



**HAL**  
open science

## Combinatoire autour du groupe symétrique

Jean-Christophe Aval

► **To cite this version:**

Jean-Christophe Aval. Combinatoire autour du groupe symétrique. Mathématique discrète [cs.DM].  
Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. tel-00978093

**HAL Id: tel-00978093**

**<https://theses.hal.science/tel-00978093>**

Submitted on 12 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Bordeaux 1

## HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

*au titre de l'École doctorale de Mathématiques et Informatique de Bordeaux*

*soutenue et présentée publiquement le 12 février 2013*

par Jean-Christophe AVAL

### **Combinatoire autour du groupe symétrique**

après avis des rapporteurs

Mme Sylvie Corteel,	Directrice de Recherche au CNRS
M. Florent Hivert,	Professeur à l'Université Paris-Sud
M. Christian Krattenthaler,	Professeur à l'Universität Wien

devant la commission d'examen formée de :

M. François Bergeron,	Professeur à l'Université du Québec à Montréal
Mme Mireille Bousquet-Mélou,	Directrice de Recherche au CNRS
Mme Sylvie Corteel,	Directrice de Recherche au CNRS
M. Philippe Duchon,	Professeur à l'Université Bordeaux 1
M. Florent Hivert,	Professeur à l'Université Paris-Sud
M. Christian Krattenthaler,	Professeur à l'Universität Wien



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Co-quasi-invariants</b>	<b>9</b>
1.1	Présentation . . . . .	9
1.2	Co-quasi-invariants du groupe symétrique . . . . .	11
1.3	Généralisations . . . . .	14
1.3.1	Co-quasi-invariants du groupe symétrique généralisé . . . . .	14
1.3.2	Co-quasi-invariants diagonaux . . . . .	15
1.3.3	Une approche unifiée en plusieurs alphabets . . . . .	17
1.3.4	Polynômes quasi-symétriques colorés . . . . .	20
1.4	Perspectives . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Matrices à signes alternants</b>	<b>23</b>
2.1	Présentation . . . . .	23
2.1.1	Les ASM ou matrices à signes alternants . . . . .	23
2.1.2	Le modèle de glace carrée ou <i>6-vertex model</i> . . . . .	25
2.1.3	Les configurations de boucles compactes et leurs couplages . . . . .	29
2.2	Énumération d'ASM invariantes par quart-de-tour . . . . .	31
2.2.1	Une propriété de symétrie de la fonction de partition . . . . .	31
2.2.2	ASM invariantes par quart-de-tour de taille paire . . . . .	32
2.3	Couplages rares dans les HTFPL . . . . .	35
2.3.1	FPL et couplages invariants par demi-tour . . . . .	35
2.3.2	Couplages rares dans les HTFPL de taille paire . . . . .	37
2.3.3	Couplages rares dans les HTFPL de taille impaire . . . . .	38
2.4	Calculs de clés et ASM . . . . .	39
2.4.1	Introduction . . . . .	39
2.4.2	Calcul de clés pour les tableaux de Young . . . . .	40
2.4.3	Applications aux ASM . . . . .	43
2.5	Perspectives . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Tableaux boisés</b>	<b>45</b>
3.1	Présentation . . . . .	45
3.1.1	Définitions . . . . .	45
3.1.2	Le modèle PASEP . . . . .	47
3.2	Structure récursive et conséquences . . . . .	49
3.2.1	Algorithme d'insertion . . . . .	49
3.2.2	Applications . . . . .	51
3.3	Généralisations . . . . .	54
3.3.1	Tableaux boisés de type $B$ . . . . .	54

3.3.2	Tableaux escaliers	56
3.4	Autres travaux et perspectives	63

# Introduction

Ce mémoire présente une partie de mes travaux de recherche les plus récents, et tous postérieurs à ma thèse. C'est ainsi le résultat d'une dizaine d'années de recherche que j'expose ici. Si tous ces travaux peuvent être qualifiés de *combinatoires*, j'ai parcouru durant cette période des chemins variés. Cette variété tient à la nature curieuse du chercheur, mais aussi à mon environnement : mon activité depuis plusieurs années mélange de façon plutôt équilibrée combinatoire algébrique et combinatoire énumérative, la première étant en quelque sorte ma "langue natale", la seconde celle de mes collègues du LaBRI, que j'ai apprise à leur contact. Le groupe symétrique est le fil conducteur de ce texte, qui devrait en toute logique s'intituler "*Ma combinatoire autour du groupe symétrique.*"

J'ai voulu faire de ce mémoire une porte d'entrée vers ma recherche pour les non-spécialistes, en particulier pour les jeunes attirés (ou qui le seront bientôt !) par ces thématiques. Pour cette raison, chacun des trois chapitres se voit doté de son propre rappel de notations et définitions (lesquelles sont, sauf erreur, cohérentes tout au long de ce mémoire). Chaque chapitre peut ainsi être lu indépendamment des autres. Pour la même raison pédagogique, j'ai voulu donner une idée assez précise des méthodes utilisées. J'espère que le lecteur trouvera ici l'esprit des preuves, sans toutefois être saturé de détails techniques.

## Chapitre 1. Co-quasi-invariants.

Le groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  agit sur l'espace des polynômes multivariés  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  par permutation des variables. Les polynômes invariants sous cette action sont dits symétriques et l'espace co-invariant associé est défini comme le quotient de l'anneau des polynômes par l'idéal engendré par les polynômes symétriques. Il est connu depuis longtemps [1, 35] que la dimension de celui-ci est égale à l'ordre du groupe symétrique, ce qui est vrai plus généralement pour tout groupe fini engendré par des réflexions [99].

Ce chapitre concerne plusieurs généralisations de cette étude. Les polynômes quasi-symétriques, introduits à l'origine par Gessel [56], sont une généralisation des polynômes symétriques, en ce sens qu'ils satisfont des contraintes de symétrie plus faibles que les polynômes symétriques. Comme l'a montré Hivert [63], ils peuvent être vus comme invariants du groupe symétrique, pour une action appelée quasi-symétrisante. Avec N. Bergeron, nous avons découvert qu'en calculant la dimension de l'espace co-invariant associé, apparaissait une suite de nombres familière aux combinatoristes : celle des nombres de Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Nous avons prouvé ce phénomène dans le cas d'un nombre infini de variables [15], puis avec le renfort de F. Bergeron le cas (plus difficile) d'un ensemble fini de variables [12]. Dans ce travail, les bases de Gröbner constituent un outil précieux : elle permettent ici de construire une base explicite de l'idéal (engendré par les polynômes quasi-symétriques), dont les

éléments sont en bijection avec certains chemins du plan.

Cette apparition des nombres de Catalan a un goût de mystère. En effet, l'action quasi-symétrisante définie par Hivert n'est pas une action fidèle de l'algèbre du groupe symétrique, mais une action fidèle d'un quotient de cette algèbre, appelée algèbre de Temperley-Lieb, et de dimension donnée par les nombres de Catalan. Cette égalité entre la dimension de l'algèbre agissant sur les polynômes et la dimension de l'espace co-invariant rappelle bien sûr le résultat dû à Steinberg et rappelé plus haut. Cependant, la double apparition des nombres de Catalan dans ce contexte n'a pas jusqu'à présent trouvé de justification.

Par la suite, j'ai travaillé (seul ou en collaboration) à étendre ce résultat remarquable. J'ai tout d'abord considéré le cas des groupes symétriques généralisés  $G_{n,m} = \mathcal{S}_n \wr \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  [4], pour lesquels une utilisation élémentaire des bases de Gröbner permet de régler la question : on obtient que la dimension des co-quasi-invariants est  $m^n \cdot C_n$ . Puis, avec F. et N. Bergeron, nous avons considéré les polynômes quasi-symétriques en plusieurs alphabets [13], définis naturellement en faisant agir le groupe symétrique simultanément (diagonalement) sur les différents alphabets. On définit ainsi les co-quasi-invariants associés, que l'on appelle diagonaux. Le problème analogue pour l'action classique du groupe symétrique a provoqué une grande effervescence dans la recherche en combinatoire algébrique. En deux alphabets, Haiman [60] a prouvé que la dimension des co-invariants diagonaux est égale à  $(n+1)^{n-1}$ . Le problème de décrire explicitement les co-quasi-invariants diagonaux semble très difficile. Dans le cas de deux alphabets, nous avons décrit [13] une base conjecturale de cet espace.

Notre dernière avancée dans l'étude des co-quasi-invariants diagonaux est frappante : elle décrit (de façon non-explicite pour le moment) la série de Hilbert des co-quasi-invariants comme une combinaison linéaire de fonctions de Schur, et ce indépendamment du nombre d'alphabets [10].

Le cas des polynômes quasi-symétriques colorés est d'essence quelque peu différente des problèmes précédents. Pour replacer cette notion en perspective, il faut rappeler que Malvenuto et Reutenauer [84] ont prouvé que l'algèbre de Hopf des polynômes quasi-symétriques est le dual gradué de l'algèbre des descentes de Solomon. Cette notion d'algèbre des descentes se généralise naturellement aux groupes symétriques généralisés : Baumann et Hohlweg [25] ont caractérisé le dual gradué correspondant, définissant ainsi les polynômes quasi-symétriques colorés. On a ainsi deux notions différentes de polynômes quasi-symétriques en  $\ell$  alphabets : l'une vient de l'action diagonale, l'autre du dual des algèbres de descentes. J'ai prouvé [6] que le quotient de l'anneau des polynômes par l'idéal engendré par les polynômes quasi-symétriques colorés est de dimension égale à  $\frac{1}{\ell n + 1} \binom{(\ell+1)n}{n}$ , le nombre d'arbres  $(\ell+1)$ -aires, ce qui généralise le résultat principal de [12].

## Chapitre 2. Matrices à signes alternants.

Une matrice à signes alternants (ASM) est une matrice carrée constituée de 0, 1 et  $-1$  de telle sorte que sur chaque ligne et colonne, les entrées non nulles alternent en signe et sont de somme 1. Ces objets très simples apparaissent dans de nombreux problèmes, à la frontière entre combinatoire énumérative et physique statistique. Un problème emblématique est celui de prouver leur formule d'énumération, conjecturée au début des années 1980 par Mills, Robbins et Rumsey [87]. Cette question a mobilisé l'énergie d'une grande partie de la communauté combinatoire pendant plusieurs an-

nées avant que Zeilberger [105], puis Kuperberg [70] n'en viennent à bout. La preuve de Kuperberg, basée sur l'étude de la fonction de partition d'un modèle de glace carrée dont les états sont en bijection avec les ASM, s'est révélée particulièrement robuste pour traiter des généralisations. Quinze ans plus tard [91], c'est leur apparition inattendue pour décrire la distribution stationnaire d'un modèle de physique statistique qui les a remis sur le devant de la scène. Les ASM apparaissent dans ce cadre sous forme de configurations de boucles compactes ou FPL, lesquelles portent un couplage plan sous-jacent. Cette question, connue comme la conjecture de Razumov-Stroganov n'a été prouvée qu'après bien des efforts par Cantini et Sportiello [33].

Les ASM étant carrées, il est naturel de s'intéresser aux classes formées par celles qui sont invariantes sous une ou plusieurs symétries du carré. Dès 1982, Robbins donnait des formules conjecturales pour une série de classes de symétrie d'ASM [95]. La plupart de ces formules furent établies par Kuperberg [71], les autres par Okada [89] et Razumov et Stroganov [93, 94]. En étudiant les FPL invariants par quart-de-tour, Duchon [51] a découvert une remarquable formule d'énumération sur une classe d'ASM "presque" symétriques par quart-de-tour et de taille 2 modulo 4 (la classe de symétrie étant vide pour la taille considérée). Cette formule complète élégamment des résultats précédents pour les tailles  $-1$ ,  $0$  et  $1$  modulo 4 [71, 94]. En utilisant la méthode développée par Kuperberg, nous avons été capables de prouver cette formule [21].

Au cœur de cette méthode se trouve la formule de Yang-Baxter qui permet d'obtenir des propriétés de symétrie de la fonction de partition du modèle de glace carrée considéré. Un autre ingrédient est une symétrie supplémentaire, découverte par Stroganov [101], et que n'explique pas directement la formule de Yang-Baxter (la preuve d'origine reposant sur le calcul explicite d'un déterminant). J'ai pu obtenir une preuve élémentaire [9] de cette propriété (n'impliquant presque aucun calcul). Cette approche permet de plus de traiter de la même manière d'autres fonctions de partition.

Comme les ASM, les FPL, qui sont l'incarnation de ces dernières dans la conjecture de Razumov-Stroganov, peuvent être restraints à certaines classes de symétrie. Razumov et Stroganov [92] ont ainsi proposé une conjecture semblable à celle du cas général pour les FPL invariants par demi-tour, ou HTFPL. Cette conjecture a été établie aussi par Cantini et Sportiello [33]. Avec P. Duchon, nous avons découvert, en comparant les deux formules de Razumov-Stroganov, une expression intéressante qui lie les nombres de FPL et de HTFPL de taille paire ayant un couplage "semblable" [22]. Dans le cas particulier du couplage formé d'arches toutes parallèles, nous avons donné une preuve bijective de cette expression. Dans le cas des HTFPL de taille impaire, il n'existe pas de formule analogue. Nous avons cependant découvert un problème énumératif intéressant, et en utilisant le principe de factorisation de Ciucu [36] et le lemme de Gessel-Viennot [55], nous avons obtenu des formules déterminantales. Pour plusieurs de ces formules, nous avons pu donner des expressions explicites, impliquant, de façon inattendue, des nombres énumérant certaines classes de symétrie d'ASM!

Un codage bien connu des ASM en termes de triangles monotones permet de voir les ASM comme une sous-classe des tableaux de Young. La clé d'un tableau de Young est une projection des tableaux de Young sur les permutations définie par Lascoux et Schützenberger [76]. Un algorithme récursif pour calculer les clés des ASM a été proposé par Lascoux [77]. J'ai prouvé la validité de cet algorithme, puis l'ai étendu à tous les tableaux de Young, et l'ai utilisé pour obtenir des formules énumérant les

ASM ayant une ou deux entrées  $-1$  [8].

### Chapitre 3. Tableaux boisés.

Les tableaux boisés sont des objets que nous avons définis avec A. Boussicault et P. Nadeau [20]. Ils sont en bijection avec les tableaux de permutations ou les tableaux alternatifs, respectivement introduits par Postnikov [90] et Viennot [102]. Parmi les  $J$ -diagrammes que Postnikov a utilisés pour l'énumération des cellules Grassmanniennes totalement positives [90], les tableaux de permutation forment un sous-ensemble qui a d'abord été étudié par Steingrímsson et Williams [104, 100]. Ces objets connaissent depuis un grand succès auprès des combinatoristes (voir entre autre [32, 41, 88]). Ils sont aussi apparus de façon surprenante dans une interprétation combinatoire de l'état stationnaire du modèle de physique statistique nommé PASEP (Partially Asymmetric Simple Exclusion Process), sous l'impulsion de Corteel et Williams [43, 44, 45]. Le PASEP est un modèle dans lequel  $N$  sites sur un réseau unidimensionnel sont soit vides soit occupés par une unique particule. Ces particules peuvent sauter d'un site à un autre (vers la droite ou la gauche), avec certaines probabilités, ce qui définit une chaîne de Markov sur les  $2^N$  états du modèle.

L'intérêt des tableaux boisés vient d'une structure arborescente sous-jacente canonique, et d'un algorithme d'insertion qui permet une approche récursive. Cette dernière permet d'obtenir une preuve limpide que les tableaux de taille  $n$  sont comptés par  $n!$ . Notre procédure d'insertion permet en particulier de définir deux nouvelles bijections simples entre tableaux et permutations : la première est conçue spécifiquement pour respecter le motif généralisé 2-31 sur les permutations, tandis que la deuxième respecte l'arbre binaire sous-jacent à un tableau boisé.

Par la suite, avec A. Boussicault et S. Dasse-Hartaut [19], nous avons utilisé cette structure arborescente pour étudier les tableaux escaliers. Ces objets, qui peuvent être vus comme des tableaux alternatifs avec des paramètres supplémentaires, ont été introduits par Corteel et Williams pour interpréter combinatoirement la distribution stationnaire du PASEP dans le cas le plus général. En utilisant une généralisation de l'algorithme d'insertion défini sur les tableaux boisés, nous avons pu obtenir des preuves plus simples, et de nouvelles propriétés de ces objets.

Enfin, toujours avec A. Boussicault et S. Dasse-Hartaut [18], nous avons découvert une nouvelle construction (inspirée du procédé d'insertion des tableaux boisés) qui relie bijectivement, de façon simple et directe, les permutations et certains chemins de Dyck valués nommés histoires de Laguerre subdivisées. Ces objets correspondent à une interprétation combinatoire du développement de la série génératrice des factorielles en fraction continue de Stieltjes [48]. Nous introduisons alors de nouveaux objets, appelés tableaux de Dyck, qui peuvent être vus comme un nouvel avatar des tableaux de permutations. Ces tableaux de Dyck nous permettent de décrire, de façon plus simple et directe que dans les travaux précédents, certaines statistiques utiles dans ce cadre (motifs généralisés, forme du tableau, points saillants).

# Chapitre 1

## Co-quasi-invariants

### 1.1 Présentation

Pour un alphabet  $X_n = x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $n$  variables, notons  $\mathbb{Q}[X_n]$  l'anneau des polynômes en l'alphabet  $X_n$ . Nous considérons l'action du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  définie pour  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  et  $P \in \mathbb{Q}[X_n]$  par :

$$\sigma.P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}). \quad (1.1)$$

Ceci signifie que  $\sigma$  agit en permutant les variables de l'alphabet. Comme il est évident que cette opération est compatible avec la composition des permutations, 1.1 définit bien une *action* du groupe  $\mathcal{S}_n$  sur  $\mathbb{Q}[X_n]$ .

Les invariants de  $\mathbb{Q}[X_n]$  sous cette action sont les polynômes *symétriques* en l'alphabet  $X_n$ . L'anneau des polynômes symétriques  $Sym_n = \mathbb{Q}[X_n]^{\mathcal{S}_n}$  possède de nombreuses bases classiques. Citons les sommes de puissances

$$p_k(X_n) = \sum_{i=1}^n x_i^k \quad (1.2)$$

les fonctions symétriques élémentaires, les fonctions symétriques homogènes, les fonctions de Schur [82].

Notons  $\mathcal{I}_N$  l'idéal engendré par les polynômes symétriques sans terme constant :

$$\mathcal{I}_n = \langle p_k(X_n), 1 < k \leq n \rangle. \quad (1.3)$$

L'espace des *co-invariants*  $\mathcal{Q}_n$  est défini comme le quotient de l'anneau  $\mathbb{Q}[X_n]$  par l'idéal engendré par les invariants sans terme constant :

$$\mathcal{Q}_n = \mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_n. \quad (1.4)$$

Comme l'idéal  $\mathcal{I}_n$  est par définition stable sous l'action de  $\mathcal{S}_n$ , cette action donne au quotient  $\mathcal{Q}_n$  une structure de  $\mathcal{S}_n$ -module. Artin a montré, il y a déjà longtemps [1], que  $\mathcal{Q}_n$  est isomorphe, comme module sur  $\mathcal{S}_n$  à la représentation régulière à gauche de  $\mathcal{S}_n$ . Ceci implique que la dimension de l'espace des coinvariants est égale à l'ordre du groupe symétrique :

$$\dim \mathcal{Q}_n = n!. \quad (1.5)$$

Il existe au moins trois pistes pour généraliser le résultat d'Artin et obtenir des espaces coinvariants dignes d'intérêt. La première piste, et la plus ancienne consiste

à remplacer le groupe symétrique par un autre groupe agissant fidèlement sur  $\mathbb{Q}[X_n]$ . Steinberg [99] a étendu (1.5) à tout groupe  $W$  fini et engendré par des réflexions : dans ce cas, l'espace coinvariant est isomorphe, comme  $W$ -module à la représentation régulière de  $W$ , donc en particulier sa dimension est égale à l'ordre de  $W$ .

La seconde piste est de dupliquer l'alphabet. Considérons ainsi un second alphabet de  $n$  variables  $Y_n = y_1, y_2, \dots, y_n$  et faisons agir  $\mathcal{S}_n$  par permutation simultanée des deux alphabets  $X_n$  et  $Y_n$  :

$$\sigma.P(x_1 \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}). \quad (1.6)$$

Cette action est appelée *action diagonale* et les invariants associés sont nommés polynômes *diagonalement symétriques*. L'espace  $DSym_n$  des polynômes diagonalement symétriques est engendré algébriquement par les sommes de puissances :

$$p_{h,k}(X_n, Y_n) = \sum_{i=1}^n x_i^h y_i^k. \quad (1.7)$$

L'espace  $\mathcal{DQ}_n$  des co-invariants diagonaux est le sujet d'une recherche foisonnante depuis une (petite) vingtaine d'années (voir par exemple [27, 52, 53, 57, 58, 59, 60, 61] et le récent ouvrage [26]). Un résultat emblématique de cette recherche est le suivant, dû à Haiman [62], qui donne la dimension de  $\mathcal{DQ}_n$  :

$$\dim \mathcal{DQ}_n = (n+1)^{n-1}. \quad (1.8)$$

La troisième piste, qui est le cœur de ce chapitre, est de modifier l'action du groupe symétrique. Hivert [63] a introduit une action du groupe symétrique sur les polynômes, appelée *quasi-symétrisante*. Pour un vecteur d'entiers  $\mathbf{v} = v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{N}^n$ , l'action d'une transposition élémentaire  $s_i = (i, i+1)$  sur le monôme  $X_n^{\mathbf{v}} = x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n}$  est définie par :

$$s_i \bullet x_1^{v_1} \dots x_i^{v_i} x_{i+1}^{v_{i+1}} \dots x_n^{v_n} = \begin{cases} x_1^{v_1} \dots x_i^{v_i} x_{i+1}^{v_{i+1}} \dots x_n^{v_n} & \text{si } v_i v_{i+1} > 0, \\ x_1^{v_1} \dots x_i^{v_{i+1}} x_{i+1}^{v_i} \dots x_n^{v_n} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.9)$$

Il est aisé (et laissé en exercice au lecteur) de vérifier que l'on définit bien une action du groupe  $\mathcal{S}_n$ , *i.e.* que (1.9) est compatible avec les relations de Coxeter du groupe symétrique :

$$\begin{aligned} s_j^2 &= Id, & (s_j s_{j+1})^3 &= Id, & \text{et} \\ s_j s_k &= s_k s_j & \text{pour } |j-k| &> 1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Les invariants de cette action sont les polynômes *quasi-symétriques*, et sont plus anciens que l'action définie par Hivert : ils ont été introduits par Gessel [56] pour l'énumération des P-partitions, définies par Stanley [97] comme fonctions vérifiant certaines propriétés de croissance sur des ensembles partiellement ordonnés. Les polynômes quasi-symétriques sont une généralisation des polynômes symétriques (tout polynôme symétrique est *a fortiori* quasi-symétrique). Si pour  $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$ , on note  $\mathbf{v}^+$  le vecteur obtenu en enlevant les entrées nulles de  $\mathbf{v}$ , alors les polynômes quasi-symétriques peuvent être caractérisés ainsi :  $P \in \mathbb{Q}[X_n]$  est quasi-symétrique si et seulement si pour tout  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{N}^n$  tels que  $\mathbf{v}^+ = \mathbf{w}^+$ , les monômes  $X_n^{\mathbf{v}}$  et  $X_n^{\mathbf{w}}$  ont même coefficient dans  $P$ . On notera  $QSym_n$  l'espace des polynômes quasi-symétriques en l'alphabet  $X_n$ . Les bases (linéaires) de  $QSym_n$  sont indexées par les compositions d'entiers en

au plus  $n$  parts, la plus naturelle étant celle des fonctions *quasi-symétriques monomiales*  $M_{\mathbf{c}}$ . Elle s'obtient en sommant l'orbite d'un monôme donné sous l'action (1.9), ce qui donne pour  $\mathbf{c} = c_1, c_2, \dots, c_k$  une composition d'entiers ayant  $k$  parts (avec  $0 < k \leq n$ ) :

$$M_{\mathbf{c}} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1}^{c_1} x_{i_2}^{c_2} \dots x_{i_k}^{c_k} \quad (1.11)$$

et pour  $\mathbf{c}$  la composition vide, on pose  $M_0 = 1$ . On a ainsi par exemple :

$$M_{1,2}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2. \quad (1.12)$$

De même que dans le cas classique, l'espace coinvariant est défini comme le quotient de l'anneau des polynômes par l'idéal engendré par les polynômes quasi-symétriques sans terme constant :

$$\mathcal{J}_n = \langle M_{\mathbf{c}}, \mid \mathbf{c} \mid > 0 \rangle, \quad \mathcal{R}_n = \mathbb{Q}[X_n] / \mathcal{J}_n, \quad (1.13)$$

et pour éviter toute confusion, on nomme  $\mathcal{R}_n$  l'espace *co-quasi-invariant*. La section suivante présente un résultat remarquable, et donne les grandes lignes de sa preuve.

## 1.2 Co-quasi-invariants du groupe symétrique

**Théorème 1.1** (Aval, Bergeron, Bergeron – 2004). *La dimension de l'espace des co-quasi-invariants du groupe symétrique est donnée par les nombres de Catalan :*

$$\dim \mathcal{R}_n = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (1.14)$$

Ce résultat publié dans [12] est l'achèvement d'un travail entrepris dans [15], au cours duquel nous avons étudié l'espace des co-quasi-invariants en un ensemble infini de variables (le cas d'un ensemble fini de variables demandant plus d'efforts). La preuve est basée sur la construction explicite d'une base de Gröbner de l'idéal  $\mathcal{J}_n$ , en bijection avec certains chemins du plan. En voici les grandes lignes.

La première étape consiste en la définition d'une (autre) base de  $QSym_n$  : les fonctions quasi-symétriques *fondamentales* [56]. Pour deux compositions  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{c}'$  du même entier, nous notons  $\mathbf{c}' \succeq \mathbf{c}$  si  $\mathbf{c}'$  est plus fine que  $\mathbf{c}$  (ce qui veut dire que  $\mathbf{c}'$  se déduit de  $\mathbf{c}$  en scindant certaines parts). On définit alors :

$$F_{\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{c}' \succeq \mathbf{c}} M_{\mathbf{c}'}. \quad (1.15)$$

Par exemple

$$F_{221} = M_{221} + M_{1121} + M_{2111} + M_{11111}. \quad (1.16)$$

Un intérêt des fonctions quasi-symétriques fondamentales est la propriété de récurrence suivante.

**Lemme 1.2.** *Pour une composition  $\mathbf{c} = c_1, c_2, \dots, c_k$ ,*

$$F_{\mathbf{c}}(X_n) = \begin{cases} x_1 F_{c_1-1, c_2, \dots, c_k}(X_n) + F_{\mathbf{c}}(x_2, \dots, x_n) & \text{si } c_1 > 1, \\ x_1 F_{c_2, c_3, \dots, c_k}(x_2, \dots, x_n) + F_{\mathbf{c}}(x_2, \dots, x_n) & \text{si } c_1 = 1. \end{cases} \quad (1.17)$$

La deuxième étape est de coder les vecteurs  $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$ , donc les monômes  $X_n^{\mathbf{v}}$  de  $\mathbb{Q}[X_n]$  à l'aide de chemins dans le plan  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Nous associons à  $\mathbf{v} = v_1, v_2, \dots, v_n$  le chemin  $\pi(\mathbf{v})$  suivant partant de l'origine  $(0, 0)$  et constitué de pas Nord et Est :

$$(0, 0) \rightarrow (v_1, 0) \rightarrow (v_1, 1) \rightarrow (v_1 + v_2, 1) \rightarrow (v_1 + v_2, 2) \cdots \\ \rightarrow (v_1 + \cdots + v_n, n - 1) \rightarrow (v_1 + \cdots + v_n, n).$$

Par exemple le chemin associé à  $\mathbf{v}^{(1)} = 2, 0, 1, 3, 0, 1$  est

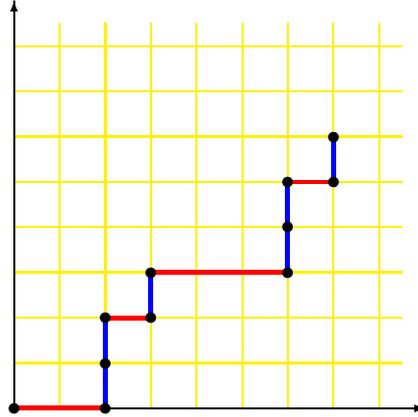


FIGURE 1.1 – Le chemin  $\pi(\mathbf{v})$  associé à  $\mathbf{v} = 2, 0, 1, 3, 0, 1$ .

On notera  $\ell(\mathbf{v}) = n$  la longueur d'un vecteur de  $\mathbb{N}^n$  et  $|\mathbf{v}| = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$  son poids. On distingue alors deux types de chemins (donc deux types de vecteurs  $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$ ) selon leur position par rapport à la diagonale du plan  $y = x$  :

- si le chemin  $\pi(\mathbf{v})$  est entièrement situé au-dessus de la diagonale, on dit que  $\pi(\mathbf{v})$  et  $\mathbf{v}$  sont *de Dyck*;
- sinon, on dit que  $\pi(\mathbf{v})$  et  $\mathbf{v}$  sont *transdiagonaux*.

Par exemple  $\mathbf{v}^{(1)} = 2, 0, 1, 3, 0, 1$  est transdiagonal et  $\mathbf{v}^{(2)} = 0, 0, 1, 2, 0, 1$  est de Dyck.

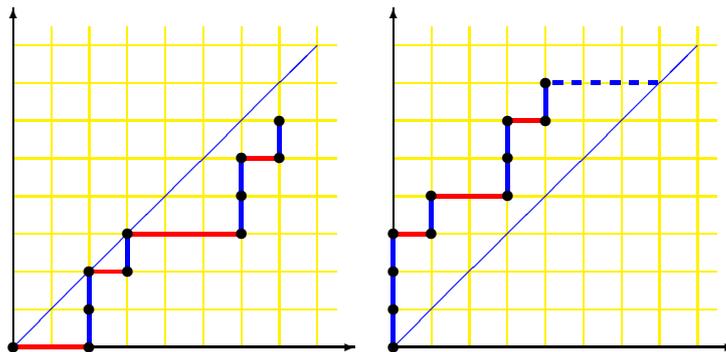


FIGURE 1.2 – Chemins transdiagonal et de Dyck.

On caractérise aisément les vecteurs transdiagonaux :  $\mathbf{v}$  est transdiagonal si et seulement s'il existe  $1 \leq k \leq n$  tel que

$$v_1 + \cdots + v_k \geq k. \quad (1.18)$$

Pour  $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^k$  avec  $k \leq n$ , on note  $\mathbf{w}0^*$  le vecteur de longueur  $n$  obtenu en ajoutant à droite  $n - k$  zéros :  $\mathbf{w}0^* = w_1, \dots, w_k, 0, \dots, 0 \in \mathbb{N}^n$ . À ce stade, il doit être clair que pour  $\mathbf{c}$  une composition,  $\mathbf{c}0^*$  est transdiagonal. On définit alors récursivement un ensemble de polynômes  $G_{\mathbf{v}}$  indexés par les vecteurs  $\mathbf{v}$  transdiagonaux de longueur  $n$ . Si  $\mathbf{v} = \mathbf{c}0^*$  avec  $\mathbf{c}$  une composition, on pose simplement

$$G_{\mathbf{v}} = F_{\mathbf{c}}. \quad (1.19)$$

Si  $\mathbf{v}$  n'est pas de la forme  $\mathbf{c}0^*$ , alors la construction est récursive. Pour cela, on écrit de façon unique  $\mathbf{v} = \mathbf{w}a\mathbf{c}0^*$  avec  $\mathbf{w}$  un vecteur de longueur  $k - 1$ ,  $a$  un entier strictement positif, et  $\mathbf{c}$  une composition d'entiers (strictement positifs). On pose alors :

$$G_{\mathbf{v}} = G_{\mathbf{w}a\mathbf{c}0^*} - x_k G_{\mathbf{w}(a-1)\mathbf{c}0^*}. \quad (1.20)$$

On vérifie aisément que si  $\mathbf{v}$  est transdiagonal, il en est de même pour  $\mathbf{w}a\mathbf{c}0^*$  et  $\mathbf{w}(a - 1)\mathbf{c}0^*$ , ce qui définit récursivement la famille  $\mathcal{G} = \{G_{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \text{ transdiagonal}\}$ . Calculons explicitement un exemple, pour lequel  $n = 4$  :

$$\begin{aligned} G_{1020} &= G_{1200} - x_2 G_{1100} \\ &= F_{12}(x_1, x_2, x_3, x_4) - x_2 F_{11}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1 x_4^2 + x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2 + x_3 x_4^2 \\ &\quad + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \\ &\quad - x_2 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) \\ &= x_1 x_3^2 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_4^2 - x_2^2 x_3 - x_2^2 x_4 + x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2 + x_3 x_4^2. \end{aligned}$$

On ordonne les monômes  $X_n^{\mathbf{v}}$  de  $\mathbb{Q}[X_n]$  selon l'ordre *lexicographique* :  $X_n^{\mathbf{v}} >_{\text{lex}} X_n^{\mathbf{w}}$  si et seulement si la première composante non nulle de  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  est strictement positive. On notera  $LM(P)$  le monôme dominant d'un polynôme  $P$  pour cet ordre. On observe alors sur l'exemple précédent que le monôme dominant pour l'ordre lexicographique de  $G_{1020}$  est précisément  $x_1^1 x_2^0 x_3^2 x_4^0 = X_4^{1020}$ . On prouve que ceci est vrai en général.

**Lemme 1.3** ([15], Corollary 3.4). *Le monôme dominant  $LM(G_{\mathbf{v}})$  de  $G_{\mathbf{v}}$  pour l'ordre lexicographique est  $X_n^{\mathbf{v}}$ .*

Le point crucial de ce travail est de prouver que l'on obtient ainsi tous les monômes dominants de l'idéal  $\mathcal{J}_n$ , ce que traduit le lemme suivant.

**Lemme 1.4** ([12], Lemma 4.4). *L'ensemble  $\mathcal{G}_n = \{G_{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \text{ transdiagonal}\}$  est une base de Gröbner de  $\mathcal{J}_n$ .*

Une fois qu'on a décrit explicitement une base de Gröbner  $\mathcal{B}$  d'un idéal  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{Q}[X_n]$ , on en déduit une base linéaire monomiale du quotient  $\mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{K}$  en prenant les monômes  $X_n^{\mathbf{w}}$  qui ne sont divisibles par aucun des monômes  $LM(P)$  pour  $P$  dans  $\mathcal{B}$ . Dans notre cas, ceci conclut la preuve.

**Théorème 1.5.** *L'ensemble de monômes*

$$\{X_n^{\mathbf{w}}, \pi(\mathbf{w}) \text{ de Dyck}, \ell(v) = n\} \quad (1.21)$$

*est une base de  $\mathcal{R}_n$ .*

Le Théorème 1.1 en est une conséquence directe. Mais on peut faire plus : comme l'idéal  $\mathcal{J}_n$  est gradué, le quotient  $\mathcal{R}_n$  l'est aussi. On peut alors considérer sa série de Hilbert :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}_n}(t) = \sum_{k \geq 0} \dim \mathbf{H}_k(\mathcal{R}_n) t^k \quad (1.22)$$

où  $\mathbf{H}_k(\mathcal{R}_n)$  désigne le sous-espace de  $\mathcal{R}_n$  engendré par les polynômes de degré  $k$ . En observant qu'un vecteur de Dyck  $\mathbf{w}$  correspond à un monôme de degré égal à son poids :

$$|\mathbf{w}| = \ell(\mathbf{w}) - d(\pi(\mathbf{w})) \quad (1.23)$$

où  $d(\pi(\mathbf{w}))$  est la longueur de la dernière descente du chemin de Dyck  $\pi(\mathbf{w})$ , on en déduit l'expression suivante :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}_n}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n+k} \binom{n+k}{k} t^k. \quad (1.24)$$

Il est frappant de noter que les nombres de Catalan apparaissent avec le Théorème 1.1 pour la *deuxième fois* dans l'étude des polynômes quasi-symétriques. En effet, Hivert a montré [63] que l'action quasi-symétrisante (1.9) n'est pas une action fidèle de l'algèbre du groupe symétrique  $\mathbb{Q}[S_n]$ , mais est en fait une action d'un quotient de  $\mathbb{Q}[S_n]$ , appelée algèbre de Temperley-Lieb, et de dimension donnée par les nombres de Catalan  $C_n$ . Cette égalité entre la dimension de l'algèbre agissant sur les polynômes et la dimension de l'espace co-invariant rappelle bien sûr le résultat de Steinberg déjà cité [99] qui dit qu'une telle égalité est toujours vérifiée sous certaines conditions (le fait que le groupe soit fini et engendré par des réflexions). Cependant, la double apparition des nombres de Catalan dans ce contexte n'a pour l'heure aucune justification...

## 1.3 Généralisations

### 1.3.1 Co-quasi-invariants du groupe symétrique généralisé

Pour  $n$  et  $m$  deux entiers positifs, le *groupe symétrique généralisé*  $G_{n,m} = S_n \wr \mathbb{Z}_m$  est défini comme le produit en couronne du groupe symétrique  $S_n$  par le groupe cyclique  $\mathbb{Z}_m$ . On peut se représenter un élément de  $G_{n,m}$  comme une matrice carrée de taille  $n$  dans laquelle chaque ligne et chaque colonne comporte exactement une entrée non nulle (matrice de pseudo-permutation), et telle que ces entrées non nulles sont des racines  $m$ -ièmes de l'unité. L'ordre du groupe  $G_{n,m}$  est par conséquent  $m^n n!$ . Si  $m = 1$ ,  $G_{n,m}$  se réduit au groupe symétrique  $S_n$ , et si  $m = 2$ ,  $G_{n,m}$  est le groupe hyperoctaédral  $B_n$ , *i.e.* le groupe des permutations signées ou groupe de Weyl de type  $B$ . On généralise l'action classique (1.1) de  $S_n$  sur les polynômes au groupe  $G_{n,m}$  en posant pour  $g \in G_{n,m}$  et  $P \in \mathbb{C}[X]$  :

$$g.P(X) = P(X_n \cdot {}^t g), \quad (1.25)$$

où  ${}^t g$  est la transposée de la matrice  $g$  et  $X_n$  est vu comme vecteur ligne. L'espace des invariants  $\mathcal{I}_{n,m}$  est aisément caractérisé : il coïncide avec l'espace

$$\{P(X_n^m), P \in \text{Sym}_n\} \quad (1.26)$$

où  $P(X_n^m) = P(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$ . On prouve (c'est un cas particulier du résultat de Steinberg [99] déjà mentionné, cf. aussi le Lemme 1.6 et ses applications ci-dessous) que la dimension de l'espace coinvariant  $\mathcal{Q}_{n,m} = \mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_{n,m}$  est donnée par :

$$\dim \mathcal{Q}_{n,m} = |G_{n,m}| = m^n n!. \quad (1.27)$$

Il est intéressant de considérer les invariants et co-invariants pour une action quasi-symétrisante de  $G_{n,m}$ . On peut définir (cf. [4]) une action qui étend naturellement au groupe symétrique généralisé l'action (1.9) telle que l'espace des invariants soit donné par

$$\{P(X_n^m), P \in QSym_n\}. \quad (1.28)$$

L'espace co-quasi-invariant correspondant est  $\mathcal{R}_{n,m} = \mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{J}_{n,m}$  où  $\mathcal{J}_{n,m}$  est l'idéal engendré par les quasi-invariants sans terme constant. L'ingrédient simple et efficace qui permet de traiter les co-invariants associés à des invariants de la forme (1.26, 1.28) est le lemme suivant. Pour toute partie  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{Q}[X_n]$  et tout entier strictement positif  $m$ , introduisons  $\mathcal{S}^m = \{P(X^m), P \in \mathcal{S}\}$ , et notons  $\mathcal{G}(I)$  l'unique base de Gröbner (réduite, cf. [46]) d'un idéal  $I$ .

**Lemme 1.6.** *Avec les notations précédentes,*

$$\mathcal{G}(\langle \mathcal{S}^m \rangle) = \mathcal{G}(\langle \mathcal{S} \rangle)^m. \quad (1.29)$$

La preuve est immédiate : c'est une application directe du critère de Buchberger [46]. Ce lemme implique aisément (1.27) et le résultat suivant.

**Proposition 1.7.** *La série de Hilbert de  $\mathcal{R}_{n,m}$  est donnée par la formule :*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{n,m}}(t) = \left(\frac{1-t^m}{1-t}\right)^n \mathcal{H}_{\mathcal{R}_n}(t^m) = \left(\frac{1-t^m}{1-t}\right)^n \sum_{k \geq 0} \frac{n-k}{n+k} \binom{n+k}{k} t^{mk} \quad (1.30)$$

d'où en posant  $t = 1$

$$\dim \mathcal{R}_{n,m} = m^n C_n = m^n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (1.31)$$

### 1.3.2 Co-quasi-invariants diagonaux

Il est naturel et tentant de considérer une extension des quasi-invariants et des co-quasi-invariants en deux alphabets. C'est l'objet de l'article [13]. Pour cela, on considère l'anneau des polynômes en deux alphabets  $X_n$  et  $Y_n$  de  $n$  variables. Par un léger abus de notation, on notera  $XY_n$  pour l'alphabet  $X_n, Y_n$ . Les monômes de  $\mathbb{Q}[XY_n]$  correspondent aux éléments  $\mathbf{v} = (v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2) \in \mathbb{N}^{2n}$  en posant

$$XY_n^{\mathbf{v}} = \prod_{i=1}^n x_i^{v_i^1} y_i^{v_i^2}. \quad (1.32)$$

On étend l'action (1.9) diagonalement à  $\mathbb{Q}[XY_n]$  en faisant agir la transposition élémentaire  $s_i = (i, i+1)$  sur les variables  $x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}$  de la façon suivante :

$$s_i \bullet x_i^{v_i^1} y_i^{v_i^2} x_{i+1}^{v_{i+1}^1} y_{i+1}^{v_{i+1}^2} = \begin{cases} x_i^{v_{i+1}^1} y_i^{v_{i+1}^2} x_{i+1}^{v_i^1} y_{i+1}^{v_i^2} & \text{si } (v_i^1 + v_i^2)(v_{i+1}^1 + v_{i+1}^2) = 0, \\ x_i^{v_i^1} y_i^{v_i^2} x_{i+1}^{v_{i+1}^1} y_{i+1}^{v_{i+1}^2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.33)$$

On vérifie aisément que (1.33) est compatible avec les relations de Coxeter (1.10), et définit ainsi une action de  $\mathcal{S}_n$  sur  $\mathbb{Q}[XY_n]$ . Les invariants associés à cette action sont appelés *quasi-invariants diagonaux* et forment un espace noté  $DQSym_n$  ou  $QSym_n^{(2)}$  dont la structure est étudiée dans [13]. Nous ne présenterons ici qu'une conjecture donnant une base de l'espace des co-invariants, et donc sa série de Hilbert. Si nous notons  $\mathcal{J}_n^{(2)}$  l'idéal engendré par les quasi-invariants diagonaux sans terme constant, l'espace  $\mathcal{R}_n^{(2)}$  des *co-quasi-invariants diagonaux* est défini comme le quotient  $\mathbb{Q}[XY_n]/\mathcal{J}_n^{(2)}$ .

Nous donnons maintenant une conjecture décrivant la série de Hilbert bigraduée de  $\mathcal{R}_n^{(2)}$ . Nous rappelons qu'à tout espace bigradué de polynômes  $\mathbf{V}$  est associée sa *série de Hilbert bigraduée*, définie comme

$$\mathcal{H}_{\mathbf{V}}(q, t) = \sum_{h,k} q^h t^k \dim(\mathbf{H}_{h,k}(\mathbf{V})) \quad (1.34)$$

où  $\mathbf{H}_{h,k}(\mathbf{V})$  est l'espace engendré par les éléments de  $\mathbf{V}$  de bi-degré  $(h, k)$  (*i.e.* de degré  $h$  en  $X_n$  et  $k$  en  $Y_n$ ). Il est pratique d'utiliser un tableau pour représenter une série de Hilbert bigraduée. On définit ainsi le *tableau de Hilbert* associée à  $\mathcal{H}_{\mathbf{V}}$  comme le tableau  $\mathbf{M}_{\mathbf{V}}$  dont l'entrée  $(i, j)$  (en coordonnées cartésiennes) est le coefficient de  $q^i t^j$  dans  $\mathcal{H}_{\mathbf{V}}(q, t)$ . Nous avons ainsi la correspondance :

$$\begin{array}{l} 3t^2 + \\ 2t + 3tq + \\ 1 + 3q + 4q^2 + q^3 \end{array} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & & & \\ 2 & 3 & & \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

où l'on omet les entrées nulles.

**Conjecture 1.8.** *Le tableau de Hilbert de l'espace  $\mathcal{R}_n^{(2)}$  est le tableau  $M_n$  carré de taille  $n$  et triangulaire inférieur ( $M_n(i, j) = 0$  dès que  $i + j \geq n$ ), dont toutes les entrées dans la diagonale sont égales au  $(n - 1)$ -ième nombre de Catalan :*

$$M_n(i, j) = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{(n-1)} \quad \text{pour } i + j = n - 1,$$

et dont les autres entrées non nulles sont obtenues récursivement par la formule :

$$M_n(i, j) = \sum_{\substack{i' \leq i \\ j' \leq j}} M_{n-1}(i', j'), \quad (1.35)$$

quand  $i + j < n - 1$ .

Par exemple, les tableaux de Hilbert  $M_n$ , pour  $1 \leq n \leq 5$ , sont :

$$\begin{aligned} M_1 &= [1], & M_2 &= \begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, & M_3 &= \begin{bmatrix} 2 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \\ M_4 &= \begin{bmatrix} 5 & & & \\ 5 & 5 & & \\ 3 & 7 & 5 & \\ 1 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}, & M_5 &= \begin{bmatrix} 14 & & & & \\ 14 & 14 & & & \\ 9 & 24 & 14 & & \\ 4 & 14 & 24 & 14 & \\ 1 & 4 & 9 & 14 & 14 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En fait, nous savons déjà que les valeurs de la première colonne et de la dernière ligne de  $M_n$  satisfont la récurrence (1.35). Ceci découle directement du Théorème 1.5, et plus précisément de la formule (1.24).

La conjecture 1.8 s'appuie sur la description explicite d'une base conjecturale pour l'espace  $\mathcal{R}_n^{(2)}$ . Nous renvoyons à l'article [13] pour plus de détails et abordons avec le paragraphe suivant une approche unifiée de ces espaces de co-quasi-invariants en plusieurs alphabets.

### 1.3.3 Une approche unifiée en plusieurs alphabets

Considérons une matrice  $\ell \times n$  de variables  $X := (x_{ij})$ . Pour  $i$  fixé, nous appelons  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$  le  $i$ -ième *ensemble de variables*.

Pour toute matrice  $M$  de taille  $\ell \times n$ , nous notons  $M_j$  la  $j$ -ième colonne de  $M$  et écrivons  $M = M_1 M_2 \cdots M_n$ . Si  $A$  est une telle matrice constituée d'entiers positifs ou nuls, nous considérons les monômes

$$X_j^{A_j} := \prod_{i=1}^{\ell} x_{ij}^{a_{ij}}, \quad \text{et} \quad X^A := \prod_{j=1}^n X_j^{A_j}. \quad (1.36)$$

Le *vecteur degré* des monômes  $X^A$  (qui forment clairement une base de l'espace  $\mathbb{Q}[X]$  des polynômes en l'alphabet  $X$ ) est défini par

$$\deg(X^A) := \sum_j A_j \in \mathbb{N}^\ell. \quad (1.37)$$

On peut définir une action quasi-symétrisante diagonale du groupe symétrique généralisé  $W = G_{n,m} = \mathcal{S}_n \wr \mathbb{Z}_m$  sur l'espace  $\mathbb{C}[X]$ . Nous renvoyons à [10] pour une description, et décrivons ici l'espace des invariants associés, nommé espace des polynômes *W-quasi-symétriques diagonaux*. Une base  $M_A$  de ces invariants est indexée par les *matrices de m-composition*, *i.e.* les matrices  $A$  de taille  $\ell \times k$ , à coefficients entiers positifs ou nuls, telles que la somme des entrées de toute colonne soit un entier strictement positif et multiple de  $m$ . Les polynômes  $M_A$  sont alors définis par

$$M_A = \sum_{Y \subseteq X} Y^A. \quad (1.38)$$

Par exemple, on a

$$M_{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}} = \sum_{a < b} x_{1,a} x_{3,a}^2 x_{1,b}^3 x_{2,b}.$$

On notera  $\mathcal{J}_{n,m}^{(\ell)}$  l'idéal engendré par les polynômes  $W$ -quasi-symétriques diagonaux. L'espace des co-invariants, noté  $\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}$ , est alors défini comme le quotient  $\mathbb{C}[X]/\mathcal{J}_{n,m}^{(\ell)}$ . L'espace  $\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}$  se réduit à  $\mathcal{R}_{n,m}$  étudié au paragraphe 1.3.1 pour  $\ell = 1$  et à  $\mathcal{R}_n^{(2)}$  étudié au paragraphe 1.3.2 pour  $\ell = 2$  et  $m = 1$ . Pour  $m = 1$ , *i.e.* dans le cas du groupe symétrique, on notera  $\mathcal{R}_n^{(\ell)}$  pour  $\mathcal{R}_{n,1}^{(\ell)}$ .

Pour bien comprendre la structure de  $\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}$ , il faut considérer l'action du groupe général linéaire  $GL_\ell$  sur  $\mathbb{C}[X]$ , défini par

$$(f \cdot \tau)(X) := f(\tau X), \quad \text{pour } \tau \in GL_\ell. \quad (1.39)$$

En remarquant que l'idéal  $\mathcal{J}_{n,m}^{(\ell)}$  est invariant sous cette action, on en déduit que  $\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}$  est muni d'une structure de  $GL_\ell$ -module. Comme l'idéal  $\mathcal{J}_{n,m}^{(\ell)}$  est homogène pour le vecteur degré,  $\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}$  peut être gradué par ce même vecteur degré, *i.e.* :

$$\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)} = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \mathbf{H}_{\mathbf{d}}(\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}), \quad (1.40)$$

où  $\mathbf{H}_{\mathbf{d}}(\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)})$  est la composante homogène de (vecteur) degré  $\mathbf{d}$  de  $\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}$ .

On observe que pour tout  $f(X)$  homogène de vecteur degré  $\mathbf{d} = d_1, \dots, d_\ell$ , et pour  $\mathbf{q}$  vu comme une matrice diagonale

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_\ell \end{pmatrix},$$

on a :

$$f(\mathbf{q}X) = \mathbf{q}^{\mathbf{d}} f(X), \quad (1.41)$$

avec  $\mathbf{q}^{\mathbf{d}} := q_1^{d_1} \cdots q_\ell^{d_\ell}$ . Ceci signifie que tout  $f(X)$  homogène est un vecteur propre de l'application linéaire  $\mathbf{q}^*$  qui envoie  $f(x)$  sur  $f(\mathbf{q}X)$ . Considérons maintenant une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}$  constituée de polynômes homogènes. Dans cette base, la trace de l'application  $\mathbf{q}^*$ , qui est par définition un caractère de  $\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}$ , coïncide d'après (1.41) avec la série de Hilbert de  $\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}$  :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell} \mathbf{q}^{\mathbf{d}} \dim(\mathbf{H}_{\mathbf{d}}(\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)})). \quad (1.42)$$

Comme les caractères irréductibles du groupe  $GL_\ell$  correspondent aux fonctions de Schur  $s_\mu(\mathbf{q})$ , la conséquence de l'observation ci-dessus est que  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}}(\mathbf{q})$  est *Schur-positive* :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}}(q_1, \dots, q_\ell) = \sum_{\mu} c_\mu s_\mu(q_1, \dots, q_\ell), \quad (1.43)$$

où  $\mu$  décrit un ensemble fini de partitions **dépendant uniquement du groupe  $W$** , et avec la propriété remarquable que les coefficients  $c_\mu$  sont **indépendants de  $\ell$** .

À titre d'exemple, on a dans le cas du groupe symétrique les expressions suivantes pour  $\mathcal{H}[n] := \mathcal{H}_{\mathcal{R}_n^{(\ell)}}(\mathbf{q})$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[1] &= 1, \\ \mathcal{H}[2] &= 1 + s_1(\mathbf{q}), \\ \mathcal{H}[3] &= 1 + 2s_1(\mathbf{q}) + 2s_2(\mathbf{q}), \\ \mathcal{H}[4] &= 1 + 3s_1(\mathbf{q}) + 5s_2(\mathbf{q}) + 2s_{11}(\mathbf{q}) + 5s_3(\mathbf{q}), \\ \mathcal{H}[5] &= 1 + 4s_1(\mathbf{q}) + 9s_2(\mathbf{q}) + 5s_{11}(\mathbf{q}) + 14s_3(\mathbf{q}) \\ &\quad + 10s_{21}(\mathbf{q}) + 14s_4(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

Ces exemples mettent en évidence la remarquable indépendance de la formule par rapport à  $\ell$ .

Un travail supplémentaire (*cf.* [10]) permet de contraindre explicitement l'ensemble des partitions  $\mu$  apparaissant dans (1.43), d'où l'énoncé suivant.

**Théorème 1.9.** *Pour le groupe symétrique généralisé  $W = G_{n,m}$ , la série de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{n,m}^{(\ell)}}(\mathbf{q})$  des co-quasi-invariants diagonaux admet un développement en termes de fonctions de Schur  $s_\mu(\mathbf{q})$ , à coefficients positifs et indépendants de  $\ell$ , la somme étant prise sur l'ensemble des partitions  $\mu$  de taille  $d$  telle que*

$$0 \leq d \leq 2mn - m - n, \quad (1.44)$$

et comportant au plus  $n$  parts.

Revenons sur la formule (1.30) obtenue au paragraphe 1.3.1 :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{n,m}}(q) = \left( \frac{1 - q^m}{1 - q} \right)^n \sum_{k \geq 0} \frac{n - k}{n + k} \binom{n + k}{k} q^{mk} \quad (1.45)$$

En particulier, pour  $n = 2$ , on a

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{2,m}}(q) = (1 + q + \dots + q^{m-1})^2 (1 + q^m). \quad (1.46)$$

En interprétant  $q^k = h_k(q)$ , nous pouvons voir (1.46) comme la spécialisation en  $\ell = 1$  de la formule suivante pour le groupe  $W = G_{2,m}$  démontrée dans [27] :

$$\left( \sum_{k=0}^{m-1} h_k \right)^2 + \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) h_{m+k} + \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) h_{2m-1+k}. \quad (1.47)$$

Une caractéristique remarquable de (1.47) est sa *h-positivité* :

$$\sum_{\mu} a_{\mu} h_{\mu}, \quad \text{avec } a_{\mu} \geq 0. \quad (1.48)$$

Cette caractéristique apparaît, au moins partiellement, pour de nombreux groupes. Dans le cas du groupe symétrique, nous formulons l'énoncé suivant.

**Conjecture 1.10.** *Pour le groupe symétrique, la série de Hilbert de  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_n^{(\ell)}}(\mathbf{q})$  est h-positif en degrés inférieurs ou égaux à  $n/2$ .*

Voici les valeurs explicites (calculées par F. Bergeron, H. Blandin et F. Saliola) des séries de Hilbert pour le groupe symétrique  $\mathcal{S}_n = G_{n,1}$  avec  $1 \leq n \leq 7$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[1] &= 1 \\ \mathcal{H}[2] &= 1 + h_1, \\ \mathcal{H}[3] &= 1 + 2h_1 + 2h_2, \\ \mathcal{H}[4] &= 1 + 3h_1 + 3h_2 + 2h_1^2 + 5h_3, \\ \mathcal{H}[5] &= 1 + 4h_1 + 4h_2 + 5h_1^2 + 4h_3 + 10h_1h_2 + 14h_4, \\ \mathcal{H}[6] &= 1 + 5h_1 + 5h_2 + 9h_1^2 + 5h_3 + 18h_1h_2 + 5h_1^3 \\ &\quad + 28h_3h_1 + 14h_2^2 + 42h_5, \\ \mathcal{H}[7] &= 1 + 6h_1 + 14h_1^2 + 6h_2 + 14h_1^3 + 28h_1h_2 + 6h_3 \\ &\quad + 42h_2h_1^2 + 14h_2^2 + 28h_1h_3 + 6h_4 \\ &\quad + 84h_3h_2 + 84h_4h_1 - 36h_5 + 132h_6. \end{aligned} \quad (1.49)$$

### 1.3.4 Polynômes quasi-symétriques colorés

Les polynômes quasi-symétriques colorés sont une généralisation des polynômes quasi-symétriques en plusieurs alphabets. Ils ont été introduits par Baumann et Hohlweg [25] dans leur étude de l'algèbre de Solomon pour le groupe symétrique généralisé  $G_{n,m}$ . L'algèbre des polynômes quasi-symétriques colorés apparaît dans ce contexte comme le dual gradué de l'algèbre de Solomon pour  $G_{n,m}$ . Les polynômes quasi-symétriques colorés ne sont pas définis comme des invariants, mais via une base explicite, indexée par les compositions colorées. Dans ce paragraphe, nous posons  $m = \ell$  pour souligner le parallèle avec le paragraphe précédent. Une *composition colorée* de longueur  $p$  est une matrice  $\ell \times p$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\ell 1} & c_{\ell 2} & \cdots & c_{\ell p} \end{pmatrix}$$

à entrées positives ou nulles et telle que son *mot de lecture* (obtenu en lisant ses entrées colonne par colonne de gauche à droite, et chaque colonne de haut en bas) évite le motif de  $\ell$  zéros consécutifs.

L'alphabet considéré est le même qu'au paragraphe précédent, à savoir la matrice  $\ell \times n$  de variables  $X := (x_{ij})$ . À chaque composition colorée  $C$ , on associe une *fonction quasi-symétrique colorée monomiale* en posant :

$$\overline{M}_C := \sum \prod_{1 \leq i \leq \ell} \prod_{1 \leq k \leq p} x_{i, a_{ik}}^{c_{ik}} \quad (1.50)$$

où la somme est sur tous les choix de  $a_{ik}$  pour  $c_{ik}$  non nul, et tels que

$$\begin{aligned} a_{ik} &\leq a_{i+1,k}, & \text{quand } 1 \leq i < \ell, & \quad \text{et} \\ a_{\ell k} &< a_{1,k+1}, & \text{pour } 1 \leq k < p. \end{aligned}$$

Par exemple, on a

$$\overline{M}_{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}} = \sum_{a \leq b < c \leq d} x_{1,a} x_{3,b}^2 x_{1,c}^3 x_{2,d}.$$

L'espace vectoriel engendré par les  $\overline{M}_C$ ,  $C$  décrivant l'ensemble des compositions colorées est appelé *espace des polynômes quasi-symétriques colorés* (de rang  $\ell$ ). Insistons sur la différence entre la notion de fonction quasi-symétrique diagonale (pour  $\mathcal{S}_n$ ) et celle de fonction quasi-symétrique colorée, dans le même alphabet, à l'aide de l'exemple suivant. Pour  $n = 3$  et  $\ell = 2$ , on a trois polynômes diagonalement quasi-symétriques de bi-degré  $(1, 1)$  indépendants :

$$\begin{aligned} M_{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} &= x_{1,1}x_{2,1} + x_{1,2}x_{2,2} + x_{1,3}x_{2,3}, \\ M_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} &= x_{1,1}x_{2,2} + x_{1,1}x_{2,3} + x_{1,2}x_{2,3}, \\ M_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} &= x_{1,2}x_{2,1} + x_{1,3}x_{2,1} + x_{1,3}x_{2,2}, \end{aligned}$$

alors qu'on a seulement deux polynômes quasi-symétriques colorés dans le même degré :

$$\begin{aligned}\overline{M} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= x_{1,1}x_{2,1} + x_{1,2}x_{2,2} + x_{1,3}x_{2,3} + x_{1,1}x_{2,2} + x_{1,1}x_{2,3} + x_{1,2}x_{2,3}, \\ \overline{M} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= x_{1,2}x_{2,1} + x_{1,3}x_{2,1} + x_{1,3}x_{2,2}.\end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{K}_n^{(\ell)}$  l'idéal engendré par les polynômes quasi-symétriques colorés sans terme constant, et définissons le quotient de l'anneau des polynômes par cet idéal :

$$\mathcal{CQ}_n^{(\ell)} = \mathbb{Q}[X]/\mathcal{K}_n^{(\ell)}. \quad (1.51)$$

Nous allons maintenant traduire le résultat principal de l'article [6] en termes d'une expression  $h$ -positive de la série de Hilbert de  $\mathcal{CQ}_n^{(\ell)}$ . Cette nouvelle formulation présente l'avantage d'être semblable à l'expression de la Conjecture 1.10. Nous allons rappeler certaines notions concernant les chemins de Dyck. Un *chemin de Dyck* peut être vu comme une suite

$$\beta = p_0, p_1, \dots, p_{2n}$$

de points  $p_i = (x_i, y_i)$  du réseau  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , avec  $x_i \leq y_i$ ,  $p_0 = (0, 0)$ ,  $p_{2n} = (n, n)$ , et telle que :

$$p_{i+1} = \begin{cases} p_i + (1, 0) & \text{ou,} \\ p_i + (0, 1), \end{cases}$$

pour tout  $i$ . On appelle  $n$  la *taille* de  $\beta$ , et on dit qu'on a un *pas horizontal*

$$s_i := (p_i, p_{i+1}),$$

au niveau  $k \geq 1$ , si  $y_i = k = y_{i+1}$ . L'ensemble des chemins de Dyck de taille  $n$  est noté  $\mathcal{D}_n$ . On associe à tout chemin de Dyck  $\beta$  une composition  $\nu(\beta)$  obtenue en comptant le nombre de pas horizontaux au niveau  $k$  pour  $1 \leq k < n$ , et en ignorant les niveaux sans pas horizontaux. La Figure 1.3 représente le chemin de Dyck

$$\begin{aligned}\beta = & (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), \\ & (4, 5), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 7), (6, 8), (7, 8), (8, 8)\end{aligned}$$

Le résultat principal de [6] peut maintenant être formulé ainsi.

**Proposition 1.11.** *La série de Hilbert du quotient  $\mathcal{CQ}_n^{(\ell)}$  est donnée par la formule :*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{CQ}_n^{(\ell)}}(\mathbf{q}) = \sum_{\beta \in \mathcal{D}_n} h_{\nu(\beta)}(\mathbf{q}), \quad (1.52)$$

dont la dépendance en  $\ell$  est entièrement contenue dans le nombre de paramètres de la variable  $\mathbf{q}$ .

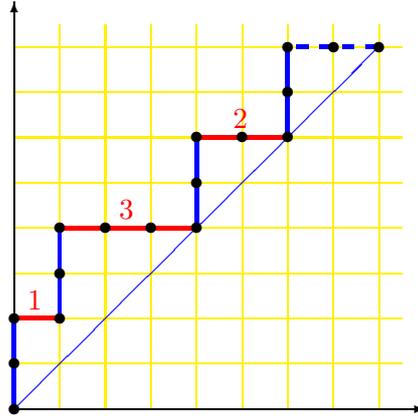


FIGURE 1.3 – Un chemin de Dyck  $\beta$  avec  $\nu(\beta) = 132$ .

On montre que si on fixe toutes les variables  $q_i$  égales à 1, on obtient une expression combinatoire intéressante :

$$\sum_{\beta \in \mathcal{D}_n} \prod_{k \in \nu(\beta)} \binom{k + \ell - 1}{k} = \frac{1}{\ell n + 1} \binom{(\ell + 1)n}{n}. \quad (1.53)$$

Si l'on voit dans (1.53) le paramètre  $\ell$  comme une variable, on a alors une identité polynomiale ; il est d'ailleurs bien connu que le membre de droite de (1.53) est un polynôme en  $\ell$ . Pour toute valeur entière de  $\ell$ , la formule (1.53) peut être prouvée via une bijection simple sur les chemins.

## 1.4 Perspectives

De nombreuses questions alléchantes restent ouvertes sur ce thème. Et même : une réponse à une question révèle régulièrement de nouveaux mystères ! Parmi les problèmes dont je supporte mal qu'ils restent ouverts :

1. Expliciter l'expression (1.43) : que peuvent bien compter ces coefficients positifs ?
2. Répondre à la question : pour quels groupes  $W$  obtient-on un développement  $h$ -positif ?
3. L'analogie des deux questions ci-dessus pour l'action "classique" des groupes  $W$  (cf. [27]).
4. Avec N. Bergeron et H. Li, nous avons initié dans [17] une étude analogue à celle présentée dans ce chapitre, mais pour des polynômes en variables *non-commutatives*. De nombreuses questions sont ouvertes dans ce cadre, citons la suivante, emblématique : l'analogue de  $\mathcal{R}_n$ , en variables non-commutatives est-il de dimension finie ?

## Chapitre 2

# Matrices à signes alternants

### 2.1 Présentation

#### 2.1.1 Les ASM ou matrices à signes alternants

Les matrices à signes alternants ont été définies au début des années 1980 par Mills, Robbins et Rumsey [87] et suscitent depuis maintenant une trentaine d'années une vive activité de recherche en combinatoire en raison de leur apparition dans de remarquables problèmes énumératifs, bijectifs, ou en lien avec la physique théorique.

Une *matrice à signes alternants* (ASM) de taille  $N$  est une matrice carrée de taille  $N$

- dont les entrées sont 0, 1 ou  $-1$ ,
- telle que dans chaque ligne et colonne, les entrées non nulles alternent en signes, la première et la dernière étant égale à 1.

Il va de soit que les matrices de permutations correspondent aux ASM sans entrée égale à  $-1$ . Voici un exemple d'ASM de taille 5.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on énumère les ASM pour les premières tailles de  $N$ , on trouve : 1 ASM de taille 1, 2 ASM de taille 2, 7 ASM de taille 3 (dont 6 matrices de permutations), 42 ASM de taille 4, ... Dans leur papier original [86], Mills, Robbins et Rumsey proposent une formule conjecturale donnant le nombre  $A(N)$  d'ASM de taille  $N$  :

$$A(N) = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{(3j+1)!}{(N+j)!}. \quad (2.1)$$

Cette formule, par son élégance, pique aussitôt l'intérêt des combinatoristes qui déploient pendant plusieurs années de grands efforts afin de l'établir. Ce sont finalement Zeilberger [105] et Kuperberg [70] qui la démontrent de façon indépendante. L'ouvrage de Bressoud [31] retrace cette aventure. Si la preuve de Zeilberger est un véritable tour de force, la méthode employée par Kuperberg a montré par la suite sa capacité

à résoudre des problèmes similaires, en particulier pour certaines classes de symétrie d'ASM.

Les ASM étant des objets carrés, il est naturel de considérer les classes d'ASM respectant certaines symétries du carré. Dès 1982, Robbins [95] propose une série de formules conjecturales pour l'énumération de telles classes. Nous en donnons ici un aperçu.

Une ASM  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$  est dite :

- *verticalement symétrique* (VASM) si  $m_{i,j} = m_{i,N+1-j}$ ,
- *verticalement et horizontalement symétrique* (VHASM) si  $m_{i,j} = m_{i,N+1-j} = m_{N+1-i,j}$ ,
- *symétrique par demi-tour* (HTASM) si  $m_{i,j} = m_{N+1-i,N+1-j}$ ,
- *symétrique par quart-de-tour* (QTASM) si  $m_{i,j} = m_{j,N+1-i}$ .
- *doublément diagonalement symétrique* (DDASM) si  $m_{i,j} = m_{N+1-j,N+1-i} = m_{j,i}$ .

Voici un exemple de deux ASM de taille 5 symétriques respectivement verticalement et par demi-tour.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On notera simplement  $A_X(N)$  le nombre d'ASM vérifiant la symétrie X. Les formules suivantes ont toutes été conjecturées par Robbins [95] :

$$A_V(2n+1) = (-3)^{n^2} \prod_{\substack{1 \leq i,j \leq 2n+1 \\ 2|j}} \frac{3(j-i)+1}{j-i+2n+1}, \quad (2.2)$$

$$A_{VH}(4n-1) = A_V(2n-1) \prod_{0 \leq i \leq n-1} (3i+1) \frac{(6i)!(2i)!}{(4i)!(4i+1)!}, \quad (2.3)$$

$$A_{VH}(4n+1) = A_V(2n+1) \prod_{0 \leq i \leq n-1} (3i+1) \frac{(6i)!(2i)!}{(4i)!(4i+1)!}, \quad (2.4)$$

$$A_{HT}(2n) = A(n)(-3)^{\binom{n}{2}} \prod_{1 \leq i,j \leq n} \frac{3(j-i)+2}{j-i+n}, \quad (2.5)$$

$$A_{HT}(2n+1) = \frac{n!(3n)!}{(2n)!^2} A_{HT}(2n), \quad (2.6)$$

$$A_{QT}(4n-1) = A_{HT}(2n-1)A(n)^2, \quad (2.7)$$

$$A_{QT}(4n) = A_{HT}(2n)A(n)^2, \quad (2.8)$$

$$A_{QT}(4n+1) = A_{HT}(2n+1)A(n)^2. \quad (2.9)$$

Kuperberg a démontré la souplesse de la méthode qu'il avait utilisée pour prouver (2.1), en établissant dans un même papier emblématique (entre autre) les formules (2.2), (2.5) et (2.8). Razumov et Stroganov [93, 94] ont utilisé la même méthode pour prouver (2.6), (2.7) et (2.9), et (2.3) et (2.4) ont été prouvées par Okada [89].

Il est temps de présenter le modèle qui permet d'obtenir ces résultats.

### 2.1.2 Le modèle de glace carrée ou 6-vertex model

L'idée est de mettre les ASM en bijection avec les états d'un modèle de glace carrée vérifiant certaines conditions au bord. On considère une partie  $G$  de la grille  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  contenant un carré  $N \times N$  de sommets tétravalents (les sommets internes), et  $4N$  sommets univalents au bord de ce carré. Un *état* de ce modèle est le choix d'une orientation des arêtes qui satisfait la condition eulérienne que tout sommet interne a exactement deux arêtes entrantes et deux arêtes sortantes. Il est clair que cette condition impose que pour chaque sommet interne, il y a six configurations possibles des arêtes (voir la Figure 2.2), d'où l'autre nom sous lequel ce modèle est connu : *6-vertex model*. Les arêtes du bord sont fixées de la façon suivante : entrantes sur les arêtes horizontales et sortantes verticalement. Ces contraintes furent introduites par Korepin [67] et sont illustrées sur la Figure 2.1.

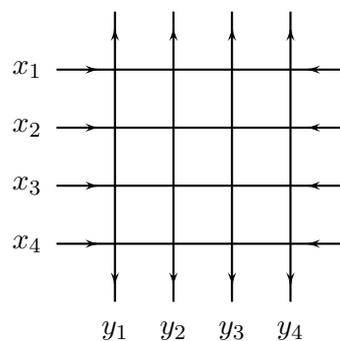


FIGURE 2.1 – Le modèle de glace carrée.

Les états de ce modèle de glace en taille  $N$  sont en bijection avec les ASM de taille  $N$ . Il suffit pour cela de remplacer chaque sommet interne du modèle de glace par un entier 0, 1 ou  $-1$  selon la règle de la Figure 2.2 pour obtenir une matrice carrée de taille  $N$ . On vérifie aisément que la contrainte sur les orientations des arêtes du modèle de glace correspond aux conditions satisfaites par les ASM. Un exemple

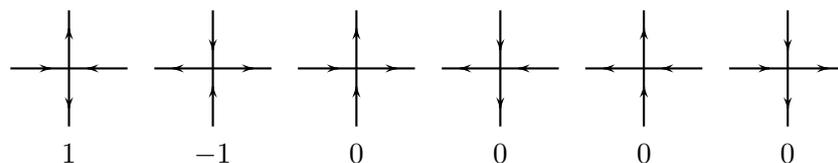


FIGURE 2.2 – Les 6 orientations possibles du modèle de glace et les entrées correspondantes dans une ASM.

explicite est donné par la Figure 2.3.

Cette bijection constitue la première étape de la méthode de Kuperberg [70] pour établir la formule (2.1) d'énumération des ASM. Décrivons maintenant les grandes lignes de cette méthode. Le principe est d'étudier la fonction de partition  $Z$  du modèle de glace. Le poids d'un état est défini comme le produit des poids de tous les sommets internes, définis de la façon suivante. Chaque sommet de degré 4 du graphe

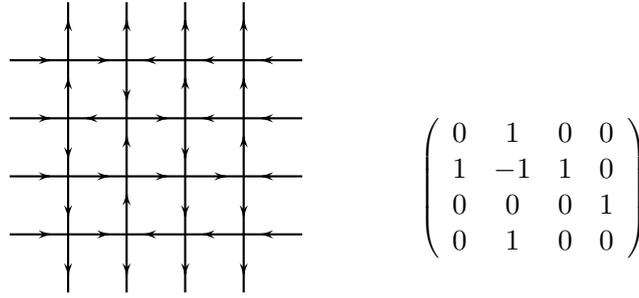
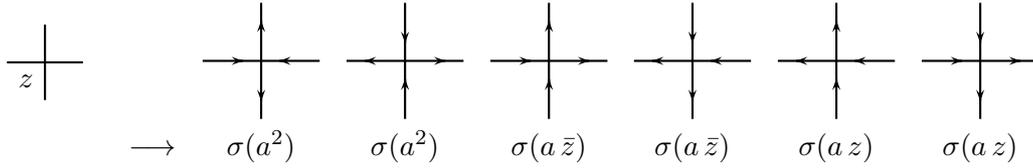


FIGURE 2.3 – La bijection entre états du 6-vertex model et ASM.

est doté d'un paramètre spectral  $z \neq 0$ . Plus précisément, le paramètre  $z$  est attaché à l'un des 4 secteurs angulaires définis par les arêtes incidentes. Le poids attribué à chaque sommet dépend de son paramètre spectral  $z$ , et de l'orientation de ses arêtes incidentes, et est défini par la Figure 2.4. Dans cette définition,  $a$  est un paramètre

FIGURE 2.4 – Le poids d'un sommet interne de paramètre spectral  $z$ .

commun à tous les sommets (et à tous les états), et on utilise les notations

$$\begin{aligned} \bar{z} &= z^{-1}, \\ \sigma(z) &= z - \bar{z} \end{aligned}$$

introduites par Kuperberg. On remarquera que le poids d'un sommet est inchangé si l'on déplace le paramètre  $z$  sur un secteur angulaire voisin, en le remplaçant par son inverse  $\bar{z}$ .

Plutôt que d'associer un paramètre spectral à chaque sommet du modèle, on pourra associer un paramètre  $x_i$  (resp.  $y_j$ ) à la ligne horizontale  $i$  (resp. ligne verticale  $j$ ) du modèle. Ces paramètres apparaissent sur la Figure 2.1. Le paramètre spectral d'un sommet interne, intersection des lignes de paramètres  $x_i$  et  $y_j$ , est par définition  $z = x_i/y_j$ .

Si l'on note  $X_N = x_1, \dots, x_N$  et  $Y_N = y_1, \dots, y_N$ , la fonction de partition

$$Z = Z(N; X_N, Y_N) \tag{2.10}$$

est alors définie comme la somme du poids de tous les états possibles du modèle.

On observe qu'en fixant tous les paramètres spectraux égaux à 1 et en donnant au paramètre global  $a$  la valeur particulière  $a = e^{i\pi/3}$ , tous les sommets (de tous les états) ont même poids, à savoir  $\sigma(a) = i\sqrt{3}$ . Le nombre d'états du modèle de glace carrée étant égal au nombre d'ASM, on en déduit que pour  $a = e^{i\pi/3}$  :

$$Z(N; \mathbf{1}, \mathbf{1}) = Z(N; \mathbf{1}, \mathbf{1}) = (i\sqrt{3})^{N^2} A(N), \tag{2.11}$$

où  $\mathbf{1} = 1^N$ .

Ainsi, le problème d'énumération des ASM se ramène à l'étude de la fonction de partition  $Z(n; X_N, Y_N)$  pour  $X_N = \mathbf{1}$  and  $Y_N = \mathbf{1}$ .

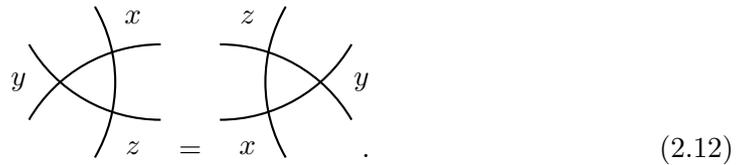
Pour étudier la fonction  $Z(N; X_N, Y_N)$ , on commence par observer que le poids d'un sommet de paramètre  $z = x_i/y_j$  est soit une constante, soit un polynôme de Laurent en  $x_i$  et  $y_j$ , centré<sup>1</sup>, impair et de demi-largeur égale à 1. En observant que pour tout état du modèle, le nombre de poids constants relatifs à tout paramètre  $x_i$  ou  $y_j$  est impair, et au minimum égal à 1, on en déduit la propriété suivante.

**Lemme 2.1.** *La fonction  $Z(N; x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N)$  est un polynôme de Laurent, centré, de même parité que  $N-1$  et de demi-largeur  $N-1$  en chacune de ses variables.*

Ceci implique que sa valeur est déterminée par  $N$  spécialisations d'une de ses variables, dès que ces évaluations ne comportent pas deux valeurs opposées.

Au cœur de toutes les manipulations des fonctions de partition que nous avons définies, se trouve l'équation de Yang-Baxter :

**Lemme 2.2** (équation de Yang-Baxter). *Si  $xyz = \bar{a}$ , alors*

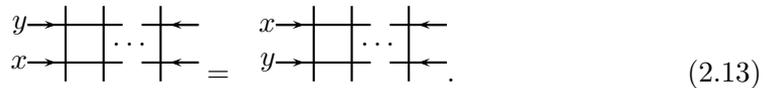


$$(2.12)$$

L'équation de Yang-Baxter doit être interprétée de la façon suivante. On fixe de façon quelconque, mais identique les orientations des arêtes sortantes dans les membres gauche et droit. Sous cette condition, les sommes des poids de toutes les configurations possibles à l'intérieur du triangle sont égales pour les membres gauche et droit. Bien sûr, ces configurations possibles sont différentes pour les deux membres de l'égalité. Le Lemme 2.2 se prouve en vérifiant l'égalité, au cas par cas pour toutes les orientations possibles des arêtes sortantes. Il est important de noter que pour certaines orientations, les nombres d'états dans les membres gauche et droit de (2.12) diffèrent, ce qui rompt avec une approche bijective de (2.1).

La première conséquence de (2.12) est la suivante; la preuve en est directement tirée de [71].

**Lemme 2.3.**



$$(2.13)$$

Dans l'équation (2.13), il faut considérer que les lignes verticales portent chacune un paramètre, ces paramètres se retrouvant dans les deux membres de l'équation. L'équation reste vraie si l'orientation des deux arêtes horizontales du bord gauche (ou droit) est inversée dans les deux membres de l'équation, tant qu'elles restent orientées dans le même sens.

1. Pour un polynôme de Laurent  $P$  (multivarié), notons  $d_1 \in \mathbb{Z}$  et  $d_2 \in \mathbb{Z}$  les degrés (totaux) minimaux et maximaux des monômes de  $P$ . Nous appelons *largeur* de  $P$  la différence  $d_2 - d_1$ , et nous qualifions  $P$  de *centré* si  $d_1 = -d_2$  (auquel cas sa demi-largeur est  $d_2$ ).

*Démonstration.* Multiplions le membre gauche par  $\sigma(a\bar{z})$ , avec  $z = \bar{a}x\bar{y}$ . On a alors

$$\begin{aligned}
 \sigma(a\bar{z}) \begin{array}{c} y \rightarrow \\ \vdots \\ x \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ \dots \\ | \\ | \end{array} &= \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ | \\ | \\ \dots \\ | \\ | \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \\ \curvearrowleft \\ | \\ | \\ \dots \\ | \\ | \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ \dots \\ | \\ \curvearrowright \\ | \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ \dots \\ | \\ | \\ \curvearrowleft \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ \dots \\ | \\ | \end{array} \sigma(a\bar{z})
 \end{aligned}$$

□

Nous présentons maintenant une méthode pour obtenir des spécialisations de la fonction de partition : la méthode des *arêtes fixées*. Ces premiers résultats de spécialisation sont dûs à Kuperberg [71].

**Lemme 2.4** (spécialisations de  $Z$ ; Kuperberg). *Posons*

$$\begin{aligned}
 A(y_1, X_N \setminus x_1, Y_N \setminus y_1) &= \prod_{2 \leq k \leq N} \sigma(ax_k \bar{y}_1) \prod_{1 \leq k \leq N} \sigma(a^2 y_1 \bar{x}_k), \\
 \bar{A}(y_1, X_N \setminus x_1, Y_N \setminus y_1) &= \prod_{2 \leq k \leq N} \sigma(ay_1 \bar{x}_k) \prod_{1 \leq k \leq N} \sigma(a^2 x_k \bar{y}_1).
 \end{aligned}$$

Alors on a

$$Z(N; \bar{a}y_1, X_N \setminus x_1, Y_N) = \bar{A}(y_1, X_N \setminus x_1, Y_N \setminus y_1) Z(N-1; X_N \setminus x_1, Y_N \setminus y_1) \quad (2.14)$$

$$Z(N; ay_1, X_N \setminus x_1, Y_N) = A(y_1, X_N \setminus x_1, Y_N \setminus y_1) Z(N-1; X_N \setminus x_1, Y_N \setminus y_1). \quad (2.15)$$

*Démonstration.* La symétrie partielle de la fonction  $Z(N; \dots)$  en ses variables (Lemme 2.3) permet de permuter lignes et colonnes. Pour prouver (2.14), on place la ligne  $x_1$  en bas de la grille, et la colonne  $y_1$  à gauche. Pour  $x_1 = \bar{a}y_1$ , le paramètre du

sommet est  $\bar{a}$ , ce qui se traduit, pour un sommet de type , par un poids nul. Cette valeur de  $x_1$  “tue” ainsi la contribution de toutes les configurations hormis

celles qui présentent un sommet de type . Or, fixer ainsi l’orientation des arêtes incidentes à ce sommet a pour effet de fixer l’ensemble de la ligne  $x_1$  et de la colonne  $y_1$ , comme indiqué Figure 2.5. La partie non fixée donne la fonction de partition  $Z$  pour la taille  $N-1$ , les paramètres  $x_1$  et  $y_1$  ayant disparu, et les poids des sommets fixés donnent le facteur  $\bar{A}(\dots)$  indiqué.

Pour (2.15), le raisonnement est le même, en plaçant la ligne  $x_1$  en haut de la grille ; à nouveau, la ligne  $x_1$  et la colonne  $y_1$  sont fixées dans toutes les configurations de poids non nul. □

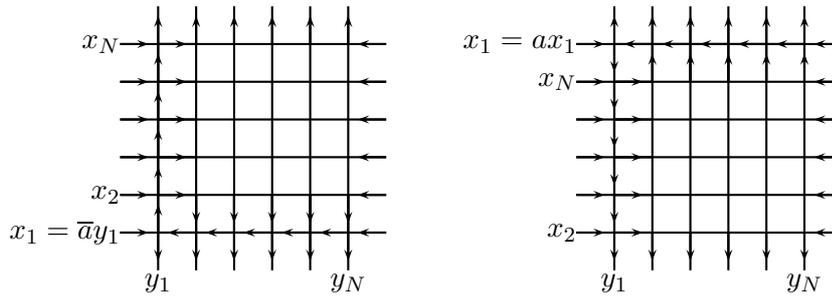


FIGURE 2.5 – Arêtes fixées pour (2.14) à gauche et (2.15) à droite.

Notons que les spécialisations que nous avons démontrées sont sous la forme  $x_1 = a^{\pm 1}y_1$ , mais le Lemme 2.3 permet de remplacer  $y_1$  par n'importe laquelle des variables  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , soit au total  $2N$  spécialisations de la variable  $x_1$ . Comme nous avons observé que la fonction  $Z$  était déterminée par  $N + 1$  spécialisations d'une de ses variables, ceci est suffisant. Afin d'obtenir le nombre d'ASM (2.1), Kuperberg [70] utilise pour représenter la fonction de partition  $Z(n; X, Y)$  une formule déterminantale découverte par Izergin et Korepin [64, 68].

Par la suite, Kuperberg [71] généralise le déterminant d'Izergin et Korepin et le déterminant de Tsuchiya pour traiter des problèmes d'énumération relatifs à de nombreuses classes de symétrie d'ASM. Parmi ces résultats figurent (2.2), (2.5) et (2.8). Une difficulté technique dans cette approche est le calcul de certains déterminants ou Pfaffiens. Remarquons que la formule (2.8) est en fait une formule d'équivalence, ce qui autorise une preuve (plus simple) en prouvant la coïncidence des fonctions de partition relatives à deux modèles de glace carrée. Cette méthode est illustrée à la Section 2.2 sur deux exemples.

### 2.1.3 Les configurations de boucles compactes et leurs couplages

Présentons maintenant une famille d'objets en bijection avec les matrices à signes alternants qui fait couler beaucoup d'encre depuis plusieurs années par leur apparition dans un modèle de physique théorique : les FPL, ou configurations de boucles compactes (FPL pour *Fully Packed Loops*).

On considère pour cela la grille carrée  $N \times N$ , munie de  $2N$  arêtes extérieures : on exclut alternativement une arête sur deux en fixant par exemple que l'arête verticale supérieure gauche est absente (voir Figure 2.6).

Une *configuration de boucles compactes* (ou *FPL*) de taille  $N$ , est alors un sous-graphe de cette grille carrée tel que tout sommet (interne) soit de degré 2 (voir Figure 2.7, gauche). Les FPL de taille  $N$  sont en bijection avec les ASM de taille  $N$ . Cette correspondance peut se présenter ainsi via le 6-vertex model : les arêtes du FPL sont exactement les arêtes entrantes du sommet  $(i, j)$  lorsque  $i + j$  est pair, et les arêtes sortantes lorsque  $i + j$  est impair.

Les sommets d'un FPL  $F$  ayant tous degré 2, les arêtes forment des chemins : un certain nombre (éventuellement nul) de boucles fermées, et  $N$  chemins reliant 2 à 2 les  $2N$  points du bord de la grille, et d'intersection vide. Ces  $N$  chemins définissent

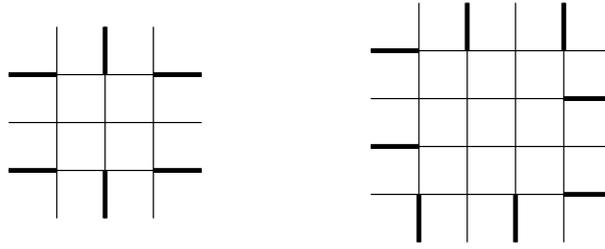


FIGURE 2.6 – La grille des FPL en taille 3 et 4.

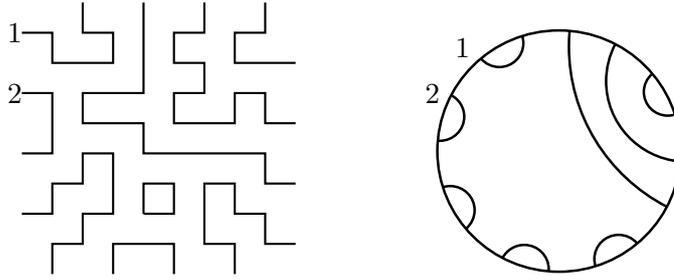


FIGURE 2.7 – Un FPL de taille 8 et son couplage.

ainsi un *couplage plan*  $\pi(F)$ . Ces couplages sont énumérés par les nombres de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

On notera  $A(N; \pi)$  le nombre de FPL de taille  $N$  et dont le couplage associé est  $\pi$ . Si à première vue, l'évaluation des nombres  $A(N; \pi)$  semble posséder (seulement) les symétries du carré, Wieland [103] a prouvé le remarquable résultat que  $A(N; \pi)$  ne dépend que de la classe de  $\pi$  sous l'action du groupe diédral  $D_n$  engendré par la rotation de  $2\pi/2n$  et la réflexion d'axe un quelconque diamètre passant par une paire de ses points. Ceci justifie de représenter les couplages  $\pi$  par des arches connectant  $2N$  points régulièrement répartis sur un cercle (voir Figure 2.7, droite).

Le grand intérêt suscité par les nombres  $A(N; \pi)$  vient de leur apparition dans un problème linéaire, motivé par un modèle de physique statistique : c'est l'histoire de la conjecture de Razumov-Stroganov, que nous redéfinissons maintenant.

L'algèbre de Temperley-Lieb périodique de paramètre  $\beta$ , notée  $PTL_p(\beta)$  est l'algèbre engendrée par l'identité et  $p$  générateurs  $e_i$ , avec  $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  satisfaisant les conditions :

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \beta e_i \\ e_i e_{i\pm 1} e_i &= e_i \\ e_i e_j &= e_j e_i \quad \text{if } |i-j| \pmod{p} > 1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

La figure 2.8 donne une représentation graphique de  $PTL_p(1)$  où le produit est représenté par empilement vertical.

Prenons justement  $\beta = 1$  et faisons agir  $PTL_{2N}(1)$  agir sur les couplages  $\pi$ . En utilisant la représentation graphique de la Figure 2.8, il est clair que  $e_i$  envoie  $\pi$  sur lui-même si  $\pi$  relie  $i$  et  $i+1$ , et que si  $\pi$  relie  $i$  et  $j$  d'une part, et  $i+1$  et  $k$  d'autre part, alors  $e_i \pi$  relie  $i$  et  $i+1$  d'une part, et  $j$  et  $k$  d'autre part.

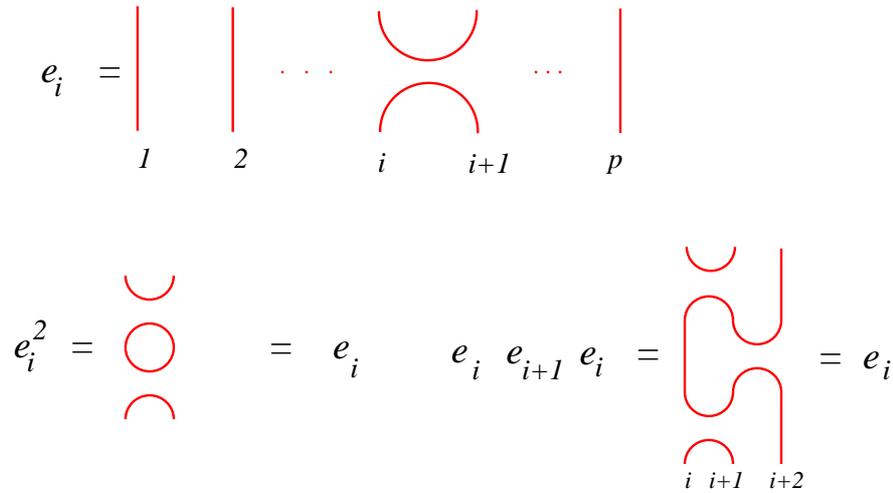


FIGURE 2.8 – Représentation graphique de l’algèbre de Temperley-Lieb périodique.

Le Hamiltonien associé est défini par

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{2N} e_i . \tag{2.17}$$

Razumov et Stroganov ont observé que, dans la base des couplages  $\pi$ , le vecteur propre de  $\mathcal{H}$  associé à la valeur propre  $2N$  a des coordonnées entières et ont conjecturé [91] l’énoncé suivant, qui a suscité une intense activité de recherche en combinatoire, et qui a été démontré par Cantini et Sportiello [33].

**Théorème 2.5** (Razumov, Stroganov – Cantini, Sportiello). *Le vecteur propre (à droite) de  $\mathcal{H}$  pour la valeur propre  $2N$  est  $\Psi = \sum_{\pi} A(N; \pi)\pi$ , autrement dit :*

$$\sum_{i=1}^{2N} e_i \sum_{\pi} A(N; \pi)\pi = 2N \sum_{\pi} A(N; \pi)\pi . \tag{2.18}$$

## 2.2 Énumération d’ASM invariantes par quart-de-tour

Cette section illustre la méthode présentée au paragraphe 2.1.2 sur deux exemples : le premier est une nouvelle preuve d’une propriété de symétrie de la fonction de partition, obtenue par Stroganov, le second est l’obtention d’une formule énumérant les ASM quasi-invariantes par quart-de-tour de taille 2 modulo 4.

### 2.2.1 Une propriété de symétrie de la fonction de partition

Nous considérons à nouveau le modèle de glace carrée de la Figure 2.1, et la fonction de partition  $Z(N; x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N)$  associée.

Comme déjà mentionné, le Lemme 2.3 implique clairement la propriété suivante.

**Lemme 2.6.** *La fonction  $Z$  est symétrique séparément en les deux ensembles de variables  $X_N = x_1, \dots, x_N$  et  $Y_N = y_1, \dots, y_N$ , quelle que soit la valeur du paramètre global  $a$ .*

Le théorème suivant apparait dans [101].

**Théorème 2.7** (Stroganov). *Pour la valeur particulière du paramètre global  $a = \omega_6 = \exp(i\pi/3)$ , la fonction de partition  $Z(N; X_N, Y_N)$  est symétrique en **toutes** ses variables  $x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N$ .*

Alors que la preuve originale de Stroganov repose sur le calcul explicite de  $Z$ , nous montrons maintenant que nous pouvons nous affranchir de ce calcul. Fixons donc  $a = \omega_6 = \exp(i\pi/3)$ , ce qui implique

$$\sigma(a) = \sigma(a^2) \quad \sigma(a^2x) = -\sigma(\bar{a}x) = \sigma(a\bar{x}). \quad (2.19)$$

La preuve du Théorème 2.7 se fait alors par récurrence sur  $N$ . On vérifie aisément que la propriété de symétrie est vraie pour  $N = 1$ . Maintenant si  $N \geq 2$ , en vertu du Lemme 2.6, il nous suffit d'obtenir la symétrie de  $Z$  par rapport à  $x_2, y_2$ .

Le Lemme 2.1 réduit alors la preuve du Théorème 2.7 à la preuve de la symétrie de  $Z$  en au moins  $N$  spécialisations de la variable  $x_1$ . Quand  $x_1 = ay_1$ , le Lemme 2.4 nous donne :

$$Z(N; \mathbf{a}y_1, X_N \setminus x_1, Y_N) = A(y_1, X_N \setminus x_1, Y_N \setminus y_1) Z(N-1; X_N \setminus x_1, Y_N \setminus y_1). \quad (2.20)$$

Par récurrence, nous avons que  $Z(N-1; X_N \setminus x_1, Y_N \setminus y_1)$  est symétrique en  $x_2, y_2$ . Les termes de  $A(y_1, X_N \setminus x_1, Y_N \setminus y_1)$  impliquant les variables  $x_2, y_2$  sont :

$$\sigma(ax_2\bar{y}_1) \sigma(a^2y_1\bar{y}_2).$$

En utilisant (2.19) nous écrivons :

$$\sigma(ax_2\bar{y}_1) \sigma(a^2y_1\bar{y}_2) = \sigma(ax_2\bar{y}_1) \sigma(ay_2\bar{y}_1)$$

qui est clairement symétrique en les variables  $x_2, y_2$ . Nous obtenons de la même manière la symétrie quand  $x_1 = \bar{a}y_1$  ; et par le Lemme 2.6, nous avons cette symétrie pour les  $2(N-1)$  spécialisations  $x_1 = a^\pm y_k$  pour  $k = 1, 3, \dots, N$ , ce qui est plus que suffisant pour conclure la preuve du Théorème 2.7.

### 2.2.2 ASM invariantes par quart-de-tour de taille paire

Les ASM invariantes par quart-de-tour (QTASM) de taille  $N$  sont énumérées par les élégantes formules (2.7), (2.8) et (2.9) pour  $N$  respectivement égal à  $4n-1$ ,  $4n$  et  $4n+1$ . Une taille manque à cette liste, et pour cause : il n'existe pas de QTASM de taille 2 modulo 4<sup>2</sup>. Malgré cela, en relâchant très légèrement la condition de symétrie au centre de la matrice, il est possible d'introduire une nouvelle classe d'ASM, dont l'énumération complète la liste de résultats mentionnés ci-dessus. La définition suivante est due à Duchon [51].

---

2. Soit en effet  $M$  une QTASM de taille  $N$  paire. Comme pour toute ASM, cette taille est égale à la somme des entrées de  $M$ . Comme  $M$  est une QTASM de taille paire, cette taille  $N$  est égale à 4 fois la somme des entrées du quart supérieur gauche (par exemple) de  $M$ . Donc la taille  $N$  de  $M$  est un multiple de 4.



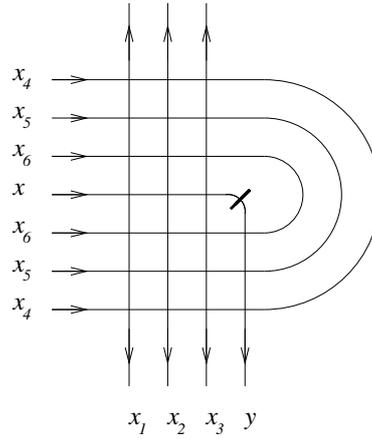


FIGURE 2.10 – Modèle de glace carrée avec symétrie HTS (demi-tour) en taille impaire (taille 7 sur cet exemple).

Sur ces figures, un court segment indique un changement de paramètre entre  $x$  et  $y$ , et un point un changement d'orientation. Nous notons respectivement  $Z_{HT}$  et  $Z_{QT}$  les fonctions de partition pour les modèles de glace avec symétrie HTS et QTS. Il est remarquable que pour la valeur spéciale  $a = \omega_6 = \exp(i\pi/3)$ , les fonctions de partition des (q)QTASM  $Z_{QT}$  se factorisent en termes des fonctions de partitions  $Z$  et  $Z_{HT}$ . Comme noté en (2.11), la fonction de partition contient l'énumération des ASM : en effet, pour  $a = \omega_6$  et toutes les variables mises à 1, le poids de tout sommet devient  $\sigma(a) = \sigma(a^2) = i\sqrt{3}$  et la fonction de partition se réduit au nombre d'états (multiplié par  $\sigma(a)^{\text{nombre de sommets}}$ ) :

$$\begin{aligned} Z(n; \mathbf{1}) &= (i\sqrt{3})^{n^2} A(n) \\ Z_{HT}(2n; \mathbf{1}) &= (-1)^n 3^{n^2} A_{HT}(2n) \\ Z_{HT}(2n+1; \mathbf{1}) &= 3^{n^2+n} A_{HT}(2n+1) \\ Z_{QT}(4n; \mathbf{1}) &= -i \cdot 3^{2n^2-1/2} A_{QT}(4n) \\ Z_{QT}(4n+2; \mathbf{1}) &= 3^{2n^2+2n} A_{QT}(4n+2) \end{aligned}$$

Le Théorème 2.9 est alors une conséquence de l'énoncé suivant, qui donne aussi une nouvelle preuve de (2.8).

**Théorème 2.10.** *Pour  $a = \omega_6 = \exp(i\pi/3)$  et  $l \geq 1$ , on a :*

$$Z_{QT}(4l; X_{2l-1}, (x, y)) = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l-1}, x) Z(l; X_{2l-1}, y) Z_{HT}(2l; X_{2l-1}, (x, y)) \quad (2.23)$$

et

$$Z_{QT}(4l+2; X_{2l}, (x, y)) = \sigma(a)^{-1} Z(l; X_{2l}) Z(l+1; X_{2l}, x, y) Z_{HT}(2l+1; X_{2l}, (x, y)). \quad (2.24)$$

La preuve de (2.23) et (2.24) suit la méthode présentée au paragraphe 2.1.2 et déjà illustrée au paragraphe 2.2.1. La première étape consiste comme dans le Lemme 2.1 à ramener la preuve des égalités entre fonctions de partition à vérifier que ces égalités sont vraies pour un nombre fini de spécialisations d'une des variables, en l'occurrence  $x$ . Puis en utilisant l'équation de Yang-Baxter, et la technique du Lemme 2.3, on

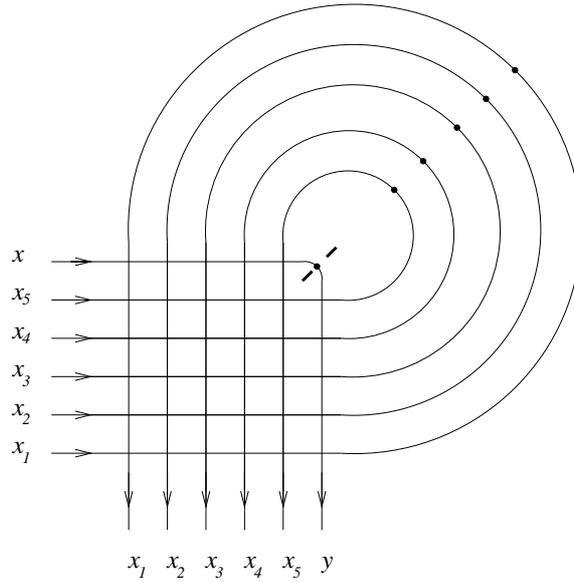


FIGURE 2.11 – Modèle de glace carrée avec symétrie QTS (quart-de-tour) en taille 0 modulo 4 (taille 12 sur cet exemple).

prouve que les fonctions de partition respectivement impliquées dans (2.23) et (2.24) sont symétriques entre autre respectivement en  $X_{2l-1}$  et  $X_{2l}$ . Enfin, on calcule les spécialisations des fonctions de partition pour des valeurs particulières de  $x$  :  $x = ax_1$  et  $x = \bar{a}x_1$ .

En utilisant la symétrie, on obtient suffisamment de coïncidences des fonctions de partition pour obtenir (2.23) et (2.24). La nécessité de travailler sur ces deux équations simultanément vient du fait suivant : en spécialisant le paramètre  $x$  comme donné ci-dessus, on passe de  $Z_{QT}(4l)$  à  $Z_{QT}(4l-2)$  et de  $Z_{QT}(4l-2)$  à  $Z_{QT}(4l-4)$ . On a ainsi deux récurrences *entrelacées*.

## 2.3 Couplages rares dans les FPL invariants par demi-tour

### 2.3.1 FPL et couplages invariants par demi-tour

Reprenons les notions introduites au paragraphe 2.1.3. Un HTFPL est un FPL invariant par demi-tour, *i.e.* par la symétrie centrale de la grille carrée. Le couplage associé à un HTFPL est lui aussi HT-symétrique. Deux cas se présentent selon la parité de la taille  $N$ . Si  $N$  est impair, le couplage *doit* contenir exactement une arête  $(i, i + N)$ , les  $2N - 2$  points restant constituant deux couplages symétriques (ou translatés par  $N$ ) l'un de l'autre. Un tel couplage se représente par un *couplage fendu* de taille  $N/2$  où le diamètre  $(i, i + N)$  devient un singleton  $\{i\}$  (représenté graphiquement par une demi-arête entrant dans le disque) et chaque paire d'arêtes  $\{j, k\}$  et  $\{j + N, k + N\}$  devient une seule arête  $\{j, k\}$ . Un couplage fendu peut être vu comme une *version fendue* d'un couplage plus petit obtenu en enlevant le singleton (et en renumérotant les entiers restant pour former un intervalle). Par exemple, le couplage HT-symétrique  $\{\{1, 12\}, \{2, 9\}, \{3, 4\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{10, 11\}, \{13, 14\}\}$  est vu

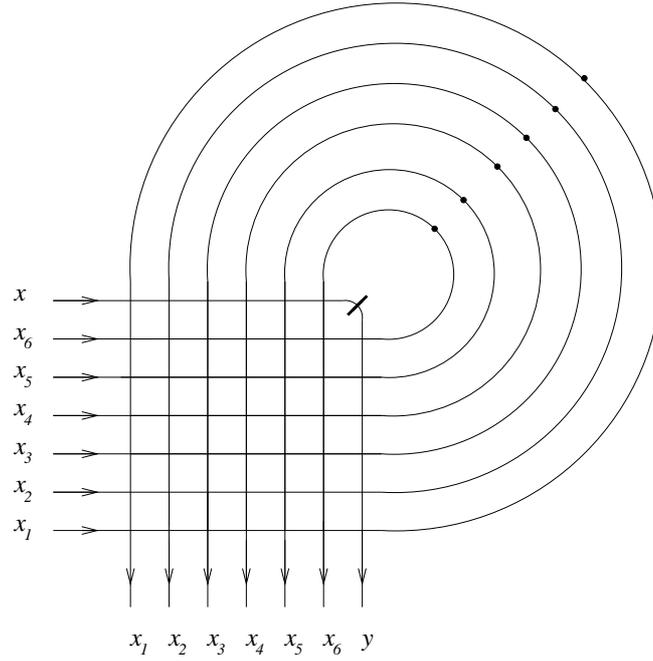


FIGURE 2.12 – Modèle de glace carrée avec symétrie QTS (quart-de-tour) en taille 2 modulo 4 (taille 14 sur cet exemple).

comme le couplage fendu  $\{\{1, 5\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{6, 7\}\}$ , qui est une version fendue du couplage  $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}$ .

Si  $N$  est pair, un couplage HT-symétrique de taille  $N$  peut être représenté par un couplage de taille  $N/2$  dessiné sur un disque troué de la façon suivante : dans un tel couplage HT-symétrique de taille  $N = 2n$ , on oriente chaque arête  $\{i, j\}$  de  $i$  vers  $j$  si  $j < i < i + 2n$  (modulo  $4n$ ) ; alors le *couplage troué* correspondant (de taille  $n$ ) a une arête  $\{i \pmod{2n}, j \pmod{2n}\}$ , avec le trou à droite de l'arête (orientée) de  $i \pmod{2n}$  vers  $j \pmod{2n}$ . La Figure 2.13 illustre ces notions et correspondances.

Notons  $A_{HT}(N; \pi)$  le nombre de HTFPL de taille  $N$  et de couplage  $\pi$ . De façon similaire au Théorème 2.5, et pour  $N \geq 2$ , nous considérons les  $N$  opérateurs symétrisés :

$$e'_i = e_i e_{i+N}. \quad (2.25)$$

Le Hamiltonien symétrisé est défini par

$$\mathcal{H}' = \sum_{i=1}^{2N} e'_i. \quad (2.26)$$

Le résultat analogue au Théorème 2.5, lui aussi conjecturé par Razumov et Stroganov [91] et prouvé par Cantini et Sportiello [33] s'énonce ainsi.

**Théorème 2.11** (Razumov, Stroganov – Cantini, Sportiello). *Le vecteur propre (à droite) de  $\mathcal{H}'$  pour la valeur propre  $N$  est  $\Psi' = \sum_{\pi} A_{HT}(N; \pi') \pi'$ , autrement dit :*

$$\sum_{i=1}^N e'_i \sum_{\pi} A_{HT}(N; \pi') \pi' = N \sum_{\pi'} A_{HT}(N; \pi') \pi'. \quad (2.27)$$

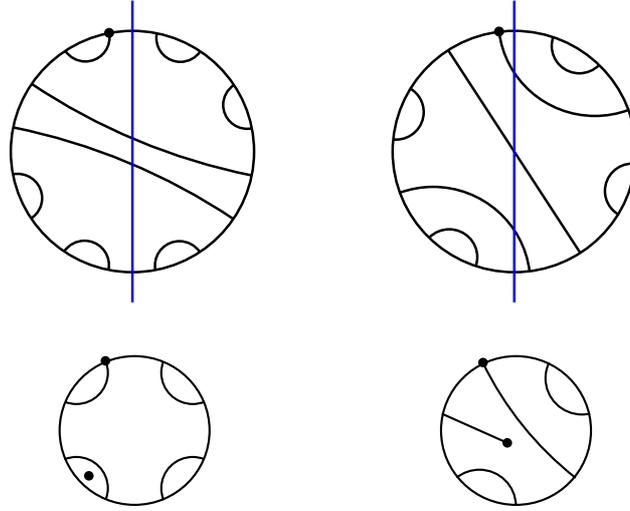


FIGURE 2.13 – Couplages HT-symétriques de taille paire (gauche) et impaire (droite).

### 2.3.2 Couplages rares dans les HTFPL de taille paire

En taille paire, il existe une projection naturelle des couplages HT-symétriques de taille  $N = 2n$  sur les couplages quelconques de taille  $n$  : elle consiste à voir ces couplages HT-symétriques comme des couplages troués et à simplement oublier la position du trou. Si l'on note  $p$  cette projection, nous observons de plus que pour tout couplage troué  $\pi'$  :

$$p(e'_i(\pi')) = e_i(p(\pi')). \quad (2.28)$$

Une conséquence de (2.28) est que le vecteur propre de  $\mathcal{H}'$  doit se projeter sur le vecteur propre de  $\mathcal{H}$ . Compte tenu de (2.18) et (2.27), ceci se traduit ainsi : pour tout couplage  $\pi$ , on a

$$\frac{A(n; \pi)}{A(n)} = \sum_{\pi'} \frac{A_{HT}(2n; \pi')}{A_{HT}(2n)}, \quad (2.29)$$

où la somme à droite porte sur tous les couplages troués  $\pi'$  tels que  $p(\pi') = \pi$ . Maintenant, il est connu [72] que

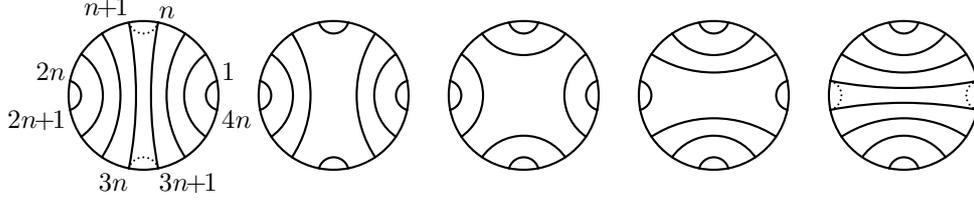
$$A_{HT}(2n) = P_{CS}(2n)A(n)$$

où  $P_{CS}(2n)$  est le nombre de partitions planes cycliquement symétriques de taille  $2n$ . Donc (2.29) est équivalent à

$$\sum_{\substack{\pi' \\ p(\pi')=\pi}} A_{HT}(2n; \pi') = P_{CS}(2n)A(n; \pi). \quad (2.30)$$

Avec P. Duchon, nous avons obtenu [22] une preuve bijective de (2.30) quand  $\pi$  est l'une des rotations du couplage le plus rare  $\pi_{0,n}$  :

$$\pi_{0,n} = \{\{i, 2n + 1 - i\}_{1 \leq i \leq n}\}.$$

FIGURE 2.14 – Les cinq couplages troués se projetant sur  $\pi_{0,4}$ .

Le couplage  $\pi_{0,n}$  est, à rotation près, *le plus rare* :  $A(n, \pi_0) = 1$ . Dans ce cas, (2.30) se réduit à :

$$\sum_{p(\pi')=\pi_{0,n}} A_{HT}(2n; \pi') = P_{CS}(2n).$$

**Théorème 2.12** (Aval, Duchon). *Pour tout entier  $n$ , il existe une bijection entre l'ensemble des HTFPL de taille  $2n$  dont le couplage est une version trouée de  $\pi_{0,n}$ , et les partitions planes cycliquement symétriques de taille  $2n$ .*

Nous donnerons ici seulement les grandes lignes de la preuve, et renvoyons à [22] pour plus de détail. On commence par déterminer quels couplages troués se projettent sur  $\pi_{0,n}$ , qui sont au nombre de  $n + 1$  :

$$\pi'_{k,n} = \{\{i, 4n + 1 - i\}_{1 \leq i \leq k}\} \cup \{\{i, 2n + 1 - i\}_{k < i \leq n}\}$$

où  $k$  varie de 0 à  $n$ . La Figure 2.14 montre ces 5 couplages quand  $n = 4$ .

Puis on utilise la technique des *arêtes fixées* (cf. [47, 34]) en identifiant les arêtes toujours présentes dans un (HT)FPL de couplage donné.

Enfin on met en bijection les configurations d'arêtes non fixées avec les partitions planes cycliquement symétriques.

### 2.3.3 Couplages rares dans les HTFPL de taille impaire

En taille impaire, bien qu'on dispose d'une projection naturelle des couplages de HTFPL de taille  $2n + 1$  vers ceux de FPL de taille  $n$  (en enlevant simplement le singleton dans leur version fendue), cette projection ne commute pas avec les générateurs  $e_i$  et  $e'_i$  des algèbres de Temperley-Lieb. Ainsi (2.18) et (2.27) n'impliquent dans ce cas aucune liaison entre les nombres  $A_{HT}(2n + 1; \pi')$  et  $A(n; \pi)$ . Malgré tout, en appliquant la technique des arêtes fixées à un ensemble de HTFPL dont le couplage est une version fendue du couplage le plus rare, nous avons obtenu [22], avec P. Duchon, de surprenants résultats énumératifs. Plus précisément, nous considérons les couplages fendus avec au plus deux arches courtes, *i.e.* de la forme

$$\{\{i, 2n + 2 - i\}_{1 \leq i \leq k}\} \cup \{\{k\}\} \cup \{\{i, 2n + 3 - i\}_{k+1 \leq i \leq n+1}\} \quad (2.31)$$

pour  $0 \leq k \leq n + 1$ , à rotation près. Autrement dit, on s'intéresse aux couplages HT-symétriques avec au plus 4 arches courtes restreintes aux positions  $(i, i + 1)$ ,  $(n + i + 1, n + i + 2)$ ,  $(2n + i + 1, 2n + i + 2)$  et  $(3n + i + 2, 3n + i + 3)$  pour un  $i$  quelconque. Voici les ingrédients de notre étude :

- identifier les arêtes fixées sur les HTFPL ayant un couplage du type (2.31) ;

- transformer le graphe des arêtes non fixées de façon à faire apparaître une symétrie axiale ;
- appliquer le théorème de Ciucu [36] qui permet de factoriser l'énumération de telles configurations ;
- coder chaque facteur à l'aide de chemins ;
- appliquer le lemme de Gessel-Viennot [55] et obtenir des formules déterminantales.

Les déterminants qui nous intéressent sont alors de la forme :

$$\mathcal{R}_\ell(n; x, y) = \det (m_{i,j,\ell})_{1 \leq i,j \leq n} \quad (2.32)$$

où

$$m_{i,j,\ell} = (1+xy) \binom{i+j+\ell-2}{2i-j-1} + x \binom{i+j+\ell-2}{2i-j-2} + y \binom{i+j+\ell-2}{2i-j} \quad (2.33)$$

avec  $x, y \in \{1/2, 1\}$ .

En calculant explicitement les valeurs des fonctions  $\mathcal{R}$ , nous reconnaissons plusieurs suites connues dans le monde des... ASM symétriques ! La proposition suivante rassemble ces résultats, dont la vérification utilise intensivement les travaux de Krattenthaler et Ciucu [37, 69].

**Proposition 2.13.** *Nous avons les spécialisations suivantes pour les fonctions  $\mathcal{R}$  :*

$$\mathcal{R}_0(n; 1/2, 1) = A_{HT}(2n + 1)$$

$$\mathcal{R}_1(n; 1/2, 1) = \frac{1}{2} A_{HT}(2n + 2)$$

$$\mathcal{R}_1(n; 1, 1) = A_V(2n + 3)$$

$$\mathcal{R}_1(n; 1, 1/2) = A(n)^2$$

$$\mathcal{R}_2(n; 1/2, 1) = A(n)A(n + 1)$$

où  $A_{HT}(N)$ ,  $A_V(N)$  et  $A(N)$  donnent respectivement les nombres d'ASM symétriques par demi-tour, symétriques verticalement et sans contrainte de symétrie.

## 2.4 Calculs de clés et ASM

### 2.4.1 Introduction

Une *clé* est par définition un tableau de Young dont les colonnes sont ordonnées par inclusion, soit par exemple :

6					
5	6				
4	4	6	6		
2	2	4	4	6	

Cette notion a été introduite par Lascoux et Schützenberger [76, 78] pour étudier les caractères de Demazure. Dans [76] est associée une clé à tout tableau de Young (cette construction est rappelé au paragraphe suivant). En type  $A$ , les caractères

irréductibles (*i.e.* les fonctions de Schur) sont définis comme une somme de poids sur tous les tableaux de Young de forme une partition donnée. Les caractères de Demazure correspondent à des sous-ensembles de tableaux qui peuvent être décrits à l'aide de clés (*cf.* [73, 80, 85] pour des travaux récents sur ce sujet).

D'autre part, dans [77], A. Lascoux définit une opération qui consiste à retirer toutes les entrées égales à  $-1$  dans une ASM donnée pour obtenir une matrice de permutation, qu'il nomme clé de l'ASM. Mais les ASM sont en bijection avec une certaine classe de tableaux de Young, appelés triangles monotones (ou triangle Gog dans [105]). De plus une (matrice de) permutation peut être vue comme un triangle monotone qui est une clé en tant que tableau de Young, comme illustré ci-dessous où l'on donne une permutation, sa forme matricielle, et sa forme clé :

$$\sigma = 31542 \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & & & & \\ \hline 4 & 5 & & & \\ \hline 3 & 4 & 5 & & \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Dès lors se pose la question de la coïncidence des deux notions de clés (définies sur les tableaux et les matrices). Nous démontrons que la réponse est positive, comme mentionnée sans preuve dans [77]. De plus, en généralisant le processus d'élimination des  $-1$ , nous obtenons une méthode simple et efficace du calcul de la clé de tout tableau de Young (et pas seulement des triangles monotones).

Enfin cette notion de clé (ou de *pseudo-clé*) débouche sur plusieurs résultats énumératifs sur le nombre d'ASM ayant un (petit) nombre de  $-1$  fixé.

Ce travail est détaillé dans [8].

## 2.4.2 Calcul de clés pour les tableaux de Young

Nous dessinons les tableaux à la Française. Un tableau peut être vu comme un produit de colonnes :  $T = C_1 C_2 \cdots C_l$ , où une colonne est un mot strictement décrois-

4		
2	5	
1	2	5

sant. Par exemple, le tableau  $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$  est le produit de 3 colonnes  $C_1 C_2 C_3$  avec  $C_1 = 421$ ,  $C_2 = 52$  et  $C_3 = 5$ . De plus ce tableau  $T$  est un *tableau de Young* car ses entrées sont croissantes (au sens large) sur ses lignes. La *forme* d'un tableau est alors la partition donnant la liste  $(H_1, \dots, H_l)$  des hauteurs de ses colonnes. La forme de notre tableau  $T$  ci-dessus est  $(3, 2, 1)$ .

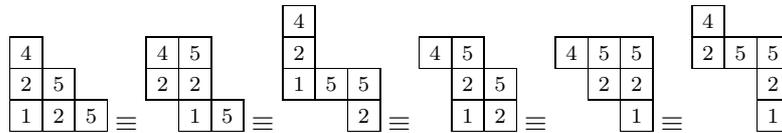
Le *mot* d'un tableau est simplement le résultat de sa lecture (colonne par colonne). Le tableau  $T$  se lit : 421 525 et on ne distingue plus un tableau de son mot. Une *clé* est un tableau tel que pour  $k \in \{1, \dots, l-1\}$ , la colonne  $C_{k+1}$  est un sous-mot de

la colonne  $C_k$ . Nous rappelons que l'insertion de Schensted envoie bijectivement les mots sur les paires de tableaux de Young  $(P, Q)$  de même forme, le second étant standard (*i.e.* strictement croissant sur les lignes). Deux mots sont équivalents pour la congruence plaxique (caractérisée par Knuth) s'il donnent le même tableau  $P$  par insertion. Le lemme suivant (*cf.* [78]) est crucial pour associer une clé à un tableau de Young.

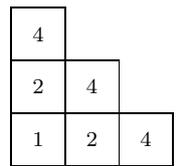
**Lemme 2.14.** *Soit  $T$  un tableau de Young de forme  $H = (H_1, \dots, H_l)$ . Alors, pour toute permutation  $I = (I_1, \dots, I_l)$  de  $H$ , il existe dans la classe plaxique de  $T$  exactement un mot  $V = V_1 \cdots V_l$ , qui est le produit de colonnes de hauteurs respectives  $I_1, \dots, I_l$ . Si  $J$  est une autre permutation de  $H$  et  $W = W_1 \cdots W_l$  le mot associé, alors  $J_k \geq I_k$  implique que  $V_k$  est un sous-mot de  $W_k$ .*

Les mots  $V$  introduits dans le Lemme 2.14 sont appelés les *mots francs* de  $T$ . Les clés sont caractérisées par le fait que leurs colonnes commutent dans le monoïde plaxique. Pour un tableau  $T$ , nous disons que  $V_1$  est le *facteur à gauche* du couple  $(I, T)$ . Ainsi pour chaque hauteur  $H_k$ , nous avons un unique facteur à gauche de hauteur  $H_k$ . Ces colonnes sont toutes ordonnées par inclusion. La *clé (à gauche) d'un tableau de Young  $T$*  est alors définie comme le produit de ses facteurs (à gauche) de hauteurs respectives  $H_1, H_2, \dots, H_l$ .

Dans notre exemple, le tableau  $T$  est de forme  $(3, 2, 1)$ , il y a donc six permutations de sa forme, ce qui correspond aux six mots francs :



La clé (à gauche) de notre tableau  $T$  est donc :



Maintenant on associe à tout tableau  $T$  une matrice de signes  $M(T)$ .

**Définition 2.15.** *Une matrice de signes est une matrice  $M = (M_{i,j})$  telle que :*

- $\forall i, j, M_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$  ;
- $\forall i, j, \sum_{r=1}^i M_{r,j} \in \{0, 1\}$  ;
- $\forall i, j, \sum_{s=1}^j M_{i,s} \geq 0$ .

La bijection entre ASM et triangles monotones (*cf.* [105]) se généralise aisément en une bijection entre tableaux de Young et matrices de signes. On traduit matriciellement les apparitions et disparitions des entrées dans les colonnes :

$$M(T)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in C_{l-i+1} \text{ et } j \notin C_{l-i+2} \\ -1 & \text{si } j \notin C_{l-i+1} \text{ et } j \in C_{l-i+2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



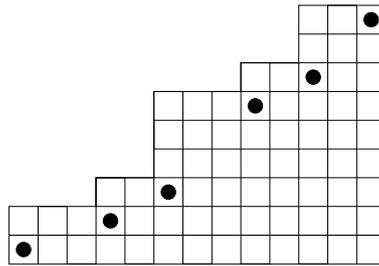


FIGURE 2.15 – Les coins internes d’un diagramme de Ferrers.

**Théorème 2.16.** Soit  $T$  un tableau de Young, et  $M(T)$  sa matrice de signes. En éliminant tout les  $-1$  de  $M(T)$ , on obtient la matrice de signes de la clé (à gauche) de  $T$ .

Voyons ça sur notre exemple  $T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 5 & & & \\ \hline 2 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$ , de matrice de signes :

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On calcule :

$$M(T) \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M(U)$$

avec  $U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 5 & & & \\ \hline 2 & 2 & 5 & 5 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$ , la clé à gauche de  $T$ .

Nous renvoyons à [8] pour une preuve de ce résultat.

### 2.4.3 Applications aux ASM

La première conséquence du Théorème 2.16 est la coïncidence des deux notions de clé introduites respectivement en [76] et [77] vu que le procédé d’élimination étudié ici se réduit à celui défini dans [77] dans le cas des ASM.

Une autre conséquence est l’idée d’étudier les nombres  $A_n^{(k)}$  d’ASM ayant exactement  $k$  entrées égales à  $-1$  (par exemple,  $A_n^{(0)} = n!$ ). Nous déduisons, plus ou moins directement, de l’étude des clés que pour  $n \geq 3$  :

$$A_n^{(1)} = \frac{(n!)^2}{(3!)^2(n-3)!}$$

et pour  $n \geq 6$  :

$$A_n^{(2)} = (n!)^2 \left( \frac{1}{36(n-6)!} + \frac{1}{12(n-4)!} + \frac{11}{30(n-5)!} \right).$$

Cette étude des nombres  $A_n^{(k)}$  a par la suite été poursuivie intensivement par Florent le Gac [79].

## 2.5 Perspectives

L'étude des ASM fournit au combinatoriste de nombreux problèmes, (très) élégants à formuler, et (très) difficiles à prouver ! Je veux mentionner ici un projet qui me tient à cœur.

Dès les années 1980, Robbins [95] conjecture de remarquables formules produits pour de nombreuses classes de symétrie d'ASM. Pratiquement toutes ces formules ont depuis été établies (*cf.* (2.2–2.9) entre autre) à une exception notable : celle des ASM symétriques par rapport aux deux diagonales, ou DDASM, de taille impaire.

**Conjecture 2.17** (Robbins). *Les DDASM de tailles impaires sont comptées par*

$$A_{DD}(2n+1) = \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{(3i)! \cdot (i-1)!}{(2i)!(2i-1)!} \quad (2.34)$$

J'ai observé que cette expression peut être traduite en une formule d'équination impliquant les HTASM de taille impaire :

$$(A_{DD}(2n+1))^2 = 3^{n-1} A_{HT}(2n+1). \quad (2.35)$$

Pour prouver (2.35), en adoptant la méthode développée au paragraphe 2.1.2, il faut décrire un modèle de glace carrée pour les DDASM (et éventuellement modifier celui pour les HTASM) de sorte que (2.35) se relève au niveau des fonctions de partition... ce que je n'ai pas encore réussi à faire !

# Chapitre 3

## Tableaux boisés

### 3.1 Présentation

Les tableaux boisés sont certains remplissages de diagrammes de Ferrers. Ils sont trivialement en bijection avec les tableaux de permutation et les tableaux alternatifs, respectivement introduits par Postnikov [90] et Viennot [102].

Ces objets sont le sujet d'une intense activité de recherche depuis plusieurs années, tant d'un point de vue combinatoire [104, 100, 32, 41, 88, 39], qu'en raison de leur apparition dans l'étude du modèle de mécanique statistique nommé PASEP dont il permet de décrire combinatoirement l'état d'équilibre [43, 44, 45, 65].

L'intérêt des tableaux boisés vient d'une structure arborescente sous-jacente naturelle, et d'un algorithme d'insertion qui permet une approche récursive.

#### 3.1.1 Définitions

Dans ce chapitre, nous représentons un *diagramme de Ferrers*  $F$  avec décroissance de la longueur des lignes de haut en bas<sup>1</sup>. Le *demi-périmètre* de  $F$  est donné par la somme de ses nombres de lignes et de colonnes. C'est aussi le nombre d'*arêtes de bord* qui sont les arêtes du bord Sud-Est de  $F$ . De la même façon, les *cases de bord* sont les cases sans case de  $F$  à leur Sud-Est.

Étant donné deux diagrammes de Ferrers ordonnés par inclusion  $F_1 \subseteq F_2$ , nous dirons que l'ensemble de cases  $S = F_2 - F_1$  (différence ensembliste) est un *ruban* s'il est connexe (par adjacence de cases) et ne contient pas de carré  $2 \times 2$ . Dans ce cas, le ruban  $S$  peut être ajouté à  $F_1$ , ou être retranché à  $F_2$ .

Nous pouvons maintenant définir les tableaux boisés, nommés TLT en anglais (pour Tree-Like Tableaux) [20].

**Définition 3.1.** *Un tableau boisé (TLT) est un diagramme de Ferrers dans lequel chaque case est soit vide soit occupée par un point, avec les contraintes suivantes :*

1. *la case en haut à gauche du diagramme (coin Nord-Ouest) est occupée, on l'appelle le point racine ;*
2. *pour toute case occupée  $c$ , autre que le point racine, il existe une case occupée soit dans la même colonne que  $c$  et au-dessus, soit dans la même ligne que  $c$  et à sa gauche, mais pas les deux simultanément.*

---

1. Noter la différence avec le Chapitre 1, chaque domaine ayant ses conventions historiques.

3. toute ligne et toute colonne possède au moins une case occupée.

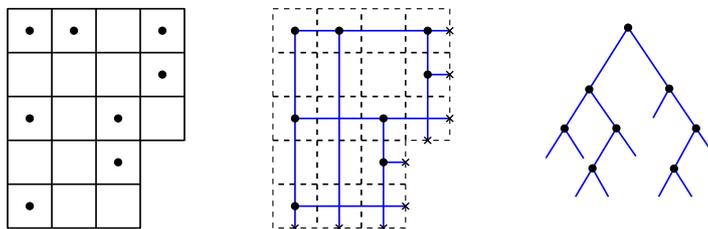


FIGURE 3.1 – Un tableau boisé (à gauche) et son arbre associé (à droite).

La Figure 3.1 (gauche) illustre cette définition par un exemple. Le nom de ces objets tient au fait qu'ils possèdent une structure d'arbre (binaire) sous-jacente. En effet, par la condition (2) de la Définition 3.1, on peut associer à tout point d'un tableau boisé (hors la racine) un unique point, situé au-dessus ou à gauche : son *père*. Si l'on relie chaque point à son père, on obtient un arbre binaire, et en ajoutant les arêtes reliant une arête verticale (resp. horizontale) du bord du tableau au point à sa gauche (resp. au-dessus d'elle), on obtient un arbre binaire complet, qui est l'arbre sous-jacent au tableau boisé. La Figure 3.1 met en évidence cette structure.

Comme annoncé, les tableaux boisés sont en bijection avec deux classes de tableaux connus et étudiés : les tableaux de permutation, et les tableaux alternatifs. Rappelons les définitions correspondantes.

Pour définir ces classes de tableaux, nous modifions légèrement la définition des diagrammes de Ferrers, en admettant d'avoir des lignes ou des colonnes vides. Nous appellerons ces diagrammes des *formes*.

**Définition 3.2** (Tableau de permutation). *Un tableau de permutation  $P$  est une forme dont les cases sont étiquetées par 0 ou 1 de telle sorte que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. chaque colonne de  $P$  contient au moins une entrée égale à 1 ;
2.  $P$  ne contient pas d'entrée 0 avec simultanément un 1 au-dessus d'elle (dans la même colonne) et un 1 à sa gauche (dans la même ligne).

Il est clair que la condition (1) impose que la forme d'un tableau de permutation est sans colonne vide. Cette classe de tableaux est une sous-classe des  $\mathbb{J}$ -diagrammes, définis par Postnikov [90], qui ne satisfont que la contrainte (2). La Figure 3.2 (gauche) donne un exemple de tableau de permutation.

**Définition 3.3** (Tableau alternatif). *Un tableau alternatif  $A$  est une forme dont chaque case peut être vide ou occupée soit par une flèche à gauche  $\leftarrow$  soit par une flèche vers le haut  $\uparrow$ , de telle sorte que toute case pointée de  $A$  par une flèche (i.e. à gauche d'une  $\leftarrow$  ou au-dessus d'une  $\uparrow$ ) soit vide.*

Cette définition est illustrée par la Figure 3.2 (droite). Les tableaux alternatifs ont été définis par Viennot [102].

Nous introduisons une notion de *taille* sur ces trois types de tableaux. Si l'on note  $p$  la fonction qui associe à un tableau son demi-périmètre :

- la taille d'un tableau boisé  $T$  est donnée par  $p(T) - 1$  ;
- la taille d'un tableau de permutation  $P$  est donnée par  $p(P)$  ;
- la taille d'un tableau alternatif  $A$  est donnée par  $p(A) + 1$  ;

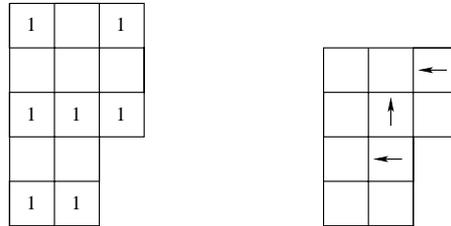


FIGURE 3.2 – Un tableau de permutation et un tableau alternatif.

**Proposition 3.4.** *Les tableaux boisés sont en bijection avec les tableaux de permutation et les tableaux alternatifs de même taille.*

*Démonstration.* Soit un tableau boisé  $T$ . Considérons l'application  $\phi$  qui consiste à remplacer tout point  $v$  de  $T$  par une flèche  $\uparrow$  (resp.  $\leftarrow$ ) s'il n'y a pas de point de  $T$  au-dessus de  $v$  (resp. à gauche de  $v$ ), puis à supprimer la première ligne et la première colonne du tableau obtenu. On vérifie aisément que  $\phi$  est une bijection des tableaux boisés vers les tableaux alternatifs de même taille.

Il est par ailleurs bien connu [102, 88] que les tableaux alternatifs sont en bijection avec les tableaux de permutations. Décrivons une application  $\varphi$  qui envoie bijectivement un tableau boisé  $T$  sur un tableau de permutation. On commence par placer un 1 :

- dans toute case pointée ayant un point à sa gauche dans sa ligne,
- dans toute case vide ayant un point à sa gauche dans sa ligne et un point au-dessus dans sa colonne.

On place ensuite un 0 dans les cases vides, et on efface la première colonne pour obtenir  $\varphi(T)$ . La Figure 3.2 donne les images par  $\phi$  et  $\varphi$  du tableau boisé de la Figure 3.1.  $\square$

Nous noterons  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des tableaux boisés de taille  $n$ . Avant de présenter le modèle PASEP qui motive grandement l'étude des tableaux boisés, introduisons trois paramètres sur les tableaux boisés. Soit  $T$  un tableau boisé. Un *croisement* de  $T$  est une case vide de  $T$  ayant simultanément un point à sa gauche et un point au-dessus de lui ; nous noterons  $cr(T)$  le nombre de croisements de  $T$ . Un *point gauche* (resp. *point haut*) de  $T$  est une case occupée dans la première colonne (resp. ligne) de  $T$ , hors la racine. Leur nombre sera noté  $lp(T)$  (resp.  $tp(T)$ ).

### 3.1.2 Le modèle PASEP

Les tableaux de permutations, et leurs avatars, doivent une partie de leur renommée à leur utilisation [43, 44, 45, 65] pour décrire la distribution stationnaire d'un modèle de physique statistique, nommé PASEP, dont nous allons rappeler la définition, et les propriétés fondamentales. Soit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Le PASEP<sup>2</sup>

2. Partially Asymmetric Simple Exclusion Process.

correspond à la chaîne de Markov suivante. Les états sont les  $2^n$  mots en les symboles  $\circ$  et  $\bullet$ . Autrement dit, on considère  $n$  sites qui peuvent être vides ( $\circ$ ) ou occupés par une particule ( $\bullet$ ).

Les probabilités de transition  $p(s_1, s_2)$  entre deux états  $s_1$  et  $s_2$  modélisent comment les particules peuvent sauter d'un site à un autre, entrer ou sortir du système (voir Figure 3.3) :

- si  $s_1 = A \bullet \circ B$  et  $s_2 = A \circ \bullet B$ , alors  $p(s_1, s_2) = \frac{1}{n+1}$  et  $p(s_2, s_1) = \frac{q}{n+1}$  ;
- si  $s_1 = A \bullet$  et  $s_2 = A \circ$ , alors  $p(s_1, s_2) = \frac{\beta}{n+1}$  et  $p(s_2, s_1) = \frac{\delta}{n+1}$  ;
- si  $s_1 = \circ B$  et  $s_2 = \bullet B$ , alors  $p(s_1, s_2) = \frac{\alpha}{n+1}$  et  $p(s_2, s_1) = \frac{\gamma}{n+1}$  ;
- si  $s_1 \neq s_2$  ne correspondent à aucun des cas précédents, alors  $p(s_1, s_2) = 0$  ;
- enfin  $p(s_1, s_1) = 1 - \sum_{s_2 \neq s_1} p(s_1, s_2)$ .

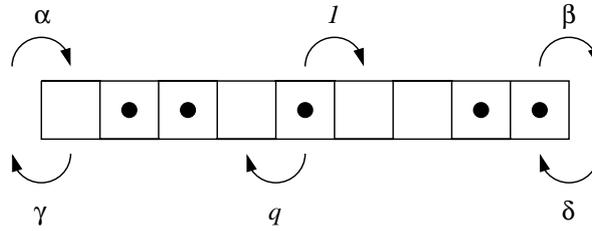


FIGURE 3.3 – Le modèle PASEP.

Comme l'ont montré Derrida *et al.* [49], le PASEP a une unique distribution stationnaire, et celle-ci peut être calculée en utilisant le *Matrix Ansatz* : supposons que l'on puisse obtenir deux matrices carrées  $D, E$ , une matrice colonne  $V$  et une matrice ligne  $W$  vérifiant les conditions suivantes

$$\begin{cases} DE = qED + D + E \\ (\beta D - \delta E)V = V \\ W(\alpha E - \gamma D) = W. \end{cases} \quad (3.1)$$

Alors soit  $s$  un état du PASEP. On note  $s(E, D)$  le mot obtenu en remplaçant dans  $s$  le symbole  $\bullet$  par  $D$  et le symbole  $\circ$  par  $E$ . Un tel mot s'interprète naturellement comme un produit matriciel. Derrida *et al.* ont obtenu le résultat suivant.

**Proposition 3.5.** *Si  $D, E, V, W$  vérifient les conditions (3.1), la probabilité stationnaire  $P_n(s)$  que le système se trouve dans l'état  $s$  est donnée par la formule*

$$P_n(s) = \frac{Ws(E, D)V}{Z_n} \quad \text{avec} \quad Z_n = W(D + E)^n V. \quad (3.2)$$

Le lien avec les tableaux boisés est le suivant. À un mot  $w$  de lettres  $E$  et  $D$ , on associe une forme  $\lambda(w)$  (de tableau boisé, *i.e.* un diagramme de Ferrers). En lisant  $w$  de droite à gauche et en interprétant une lettre  $D$  (resp.  $E$ ) comme un pas Sud (resp. Ouest), et en ajoutant un pas Sud au début, et un pas Ouest à la fin, on décrit le bord Sud-Est d'un unique diagramme de Ferrers  $\lambda(w)$ . Pour un état  $s$  du PASEP, on notera  $\lambda(s)$  la forme de  $\lambda(s(E, D))$ . On notera de plus  $\mathcal{T}_n^\lambda$  l'ensemble des tableaux boisés de taille  $n$  et de forme  $\lambda$ .

Par exemple, en taille 3, pour l'état  $s = \bullet \circ \bullet$ , on a  $s(E, D) = D E D$ ,

$$\lambda(s) = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \mathcal{T}_n^\lambda = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline & \bullet \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \right\}$$

Nous pouvons maintenant préciser le lien avec les tableaux boisés, d'abord établi par Corteel et Williams [43, 44] en termes de tableaux de permutations, puis reformulé par Viennot [102] en termes de tableaux alternatifs, et donné ci-dessous en termes de tableaux boisés.

**Proposition 3.6.** *Si  $D, E$  sont des matrices vérifiant la première condition de (3.1), et  $w$  un mot en  $E$  et  $D$ , alors on a :*

$$w = \sum_{T \in \mathcal{T}_n^{\lambda(w)}} q^{cr(T)} E^{tp(T)} D^{lp(T)}, \quad (3.3)$$

où l'égalité est entendue modulo (3.1).

Dans le cas particulier où  $\gamma = \delta = 0$ , l'existence de matrices  $D, E$  satisfaisant (3.1) est prouvée dans [49]. Dans ce cas, le vecteur  $V$  (resp.  $W$ ) est vecteur propre à droite de  $D$  (resp. à gauche de  $E$ ) :

$$\begin{aligned} D V &= \beta^{-1} V \\ W E &= \alpha^{-1} W. \end{aligned}$$

On déduit alors des Propositions 3.5 and 3.6 le corollaire suivant.

**Corollaire 3.7.** *Quand  $\gamma = \delta = 0$  on a :*

$$P_n(s) = \frac{\sum_{T \in \mathcal{T}_n^{\lambda(s)}} q^{cr(T)} \alpha^{-tp(T)} \beta^{-lp(T)}}{\sum_{T \in \mathcal{T}_n} q^{cr(T)} \alpha^{-tp(T)} \beta^{-lp(T)}}$$

Dans le cas général, *i.e.* pour des valeurs génériques de tous les paramètres du PASEP, Corteel et Williams [45] utilisent des statistiques sur des objets nommés tableaux escaliers pour interpréter combinatoirement la distribution stationnaire. La sous-section 3.3.2 présente une étude de ces tableaux escaliers.

## 3.2 Structure récursive et conséquences

### 3.2.1 Algorithme d'insertion

L'algorithme d'insertion est vraiment l'outil-clé qui donne une structure récursive aux tableaux boisés, particulièrement agréable et efficace.

Soit  $F$  un diagramme de Ferrers et  $e$  une arête de son bord. Si  $e$  est horizontale, *i.e.* au bout d'une colonne  $c$ , on définit l'*insertion d'une ligne* à  $F$  en  $e$  comme suit : on ajoute une case à  $c$  et aux colonnes à gauche de  $c$ , et on place un point dans la case la plus à droite de cette nouvelle ligne. Si  $e$  est verticale, *i.e.* au bout d'une ligne, on définit symétriquement l'*insertion d'une colonne*. Les cases ajoutées apparaissent en gris sur la Figure 3.4.

La définition suivante a pour but de distinguer un point particulier dans tout tableau boisé.

**Définition 3.8** (Point spécial). Soit  $T$  un tableau boisé. Le point spécial de  $T$  est la case occupée la plus à droite parmi celles situées au bas d'une colonne.

Cette définition est licite car la ligne la plus basse de  $T$  a nécessairement une case occupée (Définition 3.1, (3)), qui se trouve ainsi au bas d'une colonne. Le point spécial apparaît entouré d'un carré sur la Figure 3.4 (gauche).

**Définition 3.9** (Algorithme d'insertion  $i$ ). Soit  $T \in \mathcal{T}_n$  et  $e$  l'une de ses arêtes de bord. Nous définissons un tableau  $T'$  de taille  $n+1$  de la façon suivante : on insère une ligne/colonne à  $T$  en  $e$ , et on marque d'un point la case au bout de la ligne/colonne ajoutée, que l'on appelle nouveau point de  $T'$ .

On distingue alors deux cas :

1. si  $e$  est situé à l'Est du point spécial de  $T$ , on définit simplement  $i(T, e) := T'$  ;
2. sinon on ajoute un ruban de cases vides entre l'arête Est du nouveau point de  $T'$ , et l'arête Sud du point spécial de  $T$  pour former un tableau  $T'' = i(T, e)$ .

Le résultat de cet algorithme est un élément de  $\mathcal{T}_{n+1}$  (on vérifie aisément que les conditions de la Définition 3.1 sont satisfaites). La Figure 3.4 donne des exemples de l'application de l'algorithme  $i$ . Les cases ajoutées lors de l'insertion de ligne/colonne sont grisées, celles du ruban sont marquées d'une croix +.

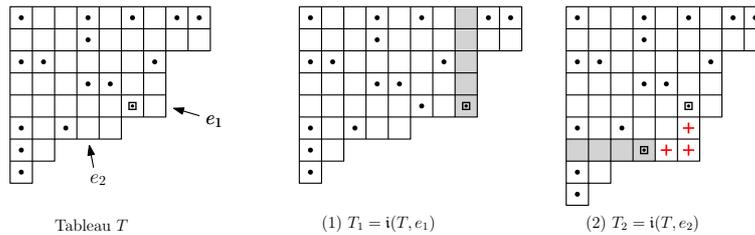


FIGURE 3.4 – Les deux cas dans la définition de  $i$ .

**Théorème 3.10.** Pour tout entier  $n \geq 1$  l'algorithme d'insertion  $i$  est une bijection entre :

- (A) l'ensemble des paires  $(T, e)$  où  $T \in \mathcal{T}_n$  et  $e$  est une des  $n+1$  arêtes du bord de  $T$ ,
- (B) l'ensemble  $\mathcal{T}_{n+1}$ .

*Démonstration.* L'observation fondamentale est la suivante : le nouveau point  $p$  ajouté à  $T'$  est son point spécial. En effet, c'est évident si  $p$  est au Nord-Est du point spécial de  $T$ , et si  $p$  est au Sud-Ouest du point spécial de  $T$ , l'ajout du ruban empêche toute case entre  $p$  et le point spécial de  $T$  (compris) d'être au bas d'une colonne.

Il est ainsi aisé de définir  $\tau$ , l'opération inverse de  $i$ . Soit  $T$  un tableau boisé de taille  $n+1$ . Notons  $c$  la case de son point spécial. Si  $c$  a une case à sa droite, on suit alors les cases du bord de  $T$  en partant de  $c$  vers le Nord-Est jusqu'à rencontrer la première case occupée  $c'$  ; on retire alors le ruban de cases vides compris entre  $c$  et  $c'$ , ce qui laisse un diagramme de Ferrers puisque  $c'$  n'est pas en bas de sa colonne. Puis, on revient au cas général, et on supprime la ligne ou la colonne de  $T$  qui contient  $c$  mais aucune autre case occupée. Notons  $T_1$  le résultat obtenu, et  $e$  l'arête du bord de  $T_1$  adjacente à  $c$  dans  $T$ . On définit  $\tau(T) = (T_1, e)$  et on vérifie que  $i$  et  $\tau$  sont inverses l'une de l'autre.  $\square$

### 3.2.2 Applications

#### Conséquences énumératives

Comme  $|\mathcal{T}_1| = 1$  un corollaire immédiat du Théorème 3.10 est le suivant :

$$\forall n \geq 1, |\mathcal{T}_n| = n!. \quad (3.4)$$

Mais on peut tirer de notre algorithme d'insertion des résultats énumératifs plus précis. Notons  $T_n(x, y)$  le polynôme

$$T_n(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}_n} x^{lp(T)} y^{tp(T)}, \quad (3.5)$$

où  $lp(T)$  (resp.  $tp(T)$ ) désigne comme en (3.3) le nombre de points gauches (resp. de points hauts) de  $T$ . Lorsqu'on insère un point dans un tableau  $T$  de taille  $n$  à l'aide de  $i$ , on ajoute un point gauche (resp. un point haut) si l'on choisit comme arête  $e$  la plus au Sud-Ouest (resp. la plus au Nord-Est). Dans les autres cas, aucun point haut ou gauche n'est ajouté, d'où la récurrence

$$T_{n+1}(x, y) = (x + y + n - 1)T_n(x, y)$$

qui, avec  $T_1(x, y) = 1$  donne :

$$T_n(x, y) = (x + y)(x + y + 1) \cdots (x + y + n - 2). \quad (3.6)$$

Cette formule a d'abord été obtenue par Corteel et Nadeau [41] puis bijectivement par Nadeau [88]. La preuve ci-dessus, bijective, est sans aucun doute la plus simple.

#### Énumération des croisements

Le point de départ est le suivant.

**Lemme 3.11.** *Soit  $T \in \mathcal{T}_n$ . Les croisements de  $T$  sont exactement les cases des rubans ajoutés lors des  $n - 1$  applications de  $i$  pour construire  $T$  à partir du tableau de taille 1.*

En suivant le bord d'un tableau boisé de taille  $n$  du Sud-Ouest au Nord-Est, on numérote les arêtes de bord  $e_0(T), \dots, e_n(T)$  et les cases de bord  $b_0(T), \dots, b_{n-1}(T)$ . On vérifie alors aisément le lemme suivant.

**Lemme 3.12.** *Soit  $T \in \mathcal{T}_n, i \in \{0, \dots, n\}$  et  $T' = i(T, e_i)$ . Alors la case spéciale de  $T'$  est  $b_i(T')$ . De plus, si  $b_k(T)$  est la case spéciale de  $T$  (avec  $0 \leq k \leq n - 1$ ), alors on a*

$$cr(T') = \begin{cases} cr(T) & \text{si } k \leq i, \\ cr(T) + (k - i) & \text{si } k > i. \end{cases} \quad (3.7)$$

Ceci est illustré sur la Figure 3.5, où  $k = 3$ . Une première conséquence de (3.7) est que pour  $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ , il y a  $n!/n = (n - 1)!$  tableaux  $T$  dans  $\mathcal{T}_n$  dont la case spéciale est  $b_k(T)$ . Une deuxième conséquence est que pour un tel tableau  $T$ , le nombre total de cases de ruban ajoutées en construisant tous les tableaux  $T' = i(T, e_i)$

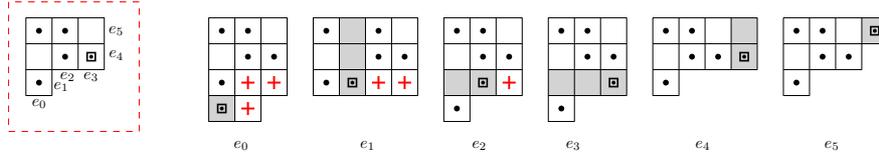


FIGURE 3.5 – Un tableau boisé de taille 5 et les 6 insertions possibles.

(pour  $i = 0, \dots, n$ ) n'est autre que  $1 + 2 + \dots + k = \binom{k+1}{2}$ . Par conséquent, le nombre total de croisements dans ces  $n + 1$  tableaux est  $(n + 1)cr(T) + \binom{k+1}{2}$ . Notons

$$Cr_n = \sum_{T \in \mathcal{T}_n} cr(T).$$

On déduit du raisonnement précédent que pour  $n \geq 2$

$$Cr_{n+1} - (n + 1)Cr_n = (n - 1)! \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+1}{2} = (n - 1)! \binom{n+1}{3}. \quad (3.8)$$

En posant  $X_n = Cr_n/n!$ , on obtient  $X_{n+1} - X_n = (n - 1)/6$ , d'où le résultat suivant.

**Proposition 3.13.** *Le nombre total de croisements dans  $\mathcal{T}_n$  est*

$$Cr_n = n! \times \frac{(n - 1)(n - 2)}{12}. \quad (3.9)$$

L'équation (3.9) peut se traduire ainsi : les tableaux boisés de taille  $n$  ont en moyenne (pour la distribution uniforme)  $(n - 1)(n - 2)/12$  croisements. Ce résultat avait d'abord été prouvé dans [38, Theorem 1]. La méthode employée ici évite un long calcul (basé sur l'ajout d'une colonne à gauche d'un tableau).

### Une première bijection avec les permutations

Il est clair que l'algorithme  $i$  est un outil pour construire des bijections entre les tableaux boisés et les permutations. Dans ce paragraphe, le but est d'en construire une qui envoie les croisements des tableaux sur les motifs 2 – 31 des permutations. Une occurrence du motif 2 – 31 dans une permutation  $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$  est une paire  $(i, j)$  d'indices tels que  $1 \leq i < j < n$  et  $\sigma_{j+1} < \sigma_i < \sigma_j$ .

On peut coder les étapes permettant de construire un tableau  $T$  de taille  $n$  à partir du tableau vide  $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow \dots \rightarrow T_n = T$  à l'aide d'une liste d'entiers  $a(T) = (a_1(T), \dots, a_n(T))$  tels que  $0 \leq a_i(T) \leq i - 1$  : pour  $i \in \{2, \dots, n\}$ , on définit  $a_i(T)$  comme l'indice  $j$  tel que  $i(T_{i-1}, e_j) = T_i$ , en utilisant la numérotation du bord introduites pour le Lemme 3.12. Considérons maintenant un mot constitué de  $n$  lettres  $X$ , que nous allons successivement remplacer par les entiers  $\{n, n - 1, \dots, 1\}$ . Pour placer  $i$ , on choisit la lettre  $X$  (encore présente à cette étape) qui a exactement  $a_i(T)$  lettres  $X$  à sa gauche, et on la remplace par  $i$ . Par exemple, si  $a(T) = (0, 1, 0, 3, 1)$ , on obtient successivement les mots  $X5XXXX$ ,  $X5XXX4$ ,  $35XXX4$ ,  $35X24$ , et  $35124$ . En général, si  $\tau$  est la permutation obtenue par cette opération, on définit  $\Phi_1(T) := \tau^{-1}$ .

**Théorème 3.14.**  $\Phi_1$  est une bijection de  $\mathcal{T}_n$  vers les permutations de longueur  $n$ . Si  $\sigma = \Phi_1(T)$ , alors  $cr(T)$  est égal au nombre d'occurrences de 2 – 31 dans  $\sigma$ .

*Démonstration.* Il est clair que  $\Phi_1$  est bien une bijection. Soit  $T \in \mathcal{T}_n$  et  $\tau = \Phi_1(T)^{-1}$ . On observe que dans  $\tau$ , l'entrée  $i + 1$  apparaît à gauche de  $i$  si et seulement si  $a_i(T) \geq a_{i+1}(T)$ , et dans ce cas, il y a  $a_i(T) - a_{i+1}(T)$  entrées plus petites que  $i$  placées dans  $\tau$  entre  $i$  et  $i + 1$ . Autrement dit,  $a_i(T) \geq a_{i+1}(T)$  si et seulement si  $i$  est une descente dans  $\Phi_1(T)(= \tau^{-1})$ , et dans ce cas, cette descente joue le rôle du "3" dans  $a_i(T) - a_{i+1}(T)$  occurrences du motif 2-31. Le théorème découle alors de l'expression

$$cr(T) = \sum_{i=1}^{n-1} \max(a_i(T) - a_{i+1}(T), 0) \tag{3.10}$$

qui est une conséquence immédiate de (3.7). □

La bijection présentée ici est nettement plus simple que la bijection II de [41], construite spécifiquement pour préserver le motif (équivalent) 31-2.

### Une seconde bijection avec les permutations, qui préserve l'arbre binaire

Un *arbre binaire croissant* de taille  $n$  est un arbre binaire dont les  $n$  nœuds (*i.e.* les sommets internes) sont étiquetés par les entiers  $\{1, \dots, n\}$  de telle sorte que les étiquettes croissent en suivant le chemin de la racine vers un nœud quelconque (croissance de père en fils). Il est bien connu que ces arbres binaires croissants sont en bijection avec les permutations de la façon suivante. Soit  $B$  un arbre binaire croissant. On parcourt  $B$  selon l'ordre infixe, à savoir récursivement : le sous-arbre gauche, puis la racine, puis le sous-arbre droit. En notant les étiquettes rencontrées lors de ce parcours infixe, on obtient la permutation  $\sigma$ , image de  $B$ . La Figure 3.6 (gauche) illustre cette correspondance. Si  $\sigma$  est une permutation, image de l'arbre binaire croissant  $B$ , on définit  $\mathcal{A}(\sigma)$  comme l'arbre binaire obtenu en oubliant les étiquettes de  $B$ .

D'autre part, comme exposé à la suite de la Définition 3.1, on associe naturellement un arbre binaire  $\mathcal{A}(T)$  à tout tableau boisé  $T$ , voir la Figure 3.6 (droite).

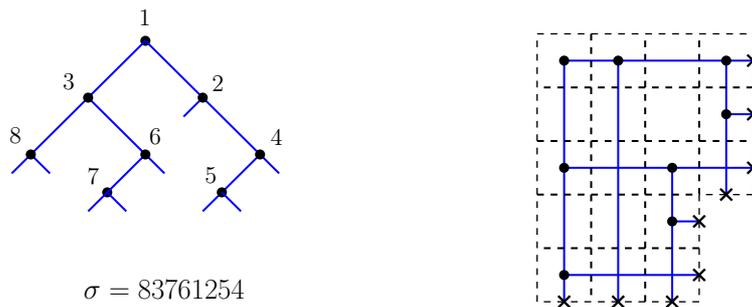


FIGURE 3.6 – Le même arbre binaire associé à une permutation (gauche) et un tableau boisé (droite).

À l'aide de  $\mathcal{A}$ , nous allons maintenant construire une autre bijection  $\Phi_2$  entre les permutations et les tableaux boisés qui préserve l'arbre binaire associé à ces objets. Nous procédons par récurrence sur la taille  $n$ .

Soit  $\sigma$  une permutation de taille  $n + 1$ , et  $\tau$  la permutation de taille  $n$  obtenue en effaçant  $n + 1$  dans  $\sigma$ . Par récurrence, le tableau  $T := \Phi_2(\tau)$  est bien défini et

vérifie :  $\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(\tau)$ . Soit  $B$  l'arbre binaire croissant associé à  $\sigma$ . Notons  $V$  le sommet de  $B$  portant l'étiquette  $n + 1$ . Effacer  $n + 1$  revient à remplacer  $V$  par une feuille  $L$ . Il est clair que  $L$  correspond à une arête du bord dans  $\Phi_2(\tau)$ , et on définit :  $\Phi_2(\sigma) = i(\Phi_2(\tau), e_L)$ .

**Théorème 3.15.** *Pour  $n \geq 1$ , l'application  $\Phi_2$  est une bijection entre les permutations de longueur  $n$  et les tableaux boisés de taille  $n$ , vérifiant :  $\mathcal{A}(\sigma) = \mathcal{A}(\Phi_2(\sigma))$ .*

Ce résultat est une conséquence directe des propriétés de l'algorithme  $i$ . La Figure 3.6 illustre la bijection  $\Phi_2$ .

**Remarque :** Le fait que les tableaux (de permutation) possèdent une structure arborescente sous-jacente n'est pas nouveau : elle a déjà été étudiée par Burstein [32], puis en détail par Nadeau [88, Section 4]. Un atout important des tableaux boisés, et de l'algorithme d'insertion qui leur est associé est que l'on utilise directement la structure d'arbre pour étiqueter les sommets.

### 3.3 Généralisations

#### 3.3.1 Tableaux boisés de type $B$

Dans ce paragraphe, nous considérons les *tableaux boisés symétriques*, *i.e.* les tableaux boisés invariants par la symétrie par rapport à la diagonale principale de leur diagramme. Ces objets sont en bijection avec les tableaux alternatifs symétriques de [88, Section 3.5], et les "tableaux de permutation de type B" de [75]. La taille d'un tel tableau est forcément impaire, et ceux de taille  $2n + 1$  (dont l'ensemble sera noté  $\mathcal{T}_{2n+1}^{sym}$ ) sont comptés par  $2^n n!$  (voir [75, 88]). Nous allons donner une preuve simple de ce résultat à l'aide d'une modification de l'algorithme d'insertion.

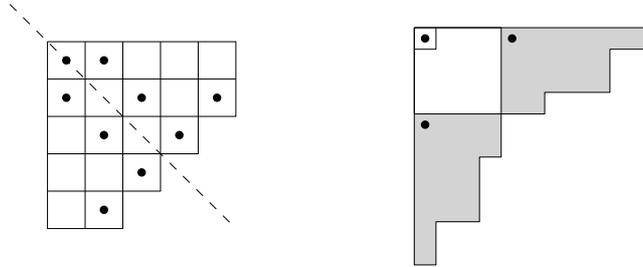


FIGURE 3.7 – Un tableau boisé symétrique, et l'inclusion des tableaux boisés dans les symétriques.

On peut observer que pour tout tableau boisé  $T$  de taille  $n$ , on peut lui associer un tableau symétrique : si  $T$  a  $k$  colonnes, on lui "colle" au-dessus un carré de cases  $k \times k$ , dans lequel seule la case la plus en haut à gauche est pointée, puis on "colle" à droite de ce carré le tableau  $T^*$  (réflexion de  $T$ ) : voir la Figure 3.7. De cette façon, on inclut naturellement  $\mathcal{T}_n$  dans  $\mathcal{T}_{2n+1}^{sym}$ .

Nous introduisons maintenant une version modifiée  $i^*$  de l'algorithme d'insertion pour les tableaux boisés symétriques. Tout d'abord, nous définissons comme *point \*-spécial* la case pointée d'un tableau symétrique qui est la plus à droite parmi celles qui sont en bas de colonne et au Sud-Ouest de la diagonale.

**Définition 3.16** (Insertion symétrique). Soit  $T \in \mathcal{T}_{2n+1}^{sym}$  et  $(e, \varepsilon)$  une paire formée d'une arête  $e$  du bord au Sud-Ouest de la diagonale (il y en a  $n + 1$ ) et d'un signe  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ . On insère d'abord une ligne/colonne en  $e$  et la colonne/ligne symétrique (avec un case pointée à leur extrémité) pour obtenir un tableau boisé symétrique  $T'$ . On distingue alors trois cas :

1. Si  $\varepsilon = +1$  et  $e$  est à droite du point  $*$ -spécial, on définit :  $i^*(T, e, +1) := T'$ .
2. Si  $\varepsilon = +1$  et  $e$  est à gauche du point  $*$ -spécial, on ajoute à  $T'$  un ruban entre le nouveau point au Sud-Ouest de la diagonale et le point  $*$ -spécial de  $T$  ; on ajoute aussi le ruban symétrique pour obtenir un tableau symétrique  $T''$ , et on définit :  $i^*(T, e, +1) := T''$ .
3. Si  $\varepsilon = -1$ , on ajoute alors un ruban à  $T'$  entre ses deux nouveaux points (au SW et au NE de la diagonale) et on définit  $i^*(T, e, -1)$  comme le tableau  $T''$  ainsi construit.

La Figure 3.8 illustre cette construction.

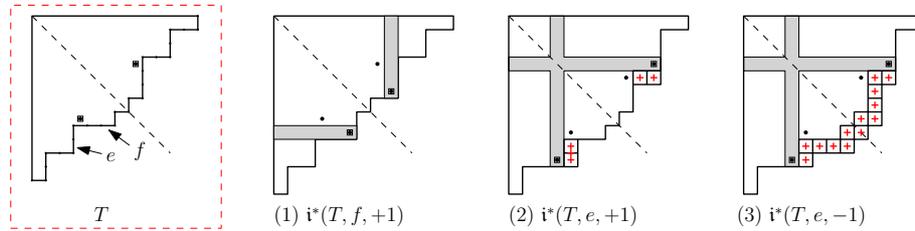


FIGURE 3.8 – Les trois cas dans la définition de  $i^*$ .

**Théorème 3.17.** La procédure d'insertion  $i^*$  réalise une bijection entre les triplets  $(T, e, \varepsilon)$  comme ci-dessus et  $\mathcal{T}_{2n+3}^{sym}$ .

*Démonstration.* La preuve est semblable à celle du Théorème 3.10. La clé est l'argument suivant : le nouveau point inséré au Sud-Ouest de la diagonale devient dans tous les cas le point  $*$ -spécial du nouveau tableau, ce qui permet d'inverser la procédure.  $\square$

De ce théorème, on tire facilement une conséquence énumérative :

$$|\mathcal{T}_{2n+3}^{sym}| = 2(n+1)|\mathcal{T}_{2n+1}^{sym}|$$

d'où

$$|\mathcal{T}_{2n+1}^{sym}| = 2^n n! \text{ pour } n \geq 0. \quad (3.11)$$

Nous pouvons aussi obtenir une généralisation de la formule (3.6) aux tableaux boisés symétriques [75, 40]. En reprenant les notations de [40, Section 5], nous posons

$$T_{2n+1}^{sym}(x, y, z) = \sum_{T \in \mathcal{T}_{2n+1}^{sym}} x^{lp^*(T)} y^{tp^*(T)} z^{diag(T)}, \quad (3.12)$$

où

- $diag(T)$  est le nombre de croisements parmi les cases diagonales ;

- $tp^*(T)$  est le nombre de points dans la ligne de la case pointée la plus haute de la première colonne (à l'exception de la racine) ;
- $lp^*(T)$  est le nombre de points dans la colonne de la case pointée la plus à gauche de la première ligne (à l'exception de la racine).

Soit  $T$  un tableau boisé symétrique de taille  $n$  et  $T' = i^*(T, e, \varepsilon)$ . On a  $diag(T') = diag(T) + 1$  exactement quand  $\varepsilon = -1$ , et  $lp(T') = lp(T) + 1$  exactement quand  $e$  est l'arête la plus à gauche de  $T$ . Notons  $r$  la ligne de la case pointée la plus haute dans la première colonne (à l'exception de la racine), et  $e'$  l'arête du bord (verticale) associée. On distingue alors deux cas :

- si  $e'$  est au Sud-Ouest de la diagonale, alors l'insertion en  $e = e'$  augmente  $tp^*(T)$  de un ;
- sinon, c'est l'insertion en  $e''$ , arête symétrique de  $e'$  qui augmente  $tp^*(T)$  de un.

Pour tous les autres choix, on a  $tp^*(T') = tp^*(T)$ . On en déduit la formule de récurrence :  $T_{2n+3}^{sym}(x, y, z) = (1+z)(x+y+n-1)T_{2n+1}^{sym}(x, y, z)$ , d'où il découle

$$T_{2n+1}^{sym}(x, y, z) = (1+z)^n(x+y)(x+y+1) \cdots (x+y+n-2). \quad (3.13)$$

Cette preuve de (3.13) est bien plus simple que chacune des deux preuves présentées dans [40].

### 3.3.2 Tableaux escaliers

Dans l'étude du modèle PASEP, un grand accomplissement a été la description par Corteel et Williams [45] de la distribution stationnaire du cas général (*i.e.* avec cinq paramètres) à l'aide de statistiques définies sur des tableaux, nommés tableaux escaliers, et généralisant les tableaux alternatifs. Nous en proposons ici une étude en utilisant les outils des tableaux boisés.

#### Tableaux escaliers et tableaux boisés étiquetés

**Définition 3.18.** *Un tableau escalier  $S$  de taille  $n$  est un diagramme de Ferrers de forme "escalier"  $(n, n-1, \dots, 2, 1)$  tel que ses cases sont soit vides soit étiquetées par  $\alpha, \beta, \gamma$ , ou  $\delta$ , de telle sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :*

- aucune des cases du bord (diagonal) de  $S$  n'est vide ;
- toute case située dans la même ligne et à gauche d'un  $\beta$  ou  $\delta$  est vide ;
- toute case située dans la même colonne et au-dessus d'un  $\alpha$  ou  $\gamma$  est vide.

La Figure 3.9 (gauche) présente un tableau escalier  $S$  de taille 5. On observe aisément qu'un tableau escalier sans  $\delta$  ou  $\gamma$  n'est autre qu'un tableau alternatif (il suffit de remplacer  $\alpha$  par  $\uparrow$  et  $\beta$  par  $\leftarrow$ ).

				$\alpha$
		$\delta$	$\alpha$	
		$\beta$		
$\alpha$	$\gamma$			
$\beta$				

1	$q$	1	1	$\alpha$
$q$	$q$	$\delta$	$\alpha$	
1	1	$\beta$		
$\alpha$	$\gamma$			
$\beta$				

FIGURE 3.9 – Un tableau escalier et ses étiquettes de poids.

**Définition 3.19.** Le poids  $\mathbf{w}(S)$  d'un tableau escaler  $S$  est un monôme en  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et  $q$ , obtenu de la façon suivante. Toute case vide de  $S$  se voit attribuer un  $q$  ou un  $1$ , selon les étiquettes les plus proches à droite dans sa ligne et en-dessous dans sa colonne :

- toute case vide qui voit un  $\beta$  à sa droite reçoit un  $1$  ;
- toute case vide qui voit un  $\delta$  à sa droite reçoit un  $q$  ;
- toute case vide qui voit un  $\alpha$  ou  $\gamma$  à sa droite, et un  $\alpha$  ou  $\delta$  en-dessous, reçoit un  $1$  ;
- toute case vide qui voit un  $\alpha$  ou  $\gamma$  à sa droite, et un  $\beta$  ou  $\gamma$  en-dessous, reçoit un  $q$ .

Après remplissage de toutes les cases, on définit  $\mathbf{w}(S)$  comme le produit des étiquettes de toutes les cases.

Par exemple, le poids du tableau escaler de la Figure 3.9 est  $\mathbf{w}(S) = q^3 \alpha^3 \beta^2 \gamma \delta$ . La correspondance entre les états du PASEP et les étiquettes du bord diagonal des tableaux escaliers est fort simple : les cases du bord peuvent être vues comme les sites du modèle, et les étiquettes  $\alpha$  et  $\delta$  (resp.  $\beta$  et  $\gamma$ ) correspondent aux sites occupés (resp. vides). Nous utiliserons une variable  $y$  (fugacité) pour tenir compte du nombre de particules dans chaque état. Plus précisément, nous définissons  $t(S)$  comme le nombre d'étiquettes  $\alpha$  ou  $\delta$  sur le bord de  $S$ . Par exemple, le tableau  $S$  de la Figure 3.9 a  $t(S) = 2$ . On définit alors la grande fonction de partition du PASEP comme

$$Z_n(y; \alpha, \beta, \gamma, \delta; q) = \sum_{S \text{ de taille } n} \mathbf{w}(S) y^{t(S)}. \quad (3.14)$$

Nous allons maintenant définir les tableaux boisés étiquetés, qui sont en bijection avec les tableaux escaliers, et qui jouissent des atouts des tableaux boisés : une structure arborescente naturelle, et un algorithme d'insertion qui permet une approche récursive.

Pour toute case  $c$  d'un diagramme de Ferrers  $D$ , on définit  $L_D(c)$  comme l'ensemble des cases situées dans la même colonne et au-dessus de  $c$  dans  $D$ . De façon symétrique,  $A_D(c)$  est l'ensemble des cases situées dans la même ligne, et à gauche de  $c$  dans  $D$ . Par un léger abus, nous utiliserons les mêmes notations pour un tableau  $T$  de forme  $D$ . Ces notions sont illustrées sur la Figure 3.10.

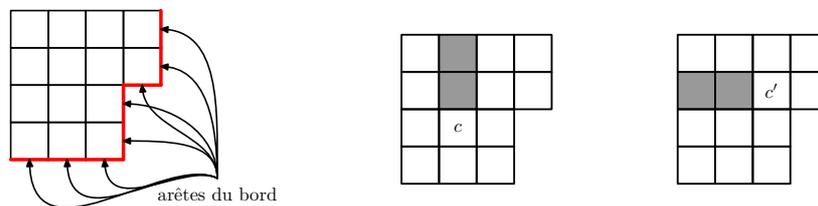


FIGURE 3.10 – Arêtes du bord,  $L_D(c)$  et  $A_D(c')$ .

**Définition 3.20.** Un tableau boisé étiqueté (TBÉ)  $T$  de taille  $n$  est un diagramme de Ferrers de demi-périmètre  $n + 1$  tel que toutes les arêtes du bord et certaines cases sont étiquetés par  $1, \alpha, \beta, \gamma$ , ou  $\delta$ , de telle sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :

- la case la plus au Nord-Est (racine) est étiquetée par  $1$  ;

- les étiquettes de la première ligne et de la première colonne sont les seules étiquettes 1 ;
- dans chaque ligne et colonne, il y a au moins une case étiquetée ;
- pour toute étiquette  $\alpha$  ou  $\gamma$ , toutes les cases de  $L_T(c)$  sont vides et au moins une case de  $A_T(c)$  est étiquetée ;
- pour toute étiquette  $\beta$  ou  $\delta$ , toutes les cases de  $A_T(c)$  sont vides et au moins une case de  $L_T(c)$  est étiquetée.

**Proposition 3.21.** Pour  $n \geq 2$ , les TBÉ de taille  $n$  sont en bijection avec les tableaux escaliers de taille  $n - 1$ .

*Démonstration.* Décrivons la correspondance  $\Lambda$  qui envoie un tableau escaler  $S$  de taille  $n - 1$  sur un TBÉ  $T$  (voir la Figure 3.11) :

- on ajoute à  $S$  une équerre  $(n + 1, 1^n)$  ;
- dans cette équerre, on étiquette par 1 : la racine, les deux arêtes du bord, et les cases de la première ligne qui voient un  $\beta$  ou  $\delta$  en-dessous, et les cases de la première colonne qui voient un  $\alpha$  ou  $\gamma$  à leur droite ;
- pour chaque étiquette  $\alpha$  ou  $\gamma$  (resp.  $\beta$  ou  $\delta$ ) sur le bord, on efface la colonne (resp. ligne) correspondante dans le tableau, qui est vide par définition, et on place l'étiquette sur l'arête du bord verticale (resp. horizontale) à leur gauche (resp. en-dessous).

Le résultat de ces opérations est un TBÉ  $T = \Lambda(S)$  de taille  $n$ . □

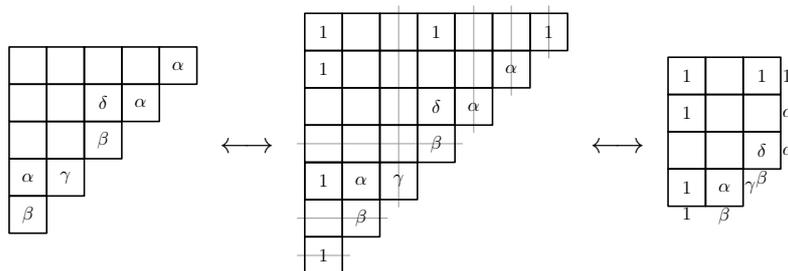


FIGURE 3.11 – La bijection  $\Lambda$ .

Une propriété agréable de la notion de TBÉ est la structure arborescente sous-jacente, de même que pour les tableaux boisés, comme illustrée à la Figure 3.12.

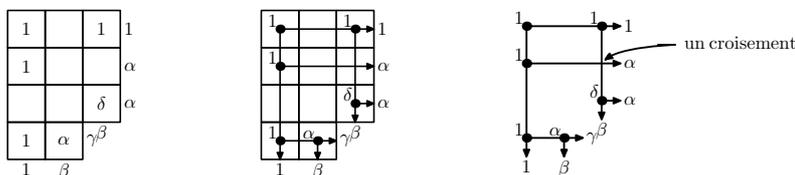


FIGURE 3.12 – La structure arborescente des tableaux escaliers.

### L'algorithme d'insertion

Décrivons maintenant une procédure d'insertion permettant de doter les TBÉ d'une structure récursive naturelle (où "naturelle" signifie "respectant la structure arborescente sous-jacente").

Cette procédure est essentiellement une version étiquetée de l’algorithme i défini à la Sous-section 3.2, et ne seront ici précisées que les différences avec l’insertion ”classique”.

En plus du choix d’une arête du bord, on peut ici choisir une paire de nouvelles étiquettes à ajouter au TBÉ.

Pour un TBÉ  $T$  et une arête de son bord  $e$ , un *bi-label compatible* est une paire d’étiquettes  $(x, y)$  telle que

- si  $e$  est dans la première ligne de  $T$  (donc verticale) :  $x = 1$  et  $y \in \{\beta, \delta\}$  ;
- si  $e$  est dans la première colonne de  $T$  (donc horizontale) :  $y = 1$  et  $x \in \{\alpha, \gamma\}$  ;
- sinon :  $x \in \{\alpha, \gamma\}$  et  $y \in \{\beta, \delta\}$ .

On définit une version étiquetée de l’insertion de colonne/ligne et de rubans, illustrées respectivement par les Figures 3.13 et 3.14. La *case spéciale* d’un TBÉ est comme dans le cas classique la case la plus à droite parmi celles en bas de colonnes et étiquetées (Figure 3.15).

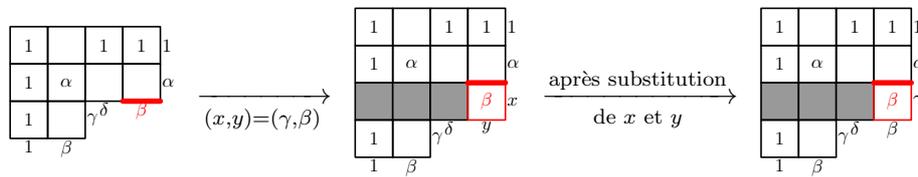


FIGURE 3.13 – L’insertion de ligne dans les TBÉ.

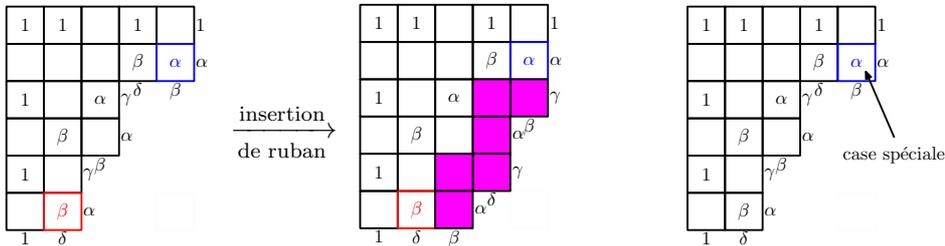


FIGURE 3.14 – L’insertion d’un ruban dans un TBÉ.

FIGURE 3.15 – La case spéciale d’un TBÉ.

**Définition 3.22** (Procédure d’insertion). Soit  $T$  un TBÉ de taille  $n$ ,  $e$  une arête de son bord, et  $(x, y)$  un bi-label compatible. L’insertion se compose de trois étapes :

1. repérer la case spéciale  $s$  de  $T$  ;
2. ajouter une ligne/colonne à  $T$  en position  $e$  avec le bi-label  $(x, y)$  ;
3. si  $e$  est à gauche de  $s$ , ajouter un ruban entre  $e$  et  $s$ .

Le résultat est un TBÉ  $T'$  de taille  $n + 1$ .

**Proposition 3.23.** Cette procédure d’insertion induit une bijection entre

- les TBÉ de taille  $n$  avec le choix d’une arête du bord et un bi-label compatible,
- les TBÉ de taille  $n + 1$ .

*Démonstration.* Comme dans le cas classique, la clé du succès est que la case étiquetée ajoutée à  $T$  est la case spéciale de  $T'$ , ce qui permet d’inverser la procédure.  $\square$

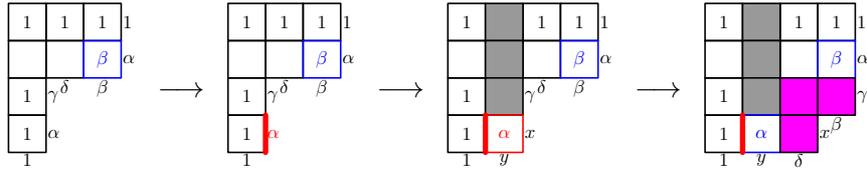


FIGURE 3.16 – La procédure d'insertion.

Cette procédure d'insertion est focalisée sur le bord du TBÉ, qui code les états du PASEP, à la différence d'autres approches récursives, fondées sur l'ajout d'une première colonne dans un tableau escalier [45, 42].

### Applications combinatoires (1) – Une formule produit pour $Z_n(1; \alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ .

**Proposition 3.24.** *Pour  $q = y = 1$ ,*

$$Z_n(1; \alpha, \beta, \gamma, \delta; 1) = \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma + \delta + j(\alpha + \gamma)(\beta + \delta)). \quad (3.15)$$

*Démonstration.* L'équation (3.15) est une conséquence immédiate des Propositions 3.23 et 3.21.  $\square$

### Applications combinatoires (2) – Étude de $Z_n(y; 1, 1, 0, 1; 1)$

Nous considérons ici des tableaux escaliers sans étiquette  $\gamma$ . Notons  $T(n, k)$  le nombre de tableaux escaliers  $S$  de taille  $n$  avec  $k$  étiquettes  $\alpha$  ou  $\delta$  sur le bord, i.e. tels que  $t(S) = k$ .

En utilisant l'algorithme d'insertion, on obtient la proposition suivante (pour les détails, on renvoie à [19]).

**Proposition 3.25.** *Les nombres  $T(n, k)$  vérifient la relation de récurrence :*

$$T(n, k) = (k+1)T(n-1, k) + (n+1)T(n-1, k-1) + (n-k+1)T(n-1, k-2) \quad (3.16)$$

d'où l'on déduit que le polynômes  $Z_n(y; 1, 1, 0, 1; 1) = \sum_{k \leq n} T(n, k)y^k$  a toutes ses racines dans le segment  $] -1, 0[$ ; en particulier, il est stable et log-concave.

### Applications combinatoires (3) – Une preuve bijective pour $Z_n(1; 1, 1, 1, 0; 0)$ .

Montrons maintenant comment notre approche donne aisément une bijection entre les tableaux escaliers sans étiquette  $\delta$  et sans poids  $q$  et une certaine classe de chemins énumérés par la suite A026671 de [96]. Ceci est une réponse au Problem 5.8 de [42].

Un *chemin paresseux* de taille  $n$  est un chemin sur le réseau  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- allant du point  $(0, 0)$  au point  $(2n, 0)$ ,
- de pas  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$  ou  $(2, 0)$ ,
- tel que ses pas  $(2, 0)$  n'apparaissent que sur l'axe d'ordonnée nulle  $\mathbb{Z} \times \{0\}$ .



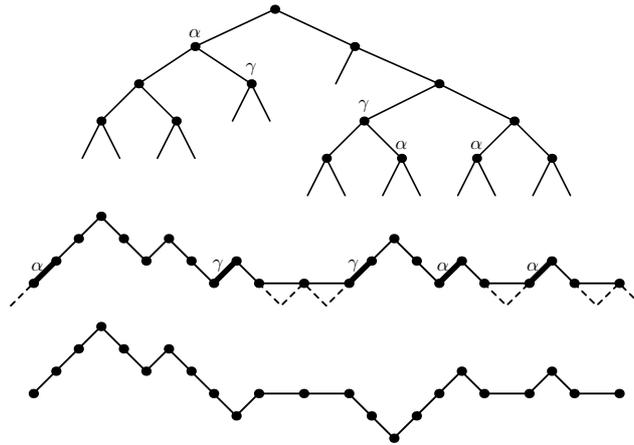


FIGURE 3.20 – Des arbres étiquetés de  $\mathcal{B}_n$  aux chemins paresseux.

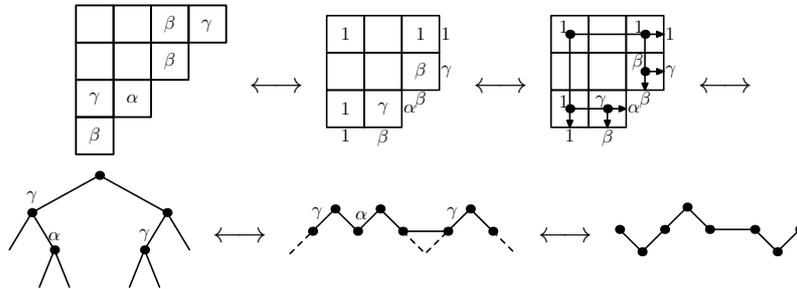


FIGURE 3.21 – La bijection  $\Phi$ .

la suite initiale maximale de pas  $(1, 1)$ ,  $H(\Phi(S))$  le nombre de pas  $(2, 0)$ ,  $F(\Phi(S))$  le nombre de facteurs, et  $N(\Phi(S))$  le nombre de facteurs négatifs dans  $\Phi(S)$ , alors :

- le nombre d'étiquettes  $\gamma$  dans  $S$  est donné par  $N(\Phi(S))$  ;
- le nombre d'étiquettes  $\alpha$  dans  $S$  est donné par  $M(\Phi(S)) - N(\Phi(S))$  ;
- le nombre d'étiquettes  $\beta$  dans  $S$  est donné par  $D(\Phi(S)) + H(\Phi(S)) - A(\Phi(S))$  ;
- le nombre de colonnes indexées<sup>3</sup> par  $\beta$  dans  $S$  est donné par  $H(\Phi(S))$  ;
- le nombre de lignes indexées<sup>3</sup> par  $\alpha$  ou  $\gamma$  dans  $S$  est donné par  $A(\Phi(S))$ .

**Remarque 3.28.** Parmi cette classe de tableaux escaliers  $S$ , ceux qui n'ont que des  $\beta$  ou  $\gamma$  sur le bord, *i.e.* tels que  $t(S) = 0$  sont en bijection avec les arbres binaires dont les sommets internes sont de profondeur gauche au plus 1, et tels que l'on interdit l'étiquette  $\alpha$  aux sommets externes. La bijection  $\Phi$  envoie ainsi ces tableaux sur les chemins paresseux de hauteur et profondeur bornées par 1, et dont les facteurs précédant un pas  $(2, 0)$  ou la fin du chemin sont négatifs (*cf.* Figure 3.22). Notons  $S(n)$  le nombre de tels chemins de taille  $n$ . En décomposant le chemin par rapport à ses deux premiers facteurs, on peut écrire la récurrence :

$$S(n) = 3S(n - 1) - S(n - 2)$$

3. Comme défini dans [45], les colonnes indexées par  $\beta$  ou  $\delta$  (resp. les lignes indexées par  $\alpha$  ou  $\gamma$ ) dans  $S$  correspondent aux étiquettes 1, hors la racine, dans la première ligne (resp. première colonne) de  $\Lambda(S)$ .

ce qui correspond (cf. A001519 dans [96]) à la récurrence des nombres de Fibonacci impairs  $F_{2n+1}$ , comme obtenu au Corollary 3.10 de [42].



FIGURE 3.22 – Un chemin de Fibonacci impair.

### 3.4 Autres travaux et perspectives

Plusieurs travaux en cours, et de nombreuses perspectives existent dans ce thème. Dans le cadre d'une étude combinatoire du PASEP (cas général à 5 paramètres), même si Corteel et Williams [45] ont décrit explicitement la probabilité stationnaire à l'aide des tableaux escaliers, plusieurs problèmes restent posés. En particulier, un problème ouvert est de définir une chaîne de Markov sur les objets combinatoires (tableaux escaliers ou autre) se projetant sur le PASEP. L'introduction des tableaux boisés étiquetés, dont la construction récursive est focalisée sur le bord des tableaux, qui décrit justement les états du PASEP, est prometteuse dans cette optique, et des travaux sont en cours.

Plusieurs travaux de nature purement combinatoire sont également en cours autour des tableaux boisés, j'en citerai deux : la description d'une classe de tableaux boisés en bijection avec les permutations de Baxter, et l'énumération des cases vides ou occupées du bord des tableaux boisés.

Enfin, nous sommes convaincus que notre approche, et en particulier notre procédure d'insertion qui "casse" la symétrie droite-gauche de certains objets par l'ajout de rubans privilégiant une direction, peut s'appliquer à d'autres formes de tableaux. Nous avons utilisé cette méthode dans l'étude des tableaux de Dyck [18] et cette idée a été reprise récemment par Kim *et. al.* [66] pour donner une élégante preuve bijective d'énumération de pavages de Dyck.



# Bibliographie

- [1] E. ARTIN, *Galois theory*, Notre Dame Lectures, University of Notre Dame Press (1944).
- [2] J.-C. AVAL, *Monomial bases related to the  $n!$  conjecture*, Discrete Math., **224** (2000), 15–35.
- [3] J.-C. AVAL, *On certain spaces of lattice diagram determinants*, Discrete Math. **256** (2002), 557–575.
- [4] J.-C. AVAL, *Quasi-invariant and super-coinvariant polynomials for the generalized symmetric group  $G_{n,m}$* , Ann. Sci. Math. Québec, **27** (2003), no. 2, 111–121.
- [5] J.-C. AVAL, *Conjecture  $n!$  et généralisations*, Publications du LaCIM, No 32, Montréal, 2004.
- [6] J.-C. AVAL, *Ideals and quotients of  $B$ -quasisymmetric functions*, Sem. Lothar. Comb., **54** (2006), B54d.
- [7] J.-C. AVAL, *Multivariate Fuss-Catalan numbers*, Disc. Math. **308** (2008) 4660–4669.
- [8] J.-C. AVAL, *Keys and alternating sign matrices*, Sem. Lothar. Comb. **59** (2008), B59f.
- [9] J.-C. AVAL, *On the symmetry of the partition function of some square ice models*, Theor. Math. Phys **161** (3) (2009), 1582–1589.
- [10] J.-C. AVAL, F. BERGERON, *Co-quasi-invariant spaces for generalized symmetric groups*, J. of Combin. Theory, Ser. A **119** (2012) 1432–1446.
- [11] J.-C. AVAL, F. BERGERON, N. BERGERON, *Lattice diagram polynomials in one set of variables*, Adv. in Appl. Math. **28** (2002), 343–359.
- [12] J.-C. AVAL, F. BERGERON, N. BERGERON, *Ideals of quasi-symmetric functions and Super-covariant polynomials for  $\mathcal{S}_n$* , Adv. Math., **81** (2004), no. 2, 353–367.
- [13] J.-C. AVAL, F. BERGERON, N. BERGERON, *Diagonal Temperley-Lieb invariants and harmonics*, Sem. Lothar. Comb., **54A** (2005), B54Aq (19 pages).
- [14] J.-C. AVAL, N. BERGERON, *Vanishing ideals of lattice diagram polynomials*, J. Combin. Theory Ser. A **99** (2002), 244–260.
- [15] J.-C. AVAL, N. BERGERON, *Catalan paths and quasi-symmetric functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 1053–1062.
- [16] J.-C. AVAL, N. BERGERON, *Schur partial derivative operator*, European J. Combin. **26** (2005), no. 6, 785–794.
- [17] J.-C. AVAL, N. BERGERON, H. LI, *Non-commutative Combinatorial Inverse Systems*, Internat. J. of Algebra **4** (2010) 1003–1020.

- [18] J.-C. AVAL, A. BOUSSICAULT, S. DASSE-HARTAUT, *Dyck tableaux*, Theor. Comp. Science, in press [hal-00618278].
- [19] J.-C. AVAL, A. BOUSSICAULT, S. DASSE-HARTAUT, *The tree structure in staircase tableaux*, GASCOM'2012 Proceedings [hal-00625911].
- [20] J.-C. AVAL, A. BOUSSICAULT, P. NADEAU, *Tree-like tableaux*, DMTCS Proceedings FPSAC'2011 63–74 [hal-00618274].
- [21] J.-C. AVAL, P. DUCHON, *Enumeration of quarter-turn symmetric alternating sign matrices*, Elec. J. of Combin. **17** (2010) R51.
- [22] J.-C. AVAL, P. DUCHON, *Half-turn symmetric FPLs with rare couplings and tilings of hexagons*, Theor. Comp. Science, in press [hal-00618319].
- [23] J.-C. AVAL, J.-C. NOVELLI, J.-Y. THIBON, *The  $\#$ -product in combinatorial Hopf algebras*, DMTCS Proceedings FPSAC'2011, 75–86 [hal-00501646].
- [24] J.-C. AVAL, X. VIENNOT, *The product of trees in the Loday-Ronco algebra through Catalan tableaux*, Semin. Lothar. de Comb. **63** (2010), B63h.
- [25] P. BAUMANN, C. HOHLWEG, *A Solomon's theory for the wreath products  $G \wr S_n$* , Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 1475-1538.
- [26] F. BERGERON, *Algebraic Combinatorics and Coinvariant Spaces*, CMS Treatise in Mathematics, CMS and A.K.Peters, 2009.
- [27] F. BERGERON, *Multivariate Diagonal Coinvariant Spaces for Complex Reflection Groups*, soumis [arXiv :1105.4358v4].
- [28] F. BERGERON, N. BERGERON, A. M. GARSIA, M. HAIMAN, G. TESLER, *Lattice diagram polynomials and extended Pieri rules*, Advances in Math. **142** (1999), 244-334.
- [29] F. BERGERON, A. GARSIA, G. TESLER, *Multiple Left Regular Representations Associated with Alternants of the Symmetric Group*, J. Combin. Theory A **91** (2000), 49–83.
- [30] N. BERGERON, F. DESCOUENS, M. ZABROCKI, *Generalization of the  $q, t$ -Catalan numbers*, DMTCS Proceedings (2008).
- [31] D. BRESSOUD *Proofs and Confirmations : The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge, England : Cambridge University Press, 1999.
- [32] A. BURSTEIN, *On some properties of permutation tableaux*, Ann. Comb. **11**(2007), 355–368.
- [33] L. CANTINI, A. SPORTIELLO, *Proof of the Razumov-Stroganov conjecture*, J. Combin. Theory Ser. A **118** Issue 5, 1549–1574.
- [34] F. CASELLI, C. KRATTENTHALER, B. LASS, P. NADEAU, *On the number of fully packed loop configurations with a fixed associated matching*, Electronic J. Combin. **11** (2) (2005), #R16.
- [35] C. CHEVALLEY, *Invariants of finite groups generated by reflections*, Amer. J. Math., **77** (1955), 778–782.
- [36] M. CIUCU, *Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry*, J. Combin. Theory Ser. A **77** (1997), 67-97.
- [37] M. CIUCU, C. KRATTENTHALER, *Plane partitions II :  $5 \frac{1}{2}$  symmetry classes*, Advanced Studies in Pure Mathematics **28** (2000), 83-103.

- [38] S. CORTEEL, P. HITCZENKO, *Expected values of statistics on permutation tableaux*, In 2007 Conference on Analysis of Algorithms, AofA 07, DMTCS Proc. AH (2007), 325–339.
- [39] S. CORTEEL, M. JOSUAT-VERGÈS, J.S. KIM, *Combinatorics of the permutation tableaux of type B*, GASCOM'2012 Proceedings [arXiv :1203.0154v1].
- [40] S. CORTEEL, J.S. KIM, *Combinatorics on permutation tableaux of type A and type B*, Europ. J. Combin. **32** Issue 4 (2011), 563–579.
- [41] S. CORTEEL, P. NADEAU, *Bijections for permutation tableaux*, Europ. J. of Comb. **30** 1 (2009), 295–310.
- [42] S. CORTEEL, R. STANLEY, D. STANTON, L. WILLIAMS, *Formulae for Askey-Wilson moments and enumeration of staircase tableaux*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 6009–6037.
- [43] S. CORTEEL, L. WILLIAMS, *Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process*, Adv. in App. Math. **39** No. 3 (2007), 293–310.
- [44] S. CORTEEL, L. WILLIAMS, *A Markov chain on permutation tableaux which projects to the PASEP*, Int. Math. Res. Not. (2007) article ID rnm055.
- [45] S. CORTEEL, L. WILLIAMS, *Staircase tableaux, the asymmetric exclusion process, and Askey-Wilson polynomials*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **107** (2010), no. 15, 6726–6730.
- [46] D. COX, J. LITTLE, D. O'SHEA, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Springer-Verlag, New-York, 1992.
- [47] J. DE GIER, *Loops, matchings and alternating-sign matrices*, Discrete Math. **298** (1-3), 365–388.
- [48] A. DE MEDICIS, X. VIENNOT, *Moments de polynômes de  $q$ -Laguerre et la bijection de Foata-Zeilberger*, Adv. in Appl. Math **15** (1994) 262–304.
- [49] B. DERRIDA, M. EVANS, V. HAKIM, V. PASQUIER, *Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation*, J. Phys. A : Math. Gen. **26** (1993), 1493–1517.
- [50] E. DUCHI, G. SCHAEFFER, *A combinatorial approach to jumping particles*, J. Combin. Theory Ser. A **110** (2005), 1–29
- [51] P. DUCHON, *On the link pattern distribution of quarter-turn symmetric FPL configurations*, DMTCS Proceedings, FPSAC 2008 [arXiv : math-CO/0711.2871].
- [52] A. GARSIA, J. HAGLUND, *A proof of the  $q, t$ -Catalan positivity conjecture*, Discrete Math. **256** (2002), 677–717.
- [53] A. M. GARSIA, M. HAIMAN, *A graded representation model for Macdonald's polynomials*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **90** (1993) no. 8, 3607-3610.
- [54] A. M. GARSIA, M. HAIMAN, *Some natural bigraded  $S_n$ -modules and  $q, t$ -Kostka coefficients*, The Foata Festschrift : Electronic J. Combin. **3** (1996) no. 2, Research Paper 24.
- [55] I. GESSEL, X. VIENNOT, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. in Math. **58** (1985) 300–321.
- [56] I.M. GESSEL, *Multipartite  $P$ -partitions and inner product of skew Schur functions*, Contemp. Math. **34** (1984), 289–301.

- [57] J. HAGLUND, *A polynomial expression for the Hilbert series of the quotient ring of diagonal coinvariants*, Adv. Math. **227** (2011), 2092–2106.
- [58] J. HAGLUND, M. HAIMAN, N. LOEHR, J. REMMEL, A. ULYANOV, *A combinatorial formula for the character of the diagonal coinvariants*, Duke Math. J. **126** (2005), 195–232.
- [59] J. HAGLUND, N. LOEHR, *A conjectured combinatorial formula for the Hilbert series for diagonal harmonics*, Discrete Math. **298** (2005), 189–204.
- [60] M. HAIMAN, *Hilbert schemes, polygraphs, and the Macdonald positivity conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 941–1006.
- [61] M. HAIMAN, *Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants*, Journal of Algebraic Combinatorics **3** (1994) 17–76.
- [62] M. HAIMAN, *Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane*, Invent. Math. **149**, no. 2 (2002), 371–407.
- [63] F. HIVERT, *Hecke Algebras, Difference Operators, and Quasi-Symmetric Functions*, Adv. in Math., **155** (2000), 181–238.
- [64] A. G. IZERGIN, *Partition function of the six-vertex model in a finite volume*, Sov. Phys. Dokl. **32** (1987) 878–879.
- [65] M. JOSUAT-VERGÈS *Combinatorics of the three-parameter PASEP partition function*, Elec. J. of Combinatorics **18** (2011), Article P22.
- [66] J.S. KIM, K. MESZAROS, G. PANOVA, D. B. WILSON, *Dyck tilings, linear extensions, descents, and inversions*, [arXiv :1205.6578].
- [67] V. E. KOREPIN, *Calculation of norms of Bethe wave functions*, Comm. Math. Phys. **86** (1982), 391–418.
- [68] V. E. KOREPIN, N. M. BOGOLIUBOV, A. G. IZERGIN, *Quantum Inverse Scattering Method, Correlation Functions and Algebraic Bethe Ansatz*, Cambridge Univ. Press, New York, 1993.
- [69] C. KRATTENTHALER, *Advanced Determinant Calculus*, Sémin. Lothar. Combin. **42** ("The Andrews Festschrift") (1999), Article B42q.
- [70] G. KUPERBERG, *Another Proof of the Alternating-Sign Matrix Conjecture*, Internat. Math. Res. Notes, No. 3, 139–150, 1996.
- [71] G. KUPERBERG, *Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof*, Annals of Math. **156** (2002) no3, 835–866.
- [72] G. KUPERBERG, *Four symmetry classes of plane partitions under one roof*, J. Combin. Theory, Ser. A **75** (2), 295–315.
- [73] V. LAKSHMIBAI, *Bases for Quantum Demazure modules*, in *Representations of Groups*, Banff 1994, CMS Conference Proceedings, vol 16, Canadian Math. Society (1995).
- [74] P. LALONDE, *q-Enumeration of alternating sign matrices with exactly one  $-1$* , Discrete Math. **256** Issue 3 (2002), 759–773.
- [75] T. LAM, L. K. WILLIAMS, *Total positivity for cominusculè Grassmannians*, New York J. Math. **14** (2008), 53–99.
- [76] A. LASCoux, M. P. SCHÜTZENBERGER, *Keys and Standard Bases*, Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988), IMA Vol. Math. Appl., 19, Springer, New York-Berlin, 1990, 12–144.

- [77] A. LASCoux, *Chern and Yang through ice*, Selecta Mathematica, soumis [hal-00622770].
- [78] A. LASCoux, M.-P. SCHÜTZENBERGER, *Arêtes et Tableaux*, 20-ème Séminaire. Lotharingien de Combinatoire, Alghero, Sept. 1988, 109–120.
- [79] F. LE GAC, *Quelques problèmes d'énumération autour des matrices à signes alternants*, Ph.D. Thesis, Université Bordeaux 1, 2011.
- [80] P. LITTELMANN, *A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras*, Invent. Math., **116** (1994), 329–346.
- [81] J.-L. LODAY, M. O. RONCO, *Hopf algebra of the planar binary trees*, Adv. Math. **139** (1998), no. 2, 293–309
- [82] I. MACDONALD, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Univ. Press, 1995, second edition.
- [83] P. A. MACMAHON, *Memoir on the Theory of the Partitions of Numbers. V : Partitions in Two-Dimensional Space*, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **211**, 75-110 (1912).
- [84] C. MALVENUTO, C. REUTENAUER, *Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra*, Journal of Algebra **177**, 967-982 (1995).
- [85] S. MASON, *An Explicit Construction of Type A Demazure Atoms*, J. Alg. Combinatorics **29** Issue 3 (2009), 295–313.
- [86] W. H. MILLS, D. P. ROBBINS, H. RUMSEY JR., *Proof of the Macdonald Conjecture*, Invent. Math. **66**, 73-87 (1982).
- [87] W. H. MILLS, D. P. ROBBINS, H. RUMSEY JR., *Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions*, J. Combin. Th. Ser. A **34**, 340-359 (1983).
- [88] P. NADEAU, *The structure of alternative tableaux*, J. of Combin. Theory A **118** Issue 5 (2011) 1638–1660.
- [89] S. OKADA, *Enumeration of symmetry classes of alternating sign matrices and characters of classical groups*, J. Algebraic Combin. **23** (2006) 43–69.
- [90] A. POSTNIKOV, *Total positivity, Grassmannians, and networks*, arXiv :math/0609764v1, 2006.
- [91] A.V. RAZUMOV, YU. G. STROGANOV, *Combinatorial nature of ground state vector of  $O(1)$  loop model*, Theor. Math. Phys. **138** (2004) 333–337.
- [92] A.V. RAZUMOV, YU.G. STROGANOV,  *$O(1)$  loop model with different boundary conditions and symmetry classes of alternating-sign matrices*, Theor. Math. Phys. **142** (2005) 237–243.
- [93] A. V. RAZUMOV, YU. G. STROGANOV, *Enumeration of half-turn symmetric alternating-sign matrices of odd order*, Theor. Math. Phys. **149** (2006) Issue 3, 1174-1198.
- [94] A. V. RAZUMOV, Y. G. STROGANOV, *Enumeration of quarter-turn symmetric alternating sign matrices of odd order*, Theor. Math. Phys. **149** (2006) Issue 3, 1639–1650.
- [95] D. P. ROBBINS, *Symmetry Classes of Alternating Sign Matrices*, [arXiv :math/0008045].
- [96] N. J. A. SLOANE, *A Handbook of Integer Sequences*, New York and London : Academic Press (1973).

- [97] R. STANLEY, *Enumerative Combinatorics Vol. 1*, Wadsworth and Brooks/Cole, 1986.
- [98] R. STANLEY, *Enumerative Combinatorics Vol. 2*, no. 62 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1999.
- [99] R. STEINBERG, *Differential equations invariant under finite reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **112** (1964), 392–400.
- [100] E. STEINGRÍMSSON, L. K. WILLIAMS, *Permutation tableaux and permutation patterns*, J. Combin. Theory Ser. A **114** 2 (2007), 211–234.
- [101] Y. G. STROGANOV, *A new way to deal with Izergin-Korepin determinant at root of unity*, arXiv :math-ph/0204042.
- [102] X. VIENNOT, *Alternative tableaux, permutations and partially asymmetric exclusion process*, Slides of a talk at the Isaac Newton Institute in Cambridge, 2008.
- [103] B. WIELAND, *A Large Dihedral Symmetry of the Set of Alternating Sign Matrices*, Electr. J. Comb. **7** R37 (2000).
- [104] L. K. WILLIAMS, *Enumeration of totally positive Grassmann cells*, Adv. in Math., **190** 2 (2005), 319–342.
- [105] D. ZEILBERGER, *Proof of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Electronic J. Combinatorics **3**, No. 2 (1996) R13, 1–84.