Habilitation à diriger des recherches

de l'Ecole Centrale de Lyon et de l'Université Claude Bernard Lyon I

Présentée à l'Ecole Centrale de Lyon

(spécialité : mécanique)

par

Pierre Carlotti

—-

Éléments de mécanique des fluides pour la modélisation des incendies

—-

Soutenue le 9 septembre 2013, devant le jury composé de :

Jean-Pierre Bertoglio	Ecole Centrale de Lyon	Rapporteur
Patrick Bontoux	M2P2 – UMR 6181 CNRS	Rapporteur
Alexis Coppalle	CORIA / INSA de Rouen	Président
Michel Lance	Université Claude Bernard Lyon I	Examinateur
Valéry Masson	CNRM-GAME / Météo France	Rapporteur
Richard Perkins	Ecole Centrale de Lyon	Examinateur

*** page laissé blache intentionnellement **

Résumé

Parmi les disciplines scientifiques qui sont utilisées pour prévoir la dynamique des incendies, la mécanique des fluides a un rôle particulier, car elle sert d'interface entre les disciplines, en propageant, si l'on peut dire, l'aléa vers les personnes et les biens. De plus, cette mécanique des fluides est tout sauf évidente : on rencontre des écoulements à masse volumique fortement variable qui conduisent souvent à utiliser les modèles bien au delà de leurs validations académiques. Cela peut en particulier conduire à des incertitudes non maîtrisées. L'objet du présent ouvrage est de mettre en perspective ces enjeux et de proposer une vision des progrès récents et des pistes à explorer pour la recherche en mécanique des fluides dans le contexte des incendies en bâtiment.

Après la mise en place des équation les plus générales possibles permettant de prendre en compte les variations fortes de masse volumique causées par variations de température et de concentration d'un scalaire, le présent document analyse finement trois écoulement *canoniques* c'est à dire des écoulements représentatifs d'un nombre restreint de phénomènes en jeu dans les situations réelles. Cette analyse est généralisée ensuite par l'emploi de la notion de variable d'intérêt, qui consitue un moyen de qualifier quantitativement, et non à dire d'expert, la cible à atteindre en matière de sécurité et en parallèle la robustesse d'une simulation. Chacun des chapitres, au fil de l'exposé, contient des pistes pour des travaux de recherche complémentaires permettant de mieux comprendre certains aspects. Ceci permet de remettre en perspective l'ensemble des problématiques rencontrées et d'en tirer des recommandations, tant pour les recherches à mener que pour les applications d'ingénierie.

Au delà des perspectives dégagées au fil du document, il importe de mettre en relief deux éléments majeurs. Premier élément majeur, les progrès en matière de simulation permettent maintenant d'aller au delà des modèles de zone prévoyant uniquement une température de couche chaude et une hauteur d'interface. Second point majeur, qui est corrélatif au premier : il ne sert à rien de pratiquer des simulations de type modèle de champ si ce n'est que pour en tirer quelques planches graphiques en couleur. Un enjeu essentiel lorsque l'on utilise des modèles de champs est de déterminer la ou les (mais cela doit rester un petit nombre) variables d'intérêt pertinentes au vu des enjeux à analyser. Ces variables d'intérêt doivent alors être utilisées dans deux buts : déterminer si le niveau de sécurité recherché peut être atteint, mais aussi réaliser des études de sensibilité aux divers paramètres d'entrée des simulations.

Table des matières

1 Introduction **9**

2 Les équations de la dynamique des fluides avec fortes variations de masse volumique **11**

2.1 Thermodynamique d'un système gazeux avec fortes variations de masse volumique 11
2.1.1 Système fermé à volume constant 11
2.1.2 Système à pression imposée 13
2.1.3 Sytème ouvert à pression imposée 14
2.1.4 Prise en compte de la variation de la chaleur spécifique . . 18
2.2 Equations de Navier Stokes 24
2.2.1 Introduction 24
2.2.2 Forme générale 25
2.2.3 Hypothèse de faible nombre de Mach 27
2.2.4 Réduction de l'équation d'enthalpie 28
2.2.5 Forme finale du système d'équations 30
2.2.6 Approximation de Boussinesq 31
2.2.7 Equation de Poisson sur la pression dans le cas non Boussinesq 35
2.2.8 Synthèse et enjeux de recherche 37
2.3 Modèles complémentaires 38
2.3.1 Prise en compte du rayonnement 38
2.3.2 Modélisation de la combustion 40
2.3.3 Modélisation de l'aspersion par des gouttelettes d'eau . . 41
2.4 Prise en compte de la turbulence 46
2.4.1 Introduction 46
2.4.2 Equations aux moyennes de Favre et équations filtrées . . 46
2.4.3 Fermeture des équations dans le cadre de l'approximation de Boussinesq 51
2.4.4 Fermeture des équations avec de grandes variations de masse volumique 58

2.5 Conclusion et perspectives 59

3 Ecoulements limités par une paroi **61**
3.1 Introduction 61
3.2 Ecoulement laminaire en canal avec parois chauffées différentiellement 61
3.2.1 Introduction 61
3.2.2 Résolution des équations 62
3.2.3 Flux de chaleur vertical 66
3.2.4 Cas d'un écoulement Boussinesq 66
3.2.5 Discussion et perspectives 67
3.3 Ecoulements turbulents stratifiés en canal 68
3.3.1 Flux vertical de chaleur en écoulement parallèle : cas de la couche limite atmosphérique 68
3.3.2 Evolution du flux vertical de chaleur en fonction des nombres de Reynolds et de Froude 69
3.3.3 Perspectives 71
3.4 Statistiques de la turbulence en couche limite 71
3.4.1 Introduction 71
3.4.2 Outils pour caractériser les mouvement verticaux préférentiels 72
3.4.3 Mouvements ascendants et descendants en couche limite neutre 75
3.4.4 Perspectives 77
3.5 Conclusion et perspectives 77

4 Etude des panaches **79**
4.1 Introduction 79
4.2 Modèles phénoménologiques de panaches d'incendie 80
4.3 Flux passant au travers de plans horizontaux 81
4.3.1 Définition des flux convectifs 81
4.3.2 Equation d'évolution des flux 82
4.3.3 Dérivation classique des équations 87
4.3.4 Mise sous forme adimensionnelle des équations 89
4.4 Panaches purs, forcés et paresseux 90
4.4.1 Panaches purs 90
4.4.2 Résolution des équations des panaches dans le cas général 93
4.4.3 Panaches paresseux 94
4.4.4 Origine virtuelle pour le panache paresseux 98
4.4.5 Panaches forcés 104
4.5 Sources de flottabilité réparties 107

4.5.1 Résolution des équations pour $z \in [0,h]$ . . . 108
4.5.2 Solution des équations pour $z \geq h$ . . . 110
4.5.3 Approximation uniforme de la solution raccordée pour $\beta = 1$ et $h = \ell$ . . . 111
4.6 Estimation a posteriori des ordres de grandeur des termes diffusifs 112
4.6.1 Introduction . . . 112
4.6.2 Diffusion de la quantité de mouvement . . . 114
4.6.3 Diffusion de la chaleur . . . 115
4.6.4 Analyses des cas des panaches purs, paresseux et avec source répartie . . . 115
4.7 Conclusion et perspectives . . . 116

5 Source de chaleur dans un pièce ventilée 119
5.1 Introduction . . . 119
5.2 Présentation du cas considéré . . . 120
5.3 Pièce avec source de chaleur . . . 121
5.3.1 Introduction . . . 121
5.3.2 Solution simplifiée en l'absence d'échanges radiatifs et de pertes de chaleur aux parois . . . 123
5.3.3 Prise en compte des pertes de chaleur aux parois et des échanges radiatifs . . . 125
5.4 Les limites de la théorie . . . 126
5.4.1 Stratification thermique et tenabilité . . . 126
5.4.2 Hauteur de couche enfumée dans les modèles CFD . . . 126
5.4.3 Proposition d'un choix alternatif pour estimer les conditions de sécurité . . . 127
5.5 Sensibilité aux paramètres d'entrée d'une simulation d'un feu dans une pièce ventilée . . . 128
5.5.1 Présentation de la méthode . . . 128
5.5.2 Sensibilité aux paramètres directs . . . 131
5.5.3 sensibilité aux paramètres indirects . . . 132
5.5.4 Conclusion . . . 139
5.6 Perspectives . . . 139

6 Analyse du niveau de confiance à accorder à une simulation : études de cas 141
6.1 Introduction . . . 141
6.2 Méthode mathématique pour analyser le niveau de confiance . . . 142
6.3 Application à un cas réel . . . 144
6.3.1 Description du projet . . . 144
6.3.2 Application de la méthode générale . . . 146

6.3.3 Description des simulations 148
6.3.4 Résultats 150
6.4 Application aux incendies en tunnels 154
6.5 Perspectives 155

7 Conclusions et perspectives **157**

A Thèses co-encadrées **159**

B Articles non cités dans le corps du document **161**

Bibliographie **161**

Chapitre 1

Introduction

Les incendies représentent un enjeu majeur dans la plupart des pays. Tous les ans, en France, ils sont à l'origine d'un mort pour 100 000 habitant, et le coût direct associé est estimé à 0,2 % du produit intérieur brut. En parallèle, le coût des mesures de protection mises en oeuvre en bâtiment est estimé à environ 2,5 % du coût de la construction (source : International Association for the Study of Insurance Economics – www.genevaassociation.org). De plus, l'évolution des pratiques constructives d'une part et l'évolution des attentes de la société en matière de sécurité constituent des moteurs complémentaires du besoin d'ingénierie et de recherche dans le domaine des incendies en bâtiment. L'un des traits majeurs de l'évolution des pratiques constructives aujourd'hui est la recherche de solutions de construction durable, ce qui conduit d'une part à mettre en oeuvre de nouveaux matériaux, à impact carbone limité, et d'autre part à viser une amélioration des performances globales des bâtiments (isolation, maîtrise de la ventilation). Ceci peut créer de nouvelles menaces (risque accru d'embrasement généralisé rapide, risque accru de propagation de gaz imbrûlés pouvant se propager en dehors de la zone initiale du feu, par exemple). L'évolution des attentes de la société va quant à elle dans le sens d'un souhait d'un niveau de sécurité toujours plus élevé, dans un contexte de vieillissement de la population. On constate aussi un souhait de plus en plus large que l'ingénierie puisse prévoir toutes les situations à risque pour les éviter. Tout cela fait qu'il y a un usage de plus en plus répandu de la science qui vise à prévoir le développement des feux, le risque qu'ils dégénèrent en incendie et le risque que cet éventuel incendie peut faire porter sur les personnes et les biens. Cette science appliquée repose sur de très nombreuses disciplines, en particulier la physique, la chimie, la thermique, la mécanique des fluides et la science du comportement humain en cas de situation dangeureuse (aspect sciences humaines de la cyndinique).

Parmi ces disciplines, la mécanique des fluides a un rôle particulier, car elle sert d'interface entre les disciplines, en propageant, si l'on peut dire, l'aléa vers

les personnes et les biens. De plus, cette mécanique des fluides est tout sauf évidente : on rencontre des écoulements à masse volumique fortement variable qui conduisent souvent à utiliser les modèles bien au delà de leurs validations académiques. Par exemple, dans un écoulement donnée et à un même instant, le nombre de Reynolds local peut varier de 0 à 10^7 suivant la position dans l'espace ; dans un feu en tunnel ; le nombre de Richardson peut varier de -10 à l'infini sur une hauteur de 5 m. Cela peut en particulier conduire à des incertitudes non maîtrisées.

L'objet du présent ouvrage est de mettre en perspective ces enjeux et de proposer une vision des progrès récents et des pistes à explorer pour la recherche en mécanique des fluides dans le contexte des incendies en bâtiment. Le chapitre 2 met en place les équation les plus générales possibles permettant de prendre en compte les variations fortes de masse volumique causées par variations de température et de concentration d'un scalaire, puis montre comment s'applique l'hypothèse de faible nombre de Mach. La démarche est de repartir de la thermodynamique élémentaire, qui est souvent occultée mais néanmoins pleine d'enseignements. La question de la modélisation de la turbulence est ensuite abordée.

Les chapitres 3, 4 et 5 consistent en l'analyse fine d'écoulement *canoniques*, au sens de [1], c'est à dire des écoulements représentatifs d'un nombre restreint de phénomènes en jeu dans les situations réelles. L'approche est néanmoins différente de celle de [1], qui se concentrait sur la zone de combustion, alors qu'ici on s'attache plus à caractériser la propagation de l'aléa incendie dans un bâtiment. Les rôle des écoulements canoniques est d'une part d'améliorer l'intuition que l'on peut avoir des phénomènes en les isolant, et d'autre part de pouvoir servir de cas de référence pour les simulations. Les chapitres 3, 4 et 5 s'attachent respectivements aux écoulements limités par une paroi, aux panaches et aux feux dans une pièce bien ventilée. Le chapitre 6 introduit la notion de variable d'intérêt, qui consitue un moyen de qualifier quantitativement, et non à dire d'expert, la cible à atteindre en matière de sécurité et en parallèle la robustesse d'une simulation. On montre comment appliquer cette méthode à un cas réel, une salle de spectacle, et on discute du choix le plus opportun dans un autre exemple, celui des tunnels. Chacun de ces chapitres, au fil de l'exposé, contient des pistes pour des travaux de recherche complémentaires permettant de mieux comprendre certains aspects. Enfin, le chapitre 7 remet en perspective l'ensemble des résultats présentés et en tire des recommandations, tant pour les recherches à mener que pour les applications d'ingénierie.

Chapitre 2

Les équations de la dynamique des fluides avec fortes variations de masse volumique

2.1 Thermodynamique d'un système gazeux avec fortes variations de masse volumique

La thermodynamique permet de décrire les évolutions des grandeurs caractéristiques d'une masse de gaz qui est l'objet d'échanges d'énergie sous forme de chaleur ou de travail. En général, cette description se fait pour une masse de gaz fixée, contenue dans un récipient de volume constant ou dans un système (de type récipient fermé par un piston) permettant d'assurer une pression constante (et dans ce cas le volume est variable). L'objet de cette section est de présenter le cas où le système est ouvert, c'est à dire où la masse n'est pas une grandeur conservée lors des transformations, car ce cas correspond à celui rencontré par exemple lors d'un incendie dans une pièce ventilée. Avant de traiter ce cas, nous remettrons en place les notations en se focalisant sur les deux cas classiques des systèmes fermés à volume puis à pression constants.

2.1.1 Système fermé à volume constant

On considère une certaine quantité de gaz (masse m) dans un volume fixé V (voir figure 2.1). L'énergie interne de cette masse de gaz est noté U (voir par exemple [2] pour des rappels de thermodynamique des gaz). La question posée est de connaître l'évolution de la température (et de la pression associée) dans l'enceinte lorsque l'on y injecte une certaine quantité de chaleur $\dot{Q}dt$ pendant un temps dt, en supposant que le gaz se comporte comme un gaz parfait. Un gaz

parfait est ici défini comme (1) un gaz dont l'énergie interne ne dépend que de la température (d'où l'on peut écrire $U(T) = \int_0^T mC_V(T')dT'$ – cette relation définissant la chaleur spécifique à volume constant C_V) et (2) dont les variables d'état (P, V et T pour une quantité de gaz fixée de n moles) sont liées par l'équation des gaz parfaits

$$PV = nRT.$$

Le nombre de moles n est lié à la masse considérée par la relation $n = m/M$, avec M la masse molaire. Ainsi, comme la variation d'énergie interne pendant le temps dt s'écrit comme la somme de la variation due aux échanges de chaleur δQ et de travail $-PdV$, $dU = \delta Q - PdV$, et que le volume de l'enceinte est constant, cette variation est

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q} - h_e(T - T_0)S. \tag{2.1}$$

On a ici supposé que les pertes de chaleur à travers les parois pouvaient se mettre sous la forme $h_e(T - T_0)S$, avec h_e un coefficient d'échange [1], S la surface de la paroi concernée, T_0 la température extérieure et T la température dans l'enceinte.

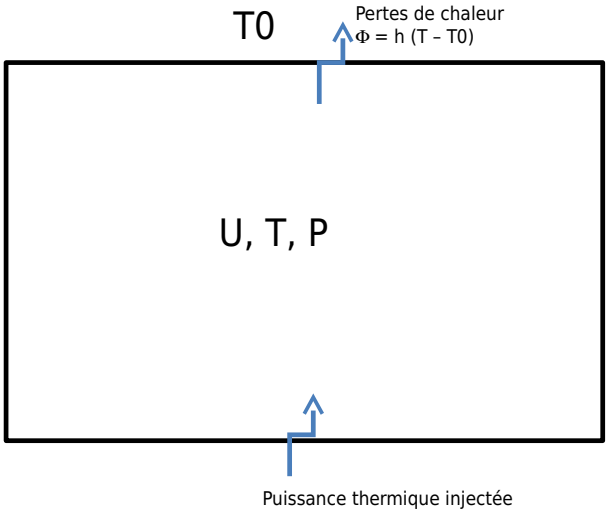


FIGURE 2.1 – Resprésentation schématique d'une enceinte à volume constant V sans échange de matière mais avec des échanges d'énergie.

Pour un gaz parfait, on a vu que $U(T) = \int_0^T mC_V dT$, et donc $\frac{dU}{dt} = mC_V \frac{dT}{dt}$.

1. A ce niveau de modélisation très simplifié, le choix d'exprimer les pertes aux parois par un coefficient d'échange permet de conserver une approche simple tout en étant réaliste.

L'équation (2.1) se réduit donc à

$$mC_V \frac{dT}{dt} = \dot{Q} - h_e(T - T_0)S$$

et la loi des gaz parfaits à $\frac{T}{P} = \frac{V}{nR}$ constante. Ces deux équations permettent donc de calculer à tout instant P et T en fonction de $\dot{Q}$ dans le cas de l'enceinte fermé de volume constant V.

2.1.2 Système à pression imposée

Le cas de l'enceinte fermée de volume constant ne représente qu'une minorité des cas pour lesquels la problématique de l'incendie se pose. En général, on est plutôt concerné par des enceintes de volume fixé mais ouvertes, c'est à dire permettant des échanges de matière avec une pression imposé par des conditions externes (en particulier le système de ventilation). Avant d'analyser ce cas, on considère ici le cas d'une enceinte contenant une masse de gaz fixée m, de volume variable, avec une pression extérieure imposée (voir figure 2.2).

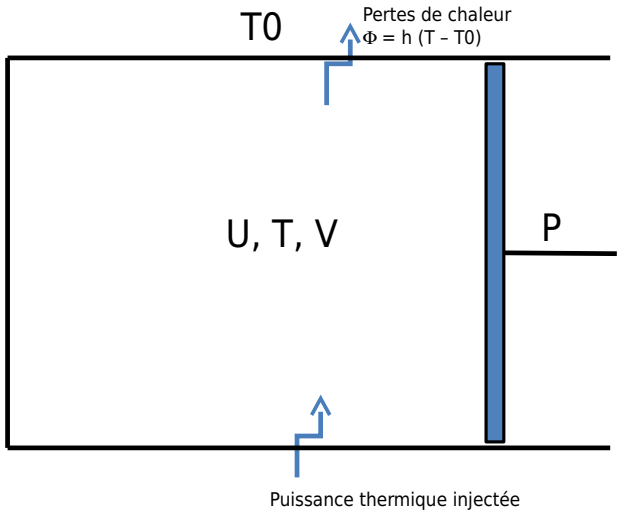


FIGURE 2.2 – Représentation schématique d'une enceinte à volume variable mais pression imposée, sans échange de matière mais avec des échanges d'énergie.

L'équation sur l'énergie interne s'écrit alors $dU = \dot{Q}dt - h_e(T - T_0)Sdt - PdV$. Cette équation est peu maniable car la variation de V est inconnue. On utilise alors l'enthalpie, définie par

$$H = U + PV$$

pour écrire $dH = \dot{Q}dt - h_e(T-T_0)Sdt + VdP$. Le volume V est variable, mais à l'ordre dominant cela donne bien :

$$\frac{dH}{dt} = \dot{Q} - h_e(T-T_0)S + V\frac{dP}{dt}. \tag{2.2}$$

Pour un gaz parfait, on a $H(T) = \int_0^T mC_P(T')dT'$ et $C_P - C_V = R$ (voir [2]). Il vient donc $\frac{dH}{dt} = mC_P\frac{dT}{dt}$, et comme $V = nRT/P$, on a :

$$mC_P\frac{dT}{dt} = \dot{Q} - h_e(T-T_0)S + \frac{nRT}{P}\frac{dP}{dt}$$

ce qui permet de calculer à tout instant les deux inconnues du problème T et V en fonction de $\dot{Q}$ dans l'enceinte à pression imposée $P = P(t)$, soit, tout simplement, pour P constante :

$$mC_P\frac{dT}{dt} = \dot{Q} - h_e(T-T_0)S.$$

Il importe de noter que comme le volume est variable, la surface d'échange S doit elle aussi a priori être variable, dans des conditions qui dépendent de la géométrie précise du domaine considéré.

2.1.3 Sytème ouvert à pression imposée

Equations générales

On considère maintenant le cas d'une enceinte de volume fixé V mais permettant des échanges de matière par le biais d'une part d'une injection de gaz à débit volumique Q_i et température T_0 imposés, et d'autre part par le biais d'une conduite à l'extrémité de laquelle la pression P est fixée, telle que l'écoulement dans cette conduite soit une extraction au débit Q_e, comme représenté sur la figure 2.3(a).

Pour résoudre ce cas, on travaille sur un système fermé fictif (voir figure 2.3(b)), constitué du volume initial auquel on ajoute les volumes correspondant aux gaz injectés et extraits pendant le temps dt. On utilise l'indice F pour ce système, l'indice i pour le sous système constitué du gaz contenu dans le tuyau d'injection et l'indice e pour le sous système constitué du gaz contenu dans le tuyau d'extraction. Ceci permet d'écrire la conservation de la masse et de l'enthalpie sur ce système :

$$\frac{d(\rho V)}{dt} - \rho_0 Q_i + \rho Q_e = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{d[\rho V h(T)]}{dt} - \rho_0 Q_i h(T_0) + \rho Q_e h(T) = \dot{Q} - h_e(T-T_0)S + V\frac{dP}{dt} \tag{2.4}$$

On a noté ici $h(T)$ l'enthalpie massique à la température T, définie à une constante additive près. On choisit cette constante de telle sorte qu'à une température de

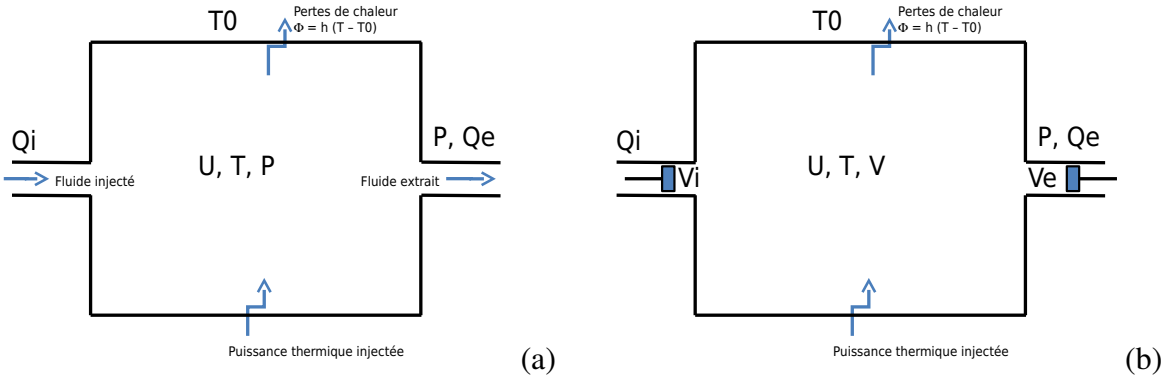


FIGURE 2.3 – Représentation schématique d'une enceinte de volume fixé et avec des échanges de matière : (a) représentation avec des flux ; (b) représentation comme une enceinte fermée à pression imposée.

référence T_{ref}, on ait $h(T_{ref}) = 0$. En combinant les équations de conservation de la masse et de l'enthalpie, on obtient, pour toute constante h_0 ayant les dimensions d'une enthalpie,

$$\frac{d[\rho V(h(T)+h_0)]}{dt} - \rho_0 Q_i(h(T_0)+h_0) + \rho Q_e(h(T)+h_0) = \dot{Q} - h_e(T-T_0)S + V\frac{dP}{dt}.$$

On vérifie bien ainsi que le choix de la température de référence est arbitraire.

A ce stade, reste à déterminer Q_e, qui, rappelons le, n'est pas imposé directement, mais déduit de la contrainte de pression imposée en sortie. On le fait en utilisant la conservation de la masse, qui donne :

$$Q_e = \frac{\rho_0}{\rho} Q_i - \frac{V}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

Comme la loi des gaz parfaits $\rho = \frac{M}{R}\frac{P}{T}$ est supposée vérifié, on a

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}$$

et donc

$$Q_e = \frac{P_0 T}{P T_0} Q_i - \frac{V}{P}\frac{dP}{dt} + \frac{V}{T}\frac{dT}{dt}$$

Cette dernière expression peut s'injecter dans l'équation (2.4), ce qui clôt le système.

Cas d'une pression en sortie constante

Les cas pratiques que nous rencontrerons dans le présent document sont avec une pression de référence constante, et on fait donc cette hypothèse ici pour alléger les expressions. L'équation (2.4) s'écrit dans ce cas :

$$\frac{d[\rho V h(T)]}{dt} - \rho_0 Q_i h(T_0) + \rho Q_e h(T) = \dot{Q} - h_e(T - T_0)S$$

avec $Q_e = \frac{T}{T_0} Q_i + \frac{V}{T} \frac{dT}{dt}$. Il vient donc

$$\frac{d[\rho V h(T)]}{dt} - \rho_0 Q_i h(T_0) + \rho \frac{T}{T_0} Q_i h(T) = \dot{Q} - h_e(T - T_0)S - \frac{\rho V h(T)}{T} \frac{dT}{dt}.$$

Comme précédement, $C_P(T) = \frac{dh}{dT}$ et on a donc $h(T) = \int_{T_{ref}}^{T} C_P(T')dT'$. On définit en outre :

$$C'_P(T) = \frac{\int_{T_{ref}}^{T} C_P(T')dT'}{T - T_{ref}}. \tag{2.5}$$

Avec ces notations, on a $h(T) = C'_P(T) \times (T - T_{ref})$, d'où :

$$\begin{aligned} V \frac{d[\rho C'_P(T) \times (T - T_{ref})]}{dt} &- \rho_0 Q_i C'_P(T_0) \times (T_0 - T_{ref}) + \rho \frac{T}{T_0} Q_i C'_P(T) \times (T - T_{ref}) \\ &= \dot{Q} - h_e(T - T_0)S - \frac{\rho V C'_P(T) \times (T - T_{ref})}{T} \frac{dT}{dt}. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau l'équation de conservation de la masse, cette équation se simplifie en

$$\begin{aligned} V \frac{d[\rho T C'_P(T)]}{dt} &- \rho_0 T_0 Q_i C'_P(T_0) + \rho T \frac{T}{T_0} Q_i C'_P(T) \\ &= \dot{Q} - h_e(T - T_0)S - \frac{\rho T V C'_P(T)}{T} \frac{dT}{dt}. \end{aligned}$$

La loi des gaz parfaits à pression constante s'écrivant $\rho T = \rho_0 T_0$, on a maintenant :

$$\begin{aligned} V \rho_0 T_0 \frac{C'_P(T)}{T} \left(1 + \frac{T}{C'_P(T)} \frac{dC'_P(T)}{dT}\right) \frac{dT}{dt} &- \rho_0 T_0 Q_i [C'_P(T_0) - \frac{T}{T_0} C'_P(T)] \\ &= \dot{Q} - h_e(T - T_0)S \end{aligned} \tag{2.6}$$

Il faut remarquer que si C_p est indépendant de la température, alors $C'_P = C_P$, et alors l'équation se simplifie en

$$V \rho_0 \frac{T_0}{T} C_P \frac{dT}{dt} = \dot{Q} - h_e(T - T_0)S + \rho_0 C_P T_0 Q_i (1 - \frac{T}{T_0})$$

avec $V\rho_0\frac{T_0}{T} = V\rho$ qui est la masse $m(t)$ présente dans l'enceinte à l'instant t. Cette équation est très proche de celle obtenue pour une enceinte fermée avec pression constante, mais son interprétation est différente, car le membre de gauche ne représente pas la variation d'enthalpie du système, la masse étant maintenant variable.

Résolution de l'équation pour C_P indépendant de la température

L'équation (2.6) étant relativement complexe, et la chaleur spécifique variant en fait assez peu sur la plage de température considérée (voir 2.1.4), on va maintenant la résoudre en supposant d'une part que C_P est indépendant de T et d'autre part en se fixant les conditions suivantes : puissance injectée constante $\dot{Q}$ pour $t > 0$, en supposant que pour $t \leq 0$, la puissance injectée est nulle et le système est en équilibre avec son environnement.

On note $\theta = \frac{T}{T_0}$, $\theta(t=0) = 1$ et $E_0 = \rho_0 T_0 C_P V$. Cette dernière grandeur a la dimension d'une énegie et représente une mesure de l'inertie thermique du système. On note aussi

$$\tau_0 = \frac{E_0}{\dot{Q}} \tag{2.7}$$

la constante de temps issue du rapport de l'inertie thermique sur la puissance injectée, et $t' = T/\tau_0$. Avec ces notations, l'équation (2.6) s'écrit :

$$\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt'} = 1 - \Big(\frac{h_e T_0 S}{\dot{Q}} + \frac{\rho_0 C_P T_0 Q_i}{\dot{Q}}\Big)(\theta - 1)$$

soit, en notant $\alpha = \frac{\dot{Q}+h_e T_0 S+\rho_0 C_P T_0 Q_i}{\dot{Q}} > 1$ le rapport de la chaleur totale entrant dans l'enceinte par unité de temps à la puissance de la source de chaleur et $\beta = \frac{h_e T_0 S+\rho_0 C_P T_0 Q_i}{\dot{Q}+h_e T_0 S+\rho_0 C_P T_0 Q_i} < 1$ le rapport de la chaleur sortant de l'enceinte lorsque $\theta = 1$ par unité de temps à la chaleur totale entrant dans l'enceinte par unité de temps :

$$\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt'} = \alpha(1 - \beta\theta) \tag{2.8}$$

Cette équation différentielle est à variables séparables, sous la forme

$$\Big(\frac{1}{\theta} + \frac{\beta}{1-\beta\theta}\Big)\frac{d\theta}{dt'} = \alpha$$

et s'intègre donc en

$$\theta = \frac{1}{\beta + (1-\beta)e^{-\alpha t'}}. \tag{2.9}$$

Ainsi, la température atteint une asymptote en $T = T_0/\beta$, soit

$$T = T_0 + \frac{\dot{Q}}{h_e S + \rho_0 C_P Q_i} \tag{2.10}$$

selon une loi exponentielle de constante de temps $\tau = \tau_0/\alpha$. On reconnait ici, si l'on néglige les pertes en paroi, la température de dilution utilisée dans les études de ventilation de tunnels, voir [3].

2.1.4 Prise en compte de la variation de la chaleur spécifique

Les calculs ci-dessus ont été menés avec des chaleurs spécifiques constantes. Cette hypothèse repose sur deux approximations : d'une part, on a négligé les effets dus à la variation de la chaleur spécifique avec la température pour une espèce chimique fixée, et d'autre part on a négligé les effets dus à la variation de la composition de l'air à cause de la combustion. Comme pour un gaz parfait, la formule de Mayer (voir [2]) donne $C_P - C_V = R$, et comme de plus, pour les applications pratiques, on travaille à pression imposée, on se limite ici la discussion à la variation de la chaleur spécifique à pression fixée C_P.

Variation de la chaleur spécifique avec la température

La chaleur spécifique représente la capacité des molécules d'un gaz à emmagasiner de l'énergie lorsque la température augmente. Cette énergie peut être stockée sous forme d'énergie cinétique des molécules, mais aussi sous la forme d'énergie de rotation et de vibration des molécules (voir par exemple [4]). Ainsi, lorsqu'un gaz est composé uniquement de molécules monoatomiques (c'est le cas des gaz rares comme l'argon), la chaleur spécifique ne dépend pas de la température. Pour un gaz composé de molécules diatomiques, on constate qu'à très faible température, le terme prépondérant est l'énergie cinétique des molécules, mais lorsque la température augmente, les modes de rotation et de vibration font que la chaleur spécifique augmente.

La chaleur spécifique de l'air en fonction de la température est donné sur la figure 2.4. La variation est de l'ordre de 20 % dans la plage de température de 273 à 1273 K. On en déduit de C'_P et $\frac{T}{C'_P(T)} \frac{dC'_P(T)}{dT}$ varient tous deux de l'ordre de 10 % sur cette plage de température. Comme cette variation est relativement petite, la nature mathématique de l'équation (2.6) n'est pas changée. Elle peut donc être étudiée par une méthode de perturbation à partir de la solution avec C_P constant.

On note comme précédemment $\theta = \frac{T}{T_0}$, $\theta(t=0) = 1$,

$$C_P = C_P^0 \times (1 + c(\theta)) \tag{2.11}$$

(a) (b)

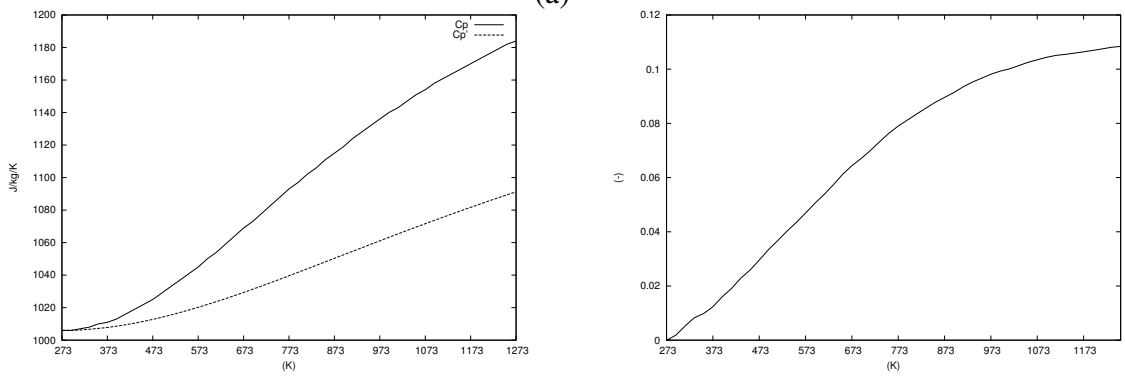


FIGURE 2.4 – (a) : Variation de la chaleur spécifique de l'air sec (en J/kg/K) en fonction de la température, d'après [2] (traits pleins : C_P ; tirets : C'_P) ; (b) : $\frac{T}{C'_P(T)}\,\frac{dC'_P(T)}{dT}$.

avec $C_P^0 = C'_P(T_0)$ et $c(\theta) \ll 1$. On note aussi, en ajustant les notations précédentes : $E_0 = \rho_0 T_0 C_P^0 V$, $\tau_0 = E_0/\dot{Q}$, $\alpha = \frac{\dot{Q}+h_e T_0 S+\rho_0 C_P^0 T_0 Q_i}{\dot{Q}}$ et $\beta = \frac{h_e T_0 S+\rho_0 C_P^0 T_0 Q_i}{\dot{Q}+h_e T_0 S+\rho_0 C_P T_0 Q_i}$. Avec ces notations, l'équation (2.6) s'écrit :

$$\frac{1}{\theta}\,\frac{d\theta}{dt'} + \left(\frac{c(\theta)}{\theta} + \frac{1}{1+c(\theta)}\,\frac{dc}{d\theta} + \frac{c(\theta)}{1+c(\theta)}\,\frac{dc}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt'} \;=\; \alpha(1-\beta\theta) - \frac{\rho_0 T_0 Q_i C_P^0}{\dot{Q}} c(\theta)\theta$$

Dans cette équation, les effets de la variation se trouvent à deux endroits. D'une part, les termes de la grande parenthèse du membre de gauche représentent une modication de la manière dont la chaleur est stockée dans le milieu fluide du fait des variations de chaleur spécifique, ce qui va causer une modification de la dynamique temporelle de l'équation. D'autre part, le terme supplémentaire du membre de droite représente le fait que si C'_p augmente avec la température, les pertes de chaleur par la masse qui sort du domaine vont être plus importantes, ce qui va causer une diminution de la température atteinte pour les temps longs par rapport au cas d'une chaleur spécifique constante.

En ne conservant que les termes d'ordre 0 et 1 en c et $\frac{dc}{d\theta}$ dans l'équation précédente, il reste :

$$\frac{1}{\theta}\,\frac{d\theta}{dt'} + \left(\frac{c(\theta)}{\theta} + \frac{dc}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt'} \;=\; \alpha(1-\beta\theta) - \frac{\rho_0 T_0 Q_i C_P^0}{\dot{Q}} c(\theta)\theta \qquad (2.12)$$

On note $\theta(t') = \theta_0(t') + \theta_1(t')$ où $\theta_0(t')$ est la solution de l'équation (2.8) déterminée ci-dessus. A l'ordre 1 en θ_1/θ_0, on a :

$$\frac{1}{\theta_0+\theta_1}\,\frac{d(\theta_0+\theta_1)}{dt'} = \frac{1}{\theta_0}\,\frac{d\theta_0}{dt'} + \frac{\theta_1}{\theta_0^2}\,\frac{d\theta_0}{dt'} + \frac{1}{\theta_0}\,\frac{d\theta_1}{dt'}$$

L'équation (2.12) devient donc, toujours à l'ordre 1 :

$$\frac{1}{\theta_0}\frac{d\theta_1}{dt'}+\Big(\frac{1}{\theta_0^2}\frac{d\theta_0}{dt'}+\alpha\beta\Big)\theta_1 \;=\; -\Big(\frac{c(\theta_0)}{\theta_0}+\frac{dc}{d\theta}(\theta_0)\Big)\frac{d\theta_0}{dt'}-\frac{\rho_0 T_0 Q_i C_P^0}{\dot{Q}}c(\theta_0)\theta_0 \tag{2.13}$$

Cette équation n'est pas aisée à intégrer, puisque θ_0 est la fonction déterminée précédemment à l'équation (2.9), qui atteint l'asymptote $\theta_0^\infty = 1+\frac{\dot{Q}}{h_e T_0 S+\rho_0 C_P^0 T_0 Q_i} > 1$ selon une loi exponentielle de constante de temps $\tau = \tau_0/\alpha$.

On peut cependant, sans intégrer l'équation (2.13), déterminer que sa solution a une asymptote

$$\theta_1^\infty = -\frac{\rho_0 Q_i C_P^0}{h_e S+\rho_0 Q_i C_P^0}\,c(\theta_0^\infty)\theta_0^\infty \tag{2.14}$$

et que l'équation (2.13) a comme constante de temps, $\tau_1 = \frac{\tau_0}{\alpha\beta\theta_0^\infty} = \frac{\tau_0}{\alpha} = \tau$ qui est la constante de temps de l'équation ne prenant pas en compte la variation de $C_P(T)$.

Ordre de grandeur de l'effet de la variation de C_P avec la température

L'écart entre $C_P'(T)$ et $C_0^P = C_P'(T_0)$ est d'autant plus grand que l'écart de température est grand. De plus, l'équation (2.14) montre que θ_1^∞ est nul si $Q_i = 0$, et maximal pour des parois adiabatiques (cas qui correspond à $h_e = 0$), avec $\theta_1 = -c(\theta_0^\infty)\theta_0^\infty$. De ce fait, pour estimer cet ordre de grandeur, on va considérer un foyer donnant une température θ_0^∞ élevée dans un volume ventilé avec parois adiabatiques. Pour déterminer les cas générant les plus grands écarts de température, il importe bien sûr de choisir une puissance $\dot{Q}$ la plus grande possible. Pour ce faire, il faut choisir un mécanisme de création de cette puissance proche des applications. On va donc ici prendre le cas particulier où cette puissance est due à la combustion totale d'un matériau typiquement rencontré dans le cas d'un incendie dans de l'air, le comburant étant l'oxygène de l'air. Dans un tel cas, de nombreux essais ont montré que la puissance était pratiquement proportionnelle à la masse d'oxygène consommé (voir [5]) :

$$\dot{Q} \approx \mathcal{E}\dot{m}_{O_2} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E} = 13,1\times 10^6 J/kg$$

Dans la pratique, on constate que la combustion est très fortement empêchée lorsque la proportion d'oxygène dans l'air descend en dessous de 15 %. Pour de l'air à 20°C, on a donc, puisque l'oxygène représente en volume 21 % des gaz qui consituent l'air :

$$\dot{Q} \approx (0,21-0,15)\times \mathcal{E}\rho_0\frac{M_{0_2}}{M_{air}}Q_i$$

Comme on a vu que la la température asymptote vaut $\theta_0^\infty = 1 + \frac{\dot{Q}}{\rho_0 T_0 C_P^0 Q_i}$, on a donc dans le cas le plus extrême :

$$\theta_0^\infty = 1 + \frac{0,06\mathcal{E}\frac{M_{0_2}}{M_{air}}}{C_P^0 T_0}$$

Soit, avec M_{0_2} =32 g/mol , M_{air} =29 g/mol, $T_0 = 293$ K et $C_P^0 = 1006$ J/K/kg :

$$\theta_0^\infty \approx 4 \quad \text{soit T} \approx 1200K$$

Il importe de noter que l'on a supposé ici que l'air qui alimente le foyer est maintenu à la température T_0. Ceci suppose qu'une proportion négligeable de la puissance a été utilisée pour préchauffer l'air avant combustion. C'est le cas pour la plupart des applications en bâtiment lorsqu'on travaille à l'échelle d'une pièce ou d'un local. Ce n'est pas en général le cas lorsque l'on travaille à l'échelle d'un petit volume dans un local. Les deux exemples pratiques de ce cas sont d'une part les incendies en tunnel et d'autre part les foyers proprement dit.

Pour l'estimation des termes correctifs dus à la variation de la chaleur spécifique, on retient que les température maximales typiques sont de l'ordre de 1200 K et que pour ces températures maximales typiques, en l'absence de pertes de chaleur aux parois, on a :

$$\theta_1^\infty = -c \times \theta_0^\infty \approx -0,1 \times \theta_0^\infty$$

c'est à dire que le fait de négliger les variations de la chaleur spécifique conduit à surestimer d'environ 10 % les températures atteintes.

Si maintenant on souhaite mener un calcul comparable en prenant en compte les pertes de chaleur aux parois, et en exprime Q_i en taux de renouvellement $Q_i = q_i V$, on a :

$$\begin{aligned}
\theta_0^\infty &= 1 + \frac{0,06 \times \mathcal{E}\frac{M_{0_2}}{M_{air}}}{\rho_0 C_P^0} \times \frac{1}{1 + \frac{h_e}{\rho_0 C_p^0 q_i}\frac{S}{V}} \\
\theta_1^\infty &= -\frac{1}{1 + \frac{h_e}{\rho_0 q_i C_P^0}\frac{S}{V}} \times c(\theta_0^\infty)\theta_0^\infty
\end{aligned}$$

Typiquement, on a en ordre de grandeur $h_e \approx 10 W/m^2/K$. On prend par exemple une pièce typique rectangulaire de 5 m sur 4 m avec 3 m de hauteur sous plafond, et un renouvellement d'air de 2 volumes par heure, ce qui conduit à :

$$\frac{1}{1 + \frac{h_e}{\rho_0 q_i C_P^0}\frac{S}{V}} \approx 0,97.$$

Ce résultat, très proche de 1, montre que la prise en compte des pertes aux parois ne modifie que très peu le résultat précédent.

En conclusion de cette analyse des ordres de grandeur, on voit que :

- l'analyse par la méthode des perturbations, qui conduit à faire un développement sous la forme $C_P(T) = C_P^0 \times (1 + c(T))$ est justifié pour tous les cas usuels ;
- l'estimation d'ordre 0 surévalue la température de $100 \times c(T)$ % en l'absence de pertes aux parois ;
- en présence de pertes aux parois, l'estimation d'ordre 0 surévalue la température de moins de $100 \times c(T)$ % ;
- ainsi, la température est toujours comprise entre l'estimation d'ordre 0 et l'estimation d'ordre 0 diminuée de $100 \times c(T)$ %.

Ainsi, le fait de supposer que C_P constant égal à C_P^0 va dans le sens de la sécurité. Lorsque l'on emploie des simulations numériques, le fait de conserver C_P' variable dans les équations ne conduit pas à changer les méthodes numériques, et donc il ne faut pas se priver de prendre en compte cette variation. En revanche, lorsque l'on cherche des solutions approximatives analytiques ou quasi-analytiques, il est en général beaucoup plus simple de ne pas la prendre en compte, ce qui est souvent pertinent puisque l'on peut évaluer a posterio l'ordre de grandeur de l'approximation ainsi réalisée.

Variation de la capacité thermique molaire avec la composition du mélange gazeux

On analyse maintenant les ordres de grandeur des variations d'enthalpie dues à la composition du mélange gazeux. Une mole de gaz de gaz, composée d'un mélange de J espèces représentant chacune une fraction molaire χ_j ($j = 1, 2, \ldots, J$), chaque espèce ayant une enthalpie molaire h_j, a pour enthalpie totale (voir par exemple [2]) :

$$H = \chi_1 h_1(T) + \chi_2 h_2(T) + \ldots \chi_J h_J(T)$$

L'enthalpie molaire de chaque espèce est $h_j = \int_0^T c_P^j dT$, où c_P^j est la capacité thermique molaire de l'espèce j. Ainsi

$$H = \int_0^T (\chi_1 c_P^1 + \chi_2 c_P^2 + \ldots + \chi_J c_P^J) dT$$

De ce fait, la capacité thermique molaire du mélange est la moyenne pondérée des capacités thermiques molaires des composants. Le tableau 2.1 donne les capacités thermiques molaires c_P^j de quelques espèces composant l'air et les gaz de combustion.

T (K)		N_2	O_2	CO_2	CO	HCN	H_2O (gazeux)
300	molaire	29,125	29,385	37,221	29,142	35,928	33,596
300	massique	1040,2	918,3	845,9	1040,8	1330,7	1866,4
400	molaire	29,249	30,106	41,325	29,342	39,229	34,262
400	massique	1044,6	940,8	939,2	1047,9	1452,9	1903,4
500	molaire	29,580	31,091	44,627	29,794	41,731	35,226
500	massique	1056,4	971,6	1014,3	1064,1	1545,6	1957,0
600	molaire	30,110	32,090	47,321	30,443	43,806	36,325
600	massique	1075,3	1002,8	1075,5	1087,3		2018,1
700	molaire	30,754	32,981	49,564	31,171	45,643	37,495
700	massique	1098,4	1030,7	1126,5	1113.3	1622,4	2083,1
800	molaire	31,433	33,733	51,434	31,899	47,317	38,721
800	massique	1122.6	1054,2	1169,0	1139,3	1752,5	2151,2
900	molaire	32,090	34,255	52,999	32,577	48,844	39,987
900	massique	1146,1	1070,5	1204,5	1063,5	1809,0	2221,5
1000	molaire	32,697	34,870	54,308	33,183	50,229	41,268
1000	massique	1167,8	1089,7	1234,3	1185,1	1860.3	2292,7
M g/mol		28	32	44	28	27	18

TABLE 2.1 – Chaleurs molaires en J/mol/K, chaleurs spécifiques en J/kg/K et masses molaires en g/mol de quelques espèces gazeuses typiques d'après la base NIST-JANAF [6].

L'air est composé pour environ 78 % d'azote et 21 % d'oxygène (en fraction molaire) le reste étant une mélange de divers gaz. Lors du processus de combustion, la composition peut évoluer. Dans la pratique, on constate que la combustion est très fortement empêchée lorsque la proportion d'oxygène dans l'air descend en dessous de 15 %.

Lorsque les gaz étrangers à la composition de l'air sont tous issus de la combustion, ils entrent donc en général pour moins de 6 % du mélange. Ainsi, un cas typique extrême pour ce qui concerne la chaleur massique est de comparer un air pur à 1000 K avec un mélange comportant 6 % de dioxyde de carbone (espèce dont la capacité thermique molaire est la plus différente de celles de l'azote et de l'oxygène, voir tableau 2.1). On obtient, à 1000 K, $C_P \approx 34,2$ J/mol/K pour une mole de mélange à 6 % de CO_2, à comparer à $C_P \approx 33,0$ J/mol/K pour une mole d'air pur. La masse molaire du mélange à 6 % de CO_2 est de 29,6 g/mol, contre 29 g/mol pour l'air pur. Ainsi, la chaleur massique pour les mélange à 6 % de CO_2 dans ces conditions vaut $C_P = 1155$ J/kg contre $C_P = 1138$ J/kg pour l'air pur. Dans ce cas, l'effet de la variation de composition sur la chaleur spécifique est donc inférieur à 1,5 %.

Lorsque l'on veut prendre en compte la variation de la composition des gaz, il faut bien entendu remplacer l'équation de conservation de la masse par plusieurs équations, une par espèce chimique considérée.

Dans le présent document, on ne va pas prendre en compte la variation de la composition du mélange gazeux sauf exceptions spécifiquement signalées dans le texte. En effet, les phénomènes qui créent la compléxité en ce qui concerne la mécanique des fluides sont tous présents dans l'étude d'un gaz de composition constante mais de température fortement variable. Prendre en compte la variation de la composition conduirait à fortement complexifier la lecture des équations, mais n'ajouterait pas de phénomène physique complémentaire majeur.

2.2 Equations de Navier Stokes

2.2.1 Introduction

La section précédente a analysé la physique d'un incendie avec des outils uniquement thermodynamiques. Une description précise des phénomènes d'incendie nécessite une description plus fine décrivant en particulier la vitesse, la température et la masse volumique d'un gaz ou d'un mélange gazeux en mouvement. Le but de cette section est de mettre en place les équations de la dynamique des gaz dans le cas qui nous concerne. Pour la suite, on travaille en formalisme eulérien (cf. [7]), avec $\underline{x}$ le vecteur position, $\underline{u}(\underline{x},t)$ le champ de vitesse, $\rho(\underline{x},t)$ le champ de masse volumique, $\mathcal{H}(\underline{x},t)$ le champ d'enthalpie totale et $T(\underline{x},t)$ le champ de

température.

En toute rigueur, la thermodynamique classique ne peut pas s'appliquer à partir du moment où le gaz est en mouvement (et donc les résultats de la section 2.1 non plus). Cependant, la thermodynamique reste une excellente approximation, à condition de l'appliquer sur des volumes de contrôle fictifs grands devant le libre parcours moyen des molécules et petits devant les échelles caractéristiques sur lesquelles les grandeurs thermodynamique varient, ce qui est toujours possible dans la gamme d'écoulements considérés ici [2].

2.2.2 Forme générale

Les équations de Navier-Stokes peuvent se déduire, sous leur forme conservative, de bilans de masse, de quantité de mouvement et d'enthalpie sur des volumes infinitésimaux fixes (voir [7]) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} &= 0 \\
\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \\
\frac{\partial \rho \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \mathcal{H}}{\partial x_j} &= \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} + \rho g_i u_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + S
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Le flux de chaleur par diffusion est q_i, le tenseur des contraintes visqueuses est τ_{ij}, et S représente les sources de chaleur. Dans ces équations, on néglige pour l'instant les effets du rayonnement (voir section 2.3.1). En utilisant l'équation de conservation de la masse, on montre que pour tout champ scalaire $f(x,y,z,t)$, on a $\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \frac{\partial \rho f u_i}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial f}{\partial x_j}$. On en déduit d'une part, que l'enthalpie est bien définie à un constante près, et d'autre part, la forme non consertive des équations :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} &= -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \\
\rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} &= \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} + \rho g_i u_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + S
\end{aligned} \tag{2.16}$$

La forme non-conservative peut être obtenue directement en considérant des bilans de masse, de quantité de mouvement et d'enthalpie pour des volumes infinitésimaux qui suivent l'écoulement, cf. par exemple [10, § 2.2]. L'une ou l'autre

2. Voir en particulier [8] pour une discussion basée sur le nombre de Knudsen, et [9], pages 277 et 278, pour discussion sur le sens exact des grandeurs thermodynamiques dans ce contexte.

forme est la plus pratique selon les cas, et on utilisera indifféremment les deux dans le présent document.

En utilisant l'équation de quantité de mouvement, l'équation d'enthalpie peut s'écrire avec l'enthalpie interne $h = \mathcal{H} - \frac{1}{2}u_i u_i$ uniquement :

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j h}{\partial x_j} = \frac{dP}{dt} + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + S \tag{2.17}$$

Dans le cas des fluides Newtoniens (voir [7]), on a

$$q_i = -\rho C_p' \kappa \frac{dT}{dx_i}$$

et

$$\tau_{ij} = \mu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) + \mu' \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

où $\lambda = \rho C_p' \kappa$ est la conductivité du fluide, κ la diffusivité, $\mu = \rho\nu$ la viscosité dynamique, et ν la viscosité cinématique. La seconde viscosité dynamique μ' est liée à la viscosité dynamique par $\mu' \approx -\frac{2}{3}\mu$.

Pour calculer μ en fonction de la température dans un gaz, on peut utiliser la formule de Sutherland, qui est, selon [2], *remarquablement vérifiée par l'expérience aux températures élevées* :

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}\,\frac{1+\frac{C}{T_0}}{1+\frac{C}{T}}.$$

Dans cette formule, l'indice 0 correspond à une température de référence et C est une constante déterminée expérimentalement ($C = 123,6$ K dans l'air sec [3]). La figure 2.5 donne l'évolution de la viscosité cinématique et de la viscosité dynamique pour l'air en fonction de la température.

En complétant ces équations par les équations des gaz parfaits

$$h(T) = C_P'(T) \times (T - T_0) \quad \text{et} \quad P = \rho\frac{R}{M}T$$

on a un système fermé d'équations qui permet, en théorie, d'analyser tous les problèmes d'écoulements de gaz de masse volumique variable. Cependant, en linéarisant les équations pour une petite perturbation d'un écoulement de base, et

3. En toute rigueur, comme l'air est un mélange de gaz pour lesquels la constante C a une valeur déterminée ($C = 103$ K pour le diazote, $C = 132$ K pour le dioxygène, $C = 101$ K pour le monoxyde de carbone, $C = 274$ K pour le dioxyde de carbone), la valeur de C pour l'air dépend de la composition précise de l'air, en particulier lorsqu'une réaction de combustion a consommé une proportion élevée du dioxygène et a produit du dioxyde de carbone. Comme en général les écoulements sont turbulents, la valeur exacte de la viscosité de l'air n'est pas critique et on peut conserver la valeur de $C = 123,6$ K.

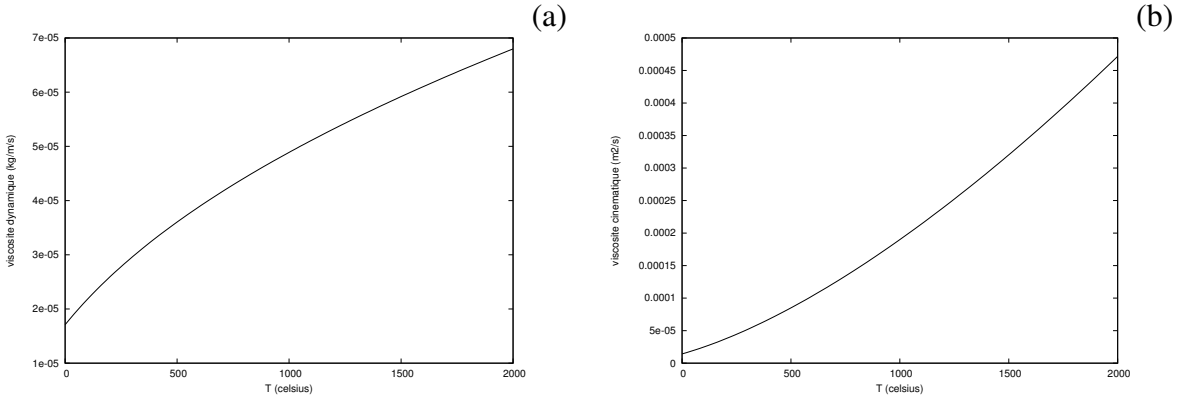


FIGURE 2.5 – Viscosité de l'air en fonction de la température, sachant que $C = 123,6$ K et que $\mu_0 = 17,1 \times 10^{-6}$ kg.m^{-1}.s^{-1} à la température de référence $T_0 = 273$ K ; (a) viscosité dynamique ; (b) viscosité cinématique.

en négligeant les termes de diffusion, on montre qu'il existe des solutions se propageant sous forme d'onde à la célérité $c = \sqrt{\gamma P/\rho}$ avec $\gamma = C_P/C_V$ (voir par exemple [9]). Il s'agit bien entendu des ondes sonores, qui coexistent avec l'écoulement issu de l'incendie, et qui ne nous intéressent pas dans ce contexte. Au contraire, elles génèrent des instabilités dont il importe de se prémunir en supprimant la possibilité de propagation des ondes sonores tout en conservant une modélisation pertinente pour ce qui est du mouvement des fumées. Ce problème se pose essentiellement pour les simulations numériques. En effet, dans une étude analytique, on peut sélectionner les solutions pertinentes par des critères physiques en cours d'analyse. Deux familles de techniques sont possibles pour filtrer les ondes sonores dans les simulations numériques : ou bien on travaille directement avec les équations ci-dessus, et le filtrage est effectué par un algorithme purement numérique, ou bien on modifie les équations pour faire en sorte que les ondes sonores ne soient pas solution du problème soumis à la résolution numérique. Une comparaison entre les deux approches dans le contexte d'une simulation incendie a été pratiquée dans [11, chapitre 4], et a montré d'une part la similitude des résultats, et d'autre part l'efficacité numérique de la seconde famille de technique, basée sur l'hypothèse de faible nombre de Mach, qui est maintenant présentée.

2.2.3 Hypothèse de faible nombre de Mach

Dans un gaz, le carré de la vitesse du son est donné par la dérivée de la pression par la masse volumique, à entropie constante (voir par exemple [9]) : $c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$. Pour le cas d'un gaz parfait, cela donne $c = \sqrt{\gamma P/\rho}$, avec $\gamma = C_p/C_v$. En suivant un tube de courant infiniment mince, on a $dP \approx -\rho d(u^2/2) \approx \rho(u^2/2)$ et donc,

pour un gaz parfait :

$$\frac{dP}{P} \approx \frac{\gamma}{2}\, d\Big(\frac{u^2}{c^2}\Big) \approx \frac{\gamma}{2}\, M^2$$

où M est le nombre de Mach et le symbole $\approx$ signifie 'du même ordre de grandeur'. Dès que $M^2 \ll 1$, on a donc $dP/P \ll 1$.

Comme les variations de la pression sont petites devant la pression totale, on a intérêt à décomposer la pression en deux termes, d'une part une pression de référence en un point fixe de l'écoulement $P_0(t)$ et d'autre part un terme P' qui reprend toutes les variations d'origine hydrostatiques et hydrodynamiques :

$$P = P_0(t) + P'(x,y,z,t) \tag{2.18}$$

L'équation d'état s'écrit alors

$$P_0 = \frac{R}{M}\rho T$$

Lorsque l'écoulement est tel qu'en un point la pression est fixée par des conditions extérieures, P_0 est constant, indépendant de t, et on peut écrire

$$\rho T = \rho_0 T_0$$

où ρ_0 et T_0 sont des températures de référence. Ce sera toujours le cas pour les applications d'incendie en bâtiment ou autre ouvrages comportant des communications avec l'extérieur. Les seuls cas où il faut conserver la variation de P_0 avec le temps correspondent aux locaux parfaitement étanches, soit par nécessité (incendie dans un sous-marin, par exemple) ou par choix (incendie dans des enceintes nucléaires pour lesquelles il n'est pas admissible de permettre des rejets).

2.2.4 Réduction de l'équation d'enthalpie

On a défini à la section 2.1 la grandeur $C'_P(T)$ telle que $h(T) = C'_P(T) \times (T - T_{ref})$. En injectant cette expression dans l'équation d'enthalpie, et en utilisant l'équation de conservation de la masse, on obtient

$$\frac{\partial C'_p \rho T}{\partial t} + \frac{\partial C'_p \rho T u_j}{\partial x_j} = \frac{dP}{dt} + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + S$$

et donc

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{C'_p}\,\frac{dC'_p}{dt} + \frac{1}{C'_p \rho_0 T_0}\Big(\frac{dP}{dt} + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + S\Big)$$

Dans cette équation, on a noté $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ la dérivée particulaire d'une grandeur. Ainsi, la divergence de la vitesse est égale à la somme de 5 termes. Dans

l'ordre où ils apparaissent dans le membre de droite, ces termes représentent (1) l'effet de la variation de la chaleur spécifique, c'est à dire le fait qu'une variation δT de la température conduit à une variation de l'enthalpie qui augmente avec la température ; (2) l'effet de la production de chaleur par les forces de pression ; (3) l'effet de la production de chaleur par les contraintes visqueuse ; (4) l'effet de la diffusion de la chaleur ; (5) l'effet des termes sources de chaleur internes à l'écoulement.

On analyse maintenant l'ordre de grandeur de chacun de ces termes, afin de déterminer ceux qui sont dominants. On note U l'échelle caractéristique des vitesses dans l'écoulement considéré, et L l'échelle caractéristiques des longueurs. On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de forçage externe qui conduirait à la présence d'échelle de temps autre que L/U. On peut réécrire l'équation d'enthalpie sous forme adimensionnelle :

$$\frac{L}{U}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{C'_p}\frac{L}{U}\frac{dC'_p}{dt} + \frac{1}{C'_p\rho_0 T_0}\frac{L}{U}\left(\frac{dP}{dt} + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + S\right)$$

En ce qui concerne le terme du membre de gauche $\frac{L}{U}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$, il importe de ne pas oublier qu'il est en fait la somme de 3 termes (convention de sommation sur les indices répétés). Il faut donc regarder l'ordre de grandeur de chacun des termes, et non pas de leur somme, car ils peuvent se soustraire. On a donc :

$$\frac{L}{U}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \sim 1$$

On note $Ec = \frac{C'_p T_0}{U^2}$ le nombre d'Eckert, $Re = \frac{UL}{\nu}$ le nombre de Reynolds et $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$. Les quatre premier termes du membre de droite de l'équation d'enthalpie adimensionnelle ont pour ordre de grandeur :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C'_p}\frac{L}{U}\frac{dC'_p}{dt} &\sim \frac{\delta C'_P}{C'_P} \\
\frac{1}{C'_p\rho_0 T_0}\frac{L}{U}\frac{dP}{dt} &\sim \frac{1}{Ec} \\
\frac{1}{C'_p\rho_0 T_0}\frac{L}{U}\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &\sim \frac{1}{Ec\times Re} \\
\frac{1}{C'_p\rho_0 T_0}\frac{L}{U}\frac{\partial q_i}{\partial x_i} &\sim \frac{Pr}{Re}
\end{aligned}$$

Pour les gaz, on a $Pr \sim 1$. Pour les écoulements à stratification stable correspondant aux couches de fumée dans les bâtiments et les ouvrages comparables, on a

en général une vitesse relativement faible, $U \lesssim 0,5$ m/s et une échelle de longueur relativement grande, $L \gtrsim 10$ m. Ceci conduit à $Ec \sim 10^6$ et Re ne dépassant pas 10^6 mais pouvant être nettement plus petit dans les zones à faible vitesse et dans les zones les plus chaudes (pour lesquelles la viscosité augmente d'un facteur pouvant aller juqu'à 10). Dans un panache, on a des vitesses plus élevées (jusqu'à 10 m/s) et une échelle de longueur supérieure au mètre. Ceci conduit à ce que Ec est plus petit, mais reste néanmoins grand, supérieur à 10^4, alors que Re dépasse toujours 10^5. Les deux termes comportant le nombre d'Eckert (le second et le troisième) sont donc toujours inférieurs à 10^{-4} dans la totalité du domaine considéré et donc toujours négligeables. En revanche, le premier terme peut atteindre 0,1 et doit être être conservé. De même, le quatrième terme peut ne pas être petit dans les zones à très faible vitesse et doit a priori être conservé. L'équation d'enthalpie se réduit donc à

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{C'_p}\frac{dC'_p}{dt} + \frac{1}{C'_p \rho_0 T_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho C'_p \kappa \frac{dT}{dx_i}\right) + S\right] \tag{2.19}$$

On peut évaluer $\frac{1}{C'_p}\frac{dC'_p(T)}{dt}$ en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées, puis la conservation de la masse, pour obtenir une formulation équivalente de l'équation (2.19) :

$$\left(1 + \frac{T}{C'_p}\frac{dC'_p}{dT}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{C'_p \rho_0 T_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho C'_p \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + S\right] \tag{2.20}$$

Selon les cas, l'emploi de l'une ou l'autre forme est le plus efficace.

Pour les cas d'un local parfaitement étanche, il faut bien entendu conserver le terme correspondant aux variations de la pression de référence dans le membre de droite,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{C'_p}\frac{dC'_p}{dt} + \frac{1}{C'_p \rho_0 T_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho C'_p \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + S\right] + \frac{1}{C'_p \rho_0 T_0}\frac{dP_0}{dt} \tag{2.21}$$

Pour la suite du document, on ne prend pas en compte ce cas, et on considère toujours P_0 constant.

2.2.5 Forme finale du système d'équations

On peut décomposer la pression en contributions hydrostatique et hydrodynamique, sous la forme suivante, qui constitue la définition de la contribution hydrodynamique P' (x_i^0 est le point où la pression hydrostatique est égale à la pression de référence) :

$$P(x,y,z,t) = P_0 + \rho_0 g_i (x_i - x_i^0) + P'$$

On obtient donc le système d'équations complet (6 inconnues $(u_1, u_2, u_3, P', \rho, T)$ et 6 équations) [4] :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\rho \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big) + (\rho - \rho_0) g_i \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} &= 0 \\
\frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= -\frac{1}{C'_p}\frac{dC'_p}{dt} + \frac{1}{C'_p \rho_0 T_0}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\rho C'_p \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}\Big) + S\Big] \\
\rho T &= \rho_0 T_0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

La résolution numérique de ces équations se fait en utilisant l'équation d'enthalpie et l'équation de quantité de mouvement pour écrire une équation de Poisson sur la pression (l'opérateur Laplacien est représenté par le symbole Δ et $\mathcal{F}$ représente une fonctionnelle qui sera explicitée ci-dessous) :

$$\Delta P' = \mathcal{F}(u_i, \rho)$$

Comme le montre par exemple [12], cette équation de Poisson a un *bon comportement* mathématique, et est inversible directement (concrètement, cela peut se faire au moyen de transformées de Fourier rapides). On écrit alors

$$P' = \Delta^{-1}\mathcal{F}(u_i, \rho).$$

Le système d'équation à résoudre se limite maintenant à quatre équations d'évolution à quatre inconnues :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \Delta^{-1}\mathcal{F}(u_i, \rho)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\rho \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big) + (\rho - \rho_0) g_i \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} &= 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Cette démarche est maintenant explicitée dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, puis exposée dans le cas général.

2.2.6 Approximation de Boussinesq

Dérivation des équations

L'approximation de Boussinesq consiste à considérer que les variations de masse volumiques sont suffisamment faibles pour que l'on puisse écrire $\rho = \rho_0 +$

4. Comme le fait remarquer [10, § 2.3], la décomposition de la pression entre un terme hydrostatique et un terme hydrodynamique est aussi pertinente pour les équations qui ne sont pas à faible nombre de Mach.

ρ' avec $\rho' \ll \rho_0$. Dans ces conditions, on peut remplacer ρ par ρ_0 partout où on ne perd pas le terme d'ordre dominant en faisant cette opération, c'est à dire partout où on ne lui soustrait pas ρ_0. C'est le cas dans les termes d'inertie du membre de gauche de l'équation de quantité de mouvement, mais aussi dans les termes diffusifs, où l'on a $\rho\nu(\rho) \approx \rho\nu(\rho_0)$ et $\rho\kappa(\rho) \approx \rho\kappa(\rho_0)$ (on note $\nu(\rho_0) = \nu_0$ et $\kappa(\rho_0) = \kappa_0$). Cela conduit aussi à $C'_P(\rho) \approx C^0_P$. Les équations (2.22) deviennent donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial (P'/\rho_0)}{\partial x_i} + \nu_0 \Delta u_i + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} g_i \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} &= -\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\
\frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= \frac{\kappa_0}{T_0} \Delta T + \frac{1}{C^0_p \rho_0 T_0} S
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Rôles réciproques des équations de conservation de la masse et d'enthalpie

La seconde équation ci-dessus, qui est issue du bilan de masse, peut s'écrire, en utilisant l'équation d'état $\rho T = \rho_0 T_0$, sous la forme d'une équation sur la température :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{T^2}{T_0} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

En injectant l'équation d'enthalpie (troisème équation du système ci-dessus) et en remplaçant un facteur multiplicatif $\frac{T^2}{T_0^2}$ dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, on obtient (on a recopié ici l'équation d'enthalpie pour la complétude du sytème) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa_0 \Delta T + \frac{1}{C^0_p \rho_0} S \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\kappa_0}{T_0} \Delta T + \frac{1}{C^0_p \rho_0 T_0} S \tag{2.26}$$

A contrario, si l'on repart de l'équation d'enthalpie initiale (2.17) en supposant que la chaleur spécifique est constante (ce qui est cohérent avec l'hypothèse de faible variation de la masse volumique), on obtient, après avoir négligé la création de chaleur par les variations de pression et la viscosité :

$$C^0_p \frac{\partial \rho T}{\partial t} + C^0_p \frac{\partial \rho u_j T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho C^0_p \kappa_0 \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + S$$

soit, en dérivant les produits et en divisant par ρC_p^0,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \kappa_0 \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{\rho C_p^0} S$$

En utilisant la conservation de la masse pour constater que la seconde parenthèse du membre de gauche est nulle, et en intervertissant ρ avec l'opérateur de dérivation dans le terme diffusif, ce qui est légitime dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, on obtient la forme classique de l'équation d'enthalpie pour les écoulements Boussinesq (voir par exemple [10], [13] ou [14]) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa_0 \Delta T + \frac{1}{\rho C_p^0} S$$

De plus, en remplaçant T par $\rho_0 T_0/\rho$ dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = -\frac{\rho_0 T_0}{T^2}\left(\kappa_0 \Delta T + \frac{1}{\rho C_p^0} S\right)$$

Comme précédemment, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$$

En y réinjectant le résultat ci-dessus, il vient (on a recopié ici l'équation d'enthalpie pour la complétude du sytème) :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\kappa_0}{T}\Delta T + \frac{1}{C_p^0 \rho T} S \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa_0 \Delta T + \frac{1}{\rho C_p^0} S \tag{2.28}$$

Une comparaison rapide des systèmes d'équations (2.25, 2.26) et (2.27, 2.28) laisse perplexe au premier abord : ces deux systèmes sont identiques dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, mais les rôles respectifs de la conservation de la masse et de l'enthalpie sont inversés. L'enjeu ici est limité, puisque l'on obtient bien le même système d'équations, et porte plus sur le nom à donner aux équations que sur leur véracité. Traditionnellement (voir par exemple [10], [13] ou [14]), on nomme équation de masse l'équation (2.27) et équation d'enthalpie l'équation (2.28). Cependant, dans la dérivation qui a conduit à (2.25, 2.26), l'équation (2.25) a été obtenue très directement à partir de la formulation conservative de la conservation de la masse, l'équation (2.26) a été obtenue très directement à partir de la formulation conservative de la conservation d'enthalpie. A

contrario, le système (2.27, 2.28) est obtenu de manière indirecte en partant des équations non-conservatives et en faisant "à l'envers" les manipulations qui ont conduit aux équations conservatives. Ainsi, le nom donné aux équations dans la littérature n'est peut être pas le plus pertinent, mais cela ne pose pas de difficulté car c'est le système d'équations complet qui pilote le comportement des fluides.

Approximation de Boussinesq et nullité de la divergence de la vitesse

Les équations ci-dessus montrent que, en toute rigueur, la divergence de la vitesse n'est pas nulle dans l'approximation de Boussinesq. Elle est la somme de deux termes, celui issu des sources de chaleur dans l'écoulement, et le terme diffusif. Le terme issu des sources de chaleur peut en théorie prendre toute valeur. Cependant, dans les cas usuels rencontrés avec l'approximation de Boussinesq, il n'y a pas de source de chaleur au coeur de l'écoulement qui ne soit pas associée à une création de masse, et dans ce cas il est exclu du système d'équations et traité en condition aux limites [5]. Le terme diffusif, quant à lui, est en général très petit devant chacun des termes individuels qui, sommés, constituent la divergence de la vitesse, ce qui justifie de le négliger dans cette équation même à des nombres de Reynolds grands mais relativement modérés.

Equation de Poisson sur la pression

En prenant la divergence de l'équation de quantité de mouvement et en utilisant le fait que l'opérateur divergence commute avec la dérivée temporelle et avec le Laplacien, il vient :

$$\Delta(P'/\rho_0) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) + \nu_0\Delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) + \frac{g_i}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

soit, en injectant l'équation d'enthalpie pour remplacer les termes en $\partial u_i/\partial x_i$:

$$\Delta(P'/\rho_0) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{C_p^0\rho_0 T_0}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \nu_0\Delta S\right) - \frac{\kappa_0}{T_0}\left(\frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} - \nu_0\Delta\Delta T\right) + \frac{g_i}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

Une analyse par ordre de grandeur montre que le premier terme du membre de droite est d'ordre $\frac{U^2}{L^2}$ alors que le troisième groupe de termes est d'ordre $\frac{Pr}{Re}\frac{U^2}{L^2}$.

5. Les cas pratiques de terme S non nuls et non assimilables à des conditions aux limites sont (1) la présence de sources radioactives dans le fluide – ce qui reste néanmoins assez exotique – (2) la combustion de gaz imbrûlés lorsque l'on modélise la combustion et (3) la présence d'échanges radiatifs.

On peut donc négliger ce dernier [6], et il vient :

$$\Delta(P'/\rho_0) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big) - \frac{1}{C_p^0\rho_0 T_0}\Big(\frac{\partial S}{\partial t} - \nu_0\Delta S\Big) + \frac{g_i}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

Cette dernière équation constitue l'équation de Poisson qui permet de calculer P'. Elle est d'autant plus facile à intégrer numériquement qu'elle ne contient de dérivée temporelle que sur le terme source S. Elle ne nécessite donc pas d'estimer de dérivée temporelle des champs u_i et T.

2.2.7 Equation de Poisson sur la pression dans le cas non Boussinesq

Equation de Poisson à coefficients variables

Dans le cas non Boussinesq, l'équation de quantité de mouvement devient, sous sa forme non conservative :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\rho\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big) + \frac{\rho-\rho_0}{\rho}g_i$$

et la divergence de cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial x_i}\Big) = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\rho\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\Big] + g_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\Big)$$

Quelle que soit la complexité du membre de droite, qui sera analysé ultérieurement, apparaît ici une nouvelle difficulté : le Laplacien du membre de gauche a été remplacé par l'opérateur à coefficients variables $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)$. L'équation reste elliptique, et conserve donc un bon comportement mathématique, mais les coefficients variables de cette équation font que les méthodes de résolution numérique perdent leur efficacité.

Interprétation par l'équation de vorticité : définition du terme barocline

On souhaiterait donc remplacer $\frac{1}{\rho}\frac{\partial P'}{\partial x_i}$ par une expression qui soit un gradient [7]. Mathématiquement, on sait qu'un champ de vecteur V peut s'écrire comme un gradient si et seulement si son rotationnal est nul. Or on a

$$\mathrm{rot}\Big(\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(P')\Big) = \frac{1}{\rho}\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(P')) + \mathrm{grad}(1/\rho)\times\mathrm{grad}(P') = -\frac{1}{\rho^2}\mathrm{grad}(\rho)\times\mathrm{grad}(P')$$

6. Dans la plupart des cas, on peut aussi négliger le terme $\frac{g_i}{\rho_0}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}$.

7. Pour alléger les notations, on utilise ici temporairement le formalisme du calcul vectoriel à la place de la notation par indices.

ce qui fait que $\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}(P')$ est un gradient si et seulement si $\frac{1}{\rho^2}\mathrm{grad}(\rho)\times\mathrm{grad}(P')=0$. Ce terme s'interprète physiquement en prenant le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement pour en déduire l'équation de conservation de la vorticité $\underline{\omega}=\mathrm{rot}(\underline{u})$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\underline{\omega}}{\partial t}+\underline{u}\cdot\mathrm{grad}(\underline{\omega}) &= \underline{\omega}\cdot\mathrm{grad}(\underline{u})+\frac{1}{\rho^2}\mathrm{grad}(\rho)\times\mathrm{grad}(P')\\ &\quad+\mathrm{grad}(\frac{\rho-\rho_0}{\rho})\times\underline{g_i}+\mathrm{rot}(\frac{1}{\rho}\mathrm{div}(\rho\nu\mathrm{grad}(\underline{u})))\end{aligned}$$

On reconnait dans le membre le droite, dans l'ordre des termes, la création de vorticité par étirement, le terme de création barocline réduit, le terme de création de vorticité par les forces de flottabilité, et enfin le terme de dissipation.

Pour être précis sur la terminologie, le terme barocline complet, tel qu'étudié par exemple dans [15], [16], est la somme du terme barocline réduit et du terme de création de vorticité par les forces de flottabilités :

$$\frac{1}{\rho^2}\mathrm{grad}(\rho)\times\mathrm{grad}(P_0+\rho_0\underline{g}\cdot(\underline{x}-\underline{x_0})+P')=\frac{1}{\rho^2}\mathrm{grad}(\rho)\times\mathrm{grad}(P')+\mathrm{grad}(\frac{\rho-\rho_0}{\rho})\times\underline{g_i}.$$

Le phénomène de création de vorticité par le terme barocline complet a été étudié essentiellement dans un contexte d'écoulements géophysiques stratifiés stablement, où il génère des ondes linéaires de grande longueur d'onde (voir [15]). Le terme barocline réduit a fait l'objet de moins d'études. Dans la plupart des cas pratiques, $||\mathrm{grad}(P_0+\rho_0\underline{g}\cdot(\underline{x}-\underline{x_0}))||\gg||\mathrm{grad}(P')||$ et donc le terme barocline réduit est sans doute petit devant la création de vorticité par les forces de flottabilité :

$$||\frac{1}{\rho^2}\mathrm{grad}(\rho)\times\mathrm{grad}(P')||\ll||\mathrm{grad}(\frac{\rho-\rho_0}{\rho})\times\underline{g_i}||.$$

Ce dernier argument n'a pas fait l'objet d'étude systématique dans la littérature, et celle-ci reste donc à réaliser. Dans la suite de ce document, on appellera *terme barocline* le terme barocline réduit.

Equation de Poisson à coefficients constants et terme correctif

Du fait de l'existence du terme barocline, on ne peut pas remplacer $\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}(P')$ par un gradient dans le cas général. La stratégie de résolution est alors de le remplacer par la somme d'un gradient et d'un terme correctif qui peut être intégré dans l'équation de Poisson comme une perturbation. Ce terme correctif doit être le plus petit possible et facile à calculer : il s'agit de trouver H et $\underline{V}$ tels que

$$\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(P')=\mathrm{grad}(H)+\underline{V}\qquad\text{et}\qquad\underline{V}\quad\text{petit}$$

Deux voies sont possibles : soit on définit $\underline{V}$ comme la solution du problème d'optimisation $Inf||\underline{V}||_2$ sous la contrainte $\mathrm{rot}(\underline{V}) = \mathrm{grad}(1/\rho) \times \mathrm{grad}(P')$; soit on choisit arbitrairement H et alors $\underline{V} = \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(P') - \mathrm{grad}(H)$ est très simple à calculer ; il reste à vérifier que $\underline{V}$ est petit.

En pratique, comme l'objectif reste de pouvoir avoir des calculs numériques rapides (sinon on résoudrait l'équation de Poisson à coefficients variables directement), on retient cette seconde solution. Par exemple, dans le code FDS, deux choix ont été pratiqués selon les versions (choix 1 pour les versions 1 à 4 et choix 2 pour les versions 5 et ultérieures [17]) :

$$\begin{aligned}
\text{choix 1} \quad &: \quad \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(P') = \mathrm{grad}(\frac{P'}{\rho_1}) - \Big(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\Big)\mathrm{grad}(P') \\
\text{choix 2} \quad &: \quad \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(P') = \mathrm{grad}(\frac{P'}{\rho}) - P'\mathrm{grad}(\frac{1}{\rho})
\end{aligned}$$

(pour le choix 1, ρ_1 est une masse volumique uniforme, choisie pour être une valeur moyenne des masses volumiques rencontrées dans l'écoulement ; pour le choix 2, il importe de se souvenir que P' représente uniquement le terme hydrodynamique, qui est a priori petit).

Avec le choix 2 ci-dessus, l'équation de Poisson devient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2(P'/\rho)}{\partial x_i \partial x_i} \quad = \quad & -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(P'\,\frac{\partial(1/\rho)}{\partial x_i}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big) \\
& -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\rho\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)\Big] + g_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\Big)
\end{aligned}$$

Cette équation peut être résolue de façon stable et rapide par exemple au moyen de l'algorithme présenté dans [17].

2.2.8 Synthèse et enjeux de recherche

On a vu comment se pouvait se faire la mise en équations des écoulements générés par un incendie. On a en particulier mis l'accent sur les modèles à petit nombre de Mach et sur les similitudes et les différences avec l'équation de Boussinesq. L'une des principales difficultés, on l'a vu, est que l'équation de Poisson sur la pression n'est pas une équation à coefficients constants, ce qui conduit à devoir mettre en place des stratégies spécifiques de résolution, liées en particulier à la prise en compte approximative du terme baroclyne.

Dans la suite de ce chapitre, on va décrire rapidement, d'une part les modèles physiques complémentaires utiles pour la résolution de problèmes complets, et d'autre part les hypothèses faites pour modéliser la turbulence.

2.3 Modèles complémentaires

La section 2.2 a exposé avec quelques détails la forme que prennent les équations de Navier-Stokes dans le contexte des simulations d'incendie. Cependant, comme cela l'a été dit au chapitre 1, une des caractéristiques de la modélisation des incendies est de nécessiter une approche multidisciplinaire. Parmi les aspects qu'il est important de considérer, il y a, outre l'équation de la chaleur dans les parois solides, les transferts de chaleur par rayonnement, mais aussi la pyrolyse et la combustion, et enfin, le cas échéant, l'effet de systèmes d'extinction. Ces points seront abordés brièvement en indiquant surtout des références et des pistes de réflexion.

2.3.1 Prise en compte du rayonnement

Pour une prise en compte complète des transferts de chaleur par rayonnement, il faut intégrer un flux de chaleur radiatif dans l'équation d'enthalpie. Une rapide introduction sur le sujet est donnée dans [14]. Une vision plus complète des phénomènes dans les milieux gazeux est présente par exemple dans [18]. L'aspect spécifique du rayonnement est qu'il peut conduire à des échanges de chaleur non locaux. En effet, on distingue les milieux transparents, opaques et semi-transparents. Les matériaux solides sont en général des milieux opaques, dans lesquels le rayonnement est arrêté, et les transferts de chaleur se font uniquement par conduction (et par convection s'il y a des porosités dans le solide). A l'opposé, l'air est un milieu essentiellement transparent, et peut être traversé par des flux radiatifs importants sans pour autant interagir avec ces flux. De l'air chargé en fumées aura un comportement intermédiaire, dit semi-transparent : un flux radiatif incident sur une couche de fumée sera partiellement transmis.

Une description complète du phénomène nécessite d'analyser en tout point d'un milieu semi-transparent l'ensemble des rayons provenant de chacune des directions, et la possibilité de réémettre des rayons dans chacune des directions, et ce bien sûr pour chaque longueur d'onde, voir [18]. En notant $I_\nu(x,y,z;l,m,n;t)$ l'intensité spécifique (ou luminance) du rayonnement à la fréquence ν, à l'instant t, au point (x,y,z) et dans la direction donnée par les coordonnées (l,m,n) d'un vecteur unitaire de direction, l'énergie émise par un petit élément de surface $d\underline{\sigma}$ dans l'angle solide $d\underline{\omega}$ vaut :

$$dE_\nu = I_\nu d\nu (d\underline{\sigma}\cdot d\underline{\omega})dt.$$

Dans un milieu semi-transparent, l'intensité I_ν est atténuée par le milieu lors de la propagation, et donc devient $I_\nu + dI_\nu$ après un trajet de longueur ds, avec

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds.$$

Dans cette équation, ρ est la masse volumique locale du milieu, et κ_ν est le coefficient d'absorption massique à la fréquence ν. L'énergie perdue par le faisceau considéré peut être réémise par diffusion à la même fréquence, ou réellement absorbée, contribuant ainsi à l'échauffement du milieu, qui réémettra donc sur d'autres fréquences. On note j_ν le coefficient d'émission du milieu, défini de telle sorte que le milieu émet dans la bande de fréquence ν, $\nu + d\nu$ pendant l'intervalle de temps dt l'énergie $j_\nu \rho dx dy dz d\nu (d\underline{\sigma} \cdot d\underline{\omega}) dt$. Ainsi, l'émission du milieu conduit à une variation de l'intensité du faisceau considéré sur le trajet ds de $dI_\nu = j_\nu \rho ds$. Il vient donc l'équation de transfert radiatif :

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \rho \tag{2.29}$$

soit, en coordonnées cartésiennes (x, y, z, l, m, n) :

$$l\frac{dI_\nu}{dx} + m\frac{dI_\nu}{dy} + n\frac{dI_\nu}{dz} = -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \rho.$$

En toute rigueur, pour prendre en compte le fait que la vitesse de la lumière est finie, un terme $\frac{1}{c} \cdot \frac{dI_\nu}{dt}$ devrait être ajouté au membre de gauche. Ce terme est négligeable aux échelles qui nous concernent ici.

Les termes κ_ν et j_ν sont donnés par les lois constitutives du milieu considéré. On note $\varpi_0 \kappa_\nu \rho I_\nu$ l'energie absorbé qui est ensuite diffusée, l'energie réellement absorbée étant $(1 - \varpi_0)\kappa_\nu \rho I_\nu$. Le facteur ϖ_0 est appelé albedo de diffusion. Le terme d'émission est alors la somme de l'énergie diffusée $j_\nu^{(s)}$ et de l'énergie émise par d'autres processus. On parle d'équilibre thermodynamique local lorsqu'il n'y a pas de diffusion ($\varpi_0 = 0$) et que l'énergie émise par le milieu est celle d'un corps noir à la température du milieu :

$$j_\nu = \kappa_\nu \times \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

avec h la constante de Planck et k la constante de Boltzman.

En ce qui concerne les simulations d'incendie, les équations sont discrétisées pour leur résolution numérique, tant en bande de fréquence qu'en direction d'espace. Dans la plupart des cas, la suie est la composante du milieu responsable des échanges radiatifs, et on peut modéliser le terme source par une hypothèse d'équilibre thermodynamique local, ce qui permet de se limiter à un nombre réduit de bandes de fréquence. On peut se référer à [19] pour la mise en oeuvre concrète dans le code FDS.

Il est fondamental de prendre en compte le rayonnement pour estimer les niveaux de sécurité en cas de présence d'un être humain (voir par exemple [3] pour

quelques données de tenabilité et des références complémentaires). Une bonne estimation des transferts radiatifs est aussi importante pour estimer correctement les températures dans le foyer proprement dit, ce qui est pertinent pour la plupart des modèles de combustion. L'expérience montre que bien souvent on peut découpler la modélisation du rayonnement de celle de l'écoulement, en pratiquant d'abord le calcul de l'écoulement avec les équations de Navier-Stokes et en négligeant le rayonnement, et en utilisant les champs de température ainsi qu'une estimation de l'opacité des fumées pour calculer a posteriori les niveaux de rayonnement atteints (voir en particulier [20]).

2.3.2 Modélisation de la combustion

On distingue les flammes de prémélange, dans lesquelles le comburant et le carburant sont mélangés en amont du front de flamme et celui-ci est fixé par la dynamique de l'écoulement (les brûleurs à gaz sont des exemples typiques d'appareils visant à produire des flammes de prémélange), et les flammes de diffusion, dans lesquelles c'est la diffusion qui met au contact un comburant et un carburant qui n'étaient pas mélangés. Dans la plupart des applications industrielles, on emploie des flammes de prémélange, mais en situation d'incendie on a presque toujours affaire à des flammes de diffusion : la chaleur dégagée par le foyer conduit à l'évaporation d'un combustible liquide ou la pyrolyse d'un combustible solide, générant des gaz qui se mélangent ensuite avec l'oxygène de l'air et, si les conditions sont réunies, s'enflamment. Deux cas d'une importance majeure sont étudiés par [1] : la couche limite réactive, qui représente un cas typique de combustion sur un combustible solide qui se pyrolyse, et le panache réactif, qui représente un cas typique de combustion au dessus d'un bac de combustible liquide.

Pour le modélisateur, deux approches sont possibles. Soit on retient une approche purement phénomélogique, dans laquelle on impose la puissance du foyer par une source de chaleur (surfacique ou volumique) dans les équations de Navier-Stokes et on impose un certain niveau d'émissions de gaz toxiques à partir de corrélations empiriques. Ces corrélations peuvent par exemple être issues de [21] ou d'un ouvrage de référence dans le domaine considéré comme [3] et les références qui y sont présentées pour le domaine des tunnels. Soit on décide d'effectivement modéliser la combustion, et on peut utiliser des modèles relativement simples (cf. [19]) ou plus complexes (voir par exemple [22, section 9]). Dans le cadre du présent document, des modèles de combustion seront uniquement utilisés en *boite noire* dans le cadre d'études de sensibilité, aux chapitres 5 et 6.

2.3.3 Modélisation de l'aspersion par des gouttelettes d'eau

Introduction

Différents types de systèmes fixes de lutte contre le feu existent. Certains systèmes utilisent des gaz inertants, qui visent à réduire la concentration d'oxygène en deçà du seuil en dessous duquel la combustion ne peut avoir lieu. Ces systèmes se modélisent via une représentation fine de la combustion. D'autres systèmes peuvent être basés sur l'emploi de mousse. La modélisation de ces systèmes est très complexe et la connaissance repose essentiellement sur des données empiriques. Enfin, la plupart des systèmes utilisent de l'eau, soit seule, soit avec des additifs visant à modifier ses caractéristiques de tension superficielle. On se concentre ici sur les systèmes qui visent à pulvériser l'eau en gouttelettes. Dans ces systèmes, l'eau agit selon plusieurs modalités (voir par exemple [23]) :

- La présence d'eau liquide en goutellettes agit comme une barrière au rayonnement, ce qui a un effet double : pour une puissance totale donnée, cela réduit les effets du feu (sur les personnes, les structures et les éventuelles autres sources combustibles présentes à proximité) ; cela conduit aussi à réduire la puissance des foyers de combustibles liquides ou solides, pour lesquels l'évaporation du combustible ou la pyrolyse sont en grande partie déterminées par l'échauffement causé par le rayonnement des flammes.
- L'évaporation de l'eau, de par la forte chaleur latente de cette dernière, constitue un puits de chaleur, ce qui là aussi influe sur les effets du feu à puissance donnée, mais aussi sur l'évaporation ou la pyrolyse de combustibles liquides ou solides.
- En s'évaporant, la masse d'eau va occuper un grand volume et réduire de ce fait la fraction massique d'oxygène à proximité du foyer, limitant sa puissance, si toutefois les conditions de ventilation le permettent.
- Enfin, pour certaines combustions, la vapeur d'eau peut agir en bloquant des réactions chimiques.

L'efficacité de chacun de ces modes d'action dépend bien sûr de la taille des gouttelettes et de la quantité d'eau présente. Plus globalement, faisant partie d'un système complet de sécurité, les dispositifs d'aspersion ne doivent être analysés que dans un cadre global. Le lecteur est invité à se référer à [24] pour analyse par scénarios, mettant en avant l'arbitrage technico-économique pour le cas des tunnels. Dans le présent document, on se limite à la question de la modélisation. Les quantités d'eau typiques appliquées pour un volume unité (c'est à dire la consommation d'eau divisée par le volume dans lequel l'aspersion est pratiquée) est de l'ordre de 2 à 4 l/min/m^3 pour des systèmes à grosses gouttes (diamètre moyen de l'ordre du millimètre) et de l'ordre de 0,2 à 1 l/min/m^3 pour des systèmes de type brouillard d'eau.

Distribution des tailles des gouttelettes

Pour une buse d'aspersion donnée dans des conditions d'emploi données, le diamètre, et donc le volume et la surface de contact des gouttelettes suivent de loi de distribution à déterminer, $p(D)$, avec $\int_0^\infty p(D)dD = 1$. Le cas où toutes les gouttelettes ont rigoureusement le même diamètre est le cas limite théorique où la loi de distribution est un dirac. Ce cas ne se rencontre pas en pratique, mais il est parfois employé pour la modélisation ; on parle alors de brouillard monodispersé. La loi de probabilité dépend de la buse et de ses conditions d'emploi. On emploie en général une loi de Rosin-Rammler (ou Weibull), voir [23], et par exemple [25] pour une discussion générale sur la loi de Weibull :

$$p(D) = \frac{q}{D_0} \cdot \left(\frac{D}{D_0}\right)^{q-1} e^{-(D/D_0)^q}$$

Les deux paramètres D_0 et q sont déterminés empiriquement. Le brouillard monodispersé correspond à la limite $q \to \infty$. La médiane de cette loi vaut $(\ln 2)^{1/q} D_0$ et son moment d'ordre α, $m_\alpha = \int_0^\infty D^\alpha p(D)dD$ vaut([8]) :

$$m_\alpha = D_0^\alpha \times \Gamma(1 + \alpha/q).$$

On peut définir de nombreuses façons un diamètre typique ou pertinent des gouttes, voir [23]. On peut employer le diamètre médian en volume, D_{V50}, les gouttelettes de diamètre inférieur à D_{V50} représentant la moitié du volume d'eau. On peut aussi définir le diamètre typique à partir des moments de la loi de distribution :

$$D_{\alpha\beta} = \left(\frac{\int_0^\infty D^\alpha p(D)dD}{\int_0^\infty D^\beta p(D)dD}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

Le diamètre le plus courament utilisé (voir par exemple [27] et les références qui y sont citées) est le diamètre de Sauter D_{32}, rapport du volume total d'eau à la surface totale d'eau, car il représente bien le taux d'évaporation moyen des gouttelettes. En particulier, pour une distribution de Weibull, on a (voir figure 2.6) :

$$\begin{array}{ll} \text{diamètre moyen} & D_{10} = D_0 \times \Gamma(1 + 1/q) \\ \text{diamètre de Sauter} & D_{32} = D_0 \frac{\Gamma(1+3/q)}{\Gamma(1+2/q)} \end{array}$$

En fonction de la distribution des diamètres, on utilise les expressions de *sprays de grosses gouttes* lorsque le diamètre de Sauter supérieur à 1 mm, et de *brouillard d'eau* lorsque le diamètre de Sauter est inférieur à 0,2 mm. En anglais, la tendance est de réserver l'expression *fog* pour les sprays de diamètre de Sauter

8. $\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds$ est la fonction Gamma, voir par exemple [26].

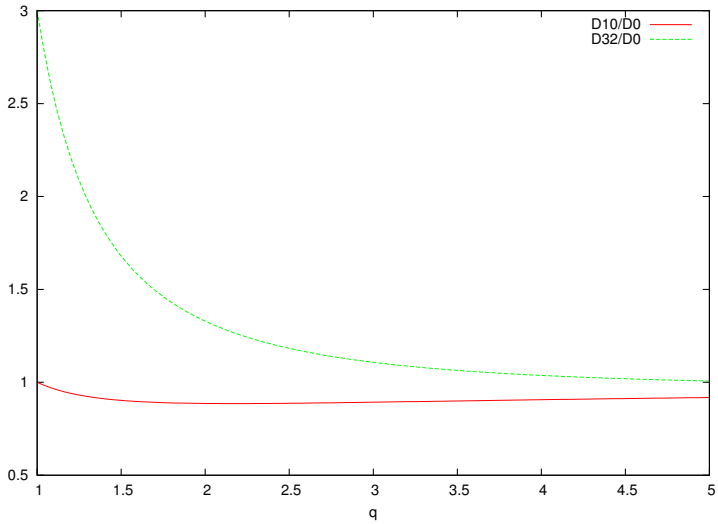


FIGURE 2.6 – Diamètres moyen (trait rouge continu) et de Sauter (tirets verts) rapportés à D_0, en fonction de q, pour une loi de Weibull de paramètres D_0 et q.

inférieurs à 0,05 mm, et de parler de *mist* pour les sprays de diamètre de Sauter compris entre 0,05 et 0,2 mm, voir [23, figure 5]. Une définition plus précise des sprays en 3 classes sur la base des lois de distribution des diamètres cumulées est aussi employée, voir [23, figure 7].

Modélisation simplifiée et ordres de grandeur

Comme on l'a vu, les gouttelettes d'eau agissent d'une part en réduisant la puissance totale du feu (par rapport au même foyer sans aspersion) et d'autre part en réduisant l'élévation de température et le niveau de rayonnement pour une puissance donnée.

En notant $\dot{Q}$ la puissance totale, $\dot{Q}_c$ la fraction convectée et $\dot{Q}_r$ la fraction rayonnée (avec bien sûr $\dot{Q} = \dot{Q}_c + \dot{Q}_r$), et en notant avec l'indice 0 les puissances qu'aurait le même foyer sans aspersion, le premier effet peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{Q}_c = \alpha_c \dot{Q}_{c0} \quad , \qquad \dot{Q}_r = \alpha_r \dot{Q}_{r0} \tag{2.30}$$

Les α_c et α_r representent la réduction de puissance du foyer par l'effet de l'aspersion, et seul un modèle relativement complexe peut les calculer efficacement. Dans de nombreuses applications pratiques, on retient des valeurs données empiriquement par des essais.

La réduction du niveau de température peut s'estimer approximativement en utilisant une variante de l'équation (2.10) prenant en compte le puits de chaleur

associé à l'échauffement de l'eau liquide et à l'évaporation :

$$T = T_0 + \frac{\alpha_c P_{c0} - L_V q_e}{h_e S + \rho_0 C_p Q_i + C_p^{eau} q_i} \tag{2.31}$$

où q_i est le flux de masse d'eau injectée, q_e est le flux de masse d'eau effectivement vaporisée (en kg/s) et L_V est la chaleur latente de l'eau (on a négligé la variation de la chaleur spécifique de l'air C_p avec la température). Le flux q_e est limité par la quantité d'eau présente sous forme liquide, mais aussi par la saturation de l'air, c'est à dire par le fait que la pression partielle de vapeur d'eau P_v ne peut excéder la pression de vapeur saturante $P_S(T)$. La pression partielle de vapeur d'eau peut être calculée en supposant que tous les gaz suivent la loi des gaz parfaits, ce qui conduit à :

$$\frac{P_v}{P} = \frac{m_v}{m_{air}} \cdot \frac{M_{air}}{M_v}$$

avec m_v la masse de vapeur d'eau dans le volume de référence, m_{air} la masse d'air dans le même volume, $M_v = 18$ g/mol et $M_{air} = 29$ g/mol sont les masses molaires de la vapeur d'eau et de l'air. Connaissant la pression de vapeur saturante de l'air à une température donnée (voir par exemple [2]), on peut calculer la concentration massique maximale de vapeur d'eau χ_v (voir table 2.2), d'où l'on déduit $q_e = \chi_v Q_i$. En supposant que l'on injecte de l'eau en excès par rapport à la capacité d'évaporation maximale (ce qui est pertinent, puisque l'eau qui reste liquide agit comme barrière au rayonnement), on obtient :

$$T = T_0 + \frac{\alpha_c P_{c0} - \chi_v L_V Q_i}{h_e S + \rho_0 C_p Q_i + C_p^{eau} q_i} \tag{2.32}$$

En ordre de grandeur, cela revient à dire que l'évaporation absorbe une puissance $\chi_v L_V Q_i$. Par exemple, si le débit de ventilation est $Q_i = 10$ m^3/s, et que la température d'équilibre est de 60 °C, l'évaporation peut absorber 3 MW ; pour une même température, dans un tunnel ventilé longitudinalement avec $Q_i \approx 150$ m^3/s, l'évaporation peut absorber 45 MW.

Modélisation dans les modèles de champ

Les ordres de grandeur de la section précédente ne sont bien sûr pas suffisants pour analyser les performances avec précision, et il est nécessaire de mettre en place des modélisations plus poussées, en modifiant les modèles de champ utilisés pour décrire les écoulements d'air et de fumée.

Deux stratégies sont possibles (voir [28, chapitre 4]) : les modèles lagrangiens et les modèles à deux fluides. Dans les modèles lagrangiens, la phase dispersée est représentée par un échantillon de particules advectées par l'écoulement fluide

Température	25 °C	60 °C	100 °C
P_S/P	0,03	0,2	1
m_v/m_{air}	0,019	0,12	0,62
χ_v	0,023 kg/m^3	0,127 kg/m^3	0,580 kg/m^3
L_V	2,4 MJ/kg^3	2,35 MJ/kg^3	2,3 MJ/kg^3
$\chi_v L_V$	0,05 MJ/ m^3	0,3 MJ/ m^3	1.3 MJ/ m^3

TABLE 2.2 – Concentration maximale de vapeur d'eau et puits de chaleur par m^3 d'air associé.

sous-jacent, un suivi langrangien de ces particules étant réalisé. C'est par exemple la stratégie retenue par [19] et [29]. Les modèles lagrangiens peuvent être plus ou moins raffinés notamment en ce qui concerne la prise en compte de l'effet de la phase dispersée sur l'écoulement porteur. Dans les modèles à deux fluides, appelés aussi Euler-Euler, la phase dispersée est représentée par un milieu continu de densité variable, qui est modélisé de façon eulérienne. C'est la stratégie adopté pour la simulation des phénomènes d'échanges dans les nuages (voir par exemple [30]), mais aussi souvent dans les procédés industriels (voir par exemple [31], ou encore www-cathare.cea.fr).

Pour un spray dispersé, les deux stratégies ont été comparées par [28], en se basant sur un cas expérimental. Il apparaît que la simulation à deux fluides est plus délicate à mettre en oeuvre pour assurer une bonne convergence, mais conduit à un calcul plus rapide, que l'approche Lagrangienne. Chaque stratégie a donc ses avantages et ses inconvénients, et c'est sans doute pour cela qu'aucune des deux ne s'est imposée pour l'ensemble des applications. En revanche, pour les applications liées à l'incendie, la stratégie lagrangienne est employée dans la plupart des cas, sans doute parce que le besoin de convergence assurée l'emporte sur le besoin de temps de calcul.

Perspectives

Le travail présenté par [27] et [28] dans le contexte incendie avec la stratégie lagrangienne montre d'une part que les modèles ont une réelle capacité prédictive pour ce qui est de la partie de l'écoulement hors du foyer, et d'autre part qu'il reste encore du travail de recherche à faire pour gagner en précision. Le travail mené par [29] montre quant à lui qu'il y a encore des efforts à faire pour bien modéliser l'effet de l'aspersion sur un foyer réaliste, et trace une voie possible pour la prise en compte des films d'eau déposés sur les combustibles solides. En ce qui concerne la stratégie à deux fluides pour la prévision des incendies, il serait opportun d'analyser leur pertinence pour des modèles d'écoulements porteurs

simplifiés tels que ceux évoqués à la section 5.4.3.

2.4 Prise en compte de la turbulence

2.4.1 Introduction

Les écoulements rencontrés lors d'incendies en milieu fermé (bâtiment, tunnel) sont turbulents au moins dans certaines parties du domaine, puisque le nombre de Reynolds basé sur la taille du domaine et une vitesse typique peut dépasser $5 \cdot 10^6$. Pratiquement, il est impensable de recourir à des simulations numériques directes, et il faut donc modéliser la turbulence. Les deux techniques usuelles que sont les équations sur les grandeurs moyennes et la simulation des grandes échelles peuvent être employées, mais il faut prendre soin de bien traiter les fortes différences de masse volumique. L'objet de cette section est de montrer les termes complémentaires qui apparaissent dans les équations moyennées ou filtrées lorsqu'il y a de grandes variations de masse volumique.

Sur le plan formel, la dérivation d'équations moyennes ou d'équations filtrées est très proche. Seuls diffèrent les termes correspondant à la modélisation de la turbulence ou au modèle de sous-maille. De ce fait, les équations dérivées dans la section 2.4.2 sont pertinentes dans les deux cas, à condition d'adapter la terminologie. Les sections suivantes particularisent à l'un ou l'autre cas.

2.4.2 Equations aux moyennes de Favre et équations filtrées

Moyenne et filtre de Favre

Pour un champ scalaire $q(x,y,z,t)$, on note $\overline{q}(x,y,z,t)$ sa moyenne au sens de Reynolds (moyenne sur les réalisations, voir par exemple [32]) ou, respectivement, le champ scalaire filtré (filtre spatial, voir aussi [32]). On définit alors la moyenne de Favre de cette grandeur (respectivement la grandeur filtrée de Favre) par :

$$\widetilde{q} = \frac{1}{\overline{\rho}} \cdot \overline{\rho q}$$

Sauf pour la masse volumique, pour laquelle on note $\widetilde{\rho} = \overline{\rho}$. Comme $\rho T = \rho_0 T_0$, on a aussi $\widetilde{T} = \frac{\rho_0}{\overline{\rho}} \cdot T_0$ c'est à dire

$$\widetilde{\rho}\,\widetilde{T} = \rho_0 T_0$$

Les équations moyennées (respectivement filtrées) sont donc :

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\rho} \cdot \widetilde{u_j}}{\partial x_j} = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}\cdot\widetilde{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial \widetilde{\rho}\cdot\widetilde{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\left(\rho\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}+\widetilde{\rho}g_i \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = -\overline{\frac{1}{C'_p}\frac{dC'_p}{dt}}+\overline{\frac{1}{C'_p\rho_0 T_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho C'_p\kappa\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+S\right]} \quad (2.35)$$

On note ρ' les fluctuations de ρ en un point donné : $\rho(t)=\overline{\rho}(t)+\rho'(t)$. On a alors $\widetilde{u}=\overline{u}+\frac{1}{\widetilde{\rho}}\overline{\rho' u}$. De plus, en notant $u_i=\widetilde{u}_i+u'_i$, on a :

$$\overline{\frac{1}{C'_p}\frac{dC'_p}{dt}}=\overline{\frac{T}{C'_p}\frac{dC'_p}{dT}}\times\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial x_j}+\overline{\frac{T}{C'_p}\frac{dC'_p}{dT}\times\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}$$

Les équations ci-dessus peuvent donc se réécrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{\rho}\cdot\widetilde{u_j}}{\partial x_j} &= 0\\
\frac{\partial\widetilde{\rho}\cdot\widetilde{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{\rho}\cdot\widetilde{u_i}\cdot\widetilde{u_j}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\left(\rho\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}+\widetilde{\rho}g_i-\frac{\partial\widetilde{\rho}\cdot R_{ij}}{\partial x_j}\\
\left(1+\overline{\frac{T}{C'_p}\frac{dC'_p}{dT}}\right)\frac{\partial\widetilde{u_j}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial M_j}{\partial x_j}-\overline{\frac{T}{C'_p}\frac{dC'_p}{dT}\times\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}+\overline{\frac{1}{C'_p\rho_0T_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho C'_p\kappa\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+S\right]}
\end{aligned}$$

avec

$$R_{ij}=\widetilde{u'_i u'_j} \quad \text{et} \quad M_j=\frac{1}{\widetilde{\rho}}\overline{\rho' u'_j}$$

Approximation des termes diffusifs

Etant dans une situation d'écoulement turbulent, les termes diffusifs sont petits, et de plus il est généralement accepté que la valeur de la dissipation globale de l'écoulement de dépend pas de leur forme exacte (voir [32]), ce qui fait que cette forme exacte n'influe pas sur l'écoulement hors des très petits tourbillons, qui ne sont pas ceux qui portent la richesse des écoulements. Comme $u_i=\widetilde{u}_i+u'_i$, on a :

$$\overline{\rho\nu(T)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=\widetilde{\rho}\cdot\nu(\overline{T})\frac{\partial\widetilde{u}_i}{\partial x_j}+\widetilde{\rho}\cdot[\widetilde{\nu(T)}-\nu(\overline{T})]\frac{\partial\widetilde{u}_i}{\partial x_j}+\overline{\rho\nu\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

Dans le membre de droite, le second et le troisième termes sont petits devant le premier, et on se contente donc de ne conserver que le premier. On peut faire le même raisonnement pour la diffusion, et on retient donc :

$$\begin{aligned}
\overline{\rho\nu(T)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} &\approx \widetilde{\rho}\cdot\nu(\overline{T})\frac{\partial\widetilde{u}_i}{\partial x_j}\\
\overline{\frac{1}{C'_p\rho_0T_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho C'_p\kappa\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+S\right]} &\approx \frac{1}{\overline{C'_p}\rho_0T_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widetilde{\rho\overline{C'_p}}\kappa(\overline{T})\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_i}\right)+S\right]
\end{aligned}$$

Ce raisonnement est valable tant pour les équations sur les moyennes que pour les équations filtrées. Dans le premier cas, les termes visqueux vont être petits devant les termes issus des tensions de Reynolds, dans le second ils vont être petits devant les termes issus du modèle de sous maille.

Termes représentant la variation de la chaleur spécifique

Le terme représentant la variation de la chaleur spécifique dans le membre de gauche de l'équation d'enthalpie est mal connu. Il est souvent ignoré, au mieux représenté sous la forme :

$$\overline{\frac{T}{C'_P(T)}\frac{dC'_P}{dT}(T)} \approx \frac{T}{C'_P(\overline{T})}\frac{dC'_P}{dT}(\overline{T})$$

L'objet de cette section est de montrer cette estimation est très correcte et peut donc être employée.

On note $T(x,y,z,t) = \overline{T}(x,y,z,t) + T''(x,y,z,t)$. De plus, on va admettre que la variable aléatoire $T''(x,y,z,t)$, qui représente les fluctuations, prend des valeurs petites devant la quantité déterministe $\overline{T}(x,y,z,t)$. Cette hypothèse est plausible aussi bien lorsque le symbole $\bar{\cdot}$ représente une moyenne que lorsqu'il représente un filtre. En effet, si la grandeur $\overline{T}(x,y,z,t)$ peut varier de façon importante dans l'écoulement (par exemple plus de 1000 K près du foyer, de l'ordre de 300 K loin du foyer), cette variation se fait sur des distances grandes au moins comme l'échelle intégrale de la turbulence. En utilisant cette hypothèse, et en supposant aussi que $\frac{dC'_P}{dT}(T) \neq 0$, il est justifié de faire des développements de Taylor sous la forme

$$\begin{aligned}
C'_P(T) &\approx C'_P(\overline{T}) \times \left(1 + \Phi_1 \frac{T''}{\overline{T}}\right) \quad \text{avec} \quad \Phi_1 = \frac{\overline{T}}{C'_P(\overline{T})} \times \frac{dC'_P}{dT}(\overline{T}) \\
\frac{dC'_P}{dT}(T) &\approx \frac{dC'_P}{dT}(\overline{T}) \times \left(1 + \Phi_2 \frac{T''}{\overline{T}}\right) \quad \text{avec} \quad \Phi_2 = \frac{\overline{T}}{\frac{dC'_P}{dT}(\overline{T})} \times \frac{d^2C'_P}{dT^2}(\overline{T})
\end{aligned}$$

d'où il vient :

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{T}{C'_P(T)}\frac{dC'_P}{dT}(T)} &\approx \overline{T \times \frac{\frac{dC'_P}{dT}(\overline{T}) + T'' \times \frac{d^2C'_P}{dT^2}(\overline{T})}{C'_P(\overline{T}) + T'' \times \frac{dC'_P}{dT}(\overline{T})}} \\
&\approx \Phi_1 \times \overline{\left(1 + \frac{T''}{\overline{T}}\right) \times \frac{1 + \Phi_2 \frac{T''}{\overline{T}}}{1 + \Phi_1 \frac{T''}{\overline{T}}}} \\
&\approx \Phi_1 \times \overline{\left(1 + \frac{T''}{\overline{T}}\right)\left(1 + \Phi_2 \frac{T''}{\overline{T}}\right)\left(1 - \Phi_1 \frac{T''}{\overline{T}} + \Phi_1^2 \frac{T''^2}{\overline{T}^2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\approx \quad \Phi_1 \times \overline{\left(1+(1-\Phi_1+\Phi_2)\frac{T''}{\overline{T}}+(-\Phi_1+\Phi_2+\Phi_1^2-\Phi_1\Phi_2)\frac{T''^2}{\overline{T}^2}\right)}$$

On obtient donc :

$$\overline{\frac{T}{C'_P(T)}\frac{dC'_P}{dT}(T)} \approx \Phi_1 + \Psi_1\frac{\overline{T''^2}}{\overline{T}^2} \tag{2.36}$$

avec

$$\Psi_1(\overline{T}) = -\Phi_1^2(\overline{T}) + \Phi_1(\overline{T})\Phi_2(\overline{T}) + \Phi_1^3(\overline{T}) - \Phi_1^2(\overline{T})\Phi_2(\overline{T})$$

Le terme comportant la variation de chaleur spécifique dans le membre de droite de l'équation d'enthalpie est en général simplement négligé. En utilisant les calculs précédents, et en ne conservant que l'ordre dominant, il s'écrit :

$$\begin{aligned}
-\overline{\frac{T}{C'_p}\frac{dC'_p}{dT}\times\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} &\approx -\frac{\overline{T}}{C'_P(\overline{T})}\frac{dC'_P}{dT}(\overline{T}) \times \overline{\left(1+(1-\Phi_1+\Phi_2)\frac{T''}{\overline{T}}\right)\times\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \\
&\approx -\frac{\overline{T}}{C'_P(\overline{T})}\frac{dC'_P}{dT}(\overline{T}) \times (1-\Phi_1+\Phi_2)\times\overline{\frac{T''}{\overline{T}}\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$-\overline{\frac{T}{C'_p}\frac{dC'_p}{dT}\times\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \approx -\Psi_2\times\overline{\frac{T''}{\overline{T}}\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \tag{2.37}$$

avec

$$\Psi_2(\overline{T}) = \Phi_1(\overline{T})\times[1-\Phi_1(\overline{T})+\Phi_2(\overline{T})].$$

Pour toutes ces fonctions, on constate que Φ_2 apparaît uniquement dans des produits comportant aussi le facteur Φ_1. Le facteur en $\frac{dC'_P}{dT}(T)$ qui apparait au dénominateur de Φ_2 est compensé par un facteur identique au numérateur. Ainsi, on voit que le cas $\frac{dC'_P}{dT}(T)=0$ se ramène aux mêmes équations si cette nullité est ponctuelle. Si $\frac{dC'_P}{dT}(T)$ est identiquement nul, on a simplement $\Phi_1=\Psi_1=\Psi_2=0$. Si ce n'est pas le cas, ces fonctions se calculent numériquement à partir de la connaissance de C'_P en fonction de la température. Pour l'air sec, la figure 2.7 donne leurs graphes, calculés à partir des données de C_P de la base NIST-JANAF [6]. On voit en particulier que leurs valeurs absolues sont toujours inférieures à 0,15 sur la plage de température allant de 0 à 2500°C.

De plus,

$$-\frac{\partial M_j}{\partial x_j} \quad = \quad -\overline{\frac{\rho'}{\widetilde{\rho}}\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} - \overline{u'_j\frac{\partial\frac{\rho'}{\widetilde{\rho}}}{\partial x_j}}$$

Dans le membre de droite de cette équation, le premier terme est petit devant le second, car la fluctuation de vitesse apparaît sous forme de divergence dans le

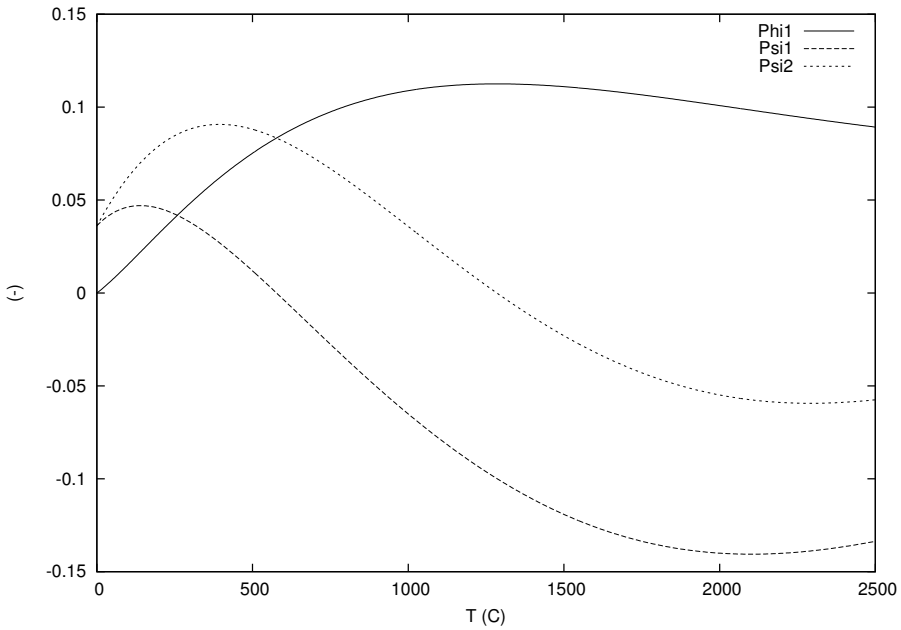


FIGURE 2.7 – Fonctions Φ_1 (traits pleins), Ψ_1 (tirets) et Ψ_2 (pointillés) pour l'air sec.

premier terme alors que ce n'est pas le cas dans le second. De plus, $\rho T = \rho_0 T_0$ est constant, d'où $\overline{T} \approx \frac{\rho_0 T_0}{\widetilde{\rho}}$ et $\frac{\rho'}{\widetilde{\rho}} \approx -\frac{T''}{\overline{T}}$ et comme de plus $\Psi_2 \ll 1$, on a avec un niveau de précision d'ordre 2 :

$$\left|\Psi_2 \times \overline{\frac{T''}{\overline{T}} \frac{\partial u_j'}{\partial x_j}}\right| \ll \left|\frac{\partial M_j}{\partial x_j}\right|.$$

Au même niveau de précision, comme $\Psi_1 \ll 1$ et $\frac{\overline{T''^2}}{\overline{T}^2} \ll 1$, on a $1+\Phi_1+\Psi_1\frac{\overline{T''^2}}{\overline{T}^2} \approx 1+\Phi_1$. L'équation d'enthalpie s'écrit donc bien :

$$\left(1+\Phi_1\right)\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial M_j}{\partial x_j} + \frac{1}{C_p'(\overline{T})\rho_0 T_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widetilde{\rho} C_p'(\overline{T})\kappa(\overline{T})\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}\right) + S\right]$$

Forme finale des équations avant fermeture

Tous calculs faits, avec les deux seules hypothèses a priori

$$\widetilde{\rho'^2} \ll \widetilde{\rho}^2 \quad \text{et} \quad \overline{\frac{\rho'}{\widetilde{\rho}}\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}} \ll \overline{u_j' \frac{\partial \frac{\rho'}{\widetilde{\rho}}}{\partial x_j}}$$

on peut donc retenir les équations suivantes pour modéliser aux moyennes d'ensemble (respectivement en LES) l'écoulement turbulent issu d'un foyer :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{\rho}\cdot\widetilde{u_j}}{\partial x_j} &= 0 \\
\frac{\partial\widetilde{\rho}\cdot\widetilde{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{\rho}\cdot\widetilde{u_i}\cdot\widetilde{u_j}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\widetilde{\rho}\nu(\overline{T})\frac{\partial\widetilde{u_i}}{\partial x_j}\Big)+\widetilde{\rho}g_i-\frac{\partial\widetilde{\rho}\cdot R_{ij}}{\partial x_j} \\
\Big(1+\frac{\overline{T}}{C'_P(\overline{T})}\times\frac{dC'_P}{dT}(\overline{T})\Big)\frac{\partial\widetilde{u_j}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial M_j}{\partial x_j}+\frac{1}{C'_p(\overline{T})\rho_0 T_0}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\widetilde{\rho}C'_p(\overline{T})\kappa(\overline{T})\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_i}\Big)+S\Big]
\end{aligned} \tag{2.38}$$

avec seulement deux termes inconnus nécessitant des hypothèses de fermeture :

$$R_{ij}=\widetilde{u'_iu'_j} \quad \text{et} \qquad M_j=\frac{1}{\widetilde{\rho}}\overline{\rho'u'_j}$$

2.4.3 Fermeture des équations dans le cadre de l'approximation de Boussinesq

Equations aux moyennes de Favre

Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, on remplace $\widetilde{\rho}$ par ρ_0 dans les termes d'inertie et les termes diffusifs. Comme la température varie peu, on retient de plus que ν, κ, C'_p et $\frac{dC'_P}{dT}$ restent égaux à leur valeur en T_0. De plus, pour les gaz qui composent l'air, et donc aussi l'air, C'_P varie lentement aux alentours des températures usuelles, c'est à dire $\frac{dC'_P}{dT}\ll\frac{C'_P}{\overline{T}}$. Enfin, en remplaçant P par $P_0+\rho_0 g(x_i-x_i^0)+P'$, il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{\rho}\cdot\widetilde{u_j}}{\partial x_j} &= 0 \\
\frac{\partial\widetilde{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{u_i}\cdot\widetilde{u_j}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial\frac{\overline{P'}}{\rho_0}}{\partial x_i}+\nu\Delta\widetilde{u_i}+\frac{\widetilde{\rho}-\rho_0}{\rho_0}g_i-\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} \\
\frac{\partial\widetilde{u_j}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial M_j}{\partial x_j}+\frac{1}{C'_p\rho_0 T_0}\Big[\rho_0 C'_p\kappa\Delta\overline{T}+S\Big]
\end{aligned}$$

Le système d'équation ci-dessus, bien que correct, n'est pas celui utilisé en général dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. En effet, il a été obtenu en partant des équations à forte variation de masse volumique, et utilise donc les moyennes de Favre pour les vitesses. En général, les équations de Boussinesq turbulentes sont obtenues à partir d'une perturbation des équations à masse volumique constante, et on n'utilise donc les moyennes de Reynolds des vitesses. La passage à cette seconde forme des équations est maintenant exposée.

Passage des moyennes de Favre à celles de Reynolds

Pour un champ de vitesse $u_i(x,y,z,t)$, on a noté $\overline{u}_i$ la moyenne de Reynolds et $\widetilde{u}_i$ la moyenne de Favre. On note de plus $u_i' = u_i - \widetilde{u}_i$ les fluctuations au sens de Favre et $u_i'' = u_i - \overline{u}_i$ les fluctuations au sens de Reynolds. Quelques calculs montrent que :

$$\widetilde{u}_i = \overline{u}_i + M_i \qquad \text{et donc} \qquad u_i' = u_i'' - M_i$$

Avec comme précédemment

$$M_i = \frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\rho' u_i} = \frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\rho' u_i'} = \frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\rho' u_i''} \tag{2.39}$$

Ainsi, contrairement à ce que pourrait laisser penser une analyse un peu rapide, la moyenne de Favre de la vitesse ne coïncide pas exactement avec sa moyenne de Reynolds même dans le cas Boussinesq. C'est d'ailleurs cette absence de coïncidence qui est à l'origine du terme en M_i dans l'équation d'enthalpie aux moyennes de Favre.

Equations aux moyennes de Reynolds

En ce qui concerne l'équation de quantité de mouvement, la correction est faible, car $|M_i| \ll |u_i|$ et les vitesses apparaissent toujours dans des groupements où elles ne s'annulent pas. De ce fait, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{u}_i \cdot \widetilde{u}_j}{\partial x_j} &\approx \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \cdot \overline{u}_j}{\partial x_j} \\ R_{ij} &\approx \overline{u_i'' u_j''} \end{aligned}$$

En revanche, les termes correctifs sont à conserver pour les équations de conservation de la masse et de l'enthalpie car ils font face à des grandeurs petites. Les équations s'écrivent donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho} \cdot \overline{u_j}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \overline{\rho' u''}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \cdot \overline{u}_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \frac{\overline{P'}}{\rho_0}}{\partial x_i} + \nu \Delta \overline{u_i} + \frac{\widetilde{\rho} - \rho_0}{\rho_0} g_i - \frac{\partial \overline{u_i'' u_j''}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} &= \frac{1}{C_p' \rho_0 T_0}\left[\rho_0 C_p' \kappa \Delta \overline{T} + S\right] \end{aligned}$$

Ce système d'équation peut encore être simplifié. Tout d'abord, en l'absence de source de chaleur, $S = 0$. De plus, en régime turbulent, et comme l'équation de

divergence de la vitesse est linéaire, on peut négliger le terme diffusif. En outre, à l'ordre dominant, $\overline{T} \approx \frac{\rho_0 T_0}{\overline{\rho}}$ et $\frac{\rho'}{\overline{\rho}} \approx -\frac{T'}{\overline{T}}$. Enfin, à l'ordre dominant encore, il est légitime de remplacer $\overline{T}$ par T_0 lorsqu'il intervient en facteur multiplicatif de M_j. On retrouve donc la forme usuelle des équations de Navier-Stokes dans le cadre de l'approximation de Boussinesq turbulente (voir par exemple [14]) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \overline{T' u_j''}}{\partial x_j} \\
\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \cdot \overline{u}_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \frac{\overline{P'}}{\rho_0}}{\partial x_i} + \nu \Delta \overline{u_i} + \frac{\widetilde{\rho} - \rho_0}{\rho_0} g_i - \frac{\partial \overline{u_i'' u_j''}}{\partial x_j} \\
\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} &= 0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Fermeture des équations : cas des moyennes de Favre

Les deux termes à modélisation dans le cas d'une modélisation aux moyennes de Favre dans le cas de l'approximation de Boussinesq sont donc :

$$R_{ij} = \overline{u_i u_j} \qquad \text{et} \qquad M_j = \frac{1}{\rho_0} \overline{\rho' u_j''} = -\frac{1}{T_0} \overline{T' u_j''}$$

Il existe une littérature abondante sur la modélisation de ces deux termes dans ce cas (voir par exemple [14] ou toute référence sur la modélisation de la turbulence). L'objectif du présent document n'est pas de reproduire les éléments présents dans la littérature. On se contentera simplement d'éléments utiles pour la compréhension de la suite. La technique la plus simple consiste à faire une hypothèse de viscosité turbulente en écrivant R_{ij} sous la forme

$$-R_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(k + \nu_t \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \qquad \text{et} \qquad M_j = -\frac{1}{T_0} D_t \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}.$$

où ν_t est une viscosité turbulente, D_t une diffusivité turbulente et $k = \frac{1}{2} \overline{u}_i \overline{u}_i$ est l'énergie cinétique turbulente, elles-même déterminées par un modèle de turbulence (voir par exemple [14]).

Un point important de ce modèle est qu'il doit avoir la capacité de traiter les zones stratifiées stablement, dans lesquelles les fluctuations turbulentes sont amorties, et dans lesquelles il peut se générer des ondes de gravité. Un modèle basé sur une viscosité turbulente conduit à un amortissement isotrope des flucutations qui peut être mis en défaut. C'est pourquoi certains groupes préfèrent utiliser des modèles plus complexes, qui prennent en compte que l'amortissement de la turbulence se fait selon la direction de la gravité, et qu'il est redistribué ensuite

vers les autres directions (mathématiquement, ceci est fait par l'équation de Poisson sur la pression), voir par exemple [33], [34] et les travaux plus récents issus de ces références.

Fermeture des équations : cas de la simulation des grandes échelles

Dans le cas de la simulation des grandes échelles, l'équation (2.40) reste formellement valable, étant entendu que la notation $\overline{u}_i$ ne représente plus une moyenne de Reynolds, mais le résultat d'une opération de filtrage sur u_i :

$$\overline{u}_i(\underline{x}) = \frac{1}{L_f}\int u_i(\underline{r})H(\frac{\underline{x}-\underline{r}}{L_f})d\underline{r} \qquad \text{et} \qquad u_i'' = u_i - \overline{u}_i$$

où L_f est l'échelle du filtre et H est une fonction définie de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$, d'intégrale 1, suffisemment régulière et négligeable en dehors de $[-1,1]^3$. Quand l'échelle du filtre L_f tends vers 0, on voit que $\overline{u}_i$ tend vers u_i. Ainsi, l'avantage théorique de la simulation des grandes échelles sur les simulations aux moyennes de Reynolds est que la solution de la simulation doit converger (en un certain sens) vers la solution exacte des équations de Navier-Stokes lorsque L_f tend vers 0. Les termes inconnus R_{ij} et M_j convergent eux vers 0 dans ce cas. Un des avantages de cette approche par rapport à la résolution des équations aux moyennes de Reynolds est que, comme ces termes inconnus peuvent être petits, on escompte qu'une erreur dans la modélisation de ces termes n'entache pas le résultat global de la simulation. On s'autorise donc des modèles nettement plus rustiques que dans l'approche par résolution des équations aux moyennes de Reynolds.

En pratique, on ne prescrit pas la fonction H (sauf dans le cas des modèles dynamiques, voir par exemple [32]). On se contente de donner une forme fermée a priori pour R_{ij} et M_j, forme qui définit implicitement la fonction H. La forme fermée de R_{ij} et M_j est appelée *modèle de sous-maille*, car elle modélise ce qui se passe aux échelles plus petites que la longueur du filtre L_f.

Le modèle le plus classique est le modèle de Smagorinsky (voir [35] pour une application historique de ce modèle), dans lequel on utilise une hypothèse dite de *viscosité de sous-maille*

$$-R_{ij} = \nu_s\Big(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\Big) \qquad \text{et} \qquad M_j = -\frac{1}{T_0}D_s\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_j}.$$

avec

$$\nu_s = (C_sL_f)^2\Big(S_{ij}\,S_{ij} - \frac{2}{3}\Big(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_i}\Big)^2\Big)^{1/2} \quad \text{et} \quad D_s = \frac{\nu_s}{Pr_s}$$

où C_s est une constante sans dimension, Pr_s un nombre de Prandtl de sous-maille habituellement fixé à 0,7 (mais [35] préconise plutôt $Pr_s \approx 0,3$ à $0,4$ sauf près des

parois où il prend $Pr_s \approx 1$), et S_{ij} est la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.41}$$

En l'absence de variation de la masse volumique, on choisit C_s entre 0,1 et 0,2. Une manière de prendre en compte l'effet des variations de masse volumique sur la turbulence est de moduler cette constante, en la diminuant en stratification stable et en l'augmentant en régime instable. Par exemple, [35] prend $C_s = 0,13$ en l'absence de variation de masse volumique et $0,21$ en régime instable.

Le modèle de Smagorinsky peut être amélioré selon deux directions : d'une part on peut mieux prendre en compte la variation des propriétés de la turbulence en écoulement cisaillé isotherme, et d'autre part mieux prendre en compte les effets de la stratification.

Une première technique pour cela est d'utiliser la stratégie du filtre dynamique (cf. par exemple [36]), qui consiste à recalculer une valeur locale de C_s. Pour ce faire, on suppose que la coupure du filtre se situe dans la zone inertielle, et on pratique en temps réel à un second filtrage sur le champ filtré, à une seconde échelle de longueur plus grande. En calculant les termes d'ordre deux de la turbulence sur cette seconde échelle, on peut calculer une estimation de C_s pour cette seconde échelle et utiliser cette valeur pour le calcul.

Une seconde technique consiste à introduire une inconnue supplémentaire, l'énergie cinétique de sous-maille, et de calculer les valeurs de R_{ij} et M_j à partir de modèles utilisant cette inconnue supplémentaire. Cette approche est présentée maintenant dans le contexte des écoulements atmosphériques.

Modèle de sous maille adapté aux situations rencontrées dans la couche limite atmosphérique

Dans le cas de écoulements atmosphériques, qui doivent modéliser de façon réaliste la couche limite atmosphérique, prendre en compte l'effet des variations de masse volumique, et pour lesquels une variante de l'approximation de Boussinesq est valide, cette seconde famille de modèles est nettement plus performante que le modèle de Smagorinsky, qui n'est plus employé pour ces applications. On présente ici pour que l'exposé soit complet un tel modèle, en l'occurence celui employé dans Méso-NH ([37], [38]).

On introduit l'énergie cinétique de sous-maille comme inconnue principale :

$$e = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} + R_{33}) \tag{2.42}$$

On écrit une équation d'évolution de e, qui permet de prendre en compte l'effet des variations de masse volumique sur la turbulence, et on calcule R_{ij} au moyen

d'une hypothèse de viscosité de sous-maille dépendante de e :

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{u_k}e) = -R_{ik}\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial x_j}(C_{2m}L_f\sqrt{e}\frac{\partial e}{\partial x_j})-gM_j-\varepsilon \quad (2.43)$$

$$\varepsilon = C_\varepsilon\frac{e^{3/2}}{L_f} \quad (2.44)$$

$$-R_{ij} = \frac{4}{15}\frac{L_f}{C_m}\sqrt{e}\Big(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_k}\Big)-\frac{2}{3}e\delta_{ij} \quad (2.45)$$

$$-M_j = \frac{2}{3}\frac{L_f}{C_s}\sqrt{e}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}\times\phi_i \quad (2.46)$$

Dans le système d'équation ci-dessus, C_m, C_s, C_{2m} et C_ε sont des variables adimensionnelles, et ϕ_i est fonction de la stratification thermique (voir [37], équations (3.28) à (3.42) pour le système d'équations complet dans le contexte de l'atmosphère).

Un point fondamental dans de tels modèles est une prise en compte appropriée des parois, qui posent des difficultés théoriques et pratiques importantes. Ce point n'est pas développé ici, et le lecteur est invité à se référer par exemple à [38], [39].

Choix du maillage optimal

Dans la présentation ci-dessus, la longueur L_f a été définie comme l'échelle du filtre, et il n'a pas été question de maillage ni de lier cette échelle à la taille des mailles. En effet, les équations de simulation aux grande échelles peuvent s'écrire comme des équations aux dérivées partielles, qui peuvent être résolues sur tout type de maillage. Pour des conditions aux limites et initiales données, on appelle $\overline{u}_{L_f,i}$ le champ de vitesse solution de l'équation filtré à l'échelle L_f mais non discrétisée, et $u^\delta_{L_f,i}$ le champ de vitesse solution des équations discrétisées sur un maillage pour lequel $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\delta$, le schéma numérique étant fixé. Les propriétés que l'on attend de nos modèles sont les suivantes :

1. lorsque $L_f\to 0$, le champ $\overline{u}_{L_f,i}$ tend vers le champ u_i solution des équations de Navier-Stokes non moyennées ;
2. aux échelles de longueur inférieures à L_f, le champ $\overline{u}_{L_f,i}$ varie peu (cette attente vient d'un choix correct du modèle de sous maille) ;
3. la vitesse discrétisée $u^\delta_{L_f,i}$ tend vers $\overline{u}_{L_f,i}$ quand δ tend vers 0 (cette attente vient du choix d'un schéma numérique qui se comporte regulièrement).

Ces deux dernières conditions étant réunies, on constate que, pour les schémas numériques usuels, lorsque $\delta\le L_f$, alors $u^\delta_{L_f,i}$ est très proche de $\overline{u}_{L_f,i}$.

De ce fait, on décide en général de fixer la taille du maillage δ à L_f, ce qui permet de faire la simulation sur le maillage le plus grossier possible pour lequel $u^{\delta}_{L_f,i}$ est proche de $\overline{u}_{L_f,i}$. Cela revient en fait à calculer $u^{\delta}_{\delta,i}$. Dans la plupart des modèles, $\delta = L_f$ par construction, et on oublie que, lorsque l'on fait varier δ, on fait aussi varier les équations que l'on va résoudre. De ce fait, la convergence en maillage, au sens strict, ne peut jamais être vérifiée.

Filtre implicite et forme effective du filtre

On s'est concentré sur les simulations aux grandes échelles à filtre implicite. En effet, il y a un bien un filtre, qui génère le terme de sous-maille R_{ij}, mais la connaissance de la forme précise du filtre n'est pas utile pour résoudre les équations filtrées. En revanche, le filtre agit effectivement sur les champs calculés, sans que l'on puisse calculer précisement l'écart entre le champs filtré et le champ initial. Quand on prescrit un modèle de sous maille sous la forme

$$R_{ij} = \phi(\overline{u}_i, \ldots)$$

on prescrit en fait, implicitement, la fonction H qui a servi a filtrer le champ de vitesse, car on a par ailleurs

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{1}{L_f}\int u_i(\underline{r})u_j(\underline{r})H(\frac{\underline{x}-\underline{r}}{L_f})d\underline{r} \\ &\quad -\Big(\frac{1}{L_f}\int u_i(\underline{r})H(\frac{\underline{x}-\underline{r}}{L_f})d\underline{r}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{L_f}\int u_j(\underline{r})H(\frac{\underline{x}-\underline{r}}{L_f})d\underline{r}\Big). \end{aligned}$$

Le calcul de la fonction H à partir du modèle de sous-maille considéré n'est en général pas trivial. Ce calcul est conduit à son terme dans le cas du modèle de Smagorinsky par [40].

Certains groupes préfèrent utiliser une variante de la simulation des grandes échelles qui consiste à ne pas inclure de modèle de sous-maille et en contrepartie de choisir un schéma numérique qui ait des bonnes caractéristiques de dissipation. On parle alors de simulation des grandes échelles implicite. Il est bien évident que dans ce cas, un tel calcul est impossible, et la simulation pratiquée n'est pas une simulation des grandes échelles au sens employé ici.

Conclusions sur la modélisation de la turbulence dans le cadre de l'approximation de Boussinesq

Nous venons de faire une digression dans le domaine de la modélisation de la turbulence dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. On a vu comment passer des moyennes de Favre à celles de Reynolds, et comment on pratique dans ce

cadre la simulation de la turbulence, aussi bien pour des écoulements de type ingénierie que dans le contexte de la modélisation de la couche limite atmosphériques. On peut retenir en particulier que l'on dispose dans la littérature de nombreuses méthodes pour modéliser la turbulence dans ce cas.

2.4.4 Fermeture des équations avec de grandes variations de masse volumique

S'agissant des méthodes issues de la littérature, la situation est très différente pour les grandes variations de masse volumique : on ne dispose pour ainsi dire d'aucun modèle spécifique construit pour cette situation et validé en profondeur. La démarche adoptée par tous est de transposer les modèles utilisés pour les faibles variations de masse volumique à ce nouveau contexte.

Modélisation avec des moyennes de Favre et de grandes variations de masse volumique

Parmi les travaux qui ont suivi cette démarche dans le contexte des moyennes de Favre, on peut citer [41]. Dans cette référence, des simulations effectuées avec le logiciel CFX ont été comparées à des résultats expérimentaux sur les feux de tunnel. La conclusion de ces travaux est complexe. En effet, on se heurte à deux types de difficultés.

D'une part, pour certaines configurations, notamment dans les cas avec nappe de retour, les résultats des simulations sont très sensibles au détail des échanges thermique de paroi, ce qui fait que si l'on connait le résultat à obtenir, il est facile d'ajuster un paramètre du code pour retrouver un comportement correct, mais si l'on travaille en aveugle, le résultat peut être qualitativement faux.

D'autre part, les expériences d'écoulement à forte variation de masse volumique suffisament instrumentées pour mesurer les fluctuations turbulentes sont faites sur des configurations assez lointaines des configurations réelles, soit que le nombre de Reynolds plus faible conduise à des zones de relaminarisation, soit que les échanges de chaleur ne soient pas représentatifs des cas réels, soit enfin que les conditions de source ne représentent pas bien un foyer réel et conduisent à des artéfacts (par exemple un jet impactant en plafond).

Simulation des grandes échelles

Ces mêmes difficultés se retrouvent dans le cas des simulations des grandes échelles, avec cependant une différence, qui est que, du fait de l'existence du programme FDS, un effort de validation important a été fait. La conclusion pragmatique à laquelle sont arrivés les développeurs de FDS est que le modèle de

Smagorinsky est perfectible, mais que la forme précise du terme turbulent influe somme toute assez peu sur les valeurs moyennes obtenues comme résultat des simulations. Là encore, il est difficile d'aller beaucoup plus loins du fait du manque de bases expérimentales pour estimer les grandeurs fluctuantes.

2.5 Conclusion et perspectives

Le présent chapitre a mis en place les équations fondamentales des écoulements de gaz à fortes variations de masse volumique, en commençant par une analyse thermodynamique simple, puis en la raffinant vers les équations de Navier-Stokes, en y ajoutant des modèles complémentaires, et enfin en analysant les méthodes possibles pour modéliser la turbulence.

Le but de ces équations est double : d'une part, une approche analytique, en procédant à des approximations contrôlées, permet de construire une compréhension des phénomènes. D'autre part, ces équations peuvent être résolues numériquements pour faires des prévisions quantitatives. Cependant, dans les deux cas, on se heurte à la question de la validation de des solutions. En quoi est-il utile de chercher à comprendre un phénomène par une analyse fine des équations si certaines hypothèses sont sujettes à caution ? En quoi est-il utile d'utiliser ces équations pour des simulations si l'on peut craindre que le résultat soit si loin de la réalité que même des résultats qualitatifs sont sujets à caution ? Ceci est d'autant plus ennuyeux qu'il est extrêment difficile de chercher à couvrir l'ensemble des situations que l'on peut rencontrer lorsque l'on vise à simuler des incendies par des expériences finement expérimentées.

Partant de ce constat, la démarche proposée dans le présent document est de chercher à qualifier le niveau de confiance que l'on peut avoir en une simulation sur des écoulements que l'on peut qualifier de canoniques, au sens de [1], c'est à dire des écoulements simples car représentatifs d'un nombre restreint de phénomènes en jeu dans les situations réelles, qui permettent d'une part que la compréhension de ces écoulements améliore l'intuition que l'on peut avoir des phénomènes ; et d'autre qu'ils puissent servir de pierre de touche des simulations.

Dans [1], l'intérêt étant centré sur la zone de combustion proprement dite, l'analyse se concentre sur deux écoulements canoniques représentatifs des phénomène de pyrolyse et d'inflammation. Dans le présent document, l'intérêt étant centré sur la dynamique des gaz chauds, on se place en dehors des zones de combustions proprement dites, et on retient trois écoulements canoniques : (1) les écoulements limités par une paroi ; (2) les panaches ; (3) la panache interagissant avec une couche de fluide stratifié en plafond (filling box). L'analyse de ces cas particuliers est l'objet des trois prochains chapitres. Un dernier chapitre qui ouvre la problématique sur des cas réels propose des méthodes d'analyse des résultats

de simulation numériques.

Chapitre 3

Ecoulements limités par une paroi

3.1 Introduction

Le présent chapitre vise à utiliser les équations mises en place au chapitre précédent pour des écoulements limités par une paroi. On verra tout d'abord le cas d'un écoulement laminaire à petit nombre de Reynolds, puis on posera la problématique pour les écoulements turbulents, en faisant le parallèle avec les méthodes employées pour la dynamique de la couche limite atmosphérique. Enfin, dans le cas isotherme, quelques pistes pour améliorer la représentation que l'on se fait de ces écoulements sont suggérées.

3.2 Ecoulement laminaire en canal avec parois chauffées différentiellement

3.2.1 Introduction

Il ya très peu de solutions exactes des équations de Navier-Stokes ([42], [43]). L'intérêt de ces solutions exactes pour résoudre des problèmes réels est souvent limité, en particulier car ces solutions sont souvent instables et elles représentent rarement des cas ayant une application pratique. Cependant, ces solutions exactes sont utiles pour tester les outils de simulation numériques, qui doivent être capables de les représenter correctement.

C'est dans ce but que la solution exacte du canal non Boussinesq introduite par [44] est présenté ici. On montre tout d'abord l'existence et la forme de solutions exactes des équations de Navier-Stokes à forte variation de masse volumique dans des canaux horizontaux (de hauteur H), dans lesquels des gradients verticaux de température sont créés par les parois hautes et basses des canaux (voir

figure 3.1). L'écoulement est considéré loin en aval de l'entrée du canal, de telle sorte qu'il est établi, que la forme exacte des conditions d'entrée n'influe pas sur le résultat et que les gradients de vitesse et de température sont purement verticaux. Cette situation est très différente de celle étudiée par [45], dans laquelle le canal est vertical et la vitesse parallèle à la gravité. On s'intéresse aux fortes variations de masse volumique, et dans le contexte des écoulements de gaz avec variations de température. De plus, on se limite ici aux écoulements laminaires.

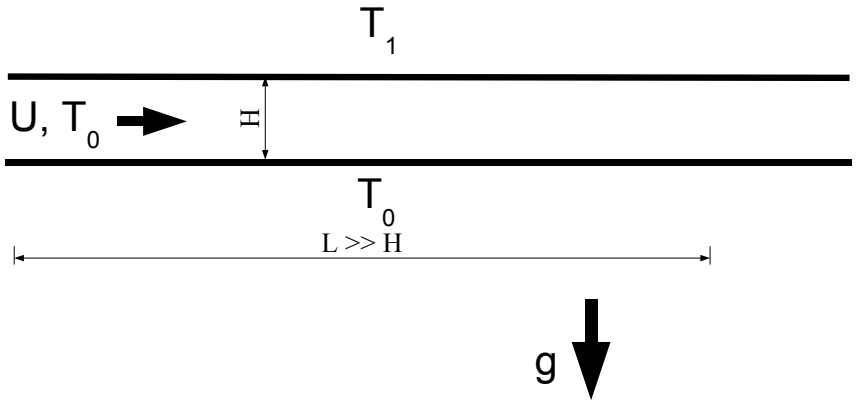


FIGURE 3.1 – Schéma de la situation étudiée : écoulement stratifié dans un canal horizontal.

3.2.2 Résolution des équations

On considère un écoulement laminaire d'un gaz de masse volumique variable. L'écoulement est supposé parallèle et la direction de l'écoulement est notée x. La direction verticale est notée z, de telle sorte que l'on utilise les notations :

$$\underline{u} = U(z)\underline{e}_x \quad , \qquad \rho = \rho(z). \tag{3.1}$$

On utilise les équations développées dans le chapitre 2, qui se réduisent à [1] :

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dz}\left(\mu\frac{dU}{dz}\right) \tag{3.2}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g \tag{3.3}$$

$$0 = \frac{d}{dx_j}\left(\rho C_p'\kappa\frac{dT}{dx_j}\right) \tag{3.4}$$

avec les conditions aux limites représentées sur la figure 3.1.

En définissant $a = -\frac{\partial P}{\partial x} \geq 0$, il vient :

$$\frac{da}{dz} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(-\rho g) = 0. \tag{3.5}$$

De ce fait, l'équation de quantité de mouvement dans la direction du canal peut s'intégrer en

$$\mu\frac{dU}{dz} = -az + \tau_0 \tag{3.6}$$

où τ_0 est la contrainte pariétale de cisaillement. Lorsque $a \neq 0$, $e = \tau_0/a$ est l'unique hauteur à lequelle $\frac{dU}{dz} = 0$ (avec $0 < e < H$ puisque $U(0) = U(H) = 0$).

Dans l'air sec, on a une bonne approximation en prenant une nombre de Prandtl $Pr = \frac{\mu}{\rho\kappa}$ contant, de même que la chaleur spécifique C_p' (voir chapitre 2 – pour la suite de ce chapitre, C_p' est noté C_p). Dans ces conditions, l'équation de la chaleur peut être intégrée en

$$\mu\frac{dT}{dz} = \frac{Prq_0}{C_p} \tag{3.7}$$

où q_0 est le flux de chaleur vertical en $z = 0$.

La variation de μ avec la température pour un gaz parfait est bien approximée par la formule de Sutherland (voir chapitre 2) :

$$\mu = \mu_r\sqrt{\frac{T}{T_r}}\frac{1+\frac{C}{T_r}}{1+\frac{C}{T}} \tag{3.8}$$

Pour l'air sec, $C = 123,6$K, et à $T_r = 273$K, $\mu_r = 17.1\times10^{-6}$Pa.s. En conséquence

$$\frac{dU}{dz} = \frac{-az+\tau_0}{\mu_0}\left[\sqrt{\frac{T}{T_0}}\,\frac{1+\frac{C}{T_0}}{1+\frac{C}{T}}\right]^{-1} \tag{3.9}$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{Prq_0}{C_p\mu_0}\left[\sqrt{\frac{T}{T_0}}\,\frac{1+\frac{C}{T_0}}{1+\frac{C}{T}}\right]^{-1}. \tag{3.10}$$

1. Dans l'équation d'enthalpie, le terme en $u_i\partial C_p'/\partial x_i$ est nul car les lignes de courant sont perpendiculaires aux gradients de C_p'.

En notant $Z = z/H$, $U_0 = \tau_0 H/\mu_0$, $\tilde{u} = U/U_0$, $\alpha = aH/\tau_0$, $\theta = T/T_0$ (où T_0 est la température de la paroi en $z = 0$), $\beta = C/T_0$, et $\gamma = \frac{Prq_0H}{C_p\mu_0T_0(1+\beta)}$, il vient

$$\frac{\sqrt{\theta}}{1+\beta/\theta}\frac{d\tilde{u}}{dZ} = \frac{-\alpha Z+1}{1+\beta} \tag{3.11}$$

$$\frac{\sqrt{\theta}}{1+\beta/\theta}\frac{d\theta}{dZ} = \gamma. \tag{3.12}$$

En utilisant $\int \frac{u^{3/2}}{1+u}du = 2(u^{3/2}/3 - u^{1/2} + \arctan u^{1/2})$, [2] on peut intégrer l'équation de la température en :

$$Z = \frac{2\beta^{3/2}}{\gamma}\Big[\frac{\theta^{3/2}-1}{3\beta^{3/2}} - \frac{\theta^{1/2}-1}{\beta^{1/2}} + \arctan\frac{\theta^{1/2}}{\beta^{1/2}} - \arctan\frac{1}{\beta^{1/2}}\Big]. \tag{3.13}$$

Pour la vitesse, en utilisant $\frac{d\tilde{u}}{d\theta} = \frac{d\tilde{u}}{dZ}\,\frac{dZ}{d\theta}$, il vient

$$\frac{d\tilde{u}}{d\theta} = \frac{-\alpha Z+1}{\gamma(1+\beta)} \tag{3.14}$$

avec comme conditions aux limites $\tilde{u}(\theta = 1) = 0$ et $\tilde{u}(\theta = T_1/T_0) = 0$. En injectant 3.13 dans l'équation ci-dessus, il vient pour $\theta \in [1, T_1/T_0]$:

$$(1+\beta)\frac{d\tilde{u}}{d\theta} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma}\times\frac{2\beta^{3/2}}{\gamma}\Big[\frac{\theta^{3/2}-1}{3\beta^{3/2}} - \frac{\theta^{1/2}-1}{\beta^{1/2}} + \arctan\frac{\theta^{1/2}}{\beta^{1/2}} - \arctan\frac{1}{\beta^{1/2}}\Big] \tag{3.15}$$

avec $\tilde{u}(\theta = 1) = 0$ and $\tilde{u}(\theta = T_1/T_0) = 0$. Cette équation peut paraître sur-déterminée, puisque l'on dispose de deux conditions aux limites pour une équation différentielle du premier degré. Ce n'est pas le cas, car la contraite pariétale de cisaillement τ_0 est apparue comme une constante d'intégration dans l'équation (3.6) et donc la valeur de α est à déterminer. L'équation différentielle 3.15 peut être intégrée analytiquement avec des fonctions spéciales (voir par exemple [26]). Cela étant, l'équation différentielle ne présente pas de difficulté particulière d'intégration numérique et il est très simple et très rapide de tabuler la fonction (par exemple par la méthode des trapèzes ou la méthode de Simpson). Comme on travaille sur un intervalle de définition compact, on peut aussi travailler en interpolant l'intégrande par des polynômes (par exemple des polynômes de Berstein, voir [46]). La figure 3.2 donne le résultat d'une intégration numérique.

Le résultat de l'intégration peut être comparé avec une simulation numérique directe. La simulation employée utilise le code FDS4 dans sa configuration de

2. puisque $\int_a^b \frac{u^{3/2}}{1+u}du = 2\int_{a^{1/2}}^{b^{1/2}} \frac{v^4 dv}{1+v^2}$ et $\frac{v^4}{1+v^2} = v^2 - 1 + \frac{1}{1+v^2}$.

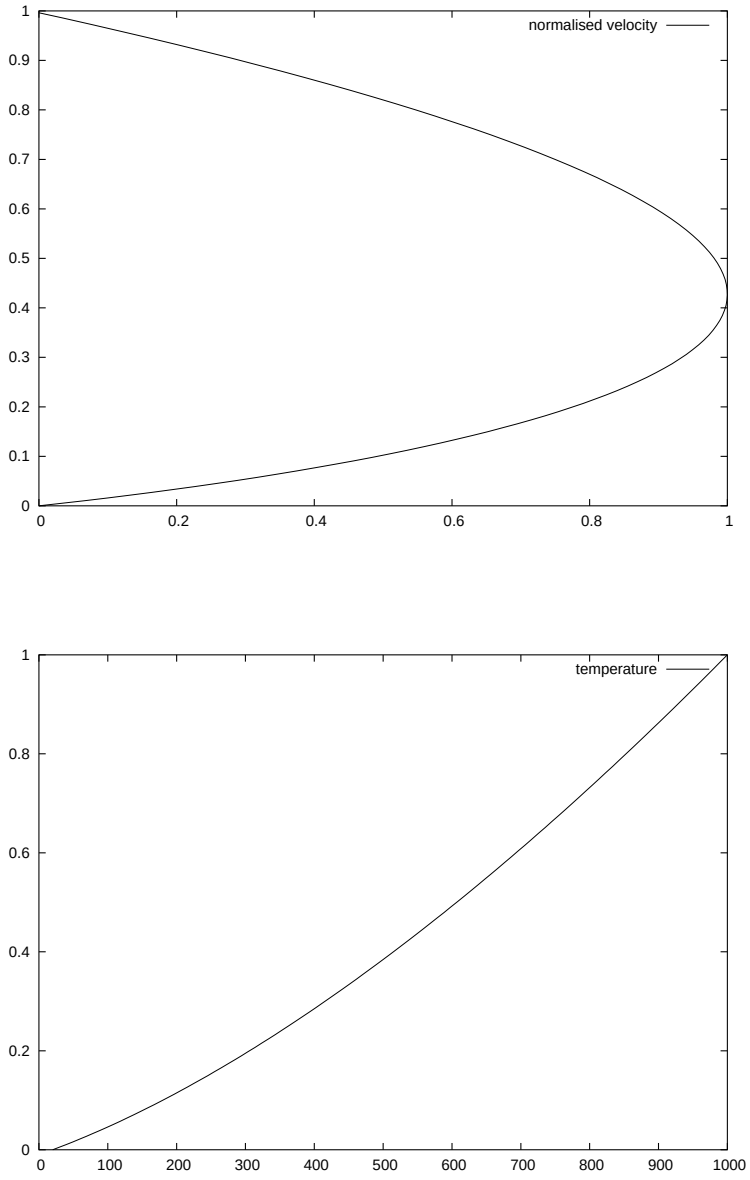


FIGURE 3.2 – Profils de vitesse et de température dans un canal empli d'air sec, avec une température de paroi basse de 20°C et une température de paroi haute de 1000°C (la hauteur du canal est de 0,01 m et le gradient de pression est de 0.01 Pa/m ; le nombre de Reynolds est 15). Les courbes ont été obtenues en utilisant d'une part la solution semi-analytique et une simulation numérique directe, et les courbes correspondant à ces deux méthodes se superposent parfaitement sur la figure.

simulation numérique directe (voir [19]). Le domaine de la simulation est un canal bidimensionnel de 1 m de long et 0,01 m de haut, avec 400 mailles dans la longeur de 20 dans la hauteur. Le résultats de la simulation et de la résolution semi-analytique des équations coïncident parfaitement (voir figure 3.2).

3.2.3 Flux de chaleur vertical

En notant $\theta_1 = T_1/T_0$, l'équation (3.13) conduit à :

$$\frac{Prq_0H}{C_p\mu_0T_0(1+\beta)} = 2\beta^{3/2}\Big[\frac{\theta_1^{3/2}-1}{3\beta^{3/2}} - \frac{\theta_1^{1/2}-1}{\beta^{1/2}} + \arctan\frac{\theta_1^{1/2}}{\beta^{1/2}} - \arctan\frac{1}{\beta^{1/2}}\Big]. \tag{3.16}$$

De ce fait le flux de chaleur vertical par unité de surface est donné par :

$$q_0 = 2\beta^{3/2}\frac{C_p\mu_0T_0(1+\beta)}{PrH}\Big[\frac{\theta_1^{3/2}-1}{3\beta^{3/2}} - \frac{\theta_1^{1/2}-1}{\beta^{1/2}} + \arctan\frac{\theta_1^{1/2}}{\beta^{1/2}} - \arctan\frac{1}{\beta^{1/2}}\Big]. \tag{3.17}$$

En écrivant le flux de chaleur vertical sous la forme d'un coefficient d'échange h, avec

$$q_0 = h(T_1 - T_0), \tag{3.18}$$

on obtient donc

$$h = 2\beta^{3/2}\frac{C_p\mu_0(1+\beta)}{PrH(\theta_1-1)}\Big[\frac{\theta_1^{3/2}-1}{3\beta^{3/2}} - \frac{\theta_1^{1/2}-1}{\beta^{1/2}} + \arctan\frac{\theta_1^{1/2}}{\beta^{1/2}} - \arctan\frac{1}{\beta^{1/2}}\Big]. \tag{3.19}$$

En définissant le nombre de Nusselt Nu par

$$Nu = \frac{hH}{\rho_0 C_p \frac{\nu_0}{Pr}}, \tag{3.20}$$

il vient donc

$$Nu = 2\beta^{3/2}\frac{1+\beta}{\theta_1-1}\Big[\frac{\theta_1^{3/2}-1}{3\beta^{3/2}} - \frac{\theta_1^{1/2}-1}{\beta^{1/2}} + \arctan\frac{\theta_1^{1/2}}{\beta^{1/2}} - \arctan\frac{1}{\beta^{1/2}}\Big]. \tag{3.21}$$

La figure 3.3 donne la valeur du nombre de Nusselt en fonction de θ_1 pour l'air sec.

3.2.4 Cas d'un écoulement Boussinesq

Pour un écoulement Boussinesq, on suppose que les différences de température sont faibles, de telle sorte que l'on peut écrire $\theta = 1 + \theta'$ avec $\theta' \ll 1$. Les équations (3.13) et (3.15) donnent, une fois linéarisées au premier ordre

$$\theta' = \theta'_1 \times Z \quad \text{et} \quad \tilde{u} = Z - Z^2 \tag{3.22}$$

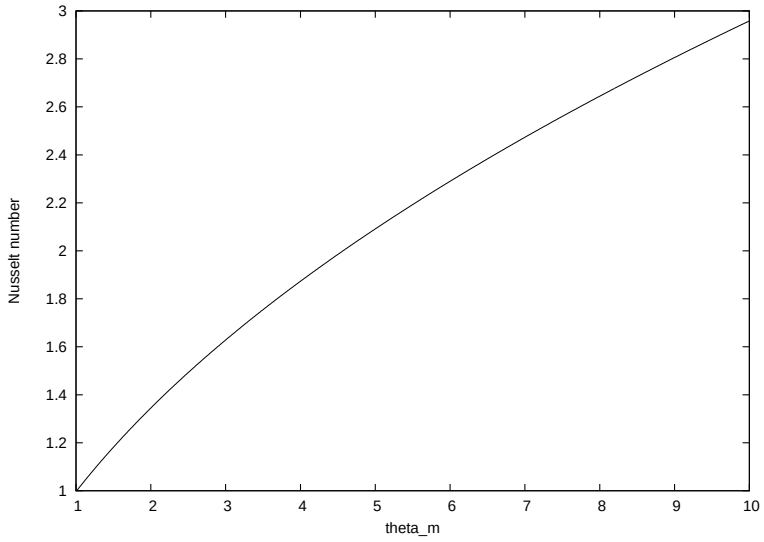


FIGURE 3.3 – Nombre de Nusselt en fonction de θ_1 pour l'air sec ($T_0 = 20°$C).

On retrouve donc le profil de Poiseuille. La stratification thermique n'a aucun effet sur le champ de vitesse et le coefficient d'échange est

$$h_B = \frac{C_p \mu_0}{PrH}, \tag{3.23}$$

ce qui correspond à $Nu = 1$.

3.2.5 Discussion et perspectives

L'écoulement laminaire avec fortes différences de température en canal a été analysé, ce qui a conduit à proposer une solution exacte semi-analytique des équations de Navier-Stokes pour le cas considéré. Physiquement, la forme du résultat ne vient pas de la variation de la masse volumique, qui n'intervient pas dans ce cas où les lignes de courant sont parallèles, mais de la variation de la viscosité dynamique avec la température, qui fait que le gradient de pression rencontre plus ou moins de résistance selon hauteur. Il faut noter que le maximum de vitesse se situe dans la zone de température plus basse (et donc à viscosité plus faible). Ceci est à l'opposé du comportement d'un courant de densité (voir [47]). Les différences entre les deux écoulements sont nombreuses, mais il aurait été tentant de penser l'écoulement laminaire en canal comme une limite à temps long du courant de densité. La différence entre le comportement à temps long du courant de densité

et l'écoulement laminaire en canal sera intéressante à considérer dans un travail complémentaire.

La comparaison avec les simulation numérique directe utilisant FDS a montré que les résultats sont absolument identiques. Ceci constitue le premier cas test exact et non trivial pour ce modèle basé sur la résolution de l'équation de pression par tranformée de Fourier rapide (voir [19], [48]), et le résultat de ce cas test est positif.

La perspective ouverte par cette solution exacte est bien sûr d'en faire une analyse de stabilité avec un nombre de Reynolds croissant. Cette solution est de la forme $z = z(T)$, $U = U(T)$, ce qui, selon [45], ne se prête pas à une analyse de stabilité efficace. Cependant, la sitation est ici différente de celle analysée par [45] car l'équation $z = z(T)$ forme un difféomorphisme très régulier qui peut donc être inversé relativement simplement. Il est aussi à noter que l'analyse de stabilité est surtout intéressante dans le cas d'une stratification stable, lorsque la paroi chaude est la paroi haute, situation qui conduit à la création d'ondre des gravité, avec la question non résolue de l'existence (ou non) de longueurs d'onde préférentielles.

Au delà de l'analyse de stabilité de l'écoulement laminaire visqueux, les nombres de Reynolds rencontrés dans les écoulements réels créées par des incendies sont beaucoup plus élevés. La suite de ce chapitre va analyser diverses questions liées à ces nombres de Reynolds plus élevés.

3.3 Ecoulements turbulents stratifiés en canal

3.3.1 Flux vertical de chaleur en écoulement parallèle : cas de la couche limite atmosphérique

Dans la modélisation de l'atmosphère, on considère des conditions aux limites thermiques au sol en flux de chaleur vertical par unité de surface Q_s (compté positivement lorsque qu'il est montant) et non pas en température, et on définit θ_* le flux adimensionnel par le ratio de Q_s par un flux de chaleur convectif associé à la vitesse de frottement pariétal (on utilise l'indice 0 pour les quantités au niveau de la paroi inférieure, le sol en l'occurence) :

$$\theta_* = \frac{Q_s}{\rho_0 C_P T_0 u_*}$$

Ainsi, lorsque $|\theta_*| \ll 1$, on est a priori dans un régime pour lequel la dynamique de la couche limite sans variation de masse volumique (dite couche limite neutre) doit l'emporter. Lorsque $\theta_* > 0$ et n'est pas petit devant 1, le régime correspond à de la convection et lorsque $\theta_* < 0$ et de valeur absolue non petite devant 1, on est en stratification stable (ce qui correspond au cas envisagé dans la section 3.3.2).

On définit aussi la longueur de Monin-Obukhov L_{MO} par (voir par exemple [13]), avec $\kappa \approx 0,4$ la constante de Karman :

$$L_{MO} = -\frac{u_*^3 C_P \rho_0 T_0}{\kappa g Q_s} = -\frac{u_*^2}{\kappa g \theta_*}$$

Cette longueur est très largement utilisée pour la compéhension et la modélisation de la turbulence atmosphérique. Cependant, son usage est limité pour les applications à la modélisation de l'incendie, car le lien entre u_* et la vitesse débitante U n'est pas trivial, et de plus il peut y avoir des zones de relaminarisation, voir la discussion dans [15, § 21.7]. On préfère donc ici proposer une méthode qui utilise le cas du canal laminaire exploré en section 3.2 et analyse la situation à Reynolds croissant.

3.3.2 Evolution du flux vertical de chaleur en fonction des nombres de Reynolds et de Froude

L'objectif de cette section est de s'interroger sur les niveaux de turbulence rencontrés dans un écoulement stratifié en canal. Dans la configuration de la figure 3.1, on peut caractériser les données d'entrée par deux nombres adimensionnels, le nombre de Reynolds et un nombre de Richardson :

$$Re = \frac{UH}{\nu(T_0)} \quad \text{et} \quad Ri = \frac{g\frac{T_1-T_0}{T_0}H}{U^2} = g(\theta_1 - 1)\frac{H}{U^2} \tag{3.24}$$

On peut noter que le nombre de Richardson est le carré de l'inverse d'un nombre de Froude réduit .

Pour caractériser le niveau de turbulence, on peut utiliser différents groupes adimensionnels. Un premier choix peut être de prendre le ratio d'une moyenne quadratique de la fluctuation de vitesse à une hauteur donnée par U. Ce choix comporte une part d'arbitraire dans la détermination de cette hauteur. On préfère donc introduire le nombre adimensionnel suivant :

$$C = \frac{q}{q_0} \tag{3.25}$$

où q est le flux de chaleur vertical par unité de surface dans l'écoulement, et q_0 le flux de chaleur qu'aurait un écoulement laminaire de mêmes nombres de Reynolds et de Richardson, donné par l'équation (3.17) :

$$q_0 = 2\beta^{3/2}\frac{C_p \mu_0 T_0 (1+\beta)}{PrH}\left[\frac{\theta_1^{3/2}-1}{3\beta^{3/2}} - \frac{\theta_1^{1/2}-1}{\beta^{1/2}} + \arctan\frac{\theta_1^{1/2}}{\beta^{1/2}} - \arctan\frac{1}{\beta^{1/2}}\right].$$

avec $\theta_1 = 1 + Ri\,\frac{U}{gH}$. L'objet de cette section est de proposer des pistes pour caractériser la fonction

$$C = C(Re, Ri)$$

Pour $Re \ll 1$, on est bien sûr en écoulement laminaire, et donc $C(Re,Ri) \approx 1$ pour tout Ri. Quand Re augmente à Ri fixé, il est raisonnable d'anticiper que l'écoulement laminaire va se déstabiliser, puis devenir turbulent, et que C va augmenter brutalement lors de la transition vers la turbulence, puis se stabiliser.

Dans le cas des faibles variations de masse volumique (Boussinesq), les résultats des simulations 1S0, 1S1, 1S2 et 1S3 réalisées par [49] peuvent être utilisés. Cet article utilise les grandeurs suivantes (remises dans les notations employées ici, u_* étant la vitesse de frottement pariétal) :

$$Re_\tau = \frac{u_* H/2}{\nu} \quad , \qquad Ri_\tau = g(\theta_1 - 1)\,\frac{H/2}{u_*^2} \quad , \qquad Re_b = \frac{UH}{\nu}$$

On a donc

$$Ri = Ri_\tau \cdot 8 \frac{Re_\tau^2}{Re_b^2}$$

ce qui permet, en utilisant le tableau V de [49] de calculer $C(Re,Ri)$ en quatre points, voir tableau 3.1. On retrouve bien dans ces résultats le fait que la turbulence est moins efficace pour le mélange lorsque le nombre de Richardson augmente avec un nombre de Reynolds approximativement constant. Cependant, il faut remarquer que les nombres de Reynolds et de Richardson de [49] sont petits par rapport à ceux rencontrés dans les applications pour l'incendie : typiquement, pour U de l'ordre de 1 m/s et H de l'ordre de 1 m, on a Re de l'ordre de 10 000 et pour T_1 de l'ordre de 1200 K on a Ri de l'ordre de 30. Une bonne compréhension de la structure de la turbulence (et du retour vers un écoulement non turbulent) suppose donc de réaliser des études complémentaires pour explorer ce domaine. Ces études peuvent être numériques ou expérimentales.

Re	Ri	C
5666	0	5,79
5944	0,0734	4,62
6168	0,1226	4,01
6294	0,1570	3,69

TABLE 3.1 – $C(Re,Ri)$ pour les simulations 1S0, 1S1, 1S2 et 1S3 de [49].

3.3.3 Perspectives

L'étude présentée en section 3.3.2 est exploratoire et propose une méthodologie pour constituer une base de donnée de validation des modèles numériques de type Moyennes de Reynolds ou Simulation des grandes échelles.

Dans ce but, le programme de travail consiste d'une part à réaliser une analyse de stabilité de la solution laminaire à Ri fixé lorsque Re croît, et des simulations numériques pour une pannel suffisamment large de valeurs du couple (Re, Ri). L'ensemble de ces deux démarches permettra de proposer une cartographie de la fonction $C(Re, Ri)$. Cette cartographie pourra ensuite servir de base de donnée pour la validation et l'amélioration des modèles.

3.4 Statistiques de la turbulence en couche limite

3.4.1 Introduction

La section précédente s'est essentiellement attachée à la mise en place d'une méthode pour quantifier quelques grandeurs globales dans des écoulements stratifiés en canal, laminaire et turbulents. Le but de cette section est de présenter une analyse de la structure fine de la turbulence en couche limite turbulente neutre, et de proposer une poursuite de cette analyse dans le cas d'une couche limite stablement stratifiée. Une partie des résultats de cette section a été publiée dans [50], mais les notations ont été simplifiées et des analyses complémentaires pratiquées.

Théories *bottom-up* et *top-down*

Dans une couche limite turbulente neutre, de nombreuses références expliquent l'alimentation de la cascade turbulente en énergie par la présence d'instabilités visqueuses à proximité immédiate de la paroi (voir par exemple [51] ou [40] et les références qui y sont incluses). Cette analyse repose sur des observations faites sur parois lisses, pour des hauteurs pouvant aller jusqu'à environ 50 y^+, et est généralisée aux parois rugueuses, qui constituent l'essentiel des parois rencontrées tant dans les applications que dans les applications atmosphériques. On appelle cette théorie l'explication *bottom-up* des couches limites turbulentes.

D'autres auteurs privilégient plutôt une théorie dans laquelle les caractéristiques de la turbulence dans la couche limite sont dominées par des tourbillons créés dans des couches plus hautes, qui sont distordus lorsqu'ils s'approchent de la paroi, d'où le nom de vision *top-down*. Cette théorie vient plutôt de la communauté des sciences de l'atmosphère, sur la base de l'observation des effets du vent sur les étendues d'eaux ou les champs lors de risées, voir [52]. Ces travaux portent en général sur ces couches limites rugueuses, avec une hauteur visqueuse typique

$\nu/u_* \approx 10^{-4}$ m, une rugosité de l'ordre de 0,1 à 10 m, et des hauteurs de mesure de l'ordre de 10 à 100 m.

Dans cette section, on va s'attacher à analyser si l'une ou l'autre des deux théories peut être écartée sur la base d'une analyse de la cinématique des écoulements, dans le cas neutre, et en ouvrant la perspective sur le cas da la stratification stable.

On peut d'ailleurs remarquer que l'hypothèse de Taylor de tourbillons gelés (voir par exemple [10], et aussi [53]) repose sur l'hypothèse que les tourbillons turbulents, qui sont transportés par l'écoulement turbulent, ne sont ni top-down ni bottom up.

Correspondance entre les écoulements sur paroi rugueuse et paroi lisse

Comme les données peuvent provenir aussi bien de couches limites atmosphériques (rugueuses) que de couches limites sur paroi lisse, il importe de mettre en place des notations qui soient compatibles avec les deux types d'écoulements. Dans la suite, x est la coordonée dans la direction de l'écoulement, et y la direction verticale. On définit y_* par $y_* = \nu/u_*$.

En neutre, pour une paroi lisse, le profil de vitesse dans la couche logarithmique est $U = \frac{u_*}{\kappa} \ln E y^+$ avec $y^+ = y/y_*$ et $E = 8$ à 10. Pour une paroi rugueuse, il vaut $U = \frac{u_*}{\kappa} \ln y/y_0$ avec y_0 la rugosité. Ainsi, les hauteurs qui se correspondent sont y_*/E et y_0. On utilise donc la notation suivante pour les couches limites rugueuses pour toute la section :

$$y^+ = \frac{y}{E y_0}$$

Pour fixer les idées, on peut retenir comme ordre de grandeur que pour une couche limite atmosphérique de rugosité $y_0 = 4$ à 10 cm, la hauteur de la couche logarithmique est de l'ordre de 200 m et celle de la couche limite est de l'ordre de 1000 m. Une hauteur adimensionnelle $y^+ = 100$ corresponds à une hauteur de l'ordre de 40 à 100m.

3.4.2 Outils pour caractériser les mouvement verticaux préférentiels

Utilisation des balayages et des éjections

Un outil classique pour étudier les statistiques de la turbulence en fonction des mouvements verticaux est l'analyse par quadrants, basées sur le calcul des balayages et des éjections. On note$(U,0,0)$ le champ de vitesse moyen et (u,v,w) le champ de fluctuations de vitesses. On dit qu'il y a une *éjection* au point (x,y,z)

et l'instant t si $u(x,y,z,t) < 0$ et $v(x,y,z,t) > 0$. On dit qu'il y a un *balayage* au point (x,y,z) et l'instant t si $u(x,y,z,t) > 0$ et $v(x,y,z,t) < 0$.

La somme des balayages et des éjections domine toujours les autres évènements, dès lors que la vitesse moyenne croît avec la hauteur. En effet, dans un tel cas on peut écrire $U(y) = S(y-y_1) + U(y_1)$ au moins localement pour $y \approx y_1$ fixé. On considère un petit volume de fluide située à la hauteur y_1 à l'instant t_0. La vitesse de ce petit volume est $(U(y_1)+u,v,w)$, avec une fluctuation de moyenne nulle. A l'instant $t+dt$, le petit volume de fluide a été transporté et se retrouve à la hauteur $y_1 + vdt$. Pour dt très petit, les forces n'ont pas eu le temps de modifier sensiblement la vitesse de ce petit volume, alors que la vitesse moyenne du fluide qui l'entoure à sa nouvelle hauteur est $U(y_1) + Svdt$. De ce fait, la nouvelle valeur de la fluctuation est $(u - Sv\,dt, v, w)$. De ce fait, si $v > 0$, la probabilité d'avoir une fluctuation horizontale négative s'est accrue, et si en revanche $v < 0$, la probabilté pour une fluctuation positive s'est accrue

La répartition entre les balayages et les éjections a été analysée dans de nombreux travaux. A titre d'exemple, dans [54], la figure 10 montre que, pour une couche limite atmosphérique rugueuse, aux hauteurs $y^+ = 22$, 70 et 120, les balayages dominent les éjections, ce qui semble être en faveur de la vision *top-down*. Dans la figure 12, il est montré que les balayages dominent en termes de nombre d'évènements, mais que la contribution éjections dominent le flux vertical de quantité de mouvement.

Cependant, la domination des balayages ou des éjections est peu représentative de la dynamique des écoulements, comme le montre le modèle très simple présenté maintenant. Pour une paire de tourbillons ponctuels isolés se rapprochant d'une paroi en bidimensionnel, une solution exacte peut être calculés avec la méthode des images. Quelle que soit la direction (vers le haut ou vers le bas) de la paire de tourbillons, le champ de vitesse est symétrique et les balayages compensent exactement les éjections. Cet exemple montre donc qu'il n'est pas possible de conclure sur la nature de l'écoulement par l'analyse des balayages et des éjections. Il montre de plus que l'identification d'une direction verticale préférentielle de l'écoulement repose sur l'identification des zones à vorticité élevée.

Identification des tourbillons au moyen d'un seuil sur la vorticité

Au delà de l'exemple de la paire de tourbillons présenté ci-dessus, on peut noter que, du fait de l'incompressibilité et de l'homogénéité sur les plans horizontaux, le flux vertical de masse est nul, soit $< v >= 0$ (y compris en masse volumique variable, en remplaçant la moyenne de Reynolds noté ici $< \cdot >$ par une moyenne de Favre). De ce fait, la théorie top-down comme la théorie bottom-up ne suppose pas simplement une direction préférentielle de l'écoulement vertical. Elles reposent sur le postulat que certaines parties de l'écoulement sont plus im-

portantes que d'autres, et que l'on peut identifier ces parties à des *tourbillons*.

Une possibilité pourrait être de définir les tourbillons comme des zones de forte valeur de la vitesse verticale. On pourrait alors les identifier et les quantifier en calculant $< v^3 >$. Cependant, dans le modèle simplifié de la paire de tourbillons ci-dessus, $< v^3 >= 0$ du fait de la symétrie, ce qui montre que cette approche ne permet pas de discrimer les les mouvements top-down et bottom-up ne serait-ce que dans ce cas simple.

On définit donc les tourbillons commes les zones de vorticité intense $\underline{\omega} = \underline{\text{rot}}\ \underline{u}$ (ω est la vorticité des fluctuations seulement). On définit l'enstrophie instantanée locale $\Omega = |\underline{\omega}|^2$ et on prend comme échelle caractéristique de la vorticité le cisaillement moyen local $S = \frac{\partial U}{\partial y}$. On dira que la vorticité est intense si le ratio de la racine carré de l'enstrophie locale par le cisaillement moyen dépasse un seuil α, et on pratique des moyennes conditionnées au dépassement de ce seuil. On peut ainsi décomposer la vitesse verticale en 3 composants :

$$\begin{aligned} v_-(\alpha) &= \left\langle v \Big|_{(\sqrt{\Omega}<\alpha|S|)} \right\rangle \\ v_+^<(\alpha) &= \left\langle v \Big|_{(\sqrt{\Omega}\geq\alpha|S| \text{ et } v\leq 0)} \right\rangle \\ v_+^>(\alpha) &= \left\langle v \Big|_{(\sqrt{\Omega}\geq\alpha|S| \text{ et } v>0)} \right\rangle \end{aligned}$$

On note aussi les probabilités d'occurence

$$\begin{aligned} \gamma_-(\alpha) &= \frac{\int_A \chi_{(\sqrt{\Omega}<\alpha|S|)} dxdz}{A} \\ \gamma_+^<(\alpha) &= \frac{\int_A \chi_{(\sqrt{\Omega}\geq\alpha|S| \text{ et } v\leq 0)} dxdz}{A} \\ \gamma_+^>(\alpha) &= \frac{\int_A \chi_{(\sqrt{\Omega}\geq\alpha|S| \text{ et } v>0)} dxdz}{A} \end{aligned}$$

avec A une surface horizontale de référence et $\chi_{(\sqrt{\Omega}<\alpha|S|)} = 1$ si $\sqrt{\Omega} < \alpha|S|$, 0 sinon, et des définitions semblables pour les deux autres fonctions caractéristiques. En définissant évènements intenses comme les zones d'écoulement où $\sqrt{\Omega} \geq \alpha|S|$, les évènements intenses ascendants (*bottom-up*) correspondent donc à $\gamma_+^>(\alpha)$, et les évènements intenses descendants (*top-down*) à $\gamma_-^>(\alpha)$.

On peut noter par ailleurs que, comme la somme des probabilités vaut 1 et que la vitesse verticale moyenne est nulle :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \gamma_-(\alpha) & + & \gamma_+^<(\alpha) & + & \gamma_+^>(\alpha) & = & 1 \\ \gamma_-(\alpha)v_-(\alpha) & + & \gamma_+^<(\alpha)v_+^<(\alpha) & + & \gamma_+^>(\alpha)v_+^>(\alpha) & = & 0 \end{array} \right.$$

3.4.3 Mouvements ascendants et descendants en couche limite neutre

La présente section est une estimation des termes définis ci-dessus dans le cas de la couche limite neutre calculée en simulation numérique directe par [55]. Cette simulation est conduite à un nombre de Reynolds (basé sur la vitesse au centre et la demi hauteur du canal) de 12580 et un nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = hu_*/\nu$ de 590. Elle a été réalisée avec un code pseudo-spectral en formulation Chebychev-τ dans la direction normale à la paroi, et Fourier dans les autres directions. Une description détaillé de la méthode numérique est donnée dans [56].

Pour α fixé, on réalise des visualisations sur des plans horizontaux de la façon suivante (voir figure 3.4) :

- couleur verte si $\sqrt{\Omega} \leq \alpha|S|$,
- couleur bleue si $\sqrt{\Omega} > \alpha|S|$ et $v \leq 0$,
- couleur rouge si $\sqrt{\Omega} > \alpha|S|$ et $v > 0$.

Suivant cette représentation, les zones peu intenses sont en vert, les zones intenses et *top-down* sont en bleu et les zones intenses et *bottom-up* sont en rouge. La figure 3.4 a été réalisée pour $\alpha = 1$. On y constate qualitativement pour y^+ valant 20, 40 et 50, une prédominance des zones rouges (vitesse verticale positive, soit zones *bottom-up*) sur les zones bleues (vitesse verticale négatives, soit zones *top-down*). Pour $y^+ = 250$, il y a un équilibre entre les zones rouges et bleues.

De plus, lorsque les zones vertes sont en nette minorité (ce qui est le cas pour y^+ valant 40, 50 et 250), ce qui correspond au cas où la valeur de α est trop faible pour discriminer les évènements réellements intenses, on a

$$\begin{cases} \gamma_+^<(\alpha) + \gamma_+^>(\alpha) = 1 \\ \gamma_+^<(\alpha)v_+^<(\alpha) + \gamma_+^>(\alpha)v_+^>(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, si les évènements de type *bottom-up* dominent en probabilité, cela a pour contrepartie que les évènements de type *top-down* sont plus intenses.

Afin de s'affranchir de la difficulté liée au choix du seuil α, la figure 3.5, tracée pour $y^+ = 100$, montre d'une part les probabilités des évènements intenses en fonction de α et d'autre part les valeurs moyennes des vitesses de ces évènements intenses. Cette figure est basée sur des éléments communiqués par F. Laadhari (communication privée). On constate que les courbes se croisent pour $\alpha \approx 0,5$, avec une prédominance des évènenements bottom-up pour $\alpha \lesssim 0,5$, et une prédominance des évènements top-down pour $\alpha \gtrsim 0,5$.

Cette figure, basée sur une analyse cinématique des évènements, n'a pas d'explication dynamique (c'est à dire basée sur une analyse des équation de Navier-Stokes) triviale, et mérite à elle seule la poursuite d'investigations détaillées du cas

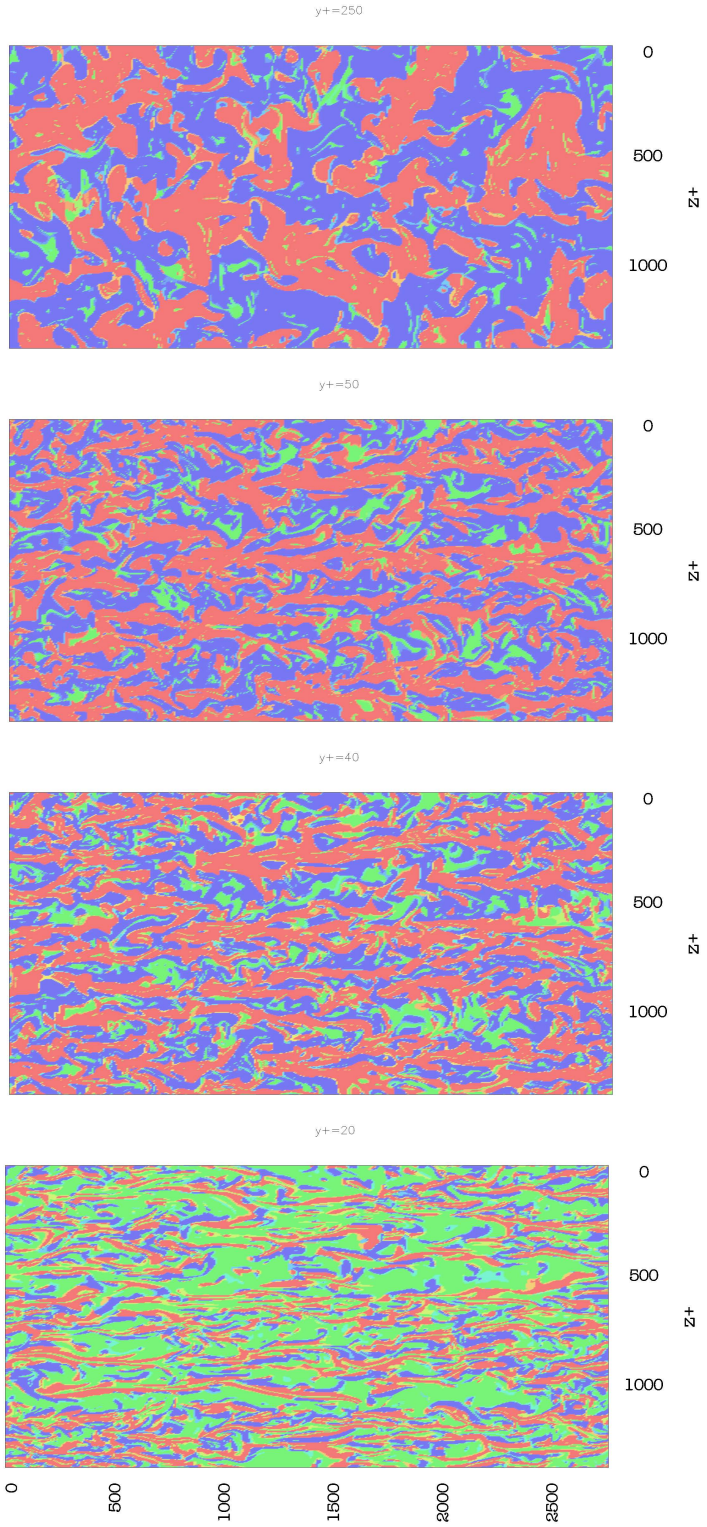


FIGURE 3.4 – Pour $\alpha = 1$, en vert zones peu intenses, en rouge zones *bottom-up* et en bleu zones *top-down*, avec, de bas en haut : $y^+ = 20$; $y^+ = 40$; $y^+ = 50$; $y^+ = 250$.

neutre. En effet, et même si in fine le mécanisme de génération de la turbulence se passerait dans la sous-couche visqueuse, il se pourrait bien que l'instabilité qui s'y produit soit déclenchée par l'arrivée d'un évènement venant des couches supérieures.

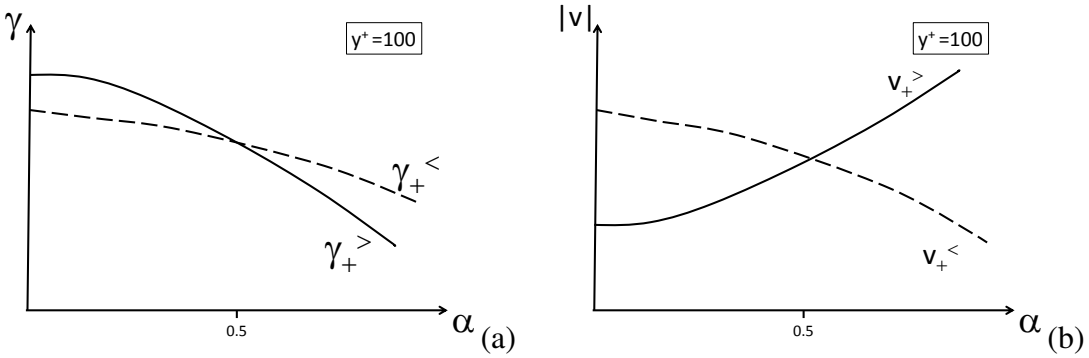


FIGURE 3.5 – Pour $y^+ = 100$, (a) : proportion d'occurence des évènements intenses en fonction du seuil α (lignes continues : évènement intenses *bottom-up* ; tirets : évènement intenses *top-down*) ; (b) : vitesse verticale moyenne des évènements intenses en fonction du seuil α (lignes continues : évènement intenses *bottom-up* ; tirets : évènement intenses *top-down*).

3.4.4 Perspectives

La perspective proposée par cette section consiste d'une part, à continuer l'investigation en neutre et d'autre part à commencer à appliquer les méthodes utilisées ici en neutre pour de la turbulence stratifiée. Pour ce qui est de l'investigation en neutre, il y a sans doute un équilibre à trouver entre les analyses de simulations numériques directes (en particulier en mettant en place un suivi lagrangien des particules fluides) et la mise au point de petits modèles analytiques à visée explicative.

3.5 Conclusion et perspectives

On a vu dans ce chapitre trois idées principales : d'une part, en laminaire, on dispose d'une solution exacte des équations de Navier-Stokes qui peut être utilisée comme cas test très simple pour les logiciels utilisés en ingénierie. D'autre part, on a vu que les cas turbulents sont beaucoup moins bien compris, qu'il s'agisse de la prévision des flux globaux en écoulement fortement stratifié ou de la structure fine de la turbulence, même en neutre. Dans ce cas particulier, un effort reste à faire

pour mieux comprendre (c'est à dire se construire une représentation mentale du phénomène) la cinématique des écoulements turbulents, dès lors que l'on souhaite mettre en place des modèles avancés.

Chapitre 4

Etude des panaches

4.1 Introduction

Le chapitre 3 a analysé un premier écoulement canonique, celui du canal stratifié, et a montré des pistes d'investigation complémentaires pour à la fois mieux décrire les caractéristiques moyennes de l'écoulement dans les cas fortement stratifiés et la structure fine de la turbulence. L'écoulement en canal est représentatif de la convection forcée. Le présent chapitre analyse un second écoulement canonique, le cas des panaches, représentatif de la convection libre.

Dans ce chapitre, on considère un milieu fluide ambient de masse volumique ρ_a, dans lequel se trouve une source continue de fluide de masse volumique $\rho_0 \neq \rho_a$. L'ensemble de l'écoulement est soumis à l'accélération de la pesanteur $\underline{g} = -g\underline{e}_z$, et de ce fait, la pousée d'Archimède va conduire à des mouvements de convection. Cette source est supposée localisé à la hauteur $z = 0$, et peut être ponctuelle ou non dans le plan $z = 0$. La masse volumique du milieu fluide ambient peut dépendre de la hauteur considérée, $\rho_a = \rho_a(z)$. On appelle panache un tel écoulement.

L'approche retenue est de partir du cas général, sans faire l'hypothèse que l'approximation de Boussinesq est valide, et de retrouver les résultats classiques de la théorie des panaches (tels que présentés en particulier dans [13]) en ne faisant que les hypothèses strictement nécessaires. Le cas des panaches non Boussinesq a été analysé phénoménologiquement par divers auteurs, en particulier [57], [58]. La théorie des panaches (issue des travaux des [59] et présentée en particulier dans [13]) a été étendue par [60] au cas des panaches non Boussinesq issus de sources ponctuelles.

On s'intéressera notamment au comportement asymptotique des panaches pour z grand, ce qui conduit naturellement aux corrections d'origine virtuelle (sur ce sujet, voir en particulier [61], [62] et [63]). On verra comment il est possible de

mettre en place des développements raccordés permettant de prendre en compte à la fois le champ proche (z petit) et le champ lointain (z grand), suivant l'approche proposée initialement par [63] et suivie ensuite par [64].

Dans toute la suite de ce chapitre, on note $\underline{x} = (x,y,z)$ la position d'un point, $\underline{u}(x,y,z,t) = (u,v,w)$ le champs de vitesse instantané et $\underline{U}(x,y,z) = (U,V,W)$ la moyenne de Favre de la vitesse. On se limite au cas d'une source constante, ce qui fait que la moyenne de Favre ne dépend pas du temps. Pour alléger les notations, la moyenne de Reynolds de la masse volumique est notée $\rho(x,y,z)$, la masse volumique instantanée étant $\rho(x,y,z) + \rho'(x,y,z,t)$. On utilisera également les coordonées cylindriques, où la position du point (x,y,z) est repérée par (r,θ,z) ; en coordonées cylindriques, la vitesse est notée $\underline{u}(x,y,z,t) = (u_r, u_\theta, w)$. Sauf mention contraire, on considérera qu'il n'y a pas de mouvement azimutal en moyenne, de telle sorte que $\frac{\partial(\cdot)}{\partial\theta}$ pour toute grandeur prise en moyenne de Reynolds ou de Favre. On se limite au cas d'un panache léger dans un fluide ambient lourd [1]. La source flottabilité donnant naissance au panache est supposée d'extension finie, comprise entre les hauteurs $z = 0$ et $z = h$, et le point $(x,y,z) = (0,0,0)$ est pris au barycentre de l'intersection de la source de flottabilité et du plan $z = 0$.

4.2 Modèles phénoménologiques de panaches d'incendie

Afin de fixer les idées, on commence par un rappel sur les descriptions phénoménologiques employées pour les panaches d'incendie (voir [58], [65], [66]).

Un panache d'incendie est constitué d'une zone localisée dans laquelle la combustion se produit, délivrant aux gaz autour d'elle une puissance $\dot{Q}_c$, surmontée d'une zone où l'écoulement prend une forme de panache plus ou moins perturbé par son environnement (confinement géométrique, vent traversier, etc.).

Outre la puissance délivrée aux gaz, une part importante $\dot{Q}_r$ de la puissance totale $\dot{Q}_r + \dot{Q}_c$ est rayonnée. Cette fraction rayonnée n'est pas prise en compte dans la présente section [2].

Les modèles phénoménogiques se composent de plusieurs sous modèles :

1. détermination de la puissance du foyer $\dot{Q}_c$ en fonction du combustible et de la géométrie ;

1. Les deux situations sont similaires au travers d'un changement de signe pour un panache avec des faibles différences de masse volumique (panache dit "Boussinesq"), mais ce n'est pas le cas général lorsque l'on ne suppose plus que les différences de masse volumiques entre le panache et le milieu ambient sont faibles.

2. Quand le milieu ambient est essentiellement transparent, les deux phénomènes sont assez largement découplés en dehors de la zone de pyrolyse et de combustion, voir plus loin.

2. détermination de la hauteur de flamme H_f en fonction de la puissance et de la géométrie du foyer ;
3. détermination de la température sur l'axe T_{max} en fonction de la puissance et de la hauteur au dessus du panache.
4. détermination du diamètre du panache b en fonction de la puissance et de la hauteur au dessus du panache.

Par exemple, le modèle proposé par [65] pour les feux de bac de combustibles liquides peut être reformulé ainsi [3] :

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_c &= \frac{4K_1}{\pi}(1-e^{-2K_2\sqrt{A/\pi}})A \\
H_f &= -1,15\sqrt{A}+3,74\dot{Q}_c^{2/5} \\
T_{max}(z) &= T_a + Min(900, 2,48\times\dot{Q}_c^{2/3}(z-z_0)^{-5/3}) \\
b(z) &= 0,12\Big(\frac{T_{max}(z)}{T_a}\Big)^{1/2}(z-z_0)
\end{aligned}$$

Dans les équations ci-dessus, toutes les grandeurs sont exprimées dans l'unité pertinente du système international sauf la puissance exprimée en MW ; A est l'aire du foyer, K_1 et K_2 dépendent du combustible, T_a est la température ambiante, et z_0 est une origine virtuelle à déterminer. On retrouve ainsi le modèle proposé dans les Eurocodes.

Pour un bac d'heptane, on peut prendre $K_1 = 3,536$ MW/m^2 et $K_2 = 1,1$ m^{-1}. Pour de l'éthanol, $K_1 = 0,315$ MW/m^2 et K_2 est infini. Si la puissance est connue par ailleurs, il est d'usage d'utiliser les 3 dernières équations en injectant la valeur de la puissance.

4.3 Flux passant au travers de plans horizontaux

4.3.1 Définition des flux convectifs

La vitesse verticale $W(x,y,z)$ (comptée positivement dans le sens opposé à l'accélération de la gravité) et la masse volumique permettent de définir des flux convectifs de quantité de matière (noté G), de flottabilité (noté B), et de quantité de mouvement verticale (notée M) à travers de disques horizontaux de rayon R placés à la hauteur z :

$$G(z,R) = \int\int_{r<R} \rho W dS \tag{4.1}$$

3. voir [48] pour les deux premières équations sous cette forme modifiée à partir de [65].

$$B(z,R) = \int\int_{r<R} g\,\frac{C'_p\rho_a - C^0_P\rho}{C^0_P\rho_a} W\,dS \tag{4.2}$$

$$M(z,R) = \int\int_{r<R} \rho W^2\,dS \tag{4.3}$$

Dans tous les cas, pour une hauteur z fixée, on suppose que le rayon R est suffisament grand pour que tous les phénomènes de convection compris entre les hauteurs z et $z+\delta z$ (avec $\delta z \ll z$) se produisent à l'intérieur du volume de rayon

La définition de B est modifiée par rapport à la définition usuelle employée dans les cas Boussinesq (cf. [59], [13]) mais aussi par rapport à celle employée dans la plupart des travaux sur les cas non-Boussinesq (cf. [60], [67] ou encore [63]) pour prendre en compte la variation de la chaleur spécifique avec la température tout en conservant une grandeur constante avec la hauteur en l'absence de sources, comme on le verra dans la suite de ce chapitre. Bien évidemment, en Boussinesq, ou en non Boussinesq si la chaleur spécifique ne dépend pas de la température, on retrouve la définition usuelle.

4.3.2 Equation d'évolution des flux

Equations aux moyennes de Favre en régime statistiquement permanent en coordonées cylindriques

Pour alléger on note $\underline{\underline{\tau}}$ et $\underline{q}$ les flux vectoriels de quantité de mouvement et de chaleur associés à la diffusion moléculaire et turbulente :

$$\underline{\underline{\tau}} = \rho\nu\,\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{U} - \underline{\underline{R}} \quad , \qquad \underline{q} = \kappa\,\underline{\mathrm{grad}}T - C_P\rho_a T_0\,\underline{M}$$

Avec ces notations, les équations (2.38) s'écrivent, en régime permanent et sous forme tensorielle :

$$\mathrm{div}\rho\underline{U} = 0 \tag{4.4}$$

$$\mathrm{div}\rho\underline{U}\otimes\underline{U} = -\mathrm{grad}P + \rho\underline{g} + \mathrm{div}\underline{\underline{\tau}} \tag{4.5}$$

$$\left(1+\frac{T}{C'_p}\frac{dC'_p}{dT}\right)\mathrm{div}\underline{U} = \frac{1}{C_p\rho_0 T_0}(\mathrm{div}\underline{q}+S) \tag{4.6}$$

Cette dernière équation est sous une forme peu pratique pour l'emploi visé ici, et on la met sous la forme équivalente :

$$\mathrm{div}\left(\frac{C'_p}{C^0_P}\,\underline{U}\right) = \frac{1}{C^0_P\rho_0 T_0}(\mathrm{div}\underline{q}+S) \tag{4.7}$$

avec $C_P^0 = C'_P(T_a)$ comme précédemment. On obtient donc, en coordonées cylindriques :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r\rho U_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho W}{\partial z} = 0 \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r\rho U_r U_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho U_r W}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial r\tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \tag{4.9}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r\rho W U_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho W W}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial r\tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \rho g \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r\frac{C'_p}{C_P^0}U_r}{\partial r} + \frac{\partial \frac{C'_p}{C_P^0}W}{\partial z} = \frac{1}{C_P^0\rho_0 T_0}\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial r q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + S\Big] \tag{4.11}$$

Equations de variation des flux convectifs

On utilise dans cette section l'équation de la divergence : pour une grandeur vectorielle $\underline{Q}$ et un volume Ω de frontière $\partial\Omega$, on a :

$$\int\int\int_\Omega div\underline{Q}\, dV = \int\int_{\partial\Omega} \underline{Q}\cdot\underline{dS}$$

On applique cette formule à chacune des équations ci-dessus, sur une boite cylindrique, centrée sur l'axe $r = 0$, de rayon R, entre les hauteurs Z et $Z + \delta z$. Il vient pour l'équation de conservation de la masse :

$$-2\pi\int_0^R \rho W(Z) r dr + 2\pi\int_0^R \rho W(Z+\delta z) r dr - 2\pi R\int_Z^{Z+\delta z} \rho U_r dr = 0 \tag{4.12}$$

d'où :

$$\frac{dG}{dz} = 2\pi\rho_a R U_r(R,z) \tag{4.13}$$

En faisant de même avec la grandeur $\rho W\underline{U}$ et en utilisant l'équation de quantité de mouvement selon z il vient :

$$\frac{dM}{dz} - 2\pi R\rho_a W(R,z)U_r(R,z) = 2\pi\int_0^R \Big[-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g + \frac{1}{r}\frac{\partial r\tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\Big] r dr \tag{4.14}$$

En notant M_D le flux vertical de quantité de mouvement verticale par diffusion moléculaire et turbulente à travers le disque de rayon R situé à l'altitude z

$$M_D = -2\pi\int_0^R \tau_{zz} r dr \tag{4.15}$$

il vient :

$$\frac{dM}{dz} + \frac{dM_D}{dz} - 2\pi R\rho_a W(R,z)U_r(R,z) = 2\pi\int_0^R \Big[-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g\Big] r dr + 2\pi R\tau_{zr}(R,z) \tag{4.16}$$

Enfin, on définit la grandeur

$$\underline{V} = g\frac{\frac{C'_p}{C^0_P}\rho_a - \rho}{\rho_a}\underline{U}$$

On a alors div $\underline{V} = \frac{g}{C^0_P \rho_0 T_0}(\text{div}\underline{q} + S)$ et donc, en tenant compte du fait que pour R suffisament grand (à Z fixé), on est à l'extérieur du panache et donc $\rho = \rho_a$, il vient :

$$\frac{dB}{dz} = \frac{2\pi g}{C^0_P \rho_0 T_0}\int_0^R \Big[\frac{1}{r}\frac{\partial r q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + S\Big] r dr$$

En remarquant que $\int_0^R \frac{1}{r}\frac{\partial r q_r}{\partial r} dr = [r q_r]_0^R = R q_r(R,z)$, et en notant B_D le flux vertical de chaleur par conduction et par diffusion turbulente à travers le disque de rayon R situé à l'altitude z, renormalisé en unité de flottabilité

$$B_D = -\frac{g}{C^0_P \rho_0 T_0} \times 2\pi \int_0^R q_z r dr \tag{4.17}$$

il vient :

$$\frac{dB}{dz} + \frac{dB_D}{dz} = \frac{2\pi g}{C^0_P \rho_0 T_0}\Big[R q_r(R,z) + \int_0^R S r dr\Big] \tag{4.18}$$

Enfin, par symétrie, la même procédure sur les flux horizontaux de quantité de mouvement dans le volume de contrôle cylindrique de rayon R entre les hauteurs z et $z + \delta z$ se réduit identiquement à zéro.

Approximation d'écoulement quasiment parallèle

Dans l'équation 4.16, le terme issu de la résultante des forces de pression $-2\pi \int_0^R \frac{\partial P}{\partial z} dr$ est à estimer. On constate expérimentalement qu'un panache conduit à un écoulement quasiment parallèle dans le panache proprement dit, et à une absence d'écoulement en dehors de celui-ci. De ce fait, l'analyse pratiquée habituellement pour les couches limites (cf. [15], pages 126 et 127) est transposable à l'identique, d'où

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r P}{\partial r} \ll \frac{\partial P}{\partial z}$$

La pression dans le panache varie donc de façon négligeable sur les plans horizontaux. Or, à l'extérieur de la zone concernée par le panache, l'écoulement est irrotationnel et de vitesse très faible, et donc la pression à la hauteur z juste à l'extérieur du panache est égale à la pression à la même hauteur loin du panache. L'analyse de l'équation de quantité de mouvement vertical loin du panache montre que l'équilibre hydrostatique est atteint. De ce fait, à la hauteur z, on a

$$P(r,z) = P_0 - \rho_a g z$$

pour tout r. Il importe de noter que l'on ne s'est pas servi ici d'une hypothèse de faible variation de masse volumique de type Boussinesq. L'équation d'évolution du flux de quantité de mouvement vertical s'écrit donc :

$$\frac{dM}{dz} + \frac{dM_D}{dz} - 2\pi R\rho_a W(R,z)U_r(R,z) = 2\pi \int_0^R (\rho_a - \rho) grdr + 2\pi R\tau_{zr}(R,z) \tag{4.19}$$

Equations pour le rayon du volume de contrôle qui tend vers l'infini

Pour une fonction $f(x,y)$ dérivable selon x et localement intégrable sur $[0,\infty[$, si l'intégrale $\int_0^Y f(x,y)dy$ est absolument convergente pour $Y \to \infty$ et si l'intégrale de la dérivée de f selon x est aussi absolument convergente, alors (voir par exemple [46]) $\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$ converge et

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

On peut appliquer ce théorème pour $G(z,R)$, dès lors que W décroit suffisamment vite en l'infini (au minimum aussi vite qu'une gaussienne). De ce fait $\frac{dG}{dz}(z,R)$ a une limite à z fixé pour $R \to \infty$, et comme

$$\frac{dG}{dz}(z,R) = 2\pi\rho_a RU_r(R,z)$$

on en déduit que $2\pi RU_r(R,z)$ a une limite pour tout z lorsque $R \to \infty$. On note $Q_e(z)$ cette limite qui a la dimension d'un débit linéique de volume. Il vient aussi, de ce fait, que $RU_r(R,z)W(R,z)$ tend rapidement vers 0 pour R qui tend vers l'infini. On note aussi $Q_m(z)$ la limite pour R qui tend vers l'infini de $2\pi g\int_0^R \frac{\rho_a-\rho}{\rho_a} rdr$

De plus, loin du panache, les gradients sont faibles et l'écoulemement laminaire, et donc $q_r(R,z)$ et $\tau_{zr}(R,z)$ tendent tous deux vers 0 pour R qui tend vers l'infini. Il vient donc :

$$\frac{dG}{dz} = \rho_a Q_e(z) \tag{4.20}$$

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{dB_D}{dz} + \frac{2\pi g}{C_P^0\rho_0 T_0}\int_0^\infty Srdr \tag{4.21}$$

$$\frac{dM}{dz} = -\frac{dM_D}{dz} + \rho_a Q_m(z) \tag{4.22}$$

Si on note $\dot{Q}_c$ le flux de chaleur convectif total de la source,

$$\dot{Q}_c = \int\int Sdr,$$

en intégrant l'équation (4.21) sur la hauteur, on obtient :

$$B = \frac{g\dot{Q}_c}{C_p^0 \rho_0 T_0}. \tag{4.23}$$

On retrouve donc la même formulation que dans le cas où C_P est constant grâce à la définition modifiée de B.

Fermeture par analyse dimensionnelle

Pour mettre les équations des flux sous leur forme finale, on va supposer que $B_D \ll B$ et $M_D \ll M$. Ces hypothèses seront justifiées a posteriori en section 4.6. De plus les termes Q_e et Q_m restent à déterminer. Pour les estimer, on raisonne par analyse dimensionnelle. Le flux Q_e et la grandeur Q_m dépendent a priori uniquement des grandeurs qui caractérisent le panache, soit B, M, G et de grandeurs d'environnement telles que ρ_a et g. On ne retient pas dans les paramètres pertinent la viscosité et la diffusivité car on suppose l'écoulement pleinement turbulent :

$$Q_e = Q_e(B, M, G, \rho_a, g) \quad \text{et} \quad Q_m = Q_m(B, M, G, \rho_a, g) \tag{4.24}$$

Disposant de 6 grandeurs formées à partir de 3 unités, on peut écrire chacune de ces relations sous la forme d'une relation entre 3 grandeurs adimensionnelles :

$$\frac{Q_e}{\sqrt{M/\rho_a}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\alpha\Big(\Gamma,\, x\Big) \quad \text{et} \quad \frac{MQ_m}{BG} = \alpha'\Big(\Gamma,\, x\Big)$$

avec

$$x = \frac{G}{G + \frac{\rho_a}{g}B} \quad \text{et} \quad \Gamma = \rho_a^{1/2} G^2 \,\frac{B}{M^{5/2}} \tag{4.25}$$

et $\alpha(\cdot,\cdot)$ et $\alpha'(\cdot,\cdot)$ des fonctions à déterminer.

Le nombre x permet de comparer le flux de masse G avec $G + \frac{\rho_a}{g}B = \int\int \rho_a W ds$ le flux de masse qui serait généré par un écoulement possédant la même vitesse mais de masse volumique uniforme ρ_a. Il permet de ce fait de prendre en compte l'effet des fortes différences de masse volumique et donc de la pertinence (ou non) de l'approximation de Boussinesq. Le nombre Γ compare le flux de flottabilité B avec le flux de quantité de mouvement M. Ainsi, quand Γ est petit, on a affaire à un écoulement pour lequel le flux de flottabilité est faible comparé à la quantité de mouvement, c'est à dire un ecoulement de type jet, alors quand Γ est grand, on a affaire à un écoulement pour lequel le flux de flottabilité est grand par rapport au flux de quantité de mouvement, correspondant à un panache "paresseux" au sens de [62]. Le facteur $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ a été introduit afin de permettre une cohérence avec les notations usuelles, ainsi qu'on le verra dans la section 4.3.3.

Ainsi, les équations du panache, dans la zone où il n'y a pas de source interne de chaleur (et donc $S(x,y,z,t) = 0$) prennent la forme :

$$\frac{dG}{dz} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{\rho_a M} \times \alpha(\Gamma, x) \tag{4.26}$$

$$\frac{dB}{dz} = 0 \tag{4.27}$$

$$\frac{dM}{dz} = \rho_a \frac{BG}{M} \times \alpha'(\Gamma, x) \tag{4.28}$$

4.3.3 Dérivation classique des équations

L'objet de cette section est d'écrire les équations en partant non pas de Navier-Stokes comme ci-dessus, mais en suivant la méthode des bilans telle qu'elle est pratiqué dans la littérature (cf. par exemple [59], mais aussi [13] ou encore [63] dans le cas non Boussinesq). On pourra ainsi comprendre, en comparant la forme prise par ces équations avec celles établies ci-dessus, quel est le niveau d'approximation retenu.

Variables homogénéisées

Classiquement, on définit dans un panache des grandeurs moyennes $W_H(z)$, $b_H(z)$ et $\rho_H(z)$ (dites "homogénéisées", ou "top-hat" en référence à la forme d'un chapeau haut-de-forme, voir par exemple [13] pour une discussion sur ce choix) telles que :

$$\pi\rho_H W_H b_H^2 = G(z) \quad , \qquad \pi g \frac{\rho_a - \rho_H}{\rho_a} W_H b_H^2 = B(z) \quad , \qquad \pi\rho_H W_H^2 b_H^2 = M(z)$$

On aurait pu décider de conserver le terme correctif $\frac{C_P'}{C_P^0}$ dans la seconde équation. Cela n'est pas le choix fait ici. En effet, d'une part, ces équations constituent la définition des grandeurs W_H, ρ_H et b_H et l'absence de ce terme ne génère pas d'erreur. D'autre part, cela allège les expressions et permet de retrouver facilement le cas Boussinesq. On peut donc écrire :

$$W_H = \frac{M}{G} \quad , \qquad \rho_H = \frac{\rho_a}{1 + \rho_a \frac{B}{gG}} \quad , \qquad b_H = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{G}{\sqrt{\rho_H M}} \tag{4.29}$$

Ces notations étant posées [4], on pratique un bilan de masse, de déficit de densité et de masse volumique "à la main" et en supposant que l'équilibre de l'écoulement

4. On remarque au passage que la grandeur x définie par l'équation 4.25 est égale à ρ_H/ρ_a.

est tel que l'on peut appliquer le principe d'Archimède (cf. [13], [63]) :

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dz} &= 2\pi\rho_a b u_e \\ \frac{dB}{dz} &= 0 \\ \frac{dM}{dz} &= \pi b_H^2(\rho_a - \rho_H)g \end{aligned}$$

Fermeture des equations

Pour fermer les équations, on pratique l'hypothèse (cf. [13], [63]) qu'il existe une grandeur α, appelée coefficient d'entraînement, telle que :

$$u_e = \alpha W_H \sqrt{\frac{\rho_H}{\rho_a}}$$

Il est à noter que dans le cas d'un écoulement entrant dans l'approximation de Boussinesq, $\rho_H/\rho_a = 1$, et les travaux de Morton, Taylor et Turner suggèrent de prendre α constant de l'ordre de 0,1. Quand l'approximation de Boussinesq n'est plus valide, certains auteurs (par exemple [60], [63]) préconisent de de conserver α constant de l'ordre de 0,1. Cette forme prémultipliée par $\sqrt{\frac{\rho_H}{\rho_a}}$ est en accord avec la forme suggérée par les mesures de [60]. D'autres auteurs (par exemple [68], [69] ont suggéré, dans le cas Boussinesq, de ne pas considérer α comme constant mais comme dépendant des flux locaux B, M et G. Dans le cas non Boussinesq, [70] propose aussi de retenir α comme dépendant des flux locaux. On dispose en fait de peu de données pour pouvoir conclure ; ce point est discuté en section 4.7.

En remplaçant les expressions de u_e, b_H, W_H et ρ_H dans les équations ci-dessus, il vient :

$$\frac{dG}{dz} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{\rho_a M} \times \alpha \tag{4.30}$$

$$\frac{dB}{dz} = 0 \tag{4.31}$$

$$\frac{dM}{dz} = \rho_a \frac{BG}{M} \tag{4.32}$$

En comparant ces équations avec les équations 4.26, 4.27 et 4.28, on constate que les deux systèmes d'équations sont identiques pour

$$\alpha = \alpha(\Gamma, x) \quad \text{et} \quad 1 = \alpha'(\Gamma, x) \tag{4.33}$$

Interprétation de la grandeur Γ comme un nombre de Richardson

On a défini $\Gamma = \rho_a^{1/2} G^2 \frac{B}{M^{5/2}}$ comme l'un des paramètres adimensionnels permettant de caractériser une section donnée d'un panache. En injectant les définitions des variables homogénéisées dans la définition de Γ, on obtient :

$$\Gamma = \sqrt{\pi} \left(g \frac{\rho_a - \rho_H}{\sqrt{\rho_a \rho_H}} \right) \frac{b_H}{W_H^2}$$

On reconnaît un nombre de Richardson, avec comme gravité réduite $g\frac{\rho_a-\rho_H}{\sqrt{\rho_a\rho_H}}$, le groupement $\sqrt{\rho_a\rho_H}$ jouant le rôle de la gravité ambiante, remplaçant ainsi le terme ρ_a du cas Boussinesq.

4.3.4 Mise sous forme adimensionnelle des équations

Solution homogène de l'équation des panaches

La théorie classique des panaches revient à remarquer que, dans le cas où $\alpha(\Gamma, x)$ et $\alpha'(\Gamma, x)$ sont des constantes égales respectivement à α et 1, une solution particulière des équations 4.26, 4.27 et 4.28 existe sous la forme

$$G(z) = K_1 z^{5/3} \quad , \qquad M(z) = K_2 z^{4/3} \quad ,$$

où K_1 et K_2 sont à déterminer. Ces derniers sont liés par $\frac{5}{3}K_1 = 2\sqrt{\pi\rho_a} \times \alpha\sqrt{K_2}$ et $\frac{4}{3}K_2 = \rho_a \frac{BK_1}{K_2}$, soit

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{6}{5}\left(\frac{9}{10}\right)^{1/3} \pi^{2/3} \rho_a \, \alpha^{4/3} B^{1/3} \\ K_2 &= \left(\frac{9}{10}\right)^{2/3} \pi^{1/3} \rho_a \, \alpha^{2/3} B^{2/3} \end{aligned}$$

Il vient en particulier :

$$\rho_H = \frac{\rho_a}{1 + \frac{\rho_a B}{g K_1} z^{-5/3}}$$

Il est donc naturel de définir une longueur ℓ de telle sorte que $\rho_H/\rho_a = 1/[1 + (\ell/z)^{5/3}]$, soit $\ell = \left(\frac{\rho_a B}{K_1 g}\right)^{3/5}$, c'est à dire :

$$\ell = \frac{B^{2/5}}{(\kappa g)^{3/5}} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{6}{5}\left(\frac{9}{10}\right)^{1/3} \pi^{2/3} \, \alpha^{4/3} \tag{4.34}$$

Numériquement, $\kappa \approx 2.4852 \, \alpha^{4/3} \approx 0.1154$ pour $\alpha = 0,1$. La longueur ℓ a été introduite indépendamment par [67] et par [63] sous le non de *longueur non-Boussinesq*. Comme on a

$$x = \frac{1}{1 + (z/\ell)^{-5/3}}$$

il est légitime d'interpréter ℓ comme la longueur caractéristique de la distance à la source sur laquelle les effets non-Boussinesq se font sentir. On définit aussi les grandeurs sans dimension :

$$\mathcal{G} = \frac{G}{G_0} \quad , \quad \mathcal{M} = \frac{M}{M_0} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{z}{\ell} \tag{4.35}$$

avec

$$G_0 = \frac{\rho_a B}{g} \quad \text{et} \quad M_0 = \left(\frac{5}{8}\right)^{2/5} \pi^{-1/5} \, \frac{\rho_a B^{6/5}}{\alpha^{2/5} g^{4/5}} \tag{4.36}$$

En utilisant ces notations, il vient :

$$\mathcal{G}(\zeta) = \zeta^{5/3} \quad , \quad \mathcal{M}(z) = \zeta^{4/3} \quad . \tag{4.37}$$

Forme adimensionnelle des équations du panache

Avec les notations ci-dessus, les constantes se simplifient et le équations du panache deviennent

$$\frac{d\mathcal{G}}{d\zeta} = \frac{5}{3} \sqrt{\mathcal{M}} \tag{4.38}$$

$$\frac{d\mathcal{M}}{d\zeta} = \frac{4}{3} \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{M}} \tag{4.39}$$

Cette forme adimensionnelle très simple a été obtenue en se servant d'une solution particulière des équations du panache. Sa valeur va cependant au delà de cette solution particulière comme on va le voir maintenant.

4.4 Panaches purs, forcés et paresseux

Dans toute cette section, on retient $\alpha(\Gamma, x) = \alpha$ constante et $\alpha'(\Gamma, x) = 1$.

4.4.1 Panaches purs

La solution homogène identifiée dans la section 4.3.4 correspond à ce que l'on appelle la solution du panache pur. Pour cette solution, on trouve que

$$\Gamma = \frac{8}{5} \sqrt{\pi} \, \alpha$$

est indépendant de z. On note Γ_0 cette valeur spécifique de Γ ([5]) ($\Gamma_0 \approx 0,283$ pour $\alpha = 0,1$).

5. Cette valeur est cohérente avec [63], où il est défini, en se remettant dans les notations du présent document, $\Gamma_{nb} = \frac{5}{8\alpha\sqrt{\pi}} \rho_a^{1/2} \frac{BG^2}{M^{5/2}}$ soit $\Gamma_{nb} = \Gamma/\Gamma_0$.

Le fait que Γ ne dépende pas de z est une propriété tout à fait spécifique du panache pur, qui impose des conditions de source particulières. En effet, à la source d'un panache, on impose la flottabilité B, le débit de masse G_s et le débit de quantité de mouvement M_s (ou tout triplet équivalent comme par exemple les grandeurs homogénéisées de source W_{Hs}, ρ_{Hs} et b_{Hs}). Physiquement, et concrètement pour une réalisation expérimentale, on peut fixer la valeur que l'on souhaite à $\Gamma_s = \rho_a^{1/2} G_s^2 \frac{B}{M_s^{5/2}}$. Si Γ_s est différent de Γ_0, la solution du panache pur ne s'applique pas. Au delà de sa définition mathématique comme la solution homogène des équations, le sens physique du panache pur est qu'il constitue, pour une flottabilité B donnée, un équilibre entre le débit de quantité de mouvement et le débit de masse. Si $\Gamma_s > \Gamma_0$, les conditions de source ne donnent pas assez de quantité de mouvement par rapport au débit de masse pour être un panache pur ; on parle de panache paresseux. Si au contraire $\Gamma_s < \Gamma_0$, les conditions de source donnent une quantité de mouvement trop importante par rapport au débit de masse pour être un panache pur ; on parle de panache forcé.

Description de la solution du panache pur

Pour le panache pur, on a

$$M = M_0 \left(\frac{z}{\ell}\right)^{4/3} \quad \text{et} \quad G = G_0 \left(\frac{z}{\ell}\right)^{5/3}$$

avec G_0, M_0 et B liés par $\rho_a^{1/2} G_0^2 \frac{B}{M_0^{5/2}} = \Gamma_0$. Il vient pour les grandeur homogénéisées

$$W_H = \frac{M_0}{G_0}\left(\frac{z}{\ell}\right)^{-1/3}, \qquad \rho_H = \frac{\rho_a}{1+(z/\ell)^{-5/3}}, \qquad b_H = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{G_0}{\sqrt{\rho_a M_0}} \left(\frac{z}{\ell}\right) \sqrt{1+\left(\frac{z}{\ell}\right)^{-5/3}}$$

Cette formulation par les grandeurs homogénéisés fait apparaître un trait spécifique pour le panache non-Boussinesq par rapport à la théorie classique du panache qui prévoit $b_H \propto z$ pour tout z ([6]) : dans la formulation non Boussinesq, $b_H \propto z^{1/6}$ pour $z/\ell \to 0$, voir la figure 4.1 où l'on a noté $\widetilde{b}_h = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{G_0}{\sqrt{\rho_a M_0}}\right]^{-1} \times b_H$.

Origine virtuelle pour le panache pur

Quand un panache pur est issu d'une source placé en $z = 0$, avec (B, M_s, G_s) tels que $\Gamma = \Gamma_0$, la question de l'origine virtuelle de ce panache consiste à trouver

6. La théorie classique du panache (cf. par exemple [13]), revient à remplacer ρ par ρ_a partout sauf dans les groupes $\rho - \rho_a$. Tous calculs faits, $G = \int\int \rho_a W dS$ reste proportionel à $z^{5/3}$, $M = \int\int \rho_a W^2 dS$ reste proportionel à $z^{5/3}$. Comme $b_H = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{G}{\sqrt{\rho_a M}}$, il vient $b_H = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{G_0}{\sqrt{\rho_a M_0}} \frac{z}{\ell}$.

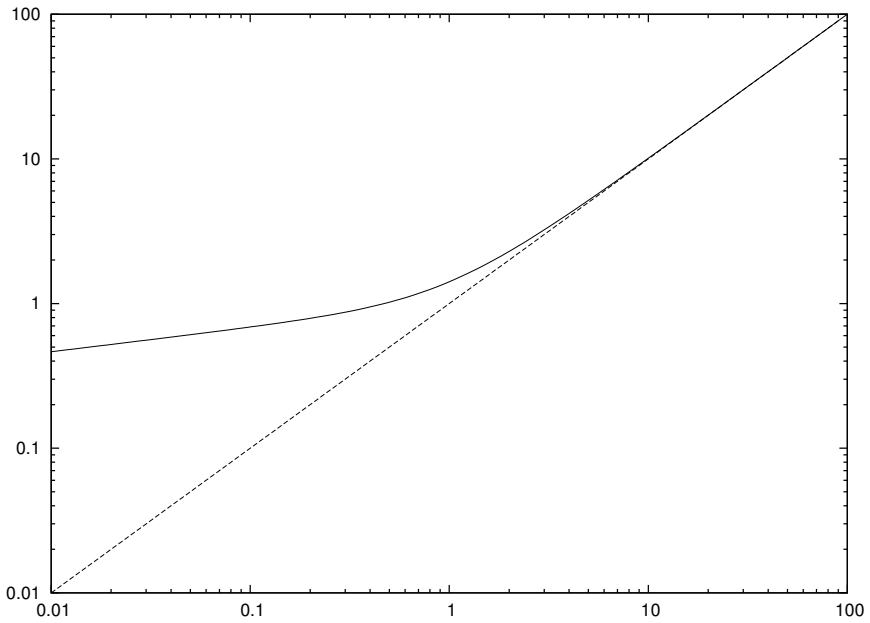


FIGURE 4.1 – $\widetilde{b_H}$ en fonction de z/ℓ : panache pur non Boussinesq (trait plein) ; théorie classique du panache pur Boussinesq (pointillé).

z_v tel que pour tout $z \geq 0$, $M = M_0[(z-z_v)/\ell]^{4/3}$ et $G = G_0[(z-z_v)/\ell]^{4/3}$. Ainsi, z_v est négatif et $-z_v = \ell(M_0/M_s)^{3/4}$ et $-z_v = \ell(G_0/G_s)^{3/5}$. C'est grâce au fait que $\Gamma = \Gamma_0$ que z_v est solution de ces deux équations simultanément. Ainsi, le panache réel issu de la source (B, M_s, G_s) en $z = 0$ est identique pour $z \geq 0$ à un panache pur, dit panache virtuel, issu d'une source $(B, 0, 0)$ en $z = z_v \leq 0$. C'est pourquoi on dit que z_v est l'origine virtuelle du panache.

La notion d'origine virtuelle peut aussi être prise en un sens asymptotique. pour $(z-z_v)/\ell$ grand, on a $b_H \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{G_0}{\sqrt{\rho_a M_0}} \frac{z-z_v}{\ell}$, qui est linéaire en $\frac{z-z_v}{\ell}$. Ainsi, l'origine virtuelle asymptotique z_v^a est définie comme le point obtenu en retenant le terme d'ordre 0 dans le développement asymptotique de $b_H(z)$ pour $\frac{z}{\ell}$ grand, $b_H(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{G_0}{\sqrt{\rho_a M_0}} [\frac{z}{\ell} - \frac{z_v^a}{\ell} + o_{\frac{z}{\ell} \to \infty}(1)]$. Tous calculs faits en repartant de la formule exacte pour b_H, il vient :

$$b_H = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{G_0}{\sqrt{\rho_a M_0}} \left(\frac{z}{\ell} - \frac{z_v}{\ell} + O_{\frac{z}{\ell} \to \infty}\left(\frac{z}{\ell}\right)^{-2/3} \right)$$

et donc $z_v^a = z_v$. Ainsi, les deux valeurs d'origine virtuelle coïncident. Ceci est un résultat important pour deux raisons. D'une part, pour déterminer expérimentalement une origine virtuelle, la mesure de b_H pour plusieurs valeurs de z pas nécessairement proches de l'origine permet de remonter par prolongation linéaire à l'origine virtuelle asympotitique et donc à l'origine virtuelle. D'autre part, loin

de la source, l'approximation de Boussinesq est valide et la théorie du panache Boussinesq est une bonne approximation de tout panache. Or la correction d'origine virtuelle dans la théorie du panache Boussinesq s'obtient par prolongation linéaire de b_H (voir par exemple [13]). On a donc démontré ici que, dans le cas des panaches purs, l'origine virtuelle telle que définie par la théorie non-Boussinesq coïncide avec l'origine virtuelle définie par la théorie du panache Boussinesq.

4.4.2 Résolution des équations des panaches dans le cas général

Jusqu'à présent, nous avons trouvé une solution particulière des équations du panache, leur solution homogène, et nous avons associé cette solution à des conditions initiales (B, M_s, G_s) en $z = 0$ liées par la relation $\Gamma(z=0) = \Gamma_0$. Nous allons maintenant rechercher et analyser les solutions des équations du panache pour les cas où $\Gamma(z=0) \neq \Gamma_0$. Pour ce faire, on conserve la forme adimensionnelle des équations (4.38), et (4.39) :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{G}}{d\zeta} &= \frac{5}{3}\sqrt{\mathcal{M}} \\ \frac{d\mathcal{M}}{d\zeta} &= \frac{4}{3}\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

avec $\mathcal{G}_s = G_s/G_0$ et $\mathcal{M}_s = M_s/M_0$. Avec ces grandeurs adimensionnelles, on a

$$\Gamma(\zeta) = \Gamma_0 \, \frac{\mathcal{G}^2}{\mathcal{M}^{5/2}}.$$

Comme $\frac{d\mathcal{G}}{d\zeta}$ est toujours strictement positif, on peut utiliser $\mathcal{G}$ comme variable principale en lieu et place de ζ, ce qui conduit au système d'équations [7] :

$$\frac{d\zeta}{d\mathcal{G}} = \frac{3}{5\sqrt{\mathcal{M}}} \tag{4.40}$$

$$\frac{d\mathcal{M}}{d\mathcal{G}} = \frac{4}{5}\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{M}^{3/2}} \tag{4.41}$$

L'équation (4.41) est à variables séparables, et s'intègre en une équation de conservation :

$$\mathcal{M}^{5/2} - \mathcal{G}^2 = \mathcal{M}_s^{5/2} - \mathcal{G}_s^2$$

En notant $\Gamma_s = \Gamma(z=0)$, cette expression s'écrit

$$\mathcal{M}^{5/2} - \mathcal{G}^2 = \mathcal{G}_s^2 \times \Big(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_s} - 1\Big). \tag{4.42}$$

7. Ce changement de variable a été introduit par [63].

Pour la suite, on note

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{\Gamma_0}{\Gamma_s} - 1\right|}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \mathrm{sgn}\left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_s} - 1\right) \tag{4.43}$$

ainsi l'équation 4.40 devient

$$\frac{d\zeta}{d\mathcal{G}} = \frac{3}{5} \frac{1}{\left[\mathcal{G}^2 + \varepsilon(\mathcal{G}_s/\gamma)^2\right]^{1/5}}.$$

Pour résoudre cette équation, il importe de distinguer trois cas selon la valeur de Γ_s : si $\Gamma_s = 1$, on est dans le cas du panache pur déjà analysé ; si $\Gamma_s > \Gamma_0$ on est dans le cas du panache paresseux et si $\Gamma_s < \Gamma_0$ on est dans le cas du panache forcé. Les équations ont déjà été résolues dans le cas du panache pur. On se concentre maintenant sur les cas des panaches paresseux et forcés.

4.4.3 Panaches paresseux

Résolution des équations du panache

Pour les panaches paresseux $\varepsilon < 0$, et les équations ci-dessus s'écrivent :

$$\mathcal{M}^{5/2} - \mathcal{G}^2 = -(\mathcal{G}_s/\gamma)^2 \tag{4.44}$$

$$\frac{d\zeta}{d\mathcal{G}} = \frac{3}{5} \frac{1}{\left[\mathcal{G}^2 - (\mathcal{G}_s/\gamma)^2\right]^{1/5}}. \tag{4.45}$$

Il vient donc, avec le changement de variable $u = \gamma\mathcal{G}/\mathcal{G}_s$:

$$\zeta = \frac{3}{5} \frac{\mathcal{G}_s^{3/5}}{\gamma^{3/5}} \int_\gamma^{\gamma\mathcal{G}/\mathcal{G}_s} \frac{du}{(u^2-1)^{1/5}} \quad .$$

Comme, en utilisant l'équation (4.44), $u = \sqrt{1 + \frac{\mathcal{M}^{5/2}}{\mathcal{G}_s^2}}$ est toujours supérieur ou égal à 1 et que $\int \frac{du}{(u^2-1)^{1/5}}$ est localement convergente sur $]1, +\infty[$ et convergente en 1, on vérifie que le problème est mathématiquement bien posé.

On définit

$$F_\ell(X) = \int_1^X \frac{du}{(u^2-1)^{1/5}} \tag{4.46}$$

et F_ℓ^{-1} sa fonction réciproque. La solution des équations du panache s'écrit alors :

$$\mathcal{M} = \left(\mathcal{G}^2 - (\mathcal{G}_s/\gamma)^2\right)^{2/5} \tag{4.47}$$

$$\mathcal{G} = \frac{\mathcal{G}_s}{\gamma} F_\ell^{-1}\left(F_\ell(\gamma) + \frac{5}{3}\frac{\gamma^{3/5}}{\mathcal{G}_s^{3/5}}\,\zeta\right) \tag{4.48}$$

Analyse des fonctions F_ℓ et F_ℓ^{-1}

La fonction F_ℓ et sa réciproque ne posent pas de problème particulier de définition car l'intégrale est absolument convergente sur $[1,+\infty[$, mais elle ne peuvent pas s'exprimer par des fonctions usuelles. La stratégie pour les manipuler peut donc être l'évaluation numérique au cas par cas à l'intérieur de leur domaine de définition, la tabulation dans ce domaine, la détermination des comportements asymptotiques sur les bords du domaine de définition et la recherche d'une fonction approchée sur l'ensemble du domaine de définition et ayant les bons comportements asymptotiques, soit par une méthode systématique d'interpolation de type polynômes de Bernstein (voir [46] pour la justification de cette méthode, et [71] pour un exemple d'application), soit de manière empirique. La figure 4.2 donne le graphe de la fonction F_ℓ^{-1} calculé par intégration numérique.

Pour $X \to \infty$, comme $(u^2-1)^{-1/5} \sim u^{-2/5}$ pour $u \gg 1$, $F_\ell(X) \sim \frac{5}{3}X^{3/5}$. De plus, comme $\frac{1-(1-u^{-2})^{1/5}}{(u^2-1)^{1/5}} \sim \frac{1}{5}u^{-12/5}$, on a

$$F_\ell(X) = \frac{5}{3}X^{3/5} + \varpi_\ell - \frac{1}{7}X^{-7/5} + O_{X\to\infty}(X^{-12/5}), \tag{4.49}$$

avec $\varpi_\ell = \int_1^\infty \frac{1-(1-1/u^2)^{1/5}}{(u^2-1)^{1/5}}du - \frac{5}{3} \approx -1.421038$.

Pour $X \to 1$, le comportement asymptotique est pleinement régulier, et on obtient :

$$F_\ell(X) = \frac{5}{2^{11/5}}(X-1)^{4/5} - \frac{1}{3^2 2^{6/5}}(X-1)^{9/5} + O_{X\to 1}((X-1)^{14/5}). \tag{4.50}$$

Comme dans l'équation (4.48), la fonction F_ℓ n'est évaluée qu'une fois au point γ, il n'est pas utile de construire une interpolation de F_ℓ uniforme sur l'ensemble du domaine de définition.

En ce qui concerne $X = F_\ell^{-1}(Y)$, les comportements asymptiques pour Y qui tend vers 0 et vers l'infini sont déterminés par inversion de ceux de $Y = F_\ell(X)$:

$$F_\ell^{-1}(Y) = \left(\frac{3}{5}Y\right)^{5/3} + \left(\frac{3}{5}\right)^{2/3}|\varpi_\ell|Y^{2/3} + O_{Y\to\infty}(Y^{-1/3}) \tag{4.51}$$

$$F_\ell^{-1}(Y) = 1 + \left(\frac{2^{11/5}}{5}Y\right)^{5/4} + O_{Y\to 0}(Y^{9/4}). \tag{4.52}$$

et la fonction

$$\breve{F}_\ell(Y) = 1 + \Big(\frac{2^{11/5}}{5}Y\Big)^{5/4}\Big(1 + \frac{3^4}{2^{33/5}5}Y\Big)^{5/12} \tag{4.53}$$

constitue une bonne approximation uniforme de F_ℓ^{-1} avec les bons comportements asymptotiques et une erreur relative $\frac{|F_\ell^{-1}-\breve{F}_\ell|}{F_\ell^{-1}}$ inférieure à 2% sur l'ensemble du domaine de définition (voir aussi figure 4.2).

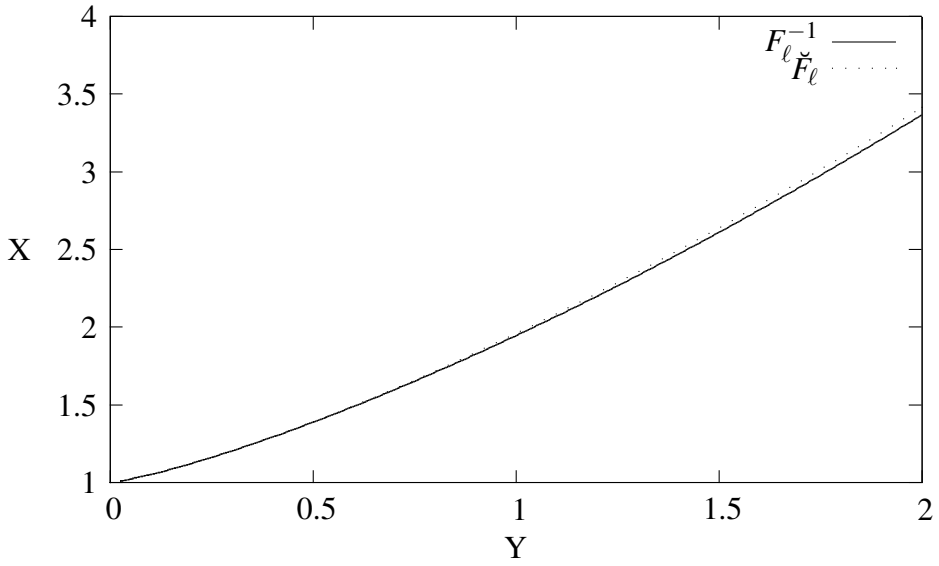


FIGURE 4.2 – Fonctions F_ℓ^{-1} (trait pleins) et $\breve{F}_\ell$ (pointillés).

Comportement du panache paresseux loin de la source

Loin de la source, c'est à dire pour $z \gg \ell$, ζ, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{G}$ sont grands. De ce fait, on peut faire des développements asympotiques des équations (4.47) et (4.48), ce qui donne, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \mathcal{G}^{4/5} - \frac{2}{5}\frac{\mathcal{G}_s^2}{\gamma^2}\mathcal{G}^{-6/5} + O_{\mathcal{G}\to\infty}(\mathcal{G}^{-16/5}) \\
\mathcal{G} &= \zeta^{5/3} + \Big(F_\ell(\gamma)\frac{\mathcal{G}_s^{3/5}}{\gamma^{3/5}} + |\varpi_\ell|\frac{\gamma^{2/5}}{\mathcal{G}_s^{2/5}}\Big)\zeta^{2/3} + O_{\zeta\to\infty}(\zeta^{-1/3})
\end{aligned}$$

soit, à l'ordre 1, $\mathcal{M} \sim \zeta^{4/3}$ et $\mathcal{G} \sim \zeta^{5/3}$. Ainsi, loin de la source, on trouve que le panache paresseux tend vers le panache pur.

Panache paresseux à proximité immédiate de la source avec $\mathcal{M}_s = 0$

On s'intéresse au comportement du panache paresseux à proximité immédiate de la source, c'est à dire pour $\zeta \ll 1$. Dans le cas où $\mathcal{M}_s = 0$, c'est à dire $\gamma = \frac{\mathcal{G}_s}{\sqrt{\mathcal{G}_s^2 - \mathcal{M}_s^{5/2}}} = 1$, l'équation (4.47) s'écrit simplement $\mathcal{M}^{5/2} = \mathcal{G}^2 - \mathcal{G}_s^2$ et l'équation (4.48) devient

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_s \, F_\ell^{-1}\Big(\frac{5}{3\mathcal{G}_s^{3/5}}\,\zeta\Big)$$

d'où il vient

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_s \times \Big(1 + \frac{2^{11/4}}{3^{5/4}\mathcal{G}_s^{3/4}}\,\zeta^{5/4} + O_{\zeta\to 0}(\zeta^{9/4})\Big)$$

et, tous calculs faits,

$$\mathcal{M} = \mathcal{G}_s^{1/2} \times \sqrt{\frac{8}{3}}\,\zeta^{1/2}\,(1 + O_{\zeta\to 0}(\zeta^2))$$

Ainsi, au point $\zeta = 0$, dans le cas $\mathcal{M}_s = 0$, les fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ sont singulières : la fonction $\mathcal{G}$ n'est pas deux fois dérivable et la fonction $\mathcal{M}$ n'est pas dérivable.

Comportement du panache paresseux à proximité immédiate de la source lorsque $\mathcal{M}_s > 0$

A proximité immédiate de la source, lorsque $\mathcal{M}_s > 0$ on a toujours $\mathcal{G}_s \neq 0$ d'après l'équation (4.47), et donc $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}_s$. On peut alors définir $\varepsilon_\mathcal{G} \ll 1$ tel que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_s \times (1 + \varepsilon_\mathcal{G})$. En utilisant $\frac{F_\ell(\gamma+\gamma\varepsilon_\mathcal{G}) - F_\ell(\gamma)}{\gamma\varepsilon_\mathcal{G}} = F_\ell'(\gamma) + O_{\varepsilon_\mathcal{G}\to 0}(\varepsilon_\mathcal{G})$, un développement limité de (4.48) donne

$$\varepsilon_\mathcal{G} = \frac{5}{3}\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^{2/5}\mathcal{G}_s^{3/5}}\,\zeta + O_{\zeta\to 0}(\zeta^2)$$

On va maintenant utiliser l'équation (4.47), qui s'écrit $\mathcal{M}^{5/2} - \mathcal{G}^2 = -(\mathcal{G}_s/\gamma)^2$, avec $\gamma = 1/\sqrt{|1 - \mathcal{M}_s^{5/2}/\mathcal{G}_s^2|} \geq 1$. Si $\mathcal{M}_s = 0$, on a donc $\gamma = 1$ et si $\mathcal{M}_s > 0$ on a $\gamma > 1$. Dans le cas où $\gamma > 0$, en utilisant l'équation (4.47) il vient alors

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s\Big(1 + \frac{4}{5}\,\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}\varepsilon_\mathcal{G} + O_{\varepsilon_\mathcal{G}\to 0}(\varepsilon_\mathcal{G}^2)\Big).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \mathcal{G}_s \times \Big(1 + \frac{5}{3}\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^{2/5}}\mathcal{G}_s^{-3/5}\,\zeta + O_{\zeta\to 0}(\zeta^2)\Big) \\
\mathcal{M} &= \mathcal{M}_s \times \Big(1 + \frac{4}{3}\,\gamma^{8/5}\mathcal{G}_s^{-3/5}\,\zeta + O_{\zeta\to 0}(\zeta^2)\Big)
\end{aligned}$$

Contrairement au cas $\mathcal{M}_s = 0$, on voit ici que les développements de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{G}$ sont réguliers. Ceci indique que l'on peut mathématiquement les prolonger pour $\zeta < 0$, permettant de mettre en place une correction d'origine virtuelle.

4.4.4 Origine virtuelle pour le panache paresseux

Correction d'origine virtuelle

Lorsque $\mathcal{M}_s > 0$, les développements de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{G}$ étant réguliers, on peut intégrer les équations (4.47) et (4.48) dans la direction des ζ négatifs, ce qui permet de prolonger les fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ pour $\zeta < 0$ jusqu'à atteindre un point où l'équation devenant singulière il n'est plus possible de continuer. Comme on a vu que l'on pouvait toujours appliquer le raisonnement de prolongation des fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ tant que $\mathcal{M} \neq 0$, le point recherché correspond à la hauteur $\zeta_v < 0$ telle que $\mathcal{M}(\zeta_v) = 0$. On note $\mathcal{G}_v = \mathcal{G}(\zeta_v)$.

L'équation (4.47) permet de calculer $\mathcal{G}_v$ car elle s'écrit alors $\mathcal{G}_v^2 = \mathcal{G}_s^2 - \mathcal{M}_s^{5/2}$. La détermination de ζ_v se fait donc en appliquant l'équation (4.48), sous la forme

$$\mathcal{G}_v = \frac{\mathcal{G}_s}{\gamma} F_\ell^{-1}\left(F_\ell(\gamma) + \frac{5}{3}\frac{\gamma^{3/5}}{\mathcal{G}_s^{3/5}}\,\zeta_v\right)$$

soit, puisque $\frac{\gamma\mathcal{G}_v}{\mathcal{G}_s} = 1$,

$$\zeta_v = -\frac{3}{5}\mathcal{G}_v^{3/5}\,F_\ell(\gamma) \quad . \tag{4.54}$$

On appelle ζ_v l'origine virtuelle du panache.

Les solutions des équations du panache paresseux (4.47) et (4.48) deviennent donc :

$$\mathcal{M} = \left(\mathcal{G}^2 - \mathcal{G}_v^2\right)^{2/5} \tag{4.55}$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_v F_\ell^{-1}\left(\frac{5}{3}\,\frac{\zeta - \zeta_v}{\mathcal{G}_v^{3/5}}\right) \tag{4.56}$$

Cette expression peut être écrite pour tout panache paresseux et la distinction entre les cas $\mathcal{M}_s > 0$ ou $\mathcal{M}_s = 0$ n'est pas utile, puisque qu'en remontant à l'origine virtuelle on a toujours $\mathcal{M} \to 0$. La suite de cette section s'applique donc à tous les panaches paresseux, à condition de remplacer les conditions à la source par les conditions à l'origine virtuelle.

Approximation uniforme du panache paresseux

En utilisant l'approximation uniforme de F_ℓ^{-1} issue de l'équation (4.53), il vient, avec une précision meilleure que 2 % pour $\zeta \in [\zeta_v, \infty[$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{G}_v\Big[1+\Big(\frac{2^{11/5}}{3}\,\frac{\zeta-\zeta_v}{\mathcal{G}_v^{3/5}}\Big)^{5/4}\Big(1+\frac{3^3}{2^{33/5}}\,\frac{\zeta-\zeta_v}{\mathcal{G}_v^{3/5}}\Big)^{5/12}\Big] \\ \mathcal{M} &= \Big(\mathcal{G}^2-\mathcal{G}_v^2\Big)^{2/5} \end{aligned}$$

Cette seconde équation s'exprime en fonction de $\zeta-\zeta_v$ seulement en utilisant l'identité remarquable $\mathcal{G}^2-\mathcal{G}_v^2=(\mathcal{G}-\mathcal{G}_v)(\mathcal{G}+\mathcal{G}_v)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{G}_v^{1/2}\times\sqrt{\frac{8}{3}}\,(\zeta-\zeta_v)^{1/2}\times\Big(1+\frac{3^3}{2^{33/5}}\,\frac{\zeta-\zeta_v}{\mathcal{G}_v^{3/5}}\Big)^{1/6} \\ &\quad\times\Big[1+\Big(\frac{2^{7/5}}{3}\,\frac{\zeta-\zeta_v}{\mathcal{G}_v^{3/5}}\Big)^{5/4}\Big(1+\frac{3^3}{2^{33/5}}\,\frac{\zeta-\zeta_v}{\mathcal{G}_v^{3/5}}\Big)^{5/12}\Big]^{2/5} \end{aligned}$$

L'évolution de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ en fonction de $\zeta-\zeta_v$ est donné sur la figure 4.3.

De plus, les équations (4.29a), (4.29b) et (4.29c) peuvent s'écrire :

$$W_H=\frac{M_0}{G_0}\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{G}}\quad,\qquad \rho_H=\frac{\rho_a}{1+\mathcal{G}^{-1}}\quad,\qquad b_H=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{G_0}{\sqrt{\rho_a M_0}}\frac{\mathcal{G}\sqrt{1+\mathcal{G}^{-1}}}{\sqrt{\mathcal{M}}}$$

Ainsi, à proximité de l'origine virtuelle,

$$W_H\sim\frac{M_0}{G_0}\frac{8}{3\;\mathcal{G}_v^{1/2}}(\zeta-\zeta_v)^{1/2}\quad,\qquad \rho_H\sim\frac{\rho_a}{1+\mathcal{G}_v^{-1}}$$

et

$$b_H=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{G_0}{\sqrt{\rho_a M_0}}\frac{3^{1/4}\,(\mathcal{G}_v\sqrt{1+\mathcal{G}_v^{-1}})}{8^{1/4}\;\mathcal{G}_v^{1/4}}\times(\zeta-\zeta_v)^{-1/4}$$

On voit que pour $\zeta\to\zeta_v$, $\rho_H(\zeta)$ tend vers une valeur non nulle $\frac{\rho_a}{1+\mathcal{G}_v^{-1}}$. Par continuité, on en déduit que pour $\zeta=\zeta_v$, ρ_H est bien défini et vaut cette valeur, notée ρ_H^v. On peut donc relier de façon simple le flux massique adimensionnel à l'origine virtuelle $\mathcal{G}_v$ au ratio de la masse volumique en cette même origine virtuelle rapportée à la masse volumique ambiante (voir aussi figure 4.3) :

$$\mathcal{G}_v=\frac{1}{\frac{\rho_a}{\rho_H^v}-1}$$

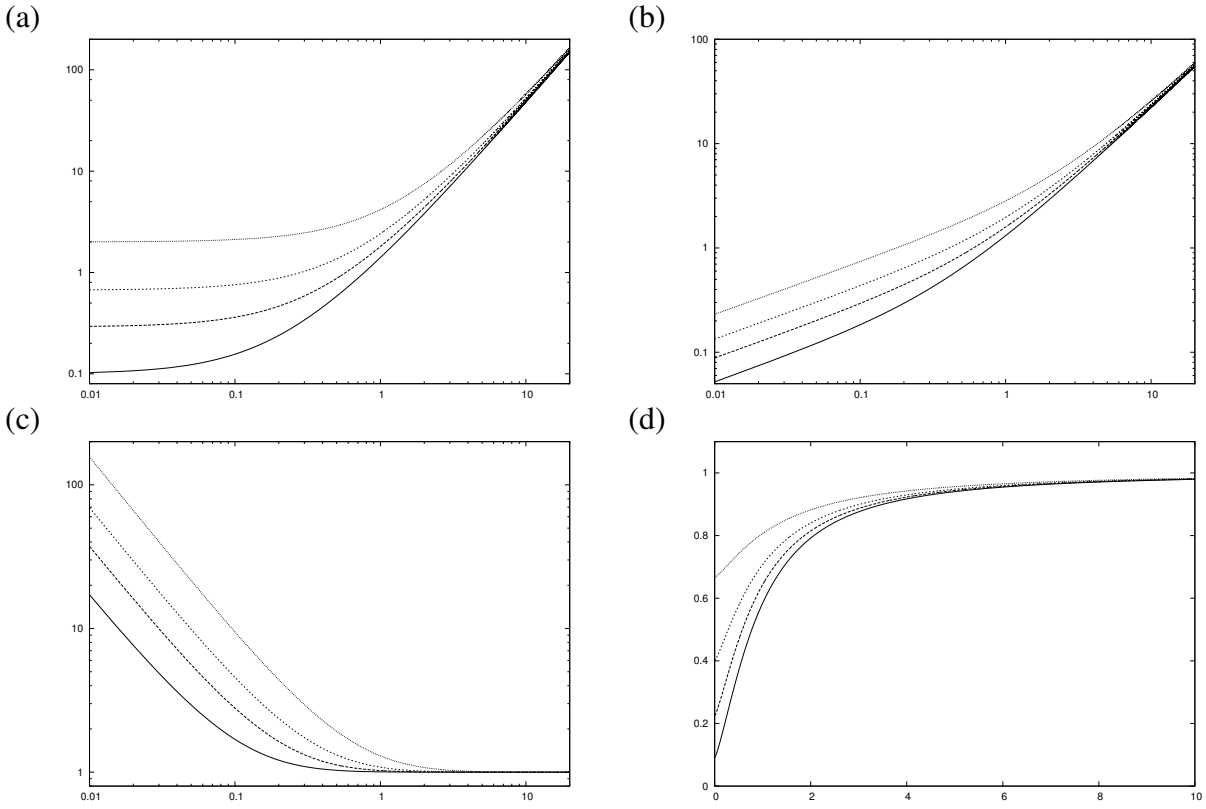


FIGURE 4.3 – Caractéristiques du panache paresseux en fonction de $\zeta - \zeta_v$ pour $\mathcal{G}_v = 0.1$ (traits pleins), $\mathcal{G}_v = 0.29$ (tirets longs), $\mathcal{G}_v = 0.67$ (tirets courts), $\mathcal{G}_v = 2$ (pointillé) : (a) : $\mathcal{G}$; (b) : $\mathcal{M}$; (c) : Γ/Γ_0 ; (d) : ρ_H/ρ_a.

Contraction du panache paresseux à proximité de sa source

Par ailleurs, l'équation pour b_H montre que le panache paresseux a un diamètre qui augmente vers l'infini quand on s'approche de l'origine virtuelle. Comme la vitesse verticale homogénéisé tend vers zéro et que le flux de masse ne tend pas vers zéro, il est parfaitement cohérent que le diamètre homogénéisé tende vers l'infini. Le panache commence donc par subir une contraction avant de reprendre son expansion, quand ζ croît à partir de l'origine virtuelle (voir figure 4.4).

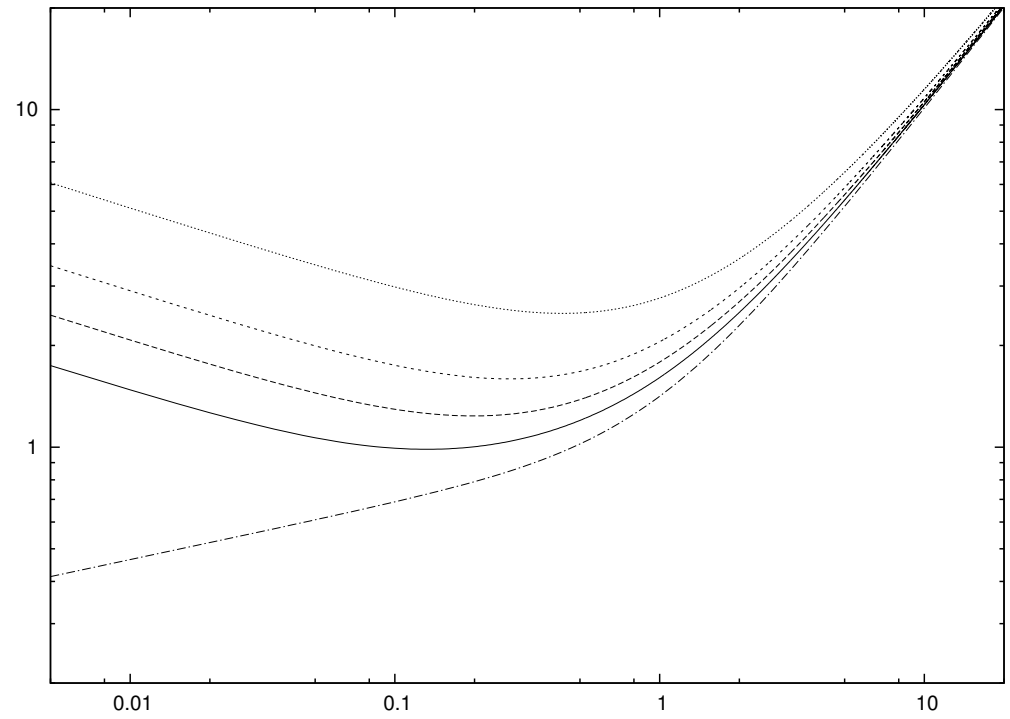


FIGURE 4.4 – Diamètre adimensionnel du panache paresseux $\widetilde{b_H} = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{G_0}{\sqrt{\rho_a M_0}}\right]^{-1} \times b_H$ en fonction de $\zeta - \zeta_v$ pour $\mathcal{G}_v = 0.1$ (traits pleins), $\mathcal{G}_v = 0.29$ (tirets longs), $\mathcal{G}_v = 0.67$ (tirets courts), $\mathcal{G}_v = 2$ (pointillé), et solution pour le panache pur (trait d'axe).

La valeur de ζ pour laquelle b_H atteind sa contraction maximale est donnée par $\frac{db_H}{d\zeta} = 0$, mais aussi par $\frac{db_H^2}{d\zeta} = 0$. Comme on a $b_H^2 \propto \frac{\mathcal{G}+\mathcal{G}^2}{\mathcal{M}}$, il vient

$$\frac{db_H^2}{d\zeta} \quad \propto \quad \frac{1}{3\mathcal{M}^3}\Big(-4\mathcal{G}(\mathcal{G}+\mathcal{G}^2)+5(1+2\mathcal{G})(\mathcal{G}^2-\mathcal{G}_v^2)\Big)$$

et le col de la contraction est caractérisé par $\frac{4}{5}\frac{\mathcal{G}_c^2+\mathcal{G}_c^3}{1+2\mathcal{G}_c} = \mathcal{G}_c^2 - \mathcal{G}_v^2$ soit, en notant provisoirement $X = \mathcal{G}_c^2$ au niveau de la contraction maximale,

$$X = \mathcal{G}_v^2 + \frac{4}{5}\frac{X + X^{3/2}}{1+2X^{1/2}}$$

Cette dernière équation se résoud facilement par la méthode du point fixe (car la dérivée du membre de droite est inférieure à 1 pour tout X positif). Asymptotiquement, on trouve $\mathcal{G}_c \sim \sqrt{5}\ \mathcal{G}_v$ pour $\mathcal{G}_v \to 0$ et $\mathcal{G}_c \sim \sqrt{\frac{5}{3}}\ \mathcal{G}_v$ pour $\mathcal{G}_v \to \infty$, voir figure 4.5(a).

(a) (b)

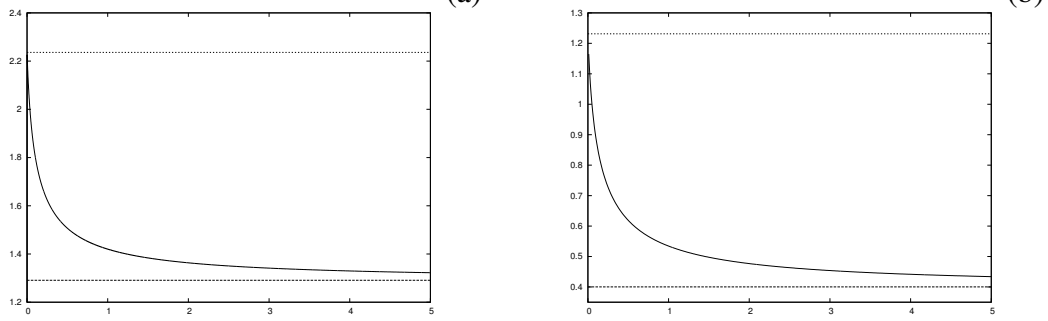


FIGURE 4.5 – (a) $\mathcal{G}_c/\mathcal{G}_v$ en fonction de $\mathcal{G}_v$ (traits pleins) ; valeurs pour $mG_v \to 0$ et $mG_v \to \infty$ (tirets) ; (b) $\frac{5}{3}\ \frac{\zeta_c-\zeta_v}{\mathcal{G}_v^{5/3}}$ en fonction de $\mathcal{G}_v$ (traits pleins) ; valeurs pour $mG_v \to 0$ et $mG_v \to \infty$ (tirets).

La valeur de $\mathcal{G}_c$ étant connue en fonction de $\mathcal{G}_v$, on calcule la hauteur de la contraction ζ_c en fonction de $\mathcal{G}_v$ en utilisant l'équation (4.56) :

$$\zeta_c - \zeta_v = \frac{3}{5}\ \mathcal{G}_v^{5/3}\ F_\ell\Big(\frac{\mathcal{G}_c}{\mathcal{G}_v}\Big)$$

Ainsi, $\frac{5}{3}\ \frac{\zeta_c-\zeta_v}{\mathcal{G}_v^{5/3}}$ varie entre $F_\ell(\sqrt{\frac{5}{3}}) \approx 0,4003$ pour $\mathcal{G}_v \to \infty$ et $F_\ell(\sqrt{5}) \approx 1,2312$ pour $\mathcal{G}_v \to 0$, voir figure 4.5(b).

Evolution du nombre de Richardson de panache avec la hauteur

L'évolution de $\Gamma = \Gamma_0\ \frac{\mathcal{G}^2}{\mathcal{M}^{5/2}}$ avec ζ dans le panache paresseux est donnée par

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{1}{1-\Big[1+\Big(\frac{2^{11/5}}{3}\ \frac{\zeta-\zeta_v}{\mathcal{G}_v^{3/5}}\Big)^{5/4}\Big(1+\frac{3^3}{2^{33/5}}\ \frac{\zeta-\zeta_v}{\mathcal{G}_v^{3/5}}\Big)^{5/12}\Big]^{-2}}$$

Pour $\zeta \to \infty$, on a $\Gamma \to \Gamma_0$, ce qui est cohérent avec le fait, noté précedemment, que, loin de la source, le panache paresseux tend vers le panache pur. Quand $\zeta \to \zeta_v$ par valeurs supérieures, on a $\mathcal{M}^{5/2} \sim \left(\frac{8}{3}\ \mathcal{G}_v\right)^{5/4} (\zeta - \zeta_v)^{5/4}$ et $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}_v$, d'où

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} \sim \frac{3}{8} \mathcal{G}_v^{3/4} (\zeta - \zeta_v)^{-5/4} \to \infty$$

L'évolution de Γ avec $\zeta - \zeta_v$ est donné en figure 4.3.

Origine virtuelle asymptotique du panache paresseux

On a vu, dans le cas du panache pur, que l'origine virtuelle, définie comme la source ponctuelle d'un panache qui a exactement les mêmes profils pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{G}$ que le panache considéré, coïncide avec l'origine virtuelle asymptotique, définie comme le point obtenu en retenant le terme d'ordre 0 dans le développement asymptotique de $b_H(\zeta)$. Pour un panache paresseux, on a défini ci-dessus l'origine virtuelle. On peut aussi définir l'origine virtuelle asymptotique. La question est donc de déterminer si ces deux définitions de l'origine virtuelle donnent la même valeur. On a vu ci-dessus que, loin de la source,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{G}^{4/5} - \frac{2}{5} \frac{\mathcal{G}_s^2}{\gamma^2} \mathcal{G}^{-6/5} + O_{\mathcal{G}\to\infty}(\mathcal{G}^{-16/5}) \\ \mathcal{G} &= \zeta^{5/3} + \left(F_\ell(\gamma) \frac{\mathcal{G}_s^{3/5}}{\gamma^{3/5}} + |\varpi_\ell| \frac{\gamma^{2/5}}{\mathcal{G}_s^{2/5}}\right) \zeta^{2/3} + O_{\zeta\to\infty}(\zeta^{-1/3}) \end{aligned}$$

avec (voir equation (4.54)) $\mathcal{G}_s = \gamma \mathcal{G}_v$ et $\zeta_v = -\frac{3}{5} \mathcal{G}_v^{3/5}\ F_\ell(\gamma)$. il vient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{G}^{4/5} \times \left(1 - \frac{2}{5}\ \mathcal{G}_v^2 \zeta^{-10/3} + O_{\mathcal{G}\to\infty}(\zeta^{-20/3})\right) \\ \mathcal{G} &= \zeta^{5/3} \left[1 - \left(\frac{5}{3}\zeta_v - |\varpi_\ell| \frac{1}{\mathcal{G}_v^{2/5}}\right) \zeta^{-1} + O_{\zeta\to\infty}(\zeta^{-2})\right] \end{aligned}$$

ainsi, l'origine virtuelle asymptotique ζ_{va} vaut :

$$\zeta_{va} = \frac{5}{3}\zeta_v - |\varpi_\ell|\, \mathcal{G}_v^{-2/5} \tag{4.57}$$

En premier lieu, on peut trouver ce résultat décevant, car il montre que l'on ne peut pas définir une origine virtuelle unique pour un panache paresseux. Cela étant, ce résultat était prévisible, car à l'origine virtuelle ζ_v, la grandeur $\mathcal{G}_v$ peut prendre différentes valeurs : il est compréhensible qu'à chacune de ces valeurs soit associé un panache suffisamment différent pour que le comportement asymptotique du panache reste affecté par ces différences.

4.4.5 Panaches forcés

Après avoir analysé le cas du panache paresseux, il importe maintenant de pratiquer une analyse similaire pour le panache forcé, c'est à dire lorsque il y a un excès de quantité de mouvement à la source et que donc $\Gamma_s < \Gamma_0$, soit $\varepsilon > 0$. Les équations (4.40) et (4.41) deviennent

$$\mathcal{M}^{5/2} - \mathcal{G}^2 = \mathcal{M}_v^{5/2} \tag{4.58}$$

$$\frac{d\zeta}{d\mathcal{G}} = \frac{3}{5}\frac{1}{(\mathcal{G}^2+\mathcal{M}_v^{5/2})^{1/5}} \tag{4.59}$$

où, comme $\mathcal{M}_s^{5/2} - \mathcal{G}_s^2 > 0$, on a défini

$$\mathcal{M}_v = (\mathcal{M}_s^{5/2} - \mathcal{G}_s^2)^{2/5} \tag{4.60}$$

Avec le changement de variable $u = \mathcal{G}/\mathcal{M}_v^{5/4}$, il vient alors

$$\zeta = \frac{3}{5}\mathcal{M}_v^{-5/4} \int_{\mathcal{G}_s/\mathcal{M}_v^{5/4}}^{\mathcal{G}/\mathcal{M}_v^{5/4}} \frac{du}{(u^2+1)^{1/5}}$$

On définit

$$F_f(X) = \int_0^X \frac{du}{(u^2+1)^{1/5}} \tag{4.61}$$

et F_f^{-1} sa fonction réciproque. La solution des équations du panache s'écrit alors

$$\mathcal{M} = \left(\mathcal{G}^2 + \mathcal{M}_v^{5/2}\right)^{2/5} \tag{4.62}$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{M}_v^{5/4}\, F_f^{-1}\left(F_f(\mathcal{G}_s/\mathcal{M}_v^{5/4}) + \frac{5}{3}\mathcal{M}_v^{-3/4}\zeta\right) \tag{4.63}$$

Analyse des fonctions F_f et F_f^{-1}

De même que F_ℓ et sa réciproque, la fonction F_f et sa réciproque ne posent pas de problème particulier de convergence, mais elles ne peuvent pas s'exprimer avec des fonctions usuelles. On va donc pratiquer la même stratégie que précédemment, en utilisant une combinaison d'évaluations numériques à l'intérieur de leur domaine de définition, d'estimations asymptotiques aux bornes du domaine de définition, et de fonction approchée sur l'ensemble du domaine. La figure 4.6 donne le graphe de F_f calculé par intégration numérique.

Pour $X \to \infty$, on a

$$F_f(X) = \frac{5}{3}X^{3/5} + \varpi_f + \frac{1}{7}X^{-7/5} + O_{X\to\infty}(X^{-12/5}),$$

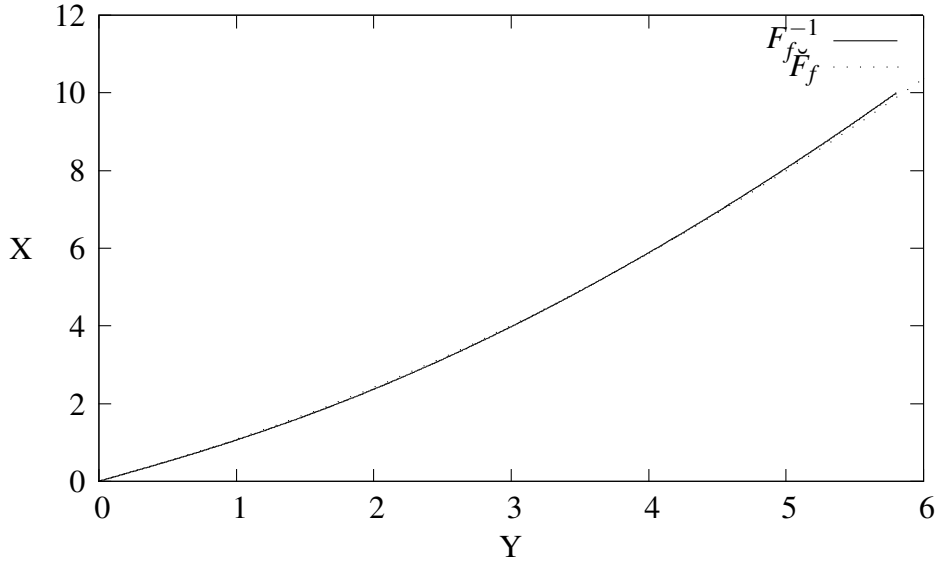


FIGURE 4.6 – Fonction F_f^{-1} (traits pleins) et $\breve{F}_f$ (pointillés).

avec $\varpi_f = \int_1^\infty \frac{1-(1+1/u^2)^{1/5}}{(u^2+1)^{1/5}} du - \frac{5}{3} + \int_0^1 \frac{du}{(u^2+1)^{1/5}} \approx -0,835266$.

Pour $X \to 0$, on a

$$F_f(X) = X - \frac{2}{5}X^3 + O_{X\to 0}(X^4).$$

En ce qui concerne F_f^{-1}, qui est définie sur l'intervale $[0,\infty[$,l'inversion des expressions asymptotiques ci-dessus conduit à :

$$\begin{aligned} F_f^{-1}(Y) &= Y + \frac{2}{5}Y^3 + O_{Y\to 0}(Y^5) \\ F_f^{-1}(Y) &= \left(\frac{3}{5}Y\right)^{5/3} + \left(\frac{3}{5}\right)^{2/3} |\varpi_f| Y^{2/3} + O_{Y\to\infty}(Y^{-1/3}) \end{aligned}$$

La fonction

$$\breve{F}_f(Y) = Y \times \left(1 + \left(\frac{3}{5}\right)^{10/3} Y^{4/3}\right)^{1/2} \tag{4.64}$$

constitue une bonne approximation de F_f^{-1}, avec les bons comportements asymptotiques et une erreur relative toujours inférieure à 1 % sur l'ensemble du domaine de définition (voir aussi figure 4.6).

Comportement du panache forcé loin de la source

Loin de la source, pour $z \gg \ell$, $\mathcal{M} \gg 1$ et $\mathcal{G} \gg 1$. A partir des équations (4.62) et (4.63), on obtient donc comme pour le panache paresseux :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\sim \mathcal{G}^{4/5} \\ \mathcal{G} &\sim \zeta^{5/3} \end{aligned}$$

Panache forcé à proximité immédiate de la source et définition de l'orgine virtuelle

Dans le cas $\mathcal{G}_s = 0$, les équations (4.62) et (4.63) se simplifient, à l'ordre dominant, et en se servant de l'expression asymptotique en 0 de F_f^{-1} :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\sim \mathcal{M}_v \\ \mathcal{G} &\sim \frac{5}{3}\mathcal{M}_v^{1/2}\zeta \end{aligned}$$

où l'on voit que $\mathcal{M}_v$ correspond à la valeur de $\mathcal{M}$ à la source.

Lorsque $\mathcal{G}_s > 0$, on a $\mathcal{M}_s > \mathcal{M}_v$, et, par un raisonnement analogue au cas du panache paresseux, on peut définir $\zeta_v < 0$ telle que, en prolongeant les solutions des équations différentielles pour $\zeta < 0$, $\mathcal{M}(\zeta_v) = \mathcal{M}_v$ et

$$0 = \mathcal{M}_v^{5/4}\, F_f^{-1}\Big(F_f(\mathcal{G}_s/\mathcal{M}_v^{5/4}) + \frac{5}{3}\mathcal{M}_v^{-3/4}\zeta_v\Big).$$

Ainsi, pour tout $\zeta > 0$, tout panache forcé défini par $(\mathcal{G}_s, \mathcal{M}_s)$ en $\zeta = 0$ est identique à un panache forcé défini par $(0, \mathcal{M}_v)$ en $\zeta = \zeta_v < 0$, avec ζ_v donné par :

$$\zeta_v = -\frac{3}{5}\mathcal{M}_v^{3/4} F_f(\mathcal{G}_s/\mathcal{M}_v^{5/4}) \tag{4.65}$$

est l'origine virtuelle du panache forcé .

Approximation uniforme du panache forcé

En utilisant l'approximation uniforme donnée par l'équation (4.64), les équations (4.62) et (4.63) se réduisent à :

$$\mathcal{M} = \Big(\mathcal{G}^2 + \mathcal{M}_v^{5/2}\Big)^{2/5} \tag{4.66}$$

$$\mathcal{G} = \frac{5}{3}\mathcal{M}_v^{1/2}(\zeta - \zeta_v) \times \sqrt{1 + \Big(\frac{3}{5}\Big)^{10/3}\Big(\frac{5}{3}\mathcal{M}_v^{-3/4}(\zeta - \zeta_v)\Big)^{4/3}} \tag{4.67}$$

Comme pour le panache paresseux, cette expression peut être employée pour recalculer les grandeurs homogénéisées W_H, ρ_H et b_H. On trouve, pour $\zeta \to \zeta_v$,

$$\begin{aligned} W_H &\sim \frac{M_0}{G_0}\frac{3}{5}\mathcal{M}^{-1/2}(\zeta-\zeta_v)^{-1} \quad , \\ \rho_H &\sim \rho_a \frac{5}{3}\mathcal{M}_v^{1/2}(\zeta-\zeta_v) \quad , \\ b_H &\sim \sqrt{\frac{5}{3\pi}}\frac{G_0}{\sqrt{\rho_a M_0}}\frac{\sqrt{\zeta-\zeta_v}}{\mathcal{M}_v^{1/4}}. \end{aligned}$$

On retrouve, comme dans le cas du panache pur, un rayon de la source et une vitesse qui tendent vers l'infini, pour une masse volumique qui tend vers zéro, mais les lois asymptotiques sont différentes. Le panache forcé n'est donc pas du tout similaire au panache pur, et ne peut lui être réduit. Un résultat a priori moins intuitif apparaît : $\rho_H(\zeta)$ tend vers zéro, et, à proximité de son origine virtuelle, le panache forcé ne ressemble pas du tout à un jet. Comme il ne prend pas non plus la forme d'un jet loin de la source, ce n'est qu'à des distance intermédiaires qu'il peut avoir un comportement proche de celui du jet.

Origine virtuelle asymptotique du panache forcé

De manière semblable au cas du panache paresseux, on obtient l'origine virtuelle asymptotique du panache forcé en calculant le développement asymptotique de $\mathcal{G}$ pour ζ grand. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{M}_v^{5/4} F_f^{-1}\Big(\frac{5}{3}\mathcal{M}_v^{-3/4}(\zeta-\zeta_v)\Big) \\ &= \zeta^{5/3}\Big[1-\Big(\frac{5}{3}\zeta_v - |\varpi_f|\mathcal{M}_v^{3/4}\Big)\zeta^{-1} + O_{\zeta\to\infty}(\zeta^{-2})\Big] \end{aligned}$$

Ainsi l'origine virtuelle asymptotique pour le panache forcé vaut :

$$\zeta_{va} = \frac{5}{3}\zeta_v - |\varpi_f|\mathcal{M}_v^{3/4} \tag{4.68}$$

4.5 Sources de flottabilité réparties

Dans cette section, on s'intéresse au cas où la flottabilité est créée par des sources réparties entre les hauteurs 0 (origine du panache) et une certaine hauteur h. En effet, ce cas correspond assez exactement au panache créé par un feu lorsque la zone de combustion s'étend des hauteurs 0 à h. Ainsi, $B = B(z)$ est une fonction croissante admettant une borne supérieure B_0 atteinte en $z = h$. On suppose en

outre qu'il n'y a pas d'injection de masse et de quantité de mouvement, c'est à dire que tout l'écoulement est crée par la flottabilité, d'où $G(z=0)=0$ et $M(z=0)=0$. Il s'agit de résoudre les équations du panache pour $z\in[0,h]$. Connaissant $G(h)$ et $M(h)$, le panache pour $z>h$ est alors complètement déterminé par les équations du panache sans source de flottabilité analysé ci-dessus.

4.5.1 Résolution des équations pour $z\in[0,h]$

Calcul des flux $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$

Les équations (4.26) et (4.28) s'écrivent comme précédemment, mais maintenant $B=B(z)$ n'est plus constante mais est une fonction connue :

$$\frac{dG}{dz} = 2\alpha\sqrt{\pi}\sqrt{\rho_a M} \tag{4.69}$$

$$\frac{dM}{dz} = \rho_a \frac{B(z)G}{M} \tag{4.70}$$

Pour résoudre ces équations, on doit se donner une forme a priori de $B(z)$ pour $z\in[0,h]$. Cette forme a priori doit être une fonction valant 0 en $z=0$, B_0 en $z=h$ et croissante en tout point entre 0 et h (puisque la dérivée de $B(z)$ est la source de flottabilité à la hauteur z). La famille de fonctions

$$B=B_0\Big(\frac{z}{h}\Big)^{\beta} \quad \text{avec} \quad \beta\geq 0 \quad \text{pour} \quad z\in[0,h] \quad , \tag{4.71}$$

(représentée en figure 4.7) remplit ces contraintes, et permet de représenter un grand nombre de cas : pour $\beta\in]0,1[$, cela correspond à une source de flottabilité concentrée vers $z=0$; pour $\beta=1$, cela correspond à une source de flottabilité uniforme sur l'intervalle ; pour $\beta>1$, la source est d'autant plus concentrée vers $z=h$ que β est grand.

Pour $B(z)$ telle que définie à l'équation (4.71), on obtient une solution particulière des équations pour $z\in[0,h]$

$$G = \Big(\frac{5}{\beta+5}\Big)^{4/3}\Big(\frac{2}{\beta+2}\Big)^{1/3}\times G_0 \times \frac{z^{5/3+\beta/3}}{\ell^{5/3}h^{\beta/3}}$$

$$M = \Big(\frac{5}{\beta+5}\Big)^{2/3}\Big(\frac{2}{\beta+2}\Big)^{2/3}\times M_0 \times \frac{z^{4/3+2\beta/3}}{\ell^{4/3}h^{2\beta/3}}$$

où $\ell=\frac{B_0^{2/5}}{(\kappa g)^{3/5}}$, $G_0=\frac{\rho_a B_0}{g}$ et $M_0=\Big(\frac{5}{8}\Big)^{2/5}\pi^{-1/5}\,\frac{\rho_a B^{6/5}}{\alpha^{2/5}g^{4/5}}$ comme précédemment.

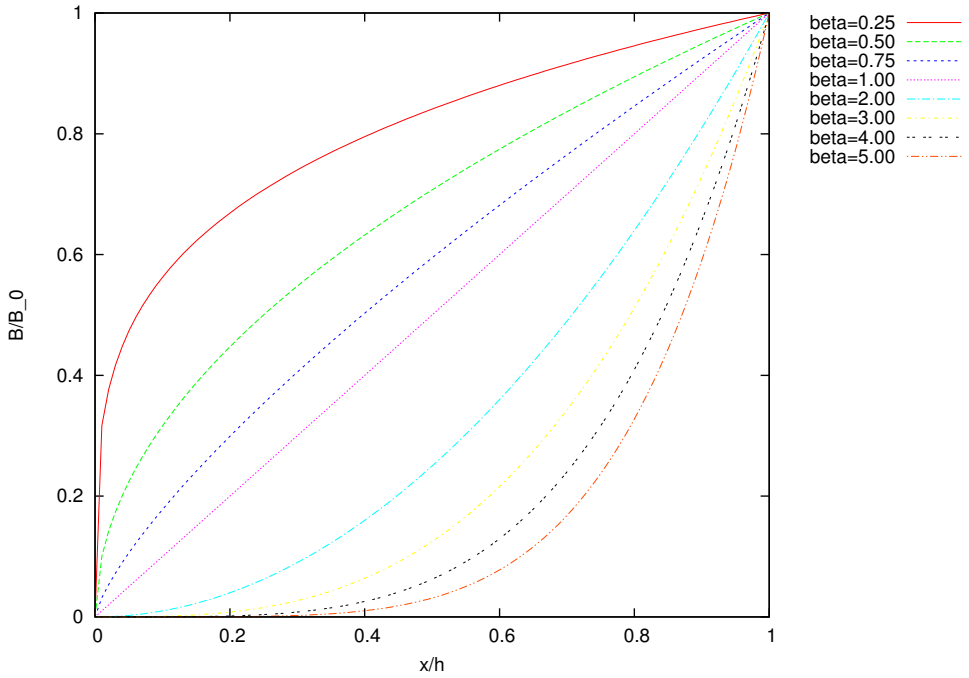


FIGURE 4.7 – Diverses fonctions présente dans la famille des fonctions B proposée en équation 4.71.

Evolution de ρ_H avec la hauteur selon les valeurs de β

L'équation 4.29 permet de recalculer les évolutions des grandeurs homogénéisées pour $z < h$. En particulier, on voit que :

$$\rho_H = \frac{\rho_a}{1+\left(\frac{\beta+5}{5}\right)^{4/3}\left(\frac{\beta+2}{2}\right)^{1/3}\frac{z^{2\beta/3-5/3}}{\ell^{-5/3}h^{2\beta/3}}}$$

Ainsi, si $\beta > 5/2$, la masse volumique décroit avec la hauteur (le panache est de plus en plus chaud quand on monte) : l'apport d'enthalpie lié à l'accroissement de B l'emporte sur l'effet de la dilution due à l'entrainement. A contrario, si $\beta < 5/2$, la masse volumique décroit avec la hauteur (le panache refroidit quand on monte) : la dilution l'emporte sur l'apport d'enthalpie.

Lorsque $\beta = 5/2$, la dilution et l'apport d'enthalpie s'équilibrent exactement, et ρ_H ne dépend plus de la hauteur :

$$\rho_H = \frac{\rho_a}{1+\frac{9}{4}\frac{\ell^{5/3}}{h^{5/3}}}$$

La forme $B = B_0(z/h)^\beta$ a été choisie a priori, et il ne faut donc pas supposer que le cas $\beta = 5/2$ corresponde à une quelconque propriété universelle des

panaches avec source de flottabilité répartie. Cela étant, cette forme permet de mettre en lumière l'importance d'analyser l'équilibre entre la dilution et la production d'enthalpie dans les panaches réactifs. Par ailleurs, il est intéressant de noter que le modèle phénoménologique proposé par [65] et cité ici dans la section 4.2 suggère, dans la partie basse du panache correspondant à la flamme, une élévation de la température indépendante de la hauteur et valant 900 K. Ceci est à mettre en perspective avec le modèle simpliste ci-dessus, qui propose pour $\beta = 5/2$, une élévation de la température indépendante de la hauteur et valant $\frac{9}{4} T_a \left(\frac{\ell}{h}\right)^{5/3}$. On retrouve la valeur du modèle de [65] pour $\frac{h}{\ell} \approx 0.8415$.

4.5.2 Solution des équations pour $z \geq h$

La solution ci-dessus donne, en $z = h$,

$$\begin{aligned} G(h) &= \left(\frac{5}{\beta+5}\right)^{4/3} \left(\frac{2}{\beta+2}\right)^{1/3} \times G_0 \times \left(\frac{h}{\ell}\right)^{5/3} \\ M(h) &= \left(\frac{5}{\beta+5}\right)^{2/3} \left(\frac{2}{\beta+2}\right)^{2/3} \times M_0 \times \left(\frac{h}{\ell}\right)^{4/3} \end{aligned}$$

Ces valeurs peuvent alors servir de conditions aux limites pour intégrer les équations du panache sans source répartie pour $z \geq h$. Pour cela, on a vu qu'il importe de distinguer les cas selon que le panache est paresseux, pur ou forcé. Le calcul donne $\Gamma(h) = \frac{\beta/2+1}{\beta/5+1}\,\Gamma_0$. Ainsi, quel que soit $\beta > 0$, on a $\Gamma(z=h) > \Gamma_0$ et le panache est paresseux. On peut donc appliquer les résultats de la section 4.4.3. On définit comme précédemment $\ell = B_0^{2/5}/(\kappa g)^{3/5}$, $\zeta = (z-h)/\ell$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\Gamma_0/\Gamma(h)} = \sqrt{\frac{5\beta+10}{3\beta}}$. On définit, suivant les équations (4.47) et (4.54)

$$\mathcal{G}_v = \sqrt{\left(\frac{G(h)}{G_0}\right)^2 - \left(\frac{M(h)}{M_0}\right)^{5/2}} \quad \text{et} \quad \zeta_v = -\frac{3}{5}\mathcal{G}_v^{3/5}\, F_\ell(\gamma) \quad .$$

Pour $z \geq h$, le panache se comporte comme le panache ayant la source $(M, G) = (0, G_0 \mathcal{G}_v)$ située en $z_v = h + \zeta_v\, \ell$. En injectant les valeurs de $M(h)$ et $G(h)$ calculées ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_v &= \frac{\sqrt{3\beta}}{\sqrt{10}\,(1+\beta/5)^{4/3}\,(1+\beta/2)^{5/6}} \left(\frac{h}{\ell}\right)^{5/3} \\ \zeta_v &= -\frac{3}{5}\,\frac{h}{\ell}\,\frac{(3\beta)^{3/10}}{10^{3/10}\,(1+\beta/5)^{4/5}\,(1+\beta/2)^{1/2}}\, F_\ell\left(\sqrt{\frac{5\beta+10}{3\beta}}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{z_v}{h} = 1 - \frac{3}{5}\,\frac{(3\beta)^{3/10}}{10^{3/10}\,(1+\beta/5)^{4/5}\,(1+\beta/2)^{1/2}}\,F_\ell\Big(\sqrt{\frac{5\beta+10}{3\beta}}\Big)$$

Dans le cas où $\beta \to 0$, on a $F_\ell\Big(\sqrt{\frac{5\beta+10}{3\beta}}\Big) \sim \frac{5}{3}\Big(\frac{10}{3\beta}\Big)^{3/10}$ et donc $\frac{z_v}{h} \to 0$. On retrouve bien que, physiquement, ce cas tend vers le panache pur de source ponctuelle placée en $z = 0$. Dans le cas où $\beta \to \infty$, on a $\Gamma \to 5\Gamma_0/2$ et $\frac{z_v}{h} \to 1$: on trouve un panache paresseux dont la source est en $z/h = 1$. Les valeurs de z_v/h dans les cas intermédiaires sont donnés en figure 4.8.

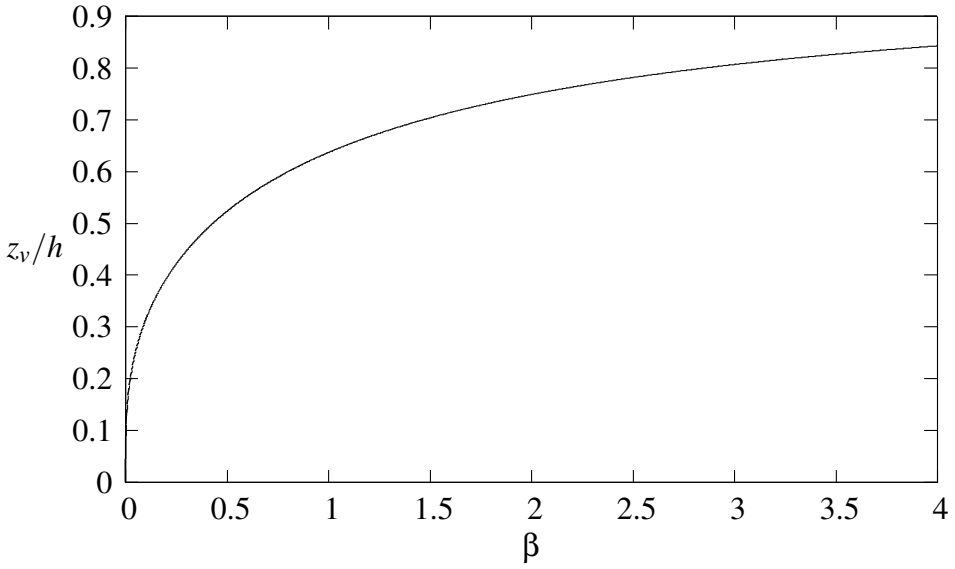


FIGURE 4.8 – Origine virtuelle en fonction de β d'un panache créé par une source de flottabilité de la forme $B = B_0\Big(\frac{z}{h}\Big)^\beta$ avec $z \in [0,h]$.

4.5.3 Approximation uniforme de la solution raccordée pour $\beta = 1$ et $h = \ell$

Dans de nombreux cas pratiques, on constate que la hauteur de flamme donnée par les corrélations empiriques vaut approximativement ℓ. Le but de la présente section est d'écrire le modèle pour un cas particulier représentatif de cette situation. Par mesure de simplicité, on prend $\beta = 1$.

Pour $0 < z < \ell = h$, soit $0 < \zeta < 1$, il vient donc

$$\mathcal{G} = \frac{5^{4/3}}{2 \times 3^{5/3}} \zeta^2 \tag{4.72}$$

$$\mathcal{M} = \frac{5^{2/3}}{3^{4/3}} \zeta^2 \tag{4.73}$$

On peut remarquer que dans le cas $\beta = 1$, on a $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{M}} = \frac{5^{2/3}}{2 \times 3^{1/3}} \approx 1,014$.

En appliquant ces équations pour $z = \ell$ et en notant $\mathcal{G}_s = \mathcal{G}(1)$ et $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}(1)$, il vient

$$\mathcal{G}_s = \frac{5^{4/3}}{2 \times 3^{5/3}} \quad , \qquad \mathcal{M}_s = \frac{5^{2/3}}{3^{4/3}}$$

d'où, en utilisant le résultat précédent $\mathcal{G}_v = \sqrt{\mathcal{G}_s^2 - \mathcal{M}_s^{5/2}}$,

$$\mathcal{G}_v = \frac{5^{5/6}}{2 \times 3^{5/3}}$$

En utilisant $\zeta_v = \zeta_s - \frac{3}{5} \mathcal{G}_v^{3/5} F_\ell\Big(\mathcal{G}_s / \mathcal{G}_v\Big)$, où ζ_s est la hauteur adimensionnelle à laquelle $\mathcal{G} = \mathcal{G}_s$, soit $\zeta_s = 1$ dans le cas présent, il vient

$$\zeta_v = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2^{3/5} \times 5} F_\ell(\sqrt{5})$$

et pour $z > \ell$, c'est à dire $\zeta > 1$,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_v F_\ell^{-1}\Big(\frac{5}{3} \frac{\zeta - \zeta_v}{\mathcal{G}_v^{3/5}}\Big) \tag{4.74}$$

$$\mathcal{M} = \Big(\mathcal{G}^2 - \mathcal{G}_v^2\Big)^{2/5} \tag{4.75}$$

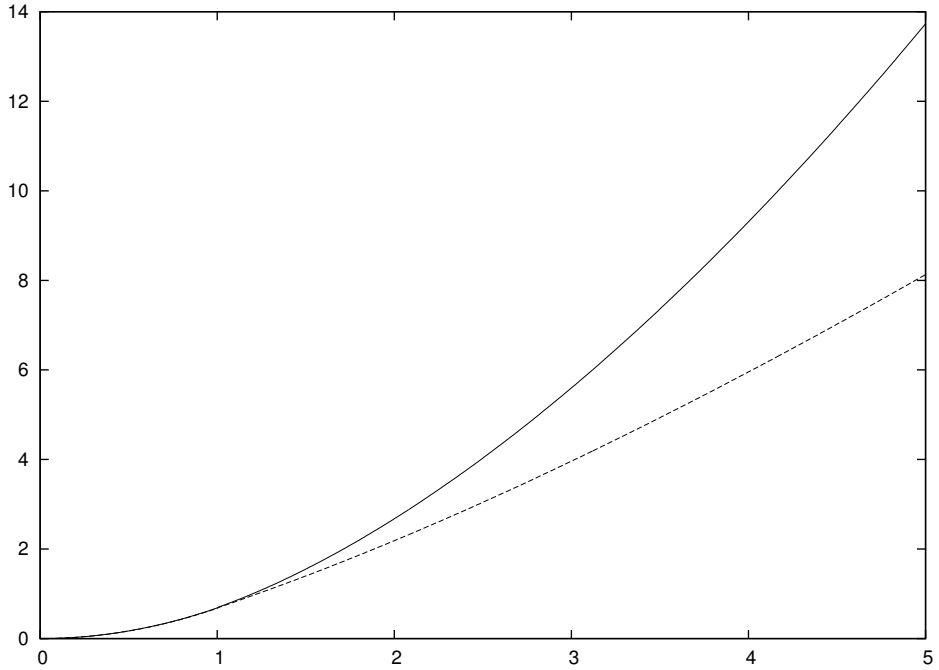
Les équations ci-dessus peuvent être résolues numériquement, voir figure 4.9. Comme $\beta = 1 < 5/2$, on a bien une température infinie en $\zeta = 0$, comme indiqué à la section précédente.

4.6 Estimation a posteriori des ordres de grandeur des termes diffusifs

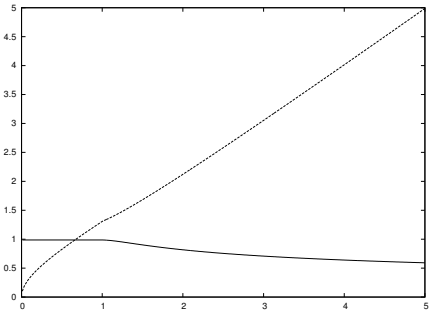
4.6.1 Introduction

Dans cette section, nous allons utiliser les résultats obtenus ci-dessus en négligeant les termes diffusifs pour estimer ces derniers et vérifier les conditions

(a)



(b)



(c)

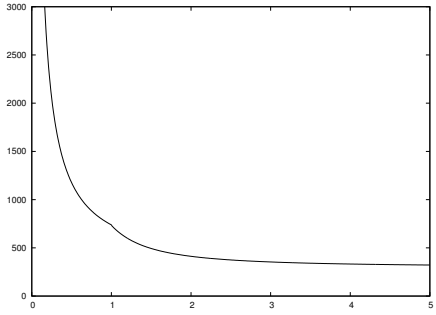


FIGURE 4.9 – Panache raccordé pour $h = \ell$ et $\beta = 1$;
(a) : traits pleins : $\mathcal{G}$; tirets : $\mathcal{M}$;
(b) : traits pleins : $\frac{G_0}{M_0} \times W_H$; tirets : $\frac{\sqrt{\pi \rho_a M_0}}{G_0} \times b_H$;
(c) : température pour une température ambiante de 300 K.

dans lesquelles ils sont négligeables. Les termes diffusifs ont été définis en section 4.3.2 :

$$M_D = -2\pi \int \tau_{zz} r dr \quad \text{et} \quad B_D = -\frac{2\pi g}{C_P \rho_a T_0} \int q_z r dr$$

Chacun de ces termes est la somme d'une contribution visqueuse et d'une contribution turbulente. Pour calculer les ordres de grandeur des contributions turbulentes, on utilise [8] qui indique qu'une hypothèse de viscosité turbulente donnée par $\nu_T = \frac{W_0(\beta z)}{R_T} \gg \nu$ avec R_T un nombre de Reynolds turbulent à peu près constant, $R_T \approx 25$ est relativement pertinente dès lors que le panache est turbulent. On suppose aussi que le nombre de Prandtl turbulent $Pr = \kappa_T/\nu_T$ est de l'ordre de 1 (du même ordre, donc, que le nombre de Prandtl visqueux dans l'air, qui vaut environ 0,7). De ce fait

$$\tau_{zz} \approx \rho(\nu + \nu_T)\frac{\partial W}{\partial z} \quad \text{et} \quad q_z \approx C_p \rho_a Pr(\nu + \nu_T)\frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{avec} \quad \nu_T \approx \frac{W_H b_H}{R_T}$$

On a en outre, d'après les résultats des sections précédentes, $W(r,z)$ de l'ordre de $W_H(z)$ pour $r < b_H$, 0 sinon, et $\rho(r,z)$ de l'ordre de $\rho_H(z)$ pour $r < b_H$, ρ_a sinon. Enfin, s'agissant de calculs d'ordre de grandeur, on prendra C_P indépendant de la température afin de simplifier les équations.

4.6.2 Diffusion de la quantité de mouvement

On a donc pour $r > b_H(z)$, $\tau_{zz} = 0$, et pour $r < b_H(z)$:

$$\begin{aligned}
\tau_{zz} &\approx \rho_H\left(\nu + \frac{W_H b_H}{R_T}\right)\frac{dW_H}{dz} \\
&\approx \rho_H\left(\nu + \frac{W_H b_H}{R_T}\right)\left[\frac{1}{G}\frac{dM}{dz} - \frac{M}{G^2}\frac{dG}{dz}\right]
\end{aligned}$$

soit, en utilisant les équations du panache (4.26) et (4.28) :

$$\begin{aligned}
\tau_{zz} &\approx \rho_H\left(\nu + \frac{M^{1/2}}{\pi^{1/2}\rho_H^{1/2} R_T}\right)\left[\rho_a \alpha' \frac{B}{M} - 2\rho_a^{1/2}\pi^{1/2}\alpha\frac{M^{3/2}}{G^2}\right] \\
&\approx \rho_H\left(\nu + \frac{M^{1/2}}{\pi^{1/2}\rho_H^{1/2} R_T}\right)\rho_a \frac{B}{M}\left(\alpha' - \frac{2\pi^{1/2}\alpha}{\Gamma}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$M_D \approx \pi\rho_H\left(\nu + \frac{M^{1/2}}{\pi^{1/2}\rho_H^{1/2} R_T}\right)\rho_a \frac{B}{M}\left(\alpha' - \frac{2\pi^{1/2}\alpha}{\Gamma}\right) b_H^2$$

Tous calculs faits, et en notant $Re = \frac{W_H b_H}{\nu}$, il vient

$$\frac{M_D}{M} \approx -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{R_T}+\frac{1}{Re}\Big)\left(\frac{\rho_H}{\rho_a}\right)^{-1/2}(\Gamma\alpha' - 2\pi^{1/2}\alpha) \tag{4.76}$$

4.6.3 Diffusion de la chaleur

De façon similaire, on a pour $r > b_H(z)$, $q_z = 0$, et pour $r < b_H(z)$:

$$q_z \approx -\rho_a C_P T_0\Big(Pr\nu + Pr\frac{W_H b_H}{R_T}\Big)\frac{d}{dz}\Big(\frac{\rho_a}{\rho_H}\Big)$$

avec, d'après l'équation (4.29), $\frac{\rho_a}{\rho_H} = 1 + \rho_a\frac{B}{gG}$, d'où

$$q_z \approx -\rho_a C_P T_0\Big(Pr\nu + Pr\frac{W_H b_H}{R_T}\Big)\frac{\rho_a}{gG}\Big(\frac{dB}{dz} - \frac{B}{G}\frac{dG}{dz}\Big)$$

soit, en utilisant l'équation(4.26) :

$$q_z \approx -\rho_a C_P T_0\Big(Pr\nu + Pr\frac{W_H b_H}{R_T}\Big)\frac{\rho_a}{gG}\Big(\frac{dB}{dz} - \frac{B}{G}2\alpha\sqrt{\pi\rho_a M}\Big)$$

D'où

$$B_D \approx \pi\Big(Pr\nu + Pr\frac{W_H b_H}{R_T}\Big)\frac{\rho_a}{G}\Big(\frac{dB}{dz} - \frac{B}{G}2\alpha\sqrt{\pi\rho_a M}\Big)\, b_H^2$$

Tous calculs faits, il vient :

$$\frac{B_D}{B} \approx 2\alpha Pr\Big(\frac{1}{Re}+\frac{1}{R_T}\Big)\left(\frac{\rho_H}{\rho_a}\right)^{-3/2}\Big(\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\rho_H}{\rho_a}}\frac{b_H}{B}\frac{dB}{dz} - 1\Big) \tag{4.77}$$

4.6.4 Analyses des cas des panaches purs, paresseux et avec source répartie

Ordres de grandeur pour le panache pur

Dans le panache pur sans source de flottabilité, on a, puisque $\Gamma = \Gamma_0 = \frac{8}{5}\sqrt{\pi}\alpha$,

$$\frac{\Gamma\alpha' - 2\pi^{1/2}\alpha}{\sqrt{\pi}} = 2\alpha(\frac{4}{5}\alpha' - 1) \approx -0,04$$

pour $\alpha \approx 0,1$ et $\alpha' \approx 1$, et $\frac{\rho_H}{\rho_a} = 1/(1+\zeta^{-5/3})$. Les équations (4.76) et (4.77) deviennent, en supposant en outre $R_T \approx 25$ et $Re \gg R_T$:

$$\begin{aligned}\frac{M_D}{M} &\approx \frac{1}{625}\left(1+\zeta^{-5/3}\right)^{1/2}\\ \frac{B_D}{B} &\approx -\frac{1}{125}\left(1+\zeta^{-5/3}\right)^{3/2}\end{aligned}$$

La figure 4.10 représente les membres de droite des équations ci-dessus. On a $B_D/B > 0,1$ pour $\zeta < 0,412$, et donc B_D/B ne peut pas être considéré comme petit pour $\zeta \lesssim 0,5$ sur la base des approximations faites dans cette section : une investigation plus détaillée serait nécessaire.

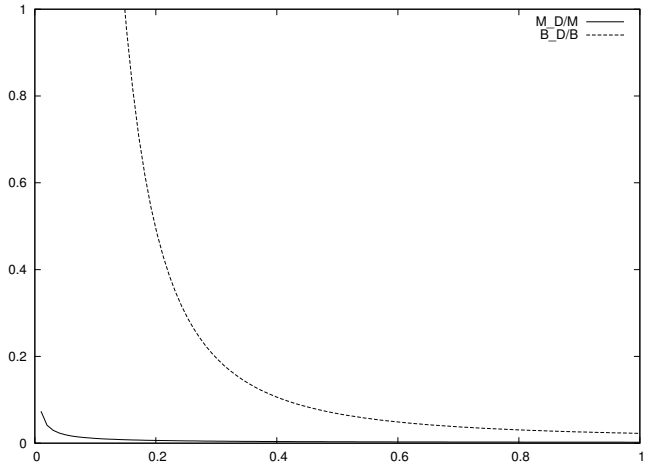


FIGURE 4.10 – Ordre de grandeur des termes diffusifs en fonction de $\zeta - \zeta_v$ dans le panache pur (traits pleins : M_D/M ; tirets : B_D/B.

Ordres de grandeur pour le panache paresseux

Dans le panache paresseux, $\frac{\rho_H}{\rho_a}$ ne tend pas vers zéro mais vers $1/(1+\mathcal{G}_v^{-1})$, le cas limite $\mathcal{G}_v \to 0$ étant le panache pur. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\frac{M_D}{M}(\zeta) &\approx \frac{1}{625}\left(\frac{\rho_H}{\rho_a}\right)^{-1/2} \lesssim \frac{1}{625}\left(1+\mathcal{G}_v^{-1}\right)^{1/2} \\
\frac{B_D}{B}(\zeta) &\approx -\frac{1}{125}\left(\frac{\rho_H}{\rho_a}\right)^{-3/2} \lesssim -\frac{1}{125}\left(1+\mathcal{G}_v^{-1}\right)^{3/2}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'une part, il n'y a pas de risque de divergence de $\frac{M_D}{M}$ et $\frac{B_D}{B}$ à proximité de l'origine virtuelle et d'autre part ces deux grandeurs sont petites pour tout ζ dès lors que $\mathcal{G}_v$ est suffisamment loin de 0, typiquement dès lors que $\mathcal{G}_v \gtrsim 0,4$.

4.7 Conclusion et perspectives

Les équations du panache dans le cas général, non Boussinesq et avec C_P variable, ont été écrites. On a vu que l'on peut introduire deux quantités α et α'

pour fermer ces équations :

$$\begin{aligned} \alpha(\Gamma, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\rho_a M}} \times \frac{dG}{dz} \\ \alpha'(\Gamma, x) &= \frac{1}{\rho_a}\frac{M}{BG} \times \frac{dM}{dz} \end{aligned}$$

Une comparaison avec les théories classiques du panache ont montré que, en l'absence d'indication plus précise issue d'expériences ou de simulations directes, il était pertinent de prendre

$$\alpha \approx 0,1 \quad , \qquad \alpha' = 1.$$

Sur cette base, on a montré comment les équations du panache peuvent être intégrées dans le cas de panaches purs, paresseux et forcés. Une attention particulière a été portée aux panaches paresseux. On a vu comment on pouvait introduire une origine virtuelle pour ces panaches paresseux, qui permet une approximation uniforme des panaches sur toute leur hauteur. Les calculs montrent que cette origine virtuelle est différente de l'origine virtuelle asymptotique, employée usuellement. On a aussi vu comment le panache paresseux, issu son origine virtuelle, peut se définir par la donnée de deux paramètres seulements, la flottabilité B et la valeur de $\mathcal{G}$ à l'origine virtuelle, $\mathcal{G}_v$, contrairement à l'analyse classique qui indique que la connaissance de 3 paramètres (par exemple B, M et G à l'origine) est nécessaire. Enfin, on a vu que le panache paresseux subit une contraction à proximité de la source, avant de se rétablir dans la situation usuelle d'un panache qui s'élargit.

Le cas des panaches forcés a ensuite été analysé de manière similaire. Là encore, on a vu comment définir une origine virtuelle qui diffère de l'origine vituelle asymptotique, mais qui permet une approximation uniforme du panache sur toute sa hauteur. On a vu en particulier que, à proximité de son origine virtuelle, le panache forcé ne devient pas un jet, mais a au contraire un régime particulier et qui n'a pas encore été exploré.

S'intéressant essentiellement aux applications liées aux incendies, le cas d'un panache avec une source de flottabilité répartie a été étudié. On a proposé un modèle permettant une approximation uniforme sur toute la hauteur pour une source de flottabilité de forme particulière.

Enfin, une estimation a posteriori des termes diffusifs a été pratiqué. Elle a montré qu'une analyse plus fine était nécessaire pour conclure dans le cas des panaches purs, mais qu'en revanche on peut négliger les termes diffusifs dans les cas pratiques de panaches paresseux et de panaches avec source de flottabilité répartie.

Toutes ces considérations, qui ont conduit à des prédictions nouvelles sur le comportement des panache, reposent sur le choix explicité ci-dessus, de considérer uniquement le cas α constant égal à environ 0,1 et $\alpha' = 1$.

Les principales directions de recherche à ce jour sur la base de ce travail sont donc :

1. par la collecte de données expérimentales et issues de simulations numériques précises, cartographier les plans $\alpha(\Gamma, x)$ et $\alpha'(\Gamma, x)$;
2. par la comparaison avec des données expérimentales et issues de simulations numériques précises, tester les prédictions des modèles ci-dessus pour $\alpha' = 1$ et α constant proche de 0,1 ;
3. Continuer à explorer les conséquences des modèles proposés ci-dessus, en particulier dans le régime spécifique du panache forcé proche de son origine virtuelle ;
4. Elargir l'analyse au cas d'un panache confiné par un plafond, en s'appuyant notamment sur les expériences de [72] (voir aussi [73]).

Les points 1 et 2 ci-dessus font partie du travail de thèse [74].

Chapitre 5

Source de chaleur dans un pièce ventilée

5.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'analyser l'écoulement stratifié qui se produit dans un volume ventilé lorsqu'une source de chaleur est présente dans ce volume. Cet écoulement est représentatif de la plupart des problèmes liés à la compréhension de la mécanique des fluides des incendies. Il reste néanmoins suffisamment simple pour être considéré comme un écoulement canonique au sens où on l'entend dans le présent document.

La section 5.2 présente le cas sélectionné et les notations. La section 5.3 expose l'approche classique qui consiste à considérer que l'écoulement est nettement stratifié en deux couches chacune de température homogène, l'épaisseur et la température de la couche chaude pouvant être calculées au moyen d'équations simples.

La section 5.4 montre les limites de cette analyse, en partant de la question suivante : comment reconstituer la hauteur et la température de la couche chaude à partir de mesures expérimentales ou de simulations CFD, tout en visant une application à la tenabilité. Nous verrons qu'il n'y a pas de solution basée uniquement sur des hypothèses transcrivant la physique de la situation. Cette difficulté sera mise en perspective avec le besoin néanmoins réel de disposer de modèles plus rapides que les simulations CFD, mais compatibles avec elles et disposant d'un niveau de confiance raisonnable. Des pistes de travail seront proposées.

La section 5.5 explore la sensibilité d'une simulation numérique aux choix pratiqués sur les différents paramètres fixés, explicitement ou implicitement, lors d'une simulation. Ceci constituera une première vision de l'approche générale développée dans le chapitre 6, qui consiste à analyser la sensibilité des simulations

au vu d'une grandeur jugée pertinente pour les besoins de l'ingénierie dans le cas particulier.

5.2 Présentation du cas considéré

Pour ce chapitre, on retient un cas concret de pièce, de taille relativement grande afin de bien représenter ce qui pourrait se passer dans un grand volume et que les difficultés rencontrées pour simuler un tel cas soient présentes. De plus, afin d'éviter une trop grande symétrie, les portes (qui assurent l'amenée d'air frais du local) sont disposées de façon asymétrique, de telle sorte que la géométrie n'est pas superposable à son image dans un miroir. La configuration correspond à un local expérimental existant au CSTB, afin de pouvoir, dans l'avenir, réaliser des essais dans une configuration proche. Une vue en perspective du local retenu est donnée sur la figure 5.1.

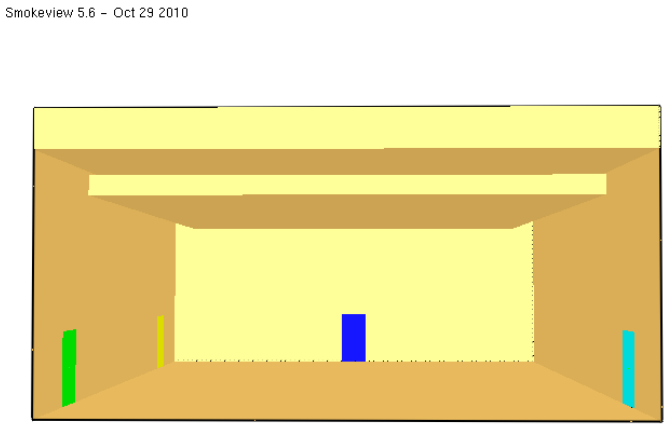


FIGURE 5.1 – Géométrie de la pièce considérée ; l'emprise au sol est de 15 m sur 15 m, la hauteur libre sous plafond de 5,5 m ; il y a 4 portes sur les parois du local, repérées par leurs couleurs (cyan, bleu, vert et jaune pour les portes 1, 2, 3 et 4 respectivement) ; l'extraction se fait par la circonférence du faux plafond ; le foyer est positionné au sol, au centre.

5.3 Pièce avec source de chaleur

5.3.1 Introduction

La théorie classique de la pièce avec source de chaleur est une adaptation simple du cas de l'écoulement dans un volume comportant une source de flottabilité. Deux cas limites sont en général considérés : le régime permanent dans un volume ventilé (voir [75]) ou l'écoulement transitoire dans un volume non ventilé (voir [76]). On se concentre ici sur le premier des deux cas.

La base de la théorie classique est de considérer que le volume est rempli de couches superposées de fluide de densités différentes, et que ces couches échangent de la matière et de l'enthalpie entre elles et avec le panache. La théorie la plus simple ne considère que deux couches, mais des modèles plus raffinés, pour prendre en compte les pertes de chaleur aux parois ou les régimes transitoires peuvent comporter de nombreuses couches, voire un nombre infini à la limite, comme dans [76]. On va se limiter ici aux modèles à 2 couches (où la couche de fumée est supposée avoir une masse volumique uniforme) pour lesquels les échanges entre les couches sont contrôlés par le panache. Ces modèles constituent la base des modèles de zone utilisés en désenfumage. Les principales notations employées sont résumées dans le tableau 5.1.

ρ_0	masse volumique de l'air froid
T_0	température de l'air froid
ρ_0	masse volumique de l'air froid
T	température de la couche de fumées
Q_e	flux de volume extrait en plafond
Q_i	flux de volume entrant en couche froide
A	surface au sol du local
H	hauteur sous plafond du local
Z	hauteur de l'interface entre la couche d'air frais et la couche de fumée
z	hauteur courante
$\dot{Q}_c$	puissance convective dégagée par le foyer
$\rho_H(z)$	masse volumique dans le panache
$T_H(z)$	température dans le panache
ϕ	flux de chaleur perdu aux parois
h	coefficient d'échange thermique aux parois

TABLE 5.1 – Principales notations employées pour l'analyse du local ventilé.

On se limite au cas où un régime permanent existe. Cela a pour conséquence qu'il est nécessaire qu'il y ait des amenées d'air dans la couche froide. On suppose en outre pour la simplicité de l'exposé qu'il n'y a pas d'amenée d'air dans la

couche chaude. Le débit entrant dans la couche froide et la température de la couche chaude sont alors liés au débit extrait en plafond (supposé imposé) par la conservation de la masse et de l'enthalpie (on a utilisé la loi des gaz parfaits $\rho T = \rho_0 T_0$ et on a négligé la variation de C_P avec la température, qui n'apporte que des corrections à la marge, voir section 2.1.3) :

$$\begin{aligned} Q_i - \frac{\rho}{\rho_0} Q_e &= 0 \\ Q_i - Q_e + \frac{\dot{Q}}{\rho_0 C_P T_0} &= \frac{\phi}{\rho_0 C_P T_0} \end{aligned}$$

(en utilisant l'équation 4.23, on a $\frac{\dot{Q}_c}{\rho_0 C_P T_0} = \frac{B}{g}$).

Pour fixer les idées, il est utile de définir quelques nombres sans dimension. On note en particulier

$$C_H = \frac{H}{\ell} \tag{5.1}$$

où ℓ est la longueur caractéristique associée au panache définie par l'équation 4.34 :

$$\ell = \frac{1}{(\kappa g)^{3/5}} \left(\frac{g \dot{Q}_c}{C_p \rho_0 T_0} \right)^{2/5}. \tag{5.2}$$

Ce nombre permet de comparer l'échelle du foyer à celle de la hauteur du plafond. Ainsi, si C_H est petit, on a une pièce basse de plafond relativement à l'incendie considéré (incendie violent pour cette taille de pièce), et réciproquement si C_H est grand. Dans le cas présent, on a choisi de ne prendre en compte que la partie convectée de la puissance $\dot{Q}_c$ car en champ libre, la fraction rayonnée est perdue à l'infini. On définit un second nombre sans dimension pour qualifier le débit de ventilation par rapport à la puissance du foyer :

$$C_V = \frac{\dot{Q}}{\rho_0 C_P T_0 Q_e} \tag{5.3}$$

Sur le cas considéré dans ce chapitre, on a

$$C_H \approx 1,7 \quad , \qquad C_V \approx 0,5.$$

Un dernier nombre sans dimension C_w peut être défini comme le rapport des pertes aux chaleur aux parois sur la chaleur évacuée par convection hors du local par le système de ventilation, $C_w = \frac{\phi_w}{\phi_c}$. Les conservations de la masse et de l'enthalpie permettent de calculer $\phi_c = C_P \rho_0 (T_e - T_0) Q_i$, avec T_e la température à l'extraction, et donc

$$C_w = \frac{\phi_w}{C_P \rho_0 (T_e - T_0) Q_i}. \tag{5.4}$$

Il est à noter que ce troisième nombre sans dimension est d'une nature différente des deux premiers, car il n'est pas basé uniquement sur les paramètres d'entrée du cas considéré, et ne peut être calculé a priori.

5.3.2 Solution simplifiée en l'absence d'échanges radiatifs et de pertes de chaleur aux parois

Si l'on néglige les échanges radiatifs et les pertes de chaleur aux parois (ou si on suppose que ces deux termes s'équilibrent exactement, auquel cas on remplace $\dot{Q}_c$ par $\dot{Q}$), les équations de conservation de la masse et de l'enthalpie conduisent à :

$$Q_i = Q_e - \frac{\dot{Q}_c}{\rho_0 C_P T_0} \tag{5.5}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 - \frac{\dot{Q}_c}{\rho_0 C_P T_0 Q_e}} \tag{5.6}$$

Il est à noter qu'à ce stade, on n'a pas fait appel à des propriétés précises d'échange entre les couches, ni même au fait que l'on s'était limités à deux couches. Les mêmes propriétés restent donc valables, en l'absence de pertes de chaleur aux parois, dès lors que l'arrivée d'air frais se fait effectivement à la température T_0 et que l'air extrait est effectivement à la température T, et en particulier pour des calculs de type CFD dans lesquels on n'aurait pas de pertes de chaleur aux parois. A contrario, cette solution cesse d'être valable si $Q_e < \frac{\dot{Q}_c}{\rho_0 C_P T_0}$. En effet, dans ce cas l'expansion volumique des fumées due à la source de chaleur ne peut pas être entièrement absorbée par l'extraction, et pour que le régime permanent existe, il est nécessaire que les bouches d'amenée d'air frais refoulent des fumées. Dans un tel cas, pour un feu réel, le foyer cesse d'être alimenté en oxygène, et la puissance thermique ne peut se maintenir. La figure 5.2 donne, pour un débit extrait en m^3/s, le ratio $\frac{T}{T_0}$ pour quelques puissances convectives.

Comme on l'a vu, il n'a pas été fait appel à une modélisation des échanges entre couche ni à un modèle de panache. Cependant, en utilisant uniquement les équations de conservation, on ne peut pas déterminer la hauteur Z de l'interface entre la couche froide et la couche chaude. Plusieurs arguments (cf. par exemple [13]) peuvent alors être employés, mais tous reviennent simplement à supposer que la hauteur de l'interface entre la couche froide et la couche chaude est la hauteur pour laquelle la température dans le panache $T_H(Z)$, est égale à la température calculée ci-dessus :

$$Z \text{ est solution de } \frac{T_H(Z)}{T_0} = \frac{1}{1 - \frac{\dot{Q}_c}{\rho_0 C_P T_0 Q_e}}. \tag{5.7}$$

Plusieurs modèles légèrement différents peuvent être construits en fonction du modèle de panache retenu. Ici, on retient le modèle de panache construit au cha-

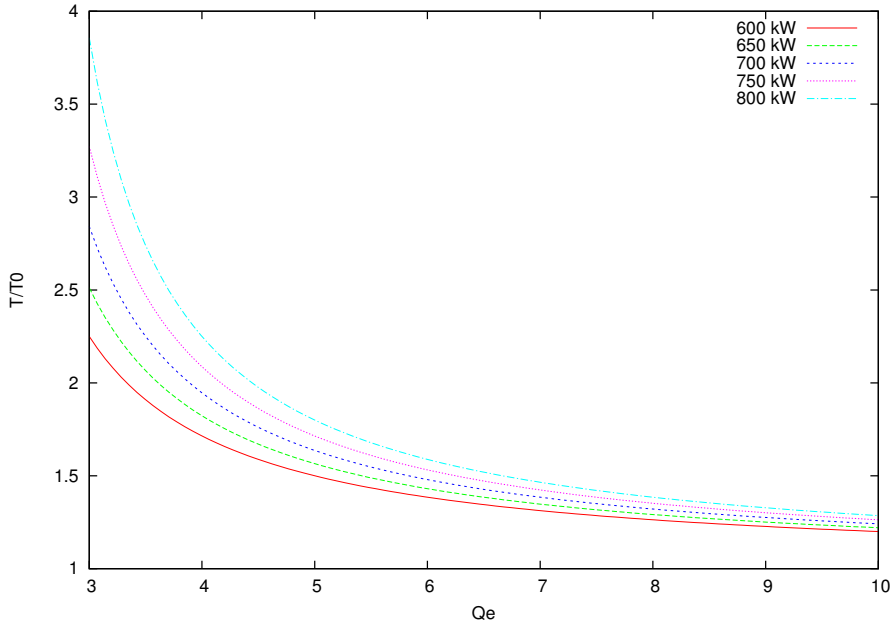


FIGURE 5.2 – Ratio $\frac{T}{T_0}$ en fonction de Q_e (en m^3/s) pour quelques puissances convectives, d'après l'équation (5.6).

pitre 4, avec un panache pur et une origine virtuelle supposée nulle. On a donc

$$\frac{T_H(z)}{T_0} = 1 + (z/\ell)^{-5/3}$$

avec comme précédemment $\ell = \frac{1}{\kappa^{3/5} g^{1/5}} \frac{\dot{Q}_c^{2/5}}{(C_P \rho_0 T_0)^{2/5}}$, $\kappa = \frac{3^{5/3}(2\pi)^{2/3}}{5^{4/3}} \alpha^{4/3} \approx 0.1154$. Il vient donc

$$Z = \ell \times \left(\frac{\rho_0 C_P T_0 Q_e}{\dot{Q}_c} - 1 \right)^{3/5}$$

soit

$$Z = \frac{Q_e^{2/5}}{\kappa^{3/5} g^{1/5}} \times \left[\left(\frac{\dot{Q}_c}{C_P \rho_0 T_0 Q_e} \right)^{2/5} \times \left(\frac{\rho_0 C_P T_0 Q_e}{\dot{Q}_c} - 1 \right)^{3/5} \right] \tag{5.8}$$

ou encore, sous forme adimensionnelle en notant $\mathcal{Z} = \frac{\kappa^{3/5} g^{1/5}}{Q_e^{2/5}} Z$ et $\dot{Q}_c = \frac{\dot{Q}_c}{C_P \rho_0 T_0 Q_e}$ (avec $0 < \dot{Q}_c < 1$ comme vu précédemment) :

$$\mathcal{Z} = \dot{Q}_c^{2/5} \times \left(\frac{1}{\dot{Q}_c} - 1 \right)^{3/5}$$

La figure 5.3 représente ce résultat. Le modèle retenu comporte un paramètre ajustable, κ, que nous avons choisi de conserver à la valeur proposée au chapitre 4.

Un modèle de panache plus complet (par exemple avec correction d'origine virtuelle, ou encore avec une description séparée de la zone de combustion) comporterait des paramètres complémentaires que l'on pourrait ajuster pour représenter au mieux des résultats expérimentaux, mais le résultat serait fondamentalement identique.

(a) (b)

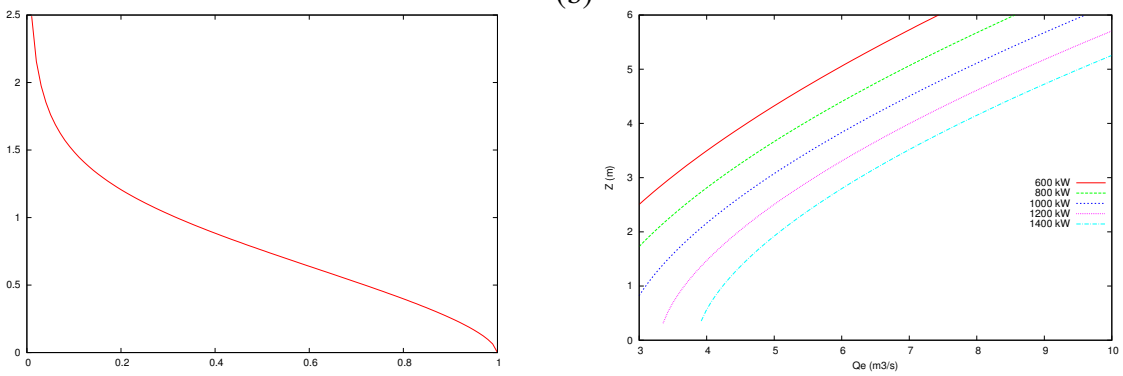


FIGURE 5.3 – Hauteur de l'interface entre la couche froide et la couche chaude selon l'équation (5.8) ; (a) forme adimensionnelle : $\mathcal{Z}$ en fonction de $\dot{\mathcal{Q}}_c$; (b) forme dimensionnelle : Z en fonction de Q_e pour plusieurs valeurs de $\dot{Q}_c$, avec $\kappa = 0.1154$ et $C_P \rho_0 T_0 = 363600$ J/m^3.

Dans la section 5.5, on pratiquera des simulations CFD sur une pièce carrée de 15 m de côté et de 5,5 m de haut, avec un foyer nominal de 700 kW convectifs. Pour ce cas, les équations ci-dessus donnent $T = 167$ °C et $H = 1.84$ m.

5.3.3 Prise en compte des pertes de chaleur aux parois et des échanges radiatifs

Dans cette section, on suppose que le local a un plan rectangulaire, de longueur L et de largeur l, et que les pertes de chaleur peuvent se modéliser par un coefficient d'échange h_e uniforme. On suppose aussi que les parois, dans la zone froide, sont à la même température que l'air. Ainsi les pertes de chaleur s'écrivent (T_p est la température de paroi) :

$$\phi = h_e \times [(2L+2l)(H-Z)+A] \times (T-T_p)$$

Ainsi, les équations à résoudre pour déterminer Q_i, Z et T en fonction de Q_e, $\dot{Q}_c$ et des paramètres du problème sont les suivantes :

$$Q_i - \frac{T_0}{T} Q_e = 0$$

$$\begin{aligned} Q_i - Q_e + \frac{\dot{Q}_c}{\rho_0 C_P T_0} &= \frac{h_e}{\rho_0 C_P T_0} \times [(2L+2l)(H-Z)+A] \times (T-T_p) \\ T_H(Z) &= T \end{aligned}$$

Pour résoudre ce système, il suffit de se donner un modèle pour T_p. Le modèle le plus simple est de prendre $T_p = T_0$ et de limiter parallèlement h_e à une valeur suffisemment faible (typiquement 10 à 20 J/K/m^2) pour éviter que la sous-estimation de T_p ne conduise à surestimer fortement les flux. Une autre possibilité est de modéliser les échanges de chaleur dans l'intérieur du matériau constitutif de la paroi, cf. [77] pour une analyse de l'effet de ces approximations et une proposition de modèle simplifié.

Enfin, la prise en compte des échanges radiatifs peut se faire de manière simplifiée en remarquant que l'essentiel de la part radiative vient du foyer, et en répartissant cette part radiative sur les parois du local.

5.4 Les limites de la théorie

5.4.1 Stratification thermique et tenabilité

La mise au point des modèles de zone dans les années 70 a été parallèle à la définition d'une stratégie de vérification de la sécurité en cas d'incendie, selon laquelle si la hauteur de la couche libre de fumée est suffisamment haute, l'évacuation (et donc la mise en sécurité des personnes) est possible en cas d'incendie. On a donc mis au point une approche relativement binaire, selon laquelle le but de la ventilation d'extraction des fumées dans un local est de garantir que la hauteur de la couche de fumée est supérieure à une valeur donnée a priori. Cela revient à dire que tout doit être fait pour éviter que des personnes puissent être atteintes par la couche de fumée, celle-ci étant considérée comme *infiniment dangeureuse*, du fait de l'opacité, de la toxicité et de la température. Cependant, on est maintenant capables de qualifier plus précisément la toxicité en fonction de la concentration des espèces chimiques présentes (voir par exemple la base de données maintenue par l'INERIS, www.ineris.fr), et parallèlement, grâce à ces calculs plus fins, de se rendre compte que l'hypothèse d'une stratification franche en 2 zones n'est presque jamais correcte.

5.4.2 Hauteur de couche enfumée dans les modèles CFD

La figure 5.4 représente la stratification thermique obtenue pour l'un des simulations présentées à la section 5.5. On y constate que, autant il est facile de se convaincre qu'il y a deux couches bien distinctes en termes de température à partir

de la représentation sous la forme de planche colorée, autant, sur la base du profil vertical de température, il n'est pas évident de décider a priori à quelle hauteur se situe la limite entre les deux couches, comprise entre 1 et 3 mètres au dessus du sol.

De nombreux travaux proposent des méthodes pour recalculer une hauteur de couche de fumée équivalente à partir de profils mesurés expérimentalement, ou, ce qui revient au même, de modèles CFD, en particulier [78] et [79]. Toutes ces méthodes se heurtent à la nécessité de prendre en compte une équation empirique pour représenter le mélange. Cette équation empirique peut être une détermination par la méthode des moindres carrés, ou basée sur une modélisation empirique de la physique du mélange. Cependant, dans aucun des cas, cette méthode ne peut être universelle et valable dans toutes les situation. Cela vient en fait d'une faiblesse inhérente aux modèles de zone à deux couche : l'hypothèse de base, qui est justement l'existence de deux couches nettements différenciées, ne se retrouve presque jamais dans les cas expérimentaux ou modélisés en CFD.

(a) (b)

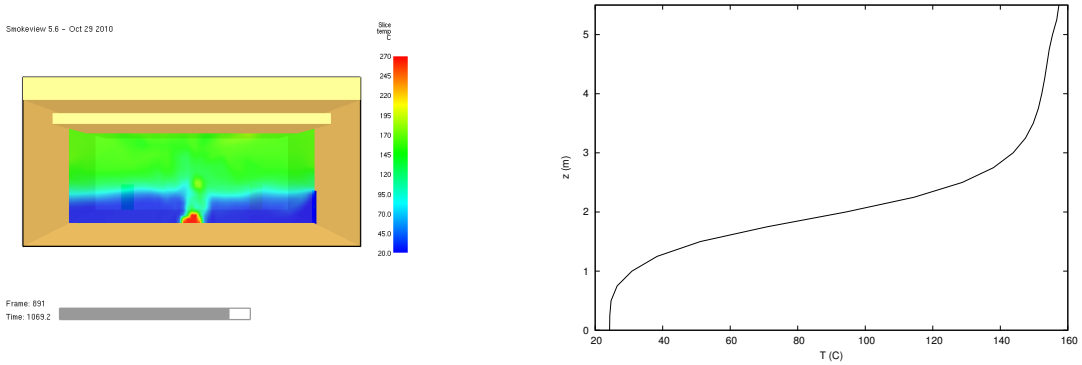


FIGURE 5.4 – Représentation graphique du profil vertical de température pour la simulation `00` (cf. section 5.5) : (a) représentation par planche colorée ; (b) profil vertical de température en $(x,y) = (7.5, 2.25)$; pour mémoire le modèle à deux zones simple de la section 5.3 donne une hauteur d'interface de 1,84 m, ce qui est tout à fait raisonnable au vu de la courbe mais par trop imprécis pour analyser la sécurité dans ce cas.

5.4.3 Proposition d'un choix alternatif pour estimer les conditions de sécurité

La meilleure réponse que l'on puisse apporter à cette difficulté est simplement de se rappeler l'origine du choix d'utiliser la hauteur de la couche de fumée pour analyser le niveau de sécurité d'un local : d'une part la volonté de s'assurer que

les conditions d'environnement sont tenables à hauteur d'homme, et d'autre part pouvoir les calculer avec les modèles à disposition à l'époque où ce choix a été fait. Il est donc raisonnable, maintenant que les puissances de calcul ont énormément progressé, de faire un choix alternatif, représentatif des conditions d'environnement à hauteur d'homme tout en étant plus pertinent vis-à-vis des modèles qui s'emploient et se développent aujourd'hui. Dans le cadre du présent travail, il est proposé de retenir à cette fin les conditions d'environnement (température, concentration de toxiques, etc.) moyennes à 2 m au dessus du sol dans le local.

Ce choix alternatif a aussi pour avantage de résoudre élégamment la difficulté rencontrée par certaines équipes pour coupler en temps réel des modèles de zone avec des modèles de champs (voir par exemple [80]), en supprimant le besoin. Ceci étant dit, reste à se convaincre que l'on sait calculer efficacement (c'est à dire avec des modèles suffisamment rapides et un niveau de confiance suffisamment élevé) les conditions d'environnement à 2 m.

Pour estimer les conditions d'environnement à 2 m, la première option est bien sûr de s'inspirer de [13, p 231 et suivantes], ou de [76] pour mettre au point et valider un modèle multicouches. Ce n'est pas l'approche retenue ici, et le lecteur est invité à se référer à [81] pour une approche possible. Au delà des modèles multicouches, l'emploi de modèles de champs raisonnablement raffinés est un bon candidat. On peut aussi construire des modèles intermédiaires, en calquant ce qui se fait en météorologie avec les modèles employés pour les situations méso-échelle (voir par exemple [37]).

5.5 Sensibilité aux paramètres d'entrée d'une simulation d'un feu dans une pièce ventilée

L'objet de la présente section est de réaliser un grand nombre de simulations par modèle de champ d'un incendie de 1 MW dans le local présenté en section 5.2, afin de déterminer dans quelles conditions il est réaliste de calculer, avec un bon niveau d'approximation et un temps de calcul raisonnable, les conditions ambiantes à 2 m du sol.

5.5.1 Présentation de la méthode

La simulations sont réalisées avec FDS, avec un maillage régulier cubique, selon un plan d'expérience prédéterminé, visant à explorer les effets de divers choix de simulations : d'une part le choix des paramètres que nous qualifierons de *directs* car présents explicitement dans la description d'un cas, indépendamment des choix de modélisation. Les paramètres directs retenus ici sont la puissance

du foyer et le débit d'extraction. D'autre part le choix des paramètres *indirects*, car pouvant donner lieu à des choix cachés lorsque l'on réalise la modélisation. On retient ici les paramètres indirects suivants : choix du maillage, répartition de l'insufflation entre les 4 portes, type de foyer (source de chaleur convective répartie sur une surface à déterminer, emploi d'un modèle de combustion, activation ou non du module de rayonnement), modélisation des échanges de chaleur aux parois, choix de la constante associée au modèle de sous maille.

On part d'un cas de référence, qui représente un cas typique d'étude, avec un débit d'extraction de 5,9 m^3/s, et on fait varier les paramètres autour de ce cas de base. Le tableau 5.2 synthétise l'ensemble des simulations réalisées. Pour fixer les ordres de grandeur, on peut retenir qu'avec le maillage retenu pour la plupart des simulations, basé sur un cube de 25 cm, le temps nécessaire à chaque simulation pour un ordinateur de bureau ordinaire est de l'ordre de 15 à 20 heures.

La traitement des données se concentre sur la température à $z = 2$ m. La figure 5.5(a) donne la moyenne sur la période allant de 600 à 3600 s des températures atteintes sur les différents points du plan $z = 2$ m. La figure 5.5(b) donne, en fonction du temps, température moyenne dans le plan $z = 2$ m. Pour le calcul de la moyenne spatiale sur le plan $z = 2$ m, il a été décidé de ne pas détourer la zone du panache. En effet, la zone du panache concerne moins de 2 % de la surface, avec une différence de température avec le reste de la surface inférieure à 200 K. L'approximation introduite en ne détourant pas la zone du panache est donc inférieure à 4 K : on verra que celle-ci est nettement inférieure aux fluctuations statistiques.

Pour la simulation xx, on définit $< T_{xx} >$ la moyenne temporelle pour $t \in [600, 3600]$ de la moyenne spatiale pour $z = 2$ m. On définit aussi δT_{xx} comme étant deux fois l'écart type sur $[600, 3600]$ de la série temporelle que constitue la moyenne spatiale de la température. Dans les représentations graphiques ci-dessous, on représentera $< T_{xx} >$ et une barre d'erreur représentant plus ou moins δT_{xx}. On notera aussi, quand c'est pertinent, $T_c^{2m} =< T_{xx} > +\delta T_{xx}$, sans le code de simulation xx mais en explicitant le paramètre considéré. Ceci nous permettra, pour toute quantité q, de définir le paramètre de sensibilité associé α_q par ($T_c^{2m}(q)$ est exprimé en kelvins) :

$$\alpha_q = \frac{q}{T_c^{2m}(q)} \times \frac{\partial T_c^{2m}}{\partial q} \tag{5.9}$$

Ce paramètre vise à quantifier l'influence relative des erreurs ou approximations sur chacune des données d'entrée, afin d'aider à déterminer les points sur lesquels il importe de porter le plus d'effort de modélisation.

no.	Q_{e1}	Q_{e2}	Q_{e3}	Q_{e4}	$\dot{Q}$	C_s	Δ_x
00	1.	1.	1.	1.	700.	0.20	0.25
01	1.05	0.9833	0.9833	0.9833	700.	0.20	0.25
02	1.10	0.9667	0.9667	0.9667	700.	0.20	0.25
03	1.15	0.95	0.95	0.95	700.	0.20	0.25
04	1.20	0.9333	0.9333	0.9333	700.	0.20	0.25
05	1.25	0.9167	0.9167	0.9167	700.	0.20	0.25
06	0.95	1.0167	1.0167	1.0167	700.	0.20	0.25
07	0.90	1.0333	1.0333	1.0333	700.	0.20	0.25
08	0.85	1.05	1.05	1.05	700.	0.20	0.25
40	1.	1.	1.	1.	700.	0.20	0.25
50	1.	1.	1.	1.	700.	0.25	0.25
51	1.	1.	1.	1.	700.	0.15	0.25
52	1.	1.	1.	1.	700.	0.20	0.1667
53	1.	1.	1.	1.	700.	0.20	0.125
54	1.	1.	1.	1.	700.	0.30	0.1667
55	1.	1.	1.	1.	700.	0.40	0.125

no.	Q_s	$\dot{Q}$	S_{extr}	mod. comb.	mod. rad.	h_e	C_s	Δ_x
10	5.9	700.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
11	5.4	700.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
12	4.9	700.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
13	4.4	700.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
14	6.4	700.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
15	6.9	700.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
16	7.4	700.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
17	7.9	700.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
18	10.	700.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
21	5.9	700.	1.5625	non	non	0.00	0.20	0.25
22	5.9	700.	2.25	non	non	0.00	0.20	0.25
23	5.9	700.	0.5625	non	non	0.00	0.20	0.25
31	5.9	650.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
32	5.9	600.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
33	5.9	750.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
34	5.9	800.	1.	non	non	0.00	0.20	0.25
41	5.9	700.	1.	oui	non	0.00	0.20	0.25
42	5.9	700.	0.5625	oui	non	0.00	0.20	0.25
43	5.9	700.	1.5625	oui	non	0.00	0.20	0.25
44	5.9	700.	1.	oui	oui	0.00	0.20	0.25
45	5.9	1000.	1.	oui	oui	0.00	0.20	0.25
46	5.9	1100.	1.	oui	oui	0.00	0.20	0.25
47	5.9	900.	1.	oui	oui	0.00	0.20	0.25
48	5.9	1000.	1.	oui	non	0.00	0.20	0.25
49	5.9	1000.	1.	oui	oui	10.00	0.20	0.25
61	5.9	700.	1.	non	non	5.00	0.20	0.25
62	5.9	700.	1.	non	non	10.00	0.20	0.25
63	5.9	700.	1.	non	non	20.00	0.20	0.25
64	5.9	700.	1.	non	non	30.00	0.20	0.25
65	5.9	900.	1.	oui	oui	10.00	0.20	0.25
66	5.9	1100.	1.	oui	oui	10.00	0.20	0.25

TABLE 5.2 – Liste des simulations pratiquées et caractéristiques principales

(a) (b)

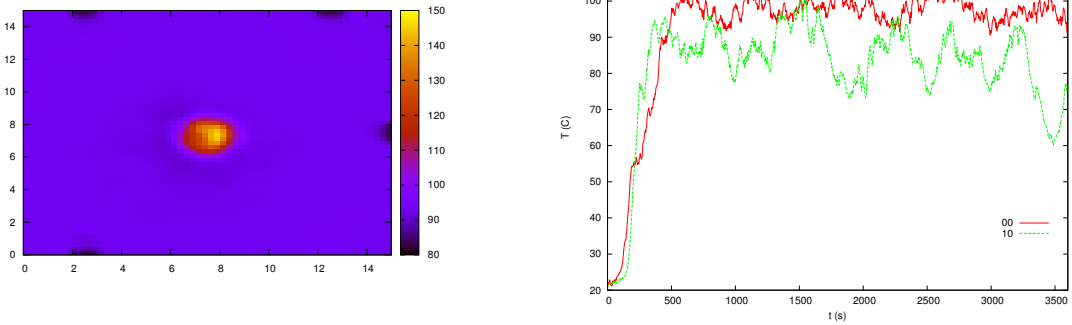


FIGURE 5.5 – (a) moyenne temporelle de la température à $z = 2$ m pour le cas 00 ; (b) moyennes spatiales de la températures à $z = 2$ m pour les cas 00 et 10.

5.5.2 Sensibilité aux paramètres directs

Débit d'extraction

Le premier paramètre est le débit d'extraction. La figure 5.6 montre $< T_{xx} > \pm \delta T_{xx}$ en fonction du débit volumique extrait (simulations 10 à 18). Ces températures sont à mettre en relation avec celles issues de l'équation 5.6 (comprises entre 260°C pour $Q_e = 4.4$ m^3/s et 100°C pour $Q_e = 10$ m^3/s) : dans ce cas pratique, la hauteur $z = 2$ m se trouve systématiquement à une hauteur intermédiaire pour laquelle le modèle de zone est peu performant.

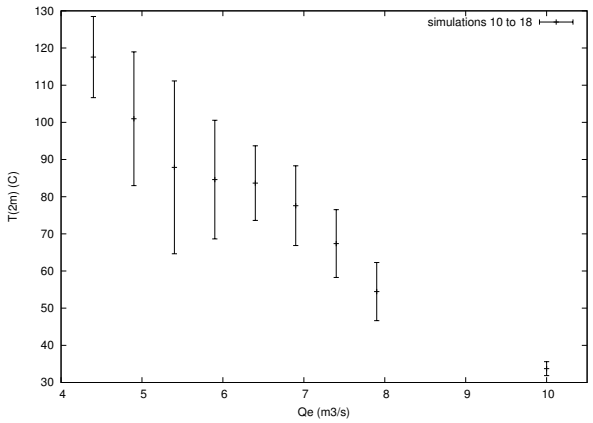


FIGURE 5.6 – $< T_{xx} > \pm \delta T_{xx}$ en fonction du débit volumique extrait (simulations 10 à 18).

On a en outre, avec une assez bonne approximation,

$$\frac{T_c^{2m}(Q_e) - T_c^{2m}(5.9)}{Q_e - 5.9} \approx \frac{93.7 - 111.1}{6.4 - 5.4} = -17.4$$

ce qui peut s'écrire sous la forme d'un modèle linéaire tangeant :

$$T_c^{2m}(Q_e) \approx T_c^{2m}(5.9) + \frac{\partial T_c^{2m}}{\partial Q_e} \times (Q_e - 5.9) \quad \text{avec } \frac{\partial T_c^{2m}}{\partial Q_e}(5.9) = -17.4 \text{ Ks /m}^3$$

En définissant le paramètre de sensibilité α_{Q_e} par l'équation (5.9) (T_c^{2m} est exprimé en K), on obtient

$$\alpha_{Q_e} = -28\ \%.$$

Puissance calorifique

En ce qui concerne la puissance calorifique, la figure 5.7 résume les résultats des simulations 10, 31, 32, 33 et 34. On a $\frac{\partial T_c^{2m}}{\partial \dot{Q}_c}(700) = 0.16$ K/kW et donc $\alpha_{\dot{Q}_c} = 35\ \%$.

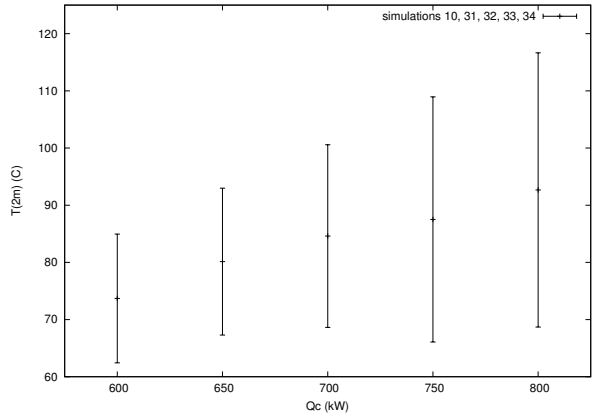


FIGURE 5.7 – $< T_{xx} > \pm \delta T_{xx}$ en fonction de la puissance convective (simulations 10 et 31 à 34).

5.5.3 sensibilité aux paramètres indirects

Maillage

Toutes les simulations sauf les simulations 52, 53, 54 et 55 emploient un maillage régulier avec une maille de 25 cm de côté (soit un total de 108 000 mailles). Les simulations 52 et 54 emploient un maillage régulier avec une maille

de 16,67 cm de côté (soit un total de 364 500 mailles). Les simulations 53 et 55 emploient un maillage régulier avec une maille de 12,5 cm de côté (soit un total de 864 000 mailles). La comparaison des simulations 00, 52 et 53 permet d'analyser la convergence en maillage *standard*, c'est à dire en ne changeant que le paramètre de maillage dans l'interface d'entrée du modèle. La figure 5.8 montre que l'influence est très faible, ce qui est confimé par le calcul, avec $\alpha_{\Delta x} = -2,8\ \%$.

(a)

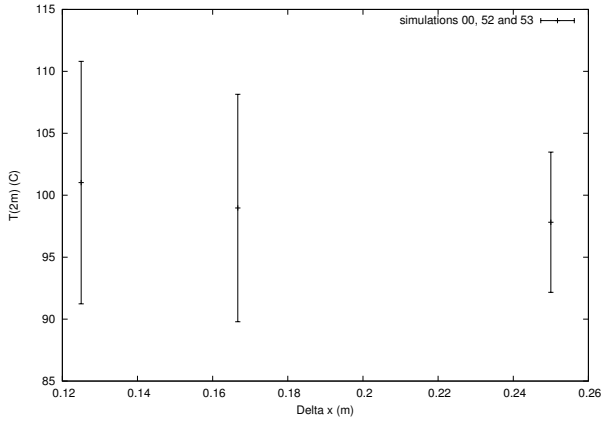


FIGURE 5.8 – $< T_{xx} > \pm \delta T_{xx}$ en fonction de la taille de la maille, sans modification de l'expression litérale du modèle de sous maille (simulations 00, 52 et 53).

Surface du foyer

Les simulation 10, 21, 22 et 23 sont en tout points identiques sauf en ce qui concerne la surface occupée par le foyer. La figure 5.9 montre que, dans les limites explorées ici, l'influence est faible. Ceci est confirmé par le calcul de α_S :

$$\alpha_S = 0,4\ \%.$$

Répartition de l'insufflation

Le cas 10 a été mené avec une extraction imposée à 5,9 m^3/s, le logiciel se chargeant de répartir l'entrée d'air frais par les 4 portes situées en partie basse du local. L'avantage est de ne pas avoir à se poser de question sur cette répartition, mais avec le risque d'occulter un effet pouvant soulever des difficultés car les pertes de charge à travers les portes sont très difficiles à estimer justement par les logiciels, et de plus leur valeur réelle dépend de manière assez fine de la géométrie des couloirs d'accès en dehors de la zone modélisée, et il serait illusoire d'avoir

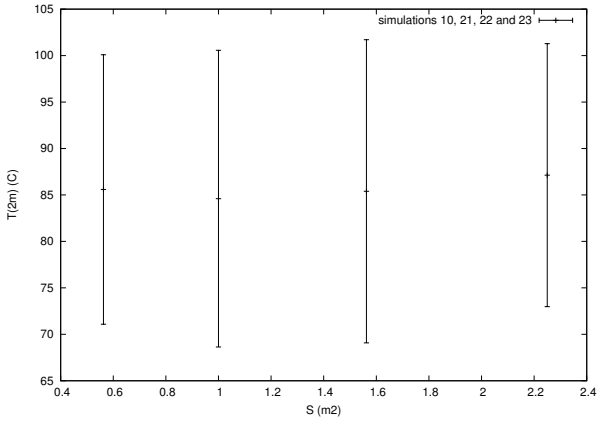


FIGURE 5.9 – $< T_{xx} > \pm \delta T_{xx}$ en fonction de la surface du foyer (simulations 10, 21, 22 et 23).

une précision absolue sur cet effet. Il est donc pertinent d'analyser la sensibilité à la répartition des débit insufflés entre les différentes portes.

On analyse l'effet de la modification du débit par la porte 1, le débit total étant conservé par une variation corrélative (et égale) sur les portes 2, 3 et 4. En effet, il s'agit d'analyser l'effet de la répartition en le découplant de la problématique de l'évolution du débit total. La figure 5.10 donne les résultats des simulations.

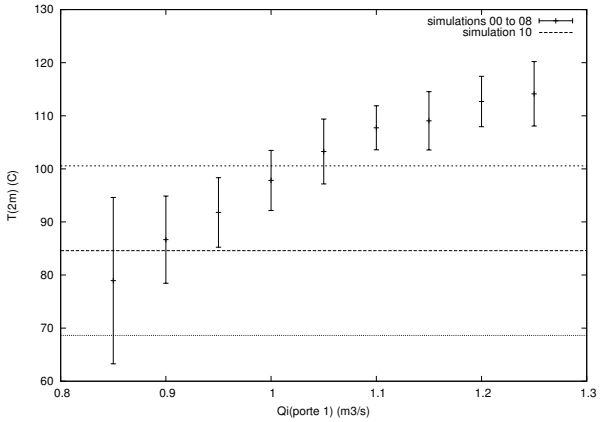


FIGURE 5.10 – $< T_{xx} > \pm \delta T_{xx}$ en fonction du débit insufflé par la porte 1 (simulations 00 à 08) ; les traits horizontaux représentent $< T_{xx} > \pm \delta T_{xx}$ pour la simulation 10, pour laquelle l'extraction était imposée et le débit insufflé par chacune des portes était calculé.

Le paramètre de sensibilité $\alpha_{Q_{i1}}$ est

$$\alpha_{Q_{i1}} = 30\ \%.$$

On voit donc que la répartition des débits entre les portes est aussi influente que le choix du débit lui-même. On a bien ici pourtant un paramètre indirect, qui d'une part ne saute pas aux yeux comme étant critique pour le modélisateur, et qui d'autre part n'est même pas un paramètre d'entrée pour les modèles simplifiés. En fonction des enjeux de sécurité associés au cas considéré, une analyse très complète peut être nécessaire pour assurer que l'ensemble des cas simulés couvre toutes les situations dangeureuses.

L'explication physique de cette très forte sensibilité tient en particulier à l'absence de symétrie du domaine de calcul, qui peut conduit, en général, à l'émergence d'une rotation d'ensemble de l'écoulement d'une intensité variable comme on peut le voir sur la figure 5.11.

(a) (b)

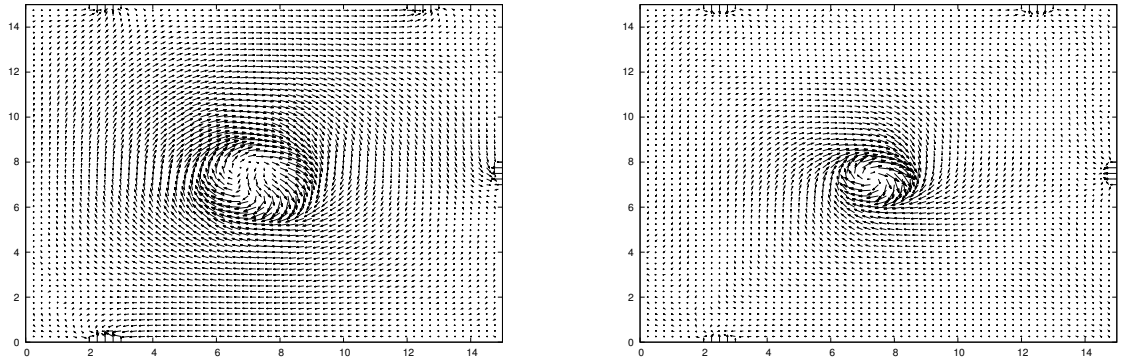


FIGURE 5.11 – Coupe à $z = 2$ m du champs de vitesse ; (a) cas 05 avec $Q_{i1} = 1.25\text{m}^3/\text{s}$; (b) cas 08 avec $Q_{i1} = 0.85\text{m}^3/\text{s}$.

Modélisation de la turbulence

Le modèle de sous-maille employé s'écrit avec une viscosité de sous-maille (voir chapitre 2) :

$$\nu_s = (C_s L_f)^2 \left(S_{ij} S_{ij} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)^2 \right)^{1/2}$$

avec une longueur de filtre liée à la taille de maille par $L_f = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{1/3}$, égale à Δx avec le maillage employé ici. Le calcul de l'influence du choix de C_S sur la base des simulations 00, 50 et 51 donne

$$\alpha_{C_s} = -5\%.$$

On peut noter que, si le filtrage se faisait dans le domaine inertiel de la turbulence, la simulation avec C_s plus grand devrait avoir un modèle de sous maille plus dissipatif et donc un écoulement filtré moins chahuté, et une moindre variance de la

température. En réalité, les variances sont du même ordre. Ceci suggère que la coupure n'est pas faite dans le domaine intertiel.

On peut aussi interpréter le paramètre C_s différemment, en notant que l'on peut forcer le code à conserver L_f constant, $L_f = 25$ cm, tout en faisant varier la valeur de Δx, pour analyser la convergence en maillage à modèle de turbulence constant. C'est ce qui a été pratiqué avec les simulations 00, 54 et 55, représentées sur la figure 5.12(b). De manière toute à fait prévisible, puisque l'on a vu que pour la simulation 00 la coupure n'était pas faite dans le domaine inertiel, l'influence n'est pas négligeable. Les calculs donnent $\alpha_{\Delta x|L_f} = 16$ % pour Δx =25 cm et $\alpha_{\Delta x|L_f} = 11$ % pour Δx =16.67 cm. La baisse de $\alpha_{\Delta x|L_f}$ montre que l'on s'approche de la convergence en maillage à L_f fixé en le raffinant. Par ailleurs, l'analyse de la convergence *standard* en maillage pratiquée ci-avant montre que le choix de $C_s = 0.2$ et $L_f = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{1/3}$ est le choix le plus pertinent pour garantir une bonne convergence dans le cas du panache.

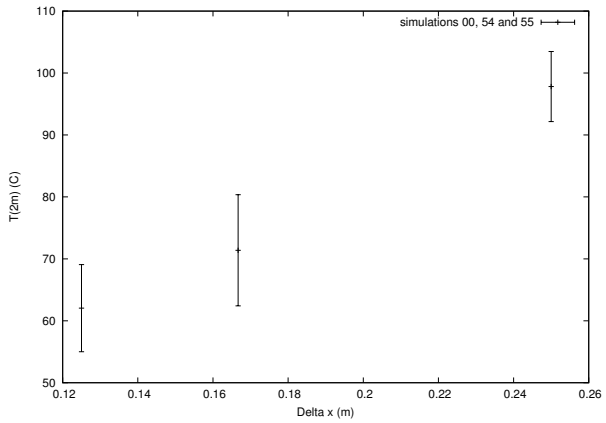


FIGURE 5.12 – $< T_{xx} > \pm \delta T_{xx}$ en fonction de la taille de la maille, en conservant $L_f = 25$cm (simulations 00, 54 et 55).

Pertes de chaleur aux parois

En ce qui concerne les pertes de chaleur aux parois, la figure 5.13 résume les résultats des simulations 10, 61, 62, 63 et 64. Une définition modifiée du paramètre de sensibilité doit être utilisée, puisque la valeur de référence de h était 0. On a $\frac{\partial T_c^{2m}}{\partial h}(0) = -6.9$ K/(W/K/m^2) et on définit

$$\alpha_h = \frac{h_{ref}}{T_c^{2m}(q)} \times \frac{\partial T_c^{2m}}{\partial h}$$

où h_{ref} est la valeur que h doit avoir si l'on veut que $C_w = 1$ lorsque $T = T_e$ partout dans la pièce : $h_{ref} = \frac{\rho_0 C_P Q_i}{(2L+2l)H+2A}$ ce qui conduit à $h_{ref} = 6.3\text{W/K/m}^2$, et donc $\alpha_h = -11.6\%$.

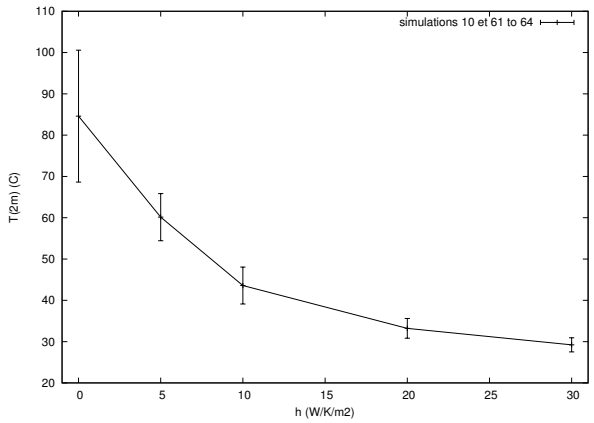


FIGURE 5.13 – $< T_{xx} > \pm \delta T_{xx}$ en fonction des pertes de chaleur aux parois (simulations 10 et 61 à 64).

Type de foyer

L'analyse de la sensibilité au type de foyer ne peut bien entendu pas se faire aussi simplement que dans les cas où la propriété analysée ne dépend que d'un paramètre. On procède donc par étapes. La première étape consiste à conserver la puissance nominale de 700 kW dans la simulation, et se contenter de remplacer la condition au limite de flux de chaleur (simulation n. 10) par une injection de méthane en quantité telle que la réaction produise 700 kW, et sans activer le modèle radiatif (simulation n. 41). Cela fait passer T_c^{2m} de 100,6 °C à 58,8 °C, effet bien au delà de l'admissible.

Il se trouve que l'équation (5.6), en l'absence de pertes de chaleur, reste valable pour indiquer la température à l'extraction lors d'une simulation CFD : un écart à la valeur prévue par l'équation est un signe d'une sous- ou sur-estimation de la puissance injectée (dans la limite d'une précision de quelques pourcents, puisque l'on a négligé la variation de la chaleur spécifique avec la température dans (5.6) et pas dans le code CFD). L'équation (5.6) prévoit une température à l'extraction de 167 °C. Pour la simulation n. 10, on a une température à l'extraction de 152 °C, conforme à la température escomptée, alors que la simulation n. 41 obtient une température à l'extraction de 98 °C, trop basse. L'interprétation physique de ce résultat est que le modèle de foyer prévoit qu'une partie de la chaleur et émise sous forme radiative, mais comme le modèle de rayonnement est désactivé, cette partie

de la chaleur est perdue. L'application de l'équation (5.6) à la part convective uniquement, en supposant que toute la part radiative est perdue, conduit à une température prévue de 101 °C. Ceci confirme notre analyse, et conduit à proscrire absolument l'emploi de modèles de combustion lorsque le rayonnement n'est pas simulé. Il est à noter que cette conclusion ne dépend pas du logiciel utilisé, car tout modèle de combustion conduit à la production d'espèce chimiques qui ne sont pas uniquement des molécules mono ou diatomiques, et qui, chaudes, rayonnent.

Ainsi, l'emploi d'un modèle de combustion nécessite l'activation du modèle radiatif. Une série de trois simulations a donc été pratiquée avec modèle de combustion et modèle radiatif, parois adiabatiques, pour des puissances totales de 900, 1000 and 1100 kW (respectivement simulations 47, 45 et 46). Ces simulations conduisent à

$$\alpha'_{\dot{Q}} = 44\%$$

(le symble prime $(.)'$ est utilisé pour noter le fait que la simulation de référence est ici la simulation no. 45). la valeur $T_c^{2m} = 100°\text{C}$ (similaire à celle atteinte pour le cas `10` avec 700 kW sans rayonnement ni combustion) est atteinte pour une puissance totale de 1050 kW avec rayonnement et combustion. Ceci montre que l'estimation d'un tiers de la puissance perdue en rayonnement reste pertinente pour un feu dans un local, mais que la question de savoir ce que devient cette source de puissance supplémentaire rend le résultat très sensible à la valeur précise de la puissance, car $\alpha'_{\dot{Q}} = 44\%$ est grand comparé aux paramètres de sensibilité pour les paramètres directs. Ainsi, lorsque le modèle de rayonnement est activé, une partie de l'énergie est perdu directement sur les parois, ce qui conduit à une interaction avec la modélisation des parois.

La dernière étape pour analyser l'influence du modèle de combustion est donc de prendre en compte les échanges de chaleur aux parois. Dans l'approche préliminaire réalisée ici, il a été choisi de le faire en fixant $h = 10\text{W/K/m}^2$. La simulation 49 est identique à la simulation 45 (1000 kW, modèle de combustion, modèle de rayonnement) mais en y ajoutant ce modèle de parois. Il vient $T_c^{2m} = 45°\text{C}$, ce qui est très proche de la valeur de 48°C obtenue avec la simulation 62 (source de chaleur convective à 770 kW sans combustion ni rayonnement, et $h = 10\text{W/K/m}^2$). De plus, les simulations 65 et 66 permettent de calculer

$$\alpha''_{\dot{Q}} = 13\%$$

(le symbole seconde $(.)''$ est utilisé pour noter le fait que la simulation de référence est ici la simulation no. 49). On voit donc que l'emploi d'une paroi non adiabatique permet réduire fortement la sensibilité des simulations.

5.5.4 Conclusion

On peut retenir de cette section deux éléments principaux : d'une part, le calcul des paramètres de sensibilité aux divers paramètres est un bon outil pour estimer la sensibilité à ces paramètres, et donc faire porter l'effort de caractérisation sur les paramètres les plus sensibles. Il peut notamment être utilisé lors des études d'ingénierie. D'autre part, il est dangeureux de modéliser la combustion si on ne modélise pas aussi les échanges radiatifs et les pertes aux parois, et une modélisation beaucoup plus simple (source convective sans rayonnement mais avec pertes aux parois) donne alors un résultat très proche. On peut aussi retenir qu'une analyse fine des modèles de parois reste à pratiquer.

5.6 Perspectives

Dans ce chapitre, on a analysé en détail différentes modélisations d'un feu dans un local ventilé. Ceci a permis de montrer d'une part le besoin d'aller au delà de ce qui peut être calculé très simplement par un modèlé à deux zones, et d'autre part l'utilité d'avoir des outils simples permettant d'analyser la sensibilité d'une simulation aux divers paramètres, constituant une première approche des niveaux de confiance. Cet enjeu sera repris par des études de cas dans le chapitre suivant. Le premier enjeu mentionné suppose pour sa part un travail de recherche complémentaire pour construire les modèles les plus simples possibles mais représentant de façon correcte la stratification.

Chapitre 6

Analyse du niveau de confiance à accorder à une simulation : études de cas

6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, le équations fondamentales utiles pour la description des écoulements de gaz issus d'incendie ont été mise en place, puis analysées sur des cas dits *canoniques*, c'est à dire des cas qui permettent de considérer séparement quelques uns des phénomènes fondamentaux impliqués dans les écoulements de gaz issus d'incendie. Il est bien évident qu'une méthode de prévision, quelle qu'elle soit, doit correctement représenter ces écoulements canoniques. Pour autant, ceci n'est pas forcément suffisant pour pouvoir, sur des cas réels, connaître a priori la pertinence d'une solution, ou, ce qui est assez proche, estimer objectivement l'incertitude d'un résultat de simulation. Le but du présent chapitre est de proposer une voie de travail pour établir une méthodologie d'évaluation de la confiance que l'on peut avoir a priori (c'est à dire sans comparer une simulation avec des cas expérimentaux complexes) en une simulation.

Cette problématique est d'autant plus importante que, de plus en plus, l'analyse de sécurité incendie d'un ouvrage (bâtiment, tunnel, navire, etc.) repose sur une approche d'ingéniérie qui emploie la modélisation pour prédire soit le mouvement des fumées, soit les champs de température qui peuvent mettre en péril la stabilité structurelle d'une partie de l'ouvrage. Cette modélisation utilise souvent des modèles de champ (CFD). Or il n'est pas du tout évident d'estimer objectivement si le résultat de la simulation est proche de la situation qui sera rencontrée le jour où un éventuel sinistre se produira.

Les causes de la proximité ou non proximité entre le résultat d'une simulation

et un incendie réel sont multiples. Les causes d'erreurs et d'incertitude peuvent être classées en plusieurs catégories : (1) méconnaissance des conditions aux limites, (2) incertitudes dans le terme source du feu, (3) choix des hypothèses employées dans les modèles, (4) incertitudes liées à la résolution numérique (y compris les choix du maillage dans le cas de la CFD). Ces causes d'erreurs et d'incertitudes peuvent être cumulatives, et peuvent conduire à des résultats dont même les ordres de grandeur sont erronés.

On regroupe sous le terme de *validation* des modèles les études qui portent sur les catégories (3) et (4) ci-dessus. De telles études ont été réalisées sur de nombreux cas par de nombreux groupes (on peut se référer par exemple à [82], [83] dans le contexte des panaches et des incendies dans les grands volumes, ou [41] dans le contexte des tunnels). Dans ces études, la démarche retenue est de comparer qualitativement quelques unes des quantités calculées par les modèles avec des données expérimentales et théoriques. Ceci est très utile dans une démarche d'amélioration des modèles.

Dans le présent contexte, on vise à construire une méthode utilisant des estimations sytématiques pour comparer soit des simulations avec un cas réel, soit des simulations entre elles, dans une démarche similaire à celle utilisée par certains groupes dans le contexte de la dispersion des polluants (voir par exemple [84]). L'objectif à moyen terme de cette recherche n'est pas valider ni d'améliorer les modèles de CFD, mais de mettre à la disposition des acteurs de la sécurité incendie des méthodes d'estimation de la confiance qu'ils peuvent avoir dans une simulation.

La section 6.2 expose la méthodologie employée, qui utilise des distances ou pseudo-distances sur l'espace mathématique dans lequel sont plongés les écoulements. La section 6.3 montre l'application de cette méthode à un cas particulier de feu dans une salle de spectacles. Une application au cas des tunnels est présentée à la section 6.4. Enfin, la section 6.5 trace les grandes perspectives autour de ces travaux.

6.2 Méthode mathématique pour analyser le niveau de confiance

D'un point de vue mathématique, le résultat d'une simulation par un modèle de type CFD est un champ scalaire ou vectoriel, noté par exemple F^{CFD} qui appartient à une version discrétisée d'un espace vectoriel comme par exemple $L^2([0,t_{max}] \times V)$ avec t_{max} l'instant de fin de la simulation et V le volume dans lequel le phénomène est étudié (voir par exemple [12]). Ce champ scalaire ou vectoriel est fonction de plusieurs paramètres d'entrée, en particulier les conditions

aux limites (notées CL), le terme source (noté S), les choix de modélisation (notés M) et la méthode numérique utilisée (notée N) : $F^{CFD} = F^{CFD}(CL,S,M,N)$. Le champ ainsi calculé doit être proche (en un sens à préciser) du champ réel. Cette proximité peut être estimée au moyen d'une distance sur l'espace vectoriel (au sens topologique), ou d'une pseudo-distance, c'est à dire une fonctionnelle Φ représentant une grandeur pertinente pour la compréhension ou l'analyse de l'écoulement (on dira alors que Φ est une *variable d'intérêt de l'écoulement*) :

$$d = d(F^{CFD},F) \quad \text{ou } d = |\Phi(F^{CFD}) - \Phi(F)| \tag{6.1}$$

L'exemple le plus simple de distance topologique est la distance associée à une norme sur l'espace. Si on retient l'espace des champs de vitesse et la norme associée à l'énergie

$$||u||_2 = \sqrt{\int_0^{t_{max}} \int_V u^2 dV dt}$$

et sa distance associée $d(u_1,u_2) = ||u_1 - u_2||_2$, alors d est simplement l'énergie de l'écoulement obtenu par soustraction de F^{CFD} à F. Un exemple de variable d'intérêt est celui de la hauteur de la couche de fumée (quel que soit le sens donné à cette notion de hauteur, voir chapitre 5). On compare dans cet exemple la hauteur de la couche de fumée associée à F^{CFD} avec celle associée à F. La section 6.3 présente un cas utilisant une distance qui n'est pas une norme. La section 6.4 présente un cas utilisant une variable d'intérêt.

On peut alors reformuler la notion de confiance ou d'incertitude : il s'agit de quantifier ou d'estimer $d = d(CL,S,M,N)$ et de vérifier qu'il est suffisamment petit pour que l'on puisse juger que F^{CFD} est proche du cas que l'on souhaite décrire. Quand on dispose du champ réel F, l'estimation de $d(CL,S,M,N)$ en fonction du temps, l'estimation de la précision est directe, et cela permet de déterminer les choix de simulation à privilégier ou à écarter. Bien sûr, en général, F n'est pas connu, et donc l'estimation de d ne peut être qu'indirecte. Dans ce cas, il y a deux stratégies :

Quand on dispose d'un cas réel F_1 proche de celui que l'on souhaite simuler F, on peut ajuster les paramètres de simulation sur ce cas réel en minimisant $d_1 = d(F^{CFD}(CL_1,S_1,M_1,N_1),F_1)$, puis partir des choix ainsi réalisés pour décider des valeurs à donner à CL, S, M et N.

Quand cela n'est pas le cas, on peut utiliser la même méthodologie pour pratiquer des analyses de sensibilité, ce qui permet de décider objectivement des choix pour CL, S, M et N qui sont critiques pour assurer la qualité de la simulation.

6.3 Application à un cas réel

6.3.1 Description du projet

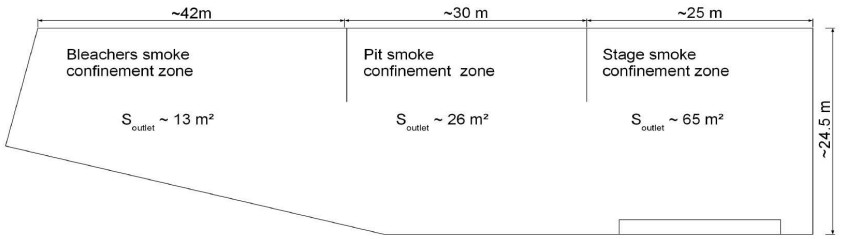
La bâtiment concerné est une salle de spectacles située à Strasbourg, d'une capacité de 10 000 places environ. Une vue en plan et une coupe sont données sur la figure 6.1. La longueur maximale de la salle est de 100 m et sa surface est d'environ 7000 m^2. Le plafond est légèrement incliné, avec une hauteur sous plafond moyenne de 24,5 m.

En ce qui concerne le choix du système de ventilation, il a été décidé de retenir la démarche de dimensionnement performantiel rendu possible dans la réglementation française [85], ce qui a conduit à mettre en place une ventilation naturelle avec une surface d'exutoires totale de 110m^2 (65m^2 dans le canton de la scène, 26m^2 dans le canton de l'orchestre et 13m^2 dans le canton des gradins, voir figure 6.1). L'arrivée de l'air frais en cas d'incendie est assurée par 2 portes de 22,5m^2 chacune, des deux côtés de la scène et deux entrées d'air de 20m^2 chacune, localisées sous les gradins. L'ouverture des trappes et des entrées d'air est commandée par un système centralisé. Plus de détails sur ces choix sont indiqués dans [86].

Avant la mise en service de la salle de spectacle, un essai incendie dont l'objectif principal était de montrer aux services d'incendie et de secours le fonctionnement du système de désenfumage a été pratiqué. Le foyer était localisé près du centre de la scène, en $(x,y) = (0,0)$, et le taux de perte de masse était mesuré en temps réel, ce qui permet, de calculer la puissance du foyer (figure 6.2). La salle était équipée de 43 thermocouples répartis sur 9 perches verticales (ici encore, plus de détails sont indiqués dans [86]). Toutes les trappes et ouvertures étaient fermées à l'allumage du foyer et ont été ouvertes à 270 s. Les mesures de température initiales (avant l'allumage) montraient une légère stratification thermique, de 15°C au sol à 21°C sous le plafond. Après l'ouverture des systèmes d'arrivée d'air, la température de l'air entrant était d'environ 7°C. Les résultats qualitatifs de l'essai sont les suivants : tout d'abord, une stratification thermique s'est formée dans le canton de la scène, qui s'est rempli de fumée. Après l'ouverture des trappes et portes, la ventilation naturelle a assuré convenablement le désenfumage. Du fait de la grande taille du bâtiment et de la faible puissance relative du foyer, la température maximale n'était pas très élevée.

L'objet de la suite de la section est d'utiliser ce essai incendie pour analyser le niveau d'erreur introduit par diverses hypothèses dans les modélisations numériques (en particulier le choix de reproduire plus ou moins fidèlement les conditions initiales et aux limites), en utilisant la méthode générale décrite en section 6.2.

(a)



(b)

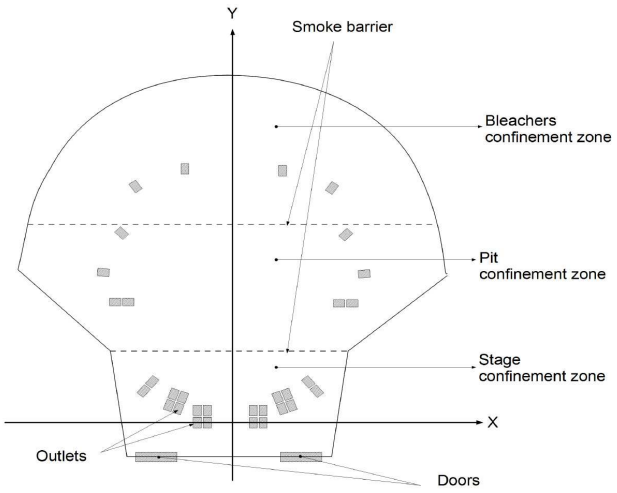


FIGURE 6.1 – Schéma de la salle de spectacle, avec représention des cantons de désenfumage et des trappes ; (a) : section ; (b) : vue en plan.

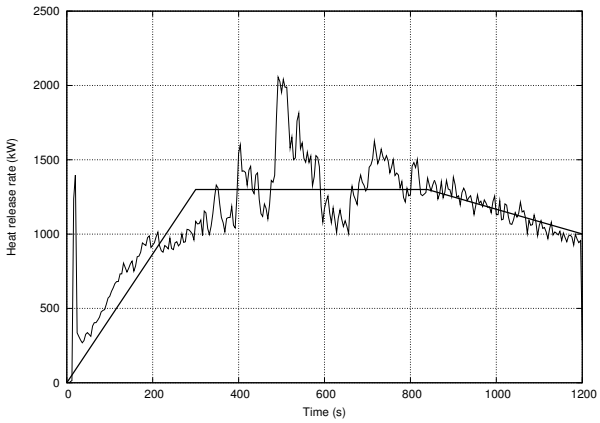


FIGURE 6.2 – Puissance du foyer en fonction du temps.

6.3.2 Application de la méthode générale

Pour la présente application, on choisit comme champ à analyser le champ de température et on définit

$$||T||(t) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} | < T(x_i,t) > |^2} \tag{6.2}$$

avec $n = 43$ le nombre de thermocouples, T le champ de température, x_i la position du thermocouple i et $< \cdot >$ un opérateur de moyenne convenablement choisi pour prendre en compte le fait que l'écoulement est turbulent, voir ci-dessous. Cette expression n'est pas une norme, mais plutôt une distance à l'origine car elle peut être nulle avec un champ non nul (voir [12]). Pour une température de référence $T_0 = 300$ K on définit la distance normalisée entre deux champs de température T_a et T_b en un instant t par :

$$d(T_a,T_b)(t) = \frac{||T_a - T_b||(t)}{T_0} \tag{6.3}$$

Le choix de l'opérateur de moyenne $< \cdot >$ est fondamental. Dans les cas réels, l'écoulement inclut toujours des régions turbulentes, du fait du cisaillement ou des gradients thermiques [1], et il est donc indispensable d'utiliser un opérateur de moyenne. Cependant, on ne peut pas se contenter d'une simple moyenne temporelle sur un temps arbitrairement long, car les conditons aux limites et la source sont presque toujours instationnaires dans les cas réels (par exemple, l'évolution

1. On regroupe ici sous le terme générique de turbulence tous les effets aléatoires, que ce soit la turbulence proprement dite ou les mouvements aléatoires associés aux ondes de gravité, voir par exemple [10].

de la puissance du foyer ou l'ouverture des trappes de désenfumage). L'idéal serait de pouvoir conserver toute la richesse des instationnarités des conditions aux limites et des conditions de source, tout en supprimant les effets aléatoires dûs à la turbulence. Une moyenne d'ensemble [32] permet en théorie de réaliser cet objectif, mais n'est pas réaliste en pratique car elle supposerait de faire un grand nombre de simulations mais aussi d'essais pour avoir la convergence statistique. Un outil plus pratique est nécessaire. Si la turbulence était homogène sur une ou plusieurs directions d'espace [32], on pourrait prendre des moyennes sur cette direction d'espace. Ce n'est pas le cas ici, et la seule issue est d'analyser finement les échelles de temps de chacun des phénomènes rencontrés, afin d'utiliser une moyenne temporelle sur un temps suffisamment court pour garder de la finesse dans la description des instationnarités liées aux conditions aux limites et de source, mais suffisamment long pour lisser l'essentiel des phénomènes aléatoires.

La création de turbulence, dans le cas présent, est dominée par l'écoulement convectif de panache (voir chapitre 4). Dans un panache, l'échelle intégrale à une hauteur donnée est proportionnelle au rayon du panache b et la moyenne quadratique des fluctuations de vitesse est de l'ordre de $0,2$ à $0,3W$ (voir par exemple [8], [87]). Le temps de retournement typique des gros tourbillons est donc plus petit que $\tau_0 \approx \frac{b}{0,2W}$. En prenant pour calculer les ordres de grandeur un panache pur sans correction d'origine virtuelle, on a (voir chapitre 4) :

$$b = \frac{\kappa^{3/4}\ell}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{\ell}\right)\sqrt{1+\left(\frac{z}{\ell}\right)^{-5/3}} \quad \text{and} \qquad W = \sqrt{\ell g}\left(\frac{z}{\ell}\right)^{-1/3}$$

avec $\kappa \approx 0,11$ et $\ell = \frac{B^{2/5}}{(\kappa g)^{3/5}}$ pour $B = \frac{g\dot{Q}_c}{C_p \rho_0 T_0}$. Pour une source de l'ordre de 1 MW, 10 ou 20 mètres au dessus de l'origine du panache, on a $\tau_0 \approx 2$ à 5 s.

D'un autre côté, la plus petite échelle de temps typique des variations des conditions aux limites ou de source est de l'ordre de 15 à 30 s (même une ouverture dite instanée de trappe prend ce temps). On utilise donc comme opérateur de moyenne un filtre passe-bas

$$< T > (x_i,t) = \int T(x,i,s)H(t-s)ds \tag{6.4}$$

dans lequel la fonction de filtre H est choisie de telle sorte que $\int H(s)ds = 1$ et qu'elle décroisse très vite pour $s > 5$ s. On choisit ici un filtre gaussien

$$H(s) = \frac{\sqrt{2}}{\tau\sqrt{\pi}}e^{-2s^2/\tau^2}$$

avec $\tau = 20$ s.

Pour conclure cette section, on calcule quelques valeurs typiques de $d(\cdot,\cdot)$ sur des cas très simples. Tout d'abord, si on suppose qu'en tout point de l'espace $T_a(x,t) - T_b(x,t) = 6$ K, alors $d(T_a,T_b) = 0,02 = 2$ %. Comme deuxième exemple, si on suppose que pour la moitié des thermocouples, $T_a(x,t) - T_b(x,t) = 0$ alors que pour la seconde moitié, $T_a(x,t) - T_b(x,t) = 20$ K, alors $d(T_a,T_b) = 0,05 = 5$ %. Enfin, si pour la moitié des thermocouples, $T_a(x,t) - T_b(x,t) = 0$ alors que pour la seconde moitié, $T_a(x,t) - T_b(x,t) = 100$ K, alors $d(T_a,T_b) = 0,24 = 24$ %. Sur cet exemple, on voit qu'en termes pratiques, une valeur de 2 % est petite, une valeur de 24 % est inacceptable et une valeur de 5 % mérite une analyse fine des champs pour voir s'il y a une réelle incidence en matière de sécurité.

6.3.3 Description des simulations

Les simulations sont réalisées avec FDS 5 [17]. La discrétisation spatiale utilise des schémas d'ordre deux, et le couplage pression-vitesse se fait au moyen de la résolution par transformées de Fourrier rapides de l'équation de Laplace sur la pression (voir chapitre 2). La turbulence est prise en compte sous la forme d'une simulation des grandes échelles utilisant le modèle de Smagorinski standard. A proprement parler, pour qu'une approche de type simulation des grandes échelles soit valide, il faudrait que la longueur caractéristique associée au filtre de sous-maille (à ne pas confondre avec le filtre utilisé pour le post-traitement des résultats en section 6.3.2) soit petite par rapport à la longueur intégrale de la turbulence au même point (cf. par exemple [32]). Les ordres de grandeur présentés dans la section 6.3.2 indiquent que, pour la source d'incendie considérée, la longueur intégrale de la turbulence dans le panache est proportionnelle à la hauteur, et vaut environ 1,5 m à 10 m au dessus de la source. Ainsi, les simulations réalisées ici, pour lesquelles la taille de la maille est de 50 cm, ne constituent pas des simulations des grandes échelles à proprement parler. De plus, le modèle de Smagorinski standard est connu pour être peu satisfaisant dans de nombreuses situations (voir par exemple [32]). Cependant, dans le cas d'un écoulement turbulent dominé par un panache, certaines références (en particulier [88]) montrent que les mouvements de grande échelle et les températures moyennes sont bien reproduites par cette approche. Ceci va faire partie des points analysés en section 6.3.4.

De la même manière, il a été choisi de retenir une géométrie très simplifiée, en conservant essentiellement la hauteur sous plafond et la surface de plafond. La géométrie du domaine de calcul est donnée en figure 6.3. Les gradins ne sont pas représentés dans le modèle de calcul. En effet, l'un des objectifs de la méthode mathématique employée dans ce chapitre est de vérifier la représentativité de simulations utilisant de telles simplifications.

Dans le même esprit d'analyse de la représentativité des choix de simulation, trois modèles différents sont utilisés pour le foyer. Le premier modèle, dénommé

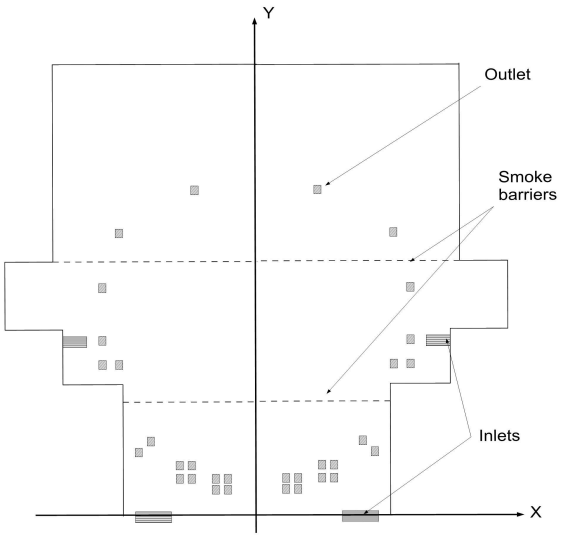


FIGURE 6.3 – Géométrie utilisée pour la simulation.

F1, représente l'application des choix par défaut de FDS avec du bois comme combustible, alors que les deux autres correspondent à des hypothèses simplificatrices complémentaires. La chaleur de réaction est fixée à 13 MJ/kg et la production de suie à 1 %. Le foyer est représenté par une surface de 1 m^2 avec une puissance totale cible de 1 300 kW/m^2. Le sous-modèle de radiation est celui mis en place par défaut dans FDS. Pour le second modèle, dénommé ici F2, on considère qu'un tiers de la puissance est perdue par rayonnement (cf. [57]) et la partie restante est modélisée par un flux convectif imposé de 0.87 MW/m^2 sur une surface de 1 m^2 Dans ce modèle, le sous-modèle de radiation est désactivé. Pour les modèles F1 et F2, la croissance de la puissance est supposée suivre la courbe en traits pleins de la figure 6.2. Le troisième modèle de foyer, F3, est similaire à F1, à l'exception de l'évolution temporelle de la puissance, qui reste fixée à à la valeur constante de 1,3 MW pour toute la durée de la simulation.

Deux champs de température initiale ont été employés. Le premier, dénommé CI1, suit au plus près les conditions expérimentales, en reproduisant la stratification observée de 15°C au sol à 22°C sous plafond. Le second, dénommé CI2, suppose une température uniforme de 15°C. Trois hypothèses différentes sont utilisées pour les parois. Dans le modèle W1, la température des murs est uniforme à 15°C. Dans le modèle W2, les parois sont supposées adiabatiques. Dans le modèle W3, on reproduit sur les parois la stratification initiale de la température ambiante. Trois maillages uniformes ont été employés. le maillage M1 comprend 771 000 mailles de 50 cm de côté. Le maillage M2 comprend 1 553 344 mailles de 40 cm

de côté et le maillage M3 4 045 950 mailles de 30 cm de côté. Le tableau 6.1 résume les cas simulés.

Dans la suite, on utilise le suffixe *exp* pour les données mesurées expérimentalement et les suffixes *ns*1, *ns*2, etc. pour les données issues des simulations numériques 1, 2, etc.

	modèle de foyer	conditions initiales	température ambiante	conditions aux parois	maillage
*ns*1	F1	IC1	7°C	W1	M1
*ns*1*B*	F1	IC1	7°C	W1	M2
*ns*1*C*	F1	IC1	7°C	W1	M3
*ns*2	F1	IC2	15°C	W1	M1
*ns*3	F1	IC2	15°C	W2	M1
*ns*4	F1	IC1	7°C	W3	M1
*ns*5	F2	IC1	7°C	W1	M1
*ns*6	F3	IC1	7°C	W1	M1

TABLE 6.1 – Liste des simulations réalisées et de leurs hypothèses principales.

La figure 6.4 représente les champs de la température pour la simulation NS1 à quatre instants, t = 0, 250, 500 and 900 s, sur l'axe de symétrie de la salle. A t = 0 s, la temperature de l'air est stratifiée conformément aux conditions initiales CI1. A t = 250 s, le feu est développé et le canton de la scène est rempli de fumées dont la température est d'environ 30°C. Ces fumées restent presque entièrement dans ce canton et la stratification initiale reste visible. Les trappes d'entrée d'air (à 4°C) et d'extraction sont ouvertes à t = 270 s. De ce fait, à t = 500 s, les fumées sont extraites et la température baisse y compris dans les zones non concernées par le feu. A t = 900 s, l'essentiel des gaz chaud est extrait. Comme le foyer n'est qu'à 5 m d'une paroi, l'entraînement incline le panache vers cette paroi.

6.3.4 Résultats

La figure 6.5 montre l'évolution de la distance $d(T_{NSi}, T_{exp})(t)$ pour i valant 1, 1B et 1C, ce qui permet de comparer les trois mailages utilisés avec le résultat expérimental. Il est frappant de constater que pour $t < 600$ s, le meilleur accord est obtenu avec le maillage le plus grossier, alors que pour $t > 600$ s, les trois simulations sont très semblables. On peut tenter d'expliquer cela de plusieurs manières : (1) du fait du maillage cartésien structuré, certains détails de la géométrie sont représentés un petit peu différemment entre les 3 simulations, en particulier la géométrie des trappes d'extraction ; (2) le modèle de Smagorinski repose sur l'hypothèse d'un équilibre local de la turbulence (voir [32]), hypothèse certainement

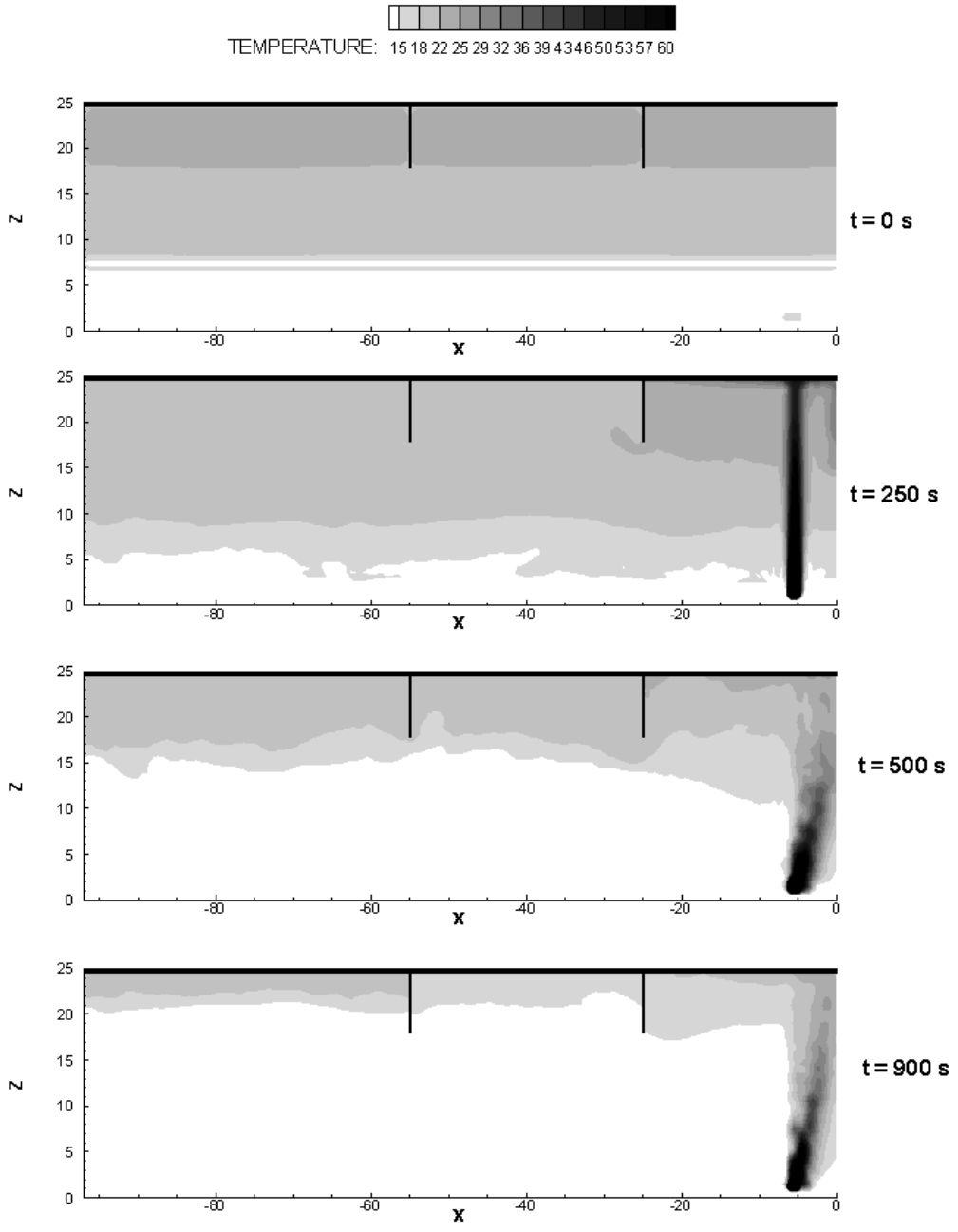


FIGURE 6.4 – Visualisation des champs de température pour la simulation NS1.

fausse quand l'écoulement n'est pas dans un régime statistiquement permanent, et cette erreur serait de moindre importance avec un maillage plus grossier qui génère une viscosité numérique plus importante. Une analyse systématique de ces effets reste à pratiquer (voir section 6.5).

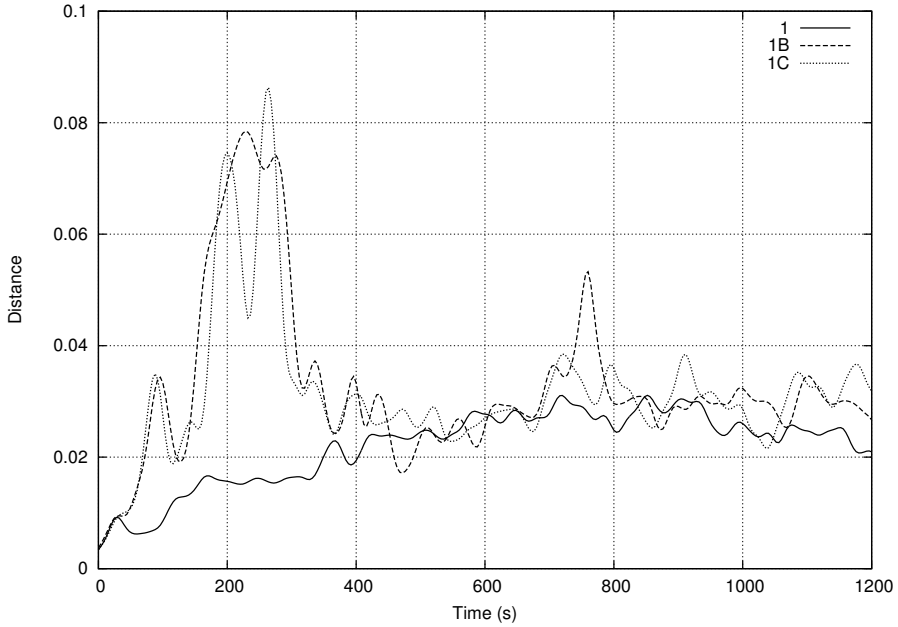


FIGURE 6.5 – Influence du maillage : distance des simulations NS1, NS1B et NS1C au résultat expérimental.

La figure 6.6 montre l'influence du choix de représentation du foyer (simulations NS1, NS5 and NS6). Cela montre qu'une représentation très approximative (NS5), sans prise en compte de la combustion ni même du rayonnement peut être aussi satisfaisante qu'une représentation plus complexe. Ceci est parfaitement cohérent avec les résultats de [20] dans le contexte des tunnels (voir aussi 6.4).

Enfin, la figure 6.7 compare 4 simulations avec des conditions initiales, de température ambiante et de température de parois différentes. On voit que, à l'exception de la simulation NS3 (parois adiabatiques), la température est correctement reproduite par toutes les simulations, même s'il reste que la simulation NS1, qui est celle qui reproduit au plus près les conditions expérimentales, reste la plus près du champs de température mesuré. Cette figure s'interprète aussi en termes de robustesse du dimensionnement : on voit que même si les températures initiales et aux parois diffèrent de celles du jour de l'essai, le système de désenfumage fonctionne de façon satisfaisante.

En tout état de cause, on obtient un bon accord entre les simulations et l'essai même avec des simplifications des hypothèses assez drastiques, qui justifient

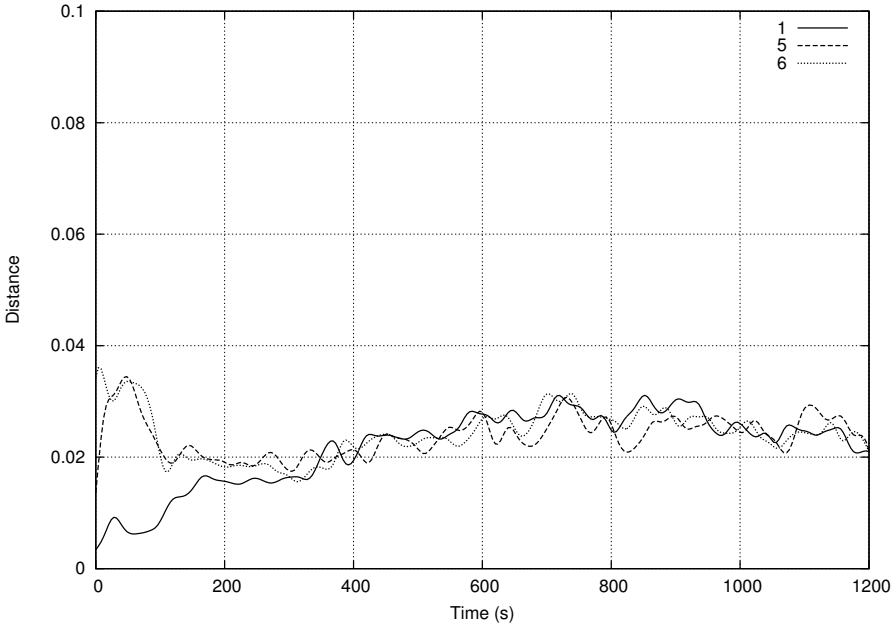


FIGURE 6.6 – Influence de la modélisation du foyer : distance des simulations NS1, NS5 et NS6 au résultat expérimental.

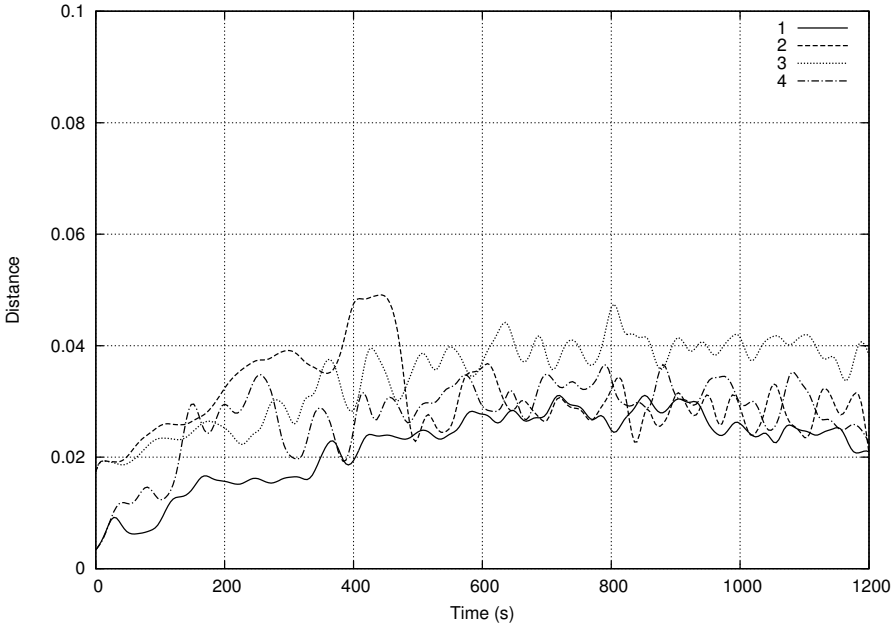


FIGURE 6.7 – Influence des conditions initiales, de la température ambiante et des conditions aux parois : distance des simulations NS1, NS2, NS3 et NS4 aux résultats de l'essai.

l'emploi de simplifications dans la géométrie, les conditions initiales, la modélisation du foyer. En particulier, l'emploi d'un modèle de combustion n'améliore pas de façon significative la représentativité de la simulation. En parallèle, ces calculs montrent la difficulté de la question de la convergence en maillage. Le maillage doit être conçu avec une connaissance fine des phénomènes physiques impliqués et des choix de modélisation faits pour les représenter (la question centrale étant ici le choix d'un modèle de sous-maille reposant sur une hypothèse d'équilibre local même dans les phases fortement instationnaires). Cette difficulté confirme à elle seule la nécessité que les utilisateurs de CFD connaissent parfaitement les limites des outils employés.

6.4 Application aux incendies en tunnels

La méthode présentée en section 6.2 propose d'employer une distance, comme dans la section 6.3, ou une variable d'intérêt choisie pour son sens physique. Cette variable d'intérêt peut être par exemple la hauteur d'une couche de fumée (quelle qu'en soit la définition), ou la grandeur T_c^{2m} employée au chapitre 5, dans lequel nous avons en fait utilisé cette notion de variable d'intérêt sans l'avoir formalisée. L'objet de la présente section est de montrer comment on peut employer une variable d'intérêt d'un type différent, fondée sur le calcul de flux sortant d'un volume de contrôle. On emploie pour cela l'exemple des incendies en tunnel ventilés transversalement.

Dans un tunnel ventilé transversalement (cf. [3]), la stratégie de mise en securité consiste à chercher à conserver la stratification des fumées, au moins pendant le premier quart d'heure de l'incendie, afin que les usagers puissent s'autoévacuer. Pour cela, la système de ventilation vise d'une part à limiter le débit d'air moyen sur la section du tunnel au droit de l'incendie (on parle de limitation du courant d'air longitudinal) et d'autre part à extraire le plus possible de fumées en plafond. L'estimation de l'efficacité d'un tel système de ventilation est en général réalisé de manière qualitative, à dire d'experts. Pour pouvoir estimer quantitativement l'efficacité, mais aussi afin de déterminer le niveau de confiance que l'on peut avoir dans une simulation, il est pertinent de mettre en place une ou plusieurs variables d'intérêt.

La première variable d'intérêt à avoir été introduite, par [48], est le ratio de la flottabilité extraite par les trappes sur la flottabilité totale émise par le foyer, dénommée *efficacité*. L'efficacité a ensuite été utilisée par [89], qui a montré son intérêt pour faire des choix dans la conception de la géométrie des gaines et des trappes d'extraction. Afin de mieux prendre en compte l'effet des pertes de chaleur aux parois, [90] a généralisé la notion d'efficacité en employant un scalaire passif, pour lequel est calculé le ratio du débit extrait au débit émis. Avec cet

outil, et en pratiquant une centaine de simulations tridimensionnelles, [90] a pu mettre en évidence de manière quantitative l'influence de divers paramètres, tels que la vitesse du courant d'air, sur le niveau de sécurité atteint en cas d'incendie selon l'espacement des trappes d'extraction. On a pu en particulier montrer que, si un système à deux grandes trappes rapprochées était le plus performant dans les conditions nominales, un système plus classique à 8 trappes est à peine moins performant dans les conditions nominales, mais beaucoup plus robuste lorsque l'on s'écarte des conditions nominales. Le lecteur est invité à se référer à [90] pour un exposé complet.

L'efficacité permet de comparer objectivement les systèmes de ventilation entre eux, et, s'agissant d'un système de ventilation donné, des simulations entre elles. Cependant, pour le traduire en niveau de sécurité apporté pendant la phase d'autoévacuation, le jugement d'expert reste indispensable. Il est aussi utile de construire des variables d'intérêt reflétant plus directement les conditions ambiantes rencontrées par des personnes. Deux choix sont possibles : ou bien, en fixant arbitrairement une hauteur (par exemple deux mètres), estimer la proportion de surface pour laquelle la concentration en scalaire passif dépasse un certain seuil, ou bien, en calculant des bilans sur des volumes limités à la hauteur Z, calculer le ratio du flux de scalaire passif traversant le plan $z = Z$ qui constitue la frontière haute du volume rapporte au flux total émis pas ce scalaire passif. La travail dans ces deux directions est en cours, l'un des objets étant de comparer les résultats issus de ces deux variables d'intérêt. La première étape consiste à s'assurer du bon conditionnement mathématique des variables d'intérêt retenues.

6.5 Perspectives

Le présent chapitre a permis de mettre en place les outils mathématiques pour systématiser sur des cas réalistes les méthodes mises en place pour les écoulements canoniques dans les chapitres précédents. L'application aux cas réalistes afin de déterminer le niveau de confiance que l'on peut accorder aux simulations numériques utilisées en ingénierie de la sécurité incendie reste un réel défi. Le travail de thèse en cours au CSTB en collaboration avec le LMFA permet de compléter l'approche par une analyse fine de trois cas pratiques. En parallèle, une recherche sur le choix de la variable d'intérêt la plus pertinente dans le cas des tunnels est en cours, en collaboration CSTB / CETU.

Chapitre 7

Conclusions et perspectives

Le domaine de la simulation des incendies a énormément progressé en quarante ans. On est passé des premiers modèles de zone, à l'emploi presque de routine de ces modèles, puis depuis une dizaine d'année, on voit de plus en plus des modèles de champ employés pour des études d'ingénierie. Le présent document a tenté de faire le point sur les techniques de simulation porteuses d'avenir, essentiellement diverses variantes de modèles de champ (chapitre 2), puis a montré leur application sur trois écoulements canoniques, canoniques en le sens qu'ils sont représentatifs des phénomènes rencontrés, mais fortement simplifiés pour n'en garder qu'une partie : les couches limites stratifiées (chapitre 3), les panaches (chapitre 4) et les sources de chaleur dans un local ventilé (chapitre 5). Les résultats accumulés au cours de ces chapitres ont ensuite été mis à profit dans le chapitre 6 pour aller vers la simulation d'écoulements réalistes.

Au delà des perspectives dégagées au fil du document, il importe de mettre en relief deux éléments majeurs. Premier élément majeur, les progrès en matière de simulation permettent maintenant d'aller au delà des modèles de zone prévoyant uniquement une température de couche chaude et une hauteur d'interface. On a pu montrer combien ce concept, qui est utilisé depuis une quarantaine d'années faute de mieux pour les études de sécurité, est peu pertinent au vu de la physique réelle des écoulements. Il vaut mieux ne conserver des modèles de zone que quelques équations très simplifiées, et aller directement vers des modèles qui permettent d'avoir une vision continue de la stratification, que ce soit des modèles de champ ou des modèles multi-couches. En particulier les équations (5.6) et (5.8) (qui négligent les pertes de chaleur aux parois, le rayonnement et qui ont un modèle de panache très simpliste) sont utiles pour s'assurer des ordres de grandeur avant de lancer une simulation par modèle de champ, qui sans cela risque de rester une boite noire. Second point majeur, qui est corrélatif au premier : il ne sert à rien de pratiquer des simulations de type modèle de champ si ce n'est que pour en tirer quelques planches graphiques en couleur. Un enjeu essentiel lorsque l'on utilise

des modèles de champ est de déterminer la ou les (mais cela doit rester un petit nombre) variables d'intérêt pertinentes au vu des enjeux à analyser. Ces variables d'intérêt doivent alors être utilisées dans deux buts : déterminer si le niveau de sécurité recherché peut être atteint, mais aussi réaliser des études de sensibilité aux divers paramètres d'entrée des simulations, que ceux-ci soient directs ou indirects (au sens proposé dans le chapitre 5).

Les deux éléments majeurs soulignés ci-dessus tracent la route pour les travaux de recherche à mettre en oeuvre : tout d'abord, continuer à étudier les écoulements canoniques pour en comprendre toujours mieux la physique et ainsi pouvoir améliorer les modèles. Ensuite, améliorer les modèles en visant la rapidité d'exécution, afin de pouvoir faire tourner le plus possible de scénarios en temps donné. En particulier, il reste sans aucun doute des progrès à faire autour des modèles de type multi-couches ou méso-échelle, voie qui est peu explorée à ce jour. Enfin, travailler, en lien avec les spécialistes du comportement humain et les structuristes pour déterminer les variables d'intérêt répondant à leurs besoins.

Annexe A

Thèses co-encadrées

- François Demouge, Contribution à la modélisation numérique de la stratification des fumées dans le cas d'un incendie en tunnel routier, Université Claude Bernard Lyon 1, 2002.
- Antoine Mos, Modèles phénoménomologiques pour la simulation d'incendies en tunnel routier, Université Claude Bernard Lyon 1, 2005.
- Ariane Rahmani, Simulation des Grandes Echelles pour les incendies en tunnels, Université Claude Bernard Lyon 1, 2006.
- Xavier Ponticq, Etudes sur les systèmes fixes d'aspersion d'eau en tunnel, Université Claude Bernard Lyon 1, 2008.
- Myriam Oucherfi, Contribution à l'étude de la ventilation transversale lors d'un incendie en tunnel routier, Université Claude Bernard Lyon 1, 2009.
- Elizabeth Blanchard, Modélisation de l'interaction entre un brouillard d'eau et un feu en tunnel, Université Henri Poincaré - Nancy I, 2011.
- Damien Lamalle, Etude des incertitudes en situation d'incendie, Ecole Centrale de Lyon, en cours

Annexe B

Articles non cités dans le corps du document

Les articles suivants ne sont pas cités dans le corps du texte, soit qu'ils aient portés sur des domaines hors du champ du présent document, soit qu'ils n'aient pas été utiles à la tenue du raisonnement :

- turbulence, dynamique de l'atmosphère et couche limite : [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [99], [100], [101], [102], [103], [104], [105], [106] et [107] ;
- pollution dans les tunnels : [108], [109] et [110] ;
- dispersion de la pollution, qualité de l'air extérieur : [111], [112] et [113],
- dynamique de l'incendie, mécanique des fluides pour les incendies : [114], [115], [116], [117], [118], [119], [120], [121], [122], [123] et [124] ;
- résistance au feu des structures : [125] et [126] ;
- articles divers : [127], [128] et [129].

Bibliographie

[1] S.R. Tieszen. On the fluid mechanics of fires. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 33 :67–97, 2001.

[2] M. Hug. *Mécanique des fluides appliquée*. Eyrolles, 1975.

[3] P. Carlotti. *Dossier pilote des tunnels : ventilation*. Centre d'Etudes des Tunnels, 2003.

[4] R. Suardet. *Thermodynamique*. Tec & Doc Lavoisier, 1985.

[5] W.J. Parker. Calculations of the heat release rate by oxygen consumption for various applications. *Journal of Fire Sciences*, 2 :380–395, 1984.

[6] M.W. Chase, C.A. Davies, J.R. Downey, D.J. Frurip, R.A. McDonald, and A.N. Syverud. *NIST JANAF THERMOCHEMICAL TABLES*. Standard Reference Data Program, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 2089, http ://kinetics.nist.gov/janaf/, 1985.

[7] P. Huerre. *Mécanique des fluides*. Ecole Polytechnique, Paris, 1993.

[8] H. Tennekes and J.L. Lumley. *A first course in turbulence*. MIT Press, 1972.

[9] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique – tome 6 – Mécanique des fluides*. Editions Mir, 1989.

[10] A.A. Townsend. *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge University Press, 1976.

[11] A. Rahmani. *Contribution à la modélisation numérique de la stratification des fumées dans le cas d'un incendie en tunnel routier*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, 2006.

[12] L. Schwartz. *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. Herman, 1961.

[13] J.S. Turner. *Buoyancy Effects in Fluids*. Cambridge University Press, 1973.

[14] P.L. Viollet. *Mécanique des fluides à masse volumique variable*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.

[15] D.J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 1988.

[16] P.G. Baines. *Topograhic effects in stratified flows*. Cambridge University Press, 1995.

[17] K. McGrattan, H. Baum, R. Rehm, W. Mell, R. McDermott, S. Hostikka, and J. Floyd. Fire dynamics simulator (version 5), technical reference guide. NIST special publication, Baltimore, Maryland, 2010.

[18] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover, 2003.

[19] Fire dynamics simulation (version 4) : technical reference guide. NIST Special Publication 1018, 2005.

[20] X. Ponticq, P. Carlotti, and B. Gay. Simplified models for radiation in tunnel fire computations. In *4th ICCH*, Paris, 2005.

[21] D. T. Gottuk and B. Y. Lattimer. Effect of combustion conditions on species production. In P.J. DiNenno et al., editor, *SFPE Handbook of Fire Protection Engineering, Third Edition*, pages 2–54 :2–82. NFPA, Quincy, Massachusetts & SFPE, Bethesda, Maryland, 2002.

[22] D. Veynante and L. Vervisch. Turbulent combustion modeling. *Progress in Energy and Combustion Science*, 28 :193–266, 2002.

[23] D Drysdale G Grant, J Brenton. Fire suppression by water sprays. *Progress in Energy and Combustion*, 26 :79–130, 2000.

[24] P. Carlotti. An integrated safety study for the use of fixed fire fighting systems. In *2005 World Safety Conference*. NFPA, 2005.

[25] S. Aïvazian, I. Enulov, and L. Méchalkine. *Eléments de modélisation et traitement primaire des données*. Editions MIR, 1986.

[26] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover, 10th edition, 1972.

[27] E. Blanchard, P Boulet, Ph Fromy, S Désanghère, P Carlotti, J.P. Vantelon, and J.P. Garo. Experimental and numerical study of the interaction between water mist and fire in an intermediate scale test tunnel. *Fire and Technology*, 2013.

[28] X. Ponticq. *Etudes sur les systèmes fixes d'aspersion d'eau en tunnel*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, 2008.

[29] K. Meredith, J. de Vries, Y. Wang, and Y. Xin. A comprehensive model for simulating the interaction of water with solid surfaces in fire suppression environments. *Proceedings of the combustion institute*, page in press, 2012.

[30] Ph. Bougeault. Cloud-ensemble relations based on the gamma probability distribution for the higher-order models of the planetary boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 39 :2691–2700, 1982.

[31] M. Moreau, O. Simonin, and B. Bédat. Development of gas-particle euler-euler les approach : A priori analysis of particle sub-grid models in homogeneous isotropic turbulence. *Flow, Turbulence and Combustion*, 84 :295–324, 2010.

[32] U. Frisch. *Turbulence, the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.

[33] T.J. Craft, N.Z. Ince, and B.E. Launder. Recent developments in second moment closures for buoyancy-affected flows. *Dynamics of atmospheres and oceans*, 23 :99–114, 1996.

[34] P. A. Durbin. A Reynolds-stress-model for near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 249 :465–498, 1993.

[35] J.W. Deardorff. Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 29 :91–115, 1972.

[36] M. Germano. Turbulence : the filtering approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 238 :325–336, 1992.

[37] J. P. Lafore, J. Stein, N. Asencio, P. Bougeault, V. Ducrocq, J. Duron, C. Fischer, P. Hereil, P. Mascart, V. Masson, J. P. Pinty, J. L. Redelsperger, E. Richard, and J. Vila-Guerau de Arellano. The Meso-NH atmospheric simulation system. *Ann. Geophysicae*, 16 :90–109, 1998.

[38] P. Carlotti. Two point properties of atmospheric turbulence very close to the ground : comparison of a high reynolds number LES with theoretical models. *Boundary layer meteorology*, 104 :381–410, 2002.

[39] W. Cabot and P. Moin. Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63 :269–291, 2000.

[40] S.J. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.

[41] F. Demouge. *Simulation des grandes échelles pour les incendie en tunnel*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, 2002.

[42] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid mechanics*. Cambridge University Press, 1967.

[43] C.Y. Wang. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23 :159–177, 1991.

[44] P. Carlotti. Stratified Poiseuille gas flows in horizontal channels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50 :3690–2694, 2007.

[45] D.R Chenoweth and S. Paolucci. Gas flow in vertical slots with large horizontal temperature difference. *Physics of Fluids*, 28 :2365–2374, 1985.

[46] J. Dieudonné. *Calcul Infinitésimal*. Hermann, 1997.

[47] J.E. Simpson. *Gravity Currents*. Cambridge University Press, 1997.

[48] P. Carlotti. Mécanique des fluides pour la ventilation des tunnels, cours de DESS donné à l'université Lyon 1. publication technique du Centre d'Etude des Tunnels, Bron, 2005.

[49] R.P. Garg, J.H. Ferziger, S.G. Monismith, and J.R. Koseff. Stably stratified turbulent channel flows. i. stratification regimes and turbulence suppression mechanism. *Physics of Fluids*, 12 :2569–2594, 2000.

[50] P. Carlotti and F. Laadhari. Top-down and bottom-up eddy motion in wall bounded turbulence. In *Advances in Turbulence XII*. Springer Verlag, 2009.

[51] P. Holmes, J.L. Lumley, and G. Berkooz. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge University Press, 1996.

[52] J.C.R. Hunt and J.M. Morrison. Eddy structure in turbulent boundary layers. *Eur. J. Mech. B - Fluids*, 19 :673–694, 2000.

[53] D.J.C. Dennis and T.B. Nickels. On the limitations of Taylor's hypothesis in constructing long structures in a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 614 :197–206, 2008.

[54] Ph. Drobinski, P. Carlotti, J.-L. Redelspeger, R.M. Banta, and R.K. Newson. Numerical and experimental investigation of the neutral atmospheric surface layer. *Journal of Atmospheric Sciences*, 64 :137–156, 2007.

[55] F. Laadhari. Reynolds number effect on the dissipation function in wall-bounded flows. *Physics of Fluids*, 19, 2007.

[56] F. S. Godeferd and L. Lollini. Direct numerical simulations of turbulence with confinement and rotation. *Journal of Fluid Mechanics*, 393 :257–308, 1999.

[57] D. Drysdale. *An introduction to fire dynamics*. John Wiley and Sons, Chichester, 1985.

[58] G. Heskestad. Dynamics of the fire plume. *Phil. Trans. R. Soc. London*, 356 :2815–2833, 1998.

[59] B.R. Morton, G.I.Taylor, and J.S. Turner. Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. *Proc. Roy. Soc. A*, 23 :1–23, 1959.

[60] P. Linden and G. Rooney. Similarity considerations for non-Boussinesq plumes in an unstratified environment. *Journal of Fluid Mechanics*, 318 :237–250, 1996.

[61] B.R. Morton. Forced plumes. *Journal of Fluid Mechanics*, 5 :151–163, 1959.

[62] G.H. Hunt and N. Kaye. Virtual origin correction for lazy turbulent plumes. *Journal of Fluid Mechanics*, 435 :377–396, 2001.

[63] P. Carlotti and G.H. Hunt. Analytical solutions for non-Boussinesq plumes. *Journal of Fluid Mechanics*, 538 :343–359, 2005.

[64] F. Candelier and O. Vauquelin. Matched asymptotic solutions for turbulent plumes. *Journal of Fluid Mechanics*, 699 :489–499, 2012.

[65] G. Heskestad. Fire plumes, flame height, and air entrainment. In P.J. DiNenno et al., editor, *SFPE Handbook of Fire Protection Engineering, Third Edition*, pages 2–1 :2–17. NFPA, Quincy, Massachusetts & SFPE, Bethesda, Maryland, 2002.

[66] Y. Hasemi and T. Togunaka. Flame geometry effects on the buoyant plumes from turbulent diffusion flames. *Fire Science and Technology*, 4 :15–26, 1984.

[67] A.W. Woods. A note on non-Boussinesq plumes in an incompressible stratified environment. *Journal of Fluid Mechanics*, 345 :347–356, 1997.

[68] F.P. Ricou and D.B. Spalding. Measurements of entrainment by axisymmetrical turbulent jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 1961.

[69] N.E. Kotsovinos and E.J. List. Plane turbulent buoyant jets. part 1. integral properties. *Journal of Fluid Mechanics*, 81 :25–44, 1977.

[70] B. M. Cetegen, E. E. Zukoski, and T. Kubota. Entrainment in the near and far field of fire plumes. *Combustion Science and Technology*, 39 :305–331, 1984.

[71] P. Carlotti. *Distorted turbulence near rigid boundaries*. PhD thesis, University of Cambridge, 2001.

[72] G.G. Rooney. *Buoyant Flows from Fires in Enclosures*. PhD thesis, University of Cambridge, 1997.

[73] G.G. Rooney and P.F. Linden. Radial jet due to plume impingement on a horizontal surface. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Engineering and Computational Mechanics*, 165 :223–233, 2012.

[74] D. Lamalle. Étude du niveau de confiance du logiciel de simulation incendie fds à travers les cas des panaches libre et impactant – rapport de 1ère année de thèse. CSTB research report, 2012.

[75] W. D. Baines and J. S. Turner. Turbulent buoyant convection from a source in a confined region. *Journal of Fluid Mechanics*, 37 :51–80, 1969.

[76] M.G. Worster and H.E. Huppert. Time dependant density profiles in a filling box. *Journal of Fluid Mechanics*, 132 :457–466, 1983.

[77] P. Carlotti and A. Voeltzel. The impact of wall heating on longitudinal ventilation during a fire. *Tunnel Management International*, 7(2), 2004.

[78] M.J. Janssens and H.C. Tran. Data reduction of room tests for zone model validation. *Journal of Fire Sciences*, 10 :528–555, 1992.

[79] Y. He, A. Fernando, and M. Luo. Determination of interface height from measured parameter profile in enclosure fire experiment. *Fire Safety Journal*, 31 :19–38, 1998.

[80] D. Burton, A. Grandison, M. Patel, E. Galea, and J. Ewer. Development of a hybrid field/zone fire model. In *Fire Safety Science 10*. IAFFS, 2011.

[81] K. Suzuki, K. Harada, and T. Tanaka. A multi-layer zone model for predicting fire behavior in a single room. In *Fire Safety Science 7*, pages 851–862. IAFFS, 2003.

[82] T.G. Ma and J.G. Quintiere. Numerical simulation of axi-symmetric fire plumes : accuracy and limitations. *Fire Safety Journal*, 38 :462–492, 2003.

[83] J.X. Wen, K. Kang, T. Donchev, and J.M. Karwatzki. Validation of fds for the prediction of medium-scale pool fires. *Fire Safety Journal*, 42 :127–138, (2007).

[84] D. Quélo, V. Mallet, and B. Sportisse. Inverse modelling of NOx emissions at regional scale over northern france. preliminary investigation of the second order sensitivity. *Journal of Geophysical Research*, 110 :D24310, 2005.

[85] Instruction technique annexée à l'arrêté du 22 mars 2004. Journal officiel de la République Française, pp. 6343–6358, 2004.

[86] S.Vallerent, P. Carlotti, Ph. Fromy, and F. Demouge. Smoke motion in large enclosures : comparison of experimental data with simulations. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Engineering and Computational Mechanics*, 165 :235–244, 2012.

[87] W.K. George, R.L. Alpert, and F. Tamanini. Turbulence measurements in an axisymmetric buoyant plume. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 20 :1145–1154, 1977.

[88] H.R. Baum, K.B. McGrattan, and R.G. Rehm. Three dimensional simulations of fire plume dynamics. *Journal of the Heat Transfer Society of Japan*, 139 :45–52, 1996.

[89] M. Oucherfi, B.Gay, A. Mos, and P. Carlotti. Definition and optimisation of the efficiency of smoke extraction in a road tunnel. In *Smoke Control in Buildings and Tunnels 2008*. University of Cantabria, 2008.

[90] S. Lovas, P. Carlotti, S. Desanghère, and A. Mos. Optimizing the repartition of extraction vents in transverse ventilation. In *Aerodynamics and ventilation of tunnels*, ISAVT 14. BHR Group, 2011.

[91] P. Carlotti and J.C.R. Hunt. Spectra of turbulence in boundary layers near the ground. In C. Dopazo, editor, *Advances in Turbulence VIII*, pages 307–310, Barcelona, 2000. CIMNE.

[92] J.C.R. Hunt and P. Carlotti. Statistical structure at the wall of high Reynolds number turbulence. *Flow, Turbulence and Combustion*, 66 :453–475, 2001.

[93] P. Carlotti, J.C.R. Hunt, and J.L. Redelsperger. Etude de la turbulence à proximité immédiate du sol dans une couche d'Ekman. In *Congrès Français de Mécanique*, 2001.

[94] J.L. Redelsperger, F. Mahé, and P. Carlotti. A simple and general subgrid model suitable both for surface layer and free stream turbulence. *Boundary layer meteorology*, 101 :375–408, 2001.

[95] P. Drobinski, R.K. Newsom, R.M. Banta, and P. Carlotti. Turbulence in a shear driven nocturnal surface layer during the CASES99 experiment. In *Symposium on Atmoshperic Boundary Layers and Turbulence*. American Meteorological Society, 2002.

[96] P. Carlotti and J.C.R. Hunt. Eddy motion and statistical structure of turbulence for aeronautical and other applications. In J. Périaux et al., editor, *Fluid Dynamis and aeronautic : new challenges*, pages 216–241. CIMNE, Barcelona, 2003.

[97] P. Drobinski, P. Carlotti, R.K. Newsom, R.M. Banta, R.C. Foster, and J.L. Redelsperger. The structure of the near neutral atmospheric surface layer as observed during the CASES'99 experiment. In *EGS - AGU - EUG Joint Assembly*, 2003.

[98] Ph. Drobinski, P. Carlotti, J-L Redelsperger, R.K. Newsom, and R.M. Banta. Near-surface turbulence in a neutral planetary boundary layer : comparison of LES with the CASES'99 experimental observations. In C. Dopazo, editor, *Advances in Turbulence X*, Barcelona, 2004. CIMNE.

[99] T. Dubos, Ph. Drobinski, P. Carlotti, and J-L Redelsperger. Near surface turbulence in a neutral planetary boundary layer : use of POD to analyse LES computed fields. In C. Dopazo, editor, *Advances in Turbulence X*, Barcelona, 2004. CIMNE.

[100] P. Carlotti, Ph. Drobinski., J-L Redelsperger, R.K. Newsom, and R.M. Banta. Near surface turbulence in a neutral planetary boundary layer : comparison of LES with the CASES'99 field experiement. In *XXI ICTAM*, Warsaw, 2004.

[101] Ph. Drobinski, P. Carlotti, R.K. Newson, R.M. Banta, R.C. Foster, and J-L. Redelsperger. The structure of the neutral atmospheric surface layer. *Journal of Atmospheric Sciences*, 61 :699–714, 2004.

[102] P. Carlotti and Ph. Drobinski. Length scales in high Reynolds number wall bounded turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 516 :239–264, 2004.

[103] R. Foster, F. Vianey, P. Drobinski, and P. Carlotti. Surface fluxes and streaks in the near-surface layer. In *9th conference on Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes*. American meteorological society, 2004.

[104] T. Dubos, P. Drobinski, and P. Carlotti. Empirical orthogonal function analysis of coherent structures in a neutral atmospheric surface layer. In *16th Symposium on Boundary Layers and Turbulence*. American Meteorological Society, 2004.

[105] R.C. Foster, F. Vianey, P. Drobinski, and P. Carlotti. Near-surface sweeps and ejections in a neutrally stratified large eddy simulation. *Boundary Layer Meteorology*, 120 :229–255, 2006.

[106] T. Dubos, P. Drobinski, and P. Carlotti. Turbulence anisotropy carried by streaks in the neutral atmospheric surface layer. In *18th Symposium on Boundary Layers and Turbulence*. American Meteorological Society, 2006.

[107] T. Dubos, P. Drobinski, and P. Carlotti. Turbulence anisotropy carried by streaks in the neutral atmospheric surface layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 65(8) :2631–2645, 2008.

[108] JP Marsault and P Carlotti. Calcul des émissions de polluants des véhicules automobiles en tunnel. publication technique du Centre d'Etude des Tunnels, Bron, 2002.

[109] B. Brousse, P. Carlotti, and B. Vidal. Measurement of pollution levels in three alpine tunnels. In *Aerodynamics and ventilation of vehicle tunnels*, ISAVT 11. BHR Group, 2003.

[110] P. Carlotti. Commande de la ventilation sanitaire en tunnel. Technical report, CETU, 2005.

[111] P. Carlotti. Notre environnement atmosphŕique. *PCM-Le Pont*, 99(4) :5–9, 2001.

[112] S. Lacour, C. Megueulle, P. Carlotti, L. Soulhac, and B. Sportisse. Unsteady effects on pollutant dispersion around a tunnel portal. In *Urban Air Quality Conference*, UAQ4. Atmospheruic dynamics and air quality group, University of Hertfordshire, 2003.

[113] F. Gourdol, R.J. Perkins, P. Carlotti, L. Soulhac, and P. Méjean. Modelling pollutant dispersal at the portals of road tunnels. In *9th conference on*

Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes, 2004.

[114] P. Carlotti and A. Voeltzel. Comparaison des incendies du Mont Blanc et des Tauern. *PCM-Le Pont*, 100(11) :40–43, 2002.

[115] CETU. Guide des dossiers de sécurité, fascicule 4, chapitre 4 et annexes C et D. publication technique du Centre d'Etude des Tunnels, Bron, 2003.

[116] P. Carlotti. Two-dimensionnal calculations with FDS and a specific plume zone as an alternative to zone models. rapport interne CETU, 2004.

[117] A. Mos, G.R. Hunt, and P. Carlotti. Salt water experiments and simplified model for investigating the dynamics of tunnel fires. In *Interflam*, Edinbourg, 2004.

[118] A. Rahmani, P. Carlotti, B. Gay, and M. Buffat. Simulating fires in tunnels using large eddy simulation. In *Tunnel safety and ventilation*. University of Graz, 2004.

[119] A. Rahmani, P. Carlotti, and B. Gay. Simulation of fires in tunnels using LES with the Smagorinski model. In C. Dopazo, editor, *Advances in Turbulence X*, Barcelona, 2004. CIMNE.

[120] A. Mos, P. Carlotti, and B. Gay. Simple model for stratified smoke front propagation. *Tunnel Management International*, 8(1), 2005.

[121] X. Ponticq, B. Brousse, P. Carlotti, X. Guigas, and A. Weatherill. Feasability and safety assessments of fixed fire fighting systems for road tunnels. In *Aerodynamics and ventilation of Vehicle tunnels*, ISAVT 12. BHR Group, 2006.

[122] M. Oucherfi, B. Gay, A. Mos, and P. Carlotti. Definition and optimisation of the efficiency of smoke extraction in a road tunnel. In *Aerodynamics and ventilation of vehicle tunnels*, ISAVVT 13. BHR Group, 2009.

[123] E. Blanchard, P. Boulet, S. Desanghère, and P. Carlotti. Energy balance in a tunnel fire- midscale tests and cfd simulations. In *Aerodynamics and ventilation of tunnels*, ISAVT 14. BHR Group, 2011.

[124] E. Blanchard, P. Boulet, P. Carlotti, A. Collin, A. Jenft, and S. Lechêne. Modelling water spray – from laboratory scale to fire safety application. In *The science of suppression*, FIRESEAT 5. University of Edinburg, 2011.

[125] CETU. Comportement au feu des tunnels routiers. publication technique du Centre d'Etude des Tunnels, Bron, 2005.

[126] N. Taillefer, P. Carlotti, C. Larive, C. Lemerle, R. Avenel, and P. Pimienta. Ten years of increased hydrocarbon temperature curves in French tunnels. *Fire Technology*, 49 :531–549, 2013.

[127] P. Carlotti. L'effet des tempêtes de décembre 1999 sur les bâtiments : quelques remarques. *PCM-Le Pont*, 98(5) :9–11, 2000.

[128] P. Carlotti. Mécanique des fluides appliquée, polycopié de cours donné à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2006.

[129] P. Carlotti. Isolation thermique : les enjeux de la mise en oeuvre. Technical report, CSTB, 2008.