



**HAL**  
open science

# Identification multi-échelle du champ d'élasticité apparent stochastique de microstructures hétérogènes : application à un tissu biologique

Manh Tu Nguyen

► **To cite this version:**

Manh Tu Nguyen. Identification multi-échelle du champ d'élasticité apparent stochastique de microstructures hétérogènes : application à un tissu biologique. Autre. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT : 2013PEST1135 . tel-00977384

**HAL Id: tel-00977384**

**<https://theses.hal.science/tel-00977384v1>**

Submitted on 11 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

Année 2013

**THÈSE**

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST**

**Discipline : Mécanique**

présentée et soutenue publiquement par

**Manh Tu NGUYEN**

le 8 octobre 2013

Titre de la thèse :

**Identification multi-échelle du champ d'élasticité  
apparent stochastique de microstructures hétérogènes.  
Application à un tissu biologique**

**Directeur de thèse**

**Professeur Christian SOIZE**

**Jury**

Jean-Marc ALLAIN	Maître de conférences	Examineur
Didier CLOUTEAU	Professeur	Rapporteur
Jérôme CREPIN	Maître de Recherche	Rapporteur
Christophe DESCELIERS	Professeur	Examineur
Samuel FOREST	Professeur	Président
Christian SOIZE	Professeur	Directeur de thèse



# Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe Mécanique du laboratoire de Modélisation et Simulation Multi Echelle (MSME) de l'Université Paris-Est Marne La Vallée. Je souhaite donc d'abord adresser toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse et mon co-encadrant de thèse pour m'avoir dirigé pendant ces trois années, pour leur disponibilité, leur patience et leur accompagnement tout au long de la thèse. Mr. Christian SOIZE aux côtés de qui j'ai pu découvrir et apprendre la micromécanique, d'abord en Master et puis en thèse. Je retiendrai notamment sa grande pédagogie ainsi que la clarté et la profondeur de ses analyses. Je remercie également Mr. Christophe DESCELIERS de m'avoir apporté beaucoup de connaissances du côté numérique de la thèse et pour ses explications toujours précises.

Je tiens à remercier chaleureusement les membres du jury d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Je remercie tout d'abord Mr. Samuel FOREST d'avoir bien voulu présider le jury. Merci aussi à Mr. Didier CLOUTEAU et Mr. Jérôme CREPIN d'avoir lu cette thèse, pour les points d'attention qu'ils ont soulevés et pour leurs remarques et questions intéressantes. Un grand merci à Mr. Jean-Marc ALLAIN qui m'a accueilli chaleureusement au Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS) de l'Ecole Polytechnique et qui m'a beaucoup aidé pendant la campagne expérimentale, son analyse fine des résultats m'a été très précieuse.

Merci à toute l'équipe Mécanique et notamment à mes amis doctorants pour une très bonne ambiance au laboratoire. Mes co-bureaux Carmelo et Americo pour leur bonne humeur, pour les moments inoubliables où nous avons partagé un gâteau ou une canette de Coca Cola lorsque nous avons faim. Un grand merci à mes amis Quàn cá, em Huyèn, em My, anh Long, em Quyèn, em Linh, em Duc, anh Thang, anh Tuyen de m'avoir aidé pendant les derniers jours avant la soutenance. Merci mes collègues Mei Luo, Heba, Chahinez, chi Huong, Hussein, Roberta, Li Ru... pour les sorties amicales, les pauses café et les moments fantastiques que nous avons vécus et avons partagés ensemble.

Pour finir, je pense à ma famille et tout particulièrement mes parents et ma soeur pour tout ce qu'ils m'ont apporté et tout ce qu'ils m'apportent chaque jour. Au-delà du fait que bien sûr je ne serais pas là sans eux, je n'en serais pas là non plus sans l'environnement idéal qu'ils m'ont offert et sans leur soutien et leurs sacrifices, je n'ai pas certainement pu faire tous mes parcours universitaires en France. Les mots me manquent pour témoigner tout le bien que je pense d'eux.

Enfin, je remercie tous ceux que j'aurais oubliés...



# Table des matières

<b>Notations et abréviations</b>	<b>8</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>9</b>
1.1 Contexte et objectifs de la recherche . . . . .	10
1.2 Positionnement de la recherche . . . . .	11
1.3 Méthodologie de la recherche . . . . .	12
1.4 Organisation du mémoire . . . . .	14
<b>2 Rappel sur des méthodes d'homogénéisation en élasticité linéaire pour les microstructures hétérogènes</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	18
2.2 Méthodes d'homogénéisation en élasticité linéaire . . . . .	18
<b>3 Problème inverse stochastique multi-échelle</b>	<b>23</b>
3.1 Introduction . . . . .	24
3.2 Stratégie proposée pour l'identification multi-échelle . . . . .	26
3.3 Problème inverse statistique multi-échelle . . . . .	28
3.3.1 Notations, la configuration expérimentale, mesures des champs de déplacement aux échelles macroscopique et mésoscopique . . . . .	28
3.3.2 Définition de l'indicateur macroscopique $\mathcal{I}_1(\mathbf{a})$ . . . . .	29
3.3.3 Définition de l'indicateur mésoscopique $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ . . . . .	30
3.3.4 Définition de l'indicateur macro-meso $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . . . . .	33
3.3.5 Formulation du problème statistique inverse par un problème d'optimisation multi-objectif . . . . .	34

## TABLE DES MATIÈRES

---

3.4	Résumé du chapitre . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Validation de la méthode d'identification par expérimentation numérique pour un problème élastique 2D</b>	<b>37</b>
4.1	Introduction . . . . .	38
4.2	Modèle stochastique <i>a priori</i> du champ d'élasticité 2D en contraintes planes	38
4.3	Générateur de réalisations indépendantes . . . . .	43
4.4	Construction d'une base de données "expérimentales" par simulation numérique . . . . .	44
4.5	Analyses de sensibilité par rapport aux paramètres moyens . . . . .	50
4.6	Problème d'optimisation multi-objectif . . . . .	55
4.7	Résultats numériques de l'identification et validation . . . . .	58
4.8	Résumé du chapitre . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Méthodologie et protocole pour les mesures expérimentales multi-échelles sur l'os cortical par mesures optiques de champs</b>	<b>63</b>
5.1	Introduction . . . . .	64
5.2	Méthodologie des mesures de champs par corrélation d'images . . . . .	65
5.3	Protocole expérimental pour l'os cortical et banc de mesures . . . . .	67
5.3.1	Échantillon et sa préparation . . . . .	68
5.3.2	Banc de mesures . . . . .	70
5.3.3	Procédure de l'essai . . . . .	72
5.3.4	Difficultés rencontrées lors du développement de la campagne expérimentale . . . . .	73
5.4	Résultats expérimentaux . . . . .	73
5.5	Résumé du chapitre . . . . .	75

6 Identification expérimentale pour l'os cortical	81
Conclusions générales et perspectives	86
Table des figures	89
Liste des tableaux	91
Bibliographie	102





# Notations et abréviations

## Notations générales

$\mathbf{x}$	: point de $\mathbb{R}^3$
$d\mathbf{x}$	: mesure de volume, $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$
$\sigma$	: tenseur des contraintes de Cauchy
$\varepsilon$	: tenseur des déformations
$\mathbf{C}$	: tenseur d'élasticité
$\mathbf{S}$	: tenseur des souplesses
$\mathbf{u}$	: champ de déplacement
$\nabla\mathbf{u}$	: gradient de $\mathbf{u}$
$(\nabla\mathbf{u})^T$	: transposée du gradient de $\mathbf{u}$
$E$	: espérance mathématique
$\delta_{ij}$	: symbole de Kronecker, $= 1$ si $i = j$ , $= 0$ si $i \neq j$
$T$	: tenseur réel de $\mathbb{R}^3$
$\ T\ _F$	: norme de Frobenius de $T$
$\otimes$	: produit tensoriel
:	: produit de contraction double

## Notations spécifiques

$\Omega$	: domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^3$
$\partial\Omega$	: bord du domaine $\Omega$
$ \Omega $	: mesure du domaine $\Omega$
$\mathbf{n}$	: normale unitaire, extérieure à $\Omega$
$\mathbf{A}$	: tenseur de localisation des déformations
$\mathbf{B}$	: tenseur de concentration des contraintes
$\mathbf{S}^{\text{eff}}$	: tenseur des souplesses effectives
$\mathbf{C}^{\text{eff}}$	: tenseur d'élasticité effective
$\mathbf{C}^{\text{macro}}$	: tenseur d'élasticité à l'échelle macroscopique
$\mathbf{C}^{\text{meso}}$	: champ stochastique d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique
$\Omega^{\text{macro}}$	: domaine macroscopique
$\partial\Omega^{\text{macro}}$	: bord du domaine $\Omega^{\text{macro}}$
$\Sigma^{\text{macro}}$	: partie du bord $\partial\Omega^{\text{macro}}$ où s'applique une condition de Neumann
$\Gamma^{\text{macro}}$	: partie du bord $\partial\Omega^{\text{macro}}$ où s'applique une condition de Dirichlet

## TABLE DES MATIÈRES

---

$\mathbf{f}^{\text{macro}}$	: densité surfacique de force sur $\Sigma^{\text{macro}}$
$\mathbf{u}^{\text{macro}}$	: champ de déplacement à l'échelle macroscopique
$\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$	: champ de déplacement expérimental à l'échelle macroscopique
$\varepsilon^{\text{macro}}$	: champ des déformations à l'échelle macroscopique
$\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}$	: champ des déformations expérimentales à l'échelle macroscopique
$\sigma^{\text{macro}}$	: champ des contraintes de Cauchy à l'échelle macroscopique
$\mathbf{n}^{\text{macro}}$	: normale unitaire, extérieure à $\Omega^{\text{macro}}$
$\mathcal{A}^{\text{macro}}$	: ensemble admissible à l'échelle macroscopique
$\Omega^{\text{meso}}$	: sous-domaine à l'échelle mésoscopique
$ \Omega^{\text{meso}} $	: mesure du domaine $\Omega^{\text{meso}}$
$\partial\Omega^{\text{meso}}$	: bord du domaine $\Omega^{\text{meso}}$
$\mathbf{U}^{\text{meso}}$	: champ stochastique de déplacement à l'échelle mésoscopique
$\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	: champ de déplacement expérimental à l'échelle mésoscopique
$\mathcal{E}^{\text{meso}}$	: champ stochastique des déformations à l'échelle mésoscopique
$\mathcal{E}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	: champ des déformations expérimentales à l'échelle mésoscopique
$\mathcal{C}^{\text{meso}}$	: champ stochastique des contraintes à l'échelle mésoscopique
$\mathcal{B}^{\text{meso}}$	: ensemble admissible à l'échelle mésoscopique
$\underline{\mathcal{E}}^{\text{meso}}$	: moyenne volumique du champ stochastique des déformations à l'échelle mésoscopique
$\underline{\mathcal{E}}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	: moyenne volumique du champ des déformations expérimentales à l'échelle mésoscopique
$\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	: paramètre quantifiant le niveau de fluctuations du champ des déformations mesurées à l'échelle mésoscopique
$\delta^{\text{meso}}$	: paramètre quantifiant le niveau de fluctuations du champ stochastique des déformations à l'échelle mésoscopique

### Abréviations

CCD	: Charge Coupled Device
EF	: Éléments Finis
HCH	: Homogénéisation en Contraintes Homogènes
HDH	: Homogénéisation en Déformations Homogènes
MEB	: Microscopie Électronique à Balayage
VER	: Volume Élémentaire Représentatif

# 1

## Introduction générale

### Sommaire

---

1.1	Contexte et objectifs de la recherche . . . . .	10
1.2	Positionnement de la recherche . . . . .	11
1.3	Méthodologie de la recherche . . . . .	12
1.4	Organisation du mémoire . . . . .	14

---

### 1.1 Contexte et objectifs de la recherche

Dans le cadre de l'élasticité linéaire 3D des microstructures complexes qui ne peuvent pas être simplement décrites en terme de constituants et en présence d'interfaces multiples ne pouvant pas non plus être simplement modélisées, telles que par exemple des tissus biologiques, une voie possible d'étude de modélisation consiste à construire une modélisation stochastique du champ d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique. On peut alors utiliser, par exemple, ces modélisations dans le cadre de changement d'échelle pour obtenir des propriétés mécaniques à l'échelle macroscopique. Dans ce contexte, la question majeure est celle de l'identification expérimentale par résolution d'un problème statistique inverse de la modélisation stochastique introduite pour le champ d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique. Cette identification expérimentale permet non seulement de valider la modélisation mais encore de la rendre utile pour des matériaux existants ayant une microstructure complexe. Le présent travail de recherche est une contribution proposée dans ce cadre pour lequel l'expérimentation et validation expérimentale sont faites sur de l'os cortical.

Les objectifs de cette recherche sont donc les suivants :

- Proposer et développer une méthodologie d'identification expérimentale multi-échelle du champ stochastique d'élasticité apparent de la microstructure à l'échelle mésoscopique, basée sur des mesures simultanées d'imagerie de champ de déplacements à l'échelle mésoscopique et à l'échelle macroscopique d'un même échantillon soumis à un chargement statique.
- Valider la méthodologie sur des "matériaux numériques" choisis dans le cadre des hypothèses retenues et pour lesquels les données expérimentales sont simulées numériquement. La solution du problème inverse étant alors connue, on peut ainsi valider la méthode d'identification proposée.
- Construire une base de données expérimentales d'imagerie de champ de déplacements aux deux échelles macroscopique et mésoscopique pour un matériau réel qui sera constitué dans ce travail d'os cortical.
- Identification expérimentale et validation de la méthodologie proposée du champ stochastique d'élasticité apparent de la microstructure à l'échelle mésoscopique pour ce matériau réel.

## 1.2 Positionnement de la recherche

A la fin des années 90, avec les développements rapides de caméras CCD (Charge Coupled Device), les techniques d'imagerie de champs telles que la corrélation d'images ont permis de réaliser des mesures de champ de déplacements et d'identifier des propriétés mécaniques de matériaux homogènes ou non homogènes. L'identification expérimentale des paramètres d'un matériau par l'imagerie de champ a été introduite et développée dans de nombreux travaux (Kahnjetter *et al.*, 1994; Vendroux et Knauss, 1998a; Vendroux et Knauss, 1998b; Hild *et al.*, 1999; Chevalier *et al.*, 2001; Calloch *et al.*, 2002; Geymonat *et al.*, 2002; Hild, 2002; Hild *et al.*, 2002; Roux *et al.*, 2002; Geymonat et Pagano, 2003; Besnard *et al.*, 2006; Hild et Roux, 2006; Avril *et al.*, 2008a; Avril *et al.*, 2008b; Rethore *et al.*, 2008; Roux et Hild, 2008; Bornert *et al.*, 2009; Bornert *et al.*, 2010; Hild et Roux, 2012), et aussi par (Jeulin, 1987; Jeulin, 1989; Jeulin, 2001; Madi *et al.*, 2007) pour l'identification expérimentale de morphologies des microstructures.

Dans les années 2000, des travaux ont été menés concernant l'identification statistique inverse de modèles stochastiques de champ d'élasticité pour des milieux élastiques hétérogènes, isotropes ou anisotropes, à l'échelle macroscopique ou à l'échelle mésoscopique pour des matériaux ayant des microstructures complexes ne relevant pas d'une description en terme des constituants, et pour lesquels les premières approches stochastiques multi-échelles ont été introduites. Voir (Desceliers *et al.*, 2006; Ghanem et Doostan, 2006; Desceliers *et al.*, 2007; Marzouk *et al.*, 2007; Arnst *et al.*, 2008; Das *et al.*, 2008; Das *et al.*, 2009; Guillemot *et al.*, 2009; Soize, 2010; Ta *et al.*, 2010; Soize, 2011). Les méthodes probabilistes proposées pour résoudre le problème statistique inverse pour des champs en très grande dimension stochastique au travers des problèmes aux limites, avec des données expérimentales de champ ou des données expérimentales partielles et limitées, s'appuient sur des outils statistiques (méthode des moindres carrés, méthodes du maximum de vraisemblance, matrice de Fisher, méthode de Bayes, etc, voir par exemple (Lawson et Hanson, 1974; Serfling, 1980; Bowman et Azzalini, 1997; Walter et Pronzato, 1997; Beck et Katafygiotis, 1998; Bernardo et Smith, 2000; Spall, 2003; Kaipio et Somersalo, 2005; Congdon, 2007; Carlin et Louis, 2009; Tan *et al.*, 2010)) et des méthodes probabilistes avancés (réduction de la dimension stochastique par les développements de Karhunen-Loève, représentation des champs sur les chaos polynomiaux, méthodes spectrales avancées et méthodes d'échantillonnage pour les solveurs stochastiques, etc, voir par exemple (Loève, 1977; Rubinstein, 1981; Ghanem et Spanos, 1991; Nouy, 2008; Le Maitre et Knio, 2010)). L'utilisation combinée de ces méthodes avancées a donné lieu à des travaux récents concernant l'identification en inverse de champs stochastiques non gaussiens

à valeurs scalaires ou à valeurs tensorielles, en petite dimension ou en grande dimension stochastique, voir par exemple (Das *et al.*, 2008; Desceliers *et al.*, 2009; Ma et Zabararas, 2009; Marzouk et Najm, 2009; Arnst *et al.*, 2010; Das *et al.*, 2010; Soize, 2010; Cottureau *et al.*, 2011; Soize, 2011; Desceliers *et al.*, 2012; Clouteau *et al.*, 2013).

Dans le cadre de la mécanique des matériaux, les méthodes d'identification multi-échelle des champs stochastiques non gaussiens à valeurs tensorielles et en grande dimension stochastique, à partir de mesures de champ de déplacement sont embryonnaires. Dans ce travail de recherche, nous proposons une méthodologie d'identification d'une modélisation stochastique *prior* du champ de tenseur d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique pour une microstructure élastique hétérogène anisotrope qui ne peut, *a priori*, être décrite en terme de constituants. Le modèle stochastique *prior*, qui sera en grande dimension stochastique, sera paramétré par un petit nombre de paramètres tels que le tenseur d'élasticité moyen à l'échelle mésoscopique, les longueurs de corrélation et un paramètre contrôlant le niveau de fluctuations statistiques du champ. L'identification de ce modèle stochastique *prior* revient alors à identifier les valeurs optimales des paramètres ci-dessus par résolution d'un problème inverse qui requiert des mesures expérimentales réalisées simultanément aux deux échelles macroscopique et mésoscopique sur un seul échantillon, sachant que l'échantillon est soumis à une charge statique connue à l'échelle macroscopique lors de l'essai.

### 1.3 Méthodologie de la recherche

La méthodologie de la recherche (dont l'objectif est un problème d'identification expérimentale de la modélisation stochastique du champ d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique d'une microstructure complexe) a été guidée principalement par la nature des mesures disponibles après avoir décidé de la procédure expérimentale.

Il est à noter que la méthodologie esquissée ci-dessous résulte de nombreux tâtonnements préalables qui ont donné lieu à plusieurs développements qui n'ont pas abouti et qui ne seront pas reproduits dans ce mémoire.

Avant d'explicitier cette ligne directrice, nous précisons plusieurs points importants pour la compréhension de la méthode proposée.

(i) Tout d'abord, précisons que cette recherche constitue une première phase de déve-

loppement, consistant à identifier un modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique de la microstructure. Ce modèle stochastique *prior* sera classiquement paramétré par le tenseur d'élasticité moyen (à l'échelle mésoscopique) et par des paramètres liés à la description statistique telle que les échelles de corrélation spatiale du champ et les paramètres qui quantifient le niveau de fluctuations statistiques autour du champ moyen. Ainsi, le problème d'identification du modèle stochastique *prior* revient à identifier en inverse la valeur optimale des paramètres inconnus introduits dans ce modèle stochastique *prior*. Une second phase de développement, qui n'a pas été abordée dans ce travail, consisterait à construire, à partir du modèle stochastique *prior* optimal (celui qui a été identifié expérimentalement dans la première phase), un modèle stochastique *posterior*.

(ii) D'autre part, le contexte des mesures expérimentales est celui de mesures optiques pour obtenir une imagerie des champs de déplacement aux échelles macroscopique et mésoscopique. La spécification suivie dans le contexte de ce cadre expérimental est le suivant :

(ii.1) Les mesures aux deux échelles sont effectuées simultanément sur un seul échantillon.

(ii.2) L'échantillon est mis sous charge statique et pour l'état d'équilibre correspondant, on procède, d'une part à une mesure du champ des déplacements à l'échelle macroscopique de l'échantillon et d'autre part, à une mesure du champ des déplacements à l'échelle mésoscopique pour un sous-domaine pré-défini inclus dans l'échantillon et correspondant à un volume élémentaire représentatif (VER) (il est donc tacitement supposé qu'il y a séparation de l'échelle mésoscopique et de l'échelle macroscopique).

(iii) La procédure expérimentale choisie est telle que, à l'échelle mésoscopique, on connaît le champ des déplacements dans le VER et sur son bord mais évidemment on ne mesure pas les forces sur l'interface qui constitue le bord du VER.

Dans les conditions expérimentales ainsi spécifiées, le problème inverse (à l'échelle mésoscopique) formulé à partir du problème d'élasticité linéaire sur le VER pour lequel le déplacement sur le bord est mesuré et pour lequel le champ des déformations dans le VER est aussi mesuré, permettrait, *a priori* d'identifier les paramètres liés à la description statistique du champ stochastique *prior*. Toutefois, en général, ce problème aux limites ne permet pas d'identifier le tenseur d'élasticité moyen à l'échelle mésoscopique. Cette difficulté nous a conduit à élaborer une méthodologie d'identification à double échelles, d'une



part de la modélisation macroscopique de l'échantillon et d'autre part, de la modélisation mésoscopique d'un VER, basée sur des mesures expérimentales à ces deux échelles obtenues suivant la procédure évoquée ci-dessus.

La méthodologie d'identification expérimentale développée consiste donc à introduire plusieurs indicateurs qui permettront de formuler un problème d'optimisation multi-objectif. Ces indicateurs au nombre de trois permettront :

- de quantifier l'écart entre le champ des déformations mesurées à l'échelle macroscopique de l'échantillon et le champ des déformations macroscopiques calculées à l'aide du problème aux limites d'élasticité linéaire 3D homogène qui modélise la configuration expérimentale de l'échantillon (échelle macroscopique) soumis au chargement et aux conditions aux limites en déplacement. Pour ce problème aux limites macroscopique, le tenseur d'élasticité est inconnu et doit être identifié ;
- de quantifier l'écart entre les fluctuations du champ des déformations mesurées à l'échelle mésoscopique dans le VER et les fluctuations statistiques du champ des déformations mésoscopiques calculées à l'aide du problème aux limites stochastiques d'élasticité linéaire 3D non homogène et anisotrope, qui modélise le comportement mésoscopique du VER soumis à une condition de Dirichlet sur son bord (valeurs des déplacements mesurées sur le bord) et pour lequel les paramètres du modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité apparent sont inconnus et doivent être identifiés ;
- de quantifier l'écart entre, d'une part le tenseur d'élasticité du problème aux limites qui modélise la configuration expérimentale de l'échantillon à l'échelle macroscopique et d'autre part, le tenseur effectif d'élasticité résultant de l'homogénéisation stochastique sur le VER.

### 1.4 Organisation du mémoire

Le mémoire est organisé en 6 chapitres incluant ce premier chapitre, suivis de conclusions et perspectives, puis des références bibliographiques.

Le chapitre 2 est consacré à un très bref rappel sur des méthodes d'homogénéisation en élasticité linéaire pour une microstructure hétérogène. L'objectif de chapitre est de rappeler les notations et les deux méthodes que nous utiliserons dans les chapitre 3 et 4

pour construire la fonction coût multi-objectif du problème d'optimisation qui permet de résoudre le problème statistique inverse de l'identification expérimentale du champ stochastique d'élasticité apparent de la microstructure hétérogène à l'échelle mésoscopique.

Le chapitre 3 est dédié au développement d'une méthodologie pour l'identification expérimentale multi-échelle du champ stochastique d'élasticité apparent de la microstructure à l'échelle mésoscopique. Le problème inverse statistique multi-échelle lié à cette identification expérimentale est formulé en terme d'un problème d'optimisation multi-objectif. La fonction coût sera constituée de trois indicateurs, l'un lié à l'échelle macroscopique, un autre à l'échelle mésoscopique et enfin un troisième qui relie le changement d'échelle mésoscopique-macroscopique en terme d'homogénéisation stochastique. La méthodologie présentée dans le cadre général de l'élasticité linéaire anisotrope non homogène. Cette méthodologie sera appliquée directement au chapitre 4 pour le cas de l'élasticité 2D en contraintes planes qui correspond à la situation expérimentale développée dans ce travail.

Le chapitre 4 est fait l'articulation entre la méthode générale présentée au chapitre 3 et l'expérimentation présentée au chapitre 5 qui est dédié à des mesures expérimentales relevant d'une modélisation élastique linéaire 2D en contraintes planes. Le chapitre 3 sera donc appliqué pour un domaine qui sera 2D avec une hypothèse de contraintes planes. La modélisation stochastique *prior* du champ d'élasticité apparent de la microstructure hétérogène à l'échelle mésoscopique sera explicitée. Comme on sera dans un cadre 2D en contraintes planes, on construira en premier lieu le modèle stochastique *prior* du champ des souplesses apparentes. On en déduit par inversion la modélisation stochastique *prior* du champ d'élasticité apparent. Muni de la méthodologie de résolution du problème inverse statistique et de la modélisation stochastique *prior*, on présentera les aspects liés à la numérisation et à l'algorithme de la résolution du problème d'optimisation. Enfin, nous présenterons deux exemples qui permettront une première validation de la méthode proposée en utilisant comme données expérimentales des données obtenues par simulation numérique.

La campagne expérimentale et les résultats de mesures obtenus pour de l'os cortical sont présentés au chapitre 5. On explicitera la méthodologie des mesures de champ par corrélation d'images et le protocole expérimental qui a été mis au point au laboratoire LMS de l'École Polytechnique pour des mesures sur l'os cortical. On y présente les résultats expérimentaux de mesures de champ de déplacement aux deux échelles macroscopique et mésoscopique, puis leur traitement pour obtenir les champs de déformations associées à ces deux échelles.

## CHAPITRE 1. INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

Enfin, le chapitre 6 concerne la validation expérimentale de la méthode d'identification proposée dans le cadre de l'élasticité linéaire 2D en contraintes planes de l'os cortical. Ce chapitre est basé sur l'utilisation de la formulation du chapitre 4 et des mesures expérimentales présentées au chapitre 5.

Le mémoire se termine par des conclusions et perspectives suivis des références bibliographiques.

# 2

## Rappel sur des méthodes d'homogénéisation en élasticité linéaire pour les microstructures hétérogènes

### Sommaire

---

<a href="#">2.1 Introduction</a>	18
<a href="#">2.2 Méthodes d'homogénéisation en élasticité linéaire</a>	18

---

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente un très bref rappel de deux méthodes principales d'homogénéisation pour des matériaux ayant une microstructure hétérogène à comportement élastique linéaire *a priori* anisotrope. On se limite au strict nécessaire dans le but d'introduire les notations et de rappeler les terminologies qui seront utilisées dans les chapitres 3 et 4.

### 2.2 Méthodes d'homogénéisation en élasticité linéaire

A l'échelle des hétérogénéités, les microstructures des matériaux sont généralement considérées comme hétérogènes. Le calcul du comportement d'une structure à l'échelle macroscopique, constituée de tels matériaux, ne peut pas être mené dans l'état actuel des connaissances en utilisant une modélisation globale à l'échelle des hétérogénéités de la structure. Du reste dans la mesure où il y a séparation des échelles microscopique (ou mésoscopique) et macroscopique (existence d'un volume élémentaire représentatif (VER)), une telle approche ne serait pas du tout efficace. Dans ce cadre, des techniques d'homogénéisation, qui sont des techniques de changement d'échelle micro-macro, ont été développées et se sont révélées très efficaces dans le cas de l'élasticité linéaire présentement considéré (et aussi en non linéaire). Dans ce chapitre, nous limitons le rappel à la méthodologie d'homogénéisation qui consiste à introduire un VER puis à définir un milieu homogène équivalent de même géométrie que le VER. Pour limiter l'exposé, nous ne ferons pas de rappel sur les méthodes asymptotiques pour différentes situations de changement d'échelle et nous renvoyons le lecteur, par exemple, à : (Sanchez-Palencia, 1980; Sanchez-Palencia et Zaoui, 1985; Meguid et Kalamkarov, 1994; Ghosh *et al.*, 1996; Andrews et Wright, 1998; Forest *et al.*, 2001; Yu et Tang, 2007). Concernant la méthode d'homogénéisation faisant l'objet de ce rappel, mais aussi l'homogénéisation stochastique et des aspects inélastiques, et sans vouloir être exhaustif, on réfère le lecteur aux travaux suivants : (Willis, 1964; Asaro, 1983; Francfort et Murat, 1986; Suquet, 1987; Sab, 1992; Boutin, 1996; Suquet, 1997; Christensen, 1998; Forest et Sab, 1998; Pradel et Sab, 1998; Nemat-Nasser et Hori, 1999; Forest *et al.*, 2000; Bornert *et al.*, 2001; Jeulin, 2001; Torquato, 2002; Zaoui, 2002; Cailletaud *et al.*, 2003; Kanit *et al.*, 2003; Bourgeat et Piatnitski, 2004; Sab et Nedjar, 2005; Weinberger *et al.*, 2005; Florence et Sab, 2006; Wriggers et Moftah, 2006; Ostoja-Starzewski, 2008; Sakata *et al.*, 2008; Soize, 2008; Xu et Chen, 2009; Tootkaboni et Graham-Brady, 2010; Miled *et al.*, 2011).

## 2.2. MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

---

Dans le chapitre 3, nous proposons une méthode d'identification multi-échelle (mésomacro) adaptée à l'identification du champ stochastique d'élasticité à l'échelle mésoscopique de microstructures complexes, ne pouvant pas *a priori* être décrite en terme de constituants, telles que les tissus biologiques. Nous verrons que cette méthode d'identification sera basée sur la résolution d'un problème d'optimisation multi-objectif par rapport à des paramètres vectoriels décrivant les modélisations aux échelles macroscopique et mésoscopique. Une des composantes de la fonction coût du problème d'optimisation multi-objectif fera intervenir le tenseur d'élasticité effectif à l'échelle macroscopique résultant de l'homogénéisation stochastique du VER à l'échelle mésoscopique. Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode d'homogénéisation que nous avons choisie dans la classe des méthodologies utilisant un VER. Nous avons retenu deux méthodes d'homogénéisation : l'homogénéisation en contraintes homogènes (HCH) et la méthode d'homogénéisation en déformations homogènes (HDH). Dans le cas général de l'élasticité linéaire tridimensionnelle, l'utilisation de l'une ou l'autre est indifférente. Afin de fixer les idées sur les échelles et les dimensions du VER qui seront utilisées pour la validation expérimentale présentée au chapitre 6 sur la base de données expérimentales présentées au chapitre 5, nous donnons ci-après quelques ordres de grandeurs. Les mesures seront effectuées sur de l'os cortical, en 2D, et avec une hypothèse de modélisation en contraintes planes. Dans ce cas, la méthode HCH est mieux adaptée. Cette application présentée au chapitre 5, relatif au tissu biologique de l'os cortical, aura un VER 2D de dimension  $1 \times 1 \text{ mm}^2$ , les fluctuations à l'échelle mésoscopique étant mesurées avec une résolution de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$ , et l'échantillon macroscopique aura une dimension de l'ordre de  $1 \times 1 \text{ cm}^2$ , la résolution spatiale à l'échelle macroscopique étant donc de  $1 \text{ mm}$  (l'échantillon physique de l'os cortical, mis en compression pour lequel on observe une face, sera un cube de dimension  $1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$ ).

Le rappel ci-dessous, qui concerne les méthodes d'homogénéisation en contraintes homogènes et en déformations homogènes, est rédigé en suivant la référence (Bornert *et al.*, 2001).

On considère le VER correspondant à un domaine ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  (typiquement un cube), de point générique  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . On note  $\partial\Omega$  son bord dont la normale unitaire au point  $\mathbf{x}$ , extérieure à  $\Omega$ , est notée  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ . Soit  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  le champ de déplacements défini sur  $\Omega$ . En tout point  $\mathbf{x}$ , le tenseur des déformations linéarisées est noté  $\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$ . Le matériau occupant le VER est élastique linéaire non homogène et anisotrope. En chaque point  $\mathbf{x}$ , le tenseur d'élasticité est noté  $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{C}_{ijkl}(\mathbf{x})\}_{1 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq 3}$ . En tout point  $\mathbf{x}$ , la loi de comportement s'écrit donc

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

## CHAPITRE 2. RAPPEL SUR DES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE POUR LES MICROSTRUCTURES HÉTÉROGÈNES

où  $\sigma(\mathbf{x})$  est le tenseur des contraintes de Cauchy. Enfin, pour  $k$  et  $h$  dans  $\{1, 2, 3\}$ , on introduit le tenseur du second ordre symétrique  $\mathbf{d}^{kh}$  défini, pour  $1 \leq p \leq q \leq 3$ , par

$$\{\mathbf{d}^{kh}\}_{pq} = \frac{1}{2}(\delta_{pk} \delta_{qh} + \delta_{ph} \delta_{qk}), \quad (2.2)$$

où  $\delta$  désigne ci-dessus le symbol de Kronecker. L'examen de l'Eq. (2.2) montre la propriété de symétrie en  $k$  et  $h$  :  $\mathbf{d}^{kh} = \mathbf{d}^{hk}$ .

### Homogénéisation en contraintes homogènes.

Pour  $1 \leq k \leq h \leq 3$ , on introduit la famille de problèmes aux limites d'élasticité linéaire statique 3D formulés en déplacement  $\mathbf{u}$ , avec une condition aux limites de Neumann,

$$-\mathbf{div} \sigma = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.3)$$

$$\sigma \mathbf{n} = \mathbf{d}^{kh} \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.4)$$

où la loi de comportement est défini par l'Eq. (2.1) et le tenseur  $\mathbf{d}^{kh}$  par l'Eq. (2.2). Pour  $k$  et  $h$  fixés, on note  $\mathbf{u}^{kh} = \{\mathbf{u}^{kh}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega\}$  la solution du problème aux limites défini par les Eqs. (2.1) à (2.4). Soit  $\varepsilon^{kh}(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{u}^{kh}(\mathbf{x}))$  le tenseur des déformations associées et  $\sigma^{kh}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \varepsilon^{kh}(\mathbf{x})$  le tenseur des contraintes associées. La méthode d'homogénéisation en contraintes homogènes (HCH) consiste alors, pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega$ , à calculer le tenseur du quatrième ordre de concentration des contraintes, noté  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , tel que, pour tout  $p, q, k$  and  $h$  dans  $\{1, 2, 3\}$ , on ait

$$\mathbf{B}_{pqkh}(\mathbf{x}) = \{\sigma^{kh}(\mathbf{x})\}_{pq}. \quad (2.5)$$

Les composantes  $\{\mathbf{S}^{\text{eff}}\}_{ijkl}$  du tenseur du quatrième ordre des souplesses effectives,  $\mathbf{S}^{\text{eff}}$ , sont telles que, pour tout  $i, j, k$  et  $h$  dans  $\{1, 2, 3\}$ ,

$$\{\mathbf{S}^{\text{eff}}\}_{ijkl} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \{\mathbf{S}(\mathbf{x})\}_{ijpq} \{\mathbf{B}(\mathbf{x})\}_{pqkh} d\mathbf{x}, \quad (2.6)$$

dans laquelle  $|\Omega|$  est la mesure de  $\Omega$  et où  $\{\mathbf{S}(\mathbf{x})\}_{ijpq}$  sont les composantes du tenseur des souplesses  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  qui est tel que  $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})^{-1}$ .

### Homogénéisation en déformations homogènes.

Pour  $1 \leq k \leq h \leq 3$ , on introduit la famille de problèmes aux limites d'élasticité linéaire statique 3D formulés en déplacement  $\mathbf{u}$ , avec une condition aux limites de Dirichlet,

$$-\mathbf{div} \sigma = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{d}^{kh} \mathbf{x} \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.8)$$

---

## 2.2. MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

---

où la loi de comportement est défini par l'Eq. (2.1) et le tenseur  $\mathbf{d}^{kh}$  par l'Eq. (2.2). Pour  $k$  et  $h$  fixés, on note  $\mathbf{u}^{kh} = \{\mathbf{u}^{kh}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega\}$  la solution du problème aux limites défini par les Eqs. (2.1), (2.2), (2.7) et (2.8). Soit  $\varepsilon^{kh}(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{u}^{kh}(\mathbf{x}))$  le tenseur des déformations associées. La méthode d'homogénéisation en déformations homogènes (HDH) consiste alors, pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega$ , à calculer le tenseur du quatrième ordre de localisation des déformations, noté  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ , tel que, pour tout  $p, q, k$  and  $h$  dans  $\{1, 2, 3\}$ , on ait

$$\mathbf{A}_{pqkh}(\mathbf{x}) = \{\varepsilon^{kh}(\mathbf{x})\}_{pq}. \quad (2.9)$$

Les composantes  $\{\mathbf{C}^{\text{eff}}\}_{ijkl}$  du tenseur du quatrième ordre d'élasticité effective,  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$ , sont telles que, pour tout  $i, j, k$  et  $h$  dans  $\{1, 2, 3\}$ ,

$$\{\mathbf{C}^{\text{eff}}\}_{ijkl} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \{\mathbf{C}(\mathbf{x})\}_{ijpq} \{\mathbf{A}(\mathbf{x})\}_{pqkh} d\mathbf{x}, \quad (2.10)$$

dans laquelle  $|\Omega|$  est la mesure de  $\Omega$  et où  $\{\mathbf{C}(\mathbf{x})\}_{ijpq}$  sont les composantes du tenseur d'élasticité.





# 3

## Problème inverse stochastique multi-échelle

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>24</b>
<b>3.2</b>	<b>Stratégie proposée pour l'identification multi-échelle</b>	<b>26</b>
<b>3.3</b>	<b>Problème inverse statistique multi-échelle</b>	<b>28</b>
<b>3.4</b>	<b>Résumé du chapitre</b>	<b>35</b>

---

### 3.1 Introduction

Les méthodes inverses pour l'identification expérimentale des propriétés élastiques des matériaux à l'échelle macroscopique et/ou à l'échelle mésoscopique ont fait l'objet de très nombreux travaux.

Ainsi, l'identification expérimentale des morphologies des microstructures par imagerie a commencé dans les années 80 (voir par exemple (Jeulin, 1987; Jeulin, 1989; Jeulin, 2001)). L'imagerie de champs a permis des progrès considérables pour l'identification des propriétés mécaniques, incluant les méthodes récentes d'imagerie de champs, et qui est porteuse d'avenir. Citons par exemple (Constantinescu, 1995; Hild *et al.*, 1999; Baxter et Graham, 2000; Chevalier *et al.*, 2001; Calloch *et al.*, 2002; Geymonat *et al.*, 2002; Hild, 2002; Hild *et al.*, 2002; Roux *et al.*, 2002; Geymonat et Pagano, 2003; Graham *et al.*, 2003; Bonnet et Constantinescu, 2005; Besnard *et al.*, 2006; Hild et Roux, 2006; Avril et Pierron, 2007; Madi *et al.*, 2007; Avril *et al.*, 2008a; Avril *et al.*, 2008b; Rethore *et al.*, 2008; Roux et Hild, 2008; Roux *et al.*, 2008; Bornert *et al.*, 2009; Bornert *et al.*, 2010; Hild et Roux, 2012).

Concernant l'identification de modèles stochastiques en inverse, les méthodologies nécessaires pour les problèmes statistiques inverses en dimension finie et en dimension infinie sont nombreuses et donnent lieu à de très nombreux travaux et publications. Ces méthodes utilisent intensivement les formulations et les outils de l'analyse fonctionnelle pour des problèmes aux limites ainsi que ceux de la théorie des probabilités incluant les statistiques mathématiques (en dimension finie et en dimension infinie). Ce n'est pas l'objectif de ce chapitre d'en ébaucher un début de synthèse, même non exhaustif. On peut toutefois donner quelques références. Concernant les statistiques mathématiques, on renvoie, par exemple, le lecteur à (Lawson et Hanson, 1974; Serfling, 1980) et pour des principes généraux sur les problèmes statistiques inverses à (Collins *et al.*, 1974; Walter et Pronzato, 1997; Spall, 2003; Kaipio et Somersalo, 2005). Les premiers travaux concernant l'identification statistique inverse en dimension infinie des champs stochastiques d'élasticité de milieux élastiques hétérogènes isotropes puis anisotropes, à partir de données expérimentales partielles et limitées, principalement dédiée à l'identification des paramètres statistiques tels que les échelles de corrélation spatiale et les intensités de fluctuations statistiques, sont apparus dans les années 2000 (Desceliers *et al.*, 2006; Desceliers *et al.*, 2007; Arnst *et al.*, 2008; Das *et al.*, 2008; Das *et al.*, 2009; Guilleminot *et al.*, 2009; Soize, 2010; Ta *et al.*, 2010). Les méthodes probabilistes/statistiques évoquées précédemment ont la potentialité pour résoudre les problèmes statistiques inverses liés à l'identification des modèles stochastiques *prior* des champs d'élasticité apparent (stochastiques et

non Gaussiens) à l'échelle mésoscopique des microstructures. La problématique de telles identifications expérimentales utilisant des mesures sur un seul échantillon soumis à un chargement connu (à l'échelle macroscopique) et utilisant des mesures de champs de déplacements aux deux échelles macroscopique et mésoscopique (conduisant à introduire un problème de Dirichlet pour l'échelle mésoscopique du VER) requiert de nouvelles méthodes pour l'identification simultanée, d'une part de la moyenne du tenseur d'élasticité apparent (qui est inconnue) et d'autre part des paramètres du modèle stochastique prior, par exemple, les échelles spatiales de corrélation et les paramètres qui contrôlent le niveau de fluctuations statistiques du champ stochastique. Nous n'avons pas trouvé dans la littérature de méthodologies existantes pouvant s'appliquer directement à cette situation. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 1, nous proposons dans ce travail une nouvelle méthodologie d'identification pour cette situation. De plus, cette recherche est limitée au développement et à sa validation expérimentale, d'une méthode d'identification d'un modèle stochastique *prior* du champ de tenseur d'élasticité apparent pour une microstructure élastique hétérogène anisotrope à l'échelle mésoscopique. Nous n'avons pas tenté d'aborder l'identification du modèle stochastique *posterior* qui serait une seconde phase après la première phase relative à l'identification du modèle stochastique *prior*. Cette seconde phase d'identification statistique *posterior* ferait intervenir, dans des formulations variées, la méthode de Bayes, voir par exemple (Bernardo et Smith, 2000; Congdon, 2007; Carlin et Louis, 2009; Tan *et al.*, 2010) comme cela a été fait pour l'identification *a posteriori* du champ stochastique d'élasticité avec des données expérimentales partielles et limitées (De Oliveira *et al.*, 1997; Wang et Zabararas, 2004; Wang et Zabararas, 2005; Ghanem et Doostan, 2006; Marzouk *et al.*, 2007; Ma et Zabararas, 2009; Marzouk et Najm, 2009; Arnst *et al.*, 2010; Soize, 2011). Il est à noter que ces méthodes ne permettraient pas non plus de résoudre directement l'identification *a posteriori* pour le problème abordé dans ce travail et nécessiteraient aussi, comme pour le modèle *prior* le développement d'une nouvelle méthodologie.

Dans ce chapitre, on présente donc une nouvelle méthode d'identification, adaptée au problème formulé ci-dessus. Il s'agit d'une méthode statistique inverse multi-échelle, formulée dans le cadre de l'élasticité linéaire tridimensionnelle, permettant l'identification du tenseur d'élasticité effectif à l'échelle macroscopique et l'identification du champ stochastique de tenseur d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique pour une microstructure hétérogène. On suppose que des mesures expérimentales de champ de déplacement sont disponibles pour l'échelle macroscopique et pour l'échelle mésoscopique. Le modèle stochastique correspond à un modèle *prior* algébrique d'un champ stochastique non Gaussien adapté au problème aux limites elliptique stochastique. Ce modèle *prior* algébrique est

paramétré par un faible nombre de paramètres et permet de décrire une large classe de champs stochastiques adaptés à ce type de modélisation. Les paramètres de ce modèle *prior* algébrique sont le tenseur d'élasticité apparent moyen à l'échelle mésoscopique ("moyen" est pris, comme précédemment, au sens de la moyenne statistique), les échelles de corrélation spatiales et l'intensité des fluctuations statistiques de ce champ stochastique à l'échelle mésoscopique. On verra que cette identification à l'échelle mésoscopique requiert la connaissance du tenseur d'élasticité effectif de l'échelle macroscopique et que l'on doit disposer simultanément, pour un même échantillon chargé statiquement, des mesures de champs aux deux échelles. La méthode proposée est donc non usuelle et nouvelle. La théorie sera présentée dans le cas 3D, mais elle ne sera validée que pour le cas 2D des contraintes planes (voir chapitre 4) et testée sur des mesures réelles de champ (voir chapitre 6) dans ce même cadre 2D, les mesures de champs effectuées expérimentalement ayant été faites par mesures optiques (voir chapitre 5).

### 3.2 Stratégie proposée pour l'identification multi-échelle

Nous considérons la microstructure d'un matériau hétérogène élastique linéaire, pour lequel il y a séparation des échelles micro et macro. A l'échelle mésoscopique, on suppose que l'on a un modèle stochastique *a priori* (ayant un petit nombre de paramètres représentés par  $\mathbf{b}$ ) du champ de tenseur d'élasticité apparent, noté  $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ . Le vecteur  $\mathbf{b}$  de paramètres sera constitué, par exemple, des composantes du tenseur d'élasticité apparent moyen à l'échelle mésoscopique, des échelles de corrélation spatiales et de paramètres caractérisant l'intensité des fluctuations statistiques. A l'échelle macroscopique, le tenseur d'élasticité effectif, construit par une méthode d'homogénéisation du modèle mésoscopique dépend donc de  $\mathbf{b}$  et est noté  $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$ . L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode d'identification du paramètre  $\mathbf{b}$  à deux échelles (macro et méso) du modèle stochastique de  $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ , en utilisant simultanément des mesures du champ de déplacement à l'échelle macroscopique et du champ de déplacements à l'échelle mésoscopique. Ces mesures sont supposées avoir été effectuées simultanément sur un même échantillon soumis à un chargement statique. On suppose aussi que l'on ne dispose des mesures de champ que pour un seul échantillon conformément au cadre expérimental présenté au chapitre 5, d'une part à l'échelle macroscopique et d'autre part, sur un sous-domaine mésoscopique. Le sous-domaine considéré à l'échelle mésoscopique de l'échantillon est par hypothèse un volume élémentaire représentatif (VER) de la microstructure. Cette dernière hypothèse est cohérente avec l'hypothèse de séparation d'échelles qui a été introduite et qui implique donc que le tenseur d'élasticité effectif a une fluctuation statistique très faible ce qui permet de considérer  $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$  comme un tenseur déterministe.

## 3.2. STRATÉGIE PROPOSÉE POUR L'IDENTIFICATION MULTI-ÉCHELLE

---

Dans ce chapitre nous présentons la méthode dans le cadre de l'élasticité linéaire tridimensionnelle et pour lequel les mesures de champs sont disponibles dans tout le volume de l'échantillon. En fait, dans ce travail nous ne disposons que des mesures sur des surfaces (obtenues par un système optique). Nous appliquerons et validerons donc la méthodologie d'identification proposée pour un problème 2D en contrainte plane. L'extension de la méthode d'identification au cas 3D pour lequel on ne dispose que de mesures de champs 2D sur des bords du domaine 3D reste à faire mais ne pose pas, *a priori*, de difficultés conceptuelles.

En conséquence, l'hypothèse sur les données expérimentales disponibles est la suivante (en cohérence avec les résultats expérimentaux présentés au chapitre 5 et l'identification associée présentée au chapitre 6) : on connaît les déplacements expérimentaux aux noeuds d'une grille du domaine macroscopique (appelé *mesure macroscopique*) et aux noeuds d'une grille d'un sous-domaine mésoscopique (appelé *mesure mésoscopique*). Il est à noter que, si l'on dispose des déplacements expérimentaux aux noeuds d'une grille de plusieurs sous-domaines mésoscopiques (d'intersection vide) pour un même échantillon, alors il suffit d'ajouter une moyenne sur ces sous-domaines mésoscopiques dans les développements présentés dans ce chapitre. Ce sera du reste le cas dans le chapitre 4 pour lequel nous considérerons le cas d'un seul sous-domaine mésoscopique mesuré (expérimentation simulée) et le cas de plusieurs sous-domaines mésoscopiques mesurés (toujours provenant d'une expérimentation simulée). Par contre, au chapitre 6, nous ne considérerons que le sous-domaine mésoscopique mesuré (mesures provenant de l'expérimentation réelle présentée au chapitre 5). Afin de ne pas alourdir la présentation de ce chapitre, nous le présenterons avec un seul sous-domaine mésoscopique mesuré. La méthode d'identification proposée du paramètre  $\mathbf{b}$  du champ de tenseur d'élasticité apparent stochastique,  $\mathbf{C}^{\text{meso}}$ , à l'échelle mésoscopique, ne peut pas être fait directement et requiert l'identification simultanée du paramètre  $\mathbf{a}$  lié au tenseur d'élasticité de l'échelle macroscopique. On est alors amené à introduire 3 indicateurs puis à introduire le problème d'optimisation multi-objectif. La méthode est donc constituée des 3 étapes résumées ci-dessous.

1. A l'échelle macroscopique, on construit le problème aux limites déterministe de l'élasticité linéaire 3D modélisant l'échantillon dans sa configuration expérimentale (définition géométrique du domaine, conditions aux limites en déplacement et en force, loi de comportement). La loi de comportement fait intervenir le tenseur d'élasticité  $C^{\text{macro}}(\mathbf{a})$  qui est paramétré par un vecteur  $\mathbf{a}$ . Pour l'élasticité 3D anisotrope,  $\mathbf{a}$  représente les 21 constantes du tenseur d'élasticité de l'échelle macroscopique. Ce

tenseur  $C^{\text{macro}}(\mathbf{a})$  est inconnu et doit être identifié expérimentalement à l'aide des mesures de champ à l'échelle macroscopique, ce qui revient à identifier le paramètre  $\mathbf{a}$ . Un premier indicateur  $\mathcal{I}_1(\mathbf{a})$  est donc construit pour mesurer la distance entre le champ de déformation macroscopique mesuré et le champ de déformation macroscopique calculé en résolvant le problème aux limites en fonction de  $\mathbf{a}$  à l'échelle macroscopique.

2. A l'échelle mésoscopique, deux indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  sont construits afin d'identifier le paramètre  $\mathbf{b}$  du modèle stochastique *prior*  $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ . On notera que  $\mathcal{I}_3$  dépendra de  $\mathbf{a}$  et de  $\mathbf{b}$  car cet indicateur va mesurer la distance entre le tenseur d'élasticité  $C^{\text{macro}}(\mathbf{a})$  du problème aux limites macroscopique et le tenseur effectif  $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$  calculé par homogénéisation stochastique du modèle mésoscopique relatif au VER, qui lui dépend de  $\mathbf{b}$ . Il est à noter que le modèle stochastique *prior*  $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  choisi sera la restriction au VER d'un champ stochastique  $\{\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$  statistiquement homogène (stationnaire) pour la translation dans  $\mathbb{R}^3$ , et sera de plus ergodique en loi bien que nous n'utilisons pas explicitement cette dernière propriété dans les développements de ce chapitre. Compte tenu de l'hypothèse de séparation des échelles macroscopique et mésoscopique,  $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$  sera quasi déterministe.
3. L'identification du paramètre  $\mathbf{b}$  qui décrit le modèle stochastique du champ de tenseur aléatoire  $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  de l'échelle mésoscopique sera obtenue par la résolution d'un problème d'optimisation multi-objectif concernant les trois indicateurs  $\mathcal{I}_1(\mathbf{a})$ ,  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

### 3.3 Problème inverse statistique multi-échelle

#### 3.3.1 Notations, la configuration expérimentale, mesures des champs de déplacement aux échelles macroscopique et mésoscopique

L'échantillon (qui a une microstructure complexe hétérogène) occupe le domaine macroscopique borné de  $\mathbb{R}^3$ , noté  $\Omega^{\text{macro}}$ . Le bord  $\partial\Omega^{\text{macro}}$  de  $\Omega^{\text{macro}}$  est constitué de deux parties disjointes  $\Sigma^{\text{macro}}$  et  $\Gamma^{\text{macro}}$ . Sur  $\Sigma^{\text{macro}}$  est appliquée une densité surfacique de force  $\mathbf{f}^{\text{macro}}$  et sur  $\Gamma^{\text{macro}}$  est appliquée une condition de Dirichlet nulle pour le déplacement, telle qu'il n'y a pas de déplacement de corps rigide. Le problème aux limites d'élasticité linéaire 3D, modélisant la configuration expérimentale, est formulé en terme du champ de déplacement défini sur  $\Omega^{\text{macro}}$  et noté  $\mathbf{u}^{\text{macro}}$ . Le tenseur de déformation correspondant est noté  $\varepsilon^{\text{macro}}$ .

### 3.3. PROBLÈME INVERSE STATISTIQUE MULTI-ÉCHELLE

---

Le champ de déplacement mesuré correspondant à l'échelle macroscopique est noté  $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$  et le tenseur de déformation associé est noté  $\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ .

Le sous-domaine mésoscopique de l'échantillon (un VER) est noté  $\Omega^{\text{meso}}$  et son bord  $\partial\Omega^{\text{meso}}$ . Le champ de déplacement défini sur  $\Omega^{\text{meso}}$  est noté  $\mathbf{U}^{\text{meso}}$  et le champ de déformation associé est noté  $\mathfrak{E}^{\text{meso}}$ . Concernant les mesures expérimentales à l'échelle mésoscopique, le champ de déplacement est noté  $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$  et le champ de déformation associé est noté  $\mathfrak{E}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ .

Soit  $T$  un tenseur réel du second ordre sur  $\mathbb{R}^3$  représenté par sa matrice  $T = \{T_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq 3}$ . Dans toute la suite, on note  $\|T\|_F$  la norme de Frobenius de  $T$  définie par

$$\|T\|_F^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}^2.$$

#### 3.3.2 Définition de l'indicateur macroscopique $\mathcal{I}_1(\mathbf{a})$

Le problème aux limites d'élasticité linéaire 3D modélisant la configuration expérimentale décrite au paragraphe 3.3.1 s'écrit

$$-\operatorname{div} \sigma^{\text{macro}} = 0 \quad \text{dans } \Omega^{\text{macro}}, \quad (3.1)$$

$$\sigma^{\text{macro}} \mathbf{n}^{\text{macro}} = \mathbf{f}^{\text{macro}} \quad \text{sur } \Sigma^{\text{macro}}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}^{\text{macro}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^{\text{macro}}, \quad (3.3)$$

dans lequel  $\mathbf{n}^{\text{macro}}$  est la normale unité au bord  $\partial\Omega^{\text{macro}}$ , extérieure à  $\Omega^{\text{macro}}$ , et  $\sigma^{\text{macro}}$  est le champ de tenseur des contraintes de Cauchy. A cette échelle macroscopique, le matériau est supposé homogène et anisotrope. Dans le contexte de l'identification, le tenseur d'élasticité est inconnu et est paramétré, conformément aux explications données au paragraphe 3.2, par  $\{C^{\text{macro}}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}\}$  où  $\mathcal{A}^{\text{macro}}$  est l'ensemble admissible du paramètre  $\mathbf{a}$  (permettant de prendre en compte les symétries matérielles ; par exemple, pour une macrostructure isotrope, les deux composantes de  $\mathbf{a}$  sont le module d'élasticité et le coefficient de Poisson ; dans le cas anisotrope, le vecteur  $\mathbf{a}$  est constitué de 21 constantes). Pour tout  $\mathbf{a}$  donné dans  $\mathcal{A}^{\text{macro}}$ , la loi de comportement macroscopique s'écrit donc

$$\sigma^{\text{macro}}(\mathbf{x}) = C^{\text{macro}}(\mathbf{a}) : \varepsilon^{\text{macro}}(\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

où le symbole " : " signifie classiquement le produit de contraction double et  $\varepsilon^{\text{macro}}$  est le champ de tenseur des déformations linéarisées,

$$\varepsilon^{\text{macro}} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}^{\text{macro}} + (\nabla \mathbf{u}^{\text{macro}})^T \right). \quad (3.5)$$



Pour tout  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}$ , le champ de déplacement  $\mathbf{u}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$  est construit comme étant la solution du problème aux limites défini par les Eqs. (3.1) à (3.5). On en déduit alors le champ de déformation  $\varepsilon^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ . Le premier indicateur  $\mathcal{I}_1(\mathbf{a})$  mesure l'écart entre les champs  $\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}$  et  $\varepsilon^{\text{macro}}(\mathbf{a})$  sur  $\Omega^{\text{macro}}$  et est défini par

$$\mathcal{I}_1(\mathbf{a}) = \|\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}} - \varepsilon^{\text{macro}}(\mathbf{a})\|^2, \quad (3.6)$$

avec

$$\|\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}} - \varepsilon^{\text{macro}}(\mathbf{a})\|^2 = \int_{\Omega^{\text{macro}}} \|\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}(\mathbf{x}) - \varepsilon^{\text{macro}}(\mathbf{x}; \mathbf{a})\|_F^2 d\mathbf{x}. \quad (3.7)$$

### 3.3.3 Définition de l'indicateur mésoscopique $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$

On considère le problème aux limites stochastique d'élasticité linéaire 3D à l'échelle mésoscopique, défini sur le VER de domaine  $\Omega^{\text{meso}}$ , formulé en terme du champ stochastique de déplacement  $\{\mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}\}$  et modélisant la configuration expérimentale décrite au paragraphe 3.3.1. On rappelle que pour cette configuration expérimentale, le champ de déplacement  $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$  a été mesuré sur  $\Omega^{\text{meso}}$  (on connaît donc les valeurs mesurées du champ de déplacement sur le bord  $\partial\Omega^{\text{meso}}$ ). Il est à noter que le champ stochastique de déplacement  $\mathbf{U}^{\text{meso}}$  n'est pas statistiquement homogène. On introduit donc le problème aux limites stochastique de Dirichlet suivant

$$-\text{div } \sigma^{\text{meso}} = 0 \quad \text{dans } \Omega^{\text{meso}}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{U}^{\text{meso}} = \mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}} \quad \text{sur } \partial\Omega^{\text{meso}}, \quad (3.9)$$

où  $\{\sigma^{\text{meso}}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}\}$  est le champ stochastique des contraintes de Cauchy. Conformément aux explications données au paragraphe 3.2, on note  $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  le modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité  $\{\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}), \mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}\}$ , paramétré par le vecteur  $\mathbf{b}$  appartenant à un ensemble admissible  $\mathcal{B}^{\text{meso}}$ . Comme nous l'avons expliqué, l'identification du champ d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique revient donc à identifier la valeur optimale du paramètre  $\mathbf{b}$  dans  $\mathcal{B}^{\text{meso}}$ . L'équation de comportement à l'échelle mésoscopique s'écrit

$$\sigma^{\text{meso}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) : \mathfrak{E}^{\text{meso}}(\mathbf{x}), \quad (3.10)$$

où  $\{\mathfrak{E}^{\text{meso}}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}\}$  est le tenseur stochastique des déformations linéarisées à l'échelle mésoscopique,

$$\mathfrak{E}^{\text{meso}} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{U}^{\text{meso}} + (\nabla \mathbf{U}^{\text{meso}})^T \right). \quad (3.11)$$

### 3.3. PROBLÈME INVERSE STATISTIQUE MULTI-ÉCHELLE

---

Dans ce qui suit,  $\mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  désigne la solution du problème aux limites stochastique défini par les Eqs. (3.8) à (3.11) et  $\mathfrak{E}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  désigne le champ de déformation stochastique associé.

Pour construire l'indicateur mésoscopique  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  nous allons au préalable introduire des quantités utiles relatives aux mesures puis relatives au problème aux limites stochastique de l'échelle mésoscopique.

#### Quantités relatives aux mesures mésoscopiques

Comme nous avons supposé que nous ne disposons que de la mesure du champ de déplacement pour un seul sous-domaine mésoscopique relatif à un seul échantillon, on introduit la moyenne volumique d'échantillon,  $\underline{\mathfrak{E}}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ , du champ de tenseur de déformation mésoscopique mesuré,  $\{\mathfrak{E}_{\text{exp}}^{\text{meso}}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}\}$ , qui s'écrit

$$\underline{\mathfrak{E}}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}|} \int_{\Omega^{\text{meso}}} \mathfrak{E}_{\text{exp}}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

Le niveau de fluctuation du champ de tenseur de déformation mésoscopique mesuré autour de sa moyenne volumique d'échantillon, sera évalué par la quantité  $V_{\text{exp}}^{\text{meso}}$  définie par

$$V_{\text{exp}}^{\text{meso}} = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}|} \int_{\Omega^{\text{meso}}} \|\mathfrak{E}_{\text{exp}}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) - \underline{\mathfrak{E}}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\|_F^2 \, d\mathbf{x}. \quad (3.13)$$

On introduit enfin la grandeur normalisée  $\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}}$  qui mesure le niveau de fluctuation, telle que

$$\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = \frac{\sqrt{V_{\text{exp}}^{\text{meso}}}}{\|\underline{\mathfrak{E}}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\|_F}. \quad (3.14)$$

#### Quantités relatives au problème aux limites stochastique de l'échelle mésoscopique

Comme la moyenne expérimentale  $\underline{\mathfrak{E}}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$  du champ de tenseur de déformation mésoscopique mesuré a été définie à l'aide d'une moyenne volumique (voir Eq. (3.12)), et bien que nous puissions introduire la moyenne statistique du champ stochastique des déformations mésoscopiques,  $\mathfrak{E}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ , fourni par la résolution du problème aux limites stochastique de l'échelle mésoscopique, nous introduisons, similairement à l'Eq. (3.12), la moyenne volumique  $\underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  définie par

$$\underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}|} \int_{\Omega^{\text{meso}}} \mathfrak{E}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) \, d\mathbf{x}. \quad (3.15)$$

## CHAPITRE 3. PROBLÈME INVERSE STOCHASTIQUE MULTI-ÉCHELLE

Comme  $\mathfrak{E}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  est un champ stochastique, la moyenne volumique  $\underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  donnée par l'Eq. (3.15) est un tenseur du second ordre aléatoire. En fait, il n'en est rien et  $\underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  est un tenseur déterministe tel que

$$\underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \underline{\mathfrak{E}}_{\text{exp}}^{\text{meso}}, \text{ pour tout } \mathbf{b} \text{ dans } \mathcal{B}^{\text{meso}}. \quad (3.16)$$

En effet, en substituant l'Eq. (3.11) dans le membre de droite de l'Eq. (3.15), puis en appliquant la formule de Green au membre de droite de l'Eq. (3.15) après substitution, on obtient la formule classique,

$$\underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}|} \int_{\partial\Omega^{\text{meso}}} \frac{1}{2} (\mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b})) d\mathbf{x}.$$

Compte tenu de la condition aux limites définie par l'Eq. (3.9), l'équation précédente donne

$$\underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}|} \int_{\partial\Omega^{\text{meso}}} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

En ré-applicant la formule de Green en sens inverse puis en utilisant les Eqs. (3.11) puis (3.12), on obtient l'Eq. (3.16).

Pour chaque  $\mathbf{x}$  fixé dans  $\Omega^{\text{meso}}$ , on introduit la quantité déterministe  $V^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b})$  qui permet de quantifier le niveau de fluctuation du champ stochastique des déformations mésoscopiques  $\mathfrak{E}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  autour du tenseur déterministe  $\underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ , définie par

$$V^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) = E\{\|\mathfrak{E}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) - \underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})\|_F^2\}, \quad (3.17)$$

où  $E$  désigne l'espérance mathématique. Il est à noter que  $V^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b})$  n'est pas une variance car  $\underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  ne représente pas la moyenne statistique de  $\mathfrak{E}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b})$ .

Similairement à l'Eq. (3.14), on introduit la grandeur normalisée  $\delta^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b})$  qui quantifie le niveau de fluctuation, telle que

$$\delta^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) = \frac{\sqrt{V^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b})}}{\|\underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})\|_F} = \frac{\sqrt{V^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b})}}{\|\underline{\mathfrak{E}}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\|_F}, \quad (3.18)$$

pour laquelle nous avons utilisé l'Eq. (3.16).

### Définition de $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$

On introduit l'indicateur  $\tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{b})$  défini à l'aide des grandeurs introduites précédemment par,

$$\tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{b}) = \frac{\|\underline{\mathfrak{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) - \underline{\mathfrak{E}}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\|_F^2}{\|\underline{\mathfrak{E}}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\|_F^2} + \frac{\int_{\Omega^{\text{meso}}} (\delta^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) - \delta_{\text{exp}}^{\text{meso}})^2 d\mathbf{x}}{\int_{\Omega^{\text{meso}}} (\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}})^2 d\mathbf{x}}. \quad (3.19)$$

### 3.3. PROBLÈME INVERSE STATISTIQUE MULTI-ÉCHELLE

---

Le premier terme de l'Eq. (3.19) quantifie l'écart normalisé entre modèle et mesures pour la "moyenne" tandis que le second quantifie l'écart normalisé pour la "fluctuation statistique". Compte tenu de l'Eq. (3.16), le premier terme est nul. L'Eq. (3.14) montre que  $\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}}$  est indépendant de  $\mathbf{x}$ . Dans ces conditions, l'Eq. (3.19) peut être réécrite,

$$\tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{b}) = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}| (\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}})^2} \int_{\Omega^{\text{meso}}} (\delta^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) - \delta_{\text{exp}}^{\text{meso}})^2 d\mathbf{x}.$$

Sur le plan de l'optimisation par rapport au paramètre  $\mathbf{b}$ , on peut remplacer  $\tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{b})$  défini par l'Eq. (3.19) par l'indicateur  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  défini par

$$\mathcal{I}_2(\mathbf{b}) = \int_{\Omega^{\text{meso}}} (\delta^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) - \delta_{\text{exp}}^{\text{meso}})^2 d\mathbf{x}. \quad (3.20)$$

#### 3.3.4 Définition de l'indicateur macro-meso $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Comme nous l'avons expliqué précédemment, l'homogénéisation stochastique du VER à l'échelle mésoscopique, permettant de construire le tenseur d'élasticité effectif,  $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$ , pourrait être faite soit par la méthode HDH soit par la méthode HCH, dont nous avons rappelé les principes au paragraphe 2.2 du chapitre 2. Toutefois, comme nous appliquerons la présente méthode d'identification à un cas 2D en contraintes planes, la méthode d'homogénéisation en contraintes homogènes (HCH) est mieux adaptée. Pour limiter l'exposé, nous présentons ci-dessous la construction de l'indicateur macro-meso par la méthode d'homogénéisation avec la méthode HCH. On considère donc le problème aux limites défini par les Eqs. (2.3)-(2.4), pour lequel la loi de comportement définie par (2.1) est écrite

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) : \varepsilon(\mathbf{x}), \quad (3.21)$$

où  $\{\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}), \mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}\}$  est le modèle stochastique *prior* du champ de tenseur d'élasticité apparent de l'échelle mésoscopique. Les Eqs. (2.5) et (2.6) permettent de calculer les composantes  $\{\mathbf{S}^{\text{eff}}(\mathbf{b})\}_{ijkl}$  du tenseur aléatoire des souplesses effectives  $\mathbf{S}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$  ce qui permet d'en déduire le tenseur aléatoire d'élasticité effectif.

$$\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b}) = (\mathbf{S}^{\text{eff}}(\mathbf{b}))^{-1}. \quad (3.22)$$

Comme nous l'avons indiqué précédemment,  $\Omega^{\text{meso}}$  étant un VER, le tenseur  $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$  devrait être quasi déterministe ce qui permet d'écrire  $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b}) \simeq E\{\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})\}$ . La qualité de cette approximation sera quantifiée pour les applications présentées aux chapitres 4 et 6.

Le troisième indicateur numérique  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}; \mathbf{b})$  est construit pour mesurer la distance entre le tenseur d'élasticité effectif  $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$  qui résulte de l'homogénéisation par la méthode HCH

du modèle stochastique de l'échelle mésoscopique, et le tenseur d'élasticité  $C^{\text{macro}}(\mathbf{a})$  du problème aux limites à l'échelle macroscopique. L'indicateur  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}; \mathbf{b})$  est donc défini, pour tout  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}$  et  $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$ , par

$$\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|C^{\text{macro}}(\mathbf{a}) - E\{\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})\}\|_F^2. \quad (3.23)$$

### 3.3.5 Formulation du problème statistique inverse par un problème d'optimisation multi-objectif

L'identification  $\mathbf{b}^{\text{meso}}$  du paramètre  $\mathbf{b}$  dans  $\mathcal{B}^{\text{meso}}$  du modèle stochastique *prior*  $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  du champ de tenseur d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique est effectuée en résolvant le problème de minimisation multi-objectif suivant : Trouver les valeurs optimales  $\mathbf{a}^{\text{macro}}$  dans  $\mathcal{A}^{\text{macro}}$  et  $\mathbf{b}^{\text{meso}}$  dans  $\mathcal{B}^{\text{meso}}$  telles que

$$(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b}^{\text{meso}}) = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}} \mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}} \mathcal{I}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (3.24)$$

avec  $\mathcal{I}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathcal{I}_1(\mathbf{a}), \mathcal{I}_2(\mathbf{b}), \mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  et où le minimum du vecteur  $\mathcal{I}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  est défini comme le vecteur de composantes  $\min \mathcal{I}_1(\mathbf{a})$ ,  $\min \mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\min \mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . On verra au chapitre 4 comment ce problème d'optimisation multi-objectif est résolu en utilisant un algorithme génétique et en construisant un front de Pareto.

La formulation proposée en terme d'un problème de minimisation multi-objectif résulte de nombreuses tentatives numériques associées à différentes possibilités de formulation du problème statistique inverse. Par exemple, la formulation consistant à minimiser séparément l'indicateur macroscopique  $\mathcal{I}_1(\mathbf{a})$  pour estimer  $\mathbf{a}^{\text{macro}}$  et à minimiser l'indicateur mésoscopique  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  pour estimer  $\mathbf{b}^{\text{meso}}$ , ne permet pas d'identifier  $\mathbf{b}$ . Les raisons en sont les suivantes. Comme nous l'avons dit, le paramètre  $\mathbf{b}$  représentera, entre autre, les composantes du tenseur d'élasticité apparent moyen à l'échelle mésoscopique (mais aussi les échelles de corrélation spatiales et des paramètres caractérisant l'intensité des fluctuations statistiques). Comme l'indicateur  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  est relatif à la résolution d'un problème de Dirichlet à l'échelle mésoscopique, ce problème de Dirichlet ne permet pas d'identifier toutes les composantes du tenseur d'élasticité apparent moyen à l'échelle mésoscopique. C'est pour cela que l'indicateur macro-mésos  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  a été introduit.

## 3.4 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode statistique inverse multi-échelle pour identifier, dans le cadre de l'élasticité linéaire 3D, à partir de mesures expérimentales aux deux échelles macroscopique et mésoscopique, le champ stochastique de tenseur d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique d'une microstructure hétérogène pour laquelle il existe une séparation d'échelle macro-méso. Ce problème d'identification a été formulé comme celui de l'identification des paramètres d'un modèle stochastique *prior* du champ stochastique d'élasticité apparent de l'échelle mésoscopique. Cette identification est menée en résolvant un problème de minimisation multi-objectif. La modélisation stochastique *prior* du champ  $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ , les aspects numériques liés aux discrétisations spatiales pour résoudre les problèmes aux limites et la méthode numérique de résolution du problème de minimisation multi-objectif seront présentés et développés au chapitre 4.



# 4

## Validation de la méthode d'identification par expérimentation numérique pour un problème élastique 2D

### Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	38
4.2	Modèle stochastique <i>a priori</i> du champ d'élasticité 2D en contraintes planes . . . . .	38
4.3	Générateur de réalisations indépendantes . . . . .	43
4.4	Construction d'une base de données "expérimentales" par simulation numérique . . . . .	44
4.5	Analyses de sensibilité par rapport aux paramètres moyens .	50
4.6	Problème d'optimisation multi-objectif . . . . .	55
4.7	Résultats numériques de l'identification et validation . . . . .	58
4.8	Résumé du chapitre . . . . .	61

---



## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons une validation de la méthodologie développée au chapitre 3 pour des données expérimentales simulées numériquement (ce qui permet de connaître *a priori* une approximation des paramètres à estimer du modèle stochastique *a priori* du champ de tenseur d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique). Conformément aux explications données précédemment, cette validation va être menée dans le cadre de l'élasticité linéaire 2D en contraintes planes, puisque c'est la situation expérimentale des mesures des champs des déplacements aux deux échelles macroscopique et mésoscopique, présentée au chapitre 5. Dans cette méthodologie, la première étape consiste à introduire le modèle stochastique *a priori* du champ de tenseur d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique,  $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ , défini sur le domaine  $\Omega^{\text{meso}}$  du VER, les composantes du paramètre vectoriel  $\mathbf{b}$  étant constituées de composantes du tenseur d'élasticité apparent moyen à l'échelle mésoscopique, d'une échelle de corrélation spatiale et d'un paramètre caractérisant l'intensité des fluctuations statistiques du champ. Nous allons voir dans un premier paragraphe, que le modèle stochastique *a priori* du champ d'élasticité 2D en contraintes planes va passer par la construction du champ de tenseur des souplesses apparentes  $\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$  à l'échelle mésoscopique. Les paragraphes suivants de ce chapitre seront consacrés au générateur de réalisations du champ stochastique, à la construction des données expérimentales simulées numériquement, à une étude de sensibilité des indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  définis par les Eqs. (3.20) et (3.23) et enfin à la présentation de deux exemples de validation de la méthodologie d'identification présentée au chapitre 3.

## 4.2 Modèle stochastique *a priori* du champ d'élasticité 2D en contraintes planes

Dans ce paragraphe, nous proposons un modèle stochastique *a priori* du champ d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique. L'objectif de cette modélisation est d'obtenir une représentation ayant un paramétrage minimal et qui possède les propriétés fondamentales requises pour les problèmes elliptiques (cas du problème aux limites considéré pour l'élasticité linéaire statique). Des modèles stochastiques paramétrés ont été proposés pour des champs à valeurs scalaires (Graham *et al.*, 2003; Babuska *et al.*, 2005; Babuska *et al.*, 2007; Desceliers *et al.*, 2012) et pour des champs non gaussiens à valeurs tensorielles dans le cadre de l'élasticité linéaire hétérogène anisotrope (Soize, 2006; Soize, 2008; Ta *et al.*, 2010; Clouteau *et al.*, 2013), avec des améliorations importantes pour prendre en compte les classes de symétrie matérielle et l'existence de bornes (Guilleminot et Soize, 2011;

## 4.2. MODÈLE STOCHASTIQUE *A PRIORI* DU CHAMP D'ÉLASTICITÉ 2D EN CONTRAINTES PLANES

---

(Guilleminot et Soize, 2012a; Guilleminot et Soize, 2012b; Guilleminot et Soize, 2013). Dans ce qui suit, la modélisation stochastique proposée est dérivée de (Soize, 2006).

Conformément au cadre introduit dans ce travail, la microstructure est hétérogène et anisotrope, et à comportement élastique linéaire. Dans la suite, on utilise la notation de Voigt pour passer du tenseur d'élasticité du quatrième ordre à sa représentation par une matrice ( $6 \times 6$ ). Le vecteur des déformations est alors noté  $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13})$  et le vecteur des contraintes associées est noté  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13})$ . L'ordre choisi n'est pas usuel car nous l'avons adapté pour simplifier la présentation qui suit au cas 2D en contraintes planes pour lequel la matrice de souplesse ( $3 \times 3$ ) correspond au premier bloc ( $3 \times 3$ ) de la matrice de souplesse ( $6 \times 6$ ) du cas 3D. Le champ d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique de la microstructure 3D est modélisé par le champ aléatoire de matrice ( $6 \times 6$ ), noté  $[\mathbf{C}^{\text{meso}}] = \{[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})], \mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}\}$  dont les composantes sont celles du champ de tenseur d'élasticité apparent  $\mathbf{C}^{\text{meso}}$ , telles que

$$[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]_{e_{ij}e_{kh}} = \{\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})\}_{ijkh}, \quad (4.1)$$

où  $e_{ij} = [e]_{ij}$  sont les composantes de la matrice  $[e]$  définie par

$$[e] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Le modèle stochastique *a priori* de  $\mathbf{C}^{\text{meso}}$  en 3D va être construit en prenant le champ aléatoire de matrice ( $6 \times 6$ ) de souplesse,  $[\mathbf{S}^{\text{meso}}] = \{[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})], \mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}\}$ , choisi dans un sous-ensemble de champs aléatoires de matrice adaptés aux opérateurs elliptiques du second ordre à coefficients variables. Ce sous-ensemble est défini par l'information disponible associée à des propriétés algébriques liées à l'ellipticité. Par ailleurs, pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$ , les éléments de la matrice aléatoire  $[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]$  sont les composantes du tenseur des souplesses apparentes 3D à l'échelle mésoscopique,  $\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})$ , telles que

$$[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]_{e_{ij}e_{kh}} = \{\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})\}_{ijkh}. \quad (4.3)$$

Pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega^{\text{meso}}$ , on a

$$[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})] = [\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]^{-1}, \quad \text{presque sûrement.} \quad (4.4)$$

Le cadre des hypothèses retenues au niveau du VER conduit à supposer que le champ stochastique  $[\mathbf{S}^{\text{meso}}]$  est statistiquement homogène (stationnaire en espace) sur  $\mathbb{R}^3$  et dont

## CHAPITRE 4. VALIDATION DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION PAR EXPÉRIMENTATION NUMÉRIQUE POUR UN PROBLÈME ÉLASTIQUE 2D

on utilise la restriction au domaine borné  $\Omega^{\text{meso}}$ . Par conséquent, la moyenne statistique de  $[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]$  est indépendante de la position  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega^{\text{meso}}$ . Elle sera donc modélisée par une matrice de souplesse  $(6 \times 6)$  (déterministe)  $[\underline{S}^{\text{meso}}] = E\{[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]\}$ , pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega^{\text{meso}}$ , laquelle est une matrice symétrique définie positive. On introduit l'ensemble  $\text{SFE}^+$  (Soize, 2006; Soize, 2012) des champs stochastiques à valeurs dans les matrices carrées réelles  $(6 \times 6)$  symétriques définies positives, du second ordre, stationnaires, non gaussiennes, de moyenne donnée et bornée uniformément inférieurement. Le modèle stochastique *a priori* de  $[\mathbf{S}^{\text{meso}}]$  est alors choisi dans cet ensemble  $\text{SFE}^+$  de champs stochastiques. Tout élément  $[\mathbf{S}^{\text{meso}}]$  appartenant à  $\text{SFE}^+$  s'écrit, pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega^{\text{meso}}$ ,

$$[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})] = [L^{\text{meso}}]^T [\mathbf{G}(\mathbf{x})] [L^{\text{meso}}] + [S_0], \quad (4.5)$$

où  $[S_0]$  est la borne inférieure qui est une matrice  $(6 \times 6)$  définie-positive déterministe et  $[\mathbf{G}]$  est un champ stochastique de matrice  $(6 \times 6)$  définie-positive, définis ci-après. Dans l'équation précédente, la transposée est notée par l'exposant  $T$ . La matrice  $[S_0]$  est telle que  $[\underline{S}^{\text{meso}}] - [S_0]$  soit définie-positive. La matrice  $[L^{\text{meso}}]$  triangulaire supérieure  $(6 \times 6)$  est issue de la factorisation de Cholesky de la matrice définie-positive  $[\underline{S}^{\text{meso}}] - [S_0]$ , c'est-à-dire,

$$[\underline{S}^{\text{meso}}] - [S_0] = [L^{\text{meso}}]^T [L^{\text{meso}}]. \quad (4.6)$$

On suppose que l'on a ni information expérimentale ni information théorique pour estimer la borne inférieure  $[S_0]$  (cas de l'os cortical considéré dans ce travail). Pour ce cas, cette matrice peut être définie par

$$[S_0] = \eta_0 [\underline{S}^{\text{meso}}], \quad (4.7)$$

où  $\eta_0$  est un scalaire fixé positif, plus petit que 1 et aussi petit que l'on veut. Pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , on a

$$[\underline{S}^{\text{meso}}]_{ij} = (1 - \eta_0)^{-1} [L^{\text{meso}}]_{ki} [L^{\text{meso}}]_{kj}, \quad (4.8)$$

avec une sommation implicite sur l'indice  $k$  telle que, la matrice  $[L^{\text{meso}}]$  étant triangulaire supérieure,  $1 \leq k \leq i$  et  $1 \leq k \leq j$ .

Le champ aléatoire à valeurs matricielles  $[\mathbf{G}] = \{[\mathbf{G}(\mathbf{x})], \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$  (dont on utilise sa restriction au domaine borné  $\Omega^{\text{meso}}$ ) est défini comme étant l'image par une application non linéaire de 21 champs stochastiques indépendants,  $U_{jj'} = \{U_{jj'}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$ , Gaussiens, homogènes (stationnaires), du second-ordre, centrés, tels que, pour tout  $1 \leq j \leq j' \leq 6$ , les fonctions d'autocorrelation  $R_{U_{jj'}}(\boldsymbol{\xi}) = E\{U_{jj'}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) U_{jj'}(\mathbf{x})\}$  sont toutes choisies égales à une même et unique fonction

$$R_{U_{jj'}}(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{k=1}^3 (2 \ell_k / \pi \xi_k)^2 \sin^2(\pi \xi_k / 2 \ell_k), \quad (4.9)$$

## 4.2. MODÈLE STOCHASTIQUE *A PRIORI* DU CHAMP D'ÉLASTICITÉ 2D EN CONTRAINTES PLANES

---

laquelle dépend de trois longueurs de corrélation spatiale  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $\ell_3$  pour les directions  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . La forme explicite de cette application, établie dans (Soize, 2006), est

$$[\mathbf{G}(\mathbf{x})] = [\mathbf{L}(\mathbf{x})]^T [\mathbf{L}(\mathbf{x})], \quad (4.10)$$

où  $[\mathbf{L}(\mathbf{x})]$  est une matrice  $(6 \times 6)$  aléatoire triangulaire supérieure telle que, pour tout  $1 \leq j < j' \leq 6$ ,

$$[\mathbf{L}(\mathbf{x})]_{jj'} = \sigma U_{jj'}(\mathbf{x}), \quad (4.11)$$

$$[\mathbf{L}(\mathbf{x})]_{jj} = \sigma \sqrt{2h(\alpha_j, U_{jj}(\mathbf{x}))}, \quad (4.12)$$

dans lesquelles  $\sigma = \delta(n+1)^{-1/2}$  et  $\alpha_j = (n+1)/(2\delta^2) + (1-j)/2$  avec  $n = 6$  et où  $\delta$  est un paramètre de dispersion tel que  $0 \leq \delta < \sqrt{(n+1)(n+5)}^{-1}$ . Le paramètre  $\delta$  permet de contrôler le niveau de fluctuation du champ stochastique  $[\mathbf{G}]$ . Pour le paramètre  $\alpha$  fixé, la fonction  $u \mapsto h(\alpha, u)$  est telle que  $\Gamma_\alpha = h(\alpha, U)$ , avec  $U$  une variable aléatoire gaussienne normalisée (centrée de variance unité), est une variable aléatoire Gamma de paramètre  $\alpha$ . Cette application  $h(\alpha, \cdot)$  peut donc s'écrire  $h(\alpha, u) = F_{\Gamma_\alpha}^{-1}(F_U(u))$  où  $F_U$  et  $F_{\Gamma_\alpha}$  sont les fonctions de répartition des variables aléatoires  $U$  et  $\Gamma_\alpha$ . Pour  $\mathbf{x}$  fixé, la fonction de densité de probabilité  $p_{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]}$  de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]$ , par rapport à la mesure  $d\tilde{G} = 2^{n(n-1)/4} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [G]_{ij}$ , sur l'ensemble  $\mathbb{M}_n^+$  des matrices réelles  $(n \times n)$  symétriques définies positives  $[G]$ , s'écrit

$$p_{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]}([G]; \mathbf{x}) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+}([G]) c (\det[G])^b \exp\{-a \operatorname{tr}[G]\}, \quad (4.13)$$

où  $a = (n+1)/(2\delta^2)$ ,  $b = a(1-\delta^2)$ ,  $c$  est la constante de normalisation et  $[G] \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+}([G])$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $\mathbb{M}_n^+$ . Il est à noter que  $p_{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]}$  n'est pas la fonction de densité de probabilité d'une matrice aléatoire gaussienne. Par ailleurs, le paramètre  $\delta$  est tel que  $E\{\|[\mathbf{G}(\mathbf{x})]\|_F^2\} = n(\delta^2 + 1)$ . Le niveau des fluctuations statistiques de la matrice aléatoire  $[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]$  est contrôlé par le paramètre  $\delta_S$  tel que  $\delta_S^2 = E\{\|[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})] - [\underline{S}^{\text{meso}}]\|_F^2\} / \|[\underline{S}^{\text{meso}}] - [S_0]\|_F^2$  (où  $\|\cdot\|_F$  est la norme de Frobenius), et qui est lié à  $\delta$  par l'équation

$$\delta_S = \frac{\delta}{\sqrt{n+1}} \left( 1 + \frac{(\operatorname{tr}\{[\underline{S}^{\text{meso}}] - [S_0]\})^2}{\operatorname{tr}\{([\underline{S}^{\text{meso}}] - [S_0])^2\}} \right)^{1/2}. \quad (4.14)$$

Comme nous l'avons expliqué, le problème est réduit à une section 2D avec une hypothèse de contraintes planes. Dans ces conditions, le domaine 2D est encore noté  $\Omega^{\text{meso}}$  et le champ stochastique d'élasticité apparent  $[\mathbf{C}^{2D}] = \{[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{x})], \mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}\}$  à valeurs dans les matrices  $(3 \times 3)$  est construit comme étant, pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega^{\text{meso}}$ , l'inverse de la

## CHAPITRE 4. VALIDATION DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION PAR EXPÉRIMENTATION NUMÉRIQUE POUR UN PROBLÈME ÉLASTIQUE 2D

matrice aléatoire  $[\mathbf{S}^{2D}(\mathbf{x})]$  qui est définie comme le premier sous-bloc ( $3 \times 3$ ) de la matrice aléatoire  $[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]$ . Pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, 2, 3\}$ , on a donc

$$[\mathbf{S}^{2D}(\mathbf{x})]_{ij} = [\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]_{ij}, \quad (4.15)$$

et

$$[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{x})] = [\mathbf{S}^{2D}(\mathbf{x})]^{-1}, \quad \text{presque sûrement.} \quad (4.16)$$

La construction du modèle stochastique *a priori* de  $[\mathbf{C}^{2D}]$  nécessite donc, apparemment, de connaître l'ensemble des paramètres du modèle stochastique du champ  $[\mathbf{S}^{\text{meso}}]$ , en particulier, tous les éléments de la matrice  $[\underline{\mathcal{S}}^{\text{meso}}]$ . On comprend donc qu'une telle formulation puisse être problématique dans le cadre de l'identification statistique inverse, car certains de ces paramètres sont liés à des propriétés élastiques que l'on ne peut pas quantifier avec des mesures d'imagerie expérimentale bidimensionnelle des champs de déplacements. Cette indétermination n'est, néanmoins, qu'une difficulté apparente qui peut être levée. En effet en utilisant les Eqs. (4.5), (4.7) et (4.10), on obtient, pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega^{\text{meso}}$  et pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,

$$[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]_{ij} = [L^{\text{meso}}]_{hi} [\mathbf{L}(\mathbf{x})]_{kh} [\mathbf{L}(\mathbf{x})]_{km} [L^{\text{meso}}]_{mj} + \eta_0 [L^{\text{meso}}]_{ki} [L^{\text{meso}}]_{kj}, \quad (4.17)$$

avec une sommation sur les indices  $h, k, m$  telle que  $1 \leq k \leq h \leq i$  et  $1 \leq k \leq m \leq j$ , puisque les matrices  $[L^{\text{meso}}]$  et  $[\mathbf{L}(\mathbf{x})]$  sont triangulaires supérieures. Ainsi, d'après les Eqs. (4.15) et (4.16), la construction de  $[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{x})]$  ne nécessite que les éléments  $[L^{\text{meso}}]_{ij}$  et  $[\mathbf{L}(\mathbf{x})]_{ij}$  avec  $1 \leq i \leq j \leq 3$ . De plus, on peut en déduire, en utilisant l'Eq. (4.8) que seule la matrice ( $3 \times 3$ ), notée  $[S^{2D}]$ , correspondant au premier sous-bloc de la matrice  $[\underline{\mathcal{S}}^{\text{meso}}]$  est nécessaire pour construire le modèle stochastique de  $[\mathbf{C}^{2D}]$ . Pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, 2, 3\}$ , on a

$$[S^{2D}]_{ij} = [\underline{\mathcal{S}}^{\text{meso}}]_{ij}. \quad (4.18)$$

Une telle reformulation est avantageuse car, en contraintes planes, tous les éléments de la matrice  $[S^{2D}]$  ne sont des fonctions que des paramètres élastiques quantifiables par des mesures expérimentales bidimensionnelles. On réintroduit maintenant la dépendance en  $\mathbf{b}$  du modèle stochastique du champ d'élasticité apparent  $[\mathbf{C}^{2D}]$  pour le cas 2D en contraintes planes. Le modèle stochastique de  $[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{b})]$  est construit comme suit en fonction des paramètres  $\mathbf{b} = (\delta, \ell_1, \ell_2)$ , valeurs moyennes des propriétés élastiques du problème d'élasticité en contraintes planes). Si l'on introduit l'hypothèse supplémentaire que les longueurs de corrélation spatiale suivant  $x_1$  et  $x_2$  sont égales, alors on pose  $\ell = \ell_1 = \ell_2$ . La procédure d'identification en inverse de  $\mathbf{b}$  requiert la construction en direct du champ stochastique  $[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{b})]$ . On peut résumer cette construction, pour un calcul direct, comme suit.

### 4.3. GÉNÉRATEUR DE RÉALISATIONS INDÉPENDANTES

---

1. On se donne une valeur de  $\mathbf{b}$  dans son ensemble admissible  $\mathcal{B}^{\text{meso}}$ .
2. On construit la matrice déterministe  $[S^{2D}(\mathbf{b})]$  correspondant à la moyenne.
3. On fixe la valeur du paramètres  $\eta_0$  (par exemple  $10^{-7}$ ).
4. On construit la matrice  $[L^{2D}(\mathbf{b})]$  issue de la factorisation de Cholesky de la matrice  $(1 - \eta_0)^{-1}[S^{2D}(\mathbf{b})]$ . On a donc  $(1 - \eta_0)^{-1}[S^{2D}(\mathbf{b})] = [L^{2D}(\mathbf{b})]^T [L^{2D}(\mathbf{b})]$ .
5. On construit  $[\mathbf{L}^{2D}(\mathbf{x}; \mathbf{b})]$ , la matrice  $(3 \times 3)$  aléatoire triangulaire supérieure, dont les 6 éléments non nuls sont les variables aléatoires  $[\mathbf{L}(\mathbf{x}; \mathbf{b})]_{j,j'}$  définies par les Eqs. (4.11) et (4.12) avec  $1 \leq i \leq j \leq 3$  et  $n = 6$  (et non pas  $n = 3$ ).
6. On construit la matrice aléatoire  $[\mathbf{S}^{2D}(\mathbf{x}; \mathbf{b})]$  qui s'écrit alors

$$[\mathbf{S}^{2D}(\mathbf{x}; \mathbf{b})] = [L^{2D}(\mathbf{b})]^T [\mathbf{L}^{2D}(\mathbf{x}; \mathbf{b})]^T [\mathbf{L}^{2D}(\mathbf{x}; \mathbf{b})] [L^{2D}(\mathbf{b})] + \eta_0 [S^{2D}(\mathbf{b})]. \quad (4.19)$$

7. On construit alors la matrice aléatoire  $[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{x}; \mathbf{b})]$  laquelle est définie par  $[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{x}; \mathbf{b})] = [\mathbf{S}^{2D}(\mathbf{x}; \mathbf{b})]^{-1}$ .

Il est à noter qu'ainsi construit, le champ de matrices aléatoires  $[\mathbf{S}^{2D}(\mathbf{b})]$  n'est pas obtenu en prenant un champ dans  $\text{SFE}^+$  avec  $n = 3$ . En effet la construction utilise une extraction du premier bloc  $(3 \times 3)$  d'un champ aléatoire dans  $\text{SFE}^+$  avec  $n = 6$ . Evidemment, le champ de matrices aléatoires  $[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{b})]$  qui est construit comme l'inverse de  $[\mathbf{S}^{2D}(\mathbf{b})]$  n'appartient pas à l'ensemble  $\text{SFE}^+$  pour  $n = 3$ .

### 4.3 Générateur de réalisations indépendantes

Le générateur de réalisations indépendantes du champ stochastique  $[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{b})] = \{[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{x}; \mathbf{b})], \mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}\}$  nécessite de construire numériquement des réalisations indépendantes de 6 champs stochastiques indépendants, Gaussiens, homogènes (stationnaires), du second ordre, centrés,  $U_{j,j'} = \{U_{j,j'}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$ , restreint à  $\Omega^{\text{meso}}$ , avec  $1 \leq j \leq j' \leq 3$ , qui apparaissent comme 6 copies indépendantes d'un même champ stochastique gaussien noté  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$  dont la fonction d'autocorrélation transversale est donnée par le membre de droite de l'Eq. (4.9). La simulation numérique du champ  $\mathcal{U}$  est faite en utilisant la méthode de Shinozuka détaillée dans (Poirion et Soize, 1989). On introduit le vecteur  $\mathbf{V} = (\mathcal{U}(\mathbf{x}^1), \dots, \mathcal{U}(\mathbf{x}^N))$  correspondant à la discrétisation spatiale du champ stochastique  $\mathcal{U}$  avec  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N$  les  $N$  points de Gauss du maillage en éléments finis plans quadrangulaires du domaine plan  $\Omega^{\text{meso}}$ . Pour tout entier pair  $\nu > 0$ , la formule de simulation numérique du vecteur aléatoire  $\mathbf{V}^\nu$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ , qui approxime  $\mathbf{V}$  à l'ordre  $\nu$ ,

s'écrit, pour tout  $1 \leq k \leq N$ ,

$$\{\mathbf{V}^\nu\}_k = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\nu} \sqrt{2 S_\alpha S_\beta} Z_{\alpha\beta} \cos(2\pi \Phi_{\alpha\beta} + \frac{\pi}{\ell_1} \tau_\alpha \{\mathbf{x}^k\}_1 + \frac{\pi}{\ell_2} \tau_\beta \{\mathbf{x}^k\}_2), \quad (4.20)$$

où  $\tau_\alpha = (2\alpha - 1)/\nu - 1$  et  $S_\alpha = (2/\nu)q(\tau_\alpha)$  avec  $q(\tau) = \mathbb{1}_{[-1;1]}(\tau) (1 - |\tau|)$ . Les variables aléatoires  $Z_{\alpha\beta}$  sont définies par  $Z_{\alpha\beta} = \sqrt{-\log(\Psi_{\alpha\beta})}$ . Les variables aléatoires  $\{\Psi_{\alpha\beta}, \Phi_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta}$  constituent une famille de variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour  $\nu \rightarrow +\infty$ , (1) la matrice de covariance du vecteur aléatoire  $\mathbf{V}^\nu$  converge vers la matrice de covariance du vecteur aléatoire  $\mathbf{V}$  et (2) la suite de vecteurs aléatoires  $\{\mathbf{V}^\nu\}_\nu$  converge en loi vers le vecteur aléatoire  $\mathbf{V}$ .

La génération de réalisations indépendantes des matrices aléatoires  $[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{x}^1; \mathbf{b})], \dots, [\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{x}^N; \mathbf{b})]$  est donc faite comme suit :

1. On fixe un entier pair  $\nu$  suffisamment grand.
2. On construit les réalisations  $\{\Psi_{\alpha\beta}(\theta_{jj'}), \Phi_{\alpha\beta}(\theta_{jj'})\}_{\alpha\beta}$  pour  $1 \leq j \leq j' \leq 3$ .
3. On en déduit les réalisations  $\mathbf{V}^\nu(\theta_{jj'})$  en utilisant l'Eq. (4.20).
4. Puis on déduit les réalisations  $\mathcal{U}(\mathbf{x}^1, \theta_{jj'}), \dots, \mathcal{U}(\mathbf{x}^N, \theta_{jj'})$  à partir des réalisations de  $\mathbf{V}^\nu(\theta_{jj'})$  qui sont telles que  $\mathbf{V}^\nu(\theta_{jj'}) = (\mathcal{U}(\mathbf{x}^1, \theta_{jj'}), \dots, \mathcal{U}(\mathbf{x}^N, \theta_{jj'}))$ .
5. Pour chaque réalisation  $\theta = \{\theta_{jj'}, 1 \leq j \leq j' \leq 3\}$ , on construit la réalisation  $[\mathbf{L}^{2D}(\mathbf{x}^1; \mathbf{b}; \theta)], \dots, [\mathbf{L}^{2D}(\mathbf{x}^N; \mathbf{b}; \theta)]$  en utilisant les réalisations  $U(\mathbf{x}^1, \theta_{jj'}), \dots, U(\mathbf{x}^N, \theta_{jj'})$  dans les Eqs. (4.11) et (4.12) avec  $1 \leq j \leq j' \leq 3$  et  $n = 6$ .
6. On construit la réalisation  $[\mathbf{S}^{2D}(\mathbf{x}^1; \mathbf{b}; \theta)], \dots, [\mathbf{S}^{2D}(\mathbf{x}^N; \mathbf{b}; \theta)]$  en utilisant l'Eq. (4.20).
7. On construit alors la réalisation  $[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{x}^1; \mathbf{b}; \theta)], \dots, [\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{x}^N; \mathbf{b}; \theta)]$  en utilisant l'Eq. (4.16).

## 4.4 Construction d'une base de données "expérimentales" par simulation numérique

Afin de valider la méthodologie, on se propose de simuler la construction d'une base de données "expérimentales" par simulation numérique en 2D (conformément aux explications données). Pour cela, on construit le domaine  $\Omega^{\text{macro}}$  2D dans le plan  $(Ox_1x_2)$ , comme étant un carré de  $h = 10^{-2} m$  de côté. A l'échelle mésoscopique, le matériau est linéaire élastique hétérogène, anisotrope. On applique une force linéique dirigée suivant  $-x_2$ , d'intensité  $5 \times 10^{-2} N/m$ , sur le côté  $x_2 = h$ . Le côté  $x_2 = 0$  est encastré. On suppose un état de contraintes planes. On modélise le champ de matrice d'élasticité 2D apparent à l'échelle

#### 4.4. CONSTRUCTION D'UNE BASE DE DONNÉES "EXPÉRIMENTALES" PAR SIMULATION NUMÉRIQUE

---

mésoscopique, en contraintes planes, comme étant une réalisation du modèle stochastique *a priori* du champ stochastique  $[\mathbf{C}^{2D}(\mathbf{b})]$  dont le modèle a été décrit dans le paragraphe précédent avec  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $\delta = 0.4$  et une hypothèse d'isotropie transverse pour le modèle moyen qui permet d'écrire :

$$[\underline{S}^{\text{meso}}(\mathbf{b})] = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_T}{E_T} & 0 & -\frac{\nu_L}{E_L} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_T}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_T)}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_L}{E_L} & -\frac{\nu_L}{E_L} & 0 & \frac{1}{E_L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_L} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

avec  $E_L = 15.8 \times 10^9 Pa$ ,  $E_T = 9.9 \times 10^9 Pa$ ,  $G_L = 5.2 \times 10^9 Pa$ ,  $\nu_L = 0.31$  et  $\nu_T = 0.38$ . On a donc

$$[S^{2D}(\mathbf{b})] = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_T}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_T}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_T)}{E_T} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Le vecteur  $\mathbf{b}$  des paramètres s'écrit donc  $\mathbf{b} = (\delta, \ell, E_T, \nu_T)$ . La réalisation du champ stochastique apparent à l'échelle mésoscopique est simulée sur toute l'étendue du domaine macroscopique  $\Omega^{\text{macro}}$ . Un modèle numérique est construit en utilisant la méthode des éléments finis et un maillage régulier d'éléments 2D quadrangulaire à 4 noeuds avec 1000 éléments dans la direction  $x_1$  et 1000 éléments dans la direction  $x_2$ , soit un maillage d'un million d'éléments (voir Fig. 4.1 à gauche). Les champs de déformations numériquement simulés par ce calcul sont interpolés sur une grille de points à l'échelle de résolution mésoscopique sur tout le domaine macroscopique (voir Fig. 4.1 au centre). Afin de simuler une mesure macroscopique du champ des déformations  $\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}$  à l'échelle macroscopique, les champs des déplacements sont extraits aux noeuds d'une grille régulière  $10 \times 10$  et ces déformations sont déduites par la méthode des éléments finis (voir Fig. 4.1 à droite-haut). Par ailleurs, sur chacun des 16 sous-domaines carrés de côté  $10^{-3} m$  (échelle mésoscopique), on extrait les déplacements à l'échelle mésoscopique qui sont calculés sur une grille régulière  $100 \times 100$  (pour chaque sous-domaine mésoscopique). On simule ainsi 16 mesures mésoscopiques du champ des déformations  $\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}$  sur chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques (voir Fig. 4.1 à droite-basse pour l'un des 16 sous-domaines localisé en ligne pointillée noire sur la figure du centre).

Les figures 4.2, 4.3 et 4.4 montrent les composantes  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{11}$ ,  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{22}$  et  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{12}$  du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle macroscopique avec une résolu-



## CHAPITRE 4. VALIDATION DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION PAR EXPÉRIMENTATION NUMÉRIQUE POUR UN PROBLÈME ÉLASTIQUE 2D

tion  $10 \times 10$ . Sur ces trois figures, les carrés en ligne blanche et le carré en ligne pointillée noire représentent les 16 sous-domaines mésoscopiques considérés.

Les figures 4.5, 4.6 et 4.7 montrent les composantes  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{11}$ ,  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{22}$  et  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{12}$  du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle mésoscopique avec une résolution  $100 \times 100$ .

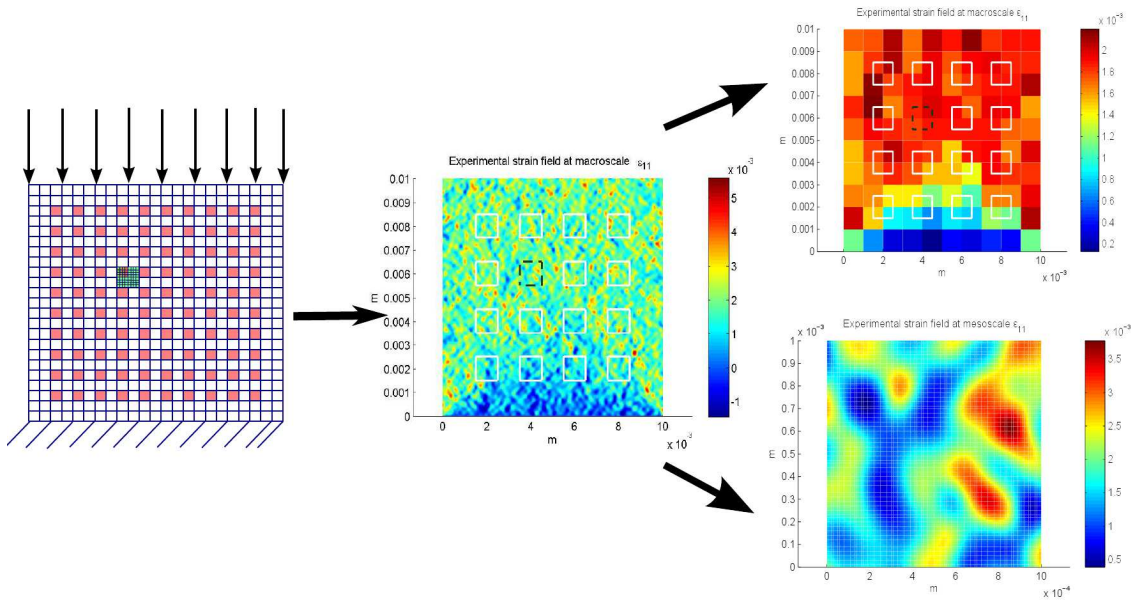


FIGURE 4.1 – Schéma décrivant la construction de la base de données "expérimentales" par simulation numérique pour les deux échelles macroscopiques et mésoscopiques : modèle EF du domaine macro de l'échantillon avec la résolution de l'échelle mésoscopique (figure de gauche), composante  $\{11\}$  du champ des déformations du domaine macroscopique avec la résolution de l'échelle mésoscopique (figure du centre), composante  $\{11\}$  du champ des déformations  $\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}$  du domaine macroscopique avec la résolution de l'échelle macroscopique (figure de droite-haut), composante  $\{11\}$  du champ des déformations  $\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}$  d'un sous-domaine mésoscopique (localisé en ligne pointillée noire sur la figure du centre) avec la résolution de l'échelle mésoscopique (figure de droite-bas).

#### 4.4. CONSTRUCTION D'UNE BASE DE DONNÉES "EXPÉRIMENTALES" PAR SIMULATION NUMÉRIQUE

---

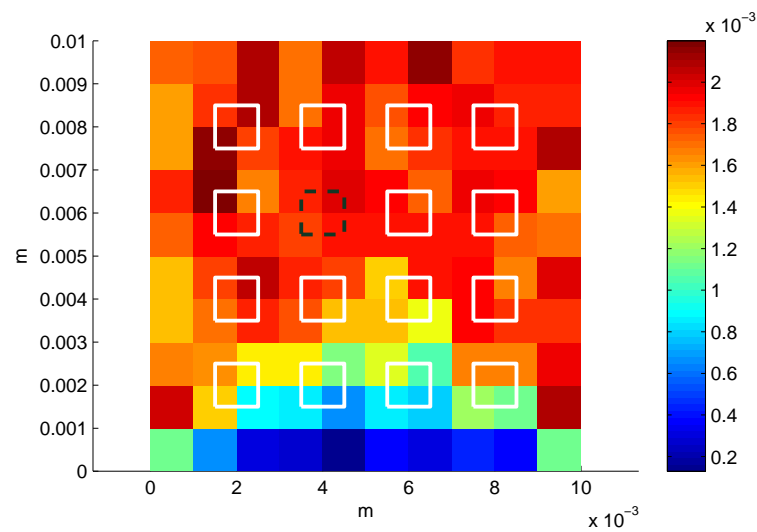


FIGURE 4.2 – Composante  $\{\epsilon_{exp}^{macro}\}_{11}$  du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle macroscopique avec une résolution  $10 \times 10$

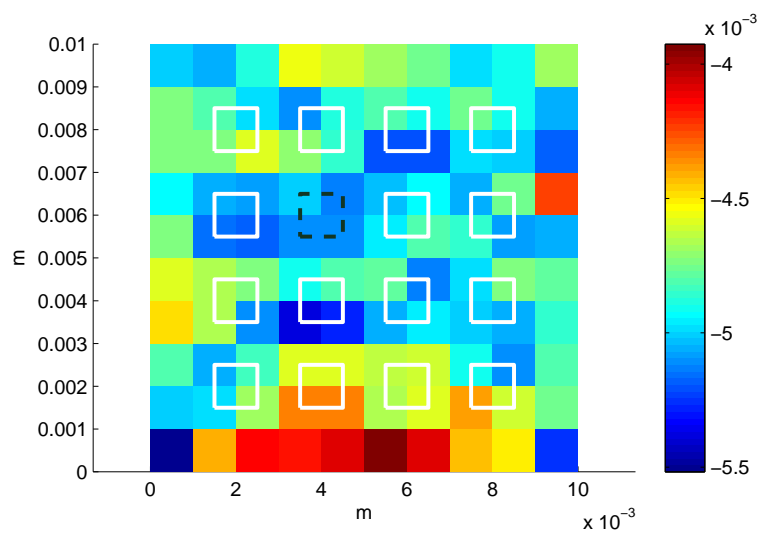


FIGURE 4.3 – Composante  $\{\epsilon_{exp}^{macro}\}_{22}$  du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle macroscopique avec une résolution  $10 \times 10$

## CHAPITRE 4. VALIDATION DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION PAR EXPÉRIMENTATION NUMÉRIQUE POUR UN PROBLÈME ÉLASTIQUE 2D

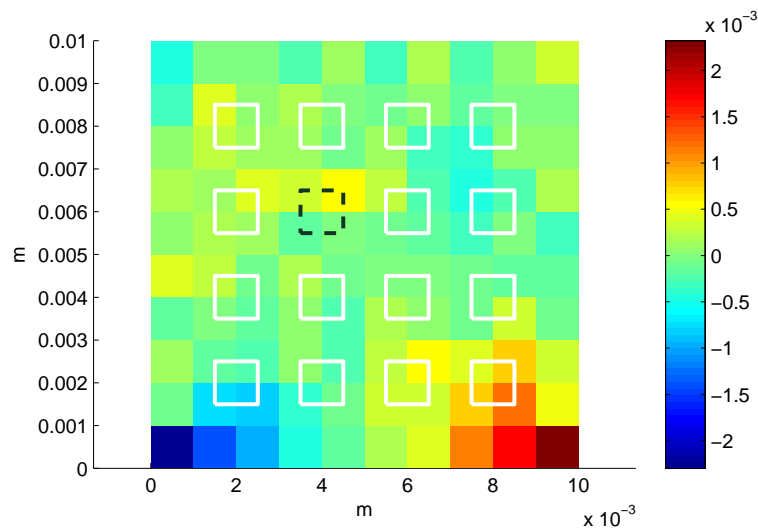


FIGURE 4.4 – Composante  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{12}$  du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle macroscopique avec une résolution  $10 \times 10$

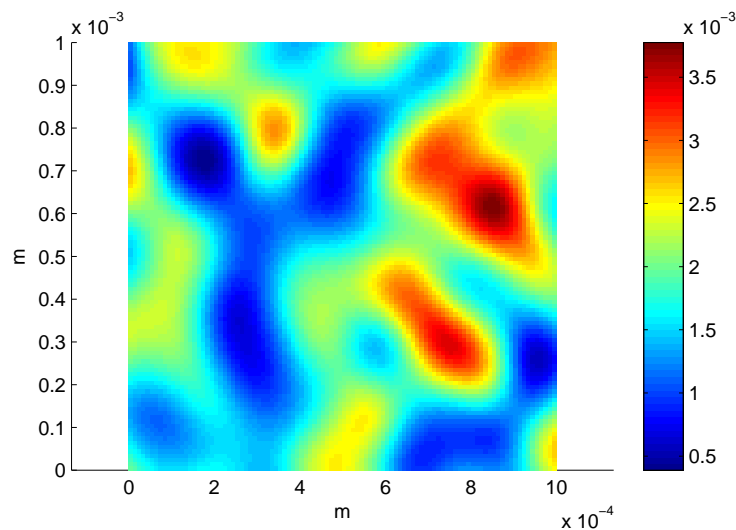


FIGURE 4.5 – Composante  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{11}$  du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle mésoscopique avec une résolution  $100 \times 100$

#### 4.4. CONSTRUCTION D'UNE BASE DE DONNÉES "EXPÉRIMENTALES" PAR SIMULATION NUMÉRIQUE

---

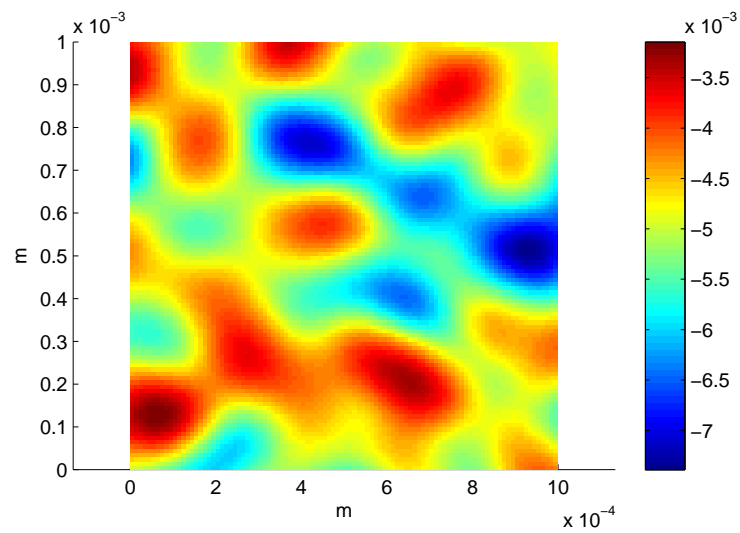


FIGURE 4.6 – Composante  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{22}$  du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle mésoscopique avec une résolution  $100 \times 100$

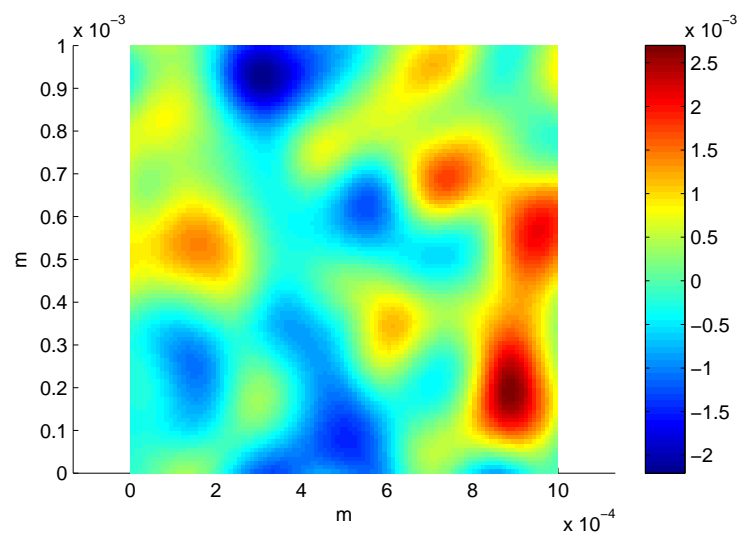


FIGURE 4.7 – Composante  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{12}$  du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle mésoscopique avec une résolution  $100 \times 100$

## 4.5 Analyses de sensibilité par rapport aux paramètres moyens

Dans ce paragraphe, on présente une étude de sensibilité des valeurs des deux indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  par rapport aux différentes composantes  $\ell, \delta, E_T, \nu_T$  du paramètre  $\mathbf{b}$  et pour laquelle, la valeur du paramètre  $\mathbf{a}$  a été fixée à  $\mathbf{a}^0 = (E_T^0, \nu_T^0)$  avec  $E_T^0 = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\nu_T^0 = 0.38$ . Cette étude de sensibilité a pour l'objectif de vérifier que le problème d'optimisation multi-objectif est bien posé.

- La figure Fig. 4.8 montre la sensibilité de l'indicateur  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  par rapport à  $\delta$  avec  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\nu_T = 0.38$ . On remarque qu'il existe une valeur optimale de  $\delta$  minimisant  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  laquelle est approximativement 0.39, ce qui correspond à une valeur approchée de la valeur choisie pour construire la base de données "expérimentales" simulées.
- La figure Fig. 4.9 montre la sensibilité de l'indicateur  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  par rapport à  $\delta$  avec  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\nu_T = 0.38$ . On remarque que cet indicateur est une fonction décroissante de  $\delta$  dans le voisinage des valeurs choisies pour construire la base de données "expérimentales" simulées.
- La figure Fig. 4.10 montre qu'il n'y a pas de sensibilité de l'indicateur  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  par rapport à  $E_T$ . Ce résultat était prévisible.
- La figure Fig. 4.11 montre la sensibilité de l'indicateur  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  par rapport à  $E_T$  avec  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $\delta = 0.4$  et  $\nu_T = 0.38$ . On remarque qu'il existe une valeur optimale de  $E_T$  minimisant  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  laquelle est approximativement  $10.2 \times 10^9 Pa$ , ce qui correspond à une valeur approchée de la valeur choisie pour construire la base de données "expérimentales" simulées.
- La figure Fig. 4.12 montre la sensibilité de l'indicateur  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  par rapport à  $\ell$  avec  $\delta = 0.4$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\nu_T = 0.38$ . On remarque qu'il existe une valeur optimale de  $\ell$  minimisant  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  laquelle est approximativement  $1.25 \times 10^{-4} m$ , ce qui correspond à la valeur choisie pour construire la base de données "expérimentales" simulées.
- La figure Fig. 4.13 montre la sensibilité de l'indicateur  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  par rapport à  $\ell$  avec  $\delta = 0.4$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\nu_T = 0.38$ . On remarque que cet indicateur est une

## 4.5. ANALYSES DE SENSIBILITÉ PAR RAPPORT AUX PARAMÈTRES MOYENS

fonction croissante de  $\ell$  dans le voisinage des valeurs choisies pour construire la base de données "expérimentales" simulées.

- La figure Fig. 4.14 montre la sensibilité de l'indicateur  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  par rapport à  $\nu_T$  avec  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $\delta = 0.4$  et  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$ . On remarque que cet indicateur est une fonction croissante de  $\nu_T$  dans le voisinage des valeurs choisies pour construire la base de données "expérimentales" simulées.
- La figure Fig. 4.15 montre la sensibilité de l'indicateur  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  par rapport à  $\nu_T$  avec  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $\delta = 0.4$  et  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$ . On remarque qu'il existe une valeur optimale de  $\nu_T$  minimisant  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  laquelle est approximativement 0.36, ce qui correspond approximativement à la valeur choisie pour construire la base de données "expérimentales" simulées.

L'analyse de sensibilité menée montre que la minimisation séparée par rapport à  $\mathbf{b}$  de chacun des deux indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  conduirait à deux valeurs différentes de  $\mathbf{b}$ . Il est donc nécessaire de procéder à un problème d'optimisation multi-objectif.

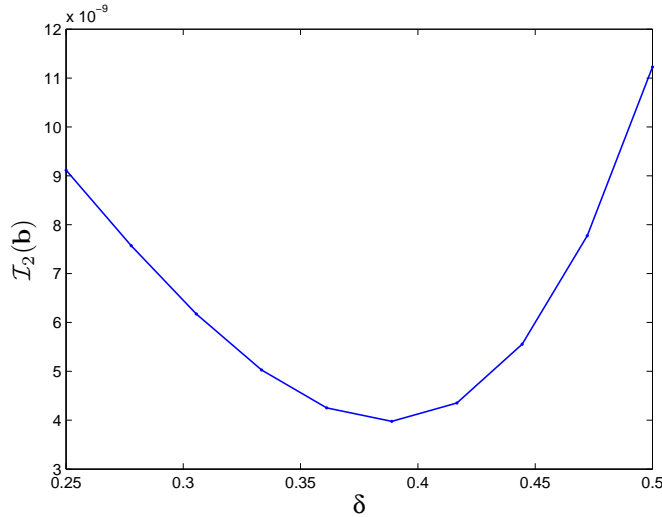


FIGURE 4.8 – Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  par rapport à  $\delta$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$ ,  $\nu_T = 0.38$  et  $\delta$  variant dans l'intervalle  $[0.25, 0.5]$ .

CHAPITRE 4. VALIDATION DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION PAR  
EXPÉRIMENTATION NUMÉRIQUE POUR UN PROBLÈME ÉLASTIQUE 2D

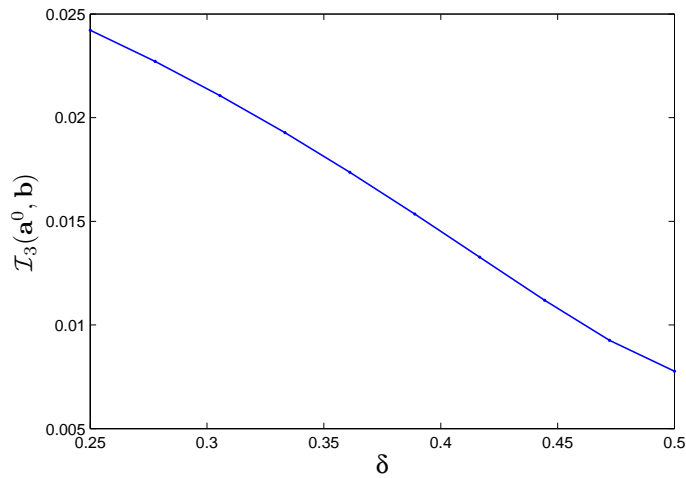


FIGURE 4.9 – Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  par rapport à  $\delta$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$ ,  $\nu_T = 0.38$  et  $\delta$  variant dans l'intervalle  $[0.25, 0.5]$ .

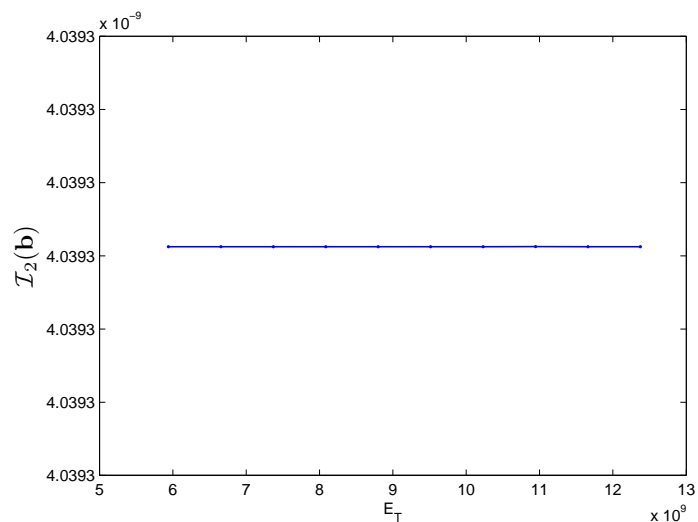


FIGURE 4.10 – Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  par rapport à  $E_T$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $\delta = 0.4$ ,  $\nu_T = 0.38$  et  $E_T$  variant dans l'intervalle  $[6 \times 10^9, 12.5 \times 10^9] Pa$ .

#### 4.5. ANALYSES DE SENSIBILITÉ PAR RAPPORT AUX PARAMÈTRES MOYENS

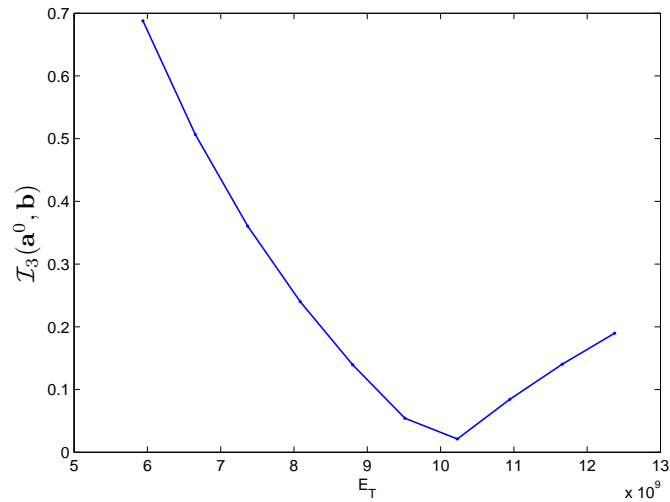


FIGURE 4.11 – Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  par rapport à  $E_T$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $\delta = 0.4$ ,  $\nu_T = 0.38$  et  $E_T$  variant dans l'intervalle  $[6 \times 10^9, 12.5 \times 10^9] Pa$ .

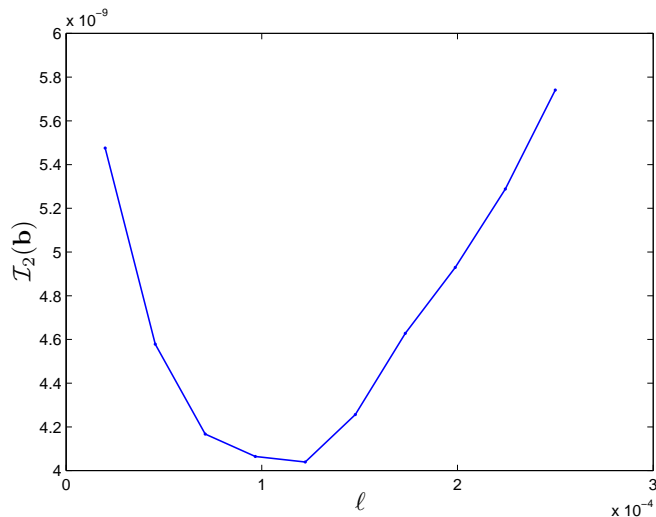


FIGURE 4.12 – Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  par rapport à  $\ell$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\delta = 0.4$ ,  $\nu_T = 0.38$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\ell$  variant dans l'intervalle  $[2 \times 10^{-5}, 2.5 \times 10^{-4}] m$ .



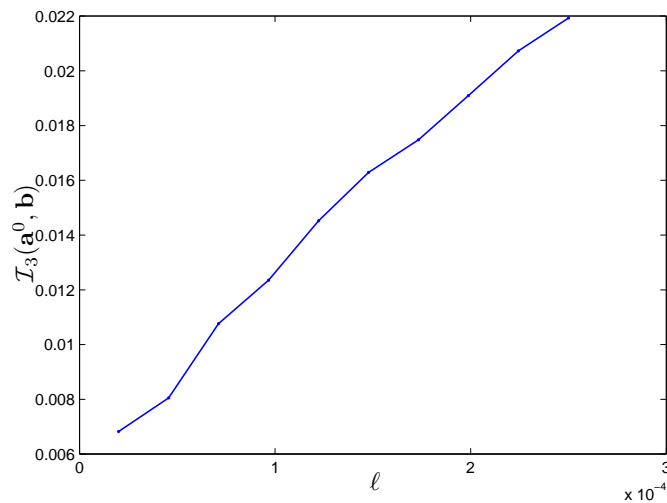


FIGURE 4.13 – Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  par rapport à  $\ell$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\delta = 0.4$ ,  $\nu_T = 0.38$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\ell$  variant dans l'intervalle  $[2 \times 10^{-5}, 2.5 \times 10^{-4}] m$ .

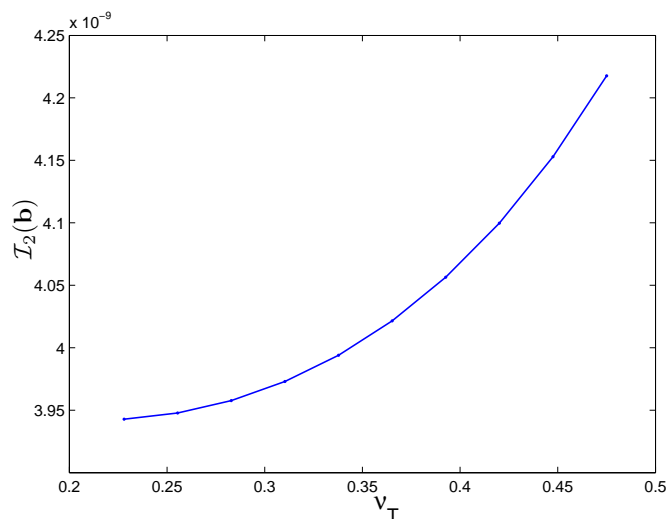


FIGURE 4.14 – Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  par rapport à  $\nu_T$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\delta = 0.4$ ,  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\nu_T$  variant dans l'intervalle  $[0.225, 0.475]$ .

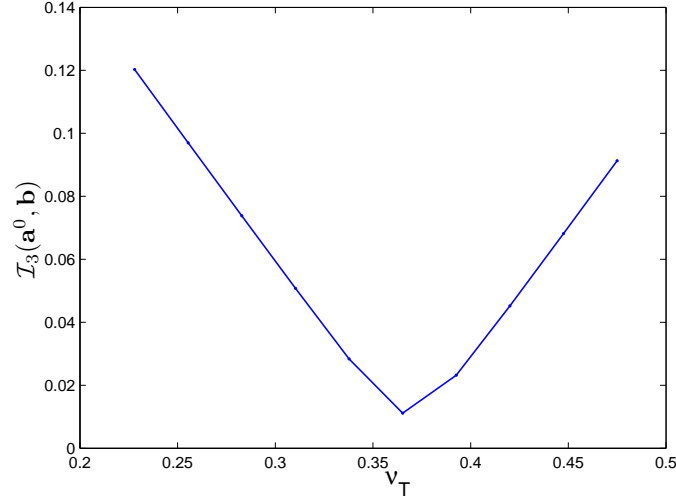


FIGURE 4.15 – Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  par rapport à  $\nu_T$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\delta = 0.4$ ,  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\nu_T$  variant dans l'intervalle  $[0.225, 0.475]$ .

## 4.6 Problème d'optimisation multi-objectif

Rappelons que le problème d'optimisation multi-objectif, introduit au Chapitre 3, pour identifier la valeur optimale  $\mathbf{b}^{\text{meso}}$  du paramètre  $\mathbf{b}$  dans son ensemble admissible  $\mathcal{B}^{\text{meso}}$ , consiste à résoudre le problème de minimisation multi-objectif suivant : trouver les valeurs optimales  $\mathbf{a}^{\text{macro}}$  dans  $\mathcal{A}^{\text{macro}}$  et  $\mathbf{b}^{\text{meso}}$  dans  $\mathcal{B}^{\text{meso}}$  telles que

$$(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b}^{\text{meso}}) = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}} \mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}} \mathcal{I}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (4.23)$$

où les composantes  $\mathcal{I}_1(\mathbf{a})$ ,  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  du vecteur  $\mathcal{I}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  sont définies par des Eqs. (3.6), (3.20) et (3.23).

Les indicateurs  $\mathcal{I}_1(\mathbf{a})$ ,  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  sont calculés suivant la méthodologie présentée au Chapitre 3. Toutefois, nous présenterons dans le paragraphe suivant deux cas de validation. Le premier sera relatif à un seul sous-domaine mésoscopique (celui indiqué en ligne pointillée noire sur les figures) ; dans ce cas, l'indicateur  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  est celui défini par l'Eq. (3.20). Le second sera relatif à un moyennage supplémentaire introduit sur les 16 sous-domaines mésoscopiques (les 15 carrés en ligne blanche et le carré en ligne noire pointillée) ; dans ce cas, l'indicateur  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  défini par l'Eq. (3.20) sera remplacé par l'expression suivante,  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b}) = \frac{1}{16} \sum_{q=1}^{16} \mathcal{I}_2^{(q)}(\mathbf{b})$  où  $\mathcal{I}_2^{(q)}(\mathbf{b})$  est l'indicateur calculé par l'Eq. (3.20) mais

## CHAPITRE 4. VALIDATION DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION PAR EXPÉRIMENTATION NUMÉRIQUE POUR UN PROBLÈME ÉLASTIQUE 2D

---

relatif au  $q$ -ème sous-domaine mésoscopique.

Les valeurs utilisées des paramètres numériques pour le calcul stochastique relatif à chaque sous-domaine mésoscopique pour calculer les indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  sont les suivantes :

- Le maillage EF de chaque sous-domaine mésoscopique pour résoudre le problème aux limites d'élasticité statique stochastique est constitué de 10000 éléments finis à 4 noeuds avec un maillage cartésien de pas constant en  $x_1$  et  $x_2$ .
- Le nombre  $N$  de points de Gauss correspondant à ce maillage est de 40000.
- Une étude de convergence a permis de fixer l'ordre  $\nu$  de la représentation définie par l'Eq. (4.20) pour la simulation numérique du vecteur  $\mathbf{V}$  à  $2 \times 10^6$ .
- Le solveur stochastique utilisé est basé sur la méthode de Monte-Carlo ce qui permet d'estimer la valeur des indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Le nombre de réalisations utilisées a été de 500 et cette valeur a été calculée par une analyse de convergence.

Le problème d'optimisation multi-objectif défini par l'Eq. (4.23) est alors résolu en utilisant un algorithme génétique et en construisant un front de Pareto. L'utilisation de l'algorithme génétique résulte de l'analyse suivante. Le coût numérique de la simulation numérique du champ stochastique par l'Eq. (4.20) avec  $\nu = 2 \times 10^6$  reste élevé (même avec une parallélisation des calculs comme cela a été faite) et donc ce coût doit être maîtrisé en limitant *a priori* le nombre de ces calculs. Dans ces conditions, il est nécessaire d'utiliser un algorithme d'optimisation qui permet d'utiliser les calculs *a priori* et qui ne requiert pas l'évaluation des gradients des indicateurs. Il est donc nécessaire de prendre l'algorithme dans la classe des algorithmes de recherche aléatoire par exploration aléatoire des ensembles admissibles des paramètres  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . Nous avons donc ainsi choisi l'algorithme génétique de Matlab (fonction `gamultiobj`). Pour les calculs, on a utilisé une taille de population initiale de 50 et moins de 100 générations ont été nécessaires pour construire le front de Pareto.

La figure Fig. 4.16 montre le principe d'utilisation du front de Pareto pour les indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Pour l'identification, chaque point sur le front de Pareto minimise l'un des deux indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  ou  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , l'autre n'ayant pas atteint sa valeur minimale.

#### 4.6. PROBLÈME D'OPTIMISATION MULTI-OBJECTIF

Théoriquement, la solution optimale (celle pour laquelle les deux indicateurs atteindraient simultanément leur valeur minimale) ne pourrait être atteinte que si le front de Pareto était constitué de deux droites perpendiculaires (et donc parallèles aux axes), ce qui n'est pas le cas en général. Il reste donc un degré de liberté dans l'interprétation de la solution optimale sur le front de Pareto. La solution généralement retenue consiste à prendre le point sur le front de Pareto qui minimise la distance à l'origine du front.

Le front de Pareto est construit itérativement à chaque génération de l'algorithme génétique. Pour l'initialisation du paramètre  $\mathbf{a}$ , sa valeur est choisie à  $\mathbf{a}^{(0)}$  qui correspond à la solution du problème d'optimisation partiel suivant :  $\mathbf{a}^{(0)} = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}} \mathcal{I}_1(\mathbf{a})$ , qui est résolu avec un algorithme classique d'optimisation (fonction `fminsearch` de Matlab basée sur un algorithme du simplexe). Il a été constaté que cette valeur initiale varie peu pendant les itérations et correspond, en fait, à la valeur optimale trouvée  $\mathbf{a}^{\text{macro}}$  en résolvant le problème d'optimisation multi-objectif.

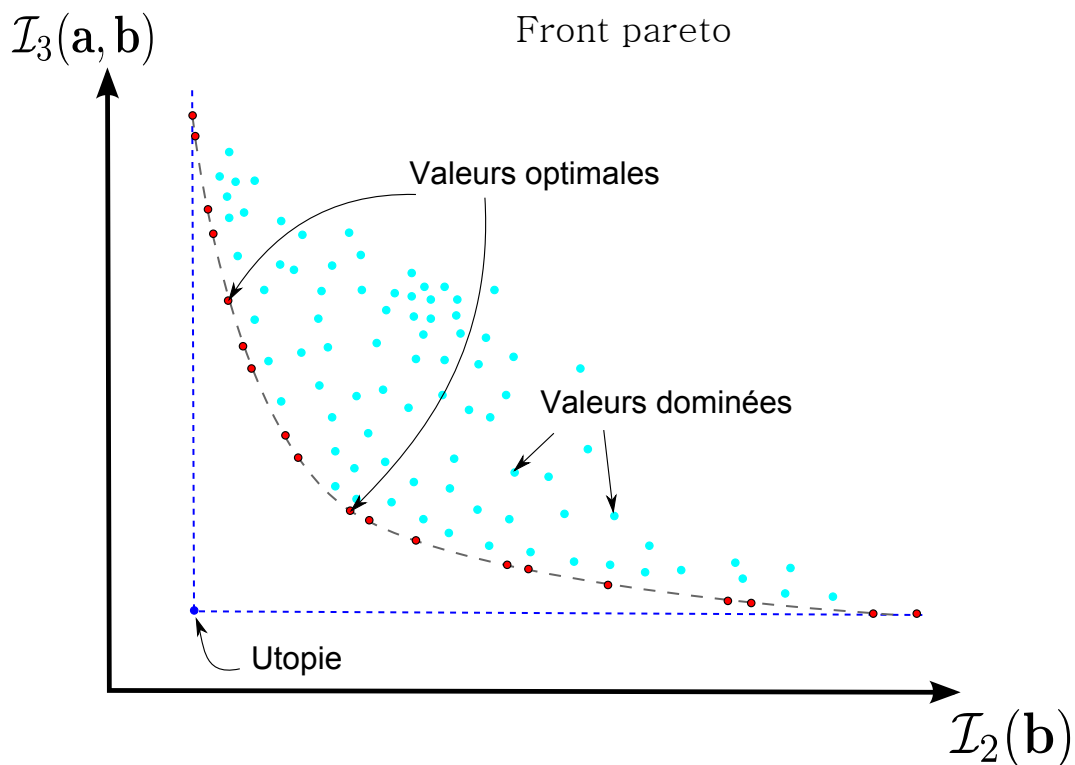


FIGURE 4.16 – Principe d'utilisation du front de Pareto pour les indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

## 4.7 Résultats numériques de l'identification et validation

Dans ce paragraphe, on présente les deux cas définis précédemment. Pour ces deux cas, le modèle de loi de comportement du matériau à l'échelle macro est prise dans la classe des isotropes transverses en 2D et en contraintes planes dont le paramétrage  $\mathbf{a} = (E_T^{\text{macro}}, \nu_T^{\text{macro}})$  correspond au module d'Young transverse et au coefficient de Poisson de la modélisation macroscopique. Pour ces deux cas, la valeur optimale de  $\mathbf{a} = (E_T^{\text{macro}}, \nu_T^{\text{macro}})$  est  $\mathbf{a}^{\text{macro}} = (9.565 \times 10^9 Pa, 0.3987)$ .

### Premier cas : utilisation d'un seul sous-domaine mésoscopique

Le tableau Tab. 4.1 donne les valeurs de  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$  pour chaque point du front de Pareto montré à la Fig. 4.17. Les points optimaux sont les points 5, 6, 7, 8 et 9 où 6 et 7 sont confondus sur le front de Pareto. La valeur optimale  $\mathbf{b}^{\text{meso}}$  a donc pour composantes optimales,  $\ell^{\text{meso}} = 9.66 \times 10^{-5} m$ ,  $\delta^{\text{meso}} = 0.37$ ,  $E_T^{\text{meso}} = 1.023 \times 10^{10} Pa$ ,  $\nu_T^{\text{meso}} = 0.376$ . Ce résultat permet de valider la méthodologie proposée pour l'identification inverse car cette valeur optimale identifiée  $\mathbf{b}^{\text{meso}}$  est voisine de la valeur de  $\mathbf{b}$  utilisée pour construire la base "expérimentale" simulée, donnée au paragraphe 4.4, dont les composantes sont  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $\delta = 0.4$ ,  $E_T = 9.9 \times 10^9 Pa$ ,  $\nu_T = 0.38$ .

TABLE 4.1 – Premier cas : Optimisation par l'algorithme génétique

k	$\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$	$\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	$\ell$	$\delta$	$E_T$	$\nu_T$
1	$5.006529 \times 10^{-9}$	$2.311672 \times 10^{-1}$	$1.886667 \times 10^{-4}$	0.400000	$1.023000 \times 10^{10}$	0.392667
2	$5.006529 \times 10^{-9}$	$9.477024 \times 10^{-2}$	$2.500000 \times 10^{-4}$	0.400000	$1.023000 \times 10^{10}$	0.392667
3	$5.010827 \times 10^{-9}$	$9.469903 \times 10^{-2}$	$9.666667 \times 10^{-5}$	0.366667	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
4	$5.132208 \times 10^{-9}$	$9.201960 \times 10^{-2}$	$1.273333 \times 10^{-4}$	0.383333	$1.023000 \times 10^{10}$	0.392667
5	$5.240100 \times 10^{-9}$	$3.467300 \times 10^{-2}$	$9.666667 \times 10^{-5}$	0.366667	$1.023000 \times 10^{10}$	0.359733
6	$5.259407 \times 10^{-9}$	$2.455275 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.350000	$8.943000 \times 10^9$	0.293867
7	$5.259407 \times 10^{-9}$	$2.455275 \times 10^{-2}$	$9.666667 \times 10^{-5}$	0.366667	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
8	$5.386876 \times 10^{-9}$	$2.064010 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.350000	$8.943000 \times 10^9$	0.310333
9	$5.490529 \times 10^{-9}$	$1.968774 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.350000	$1.237500 \times 10^{10}$	0.293867
10	$6.57386 \times 10^{-9}$	$1.962839 \times 10^{-2}$	$2.193333 \times 10^{-4}$	0.400000	$1.023000 \times 10^{10}$	0.392667
11	$6.895467 \times 10^{-9}$	$1.885624 \times 10^{-2}$	$2.500000 \times 10^{-4}$	0.383333	$1.023000 \times 10^{10}$	0.392667
12	$7.254986 \times 10^{-9}$	$1.759584 \times 10^{-2}$	$2.500000 \times 10^{-4}$	0.333333	$1.023000 \times 10^{10}$	0.392667
13	$7.567184 \times 10^{-9}$	$1.688894 \times 10^{-2}$	$9.666667 \times 10^{-5}$	0.383333	$1.023000 \times 10^{10}$	0.392667
14	$7.996816 \times 10^{-9}$	$1.623193 \times 10^{-2}$	$2.000000 \times 10^{-5}$	0.350000	$8.943000 \times 10^9$	0.310333
15	$9.129340 \times 10^{-9}$	$1.507042 \times 10^{-2}$	$2.500000 \times 10^{-4}$	0.366667	$1.023000 \times 10^{10}$	0.392667
16	$9.368447 \times 10^{-9}$	$1.333442 \times 10^{-2}$	$1.273333 \times 10^{-4}$	0.266667	$1.023000 \times 10^{10}$	0.392667

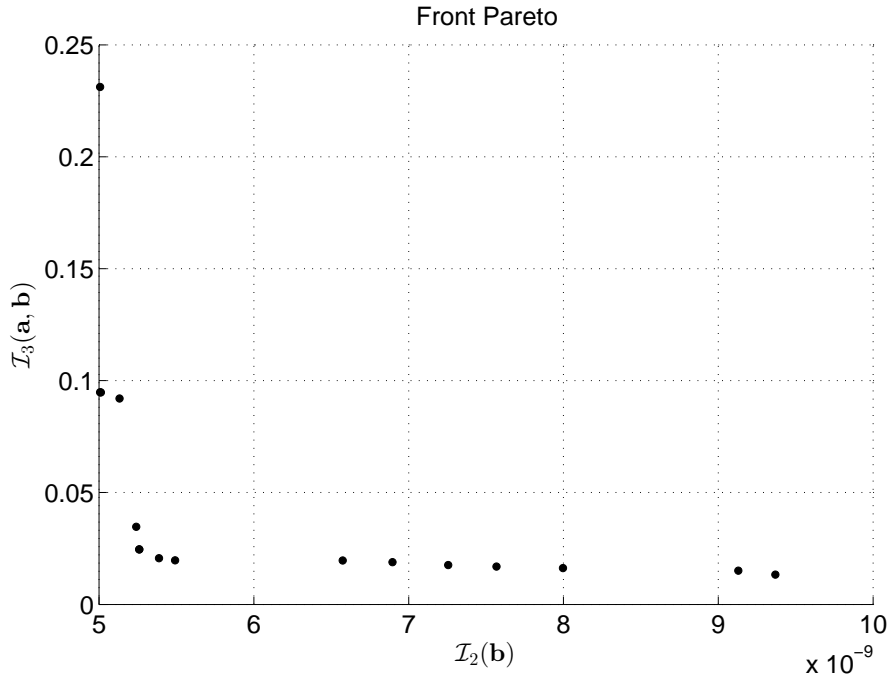


FIGURE 4.17 – Premier cas : Front de Pareto pour les indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

### Second cas : utilisation des 16 sous-domaines mésoscopiques

Comme pour le premier cas, le tableau Tab. 4.2 donne les valeurs de  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$  pour chaque point du front de Pareto montré à la Fig. 4.18. Les points optimaux sont les points 7 et 8. La valeur optimale  $\mathbf{b}^{\text{meso}}$  a donc pour composantes optimales,  $\ell^{\text{meso}} = 9.66 \times 10^{-5} m$ ,  $\delta^{\text{meso}} = 0.38$ ,  $E_T^{\text{meso}} = 1.023 \times 10^{10} Pa$ ,  $\nu_T^{\text{meso}} = 0.409$ . Ce résultat est cohérent avec les résultats du premier cas et confirme la validation de la méthodologie proposée pour l'identification inverse car cette valeur optimale identifiée  $\mathbf{b}^{\text{meso}}$  est voisine de la valeur de  $\mathbf{b}$  utilisée pour construire la base "expérimentale" simulée. Il est à noter que l'utilisation de plusieurs sous-domaines à l'échelle mésoscopique (conduisant à moyenner l'indicateur  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  sur les sous-domaines) n'améliore pas, pour le cas traité, l'identification qui n'utilise qu'un seul sous-domaine mésoscopique. Ce résultat est un élément positif pour l'identification du modèle stochastique mésoscopique présentée au Chapitre 6 sur la base des données expérimentales mesurées (Chapitre 5) et qui n'utilise qu'un seul sous-domaine mésoscopique (le carré en ligne pointillée noire montré sur les figures).

CHAPITRE 4. VALIDATION DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION PAR EXPÉRIMENTATION NUMÉRIQUE POUR UN PROBLÈME ÉLASTIQUE 2D

TABLE 4.2 – Second cas : Optimisation par l'algorithme génétique

k	$\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$	$\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	$\ell$	$\delta$	$E_T$	$\nu_T$
1	$3.679796 \times 10^{-9}$	$1.169902 \times 10^{-1}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.366667	$8.943000 \times 10^9$	0.228000
2	$3.682074 \times 10^{-9}$	$1.082580 \times 10^{-1}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.366667	$8.943000 \times 10^9$	0.244467
3	$3.697709 \times 10^{-9}$	$9.326875 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.366667	$8.943000 \times 10^9$	0.293867
4	$3.789464 \times 10^{-9}$	$9.273135 \times 10^{-2}$	$6.600000 \times 10^{-5}$	0.366667	$8.943000 \times 10^9$	0.310333
5	$3.921333 \times 10^{-9}$	$9.151397 \times 10^{-2}$	$3.533333 \times 10^{-5}$	0.366667	$8.943000 \times 10^9$	0.293867
6	$3.929112 \times 10^{-9}$	$9.116923 \times 10^{-2}$	$3.533333 \times 10^{-5}$	0.366667	$8.943000 \times 10^9$	0.310333
7	$4.013329 \times 10^{-9}$	$2.612327 \times 10^{-2}$	$9.666667 \times 10^{-5}$	0.383333	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
8	$4.059328 \times 10^{-9}$	$2.318577 \times 10^{-2}$	$9.666667 \times 10^{-5}$	0.383333	$1.023000 \times 10^{10}$	0.409133
9	$4.714046 \times 10^{-9}$	$2.162068 \times 10^{-2}$	$9.666667 \times 10^{-5}$	0.333333	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
10	$5.158079 \times 10^{-9}$	$1.960220 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.300000	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
11	$6.028286 \times 10^{-9}$	$1.897077 \times 10^{-2}$	$9.666667 \times 10^{-5}$	0.300000	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
12	$6.321512 \times 10^{-9}$	$1.860217 \times 10^{-2}$	$1.120000 \times 10^{-4}$	0.300000	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
13	$6.850773 \times 10^{-9}$	$1.775312 \times 10^{-2}$	$9.666667 \times 10^{-5}$	0.283333	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
14	$7.749153 \times 10^{-9}$	$1.660786 \times 10^{-2}$	$9.666667 \times 10^{-5}$	0.266667	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
15	$8.700164 \times 10^{-9}$	$1.553561 \times 10^{-2}$	$9.666667 \times 10^{-5}$	0.250000	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
16	$1.026257 \times 10^{-8}$	$1.548510 \times 10^{-2}$	$2.193333 \times 10^{-4}$	0.266667	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
17	$1.078391 \times 10^{-8}$	$1.430133 \times 10^{-2}$	$2.500000 \times 10^{-4}$	0.266667	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200
18	$1.156193 \times 10^{-8}$	$1.362587 \times 10^{-2}$	$2.500000 \times 10^{-4}$	0.250000	$1.023000 \times 10^{10}$	0.376200

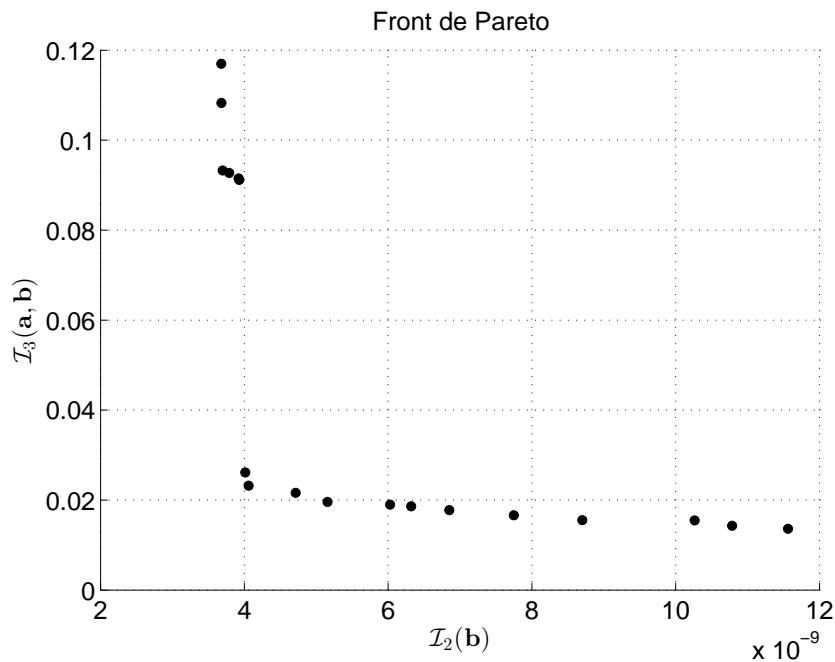


FIGURE 4.18 – Second cas : Front de Pareto pour les indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

## 4.8 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons proposé une modélisation stochastique *a priori*, paramétrée par un vecteur  $\mathbf{b}$ , du champ d'élasticité 2D en contraintes planes, qui satisfait à toutes les propriétés fondamentales attendues pour un tel champ. Pour une valeur fixée du paramètre  $\mathbf{b}$  dans son ensemble admissible, nous avons proposé un générateur de réalisations indépendantes de ce champ pour un sous-domaine mésoscopique. Afin de valider la méthode d'identification statistique inverse présentée au Chapitre 3 et dont les aspects numériques et algorithmiques ont été présentés dans ce chapitre, nous avons développé deux exemples pour lesquels la référence était donnée *a priori*. Afin de s'assurer que le problème d'optimisation multi-objectif était bien posé, nous avons mené au préalable une étude de sensibilité des indicateurs du problème d'optimisation vis-à-vis des paramètres à identifier (à optimiser). Nous avons montré au travers des deux cas présentés pour la validation que le moyennage de l'indicateur de l'échelle mésoscopique sur plusieurs sous-domaines mésoscopiques pour lesquels on aurait une image expérimentale de champ des déplacements, n'améliore pas l'identification par rapport à l'utilisation d'un seul sous-domaine mésoscopique. Ce constat est favorable à la situation expérimentale décrite au chapitre 5 pour laquelle un seul sous-domaine mésoscopique a été mesuré.





# 5

## Méthodologie et protocole pour les mesures expérimentales multi-échelles sur l'os cortical par mesures optiques de champs

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>64</b>
<b>5.2</b>	<b>Méthodologie des mesures de champs par corrélation d'images</b>	<b>65</b>
<b>5.3</b>	<b>Protocole expérimental pour l'os cortical et banc de mesures</b>	<b>67</b>
<b>5.4</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>73</b>
<b>5.5</b>	<b>Résumé du chapitre</b>	<b>75</b>

---

### 5.1 Introduction

Comme nous l'avons vu, nous nous intéressons à des matériaux hétérogènes dont la microstructure est complexe, aléatoire et hiérarchique telle que celle de l'os cortical qui fait l'objet des mesures présentées dans ce chapitre. A l'échelle macroscopique, nous avons supposé aux chapitres 3 et 4 qu'un tel matériau était homogène (pour le tenseur d'élasticité). Ce tenseur d'élasticité à l'échelle macroscopique doit être identifié en utilisant des mesures expérimentales du champ de déplacement à l'échelle macroscopique. Par ailleurs, à l'échelle microscopique, ce matériau qui est non homogène et aléatoire a été supposé ne pas pouvoir être décrit en termes de constituants (c'est le cas de l'os cortical considéré dans ce chapitre). Par conséquent, une échelle intermédiaire a été introduite entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique, dite échelle mésoscopique, pour laquelle le milieu considéré a des propriétés mécaniques apparentes (champ d'élasticité à valeurs tensorielles) qui ont été modélisées par un champ stochastique (voir chapitres 3 et 4). Pour identifier les paramètres du modèle stochastique des propriétés apparentes à l'échelle mésoscopique, nous avons proposé, dans la méthodologie présentée aux chapitres 3 et 4, une méthode qui requiert des mesures de champ de déplacement aux deux échelles macroscopique et mésoscopique. Dans ce chapitre, nous présentons (1) la méthodologie expérimentale basée sur des mesures optiques de champ par corrélation d'images, (2) le protocole expérimental pour un échantillon de l'os cortical et le banc de mesures et (3) les résultats expérimentaux.

La nouveauté et les difficultés de ces mesures pour l'os cortical résident d'une part, par la nature du matériau qui est très complexe et qui requiert un protocole adapté pour la mise en charge et pour les mesures optiques de la face éclairée qui doit avoir suffisamment de contraste pour les deux échelles de mesures (préparation délicate des mouchetis de l'échantillon dans le cas de l'os cortical), et d'autre part, la nécessité de faire pour un même échantillon et pour une seule mise en charge, les mesures optiques aux deux échelles, l'échelle macroscopique et l'échelle mésoscopique.

L'implémentation de la méthodologie expérimentale par mesures optiques de champs, le développement du banc expérimental, la préparation des échantillons et les mesures expérimentales proprement dites ont été initialisées dans le cadre d'une collaboration avec Jérôme Crépin (qui travaille entre autre sur des matériaux biologiques et la corrélation d'image ([Bertolino \*et al.\*, 2007](#); [Heripre \*et al.\*, 2007](#); [Kalouche \*et al.\*, 2010](#))) et ont été effectués au Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS) de l'Ecole Polytechnique (qui a l'expérience des mesures optiques par corrélation d'images) par Jean-Marc Allain ([Chau-](#)

vet *et al.*, 2010; Houssen *et al.*, 2011; Gusachenko *et al.*, 2012), Hakim Gharbi (Bornert *et al.*, 2010; Yang *et al.*, 2010; Yang *et al.*, 2012) et moi-même.

### 5.2 Méthodologie des mesures de champs par corrélation d'images

La méthode de mesures de champs par corrélation d'images, introduite et développée dans de nombreux travaux depuis le début des années 90 (Kahnjetter *et al.*, 1994; Vendroux et Knauss, 1998a; Vendroux et Knauss, 1998b; Hild *et al.*, 1999; Schreier *et al.*, 2000; Chevalier *et al.*, 2001; Hild, 2002; Hild *et al.*, 2002; Roux *et al.*, 2002; Hild et Roux, 2006; Pan *et al.*, 2006; Avril *et al.*, 2008a; Rethore *et al.*, 2008; Roux et Hild, 2008; Roux *et al.*, 2008; Sutton *et al.*, 2008; Bornert *et al.*, 2009; Pan *et al.*, 2009; Bornert *et al.*, 2010; Yamaguchi *et al.*, 2011; Hild et Roux, 2012), permet de mesurer, pour une résolution fixée, le champ de déplacement élastique de la face éclairée de l'échantillon soumis à une sollicitation mécanique (dans le cas présent, ce sera une compression). Ce champ de déplacement est obtenu en comparant deux images de la face éclairée, celle de l'échantillon non déformé (dite image de référence) et celle de l'échantillon déformé sous la sollicitation mécanique (dite image déformée) (voir la Fig. 5.1 relative à une mesure sur l'os cortical, obtenue pendant la campagne de mesures au LMS). La comparaison d'images repose sur l'utilisation de la technique de corrélation, qui exploite une hypothèse de conservation du contraste local des images dans un voisinage des points dont on recherche le déplacement.

La méthode de corrélation d'images admet en général un grand nombre de variantes liées

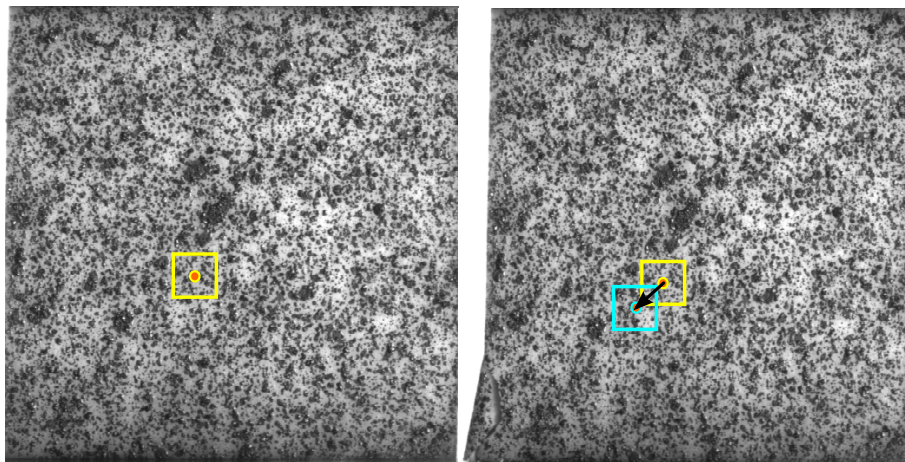


FIGURE 5.1 – Comparaison de la zone d'étude entre une image de référence (figure de gauche) et une image déformée (figure de droite) à l'échelle macroscopique. Images obtenues pour l'os cortical pendant la campagne de mesures au LMS.

## CHAPITRE 5. MÉTHODOLOGIE ET PROTOCOLE POUR LES MESURES EXPÉRIMENTALES MULTI-ÉCHELLES SUR L'OS CORTICAL PAR MESURES OPTIQUES DE CHAMPS

---

au mode d'obtention des images, à la nature du contraste qui sert à repérer les points, à l'expression du coefficient de corrélation, à son calcul approché à partir de la représentation discrète des images sous la forme de pixels et à l'algorithme de minimisation. Les applications les plus nombreuses reposent sur des images enregistrées au moyens de caméras CCD optiques, équipées d'objectifs adaptés aux structures étudiées. Les champs couverts à l'échelle macroscopique varient entre quelques millimètres et quelques centimètres, voire plus. Ce type d'observation ne pose en général pas de problème particulier d'éclairage, d'alignement ou de profondeur de champ. Les images sont enregistrées au moyen d'un ordinateur pourvu d'une carte vidéo (à une fréquence qui dépend de l'application envisagée) et d'un logiciel d'acquisition et de traitements. Les images analysées par les techniques de corrélation sont en noir et blanc, le signal en chaque pixel étant représenté par un scalaire, dit niveau de gris. L'utilisation des images en couleur est possible mais pose au moins deux difficultés qui font que nous n'avons pas utilisé cette possibilité. La première difficulté est que la différence (ou l'écart) entre deux couleurs est une notion plus difficile à mettre en oeuvre à l'aide d'un indicateur scalaire (mode de codage des couleurs). La définition d'un coefficient de corrélation qui repose sur une notion de distance entre images reste donc ouverte pour les images en couleur. La seconde difficulté est liée au mode de fonctionnement des caméras couleurs traditionnelles qui utilisent un filtre chromatique placé devant un capteur CCD. Certains pixels sont alors sensibles au bleu, d'autres au rouge et d'autres au vert. Le signal est globalement sous-échantillonné d'un facteur trois, ce qui peut être néfaste à la performance des méthodes de corrélation.

Il est également possible d'enregistrer au moyen d'une caméra CCD, les images fournies par un objectif de macrophotographie, voire par un microscope optique. Les dimensions du champ d'observation peuvent alors être inférieures au millimètre carré, voire au dixième de millimètre carré. Cette augmentation de grossissement s'accompagne de difficultés liées à la faible quantité de lumière disponible qui impose des éclairages adaptés. Un autre problème est la profondeur de champ qui est de plus en plus petite à mesure que le grossissement augmente. Pour obtenir des images nettes sur toute la zone d'observation, il faut alors s'assurer de la planéité de la surface observée ce qui est très délicat pour des matériaux tels que l'os cortical, et du bon alignement de l'axe optique avec la normale à cette surface. De plus, l'apparition d'un relief important en surface peut rendre des images inexploitable. Une autre difficulté est le contrôle de la distance frontale entre le système d'observation et l'objet étudié. En effet, une faible variation de cette distance peut induire une variation de grossissement entre deux configurations, qui, si elle n'est pas corrigée, pourrait être interprétée comme une déformation mécanique de l'objet. Pour cette raison, il est préférable d'utiliser des focales longues, pour éloigner l'objet de la

### 5.3. PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL POUR L'OS CORTICAL ET BANC DE MESURES

---

caméra, et de bloquer le réglage de mise au point sur l'objectif lorsqu'il en existe un. La distance de mise au point sera alors fixe et un déplacement relatif de l'objet par rapport à la caméra pourra être corrigé en déplaçant cette dernière de façon à refaire la mise au point. Les lois de l'optique classique font que la limite de résolution des caméras optiques est liée à la longueur d'onde de la lumière utilisée. En pratique, sous éclairage en lumière blanche classique et avec un système optique de très bonne qualité, la limite inférieure d'un pixel est d'environ  $0,5 \mu m$ . Avec une caméra megapixel, il est donc inutile d'analyser des champs plus petits que  $0,5 \times 0,5 mm^2$ . Pour atteindre des grossissements plus importants, il convient d'utiliser d'autres moyens de microscopie tels que la microscopie électronique à balayage (MEB), dont la résolution atteint  $5 nm$  sur un appareil conventionnel, et peut descendre à  $1 nm$  sur un microscope à effet de champ.

### 5.3 Protocole expérimental pour l'os cortical et banc de mesures

Dans ce paragraphe, on présente la méthode de préparation d'un échantillon d'os cortical, la description du banc de mesures, la procédure de l'essai (fait au LMS de l'Ecole Polytechnique par Jean-Marc Allain, Hakim Gharbi et moi-même) ainsi que les difficultés rencontrées.

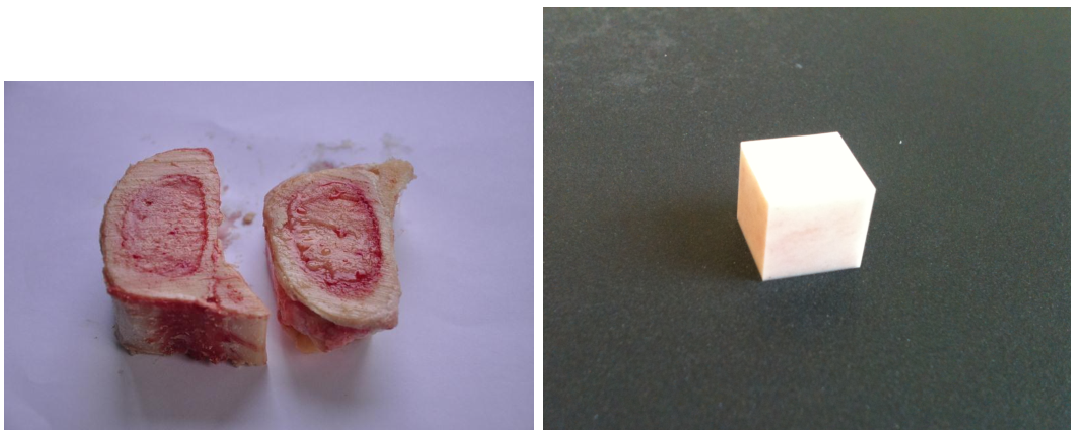


FIGURE 5.2 – Os cortical de boeuf. Os cortical avant préparation (figure de gauche) et Échantillon d'os cortical après préparation (figure de droite) (dimensions  $1 cm^3$ )

## CHAPITRE 5. MÉTHODOLOGIE ET PROTOCOLE POUR LES MESURES EXPÉRIMENTALES MULTI-ÉCHELLES SUR L'OS CORTICAL PAR MESURES OPTIQUES DE CHAMPS

---



FIGURE 5.3 – Équipements du laboratoire LMS utilisés (1) pour découper l'échantillon (figure gauche) et (2) pour polir les faces de l'échantillon (figure droite).

### 5.3.1 Échantillon et sa préparation

Comme nous l'avons déjà indiqué, les tissus biologiques sont parmi les matériaux les plus difficiles à modéliser et à expérimenter contenu du niveau de complexité de leurs constituants à l'échelle microscopique. C'est le cas de l'os cortical pour lequel plusieurs échelles doivent être définies (voir Fig. 5.4). L'os cortical est un matériau hétérogène poreux (dont la microstructure est principalement constituée d'ostéons, de lamelles et de canaux), qui est, à l'échelle macroscopique, un matériau dur et très résistant. Les échantillons d'os utilisés proviennent de fémurs de boeuf. La Fig. 5.4 montre les images optiques de l'os cortical de boeuf à l'échelle macroscopique (1 cm), à l'échelle mésoscopique (1 mm) et à l'échelle des hétérogénéités de la microstructure. On voit clairement sur ces images les ostéons, les canaux et les lamelles. L'échantillon est fabriqué pour avoir une forme cubique de dimension  $0.01 \times 0.01 \times 0.01 m^3$  dont la dimension de chaque arête est à 5% d'erreur au maximum (voir Fig. 5.2). Pour préparer l'échantillon, la première étape consiste à enlever la moelle, les nerfs et le cartilage qui sont accrochés à l'os. La seconde étape consiste à découper l'os nettoyé avec un fil diamanté (voir l'équipement utilisé à la Fig. 5.3). La troisième étape consiste à polir les faces de l'échantillon avec une polisseuse à disque (voir Fig. 5.3) afin d'assurer une bonne planéité. Dans la procédure de polissage, l'échantillon est fixé à un porte-échantillon avec du scotch à double face et est pressé sur le disque à la main afin d'obtenir les deux faces parallèles de l'échantillon. La face observée de l'échantillon (face dont les déformations seront mesurées par le système optique) est une face qui est perpendiculaire au grand axe de l'os. La dernière étape consiste à couvrir la

### 5.3. PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL POUR L'OS CORTICAL ET BANC DE MESURES

face observée par un mouchetis consistant à déposer un marqueur. Il est nécessaire d'avoir un fort contraste sur cette surface pour mettre en oeuvre, dans de bonnes conditions, la technique de corrélation d'images. Il est à noter qu'un même marquage doit être utilisé pour les mesures des déformations aux deux échelles mésoscopique et macroscopique de l'échantillon soumis au même chargement. Trois techniques de mouchetis ont été utilisées pour ce tissu biologique, les deux premières décrites ci-après n'ont pas donné un contraste suffisant et ont été abandonnées. La troisième a donné de bons contrastes et a permis d'obtenir l'ensemble des mesures expérimentales présentées dans ce mémoire. La première a été un mouchetis de peinture noire pulvérisée qui a donné un résultat satisfaisant pour l'échelle macroscopique, mais avec des gouttes trop grosses pour l'échelle mésoscopique. La deuxième technique essayée a été un mouchetis de micro-billes. Les micro-billes étaient de l'ordre du micron, étaient mélangées dans de l'encre (fluide colorant) puis le mélange a été déposé sur la face observée de l'échantillon à l'aide d'une pipette. Après séchage l'échantillon était prêt pour la mesure, mais pour de l'imagerie optique, ce type de marquage n'est pas assez constaté et trop hétérogène bien que cette technique ait déjà donné de bons résultats pour étudier de l'os sous MEB au laboratoire LMS. La troisième technique de marquage qui a donné de bons résultats consiste à rayer la face observée dans deux directions perpendiculaires avec du papier à polir, puis à déposer sur la face rayée de l'encre noire, et enfin à essuyer cette encre qui va rester principalement dans les pores et les rainures. La Fig. 5.5 montre, pour la face observée de l'échantillon préparé, le mouchetis de peinture noire pulvérisée (figure de gauche), le mouchetis par micro-billes (figure du milieu) et le mouchetis par rayures (figure de droite).

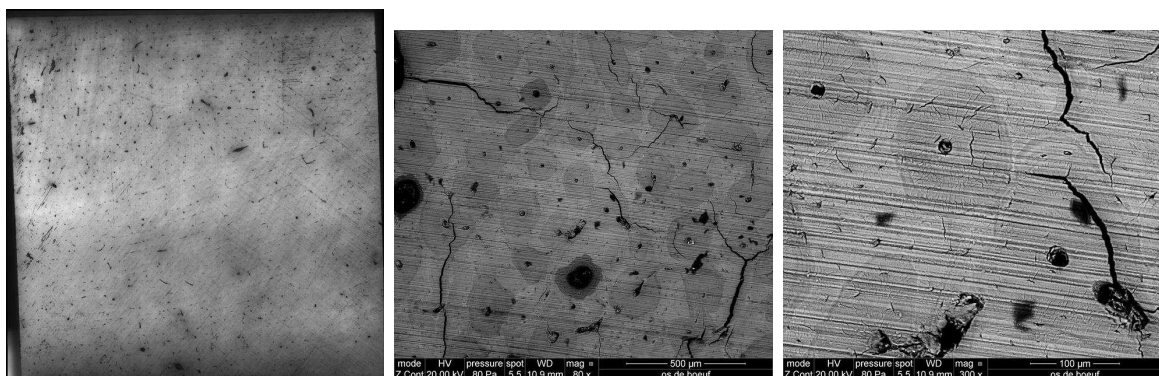


FIGURE 5.4 – Images optiques expérimentales de l'échantillon d'os cortical présentées à plusieurs échelles : à l'échelle macroscopique (1 cm) (figure de gauche), à l'échelle mésoscopique (1 mm) (figure du milieu) et à l'échelle des hétérogénéités (figure de droite)



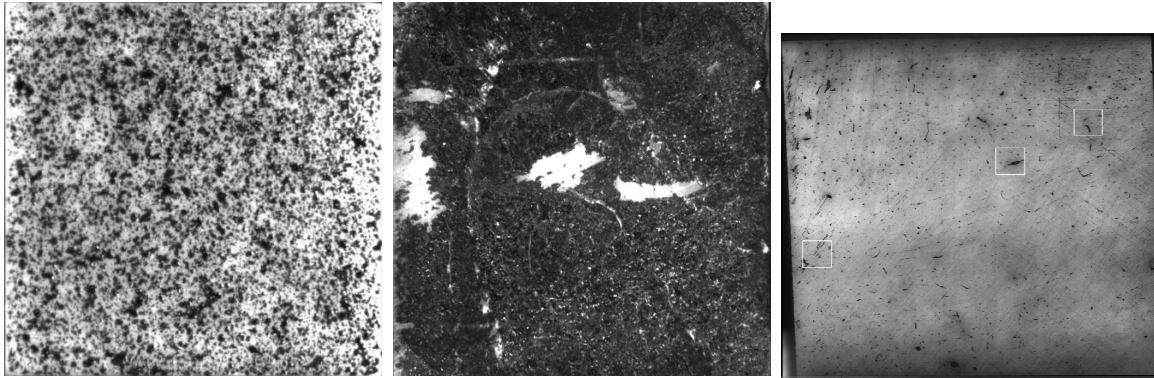


FIGURE 5.5 – Face observée de l'échantillon préparée, à l'échelle macroscopique : Mouchetis de peinture noire pulvérisée (figure de gauche), mouchetis par micro-billes (figure du milieu) et mouchetis par rayures (figure de droite)

### 5.3.2 Banc de mesures

Le banc de mesure du LMS sur lequel la campagne d'expérimentation a été effectuée est montrée à la Fig. 5.6.

L'échantillon préparé est placé dans une presse uniaxiale (la presse est verticale sur la figure). Le système de chargement peut délivrer une force suffisante pour obtenir des déformations mesurables dans le domaine de l'élasticité linéaire. Dans les mesures présentées pour la campagne expérimentale, la charge a été limitée à  $9\text{ kN}$  (voir paragraphe 5.3.3). Les conditions aux limites correspondant à l'expérimentation sont les suivantes. Pour la face de l'échantillon en contact avec la partie fixe inférieure de la presse, les déplacements normaux à cette face sont nuls et les déplacements tangentiels sont libres. Pour la face de l'échantillon en contact avec la partie supérieure de la presse (vérin mobile appliquant une force de compression), une pression supposée uniforme est appliquée à cette face et les déplacements tangentiels sur cette face sont libres. Les quatre autres faces (verticales) de l'échantillon sont libres (ni force appliquée, ni déplacement imposé). Pour mesurer le champ de déplacement de la face observée par corrélation d'images, une source d'éclairage est mise en place dans le montage et son intensité est réglée. L'acquisition des images à l'échelle macroscopique de la face observée de l'échantillon et à l'échelle mésoscopique sur des sous-domaines de la face observée, est réalisée avec une caméra CCD équipée d'un objectif de microscope (Edmund Optics) de grandissement  $\times 5$  qui est placée devant l'échantillon. La caméra utilisée (type Pike - Allied Vision Technologies) est connectée à un ordinateur dans lequel se trouve un logiciel qui fait l'acquisition des images et leur trai-

### 5.3. PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL POUR L'OS CORTICAL ET BANC DE MESURES

---

tement. La taille d'un pixel de l'image est de  $600 \times 600 \text{ nm}^2$  et le capteur fait  $2452 \times 2054$  pixels.

Un seul objectif est utilisé permettant de faire l'acquisition de l'image d'une zone carrée de dimension d'environ  $1 \times 1 \text{ mm}^2$  de la face éclairée de l'échantillon correspondant à l'échelle mésoscopique. La caméra parcourt horizontalement et verticalement la face éclairée de l'échantillon et prend 10 images dans la direction verticale et 9 images dans la direction horizontale. Avant chaque prise d'image, le système fait une mise au point automatique. A la fin de l'acquisition, 90 images de dimension  $1.47 \times 1.23 \text{ mm}^2$  en  $2452 \times 2054$  pixels sont obtenues. Chacune de ces images peut être associée à une grille de corrélation de  $100 \times 100$  points sur  $1 \times 1 \text{ mm}^2$  à l'échelle mésoscopique, donnant une résolution  $10^{-5} \times 10^{-5} \text{ m}^2$ . Le regroupement de ces images à l'échelle mésoscopique permet de construire l'image à l'échelle macroscopique de la face observée. Cette image macroscopique peut être associée à une grille de corrélation de  $10 \times 10$  points, donnant une résolution de  $10^{-3} \times 10^{-3} \text{ m}^2$ .

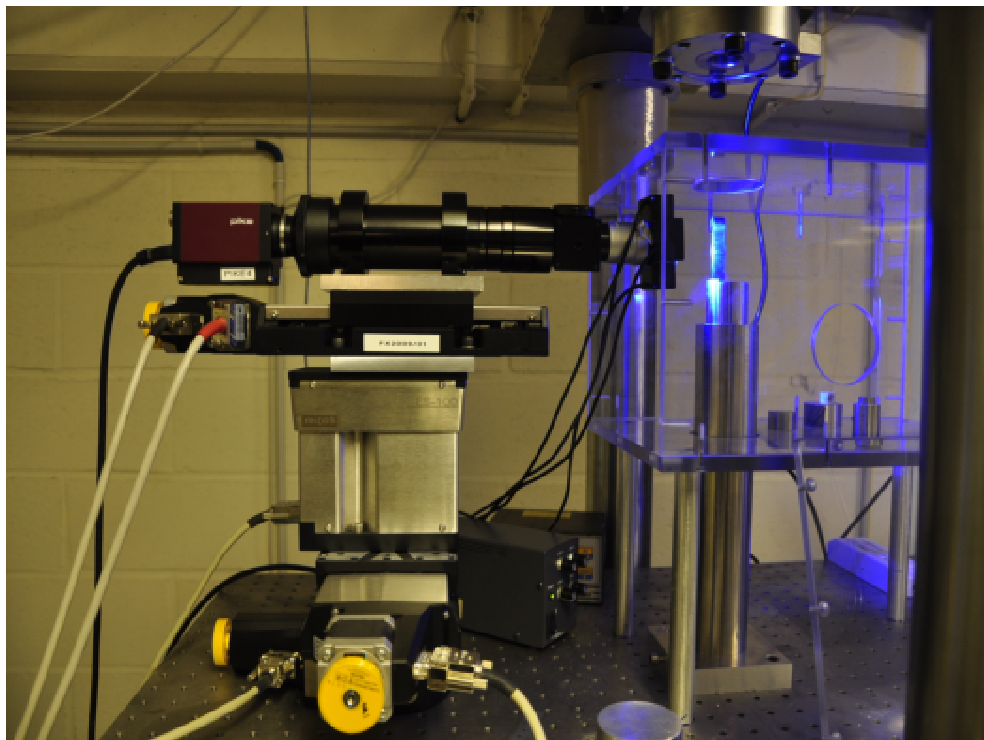


FIGURE 5.6 – Banc de mesure du LMS sur lequel la campagne d'expérimentation a été effectuée

### 5.3.3 Procédure de l'essai

La procédure utilisée pour un essai est la suivante :

0. Dans une étape préalable, la force maximale de compression à appliquer a été déterminée pour rester dans le domaine de l'élasticité linéaire. Pour cela, des mises en charge et en décharge ont été appliquées sur 4 échantillons. Cette étape a permis de définir la force maximale de compression à  $9\text{ kN}$ . Cette force est choisie pour assurer une déformation maximale tout en restant dans le domaine d'élasticité de l'échantillon.

1. Acquisition des 90 images  $2452 \times 2054$  pixels de l'échantillon non chargé (permettant d'accéder à l'imagerie aux échelles mésoscopique et macroscopique de la face observée comme nous l'avons indiqué au paragraphe précédent), numérotées de 1 à 90.

2. En utilisant l'ensemble de 90 images  $2452 \times 2054$  pixels de l'étape 1, construction d'une image de référence à l'échelle macroscopique (image mosaïque) à l'aide du logiciel *ImageJ* sur une grille de  $10 \times 10$  points. Par ailleurs, nous avons choisi l'image numéro 42 (qui se trouve quasiment au milieu de la face observée de l'échantillon) comme l'image de référence pour l'échelle mésoscopique construite sur une grille de  $100 \times 100$  points.

3. Mise en charge de l'échantillon avec une vitesse de déplacement fixée à  $1\mu\text{m}/\text{s}$  correspondant à une vitesse de déformation de l'ordre de  $10^{-5}\text{ s}^{-1}$ . Le chargement est incrémenté à partir d'une valeur initiale de  $0\text{ N}$  jusqu'à la valeur finale de  $9\text{ kN}$ . Acquisition pour la valeur finale de  $9\text{ kN}$  des 90 images de  $2452 \times 2054$  pixels de la face observée de l'échantillon chargé. Une relaxation très faible est observée pendant l'imagerie (7%).

4. A partir de l'ensemble des 90 images  $2452 \times 2054$  pixels acquis à l'étape 3, construction de l'image de la face observée de l'échantillon déformé, d'une part à l'échelle macroscopique (image mosaïque) sur une grille de  $10 \times 10$  points et d'autre part à l'échelle mésoscopique, correspondant à l'image numéro 42, sur une grille de  $100 \times 100$  points.

5. Utilisation de la méthode de corrélation d'images pour identifier le champ de déplacement dans la face observée, d'une part à l'échelle macroscopique avec une résolution de  $10 \times 10$  points, et d'autre part, à l'échelle mésoscopique avec une résolution de  $100 \times 100$  points. Le traitement a été fait à l'aide du logiciel *Correl Manu* développé par Michel Bornert au laboratoire LMS.

### 5.3.4 Difficultés rencontrées lors du développement de la campagne expérimentale

De nombreuses difficultés ont été rencontrées pour la mise au point dans la campagne expérimentale, concernant la préparation des échantillons, la mise en charge, le développement du système optique et la mise au point, l'éclairage de la face observée.

Concernant la préparation de l'échantillon, le polissage fait avec les moyens du laboratoire LMS (montré à la Fig. 5.3 (figure de droite)) ne permet pas d'obtenir un cube parfait. En effet, la fixation au porte-échantillon n'est possible qu'avec du scotch à double face, qui limite les possibilités de fixation et empêche d'avoir des faces bien perpendiculaires. Ce type de défaut conduit à un chargement qui n'est pas "parfaitement" uniforme sur la face chargée de l'échantillon. Comme nous l'avons vu, deux techniques de mouchetis ont été essayées et abandonnées au profit d'une troisième technique qui a donné satisfaction. Il est à noter que cette phase de préparation de l'échantillon a été très délicate et que la préparation du marquage (très fin sur une grande surface) qui a été très longue.

## 5.4 Résultats expérimentaux

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats obtenus pendant la campagne expérimentale effectuée au sein du laboratoire LMS de l'Ecole polytechnique. On présentera les composantes du champ de déplacement suivant deux axes  $x_1$  et  $x_2$  sur une fenêtre incluse dans le domaine  $\Omega^{\text{macro}}$  (la fenêtre est très légèrement plus petite que le domaine  $\Omega^{\text{macro}}$ ) ainsi que les composantes du champ de déplacement suivant ces deux axes  $x_1$  et  $x_2$  sur une fenêtre mésoscopique qui définit le sous-domaine  $\Omega^{\text{meso}}$ , incluse dans la fenêtre macroscopique. On en déduit ensuite les composantes du champ des déformations pour  $\Omega^{\text{macro}}$  et  $\Omega^{\text{meso}}$  qui sont calculées par la méthode des éléments finis 2D à quatre noeuds pour un maillage défini par la grille sur laquelle les déplacements mesurés sont donnés aux noeuds.

Concernant les Fig. 5.7 à Fig. 5.11 relatives à l'échelle macroscopique, les images sont présentées dans le repère cartésien  $Ox_1x_2$ , l'origine  $O$  étant située au coin inférieur gauche de chaque image, l'axe  $Ox_1$  étant horizontal orienté de gauche à droite, l'axe  $Ox_2$  étant vertical orienté de bas en haut. La dimension de chacune des images est de  $9.525 \times 10^{-3} m$  (horizontal) sur  $9.334 \times 10^{-3} m$  (vertical). C'est une fenêtre rectangulaire (quasi carrée) qui s'inscrit dans la face carrée éclairée de  $0.01 m$  (horizontal) sur  $0.01 m$  (vertical) de

## CHAPITRE 5. MÉTHODOLOGIE ET PROTOCOLE POUR LES MESURES EXPÉRIMENTALES MULTI-ÉCHELLES SUR L'OS CORTICAL PAR MESURES OPTIQUES DE CHAMPS

---

l'échantillon. Il y a donc une quasi superposition de chacune de ces images avec la face physique éclairée de l'échantillon cubique.

Concernant les Fig. 5.12 à Fig. 5.16 relatives à l'échelle mésoscopique, les images sont présentées dans le repère cartésien  $O' x_1 x_2$  déduit par translation du repère  $O x_1 x_2$ , l'origine  $O'$  étant située au coin inférieur gauche de chaque image de l'échelle mésoscopique. La dimension de chaque image est de  $10^{-3} m$  (horizontal) sur  $10^{-3} m$  (vertical), qui est une fenêtre carrée localisée (comme nous l'avons expliqué) approximativement au centre de l'image de la fenêtre macroscopique.

Il est à noter que les images des champs de déplacement, après traitement des mesures, ont été globalement translatées pour obtenir un recalage par rapport à une même origine spatiale. Les valeurs des champs de déplacement indiquées sur les figures sont donc données à une translation globale près. Par exemple, sur la Fig. 5.8, l'échelle (relative) des déplacements est de  $2 \times 10^{-5} m$  à  $10 \times 10^{-5} m$  et correspond à une composante de translation  $T_2$  près suivant l'axe  $x_2$ . Physiquement, la ligne inférieure horizontale de l'image (en bas) sur la Fig. 5.8 est à une distance d'environ  $3.3 \times 10^{-4} m$  du bord inférieur horizontal de l'échantillon (en bas) qui repose sur la partie inférieure fixe de la presse, ce bord de l'échantillon étant bloqué en déplacement suivant l'axe  $x_2$ . La ligne supérieure horizontale de l'image (en haut) sur la Fig. 5.8 est à une distance d'environ  $3.3 \times 10^{-4} m$  du bord supérieur horizontal de l'échantillon (en haut) sur lequel la partie supérieure mobile de la presse applique la force surfacique de compression suivant  $-x_2$ . Physiquement, la ligne supérieure horizontale de l'image se déplace donc négativement suivant  $x_2$  d'une valeur supérieure (en valeur absolue) au déplacement négatif suivant  $x_2$  de la ligne inférieure horizontale de l'image qui est près du bord inférieur de l'échantillon bloqué en déplacement suivant  $x_2$ . Par exemple, cette composante de translation  $T_2$  est de l'ordre de  $-11 \times 10^{-5} m$  ce qui donne un déplacement physique en  $x_2$  de l'ordre de  $-9 \times 10^{-5} m$  en haut de l'image et de  $-10^{-5} m$  en bas de l'image. Le raisonnement que nous venons de mener s'applique aussi à l'échelle relative des déplacements suivant  $x_1$  de la Fig. 5.7 et qui sont donnés à une translation  $T_1$  négative près suivant  $x_1$ . Ce vecteur de translation de composantes  $T_1$  et  $T_2$  suivant  $x_1$  et  $x_2$  s'appliquent aux Fig. 5.12 et Fig. 5.13 relatives au champ de déplacement à l'échelle mésoscopique. Finalement, notons que toute la méthodologie de l'identification est développée en utilisant uniquement les champs de déformation mesurés qui sont indépendants de toutes translations globales. La connaissance précise de ces deux composantes de translation n'est donc pas requise.

**Résultats à l'échelle macroscopique.**

L'imagerie des deux composantes du champ de déplacement mesuré à l'échelle macroscopique est montrée à la Fig. 5.7 pour le déplacement suivant  $x_1$  et à la Fig. 5.8 pour le déplacement suivant  $x_2$ . Les images sont présentées sur une grille de  $10 \times 10$  points. Les composantes 11, 12 et 22 du champ de déformation sont montrées aux Figs. 5.9, 5.10 et 5.11. On notera évidemment compte tenu des conditions aux limites appliquées à l'échantillon que ce champ de déformation n'est pas homogène dans le domaine macroscopique. L'analyse des figures Fig. 5.7 et Fig. 5.8 montre qu'il y a une perte de symétrie par rapport à une ligne verticale médiale de l'image. Si l'échantillon était un cube strict (faces parfaitement parallèles), compte tenu du système mécanique (la presse) qui mets en compression l'échantillon et sous l'hypothèse d'un matériau homogène à l'échelle macroscopique (hypothèse raisonnable), on aurait dû obtenir une telle symétrie pour les deux composantes du champ de déplacement. La perte de symétrie constatée est expliquée par un défaut de parallélisme des faces opposées. Ainsi, la normale locale à la face supérieure de l'échantillon n'est pas verticale en tout point et n'est pas verticale en moyenne sur la face supérieure. La force résultante sur la face supérieure délivrée par la presse a donc, non seulement une composante verticale, mais aussi une petite composante horizontale, induisant des déformations de cisaillement horizontal et peut être aussi un petit glissement horizontal de l'échantillon.

**Résultats à l'échelle mésoscopique.**

L'imagerie des deux composantes du champ de déplacement mesuré à l'échelle mésoscopique est montrée à la Fig. 5.12 pour le déplacement suivant  $x_1$  et à la Fig. 5.13 pour le déplacement suivant  $x_2$ . Les images sont présentées sur une grille de  $100 \times 100$  points. Les composantes 11, 12 et 22 du champ de déformation sont montrées aux Figs. 5.14, 5.15 et 5.16. L'analyse des figures Fig. 5.12 et Fig. 5.13 montre une perte de symétrie similaire à celui de l'échelle macroscopique due à la même cause.

## 5.5 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté le protocole expérimental, le banc de mesures optiques, la méthodologie des mesures de champ par corrélation d'images et les résultats pour la mesure du champ de déplacement à l'échelle macroscopique et à l'échelle mésoscopique, pour un échantillon d'os cortical constitué d'un cube d'un centimètre de côté. Les résultats expérimentaux obtenus semblent très cohérents. De très nombreuses difficultés ont été rencontrées pour mettre au point la procédure expérimentale et obtenir les

## CHAPITRE 5. MÉTHODOLOGIE ET PROTOCOLE POUR LES MESURES EXPÉRIMENTALES MULTI-ÉCHELLES SUR L'OS CORTICAL PAR MESURES OPTIQUES DE CHAMPS

résultats satisfaisants qui sont présentés. Les difficultés ont été induites par la nature du matériau testé (os cortical) pour lequel il n'y avait de méthode de marquage simple à l'échelle voulue.

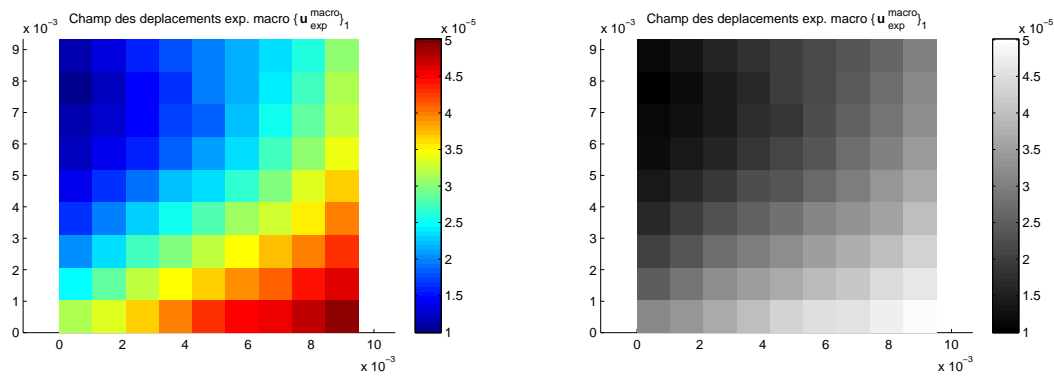


FIGURE 5.7 – Composante  $\{\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_1$  suivant  $x_1$  (horizontal) du champ des déplacements expérimentaux à l'échelle macroscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite).

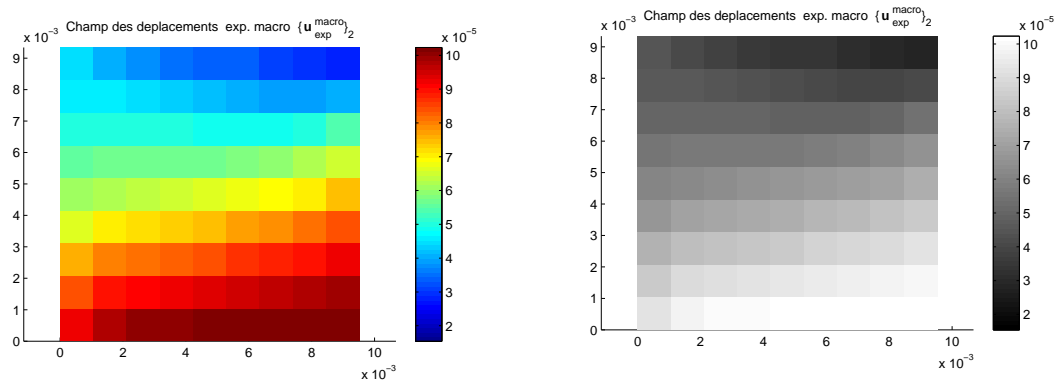


FIGURE 5.8 – Composante  $\{\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_2$  suivant  $x_2$  (vertical) du champ des déplacements expérimentaux à l'échelle macroscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite).

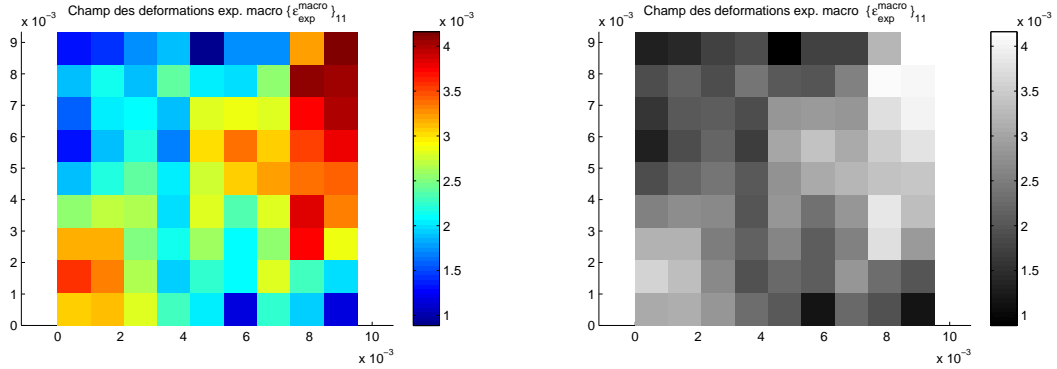


FIGURE 5.9 – Composante  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{11}$  suivant  $x_1$  (horizontal) du champ des déformations expérimentales à l'échelle macroscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite).

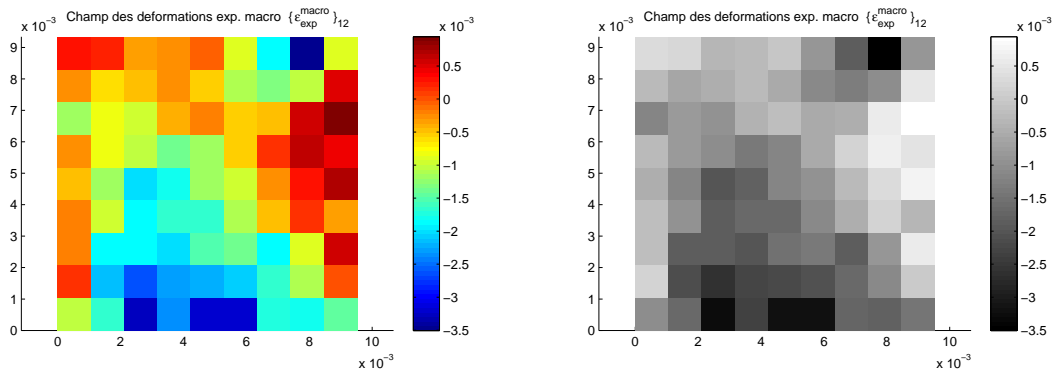


FIGURE 5.10 – Composante  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{12}$  du champ des déformations expérimentales à l'échelle macroscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite).



## CHAPITRE 5. MÉTHODOLOGIE ET PROTOCOLE POUR LES MESURES EXPÉRIMENTALES MULTI-ÉCHELLES SUR L'OS CORTICAL PAR MESURES OPTIQUES DE CHAMPS

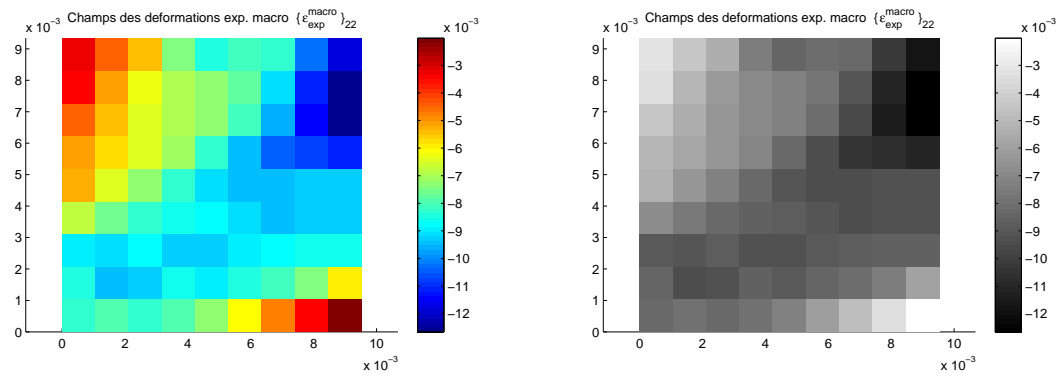


FIGURE 5.11 – Composante  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{22}$  suivant  $x_2$  (vertical) du champ des déformations expérimentales à l'échelle macroscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite).

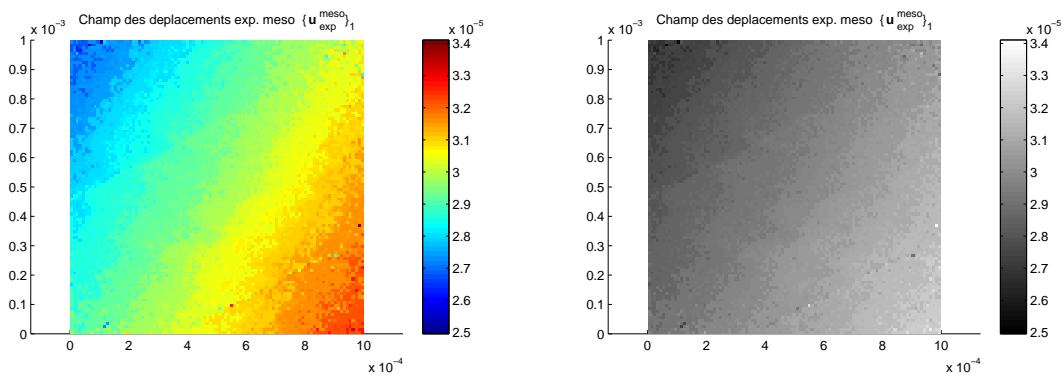


FIGURE 5.12 – Composante  $\{\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_1$  suivant  $x_1$  (horizontal) du champ des déplacements expérimentaux à l'échelle mésoscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite).

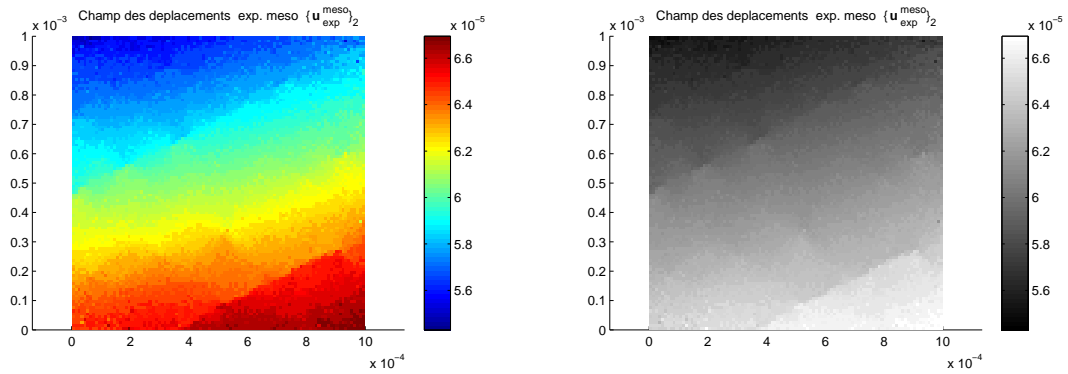


FIGURE 5.13 – Composante  $\{\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_2$  suivant  $x_2$  (vertical) du champ des déplacements expérimentaux à l'échelle mésoscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite).

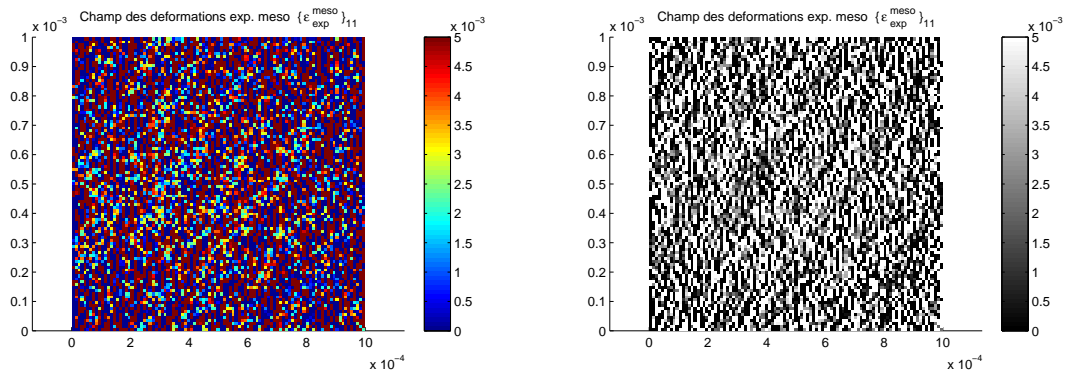


FIGURE 5.14 – Composante  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{11}$  suivant  $x_1$  (horizontal) du champ des déformations expérimentales à l'échelle mésoscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite).

## CHAPITRE 5. MÉTHODOLOGIE ET PROTOCOLE POUR LES MESURES EXPÉRIMENTALES MULTI-ÉCHELLES SUR L'OS CORTICAL PAR MESURES OPTIQUES DE CHAMPS

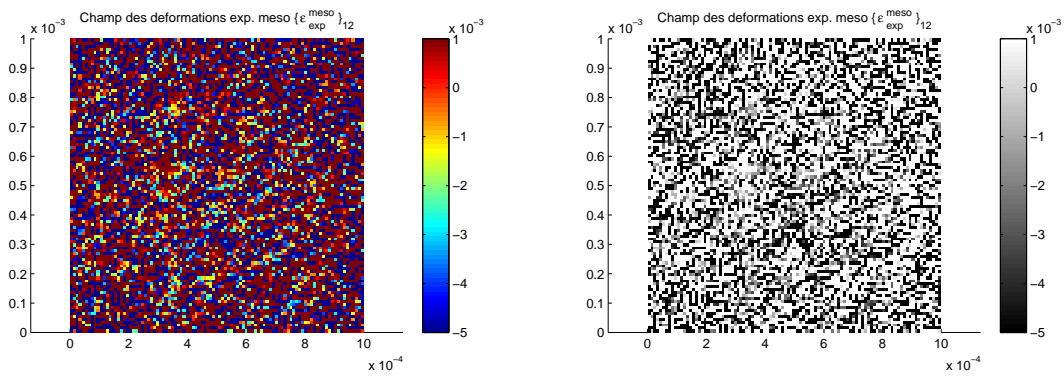


FIGURE 5.15 – Composante  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{12}$  du champ des déformations expérimentales à l'échelle mésoscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite).

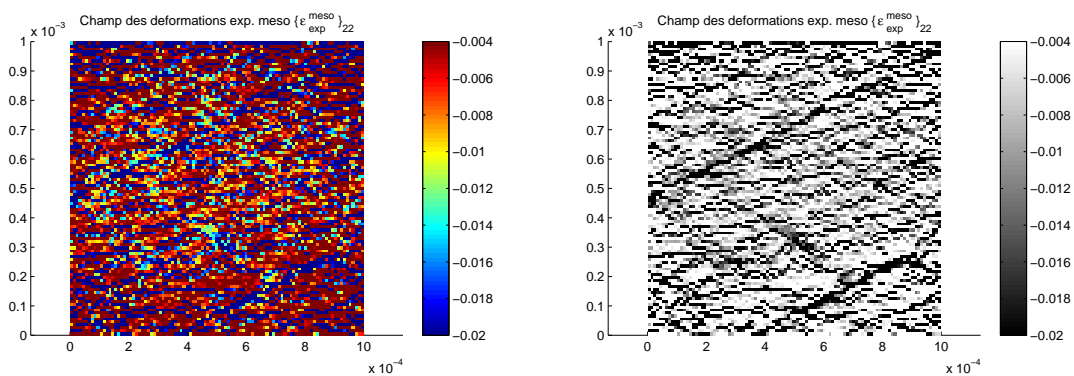


FIGURE 5.16 – Composante  $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{22}$  suivant  $x_2$  (vertical) du champ des déformations expérimentales à l'échelle mésoscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite).

# 6

## Identification expérimentale pour l'os cortical

## CHAPITRE 6. IDENTIFICATION EXPÉRIMENTALE POUR L'OS CORTICAL

---

Dans ce chapitre, on présente les résultats de l'identification du modèle macroscopique et du modèle stochastique mésoscopique sur la base des données expérimentales mesurées présentée au Chapitre 5. Le modèle de loi de comportement du matériau à l'échelle macro est pris dans la classe des isotropes transverses en 2D et en contraintes planes dont le paramétrage  $\mathbf{a} = (E_T^{\text{macro}}, \nu_T^{\text{macro}})$  correspond au module d'Young transverse et au coefficient de Poisson de la modélisation macroscopique. Le modèle stochastique mésoscopique est celui présenté au Chapitre 4. La méthode d'identification est celle du Chapitre 3 dont la numérisation et les algorithmes sont ceux détaillés au Chapitre 4. Le sous-domaine mésoscopique est celui indiqué dans le Chapitre 5.

Les valeurs utilisées des paramètres numériques pour le calcul stochastique relatif au sous-domaine mésoscopique pour calculer les indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  sont les suivantes :

- Le maillage EF du sous-domaine mésoscopique pour résoudre le problème aux limites d'élasticité statique stochastique est constitué de  $9801 = 99 \times 99$  éléments finis à 4 noeuds avec un maillage cartésien de pas constant en  $x_1$  et  $x_2$ .
- Le nombre  $N$  de points de Gauss correspondant à ce maillage est de 39204.
- Une étude de convergence a permis de fixer l'ordre  $\nu$  de la représentation définie par l'Eq. (4.20) pour la simulation numérique du vecteur  $\mathbf{V}$  à  $2 \times 10^6$ .
- Le solveur stochastique utilisé est basé sur la méthode de Monte-Carlo ce qui permet d'estimer la valeur des indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Le nombre de réalisations utilisées a été de 500 correspondant à la convergence.
- Pour l'algorithme génétique, on a utilisé une taille de population initiale de 50 et moins de 100 générations pour construire le front de Pareto.

Pour l'initialisation du paramètre  $\mathbf{a}$ , on a procédé comme au Chapitre 4. La valeur initiale est choisie à  $\mathbf{a}^{(0)}$  qui correspond à la solution du problème d'optimisation :  $\mathbf{a}^{(0)} = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}} \mathcal{I}_1(\mathbf{a})$ . La fonction `fmeansearch` de Matlab, basée sur un algorithme du simplex, a été utilisée pour résoudre ce problème d'optimisation. Comme précédemment, on a constaté que cette valeur initiale variait peu pendant les itérations de résolution du problème d'optimisation multi-objectif. La valeur optimale de  $\mathbf{a} = (E_T^{\text{macro}}, \nu_T^{\text{macro}})$  trouvée est  $\mathbf{a}^{\text{macro}} = (6.74 \times 10^9 Pa, 0.32)$ .

Le tableau Tab. 6.1 donne les valeurs de  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$  pour chaque point du front de Pareto montré à la Fig. 6.1. Conformément aux explications données dans le Chapitre 4, l'examen de ce front de Pareto montre le point 9 du front de Pareto minimise la distance

à l'origine et a pour composantes optimales  $\ell^{\text{meso}} = 5.06 \times 10^{-5} m$ ,  $\delta^{\text{meso}} = 0.28$ ,  $E_T^{\text{meso}} = 6.96 \times 10^9 Pa$ ,  $\nu_T^{\text{meso}} = 0.37$ . Cette solution optimale donne une valeur de longueur de corrélation de  $5.06 \times 10^{-5} m$  qui permet de bien valider la séparation d'échelle.

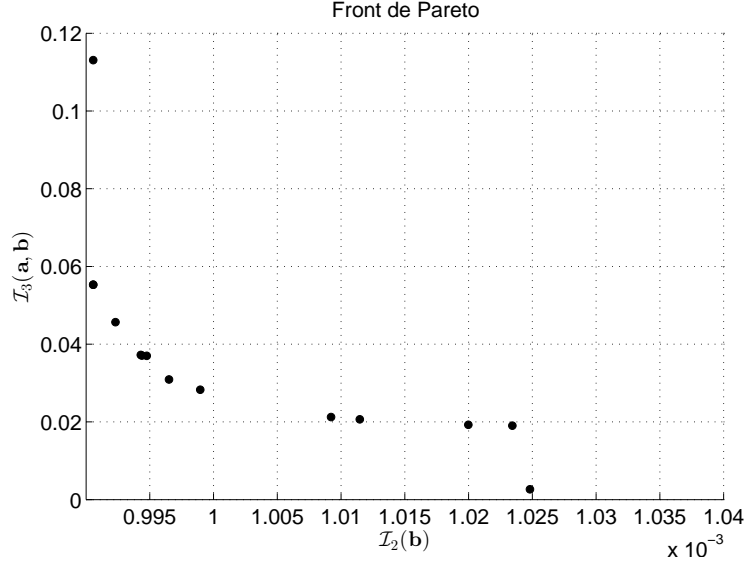


FIGURE 6.1 – Front de Pareto pour les indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de l'identification expérimentale

TABLE 6.1 – Optimisation par l'algorithme génétique pour le cas de l'os cortical

k	$\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$	$\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	$\ell$	$\delta$	$E_T$	$\nu_T$
1	$9.905566 \times 10^{-4}$	$1.130759 \times 10^{-1}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.300000	$6.964455 \times 10^9$	0.399180
2	$9.905566 \times 10^{-4}$	$5.529077 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.300000	$6.964455 \times 10^9$	0.385342
3	$9.905566 \times 10^{-4}$	$5.529077 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.300000	$6.964455 \times 10^9$	0.399180
4	$9.923024 \times 10^{-4}$	$4.566584 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.300000	$6.964455 \times 10^9$	0.371504
5	$9.942891 \times 10^{-4}$	$3.721737 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.300000	$6.964455 \times 10^9$	0.371504
6	$9.942891 \times 10^{-4}$	$3.721737 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.266667	$6.964455 \times 10^9$	0.371504
7	$9.943808 \times 10^{-4}$	$3.707802 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.300000	$6.380340 \times 10^9$	0.399180
8	$9.947595 \times 10^{-4}$	$3.698333 \times 10^{-2}$	$1.426667 \times 10^{-4}$	0.383333	$6.672398 \times 10^9$	0.316151
9	<b><math>9.965090 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>3.092503 \times 10^{-2}</math></b>	<b><math>5.066667 \times 10^{-5}</math></b>	<b>0.283333</b>	<b><math>6.964455 \times 10^9</math></b>	<b>0.371504</b>
10	$9.989547 \times 10^{-4}$	$2.826733 \times 10^{-2}$	$2.040000 \times 10^{-4}$	0.416667	$6.672398 \times 10^9$	0.343827
11	$1.009211 \times 10^{-3}$	$2.125592 \times 10^{-2}$	$2.040000 \times 10^{-4}$	0.483333	$6.672398 \times 10^9$	0.343827
12	$1.011463 \times 10^{-3}$	$2.064572 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.300000	$6.964455 \times 10^9$	0.357666
13	$1.019979 \times 10^{-3}$	$1.925469 \times 10^{-2}$	$5.066667 \times 10^{-5}$	0.300000	$6.964455 \times 10^9$	0.343827
14	$1.023436 \times 10^{-3}$	$1.901348 \times 10^{-2}$	$2.040000 \times 10^{-4}$	0.500000	$6.672398 \times 10^9$	0.343827
15	$1.024812 \times 10^{-3}$	$2.645432 \times 10^{-3}$	$2.040000 \times 10^{-4}$	0.433333	$6.672398 \times 10^9$	0.343827

### Résumé du chapitre

Nous avons utilisé la méthode d'identification en inverse présentée aux Chapitres 3 et 4 avec les données expérimentales présentées au Chapitre 5 pour un échantillon d'os cortical soumis à un chargement de compression dans le cadre de l'élasticité linéaire 2D, avec une hypothèse de contraintes planes et avec un modèle isotrope transverse.

Les résultats de l'identification donnent des valeurs cohérentes et réalistes par rapport aux données connues et publiées et par rapport aux valeurs attendues pour les paramètres statistiques (échelle de corrélation et intensité des fluctuations statistiques).

# Conclusions générales et perspectives

## Synthèse des résultats obtenus

Nous avons développé et présenté une méthode d'identification statistique inverse du champ d'élasticité apparent stochastique à l'échelle mésoscopique pour une microstructure complexe hétérogène et anisotrope à comportement élastique linéaire (telle que celle de l'os cortical), basée sur des mesures de champ de déplacements à deux échelles (mésoscopique et macroscopique). Il est à noter que le champ à identifier n'est pas un champ gaussien scalaire, mais un champ non Gaussien à valeurs tensorielles ayant des propriétés mathématiques liées aux propriétés de symétrie et de positivité du tenseur d'élasticité en chaque point de l'espace. Le problème statistique inverse de son identification, au travers le problème aux limites, reste un problème difficile.

La théorie a été présentée dans le cadre tridimensionnelle, mais sa validation puis son utilisation sur des mesures expérimentales ont été faites dans un cadre de l'élasticité linéaire 2D en contraintes planes. Nous avons validé la méthodologie sur un "matériau numérique" choisi dans le cadre des hypothèses retenues (élasticité linéaire 2D en contraintes planes) et pour lequel les données expérimentales des champs de déplacement aux deux échelles ont été simulées numériquement, ce qui a permis de connaître la solution du problème inverse et donc de valider la procédure et les algorithmes de résolution du problème statistique inverse.

Ensuite, une campagne de mesures expérimentales multi-échelles des champs de déplacement, adaptée à la méthode d'identification proposée, a été menée au laboratoire LMS de l'École Polytechnique. Malgré les grandes difficultés rencontrées pendant le développement de la procédure expérimentale et de sa mise en oeuvre, nous sommes arrivés à obtenir un ensemble de mesures des champs de déplacement, de qualités et cohérentes. Nous avons ainsi construit une base de données expérimentales d'imagerie de champ de déplacements aux deux échelles (macroscopique et mésoscopique) pour un matériau réel (os cortical).

Cette base de données expérimentales nous a finalement permis d'identifier le champ d'élasticité apparent stochastique à l'échelle mésoscopique de la microstructure de l'os cortical et de valider, sur des données expérimentales réelles, la méthodologie d'identification proposée.



### Perspectives

La méthodologie présentée a été développée dans le cadre de l'élasticité 3D.

Concernant l'utilisation et la validation de la méthode proposée dans le cadre de la mécanique des matériaux hétérogènes, la première extension d'intérêt serait son application à des mesures de champ de déplacement 3D obtenues, par exemple, par tomographie 3D. La seconde extension qui serait aussi de très grand intérêt serait l'application et la validation de la méthodologie 3D présentée, voire son extension, au cas de mesures partielles et limitées de champs de déplacement 2D (par exemple, mesures de champs 2D sur deux faces perpendiculaires (voire trois faces perpendiculaires) d'un échantillon 3D cubique).

Concernant la méthode statistique d'identification proposée (identification d'un modèle stochastique *prior* du champ), une amélioration intéressante consisterait à identifier un modèle stochastique *posterior* du champ à partir (i) du modèle *prior* identifié dans une première étape en utilisant la méthode présentée dans ce travail, (ii) des données expérimentales de champ et (iii) de la méthode de Bayes, sachant que ce problème en grande dimension stochastique reste un problème très difficile.

# Table des figures

4.1	Schéma décrivant la construction de la base de données "expérimentales" par simulation numérique pour les deux échelles macroscopiques et mésoscopiques : modèle EF du domaine macro de l'échantillon avec la résolution de l'échelle mésoscopique (figure de gauche), composante $\{11\}$ du champ des déformations du domaine macroscopique avec la résolution de l'échelle mésoscopique (figure du centre), composante $\{11\}$ du champ des déformations $\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ du domaine macroscopique avec la résolution de l'échelle macroscopique (figure de droite-haut), composante $\{11\}$ du champ des déformations $\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ d'un sous-domaine mésoscopique (localisé en ligne pointillée noire sur la figure du centre) avec la résolution de l'échelle mésoscopique (figure de droite-bas).	46
4.2	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{11}$ du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle macroscopique avec une résolution $10 \times 10$	47
4.3	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{22}$ du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle macroscopique avec une résolution $10 \times 10$	47
4.4	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{12}$ du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle macroscopique avec une résolution $10 \times 10$	48
4.5	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{11}$ du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle mésoscopique avec une résolution $100 \times 100$	48
4.6	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{22}$ du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle mésoscopique avec une résolution $100 \times 100$	49
4.7	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{12}$ du champ des déformations "expérimental" simulé à l'échelle mésoscopique avec une résolution $100 \times 100$	49
4.8	Etude de sensibilité des valeurs de $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ par rapport à $\delta$ : Graphe de $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ , où $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ , $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$ , $\nu_T = 0.38$ et $\delta$ variant dans l'intervalle $[0.25, 0.5]$ .	51
4.9	Etude de sensibilité des valeurs de $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$ par rapport à $\delta$ : Graphe de $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$ , où $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ , $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$ , $\nu_T = 0.38$ et $\delta$ variant dans l'intervalle $[0.25, 0.5]$ .	52
4.10	Etude de sensibilité des valeurs de $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ par rapport à $E_T$ : Graphe de $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ , où $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ , $\delta = 0.4$ , $\nu_T = 0.38$ et $E_T$ variant dans l'intervalle $[6 \times 10^9, 12.5 \times 10^9] Pa$ .	52

**TABLE DES FIGURES**

---

4.11 Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  par rapport à  $E_T$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $\delta = 0.4$ ,  $\nu_T = 0.38$  et  $E_T$  variant dans l'intervalle  $[6 \times 10^9, 12.5 \times 10^9] Pa$ . . . . . 53

4.12 Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  par rapport à  $\ell$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\delta = 0.4$ ,  $\nu_T = 0.38$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\ell$  variant dans l'intervalle  $[2 \times 10^{-5}, 2.5 \times 10^{-4}] m$ . . . . . 53

4.13 Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  par rapport à  $\ell$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\delta = 0.4$ ,  $\nu_T = 0.38$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\ell$  variant dans l'intervalle  $[2 \times 10^{-5}, 2.5 \times 10^{-4}] m$ . . . . . 54

4.14 Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  par rapport à  $\nu_T$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\delta = 0.4$ ,  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\nu_T$  variant dans l'intervalle  $[0.225, 0.475]$ . . . . . 54

4.15 Etude de sensibilité des valeurs de  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$  par rapport à  $\nu_T$  : Graphe de  $\mathbf{b} \mapsto \mathcal{I}_3(\mathbf{a}^0, \mathbf{b})$ , où  $\mathbf{b} = (\ell, \delta, E_T, \nu_T)$ , avec  $\delta = 0.4$ ,  $\ell = 1.25 \times 10^{-4} m$ ,  $E_T = 5.2 \times 10^9 Pa$  et  $\nu_T$  variant dans l'intervalle  $[0.225, 0.475]$ . . . . . 55

4.16 Principe d'utilisation du front de Pareto pour les indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  57

4.17 Premier cas : Front de Pareto pour les indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  . . . . . 59

4.18 Second cas : Front de Pareto pour les indicateurs  $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$  et  $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  . . . . . 60

5.1 Comparaison de la zone d'étude entre une image de référence (figure de gauche) et une image déformée (figure de droite) à l'échelle macroscopique. Images obtenues pour l'os cortical pendant la campagne de mesures au LMS. 65

5.2 Os cortical de boeuf. Os cortical avant préparation (figure de gauche) et Échantillon d'os cortical après préparation (figure de droite) (dimensions  $1 cm^3$ ) . . . . . 67

5.3 Équipements du laboratoire LMS utilisés (1) pour découper l'échantillon (figure gauche) et (2) pour polir les faces de l'échantillon (figure droite). . . 68

5.4 Images optiques expérimentales de l'échantillon d'os cortical présentées à plusieurs échelles : à l'échelle macroscopique ( $1 cm$ ) (figure de gauche), à l'échelle mésoscopique ( $1 mm$ ) (figure du milieu) et à l'échelle des hétérogénéités (figure de droite) . . . . . 69

5.5 Face observée de l'échantillon préparée, à l'échelle macroscopique : Mouchetis de peinture noire pulvérisée (figure de gauche), mouchetis par microbilles (figure du milieu) et mouchetis par rayures (figure de droite) . . . . . 70

5.6	Banc de mesure du LMS sur lequel la campagne d'expérimentation a été effectuée . . . . .	71
5.7	Composante $\{\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_1$ suivant $x_1$ (horizontal) du champ des déplacements expérimentaux à l'échelle macroscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite). . . . .	76
5.8	Composante $\{\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_2$ suivant $x_2$ (vertical) du champ des déplacements expérimentaux à l'échelle macroscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite). . . . .	76
5.9	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{11}$ suivant $x_1$ (horizontal) du champ des déformations expérimentales à l'échelle macroscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite). . . . .	77
5.10	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{12}$ du champ des déformations expérimentales à l'échelle macroscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite). . . . .	77
5.11	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}\}_{22}$ suivant $x_2$ (vertical) du champ des déformations expérimentales à l'échelle macroscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite). . . . .	78
5.12	Composante $\{\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_1$ suivant $x_1$ (horizontal) du champ des déplacements expérimentaux à l'échelle mésoscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite). . . . .	78
5.13	Composante $\{\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_2$ suivant $x_2$ (vertical) du champ des déplacements expérimentaux à l'échelle mésoscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite). . . . .	79
5.14	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{11}$ suivant $x_1$ (horizontal) du champ des déformations expérimentales à l'échelle mésoscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite). . . . .	79
5.15	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{12}$ du champ des déformations expérimentales à l'échelle mésoscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite). . . . .	80
5.16	Composante $\{\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}\}_{22}$ suivant $x_2$ (vertical) du champ des déformations expérimentales à l'échelle mésoscopique : en couleur (figure de gauche) et en noir-blanc (figure de droite). . . . .	80
6.1	Front de Pareto pour les indicateurs $\mathcal{I}_2(\mathbf{b})$ et $\mathcal{I}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de l'identification expérimentale . . . . .	83



# Liste des tableaux

4.1	Premier cas : Optimisation par l'algorithme génétique . . . . .	58
4.2	Second cas : Optimisation par l'algorithme génétique . . . . .	60
6.1	Optimisation par l'algorithme génétique pour le cas de l'os cortical . . . . .	83



# Bibliographie

- ANDREWS, K. T. et WRIGHT, S. (1998). Stochastic homogenization of elliptic boundary value problems with L-P-data. *Asymptotic Analysis*, 17:165–184.
- ARNST, M., CLOUTEAU, D. et BONNET, M. (2008). Inversion of probabilistic structural models using measured transfer functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:589–608.
- ARNST, M., GHANEM, R. et SOIZE, C. (2010). Identification of bayesian posteriors for coefficients of chaos expansions. *Journal of Computational Physics*, 229:3134–3154.
- ASARO, R. J. (1983). Micromechanics of crystals and polycrystals. *Advances in Applied Mechanics*, 23:1–115.
- AVRIL, S., BONNET, M., BRETTELLE, A.-S., GRÉDIAC, M., HILD, F., IENNY, P., LATOURTE, F., LEMOSSE, D., PAGANO, S., PAGNACCO, E. et PIERRON, F. (2008a). Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48:381–402.
- AVRIL, S. et PIERRON, F. (2007). General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 44:4978–5002.
- AVRIL, S., PIERRON, F., PANNIER, Y. et ROTINAT, R. (2008b). Stress reconstruction and constitutive parameter identification in plane-stress elastoplastic problems using surface measurements of deformation fields. *Experimental Mechanics*, pages 403–419.
- BABUSKA, I., NOBILE, F. et TEMPONE, R. (2007). A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45 (3):1005–1034.
- BABUSKA, I., TEMPONE, R. et ZOURARIS, G. E. (2005). Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method : the stochastic formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194 (12-16):1251–1294.
- BAXTER, S. C. et GRAHAM, L. L. (2000). Characterization of random composites using a moving window technique. *ASCE J Engng Mech*, 126(4):389–404.
- BECK, J. L. et KATAFYGIOTIS, L. S. (1998). Updating models and their uncertainties. I : Bayesian statistical framework. *J. Engrg. Mech.*, 124 (4):455–461.
- BERNARDO, J. M. et SMITH, A. F. M. (2000). *Bayesian Theory*. John Wiley & Sons, Chichester.
- BERTOLINO, G., BILGER, N. et CRÉPIN, J. (2007). Modeling microstructures and microstructural effects on macroscopic and intragranular mechanical behavior. *Computational Materials Science*, 40:408–416.



- BESNARD, G., HILD, F. et ROUX, S. (2006). Finite-element displacement fields analysis from digital images : Application to portevin-le chatelier bands. *Experimental Mechanics*, 46:789–803.
- BONNET, M. et CONSTANTINESCU, A. (2005). Inverse problems in elasticity. *Inverse Probl*, 21:R1–R50.
- BORNERT, M., BRETHERAU, T. et GILORMINI, P. (2001). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1. Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Hermes Science Publications.
- BORNERT, M., BRÉMAND, F., DOUMALIN, P., DUPRÉ, J.-C., FAZZINI, M., GRÉDIAC, M., HILD, F., MISTOU, S., MOLIMARD, J., ORTEU, J.-J., ROBERT, L., SURREL, Y., VACHER, P. et WATTRISSE, B. (2009). Assessment of digital image correlation measurement errors : Methodology and results. *Experimental Mechanics*, 49:353–370.
- BORNERT, M., VALES, F., GHARBI, H. et NGUYEN MINH, D. (2010). Multiscale full-field strain measurements for micromechanical investigations of the hydromechanical behaviour of clayey rocks. *Strain*, 46:33–46.
- BOURGEAT, A. et PIATNITSKI, A. (2004). Approximations of effective coefficients in stochastic homogenization. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilité et Statistiques PR*, 40:153–65.
- BOUTIN, C. (1996). Microstructural effects in elastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 33:1023–1051.
- BOWMAN, A. W. et AZZALINI, A. (1997). *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis*. Oxford University Press.
- CAILLETAUD, G., FOREST, S., JEULIN, D., FEYEL, F., GALLIET, I., MOUNOURY, V. et QUILICI, S. (2003). Some elements of microstructural mechanics. *Computational Materials Science*, 27:351–374.
- CALLOCH, S., DUREISSEIX, D. et HILD, F. (2002). Identification de modèles de comportement de matériaux solides : utilisation d'essais et de calculs. *Technol Form*, 100:36–41.
- CARLIN, B. P. et LOUIS, T. A. (2009). *Bayesian Methods for Data Analysis, third ed.* Chapman & Hall/ CRC Press, Boca Raton.
- CHAUVET, D., CARPENTIER, A. et ALLAIN, J.-M. (2010). Histological and biomechanical study of dura mater applied to the technique of dura splitting decompression in chiari type i malformation. *Neurosurgical Review*, 33:287–294.
- CHEVALIER, L., CALLOCH, S., HILD, F. et MARCO, Y. (2001). Digital image correlation used to analyze the multiaxial behavior of rubber-like materials. *European Journal of Mechanics A-Solids*, 20:169–187.

- CHRISTENSEN, R. M. (1998). Two theoretical elasticity micromechanics models. *Journal of Elasticity*, 50:15–25.
- CLOUTEAU, D., COTTEREAU, R. et LOMBAERT, G. (2013). Dynamics of structures coupled with elastic media - a review of numerical models and methods. *Journal of Sound and Vibration*, 332:2415–2436.
- COLLINS, J. C., HART, G. C. et KENNEDY, B. (1974). Statistical identification of structures. *AIAA J*, 12:185–190.
- CONGDON, P. (2007). *Bayesian Statistical Modelling, second ed.* John Wiley and Sons, Chichester.
- CONSTANTINESCU, A. (1995). On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements. *Inverse Probl Eng*, 1:293–315.
- COTTEREAU, R., CLOUTEAU, D., BEN DHIA, H. et ZACCARDI, C. (2011). A stochastic - deterministic coupling method for continuum mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200:3280–3288.
- DAS, S., GHANEM, R. et FINETTE, S. (2009). Polynomial chaos representation of spatiotemporal random field from experimental measurements. *J. Comput. Phys.*, 228:8726–8751.
- DAS, S., GHANEM, R. et SPALL, J. (2008). Asymptotic sampling distribution for polynomial chaos representation of data : a maximum-entropy and fisher information approach. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30 (5):2207–2234.
- DAS, S., SPALL, J. et GHANEM, R. (2010). Efficient monte carlo computation of fisher information matrix using prior information. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54:272–289.
- DE OLIVEIRA, V., KEDEM, B. et SHORT, D. A. (1997). Bayesian prediction of transformed gaussian random fields. *J. Am. Statist. Assoc.*, 92 (440):1422–1433.
- DESCELIERS, C., GHANEM, R. et SOIZE, C. (2006). Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 66:978–1001.
- DESCELIERS, C., SOIZE, C. et GHANEM, R. (2007). Identification of chaos representations of elastic properties of random media using experimental vibration tests. *Comput.Mech.*, 39(6):831–838.
- DESCELIERS, C., SOIZE, C., GRIMAL, Q., TALMANT, M. et NAILI, S. (2009). Determination of the random anisotropic elasticity layer using transient wave propagation in a fluid-solid multilayer : Model and experiments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 125(4):2027–2034.

- DESCELIERS, C., SOIZE, C., NAILI, S. et HAIAT, G. (2012). Probabilistic model of the human cortical bone with mechanical alterations in ultrasonic range. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 32:170–177.
- FLORENCE, C. et SAB, K. (2006). A rigorous homogenization method for the determination of the overall ultimate strength of periodic discrete media and an application to general hexagonal lattices of beams. *European Journal of Mechanics A-Solids*, 25:72–97.
- FOREST, S., BARBE, F. et CAILLETAUD, G. (2000). *International Journal of Solids and Structures*, 37:7105–7126.
- FOREST, S., PRADEL, F. et SAB, K. (2001). Asymptotic analysis of heterogeneous cosserat media. *International Journal of Solids and Structures*, 38:4585–4608.
- FOREST, S. et SAB, K. (1998). Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communications*, 25:449–454.
- FRANCFORT, G. A. et MURAT, F. (1986). Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 94:307–334.
- GEYMONAT, G., HILD, F. et PAGANO, S. (2002). Identification of elastic parameters by displacement field measurement. *Comptes Rendus Mécanique*, 330:403–408.
- GEYMONAT, G. et PAGANO, S. (2003). Identification of mechanical properties by displacement field measurement : a variational approach. *Meccanica*, 38:535–545.
- GHANEM, R. et DOOSTAN, R. (2006). Characterization of stochastic system parameters from experimental data : a bayesian inference approach. *J. Comput. Phys.*, 217(1):63–81.
- GHANEM, R. et SPANOS, P. D. (1991). *Stochastic Finite Elements : A spectral Approach*. Springer-verlag, New York.
- GHOSH, S., LEE, K. et MOORTHY, S. (1996). Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and voronoi cell finite element model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 132:63–116.
- GRAHAM, L. L., GURLEY, K. et MASTERS, F. (2003). Non-gaussian simulation of local material properties based on a moving-window technique. *Prob. Eng. Mechanics*, 18:223–234.
- GUILLEMINOT, J. et SOIZE, C. (2011). Non-gaussian positive-definite matrix-valued random fields with constrained eigenvalues : Application to random elasticity tensors with uncertain material symmetries. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88:1128–1151.

- GUILLEMINOT, J. et SOIZE, C. (2012a). Generalized stochastic approach for constitutive equation in linear elasticity : a random matrix model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90:613–635.
- GUILLEMINOT, J. et SOIZE, C. (2012b). Probabilistic modeling of apparent tensors in elastostatics : A maxent approach under material symmetry and stochastic boundedness constraints. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 28:118–124.
- GUILLEMINOT, J. et SOIZE, C. (2013). On the statistical dependence for the components of random elasticity tensors exhibiting material symmetry properties. *Journal of Elasticity*, 111:109–130.
- GUILLEMINOT, J., SOIZE, C. et KONDO, D. (2009). Mesoscale probabilistic models for the elasticity tensor of fiber reinforced composites : Experimental identification and numerical aspects. *Mechanics of Materials*, 41:1309–1322.
- GUSACHENKO, I., TRAN, V., HOUSSEN, Y.-G. et ALLAIN, J.-M. (2012). Polarization-resolved second-harmonic generation in tendon upon mechanical stretching. *Biophysical Journal*, 102:2220–2229.
- HERIPRE, E., DEXET, M., CRÉPIN, J., GÉLÉBART, L., ROOS, A., BORNERT, M. et CALDEMAISON, D. (2007). Coupling between experimental measurements and polycrystal finite element calculations for micromechanical study of metallic materials. *International Journal of Plasticity*, 23:1512–1539.
- HILD, F. (2002). *CORRELI<sup>LMT</sup>* : a software for displacement field measurements by digital image correlation. *LMT-Cachan, internal report 254*.
- HILD, F., PÉRIÉ, J.-N. et CORET, M. (1999). Mesure de champs de déplacements 2D par intercorrélation d’images : CORRELI 2D. *LMT-Cachan, internal report 230*.
- HILD, F., RAKA, B., BAUDEQUIN, M., ROUX, S. et CANTELAUBE, F. (2002). Multiscale displacement field measurements of compressed mineral-wool samples by digital image correlation. *Applied Optics*, 41:6815–6828.
- HILD, F. et ROUX, S. (2006). Digital image correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties - a review. *Strain*, 42:69–80.
- HILD, F. et ROUX, S. (2012). Comparison of local and global approaches to digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 52:1503–1519.
- HOUSSEN, Y.-G., GUSACHENKO, I., SCHANNE-KLEIN, M.-C. et ALLAIN, J.-M. (2011). Monitoring micrometer-scale collagen organization in rat-tail tendon upon mechanical strain using second harmonic microscopy. *Journal of Biomechanics*, 44:2047–2052.
- JEULIN, D. (1987). Microstructure modeling by random textures. *Journal de Microscopie et de Spectroscopie Electroniques*, 12:133–140.

- JEULIN, D. (1989). Morphological modeling of images by sequential random functions. *Signal Processing*, 16:403–431.
- JEULIN, D. (2001). *Caractérisation morphologique et modèles de structures aléatoires. In Homogénéisation en mécanique des matériaux 1*. Hermès Science Publications.
- KAHNJETTER, Z. L., JHA, N. K. et BHATIA, H. (1994). Optimal image correlation in experimental mechanics. *Optical Engineering*, 33:1099–1105.
- KAPIO, J. et SOMERSALO, E. (2005). *Statistical and Computational Inverse Problems*. Springer-Verlag, New York.
- KALOUCHE, I., CRÉPIN, J., ABDELMOUMEN, S., MITTON, D., GUILLOT, G. et GAGEY, O. (2010). Mechanical properties of glenoid cancellous bone. *Clinical Biomechanics*, 25:292–298.
- KANIT, T., FOREST, S., GALLIET, I., MOUNOURY, V. et JEULIN, D. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40:3647–3679.
- LAWSON, C. L. et HANSON, R. J. (1974). *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall.
- LE MAITRE, O.-P. et KNIO, O.-M. (2010). *Spectral Methods for Uncertainty Quantification with Applications to Computational Fluid Dynamics*. Springer, Heidelberg.
- LOÈVE, M. (1977). *Probability Theory*. 4th Ed. Springer Verlag, New York.
- MA, X. et ZABARAS, N. (2009). An efficient bayesian inference approach to inverse problems based on an adaptive sparse grid collocation method. *Inverse Probl.*, 25 (3):(Article Number 035013).
- MADI, K., FOREST, S., BOUSSUGE, M., GAILLIEGUE, S., LATASTE, E., BUFFIERE, J.-Y., BERNARD, D. et JEULIN, D. (2007). Finite element simulations of the deformation of fused-cast refractories based on x-ray computed tomography. *Computational Materials Science*, 39:224–229.
- MARZOUK, Y.-M. et NAJM, H.-N. (2009). Dimensionality reduction and polynomial chaos acceleration of bayesian inference in inverse problems. *J. Comput. Phys.*, 228 (6):1862–1902.
- MARZOUK, Y.-M., NAJM, H.-N. et RAHN, L.-A. (2007). Stochastic spectral methods for efficient bayesian solution of inverse problems. *J. Comput. Phys.*, 224 (2):560–586.
- MEGUID, S. A. et KALAMKAROV, A. L. (1994). Asymptotic homogenization of elastic composite-materials with a regular structure. *International Journal of Solids and Structures*, 31:303–316.

- MILED, K., SAB, K. et LE ROY, R. (2011). Effective elastic properties of porous materials : Homogenization schemes vs experimental data. *Mechanics Research Communications*, 38:131–135.
- NEMAT-NASSER, S. et HORI, M. (1999). *Micromechanics : Overall properties of heterogeneous materials*. Elsevier, Amsterdam.
- NOUY, A. (2008). Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : Invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197 (51-52):4718–4736.
- OSTOJA-STARZEWSKI, M. (2008). *Microstructural Randomness and Scaling in Mechanics of Materials*. Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis.
- PAN, B., QIAN, K. M., XIE, H. M. et ASUNDI, A. (2009). Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement : a review. *Measurement Science and Technology*, 20.
- PAN, B., XIE, H. M., XU, B. Q. et DAI, F. L. (2006). Performance of sub-pixel registration algorithms in digital image correlation. *Measurement Science and Technology*, 17: 1615–1621.
- POIRION, F. et SOIZE, C. (1989). Numerical-simulation of homogeneous and inhomogeneous stochastic gaussian vector-fields. *Recherche Aerospaciale*, pages 41–61.
- PRADEL, F. et SAB, K. (1998). Homogenization of discrete media. *Journal de Physique IV*, 8:317–324.
- RETHORE, J., TINNES, J.-P., ROUX, S., BUFFIERE, J.-Y. et HILD, F. (2008). Extended three-dimensional digital image correlation (X3D-DIC). *Comptes Rendus Mécanique*, 336:643–649.
- ROUX, S. et HILD, F. (2008). Digital image mechanical identification (DIMI). *Experimental Mechanics*, 48:495–508.
- ROUX, S., HILD, F. et BERTHAUD, Y. (2002). Correlation image velocimetry : a spectral approach. *Applied Optics*, 41:108–115.
- ROUX, S., HILD, F., VIOT, P. et BERNARD, D. (2008). Three-dimensional image correlation from X-ray computed tomography of solid foam. *Composites Part A-Applied Science and Manufacturing*, 39:1253–1265.
- RUBINSTEIN, R. (1981). *Simulation and the Monte Carlo method*. John Wiley and Sons, New York.
- SAB, K. (1992). On the homogenization and the simulation of random materials. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 11(5):585–607.

- SAB, K. et NEDJAR, B. (2005). Periodization of random media and representative volume element size for linear composites. *Comptes Rendus Mécanique*, 333:187–195.
- SAKATA, S., ASHIDA, F. et KOJIMA, T. (2008). Stochastic homogenization analysis on elastic properties of fiber reinforced composites using the equivalent inclusion method and perturbation method. *International Journal of Solids and Structures*, 45:6553–6565.
- SANCHEZ-PALENCIA, E. (1980). *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, volume 127 de *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin.
- SANCHEZ-PALENCIA, E. et ZAOUÏ, A. (1985). *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume 272 de *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin.
- SCHREIER, H. W., BRAASCH, J. R. et SUTTON, M. A. (2000). Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation. *Optical Engineering*, 39:2915–2921.
- SERFLING, R. J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons.
- SOIZE, C. (2006). Non-gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:26–64.
- SOIZE, C. (2008). Tensor-valued random fields for meso-scale stochastic model of anisotropic elastic microstructure and probabilistic analysis of representative volume element size. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 23:307–323.
- SOIZE, C. (2010). Identification of high-dimension polynomial chaos expansions with random coefficients for non-gaussian tensor-valued random fields using partial and limited experimental data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:2150–2164.
- SOIZE, C. (2011). A computational inverse method for identification of non-gaussian random fields using the bayesian approach in very high dimension. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200:3083–3099.
- SOIZE, C. (2012). *Stochastic Models of Uncertainties in Computational mechanics*, volume 2 de *Lecture Notes in Mechanics*. American Society of Civil Engineers, Reston.
- SPALL, J. C. (2003). *Introduction to Stochastic Search and Optimization*. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey.
- SUQUET, P. (1987). *Elements of Homogenization for Inelastic Solid Mechanics. Homogenization Techniques for Composite Media*. Springer, New York.
- SUQUET, P. (1997). *Continuum Micro-mechanics*, volume 397 de *CISM Courses and Lectures Notes*. Springer, Berlin.

- SUTTON, M. A., YAN, J. H., TIWARI, V., SCHREIER, H. W. et ORTEU, J. J. (2008). The effect of out-of-plane motion on 2d and 3d digital image correlation measurements. *Optics and Lasers in Engineering*, 46:746–757.
- TA, Q. A., CLOUTEAU, D. et COTTEREAU, R. (2010). Modeling of random anisotropic elastic media and impact on wave propagation. *European Journal of Computational Mechanics*, 19:241–253.
- TAN, M. T., TIAN, G. L. et NG, K. W. (2010). *Bayesian Missing Data Problems, EM, Data Augmentation and Noniterative Computation*. Chapman & Hall/ CRC Press, Boca Raton.
- TOOTKABONI, M. et GRAHAM-BRADY, L. (2010). A multi-scale spectral stochastic method for homogenization of multi-phase periodic composites with random material properties. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83:59–90.
- TORQUATO, S. (2002). *Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer, New York.
- VENDROUX, G. et KNAUSS, W. G. (1998a). Submicron deformation field measurements : Part 1. developing a digital scanning tunnelling microscope. *Experimental Mechanics*, 38:18–23.
- VENDROUX, G. et KNAUSS, W. G. (1998b). Submicron deformation field measurements : Part 2. improved digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 38:86–92.
- WALTER, E. et PRONZATO, L. (1997). *Identification of Parametric Models from Experimental Data*. Springer.
- WANG, J. B. et ZABARAS, N. (2004). A bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem. *Int. J. Heat Mass Transf*, 47(17-18):3927–3941.
- WANG, J. B. et ZABARAS, N. (2005). Hierarchical Bayesian models for inverse problems in heat conduction. *Inverse Probl.*, 21 (1):183–206.
- WEINBERGER, C., CAI, W. et BARNETT, D. (2005). *Elasticity of Microscopic Structures*. Lecture Notes. Stanford University.
- WILLIS, J. R. (1964). Anisotropic elastic inclusion problems. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 17.
- WRIGGERS, P. et MOFTAH, S. O. (2006). Mesoscale models for concrete : Homogenisation and damage behaviour. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42:623–636.
- XU, X. F. et CHEN, X. (2009). Stochastic homogenization of random elastic multi-phase composites and size quantification of representative volume element. *Mechanics of Materials*, 41:174–186.



- YAMAGUCHI, H., KIKUGAWA, H., ASAKA, T., KASUYA, H. et KUNINORI, M. (2011). Measurement of cortical bone strain distribution by Image Correlation Techniques and from fracture toughness. *Materials Transactions*, 52(5):1026–1032.
- YANG, D. S., BORNERT, M., CHANCHOLE, S., GHARBI, H., VALLI, P. et GATMIRI, B. (2012). Dependence of elastic properties of argillaceous rocks on moisture content investigated with optical full-field strain measurement techniques. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 53:45–55.
- YANG, D. S., BORNERT, M., GHARBI, H., VALLI, P. et WANG, L. (2010). Optimized optical setup for dic in rock mechanics. *14th International Conference on Experimental Mechanics*.
- YU, W. et TANG, T. (2007). Variational asymptotic method for unit cell homogenization of periodically heterogeneous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 44:3738–3755.
- ZAOUI, A. (2002). Continuum micromechanics : Survey. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 128:808–816.