long de la thèse, de nombreux points ont été modifiés et améliorés. De nouvelles capacités ont été incorporées, dont notamment la capacité à traiter des lois de comportement à variables internes sur plusieurs points d'intégration, ainsi que la possibilité de traiter des structures multimatériaux.

La plate-forme repose sur une triple exigence :

- Offrir un développement aisé et accéléré, en proposant des conteneurs (matrices, matrice creuse, vecteurs, maillages) adaptés aux besoins du calcul scientifique haute performance en mécanique.
- Garantir une vitesse d'exécution optimale pour la simulation de problèmes de grande taille, grâce à une programmation moderne en C++.
- Offrir des fonctionnalités avancées pour la simulation en mécanique, notamment la génération de matrices élémentaires.

La plate-forme propose un ensemble d'outils d'assistance génériques à la création de codes. Une des originalités de la plate-forme est la possibilité d'utiliser le calcul symbolique et la génération de code pour accélérer, simplifier et optimiser le développement de nouvelles méthodes. Un des exemples d'utilisation de ces techniques de programmation concerne la définition de la formulation mécanique sur un élément et l'obtention des opérateurs élémentaires. Dans ce cas précis, il suffit de définir d'une part la discrétisation retenue (type d'éléments possibles à utiliser) et d'autre part l'expression continue du principe des puissances virtuelles. La procédure de génération de code se charge de la construction du code source en C++ définissant les fonctions pour le calcul des opérateurs de raideur élémentaire. Après compilation, ces fonctions sont appelées pour chaque élément du maillage considéré pour calculer les contributions élémentaires.

Un autre point, très apprécié, est la capacité de lire et d'écrire en plusieurs formats de fichier de stockage des maillages éléments finis. Ceci permet d'importer des maillages générés par des logiciels tiers (Cast3M¹, Gmsh²), ainsi que d'exporter les résultats pour le post-traitement avec des outils performants (Paraview³).

2.2 Bibliothèques externes

Aujourd'hui, on ne peut plus concevoir le développement d'un code sans l'utilisation de bibliothèques annexes. Ces bibliothèques permettent d'alléger la lourde tâche d'écriture de toutes les routines nécessaires pour un calcul scientifique.

Les bibliothèques les plus appréciées sont celles d'algèbre linéaire (Lapack, Blas, Atlas. . .) et les bibliothèques pour la communication entre *threads* (OpenMPI, Lam/MPI). Ils proposent de la documentation détaillée, qui est rare ou même absente dans les bibliothèques dites *faites maison*, ainsi qu'une maintenance assurée à long terme. Ceci permet de concentrer l'effort sur les questions scientifiques liées directement au problème de référence.

La table 4.1 montre les principales bibliothèques utilisées durant la thèse.

¹<http://www-cast3m.cea.fr/>

²<http://www.geuz.org/gmsh/>

³<http://www.paraview.org/>

TAB. 4.1: Bibliothèques externes utilisées par **COFFEE**

Bibliothèque	Description
MPI	Utilisée pour la synchronisation et le transfert d'information entre processus pendant une résolution en parallèle. MPI/Lam (www.lam-mpi.org) et OpenMpi (www.open-mpi.org) peuvent être utilisés.
Partitionneur de Graphes	Utilisée pour générer la partition des maillages, ainsi que pour générer une répartition équilibrée des sous-domaines à travers les processeurs du cluster. Metis (Kasypis et Takeda, 1998) et Scotch (http://www.labri.fr/perso/pelegrin/scotch/) peuvent être utilisés
ZThread	Utilisée pour la synchronisation de <i>threads</i> à l'intérieur d'un processus (http://zthread.sourceforge.net/index.html).
SuiteSparse	Bibliothèque de fonctions d'algèbre linéaire (www.cise.ufl.edu/research/sparse/SuiteSparse/).

2.3 Structure générale du code

L'utilisation d'un langage orienté objet (C++) donne une grande souplesse au moment de la programmation. L'architecture interne de **COFFEE** a été conçue pour profiter au maximum de la programmation orientée objet. D'une part, des objets sont créés pour stocker toutes les données concernant le problème à traiter (maillages, conditions limites, chargement...) et d'autre part, une liste d'*actions* est créée, avec l'objectif de faire interagir les différents objets pour aboutir à un résultat.

En résumé, la structure interne de **COFFEE** peut être séparée en deux parties, les données et les actions (voir figure 4.2)⁴. Ce type d'architecture permet l'ajout facile de nouvelles fonctionnalités (solveur, lecteur de maillage...), sans aucun impact sur le reste du code.

La classe principale du code, instanciée une seule fois, s'appelle `DataStruct`, et elle contient une instance de chacune des classes de la figure 4.2. Le tableau 4.2 contient les descriptions des différentes classes à l'intérieur de `DataStruct`.

Ainsi, à partir du fichier d'entrée, les différentes classes sont initialisées. Ensuite, les actions chargées sont exécutées de manière séquentielle (lecture de maillage, application de propriétés matériaux).

La description détaillée de toutes les classes peut être consultée dans la documentation de **COFFEE** qui se trouve dans les sources et disponible en ligne sur l'intranet du laboratoire.

Ici seules deux classes seront présentées en détail, la classe `TIMELINE` chargé de gérer le temps et la classe `DDM` pour la gestion du maillage.

⁴Des explications sur les diagrammes UML peuvent être trouvées sur le site <http://www.uml.org>

Mise en œuvre numérique

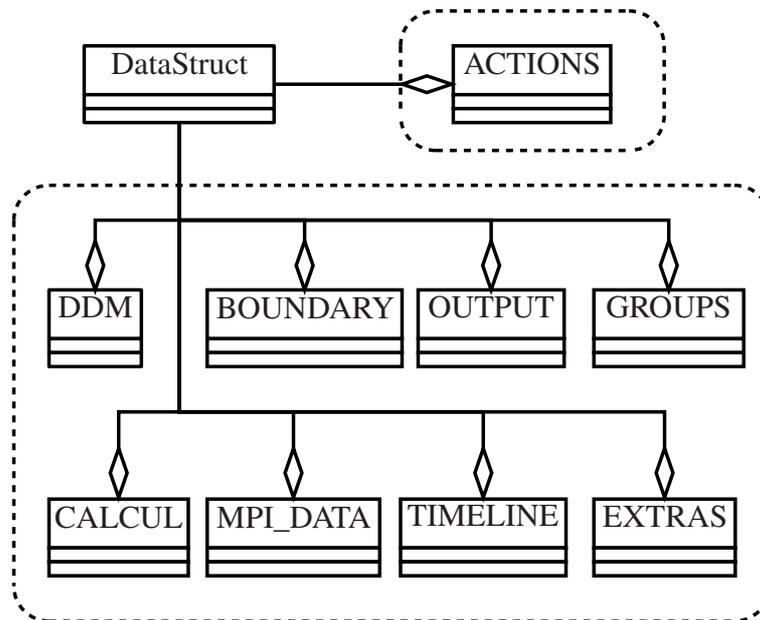


FIG. 4.2: Structure interne de **COFFEE** : Données et Actions

TAB. 4.2: Description des principales classes dans **COFFEE**

Structure	Description
DataStruct	Classe principale, elle stocke toutes les données du calcul
DDM	Classe pour stocker l'information sur le domaine d'étude. Maillages type de matériau
BOUNDARY	Conditions limites. (déplacement, effort, contact...)
OUTPUT	Information à exporter au fur et à mesure du calcul. (maillages, forces de réactions...)
GROUPS	Volumes imaginaires pour la sélection de nœuds et éléments
CALCUL	Information à propos du calcul (calcul parallèle...)
MPI_DATA	Classe pour stocker de l'information concernant un calcul en parallèle
TIMELINE	Classe en charge du contrôle du temps (intervalle d'étude, pas de chargement...)
EXTRAS	Classe pour stocker et générer certains aspects du débogage
ACTIONS	Actions à exécuter pour faire interagir les différents objets (lecture de maillage, solveur non linéaire, application de conditions limites)

2.4 Discrétisation temporelle

Comme dit précédemment, l'intervalle d'étude $[0, T]$ est divisé en un nombre fini d'incrémentations $[t, t + \Delta t]$. Les incréments sont regroupés selon les conditions limites appliquées au domaine d'étude. Ainsi, une simulation avec un chargement monotone n'aura qu'un seul intervalle d'étude découpé en plusieurs pas de chargement ΔT . La figure 4.3 montre

Développements informatiques

un cas typique de chargement monotone avec un palier intermédiaire. Dans ce cas, l'intervalle d'étude est coupé en trois intervalles, et chaque intervalle est découpé en un nombre fini de pas de chargement (bien sûr, le nombre de pas dans chaque intervalle peut être différent).

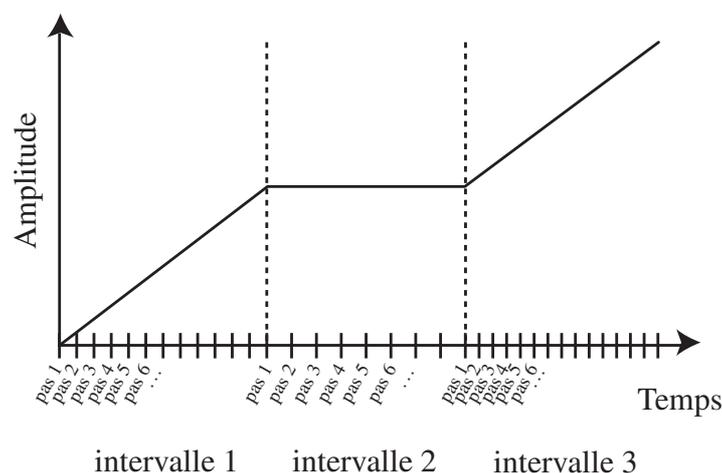


FIG. 4.3: Discrétisation de l'intervalle d'étude : intervalles et pas

La classe `TIMELINE` (voir figure 4.4) est chargée du temps. Une fois renseignée avec l'information provenant du fichier d'entrée, elle peut être interrogée pour obtenir des informations (Δt courant, pas courant, $t...$). La fonction `shift()` permet d'avancer dans le temps. Quand tous les intervalles sont « utilisés », `TIMELINE` envoie un signal pour annoncer au solveur que tous les intervalles sont déjà traités et le calcul est terminé.

TIMELINE
+time
+step
+shift()
+get_step()
+get_interval()
+get_frac()
+time_step()

FIG. 4.4: Classe gérant les temps

2.5 Discrétisation spatiale

Normalement, la discrétisation spatiale du domaine d'étude peut s'effectuer avec des éléments de types quelconques. Ensuite, la loi d'état et la loi d'évolution sont intégrées, élément par élément, afin de déduire les différentes quantités nécessaires pour le calcul (c'est-à-dire les opérateurs tangents et le calcul du résidu).

Mise en œuvre numérique

L'utilisation de la méthode de quadrature de Gauss pour l'intégration élémentaire permet de diminuer considérablement le coût numérique (Zienkiewicz et Taylor, 1987) (évaluation de l'énergie élémentaire sur les points de Gauss). Le tableau 4.3 montre les éléments actuellement disponibles (dans **COFFEE**) et la quadrature de Gauss associée. La quadrature de Gauss utilisée permet d'intégrer correctement des polynômes de deuxième degré pour les éléments Hexa, les Hexa_20, les Wedge et les Wedge_15, et des polynômes de degré trois pour les Tetra et Tetra_10.

Cependant, l'utilisation d'une loi de comportement non locale pose des difficultés supplémentaires. En effet l'intégration du méso-modèle implique des transferts d'information dans l'épaisseur du composite au cours de l'intégration. Ces transferts d'information peuvent poser problème dans le cas où le maillage n'est pas régulier (voir figure 4.5.b) car le comportement est évalué seulement aux points de Gauss, et l'opérateur $\langle \cdot \rangle_H$ (équation 2.5) impose l'homogénéité des forces thermodynamique dans l'épaisseur du pli. De plus, l'intégration de la loi d'évolution de l'interface nécessite l'accès aux variables internes des plis adjacentes sur le même point du plan de composite.

L'utilisation d'un maillage régulier dans l'épaisseur du composite permet de s'affranchir de cette problématique (voir figure 4.5.a). Cette restriction n'est pas vraiment un problème, car la plupart des structures composites laminées peuvent être discrétisées avec cette technique. Ainsi, tous les points d'intégration sont alignés dans l'épaisseur du composite et le transfert d'information est trivial.

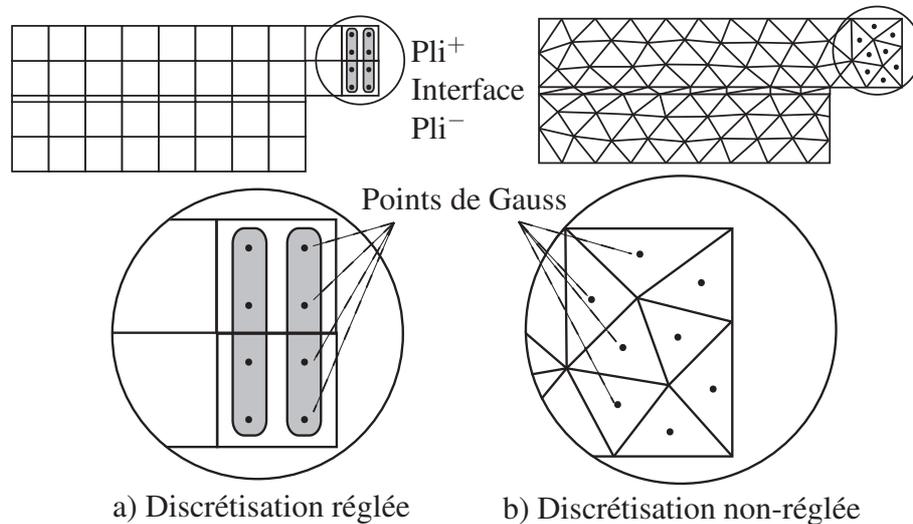
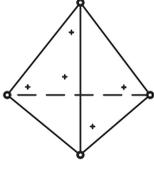
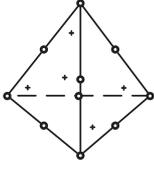
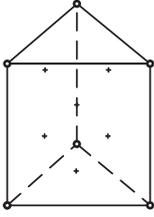
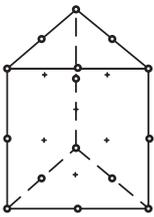
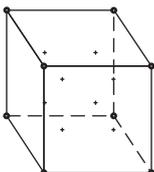
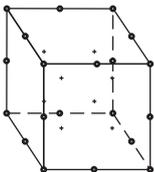


FIG. 4.5: Discrétisation du composite, caractère non-local (schématisation 2D)

La liste d'éléments utilisables avec le méso-modèle est donc restreinte aux éléments prismatiques, c'est-à-dire des éléments qui sont le résultat de l'extrusion d'une figure bidimensionnelle. Ces éléments sont des prismes à base carrée linéaires et quadratiques (Hexa et Hexa_20), et des prismes à base triangulaire linéaires et quadratiques (Wedge et Wedge_10).

Développements informatiques

TAB. 4.3: Types d'éléments et quadrature de Gauss

Nom	Ordre	Figure	Points de Gauss	Poids de Gauss
Tetra	Linéaire		1/4, 1/4, 1/4	-2/15
			1/6, 1/6, 1/6	3/40
			1/2, 1/6, 1/6	3/40
			1/6, 1/2, 1/6	3/40
			1/6, 1/6, 1/2	3/40
Tetra_10	Quadratique		1/4, 1/4, 1/4	-2/15
			1/6, 1/6, 1/6	3/40
			1/2, 1/6, 1/6	3/40
			1/6, 1/2, 1/6	3/40
			1/6, 1/6, 1/2	3/40
Wedge	Linéaire		1/2, 0, α	1/12
			1/2, 1/2, α	
			0, 1/2, α	
			1/2, 0, β	
			1/2, 1/2, β	
Wedge_15	Quadratique		1/2, 0, α	1/12
			1/2, 1/2, α	
			0, 1/2, α	
			1/2, 0, β	
			1/2, 1/2, β	
Hexa	Linéaire		α, α, α	1/8
			β, α, α	
			β, β, α	
			α, β, α	
			α, α, β	
			β, α, β	
			β, β, β	
			α, β, β	
Hexa_20	Quadratique		α, α, α	1/8
			β, α, α	
			β, β, α	
			α, β, α	
			α, α, β	
			β, α, β	
			β, β, β	
			α, β, β	
$\alpha = \frac{1-\sqrt{1/3}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{1/3}}{2}$				

Mise en œuvre numérique

L'utilisation d'une intégration complète, même si elle est numériquement plus coûteuse, permet d'éliminer tous les problèmes liés à une intégration réduite, comme les modes de déplacements à énergie nulle aussi appelés modes *hourglass*.

La classe `Domain` est chargée de stocker tous les sous-domaines ainsi que l'information reliée au problème grossier de la méthode de décomposition de domaine (voir figure 4.6). Elle est composée d'un ensemble de sous-domaines du type `SubDomain`.

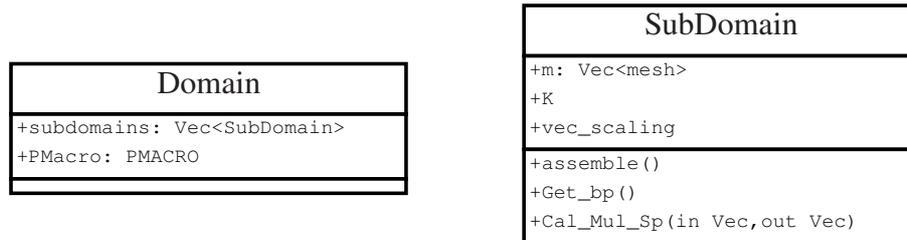


FIG. 4.6: Classe `Domain` et `SubDomain`

Chaque sous-domaine contient une série de maillages (un par type de matériau) et l'information nécessaire pour calculer son résidu, l'opérateur tangent, le résidu condensé sur l'interface et le résultat de la multiplication d'un vecteur par le complément de Shur primal.

L'information nécessaire pour grouper les éléments alignés dans l'épaisseur se trouve aussi dans la classe `SubDomain`. Ceci permet l'intégration de la loi comportement de manière indépendante sous-domaine par sous-domaine.

2.6 Partitionnement

Le point fort des méthodes de décomposition de domaine est la capacité de traiter de manière quasi indépendante chaque sous-domaine. Le caractère non local du méso-modèle demande des transferts supplémentaires entre éléments au moment de l'intégration de la loi comportement. La figure 4.7 schématise deux partitions possibles d'un maillage éléments finis. On constate, pour la partition de gauche, qu'au moment de l'intégration de la loi comportement (méso-constituant pli), plus précisément dans le calcul de la moyenne des forces thermodynamiques (opérateur $\langle\langle \rangle\rangle_H$), des transferts d'information sont nécessaires entre sous-domaines. Cela rend l'intégration de la loi de comportement non locale à l'échelle des sous-domaines, demandant des transferts très lourds entre éléments alignés dans l'épaisseur du composite (forces thermodynamiques par point d'intégration). Ce problème est aussi rencontré au moment de l'intégration de la loi de comportement du méso-constituant interface.

Pour éliminer le transfert d'information entre sous-domaines et rendre l'intégration de la loi de comportement indépendante de la partition, une stratégie de partitionnement de maillages dédié aux problèmes de composite a été développée. La stratégie consiste à prendre en compte le caractère non local du modèle au moment de la partition. La figure 4.7 (droite) montre que si nous coupons le maillage dans la « verticale », les éléments

Développements informatiques

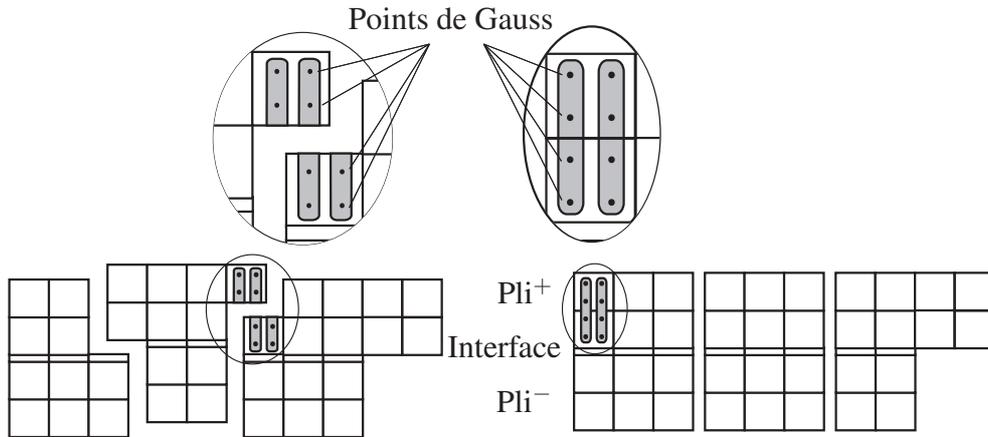


FIG. 4.7: Partitionnement : (gauche) Partitionnement non-adapté, (droite) Partitionnement respectant le caractère non-locale du méso-modèle

alignés dans l'épaisseur du composite resteront au sein du même sous-domaine. Ainsi, nous pouvons assurer que l'intégration de la partie non locale de la loi de comportement se fera de manière locale à l'échelle des sous-domaines.

L'algorithme de partitionnement doit donc assurer que tous les éléments qui sont alignés dans l'épaisseur du composite appartiennent à la même partition. Pour garantir le partitionnement correct du maillage, on génère le graphe dual du maillage (graphe représentant la connectivité entre éléments) (figure 4.8.b) et on identifie les éléments qui sont alignés dans l'épaisseur du stratifié.

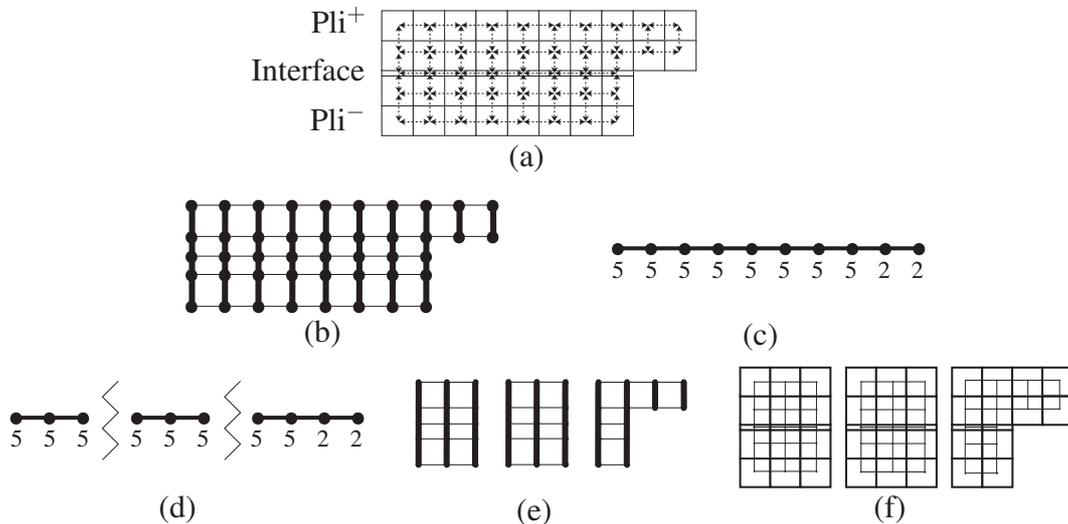


FIG. 4.8: Étapes du partitionnement (a) maillage original et graphe dual (b) graphe dual pondéré (lignes grasses représentent les éléments alignés dans l'épaisseur) (c) graphe pondéré simplifié (d) graphe partitionné (e) graphe partitionné reconstruit, (f) maillage partitionné

La procédure de repérage se base sur les directions d'orthotropie et le centre de

Mise en œuvre numérique

chaque élément. Quand deux éléments partagent les mêmes directions d'orthotropie et leurs centres forment un vecteur colinéaire à N_3^{pli} (à une tolérance près), on considère que sont deux éléments appartenant au même pli (figure 4.9.a). De la même façon, pour chaque élément d'interface, on cherche les deux éléments des plis adjacents les plus proches avec des centres colinéaires à N_3^{int} (figure 4.9.b).

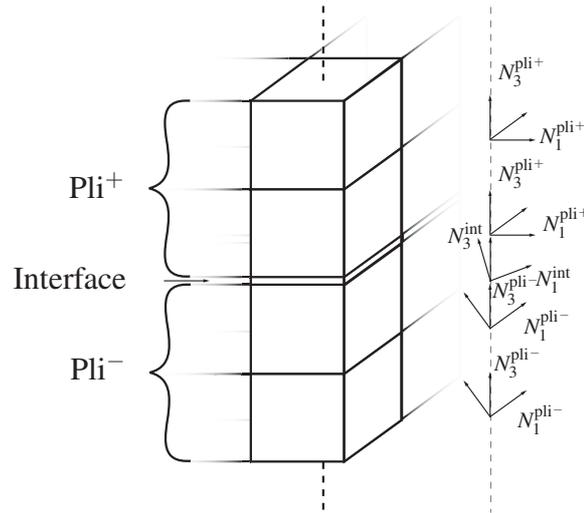


FIG. 4.9: Repères d'orthotropie par élément

Ensuite, on simplifie le graphe de manière à compacter tous les éléments alignés dans l'épaisseur du pli sur le même nœud du graphe (4.8.c). Les numéros au dessous de chaque nœud correspondent à la quantité d'éléments compactés.

Le graphe dual simplifié est ensuite partitionné à l'aide d'un algorithme de partition de graphes (figure 4.8.d). Dans notre cas, deux bibliothèques ont été interfacées avec le code. Metis (Kasypis et Takeda, 1998) et Scotch (Pellegrini, 1997) sont des logiciels libres capables de générer des partitions de graphes irréguliers. Finalement, les différentes parties sont traitées pour reconstruire le graphe (figure 4.8.e) et les maillages des différents sous-domaines (figure 4.8.f).

En même temps que la partition est calculée, le graphe représentant la connectivité des sous-domaines est calculé. Cette information sera utilisée pour optimiser la lecture et la répartition de sous-domaines au moment du calcul parallèle.

Cette méthode nous permet de générer une partition en accord avec le méso-modèle d'endommagement, de manière complètement automatique.

La figure 4.10 montre la partition d'une plaque trouée de 73 500 éléments en 200 sous-domaines.

La figure 4.11 montre la quantité d'éléments par sous-domaine. Grâce aux outils de partitionnement performants et à la stratégie de simplification du graphe duale, la qualité de la partition est bien assurée.



FIG. 4.10: Partition du maillage

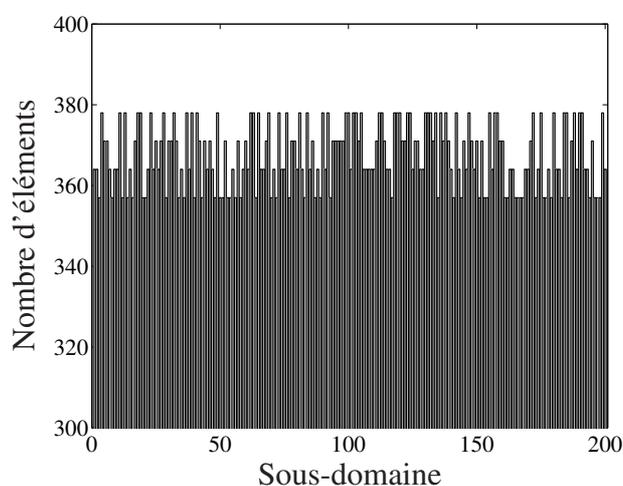


FIG. 4.11: Nombre d'éléments par sous-domaine

2.7 Post-traitement

Un point non négligeable d'une stratégie de résolution parallèle est l'exploitation de résultats. Bien entendu, la résolution d'un problème en parallèle permet de le distribuer sur différents ordinateurs. Le stockage de résultats doit aussi être fait en parallèle pour assurer l'extensibilité du logiciel. Cela signifie que les données générées par la résolution seront stockées de manière distribuée (sur un ensemble de fichiers par exemple).

Dans **COFFEE** la sortie de résultat est faite de manière à ce que pour chaque sous-domaine et chaque pas de chargement un fichier est écrit. Dans le cas d'une résolution avec 200 domaines et 50 pas de chargement, 10 000 fichiers sont créés. En même temps, l'écriture d'un fichier maître permet de charger l'ensemble des données à l'aide d'un seul clic. Ceci permet que chaque processeur écrive les données générées en parallèle, et si nécessaire, de visualiser un seul sous-domaine sans charger l'ensemble de données en mémoire.

Postérieurement, pour assurer un traitement efficace des résultats une approche pa-

Mise en œuvre numérique

rallèle de post-traitement est aussi nécessaire. Paraview⁵ est un logiciel de visualisation ouvert et gratuit qui propose, entre autres, l'ouverture et l'exploitation de résultats de manière distribuée.

Un aspect innovant de Paraview est le mode client/serveur, qui permet l'exploitation de résultats directement sur le cluster de calcul sans nécessiter de rapatrier les données sur la machine de post-traitement.

§ 3 Bilan

La complexité du modèle et la taille des calculs nous imposent l'utilisation de super calculateurs. Ces supercalculateurs avec une architecture parallèle (*cluster*) demandent une attention particulière à toute la chaîne de simulation. D'abord, dans la conception de la structure du code et puis dans la définition des différentes étapes pour aboutir à une stratégie de calcul robuste et performante.

Le méso modèle, lui aussi, impose des restrictions fortes qui demandent des traitements particuliers.

La conception du code de calcul a été fortement influencée par la plate-forme de calcul déjà existante au laboratoire au moment de l'étude. Des développements lourds ont été nécessaires pour ajouter les fonctionnalités indispensables pour un calcul performant avec le méso modèle. L'utilisation d'un langage orienté objet et d'une structure de code adapté ont permis la création d'un code, à la fois modulaire et performant, donnant aux chercheurs une grande marge de manoeuvre pour explorer le méso modèle.

La conception d'une stratégie de partitionnement adaptée aux contraintes du méso modèle a permis de rendre le prétraitement du problème à la portée de tous.

L'utilisation d'un système de fichier en parallèle pour le stockage des résultats a permis l'utilisation d'un logiciel de post-traitement adapté au problème de grande taille.

Une attention spéciale a été accordée à l'architecture de **COFFEE** pour donner la possibilité aux développeurs d'ajouter de nouvelles fonctionnalités, lois de comportement, format de fichier, conditions limites entre autres.

⁵<http://www.paraview.org/>

Chapitre 5

Mise en œuvre : lois de comportement

Ce chapitre est dédié à la mise en œuvre numérique des lois de comportement utilisées pendant l'étude. Une description détaillée des algorithmes utilisés pour l'intégration du méso-modèle dans le cadre de la méthode des éléments finis sera présentée.

Sommaire

1	Loi de comportement pli	78
1.1	Réorientation de fibres due à la déformation	79
1.2	Hyperélasticité direction fibre	80
1.3	Plasticité	80
1.3.1	Direction d'écoulement plastique	81
1.3.2	Direction d'évolution des variables d'écroutissage	81
1.3.3	Retour itératif sur le convexe d'élasticité	82
1.3.4	Algorithme	83
1.4	Endommagement sens fibre	86
1.5	Endommagement diffus	86
1.6	Fissuration transverse	88
2	Interface	89
3	Effet retard	90
4	Bilan	94

Mise en œuvre : lois de comportement

La résolution du problème de référence (équations 3.2 à 3.6) passe par l'évaluation du résidu, avec la solution trouvée à l'itération précédente, à chaque étape de la boucle NKS.

Le calcul du nouveau résidu se fait donc à une solution U constant. Cela veut dire que la solution en déplacement pendant l'actualisation de la loi de comportement ne varie pas.

Comme dit précédemment, dans l'étude nous avons choisi de ne pas utiliser une intégration réduite des éléments finis, qui peut introduire des erreurs d'intégration comme des phénomènes l'*Hourglass*. Pour minimiser le plus possible l'erreur due à l'intégration, nous avons décidé d'utiliser la même quantité de points d'intégration pour l'intégration de la loi d'état et pour l'intégration de la loi d'évolution.

Ce choix nous a obligé à faire des développements lourds au sein de la plate-forme de calcul LMTpp. Au moment du développement, la plate-forme était incapable de traiter des lois de comportement non linéaire à variables internes.

L'opérateur moyen dans l'épaisseur du pli, et la loi d'évolution de l'interface couplée avec l'état des plis adjacents font du modèle un modèle fortement non local. Le caractère non local de la loi ajoute une difficulté supplémentaire au moment de l'implémentation et de l'intégration dans un code de calcul.

La généralisation de la procédure de traitement des lois de comportement non linéaire (dans la plate-forme de calcul) a rendu possible le traitement de lois de comportement non local (non disponible jusqu'alors), permettant de traiter l'intégration des lois d'évolution de manière globale et non point de gauss par point de gauss.

Sachant que le couplage pli-interface se fait dans une seule direction, nous proposons donc d'intégrer d'abord la loi de comportement du pli, puis dans un second temps la loi de comportement de l'interface.

§ 1 Loi de comportement pli

Cette loi est composée par un ensemble de comportements élémentaires.

- Hyperélasticité dans la direction fibre
- Réorientation de fibres due à la déformation
- Endommagement sens fibre (d_f)
- Endommagement diffus (d et d')
- Endommagement dû à la fissuration transverse (\bar{d}_{22} , \bar{d}_{12} et \bar{d}_{23})
- Comportement plastique de la matrice (ε_p et p)

L'ensemble des lois de comportement doit être vérifié simultanément pour une intégration correcte. L'ordre d'actualisation des lois élémentaires a un impact non négligeable sur la robustesse et la convergence de la stratégie. Après analyse, la manière la plus robuste est de commencer par l'intégration des lois les moins couplées. Ainsi, la loi pour la modélisation de la réorientation de fibres sera la première à être actualisée. En effet, cette loi dépend uniquement de l'état de déformation locale.

Il est clair que la deuxième loi à actualiser sera l'hyperélasticité dans le sens des fibres. Elle ne dépend que de l'état de déformation et de l'orientation des fibres.

Les quatre lois restantes sont fortement couplées les unes avec les autres. Une intégra-

Loi de comportement pli

tion itérative permettra la vérification, à convergence, de l'ensemble des équations.

Pour assurer que les valeurs de variables internes du pas de chargement précédent ne sont pas modifiées pendant les itérations de l'algorithme d'intégration, tout le travail d'intégration se fait en utilisant des variables internes temporaires ($\Delta \cdot$). L'idée est de travailler sur la variation des variables internes. Ceci permet, par exemple, de revenir à l'état initial de l'algorithme itératif (remise à zéro de variables temporaires). De cette manière, une fois que l'algorithme aura convergé, les valeurs de variables internes seront modifiées en ajoutant la variation trouvée (exemple $d_f = d_f + \Delta d_f$), et les variables temporaires seront remises à zéro.

Après plusieurs essais numériques, un ordre a été trouvé pour l'intégration des lois de comportement élémentaires. Cet ordre a montré être la manière la plus robuste d'intégrer la loi comportement pli. L'algorithme 4 montre l'ordre retenu et le détail de certaines étapes de l'intégration.

Algorithme 5.1 : Intégration loi comportement méso-constituant pli

```

1 tant que  $\Delta p, \Delta d_f, \Delta d, \Delta d', \Delta \rho, \Delta \bar{d}_{22}, \Delta \bar{d}_{12}$  et  $\Delta \bar{d}_{23}$  varient faire
2   | Calcul de la réorientation des fibres et actualisation de  $\epsilon_{local}$  ; (al. 5.2)
3   | Calcul du module de Young sens fibre (Hyperélasticité) ; (al. 5.3)
4   | si Plasticité active alors
5     | Actualisation de la plasticité ( $\Delta \epsilon_p$  et  $\Delta p$ ) ; (al. 5.4)
6   | si Rupture fibre active alors
7     | Actualisation de l'endommagement sens fibre ( $\Delta d_f$ ) ; (al. 5.5)
8   | si Endommagement diffus active alors
9     | Actualisation de l'endommagement diffus ( $\Delta d$  et  $\Delta d'$ ) ; (al. 5.6)
10  | si Fissuration transverse active alors
11  | Actualisation de la fissuration transverse ( $\Delta \rho, \Delta \bar{d}_{22}, \Delta \bar{d}_{12}$  et  $\Delta \bar{d}_{23}$ ) ; (al. 5.7)
12  | fin
13 fin

```

1.1 Réorientation de fibres due à la déformation

Le modèle de réorientation de fibres est très simple à mettre en œuvre. L'absence de branchements et de couplages permet l'écriture de la loi de manière directe.

Une hypothèse importante a été de considérer que la variation de la réorientation de fibres à l'intérieur d'un élément est minimale. Ceci permet de calculer une seule variation d'angle par élément, et ainsi d'économiser une quantité non négligeable de mémoire (les valeurs sont calculées au centre de l'élément). Dans le cas contraire, il faudrait calculer une variation d'angle par point d'intégration, et donc stocker deux vecteurs de direction (N_{1new}^{pli} et N_{2new}^{pli}) par point.

L'hypothèse de petit chargement permet d'écrire la loi en fonction de la solution au pas de chargement précédent (u^{old}).

Algorithme 5.2 : Calcul de la reorientation des fibres

- 1 **pour chaque** *élément* **faire**
 - 2 Calcul du gradient du déplacement dans le repère local $\nabla_{123} u^{old}$; (éq. 2.66)
 - 3 Calcul de la transformation affine \mathbb{T} dans le repère global ; (éq. 2.68 et 2.69)
 - 4 Calcul des nouvelles direction d'orthotropie ; (éq. 2.62, 2.71 et 2.72)
 - 5 **fin**
-

La figure 2.12 montre la variation d'angle généré pour différents niveaux de chargement dans un composite $[\pm\theta]_{ns}$. Dans ce cas, tous les mécanismes de dégradation ont été désactivés.

1.2 Hyperélasticité direction fibre

La simplicité de cette loi permet une écriture directe et ne pose aucune difficulté. L'algorithme 5.3 résume la mise en œuvre. Elle permet de calculer la rigidité apparente du composite dans la direction des fibres en fonction du taux de déformation.

De la même façon que précédemment, cette équation est résolue de manière explicite.

Algorithme 5.3 : Calcul de la hyperélasticité

- 1 **pour chaque** *point de Gauss* **de chaque** *élément* **faire**
 - 2 Calcul de la déformation dans le repère local $\boldsymbol{\varepsilon}^{old}$
 - 3 Calcul de E_1^0 ; (éq. 2.4)
 - 4 **fin**
-

La figure 5.1 montre la réponse en traction et compression dans le sens des fibres du pli élémentaire. Dans ce cas seulement les phénomènes d'hyperélasticité et de rupture de fibres sont présents.

1.3 Plasticité

La fonction de charge définie précédemment (équation 2.37) peut être écrite de manière tensorielle. Afin de conserver la généralité de la présentation, nous adopterons la notation condensée suivante :

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, p) = \sqrt{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T H \hat{\boldsymbol{\sigma}}} - R(p) - R_0 \quad (5.1)$$

L'équation (2.37) correspond donc au cas particulier :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Loi de comportement pli

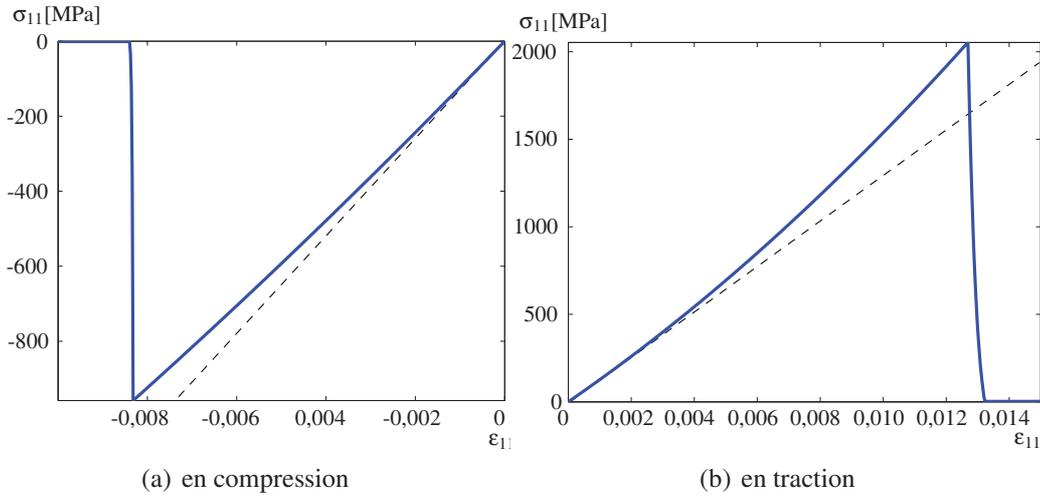


FIG. 5.1: Comportement sens fibre pour un chargement monotone
(ligne pointillé : tangente à l'origine)

Les conditions de charge-décharge s'expriment au travers la fonction de charge (équations (5.3) à (5.5)).

– domaine d'élasticité si :

$$f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p) < 0 \quad (5.3)$$

– décharge élastique si :

$$f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p) < 0 \quad (5.4)$$

– écoulement plastique si :

$$f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p) = 0 \quad (5.5)$$

1.3.1 Direction d'écoulement plastique

La direction de l'écoulement plastique est donnée par le principe d'écoulement maximal de Hill, qui indique que l'écoulement s'effectue de manière normale à la fonction de charge :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p^T = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (5.6)$$

1.3.2 Direction d'évolution des variables d'écrouissage

Dans le cadre des matériaux standards généralisés, la notion de normalité est étendue aux variables d'écrouissage, ce qui conduit à :

$$\dot{p} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} \quad (5.7)$$

Mise en œuvre : lois de comportement

Dans le cas de la fonction de charge définie par l'équation 5.1, il est immédiat que $\frac{\partial f}{\partial R} = -1$. Par conséquent :

$$\dot{\lambda} = \dot{p} \quad (5.8)$$

1.3.3 Retour itératif sur le convexe d'élasticité

Écrivons la différentielle de la fonction de charge :

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \partial R \quad (5.9)$$

Il convient désormais d'exprimer les différents termes de l'équation 5.9 en fonction du taux de déformation plastique cumulée.

D'après (5.1)

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T H^T}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad (5.10)$$

De plus :

$$\frac{\partial f}{\partial R} \partial R = \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial p} \partial p = -R'(p) \partial p \quad (5.11)$$

Donc :

$$\partial f = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T H^T}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}} \partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - R'(p) \partial p \quad (5.12)$$

Or :

$$\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \Theta \partial \boldsymbol{\sigma} = \Theta \cdot K \cdot \partial \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (5.13)$$

Lors de la recherche de la partie plastique, la déformation totale est imposée à l'étape locale, ce qui conduit :

$$\partial \boldsymbol{\varepsilon} = \partial \boldsymbol{\varepsilon}_p + \partial \boldsymbol{\varepsilon}_e = 0 \quad (5.14)$$

ou encore :

$$\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p = -\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (5.15)$$

Par conséquent :

$$\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -\Theta \cdot K \cdot \partial \boldsymbol{\varepsilon}_p = -\Theta \cdot K \cdot \Theta \cdot \partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad (5.16)$$

D'après (5.6) et (5.8) :

$$\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{\partial f^T}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \partial p = \frac{H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}} \partial p \quad (5.17)$$

soit :

$$\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -\Theta \cdot K \cdot \Theta \cdot \frac{H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}} \partial p \quad (5.18)$$

La différentielle de f s'exprime donc au final :

$$\partial f = - \left[\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T H^T}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}} \cdot \Theta \cdot K \cdot \Theta \cdot \frac{H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}} + R'(p) \right] \partial p \quad (5.19)$$

Loi de comportement pli

D'où l'expression du taux de déformation plastique cumulée nécessaire pour revenir sur le convexe d'élasticité à partir d'une solution sortant du convexe d'élasticité :

$$f + \partial f = 0 \Rightarrow \partial p = \frac{\sqrt{\tilde{\sigma}^T H \tilde{\sigma}} - R(p) - R_0}{\left[\frac{\tilde{\sigma}^T H^T}{\sqrt{\tilde{\sigma}^T H \tilde{\sigma}}} \cdot \Theta \cdot K \cdot \frac{H \tilde{\sigma}}{\sqrt{\tilde{\sigma}^T H \tilde{\sigma}}} + R'(p) \right]} \quad (5.20)$$

ou encore sous forme condensée :

$$\partial p = \frac{\sqrt{\tilde{\sigma}^T H \tilde{\sigma}} - R(p) - R_0}{\left[\frac{\tilde{\sigma}^T \cdot O \cdot \tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}^T \cdot H \cdot \tilde{\sigma}} + R'(p) \right]} \quad (5.21)$$

où :

$$O = H^T \cdot \Theta \cdot K \cdot \Theta \cdot H \quad (5.22)$$

En remplaçant le ∂ par un Δ on obtient donc l'équation à programmer :

$$\Delta p = \frac{\sqrt{\tilde{\sigma}^T H \tilde{\sigma}} - R(p) - R_0}{\left[\frac{\tilde{\sigma}^T \cdot O \cdot \tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}^T \cdot H \cdot \tilde{\sigma}} + R'(p) \right]} \quad (5.23)$$

Ensuite à partir des équations 5.6 et 5.1, le taux de déformation plastique peut être calculé.

$$\dot{\epsilon}_p^T = \dot{\lambda} \frac{\tilde{\sigma}^T H^T}{\sqrt{\tilde{\sigma}^T H \tilde{\sigma}}} \quad (5.24)$$

1.3.4 Algorithme

Pendant l'implémentation nous avons constaté que quand l'endommagement d atteignait des valeurs proches de 1 (de l'ordre de 0,999), l'algorithme chargé de l'intégration de la plasticité divergeait. La solution a été de considérer qu'après ce point le matériau est complètement dégradé, en conséquence l'évolution de la plasticité, pour ce point d'intégration, est bloquée.

Il faut remarquer que dans le cas où la plasticité cumulée est égale à zéro, $R'(p)$ n'est pas définie, et on est dans l'impossibilité d'évaluer l'équation 5.23. L'introduction d'une valeur initiale pour $\Delta p_{correction}$ permet de démarrer l'algorithme. La valeur de Δp_{ini} (10^{-50}) a été choisie pour ne pas induire un écoulement plastique excessif.

L'algorithme retenu (voir algorithme 5.4) permet une intégration robuste de la plasticité. De plus, l'implémentation générique de la plasticité, dans la plate-forme de calcul, permet son utilisation en dehors du cadre du méso-modèle (par une nouvelle définition des opérateurs Θ et H).

Algorithme 5.4 : Calcul de la plasticité

```

1 pour chaque point de Gauss de chaque élément faire
2   si  $d > d_{max}$  alors continue avec le point d'intégration suivant
3   Initialisation de variables temporaires de la plasticité ( $\Delta p$  et  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p$ ) à 0
4   Calcul du  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 
5   si  $\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot H \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - R(p) - R_0 > 0$  alors (éq. 5.1)
6     répéter
7       Calcul du  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  en fonction de  $\boldsymbol{\varepsilon}_p + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p$ 
8       si  $p + \Delta p > 0$  alors
9         | Calcul de  $\Delta p_{correction}$  ; (éq. 5.23)
10        sinon
11          |  $\Delta p_{correction} = \Delta p_{ini}$ 
12          fin
13           $\Delta p = \Delta p + \Delta p_{correction}$ 
14          Calcul du taux de déformation plastique  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p$  ; (éq. 5.24 et 2.36)
15        jusqu'à  $\frac{\Delta p_{correction}}{p + \Delta p} < tol$ 
16    fin
17 fin

```

Le critère de sortie est défini en fonction de $\Delta p_{correction}$. Si la correction de la plasticité est suffisamment petite (de l'ordre de 10^{-6}), on considère que l'algorithme a atteint la convergence.

La figure 5.2 montre la réponse du modèle à un chargement cyclique en cisaillement et l'évolution de l'endommagement et de la plasticité cumulée en fonction du chargement. Plusieurs caractéristiques peuvent être observées. L'accumulation de la déformation anélastique au fur et à mesure que la plasticité cumulée évolue. La diminution de la raideur du matériau en décharge due à l'endommagement.

Loi de comportement pli

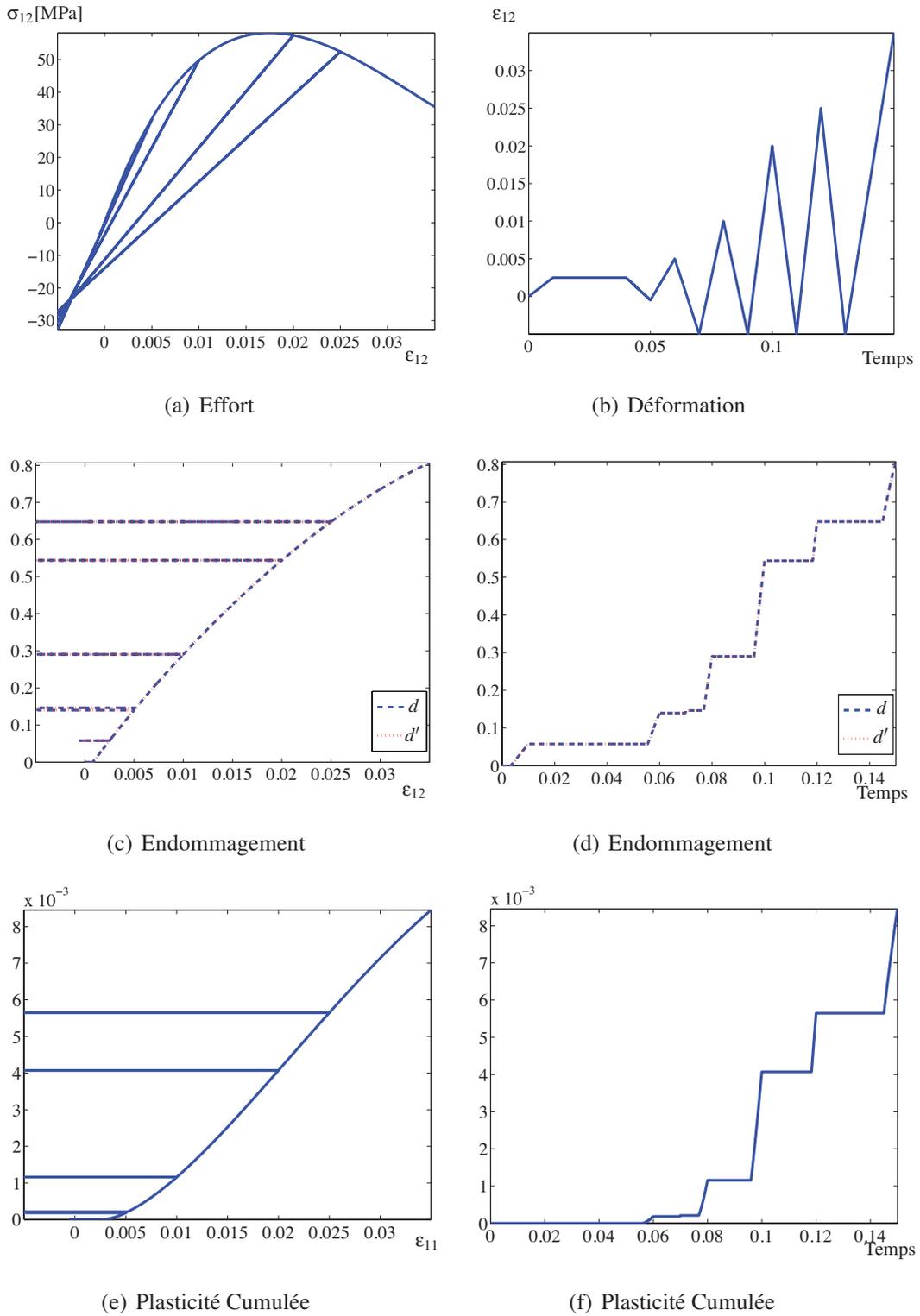


FIG. 5.2: Comportement en cisaillement

1.4 Endommagement sens fibre

L'algorithme 5.5 montre la stratégie retenue pour l'actualisation de l'endommagement sens fibre. Comme pour la plasticité, l'incrément de l'endommagement sens fibre (d_f) est stocké dans une variable temporaire Δd_f .

Algorithme 5.5 : Calcul de l'endommagement sens fibre (d_f)

```

1 pour chaque point de Gauss de chaque élément faire
2   | Actualisation de  $\epsilon_{local}$  et  $\sigma$ 
3   | Calcul de  $Y_{d_f}$  et  $Y_{d'}$  ;                               (éq. 2.7 et 2.12)
4 fin
5 Opérateur  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_H$  sur les quantités  $Y_{d_f}$  et  $Y_{d'}$ 
6 pour chaque point de Gauss de chaque élément faire
7   | Calcul de  $\Delta d_f$  ;                                       (éq. 2.13 et 2.14)
8   | Vérification des valeurs de l'endommagement
9 fin

```

Les équations 2.7 et 2.12 ne peuvent pas être calculées directement. L'opérateur moyenne dans l'épaisseur ($\langle\langle \cdot \rangle\rangle_H$) requiert l'ensemble de valeur alignée dans l'épaisseur d'un pli élémentaire. Une première boucle sur tous les points d'intégration permet de calculer les valeurs ponctuelles qui seront postérieurement utilisées dans la routine de l'opérateur $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_H$.

Une fois les forces thermodynamiques calculées, le calcul de l'incrément d'endommagement sens fibre (Δd_f) ne pose aucune difficulté.

La vérification des valeurs de l'endommagement est nécessaire pour assurer que l'endommagement trouvé est compatible avec la loi d'état. Dans le cas où un jeu des variables internes fait que l'opérateur de Hooke n'est plus défini positif, on considère que le matériau est complètement dégradé. Dans ce cas, les variables sont fixées au maximum (0,999). Cette valeur a été choisie pour assurer une rigidité quasi nulle, mais sans dégrader considérablement le conditionnement de l'opérateur de la matrice tangente.

La figure 5.1 montre la réponse du matériau pour un chargement monotone en traction et compression. L'utilisation de l'effet retard permet d'empêcher un passage brutal d'un endommagement de zéro à un, donc la localisation de la déformation.

1.5 Endommagement diffus

L'actualisation de l'endommagement diffus (d et d') se fait de la même manière que l'endommagement sens fibre. L'algorithme 5.6 montre la stratégie retenue.

Loi de comportement pli

Algorithme 5.6 : Calcul de l'endommagement diffus (d et d')

```

1 pour chaque point de Gauss de chaque élément faire
2   | Actualisation de  $\epsilon_{local}$  et  $\sigma$ 
3   | Calcul de  $Y_d$  et  $Y_{d'}$  ; (éq. 2.6 et 2.7)
4 fin
5 Opérateur  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_H$  sur les quantités  $Y_d$  et  $Y_{d'}$ 
6 pour chaque point de Gauss de chaque élément faire
7   | Calcul de  $\Delta d$  et  $\Delta d'$  ; (éq. de 2.8 à 2.10)
8   | Vérification des valeur de l'endommagement
9 fin

```

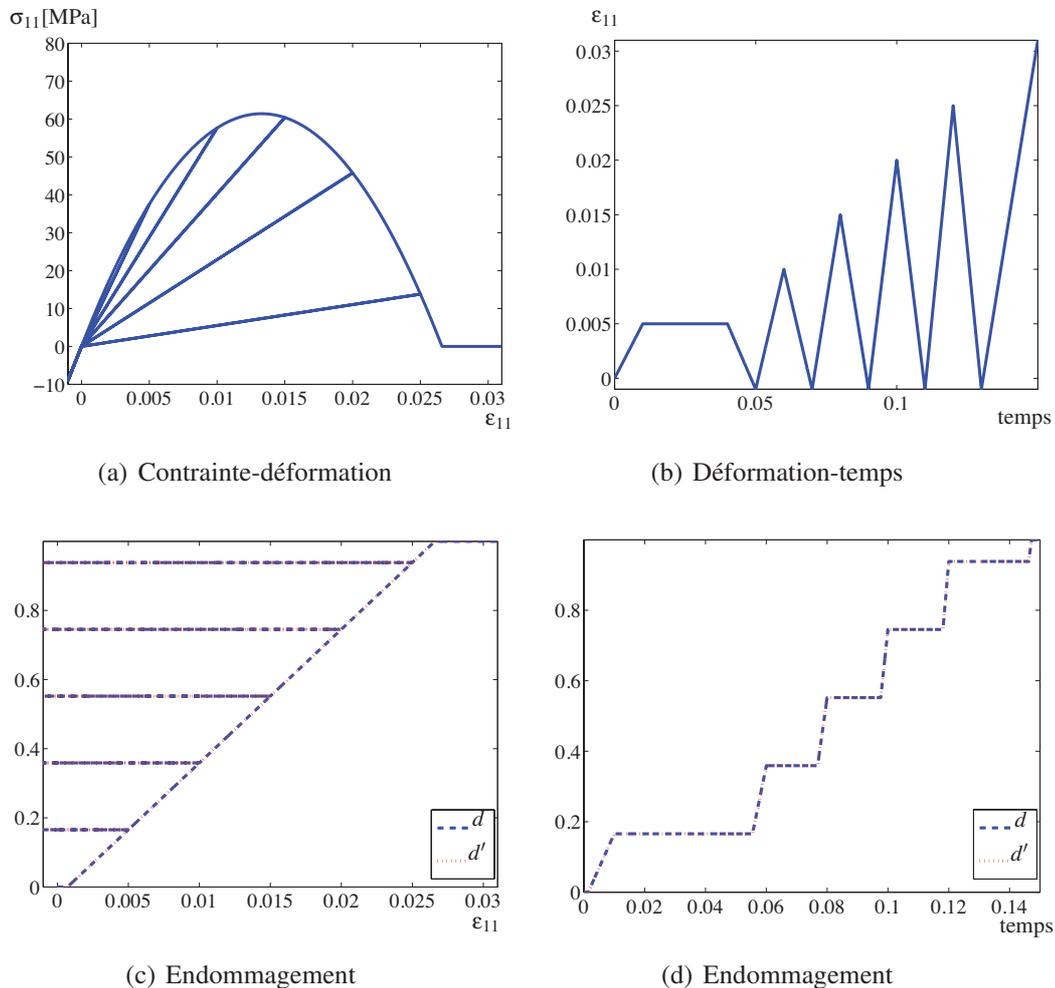


FIG. 5.3: Comportement sens transverse cyclique

Comme pour l'endommagement sens fibre, l'algorithme n'est pas contraint par les bornes de Δd et $\Delta d'$. Cela veut dire que dans l'algorithme, Δd et $\Delta d'$ peuvent prendre

Mise en œuvre : lois de comportement

n'importe quelle valeur. Ensuite dans la vérification des valeurs d'endommagement ces valeurs sont bornées inférieurement et supérieurement. Inférieurement ($\Delta d \not\leq 0$), pour assurer un endommagement toujours croissant. Et supérieurement ($\Delta d < 0,999 - d$), pour assurer que l'endommagement ne dépasse pas la valeur maximale permise. Évidemment, ces bornes s'appliquent également à toutes les autres valeurs d'incrément d'endommagement.

La figure 5.3 montre le comportement en traction transverse pour un chargement cyclique. Pour simplifier, seul l'endommagement diffus est actif. Dans la figure, on peut noter la prise en compte de la fermeture de fissures en compression, modélisée par une désactivation de l'endommagement en compression. Un autre point important est que même si l'endommagement n'atteint jamais la valeur de 1 (avec l'objectif d'empêcher de rendre non inversible l'opérateur tangent), la valeur de 0,999 est suffisante pour assurer que la raideur résiduelle soit minimale.

Les autres figures montrent l'évolution de l'endommagement en fonction de la déformation et en fonction du chargement.

La figure 5.4 montre la réponse du modèle, avec l'effet retard activé, pour le même chargement. Dans la courbe contrainte-déformation (figure 5.4(a)), la ligne pointillée dénote la réponse sans effet retard. On remarque que le comportement est complètement élastique au-dessous de la courbe de réponse sans effet retard. Par contre, l'évolution de l'endommagement en dessus de la courbe statique n'est pas instantanée. Ce retard dans l'évolution est la cause des coins arrondis dans la figure 5.4(d).

Dans les figures 5.3 et 5.4, la valeur de saturation de l'endommagement diffus (d_s , équation 2.10) est fixée à la valeur maximale de l'endommagement (pas de saturation).

1.6 Fissuration transverse

La mise en œuvre de la loi d'évolution de la fissuration transverse passe par la détermination de fonctions provenant de l'homogénéisation du problème micro (éq. 2.24) (Ladevèze et Lubineau, 2001). Elles sont tabulées et stockées en mémoire, et évaluées selon les besoins. Ces fonctions ont été identifiées jusqu'à un taux de fissuration de 1,96, équivalent à un endommagement de 0,95. Cette valeur n'est pas suffisante pour atteindre la rupture finale. La solution a été d'extrapoler la fonction f_{22} pour parvenir à un endommagement maximal (figure 5.5).

La fonction $\mathcal{G}(x)$ (équation 2.26) a également été calculée et tabulée en même temps que les fonctions précédentes.

L'algorithme 5.7 montre les différentes étapes de la stratégie d'intégration.

Il faut remarquer que le modèle de fissuration n'a pas de sens s'il n'est pas couplé avec le modèle d'endommagement diffus. Les figures 5.6 et 5.7 montrent le comportement du modèle avec l'endommagement diffus, la fissuration, et la plasticité, actifs à un chargement cyclique de traction. La courbe 5.6 montre la réponse en contrainte. Les autres figures montrent l'évolution des variables internes.

Un point important est qu'une valeur de saturation pour l'endommagement diffus n'est plus nécessaire. Cela veut dire que si les propriétés matériau utilisées sont identifiées à

Interface

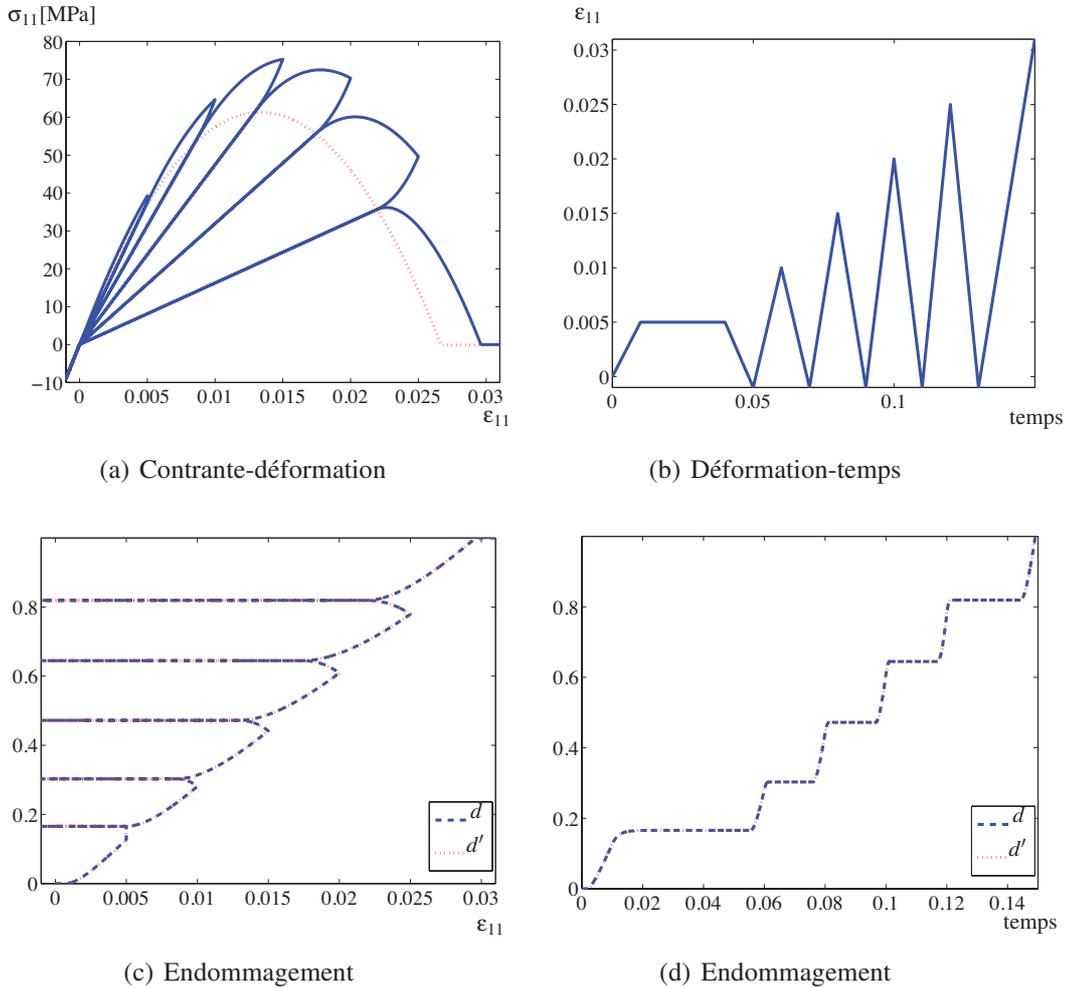


FIG. 5.4: Comportement sens transverse cyclique avec effet retard

partir d'un vrai matériau le modèle diffus et le modèle de fissuration se couplent parfaitement, donc il n'est plus nécessaire de fixer un endommagement maximal sur d pour démarrer la fissuration transverse.

§ 2 Interface

Le méso-modèle présente un couplage pli-interface unidirectionnel. Cela veut dire que l'information se propage du pli à l'interface. Ceci nous permet de traiter la loi de comportement pli sans avoir à nous préoccuper de l'interface. Après l'intégration de la loi de comportement pli, l'intégration de la loi d'interface ne présente presque aucune difficulté. Toute la difficulté réside dans le repérage de plis adjacents et de l'obtention d'information des éléments voisins à chaque élément d'interface (voir page 74).

L'hypothèse de petite variation de l'orientation des fibres dans le plan nous permet de

Mise en œuvre : lois de comportement

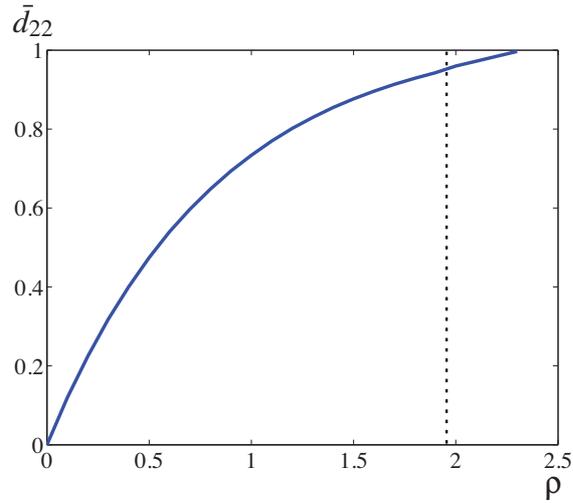


FIG. 5.5: Fonction f_{22} identifié du modèle micro, et sont extrapolation à partir de $\rho = 1,96$

Algorithme 5.7 : Calcul de l'endommagement dû à la fissuration transverse (\bar{d}_{22} , \bar{d}_{12} , \bar{d}_{23})

```

1 pour chaque point de Gauss de chaque élément faire
2   | Actualisation de  $\epsilon_{local}$  et  $\sigma$ 
3   | Calcul de  $Y_{\bar{d}_{22}}$ ,  $Y_{\bar{d}_{12}}$  et  $Y_{\bar{d}_{23}}$  ; (éq. 2.18, 2.19 et 2.20)
4 fin
5 Opérateur  $\langle \cdot \rangle_H$  sur les quantités  $Y_{\bar{d}_{22}}$ ,  $Y_{\bar{d}_{12}}$  et  $Y_{\bar{d}_{23}}$ 
6 pour chaque point de Gauss de chaque élément faire
7   | Calcul de  $\gamma_I$ ,  $\gamma_{II}$  et  $\gamma_{III}$  ; (éq. 2.28, 2.28 et 2.29)
8   | Calcul de  $\Delta\rho$  ; (éq. 2.25 ou 2.30)
9   | Actualisation de  $\Delta\bar{d}_{22}$ ,  $\Delta\bar{d}_{12}$  et  $\Delta\bar{d}_{23}$  (éq. 2.24)
10 fin

```

n'évaluer l'angle entre deux plis adjacents qu'au centre des éléments.

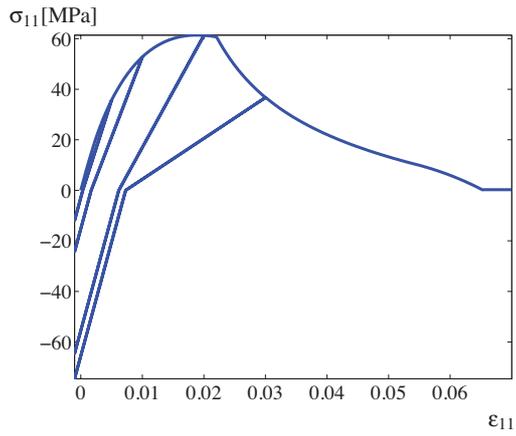
L'algorithme 5.8 montre les étapes et les équations utilisées dans l'actualisation de la loi.

Dans le cadre de l'utilisation de l'effet retard, seule l'équation 2.50 est modifiée. Ceci est dû à la définition de la loi d'évolution. d_{II} et d_{III} dépendent de la valeur de d_I et de la valeur du taux de fissuration des plis adjacents (ρ^+ et ρ^-). Ces trois indicateurs d'endommagement ont déjà été bornés par l'effet retard.

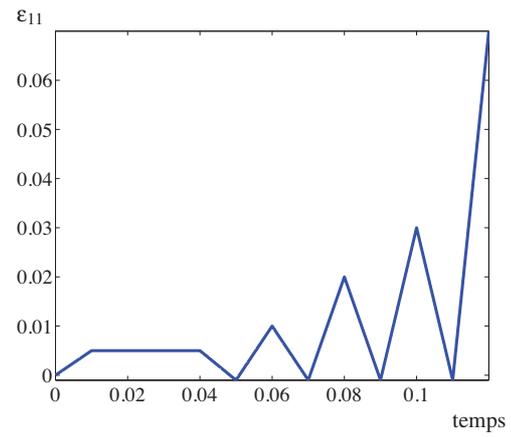
§ 3 Effet retard

L'utilisation de l'effet retard pour pallier aux problèmes de localisation numérique dans le cadre du méso-modèle a mené à la redéfinition de plusieurs équations du modèle.

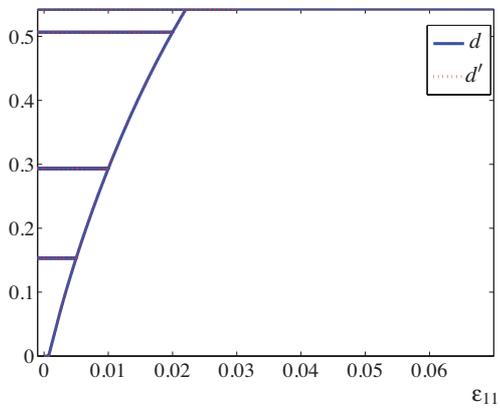
Effet retard



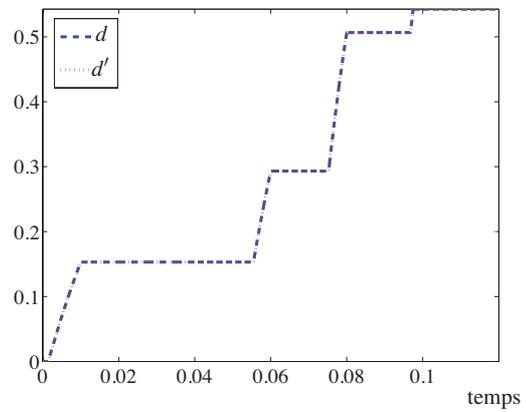
(a) Traction



(b) Déformation



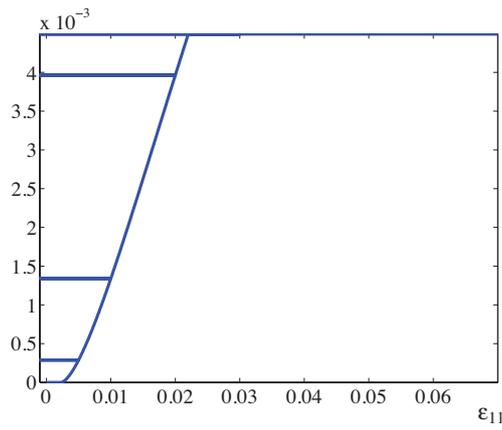
(c) Endommagement



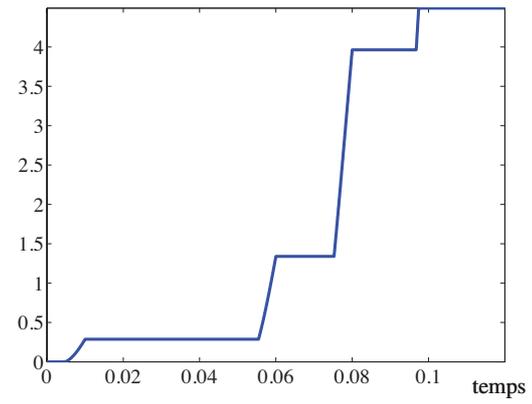
(d) Endommagement

FIG. 5.6: Comportement sens Transverse avec Diffus, Plasticité et Fissurations (1)

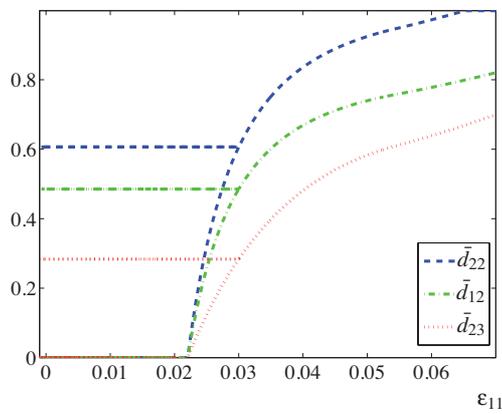
Mise en œuvre : lois de comportement



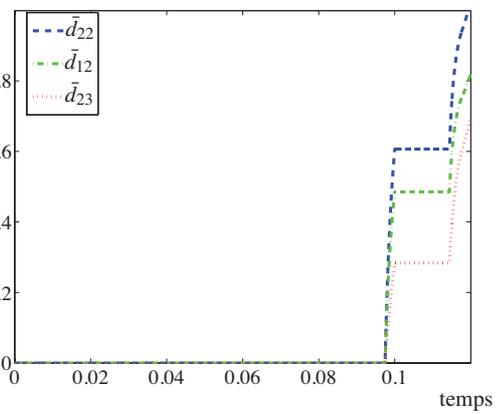
(a) Plasticité Cumulé



(b) Plasticité Cumulé



(c) Fissuration



(d) Fissuration

FIG. 5.7: Comportement sens Transverse avec Diffus, Plasticité et Fissurations (2)

Bilan

Algorithme 5.8 : Intégration loi comportement méso-constituant interface

```

1 pour chaque élément d'interface faire
2   | Calcul de l'angle formé par les deux plis adjacents  $\theta$ 
3   | pour chaque point de Gauss faire
4     | Calcul du saut de déplacement ; (éq. 2.39)
5     | Calcul de  $Y_{d_I}$ ,  $Y_{d_{II}}$  et  $Y_{d_{III}}$  ; (éq. 2.44, 2.45 et 2.46)
6     | Calcul de  $w$  ; (éq. 2.48)
7     | si effet retard active alors
8       | | calcul de  $\Delta d_I$  avec l'effet retard ; (éq. 2.60)
9     | sinon
10      | |  $\Delta d_I = w - d_I$  (éq. 2.50)
11     | fin
12     | si Couplage active alors
13       | | Recupération de  $\rho$  et  $\rho_s$  des éléments adjacents
14       | | Calcul de  $d_{II}$  et  $d_{III}$  ; (éq. 2.51 et 2.52)
15     | fin
16     | Actualisation de  $d_I$ ,  $d_{II}$  et  $d_{III}$ 
17   | fin
18 fin

```

Il introduit la notion de vitesse d'endommagement, donc la dépendance de la loi comportement à la vitesse du chargement. Le calcul de la vitesse d'endommagement se fait en utilisant la valeur de l'endommagement au pas de chargement précédent (d_{t-1}).

$$\dot{d} = \frac{d_t - d_{t-1}}{\Delta T} \quad (5.25)$$

Ensuite, la loi de l'effet retard (2.56) devient :

$$\frac{d_t - d_{t-1}}{\Delta T} = \frac{1}{\tau_c} \left(1 - e^{(-a(w-d_t)_+)} \right) \quad (5.26)$$

Cette équation non linéaire en d_t est ensuite résolue par la méthode de Newton.

Il est important de remarquer que pendant la résolution de l'équation précédente aucune borne n'est appliquée à la variable d_t . Ceci permet d'assurer la convergence de la méthode de Newton. La vérification des valeurs d'endommagement ($\dot{d} > 0$ et $d_t \leq 1$) se fait ultérieurement.

Dans le code de calcul, chaque phénomène a son propre jeu de paramètre pour l'effet retard, permettant de contrôler l'influence de l'effet retard sur chaque phénomène de manière indépendante. En général, pour simplifier l'utilisation, nous fixons toutes les paramètres à la même valeur ($\tau_c = \tau_c^{d_f} = \tau_c^d = \tau_c^0$ et $a = a^{d_f} = a^d = a^0$).

§ 4 Bilan

Le méso-modèle avec des lois élémentaires pour chaque phénomène apporte une grande souplesse au moment de la mise en œuvre. Nous avons profité de cette séparation des phénomènes pour la mise en œuvre. Chaque loi élémentaire est traitée dans un morceau de code indépendant, et ensuite une routine globale permet de les imbriquer de manière cohérente pour une résolution robuste.

Ceci permet d'intégrer une à une les lois élémentaires et ainsi de tester leurs comportements de manière indépendante. De plus, il est possible d'activer et désactiver les lois élémentaires permettant une compréhension approfondie de l'impact que chacune a sur le comportement global d'une structure.

Chapitre 6

Mise en œuvre : méthodes de résolution

Par la suite, l'implémentation de la méthode de résolution sera exposée. La mise en œuvre de la méthode NKS pour un calcul éléments finis de grande taille en parallèle sera présentée. En même temps, on présentera les différentes modifications apportées pour adapter la méthode à la résolution du problème de référence.

Sommaire

1	Résolution d'un problème linéaire	96
1.1	Traitement des conditions de bords	96
2	Résolution d'un problème non linéaire	99
2.1	Le contact	100
3	Non linéaire en décomposition de domaine	101
3.1	Solveur linéaire	102
3.1.1	Projection	102
3.1.2	Préconditionnement	105
3.2	Solveur non linéaire	105
3.3	Localisation non linéaire	107
4	Bilan	109

Mise en œuvre : méthodes de résolution

Dans le cadre des éléments finis, le problème de référence est discrétisé, aboutissant à un système d'équations non linéaire. Dans notre cas, le système est résolu de manière itérative par un algorithme de Newton-Raphson. La méthode a donc besoin du résidu du système d'équations non linéaires, et d'un opérateur pour chercher une correction à la solution.

Par conséquent, plusieurs systèmes linéaires doivent être résolus. Ces problèmes linéaires, trop grands pour être résolus sur un seul ordinateur, sont traités par une méthode de décomposition de domaine.

La méthode de décomposition de domaine nous permet de distribuer les calculs sur plusieurs ordinateurs pour une résolution en parallèle.

En première instance, la résolution d'un problème linéaire sera exposée. L'extension aux problèmes non linéaires sera ensuite introduite, puis l'implémentation de la méthode de décomposition de domaine sera exposée.

§ 1 Résolution d'un problème linéaire

La résolution d'un problème linéaire (de taille réduite) ne pose aucun problème significatif, mais la manière de le traiter ainsi que sa mise en œuvre peuvent avoir un impact non négligeable sur l'efficacité de l'algorithme de résolution. Ici, le terme efficacité est utilisé pour évaluer le rendement du code de calcul, cela veut dire la relation entre la taille du problème et le temps (et la mémoire) nécessaire pour sa résolution.

1.1 Traitement des conditions de bords

Le calcul du second membre (vecteur de forces généralisées) permet la prise en compte des conditions de bords en effort ainsi que des forces volumiques.

Imposer le déplacement sur un degré de liberté donné signifie que le déplacement sur ce degré de liberté n'est plus une inconnue. Les conditions de bord en déplacement peuvent être imposées, essentiellement, par trois techniques différentes.

La première technique consiste à éliminer l'équation reliée à ce degré de liberté. Le système à résoudre porte alors sur un sous-ensemble d'équations. La solution finale est alors reconstruite à partir de la valeur imposée sur le degré de liberté et la solution donnée par la résolution du système. Cette technique permet de vérifier exactement les conditions en déplacement, mais entraîne un changement de la taille du système à résoudre. La modification du système ne pose aucun problème théorique, mais elle ajoute des difficultés supplémentaires au moment de l'implémentation des algorithmes de résolution. Dans le cas de l'introduction d'un modèle de contact unilatéral (avec un solide rigide par exemple), des conditions de type Dirichlet sont introduites. Cela se traduit par un changement de la taille du problème à résoudre à chaque itération de l'algorithme de résolution, donc de manipulations matricielles et de réallocations de mémoire récurrentes. Ces modifications peuvent être très lourdes numériquement.

Une deuxième technique consiste à utiliser des multiplicateurs de Lagrange. L'utili-

Résolution d'un problème linéaire

sation des multiplicateurs de Lagrange permet l'introduction de contraintes directement dans la formulation variationnelle du problème. La nouvelle fonctionnelle $\bar{\Pi}(u, \lambda)$ est construite à partir de la fonctionnelle originale $\Pi(u)$ du problème d'origine et la contrainte $E(u) = 0$ sur Γ :

$$\bar{\Pi}(u, \lambda) = \Pi(u) + \int_{\Gamma} \lambda^T E(u) d\Gamma \quad (6.1)$$

Le multiplicateur de Lagrange λ est une inconnue supplémentaire. Cette technique apporte une grande souplesse à l'écriture des contraintes, permettant d'exprimer des contraintes qui sont difficiles à appliquer avec une méthode d'élimination directe (par exemple, déplacement moyen nul sur une face). La discrétisation du problème variationnel modifié mène à un système de taille supérieure. Chaque condition en déplacement ajoute un degré de liberté supplémentaire au système final. Le premier point désavantageux est que la matrice modifiée n'est plus définie. Cela se traduit par l'incapacité d'utiliser certains types de solveur linéaires (décomposition LU, décomposition Cholesky...). Le deuxième point consiste au changement de taille de la matrice et à la modification de la largeur de bande. L'utilisation d'un double multiplicateur de Lagrange permet de garder les propriétés de la matrice, mais en revanche on introduit deux degrés de liberté supplémentaire par contrainte en déplacement.

La troisième technique consiste à appliquer les conditions de bord par pénalisation. Cette technique permet aussi d'imposer des contraintes en déplacement directement dans la formulation variationnelle. Cependant, le système à résoudre reste de la même taille que le problème d'origine. La nouvelle fonctionnelle $\bar{\bar{\Pi}}(u)$ est définie comme suit :

$$\bar{\bar{\Pi}}(u) = \Pi(u) + \alpha \int_{\Gamma} E(u)^T E(u) d\Gamma \quad (6.2)$$

Par contre, les contraintes ne sont vérifiées que de manière approchée. La valeur de α dans l'équation 6.2 permet de pondérer la contribution du terme de pénalisation à la nouvelle fonctionnelle. Un point important est que la pénalisation apporte la même souplesse que les multiplicateurs de Lagrange. En pratique, elle consiste à venir perturber, avec des termes lourds, l'opérateur et le second membre. Plus les termes de pénalisation sont grands (α grand), mieux les contraintes imposées seront vérifiées. Les termes de pénalisation sont normalement supérieurs au maximum des termes de la diagonale de la matrice de plusieurs ordres de grandeur (10^5). Ceci permet d'assurer la bonne vérification des conditions de bord. Cependant, le conditionnement de l'opérateur est modifié. Une pénalisation excessive peut dégrader considérablement les propriétés du système à résoudre. Cela peut se traduire par la perte de la robustesse de l'algorithme de résolution.

Les trois techniques pour le traitement de conditions de bords présentées précédemment, l'élimination directe, multiplicateur de Lagrange et pénalisation, permettent d'imposer des conditions limites en déplacement. La méthode de pénalisation a été choisie principalement à cause de sa souplesse et sa simplicité d'implémentation.

Mise en œuvre : méthodes de résolution

La figure 6.2 montre, pour le cas d'une barre en traction avec un comportement élastique linéaire (figure 6.1), l'erreur commise (en millimètres) pour un déplacement imposé de 1 mm.

La pondération de α par le terme le plus grand de la diagonale de l'opérateur tangent fait les résultats indépendants des propriétés matériaux.

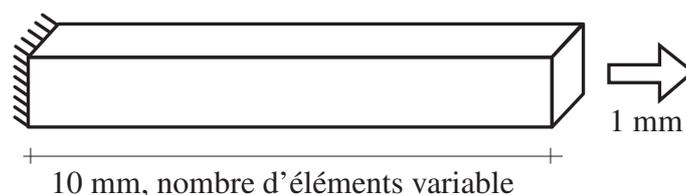


FIG. 6.1: Barre en traction

Au fur et à mesure que le maillage est raffiné, les termes diagonaux de la matrice deviennent de plus en plus grands. L'augmentation de la valeur des termes diagonaux par rapport à la rigidité de la structure, se traduit par une meilleure vérification des conditions limites en déplacement. En pratique, un coefficient de pénalisation de 10^5 est suffisant pour assurer la convergence de conditions limites en déplacement, sans perturber considérablement le conditionnement de l'opérateur.

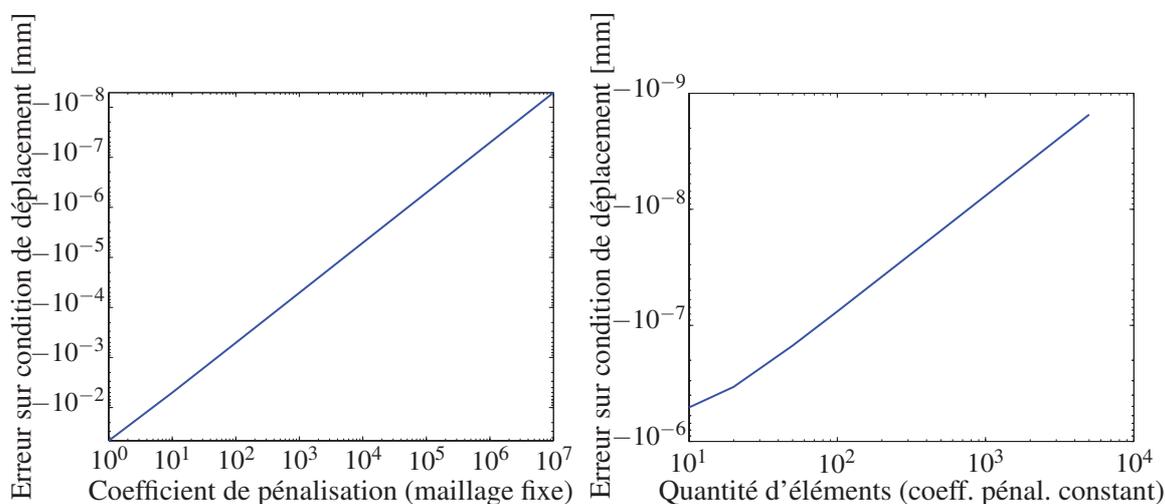


FIG. 6.2: Erreur commise sur la solution en fonction du coefficient de pénalisation et la quantité d'éléments

L'utilisation de la méthode de pénalisation permet ainsi de réutiliser les informations intermédiaires de certains solveurs linéaires. En effet, la non-modification du remplissage de la matrice (termes non nuls) permet, par exemple, la réutilisation de la factorisation symbolique du solveur LU.

§ 2 Résolution d'un problème non linéaire

La résolution d'un problème non linéaire par la méthode de Newton-Raphson passe par le calcul du résidu du système d'équations, ainsi que la résolution une suite de problèmes linéaires.

Le calcul du résidu consiste à l'évaluation de la non-vérification du système d'équations (équation 6.3).

$$\text{résidu} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} dx - \int_{\Omega} f dx - \int_{\delta\Omega} g dx + \alpha \int_{\Gamma} E(u) d\Gamma \quad (6.3)$$

Cette intégrale doit être évaluée à chaque itération de la méthode de Newton-Raphson. Elle permet de définir un critère de sortie du processus itératif.

Mais la définition d'un critère de sortie n'est pas toujours évidente. En général, on cherche à corriger la solution jusqu'à ce que la variation de l'énergie du système soit inférieure à une valeur prédéfinie. Cependant, l'utilisation de la pénalisation pour imposer les conditions limites en déplacement modifie la fonctionnelle, donc l'énergie apparente du système. Ainsi l'énergie du système dépend de la valeur du déplacement imposé et du coefficient de pénalisation.

L'élimination de l'influence du terme de pénalisation dans le critère de sortie est donc nécessaire. L'équation 6.4 montre le critère de sortie utilisé pendant les calculs.

$$C_{\text{sortie}} = \frac{\|\text{résidu du système}\|}{\|\text{énergie mécanique}\|} = \frac{\|\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} dx - \int_{\Omega} f dx - \int_{\delta\Omega} g dx + \alpha \int_{\Gamma} E(u) d\Gamma\|}{\|\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} dx - \int_{\Omega} f dx - \int_{\delta\Omega} g dx\|} \quad (6.4)$$

Cette équation permet de mesurer la convergence de l'algorithme itératif d'une manière robuste. La seule exception est dans le cas où u est nul, c'est-à-dire à la première itération du premier pas de chargement. Dans ce cas, on force l'algorithme à ne pas sortir de la boucle itérative.

En plus dans **COFFEE** d'autres définitions du critère de sortie sont présentes. Elles permettent de forcer un certain comportement du code pour une situation particulière (par exemple, forcer 10 itérations par pas de chargement). Ceci est utilisé principalement pendant le débogage du code.

Enfin, si le résidu du système est trop important une correction de la solution s'impose (équation 3.31). Or la factorisation de l'opérateur tangent est une opération très coûteuse. La réutilisation de la factorisation pendant plusieurs itérations nous permet d'économiser du temps de calcul, mais on perd aussi la convergence quadratique de la méthode. Dans notre cas, une réactualisation de la factorisation de l'opérateur toutes les 10 itérations a démontré être un bon compromis entre le coût de calcul de la factorisation et la perte de convergence de la méthode. Ce choix se justifie par l'hypothèse que l'opérateur tangent varie peu entre chaque itération.

Malheureusement, cette stratégie ne peut pas être appliquée systématiquement. Dans le cas où du contact est présent, l'opérateur tangent peut varier considérablement d'une itération à l'autre. Alors une factorisation à chaque itération s'impose.

Une autre solution est d'utiliser un solveur linéaire sans factorisation, par exemple un gradient conjugué. Ceci permet de se passer d'une factorisation à chaque itération.

Dans **COFFEE** plusieurs solveurs linéaires sont disponibles (gradient conjugué, factorisation LU, factorisation de Cholesky). Ainsi l'utilisateur peut choisir le solveur le plus adapté en fonction du type de problème.

2.1 Le contact

Un essai très utilisé pour la caractérisation de l'absorption d'énergie d'une structure composite est l'essai d'indentation. Il permet de mesurer l'énergie absorbée par le matériau sous un impact de faible vitesse (par exemple la chute d'un outil sur l'aile d'un avion).

L'essai est composé par un cadre rigide et un poinçon sphérique en acier (appelé indenteur), et entre les deux se situe une plaque en matériau composite (voir figure 6.3). La courbe force vs déplacement va permettre, par post-traitement, de calculer l'énergie dissipée par la structure. Une caractéristique importante de cet essai est la présence du contact unilatéral entre l'indenteur et le matériau.

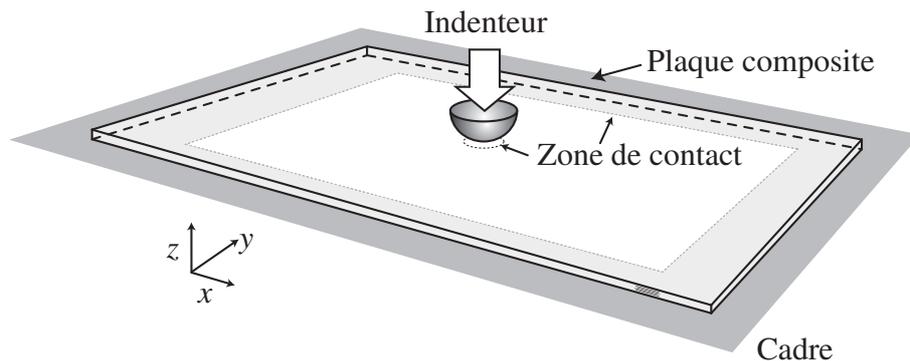


FIG. 6.3: Indentation sur plaque composite

Pour pouvoir simuler correctement cet essai, un modèle de contact unilatéral a été implanté dans **COFFEE**. Le rapport de rigidité entre l'indenteur et la structure composite justifie le choix de modélisation du contact de type solide/rigide. Le frottement entre l'indenteur et la plaque n'est pas pris en compte dans le modèle de contact. L'indenteur est donc modélisé comme une sphère rigide et sa frontière est définie de manière implicite par la position du centre et son rayon.

Au cours d'une simulation, les nœuds présents dans la zone potentiellement en contact (définie préalablement) sont testés pour déterminer si leurs positions sont à l'intérieur de la sphère. Dans le cas où un nœud se trouve à l'intérieur, une contrainte en déplacement est ajoutée au système. Cette contrainte force le déplacement du nœud concerné à rester sur le plan tangentiel à la sphère (figure 6.4). La définition d'une zone potentielle de contact par l'utilisateur permet de restreindre les nœuds à vérifier pendant la simulation et donc d'alléger considérablement le coût associé.

Non linéaire en décomposition de domaine

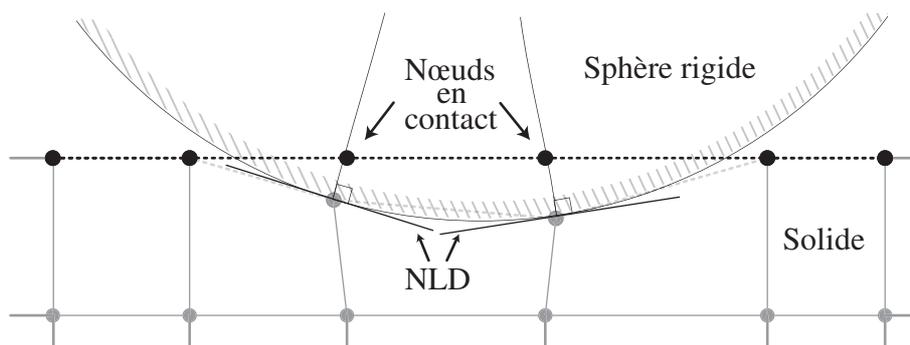


FIG. 6.4: Surface du composite sous l'influence d'un indenteur sphérique rigide (NLD : nouvelles conditions en déplacement)

Aux itérations postérieures, les conditions imposées aux nœuds sont actualisées en fonction de l'effort de réaction.

Il est important de remarquer que la programmation (orienté objet) a été faite de manière à permettre l'ajout de nouvelles formes rigides pour le contact. Par exemple, un cylindre rigide pour la simulation d'un essai de flexion avec des appuis cylindriques.

Le caractère fortement non linéaire du contact empêche la réutilisation de l'opérateur tangent dans les itérations de la boucle de Newton-Raphson. En plus, nous avons observé que le modèle de contact unilatéral et le modèle de fermeture de fissures (pour l'interface ainsi que pour le pli élémentaire) peuvent avoir un comportement couplé assez particulier et impossible à prédire. Ceci peut s'expliquer par l'activation et la désactivation alternées des modèles de contact et de fermeture des fissures (première itération : contact activé, fermeture fissure désactivée ; deuxième itération : contact désactivé, fermeture fissure activée), empêchant toute convergence de la méthode. Ce comportement peut dégrader considérablement la convergence de la méthode de Newton-Raphson, au point ne pas pouvoir atteindre la convergence. Une manière de pallier à ce problème est d'actualiser la nouvelle approximation de la solution de la manière suivante :

$$u_{i+1} = u_i + \alpha_{\text{relax}} \Delta u_{i+1} \quad (6.5)$$

Le facteur de relaxation α_{relax} est compris entre 0 et 1. Ceci dégrade la convergence quadratique du Newton-Raphson, mais augmente le rayon de convergence (permettant surtout de sortir des boucles d'itérations alternées).

La valeur de α_{relax} est calculée automatiquement en fonction des itérations. Dans le cas où la quantité d'itérations maximale est atteinte, le facteur de relaxation est fixé à 0,5, et le nombre d'itérations maximal est multiplié par deux. Ce processus continue cinq fois au maximum, générant un facteur de relaxation égal à $1/5 = 0,2$ pour un nombre maximal d'itérations égal à cinq fois le nombre initial.

§ 3 Non linéaire en décomposition de domaine

Mise en œuvre : méthodes de résolution

La taille des problèmes à résoudre peut nous empêcher de le résoudre dans un seul ordinateur. Ceci peut être dû principalement à deux raisons. Soit la taille du système linéarisé est trop importante, un ordinateur ne possède pas assez de mémoire pour stocker toutes les données du problème (maillages, champs, opérateurs). Soit le temps de résolution est trop important, et cela à cause de la taille du problème linéaire, ou à cause de la quantité de pas de chargement à calculer.

Dans les deux cas, une résolution en parallèle permet de distribuer le problème sur plusieurs ordinateurs et ainsi de diminuer le temps de calcul et de distribuer l'information à stocker.

Dans la phase de pré-traitement du problème, le maillage a été partitionné en utilisant l'algorithme proposé, qui assure une répartition des éléments en accord avec le mésomodèle (voir partitionnement, page 72). Ceci permet d'assurer que l'intégration de la loi d'évolution se fera sous-domaine par sous-domaine et d'assurer un *speed up* proche de l'idéal pour la boucle d'intégration.

Pour la résolution des problèmes linéaires en parallèle à l'intérieur du Newton-Raphson la méthode BDD (de l'anglais *balancing domain decomposition*) a été choisie. Les différents facteurs pris en compte dans le choix de la méthode sont :

- L'efficacité de la méthode.
- La robustesse et la souplesse en matière de préconditionneur et projecteurs.
- La maîtrise de la méthode par la communauté scientifique.

3.1 Solveur linéaire

L'algorithme 3.1 (page 54) montre les différentes étapes d'un calcul avec la méthode BDD. Au cours d'une résolution (en parallèle) des transferts d'information entre les différents sous-domaines sont nécessaires. L'algorithme 6.1 montre les mêmes étapes, mais avec les étapes de transfert. Les variables barrées ($\bar{\cdot}$) portent sur les mêmes quantités, mais ils ont des valeurs différentes dans chaque sous-domaine. On peut constater qu'à chaque itération, on a besoin de faire deux opérations de réduction. Ceci consiste à faire la somme d'un terme sur tous les sous-domaines, et ensuite à redistribuer le résultat (transfert type tous-vers-tous). En même temps, deux opérations de transfert de quantité d'interfaces entre sous-domaines voisins (transfert un-vers-un) sont nécessaires (ligne 11 et ligne 18), ainsi que l'étape d'assemblage du projecteur, qui se traduit par un transfert du type tous-vers-tous de la taille de l'interface.

Il est clair que la quantité de données à transférer est en relation directe avec la quantité de sous-domaines et la mesure de la taille de l'interface. Le coût d'une opération de réduction est lié à la quantité totale de sous-domaines. Par contre, le coût d'une opération de transfert est lié à la mesure de l'interface (nombre de nœuds appartenant à plus d'un sous-domaine).

3.1.1 Projection

Dans l'algorithme 6.1, la matrice C représente le sous-espace \mathcal{C} formé par les mouvements de corps rigide des sous-domaines. Cette matrice est généralement construite à

Non linéaire en décomposition de domaine

Algorithme 6.1 : Algorithme du gradient conjugué préconditionné projeté

```

1  $P = I - C (C^T S_p C)^{-1} C^T S_p$  ; // Projecteur
2  $u_0 = C (C^T S_p C)^{-1} C^T b_p + P u_{00}$  ; // Initialisation
3  $\bar{r}_0 = b_p - S_p^{(s)} u_0$  ; // Calcul du résidu condensé
4 Envoi de  $\bar{r}_0^{\text{bord}}$ , réception de  $\bar{r}_0^{\text{bord}}$  extérieur
5  $r_0 = \bar{r}_0 + \bar{r}_0^{\text{bord}}$  extérieur
6  $z_0 = P \tilde{S}_p^{-1} r_0$  ; // Préconditionnement et projection
7  $w_0 = z_0$ 
8 pour  $i = 0, 1 \dots$  faire
9    $\bar{p}_i = S_p^{(s)} r_i$ 
10  Envoi de  $\bar{p}_i^{\text{bord}}$ , réception de  $\bar{p}_i^{\text{bord}}$  extérieur
11   $p_i = \bar{p}_i^{\text{bord}} + \bar{p}_i^{\text{bord}}$  extérieur
12   $\bar{\gamma}_i = (r_i, z_i)$ 
13  Réduction de  $\bar{\gamma}_i$ 
14   $\bar{\beta}_i = (p_i, w_i)$ 
15  Réduction de  $\bar{\beta}_i$ 
16   $u_{i+1} = u_i + (\gamma_i / \beta_i) w_i$ 
17   $r_{i+1} = r_i - (\gamma_i / \beta_i) p_i$ 
18   $z_{i+1} = P \tilde{S}_p^{-1} r_{i+1}$  ; // Préconditionnement et projection
19  pour  $0 \leq j \leq i$  faire
20     $\bar{\delta}_i^j = -(z_{i+1}, p_j)$ 
21    Réduction de  $\bar{\delta}_i^j$ 
22  fin
23   $w_{i+1} = z_{i+1} + \sum_{j=0}^i (\delta_i^j / \beta_j)$  ; // Orthogonalisation
24 fin

```

partir des noyaux des opérateurs $S_d^{(s)}$. L'extraction des noyaux peut se faire avec différentes techniques. En général, cela consiste à faire une factorisation de l'opérateur avec une détection de pivot nulle (à une tolérance près). Dans notre cas, la loi d'endommagement rend les éléments endommagés de moins en moins rigides par rapport aux éléments « sains ». L'endommagement dégrade le conditionnement des opérateurs, à tel point que les algorithmes de détection ne parviennent plus à capturer le noyau correctement.

Pour illustrer ce problème, la figure 6.5 montre un sous-domaine flottant avec un délaminage partiel. Initialement, le noyau du sous-domaine est composé par les 6 mouvements de corps rigide (3 translations et 3 rotations). Au fur et à mesure que le délaminage avance, le conditionnement de l'opérateur varie. Finalement, le noyau de l'opérateur est modifié et un nouveau mouvement de corps rigide apparaît. Ce mode correspond à la rotation de la partie supérieure par rapport à la partie inférieure (effet charnière). Ensuite, quand seul un nœud relie les deux parties, 2 nouveaux modes de rotation s'ajoutent au noyau (effet

Mise en œuvre : méthodes de résolution

rotule). En dernier lieu quand les deux parties sont complètement déconnectées, le noyau est composé par 12 modes (6 translations et 6 rotations).

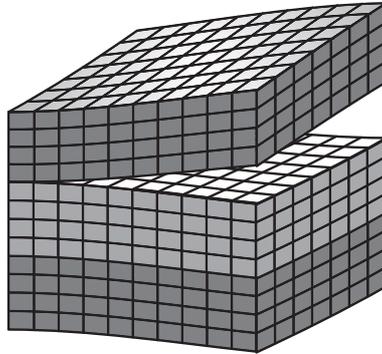


FIG. 6.5: Sous-domaine avec un délaminage partiel

De plus, la détection automatique du noyau à chaque itération est extrêmement coûteuse (régénération de la matrice C , transfert d'information, construction du projecteur).

Pour pouvoir s'affranchir de ce problème, le projecteur est calculé explicitement à partir de la position des nœuds, et une seule fois pour toute la durée du calcul.

Ceci pose un problème dans le cas où les mouvements des sous-domaines sont orthogonaux à C et ont une influence sur l'ensemble de la structure.

Par exemple, la figure 6.6 montre une éprouvette DCB partitionnée. Nous pouvons observer que le déplacement de chaque sous-domaine projeté sur C est presque nul. Pour ce cas, la construction du problème grossier avec C composé seulement par le mouvement de corps rigide géométrique, n'apporte aucune information supplémentaire. Cela veut dire que l'extensibilité de la méthode est complètement dégradée.

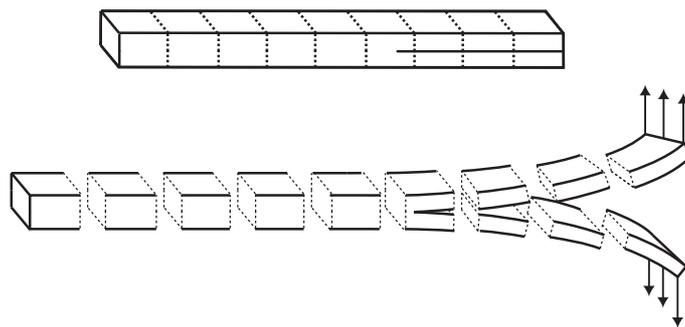


FIG. 6.6: Exemple de partitionnement d'une éprouvette DCB

Une façon de surmonter ce problème serait de partitionner le domaine en prenant en compte le délaminage. Malheureusement, ceci n'est pas possible, à cause du caractère non local de la loi de comportement de l'interface.

Non linéaire en décomposition de domaine

Pour l'instant seul un traitement particulier permettrait de traiter efficacement ce problème (construction de C avec 12 modes par sous-domaine). Par manque de temps, il n'a pas été implémenté dans le code **COFFEE**

3.1.2 Préconditionnement

L'utilisation d'un préconditionneur pour le gradient conjugué est obligatoire pour obtenir un algorithme de résolution efficace. Comme dit précédemment, un préconditionneur efficace \tilde{S}_p^{-1} est un opérateur d'interface capable de donner une bonne approximation de l'inverse de S_p .

Sachant que l'opérateur S_p est la somme de contributions locales, la stratégie la plus classique est donc de définir \tilde{S}_p^{-1} comme la somme pondérée de l'inverse des contributions locales (éq. 3.26). Le calcul de ce préconditionneur fait intervenir les compléments de Schur locaux (S_d). Ceci est obtenu classiquement par le calcul des inverses généralisées sur les compléments primaux (S_p^+).

Malheureusement, le caractère très mal conditionné des opérateurs locaux (à cause de l'endommagement) conduit à une perte de robustesse des algorithmes d'inverse généralisé.

Plusieurs techniques ont été testées afin d'améliorer la robustesse. En s'inspirant de l'idée de préconditionneurs duale de type *lumped* et *superlumped* un nouveau préconditionneur a été conçu. Ceci consiste à venir pondérer les termes hors diagonaux de la matrice par un facteur κ avant le calcul de l'inverse.

$$\tilde{S}_p^{-1} = \sum_s W^{(s)} A^{(s)} (K^{(s)} \kappa + \text{diag}(K^{(s)})(1 - \kappa))^{-1} A^{(s)T} W^{(s)T} \quad (6.6)$$

Si la valeur de κ est égale à 1, on retrouve le préconditionneur classique. La figure 6.7 montre l'influence de κ sur la quantité d'itérations nécessaires pour une résolution d'un problème fortement endommagé. On observe que pour une valeur de κ égal à 10^{-5} la convergence est considérablement améliorée (de l'ordre de 50%). Ceci permet l'amélioration de la robustesse de l'algorithme d'inverse généralisée, sans pour autant altérer la solution finale de l'algorithme itératif. Dans **COFFEE**, κ est fixé par défaut à 10^{-5} . L'utilisateur peut, s'il le veut, choisir d'écraser cette valeur afin de modifier la définition du préconditionneur.

Les différents essais numériques conduits au cours de ces travaux, on permit de constater l'amélioration de la robustesse par rapport à l'algorithme classique.

3.2 Solveur non linéaire

La modification du solveur linéaire en décomposition de domaine permet le traitement de manière robuste de problèmes linéaires très mal conditionnés. Ce solveur est ensuite utilisé à l'intérieur d'un algorithme de Newton-Raphson pour résoudre le problème non linéaire de référence. L'algorithme 6.2 montre les différentes étapes de l'algorithme NKS.

Mise en œuvre : méthodes de résolution

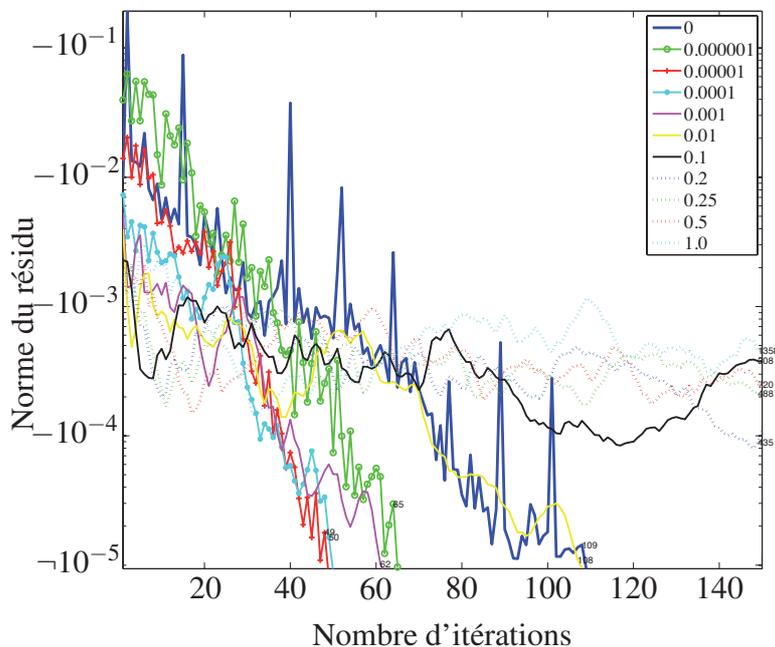


FIG. 6.7: Résidu par itération selon le coefficient de régularisation (κ)

Algorithme 6.2 : Newton-Krylov-Shur

- 1 **tant que** $tolérance_{global} < C_{sortie}$ **faire**
 - 2 -Assemblage des opérateurs locaux tangents $K_T^{(s)}$
 - 3 -Factorisation $K_{Tii}^{(s)}$; (éq. 3.18)
 - 4 -Assemblage des résidus locaux $r^{(s)}$; (éq. 6.3)
 - 5 -Résolution du problème global condensé en parallèle ; (éq. 3.22)
 - 6 -Calcul de la solution intérieure $\Delta u_i^{(s)} = K_{Tii}^{(s)-1} (r_i^{(s)} - K_{Tib}^{(s)} u_b^{(s)})$; (éq. 3.25)
 - 7 -Actualisation des variables internes
 - 8 **fin**
-

Non linéaire en décomposition de domaine

La mise en œuvre de cet algorithme ne pose aucune difficulté particulière. En plus, l'architecture orientée objet du code de calcul a grandement facilité les travaux d'implantation.

3.3 Localisation non linéaire

La mise en œuvre de la relocalisation non linéaire demande la modification des lignes 6 et 7 de l'algorithme 6.2. L'introduction d'une boucle à l'échelle du sous-domaine va permettre d'assurer le comportement et l'équilibre à l'intérieur de chaque sous-domaine. L'algorithme 6.3 montre les différentes étapes.

Algorithme 6.3 : Newton-Krylov-Shur avec relocalisation non linéaire

```

1 tant que  $tolérance_{global} < C_{sortie}$  faire
2   -Assemblage des opérateurs locaux tangents  $K_T^s$ 
3   -Factorisation  $K_{Tii}^s$  ;                               (éq. 3.18)
4   -Assemblage des résidus locaux  $r^s$  ;                 (éq. 6.3)
5   -Résolution du problème global condensé en parallèle ; (éq. 3.22)
6   répéter
7     -Calcul de la solution intérieure  $\Delta u_i^s = K_{Tii}^{s-1} (r_i^s - K_{Tib}^s u_b^s)$  ; (éq. 3.25)
8     -Actualisation de  $u_i$ ,  $K_{Tii}^s$ ,  $K_{Tib}^s$  et du résidu local intérieur ( $r_i^s$ )
9   jusqu'à  $tolérance_{local} < \epsilon_{local}$ 
10 fin

```

L'introduction d'une nouvelle boucle demande la définition d'un critère de sortie supplémentaire. La définition de $tolérance_{local}$ fait intervenir l'équilibre local à l'échelle du sous-domaine avec des conditions de type Dirichlet sur l'interface.

Cresta (2008) a établi sur la base de tests numériques que la valeur optimale du critère de sortie de la boucle intérieure doit être de l'ordre de la racine carrée du critère de convergence global. Cette valeur permet de trouver un bon équilibre entre le nombre d'itérations par sous-domaine et le nombre d'itérations globales.

La figure 6.8 montre une éprouvette composite et la partition utilisée pour le calcul. L'empilement est $[45_4, 90_4, -45_5, 0_4]_s$. La partition finale est composée de 50 sous-domaines et de 300 000 degrés de liberté. La plaque a été soumise à un chargement en traction monotone.

Deux calculs ont été effectués, un avec l'algorithme « classique » et un deuxième avec la relocalisation non linéaire (algorithme 6.3). Le chargement appliqué permet le développement d'une zone d'endommagement autour du trou.

La figure 6.8 montre la quantité d'itérations globales par pas de chargement. Au fur et à mesure que l'endommagement se développe autour du trou, le problème devient de plus en plus non linéaire, et l'algorithme classique nécessite plus d'itération pour trouver une solution. Par contre, l'algorithme avec la relocalisation non linéaire permet à chaque itération de trouver une solution équilibrée au sein des sous-domaines, et ainsi d'accélérer la convergence du problème global.

Mise en œuvre : méthodes de résolution

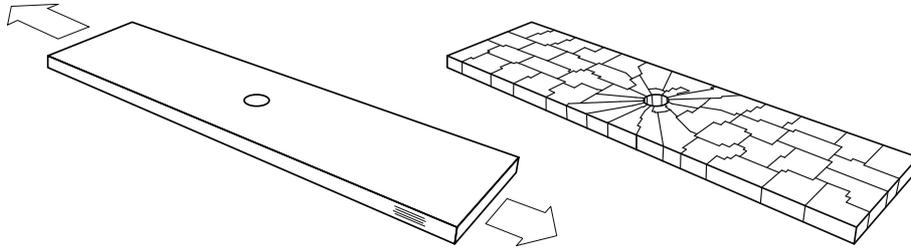


FIG. 6.8: Epreuve et partition utilisée

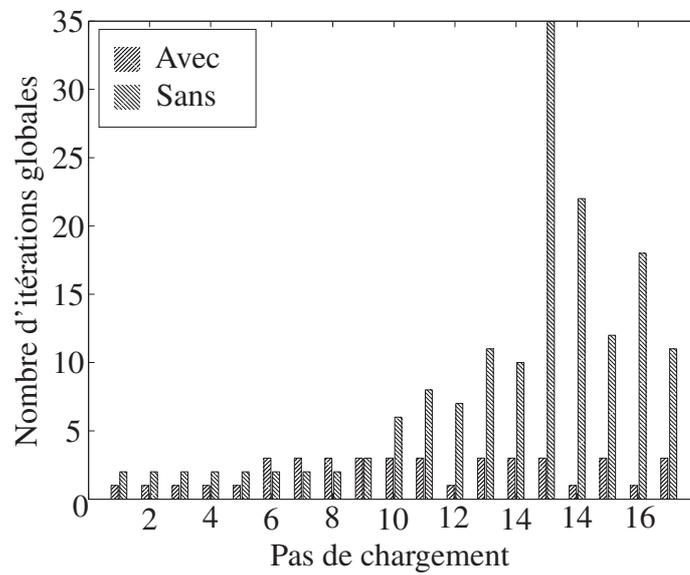


FIG. 6.9: Nombre d'itérations globales par pas de chargement avec/sans relocalisation non linéaire

Bilan

En revanche, cet algorithme est très délicat à utiliser. L'actualisation de la loi de comportement avec un état intermédiaire du calcul peut poser problème. Dans notre cas, le caractère irréversible de la loi de comportement avec son actualisation à partir d'un état de déformation intermédiaire se traduit par la perte d'unicité de la solution. Ceci s'explique par le fait qu'en fonction de la partition du maillage (forme des sous-domaines), les états intermédiaires de déformation pendant l'actualisation de la loi de comportement sont tous différents. Même si cet algorithme peut accélérer considérablement le temps de résolution, seul l'algorithme classique peut assurer la qualité de la solution. C'est pour cela que dans le code de calcul développé, il est possible ou non d'activer la relocalisation non linéaire.

§ 4 Bilan

Le choix d'utiliser la méthode de pénalisation pour imposer les conditions de bord en déplacement a apporté des avantages mais aussi des inconvénients. Premièrement, la pénalisation permet d'imposer les conditions en déplacement très facilement, sans changer la taille du problème et sans difficulté dans l'implantation. Par contre, la fonctionnelle du problème est modifiée, nécessitant la réécriture de tous les critères de sortie.

Le modèle de contact du type solide/rigide sans frottement a été simple à implanter. La pénalisation a allégé la lourde tâche d'activer et de désactiver de conditions de type Dirichlet au cours du processus itératif. En revanche, il faut être conscient que les conditions imposées ne sont pas vérifiées exactement.

L'utilisation de la relaxation pour sortir d'un état pathologique de la boucle itérative a démontré être une stratégie efficace. Surtout quand un calcul tourne sans problèmes pendant plusieurs heures et qu'il tombe dans un état pathologique avec deux solutions qui alternent.

La méthode BDD a dû suivre plusieurs modifications pour être adaptée au problème de référence. À cause du mauvais conditionnement des opérateurs locaux, la définition de l'espace C définissant le problème grossier a dû être modifiée. Il faut remarquer que ces modifications ont dégradé la convergence de la méthode dans des cas très particuliers (cas DCB). La modification du préconditionneur a été obligatoire afin d'obtenir un algorithme robuste.

Même si la relocalisation non linéaire permet dans certains cas d'accélérer la résolution. Son utilisation pour la résolution de problèmes d'évolution à variable internes peut être très délicate, dû surtout à la perte d'unicité de l'algorithme de résolution.

Mise en œuvre : méthodes de résolution

Chapitre 7

Exemples de prévision des dégradations dans les structures composites

Ce chapitre présente différentes simulations tridimensionnelles des dégradations de structures composites stratifiées. Les exemples proposés dans ce chapitre illustrent les possibilités offertes par l'approche à l'échelle mésoscopique.

Sommaire

1	Problème élastique en parallèle	112
2	Réorientation de fibres	114
3	Petit choc	115
4	Traction sur une plaque trouée	117
5	DCB <i>Double Cantilever Beam</i>	121

Exemples de prévision des dégradations dans les structures composites

L'approche proposée dans ce travail nous permet de traiter, en parallèle, une grande variété des problèmes non linéaires. En plus du méso-modèle, trois lois de comportement sont disponibles dans le code : élasticité linéaire isotrope, élasticité linéaire orthotrope et élastoplasticité avec écrouissage isotrope. Ces lois offrent la possibilité d'appliquer des conditions aux limites plus réalistes, par exemple la modélisation des mors métalliques avec un comportement élastique linéaire.

Le logiciel éléments finis développé a été utilisé pour toutes les simulations présentées. Une fois la mise en œuvre numérique effectuée, l'outil de simulation obtenu peut par exemple servir à valider le comportement identifié grâce à des essais sur des structures composites. Plus généralement, il permet la prévision de l'évolution des dégradations et de la rupture de structures stratifiées soumises à des sollicitations complexes. Le logiciel développé doit être vu comme un premier outil opérationnel nécessaire à la mise en pratique des approches de type *virtual testing*.

Les simulations présentées dans la suite représentent un échantillon des problèmes traités au cours de cette étude.

§ 1 Problème élastique en parallèle

Le problème suivant a comme objectif d'illustrer les capacités de **COFFEE** à résoudre un problème linéaire en parallèle. Le problème traité consiste en une structure en « T » (voir figure 7.1) composée par deux matériaux élastiques linéaires avec une différence de rigidité de 1000. La différence de rigidité permet d'évaluer la robustesse du solveur de Krylov à l'intérieur du solveur BDD. La structure est encastree dans une extrémité et un déplacement est imposé dans l'autre extrémité.

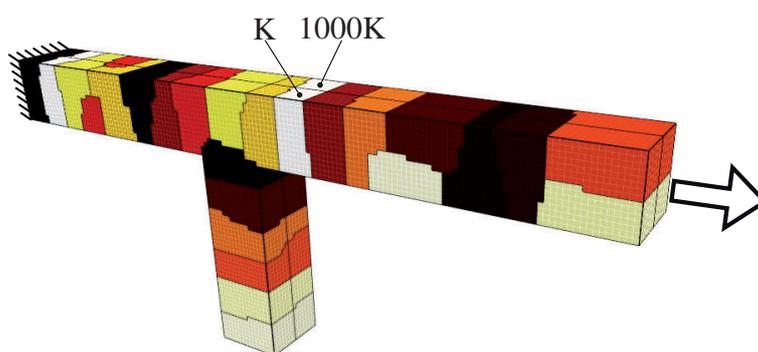


FIG. 7.1: Maillage et sous-domaines

Une fois le maillage partitionné, le problème a été résolu en utilisant la méthode de décomposition de domaine (BDD) présentée précédemment. Le problème est composé de 135 000 degrés de liberté. La figure 7.2 montre le *speed up* mesuré et le temps du calcul en fonction de la quantité de processeurs utilisés pour le calcul.

Comme nous nous y attendions, le *speed up* se dégrade quand la quantité de processeurs utilisés augmente. Ceci est dû seulement au temps nécessaire pour le transfert d'in-

Problème élastique en parallèle

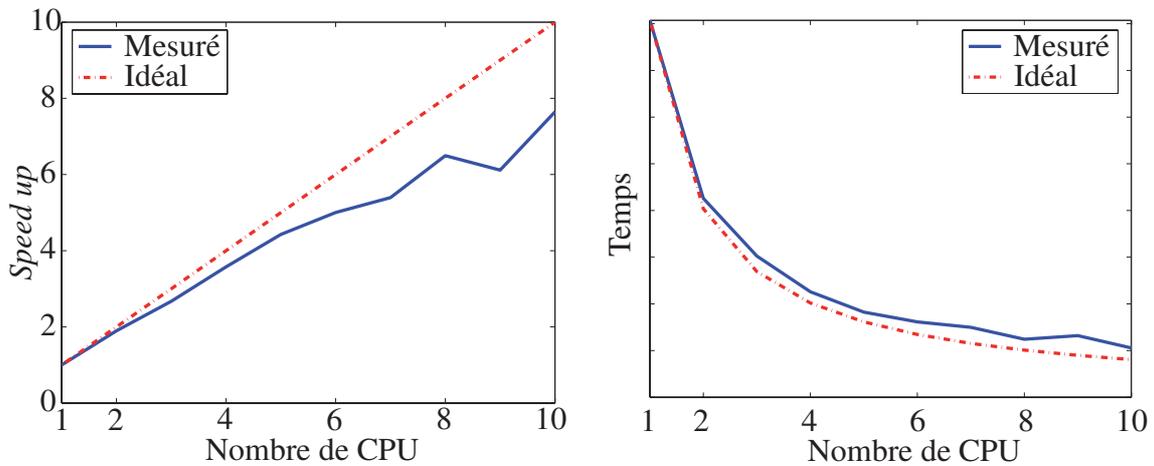


FIG. 7.2: *Speed up* et temps de calcul en fonction du nombre de processeurs

formation entre les processeurs. Dans le cas d'un calcul non linéaire, les sous-domaines plus chargés, donc avec une évolution non linéaire plus importante, demandent plus de temps de calcul. Cela se traduit par un déséquilibre de la charge parmi les processeurs dans la partie du code dédié au calcul de la loi de comportement, en conséquence une dégradation du *speed up* supplémentaire. Ce type de détérioration du *speed up* est très difficile à évaluer. Elle dépend du type de loi comportement, de la partition utilisée, et du chargement.

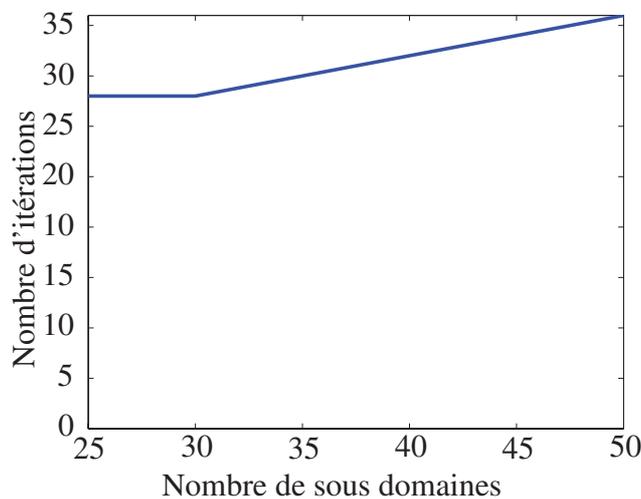


FIG. 7.3: Nombre d'itérations du solveur de Krylov en fonction du nombre de sous domaines

La figure 7.3 montre le nombre d'itérations du solveur de Krylov à l'intérieur de la méthode BDD. Nous pouvons constater que le nombre d'itérations reste stable par rapport au nombre de sous domaines, ce qui confirme l'extensibilité et la mise en œuvre de la méthode de résolution.

§ 2 Réorientation de fibres

Pour illustrer la pertinence du modèle de réorientation des fibres proposé, un essai de traction sur une plaque composite $[\pm 45]_s$ a été étudié. La figure 7.4 montre la géométrie de l'éprouvette et les conditions limites associées. Pour pouvoir analyser plus facilement les résultats, la simulation a été réalisée sans évolution d'endommagement. C'est-à-dire, avec une interface parfaite entre les plis et un endommagement toujours égal à zéro dans les plis.

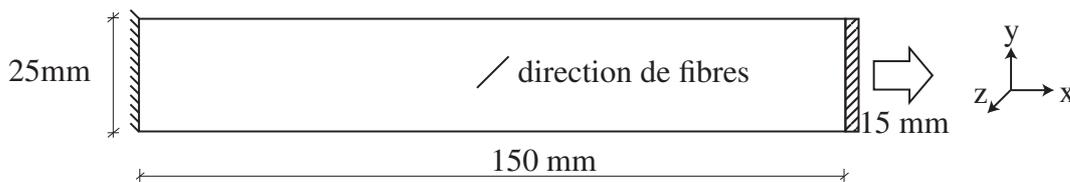


FIG. 7.4: Plaque composite $[\pm 45]_s$

La figure 7.5 montre l'éprouvette déformée et le champ de déformation (ϵ_x) associé. Le problème éléments finis associé est composé de 22 500 degrés de liberté. Le problème a été entièrement calculé sur un seul processeur. Le chargement a été décomposé en 165 pas. Le temps nécessaire pour le calcul d'un pas de chargement a été de 1,5 minute en moyenne. Chaque itération a demandé de 5 itérations en moyenne, 2 pour le premier pas et 6 pour les derniers pas. Les conditions limites en déplacement font que la déformation de l'éprouvette n'est pas homogène, ce qui se traduit par la présence de cisaillement à proximité de l'encastrement.

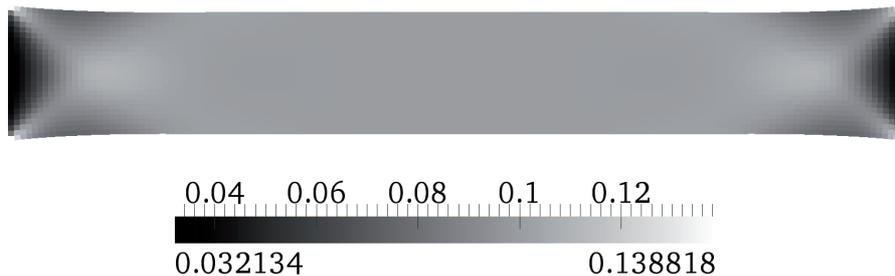


FIG. 7.5: Éprouvette déformée et champs de déformation ϵ_x

Si nous considérons le modèle classique, la réorientation de fibres calculée sera symétrique par rapport à l'axe x . Ceci est dû au fait que le modèle classique prend en compte seulement les composantes ϵ_x et ϵ_y de la déformation. La figure 7.6.b montre la variation d'angle calculée avec le modèle classique. En revanche, le modèle de réorientation de fibre proposé prend en compte toutes les composantes du champ de déformation. La figure 7.6.a illustre la variation d'angle avec le modèle proposé.

Petit choc

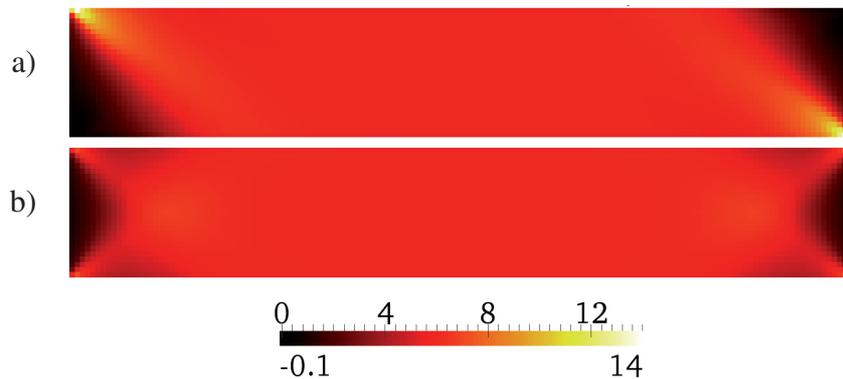


FIG. 7.6: Réorientations de fibres a) modèle proposé, b) modèle classique

Le modèle proposé, équivalent au modèle classique dans la zone à cisaillement nulle, permet une prédiction plus réaliste de la réorientation de fibres dans les zones où le cisaillement n'est pas négligeable.

§ 3 Petit choc

Cette partie présente les résultats d'une simulation d'impact sur plaque composite stratifiée d'empilement $[90/0/45/0_2/-45/0/-45/0_2/45/0/90]$. Le matériau pris en compte dans cet exemple est le composite AS4/PEEK. La plaque stratifiée, de dimensions $100 \times 150 \times 1,82$ mm, est simplement appuyée sur une fenêtre en acier de taille 125×75 mm et soumise à la charge d'un indenteur en acier sphérique de rayon 8 mm (voir figure 7.7). Pour la simulation, l'indenteur ainsi que la fenêtre sont considérés comme indéformables. La présence des plis à ± 45 degrés interdit la définition d'un plan de symétrie, donc une simulation sur l'ensemble de la plaque s'impose. Le déplacement imposé à l'indenteur est de 5 mm.

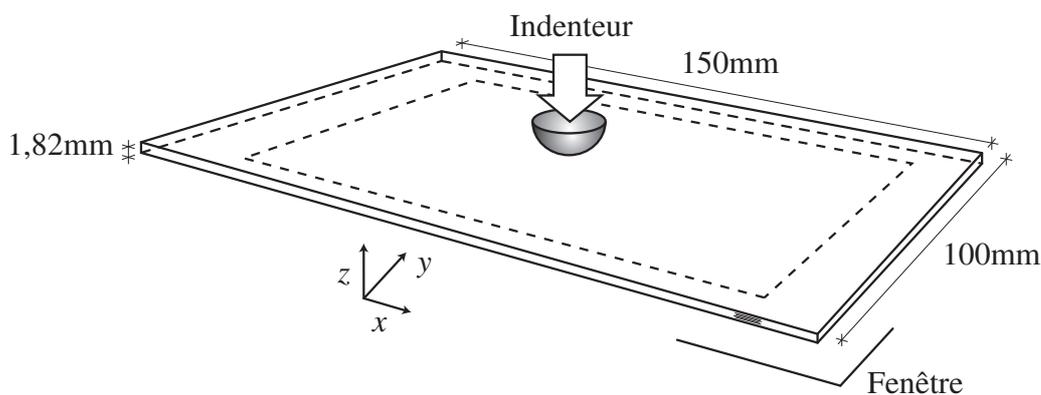


FIG. 7.7: Indentation sur plaque composite

La figure 7.8 montre la discrétisation de la plaque. Le maillage est composé d'envi-

Exemples de prévision des dégradations dans les structures composites

ron 37 168 éléments hexaédriques de degré 1 (voir tableau 4.3). La taille finale du problème éléments finis est d'environ 135 000 degrés des libertés (voir figures 7.8 et 7.9). Le maillage a été partitionné en 61 sous-domaines, et 26 processeurs ont été utilisés pour la simulation en parallèle. Comme l'indenteur est considéré comme solide rigide, il n'est pas nécessaire de le discrétiser et une description implicite est suffisante.

Les résultats générés utilisent 62 Mo par pas de chargement, pour un total de 28,2 Go pour les 450 pas de calcul. Un pas de chargement « peu » non linéaire a besoin de 6 itérations et il est calculé en moins d'une minute. Par contre, un pas fortement non linéaire (par exemple quand la rupture fibre se développe) a besoin de 50 itérations pour atteindre la convergence, pour un temps de calcul de 18 minutes.

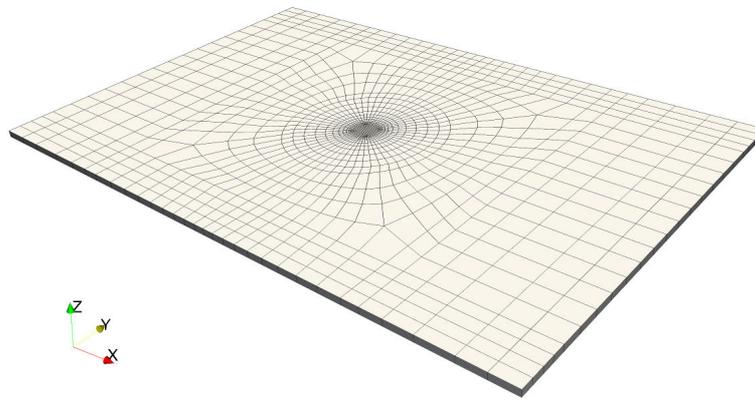


FIG. 7.8: Maillage utilisé pour l'indentation

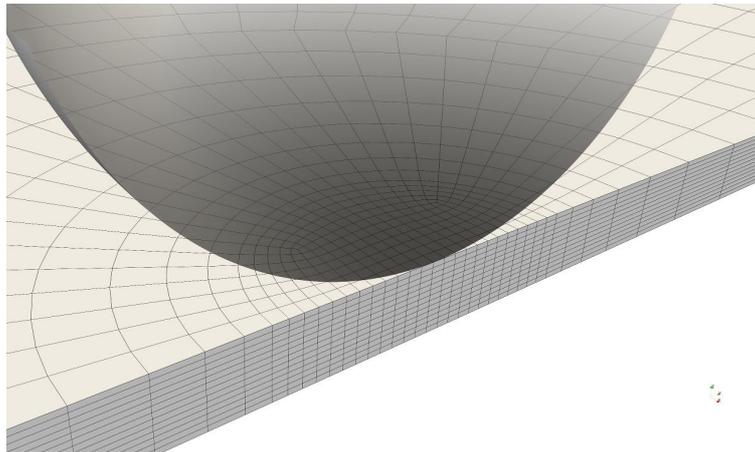


FIG. 7.9: Maillage utilisé pour l'indentation (zoom)

La finesse de la discrétisation permet de prendre en compte le contact sous l'indenteur correctement. Cependant, la présence de plasticité et d'endommagement très localisés sous l'indenteur a été observée dans des simulations précédentes. Pour éviter cette situation peu réaliste, nous avons considéré la première couche de composite comme un

Traction sur une plaque trouée

matériau sans évolution du dommage ni de la plasticité. Au cours d'un essai réalisé par EADS IW (voir figure 7.10) (plus de détails de l'essai dans Abisset (2009)), nous avons observé que la plaque ne s'appuie que sur une partie du bord de la fenêtre (rectangle en pointille figure 7.7), donc nous avons décidé d'appliquer des conditions de déplacement nulles dans la direction z dans cette zone.

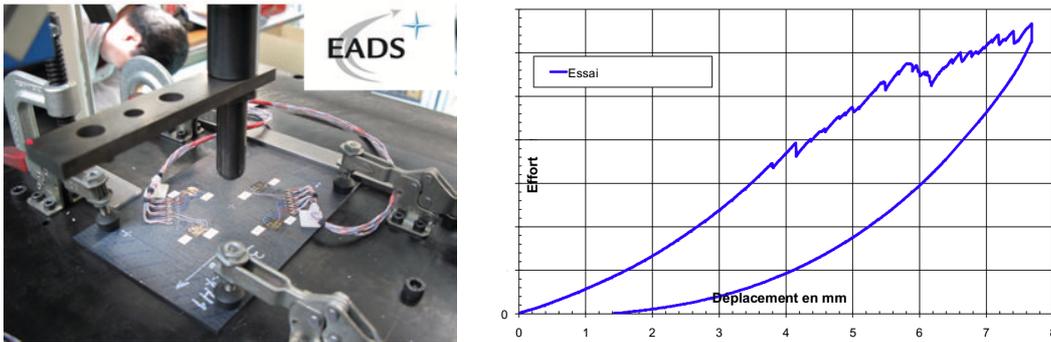


FIG. 7.10: Montage essai indentation (EADS IW) et réponse globale essai

La figure 7.10 montre la courbe force/déplacement de l'essai. Pour des raisons de confidentialité, les valeurs numériques de la force ne sont pas reportées. La simulation de l'essai a permis de mettre en évidence le caractère non linéaire géométrique de l'essai. Pour le moment, le code de calcul travaille sous l'hypothèse de petites perturbations, en conséquence il est incapable de capturer le caractère non linéaire observé du début de l'essai. Seule une analyse qualitative de l'essai et des phénomènes de dégradation est donc possible.

L'amorçage et l'évolution des mécanismes de dégradation dans la plaque composite ont suivi le même ordre décrit dans le chapitre 1. La figure 7.11 montre l'état d'endommagement sous la zone de contact, au moment de l'apparition de la fissuration transverse ($\bar{d}_{12}, \bar{d}_{22}, \bar{d}_{23}$). Seuls les éléments endommagés sont visibles.

La figure 7.12 montre l'endommagement dans la zone de contact, à la fin de la simulation. On observe la rupture de fibre dans les plis inférieur et supérieur (observée également dans l'essai).

Bien que le code de calcul soit incapable de traiter un problème en grandes rotations, la prévision des mécanismes de dégradation semble être en accord avec l'expérience.

§ 4 Traction sur une plaque trouée

Ici, nous présentons le résultat de la simulation d'une plaque composite avec un empilement de $[45_4, 90_4, -45_4, 0_4, 45_4, 90_4, -45_4, 0_4]$ soumis à un chargement en traction. La figure 7.13 montre les dimensions de l'éprouvette. Le déplacement imposé est de 0,6mm, ce qui est équivalent à une déformation homogène de 0,63%. Les propriétés matériaux ainsi que des simulations équivalentes (effectués avec le même code de calcul) peuvent être trouvées dans Abisset et al. (2011).

Exemples de prévision des dégradations dans les structures composites

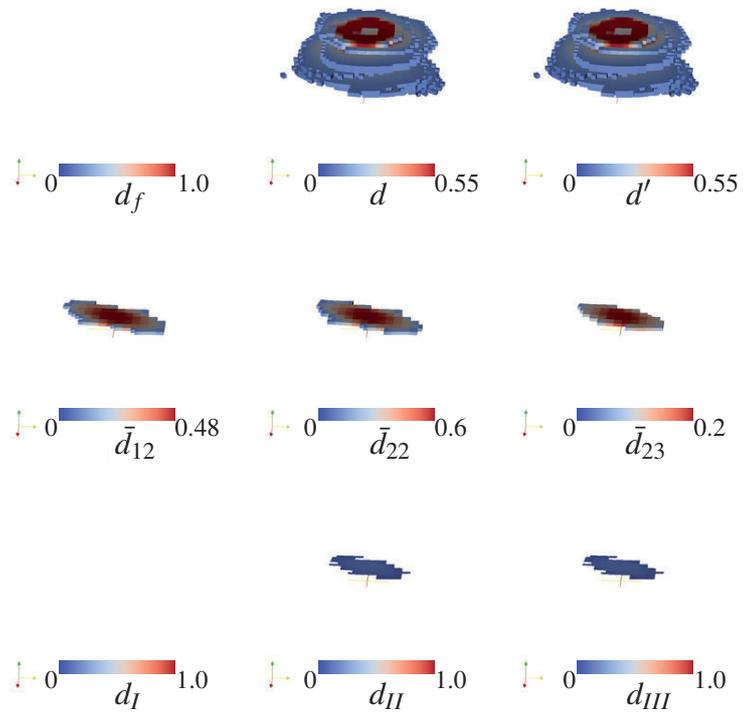


FIG. 7.11: Endommagement sous la zone de contact (armoçage de la fissuration)

Traction sur une plaque trouée

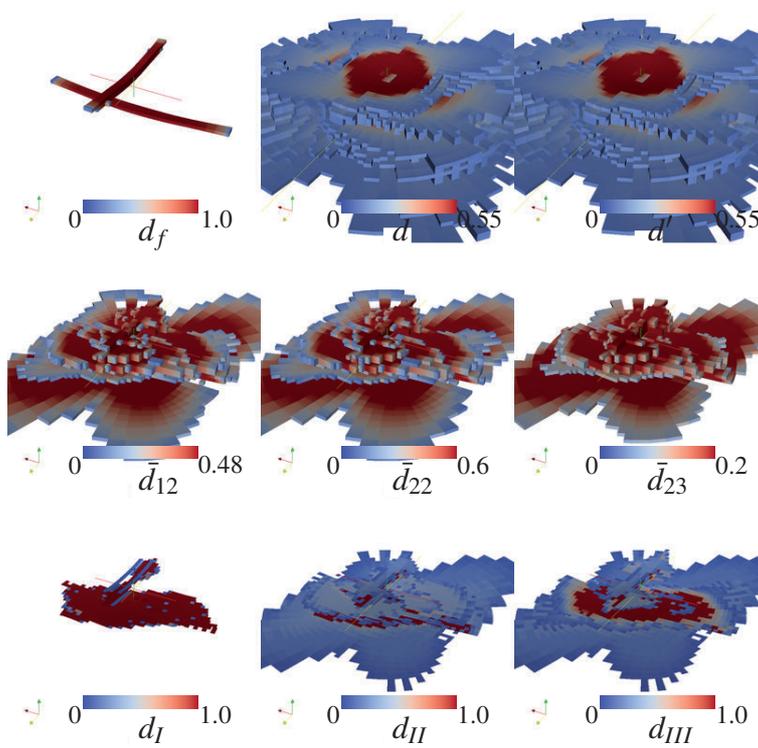


FIG. 7.12: Endommagement sous la zone de contact (rupture fibre)

Exemples de prévision des dégradations dans les structures composites

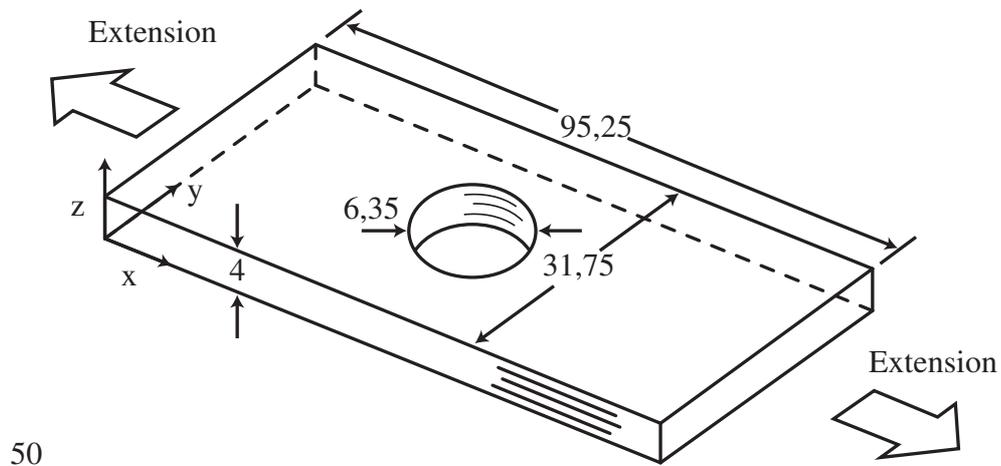


FIG. 7.13: Plaque trouée en traction

La figure 7.14 montre le maillage utilisé. Composé de 230 000 éléments hexaédriques linéaires et 250 000 nœuds approximativement, il représente un problème à 750 000 ddl. Les plis sont discrétisés avec deux éléments dans l'épaisseur. Le chargement a été divisé en deux parties. Une première partie divisée en 60 pas de chargements et un déplacement de 0,286 mm. Dans cette partie de la simulation, seul l'endommagement diffus est présent pour les plis, et l'endommagement pour l'interface est assez réduit. Ceci permet d'utiliser des pas de chargements relativement grands et ainsi réduire le temps de calcul. Et une deuxième partie composée de 300 pas, qui complète le chargement jusqu'à un déplacement imposé de 0,6 mm.

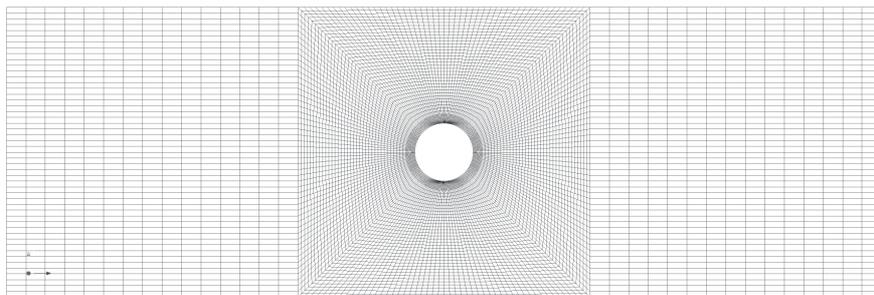


FIG. 7.14: Maillage utilisé pour la simulation

La figure 7.15 montre une vue en coupe de l'endommagement autour du trou. Nous pouvons constater la distribution caractéristique du délaminage en forme d'hélice.

DCB Double Cantilever Beam

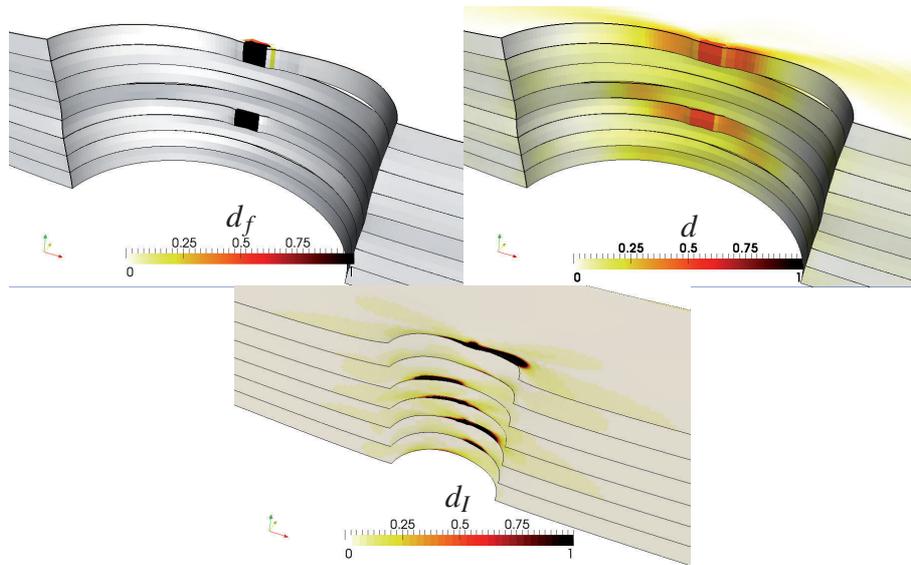


FIG. 7.15: Endommagement dans la zone du trou (déplacement imposé : 0,52mm)

§ 5 DCB Double Cantilever Beam

Les éprouvettes DCB sont communément utilisées pour la caractérisation de l'interface entre deux plis. La simulation d'un essai DCB demande quelques précautions particulières. En premier lieu, la discrétisation en front de fissure doit être suffisamment fine pour pouvoir capturer correctement le champ de contrainte. Une discrétisation insuffisante mène à une solution oscillante en pointe de fissure incompatible avec une évolution de l'endommagement (Barranger, 2005). Les dimensions de l'éprouvette utilisée sont ; $a = 20 \text{ mm}$; $B = 20 \text{ mm}$; $l = 200 \text{ mm}$; $h = 2 \text{ mm}$ (voir figure 7.16).

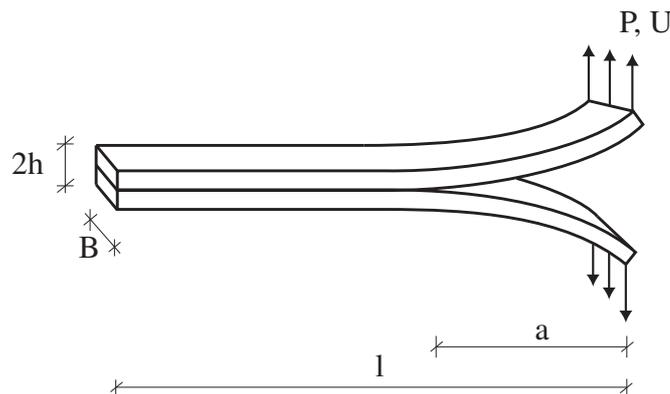


FIG. 7.16: Essai DCB (Double Cantilever Beam)

Nous nous intéressons à la comparaison des résultats avec les résultats expérimentaux obtenus par Laksimi et al. (1991). Dans cet article, trois types d'éprouvettes Carbon-Époxyde (T300 Vicotex M10) ont été testés. Pour la simulation, nous avons choisi l'éprou-

Exemples de prévision des dégradations dans les structures composites

vette ($0^\circ/0^\circ$). La discrétisation utilisée permet de capturer toute la richesse du champ de contrainte en point de fissure. Le problème à résoudre est composé de 140 000 degrés des libertés approximativement. Le chargement a été découpé en 400 pas de chargement. Le temps nécessaire pour le calcul d'un pas de chargement a été de 5 minutes approximativement. La figure 7.17 montre le champ de contrainte ainsi que la distribution de l'endommagement en point de fissure.

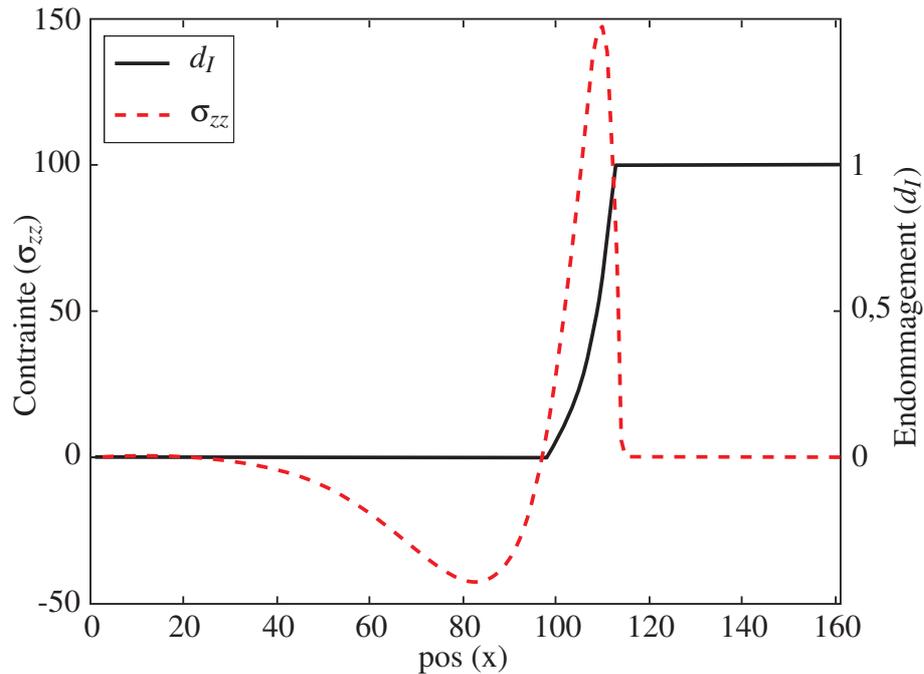


FIG. 7.17: Essai DCB (*Double Cantilever Beam*)

La figure 7.18 montre la réponse simulée de la structure au chargement et les résultats expérimentaux de Laksimi et al. (1991). Pour cette simulation, seule l'interface entre les deux poutres est endommageable, ce qui explique l'écart relatif entre la simulation et l'essai. Ici seul le début de l'essai a été simulé.

DCB Double Cantilever Beam

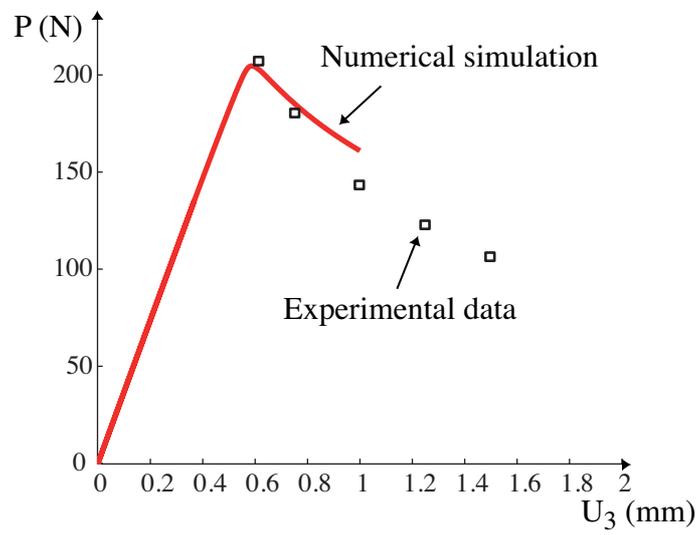


FIG. 7.18: DCB, réponse force/déplacement

Exemples de prévision des dégradations dans les structures composites

Conclusion

Les travaux menés au cours de ces dernières années ont permis la compréhension de la plupart des mécanismes de dégradation au sein d'une structure composite. Les différents modèles disponibles couvrent toutes les échelles de modélisation, de l'échelle de la structure jusqu'à l'échelle de la matière. En matière de modèles, nous pouvons citer les modèles à grande échelle de plaques et de coques, très adaptés aux calculs de non-linéarités géométriques comme le flambage. À échelle du matériau, nous trouvons un vaste nombre de modèles.

Pour l'industrie, le choix d'un modèle ou d'un autre reste toujours une question difficile. Ceci est principalement lié à la complexité des modèles les plus avancés par rapport aux modèles « classiques » (élastique, critère de rupture. . .). Une manière d'approcher les modèles les plus avancés au milieu industriel est à travers la conception de modèles à fort contenu mécanique. C'est-à-dire en utilisant des quantités avec une relation directe entre la simulation et l'expérimental, permettant ainsi le transfert rapide d'information entre les différents acteurs pendant la conception d'un nouveau matériau ou d'une nouvelle pièce mécanique.

Le méso-modèle amélioré d'endommagement des composites stratifiés propose une alternative séduisante pour le remplacement des modèles à critère de rupture. Il est capable de prédire l'évolution des phénomènes de dégradation responsables de la ruine d'une pièce mécanique et fournit des indicateurs de dommage avec un lien direct vis-à-vis de la réalité (par exemple, l'indicateur d'endommagement d'interface, d_I , correspond à l'aire délaminée).

Un deuxième point à examiner est le coût d'utilisation d'un modèle en particulier. Un modèle peut être très adapté pour répondre à une problématique particulière, mais sa mise en œuvre peut s'avérer longue et coûteuse. Et cela, soit parce que les modèles les plus sophistiqués ne sont pas disponibles dans le code de calcul, donc pas accessible aux ingénieurs, soit parce qu'une campagne d'essai sophistiqué est requise pour leur utilisation. L'indisponibilité de certains modèles s'explique par le vaste nombre de modèles disponibles dans la littérature. Un modèle doit démontrer une réelle utilité avant d'être pris en compte par les éditeurs de logiciel. Par ailleurs si un modèle performant a un champ d'application trop restreint, il n'attirera pas l'attention des éditeurs.

Les travaux de cette thèse ont été menés dans l'optique d'améliorer la confiance accordée à ces modèles et proposer des solutions numériques permettant de traiter une structure composite de complexité moyenne. C'est ce que nous avons tenté de réaliser à travers une démarche cohérente permettant d'intégrer les dernières avancées réalisées sur le méso-

Conclusion

modèle au sein d'un environnement de calcul performant dédié au traitement de structures stratifiées composites de taille industrielle. Plus particulièrement, l'objectif de ces travaux de thèse a consisté à améliorer la compréhension du comportement du méso-modèle amélioré pour des composites stratifiés, en développant un outil de calcul capable de résoudre des problèmes de taille représentative.

La première partie a été consacrée à la compréhension approfondie du comportement du méso-modèle dans tous les cas de chargement élémentaires. Ceci a permis de proposer quelques alternatives au modèle existant. Par exemple, l'intégration de l'effet retard pour tous les phénomènes de dégradation permet l'élimination de la réserve de contrainte observée classiquement pour la rupture des fibres. Une autre proposition a été l'introduction du modèle de réorientation des fibres pour la simulation correcte d'éprouvettes en l'absence de fibres dans la direction du chargement. Cette première partie a permis de rassembler tout le savoir-faire acquis autour du méso-modèle de ces dernières années.

Il est important de remarquer que la complexité du modèle est relative. Même si la quantité d'équations et de paramètres semble être grande, il permet de traiter chaque phénomène de manière indépendante. Ceci permet d'activer un ensemble réduit de phénomènes et d'avoir une démarche d'identification presque découplée.

La deuxième partie a été consacrée à la mise en œuvre d'un outil de calcul performant capable de traiter toute la complexité du modèle. Une simulation avec le méso-modèle est caractérisée par un comportement non linéaire couplé, non local et d'évolution en temps, avec un grand nombre de degrés de liberté. Il faut noter qu'au début de l'étude, seule une loi de comportement « UMAT » Abaqus permettait de réaliser des simulations avec le méso-modèle. Les coûts de calcul étaient très élevés et un certain nombre de limitations existaient, attribuables au fait que Abaqus ne permet pas de gérer un comportement non local.

Le travail de mise en œuvre peut être divisé en deux parties. La première dédiée à l'intégration des différentes équations du modèle, et la seconde dédiée à la méthode de résolution en parallèle.

En ce qui concerne l'intégration de la loi comportement, la stratégie de résolution développée a permis de résoudre correctement le modèle. La richesse du modèle (non local, non linéaire) nous a restreint dans certains choix, par exemple le type d'éléments finis possible à utiliser et la manière d'intégrer les équations. L'ordre dans lequel les différentes équations sont résolues joue sur la robustesse de l'algorithme. Une attention particulière a été portée à la manière d'actualiser les différentes quantités à l'intérieur de la boucle itérative. L'algorithme proposé permet ainsi de résoudre le modèle de manière robuste.

Après la mise en œuvre du méso-modèle, nous nous sommes intéressés à la méthode de résolution. Premièrement, un solveur non linéaire de type Newton-Raphson a été implanté pour traiter des problèmes réduits de manière monolithique. Mais, la plupart des calculateurs modernes sont du type *cluster*, donc une parallélisation de la méthode de résolution a été envisagée.

Le choix d'utiliser un algorithme du type Newton-Krylov-Schur pour la méthode de résolution parallèle a été motivé par la nécessité de concentrer les efforts sur l'intégration

de la loi comportement. Malgré l'état de maturité de ce type d'algorithme, une adaptation a été nécessaire pour aboutir à une stratégie performante et robuste. En premier lieu, une stratégie de partitionnement spécifique a dû être conçue pour diviser de manière automatique les maillages, en prenant en compte le caractère non local du méso-modèle. De plus, l'endommagement fait que les opérateurs en jeux peuvent être très mal conditionnés. Le traitement de manière pragmatique du problème de mauvais conditionnement a permis de maîtriser le problème et d'aboutir à un algorithme capable de résoudre le méso-modèle en parallèle.

Aujourd'hui, le code de calcul s'appelle **COFFEE**, il contient la version la plus évoluée de méso-modèle, et représente la référence en ce qui concerne le méso-modèle au sein du laboratoire.

Les perspectives ouvertes par cette étude sont de différentes natures. La plus évidente est l'exploitation de manière intensive du code de calcul développé. Ceci permettra de confronter le modèle à des essais, et d'atteindre les limites du modèle pour ensuite envisager de nouvelles améliorations (par exemple l'introduction d'un modèle de viscosité).

Le méso-modèle, avec ses 40 paramètres matériaux, intimide parfois les potentiels nouveaux utilisateurs. Des études peuvent être menées afin de pouvoir identifier un nombre réduit de paramètres, sans pour autant diminuer la richesse du méso-modèle actuel.

En ce qui concerne la méthode de résolution, les difficultés rencontrées à cause du mauvais conditionnement des opérateurs donnent des idées d'améliorations. Un travail dans la direction de méthodes pour l'extraction du noyau des opérateurs pourra éventuellement trouver une solution à ce problème.

Enfin, à plus court terme, les outils développés dans ce travail servent déjà au sein du laboratoire (un maître de conférence, un postdoctorat et trois doctorants). Les différentes fonctionnalités proposées, comme le partitionnement de maillage et le calcul en parallèle, sont très appréciées par les utilisateurs. La souplesse du code était un point important durant la conception, permettant l'incorporation de nouvelles fonctionnalités de manière presque transparente.

Conclusion

Annexe A

Hypothèse d'un matériau isotrope transverse

Soit S l'opérateur de Hooke d'un pli endommageable,

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^0(1-d_f)} & \frac{-v_{12}^0}{E_1^0} & \frac{-v_{13}^0}{E_1^0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{12}^0}{E_1^0} & \frac{1}{E_2^0(1-[\sigma_{22}]^{+d'}) (1-[\sigma_{22}]^{+d_{22}})} & \frac{-v_{23}^0}{E_2^0(1-[\sigma_{22}]^{+d_{22}})} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{13}^0}{E_1^0} & \frac{-v_{23}^0}{E_2^0(1-[\sigma_{22}]^{+d_{22}})} & \frac{1}{E_3^0(1-[\sigma_{33}]^{+d'})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}^0(1-d)(1-\bar{d}_{12})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}^0(1-d)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}^0(1-d_{23})(1-\bar{d}_{23})} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Pour des niveaux de chargement faibles, seuls les mécanismes diffus sont présents. Ainsi l'opérateur de Hooke courant peut être décrit de la manière suivante,

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^0(1-d_f)} & \frac{-v_{12}^0}{E_1^0} & \frac{-v_{13}^0}{E_1^0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{12}^0}{E_1^0} & \frac{1}{E_2^0(1-[\sigma_{22}]^{+d'})} & \frac{-v_{23}^0}{E_2^0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{13}^0}{E_1^0} & \frac{-v_{23}^0}{E_2^0} & \frac{1}{E_3^0(1-[\sigma_{33}]^{+d'})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}^0(1-d)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}^0(1-d)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}^0(1-d_{23})} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

À partir de la définition de comportement isotrope transverse, on peut déduire la valeur de $(1 - d_{23})$:

Hypothèse d'un matériau isotrope transverse

$$\frac{1}{2G_{23}} = \frac{1 - \nu_{23}}{E_2} \quad \text{définition du comp. trans. isotrope} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{1}{2}G_{23}^0(1 - d_{23}) = \frac{1 - \nu_{23}^0(1 - d')}{E_2^0(1 - d')} \quad \text{propriétés endommagés} \quad (\text{A.4})$$

$$2G_{23}^0(1 - d_{23}) = \frac{E_2^0(1 - d')}{1 - \nu_{23}^0(1 - d')} \quad \text{avec } E = 2G(1 + \nu) \quad (\text{A.5})$$

$$2G_{23}^0(1 - d_{23}) = \frac{2G_{23}^0(1 + \nu_{23})(1 - d')}{1 - \nu_{23}^0(1 - d')} \quad (\text{A.6})$$

$$(1 - d_{23}) = \frac{(1 + \nu_{23})(1 - d')}{1 - \nu_{23}^0(1 - d')} \quad (\text{A.7})$$

$$(1 - d_{23}) = \frac{(1 - d')}{\frac{(1 - \nu_{23}^0 + \nu_{23}^0 d')}{(1 + \nu_{23})}} \quad (\text{A.8})$$

$$(1 - d_{23}) = \frac{1 - d'}{1 - \frac{\nu_{23}^0}{1 + \nu_{23}^0} d'} \quad (\text{A.9})$$

$$(1 - d_{23}) = \frac{1 - d'}{1 - \frac{\nu_{23}^0}{1 + \nu_{23}^0} d'} \quad (\text{A.10})$$

Annexe B

**Propriétés standards du méso-modèle
pour CFRP**

Propriétés standards du méso-modèle pour CFRP

TAB. B.1: Propriétés typiques du méso-constituant pli pour un CFRP

Mécanisme	Notation	Nom	Unité	Valeur typique
Élasticité	E_{INI}	Module d'élasticité direction fibre	MPa	120 000 – 140 000
	E_2, E_3	Module d'élasticité direction trans.	MPa	8 000 – 10 000
	ν_{12}, ν_{13}	Coefficient de Poisson fibre/trans.	-	0,25 – 0,35
	ν_{23}	Coefficient de Poisson trans./trans.	-	0,35 – 0,4
	G_{12}	Module de cisaillement fibre/trans.	MPa	5 000 – 7 000
Endommagement diffus	b_d	Couplage forces trans./cisaillement	-	0 – 1
	b_y	Couplage trans./cisaillement	-	0 – 1
	Y_c	Pente	MPa	5,9 – 10
	Y_0	Seuil d'initiation	MPa	0 – 0,01
	Y_s	Seuil de saturation	MPa	$Y_0 - Y_c$
Déformation anélastique	R_0	Seuil plastique	MPa	12,1 – 25
	a	Couplage transverse/cisaillement	-	0 – 0,6
	K	Paramètre loi d'écrouissage	MPa	1 000 – 2 800
	M	Paramètre loi d'écrouissage	-	0,58
Rupture fibre	Y_{df}^T	Seuil traction	MPa	13 – 21
	Y_{df}^C	Seuil compression	MPa	10,5 – 18
	k	Couplage compression/cisaillement	-	4
Fissuration transverse	G_I^C	Ténacité mode I	mJ/m ²	0,1 – 1
	G_{II}^C	Ténacité mode II	mJ/m ²	0,3 – 3
	G_{III}^C	Ténacité mode III	mJ/m ²	0,3 – 3
	h_c	Épaisseur critique	mm	2 – 4 EPE ¹
	ρ_s	Densité de saturation	-	0,5 – 0,7
	α	Exposant mode mixte	-	1 - 2
Non-linearité sens fibre	E^+	Traction	-	5,5 – 12
	E^-	Compression	-	7,5 – 12
Déformation thermique	ΔT	Variation de température	K	-80 – -200
	α_1	Coefficient sens fibre	10 ⁻⁶ /K	0 – 2
	α_2	Coefficient sens transverse	10 ⁻⁶ /K	20 – 40

¹Épaisseur élémentaire du pli

TAB. B.2: Propriétés typiques du méso-constituant interface pour un CFRP

Mécanisme	Notation	Nom	Unité	Valeur typique
Élasticité	E_3	Rigidité mode I	N/mm ³	600 000 – 1 000 000
	G_{13}, G_{23}	Rigidité mode II et III	N/mm ³	
	e	Epaisseur	mm	0,01 – 0,02
Délaminage diffus	α_i	Exposant mode mixte	-	1 - 2
	γ_{II}	Couplage mode II	-	0,3 – 1
	γ_{III}	Couplage mode III	-	0,3 – 1
	Y_0	Seuil d'initiation	N/mm	0 – Y_c
	Y_c	Pente	N/mm	0,1 – 3
	n	Exposant	-	0,5
Délaminage discret	a_i	Couplage fissuration trans.	-	0,55

Propriétés standards du méso-modèle pour CFRP

Bibliographie

- E. Abisset (2009). La rupture des composites stratifiés l'échelle méso : modélisation et validation. Master's thesis, LMT-Cachan.
- E. Abisset, F. Daghia, et P. Ladevèze (2011). On the validation of a damage mesomodel for laminated composites by means of open-hole tensile tests on quasi-isotropic laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 42(10) :1515 – 1524.
- Olivier Allix, Nadia Bahlouli, Christophe Cluzel, et Lionel Perret (1996). Modelling and identification of temperature-dependent mechanical behaviour of the elementary ply in carbon/epoxy laminates. *Composites Science and Technology*, 56(7) :883 – 888. <ce :title>9th French National Colloquium on Composite Materials</ce :title>.
- O. Allix, P. Feissel, et P. Thévenet (2003). A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers and Structures*, 81 :1177 – 1191.
- O. Allix et P. Ladevèze (1992). Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures*, 22(4) :235 – 242.
- O. Allix, D. Lévêque, et L. Perret (1998). Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composites Science and Technology*, 58 :671 – 678.
- G.I. Barenblatt (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. volume 7 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 55 – 129. Elsevier.
- E. Barranger (2005). *Stratégie de calcul et utilisation de séries de fourier pour les tubes composites dégradés*. Thèse de doctorat, ENS-Cachan, 61, Avenue Président Wilson, 94235 Cachan (France).
- C. Blanzé, R. Danwé, P. Ladevèze, et J.P. Moreau (1993). Une méthode pour l'étude désassemblage des structures massives. In Hermes, editor, *Actes du premier Colloque National en Calcul de Structures*, volume 1, pages 1104 – 1113.

Bibliographie

- L. Boniface, P.A. Smith, M.G. Bader, et A.H. Rezaifard (1997). Transverse ply cracking in cross-ply cfrp laminates - initiation or propagation controlled? *Journal of Composites Materials*, 31(11) :1080 – 1112.
- Achi Brand (1977). Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, 31(138) :333 – 390.
- J.F Caron et R.P. Carreira et A. Diaz (1999). Critère d'initiation de délaminage dans les stratifiés. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences, Série II b*(327) :1291 – 1296.
- L. Champaney, J.Y. Cognard, D. Dureisseix, et P. Ladevèze (1997). Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19 :253 – 263.
- P. Cresta (2008). *Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local*. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 61, Avenue Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France).
- P. Cresta, O. Allix, C. Rey, et S. Guinard (2007). Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :1436 – 1446.
- M.A. Crisfield (1981). A fast incremental iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers and Structures*, 13 :55 – 62.
- F.W. Crossman et A.S.D. Wang (1982). The dependence of transverse cracking and delamination on ply thickness in graphite/epoxy laminates. *ASTM special technical publication ISSN 0066-0558 CODEN ASTTA8*, 775 :118 – 139.
- Jean-Baptiste Donnet, Tong Kuan Wang, Serge Rebouillat, et Jimmy C. M. Peng, editors (1998). *Carbon Fibers*. Marcel Dekker, Inc, third ed, rev. and expanded edition.
- E.C. Edge (1994). Does transverse and shear loading affect the compression strength of unidirectional CFC? a reply to dr hart-smith. *Composites*, 25(2) :159 – 161.
- C. Farhat et F.X. Roux (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 :1205 – 1227.
- R. P. Fedorenko (1964). The speed of convergence of one iterative process. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4(3) :227 – 235.
- M. Fortin et R. Glowinski (1983a). Augmented lagrangian methods : Applications to the numerical solution of boundary-value problems. In *Studies in Mathematics and Its Applications*, volume 15. Elsevier.

- M. Fortin et R. Glowinski (1983b). Chapter III on decomposition-coordination methods using an augmented lagrangian. In Michel Fortin et Roland Glowinski, editors, *Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*, volume 15 of *Studies in Mathematics and Its Applications*, pages 97 – 146. Elsevier.
- E.K. Gamstedt et B.A. Sjögren (1999). Micromechanisms in tension-compression fatigue of composite containing transverse plies. *Composites Science and Technology*, 59 :167 – 178.
- P. Gosselet et C. Rey (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13 :515 – 572.
- P. Guidault, O. Allix, L. Champaney, et C. Cornuault (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5) :381 – 399.
- C. Henaff-Gardin et M. Lafarie-Frenot (1992). Influence of the stacking sequence on fatigue transverse ply cracking in cross-ply composite laminates. *ASTM-STP*, 1128 :236 – 255.
- C. Herakovich, R. Schroedter, A. Gasser, et L. Guitard (2000). Damage evolution in $[\pm 45]_s$ laminates with fiber rotation. *Composites Science and Technology*, 60(15) :2781 – 2789.
- Hexcel Corporation. *Hexcel*, <http://www.hexcel.com> (2009).
- G. Kasyapis et N. Takeda (1998). A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *Journal on Scientific Computing*, 20 :359 – 392.
- P. Kerfriden, O. Allix, et P. Gosselet (2009). A three-scale domain decomposition method for the 3d analysis of debonding in laminates. *Computational Mechanics*, 33(3) :343 – 362.
- P. Ladevèze (1983). Sur une théorie de l'endommagement anisotrope. Rapport Interne n°34, Laboratoire de Mécanique et Technologie.
- P. Ladevèze (1986). Sur la mécanique de l'endommagement des composites. In E. Bastias et D. Menkès, editors, *Comptes-Rendus des JNC5*, pages 667 – 683, Paris. Pluralis Publication.
- P. Ladevèze (1991). On a damage mechanics approach. In D. Baptiste, editor, *Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and Multi-Materials*, pages 119 – 141, London. Mechanical Engineering Publication.
- P. Ladevèze, O. Allix, JF Deü, et D. Lévêque (2000). A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183 :105 – 122.

Bibliographie

- P. Ladevèze et D. Dureisseix (2000). A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International journal of Computational Civil and Structural Engineering*, 1 :18 – 28.
- P. Ladevèze et E. Le Dantec (1992). Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3) :257 – 267.
- P. Ladevèze, O. Loiseau, et D. Dureisseix (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 :121 – 138.
- P. Ladevèze et G. Lubineau (2001). On a damage mesomodel for laminates : micro-meso relationships, possibilities and limits. *Composites Science and Technology*, 61 :2149 – 2158.
- P. Ladevèze et G. Lubineau (2002). An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics. *Composites Science and Technology*, 62 :533 – 541.
- P. Ladevèze et G. Lubineau (2003a). On a damage mesomodel for laminates : micromechanics basis and improvement. *Mechanics of Materials*, 35 :763 – 775.
- P. Ladevèze et G. Lubineau (2003b). Pont entre les "micro" et "méso" mécaniques des composites stratifiés. *C.R. Mécanique*, 331 :537 – 544.
- P. Ladevèze, G. Lubineau, et D. Marsal (2006a). Towards a bridge between the micro and mesomechanics of delamination for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 66 :698 – 712.
- P. Ladevèze, G. Lubineau, et D. Violeau (2006b). A computational damage micromodel of laminated composites. *International Journal of Fracture*, 137(1-4) :139 – 150.
- P. Ladevèze et A. Nouy (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28 – 30) :3061 – 3087.
- F. Lagattu et M.C. Lafarie-Frenot (2000). Variation of peek matrix crystallinity in apc-2 composite subjected to large shearing deformations. *Composites Science and Technology*, 60 :605 – 612.
- A. Laksimi, M.L. Benzeggagh, G. Jing, M. Hecini, et J.M. Roelandt (1991). Mode I interlaminar fracture of symmetrical cross-ply composites. *Composites Science and Technology*, 41(2) :147 – 164.
- F. Laurin, N. Carrère, et J.-F. Maire (2007). A multiscale progressive failure approach for composite laminates based on thermodynamical viscoelastic and damage models. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38(1) :198 – 209.

- Parick Le Tallec (1994). Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 1(2) :121 – 220.
- H. Leclerc (2007). Platform metal : Optimizations and facilities linked to the generation of code (in french). *8nd National Colloquium in Structures Calculation*.
- C. Lemauff et D. Martini (2006 – 2007). Mise en oeuvre d'un mésomodèle d'endommagement avec couplage entre mésoconstituants. Master's thesis, ENS-Cachan, 61, Avenue Président Wilson, 94235 Cachan (France).
- G. Lubineau (2002). *Sur un mésomodèle d'endommagement des composites stratifiés : relations micro-méso, possibilités et limites*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan.
- G. Lubineau et P. Ladevèze (2008). Construction of a micromechanics-based intralaminar mesomodel, and illustrations in abaqus/standard. *Computational Materials Science*, 43(1) :137 – 145.
- J. Mandel (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9 :233 – 241.
- J. Mandel et M. Brezina (1996). Balancing domain decomposition for problems with large jumps in coefficients. *Mathematics of Computation*, 65(216) :1387 – 1401.
- H. Matthies et G. Strang (1979). The solution of nonlinear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(11) :1613 – 1626.
- H. Meuer, E. Strohmaier, J. Dongarra, et H. Simon. *TOP500 Supercomputing*, <http://www.top500.org> (2009).
- Y. Murray et L. Schwer (1990). Implementation and verification of fiber-composite damage models. In *Failure Criteria and Analysis in Dynamic Response*, volume 107, pages 21 – 30.
- J.A. Nairn et S. Hu (1992). The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites. *International Journal of Fracture*, 57(1) :1 – 24.
- A. Needleman (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1) :69–85.
- Isaac Newton (1687). *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Excudit Georgius Brookman.
- S. Ogihara et N. Takeda (1995). Interaction between cracks and delamination during damage progress in CFRP cross-ply laminates. *Composites Science and Technology*, 45 :395 – 404.

Bibliographie

- Philippe Olivier et Michel Cavarero (2000). Comparison between longitudinal tensile characteristics of thin and thick thermoset composite laminates : influence of curing conditions. *Computers and Structures*, 76(1 – 3) :125 – 137.
- A. Parvizi, K.W. Garrett, et J.E. Bailey (1978). Cosntrained cracking in glass fiber-reinforced epoxy cross-py laminates. *Journal of Materials Science*, 13(1) :195 – 201.
- J. Pebrel, C. Rey, et P. Gosselet (2008). A nonlinear dual domain decompotition method : application to structural problems with damage. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3) :251 – 262.
- R. H. J. Peerlings (1999). Enhanced damage modelling for fracture and fatigue.
- R. H. J. Peerlings, R. de Borst, W. A. M. Brekelmans, et M. G. D. Geers (2002). Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(2) :175 – 189.
- François Pellegrini (1997). Graph partitioning based methods and tools for scientific computing. *Parallel Computing*, 23(1-2) :153 – 164. Environment and tools for parallel scientific computing.
- D. Perreux, D. Choqueuse, et P. Davies (2002). Anomalies in moisture absorption of glass fibre reinforced epoxy tubes. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 33(2) :147 – 154.
- A Puck et W Schneide (1969). On failure mechanisms and failure criteria of filament-wound glass-fibre/resin composites. *Plastics and Polymers*, 37(127) :33 – 43.
- A. Puck et H. Schürmann (1998). Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 58(7) :1045 – 1067.
- J. N. Reddy (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51(4) :745 – 752.
- Arther Rerrill (1997). *The origins of war, from the stone age to allexander the great*. Westview Press.
- E. Riks (1972). The application of Newton's methods to the problem of elastic estability. *Journal of Applied Mechanics*, 39 :1060 – 1065.
- Daniel J. Rixen et Charbel Farhat (1999). A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(4) :489 – 516.
- Yann-Hervé De Roeck, Patrick Le Tallec, et Marina Vidrascu (1992). A domain-decomposed solver for nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99(2 – 3) :187 – 207.

- Cédric Sauder, Jacques Lamon, et René Pailler (2004). The tensile behavior of carbon fibers at high temperatures up to 2400°C. *Carbon*, 42(4) :715 – 725.
- B.A. Sjögren et L. Berglund (2000). The effects of matrix and interface on damage in GRP cross-ply laminates. *Composites Science and Technology*, 60 :9 – 21.
- C. T. Sun et Changming Zhu (2000). The effect of deformation-induced change of fiber orientation on the non-linear behavior of polymeric composite laminates. *Composites Science and Technology*, 60(12 – 13) :2337 – 2345.
- Stephen W. Tsai et Edward M. Wu (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composites Materials*, 5(1) :58 – 80.
- E. Vergnault, O. Allix, et S.M. le Poëc (2009). Fluid-structure interaction with multiscale domain decomposition methods. In *Proceedings of the 3th International Conference on Computational Methods for Coupled problems in Science and Engineering*.
- C. A. Weeks et C. T. Sun (1998). Modeling non-linear rate-dependent behavior in fiber-reinforced composites. *Composites Science and Technology*, 58(3 – 4) :603 – 611.
- Gerald A. Wempner (1971). Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(11) :1581 – 1599.
- Michael R. Wisnom (1995). The effect of fibre rotation in $\pm 45^\circ$ tension tests on measured shear properties. *Composites*, 26(1) :25 – 32.
- Tomohiro Yokozeki, Toshio Ogasawara, et Takashi Ishikawa (2005). Effects of fiber non-linear properties on the compressive strength prediction of unidirectional carbon-fiber composites. *Composites Science and Technology*, 65(14) :2140 – 2147.
- Tomohiro Yokozeki, Toshio Ogasawara, et Takashi Ishikawa (2006). Nonlinear behavior and compressive strength of unidirectional and multidirectional carbon fiber composite laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(11) :2069 – 2079.
- O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor (1987). *The Finite Element Method*, volume 1. McGraw-Hill Book Company Europe, 4e edition.