



**HAL**  
open science

# Modélisation numérique des écoulements gravitaires viscoplastiques avec transition fluide/solide

Christelle Lusso

► **To cite this version:**

Christelle Lusso. Modélisation numérique des écoulements gravitaires viscoplastiques avec transition fluide/solide. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2013. Français. NNT: . tel-00977866v1

**HAL Id: tel-00977866**

**<https://theses.hal.science/tel-00977866v1>**

Submitted on 15 Apr 2014 (v1), last revised 29 Jun 2016 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ECOLE DOCTORALE MSTIC  
MATHEMATIQUES, SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DE LA COMMUNICATION

# THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

**Docteur de l'Université Paris-Est**  
Mention : Mathématiques Appliquées

par Christelle LUSSO

## Modélisation numérique des écoulements gravitaires viscoplastiques avec transition fluide/solide

Thèse dirigée par François Bouchut et Alexandre Ern  
préparée au CERMICS, Université Paris-Est (ENPC)

Soutenue le 19 décembre 2013

### Jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Didier Bresch	- LAMA & CNRS, Université de Savoie
	Jacques Sainte-Marie	- INRIA, Paris-Rocquencourt
<i>Examineurs :</i>	Anne Mangeney	- IPGP, Paris
	Ioan Ionescu	- LPMTM & CNRS, Université Paris 13
	Robert Eymard	- LAMA, Université Marne-la-Vallée
<i>Directeurs de thèse :</i>	François Bouchut	- LAMA & CNRS, Université Paris-Est
	Alexandre Ern	- CERMICS, Université Paris-Est (ENPC)



# Modélisation numérique des écoulements gravitaires viscoplastiques avec transition fluide/solide

---

## Résumé

---

Nous nous intéressons à la modélisation et à la simulation numérique d'écoulements gravitaires transitoires à surface libre, pour des fluides visqueux et incompressibles. La loi de comportement est de type viscoplastique avec transition fluide/solide. Plus précisément, nous considérons la loi rhéologique de Drucker–Prager. Nous nous intéressons tout d'abord le cas unidimensionnel d'un écoulement longitudinal cisailé. Nous étudions un modèle simplifié, avec terme source empirique, pour lequel nous concevons une méthode numérique pour le suivi de la position de l'interface entre la couche solide et la couche fluide. Nous présentons des résultats numériques, avec divers termes sources, et nous comparons ces résultats, lorsque la viscosité est petite, à la solution analytique non visqueuse. Dans le cas visqueux, nous étudions les phases de démarrage et d'arrêt de l'écoulement. Dans un second temps, nous étudions le cas bidimensionnel d'écoulement de Drucker–Prager avec surface libre. La loi de comportement du fluide est traitée par régularisation, et nous utilisons la méthode ALE pour traiter le mouvement du domaine. Nous présentons des résultats numériques pour l'étude de la mise en mouvement d'un talus.

---

## Mots clés

---

Écoulement géophysique, viscoplasticité, Drucker–Prager, transition fluide/solide, dynamique d'interface, simulation numérique.



# Numerical modeling of viscoplastic gravity flows with fluid/solid transition

---

## Abstract

---

This thesis deals with the modeling and numerical simulation of transient free-surface gravity flows, for viscous and incompressible fluids. The constitutive law is viscoplastic, with fluid/solid transition. More precisely, we consider the Drucker–Prager rheological law. We first study the case of a one-dimensional shear flow. We investigate a simplified model, with an empirical source term, for which we develop a numerical method to compute the position of the solid/fluid interface. We present numerical results for various source terms, and compare, in the case of small viscosity, our results to the inviscid analytical solution. In the viscous case, we study the case of a two-dimensional Drucker–Prager flow with free surface. The constitutive law of the fluid is regularized, and the ALE method is used to treat the displacement of the domain. Numerical results are presented for the setting in motion of an embankment.

---

## Keywords

---

Geophysic flow, viscoplasticity, Drucker–Prager, fluid/solid transition, interface dynamics, numerical simulation.



*À mes parents.*





## Remerciements

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à mes directeurs de thèse, François Bouchut et Alexandre Ern, auxquels j'exprime toute ma gratitude. Merci d'avoir accepté d'encadrer cette thèse, me donnant l'opportunité de réaliser ce travail dans d'excellentes conditions, de bénéficier de conseils avisés et d'une aide inestimable. Ils se sont toujours montrés très disponibles, à l'écoute et patients. Je leur exprime mes plus vifs remerciements.

Je voudrais exprimer une profonde reconnaissance envers Jacques Saint-Marie et Didier Bresch qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je suis également très reconnaissante à l'égard des membres du jury : Ioan Ionescu, Anne Mangeney et Robert Eymard, et je suis très honorée de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Je remercie chaleureusement Ioan Ionescu pour son aide précieuse, sa patience et ses encouragements, lors d'échanges que nous avons eu au début de cette thèse. Je remercie très vivement Anne Mangeney pour sa collaboration et son enthousiasme sans faille, qui a toujours été très stimulant et m'a remotivée dans les moments de doute et de découragement que tout thésard vit, à un moment ou à un autre, au cours de ses trois (longues) années de thèse. Également merci à Robert Eymard pour ses conseils de dernière minute.

Je remercie tous les membres du laboratoire du CERMICS, avec qui j'ai pu partager des discussions, des déjeuners ou simplement un café, pour leur accueil. Ma gratitude s'adresse ainsi à Jean-François Delmas et Benjamin Jourdain, qui nous ont fait sourire... par leurs fous rires, Frédéric Meunier, Régis Monneau, Aurélien Alfonsi, Eric Cancès... pour leur aide ou leur soutien ponctuel. Un grand merci à Michel De Lara, Jean-Philippe Chancelier et Gabriel Stoltz qui m'ont permis d'enseigner à l'École des Ponts et à l'École des Mines. Je tiens à remercier très chaleureusement Laurent Monasse qui a été très attentif et bienveillant envers moi, et qui a su m'apaiser lorsque j'étais trop angoissée. Je remercie sincèrement Tony Lelièvre qui s'est rendu disponible, aimable, et m'a également beaucoup apporté durant cette thèse. Sans oublier Virginie Ehrlacher pour son écoute, son aide, et sa bienveillance de tous les instants.

Que soient remerciés ici mes collègues doctorants, compagnons de galère ! En particulier, ceux qui furent à un moment donné mes co-bureau, comme David, Adela, Fabien... et qui m'ont supportée d'autant plus. Merci pour leur soutien et leur aide à tous niveaux. Un immense merci à tous les autres doctorants du CERMICS : Pauline, David, William, Pierre, Clément, Julien, Richard, Thomas, Jérôme, Yannick, Arnaud, Guillaume, Charline... avec qui j'ai pu partager des goûters et des parties de pétanque ensoleillées à la pause déjeuner. Une pensée pour les anciens doctorants : Salma, Julie, et en particulier pour les copains : Rémi, Olivier, Maxence, Ronan, Patrick, José, Abdel... avec qui fut instaurée la tradition du verre du Vendreday, aux Pères Populaires et à la Perla. Enfin, les doctorants du LAMA : Xavier, Pierre,

Harry. À tous, merci de m'avoir supportée jusqu'au bout !

Je tiens aussi à saluer Jacques Daniel pour le support informatique, tant au niveau du matériel professionnel que pour les difficultés linuxiennes personnelles. Sans oublier Catherine et Nathalie au secrétariat du CERMICS, ainsi que Sylvie Cach, pour leur aide tant administrative qu'humaine.

À mes parents, qui m'ont soutenue tout au long de mes études à l'aveuglette, merci pour leur confiance et leur patience.

Enfin, merci à ceux qui lisent ces lignes présentement, d'y trouver quelque intérêt.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation géophysique . . . . .	1
1.2	Équations de Navier–Stokes incompressibles . . . . .	3
1.3	Écoulements en régime de couche mince . . . . .	6
1.4	Rhéologie . . . . .	7
1.4.1	Modèles physiques . . . . .	7
1.4.2	Fluides à seuil . . . . .	8
1.4.3	Critère de plasticité (Drucker–Prager) . . . . .	9
1.4.4	Méthodes numériques . . . . .	10
1.5	Plan de la thèse . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Écoulement unidimensionnel avec transition</b>	<b>13</b>
2.1	Modèle de Drucker–Prager . . . . .	13
2.1.1	Description du domaine . . . . .	13
2.1.2	Équations de conservation . . . . .	14
2.2	Changement de coordonnées . . . . .	16
2.2.1	Nouveau système de coordonnées . . . . .	16
2.2.2	Reformulation des équations . . . . .	20
2.3	Solution longitudinale avec pression hydrostatique et transition . . . . .	22
2.3.1	Reformulation des équations . . . . .	22
2.3.2	Étude du cas non visqueux . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Modèle unidimensionnel avec terme source</b>	<b>33</b>
3.1	Asymptotique de couche mince du modèle de Drucker–Prager . . . . .	34

3.2	Formulation du modèle avec terme source . . . . .	35
3.3	Étude analytique du cas non visqueux . . . . .	39
3.3.1	Cas $b^*(t)$ croissant . . . . .	40
3.3.2	Cas $b^*(t)$ strictement décroissant avec $b^0 = b^*(0)$ . . . . .	45
3.3.3	Cas $b^*(t)$ décroissant avec $b^0 < b^*(0)$ . . . . .	48
3.3.4	Cas particulier : $b(t)$ discontinu . . . . .	52
3.4	Méthodes numériques pour le cas avec viscosité . . . . .	55
3.4.1	Changement de variable . . . . .	55
3.4.2	Différences finies en espace et en temps . . . . .	56
3.4.3	Méthode pour le suivi d'interface . . . . .	58
3.5	Résultats numériques pour le cas avec viscosité . . . . .	59
3.5.1	Étude de convergence . . . . .	60
3.5.2	Comportement en temps long . . . . .	62
3.5.3	Étude du régime transitoire . . . . .	72
3.6	Étude de l'arrêt de l'écoulement . . . . .	79
3.6.1	Formulation sous forme d'inéquation variationnelle . . . . .	80
3.6.2	Discrétisation de l'inéquation variationnelle . . . . .	81
3.6.3	Comparaison avec l'approche précédente . . . . .	82
3.6.4	Résultats numériques pour l'arrêt de l'écoulement . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Simulation d'écoulements bidimensionnels</b>	<b>87</b>
4.1	Formulation du modèle . . . . .	87
4.1.1	Équations et conditions aux limites . . . . .	87
4.1.2	Régularisation et formulation variationnelle . . . . .	89
4.2	Formulation ALE . . . . .	91
4.2.1	Principe général . . . . .	91
4.2.2	Traitement de la dérivée temporelle . . . . .	93
4.2.3	Formulation variationnelle par la méthode ALE . . . . .	95
4.2.4	Reconstruction de la vitesse du domaine . . . . .	95
4.3	Discrétisation du problème . . . . .	96
4.3.1	Discrétisation en temps . . . . .	96

4.3.2	Discrétisation en espace . . . . .	98
4.3.3	Discrétisation du mouvement du domaine . . . . .	100
4.4	Vérification numérique . . . . .	105
4.5	Étude de la mise en mouvement d'un talus . . . . .	111
4.5.1	Configuration . . . . .	111
4.5.2	Adaptation du maillage . . . . .	113
4.5.3	Simulations numériques . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>123</b>



# INTRODUCTION

---

<b>1.1</b>	<b>Motivation géophysique . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Équations de Navier–Stokes incompressibles . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>1.3</b>	<b>Écoulements en régime de couche mince . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.4</b>	<b>Rhéologie . . . . .</b>	<b>7</b>
1.4.1	Modèles physiques . . . . .	7
1.4.2	Fluides à seuil . . . . .	8
1.4.3	Critère de plasticité (Drucker–Prager) . . . . .	9
1.4.4	Méthodes numériques . . . . .	10
<b>1.5</b>	<b>Plan de la thèse . . . . .</b>	<b>11</b>

---

## 1.1 Motivation géophysique

Un nombre important d’écoulements rencontrés en géophysique fait intervenir des matériaux granulaires. De tels écoulements, appelés *écoulements granulaires*, ont fait l’objet de nombreux travaux [3, 58, 70, 73, 77, 112, 118]. Des exemples en géophysique sont les mouvements des dunes de sable, les écoulements pyroclastiques [68, 79, 82, 121] lors des éruptions volcaniques, les glissements de terrain, ou encore les avalanches de neige [10, 44, 76, 111]. Les écoulements granulaires interviennent également dans de nombreuses applications industrielles comme l’activité minière, le bâtiment et le génie civil (e.g. coulées de béton), ainsi que dans l’industrie agroalimentaire et pharmaceutique, sous forme de poudre (médicaments, sel, sucre...) ou de suspension (crèmes, soupes, compotes...) [38, 44, 98, 115].

En géophysique, les écoulements sont généralement induits par la force de pesanteur. Dans un tel cas, la mise en mouvement du système est uniquement due à cette force motrice, en partant d’une situation initiale instable. Ce type d’écoulement est appelé *écoulement gravitaire*. Pour une étude des écoulements gravitaires, on pourra consulter en particulier [5, 19, 131]. Deux illustrations de ce type d’écoulement sont présentées à la figure 1.1. Les écoulements granulaires qui surviennent



en milieu naturel, dans les zones de montagne notamment, peuvent se produire à proximité de zones urbaines. De tels aléas naturels présentent un risque majeur par l'ampleur des dégâts humains et matériels qu'ils peuvent générer. La description et la prédiction de ces événements recouvrent donc des enjeux considérables en terme d'évaluation des risques et de prévention.



FIGURE 1.1 – Coulées gravitaires.

Les écoulements gravitaires granulaires [78, 125] mettent en jeu des phénomènes physiques complexes et la rhéologie des matériaux associés est décrite par des modèles délicats à manipuler [2, 4, 84, 85]. En effet, les problèmes considérés en géophysique font souvent intervenir des couplages entre matériaux ayant des rhéologies différentes [83]. En particulier, dans les écoulements gravitaires que nous considérons, les couplages interviennent par la présence de plusieurs phases au sein d'un même fluide. Dans une telle configuration, les écoulements présentent une même caractéristique essentielle, celle de *transition* entre des comportements statiques et des comportements mobiles [14, 52]. Un exemple typique est le phénomène d'avalanches de neige. Pour ces régimes de transition, entre un *état statique* et un *état mobile*, la détermination de la position de l'interface de transition est un des éléments fondamentaux dans la prédiction de l'écoulement. L'étude de la transition statique/mobile est un enjeu essentiel aussi bien en géophysique pour la prévention des risques naturels et la préservation de l'environnement, que dans l'industrie, où la capacité d'un fluide à passer d'un état solide à un état liquide est bien souvent déterminante pour la qualité et la performance des processus industriels.

Au voisinage de cette transition statique/mobile, le comportement de l'écoulement est difficile à analyser. Actuellement, aucune théorie ne permet de décrire de manière rigoureuse cette transition. Il en découle des difficultés, au niveau de la modélisation et de la simulation de ce type d'écoulements transitoires. Les modèles présentent en particulier des non linéarités issues de la modélisation de la transition

de phase. Par ailleurs, le comportement en temps court et long de cette transition est important afin de décrire les phases de démarrage et d'arrêt de l'écoulement. Ces phases jouent un rôle important dans la dynamique d'un écoulement naturel [91, 107]. La transition d'une phase statique à une phase mobile, précédée d'une phase de déstabilisation, correspond à un démarrage. La transition d'une phase fluide à solide correspond à l'arrêt, suivi d'une phase de stabilisation où le matériau atteint l'équilibre au repos [29].

Les écoulements géophysiques ont également la propriété de présenter une *surface libre*, lieu de contact direct entre le milieu considéré et l'atmosphère. Cette configuration est bien connue dans le domaine des canaux, des rivières ou des grandes étendues d'eau comme les lacs, les mers ou les océans. Par opposition, les écoulements dits "en charge" sont ceux dans lesquels le fluide emplit complètement une canalisation ou une conduite. En écoulement à surface libre, il est souvent possible de négliger l'action du fluide ambiant (l'air) et les termes de tension surfacique, hypothèse que nous ferons par la suite.

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux écoulements à surface libre [48, 128]. Une difficulté dans la simulation de ce type d'écoulements se situe au niveau du mouvement de la surface libre, et notamment de prédire sa position et sa vitesse. À cette fin, des travaux focalisés sur l'étude de la surface libre d'un écoulement ont été menés tant au niveau expérimental, dans des configurations simples d'écoulements parallèles [95, 99], qu'au niveau numérique [122]. De plus, plusieurs travaux récents se sont intéressés à une description de type couche mince multi-couches [7, 8, 31], en vue d'une meilleure compréhension de la dynamique de ces systèmes.

En résumé, les difficultés dans l'étude des écoulements gravitaires transitoires à surface libre sont liées tout d'abord à la complexité des équations mises en jeu, faisant intervenir des modèles rhéologiques décrivant des comportements visco-élastoplastiques. À cela s'ajoute le fait que les événements considérés font intervenir de grandes échelles de temps et d'espace. Enfin, le traitement de la surface libre pose une difficulté supplémentaire.

## 1.2 Équations de Navier–Stokes incompressibles

Nous nous intéressons aux équations régissant les écoulements de fluides visqueux incompressibles. Ces équations portent le nom de Navier–Stokes [127], et sont utilisées pour la modélisation et la simulation des écoulements incompressibles, en particulier à surface libre.

Toutes les équations fondamentales en mécanique se déduisent de bilans sur des volumes de contrôle de grandeurs conservatives : masse, quantité de mouvement (et énergie). Ainsi, les équations de Navier–Stokes résultent du principe de conservation

de la masse et de la quantité de mouvement (ou du principe fondamental de la dynamique).

Nous nous plaçons dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n \in \{1, 2, 3\}$ . Pour l’instant, nous supposons pour simplifier cet exposé introductif, que le domaine  $\Omega$  ne dépend pas du temps. Le temps d’observation ou de simulation de l’écoulement est noté  $T$ . L’équation traduisant le principe de conservation de la masse, appelée équation de continuité, est la suivante :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad \text{sur } ]0, T[ \times \Omega, \quad (1.1)$$

avec  $\rho$  la masse volumique et  $\vec{U}$  la vitesse du fluide. Par ailleurs, l’équation traduisant le principe de conservation de la quantité de mouvement est la suivante :

$$\partial_t(\rho \vec{U}) + \operatorname{div}(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) - \operatorname{div} P = \vec{f} \quad \text{sur } ]0, T[ \times \Omega, \quad (1.2)$$

avec  $P$  le tenseur des contraintes (qui est symétrique), et  $\vec{f}$  la densité d’efforts extérieurs (résultant de la gravité dans les écoulements que nous considérons), l’équation (1.2) combinée avec (1.1) se réécrit sous la forme non conservative

$$\rho \left( \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right) - \operatorname{div} P = \vec{f} \quad \text{sur } ]0, T[ \times \Omega. \quad (1.3)$$

Dans le cas d’un fluide incompressible, la masse volumique est constante, et l’équation de continuité (1.1) se simplifie sous la forme

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad \text{sur } ]0, T[ \times \Omega. \quad (1.4)$$

L’équation (1.4) est appelée condition d’incompressibilité. Dans le cas d’écoulements incompressibles, le tenseur des contraintes s’écrit sous la forme

$$P = \sigma - p \operatorname{Id}, \quad (1.5)$$

avec  $p$  la pression,  $\sigma$  la partie déviatorique (symétrique à trace nulle) du tenseur des contraintes. Enfin, en utilisant l’équation (1.2) et l’équation d’incompressibilité (1.4), nous en déduisons l’équation de conservation de l’énergie

$$\partial_t \left( \rho \frac{\vec{U}^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left( \left( \rho \frac{\vec{U}^2}{2} + p \right) \vec{U} \right) - (\operatorname{div} \sigma) \cdot \vec{U} = \vec{f} \cdot \vec{U} \quad \text{sur } ]0, T[ \times \Omega. \quad (1.6)$$

La description du comportement du fluide nécessite aussi une loi de comportement rhéologique, encore appelée équation constitutive. La loi de comportement rhéologique d’un fluide exprime le tenseur des contraintes en fonction de l’état du fluide, et plus précisément en fonction de la pression  $p$  et du tenseur de taux de déformation  $D\vec{U}$  donné par

$$D\vec{U} = \frac{\nabla \vec{U} + \nabla \vec{U}^t}{2}. \quad (1.7)$$

Nous notons que ce tenseur est symétrique, et à trace nulle pour un fluide incompressible. Un fluide est dit *Newtonien* lorsque sa vitesse de déformation est proportionnelle à la contrainte qui lui est appliquée, le quotient de proportionnalité étant la viscosité. La plupart des fluides, comme l'air ou l'eau, se comportent comme des fluides Newtoniens. Certains fluides, tels que la lave ou le miel, ont en revanche un comportement plus complexe, et sont qualifiés de non-Newtoniens. Plus précisément, pour les fluides Newtoniens, la partie déviatorique du tenseur des contraintes dépend de manière linéaire du tenseur des déformations, sous la forme

$$\sigma = 2\nu D\vec{U},$$

avec  $\nu$  la viscosité. Dans le cas de fluides non-Newtoniens, la partie déviatorique du tenseur des contraintes est reliée de manière non linéaire au tenseur de taux de déformation et à la pression, sous la forme

$$\sigma = 2\nu D\vec{U} + F(D\vec{U}, p), \quad (1.8)$$

avec  $F$  une fonction non linéaire. Dans le cadre de cette thèse, nous considérons des fluides non-Newtoniens.

Pour fermer le système, il reste à imposer des conditions aux limites et une condition initiale. Les conditions aux limites sont appliquées sur  $\Gamma$  le bord du domaine  $\Omega$ . Dans nos applications, le bord comprend un fond, des bords latéraux et une surface libre. Des conditions de type Dirichlet sur la vitesse, ou de type Neumann peuvent être imposées sur les bords latéraux. Sur le fond, la vitesse vérifie une condition de non-pénétration et une condition de non-glissement. Il s'ensuit que la vitesse du fluide est nulle au fond du domaine

$$\vec{U} = 0 \quad \text{au fond.} \quad (1.9)$$

En ce qui concerne la surface libre, il y a deux conditions à écrire. D'une part, pour une surface libre en contact avec un gaz à pression constante comme l'atmosphère, et en supposant que les effets de tension de surface sont négligeables, nous obtenons une condition de tension nulle à la surface libre

$$(p\text{Id} - \sigma)\vec{N} = 0 \quad \text{à la surface libre,} \quad (1.10)$$

où  $\vec{N}$  est un vecteur normal à la surface libre qui est conventionnellement orientée vers l'extérieur du domaine. D'autre part, nous disposons également d'une condition cinématique exprimant le fait que la surface libre est transportée par le mouvement du fluide. En notant  $X$  un point du domaine et  $t$  le temps, l'équation de la surface libre s'écrit  $G(t, X) = 0$ . La condition cinématique s'écrit alors

$$\frac{d}{dt}G(t, X) = 0, \quad (1.11)$$

où  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla$  dénote la dérivée matérielle. Comme  $(\partial_t G, \nabla_X G)$  est proportionnel à  $(N_t, N_X)$  la normale temps-espace à la surface, cela s'écrit aussi  $N_t + \vec{U} \cdot N_X = 0$  à la surface libre. Enfin, une condition initiale est spécifiée par la donnée d'un champ de vitesse initial  $\vec{U}|_{t=0} = \vec{U}_0$ .

### 1.3 Écoulements en régime de couche mince

Au delà des difficultés intrinsèques de simulation des équations de Navier–Stokes incompressibles avec des rhéologies non-Newtoniennes, la complexité tient également au fait que les phénomènes considérés en géophysique se propagent sur des distances relativement grandes. Les dimensions caractéristiques des problèmes étudiés motivent l'utilisation de modèles plus simples, afin notamment de réduire les coûts de calcul. Une approche simplifiée consiste à considérer des écoulements en couche mince, c'est à dire où la couche en mouvement est d'épaisseur fine devant les longueurs caractéristiques de l'écoulement.

Pour modéliser ce type d'écoulements, dits en "eaux peu profondes" (ou "shallow water" en anglais), les équations de Saint–Venant [60] sont classiquement utilisées. Le système de Saint–Venant a été initialement introduit dans un cadre unidimensionnel en 1871 [17]. Plus généralement, le système de Saint–Venant est un système hyperbolique (voir [25, 66]) décrivant l'écoulement d'un fluide dans un canal rectiligne, à fond peu variable. La longueur d'eau est supposée grande par rapport à la hauteur d'eau, ce qui permet de négliger les variations verticales du profil de vitesse, et de ne prendre en compte que les variations longitudinales. Le système s'écrit en termes de hauteur d'eau  $h(t, x)$  et de vitesse moyennée selon la direction verticale  $u(t, x)$  sous la forme

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) &= \text{termes sources}, \end{aligned}$$

où  $g$  désigne la gravité, et  $x$  la variable longitudinale. Les équations de Saint–Venant sont généralement obtenues à partir des équations d'Euler incompressibles [87], ou à partir des équations de Navier–Stokes incompressibles [29, 30, 34, 37, 60, 92], par différentes techniques telles que la méthode de moyennisation directe, ou encore l'analyse asymptotique [47]. Une des principales applications des équations de Saint–Venant concerne la modélisation des écoulements gravitaires en géophysique, où une couche de matériau de quelques dizaines de mètres s'écoule sur des kilomètres de distance [90].

De nombreux modèles, fondés sur les équations de Saint–Venant ou des variantes, ont été dérivés [27, 29, 47], et mis en œuvre afin de décrire différents cas d'écoulements à surface libre [9, 91, 119, 130]. Les équations de type Saint–Venant,

dans le contexte des écoulements granulaires, ont été introduites par Savage et Hutter en 1989 [119]. Ces auteurs ont proposé d'intégrer la loi de comportement du matériau granulaire dans les équations de mouvement de type de Saint–Venant. Il s'ensuit un "modèle granulaire" plus complexe, permettant de décrire l'écoulement de masses granulaires en couches minces [117]. Le modèle de Savage–Hutter et ses extensions [32, 30, 91, 110] permettent ainsi de modéliser des écoulements peu profonds, à surface libre, et présentant des changements de phase décrits par une loi de comportement.

## 1.4 Rhéologie

### 1.4.1 Modèles physiques

L'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière, sous l'effet d'une contrainte qui lui est appliquée, constitue la discipline appelée rhéologie [13, 69, 89]. Cette discipline, a connu un développement considérable avec l'apparition des polymères synthétiques. Les modèles rhéologiques établissent les *lois de comportement* d'un matériau [46, 78, 118], c'est à dire leur réponse à une sollicitation mécanique. Les comportements de base des matériaux sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité. Ces trois types de comportement peuvent être combinés pour former différents modèles rhéologiques [93, 108]. Parmi tous les types de comportement, aux deux extrêmes se trouvent le solide élastique (régé par la loi de Hooke) et le fluide visqueux. Pour un solide élastique, la déformation du matériau est proportionnelle à la contrainte appliquée. Pour un fluide visqueux, c'est la vitesse de déformation qui est proportionnelle à la contrainte appliquée. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à la classe de matériaux fluides ayant un comportement visqueux [40].

La rhéologie d'un fluide dépend du champ de pression et des vitesses de déformation. La vitesse de déformation d'un fluide est mesurable par le tenseur des taux de déformation  $D\vec{U}$  introduit ci-dessus. Ainsi, la loi de comportement d'un fluide établit une relation entre le tenseur des taux de déformation, la pression et les contraintes internes au fluide, représentées par le tenseur de contraintes  $P$ . Dans le cas d'un fluide non Newtonien incompressible, la relation entre contraintes et déformations est de la forme

$$P = 2\nu D\vec{U} + F(D\vec{U}, p) - p\text{Id}.$$

La donnée de la fonction  $F$  détermine alors la loi de comportement du fluide.

Parmi les grandes classes de comportement se trouvent les modèles rhéologiques *viscoplastiques*, tels que le modèle Maxwell [93], le modèle d'Herschel-Bulkley [24, 71], le modèle de Bingham [22] (cas particulier du modèle d'Herschel-Bulkley), ou le modèle de Norton–Hoff pour les grandes déformations [75, 102]. La viscoplasticité [2, 126] est la capacité d'un matériau à se comporter comme s'il était composé

d'un fluide visqueux et d'un solide plastique. Les déformations d'un matériau viscoplastique sont irréversibles. Les matériaux viscoplastiques sont impliqués dans une large classe de processus industriels et d'écoulements géophysiques. Les polymères possèdent en général un tel comportement, c'est aussi le cas des métaux à hautes températures notamment, de la pâte à dentifrice, et des avalanches granulaires.

### 1.4.2 Fluides à seuil

Dans le cas d'un comportement viscoplastique [24, 43, 104], l'écoulement n'a lieu qu'au-delà d'une certaine valeur de contrainte à appliquer sur le fluide, dite seuil d'écoulement, seuil de plasticité, contrainte critique ou contrainte seuil (en anglais "yield stress"), qui s'exprime en termes de friction. La notion de seuil d'écoulement est documentée dès le début du XX<sup>ème</sup> siècle, dans la formulation monodimensionnelle, plastique viscoélastique, du modèle de Maxwell pour l'étude d'une suspension de gélatine [120]. Ce modèle a été à la base du développement de la rhéologie viscoplastique. Le seuil d'écoulement est communément décrit comme étant la contrainte en dessous de laquelle aucun écoulement n'est observable dans les conditions d'expérimentation [15]. Les écoulements granulaires denses font partie de la vaste famille des fluides à seuil, comme la boue, la mousse à raser ou le dentifrice, qui ne peut en général sortir de son tube sous le seul effet de son propre poids sans qu'aucune contrainte ne lui soit appliquée.

Parmi les fluides ayant la propriété d'effet de seuil, se trouvent les fluides de Bingham [22, 23, 109]. La loi de Bingham [26, 39, 51, 81] est la plus simple des lois de fluide à seuil, et régit les fluides dits rigides viscoplastiques. Les phénomènes naturels faisant intervenir les fluides viscoplastiques sont nombreux, comme par exemple les coulées de boue ou les coulées pyroclastiques. Ce type de fluide présente un comportement de solide parfait (non déformable) sous faibles contraintes, et un comportement de fluide visqueux au delà d'un seuil d'écoulement. La loi de Bingham peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\nu D\vec{U} + \sigma_c \frac{D\vec{U}}{\|D\vec{U}\|} & \text{si } \|D\vec{U}\| \neq 0, \\ \|\sigma\| &\leq \sigma_c & \text{si } \|D\vec{U}\| = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

où  $\sigma_c$  représente le seuil d'écoulement, et la norme  $\|\cdot\|$  est la norme de Frobenius. Plusieurs écoulements granulaires ou gravitaires, vus comme des fluides viscoplastiques, peuvent être modélisés par cette loi de comportement [72, 80, 100, 129]. En ce qui concerne les écoulements que nous considérons dans cette thèse, il faut prendre en compte le phénomène de transition interne au fluide. La modélisation de cette transition nécessite l'introduction d'un critère de plasticité.



### 1.4.3 Critère de plasticité (Drucker–Prager)

Un critère de plasticité est un critère permettant de savoir, sous des sollicitations données, si un matériau se déforme plastiquement ou non. Deux critères de plasticité sont couramment utilisés : le critère de Mohr–Coulomb [42, 94, 98] et le critère de Drucker–Prager [49, 50, 108]. Ces deux critères sont basés sur un critère de friction, et font intervenir la pression.

Le modèle de Mohr–Coulomb [3] décrit la réponse de matériaux fragiles (casants), tels que le béton par exemple, et fournit un critère de rupture. Ce critère de rupture détermine sous quelles conditions le matériau cède. En ingénierie géotechnique, il est utilisé pour évaluer la résistance au cisaillement des sols, des roches, sous l'effet de contraintes. Dans le contexte des milieux granulaires, le modèle de Mohr–Coulomb est un des premiers modèles introduits pour décrire le comportement des matériaux sous contraintes. Le modèle s'exprime par un critère de rupture sur les contraintes uniquement, se basant sur le concept de friction. Dans le cas d'un plan incliné, cela se traduit par l'existence d'un angle critique en dessous duquel il n'y a pas d'écoulement. La tangente de l'angle du talus donne une idée de la valeur du coefficient de friction effectif du matériau. En notant  $\theta$  l'angle d'inclinaison, le critère de rupture stipule que le matériau cède au point  $X$ , s'il existe en ce point un plan, repéré par sa normale  $\vec{N}$ , selon lequel

$$|\tau| = (\tan \theta)\varsigma + c, \quad (1.13)$$

où  $\tau$ ,  $\varsigma$  sont les contraintes normale et tangentielle, et  $c$  est la contrainte de cisaillement.

Le critère de Drucker–Prager [50] est un critère faisant intervenir la pression hydrostatique, qui a été introduit initialement pour étudier la déformation plastique des sols, des roches, mais aussi d'autres matériaux pour lesquels la pression hydrostatique a un effet sur le comportement plastique [86, 88]. Ce critère a été largement utilisé en ingénierie géotechnique et en mécanique de l'endommagement continu, pour prédire des forces de résistance, ou un potentiel plastique. Ce critère a été établi comme un généralisation du critère de Mohr–Coulomb. Il est similaire au critère de Mohr–Coulomb mais est mathématiquement plus régulier. Dans le cadre de cette thèse, nous considérons le critère de Drucker–Prager sous la forme

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{\|D\vec{U}\|} & \text{si } \|D\vec{U}\| \neq 0, \\ \|\sigma\| &\leq \kappa & \text{si } \|D\vec{U}\| = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

où  $\kappa$  représente la plasticité et est couplée à la pression sous la forme  $\kappa = \sqrt{2}\lambda[p]_+$ , où  $\lambda$  est un coefficient de friction, et  $[p]_+$  est la partie positive de la pression, celle-ci étant nulle au niveau du gaz en contact avec le fluide à la surface libre.



### 1.4.4 Méthodes numériques

Il y a principalement deux familles de méthodes de calcul pour les problèmes d'écoulement de fluide viscoplastique. La première est basée sur des formulations d'inéquations variationnelles. Cette approche a été développée par Duvaut et Lions [51] pour l'analyse mathématique des écoulements de Bingham. L'approche variationnelle a fait l'objet de nombreuses recherches du point de vue théorique [36, 57, 64, 65], permettant de démontrer la convergence de la méthode. Le principal avantage de cette technique est qu'elle permet de prendre en compte la discontinuité de la loi de comportement. La formulation par inéquation variationnelle aboutit à un problème de point selle. La méthode de résolution associée utilise une méthode de décomposition-coordination et un Lagrangien augmenté assurant de bonnes propriétés de convergence de l'algorithme [57]. La décomposition consiste à introduire une variable supplémentaire, représentant le tenseur des contraintes, et la coordination consiste à introduire un multiplicateur de Lagrange associé à la variable de décomposition additionnelle. Pour résoudre le problème de point selle associé, la méthode employée est un algorithme de type Uzawa [33]. Bien que la convergence de ces méthodes itératives ait été prouvée théoriquement sous certaines hypothèses, la convergence des algorithmes est lente.

La seconde famille de méthodes est fondée sur une régularisation de la loi de comportement rhéologique. Cette approche [1, 20, 26, 103], a été établie en vue de contourner la non-différentiabilité de la loi constitutive au voisinage du seuil d'écoulement. En introduisant un paramètre  $\epsilon > 0$ , les méthodes de régularisation permettent d'obtenir une loi constitutive continûment différentiable. L'utilisation de la méthode de Newton, sous sa forme classique, est ainsi possible. Dans notre contexte, l'équation constitutive (1.14) se réécrit, par la méthode de régularisation, sous la forme

$$\sigma_\epsilon = 2\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{\sqrt{D\vec{U}^2 + \epsilon^2}}. \quad (1.15)$$

D'un point de vue rhéologique, les modèles de régularisation sont plus proches de la réalité physique, puisque l'existence du seuil d'écoulement d'un fluide est largement controversée [14, 15]. D'un point de vue mathématique, la régularisation permet de rendre les calculs possibles (méthode de Newton), et d'obtenir des solutions proches de la réalité physique si le paramètre de régularisation est assez petit. D'autres modèles de régularisation ont été dérivés : le modèle exponentiel de Papanastasiou [103], le modèle de Bercovier et Engelman [20], le modèle "algébrique" d'Allouche, Frigaard et Sona [1].

## 1.5 Plan de la thèse

L'objectif du second chapitre est de présenter le cadre général dans lequel nous nous plaçons pour étudier un écoulement de fluide incompressible avec transition de phase. Nous présentons en détail les équations de conservation et la loi rhéologique. Pour les fluides que nous considérons, il s'agit des équations de Navier–Stokes incompressibles et de la loi de Drucker–Prager. Nous effectuons un changement de coordonnées  $(X, Z)$ , permettant de nous placer dans un repère tournant et réécrivons le problème dans les nouvelles coordonnées. Ce changement de coordonnées est effectué en vue de simplifier les équations dans certains régimes d'écoulement. Il nous permettra également d'opérer un développement asymptotique en couche mince au chapitre 3. Ensuite, nous nous intéressons au cas d'un mouvement longitudinal avec pression hydrostatique. Nous introduisons l'épaisseur de la couche solide  $b$ , qui est une inconnue du problème. Nous reformulons les équations et posons le problème uniquement dans la partie du fluide en mouvement, que nous appelons la couche fluide. Nous déterminons les conditions permettant d'obtenir l'équivalence entre le problème posé sur l'ensemble du domaine, et celui posé uniquement dans la couche fluide. Nous établissons également une condition d'écoulement dont l'interprétation physique est que les efforts de friction l'emportent sur ceux dus à la gravité, si bien que l'arrêt de l'écoulement est atteint en temps suffisamment long. Pour un tel mouvement longitudinal avec pression hydrostatique, nous disposons de la solution analytique lorsqu'il n'y a pas de viscosité. Nous étudions brièvement le comportement du fluide dans le cas non visqueux, et donnons une formule analytique pour le temps d'arrêt de cet écoulement.

Dans le troisième chapitre, nous étudions un modèle simplifié, avec terme source empirique, posé uniquement dans la direction transverse  $Z$ , et uniquement au sein de la couche fluide. Le rôle du terme source est d'agrèger plusieurs effets physiques dus à la friction et aux variations longitudinales en  $X$ , afin de pouvoir dégager les grandes tendances dans l'évolution de l'écoulement. Tout d'abord, nous présentons l'asymptotique en couche mince des équations du chapitre 2, afin de motiver l'introduction de ce terme source empirique, et de faire le lien avec ce qui précède. Puis, nous présentons le modèle avec terme source empirique et dégageons quelques propriétés de la solution en fonction des données. Ensuite, nous étudions le comportement du fluide lorsqu'il n'y a pas de viscosité, puisque dans ce cas, nous disposons de la solution analytique. En particulier, nous étudions l'influence du terme source sur le comportement de la solution et nous mettons en évidence l'influence du zéro en  $Z$  du terme source dans la dynamique de l'écoulement. Ensuite, nous passons au cas avec viscosité où nous ne disposons plus de solution analytique. Nous présentons la méthode numérique employée, le point clé étant le suivi de la position de l'interface entre la couche solide et la couche fluide. Nous présentons des résultats numériques, d'abord une étude de convergence dans le cas d'un terme source constant, puis une

étude du comportement en temps long, pour différentes formes de terme source et de son zéro en  $Z$ . Nous analysons également l'évolution de l'épaisseur de la couche solide au démarrage de l'écoulement. Pour clôturer ce chapitre, nous étudions le cas de l'arrêt de l'écoulement du fluide. Pour cela, nous reformulons le problème sous forme d'inéquation variationnelle et présentons des résultats numériques.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons au cas bidimensionnel. Nous revenons au modèle de base, sans terme source, ni changement de coordonnées. Nous présentons les équations du modèle en deux dimensions, la méthode de régularisation, ainsi que la formulation variationnelle du problème. La méthode de régularisation employée pour la loi de comportement permet de poser le problème sur l'ensemble du domaine fluide. Cette formulation diffère donc des chapitres 2 et 3, où le problème est posé uniquement dans la couche fluide. Ensuite, nous présentons la méthode utilisée pour prendre en compte le fait que le domaine possède une surface libre qui se déplace avec le temps. Il s'agit de la méthode Arbitrary Lagrangian Eulerian. Nous récrivons la formulation variationnelle dans le cadre de la méthode ALE. Cette méthode introduit un paramètre supplémentaire : la vitesse du domaine, qui peut être déterminée arbitrairement à l'intérieur du domaine tant qu'elle satisfait des conditions de compatibilité avec la vitesse du fluide au bord du domaine. Nous proposons une méthode simple (et classique) afin de déterminer la vitesse du domaine et effectuer le mouvement du maillage. Ensuite, nous discrétisons le problème en temps et en espace, et présentons des résultats numériques. Tout d'abord, nous procédons à une vérification numérique de la méthode dans un cas où la solution ne dépend pas de  $X$ , ce qui permet de comparer la solution bidimensionnelle à des solutions unidimensionnelles obtenues au chapitre 3. Enfin, nous nous intéressons à la simulation de la mise en mouvement d'un talus, plus particulièrement lors de la phase de démarrage de l'écoulement.

# ÉCOULEMENT UNIDIMENSIONNEL AVEC TRANSITION

---



---

<b>2.1</b>	<b>Modèle de Drucker–Prager</b>	<b>13</b>
2.1.1	Description du domaine	13
2.1.2	Équations de conservation	14
<b>2.2</b>	<b>Changement de coordonnées</b>	<b>16</b>
2.2.1	Nouveau système de coordonnées	16
2.2.2	Reformulation des équations	20
<b>2.3</b>	<b>Solution longitudinale avec pression hydrostatique et transition</b>	<b>22</b>
2.3.1	Reformulation des équations	22
2.3.2	Étude du cas non visqueux	30

---

## 2.1 Modèle de Drucker–Prager

Dans cette section, nous décrivons la configuration géométrique dans laquelle nous nous plaçons : un fond fixe avec une surface libre. Puis, nous présentons les équations qui régissent l'écoulement du fluide. Il s'agit d'équations de type Navier–Stokes incompressibles complétées par la loi rhéologique de Drucker–Prager, la seule force appliquée au système étant la gravité.

### 2.1.1 Description du domaine

Pour simplifier, nous nous plaçons en deux dimensions d'espace et nous considérons un domaine d'extension latérale infinie dont la frontière au fond est fixe, et la frontière en surface est mobile. Le domaine  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^2$  occupé par le fluide est donc dépendant du temps  $t$  et son évolution n'est pas connue *a priori*. La frontière au fond est notée  $\Gamma_b$  et est donnée par la topographie (qui est fixée), tandis que la frontière à la surface est notée  $\Gamma_{f,t}$  et elle dépend du temps. Nous notons  $\vec{X}$  un point générique

à l'intérieur du domaine  $\Omega_t$ . À chacun de ces points correspond une vitesse  $\vec{U}(t, \vec{X})$ , comme représenté sur la figure 2.1 à un temps  $t$  fixé. Les coordonnées cartésiennes du point  $\vec{X}$  sont notées  $(y, z)$ .

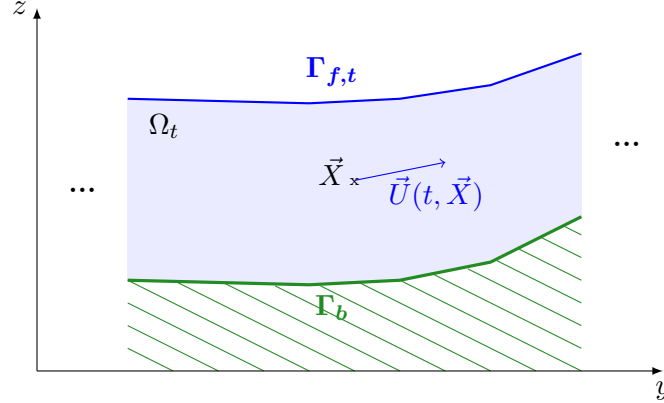


FIGURE 2.1 – Domaine occupé par le fluide au temps  $t$ .

### 2.1.2 Équations de conservation

Nous considérons un fluide visco-plastique incompressible dont la dynamique est régie par des équations de type Navier–Stokes incompressibles. Ces équations expriment la conservation de la masse et de l'impulsion. Les inconnues sont la vitesse  $\vec{U}(t, \vec{X})$  et la pression  $p(t, \vec{X})$  du fluide au point  $\vec{X} \in \Omega_t$  et à l'instant  $t \in [0, T]$ . La vitesse est à valeurs vectorielles  $\vec{U} = (U_y, U_z) \in \mathbb{R}^2$  et la pression  $p$  est à valeurs scalaires.

Soit  $T > 0$  un temps de simulation fixé. Les équations de conservation s'écrivent sous la forme

$$\rho(\partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla_{\vec{X}}) \vec{U}) + \operatorname{div}_{\vec{X}} P = \vec{f} \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega_t, \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{div}_{\vec{X}} \vec{U} = 0 \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega_t, \quad (2.1b)$$

où nous avons introduit le tenseur des contraintes  $P$  décrit ci-après. La densité est désignée par  $\rho$  (qui est supposée constante) et  $\vec{f}$  représente la densité des forces extérieures, qui résulte ici uniquement de la gravité. L'équation de conservation de la masse (2.1b) traduit l'incompressibilité du fluide. Sans perte de généralité, quitte à diviser l'équation (2.1a) par la densité du fluide  $\rho$ , nous pouvons supposer que  $\rho = 1$ .

Nous utilisons la loi rhéologique de Drucker–Prager qui fournit une expression

du tenseur des contraintes  $P$  sous la forme

$$P = p\text{Id} - \sigma, \quad \sigma = 2\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{\|D\vec{U}\|}, \quad (2.2)$$

où  $\sigma$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes ( $\sigma$  est symétrique à trace nulle),  $\nu \geq 0$  le coefficient de viscosité,  $\kappa \geq 0$  le coefficient de plasticité, et

$$D\vec{U} = \frac{\nabla\vec{U} + \nabla\vec{U}^t}{2} \quad (2.3)$$

le tenseur des déformations linéarisé. Le coefficient de viscosité  $\nu$  est un paramètre fixé, tandis que le coefficient de plasticité  $\kappa$  dépend de la pression du fluide sous la forme

$$\kappa = \sqrt{2}\lambda[p]_+, \quad (2.4)$$

où  $\lambda$  est un coefficient de friction interne sans unité, le terme  $\sqrt{2}$  est un coefficient de normalisation et  $[p]_+$  désigne la partie positive de  $p$  ( $[p]_+ = \max(p, 0)$ ).

Nous remarquons dans (2.2) la présence d'un terme non linéaire en fonction du tenseur des déformations linéarisé puisque nous divisons par la norme de celui-ci, la norme utilisée étant la norme matricielle de Frobenius. Dans la *phase mobile* du fluide où  $\|D\vec{U}\| > 0$ , l'évaluation du tenseur  $\sigma$  est immédiate. Par contre, dans la *phase statique* du fluide où  $\|D\vec{U}\| = 0$ , le tenseur  $\sigma$  est multi-valué. L'équation (2.2) signifie que

$$\begin{cases} \sigma = 2\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{\|D\vec{U}\|} & \text{si } \|D\vec{U}\| \neq 0, \\ \|\sigma\| \leq \kappa, \sigma \text{ symétrique à trace nulle} & \text{si } \|D\vec{U}\| = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Dans la phase mobile,  $\sigma$  est par définition symétrique à trace nulle car  $D\vec{U}$  est symétrique et  $\text{div}_{\vec{X}}\vec{U} = 0$ .

Nous précisons enfin les conditions aux limites et la condition initiale. Nous imposons une condition limite de Dirichlet sur la vitesse sur la frontière  $\Gamma_b$

$$\vec{U}(t, \vec{X}) = \vec{0} \quad \text{pour } t \in [0, T], \vec{X} \in \Gamma_b, \quad (2.6)$$

et une condition de tension nulle à la surface libre  $\Gamma_{f,t}$

$$P(t, \vec{X}) \cdot \vec{N} = \vec{0} \quad \text{pour } t \in [0, T], \vec{X} \in \Gamma_{f,t}, \quad (2.7)$$

où  $\vec{N}$  est le vecteur normal à la surface libre pointant conventionnellement vers l'extérieur de  $\Omega_t$ . Nous avons également la condition cinématique

$$N_t + \vec{N} \cdot \vec{U}(t, \vec{X}) = 0 \quad \text{pour } t \in [0, T], \vec{X} \in \Gamma_{f,t}, \quad (2.8)$$

où  $(N_t, \vec{N})$  est la normale temps-espace à la surface libre, vue comme une hypersurface dans  $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^2$ . Enfin, nous prescrivons une condition initiale sur la vitesse

$$\vec{U}(0, \vec{X}) = \vec{U}^0(\vec{X}) \quad \text{pour } \vec{X} \in \Omega_0, \quad (2.9)$$

où  $\vec{U}^0$  est une fonction donnée sur le domaine  $\Omega_0$  qui est lui aussi donné.

## 2.2 Changement de coordonnées

Afin de simplifier l'étude des équations, nous effectuons un changement de repère en nous plaçant dans un repère tournant qui est localement orthonormal à la topographie. Ce changement de repère est possible sous certaines hypothèses sur la topographie que nous précisons ci-après. L'intérêt du nouveau système de coordonnées est qu'il nous permettra d'effectuer un développement asymptotique en couche mince dans la direction normale à la topographie. En particulier, nous introduisons la hauteur locale du domaine mesurée selon la normale à la topographie et l'angle d'inclinaison local mesuré selon la tangente à la topographie. L'évolution du domaine en temps est alors régie par une équation sur cette hauteur et les équations se réécrivent dans un intervalle compris entre le fond, à altitude 0, et cette hauteur.

### 2.2.1 Nouveau système de coordonnées

Nous considérons le repère cartésien orthonormé  $(Oy, Oz)$  qui est fixe. La frontière  $\Gamma_b$  donnée par la topographie est décrite par une fonction  $y \mapsto z_{\text{bot}}(y)$ . En un point de coordonnées  $(y, z_{\text{bot}}(y))$ , nous considérons d'une part l'angle entre l'axe  $Oy$  et le vecteur tangent à la topographie noté  $\theta(y)$  et d'autre part la hauteur du domaine occupé par le fluide  $h(t, s(y))$  dans la direction normale à la topographie, où  $s$  est l'abscisse curviligne attachée au point  $(y, z_{\text{bot}}(y))$ , qui mesure la longueur de l'arc le long de la topographie à partir d'un point fixe. Ces définitions sont illustrées sur la figure 2.2.

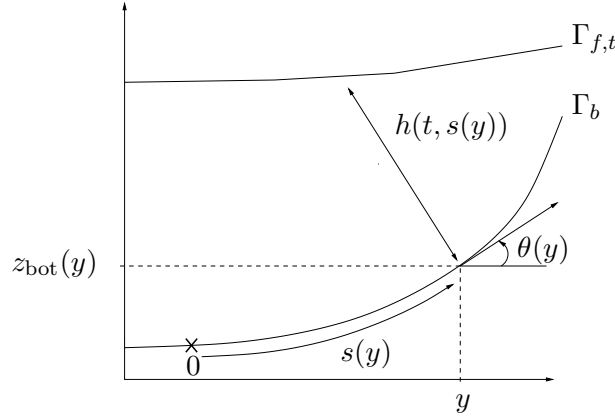


FIGURE 2.2 – Topographie dans le repère cartésien.

Ainsi, nous considérons les applications

$$\begin{cases} y \mapsto z_{\text{bot}}(y), \\ y \mapsto \theta(y), \\ y \mapsto s(y), \\ (t, y) \mapsto h(t, s(y)). \end{cases} \quad (2.10)$$

Par la suite, nous supposons que ces fonctions sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . Remarquons que nous avons

$$s'(y) = \sqrt{1 + (z'_{\text{bot}})^2(y)}.$$

Par ailleurs, en exprimant le vecteur tangent à la topographie au point  $(y, z_{\text{bot}}(y))$ , nous obtenons

$$\begin{pmatrix} 1 \\ z'_{\text{bot}}(y) \end{pmatrix} = \sqrt{1 + (z'_{\text{bot}})^2(y)} \begin{pmatrix} \cos \theta(y) \\ \sin \theta(y) \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} 1 \\ z'_{\text{bot}}(y) \end{pmatrix} = s'(y) \begin{pmatrix} \cos \theta(y) \\ \sin \theta(y) \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons les deux égalités

$$\begin{cases} 1 = s'(y) \cos \theta(y), \\ z'_{\text{bot}}(y) = s'(y) \sin \theta(y), \end{cases} \quad (2.11)$$

et de celles-ci nous tirons

$$z'_{\text{bot}}(y) = \tan \theta(y). \quad (2.12)$$

Soit maintenant  $\vec{M}$  un point quelconque du domaine  $\Omega_t$ . En supposant que la topographie est suffisamment douce (ce que nous précisons ci-après), nous pouvons lui associer un unique point  $\vec{M}_b$  défini comme le projeté orthogonal de  $\vec{M}$  sur  $\Gamma_b$ . Les coordonnées de  $\vec{M}_b$  dans le repère cartésien sont, en notant  $x$  son abscisse,

$$(x, z_{\text{bot}}(x)).$$



Comme  $x$  dépend de  $y$  et  $z$ , les coordonnées de  $\vec{M}$ , nous définissons la fonction

$$x_b : \Omega_t \ni \vec{M} \mapsto x_b(y, z) \in \mathbb{R},$$

telle que l'abscisse de  $\vec{M}_b$  est donnée par  $x = x_b(y, z)$ .

Nous pouvons maintenant définir  $X$  et  $Z$  les coordonnées de  $\vec{M}$  dans le repère tournant. Pour cela, nous posons

$$\tilde{\Omega}_t = \{(X, Z) | X \in \mathbb{R}, 0 \leq Z \leq h(t, X)\},$$

et

$$\hat{\Omega}_t = \{(y, z) | y \in \mathbb{R}, z_{\text{bot}}(y) \leq z \leq z_f(t, y)\},$$

où  $z_f(t, y)$  décrit la surface libre  $\Gamma_{f,t}$  dans le repère cartésien. Nous pouvons formuler le changement de coordonnées sous la forme

$$\begin{aligned} \phi : \hat{\Omega}_t &\longrightarrow \tilde{\Omega}_t, \\ (y, z) &\longmapsto (X, Z) \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(x) \\ \|\vec{M} - \vec{M}_b\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(x) \\ \sqrt{(y-x)^2 + (z-z_{\text{bot}}(x))^2} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

où  $x = x_b(y, z)$ . Nous verrons ci-dessous quelle condition imposer pour que cette application réalise un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

Dans l'autre sens, si nous nous donnons  $X$  et  $Z$  et que nous voulons retrouver les coordonnées  $(y, z)$  du point  $\vec{M}$  dans le repère cartésien, nous obtenons l'application inverse  $\varphi = \phi^{-1}$  telle que

$$\begin{aligned} \varphi : \tilde{\Omega}_t &\longrightarrow \hat{\Omega}_t, \\ (X, Z) &\longmapsto (y, z) \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{-1}(X) - Z \sin \theta(s^{-1}(X)) \\ z_{\text{bot}}(s^{-1}(X)) + Z \cos \theta(s^{-1}(X)) \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Le nouveau système de coordonnées est représenté sur la figure 2.3.

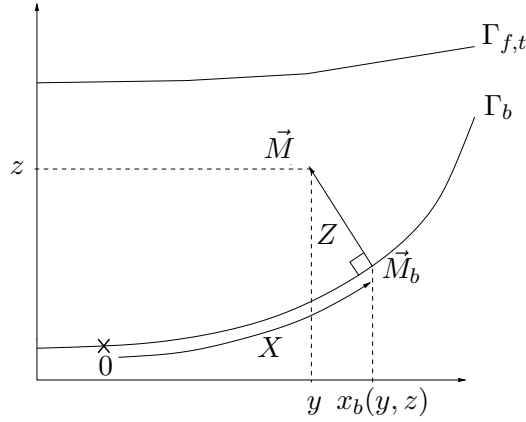


FIGURE 2.3 – Topographie et nouveau système de coordonnées.

Nous allons maintenant préciser sous quelle condition l'application  $\phi$  réalise un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Remarquons tout d'abord que par définition de l'angle  $\theta$ , la courbure de la topographie est donnée par  $\frac{d\theta}{ds}$ , et nous avons  $\frac{d\theta}{ds} = \pm \frac{1}{\varrho}$  où  $\varrho > 0$  désigne le rayon de courbure de la topographie.

**Lemme 2.1.** *Nous supposons que les applications définies par (2.10) sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si, pour tout  $X \in \mathbb{R}$ ,*

$$\frac{d\theta}{ds}(s^{-1}(X))h(t, X) < 1, \quad (2.17)$$

alors l'application  $\phi$  définie par (2.13) réalise un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

*Démonstration.* Nous allons raisonner sur l'application  $\varphi$  définie par (2.16). Une condition suffisante d'inversibilité de  $\varphi$  est donnée par

$$|\det(\text{Jac}\varphi(X, Z))| > 0, \quad (2.18)$$

uniformément en  $X, Z$ . Calculons donc la jacobienne de l'application  $\varphi$ . En posant  $x = s^{-1}(X)$ , il vient

$$\text{Jac}\varphi(X, Z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s'(x)} - \frac{\theta'(x)}{s'(x)} \cos(\theta(x))Z & -\sin(\theta(x)) \\ \frac{z'_{\text{bot}}(x)}{s'(x)} - \frac{\theta'(x)}{s'(x)} \sin(\theta(x))Z & \cos(\theta(x)) \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne

$$\det(\text{Jac}\varphi(X, Z)) = -\frac{\theta'(x)}{s'(x)}Z + \frac{1}{s'(x)} \cos(\theta(x)) + \frac{z'_{\text{bot}}(x)}{s'(x)} \sin(\theta(x)).$$

Et par (2.11) nous obtenons

$$\det(\text{Jac}\varphi(X, Z)) = -\frac{\theta'(x)}{s'(x)}Z + 1,$$

ce qui s'écrit également

$$\det(\text{Jac}\varphi(X, Z)) = -\frac{d\theta}{ds}(x)Z + 1.$$

Si  $\frac{d\theta}{ds} \leq 0$ , on constate que le membre de droite est toujours supérieur ou égal à 1.

Si  $\frac{d\theta}{ds} > 0$ , en nous plaçant en  $Z = h(t, X)$ , qui est le cas le moins favorable, nous obtenons la propriété (2.18) sous la condition

$$\frac{d\theta}{ds}(s^{-1}(X))h(t, X) < 1,$$

comme annoncé. Enfin, le fait que  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  résulte d'une vérification directe et de l'hypothèse de régularité faite sur la topographie.  $\square$

**Remarque 2.2.** *Si la courbure est positive (ce qui est le cas dans les figures précédentes), la condition d'inversibilité (2.17) est équivalente à*

$$h(t, X) < \varrho(s^{-1}(X)).$$

*Si la courbure est négative, la condition d'inversibilité (2.17) est toujours satisfaite.*

### 2.2.2 Reformulation des équations

Nous pouvons maintenant utiliser les résultats précédents pour réécrire les équations (2.1) dans les variables  $X$  et  $Z$ , où  $Z$  est donc compris entre 0 et  $h(t, X)$ . Nous notons  $U$  la vitesse longitudinale (selon  $X$ ) et  $W$  la vitesse transverse (selon  $Z$ ), ce qui donne

$$\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = R_{-\theta} \vec{U},$$

avec la matrice de rotation

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Pour plus de clarté, nous introduisons la quantité  $J = 1 - Z \frac{d\theta}{dX}$ , terme récurrent dans la réécriture. Nous renvoyons à [27] pour le détail des calculs.

Les équations (2.1) peuvent s'écrire dans les coordonnées  $(X, Z)$  pour tout

$Z \in ]0, h(t, X)[$  comme suit :

$$\begin{aligned} \partial_t(JU) + U\partial_X U + JW\partial_Z U + \partial_X(g(z_{\text{bot}} + Z \cos \theta) + \mathcal{P}_{XX}) + \partial_Z(J\mathcal{P}_{XZ}) = \\ (\mathcal{P}_{XZ} + UW)\partial_X \theta, \end{aligned} \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(JW) + U\partial_X W + JW\partial_Z W + J\partial_Z(gZ \cos \theta + \mathcal{P}_{ZZ}) + \partial_X(\mathcal{P}_{XZ}) = \\ (\mathcal{P}_{ZZ} - \mathcal{P}_{XX} - U^2)\partial_X \theta, \end{aligned} \quad (2.20b)$$

$$\partial_X U + \partial_Z(JW) = 0, \quad (2.20c)$$

qui sont respectivement les équations de quantité de mouvement longitudinale, de quantité de mouvement transverse et d'incompressibilité, et où

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{XX} & \mathcal{P}_{XZ} \\ \mathcal{P}_{XZ} & \mathcal{P}_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

est le tenseur des contraintes dans les nouvelles coordonnées. Celui-ci est donné par

$$\mathcal{P} = R_{-\theta} P R_{\theta}.$$

Après diverses manipulations algébriques (utilisant notamment (2.20c) pour éliminer  $\partial_X U$ ), il vient

$$\mathcal{P}_{XX} = p + \left(2\nu + \frac{\kappa}{\|D\vec{U}\|}\right) \partial_Z W, \quad (2.22a)$$

$$\mathcal{P}_{ZZ} = p - \left(2\nu + \frac{\kappa}{\|D\vec{U}\|}\right) \partial_Z W, \quad (2.22b)$$

$$\mathcal{P}_{XZ} = - \left(2\nu + \frac{\kappa}{\|D\vec{U}\|}\right) \frac{1}{2} \left( \partial_Z U + \frac{\partial_X W + U\partial_X \theta}{J} \right), \quad (2.22c)$$

$$\text{où } \|D\vec{U}\|^2 = 2(\partial_Z W)^2 + \frac{1}{2} \left( \partial_Z U + \frac{\partial_X W + U\partial_X \theta}{J} \right)^2.$$

### Condition cinématique et conditions aux limites

Nous nous intéressons maintenant à la reformulation de la condition cinématique et des conditions aux limites. L'évolution du domaine  $\Omega_t$  est déterminée par une équation sur  $h(t, X)$ . En utilisant le fait que la surface libre se déplace à la vitesse du fluide et qu'elle est caractérisée par  $Z = h(t, X)$ , nous obtenons l'équation

$$J\partial_t h + U\partial_X h = JW \quad \text{en } Z = h(t, X). \quad (2.23)$$

En intégrant l'équation d'incompressibilité (2.20c) selon la direction normale à la topographie, nous pouvons réécrire (2.23) sous la forme

$$\partial_t \left( h - \frac{h^2}{2} \partial_X \theta \right) + \partial_X \left( \int_0^h U dZ \right) = 0. \quad (2.24)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, nous obtenons

$$J\mathcal{P}_{XZ} - \mathcal{P}_{XX} \partial_X h = 0 \quad \text{en } Z = h(t, X), \quad (2.25a)$$

$$J\mathcal{P}_{ZZ} - \mathcal{P}_{XZ} \partial_X h = 0 \quad \text{en } Z = h(t, X), \quad (2.25b)$$

$$U = 0, W = 0 \quad \text{en } Z = 0. \quad (2.25c)$$

Conclusion : nous avons reformulé le problème en fonction des composantes longitudinale et transverse de la vitesse dans les directions  $X$  et  $Z$ . Le système obtenu est constitué des équations (2.20) et (2.22) et des conditions (2.23) et (2.25). Nous allons maintenant simplifier ces équations dans les cas où il n'y a pas de vitesse transverse et où la pression est hydrostatique.

## 2.3 Solution longitudinale avec pression hydrostatique et transition

Nous nous intéressons ici au cas où le mouvement est longitudinal, c'est à dire qu'il n'y a pas de mouvement transverse (dans la direction normale à la topographie) et où la pression est hydrostatique. Nous supposons également que le fond est de pente constante. Nous nous intéressons plus particulièrement au cas où l'écoulement présente une transition entre une phase statique au fond (que nous appelons *couche solide*) et une phase mobile au-dessus (que nous appelons *couche fluide*).

Sous les hypothèses ci-dessus, nous simplifions les équations du modèle et nous obtenons un système d'équations dont nous pouvons expliciter une solution analytique dans le cas non visqueux, ce qui nous permet de mettre en lumière quelques propriétés de la solution du modèle. Enfin, nous dérivons une formulation sur l'épaisseur de la couche fluide uniquement.

### 2.3.1 Reformulation des équations

Nous considérons le cas où la pente du domaine est uniforme en  $X$ , c'est à dire que l'angle d'inclinaison  $\theta$  ne varie pas, et pour fixer les idées, nous supposons que  $\theta \leq 0$ . Nous supposons également que l'épaisseur initiale du domaine  $h^0$  est uniforme en  $X$ . De plus, nous supposons que la donnée initiale sur la vitesse (elle aussi uniforme en  $X$ ) est nulle pour  $Z \in [0, b^0]$  où  $b^0$  correspond à l'épaisseur initiale de

la couche solide. Plus précisément, les hypothèses concernant les données s'écrivent

$$(H_1) \quad \partial_X \theta = 0 \text{ et } \partial_X h^0 = 0,$$

$$(H_2) \quad \vec{U}^0(\vec{M}) = \begin{pmatrix} U^0(Z) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } U^0 \text{ continue sur } [0, h^0], U^0(Z) = 0 \text{ sur } [0, b^0] \\ \text{avec } 0 < b^0 < h^0, \text{ et } U^0 \text{ strictement croissante sur } ]b^0, h^0[.$$

L'intérêt de cette configuration est de nous permettre d'étudier l'évolution en temps de l'épaisseur de la couche solide. Nous introduisons la fonction  $b(t)$  qui représente la position de l'interface de transition entre les deux phases du fluide ; cf. la figure 2.4.

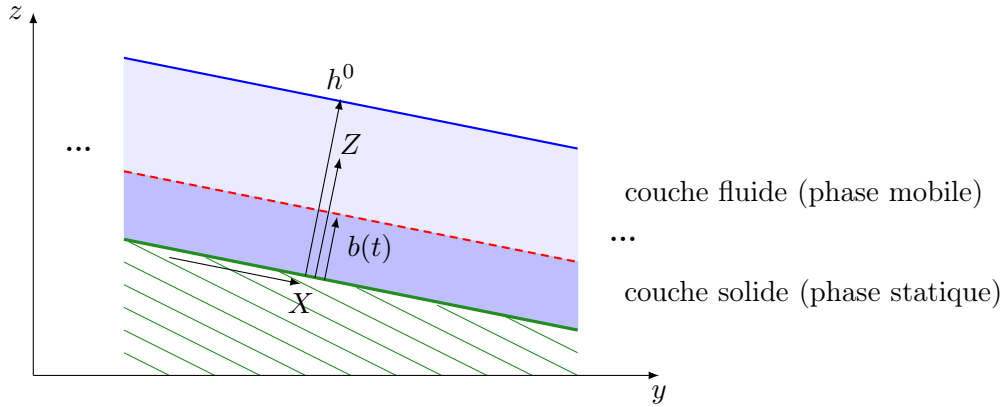


FIGURE 2.4 – Domaine avec interface au temps  $t$ .

Nous considérons la classe de fonctions  $(U, W, \mathcal{P}, p)$  satisfaisant les hypothèses suivantes pour tout temps  $t \in [0, T]$  :

- a)  $U, \mathcal{P}_{XX}, \mathcal{P}_{ZZ}, \mathcal{P}_{XZ}$  et  $h$  ne dépendent pas de  $X$ . Par conséquent (voir lemme 2.3 ci-dessous),  $W = 0$  et  $h = h^0$ . Pour alléger les notations, nous désignons par  $h$  l'épaisseur du domaine.
- b) la pression est hydrostatique et nulle à la surface libre ; elle est donc donnée par  $p = g \cos \theta (h - Z)$ ,
- c) il existe une fonction  $b(t) > 0$  définie pour tout  $t \geq 0$  telle que  $Z \mapsto U(t, Z)$  est continue sur  $[0, h]$ , nulle sur  $[0, b(t)]$  et strictement croissante sur  $]b(t), h[$ . De plus, la fonction  $t \mapsto b(t)$  est continue en temps, avec  $b(0) = b^0$ .

Nous allons maintenant expliciter le système d'équations obtenu pour les solutions appartenant à la classe a)-b)-c).

**Lemme 2.3.** *Nous nous plaçons sous les hypothèses  $(H_1), (H_2)$ . Soit  $(U, W, \mathcal{P}, p)$  appartenant à la classe  $a), b), c)$ . Alors,  $(U, W, \mathcal{P}, p)$  est solution de (2.20), (2.22), (2.23), (2.25) si et seulement si  $W = 0$ ,  $h = h^0$ , et*

$$\partial_t U + g \sin \theta + \partial_Z \mathcal{P}_{XZ} = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]0, h[, \quad (2.26)$$

avec

$$\mathcal{P}_{XZ} = -\lambda g \cos \theta (h - Z) \operatorname{sgn}(\partial_Z U) - \nu \partial_Z U, \quad (2.27)$$

et les conditions aux limites

$$U = 0 \quad \text{en } Z = 0, \quad (2.28a)$$

$$\nu \partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = h. \quad (2.28b)$$

*Démonstration.* En utilisant l'hypothèse a) et l'équation (2.20c), de par (2.23), nous obtenons  $\partial_Z W = 0$ , c'est à dire que  $W$  ne dépend pas de  $Z$ . De plus, (2.25c) nous donne que  $W$  est nulle au fond du domaine et donc est nulle partout. De plus,  $h$  étant indépendant de  $X$  et  $W = 0$ ,  $h$  est indépendant de  $t$ . Par ailleurs, l'équation d'incompressibilité fournit  $\partial_X U = 0$ , ce qui est cohérent avec l'indépendance de  $U$  en  $X$  dans l'hypothèse a). Nous allons maintenant simplifier les équations de mouvement et l'expression du tenseur des contraintes dans les coordonnées  $(X, Z)$ . Nous réécrivons les composantes du tenseur des contraintes, ce qui donne

$$\mathcal{P}_{XX} = p, \quad \mathcal{P}_{ZZ} = p,$$

pour les composantes diagonales, car  $W = 0$ . Pour le terme extra-diagonal, nous obtenons

$$\mathcal{P}_{XZ} = - \left( 2\nu + \frac{\kappa}{\|D\vec{U}\|} \right) \frac{1}{2} \partial_Z U, \quad (2.29)$$

puis nous utilisons le fait que dans le modèle de Drucker–Prager, le coefficient de plasticité est couplé à la pression par l'égalité  $\kappa = \sqrt{2}\lambda p$  ( $p$  étant positive de par b)) et nous remarquons que  $\|DU\| = \frac{|\partial_Z U|}{\sqrt{2}}$ . Ainsi, l'expression (2.22c) de  $\mathcal{P}_{XZ}$  se simplifie pour donner

$$\mathcal{P}_{XZ} = -\frac{\kappa}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn}(\partial_Z U) - \nu \partial_Z U = -\lambda p \operatorname{sgn}(\partial_Z U) - \nu \partial_Z U.$$

En utilisant le fait que la pression est hydrostatique, nous obtenons

$$\mathcal{P}_{XX} = g \cos \theta (h - Z),$$

$$\mathcal{P}_{ZZ} = g \cos \theta (h - Z),$$

$$\mathcal{P}_{XZ} = -\lambda g \cos \theta (h - Z) \operatorname{sgn}(\partial_Z U) - \nu \partial_Z U,$$

d'où (2.27). Par la condition aux limites (2.25a), nous obtenons

$$\mathcal{P}_{XZ} = 0 \quad \text{en } Z = h,$$

et de l'expression (2.27) nous déduisons

$$\nu \partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = h,$$

d'où (2.28b). La condition (2.28a) résulte directement de (2.25c). Notons également que la condition aux limites (2.25b) fournit  $\mathcal{P}_{ZZ} = 0$  en  $Z = h$ , qui est compatible avec la condition  $p = 0$  en  $Z = h$  résultant de b).

Enfin, nous réécrivons le système (2.20) dans le cadre des hypothèses faites et nous obtenons un système réduit à une seule équation

$$\partial_t U + \partial_X (g(z_{\text{bot}} + Z \cos \theta) + \mathcal{P}_{XX}) + \partial_Z \mathcal{P}_{XZ} = 0, \quad (2.31)$$

car le bilan de quantité de mouvement transversale est trivial. Par définition de la variable  $X$ , nous obtenons  $\frac{dX}{dx} = \frac{1}{\cos \theta}$ , si bien que par (2.12), il vient  $\frac{dz_{\text{bot}}}{dX} = \sin \theta$ . Nous pouvons donc simplifier (2.31), ce qui nous donne

$$\partial_t U + g \sin \theta + \partial_Z \mathcal{P}_{XZ} = 0,$$

d'où l'équation (2.26) sur  $[0, h]$ .

Dans l'autre sens, la vérification de (2.20),(2.22),(2.23),(2.25) à partir de (2.26), (2.27),(2.28) utilise des arguments analogues.  $\square$

Par la suite, comme  $W = 0$  et que  $p$  est hydrostatique, nous allons alléger l'écriture et noter simplement  $(U, \mathcal{P})$  la solution plutôt que  $(U, W, \mathcal{P}, p)$ .

Nous allons maintenant identifier une condition nécessaire à l'existence d'une solution de (2.26),(2.27),(2.28). Physiquement, cette condition signifie que la force de friction l'emporte sur la gravité. La dynamique décrite correspond donc à un arrêt progressif de l'écoulement. Nous supposons que la fonction  $t \mapsto b(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  et que  $b'(t) \neq 0$  presque partout pour  $t \in \mathbb{R}^+$  (ou tout du moins jusqu'à l'arrêt de l'écoulement si celui-ci intervient en temps fini).

**Lemme 2.4.** *Une condition nécessaire à l'existence d'une solution de (2.26),(2.27), (2.28) est*

$$|\tan \theta| \leq \lambda. \quad (2.32)$$

*Démonstration.* Soit  $(U, \mathcal{P})$  dans la classe a),b),c) vérifiant (2.26),(2.27),(2.28). D'après c),  $b(t) > 0$  et  $U$  est nulle dans l'intervalle  $]0, b(t)[$ , donc par (2.26) il vient

$$g \sin \theta + \partial_Z \mathcal{P}_{XZ} = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]0, b(t)[. \quad (2.33)$$



Par ailleurs, par (2.27) nous obtenons

$$\mathcal{P}_{XZ} = -\lambda g \cos \theta (h - Z) \operatorname{sgn}(\partial_Z U) \quad \text{pour tout } Z \in ]0, b(t)[. \quad (2.34)$$

Dans cette expression, le terme  $\operatorname{sgn}(\partial_Z U)$  est multivalué et peut prendre n'importe quelle valeur entre  $-1$  et  $1$ . Nous pouvons donc réécrire (2.34) sous la forme

$$\mathcal{P}_{XZ} = -\lambda g \cos \theta (h - Z) \eta \quad \text{pour tout } Z \in ]0, b(t)[, \quad (2.35)$$

avec  $\eta \in \mathbb{R}$  tel que  $|\eta| \leq 1$ .

Nous allons maintenant montrer que  $\mathcal{P}_{XZ}$  est continu en  $Z = b(t)$ . Par l'absurde, nous supposons que  $\mathcal{P}_{XZ}$  n'est pas continu en  $Z = b(t)$ . Dans ce cas, le terme  $\partial_Z \mathcal{P}_{XZ}$  génère une masse de dirac  $\delta$  en  $Z = b(t)$ , et s'écrit donc sous la forme

$$\partial_Z \mathcal{P}_{XZ} = \lambda \delta_{\{Z=b(t)\}} + \bar{\gamma},$$

où  $\lambda$  et  $\bar{\gamma}$  sont des fonctions régulières de  $(t, Z)$ . En remplaçant cette expression dans l'équation (2.26), nous arrivons à

$$\partial_t U = -\lambda \delta_{\{Z=b(t)\}} + \gamma,$$

avec  $\gamma$  une fonction régulière de  $(t, Z)$ . Au sens des distributions, nous avons

$$\partial_t \mathbb{1}_{\{Z < b(t)\}} = b'(t) \delta_{\{Z=b(t)\}}.$$

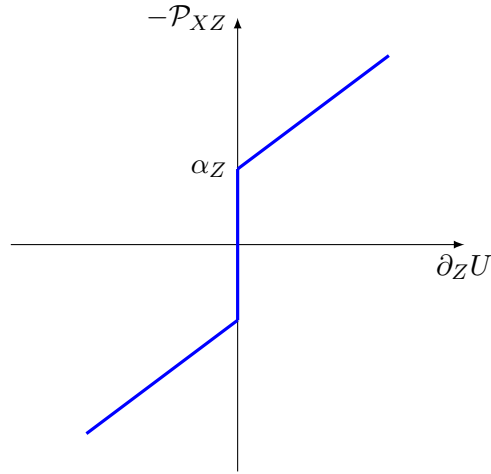
Par suite, pour presque tout  $t \in \mathbb{R}^+$  tel que  $b'(t) \neq 0$ , il vient

$$U = \lambda \frac{1}{b'(t)} \mathbb{1}_{\{Z < b(t)\}} + \hat{\gamma}$$

où  $\hat{\gamma}$  est une fonction régulière de  $(t, Z)$ . Ceci montre que  $U$  a une discontinuité en  $Z$  (car  $b'(t)$  est fini), ce qui est exclu par c). Et donc  $\mathcal{P}_{XZ}$  est continue en  $Z = b(t)$ .

En utilisant la continuité de  $\mathcal{P}_{XZ}$  en  $Z = b(t)$ , nous allons maintenant montrer que  $\operatorname{sgn}(\partial_Z U)$  est également continu en  $Z = b(t)$ . Si  $\nu = 0$ , le résultat est trivial puisque  $\mathcal{P}_{XZ} = -\alpha_Z \operatorname{sgn}(\partial_Z U)$ , où  $\alpha_Z = \lambda g \cos \theta (h - Z)$  dépend continûment de  $Z$ . Si  $\nu > 0$ , à  $Z$  fixé, nous considérons l'expression (2.27) de  $\mathcal{P}_{XZ}$  comme une fonction de  $\partial_Z U$ . Nous traçons à la figure 2.5 le graphe de la fonction

$$\partial_Z U \mapsto -\mathcal{P}_{XZ} = \alpha_Z \operatorname{sgn}(\partial_Z U) + \nu \partial_Z U.$$


 FIGURE 2.5 –  $-\mathcal{P}_{XZ}$  en fonction de  $\partial_Z U$ .

Nous constatons que cette fonction est inversible et que son inverse est continue. Ainsi,  $\partial_Z U$  est une fonction continue de  $\mathcal{P}_{XZ}$ . Comme  $\mathcal{P}_{XZ}$  est continue en  $Z = b(t)$  et que  $\alpha_Z$  est continu en  $Z$ , nous en tirons que  $\partial_Z U$  est également continue en  $Z = b(t)$ . Enfin, par l'expression (2.27) de  $\mathcal{P}_{XZ}$ , nous obtenons que  $\text{sgn}(\partial_Z U)$  est continu en  $Z = b(t)$  comme somme de deux fonctions continues.

Ensuite, nous utilisons les résultats ci-dessus pour exhiber une condition sur  $\mathcal{P}_{XZ}$  dans la partie solide. Puisque  $\text{sgn}(\partial_Z U)$  est continu à l'interface et que  $\text{sgn}(\partial_Z U) = 1$  sur  $]b(t), h[$  (par c), nous en déduisons que  $\text{sgn}(\partial_Z U) = 1$  en  $Z = b(t)$ . De même, puisque  $\partial_Z U$  est continue à l'interface et que  $\partial_Z U = 0$  sur  $]0, b(t)[$ , nous en déduisons que, si  $\nu > 0$ ,  $\partial_Z U = 0$  en  $Z = b(t)$ . Par ailleurs, si  $\nu = 0$ ,  $\nu \partial_Z U = 0$ . Par (2.27), il vient

$$\mathcal{P}_{XZ} = -\lambda g \cos \theta (h - b(t)) \quad \text{en } Z = b(t), \quad (2.36)$$

et dans la partie solide, par (2.35), nous avons

$$|\mathcal{P}_{XZ}| \leq |-\lambda g \cos \theta (h - Z)| \quad \text{pour tout } Z \in ]0, b(t)[,$$

et comme  $\cos \theta \geq 0$ , il vient la condition

$$|\mathcal{P}_{XZ}| \leq \lambda g \cos \theta (h - Z) \quad \text{pour tout } Z \in ]0, b(t)[. \quad (2.37)$$

Maintenant nous déterminons une expression de  $\mathcal{P}_{XZ}$  dans la partie solide en intégrant l'équation (2.33) entre un  $Z$  arbitraire et  $b(t)$  pour  $Z \in ]0, b(t)[$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Z^{b(t)} (g \sin \theta + \partial_Z \mathcal{P}_{XZ}) dZ \\ &= g \sin \theta (b(t) - Z) + \mathcal{P}_{XZ}|_{b(t)} - \mathcal{P}_{XZ}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant (2.36) nous avons

$$\mathcal{P}_{XZ} = g \sin \theta (b(t) - Z) - \lambda g \cos \theta (h - b(t)) \quad \text{pour tout } Z \in ]0, b(t)[.$$

Cette expression doit satisfaire la condition (2.37), ce qui signifie que nous devons avoir

$$|g \sin \theta (b(t) - Z) - \lambda g \cos \theta (h - b(t))| \leq \lambda g \cos \theta (h - Z),$$

pour tout  $Z \in ]0, b(t)[$ . Cette inégalité est équivalente aux deux inégalités

$$\begin{cases} g \sin \theta (b(t) - Z) - \lambda g \cos \theta (h - b(t)) \leq \lambda g \cos \theta (h - Z), \\ -g \sin \theta (b(t) - Z) + \lambda g \cos \theta (h - b(t)) \leq \lambda g \cos \theta (h - Z). \end{cases} \quad \text{et}$$

Dans la mesure où  $\sin \theta \leq 0$  et  $\cos \theta \geq 0$ , la première inégalité est triviale car

$$g \sin \theta (b(t) - Z) \leq 0, \quad -\lambda g \cos \theta (h - b(t)) \leq 0 \quad \text{et} \quad \lambda g \cos \theta (h - Z) \geq 0.$$

La deuxième inégalité donne

$$-g \sin \theta (b(t) - Z) \leq \lambda g \cos \theta (b(t) - Z),$$

et comme  $b(t) > Z$ , nous obtenons

$$-\tan \theta \leq \lambda.$$

Comme  $\tan \theta \leq 0$ , il vient  $|\tan \theta| \leq \lambda$ , d'où la condition (2.32).  $\square$

La prochaine étape consiste à réécrire le système (2.26),(2.27),(2.28) posé sur  $[0, h]$  en un problème en  $U$  posé sur la phase mobile  $[b(t), h]$  avec une condition limite supplémentaire en  $Z = b(t)$ . De plus, nous allons obtenir une formule de reconstruction explicite pour  $\mathcal{P}_{XZ}$  dans chacune des deux phases du fluide.

**Lemme 2.5.** *( $U, \mathcal{P}$ ) est solution de (2.26),(2.27),(2.28) sur  $[0, h]$  si et seulement si*

a)  *$U$  est solution de*

$$\partial_t U + g(\sin \theta + \lambda \cos \theta) - \nu \partial_{ZZ}^2 U = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[, \quad (2.38)$$

*avec les conditions aux limites*

$$U = 0 \quad \text{en } Z = b(t), \quad (2.39a)$$

$$\nu \partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = b(t), \quad (2.39b)$$

$$\nu \partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = h, \quad (2.39c)$$

*et la condition d'écoulement  $|\tan \theta| \leq \lambda$ . De plus, si  $\nu \neq 0$ , la condition d'écoulement est automatiquement satisfaite, dès lors que nous disposons d'une solution de*

(2.38),(2.39).

b) nous avons les formules de reconstruction de  $\mathcal{P}_{XZ}$  suivantes :

$$\mathcal{P}_{XZ} = -\lambda g \cos \theta (h - Z) - \nu \partial_Z U \quad \text{pour } Z \in ]b(t), h[, \quad (2.40a)$$

$$\mathcal{P}_{XZ} = -\lambda g \cos \theta (h - b(t)) - g \sin \theta (Z - b(t)) \quad \text{pour } Z \in ]0, b(t)[. \quad (2.40b)$$

*Démonstration.* Soit  $(U, \mathcal{P})$  vérifiant (2.26),(2.27),(2.28). Dans la phase mobile, nous avons  $\partial_Z U > 0$  par l'hypothèse c), donc  $\text{sgn}(\partial_Z U) = 1$  pour tout  $Z \in ]b(t), h[$ . Ainsi, il vient

$$\mathcal{P}_{XZ} = -\lambda g \cos \theta (h - Z) - \nu \partial_Z U \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[,$$

et

$$\partial_t U + g \sin \theta + \lambda g \cos \theta - \nu \partial_{ZZ}^2 U = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[.$$

D'où (2.38) et (2.40a). La condition aux limites (2.39a) est assurée puisque  $U$  est nulle sur  $[0, b(t)]$  et est continue en  $b(t)$ . La condition aux limites (2.39c) n'est rien d'autre que (2.28b). La condition d'écoulement est assurée par le lemme 2.4. Ainsi, il reste à montrer (2.39b) et (2.40b). Nous avons déjà montré (cf. démonstration du lemme 2.4) que  $\mathcal{P}_{XZ}$  est continue en  $Z = b(t)$  et que

$$\mathcal{P}_{XZ} = -\lambda g \cos \theta (h - b(t)) - g \sin \theta (Z - b(t)) \quad \text{pour tout } Z \in ]0, b(t)[,$$

d'où (2.40b). Enfin, la condition (2.39b) a également été démontrée dans la preuve du lemme 2.4.

Réciproquement, soit  $U$  vérifiant (2.38),(2.39) et  $\mathcal{P}_{XZ}$  donné par (2.40). Nous retrouvons l'équation (2.26) en dérivant  $\mathcal{P}_{XZ}$  dans la phase mobile et en reportant le résultat dans (2.38), alors que dans la phase statique l'équation (2.26) est une conséquence directe de la dérivation de (2.40b). Les conditions aux limites (2.28) étant clairement satisfaites, il reste à vérifier (2.27). Cette équation est simplement (2.40a) dans la phase mobile, et dans la phase statique, il faut vérifier

$$|\mathcal{P}_{XZ}| \leq \lambda g \cos \theta (h - Z),$$

ce qui a été fait dans la démonstration du lemme 2.4.

Nous montrons enfin que la condition d'écoulement est toujours satisfaite dès lors que  $\nu \neq 0$ , si nous disposons d'une solution de (2.38),(2.39). Nous considérons la condition de vitesse nulle à l'interface (2.39a) que nous dérivons en temps pour obtenir

$$\partial_t U(t, b(t)) + \partial_Z U(t, b(t)) \dot{b}(t) = 0. \quad (2.41)$$

Ensuite, comme  $\nu \neq 0$ , la seconde condition (2.39b) appliquée à (2.41) nous permet d'en déduire que

$$\partial_t U(t, b(t)) = 0.$$

En évaluant (2.38) en  $Z = b(t)$ , il vient

$$g(\sin \theta + \lambda \cos \theta) - \nu \partial_{ZZ}^2 U(t, b(t)) = 0. \quad (2.42)$$

Comme  $U$  est nulle et à dérivée nulle en  $Z = b(t)$ , nous avons  $\partial_{ZZ}^2 U(t, b(t)) \geq 0$  et donc, par (2.42) nous obtenons

$$\sin \theta + \lambda \cos \theta \geq 0.$$

D'où la condition d'écoulement puisque  $\theta \leq 0$ .  $\square$

### 2.3.2 Étude du cas non visqueux

Dans le cas non visqueux, l'équation (2.38) se simplifie et nous pouvons expliciter la solution analytique, ainsi qu'une équation implicite pour l'épaisseur de la couche solide. Ceci fait l'objet de la proposition suivante. Nous rappelons que de par l'hypothèse (H<sub>2</sub>), le profil de vitesse initial  $U^0$  est une fonction positive, continue, qui vérifie  $\partial_Z U^0 > 0$  sur  $]b^0, h[$  et est nulle sur  $[0, b^0]$ .

**Proposition 2.6.** *Si  $\nu = 0$  et sous la condition d'écoulement (2.32), le système (2.38), (2.39) admet une unique solution donnée par*

$$U(t, Z) = [U^0(Z) - g(\sin \theta + \lambda \cos \theta)t]_+ \quad \text{pour tout } Z \in ]0, h[, \quad (2.43)$$

et la position de l'interface est déterminée implicitement par l'équation

$$U^0(b(t)) = g(\sin \theta + \lambda \cos \theta)t. \quad (2.44)$$

Si  $\sin \theta + \lambda \cos \theta = 0$  (égalité dans (2.32)), cette équation a pour solution  $b(t) = b^0$  pour tout  $t \in [0, T]$ , et si  $\sin \theta + \lambda \cos \theta > 0$ , cette équation a une solution unique dans  $[b^0, h]$  pour tout  $t \leq t^{\text{stop}}$ , avec le temps  $t^{\text{stop}}$  défini par

$$t^{\text{stop}} = \frac{U^0(h)}{g(\sin \theta + \lambda \cos \theta)}, \quad (2.45)$$

et qui correspond au temps d'arrêt de l'écoulement ; pour tout  $t \geq t^{\text{stop}}$ , nous avons  $b(t) = h$ .

*Démonstration.* Nous considérons l'équation (2.38) et les conditions aux limites (2.39) sans viscosité :

$$\begin{aligned} \partial_t U + g(\sin \theta + \lambda \cos \theta) &= 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[, \\ U(t, b(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Supposons que la fonction  $b(t)$  est croissante (ce que nous vérifions ci-dessous). En intégrant en temps, pour  $Z \in ]b(t), h[$ , il vient

$$\begin{aligned} U(t, Z) &= U^0(Z) + \int_0^t \partial_t U(\tau, Z) d\tau, \\ &= U^0(Z) - g(\sin \theta + \lambda \cos \theta)t, \end{aligned} \quad (2.46)$$

car  $b(\tau) \leq b(t) < Z$ , si bien que nous pouvons utiliser (2.38) en  $(\tau, Z)$ . Le terme en facteur de la gravité dans cette expression est positif par (2.32). Par ailleurs, pour imposer une vitesse nulle dans la partie inférieure à l'interface nous prenons la partie positive du membre de droite de (2.46). À chaque  $t$ , la position de l'interface  $b(t)$  se détermine en cherchant le zéro du membre de droite de (2.46), ce qui donne

$$0 = U(t, b(t)) = U^0(b(t)) - g(\sin \theta + \lambda \cos \theta)t.$$

D'où (2.44). En dérivant cette équation par rapport à  $t$ , en observant que  $\partial_Z U^0 > 0$  sur  $]b^0, h[$  et  $\sin \theta + \lambda \cos \theta \geq 0$ , nous obtenons  $\partial_t b \geq 0$ , ce qui confirme l'hypothèse de croissance en temps de  $b$  faite ci-dessus. Comme  $\partial_Z U^0 > 0$  sur  $]b^0, h[$  et que  $U^0(b^0) = 0$ , l'équation (2.44) a une solution unique dans  $[b^0, h]$  pour tout  $0 \leq t \leq t^{\text{stop}}$ , avec  $t^{\text{stop}}$  donné par (2.45). Pour  $t \geq t^{\text{stop}}$ , la vitesse est nulle partout et  $b(t) = h$ , ce qui correspond à un arrêt complet de l'écoulement. Enfin, comme il est immédiat que les formules (2.43),(2.44) donnent bien une solution de (2.38),(2.39), nous obtenons l'unicité de la solution.  $\square$

Comme  $\partial_t b \geq 0$  (et  $\partial_t b > 0$  en supposant l'inégalité stricte dans (2.32)), nous obtenons une solution qui décrit un arrêt progressif de l'écoulement avec une couche solide qui s'épaissit au cours du temps. Le temps d'arrêt de l'écoulement peut être déterminé par l'équation (2.44).

Pour illustrer les propos précédents, nous présentons les profils de vitesse à différents instants ainsi que l'évolution de l'épaisseur de la couche solide en fonction du temps, à la figure 2.6. Nous nous plaçons dans le cas d'une hauteur  $h$  fixée à 6, l'angle d'inclinaison du domaine est  $\theta = -\frac{\pi}{6}$  et le coefficient de friction interne est  $\lambda = 1$ . Dans cette configuration, nous avons  $|\tan \theta| = 0.11$  et la condition d'écoulement (2.32) est vérifiée avec inégalité stricte. Nous choisissons comme vitesse initiale  $U^0(Z) = \sqrt{Z}$  pour tout  $Z \in ]0, h[$ , qui correspond à un fluide s'écoulant dès le bord du domaine  $Z = 0$  et nous prenons pour temps final de la simulation  $T = 2$ .

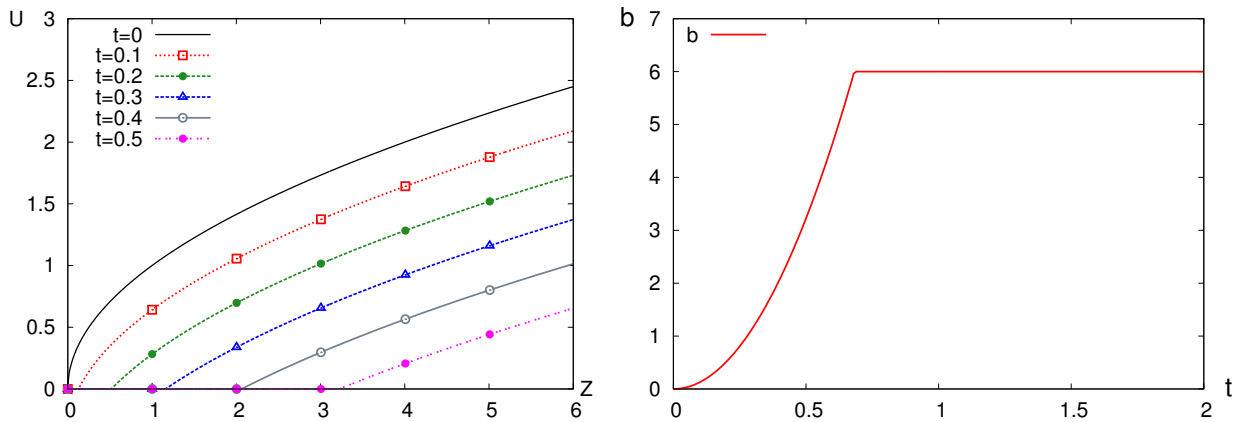


FIGURE 2.6 – Profils de vitesse et épaisseur de la couche solide.

La formule (2.43) signifie qu'au fil du temps, le graphe de  $U$  est translaté vers le bas à vitesse constante, et tronqué aux valeurs positives. Nous observons que conformément à la formule (2.44), au temps intermédiaire  $t = 0.5$  l'épaisseur de la couche solide est d'environ 3.25, puisque le profil de vitesse est nul pour les valeurs de  $Z$  inférieures à cette valeur, ce qui correspond bien à la valeur de  $b$  en  $t = 0.5$  sur le graphique de droite. L'évolution de l'épaisseur de la couche solide montre que l'écoulement s'arrête à  $t^{\text{stop}} = 0.68$ , conformément à l'expression donnée par (2.45). Ensuite, la couche solide stationne en la valeur  $h = 6$  et les profils de vitesse sont nuls.

# MODÈLE UNIDIMENSIONNEL AVEC TERME SOURCE

---



---

<b>3.1</b>	<b>Asymptotique de couche mince du modèle de Drucker–Prager . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3.2</b>	<b>Formulation du modèle avec terme source . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>3.3</b>	<b>Étude analytique du cas non visqueux . . . . .</b>	<b>39</b>
3.3.1	Cas $b^*(t)$ croissant . . . . .	40
3.3.2	Cas $b^*(t)$ strictement décroissant avec $b^0 = b^*(0)$ . . . . .	45
3.3.3	Cas $b^*(t)$ décroissant avec $b^0 < b^*(0)$ . . . . .	48
3.3.4	Cas particulier : $b(t)$ discontinu . . . . .	52
<b>3.4</b>	<b>Méthodes numériques pour le cas avec viscosité . . . . .</b>	<b>55</b>
3.4.1	Changement de variable . . . . .	55
3.4.2	Différences finies en espace et en temps . . . . .	56
3.4.3	Méthode pour le suivi d’interface . . . . .	58
<b>3.5</b>	<b>Résultats numériques pour le cas avec viscosité . . . . .</b>	<b>59</b>
3.5.1	Étude de convergence . . . . .	60
3.5.2	Comportement en temps long . . . . .	62
3.5.3	Étude du régime transitoire . . . . .	72
<b>3.6</b>	<b>Étude de l’arrêt de l’écoulement . . . . .</b>	<b>79</b>
3.6.1	Formulation sous forme d’inéquation variationnelle . . . . .	80
3.6.2	Discrétisation de l’inéquation variationnelle . . . . .	81
3.6.3	Comparaison avec l’approche précédente . . . . .	82
3.6.4	Résultats numériques pour l’arrêt de l’écoulement . . . . .	83

---



### 3.1 Asymptotique de couche mince du modèle de Drucker–Prager

Nous considérons les équations du modèle de Drucker–Prager en coordonnées  $(X, Z)$  telles que présentées à la section 2.2. Afin de simplifier ces équations, nous nous plaçons sous certaines hypothèses permettant de réaliser un développement asymptotique en couche mince. Le point saillant dans ces hypothèses est que la hauteur du domaine occupé par le fluide reste petite par rapport aux autres échelles de longueur. Plus précisément, nous considérons les hypothèses suivantes :

- (H<sub>1</sub>)  $h \sim \epsilon$ ,  $\epsilon \ll 1$ ,
- (H<sub>2</sub>)  $\partial_X \theta = O(\epsilon)$  avec  $\theta < 0$  et  $|\theta| \gg \epsilon$ ,
- (H<sub>3</sub>)  $\nu = O(\epsilon^2)$ ,
- (H<sub>4</sub>)  $U = O(\epsilon)$ ,
- (H<sub>5</sub>)  $\lambda = |\tan \theta| + O(\epsilon)$ ,
- (H<sub>6</sub>)  $U = 0$  pour tout  $Z \in ]0, b(t)[$  et  $\partial_Z U > 0$  pour tout  $Z \in ]b(t, X), h(t, X)[$ .

Dans ces hypothèses, la notation  $O(\epsilon)$  signifie qu’il s’agit d’une quantité au plus d’ordre de  $\epsilon$  fois une valeur de référence d’ordre 1 qui est omise afin d’alléger l’écriture.

L’hypothèse (H<sub>1</sub>) signifie que  $\epsilon$  est de l’ordre de  $h$  et que nous nous plaçons dans une asymptotique de couche mince. L’hypothèse (H<sub>2</sub>) signifie que nous considérons un domaine avec une faible variation de l’angle d’inclinaison de la pente et que l’angle d’inclinaison n’est pas trop petit. L’hypothèse (H<sub>3</sub>) permet de négliger la viscosité et l’hypothèse (H<sub>4</sub>) permet de considérer des écoulements lents. L’hypothèse (H<sub>5</sub>) signifie que les effets de gravité et de friction sont presque à l’équilibre, ce qui est cohérent avec (H<sub>4</sub>). Enfin, l’hypothèse (H<sub>6</sub>) permet de considérer le cas d’une seule interface entre une phase statique et une phase mobile, la position de l’interface étant repérée par la fonction  $b(t, X)$ .

Un développement formel des équations (2.20), sous les hypothèses précédentes, donne (voir [27])

$$\partial_t U + S - \nu \partial_Z^2 U = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t, X), h(t, X)[, \quad (3.1)$$

où le terme  $S$  est défini en (3.4),(3.5) ci-dessous. Cette équation est posée dans la phase mobile de l’écoulement, comme dans le modèle obtenu au lemme 2.5. Les conditions aux limites associées s’écrivent

$$U = 0 \quad \text{en } Z = b(t, X), \quad (3.2a)$$

$$\nu \partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = b(t, X), \quad (3.2b)$$

$$\nu \partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = h(t, X), \quad (3.2c)$$

auxquelles s'ajoute la condition cinématique

$$\partial_t h + \partial_X \left( \int_0^h U dZ \right) = 0. \quad (3.3)$$

Le terme  $S$  dans (3.1) dépend de  $(t, X, Z)$  et s'exprime sous la forme

$$S = g(\sin \theta + \partial_X(h \cos \theta)) - \lambda \partial_Z p, \quad (3.4)$$

où la pression est donnée par

$$p = g \left( \cos \theta + \sin \theta \partial_X h - 2 |\sin \theta| \frac{\partial_X U}{|\partial_Z U|} \right) (h - Z), \quad (3.5)$$

pour tout  $Z \in ]b(t, X), h(t, X)[$ . Dans l'expression de  $p$ , la difficulté majeure provient du terme  $\frac{\partial_X U}{|\partial_Z U|}$  qui a une forme indéterminée lorsque  $Z \rightarrow b(t, X)$  par valeurs supérieures et qui, en outre, est non linéaire. De plus, en remplaçant l'expression (3.5) de  $p$  dans celle de  $S$ , nous obtenons une équation d'ordre 2 avec une dérivée croisée, ce qui pose question quant au caractère bien posé du problème. Ces questions mathématiques ne seront pas abordées dans ce manuscrit. Dans la suite, nous allons nous intéresser à un modèle plus simple, ne faisant pas intervenir la variable  $X$ , et qui nous permettra de réaliser une étude analytique et numérique dont les résultats, malgré le caractère simplifié du modèle de départ, mettent en lumière plusieurs comportements intéressants pour les écoulements en couche mince avec transition.

## 3.2 Formulation du modèle avec terme source

Par rapport au modèle présenté à la section 3.1, nous remplaçons le terme  $S$  qui dépend de  $X$  par un terme source empirique  $S$  que nous supposons donné. Ainsi, à chaque  $X$  fixé correspond un modèle unidimensionnel où n'interviennent plus que les variables  $t$  et  $Z$ . La variable  $X$  peut dès lors être vue comme un paramètre et nous pouvons l'omettre dans l'écriture des équations.

Dans le modèle que nous considérons, l'équation sur la vitesse  $U(t, Z)$  s'écrit

$$\partial_t U(t, Z) + S(t, Z) - \nu \partial_Z^2 U(t, Z) = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[, \quad (3.6)$$

où  $S(t, Z)$  est donc un terme source donné, défini pour tout  $t \in [0, T]$  et  $Z \in [0, h]$ . Nous supposons que  $S(t, \cdot)$  est défini sur  $[0, h]$  puisque  $b(t)$  est *a priori* inconnue. Nous supposons de plus que  $S$  est continu en temps et en espace. L'équation (3.6) est complétée par les conditions aux limites suivantes :

$$U = 0 \quad \text{en } Z = b(t), \quad (3.7a)$$

$$\nu \partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = b(t), \quad (3.7b)$$

$$\nu \partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = h. \quad (3.7c)$$

Ces conditions aux limites traduisent le fait que le fluide est au repos dans la partie inférieure à l'interface et que le raccord de la vitesse se fait de manière continûment dérivable en espace au niveau de l'interface (dans le cas avec viscosité). En outre, les efforts visqueux sont supposés nuls à la surface libre  $Z = h$ . Enfin, la condition initiale sur la vitesse est

$$U(0, Z) = U^0(Z) \quad \text{pour tout } Z \in ]b^0, h[, \quad (3.8)$$

la fonction  $U^0$  est supposée strictement croissante sur  $]b^0, h[$  et vérifie

$$U^0(b^0) = 0, \quad (3.9)$$

où  $b^0 \in ]0, h[$  est la position initiale de l'interface (qui est connue).

Le modèle ci-dessus n'est pas déductible du modèle en couche mince présenté à la section 3.1. Toutefois, nous souhaitons mettre en cohérence le modèle avec terme source et l'hypothèse  $(H_6)$  du modèle en couche mince. Pour ce faire, nous voulons nous assurer que, pour tout  $t \in [0, T]$ , la vitesse est strictement croissante sur  $]b(t), h[$ . Nous allons montrer que cette propriété est bien satisfaite sous une hypothèse de décroissance du terme source en espace. Cette condition peut être interprétée comme une condition de stabilité dans le modèle avec terme source.

**Lemme 3.1.** *Nous supposons  $\nu \neq 0$ . Si  $S$  vérifie*

$$\partial_Z S \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \text{ et tout } Z \in ]0, h[, \quad (3.10)$$

*et la donnée initiale vérifie*

$$\partial_Z U^0 > 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b^0, h[, \quad (3.11)$$

*alors, tant que  $b(t) < h$ , nous avons*

$$\partial_Z U > 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \text{ et tout } Z \in ]b(t), h[. \quad (3.12)$$

*Démonstration.* En dérivant (3.6) par rapport à  $Z$ , nous obtenons

$$\partial_t(\partial_Z U) + \partial_Z S - \nu \partial_{ZZ}^2(\partial_Z U) = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[,$$

d'où, par (3.10),

$$\partial_t(\partial_Z U) - \nu \partial_{ZZ}^2(\partial_Z U) \geq 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[.$$

En utilisant les conditions aux limites (3.7b),(3.7c), il vient

$$\partial_t(\partial_Z U) - \nu \partial_{ZZ}^2(\partial_Z U) \geq 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[, \quad (3.13a)$$

$$\nu \partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = b(t), \quad (3.13b)$$

$$\nu \partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = h, \quad (3.13c)$$

$$\partial_Z U > 0 \quad \text{à } t = 0. \quad (3.13d)$$

Nous voudrions appliquer le principe du maximum fort à la fonction  $\partial_Z U$  qui est nulle sur les bords de l'intervalle  $[b(t), h]$  et strictement positive à  $t = 0$ . Puisque cet intervalle dépend du temps, nous justifions cela en effectuant un changement de variables

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ \times [b(t), h] &\rightarrow \mathbb{R}^+ \times [0, 1] \\ (t, Z) &\mapsto (\tau, Y) \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec  $t = \tau$  et  $Z = b(\tau) + Y(h - b(\tau))$  pour tout  $Y \in ]0, 1[$ . Comme nous supposons que  $b(t) < h$ , ce changement de variables est bien défini. Nous allons réécrire les équations et conditions aux limites du problème dans les nouvelles variables. Tout d'abord, les dérivées partielles se réécrivent

$$\begin{aligned} \partial_\tau &= \partial_t + \frac{\partial Z}{\partial \tau} \partial_Z = \partial_t + \dot{b}(\tau)(1 - Y) \partial_Z, \\ \partial_Y &= \frac{\partial Z}{\partial Y} \partial_Z = (h - b(\tau)) \partial_Z. \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, nous écrivons maintenant  $b$  et  $\dot{b}$  au lieu de  $b(\tau)$  et  $\dot{b}(\tau)$ . En posant  $V = \partial_Z U$ , et en remplaçant ces expressions dans (3.13a), il vient

$$\partial_\tau V - \frac{(1 - Y)}{h - b} \dot{b} \partial_Y V - \frac{\nu}{(h - b)^2} \partial_{YY}^2 V \geq 0 \quad \text{pour tout } Y \in ]0, 1[, \quad (3.15)$$

et les conditions aux limites (3.13b), (3.13c), (3.13d) deviennent

$$\nu V = 0 \quad \text{en } Y = 0, \quad (3.16a)$$

$$\nu V = 0 \quad \text{en } Y = 1, \quad (3.16b)$$

$$V > 0 \quad \text{en } \tau = 0. \quad (3.16c)$$

Ainsi, nous obtenons une équation sur un intervalle fixe, et (comme  $\nu \neq 0$ ) le principe du maximum fort s'applique. Nous en déduisons (3.12).  $\square$

**Remarque 3.2.** Si  $\nu = 0$  et  $\dot{b} < 0$ , il manque une condition aux limites en  $Y = 0$  pour pouvoir conclure.

**Remarque 3.3.** Nous retrouvons le modèle (2.38), (2.39) en prenant un terme source constant et uniforme, à valeurs positives, donné par  $S = g(\sin \theta + \lambda \cos \theta)$ .

À partir du modèle avec terme source (3.6), (3.7), nous pouvons expliciter une équation d'évolution sur l'épaisseur de la couche solide, sous l'hypothèse que la vitesse et le terme source sont suffisamment réguliers. Ceci fait l'objet du lemme suivant.

**Lemme 3.4.** 1) Si  $\nu \neq 0$ , si la fonction  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  en espace et  $\mathcal{C}^1$  en temps, si la fonction  $S$  de classe  $\mathcal{C}^1$  en espace et si  $S(t, b(t)) \neq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , alors

$$\dot{b}(t) = \left( \frac{\partial_Z S(t, b(t)) - \nu \partial_{ZZZ}^3 U(t, b(t))}{S(t, b(t))} \right) \nu. \quad (3.17)$$

2) Si  $\nu = 0$ , si la fonction  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en espace et en temps et si  $\partial_Z U(t, b(t)) > 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , alors

$$\dot{b}(t) = \frac{S(t, b(t))}{\partial_Z U(t, b(t))}. \quad (3.18)$$

*Démonstration.* Nous considérons la condition de vitesse nulle à l'interface (3.7a) que nous dérivons en temps pour obtenir

$$\partial_t U(t, b(t)) + \partial_Z U(t, b(t)) \dot{b}(t) = 0. \quad (3.19)$$

1) Si  $\nu \neq 0$ , la condition (3.7b) appliquée à (3.19) nous permet d'en déduire que

$$\partial_t U(t, b(t)) = 0.$$

Nous pouvons alors évaluer l'équation (3.6) en  $Z = b(t)$  pour arriver à

$$S(t, b(t)) - \nu \partial_{ZZ}^2 U(t, b(t)) = 0. \quad (3.20)$$

Nous dérivons ensuite l'équation (3.6) par rapport à  $Z$  et évaluons le résultat en  $(t, b(t))$ . Il vient

$$\partial_{tZ}^2 U(t, b(t)) + \partial_Z S(t, b(t)) - \nu \partial_{ZZZ}^3 U(t, b(t)) = 0.$$

Afin de faire apparaître un terme  $\partial_{tZ}^2$  dans une seconde égalité pour identifier les termes, nous dérivons la condition aux limites (3.7b) en temps, d'où

$$\partial_{tZ}^2 U(t, b(t)) + \partial_{ZZ}^2 U(t, b(t)) \dot{b}(t) = 0,$$

et donc

$$\partial_{ZZ}^2 U(t, b(t)) \dot{b}(t) = \partial_Z S(t, b(t)) - \nu \partial_{ZZZ}^3 U(t, b(t)).$$

En utilisant ce qui précède, nous en déduisons

$$\frac{1}{\nu} S(t, b(t)) \dot{b}(t) = \partial_Z S(t, b(t)) - \nu \partial_{ZZZ}^3 U(t, b(t)).$$

En utilisant l'hypothèse  $S(t, b(t)) \neq 0$ , nous obtenons l'expression annoncée.

2) Si  $\nu = 0$ , l'équation (3.6) se réduit à

$$\partial_t U(t, Z) + S(t, Z) = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[,$$

ce qui nous donne, grâce à la continuité en espace de  $\partial_t U$  et de  $S$ , que  $\partial_t U(t, b(t)) = -S(t, b(t))$ . Et par (3.19) nous avons

$$\dot{b}(t) = \frac{-\partial_t U(t, b(t))}{\partial_Z U(t, b(t))},$$

d'où la relation (3.18). □

Le lemme 3.4 fournit une équation qui régit l'évolution de  $b(t)$ . Cette équation ne sera pas utilisée par la suite car elle demande trop de régularité sur la vitesse. Dans la section 3.3, nous développerons une approche numérique qui nous permettra de suivre l'évolution de  $b(t)$  et qui présente l'avantage de ne pas faire intervenir la dérivée troisième de la vitesse en espace.

### 3.3 Étude analytique du cas non visqueux

Lorsqu'il n'y a pas de viscosité, l'équation d'évolution (3.6) se simplifie en

$$\partial_t U(t, Z) + S(t, Z) = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[. \quad (3.21)$$

De plus, il ne reste que la condition aux limites

$$U(t, b(t)) = 0, \quad (3.22)$$

et nous supposons à nouveau (3.10) et (3.11), à savoir

$$\partial_Z S \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \text{ et tout } Z \in ]0, h[, \quad (3.23)$$

et

$$\partial_Z U^0 > 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(0), h[. \quad (3.24)$$

La vitesse initiale est donnée par (3.8) et vérifie (3.9), i.e.

$$U(0, Z) = U^0(Z) \quad \text{pour } Z \in ]b^0, h[. \quad (3.25)$$

Nous cherchons une solution  $(U, b)$  vérifiant

$$\partial_Z U > 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \text{ et tout } Z \in ]b(t), h[, \quad (3.26)$$

et telle que la condition

$$S(t, b(t)) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \quad (3.27)$$

soit satisfaite. En effet, cette condition est automatiquement vérifiée dans le cas visqueux. Ceci s'obtient en utilisant (3.20) et le fait que  $\partial_{ZZ}^2 U(t, b(t)) \geq 0$ , puisque  $U(t, b(t)) = \partial_Z U(t, b(t)) = 0$ , et  $U(t, Z) > 0$  pour  $Z > b(t)$ , comme représenté ci-dessous à la figure 3.1.

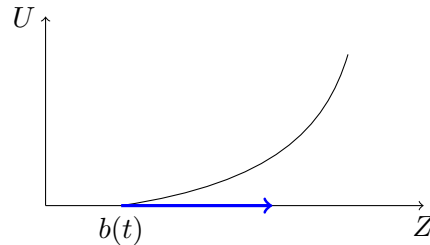


FIGURE 3.1 – Profil de vitesse si  $\nu > 0$ .

Si la solution  $U_\nu$  du problème visqueux tend vers une limite  $U$  solution du problème non visqueux (3.21),(3.22),(3.26), nous nous attendons à ce qu'elle satisfasse (3.27). En fait, (3.27) s'interprète comme une condition d'entropie qui permet de sélectionner une solution unique.

Nous allons construire une solution à (3.21),(3.22),(3.26),(3.27) pour différents choix de  $S$  et  $U^0$ . Nous avons vu en section 2.3 un exemple où la fonction  $S$  est constante et à valeurs positives. Nous allons étudier ici des cas où la fonction  $S$  varie en espace et admet un zéro en  $Z$ . Par la suite, nous supposons que  $S$  admet un seul zéro, celui-ci est noté  $b^*(t)$  et dépend du temps. Puisque  $S$  est décroissant et admet un seul zéro, nous avons

$$S(t, Z) > 0 \quad \text{pour tout } Z < b^*(t), \quad (3.28a)$$

$$S(t, Z) < 0 \quad \text{pour tout } Z > b^*(t). \quad (3.28b)$$

Nous supposons que  $S$  est continu par rapport à ses deux arguments. Nous remarquons qu'avec (3.28) ceci implique que  $b^*(t)$  est continu.

**Lemme 3.5.** *La condition (3.27) est équivalente à*

$$b(t) \leq b^*(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (3.29)$$

La démonstration est immédiate par (3.28), et ce résultat signifie que le zéro de  $S$  est atteint dans la zone fluide de l'écoulement.

Il n'est pas nécessaire de supposer  $b^0 \leq b^*(0)$  pour obtenir (3.29). En effet, même si  $b^0 > b^*(0)$ ,  $b(t)$  doit sauter instantanément au-dessous de  $b^*(t)$  pour des temps très petits, afin que (3.29) soit satisfaite. Néanmoins, dans ce cas,  $b(t)$  est discontinu. Nous reviendrons sur cette configuration dans la section 3.3.4. Dans les sections 3.3.1 à 3.3.3, nous supposons que

$$b^0 < b^*(0), \quad (3.30)$$

et nous cherchons  $b(t)$  continu, avec  $b^0 \equiv \lim_{t \rightarrow 0^+} b(t) = b^0$ .

**Remarque 3.6.** *Notons que pour obtenir un arrêt total de l'écoulement, il faut que l'épaisseur de la couche solide atteigne la hauteur du domaine, i.e.,  $b(t) = h$  à partir d'un certain temps  $t$ . Or, par (3.29), lorsque  $b^*(t) < h$ , ceci est impossible. Le zéro de  $S$  agit donc comme une barrière empêchant la couche solide d'atteindre la hauteur du domaine.*

### 3.3.1 Cas $b^*(t)$ croissant

Commençons par construire une solution analytique de l'équation d'évolution (3.21), sous l'hypothèse que  $b(t)$  est croissant. Le premier résultat n'utilise pas l'hypothèse  $b^*(t)$  croissant. Cette hypothèse sera utilisée par la suite (cf. lemme 3.8

ci-dessous) pour montrer que la solution analytique ainsi construite satisfait bien  $b(t)$  croissant.

**Lemme 3.7.** *Supposons que nous ayons une solution de (3.21), (3.22), (3.25), (3.26), (3.27) avec  $b(t)$  croissant. Alors, pour tout  $t \in [0, T]$  et pour tout  $Z \in ]b(t), h[$ , nous avons*

$$U(t, Z) = U^0(Z) - \int_0^t S(\tau, Z) d\tau, \quad (3.31)$$

où  $U^0$  est la vitesse initiale.

*Démonstration.* Nous voulons intégrer l'équation (3.21) en temps, sur  $[0, t]$  pour  $t \in [0, T]$  fixé, et  $Z$  fixé dans  $[b(t), h]$ . Pour que ce soit possible, il faut que  $Z \geq b(\tau)$  pour tout  $\tau \in [0, t]$ , pour que  $(\tau, Z)$  reste dans un domaine où (3.21) est valable. Mais  $b(t)$  étant supposé croissant, cette condition est automatiquement satisfaite dès que  $Z \geq b(t)$  (cf. figure 3.2).

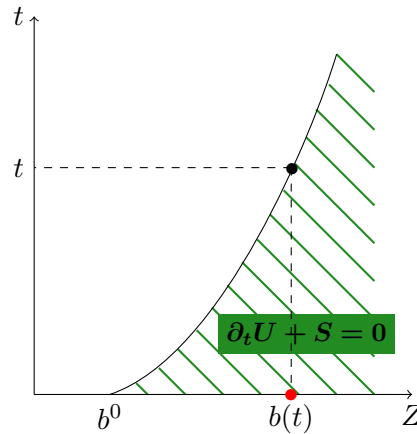


FIGURE 3.2 – Domaine d'intégration de la vitesse avec  $b$  croissant.

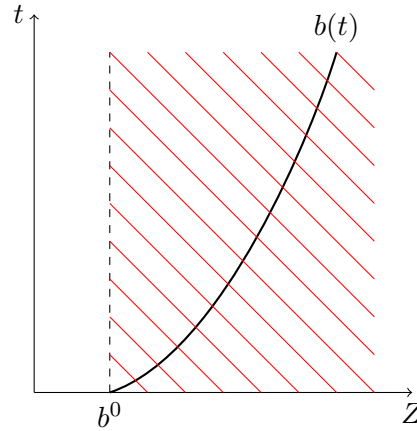
Nous pouvons donc intégrer (3.21) en temps entre 0 et  $t$ , et nous obtenons (3.31).  $\square$

À partir du lemme 3.7, nous allons construire la solution. Nous définissons la fonction  $\tilde{U}$  comme le membre de droite de (3.31) pour tout  $Z \in ]b^0, h[$ , soit

$$\tilde{U}(t, Z) = U^0(Z) - \int_0^t S(\tau, Z) d\tau \quad \text{pour tout } Z \in ]b^0, h[. \quad (3.32)$$

La fonction  $\tilde{U}$  est appelée *vitesse étendue* et elle est entièrement spécifiée par les données du problème. Nous cherchons  $b(t) \in ]b^0, h[$  car  $b(t)$  est *a priori* inconnu, mais il est supposé croissant (cf. figure 3.3).



FIGURE 3.3 – Domaine de définition de la vitesse étendue  $\tilde{U}$ .

Le lemme 3.7 nous dit que  $U$  est nécessairement égal à  $\tilde{U}$  pour tout  $Z \in ]b(t), h[$ , et il nous reste à déterminer  $b(t)$ . Nous observons d'abord, en dérivant  $\tilde{U}$  par rapport à  $Z$  et en utilisant les hypothèses de décroissance en espace du terme source et de croissance de la donnée initiale, que nous avons  $\partial_Z \tilde{U} > 0$  pour tout  $Z \in ]b^0, h[$ . À cause de (3.22),  $b(t)$  doit vérifier  $\tilde{U}(t, b(t)) = 0$ . Il reste à vérifier que nous pouvons trouver un  $b(t)$  zéro de  $\tilde{U}$  qui soit croissant, continu, et vérifiant (3.29).

**Lemme 3.8.** *Nous définissons la vitesse étendue  $\tilde{U}$  par (3.32). Si  $b^*(t)$  est croissant et sous la condition (3.30) qui stipule que  $b^0 < b^*(0)$ , il existe un unique  $b(t) \in [b^0, h]$  tel que  $\tilde{U}(t, b(t)) = 0$ . De plus,*

- 1)  $b(t) < b^*(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ ,
- 2)  $b(t)$  est croissant et continu.

*Démonstration.* L'unicité résulte du fait que  $\partial_Z \tilde{U} > 0$ . Montrons l'existence d'un  $b(t) \in [b^0, b^*(t)]$  tel que  $\tilde{U}(t, b(t)) = 0$ . Cette condition s'écrit

$$U^0(b(t)) - \int_0^t S(\tau, b(t)) d\tau = 0.$$

En posant

$$F(t, b) = U^0(b) - \int_0^t S(\tau, b) d\tau, \quad (3.33)$$

(en fait,  $F(t, b) = \tilde{U}(t, b)$ ) l'équation sur  $b(t)$  s'écrit  $F(t, b(t)) = 0$ . Nous allons montrer que  $F(t, b^0) < 0$ ,  $F(t, b^*(t)) > 0$  et que  $\partial_b F > 0$ . Tout d'abord, nous avons

$$F(t, b^0) = U^0(b^0) - \int_0^t S(\tau, b^0) d\tau = - \int_0^t S(\tau, b^0) d\tau.$$

De plus, comme nous nous sommes placés dans le cas  $b^0 < b^*(0)$ , et que  $b^*(t)$  est supposé croissant, nous avons  $b^0 < b^*(\tau)$  pour tout  $\tau > 0$ . Ainsi, par (3.28), nous

en déduisons que  $S(\tau, b^0) > 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . D'où  $F(t, b^0) < 0$ . Ensuite,

$$F(t, b^*(t)) = U^0(b^*(t)) - \int_0^t S(\tau, b^*(t)) d\tau.$$

Puisque  $U^0$  est supposé strictement croissant, et que  $b^0 < b^*(0) \leq b^*(t)$ , nous obtenons

$$0 = U^0(b^0) < U^0(b^*(t)). \quad (3.34)$$

De plus,  $b^*(\tau) \leq b^*(t)$  pour tout  $\tau \in [0, t]$ , donc par (3.28),  $S(\tau, b^*(t)) \leq 0$ . D'où  $F(t, b^*(t)) > 0$ . Enfin, en dérivant  $F$  par rapport à  $b$ , il vient

$$\partial_b F(t, b) = (U^0)'(b) - \int_0^t \partial_Z S(\tau, b) d\tau.$$

Comme  $S$  est supposé décroissant et  $U^0(Z)$  est supposé strictement croissant pour tout  $Z \in ]b^0, h[$ , nous obtenons  $\partial_b F(t, b) > 0$  dès lors que  $b^0 < b$ . Comme  $F(t, b^0) \neq 0$ , nous cherchons  $b(t)$  tel que  $b^0 < b(t)$  et nous obtenons l'existence et l'unicité de  $b(t)$ . Il reste à montrer que  $b(t)$  est croissant. Nous dérivons l'équation  $F(t, b(t)) = 0$  par rapport à  $t$  pour obtenir

$$\partial_t F(t, b) + \partial_b F(t, b) \dot{b} = 0. \quad (3.35)$$

De plus, nous avons

$$\partial_t F(t, b(t)) = -S(t, b(t)),$$

et par (3.28), nous obtenons  $\partial_t F(t, b) < 0$ . Ainsi, par (3.35) et le fait que  $\partial_b F > 0$ , nous en déduisons que  $\dot{b} > 0$ .  $\square$

Nous avons finalement démontré le résultat suivant :

**Proposition 3.9.** *Supposons que nous ayons (3.10), (3.11), (3.28), (3.30), et  $b^*(t)$  croissant. Alors, il existe une unique solution à (3.21), (3.22), (3.25), (3.26), (3.27), avec  $b(t)$  croissant et continu. La vitesse est donnée par (3.31) et  $b(t)$  est déterminé par*

$$U^0(b(t)) = \int_0^t S(\tau, b(t)) d\tau, \quad (3.36)$$

et vérifie  $b(t) < b^*(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

#### Illustration : vitesse initiale linéaire et terme source linéaire en $Z$

Pour illustrer les résultats ci-dessus, nous explicitons la solution analytique dans le cas particulier d'une vitesse initiale linéaire avec

$$U^0(Z) = Z - b^0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b^0, h[, \quad (3.37)$$

où  $b^0$  est l'épaisseur initiale de la couche solide. La fonction  $U^0$  vérifie bien l'hypothèse de croissance (3.11). Pour simplifier, nous prenons un terme source linéaire en  $Z$

$$S(t, Z) = b^*(t) - Z \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \text{ et tout } Z \in ]0, h[. \quad (3.38)$$

La condition (3.10) est trivialement satisfaite, et conformément aux hypothèses ci-dessus, nous supposons que  $b^*(t)$  est croissant avec  $b^0 < b^*(0)$ . Dans ces conditions, la proposition 3.8 donne une unique solution, avec  $b(t)$  croissant. En utilisant (3.37) et (3.38), la vitesse analytique est donnée par

$$U(t, Z) = Z(1+t) - b^0 - \int_0^t b^*(\tau) d\tau \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[. \quad (3.39)$$

Il reste à nous donner un  $b^*(t)$ , ainsi que  $b^0$ , pour obtenir l'expression explicite de la vitesse. De même, pour l'épaisseur de la couche solide, nous sommes en mesure de calculer son expression analytique. Par l'équation  $U(t, b(t)) = 0$ , il vient

$$b(t) = \frac{b^0 + \int_0^t b^*(\tau) d\tau}{1+t} \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (3.40)$$

Remarquons qu'en combinant cette expression avec (3.39), nous en déduisons

$$U(t, Z) = (1+t)(Z - b(t)) \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[. \quad (3.41)$$

De plus, nous pouvons vérifier que  $b$  défini par (3.40) est bien croissant. En effet, il suffit de voir que la dérivée en temps de (3.40),

$$\partial_t b(t) = \frac{b^*(t)(1+t) - b^0 - \int_0^t b^*(\tau) d\tau}{(1+t)^2} \quad (3.42)$$

est positive. Nous avons

$$b^*(t)(1+t) - b^0 - \int_0^t b^*(\tau) d\tau > b^*(t)(1+t) - b^*(0) - \int_0^t b^*(\tau) d\tau, \quad (3.43)$$

car nous avons supposé  $b^0 < b^*(0)$ . Ensuite, puisque  $b^*(t)$  est croissant,

$$b^*(t)(1+t) - b^*(0) - \int_0^t b^*(\tau) d\tau \geq b^*(t)t - \int_0^t b^*(\tau) d\tau \geq 0. \quad (3.44)$$

À titre d'illustration, nous considérons un domaine de hauteur  $h = 6$ , et nous fixons l'épaisseur initiale de couche solide à  $b^0 = 3.5$ . Nous prenons une fonction  $b^*(t)$  constante,  $b^*(t) = b^*$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , et vérifiant  $b^0 < b^* < h$ . La formule (3.39) donnant la vitesse devient

$$U(t, Z) = (1+t)Z - (b^0 + tb^*) \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[, \quad (3.45)$$

et la formule (3.40) donnant l'épaisseur de la couche solide devient

$$b(t) = \frac{b^0 + tb^*}{1+t} \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (3.46)$$

Nous observons que  $b(t) > b^0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = b^*$ . Pour illustrer graphiquement cet exemple, nous présentons à la figure 3.4, pour  $b^* = 5$ , les profils de vitesse à différents instants et l'évolution de la position de l'interface jusqu'au temps final  $T = 6$ .

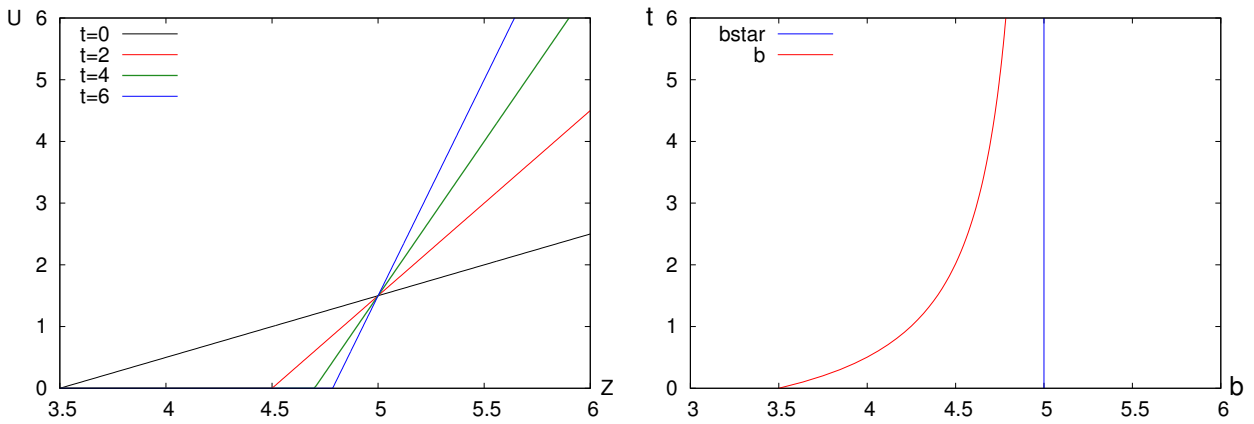


FIGURE 3.4 – Profils de vitesse et épaisseur de la couche solide.

Nous observons une croissance progressive de l'épaisseur de la couche solide sans atteindre l'arrêt complet de l'écoulement puisque la valeur limite de l'épaisseur de la couche solide est  $b^*$ , avec  $b^* < h$ . De plus, nous remarquons que tous les profils de vitesse s'intersectent en  $Z = b^*$ . Ceci vient de la formule (3.45) évaluée en  $b^*$ , qui donne

$$U(t, b^*) = U^0(b^*) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+.$$

### 3.3.2 Cas $b^*(t)$ strictement décroissant avec $b^0 = b^*(0)$

Nous commençons par un résultat préliminaire qui n'utilise pas les hypothèses ci-dessus sur  $b^*$ .

**Lemme 3.10.** *Soit  $(U, b)$  une solution de (3.21), (3.22), (3.25), (3.26), (3.27). Supposons qu'il existe  $t_0 > 0$  tel que  $\dot{b}(t_0) \leq 0$ . Alors,*

$$b(t_0) = b^*(t_0). \quad (3.47)$$

*Démonstration.* Nous dérivons l'égalité  $U(t, b(t)) = 0$ , ce qui donne

$$\partial_t U(t, b(t)) + \partial_Z U(t, b(t)) \dot{b}(t) = 0. \quad (3.48)$$

Comme  $U$  vérifie l'équation (3.21), nous avons  $\partial_t U(t, b(t)) = -S(t, b(t)) \leq 0$  par (3.27). Maintenant, soit  $t_0 > 0$  tel que  $\dot{b}(t_0) \leq 0$ . Comme  $\partial_Z U(t, b(t)) \geq 0$  (limite de (3.26) quand  $Z \rightarrow b(t)$ ), les deux termes de l'équation (3.48) sont négatifs ou nuls. Ils sont donc tous les deux nuls. D'où  $S(t_0, b(t_0)) = 0$  et  $\partial_Z U(t_0, b(t_0))\dot{b}(t_0) = 0$ . L'égalité  $S(t_0, b(t_0)) = 0$  implique que  $b(t_0) = b^*(t_0)$ , car  $S$  n'a qu'un seul zéro en  $Z$ .  $\square$

Nous allons maintenant construire la solution analytique sous l'hypothèse que  $b^*(t)$  est strictement décroissant et que  $b^0 = b^*(0)$ .

**Lemme 3.11.** *Si  $(U, b)$  est solution de (3.21), (3.22), (3.25), (3.26), (3.27). Supposons que  $b^*(t)$  est strictement décroissant et que  $b^0 = b^*(0)$ . Alors,*

$$b(t) = b^*(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \quad (3.49)$$

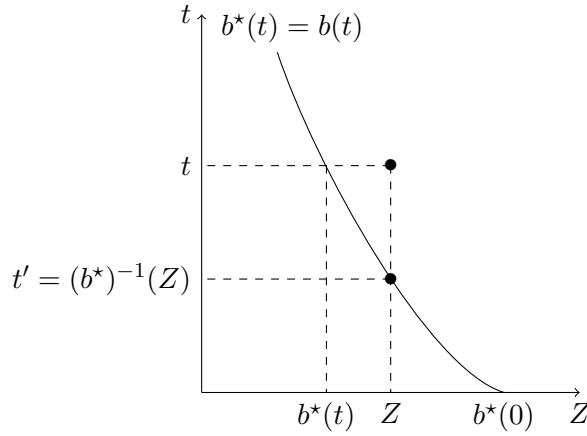
et

$$U(t, Z) = - \int_{(b^*)^{-1}(Z)}^t S(\tau, Z) d\tau \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), b^*(0)], \quad (3.50a)$$

$$U(t, Z) = U^0(Z) - \int_0^t S(\tau, Z) d\tau \quad \text{pour tout } Z \in [b^*(0), h[. \quad (3.50b)$$

*Démonstration.* Montrons tout d'abord (3.49). Pour cela, nous posons  $\Delta = b - b^*$ . Nous avons alors, par l'hypothèse  $b^0 = b^*(0)$  et la propriété  $b(0) = b^0$ ,  $\Delta(0) = 0$ . De plus, par le lemme 3.5, nous avons  $\Delta \leq 0$ . Raisonnons par l'absurde pour montrer que  $\Delta(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Supposons qu'il existe un temps  $t_1 > 0$  tel que  $\Delta(t_1) < 0$ . Par le théorème des accroissements finis, il existe un temps  $t_0 \in ]0, t_1[$  tel que  $\Delta(t_0) < 0$  et  $\Delta'(t_0) < 0$ . Ceci implique que  $\dot{b}(t_0) < \dot{b}^*(t_0) \leq 0$ , d'où  $\Delta(t_0) = 0$  par le lemme 3.10, ce qui contredit  $\Delta(t_0) < 0$ .

Montrons maintenant (3.50). Nous avons  $b(t) < b^*(0)$  car  $b = b^*$  est strictement décroissant. Pour  $Z$  fixé dans  $]b^*(t), b^*(0)[$ , nous intégrons l'équation (3.21) entre  $t \in [0, T]$  et  $t' \in ]0, t[$ , où  $t'$  est tel que  $Z = b^*(t')$ , i.e.  $t' = (b^*)^{-1}(Z)$  (cf. figure 3.5).

FIGURE 3.5 – Domaine d'intégration de la vitesse avec  $b$  décroissant.

Nous obtenons

$$U(t, Z) = U(t', Z) - \int_{t'}^t S(\tau, Z) d\tau.$$

De plus, nous avons  $U(t', Z) = U(t', b(t')) = 0$  car  $t' = (b^*)^{-1}(Z) = b^{-1}(Z)$ , ce qui nous donne (3.50a). Pour  $Z$  fixé dans  $]b^*(0), h[$ , nous pouvons intégrer (3.21) entre  $t \in [0, T]$  et 0, d'où (3.50b).  $\square$

Nous vérifions maintenant que la construction ci-dessus fournit bien une solution et nous en déduisons une condition aux limites supplémentaire en  $Z = b(t)$ ,

$$\partial_Z U(t, b(t)) = 0. \quad (3.51)$$

**Proposition 3.12.** *Soit  $(U, b)$  définie par (3.49), (3.50). Nous supposons que  $b^*(t)$  est strictement décroissant, et que  $b^0 = b^*(0)$ . Si  $\partial_Z S < 0$ , alors  $(U, b)$  est solution de (3.21), (3.22), (3.25), (3.26), (3.27) et vérifie (3.51).*

*Démonstration.* Si  $Z = b^*(0)$ , les deux formules (3.50a) et (3.50b) donnent la même valeur, car  $U^0(b^*(0)) = U^0(b(0)) = U^0(b^0) = 0$ , ce qui implique que  $U$  est continu en  $Z$ . Vérifions que les conditions (3.21), (3.22), (3.25), (3.26), (3.27) sont bien satisfaites. Tout d'abord, (3.21) est vérifiée de façon évidente en dérivant (3.50) par rapport à  $t$ . Ensuite, (3.22) est immédiate par (3.50a) et (3.25) par (3.50b). La condition (3.27) est évidemment satisfaite puisque  $S(t, b(t)) = S(t, b^*(t)) = 0$ . Ensuite, montrons la condition (3.26). Pour  $Z \in ]b^*(0), h[$ , c'est immédiat car  $S$  est supposé strictement décroissant en  $Z$  et  $U^0$  strictement croissant en  $Z$ . Pour tout  $Z \in ]b(t), b^*(0)[$ , nous avons

$$\partial_Z U = - \int_{(b^*)^{-1}(Z)}^t \partial_Z S(\tau, Z) d\tau + S((b^*)^{-1}(Z), Z) \partial_Z ((b^*)^{-1}(Z)).$$

Il existe un temps  $t' \in ]0, t[$  tel que  $t' = (b^*)^{-1}(Z)$ , d'où  $S((b^*)^{-1}(Z), Z) = S(t', b^*(t')) = 0$ . Ainsi,

$$\partial_Z U = - \int_{t'}^t \partial_Z S(\tau, Z) d\tau > 0.$$

D'où le résultat. De cette dernière égalité nous en déduisons également la condition aux limites supplémentaire (3.51) puisque  $t' = (b^*)^{-1}(Z) = t$  en  $Z = b(t)$ .  $\square$

### 3.3.3 Cas $b^*(t)$ décroissant avec $b^0 < b^*(0)$

Nous allons maintenant nous placer dans la situation où  $b^0 < b^*(0)$ , et nous considérons comme précédemment des fonctions  $b(t)$  continues. D'après le lemme 3.10, si  $b(t) < b^*(t)$  sur un intervalle, alors  $b(t)$  est strictement croissant sur cet intervalle (par contraposée). Nous avons donc deux situations qui peuvent se présenter :

- 1)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = l$  (par valeurs croissantes) et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} b^*(t) = l'$  (par valeurs décroissantes) avec  $l \leq l'$ ,
- 2) il existe un temps  $t^* > 0$  tel que  $b(t^*) = b^*(t^*)$ , et pour tout  $t < t^*$ ,  $b(t) < b^*(t)$ .

La situation 1) signifie qu'il n'y a pas d'intersection entre les graphes des fonctions  $b$  et  $b^*$ . Dans la situation 2), il y a une intersection en  $t = t^*$ , et à partir du temps  $t^*$ , nous sommes dans le cas de la sous-section 3.3.2. Dans le reste de cette section, nous allons détailler le cas 2). Ainsi, nous avons

$$\begin{cases} b(t) < b^*(t) & \text{pour tout } t < t^*, \\ b(t) = b^*(t) & \text{pour tout } t \geq t^*. \end{cases} \quad (3.52)$$

Ce qui donne une épaisseur de couche solide croissante pour  $0 \leq t \leq t^*$  et décroissante pour  $t > t^*$ . Ce changement de variation influe sur la formule déterminant la vitesse.

**Lemme 3.13.** *Soit  $(U, b)$  une solution de (3.21), (3.22), (3.25), (3.26), (3.27), avec  $b(t)$  satisfaisant (3.52). Nous supposons que  $b^*(t)$  est strictement décroissant, et que  $b^0 < b^*(0)$ . Alors, pour tout  $t \geq t^*$ , la vitesse est donnée par*

$$U(t, Z) = - \int_{(b^*)^{-1}(Z)}^t S(\tau, Z) d\tau \quad \text{pour tout } Z \in ]b^*(t), b^*(t^*)[, \quad (3.53a)$$

$$U(t, Z) = U^0(Z) - \int_0^t S(\tau, Z) d\tau \quad \text{pour tout } Z \in ]b^*(t^*), h[. \quad (3.53b)$$

Pour  $0 < t < t^*$ , la vitesse est donnée par

$$U(t, Z) = U^0(Z) - \int_0^t S(\tau, Z) d\tau \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[. \quad (3.54)$$

*Démonstration.* Nous raisonnons sur la figure 3.6. Lorsque  $t \geq t^*$ , nous sommes dans la même configuration que dans la sous-section précédente, et les mêmes arguments donnent la formule (3.53). Lorsque  $0 < t < t^*$ , nous sommes dans le cas où  $b(t)$  est croissant, donc la vitesse est donnée par le lemme 3.7, d'où (3.54).

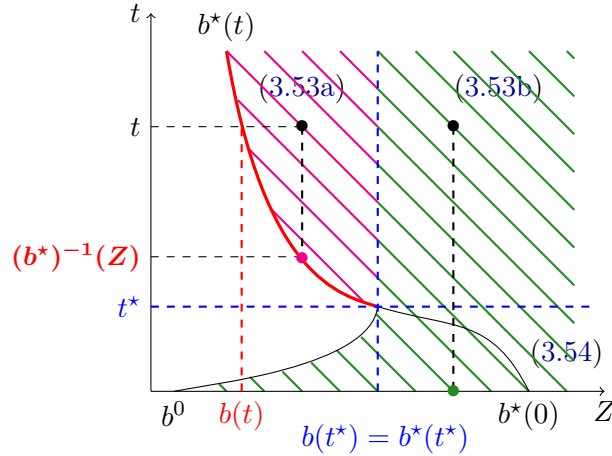


FIGURE 3.6 – Domaine d'intégration de la vitesse.

□

Pour achever la construction de la solution, il nous reste à montrer que  $b(t)$  est déterminé comme zéro de (3.54), et que  $t^*$  est le premier temps  $t$  à partir duquel  $b(t) = b^*(t)$ . Nous rappelons la vitesse étendue  $\tilde{U}$  définie pour  $Z \in [b^0, h]$  et  $t \in [0, T]$ , qui est donnée par (3.32).

**Proposition 3.14.** *Il existe un temps maximal  $t^* > 0$  tel que pour tout  $t < t^*$ , il existe un unique zéro en  $Z$  de  $\tilde{U}$ , que nous appelons  $b(t)$ , tel que  $b^0 < b(t) < b^*(t)$ . De plus,  $b(t)$  est strictement croissant sur  $]0, t^*[$ , et si  $t^* < +\infty$ , alors  $b(t^*) = b^*(t^*)$ .*

*Démonstration.* Notons  $Prop(t)$  la proposition suivante : il existe un unique zéro de  $Z \mapsto \tilde{U}(t, Z)$ , appelé  $b(t)$ , tel que  $b^0 < b(t) < b^*(t)$ . Soit  $I$  l'ensemble

$$I = \{t^+ > 0 \mid \forall t \in ]0, t^+[ , Prop(t) \text{ est vraie} \}.$$

Cet ensemble  $I$  est convexe puisque si  $t_1^+ \in I$ , alors  $t_2^+ \in ]0, t_1^+[$  implique  $t_2^+ \in I$ . L'ensemble  $I$  est donc un intervalle de  $\mathbb{R}$ . De plus, de la définition de  $I$  nous déduisons que nous avons l'un des trois cas suivants :

- 1)  $I = \emptyset$ ,
- 2)  $I = ]0, t^*]$ ,
- 3)  $I = ]0, +\infty[$ .



Nous allons montrer que  $I \neq \emptyset$ . Reprenons la démonstration du lemme 3.8. Nous considérons  $F$  la fonction définie en (3.33) telle que  $\tilde{U}(t, b) = F(t, b)$ , c'est à dire

$$F(t, b) = U^0(b) - \int_0^t S(\tau, b) d\tau.$$

Montrons que cette fonction admet un unique zéro  $b(t)$  dans l'intervalle  $[b^0, b^*(t)]$ . L'unicité résulte du fait que  $\partial_b F > 0$  (cf. démonstration du lemme 3.8). Reste à prouver l'existence. Pour cela, nous allons montrer que pour  $t^+ > 0$  (assez petit),  $Prop(t)$  est vraie pour tout  $t < t^+$ . Pour  $t^+ > 0$  (assez petit), montrons que  $F(t, b^0) < 0$ , et que  $F(t, b^*(t)) > 0$ , pour tout  $t < t^+$ . À cette fin, nous remarquons qu'il existe  $\epsilon > 0$  et  $\bar{t} > 0$  tels que

$$b^0 + \epsilon < b^*(t) \quad \text{pour tout } t \leq \bar{t}, \quad (3.55)$$

puisque  $b^0 < b^*(0)$  et que  $b^*(t)$  est décroissant et continu. Commençons par montrer  $F(t, b^0) < 0$ . Nous avons  $F(t, b^0) = -\int_0^t S(\tau, b^0) d\tau$ , il suffit donc de montrer que  $S(\tau, b^0) > 0$  pour tout  $\tau \in ]0, t[$ . Par (3.55) nous avons,  $b^0 < b^*(\tau)$  pour tout  $\tau \in ]0, t[$ . Ainsi, par (3.28), nous en déduisons que  $S(\tau, b^0) > 0$  pour tout  $\tau \in ]0, t[$ , d'où  $F(t, b^0) < 0$ . Ensuite, montrons que  $F(t, b^*(t)) > 0$ . Comme  $S$  est continu en ses deux variables, il existe une constante  $C_1 \geq 0$  telle que  $S(\tau, Z) \leq C_1$  pour tout  $\tau \in [0, \bar{t}]$  et tout  $Z \in [0, h]$ . De plus,  $U^0(Z)$  est continu sur  $[b^0 + \epsilon, h]$ , et ne s'y annule pas, donc il existe une constante  $C_2 > 0$  telle que  $U^0(Z) \geq C_2$  pour tout  $Z \in [b^0 + \epsilon, h]$ . Ainsi, pour tout  $t \leq \bar{t}$ , il vient  $F(t, b^*(t)) \geq C_2 - C_1 t$ . Nous en déduisons que, pour tout  $t \leq \bar{t}$  tel que  $t < \frac{C_2}{C_1}$ , nous avons  $F(t, b^*(t)) > 0$ . D'où l'existence d'un zéro  $b(t)$  dans l'intervalle  $[b^0, b^*(t)]$ . Ainsi,  $I \neq \emptyset$ .

La démonstration de la croissance de  $b(t)$  est identique à celle de la démonstration du lemme 3.8, en utilisant (3.35). Il reste à montrer que si  $t^* < +\infty$ , alors  $b(t^*) = b^*(t^*)$ . Pour cela, nous allons démontrer que si  $t^* < +\infty$ , alors  $\tilde{U}(t^*, b^*(t^*)) = 0$ . Si  $t^* < +\infty$ , par ce qui précède, nous avons  $I = ]0, t^*]$ , et pour tout  $t^+ > t^*$ ,  $t^+ \notin I$ . Par conséquent, il existe  $t \in [t^*, t^+]$  tel que  $Prop(t)$  est fausse. Comme ceci est valable pour tout  $t^+ > t^*$ , il existe une suite de réels positifs  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_n \geq t^*$  et  $t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} t^*$ , telle que  $Prop(t_n)$  est fausse. Puisque  $\partial_b F > 0$ , l'unicité dans l'énoncé de la proposition est acquise. Nous allons commencer par montrer que  $F(t_n, b^0) < 0$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $b^0 < b^*(\tau)$  pour tout  $\tau \in ]0, t_n[$ . Nous savons que  $b(t)$  est strictement croissant sur  $]0, t^*[$ , donc pour tout  $t \in ]0, t^*[$ , nous avons  $b^0 < b(t)$  et  $b^0 < \lim_{t \rightarrow t^*} b(t)$ . De plus, comme  $b(t) < b^*(t)$  pour tout  $t \in ]0, t^*[$ , il vient  $\lim_{t \rightarrow t^*} b(t) \leq b^*(t^*)$ . D'où, en passant à la limite  $t \rightarrow t^*$ ,  $b^0 < b^*(t^*)$ . De plus, la continuité de  $b^*$  en  $t^*$  implique qu'il existe un temps  $\tilde{t} \in ]t^*, +\infty[$  tel que

$$b^*(t) \geq \frac{b^*(t^*) + b^0}{2} \quad \text{pour tout } t \in [t^*, \tilde{t}], \quad (3.56)$$

puisque  $b^0 < b^*(t^*)$ . De plus, comme  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t^*$  en décroissant, il existe  $\tilde{n} \in \mathbb{N}^*$  tel que  $t_n \leq \tilde{t}$  pour tout  $n \geq \tilde{n}$ . Ainsi, par (3.56), il vient

$$b^*(t_n) \geq \frac{b^*(t^*) + b^0}{2} > b^0 \quad \text{pour tout } n \geq \tilde{n}.$$

Par stricte décroissance de  $b^*$ , nous en déduisons que  $b^*(\tau) > b^*(t_n) > b^0$  pour tout  $\tau \in ]0, t_n[$ .

Comme  $Prop(t_n)$  est fausse, ceci signifie qu'il n'existe pas de zéro de  $\tilde{U}$  qui est inférieur à  $b^*(t_n)$ , et comme nous avons montré que  $b^*(\tau) > b^0$  pour tout  $Z \in ]0, t_n[$ , nous en déduisons que  $F(t_n, b^*(t_n)) \leq 0$ . Faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , nous obtenons  $F(t^*, b^*(t^*)) \leq 0$ . De plus, il existe une suite de réels positifs  $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $t'_n < t^*$  et  $t'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t^*$ , telle que  $Prop(t'_n)$  est vraie. Nous en déduisons en particulier que

$$F(t'_n, b^*(t'_n)) \geq 0.$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , il vient

$$F(t^*, b^*(t^*)) \geq 0.$$

En combinant cette inégalité avec  $F(t^*, b^*(t^*)) \leq 0$ , il vient  $F(t^*, b^*(t^*)) = 0$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

### Illustration

Pour illustrer la construction ci-dessus, nous nous plaçons à nouveau dans le cas d'une vitesse initiale linéaire donnée par (3.37) et d'un terme source linéaire en  $Z$  donné par (3.38). Nous prenons  $b^*(t) = \frac{h + b^0 t^2}{1 + t^2}$ , qui décroît de  $h$  à  $b^0$ . En utilisant le lemme 3.13, nous obtenons, pour tout  $t < t^*$ ,

$$U(t, Z) = (1 + t)(Z - b^0) + (b^0 - h) \arctan t \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[,$$

et pour tout  $t \geq t^*$ ,

$$U(t, Z) = (1 + t)(Z - b^0) + (b^0 - h) \arctan t \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[,$$

$$U(t, Z) = (Z - b^0) \left( t - \sqrt{\frac{h - Z}{Z - b^0}} \right) - (h - b^0) \left( \arctan t - \arctan \sqrt{\frac{h - Z}{Z - b^0}} \right) \\ \text{pour tout } Z \in ]b(t), b^*(t^*)[.$$

Pour l'épaisseur de la couche solide, nous obtenons

$$\begin{aligned} b(t) &= b^0 + (h - b^0) \frac{\arctan t}{1 + t} && \text{pour } t < t^*, \\ b(t) &= b^*(t) && \text{pour } t \geq t^*. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Nous représentons ces résultats à la figure 3.7 ci-dessous.

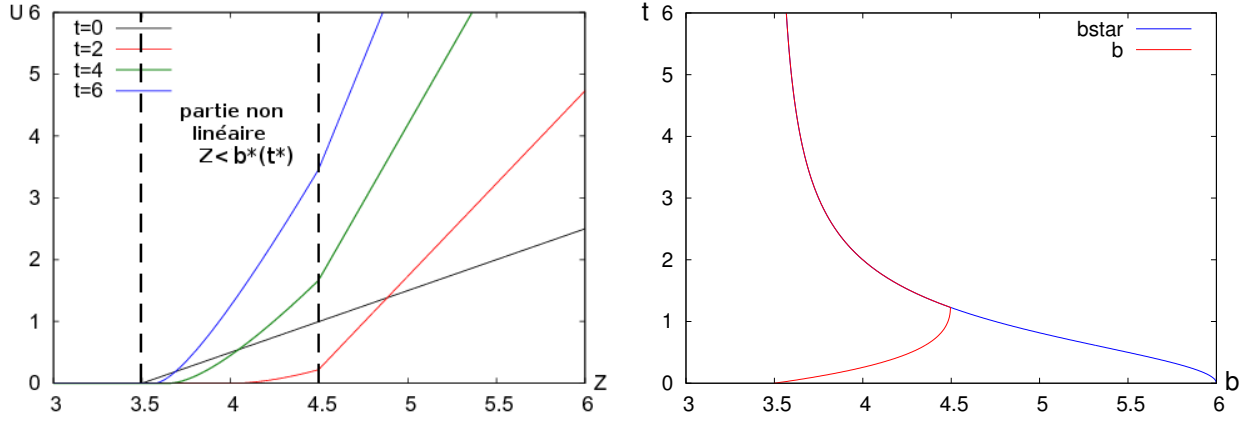


FIGURE 3.7 – Profils de vitesse et épaisseur de la couche solide.

Nous distinguons les parties  $t \leq t^*$  et  $t > t^*$ , avec ici  $t^* \simeq 1.23$ , ce qui donne  $b^*(t^*) \simeq 4.49$ . Lorsque  $t \leq t^*$ , les profils de vitesse sont linéaires et la couche solide s'épaissit. En revanche, lorsque  $t > t^*$ , les profils de vitesse sont non linéaires dans la partie où  $Z \in ]b(t), b^*(t^*)[$ , et sont à nouveau linéaires dans la partie où  $Z \in ]b^*(t^*), h[$ .

### 3.3.4 Cas particulier : $b(t)$ discontinu

Nous revenons au cas d'une fonction  $b^*(t)$  croissante, mais contrairement à la sous-section 3.3.1, nous supposons maintenant que  $b^*(0) < b^0$ . Dans un tel cas de figure, de par le lemme 3.5, dès que  $t > 0$ , l'interface  $b(t)$  saute instantanément en  $Z = b^*(t)$  et nous avons ainsi

$$b(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} b(t) = b^*(0). \quad (3.58)$$

Cette configuration permet de modéliser le cas d'un démarrage brutal d'une partie de la couche solide. Dans cette configuration, nous avons à écrire la condition initiale

$$U(t, Z) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} U^0(Z) \quad \text{pour tout } Z \in ]b(0^+), h[. \quad (3.59)$$

Comme  $U^0$  n'est définie que pour  $b^0 < Z < h$ , nous l'étendons en posant

$$U^0(Z) = 0 \quad \text{pour tout } Z \in [b^*(0), b^0]. \quad (3.60)$$

Pour des temps  $t \in [0, T]$  tels que  $b(t) \geq b^0$ , les profils de vitesse sont donnés par le lemme 3.7. Pour des temps  $t$  tels que  $b^*(0) < b(t) < b^0$ , nous avons le lemme suivant :

**Lemme 3.15.** *Supposons que  $b(t)$  est croissant et que  $b^*(0) < b^0$ . Pour tout  $t \in [0, T]$  tel que  $b^*(0) < b(t) < b^0$ , la vitesse est donnée par*

$$U(t, Z) = - \int_0^t S(\tau, Z) d\tau \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), b^0[,$$

$$U(t, Z) = U^0(Z) - \int_0^t S(\tau, Z) d\tau \quad \text{pour tout } Z \in ]b^0, h[.$$

*Démonstration.* Identique à la démonstration du lemme 3.7, en tenant compte de (3.60). La partie  $]b(t), b^0[$  est représentée sur la figure 3.8 ci-dessous.

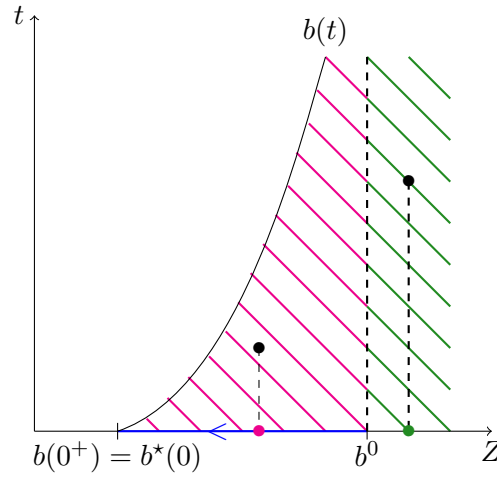


FIGURE 3.8 – Intégration de la vitesse dans la partie  $[b^*(0), b^0]$ .

□

### Illustration

Nous choisissons à nouveau une vitesse initiale linéaire donnée par (3.37) (et étendue selon (3.60)) et un terme source linéaire en  $Z$  donné par (3.38). Nous prenons  $b^*(t) = \frac{b^*(0) + ht^2}{1 + t^2}$ . De plus, nous prenons  $b^0 = 3.5$ . Les profils de vitesse sont linéaires pour tout  $t \in [0, T]$  tel que  $b(t) > b^0$ , et donnés par (en utilisant (3.39))

$$U(t, Z) = -b^0 + (1+t)Z - ht + (h - b^*(0)) \arctan t \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[. \quad (3.61)$$

Les profils de vitesse sont linéaires par morceaux pour tout  $t \in [0, T]$  tel  $b^*(0) < b(t) < b^0$ , et donnés par

$$U(t, Z) = -b^0 + (1+t)Z - ht + (h - b^*(0)) \arctan t \quad \text{pour tout } Z \in ]b^0, h[,$$

$$U(t, Z) = Zt - ht + (h - b^*(0)) \arctan t \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), b^0[.$$

En utilisant la condition  $U(t, b(t)) = 0$ , appliquée à la vitesse dans la partie  $]b(t), b^0[$  avec  $t \in [0, T]$  tel  $b^*(0) < b(t) < b^0$ , il vient

$$b(t) = \frac{ht - (h - b^*(0)) \arctan t}{t}. \quad (3.62)$$

Ainsi, nous avons bien  $b(t)$  croissant,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} b(t) = 1 = b^*(0)$ , et  $b(t)$  est l'unique zéro de  $Z \mapsto U(t, Z)$ . Ces résultats sont représentés à la figure 3.9.

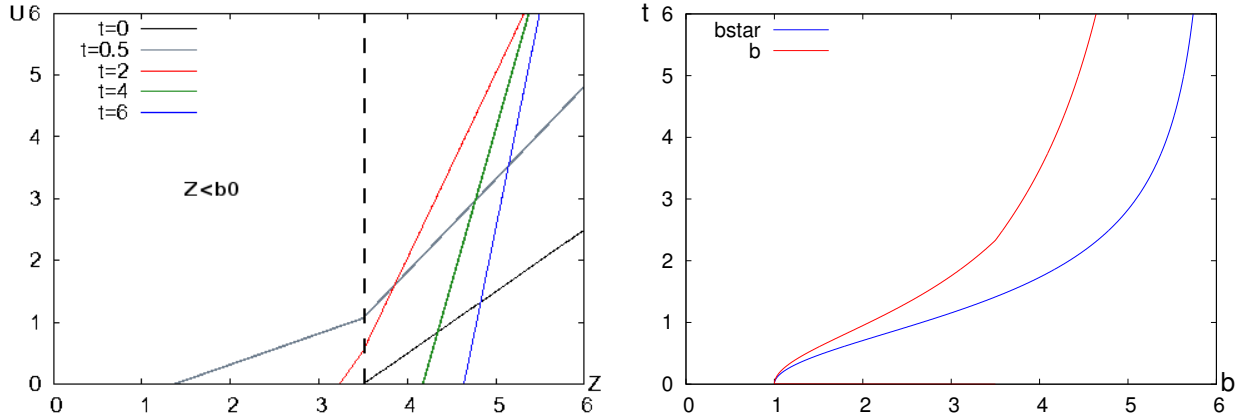


FIGURE 3.9 – Profils de vitesse et épaisseur de la couche solide.

Nous observons que l'épaisseur de la couche solide saute de  $b^0$  à  $b^*(0)$  au démarrage, et les profils de vitesse sont linéaires par morceaux avec un changement de pente en  $Z = b^0$ , pour les temps  $t$  tels que  $b(t) < b^0$ . Dans notre exemple, cela correspond aux temps  $t$  tels que

$$\frac{ht - (h - b^*(0)) \arctan t}{t} < b^0, \quad (3.63)$$

c'est à dire,

$$\frac{\arctan t}{t} > \frac{h - b^0}{h - b^*(0)}. \quad (3.64)$$

Ce qui nous donne  $t \simeq 2.33$ . Au-delà de cet instant, les profils de vitesse sont linéaires.

### 3.4 Méthodes numériques pour le cas avec viscosité

Dans cette section, nous nous intéressons au modèle avec terme source (3.6),(3.7) dans le cas avec viscosité. Comme nous ne disposons pas d'une solution analytique, nous allons approcher la solution par une méthode numérique. Le principe est le suivant : nous discrétisons l'équation d'évolution (3.6) et les conditions aux limites (3.7a) et (3.7c) par un schéma aux différences finies. La troisième condition aux

limites, (3.7b), nous sert à prédire l'évolution de l'épaisseur de la couche solide. Le couplage entre  $U$  et  $b$  est traité de manière implicite. Étant donné une valeur de  $b(t)$  à un instant discret  $t^{n+1}$ ,  $b^{n+1}$ , le profil de vitesse en  $t^{n+1}$ ,  $U^{n+1}$ , se détermine par la discrétisation de (3.6),(3.7a),(3.7c). Ce profil de vitesse  $U^{n+1}$  dépend de manière très simple de  $b^{n+1}$  (nous verrons qu'il s'agit d'une fonction affine par morceaux). Nous pouvons alors déterminer facilement la valeur de  $b^{n+1}$  permettant de satisfaire la condition aux limites (3.7b).

### 3.4.1 Changement de variable

Le problème considéré est posé sur un intervalle dépendant du temps, via l'épaisseur de la couche solide  $b(t)$ . Nous allons donc opérer un changement de variables, afin de passer de l'intervalle  $[b(t), h]$  à  $[0, 1]$ , et de permettre ainsi une discrétisation du problème sur un maillage fixe. Pour ce faire, nous considérons le changement de variables affine suivant

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ \times [b(t), h] &\rightarrow \mathbb{R}^+ \times [0, 1] \\ (t, Z) &\mapsto (\tau, Y) \end{aligned} \quad (3.65)$$

avec  $t = \tau$  et  $Z = b(\tau) + Y(h - b(\tau))$  pour  $0 < Y < 1$ . Ce changement de variables a déjà été présenté dans la preuve du lemme 3.1. Il est clair que ce changement de variables devient singulier lorsque  $b(t) \rightarrow h$  et n'est donc pas adapté à des situations où l'écoulement est proche de l'arrêt. Nous développons une approche alternative en section 3.6 pour étudier ce cas.

Nous allons réécrire les équations et conditions aux limites du problème dans les nouvelles variables. Tout d'abord, les dérivées partielles se réécrivent

$$\begin{aligned} \partial_\tau &= \partial_t + \frac{\partial Z}{\partial \tau} \partial_Z = \partial_t + \dot{b}(\tau)(1 - Y) \partial_Z, \\ \partial_Y &= \frac{\partial Z}{\partial Y} \partial_Z = (h - b(\tau)) \partial_Z. \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, nous écrivons maintenant  $b$  et  $\dot{b}$  au lieu de  $b(\tau)$  et  $\dot{b}(\tau)$ . En remplaçant ces expressions dans (3.6), il vient

$$\partial_\tau U - \frac{(1 - Y)}{h - b} \dot{b} \partial_Y U + S - \frac{\nu}{(h - b)^2} \partial_{YY}^2 U = 0 \quad \text{pour tout } Y \in ]0, 1[, \quad (3.66)$$

et les conditions aux limites (3.7) deviennent (comme  $\nu \neq 0$ )

$$U = 0 \quad \text{en } Y = 0, \quad (3.67a)$$

$$\partial_Y U = 0 \quad \text{en } Y = 0, \quad (3.67b)$$

$$\partial_Y U = 0 \quad \text{en } Y = 1. \quad (3.67c)$$

### 3.4.2 Différences finies en espace et en temps

Nous discrétisons le domaine  $\Omega = ]0, 1[$  par un maillage uniforme. Nous introduisons un pas d'espace  $\Delta Y = \frac{1}{n_Y} > 0$ , avec  $n_Y$  entier positif, et nous définissons les nœuds d'un maillage régulier

$$Y_j = (j - \frac{1}{2})\Delta Y,$$

point milieu de chaque maille  $](j - 1)\Delta Y, j\Delta Y[$ , pour  $j \in \{1, \dots, n_Y\}$ . Soit  $\Delta t^n > 0$  le pas de discrétisation en temps pour  $n \in \{0, \dots, N\}$ . En partant de  $t^0 = 0$ , ces pas génèrent la suite d'instants discrets  $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$  avec  $t^n$  une suite croissante d'instants discrets. Nous posons  $T = t^N$  le temps final.

Notre objectif est de déterminer des approximations de la vitesse au point milieu de chaque maille et à l'instant discret  $t^n$

$$U_j^n \simeq U(t^n, b^n + Y_j(h - b^n)),$$

pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, n_Y\}$ . La condition initiale est prise en compte en posant  $U_j^0 = U^0(b^0 + Y_j(h - b^0))$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n_Y\}$ . Les conditions aux limites (3.67a),(3.67c) conduisent aux égalités

$$U_0^{n+1} = -U_1^{n+1}, \quad (3.68a)$$

$$U_0^{n+1} = U_1^{n+1}, \quad (3.68b)$$

$$U_{n_Y+1}^{n+1} = U_{n_Y}^{n+1}, \quad (3.68c)$$

pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ .

L'équation d'évolution (3.66) contient un terme advectif,  $\frac{1 - Y_j}{h - b} \dot{b} \partial_Y U$ , un terme source  $S$ , et un terme diffusif,  $-\frac{\nu}{(h - b)^2} \partial_{YY}^2 U$ . Le terme advectif et le terme source sont discrétisés par un schéma explicite, avec condition CFL, et le terme de diffusion de manière semi-implicite. Ainsi, l'équation (3.66) se discrétise en la suivante : pour tout  $n \in \{0, \dots, N - 1\}$ , trouver  $U_j^{n+1}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n_Y\}$ , tel que

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t^n} + \frac{(1 - Y_j)}{h - b^n} a_j^{n+\frac{1}{2}} + S(t^n, Y_j) - \frac{\nu}{(h - b^n)^2} \frac{U_{j+1}^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1}}{(\Delta Y)^2} = 0, \quad (3.69)$$

avec  $b^n$  l'approximation de l'épaisseur de la couche solide au temps  $t^n$  (qui est connue), et  $b^{n+1}$  celle au temps  $t^{n+1}$  (qui doit être déterminée). Pour alléger les notations, nous écrivons  $S(t^n, Y_j)$  au lieu de  $S(t^n, b^n + Y_j(h - b^n))$ . Enfin,  $a_j^{n+\frac{1}{2}}$  est

un terme d'advection tel que, en posant  $\dot{b}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{b^{n+1} - b^n}{\Delta t}$ ,

$$a_j^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} -\dot{b}^{n+\frac{1}{2}} \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta Y} & \text{si } \dot{b}^{n+\frac{1}{2}} \leq 0, \\ -\dot{b}^{n+\frac{1}{2}} \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta Y} & \text{si } \dot{b}^{n+\frac{1}{2}} \geq 0. \end{cases} \quad (3.70)$$

D'après l'équation (3.69), le système à résoudre est, pour tout  $j \in \{1, \dots, n_Y\}$ ,

$$U_j^{n+1} - \frac{\nu \Delta t^n}{(h - b^n)^2 (\Delta Y)^2} (U_{j+1}^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1}) = V_j^n, \quad (3.71)$$

avec

$$V_j^n = U_j^n - \Delta t^n \frac{1 - Y_j}{h - b^n} a_j^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t^n S(t^n, Y_j). \quad (3.72)$$

Par souci de concision, nous notons

$$K^n = \frac{\nu \Delta t^n}{(h - b^n)^2 (\Delta Y)^2} > 0, \quad (3.73)$$

ce qui donne finalement

$$U_j^{n+1} (1 + 2K^n) - K^n (U_{j+1}^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}) = V_j^n. \quad (3.74)$$

Ainsi, à chaque pas de temps nous avons à calculer les valeurs  $(U_j^{n+1})_{1 \leq j \leq n_Y}$  et pour cela, prenant en compte les conditions aux limites (3.68a), (3.68c) afin d'évaluer  $U_0^{n+1}$  et  $U_{n_Y+1}^{n+1}$ , nous devons inverser la matrice tridiagonale

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 + 3K^n & -K^n & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -K^n & 1 + 2K^n & -K^n & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & -K^n & 1 + 2K^n & -K^n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -K^n & 1 + K^n \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

dont il est aisé de remarquer le caractère à diagonale dominante et donc inversible à coefficients positifs. En pratique, nous exploitons la structure tridiagonale pour calculer explicitement, par un algorithme de descente-remontée, la décomposition LU de la matrice  $A^n$ .

Enfin, pour assurer la stabilité du schéma, nous imposons que  $\Delta t^n$  vérifie la condition CFL classique d'un schéma décentré

$$\frac{\Delta t^n |\dot{b}^{n+\frac{1}{2}}|}{h - b^n} \leq \Delta Y. \quad (3.76)$$



De ce fait, nous constatons que nous avons besoin de connaître *a priori* une approximation de  $\dot{b}^{n+\frac{1}{2}}$  afin de pouvoir évaluer cette condition CFL. À cette fin, nous posons  $\dot{b}^{-\frac{1}{2}} = 0$  pour une estimation du choix de pas de temps initial et la mise en marche de l'algorithme, puis aux pas de temps suivants, nous utilisons  $\dot{b}^{n-\frac{1}{2}}$  dans la condition CFL (3.76).

### 3.4.3 Méthode pour le suivi d'interface

La valeur de  $b^{n+1}$  est déterminée par la condition aux limites (3.68b). Nous écrivons le système linéaire (3.74),(3.68a),(3.68c) sous la forme compacte

$$A^n U^{n+1}(b^{n+1}) = V^n(b^{n+1}) \quad (3.77)$$

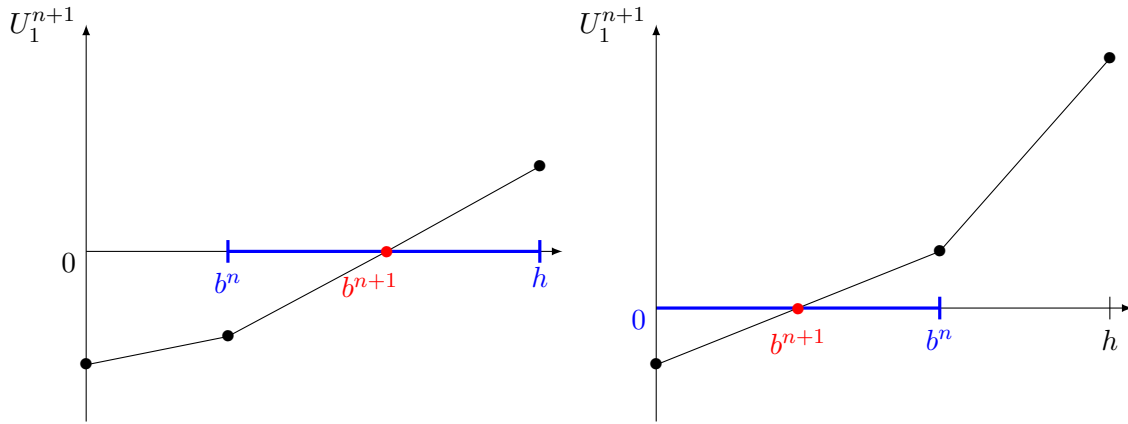
où nous avons fait figurer explicitement la dépendance du membre de droite  $V^n$  en  $b^{n+1}$  et celle de la solution  $U^{n+1}$  qui en résulte.

La discrétisation de la condition aux limites (3.68b) s'écrit, compte tenu de (3.68a),

$$U_1^{n+1}(b^{n+1}) = 0.$$

Ainsi, nous pouvons déterminer  $b^{n+1}$  comme le zéro de la première composante de la vitesse numérique  $U^{n+1}$ . Comme la matrice  $A^n$  est indépendante de  $b^{n+1}$  et que le vecteur  $V^n$  est une fonction affine par morceaux de  $b^{n+1}$  (le caractère par morceaux provient du décentrement qui dépend du signe de  $\frac{b^{n+1} - b^n}{\Delta t}$ ), nous en déduisons que  $U_1^{n+1}$  est une fonction affine par morceaux de  $b^{n+1}$ . De plus,  $U_1^{n+1}$  est fonction croissante de  $b^{n+1}$ . En effet, pour tout  $j \in \{1, \dots, n_Y\}$ ,  $U_j^{n+1}$  est fonction croissante de  $b^{n+1}$  puisque  $A^n$  a un inverse à coefficients positifs, et pour tout  $j \in \{1, \dots, n_Y\}$ ,  $V_j^n$  est fonction croissante de  $b^{n+1}$  par (3.72), puisque  $a_j^{n+1/2}$  est fonction décroissante de  $b^{n+1}$  par (3.70).

Pour déterminer la fonction  $U_1^{n+1}$ , il suffit de l'évaluer en prenant les valeurs  $b^{n+1} = 0$ ,  $b^n$  et  $h$ . La figure 3.10 illustre cette fonction dans le cas où  $b(t)$  est croissant, si bien que  $b^{n+1} \geq b^n$ , l'autre cas est illustré à droite.

FIGURE 3.10 – Fonction  $U_1^{n+1}$  en fonction de  $b^{n+1}$ .

Enfin, une fois déterminée la valeur de  $b^{n+1}$  par interpolation linéaire comme indiqué à la figure 3.10, nous résolvons une dernière fois le système (3.74) pour obtenir la vitesse  $U^{n+1}(b^{n+1})$  sur tous les points du maillage.

### 3.5 Résultats numériques pour le cas avec viscosité

Dans cette section, nous allons étudier numériquement le modèle simplifié avec terme source empirique. Nous avons vu que lorsqu'il n'y a pas de viscosité nous disposons de la solution analytique. Ainsi, par comparaison nous allons pouvoir étudier l'influence de la viscosité sur la solution en utilisant les méthodes numériques décrites précédemment. Les simulations numériques sont effectuées pour un temps final inférieur à celui de l'arrêt de l'écoulement, puisque l'arrêt n'est pas traité par notre modèle. En effet, ceci est dû au changement de variable (3.65) qui fait apparaître un terme devenant singulier lorsque l'épaisseur de la couche solide  $b(t)$  tend vers la hauteur du domaine  $h$ . Néanmoins, nous aborderons une autre méthode permettant de traiter l'arrêt dans la section suivante.

Dans un premier temps, nous effectuons une analyse de la convergence de la solution avec viscosité, afin de nous assurer de la pertinence des résultats obtenus. Pour cela, nous considérons le cas où le terme source est une fonction constante et uniforme. Dans un second temps, nous étudions le comportement en temps long de la solution lorsque le terme source est choisi comme dans l'étude de convergence, constant et uniforme, et également lorsqu'il est linéaire avec un zéro constant ou décroissant en temps, comme décrit dans la section 3.3. Nous présentons quelques profils de vitesse et l'évolution de l'épaisseur de la couche solide selon la forme du terme source et de son zéro, avec une étude asymptotique de l'épaisseur de la couche solide. Ensuite, une analyse du comportement de l'écoulement au démarrage est présentée dans le cas d'un terme source constant et uniforme. En outre, nous

effectuons une étude des équations adimensionnées, afin d'en déduire les valeurs caractéristiques du mouvement du fluide dans cette phase de l'écoulement, telles que la profondeur minimale atteinte pour la couche fluide et le temps correspondant, en fonction de la viscosité et du terme source.

### 3.5.1 Étude de convergence

Dans cette section, nous effectuons une étude de convergence en fonction du raffinement en temps et en espace. Concrètement, nous calculons une solution dite "de référence", que nous jugeons suffisamment fiable, en prenant un grand nombre de nœuds de maillage et un pas de temps très petit. En calculant des solutions plus grossières, et en évaluant l'erreur avec la solution de référence, nous pouvons déterminer les taux de convergence relatifs à notre approche. Afin de simplifier l'étude, nous nous plaçons dans le cas d'un terme source constant et uniforme.

La solution de référence est notée  $U_{\text{ref}}$ . Elle sert à évaluer la qualité de la solution avec viscosité, en la comparant à des solutions calculées moins précisément, c'est à dire avec des pas de temps et d'espace plus grossiers. Pour cela, il faut définir une façon de mesurer l'erreur entre deux solutions calculées sur des maillages différents, c'est à dire que nous allons devoir faire une interpolation de la solution de référence. Il faut prendre garde au fait que l'intervalle sur lequel la solution est non nulle dépend du temps (et en pratique, des paramètres d'approximation), ce qui entraîne des résultats différents lorsque le pas de temps est modifié.

Nous prenons un nombre de points suffisamment grand, soit  $n_Y = 40000$  points, et nous en déduisons, d'après la méthode numérique vue à la section précédente utilisant un changement de variable, que cela donne un pas d'espace  $\Delta Y_{\text{ref}} = \frac{1}{n_Y} = 2.5 \times 10^{-5}$ . Nous optons ensuite pour un pas de temps initial petit  $\Delta t_{\text{ref}}^0 = 10^{-4}$  puis nous déterminons  $\Delta t^n$  en utilisant la condition CFL (3.76). Numériquement, nous posons

$$\Delta t^n = \min \left( \Delta t_{\text{ref}}^0, \frac{\Delta Y(h - b^n)}{|b^{n+\frac{1}{2}}|} \right). \quad (3.78)$$

Nous utilisons ces paramètres pour le calcul de la solution de référence  $U_{\text{ref}}$ . Ensuite, nous calculons une autre solution  $U$  avec un pas de temps initial  $\Delta t^0$  ou (exclusif) un pas d'espace  $2^k$  fois plus grand que celui servant au calcul de  $U_{\text{ref}}$ .

Maintenant, il s'agit de jauger l'écart entre les deux solutions. Pour cela, nous interpolons la solution de référence sur le maillage grossier ayant servi à calculer la solution  $U$ , puis nous estimons l'erreur relative par la quantité

$$\|e\|_k := \frac{\|\mathcal{I}(U_{\text{ref}}) - U\|_k}{\|\mathcal{I}(U_{\text{ref}})\|_k} \quad \text{pour } k = 1, 2, \infty, \quad (3.79)$$

où  $\mathcal{I}$  désigne l'opérateur d'interpolation, et où  $U_{\text{ref}}$  et  $U$  sont évalués au temps final de simulation qui est fixé à  $T = 1$ . Les normes sont celles utilisées de manière usuelle

$$\begin{aligned} \|U\|_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_Y} |U(Y_i)|}{n_Y}, \\ \|U\|_2 &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_Y} |U(Y_i)|^2}{n_Y}}, \\ \|U\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n_Y} |U(Y_i)|. \end{aligned}$$

Les solutions approchées considérées ici correspondent au cas où le terme source est de la forme

$$S = g(\sin \theta + \lambda \cos \theta), \quad (3.80)$$

avec  $\theta$  l'angle d'inclinaison du domaine,  $\lambda$  un coefficient de friction interne et  $g$  la gravité. L'angle d'inclinaison du domaine est fixé à  $-1^\circ$ , et le coefficient de friction interne est choisi de telle manière à ce que nous ayons

$$|\tan \theta| < \lambda = |\tan \theta| + 10^{-2}.$$

Cette condition permet de simuler l'arrêt d'un écoulement, dès lors que nous partons d'une vitesse initiale non nulle partout. Nous choisissons comme profil de vitesse initiale (3.37), i.e

$$U^0(Z) = Z - b(0) \quad \text{pour tout } Z \in ]b(0), h[, \quad (3.81)$$

linéaire par morceaux et non nul au dessus de l'épaisseur de la couche solide initiale  $b(0)$ . L'écoulement va alors tendre progressivement vers l'arrêt, avec un comportement différent selon la viscosité. Pour étudier l'influence de la viscosité sur les résultats, nous étudions les cas  $\nu = 10^{-3}$ , puis  $\nu = 1$ . Les résultats sont présentés sous forme de tableaux renseignant les erreurs selon les 3 normes, pour des valeurs différentes de  $\Delta Y$  et  $\Delta t$ .

- $\nu = 10^{-3}$

$\Delta Y$	$\ e\ _1$	$\ e\ _2$	$\ e\ _\infty$
$2\Delta Y_{\text{ref}}$	1.25e-05	1.24e-05	1.23e-05
$4\Delta Y_{\text{ref}}$	3.75e-05	3.72e-05	3.69e-05
$8\Delta Y_{\text{ref}}$	8.74e-05	8.69e-05	8.61e-05
$16\Delta Y_{\text{ref}}$	1.87e-04	1.86e-04	1.85e-04
$32\Delta Y_{\text{ref}}$	3.87e-04	3.85e-04	3.82e-04

$\Delta t^0$	$\ e\ _1$	$\ e\ _2$	$\ e\ _\infty$
$2\Delta t_{\text{ref}}^0$	9.46e-09	5.30e-08	4.18e-07
$4\Delta t_{\text{ref}}^0$	2.90e-08	1.60e-07	1.25e-06
$8\Delta t_{\text{ref}}^0$	6.96e-08	3.74e-07	2.92e-06
$16\Delta t_{\text{ref}}^0$	1.54e-07	8.10e-07	6.25e-06

- $\nu = 1$

$\Delta Y$	$\ e\ _1$	$\ e\ _2$	$\ e\ _\infty$
$2\Delta Y_{\text{ref}}$	2.03e-05	1.75e-05	1.61e-05
$4\Delta Y_{\text{ref}}$	6.08e-05	5.26e-05	4.82e-05
$8\Delta Y_{\text{ref}}$	1.42e-04	1.22e-04	1.12e-04
$16\Delta Y_{\text{ref}}$	3.04e-04	2.63e-04	2.41e-04
$32\Delta Y_{\text{ref}}$	6.28e-04	5.44e-04	4.98e-04

$\Delta t^0$	$\ e\ _1$	$\ e\ _2$	$\ e\ _\infty$
$2\Delta t_{\text{ref}}^0$	1.02e-05	8.85e-06	8.88e-06
$4\Delta t_{\text{ref}}^0$	3.06e-05	2.65e-05	2.66e-05
$8\Delta t_{\text{ref}}^0$	7.12e-05	6.18e-05	6.20e-05
$16\Delta t_{\text{ref}}^0$	1.52e-04	1.32e-04	1.32e-04

Nous observons une convergence un peu plus que linéaire en espace et en temps, les erreurs sont d'ordre légèrement supérieur à 1 avec les 3 normes, ce qui est compatible avec l'ordre formel de l'erreur de troncature en temps et en espace. Par ailleurs, nous remarquons que pour  $\nu = 10^{-3}$  l'erreur en temps est  $10^3$  fois plus petite que pour  $\nu = 1$  alors que les erreurs en espace sont du même ordre pour les deux valeurs de la viscosité.

Pour la suite, nous effectuons nos simulations avec  $n_Y = 5000$ , correspondant à  $8\Delta Y_{\text{ref}}$ , et  $\Delta t^0 = 10^{-4}$  correspondant à  $\Delta t_{\text{ref}}^0$ . Pour le pas d'espace, cela correspond à une erreur de l'ordre de  $10^{-5}$ . Le pas de temps, est pris égal à  $\Delta t_{\text{ref}}^0$ , autrement l'erreur en temps domine.

### 3.5.2 Comportement en temps long

Nous allons analyser le comportement en temps long des solutions en fonction de la force imposée au système par le terme source. Pour cela, nous allons passer en revue tous les cas énumérés à la section 3.3. Tout d'abord, nous détaillons, comme dans le paragraphe précédent, le cas d'un terme source constant et uniforme. Ensuite, nous nous intéressons aux résultats obtenus avec un terme source variable en espace, à zéro constant, puis à zéro décroissant en temps. Dans ce cas, nous décrivons l'évolution de la position de l'interface en temps long et exhibons une valeur asymptotique de convergence indépendante de la viscosité. Dans chacun des cas, nous choisissons différentes valeurs pour la viscosité, afin d'évaluer l'influence de celle-ci sur la dynamique.

### $S$ constant et uniforme

Nous choisissons le même terme source que précédemment, soit (3.80). Nous notons  $\alpha$  cette valeur,

$$\alpha := g(\sin \theta + \lambda \cos \theta).$$

Ce cas correspond à l'exemple décrit à la section 2.3 avec l'équation (2.38), et nous avons vu que lorsqu'il n'y a pas de viscosité, la solution analytique  $(U, b)$  est connue. La vitesse est donnée par (2.43), et l'épaisseur de la couche solide par (2.44). En choisissant une vitesse initiale linéaire par morceaux (3.37), nous obtenons pour tout  $t$  tel que  $0 \leq t \leq \frac{h - b^0}{\alpha}$

$$\begin{aligned} U(t, Z) &= Z - b^0 - \alpha t \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[, \\ b(t) &= \alpha t + b^0. \end{aligned}$$

Les paramètres  $\lambda$  et  $\theta$  sont choisis de telle sorte que la condition d'écoulement (2.32) soit satisfaite. Cette configuration permet alors de modéliser l'arrêt d'un écoulement, dès lors que la vitesse initiale est non nulle partout.

Nous allons comparer nos résultats numériques, avec viscosité, aux profils analytiques sans viscosité. Plus précisément, nous choisissons quatre valeurs pour la viscosité,  $\nu = 10^{-4}$ ,  $\nu = 10^{-3}$ ,  $\nu = 10^{-2}$  et  $\nu = 10^{-1}$ . Pour la discrétisation, nous prenons  $n_Y = 5000$  en espace points, c'est à dire un pas de temps  $\Delta Y = 2 \times 10^{-4}$ , et pour la discrétisation en temps nous partons d'un pas d'espace initial  $\Delta t^0 = 10^{-4}$ . Les graphiques ci-dessous représentent les profils de vitesse numériques aux temps  $t = 0$ ,  $t = 2$ ,  $t = 4$  et  $t = 6$  à viscosité non nulle fixée. Aux mêmes instants nous représentons les profils des vitesses analytiques non visqueuses en noir. Pour nos simulations, nous choisissons  $b^0 = 3.5$  et une hauteur de domaine  $h = 6$ .

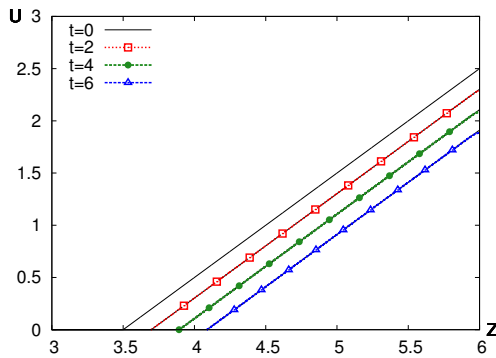


FIGURE 3.11 – Vitesse pour  $\nu = 10^{-4}$ .

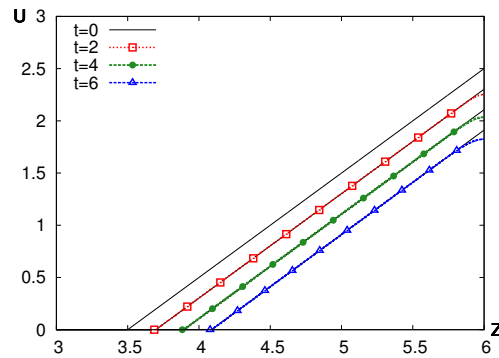
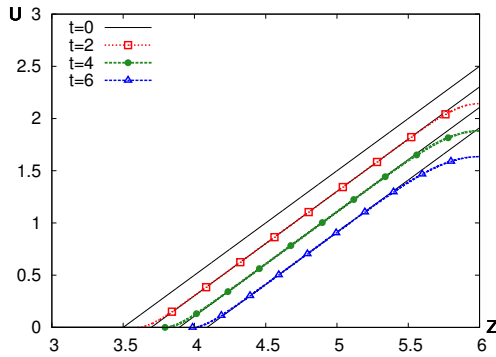
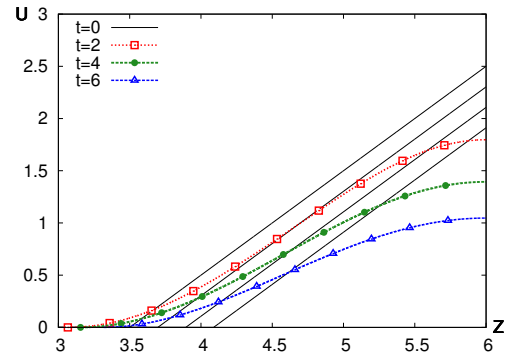


FIGURE 3.12 – Vitesse pour  $\nu = 10^{-3}$ .

FIGURE 3.13 – Vitesse pour  $\nu = 10^{-2}$ .FIGURE 3.14 – Vitesse pour  $\nu = 10^{-1}$ .

Nous observons sur les deux premiers graphes 3.11 et 3.12, correspondant à des viscosités petites, que les profils avec et sans viscosité sont confondus à l'œil nu. À mesure que la viscosité augmente, figures 3.13 et 3.14, nous observons que les profils de vitesse font apparaître des couches limites de plus en plus grandes, et que la couche solide s'amincit, c'est à dire qu'une partie du fluide qui n'était pas en mouvement au départ se fluidifie. Représentons alors l'évolution de l'épaisseur de la couche solide à la figure 3.15.

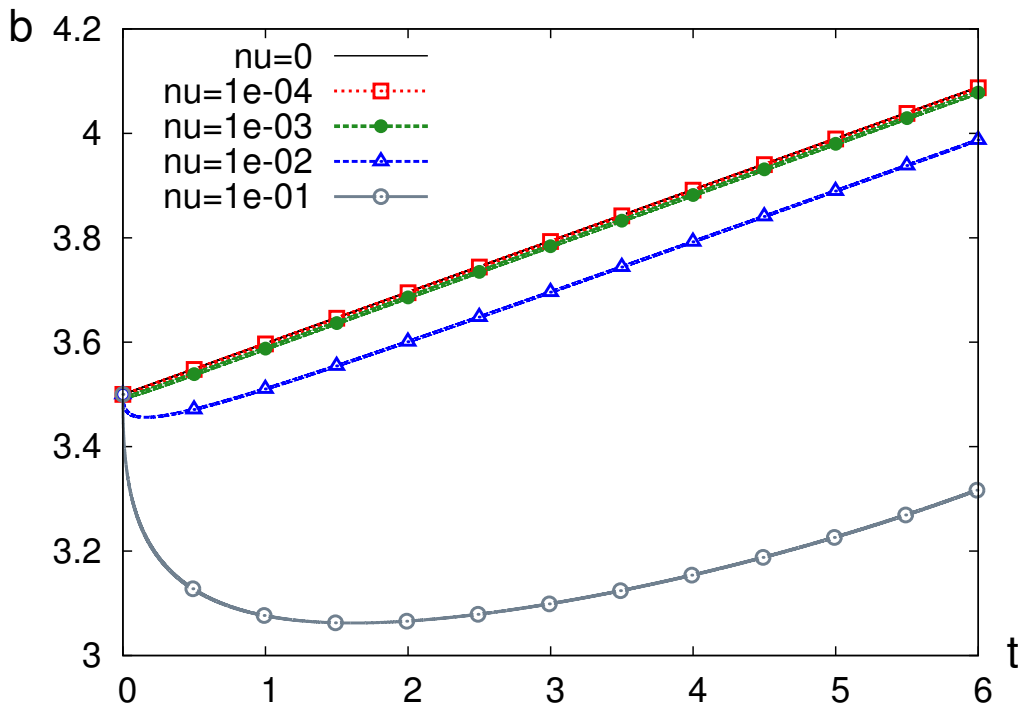


FIGURE 3.15 – Évolution de l'épaisseur de la couche solide.

Le comportement observé sur les profils de vitesse se traduit par une décroissance initiale de  $b(t)$  que l'on distingue bien à partir de  $\nu$  supérieur ou égal à  $10^{-2}$ . Néanmoins, nous constatons qu'avec le temps  $b(t)$  se met finalement à croître. Ces résultats sont la conséquence d'un phénomène de compensation entre la viscosité, qui fait décroître  $b(t)$ , et la friction qui provoque l'effet inverse. En temps suffisamment long, relativement aux valeurs de  $\nu$  et  $S$ , les effets de la friction l'emportent sur les effets visqueux, et c'est alors que l'épaisseur de la couche solide se met à croître. Pour observer la croissance de  $b(t)$ , nous effectuons une simulation sur un temps plus long, en prenant  $T = 13$  (cf. figure 3.16).

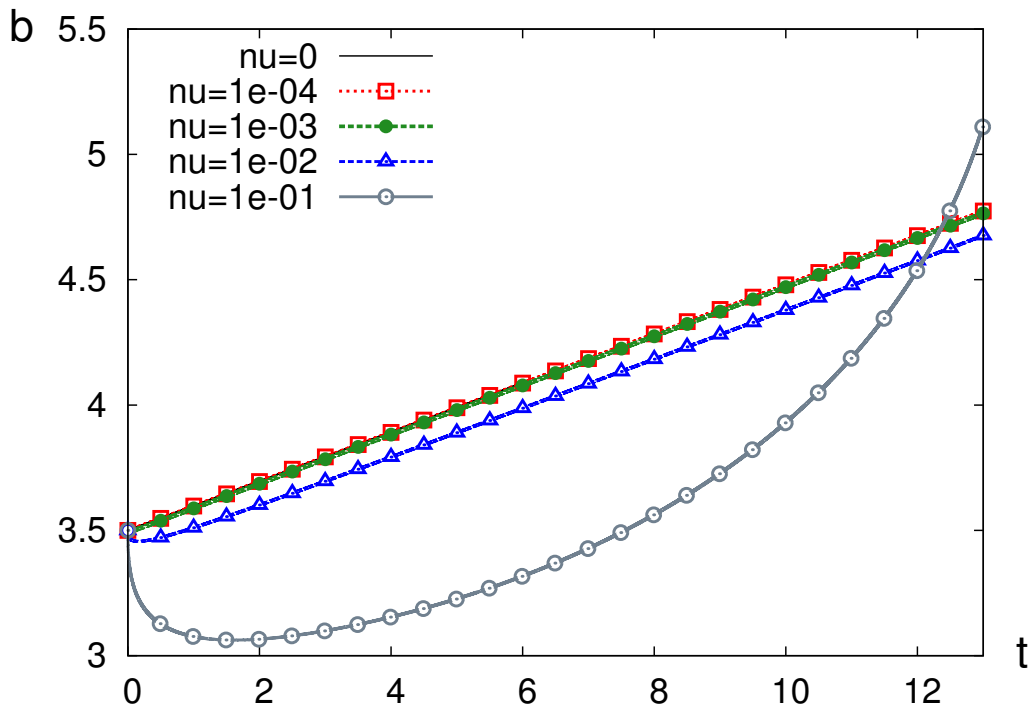


FIGURE 3.16 – Évolution de l'épaisseur de la couche solide en temps long.

Ici, nous observons qu'avec  $\nu = 10^{-1}$  la couche solide s'épaissit beaucoup plus vite. Lorsque l'écoulement est proche de l'arrêt il y a une accélération de l'épaississement de la couche solide.

### ***S* non uniforme**

Nous nous plaçons dans la même configuration que dans la sous-section 3.3.1 concernant les données du terme source et de la vitesse initiale. Ainsi, nous considérons un terme source  $S$  linéaire en espace (3.38), soit  $S(t, Z) = b^*(t) - Z$  pour tout  $Z \in ]0, h[$ , ayant un zéro  $b^*(t)$ , et nous choisissons une vitesse initiale linéaire



par morceaux donnée par (3.37). Puisque nous disposons d'une solution analytique lorsqu'il n'y a pas de viscosité, nous comparons les profils de vitesse pour différentes valeurs de  $\nu$ , puis nous étudions l'évolution de la position de l'interface. En particulier, en temps long, nous observons que celle-ci converge vers une valeur constante, indépendante de la viscosité. Cette valeur, notée  $b^\infty$ , se déduit de l'équation à l'équilibre et des conditions aux limites associées

$$S(t = \infty, Z) - \nu U''(Z) = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b^\infty, h[, \quad (3.82a)$$

$$U(b^\infty) = 0, \quad (3.82b)$$

$$U'(b^\infty) = 0, \quad (3.82c)$$

$$U'(h) = 0. \quad (3.82d)$$

Puisque nous connaissons l'expression de  $S$ , il est facile d'intégrer cette équation pour en déduire l'expression de  $b^\infty$ .

**Lemme 3.16.** *Supposons que  $b^*(t) \rightarrow b_\infty^*$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , avec  $b_\infty^* < h$ . La valeur asymptotique de l'épaisseur de la couche solide est*

$$b^\infty = 2b_\infty^* - h. \quad (3.83)$$

*Démonstration.* Nous intégrons l'expression de  $S$  et réécrivons l'équation différentielle (3.82a), ce qui donne

$$\left( \frac{1}{6}(b_\infty^* - Z)^3 - \nu U(Z) \right)'' = 0.$$

Ainsi, nous avons

$$\frac{1}{6}(b_\infty^* - Z)^3 - \nu U = \alpha Z + \beta, \quad (3.84)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes d'intégration. Maintenant, nous exploitons les conditions aux limites (3.82c) et (3.82d). En dérivant l'égalité (3.84), puis en appliquant (3.82d), nous obtenons

$$-\frac{1}{2}(b_\infty^* - h)^2 = \alpha,$$

d'où

$$\frac{1}{6}(b_\infty^* - Z)^3 - \nu U = -\frac{1}{2}(b_\infty^* - h)^2 Z + \beta. \quad (3.85)$$

En dérivant (3.85) et en appliquant (3.82c), il vient

$$(b_\infty^* - b^\infty)^2 = (b_\infty^* - h)^2. \quad (3.86)$$

Finalement, nous en déduisons

$$b_\infty^* - b^\infty = -b_\infty^* + h, \quad (3.87)$$

d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 3.17.** Bien que la valeur asymptotique  $b^\infty$  est indépendante de la viscosité, lorsque  $\nu = 0$  cette valeur est différente. Dans ce cas, nous avons

$$b^\infty = b_\infty^*. \quad (3.88)$$

Ceci illustre le fait que les passages à la limite  $t \rightarrow +\infty$  et  $\nu \rightarrow 0$  ne commutent pas.

Nous allons illustrer ceci en choisissant une fonction  $b^*(t)$  d'abord constante, puis décroissante en temps, et en faisant décroître la viscosité vers 0.

- $b^*$  constant

Nous choisissons un zéro constant,  $b^*(t) = b^*$  pour tout  $t \in [0, T]$ , tel que  $b^* < h$ . Nous avons déjà considéré cette situation dans le cas sans viscosité, dans le paragraphe d'illustration de la section 3.3.1. Rappelons que la solution analytique est donnée par la formule (3.45). Nous pouvons ainsi comparer nos résultats lorsque la viscosité tend vers 0 à cette solution analytique et étudier dans quelle mesure, lorsque  $\nu$  tend vers 0, la solution numérique se rapproche de la solution analytique.

Nous considérons encore un domaine de hauteur  $h = 6$ , avec une épaisseur de couche solide initiale  $b^0 = 3.5$  et la valeur du zéro du terme source est fixée à  $b^* = 5$ . Nous représentons ci-après (figures 3.17 à 3.20) les profils de vitesse obtenus avec ces paramètres aux instants  $t = 0$ ,  $t = 2$ ,  $t = 4$  et  $t = 6$ , ceci pour des viscosités entre  $\nu = 10^{-4}$  et  $\nu = 10^{-1}$ . En chacun de ces instants, nous représentons aussi la solution exacte sans viscosité, en noir.

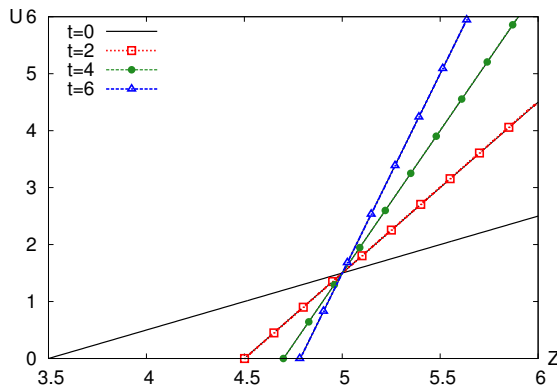


FIGURE 3.17 –  $\nu = 10^{-4}$

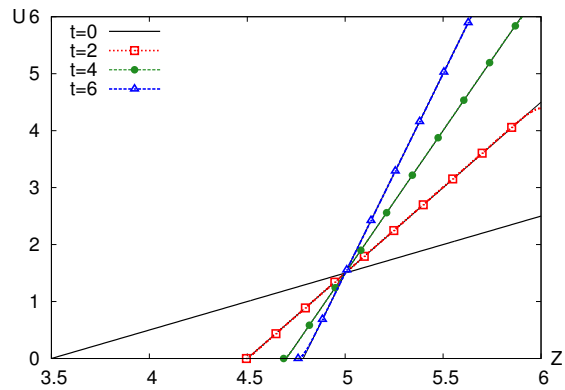
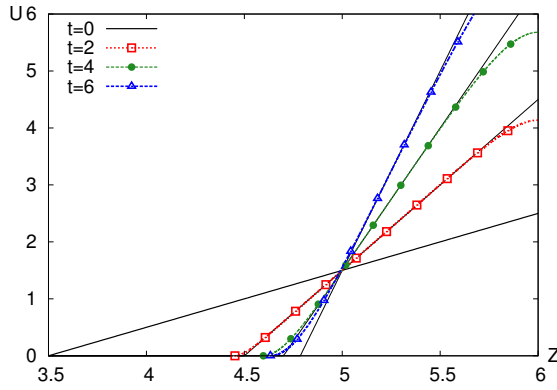
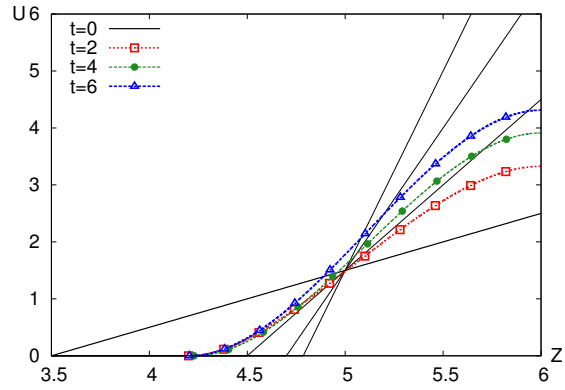


FIGURE 3.18 –  $\nu = 10^{-3}$

FIGURE 3.19 –  $\nu = 10^{-2}$ FIGURE 3.20 –  $\nu = 10^{-1}$ 

Nous observons bien que la solution approchée avec viscosité tend vers la solution analytique sans viscosité, lorsque la viscosité tend vers 0 (figure 3.17). Les profils se recoupent en  $Z = b^*$  lorsqu'il n'y a pas de viscosité, ce qui vient du fait que  $S$  s'annule en  $b^*$ . En revanche, lorsque la viscosité est plus importante (figure 3.20), l'allure des solutions change substantiellement, comme nous le constatons sur le dernier graphique à  $\nu = 10^{-1}$ .

Ensuite, nous représentons à la figure 3.21 l'évolution de la position de l'interface, correspondant à l'épaisseur de la couche solide, en fonction du temps avec ces différentes viscosités jusqu'au temps final correspondant aux profils précédents, soit  $T = 6$ . Nous traçons également la solution analytique, donnée par (3.46) lorsque  $\nu = 0$ .

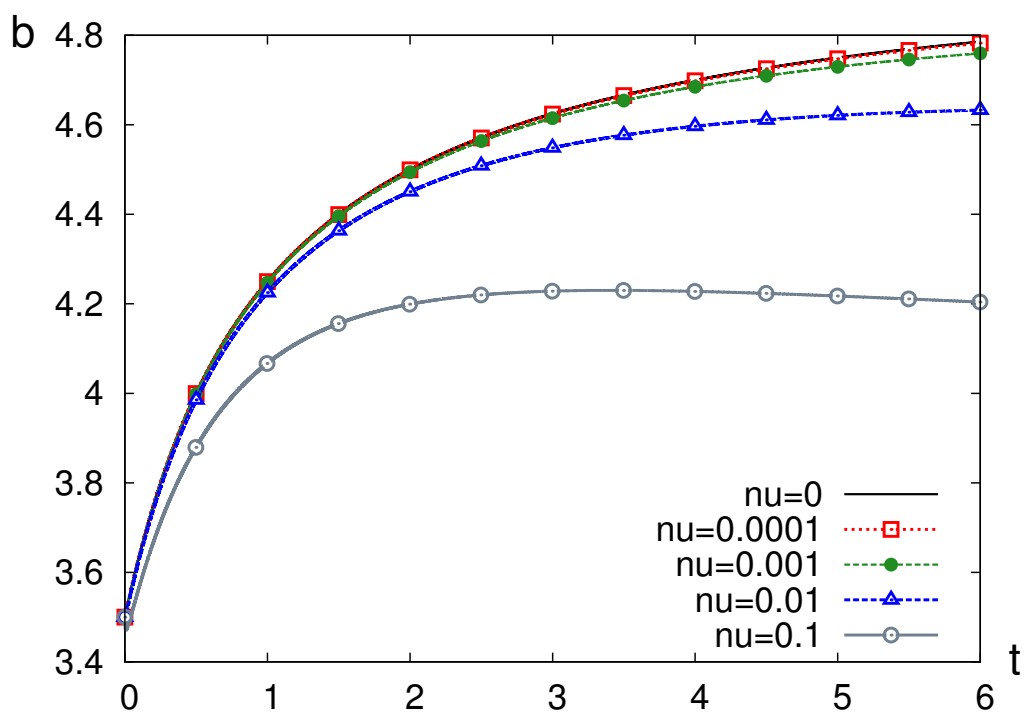


FIGURE 3.21 – Évolution de l'épaisseur de la couche solide.

Nous observons qu'avec une forte viscosité l'épaisseur de la couche solide décroît lorsque  $t \sim T$ . Pour illustrer le comportement asymptotique de la position de l'interface, nous effectuons une simulation en temps beaucoup long en fixant  $T = 100$ .

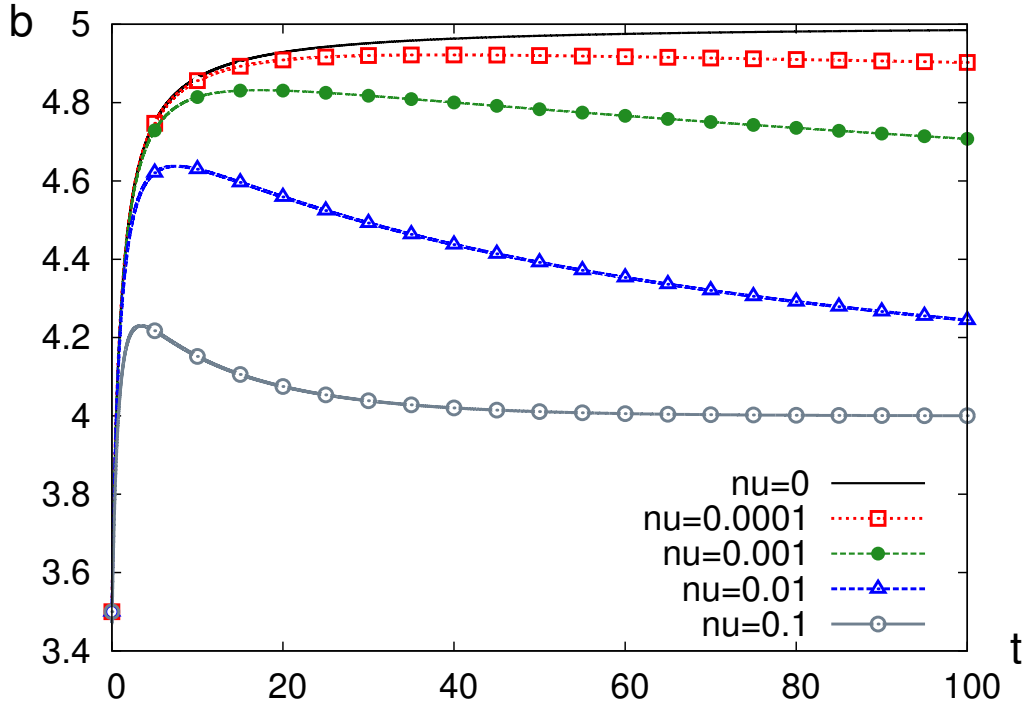


FIGURE 3.22 – Évolution de l'épaisseur de la couche solide en temps long.

Nous observons (figure 3.22) que l'épaisseur de la couche solide continue à décroître jusqu'à la valeur asymptotique, donnée par la formule (3.83), ce qui correspond ici à

$$b^\infty = 2b^* - h = 4.$$

C'est bien cette valeur que nous observons sur le graphe lorsque la viscosité vaut 0.1. Pour les viscosités inférieures à 0.1, il faut un temps final de simulation encore plus grand pour pouvoir observer la convergence vers cette valeur asymptotique. Par contre, lorsqu'il n'y a pas de viscosité, la valeur asymptotique observée est bien  $b^\infty = b_\infty^* = 5$ . Lorsque  $T = 100$ , nous constatons qu'il y a une décroissance de l'épaisseur de la couche solide quelque soit la valeur de  $\nu$ , ce qui ne se voit pas sur des simulations en temps courts.

#### • $b^*$ décroissant

Nous choisissons maintenant un zéro de  $S$  décroissant en temps, donné par  $b^*(t) = \frac{h + b^0 t^2}{1 + t^2}$ . Nous avons alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} b^*(t) = b^0$ . Nous rappelons que dans ce cas, vu en sous-section 3.3.2, il y a un temps  $t^*$  à partir duquel l'épaisseur de la couche solide et le zéro du terme source  $b^*(t)$  sont confondus. De plus, dans l'intervalle  $]b(t), b(t^*)[$ , les profils de vitesse relatifs aux temps inférieurs à  $t^*$  sont non linéaires. Comme dans ce qui précède, nous représentons les profils de vitesse pour différentes

viscosités, puis l'évolution de l'épaisseur de la couche solide. La valeur asymptotique atteinte par celle-ci correspond maintenant à

$$b^\infty = 2b^0 - h = 1.$$

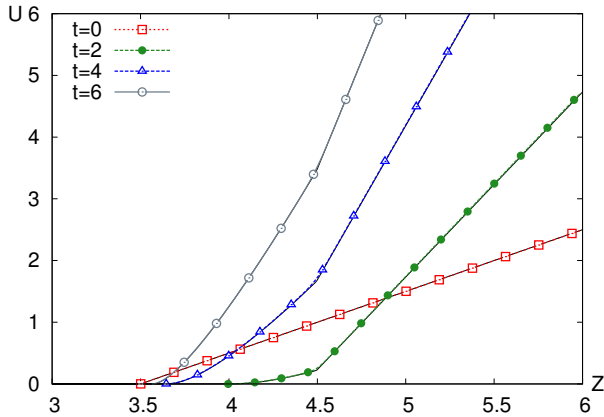


FIGURE 3.23 – Vitesse pour  $\nu = 10^{-4}$ .

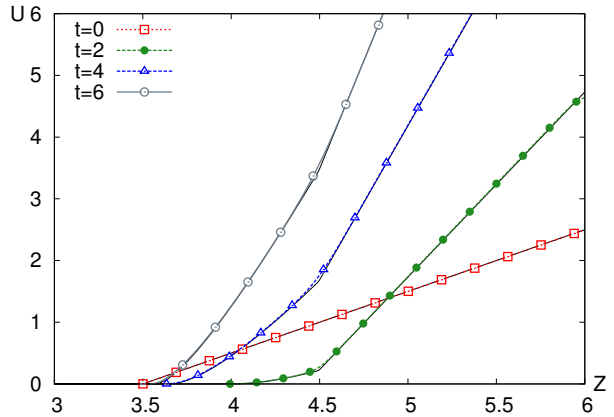


FIGURE 3.24 – Vitesse pour  $\nu = 10^{-3}$ .

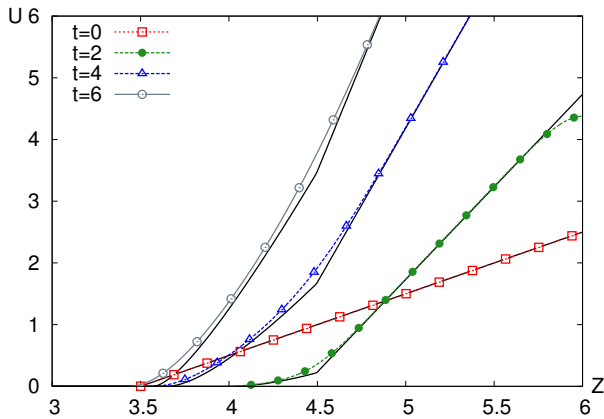


FIGURE 3.25 – Vitesse pour  $\nu = 10^{-2}$ .

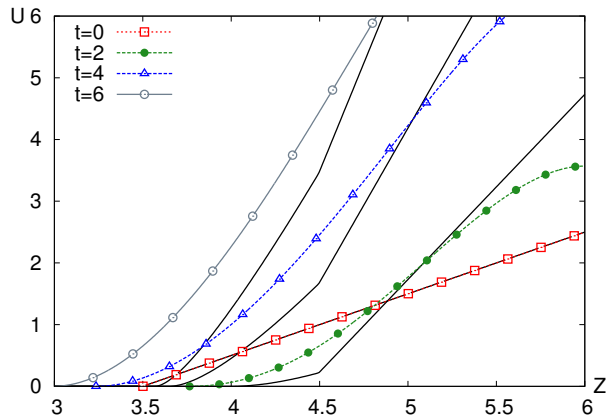
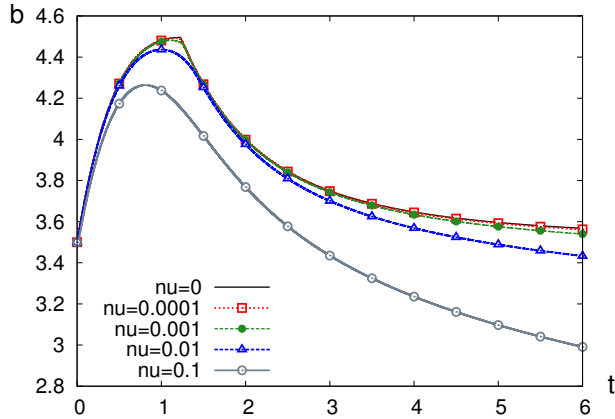
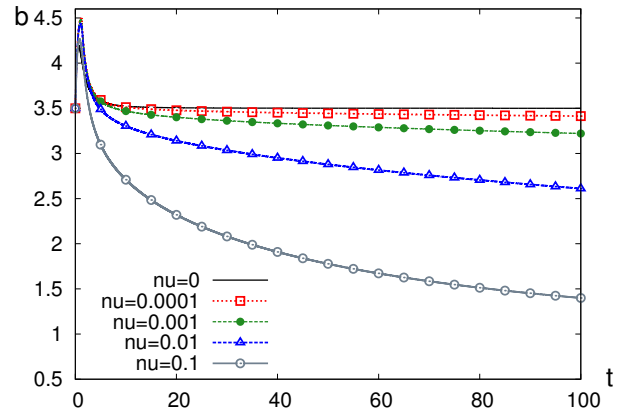


FIGURE 3.26 – Vitesse pour  $\nu = 10^{-1}$ .

Lorsque la viscosité est très petite, nous constatons (figure 3.23) que le schéma numérique capte bien la partie non linéaire pour  $Z \in ]b^0, b(t^*[$  pour les temps  $t \geq t^*$ . Avec une plus grande viscosité (figures 3.24 à 3.26), les profils se lissent et il n'y a plus de distinction entre les parties linéaires et non linéaires.

Ensuite, nous représentons l'épaisseur de la couche solide en temps court (figure 3.27) et en temps long (figure 3.28) afin d'observer la convergence vers la valeur asymptotique  $b^\infty = 1$ . Nous observons à nouveau que le schéma résout correctement le passage à la phase  $b(t) = b^*(t)$ .

FIGURE 3.27 – Temps court  $T = 6$ .FIGURE 3.28 – Temps long  $T = 100$ .

Ainsi, nous avons vu que dans chaque cas où  $S$  n'est pas uniforme, il y a un changement de variation de l'épaisseur de la couche solide en début de simulation, avec convergence vers une valeur asymptotique dans le cas d'un terme source non-uniforme. Maintenant que nous avons étudié l'évolution en temps long de la couche solide, nous allons nous intéresser au démarrage de celle-ci dans la sous-section suivante.

### 3.5.3 Étude du régime transitoire

Dans cette sous-section, nous souhaitons réaliser une étude du comportement du fluide dans la phase de démarrage, et en déduire les grandeurs caractéristiques de cette phase. Nous choisissons de traiter le cas avec terme source constant et uniforme.

Une première observation importante est que, peu importe la valeur que prend la viscosité et aussi petite soit elle, il y a toujours une décroissance de l'épaisseur de la couche solide au démarrage (mais pendant un temps qui peut être très petit). Nous étudions cette décroissance, en déterminant l'instant à partir duquel il y a un changement de variation de cette épaisseur et l'épaisseur minimale qui est alors atteinte. Une fois l'épaisseur minimale atteinte, la couche solide s'épaissit, plus ou moins rapidement selon les paramètres. Nous fournissons alors une estimation de la valeur asymptotique de la dérivée en temps de  $b(t)$ . Ainsi, le régime transitoire est essentiellement composé de deux phases : la phase de d'écoulement et la phase d'arrêt.

Il y a deux difficultés numériques. D'une part, lorsque la viscosité est très petite, la variation de l'épaisseur de la couche solide se fait à un temps très petit, de l'ordre

de  $10^{-2}$  voire  $10^{-3}$ . Il faut donc prendre un pas de temps de l'ordre de  $10^{-4}$  pour arriver à capturer ce phénomène. Nous choisissons donc de faire l'étude à partir de  $\nu = 10^{-4}$ . D'autre part, lorsque la viscosité est grande, de l'ordre de  $10^{-1}$ , il y a une décroissance de l'épaisseur de la couche solide sur un intervalle de temps plus long, et le temps de simulation doit être choisi plus grand pour observer le changement de variation. Nous optons pour une viscosité maximale à  $10^{-1}$ , car avec  $\nu = 1$  la phase d'arrêt de l'écoulement est atteinte trop vite (approximativement à  $t = 2$  secondes). Ceci restreint le temps d'observation que nous souhaitons uniforme en toutes les différentes valeurs de viscosité, en vue d'une comparaison de tous les profils au temps final  $T$  fixé.

Les valeurs qui vont nous intéresser sont tout d'abord  $t^{\text{car}}$ , le temps au bout duquel l'épaisseur de la couche solide cesse de décroître, et  $b^{\text{min}}$  l'épaisseur atteinte en partant d'une épaisseur initiale  $b^0$  à l'instant  $t^{\text{car}}$ . Puis, la distance parcourue par l'interface à cet instant, c'est à dire la variation de l'épaisseur de la couche solide. La situation est décrite par le graphique 3.29 où nous représentons l'épaisseur de la couche solide en fonction du temps et le point de coordonnées  $(t^{\text{car}}, b^{\text{min}})$ . Pour  $t > t^{\text{car}}$ , l'épaisseur de la couche solide augmente et l'écoulement entre dans la phase d'arrêt où les efforts de friction l'emportent progressivement sur la gravité.

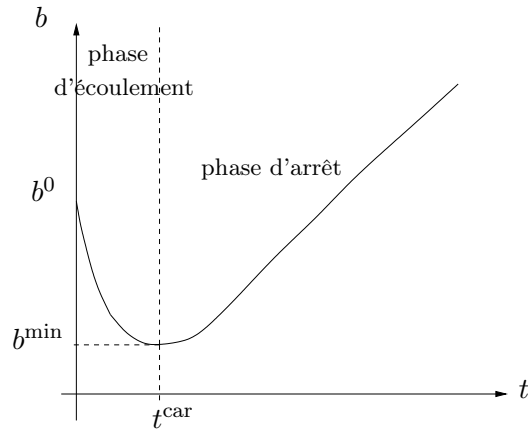


FIGURE 3.29 – Évolution de l'épaisseur de la couche solide au démarrage.

Numériquement,  $t^{\text{car}}$  est déterminé comme étant le zéro de la fonction  $\dot{b}(t)$ . Il s'agit de déterminer les instants discrets successifs  $t^n$  et  $t^{n+1}$  tels que  $\dot{b}(t^n) < 0$  et  $\dot{b}(t^{n+1}) > 0$ , puis d'interpoler linéairement la valeur de  $t^{\text{car}}$ , ce qui donne

$$t^{\text{car}} = \frac{-\dot{b}(t^n)}{\dot{b}(t^{n+1}) - \dot{b}(t^n)}(t^{n+1} - t^n) + t^n \quad (3.89)$$



Nous en déduisons directement, toujours par interpolation linéaire,

$$b^{\min} = \frac{b(t^{n+1}) - b(t^n)}{t^{n+1} - t^n} (t^{\text{car}} - t^n) + b(t^n). \quad (3.90)$$

Enfin, nous estimons la valeur asymptotique de  $\dot{b}(t)$  par la quantité

$$\dot{b}^\infty = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{b}(s) ds. \quad (3.91)$$

Cette quantité est informative dans la phase d'arrêt.

Nous choisissons d'étudier le démarrage avec quatre valeurs de terme source différentes, soient  $S = 0.1$ ,  $S = 0.2$ ,  $S = 0.4$  et  $S = 0.8$ . Lorsque  $S$  est grand ( $S = 0.8$ ), nous avons constaté que tout se passe très vite au démarrage et l'écoulement s'arrête en un temps très court. En revanche, lorsque  $S$  est petit ( $S = 0.1$ ), il faut attendre plus longtemps pour observer la décroissance totale de l'épaisseur de la couche fluide. Prenant en compte toutes ces observations, nous choisissons ici  $T = 3$  pour nos simulations, ce qui permet ainsi d'observer l'intégralité du démarrage dans tous les cas. Néanmoins, pour  $S = 0.8$ , et avec une grande viscosité, le temps final  $T$  est trop grand et l'écoulement passe en phase d'arrêt, ce qui provoque une accélération de l'épaisseur de la couche solide. En effet,  $b(t)$  tend vers  $h$  de plus en plus vite, et la simulation n'aboutit pas puisque l'arrêt n'est pas traité par notre schéma.

Pour chaque valeur de  $S$  nous faisons varier  $\nu$  de  $10^{-4}$  à  $10^{-1}$  et nous obtenons les résultats présentés ci-après, sous forme de tableau. Nous renseignons le temps où l'épaisseur de la couche solide est minimum,  $t^{\text{car}}$ , puis la variation de l'épaisseur de la couche solide entre les temps  $t = 0$  et  $t = t^{\text{car}}$ , c'est à dire  $\delta b := b^0 - b^{\min}$ .

$S = 0.1$	$t^{\text{car}}$	$\delta b$	$\dot{b}^\infty$
$\nu = 10^{-4}$	1.49e-03 <sup>(a)</sup>	4.37e-04	9.97e-02
$\nu = 10^{-3}$	1.44e-02	4.37e-03	9.66e-02
$\nu = 10^{-2}$	1.54e-01	4.30e-02	6.79e-02
$\nu = 10^{-1}$	1.55	4.29e-01	4.79e-02 <sup>(b)</sup>

$S = 0.2$	$t^{\text{car}}$	$\delta b$	$\dot{b}^\infty$
$\nu = 10^{-4}$	3.49e-04	2.20e-04	2.00e-01
$\nu = 10^{-3}$	3.49e-03	2.20e-03	1.98e-01
$\nu = 10^{-2}$	3.84e-02	2.15e-02	1.83e-01
$\nu = 10^{-1}$	3.88e-01	2.15e-01	1.55e-01

$S = 0.4$	$t^{\text{car}}$	$\delta b$	$\dot{b}^\infty$
$\nu = 10^{-4}$	8.98e-05	1.09e-04	4.00e-01
$\nu = 10^{-3}$	8.98e-04	1.09e-03	4.00e-01
$\nu = 10^{-2}$	9.62e-03	1.08e-02	3.92e-02
$\nu = 10^{-1}$	9.69e-02	1.07e-01	3.32e-01

$S = 0.8$	$t^{\text{car}}$	$\delta b$	$\dot{b}^\infty$
$\nu = 10^{-4}$	2.97e-05	5.39e-05	8.00e-01
$\nu = 10^{-3}$	2.97e-04	5.39e-04	8.03e-01
$\nu = 10^{-2}$	2.49e-03	5.33e-03	/ <sup>(c)</sup>
$\nu = 10^{-1}$	2.43e-02	5.36e-02	/

Nous déduisons des tableaux précédents que

$$t^{\text{car}} \sim \frac{\nu}{S^2},$$

tandis que

$$\delta b \sim \frac{\nu}{S}.$$

(a). Lorsque la viscosité est aussi petite, le changement de variation se fait très rapidement il faut donc raffiner en temps pour obtenir une estimation de  $t^{\text{car}}$  convenable.

(b). Avec une forte viscosité, le  $b$  change de variation en un temps plus grand, il faut donc simuler l'écoulement sur un temps final plus grand,  $T = 10$  pour  $S_1$  et  $T = 6$  pour  $S_2$ , pour avoir une bonne estimation de la valeur asymptotique.

(c). Lorsque  $S = 0.8$  et  $\nu \geq 10^{-2}$ , l'arrêt de l'écoulement se fait avant  $T = 3$ . Nous avons donc  $b \rightarrow h$  et l'algorithme ns'arrête puisque nous divisons par  $h - b$ .

Qualitativement, il est clair que la viscosité accentue la décroissance de l'épaisseur de la couche solide dans la phase de démarrage. En effet, lorsque  $\nu$  est grand, la couche solide rétrécit sur une durée plus longue et la profondeur atteinte en décroissant est plus importante également. Ainsi, les efforts visqueux provoquent la mise en mouvement d'une partie de la couche solide. Toutefois, malgré cette mise en mouvement, il reste que la vitesse est plus faible avec la viscosité et donc, le temps d'arrêt de l'écoulement est plus grand. En fait, la viscosité joue ici le rôle de frein à deux titres, puisque d'une part elle retarde l'instant de passage en phase d'arrêt de l'écoulement par cette mise en mouvement d'un bloc de fluide sous l'interface initiale, et que d'autre part, elle ralentit la vitesse d'évolution jusqu'à l'arrêt total.

### Étude adimensionnée

Afin de déterminer les temps et longueur caractéristiques de l'écoulement, nous adimensionnons l'équation. Notons

$$\begin{aligned} U &= u\check{U}, \\ t &= \tau\check{t}, \\ Z &= l\check{Z}, \end{aligned}$$

avec  $\tau$  une échelle de temps,  $l$  une échelle de longueur et  $u = lP_U$  où  $P_U$  est la pente de la vitesse initiale  $U^0$  (cisaillement initial). Notons  $\check{b} = \frac{b}{l}$ . Nous obtenons alors

$$\partial_{\check{t}}\check{U} + \frac{\tau}{lP_U}S - \nu\frac{\tau}{l^2}\partial_{\check{Z}}^2\check{U} = 0 \quad \text{pour tout } \check{Z} \in ]\check{b}(t), \frac{h}{l}]. \quad (3.92)$$

De plus, nous remarquons que  $\nu$  est en  $m^2s^{-1}$ ,  $S$  est une accélération et  $P_U$  est l'inverse d'un temps. Nous obtenons une échelle de longueur en prenant  $\frac{\nu}{S}P_U$ , ce qui nous conduit à poser

$$l = \frac{\nu}{S}P_U. \quad (3.93)$$

En remplaçant  $l$  par cette valeur dans l'équation (3.92), il vient

$$\partial_{\check{t}}\check{U} + \frac{\tau S^2}{\nu P_U^2}S - \frac{\tau S^2}{\nu P_U^2}\partial_{\check{Z}}^2\check{U} = 0 \quad \text{pour tout } \check{Z} \in ]\check{b}(t), \frac{h}{l}].$$

Pour adimensionner, nous prenons donc comme échelle de temps

$$\tau = \frac{\nu}{S^2}P_U^2, \quad (3.94)$$

ce qui donne

$$\partial_{\check{t}}\check{U} + 1 - \partial_{\check{Z}}^2\check{U} = 0 \quad \text{pour tout } \check{Z} \in ]\check{b}(t), \frac{h}{l}].$$

Maintenant nous notons  $t^{\text{car}} = \frac{t^{\text{car}}}{\tau}$ ,  $\delta\check{b} = \frac{\delta b}{l}$  et  $(\check{b}^\infty) = \frac{\tau}{l}\dot{b}^\infty$  les valeurs caractéristiques adimensionnées. Nous obtenons les tableaux de valeurs suivants :

$S = 0.1$	$\tau$	$l$	$t^{\check{\text{car}}}$	$\delta\check{b}$	$(\check{b}^{\infty})$
$\nu = 10^{-4}$	1.00e-02	1.00e-03	1.44e-01	4.37e-01	9.97e-01
$\nu = 10^{-3}$	1.00e-01	1.00e-02	1.44e-01	4.37e-01	9.66e-01
$\nu = 10^{-2}$	1	1e-01	1.54e-01	4.30e-01	6.79e-01
$\nu = 10^{-1}$	10	1	1.55e-01	4.29e-01	4.79e-02

$S = 0.2$	$\tau$	$l$	$t^{\check{\text{car}}}$	$\delta\check{b}$	$(\check{b}^{\infty})$
$\nu = 10^{-4}$	2.50e-03	5.00e-04	1.39e-02	4.40e-01	1
$\nu = 10^{-3}$	2.50e-02	5.00e-03	1.39e-01	4.40e-01	9.91e-01
$\nu = 10^{-2}$	2.50e-01	5.00e-02	1.54e-01	4.30e-01	9.17e-01
$\nu = 10^{-1}$	2.5	5e-01	1.55e-01	4.29e-01	7.75e-01

$S = 0.4$	$\tau$	$l$	$t^{\check{\text{car}}}$	$\delta\check{b}$	$(\check{b}^{\infty})$
$\nu = 10^{-4}$	6.25e-04	2.50e-04	1.44e-01	4.36e-01	1
$\nu = 10^{-3}$	6.25e-03	2.50e-02	1.44e-01	4.36e-01	9.98e-01
$\nu = 10^{-2}$	6.25e-02	2.50e-02	1.54e-01	4.30e-01	9.79e-01
$\nu = 10^{-1}$	6.25e-01	2.50e-01	1.55e-01	4.29e-01	8.29e-01

$S = 0.8$	$\tau$	$l$	$t^{\check{\text{car}}}$	$\delta\check{b}$	$(\check{b}^{\infty})$
$\nu = 10^{-4}$	1.56e-04	1.25e-04	1.90e-01	4.31e-01	1
$\nu = 10^{-3}$	1.56e-03	1.25e-03	1.90e-01	4.32e-01	1
$\nu = 10^{-2}$	1.56e-02	1.25e-02	1.59e-01	4.27e-01	/
$\nu = 10^{-1}$	1.56e-01	1.25e-01	1.56e-01	4.29e-01	/

Nous en déduisons la valeur moyenne du temps caractéristique  $t^{\check{\text{car}}} \simeq 1.5 \times 10^{-1}$ , de la longueur caractéristique  $\delta\check{b} \simeq 4.3 \times 10^{-1}$  et de la valeur asymptotique de  $\check{b}$  caractéristique  $(\check{b}^{\infty}) \simeq 9.5 \times 10^{-1}$ . Néanmoins ces valeurs caractéristiques ne sont pas identiques sur toute leur colonne respective. Les variations sont dues au fait que nous n'avons pas tenu compte du paramètre  $\frac{h - b^0}{l}$ , qui influence la solution. En utilisant les valeurs ci-dessus et en revenant vers des grandeurs adimensionnées,

nous obtenons

$$t^{\text{car}} = 1.5 \times 10^{-1} \frac{\nu}{S^2} P_U^2, \quad (3.95a)$$

$$\delta b = 4.3 \times 10^{-1} \frac{\nu}{S} P_U, \quad (3.95b)$$

$$b^\infty = 9.5 \times 10^{-1} \frac{S}{P_U}. \quad (3.95c)$$

Ces expressions nous montrent l'influence du cisaillement initial (paramètre  $P_U$ ). Nous observons que ce paramètre n'intervient que par le biais du rapport  $\frac{P_U}{S}$ .

Nous représentons ci-après l'évolution de  $b$  et de sa dérivée  $\dot{b}$  pour deux valeurs de  $S$ ,  $S = 0.1$  (figure 3.30) et  $S = 0.4$  (figure 3.31), et ce pour chaque viscosité. Les graphes de droite montrent un zoom de l'évolution de  $\dot{b}$ . Pour chaque valeur de  $\nu$ ,  $\dot{b}$  converge en temps long vers une valeur de l'ordre de  $10^{-1}$  pour  $S = 0.1$ , et de l'ordre de 1 pour  $S = 0.4$ .

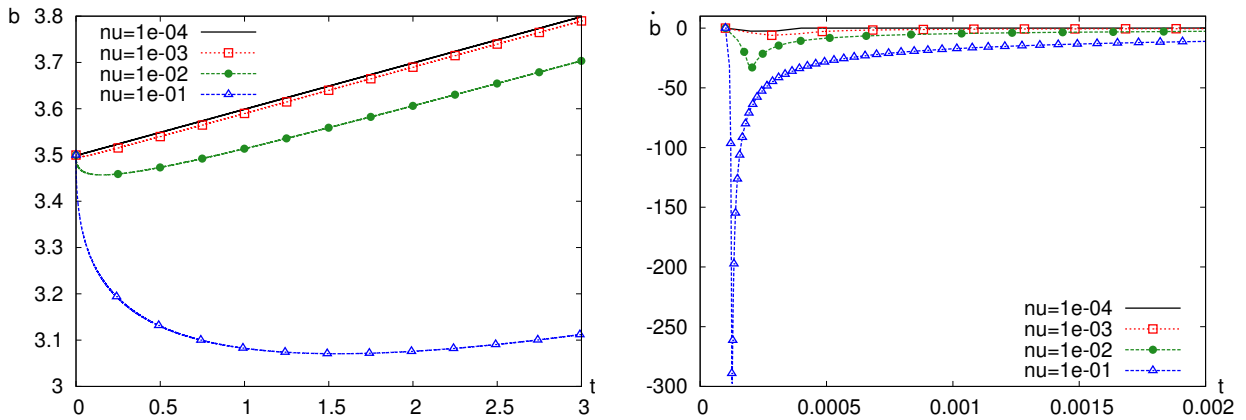
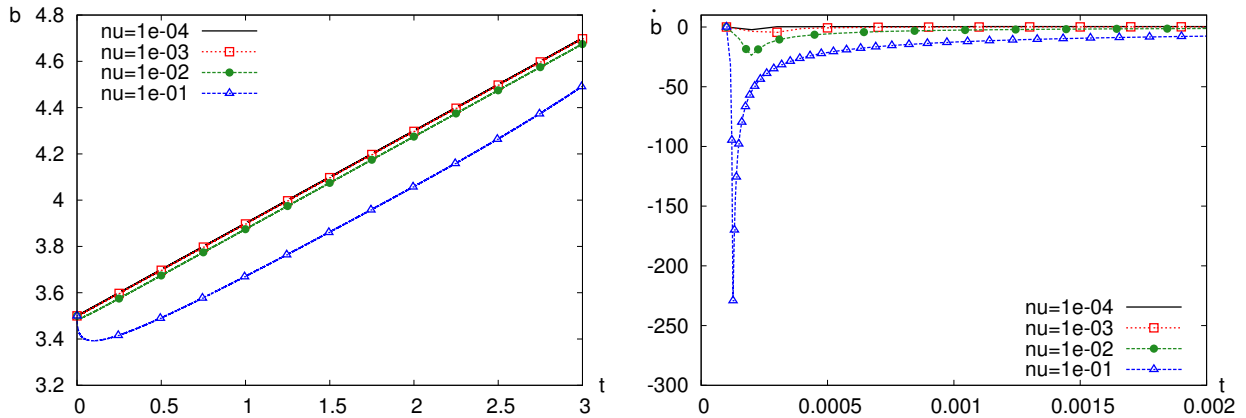


FIGURE 3.30 – Évolution de  $b$  et de sa dérivée  $\dot{b}$  pour  $S = 0.1$ .

FIGURE 3.31 – Évolution de  $b$  et dérivée  $\dot{b}$  pour  $S = 0.4$ .

Avec un terme source plus grand, la valeur  $b^{\min}$  est atteinte en un temps  $t^{\text{car}}$  plus court. La couche solide s'amincit moins et l'écoulement passe dans la phase d'arrêt plus rapidement.

En observant les simulations, nous constatons que plus nous nous approchons de l'arrêt, plus l'augmentation de l'épaisseur de la couche solide s'accélère, ce qui ne se voit pas sur le graphique puisque nous nous arrêtons à  $T = 3$ . Néanmoins, en prenant un temps final proche du temps d'arrêt, nous observons une pente sensiblement plus grande pour  $b$  lorsque  $t \rightarrow T_a$  avec  $T_a$  le temps d'arrêt de l'écoulement. C'est ce que nous allons constater dans la partie suivante où nous étudions l'arrêt de l'écoulement.

### 3.6 Étude de l'arrêt de l'écoulement

Nous allons maintenant nous intéresser à l'arrêt de l'écoulement. Dans cette optique, nous allons utiliser une autre formulation du modèle, permettant d'étudier le comportement de l'écoulement dans la phase d'arrêt. Toutefois, il faut noter qu'en ce qui concerne le suivi d'interface, la démarche employée dans cette section est moins précise. En effet, l'épaisseur de la couche solide est simplement déduite de la vitesse en identifiant l'abscisse à partir de laquelle celle-ci devient positive à une tolérance numérique près.

Concrètement, nous reformulons le problème sous forme d'inéquation variationnelle, ce qui permet ensuite de le résoudre par des méthodes dédiées à ce type de problèmes. Dans cette section, nous explicitons tout d'abord la nouvelle formulation du problème, puis nous discrétisons le problème obtenu. Ensuite, nous comparons les résultats obtenus par cette méthode avec ceux obtenus à la section précédente, via l'approche par suivi d'interface, en considérant des temps de simulation suffisamment petits pour que l'écoulement ne passe pas en phase d'arrêt, ceci afin que la première méthode soit exploitable. Enfin, nous étudions l'arrêt de l'écoulement

en utilisant la nouvelle méthode basée sur une approche variationnelle.

### 3.6.1 Formulation sous forme d'inéquation variationnelle

Nous considérons le problème (3.6),(3.7). Rappelons l'équation d'évolution et les conditions aux limites

$$\partial_t U + S - \nu \partial_{ZZ}^2 U = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[, \quad (3.96a)$$

$$U = 0 \quad \text{en } Z = b(t), \quad (3.96b)$$

$$\partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = b(t), \quad (3.96c)$$

$$\partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = h, \quad (3.96d)$$

avec la condition initiale  $U(0, Z) = U^0(Z)$ .

Nous étendons  $U$  sur  $[0, h]$  en posant  $U(t, Z) = 0$  pour tout  $Z \in ]0, b(t)[$ . L'équation d'évolution se pose alors sur  $[0, h]$  et la position de l'interface n'intervient pas dans l'intervalle de résolution, ce qui permet de supprimer les conditions aux limites (3.96b) et (3.96c). Plus précisément, sous forme d'inéquation variationnelle, le problème s'écrit

$$\min(\partial_t U + S - \nu \partial_{ZZ}^2 U, U) = 0 \quad \text{pour tout } Z \in ]0, h[, \quad (3.97)$$

et nous ajoutons la condition en  $Z = h$ ,

$$\partial_Z U = 0 \quad \text{en } Z = h. \quad (3.98)$$

Nous pouvons traduire et symétriser le problème autour de  $Z = h$ . Ceci permet de supprimer la condition aux limites en  $Z = h$  et le problème est alors réduit à la seule équation (3.97) pour  $Z \in \mathbb{R}$ , soit

$$\min(\partial_t U + S - \nu \partial_{ZZ}^2 U, U) = 0 \quad \text{pour tout } Z \in \mathbb{R}, \quad (3.99)$$

En utilisant la théorie des inéquations variationnelles, ou des solutions de viscosité (voir [12, 45, 51]), nous pouvons montrer que le problème (3.99),(3.98) est bien posé.

En ce qui concerne le suivi d'interface, nous déduisons directement l'épaisseur de la couche solide de la vitesse solution obtenue comme étant le premier point à partir duquel celle-ci est strictement positive, ceci en chaque temps  $t$ . Nous avons ainsi

$$b(t) = \sup \{ Z_0 \mid U(t, Z) = 0 \text{ sur } ] - \infty, Z_0[ \}. \quad (3.100)$$

### 3.6.2 Discrétisation de l'inéquation variationnelle

Nous détaillons maintenant la discrétisation du problème (3.97) posé sur  $[0, h]$ , avec  $h > 0$  donné. Notons que nous n'avons pas besoin d'effectuer un changement de variable puisque le domaine ne dépend pas du temps, l'équation étant posée sur l'intervalle  $[0, h]$ . Nous considérons une approximation de la vitesse  $U_i^n \sim U((i - \frac{1}{2})\Delta Z, n\Delta t)$ , pour  $i \in \{1, \dots, n_Z\}$  et  $n \in \{1, \dots, N\}$ , avec  $n_Z$  et  $N$  des entiers naturels, correspondant aux nombres de points de discrétisation en espace et en temps. Le schéma s'écrit, avec une discrétisation explicite en temps pour le terme de diffusion, sous la forme

$$\begin{cases} \min \left( \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + S_i^n - \nu \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n - 2U_i^n}{(\Delta Z)^2}, U_i^{n+1} \right) = 0, \\ U_{n_Z+1}^n = U_{n_Z}^n. \end{cases} \quad (3.101)$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, n_Z\}$ , et tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ , où la condition aux limites discrète correspond à la condition (3.98). Nous supposons que  $U$  reste nul au voisinage de 0, si bien que nous posons

$$U_0^n = 0 \quad \text{pour tout } n \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.102)$$

Le schéma (3.101) se résout explicitement. Nous effectuons une étape de prédiction en posant

$$\hat{U}_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t S_i^n + \nu \frac{\Delta t}{(\Delta Z)^2} (U_{i+1}^n + U_{i-1}^n - 2U_i^n), \quad (3.103)$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, n_Z\}$ , et tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Sous la condition de type CFL parabolique classique

$$1 - 2\nu \frac{\Delta t}{(\Delta Z)^2} \geq 0, \quad (3.104)$$

cette étape satisfait une propriété de monotonie. Comme  $\hat{U}_i^{n+1}$  n'est pas forcément positif, nous obtenons la solution de (3.101) par

$$U_i^{n+1} = \begin{cases} \hat{U}_i^{n+1} & \text{si } \hat{U}_i^{n+1} \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.105)$$

pour  $i \in \{1, \dots, n_Z\}$ , et tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Par consistance et monotonie, la convergence du schéma est assurée. De plus, celui-ci reste valable lorsque  $\nu = 0$ .

Enfin, l'épaisseur de la couche solide est déduite de la vitesse numérique en posant

$$b^n = \sup \{i \in \{1, \dots, n_Z\} \mid U_j^n = 0 \text{ pour tout } j \leq i\} \times \Delta Z. \quad (3.106)$$

pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Numériquement, il faut fixer un seuil pour la vitesse. Plus exactement, nous sélectionnons l'indice  $k^n$  tel que

$$k^n = \inf \{j \in \{1, \dots, n_Z\} \mid |U_j^n| \geq \Delta Z^2\}, \quad (3.107)$$



pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Puis, nous posons

$$b^n = (k^n - 1)\Delta Z + \frac{\Delta Z}{2}. \quad (3.108)$$

L'inconvénient de l'approche par inéquation variationnelle est que la détermination de l'épaisseur de la couche solide n'est pas aussi précise que dans l'approche par suivi d'interface décrite à la section 3.4. En revanche, l'approche par inéquation variationnelle autorise la simulation de l'écoulement jusqu'à l'arrêt.

### 3.6.3 Comparaison avec l'approche précédente

Nous allons maintenant comparer les résultats obtenus avec chacune des deux méthodes décrites dans ce manuscrit, sur une phase de simulation qui n'atteint pas l'arrêt de l'écoulement. Prenons à nouveau le cas simple d'un terme source constant et uniforme. Nous faisons une simulation de ce cas en prenant 5000 points et  $\Delta t^0 = 10^{-4}$ , pour chacune des deux méthodes. Nous confrontons les résultats obtenus par les deux méthodes pour différentes viscosités en superposant les courbes. D'une part, nous représentons les profils de vitesse au temps  $t = 6$ , d'autre part nous traçons l'évolution de la position de l'interface jusqu'à cet instant (figure 3.32). Les courbes de couleurs correspondent à la méthode variationnelle, et les courbes noires à la méthode par suivi d'interface décrite à la section 3.4. Dans tous les cas, les courbes se superposent.

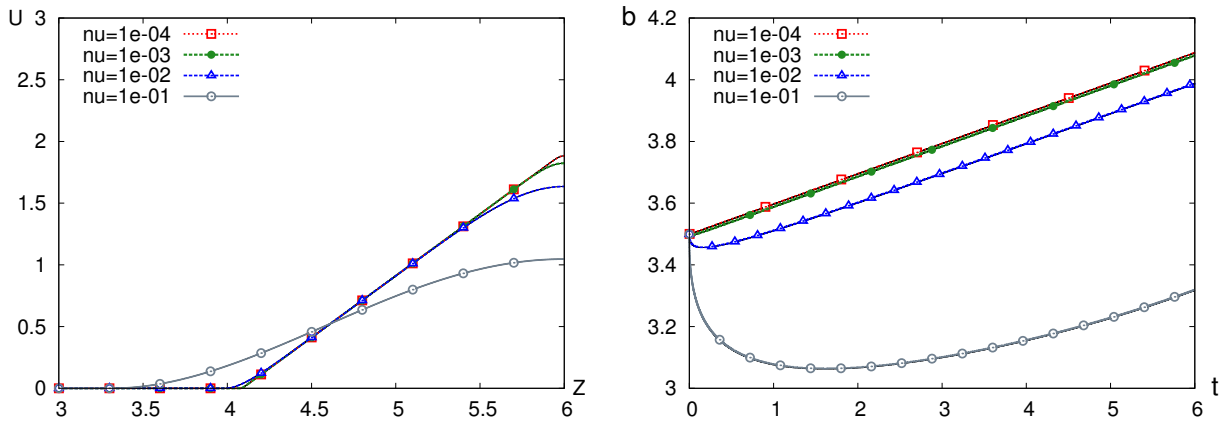


FIGURE 3.32 – Profils de vitesse à  $T = 6$  et évolution de  $b(t)$ .

Nous renseignons ci-dessous l'erreur entre les deux méthodes sur l'épaisseur de la couche solide.

$\nu$	erreur
$\nu = 10^{-4}$	7.96e-04
$\nu = 10^{-3}$	3.19e-04
$\nu = 10^{-2}$	2.81e-04
$\nu = 10^{-1}$	6.27e-04

Sachant que le pas d'espace est de l'ordre de  $10^{-3}$ , et que par la CFL le pas de temps est divisé par 10 lorsque la viscosité est multipliée par 10, nous avons 1000 fois moins de points pour  $\nu = 10^{-4}$  que pour  $\nu = 10^{-1}$ . Néanmoins, l'erreur est grande pour  $\nu = 10^{-1}$  car le  $b$  a la même valeur sur beaucoup d'itérations (jusqu'à 50) par la méthode variationnelle.

### 3.6.4 Résultats numériques pour l'arrêt de l'écoulement

Dans cette sous-section, nous allons faire des simulations en des temps suffisamment longs pour observer le comportement du fluide proche de l'arrêt. Nous nous plaçons à nouveau dans le cas d'un terme source constant et uniforme et nous faisons varier la valeur de celui-ci comme dans l'étude du démarrage dans la section 3.5.3. Par ailleurs, nous renseignons le temps exact d'arrêt de l'écoulement en fonction de la viscosité et du terme source. Nous notons  $t^{\text{stop}}$  le temps d'arrêt de l'écoulement. Lorsqu'il n'y a pas de viscosité, nous avons vu en section 2.3.2 que  $t^{\text{stop}}$  est donné par la formule

$$t^{\text{stop}} = \frac{U^0(h)}{S}. \quad (3.109)$$

Ce qui donne, dans notre configuration, et avec la vitesse initiale (3.37), un temps d'arrêt  $t^{\text{stop}} = \frac{2.5}{S}$ . En revanche, lorsque le fluide est visqueux, nous déduisons approximativement le temps d'arrêt des résultats des simulations numériques. Comme l'indiquent les tableaux ci-dessous, nous avons fait ce calcul pour quatre valeurs différentes de  $S$ , en variant également la viscosité. Nous prenons successivement,  $S = 0.1$ ,  $S = 0.2$ ,  $S = 0.4$  et  $S = 0.8$ . En cohérence avec la formule (3.109) ci-dessus, nous pouvons voir que plus le terme source est grand, plus le temps d'arrêt

est petit.

$S = 0.1$	$t^{\text{stop}}$	$S = 0.2$	$t^{\text{stop}}$	$S = 0.4$	$t^{\text{stop}}$	$S = 0.8$	$t^{\text{stop}}$
$\nu = 0$	25	$\nu = 0$	12.5	$\nu = 0$	6.25	$\nu = 0$	3.125
$\nu = 10^{-4}$	24.44	$\nu = 10^{-4}$	12.30	$\nu = 10^{-4}$	6.18	$\nu = 10^{-4}$	3.10
$\nu = 10^{-3}$	23.28	$\nu = 10^{-3}$	11.88	$\nu = 10^{-3}$	6.03	$\nu = 10^{-3}$	3.05
$\nu = 10^{-2}$	19.97	$\nu = 10^{-2}$	10.66	$\nu = 10^{-2}$	5.58	$\nu = 10^{-2}$	2.89
$\nu = 10^{-1}$	13.27	$\nu = 10^{-1}$	7.75	$\nu = 10^{-1}$	4.40	$\nu = 10^{-1}$	2.43

Étudions maintenant les effets de la viscosité sur  $t^{\text{stop}}$ . Pour cela, nous considérons la quantité  $t_{\nu=0}^{\text{stop}} - t_{\nu}^{\text{stop}}$ , que nous traçons en échelle log-log en fonction de la viscosité à la figure 3.33.

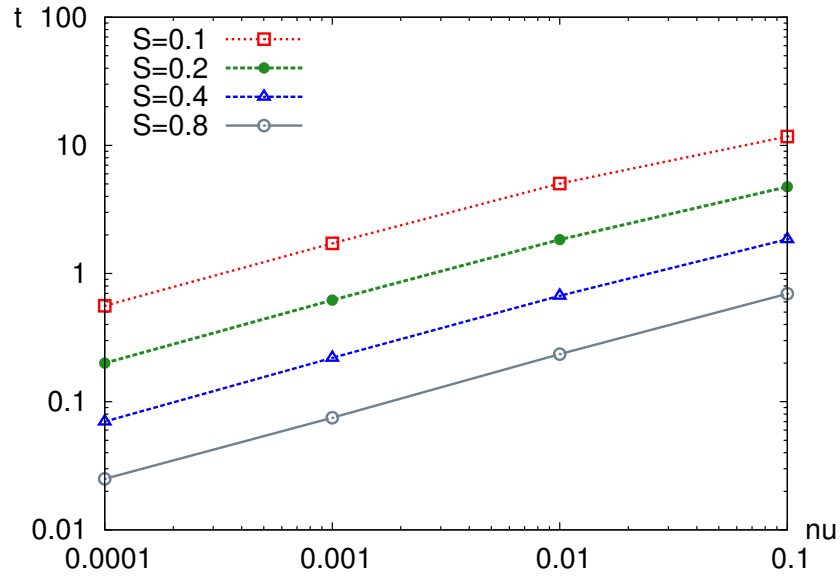


FIGURE 3.33 –  $t_{\nu=0}^{\text{stop}} - t_{\nu}^{\text{stop}}$  en fonction de la viscosité  $\nu$  en échelle log-log.

Nous obtenons ainsi un coefficient directeur de  $\frac{1}{2}$ , ce qui permet d'en tirer la relation

$$t_{\nu=0}^{\text{stop}} - t_{\nu}^{\text{stop}} \propto \sqrt{\nu}. \quad (3.110)$$

En observant les résultats du tableau, nous en déduisons également que la viscosité accélère l'arrêt de l'écoulement. Pour illustrer cela, nous représentons, à la figure 3.34, l'évolution de l'épaisseur de la couche solide pour les termes sources  $S = 0.1$

et  $S = 0.8$ .

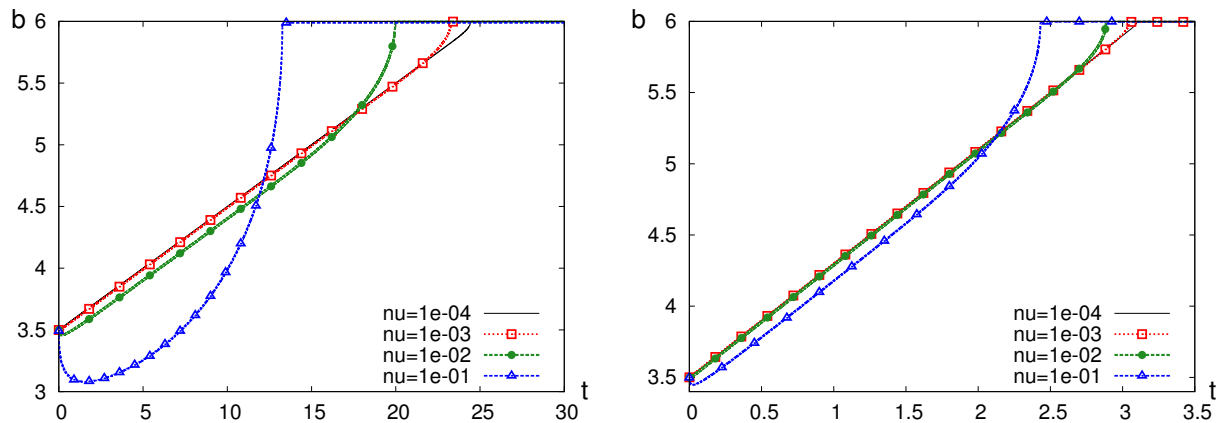


FIGURE 3.34 – Évolution de  $b$  pour les termes sources  $S = 0.1$  et  $S = 0.8$ .

Nous constatons que la viscosité et la force externe exercée par le terme source, qui représente les effets de friction, ont un impact sur la valeur du temps d'arrêt de l'écoulement, ainsi que son comportement global. En effet, les effets visqueux ont tendance à mettre en mouvement une partie de la couche solide. L'écoulement ralentit ensuite, ce qui provoque *in fine* un arrêt plus précoce de l'écoulement, dû à une forte dissipation visqueuse. Par ailleurs, le terme source provoque l'arrêt de l'écoulement, et son effet que celui de la viscosité. De plus, plus le terme source est grand, moindre est la portion de la couche solide entraînée par la viscosité lors de la phase de démarrage. celui-ci diminue la quantité de portion entraînée au départ par la viscosité.



# SIMULATION D'ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

---



---

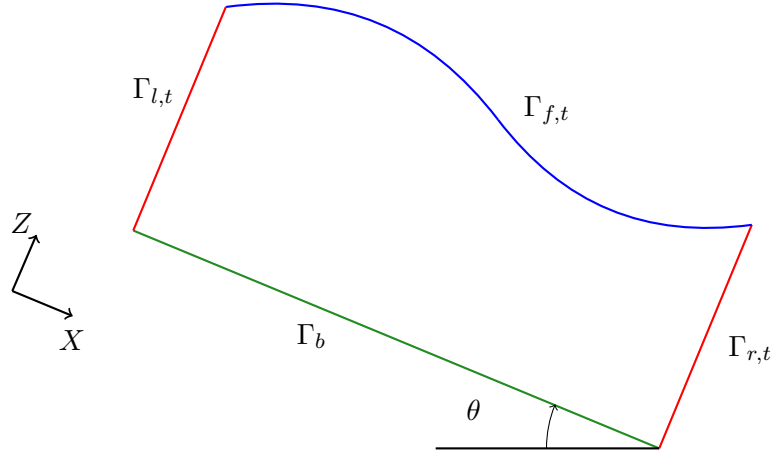
<b>4.1 Formulation du modèle</b> . . . . .	<b>87</b>
4.1.1 Équations et conditions aux limites . . . . .	87
4.1.2 Régularisation et formulation variationnelle . . . . .	89
<b>4.2 Formulation ALE</b> . . . . .	<b>91</b>
4.2.1 Principe général . . . . .	91
4.2.2 Traitement de la dérivée temporelle . . . . .	93
4.2.3 Formulation variationnelle par la méthode ALE . . . . .	95
4.2.4 Reconstruction de la vitesse du domaine . . . . .	95
<b>4.3 Discrétisation du problème</b> . . . . .	<b>96</b>
4.3.1 Discrétisation en temps . . . . .	96
4.3.2 Discrétisation en espace . . . . .	98
4.3.3 Discrétisation du mouvement du domaine . . . . .	100
<b>4.4 Vérification numérique</b> . . . . .	<b>105</b>
<b>4.5 Étude de la mise en mouvement d'un talus</b> . . . . .	<b>111</b>
4.5.1 Configuration . . . . .	111
4.5.2 Adaptation du maillage . . . . .	113
4.5.3 Simulations numériques . . . . .	113

---

## 4.1 Formulation du modèle

### 4.1.1 Équations et conditions aux limites

Soit un temps de simulation  $T > 0$  fixé. Pour tout  $t \in [0, T]$ , nous supposons que le fluide occupe un domaine  $\Omega_t$  de  $\mathbb{R}^2$ , dépendant du temps. Ce domaine est composé d'un fond plat  $\Gamma_b$ , d'une surface libre  $\Gamma_{f,t}$ , de bords latéraux  $\Gamma_{l,t}$  et  $\Gamma_{r,t}$ , avec une inclinaison d'angle  $\theta$ , comme illustré à la figure 4.1. La partie  $\Gamma_b$  de la frontière est une donnée du problème indépendante du temps.

FIGURE 4.1 – Domaine occupé par le fluide au temps  $t$ .

Nous notons  $\Gamma_{s,t} := \Gamma_{l,t} \cup \Gamma_{r,t}$ . Le problème que nous étudions est régi par des équations de type Navier–Stokes incompressibles sous la forme

$$\rho(\partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla_{\vec{X}}) \vec{U}) - \operatorname{div}_{\vec{X}} P = \vec{f} \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega_t, \quad (4.1a)$$

$$\operatorname{div}_{\vec{X}} \vec{U} = 0 \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega_t, \quad (4.1b)$$

où  $\vec{f}$  est une force extérieure qui se réduit ici à la gravité, et (4.1b) est la condition d'incompressibilité du fluide. Par la suite, nous omettons l'écriture de l'indice  $\vec{X}$  sur les opérateurs de gradient et de divergence. Sans perte de généralité, nous supposons dans toute la suite que  $\rho = 1$ . Nous rappelons que le tenseur des contraintes  $P$  est de la forme

$$P = \sigma - p \operatorname{Id}, \quad \text{avec } \sigma = 2\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{\|D\vec{U}\|}, \quad (4.2)$$

où  $\nu \geq 0$  représente la viscosité et  $\kappa := \sqrt{2}\lambda[p]_+$  la plasticité. Nous rappelons également le sens rigoureux de (4.2) :

$$\begin{cases} \sigma = 2\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{\|D\vec{U}\|} & \text{si } \|D\vec{U}\| \neq 0, \\ \|\sigma\| \leq \kappa, \sigma \text{ symétrique à trace nulle} & \text{si } \|D\vec{U}\| = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

À cela s'ajoutent les conditions aux limites. Nous choisissons une condition de Dirichlet au fond sous la forme

$$\vec{U}(t, \vec{X}) = \vec{0} \quad \text{pour } t \in [0, T], \vec{X} \in \Gamma_b. \quad (4.4)$$

Sur les bords latéraux, nous supposons que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\Gamma_{r,t}$  se déduit de  $\Gamma_{l,t}$  par une translation en espace  $\mathcal{T}$  telle que  $\mathcal{T}(\Gamma_{l,t}) = \Gamma_{r,t}$  et, nous imposons des

conditions de périodicité sous la forme

$$\vec{U}(t, \vec{X}) = \vec{U}(t, \mathcal{T}(\vec{X})) \quad \text{pour } t \in [0, T], \vec{X} \in \Gamma_{l,t}, \quad (4.5a)$$

$$\left( P(t, \vec{X}) - P(t, \mathcal{T}(\vec{X})) \right) \vec{N} = \vec{0} \quad \text{pour } t \in [0, T], \vec{X} \in \Gamma_{l,t}. \quad (4.5b)$$

Nous adoptons dorénavant la terminologie suivante :

$$V \quad \text{est } \Gamma_{s,t}\text{-périodique,} \quad (4.6)$$

signifie que

$$V(t, \vec{X}) = V(t, \mathcal{T}(\vec{X})) \quad \text{pour } t \in [0, T], \vec{X} \in \Gamma_{s,t}. \quad (4.7)$$

La condition (4.5a) sera imposée au sens fort dans la formulation variationnelle. Par ailleurs, (4.5b) est imposée au sens faible dans la formulation variationnelle en annulant les termes de bord correspondants sur  $\Gamma_{l,t}$  et  $\Gamma_{r,t}$ . Enfin, nous imposons une condition de tension nulle à la surface libre  $\Gamma_{f,t}$  sous la forme

$$P(t, \vec{X}) \vec{N} = \vec{0} \quad \text{pour } t \in [0, T], \vec{X} \in \Gamma_{f,t}. \quad (4.8)$$

**Remarque 4.1.** *Pour l'étude de la mise en mouvement d'un talus à la section 4.5, nous formulerons également le problème avec une condition aux limites de Neumann sur le bord gauche et une vitesse nulle sur le bord droit.*

Nous avons par ailleurs la condition cinématique

$$N_t + \vec{N} \cdot \vec{U}(t, \vec{X}) = 0 \quad \text{pour } t \in [0, T], \vec{X} \in \Gamma_{f,t}, \quad (4.9)$$

où  $(N_t, \vec{N})$  est la normale temps-espace à la surface libre. La condition (4.9) régit l'évolution du domaine fluide  $\Omega_t$  en temps. Enfin, la condition initiale s'écrit

$$\vec{U}(0, \vec{X}) = \vec{U}_0(\vec{X}) \quad \text{pour } \vec{X} \in \Omega_0, \quad (4.10)$$

où  $\vec{U}_0$  et  $\Omega_0$  sont donnés.

### 4.1.2 Régularisation et formulation variationnelle

Dans le cas d'écoulements bidimensionnels, l'interface séparant les phases statique et mobile peut *a priori* prendre des formes complexes. Nous n'allons donc plus formuler le problème comme au chapitre 3 sur la phase mobile uniquement, mais sur l'ensemble du domaine fluide  $\Omega_t$ . Ceci pose la question du traitement du terme multivalué  $\kappa \frac{D\vec{U}}{\|D\vec{U}\|}$  dans (4.2). Une première possibilité est de traiter ce terme par une formulation en lagrangien augmenté; un exemple dans le cas d'un fluide de



Bingham est présenté dans [116]. Une autre approche, que nous adoptons ici, est de régulariser le terme multivalué sous la forme

$$\kappa \frac{D\vec{U}}{\sqrt{\|D\vec{U}\|^2 + \epsilon^2}}, \quad (4.11)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre réel strictement positif. L'intérêt de cette approche est que le terme (4.11) est toujours univalué, même si  $D\vec{U}$  est nul. L'avantage par rapport à l'approche par lagrangien augmenté est la réduction du coût des calculs. Le prix à payer est que l'expression (4.11) peut différer de (4.2) lorsque  $\|D\vec{U}\|$  est de l'ordre de  $\epsilon$ . Le choix du paramètre  $\epsilon$  est donc un élément important d'appréciation de la qualité des simulations, notamment s'il s'agit de prédire avec précision la localisation de la couche solide. Le tenseur des contraintes régularisé, que nous notons  $\sigma_\epsilon$ , s'écrit

$$\sigma_\epsilon = 2\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{\sqrt{\|D\vec{U}\|^2 + \epsilon^2}}. \quad (4.12)$$

L'équation (4.1a) peut se réécrire

$$\partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} - \operatorname{div} \sigma_\epsilon + \nabla p = \vec{f} \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega_t. \quad (4.13)$$

Pour tout  $t \in ]0, T[$ , nous posons

$$H_t = \left\{ \vec{V} \in H^1(\Omega_t)^2 \mid \vec{V} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_b, \vec{V} \text{ } \Gamma_s\text{-périodique} \right\}, \quad (4.14)$$

$$L_t = L^2(\Omega_t). \quad (4.15)$$

L'opérateur  $\operatorname{div} : H_t \rightarrow L_t$  est surjectif [35]. Pour prendre en compte la dépendance temporelle, nous définissons les espaces

$$V = \left\{ \vec{V} \in L^2(]0, T[; H_t) \mid \frac{d\vec{V}}{dt} \in L^2(]0, T[; H_t') \right\}, \quad (4.16)$$

$$M = L^2(]0, T[; L_t), \quad (4.17)$$

où  $H_t'$  désigne l'espace dual de  $H_t$ . Nous admettons que les fonctions de  $V$  sont dans  $\mathcal{C}^0(]0, T[, L_t)$  (X) ce qui permet de donner un sens à la condition initiale (4.10) dans  $L^2(\Omega_0)$ , voir [6] dans le cas de domaines indépendants du temps.

**Lemme 4.2.** *La formulation variationnelle correspondante au problème (4.1), (4.4), (4.5), (4.8), est la suivante :*

*Trouver  $(\vec{U}, p) \in V \times M$  tels que la condition initiale est satisfaite, et pour presque*

tout  $t \in ]0, T[$ , tout  $\vec{V} \in H_t$ , et tout  $q \in L_t$ ,

$$\int_{\Omega_t} \left( \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right) \cdot \vec{V} + \int_{\Omega_t} 2\nu D\vec{U} : D\vec{V} + \int_{\Omega_t} \kappa \frac{D\vec{U}}{\sqrt{\|D\vec{U}\|^2 + \epsilon^2}} : D\vec{V} - \int_{\Omega_t} p \operatorname{div} \vec{V} = \int_{\Omega_t} \vec{f} \cdot \vec{V}, \quad (4.18a)$$

$$\int_{\Omega_t} q \operatorname{div} \vec{U} = 0. \quad (4.18b)$$

En toute rigueur, le premier terme de (4.18a) devrait s'écrire sous la forme  $\langle \partial_t \vec{U}, \vec{V} \rangle_{H_t', H_t}$ .

*Démonstration.* En intégrant (4.13) contre une fonction test  $\vec{V} \in H_t$ , nous obtenons

$$\int_{\Omega_t} \left( \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right) \cdot \vec{V} - \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \sigma_\epsilon \cdot \vec{V} + \int_{\Omega_t} \nabla p \cdot \vec{V} = \int_{\Omega_t} \vec{f} \cdot \vec{V}.$$

Par intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left( \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right) \cdot \vec{V} + \int_{\Omega_t} \sigma_\epsilon : D\vec{V} - \int_{\partial\Omega_t} (\sigma_\epsilon - p \operatorname{Id}) \vec{N} \cdot \vec{V} - \int_{\Omega_t} p \operatorname{div} \vec{V} \\ = \int_{\Omega_t} \vec{f} \cdot \vec{V}. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites considérées font disparaître le terme de bord, d'où en utilisant l'expression (4.12) de  $\sigma_\epsilon$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left( \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right) \cdot \vec{V} + \int_{\Omega_t} \left( 2\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{\sqrt{\|D\vec{U}\|^2 + \epsilon^2}} \right) : D\vec{V} \\ - \int_{\Omega_t} p \operatorname{div} \vec{V} = \int_{\Omega_t} \vec{f} \cdot \vec{V}. \end{aligned}$$

L'obtention de la deuxième égalité (4.18b) est immédiate.  $\square$

## 4.2 Formulation ALE

### 4.2.1 Principe général

La modélisation de l'écoulement d'un fluide avec surface libre doit tenir compte de la déformation du domaine. Nous allons ici détailler la méthode la plus généralement utilisée dans ce contexte, la méthode ALE (de l'anglais Arbitrary Lagrangian Eulerian). Cette section est largement inspirée du livre [61]. Pour une description

théorique de la méthode, le lecteur pourra consulter [74]. Des exemples de simulations sont par ailleurs présentés dans [62, 63, 123].

La formulation ALE nécessite d'introduire un domaine fluide de référence, que nous notons  $\hat{\Omega}$ . Le domaine fluide au temps  $t$ , que nous avons noté  $\Omega_t$ , est l'image du domaine de référence  $\hat{\Omega}$  par une application  $\hat{\mathcal{A}}_t$  telle que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_t : \hat{\Omega} &\rightarrow \Omega_t \\ \hat{x} &\mapsto x, \end{aligned} \quad (4.19)$$

et nous supposons que cette application réalise un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Nous notons  $\vec{W}$  la vitesse du domaine définie par

$$\vec{W}(t, \hat{x}) = \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_t}{\partial t}(\hat{x}). \quad (4.20)$$

Pour toute fonction  $\psi(t, \cdot)$  définie sur  $\Omega_t$ , nous notons  $\hat{\psi}(t, \cdot)$  la fonction correspondante définie sur le domaine de référence  $\hat{\Omega}$  par

$$\hat{\psi}(t, \hat{x}) = \psi(t, \hat{\mathcal{A}}_t(\hat{x})). \quad (4.21)$$

Pour toute fonction  $\psi$  suffisamment régulière, en utilisant la règle de la dérivation composée, nous avons

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}(t, \hat{x}) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \hat{\mathcal{A}}_t(\hat{x})) + \vec{W}(t, \hat{x}) \cdot \nabla \psi(t, \hat{\mathcal{A}}_t(\hat{x})). \quad (4.22)$$

Nous pouvons également définir la vitesse du domaine  $\vec{W}$  sur le domaine  $\Omega_t$  par

$$\vec{W}(t, x) = \vec{W}(t, \hat{\mathcal{A}}_t^{-1}(x)). \quad (4.23)$$

Le choix de la transformation  $\hat{\mathcal{A}}_t$  est relativement libre. Les seules conditions à satisfaire sont des conditions de compatibilité de la vitesse du domaine  $\vec{W}$  avec les conditions aux limites du problème de départ. Plus précisément, la condition cinématique (4.9) s'écrit

$$\vec{N} \cdot \vec{W} = \vec{N} \cdot \vec{U} \quad \text{pour } t \in [0, T], \vec{X} \in \Gamma_{f,t}, \quad (4.24)$$

et la condition de ne pas déplacer  $\Gamma_b$  ni  $\Gamma_{s,t}$  dans la direction normale s'écrit

$$\vec{N} \cdot \vec{W} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b \cup \Gamma_{s,t}. \quad (4.25)$$

Sur  $\Gamma_b$ , la condition (4.25) équivaut à  $\vec{N} \cdot \vec{W} = \vec{N} \cdot \vec{U}$ ; sur  $\Gamma_{s,t}$ , la condition (4.25) est naturelle dans un contexte de périodicité.

Pour la vitesse et la pression, nous introduisons les espaces de fonctions test suivants, utilisant des fonctions définies sur le domaine de référence  $\hat{\Omega}$ . Pour tout

$t \in [0, T]$ , nous définissons

$$V_t = \left\{ \vec{V}(t, x) \mid \vec{V}(t, x) = \vec{V}(\hat{\mathcal{A}}_t^{-1}(x)) \text{ où } \vec{V} \in \hat{V} \right\}, \quad (4.26)$$

$$M_t = \left\{ q(t, x) \mid q(t, x) = \hat{q}(\hat{\mathcal{A}}_t^{-1}(x)) \text{ où } \hat{q} \in \hat{M} \right\}, \quad (4.27)$$

où  $\hat{V} = \left\{ \vec{V} \in H^1(\hat{\Omega})^2 \mid \vec{V}|_{\Gamma_b} = \vec{0}, \vec{V} \text{ } \hat{\Gamma}_s\text{-périodique} \right\}$  avec  $\hat{\Gamma}_s = \mathcal{A}_t^{-1}(\Gamma_{s,t})$  pour tout  $t \in [0, T]$ , et  $\hat{M} = L^2(\hat{\Omega})$ . Ces définitions permettent de sélectionner des fonctions test indépendantes du temps sur le domaine de référence  $\hat{\Omega}$ .

### 4.2.2 Traitement de la dérivée temporelle

Nous allons maintenant examiner deux manières de traiter la dérivée temporelle dans (4.18a)

**Proposition 4.3.** *Pour toute fonction  $\vec{U}(t, x)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  en temps et en espace, et pour toute fonction  $\vec{V} \in V_t$ , nous avons*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \vec{U} \cdot \vec{V} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot \vec{V} + \int_{\Omega_t} (\operatorname{div} \vec{W}) \vec{U} \cdot \vec{V} + \int_{\Omega_t} ((\vec{W} \cdot \nabla) \vec{U}) \cdot \vec{V}, \quad (4.28)$$

où  $\vec{W}$  est la vitesse du domaine définie par (4.23).

*Démonstration.* Par la formule de Reynolds, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \vec{U} \cdot \vec{V} &= \int_{\Omega_t} \partial_t(\vec{U} \cdot \vec{V}) + \int_{\partial\Omega_t} (\vec{W} \cdot \vec{N})(\vec{U} \cdot \vec{V}) \\ &\quad - \int_{\Omega_t} \partial_t(\vec{U} \cdot \vec{V}) + \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\vec{W}(\vec{U} \cdot \vec{V})) \\ &= \int_{\Omega_t} \partial_t(\vec{U} \cdot \vec{V}) + \int_{\Omega_t} (\operatorname{div} \vec{W}) \vec{U} \cdot \vec{V} + \int_{\Omega_t} \vec{W} \cdot \nabla(\vec{U} \cdot \vec{V}). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\partial_t(\vec{U} \cdot \vec{V}) = \partial_t \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \partial_t \vec{V}$ , et

$$\vec{W} \cdot \nabla(\vec{U} \cdot \vec{V}) = (\vec{W} \cdot \nabla \vec{U}) \cdot \vec{V} + (\vec{W} \cdot \nabla \vec{V}) \cdot \vec{U},$$

et le fait que  $\partial_t \vec{V} + \vec{W} \cdot \nabla \vec{V} = 0$  car  $\vec{V} \circ \hat{\mathcal{A}}_t$  ne dépend pas du temps, il en résulte (4.28).  $\square$

Par la formule (4.28), les deux premiers termes de l'équation (4.18a) se réécrivent sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \partial_t \vec{U} \cdot \vec{V} + ((\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U}) \cdot \vec{V} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \vec{U} \cdot \vec{V} \\ - \int_{\Omega_t} (\operatorname{div} \vec{W})(\vec{U} \cdot \vec{V}) - \int_{\Omega_t} (\vec{W} \cdot \nabla \vec{U}) \cdot \vec{V} &+ \int_{\Omega_t} ((\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U}) \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Au niveau discret, cette formulation occasionne une difficulté, liée au traitement du terme  $\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} \vec{U} \cdot \vec{V} \right)$ . En effet, l'approximation de ce terme par une différence finie en temps d'ordre un par exemple, nécessite d'intégrer sur deux domaines différents correspondant à deux instants consécutifs. L'avantage de l'approche est que dans le cadre d'une analyse de stabilité classique du schéma discrétisé en temps, on obtient bien une forme incrémentale pour le terme instationnaire ; voir par exemple [61, p. 210]. Un exemple récent d'utilisation de cette approche peut être trouvé dans [55].

La formulation ALE peut s'énoncer d'une autre manière, permettant d'obtenir des intégrales toutes sur le même domaine. Cette méthode, qui est par exemple employée dans [101], est celle qui est retenue ici. Le prix à payer est que l'analyse de stabilité classique ne conduit plus à une forme incrémentale du terme instationnaire. Il n'est donc pas possible de conclure *a priori* à la stabilité, même si en pratique on observe pas d'instabilité dans une gamme raisonnable de paramètres numériques, voir à nouveau [61, p. 210].

**Proposition 4.4.** *Pour toute fonction  $\vec{U}(t, x)$  de classe  $C^1$  en temps et en espace, et pour toute fonction  $\vec{V} \in V_t$ , nous avons*

$$\int_{\Omega_t} \partial_t \vec{U} \cdot \vec{V} = \int_{\Omega_t} \partial_t ((\vec{U} \cdot \vec{V}) \circ \hat{A}_t) \circ \hat{A}_t^{-1} - \int_{\Omega_t} ((\vec{W} \cdot \nabla) \vec{U}) \cdot \vec{V}, \quad (4.30)$$

où  $\vec{W}$  est la vitesse du domaine définie par (4.23).

*Démonstration.* Pour prouver (4.30), nous allons montrer que

$$\partial_t ((\vec{U} \cdot \vec{V}) \circ \hat{A}_t) \circ \hat{A}_t^{-1} = (\partial_t \vec{U} + ((\vec{W} \cdot \nabla) \vec{U})) \cdot \vec{V}.$$

Pour cela, nous calculons tout d'abord

$$\begin{aligned} \partial_t ((\vec{U} \cdot \vec{V}) \circ \hat{A}_t) &= \partial_t ((\vec{U} \circ \hat{A}_t) \cdot (\vec{V} \circ \hat{A}_t)) \\ &= \partial_t (\vec{U} \circ \hat{A}_t) \cdot (\vec{V} \circ \hat{A}_t) + 0 \end{aligned}$$

car  $\vec{V} \circ \hat{A}_t$  ne dépend pas du temps. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} \partial_t ((\vec{U} \cdot \vec{V}) \circ \hat{A}_t) \circ \hat{A}_t^{-1} &= \left( \partial_t (\vec{U} \circ \hat{A}_t) \cdot (\vec{V} \circ \hat{A}_t) \right) \circ \hat{A}_t^{-1}, \\ &= \left( \partial_t (\vec{U} \circ \hat{A}_t) \circ \hat{A}_t^{-1} \right) \cdot \left( (\vec{V} \circ \hat{A}_t) \circ \hat{A}_t^{-1} \right), \\ &= \left( \partial_t (\vec{U} \circ \hat{A}_t) \circ \hat{A}_t^{-1} \right) \cdot \vec{V}. \end{aligned}$$

De la relation (4.22) nous déduisons

$$\partial_t (\vec{U} \circ \hat{A}_t) = (\partial_t \vec{U}) \circ \hat{A}_t + ((\vec{W} \cdot \nabla) \vec{U}) \circ \hat{A}_t.$$

Ce qui donne au final

$$\left( \partial_t (\vec{U} \circ \hat{A}_t) \circ \hat{A}_t^{-1} \right) \cdot \vec{V} = (\partial_t \vec{U}) \cdot \vec{V} + ((\vec{W} \cdot \nabla) \vec{U}) \cdot \vec{V}, \quad (4.31)$$

et nous en déduisons le résultat annoncé.  $\square$

### 4.2.3 Formulation variationnelle par la méthode ALE

Nous pouvons maintenant obtenir la formulation variationnelle du problème par la méthode ALE.

**Corollaire 4.5.** *La formulation variationnelle du problème avec la méthode ALE est la suivante : pour tout  $t \in [0, T]$ , trouver  $(\vec{U}, p) \in V \times M$ , où  $\vec{U}$  satisfait la condition initiale, et une application  $\hat{A}_t$  dont la vitesse associée  $\vec{W}$  définie par (4.23) vérifie (4.24), (4.25) et tels que*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left( \partial_t((\vec{U} \cdot \vec{V}) \circ \hat{A}_t) \circ \hat{A}_t^{-1} + \left( [(\vec{U} - \vec{W}) \cdot \nabla] \vec{U} \right) \cdot \vec{V} \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega_t} 2\nu D\vec{U} : D\vec{V} + \int_{\Omega_t} \kappa \frac{D\vec{U}}{\sqrt{\|D\vec{U}\|^2 + \epsilon^2}} : D\vec{V} \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega_t} p \operatorname{div} \vec{V} = \int_{\Omega_t} \vec{f} \cdot \vec{V} \quad \text{pour tout } \vec{V} \in V_t, \right. \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\int_{\Omega_t} q \operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad \text{pour tout } q \in M_t. \quad (4.33)$$

### 4.2.4 Reconstruction de la vitesse du domaine

Nous considérons deux méthodes afin de reconstruire la vitesse du domaine. La direction longitudinale à l'écoulement correspond à l'axe  $X$  et la direction transversale à l'axe  $Z$  dans la figure 4.1. La première méthode reconstruit une vitesse dans la direction transverse uniquement, ce qui permet d'effectuer uniquement des mouvements transversaux des points du maillage. Cette méthode est adaptée au cas où les mouvements longitudinaux de la surface libre sont de faible amplitude. La deuxième méthode reconstruit une vitesse vectorielle, au sens où la composante longitudinale de la vitesse peut être non nulle également, permettant de simuler *a priori* une plus large gamme d'écoulements.

Dans les deux cas, la vitesse reconstruite se doit de respecter les conditions (4.24) et (4.25).

#### o *Version scalaire*

Nous déterminons ici une vitesse vectorielle dont la composante transverse est notée  $W$ , et la composante longitudinale est nulle. Nous avons donc  $\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ W \end{pmatrix}$ , et nous reconstruisons la composante transverse  $W$  comme solution du problème

$$-\Delta W = 0 \quad \text{dans } \Omega_t \quad (4.34)$$

avec les conditions aux limites

$$W = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b, \quad (4.35a)$$

$$W - \frac{\vec{U} \cdot \vec{N}}{N_Z} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{f,t}, \quad (4.35b)$$

$$W \quad \Gamma_{s,t}\text{-périodique}, \quad (4.35c)$$

$$\nabla W \cdot \vec{N} \quad \Gamma_{s,t}\text{-périodique}, \quad (4.35d)$$

où  $\vec{N} = \begin{pmatrix} N_X \\ N_Z \end{pmatrix}$  est le vecteur normal unitaire au bord du domaine et  $\vec{U}$  est la vitesse du fluide.

#### o *Version vectorielle*

Nous calculons directement une vitesse à deux composantes  $\vec{W}$ , solution du problème

$$- \operatorname{div}(D\vec{W}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t, \quad (4.36)$$

où  $D\vec{W}$  est la partie symétrique du gradient de  $\vec{W}$ , avec les conditions aux limites

$$(\vec{W} - \vec{U}) \cdot \vec{N} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b \cup \Gamma_{f,t}, \quad (4.37a)$$

$$\vec{W} \cdot \vec{N} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{s,t}, \quad (4.37b)$$

$$(D\vec{W}\vec{N})_T = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_t, \quad (4.37c)$$

où  $(D\vec{W}\vec{N})_T$  est la composante tangentielle du vecteur  $D\vec{W}\vec{N}$ .

## 4.3 Discrétisation du problème

### 4.3.1 Discrétisation en temps

Nous considérons une subdivision de l'intervalle  $[0, T]$ , avec un pas d'espace  $\Delta t$  que nous prenons constant pour simplifier. Nous notons  $t^n = n\Delta t$  le temps discret à l'itération  $n$ , pour tout  $n = 0, \dots, N$ , avec  $T = N\Delta t$ . Nous notons  $\vec{U}^n$  l'approximation de  $\vec{U}$  à l'instant  $t^n$ . Nous notons

$$\Omega^n := \Omega_{t^n}, \quad (4.38)$$

l'approximation du domaine fluide à l'itération  $n = 0, \dots, N$  et nous introduisons également les espaces fonctionnels

$$V^n := V_{t^n} \quad \text{et} \quad M^n := M_{t^n}.$$

La discrétisation en temps se fait par un schéma aux différences finies d'ordre un. Nous utilisons le schéma d'Euler implicite, sauf pour le terme de friction qui peut

être traité de manière explicite ou implicite et pour le mouvement du domaine qui est traité de manière explicite. Commençons par traiter le terme d'accélération.

**Lemme 4.6.** *Soient  $\vec{U}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  en temps et en espace, et  $\vec{V}$  une fonction test appartenant à  $V_t$  défini en (4.26). Alors pour tout  $t \in [t^n, t^{n+1}]$ , en posant  $\Omega^n := \hat{\mathcal{A}}_{t^n}(\hat{\Omega})$ ,  $\Omega^{n+1} := \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}}(\hat{\Omega})$ , et  $\mathcal{A}_{n,n+1} = \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}} \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n}^{-1}$ , nous avons*

$$\int_{\Omega_t} \partial_t((\vec{U} \cdot \vec{V}) \circ \hat{\mathcal{A}}_t) \circ \hat{\mathcal{A}}_t^{-1} = \int_{\Omega^{n+1}} \left( \frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1}}{\Delta t} \right) \cdot \vec{V}^{n+1} + O(\Delta t). \quad (4.39)$$

*Démonstration.* Nous discrétisons la dérivée en temps par une différence finie d'ordre un, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \partial_t((\vec{U} \cdot \vec{V}) \circ \hat{\mathcal{A}}_t) \circ \hat{\mathcal{A}}_t^{-1} &= \\ &= \int_{\Omega^{n+1}} \left( \frac{(\vec{U}^{n+1} \cdot \vec{V}^{n+1}) \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}} - (\vec{U}^n \cdot \vec{V}^n) \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n}}{\Delta t} \right) \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}}^{-1} + O(\Delta t). \end{aligned}$$

Ensuite, nous montrons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{n+1}} \left( \frac{(\vec{U}^{n+1} \cdot \vec{V}^{n+1}) \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}} - (\vec{U}^n \cdot \vec{V}^n) \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n}}{\Delta t} \right) \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}}^{-1} \\ = \int_{\Omega^{n+1}} \left( \frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1}}{\Delta t} \right) \cdot \vec{V}^{n+1}. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} ((\vec{U}^{n+1} \cdot \vec{V}^{n+1}) \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}} - (\vec{U}^n \cdot \vec{V}^n) \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n}) \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}}^{-1} &= \\ \vec{U}^{n+1} \cdot \vec{V}^{n+1} - (\vec{U}^n \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n} \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}}^{-1}) \cdot (\vec{V}^n \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n} \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}}^{-1}), \end{aligned}$$

et comme  $\vec{V} \circ \hat{\mathcal{A}}_t$  ne dépend pas du temps, nous avons

$$\vec{V}^n \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n} = \vec{V}^{n+1} \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} (\vec{U}^n \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n} \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}}^{-1}) \cdot (\vec{V}^n \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n} \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}}^{-1}) &= (\vec{U}^n \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n} \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}}^{-1}) \cdot \vec{V}^{n+1} \\ &= (\vec{U}^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1}) \cdot \vec{V}^{n+1} \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.  $\square$

Nous approchons le mouvement du domaine de manière explicite en remplaçant  $\mathcal{A}_{n,n+1}$  par la transformation approchée suivante : étant donné  $\Omega^n$  (obtenu au pas de temps précédent ou donné par la condition initiale), nous posons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,n+1} : \Omega^n &\rightarrow \Omega^{n+1} := \mathcal{A}_{n,n+1}(\Omega^n) \\ y &\mapsto x = y + \Delta t W^n(y), \end{aligned} \quad (4.40)$$



où  $W^n$  est la solution du problème (4.34),(4.35), ou (4.36),(4.37), en  $t^n$ . Formellement, nous avons

$$\mathcal{A}_{n,n+1} = \hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}} \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n}^{-1} + O(\Delta t^2), \quad (4.41)$$

et

$$\hat{\mathcal{A}}_{t^{n+1}} = (\text{Id} + \Delta t \vec{W}^n) \circ \hat{\mathcal{A}}_{t^n} + O(\Delta t^2).$$

Nous pouvons maintenant énoncer la formulation variationnelle semi-discrétisée en temps.

**Lemme 4.7.** *La formulation variationnelle semi-discrétisée en temps par la méthode ALE est la suivante : étant donné  $\vec{U}^0$ , trouver  $(\vec{U}^{n+1}, p^{n+1}) \in V^{n+1} \times M^{n+1}$  pour tout  $n = 0, \dots, N-1$ , tels que pour tout  $\vec{V} \in V^{n+1}$  et tout  $q \in M^{n+1}$ ,*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{n+1}} \left( \frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1}}{\Delta t} + [(\vec{U}^{n+1} - \vec{W}^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1}) \cdot \nabla \vec{U}^{n+1}] \right) \cdot \vec{V} \\ + \int_{\Omega^{n+1}} \left( 2\nu + \frac{\kappa^{n+\alpha}}{\sqrt{\|D\vec{U}^{n+\alpha}\|^2 + \epsilon^2}} \right) D\vec{U}^{n+1} : D\vec{V} - \int_{\Omega^{n+1}} p^{n+1} \text{div} \vec{V} \\ = \int_{\Omega^{n+1}} \vec{f}^{n+1} \cdot \vec{V}, \end{aligned} \quad (4.42a)$$

$$\int_{\Omega^{n+1}} q \text{div} \vec{U}^{n+1} = 0, \quad (4.42b)$$

où  $\mathcal{A}_{n,n+1}$  est définie par (4.40). Enfin, le paramètre  $\alpha$  permet d'effectuer soit une discrétisation explicite du terme de friction ( $\alpha = 0$ ), soit une discrétisation implicite ( $\alpha = 1$ ) (avec, en particulier, la notation  $\kappa^{n+\alpha} = \sqrt{2}\lambda[p^{n+\alpha}]_+$ ).

*Démonstration.* Il suffit de combiner le corollaire 4.5 et le lemme 4.39.  $\square$

### 4.3.2 Discrétisation en espace

Pour la discrétisation en espace, nous utilisons des éléments finis triangulaires. Nous notons  $\mathcal{T}_h^n$  la triangulation du domaine  $\Omega_h^n$  au temps discret  $t^n$ , de sorte que

$$\Omega_h^n = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^n} T.$$

L'indice  $h^n = \max_{T \in \mathcal{T}_h^n} \text{diam}(T)$  est un réel qui caractérise la taille des mailles et est destiné à tendre vers 0. Notons que la surface libre de  $\Omega^n$  est en général courbe, si bien que  $\Omega_h^n$  réalise une approximation de  $\Omega^n$ . Nous utilisons des triangles affines, si bien que cette approximation est d'ordre un en espace. Il serait également possible

de travailler avec des éléments finis isoparamétriques et des triangles courbes au niveau de la surface libre. Pour plus de détails sur les éléments finis, voir [54].

Nous choisissons les espaces d'éléments finis mixtes pour la vitesse et la pression, de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{k+1} & / & \mathbb{P}_k \\ \text{(vitesse)} & & \text{(pression)} \end{array}$$

où l'espace  $\mathbb{P}_k$  est l'espace vectoriel des polynômes de deux variables de degré global inférieur ou égal à  $k$ . Nous prenons  $k = 1$ , ce qui correspond à l'élément fini de Taylor–Hood, et nous définissons alors les espaces discrets

$$V_h^n = \left\{ \vec{V}_h \in (\mathcal{C}^0(\Omega_h^n))^2 \mid \vec{V}_h|_T \in (\mathbb{P}_2)^2, \forall T \in \mathcal{T}_h^n, \vec{V}_h = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_b \text{ et } \Gamma_s^n\text{-périodique} \right\}, \quad (4.43)$$

et

$$M_h^n = \{ p_h \in \mathcal{C}^0(\Omega_h^n) \mid p_h|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h^n \}. \quad (4.44)$$

où  $\Gamma_s^n$  correspond au bord  $\Gamma_{s,t}$  à l'instant discret  $t^n$ .

Nous cherchons une approximation  $\vec{U}_h^{n+1}$  de la vitesse et une approximation  $p_h^{n+1}$  de la pression au temps  $t^{n+1}$ , dans les espaces d'approximation  $V_h^{n+1}$  et  $M_h^{n+1}$  respectivement. Le problème totalement discrétisé en espace et en temps se déduit directement du problème semi-discrétisé en temps (4.42). Étant donné  $\vec{U}_h^0$  l'approximation de  $\vec{U}^0$  dans  $V_h^0$ , il s'agit de trouver  $(\vec{U}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in V_h^{n+1} \times M_h^{n+1}$  pour tout  $n = 0, \dots, N-1$ , tels que pour tout  $\vec{V}_h \in V_h^{n+1}$  et tout  $q_h \in M_h^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h^{n+1}} \left( \frac{\vec{U}_h^{n+1} - \vec{U}_h^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1}}{\Delta t} + [(\vec{U}_h^{n+1} - \vec{W}_h^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1}) \cdot \nabla \vec{U}_h^{n+1}] \right) \cdot \vec{V}_h \\ & + \int_{\Omega_h^{n+1}} \left( 2\nu + \frac{\kappa_h^{n+\alpha}}{\sqrt{\|D\vec{U}_h^{n+\alpha}\|^2 + \epsilon^2}} \right) D\vec{U}_h^{n+1} : D\vec{V}_h \\ & - \int_{\Omega_h^{n+1}} p_h^{n+1} \operatorname{div} \vec{V}_h = \int_{\Omega_h^{n+1}} \vec{f}^{n+1} \cdot \vec{V}_h, \end{aligned} \quad (4.45a)$$

$$\int_{\Omega_h^{n+1}} q_h \operatorname{div} \vec{U}_h^{n+1} = 0, \quad (4.45b)$$

avec  $\vec{W}_h^n$  la vitesse approchée du domaine  $\Omega_h^n$  dont l'évolution sera discutée plus amplement à la section 4.3.3, et enfin la transformation  $\mathcal{A}_{n,n+1}$  est maintenant définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,n+1} : \Omega_h^n &\rightarrow \Omega_h^{n+1} \\ y &\mapsto x = y + \Delta t W_h^n(y). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Pour résoudre cette formulation variationnelle dans le cas implicite, si  $\alpha = 1$ , nous utilisons des itérations de point fixe. Pour cela, nous introduisons les variables  $\vec{U}_h^{n+1,k}$  et  $p_h^{n+1,k}$ . Le problème (4.45) s'écrit alors : étant donné  $(\vec{U}_h^{n+1,k}, p_h^{n+1,k}) \in V_h^{n+1} \times M_h^{n+1}$ , avec pour  $k = 0$ ,  $\vec{U}_h^{n+1,0} = \vec{U}_h^n$  et  $p_h^{n+1,0} = p_h^n$ , trouver  $(\vec{U}_h^{n+1,k+1}, p_h^{n+1,k+1}) \in V_h^{n+1} \times M_h^{n+1}$  pour tout  $n = 0, \dots, N-1$ , tels que pour tout  $\vec{V}_h \in V_h^{n+1}$  et tout  $q_h \in M_h^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h^{n+1}} \left( \frac{\vec{U}_h^{n+1,k+1} - \vec{U}_h^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1}}{\Delta t} + [(\vec{U}_h^{n+1,k} - \vec{W}_h^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1}) \cdot \nabla \vec{U}_h^{n+1,k+1}] \right) \cdot \vec{V}_h \\ & + \int_{\Omega_h^{n+1}} \left( 2\nu + \frac{\kappa_h^{n+1,k}}{\sqrt{\|D\vec{U}_h^{n+1,k}\|^2 + \epsilon^2}} \right) D\vec{U}_h^{n+1,k+1} : D\vec{V}_h \\ & - \int_{\Omega_h^{n+1}} p_h^{n+1,k+1} \operatorname{div} \vec{V}_h = \int_{\Omega_h^{n+1}} \vec{f}^{n+1} \cdot \vec{V}_h, \end{aligned} \quad (4.47a)$$

$$\int_{\Omega_h^{n+1}} q_h \operatorname{div} \vec{U}_h^{n+1,k+1} = 0, \quad (4.47b)$$

avec  $\kappa_h^{n+1,k} = \sqrt{2}\lambda[p_h^{n+1,k}]_+$ . Le critère d'arrêt choisi étant

$$\|\vec{U}_h^{n+1,k+1} - \vec{U}_h^{n+1,k}\|_{L^2} < \operatorname{tol} \quad (4.48)$$

avec  $\operatorname{tol} = 10^{-7}$ .

### 4.3.3 Discrétisation du mouvement du domaine

Nous présentons la formulation variationnelle discrète permettant d'approcher la vitesse du domaine dans le cas scalaire, puis dans le cas vectoriel. Un point important dans le cas scalaire est la discrétisation de la condition cinématique (4.35b). Celle-ci est traitée de manière forte comme une condition essentielle, en l'imposant explicitement dans l'espace d'éléments finis où est cherchée la composante transverse de la vitesse du domaine. L'approche par condition essentielle passe par une définition adéquate de la normale aux nœuds du maillage sur  $\Gamma_{f,h}^n$ . Cette définition est motivée par une propriété de conservation globale de la masse et sera discutée plus amplement ci-dessus. Dans le cas vectoriel, cette propriété de conservation globale est plus délicate à assurer, cf. à nouveau ci-dessous, si bien que la condition cinématique sera traitée par le biais d'un multiplicateur de lagrange, ce qui évite de devoir définir une normale aux nœuds.

Soit  $i$  l'indice d'un nœud  $x_i$  situé sur la surface libre  $\Gamma_{f,h}^n$ . Par la suite, l'ensemble de ces indices est noté  $\mathcal{N}_{f,h}^n$ . Soit  $\varphi_i$  une des composantes de la fonction de base de l'espace d'éléments finis  $V_h^n$ , associée à ce nœud. En se basant sur [53], la normale

approchée au nœud  $i$ ,  $\vec{N}_{h,i}$ , est définie par

$$\vec{N}_{h,i} = \frac{-1}{\int_{\partial\Omega_h^n} \varphi_i d\sigma} \int_{\Omega_h^n} \nabla \varphi_i dx. \quad (4.49)$$

Cette normale est orientée vers l'extérieur du domaine et est obtenue comme combinaison barycentrique des vecteurs normaux aux deux arêtes du maillage,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , partageant le sommet  $i$ . Par exemple, en considérant pour simplifier des éléments finis  $\mathbb{P}_1$ , un calcul explicite montre que (dans la configuration de la figure 4.2),

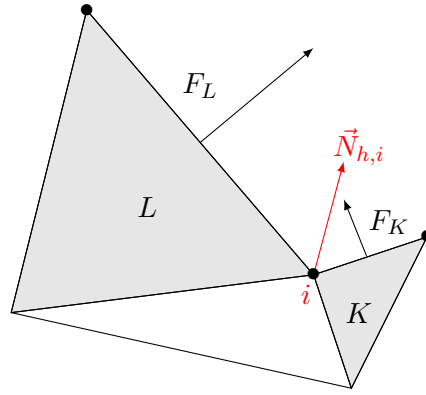


FIGURE 4.2 – Illustration de la normale  $\vec{N}_{h,i}$ ; les flux  $F_K$  et  $F_L$  partageant le nœud  $i$  sont situés sur la surface libre  $\mathcal{T}_{f,h}^n$ .

nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h^n} \nabla \varphi_i dx &= \int_{\partial\Omega_h^n} \varphi_i \vec{N} d\tau \\ &= \int_{F_K} \varphi_i \vec{N}_K dx + \int_{F_L} \varphi_i \vec{N}_L dx \\ &= \frac{|F_K|}{2} \vec{N}_K + \frac{|F_L|}{2} \vec{N}_L, \end{aligned}$$

et également

$$\int_{\partial\Omega_h^n} \varphi_i d\tau = \frac{1}{2} (|F_K| + |F_L|),$$

si bien que

$$\vec{N}_{h,i} = \frac{|F_K| \vec{N}_K + |F_L| \vec{N}_L}{|F_K| + |F_L|}.$$

◦ *Version scalaire*

Nous souhaitons discrétiser le problème (4.34),(4.35) en espace, à l'instant discret  $t^n$ . Pour cela, nous définissons les espaces

$$Y_h^n = \{W_h \in \mathcal{C}^0(\Omega_h^n) \mid W|_T \in \mathbb{P}^2, \forall T \in \mathcal{T}_h^n, W_h = 0 \text{ sur } \Gamma_b, W_h \text{ } \Gamma_s^n\text{-périodique}\}, \quad (4.51)$$

$$Y_{h,0}^n = \left\{ V_h \in \mathcal{C}^0(\Omega_h^n) \mid V|_T \in \mathbb{P}^2, \forall T \in \mathcal{T}_h^n, V_h(x_i) = \frac{\vec{U}_h^n(x_i) \cdot \vec{N}_{h,i}}{N_{h,i,Z}} \text{ pour tout } i \in \mathcal{N}_{f,h}^n, \right. \\ \left. V_h = 0 \text{ sur } \Gamma_b \cup \Gamma_s^n \right\}. \quad (4.52)$$

La formulation variationnelle discrète est alors la suivante : trouver  $W_h^n \in Y_h^n$  tel que

$$\int_{\Omega_h^n} \nabla W_h^n \cdot \nabla V_h = 0, \quad (4.53)$$

pour tout  $V_h \in Y_{h,0}^n$ . Nous posons alors  $\vec{W}_h^n = \begin{pmatrix} 0 \\ W_h^n \end{pmatrix}$ .

◦ *Version vectorielle*

Nous introduisons un multiplicateur de lagrange  $\lambda$  pour discrétiser les conditions aux limites sur  $\vec{W}_h^n \cdot \vec{N}$ , cf. (4.37a),(4.37b), alors que la condition (4.37c) est traitée au sens faible. Nous discrétisons le problème (4.36),(4.37) par :

Trouver  $(\vec{W}_h^n, \lambda) \in \bar{V}_h^n \times M_h^n$  tel que

$$\int_{\Omega_h^n} D\vec{W}_h^n : D\vec{V}_h + \int_{\Gamma_b^n \cup \Gamma_{f,h}^n} \lambda_h^n (\vec{W}_h^n - \vec{U}_h^n) \cdot \vec{N} + \int_{\Gamma_s^n} \lambda_h^n \vec{W}_h^n \cdot \vec{N} \\ + \int_{\Gamma_b^n \cup \Gamma_{f,h}^n} \mu_h \vec{V}_h \cdot N + \int_{\Omega_h^n} \alpha \lambda_h^n \mu_h = 0, \quad (4.54)$$

pour tout  $(\vec{V}_h, \mu_h) \in \bar{V}_h^n \times M_h^n$  avec

$$\bar{V}_h^n = \left\{ \vec{V}_h \in (\mathcal{C}^0(\Omega_h^n))^2 \mid \vec{V}_h|_T \in (\mathbb{P}_2)^2, \forall T \in \mathcal{T}_h^n \right\}, \quad (4.55)$$

et l'espace  $M_h^n$  défini par (4.44). Pour faciliter l'implémentation, nous relevons les multiplicateurs de lagrange dans tout le volume  $\Omega_h^n$  et nous prenons la maximale de ce multiplicateur dans  $\Omega_h^n$  avec un coefficient numérique  $\alpha \ll 1$  afin d'éviter des erreurs de consistance trop importantes.

○ *Conservation globale de la masse*

Le fluide étant incompressible, la conservation globale de la masse équivaut à la conservation du volume du domaine fluide au fil des pas de temps. Nous voulons donc assurer la propriété

$$|\Omega_h^{n+1}| = |\Omega_h^n| \quad \text{pour tout } n = 0, \dots, N-1, \quad (4.56)$$

où  $|\Omega_h^n|$  désigne le volume de  $\Omega_h^n$ .

Nous allons voir que dans le cas où le mouvement du domaine s'effectue dans la direction transverse uniquement, cette propriété peut être satisfaite de manière exacte à condition de discrétiser la normale extérieure de façon appropriée. Dans le cas général pour le mouvement du domaine, cette propriété peut s'obtenir de manière approchée.

Considérons donc le cas d'un mouvement transverse uniquement, et montrons que dans ce cas, la méthode ALE vérifie une loi de conservation géométrique.

**Lemme 4.8.** *Supposons que la vitesse du domaine  $\vec{W}_h^n$  est de la forme  $(0, W_h^n)$ , et que le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation  $\mathcal{A}_{n,n+1}$  définie par (4.46) est strictement positif. Soit  $\phi$  une fonction définie sur  $\Omega_h^{n+1}$ . Alors, le schéma ALE vérifie la loi de conservation géométrique suivante :*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h^{n+1}} \phi(x) dx - \int_{\Omega_h^n} \phi \circ \mathcal{A}_{n,n+1}(y) dy \\ &= \Delta t \int_{\Omega_h^n} \phi \circ \mathcal{A}_{n,n+1}(y) \operatorname{div} \vec{W}_h^n(y) dy. \end{aligned} \quad (4.57)$$

*Démonstration.* Notons  $\mathbb{J}_{n,n+1}$  la matrice jacobienne de  $\mathcal{A}_{n,n+1}$ . Comme le déterminant de la jacobienne, noté  $J_{n,n+1}$ , est supposé strictement positif, le changement de variable  $x = \mathcal{A}_{n,n+1}(y)$  donne

$$\int_{\Omega_h^{n+1}} \phi(x) dx = \int_{\Omega_h^n} \phi \circ \mathcal{A}_{n,n+1}(y) J_{n,n+1}(y) dy.$$

D'où

$$\int_{\Omega_h^{n+1}} \phi(x) dx - \int_{\Omega_h^n} \phi \circ \mathcal{A}_{n,n+1}(y) dy = \int_{\Omega_h^n} \phi \circ \mathcal{A}_{n,n+1}(y) [J_{n,n+1}(y) - 1] dy.$$

Dans le cas d'un mouvement transverse où  $\vec{W}_h^n = \begin{pmatrix} 0 \\ W_h^n \end{pmatrix}$ , la matrice jacobienne est de la forme

$$\mathbb{J}_{n,n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t \frac{\partial W_h^n}{\partial X} & 1 + \Delta t \frac{\partial W_h^n}{\partial Z} \end{pmatrix}.$$

Comme  $\operatorname{div} \vec{W}_h^n = \frac{\partial W_h^n}{\partial Z}$ , il vient  $J_{n,n+1} = 1 + \Delta t \operatorname{div} \vec{W}_h^n$ . D'où le résultat.  $\square$

Les vecteurs  $\vec{N}_{h,i}$  étant définis par (4.49), nous définissons la composante normale d'une fonction  $\vec{V}_h \in V_h^n$  sur  $\Gamma_{f,h}^n$  par la formule

$$\vec{V}_h \cdot \vec{N}_h := \sum_{x_i \in \Gamma_{f,h}^n} (\vec{V}_h(x_i) \cdot \vec{N}_{h,i}) \varphi_i \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_{f,h}^n. \quad (4.58)$$

Alors, nous vérifions par un calcul direct que

$$\int_{\Omega_h^n} \operatorname{div} \vec{V}_h \, dx = \int_{\Gamma_{f,h}^n} \vec{V}_h \cdot \vec{N}_h \, d\tau, \quad (4.59)$$

**Corollaire 4.9.** *Supposons que la vitesse discrète du domaine est de la forme  $\vec{W}_h^n = \begin{pmatrix} 0 \\ W_h^n \end{pmatrix}$ . Supposons que le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation  $\mathcal{A}_{n,n+1}$  est strictement positif. Supposons la condition cinématique*

$$W_h^n(x_i) N_{h,i,Z} = \vec{U}_h^n(x_i) \cdot \vec{N}_{h,i} \quad \forall i \in \mathcal{N}_{f,h}^n, \quad (4.60)$$

avec la définition (4.58) où  $\vec{U}_h^n$  est la vitesse discrète. Alors, la conservation globale de la masse est satisfaite.

*Démonstration.* En évaluant l'égalité (4.57) avec  $\phi = 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} |\Omega_h^{n+1}| - |\Omega_h^n| &= \Delta t \int_{\Omega_h^n} \operatorname{div} \vec{W}_h^n \, dx \\ &= \Delta t \int_{\Gamma_{f,h}^n} \vec{W}_h^n \cdot \vec{N}_h \, dx \end{aligned}$$

En utilisant (4.60) qui implique  $\vec{W}_h^n \cdot \vec{N}_h^n = \vec{U}_h^n \cdot \vec{N}_h$  dans (4.58), il vient

$$\begin{aligned} |\Omega_h^{n+1}| - |\Omega_h^n| &= \Delta t \int_{\Gamma_{f,h}^n} \vec{U}_h^n \cdot \vec{N}_h \, dx, \\ &= \Delta t \int_{\Omega_h^n} \operatorname{div} \vec{U}_h^n \, dx = 0, \end{aligned}$$

car  $\int_{\Omega_h^n} \operatorname{div} \vec{U}_h^n \, dx = 0$  de par (4.47b). □

**Remarque 4.10.** *La condition cinématique (4.60) est bien satisfaite en cherchant  $W_h^n$  dans  $Y_h^n$ , voir (4.52).*

Enfin, dans le cas d'un mouvement vectoriel, en notant  $(\lambda_1, \lambda_2)$  les valeurs propres de  $\nabla \vec{W}_h^n$ , nous avons

$$J_{n,n+1} = 1 + \Delta t \operatorname{div} \vec{W}_h^n + (\Delta t)^2 \lambda_1 \lambda_2. \quad (4.63)$$

Par conséquent, la loi de conservation géométrique est satisfaite à  $O(\Delta t^2)$ .

## 4.4 Vérification numérique

Dans cette section, nous comparons les résultats obtenus dans le chapitre 3, dans le cas unidimensionnel, avec des simulations bidimensionnelles où la vitesse vectorielle longitudinale est :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Pour cela, nous nous plaçons dans le cas où la vitesse longitudinale, est la solution du problème unidimensionnel

$$\begin{aligned} \partial_t U + S - \nu \partial_{ZZ}^2 U &= 0 & \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[, \\ U &= 0 & \text{en } Z = b(t), \\ \partial_Z U &= 0 & \text{en } Z = b(t), \\ \partial_Z U &= 0 & \text{en } Z = h, \end{aligned}$$

avec un terme source constant  $S = g(\sin \theta + \lambda \cos \theta)$ . En deux dimensions, cela correspond à résoudre le problème (4.1a),(4.1b), en prenant pour force extérieure

$$\vec{f} = -g \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

avec les conditions aux limites

$$\vec{U} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b, \quad (4.66a)$$

$$\vec{U} \text{ } \Gamma_s\text{-périodique}, \quad (4.66b)$$

$$U_y = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{f,t}, \quad (4.66c)$$

$$p = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{f,t}. \quad (4.66d)$$

où  $U_y$  désigne la composante transversale de la vitesse  $\vec{U}$ . Notons qu'avec ces conditions aux limites, la vitesse du domaine  $\vec{W}$  est nulle. Pour la pression, la solution est une pression hydrostatique

$$p = g \cos \theta (h - Z) \quad \text{pour tout } Z \in ]b(t), h[. \quad (4.67)$$

Nous nous plaçons dans un domaine carré de côté  $h$ ,  $\Omega^0 = [0, h] \times [0, h]$  incliné d'un angle  $\theta = -\frac{\pi}{180}$ . L'épaisseur de la couche solide initiale  $b^0$  est fixée à 3.5, et la vitesse initiale est donnée par  $U^0(Z) = [Z - b^0]_+$ . Nous choisissons  $\lambda = |\tan \theta| + 10^{-2}$ , de sorte que la condition  $\lambda > |\tan \theta|$  est satisfaite.

Nous comparons le profil 1D avec la composante longitudinale de la vitesse 2D au temps final de simulation  $T = 5$ , avec une hauteur de domaine  $h = 6$ , une viscosité  $\nu = 10^{-3}$  et un paramètre de régularisation  $\epsilon = 10^{-4}$ . Les résultats sont présentés à la figure 4.3. Nous constatons qu'à l'œil nu les courbes se superposent.



Pour la solution 1D, nous avons pris un pas de temps  $\Delta t = 10^{-4}$ , et un pas d'espace  $\Delta Z = 10^{-3}$ . Pour la solution 2D, nous avons pris  $\Delta t = 10^{-3}$  et  $\Delta Z = 10^{-2}$  afin d'alléger le coût de calcul. Par ailleurs, la vitesse du domaine  $\vec{W}$  a été prise égale à zéro, nous y reviendrons ci-dessous.

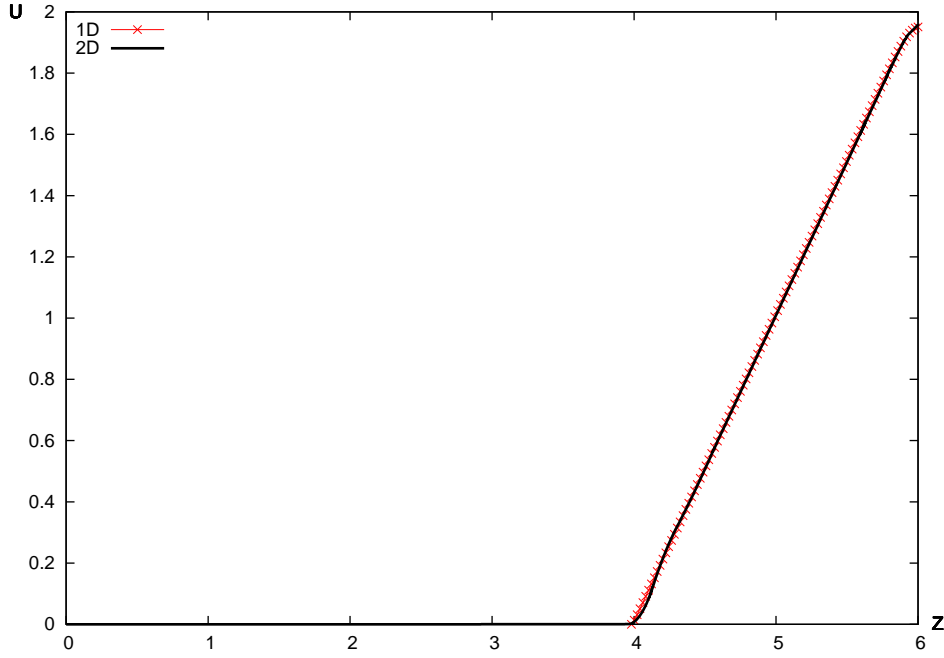


FIGURE 4.3 – Comparaison des profils de vitesse 1D et 2D.

Afin d'évaluer de manière plus précise l'erreur entre le profil 1D et la composante longitudinale de la vitesse 2D, nous prolongeons la solution 1D sur le maillage 2D en attribuant une valeur en chaque sommet de la triangulation par interpolation linéaire en  $Z$  des valeurs 1D. Nous notons  $\mathbb{E}^{2D}(U^{1D})$  la fonction ainsi obtenue, et  $U^{2D}$  la composante longitudinale de la vitesse bidimensionnelle. L'erreur sur la vitesse est estimée par

$$e_{L^2}(U) := \frac{\|U^{2D} - \mathbb{E}^{2D}(U^{1D})\|_{L^2}}{\|\mathbb{E}^{2D}(U^{1D})\|_{L^2}}. \quad (4.68)$$

L'opérateur d'extension  $\mathbb{E}^{2D}$  s'écrit sous la forme

$$\mathbb{E}^{2D}(U^{1D})(x, y) = \sum_{i=1}^N f(y_i) \varphi_i(x, y), \quad (4.69)$$

avec  $N$  le nombre de degrés de liberté de l'espace d'éléments finis  $V_h$ ,  $y_i$  l'ordonnée du noeud du maillage  $i$ , et  $\varphi_i$  la fonction de base associée à ce noeud. La fonction  $f$  est définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} U^{1D}(Z_1) = 0 & \text{si } y < b^0 = Z_1, \\ \frac{U^{1D}(Z_m) - U^{1D}(Z_{m-1})}{Z_m - Z_{m-1}}(y - Z_{m-1}) + U^{1D}(Z_m) & \text{si } Z_{m-1} \leq y \leq Z_m, \\ U^{1D}(Z_M) & \text{si } y > h = Z_M \end{cases} \quad (4.70)$$

où  $(Z_1, \dots, Z_M)$  sont les ordonnées des noeuds du maillage 1D avec  $Z_1 = b^0$ , l'épaisseur initiale de la couche solide, et  $Z_M = h$  l'épaisseur du domaine 1D (qui est fixe en temps).

Pour la géométrie initiale du domaine 2D, nous choisissons un rectangle  $\Omega^0 = [0, l] \times [0, h]$  d'une hauteur  $h = 6$ , et de longueur  $l = 1.5$  plus petite que précédemment, afin de réduire les coûts de calcul. Le domaine est incliné d'un angle  $\theta = -\frac{\pi}{180}$  comme précédemment. La vitesse longitudinale et initiale est donnée par  $U^0(Z) = [Z - b^0]_+$ , où  $b^0 = 3.5$ .

Nous calculons l'erreur avec la solution 1D approchée avec 40000 points en espace et un pas de temps initial  $\Delta t^0 = 10^{-4}$ . Nous fixons le temps final à  $T = 0.2$  (pour réduire le temps de calcul), et nous étudions tout d'abord l'erreur  $e_{L^2}(U)$ , définie par (4.68), sans mouvement du maillage. La résolution numérique de la formulation variationnelle 2D se fait de manière implicite, avec une tolérance d'arrêt fixée à  $10^{-7}$ . Nous comparons les résultats avec un paramètre de régularisation  $\epsilon$  variant de  $10^{-2}$  à  $\epsilon = 10^{-8}$ , afin d'évaluer l'influence de ce paramètre. Pour la viscosité, nous choisissons la valeur  $\nu = 1$ , puis  $\nu = 10^{-3}$ . Nous effectuons également la comparaison avec mouvement de maillage avec une vitesse scalaire, pour  $\epsilon = 10^{-6}$ . Dans ce cas, nous renseignons  $e_{L^2}(U)$ , ainsi que l'erreur relative sur le volume du domaine

$$e(\Omega) := \frac{|\Omega^N| - |\Omega^0|}{|\Omega^0|}, \quad (4.71)$$

où  $|\Omega^0|$  est le volume du domaine initial, et  $|\Omega^N|$  est le volume du domaine final en temps.

•  $\nu = 1$  :

$\epsilon = 10^{-2}$	$\Delta Y = 2.5e-01$	$\Delta Y = 1.25e-01$	$\Delta Y = 6.25e-02$
$\Delta t = 2.5e-02$	3.02e-02	2.99e-02	2.99e-02
$\Delta t = 1.25e-02$	2.75e-02	2.73e-02	2.73e-02
$\Delta t = 6.25e-03$	2.65e-02	2.64e-02	2.64e-02
$\Delta t = 3.12e-03$	2.61e-02	2.60e-02	2.60e-02
$\Delta t = 1.56e-03$	2.59e-02	2.59e-02	2.59e-02
$\Delta t = 7.78e-04$	2.59e-02	2.58e-02	2.58e-02

$\epsilon = 10^{-4}$	$\Delta Y = 2.5e-01$	$\Delta Y = 1.25e-01$	$\Delta Y = 6.25e-02$
$\Delta t = 2.5e-02$	1.26e-02	1.19e-02	1.17e-02
$\Delta t = 1.25e-02$	6.87e-03	6.18e-03	5.99e-03
$\Delta t = 6.25e-03$	4.01e-03	3.28e-03	3.11e-03
$\Delta t = 3.12e-03$	2.60e-03	1.85e-03	1.67e-03
$\Delta t = 1.56e-03$	1.89e-03	1.16e-03	1.01e-03
$\Delta t = 7.78e-04$	1.55e-03	8.28e-04	7.13e-04

$\epsilon = 10^{-6}$	$\Delta Y = 2.5e-01$	$\Delta Y = 1.25e-01$	$\Delta Y = 6.25e-02$
$\Delta t = 2.5e-02$	1.25e-02	1.18e-02	1.16e-02
$\Delta t = 1.25e-02$	6.77e-03	6.06e-03	5.87e-03
$\Delta t = 6.25e-03$	3.89e-03	3.15e-03	2.96e-03
$\Delta t = 3.12e-03$	2.47e-03	1.69e-03	1.50e-03
$\Delta t = 1.56e-03$	1.75e-03	9.69e-04	7.70e-04
$\Delta t = 7.78e-04$	1.40e-03	6.15e-04	4.13e-04

$\epsilon = 10^{-6}$	(scalaire)	$\Delta Y=2.5e-01$	$\Delta Y=1.25e-01$	$\Delta Y=6.25e-02$
$\Delta t=1.56e-03$	$e_{L^2}(U)$	1.79e-03	9.73e-04	7.71e-04
	$e(\Omega)$	6.62e-05	2.10e-05	7.68e-06
$\Delta t=7.78e-04$	$e_{L^2}(U)$	1.45e-03	6.21e-04	4.13e-04
	$e(\Omega)$	6.62e-05	2.11e-05	7.69e-06

Les trois premiers tableaux sont obtenus en prenant une vitesse nulle pour le mouvement du domaine. Le premier tableau, correspondant à  $\epsilon = 10^{-2}$ , met en évidence le fait que lorsque  $\epsilon = 10^{-2}$ , l'erreur de régularisation domine. Le second tableau, correspondant à  $\epsilon = 10^{-4}$ , montre que pour les quatre premiers pas de temps (les plus grossiers), l'erreur en temps domine avec une convergence d'ordre un, puis pour les derniers pas de temps l'erreur de régularisation domine à nouveau, et l'erreur stagne vers  $10^{-3}$ . Le troisième tableau, correspondant à  $\epsilon = 10^{-6}$ , permet d'observer une convergence d'ordre 1 en temps pour les premiers pas de temps, puis les erreurs de discrétisation en temps et en espace sont équilibrées, ce qui s'observe par une division par 2 (voire un peu plus) de l'erreur lorsque le pas de temps et d'espace sont divisés par deux simultanément. Nous pouvons en déduire que pour  $\epsilon = 10^{-6}$ , les paramètres de discrétisation choisis permettent d'obtenir une bonne convergence, et que l'erreur de régularisation est négligeable. Le quatrième tableau présente les résultats de simulations avec mouvement scalaire du maillage pour  $\epsilon = 10^{-6}$ . Nous observons que l'erreur sur la vitesse n'est pratiquement pas modifiée par le mouvement éventuel du maillage (cf. les lignes correspondantes dans le troisième tableau), et que la conservation de la masse discrète est vérifiée avec une très bonne précision puisque  $e(\Omega)$  est de l'ordre de  $10^{-5}$ . Enfin, lorsque  $\epsilon = 10^{-8}$ , nous obtenons les mêmes résultats de convergence qu'avec  $\epsilon = 10^{-6}$  (les résultats ne sont pas reportés ici). Ainsi, nous choisissons la valeur  $\epsilon = 10^{-6}$  pour le paramètre de régularisation dans toute la suite de nos simulations.

Le choix d'un petit paramètre de régularisation permet d'améliorer la précision de la solution. Néanmoins, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , le nombre d'itérations totales augmente. Nous présentons ci-dessous le nombre d'itérations totales pour  $\Delta Y = 1.25e-01$  et  $\Delta t = 3.12e-03$  :

	$\epsilon = 10^{-2}$	$\epsilon = 10^{-4}$	$\epsilon = 10^{-6}$	$\epsilon = 10^{-8}$
nb iter totales	824	2958	5086	5272

Nous observons que le nombre d'itérations totales augmente sensiblement lorsque nous diminuons  $\epsilon$  de  $10^{-2}$  à  $10^{-6}$ ; par contre, ce nombre augmente peu lorsqu'on passe de  $\epsilon = 10^{-6}$  à  $\epsilon = 10^{-8}$ .

•  $\nu = 10^{-3}$  :

$\epsilon = 10^{-2}$	$\Delta Y=2.5e-01$	$\Delta Y=1.25e-01$	$\Delta Y=6.25e-02$
$\Delta t=2.5e-02$	2.59e-02	–	–
$\Delta t=1.25e-02$	2.58e-02	2.59e-02	–
$\Delta t=6.25e-03$	2.58e-02	2.59e-02	2.59e-02
$\Delta t=3.12e-03$	2.58e-02	2.59e-02	2.596e-02
$\Delta t=1.56e-03$	2.58e-02	2.59e-02	2.59e-02
$\Delta t=7.78e-04$	2.58e-02	2.59e-02	2.59e-02

$\epsilon = 10^{-4}$	$\Delta Y=2.5e-01$	$\Delta Y=1.25e-01$	$\Delta Y=6.25e-02$
$\Delta t=2.5e-02$	1.85e-03	–	–
$\Delta t=1.25e-02$	1.13e-03	1.00e-03	–
$\Delta t=6.25e-03$	8.77e-04	6.71e-04	6.01e-04
$\Delta t=3.12e-03$	8.10e-04	5.57e-04	4.71e-04
$\Delta t=1.56e-03$	7.96e-04	5.25e-04	4.32e-04
$\Delta t=7.78e-04$	7.95e-04	5.17e-04	4.21e-04

$\epsilon = 10^{-6}$	$\Delta Y=2.5e-01$	$\Delta Y=1.25e-01$	$\Delta Y=6.25e-02$
$\Delta t=2.5e-02$	1.81e-03	–	–
$\Delta t=1.25e-02$	1.07e-03	9.31e-04	–
$\Delta t=6.25e-03$	7.91e-04	5.56e-04	4.63e-04
$\Delta t=3.12e-03$	7.15e-04	4.10e-04	1.69e-04
$\Delta t=1.56e-03$	6.98e-04	3.64e-04	1.94e-04
$\Delta t=7.78e-04$	6.98e-04	3.53e-04	1.69e-04

**Remarque 4.11.** *Les cases en haut à droite ne sont pas renseignées dans la mesure où, pour ces valeurs de paramètres de discrétisation, l'erreur en temps domine.*

$\epsilon = 10^{-6}$	(scalaire)	$\Delta Y=2.5e-01$	$\Delta Y=1.25e-01$	$\Delta Y=6.25e-02$
$\Delta t=1.56e-03$	$e_{L^2}(U)$	4.36e-03	1.54e-03	4.88e-04
	$e( \Omega )$	6.29e-05	1.34e-05	4.81e-06
$\Delta t=7.78e-04$	$e_{L^2}(U)$	4.36e-03	1.56e-03	4.78e-04
	$e( \Omega )$	6.42e-05	1.31e-05	4.74e-06

Nous constatons à nouveau que lorsque  $\epsilon = 10^{-2}$ , l'erreur de régularisation domine. En revanche, lorsque  $\epsilon = 10^{-4}$ , les erreurs de discrétisation en temps ne dominent que pour les deux premiers pas de temps, avec une convergence d'ordre un, puis ce sont les erreurs de régularisation qui dominent. Pour  $\epsilon = 10^{-6}$ , l'erreur en temps domine pour les trois premiers pas de temps, puis ce sont les erreurs de discrétisation en espace qui dominent avec une convergence d'ordre plus ou moins égale à un. Enfin, pour  $\epsilon = 10^{-8}$ , nous obtenons des résultats similaires au cas  $\epsilon = 10^{-6}$  (les résultats ne sont pas reportés ici), et l'erreur de régularisation est donc négligeable. Ces observations corroborent le fait de fixer la valeur du paramètre de régularisation à  $10^{-6}$  pour nos simulations.

## 4.5 Étude de la mise en mouvement d'un talus

### 4.5.1 Configuration

Pour la simulation de la mise en mouvement d'un talus, la géométrie du domaine est un rectangle, de hauteur  $H$  et de longueur  $L$ , surmonté d'un talus surélevé d'un angle  $\alpha$ . Le plan peut être incliné d'un angle  $\theta$ , comme représenté à la figure 4.4. La forme initiale de la surface libre est donnée par l'expression analytique suivante :

$$F(X) = -\eta \tanh\left(X - \frac{L}{2}\right) + H + \eta \tanh \frac{L}{2}, \quad (4.72)$$

où le paramètre  $\eta$  permet de fixer l'angle  $\alpha$  de la surface libre dans sa partie la plus inclinée ( $\arctan \eta = \alpha$ ). Nous avons ainsi  $F(L) = H$  et  $\bar{H} := F(0) - H = 2 \tanh \frac{L}{2} - H$ .

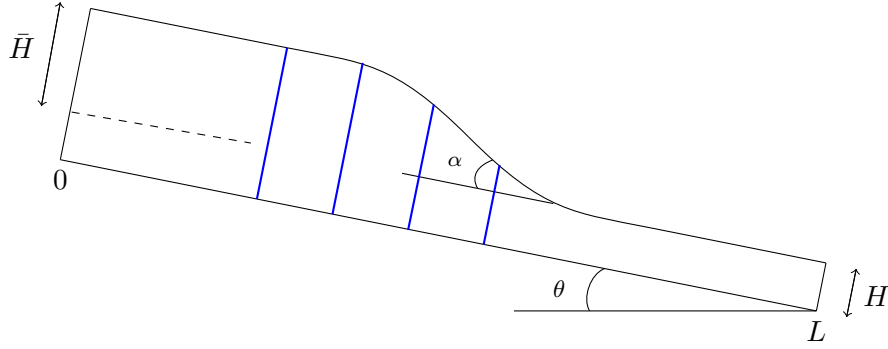


FIGURE 4.4 – Géométrie du domaine représentant le talus dans sa configuration initiale. Les 4 lignes verticales indiquent le lieu des coupes verticales en différents  $X$  lors de la présentation des résultats numériques.

Nous considérons l'angle  $\theta_c$ , correspondant aux effets de friction, c'est à dire

$$\lambda = |\tan \theta_c|. \quad (4.73)$$

Les angles  $\theta$ ,  $\theta_c$  et  $\alpha$  doivent vérifier deux inégalités. La première inégalité doit être compatible avec le démarrage de la partie talus, en partant d'un fluide au repos initialement, i.e.

$$\theta_c < \theta + \alpha. \quad (4.74)$$

Cette inégalité permet à la partie la plus inclinée du talus de se mettre en mouvement. D'autre part, il faut que la partie droite du domaine reste en équilibre sous les effets de friction, ce qui correspond à la condition

$$\theta < \theta_c. \quad (4.75)$$

Cette deuxième inégalité requiert que l'angle d'inclinaison de la pente soit assez petit.

En ce qui concerne les conditions aux limites, nous ne sommes plus dans un cadre périodique. Pour la vitesse, nous prenons

$$\begin{aligned} \vec{U} &= 0 && \text{sur } \Gamma_b \cup \Gamma_{r,t}, \\ (\sigma - p\text{Id})N &= 0 && \text{sur } \Gamma_{f,t}, \\ \sigma N \cdot T &= 0 && \text{sur } \Gamma_{l,t}, \\ \vec{U} \cdot N &= 0 && \text{sur } \Gamma_{l,t}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Pour la vitesse du domaine, qui est cherchée sous forme vectorielle, nous imposons

les conditions

$$\begin{aligned}
\vec{W} \cdot \vec{N} &= \vec{U} \cdot \vec{N} && \text{sur } \Gamma_b \cup \Gamma_{f,t}, \\
\vec{W} \cdot \vec{N} &= 0 && \text{sur } \Gamma_{l,t}, \\
\vec{W} \cdot \vec{T} &= \vec{U} \cdot \vec{T} && \text{sur } \Gamma_{l,t}, \\
\vec{W} &= 0 && \text{sur } \Gamma_{r,t},
\end{aligned} \tag{4.77}$$

### 4.5.2 Adaptation du maillage

Afin de réduire les temps de calcul, tout en maintenant une bonne résolution spatiale, nous pouvons adapter le maillage au fil de la simulation. Pour cela, nous employons la routine `adaptmesh` du logiciel FreeFem++ qui utilise en entrée une fonction dont la hessienne sert à adapter le maillage de manière anisotrope [59]. La taille locale de chaque maille est donnée par la fonction en argument, et la direction des mailles est donnée par les vecteurs propres de la hessienne. La fonction que nous utilisons est la suivante :

$$R(x, y) = (h_{\min} - h_{\max}) \frac{\|\vec{U}_h^n(x, y)\| - \min_{(x,y) \in \Omega_h^n} \|\vec{U}_h^n(x, y)\|}{\max_{(x,y) \in \Omega_h^n} \|\vec{U}_h^n(x, y)\| - \min_{(x,y) \in \Omega_h^n} \|\vec{U}_h^n(x, y)\|} + h_{\max}, \tag{4.78}$$

qui est à valeurs dans  $[h_{\min}, h_{\max}]$ . Les paramètres  $h_{\min}$  et  $h_{\max}$  désignent respectivement les tailles minimum et maximum des triangles que nous souhaitons obtenir. Cette fonction permet d'obtenir des mailles de taille comprise entre  $h_{\min}$  et  $h_{\max}$ . Dans nos simulations, nous avons fixé  $h_{\max} = 1.5h$  et  $h_{\min} = h_{\max}/3$ , où le paramètre  $h$  permet de fixer une taille moyenne de mailles.

### 4.5.3 Simulations numériques

Pour nos simulations, nous considérons une viscosité  $\nu = 10^{-3}$ , et nous rappelons que le paramètre de régularisation est fixé à  $\epsilon = 10^{-6}$ . Nous choisissons une longueur de domaine  $L = 10$  et une hauteur du bord droit  $H = 0.5$ . Nous prenons un angle de friction  $\theta_c = 20^\circ$ , et pour l'inclinaison du domaine nous choisissons  $\theta = 0^\circ$ . L'angle du talus est choisi assez grand relativement à  $\theta_c$ , nous fixons  $\eta = 1$ , ce qui correspond à  $\alpha = 45^\circ$  et à  $\bar{H} \approx 2$ . Avec ce choix, la zone dans laquelle l'angle de la surface libre est plus grand que l'angle de friction interne, est délimitée par  $X = 3.91$  et  $X = 6.09$ . Cette zone correspond à l'endroit où le fluide se met initialement en mouvement. Enfin, nous imposons initialement une vitesse nulle partout et une pression hydrostatique.

Pour les paramètres de simulation, nous choisissons un pas d'espace de l'ordre



de  $h = 10^{-1}$ , et un pas de temps évolutif donné par

$$\Delta t^n = \min \left( \alpha \Delta t^{n-1}, \max \left( \frac{t^n}{10}, \Delta t_{\max} \right) \right), \quad (4.79a)$$

$$\Delta t_{\max} = 10^{-3}, \quad (4.79b)$$

$$\Delta t^0 = \Delta t_{\min} = 10^{-6}, \quad (4.79c)$$

avec  $\alpha = 1.5$ . Ce choix permet d'obtenir un pas de temps de  $10^{-6}$  au démarrage, qui augmente au cours du temps de manière géométrique avec le facteur  $\alpha$ , tout en restant inférieur à  $10^{-3}$ . Le choix relativement élevé du facteur de croissance  $\alpha$  est motivé par le fait qu'une résolution temporelle très fine est nécessaire uniquement au démarrage. Les simulations sont effectuées pour un temps final  $T = 1$ . Enfin, la tolérance d'arrêt dans les itérations de point fixe, pour la résolution du problème implicite à chaque pas de temps, est fixée à  $10^{-7}$ . Nos simulations montrent que plusieurs itérations sont nécessaires uniquement au premier pas de temps (de l'ordre de  $10^2$ ), la convergence aux pas de temps suivants étant atteinte en 2 itérations au plus.

Nous représentons ci-dessous les résultats de simulation aux instants  $t = 10^{-2}$ ,  $t = 10^{-1}$ ,  $t = 5 \times 10^{-1}$  et  $t = 1$ . Les figures représentent, tout d'abord, la norme du tenseur de déformation, qui renseigne les variations du fluide dans la zone liquide de l'écoulement. Puis, les variations dans la zone solide de l'écoulement, représentées par  $\frac{\|D\vec{U}\|}{\sqrt{\|D\vec{U}\|^2 + \epsilon^2}}$ . Ensuite, nous représentons la norme de la vitesse et la pression. Enfin, une coupe verticale de la pression en  $X = 3$ ,  $X = 4$ ,  $X = 5$  et  $X = 6$ .

•  $t = 10^{-2}$

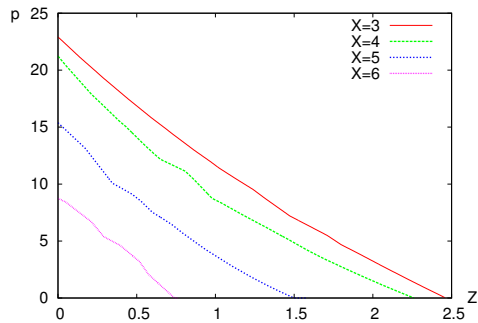
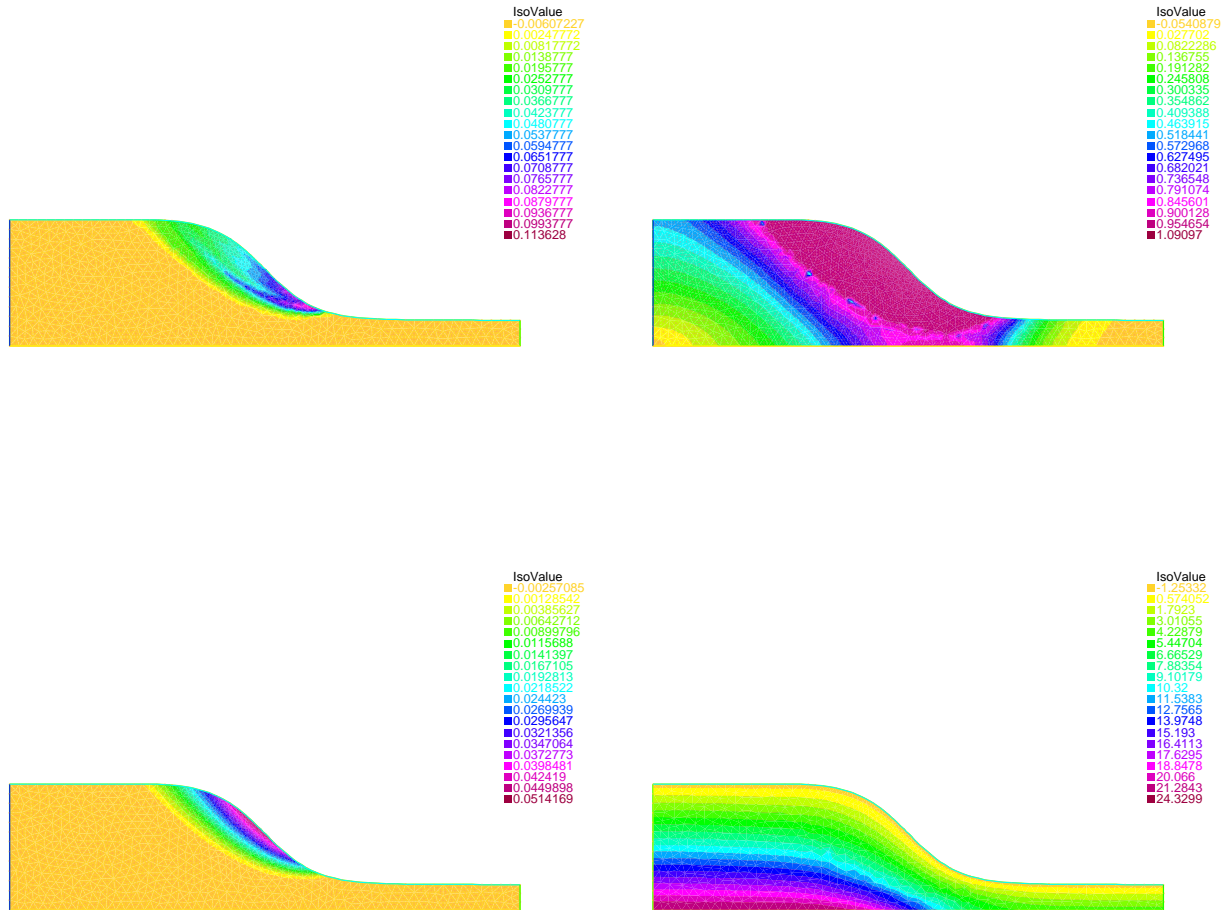


FIGURE 4.5 – Paramètres :  $\epsilon = 10^{-6}$ ,  
 $\alpha = 45^\circ$ ,  $\theta_c = 20^\circ$ ,  $\Delta Y \simeq 10^{-1}$ ,  
 $(\nu = 10^{-3})$ .

$$\|D\vec{U}\| : \min = 0, \max = 1,$$

$$\|\vec{U}\| : \min = 0, \max = 5 \times 10^{-1}.$$

•  $t = 10^{-1}$

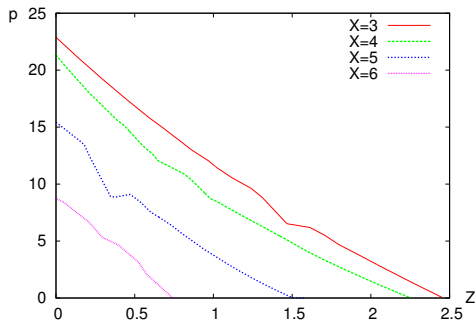
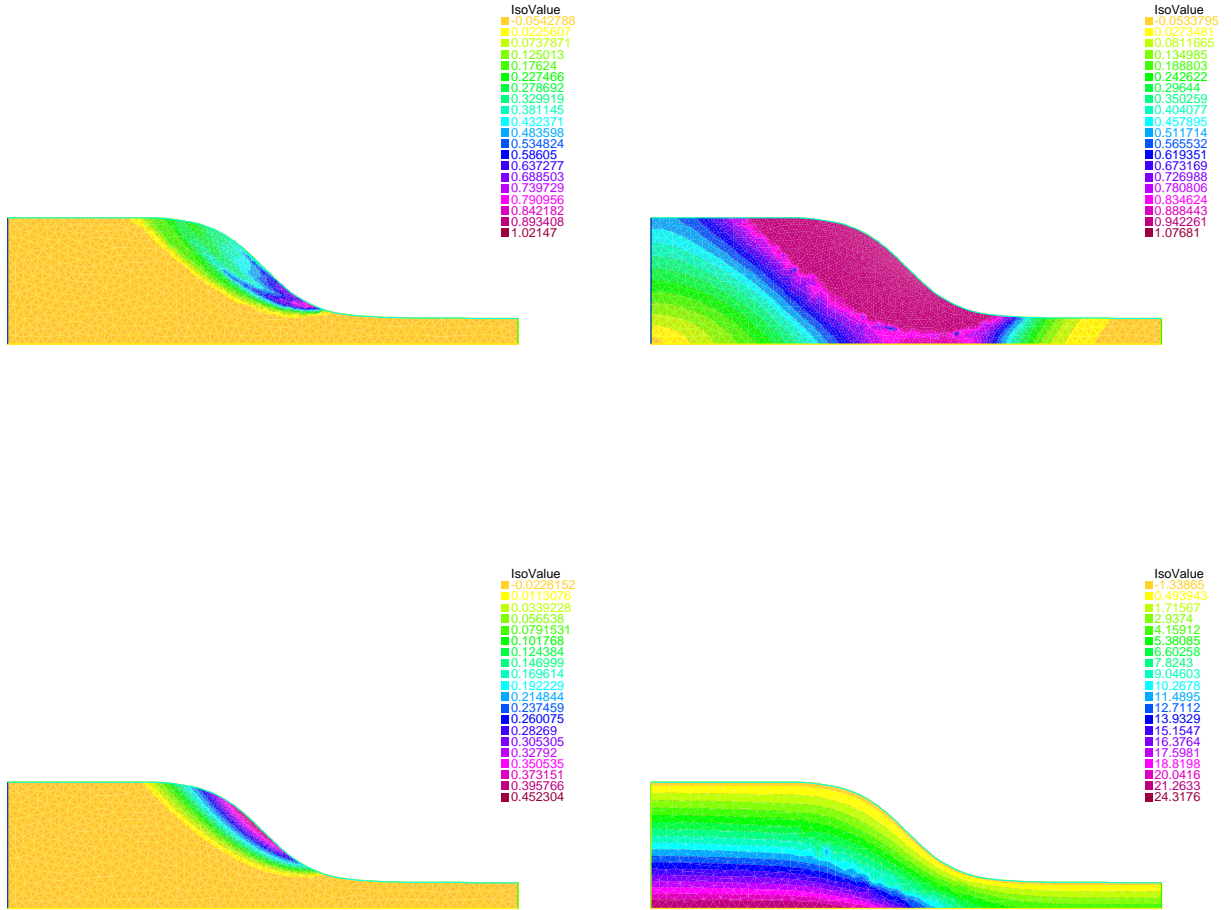


FIGURE 4.6 – Paramètres :  $\epsilon = 10^{-6}$ ,  
 $\alpha = 45^\circ$ ,  $\theta_c = 20^\circ$ ,  $\Delta Y \simeq 10^{-1}$ ,  
 $(\nu = 10^{-3})$ .

$$\|D\vec{U}\| : \min = 0, \max = 5,$$

$$\|\vec{U}\| : \min = 0, \max = 2.$$

•  $t = 5 \times 10^{-1}$

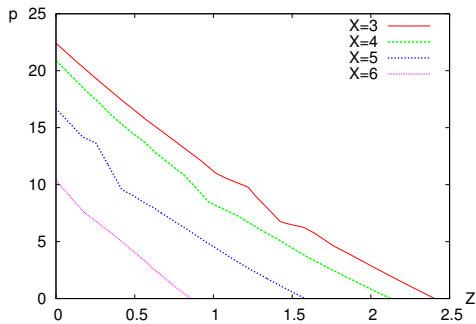
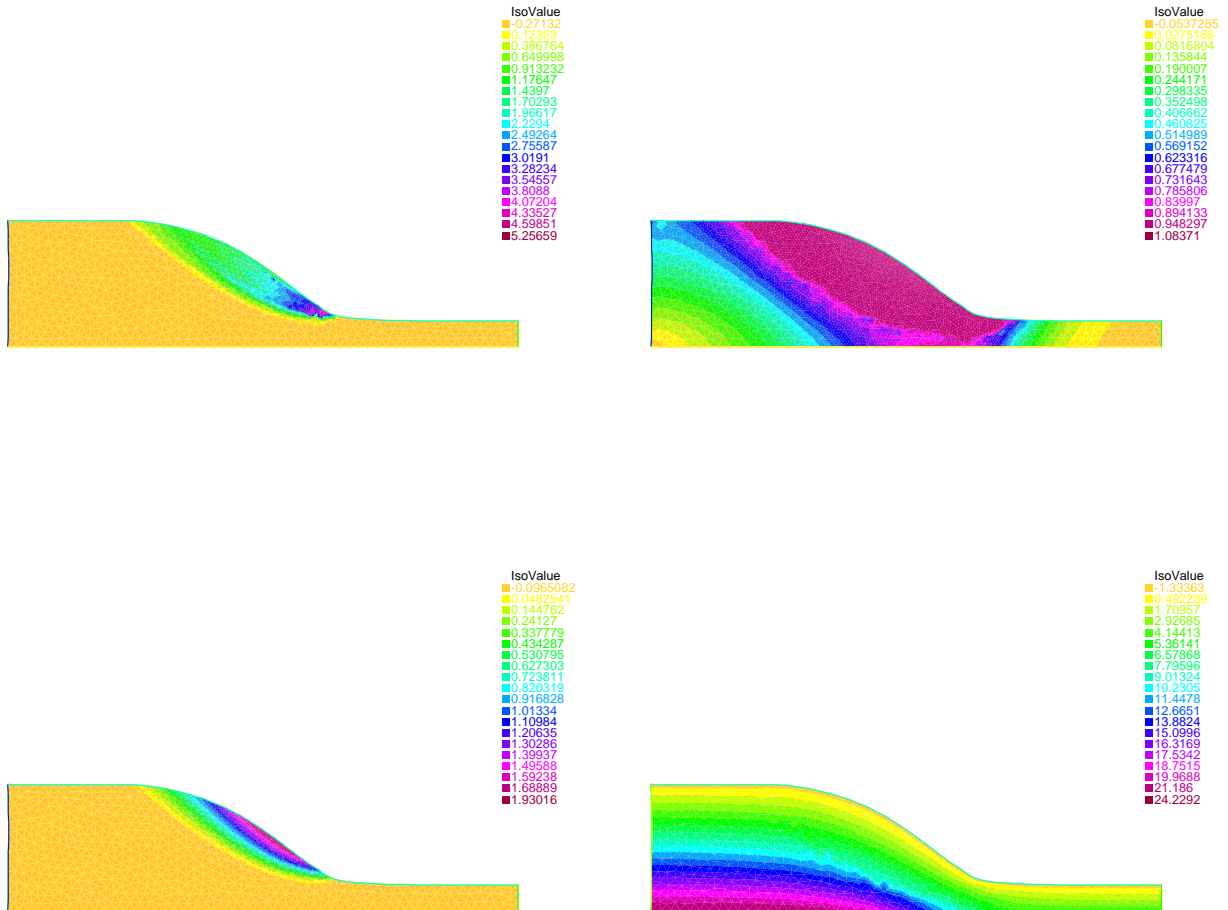


FIGURE 4.7 – Paramètres :  $\epsilon = 10^{-6}$ ,  
 $\alpha = 45^\circ$ ,  $\theta_c = 20^\circ$ ,  $\Delta Y \simeq 10^{-1}$ ,  
 $(\nu = 10^{-3})$ .

$$\|D\vec{U}\| : \min = 0, \max = 22,$$

$$\|\vec{U}\| : \min = 0, \max = 3.$$

•  $t = 1$

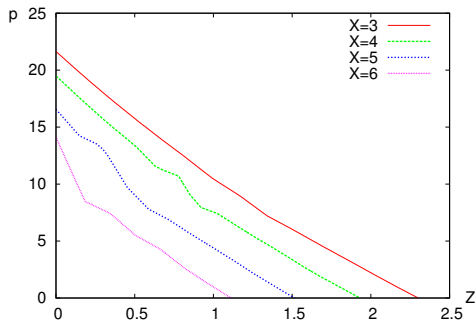
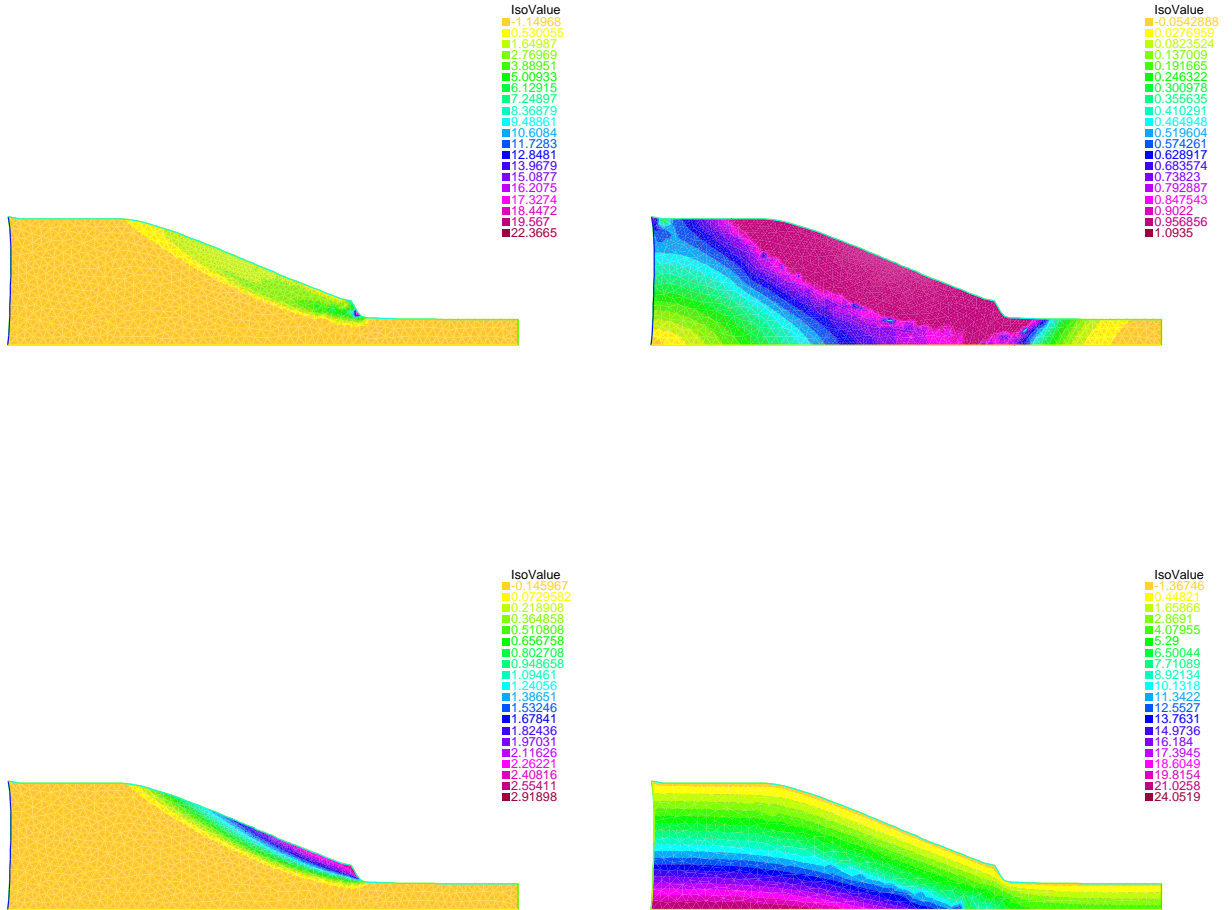


FIGURE 4.8 – Paramètres :  $\epsilon = 10^{-6}$ ,  
 $\alpha = 45^\circ$ ,  $\theta_c = 20^\circ$ ,  $\Delta Y \simeq 10^{-1}$ ,  
 $(\nu = 10^{-3})$ .

$$\|D\vec{U}\| : \min = 0, \max = 10^{-1},$$

$$\|\vec{U}\| : \min = 0, \max = 5 \times 10^{-2}.$$

Les deux premières figures en haut renseignent sur les variations de  $\|DU\|$ . La figure en haut à gauche représentant la norme de  $\|D\vec{U}\|$ , nous renseigne sur les variations du fluide dans la zone liquide, i.e. la couche fluide. La figure en haut à droite représente la norme de la contrainte,  $\frac{\|D\vec{U}\|}{\sqrt{\|D\vec{U}\|^2 + \epsilon^2}}$ . Cette fonction est à valeurs comprises entre 0 et 1, et renseigne sur les variations dans la couche solide. Nous observons que la zone dans laquelle la norme de la contrainte vaut 1, c'est à dire là où  $\|D\vec{U}\|$  n'est pas trop petit, correspond à la zone où  $\|D\vec{U}\|$  est non nul sur la figure de gauche. Ensuite, nous observons que la norme de la vitesse a une structure en couche. Enfin, la pression et les coupes verticales de la pression nous indique une éventuelle perte de monotonie de celle-ci. En ce qui concerne l'évolution en temps, nous obtenons une convergence linéaire pour  $\|D\vec{U}\|$  et  $\|U\|$ , ceci jusqu'en  $t = 5 \times 10^{-1}$ , le régime non-linéaire étant atteint en  $t = 1$ . Le passage de  $t = 10^{-2}$  à  $t = 10^{-1}$  et de  $t = 10^{-1}$  à  $t = 5 \times 10^{-1}$  nous montre la même dynamique mais amplifiée. Lorsque  $t = 5 \times 10^{-1}$ , nous commençons à voir apparaître des microstructures au voisinage de la transition fluide/solide. Au temps final de simulation,  $t = 1$ , nous constatons qu'un front s'est formé au niveau de la surface libre. La norme de la vitesse préserve sa structure en couche. Pour la pression, nous observons une légère perte de monotonie, qui peut être associée aux microstructures de la norme de la contrainte.

Nous présentons maintenant les résultats d'une simulation avec une géométrie différente. Le talus est formé d'un plateau d'angle  $\alpha = 42^\circ$ . Les paramètres de simulation reste inchangés.

•  $t = 10^{-2}$

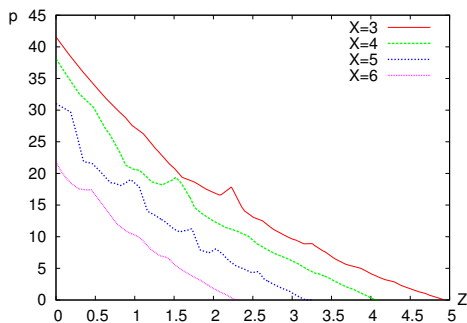
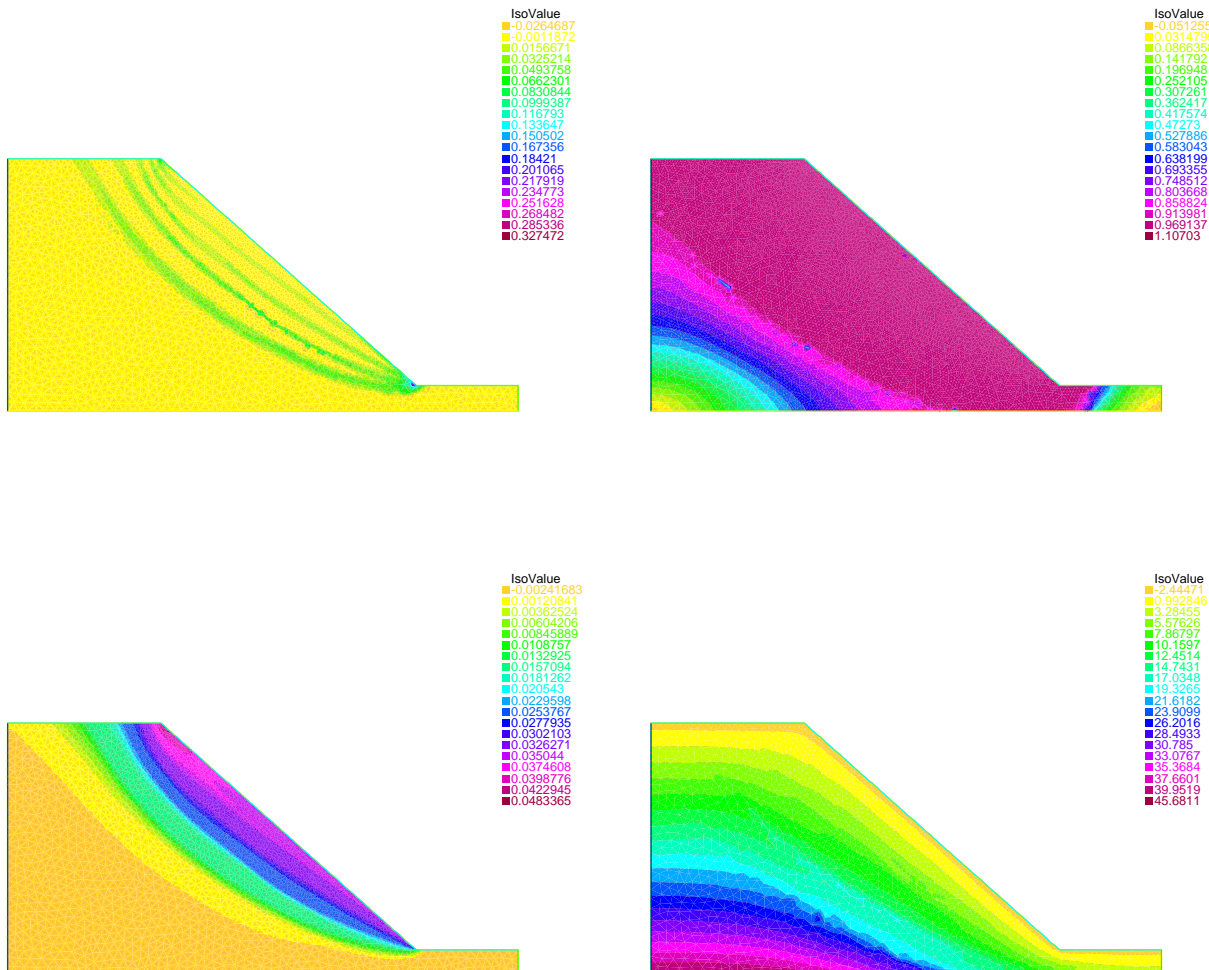


FIGURE 4.9 – Paramètres :  $\epsilon = 10^{-6}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\theta_c = 20^\circ$ ,  $\Delta Y \simeq 10^{-1}$ , ( $\nu = 10^{-3}$ ).

$$\|D\vec{U}\| : \min = 0, \max = 3 \times 10^{-1},$$

$$\|\vec{U}\| : \min = 0, \max = 5 \times 10^{-2}.$$

La géométrie du domaine étant moins régulière, des lignes de déformation apparaissent (à un instant inférieur à  $t = 10^{-2}$ ). Les lignes de déformation sont issues du point de singularité. Ces lignes de déformation se développent à petite échelle et sont structurées dans le sens des couches de la norme de la vitesse. Le fluide se sépare en plusieurs couches d'épaisseur finie, qui chacune se déplace comme un solide. Nous observons que les lignes de déformation délimitent chaque couche de  $\|U\|$ , puisqu'elles correspondent au passage d'une valeur à une autre sur la figure de  $\|U\|$ . De plus, nous constatons que la singularité du domaine fait apparaître des fluctuations à petite échelle sur la norme des contrainte et la pression, ce qui accentue le phénomène de perte de monotonie de la pression.





# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

---

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la modélisation et à la simulation numérique d'écoulements gravitaires transitoires à surface libre, pour des fluides visqueux et incompressibles suivant une loi rhéologique viscoplastique de type Drucker–Prager. Nous avons abordé un certain nombre de difficultés tant en une qu'en deux dimensions d'espace. Une difficulté fondamentale dans le modèle de Drucker–Prager est que l'interface n'a pas d'équation d'évolution explicite. Nous avons obtenu une description de cette évolution dans le contexte d'un modèle unidimensionnel avec terme source, basé sur des conditions d'écoulement très particulières. Dans ce cas, l'évolution de l'interface se fait via une condition aux limites surnuméraire, et non via une équation différentielle sur sa position. Nous avons conçu une méthode numérique permettant d'obtenir l'épaisseur de la couche solide à partir des conditions aux limites sur la vitesse. Ensuite, nous avons étudié un modèle en couche mince qui est une simplification du modèle de base puisqu'il prend en compte un terme source donné. Ceci nous a permis d'analyser le comportement de l'écoulement dans le cadre du modèle avec terme source, et d'en déduire des propriétés sur la dynamique de l'épaisseur de la couche solide et son asymptotique en temps long. Enfin, dans le cas bidimensionnel avec surface libre, nous avons développé une approche ALE et nous avons traité le terme de friction par régularisation. Les simulations numériques ont montré l'importance d'utiliser un pas de temps très petit, particulièrement au démarrage de l'écoulement (sans quoi nous pouvons observer une divergence de la méthode itérative ou des instabilités). Plus généralement, notre étude a montré l'importance du choix des paramètres de simulation (pas de temps, pas d'espace, paramètre de régularisation, tolérance d'arrêt itérative). Sur un cas test d'origine physique, nous avons observé des oscillations du profil de vitesse au démarrage de l'écoulement, à très petite échelle et pour des temps de simulation relativement courts. L'étude de ce comportement mérite d'être approfondie afin de déterminer si son origine est de nature numérique ou physique.

Les perspectives s'ouvrant à l'issue de cette thèse sont nombreuses. Un objectif fondamental est d'évaluer les limites de la modélisation de Drucker–Prager pour les écoulements granulaires, par comparaison avec des expérimentations. En par-

ticulier, il serait intéressant d'entreprendre une étude systématique de l'influence de paramètres tels que l'angle d'inclinaison du domaine, l'angle de friction interne, et la viscosité, en balayant une gamme plus large de valeurs pour ces paramètres. De plus, dans la modélisation des avalanches granulaires, par exemple, le coefficient de friction  $\lambda$  dépend de  $\|D\vec{U}\|$  et de  $p$ , ce qui pose des difficultés numériques supplémentaires du fait des non-linéarités. En outre, dans le cas unidimensionnel, une étude plus poussée des phases de démarrage et d'arrêt de l'écoulement pourrait permettre d'améliorer la compréhension de la phase intermédiaire d'écoulement, notamment dans le cas où l'épaisseur de la couche solide devient nulle. Toujours dans le cas unidimensionnel, la mise au point d'un modèle de couche mince heuristique est envisageable, ce qui permettrait d'aller au-delà de l'étude actuelle réalisée sur un modèle avec terme source empirique. En ce qui concerne le cas bidimensionnel, relatif à la mise en mouvement d'un talus, des simulations numériques par une méthode de lagrangien augmenté permettraient de mieux évaluer la pertinence de l'approche actuelle par régularisation, en vue de la détermination des zones fluide et solide. De plus, des simulations à des temps d'observation plus grands pourraient être effectuées, dans le but d'étudier l'évolution de la surface libre de l'écoulement. Enfin, il reste un besoin de développer des méthodes numériques robustes lorsque la viscosité  $\nu$  est petite, et que le maillage subit des déformations importantes, afin de pouvoir mieux comparer les résultats à des situations plus réalistes.

# Bibliographie

- [1] ALLOUCHE, M., FRIGAARD, I. A., AND SONA, G. Static wall layers in the displacement of two visco-plastic fluids in a plane channel. *Journal of Fluid Mechanics* 424 (2000), 243–277.
- [2] ANCEY, C. Plasticity and geophysical flows : A review. *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 142, 1-3 (2007), 4–35. Workshop on Viscoplastic Fluids, Banff, Canada.
- [3] ANDREOTTI, B., FORTERRE, Y., AND POULIQUEN, O. *Les Milieux Granulaires Entre Fluide Et Solide*. Savoirs actuels. EDP Sciences, 2011.
- [4] ARANSON, I. S., AND TSIMRING, L. S. Continuum theory of partially fluidized granular flows. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys* 65, 6 Part 1 (2002), 061303.
- [5] ARMANINI, A. Granular flows driven by gravity. *Journal of Hydraulic Research* 51 (2013), 111–120.
- [6] AUBIN, J. P. Un théorème de compacité. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* 265 (1963), 5042–5045.
- [7] AUDUSSE, E., BRISTEAU, M. O., PELANTI, M., AND SAINTE-MARIE, J. Approximation of the hydrostatic navier-stokes system for density stratified flows by a multilayer model : Kinetic interpretation and numerical solution. *J. Comput. Phys.* 230, 9 (2011), 3453–3478.
- [8] AUDUSSE, E., BRISTEAU, M.-O., PERTHAME, B., AND SAINTE-MARIE, J. A multilayer saint-venant system with mass exchanges for shallow water flows. derivation and numerical validation. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 45, 1 (2011), 169–200.
- [9] BALMFORTH, N. J., AND CRASTER, R. V. A consistent thin-layer theory for Bingham plastics. *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 84, 1 (1999), 65–81.
- [10] BALMFORTH, N. J., AND PROVENZALE, A. *Geomorphological Fluid Mechanics*. Lecture Notes in Physics. Springer, 2001.
- [11] BARDI, M., AND CAPUZZO-DOLCETTA, I. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, 2008.

- 
- [12] BARDI, M., CRANDALL, M. G., EVANS, L. C., SONER, H. M., AND SOUGANIDIS, P. E. *Viscosity solutions and applications*, vol. 1660 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [13] BARNES, H., HUTTON, J., AND WALTERS, K. *An Introduction to Rheology*. Annals of Discrete Mathematics. Elsevier, 1989.
- [14] BARNES, H. A. The yield stress – a review or "panta rei" – everything flows? *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 81 (1999), 133–178.
- [15] BARNES, H. A., AND WALTERS, K. The yield stress myth? *Rheologica acta* 24, 4 (1985), 323–326.
- [16] BARRÉ DE SAINT-VENANT, A. J. C. *Note à joindre au Memoire sur la dynamique des fluides présenté le 14 avril 1834*. Impr. de Bachelier, 1843.
- [17] BARRÉ DE SAINT-VENANT, A. J. C. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leurs lits. *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences* 73 (1871), 237–240.
- [18] BATCHELOR, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1967.
- [19] BENJAMIN, T. B. Gravity currents and related phenomena. *Journal of Fluid Mechanics* 31 (1968).
- [20] BERCOVIER, M., AND ENGELMAN, M. A Finite-Element Method for Incompressible Non-Newtonian Flows. *Journal of Computational Physics* 36 (1980), 313–326.
- [21] BERNOULLI, D. *Hydrodynamica : sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*. Dulsecker, 1738.
- [22] BINGHAM, E. C. *An investigation of the laws of plastic flow*. Bulletin of the Bureau of Standards. Govt. Print. Off., 1917.
- [23] BINGHAM, E. C. *Fluidity and Plasticity*. McGraw-Hill, 1922.
- [24] BIRD, R. B., DAI, G. C., AND YARUSSO, B. J. The rheology and flow of viscoplastic materials. *Rev. Chem. Eng* 1 (1983), 1–70.
- [25] BOUCHUT, F. *Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws : And Well-Balanced Schemes for Sources*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2004.
- [26] BOUCHUT, F., EYMARD, R., AND PRIGNET, A. Convergence of conforming approximations of inviscid incompressible bingham fluid flows and related problems. *preprint* (2013).
- [27] BOUCHUT, F., FERNANDEZ-NIETO, E. D., MANGENEY, A., AND LAGREE, P. Y. On new erosion models of Savage-Hutter type for avalanches. *Acta mechanica* 199, 1-4 (2008), 181–208.

- [28] BOUCHUT, F., IONESCU, I., AND MANGENEY, A. A shallow model including fluid-solid transition for viscoplastic drucker-prager materials. *preprint* (2013).
- [29] BOUCHUT, F., MANGENEY-CASTELNAU, A., PERTHAME, B., AND VILOTTE, J. P. A new model of Saint Venant and Savage-Hutter type for gravity driven shallow water flows. *Comptes rendus mathématique 336*, 6 (2003), 531–536.
- [30] BOUCHUT, F., AND WESTDICKENBERG, M. Gravity driven shallow water models for arbitrary topography. *Communications in Mathematical Sciences 2* (2004), 359–389.
- [31] BOUCHUT, F., AND ZEITLIN, V. A robust well-balanced scheme for multi-layer shallow water equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B 13*, 4 (2010), 739–758.
- [32] BRESCH, D., FERNANDEZ-NIETO, E. D., BOUCHUT, F., CASTRO-DIAZ, M., AND MANGENEY, A. A new Savage-Hutter type model for submarine avalanches and generated tsunamis. *J. Comput Physics 227*, 18 (2008), 7720–7754.
- [33] BRESCH, D., FERNANDEZ-NIETO, E. D., IONESCU, I., AND VIGNEAUX, P. Augmented Lagrangian Method and Compressible Visco-Plastic Flows : Applications to Shallow Dense Avalanches. *Advances in Mathematical Fluid Mechanics New Directions in Mathematical Fluid Mechanics* (2010), 57–89.
- [34] BRESCH, D., AND NOBLE, P. Mathematical Justification of a Shallow Water Model. *Methods and Applications of Analysis* (2007), 87–118.
- [35] BRÉZIS, H. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1999.
- [36] BRISTEAU, M. O., AND GLOWINSKI, R. Finite element analysis of the unsteady flow of a visco-plastic fluid in a cylindrical pipe. *Finite Element Methods in Flow Problems* (1974), 471–488.
- [37] BRISTEAU, M. O., AND SAINTE-MARIE, J. Derivation of a non-hydrostatic shallow water model ; Comparison with Saint-Venant and Boussinesq systems. *Discrete and continuous dynamical systems-series b 10*, 4 (2008), 733–759.
- [38] BROWN, R. L., AND RICHARDS, J. C. *Principles of Powder Mechanics*, 221 pp. ed. Pergamon Press, Oxford, 1970.
- [39] CAZACU, O., AND IONESCU, I. R. Compressible rigid viscoplastic fluids. *Journal of the mechanics and physics of solids 54*, 8 (2006), 1640–1667.
- [40] CHEN, C. L. Comprehensive review of debris flow modelling concepts in Japan. *Geol Soc Am, Rev Engrg Geology VII* (1987), 13–29.
- [41] COUETTE, M. Distinction de deux régimes dans le mouvement des fluides. *Journal de Physique* (1890), 414–424.

- [42] COULOMB, C. A. *Sur une application des règles de maxima & minima à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*, Mémoires de Mathématique et de Physique. Académie Royale de Sciences, Imprimerie Royale, 1773.
- [43] COUSSOT, P. *Mudflow Rheology and Dynamics*. A.A. Balkema, 1997.
- [44] COUSSOT, P., AND ANCEY, C. *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. EDP Sciences, 1999.
- [45] CRANDALL, M. G. *Viscosity solutions : A primer*. 1997.
- [46] DARTEVELLE, S. Numerical modeling of geophysical granular flows : 1. a comprehensive approach to granular rheologies and geophysical multiphase flows. *Geochem. Geophys. Geosyst.* 5 (2004).
- [47] DECOENE, A., BONAVENTURA, L., MIGLIO, E., AND SALERI, F. Asymptotic derivation of the section-averaged shallow water equations for natural river hydraulics. *Mathematical models & methods in applied sciences* 19, 3 (2009), 387–417.
- [48] DIMAKOPOULOS, Y., AND TSAMOPOULOS, J. Transient displacement of a viscoplastic material by air in straight and suddenly constricted tubes. *J. NonNewton. Fluid Mech.* 112 (2003), 43–75.
- [49] DRUCKER, D. C. Relations of experiments to mathematical theories of plasticity. *Journal of Applied Mechanics* 349–357 (1949), 16.
- [50] DRUCKER, D. C., PRAGER, W., OF APPLIED MATHEMATICS, B. U. D., AND OF NAVAL RESEARCH, U. S. O. *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*. Technical report (Brown University. Division of Applied Mathematics). Division of Applied Mathematics, Brown University, 1952.
- [51] DUVAUT, G., AND LIONS, J. L. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Travaux et Recherches Mathématiques. Dunod, 1972.
- [52] EDWARDS, M. F., NELLIST, D. A., AND WILKINSON, W. L. Unsteady, laminar flows of non-newtonian fluids in pipes. *Chemical Engineering Science* (1972), 295–306.
- [53] ENGELMAN, M. S., SANI, R. L., AND GRESHO, P. M. The implementation of normal tangential velocity boundary conditions in finite element codes for incompressible fluid flow. *Int. J. Num. Meth. Fluids* 2 (1982), 225–238.
- [54] ERN, A., AND GUERMOND, J. *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*. Mathématiques et Applications. Springer, 2002.
- [55] ERN, A., JOUBAUD, R., AND LELIEVRE, T. Numerical study of a thin liquid film flowing down an inclined wavy plane. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 240, 21 (Oct. 2011), 1714–1723.
- [56] EULER, L. *Principes généraux du mouvement des fluides*. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1755.

- [57] FORTIN, M., AND GLOWINSKI, R. *Augmented Lagrangian methods*. Elsevier, 1983.
- [58] GDR MIDI. On dense granular flows. *Eur Phys J E Soft Matter* 14, 4 (2004), 341–365.
- [59] GEORGE, P. L., BOROUCAKI, H. DANS FREY, P. J. D. L. P., AND SALTEL, E. Mesh generation and mesh adaptivity : theory, techniques. *Encyclopedia of computational mechanics* (2004).
- [60] GERBEAU, J., AND PERTHAME, B. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; Numerical validation. *Discrete and continuous dynamical systems-series b* 1, 1 (2001), 89–102.
- [61] GERBEAU, J.-F., LE BRIS, C., AND LELIEVRE, T. Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals, 2006.
- [62] GERBEAU, J.-F., AND LELIEVRE, T. Generalized Navier Boundary Condition and Geometric Conservation Law for surface tension. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), 644–656.
- [63] GERBEAU, J. F., LELIEVRE, T., AND LE BRIS, C. Simulations of mhd flows with moving interfaces. *J. Comput. Phys.* 184, 1 (2003), 163–191.
- [64] GLOWINSKI, R., LIONS, J. L., AND TRÉMOLIÈRES, R. *Numerical analysis of variational inequalities*. Studies in mathematics and its application. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [65] GLOWINSKI, R., AND TALLEC, P. *Augmented Lagrangian and Operator Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. SIAM studies in applied and numerical mathematics : Society for Industrial and Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.
- [66] GODLEWSKI, E., AND RAVIART, P. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 1996.
- [67] GRASS, A. J. Structural features of turbulent flow over smooth and rough boundaries. *Journal of Fluid Mechanics* 50 (1971).
- [68] GRIFFITHS, R. W. The dynamics of lava flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* 32, 1 (2000), 477–518.
- [69] GUYON, E., HULIN, J., AND PETIT, L. *Hydrodynamique physique*. Savoirs actuels. EDP Sciences, 2001.
- [70] GUYON, E., AND TROADEC, J. *Du sac de billes au tas de sable*. Sciences (Editions Odile Jacob). O. Jacob, 1994.
- [71] H., W., AND HERSCHEL, R. B. Konsistenzmessungen von gummi-benzollösungen, 1926.



- [72] HILD, P., IONESCU, I., LACHAND-ROBERT, T., AND ROSCA, I. The blocking of an inhomogeneous Bingham fluid. Applications to landslides. *Esaim-mathematical modelling and numerical analysis-modelisation mathématique et analyse numérique* 36, 6 (2002), 1013–1026.
- [73] HINRICHSSEN, H., AND WOLF, D. *The Physics of Granular Media*. Wiley, 2004.
- [74] HIRT, C. W., AMSDEN, A. A., AND COOK, J. L. An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Computing Method for All Flow Speeds. *Journal of Computational Physics* 135, 2 (1997), 203–216.
- [75] HOFF, H. J. Approximate analysis of structures in presence of moderately large creep deformations. *Quarterly of Appl. Math.* 12 (1954), 49.
- [76] HOPFINGER, E. J. Snow avalanche motion and related phenomena. *Annual review of fluid mechanics* 15 (1983), 47–76.
- [77] HUTTER, K., AND RAJAGOPAL, K. On flows of granular materials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 6 (1994), 81–139.
- [78] HUTTER, K., SVENDSEN, B., AND RICKENMANN, D. Debris flow modeling : a review. *Continuum Mech. Thermodyn.* 8 (1996), 1–35.
- [79] ILDEFONSE, B., ALLAIN, C., AND COUSSOT, P. *Des grands écoulements naturels à la dynamique du tas de sable : introduction aux suspensions en géologie et en physique*. Cemagref, 1997.
- [80] IONESCU, I. Onset and dynamic shallow flow of a viscoplastic fluid on a plane slope. *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 165, 19-20 (2010), 1328–1341.
- [81] IONESCU, I. R., AND SOFONEA, M. *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 1993.
- [82] IVERSON, R. M. The physics of debris flows. *Reviews of Geophysics* 35, 3.
- [83] JAEGER, H. M., NAGEL, S. R., AND BEHRINGER, R. P. Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics* 68, 4 (1996), 1259–1273.
- [84] JOP, P., FORTERRE, Y., AND POULIQUEN, O. A constitutive law for dense granular flows. *Nature* 441, 7094 (2006), 727–730.
- [85] KHAKHAR, D., ORPE, A., ANDRESÉN, P., AND OTTINO, J. Surface flow of granular materials : Model and experiments in heap formation. *Journal of Fluid Mechanics* 441 (2001), 255 – 264.
- [86] LEE, J., AND FENVES, G. L. Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures. *Journal of Engineering Mechanics-asce* 124 (1998).
- [87] LEVERMORE, C. D., OLIVER, M., AND TITI, E. S. Global well-posedness for models of shallow water in a basin with a varying bottom. *Indiana University Mathematics Journal* 45 (1996), 0–0.

- [88] LUBLINER, J., OLIVER, J., OLLER, S., AND ONATE, E. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures* 25 (1989), 299–326.
- [89] MACOSKO, C. *Rheology : principles, measurements, and applications*. Advances in interfacial engineering series. VCH, 1994.
- [90] MANGENEY-CASTELNAU, A., BOUCHUT, B., VILOTTE, J. P., LAJEUNESSE, E., AUBERTIN, A., AND PIRULLI, M. On the use of Saint-Venant equations for simulating the spreading of a granular mass. *J. Geophys. Res.* 110 (2005).
- [91] MANGENEY-CASTELNAU, A., VILOTTE, J. P., BRISTEAU, M. O., PERTHAME, B., BOUCHUT, F., SIMEONI, C., AND YERNENI, S. Numerical modeling of avalanches based on Saint Venant equations using a kinetic scheme. *Journal of geophysical research-solid earth* 108, B11 (2003).
- [92] MARCHE, F. Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *European journal of mechanics b-fluids* 26, 1 (2007), 49–63.
- [93] MAXWELL, J. *On the Dynamical Theory of Gases*, vol. 157. 1866.
- [94] MOHR, O. Welche umstände bedingen die elastizitätsgrenze und den bruch eines materials? *Zeit. Vereines Deutsch. Ing.* 44 (1900), 1–12.
- [95] NAKAGAWA, H., AND NEZU, I. Prediction of contributions to reynolds stress from bursting events in open-channel flows. *Journal of fluid mechanics* 80, APR4 (1977), 99–128.
- [96] NAVIER, C. L. M. H. *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*. 1827.
- [97] NAVIER, C. L. M. H. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*. Mémoires de l'Académie des sciences, 1827.
- [98] NEDDERMAN, R. M. *Statics and Kinematics of Granular Materials*. Cambridge University Press, 2005.
- [99] NEZU, I., AND RODI, W. Open-channel flow measurements with a laser doppler anemometer. *Journal of hydraulic engineering-asce* 112, 5 (1986), 335–355.
- [100] NISHIMURA, K., AND MAENO, N. Contribution of viscous forces to avalanche dynamics. 202–206.
- [101] NOBILE, F. *Numerical Approximation of Fluid-structure Interaction Problems with Application to Haemodynamics*. PhD thesis, EPFL, Switzerland, 2001.
- [102] NORTON, F. *The Creep of Steel at High Temperatures*. Bulletin. McGraw-Hill Book Company, Incorporated, 1929.
- [103] PAPANASTASIOU, T. C. Flow of materials with yield. *J. Rheol.* 31, 385–404.
- [104] PIAU, J. M. Flow of a yield stress fluid in a long domain, application to flow on an inclined plane. *J. Rheol.* 40 (1996), 711–723.

- [105] POISEUILLE, J. L. M. Écoulement des liquides : société philomatique de paris. extraits des procès-verbaux des séances pendant l'année 1838. *Paris : Rene et Cie* (1838).
- [106] POISSON, S. D. *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides : lu à l'Académie des sciences le 12 octobre 1829.* Journal de l'École polytechnique / publié par le conseil de cet établissement. De l'Imprimerie royale, 1831.
- [107] POULIQUEN, O., AND FORTERRE, Y. Friction law for dense granular flows : application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *Journal of fluid mechanics* 453 (2002), 133–151.
- [108] PRAGER, W. *Theory of plasticity : a survey of recent achievements.* Inst. Mech. Eng. London, 1942.
- [109] PRAGER, W. *Introduction to Mechanics of Continua.* Dover Books on Engineering Series. Gim and Company, 1961.
- [110] PUDASAINI, S. P., AND HUTTER, K. Rapid shear flows of dry granular masses down curved and twisted channels. *J. Fluid Mech.* 495 (2003), 193–208.
- [111] PUDASAINI, S. P., AND HUTTER, K. *Avalanche Dynamics.* Springer London, Limited, 2007.
- [112] RAJCHENBACH, J. Granular flows. *Advances in Physics* 49 (2000), 229–256.
- [113] RAYLEIGH, J. *Notes on Hydrodynamics.* 1876.
- [114] REYNOLDS, O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A* 186 (1895), 123–164.
- [115] RIETEMA, K. *The Dynamics of Fine Powders.* Elsevier handling and processing of solids series. Elsevier Applied Science, 1991.
- [116] ROQUET, N., AND SARAMITO, P. An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 192, 31-32 (2003), 3317–3341.
- [117] SAVAGE, S., AND HUTTER, K. The dynamics of avalanches of antigranulocytes materials from initiation to runout .1. Analysis. *Acta mechanica* 86, 1-4 (1991), 201–223.
- [118] SAVAGE, S. B. Flow of granular materials. *Theoretical and Applied Mechanics* (1989), 241–266.
- [119] SAVAGE, S. B., AND HUTTER, K. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *Journal of fluid mechanics* 199 (1989), 177–215.
- [120] SCHWEDOFF, T. La rigidité des fluides. *Rapports du Congrès intern. de Physique* 1 (1900), 478–486.

- 
- [121] SIEBERT, L. Large volcanic debris avalanches : Characteristics of deposits, source areas, and associated eruption. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 22 (1984), 163–197.
- [122] SOULAIMANI, A. *Nouveaux aspects de l'application de la méthode des éléments finis en hydrodynamique*. Université Laval, 1983.
- [123] SOULAÏMANI, A., FORTIN, M., DHATT, G., AND OUELLET, Y. Finite element simulation of two- and three-dimensional free surface flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 86, 3 (1991), 265–296.
- [124] STOKES, G. G. *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of thte equilibrium and motion of elastic solids*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1845.
- [125] TAKAHASHI, T. Debris flow. *Annual Review of Fluid Mechanics* 13, 1 (1981), 57–77.
- [126] TANNER, R. *Engineering Rheology*. OUP Oxford, 2000.
- [127] TEMAM, R. *Navier–Stokes Equations : Theory and Numerical Analysis*. American Mathematical Society, 2001.
- [128] VOLA, D., BABIK, F., AND LATCHÉ, J.-C. On a numerical strategy to compute gravity currents of non-Newtonian fluids. *J. Comput. Phys.* 201, 2 (2004), 397–420.
- [129] VOLA, D., BOSCARDIN, L., AND LATCHÉ, J. C. Laminar unsteady flows of bingham fluids : a numerical strategy and some benchmark results. *J. Comput. Phys.* 187, 2 (2003), 441–456.
- [130] VREUGDENHIL, C. *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. NATO Asi Series. Series C, Mathematical and Physical Science. Springer, 1994.
- [131] WEISSE, D. *Modélisation de l'écoulement gravitaire d'un matériau granulaire*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1991.