

Université de Caen Basse-Normandie

École doctorale SIMEM

Thèse de doctorat

présentée par

Hugues BAUCHÈRE

et soutenue le lundi 16 septembre 2013

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN BASSE-NORMANDIE

Spécialité : Mathématiques et leurs interactions

(arrêté du 07 août 2006)

Propriété de Bogomolov pour les modules de Drinfeld à multiplications complexes

Directeur de thèse : Francesco AMOROSO

Jury

Federico PELLARIN, professeur à l'Université de SAINT-ÉTIENNE (rapporteur)

Patrice PHILIPPON, DR CNRS à l'Université de PARIS VI (rapporteur)

Bruno ANGLÈS, professeur à l'Université de CAEN

Vincent BOSSER, maître de conférences à l'Université de CAEN

Sinnou DAVID, professeur à l'Université de PARIS VI

Éric GAUDRON, professeur à l'Université de CLERMONT-FERRAND

Francesco AMOROSO, professeur à l'Université de CAEN (directeur de thèse)

REMERCIEMENTS

Mon premier témoignage de reconnaissance s'adresse tout naturellement à mon directeur de thèse, Francesco Amoroso, qui m'a proposé un sujet de recherche passionnant et un co-encadrant de thèse formidable, Vincent Bosser, à qui j'adresse également toute ma reconnaissance. J'ai eu beaucoup de plaisir à apprendre de vous deux et à travailler sous votre direction. Vous avez été complémentaires et m'avez ouvert au monde de la recherche avec beaucoup d'enthousiasme, mais surtout, vous avez été une source d'émulation incroyable. Pour tout ça je vous dis un grand merci.

Je remercie Patrice Philippon et Federico Pellarin d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Leur minutieux travail de relecture a permis d'améliorer très nettement la rédaction de certaines preuves.

Je suis très heureux que Bruno Anglès fasse partie de mon jury. Il s'est beaucoup intéressé à mon travail et a toujours été à l'écoute de mes interrogations Drinfeldiennes. Ses conseils et nos discussions fréquentes m'ont permis d'évoluer rapidement dans la compréhension de certains objets.

Toute ma gratitude va ensuite à Sinnou David qui a accepté d'être membre du jury. Ses cours à l'école d'hiver de Tübingen m'ont été d'une grande aide pour comprendre certaines similarités entre courbes elliptiques et modules de Drinfeld et nos discussions sur son travail fait en commun avec Amílcar Pacheco m'ont permis de comprendre toutes les subtilités de leurs démonstrations.

Je remercie Éric Gaudron d'avoir accepté de faire partie de mon jury et de l'intérêt qu'il porte à mon travail.

Je suis reconnaissant envers Amílcar Pacheco d'être venu à Caen lors d'un de ses séjours en France pour discuter de son article co-écrit avec Sinnou David et pour l'intérêt qu'il avait porté à mon travail.

Je tiens à remercier tous les membres du LMNO pour leur sympathie. Plus particulièrement, l'équipe de théorie des nombres dont je fais partie. Les membres administratifs, Sonia, Isabelle, Nadège et Yoann qui font un travail formidable. L'équipe d'algèbres d'opérateurs, en particulier Sébastien, Éric et Roland pour leur très grande sympathie. Dimitri Latsis pour son enseignement d'algèbre de deuxième année de Licence et Yvan Ramadanoff pour celui d'approfondissement en analyse de deuxième année de Master. Je termine ce paragraphe en remerciant très sincèrement Valérie Girardin pour tous les bons conseils qu'elle m'a donnés depuis ma troisième année de Licence.

Merci à l'École doctorale SIMEM qui a permis le financement de cette thèse et à ses membres, Lamri Adoui, Sandrine Soro,...

Comment ne pas remercier tous les doctorants du labo ! Tout d'abord mes co-bureaux du S3 – 111, Mohamed, Philippe, Florent et Tony avec qui j'ai passé de très grands moments de recherche silencieuse et studieuse... Ensuite, mes grands frères, Louis et Corentin, puis tous les autres : Jérémy, Julien, Benjamin, Pierre, Mathieu, Nicolas, David, Fabien, Willy, Justine, Abdoulaye, Kisoon, Anne-Sophie, Vincent,...

Mes amis (presque tous prof. des écoles), ne faisant pas (ou plus !) de maths, m'ont obligé à sortir de temps en temps la tête du guidon, je les en remercie très chaleureusement : Nicolas, Pauline, Claudie, Delphine, Sandrine, Guillaume, Marie,...

Je remercie ma famille de tout mon cœur : ma mère, Dominique, Alicia et Sébastien, mes frères et ma sœur, Marc, Sarah, Achille, ma grand mère et tous les autres. Ainsi que ma belle-famille, Dominique, Maëlle, Gabin,...

Enfin, je remercie Aurore, ma merveilleuse épouse qui supporte Dame mathématiques au quotidien ! Et Célestine, ma fille qui est mon petit rayon de bonheur !

*« Young man, in mathematics you don't understand things.
You just get used to them. »*

John Von Neumann

*« Un fait est comme un sac : vide, il ne tient pas debout.
Pour qu'il tienne debout, il faut d'abord y faire entrer la raison
et les sentiments qui l'ont déterminé. »*

Luigi Pirandello, *Six personnages en quête d'auteur*.

À Éric, Bernard, Tenzin et Philippe

SOMMAIRE

Remerciements	iii
1. Introduction	xi
Notations	xix
Notations du chapitre 2	xix
Notations de la partie 2.1	xix
Notations de la partie 2.2	xx
Notations de la partie 2.3	xxii
Notations de la partie 2.4	xxii
Notations du chapitre 3	xxii
Notations des parties 3.1 et 3.2	xxii
Notations de la partie 3.3	xxiii
Notations de la partie 3.4	xxiv
Notations de la partie 3.5	xxiv
Notations de l'annexe A	xxv
Notations de la partie A.1	xxv
Notations de la partie A.2	xxv
2. Préliminaires	1
2.1. Préambule	1
2.1.1. Notations générales	1
2.1.2. Places et degrés	2
2.2. Modules de Drinfeld	5
2.2.1. Anneau des polynômes en le Frobenius	5
2.2.2. Modules de Drinfeld	6
2.2.3. Réseaux et modules de Drinfeld	7

2.2.4. Morphismes entre modules de Drinfeld	8
2.2.5. Endomorphismes d'un module de Drinfeld	9
2.2.6. Points de torsion et idéaux	10
2.2.7. Théorie de Hayes	12
2.3. Hauteur canonique d'un module de Drinfeld	17
2.3.1. Hauteur de Weil	17
2.3.2. Hauteur canonique associée à un module de Drinfeld ..	18
2.3.3. Comparaisons entre hauteurs canoniques	24
2.4. Récapitulatif pour les modules de Drinfeld CM	26
3. Propriété de Bogomolov et modules de Drinfeld CM ..	29
3.1. Inégalités métriques	32
3.2. Minorations de la hauteur canonique	39
3.3. Principe des tiroirs dans $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m})^\times$	45
3.4. Démonstration du théorème 1.4	50
3.5. Démonstration du théorème 1.1	56
A. Deux résultats d'arithmétique des corps en caractéristique positive	61
A.1. Une conséquence du théorème de Hasse-Arf	61
A.1.1. Les groupes de ramification	62
A.1.2. Démonstration de la proposition 3.1.5	66
A.2. Quelques remarques à propos d'un théorème de Checcoli ..	71
A.2.1. Analogie du théorème A.2.1 en caractéristique > 0	71
A.2.2. Un contre-exemple en caractéristique positive	73
Bibliographie	81
Index des notations	85
Index	89

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

En 1933 à la page 476 de [Leh33], D. H. Lehmer se pose la question suivante :

Question. — Soit $\varepsilon > 0$. Peut-on trouver un polynôme unitaire à coefficients entiers dont la *mesure de Mahler* (*i.e.* le produit des valeurs absolues des racines du polynôme qui sont en dehors du disque unité) soit compris entre 1 et $1 + \varepsilon$?

Il semble que la réponse à cette question soit non dès que $\varepsilon < 0.176$. Cette valeur est suggérée par un calcul fait par D. H. Lehmer lui-même dans [Leh33]. Le polynôme :

$$f(X) := X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$$

satisfait :

$$M(f) = 1.17628 \dots,$$

où $M(f)$ est la mesure de Mahler de f .

Afin de reformuler la question de D. H. Lehmer, on définit la *hauteur logarithmique et absolue de Weil*, notée h , par :

$$h(\alpha) := \frac{1}{D} \sum_{v \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}(\alpha)}} n_v \max\{0, \log |\alpha|_v\},$$

où $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $D := [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, où v parcourt toutes les places de $\mathbb{Q}(\alpha)$, $n_v := [\mathbb{Q}(\alpha)_v : \mathbb{Q}_v]$ est le degré local en v de l'extension $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ et $|\cdot|_v$ est convenablement normalisée. Pour un entier algébrique α de polynôme minimal f de degré D , on a :

$$D h(\alpha) = \log M(f).$$

Par ailleurs, si α n'est pas un entier algébrique, il est facile de voir que :

$$D h(\alpha) \geq \log 2.$$

Ainsi, la question initiale devient la conjecture suivante, dite de Lehmer :

Conjecture (de Lehmer). — *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ non nul de degré D sur $\mathbb{Q}$ qui n'est pas une racine de l'unité, on ait :*

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{D}.$$

Le résultat général s'approchant, à ce jour, le plus de la conjecture de Lehmer est le suivant (cf. [Dob79]) :

Théorème (de Dobrowolski). — *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ non nul de degré D sur $\mathbb{Q}$ qui n'est pas une racine de l'unité, on a :*

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{D} \left(\frac{\log \log 16 D}{\log 16 D} \right)^3.$$

Il existe plusieurs généralisations du problème de Lehmer, l'une d'elle consiste à remplacer le corps des rationnels par un sous-corps K de $\overline{\mathbb{Q}}$. On décompose alors le problème en deux étapes :

1. Existe-t-il une constante $c(K) > 0$ telle que pour tout $\alpha \in K$ non nul qui n'est pas une racine de l'unité, on ait $h(\alpha) \geq c(K)$?
2. S'il existe un tel $c(K)$, existe-t-il une constante $c'(K) > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ non nul qui n'est pas une racine de l'unité, on ait :

$$h(\alpha) \geq \frac{c'(K)}{[K(\alpha) : K]} ?$$

On dit qu'un sous-corps K de $\overline{\mathbb{Q}}$ a la *propriété (B) de Bogomolov* (cf. [BZ01]) s'il vérifie le point 1. Lorsque le corps K est un corps de nombres, le point 1 découle du théorème de Northcott et le point 2 se ramène au problème de Lehmer sur $\mathbb{Q}$. En revanche, lorsque $K/\mathbb{Q}$ est une extension algébrique infinie, le problème est beaucoup plus compliqué. Le cas le plus étudié est celui où K est la clôture abélienne de $\mathbb{Q}$. On parle alors de problème de *Lehmer abélien* pour le point 1 et de problème de *Lehmer relatif* pour le point 2.

Le problème de Lehmer abélien a été résolu par F. Amoroso et R. Dvornicich en 2000 (*cf.* [AD00]) qui ont montré que pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}^{\text{ab}}$ non nul qui n'est pas une racine de l'unité, on a :

$$h(\alpha) \geq \frac{\log 5}{12}.$$

Quant au problème de Lehmer relatif, on n'en a qu'un résultat partiel à la *Dobrowolski* dû à F. Amoroso et U. Zannier en 2000 (*cf.* [AZ00]). Ils ont montré qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ non nul qui n'est pas une racine de l'unité, on a :

$$h(\alpha) \geq \frac{c'}{D} \left(\frac{\log 2D}{\log \log 5D} \right)^{-13},$$

où $D = [\mathbb{Q}^{\text{ab}}(\alpha) : \mathbb{Q}^{\text{ab}}]$.

Les problèmes de Lehmer s'étendent naturellement à d'autres groupes algébriques dès qu'une notion de hauteur (dite « normalisée » ou « canonique ») intervient, comme, par exemple, aux variétés abéliennes.

Dans le cadre des courbes elliptiques (ou des variétés abéliennes) sur un corps de nombres, pour obtenir une hauteur ayant des propriétés satisfaisantes vis à vis de la structure de groupe on utilise un procédé limite dû à A. Néron et J. Tate.

Une fois cette hauteur dite « canonique » construite, on peut formuler les problèmes de Lehmer dans ce cadre. M. Laurent démontre en 1981 un analogue du théorème de Dobrowolski pour les courbes elliptiques à multiplication complexe (*cf.* [Lau83]). Le problème de Lehmer abélien a lui été résolu en 2003 par M. H. Baker (*cf.* [Bak03]) pour les courbes elliptiques à multiplication complexe et en 2004 par J. H. Silverman (*cf.* [Sil04]) pour les courbes elliptiques sans multiplication complexe. Enfin le résultat partiel de F. Amoroso et U. Zannier concernant le problème de Lehmer relatif a été étendu aux courbes elliptiques à multiplication complexe par N. Ratazzi en 2004 (*cf.* [Rat04]).

Dans le cas des variétés abéliennes, S. David et M. Hindry ont démontré en 2000 un théorème à la *Dobrowolski* pour les variétés abéliennes CM (*cf.* [DH00]). M. H. Baker et J. H. Silverman ont généralisé leurs résultats sus-mentionnés pour démontrer en 2004 le problème de Lehmer abélien pour les variétés abéliennes (*cf.* [BS04]). Pour finir M. Carrizosa a démontré en 2008 (*cf.* [Car08]) un analogue du résultat de N. Ratazzi (*cf.* [Rat04]) pour les variétés abéliennes CM.

En 1992, L. Denis a défini par un procédé à la Néron-Tate la hauteur canonique d'un module de Drinfeld défini sur la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q(T)$ (cf. [Den92]). Dans ce même article, il a démontré un analogue séparable du théorème de Dobrowolski pour le module de Carlitz. Ce résultat a ensuite été généralisé par L. Demangos (cf. [Dem12]) à certains modules de Drinfeld ayant suffisamment de « bons relèvements ».

Pour ce qui est du problème de Lehmer abélien pour les modules de Drinfeld, il a été résolu par S. David et A. Pacheco en 2008 (cf. [DP08]). En revanche, il n'y a aucun résultat connu en direction du problème de Lehmer relatif pour les modules de Drinfeld.

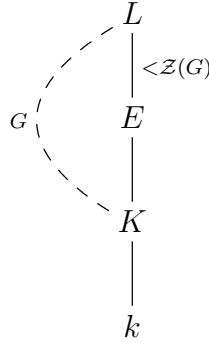
Notons $A := \mathbb{F}_q[T]$ et $k := \mathbb{F}_q(T)$. Soient ϕ un A -module de Drinfeld défini sur la clôture algébrique de k et $\widehat{h}_\phi$ sa hauteur canonique. Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne infinie de groupe de Galois G . Par analogie avec la terminologie utilisée dans [BZ01], on dit que L a la *propriété* (B, ϕ) s'il existe une constante strictement positive qui minore $\widehat{h}_\phi$ sur L privé des points de torsion de ϕ .

Avec cette terminologie, le théorème principal de [DP08] cité ci-dessus se reformule en disant que la clôture abélienne de K a la propriété (B, ϕ) . Dans cette thèse nous généralisons, dans le cadre des modules de Drinfeld à multiplications complexes, ce résultat.

Théorème 1.1. — *Soit ϕ un A -module de Drinfeld défini sur $\bar{k}$ et à multiplications complexes. Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne infinie de groupe de Galois G . Soient H un sous-groupe du centre de G et $E \subseteq L$ le sous-corps fixé par H . Soit $d_0 > 0$ un entier. On suppose qu'il existe une place finie v de K telle que pour toute place w de E au-dessus de v , on ait $[E_w : K_v] \leq d_0$. Alors L a la propriété (B, ϕ) . Plus précisément, il existe une constante $c_0 > 0$ qui ne dépend que de ϕ telle que pour tout $\alpha \in L$ non de torsion pour ϕ , on a :*

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c_0 \deg v d_0^2 [K:k]}.$$

On illustre la tour d'extensions que nous venons de décrire par le diagramme suivant :



Remarquons que ce théorème est l'analogie pour les modules de Drinfeld à multiplications complexes d'un résultat obtenu par F. Amoroso, S. David et U. Zannier dans [ADZ11] dans le cas du groupe multiplicatif. Dans ce cadre, même pour une extension abélienne L d'un corps de nombres K , le fait d'obtenir une minoration dépendant seulement du degré $[K : \mathbb{Q}]$ n'était pas possible à l'aide des techniques de [AZ00]. Pour ce faire les auteurs ont dû modifier leur méthode (*cf.* [AZ10]), notamment pour ne pas utiliser le théorème de Kronecker-Weber. Pour ce qui est des modules de Drinfeld, la minoration obtenue dans [DP08] n'est pas explicite. Dans le cadre de modules CM, leur méthode permettrait probablement d'obtenir une minoration dépendant seulement du degré. Ici nous utilisons, comme dans [ADZ11], la méthode de [AZ10], ce qui nous permet d'obtenir en particulier, dans le cadre des modules CM, une version du théorème de [DP08] avec une constante dépendant seulement du degré $[K : k]$.

Corollaire 1.2. — *Soit ϕ un A -module de Drinfeld défini sur $\bar{k}$ à multiplications complexes. Soient K/k une extension finie et K^{ab} la fermeture abélienne de K dans $\mathbb{C}_\infty$. Alors K^{ab} a la propriété (B, ϕ) . Plus précisément, il existe une constante $c_0 > 0$ qui ne dépend que de ϕ telle que pour tout $\alpha \in K^{\text{ab}}$ non de torsion pour ϕ , on a :*

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c_0 [K:k]^2}.$$

Démonstration. — On applique le théorème 1.1 dans le cas $L = K^{\text{ab}}$ en prenant $H = G$. En particulier $E = K$, on peut ainsi prendre $d_0 = 1$ et choisir n'importe quelle place finie et non triviale de K . Prenons une place finie v de K telle que $\deg v \leq [K : k]$ (une telle place existe, il suffit par exemple de prendre une place de K au-dessus de la place en T de k). D'après le théorème 1.1, il existe une constante $c_0 > 0$ ne dépendant que de ϕ telle que pour tout $\alpha \in K^{\text{ab}}$ non de torsion pour ϕ , on a :

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c_0 [K:k]^2},$$

ce qui permet de conclure. □

S'il existe une place finie v de K telle que pour toute place w de L au-dessus de v , on ait $[L_w : K_v] \leq d_0$ pour un certain entier d_0 , alors, en considérant le sous-groupe trivial du centre du groupe de Galois de l'extension L/K , on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1.3. — Soit ϕ un A -module de Drinfeld défini sur $\bar{k}$ et à multiplications complexes. Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne infinie de groupe de Galois G . Soit $d_0 > 0$ un entier. S'il existe une place finie v de K telle que pour toute place w de L au-dessus de v , on ait $[L_w : K_v] \leq d_0$, alors L a la propriété (B, ϕ) . Plus précisément, il existe une constante $c_0 > 0$ qui ne dépend que de ϕ telle que pour tout $\alpha \in L$ non de torsion pour ϕ , on a :

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c_0 \deg v d_0^2 [K:k]}.$$

Nous rassemblons dans le chapitre 2 tous les préliminaires sur les corps de fonctions en caractéristique positive, sur les modules de Drinfeld et sur leur hauteur canonique.

Afin de démontrer le théorème 1.1, nous nous ramènerons à un module de Drinfeld de signe normalisé, en utilisant les résultats du §2.4 et au cas d'extensions finies en montrant (cf. §3.4) :

Théorème 1.4. — Soient F/k une extension CM finie, ∞' l'unique place de F au-dessus de ∞ , d le degré sur $\mathbb{F}_q$ de la place ∞' et ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé. Soient K/k une extension finie telle que ψ soit défini sur K et L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G . Soient H un sous-groupe du centre de G et $E \subseteq L$ le sous-corps fixé par H . Soient $d_1 > 0$ un entier et v une place finie de K . On suppose que pour toute place w de E au-dessus de v , on ait $[E_w : K_v] \leq d_1$. Alors il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 \geq 1$ qui ne dépendent que de ψ telles que pour tout $\alpha \in L$ non de torsion pour ψ , on a :

$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \frac{q^{-c_1 \deg v d_1^2 [K:k]}}{c_2 d_1^{q^d-1} [K:k]^{q^r}}.$$

Pour démontrer ce dernier théorème, nous commencerons par montrer dans le §3.1 des inégalités ultramétriques faisant intervenir un module de Drinfeld de signe normalisé. Une de ces inégalités, concernant des extensions ramifiées, nécessite un résultat sur les groupes de ramifications qui sera démontré dans la partie A.1. Ces inégalités nous permettront, grâce à la formule du produit (cf. th. 2.1.1), d'en déduire au §3.2 des minoration conditionnelles de la hauteur canonique. À l'aide d'un argument reposant entre autres sur le principe des tiroirs (cf. 3.3), nous nous affranchirons dans le §3.4 de ces contraintes.

Dans sa thèse, S. Checcoli démontre (*cf.* th. 2.2.2 [**Che10**]) que pour un corps de nombres K , si le groupe de Galois de l'extension galoisienne infinie L/K est d'exposant fini, alors tous les degrés locaux sont uniformément bornés. Ce résultat permet à F. Amoroso, S. David et U. Zannier de montrer dans [**ADZ11**] qu'une extension galoisienne infinie d'un corps de nombres dont le groupe de Galois est d'exposant fini a la propriété (B).

Dans la partie A.2 nous rassemblons deux remarques à propos de la généralisation du résultat de S. Checcoli aux corps de fonctions de caractéristique positive. D'une part nous montrons un analogue de son théorème 2.2.2 dans ce cadre, sous l'hypothèse que l'exposant du groupe de Galois soit premier à p . D'autre part, nous montrons à l'aide d'un exemple que cette hypothèse est en fait nécessaire.

NOTATIONS

Notations du chapitre 2

Notations de la partie 2.1

p : un nombre premier	1
q : une puissance de p	1
$\mathbb{F}_q$: le corps fini à q éléments	1
$A := \mathbb{F}_q[T]$: l'anneau des polynômes en T à coefficients dans $\mathbb{F}_q$	1
$k := \mathbb{F}_q(T)$: le corps des fractions de A	1
$\deg_T$: le degré d'un polynôme en T	1
∞ : la place en $\frac{1}{T}$ de k	1
$k_\infty := \mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$: le corps des séries de Laurent sur $\mathbb{F}_q$	1
$v_\infty(\cdot) := -\deg_T(\cdot)$: la valuation $\frac{1}{T}$ -adique	1
$\bar{k}_\infty$: une clôture algébrique de k_∞	1
$\mathbb{C}_\infty$: un complété de $\bar{k}_\infty$ pour la valuation v_∞	1
$ \cdot _\infty := q^{-v_\infty(\cdot)}$: la valeur absolue associée à la valuation v_∞	1
$\bar{k}$: la fermeture algébrique de k dans $\mathbb{C}_\infty$	1
$\bar{\mathbb{F}}_q$: la fermeture algébrique de $\mathbb{F}_q$ dans $\mathbb{C}_\infty$	1
K/k : une extension finie	1
$[K : k]$: le degré de l'extension K/k	1
$K^* := K \setminus \{0\}$: l'ensemble des éléments non nuls de K	1
$\tilde{K} = K \cap \bar{\mathbb{F}}_q$: le corps des constantes de K	2
$\mathcal{O}_K$: la fermeture intégrale de A dans K	2
$\bar{K}$: la fermeture algébrique de K dans $\mathbb{C}_\infty$	2
K_∞ : le complété de K dans $\mathbb{C}_\infty$ pour la valuation v_∞	2
K^{ab} : la fermeture abélienne de K dans $\mathbb{C}_\infty$	2
K^{sep} : la fermeture séparable de K dans $\mathbb{C}_\infty$	2

$\text{Gal}(L/K)$: le groupe de Galois d'une extension galoisienne L/K	2
$\#E$: le cardinal d'un ensemble E	2
$\mathcal{M}_K$: l'ensemble des places non triviales de K	2
v : une place non triviale de K	2
$v : K \mapsto \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$: la valuation associée à la place v	2
$ \cdot _v := q^{-v(\cdot)}$: la valeur absolue normalisée associée à la place v	2
$\mathcal{O}_v := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$: l'anneau de valuation associé à la place v	2
$\mathfrak{m}_v := \{x \in K \mid v(x) > 0\}$: l'idéal maximal associé à la place v	2
$\mathbb{F}_v := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$: le corps résiduel associé à la place v	2
$\deg v := [\mathbb{F}_v : \mathbb{F}_q]$: le degré sur $\mathbb{F}_q$ de la place v	2
L/K : une extension finie	3
$w v$: une place de L au-dessus de la place v de K	3
$f(w/v) := [\mathbb{F}_w : \mathbb{F}_v]$: le degré résiduel de w sur v	3
$e(w/v)$: l'indice de ramification de w sur v	3
K_v : le complété de K en la place v	3
L_w : le complété de L en la place w	3
$[L_w : K_v]$: le degré local de w sur v	3
$\mathfrak{p}$: un idéal premier de $\mathcal{O}_K$	3
$v_{\mathfrak{p}}$: la valuation associée à $\mathfrak{p}$	3
$\log_q$: le logarithme de base q	3
$\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} := \log_q \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$: le degré sur $\mathcal{O}_K$ de $\mathfrak{p}$	3
F/k : une extension finie	4
R : un ordre de F	4
$\mathfrak{a}$: un idéal non nul de R	4
$\deg_R \mathfrak{a} := \log_q \#(R/\mathfrak{a})$: le degré sur R de $\mathfrak{a}$	4
$(\gamma) := \gamma R$: l'idéal principal de R engendré par $\gamma \in R \setminus \{0\}$	4
$\deg_R \gamma := \deg_R(\gamma)$: le degré sur R de $\gamma \in R \setminus \{0\}$	4

Notations de la partie 2.2

$L \subset \mathbb{C}_{\infty}$: une extension de k	5
τ : l'application de Frobenius associée à $\mathbb{F}_q$	5
$L\{\tau\}$: l'anneau des polynômes en le Frobenius	5
$\deg_{\tau}$: le degré d'un polynôme en τ	5
D : la dérivation formelle des polynômes	6
$C_T := T\tau^0 + \tau$: le module de Carlitz	6
F/k : une extension finie de type CM	6
ρ : un R -module de Drinfeld	6
r : le rang de ρ	6
H_{ρ} : le corps engendré sur k par les coefficients des polynômes $\{\rho_a\}_{a \in R}$	6

$\rho_{\mathfrak{a}}$: le générateur unitaire de l'idéal à gauche de $\bar{k}\{\tau\}$ engendré par la famille $\{\rho_a\}_{a \in \mathfrak{a}}$	7
∞' : l'unique place de F au-dessus de ∞	7
$F_{\infty'}$: le complété de F pour l'unique prolongement de v_{∞} à F	7
$\tilde{F} := F \cap \bar{\mathbb{F}}_q$: le corps des constantes de F	7
$\mathbf{K}/F_{\infty'}$: une extension finie	7
$\mathbf{K}^{\text{sep}}$: la fermeture séparable de $\mathbf{K}$ dans $\mathbb{C}_{\infty}$	7
$\mathcal{L}$: un R -réseau sur $\mathbf{K}$	7
$e_{\mathcal{L}}$: exponentielle de $\mathcal{L}$	7
$\mathbf{K}\{\{\tau\}\}$: anneau des séries formelles en le Frobenius à coefficients dans $\mathbf{K}$	8
e_{ρ} : exponentielle de ρ	8
ϕ : un A -module de Drinfeld de rang r défini sur $\bar{k}$	9
$\text{End}(\phi)$: l'ensemble des endomorphismes de ϕ sur $\bar{k}$	9
ϕ' : un R -module de Drinfeld de rang r'	10
$\phi'[a]$: l'ensemble des points de a -torsion de ϕ' où $a \in R \setminus \{0\}$	10
$\phi'[\mathfrak{a}]$: l'ensemble des points de $\mathfrak{a}$ -torsion de ϕ' où $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de R	10
$\phi'(L)_{\text{tors}}$: l'ensemble des points de torsion de ϕ' dans l'extension $L \subseteq \bar{k}$ de k	11
$\mathfrak{I}_{\phi'}(\delta) := \{a \in R \mid \phi'_a(\delta) = 0\}$: l'ordre d'un point de torsion δ de ϕ' ..	11
$d := \deg \infty'$: le degré de la place ∞' sur $\mathbb{F}_q$	12
$\mathbb{F}_{\infty'} \simeq \mathbb{F}_{q^d}$: le corps résiduel de ∞'	12
$v_{\infty'}$: l'unique extension de v_{∞} à F	12
$\mathfrak{a} * \rho$: l'unique R -module de Drinfeld ϱ tel que $\forall a \in A, \rho_{\mathfrak{a}} \rho_a = \varrho_a \rho_{\mathfrak{a}}$..	12
$\text{End}(\mathfrak{a})$: l'ensemble des éléments $a \in \mathcal{O}_F$ tels que $a\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de R	13
$\mathfrak{C} := \{a \in \mathcal{O}_F \mid a\mathcal{O}_F \subset R\}$: le conducteur de R	13
π : une uniformisante de $v_{\infty'}$ dans F	13
$\text{sgn} : F_{\infty'}^* \longrightarrow \mathbb{F}_{\infty'}^*$: une fonction signe	13
ψ : un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé	14
$\mu_{\psi}(a)$: le coefficient dominant de ψ_a	13
H_F^+ : le corps des coefficients des modules de Drinfeld de signe normalisé	14
$\mathfrak{m}$: un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$	14
$\sigma_{\mathfrak{m}}$: le symbole d'Artin de l'idéal premier non nul $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_F$	14
$H_F^+(\psi[\mathfrak{a}])$: le corps engendré sur H_F^+ par les points de $\mathfrak{a}$ -torsion de ψ ..	15
$\mathfrak{h}$: le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$	15
$m \in \mathcal{O}_F$: un générateur de l'idéal $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$	15

Notations de la partie 2.3

$h(\cdot)$: la hauteur logarithmique et absolue de Weil	17
$ \cdot $: la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$	17
$\widehat{h}_{\phi'}$: la hauteur canonique de ϕ'	21
$c(\phi'_a) := \max_{\alpha \in \overline{k}} \left\{ \left h(\phi'_a(\alpha)) - q^{\deg_{\tau} \phi'_a} h(\alpha) \right \right\}$: la constante de comparaison entre $h(\phi'_a(\cdot))$ et $q^{\deg_{\tau} \phi'_a} h(\cdot)$	18
$\gamma(\phi') := \max \left\{ 1, \inf_{a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q} \{c(\phi'_a)\} \right\}$: la constante de comparaison entre la hauteur canonique de ϕ' et la hauteur de Weil	22

Notations de la partie 2.4

ϕ : un A -module de Drinfeld CM de rang r	26
R : l'image canonique de $\text{End}(\phi)$ dans $\overline{k}$	26
ϕ' : le R -module étendu de ϕ	26
$\varphi' := \mathfrak{C} * \varphi'$: le R -module de Drinfeld isogène à ϕ' via $\phi'_{\mathfrak{C}}$	26
φ : le R -module de Drinfeld φ' munit de la structure de $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de rang 1	26
z : une racine dans $\overline{k}$ du polynôme $X^{q^d-1} - \mu_{\varphi}(\pi^{-1})$	26
$\psi := z \varphi z^{-1}$: un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé isomorphe à φ via z	26

Notations du chapitre 3**Notations des parties 3.1 et 3.2**

F/k : une extension CM finie	30
∞' : l'unique place de F au-dessus de ∞	30
d : le degré de ∞' sur $\mathbb{F}_q$	30
$\widetilde{F} := F \cap \overline{\mathbb{F}}_q$: le corps des constantes de F	30
$\varsigma := \log_q \# \widetilde{F}$: le degré de l'extension $\widetilde{F}/\mathbb{F}_q$	30
ψ : un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé	30
H_F^+ : le corps des coefficients des modules de Drinfeld de signe normalisé	30
K/H_F^+ : une extension finie	30
L/K : une extension galoisienne finie	30
$G := \text{Gal}(L/K)$: le groupe de Galois de l'extension L/K	30
H : un sous-groupe du centre de G	30
$E \subseteq L$: le sous-corps fixé par H	30

$d_1 > 0$: un entier	30
v : une place finie non triviale de K telle que pour toute place $w v$	
de E , on ait $[E_w : K_v] \leq d_1$	30
$\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_K$ associé à la place v	30
$\mathfrak{q}$: un idéal premier de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ (<i>i.e.</i> $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}_K$)	30
$\mathfrak{m} := \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_F$: l'idéal premier de $\mathcal{O}_F$ en-dessous de $\mathfrak{p}$	30
$\mathfrak{h}$: le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$	30
$m \in \mathcal{O}_F$: un générateur de l'idéal principal $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$	30
$\nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}$: la définition de l'entier ν	30
$n := \mathfrak{h} d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}$: la définition de l'entier n	30
$s := \mathfrak{h} d(q^d - 1)$: la définition de l'entier s	30
$\mathcal{Z}(G)$: le centre du groupe G	34
$H_{\mathfrak{q}}$: un sous-groupe non trivial du groupe d'inertie de $\mathfrak{q}$ sur L	35
$c_3 := 3 \mathfrak{h} d(q^d - 1) \gamma(\psi)$: choix de la constante c_3	39

Notations de la partie 3.3

$\mathfrak{n}$: un idéal non nul et principal de $\mathcal{O}_F$ (par la suite $\mathfrak{n} := \mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$)	45
$\mathcal{R}_0$: un système de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}$	45
$e > 0$: un entier suffisamment grand	45
$\bar{a}$: l'image canonique d'un élément $a \in \mathcal{O}_F$ dans $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$	45
$\mathcal{R} := \{\sum_{i=0}^{e-1} \lambda_i m^i \mid \lambda_i \in \mathcal{R}_0\}$: un système de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$	45
N : le nombre d'éléments de $\mathcal{O}_F$ de degré (en $\mathcal{O}_F$) < 2	45
$B > 1$: un entier	46
$(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^{\times}$: le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$	46
H : un sous-groupe de $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^{\times}$ d'indice $< B$	46
$d_m := \max_{\lambda \in \mathcal{R}_0} \{\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda\}$: le maximum des degrés des éléments	
de $\mathcal{R}_0$	46
$[x]$: la partie entière par excès de $x \in \mathbb{R}$	46
$c := \left\lceil \frac{\log_q(2NB)}{\deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}} \right\rceil$: une constante	46
$\Gamma := \{\sum_{i=c}^{e-1} \lambda_i m^i \mid \lambda_i \in \mathcal{R}_0\}$: un sous-ensemble de $\mathcal{R}$ dépendant de c	46
$I_{\alpha} := \{\sum_{i=0}^{c-1} \lambda_i m^i + \alpha \mid \lambda_i \in \mathcal{R}_0\}$: un sous-ensemble de $\mathcal{R} + \alpha$	
avec $\alpha \in \Gamma$	46
$\Lambda := \{a \in \mathcal{O}_F \mid \bar{a} \in H\}$: l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}_F$ dont	
l'image canonique dans $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$ est dans H	46
$(e_1, \dots, e_r)$: une base de $\mathcal{O}_F$ en tant que A -module	48
$d_{\mathcal{O}_F} := \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_{\mathcal{O}_F} e_i\}$: le maximum des degrés des éléments	
de la base $(e_1, \dots, e_r)$	48

Notations de la partie 3.4

$c_1 := 7 \mathfrak{h} r \varsigma (q^d - 1) \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi)$: le choix de la constante c_1 ..	53
$c_2 := 4^{q^d}$: le choix de la constante c_2	53
i : un entier suffisamment grand	50
$H_1 := \text{Gal}(E(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu_i}]) / E)$: le groupe de Galois de l'extension	
$E(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu_i}]) / E$	50
$G_1 := \text{Gal}(H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu_i}]) / H_F^+)$: le groupe de Galois de l'extension	
$H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu_i}]) / H_F^+$	51
$B := d_1[K : H_F^+] + 1$: le choix de l'entier B	51
σ_a : le symbole d'Artin associé à l'idéal (a) de $\mathcal{O}_F$ où $a \in \mathcal{O}_F$	51
$\beta := (\mu_\psi(b) \tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a) \tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\alpha) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha)$: un élément de L ..	52
η : un élément du groupe de Galois de l'extension $L(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu_i}]) / E$...	54
$\theta := \eta(\beta) - \beta$: un élément de $\psi[\mathfrak{m}^\infty] \setminus \{0\}$	54
$\delta := \eta(\alpha) - \alpha$: un élément de $L(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu_i}])$	54
δ_1 : un point de torsion de ψ d'ordre un multiple de $\mathfrak{m}$ ($\delta = \delta_1 + \delta_2$) ..	55
δ_2 : un point de torsion de ψ d'ordre premier à $\mathfrak{m}$ ($\delta = \delta_1 + \delta_2$)	55

Notations de la partie 3.5

$c_0 = 11 \mathfrak{h} r \varsigma q^d \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) \max\{1, \deg_R \mathfrak{C}\} [F_\phi(z) : k]^2$: le choix de la constante c_0	58
$F_\phi(z)$: le corps engendré sur F_ϕ par z	56
$K_1 := K F_\phi(z)$: le compositum des corps K et $F_\phi(z)$	56
$L_1 := L F_\phi(z)$: le compositum des corps L et $F_\phi(z)$	56
$G_1 := \text{Gal}(L_1/K_1)$: le groupe de Galois de l'extension L_1/K_1	56
$E_1 := L_1^{Z(G_1)}$: le sous-corps de L_1 fixé par le centre de G_1	56
$E_0 := E F_\phi(z)$: le compositum des corps E et $F_\phi(z)$	56
v_1 : une place de K_1 au-dessus de v	57
w_1 : une place de E_1 au-dessus de v_1	57
w_0 : la restriction de w_1 à E_0	57
w : la restriction de w_0 à E	57
L'/K : une extension galoisienne finie telle que $L' \subset L$	58
$G' := \text{Gal}(L'/K)$: le groupe de Galois de l'extension L'/K	58
$E' := L' \cap E$: l'intersection des corps L' et E	58
$c'_0 := 11 \mathfrak{h} r \varsigma q^d \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) \max\{1, \deg_R \mathfrak{C}\}$: le choix de la constante c'_0	58

Notations de l'annexe A

Notations de la partie A.1

K/k : une extension finie	61
L/K : une extension galoisienne finie (abélienne par la suite)	61
$G := \text{Gal}(L/K)$: le groupe de Galois de l'extension L/K	61
$\mathfrak{p}$: un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_K$	61
$\mathfrak{P}$: un idéal premier de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p}$	61
$e := e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ l'indice de ramification de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$	61
$f := f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$: le degré d'inertie de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$	61
$v_{\mathfrak{P}}$: la valuation discrète associée à $\mathfrak{P}$	61
$\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} := \{x \in L \mid v_{\mathfrak{P}}(x) \geq 0\}$: l'anneau de valuation discrète associé à $\mathfrak{P}$	61
ϖ : une uniformisante de $\mathfrak{P}$	61
$G_{-1} = G_{-1}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) := \{\sigma \in G \mid \sigma\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\}$: le groupe de décomposition de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$	62
$G_0 = G_0(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) := \{\sigma \in G \mid \forall \gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}, \sigma(\gamma) \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{P}}\}$: le groupe d'inertie de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$	62
$G_i = G_i(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) := \{\sigma \in G \mid \forall \gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}, \sigma(\gamma) \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}\}$: l' i -ème groupe de ramification de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ où $i \in \mathbb{N}$	62
$\theta_0 : G_0/G_1 \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P})^\times$: l'application définie par $\sigma \mapsto \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi}$	64
$\theta_i : G_i/G_{i+1} \rightarrow \mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1}$: l'application définie par $\sigma \mapsto \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} - 1$ où $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	64
$H_{\mathfrak{p}} := \{\sigma \in G \mid \forall \gamma \in \mathcal{O}_L, \sigma(\gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \equiv \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \pmod{\mathfrak{p}\mathcal{O}_L}\}$: un sous-groupe non trivial du groupe d'inertie de $\mathfrak{p}$ sur L	68

Notations de la partie A.2

K/k : une extension finie	71
$\mathcal{P}$: l'ensemble des polynômes irréductibles et unitaires de A	73
$\mathcal{M}_k \simeq \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$: l'ensemble des places de k	73
$a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$: une place de k	73
$v_a : k \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$: la valuation associée à a	73
k_{v_a} : le complété de k en v_a	73
$i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$: un entier non divisible par la caractéristique de k	74
$P_{a,i}(X) := X^p - X - a^{-i}$: un polynôme de $k[X]$	74
$\theta_{a,i}$: une racine du polynôme $P_{a,i}$	74
$\Lambda_{a,v_a} := \{k_{v_a}(\theta_{a,i}) \mid i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}\}$: une famille d'extensions de k	75

$\Lambda := \{k(\theta_{a,i}) \mid a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}, i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}\}$: une famille d'extensions de k	78
$\Lambda_a := \{k(\theta_{a,i}) \mid i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}\}$: une famille d'extensions de k	79
L_a : le compositum des corps de la famille Λ_a	79
w : une place de L_a	79
$L_{a,w}$: le complété de L_a en la place w	79
L : le compositum des corps de la famille Λ	79
$\Lambda_i := \{k(\theta_{a,i}) \mid a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}\}$: une famille d'extensions de k	80
L_i : le compositum des corps de la famille Λ_i	80
$\Lambda_{i \setminus a} := \{k(\theta_{b,i}) \mid b \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\} \setminus \{a\}\}$: une famille d'extensions de k ..	80
$L_{i \setminus a}$: le compositum des corps de la famille $\Lambda_{i \setminus a}$	80

CHAPITRE 2

PRÉLIMINAIRES

2.1. Préambule

2.1.1. Notations générales

Soient p un nombre premier et q une puissance de p . On considère $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments, $A := \mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ en l'indéterminée T et k le corps des fractions de A .

Soit $a \in A \setminus \{0\}$, on note $\deg_T a$ le degré de a en tant que polynôme en T . On rappelle que par convention $\deg_T 0 := -\infty$ et qu'on peut étendre à k la fonction degré en posant pour tout $\alpha \in k^*$:

$$\deg_T \alpha := \deg_T a - \deg_T b$$

où $\alpha = \frac{a}{b}$ avec $a \in A$ et $b \in A \setminus \{0\}$.

Soient ∞ la place en $\frac{1}{T}$ et $k_\infty := \mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$ le corps des séries de Laurent sur $\mathbb{F}_q$. Alors k_∞ est un complété de k pour la valuation $\frac{1}{T}$ -adique :

$$v_\infty := -\deg_T .$$

On fixe $\bar{k}_\infty$ une clôture algébrique de k_∞ et $\mathbb{C}_\infty$ un complété de $\bar{k}_\infty$ pour la valuation v_∞ que l'on a étendue naturellement à $\bar{k}_\infty$.

Ensuite, on normalise sur $\mathbb{C}_\infty$ la valeur absolue associée à la valuation v_∞ en posant :

$$|\cdot|_\infty := q^{-v_\infty(\cdot)}.$$

On note respectivement $\bar{k}$ la fermeture algébrique de k dans $\mathbb{C}_\infty$ et $\bar{\mathbb{F}}_q$ celle de $\mathbb{F}_q$ dans $\mathbb{C}_\infty$.

Soit K/k une extension finie, on désigne par $[K : k]$ le degré de cette extension, par $K^* := K \setminus \{0\}$ l'ensemble des éléments inversibles de K ,

par $\tilde{K} := K \cap \overline{\mathbb{F}_q}$ le corps des constantes de K , par $\mathcal{O}_K$ la fermeture intégrale de A dans K , par $\overline{K}$ la fermeture algébrique de K dans $\mathbb{C}_\infty$, par K_∞ le complété de K dans $\mathbb{C}_\infty$ pour la valuation v_∞ , par K^{ab} la fermeture abélienne de K dans $\mathbb{C}_\infty$ et par K^{sep} la fermeture séparable de K dans $\mathbb{C}_\infty$.

Si L est une extension galoisienne de K , on note $\text{Gal}(L/K)$ son groupe de Galois.

Si E est un ensemble, on note $\#E$ son cardinal.

2.1.2. Places et degrés

Pour tout ce paragraphe on se référera à [Sti09].

Soient K une extension finie de k et $\mathcal{M}_K$ l'ensemble des places non triviales de K . Si $v \in \mathcal{M}_K$, on note $v : K \mapsto \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation associée et $|\cdot|_v := q^{-v(\cdot)}$ la valeur absolue normalisée associée. On note également $\mathcal{O}_v := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ son anneau de valuation, $\mathfrak{m}_v := \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ son idéal maximal, $\mathbb{F}_v := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ son corps résiduel, et $\deg v := [\mathbb{F}_v : \mathbb{F}_q]$ son degré sur $\mathbb{F}_q$.

On rappelle les deux théorèmes suivants qui nous seront utiles par la suite et qui lient les places entre elles :

Théorème 2.1.1 (formule du produit). — *Soit K une extension finie de k . Pour tout $\alpha \in K^*$, on a $|\alpha|_v = 1$ pour presque toute place v de K et :*

$$\prod_{v \in \mathcal{M}_K} |\alpha|_v^{\deg v} = 1.$$

Ou bien de façon additive :

$$\sum_{v \in \mathcal{M}_K} \deg v \cdot \log_q |\alpha|_v = 0.$$

Démonstration. — Voir le théorème 3 du §3 du chapitre *XII* de [Art67].

□

Théorème 2.1.2 (d'approximation forte). — Soient $E \subset \mathcal{M}_K$ un sous-ensemble strict, $j \geq 0$ un entier et $v_1, \dots, v_j \in E$ des places distinctes. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in K$ et $e_1, \dots, e_j \in \mathbb{Z}$. Alors, il existe $\alpha \in K$ tel que :

1. pour tout $i \in \{1, \dots, j\}$, on a $v_i(\alpha_i - \alpha) = e_i$;
2. pour tout $v \in E \setminus \{v_1, \dots, v_j\}$, on a $v(\alpha) \geq 0$.

Démonstration. — Voir le théorème 1.6.5 de [Sti09]. $\square$

Soit L une extension finie de K . Si w est une place de L au-dessus de v (ce que l'on note $w|v$), on pose $f(w/v) := [\mathbb{F}_w : \mathbb{F}_v]$ le degré résiduel de w sur v et $e(w/v)$ l'indice de ramification de w sur v , c'est-à-dire l'unique entier tel que pour tout $\alpha \in K$ on a :

$$w(\alpha) = e(w/v) v(\alpha).$$

On note K_v le complété de K en la place v et L_w celui de L en w . On appelle degré local de w sur v le degré de l'extension L_w/K_v et on rappelle qu'on a (cf. Chap.II §3 th.1 de [Ser68]) :

$$[L_w : K_v] = e(w/v) f(w/v).$$

Théorème 2.1.3 (égalité fondamentale). — Soit L une extension finie de K . Soient v une place de K et $\{w_1, \dots, w_j\}$ l'ensemble des places distinctes de L au-dessus de v , alors :

$$\sum_{i=1}^j [L_{w_i} : K_v] = [L : K].$$

Démonstration. — Voir le théorème 3.1.11 de [Sti09]. $\square$

De plus, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_K$ et si $v_{\mathfrak{p}}$ est la valuation associée à $\mathfrak{p}$, alors en posant $\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} := \log_q \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$, où $\log_q$ est le logarithme de base q et $\#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$ est le cardinal de l'anneau quotient $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$, on a :

- $\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} = \deg v_{\mathfrak{p}}$;
- $\mathfrak{m}_v = \mathfrak{p}\mathcal{O}_v$;
- $\mathbb{F}_v \simeq \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$.

Soit F/k une extension finie. Soit R un *ordre* de F , *i.e.* un sous- A -module de $\mathcal{O}_F$ de rang maximal. Rappelons que dans ce cas F est le corps des fractions de R . Rappelons également que $\mathcal{O}_F$ est l'*ordre maximal* de F (pour l'inclusion).

Pour tout idéal non nul $\mathfrak{a}$ de R , on définit :

$$\deg_R \mathfrak{a} := \log_q \#(R/\mathfrak{a}) .$$

On étend la définition précédente à tout élément non nul $\gamma \in R$ en posant :

$$\deg_R \gamma := \deg_R(\gamma),$$

où $(\gamma) := \gamma R$ est l'idéal de R engendré par γ . En particulier, pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, on a $\deg_A a = \deg_T a$.

2.2. Modules de Drinfeld

Dans cette partie on se référera à [Gos96], [Hay79] et [Hay92].

2.2.1. Anneau des polynômes en le Frobenius

Soit $L \subset \mathbb{C}_\infty$ une extension de k . Un polynôme $P \in L[X]$ est dit additif si :

$$P(X + Y) = P(X) + P(Y).$$

Si de plus pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q$ on a :

$$P(\lambda X) = \lambda P(X),$$

alors P est dit $\mathbb{F}_q$ -linéaire.

D'après le §1.1 de [Gos96], un polynôme $P \in L[X]$ est $\mathbb{F}_q$ -linéaire si et seulement s'il est de la forme :

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X^q + \cdots + \alpha_j X^{q^j}$$

avec $j \in \mathbb{N}$ et $\alpha_i \in L$ pour tout $i \in \{0, \dots, j\}$. En notant τ l'application de Frobenius associée à $\mathbb{F}_q$ (i.e. $\tau(x) = x^q$ pour tout $x \in \mathbb{C}_\infty$), on peut réécrire P sous la forme :

$$P = \alpha_0 \tau^0 + \alpha_1 \tau + \cdots + \alpha_j \tau^j$$

avec $\tau^i = \underbrace{\tau \circ \cdots \circ \tau}_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des polynômes $\mathbb{F}_q$ -linéaires muni de l'addition et de la composition est une L -algèbre non commutative qu'on note $L\{\tau\}$ et qu'on appelle *anneau des polynômes en le Frobenius*. Dans la littérature, l'anneau $L\{\tau\}$ est parfois nommé *anneau de Öre* ou *anneau des polynômes tordus*. Par la suite, pour $P, Q \in L\{\tau\}$ on notera toujours $PQ := P \circ Q$.

Soit $P \in L\{\tau\}$, on définit $\deg_\tau P$ le degré de P en tant que polynôme en τ . Muni du degré en τ , l'anneau $L\{\tau\}$ est euclidien à droite, c'est-à-dire que pour tous $P \in L\{\tau\}$ et $Q \in L\{\tau\} \setminus \{0\}$, il existe un unique couple (S, R) de polynômes de $L\{\tau\}$ tel que :

$$\begin{cases} P = SQ + R \\ \deg_\tau R < \deg_\tau Q \end{cases}.$$

L'anneau $L\{\tau\}$ étant euclidien à droite, il est principal à gauche, c'est-à-dire que pour tout idéal à gauche I de $L\{\tau\}$, il existe un polynôme $P \in L\{\tau\}$ tel que $I = L\{\tau\}P$.

On note D la dérivation formelle des polynômes de $L[X]$. Si $P \in L\{\tau\}$ alors DP est le coefficient du monôme en τ^0 de P .

2.2.2. Modules de Drinfeld

Un A -module de Drinfeld ϕ est un morphisme de $\mathbb{F}_q$ -algèbres :

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty\{\tau\} , \\ a &\longmapsto \phi_a \end{aligned}$$

tel que la condition de normalisation suivante soit satisfaite : pour tout $a \in A$, on a $D\phi_a = a$ (i.e. $\phi_a = a\tau^0 + \dots$). On demandera de plus à ϕ d'être non trivial, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ vérifiant $\phi_a \neq a\tau^0$. Comme T engendre A en tant que $\mathbb{F}_q$ -algèbre, un A -module de Drinfeld est uniquement déterminé par ϕ_T .

On appelle *rang* de ϕ l'entier naturel non nul $r := \deg_\tau \phi_T$. Le polynôme ϕ_T est donc de la forme :

$$\phi_T = T\tau^0 + b_1\tau + \dots + b_r\tau^r,$$

où $b_i \in \mathbb{C}_\infty$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. On vérifie aisément que pour tout $a \in A$, on a :

$$\deg_\tau \phi_a = r \deg_T a.$$

Le premier exemple de A -module de Drinfeld est le *module de Carlitz* : il est de rang 1 et donné par $C_T := T\tau^0 + \tau$.

On peut généraliser la théorie des modules de Drinfeld en suivant [Hay79]. Soit F/k une extension finie de type CM, c'est-à-dire que F ne possède qu'une seule place au-dessus de ∞ . Soit R un ordre de F . On dira que $\rho : R \longrightarrow \mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ est un R -module de Drinfeld si pour tout $a \in R$, on a $D\rho_a = a$ et s'il existe $a \in R$ vérifiant $\rho_a \neq a\tau^0$.

D'après la proposition 2.3 de [Hay79], il existe un entier $r > 0$ tel que pour tout $a \in R \setminus \{0\}$, on ait :

$$\deg_\tau \rho_a = r \deg_R a.$$

Cet entier est appelé le *rang* de ρ .

On note $H_\rho \subset \mathbb{C}_\infty$ le corps engendré sur k par les coefficients des polynômes $\{\rho_a\}_{a \in R}$ de $\mathbb{C}_\infty\{\tau\}$. On dira que ρ est défini sur $L \subset \mathbb{C}_\infty$ si $H_\rho \subset L$, i.e. $\rho : R \longrightarrow L\{\tau\}$.

Comme F/k est une extension finie, R est un A -module libre de rang $t := [F : k]$. Si $(e_1, \dots, e_t)$ est une base de R en tant que A -module, alors H_ρ est le corps engendré sur k par les coefficients des polynômes $\rho_T \in \mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ et $\{\rho_{e_i}\}_{1 \leq i \leq t}$. On remarque par ailleurs que si ρ est défini sur $\bar{k}$, alors H_ρ est une extension finie de k contenant F (car $D\rho_a = a$, pour tout $a \in R$).

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de R , on note $\rho_{\mathfrak{a}}$ le générateur unitaire de l'idéal à gauche de $\bar{k}\{\tau\}$ engendré par la famille $\{\rho_a\}_{a \in \mathfrak{a}}$.

2.2.3. Réseaux et modules de Drinfeld

Soit F/k une extension finie de type CM. On note ∞' l'unique place de F au-dessus de ∞ , $F_{\infty'} \subset \mathbb{C}_\infty$ le complété de F pour l'unique prolongement de v_∞ à F et $\tilde{F} := F \cap \bar{\mathbb{F}}_q$ le corps des constantes de F . Soient R un ordre de F et $\mathbf{K}/F_{\infty'}$ une extension finie. On note $\mathbf{K}^{\text{sep}}$ la fermeture séparable de $\mathbf{K}$ dans $\mathbb{C}_\infty$.

Définition 2.2.1. — Un R -réseau sur $\mathbf{K}$ est un sous- R -module de type fini de $\mathbf{K}^{\text{sep}}$, discret⁽¹⁾ et stable sous l'action de $\text{Gal}(\mathbf{K}^{\text{sep}}/\mathbf{K})$.

Soit $\mathcal{L}$ un R -réseau sur $\mathbf{K}$. On associe à $\mathcal{L}$ une fonction $e_{\mathcal{L}}$ appelée *exponentielle* de $\mathcal{L}$ et définie par :

$$e_{\mathcal{L}}(x) := x \prod_{\alpha \in \mathcal{L} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right).$$

Cette fonction converge pour tout $x \in \mathbb{C}_\infty$ et admet un développement de Taylor en zéro à coefficients dans $\mathbf{K}$. De plus, $e_{\mathcal{L}}$ est $\tilde{F}$ -linéaire et induit l'isomorphisme de groupes abéliens suivant :

$$\mathbb{C}_\infty/\mathcal{L} \xrightarrow{e_{\mathcal{L}}} \mathbb{C}_\infty.$$

Pour tout $a \in R \setminus \{0\}$ on a :

$$e_{\mathcal{L}}(ax) = a e_{\mathcal{L}}(x) \prod_{\alpha \in (a^{-1}\mathcal{L}/\mathcal{L}) \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{e_{\mathcal{L}}(x)}{e_{\mathcal{L}}(\alpha)}\right).$$

1. On dira qu'un ensemble $E \subset \mathbb{C}_\infty$ est discret pour la topologie de $\mathbb{C}_\infty$ si toute boule finie de $\mathbb{C}_\infty$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de E .

Ainsi, en posant $\rho_0 := 0\tau^0$ et pour tout $a \in R \setminus \{0\}$:

$$\rho_a(x) := ax \prod_{\alpha \in (a^{-1}\mathcal{L}/\mathcal{L}) \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{x}{e_{\mathcal{L}}(\alpha)}\right),$$

l'application :

$$\begin{aligned} \rho : R &\longrightarrow \mathbf{K}\{\tau\} , \\ a &\longmapsto \rho_a \end{aligned}$$

est un R -module de Drinfeld. C'est le R -module de Drinfeld associé à $\mathcal{L}$ et il est de même rang que $\mathcal{L}$ en tant que R -module.

Réciproquement, soit ρ un R -module de Drinfeld défini sur $\mathbf{K}$. On note $\mathbf{K}\{\{\tau\}\}$ l'*anneau des séries formelles en le Frobenius* à coefficients dans $\mathbf{K}$. Étant donné que pour tout $a \in R \setminus \{0\}$ on a $D\rho_a = a$, la fraction rationnelle τ^0/ρ_a admet formellement un développement en une série de $\mathbf{K}\{\{\tau\}\}$. On peut donc associer à ρ ce qu'on appelle un *F-module formel*, c'est-à-dire un morphisme (que l'on note encore ρ car il est unique) :

$$\rho : F \longrightarrow \mathbf{K}\{\{\tau\}\}$$

qui vérifie $D\rho_\alpha = \alpha\tau^0$ pour tout $\alpha \in F^*$.

De plus, d'après la proposition 5.5 de [Hay79], il existe une unique série formelle $e_\rho \in \mathbf{K}\{\{\tau\}\}$ qui vérifie $De_\rho = 1$ et telle que pour tout $\alpha \in F^*$ on ait :

$$\rho_\alpha = e_\rho \alpha e_\rho^{-1}.$$

La série e_ρ définit une fonction $e_\rho : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ appelée *exponentielle* de ρ . L'ensemble $\mathcal{L}$ des zéros de e_ρ est un R -réseau sur $\mathbf{K}$. C'est le R -réseau associé à ρ et il est de même rang que ρ .

2.2.4. Morphismes entre modules de Drinfeld

Soient ρ et ϱ deux R -modules de Drinfeld. Un *morphisme* de ρ vers ϱ est un polynôme $P \in \mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ vérifiant $P\rho_a = \varrho_a P$ pour tout $a \in R$. Un morphisme non nul de ρ vers ϱ est appelé *isogénie*. On remarque que si ρ et ϱ sont isogènes, alors ils ont nécessairement même rang. Un *isomorphisme* de ρ vers ϱ est une isogénie inversible, c'est donc un élément de $\mathbb{C}_\infty^*$.

Soient maintenant $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ les R -réseaux associés respectivement à ρ et ϱ et supposons que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ aient même rang. Un *morphisme* de $\mathcal{L}_1$ vers $\mathcal{L}_2$ est un élément $c \in \mathbb{C}_\infty$ vérifiant $c\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$.

Soit $c \in \mathbb{C}_\infty^*$ un morphisme de $\mathcal{L}_1$ vers $\mathcal{L}_2$. D'après la proposition 4.3.5 de [Gos96], il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ tel que pour tout $a \in R$, on a :

$$P \rho_a = \varrho_a P.$$

Ce polynôme vérifie $DP = c$ et il est défini par :

$$P(x) := cx \prod_{\alpha \in (c^{-1}\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_1) \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{x}{e_{\mathcal{L}_1}(\alpha)}\right). \quad (1)$$

Ainsi

$$P(e_{\mathcal{L}_1}(x)) = e_{\mathcal{L}_2}(cx),$$

ce qu'on peut résumer par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_\infty/\mathcal{L}_1 & \xrightarrow{c} & \mathbb{C}_\infty/\mathcal{L}_2 \\ e_{\mathcal{L}_1} \downarrow \wr & & e_{\mathcal{L}_2} \downarrow \wr \\ \mathbb{C}_\infty & \xrightarrow{P} & \mathbb{C}_\infty \end{array}$$

Autrement dit on a une équivalence de catégories entre les R -modules de Drinfeld de rang r définis sur $\mathbf{K}$ et les R -réseaux sur $\mathbf{K}$ de rang r .

2.2.5. Endomorphismes d'un module de Drinfeld

Dorénavant par module de Drinfeld on entendra module de Drinfeld défini sur $\bar{k}$.

Soit ϕ un A -module de Drinfeld de rang r . Un *endomorphisme* de ϕ est un morphisme de ϕ vers ϕ . Ainsi, un endomorphisme P de ϕ sur $\bar{k}$ est un polynôme $P \in \bar{k}\{\tau\}$ qui vérifie la règle de commutation :

$$\forall a \in A, P \phi_a = \phi_a P.$$

On note $\text{End}(\phi)$ l'ensemble des endomorphismes de ϕ sur $\bar{k}$. L'anneau $\text{End}(\phi)$ est un A -module de rang $\leq r$ (cf. cor. de la prop. 2.4. de [Dri74]) via l'action de ϕ . On dira que ϕ est à *multiplications complexes* (en abrégé CM) si $\text{End}(\phi)$ est un A -module de rang r .

Soit $\mathcal{L}$ le A -réseau associé à ϕ . Un *endomorphisme* de $\mathcal{L}$ sur $\bar{k}$ est un morphisme sur $\bar{k}$ de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{L}$, c'est donc un élément $c \in \bar{k}$ tel que $c\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$. On note $R := \text{End}(\mathcal{L}) \subset \bar{k}$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{L}$ sur $\bar{k}$. Comme $\mathcal{L}$ est un A -module, il en est de même de R .

Soit $c \in R \setminus \{0\}$, d'après la formule (1) p. 9, le polynôme $\phi'_c \in \bar{k}\{\tau\}$ défini par :

$$\phi'_c(x) := cx \prod_{\alpha \in (c^{-1}\mathcal{L}/\mathcal{L}) \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{x}{e_{\mathcal{L}}(\alpha)}\right),$$

est un endomorphisme de ϕ vérifiant $D\phi'_c = c$. On a donc l'isomorphisme de A -modules suivant :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\sim} & \text{End}(\phi) \\ c & \longmapsto & \phi'_c \end{array} \quad (2)$$

Ainsi $\text{End}(\phi)$ se plonge naturellement dans $\bar{k}$ via l'application $P \longmapsto DP$.

D'après le corollaire 4.7.15 de [Gos96], R est un ordre d'une extension finie F de k . De plus cette extension est de type CM (voir la preuve du théorème 4.7.17 de [Gos96]) de degré égal au rang t de R en tant que A -module. L'application $\phi' : c \longmapsto \phi'_c$ définit donc naturellement une structure de R -module de Drinfeld de rang $\frac{r}{t}$ qui étend celle de ϕ , *i.e.* :

$$\forall a \in A, \phi'_a = \phi_a. \quad (3)$$

En particulier, si ϕ est à multiplications complexes (*i.e.* $t = r$), alors ϕ' est de rang 1.

2.2.6. Points de torsion et idéaux

Soient F/k une extension finie de type CM, R un ordre de F , ϕ' un R -module de Drinfeld de rang r' et $H_{\phi'}$ le corps des coefficients de ϕ' (cf. §2.2.2).

Soit $a \in R \setminus \{0\}$. Un *point de a -torsion* de ϕ' est un élément $\delta \in \bar{k}$ tel que $\phi'_a(\delta) = 0$. On note $\phi'[a]$ l'ensemble des points de a -torsion, c'est un R -module via ϕ' qui est isomorphe à $(R/(a))^{r'}$. Plus généralement, on dit qu'un élément $\delta \in \bar{k}$ est un *point de torsion* de ϕ' si c'est un point de a -torsion pour un certain $a \in R \setminus \{0\}$.

De façon générale, si $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de R , un *point de $\mathfrak{a}$ -torsion* de ϕ' est un élément $\delta \in \bar{k}$ tel que $\phi'_a(\delta) = 0$ pour tout $a \in \mathfrak{a}$. On note $\phi'[\mathfrak{a}]$ l'ensemble des points de $\mathfrak{a}$ -torsion, c'est un R -module via ϕ' . On note également $\phi'[\mathfrak{a}^\infty] := \cup_{i \geq 1} \phi'[\mathfrak{a}^i]$. Soit ϕ'_a le générateur unitaire de l'idéal à gauche de $\bar{k}\{\tau\}$ engendré par la famille $\{\phi'_a\}_{a \in \mathfrak{a}}$. On a alors l'équivalence :

$$\delta \in \phi'[\mathfrak{a}] \iff \phi'_a(\delta) = 0.$$

Si $L \subseteq \bar{k}$ est une extension de k , on note $\phi'(L)_{\text{tors}}$ l'ensemble des points de torsion de ϕ' dans L . De plus, si ϕ' est défini sur L , alors $\phi'(L)_{\text{tors}}$ est un R -module via l'action de ϕ' .

Le lemme suivant montre qu'on ne « perd pas » de points de torsion lorsqu'on restreint l'anneau des scalaires d'un module de Drinfeld.

Lemme 2.2.2. — *Soient ϕ' un R -module de Drinfeld et ϕ sa restriction à A . Alors, on a :*

$$\phi(\bar{k})_{\text{tors}} = \phi'(\bar{k})_{\text{tors}}.$$

Démonstration. — Comme $A \subseteq R$, il est clair que $\phi(\bar{k})_{\text{tors}} \subseteq \phi'(\bar{k})_{\text{tors}}$. Réciproquement, soient $a \in R \setminus A$ et $\delta \in \phi'[a]$. L'extension F/k étant finie et l'anneau R étant un ordre de F , tout élément de R est entier sur A . En particulier, il existe un polynôme

$$P(X) = b + b_1 X + \cdots + b_n X^n \in A[X]$$

avec $b \neq 0$ et $b_n = 1$ tel que $P(a) = 0$. D'où :

$$\phi'_{P(a)}(\delta) = \phi_b(\delta) + \phi_{b_1} \phi'_a(\delta) + \cdots + \phi_{b_n} \phi'_a{}^n(\delta).$$

Or $\phi'_a(\delta) = 0$, d'où $\phi'_{P(a)}(\delta) = \phi_b(\delta)$. D'autre part, $P(a) = 0$ donc $\phi'_{P(a)}(\delta) = 0$. Ainsi, $\phi_b(\delta) = 0$ et donc δ est un point de b -torsion de ϕ . $\square$

Soit $\delta \in \bar{k}$ un point de torsion de ϕ' . On appelle *ordre* de δ l'idéal $\mathfrak{I}_{\phi'}(\delta) := \{a \in R \mid \phi'_a(\delta) = 0\}$, c'est le plus grand idéal annulateur de δ via l'action de ϕ' . Soit $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de R . S'il existe un entier $i \geq 0$ tel que $\mathfrak{I}_{\phi'}(\delta) = \mathfrak{a}^i$ (i.e. $\delta \in \phi'[\mathfrak{a}^\infty]$), on dit que δ est *d'ordre une puissance* de $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{I}_{\phi'}(\delta)$ est premier à $\mathfrak{a}$, on dit que δ est *d'ordre premier* à $\mathfrak{a}$. On remarque immédiatement que δ est d'ordre premier à $\mathfrak{a}$ si et seulement s'il existe un idéal non nul $\mathfrak{b}$ de R premier à $\mathfrak{a}$ tel que $\delta \in \phi'[\mathfrak{b}]$ (en effet, dans ce cas $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{I}_{\phi'}(\delta)$).

Lorsque $R = \mathcal{O}_F$, le lemme suivant montre qu'on peut décomposer un point de torsion suivant un idéal premier non nul fixé de $\mathcal{O}_F$.

Lemme 2.2.3. — *Soient $\mathfrak{m}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$ et $\delta \in \bar{k}$ un point de torsion pour ϕ' . Alors, il existe $\delta_1 \in H_{\phi'}(\delta)$ un point de torsion pour ϕ' d'ordre une puissance de $\mathfrak{m}$ et $\delta_2 \in H_{\phi'}(\delta)$ un point de torsion pour ϕ' d'ordre premier à $\mathfrak{m}$ tels que $\delta = \delta_1 + \delta_2$.*

Démonstration. — Soit $a \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$ tel que $\phi'_a(\delta) = 0$. Écrivons $(a) = \mathfrak{m}^g \mathfrak{b}$ avec $g \geq 0$ un entier et $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathcal{O}_F$ premier à $\mathfrak{m}$. Alors $\mathfrak{m}^g$ et $\mathfrak{b}$ sont premiers entre eux, donc $\mathfrak{m}^g + \mathfrak{b} = \mathcal{O}_F$. Ainsi, il existe $u \in \mathfrak{b}$ et $v \in \mathfrak{m}^g$ tels que $u + v = 1$. D'où

$$\delta = \phi'_1(\delta) = \phi'_u(\delta) + \phi'_v(\delta).$$

Posons $\delta_1 := \phi'_u(\delta)$ et $\delta_2 := \phi'_v(\delta)$. On va vérifier que $\delta_1 \in \phi'[\mathfrak{m}^\infty]$ et $\delta_2 \in \phi'[\mathfrak{b}]$. Soit m un élément de $\mathfrak{m}^g$. On a $mu \in \mathfrak{m}^g \mathfrak{b} = (a)$, il existe donc $c \in \mathcal{O}_F$ tel que $mu = ac$. On en déduit

$$\phi'_m(\delta_1) = \phi'_{mu}(\delta) = \phi'_{ac}(\delta) = \phi'_c(\phi'_a(\delta)) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $m \in \mathfrak{m}^g$, on a bien $\delta_1 \in \phi'[\mathfrak{m}^g]$ comme annoncé. Un raisonnement analogue montre que $\delta_2 \in \phi'[\mathfrak{b}]$. Le lemme est donc démontré. $\square$

Soient ρ et ϱ deux R -modules de Drinfeld isogènes sur $\bar{k}$ dont l'isogénie de ρ vers ϱ est donnée par $P \in \bar{k}\{\tau\}$ (i.e. $\forall a \in R, P\rho_a = \varrho_a P$). Alors, on a l'isomorphisme de R -modules suivant :

$$\begin{array}{ccc} \rho(\bar{k})_{\text{tors}} & \xrightarrow{\sim} & \varrho(\bar{k})_{\text{tors}} \\ \alpha & \longmapsto & P(\alpha) \end{array}.$$

2.2.7. Théorie de Hayes

Nous rassemblons dans ce paragraphe des résultats dus à Hayes qui seront essentiels pour la suite.

Soient F/k une extension finie de type CM et R un ordre de F . On note ∞' l'unique place de F au-dessus de ∞ et $d := \deg \infty'$ son degré. Soient $\mathbb{F}_{\infty'}$ le corps résiduel de ∞' (qui est donc isomorphe à $\mathbb{F}_{q^d}$), $v_{\infty'}$ l'unique extension de v_∞ à F et $F_{\infty'}$ le complété de F pour $v_{\infty'}$.

Proposition 2.2.4. — *Soit ρ un R -module de Drinfeld et $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de R . Alors il existe un unique R -module de Drinfeld ϱ tel que pour tout $a \in A$, on a :*

$$\rho_{\mathfrak{a}} \rho_a = \varrho_a \rho_{\mathfrak{a}}.$$

On notera $\mathfrak{a} * \rho$ le R -module ϱ .

Démonstration. — Voir le §3 de [Hay79]. $\square$

De plus, si on note $\text{End}(\mathfrak{a})$ l'ensemble des éléments $a \in \mathcal{O}_F$ tels que $a\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$, alors, d'après la proposition 3.2 de [Hay79], ϱ est en fait un $\text{End}(\mathfrak{a})$ -module de Drinfeld.

Nous utiliserons exclusivement le cas particulier suivant pour étendre à l'ordre maximal l'anneau des scalaires de nos modules de Drinfeld CM. Soit $\mathfrak{C} := \{a \in \mathcal{O}_F \mid a\mathcal{O}_F \subset R\}$ le *conducteur* de R (i.e. le plus grand idéal de $\mathcal{O}_F$ contenu dans R). On a alors $\text{End}(\mathfrak{C}) = \mathcal{O}_F$ et ce qui précède montre que ρ est isogène (via $\rho_{\mathfrak{C}}$) à un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld qui n'est autre que $\mathfrak{C} * \rho$.

Soit $\pi \in F$ une uniformisante de $v_{\infty'}$ (i.e. $v_{\infty'}(\pi) = 1$). On a alors $F_{\infty'} = \mathbb{F}_{\infty'}((\pi))$. Tout élément $\alpha \in F_{\infty'}^*$ peut donc s'écrire :

$$\alpha = \sum_{i \geq j} c_i \pi^i$$

où $j := v_{\infty'}(\alpha)$ et $c_i \in \mathbb{F}_{\infty'}$ pour tout entier $i \geq j$. En posant $\text{sgn}(\alpha) := c_j$ on définit alors, suivant la terminologie de Hayes, une *fonction signe* sur $F_{\infty'}$ (i.e. un morphisme de groupe $F_{\infty'}^* \longrightarrow \mathbb{F}_{\infty'}^*$ dont la restriction à $\mathbb{F}_{\infty'}^*$ est l'identité).

Soit ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de rang 1. Pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, on note $\mu_{\psi}(a) \in \bar{k}$ le coefficient dominant de ψ_a , c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré de $\psi_a \in \bar{k}\{\tau\}$. Pour tous $a \in \mathcal{O}_F$ et $b \in \mathcal{O}_F$ on a :

$$\mu_{\psi}(ab) = \mu_{\psi}(a) \mu_{\psi}(b)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_F} a}} \quad (4)$$

car

$$\psi_{ab} = \psi_a \psi_b.$$

Soient $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de $\mathcal{O}_F$ et $\psi_{\mathfrak{a}}$ le générateur unitaire de l'idéal à gauche de $\bar{k}\{\tau\}$ engendré par la famille $\{\psi_a\}_{a \in \mathfrak{a}}$. Si $\mathfrak{a}$ est principal engendré par $a \in \mathcal{O}_F$, alors on a :

$$\psi_a = \mu_{\psi}(a) \psi_{\mathfrak{a}}. \quad (5)$$

D'après le §6 de [Hay79], l'application $x \longmapsto \mu_{\psi}(x)$ s'étend en une application

$$\begin{array}{ccc} \mu_{\psi} : F_{\infty'} & \longrightarrow & \mathbb{C}_{\infty} \\ x & \longmapsto & \mu_{\psi}(x) \end{array}.$$

Définition 2.2.5. — Soit ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de rang 1. On dit que ψ est de *signe normalisé* s'il existe $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}_{\infty}/\mathbb{F}_q)$ tel que :

$$\mu_\psi = \sigma \circ \text{sgn}.$$

En particulier, si ψ est de signe normalisé, alors pour tout $a \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$, on a :

$$\mu_\psi(a) \in \mathbb{F}_{\infty'} \simeq \mathbb{F}_{q^d}^*, \quad (6)$$

car F est de type CM.

Soit φ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de rang 1. Alors, d'après le théorème 12.3 de [Hay92], φ est isomorphe à un module de Drinfeld de signe normalisé. Plus précisément :

Proposition 2.2.6. — Soient φ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de rang 1 et $z \in \bar{k}$ une racine du polynôme :

$$X^{q^d-1} - \mu_\varphi(\pi^{-1}).$$

Alors le $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld $\psi := z\varphi z^{-1}$ est de signe normalisé.

Démonstration. — Voir le théorème 12.3 de [Hay92]. $\square$

Soient ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé et H_ψ le corps engendré sur k par les coefficients des polynômes de la famille $\{\psi_a\}_{a \in \mathcal{O}_F}$ de $\bar{k}\{\tau\}$. Comme $\mu_\psi(a) \in \mathbb{F}_{\infty'}$ pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, d'après la proposition 11.3 de [Hay92], ψ est défini sur $\mathcal{O}_{H_\psi}$.

Par ailleurs, d'après le §14 de [Hay92], le corps H_ψ est indépendant du $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé, on le note H_F^+ . De plus, l'extension H_F^+/F est abélienne, finie (cf. prop. 14.1 de [Hay92]) et non ramifiée au-dessus de toutes les places finies de F (cf. Th. 14.4 de [Hay92]).

On peut donc associer à tout idéal premier non nul $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_F$ son *symbole d'Artin*, c'est-à-dire l'unique automorphisme $\sigma_{\mathfrak{m}} \in \text{Gal}(H_F^+/F)$ vérifiant :

$$\forall \gamma \in \mathcal{O}_{H_F^+}, \quad \sigma_{\mathfrak{m}}(\gamma) \equiv \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}}} \pmod{\mathfrak{n}}$$

où $\mathfrak{n}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{H_F^+}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$. Soient $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de $\mathcal{O}_F$ et $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{m}_j^{e_j}$ sa décomposition en produit d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_F$. On étend la définition du symbole d'Artin à tout idéal non nul $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_F$ en posant :

$$\sigma_{\mathfrak{a}} = \sigma_{\mathfrak{m}_1}^{e_1} \cdots \sigma_{\mathfrak{m}_j}^{e_j}.$$

Soit $H_F^+(\psi[\mathfrak{a}])$ le corps engendré sur H_F^+ par les points de $\mathfrak{a}$ -torsion de ψ . Alors, d'après la proposition 7.5.4 de [Gos96], l'extension $H_F^+(\psi[\mathfrak{a}])/F$ est abélienne et non ramifiée au-dessus de tout idéal premier de $\mathcal{O}_F$ qui ne divise pas $\mathfrak{a}$. Dans le cas des idéaux premier de $\mathcal{O}_F$ nous avons le résultat complémentaire suivant (cf. prop. 7.5.18 de [Gos96]) :

Proposition 2.2.7. — *Soient $\mathfrak{m}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$ et $i > 0$ un entier. Alors, l'extension $H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^i])/H_F^+$ est totalement ramifiée en tout premier de $\mathcal{O}_{H_F^+}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$.*

Soient $\lambda \in \bar{k}$ un point de $\mathfrak{a}$ -torsion, $\mathfrak{b}$ un idéal non nul de $\mathcal{O}_F$ premier à $\mathfrak{a}$ et $\sigma_{\mathfrak{b}} \in \text{Gal}(H_F^+(\psi[\mathfrak{a}])/F)$ le symbole d'Artin de $\mathfrak{b}$. Alors, toujours d'après la proposition 7.5.4 de [Gos96], on a :

$$\sigma_{\mathfrak{b}}(\lambda) = \psi_{\mathfrak{b}}(\lambda). \quad (7)$$

De plus, d'après le corollaire 7.5.6 de [Gos96], on a :

$$\text{Gal}(H_F^+(\psi[\mathfrak{a}])/H_F^+) \simeq (\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})^\times. \quad (8)$$

Soient $\mathfrak{m}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$ et $\mathfrak{n}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_{H_F^+}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ (i.e. $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathcal{O}_F$). D'après le corollaire 5.9 de [Hay92], pour tout entier $i \geq 1$ on a :

$$\psi_{\mathfrak{m}^i} \equiv \tau^{i \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}} \pmod{\mathfrak{n}}. \quad (9)$$

Nous voudrions maintenant pouvoir nous servir de cette congruence pour obtenir des minoration utiles par la suite. Le problème avec cette congruence est que $\psi_{\mathfrak{m}^i}$ n'est pas, en général, un endomorphisme de ψ . Pour que $\psi_{\mathfrak{m}^i}$ soit un endomorphisme de ψ il faut et il suffit qu'il existe $m \in \mathcal{O}_F$ tel que $\psi_m = \psi_{\mathfrak{m}^i}$. Il suffit donc que l'idéal $\mathfrak{m}^i$ soit principal et que l'un de ses générateurs $m \in \mathcal{O}_F$ vérifie $\mu_{\psi}(m) = 1$ (cf. (5) p. 13).

L'idée est donc de considérer une puissance suffisamment grande de l'idéal $\mathfrak{m}$. Pour cela, On note $\mathfrak{h}$ le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$ et $d := \deg \infty'$ le degré de la place ∞' . Alors $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$ est un idéal principal. On fixe $m \in \mathcal{O}_F$ un générateur de $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$. Pour tout entier $i > 0$, on a d'après (4) p. 13 :

$$\mu_{\psi}(m^i) = \mu_{\psi}(m)^{1+q^{\deg_{\mathcal{O}_F} m} + \dots + q^{(i-1)\deg_{\mathcal{O}_F} m}}.$$

Or $\mu_{\psi}(m) \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$ car ψ est de signe normalisé (cf. (6) p. 14). Donc si j et j' représentent respectivement le quotient et le reste de la division

euclidienne de i par d , alors :

$$\mu_\psi(m)^{q^{i \deg_{\mathcal{O}_F} m}} = \mu_\psi(m)^{q^{(jd+j') \deg_{\mathcal{O}_F} m}} = \mu_\psi(m)^{q^{j' \deg_{\mathcal{O}_F} m}}.$$

Ainsi,

$$\mu_\psi(m^{id}) = \left(\mu_\psi(m)^{1+q^{\deg_{\mathcal{O}_F} m} + \dots + q^{(d-1) \deg_{\mathcal{O}_F} m}} \right)^i.$$

En prenant $i = q^d - 1$, on obtient :

$$\mu_\psi(m^{d(q^d-1)}) = \left(\mu_\psi(m)^{1+q^{\deg_{\mathcal{O}_F} m} + \dots + q^{(d-1) \deg_{\mathcal{O}_F} m}} \right)^{q^d-1} = 1.$$

Soient K/H_F^+ et L/K deux extensions finies, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Posons

$$\nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_L} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}$$

(c'est bien un entier car $\mathcal{O}_L/\mathfrak{q}$ est une extension finie du corps fini $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}$), alors, d'après la congruence (9) p. 15 et la discussion ci-dessus, on a :

$$\psi_{m^\nu} = \psi_{\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu}} \equiv \tau^{\mathfrak{h} d(q^d-1) \deg_{\mathcal{O}_L} \mathfrak{q}} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Cela montre :

Proposition 2.2.8. — Soient F/k une extension CM finie, ∞' l'unique place de F au-dessus ∞ , d le degré sur $\mathbb{F}_q$ de la place ∞' , $\mathfrak{h}$ le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$ et ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé. Soient $\mathfrak{m}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$, $m \in \mathcal{O}_F$ un générateur de l'idéal principal $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$, K/H_F^+ et L/K deux extensions finies, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. On pose :

$$\nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_L} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}.$$

Alors on a :

$$\psi_{m^\nu} = \psi_{\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu}} \equiv \tau^{\mathfrak{h} d(q^d-1) \deg_{\mathcal{O}_L} \mathfrak{q}} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

2.3. Hauteur canonique d'un module de Drinfeld

2.3.1. Hauteur de Weil

Dans toute cette partie on se référera à [BG06] et [HS00].

Soient $\alpha \in \bar{k}$ et K une extension finie de k contenant α . La *hauteur logarithmique et absolue de Weil* de α , notée $h(\alpha)$, est définie par :

$$h(\alpha) := \frac{1}{[K : k]} \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \deg v \log_q \max\{1, |\alpha|_v\}.$$

Cette définition ne dépend pas de l'extension finie K choisie. Rappelons que la hauteur de Weil est une fonction positive qui ne s'annule qu'en zéro et les racines de l'unité et qu'elle est invariante par conjugaison (*i.e.* pour tout $\alpha \in \bar{k}$ et tout conjugué $\beta \in \bar{k}$ de α sur k , on a $h(\beta) = h(\alpha)$). Par ailleurs, elle vérifie la *propriété de Northcott* : pour tous réels $D > 0$ et $c > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de points $\alpha \in \bar{k}$ tels que $[k(\alpha) : k] \leq D$ et $h(\alpha) \leq c$.

De plus, pour tous $\alpha, \beta \in \bar{k}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

- $h(\alpha + \beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$;
- $h(\alpha \beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$;
- $h(\alpha^n) = |n| h(\alpha)$ où $|\cdot|$ est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer l'existence de la hauteur canonique associée à un module de Drinfeld nous aurons besoin du théorème suivant qui est la version affine du théorème B.2.5 de [HS00] qu'on applique à

$$\left(X_0^{\deg_X P}, X_0^{\deg_X P} P(X_1/X_0) \right)$$

et au point projectif $(1 : \alpha)$.

Théorème 2.3.1 (propriété fonctorielle de la hauteur)

Soit $P \in \bar{k}[X]$ un polynôme non constant dont on note $\deg_X P$ le degré. Il existe une constante $c(P) > 0$ qui ne dépend que du polynôme P telle que pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :

$$|h(P(\alpha)) - \deg_X P h(\alpha)| \leq c(P).$$

2.3.2. Hauteur canonique associée à un module de Drinfeld

La construction de L. Denis (*cf.* [Den92]) de la hauteur canonique d'un A -module de Drinfeld se généralise sans aucune difficulté aux R -modules de Drinfeld définis sur $\bar{k}$, où R est un ordre d'une extension CM finie de k . C'est l'objet de ce paragraphe.

Nous aurons besoin du lemme suivant qui se déduit de la propriété fonctorielle de la hauteur (*cf.* th. 2.3.1).

Lemme 2.3.2. — *Soient F/k une extension CM finie, R un ordre de F et ϕ' un R -module de Drinfeld de rang r' défini sur $\bar{k}$. Alors pour tout $a \in R \setminus \bar{\mathbb{F}}_q$, il existe une constante $c(\phi'_a) > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \bar{k}$ et tout entier $i \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} & \left| h(\phi'_{a^i}(\alpha)) - q^{i r' \deg_R a} h(\alpha) \right| \\ & \leq c(\phi'_a) \left(1 + q^{r' \deg_R a} + \dots + q^{(i-1) r' \deg_R a} \right) \\ & \leq c(\phi'_a) q^{i r' \deg_R a}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit $a \in R \setminus \bar{\mathbb{F}}_q$. D'après le théorème 2.3.1, il existe un réel $c(\phi'_a) > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :

$$\left| h(\phi'_a(\alpha)) - q^{r' \deg_R a} h(\alpha) \right| \leq c(\phi'_a).$$

Cela montre le résultat pour $i = 1$.

Supposons l'énoncé vrai pour $i \geq 1$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
& \left| h(\phi'_{a^{i+1}}(\alpha)) - q^{(i+1)r' \deg_R a} h(\alpha) \right| \\
&= \left| h((\phi'_a)^{i+1}(\alpha)) - q^{r' \deg_R a} h((\phi'_a)^i(\alpha)) \right. \\
&\quad \left. + q^{r' \deg_R a} h((\phi'_a)^i(\alpha)) - q^{(i+1)r' \deg_R a} h(\alpha) \right| \\
&\leq \left| h((\phi'_a)^{i+1}(\alpha)) - q^{r' \deg_R a} h((\phi'_a)^i(\alpha)) \right| \\
&\quad + \left| q^{r' \deg_R a} h((\phi'_a)^i(\alpha)) - q^{(i+1)r' \deg_R a} h(\alpha) \right| \\
&\leq c(\phi'_a) + q^{r' \deg_R a} \left| h((\phi'_a)^i(\alpha)) - q^{i r' \deg_R a} h(\alpha) \right| \\
&\leq c(\phi'_a) + c(\phi'_a) q^{r' \deg_R a} \left(1 + q^{r' \deg_R a} + \dots + q^{(i-1)r' \deg_R a} \right) \\
&\leq c(\phi'_a) \left(1 + q^{r' \deg_R a} + \dots + q^{i r' \deg_R a} \right).
\end{aligned}$$

Enfin, la dernière inégalité est évidente car :

$$\begin{aligned}
c(\phi'_a) \left(1 + q^{r' \deg_R a} + \dots + q^{(i-1)r' \deg_R a} \right) &= c(\phi'_a) \frac{q^{i r' \deg_R a} - 1}{q^{r' \deg_R a} - 1} \\
&\leq c(\phi'_a) q^{i r' \deg_R a}
\end{aligned}$$

puisque $q^{r' \deg_R a} - 1 \geq q - 1 \geq 1$. D'où le résultat. $\square$

Nous pouvons maintenant montrer l'existence de la hauteur canonique :

Théorème 2.3.3. — Soient F/k une extension CM finie, R un ordre de F et ϕ' un R -module de Drinfeld de rang r' défini sur $\bar{k}$. Pour tout $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ et tout $\alpha \in \bar{k}$ la limite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{h(\phi'_a{}^i(\alpha))}{q^{i r' \deg_R a}}$$

existe et ne dépend pas de a .

Démonstration. — Soit $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$. Alors, d'après le lemme 2.3.2, il existe une constante réelle $c(\phi'_a) > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :

$$\left| h(\phi'_a(\alpha)) - q^{r' \deg_R a} h(\alpha) \right| \leq c(\phi'_a).$$

Soit $i \geq 1$ un entier. Appliquons l'inégalité ci-dessus en substituant $\phi'_{a^{i-1}}(\alpha)$ à α :

$$\left| h(\phi'_{a^i}(\alpha)) - q^{r' \deg_R a} h(\phi'_{a^{i-1}}(\alpha)) \right| \leq c(\phi'_a),$$

d'où en divisant par $q^{i r' \deg_R a}$:

$$\left| \frac{h(\phi'_{a^i}(\alpha))}{q^{i r' \deg_R a}} - \frac{h(\phi'_{a^{i-1}}(\alpha))}{q^{(i-1) r' \deg_R a}} \right| \leq \frac{c(\phi'_a)}{q^{i r' \deg_R a}}. \quad (10)$$

Soit $j > i$ un entier, en itérant l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{h(\phi'_{a^j}(\alpha))}{q^{j r' \deg_R a}} - \frac{h(\phi'_{a^i}(\alpha))}{q^{i r' \deg_R a}} \right| \\ & \leq c(\phi'_a) \left(\frac{1}{q^{j r' \deg_R a}} + \cdots + \frac{1}{q^{(i+1) r' \deg_R a}} \right). \end{aligned}$$

Comme $q^{\deg_R a} > 1$, le second membre de l'inégalité précédente tend vers 0 quand i tend vers l'infini. La suite $\left(\frac{h(\phi'_{a^i}(\alpha))}{q^{i r' \deg_R a}} \right)_{i \in \mathbb{N}}$ étant ainsi de Cauchy, elle converge vers une limite que l'on note $\widehat{h}_{\phi'_a}(\alpha)$.

Montrons que la limite $\widehat{h}_{\phi'_a}(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ est indépendante de l'élément $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ choisi. Soient $b \in R \setminus (\overline{\mathbb{F}}_q \cup \{a\})$ et $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En appliquant le lemme 2.3.2 en substituant $\phi'_{b^i}(\alpha)$ à α , on a :

$$\left| h(\phi'_{a^i}(\phi'_{b^i}(\alpha))) - q^{i r' \deg_R a} h(\phi'_{b^i}(\alpha)) \right| \leq c(\phi'_a) q^{i r' \deg_R a}.$$

Ainsi, en divisant par $q^{i r' (\deg_R a + \deg_R b)}$, on obtient :

$$\left| \frac{h(\phi'_{a^i b^i}(\alpha))}{q^{i r' \deg_R ab}} - \frac{h(\phi'_{b^i}(\alpha))}{q^{i r' \deg_R b}} \right| \leq \frac{c(\phi'_a)}{q^{i r' \deg_R b}}.$$

En faisant tendre i vers l'infini, on obtient $\widehat{h}_{\phi'_{ab}}(\alpha) = \widehat{h}_{\phi'_b}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \overline{k}$ (où les réels $\widehat{h}_{\phi'_{ab}}(\alpha)$ et $\widehat{h}_{\phi'_b}(\alpha)$ sont les limites respectives des suites $\left(\frac{h(\phi'_{(ab)^i}(\alpha))}{q^{i r' \deg_R ab}} \right)_{i \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{h(\phi'_{b^i}(\alpha))}{q^{i r' \deg_R b}} \right)_{i \in \mathbb{N}}$).

De même, $\widehat{h}_{\phi'_{ab}}(\alpha) = \widehat{h}_{\phi'_a}(\alpha)$, d'où $\widehat{h}_{\phi'_a}(\alpha) = \widehat{h}_{\phi'_b}(\alpha)$, ce qui permet de conclure. $\square$

Définition 2.3.4. — Soient F/k une extension CM finie, R un ordre de F et ϕ' un R -module de Drinfeld de rang r' défini sur $\bar{k}$. On appelle hauteur canonique de ϕ' la fonction $\widehat{h}_{\phi'} : \bar{k} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\widehat{h}_{\phi'}(\alpha) := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{h(\phi'_{a^i}(\alpha))}{q^{i r' \deg_R a}}$$

où $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$.

Comme dans le cas classique, la hauteur canonique satisfait les bonnes propriétés suivantes :

Théorème 2.3.5. — Soient F/k une extension CM finie, R un ordre de F et ϕ' un R -module de Drinfeld de rang r' défini sur $\bar{k}$. Alors la hauteur canonique $\widehat{h}_{\phi'}$ de ϕ' vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $a \in R$ et tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :

$$\widehat{h}_{\phi'}(\phi'_a(\alpha)) = q^{r' \deg_R a} \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) ;$$

2. Il existe une constante réelle $\gamma(\phi') \geq 1$ telle que pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :

$$\left| \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) - h(\alpha) \right| \leq \gamma(\phi') ;$$

3. La fonction $\widehat{h}_{\phi'}$ est l'unique fonction définie sur $\bar{k}$ vérifiant à la fois la propriété 1 pour un certain $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ et la propriété 2 ;
4. La fonction $\widehat{h}_{\phi'}$ vérifie la propriété de Northcott : pour tous réels $D > 0$ et $c > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de points $\alpha \in \bar{k}$ tels que $[k(\alpha) : k] \leq D$ et $\widehat{h}_{\phi'}(\alpha) \leq c$;
5. Soit $\alpha \in \bar{k}$, alors $\widehat{h}_{\phi'}(\alpha) = 0$ si et seulement si α est un point de torsion de ϕ' ;

6. Pour tous $\alpha \in \bar{k}$ et $\delta \in \phi'(\bar{k})_{\text{tors}}$, on a :

$$\widehat{h}_{\phi'}(\alpha + \delta) = \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) ;$$

7. Pour tous $\alpha, \beta \in \bar{k}$, on a :

$$\widehat{h}_{\phi'}(\alpha + \beta) \leq \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) + \widehat{h}_{\phi'}(\beta).$$

Démonstration. —

1. Soient $a \in R \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \bar{k}$:
 - si $\deg_R a = 0$ alors $a \in \overline{\mathbb{F}}_q^* \cap R$. Or, pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_q^* \cap R$, on a $\phi'_\lambda(\alpha) = \lambda \alpha$ et $h(\lambda \alpha) = h(\alpha)$. Donc :

$$\widehat{h}_{\phi'}(\phi'_a(\alpha)) = \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) = q^{r' \deg_R a} \widehat{h}_{\phi'}(\alpha);$$

- si $\deg_R a > 0$ en multipliant chaque membre de l'inégalité (10) p. 20 par $q^{r' \deg_R a}$, on obtient pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\left| \frac{h(\phi'_{a^{i-1}}(\phi'_a(\alpha)))}{q^{(i-1)r' \deg_R a}} - q^{r' \deg_R a} \frac{h(\phi'_{a^{i-1}}(\alpha))}{q^{(i-1)r' \deg_R a}} \right| \leq \frac{c(\phi'_a)}{q^{(i-1)r' \deg_R a}}.$$

Et il ne reste plus qu'à faire tendre i vers l'infini pour obtenir l'égalité souhaitée.

2. Soient $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ et $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En divisant chaque membre de l'inégalité du lemme 2.3.2 par $q^{i r' \deg_R a}$, on obtient pour tout $\alpha \in \bar{k}$:

$$\left| \frac{h(\phi'_{a^i}(\alpha))}{q^{i r' \deg_R a}} - h(\alpha) \right| \leq c(\phi'_a).$$

Ainsi, par passage à la limite on obtient que la fonction $\widehat{h}_{\phi'} - h$ est bornée sur $\bar{k}$ par $c(\phi'_a)$. De plus, comme $\widehat{h}_{\phi'}$ ne dépend pas de l'élément $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ choisi, on peut poser :

$$\gamma(\phi') := \max \left\{ 1, \inf_{a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q} \{c(\phi'_a)\} \right\}.$$

3. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une fonction $\widehat{h}'_{\phi'}$ différente de $\widehat{h}_{\phi'}$ vérifiant les propriétés 1 et 2 du théorème. Alors, par hypothèse, il existe $\alpha \in \bar{k}$ tel que $\widehat{h}'_{\phi'}(\alpha) \neq \widehat{h}_{\phi'}(\alpha)$. Soient $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ et $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a alors :

$$\left| (\widehat{h}'_{\phi'} - \widehat{h}_{\phi'}) (\phi'_{a^i}(\alpha)) \right| = q^{i r' \deg_R a} \left| (\widehat{h}'_{\phi'} - \widehat{h}_{\phi'}) (\alpha) \right| > 0.$$

Or $q^{r' \deg_R a} > 1$ donc $\left| (\widehat{h}'_{\phi'} - \widehat{h}_{\phi'}) (\phi'_{a^i}(\alpha)) \right|$ tend vers l'infini avec i , ce qui contredit le fait que la fonction $\widehat{h}'_{\phi'} - \widehat{h}_{\phi'}$ soit bornée sur $\bar{k}$, d'où l'unicité de $\widehat{h}_{\phi'}$.

4. Cela découle directement du fait que la propriété de Northcott est vraie pour la hauteur de Weil et que la fonction $\widehat{h}_{\phi'} - h$ est bornée d'après la propriété 2.
5. Soit $\alpha \in \overline{k}$ un point de torsion non nul de ϕ' . Il existe alors $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ tel que α soit de a -torsion. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $h(\phi'_{a^i}(\alpha)) = h(0) = 0$. On en déduit donc que $\widehat{h}_{\phi'}(\alpha) = 0$.
Réciproquement si $\widehat{h}_{\phi'}(\alpha) = 0$ alors, pour tout $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ et tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $\widehat{h}_{\phi'}(\phi'_{a^i}(\alpha)) = 0$ d'après la propriété 1. De plus, il existe une extension finie de k contenant tous les $\phi'_{a^i}(\alpha)$. Il existe donc, d'après la propriété 4, deux entiers distincts $i > 0$ et $j > 0$ tels que $\phi'_{a^i}(\alpha) = \phi'_{a^j}(\alpha)$. Ainsi $\phi'_{a^i - a^j}(\alpha) = 0$ et donc α est un point de torsion de ϕ' .
6. Soient $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ et $\gamma \in \overline{k}^*$ un point de a -torsion. Alors, d'après la propriété 1, pour tout $\alpha \in \overline{k}$, on a :

$$\widehat{h}_{\phi'}(\phi'_a(\alpha + \gamma)) = q^{r' \deg_R a} \widehat{h}_{\phi'}(\alpha + \gamma).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{\phi'}(\phi'_a(\alpha + \gamma)) &= \widehat{h}_{\phi'}(\phi'_a(\alpha) + \phi'_a(\gamma)) \\ &= \widehat{h}_{\phi'}(\phi'_a(\alpha)) \\ &= q^{r' \deg_R a} \widehat{h}_{\phi'}(\alpha). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

7. Soient $\alpha \in \overline{k}$ et $\beta \in \overline{k}$. On a $h(\alpha + \beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$. Ainsi, pour tout $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ et tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\frac{h(\phi'_{a^i}(\alpha + \beta))}{q^{i r' \deg_R a}} \leq \frac{h(\phi'_{a^i}(\alpha))}{q^{i r' \deg_R a}} + \frac{h(\phi'_{a^i}(\beta))}{q^{i r' \deg_R a}}.$$

D'où le résultat après passage à la limite.

□

2.3.3. Comparaisons entre hauteurs canoniques

Soient F/k une extension CM finie, R un ordre de F , ϕ' un R -module de Drinfeld de rang r' défini sur $\bar{k}$ et ϕ la restriction de ϕ' à A (cf. égalité (3) p. 10). On a déjà vu (cf. lemme 2.2.2) que ϕ et ϕ' avaient les mêmes points de torsion. Nous allons maintenant montrer que les hauteurs canoniques relatives à ϕ et ϕ' coïncident.

Proposition 2.3.6. — *Pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a $\widehat{h}_\phi(\alpha) = \widehat{h}_{\phi'}(\alpha)$.*

Démonstration. — Soit t le rang de R en tant que A -module. D'après le §2.2.5, ϕ est de rang $r = r't$ et pour tout $a \in A$, on a $\deg_R a = t \deg_A a$. De plus, d'après le théorème 2.3.3, la hauteur canonique ne dépend pas du scalaire $a \in R \setminus \bar{\mathbb{F}}_q$ choisi pour la calculer. Donc si on choisit $a \in A$ tel que $\deg_A a > 0$, alors pour tout $\alpha \in \bar{k}$ on a :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(\phi'_{a^n}(\alpha))}{q^{nr' \deg_R a}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(\phi_{a^n}(\alpha))}{q^{nr't \deg_A a}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(\phi_{a^n}(\alpha))}{q^{nr \deg_A a}} \\ &= \widehat{h}_\phi(\alpha). \end{aligned}$$

□

Par abus de notation on pourra encore noter $\widehat{h}_\phi$ la hauteur normalisée du R -module de Drinfeld ϕ' .

On vient de voir que la hauteur canonique est invariante par extension des scalaires du module de Drinfeld. On va maintenant montrer par le biais de la proposition suivante, qui est une généralisation de la proposition 2 de [Poo95], que l'on peut relier les hauteurs canoniques associées à deux modules de Drinfeld isogènes.

Proposition 2.3.7. — *Soient ρ et ϱ deux R -modules de Drinfeld de rang r définis sur $\bar{k}$ isogènes via $P \in \bar{k}\{\tau\}$ (i.e. $P\rho = \varrho P$). Alors, pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :*

$$q^{\deg_\tau P} \widehat{h}_\rho(\alpha) = \widehat{h}_\varrho(P(\alpha)).$$

Démonstration. — D'après la propriété fonctorielle de la hauteur (cf. th. 2.3.1), il existe une constante $c(P) > 0$ ne dépendant que du polynôme P telle que pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :

$$|h(P(\alpha)) - q^{\deg_\tau P} h(\alpha)| \leq c(P).$$

Ainsi, pour tout $a \in R \setminus \bar{\mathbb{F}}_q$ et tout entier $i > 0$, on a :

$$\left| \frac{h(P(\rho_{a^i}(\alpha)))}{q^{i r \deg_R a}} - \frac{q^{\deg_\tau P} h(\rho_{a^i}(\alpha))}{q^{i r \deg_R a}} \right| \leq \frac{c(P)}{q^{i r \deg_R a}}.$$

Or $P(\rho_{a^i}(\alpha)) = \varrho_{a^i}(P(\alpha))$, d'où :

$$\left| \frac{h(\varrho_{a^i}(P(\alpha)))}{q^{i r \deg_R a}} - \frac{q^{\deg_\tau P} h(\rho_{a^i}(\alpha))}{q^{i r \deg_R a}} \right| \leq \frac{c(P)}{q^{i r \deg_R a}}.$$

On obtient donc le résultat souhaité en faisant tendre i vers l'infini. $\square$

2.4. Récapitulatif pour les modules de Drinfeld CM

Dans ce paragraphe on commence par faire un rappel des différents passages qui nous permettent d'obtenir un module de Drinfeld de signe normalisé à partir d'un module de Drinfeld à multiplications complexes. On décrit ensuite les liens qui existent entre les hauteurs canoniques de ces modules de Drinfeld. Enfin, on termine en rappelant la congruence de la proposition 2.2.8.

Soit ϕ un A -module de Drinfeld CM de rang r . Alors l'anneau des endomorphismes $\text{End}(\phi)$ de ϕ dans $\bar{k}$ est de rang r en tant que A -module et se plonge naturellement dans $\bar{k}$ via l'opérateur de dérivation D (cf. isomorphisme (2) p. 10). Soit R l'image canonique de $\text{End}(\phi)$ dans $\bar{k}$. On a vu au §2.2.5 que R est un ordre et que son corps des fractions F est une extension CM de k de degré r . On a également vu qu'on pouvait donc naturellement munir ϕ d'une structure de R -module de Drinfeld de rang 1.

Soient ϕ' le R -module de Drinfeld étendu de ϕ (cf. égalité (3) p. 10), $\mathfrak{C}$ le conducteur de R et $\varphi' := \mathfrak{C} * \phi'$ (cf. prop. 2.2.4). D'après le §2.2.7, le R -module de Drinfeld φ' peut être muni d'une structure φ de $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de rang 1. Soient ∞' l'unique place de F au-dessus de la place ∞ , d le degré sur $\mathbb{F}_q$ de la place ∞' , π une uniformisante de ∞' dans F et $z \in \bar{k}$ une racine du polynôme $X^{q^d-1} - \mu_\varphi(\pi^{-1})$. Alors, d'après la proposition 2.2.6, le $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld $\psi := z \varphi z^{-1}$ est de signe normalisé.

On résume tout ceci par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_F & & \varphi : \mathcal{O}_F \rightarrow \bar{k}\{\tau\} \xrightarrow{z} \psi : \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_{H_F^+}\{\tau\} \\
 \downarrow & & \uparrow \text{End}(\varphi') \\
 R & \phi' : R \rightarrow \bar{k}\{\tau\} \xrightarrow{\phi' \mathfrak{C}} \varphi' : R \rightarrow \bar{k}\{\tau\} & \\
 \downarrow & \uparrow \text{End}(\phi) & \\
 A & \phi : A \rightarrow \bar{k}\{\tau\} &
 \end{array} \tag{11}$$

On peut maintenant expliciter, grâce au §2.3.3, les relations entre les hauteurs canoniques des modules de Drinfeld apparaissant dans le diagramme ci-dessus. D'après la proposition 2.3.6, pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) = \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) \quad \text{et} \quad \widehat{h}_{\varphi'}(\alpha) = \widehat{h}_\varphi(\alpha).$$

D'autre part, d'après la proposition 2.3.7, pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :

$$q^{\deg_R \mathfrak{C}} \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) = \widehat{h}_{\varphi'}(\phi'_\mathfrak{C}(\alpha))$$

et

$$\widehat{h}_\varphi(\alpha) = \widehat{h}_\psi(z\alpha)$$

car $\deg_\tau \phi'_\mathfrak{C} = \deg_R \mathfrak{C}$ et $\deg_\tau z = 0$ (puisque $z \in \bar{k}^*$). Ainsi

$$q^{\deg_R \mathfrak{C}} \widehat{h}_\phi(\alpha) = \widehat{h}_\psi(z\phi'_\mathfrak{C}(\alpha)). \quad (12)$$

On termine ce paragraphe en rappelant la congruence obtenue dans la proposition 2.2.8. Pour cela on fixe $\mathfrak{m}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$, K/H_F^+ et L/K deux extensions finies, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{h}$ le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$. On fixe $m \in \mathcal{O}_F$ un générateur de l'idéal $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$. En posant :

$$\nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_L} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m},$$

on a (cf. prop. 2.2.8) :

$$\psi_{m^\nu} = \psi_{\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu}} \equiv \tau^{\mathfrak{h}d(q^d-1)\deg_{\mathcal{O}_L} \mathfrak{q}} \pmod{\mathfrak{p}}. \quad (13)$$

Dans toute cette thèse la stratégie suivie pour minorer la hauteur canonique d'un module de Drinfeld à multiplications complexes va consister à se ramener à un module de Drinfeld de signe normalisé en suivant le diagramme (11) p. 26, puis à obtenir les minoration souhaitées en utilisant la congruence (13) pour les modules de Drinfeld de signe normalisé et à conclure en utilisant le lien entre hauteurs canoniques de l'égalité (12).

CHAPITRE 3

PROPRIÉTÉ DE BOGOMOLOV ET MODULES DE DRINFELD À MULTIPLICATIONS COMPLEXES

Rappelons maintenant le contexte du résultat principal de cette thèse (*cf.* th. 1.1) que nous démontrons dans ce chapitre.

Soient ϕ un A -module de Drinfeld défini sur $\bar{k}$ et $\widehat{h}_\phi$ sa hauteur canonique. Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne infinie de groupe de Galois G . Par analogie avec la terminologie utilisée dans [BZ01], on dit que L a la propriété (B, ϕ) s'il existe une constante strictement positive qui minore $\widehat{h}_\phi$ sur L privé des points de torsion de ϕ .

Afin de démontrer le théorème 1.1, nous nous ramènerons à un module de Drinfeld de signe normalisé en utilisant les résultats du §2.4. Nous nous réduirons également au cas d'extensions finies en montrant au §3.4 le théorème 1.4. Pour démontrer ce dernier, nous commencerons par montrer dans le §3.1 des inégalités ultramétriques faisant intervenir un module de Drinfeld de signe normalisé, ce qui nous permettra, grâce à la formule du produit (*cf.* th. 2.1.1), d'en déduire au §3.2 des minoration conditionnelles de la hauteur canonique. À l'aide d'un argument reposant entre autres sur le principe des tiroirs (*cf.* 3.3), nous nous affranchirons dans le §3.4 de ces contraintes.

À partir de maintenant et jusqu'au §3.2 nous utiliserons les notations suivantes.

Notations.

On fixe :

- F/k une extension CM finie ;
- ∞' l'unique place de F au-dessus de ∞ ;
- d le degré de ∞' sur $\mathbb{F}_q$;
- $\tilde{F} := F \cap \overline{\mathbb{F}_q}$ le corps des constantes de F ;
- $\varsigma := \log_q \# \tilde{F}$ (i.e. $\tilde{F} = \mathbb{F}_{q^\varsigma}$) ;
- ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé ;
- H_F^+ le corps des coefficients des modules de Drinfeld de signe normalisé ;
- K/H_F^+ une extension finie ;
- L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G ;
- H un sous-groupe du centre de G ;
- $E \subseteq L$ le sous-corps fixé par H ;
- $d_1 > 0$ un entier ;
- v une place finie non triviale de K telle que pour toute place $w|v$ de E , on ait $[E_w : K_v] \leq d_1$;
- $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_K$ associé à la place v ;
- $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ (i.e. $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}_K$) ;
- $\mathfrak{m} := \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_F$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_F$ en-dessous de $\mathfrak{p}$;
- $\mathfrak{h}$ le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$;
- $m \in \mathcal{O}_F$ un générateur de l'idéal principal $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$.

On pose :

$$\nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m} ; \quad (14)$$

$$n := \mathfrak{h} d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} ; \quad (15)$$

et

$$s := \mathfrak{h} d(q^d - 1). \quad (16)$$

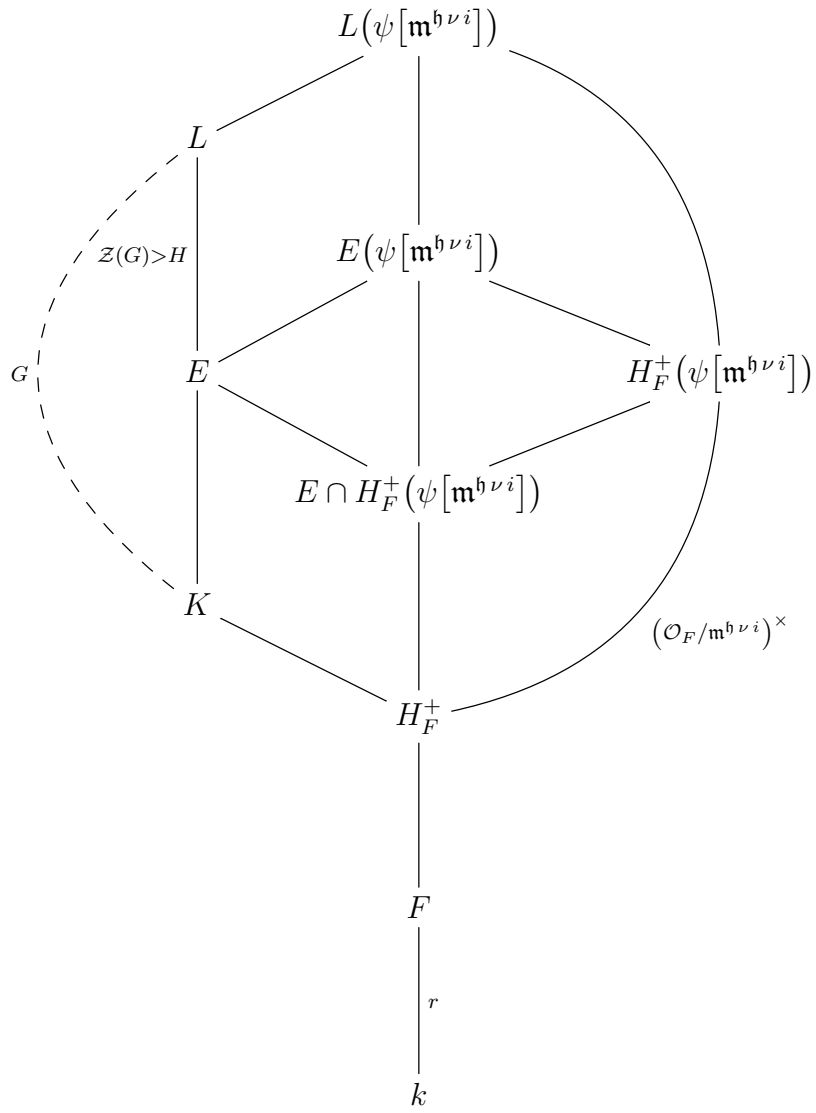
En particulier, on a :

$$n = s \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} = \nu \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}.$$

Enfin, d'après la proposition 2.2.8, nous avons la congruence suivante :

$$\psi_{m^\nu} = \psi_{\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu}} \equiv \tau^n \pmod{\mathfrak{p}}. \quad (17)$$

On illustre par le diagramme suivant toutes les extensions finies de corps qui seront introduites dans ce chapitre :



3.1. Inégalités métriques

On établit ici quelques inégalités ultramétriques utiles pour la suite. Dans tout ce paragraphe on utilise les notations fixées au début de ce chapitre (*cf.* p. 30).

Lemme 3.1.1. — *Soit M une extension finie de K . Alors, pour tout $\alpha \in M$ et toute place finie w de M , on a :*

$$\max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} = \max\left\{1, |\alpha|_w^{q^n}\right\}$$

où $\nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}$ et $n := \mathfrak{h} d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}$.

Démonstration. — Soit $\alpha \in M$. Comme ψ est de signe normalisé, ses coefficients sont entiers (*cf.* §2.2) et d'après la relation (6) p. 14 pour tout $a \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$, on a $\mu_\psi(a) \in \mathbb{F}_{q^d}^*$. Il existe donc des éléments $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{O}_{H_F^+}$ tels que :

$$\psi_{m^\nu}(\alpha) = a_0 \alpha + \dots + a_{n-1} \alpha^{q^{n-1}} + \alpha^{q^n}.$$

De plus, comme pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ le coefficient a_i est entier, pour toute place finie w de M , on a $|a_i|_w \leq 1$. Ainsi, il y a deux cas possibles :

1. Si $|\alpha|_w > 1$, alors pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on a :

$$\left| a_i \alpha^{q^i} \right|_w \leq |\alpha|_w^{q^i} < |\alpha|_w^{q^n},$$

d'où

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w = |\alpha|_w^{q^n} > 1$$

et donc

$$\max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} = |\alpha|_w^{q^n} = \max\left\{1, |\alpha|_w^{q^n}\right\}.$$

2. Si $|\alpha|_w \leq 1$, alors :

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w \leq 1$$

et donc

$$\max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} = 1 = \max\left\{1, |\alpha|_w^{q^n}\right\}.$$

□

Lemme 3.1.2. — Soit M une extension finie de K . Alors, pour tout $\alpha \in M$ et toute place $w|v$ de M , on a :

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha) - \alpha^{q^n}|_w \leq q^{-e(w/v)} \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^{n-1}}$$

où $e(w/v)$ est l'indice de ramification de w sur v et où :

$$\begin{cases} \nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m} \\ n := \mathfrak{h} d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} \end{cases}.$$

Démonstration. — Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in H_F^+$ les coefficients de ψ_{m^ν} , i.e. :

$$\psi_{m^\nu} = a_0 \tau^0 + \dots + a_{n-1} \tau^{n-1} + \tau^n.$$

Soient $\alpha \in M$ et w une place de M au-dessus de v , alors, d'après l'inégalité ultramétrique, on a :

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha) - \alpha^{q^n}|_w \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ |a_i|_w |\alpha|_w^{q^i} \right\}.$$

Or, d'après la congruence (17) p. 30, on a :

$$\psi_{m^\nu} \equiv \tau^n \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ainsi pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $a_i \in \mathfrak{p}$, d'où $|a_i|_w \leq q^{-e(w/v)}$ ce qui permet de conclure. $\square$

Le lemme suivant, basé sur le théorème d'approximation forte, nous permettra de nous ramener dans les preuves au cas des entiers.

Lemme 3.1.3. — Soit M une extension finie de k . Soit w une place finie de M . Alors, pour tout $\alpha \in M$ non nul, il existe $\beta \in \mathcal{O}_M$ tel que $\alpha\beta \in \mathcal{O}_M$, et $|\beta|_w = \max\{1, |\alpha|_w\}^{-1}$.

Démonstration. — Soit S l'ensemble des places finies de M (i.e. des places ω de M tel que $\omega \nmid \infty$). Soit $\Sigma_0 := \{\omega \in S \mid |\alpha|_\omega > 1\}$ (c'est un ensemble fini car α n'a qu'un nombre fini de pôles). Soit $\Sigma := \Sigma_0 \cup \{w\}$. Alors, d'après le théorème d'approximation forte (cf. th. 2.1.2), il existe $\beta \in M$ tel que $|\beta|_\omega = \max\{1, |\alpha|_\omega\}^{-1}$ pour toute $\omega \in \Sigma$ et $|\beta|_\omega \leq 1$ pour toute $\omega \in S \setminus \Sigma$. Ainsi β et $\alpha\beta$ sont bien dans $\mathcal{O}_M$. $\square$

Proposition 3.1.4. — *Supposons que l'extension L/E soit non ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$. Soit $\sigma_{\mathfrak{q}}$ le symbole d'Artin associé à $\mathfrak{q}$. Alors, pour toute place non triviale w de L et tout $\alpha \in L$, on a :*

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha) - \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w \leq C(w) \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w\}$$

où $C(w) = q^{-1}$ si $w|v$ et $C(w) = 1$ sinon et où :

$$\begin{cases} \nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m} \\ s := \mathfrak{h} d(q^d - 1) \end{cases}.$$

Démonstration. — Soit w une place non triviale de L . Si $w \nmid v$, l'inégalité découle directement de l'inégalité ultramétrique. On suppose donc que $w|v$. Dans ce cas, comme l'extension L/E est abélienne, $\sigma_{\mathfrak{q}}$ ne dépend pas du choix de l'idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{q}$. Ainsi, pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_L$, on a :

$$\sigma_{\mathfrak{q}}(\gamma) \equiv \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}}} \pmod{\mathfrak{q}\mathcal{O}_L}$$

et donc

$$\sigma_{\mathfrak{q}}^s(\gamma) \equiv \gamma^{q^{s \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}}} \equiv \gamma^{q^n} \pmod{\mathfrak{q}\mathcal{O}_L}$$

car $n = s \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}$ (cf. notations (15) et (16) p. 30). De plus, si $\mathfrak{q}'$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ et si $\sigma_{\mathfrak{q}'}$ est le symbole d'Artin associé à $\mathfrak{q}'$, alors $\sigma_{\mathfrak{q}}$ et $\sigma_{\mathfrak{q}'}$ sont des éléments de H conjugués dans G . Or H est dans $\mathcal{Z}(G)$, donc $\sigma_{\mathfrak{q}} = \sigma_{\mathfrak{q}'}$. Ainsi, comme l'extension L/E est non ramifiée, pour toute place $w|v$ de $\mathcal{O}_L$ et pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_L$, on a :

$$|\gamma^{q^n} - \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\gamma)|_w \leq q^{-1},$$

avec $n := \mathfrak{h} d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}$. Soit $\alpha \in L$, alors d'après le lemme 3.1.3, il existe $\beta \in \mathcal{O}_L$ tel que $\alpha\beta \in \mathcal{O}_L$ et $|\beta|_w = \max\{1, |\alpha|_w\}^{-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} & |\alpha^{q^n} - \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w \\ &= |\beta|_w^{-q^n} |(\alpha\beta)^{q^n} - \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha\beta) + (\sigma_{\mathfrak{q}}^s(\beta) - \beta^{q^n}) \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w \\ &\leq |\beta|_w^{-q^n} \max\{|(\alpha\beta)^{q^n} - \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha\beta)|_w, |(\sigma_{\mathfrak{q}}^s(\beta) - \beta^{q^n}) \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w\} \\ &\leq \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^n} q^{-1} \max\{1, |\sigma_{\mathfrak{p}}^s(\alpha)|_w\} \\ &\stackrel{\text{lem. 3.1.1}}{\leq} q^{-1} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w\}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |\psi_{m^\nu}(\alpha) - \alpha^{q^n}|_w &\stackrel{\text{lem. 3.1.2}}{\leq} q^{-e(w/v)} \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^n-1} \\ &\stackrel{\text{lem. 3.1.1}}{\leq} q^{-1} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\}. \end{aligned}$$

Le résultat découle maintenant directement de l'utilisation de l'inégalité ultramétrique. $\square$

Rappelons que comme E est le sous-corps de L fixé par H qui est un sous-groupe du centre de G , l'extension L/E est abélienne.

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 2.3 de [AZ10] et se démontre de façon analogue. Nous renvoyons au §A.1 pour les détails.

Proposition 3.1.5. — *Supposons que l'extension L/E soit ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$. Alors l'ensemble*

$$H_{\mathfrak{q}} := \left\{ \sigma \in \text{Gal}(L/E) \mid \forall \gamma \in \mathcal{O}_L, \sigma(\gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}}} \equiv \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}}} \pmod{\mathfrak{q}\mathcal{O}_L} \right\}$$

est un sous-groupe non trivial du groupe d'inertie de $\mathfrak{q}$ sur L .

La proposition 3.1.4 établit une inégalité ultramétrique pour les extensions non ramifiées, une inégalité similaire dans le cas ramifié fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.1.6. — *On suppose que l'extension L/E est ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$. Soient $\eta \in H_{\mathfrak{q}} \setminus \{\text{id}\}$ et $e_{\mathfrak{q}}(L/E)$ l'indice de ramification de $\mathfrak{q}$ sur L . Alors, pour toute place w de L et tout $\alpha \in L$, on a :*

$$\begin{aligned} |\psi_{m^\nu}(\alpha) - \psi_{m^\nu}(\eta(\alpha))|_w &\leq C(w) \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\eta(\alpha))|_w\} \end{aligned}$$

où $C(w) = q^{-e_{\mathfrak{q}}(L/K)}$ si $w|v$ et $C(w) = 1$ sinon et où :

$$\begin{cases} \nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m} \\ s := \mathfrak{h} d (q^d - 1) \end{cases}.$$

Démonstration. — Soit w une place de L . Si $w \nmid v$, l'inégalité découle directement de l'inégalité ultramétrique. On suppose donc que $w|v$. Soit $\mathfrak{q}'$ un idéal premier de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Alors $H_{\mathfrak{q}}$ et $H_{\mathfrak{q}'}$ sont dans H et

sont conjugués dans G . Or H est dans $\mathcal{Z}(G)$, donc $H_{\mathfrak{q}} = H_{\mathfrak{q}'}$. Ainsi, pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_L$, en posant $n := \mathfrak{h} d (q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}$, on a :

$$|\gamma^{q^n} - \eta(\gamma)^{q^n}|_w \leq q^{-e_{\mathfrak{q}}(L/K)}$$

car

$$\eta(\gamma)^{q^n} \equiv \gamma^{q^n} \pmod{\mathfrak{q}\mathcal{O}_L}.$$

Soit $\alpha \in L$. Alors d'après le lemme 3.1.3, il existe $\beta \in \mathcal{O}_L$ tel que $\alpha\beta \in \mathcal{O}_L$ et $|\beta|_w = \max\{1, |\alpha|_w\}^{-1}$, ainsi :

$$\begin{aligned} & |\alpha^{q^n} - \eta(\alpha)^{q^n}|_w \\ &= |\beta|_w^{-q^n} |(\alpha\beta)^{q^n} - \eta(\alpha\beta)^{q^n} + (\eta(\beta)^{q^n} - \beta^{q^n}) \eta(\alpha)^{q^n}|_w \\ &\leq |\beta|_w^{-q^n} \max\{ |(\alpha\beta)^{q^n} - \eta(\alpha\beta)^{q^n}|, |(\eta(\beta)^{q^n} - \beta^{q^n}) \eta(\alpha)^{q^n}|_w \} \\ &\leq \max\{1, |\alpha|_v\}^{q^n} q^{-e_{\mathfrak{q}}(L/K)} \max\{1, |\eta(\alpha)|_w\}^{q^n} \\ &\stackrel{\text{lem. 3.1.1}}{\leq} q^{-e_{\mathfrak{q}}(L/K)} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\eta(\alpha))|_w\}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |\psi_{m^\nu}(\alpha) - \alpha^{q^n}|_w &\stackrel{\text{lem. 3.1.2}}{\leq} q^{-e(w/v)} \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^{n-1}} \\ &\stackrel{\text{lem. 3.1.1}}{\leq} q^{-e_{\mathfrak{q}}(L/K)} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\}. \end{aligned}$$

Le résultat découle maintenant directement de l'utilisation de l'inégalité ultramétrique. $\square$

Le lemme suivant, que l'on couplera aux deux lemmes précédents par la suite, permet d'obtenir des majorations suffisamment fines en composant par ψ_{m^ν} , ce qui sera très utile pour obtenir les minoration de hauteur souhaitées (cf. prop. 3.2.1 et 3.2.2).

Lemme 3.1.7 (d'accélération). — *Soient w une place de L au-dessus de v et $\alpha, \beta \in L$. On suppose qu'il existe un entier $c > 0$ tel que :*

$$|\alpha - \beta|_w \leq q^{-c e_{\mathfrak{q}}(L/E)} \max\{1, |\alpha|_w\} \max\{1, |\beta|_w\}.$$

Alors, pour tout entier naturel l , on a :

$$|\psi_{m^{\nu l}}(\alpha - \beta)|_w \leq q^{-(c+l) e_{\mathfrak{q}}(L/E)} \max\{1, |\psi_{m^{\nu l}}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^{\nu l}}(\beta)|_w\}.$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur l . Pour $l = 0$ le résultat est immédiat. Montrons le cas $l = 1$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \bar{k}$ les coefficients de ψ_{m^ν} , i.e. :

$$\psi_{m^\nu} = a_0 \tau^0 + \dots + a_n \tau^n,$$

avec $a_0 = m^\nu$ et $a_n = 1$. D'après la congruence (17) p. 30, on a :

$$\psi_{m^\nu} = \psi_{\mathfrak{m}^{h\nu}} \equiv \tau^n \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ainsi, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $|a_i|_w \leq q^{-e(w/v)}$. Or,

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha - \beta)|_w \leq \max_{0 \leq i \leq n} \left\{ |a_i|_w |\alpha - \beta|_w^{q^i} \right\}.$$

Il y a donc deux cas possibles :

1. Si $|\alpha - \beta|_w \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} & |\psi_{m^\nu}(\alpha - \beta)|_w \\ & \leq \max_{0 \leq i \leq n} \left\{ |a_i|_w |\alpha - \beta|_w^{q^i} \right\} \\ & = |\alpha - \beta|_w^{q^n} \\ & \leq q^{-c e_{\mathfrak{q}}(L/E) q^n} \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^n} \max\{1, |\beta|_w\}^{q^n} \\ & \stackrel{\text{lem.3.1.1}}{\leq} q^{-(c+1) e_{\mathfrak{q}}(L/E)} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\beta)|_w\}; \end{aligned}$$

2. Si $|\alpha - \beta|_w < 1$, alors :

$$\begin{aligned} & |\psi_{m^\nu}(\alpha - \beta)|_w \\ & \leq \max_{0 \leq i \leq n} \left\{ |a_i|_w |\alpha - \beta|_w^{q^i} \right\} \\ & \leq q^{-e(w/v)} |\alpha - \beta|_w \\ & \leq q^{-e(w/v)} q^{-c e_{\mathfrak{q}}(L/E)} \max\{1, |\alpha|_w\} \max\{1, |\beta|_w\} \\ & \leq q^{-(c+1) e_{\mathfrak{q}}(L/E)} \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^n} \max\{1, |\beta|_w\}^{q^n} \\ & \stackrel{\text{lem.3.1.1}}{=} q^{-(c+1) e_{\mathfrak{q}}(L/E)} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\beta)|_w\}. \end{aligned}$$

En effet $e_{\mathfrak{q}}(L/E) \leq e(w/v)$ car les extensions L/E et E/K sont galoisiennes et $\mathfrak{q}$ est au-dessus de $\mathfrak{p}$ la place associée à v .

Supposons maintenant $l > 1$. Alors

$$\psi_{m^{\nu l}}(\alpha - \beta) = \psi_{m^\nu} \psi_{m^{\nu(l-1)}}(\alpha - \beta).$$

Or, par l'hypothèse de récurrence, on a :

$$|\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\alpha - \beta)|_w \leq q^{-(c+l-1)e_q(L/E)} \max\{1, |\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\beta)|_w\}.$$

Il ne reste donc plus qu'à substituer $\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\alpha)$ à α et $\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\beta)$ à β , à faire agir $\psi_{m^{\nu}}$ sur $\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\alpha) - \psi_{m^{\nu(l-1)}}(\beta)$ et à utiliser ce que l'on a montré dans le cas $l = 1$. $\square$

3.2. Minorations de la hauteur canonique

Dans tout ce paragraphe on utilise les notations fixées au début de ce chapitre (*cf.* p. 30). Elles feront implicitement partie des conditions de tous les énoncés de ce paragraphe. Notons aussi :

$$c_3 := 3 \mathfrak{h} d (q^d - 1) \gamma(\psi).$$

La proposition suivante fournit une minoration de la hauteur normalisée dans le cas où l'extension L/E n'est pas ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$.

Proposition 3.2.1. — *On suppose que l'extension L/E est non ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$, alors pour tout $\alpha \in L$ qui n'est pas de torsion pour ψ , on a :*

$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \frac{q^{-c_3 \deg v d_1^2 [K:k]}}{2 [K:k]}.$$

Démonstration. — Soit $\alpha \in L$ non de torsion pour ψ . Commençons par montrer que pour tout $\sigma \in \text{Gal}(L/E)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a :

$$\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha) \neq \psi_{m^{\nu l}}(\sigma(\alpha)).$$

En effet, si $\psi_{m^{\nu}}(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha)) = \sigma(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha))$, alors pour tout entier $j \geq 1$, on a :

$$\psi_{m^{\nu}}^j(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha)) = \sigma^j(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha))$$

car $\psi_{m^{\nu}}$ et σ commutent. Soit $o(\sigma)$ l'ordre de σ dans $\text{Gal}(L/K)$, alors :

$$0 = \psi_{m^{\nu}}^{o(\sigma)}(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha)) - \psi_{m^{\nu l}}(\alpha) = \psi_{m^{\nu(l+1)o(\sigma)} - m^{\nu l}}(\alpha).$$

Donc α est un point de torsion pour ψ , ce qui contredit l'hypothèse faite sur α . En particulier, en notant $\sigma_{\mathfrak{p}}$ le symbole d'Artin associé à $\mathfrak{p}$, on obtient :

$$\psi_{m^{\nu l}}(\psi_{m^{\nu}}(\alpha) - \sigma_{\mathfrak{p}}^s(\alpha)) \neq 0.$$

On peut donc appliquer la formule du produit (*cf.* th. 2.1.1) :

$$0 = \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \log_q |\psi_{m^{\nu l}}(\psi_{m^{\nu}}(\alpha) - \sigma_{\mathfrak{p}}^s(\alpha))|_w.$$

Ainsi, en appliquant la proposition 3.1.4 et le lemme 3.1.7 avec

$$l := (2 \gamma(\psi) [K:k] + 1) [E_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] - 1,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{w|v} \deg w (-(l+1)) \\
&\quad + \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \log_q \max\{1, |\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)|_w\} \\
&\quad + \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \log_q \max\{1, |\psi_{m^{\nu l}}(\sigma_{\mathfrak{p}}^s(\alpha))|_w\}. \quad (18)
\end{aligned}$$

Or, pour toute place $u|v$ de E , on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{w|u} \deg w &= [L : E] \deg u \\
&= [L : E] \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}
\end{aligned}$$

car l'extension L/E est non ramifiée et l'extension L/K est galoisienne. De plus,

$$\begin{aligned}
&\sum_{u|v} (l+1) [L : E] \deg u \\
&= (2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \sum_{u|v} [E_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] [L : E] \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} \\
&\geq (2\gamma(\psi) [K : k] + 1) [L : K] \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}.
\end{aligned}$$

En divisant les membres de l'inégalité (18) par $[L : k]$, on obtient :

$$0 \leq -\frac{(2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}{[K : k]} + h(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)) + h(\psi_{m^{\nu l}}(\sigma_{\mathfrak{p}}^s(\alpha))),$$

d'où

$$\frac{(2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}{[K : k]} \leq 2\gamma(\psi) + \widehat{h}_{\psi}(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)) + \widehat{h}_{\psi}(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha))$$

car pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a $|h(\alpha) - \widehat{h}_{\psi}(\alpha)| \leq \gamma(\psi)$, et la hauteur de Weil est invariante sous l'action du groupe de Galois. Ainsi :

$$\frac{(2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}{[K : k]} \leq 2\gamma(\psi) + 2q^{n(l+1)} \widehat{h}_{\psi}(\alpha),$$

d'où

$$\frac{1}{[K : k]} \leq 2q^{n(l+1)} \widehat{h}_{\psi}(\alpha).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
n(l+1) &= \mathfrak{h} d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} (2\gamma(\psi) [K : k] + 1) [E_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] \\
&\leq 3 \mathfrak{h} d(q^d - 1) \gamma(\psi) [E_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} [K : k] \\
&\leq 3 \mathfrak{h} d(q^d - 1) \gamma(\psi) [E_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}]^2 \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} [K : k] \\
&\leq 3 \mathfrak{h} d(q^d - 1) \gamma(\psi) \deg v d_1^2 [K : k].
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. $\square$

Le résultat qui suit donne une minoration de la hauteur normalisée dans le cas ramifié et utilise la notation $H_{\mathfrak{q}}$ définie dans la proposition 3.1.5.

Proposition 3.2.2. — *On suppose que l'extension L/E est ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$. Soit $\eta \in H_{\mathfrak{q}} \setminus \{\text{id}\}$. Alors, pour tout $\alpha \in L$ tel que $\alpha - \eta(\alpha) \notin \psi[\mathfrak{m}^\infty]$, on a :*

$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \frac{q^{-c_3 \deg v d_1^2 [K:k]}}{2 [K : k]}.$$

Démonstration. — Cette preuve est similaire à celle de la proposition 3.2.1 à la différence qu'on utilise la proposition 3.1.6 à la place de la proposition 3.1.4. Soit $\alpha \in L$ tel que $\alpha - \eta(\alpha) \notin \psi[\mathfrak{m}^\infty]$. Alors, en posant :

$$l := (2\gamma(\psi) [K : k] + 1) [E_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] - 1,$$

on a :

$$\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha) - \psi_{m^{\nu(l+1)}}(\eta(\alpha)) \neq 0.$$

On peut donc appliquer la formule du produit (cf. th. 2.1.1), i.e. :

$$0 = \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \cdot \log_q |\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha) - \psi_{m^{\nu(l+1)}}(\eta(\alpha))|_w.$$

Ainsi, en appliquant la proposition 3.1.6 et le lemme 3.1.7, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{w|v} \deg w (-(l+1) e_{\mathfrak{q}}(L/E)) \\
&\quad + \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \log_q \max\{1, |\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)|_w\} \\
&\quad + \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \log_q \max\{1, |\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\eta(\alpha))|_w\}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Or, pour toute place $u|v$ de E , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{w|u} e_q(L/E) \deg w &= [L : E] \deg u \\ &= [L : E] \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} \end{aligned}$$

car l'extension L/E est ramifiée d'indice $e_q(L/E)$ et l'extension L/K est galoisienne. De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{u|v} (l+1) [L : E] \deg u &= (2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \sum_{u|v} [E_q : K_p] [L : E] \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} \\ &\geq (2\gamma(\psi) [K : k] + 1) [L : K] \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Donc, en divisant les membres de l'inégalité (19) par $[L : k]$, on obtient :

$$0 \leq -\frac{(2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}{[K : k]} + h(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)) + h(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\eta(\alpha))),$$

d'où

$$\frac{(2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}{[K : k]} \leq 2\gamma(\psi) + 2\widehat{h}_\psi(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha))$$

car pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a $|h(\alpha) - \widehat{h}_\psi(\alpha)| \leq \gamma(\psi)$ et :

$$h(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\eta(\alpha))) = h(\eta(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha))) = h(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)).$$

En effet, la hauteur de Weil est invariante sous l'action du groupe de Galois, ψ_{m^ν} est à coefficients $\mathfrak{p}$ -entiers et η est dans le groupe d'inertie de L/E . Ainsi, on obtient :

$$\frac{(2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}{[K : k]} \leq 2\gamma(\psi) + 2q^{n(l+1)} \widehat{h}_\psi(\alpha),$$

d'où

$$\frac{1}{[K : k]} \leq 2q^{n(l+1)} \widehat{h}_\psi(\alpha),$$

ce qui achève la preuve car

$$n(l+1) \leq 3\mathfrak{h}d(q^d - 1)\gamma(\psi) \deg v d_1^2 [K : k].$$

□

Nous pouvons regrouper les deux propositions précédentes en un seul théorème qui fournit une minoration conditionnelle de la hauteur normalisée.

Théorème 3.2.3 (de minoration conditionnelle)

Soient F/k une extension CM finie et ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé. Soient K/k une extension finie telle que ψ soit défini sur K , L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G , H un sous-groupe du centre de G et $E \subseteq L$ le sous-corps fixé par H . Soient $d_1 > 0$ un entier et v une place finie de K . On suppose que pour toute place $w|v$ de E , on ait $[E_w : K_v] \leq d_1$. Soient $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_K$ associé à la place v et $\mathfrak{m} := \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_F$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_F$ en-dessous de $\mathfrak{p}$. Soit $\alpha \in L$ non de torsion pour ψ . On suppose que :

$$\forall \eta \in \text{Gal}(L/E), \quad \eta(\alpha) - \alpha \notin \psi[\mathfrak{m}^\infty] \setminus \{0\}. \quad (20)$$

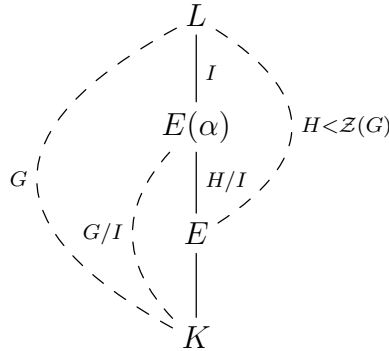
Alors :

$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \frac{q^{-c_3 \deg v d_1^2 [K:k]}}{2 [K:k]}.$$

Démonstration. — Soit $\alpha \notin \psi(L)_{\text{tors}}$ un élément de L qui vérifie la condition (20). Soit $I := \text{Gal}(L/E(\alpha))$. Comme $H := \text{Gal}(L/E)$ est un sous-groupe du centre de G , H est abélien et est un sous-groupe normal de G . De même, comme I est un sous-groupe de H , I est abélien et est un sous-groupe normal de G . Ainsi, H/I est un sous-groupe normal de G/I et :

$$(G/I)/(H/I) \simeq G/H.$$

De plus, comme H est inclus dans le centre de G , par passage au quotient H/I est un sous-groupe du centre de G/I . Or $G/I \simeq \text{Gal}(E(\alpha)/K)$ et $H/I \simeq \text{Gal}(E(\alpha)/E)$. On peut donc supposer que $L := E(\alpha)$. On illustre la tour d'extensions que nous venons de décrire par le diagramme suivant :



1. Supposons que l'extension $E(\alpha)/E$ soit non ramifiée, alors, d'après la proposition 3.2.1, on a :

$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \frac{q^{-c_3 \deg v d_1^2 [K:k]}}{2 [K:k]}$$

car α n'est pas un point de torsion pour ψ .

2. Supposons maintenant que l'extension $E(\alpha)/E$ soit ramifiée. Soit $\eta \in H_{\mathfrak{q}} \setminus \{\text{id}\}$ (on rappelle que $H_{\mathfrak{q}}$ est non trivial d'après la proposition 3.1.5), alors d'après la condition (20), on a $\eta(\alpha) - \alpha \notin \psi[\mathfrak{m}^\infty]$. On peut donc appliquer la proposition 3.2.2, d'où :

$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \frac{q^{-c_3 \deg v d_1^2 [K:k]}}{2 [K:k]}.$$

On obtient ainsi le résultat annoncé. □

3.3. Principe des tiroirs dans $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m})^\times$

Le but de ce paragraphe est d'établir la proposition 3.3.3 qui nous permettra au §3.4 d'achever la preuve du théorème 1.4.

Soient F/k une extension finie de degré r , $\mathcal{O}_F$ la fermeture intégrale de A dans F , $\mathfrak{n}$ un idéal non nul et principal de $\mathcal{O}_F$ pour lequel on fixe un générateur $m \in \mathcal{O}_F$. Soient $\mathcal{R}_0$ un système de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}$ et $e > 0$ un entier. Pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, on note $\bar{a}$ l'image canonique de a dans $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$.

Le lemme suivant permet de construire un système explicite de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$ à partir du système $\mathcal{R}_0$ de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}$.

Lemme 3.3.1. — *L'ensemble*

$$\mathcal{R} := \left\{ \sum_{i=0}^{e-1} \lambda_i m^i \mid \lambda_i \in \mathcal{R}_0 \right\}$$

est un système de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que :

$$\#(\mathcal{R}_0)^e = \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})^e = q^{e \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}} = q^{\deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}^e} = \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e).$$

Il suffit donc de montrer que les éléments de $\mathcal{R}$ sont deux-à-deux distincts modulo $\mathfrak{n}^e$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1}, \mu_0, \dots, \mu_{e-1} \in \mathcal{R}_0$. Montrons donc que si :

$$\sum_{i=0}^{e-1} \lambda_i m^i \equiv \sum_{i=0}^{e-1} \mu_i m^i \pmod{\mathfrak{n}^e},$$

alors, pour tout $i \in \{0, \dots, e-1\}$, on a $\lambda_i = \mu_i$. En effet, pour tout $j \in \{0, \dots, e-1\}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{e-1} \lambda_i m^i \equiv \sum_{i=0}^{e-1} \mu_i m^i \pmod{\mathfrak{n}^j} \iff \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i m^i \equiv \sum_{i=0}^{j-1} \mu_i m^i \pmod{\mathfrak{n}^j}.$$

On en déduit successivement $\lambda_0 = \mu_0, \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_{e-1} = \mu_{e-1}$. □

Soit N le nombre d'éléments de $\mathcal{O}_F$ de degré (en $\mathcal{O}_F$) < 2 (qui est fini d'après le lemme 5.6 de [Hay79]). La proposition suivante, qui repose sur le principe des tiroirs, est un des ingrédients clefs qui nous permettra d'éliminer l'hypothèse technique (20) p. 43.

Proposition 3.3.2. — Soient $B > 1$ un entier et H un sous-groupe de $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^\times$ d'indice $< B$. On suppose que $e \geq \log_q(2NB)$. Alors, il existe deux éléments a et b de $\mathcal{O}_F$ tels que $\bar{a} \in H$, $\bar{b} \in H$ et :

$$2 < q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} < 2NB q^{d_m}$$

où $d_m := \max_{\lambda \in \mathcal{R}_0} \{\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda\}$.

Démonstration. — D'après le lemme 3.3.1, l'ensemble

$$\mathcal{R} := \left\{ \sum_{i=0}^{e-1} \lambda_i m^i \mid \lambda_i \in \mathcal{R}_0 \right\}$$

est un système de représentants des classes d'équivalence de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$. Pour tout réel x , on note $\lceil x \rceil$ la partie entière par excès de x , c'est-à-dire le plus grand entier vérifiant :

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil.$$

Posons

$$c := \left\lceil \frac{\log_q(2NB)}{\deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}} \right\rceil.$$

Soit

$$\Gamma := \left\{ \sum_{i=c}^{e-1} \lambda_i m^i \mid \lambda_i \in \mathcal{R}_0 \right\}.$$

Pour tout $\alpha \in \Gamma$, définissons

$$I_\alpha := \left\{ \sum_{i=0}^{c-1} \lambda_i m^i + \alpha \mid \lambda_i \in \mathcal{R}_0 \right\}.$$

Ainsi, $\mathcal{R}$ est la réunion disjointe de tous les I_α pour α parcourant Γ . Soit

$$\Lambda := \{a \in \mathcal{O}_F \mid \bar{a} \in H\}.$$

Alors, H est en bijection avec $\Lambda \cap \mathcal{R}$ qui est la réunion disjointe des $\Lambda \cap I_\alpha$ pour $\alpha \in \Gamma$. Supposons que pour tout $\alpha \in \Gamma$, on ait $\#(\Lambda \cap I_\alpha) \leq N$. Alors :

$$\#H = \#(\Lambda \cap \mathcal{R}) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \#(\Lambda \cap I_\alpha) \leq N \# \Gamma.$$

Or $\# \Gamma = q^{(e-c)\deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}}$ (car $e \geq \log_q(2NB) \geq c$), d'où :

$$\#H \leq N q^{(e-c)\deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}} = N \frac{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)}{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^c)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} B > [(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^\times : H] &= \frac{\#((\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^\times)}{\#(H)} \geq \frac{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^c)}{N} \frac{\#((\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^\times)}{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^c)}{N} \end{aligned}$$

car, d'après la proposition 1.6 de [Ros02], on a :

$$\#((\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^\times) = \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})^e \left(1 - \frac{1}{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})}\right) \geq \frac{1}{2} \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e).$$

On obtient donc $2NB > q^{c \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}}$, ce qui contredit le choix de c . Il existe alors $\alpha \in \Gamma$ tel que $\#(\Lambda \cap I_\alpha) \geq N+1$. On peut donc trouver a et b distincts dans $\Lambda \cap I_\alpha$ tels que $\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a) \geq 2$. En effet, si a est fixé dans $\Lambda \cap I_\alpha$, le cardinal de l'ensemble $\{b-a \mid b \in \Lambda \cap I_\alpha\}$ est $N+1$. Or, il n'y a que N éléments de $\mathcal{O}_F$ de degré ≤ 1 . Donc il existe bien $b \in \Lambda \cap I_\alpha$ tel que $\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a) \geq 2$. Et comme $a, b \in I_\alpha$, on a également :

$$\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a) \leq (c-1) \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n} + d_m.$$

□

On suppose de plus que l'extension F/k est CM. Soient φ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de rang r , $\tilde{F} := F \cap \overline{\mathbb{F}}_q$ le corps des constantes de F , $\varsigma := \log_q \# \tilde{F}$ (i.e. $\tilde{F} = \mathbb{F}_{q^\varsigma}$) et $\mathfrak{h}$ le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$, alors $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$ est un idéal principal dont on note m un générateur. La proposition suivante est un raffinement du résultat précédent dans ce cadre plus général.

Proposition 3.3.3. — Soient $B > 1$ un entier et H un sous-groupe de $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}e})^\times$ d'indice $< B$. On suppose que $e \geq \log_q(2Bq^\varsigma(d+1))$.

Alors, il existe deux éléments a et b de $\mathcal{O}_F$ tels que $\bar{a} \in H$, $\bar{b} \in H$, $\deg_{\mathcal{O}_F} a = \deg_{\mathcal{O}_F} b$, $\mu_\varphi(a) = \mu_\varphi(b)$ et :

$$2 < q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} < 2Bq^{\varsigma(d+1)+d_m}$$

où $d_m := \max_{\lambda \in \mathcal{R}_0} \{\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda\}$.

Démonstration. — Soient ∞' l'unique place de F au-dessus de ∞ et $d := \deg \infty'$ le degré de ∞' sur $\mathbb{F}_q$. Alors, d'après la proposition 1.4.9 de [Sti09], on a $N \leq q^\varsigma(d+1)$.

D'après la proposition 3.3.2, il existe a' et b' dans $\mathcal{O}_F$ tels que $\bar{a'} \in H$, $\bar{b'} \in H$ et :

$$2 < q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b'-a')} < 2Bq^{\varsigma(d+1)+d_m}.$$

Soit $\lambda \in \mathcal{O}_F$ de degré suffisamment grand, *i.e.* :

$$\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda > \max\{\deg_{\mathcal{O}_F} a', \deg_{\mathcal{O}_F} b'\}.$$

Posons $a = a' + \lambda m^e$ et $b = b' + \lambda m^e$, alors $\bar{a} \in H$, $\bar{b} \in H$,

$$\deg_{\mathcal{O}_F} b = \deg_{\mathcal{O}_F} a = \deg_{\mathcal{O}_F} \lambda + e \deg_{\mathcal{O}_F} m$$

et

$$\deg_{\mathcal{O}_F} (b - a) = \deg_{\mathcal{O}_F} (b' - a') < \deg_{\mathcal{O}_F} a,$$

d'où

$$\deg_{\tau} \varphi_a = r \deg_{\mathcal{O}_F} a > r \deg_{\mathcal{O}_F} (b - a) = \deg_{\tau} \varphi_{b-a}.$$

Or $\varphi_{b-a} = \varphi_b - \varphi_a$, donc $\mu_{\varphi}(a) = \mu_{\varphi}(b)$. $\square$

Le lemme suivant établit une majoration de la constante d_m qui apparaît dans la proposition 3.3.3 en fonction d'une base fixée du A -module $\mathcal{O}_F$.

Lemme 3.3.4. — *Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathcal{O}_F$ en tant que A -module. Il existe un système de représentants $\mathcal{R}_0$ de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^h$ tel que :*

$$d_m := \max_{\lambda \in \mathcal{R}_0} \{\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda\} \leq d_{\mathcal{O}_F} + h r \deg_{\mathcal{O}_F} m$$

où $d_{\mathcal{O}_F} := \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_{\mathcal{O}_F} e_i\}$.

Démonstration. — Soit $m_0 \in A$ le générateur unitaire de l'idéal premier de A en-dessous de $\mathfrak{m}$ (*i.e.* $(m_0) = A \cap \mathfrak{m}$). Comme $m_0 \in \mathfrak{m}$, on a $m_0^h \in \mathfrak{m}^h$, donc $\mathcal{O}_F/(m_0^h \mathcal{O}_F)$ se surjecte sur $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^h$. Ainsi, tout système de représentants de $\mathcal{O}_F/(m_0^h \mathcal{O}_F)$ contient un système de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^h$. Or, l'ensemble $\{a \in A \mid \deg_A a < \deg_A m_0^h\}$ est un système de représentants de $A/(m_0^h)$. Donc l'ensemble $\mathcal{R}_0$ des éléments $\lambda \in \mathcal{O}_F$ tel que $\lambda = a_1 e_1 + \dots + a_r e_r$ avec les $a_i \in A$ de degré $< \deg_A m_0^h$ forme un système de représentants de $\mathcal{O}_F/(m_0^h \mathcal{O}_F)$. De plus, pour tout $a \in A$, on a $\deg_{\mathcal{O}_F} a = r \deg_A a$ car ⁽¹⁾ :

$$\mathcal{O}_F/(a \mathcal{O}_F) \simeq (A/(a))^r.$$

1. Ou d'une autre manière, comme F/k est CM, on a pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned} \deg_{\mathcal{O}_F} a &= -d v_{\infty'}(a) = -f(\infty'/\infty) v_{\infty'}(a) = -f(\infty'/\infty) e(\infty'/\infty) v_{\infty}(a) \\ &= -[F : k] v_{\infty}(a) = -r v_{\infty}(a) = r \deg_A a. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathcal{R}_0$, on a :

$$\begin{aligned}
\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda &= \deg_{\mathcal{O}_F} (a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r) \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_{\mathcal{O}_F} a_i e_i\} \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_{\mathcal{O}_F} e_i\} + \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_{\mathcal{O}_F} a_i\} \\
&\leq d_{\mathcal{O}_F} + r \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_A a_i\} \\
&\leq d_{\mathcal{O}_F} + r \deg_A m_0^{\mathfrak{h}} \\
&\leq d_{\mathcal{O}_F} + \mathfrak{h} r \deg_A m_0.
\end{aligned}$$

Or, $\deg_A m_0 \leq \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}$ (car $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}$ est une extension finie de $A/(m_0)$), ce qui achève la preuve. $\square$

3.4. Démonstration du théorème 1.4

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1.4 dont nous rappelons l'énoncé pour la commodité du lecteur :

Théorème 1.4. — Soient F/k une extension CM finie, ∞' l'unique place de F au-dessus de ∞ , d le degré sur $\mathbb{F}_q$ de la place ∞' et ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé. Soient K/k une extension finie telle que ψ soit défini sur K et L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G . Soient H un sous-groupe du centre de G et $E \subseteq L$ le sous-corps fixé par H . Soient $d_1 > 0$ un entier et v une place finie de K . On suppose que pour toute place w de E au-dessus de v , on ait $[E_w : K_v] \leq d_1$. Alors il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 \geq 1$ qui ne dépendent que de ψ telles que pour tout $\alpha \in L$ non de torsion pour ψ , on a :

$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \frac{q^{-c_1 \deg v d_1^2 [K:k]}}{c_2 d_1^{q^d-1} [K:k]^{q^d}}.$$

Démonstration. — Rappelons que comme ψ est de signe normalisé son corps des coefficients est H_F^+ (cf. §2.2.7). Donc $K \supset H_F^+ \supset F$. Conformément aux notations de la page 30, notons $\mathfrak{p}$ l'idéal de $\mathcal{O}_K$ associé à la place v et $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. On pose $\mathfrak{m} := \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_F$, $\widetilde{F} := F \cap \overline{\mathbb{F}_q}$ et $\varsigma := \log_q \# \widetilde{F}$. Soient $\mathfrak{h}$ le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$ et m un générateur de l'idéal principal $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$. Fixons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathcal{O}_F$ en tant que A -module et $\mathcal{R}_0$ un système de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$ tel que :

$$d_m := \max_{\lambda \in \mathcal{R}_0} \{\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda\} \leq d_{\mathcal{O}_F} + \mathfrak{h} r \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}$$

où $d_{\mathcal{O}_F} := \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_{\mathcal{O}_F} e_i\}$ (un tel système de représentants existe d'après le lemme 3.3.4). Soit $\alpha \in L$ non de torsion pour ψ . Soit i un entier suffisamment grand, i.e. tel que :

$$L \cap H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^\infty]) = L \cap H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}]) \quad (21)$$

et

$$\nu i \geq \log_q (4 d_1 [K : H_F^+] q^{\varsigma(d+1)}).$$

Alors, en posant :

$$H_1 := \text{Gal}(E(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}]) / E),$$

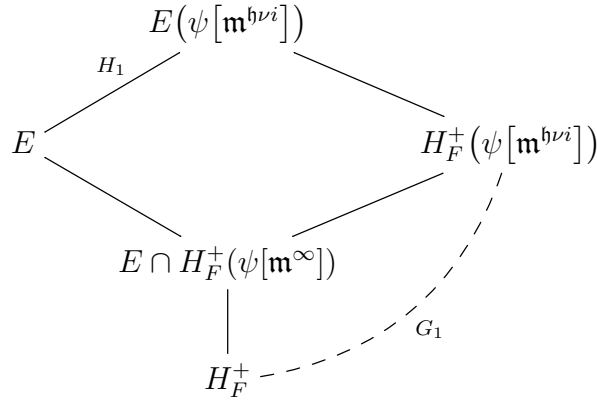
on a

$$H_1 \cong \text{Gal}(H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}]) / E \cap H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}])).$$

On peut donc voir H_1 comme un sous-groupe de $\text{Gal}(H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}]) / H_F^+)$.
Posons :

$$G_1 := \text{Gal}(H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}]) / H_F^+).$$

On illustre la tour d'extensions que nous venons de décrire par le diagramme suivant :



D'après la proposition 2.2.7, l'extension $H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}]) / H_F^+$ est totalement ramifiée en tout premier de H_F^+ au-dessus de $\mathfrak{m}$, ainsi :

$$[E \cap H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}]) : H_F^+] \leq e_q(E/H_F^+) \leq d_1 [K : H_F^+].$$

D'autre part, d'après l'isomorphisme (8) p. 15, on a :

$$G_1 \simeq (\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i})^\times.$$

On peut donc voir H_1 comme un sous-groupe de $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i})^\times$ et lui appliquer la proposition 3.3.3 avec $B := d_1 [K : H_F^+] + 1$. Ainsi, en notant pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, $\bar{a}$ l'image canonique de a dans $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}$, on obtient qu'il existe deux éléments a et b de $\mathcal{O}_F$ tels que $\bar{a} \in H_1$, $\bar{b} \in H_1$, $\deg_{\mathcal{O}_F} a = \deg_{\mathcal{O}_F} b$, $\mu_\psi(a) = \mu_\psi(b)$ et :

$$2 < q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} < 2Bq^{\zeta(d+1)+d_m}.$$

De plus, d'après les égalités (5) p. 13 et (7) p. 15, en notant $\sigma_a \in H_1$ et $\sigma_b \in H_1$ les symboles d'Artin associés, respectivement, aux idéaux (a) et (b) de $\mathcal{O}_F$, pour tout $\lambda \in \psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}]$, on a :

$$\mu_\psi(a) \sigma_a(\lambda) = \psi_a(\lambda) \tag{22}$$

et

$$\mu_\psi(b) \sigma_b(\lambda) = \psi_b(\lambda). \tag{23}$$

Soient $\tilde{\sigma}_a$ et $\tilde{\sigma}_b$ des prolongements respectifs de σ_a et σ_b à $L(\psi[\mathbf{m}^{\mathbf{h}^{\nu_i}}])$. Ainsi $\tilde{\sigma}_a$ et $\tilde{\sigma}_b$ sont des éléments de $\text{Gal}(L(\psi[\mathbf{m}^{\mathbf{h}^{\nu_i}}]) / E)$. On pose :

$$\beta := (\mu_\psi(b) \tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a) \tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\alpha) - \psi_{(b-a)^{q^d-1}}(\alpha) \in L. \quad (24)$$

On a :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_\psi(\beta) &= \widehat{h}_\psi\left((\mu_\psi(b) \tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a) \tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\alpha) - \psi_{(b-a)^{q^d-1}}(\alpha)\right) \\ &\leq \widehat{h}_\psi\left((\mu_\psi(b) \tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a) \tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\alpha)\right) + \widehat{h}_\psi\left(\psi_{(b-a)^{q^d-1}}(\alpha)\right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &(\mu_\psi(b) \tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a) \tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\alpha) \\ &= \sum_{j=0}^{q^d-1} (-1)^j \binom{q^d-1}{j} \mu_\psi(a)^j \mu_\psi(b)^{q^d-1-j} \tilde{\sigma}_b^{q^d-1-j} \circ \tilde{\sigma}_a^j(\alpha) \\ &\stackrel{\mu_\psi(a)=\mu_\psi(b)}{=} \sum_{j=0}^{q^d-1} (-1)^j \binom{q^d-1}{j} \mu_\psi(a)^{q^d-1} \tilde{\sigma}_b^{q^d-1-j} \circ \tilde{\sigma}_a^j(\alpha) \\ &= \sum_{j=0}^{q^d-1} (-1)^j \binom{q^d-1}{j} \tilde{\sigma}_b^{q^d-1-j} \circ \tilde{\sigma}_a^j(\alpha) \end{aligned}$$

car $\mu_\psi(a) \in \mathbb{F}_{q^d}^*$ d'après la relation (6) p. 14. Comme pour tout $x \in \bar{k}$ et tout $\zeta \in \mathbb{F}_q^*$ on a ⁽²⁾ $\widehat{h}_\psi(\zeta x) = \widehat{h}_\psi(x)$, on en déduit :

$$\widehat{h}_\psi\left((\mu_\psi(b) \tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a) \tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\alpha)\right) \leq q^d \widehat{h}_\psi(\alpha). \quad (25)$$

Par ailleurs,

$$\widehat{h}_\psi\left(\psi_{(b-a)^{q^d-1}}(\alpha)\right) = q^{(q^d-1) \deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} \widehat{h}_\psi(\alpha). \quad (26)$$

En regroupant les relations ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_\psi(\beta) &\leq \left(q^d + q^{(q^d-1) \deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)}\right) \widehat{h}_\psi(\alpha) \\ &\leq 2 \left(q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)}\right)^{q^d-1} \widehat{h}_\psi(\alpha). \end{aligned}$$

2. En effet, on a : $\widehat{h}_\psi(\zeta x) = \widehat{h}_\psi(\psi_\zeta(x)) = q^{\deg_{\mathcal{O}_F} \zeta} \widehat{h}_\psi(x) = \widehat{h}_\psi(x)$.

On pourrait aussi remarquer que $\binom{q^d-1}{j} = (-1)^j$ dans $\mathbb{F}_q$, car $\binom{q^d-1}{0} = 1$ et :

$$\binom{q^d-1}{j} + \binom{q^d-1}{j+1} = \binom{q^d}{j+1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Or, par choix de a et b , on a :

$$2 < q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} < 2B q^{\varsigma(d+1)+d_m},$$

avec $B = d_1 [K : H_F^+] + 1$, ainsi :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_\psi(\beta) &\leq 2 \left((d_1 [K : H_F^+] + 1) q^{\varsigma(d+1)+d_m} \right)^{q^d-1} \widehat{h}_\psi(\alpha) \\ &\leq 2 \left(4d_1 [K : k] q^{\varsigma(d+1)+d_m} \right)^{q^d-1} \widehat{h}_\psi(\alpha). \end{aligned}$$

Supposons dans un premier temps que les hypothèses du théorème 3.2.3 (avec α remplacé par β) soient vérifiées. D'après ce théorème on a alors :

$$\widehat{h}_\psi(\beta) \geq \left(2 [K : k] q^{3\mathfrak{h}d(q^d-1)\gamma(\psi)\deg_{\mathcal{O}_K}\mathfrak{p}d_1^2[K:k]} \right)^{-1}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_\psi(\alpha) &\geq \\ &\left(4(4d_1)^{q^d-1} [K : k]^{q^d} q^{(q^d-1)(3\mathfrak{h}d\gamma(\psi)d_1^2\deg_{\mathcal{O}_K}\mathfrak{p}[K:k]+\varsigma(d+1)+d_m)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} d_m &\leq d_{\mathcal{O}_F} + \mathfrak{h}r \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m} \\ &\leq 2 \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \mathfrak{h}r \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m} \\ &\leq 2 \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \mathfrak{h}r \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &3\mathfrak{h}d\gamma(\psi)d_1^2\deg_{\mathcal{O}_K}\mathfrak{p}[K:k] + \varsigma(d+1) + d_m \\ &\leq 3\mathfrak{h}d\gamma(\psi)d_1^2\deg_{\mathcal{O}_K}\mathfrak{p}[K:k] + 4\max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\}\mathfrak{h}r\varsigma\deg_{\mathcal{O}_K}\mathfrak{p} \\ &\leq \mathfrak{h}\deg_{\mathcal{O}_K}\mathfrak{p}(3d\gamma(\psi)d_1^2[K:k] + 4r\varsigma\max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\}) \\ &\leq 7\mathfrak{h}r\varsigma\max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\}\gamma(\psi)d_1^2\deg_{\mathcal{O}_K}\mathfrak{p}[K:k]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \widehat{h}_\psi(\alpha) &\geq \\ &\left(4(4d_1)^{q^d-1} [K : k]^{q^d} q^{7\mathfrak{h}r\varsigma(q^d-1)\max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\}\gamma(\psi)d_1^2\deg_{\mathcal{O}_K}\mathfrak{p}[K:k]} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat énoncé en posant :

$$c_1 := 7\mathfrak{h}r\varsigma(q^d-1)\max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\}\gamma(\psi),$$

et

$$c_2 := 4^{q^d}.$$

Il est clair que les constantes c_1 et c_2 sont positives et ne dépendent que de ψ . Plus précisément, elles ne dépendent que de $\mathfrak{h}$, $d_{\mathcal{O}_F}$, r , d et $\gamma(\psi)$. Or $\gamma(\psi)$ ne dépend que de ψ et $\mathfrak{h}$, $d_{\mathcal{O}_F}$, r et d ne dépendent que de l'anneau $\mathcal{O}_F$, donc de ψ car $\mathcal{O}_F$ est l'anneau des endomorphismes de ψ .

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que β n'est pas un point de torsion pour ψ et que β vérifie la condition (20) du théorème 3.2.3 : pour tout $\eta \in \text{Gal}(L/E)$, on a $\eta(\beta) - \beta \notin \psi[\mathfrak{m}^\infty] \setminus \{0\}$. Supposons par l'absurde que β soit un point de torsion pour ψ . Dans ce cas, on a d'après la définition (24) p. 52 de β et les relations (25) et (26) p. 52 :

$$\begin{aligned} q^{(q^d-1)\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} \widehat{h}_\psi(\alpha) &= \widehat{h}_\psi\left(\psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha)\right) \\ &= \widehat{h}_\psi\left((\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\alpha)\right) \\ &\leq q^d \widehat{h}_\psi(\alpha). \end{aligned}$$

Or $q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} > 2$ et $2^{q^d-1} > q^d$, ce qui contredit le fait que α ne soit pas un point de torsion pour ψ . Montrons maintenant que β vérifie la condition (20) du théorème 3.2.3. Pour cela supposons par l'absurde qu'il existe $\eta \in \text{Gal}(L/E)$ tel que $\theta := \eta(\beta) - \beta \in L \cap \psi[\mathfrak{m}^\infty] \setminus \{0\}$. Alors, en posant $\delta := \eta(\alpha) - \alpha \in L$, on a d'après la définition (24) p. 52 de β et en utilisant le fait que $\text{Gal}(L/E)$ est abélien :

$$\begin{aligned} \theta = \eta(\beta) - \beta &= \eta\left((\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\alpha) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha)\right) \\ &\quad - (\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\alpha) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha) \\ &= (\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\eta(\alpha)) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\eta(\alpha)) \\ &\quad - (\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\alpha) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha) \\ &= (\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\eta(\alpha) - \alpha) \\ &\quad - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\eta(\alpha) - \alpha) \\ &= (\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\delta) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\delta). \end{aligned}$$

Comme θ est un point de torsion pour ψ , on a d'après les relations (25) et (26) p. 52 (avec α remplacé par δ) :

$$\begin{aligned} q^{(q^d-1)\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} \widehat{h}_\psi(\delta) &= \widehat{h}_\psi\left(\psi_{(b-a)q^{d-1}}(\delta)\right) \\ &= \widehat{h}_\psi\left((\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\delta)\right) \\ &\leq q^d \widehat{h}_\psi(\delta). \end{aligned}$$

Donc δ est un point de torsion pour ψ car $q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} > 2$, et $2^{q^d-1} > q^d$. D'après le lemme 2.2.3, il existe $\delta_1 \in L$ et $\delta_2 \in L$ deux points de torsion de ψ tels que $\delta = \delta_1 + \delta_2$ avec δ_1 d'ordre une puissance de $\mathfrak{m}$ et δ_2 d'ordre premier à $\mathfrak{m}$. Remarquons que $\delta_1 \in \psi[\mathfrak{m}^{h\nu^i}]$ par choix de i (cf. relation (21)). Ainsi, en utilisant les relations (22) et (23) p. 51, on obtient :

$$(\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\delta_1) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\delta_1) = 0.$$

Donc

$$\theta = (\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\delta_2) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\delta_2).$$

Puisque δ_2 est d'ordre premier à $\mathfrak{m}$, on en déduit que θ est également d'ordre premier à $\mathfrak{m}$. Il existe donc un idéal non nul $\mathfrak{b}$ de $\mathcal{O}_F$ premier à $\mathfrak{m}$ tel que $\theta \in \psi[\mathfrak{b}]$. D'autre part, θ est d'ordre une puissance de $\mathfrak{m}$ par hypothèse. Il existe donc un entier $i > 0$ tel que $\theta \in \psi[\mathfrak{m}^i]$. Mais les idéaux $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{m}$ étant premiers entre eux, il en est de même de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{m}^i$. Ainsi, il existe $u \in \mathfrak{b}$ et $v \in \mathfrak{m}^i$ tels que $u + v = 1$. Or, $\psi_u(\theta) = 0$ car $\theta \in \psi[\mathfrak{b}]$ et $\psi_v(\theta) = 0$ car $\theta \in \psi[\mathfrak{m}^i]$. D'où

$$\theta = \psi_1(\theta) = \psi_u(\theta) + \psi_v(\theta) = 0.$$

Ce qui contredit l'hypothèse suivant laquelle $\theta \neq 0$. Donc β vérifie bien la condition (20) du théorème 3.2.3, ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

3.5. Démonstration du théorème 1.1

Dans ce paragraphe nous montrons le résultat principal, dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 1.1. — *Soit ϕ un A -module de Drinfeld défini sur $\bar{k}$ et à multiplications complexes. Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne infinie de groupe de Galois G . Soient H un sous-groupe du centre de G et $E \subseteq L$ le sous-corps fixé par H . Soit $d_0 > 0$ un entier. On suppose qu'il existe une place finie v de K telle que pour toute place w de E au-dessus de v , on ait $[E_w : K_v] \leq d_0$. Alors L a la propriété (B, ϕ) . Plus précisément, il existe une constante $c_0 > 0$ qui ne dépend que de ϕ telle que pour tout $\alpha \in L$ non de torsion pour ϕ , on a :*

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c_0 \deg v d_0^2 [K:k]}.$$

Démonstration. — En reprenant les notations et résultats du §2.4, on note r le rang de ϕ , R l'image de $\text{End}(\phi)$ dans $\bar{k}$, $\mathfrak{C}$ le conducteur de R , F le corps des fractions de R (on rappelle que F est une extension CM de k de degré r), $\widetilde{F} := F \cap \overline{\mathbb{F}}_q$ le corps des constantes de F et $\varsigma := \log_q \# \widetilde{F}$. On note également ∞' l'unique place de F au-dessus de ∞ , d le degré de la place ∞' sur $\mathbb{F}_q$, ϕ' le R -module de Drinfeld étendu de ϕ et $\varphi' := \mathfrak{C} * \phi'$ le R -module de Drinfeld isogène à ϕ' via $\phi'_\mathfrak{C}$ dont on note φ le $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld étendu. Soient $\pi \in \mathcal{O}_F$ une uniformisante de ∞' et $z \in \bar{k}$ une racine du polynôme :

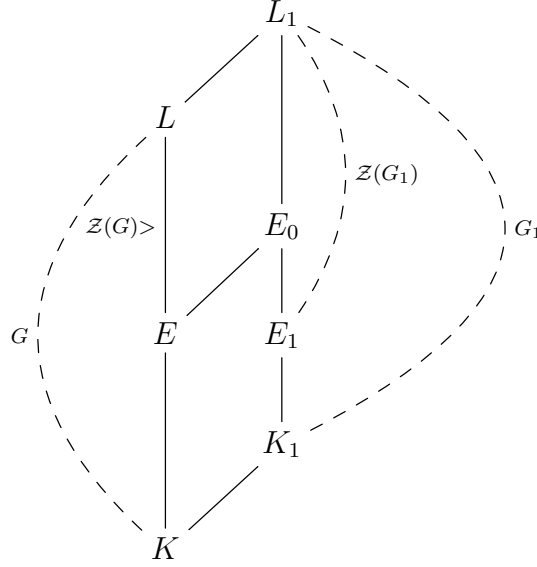
$$X^{q^d-1} - \mu_\varphi(\pi^{-1}).$$

Alors, d'après la proposition 2.2.6, le $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld $\psi := z \varphi z^{-1}$ est de signe normalisé. De plus, comme $\psi = z \varphi z^{-1}$ et $\varphi' := \mathfrak{C} * \phi'$, le corps $F_\phi(z)$ est un corps de définition de ψ . D'autre part, d'après l'égalité (12) p. 27, pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :

$$q^{\deg_R \mathfrak{C}} \widehat{h}_\phi(\alpha) = \widehat{h}_\psi(z \phi'_\mathfrak{C}(\alpha)).$$

Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer que K contient $F_\phi(z)$. En effet, en posant $K_1 := K F_\phi(z)$ et $L_1 := L F_\phi(z)$, l'extension L_1/K_1 est galoisienne. Soient $G_1 := \text{Gal}(L_1/K_1)$ et $E_1 := L_1^{Z(G_1)}$. On vérifie aisément que si $E_0 := E F_\phi(z)$, alors $\text{Gal}(L_1/E_0)$ est un sous-groupe

de $\mathcal{Z}(G_1)$, donc $E_1 \subset E_0$. On illustre la tour d'extensions que nous venons de décrire par le diagramme suivant :



De plus, si v_1 est une place de K_1 au-dessus de v , alors pour toute place w_1 de E_1 au-dessus de v_1 , on a $[(E_1)_{w_1} : (K_1)_{v_1}] \leq d_0$. En effet :

$$[(E_1)_{w_1} : (K_1)_{v_1}] \leq [(E_0)_{w_0} : (K_1)_{v_1}] \leq [E_w : K_v] \leq d_0,$$

où w_0 est une place de E_0 au-dessus de w_1 et w est la restriction de w_0 à E . Ainsi, s'il existe une constante $c'_0 > 0$ telle que pour tout $\alpha \in L_1 \setminus \phi(L_1)_{\text{tors}}$, on ait :

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c'_0 \deg v_1 d_0^2 [K_1:k]},$$

alors, en posant

$$c_0 := c'_0 [F_\phi(z) : k]^2,$$

pour tout $\alpha \in L \setminus \phi(L)_{\text{tors}}$, on a :

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c_0 \deg v d_0^2 [K:k]}$$

car

$$\deg v_1 \leq [F_\phi(z) : k] \deg v$$

et

$$[K_1 : K] \leq [F_\phi(z) : k] [K : k].$$

Donc, quitte à remplacer (K, L) par (K_1, L_1) , on peut supposer que $F_\phi(z) \subset K$, ce qu'on fera désormais.

Soit L'/K une extension galoisienne finie telle que $L' \subset L$ et notons $G' := \text{Gal}(L'/K)$ son groupe de Galois. Soit $E' := L' \cap E$. Alors, l'extension L'/E' est galoisienne et $\text{Gal}(L'/E')$ est un sous-groupe de $\mathcal{Z}(G')$. De plus, pour toute place $w|v$ de E' , on a $[E'_w : K_v] \leq d_0$. Soit $\beta \in L'$ qui n'est pas un point de torsion de ψ . Alors, d'après le théorème 1.4, il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 \geq 1$ qui ne dépendent que de ψ (et donc que de ϕ) telles que :

$$\widehat{h}_\psi(\beta) \geq \frac{q^{-c_1 \deg v d_0^2 [K:k]}}{c_2 d_0^{q^d-1} [K:k]^{q^d}}.$$

Or, d'après la preuve du théorème 1.4, on a :

$$c_1 := 7 \mathfrak{h} r \varsigma (q^d - 1) \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi)$$

et

$$c_2 := 4^{q^d}.$$

En majorant grossièrement, on obtient :

$$\begin{aligned} c_2 d_0^{q^d-1} [K:k]^{q^d} &\leq q^{2q^d} q^{(q^d-1)d_0} q^{q^d [K:k]} \\ &\leq q^{4q^d d_0 [K:k]}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\widehat{h}_\psi(\beta) \geq q^{-11 \mathfrak{h} r \varsigma q^d \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) \deg v d_0^2 [K:k]}.$$

Soit $\alpha \in L \setminus \phi(L)_{\text{tors}}$. En substituant β par $z \phi'_\mathfrak{C}(\alpha)$ dans l'inégalité précédente et en utilisant l'égalité (12) p. 27, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_\phi(\alpha) &= \frac{\widehat{h}_\psi(z \phi'_\mathfrak{C}(\alpha))}{q^{\deg_R \mathfrak{C}}} \\ &\geq q^{-11 \mathfrak{h} r \varsigma q^d \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) \max\{1, \deg_R \mathfrak{C}\} \deg v d_0^2 [K:k]}. \end{aligned}$$

D'où le résultat souhaité en posant :

$$c'_0 := 11 \mathfrak{h} r \varsigma q^d \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) \max\{1, \deg_R \mathfrak{C}\}.$$

□

Remarque 3.5.1. — Il est possible d'expliciter la constante c_0 du théorème précédent. En effet, en reprenant la preuve du théorème 1.1, on obtient :

$$c_0 = 11 \mathfrak{h} r \varsigma q^d \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) \max\{1, \deg_R \mathfrak{C}\} [F_\phi(z) : k]^2.$$

En particulier, dans le cas du module de Carlitz (*i.e.* le A -module de Drinfeld C de rang 1 défini sur k par $C_T = T\tau^0 + \tau$), on obtient que pour toute extension finie K/k et pour tout $\alpha \in K^{\text{ab}} \setminus C(K^{\text{ab}})_{\text{tors}}$, on a :

$$\widehat{h}_C(\alpha) \geq q^{-11} q^{\gamma(C)} [K:k]^2.$$

Remarque 3.5.2. — Comme corollaire à leur théorème (*cf.* cor. 1.3 de [ADZ11]), F. Amoroso, S. David et U. Zannier montrent qu’une extension galoisienne infinie de groupe de Galois d’exposant fini a la propriété (B). En effet, dans sa thèse (*cf.* [Che10]), S. Checcoli montre que si K est un corps de nombres et si L/K est une extension galoisienne infinie de groupe de Galois G d’exposant fini, alors les degrés locaux sur L sont uniformément bornés en toutes les places de K . Ensuite S. Checcoli et P. Dèbes (*cf.* [CD13]) ont généralisé ce résultat à certaines classes de corps de fonctions. Une question naturelle est donc de savoir si ce résultat est encore vrai dans le cadre des corps de fonctions en caractéristique positive. Cette question fait l’objet du §A.2.

ANNEXE A

DEUX RÉSULTATS D'ARITHMÉTIQUE DES CORPS EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE

Ce chapitre regroupe deux résultats de nature différente concernant l'arithmétique des corps en caractéristique positive. Dans le paragraphe A.1 nous donnerons une preuve de la proposition 3.1.5 dont nous avons eu besoin pour montrer une inégalité métrique dans le cas « ramifié » (*cf.* proposition 3.1.6).

Le paragraphe A.2 est consacré à une généralisation conditionnelle d'un théorème de S. Checcoli. Pour ce faire, nous aurons besoin, dans le cas de corps de fonctions en caractéristique positive, d'une hypothèse supplémentaire. Nous montrons ensuite, à l'aide d'un exemple, que cette hypothèse est en effet nécessaire.

A.1. Une conséquence du théorème de Hasse-Arf

Dans ce paragraphe nous nous proposons de donner une preuve de la proposition 3.1.5. Pour cela nous aurons besoin de quelques rappels de théorie de la ramification.

Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois $G := \text{Gal}(L/K)$. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_K$ et $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. On pose $e := e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ l'indice de ramification de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ et $f := f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ le degré d'inertie de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$. On note $v_{\mathfrak{P}}$ la valuation discrète associée à $\mathfrak{P}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} := \{x \in L \mid v_{\mathfrak{P}}(x) \geq 0\}$ l'anneau de valuation discrète associé à $\mathfrak{P}$. Enfin on fixe ϖ une uniformisante de $\mathfrak{P}$.

A.1.1. Les groupes de ramification

Définition A.1.1. — Avec les notations précédentes, on appelle :

- groupe de décomposition de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ l'ensemble :

$$G_{-1} = G_{-1}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) := \{\sigma \in G \mid \sigma\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\} ;$$

- groupe d'inertie de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ l'ensemble :

$$G_0 = G_0(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) := \{\sigma \in G \mid \forall \gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}, \sigma(\gamma) \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{P}}\} ;$$

- i -ème groupe de ramification de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ (avec $i \in \mathbb{N}$) l'ensemble :

$$G_i = G_i(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) := \{\sigma \in G \mid \forall \gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}, \sigma(\gamma) \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}\} .$$

Remarque A.1.2. — Il est clair que les ensembles définis ci-dessus sont bien des sous-groupes de G .

Lemme A.1.3. — Avec les notations précédentes, on a :

1. $G \supseteq G_{-1} \supseteq G_0 \supseteq \cdots \supseteq G_i \supseteq \cdots$;
2. Il existe $i' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $i \geq i'$, on a $G_i = \{\text{id}\}$.

Démonstration. —

1. Il suffit de montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $G_i \subseteq G_{i-1}$. Soient $i \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in G_i$, alors pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, on a :

$$\sigma(\gamma) \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}} .$$

Or $\mathfrak{P}^{i+1} \subset \mathfrak{P}^i$. Ainsi, pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, on a :

$$\sigma(\gamma) \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{P}^i} .$$

Et donc $\sigma \in G_{i-1}$.

2. Soit $\sigma \in G$ tel que pour tout entier $i \geq -1$, on ait $\sigma \in G_i$. Alors, pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, on a :

$$\sigma(\gamma) \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}} .$$

Cela signifie que pour tout $i \geq -1$, on a $\sigma(\gamma) - \gamma \in \mathfrak{P}^{i+1}$. Donc $\sigma = \text{id}$. Le groupe G étant fini, on en déduit immédiatement le résultat.

□

Lemme A.1.4. — Pour tout $i \in \mathbb{N}$, le groupe G_i est un sous-groupe normal de G_{-1} .

Démonstration. — Soient $i \in \mathbb{N}$, $\sigma \in G_i$ et $\eta \in G_{-1}$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, on a :

$$\sigma \circ \eta^{-1}(\gamma) \equiv \eta^{-1}(\gamma) \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}.$$

Ainsi,

$$\eta \circ \sigma \circ \eta^{-1}(\gamma) \equiv \gamma \pmod{\eta \mathfrak{P}^{i+1}}.$$

Or $\eta \in G_{-1}$ donc $\eta \mathfrak{P} = \mathfrak{P}$. D'où le résultat. $\square$

Proposition A.1.5. — Avec les notations précédentes, on a :

1. $\#(G_{-1}) = ef$;
2. $\#(G_0) = e$;
3. $p \nmid \#(G_0/G_1)$.

Démonstration. — Voir le théorème 3.8.2 page 131 et la proposition 3.8.5 page 134 de [Sti09]. $\square$

Lemme A.1.6. — Avec les notations précédentes :

1. Pour tout $\sigma \in G_{-1}$, on a $v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\sigma(\varpi)}{\varpi}\right) = 0$;
2. Pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $\sigma \in G_i$ si et seulement si

$$\frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}^i}.$$

Démonstration. —

1. Soit $\sigma \in G_{-1}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\sigma(\varpi)}{\varpi}\right) &= v_{\mathfrak{P}}(\sigma(\varpi)) - v_{\mathfrak{P}}(\varpi) \\ &= v_{\sigma^{-1}\mathfrak{P}}(\varpi) - v_{\mathfrak{P}}(\varpi). \end{aligned}$$

Or, comme $\sigma \in G_{-1}$, on a $\sigma \mathfrak{P} = \mathfrak{P}$, d'où :

$$v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\sigma(\varpi)}{\varpi}\right) = v_{\mathfrak{P}}(\varpi) - v_{\mathfrak{P}}(\varpi) = 0.$$

2. Soient $i \geq 1$ et $\sigma \in G_i$, alors on a :

$$\begin{aligned} \sigma \in G_i &\iff v_{\mathfrak{P}}(\sigma(\varpi) - \varpi) \geq i + 1 \\ &\iff v_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} - 1\right) \geq i \\ &\iff \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}^i}. \end{aligned}$$

□

Le lemme précédent nous permet de définir les applications suivantes :

Définition A.1.7. — Avec les notations précédentes :

1. On note $\theta_0 : G_0/G_1 \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P})^\times$ l'application définie par $\sigma \mapsto \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi}$;
2. Soit $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\theta_i : G_i/G_{i+1} \rightarrow \mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1}$ l'application définie par $\sigma \mapsto \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} - 1$;

Proposition A.1.8. — Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'application θ_i est un morphisme de groupes injectif. De plus, l'application θ_i ne dépend pas de l'uniformisante ϖ de $\mathfrak{P}$ choisie.

Démonstration. — Soit $i \in \mathbb{N}$:

1. Montrons que θ_i ne dépend pas du choix de ϖ . Soient $\sigma \in G_i$ et $\varpi' \neq \varpi$ une autre uniformisante de $\mathfrak{P}$, alors il existe $u \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^\times$ tel que $\varpi' = u\varpi$. Ainsi :

$$\frac{\sigma(\varpi')}{\varpi'} = \frac{\sigma(u\varpi)}{u\varpi} = \frac{\sigma(u)}{u} \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi}.$$

Or $u \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^\times$ et $\sigma \in G_i$, d'où :

$$\frac{\sigma(u)}{u} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}.$$

Et donc :

$$\frac{\sigma(\varpi')}{\varpi'} \equiv \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}.$$

2. Montrons que pour tous $\sigma \in G_i$ et $\eta \in G_i$, on a :

$$\frac{\sigma \circ \eta(\varpi)}{\varpi} \equiv \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} \frac{\eta(\varpi)}{\varpi} \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}.$$

On écrit

$$\frac{\sigma \circ \eta(\varpi)}{\varpi} = \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} \frac{\eta(\varpi)}{\varpi} \frac{\sigma \circ \eta(\varpi)}{\eta(\varpi)} \frac{\varpi}{\sigma(\varpi)}.$$

Ainsi, en posant $u := \frac{\eta(\varpi)}{\varpi}$, on obtient :

$$\frac{\sigma \circ \eta(\varpi)}{\eta(\varpi)} \frac{\varpi}{\sigma(\varpi)} = \frac{\sigma(u)}{u}.$$

Comme $\eta \in G_i \subset G_{-1}$, on a $\eta\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ et donc $u \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^\times$. De même, comme $\sigma \in G_i$, on a :

$$\frac{\sigma(u)}{u} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}.$$

D'où le résultat.

3. Montrons que θ_0 est injectif. Le fait que θ_0 soit un morphisme de groupes découlant directement du point précédent, il suffit de calculer le noyau de θ_0 :

$$\begin{aligned} \ker \theta_0 &= \{ \sigma \in G_0 \mid \theta_0(\sigma) = 1 \} \\ &= \left\{ \sigma \in G_0 \mid \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}} \right\} \\ &= G_1, \end{aligned}$$

d'après le lemme A.1.6. Ainsi θ_0 est bien injectif.

4. Soient $i > 0$ un entier, $\sigma \in G_i$ et $\eta \in G_i$. D'après le point 2 ci-dessus, on a :

$$\frac{\sigma \circ \eta(\varpi)}{\varpi} - 1 \equiv \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} \frac{\eta(\varpi)}{\varpi} - 1 \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}.$$

Posons $x := \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} - 1$ et $y := \frac{\eta(\varpi)}{\varpi} - 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} \frac{\eta(\varpi)}{\varpi} - 1 &= (x+1)(y+1) - 1 \\ &= xy + x + y \\ &\equiv x + y \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}} \end{aligned}$$

car $xy \in \mathfrak{P}^{2i} \subset \mathfrak{P}^{i+1}$. Donc $\theta_i(\sigma \circ \eta) = \theta_i(\sigma) + \theta_i(\eta)$. Il ne reste plus qu'à calculer le noyau de θ_i :

$$\begin{aligned} \ker \theta_i &= \{ \sigma \in G_i \mid \theta_i(\sigma) = 0 \} \\ &= \left\{ \sigma \in G_i \mid \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} - 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}} \right\} \\ &= \left\{ \sigma \in G_i \mid \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}} \right\} \\ &= G_{i+1}, \end{aligned}$$

d'après le lemme A.1.6. Ainsi θ_i est bien un morphisme injectif de groupes.

□

A.1.2. Démonstration de la proposition 3.1.5

Dorénavant, on suppose que l'extension L/K est abélienne (*i.e.* G est abélien).

Proposition A.1.9. — *Avec les notations précédentes :*

1. L'image de θ_0 est contenue dans $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})^\times$;
2. Pour tout $i \geq 1$, l'image de θ_i est contenue dans un $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ -espace vectoriel de dimension 1.

En particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\#(G_i/G_{i+1}) \leq q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}.$$

Démonstration. —

1. Soit $\sigma \in G_{-1}$, alors $\sigma\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$. Il existe donc $a_\sigma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^\times$ tel que $\sigma(\varpi) = a_\sigma \varpi$. De même, soit $\eta \in G_{-1}$, il existe $a_\eta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^\times$ tel que $\eta(\varpi) = a_\eta \varpi$. Ainsi :

$$\sigma \circ \eta(\varpi) = \sigma(a_\eta \varpi) = \sigma(a_\eta) \sigma(\varpi) = \sigma(a_\eta) a_\sigma \varpi,$$

d'où $a_{\sigma\eta} = \sigma(a_\eta) a_\sigma$. En inversant les rôles de σ et η , on obtient $a_{\eta\sigma} = \eta(a_\sigma) a_\eta$. Supposons que $\sigma \in G_0$, alors :

$$\sigma(a_\eta) \equiv a_\eta \pmod{\mathfrak{P}},$$

d'où

$$\sigma(a_\eta) a_\sigma \equiv a_\eta a_\sigma \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Or G est abélien donc $a_{\sigma\eta} = a_{\eta\sigma}$ (i.e. $\sigma(a_\eta) a_\sigma = \eta(a_\sigma) a_\eta$). D'où :

$$\eta(a_\sigma) a_\eta \equiv a_\eta a_\sigma \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Et comme $a_\eta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^\times$, on a :

$$\eta(a_\sigma) \equiv a_\sigma \pmod{\mathfrak{P}}.$$

En notant $\bar{a}_\sigma$ la classe de a_σ dans $(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P})^\times$, on obtient que $\bar{a}_\sigma$ est fixé par tous les éléments de G_{-1} . Or

$$\text{Gal}((\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P})/(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p})) \simeq G_{-1}/G_0,$$

d'où $\bar{a} \in (\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p})^\times$. Et donc :

$$\text{Im } \theta_0 \subset (\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p})^\times \simeq (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})^\times.$$

2. Soit $i \geq 1$, montrons que l'image de θ_i est fixée par G_{-1} . Soient $\sigma \in G_i$ et $\eta \in G_{-1}$. Posons $\alpha := \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} - 1$. Comme auparavant, on montre qu'il existe $a_\eta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^\times$ tel que $\eta(\varpi) = a_\eta \varpi$. D'où :

$$\varpi = \eta^{-1} \circ \eta(\varpi) = \eta^{-1}(a_\eta \varpi) = \eta^{-1}(a_\eta) \eta^{-1}(\varpi).$$

Or $a_\eta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^\times$ donc $\eta^{-1}(\varpi) = \eta^{-1}(a_\eta^{-1}) \varpi$. De plus :

$$\begin{aligned} \sigma(\varpi) &\stackrel{G \text{ abélien}}{=} \eta \circ \sigma \circ \eta^{-1}(\varpi) \\ &= \eta \circ \sigma(\eta^{-1}(a_\eta^{-1}) \varpi) \\ &\stackrel{\alpha := \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi} - 1}{=} \sigma(a_\eta^{-1}) \eta(\varpi (1 + \alpha)) \\ &= \sigma(a_\eta^{-1}) a_\eta (1 + \eta(\alpha)) \varpi. \end{aligned}$$

Or $\sigma \in G_i$ et $a_\eta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^\times$, d'où :

$$\sigma(a_\eta^{-1}) a_\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{(1 + \eta(\alpha)) \varpi}{\varpi} - 1 \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}} \\ &\equiv \eta(\alpha) \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}. \end{aligned}$$

Donc l'image de θ_i est bien fixée par G_{-1} . Maintenant, soient $v_0 \neq 0$ et v deux éléments de $\text{Im } \theta_i$. Si G_i/G_{i+1} est trivial, alors le résultat est clair. On suppose donc que $G_i/G_{i+1} \neq \{\text{id}\}$. Comme $\mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1}$ est

un $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}$ -espace vectoriel de dimension 1, il existe $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}$ tel que $v = \lambda v_0$. On en déduit que λ est fixé par G_{-1} . Or

$$\mathrm{Gal}((\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P})/(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p})) \simeq G_{-1}/G_0,$$

d'où $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \simeq \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$. Donc $\mathrm{Im} \theta_i$ est contenu dans un $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ -espace vectoriel de dimension 1 engendré par v_0 .

En particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\#(G_i/G_{i+1}) = \#(\mathrm{Im} \theta_i) \leq \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) = q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}.$$

□

Nous sommes maintenant en position de donner une démonstration de la proposition 3.1.5, dont nous rappelons l'énoncé pour la commodité du lecteur.

Proposition 3.1.5. — *Soient K/k une extension finie, L/K une extension abélienne de groupe de Galois G et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$. Si l'idéal $\mathfrak{p}$ est ramifié sur L alors l'ensemble :*

$$H_{\mathfrak{p}} := \left\{ \sigma \in G \mid \forall \gamma \in \mathcal{O}_L, \sigma(\gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \equiv \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \pmod{\mathfrak{p}\mathcal{O}_L} \right\}$$

est un sous-groupe non trivial du groupe d'inertie de $\mathfrak{p}$ sur L .

Démonstration. — Montrons tout d'abord que $H_{\mathfrak{p}}$ est un sous-groupe du groupe d'inertie de $\mathfrak{p}$. Le fait que $H_{\mathfrak{p}}$ est un groupe étant évident, il suffit de montrer que $H_{\mathfrak{p}}$ est inclus dans G_0 . Soit $\sigma \in H_{\mathfrak{p}}$, alors pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_L$, on a :

$$\sigma(\gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \equiv \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \pmod{\mathfrak{p}\mathcal{O}_L}.$$

Ainsi, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, on a :

$$v_{\mathfrak{P}}\left(\sigma(\gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} - \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}}\right) \geq 1.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{P}}\left(\sigma(\gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} - \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}}\right) &= v_{\mathfrak{P}}\left((\sigma(\gamma) - \gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}}\right) \\ &= q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}} v_{\mathfrak{P}}(\sigma(\gamma) - \gamma). \end{aligned}$$

Donc

$$v_{\mathfrak{P}}(\sigma(\gamma) - \gamma) \geq 1.$$

Ainsi $\sigma \in G_0$ et donc $H_{\mathfrak{p}}$ est bien un sous-groupe du groupe d'inertie de $\mathfrak{p}$ sur L .

Montrons maintenant que $H_{\mathfrak{p}}$ est non trivial. Soient $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{P}_1^e \cdots \mathfrak{P}_j^e$ la décomposition en produit d'idéaux premiers de $\mathfrak{p}$. Le groupe G étant abélien, les groupes G_i (où $i \geq -1$) ne dépendent pas de l'idéal $\mathfrak{P}_{j'} = \mathfrak{P}$ ($1 \leq j' \leq j$) fixé.

- Supposons que $\mathfrak{p}$ soit modérément ramifié sur L (i.e. $p \nmid e$), alors d'après la proposition A.1.9, on a :

$$e = e_0 = \#(G_0/G_1) \leq q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}.$$

Soient $\sigma \in G_0$ et $\gamma \in \mathcal{O}_L$. Alors, par définition de G_0 , pour tout $j' \in \{1, \dots, j\}$, on a :

$$\sigma(\gamma) - \gamma \in \mathfrak{P}_{j'},$$

d'où,

$$(\sigma(\gamma) - \gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \in \mathfrak{P}_{j'}^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \subset \mathfrak{P}_{j'}^e,$$

car $e \leq q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}$. De plus,

$$(\sigma(\gamma) - \gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} = \sigma(\gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} - \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}}.$$

Ainsi,

$$\sigma(\gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} - \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \in \mathfrak{P}_1^e \cdots \mathfrak{P}_j^e = \mathfrak{p}\mathcal{O}_L.$$

D'où $G_0 \subset H_{\mathfrak{p}}$. D'autre part G_0 est non trivial car $\mathfrak{p}$ est ramifié sur L par hypothèse.

- Supposons maintenant que $\mathfrak{p}$ est sauvagement ramifié sur L (i.e. $p \mid e$), alors d'après le *théorème de Hasse-Arf* (cf. [Ser68] page 84), pour tout $i' \geq 1$ tel que $G_{i'} \neq G_{i'+1}$, on a :

$$\frac{1}{e} \sum_{i=1}^{i'} \#(G_i) \in \mathbb{Z}.$$

Soit $i' \geq 1$ tel que $G_{i'} \neq G_{i'+1} = \{\text{id}\}$. Posons $j' := 0$ si $G_{i'} = G_1$, et sinon on définit $j' \geq 1$ par :

$$G_{j'} \neq G_{j'+1} = \cdots = G_{i'} \neq G_{i'+1} = \{\text{id}\}.$$

Alors,

$$\frac{1}{e} \sum_{i=1}^{j'} \#(G_i) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \frac{1}{e} \sum_{i=1}^{i'} \#(G_i) \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, e divise

$$\sum_{i=j'+1}^{i'} \#(G_i) = (i' - j') \#(G_{i'}) = (i' - j') \#(G_{i'}/G_{i'+1}).$$

D'où,

$$e \leq (i' - j') \#(G_{i'}/G_{i'+1}) \leq i' q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}.$$

Soient $\sigma \in G_{i'-1}$ et $\gamma \in \mathcal{O}_L$. Pour tout $i \in \{1, \dots, j\}$, on a :

$$\sigma(\gamma) - \gamma \in \mathfrak{P}_i^{i'},$$

d'où,

$$\sigma(\gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} - \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} = (\sigma(\gamma) - \gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \in \mathfrak{P}_i^{i' q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \subset \mathfrak{P}_i^e.$$

Ainsi,

$$\sigma(\gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} - \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}} \in \mathfrak{P}_1^e \cdots \mathfrak{P}_j^e = \mathfrak{p} \mathcal{O}_L.$$

On obtient donc $\{\text{id}\} \subsetneq G_{i'} \subseteq G_{i'-1} \subseteq H_{\mathfrak{p}}$.

□

A.2. Quelques remarques à propos d'un théorème de Checcoli

Soient K un corps global⁽¹⁾ et L/K une extension galoisienne infinie. On dit que l'extension L/K a ses degrés locaux *uniformément bornés* en toutes (resp. en presque toutes⁽²⁾) les places de K s'il existe un entier $d_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour toutes (resp. presque toutes) les places v de K , on a $[L_w : K_v] \leq d_0$ pour toute place $w|v$ de L .

Dans sa thèse S. Checcoli démontre entre autres résultats le théorème suivant (cf. th. 2.2.2 de [Che10]) :

Théorème A.2.1. — *Soit K un corps de nombres et L/K une extension galoisienne infinie. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'extension L/K a ses degrés locaux uniformément bornés en toutes les places de K ;*
2. *l'extension L/K a ses degrés locaux uniformément bornés en presque toutes les places de K ;*
3. *le groupe de Galois de l'extension L/K est d'exposant fini.*

Nous montrons ici un analogue du théorème A.2.1 en supposant de plus que l'exposant est premier à la caractéristique. Cette hypothèse n'est utile que dans la démonstration de l'implication $3 \implies 1$. Nous donnons ensuite un exemple illustrant la nécessité de cette hypothèse.

A.2.1. Analogie du théorème A.2.1 en caractéristique > 0

Nous reprenons la preuve du théorème A.2.1 en lui apportant les modifications nécessaires dans notre cadre : celui d'une extension finie K de $k := \mathbb{F}_q(T)$. Nous commençons par rappeler la définition suivante :

Définition A.2.2. — Soit G un groupe. On dit que G est un *groupe métacyclique* s'il existe un sous-groupe normal H de G tel que H et G/H soient cycliques.

Remarque A.2.3. — Si G est un groupe fini métacyclique d'exposant b , alors G est d'ordre un diviseur de b^2 .

1. *i.e.* un corps de nombres ou une extension finie de k .
 2. *i.e.* en toutes sauf un nombre fini.

Nous pouvons maintenant énoncer un analogue en caractéristique positive du théorème A.2.1.

Théorème A.2.4. — *Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne infinie. Si les degrés locaux de l'extension L/K sont uniformément bornés en presque toutes les places de K , alors $\text{Gal}(L/K)$ est d'exposant fini.*

Réciproquement, si $\text{Gal}(L/K)$ est d'exposant fini premier à la caractéristique de K , alors les degrés locaux de l'extension L/K sont uniformément bornés en toutes les places de K .

Démonstration. — Supposons que presque toutes les places de K aient leurs degrés locaux sur L bornés par $d_0 \in \mathbb{N}$. Soit S l'ensemble des places de K dont le degré local sur L n'est pas borné par d_0 . Alors, par hypothèse, S est un ensemble fini. Soient E/K une extension galoisienne finie incluse dans L et $\sigma \in \text{Gal}(E/K)$. D'après le théorème de densité de Tchebotarev (cf. th. 9.13A de [Ros02]), il existe une place finie $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_K \setminus S$ non ramifiée sur L telle que σ appartient à la classe de conjugaison d'Artin de $\mathfrak{p}$ dans $\text{Gal}(E/K)$ (rappelons que d'après le corollaire 3.5.5 de [Sti09], comme l'extension E/K est séparable finie, presque toutes les places de K sont non ramifiées dans E). Ainsi, si $\mathfrak{q}$ est une place de E au-dessus de $\mathfrak{p}$, il existe un conjugué $\eta \in \text{Gal}(E/K)$ de σ qui engendre le groupe de décomposition de $\mathfrak{q}$ sur $\mathfrak{p}$ qui est cyclique (d'après le théorème 3.8.2 de [Sti09]) et isomorphe à $\text{Gal}(E_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}})$, où $E_{\mathfrak{q}}$ et $K_{\mathfrak{p}}$ sont respectivement les complétés des corps E et K en $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$. Or, par hypothèse, $\#(\text{Gal}(E_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}})) \leq d_0$, ainsi $\sigma^{d_0!} = \eta^{d_0!} = \text{id}$ et donc $\text{Gal}(E/K)$ est d'exposant borné par $d_0!$. Comme $\text{Gal}(L/K)$ est la limite projective de la famille $\{\text{Gal}(E/K)\}_E$ indexée par les extensions galoisiennes finies de K contenues dans L , le groupe $\text{Gal}(L/K)$ est d'exposant borné par $d_0!$.

Réciproquement, supposons que $\text{Gal}(L/K)$ soit d'exposant fini $b \in \mathbb{N}$ premier à p , la caractéristique de K . Écrivons L comme une réunion croissante d'extensions galoisiennes finies L_j/K de groupe de Galois G_j . Soit w une place de L , pour chaque j on note v_j l'unique place de L_j en-dessous de w et L_{j,v_j} le complété de L_j en la place v_j . De même, on note v l'unique place de K en-dessous de w et K_v le complété de K en la place v . On rappelle que pour tout j , le quotient du groupe de décomposition par

le groupe d'inertie de v_j sur v est isomorphe au groupe de Galois des corps résiduels et qu'il est donc cyclique (engendré par le Frobenius). On rappelle également que le groupe $\text{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est isomorphe au groupe de décomposition de v_j sur v qui est un sous-groupe de G_j . Donc $\text{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est d'exposant un diviseur de b . De plus, comme b est premier à p , il ne peut y avoir de ramification sauvage. Il y a donc deux cas possibles pour l'extension $L_{j,v_j}/K_v$:

1. si l'extension $L_{j,v_j}/K_v$ est non ramifiée, alors, $\text{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est cyclique d'ordre un diviseur de b ;
2. si l'extension $L_{j,v_j}/K_v$ est modérément ramifiée, alors d'après la proposition 3.8.5 de [Sti09], le groupe d'inertie de v_j sur v est cyclique, tout comme le quotient du groupe de décomposition par le groupe d'inertie, ainsi $\text{Gal}(L_{j,v_j}/K_v)$ est métacyclique et donc d'ordre un diviseur de b^2 .

Pour tout j , le degré de l'extension $L_{j,v_j}/K_v$ est donc un diviseur de b^2 . On obtient donc le résultat souhaité par passage à la limite projective. $\square$

A.2.2. Un contre-exemple en caractéristique positive

Dans le théorème A.2.4, on a vu que si $\text{Gal}(L/K)$ est d'exposant fini premier à la caractéristique de K , alors les degrés locaux de l'extension L/K sont uniformément bornés en toutes les places de K . Dans cette partie nous allons donner un contre-exemple dans le cas où l'exposant du groupe $\text{Gal}(L/K)$ est divisible par p . Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes irréductibles et unitaires de A . Alors l'ensemble $\mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{M}_k$ des places de k . Si $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$, on note $v_a : k \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation associée à a et k_{v_a} le complété de k en v_a . Si E est une extension finie de k et si w est une place de E qui prolonge v_a , on normalise (exceptionnellement ici) w par la formule $w(\alpha) = v_a(\alpha)$ pour tout $\alpha \in k$. On a donc :

$$w(E) = \frac{1}{e} \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

où $e := e(w/v_a)$ est l'indice de ramification de w sur v_a .

Lemme A.2.5. — Soient $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$ et $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$. On pose :

$$P_{a,i}(X) := X^p - X - a^{-i}.$$

Soit $\theta_{a,i} \in \bar{k}$ une racine de $P_{a,i}$. On a les propriétés suivantes :

1. toutes les racines de $P_{a,i}$ sont de la forme $\theta_{a,i} + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$;
2. $w(\theta_{a,i}) = -\frac{i}{p} \notin \mathbb{Z}$ pour toute place $w|v_a$ de $k(\theta_{a,i})$;
3. le polynôme $P_{a,i}$ est irréductible sur k ;
4. l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est totalement ramifiée au-dessus de a ;
5. l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est cyclique de degré p ;
6. $w(\theta_{a,i}) = 0$ pour tout $b \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\} \setminus \{a\}$ et toute place $w|v_b$ de $k(\theta_{a,i})$;
7. l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est non ramifiée au-dessus de toutes les places de k différentes de a .

Démonstration. — La propriété 1 est évidente. Vérifions la propriété 2. Soit $w|v_a$ une place de $k(\theta_{a,i})$. On a :

$$w(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}) = v_a(a^{-i}) = -i$$

et

$$w(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}) \geq \min\{pw(\theta_{a,i}), w(\theta_{a,i})\},$$

ainsi $w(\theta_{a,i}) < 0$, donc la dernière inégalité est en fait une égalité et on en déduit que $w(\theta_{a,i}) = -\frac{i}{p}$. Or $p \nmid i$ donc $w(\theta_{a,i}) \notin \mathbb{Z}$ d'où la propriété 2.

Maintenant, on a $w(\theta_{a,i}) = -\frac{i}{p} \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$, où $e := e(w/v_a)$ est l'indice de ramification de w sur v_a . On en déduit donc que $p|e$. Or, le polynôme $P_{a,i}$ étant de degré p , l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est au plus de degré p . Donc $e = p$. Les propriétés 3 à 5 s'en déduisent naturellement. Il ne nous reste donc plus qu'à montrer les propriétés 6 et 7.

$$w(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}) = v_b(a^{-i}) = 0$$

et

$$w(\theta_{a,i}^p - \theta_{a,i}) \geq \min\{pw(\theta_{a,i}), w(\theta_{a,i})\},$$

ainsi $w(\theta_{a,i}) = 0$ et donc l'extension $k(\theta_{a,i})/k$ est non ramifiée au-dessus de b . $\square$

Dorénavant, pour alléger les notations, pour tous $a, b \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$ et tout $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$, nous noterons encore v_a une extension arbitraire de v_a à $k(\theta_{b,i})$. Ainsi, nous aurons toujours :

$$v_a(\theta_{b,i}) = \begin{cases} -\frac{i}{p} \notin \mathbb{Z} & \text{si } b = a \\ 0 & \text{si } b \neq a \end{cases}.$$

Nous allons maintenant construire une p -extension abélienne élémentaire⁽³⁾ dont le degré local est infini au-dessus d'une place quelconque a de k . Pour cela, nous aurons besoin de montrer que certaines extensions sont linéairement disjointes (cf. §2.5 de [FJ08] pour ce qui concerne ces dernières) :

Lemme A.2.6. — *Soit $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$. Alors, l'ensemble :*

$$\Lambda_{a,v_a} := \{k_{v_a}(\theta_{a,i}) \mid i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}\}$$

forme une famille d'extensions linéairement disjointes sur k_v .

Démonstration. — L'élément a de $\mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$ étant fixé, on simplifie les notations en posant $v := v_a$ et $\theta_i := \theta_{a,i}$ pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$.

Il faut montrer que toute sous-famille finie de $\Lambda_{a,v}$ est linéairement disjointe sur k_v . Supposons par l'absurde qu'il existe une sous-famille finie $\{k_v(\theta_{i_j}) \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ de $\Lambda_{a,v}$ de cardinal $n \geq 2$ qui ne soit pas linéairement disjointe sur k_v . Sans perte de généralité, on peut supposer que n est minimal. L'extension $k_v(\theta_{i_n})/k_v$ étant galoisienne, on a :

$$k_v(\theta_{i_n}) \cap k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-1}}) \neq k_v. \quad (27)$$

En effet, si ce n'était pas le cas les extensions $k_v(\theta_{i_n})$ et $k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-1}})$ seraient linéairement disjointes sur k_v (cf. remarque suivant le corollaire 2.5.2 de [FJ08]), et donc aussi les extensions $k_v(\theta_{i_1}), \dots, k_v(\theta_{i_n})$, ce qui contredit le choix de n . Comme l'extension $k_v(\theta_{i_n})/k_v$ est de degré p premier, on déduit de (27) que :

$$\theta_{i_n} \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-1}}) = k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}})(\theta_{i_{n-1}}). \quad (28)$$

Il existe alors $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1} \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}})$ non tous nuls tels que :

$$\theta_{i_n} = \alpha_0 + \alpha_1 \theta_{i_{n-1}} + \dots + \alpha_{p-1} \theta_{i_{n-1}}^{p-1}.$$

3. *i.e.* une extension dont le groupe de Galois est isomorphe à un produit de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Or $\theta_{i_n}^p = \theta_{i_n} + a^{-i_n}$ et :

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_0 + \alpha_1 \theta_{i_{n-1}} + \cdots + \alpha_{p-1} \theta_{i_{n-1}}^{p-1} \right)^p \\ &= \alpha_0^p + \alpha_1^p (\theta_{i_{n-1}} + a^{-i_{n-1}}) + \cdots + \alpha_{p-1}^p (\theta_{i_{n-1}} + a^{-i_{n-1}})^{p-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & a^{-i_n} + \alpha_0 + \alpha_1 \theta_{i_{n-1}} + \cdots + \alpha_{p-1} \theta_{i_{n-1}}^{p-1} \\ &= \alpha_0^p + \alpha_1^p (\theta_{i_{n-1}} + a^{-i_{n-1}}) + \cdots + \alpha_{p-1}^p (\theta_{i_{n-1}} + a^{-i_{n-1}})^{p-1}. \end{aligned}$$

Comme les éléments $1, \theta_{i_{n-1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}}^{p-1}$ sont $k(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}})$ -linéairement indépendants, les coefficients des puissances de $\theta_{i_{n-1}}$ sont égaux dans l'égalité précédente. Ainsi, en comparant les coefficients des monômes en $\theta_{i_{n-1}}^{p-1}$, on obtient :

$$\alpha_{p-1} = \alpha_{p-1}^p,$$

d'où on déduit $\alpha_{p-1} \in \mathbb{F}_p$. En comparant les coefficients des monômes en $\theta_{i_{n-1}}^{p-2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_{p-2} &= \alpha_{p-2}^p + \alpha_{p-1}^p (p-1) a^{-i_{n-1}} \\ &= \alpha_{p-2}^p - \alpha_{p-1} a^{-i_{n-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\alpha_{p-2}^p - \alpha_{p-2} - \alpha_{p-1} a^{-i_{n-1}} = 0.$$

On a donc deux possibilités : soit $\alpha_{p-1} = 0$ et $\alpha_{p-2} \in \mathbb{F}_p$, soit $\alpha_{p-1} \neq 0$ et $\alpha_{p-2} = \alpha_{p-1} \theta_{i_{n-1}} + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$. Or, par minimalité de n , on a $\theta_{i_{n-1}} \notin k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}})$, donc $\alpha_{p-1} = 0$ et $\alpha_{p-2} \in \mathbb{F}_p$. De la même façon, on montre de proche en proche que $\alpha_{p-1} = \cdots = \alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 \in \mathbb{F}_p$. Il ne reste donc plus qu'à comparer les termes constants, *i.e.* :

$$\begin{aligned} \alpha_0 + a^{-i_n} &= \alpha_0^p + \alpha_1^p a^{-i_{n-1}} \\ &= \alpha_0^p + \alpha_1 a^{-i_{n-1}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha_0^p - \alpha_0 - a^{-i_n} + \alpha_1 a^{-i_{n-1}} = 0.$$

Deux cas s'offrent à nous :

1. $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_0 = \theta_{i_n} + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$;
2. $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_0 = \theta_{i_n} - \alpha_1 \theta_{i_{n-1}} + \zeta$ avec $\zeta \in \mathbb{F}_p$.

Dans le premier cas, on obtient :

$$\theta_{i_n} \in k_v(\alpha_0) \subseteq k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}}).$$

Donc les extensions $k_v(\theta_{i_1}), \dots, k_v(\theta_{i_{n-2}})$ et $k_v(\theta_{i_n})$ ne sont pas linéairement disjointes, ce qui contredit la minimalité de n . Supposons que nous soyons dans le deuxième cas. Alors, il existe $\beta_{n-1} \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{n-2}})$ et $\lambda_{n-1} \in \mathbb{F}_p$ tels que :

$$\theta_{i_n} = \beta_{n-1} + \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}}$$

(il suffit de poser $\beta_{n-1} := \alpha_0 - \zeta$ et $\lambda_{n-1} := \alpha_1$). En reprenant le raisonnement précédent et en remplaçant pour tout $j \in \{1, \dots, n-2\}$ la relation (28) par :

$$\theta_{i_n} \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}})(\theta_{i_j}),$$

on montre que pour tout entier $j \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{F}_p$ et $\beta_j \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}})$ tels que :

$$\theta_{i_n} = \beta_j + \lambda_j \theta_{i_j}.$$

De plus, pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$ on a :

$$\begin{aligned} \theta_{i_n} - \lambda_1 \theta_{i_1} - \dots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}} \\ = \beta_j - \lambda_1 \theta_{i_1} - \dots - \lambda_{j-1} \theta_{i_{j-1}} - \lambda_{j+1} \theta_{i_{j+1}} - \dots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\theta_{i_n} - \lambda_1 \theta_{i_1} - \dots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}} \in k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}}),$$

et donc

$$\theta_{i_n} - \lambda_1 \theta_{i_1} - \dots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}} \in \bigcap_{1 \leq j \leq n-1} k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}}).$$

Or les corps $\{k_v(\theta_{i_j}) \mid j \in \{1, \dots, n-1\}\}$ étant linéairement disjointes (à nouveau par minimalité de n), on a :

$$\bigcap_{1 \leq j \leq n-1} k_v(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \dots, \theta_{i_{n-1}}) = k_v.$$

Ainsi, il existe $\beta \in k_v$ tel que :

$$\theta_{i_n} = \beta + \lambda_1 \theta_{i_1} + \dots + \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}}.$$

On en déduit que :

$$v(\beta) = v(\theta_{i_n} - \lambda_1 \theta_{i_1} - \cdots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}}). \quad (29)$$

Or $v(\theta_{i_j}) = -\frac{i_j}{p} \notin \mathbb{Z}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ d'après le lemme A.2.5 et les entiers i_j sont deux à deux distincts, d'où :

$$\begin{aligned} v(\theta_{i_n} - \lambda_1 \theta_{i_1} - \cdots - \lambda_{n-1} \theta_{i_{n-1}}) &= \min_{1 \leq j \leq n} \{v(\theta_{i_j})\} \\ &= -\frac{1}{p} \max_{1 \leq j \leq n} \{i_j\} \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc $v(\beta) \notin \mathbb{Z}$ ce qui contredit le fait que $\beta \in k_v$. $\square$

Remarque A.2.7. — Dans le lemme A.2.6 nous n'avons fait varier que $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$. Dans le cas global, on peut aussi faire varier $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$. Plus précisément, on peut montrer que l'ensemble :

$$\Lambda := \left\{ k(\theta_{a,i}) \mid a \in \mathcal{P} \cup \left\{ \frac{1}{T} \right\}, i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N} \right\}$$

forme une famille d'extensions linéairement disjointes sur k . La démonstration est identique à celle du lemme A.2.6, à la différence qu'on considère une sous-famille finie $\{k(\theta_{a_j, i_j}) \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ de Λ de cardinal $n \geq 2$ qui ne soit pas linéairement disjointe sur k , avec n supposé minimal. On montre alors (cf. égalité (29)) qu'il existe $\beta \in k$ tel qu'on ait :

$$\theta_{a_n, i_n} = \beta + \lambda_1 \theta_{a_1, i_1} + \cdots + \lambda_{n-1} \theta_{a_{n-1}, i_{n-1}}.$$

On en déduit que :

$$v_{a_n}(\beta) = v_{a_n}(\theta_{a_n, i_n} - \lambda_1 \theta_{a_1, i_1} - \cdots - \lambda_{n-1} \theta_{a_{n-1}, i_{n-1}}).$$

Or, d'après le lemme A.2.5, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$v_{a_n}(\theta_{a_j, i_j}) = \begin{cases} -\frac{i_j}{p} \notin \mathbb{Z} & \text{si } a_j = a_n \\ 0 & \text{si } a_j \neq a_n \end{cases}.$$

De plus, si $a_j = a_l = a_n$, alors $i_j \neq i_l$. Donc :

$$\begin{aligned} v_{a_n}(\theta_{a_n, i_n} - \lambda_1 \theta_{a_1, i_1} - \cdots - \lambda_{n-1} \theta_{a_{n-1}, i_{n-1}}) \\ &= \min_{1 \leq j \leq n} \{v_{a_n}(\theta_{a_j, i_j})\} \\ &= -\frac{1}{p} \max \{i_j \mid j \in \{1, \dots, n\}, a_j = a_n\} \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc $v_{a_n}(\beta) \notin \mathbb{Z}$ ce qui contredit le fait que $\beta \in k$. L'ensemble Λ forme donc bien une famille d'extensions linéairement disjointes sur k .

La proposition suivante nous donne un premier contre-exemple d'extension galoisienne infinie d'exposant fini ayant une place dont tous les degrés locaux sont infinis.

Proposition A.2.8. — Soient $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$ et L_a le compositum des corps de la famille $\Lambda_a := \{k(\theta_{a,i}) \mid i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}\}$. Si w est une place de L_a , on note $L_{a,w}$ le complété de L_a en w . Alors, l'extension L_a est une p -extension abélienne de k telle que pour toute place $w|v_a$ de L_a , l'extension $L_{a,w}/k_{v_a}$ est une p -extension abélienne infinie.

Démonstration. — Le fait que l'ensemble Λ_a forme une famille d'extensions linéairement disjointes de k et que pour toute place $w|v_a$, l'extension $L_{a,w}/k_{v_a}$ soit infinie découle directement du lemme A.2.6. De plus, les extensions $k(\theta_{a,i})/k$ étant abéliennes de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on en déduit que l'extension L_a est une p -extension abélienne de k . $\square$

Remarque A.2.9. — Pour tout $b \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\} \setminus \{a\}$ et toute place $w|v_b$ de L_a , on a $[L_{a,w} : k_{v_b}] \leq p$. En effet, les extensions $k(\theta_{a,i})/k$ étant de degré p et non ramifiées au-dessus de b d'après le lemme A.2.5, l'extension L_a/k est abélienne, d'exposant p et non ramifiée au-dessus de b . Il en est donc de même des complétés. Ainsi l'extension $L_{a,w}$ est une p -extension abélienne de k_{v_b} qui est non ramifiée au-dessus de b . Or les extensions non ramifiées d'un corps local sont cycliques (cf. prop. p. 113 de [FV93]) ce qui n'est pas le cas de l'extension $L_{a,w}/k_{v_b}$ dès que $[L_{a,w} : k_{v_b}] > p$ puisque son groupe de Galois est isomorphe à un produit de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner le contre-exemple annoncé :

Théorème A.2.10. — Soit L le compositum des corps de la famille Λ de la remarque A.2.7. Alors, L est une p -extension abélienne de k dont les degrés locaux sur L sont infinis au-dessus de toutes les places de k .

Démonstration. — Comme L est un compositum d'extensions de degré p , c'est clairement une p -extension abélienne de k . Le fait que tous les degrés locaux sur L soient infinis au-dessus des places de k provient de la proposition A.2.8. En effet, si $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$, alors $L_a \subset L$. $\square$

Nous terminons cette partie en donnant un exemple d'une extension galoisienne infinie de k dont le groupe de Galois est d'exposant divisible par la caractéristique de k et dont néanmoins les degrés locaux sont uniformément bornés.

Proposition A.2.11. — Soient $i \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ et L_i le compositum des corps de la famille $\Lambda_i := \{k(\theta_{a,i}) \mid a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}\}$. Alors, L_i est une p -extension abélienne infinie de k dont les degrés locaux sont uniformément bornés par p^2 .

Démonstration. — L'extension L_i/k étant une sous-extension de l'extension L/k (cf. th. A.2.10), c'est une p -extension abélienne infinie de k . Soient $a \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$ et $L_{i \setminus a}$ le compositum des corps de la famille $\Lambda_{i \setminus a} := \{k(\theta_{b,i}) \mid b \in \mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\} \setminus \{a\}\}$. Alors L_i est le compositum de $k(\theta_{a,i})$ et de $L_{i \setminus a}$. Soit $w|v_a$ une place de L_i , on note encore w la restriction de w à $L_{i \setminus a}$. L'extension $k(\theta_{a,i})/k$ étant totalement ramifiée au-dessus de a , on a $[k_{v_a}(\theta_{a,i}) : k_{v_a}] = p$. D'autre part, l'extension $L_{i \setminus a}/k$ est une p -extension abélienne infinie qui est non ramifiée au-dessus de a . Or les extensions non ramifiées d'un corps local sont cycliques (cf. prop. p. 113 de [FV93]) ce qui n'est pas le cas de l'extension $L_{i \setminus a, w}/k_{v_a}$ dès que $[L_{i \setminus a, w} : k_{v_a}] > p$. On obtient donc :

$$[L_{i, w} : k_{v_a}] \leq [L_{i \setminus a, w} : k_{v_a}] [k_{v_a}(\theta_{a,i}) : k_{v_a}] \leq p^2.$$

D'où le résultat annoncé. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [AD00] F. AMOROSO & R. DVORNICICH – « A lower bound for the height in abelian extensions », *J. Number Theory* **80** (2000), no. 2, p. 260–272.
- [ADZ11] F. AMOROSO, S. DAVID & U. ZANNIER – « On fields with the Property (B) », Dec. 2011, [hal-00649954] (à paraître dans *Proc. Amer. Math. Soc.*).
- [Art67] E. ARTIN – *Algebraic numbers and algebraic functions*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1967.
- [AZ00] F. AMOROSO & U. ZANNIER – « A relative Dobrowolski lower bound over abelian extensions », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **29** (2000), no. 3, p. 711–727.
- [AZ10] ———, « A uniform relative Dobrowolski’s lower bound over abelian extensions », *Bull. Lond. Math. Soc.* **42** (2010), no. 3, p. 489–498.
- [Bak03] M. H. BAKER – « Lower bounds for the canonical height on elliptic curves over abelian extensions », *Int. Math. Res. Not.* (2003), no. 29, p. 1571–1589.
- [BG06] E. BOMBIERI & W. GUBLER – *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs, vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

- [BS04] M. H. BAKER & J. H. SILVERMAN – « A lower bound for the canonical height on abelian varieties over abelian extensions », *Math. Res. Lett.* **11** (2004), no. 2-3, p. 377–396.
- [BZ01] E. BOMBIERI & U. ZANNIER – « A note on heights in certain infinite extensions of $\mathbb{Q}$ », *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **12** (2001), p. 5–14 (2002).
- [Car08] M. CARRIZOSA – « Problème de Lehmer et variétés abéliennes CM », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **346** (2008), no. 23-24, p. 1219–1224.
- [CD13] S. CHECCOLI & P. DÈBES – « Tchebotarev theorems for function fields », 2013, [arXiv :1301.1815].
- [Che10] S. CHECCOLI – « On fields of algebraic numbers with bounded local degrees », Thèse, Université de Pise, 2010.
- [Dem12] L. DEMANGOS – « Minoration de hauteurs canoniques et conjecture de manin-mumford », Thèse, Université Lille 1, 2012.
- [Den92] L. DENIS – « Hauteurs canoniques et modules de Drinfel'd », *Math. Ann.* **294** (1992), no. 2, p. 213–223.
- [DH00] S. DAVID & M. HINDRY – « Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M », *J. Reine Angew. Math.* **529** (2000), p. 1–74.
- [Dob79] E. DOBROWOLSKI – « On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial », *Acta Arith.* **34** (1979), no. 4, p. 391–401.
- [DP08] S. DAVID & A. PACHECO – « Le problème de Lehmer abélien pour un module de Drinfel'd », *Int. J. Number Theory* **4** (2008), no. 6, p. 1043–1067.
- [Dri74] V. G. DRINFEL'D – « Elliptic modules », *Mat. Sb. (N.S.)* **94(136)** (1974), no. 4(8), p. 594–627, 656, [Trad. anglaise : « Elliptic modules. », *Math. U.S.S.R.-Sb.* **23** (1976), no. 4, p. 561–592].

- [FJ08] M. D. FRIED & M. JARDEN – *Field arithmetic*, third éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 2008, Revised by Jarden.
- [FV93] I. B. FESENKO & S. V. VOSTOKOV – *Local fields and their extensions*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 121, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993, A constructive approach, With a foreword by I. R. Shafarevich.
- [Gos96] D. GOSS – *Basic structures of function field arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 35, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Hay79] D. R. HAYES – « Explicit class field theory in global function fields », Studies in algebra and number theory, Adv. in Math. Suppl. Stud., vol. 6, Academic Press, New York, 1979, p. 173–217.
- [Hay92] ———, « A brief introduction to Drinfel'd modules », The arithmetic of function fields (Columbus, OH, 1991), Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., vol. 2, de Gruyter, Berlin, 1992, p. 1–32.
- [HS00] M. HINDRY & J. H. SILVERMAN – *Diophantine geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000, An introduction.
- [Lau83] M. LAURENT – « Minoration de la hauteur de Néron-Tate », Seminar on number theory, Paris 1981–82 (Paris, 1981/1982), Progr. Math., vol. 38, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, p. 137–151.
- [Leh33] D. H. LEHMER – « Factorization of certain cyclotomic functions », *Ann. of Math. (2)* **34** (1933), no. 3, p. 461–479.
- [Poo95] B. POONEN – « Local height functions and the Mordell-Weil theorem for Drinfel'd modules », *Compositio Math.* **97** (1995), no. 3, p. 349–368.

- [Rat04] N. RATAZZI – « Théorème de Dobrowolski-Laurent pour les extensions abéliennes sur une courbe elliptique à multiplication complexe », *Int. Math. Res. Not.* (2004), no. 58, p. 3121–3152.
- [Ros02] M. ROSEN – *Number theory in function fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 210, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Ser68] J.-P. SERRE – *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.
- [Sil04] J. H. SILVERMAN – « A lower bound for the canonical height on elliptic curves over abelian extensions », *J. Number Theory* **104** (2004), no. 2, p. 353–372.
- [Sti09] H. STICHTENOTH – *Algebraic function fields and codes*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 254, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

INDEX DES NOTATIONS

A , 1	δ , 54
a , 73	δ_1 , 55
$\bar{a}$, 45	δ_2 , 55
$\mathfrak{a} * \rho$, 12	d_m , 46
B , 46, 51	d_m , 48
(B) , xii	$d_{\mathcal{O}_F}$, 48
β , 52	E , 30
(B, ϕ) , xiv	e , 45, 61
c , 46	E_0 , 56
c_0 , 56, 58	E_1 , 56
c_1 , 50, 53	$e_{\mathcal{L}}$, 7
c_2 , 50, 53	$\text{End}(\mathfrak{a})$, 13
c_3 , 39	$\text{End}(\phi)$, 9
$\#E$, 2	E' , 58
$\mathfrak{C}$, 13	η , 54
$\mathbb{C}_{\infty}$, 1	$e(w/v)$, 3
$c(\phi'_a)$, 18	F , 6, 30
c'_0 , 58	f , 61
C_T , 6	$\mathbb{F}_{\infty'}$, 12
D , 6	$F_{\infty'}$, 7
d , 12, 30	$F_{\phi}(z)$, 56
d_1 , 30	$\mathbb{F}_q$, 1
$\deg_A$, 4	$\mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$, 1
$\deg_{\mathcal{O}_K}$, 3	$\overline{\mathbb{F}}_q$, 1
$\deg_R$, 4	$\mathbb{F}_q[T]$, 1
$[K : k]$, 1	$\mathbb{F}_q(T)$, 1
$\deg_T$, 1	$\widetilde{F}$, 7, 30
$\deg_{\tau}$, 5	$\mathbb{F}_v$, 2
$\deg v$, 2	$f(w/v)$, 3

- G , 30, 61
 G_{-1} , 62
 G_0 , 62
 G_1 , 51, 56
 $\text{Gal}(L/K)$, 2
 Γ , 46
 $\gamma(\phi')$, 22
 G_i , 62
 G' , 58
 H , 30, 46
 $\mathfrak{h}$, 15, 30
 H_1 , 50
 $\widehat{h}_{\phi'}$, 21
 H_F^+ , 14, 30
 $H_F^+(\psi[\mathfrak{a}])$, 15
 $H_{\mathfrak{p}}$, 68
 $H_{\mathfrak{q}}$, 35
 H_{ρ} , 6
 $h(\cdot)$, 17
 i , 50, 74
 I_{α} , 46
 ∞ , 1
 ∞' , 7, 30
 $\mathfrak{I}_{\phi'}(\delta)$, 11
 K , 1, 30, 61, 71
 k , 1
 K_1 , 56
 K^{ab} , 2
 $\mathbf{K}$, 7
 $\overline{K}$, 2
 $\overline{k}$, 1
 $\overline{k}_{\infty}$, 1
 $\mathbf{K}\{\{\tau\}\}$, 8
 $\mathbf{K}^{\text{sep}}$, 7
 K^* , 1
 K_{∞} , 2
 k_{∞} , 1
 K^{sep} , 2
 $\widetilde{K}$, 2
 K_v , 3
 k_{v_a} , 73
 L , 29, 30, 61, 79
 L_1 , 56
 L_a , 79
 Λ , 46, 78
 Λ_a , 79
 Λ_{a,v_a} , 75
 Λ_i , 80
 Λ_i , 80
 $L_{a,w}$, 79
 $\mathcal{L}$, 7
 $L\{\tau\}$, 5
 L_i , 80
 $L_i \backslash a$, 80
 $\log_q$, 3
 L' , 58
 m , 15, 30
 $\mathcal{M}_k$, 73
 $\mathfrak{m}$, 14, 30
 $M(f)$, xi
 $\mathcal{M}_K$, 2
 $\mu_{\psi}(a)$, 13
 $\mathfrak{m}_v$, 2
 N , 45, 47
 n , 30
 $\mathfrak{n}$, 45
 ν , 30
 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, 61
 $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^{\times}$, 46
 $\mathcal{O}_K$, 2
 $\mathcal{O}_v$, 2
 p , 1
 $P_{a,i}$, 74
 $[x]$, 46
 $\mathcal{P}$, 73
 $\mathcal{P} \cup \{\frac{1}{T}\}$, 73
 $\mathfrak{p}$, 3, 30, 61
 $\mathfrak{P}$, 61
 ϕ , 9, 26
 ϕ_a , 6
 ϕ' , 26
 $\phi'[\mathfrak{a}]$, 10
 $\phi'[\mathfrak{a}^{\infty}]$, 10
 $\phi'[a]$, 10
 $\phi'(L)_{\text{tors}}$, 11
 π , 13
 ψ , 14, 26, 30
 q , 1
 $\mathfrak{q}$, 30
 R , 4, 26

r , 6	$ \cdot _v$, 2
$\mathcal{R}$, 45	$ \cdot _\infty$, 1
$\mathcal{R}_0$, 45	φ , 26
ρ_a , 7	φ' , 26
s , 30	ϖ , 61
sgn , 13	ς , 30
σ_a , 51	v_∞ , 1
σ_m , 14	$v_{\infty'}$, 12
τ , 5	v_p , 3
θ , 54	$v_{\mathfrak{p}}$, 61
θ_0 , 64	w , 57, 79
$\theta_{a,i}$, 74	w_0 , 57
θ_i , 64	w_1 , 57
v , 2, 30	$w v$, 3
v_1 , 57	z , 26
v_a , 73	$\mathcal{Z}(G)$, 34
$ \cdot $, 17	

INDEX

- accélération, lemme d', 36
- anneau
 - de Öre, 5
 - des polynômes en le Frobenius, 5
 - des polynômes tordus, 5
 - des séries formelles en le Frobenius, 8
 - euclidien à droite, 5
 - principal à gauche, 5
- Artin, symbole, 14
- Carlitz, module de, 6
- classes, nombre de, 15
- CM
 - extension, 6
 - module de Drinfeld, 9
- conducteur, 13
- conjecture de Lehmer, xii
- corps
 - des constantes, 2
 - des séries de Laurent, 1
 - résiduel, 2
- degré
 - d'une place, 2
 - en T , 1
 - en τ , 5
 - local, 3
 - résiduel, 3
 - sur $\mathbb{F}_q$, 2
 - sur $\mathcal{O}_K$, 3
 - sur R , 4
- degrés locaux uniformément bornés, 71
- égalité fondamentale, 3
- endomorphisme, 9
- exponentielle
 - d'un module de Drinfeld, 8
 - d'un réseau, 7
- extension
 - CM, 6
 - de type CM, 6
- fonction signe, 13
- formule du produit, 2
- Frobenius, 5
- groupe
 - métacyclique, 71
- hauteur
 - canonique, 21
 - logarithmique et absolue de Weil, 17
- indice de ramification, 3
- isogénie, 8
- isomorphisme, 8
- Lehmer
 - abélien, xii
 - conjecture, xii
 - relatif, xii
- lemme d'accélération, 36
- mesure de Mahler, xi

- module
 - de Carlitz, 6
 - de Drinfeld, 6
 - formel, 8
- module de Drinfeld, 6
 - à multiplications complexes, 9
 - A -, 6
 - associé à un réseau, 8
 - CM, 9
 - de signe normalisé, 14
 - défini sur un corps, 6
 - endomorphisme, 9
 - exponentielle d'un, 8
 - isogénie, 8
 - isomorphisme, 8
 - module de Carlitz, 6
 - morphisme, 8
 - point de a -torsion, 10
 - point de $\mathfrak{a}$ -torsion, 10
 - point de torsion, 10
 - R -, 6
 - rang d'un, 6
- morphisme, 8
- nombre de classes, 15
- Northcott, propriété de, 17
- ordre, 4
 - d'un point de torsion, 11
 - maximal, 4
- point de torsion, 10
 - d'ordre premier à $\mathfrak{a}$, 11
 - d'ordre une puissance de $\mathfrak{a}$, 11
 - ordre, 11
- polynôme
 - additif, 5
 - $\mathbb{F}_q$ -linéaire, 5
- propriété
 - (B), xii
 - (B, ϕ), xiv
 - de Bogomolov, xii
 - de Northcott, 17
 - fonctorielle de la hauteur, 17
- rang
 - d'un module de Drinfeld, 6
- réseau, 7
 - endomorphisme, 9
 - exponentielle d'un, 7
 - module de Drinfeld associé à un, 8
 - morphisme, 8
- signe
 - fonction, 13
 - normalisé, 14
- symbole d'Artin, 14
- théorème
 - d'approximation forte, 3
 - de Dobrowolski, xii
 - de Hasse-Arf, 69
 - de minoration conditionnelle, 43
- torsion, 10

Propriété de Bogomolov pour les modules de Drinfeld à multiplications complexes.

Résumé de la thèse : Notons $A := \mathbb{F}_q[T]$ et $k := \mathbb{F}_q(T)$. Soient ϕ un A -module de Drinfeld défini sur la clôture algébrique de k et $\widehat{h}_\phi$ sa hauteur canonique. Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne infinie. Par analogie avec la terminologie utilisée par E. Bombieri et U. Zannier, on dit que L a la propriété (B, ϕ) s'il existe une constante strictement positive qui minore $\widehat{h}_\phi$ sur L privé des points de torsion de ϕ .

S. David et A. Pacheco ont montré que pour tout module de Drinfeld ϕ , la clôture abélienne de K a la propriété (B, ϕ) . Dans cette thèse nous généralisons, dans le cadre des modules de Drinfeld à multiplications complexes, ce résultat.

Bogomolov Property for Drinfeld Modules with Complex Multiplications.

Thesis summary : Denote by $A := \mathbb{F}_q[T]$ and $k := \mathbb{F}_q(T)$. Let ϕ be a Drinfeld A -module defined on the algebraic closure of k and $\widehat{h}_\phi$ its canonical height. Let K/k be a finite extension and L/K a infinite Galois extension. By analogy with the terminology used by E. Bombieri and U. Zannier, we state that L has the property (B, ϕ) if exists a strictly positive constant which bound $\widehat{h}_\phi$ on L except for torsion points of ϕ .

S. David and A. Pacheco have proven that for all Drinfeld modules ϕ , the abelian closure of K has the property (B, ϕ) . In this thesis we generalize this result, for the Drinfeld modules with complex multiplication.

Discipline : Mathématiques et leurs interactions.

Indexation RAMEAU : Drinfeld (modules de), multiplication complexe, approximation diophantienne, nombres algébriques (théorie des).

Normandie Univ, France
UNICAEN, LMNO, F-14032 CAEN, FRANCE
CNRS, UMR 6139, F-14032 CAEN, FRANCE