



**HAL**  
open science

# Effets des transferts radiatifs sur les écoulements de convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée en régimes transitionnel et faiblement turbulent

Laurent Soucasse

## ► To cite this version:

Laurent Soucasse. Effets des transferts radiatifs sur les écoulements de convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée en régimes transitionnel et faiblement turbulent. Autre. Ecole Centrale Paris, 2013. Français. NNT : 2013ECAP0069 . tel-00978507

**HAL Id: tel-00978507**

**<https://theses.hal.science/tel-00978507>**

Submitted on 14 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée par

**Laurent Soucasse**

pour l'obtention du

GRADE de DOCTEUR

Spécialité : Énergétique

Laboratoire d'accueil : Laboratoire d'Énergétique Moléculaire  
et Macroscopique, Combustion (EM2C)  
du CNRS et de l'ECP

**Effets des transferts radiatifs sur les écoulements de  
convection naturelle dans une cavité différentiellement  
chauffée en régimes transitionnel et faiblement turbulent**

soutenue le 11 décembre 2013

<b>Jury :</b>	M. Pedro	Coelho	Examineur
	M. Jean-Louis	Dufresne	Rapporteur
	M. Guy	Lauriat	Rapporteur
	M. Denis	Lemonnier	Président du jury
	M. Philippe	Rivière	Co-directeur de thèse
	M. Anouar	Soufiani	Directeur de thèse
	M. Shihe	Xin	Examineur



Je témoigne ma reconnaissance à la direction de la recherche de l'École Centrale ainsi qu'à la direction du laboratoire EM2C pour leur confiance et l'opportunité qu'ils m'ont offerte.

Je remercie tout particulièrement mes directeurs de thèse, Philippe Rivière et Anouar Soufiani, pour leur accompagnement engagé tout au long de ces trois années. Je veillerai à exercer le métier de chercheur avec la rigueur et la finesse vers lesquelles ils m'ont guidé.

Que les rapporteurs Jean-Louis Dufresne et Guy Lauriat ainsi que les membres du jury, Pedro Coelho, Denis Lemonnier et Shihe Xin, reçoivent ici mes remerciements pour l'intérêt porté à mon travail et la richesse de nos échanges.

J'adresse toute ma sympathie aux doctorants, aux post-doctorants, aux personnels administratifs et techniques, ainsi qu'aux chercheurs de l'EM2C, grâce à qui j'ai pu mener ma thèse dans les meilleures conditions.

Mes remerciements vont enfin à mes proches, dont le soutien est précieux.



## Résumé

Les effets des transferts radiatifs sur les écoulements de convection naturelle sont étudiés en régimes transitionnel et turbulent au moyen de la simulation numérique. La cavité cubique différentiellement chauffée est choisie comme configuration d'étude pour son exploitation intensive dans la littérature passée. Des mélanges air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> sont considérés en vue d'applications au domaine de l'habitat.

Des simulations numériques de référence sont entreprises jusqu'à  $Ra = 3 \times 10^8$  en couplant une méthode spectrale de collocation pour l'écoulement et une méthode de lancer de rayons, associée à un modèle ADF, pour les transferts radiatifs. Une méthode de Monte Carlo, combinée à une approche raie par raie, est également développée mais n'est pas retenue pour les calculs couplés car les fluctuations statistiques de la méthode ne permettent pas de détecter précisément les premières instationnarités de l'écoulement. Parallèlement, une nouvelle formulation de l'équation de transfert radiatif, adaptée aux milieux quasi-isothermes, est introduite.

Pour l'étude du régime turbulent, une modélisation des transferts radiatifs basée sur un filtrage spatial est proposée : les contributions filtrées sont résolues par la méthode de lancer de rayons sur un maillage lâche et les contributions de sous-maille sont résolues de manière analytique dans l'espace de Fourier. Ce modèle est combiné à la simulation numérique directe de l'écoulement à  $Ra = 3 \times 10^9$ . Une modélisation aux grandes échelles de la convection naturelle turbulente est également proposée pour l'investigation des plus hauts nombres de Rayleigh.

Lorsque les six parois de la cavité sont noires et le gaz transparent, les échanges radiatifs pariétaux imposent une température proche de la température moyenne sur les parois adiabatiques et en particulier sur les parois haute et basse. La stratification thermique verticale décroît et l'écoulement est renforcé. Deux zones de stratification thermique instable apparaissent en amont des couches limites verticales. Dès  $Ra = 5 \times 10^6$ , une instabilité de type Rayleigh-Bénard se développe dans ces zones, induisant des écoulements instationnaires. En outre, ces régions instables thermiquement favorisent la production de turbulence à  $Ra = 3 \times 10^8$  et  $3 \times 10^9$ .

Lorsque les parois adiabatiques sont parfaitement réfléchissantes, les parois isothermes noires et le gaz rayonnant, les échanges radiatifs gaz-gaz et gaz-parois isothermes homogénéisent le champ de température et les couches limites sont épaissies. La stratification thermique verticale décroît et la circulation générale augmente. Des écoulements instationnaires d'évolution chaotique sont obtenus dans ce cas à partir de  $Ra = 3 \times 10^7$ . Des rouleaux contra-rotatifs à la sortie des couches limites verticales sont observés, ce qui suggère qu'une instabilité de force centrifuge soit responsable de la transition. Ces rouleaux sont convectés le long des parois isothermes sous la forme de cheminées. À  $Ra = 3 \times 10^8$  et  $3 \times 10^9$ , ces structures persistent et la production d'énergie cinétique turbulente est dominée par le cisaillement moyen.



## Abstract

Radiative transfer effects on natural convection flows are investigated in transitional and turbulent regimes by means of numerical simulation. The cubical differentially heated cavity is adopted as this configuration has been widely studied in the literature. Air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> mixtures are considered making the simulations relevant for building applications.

Benchmark numerical simulations are carried out, up to  $Ra = 3 \times 10^8$ , by coupling a spectral collocation method for the flow and a ray tracing method, associated with an ADF model, for radiative transfer. A Monte Carlo method, combined with the line-by-line approach, is also developed but is not kept for coupled calculations because of the statistical noise of the method making difficult the study of the transition to unsteadiness. Alongside, a new formulation for radiative transfer in quasi-isothermal participating media is introduced.

For studying the turbulent regime, a radiative transfer model based on spatial filtering is proposed : filtered contributions are solved with the ray tracing method on a coarse grid and sub-grid contributions are obtained analytically in Fourier space. This model is combined with the direct numerical simulation of the flow at  $Ra = 3 \times 10^9$ . A large eddy simulation model for turbulent natural convection is also developed for investigating higher Rayleigh numbers.

When the six cavity walls are black and the gas is transparent, wall radiative exchanges impose a temperature close to the mean one on the adiabatic walls, especially on top and bottom walls. The vertical thermal stratification decreases and the flow is strengthened. Two unstably stratified zones appear upstream the vertical boundary layers. From  $Ra = 5 \times 10^6$ , a Rayleigh-Bénard type instability in those zones triggers the unsteadiness. Besides, those unstably stratified regions enhance the turbulence production at  $Ra = 3 \times 10^8$  and  $3 \times 10^9$ .

When the adiabatic walls are perfectly reflecting, the isothermal walls are black and the gas is participating, gas-gas and gas-isothermal walls radiative exchanges homogenise the temperature field and thicken the boundary layers. The thermal stratification decreases and the flow driven in the cavity increases. Unsteady flows with chaotic behaviour are obtained in this case from  $Ra = 3 \times 10^7$ . Counter rotating rolls at the exit of the vertical boundary layers are observed, which suggest that transition to unsteadiness is due to centrifugal forces. Those rolls are convected along the isothermal walls as chimney-like rolls. At  $Ra = 3 \times 10^8$  and  $3 \times 10^9$ , those structures remain and the turbulent kinetic energy is mainly produced by the mean shear.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Transferts thermiques couplés en cavité différentiellement chauffée</b>	<b>7</b>
1.1 Mise en équation . . . . .	8
1.1.1 Bilans macroscopiques de masse, de quantité de mouvement et d'énergie . . . . .	8
1.1.2 Transferts radiatifs . . . . .	10
1.2 Analyse dimensionnelle . . . . .	13
1.3 Propriétés radiatives du milieu . . . . .	15
1.3.1 Spectre d'absorption raie par raie . . . . .	15
1.3.2 Modélisation . . . . .	16
<b>2 Méthodes numériques de référence</b>	<b>25</b>
2.1 Méthode spectrale pour la convection naturelle . . . . .	26
2.1.1 Discrétisation spatiale . . . . .	27
2.1.2 Discrétisation temporelle . . . . .	29
2.1.3 Couplage pression-vitesse . . . . .	31
2.1.4 Parallélisation . . . . .	33
2.1.5 Validation . . . . .	34
2.2 Transferts radiatifs . . . . .	36
2.2.1 Formulation de l'équation de transfert en milieu quasi-isotherme . . . . .	38
2.2.2 Méthode de Monte Carlo . . . . .	40
2.2.3 Méthode de lancer de rayons . . . . .	46
2.2.4 Validation et comparaison des méthodes . . . . .	49
2.3 Couplage de code . . . . .	54

<b>3</b>	<b>Simulations couplées en régime stationnaire</b>	<b>57</b>
3.1	Configurations étudiées . . . . .	58
3.2	Effets du rayonnement du gaz et des parois à $Ra=10^6$ . . . . .	59
3.2.1	Structure du champ de température . . . . .	59
3.2.2	Couches limites et écoulement . . . . .	61
3.2.3	Transferts de chaleur . . . . .	64
3.2.4	Effets tridimensionnels . . . . .	66
3.2.5	Cas d'un milieu gris . . . . .	67
3.3	Influence du nombre de Rayleigh . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Simulations couplées : transition vers l'instationnarité</b>	<b>73</b>
4.1	Analyse des écoulements instationnaires . . . . .	74
4.1.1	Identification des vortex . . . . .	74
4.1.2	Décomposition modale . . . . .	76
4.1.3	Analyse statistique . . . . .	81
4.2	Effets du rayonnement du gaz et des parois sur la transition vers l'instationnarité . . . . .	85
4.2.1	Gaz transparent, parois adiabatiques parfaitement ré- fléchissantes . . . . .	86
4.2.2	Gaz transparent, six parois noires . . . . .	89
4.2.3	Gaz rayonnant, parois adiabatiques parfaitement ré- fléchissantes . . . . .	98
4.3	Effets du rayonnement du gaz et des parois à $Ra=3 \times 10^8$ . . . . .	102
4.3.1	Champs moyens . . . . .	103
4.3.2	Dynamique instationnaire . . . . .	107
4.3.3	Statistiques d'ordre deux . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Modèle de sous-maille pour les transferts radiatifs en milieu turbulent</b>	<b>117</b>
5.1	Formulation du modèle . . . . .	119
5.1.1	Contributions filtrées . . . . .	120
5.1.2	Contributions de sous-maille . . . . .	121
5.1.3	Définition du filtre . . . . .	123
5.1.4	Implémentation . . . . .	124
5.2	Cas d'un milieu gris en turbulence homogène . . . . .	126
5.2.1	Génération du champ de température . . . . .	127
5.2.2	Résultats pour différents niveaux de filtre . . . . .	128
5.2.3	Influence de l'épaisseur optique et de l'échelle intégrale	132

5.2.4	Temps de calcul . . . . .	133
5.2.5	Conclusion sur la précision du modèle . . . . .	134
5.3	Application à la convection naturelle . . . . .	134
5.3.1	Modèle de sous-maille pour un milieu non gris . . . . .	136
5.3.2	Résultats . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Simulations couplées en régime turbulent</b>	<b>141</b>
6.1	Effets du rayonnement du gaz et des parois à $Ra=3 \times 10^9$ . . .	142
6.1.1	Champs moyens . . . . .	143
6.1.2	Champs instantanés . . . . .	148
6.1.3	Statistiques d'ordre deux . . . . .	150
6.2	Modélisation pour la simulation aux grandes échelles . . . . .	154
6.2.1	Filtrage des bilans macroscopiques de masse, de quantité de mouvement et d'énergie . . . . .	154
6.2.2	Modélisation des termes de sous-maille . . . . .	156
6.2.3	Modèle <i>Spectral Vanishing Viscosity</i> . . . . .	157
6.2.4	Étude de validité du modèle SVV . . . . .	159
	<b>Conclusion</b>	<b>167</b>
<b>A</b>	<b>Paramètres des simulations numériques</b>	<b>173</b>
A.1	Simulations stationnaires . . . . .	174
A.2	Simulations instationnaires . . . . .	176
<b>B</b>	<b>Compléments sur le modèle de sous-maille</b>	<b>183</b>
B.1	Approximations différentielles . . . . .	183
B.1.1	Approximation P1 . . . . .	184
B.1.2	Approximation SP3 . . . . .	184
B.1.3	Comparaison avec la solution exacte . . . . .	185
B.2	Application à la convection forcée de produits de combustion	186
B.2.1	Modèle de sous-maille à coefficient d'absorption variable	187
B.2.2	Résultats . . . . .	190
<b>C</b>	<b>Méthode de Monte Carlo pour les milieux quasi-isothermes</b>	<b>193</b>
C.1	Introduction . . . . .	194
C.2	Monte Carlo methods . . . . .	196
C.2.1	Shift formulation . . . . .	196
C.2.2	Reciprocal formulation . . . . .	197

C.2.3	Implementation . . . . .	198
C.3	Results and discussion . . . . .	201
C.3.1	Comparison between SFM and FM methods . . . . .	202
C.3.2	Comparison between SFM and ERM/ARM methods . . . . .	204
C.3.3	Influence of temperature difference . . . . .	207
C.4	Conclusion . . . . .	208
<b>Bibliographie</b>		<b>211</b>

# Nomenclature

## Symboles romains

$a$	$= \lambda/(\rho C_p)$ , diffusivité thermique [ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]
$C_p$	Capacité calorifique à pression constante [ $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]
$g$	Accélération de la pesanteur [ $\text{m s}^{-2}$ ]
$G_\nu$	Luminance monochromatique intégrée sur $4\pi$ stéradians [ $\text{W m}^{-2} \text{cm}$ ]
$I_\nu$	Luminance monochromatique directionnelle [ $\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{cm}$ ]
$I_\nu^\circ$	Luminance d'équilibre [ $\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{cm}$ ]
$\mathcal{I}_\nu$	$= I_\nu - I_\nu^\circ(T_S)$ , Luminance modifiée [ $\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{cm}$ ]
$\mathcal{I}_\nu^\circ$	$= I_\nu^\circ - I_\nu^\circ(T_S)$ , Luminance d'équilibre modifiée [ $\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{cm}$ ]
$\mathbf{k}$	$= (k_x; k_y; k_z)$ , Vecteur d'onde [ $\text{m}^{-1}$ ]
$L$	Taille de la cavité [ $\text{m}$ ]
$\mathbf{n}$	Vecteur normal à la paroi
$P$	Pression thermodynamique [ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ ]
$p$	Écart à la pression hydrostatique ( $\nabla p = \nabla P - \rho_0 \mathbf{g}$ ) [ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ ]
$\mathbf{q}^R$	Vecteur flux radiatif [ $\text{W m}^2$ ]
$\mathbf{r}$	$= (x; y; z)$ , Vecteur position [ $\text{m}$ ]
$\mathcal{S}$	$= \partial T^+ / \partial z^+$ , Stratification thermique au cœur de la cavité
$T$	Température [ $\text{K}$ ]
$\Delta T$	$= T_c - T_f$ , Écart de température entre les parois chaude et froide [ $\text{K}$ ]

$T_S$	Température de <i>shift</i> [K]
$\mathcal{T}_k(x)$	$= \cos(k \cos^{-1}(x))$ , $k \in \mathbb{N}$ , $x \in [-1; 1]$ , Polynôme de Chebyshev
$t$	Temps [s]
$\mathbf{u}$	$= (u_1; u_2; u_3)$ , Vecteur vitesse [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$X$	Fraction molaire

### Symboles grecs

$\beta$	Coefficient d'expansion thermique
$\varepsilon$	Émissivité
$\theta$	$= T - T_0$ , Écart de température [K]
$\vartheta$	Angle azimutal [rad]
$\iota$	$\iota^2 = -1$ , Unité imaginaire
$\kappa_\nu$	Coefficient d'absorption [ $\text{m}^{-1}$ ]
$\lambda$	Conductivité thermique [ $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]
$\mu$	Viscosité dynamique [ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ ]
$\nu$	Fréquence [ $\text{s}^{-1}$ ] ou nombre d'onde [ $\text{cm}^{-1}$ ] du rayonnement
$\rho$	Masse volumique [ $\text{kg m}^{-3}$ ]
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann [ $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$ ]
$\phi$	Angle zénithal [rad]
$\Omega$	Vecteur direction de propagation des rayons lumineux

### Nombres adimensionnels

Nu	Nombre de Nusselt
Pl	Nombre de Planck
Pr	Nombre de Prandtl
Ra	Nombre de Rayleigh

### Exposants et indices

+	Quantité adimensionnée
---	------------------------

0	Conditions à la température moyenne $T_0$
$a$	Absorbé
$e$	Émis
$\bar{\cdot}, \tilde{\cdot}$	Filtrage spatial
$\langle \cdot \rangle$	Moyenne statistique

**Autres notations**

ADF	<i>Absorption Distribution Function</i>
DMD	<i>Dynamique Mode Decomposition</i>
POD	<i>Proper Orthogonal Decomposition</i>
SVV	<i>Spectral Vanishing Viscosity</i>



# Introduction

LES ÉCOULEMENTS de convection naturelle sont des mouvements de fluide générés par des variations spatiales de densité dans le champ gravitationnel terrestre. On rencontre ces écoulements dans l'atmosphère, où l'air chauffé à la surface de la Terre se dilate, s'élève et laisse place à un air plus froid et plus lourd provenant de plus haute altitude. La circulation de l'air dans les bâtiments est régie par le même phénomène et s'effectue entre les sources chaudes (chauffage) et les sources froides (murs en contact avec l'extérieur) d'une pièce. La convection naturelle joue également un rôle prépondérant dans de nombreux procédés industriels, comme le refroidissement de composants électroniques ou la production d'énergie solaire.

Les variations de densité, moteurs du mouvement, sont dues aux variations de température en convection naturelle thermique. L'écoulement est donc fortement couplé aux transferts de chaleur au sein du fluide, et peut être affecté par l'émission et l'absorption de rayonnement électromagnétique. Dans l'air, les espèces chimiques qui absorbent le rayonnement de manière significative dans l'infrarouge sont la vapeur d'eau et le dioxyde de carbone, molécules connues pour leur rôle dans l'effet de serre atmosphérique.

La simulation numérique des écoulements de convection naturelle couplés aux transferts radiatifs vise à affiner la compréhension physique de ces phénomènes et à maîtriser les procédés dans lesquels ils interviennent. Appréhender l'influence des transferts radiatifs sur la stabilité des écoulements de convection naturelle et sur la transition vers le régime turbulent, caractérisé par des fluctuations temporelles et spatiales chaotiques, constitue un enjeu scientifique majeur. Prédire les flux conductifs et radiatifs sur une paroi chauffée ou encore déterminer la stratification thermique (gradient de température vertical) d'une pièce habitée, sont d'autres objectifs importants de la simulation.

Plusieurs difficultés sont rencontrées dans la résolution de ces problé-

matiques. D'une part, lorsque les écoulements étudiés sont turbulents, les champs de température et de vitesse sont fortement instationnaires et varient sur une large gamme d'échelles spatiales et temporelles. La quantité de données numériques à traiter, correspondant au nombre de points de discrétisation de ces champs, peut être rédhibitoire. D'autre part, les transferts radiatifs dépendent à la fois de l'espace, du temps, de la direction de propagation et de la fréquence du rayonnement, ce qui complexifie leur simulation. Les gaz absorbants possèdent des milliers de raies d'absorption et la prise en compte détaillée de leurs propriétés radiatives implique une forte augmentation du temps de calcul.

Les premiers travaux numériques sur le couplage entre la convection naturelle et le rayonnement des gaz se sont intéressés à la configuration de Rayleigh-Bénard pour prédire les instabilités thermoconvectives dans les atmosphères stellaires (Goody, 1956; Spiegel, 1960). Une couche horizontale de fluide est chauffée par le bas. Sa stabilité est déterminée en fonction du nombre de Rayleigh qui compare les phénomènes convectifs et diffusifs. Pour les bas nombres de Rayleigh, la couche de fluide est immobile et stratifiée thermiquement, puis, à partir d'un certain seuil, la convection naturelle se déclenche et induit des rouleaux stationnaires. Ces études, bien que limitées au cas d'un gaz gris (coefficient d'absorption indépendant de la fréquence), ont montré que le rayonnement du fluide retarde le déclenchement de l'instabilité en diminuant la stratification thermique de l'état de base et en amortissant les fluctuations de température. Ces effets s'amplifient quand l'épaisseur optique du gaz augmente puis s'estompent à la limite optiquement épaisse. Bdéoui et Soufiani (1997) ont étendu cette analyse en considérant des spectres de gaz réels comme la vapeur d'eau, le dioxyde de carbone et l'ammoniac et en se basant sur une linéarisation rigoureuse du terme source radiatif. Il est à noter que les effets du rayonnement sur la stabilité d'une couche de fluide verticale se sont avérés similaires (Arpaci et Bayazitoglu, 1973; Borget *et al.*, 2001).

Les travaux numériques de ces dernières années se sont davantage concentrés sur l'étude des écoulements de fluides rayonnants confinés dans des cavités. La configuration récurrente est celle de la cavité différentiellement chauffée constituée de deux parois verticales opposées maintenues à température constante et de parois haute et basse adiabatiques. Le plus souvent,

les auteurs considèrent des écoulements de fluides rayonnants gris, contenus dans des cavités bidimensionnelles, en régime stationnaire (Lauriat, 1982; Yücel *et al.*, 1989; Tan et Howell, 1991; Kassemi et Naraghi, 1993; Han et Baek, 2000; Lari *et al.*, 2011; Moufekkik *et al.*, 2012). Ces études montrent qu'en régime convectif, le rayonnement augmente la vitesse de l'écoulement et diminue la stratification thermique verticale. Selon Colomer *et al.* (2004), Borjini *et al.* (2008) et Kumar et Eswaran (2010) qui étudient des fluides gris en cavité cubique, les transferts radiatifs accentuent les effets tridimensionnels pour des épaisseurs optiques intermédiaires. Par ailleurs, l'approximation du gaz gris surestime les transferts radiatifs et ne permet pas de prédire correctement les champs de vitesse et de température (Colomer *et al.*, 2007; Lari *et al.*, 2012).

Les ressources informatiques importantes requises par les simulations numériques instationnaires ont été et continuent d'être un facteur limitant pour l'investigation des régimes d'écoulements de gaz rayonnants transitionnels et turbulents. Les contributions existantes font généralement appel à la simulation en moyenne de Reynolds (Fusegi et Farouk, 1989) ou à la simulation aux grandes échelles (Capdevila *et al.*, 2011; Djanna, 2011). Des simulations numériques directes ont toutefois été entreprises par Borget *et al.* (2006) pour des gaz non-gris contenus dans des cavités différentiellement chauffées rectangulaires de haut rapport de forme (hauteur/largeur).

Un autre cas de couplage entre le rayonnement et la convection naturelle intervient dans les cavités contenant des gaz transparents, mais dont les parois adiabatiques ou à flux imposé rayonnent (Larson et Viskanta, 1976; Akiyama et Chong, 1997; Velusamy *et al.*, 2001; Wang *et al.*, 2006; Lauriat et Desrayaud, 2006; Nouanegue *et al.*, 2009; Sun *et al.*, 2011; Xin *et al.*, 2013). Dans ces configurations, les efforts numériques sont moins importants que lorsque le gaz rayonne, ce qui facilite l'étude des géométries tridimensionnelles et des régimes instationnaires. En cavité différentiellement chauffée, le rayonnement des parois adiabatiques est connu pour baisser la température moyenne de la paroi haute, augmenter la température moyenne de la paroi basse et ainsi réduire la stratification thermique du fluide.

Cet aperçu des différentes contributions numériques à l'étude du couplage entre la convection naturelle et le rayonnement révèle un manque de solution de référence en régime instationnaire, dans des géométries tridimensionnelles et tenant compte des propriétés radiatives réelles des gaz.

Pour confirmer leur validité, les résultats de simulation numérique doivent, dans la mesure du possible, être confrontés à des expériences de laboratoire. Le couplage entre le rayonnement des gaz et la convection naturelle a été étudié expérimentalement pour des parois verticales chauffées (Audunson et Gebhart, 1972; Iacona et Taine, 2001; Prasanna et Venkateshan, 2011), pour des cavités différentiellement chauffées (Bratis et Novotny, 1974; Fusegi et Farouk, 1990; Clergent, 2000; Rouger, 2009) ou pour des cavités chauffées par le bas (Gille et Goody, 1964; Bdéoui, 1998; Borget, 2001; Hutchison et Richards, 1999). Dans la plupart de ces travaux, la température est mesurée par interférométrie : il s'agit d'une méthode optique basée sur les variations de l'indice de réfraction avec la température. Cette technique de mesure ne perturbe pas les transferts radiatifs, contrairement à l'introduction de thermocouples, mais est réservée aux phénomènes bidimensionnels. Concernant le choix du gaz rayonnant, le dioxyde de carbone et l'ammoniac sont préférés à la vapeur d'eau afin d'éviter les problèmes de condensation.

La comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques est délicate lorsque des cavités aux parois haute et basse adiabatiques, remplies d'air, sont considérées. En effet, la conductivité de l'air est très faible et il est difficile de réaliser des parois parfaitement isolées thermiquement. Certains auteurs ont proposé d'imposer la distribution de température obtenue dans les expériences comme condition aux limites des simulations numériques (Salat *et al.*, 2004). La résolution numérique de la conduction à l'intérieur des parois semble cependant plus satisfaisante pour reproduire les résultats expérimentaux (Xin *et al.*, 2013). Une autre façon de résoudre cette difficulté est de considérer des cavités aux parois haute et basse parfaitement conductrices, comme cela est proposé par Leong *et al.* (1998).

Les présents travaux de thèse ont vocation à étendre l'exploration numérique du couplage entre le rayonnement des gaz et la convection naturelle. Les développements récents de l'informatique permettent aujourd'hui de dépasser certaines des limitations exposées ci-avant. Depuis les années 2000, la recherche scientifique s'appuie sur les calculateurs parallèles, qui offrent la possibilité de réaliser des calculs simultanément sur des milliers de processeurs et ainsi de diminuer le temps de restitution des simulations numériques.

L'objectif est de réaliser des simulations numériques de référence en régime instationnaire transitionnel afin d'analyser les effets des transferts radiatifs. Ces simulations serviront de guide au développement de modèles approchés pour l'exploration des hauts nombres de Rayleigh. La cavité cubique différentiellement chauffée est choisie comme configuration d'étude. On considérera des écoulements d'air contenant de faibles quantités de vapeur d'eau et de dioxyde de carbone et s'écoulant dans des cavités de grande taille. Les simulations numériques seront ainsi représentatives des transferts thermiques dans l'habitat.

Le chapitre 1 introduit la mise en équation des phénomènes physiques et leur analyse dimensionnelle. Les propriétés radiatives du milieu sont spécifiées.

Le chapitre 2 présente les méthodes numériques de référence utilisées dans les simulations numériques. Une méthode spectrale de collocation pour résoudre les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie est couplée à une méthode de lancer de rayons déterministe ou à une méthode de Monte Carlo statistique pour résoudre les transferts radiatifs.

Les chapitres 3 et 4 discutent les résultats de référence obtenus en régime stationnaire et en régime transitionnel pour des nombres de Rayleigh compris entre  $10^5$  et  $3 \times 10^8$ . Les effets du rayonnement du gaz et les effets du rayonnement des parois sont mis en évidence distinctement par comparaison avec des résultats de simulations numériques ignorant les transferts radiatifs.

Le chapitre 5 propose une modélisation des transferts radiatifs permettant de diminuer le coût numérique des simulations couplées en régime turbulent. Le chapitre 6 analyse les résultats obtenus avec cette approche à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^9$  et présente une modélisation aux grandes échelles de l'écoulement.



# Chapitre 1

## Transferts thermiques couplés en cavité différentiellement chauffée

LA CAVITÉ différentiellement chauffée est une configuration privilégiée pour l'étude numérique de la convection naturelle depuis le calcul de référence proposé par de Vahl Davis et Jones (1983) pour des fluides transparents ou encore depuis les simulations de Yücel *et al.* (1989) pour des fluides rayonnants. Malgré les difficultés expérimentales à réaliser des cavités remplies d'air parfaitement isolées thermiquement, cette configuration constitue une référence pour l'étude des transferts couplés dans l'habitat.

On considère une cavité cubique fermée de côté  $L$ , différentiellement chauffée, représentée sur la figure 1.1. Deux parois verticales opposées sont isothermes, une paroi chaude à la température  $T_c$ , une paroi froide à la température  $T_f$ , et les quatre autres parois sont adiabatiques. La cavité est remplie d'air contenant de faibles quantités de vapeur d'eau et de dioxyde de carbone. Ces espèces sont naturellement présentes dans l'air et sont également produites par la respiration humaine.

Afin de réaliser des simulations numériques représentatives des transferts thermiques dans l'habitat, on choisit :

- des tailles de cavité de l'ordre du mètre ( $L_{\max} = 3$  m) ;
- de faibles écarts de température  $\Delta T_{\max} = T_c - T_f \simeq 10$  K autour d'une température moyenne  $T_0 = (T_c + T_f)/2 = 300$  K ;
- un mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> à pression atmosphérique de composition

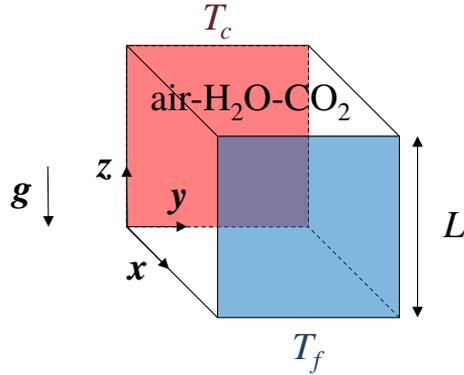


FIGURE 1.1 – Cavité cubique différentiellement chauffée de côté  $L$ , remplie d’un mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub>. Les parois  $x = 0$  et  $x = L$  sont maintenues à la température  $T_c$  et  $T_f$ , respectivement. Les parois  $y = 0$ ,  $y = L$ ,  $z = 0$  et  $z = L$  sont adiabatiques, sauf indication contraire.

constante (fractions molaires de l’ordre de 1 % pour H<sub>2</sub>O et de 0,1% pour CO<sub>2</sub>).

La section 1.1 présente la modélisation mathématique des phénomènes de transferts conductifs, convectifs et radiatifs au sein de la cavité. La section 1.2 identifie les paramètres physiques issus de l’analyse dimensionnelle du problème. Enfin, la section 1.3 spécifie les propriétés radiatives spectrales du mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub>, dont la prise en compte n’est pas courante.

## 1.1 Mise en équation

### 1.1.1 Bilans macroscopiques de masse, de quantité de mouvement et d’énergie

L’écart de température entre les parois chaudes et froides étant faible, on adopte l’approximation de Boussinesq qui consiste à :

- prendre en compte les variations de la masse volumique  $\rho$  avec la température uniquement pour calculer les forces de flottabilité à l’origine du mouvement du fluide ;

- linéariser ces variations selon

$$\rho(T) = \rho_0 + \rho_0\beta(T_0 - T), \quad (1.1)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique du fluide à la température moyenne du milieu  $T_0 = (T_c + T_f)/2$  et  $\beta = -1/\rho(\partial\rho/\partial T)_{T_0}$  est le coefficient d'expansion thermique pris égal à  $1/T_0$  (gaz parfait) ;

- considérer la masse volumique constante sinon.

Les autres propriétés du fluide comme la viscosité dynamique  $\mu$ , la capacité calorifique à pression constante  $C_p$  et la conductivité thermique  $\lambda$  sont considérées constantes et prises égales à celles de l'air à la température  $T_0$ .

L'approximation de Boussinesq permet de simplifier les bilans macroscopiques de masse, de quantité de mouvement et d'énergie que l'on souhaite résoudre pour calculer les champs de vitesse, de température et de pression. Comme la masse volumique est considérée constante, la conservation de la masse implique que la divergence du champ de vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  soit nulle

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.2)$$

En utilisant l'équation (1.1), le bilan de quantité de mouvement qui traduit l'équilibre des forces s'exerçant sur le fluide s'écrit

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho_0 \beta (T_0 - T) \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{g} = -g\mathbf{z}$  est l'accélération de la pesanteur,  $p$  est l'écart à la pression hydrostatique ( $\nabla p = \nabla P - \rho_0 \mathbf{g}$ , avec  $P$  la pression thermodynamique) et l'air est considéré comme un fluide newtonien. Le terme de flottabilité  $\rho_0 \beta (T_0 - T) \mathbf{g}$  indique explicitement le couplage du champ de vitesse avec le champ de température. Réciproquement, les variations de température sont reliées au champ de vitesse par le phénomène de convection thermique. Le bilan d'énergie s'écrit

$$\rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 C_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \lambda \nabla^2 T - \nabla \cdot \mathbf{q}^R, \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{q}^R$  est le vecteur flux radiatif. Dans ce bilan la dissipation visqueuse d'énergie cinétique ainsi que les variations de pression sont négligées.

Les conditions aux limites associées aux équations bilans (1.2), (1.3) et (1.4) sont les suivantes.

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur les six parois} \quad (1.5)$$

$$T = T_c \quad x = 0 \quad (1.6)$$

$$T = T_f \quad x = L \quad (1.7)$$

$$(-\lambda \nabla T + \mathbf{q}^R) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad y = 0, y = L, z = 0, z = L \quad (1.8)$$

Les six parois de la cavité sont rigides et donc la vitesse du fluide  $\mathbf{y}$  est nulle. La température des parois  $x = 0$  et  $x = L$  est imposée à  $T_c$  et  $T_f$  respectivement, les autres parois sont adiabatiques.

### 1.1.2 Transferts radiatifs

Le vecteur flux radiatif intervenant dans le bilan d'énergie (1.4) et dans la conditions aux limites (1.8) est défini par

$$\mathbf{q}^R(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \mathbf{\Omega} d\mathbf{\Omega} d\nu, \quad (1.9)$$

où  $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  est la luminance monochromatique directionnelle.  $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \mathbf{\Omega}$  est la densité du flux d'énergie par unité de surface au point  $\mathbf{r}$  transporté par les photons de fréquence  $\nu$  se déplaçant dans la direction  $\mathbf{\Omega}$ . Le flux radiatif est donc la somme de tous ces flux élémentaires.

La distribution spatiale et directionnelle de la luminance  $I_\nu$  est modifiée par interaction avec la matière (atomes, molécules) capable d'absorber, d'émettre et de diffuser le rayonnement électromagnétique. Dans les milieux gazeux, les propriétés de la matière caractérisant ces phénomènes sont :

- l'indice optique  $n$ , supposé constant uniforme et égal à un ;
- le coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$ , fonction de la température, de la pression et de la composition des espèces absorbantes ;
- le coefficient de diffusion  $\sigma_\nu$ , négligé pour le mélange considéré ( $\sigma_\nu \ll \kappa_\nu$ ) ;
- le coefficient d'émission  $\eta_\nu$ , égal à  $\kappa_\nu I_\nu^\circ$ , le mélange gazeux étant à l'équilibre thermodynamique local.

La luminance du rayonnement d'équilibre  $I_\nu^\circ$  est définie par la fonction de Planck

$$I_\nu^\circ(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right)}, \quad (1.10)$$

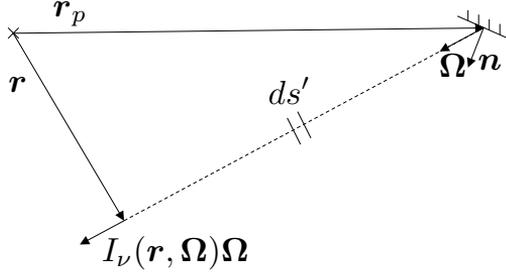


FIGURE 1.2 – Schéma d'un trajet optique.

où  $c$  est la vitesse de la lumière,  $h$  la constante de Planck,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température du milieu. Intégrée sur toute les fréquences, l'équation (1.10) devient

$$\int_0^\infty I_\nu(T) d\nu = \frac{\sigma T^4}{\pi}, \quad (1.11)$$

où  $\sigma = 2\pi^5 k_B^4 / (15h^3 c^2)$  est la constante de Stefan-Boltzmann.

Les variations de la luminance le long d'un chemin optique sont données par l'équation de transfert radiatif

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \kappa_\nu(\mathbf{r})(I_\nu^\circ(T(\mathbf{r})) - I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})). \quad (1.12)$$

On suppose que la propagation du rayonnement est instantanée car la vitesse de la lumière  $c$  est très grande devant la vitesse du fluide. La solution de l'équation (1.12) le long d'un chemin optique d'équation  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_p + s'\mathbf{\Omega}$ , représenté figure 1.2, allant d'un point  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_p$  ( $s' = 0$ ) au bord du domaine jusqu'à un point  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  ( $s' = s$ ), s'écrit

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \int_0^s \kappa_\nu(\mathbf{r}') I_\nu^\circ(T(\mathbf{r}')) \exp\left(-\int_{s'}^s \kappa_\nu(s'') ds''\right) ds' + I_\nu(\mathbf{r}_p, \mathbf{\Omega}) \exp\left(-\int_0^s \kappa_\nu(s') ds'\right). \quad (1.13)$$

La luminance partante au bord du domaine  $I_\nu(\mathbf{r}_p, \mathbf{\Omega})$  est fonction des propriétés radiatives des parois de la cavité qui sont ici assimilées à des corps

opaques, d'émissivité  $\varepsilon_\nu$ . La réflexion aux parois est supposée diffuse (la luminance réfléchie est isotrope), ce qui est le cas pour une paroi rugueuse par exemple. La luminance partante des parois ne dépend plus de la direction et est définie par

$$I_\nu^p(\mathbf{r}_p) = \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p)I_\nu^\circ(T(\mathbf{r}_p)) + \frac{1 - \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p)}{\pi} \int_{\Omega' \cdot \mathbf{n} < 0} I_\nu(\mathbf{r}_p, \Omega') |\Omega' \cdot \mathbf{n}| d\Omega', \quad (1.14)$$

pour les direction telles que  $\Omega \cdot \mathbf{n} > 0$ ,  $\mathbf{n}$  étant le vecteur normal à la paroi dirigé vers l'intérieur du domaine.

La divergence du flux radiatif  $\nabla \cdot \mathbf{q}^R(\mathbf{r})$ , appelée également puissance radiative, et le flux radiatif aux parois  $\mathbf{q}^R \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_p)$  apparaissant dans les équations (1.4) et (1.8), s'expriment tous deux comme la différence entre un terme d'émission et un terme d'absorption selon

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q}^R(\mathbf{r}) &= \int_0^\infty \int_0^{4\pi} (\Omega \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \Omega)) d\Omega d\nu, \\ &= 4\pi \int_0^\infty \kappa_\nu(\mathbf{r}) I_\nu^\circ(T(\mathbf{r})) d\nu \\ &\quad - \int_0^\infty \int_0^{4\pi} \kappa_\nu(\mathbf{r}) I_\nu(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega d\nu, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^R \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_p) &= \int_0^\infty \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}_p, \Omega) \Omega \cdot \mathbf{n} d\Omega d\nu, \\ &= \pi \int_0^\infty \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p) I_\nu^\circ(T(\mathbf{r}_p)) d\nu \\ &\quad - \int_0^\infty \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p) \int_{\Omega' \cdot \mathbf{n} < 0} I_\nu(\mathbf{r}_p, \Omega') |\Omega' \cdot \mathbf{n}| d\Omega' d\nu. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Si le terme d'émission est parfaitement déterminé par la loi de Planck à partir du champ de température (équation (1.10)), le terme d'absorption en un point  $\mathbf{r}$  est en revanche fonction de la luminance provenant de tout point du domaine  $\mathbf{r}'$  et de sa transmission le long du trajet optique  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$  et cela pour chaque fréquence  $\nu$ . Par ailleurs, la luminance, la puissance radiative et le flux radiatif aux parois dépendent du temps dès lors que le champ de température en dépend.

## 1.2 Analyse dimensionnelle

La convection thermique forcée est caractérisée par deux nombres adimensionnels : le nombre de Reynolds, rapport des forces inertielles et des forces visqueuses, et le nombre de Prandtl, rapport des diffusivités de quantité de mouvement et de chaleur, définis par

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 u_{\text{ref}} L}{\mu}, \quad (1.17)$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu C_p}{\lambda}. \quad (1.18)$$

En convection naturelle, l'écoulement est induit par les variations de masse volumique. Un ordre de grandeur de la vitesse  $u_{\text{ref}}$  peut être obtenu en comparant les forces inertielles et les forces de flottabilité

$$\rho_0 \frac{u_{\text{ref}}^2}{L} = \rho_0 \beta (T_c - T_f) g. \quad (1.19)$$

Cela nous permet d'introduire les nombres de Grashoff et de Rayleigh

$$\text{Gr} = \text{Re}^2 = \frac{\rho_0^2 \beta (T_c - T_f) g L^3}{\mu^2}, \quad (1.20)$$

$$\text{Ra} = \text{Gr} \text{Pr} = \frac{\rho_0^2 C_p \beta (T_c - T_f) g L^3}{\mu \lambda}. \quad (1.21)$$

Lorsque le fluide est transparent ( $\kappa_\nu = 0$ ) et les parois adiabatiques parfaitement réfléchissantes ( $\varepsilon_\nu = 0$ ), l'écoulement de convection naturelle en cavité cubique différentiellement chauffée ne dépend que des nombres de Rayleigh et de Prandtl. Lorsque le fluide et les parois rayonnent, un adimensionnement est possible si les propriétés radiatives sont grises (indépendantes de la fréquence). Il faut alors introduire quatre paramètres supplémentaires, par exemple : le rapport de température  $\Delta T/T_0$ , l'épaisseur optique du milieu  $\kappa L$ , l'émissivité des parois  $\varepsilon$  et le nombre de Planck

$$\text{Pl} = \frac{\lambda \Delta T}{\sigma T_0^4 L}, \quad (1.22)$$

défini comme le ratio entre les flux conductifs et radiatifs (on peut préférer à ce dernier le nombre de rayonnement  $N^R = \kappa L \text{Pl}$ ). Cependant, le

TABLE 1.1 – Définition des quantités physiques adimensionnées.

temps	longueur	vitesse	pression	température	flux radiatif
$t^+ = \frac{t}{t_{\text{ref}}}$	$\mathbf{r}^+ = \frac{\mathbf{r}}{L}$	$\mathbf{u}^+ = \frac{\mathbf{u}}{u_{\text{ref}}}$	$p^+ = \frac{p}{\rho_0 u_{\text{ref}}^2}$	$T^+ = \frac{T - T_0}{\Delta T}$	$\mathbf{q}^{R+} = \frac{\mathbf{q}^R L}{\lambda \Delta T}$

spectre d'absorption de gaz comme la vapeur d'eau ou le dioxyde de carbone présente de fortes variations avec la fréquence  $\nu$  et ne peut pas être considéré comme gris. L'épaisseur optique  $\kappa_\nu L$  dépend alors de la fréquence et le transfert radiatif ne peut plus être adimensionné.

### Adimensionnement choisi

Pour adimensionner les bilans de masse (1.2), de quantité de mouvement (1.3) et d'énergie (1.4), on choisit les échelles de vitesse et de temps suivantes

$$u_{\text{ref}} = \sqrt{\frac{\beta(T_c - T_f)gL}{\text{Pr}}} = \frac{a\sqrt{\text{Ra}}}{L}, \quad (1.23)$$

$$t_{\text{ref}} = \frac{L^2}{a\sqrt{\text{Ra}}}, \quad (1.24)$$

$a = \lambda/(\rho_0 C_p)$  étant la diffusivité thermique. Par rapport à la l'équation (1.19), une correction en  $1/\sqrt{\text{Pr}}$  a été apportée dans la définition de l'échelle de vitesse. Patterson et Imberger (1980) l'ont introduite pour tenir compte des différences d'épaisseur entre couches limites mécanique et thermique. Les échelles de référence (1.23) et (1.24) sont pertinentes dès que le régime inertiel est atteint (l'épaisseur des couches limites est petite devant la taille de la cavité). Dans ce régime, la vitesse adimensionnée  $\mathbf{u}^+$  reste du même ordre quelque soit le nombre de Rayleigh. L'adimensionnement des autres quantités physiques est donné dans le tableau 1.1. Les bilans adimensionnés et leurs conditions aux limites associées s'écrivent

$$\nabla^+ \cdot \mathbf{u}^+ = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \mathbf{u}^+ = -\nabla^+ p^+ + \text{Pr} T^+ \mathbf{z} + \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \nabla^{+2} \mathbf{u}^+, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ T^+ = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} (\nabla^{+2} T^+ - \nabla^+ \cdot \mathbf{q}^{R+}). \quad (1.27)$$

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{0} \quad \text{sur les six parois} \quad (1.28)$$

$$T^+ = 0,5 \quad x^+ = 0 \quad (1.29)$$

$$T^+ = -0,5 \quad x^+ = 1 \quad (1.30)$$

$$(-\nabla^+ T^+ + \mathbf{q}^{R+}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad y^+ = 0, y^+ = 1, z^+ = 0, z^+ = 1 \quad (1.31)$$

Pour traiter les transferts radiatifs de façon dimensionnelle, la taille de la cavité, le champ de température et les propriétés réelles des parois et du gaz, doivent être spécifiés :

- le champ de température dimensionnel est défini par  $T = T^+ \Delta T + T_0$ , où  $\Delta T = \text{Ra Pr } a^2 T_0 / (gL^3)$  ;
- les parois de la cavité sont prises grises ;
- le coefficient d'absorption du mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> est pris uniforme à la température  $T_0$  et à la pression atmosphérique étant donnés les faibles écarts de température et de pression rencontrés et s'obtient en imposant la concentration des espèces absorbantes.

Le flux radiatif  $\mathbf{q}^R$  est divisé par  $\lambda \Delta T / L$  pour être intégré au bilan (1.27) et à la condition aux limites (1.31). Pour l'ensemble des simulations couplées, on considère de l'air à  $T_0 = 300$  K, dont les propriétés thermophysiques ne sont pas modifiées par la présence de faibles quantités de vapeur d'eau et de dioxyde de carbone, et pour lequel  $\text{Pr} = 0,707$ ,  $a = 2,25 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  et  $\lambda = 2,63 \times 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Les paramètres restant variables sont le nombre de Rayleigh  $\text{Ra}$ , la taille de la cavité  $L$  et les fractions molaires de vapeur d'eau et de dioxyde de carbone  $X_{\text{H}_2\text{O}}$  et  $X_{\text{CO}_2}$ .

## 1.3 Propriétés radiatives du milieu

### 1.3.1 Spectre d'absorption raie par raie

L'émission ou l'absorption par une molécule d'un photon de fréquence  $\nu_r$  est associée à une transition entre deux niveaux d'énergie,  $E_1$  et  $E_2$ , tels que  $E_2 - E_1 = h\nu_r$ . Ces niveaux d'énergie correspondent à des états électroniques, de vibration et de rotation de l'espèce chimique considérée. Une raie d'absorption de fréquence ou de nombre d'onde  $\nu_r$  est caractérisée par son intensité  $S_r$  (en  $\text{m}^{-1} \text{ atm}^{-1} \text{ cm}^{-1}$ ) et son profil  $F_r(\nu - \nu_r)$  normalisé (en cm), fonctions de la température et de la pression. Le coefficient d'absorption  $\kappa_{r\nu}$  de la raie  $r$  est un spectre continu qui s'obtient en multipliant la pression partielle de l'espèce  $i$ ,  $X_i P$ , par l'intensité et le profil de raie.

Le coefficient d'absorption d'un gaz  $\kappa_\nu$  est alors la somme des coefficients d'absorption  $\kappa_{ir\nu}$  sur l'ensemble des raies  $r$  de chaque espèce absorbante  $i$ , soit

$$\kappa_\nu = \sum_i \sum_r \kappa_{ir\nu} = \sum_i \sum_r X_i P S_{ir} F_{ir}(\nu - \nu_{ir}). \quad (1.32)$$

Le recouvrement entre les raies d'absorption est ici pris en compte de manière simplifiée en négligeant les effets de couplage de raie.

L'approche raie par raie consiste à discrétiser finement ce spectre dans la gamme de fréquence d'intérêt, où la luminance du rayonnement d'équilibre donnée par la fonction de Planck (équation (1.10)) est non négligeable.

La cavité différentiellement chauffée est remplie d'un mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> de température moyenne  $T_0 = 300$  K à pression atmosphérique. À 300 K, le rayonnement d'équilibre est dominant dans l'infrarouge : la luminance d'équilibre intégrée entre 125 et 2000 cm<sup>-1</sup> (entre 5 et 80 μm) est égale à 98 % de la luminance intégrée sur tout le spectre. Dans cette gamme de fréquence, les transitions s'effectuent entre niveaux rovibrationnels d'un même état électronique et seules les molécules dotées d'un moment dipolaire de transition non nul sont susceptibles d'émettre ou d'absorber du rayonnement de manière significative. L'air est donc considéré transparent car il contient majoritairement des molécules composées de deux atomes identiques (N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>). La présence de vapeur d'eau et de dioxyde de carbone le rend semi-transparent.

Le spectre d'absorption raie par raie d'un mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> de composition  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$  et  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ , est représenté figure 1.3. Ce spectre a été obtenu à partir de la base de données spectroscopiques HITRAN (Rothman *et al.*, 2009) et est discrétisé entre 50 et 4050 cm<sup>-1</sup> avec une résolution de 0,025 cm<sup>-1</sup> (160 000 points spectraux). Le coefficient d'absorption étant directement proportionnel à la fraction molaire (relation (1.32)), on pourra utiliser ce spectre pour d'autres concentrations en vapeur d'eau en conservant le ratio  $X_{\text{H}_2\text{O}}/X_{\text{CO}_2}$  (l'effet de la composition sur les largeurs de raie est négligeable dans la plage de concentration considérée). La fraction molaire de vapeur d'eau devra cependant rester inférieure au seuil de saturation à pression atmosphérique  $X_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{sat}}(300 \text{ K}) = 0,0349$ .

### 1.3.2 Modélisation

La prise en compte des propriétés radiatives à haute résolution dans les calculs de transferts radiatifs est très lourde. Si l'approche raie par raie

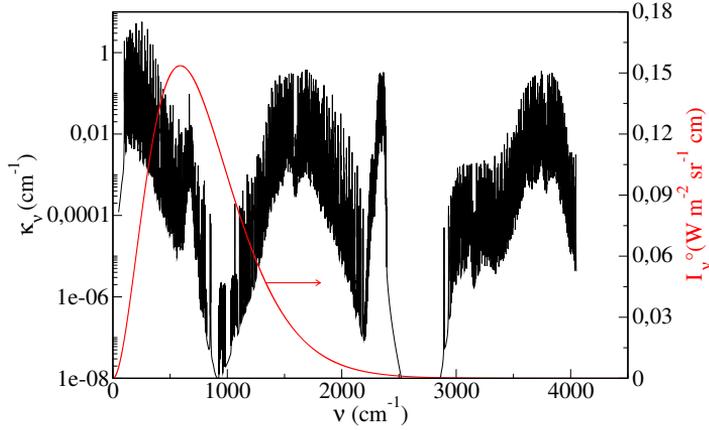


FIGURE 1.3 – Spectre d’absorption d’un mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> à  $T_0 = 300$  K,  $P = 1$  atm,  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$  et  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$  et fonction de Planck à  $T_0 = 300$  K.

peut être envisagée avec la méthode statistique de Monte Carlo, elle est impraticable avec une méthode déterministe comme la méthode de lancer de rayons. Plusieurs voies de modélisation ont été explorées pour accélérer l’intégration spectrale. Ces approches peuvent être classées en deux grandes familles : les modèles de bande (dont font partie le modèle statistique à bande étroite et le modèle CK) et les modèles globaux.

- **Le modèle statistique à bande étroite** Le spectre d’absorption est discrétisé en intervalles spectraux  $\Delta\nu$  appelés bandes étroites où la fonction de Planck est supposée constante mais dans lesquels il existe un grand nombre de raies d’absorption. À partir d’hypothèses statistiques sur la position, les largeurs et les intensités des raies, le modèle propose une expression de la transmittivité moyenne en fonction de deux paramètres pour chaque bande étroite, lorsque le milieu est uniforme. Sa formulation en transmittivité et non en coefficient d’absorption ne le rend pas compatible avec toutes les méthodes de transfert radiatif.
- **Le modèle CK** Ce modèle est basé sur le réarrondissement croissant des valeurs du coefficient d’absorption  $\kappa$  prises dans un intervalle  $\Delta\nu$  où la fonction de Planck est supposée constante. La fonction de distri-

bution cumulée du coefficient d'absorption, obtenue sur chaque bande, présente une allure plus lisse que le spectre initial et s'intègre facilement avec quelques points de quadrature. La formulation est exacte en milieu uniforme.

- **Les modèles globaux** Les modèles globaux sont également basés sur le réordonnement des valeurs du coefficient d'absorption, mais cette fois sur l'ensemble du spectre. La fonction de distribution cumulée est alors pondérée par la fonction de Planck. Ces modèles sont limités à des propriétés de parois grises.

L'utilisation de ces modèles dans des milieux non uniformes, suppose que les variations du coefficient d'absorption avec la température et la pression ne dépendent pas de la fréquence  $\nu$ . Cette hypothèse n'est pas valable lorsque les gradients de température sont forts par exemple. Dans ce cas, une amélioration consiste à discriminer les raies d'absorption en plusieurs classes selon leur comportement avec la température, et à appliquer le modèle statistique à bande étroite, le modèle CK ou les modèles globaux à chacune des classes. De manière générale, les modèles globaux sont les plus efficaces en termes de temps de calcul mais sont également les moins précis. Une revue détaillée de ces différents modèles est donnée par Taine et Soufiani (1999).

Pour modéliser les propriétés radiatives des mélanges air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub>, on choisit le modèle global *Absorption Distribution Function* (ADF) de Pierrot *et al.* (1999a). Il est particulièrement adapté dans le contexte de ce travail puisque le coefficient d'absorption est supposé uniforme. Sa formulation est alors identique à celle des autres modèles globaux (Denison et Webb, 1995; Modest et Zhang, 2002). Le modèle est d'abord présenté pour des milieux non uniformes vérifiant l'hypothèse de séparabilité. Puis, son application à la modélisation des mélanges air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub>, qui sera exploitée dans les simulations numériques couplées, est développée.

## Modèle ADF

On suppose que le coefficient d'absorption  $\kappa_\nu(\mathbf{r})$  dépend séparément de la fréquence  $\nu$  et de la position  $\mathbf{r}$  (au travers de la température, la pression et la composition locale) selon

$$\kappa_\nu(\mathbf{r}) = \eta(\nu)\phi(\mathbf{r}). \quad (1.33)$$

La fonction de distribution cumulée de  $\eta(\nu)$ , pondérée par la fonction de Planck à la température  $T$ , est définie par

$$F(h, T) = \frac{\pi}{\sigma T^4} \int_{\nu/\eta(\nu) \leq h} I_\nu^\circ(T) d\nu. \quad (1.34)$$

Cette fonction présente une allure beaucoup plus lisse que le spectre d'absorption raie par raie. Le modèle consiste à remplacer l'intégration sur les fréquence  $\nu$  par une intégration sur les valeurs de  $\eta$ . Les luminances  $I_\eta(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  et  $I_\eta^\circ(\mathbf{r})$ , fonctions de  $\eta$ , sont définies par

$$I_\eta(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\nu/\eta(\nu) \leq \eta} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\nu, \quad (1.35)$$

$$I_\eta^\circ(\mathbf{r}) = \frac{\partial F(\eta, T(\mathbf{r}))}{\partial \eta} \frac{\sigma T^4(\mathbf{r})}{\pi}. \quad (1.36)$$

$I_\eta d\eta$  est la fraction de la luminance totale  $\int_0^\infty I_\nu d\nu$  correspondant aux intervalles de  $\nu$  tels que  $\eta \leq \eta(\nu) < \eta + d\eta$  et  $I_\eta^\circ d\eta$  est la fraction de la luminance d'équilibre  $\sigma T^4/\pi$  correspondant aux mêmes intervalles de  $\nu$ . La luminance  $I_\eta(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  satisfait l'équation de transfert radiatif

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_\eta(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \eta \phi(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial F(\eta, T(\mathbf{r}))}{\partial \eta} \frac{\sigma T^4(\mathbf{r})}{\pi} - I_\eta(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \right). \quad (1.37)$$

La fonction de distribution cumulée est discrétisée en intervalles  $[\eta_i^-; \eta_i^+]$ . La luminance  $I_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  associée à chaque intervalle vérifie l'équation discrète

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_i(\mathbf{r}) \left( a_i(\mathbf{r}) \frac{\sigma T^4(\mathbf{r})}{\pi} - I_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \right), \quad (1.38)$$

où  $a_i(\mathbf{r}) = F(\eta_i^+, T(\mathbf{r})) - F(\eta_i^-, T(\mathbf{r}))$  et où  $\kappa_i(\mathbf{r}) = \eta_i \phi(\mathbf{r})$  est une valeur moyenne du coefficient d'absorption sur l'intervalle  $[\eta_i^- \phi(\mathbf{r}); \eta_i^+ \phi(\mathbf{r})]$ . La condition aux limites associée est, pour une paroi grise et diffuse

$$I_i(\mathbf{r}_p) = \varepsilon(\mathbf{r}_p) a_i(\mathbf{r}_p) \frac{\sigma T^4(\mathbf{r}_p)}{\pi} + \frac{1 - \varepsilon(\mathbf{r}_p)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} I_i(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}'. \quad (1.39)$$

L'intégration spectrale s'effectue simplement en sommant la contribution de chaque intervalle  $i$ . Tant que l'hypothèse (1.33) est vérifiée, la formulation du modèle ADF est exacte et sa précision ne dépend que de la discrétisation retenue pour la fonction  $F$ . Cependant, le spectre des mélanges gazeux vérifie rarement cette hypothèse. Pierrot *et al.* (1999a,b) fournissent des développements supplémentaires pour étendre la validité du modèle dans ce cas (voir annexe B).

### Implémentation

Les mélanges air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> considérés sont de composition uniforme et à la pression atmosphérique. Compte tenu des faibles écarts de température rencontrés dans la cavité différentiellement chauffée, le coefficient d'absorption peut être considéré uniforme à la température moyenne  $T_0$ . La validité de cette hypothèse est discutée en annexe (§ C.3.3). Le modèle ADF présenté ci-dessus, s'applique en posant  $\phi(\mathbf{r}) = 1$ .

Pour s'adapter aux faibles gradients de température, le modèle ADF est ici développé à partir des luminances modifiées définies par

$$\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - I_\nu^\circ(T_S), \quad (1.40)$$

$$\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{r}) = I_\nu^\circ(\mathbf{r}) - I_\nu^\circ(T_S), \quad (1.41)$$

où  $T_S$  est la température de *shift*, choisie légèrement inférieure à la température minimum du milieu  $T_f$ . Ce changement d'échelle sera justifié et expliqué plus en détail dans le paragraphe 2.2.1. Il ne modifie pas la forme de l'équation de transfert radiatif, puisque celle-ci est linéaire en  $I_\nu$ .

En utilisant la fonction de Planck modifiée, la fonction de distribution cumulée devient

$$F(\kappa) = \frac{\pi}{\sigma(T_0^4 - T_S^4)} \int_{\nu/\kappa_\nu(T_0) \leq \kappa} (I_\nu^\circ(T_0) - I_\nu^\circ(T_S)) d\nu. \quad (1.42)$$

De même, l'équation de transfert radiatif (1.38) associée au modèle ADF discrétisé s'écrit

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathcal{I}_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_i \left( a_i \frac{\sigma(T^4(\mathbf{r}) - T_S^4)}{\pi} - \mathcal{I}_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \right). \quad (1.43)$$

La fonction de distribution cumulée à haute résolution du mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> de composition  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$  et  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ , construite à

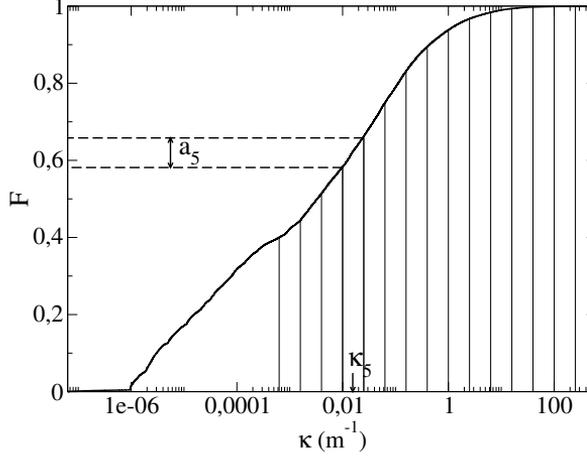


FIGURE 1.4 – Fonction de distribution cumulée du coefficient d’absorption pondérée par la fonction de Planck modifiée (équation (1.42)) relative au spectre du mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> représenté figure 1.3 ( $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$ ,  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ ,  $T_0 = 300$  K et  $P = 1$  atm). La température de *shift* est de  $T_S = 299,9$  K. Discretisation sur 16 intervalles de  $\kappa$ .

partir du spectre raie par raie correspondant (figure 1.3), est représentée figure 1.4. L’espace des  $\kappa$  est discrétisé en  $N_{\text{ADF}} = 16$  intervalles entre les valeurs minimale et maximale prises par le coefficient d’absorption, de manière logarithmique, mis à part le premier intervalle des  $\kappa$  les plus faibles dont la taille est fixée arbitrairement (le premier intervalle est optiquement mince ( $\kappa_1 L \ll 1$ ) et peut être plus large que les autres). La valeur moyenne  $\kappa_i$  dans chaque intervalle est calculée selon

$$\kappa_i = (\kappa_i^-)^{1-\alpha} (\kappa_i^+)^{\alpha}, \quad (1.44)$$

où  $\alpha = 0,52$  est un paramètre optimisé sur le calcul d’émissivité suivant.

L’émissivité modifiée d’une colonne homogène isotherme à la température  $T_0$  et de longueur  $l$  est définie par

$$\varepsilon_{\text{tot}} = \frac{\pi}{\sigma(T_0^4 - T_S^4)} \int_0^{\infty} (I_{\nu}^{\circ}(T_0) - I_{\nu}^{\circ}(T_S))(1 - \exp(-\kappa_{\nu} l)) d\nu. \quad (1.45)$$

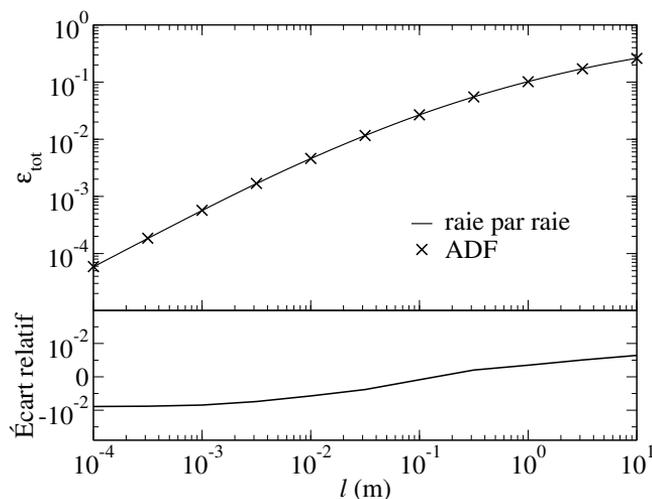


FIGURE 1.5 – Émissivité modifiée d’une colonne homogène isotherme à la température  $T_0 = 300$  K du mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> ( $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$ ,  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ ,  $T_0 = 300$  K et  $P = 1$  atm) pour différentes longueur  $l$ . La température de *shift* est de  $T_S = 299,9$  K. Comparaison entre le modèle ADF et l’approche raie par raie.

Son approximation par le modèle ADF s’écrit

$$\varepsilon_{\text{tot}} \simeq \sum_{i=1}^{N_{\text{ADF}}} a_i (1 - \exp(\kappa_i l)). \quad (1.46)$$

La figure 1.5 compare les émissivités calculées avec le modèle ADF pour différentes longueurs  $l$  entre 0,1 mm et 10 m avec les émissivités calculées par l’approche raie par raie pour le mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> considéré. Les écarts obtenus sont inférieurs à 1 %.

Les paramètres  $\kappa_i$  et  $a_i$  obtenus sont donnés dans le tableau 1.2. La température  $T_S$  du modèle est fixée à 299,9 K. Les paramètres resteront valables pour des températures de *shift* proches étant donné que le coefficient d’absorption est uniforme. Ils pourront également être réutilisés pour d’autres mélanges en modifiant les valeurs  $\kappa_i$  proportionnellement à  $X_{\text{H}_2\text{O}}$ , si le rapport  $X_{\text{H}_2\text{O}}/X_{\text{CO}_2}$  reste constant.

TABLE 1.2 – Paramètres du modèle ADF extraits à partir de la fonction de distribution cumulée (figure 1.4) du mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> ( $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$ ,  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ ,  $T_0 = 300$  K et  $P = 1$  atm).

$\kappa_i$ (m <sup>-1</sup> )	$a_i$
$5,24807645 \times 10^{-6}$	$4,00010060 \times 10^{-1}$
$9,81747956 \times 10^{-4}$	$4,34007700 \times 10^{-2}$
$2,46603926 \times 10^{-3}$	$7,07250000 \times 10^{-2}$
$6,19441015 \times 10^{-3}$	$6,90137200 \times 10^{-2}$
$1,55596562 \times 10^{-2}$	$7,90771500 \times 10^{-2}$
$3,90840871 \times 10^{-2}$	$8,66007100 \times 10^{-2}$
$9,81747891 \times 10^{-2}$	$8,22948400 \times 10^{-2}$
$2,46603933 \times 10^{-1}$	$6,34657800 \times 10^{-2}$
$6,19441082 \times 10^{-1}$	$4,34745600 \times 10^{-2}$
1,55596567	$2,91461900 \times 10^{-2}$
3,90840911	$1,64320300 \times 10^{-2}$
9,81748026	$9,85414000 \times 10^{-2}$
$2,46603959 \times 10^1$	$3,95211000 \times 10^{-3}$
$6,19441104 \times 10^1$	$1,19208000 \times 10^{-3}$
$1,55596582 \times 10^2$	$6,10420000 \times 10^{-4}$
$3,90840927 \times 10^2$	$1,65100000 \times 10^{-4}$



## Chapitre 2

# Méthodes numériques de référence

L'ÉTABLISSEMENT de solutions numériques de référence pour le couplage entre la convection naturelle et le rayonnement en cavité cubique différentiellement chauffée exige le recours à des méthodes de résolution précises, minimisant l'erreur d'approximation numérique.

Les équations aux dérivées partielles, déterminant l'évolution de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie du système matériel, doivent être résolues sur un maillage spatio-temporel suffisamment fin pour capter toutes les échelles de variations. En régime instationnaire, on parle de simulation numérique directe. Des schémas d'ordre élevé pour l'approximation des opérateurs différentiels sont également requis pour obtenir des solutions numériques précises. Les méthodes spectrales font partie des méthodes d'ordre de précision les plus élevés pour l'approximation des gradients. Une telle méthode est adoptée ici, associée à un schéma temporel semi-implicite d'ordre deux.

Concernant les transferts radiatifs, la méthode de référence est la méthode de lancer de rayons, qui consiste en une discrétisation rigoureuse de l'équation de transfert sur les variables d'espace, de direction et de fréquence. La réalisation de calculs couplés instationnaires par cette approche n'est cependant pas envisageable avec une description à haute résolution spectrale (raie par raie) des propriétés radiatives. Seule la méthode de Monte Carlo permet de traiter cet aspect, mais les résultats obtenus présentent des fluctuations statistiques. La méthode de lancer de rayons, associée au modèle

global de propriétés radiatives présenté au chapitre précédent (§ 1.3.2), et la méthode de Monte Carlo, associée à une description raie par raie, ont toutes deux été utilisées pour le calcul des termes sources radiatifs dans le bilan d'énergie et la condition aux limites des parois adiabatiques. La présentation des deux méthodes sera suivie d'une discussion visant à identifier la méthode la plus adéquate pour les simulations numériques couplées.

## 2.1 Méthode spectrale pour la convection naturelle

La résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles repose sur une discrétisation spatiale et temporelle et sur un schéma d'approximation des opérateurs différentiels. Pour une méthode de différences finies, l'erreur commise sur l'approximation de la dérivée spatiale est de l'ordre de  $\mathcal{O}(h^N)$ , où  $h$  est le pas de discrétisation et  $N$  est l'ordre du schéma d'approximation (lié au nombre de points impliqués dans le calcul de la dérivée). Pour diminuer l'erreur, deux solutions sont envisageables : diminuer  $h$  ou augmenter  $N$ . En trois dimensions, diminuer le pas spatial d'un facteur 2 revient à multiplier la taille du domaine et donc approximativement le temps de calcul par 8. Il est donc préférable d'augmenter l'ordre du schéma d'approximation.

Les méthodes spectrales permettent d'atteindre une précision spatiale élevée à un coût numérique raisonnable. Ces méthodes supposent que la solution recherchée peut être représentée sur une base finie de fonctions orthogonales. En projetant l'équation à résoudre sur cette base, on obtient une équation d'évolution pour les coefficients spectraux de la solution. La base spectrale la plus connue est celle de Fourier ( $\phi_k(x) = \exp(\iota kx)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ), qui permet d'engendrer l'espace des fonctions périodiques. Les coefficients de Fourier des fonctions périodiques de classe  $C^\infty$  ont la propriété de décroître exponentiellement : en tronquant la représentation spectrale à l'ordre  $N$ , l'erreur commise est de l'ordre de  $\mathcal{O}(\exp(-N))$ . Les méthodes spectrales sont néanmoins restreintes aux géométries simples. Une revue détaillée de ces méthodes pour la mécanique des fluides est donnée par Canuto *et al.* (2006a,b).

La méthode numérique utilisée ici est une méthode spectrale de collocation. L'équation aux dérivées partielles est résolue dans l'espace physique aux points de collocations, qui sont les points de quadrature utilisés pour évaluer les coefficients spectraux. La représentation spectrale est exploitée

pour calculer les termes différentiels. Un schéma d'approximation temporel d'ordre 2 est choisi et le couplage pression-vitesse est réalisé au moyen d'une méthode de projection. L'algorithme de résolution est parallélisé par décomposition du domaine spatial. Le code informatique a été développé au laboratoire LIMSI par Jalel Chergui, Shihe Xin et Patrick Le Quéré.

### 2.1.1 Discrétisation spatiale

Les fonctions de base considérées pour la discrétisation spatiale sont les polynômes de Chebyshev, adaptés au développement de fonctions non périodiques. Ils sont définis sur l'intervalle  $x \in [-1; 1]$  par

$$\mathcal{T}_k(x) = \cos(k \cos^{-1}(x)), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Les polynômes de Chebyshev sont orthogonaux au sens du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_w$  muni de la fonction poids  $w(x) = (\sqrt{1-x^2})^{-1}$

$$(\mathcal{T}_k(x), \mathcal{T}_p(x))_w = \int_{-1}^1 \mathcal{T}_k(x) \mathcal{T}_p(x) w(x) dx = 0, \quad k \neq p, \quad (2.2)$$

et le carré de leur norme est égal à

$$\|\mathcal{T}_k(x)\|_w^2 = \frac{\pi}{2} c_k, \quad (2.3)$$

où  $c_k = 2$  si  $k = 0$  et  $c_k = 1$  si  $k \geq 1$ . Les  $\mathcal{T}_k(x)$  forment une base de l'espace vectoriel  $L_w^2([-1; 1], \mathbb{R})$ . Une fonction  $f$  appartenant à cet espace peut se décomposer selon

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \check{f}_k \mathcal{T}_k(x), \quad (2.4)$$

où  $\check{f}_k$  sont les coefficients spectraux, projections de la fonction  $f$  sur les polynômes  $\mathcal{T}_k(x)$

$$\check{f}_k = \frac{2}{\pi c_k} \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{T}_k(x) w(x) dx. \quad (2.5)$$

### Méthode de collocation

Les équations aux dérivées partielles à résoudre sont de type advection/diffusion

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \quad (2.6)$$

La méthode de collocation consiste à vérifier cette équation en un nombre fini de points  $x_i$  dans l'espace physique

$$\left. \frac{\partial f^N}{\partial t} + u^N \frac{\partial f^N}{\partial x} - \frac{\partial^2 f^N}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = 0. \quad (2.7)$$

La solution approchée  $f^N$  peut être représentée sur une base tronquée de  $N + 1$  polynômes de Chebyshev

$$f^N(x_i) = \sum_{k=0}^N \check{f}_k \mathcal{T}_k(x_i). \quad (2.8)$$

Si les  $x_i$  sont les points de la quadrature de Gauss-Lobatto, les coefficients spectraux sont calculés selon

$$\check{f}_k = \frac{2}{\pi c_k} \sum_{i=0}^N f^N(x_i) \mathcal{T}_k(x_i) w_i, \quad (2.9)$$

avec

$$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad w_i = \begin{cases} \pi/2N & j = 0, N \\ \pi/N & 1 \leq j \leq N - 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Les points de quadrature  $x_i$  définissent le maillage de l'espace physique. La répartition spatiale des points en cosinus est raffinée aux bords du domaine, ce qui est adapté aux gradients de température et de vitesse dans la couche limite proche des parois. L'ordre de troncature  $N$  de la représentation Chebyshev, égal aux nombres de points de quadrature, conditionne la qualité de l'approximation spectrale. Les coefficients spectraux Chebyshev possèdent des propriétés de convergence similaires aux coefficients Fourier. En effet, la série de Chebyshev est équivalente à une série de Fourier en cosinus, si l'on utilise le changement de variable  $\theta = \cos^{-1}(x)$ .

Dans l'espace spectral, des relations simples permettent de calculer les coefficients spectraux  $\check{f}_k^{(1)}$  et  $\check{f}_k^{(2)}$  des dérivées première  $\partial f^N / \partial x$  et seconde  $\partial^2 f^N / \partial x^2$

$$\check{f}_k^{(1)} \simeq \frac{2}{c_k} \sum_{\substack{p=k+1 \\ p+k \text{ impair}}}^N p \check{f}_p, \quad (2.11)$$

$$\check{f}_k^{(2)} \simeq \frac{1}{c_k} \sum_{\substack{p=k+2 \\ p+k \text{ pair}}}^N p(p^2 - k^2) \check{f}_p. \quad (2.12)$$

Les termes de dérivation spatiale première et seconde apparaissant dans l'équation (2.7) se calculent dans l'espace physique à partir des relations (2.11) et (2.12) et des relations de passage (2.8) et (2.9) entre espace physique et espace spectral.

### Généralisation 3D

La décomposition spectrale est présentée dans les équations précédentes selon une dimension d'espace  $x$  pour des raisons de clarté. Les développements se généralisent néanmoins aux trois dimensions d'espace. Par exemple, les équations (2.8) et (2.9) deviennent

$$f^{LMN}(x_i, y_j, z_k, t) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \check{f}_{lmn}(t) \mathcal{T}_l(x_i) \mathcal{T}_m(y_j) \mathcal{T}_n(z_k), \quad (2.13)$$

$$\check{f}_{lmn}(t) = \frac{8}{\pi^3 c_l c_m c_n} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^N f^{LMN}(x_i, y_j, z_k, t) \times \mathcal{T}_l(x_i) \mathcal{T}_m(y_j) \mathcal{T}_n(z_k) w_i w_j w_k. \quad (2.14)$$

#### 2.1.2 Discrétisation temporelle

On s'intéresse maintenant à la discrétisation du terme de dérivation temporelle dans l'équation d'advection/diffusion

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f - \nabla^2 f = 0. \quad (2.15)$$

La discrétisation par un schéma temporel explicite est la plus facile à implémenter mais la stabilité numérique de ce type de schéma impose des pas de temps  $\delta t$  très petits. La contrainte de stabilité la plus forte provient du terme de diffusion et s'écrit  $a \delta t / \delta x^2 < 1$ , si  $a$  est le coefficient de diffusion et  $\delta x$  le pas d'espace (Le Quéré et Alziary de Roquefort, 1985). Pour une discrétisation spatiale Chebyshev, cette contrainte est particulièrement sévère puisque le temps critique est de l'ordre de  $\mathcal{O}(C_1/N^4)$  pour un problème

unidimensionnel si  $N$  est le nombre de polynômes de Chebyshev et  $C_1$  une constante (en effet,  $\delta x_{\min} = 1 - \cos(\pi/N) \simeq \pi^2/(2N^2)$ ). Cette limitation devient rédhitoire pour l'étude des régimes transitionnel et turbulent où les temps d'intégration sont longs et les maillages fins ( $N$  grand).

Un schéma temporel semi-implicite d'ordre 2 est donc choisi. Il consiste en un développement de type Euler-retardé (implicite) des termes de diffusion et en un développement de type Adams-Bashforth (explicite) des termes de convection (Vanel *et al.*, 1986)

$$\frac{3f_{n+1} - 4f_n + f_{n-1}}{2\delta t} + 2(\mathbf{u} \cdot \nabla f)_n - (\mathbf{u} \cdot \nabla f)_{n-1} - \nabla^2 f_{n+1} = 0, \quad (2.16)$$

avec  $f_n \equiv f(n\delta t)$ . À noter que le pas de temps critique pour un problème d'advection discrétisé à l'ordre 2 par un schéma d'Adams-Bashforth explicite est de l'ordre de  $\mathcal{O}(C_2/N^2)$ ,  $C_2$  étant une constante (Canuto *et al.*, 2006a). La contrainte de stabilité du schéma (2.16) est donc moins sévère que pour un problème de diffusion pur traité explicitement.

Ce type de discrétisation conduit à la résolution d'une équation de Helmholtz pour la température et pour chaque composante de la vitesse

$$f_{n+1} = \left( \nabla^2 - \frac{3}{2\delta t} \right)^{-1} S_{n,n-1}, \quad (2.17)$$

où  $S_{n,n-1}$  est le terme source défini par

$$S_{n,n-1} = -\frac{2}{\delta t} f_n + \frac{1}{2\delta t} f_{n-1} + 2(\mathbf{u} \cdot \nabla f)_n - (\mathbf{u} \cdot \nabla f)_{n-1}. \quad (2.18)$$

L'inversion de l'opérateur de Helmholtz  $H \equiv \nabla^2 - 3/(2\delta t)$  s'effectue par tridiagonalisation : dans chaque direction d'espace, on recherche les valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur de dérivation seconde. Cette technique est possible car l'opérateur de Helmholtz discrétisé en Chebyshev possède des valeurs propres réelles, distinctes et négatives. Pour résoudre l'équation (2.17), le terme source est projeté dans la base des vecteurs propres, le système diagonal est résolu et la solution est retournée dans l'espace de départ. Pour traiter les bords du domaine, on diagonalise les opérateurs de dérivation seconde réduits (la première et la dernière lignes sont éliminées) et les conditions aux limites sont imposées après résolution du système réduit.

### 2.1.3 Couplage pression-vitesse

La résolution couplée des champs de pression et de vitesse est une difficulté spécifique aux écoulements à bas nombre de Mach ( $\text{Ma} = u_{\text{ref}}/c_S$ ,  $c_S$  étant la vitesse du son). Dans le cas des écoulements à masse volumique constante, le champ de pression n'est pas déterminé explicitement par une équation d'état. Le couple pression-vitesse doit simultanément vérifier le bilan de quantité de mouvement (1.3) et le bilan de masse (1.2) imposant la divergence du vecteur vitesse à zéro. L'algorithme d'Uzawa propose une méthode rigoureuse de couplage entre les champs de pression et de vitesse. Le bilan de quantité de mouvement discrétisé en temps, s'écrit sous la forme d'une équation de Helmholtz dans laquelle le champ de pression est une inconnue

$$H\mathbf{u}_{n+1} - \nabla p_{n+1} = \mathbf{S}_{n,n-1}. \quad (2.19)$$

En exploitant la condition de divergence nulle du champ de vitesse, on peut faire disparaître le champ de vitesse  $\mathbf{u}_{n+1}$  et écrire une équation exacte pour le champ de pression  $p_{n+1}$

$$p_{n+1} = -U^{-1}(\nabla \cdot H^{-1} \mathbf{S}_{n,n-1}), \quad (2.20)$$

où  $U \equiv \nabla \cdot H^{-1} \nabla$  est l'opérateur d'Uzawa. Cependant, cet opérateur est mal conditionné et son inversion est un problème numérique difficile. Une alternative consiste à prendre la divergence du bilan de quantité de mouvement et d'écrire une équation de Poisson pour la pression. Le problème consiste ensuite à imposer des conditions aux limites pour la pression au bord du domaine, ce qui peut être accompli avec la méthode de la matrice d'influence (Le Quéré, 1991).

Le coût numérique de ces méthodes devient prohibitif pour des géométries tridimensionnelles. On fait alors appel à une résolution à pas fractionnés (pression et vitesse ne sont pas évalués exactement au même instant) appelée méthode de projection (Xin et Le Quéré, 2002). Cette méthode consiste à calculer un champ de vitesse intermédiaire, de divergence non nulle, à partir du gradient de pression à l'instant  $n$ . On ajoute ensuite au champ de vitesse une correction de pression de telle sorte que le bilan de masse soit satisfait. L'approximation réalisée est correcte pour des pas de temps  $\delta t$  faibles. Cette contrainte sur le pas de temps est cependant moins sévère que la contrainte de stabilité du schéma semi-implicite. Des détails sur la précision et la convergence de la méthode sont donnés par Achdou et Guermond (2000).

### Algorithme de résolution

L'algorithme complet de résolution, en tenant compte de l'adimensionnement des équations introduit au chapitre précédent, comporte les étapes suivantes :

1. Résolution de l'équation de Helmholtz pour la température (les transferts radiatifs sont pour l'instant ignorés, voir § 2.3 pour leur prise en compte).

$$T_{n+1}^+ = \left( \nabla^{+2} - \frac{3\sqrt{\text{Ra}}}{2\delta t^+} \right)^{-1} S_T \quad (2.21)$$

$$S_T = \sqrt{\text{Ra}} \left( -\frac{2}{\delta t^+} T_n^+ + \frac{1}{2\delta t^+} T_{n-1}^+ + 2(\mathbf{u}^+ \cdot \nabla T^+)_n - (\mathbf{u}^+ \cdot \nabla T^+)_{n-1} \right) \quad (2.22)$$

2. Résolution de l'équation de Helmholtz pour le champ de vitesse à partir du champ de pression à l'instant  $n$ . Le champ de vitesse obtenu  $\mathbf{u}_*^+$  n'est pas à divergence nulle.

$$\mathbf{u}_*^+ = \left( \nabla^{+2} - \frac{3\sqrt{\text{Ra}}}{2\text{Pr}\delta t^+} \right)^{-1} \mathbf{S}_u \quad (2.23)$$

$$\mathbf{S}_u = \frac{\sqrt{\text{Ra}}}{\text{Pr}} \left( \nabla^+ p_n^+ - \frac{2}{\delta t^+} \mathbf{u}_n^+ + \frac{1}{2\delta t^+} \mathbf{u}_{n-1}^+ + 2((\mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+) \mathbf{u}^+)_n - ((\mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+) \mathbf{u}^+)_{n-1} \right) - \sqrt{\text{Ra}} T_{n+1}^+ \mathbf{z} \quad (2.24)$$

3. Calcul du champ de pression à l'instant  $n+1$  en imposant la contrainte d'incompressibilité sur le champ de vitesse  $\mathbf{u}_{n+1}^+$  (l'opérateur laplacien s'inverse de la même façon que l'opérateur de Helmholtz et le gradient de pression est pris nul aux bords).

$$p_{n+1}^+ = \frac{3}{2\delta t^+} (\nabla^{+2})^{-1} \left( \nabla^+ \cdot \mathbf{u}_*^+ + \frac{2\delta t^+}{3} \nabla^{+2} p_n^+ \right) \quad (2.25)$$

4. Correction du champ de vitesse pour satisfaire le bilan de masse.

$$\mathbf{u}_{n+1}^+ = \mathbf{u}_*^+ - \frac{2\delta t^+}{3} \nabla^+ (p_{n+1}^+ - p_n^+) \quad (2.26)$$

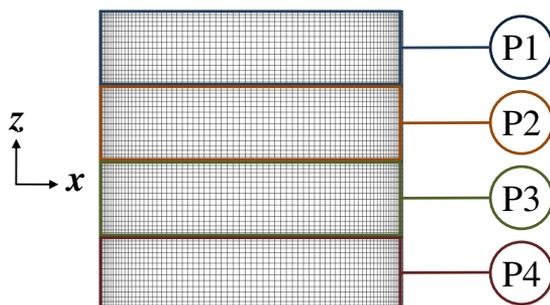


FIGURE 2.1 – Principe de la parallélisation du code spectral par décomposition du domaine spatial dans la direction verticale. Chaque domaine est ici discrétisé en 81 points de Gauss-Lobatto selon  $x$  et 21 points de Gauss-Lobatto selon  $z$  (la direction  $y$  suit la même discrétisation que la direction  $x$ ). La résolution numérique dans chaque domaine spatial  $i$  est assurée par le processeur  $P_i$ .

### 2.1.4 Parallélisation

Pour étudier les écoulements de convection naturelle à haut nombre de Rayleigh, une implémentation parallèle du code de calcul s'impose car d'une part les résolutions temporelles et spatiales requises sont de plus en plus fines à mesure que le nombre de Rayleigh augmente et d'autre part l'intégration temporelle doit être suffisamment longue pour obtenir des solutions statistiquement stationnaires.

La parallélisation par décomposition du domaine spatial selon la direction verticale est adoptée. La cavité cubique est divisée en blocs identiques de taille  $L \times L \times (L/N_p)$ ,  $N_p$  étant le nombre de processeurs et chaque bloc est discrétisé par les points de Gauss-Lobatto dans chaque direction d'espace, comme représenté figure 2.1. Le choix de la direction verticale est intéressant car, lorsque le nombre de Rayleigh augmente, le décollement de la couche limite verticale se produit de plus en plus en amont et la résolution verticale doit être augmentée au cœur de la cavité. Un maillage Gauss-Lobatto de chaque bloc est donc plus favorable qu'un maillage Gauss-Lobatto unique car pour un même nombre total de points, le pas d'espace moyen est plus faible. L'efficacité de la parallélisation est limitée par l'ordre du développe-

ment Chebyshev de chaque bloc selon la direction verticale, qui ne peut pas être trop bas (on utilise au minimum une vingtaine de points).

La résolution des équations de Helmholtz dans un sous domaine est couplée à celle des domaines voisins à travers les conditions aux limites. La continuité des variables et de leurs dérivées doit être assurée aux interfaces. Pour découpler les problèmes, on adopte une procédure en deux itérations. Les équations de Helmholtz sont résolues une première fois en imposant aux interfaces des valeurs estimées. La méthode du complément de Schur (Cannuto *et al.*, 2006b) est ensuite utilisée pour calculer les valeurs des variables aux interfaces. Les équations de Helmholtz sont résolues à nouveau en imposant les valeurs précises aux interfaces et les solutions obtenues vérifient à la fois la continuité des variables et la continuité de leurs dérivées (Xin *et al.*, 2008).

### 2.1.5 Validation

#### Régime stationnaire

Le code parallèle spectral a été validé par comparaison avec les résultats de Tric *et al.* (2000) pour des écoulements stationnaires en cavité cubique remplie d'air ( $Pr = 0,71$ ) à  $Ra = 10^5$ ,  $Ra = 10^6$  et  $Ra = 10^7$ . Tric *et al.* (2000) utilisent un code spectral Chebyshev séquentiel et une méthode de projection-diffusion pour le couplage pression-vitesse. Leur domaine est maillé par  $81^3$  points de Gauss-Lobatto pour  $Ra = 10^5$  et  $Ra = 10^6$  et par  $101^3$  points de Gauss-Lobatto pour  $Ra = 10^7$ . Leur pas de temps est tel que  $\delta t a/L^2 = 4 \times 10^{-5}$ . Concernant les présents calculs, le domaine est maillé par  $81 \times 81 \times (4 \times 21)$  points de Gauss-Lobatto (81 points dans les directions  $x$  et  $y$ , 21 points dans la direction  $z$  pour chacun des quatre processeurs). Le pas de temps est  $\delta t^+ = 2 \times 10^{-3}$  pour  $Ra = 10^5$  et  $10^6$  et  $\delta t^+ = 10^{-3}$  pour  $Ra = 10^7$ .

Le tableau 2.1 compare le maximum des trois composantes de la vitesse, le nombre de Nusselt  $Nu_{mp}$  moyenné selon la ligne  $x^+ = 0$  et  $y^+ = 0,5$  et le nombre de Nusselt  $Nu_{3D}$  moyenné sur le plan  $x^+ = 0$ . Un bon accord est obtenu pour chaque quantité comparée, les différences restent inférieures à 0,5 %.

TABLE 2.1 – Comparaison entre les résultats obtenus avec le code spectral et les calculs de Tric *et al.* (2000). Maximum des trois composantes de la vitesse, nombre de Nusselt  $Nu_{mp}$  moyenné sur une ligne  $x^+=0$  et  $y^+=0,5$  et nombre de Nusselt  $Nu_{3D}$  moyenné sur la paroi chaude  $x^+=0$ .

	Ra = $10^5$		Ra = $10^6$	
	Code spectral	Tric <i>et al.</i>	Code spectral	Tric <i>et al.</i>
$u_{1\max}^+$	0,13859	0,13884	0,12664	0,12697
$u_{2\max}^+$	0,03065	0,03067	0,02550	0,02557
$u_{3\max}^+$	0,22411	0,22474	0,23627	0,23672
$Nu_{mp}$	4,6117	4,6127	8,8743	8,8771
$Nu_{3D}$	4,3360	4,3370	8,6381	8,6407

	Ra = $10^7$	
	Code spectral	Tric <i>et al.</i>
$u_{1\max}^+$	0,12090	0,12138
$u_{2\max}^+$	0,02627	0,02637
$u_{3\max}^+$	0,24168	0,24291
$Nu_{mp}$	16,5433	16,5477
$Nu_{3D}$	16,3386	16,3427

## Régime instationnaire

Une seconde validation a été menée en confrontant les résultats du code spectral aux résultats de Trias *et al.* (2007, 2010a,b) en régime instationnaire, dans une cavité de rapport de forme  $L_z/L_x = 4$ ,  $L_y/L_x = 1$ , remplie d'air ( $Pr = 0,71$ ) et à un nombre de Rayleigh basé sur la hauteur de la cavité  $Ra_{L_z} = 2 \times 10^9$ . Les parois haute et basse de la cavité sont adiabatiques et la périodicité des champs de température, pression et vitesse est imposée dans la direction  $y$ . Trias *et al.* (2007, 2010a,b) utilisent une méthode de volumes finis, un schéma temporel explicite et une méthode de projection pour le couplage pression-vitesse. Leur résolution spatiale est de  $144 \times 64 \times 318$  points (maillage régulier dans la direction  $y$ , maillage basé sur une fonction tangente hyperbolique dans les directions  $x$  et  $z$ ) et leur pas de temps est égal à  $\delta t^+ = 1,27 \times 10^{-3}$ . Concernant les présents calculs, le domaine est maillé par  $161 \times 81 \times (8 \times 41)$  points (un développement spectral en Fourier est utilisé dans la direction  $y$ ) et le pas de temps est  $\delta t^+ = 5 \times 10^{-4}$ . Les résultats sont moyennés statistiquement  $\langle \cdot \rangle$  en moyennant selon le temps ( $\Delta t^+ = 420$  ici et  $\Delta t^+ = 550$  pour Trias *et al.*), selon la direction  $y$  et selon la symétrie centrale 2D par rapport au point central  $(x^+; z^+) = (0, 125; 0, 5)$ .

Le tableau 2.2 compare le nombre de Nusselt moyen, le maximum de l'écart type du nombre de Nusselt, la température moyenne de la paroi haute, la stratification thermique au cœur de la cavité, le maximum de  $u_1^+$  dans le plan vertical à mi-largeur, le maximum de  $u_3^+$  dans le plan horizontal à mi-hauteur, et enfin le taux de pseudo-dissipation d'énergie cinétique turbulente moyenné sur l'ensemble du volume. Pour chacune de ces quantités, les écarts ne dépassent pas 1,5 %. La figure 2.2 compare des profils de l'énergie cinétique turbulente, de la pseudo-dissipation, du nombre Nusselt et de l'écart type du nombre de Nusselt. Une nouvelle fois, les écarts sont faibles et peuvent être attribués aux différences de méthode numérique, de résolution temporelle et spatiale et de temps d'intégration.

## 2.2 Transferts radiatifs

La résolution numérique de l'équation de transfert radiatif le long d'un trajet optique se résume à un calcul d'intégrales spatiales (équation (1.13)) pour un milieu non diffusant. Pour calculer la puissance volumique ainsi que les flux aux parois intervenant dans les équations (1.4) et (1.8), ce calcul doit

TABLE 2.2 – Comparaison entre les résultats obtenus avec le code spectral et les calculs de référence de Trias *et al.* (2007, 2010a,b) à  $Ra = 2 \times 10^9$ . Nombre de Nusselt moyen, maximum de l'écart type du nombre de Nusselt, température moyenne de la paroi haute, stratification thermique  $\langle \mathcal{S} \rangle = \partial \langle T^+ \rangle / \partial z^+$  au cœur de la cavité, maximum de  $u_1^+$  dans un plan vertical à mi-largeur, maximum de  $u_3^+$  dans un plan horizontal à mi-hauteur et pseudo-dissipation d'énergie cinétique turbulente moyennée sur l'ensemble du volume.

	Code spectral	Trias <i>et al.</i>
$\langle Nu \rangle$	66,55	66,63
$\sigma(Nu)_{\max}(z^+)$	11,09	10,92
$\langle T^+ \rangle_{\text{haut}}$	0,389	0,391
$\langle \mathcal{S} \rangle$	1,02	1,01
$\langle u_1^+ \rangle_{\max}(x^+ = 0, 125, z^+)$	$1,78 \times 10^{-2}$	$1,76 \times 10^{-2}$
$\langle u_3^+ \rangle_{\max}(x^+, z^+ = 0, 5)$	$2,22 \times 10^{-1}$	$2,22 \times 10^{-1}$
$Pr/\sqrt{Ra} \langle (\partial u_i^{+'}/\partial x_i^+)^2 \rangle$	$7,96 \times 10^{-5}$	$8,08 \times 10^{-5}$

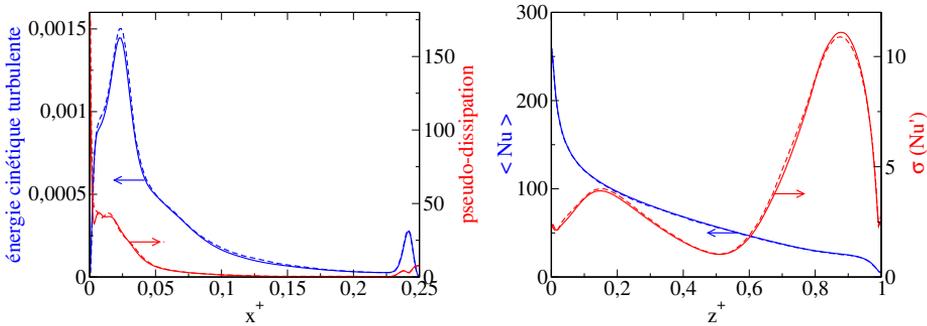


FIGURE 2.2 – À gauche : énergie cinétique turbulente  $0.5 \langle u_i^{+'} u_i^{+'} \rangle$  (en bleu) et pseudo-dissipation  $\langle (\partial u_i^{+'}/\partial x_i^+)^2 \rangle$  (en rouge) à  $z^+ = 0, 8$ . À droite : nombre de Nusselt (en bleu) et son écart type (en rouge) sur la paroi chaude  $x^+ = 0$ . Les résultats du code spectral en traits pleins sont comparés aux résultats de Trias *et al.* (2007, 2010a,b) en pointillés.

être mené en chaque point du domaine  $\mathbf{r}$ , dans chaque direction  $\mathbf{\Omega}$ , pour chaque fréquence  $\nu$  et doit être répété dans le temps à mesure que le champ de température évolue.

Le coût élevé du calcul numérique des transferts radiatifs a encouragé le développement de méthodes approchées, simplifiant la dépendance fréquentielle (cet aspect a été précédemment discuté, voir § 1.3) et directionnelle de la luminance. La méthode  $P_N$ , basée sur un développement à l'ordre  $N$  de la luminance sur une base d'harmoniques sphériques, permet d'obtenir un jeu d'équations différentielles qui ne dépendent plus de la direction de propagation. Plus l'ordre du développement est élevé, plus la méthode est précise mais plus il y a d'équations à résoudre. Les méthodes de bas ordre ( $P_1$  et  $P_3$ ) sont les plus pratiquées mais n'apportent des résultats précis que dans le cas de milieux optiquement épais ( $\kappa_\nu L \gg 1$ ). La méthode des ordonnées discrètes est une autre approche qui consiste à réaliser l'intégration directionnelle au moyen d'une quadrature. La discrétisation grossière de l'espace des directions, permet de réduire le coût du calcul mais conduit à des imprécisions sur de longs trajets optiques. Des détails concernant ces méthodes sont donnés dans les ouvrages de référence consacrés au rayonnement thermique (Siegel et Howell, 2002; Modest, 2003).

Les méthodes de référence pour le calcul du transfert radiatif, atteignant des niveaux de précision comparables aux méthodes spectrales pour la mécanique des fluides, sont néanmoins praticables aujourd'hui grâce aux progrès de l'informatique. Deux méthodes de référence ont été développées dans ces travaux. La première est la méthode de Monte Carlo, méthode de résolution statistique qui permettra ici de tenir compte des propriétés radiatives raie par raie. La seconde est la méthode de lancer de rayons, méthode de résolution déterministe qui ne pourra être appliquée que combinée avec un modèle approché des propriétés radiatives. Avant de présenter et de discuter ces méthodes, une nouvelle formulation de l'équation de transfert radiatif est introduite afin de s'adapter aux faibles gradients de température rencontrés dans la cavité.

### 2.2.1 Formulation de l'équation de transfert en milieu quasi-isotherme

La puissance volumique radiative et le flux radiatif aux parois apparaissent comme la différence de deux termes d'émission et d'absorption qui sont calculés séparément dans les méthodes standards de Monte Carlo ou de

lancer de rayons. Dans les milieux quasi-isothermes, les puissances émises et absorbées sont très grandes devant les puissances nettes échangées, ce qui entraîne des imprécisions numériques. Pour accroître fictivement les écarts entre puissances émises et absorbées, on introduit la transformation suivante

$$\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - I_\nu^\circ(T_S), \quad (2.27)$$

où  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  est la luminance modifiée qui s'obtient en retranchant à la luminance  $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  la luminance d'équilibre à la température de *shift*  $T_S$ , température légèrement inférieure ou égale à la température minimale rencontrée dans le milieu. De la même façon, on introduit la luminance d'équilibre modifiée par la relation

$$\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{r}) = I_\nu^\circ(\mathbf{r}) - I_\nu^\circ(T_S). \quad (2.28)$$

La luminance d'équilibre à la température  $T_S$  étant une constante, cette transformation ne modifie pas la forme de l'équation de transfert radiatif qui dépend linéairement de la luminance

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_\nu(\mathbf{r})(\mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{r})) - \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})), \quad (2.29)$$

ni la forme de la condition aux limites associée, dans le cas de parois diffuses

$$\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p) = \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p)\mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{r}_p)) + \frac{1 - \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}'. \quad (2.30)$$

L'application du théorème de superposition montre que le système (1.12)-(1.14) est équivalent au système (2.29)-(2.30). Les expressions des puissances nettes échangées, volumiques ou surfaciques, sont également conservées

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q}^R(\mathbf{r}) &= 4\pi \int_0^\infty \kappa_\nu(\mathbf{r}) \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{r})) d\nu \\ &\quad - \int_0^\infty \int_0^{4\pi} \kappa_\nu(\mathbf{r}) \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} d\nu, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^R \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_p) &= \pi \int_0^\infty \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p) \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{r}_p)) d\nu \\ &\quad - \int_0^\infty \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p) \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}' d\nu. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Les puissances émises et absorbées sont ainsi du même ordre de grandeur que les puissances nettes. Les équations du transfert radiatif restent strictement similaires à celles introduites au chapitre précédent, la méthode de Monte Carlo ou la méthode de lancer de rayons peuvent être employées avec cette nouvelle formulation.

### 2.2.2 Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo est une méthode statistique de résolution de l'équation de transfert radiatif. Elle consiste à simuler l'émission de paquets d'énergie et à suivre leur propagation dans le domaine : leur extinction par absorption et éventuellement leur réflexion s'ils atteignent une paroi. Chaque tir de paquet est une expérience aléatoire. Le point d'émission, la direction et la fréquence des paquets d'énergie sont choisis à partir d'une loi de probabilité de telle sorte que l'émission déterministe soit reproduite pour un grand nombre de tirs. En suivant l'absorption de ces paquets, on estime un champ de puissance absorbée qui converge statistiquement vers le champ de puissance absorbée exact pour un grand nombre de tirs.

La méthode de Monte Carlo est coûteuse en termes de temps de calcul mais est particulièrement recommandée pour des problèmes de transferts radiatifs complexes (géométries tridimensionnelles, milieux diffusant, spectre d'absorption de gaz à haute résolution) où elle devient plus efficace que les méthodes déterministes. Dans le cas présent, la méthode de Monte Carlo permet de tenir compte du spectre d'absorption raie par raie du mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub>.

#### Simulation statistique de l'émission

Le domaine de calcul (gaz et parois) est discrétisé en mailles (volumiques et surfaciques) isothermes et de coefficient d'absorption uniforme. Si  $N_{\text{tirs}}$  est le nombre total de paquets émis dans le domaine, le nombre de paquets émis par la maille  $i$  est choisi au prorata de son émission soit  $N_{\text{tirs}} \times (P_i^e / P_{\text{tot}}^e)$ , avec  $P_i^e$  la puissance émise (en Watts) par la maille  $i$  (volumique ou surfacique) et  $P_{\text{tot}}^e = \sum_i P_i^e$ . Ainsi, chaque paquet émet la même énergie  $q$ . On utilise les luminances modifiées  $\mathcal{I}_\nu$  et  $\mathcal{I}_\nu^o$  en imposant la température de *shift* égale à la température minimale du milieu, soit  $T_S = T_{\text{min}}$ . Ainsi, une maille à la température  $T_{\text{min}}$  aura une émission nulle.

ÉMISSION VOLUMIQUE. Le ratio entre l'émission élémentaire  $dP_i^e$  et l'émission  $P_i^e$  de la maille volumique  $i$

$$\frac{dP_i^e}{P_i^e} = \frac{\kappa_{\nu,i}\mathcal{I}_{\nu}^{\circ}(T_i)d\nu}{\int_0^{\infty}\kappa_{\nu,i}\mathcal{I}_{\nu}^{\circ}(T_i)d\nu} \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d\mathbf{r}}{V_i}, \quad (2.33)$$

correspond à une densité de probabilité fonction de trois variables indépendantes : la position  $\mathbf{r}$ , la direction  $\Omega$ , et la fréquence  $\nu$ . L'équation (2.33) permet de déterminer ces trois variables à partir de six nombres aléatoires à densité de probabilité uniforme, tirés entre 0 et 1.

Tout d'abord, les coordonnées du point d'émission dans la maille sont choisis de façon équiprobable selon les trois coordonnées de l'espace. Ensuite, pour déterminer la direction de propagation, on choisit les angles zénithal  $\vartheta$  et azimutal  $\varphi$  autour de l'axe  $\mathbf{z}$  définis par

$$\Omega = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{x} + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{y} + \cos \vartheta \mathbf{z}. \quad (2.34)$$

Si  $\Omega$  est l'angle solide associé à la direction  $\Omega$ , les densités de probabilité pour  $\vartheta$  et  $\varphi$  s'obtiennent par la relation

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{2 \cdot 2\pi}, \quad (2.35)$$

d'où l'on déduit les fonctions de distribution cumulées

$$R(\vartheta) = \frac{1 - \cos \vartheta}{2}, \quad \vartheta \in [0; \pi], \quad R(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad \varphi \in [0; 2\pi]. \quad (2.36)$$

Ces relations sont inversées pour obtenir  $\vartheta$  et  $\varphi$  à partir d'un nombre  $R$  tiré aléatoirement de façon uniforme entre 0 et 1. Enfin, pour déterminer la fréquence  $\nu$ , on utilise la fonction de distribution cumulée calculée aux conditions de référence indicées 0 (température moyenne, composition moyenne) et non aux conditions de la maille  $i$ , à partir d'un spectre raie par raie

$$R(\nu) = \frac{\int_0^{\nu} \kappa_{\nu',0}\mathcal{I}_{\nu'}^{\circ}(T_0)d\nu'}{\int_0^{\infty} \kappa_{\nu',0}\mathcal{I}_{\nu'}^{\circ}(T_0)d\nu'}, \quad (2.37)$$

afin d'éviter le stockage de la fonction  $R(\nu)$  à haute résolution spectrale en fonction de la température et de la composition. De manière à préserver la distribution spectrale exacte de l'énergie émise par les paquets, on corrige l'énergie  $q$  par un facteur  $f_{\nu}$  défini par

$$f_{\nu} = \frac{\kappa_{\nu,i}\mathcal{I}_{\nu}^{\circ}(T_i)}{\kappa_{\nu,0}\mathcal{I}_{\nu}^{\circ}(T_0)} \frac{\int_0^{\infty} \kappa_{\nu',0}\mathcal{I}_{\nu'}^{\circ}(T_0)d\nu'}{\int_0^{\infty} \kappa_{\nu',i}\mathcal{I}_{\nu'}^{\circ}(T_i)d\nu'}. \quad (2.38)$$

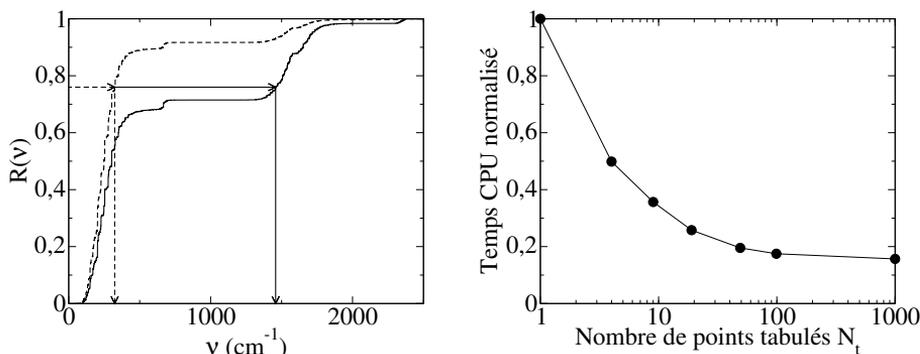


FIGURE 2.3 – À gauche : fonction de distribution cumulée de la fréquence  $\nu$  (équation (2.37)) à partir des luminances modifiées  $\mathcal{I}_\nu^\circ(T_0)$  (trait plein) et des luminances réelles  $I_\nu^\circ(T_0)$  (trait pointillé). À droite : temps CPU de calcul du code Monte Carlo en fonction du nombre de points pré-tabulés pour accélérer l'inversion de la fonction de distribution cumulée  $R(\nu)$ .

La fonction de distribution cumulée associée au spectre raie par raie de la figure 1.3 ( $T_0 = 300$  K,  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$ ,  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ ) est représentée sur la figure 2.3 à partir des luminances modifiées  $\mathcal{I}_\nu^\circ(T_0)$  et aussi à partir des luminances réelles  $I_\nu^\circ(T_0)$ . On note que le changement de variable défini par l'équation (2.28), modifie la distribution spectrale de l'émission et renforce la contribution des hauts nombres d'onde. La recherche de la fréquence  $\nu$  à partir d'un nombre  $R$  tiré aléatoirement entre 0 et 1, est numériquement coûteuse car la fonction de distribution cumulée se compose de milliers de points spectraux. Pour accélérer la recherche, une tabulation de la fonction de distribution cumulée est implémentée pour  $N_t$  valeurs de  $R$  régulièrement espacées. Une première recherche est entreprise parmi les  $N_t$  valeurs pré-calculées  $\nu(R)$ , puis une seconde recherche plus fine est effectuée dans l'intervalle pertinent. La figure 2.3 montre la diminution du temps de calcul en fonction du nombre de points tabulés. Pour  $N_t = 100$ , on atteint une valeur asymptotique, ce qui signifie que la détermination de la fréquence n'est plus une étape limitante. Le temps de calcul total est divisé d'un facteur 5 et le temps de calcul nécessaire à la détermination de la fréquence est divisé d'un facteur 50.

ÉMISSION SURFACIQUE. Le ratio entre l'émission élémentaire  $dP_i^e$  et l'émis-

sion  $P_i^e$  de la maille surfacique  $i$ , dans le cas de parois grises

$$\frac{dP_i^e}{P_i^e} = \frac{\varepsilon_i \mathcal{I}_\nu^\circ(T_i) d\nu}{\varepsilon_i \sigma (T_i^4 - T_S^4)/\pi} \frac{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} d\boldsymbol{\Omega}' d\mathbf{r}_p}{\pi S_i}, \quad (2.39)$$

correspond à une densité de probabilité permettant de définir le point d'émission  $\mathbf{r}_p$ , la direction  $\boldsymbol{\Omega}'$  (telle que  $\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} > 0$ ) et la fréquence  $\nu$  pour les paquets d'énergie émis depuis les parois.

Les deux coordonnées du point d'émission dans la maille sont choisis de façon équiprobable dans chaque direction d'espace. Les angles azimutal et zénithal, définis autour de la normale à la paroi  $\mathbf{n}$ , sont déterminés à partir de la densité de probabilité

$$\frac{\cos \vartheta d\boldsymbol{\Omega}'}{\pi} = \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\frac{1}{2} 2\pi}, \quad (2.40)$$

d'où l'on déduit les fonctions de distribution cumulées

$$R(\vartheta) = \sin^2 \vartheta, \quad \vartheta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad R(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad \varphi \in [0; 2\pi]. \quad (2.41)$$

La fréquence est déterminée à partir de la fonction de distribution cumulée définie à la température de la maille  $T_i$  par

$$R(\nu) = \frac{\int_0^\nu \mathcal{I}_\nu^\circ(T_i) d\nu}{\sigma (T_i^4 - T_S^4)/\pi}. \quad (2.42)$$

En pratique, on tire aléatoirement la fréquence à la température  $T_0$ ,  $\nu(T_0)$ , pour éviter le stockage de la fonction  $R(\nu)$  en fonction de la température. On exploite ensuite l'expression de la fonction de Planck pour calculer  $\nu(T_i)$  selon  $\nu(T_i) = \nu(T_0)T_i/T_0$ . Cette relation n'est pas rigoureuse lorsque l'on utilise les luminances modifiées mais n'a qu'une incidence mineure sur les résultats.

### Traitement de l'absorption et de la réflexion

La probabilité qu'un photon de fréquence  $\nu$ , se propageant dans une direction  $\boldsymbol{\Omega}$ , soit absorbé entre les abscisses curvilignes  $s$  et  $s + ds$  ( $s = 0$  étant le point d'émission) est égale à  $\kappa_\nu(s) \exp(-\int_0^s \kappa_\nu(s') ds') ds$ . En tirant uniformément un nombre aléatoire entre 0 et 1, on peut déterminer une longueur d'extinction par absorption  $l$

$$R(l) = 1 - \exp\left(-\int_0^l \kappa_\nu(s) ds\right), \quad (2.43)$$

pour les paquets d'énergie émis au point  $\mathbf{r}$  ou  $\mathbf{r}_p$  depuis une maille volumique ou surfacique. Un calcul d'intersection permet de déterminer la maille atteinte par le rayon de longueur  $l$ , tracé depuis le point d'émission dans la direction  $\boldsymbol{\Omega}$ , et d'y déposer l'intégralité de l'énergie transportée par le paquet.

Cette approche probabiliste de l'absorption n'est cependant pas adoptée ici. Un traitement déterministe de l'absorption, connu pour accélérer la convergence des calculs, est préféré. L'énergie du paquet est atténuée continûment dans chaque maille traversée par le rayon, tracé depuis le point d'émission  $\mathbf{r}$  dans la direction  $\boldsymbol{\Omega}$ . L'énergie  $q_j$  absorbée par la  $j^{\text{ème}}$  maille traversée est égale à l'énergie du paquet multipliée par l'absorptivité de la maille  $j$  et par la transmittivité du trajet optique entre le point d'émission et le point d'intersection avec la maille  $j$ , soit

$$q_j = q(1 - \exp(-\kappa_{\nu,j}l_j)) \prod_{k=1}^{j-1} \exp(-\kappa_{\nu,k}l_k). \quad (2.44)$$

La propagation du rayon dans le maillage et le calcul des longueurs  $l_k$  sont assurés par des calculs d'intersection exacts entre le rayon d'équation (2.34) et le maillage cartésien. À partir d'un point d'émission quelconque situé dans la maille volumique  $j$ , on calcule la distance signée entre le point et les six plans correspondants aux six faces de la maille  $j$ . La plus petite distance strictement positive correspond à la face de la maille interceptée par le rayon et les coordonnées du point d'intersection se déduisent immédiatement. Cet algorithme est répété pour propager le rayon jusqu'à ce que son énergie devienne inférieure à  $10^{-4}q$ . Le résidu est intégralement déposé dans la maille suivante de façon à conserver l'énergie totale.

Lorsque le rayon atteint une paroi, l'énergie  $q_{j'}$  absorbée par la maille surfacique  $j'$  est égale à

$$q_{j'} = q \varepsilon_{j'} \prod_{k=1}^{j'-1} \exp(-\kappa_{\nu,k}l_k). \quad (2.45)$$

Si la paroi n'est pas noire, la propagation du rayon se poursuit en tirant aléatoirement une direction de réflexion selon les relations (2.41). Étant donné que l'on considère des parois diffuses, la direction du rayon réfléchi est indépendante de la direction du rayon incident.

### Estimation du résultat et de l'erreur

Chaque tir Monte Carlo est une expérience aléatoire dont le résultat est la puissance absorbée par les mailles traversées par le rayon émis depuis une maille  $i$ . La puissance absorbée  $P_j^a$  par la maille  $j$  est une variable aléatoire continue, d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$ , qui prend des valeurs comprises entre 0 et  $P_{\text{tot}}^e$  si la puissance émise lors du tir est  $q = P_{\text{tot}}^e$ . En réalisant  $N_{\text{tirs}}$  expériences, on peut estimer la puissance absorbée  $m$  en calculant la moyenne arithmétique

$$m^* = \frac{1}{N_{\text{tirs}}} \sum_{t=1}^{N_{\text{tirs}}} P_{j,t}^a. \quad (2.46)$$

$m^*$  est un estimateur non biaisé de la puissance absorbée, d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2/N_{\text{tirs}}$ . En estimant  $m$  par  $m^*$ , l'erreur commise tend vers 0 quand le nombre de tirs tend vers l'infini : l'écart quadratique décroît en  $N_{\text{tirs}}^{-1}$  et l'écart type décroît en  $N_{\text{tirs}}^{-1/2}$ . Pour diviser l'écart type par 10, il faut multiplier le nombre de tirs (et donc le temps de calcul) par 100. Pour estimer de façon non biaisée la variance  $\sigma^2$ , on utilise la variance empirique

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{N_{\text{tirs}} - 1} \sum_{t=1}^{N_{\text{tirs}}} (P_{j,t}^a - m^*)^2. \quad (2.47)$$

On peut ensuite estimer l'écart type statistique du résultat Monte Carlo par  $\sigma^*/\sqrt{N_{\text{tirs}}}$ . Chaque tir étant indépendant des autres, le théorème central limite indique que la somme des résultats suit une loi Gaussienne. La probabilité que la valeur exacte de la puissance absorbée dans la maille  $j$  soit comprise dans l'intervalle  $m^* \pm \sigma^*/\sqrt{N_{\text{tirs}}}$  est de 68 %.

L'indépendance des tirs permet d'implémenter facilement l'algorithme Monte Carlo de manière parallèle, sur  $N_p$  processeurs. Chaque processeur réalise un nombre de tirs  $N_{\text{tirs}}/N_p$  et fournit un résultat partiel  $P_{j,p}^a$  en moyennant sur l'ensemble de ses tirs. Le résultat final est ensuite estimé selon

$$m^* = \frac{1}{N_p} \sum_{p=1}^{N_p} P_{j,p}^a, \quad (2.48)$$

et l'écart type statistique du résultat Monte Carlo selon

$$\frac{\sigma^*}{\sqrt{N_p}} = \sqrt{\frac{1}{N_p} \frac{1}{N_p - 1} \sum_{p=1}^{N_p} (P_{j,p}^a - m^*)^2}. \quad (2.49)$$

À noter que les estimations données par les équations (2.47) et (2.49) ne sont pas rigoureusement équivalentes.

### Efficacité de l'algorithme

L'utilisation des luminances modifiées  $\mathcal{I}_\nu$  et  $\mathcal{I}_\nu^\circ$  au lieu des luminances réelles  $I_\nu$  et  $I_\nu^\circ$  dans l'algorithme Monte Carlo accélère fortement la convergence des calculs dans des situations quasi-isothermes. Des calculs de transferts radiatifs, menés à partir d'un champ de température prescrit issu d'un calcul couplé en cavité différentiellement chauffée, ont montré que le temps de calcul est diminué d'un facteur  $(T_0/\Delta T)^2$  pour un même niveau de convergence. L'algorithme développé dans ces travaux a également été confronté aux algorithmes Monte Carlo réciproques de Tessé *et al.* (2002), eux aussi adaptés aux faibles gradients de température : à nombre de tirs fixé, des résultats plus précis ont été obtenus ici pour les flux aux parois mais des résultats moins précis ont été obtenus pour les puissances volumiques.

L'ensemble de ces résultats est reporté en détail dans l'annexe C.

### 2.2.3 Méthode de lancer de rayons

La méthode de lancer de rayons repose sur une discrétisation de la solution de l'équation de transfert radiatif le long d'un trajet optique d'équation  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_p + s'\boldsymbol{\Omega}$ , allant d'un point  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_p$  ( $s' = 0$ ) au bord du domaine jusqu'à un point  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  ( $s' = s$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = & \int_0^s \kappa_\nu(\mathbf{r}') \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{r}')) \exp\left(-\int_{s'}^s \kappa_\nu(s'') ds''\right) ds' \\ & + \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p) \exp\left(-\int_0^s \kappa_\nu(s') ds'\right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Une fine discrétisation spatiale, angulaire et fréquentielle permet de calculer le champ de luminance  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  et les termes sources (2.31) et (2.32). Dans le cas de parois non noires, la luminance partante de la paroi  $\mathcal{I}_\nu^p(\mathbf{r}_p)$  donnée par l'équation (2.30) dépend du champ de luminance incident  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}')$ ,  $\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0$ , déterminé par l'équation (2.50), ce qui rend implicite la résolution du problème. Les champs de luminance incidente  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}')$  et partante  $\mathcal{I}_\nu^p(\mathbf{r}_p)$  sont calculés itérativement à partir des relations (2.50) et (2.30) jusqu'à la convergence. Le temps de calcul de la méthode de lancer de rayons est proportionnel au nombre de points de discrétisation spatiale, directionnelle

et fréquentielle, et au nombre moyen de cellules croisées lors du tracé d'un rayon, ce qui contraint fortement son utilisation. Pour les présents travaux, la méthode de lancer de rayons n'a pu être utilisée que combinée avec le modèle spectral ADF présenté au chapitre précédent, ce qui a permis de diminuer la discrétisation du spectre du mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> de 160 000 points avec l'approche raie par raie à 16 points avec l'approche ADF.

La méthode de lancer de rayons est implémentée en imposant la température de *shift* légèrement inférieure à la température minimale du milieu, pour les luminances modifiées  $\mathcal{I}_\nu$  et  $\mathcal{I}_\nu^\circ$ , de manière à conserver des luminances strictement positives (ce critère est requis pour le calcul itératif des luminances partantes des parois).

### Discrétisation spatiale

Le domaine de calcul (gaz et parois) est discrétisé en mailles (volumique et surfacique) isothermes et de coefficient d'absorption uniforme, depuis lesquelles est tracé un grand nombre de rayons. Le champ de luminance, la puissance volumique et le flux surfacique aux parois sont calculés au centre des mailles.

L'équation (2.50) discrétisée le long d'un rayon arrivant au point  $\mathbf{r}_i$  dans une direction  $\boldsymbol{\Omega}$  s'écrit

$$\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_i, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_{j=1}^{N_k} \left[ \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{r}_j))(1 - \exp(-\kappa_{\nu,j}l_j)) \prod_{k=1}^{j-1} \exp(-\kappa_{\nu,k}l_k) \right] + \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p, N_k+1) \prod_{k=1}^{N_k} \exp(-\kappa_{\nu,k}l_k). \quad (2.51)$$

La détermination des  $N_k$  cellules traversées et des longueurs  $l_k$  est réalisée au moyen de calculs d'intersections exacts entre le rayon et le maillage cartésien, comme pour le code de Monte Carlo. La luminance partante  $\mathcal{I}_\nu^p(\mathbf{r}_p, N_k+1)$  est supposée constante sur la maille surfacique  $N_k + 1$  qui contient le point ( $\mathbf{r}_p$ ).

Le pas de discrétisation spatiale  $\delta x$  doit vérifier un double critère. Il doit être suffisamment petit pour supposer les mailles isothermes et pour limiter l'épaisseur optique des mailles  $\kappa\delta x$ , car plus le milieu est optiquement épais, plus le champ de luminance est sensible à de faibles variations de

température. Des tests de raffinement de maillage ont montré que la précision des calculs était maintenue jusqu'à des épaisseurs optiques de maille de l'ordre de l'unité. Pour des épaisseurs optiques de maille supérieures, une interpolation de la température entre les mailles est nécessaire.

### Discrétisation angulaire

La direction  $\boldsymbol{\Omega}$  d'un rayon issu du centre d'une maille volumique est définie par son angle zénithal  $\vartheta$  et azimutal  $\varphi$  autour de l'axe  $\mathbf{z}$  selon l'équation (2.34). Les angles azimutaux sont discrétisés en  $N_\varphi$  valeurs régulièrement espacées entre  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 2\pi$  et les angles zénithaux sont discrétisés en  $N_\vartheta$  valeurs, dont les cosinus sont régulièrement espacés entre  $\cos \vartheta = -1$  et  $\cos \vartheta = 1$ . La direction  $\boldsymbol{\Omega}'$  d'un rayon issu du centre d'une maille surfacique est également définie par ses angles zénithal et azimutal autour de la normale à la paroi  $\mathbf{n}$ . Les angles azimutaux sont discrétisés en  $N_\varphi^p$  valeurs régulièrement espacées entre  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 2\pi$  et les angles zénithaux sont discrétisés en  $N_\vartheta^p$  valeurs, dont les carrés des cosinus sont régulièrement espacés entre  $\cos^2 \vartheta = 0$  et  $\cos^2 \vartheta = 1$ . Les intégrations directionnelles intervenant dans le calcul des termes sources (2.31) et (2.32) sont évaluées selon

$$\int_{4\pi} \mathcal{I}_\nu d\boldsymbol{\Omega} = \frac{4\pi}{N_\vartheta N_\varphi} \sum_{m=1}^{N_\vartheta} \sum_{n=1}^{N_\varphi} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}_{mn}), \quad (2.52)$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}' = \frac{\pi}{N_\vartheta^p N_\varphi^p} \sum_{m=1}^{N_\vartheta^p} \sum_{n=1}^{N_\varphi^p} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}'_{mn}). \quad (2.53)$$

En toute rigueur, le nombre de directions  $N_\vartheta \times N_\varphi$  doit permettre de relier chaque couple de maille par un rayon. En trois dimensions d'espace, si  $N^3$  est le nombre de points, le nombre de directions doit être de l'ordre de  $N^2$ . Le nombre de directions depuis les parois est choisi de façon à conserver le nombre de directions par hémisphère, soit  $N_\varphi^p = N_\varphi$  et  $N_\vartheta^p = N_\vartheta/2$ .

Le calcul de la luminance dans une direction discrète pouvant être mené indépendamment des autres, la méthode de lancer de rayons est implémentée de manière parallèle selon le nombre de directions. Chaque processeur effectue  $(N_\vartheta \times N_\varphi)/N_p$  tracés depuis chaque point du domaine discrétisé,  $N_p$  étant le nombre de processeurs ( $(N_\vartheta^p \times N_\varphi^p)/N_p$  tracés depuis chaque point de paroi).

## Discrétisation spectrale

Le modèle ADF (voir § 1.3.2) est utilisé pour traiter la dépendance fréquentielle du coefficient d'absorption. L'équation (2.50) est résolue pour chaque classe ADF  $i$  : la luminance spectrale  $\mathcal{I}_\nu$ , la luminance d'équilibre  $\mathcal{I}_\nu^\circ(T)$  et le coefficient d'absorption sont remplacés respectivement par  $\mathcal{I}_i$ ,  $a_i\sigma(T^4 - T_S^4)/\pi$  et  $\kappa_i$ .

Le calcul des termes sources (2.31) et (2.32) s'effectue selon

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q}^R(\mathbf{r}) = & \sum_{i=1}^{N_{\text{ADF}}} 4\kappa_i(\mathbf{r})a_i(\mathbf{r})\sigma(T(\mathbf{r})^4 - T_S^4) \\ & - \sum_{i=1}^{N_{\text{ADF}}} \int_0^{4\pi} \kappa_i(\mathbf{r})\mathcal{I}_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})d\boldsymbol{\Omega}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^R \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_p) = & \sum_{i=1}^{N_{\text{ADF}}} \varepsilon(\mathbf{r}_p)a_i(\mathbf{r})\sigma(T(\mathbf{r}_p)^4 - T_S^4) \\ & - \sum_{i=1}^{N_{\text{ADF}}} \varepsilon(\mathbf{r}_p) \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_i(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}')|\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}|d\boldsymbol{\Omega}'. \end{aligned} \quad (2.55)$$

### 2.2.4 Validation et comparaison des méthodes

#### Mur plan homogène isotherme

Le mur plan homogène isotherme est une configuration unidimensionnelle pour laquelle les transferts radiatifs peuvent être résolus de manière analytique, ce qui constitue un premier cas de validation pour les codes de Monte Carlo et de lancer de rayons. On considère un milieu gris, de coefficient d'absorption  $\kappa$ , isotherme à  $T_{\text{gaz}} = 300$  K, contenu entre deux parois noires parallèles, de température uniforme  $T_{\text{paroi}} = 300,1$  K, infinies dans les directions  $y$  et  $z$  et séparées par une distance  $L$ . Le flux radiatif aux parois  $x = 0$  et  $x = L$  ainsi que la puissance radiative volumique sont donnés par les relations

$$\mathbf{q}^R \cdot \mathbf{n} \big|_{\text{paroi}} = \sigma(T_{\text{paroi}}^4 - T_{\text{gaz}}^4)(1 - 2E_3(\kappa L)), \quad (2.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^R(x) = 2\kappa\sigma(T_{\text{gaz}}^4 - T_{\text{paroi}}^4)(E_2(\kappa x) + E_2(\kappa(L - x))), \quad (2.57)$$

TABLE 2.3 – Mur plan homogène isotherme. Flux radiatif adimensionné par  $\sigma(T_{\text{paroi}}^4 - T_{\text{gaz}}^4)$  calculé par l'équation (2.56), par la méthode de lancer de rayons et par la méthode de Monte Carlo.

$\kappa L$	Analytique	Lancer de rayons	Monte Carlo
0,25	0,35063	0,35055	0,35063
1	0,78062	0,78062	0,78062
2	0,93973	0,93974	0,93973

où  $E_2$  et  $E_3$  sont les fonctions intégréo-exponentielles définies par  $E_n(x) = \int_0^1 \chi^{n-2} \exp(-x/\chi) d\chi$ .

Pour résoudre ce problème avec la méthode de Monte Carlo 3D, le calcul est effectué dans un cube de côté  $L$  en imposant des parois parfaitement réfléchissantes spéculaires en  $y = 0$ ,  $y = L$ ,  $z = 0$  et  $z = L$ . Les directions  $y$  et  $z$  sont considérées comme des invariants statistiques selon lesquels on peut moyenner le résultat. La méthode de lancer de rayons ne permet pas de traiter la réflexion spéculaire. Avec cette méthode, le problème est résolu dans un domaine parallélépipédique tel que  $L_z = L_y = 10^4 L$ , avec des parois diffuses parfaitement réfléchissantes aux extrémités et le résultat est extrait le long de la ligne  $y = L_y/2$  et  $z = L_z/2$  afin de limiter l'influence des bords. Pour chacune des méthodes, le domaine est maillé par 21 points de Gauss-Lobatto dans la direction  $x$  et 21 points uniformément espacés dans les directions  $y$  et  $z$ . Le nombre de tirs Monte Carlo est fixé à  $N_{\text{tirs}} = 6 \times 10^9$  et les nombres de directions du lancer de rayons sont fixés à  $N_\vartheta \times N_\varphi = 60 \times 60$  et  $N_\vartheta^p \times N_\varphi^p = 30 \times 60$ .

Le calcul est mené pour les épaisseurs optiques  $\kappa L = 0,25$ ,  $\kappa L = 1$  et  $\kappa L = 2$ . Les résultats sur la puissance volumique sont représentés sur la figure 2.4 : les écarts avec la solution analytique n'excèdent pas 0,3 % pour la méthode de Monte Carlo et 0,7 % pour la méthode de lancer de rayons. Les résultats sur le flux aux parois sont donnés dans le tableau 2.3. L'accord avec la solution analytique est excellent pour les deux méthodes.

### Cas de validation tridimensionnel

Peu de calculs de référence tridimensionnels ont été proposés dans la littérature consacrée aux transferts radiatifs et les rares cas de référence disponibles ont généralement été calculés avec des méthodes approchées comme la mé-

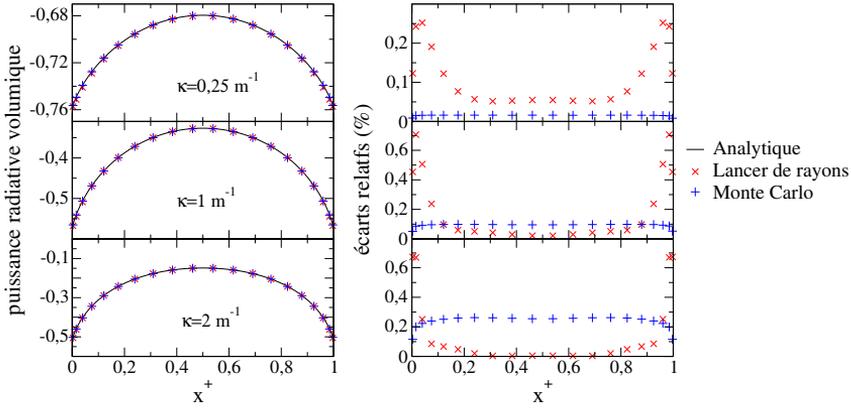


FIGURE 2.4 – Mur plan homogène isotherme. À gauche, puissance radiative volumique adimensionnée par  $4\kappa\sigma(T_{\text{paroi}}^4 - T_{\text{gaz}}^4)$  calculée par l'équation (2.57), par la méthode de lancer de rayons et par la méthode de Monte Carlo. À droite, erreur relative du calcul Monte Carlo et lancer de rayons comparé à la solution analytique.

thode des ordonnées discrètes. On propose ici un cas test tridimensionnel afin de valider de façon croisée le code de Monte Carlo et le code de lancer de rayons.

On considère une cavité cubique de taille  $L$ , fermée par des parois d'émissivité  $\varepsilon = 0,5$  et contenant un milieu gris d'épaisseur optique  $\kappa L = 1$ . On impose un champ de température Gaussien dans le milieu

$$T(x^+, y^+, z^+) = \exp(-(x^+ - x_c^+)^2 - (y^+ - y_c^+)^2 - (z^+ - z_c^+)^2)\Delta T + T_0 \quad (2.58)$$

avec  $(x_c^+, y_c^+, z_c^+) = (0, 25, 0, 25, 0, 25)$ ,  $\Delta T = 10 \text{ K}$  et  $T_0 = 300 \text{ K}$ . Les parois sont isothermes à la température  $T_0$ . Le domaine est discrétisé en 43 points uniformément espacés dans chaque direction d'espace. Le nombre de tirs Monte Carlo est fixé à  $N_{\text{tirs}} = 6 \times 10^9$  et les nombres de directions du lancer de rayons sont fixés à  $N_\theta \times N_\varphi = 60 \times 60$  et  $N_\theta^p \times N_\varphi^p = 30 \times 60$ .

La figure 2.5 montre la puissance volumique radiative et le flux radiatif pour différents plans  $x$ , calculés avec la méthode de lancer de rayons. Comme le champ de température, le champ de puissance radiative présente une symétrie de réflexion selon la ligne  $x^+ = y^+ = z^+$  et ces quelques plans sont donc représentatifs du champ 3D complet. Les parois étant plus froides que

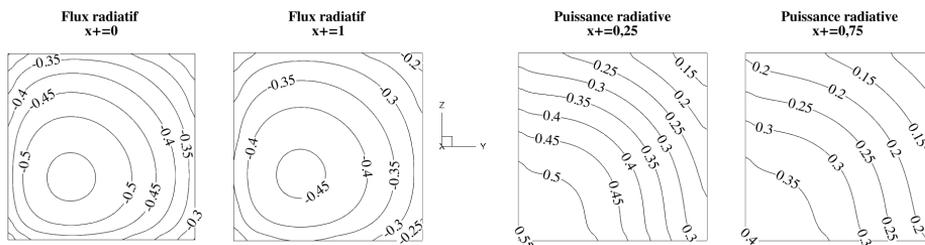


FIGURE 2.5 – Cas de validation 3D. Isovaleurs du flux radiatif (adimensionné par  $\varepsilon\sigma((T_0+\Delta T)^4 - T_0^4)$ ) à  $x^+ = 0$  et  $x^+ = 1$  et puissance radiative volumique (adimensionnée par  $4\kappa\sigma((T_0+\Delta T)^4 - T_0^4)$ ) à  $x^+ = 0, 25$  et  $x^+ = 0, 75$  calculés avec la méthode de lancer de rayons.

le milieu, le flux radiatif est négatif et possède un minimum près du point chaud  $(x_c^+, y_c^+, z_c^+)$ . Le milieu étant plus chaud que les parois, la puissance radiative volumique est positive et possède un maximum dans le coin  $x^+ = y^+ = z^+ = 0$ . La comparaison entre les calculs Monte Carlo et lancer de rayons est présentée figures 2.6 et 2.7. On observe un bon accord entre les deux méthodes : les écarts sont de l'ordre de l'écart type Monte Carlo et n'excèdent pas 0,3 % pour les puissances et 0,4 % pour les flux. L'écart type Monte Carlo est quasi-constant et de l'ordre de 0,1 %.

Une autre comparaison tridimensionnelle entre la méthode de Monte Carlo et la méthode de lancer de rayons est fournie en annexe C à partir d'un champ de température issu d'un calcul de transfert couplé en cavité différentiellement chauffée.

### Lancer de rayons déterministe ou Monte Carlo statistique ?

Pour établir des solutions numériques couplées de référence, la méthode de transfert radiatif idéale serait déterministe et ne reposerait sur aucune modélisation. Ces deux critères ne sont vérifiés ni par la méthode de lancer de rayons ADF ni par la méthode de Monte Carlo raie par raie. Il s'agit néanmoins de choisir la méthode la plus précise et la plus adaptée.

La présence de fluctuations statistiques sur le calcul de la puissance radiative pose problème pour l'étude du régime stationnaire car la convergence temporelle n'est plus rigoureusement possible. L'étude de la transition vers l'insationnarité est également délicate car l'on doit pouvoir distinguer

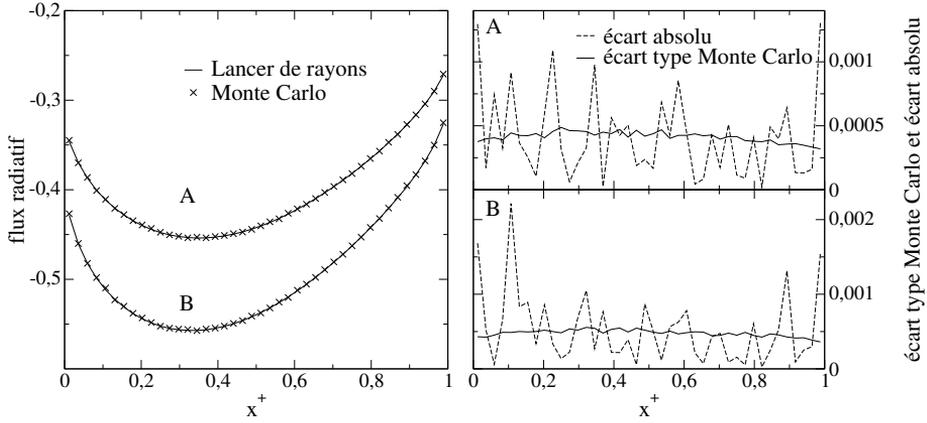


FIGURE 2.6 – Cas de validation 3D. À gauche : flux radiatif adimensionné par  $\varepsilon\sigma((T_0 + \Delta T)^4 - T_0^4)$  selon les lignes  $y^+ = 0, 25, z^+ = 1$  (A), et  $y^+ = 0, 25, z^+ = 0$  (B). À droite : différence absolue entre les calculs lancer de rayons et Monte Carlo comparée à l'écart type des calculs Monte Carlo aux mêmes positions.

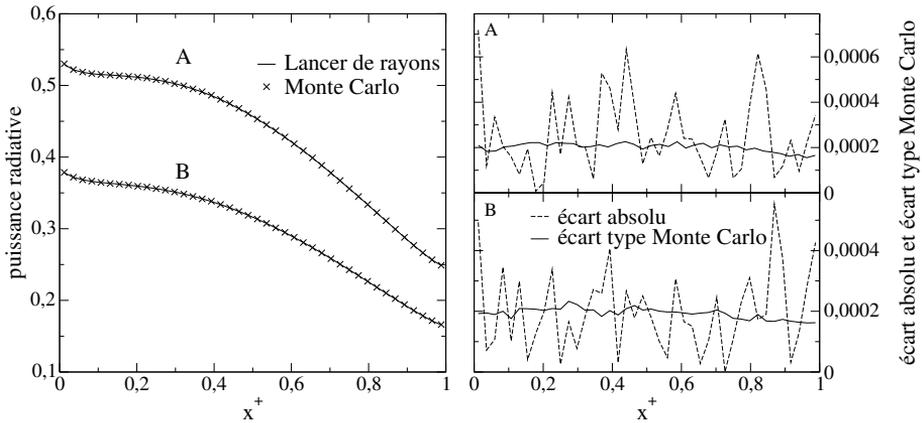


FIGURE 2.7 – Cas de validation 3D. À gauche : puissance radiative adimensionnée par  $4\kappa\sigma((T_0 + \Delta T)^4 - T_0^4)$  selon les lignes  $y^+ = 0, 25, z^+ = 0, 25$  (A), et  $y^+ = 0, 25, z^+ = 0, 75$  (B). À droite : différence absolue entre les calculs lancer de rayons et Monte Carlo comparée à l'écart type des calculs Monte Carlo aux mêmes positions.

sans ambiguïté les fluctuations statistiques des fluctuations physiques. Par ailleurs, la formulation ADF utilisée par la méthode de lancer de rayons est exacte, car le coefficient d'absorption est supposé uniforme, et les erreurs de modélisation ne proviennent que de la discrétisation de la fonction de distribution cumulée du coefficient d'absorption. Les calculs d'émissivité présentés au chapitre précédent (§ 1.3.2) montrent que la précision de la discrétisation est du même ordre, voire meilleure, que les incertitudes sur les intensités et les largeurs de raie des spectres à haute résolution.

Le choix de la méthode de lancer de rayons associée au modèle ADF pour les calculs couplés s'impose donc. La méthode de Monte Carlo pourrait néanmoins s'avérer pertinente dans le cas de variations de température importantes pour lesquelles le coefficient d'absorption ne peut être considéré constant.

## 2.3 Couplage de code

La résolution de l'équation de bilan d'énergie par la méthode spectrale de collocation a été présentée au paragraphe 2.1 en considérant des termes sources radiatifs  $\nabla \cdot \mathbf{q}^R(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{q}^R \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_p)$  nuls. Lorsque le fluide dans la cavité et les parois rayonnent, le champ de puissance radiative est calculé à partir du champ de température à l'instant  $n\delta t$  et ajouté au terme source  $S_T$  du bilan d'énergie discrétisé (équation (2.22)) pour prédire le champ de température à l'instant  $(n+1)\delta t$ . Cependant, il est suffisant de n'actualiser le champ de puissance radiative que tous les 10  $\delta t$  ou 20  $\delta t$  : le pas de temps du code spectral est imposé par la contrainte de stabilité du schéma de discrétisation temporelle et non par les variations de température qui restent négligeables sur cet intervalle de temps (voir annexe A). Le principe du couplage entre les codes de convection naturelle et de transfert radiatif est schématisé par l'algorithme présenté figure 2.8. Les deux codes fonctionnent comme des programmes parallèles indépendants qui échangent des données à chaque itération radiative (après  $\alpha$  itérations convectives, si  $\alpha$  est la fréquence de couplage). Le nombre de processeurs affecté à chaque code est choisi judicieusement pour synchroniser les communications et limiter les temps d'attente : le temps de restitution d'une itération radiative doit être à peu près égal au temps de restitution de  $\alpha$  itérations convectives.

Le maillage spatial du code de transfert radiatif est construit en regroupant par deux les mailles du maillage convectif (maillage Chebyshev dans

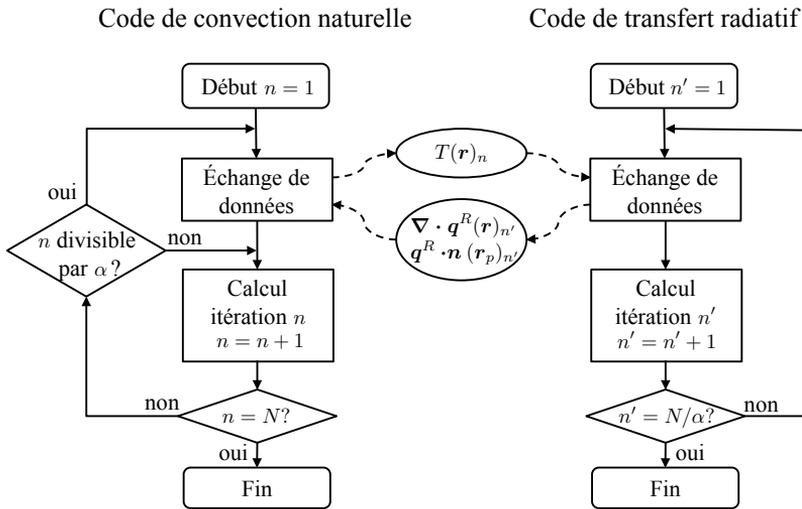


FIGURE 2.8 – Algorithme décrivant le couplage entre les codes de convection naturelle et de transfert radiatif.  $N$  est le nombre d’itérations temporelles du code de convection naturelle et  $\alpha$  la fréquence de couplage des calculs de transfert radiatif.

chaque boîte issue de la décomposition de domaine, voir § 2.1.4) selon chaque axe  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Ce maillage plus grossier s’est avéré suffisant pour l’étude de la gamme  $10^5 \leq Ra \leq 3 \times 10^8$  (voir annexe A). L’échange des variables entre les deux codes (température, puissance et flux radiatifs), représenté figure 2.8, nécessite une interpolation spatiale : le champ de température est calculé sur les noeuds du maillage convectif et le champ de rayonnement est calculé au centre des mailles du maillage radiatif. Le champ de température, calculé par le code de convection naturelle, est échantillonné sur les noeuds du maillage radiatif avec un pas de deux dans chaque direction d’espace. Une interpolation linéaire est utilisée pour déterminer la température au centre des mailles du maillage radiatif. Le champ de rayonnement, calculé par le code de transfert radiatif, est interpolé linéairement sur les noeuds du maillage radiatif. Une interpolation de Lagrange est utilisée pour déterminer

la puissance radiative sur les nœuds du maillage convectif (et le flux radiatif au bord du domaine).

Chacun des codes de calcul a été développé en langage Fortran 95 et parallélisé en utilisant la bibliothèque *Message Passing Interface*. L'interface de couplage *Coupling Program Layer*, développée par Jalel Chergui, a été implémentée pour traiter les échanges de données entre le code de convection naturelle et le code de transfert radiatif.

## Chapitre 3

# Simulations couplées en régime stationnaire

PARMI LES travaux numériques récents consacrés au couplage entre la convection naturelle et le rayonnement des gaz dans des cavités différentiellement chauffées en régime stationnaire, certains s'intéressent à des mélanges gazeux réels, non-gris, tout en se restreignant à des configurations géométriques bidimensionnelles (Chang *et al.*, 1983; Colomer *et al.*, 2007; Meftah *et al.*, 2009; Lari *et al.*, 2012). À l'inverse, les effets tridimensionnels n'ont été explorés que pour des milieux gris (Colomer *et al.*, 2004; Borjini *et al.*, 2008; Kumar et Eswaran, 2010). Des méthodes numériques approchées, comme la méthode des ordonnées discrètes ou la méthode des volumes finis, sont employées dans ces travaux pour résoudre l'équation de transfert radiatif. La réalisation de simulations numériques de référence en régime stationnaire reste donc nécessaire.

Des solutions stationnaires de référence sont obtenues à  $Ra = 10^5$ ,  $Ra = 10^6$  et  $Ra = 3 \times 10^7$  en utilisant le code spectral (§ 2.1), la méthode de lancer de rayons (§ 2.2.3) et le modèle ADF (§ 1.3.2). Différentes configurations sont considérées pour mettre en valeur distinctement les effets du rayonnement du gaz et des parois. Les résultats sont d'abord discutés à  $Ra = 10^6$ , puis l'influence du nombre de Rayleigh est analysée. Les paramètres des simulations numériques sont donnés en annexe A. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été repris dans une publication (Soucasse *et al.*, 2012).

TABLE 3.1 – Configurations étudiées.

Cas	A	B	C	D
Parois isothermes	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$
Parois adiabatiques	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$
Gaz	Transparent	Rayonnant	Transparent	Rayonnant

### 3.1 Configurations étudiées

La mise en équation du couplage entre le rayonnement et la convection naturelle (§ 1.1) a montré deux effets des transferts radiatifs :

- la modification du bilan d'énergie macroscopique par l'ajout du terme source  $-\nabla \cdot \mathbf{q}^R$  (équation 1.4) ;
- la modification de la condition aux limites thermique pour les parois adiabatiques, le flux radiatif  $\mathbf{q}^R \cdot \mathbf{n}$  égalisant le flux conductif (équation 1.8).

Pour mettre en évidence distinctement les effets de ces deux couplages, quatre configurations, résumées dans le tableau 3.1, ont été étudiées.

La première configuration, nommée A, correspond au cas où l'écoulement de convection naturelle n'est pas affecté par les transferts radiatifs. Le gaz est supposé transparent et les parois adiabatiques parfaitement réfléchissantes. Les deux parois isothermes sont noires et échangent de l'énergie par rayonnement mais ce flux n'influence ni le champ de vitesse, ni le champ de température. Ce cas est pris pour référence pour analyser les effets du rayonnement du gaz et des parois. Dans la seconde, nommée B, l'écoulement de convection naturelle et les transferts radiatifs sont couplés uniquement au niveau du bilan d'énergie local, en supposant le gaz rayonnant et les parois adiabatiques parfaitement réfléchissantes. À l'inverse, la configuration C réalise le couplage uniquement au travers des conditions aux limites thermiques. Les six parois de la cavité sont prises noires et le gaz transparent. Enfin, pour le cas D, les six parois sont supposées noires et le gaz rayonnant, ce qui combine les deux effets.

L'analyse dimensionnelle (§ 1.2) a montré qu'en l'absence de transferts radiatifs, le problème ne dépendait que de deux paramètres : le nombre de Rayleigh et le nombre de Prandtl. La prise en compte de la dépendance spectrale des propriétés radiatives du gaz ne permet plus l'adimensionnement et la taille de la cavité, la fraction molaire des espèces absorbantes

ainsi que la température moyenne doivent être spécifiées. On considère de l'air à la température moyenne  $T_0 = 300$  K, pour lequel  $Pr = 0,707$ , contenu dans une cavité de taille  $L = 1$  m. Les fractions molaires de vapeur d'eau et de dioxyde de carbone sont fixées à  $X_{H_2O} = 0,02$  et  $X_{CO_2} = 0,001$ .

Des solutions stationnaires ont été obtenues à  $Ra = 10^5$  ( $\Delta T = 1,09 \times 10^{-3}$  K) et  $Ra = 10^6$  ( $\Delta T = 1,09 \times 10^{-2}$  K) pour les quatre cas et à  $Ra = 3 \times 10^7$  ( $\Delta T = 3,28 \times 10^{-1}$  K) pour les cas A et B. Les résultats sont présentés en détail à  $Ra = 10^6$  puis l'influence du nombre de Rayleigh est discutée.

## 3.2 Effets du rayonnement du gaz et des parois à Ra=10<sup>6</sup>

### 3.2.1 Structure du champ de température

Le champ de température des parois adiabatiques ainsi que le champ de température dans le gaz dans le plan  $y^+ = 0,5$  sont représentés sur les figures 3.1 et 3.2, pour chacun des cas étudiés. Sont tracés sur la figure 3.3 de manière plus quantitative le profil de température sur la paroi haute et le profil de température vertical au centre de la cavité, moyennés selon  $y$ .

Lorsque les parois adiabatiques sont noires et le gaz transparent (cas C), le transfert radiatif entre les six parois de la cavité impose une distribution de température stratifiée dans la direction  $x$  sur les parois adiabatiques. Cette distribution est très différente du cas A où les parois latérales sont stratifiées selon la direction  $z$  et où les parois hautes et basses sont proches de l'isothermie. Le profil de température sur la paroi haute (figure 3.3), présente une allure linéaire, excepté à proximité des parois isothermes. Le rayonnement des six parois tend à créer un profil plat, proche de zéro, créant un saut de température à proximité des parois chaude et froide, amorti par la conduction. Le refroidissement de la paroi haute et le réchauffement de la paroi basse induisent une homogénéisation de la température du gaz (figure 3.2) et une forte baisse de la stratification thermique au cœur de la cavité (figure 3.3).

Lorsque les parois adiabatiques sont parfaitement réfléchissantes mais que le gaz rayonne (cas B), on observe également une homogénéisation de la température du gaz ainsi qu'une baisse de la stratification (figures 3.2 et 3.3). Le mécanisme physique est cependant différent du cas C, puisque

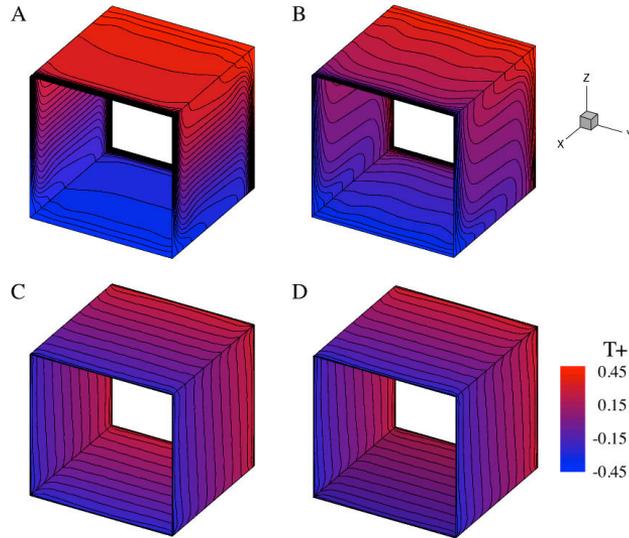


FIGURE 3.1 –  $Ra = 10^6$ . Champ de température sur les parois adiabatiques. L'écart entre deux isothermes est de 0,05.

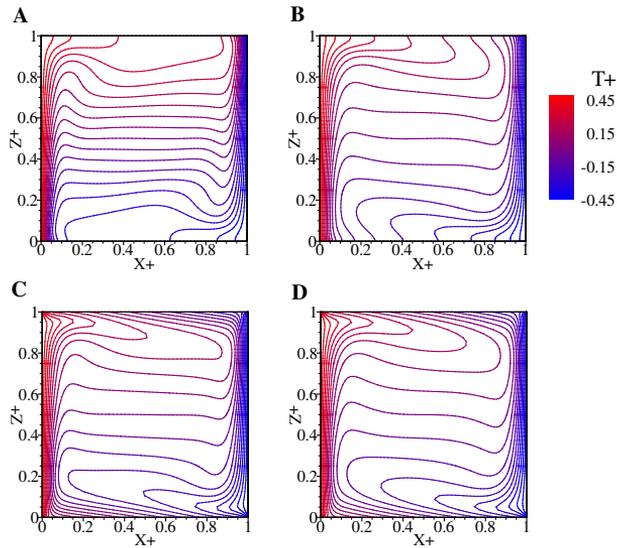


FIGURE 3.2 –  $Ra = 10^6$ . Température du gaz dans le plan  $y^+ = 0,5$ . L'écart entre deux isothermes est de 0,05.

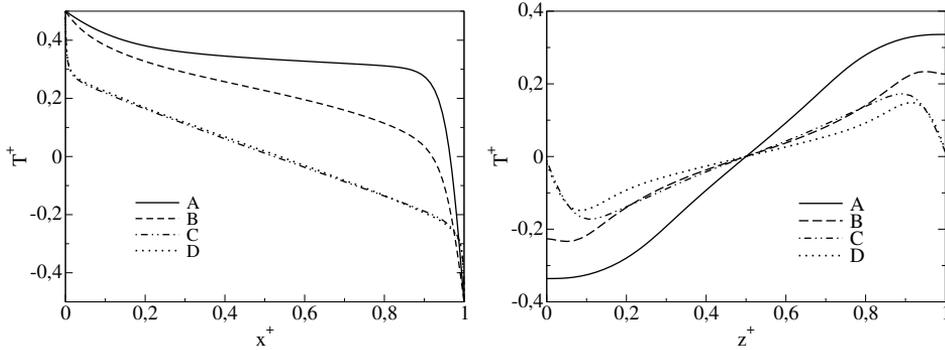


FIGURE 3.3 –  $Ra = 10^6$ . À gauche : profil de température sur la paroi haute  $z^+ = 1$ . À droite : profil de température à  $x^+ = 0,5$ . Les résultats sont moyennés selon  $y$ .

les transferts radiatifs gaz-gaz et gaz-parois ont un effet direct sur la température du gaz. La température des parois latérales et horizontales est maintenant imposée par le gaz, le flux conductif étant nul sur ces parois. Ainsi, par rapport au cas A, la paroi haute est refroidie, la paroi basse est réchauffée, mais dans une moindre mesure que dans le cas C (figure 3.3) : la température moyenne de la paroi haute est égale dans chacun des cas à 0,323 (A), 0,207 (B) et 0,012 (C).

Lorsque les parois adiabatiques sont noires et le gaz rayonnant (cas D), la distribution de température des parois adiabatiques est identique au cas C car elle résulte essentiellement des transferts radiatifs parois-parois. Pour ce cas, la stratification du gaz est la plus faible : le refroidissement de la paroi haute et le réchauffement de la paroi basse, liés au rayonnement des parois, se combinent à l'homogénéisation directe du gaz par les transferts radiatifs volumiques.

### 3.2.2 Couches limites et écoulement

Les variations de température étant le moteur de la convection naturelle, les transferts radiatifs affectent fortement le mouvement du gaz. Les profils de vitesse verticale et de température le long des couches limites verticales en  $z^+ = 0,25$ ,  $z^+ = 0,5$  et  $z^+ = 0,75$ , sont tracés sur la figure 3.4. Les profils de température montrent à nouveau l'homogénéisation de la température

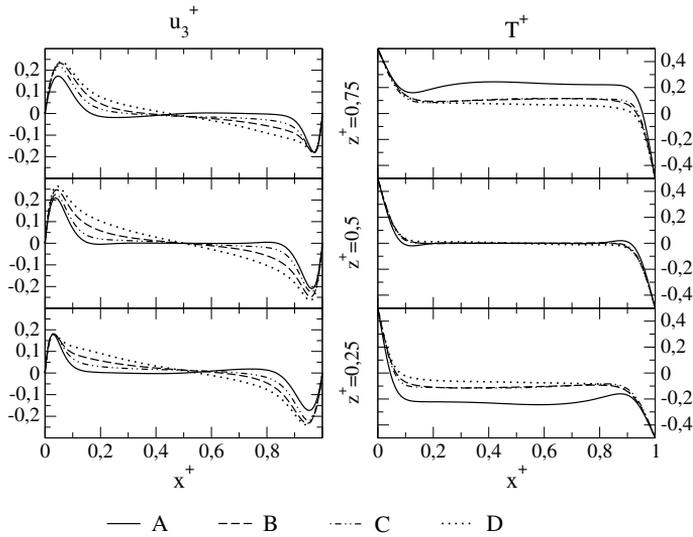


FIGURE 3.4 –  $Ra = 10^6$ . Couches limites mécaniques et thermiques à  $z^+ = 0, 25, z^+ = 0, 5$  et  $z^+ = 0, 75$ . Les résultats sont moyennés selon  $y$ .

du gaz lorsque les transferts radiatifs sont pris en compte, comme exposé précédemment. Concernant les profils de vitesse, on note pour les cas B, C et D une augmentation de la vitesse du gaz ainsi qu'un épaississement des couches limites. Le maximum de vitesse augmente significativement à la sortie des couches limites. Ces effets sont les plus marqués pour le cas D et les moins marqués pour le cas C.

Lorsque le gaz rayonne (cas B et D), les transferts d'énergie entre le gaz et les parois peuvent se produire sur de longues distances, permettant la mise en mouvement du fluide loin des parois. Le volume de fluide circulant dans la cavité devient plus important, ce qui explique l'épaississement des couches limites et l'augmentation des vitesses. La puissance radiative volumique est représentée sur la figure 3.5 dans le plan  $y^+ = 0, 5$  et plus quantitativement le long d'une ligne  $y^+ = z^+ = 0, 5$ , pour les cas B et D. Les deux champs de puissance sont similaires, sauf à proximité des parois haute et basse, où les champs de température sont très différents (voir § 3.2.1). En s'écoulant le long de la paroi froide, le gaz émet plus de rayonnement qu'il n'en absorbe et la puissance radiative est positive. Réciproquement, en s'écoulant le long de la paroi chaude, le gaz absorbe plus de rayonnement qu'il n'en émet et la

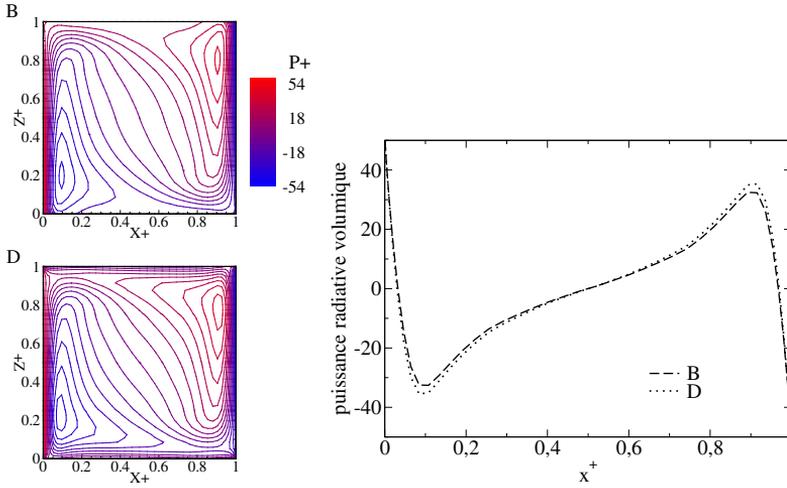


FIGURE 3.5 –  $Ra = 10^6$ . À gauche : puissance radiative volumique  $\nabla^+ \cdot \mathbf{q}^{R+}$  dans le plan  $y^+ = 0, 5$ . L'écart entre deux iso-valeurs est de 6. À droite : profil correspondant à  $y^+ = z^+ = 0, 5$ .

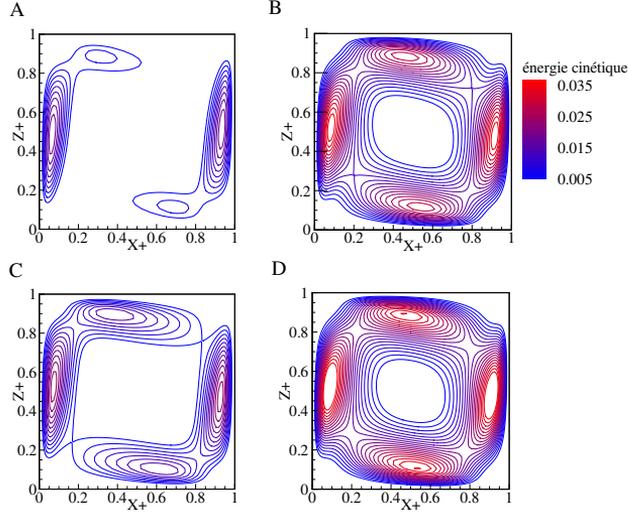


FIGURE 3.6 –  $Ra = 10^6$ . Énergie cinétique 2D  $0,5(u_1^{+2} + u_3^{+2})$  moyennée selon  $y$ . L'écart entre deux isovaleurs est de  $1,67 \times 10^{-3}$ . Les valeurs maximales sont 0,0198, 0,0368, 0,0245 et 0,0406 pour les cas A, B, C et D, respectivement.

puissance radiative est négative. Près des parois isothermes, la température du gaz tend vers celle de la paroi et le champ de puissance radiative s'inverse : le gaz devient émettant proche de la paroi chaude et absorbant proche de la paroi froide. Concernant le cas C, où le gaz est transparent, l'épaississement des couches limites s'explique par le préchauffage du gaz le long de la paroi basse, en amont de la couche limite verticale ascendante, et réciproquement par le refroidissement du gaz le long de la paroi haute.

L'augmentation du débit de fluide par le rayonnement du gaz et des parois peut être appréciée sur la figure 3.6, représentant l'énergie cinétique 2D  $0,5(u_1^{+2} + u_3^{+2})$  moyennée selon  $y$ . La circulation du gaz est nettement renforcée lorsque le gaz rayonne (cas B et D). Le cœur de la cavité est mis en mouvement alors qu'il reste presque immobile dans les cas A et C.

### 3.2.3 Transferts de chaleur

Le nombre de Nusselt intégré dans les plans  $x^+ = 0$ ,  $x^+ = 0,5$  et  $x^+ = 1$  est donné pour chaque cas dans le tableau 3.2. Les distributions verticales correspondantes sont tracées sur la figure 3.7, mis à part pour la paroi froide ( $x^+ = 1$ ) où le profil du Nusselt est antisymétrique à celui de la paroi chaude  $x^+ = 0$  (se reporter à la discussion sur les symétries § 3.2.4) et les valeurs intégrées égales.

L'homogénéisation du champ de température induite par les transferts radiatifs diminue en moyenne le gradient de température aux parois isothermes : aux parois chaudes et froides, le nombre de Nusselt est plus faible et sa distribution verticale est aplanie. On remarque pour les cas C et D une brusque augmentation du Nusselt en  $z^+ = 0$  et  $z^+ = 1$ , causée par le saut de température en  $x^+ = 0$  sur les parois haute et basse (voir figure 3.3).

Dans le plan  $x^+ = 0,5$ , le nombre de Nusselt est défini par

$$\text{Nu} = -\frac{\partial T^+}{\partial x^+} + u_1^+ T^+ \sqrt{\text{Ra}}, \quad (3.1)$$

pour tenir compte à la fois des transferts conductifs et convectifs. Le profil du nombre de Nusselt dans ce plan présente deux pics correspondant aux maxima de vitesse  $u_1^+$  des couches limites horizontales. Dans le cas A, le nombre de Nusselt moyen au milieu de la cavité est égal à celui des parois isothermes, contrairement aux autres cas où le rayonnement modifie le bilan d'énergie. Dans les cas B et D, le nombre de Nusselt augmente car l'écoulement est renforcé. Dans le cas C, le flux enthalpique moyen diminue car

TABLE 3.2 – Ra = 10<sup>6</sup>. Nombre de Nusselt moyenné sur des plans verticaux.

Cas	A	B	C	D
$x^+ = 0$	8,64	7,55	8,47	8,48
$x^+ = 0,5$	8,64	12,41	7,40	11,00
$x^+ = 1$	8,64	7,55	8,47	8,48

TABLE 3.3 – Ra = 10<sup>6</sup>. Flux radiatifs moyens aux parois  $q^{R+} \cdot n$ .

Cas	A	B	C	D
$x^+ = 0$	125,05	120,58	124,53	119,61
$x^+ = 1$	-125,05	-120,58	-124,53	-119,61
$y^+ = 0$	0	0	$0,2 \times 10^{-3}$	$0,7 \times 10^{-3}$
$y^+ = 1$	0	0	$0,2 \times 10^{-3}$	$0,7 \times 10^{-3}$
$z^+ = 0$	0	0	-3,02	-2,72
$z^+ = 1$	0	0	3,02	2,72

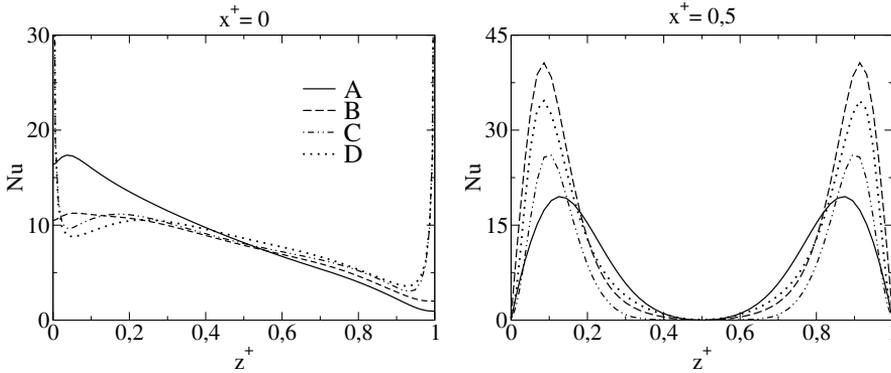


FIGURE 3.7 – Ra = 10<sup>6</sup>. Profil du nombre de Nusselt à  $x^+ = 0$  (gauche) et à  $x^+ = 0,5$  (droite). Résultats moyennés selon  $y$ .

les zones de vitesses maximales sont proches de la température moyenne  $T^+ = 0$ .

Le tableau 3.3 répertorie les flux radiatifs moyennés sur chacune des six parois de la cavité. En comparant les cas A et B (ou en comparant les cas C et D), on note l'effet de l'absorption du gaz qui réduit légèrement le flux radiatif transféré entre les deux parois isothermes. Lorsque les parois adiabatiques sont noires (cas C et D), le transfert radiatif entre les parois impose une distribution de température stratifiée selon  $x$  (voir figure 3.1) sur les parois latérales et horizontales. La température moyenne adimensionnée sur ces parois est proche de 0, le flux radiatif moyen  $y$  est donc faible. Cet effet est plus marqué sur les parois latérales  $y^+ = 0$  et  $y^+ = 1$ .

### 3.2.4 Effets tridimensionnels

La figure 3.8 montre deux surfaces iso-valeurs de la composante transversale de la vitesse  $u_2^+$  pour chacun des cas étudiés. Les transferts radiatifs tendent à augmenter cette vitesse, particulièrement dans les cas C et D et donc à accroître les effets tridimensionnels. L'augmentation de la vitesse d'écoulement du gaz  $\|\mathbf{u}^+\|$  a déjà été mise en évidence au paragraphe 3.2.2. Cependant, les mouvements latéraux ne sont pas seulement renforcés en valeur absolue : leur contribution au bilan d'énergie cinétique global augmente. Plus précisément, le rapport entre l'énergie cinétique des mouvements latéraux  $\int 0,5u_2^{+2}dV$  et l'énergie cinétique totale  $\int 0,5(u_1^{+2} + u_2^{+2} + u_3^{+2})dV$  est égal pour chacun des cas à  $4,22 \times 10^{-3}$  (A),  $8,30 \times 10^{-3}$  (B),  $1,52 \times 10^{-2}$  (C) et  $2,45 \times 10^{-2}$  (D).

En régime stationnaire, l'écoulement de convection naturelle sans rayonnement vérifie les symétries suivantes :

- la symétrie centrale 2D

$$\begin{aligned} (u_1^+, u_2^+, u_3^+, T^+)(x^+, y^+, z^+) \\ = -(u_1^+, -u_2^+, u_3^+, T^+)(1 - x^+, y^+, 1 - z^+); \end{aligned} \quad (3.2)$$

- la symétrie de réflexion par rapport au plan  $y^+ = 0,5$

$$\begin{aligned} (u_1^+, u_2^+, u_3^+, T^+)(x^+, y^+, z^+) \\ = (u_1^+, -u_2^+, u_3^+, T^+)(x^+, 1 - y^+, z^+); \end{aligned} \quad (3.3)$$

- la symétrie centrale 3D, combinaison des deux précédentes

$$(u_1^+, u_2^+, u_3^+, T^+)(x^+, y^+, z^+) = -(u_1^+, u_2^+, u_3^+, T^+)(1 - x^+, 1 - y^+, 1 - z^+). \quad (3.4)$$

La non-linéarité des transferts radiatifs avec la température brise les symétries centrales 2D et 3D et par conséquent l'écoulement stationnaire obtenu dans les cas B, C et D ne conserve rigoureusement que la symétrie de réflexion par rapport au plan médian. En revanche, on remarque sur la figure 3.8 que la composante transversale de la vitesse vérifie les trois symétries pour chaque cas. La centro-symétrie 2D semble également satisfaite pour les champs de température (figure 3.2) et d'énergie cinétique (figure 3.6).

Ces observations sont confirmées en calculant les indicateurs de symétrie pour le champ de température  $\Gamma_{c-2D}$ ,  $\Gamma_{r-y}$ ,  $\Gamma_{c-3D}$ , définis par

$$\Gamma_{c-2D}^T = \int (T^+(x^+, y^+, z^+) + T^+(1 - x^+, y^+, 1 - z^+))^2 dV^+, \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{r-y}^T = \int (T^+(x^+, y^+, z^+) - T^+(x^+, 1 - y^+, z^+))^2 dV^+, \quad (3.6)$$

$$\Gamma_{c-3D}^T = \int (T^+(x^+, y^+, z^+) + T^+(1 - x^+, 1 - y^+, 1 - z^+))^2 dV^+, \quad (3.7)$$

et sont pour chacun des cas inférieurs à  $10^{-8}$ . Ce comportement est lié aux faibles écarts de température qui se traduisent par des effets quasi-linéaires du rayonnement.

### 3.2.5 Cas d'un milieu gris

L'approximation du milieu gris, qui consiste à négliger la dépendance spectrale du coefficient d'absorption, est le plus souvent inexacte pour des gaz et entraîne de fortes erreurs sur le calcul des transferts radiatifs. En cavité carrée différentiellement chauffée, Colomer *et al.* (2007) ou encore Lari *et al.* (2012) montrent que cette approximation échoue à prédire correctement les champs de température et de vitesse pour des mélanges contenant de la vapeur d'eau et du dioxyde de carbone. Une simulation couplée en milieu gris est réalisée ici et est confrontée aux résultats précédents.

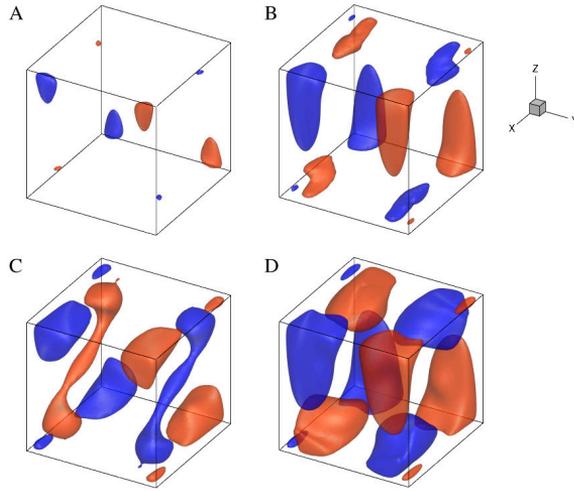


FIGURE 3.8 –  $Ra = 10^6$ . Surfaces iso-valeurs de la composante transversale de la vitesse  $u_2^+ \pm 0,019$  (valeurs négatives en bleu).

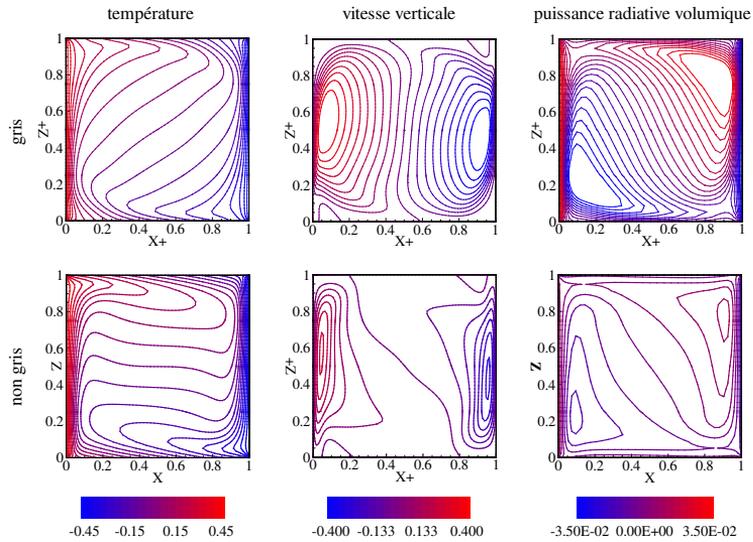


FIGURE 3.9 –  $Ra = 10^6$ . Cas D. De gauche à droite : température, vitesse verticale et puissance radiative volumique dans le plan  $y^+ = 0,5$ . Calculs gris (haut) et non gris (bas).

À partir de la solution stationnaire obtenue pour le cas D avec le modèle ADF, le calcul est poursuivi jusqu'à la convergence en prenant le coefficient d'absorption gris, égal à la moyenne de Planck du spectre raie par raie du mélange

$$\kappa_P(T) = \frac{\pi \int_0^\infty \kappa_\nu I_\nu^\circ(T) d\nu}{\sigma T^4}, \quad (3.8)$$

soit  $\kappa_P = 1,05523 \text{ m}^{-1}$  à 300 K. La figure 3.9 compare les résultats obtenus avec les propriétés grises à ceux présentés précédemment pour le cas D. L'approximation du gaz gris surestime fortement les transferts radiatifs gaz-gaz et gaz-parois : le maximum de puissance radiatif est trois fois plus élevé dans le cas gris. L'écoulement est beaucoup plus intense, le débit entraîné dans la cavité est deux fois plus grand et le maximum de vitesse verticale est environ 40 % plus grand. Au centre de la cavité, les isothermes ne sont plus horizontales mais orientées à 45°. Cet exemple confirme la nécessité de prendre en compte la dépendance spectrale du rayonnement pour des gaz réels.

### 3.3 Influence du nombre de Rayleigh

Le tableau 3.4 reporte les valeurs du nombre de Nusselt moyenné selon les plans  $x^+ = 0$ ,  $x^+ = 0,5$  et  $x^+ = 1$ , la stratification thermique au cœur de la cavité, la température moyenne de la paroi haute et le maximum des trois composantes de la vitesse pour les quatre configurations à  $\text{Ra} = 10^5$ ,  $10^6$  et  $3 \times 10^7$ . Pour le plus haut nombre de Rayleigh, les solutions obtenues dans les cas C et D sont instationnaires et ne sont pas présentées ici.

Les principaux effets du rayonnement du gaz et des parois, mis en évidence à  $\text{Ra} = 10^6$ , sont retrouvés à plus bas et plus haut nombres de Rayleigh, à savoir :

- une homogénéisation du champ de température du gaz et donc une baisse de la stratification thermique ;
- une diminution de la température de la paroi haute et réciproquement une augmentation de la température de la paroi basse, en particulier lorsque les parois adiabatiques rayonnent (cas C et D) ;
- un épaississement des couches limites mécaniques et une augmentation du débit entraîné dans la cavité ;
- une diminution du nombre de Nusselt aux parois isothermes, mis à part pour les cas C et D à  $\text{Ra} = 10^5$ .

TABLE 3.4 – Comparaison des résultats obtenus à  $Ra = 10^5$ ,  $Ra = 10^6$  et  $Ra = 3 \times 10^7$ . Nombre de Nusselt moyenné selon les plans  $x^+ = 0$ ,  $x^+ = 0,5$  et  $x^+ = 1$ , stratification thermique  $\mathcal{S} = \partial T^+ / \partial z^+$  au cœur de la cavité, température moyenne de la paroi haute  $T_{\text{haut}}^+$  et maximum des trois composantes de la vitesse.

Cas Ra	A			B		
	$10^5$	$10^6$	$3 \times 10^7$	$10^5$	$10^6$	$3 \times 10^7$
$Nu(x^+ = 0)$	4,34	8,64	21,91	4,09	7,55	19,87
$Nu(x^+ = 0,5)$	4,34	8,64	21,91	6,12	12,41	26,83
$Nu(x^+ = 1)$	4,34	8,64	21,91	4,09	7,55	19,87
$\mathcal{S}$	1,02	0,91	0,98	0,43	0,36	0,60
$T_{\text{haut}}^+$	0,278	0,323	0,357	0,144	0,207	0,276
$u_{1 \text{ max}}^+$	0,139	0,127	0,118	0,270	0,231	0,203
$u_{2 \text{ max}}^+$	0,031	0,026	0,031	0,053	0,060	0,044
$u_{3 \text{ max}}^+$	0,224	0,236	0,245	0,295	0,296	0,272

Cas Ra	C		D	
	$10^5$	$10^6$	$10^5$	$10^6$
$Nu(x^+ = 0)$	5,41	8,47	5,62	8,48
$Nu(x^+ = 0,5)$	3,29	7,40	4,83	11,00
$Nu(x^+ = 1)$	5,41	8,47	5,62	8,48
$\mathcal{S}$	0,39	0,42	0,31	0,26
$T_{\text{haut}}^+$	0,007	0,012	0,010	0,016
$u_{1 \text{ max}}^+$	0,203	0,214	0,294	0,259
$u_{2 \text{ max}}^+$	0,050	0,050	0,058	0,094
$u_{3 \text{ max}}^+$	0,260	0,278	0,311	0,338

Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, on note pour chacun des cas une augmentation du nombre de Nusselt aux parois isothermes et dans le plan médian. La stratification thermique reste à peu près constante, mis à part entre  $Ra = 10^6$  et  $Ra = 3 \times 10^7$  dans le cas B où la stratification thermique augmente de 0,36 à 0,60. La température moyenne de la paroi haute croît avec le nombre de Rayleigh dans tous les cas, par le renforcement des transferts convectifs. On peut enfin noter que le niveau des maxima de vitesse varie peu en fonction du nombre de Rayleigh ce qui montre que l'adimensionnement choisi (§ 1.2) est pertinent.

\*\*\*

Les résultats des simulations couplées conduisant à des régimes stationnaires, à relativement bas nombre de Rayleigh, ont été discutés dans ce chapitre. Quatre configurations différentes ont été étudiées pour mettre en évidence distinctement les effets du rayonnement du gaz et des parois.

Le rayonnement du gaz et le rayonnement des parois adiabatiques ont pour effet de diminuer la stratification thermique verticale dans la cavité, par deux mécanismes différents. Lorsque le gaz rayonne, les transferts radiatifs affectent localement le bilan d'énergie et homogénéisent directement la température du gaz. Lorsque les parois adiabatiques rayonnent, la paroi haute est refroidie et la paroi basse est réchauffée : la stratification thermique est réduite du fait de la diminution de l'écart de température entre les parois haute et basse.

Les transferts radiatifs volumiques entraînent un épaississement des couches limites mécaniques et thermiques et une augmentation de la vitesse d'écoulement du gaz en activant à distance des zones loin des parois. L'écoulement est également renforcé dans le cas où les parois adiabatiques rayonnent, par le préchauffage (pré-refroidissement) du gaz le long de la paroi basse (haute). Enfin, le rayonnement du gaz et le rayonnement des parois adiabatiques accentuent tous deux les effets tridimensionnels.

Le nombre de Rayleigh critique de transition vers l'instationnarité se situe dans la plage  $Ra \in [3,2 - 3,5 \times 10^7]$  quand le rayonnement du gaz et des parois est ignoré. Les solutions obtenues à des nombres de Rayleigh supérieurs se sont toutes révélées dépendantes du temps, pour toutes les configurations (un retour à la stationnarité a néanmoins été observé par de Gassowski *et al.* (2003) dans la plage  $Ra \in [10^7 - 10^8]$  et sans rayonnement ; il ne sera pas discuté ici). L'étude du régime transitionnel et des mécanismes physiques d'instabilité est présentée au chapitre suivant.



## Chapitre 4

# Simulations couplées : transition vers l'instationnarité

AU-DELÀ d'un nombre de Rayleigh critique, les écoulements de convection naturelle deviennent instationnaires. Leur complexité croît avec le nombre de Rayleigh jusqu'à atteindre le régime turbulent, où les variations spatiales et temporelles de la température et de la vitesse sont chaotiques.

En cavité différentiellement chauffée, pour des gaz transparents et des parois adiabatiques réfléchissantes, la transition vers l'instationnarité a été étudiée par l'analyse de stabilité linéaire (Henkes et Le Quéré, 1996; Gelfgat *et al.*, 1999) ou par la simulation numérique directe des écoulements (Paolucci et Chenoweth, 1989; Le Quéré et Behnia, 1998; Labrosse *et al.*, 1997). L'analyse de stabilité linéaire permet de déterminer le nombre de Rayleigh critique et d'identifier les structures spatiales responsables de la transition. Elle repose sur la linéarisation du modèle de Navier-Stokes pour des fluctuations de faibles amplitudes : si les fluctuations sont amorties, l'écoulement est stable mais si les fluctuations sont amplifiées, l'écoulement est instable.

Les effets du rayonnement du gaz sur la transition vers l'instationnarité et le régime turbulent en cavité cubique différentiellement chauffée, ne semblent pas avoir été explorés à ce jour dans le cas de gaz non-gris. Deux difficultés sont rencontrées. D'une part, l'analyse de stabilité linéaire n'est pas praticable aujourd'hui pour des géométries tridimensionnelles et, d'autre part, il n'est pas possible de définir un nombre limité de paramètres sans

dimension influant sur la transition (§ 1.2). L'approche qui a été retenue est la simulation numérique directe de l'écoulement et des transferts radiatifs à partir des méthodes de référence décrites au chapitre 2. Trois configurations ont été considérées pour dissocier les effets du rayonnement du gaz des effets du rayonnement des parois. Pour chacune des configurations, une solution instationnaire proche du point critique est présentée, puis une comparaison est entreprise en régime faiblement turbulent à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^8$ . Les résultats de ce chapitre ont été repris dans une publication (Soucasse *et al.*, 2014b). Avant de les discuter, les méthodes utilisées pour l'analyse des écoulements instationnaires sont introduites.

## 4.1 Analyse des écoulements instationnaires

Les simulations numériques directes des écoulements instationnaires génèrent de grandes quantités de données, associées aux larges gammes des variations spatiales et temporelles. L'enjeu est d'extraire des résultats une information synthétique visant à comprendre ces écoulements ou à les modéliser.

En ce sens, l'identification des zones tourbillonnaires peut faciliter la représentation tridimensionnelle des champs de vecteur vitesse. La décomposition des solutions instationnaires sur une base finie de modes spatiaux est également un outil efficace pour identifier les structures cohérentes de l'écoulement. Enfin, l'analyse des corrélations statistiques entre les variables permet de distinguer les aspects chaotiques des aspects ordonnés de l'écoulement, et apporte des informations nécessaires à la plupart des modèles de turbulence. Les méthodes présentées dans ce paragraphe peuvent être appliquées indifféremment à des résultats expérimentaux d'écoulement instationnaires ou turbulents.

### 4.1.1 Identification des vortex

Les écoulements instationnaires et turbulents sont caractérisés par des structures tourbillonnaires ou vortex dont l'identification améliore la compréhension de la dynamique de l'écoulement.

La localisation d'une zone tourbillonnaire se fonde intuitivement sur l'analyse des mouvements de rotation du fluide. Le tenseur des gradients de vitesse  $\nabla \mathbf{u}$ , qui contient l'information sur la dynamique du mouvement

du fluide, se décompose en une partie symétrique et une partie antisymétrique selon

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{S_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\Upsilon_{ij}}. \quad (4.1)$$

La partie symétrique  $\mathbf{S}$  est le tenseur des déformations et la partie antisymétrique  $\Upsilon$  est le tenseur des rotations. Une valeur élevée du taux de rotation  $\|\boldsymbol{\omega}\| = \sqrt{2\Upsilon_{ij}\Upsilon_{ij}}$ , où  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}$  désigne le vecteur vorticité, indique potentiellement la présence d'un vortex. Ce critère n'est pas pertinent pour les écoulements de couche limite, où l'on observe de forts taux de rotation aux parois liés au cisaillement et non aux tourbillons.

Une caractéristique fréquente des tourbillons est la présence d'un minimum de pression en leur cœur, résultant d'un équilibre entre les forces de pression et les forces centrifuges. Cependant, l'équivalence entre minimum de pression et tourbillon n'est pas toujours v rifi e. D'une part, les forces visqueuses peuvent contrebalancer les forces centrifuges cr ees par un vortex à pression constante et d'autre part, les mouvements instationnaires du fluide peuvent induire des minima de pression sans rotation.

D'autres critères pour l'identification des vortex, plus satisfaisants, ont été proposés dans la littérature. Parmi eux, deux approches sont retenues : le critère  $Q$  et le critère  $\lambda_2$ .

### Critère $Q$

Hunt *et al.* (1988) identifient les structures tourbillonnaires en se basant sur le deuxième invariant du tenseur des déformations pour un écoulement à masse volumique constante, qu'ils nomment  $Q$

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (\|\Upsilon\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2), \quad (4.2)$$

$\|\Upsilon\|^2 = \Upsilon_{ij}\Upsilon_{ij}$  et  $\|\mathbf{S}\|^2 = S_{ij}S_{ij}$ . Physiquement, le critère  $Q$  compare le taux de rotation et le taux de déformation locaux : si  $Q$  est positif, la vorticité domine. Sont consid rees comme tourbillonnaires par Hunt *et al.* (1988), les zones de l'écoulement pour lesquelles le critère  $Q$  dépasse une valeur positive arbitraire et pour lesquelles il existe un minimum de pression.

Dans le cas d'un écoulement de couche limite, le critère  $Q$  permet de s'affranchir du cisaillement pariétal et identifie avec succès les structures tourbillonnaires.

### Critère $\lambda_2$

Les minima du champ de pression peuvent être localisés en étudiant la matrice Hessienne  $\mathbf{H}(P) = \partial^2 P / (\partial x_i \partial x_j)$ , déterminée par l'équation d'évolution du tenseur des déformations

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} + S_{ik} S_{kj} + \Upsilon_{ik} \Upsilon_{kj} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial x_k^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (4.3)$$

pour un écoulement à masse volumique constante, sans terme source.

Jeong et Hussain (1995) proposent de s'affranchir des effets instationnaires, des effets d'advection et des effets visqueux, et de considérer

$$\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Upsilon}^2 = -\frac{1}{\rho} \mathbf{H}(P). \quad (4.4)$$

Les tourbillons sont identifiés en calculant les valeurs propres du tenseur symétrique  $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Upsilon}^2$ , telles que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ . Si  $\lambda_2$  est strictement négatif, alors il existe un minimum de pression local dans un plan, ce qui correspond d'après Jeong et Hussain (1995) à un vortex.

Le critère  $\lambda_2$  est lié au critère  $Q$  par la relation  $Q = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \lambda_i$ . Les deux approches sont équivalentes en deux dimensions.

#### 4.1.2 Décomposition modale

L'objet de la décomposition modale est de construire une base de fonctions spatiales, de dimension finie, capable de représenter l'ensemble des réalisations possibles de l'écoulement. Si  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t)$  désigne le champ de vecteur instantané regroupant les variables de l'écoulement, la décomposition s'écrit

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) \simeq \sum_{n=1}^N a_n(t) \boldsymbol{\zeta}_n(\mathbf{r}), \quad (4.5)$$

$\boldsymbol{\zeta}_n(\mathbf{r})$  sont les modes spatiaux représentant les structures spatiales et  $a_n(t)$  sont les coefficients de la projection. Plus la méthode de décomposition est efficace, plus la dimension  $N$  de la base est faible. Toutefois, le nombre

de modes  $N$  croît inévitablement avec le nombre de Rayleigh, lorsque la complexité de l'écoulement augmente.

La décomposition en modes propres orthogonaux et la décomposition en modes dynamiques sont deux méthodes qui cherchent à extraire cette base à partir d'un échantillon de champs instantanés  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t_i)$  ou *snapshots*, obtenus par expérience ou par simulation numérique. La première est une méthode statistique, dénommée ailleurs décomposition de Karhunen–Loève ou analyse en composantes principales. La seconde s'appuie sur une linéarisation de la dynamique de l'écoulement.

### Décomposition en modes propres orthogonaux

La décomposition en modes propres orthogonaux (Berkooz *et al.*, 1993) ou POD (acronyme pour *Proper Orthogonal Decomposition*) vise à construire une base optimale pour un champ de vecteur aléatoire  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t)$  de moyenne statistique nulle  $\langle \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ , selon sa variance  $\langle \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t)^2 \rangle$ . Les modes spatiaux  $\boldsymbol{\zeta}_n(\mathbf{r})$  sont recherchés de telle sorte qu'ils maximisent en moyenne la projection de  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t)$  :

$$\max_{\|\boldsymbol{\zeta}\|=1} \langle (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\zeta})^2 \rangle, \quad (4.6)$$

où le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  de deux champs de vecteur  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  et la norme associée  $\|\cdot\|$  sont donnés par

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{\Omega} \sum_{m=1}^M f^m(\mathbf{r}) g^m(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.7)$$

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}, \quad (4.8)$$

$M$  étant la dimension du champ de vecteur et  $f^m$  la  $m^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $\mathbf{f}$ . L'équation (4.6) conduit au problème aux valeurs propres suivant

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^M \langle \psi^m(\mathbf{r}, t) \psi^k(\mathbf{r}', t) \rangle \zeta^k(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \lambda \zeta^m(\mathbf{r}). \quad (4.9)$$

Comme la moyenne statistique est généralement estimée en moyennant  $N$  champs instantanés  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t_i)$  extraits à des temps discrets  $t_i$  (voir § 4.1.3), Sirovich (1987) propose un problème aux valeurs propres équivalent, de dimension réduite

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha}_n = \lambda_n \boldsymbol{\alpha}_n, \quad (4.10)$$

$$K_{ij} = \frac{1}{N}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t_i), \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t_j)), \quad (4.11)$$

où  $\mathbf{K}$  est une matrice symétrique réelle définie positive qui possède des valeurs propres positives  $\lambda_n$  et des vecteurs propres orthogonaux  $\boldsymbol{\alpha}_n$ .

Les modes spatiaux sont construits par combinaison linéaire des vecteurs propres et des champs instantanés selon

$$\boldsymbol{\zeta}_n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t_i) \alpha_n^i. \quad (4.12)$$

Les modes spatiaux forment une base orthonormée, permettant la décomposition du signal

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) \simeq \sum_{n=1}^N a_n(t) \boldsymbol{\zeta}_n(\mathbf{r}). \quad (4.13)$$

Comme les modes sont orthogonaux, les coefficients de projection  $a_n(t)$  sont statistiquement décorrélés et leur variance est égale à la valeur propre  $\lambda_n$ , soit

$$\langle a_n(t) a_m(t) \rangle = \lambda_n \delta_{nm}. \quad (4.14)$$

On peut restreindre cette décomposition aux modes dont la variance est significative, en ne retenant par exemple que les  $N^*$  premiers modes tels que

$$\frac{\sum_{n=1}^{N^*} \lambda_n}{\sum_{n=1}^N \lambda_n} \geq 0,99. \quad (4.15)$$

Ainsi, les premiers modes spatiaux  $\boldsymbol{\zeta}_n(\mathbf{r})$ ,  $n \leq N^*$  offrent une représentation spatiale synthétique de la variabilité du champ  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t)$ .

En convection naturelle, les champs de vitesse et de température sont étroitement liés. La POD est appliquée au champ de vecteur  $\boldsymbol{\psi} = \{\mathbf{u}', \gamma T'\}$ , où  $\gamma$  est un facteur (introduit par exemple par Podvin et Le Quéré (2001)) qui compare le contenu énergétique des champs de température et vitesse

$$\gamma^2 = \left\langle \frac{\|\mathbf{u}'\|^2}{\|T'\|^2} \right\rangle \quad (4.16)$$

Les champs instantanés sont échantillonnés à une période fixe  $\Delta t$  sur un large intervalle de temps afin d'être représentatifs de la moyenne statistique et de capturer la dynamique basse fréquence. Le nombre de *snapshots*  $N$

est suffisant lorsque le nombre de modes  $N^*$  défini par l'équation (4.15) est tel que  $N^* \ll N$ . Les paramètres  $\Delta t$  et  $N$  seront précisés au moment de la présentation des résultats. La bibliothèque LAPACK est utilisée pour résoudre le problème aux valeurs propres (4.10).

### Décomposition en modes dynamiques

La décomposition en modes dynamiques (Rowley *et al.*, 2009; Schmid, 2010)) ou DMD (acronyme pour *Dynamic Mode Decomposition*) propose d'extraire une base de modes possédant une fréquence et un accroissement temporels, à partir d'une séquence de données évoluant dans le temps. Ces modes dynamiques sont les vecteurs propres d'une matrice  $\mathbf{A}$  qui relierait linéairement deux instants de la séquence de données  $\boldsymbol{\psi}_i \equiv \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t_i)$

$$\boldsymbol{\psi}_{i+1} = \mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i. \quad (4.17)$$

Si les données sont extraites d'un procédé non-linéaire, l'application  $\mathbf{A}$  est une approximation linéaire moyenne du système dynamique. Les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\mathbf{A}$  sont estimés à partir d'une séquence de  $N$  *snapshots* échantillonnés à une période fixe telle que  $t_i = i\Delta t$

$$\boldsymbol{\Psi}_2^N = [\boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_N] = \mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}_1^{N-1} = \boldsymbol{\Psi}_1^{N-1}\mathbf{C} + \boldsymbol{\varsigma}, \quad (4.18)$$

où  $\mathbf{C}$  est la matrice compagnon de  $\mathbf{A}$  et  $\boldsymbol{\varsigma}$  est un résidu non nul si le champ  $\boldsymbol{\psi}_N$  n'est pas une combinaison linéaire des champs précédents  $\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_{N-1}$ . La matrice compagnon est définie par

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & & & c_1 \\ 1 & 0 & & c_2 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 & c_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Toutes les valeurs propres de  $\mathbf{C}$  sont valeurs propres de  $\mathbf{A}$ . Le calcul de la matrice  $\mathbf{C}$  à partir de l'équation (4.18) conduit à un problème surdéterminé qui est résolu au sens des moindres carrés selon

$$\mathbf{C} = ((\boldsymbol{\Psi}_1^{N-1})^T \boldsymbol{\Psi}_1^{N-1})^{-1} (\boldsymbol{\Psi}_1^{N-1})^T \boldsymbol{\Psi}_2^N. \quad (4.20)$$

En pratique, on introduit la décomposition  $\boldsymbol{\Psi}_1^{N-1} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$  telle que  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{R}$  est une matrice triangulaire supérieure. Si la matrice  $\boldsymbol{\Psi}_1^{N-1}$  est de taille

$M \times (N - 1)$  ( $M > N - 1$ ), la matrice  $\mathbf{Q}$  est de taille  $M \times (N - 1)$  et la matrice  $\mathbf{R}$  est carrée de taille  $N - 1$ . L'équation (4.20) devient

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \Psi_2^N. \quad (4.21)$$

La matrice compagnon est ensuite diagonalisée selon

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}^{-1} \Lambda \mathbf{V}, \quad (4.22)$$

où  $\Lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$  ( $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ) est la matrice des valeurs propres et  $V_{ij} = \lambda_i^{j-1}$  est une matrice de Vandermonde. Comme la matrice  $\mathbf{C}$  est à valeurs réelles, les valeurs propres et vecteurs propres à partie imaginaire non nulle, sortent par paires complexes conjuguées.

Les modes dynamiques sont construits en combinant les vecteurs propres de  $\mathbf{C}$  et les *snapshots*

$$\zeta_n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N-1} \psi(\mathbf{r}, t_i) V_{in}^{-1}. \quad (4.23)$$

En introduisant la décomposition (4.22) dans l'équation (4.18), on obtient une expression des  $\psi(\mathbf{r}, t_i)$  en fonction des valeurs propres  $\lambda_n$  et des modes dynamiques  $\zeta(\mathbf{r})$  que l'on généralise selon

$$\psi(\mathbf{r}, t) \simeq \sum_{n=1}^{N-1} \exp(\omega_n t) \zeta_n(\mathbf{r}), \quad (4.24)$$

avec  $\omega_n = \ln \lambda_n / \Delta t$ . Le taux d'accroissement et la fréquence temporels sont donnés respectivement par les parties réelle et imaginaire de  $\omega_n$ . La décomposition peut être restreinte aux modes de norme dominante  $\|\zeta_i\|$  (norme définie par l'équation (4.8)).

Pour la convection naturelle, les champs de vitesse et température sont regroupés ici pour former la séquence de données selon  $\psi = \{\mathbf{u}, T\}$ . La période d'échantillonnage  $\Delta t$  et le nombre de champs instantanés  $N$  sont choisis à partir du critère de Nyquist, selon la gamme de fréquence temporelle que l'on souhaite capter. Les paramètres  $\Delta t$  et  $N$  seront précisés au moment de la présentation des résultats. La bibliothèque LAPACK est utilisée pour calculer la matrice compagnon (4.21), calculer ses valeurs propres (4.22) et inverser la matrice de Vandermonde  $V_{ij} = \lambda_i^{j-1}$ .

### 4.1.3 Analyse statistique

À hauts nombres de Rayleigh, l'écoulement de convection naturelle devient turbulent et se caractérise par des fluctuations spatio-temporelles chaotiques des champs de vitesse et de température. Le modèle de Navier-Stokes, s'il est toujours considéré comme déterministe, devient très sensible aux conditions initiales et aux limites car les effets inertiels non-linéaires dominent. L'approche statistique en simulation numérique consiste à calculer un grand nombre de solutions pour un jeu de conditions initiales. Chaque solution  $f_k(\mathbf{r}, t)$  est considérée comme une réalisation possible d'une fonction aléatoire  $f$  dont l'espérance est égale à la moyenne d'ensemble des  $N$  réalisations lorsque  $N$  tend vers l'infini

$$\langle f \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(\mathbf{r}, t). \quad (4.25)$$

Cependant, les maillages spatio-temporels requis par la simulation numérique des écoulements turbulents limitent fortement cette approche. L'obtention d'une solution nécessite à elle seule des ressources informatiques importantes. On préfère estimer la moyenne statistique par la moyenne temporelle appliquée à une réalisation

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_k(\mathbf{r}, t) dt, \quad (4.26)$$

en admettant l'ergodicité, c'est-à-dire l'équivalence entre moyennes statistique et temporelle.

L'analyse statistique des résultats de simulation permet d'extraire un comportement moyen indépendant des conditions initiales et donc reproductible. En étudiant les corrélations statistiques entre les grandeurs physiques, on distingue les structures cohérentes et ordonnées de l'écoulement des structures aléatoires. Les équations d'évolution de l'énergie cinétique et du carré des écarts de température, pour le mouvement moyen et le mouvement fluctuant, sont établies ci-dessous.

### Énergie cinétique

L'énergie cinétique instantanée par unité de volume est définie par

$$E_c(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \rho_0 u_i u_i. \quad (4.27)$$

L'énergie cinétique moyenne est la somme de l'énergie cinétique du mouvement moyen et de l'énergie cinétique moyenne du mouvement fluctuant, soit

$$\langle E_c(\mathbf{u}) \rangle = E_c(\langle \mathbf{u} \rangle) + \langle E_c(\mathbf{u}') \rangle, \quad (4.28)$$

où  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle$  désigne le vecteur vitesse fluctuant.

L'équation d'évolution de  $E_c(\langle \mathbf{u} \rangle)$  se déduit en faisant le produit scalaire de l'équation d'évolution de la vitesse moyenne  $\langle \mathbf{u} \rangle$  par la vitesse moyenne  $\langle \mathbf{u} \rangle$ , soit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_c(\langle \mathbf{u} \rangle)}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial E_c(\langle \mathbf{u} \rangle)}{\partial x_j} \\ &= - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \langle u_j \rangle \langle p \rangle + \rho_0 \langle u'_i u'_j \rangle \langle u_i \rangle - \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right)}_{\text{I}} \\ & \quad + \underbrace{\rho_0 \beta g (\langle T \rangle - T_0) \langle u_3 \rangle}_{\text{II}} + \underbrace{\rho_0 \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{\text{III}} - \underbrace{\mu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{\text{IV}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

L'équation d'évolution de  $\langle E_c(\mathbf{u}') \rangle$  se déduit en soustrayant l'équation (4.29) à l'équation d'évolution de  $\langle E_c(\mathbf{u}) \rangle$  (obtenue en faisant le produit scalaire entre l'équation d'évolution de la vitesse instantanée  $\mathbf{u}$  par la vitesse instantanée  $\mathbf{u}$  et en prenant la moyenne), soit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle E_c(\mathbf{u}') \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle E_c(\mathbf{u}') \rangle}{\partial x_j} \\ &= - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \langle u'_j p' \rangle + \frac{1}{2} \rho_0 \langle u'_i u'_i u'_j \rangle - \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \langle u'_i u'_i \rangle}{\partial x_j} \right)}_{\text{I}'} \\ & \quad + \underbrace{\rho_0 \beta g \langle T' u'_3 \rangle}_{\text{II}'}} - \underbrace{\rho_0 \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{\text{III}'}} - \underbrace{\mu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle}_{\text{IV}'}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Les termes en accolade sont les différentes contributions aux variations de  $E_c(\langle \mathbf{u} \rangle)$  et  $\langle E_c(\mathbf{u}') \rangle$  et représentent physiquement :

- (I et I') une redistribution ;
- (II et II') une production par les forces d'Archimède ;

- (III et III') un échange d'énergie entre le mouvement moyen et le mouvement d'agitation III' = -III ;
- (IV et IV') une pseudo-dissipation.

En additionnant les équations (4.29) et (4.30) et en moyennant sur le volume de la cavité on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int \underbrace{\rho_0 \beta g (\langle T \rangle - T_0) \langle u_3 \rangle + \langle T' u_3' \rangle}_{\text{III+III'}} dV \\ = \frac{1}{V} \int \underbrace{\mu \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \left\langle \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right\rangle \right)}_{\text{-(IV+IV')}} dV. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Les termes instationnaires s'annulent en moyenne statistique et, intégrés en volume, les termes de redistribution disparaissent puisque la cavité est fermée. Enfin, les termes d'échange III et III' sont rigoureusement opposés. L'équation (4.31) traduit l'équilibre entre la production d'énergie cinétique par les forces d'Archimède et sa dissipation visqueuse.

### Carré des écarts de température

Par analogie avec l'énergie cinétique, on définit la quantité  $E_t(\theta)$  comme le carré des écarts de température  $\theta = T - T_0$

$$E_t(\theta) = \frac{1}{2} \theta^2. \quad (4.32)$$

La moyenne du carré des écarts est la somme du carré des écarts moyens et de la moyenne du carré des fluctuations des écarts selon

$$\langle E_t(\theta) \rangle = E_t(\langle \theta \rangle) + \langle E_t(\theta') \rangle, \quad (4.33)$$

où  $\theta' = \theta - \langle \theta \rangle$  désigne l'écart de température fluctuant.

L'équation d'évolution de  $E_t(\langle \theta \rangle)$  se déduit en multipliant l'équation d'évolution de l'écart de température moyen  $\langle \theta \rangle$  par l'écart de température

moyen  $\langle \theta \rangle$ , soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t(\langle \theta \rangle)}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial E_t(\langle \theta \rangle)}{\partial x_i} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a \langle \theta \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} \right)}_{\text{V}} + \underbrace{\langle u'_i \theta' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i}}_{\text{VI}} \\ &\quad - \underbrace{a \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i}}_{\text{VII}} - \underbrace{\frac{\langle \theta \rangle}{\rho_0 C_p} \left\langle \frac{\partial q_i^R}{\partial x_i} \right\rangle}_{\text{VIII}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u'_i \theta' \rangle \langle \theta \rangle)}_{\text{IX}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

L'équation d'évolution de  $\langle E_t(\theta') \rangle$  se déduit en soustrayant l'équation (4.34) à l'équation d'évolution de  $\langle E_t(\theta) \rangle$  (obtenue en multipliant l'équation d'évolution de l'écart de température instantané  $\theta$  par l'écart de température instantané  $\theta$  et en prenant la moyenne), soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E_t(\theta') \rangle}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle E_t(\theta') \rangle}{\partial x_i} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a \left\langle \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle \right)}_{\text{V}'} - \underbrace{\langle u'_i \theta' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i}}_{\text{VI}'} \\ &\quad - \underbrace{a \left\langle \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle}_{\text{VII}'} - \underbrace{\left\langle \frac{\theta'}{\rho_0 C_p} \left( \frac{\partial q_i^R}{\partial x_i} \right)' \right\rangle}_{\text{VIII}'}}_{\text{IX}'}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \langle u'_i \theta' \theta' \rangle \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Les termes en accolade sont les différentes contributions aux variations de  $E_t(\langle \theta \rangle)$  et  $\langle E_t(\theta') \rangle$  et représentent :

- (V et V') une production par gradients à la paroi ;
- (VI et VI') un échange entre les parties moyenne et fluctuante VI' = -VI ;
- (VII et VII') une pseudo-dissipation ;
- (VIII et VIII') une pseudo-dissipation radiative, nulle pour un milieu transparent ;
- (IX et IX') une redistribution.

En additionnant les équations (4.34) et (4.35) et en moyennant sur le

volume de la cavité on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{S} \int -a \underbrace{\left( \langle \theta \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} + \left\langle \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle \right)}_{V+V'} n_i dS \\
 & = \frac{1}{V} \int a \underbrace{\left( \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} + \left\langle \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle \right)}_{-(VII+VII')} \\
 & \quad + \frac{1}{\rho_0 C_p} \underbrace{\left( \langle \theta \rangle \left\langle \frac{\partial q_i^R}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \theta' \left( \frac{\partial q_i^R}{\partial x_i} \right)' \right\rangle \right)}_{-(VIII+VIII')} dV. \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Les termes instationnaires s'annulent en moyenne statistique et les termes d'échange VI et VI' sont rigoureusement opposés. L'équation (4.36) traduit l'équilibre entre la génération des écarts de température aux parois et leur dissipation par conduction et rayonnement.

## 4.2 Effets du rayonnement du gaz et des parois sur la transition vers l'instationnarité

Les effets du rayonnement du gaz et des parois sur la transition de l'écoulement de convection naturelle vers l'instationnarité sont étudiés en considérant les trois configurations listées dans le tableau 4.1. Ces configurations sont discutées plus en détail au chapitre précédent (§ 3.1). Le gaz contenu dans la cavité est soit de l'air supposé transparent à  $T_0 = 300$  K (cas A et C), soit un mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> rayonnant à  $T_0 = 300$  K (cas B). Dans le cas A, l'écoulement de convection naturelle n'est pas couplé au rayonnement et la transition vers l'instationnarité ne dépend que du nombre de Rayleigh ( $Pr = 0,707$ ). Dans le cas C, les six parois de la cavité rayonnent, le gaz est transparent, et la transition dépend d'un paramètre supplémentaire : la taille de la cavité  $L$ . Enfin, dans le cas B, le gaz est rayonnant et la transition vers l'instationnarité est étudiée en faisant varier le nombre de Rayleigh, la taille de la cavité  $L$  et les fractions molaires des espèces absorbantes  $X_{H_2O}$  et  $X_{CO_2}$ .

Pour le cas A, une simulation instationnaire est menée juste au-dessus du nombre de Rayleigh critique, afin de retrouver les principaux résultats obtenus.

TABLE 4.1 – Configurations étudiées.

Cas	A	B	C
Parois isothermes	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$
Parois adiabatiques	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$
Gaz	Transparent	Rayonnant	Transparent

nus dans la littérature. Pour les cas B et C, les simulations sont entreprises à partir des solutions stationnaires discutées au chapitre précédent, en faisant varier les paramètres énumérés ci-dessus jusqu'à l'obtention d'une solution instationnaire. Les paramètres des simulations numériques sont donnés et justifiés en annexe A.

#### 4.2.1 Gaz transparent, parois adiabatiques parfaitement réfléchissantes

Lorsque le gaz est considéré transparent, les parois isothermes noires et les parois adiabatiques parfaitement réfléchissantes (cas A), le transfert radiatif n'influence pas l'écoulement de convection naturelle. La transition vers l'instationnarité dépend uniquement de deux paramètres : le nombre de Rayleigh et le nombre de Prandtl, ici fixé à  $Pr = 0,707$ . De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de la transition dans cette configuration, en cavité carrée, puis en cavité cubique.

Une des premières études en cavité carrée menée par Paolucci et Chenoweth (1989) montre que la transition a lieu en sortie des couches limites verticales lorsque le fluide rebondit sur la paroi haute ou basse. Un brusque épaissement de la couche limite horizontale se produit et une poche de recirculation se forme dans le coin de la cavité. Le nombre de Rayleigh critique de transition est estimé dans cette étude autour de  $Ra = 2 \times 10^8$ . Les auteurs proposent une interprétation physique de la transition par analogie avec le ressaut hydraulique, en construisant un nombre de Froude,  $Fr = u/\sqrt{g\delta}$ , basé sur la vitesse du fluide  $u$  et une distance caractéristique  $\delta$  de passage du fluide : lorsque le nombre de Froude est supérieur à 1, le ressaut se produit. Ravi *et al.* (1994) contestent cette analyse en montrant notamment que l'expansion du fluide le long des parois horizontales n'est pas associée à une perte d'énergie cinétique par viscosité, comme dans le cas d'un ressaut hydraulique classique. Selon eux, le rebond du fluide est lié à un effet

thermique : le fluide oscille le long des parois horizontales lorsque sa température est en déséquilibre par rapport à la température du cœur stratifié à la même hauteur. Les auteurs montrent que ce rebond du fluide disparaît lorsque la température de la paroi haute (basse) est refroidie (réchauffée) et que la stratification thermique résultante est plus faible.

Les effets tridimensionnels sur la transition ont été pris en compte par Henkes et Le Quéré (1996) sous la forme de perturbations périodiques dans la direction transverse. Leur analyse de stabilité linéaire autour d'un état stationnaire 2D conclut que les perturbations 3D sont moins stables que les perturbations 2D. Le nombre de Rayleigh critique de transition dans cette configuration est donné dans une étude plus récente (Xin et Le Quéré, 2012). Un mode instable stationnaire de longueur d'onde  $\Lambda^+ = \Lambda/L = 0,33$  est détecté à  $Ra = 1,55 \times 10^7$  et l'écoulement 3D résultant devient instationnaire pour un nombre de Rayleigh compris entre  $4 \times 10^7$  et  $4,5 \times 10^7$ .

Janssen et Henkes (1996) sont les premiers à explorer la transition en cavité cubique en réalisant des calculs instationnaires. Ils limitent cependant la taille de leur domaine à un quart du volume de la boîte en imposant les trois symétries de l'écoulement. À  $Ra = 10^8$  ils obtiennent une solution stationnaire où une ondulation transverse de longueur d'onde  $\Lambda^+ = 0,18$  est observée dans la couche limite horizontale. Ils mettent en évidence la présence de rouleaux stationnaires contra-rotatifs orientés dans la direction de l'écoulement, qu'ils associent à une instabilité de Dean, liée aux forces centrifuges. À plus haut Rayleigh, une solution instationnaire présentant une oscillation basse fréquence est obtenue. Malgré l'hypothèse de symétrie, ces résultats sont en partie retrouvés qualitativement par simulation numérique directe sur la totalité du domaine. Labrosse *et al.* (1997) situent la transition vers l'instationnarité dans l'intervalle  $Ra \in [3, 2 \times 10^7; 3, 5 \times 10^7]$  (soit un ordre de grandeur en dessous de la transition en cavité carrée). À  $Ra = 3,5 \times 10^7$ , l'écoulement présente une basse fréquence caractéristique égale à  $f^+ = fL^2/(a\sqrt{Ra}) = 7,6 \times 10^{-3}$ . Ce résultat fait aujourd'hui référence et a été confirmé par de Gassowski *et al.* (2003), qui notent également la présence de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs dans les couches limites horizontales.

## Résultats

Afin de retrouver ces résultats en cavité cubique, une simulation est entreprise à un nombre de Rayleigh de  $3,5 \times 10^7$ , ce qui correspond à la fin de

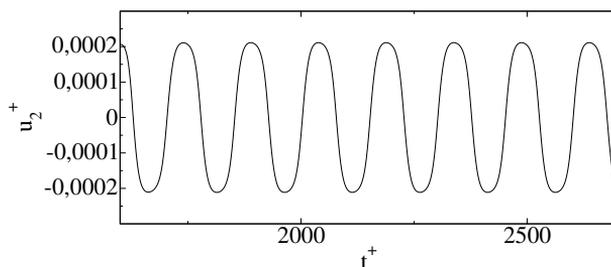


FIGURE 4.1 – Cas A -  $Ra = 3,5 \times 10^7$ . Évolution temporelle de la composante transversale de la vitesse  $u_2^+$  au point  $(x^+; y^+; z^+) = (9,6 \times 10^{-3}; 0,5; 0,963)$ .

l'intervalle donné par Labrosse *et al.* (1997) pour la transition. En partant de l'état initial  $\mathbf{u}^+ = \mathbf{0}$ ,  $p^+ = 0$  et  $T^+ = 0$ , une solution instationnaire périodique est obtenue pour l'ensemble des champs à partir de  $t^+ \simeq 1800$ . L'évolution temporelle de la composante transversale de la vitesse  $u_2^+$  en un point est donnée sur la figure 4.1 à titre d'illustration. La fréquence du signal est  $f^+ = 6,7 \times 10^{-3}$ , ce qui est proche de la fréquence  $f^+ = 7,6 \times 10^{-3}$  obtenue par Labrosse *et al.* (1997).

Les champs de température et d'énergie cinétique, moyennés temporellement entre  $t^+ = 2100$  et  $t^+ = 2700$ , sont montrés sur la figure 4.2 dans le plan médian de la cavité  $y^+ = 0,5$ . On reconnaît le phénomène d'expansion du fluide à la sortie des couches limites verticales analysé par Ravi *et al.* (1994), qui freine le fluide et le fait osciller le long des parois horizontales. Le cœur de la cavité est immobile et le paramètre de stratification  $\langle \mathcal{S} \rangle$  est égal à 0,99.

### Modes dynamiques

La décomposition en modes dynamiques (§ 4.1.2) est appliquée sur 120 champs instantanés de température et de vitesse, échantillonnés à  $\Delta t^+ = 5$ . Le spectre des valeurs propres ainsi que l'amplitude des modes sont représentés sur la figure 4.3. Un mode dominant de fréquence  $f^+ = 6,7 \times 10^{-3}$  et d'accroissement temporel négligeable ( $|\lambda| = 0,9994$ ) est trouvé. La figure 4.4 montre les parties réelle et imaginaire de ce mode. On observe des rouleaux contra-rotatifs alignés selon l'axe  $x$ , qui apparaissent à la sortie des couches limites verticales et s'estompent à mi-longueur de la cavité ( $x^+ \simeq 0,5$ ). Dans la direction  $y$ , ces rouleaux sont séparés par une période spatiale  $\Lambda^+ \simeq 0,25$ .

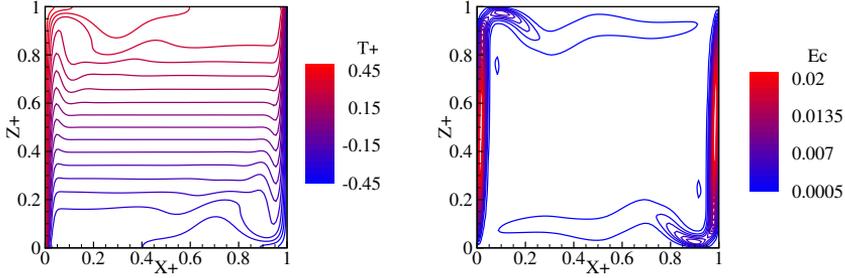


FIGURE 4.2 – Cas A -  $Ra = 3,5 \times 10^7$ . Température moyenne  $\langle T^+ \rangle$  et énergie cinétique moyenne  $\langle u_i^+ u_i^+ / 2 \rangle$  dans le plan  $y^+ = 0,5$ . L'écart entre deux isothermes est de  $0,05$  et l'écart entre deux isovalues de l'énergie cinétique est de  $1,08 \times 10^{-3}$ .

Le mode DMD conserve la symétrie centrale 2D (équation (3.2)), mais brise la symétrie de réflexion par rapport au plan  $y^+ = 0,5$  (équation (3.3)) et la symétrie centrale 3D (équation (3.4)).

Ces rouleaux contra-rotatifs, orientés dans le sens de l'écoulement, ont également été mis en évidence par Janssen et Henkes (1996) et de Gassowski *et al.* (2003) en cavité cubique, et par Xin et Le Quéré (2012) à partir d'une analyse de stabilité linéaire de perturbations périodiques dans la direction  $y$ . La forme de ces structures ainsi que la courbure de l'écoulement dans le coin en sortie des couches limites, suggèrent que la transition est liée à une instabilité de force centrifuge (instabilité de Görtler (Saric, 1994)).

La décomposition en modes propres orthogonaux a également été effectuée à partir des mêmes champs instantanés. Les valeurs propres du spectre POD sont obtenues par paires, ce qui est caractéristique des phénomènes périodiques. Les deux premiers modes POD sont très proches de la partie réelle et de la partie imaginaire du mode DMD dominant, comme cela est également noté par (Chen *et al.*, 2012) dans le cas d'évolutions périodiques.

#### 4.2.2 Gaz transparent, six parois noires

Lorsque le gaz est considéré transparent et que les six parois de la cavité sont noires (cas C), les conditions aux limites de l'équation du bilan d'énergie du fluide sont modifiées. Aux parois adiabatiques, le flux radiatif est égal au flux conductif. Dans cette configuration, la transition vers l'instation-

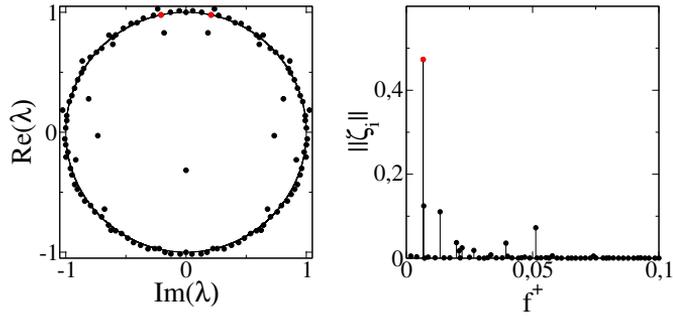


FIGURE 4.3 – Cas A -  $\text{Ra} = 3,5 \times 10^7$ . Spectre (gauche) et amplitude (droite) des modes dynamiques. La fréquence du mode est obtenue selon  $f^+ = \text{Im}(\ln \lambda)/(2\pi\Delta t^+)$ . Le mode dominant de fréquence  $f^+ = 6,7 \times 10^{-3}$  est coloré en rouge.

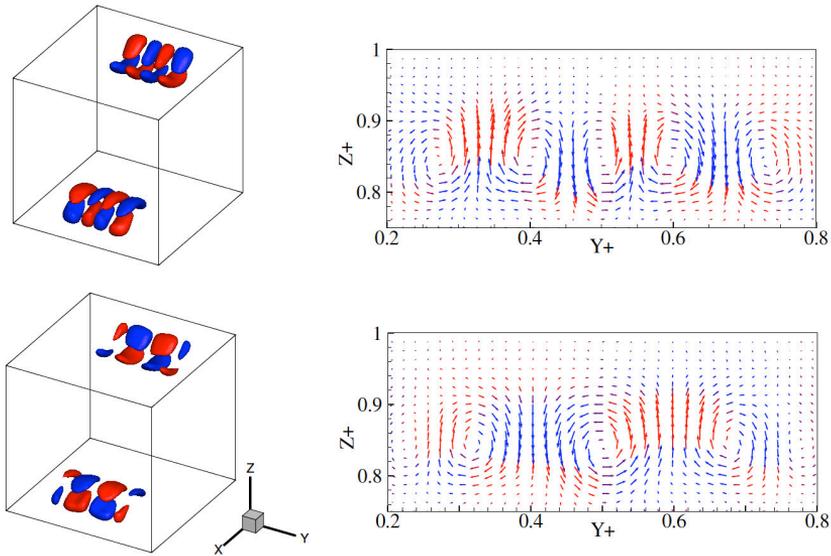


FIGURE 4.4 – Cas A -  $\text{Ra} = 3,5 \times 10^7$ . Partie réelle (haut) et partie imaginaire (bas) du mode dynamique dominant de fréquence  $f^+ = 6,7 \times 10^{-3}$ . Surfaces iso-valeurs de la température du mode  $\zeta^T = \pm 1 \times 10^{-3}$  (gauche) et vitesse du mode colorée par la température du mode dans le plan  $x^+ = 0,175$  (droite).

narité dépend du nombre de Rayleigh, du nombre de Prandtl, du rapport de température  $\Delta T/T_0$  et du nombre de Planck (équation (1.22)). Comme de l'air à  $T_0 = 300$  K est contenu dans la cavité, on choisit de faire varier uniquement le nombre de Rayleigh et la taille de la cavité  $L$ .

Wang *et al.* (2006) ont étudié la transition vers l'instationnarité dans cette configuration dans le cas d'une cavité carrée. Des solutions instationnaires périodiques sont obtenues dans la gamme  $Ra \in [10^7; 2 \times 10^7]$  pour une cavité de taille  $L = 0,335$  m, une émissivité  $\varepsilon = 0,2$  pour les quatre parois et une température moyenne  $T_0 = 293,5$  K. Pour expliquer l'origine physique de la transition, une analogie est soulignée entre les structures d'écoulement observées et celles rencontrées dans les cavités aux parois horizontales parfaitement conductrices. Dans cette dernière configuration, un profil de température linéaire  $T(x) = T_c - x\Delta T/L$  est imposé aux parois horizontales. La paroi haute est donc refroidie, la paroi basse réchauffée et la stratification résultante est plus faible comme dans le cas où ces parois sont noires et adiabatiques.

En cavité conductrice, l'analyse de stabilité linéaire a été menée par Xin et Le Quéré (2001) pour  $Pr = 0,71$ . En deux dimensions, un mode instable de fréquence  $f^+ = 0,213$  est obtenu à  $Ra = 2,1 \times 10^6$ . Pour des perturbations périodiques dans la direction transverse, un mode instable de fréquence  $f^+ = 0,190$  et de longueur d'onde  $\Lambda^+ = 0,87$  est détecté à plus bas Rayleigh,  $Ra = 1,6 \times 10^6$ . L'origine physique de la transition est discutée par Janssen et Henkes (1995). Il s'agit d'une instabilité de type Rayleigh-Bénard liée à la stratification thermique instable en amont des couches limites verticales. À partir d'un modèle analytique simple basé sur ce mécanisme, ils réussissent à reproduire le profil de température dans la couche limite horizontale et à prédire la fréquence d'oscillation des structures mécaniques et thermiques. Ils montrent également que les fluctuations d'énergie cinétique sont créées majoritairement par la force de flottabilité. Les résultats obtenus en cavité carrée et en cavité cubique sont proches en termes de nombre de Rayleigh critique, de fréquence d'oscillation et de structures spatiales. Les auteurs concluent que la transition est basée sur le même mécanisme physique en deux et trois dimensions.

## Résultats

À partir de la solution stationnaire obtenue à  $Ra = 10^6$  et  $L = 1$  m, des simulations de l'écoulement de convection naturelle couplé au rayonnement

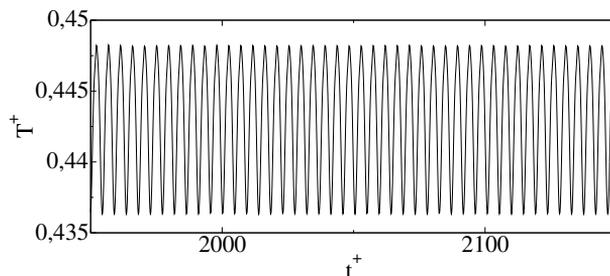


FIGURE 4.5 – Cas C -  $Ra = 5 \times 10^6$ . Évolution temporelle de la température  $T^+$  au point  $(x^+; y^+; z^+) = (9,6 \times 10^{-3}; 0,5; 0,875)$ .

des six parois noires sont réalisées en augmentant le nombre de Rayleigh et en conservant la taille de la cavité. À  $Ra = 3 \times 10^6$ , une solution stationnaire est obtenue mais à  $Ra = 5 \times 10^6$ , une solution instationnaire périodique de fréquence  $f^+ = 0,22$  est observée pour l'ensemble des champs à partir de  $t^+ \simeq 1700$ . L'évolution temporelle de la température  $T^+$  en un point est donnée sur la figure 4.5 à titre d'illustration. À  $Ra = 5 \times 10^6$  et  $L = 1$  m, le nombre de Planck et le rapport de température  $\Delta T/T_0$  valent respectivement  $3,1 \times 10^{-6}$  et  $1,8 \times 10^{-4}$ .

Les champs de température et d'énergie cinétique, moyennés temporellement entre  $t^+ = 1900$  et  $t^+ = 2300$ , sont montrés sur la figure 4.6 dans le plan médian de la cavité  $y^+ = 0,5$ . L'effet du rayonnement des parois est de chauffer la paroi basse, de refroidir la paroi haute et de réduire la stratification au centre de la cavité (§ 3.2.1). Les lignes isothermes ne sont plus perpendiculaires à la paroi adiabatique, ce qui crée des zones de stratification instable pour  $0 \leq x^+ \leq 0,5$  près de la paroi basse et pour  $0,5 \leq x^+ \leq 1$  près de la paroi haute. L'écoulement est renforcé car le fluide est réchauffé (refroidi) en amont de la couche limite verticale le long de la paroi chaude (froide). L'expansion thermique, typique de l'écoulement de convection naturelle en l'absence de transferts radiatifs (figure 4.2), disparaît car la stratification thermique est plus faible. Le gaz n'est plus freiné à la sortie de la couche limite verticale et circule plus rapidement le long des parois haute et basse.

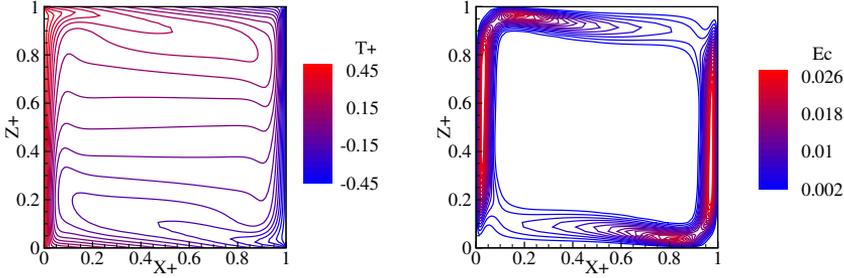


FIGURE 4.6 – Cas C -  $Ra = 5 \times 10^6$ . Température moyenne  $\langle T^+ \rangle$  et énergie cinétique moyenne  $\langle u_i^+ u_i^+ / 2 \rangle$  dans le plan  $y^+ = 0,5$ . L'écart entre deux isothermes est de 0,05 et l'écart entre deux isovaleurs de l'énergie cinétique est de  $1,33 \times 10^{-3}$ .

### Modes dynamiques

La décomposition en modes dynamiques est appliquée sur 100 champs instantanés de température et de vitesse, échantillonnés à  $\Delta t^+ = 0,5$ . Le spectre des valeurs propres ainsi que l'amplitude des modes sont représentés sur la figure 4.7. Un mode dominant de fréquence  $f^+ = 0,22$  et d'accroissement temporel négligeable ( $|\lambda| = 0,9999$ ) est trouvé et ses parties réelle et imaginaire sont montrées sur la figure 4.8. Les champs de température et de vitesse du mode sont caractérisés par des rouleaux d'axes perpendiculaires à la direction de l'écoulement. Ces structures grossissent le long des parois horizontales, dans les zones de stratification instable, avant d'être entraînées dans les couches limites verticales. L'origine de ces structures est vraisemblablement liée à une instabilité de type Rayleigh-Bénard.

Le mode DMD conserve la symétrie centrale 2D mais brise la symétrie de réflexion par rapport au plan  $y^+ = 0,5$  et la symétrie centrale 3D. La symétrie centrale 2D est vérifiée uniquement parce que les gradients de température sont faibles et les transferts radiatifs quasi-linéaires (voir § 3.2.4). La température au centre de la cavité  $T^+(0,5;0,5;0,5)$  est néanmoins différente du zéro numérique et est de l'ordre de  $10^{-6}$ . Les structures thermiques apparaissent symétriques par rapport au plan de réflexion  $y^+ = 0,5$  le long des parois horizontales, puis sont déformées dans la direction  $y$  lorsqu'elle sont convectées dans les couches limites verticales.

La décomposition en modes propres orthogonaux a également été appli-

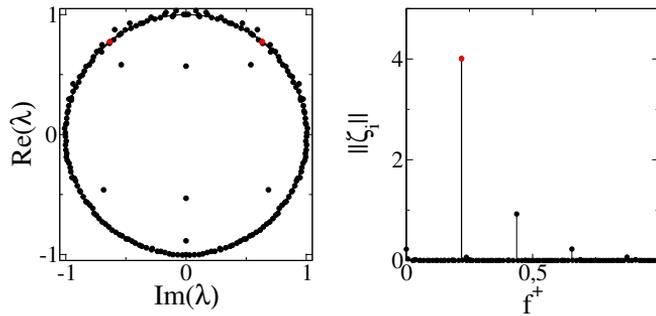


FIGURE 4.7 – Cas C -  $\text{Ra} = 5 \times 10^6$ . Spectre (gauche) et amplitude (droite) des modes dynamiques. La fréquence du mode est obtenue selon  $f^+ = \text{Im}(\ln \lambda)/(2\pi\Delta t^+)$ . Le mode dominant de fréquence  $f^+ = 0,22$  est coloré en rouge.

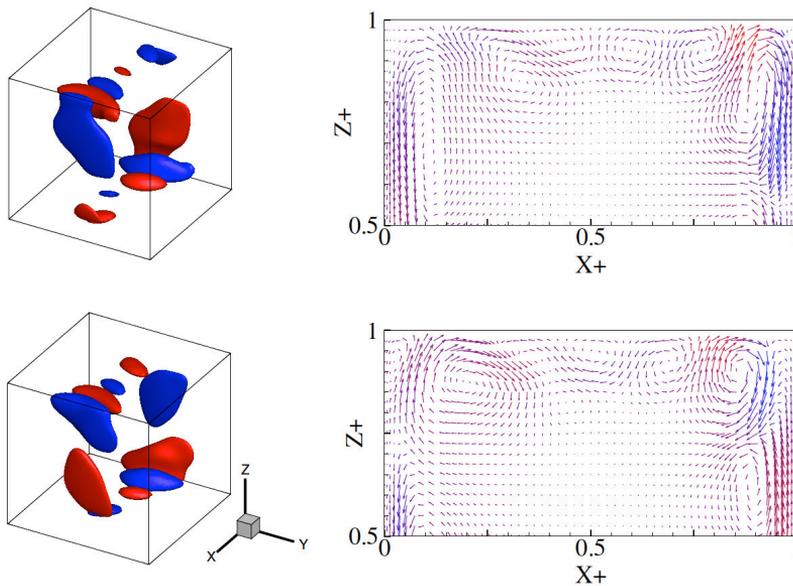


FIGURE 4.8 – Cas C -  $\text{Ra} = 5 \times 10^6$ . Partie réelle (haut) et partie imaginaire (bas) du mode dynamique dominant de fréquence  $f^+ = 0,22$ . Surfaces isovaleurs de la température du mode  $\zeta^T = \pm 0,01$  (gauche) et vitesse du mode colorée par la température du mode dans le plan  $y^+ = 0,5$  (droite).

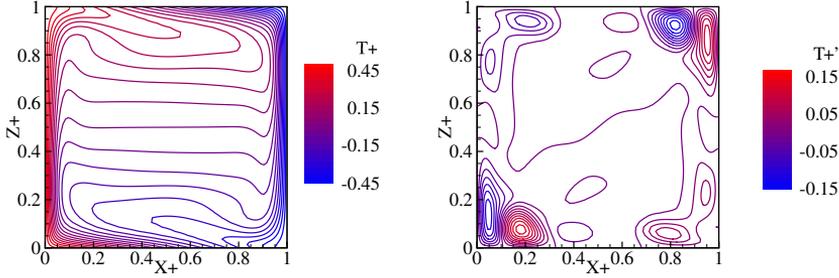


FIGURE 4.9 – Cavité conductrice -  $Ra = 3 \times 10^6$ . Température moyenne  $\langle T^+ \rangle$  et fluctuations de température instantanées  $T^{+'}$  dans le plan  $y^+ = 0,5$ . L'écart entre deux isothermes est de  $0,05$  pour le champ moyen et de  $1,67 \times 10^{-2}$  pour le champ fluctuant.

qu ee aux mêmes champs instantan es.   nouveau, les deux premiers modes POD sont très proches des parties réelle et imaginaire du mode DMD dominant.

### Comparaison avec la cavité conductrice

Afin de comparer l'écoulement transitionnel de la cavité rayonnante et celui de la cavité conductrice, une simulation numérique est réalisée en remplaçant les parois adiabatiques noires par des parois à température imposée  $T^+(x^+) = 0,5 - x^+$ .    $Ra = 3 \times 10^6$ , une solution instationnaire périodique, de fréquence  $f^+ = 0,16$  est obtenue. En observant le champ de température moyen et le champ de température fluctuant instantan e dans le plan  $y^+ = 0,5$  repr esent e sur la figure 4.9, on peut apprécier les similitudes avec le cas de la cavité rayonnante. Le champ de température fluctuant présente notamment les mêmes structures thermiques que le mode POD repr esent e sur la figure 4.8.

Janssen et Henkes (1995) prédisent une fréquence d'oscillation pour l'écoulement en cavité conductrice en adaptant une relation empirique établie par Sparrow *et al.* (1970), pour des *thermals* g en er es dans des couches de fluide épaisses et thermiquement instables

$$f^+ = 2,77^2 \left( \frac{\Delta T_{cl}^+}{Ra_{cl}} \right)^{2/3} Ra^{1/6}. \quad (4.37)$$

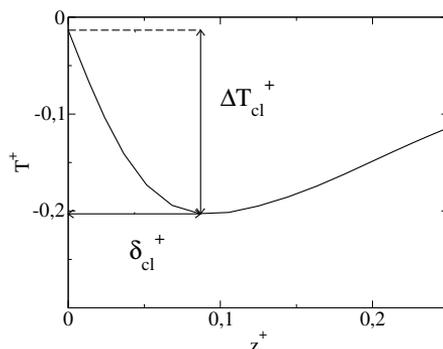


FIGURE 4.10 – Cas C -  $Ra = 5 \times 10^6$ . Profil de température moyenne en  $x^+ = 0,5$  et  $y^+ = 0,5$ . Définition de l'écart de température  $\Delta T_{cl}^+$  et de l'épaisseur  $\delta_{cl}^+$  introduits dans l'équation (4.38).

Pour la cavité carrée, le nombre de Rayleigh équivalent  $Ra_{cl}$  de la couche limite horizontale est estimé en moyennant un nombre de Rayleigh équivalent local

$$Ra_{cl}(x^+) = \frac{\rho_0^2 C_p \beta g \Delta T_{cl}^+(x^+) \delta_{cl}^+(x^+)^3}{\mu \lambda}, \quad (4.38)$$

basé sur l'épaisseur de la couche limite  $\delta_{cl}^+(x^+)$  définie par

$$\frac{\partial \langle T^+ \rangle}{\partial z^+}(x^+; z^+ = \delta_{cl}^+(x^+)) = 0, \quad (4.39)$$

et sur l'écart de température

$$\Delta T_{cl}^+(x^+) = \langle T_{bas}^+ \rangle(x^+, z^+ = 0) - \langle T_{cl}^+ \rangle(x^+, z^+ = \delta_{cl}^+(x^+)), \quad (4.40)$$

pour la paroi basse par exemple ( $\Delta T_{cl}^+$  et  $\delta_{cl}^+$  sont représentés graphiquement sur la figure 4.10).

Cette analyse est appliquée à la solution instationnaire obtenue pour la cavité rayonnante à  $Ra = 5 \times 10^6$  et à la solution instationnaire obtenue pour la cavité conductrice à  $Ra = 3 \times 10^6$ . La figure 4.11 compare les profils du nombre de Rayleigh équivalent, de la température  $\langle T_{bas}^+ \rangle$  et de la température de couche limite  $\langle T_{cl}^+ \rangle$ , pour les deux cas, dans le plan  $y^+ = 0,5$ . La principale différence concerne le profil de température sur la paroi basse, qui est plus proche de zéro dans le cas d'une paroi adiabatique noire.

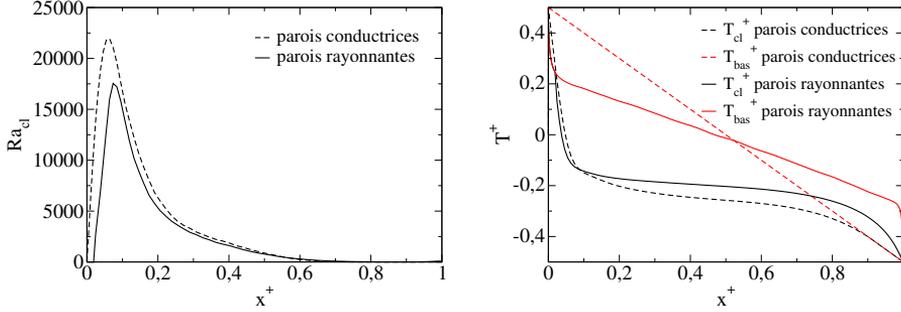


FIGURE 4.11 – Comparaison entre la cavité conductrice (parois latérales et horizontales parfaitement conductrices) à  $Ra = 3 \times 10^6$  et le cas C (parois horizontales et latérales adiabatiques et noires) à  $Ra = 5 \times 10^6$ . Nombre de Rayleigh équivalent de la couche limite basse (équation (4.38)) et profils de la température de la paroi basse  $\langle T_{bas}^+ \rangle(x^+)$  et de la température de couche limite  $\langle T_{cl}^+ \rangle(x^+, z^+ = \delta_{cl}^+(x))$ . Résultats moyennés en temps dans le plan  $y^+ = 0, 5$ .

L'écart de température  $\Delta T_{cl}^+(x^+)$  entre  $0 \leq x \leq 0, 5$  est donc plus faible, ce qui explique pourquoi le nombre de Rayleigh critique de la transition est supérieur. L'équation (4.37) prédit une fréquence  $f^+$  égale à 0,19 pour la cavité rayonnante et 0,18 pour la cavité conductrice, ce qui est proche des résultats numériques  $f^+ = 0, 22$  (cavité rayonnante) et  $f^+ = 0, 16$  (cavité conductrice).

La transition vers l'instationnarité a été étudiée pour une taille de cavité  $L$  donnée. Une augmentation de ce paramètre renforcerait les effets du rayonnement de parois et diminuerait probablement le nombre de Rayleigh critique, sans modifier pour autant le mécanisme physique de la transition. Il faut également souligner qu'en régime instationnaire, le couplage instantané entre la conduction et le rayonnement de la paroi est peu réaliste physiquement. La conduction instationnaire à l'intérieur des parois latérales et verticales, couplée au rayonnement des six parois de la cavité, est prise en compte par exemple par Xin *et al.* (2006, 2013).

### 4.2.3 Gaz rayonnant, parois adiabatiques parfaitement réfléchissantes

Lorsque le gaz est considéré rayonnant, les parois isothermes noires et les parois adiabatiques parfaitement réfléchissantes (cas B), l'écoulement de convection naturelle est affecté localement par les échanges radiatifs gaz-gaz et gaz-parois isothermes. Les propriétés radiatives réelles de mélanges air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> sont prises en compte et le problème ne peut plus être adimensionné. La transition vers l'instationnarité dépend du nombre de Rayleigh, du nombre de Prandtl, de la taille de la cavité  $L$  et de la fraction molaire des espèces absorbantes  $X_{\text{H}_2\text{O}}$  et  $X_{\text{CO}_2}$ . On choisit par la suite de conserver le rapport  $X_{\text{H}_2\text{O}}/X_{\text{CO}_2}$  constant et égal à 20 et seule la concentration en vapeur d'eau sera précisée.

#### Résultats

Au chapitre précédent, une solution stationnaire a été obtenue dans cette configuration à  $\text{Ra} = 3 \times 10^7$  et pour  $L = 1$  m,  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$  et  $X_{\text{H}_2\text{O}}/X_{\text{CO}_2} = 20$ . Afin de vérifier si un état instationnaire peut être atteint en dessous du nombre de Rayleigh critique de transition sans rayonnement (cas A), les effets du rayonnement du gaz peuvent être accentués en augmentant soit la taille de la cavité, soit la fraction molaire des espèces absorbantes. Comme la concentration en vapeur d'eau doit rester inférieure au seuil de saturation à pression atmosphérique  $X_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{sat}}(300 \text{ K}) = 0,0345$ , on choisit d'augmenter la taille de la cavité à  $L = 3$  m tout en conservant les concentrations initiales et le nombre de Rayleigh. En partant de la solution stationnaire couplée obtenue à  $L = 1$  m, une solution instationnaire chaotique est trouvée à  $\text{Ra} = 3 \times 10^7$ . Le même calcul est répété avec la taille de cavité  $L = 3$  m, mais avec des fractions molaires plus faibles : une solution instationnaire est obtenue pour  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,004$  et une solution stationnaire est obtenue pour  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,002$ . Ces résultats sont résumés dans le tableau 4.2.

La solution instationnaire obtenue à  $\text{Ra} = 3 \times 10^7$  pour  $L = 3$  m (soit  $\Delta T = 1,21 \times 10^{-2}$  K) et  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,004$  est présentée en détail car il s'agit de la solution instationnaire la plus proche d'un seuil de transition parmi celles étudiées. Les champs de température et de vitesse semblent atteindre un état instationnaire asymptotique à partir de  $t^+ \simeq 200$ , sans converger vers une solution périodique. L'évolution temporelle du nombre de Nusselt dans le plan  $x^+ = 0,5$ , représentée sur la figure 4.12 illustre le comportement

TABLE 4.2 – Cas B -  $Ra = 3 \times 10^7$ . Récapitulatif des solutions obtenues. Le cas indiqué en gras est celui analysé en détail dans cette partie.  $X_{H_2O}/X_{CO_2} = 20$ .

$L$ (m)	$X_{H_2O}$	état asymptotique
1	0,02	stationnaire
3	0,02	instationnaire
<b>3</b>	<b>0,004</b>	<b>instationnaire</b>
3	0,002	stationnaire

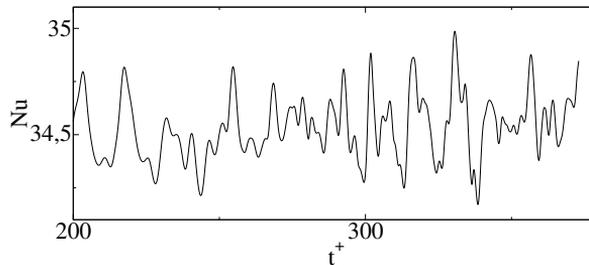


FIGURE 4.12 – Cas B -  $Ra = 3 \times 10^7$  ( $L = 3$  m,  $X_{H_2O} = 0,004$ ). Évolution temporelle du nombre de Nusselt  $Nu = -\partial T^+ / \partial x^+ + u_1^+ T^+ \sqrt{Ra}$ , moyenné dans le plan  $x^+ = 0,5$ .

chaotique de la solution.

Les champs de température et d'énergie cinétique, moyennés temporellement entre  $t^+ = 200$  et  $t^+ = 372$ , sont montrés sur la figure 4.13. Les transferts radiatifs gaz-gaz et gaz-parois ont pour effet de diminuer la stratification thermique et d'épaissir les couches limites verticales (voir §§ 3.2.1 et 3.2.2). On n'observe pas de stratification thermique instable comme dans le cas C car les parois adiabatiques sont parfaitement réfléchissantes et donc le flux conductif  $y$  est nul. L'expansion thermique, caractéristique du cas A, disparaît du fait de la faible stratification.

### Modes propres orthogonaux

La décomposition en modes dynamiques échoue à extraire les structures cohérentes de l'écoulement à cause de la complexité temporelle des champs

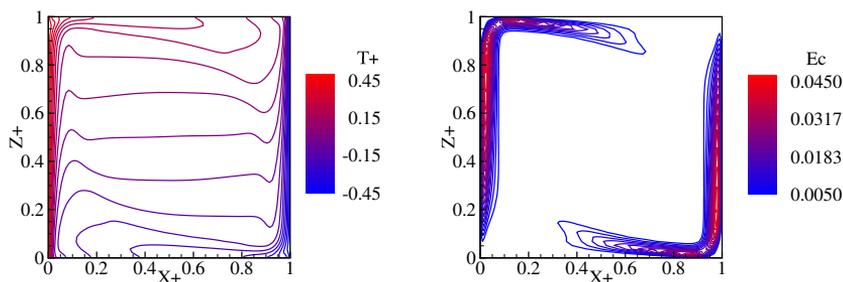


FIGURE 4.13 – Cas B -  $Ra = 3 \times 10^7$  ( $L = 3$  m,  $X_{H_2O} = 0,004$ ). Température moyenne  $\langle T^+ \rangle$  et énergie cinétique moyenne  $\langle u_i^+ u_i^+ / 2 \rangle$  dans le plan  $y^+ = 0,5$ . L'écart entre deux isothermes est de  $0,05$  et l'écart entre deux iso-valeurs de l'énergie cinétique est de  $2,22 \times 10^{-3}$ .

de température et de vitesse : les modes obtenus sont très sensibles à la période d'échantillonnage et au nombre de *snapshots*.

La décomposition en modes propres orthogonaux (§ 4.1.2) est préférée ici et est appliquée sur 64 champs instantanés de température et de vitesse, échantillonnés à  $\Delta t^+ = 1$ . La figure 4.14 montre le spectre POD ainsi que les trois premiers modes. Les valeurs propres représentent l'énergie (fluctuations au carré) de chaque mode : 14 modes sont nécessaires pour capter 90 % de l'énergie des fluctuations dans ce cas. Pour les trois modes présentés figure 4.14, on observe des rouleaux alignés dans la direction  $x$  près des parois horizontales, dont la position et le nombre varient selon les modes. Les plus gros rouleaux sont localisés à la sortie des couches limites verticales. Leur taille diminue le long des parois haute et basse (pour les modes 1 et 3 principalement) et croit à nouveau le long de parois isothermes. Tous les modes brisent les trois symétries du problème, même si le rayonnement est toujours linéarisable. Un champ instantané de vitesse fluctuante coloré par le champ de température fluctuante est montré sur la figure 4.15 dans un plan  $x$ , où l'on note cinq rouleaux contra-rotatifs, localisés arbitrairement selon  $y$ . La puissance radiative fluctuante  $\mathcal{P}^+ = (\nabla^+ \cdot \mathbf{q}^{R+})'$  correspondante est également représentée sur cette figure : les fluctuations positives de la puissance radiative sont corrélées aux fluctuations positives de la température, et réciproquement.

La forme des structures thermiques extraites par la POD et l'allure des

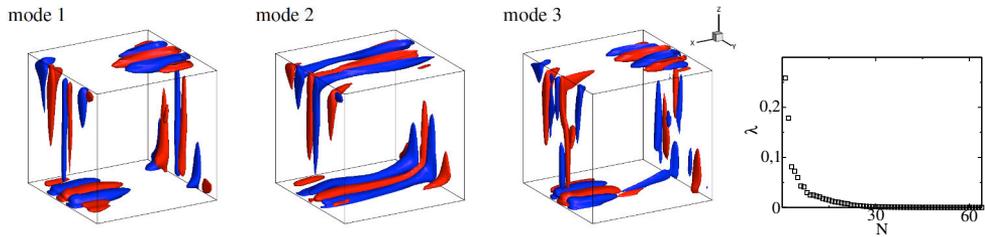


FIGURE 4.14 – Cas B -  $Ra = 3 \times 10^7$  ( $L = 3$  m,  $X_{H_2O} = 0,004$ ). Surfaces iso-valeurs de la température  $\zeta^T = \pm 2$  des trois premiers modes POD et spectre POD.

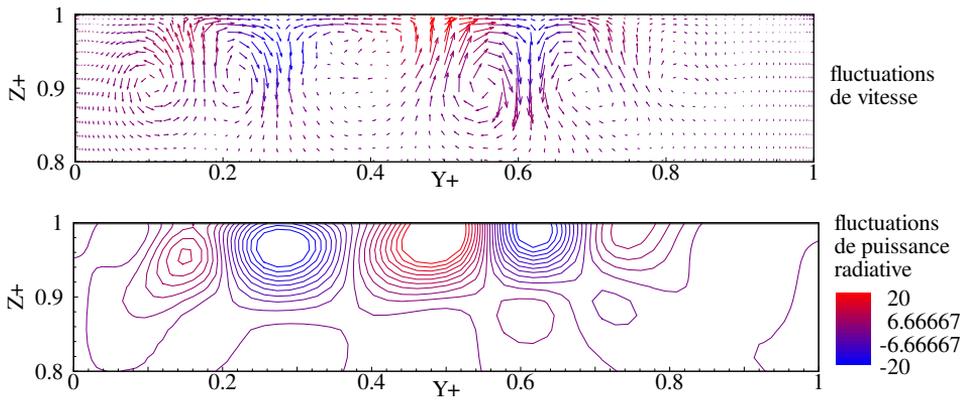


FIGURE 4.15 – Cas B -  $Ra = 3 \times 10^7$  ( $L = 3$  m,  $X_{H_2O} = 0,004$ ). Fluctuations de vitesse instantanées colorées par les fluctuations de température (haut) et fluctuations de la puissance radiative (bas) dans le plan  $x^+ = 0,42$ .

champs de vitesse fluctuants sont plus proches de celles observées dans le cas A que dans le cas C. À la sortie des couches limites verticales, on identifie des rouleaux contra-rotatifs, qui rétrécissent le long des parois horizontales mais qui persistent le long des parois isothermes. Dans le cas A, ces rouleaux sont freinés par l'expansion thermique et disparaissent. Ces observations suggèrent que le mécanisme d'instabilité est plutôt de nature hydrodynamique que thermique. Comme pour le cas A, il pourrait s'agir d'une instabilité de Görtler, induite par les forces centrifuges dans le coin à la sortie des couches limites verticales. Le rayonnement du gaz augmente la vitesse de l'écoulement et accroît les forces centrifuges, proportionnelles à  $\|\mathbf{u}\|^2/R$  si  $R$  est le rayon de courbure de la trajectoire du fluide.

### 4.3 Effets du rayonnement du gaz et des parois à $Ra=3 \times 10^8$

Les effets du rayonnement du gaz et des parois en régime faiblement turbulent sont étudiés à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^8$  pour les configurations listées dans le tableau 4.1. Le nombre de Rayleigh choisi est au minimum dix fois plus grand que le nombre de Rayleigh critique de la transition vers l'instationnarité. Pour les cas B et C, la taille de la cavité est fixée à  $L = 3$  m (soit  $\Delta T = 1,21 \times 10^{-1}$  K) et pour le cas B, la concentration des espèces absorbantes est fixée à  $X_{H_2O} = 0,02$  et  $X_{CO_2} = 0,001$ . Les paramètres des simulations numériques sont donnés et justifiés en annexe A.

L'analyse statistique est une composante importante de l'étude des écoulements instationnaires, puisque seuls les résultats moyennés sont supposés reproductibles (§ 4.1.3). Les simulations numériques instationnaires doivent être intégrées durant une longue période temporelle afin d'en éliminer les aspects transitoires liés aux conditions initiales et de disposer d'une large période temporelle en régime asymptotique, représentative de la moyenne statistique. En partant de l'état initial  $\mathbf{u}^+ = \mathbf{0}$ ,  $p^+ = 0$  et  $T^+ = 0$ , le régime asymptotique pour le cas A est atteint à partir de  $t^+ \simeq 600$  et les résultats sont moyennés pendant une période  $\Delta t^+ = 300$ . En partant de la solution obtenue pour le cas A à  $t^+ = 600$ , le régime asymptotique pour les cas B et C est atteint à partir de  $t^+ \simeq 300$  et les résultats sont moyennés pendant une période  $\Delta t^+ = 200$ .

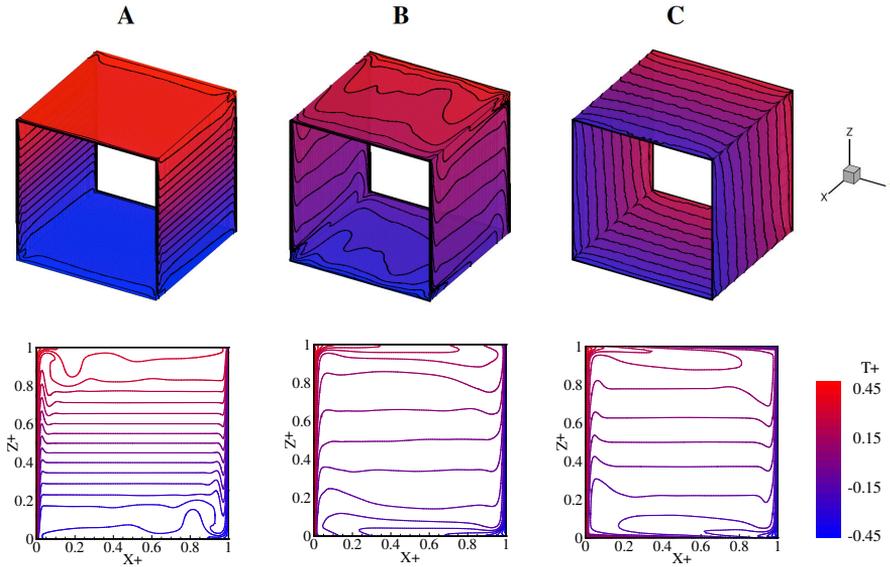


FIGURE 4.16 –  $Ra = 3 \times 10^8$ . Champs de température moyens sur les parois adiabatiques (haut) et dans le plan  $y^+ = 0,5$  (bas). L'écart entre deux isothermes est de 0,05.

### 4.3.1 Champs moyens

#### Champ de température

Les champs de température moyens sur les parois adiabatiques et dans le plan médian  $y^+ = 0,5$  sont représentés sur la figure 4.16. Ces champs moyennés temporellement possèdent des caractéristiques similaires à celles observées sur les solutions stationnaires à plus bas nombre de Rayleigh.

Lorsque le rayonnement n'est pas pris en compte (cas A), on retrouve le rebond des lignes isothermes lié à l'expansion du fluide, en aval des couches limites verticales. La stratification thermique est proche de l'unité et les parois haute et basse sont proches de l'isothermie.

Lorsque le gaz rayonne et que les parois adiabatiques sont parfaitement réfléchissantes (cas B), l'émission et l'absorption locale de rayonnement homogénéisent le champ de température et la stratification thermique décroît fortement. La distribution de température sur les parois adiabatiques suit celle du gaz : la paroi basse est réchauffée et la paroi haute est refroidie.

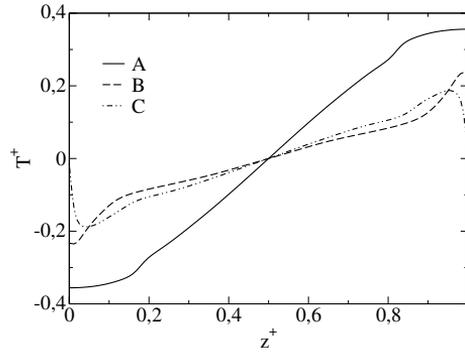


FIGURE 4.17 –  $Ra = 3 \times 10^8$ . Stratification thermique au cœur de la cavité : profil de température moyen le long de la ligne  $x^+ = 0,5$ ,  $y^+ = 0,5$ .

On peut observer sur la figure 4.16 que la symétrie de réflexion par rapport au plan  $y^+ = 0,5$  (équation (3.3)) est fortement brisée sur les parois hautes et basses. Si les symétries du problème sont naturellement brisées par la solution instantanée (§ 4.2), elles devraient être vérifiées par la solution moyenne, statistiquement stationnaire. Cette brisure de symétrie est probablement due à un manque de temps d'intégration et à des fluctuations de basse fréquence.

Enfin, lorsque les six parois de la cavité sont noires et le gaz transparent (cas C), le champ de température sur les parois adiabatiques est imposé par le couplage conduction/rayonnement et est quasi-linéaire selon l'axe  $x$  autour de la valeur moyenne  $T^+ = 0$ . Cela conduit à une baisse de la stratification thermique au cœur de la cavité imposée par la conduction. Dans ce cas, on note que les isothermes sur les parois adiabatiques sont un peu bruitées selon la direction  $y$ . Il s'agit d'un artefact numérique, qui pourrait être éliminé en tenant compte de l'inertie thermique des parois (Xin *et al.*, 2013).

La stratification thermique moyenne au cœur de la cavité est montrée plus quantitativement sur la figure 4.17. La stratification thermique moyenne  $\langle \mathcal{S} \rangle$  au cœur de la cavité est égale à 1,00 (A), 0,32 (B) et 0,42 (C).

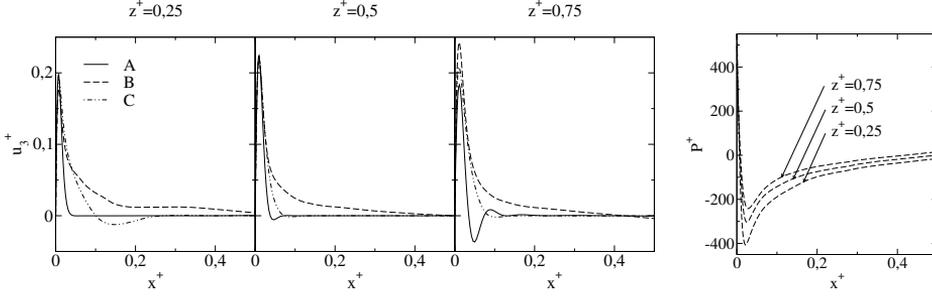


FIGURE 4.18 –  $Ra = 3 \times 10^8$ . À gauche : profils de vitesse verticale  $\langle u_3^+ \rangle$  le long des lignes  $y^+ = 0,5$  et  $z^+ = 0,25$ ,  $z^+ = 0,5$  et  $z^+ = 0,75$ . À droite : profil de puissance radiative  $\langle \mathcal{P}^+ \rangle = \nabla^+ \cdot \langle \mathbf{q}^{R+} \rangle$  correspondant dans le cas B.

### Couches limites

La figure 4.18 montre plusieurs profils de la composante verticale de la vitesse moyennée temporellement  $\langle u_3^+ \rangle$ , selon  $x^+$ , dans le plan  $y^+ = 0,5$  et pour différentes hauteurs  $z^+$  à proximité de la paroi chaude. Dans le cas A, la couche limite est fine ( $\delta^+ \simeq 0,05$ ) en amont ( $z^+ = 0,25$ ) et présente une oscillation spatiale liée à l'expansion de l'écoulement à des hauteurs plus élevées. Dans le cas C, la couche limite est épaissie en amont à cause du préchauffage du gaz le long de la paroi basse : un plus grand volume de fluide est mis en mouvement. Plus haut dans la cavité, l'épaisseur de la couche limite diminue mais le profil de vitesse n'oscille pas comme dans le cas A.

Dans le cas B où le gaz rayonne, le profil de vitesse n'atteint pas de plateau et le cœur de la cavité est mis en mouvement. Le débit de fluide moyen  $\langle \mathcal{Q} \rangle$  entraîné dans la cavité, calculé en intégrant spatialement la vitesse dans un demi-plan à mi-hauteur

$$\langle \mathcal{Q} \rangle = \int_0^{0,5} \int_0^1 \langle u_3^+(x^+, y^+, z^+ = 0,5) \rangle dy^+ dx^+, \quad (4.41)$$

est égal à  $1,98 \times 10^{-3}$  (A),  $5,55 \times 10^{-3}$  (B) et  $3,56 \times 10^{-3}$  (C). Les profils de puissance radiative, tracés sur la figure 4.18 aux mêmes positions que les profils de vitesse, expliquent ce comportement. La puissance radiative est principalement négative, excepté près de la paroi, ce qui signifie que le gaz est absorbant plutôt qu'émetteur. Elle atteint une valeur minimale en bas

TABLE 4.3 –  $Ra = 3 \times 10^8$ . Nombres de Nusselt moyennés en temps et sur des plans verticaux.

Cas	A	B	C
$\langle Nu(x^+ = 0) \rangle$	39,95	35,58	36,52
$\langle Nu(x^+ = 0,5) \rangle$	39,95	73,38	45,07
$\langle Nu(x^+ = 1) \rangle$	39,95	35,58	36,52

de la cavité, là où le gaz est plus froid et augmente avec la hauteur quand le gaz se réchauffe. Au cœur de la cavité, entre  $x^+ = 0,25$  et  $x^+ = 0,75$ , les transferts radiatifs gaz-gaz et gaz-parois isothermes ne disparaissent pas. Ils activent les forces de flottabilité, mettant en mouvement le fluide loin des parois isothermes.

### Transferts de chaleur

Les nombres de Nusselt aux parois isothermes et dans le plan  $x^+ = 0,5$  sont aussi affectés par les transferts radiatifs et sont donnés dans le tableau 4.3 pour les trois configurations. Les nombres de Nusselt moyens aux parois chaude et froide sont systématiquement égaux : les transferts radiatifs sont quasi-linéaires et l'énergie est conservée en moyenne. Comme à  $Ra = 10^6$ , le gradient de température aux parois isothermes est plus faible quand le rayonnement est pris en compte. Dans les cas B et C, le nombre de Nusselt dans le plan  $x^+ = 0,5$  est différent de celui des parois isothermes et significativement plus grand que dans le cas A, du fait du renforcement de l'écoulement.

Les flux radiatifs aux parois sont donnés dans le tableau 4.4. En comparant les flux radiatifs entre les cas A et B, on peut apprécier le niveau d'absorption du gaz. L'écart de 0,2 % entre les flux radiatifs des parois chaude et froide dans le cas B est lié au critère de convergence sur les flux partants (voir §§ 2.2.3), pris égal à  $10^{-3}$ . Les flux radiatifs aux parois horizontales et latérales ne sont pas nuls dans le cas C. Néanmoins, ces flux restent faibles devant les flux radiatifs aux parois isothermes car la température moyenne de ces parois est proche de zéro et car le champ de température est assez symétrique.

TABLE 4.4 – Ra = 3 × 10<sup>8</sup>. Flux radiatifs aux parois moyennés temporellement  $\langle \mathbf{q}^{R+} \rangle \cdot \mathbf{n}$ .

Cas	A	B	C
$x^+ = 0$	375,15	360,71	377,05
$x^+ = 1$	-375,15	-360,01	-377,05
$y^+ = 0$	0	0	$0,3 \times 10^{-2}$
$y^+ = 1$	0	0	$-0,4 \times 10^{-3}$
$z^+ = 0$	0	0	-13,65
$z^+ = 1$	0	0	13,65

### 4.3.2 Dynamique instationnaire

#### Champs instantanés

La figure 4.19 montre un champ de température instantané dans un plan  $x^+$  proche de la paroi chaude afin de visualiser les structures thermiques au sein de la couche limite verticale. Aux mêmes instants, est représentée sur la figure 4.20 une iso-valeur du critère  $Q$  positif (§ 4.1.1), mettant en évidence les structures tourbillonnaires instantanées (le critère  $\lambda_2$  capte des structures semblables).

Dans la couche limite verticale, les isothermes restent pratiquement horizontales pour le cas A où le rayonnement est ignoré. Le critère  $Q$  repère des structures tournantes en aval de ces couches limites, suivant le rebond de l'écoulement moyen du fluide. Dans le cas B où le gaz rayonne, on observe sur la figure 4.19 des filets de gaz chauds qui s'écoulent plus vite que l'écoulement moyen. Si l'on se réfère aux critère  $Q$ , ces filets possèdent un axe de rotation dans la direction de l'écoulement. Ces structures sont à relier à celles extraites par la décomposition en modes propres orthogonaux à Ra = 3 × 10<sup>7</sup>, proche de la transition (§ 4.2.3). Le cas C où les six parois rayonnent mais où le gaz est transparent, est le cas le plus chaotique. Les structures thermiques et mécaniques sont nombreuses et de plus petite taille. Elles sont orientées dans le sens de l'écoulement, et non plus perpendiculairement à celui-ci comme cela a été observé proche de la transition à Ra = 5 × 10<sup>6</sup>.

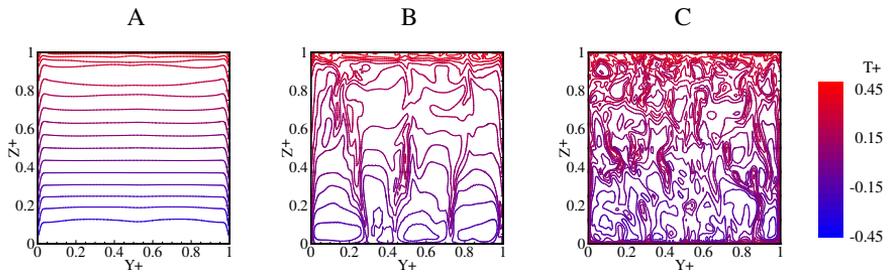


FIGURE 4.19 –  $Ra = 3 \times 10^8$ . Champ de température instantané dans le plan  $x^+ = 0,02$ , proche de la paroi chaude. L'écart entre deux isothermes est de  $0,05$ .

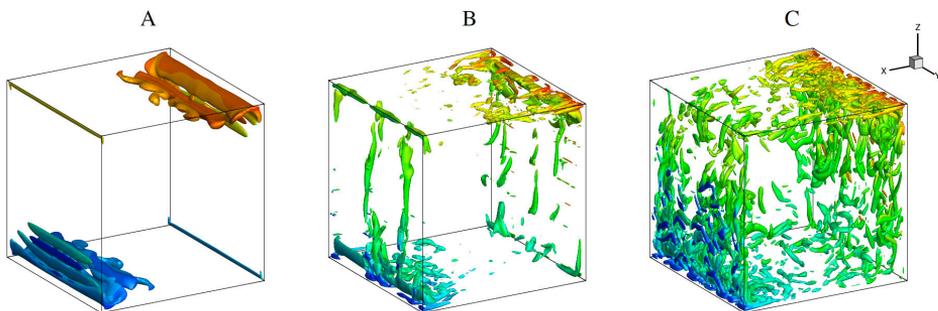


FIGURE 4.20 –  $Ra = 3 \times 10^8$ . Surfaces iso-valeurs du critère  $Q$  instantané,  $Q = 0,3$  (cas A) et  $Q = 3$  (cas B et C) coloré par la température.

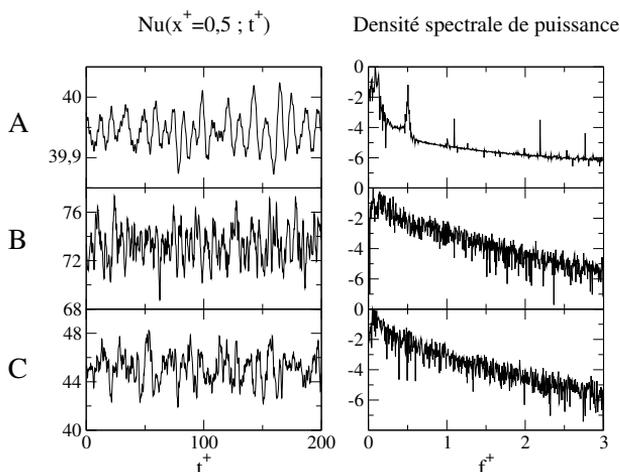


FIGURE 4.21 –  $Ra = 3 \times 10^8$ . Évolution temporelle du nombre de Nusselt moyenné dans le plan  $x^+ = 0,5$  et densité spectrale de puissance associée, représentée en échelle logarithmique et normalisée par son maximum.

### Évolution temporelle

La figure 4.21 trace l'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyenné dans le plan  $x^+ = 0,5$  ainsi que les densités spectrales de puissance de ces signaux. Cette représentation est habituellement utilisée pour mettre en évidence la fréquence d'oscillation des ondes de gravité internes (Le Quéré et Behnia, 1998).

Les ondes de gravité internes apparaissent lorsqu'un milieu stratifié est excité à une fréquence  $f \leq f_{BV}$ , où  $f_{BV}$  est la fréquence de Brunt-Väisälä définie par

$$f_{BV} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz}}, \quad (4.42)$$

soit en adimensionné  $f_{BV}^+ = f_{BV} L^2 / (a \sqrt{Ra}) = \sqrt{\langle S \rangle} \text{Pr} / (2\pi)$ ,  $\langle S \rangle$  étant la stratification thermique moyenne. Ces ondes se propagent selon un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale tel que  $\cos \alpha = f / f_{BV}$ , si  $f$  est la fréquence d'excitation (Gostiaux, 2006). En cavité différentiellement chauffée, les ondes de gravité sont présentes en régime transitoire et en régime asymptotique

instationnaire, dès lors qu'une instabilité basse fréquence les active.

Le pic à basse fréquence remarquable sur les densités spectrales de puissance de la figure 4.21 correspond probablement à ces ondes de gravité et donc à des oscillations du cœur stratifié. La fréquence du pic, égale à 0,085 (A), 0,060 (B) et 0,050 (C) pour chacun des cas, est à comparer à la fréquence de Brunt-Väisälä, égale à 0,134 (A), 0,075 (B) et 0,087 (C). On notera cependant la présence de nombreux pics à basse fréquence, proches de  $f^+ = 0,05$ , dans le cas C.

Une autre fréquence se distingue clairement sur le spectre du cas A, à  $f^+ = 0,505$ . Cette fréquence est également repérée par Le Quéré et Behnia (1998) à  $Ra = 3 \times 10^8$  en cavité carrée et correspond à des ondes progressives liées au décollement des couches limites verticales. Dans les cas B et C, l'évolution temporelle du nombre de Nusselt et le spectre fréquentiel associé montrent un comportement beaucoup plus chaotique et plus complexe à analyser.

### 4.3.3 Statistiques d'ordre deux

La figure 4.22 montre l'énergie cinétique turbulente  $\langle u_i^{+'} u_i^{+'} \rangle / 2$  ainsi que la variance des fluctuations de température  $\langle T^{+'2} \rangle$  dans le plan  $y^+ = 0,5$  (ces quantités varient peu selon la direction transverse  $y$ ). La symétrie centrale 2D de ces champs n'est pas exactement satisfaite, probablement à cause d'un temps de prise de moyenne insuffisant.

Dans le cas A, les fluctuations de vitesse et de température sont uniquement localisées dans les coins à la sortie des couches limites verticales. La forme des iso-valeurs ressemble aux structures mises en évidence proche de la transition, à  $Ra = 3,5 \times 10^7$ . Dans les cas B et C, les maxima de ces fluctuations sont un ordre de grandeur supérieur. L'énergie cinétique turbulente est principalement produite le long des parois isothermes puis advectée dans toute la cavité. La variance des fluctuations de température est maximale à la sortie des couches limites verticales, dans les deux cas. Cependant, pour le cas C, on note une forte augmentation des fluctuations thermiques près de la paroi haute pour  $0,5 \leq x^+ \leq 1$  et près de la paroi basse pour  $0 \leq x^+ \leq 0,5$ , alors que celles-ci y sont négligeables dans le cas B. Ces zones sont thermiquement instables, comme on peut l'observer sur le champ de température moyen à  $Ra = 3 \times 10^8$  (figure 4.16) ou à  $Ra = 5 \times 10^6$  (figure 4.6).

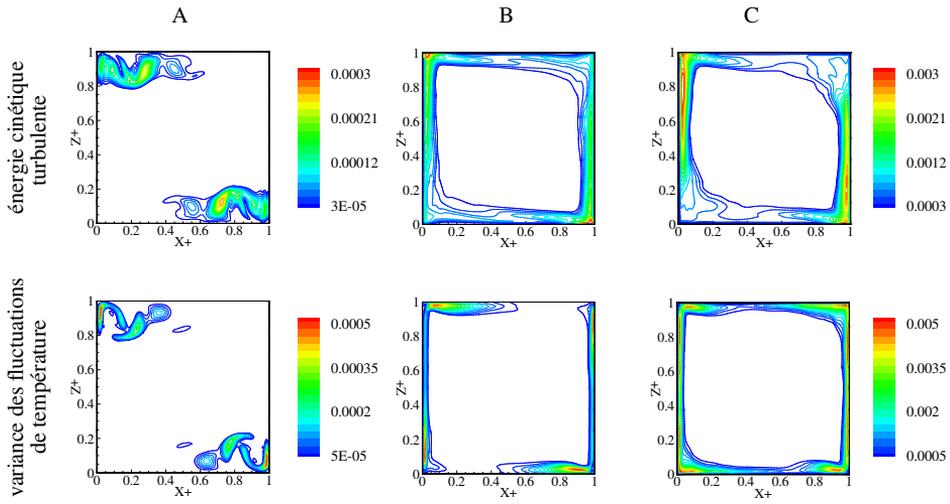


FIGURE 4.22 –  $Ra = 3 \times 10^8$ . Énergie cinétique turbulente  $\langle u_i^{+'} u_i^{+'} \rangle / 2$  (haut) et variance des fluctuations de température  $\langle T^{+'2} \rangle$  (bas) dans le plan  $y^+ = 0,5$ . Pour le cas A, l'écart entre deux iso-valeurs de l'énergie cinétique est  $1,5 \times 10^{-5}$  et l'écart entre deux iso-valeurs de la variance des fluctuations de température est  $2,5 \times 10^{-5}$ . Une échelle dix fois supérieure est utilisée pour les cas B et C.

TABLE 4.5 –  $Ra = 3 \times 10^8$ . Contributions aux bilans d'énergie cinétique du mouvement moyen (équation (4.29)) et du mouvement fluctuant (équation (4.30)), intégrées en volume.

		A	B	C
II	$\text{Pr} \langle u_3^+ \rangle \langle T^+ \rangle$	$5,89 \times 10^{-4}$	$8,77 \times 10^{-4}$	$8,93 \times 10^{-4}$
II'	$\text{Pr} \langle u_3^{+'} T^{+'} \rangle$	$2,02 \times 10^{-7}$	$3,70 \times 10^{-5}$	$8,87 \times 10^{-5}$
III' = -III	$-\langle u_i^{+'} u_j^{+'} \rangle \frac{\partial \langle u_i^+ \rangle}{\partial x_j^+}$	$1,71 \times 10^{-6}$	$1,16 \times 10^{-4}$	$1,74 \times 10^{-4}$
-IV	$\frac{\text{Pr}}{\sqrt{Ra}} \frac{\partial \langle u_i^+ \rangle}{\partial x_j^+} \frac{\partial \langle u_i^+ \rangle}{\partial x_j^+}$	$5,72 \times 10^{-4}$	$7,34 \times 10^{-4}$	$6,96 \times 10^{-4}$
-IV'	$\frac{\text{Pr}}{\sqrt{Ra}} \left\langle \frac{\partial u_i^{+'}}{\partial x_j^+} \frac{\partial u_i^{+'}}{\partial x_j^+} \right\rangle$	$1,94 \times 10^{-6}$	$1,63 \times 10^{-4}$	$2,74 \times 10^{-4}$

## Bilans d'énergie cinétique

Le tableau 4.5 reporte les contributions intégrées en volume au bilan d'énergie cinétique du mouvement moyen (équation (4.29)) et au bilan d'énergie cinétique du mouvement fluctuant (équation (4.30)).

Le bilan global de  $\langle E_c(\mathbf{u}^+) \rangle$  (4.31), traduisant l'équilibre entre la production d'énergie cinétique par les forces d'Archimède et la dissipation d'énergie cinétique par viscosité, s'écrit  $\text{II} + \text{II}' + \text{IV} + \text{IV}' = 0$  en utilisant les notations précédemment introduites (§ 4.1.3) et est vérifié à 2,6 % (A), 1,1 % (B) et 1,9 % (C). Le bilan de la partie moyenne  $E_c(\langle \mathbf{u}^+ \rangle)$  ( $\text{II} + \text{III} + \text{IV} = 0$ ) est vérifié à 2,6 % (A), 3,2 % (B) et 2,6 % (C) et le bilan de la partie fluctuante  $\langle E_c(\mathbf{u}^{+'}) \rangle$  ( $\text{II}' + \text{III}' + \text{IV}' = 0$ ) est vérifié à 1,5 % (A), 6,1 % (B) et 4,4 % (C). Ces écarts donnent une indication sur le niveau de convergence statistique de la solution moyenne.

Dans le cas A, les termes fluctuants II', III' et IV' sont négligeables devant les termes moyens II et IV alors que dans les cas B et C qui sont plus chaotiques, tous les termes sont approximativement du même ordre de grandeur. La production d'énergie cinétique fluctuante est plutôt d'origine mécanique (III') que thermique (II') : le ratio entre ces deux termes est égal à 8,5 (A), 3 (B) et 2 (C).

### Décomposition en modes propres orthogonaux

La décomposition en modes propres orthogonaux est menée pour chacun des cas à partir de 100 champs instantanés de vitesse et de température, échantillonnés à  $\Delta t^+ = 1$ . Les spectres POD ainsi que les surfaces iso-valeurs de la température des trois modes dominants sont présentés sur la figure 4.23.

Dans le cas A, la POD extrait deux types de mode différents, caractérisés soit par des structures orientées dans le sens de l'écoulement, oscillant le long des parois horizontales (modes 1 et 3), soit par des structures longitudinales selon l'axe  $y$ , typiques des instabilités de couche limite. Ces deux types de mode ont également été mis en évidence par Puragliesi et Leriche (2012), qui ont appliqué la POD dans cette configuration à  $Ra = 10^9$ . Le spectre POD présente une décroissance rapide : 14 modes sont suffisants pour capter 90 % de l'énergie des fluctuations.

Concernant le cas B, la POD montre des résultats similaires à ceux extraits à  $Ra = 3 \times 10^7$ . Les résultats sont cependant plus chaotiques, comme on peut le noter sur la forme des surfaces iso-valeurs ou sur l'allure du spectre des valeurs propres. Les plus gros rouleaux thermiques sont toujours localisés le long des parois horizontales, à la sortie des couches limites verticales.

Les modes POD du cas C possèdent un grand nombre de structures de taille et de forme différentes selon le mode. Ces structures sont orientées dans le sens de l'écoulement et non plus perpendiculairement à celui-ci, comme à  $Ra = 5 \times 10^6$ . La décroissance du spectre POD est la plus lente dans ce cas : les derniers modes contiennent encore une part significative de l'énergie totale des fluctuations. L'écoulement est le plus chaotique dans ce cas car le nombre de Rayleigh critique de transition se situe presque deux ordres de grandeur en dessous de  $Ra = 3 \times 10^8$ .

\*\*\*

Les effets du rayonnement du gaz et des parois sur la transition vers l'instationnarité de l'écoulement de convection naturelle en cavité cubique différenciellement chauffée ont été étudiés par la simulation numérique directe. La décomposition en modes dynamiques et la décomposition en modes propres orthogonaux ont été utilisées pour identifier les structures cohérentes et comprendre les mécanismes physiques responsables de la transition.

Lorsque les transferts radiatifs sont ignorés, les champs de vitesse et de température deviennent dépendants du temps pour un nombre de Rayleigh

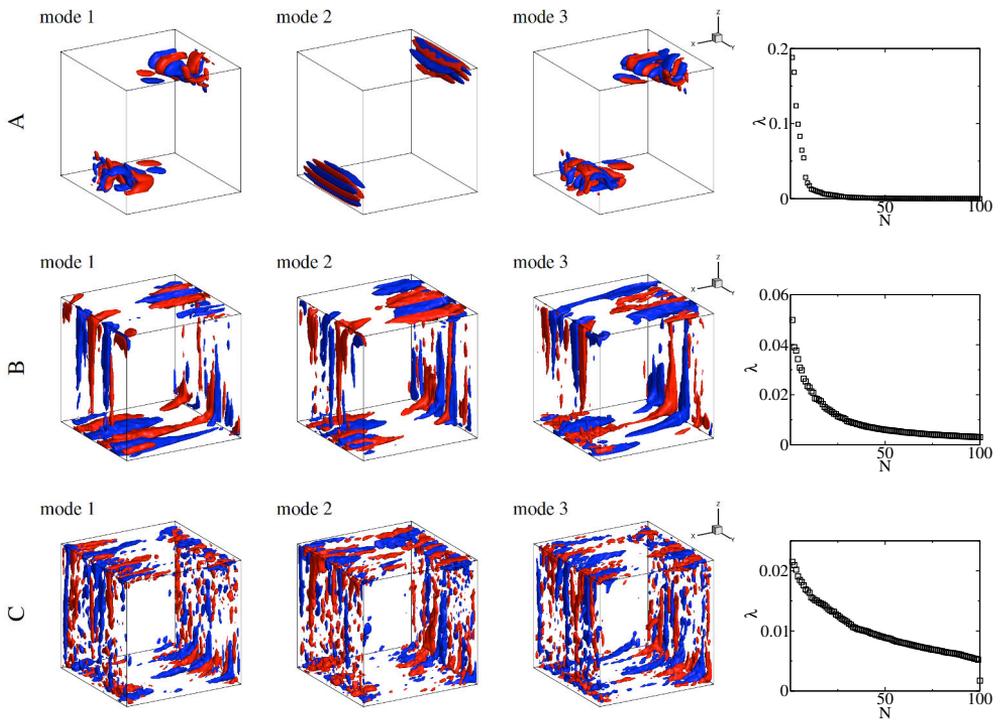


FIGURE 4.23 –  $Ra = 3 \times 10^8$ . Surfaces iso-valeurs de la température  $\zeta^T = \pm 2$  des trois premiers modes POD et spectre POD.

compris entre  $3,2 \times 10^7$  et  $3,5 \times 10^7$  (Labrosse *et al.*, 1997). Des rouleaux contra-rotatifs, dont l'axe est dans le sens de l'écoulement, apparaissent en sortie des couches limites verticales et sont créés par une instabilité de force centrifuge selon Janssen et Henkes (1996). Ces résultats ont été retrouvés par la simulation numérique à un nombre de Rayleigh égal à  $3,5 \times 10^7$ .

Lorsque les six parois de la cavité sont noires et que le gaz est transparent, une solution stationnaire a été obtenue à  $Ra = 3 \times 10^6$  et une solution instationnaire périodique a été obtenue à  $Ra = 5 \times 10^6$  pour une cavité de taille  $L = 1$  m. Comme dans le cas de la cavité conductrice, le rayonnement des parois induit une stratification thermique instable en amont des couches limites verticales. Un mécanisme de type Rayleigh-Bénard est à l'origine des fluctuations temporelles.

Lorsque le gaz rayonne et que les parois adiabatiques sont parfaitement réfléchissantes, des solutions stationnaires et instationnaires ont été obtenues à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^7$  pour différentes compositions en vapeur d'eau et dioxyde de carbone et pour différentes tailles de la cavité. Pour  $L = 3$  m,  $X_{H_2O} = 4 \times 10^{-3}$  et  $X_{CO_2} = 2 \times 10^{-4}$ , une solution asymptotiquement instationnaire et non périodique est trouvée. Comme dans le cas où les transferts radiatifs ne sont pas pris en compte, on observe des rouleaux contra-rotatifs à la sortie des couches limites verticales, ce qui suggère qu'une instabilité de force centrifuge soit également responsable de la transition. Ces rouleaux persistent le long des parois isothermes sous la forme de cheminées.

Les effets du rayonnement du gaz et des parois ont été étudiés en régime faiblement turbulent à nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^8$ . En termes de champs moyens, les comportements observés à plus bas nombre de Rayleigh sont retrouvés dans l'ensemble. Les transferts radiatifs accentuent fortement les aspects chaotiques et tridimensionnels de l'écoulement.



## Chapitre 5

# Modèle de sous-maille pour les transferts radiatifs en milieu turbulent

LES RÉSULTATS numériques couplés en régimes stationnaire et transitionnel ont été obtenus jusqu'à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^8$ . L'investigation du régime turbulent, pour des nombres de Rayleigh plus élevés, exige le recours à des ressources informatiques plus importantes, car l'étendue des échelles spatiales sur laquelle l'écoulement varie augmente. À un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^9$ , la méthode spectrale de collocation peut encore être appliquée mais la méthode de lancer de rayons devient impraticable avec les moyens informatiques actuels.

Les travaux dédiés à la simulation numérique directe d'écoulements turbulents rayonnants sont effectivement rares. Wu *et al.* (2005) abordent un cas simplifié de combustion turbulente pré-mélangée, statistiquement unidimensionnelle, où le coefficient d'absorption est pris gris et fonction de l'avancement de la réaction. Plus récemment, Zhang *et al.* (2013) étudient les transferts radiatifs instationnaires dans un écoulement turbulent non réactif de gaz chauds, dont les propriétés radiatives sont traitées avec le modèle CK. Dans ces deux études, la méthode de Monte Carlo est utilisée comme méthode de référence pour les calculs de rayonnement.

Deux alternatives à la simulation numérique directe des écoulements sont la simulation en moyenne de Reynolds et la simulation aux grandes échelles, basées respectivement sur une moyenne statistique et sur un filtrage spatial

des équations de Navier-Stokes. Plusieurs travaux ont été consacrés à une modélisation du rayonnement compatible avec ces approches dont une revue est donnée par Coelho (2007).

Dans le cadre d'une simulation en moyenne de Reynolds, Ammouri *et al.* (1994) proposent de tenir compte des effets des fluctuations turbulentes sur les transferts radiatifs en se donnant une fonction d'autocorrélation spatiale des fluctuations de température et de concentration, dont les paramètres sont déduits d'un modèle de turbulence à six équations supplémentaires. Les fluctuations de température et de concentration peuvent être également évaluées aléatoirement à partir d'une densité de probabilité : la méthode de Monte Carlo est alors utilisée pour calculer les puissances radiatives (Tessé *et al.*, 2004; Wang et Modest, 2008).

Dans le cadre d'une simulation aux grandes échelles, Roger *et al.* (2010) estiment les contributions de sous-maille du rayonnement pour une configuration académique. Gupta *et al.* (2013) réalisent des simulations numériques couplées filtrées spatialement en modélisant ces contributions par une densité de probabilité filtrée. Les auteurs de ces travaux concluent que la part non résolue de l'émission de rayonnement est toujours importante alors que la part non résolue de l'absorption n'est significative qu'aux fortes épaisseurs optiques.

Le modèle proposé dans ce chapitre, basé sur un filtrage spatial, vise à accélérer les calculs de transfert radiatif dans le cadre d'un couplage avec la simulation numérique directe d'un écoulement turbulent. Dans un premier temps, la précision et l'efficacité du modèle sont analysées dans le cas d'un milieu gris en turbulence homogène. Une application à la convection naturelle est développée par la suite afin d'étudier la faisabilité de calculs couplés en cavité différentiellement chauffée à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^9$ . La convection forcée de gaz de combustion dans un canal est étudiée en annexe B afin d'étendre le domaine de validité du modèle à de larges variations de température. Les résultats présentés dans ce chapitre et en annexe B ont été repris dans une publication (Soucasse *et al.*, 2014a).

## 5.1 Formulation du modèle

Dans un milieu non diffusant, délimité par des parois diffuses, le champ de luminance est déterminé par le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_\nu(\mathbf{r})(I_\nu^\circ(T(\mathbf{r})) - I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})), \\ I_\nu^p(\mathbf{r}_p) = \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p)I_\nu^\circ(T(\mathbf{r}_p)) + \frac{1 - \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} I_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}', \end{array} \right. \quad (5.1)$$

dont la résolution pour une fréquence  $\nu$  donnée permet de calculer la puissance radiative spectrale

$$\mathcal{P}_\nu(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{q}_\nu^R(\mathbf{r}) = \kappa_\nu(\mathbf{r})(4\pi I_\nu^\circ(\mathbf{r}) - G_\nu(\mathbf{r})), \quad (5.3)$$

où  $G_\nu(\mathbf{r})$  désigne la luminance intégrée sur l'ensemble des directions  $\boldsymbol{\Omega}$

$$G_\nu(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}, \quad (5.4)$$

et également le flux radiatif spectral aux parois

$$\phi_\nu(\mathbf{r}_p) = \mathbf{q}_\nu^R \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_p) = \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p) \left( \pi I_\nu^\circ(\mathbf{r}_p) - \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} I_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}' \right). \quad (5.5)$$

Les expressions (5.3) et (5.5) s'écrivent toutes deux comme la différence entre un terme d'émission et un terme d'absorption. Le calcul du terme d'émission à partir des propriétés locales du milieu est immédiat tandis que le calcul du terme d'absorption nécessite la résolution du champ de luminance.

L'idée principale du modèle de sous-maille est de décomposer la fonction de Planck  $I_\nu^\circ(\mathbf{r})$  par un filtrage spatial, en contributions filtrées  $\overline{I}_\nu^\circ(\mathbf{r})$  et de sous-maille  $I_\nu^{\circ'}(\mathbf{r})$ , selon

$$I_\nu^\circ(\mathbf{r}) = \overline{I}_\nu^\circ(\mathbf{r}) + I_\nu^{\circ'}(\mathbf{r}). \quad (5.6)$$

L'équation de transfert radiatif dépendant linéairement de ce terme source, la résolution du champ de luminance se décompose formellement en deux sous-problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \tilde{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_\nu(\mathbf{r})(\overline{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{r})) - \tilde{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})), \\ \tilde{I}_\nu^p(\mathbf{r}_p) = \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p)\overline{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{r}_p)) + \frac{1 - \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \tilde{I}_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}', \end{array} \right. \quad (5.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \tilde{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_\nu(\mathbf{r})(\overline{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{r})) - \tilde{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})), \\ \tilde{I}_\nu^p(\mathbf{r}_p) = \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p)\overline{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{r}_p)) + \frac{1 - \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \tilde{I}_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}', \end{array} \right. \quad (5.8)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I''_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_{\nu}(\mathbf{r})(I'_{\nu}(T(\mathbf{r})) - I''_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})), \\ I''_{\nu}(\mathbf{r}_p) = \varepsilon_{\nu}(\mathbf{r}_p)I'_{\nu}(T(\mathbf{r}_p)) + \frac{1 - \varepsilon_{\nu}(\mathbf{r}_p)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} I''_{\nu}(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}' \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Le champ de luminance  $I_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  est obtenu en additionnant les contributions filtrée  $\tilde{I}_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  et de sous-maille  $I''_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  issues de la résolution des systèmes (5.7)-(5.8) et (5.9)-(5.10), soit

$$I_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \tilde{I}_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + I''_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}). \quad (5.11)$$

Le modèle consiste à utiliser une méthode de référence pour calculer les contributions filtrées, et une méthode approchée pour calculer les contributions de sous-maille.

### 5.1.1 Contributions filtrées

Le filtrage spatial vise à lisser les variations de la fonction de Planck, afin de discrétiser celle-ci sur un maillage plus grossier. Si les propriétés radiatives ( $\kappa_{\nu}(\mathbf{r})$  et  $\varepsilon_{\nu}(\mathbf{r})$ ) sont correctement représentées sur le maillage requis pour discrétiser  $\bar{I}_{\nu}(\mathbf{r})$ , alors le système (5.7)-(5.8) peut être résolu sur ce maillage grossier avec la méthode de lancer de rayons (§ 2.2.3). La puissance radiative filtrée est ensuite calculée selon

$$\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} \kappa_{\nu}(\mathbf{r}) \left( 4\pi \bar{I}_{\nu}(\mathbf{r}) - \tilde{G}_{\nu}(\mathbf{r}) \right) d\nu, \quad (5.12)$$

où  $\tilde{G}_{\nu}(\mathbf{r})$  est défini par

$$\tilde{G}_{\nu}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \tilde{I}_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}. \quad (5.13)$$

La réduction du maillage entraîne une forte diminution du temps de calcul numérique. En effet, celui-ci est directement proportionnel au nombre de points spatiaux  $N_{\mathbf{r}}$ , au nombre de directions  $N_{\boldsymbol{\Omega}}$  et au nombre moyen de cellules traversées par un rayon  $N_{cc}$

$$t \propto N_{\mathbf{r}} \times N_{\boldsymbol{\Omega}} \times N_{cc}. \quad (5.14)$$

Comme  $N_{\boldsymbol{\Omega}} \propto N_{\mathbf{r}}^{2/3}$  et  $N_{cc} \propto N_{\mathbf{r}}^{1/3}$ , le temps de calcul est proportionnel au nombre de points spatiaux au carré, soit  $t \propto N_{\mathbf{r}}^2$ .

### 5.1.2 Contributions de sous-maille

Pour établir le modèle de sous-maille, on émet les hypothèses suivantes :

- la luminance de sous-maille peut être décomposée dans l'espace de Fourier ;
- le coefficient d'absorption est uniforme spatialement (on reviendra sur cette hypothèse en annexe (§ B.2)).

Sous ces hypothèses, la transformée de Fourier spatiale de l'équation de transfert radiatif (5.9) s'écrit

$$\iota \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} \hat{I}_\nu''(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_\nu (\hat{I}_\nu^{\circ'}(\mathbf{k}) - \hat{I}_\nu''(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega})), \quad (5.15)$$

où la transformée de Fourier  $\hat{\psi}(\mathbf{k})$  d'une fonction  $\psi(\mathbf{r})$  est définie par

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}) \exp(-\iota \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (5.16)$$

Dans l'espace de Fourier, l'intégration directionnelle de la luminance sur  $4\pi$  stéradians s'obtient analytiquement selon

$$\begin{aligned} \hat{G}_\nu''(\mathbf{k}) &= \int_{4\pi} \hat{I}_\nu''(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}, \\ &= \int_{4\pi} \frac{\kappa_\nu}{\kappa_\nu + \iota \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}} \hat{I}_\nu^{\circ'}(\mathbf{k}) d\boldsymbol{\Omega}, \\ &= 2\pi \hat{I}_\nu^{\circ'}(\mathbf{k}) \frac{\kappa_\nu}{k} \int_{-k/\kappa_\nu}^{k/\kappa_\nu} \frac{1 - \iota x}{1 + x^2} dx, \quad x = \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\kappa_\nu} \\ &= 4\pi \hat{I}_\nu^{\circ'}(\mathbf{k}) \frac{\kappa_\nu}{k} \arctan\left(\frac{k}{\kappa_\nu}\right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

où  $k$  est le module du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Ce résultat théorique a déjà été établi par Spiegel (1957) et Soufiani (1991), en étudiant l'amortissement de fluctuations de température par le rayonnement.

La résolution de l'équation de transfert dans l'espace de Fourier est immédiate et le seul effort numérique consiste à calculer la transformée de Fourier de la luminance fluctuante  $I_\nu^{\circ'}(\mathbf{r})$  et la transformée de Fourier inverse du résultat  $\hat{G}_\nu''(\mathbf{k})$ . La puissance radiative de sous-maille s'obtient ensuite selon

$$\mathcal{P}''(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \kappa_\nu(\mathbf{r}) (4\pi I_\nu^{\circ'}(\mathbf{r}) - G_\nu''(\mathbf{r})) d\nu. \quad (5.18)$$

En pratique, des transformées de Fourier discrètes seront calculées sur le domaine spatial d'étude. On supposera donc la périodicité spatiale des champs de luminance d'équilibre de sous-maille  $I_\nu'(\mathbf{r})$  et de luminance de sous-maille  $I_\nu''(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  et on ignorera la luminance de sous-maille partante des parois  $I_\nu'''(\mathbf{r}_p)$ .

**Limite optiquement mince** À la limite des nombres d'ondes caractéristiques des structures optiquement minces ( $\kappa_\nu/k \ll 1$ ), l'équation (5.17) montre que la puissance absorbée  $\kappa_\nu \hat{G}_\nu''(\mathbf{k})$  devient négligeable devant la puissance émise  $4\pi\kappa_\nu \hat{I}_\nu'(\mathbf{k})$ . En effet, si on considère un rayonnement d'équilibre périodique  $I_\nu^\circ(s) = A_\nu \sin(2\pi s/\lambda)$ , de longueur d'onde  $\lambda$  telle que  $\kappa_\nu \lambda \ll 1$ , la transmission de ce rayonnement s'annule sur un trajet optique de longueur  $\lambda$

$$\int_0^\lambda \kappa_\nu I_\nu^\circ(s) \exp(-\kappa_\nu s) ds \simeq \int_0^\lambda \kappa_\nu I_\nu^\circ(s) ds \simeq 0. \quad (5.19)$$

Si les fluctuations spatiales de la luminance d'équilibre de sous-maille sont minces, le modèle de sous-maille n'est pas requis. Il suffit de tenir compte de l'émission exacte pour calculer la contribution des échelles de sous-maille au transfert radiatif.

**Limite optiquement épaisse** À la limite des nombres d'ondes représentant les structures optiquement épaisses ( $\kappa_\nu/k \gg 1$ ), l'expression (5.17) converge vers les résultats obtenus par les approximations différentielles de l'équation de transfert ( $SP_1$ ,  $SP_3$ ), connues pour être valides pour de grandes épaisseurs optiques. Les détails sont fournis en annexe (§ B.1).

Lorsque la contribution des échelles de sous-maille à l'absorption est significative, l'utilisation du modèle de sous-maille est restreinte par les deux hypothèses initialement énoncées. L'utilisation de transformées de Fourier discrètes suppose la périodicité des champs de rayonnement de sous-maille qui, si elle n'est pas vérifiée, entraînera des erreurs de calcul aux bords du domaine. La dépendance spatiale du coefficient d'absorption peut être négligée lorsque les gradients de température sont faibles, comme en convection naturelle. Dans le cas de fortes variations de température ou de composition des espèces absorbantes, la solution (5.17) n'est plus valide. Ce point est discuté en annexe (§ B.2), où un exemple d'application incluant de larges variations de température est étudié.

### 5.1.3 Définition du filtre

Deux procédures de filtrage sont considérées, selon que le maillage de discrétisation est uniforme ou construit à partir des points de collocation Chebyshev-Gauss-Lobatto. Les développements sont présentés en 1D pour des champs variant entre  $x = 0$  et  $x = L$ . La généralisation au cas cartésien 3D est immédiate.

#### Maillage uniforme

Lorsque les champs sont discrétisés sur un maillage uniforme, on utilise un filtre dans l'espace de Fourier, basé sur la troncature des hauts modes. La fonction de Planck  $I_\nu^\circ(x_j)$ , discrétisée aux points  $x_j = jL/N$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , est représentée dans l'espace de Fourier discret selon

$$\hat{I}_\nu^\circ(k_n^x) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} I_\nu^\circ(x_j) \exp(-i2\pi nj/N), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (5.20)$$

où  $k_n^x = 2\pi n/L$  sont les nombres d'ondes discrets.

La fonction de Planck filtrée est obtenue par une transformée de Fourier inverse sur un maillage grossier de  $\bar{N}$  points dans l'espace physique  $\bar{x}_j = jL/\bar{N}$ , en ne retenant que les modes en dessous du nombre d'onde de coupure  $k_c^x = \pi\bar{N}/L$

$$\bar{I}_\nu^\circ(\bar{x}_j) = \sum_{n=-\bar{N}/2}^{\bar{N}/2-1} \hat{I}_\nu^\circ(k_n^x) \exp(i2\pi nj/\bar{N}), \quad j = 0, \dots, \bar{N} - 1. \quad (5.21)$$

La luminance d'équilibre de sous-maille est obtenue par une transformée de Fourier inverse des modes restants

$$I_\nu^{\circ'}(x_j) = \sum_{\substack{n=-N/2 \\ n \geq \bar{N}/2 \text{ ou } n < -\bar{N}/2}}^{N/2-1} \hat{I}_\nu^\circ(k_n^x) \exp(i2\pi nj/N), \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (5.22)$$

#### Maillage non uniforme

Lorsque les champs sont discrétisés sur un maillage non uniforme, construit à partir des points de Chebyshev-Gauss-Lobatto  $x_j = (\xi_j + 1)L/2$ ,  $\xi_j =$

$\cos(\pi j/N)$ , la fonction de Planck possède un développement spectral selon les polynômes de Chebyshev

$$I_\nu^\circ(x) = \sum_{n=0}^N \check{I}_{\nu,n}^\circ \mathcal{T}_n(\xi). \quad (5.23)$$

Les coefficients  $\check{I}_{\nu,n}^\circ$  associés au polynôme  $\mathcal{T}_n(\xi)$  sont calculés à partir des valeurs  $I_\nu^\circ(x_j)$  aux points de collocation selon

$$\check{I}_{\nu,n}^\circ = \sum_{j=0}^N I_\nu^\circ(x_j) \mathcal{T}_n(\xi_j) w_j, \quad n = 0, \dots, N, \quad (5.24)$$

où  $w_j = \pi/N$ ,  $j = 1, \dots, N-1$ , et  $w_0 = w_N = \pi/(2N)$ .

Les luminances d'équilibre filtrée et de sous-maille sont définies par une troncature du développement Chebyshev de  $I_\nu^\circ$  selon

$$\bar{I}_\nu^\circ(\bar{x}_j) = \sum_{n=0}^{\bar{N}} \check{I}_{\nu,n}^\circ \mathcal{T}_n(\bar{\xi}_j), \quad j = 0, \dots, \bar{N}, \quad (5.25)$$

$$I_\nu^{\circ'}(x_j) = \sum_{n=\bar{N}+1}^N \check{I}_{\nu,n}^\circ \mathcal{T}_n(\xi_j), \quad j = 0, \dots, N, \quad (5.26)$$

où  $\bar{x}_j = (\bar{\xi}_j + 1)L/2$ ,  $\bar{\xi}_j = \cos(\pi j/\bar{N})$ .

### 5.1.4 Implémentation

Les différentes étapes de mise en application du modèle de sous-maille sont représentées de manière schématique sur la figure 5.1. Elles sont détaillées une à une ci-dessous.

**Filtrage** On suppose que les champs de température et de concentration sont disponibles sur un maillage cartésien fin,  $N_x \times N_y \times N_z$ , suffisant pour en capter toutes les variations. La fonction de Planck filtrée est calculée sur un maillage grossier,  $\bar{N}_x \times \bar{N}_y \times \bar{N}_z$ , en utilisant l'équation (5.21) ou (5.25), selon le type de maillage. La fonction de Planck de sous-maille est déduite de la relation (5.22) ou (5.26).

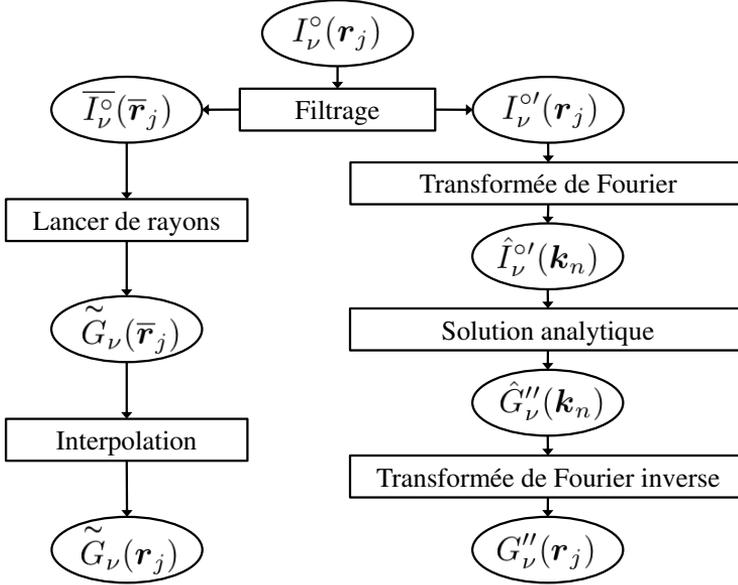


FIGURE 5.1 – Principe du modèle de sous-maille, synthèse des principales étapes. Le vecteur  $\mathbf{r}_j$  désigne les points du maillage fin et le vecteur  $\bar{\mathbf{r}}_j$  ceux du maillage grossier.

**Lancer de rayons** La méthode de lancer de rayons (§ 2.2.3) est appliquée sur le maillage grossier afin de calculer la luminance intégrée sur les directions

$$\tilde{G}_\nu(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \tilde{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}. \quad (5.27)$$

La puissance est calculée aux nœuds du maillage et non au centre des mailles.

**Interpolation** Le résultat  $\tilde{G}_\nu(\mathbf{r})$  est interpolé sur le maillage fin. Dans le cas du maillage uniforme, on utilise une interpolation cubique lagrangienne. Dans le cas du maillage non uniforme, on utilise une interpolation polynomiale à partir de la représentation spectrale Chebyshev.

**Transformée de Fourier** La transformée de Fourier de la luminance d'équilibre de sous-maille  $\hat{I}_\nu^{\circ}(\mathbf{k})$  s'obtient directement à partir de l'équation (5.20) dans le cas d'un maillage uniforme. Dans le cas du maillage non

uniforme, on utilise la quadrature de Gauss-Lobatto pour évaluer le spectre Fourier à partir du champ discrétisé sur les points de collocation

$$\hat{I}_\nu^{\circ'}(k_n^x) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N I_\nu^{\circ'}(x_j) \sqrt{1 - \xi_j^2} \exp(-i2\pi n x_j / L) w_j. \quad (5.28)$$

La luminance  $\hat{I}_\nu^{\circ'}(k_n^x)$  est calculée sur une grille régulière dans l'espace de Fourier  $k_n^x = 2\pi n / L$ . Le nombre de modes Fourier requis pour décrire la fonction de Planck de sous-maille n'est pas défini a priori. Utiliser  $N/2$  modes, correspondant à  $n = -N/4, \dots, N/4 - 1$  et à un nombre d'onde maximum de  $k_{\max}^x = \pi N / 2L$  s'est avéré suffisant (moins de 1 % d'erreur sur la norme  $L^2$  de  $I_\nu^{\circ'}(\mathbf{r})$ ).

**Solution analytique** L'équation (5.17) est utilisée pour calculer directement la luminance intégrée sur  $4\pi$  stéradians, dans l'espace de Fourier  $\hat{G}_\nu''(\mathbf{k})$ .

**Transformée de Fourier inverse** Le résultat  $G_\nu''(\mathbf{r})$  est calculé sur le maillage fin par la transformée de Fourier discrète inverse. On rappelle qu'en utilisant la transformation de Fourier discrète, on suppose la périodicité de  $I_\nu^{\circ'}(\mathbf{r})$  et de  $I_\nu''(\mathbf{r}, \Omega)$ .

La puissance radiative spectrale est obtenue sur le maillage fin en calculant le terme d'émission de manière exacte et le terme d'absorption par l'addition des contributions filtrée et de sous-maille  $\tilde{G}_\nu(\mathbf{r})$  et  $G_\nu''(\mathbf{r})$  selon

$$\mathcal{P}_\nu(\mathbf{r}) = 4\pi\kappa_\nu(\mathbf{r})I_\nu^\circ(\mathbf{r}) - \kappa_\nu(\mathbf{r})(\tilde{G}_\nu(\mathbf{r}) + G_\nu''(\mathbf{r})). \quad (5.29)$$

En ce qui concerne les flux radiatifs aux parois, on néglige la luminance incidente de sous-maille, ce qui donne

$$\phi_\nu(\mathbf{r}_p) = \varepsilon_\nu(\mathbf{r}_p) \left( \pi I_\nu^\circ(\mathbf{r}_p) - \int_{\Omega' \cdot \mathbf{n} < 0} \tilde{I}_\nu(\mathbf{r}_p, \Omega') |\Omega' \cdot \mathbf{n}| d\Omega \right). \quad (5.30)$$

## 5.2 Cas d'un milieu gris en turbulence homogène

L'efficacité et la précision du modèle de sous-maille sont tout d'abord testées dans le cas d'un milieu gris caractérisé par un champ de température statistiquement homogène. On considère une cavité cubique de côté  $L$ , fermée par

six parois diffuses parfaitement réfléchissantes. En milieu gris, la quantité à filtrer est la fonction de Planck intégrée sur le spectre  $I^\circ(\mathbf{r}) = \sigma T^4(\mathbf{r})/\pi$ .

### 5.2.1 Génération du champ de température

La méthode utilisée par Kritzstein et Soufiani (1993) est adaptée afin d'obtenir une réalisation d'un champ de température stochastique 3D. On choisit des fluctuations de température  $\theta(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}) - T_0$  de moyenne nulle, d'écart type  $\Theta$ , qui vérifient statistiquement une loi de corrélation spatiale  $C(\mathbf{r})$ , soit

$$\langle \theta(\mathbf{r}) \rangle = 0, \quad (5.31)$$

$$\langle \theta(\mathbf{r})\theta(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle = \Theta^2 C(\mathbf{r}'), \quad (5.32)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  est la moyenne statistique qui peut être approchée ici par la moyenne spatiale. D'après le théorème de Wiener-Khintchine, l'équation (5.32) s'écrit dans l'espace de Fourier

$$\langle \hat{\theta}(\mathbf{k})\hat{\theta}^*(\mathbf{k}) \rangle = \Theta^2 \hat{C}(\mathbf{k}), \quad (5.33)$$

où \* désigne le nombre complexe conjugué.

Les fluctuations de température sont générées dans l'espace de Fourier discret selon

$$\hat{\theta}(\mathbf{k}) = \Theta Z(\mathbf{k})\sqrt{\hat{C}(\mathbf{k})}, \quad (5.34)$$

où  $Z(\mathbf{k})$  est un champ de nombres complexes aléatoires discrets, suivant une densité de probabilité gaussienne de variance un. La fonction de corrélation  $C(\mathbf{r})$  étant une fonction paire, le champ  $Z(\mathbf{k})$  doit satisfaire

$$\langle Z(\mathbf{k}) \rangle = 0, \quad (5.35)$$

$$Z(-\mathbf{k}) = Z^*(\mathbf{k}), \quad (5.36)$$

$$\langle Z(\mathbf{k})Z(\mathbf{k}') \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pour } \mathbf{k}' = -\mathbf{k}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.37)$$

afin d'obtenir un champ  $\theta(\mathbf{r})$  à valeurs réelles et vérifiant (5.31) et (5.32).

En pratique, on introduit deux champs de nombres réels aléatoires discrets et indépendants,  $A(\mathbf{k})$  et  $B(\mathbf{k})$ , suivant une loi de probabilité gaussienne de variance un, et tels que

$$Z(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A(\mathbf{k}) + \iota B(\mathbf{k})), \quad \mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \quad (5.38)$$

$$Z(\mathbf{k}) = A(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (5.39)$$

Pour générer un couple de coefficients  $A$  et  $B$  aléatoires et indépendants, suivant une loi de probabilité gaussienne de variance un, on utilise la méthode de Box-Muller

$$\begin{cases} A = \sqrt{-2 \ln U} \cos(2\pi V), \\ B = \sqrt{-2 \ln U} \sin(2\pi V), \end{cases} \quad (5.40)$$

où  $U$  et  $V$  sont deux nombres aléatoires indépendants tirés uniformément entre 0 et 1.

Une fonction de corrélation exponentielle  $C(\mathbf{r}) = \exp(-\|\mathbf{r}\|/\Lambda)$ , où  $\Lambda$  correspond à l'échelle intégrale des fluctuations, est adoptée. La cavité cubique est discrétisée avec un maillage uniforme de  $N = 320$  points dans chaque direction  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le spectre Fourier de  $\theta(\mathbf{r})$  est tronqué à  $k_{\max}^x = k_{\max}^y = k_{\max}^z = \pi N/(2L)$ . La température moyenne et l'écart type des fluctuations sont fixés à  $T_0 = 500$  K et  $\Theta = 50$  K.

## 5.2.2 Résultats pour différents niveaux de filtre

Dans un premier temps, un milieu d'épaisseur optique  $\kappa L = 25$  et d'échelle intégrale  $\Lambda/L = 0,05$  est considéré. En utilisant le filtre Fourier défini par l'équation (5.21), la luminance d'équilibre  $I^\circ(\mathbf{r}) = \sigma T^4(\mathbf{r})/\pi$  est filtrée et discrétisée sur des maillages grossiers de  $\bar{N} = 160, 80$  et  $40$  points dans chaque direction. Le niveau de filtre  $N/\bar{N}$  représente le ratio entre le plus haut nombre d'onde  $\pi N/2L$  et le nombre d'onde de coupure du filtre  $\pi \bar{N}/2L$ . Pour les calculs de lancer de rayons, la taille du maillage est réduite d'un facteur  $(N/\bar{N})^3$ .

La figure 5.2(a) montre la distribution de la puissance radiative  $\mathcal{P}^+ = \tilde{\mathcal{P}}^+ + \mathcal{P}^{+\prime\prime}$  pour différents niveaux de filtre selon les lignes  $y^+ = z^+ = 0, 5$ . Les puissances radiatives sont adimensionnées ici par  $4\kappa\sigma T_0^4$ . Sont aussi tracés sur cette figure la puissance radiative filtrée  $\tilde{\mathcal{P}}^+$  calculée avec la méthode de lancer de rayons sur le maillage grossier, la puissance radiative de sous-maille  $\mathcal{P}^{+\prime\prime}$  évaluée par le modèle, et l'écart relatif entre le résultat final et un calcul de référence (méthode de lancer de rayons appliquée sur le maillage fin, sans utiliser le modèle de sous-maille). Comme la puissance radiative nette peut être nulle, les écarts relatifs peuvent être infinis. On préfère représenter les écarts absolus, normalisés par la norme  $L^2$  de la puissance radiative de référence  $\|\mathcal{P}^{+\text{ref}}\|$ , égale à 0,2046 dans ce cas.

La puissance radiative présente de fortes fluctuations autour de zéro, comme le champ de température est statistiquement isotherme. Les écarts

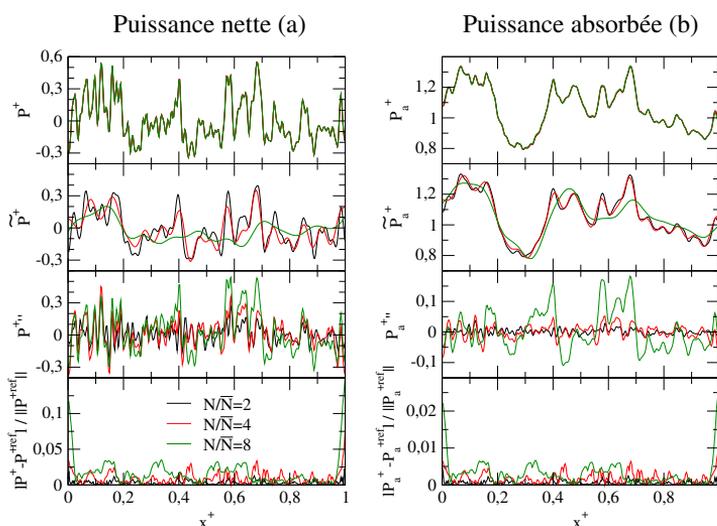


FIGURE 5.2 – Cas d'un milieu gris en turbulence homogène. (a) Puissance radiative totale, filtrée et de sous-maille et écarts absolus normalisés avec le calcul de référence ; profils à  $y^+ = 0, 5$  et  $z^+ = 0, 5$ . (b) Mêmes profils pour la puissance radiative absorbée. Les puissances radiatives sont adimensionnées par  $4\kappa\sigma T_0^4$  et les écarts absolus sont normalisés par  $\|P^{+\text{ref}}\| = 0, 2046$  et  $\|P_a^{+\text{ref}}\| = 1, 0808$ .

entre les solutions obtenues pour différents niveaux de filtre ne sont pas perceptibles sur la figure 5.2. En observant les parties filtrée et de sous-maille, on observe que le filtre lisse efficacement les fluctuations de la puissance radiative : quand le niveau de filtre augmente, la puissance radiative filtrée diminue et la puissance radiative de sous-maille tend vers la puissance radiative totale. Pour les trois niveaux de filtre considérés, la contribution de sous-maille est significative et sa modélisation nécessaire. Les écarts absolus montrés sur la figure 5.2(a) augmentent quand le niveau de filtre augmente. Ces écarts sont très faibles, de l'ordre de quelques pour cent de  $\|P^{+\text{ref}}\|$ , excepté près des parois à  $x^+ = 0$  et  $x^+ = 1$  pour le plus haut niveau de filtre  $N/\bar{N} = 8$ . Les erreurs près des parois proviennent de la décomposition du terme source radiatif dans l'espace de Fourier et de l'hypothèse de périodicité sous-jacente : la luminance de sous-maille partante des parois est négligée. Néanmoins, l'utilisation d'un maillage non uniforme, raffiné près

des parois, permet de limiter cet inconvénient (se reporter au § 5.3).

La figure 5.2(b) montre les mêmes distributions que la figure 5.2(a) mais pour la puissance absorbée, qui est la quantité effectivement modélisée. La puissance émise, quantité déterministe et locale, est calculée exactement à partir du champ de température sur le maillage fin. On note que la puissance absorbée possède de plus larges structures que la puissance totale. En effet, alors que l'émission suit directement les fluctuations du champ de température, l'absorption est lissée par l'extinction du rayonnement provenant de tout point du domaine. La puissance absorbée de sous-maille n'est pas négligeable : le modèle de sous-maille est requis pour calculer précisément la puissance radiative. Les écarts avec les calculs de référence, tracés sur la figure 5.2(b), sont normalisés par la norme de la puissance absorbée de référence  $\|\mathcal{P}_a^{+\text{ref}}\| = 1,0808$  et ne dépassent pas 3,3 %, 1,5 %, et 0,4 % pour  $N/\bar{N} = 8, 4$ , et 2 respectivement.

Afin d'évaluer plus finement la précision du modèle, une analyse séparée des contributions filtrée et de sous-maille est menée. Les puissances radiatives totale, filtrée et de sous-maille sont comparées sur la figure 5.3 à leur calcul de référence respectif (méthode de lancer de rayons, appliquée sur le maillage fin, à partir du terme source  $I^\circ$ ,  $\bar{I}^\circ$  ou  $I^{\circ'}$ ). Le niveau de filtre est  $N/\bar{N} = 4$ . Excepté près des parois, le calcul de la puissance filtrée induit plus d'erreurs que le calcul de la puissance de sous-maille. La méthode de lancer de rayons est certes considérée comme une référence, mais sa précision décroît avec le niveau de filtre, quand l'épaisseur optique de la maille élémentaire augmente. Par ailleurs, l'interpolation (cubique lagrangienne) du résultat sur le maillage fin, est également source d'erreur et peut expliquer les motifs périodiques remarquables sur les écarts montrés sur la figure 5.3. Ces écarts restent tout de même satisfaisants, leur norme est égale à  $\|\tilde{\mathcal{P}}^+ - \tilde{\mathcal{P}}^{+\text{ref}}\|/\|\tilde{\mathcal{P}}^{+\text{ref}}\| = 2,45 \times 10^{-2}$ . Concernant la partie de sous-maille, les écarts sont uniquement localisés sur une fine couche près des parois, d'épaisseur  $\delta \sim 1/\kappa$  : le modèle de sous-maille est exact dès lors que le milieu ne voit pas les frontières du domaine.

Enfin, la décomposition de la puissance radiative est analysée dans l'espace de Fourier. Le nombre d'onde de coupure du filtre est mis en évidence sur la figure 5.4 où sont tracées les densités spectrales des puissances radiatives de référence, filtrée et de sous-maille. Ces spectres unidimensionnels sont obtenus par intégration sphérique du spectre Fourier tridimensionnel

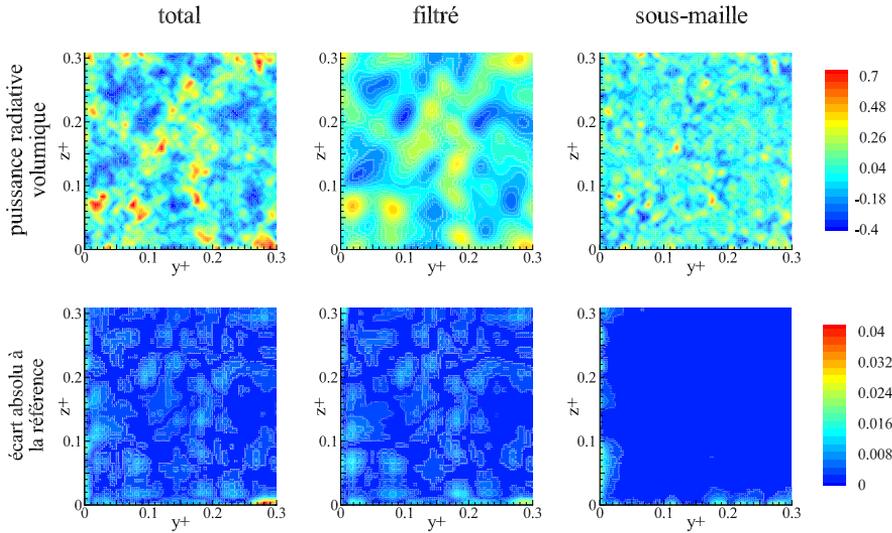


FIGURE 5.3 – Cas d'un milieu gris en turbulence homogène. De gauche à droite : puissance radiative totale, filtrée et de sous-maille (haut) et écarts absolus avec la puissance de référence correspondante (bas). Coupes à  $x^+ = 0, 25, 0 < y^+ < 0, 3$  et  $0 < z^+ < 0, 3$ . Le niveau de filtre est  $N/\bar{N} = 4$ .

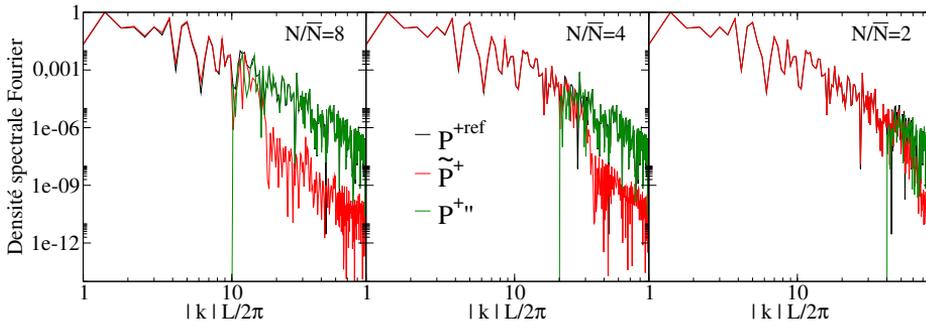


FIGURE 5.4 – Cas d'un milieu gris en turbulence homogène. Densité spectrale Fourier de la puissance radiative (unité arbitraire) pour différents niveaux de filtre. De gauche à droite :  $N/\bar{N} = 8$ ,  $N/\bar{N} = 4$  et  $N/\bar{N} = 2$ . Les spectres unidimensionnels sont obtenus par intégration sphérique.

correspondant

$$\mathcal{D}(k) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \mathcal{D}(k, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (5.41)$$

où  $\mathcal{D}(k)$  est la densité spectrale unidimensionnelle et  $\mathcal{D}(k, \vartheta, \varphi)$  la densité spectrale en coordonnées sphériques. À chaque niveau de filtre  $N/\bar{N} = 2, 4$  et  $8$ , est associé un nombre d'onde de coupure  $k_c L/2\pi$  égal à  $40, 20$  et  $10$ , respectivement. Pour les nombres d'onde plus petit que  $k_c$ , seule la contribution de sous-maille est rigoureusement nulle. Pour les nombres d'onde compris entre  $k_c$  et  $\sqrt{3}k_c$ , les parties filtrée et de sous-maille sont toutes deux significatives, le filtre étant cubique et non sphérique dans l'espace des vecteurs d'onde. Pour les nombres d'onde plus grand que  $\sqrt{3}k_c$ , la contribution filtrée devient négligeable (la faible énergie restante dans le signal est créée artificiellement par l'interpolation). La somme des densités spectrales des puissances filtrée et de sous-maille reproduit correctement la densité spectrale de la puissance de référence, les différences étant inférieures à 7 % de la valeur maximale.

### 5.2.3 Influence de l'épaisseur optique et de l'échelle intégrale

Les calculs de transferts radiatifs sont répétés pour différentes valeurs de l'épaisseur optique  $\kappa L$  et de l'échelle intégrale adimensionnée  $\Lambda/L$  des fluctuations de température, afin d'en analyser l'effet sur la précision du modèle de sous-maille. Les écarts absolus moyens de la puissance radiative avec les calculs de référence sont donnés dans le tableau 5.1. Le niveau de la puissance radiative de sous-maille, représentatif de l'erreur que l'on obtiendrait si l'on négligeait cette contribution, est également donné dans ce tableau.

Dans un premier temps, les effets de l'épaisseur optique sont discutés pour une échelle intégrale  $\Lambda/L$  donnée, égale à  $0,05$ . Pour la plus faible épaisseur optique considérée ( $\kappa L = 1$ ), les écarts obtenus sont très faibles (voir tableau 5.1). En effet, lorsque les plus petites échelles filtrées sont minces ( $2\pi\kappa/k_c \ll 1$ ), la puissance absorbée de sous-maille devient négligeable devant la puissance absorbée filtrée ( $\mathcal{P}_a^{+''} \ll \tilde{\mathcal{P}}_a^+$ ). Il suffit dans ce cas de prendre en compte l'émission exacte pour calculer le rayonnement des échelles de sous-maille. En comparant le cas  $\kappa L = 50$  et le cas  $\kappa L = 25$  (analysé en détail au § 5.2.2), on constate que les erreurs augmentent avec l'épaisseur optique. D'une part, la précision de la méthode de lancer de rayons se dégrade et, d'autre part, l'hypothèse de périodicité conduit à de

TABLE 5.1 – Cas d'un milieu gris en turbulence homogène. Écarts absolus moyens  $\|\mathcal{P}^+ - \mathcal{P}^{+\text{ref}}\|/\|\mathcal{P}^{+\text{ref}}\|$  pour différentes valeurs de l'épaisseur optique  $\kappa L$ , de l'échelle intégrale  $\Lambda/L$  et du niveau de filtre  $N/\bar{N}$ . Les valeurs entre parenthèses indiquent le niveau de la puissance radiative de sous-maille  $\|\mathcal{P}^{+\prime\prime}\|/\|\mathcal{P}^{+\text{ref}}\|$ .

$\kappa L$	$\Lambda/L$	$N/\bar{N} = 2$	$N/\bar{N} = 4$	$N/\bar{N} = 8$
1	0,05	$6,52 \times 10^{-4}$	$1,15 \times 10^{-3}$	$2,59 \times 10^{-3}$
		$(5,19 \times 10^{-2})$	$(1,49 \times 10^{-1})$	$(3,26 \times 10^{-1})$
25	0,05	$7,82 \times 10^{-3}$	$2,29 \times 10^{-2}$	$5,07 \times 10^{-2}$
		$(1,52 \times 10^{-1})$	$(3,82 \times 10^{-1})$	$(6,64 \times 10^{-1})$
50	0,05	$1,78 \times 10^{-2}$	$4,65 \times 10^{-2}$	$8,37 \times 10^{-2}$
		$(2,43 \times 10^{-1})$	$(5,42 \times 10^{-1})$	$(8,10 \times 10^{-1})$
25	0.1	$7,59 \times 10^{-3}$	$2,26 \times 10^{-2}$	$5,24 \times 10^{-2}$
		$(1,34 \times 10^{-1})$	$(3,38 \times 10^{-1})$	$(6,00 \times 10^{-1})$

plus larges écarts près des parois quand le milieu est épais.

Pour une épaisseur optique donnée ( $\kappa L = 25$ ), augmenter l'échelle intégrale des fluctuations de température n'a pas d'effets significatifs. La précision du modèle n'est pas sensible à l'échelle intégrale dès que celle-ci appartient aux échelles filtrées ( $\Lambda \gtrsim 2\pi/k_c$ ).

#### 5.2.4 Temps de calcul

Le modèle de sous-maille permet d'économiser un temps de calcul important comparativement à la méthode de lancer de rayons appliquée à toutes les échelles thermiques. Les résultats précédents ont été obtenus avec un facteur d'accélération de 14, 150 et 780 pour les niveaux de filtre  $N/\bar{N} = 2, 4$  et 8. Cette accélération des calculs, d'un facteur de l'ordre de  $2(N/\bar{N})^3$ , est liée à la réduction du maillage dans la méthode de lancer de rayons sachant que le même nombre de directions a été choisi pour les trois niveaux de filtre. Les coûts de calcul de la transformée de Fourier 3D et des interpolations sont négligeables.

### 5.2.5 Conclusion sur la précision du modèle

D'après les résultats obtenus pour différents niveaux de filtre  $N/\bar{N}$  et différentes épaisseurs optiques  $\kappa L$ , le paramètre clé qui contrôle la précision du modèle est l'épaisseur optique correspondant à la longueur d'onde de coupure  $2\pi\kappa/k_c$ . Lorsque la longueur d'onde de coupure est mince  $2\pi\kappa/k_c \ll 1$ , le terme d'absorption de sous-maille devient négligeable et il suffit de prendre en compte l'émission exacte pour calculer correctement le rayonnement des échelles de sous-maille. Lorsque l'épaisseur optique de la longueur d'onde de coupure augmente, le modèle de sous-maille devient nécessaire et conduit à des résultats satisfaisants. La précision globale des calculs se dégrade au fur et à mesure que  $2\pi\kappa/k_c$  augmente, pour deux raisons. La méthode de lancer de rayons est moins précise quand les mailles élémentaires sont épaisses et le modèle de sous-maille génère des erreurs à proximité des parois, sur une distance caractéristique de l'ordre de  $1/\kappa$ . Ces erreurs sont néanmoins acceptables dans le cadre de calculs couplés tant que l'épaisseur optique du nombre d'onde de coupure  $2\pi\kappa/k_c$  reste de l'ordre de l'unité.

Les deux paramètres sans dimension, reliant les transferts radiatifs aux échelles de la turbulence, sont l'épaisseur optique de l'échelle de Kolmogorov  $\kappa\eta$  et l'épaisseur optique de l'échelle intégrale  $\kappa\Lambda$ . Dans la plupart des situations, l'échelle de Kolmogorov est mince et n'affecte pas la précision du modèle. Si cette échelle était épaisse, d'autres modèles de transfert radiatif comme l'approximation  $P_1$  ou l'approximation de Rosseland, seraient plus pertinents. Concernant l'échelle intégrale, les résultats ont montré qu'elle n'influe pas sur la précision du modèle dès lors que celle-ci appartient aux échelles filtrées ( $\Lambda \gtrsim 2\pi/k_c$ ).

Ces conclusions sont cependant restreintes au cas d'un milieu gris. Dans le cas d'un gaz, le coefficient d'absorption, et donc l'épaisseur optique des échelles caractéristiques de l'écoulement, varient de plusieurs ordres de grandeur avec la fréquence  $\nu$ .

## 5.3 Application à la convection naturelle

L'efficacité et la précision du modèle de sous-maille sont maintenant testées pour calculer les transferts radiatifs dans la cavité cubique différentiellement chauffée remplie d'un mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub>. Par rapport au cas précédent, le maillage spatial est construit à partir des points de Chebyshev-Gauss-Lobatto pour discrétiser les couches limites et le mélange de gaz rayonnant

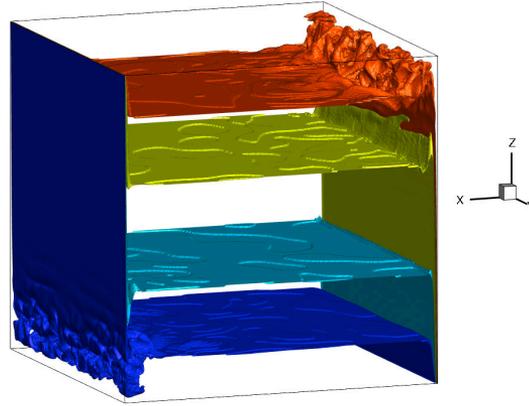


FIGURE 5.5 – Cas de la convection naturelle. Iso-surfaces de la température instantanée dans la cavité cubique différentiellement chauffée à  $Ra = 3 \times 10^9$ , sans rayonnement. Les iso-valeurs sont 299,6 – 299,8 – 300,2 – 300,4 K avec  $T_c = 300,6075$  et  $T_f = 299,3925$  K (air à  $T_0 = 300$  K,  $L = 3$  m).

n'est plus gris. Compte tenu des faibles écarts de température entre les parois chaude et froide, le coefficient d'absorption est supposé uniforme.

Les calculs de rayonnement sont entrepris à partir d'un champ de température non couplé, obtenu avec le code spectral à  $Ra = 3 \times 10^9$  et  $Pr = 0,707$  en régime asymptotique ( $t^+ = 200$ ), et représenté sur la figure 5.5 (cas A, § 6.1). À ce nombre de Rayleigh, une instabilité se développe dans les couches limites le long des parois isothermes sous la forme de rouleaux orientés selon la direction  $y$ . Ces rouleaux sont transportés verticalement et se cassent en structures plus fines, quasiment isotropes, contre les parois horizontales. Le cœur de la cavité reste immobile. Le champ de température est discrétisé par  $N = 320$  points de Chebyshev-Gauss-Lobatto dans chaque direction  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Les parois isothermes sont prises noires et les parois adiabatiques parfaitement réfléchissantes. La taille de la cavité est fixée à  $L = 3$  m et les concentrations des espèces actives à  $X_{H_2O} = 0,02$  et  $X_{CO_2} = 0,001$ . La température moyenne est de  $T_0 = 300$  K et l'écart de température entre les parois chaude et froide de  $\Delta T = 1,21$  K.

### 5.3.1 Modèle de sous-maille pour un milieu non gris

La dépendance spectrale du coefficient d'absorption du mélange air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> est prise en compte par le modèle ADF (voir § 1.3.2). Pour améliorer la précision du calcul dans cette configuration quasi-isotherme, on utilise également les luminances modifiées (introduites § 2.2.1). Dans ce cadre, l'équation de transfert radiatif (équation (1.38)) est résolue pour chaque classe ADF  $i$  afin de calculer le champ de luminance  $\mathcal{I}_i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ . La luminance d'équilibre  $\mathcal{I}_i^o(\mathbf{r})$  associée se décompose par filtrage spatial Chebyshev (équation (5.25)) selon

$$\underbrace{\frac{a_i \sigma}{\pi} (T^4(\mathbf{r}) - T_s^4)}_{\mathcal{I}_i^o(\mathbf{r})} = \underbrace{\frac{a_i \sigma}{\pi} \overline{(T^4(\mathbf{r}) - T_s^4)}}_{\overline{\mathcal{I}_i^o(\mathbf{r})}} + \underbrace{\frac{a_i \sigma}{\pi} (T^4)'(\mathbf{r})}_{\mathcal{I}_i^{o'}(\mathbf{r})}. \quad (5.42)$$

La température de *shift* étant une constante, elle est éliminée par le filtre Chebyshev et n'apparaît pas dans l'expression de la luminance d'équilibre de sous-maille.

Suivant la méthodologie développée au paragraphe 5.1.4, la contribution filtrée à la luminance intégrée sur  $4\pi$  stéradians  $\tilde{\mathcal{G}}_i(\mathbf{r})$  est calculée par la méthode de lancer de rayons et la contribution de sous-maille  $\mathcal{G}_i''(\mathbf{r})$  est calculée dans l'espace de Fourier par

$$\hat{\mathcal{G}}_i''(\mathbf{k}) = \int_{4\pi} \hat{\mathcal{I}}_i''(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} = 4\sigma a_i \widehat{(T^4)'(\mathbf{k})} \frac{\kappa_i}{k} \arctan\left(\frac{k}{\kappa_i}\right). \quad (5.43)$$

La puissance radiative est calculée en sommant la contribution de chaque classe ADF  $i$  selon

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{ADF}}} \kappa_i \left( \frac{a_i \sigma}{\pi} (T^4(\mathbf{r}) - T_s^4) - (\tilde{\mathcal{G}}_i(\mathbf{r}) + \mathcal{G}_i''(\mathbf{r})) \right). \quad (5.44)$$

### 5.3.2 Résultats

Le champ de température présente des structures thermiques de petite taille, à la sortie des couches limites verticales. Ces structures thermiques ne sont pas optiquement minces pour toutes les fréquences, d'après le spectre d'absorption du mélange et la taille de la cavité. Dans ces régions, on s'attend donc à une contribution de sous-maille significative. Partout ailleurs dans la

cavité, et plus particulièrement dans le cœur, les fluctuations de température (et donc la puissance radiative de sous-maille) disparaissent.

Les résultats pour un niveau de filtre de  $N/\bar{N} = 4$  (soit pour la méthode de lancer de rayons, un maillage grossier de  $\bar{N} = 80$  points de Gauss-Lobatto dans chaque direction) sont représentés sur la figure 5.6 pour un plan dans la couche limite turbulente à proximité de la paroi chaude. La puissance radiative présente les mêmes motifs que le champ de température et est principalement négative à cause du rayonnement incident provenant de la paroi chaude. La contribution de sous-maille est proche de zéro en moyenne, mais montre de fortes oscillations avec des valeurs maximales du même ordre de grandeur que la puissance radiative totale. Les erreurs montrées sur la figure 5.6 indiquent un bon accord entre le résultat du modèle et le calcul de référence (à nouveau, la méthode de lancer de rayons appliquée sur le maillage fin). Plus précisément, l'écart moyen normalisé est  $\|\mathcal{P} - \mathcal{P}^{\text{ref}}\|/\|\mathcal{P}^{\text{ref}}\| = 0,018$ .

Les résultats obtenus pour un milieu gris et un maillage uniforme, discutés § 5.2, montraient une dégradation de la précision près des parois, liée à l'hypothèse de périodicité. Ce problème n'est plus rencontré ici grâce au raffinement près des bords apporté par les points de Gauss-Lobatto. La figure 5.7 trace la puissance radiative près de la paroi chaude selon la ligne  $y = 1,5$  m,  $z = 2,56$  m, avec ses contributions filtrée et de sous-maille ainsi que les écarts avec le calcul de référence. Près de la paroi, la puissance radiative de sous-maille tend vers zéro et le modèle n'est plus requis dans cette région.

Les luminances de sous-maille incidentes aux parois ont été négligées dans les développements du modèle. Cette hypothèse n'a que peu d'effets sur le calcul des flux radiatifs. La figure 5.8 présente le flux radiatif à la paroi chaude, calculé sur le maillage grossier puis interpolé sur le maillage fin et les écarts correspondants avec le calcul de référence. On note que le flux radiatif est lisse spatialement : le flux émis est uniforme et une large partie du flux absorbé provient du flux émis par la paroi opposée qui n'est pas sensible aux fluctuations de la luminance dans le milieu. L'écart moyen normalisé est égal à  $\|\phi - \phi^{\text{ref}}\|/\|\phi^{\text{ref}}\| = 1,5 \times 10^{-3}$  et  $9,9 \times 10^{-4}$  pour les parois chaude et froide, respectivement. Les faibles écarts visibles sur la figure 5.8 sont principalement dus à l'interpolation.

Avec le modèle de sous-maille, le temps de calcul est 120 fois plus court que pour le calcul de référence, pour le niveau de filtre considéré  $N/\bar{N} = 4$ .

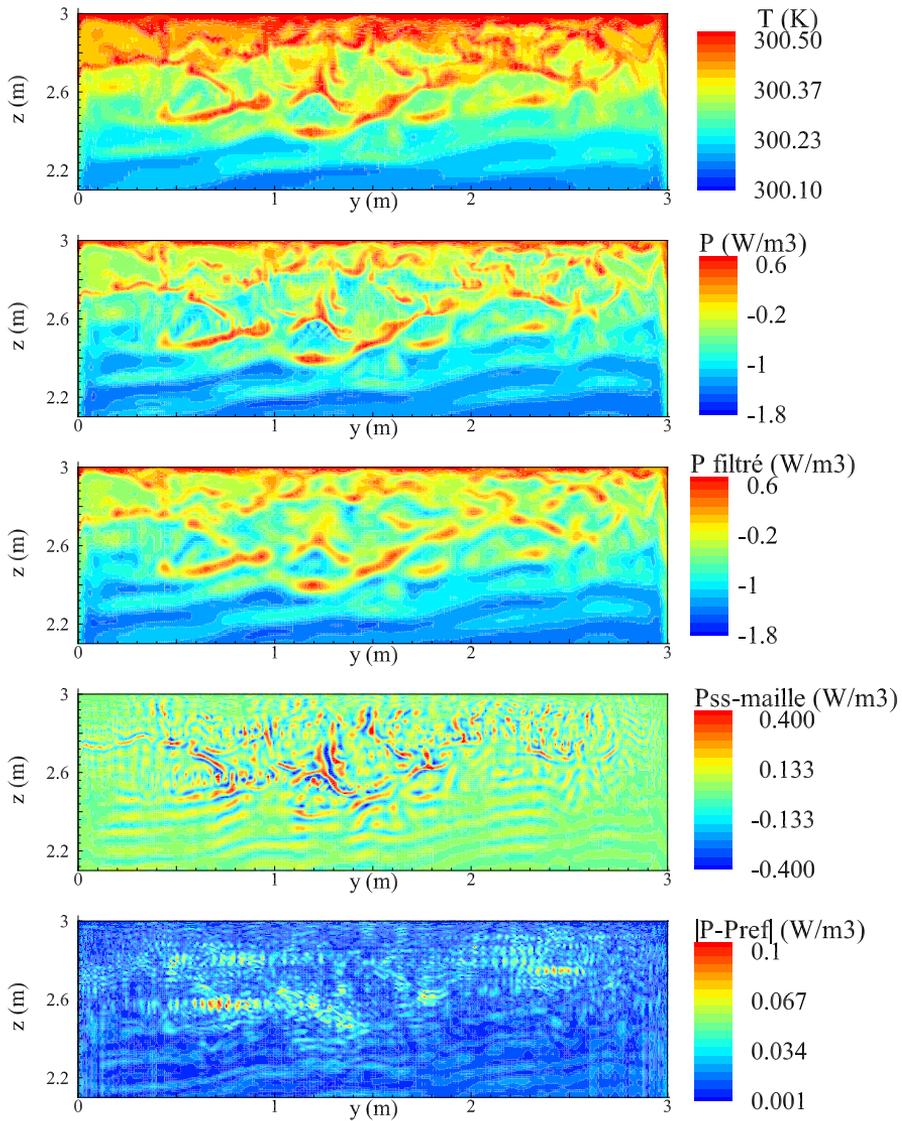


FIGURE 5.6 – Cas de la convection naturelle. De haut en bas : température, puissance radiative totale, filtrée, de sous-maille et écarts absolus avec le calcul de référence. Plan dans la couche limite, près de la paroi chaude en haut de la cavité à  $x = 0,0138$  m,  $0 < y < 3$  m et  $2,1 < z < 3$  m. Le niveau de filtre est  $N/\bar{N} = 4$ . Le champ de température a été obtenu par un calcul de convection naturelle sans rayonnement à  $Ra = 3 \times 10^9$  (cas A, § 6.1).

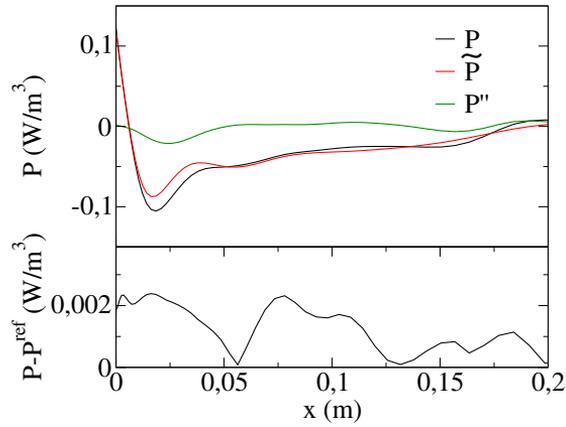


FIGURE 5.7 – Cas de la convection naturelle. Profil de puissance radiative dans la couche limite, à proximité de la paroi chaude selon la ligne  $y = 1,5$  m et  $z = 2,56$  m.

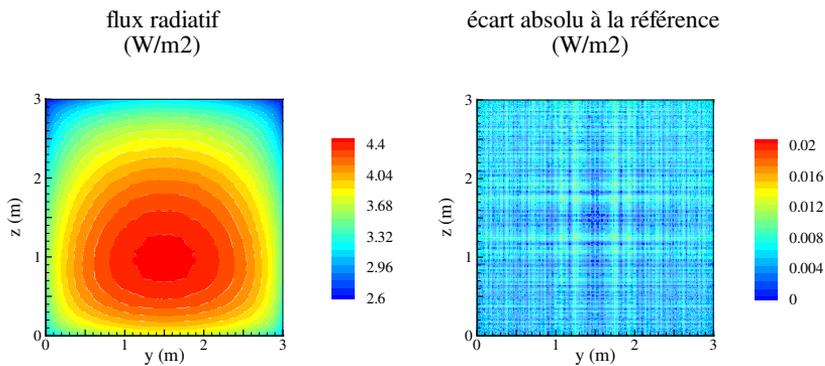


FIGURE 5.8 – Cas de la convection naturelle. Flux radiatif à la paroi chaude (gauche) et écarts à la référence (droite).

\*\*\*

Un modèle de sous-maille pour les transferts radiatifs a été proposé afin d'accélérer les calculs de rayonnement dans le cadre d'un couplage avec la simulation numérique directe d'un écoulement turbulent. Cette approche, basée sur un filtrage spatial, consiste à utiliser la méthode de lancer de rayons sur un maillage grossier pour calculer les contributions filtrées, et une méthode analytique dans l'espace de Fourier pour calculer les contributions de sous-maille.

L'efficacité et la précision du modèle ont d'abord été évaluées sur un champ de température stochastique statistiquement homogène. L'accélération du temps de calcul est liée au facteur de réduction de maillage pour la méthode de lancer de rayons. La précision des résultats est contrôlée par l'épaisseur optique correspondant à la longueur d'onde de coupure du filtre  $2\pi\kappa/k_c$  : les erreurs sont limitées à quelques pour cent tant que  $2\pi\kappa/k_c$  reste de l'ordre de ou inférieur à l'unité.

Le modèle a ensuite été testé sur un champ de température instantané représentatif de la convection naturelle turbulente en cavité cubique différentiellement chauffée. Les résultats obtenus sont suffisamment précis et le temps de calcul suffisamment rapide pour envisager des calculs de transferts radiatifs couplés à la simulation numérique directe de l'écoulement de convection naturelle à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^9$ .

Pour établir le modèle de sous-maille, le coefficient d'absorption a été supposé spatialement uniforme. Le cas d'un écoulement de convection forcée de gaz chauds, où cette hypothèse n'est pas vérifiée, est traité en annexe B.

## Chapitre 6

# Simulations couplées en régime turbulent

GRÂCE AU modèle de sous-maille pour les transferts radiatifs présenté au chapitre précédent, des simulations numériques couplées, où toutes les échelles spatiales et temporelles sont résolues, ont pu être entreprises à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^9$ . La simulation numérique directe de l'écoulement n'est cependant pas envisageable pour l'étude des nombres de Rayleigh supérieurs, compte tenu des ressources informatiques disponibles aujourd'hui. À  $Ra = 3 \times 10^9$ , un gigaoctet de mémoire est nécessaire pour stocker les champs de température et de vitesse instantanés. La quantité de données à traiter pour des nombres de Rayleigh supérieurs deviendrait trop importante.

Dans ce contexte, la simulation aux grandes échelles de l'écoulement, qui cherche à reproduire l'évolution de grandeurs filtrées spatialement, est une alternative intéressante car les maillages spatiaux requis sont plus larges. Les petites échelles de l'écoulement ne sont pas résolues mais leur impact sur la dynamique de l'écoulement doit être modélisé. Dans le cas de la cavité différentiellement chauffée et lorsque les transferts radiatifs ne sont pas pris en compte, Barhaghi et Davidson (2007), Sergent *et al.* (2013) ou encore Trias *et al.* (2013) ont réalisé des simulations aux grandes échelles pour des nombres de Rayleigh basés sur la hauteur de la cavité compris entre  $10^9$  et  $5 \times 10^{10}$ . D'autres auteurs ont couplé la simulation aux grandes échelles de la convection naturelle avec le rayonnement des parois (Barhaghi et Davidson, 2009) ou avec le rayonnement des gaz (Capdevila *et al.*, 2011), en négligeant

TABLE 6.1 – Configurations étudiées.

Cas	A	B	C
Parois isothermes	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$
Parois adiabatiques	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$
Gaz	Transparent	Rayonnant	Transparent

les effets non linéaires induits par le filtrage spatial.

Les résultats de simulation, obtenus à  $Ra = 3 \times 10^9$  en couplant la simulation numérique directe de l'écoulement et le modèle de sous-maille pour les transferts radiatifs établi au chapitre 5, sont tout d'abord discutés (§ 6.1). Une modélisation pour la simulation aux grandes échelles de la convection naturelle turbulente est ensuite proposée et validée (§ 6.2). La prise en compte des transferts radiatifs dans le cadre de cette approche n'est pas traitée et fera l'objet de travaux futurs.

## 6.1 Effets du rayonnement du gaz et des parois à $Ra=3 \times 10^9$

Les effets du rayonnement du gaz et des parois en régime turbulent sont étudiés à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^9$  pour les configurations rappelées dans le tableau 6.1. Comme pour les simulations à  $Ra = 3 \times 10^8$  (§ 4.3), la taille de la cavité est fixée à  $L = 3$  m (soit  $\Delta T = 1.21$  K) dans les cas B et C et la concentration des espèces absorbantes est fixée à  $X_{H_2O} = 0,02$  et  $X_{CO_2} = 0,001$  dans le cas B. Les paramètres des simulations numériques sont donnés et justifiés en annexe A.

Dans la version initiale du code couplé (§ 2.3), le maillage radiatif était choisi deux fois plus gros que le maillage convectif. Avec le modèle de sous-maille, le maillage convectif et le maillage radiatif fin sont identiques dans les directions  $x$  et  $y$ . À cause de la parallélisation du code de convection par décomposition de domaine, les maillages diffèrent dans la direction  $z$  (maillage Gauss-Lobatto dans chacun des domaines pour la convection, maillage Gauss-Lobatto unique pour le rayonnement). Pour communiquer les champs de température et de puissance radiative d'un code de calcul à l'autre, une interpolation spatiale, exploitant les représentations spectrales Chebyshev, est implémentée.

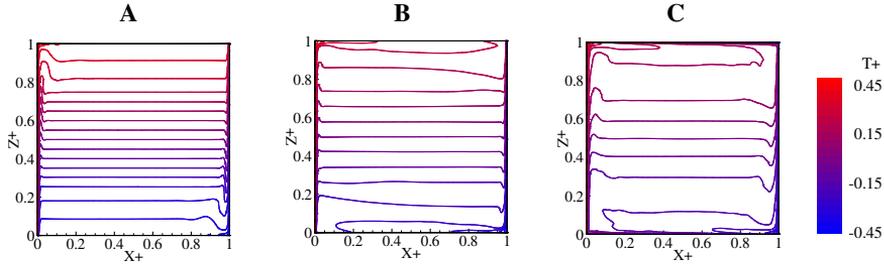


FIGURE 6.1 –  $Ra = 3 \times 10^9$ . Champ de température moyen dans le plan  $y^+ = 0,5$ . L'écart entre deux isothermes est de  $0,05$ .

Le coût de la simulation numérique directe à ce nombre de Rayleigh a restreint la période d'intégration temporelle, en particulier dans le cas B, malgré l'utilisation du modèle de sous-maille pour les transferts radiatifs. En partant d'une solution initiale obtenue pour le cas A à  $Ra = 3 \times 10^8$  en régime asymptotique, la simulation dans le cas A est menée jusqu'à  $t^+ = 200$  et poursuivie sur un intervalle de temps  $\Delta t^+ = 120$ , considéré comme représentatif de la moyenne statistique. En partant de la solution obtenue pour le cas A à  $Ra = 3 \times 10^9$  et à  $t^+ = 200$ , les simulations dans les cas B et C sont menées jusqu'à  $t^+ = 70$  (B) et  $t^+ = 100$  (C) et poursuivies sur un intervalle de temps  $\Delta t^+ = 30$  (B) et  $\Delta t^+ = 50$  (C), considéré comme représentatif de la moyenne statistique.

### 6.1.1 Champs moyens

#### Champ de température

Le champ de température moyen dans le plan  $y^+ = 0,5$  est montré sur la figure 6.1. Le profil de température moyenne le long de la ligne  $x^+ = 0,5$  et  $y^+ = 0,5$  est tracé sur la figure 6.2. Les valeurs de la stratification thermique moyenne  $\langle S \rangle$  sont reportées dans le tableau 6.2.

Dans le cas A, où les transferts radiatifs sont ignorés, la stratification thermique au cœur de la cavité est égale à  $1,01$ . On note cependant sur le profil de température vertical de la figure 6.2 un changement de pente en  $z^+ \simeq 0,25$  et  $z^+ \simeq 0,75$ . La température dans les zones haute et basse de la cavité est homogénéisée par le mélange turbulent à la sortie des couches limites verticales. Cet effet a été précédemment souligné par Trias *et al.*

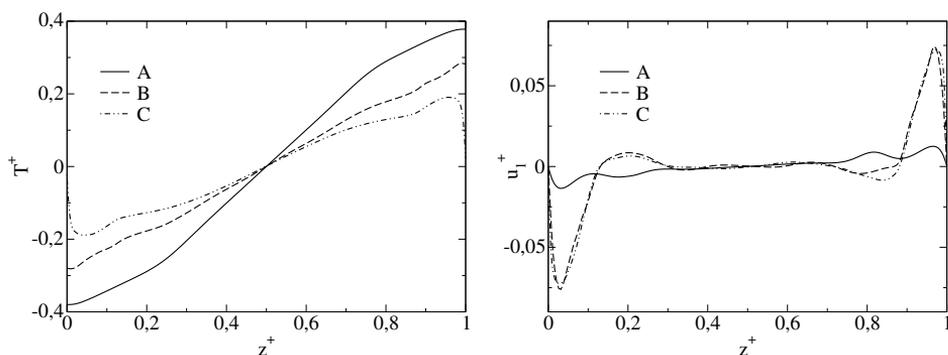


FIGURE 6.2 –  $Ra = 3 \times 10^9$ . Profils de température moyenne  $\langle T^+ \rangle$  et de vitesse horizontale moyenne  $\langle u_1^+ \rangle$  le long de la ligne  $x^+ = 0,5$ ,  $y^+ = 0,5$ .

(2010a) pour des cavités de rapport de forme  $L_z/L_x = 4$ .

Dans les cas B (gaz rayonnant, parois adiabatiques réfléchissantes) et C (gaz transparent, six parois noires), la stratification thermique est plus faible et est égale à 0,68 (B) et 0,56 (C). Ces valeurs sont néanmoins plus élevées qu'à  $Ra = 3 \times 10^8$  (0,32 (B) et 0,42 (C)), en particulier pour le cas B. La forme des isothermes dans le plan  $y^+ = 0,5$  (figure 6.1) indique que l'écoulement horizontal le long des parois haute et basse est significatif, alors qu'il semble disparaître dans le cas A. Par ailleurs, on observe dans le cas C que les couches limites verticales sont bien plus épaisses.

### Couches limites

Le profil de vitesse horizontale moyenne  $\langle u_1^+ \rangle$  le long de la ligne  $x^+ = 0,5$  et  $y^+ = 0,5$  est tracé sur la figure 6.2. Dans le cas A, l'écoulement est fortement freiné par le rebond à la sortie de la couche limite verticale alors que dans les cas B et C, les mouvements horizontaux restent importants. Ce comportement est confirmé par les valeurs maximales de la vitesse horizontale données dans le tableau 6.2.

Plusieurs profils de vitesse verticale moyenne  $\langle u_3^+ \rangle$  dans la couche limite chaude sont tracés à  $y^+ = 0,5$  pour différentes hauteurs  $z^+ = 0,25$ ,  $z^+ = 0,5$  et  $z^+ = 0,75$  sur la figure 6.3. Dans le cas A, les profils de vitesse conservent la même forme qu'à  $Ra = 3 \times 10^8$  avec une épaisseur de couche limite plus fine ( $\delta^+ \sim Ra^{-1/4}$  pour une plaque plane verticale chauffée).

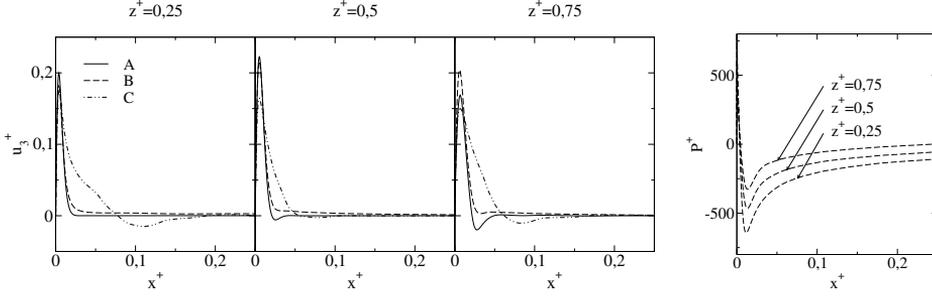


FIGURE 6.3 –  $Ra = 3 \times 10^9$ . À gauche : profils de vitesse verticale moyenne  $\langle u_3^+ \rangle$  le long des lignes  $y^+ = 0,5$  et  $z^+ = 0,25$ ,  $z^+ = 0,5$  et  $z^+ = 0,75$ . À droite : profil de puissance radiative  $\langle \mathcal{P}^+ \rangle = \nabla^+ \cdot \langle \mathbf{q}^{R+} \rangle$  correspondant dans le cas B.

Dans le cas C, l'épaisseur de la couche limite est large en amont à  $z^+ = 0,25$  (préchauffage du gaz le long de la paroi basse), diminue à mi-hauteur, puis augmente à nouveau à  $z^+ = 0,75$  du fait du décollement de la couche limite.

L'épaississement des couches limites verticales par le rayonnement du gaz dans le cas B est beaucoup moins marqué qu'à  $Ra = 3 \times 10^8$ . En effet, l'ordre de grandeur du terme source radiatif dans le bilan d'énergie adimensionné (1.27) peut être estimé par

$$\frac{1}{\sqrt{Ra}} \nabla^+ \cdot \langle \mathbf{q}^{R+} \rangle = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{Ra}} \frac{\kappa_P \sigma T_0^3 L^2}{\lambda} \right), \quad (6.1)$$

où  $\kappa_P$  est la moyenne de Planck du coefficient d'absorption (équation (3.8)). En comparant les profils de puissance radiative à  $Ra = 3 \times 10^8$  (figure 4.18) et à  $Ra = 3 \times 10^9$  (figure 6.3), on peut noter que les niveaux de puissance  $\nabla^+ \cdot \langle \mathbf{q}^{R+} \rangle$  sont proches car la taille de la cavité et les fractions molaires des espèces absorbantes ont été conservées. Entre  $Ra = 3 \times 10^8$  et  $3 \times 10^9$ , l'estimation (6.1) impliquerait une diminution du terme source radiatif d'un facteur  $\sqrt{10}$  alors que le terme source convectif  $\mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \mathbf{u}^+$  reste constant.

Si les effets du rayonnement du gaz sont moins prononcés sur l'épaisseur de la couche limite, ils restent importants sur la vitesse de l'écoulement : le maximum de vitesse moyenne verticale est obtenu dans le cas B comme on peut le noter à  $z^+ = 0,75$  sur la figure 6.3 ou sur les valeurs reportées dans le tableau 6.2.

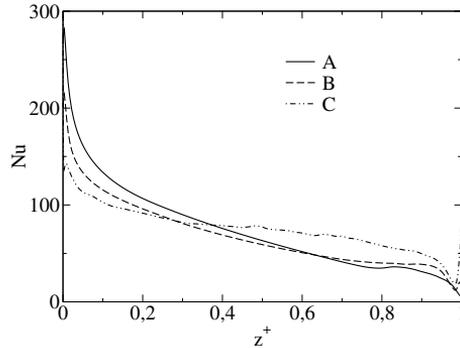


FIGURE 6.4 –  $Ra = 3 \times 10^9$ . Nombre de Nusselt moyen  $\langle Nu \rangle$  le long de la ligne  $x^+ = 0$ ,  $y^+ = 0,5$  (paroi chaude).

### Transferts de chaleur

La figure 6.4 montre le profil du nombre de Nusselt le long de la ligne  $x^+ = 0$  et  $y^+ = 0,5$  (paroi chaude). Cette représentation permet de repérer la hauteur de transition à partir de laquelle la couche limite devient turbulente : la transition est caractérisée par une légère augmentation du flux de chaleur à la paroi. Pour les cas A et B, la hauteur de transition se situe autour de  $z^+ = 0,8$  alors que dans le cas C, elle se situe plus en amont, autour de  $z^+ = 0,4$ .

Les valeurs du nombre de Nusselt moyenné dans les plans  $x^+ = 0$ ,  $x^+ = 0,5$  et  $x^+ = 1$  sont données dans le tableau 6.2. Tout d’abord, on remarque que les nombres de Nusselt diffèrent légèrement entre les parois chaude et froide ce qui montre que la période de moyenne temporelle n’est pas tout à fait suffisante. Les nombres de Nusselt aux parois isothermes sont les plus élevés dans le cas C : la transition plus précoce de la couche limite verticale vers le régime turbulent favorise les transferts de chaleur dans ce cas. Le nombre de Nusselt dans le plan  $x^+ = 0,5$  est le plus élevé dans le cas B : le flux d’enthalpie  $u_1^+ T^+ \sqrt{Ra}$  est effectivement le plus élevé dans ce cas si l’on se réfère aux profils tracés sur la figure 6.2.

La figure 6.5 synthétise les résultats concernant le nombre de Nusselt et le flux radiatif adimensionné aux parois isothermes, obtenus entre  $Ra = 10^5$  et  $Ra = 3 \times 10^9$  pour les trois cas A, B et C. En convection naturelle, l’évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh suit

TABLE 6.2 – Ra = 3 × 10<sup>9</sup>. Nombre de Nusselt ⟨Nu⟩ moyenné selon les plans  $x^+ = 0$ ,  $x^+ = 0,5$  et  $x^+ = 1$ , stratification thermique  $\langle \mathcal{S} \rangle = \partial \langle T^+ \rangle / \partial z^+$  au cœur de la cavité, température moyenne de la paroi haute  $\langle T^+ \rangle_{\text{haut}}$  et maximum des trois composantes de la vitesse.

Cas	A	B	C
$\langle \text{Nu}(x^+ = 0) \rangle$	73,82	67,42	75,70
$\langle \text{Nu}(x^+ = 0,5) \rangle$	73,90	108,19	96,04
$\langle \text{Nu}(x^+ = 1) \rangle$	73,88	67,73	75,68
$\langle \mathcal{S} \rangle$	1,01	0,68	0,56
$\langle T^+ \rangle_{\text{haut}}$	0,380	0,276	0,034
$\langle u_1^+ \rangle_{\text{max}}$	0,059	0,157	0,144
$\langle u_2^+ \rangle_{\text{max}}$	0,016	0,076	0,060
$\langle u_3^+ \rangle_{\text{max}}$	0,246	0,278	0,247

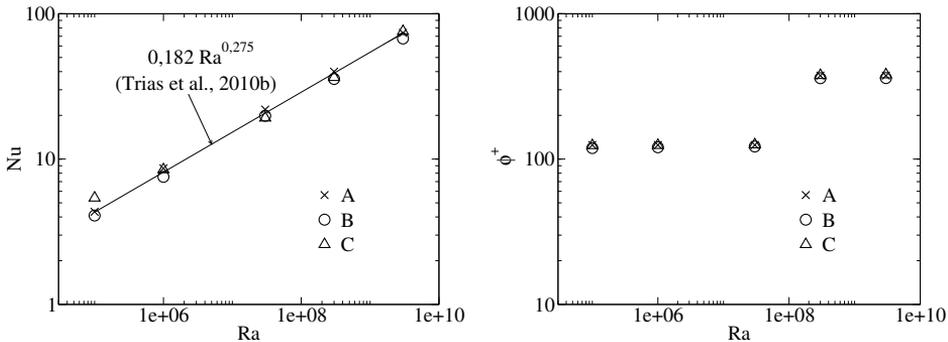


FIGURE 6.5 – Ra ∈ [10<sup>5</sup>; 3 × 10<sup>9</sup>]. Nombre de Nusselt moyen (gauche) et flux radiatif moyen  $\phi^+ = \mathbf{q}^{R+} \cdot \mathbf{n}$  (droite) aux parois isothermes : synthèse des résultats. La taille de la cavité est de  $L = 1$  m pour Ra ∈ [10<sup>5</sup>; 3 × 10<sup>7</sup>] et de  $L = 3$  m pour Ra ∈ [3 × 10<sup>8</sup>; 3 × 10<sup>9</sup>]. Dans le cas B, la fraction molaire des espèces absorbantes est de  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$  et  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ , quelque soit le nombre de Rayleigh.

généralement une loi puissance entre  $1/4$  et  $1/3$  (Grosmann et Lohse, 2000; Yu *et al.*, 2007). Pour la cavité différentiellement chauffée de rapport de forme  $L_z/L_x = 4$ , Trias *et al.* (2010b) ont proposé la corrélation

$$\text{Nu} = 0,182 \text{Ra}^{0,275}, \quad (6.2)$$

pour  $\text{Ra}_{L_z} \in [6, 4 \times 10^8; 10^{11}]$  et en absence de rayonnement. On peut noter sur la figure 6.5 que les transferts radiatifs volumiques et pariétaux ont une influence modérée sur le nombre de Nusselt aux parois isothermes et que l'évolution de celui-ci est proche de la corrélation proposée par Trias *et al.* (2010b). Les flux radiatifs sont quasi indépendants du nombre de Rayleigh (faibles écarts de température) mais sont proportionnels à la taille de la cavité  $L$ , choisie ici égale à 1 m pour  $\text{Ra} \in [10^5; 3 \times 10^7]$  et égale à 3 m pour  $\text{Ra} \in [3 \times 10^8; 3 \times 10^9]$

### 6.1.2 Champs instantanés

Un champ instantané de température est représenté sur la figure 6.6 dans le plan  $x^+ = 0,0054$ , proche de la paroi chaude, et dans le plan  $y^+ = 0,5$ . Aux mêmes instants est représenté sur la figure 6.7 une iso-valeur du critère  $Q$  positif (§ 4.1.1).

Dans le cas A, dans la couche limite verticale, une instabilité se développe sous la forme de rouleaux horizontaux dans la direction  $y$ . À partir d'une hauteur  $z^+ = 0,8$ , correspondant à la transition vers le régime turbulent repérée sur le nombre de Nusselt (figure 6.4), ces rouleaux se cassent en des structures plus petites et isotropes.

Dans le cas B, cette instabilité de couche limite se superpose aux rouleaux verticaux créés en amont, mis en évidence à  $\text{Ra} = 3 \times 10^8$  par l'observation des champs instantanés (§ 4.3.2) et par la POD (§ 4.3.3). La transition se situe également à une hauteur proche de  $z^+ = 0,8$ , sauf autour de  $y^+ = 0,2$ , où l'on observe un rouleau vertical sur le champ de température et sur le critère  $Q$  qui se brise au tour de  $z^+ = 0,5$ . Par rapport au cas A, les structures mécaniques et thermiques produites par la turbulence sont convectées dans les couches limites horizontales sur une plus grande distance avant d'être dissipées par viscosité.

Dans le cas C, les champs de température et de vitesse sont beaucoup plus chaotiques. De nombreuses structures sont produites dans les zones de stratification instable, en amont des couches limites verticales. Ces struc-

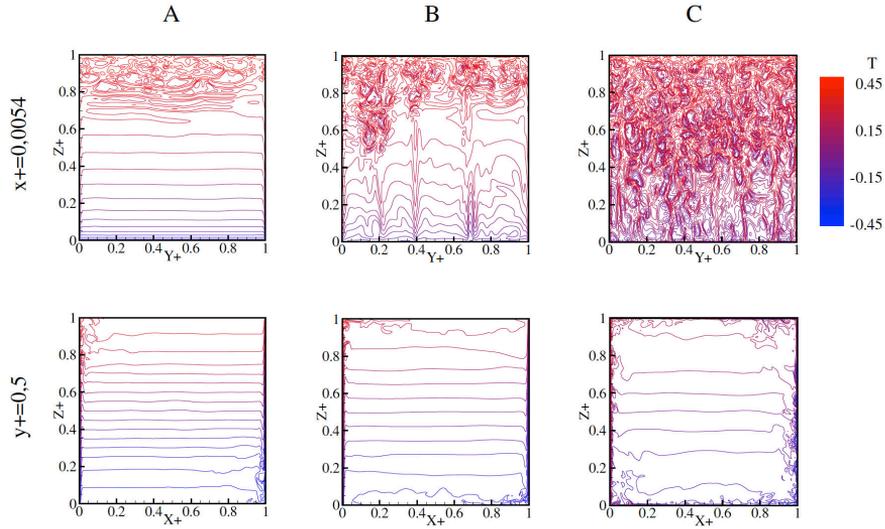


FIGURE 6.6 –  $Ra = 3 \times 10^9$ . Champ de température instantané dans le plan  $x^+ = 0,0054$ , proche de la paroi chaude (haut) et dans le plan  $y^+ = 0,5$  (bas). L'écart entre deux isothermes est de 0,05.

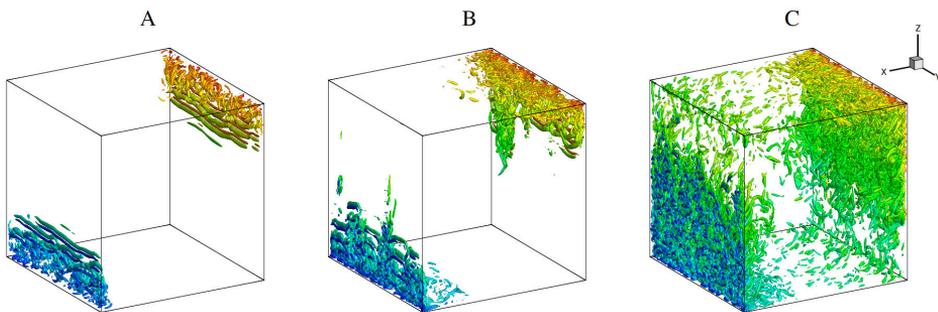


FIGURE 6.7 –  $Ra = 3 \times 10^9$ . Surfaces iso-valeurs du critère  $Q$  instantané  $Q = 10$ , coloré par la température instantanée.

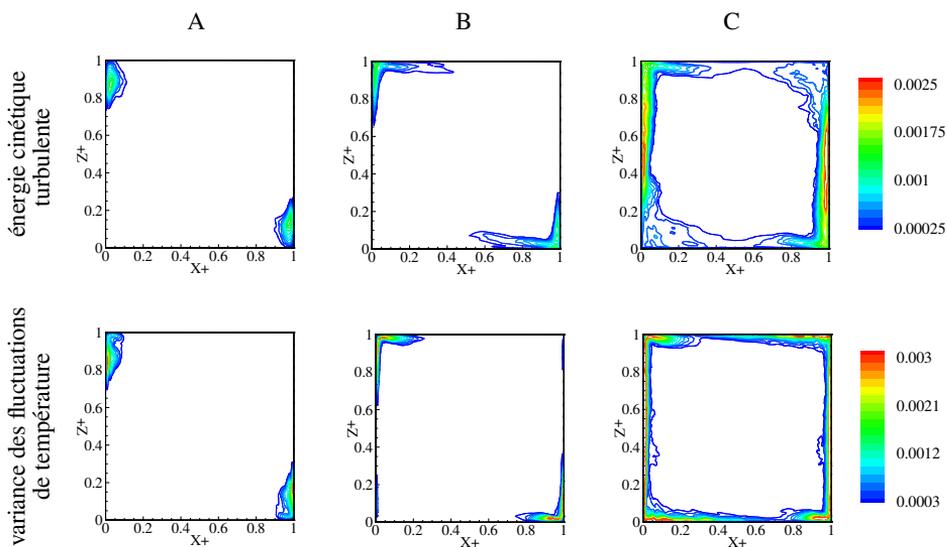


FIGURE 6.8 –  $Ra = 3 \times 10^9$ . Énergie cinétique turbulente  $\langle u_i^{+'} u_i^{+'} \rangle / 2$  (haut) et variance des fluctuations de température  $\langle T^{+'2} \rangle$  (bas) dans le plan  $y^+ = 0, 5$ . L'écart entre deux iso-valeurs de l'énergie cinétique est  $1, 25 \times 10^{-4}$  et l'écart entre deux iso-valeurs de la variance des fluctuations de température est  $1, 5 \times 10^{-4}$ .

tures favorisent l'apparition des instabilités de couche limite et de la turbulence le long des parois isothermes.

### 6.1.3 Statistiques d'ordre deux

La figure 6.8 montre l'énergie cinétique turbulente  $\langle u_i^{+'} u_i^{+'} \rangle / 2$  ainsi que la variance des fluctuations de température  $\langle T^{+'2} \rangle$  dans le plan  $y^+ = 0, 5$  (ces quantités varient peu selon la direction transverse  $y$ ). On peut noter que la symétrie centrale 2D de ces champs n'est pas exactement satisfaite, et que ces statistiques ne sont pas parfaitement convergées.

Dans les cas A et B, les fluctuations de température et de vitesse sont produites par la turbulence de couche limite le long des parois isothermes à partir de  $z^+ \simeq 0, 7$ . Ces fluctuations sont ensuite convectées dans la couche limite horizontale dans le cas B alors qu'elles sont immédiatement dissipées dans le cas A. Dans le cas C les fluctuations de température et de vitesse

TABLE 6.3 – Ra = 3 × 10<sup>9</sup>. Contributions aux bilans d'énergie cinétique du mouvement moyen  $E_c(\langle \mathbf{u}^+ \rangle)$  (équation (4.29)) et du mouvement fluctuant  $\langle E_c(\mathbf{u}^{+'}) \rangle$  (équation (4.30)), intégrées en volume.

		A	B	C
II	$\text{Pr} \langle u_3^+ \rangle \langle T^+ \rangle$	$3,24 \times 10^{-4}$	$3,98 \times 10^{-4}$	$4,23 \times 10^{-4}$
II'	$\text{Pr} \langle u_3^{+'} T^{+'} \rangle$	$1,54 \times 10^{-7}$	$5,21 \times 10^{-6}$	$6,99 \times 10^{-5}$
III' = -III	$-\langle u_i^{+'} u_j^{+'} \rangle \frac{\partial \langle u_i^+ \rangle}{\partial x_j^+}$	$1,88 \times 10^{-5}$	$5,81 \times 10^{-5}$	$1,43 \times 10^{-4}$
-IV	$\frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial \langle u_i^+ \rangle}{\partial x_j^+} \frac{\partial \langle u_i^+ \rangle}{\partial x_j^+}$	$3,02 \times 10^{-4}$	$3,34 \times 10^{-4}$	$2,74 \times 10^{-4}$
-IV'	$\frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \langle \frac{\partial u_i^{+'}}{\partial x_j^+} \frac{\partial u_i^{+'}}{\partial x_j^+} \rangle$	$1,92 \times 10^{-5}$	$6,51 \times 10^{-5}$	$2,28 \times 10^{-4}$

sont moins corrélées spatialement. Le long des parois haute et basse, dans les zones de stratification instable, on observe un fort niveau de fluctuation de température. Ces fluctuations de température génèrent des fluctuations de vitesse en amont des couches limites verticales qui favorisent la turbulence mécanique le long des parois isothermes.

### Bilans d'énergie cinétique

Le tableau 6.3 reporte les contributions intégrées en volume au bilan d'énergie cinétique du mouvement moyen (équation (4.29)) et du mouvement fluctuant (équation (4.30)).

Le bilan global de  $\langle E_c(\mathbf{u}^+) \rangle$  (4.31), traduisant l'équilibre entre la production d'énergie cinétique par les forces d'Archimède et la dissipation d'énergie cinétique par viscosité, s'écrit  $\text{II} + \text{II}' + \text{IV} + \text{IV}' = 0$  en utilisant les notations précédemment introduites (§ 4.1.3) et est vérifié à 0,9 % (A), 1,0 % (B) et 1,8 % (C). Le bilan de la partie moyenne  $E_c(\langle \mathbf{u}^+ \rangle)$  ( $\text{II} + \text{III} + \text{IV} = 0$ ) est vérifié à 0,9 % (A), 1,5 % (B) et 1,4 % (C) et le bilan de la partie fluctuante  $\langle E_c(\mathbf{u}^{+'}) \rangle$  ( $\text{II}' + \text{III}' + \text{IV}' = 0$ ) est vérifié à 1,0 % (A), 2,8 % (B) et 6,6 % (C). Ces écarts donnent une indication sur le niveau de convergence statistique de la solution moyenne.

Si les termes de production moyenne (II) et de dissipation moyenne (IV) sont du même ordre dans chaque cas, il n'en est pas de même pour les termes du bilan d'énergie cinétique turbulente II', III' et IV'. Les termes

de production  $II'$  et  $III'$  des fluctuations de vitesse sont plus importants quand les transferts radiatifs sont pris en compte et sont maximaux dans le cas C qui est le cas le plus chaotique. Le ratio entre le terme de production mécanique  $III'$  extrait du mouvement moyen et le terme de production thermique  $II'$  par les forces d'Archimède est de l'ordre de 100 (A), 10 (B) et 2 (C) : dans les cas A et B, il s'agit essentiellement d'une turbulence mécanique liée au cisaillement aux parois isothermes, alors que dans le cas C, les zones de stratification thermique instable participent à la production des fluctuations.

Les termes  $II'$ ,  $III'$  et  $IV'$  du bilan d'énergie cinétique turbulente sont tracés sur la figure 6.9-(gauche) le long d'une ligne  $0 \leq x^+ \leq 0,1$ ,  $y^+ = 0,5$  et  $z^+ = 0,875$ , soit dans la couche limite verticale près de la paroi chaude. Les observations précédentes concernant les contributions intégrées en volume sont retrouvées. Le terme de production d'origine mécanique  $III'$  domine devant celui d'origine thermique  $II'$  dans tous les cas. La production totale ( $II'+III'$ ) et la dissipation ( $IV'$ ) sont les plus importantes dans le C.

### Bilans du carré des écarts de température

Le tableau 6.4 reporte les contributions intégrées en volume au bilan du carré des écarts de température des parties moyennes (équation (4.34)) et des parties fluctuantes (équation (4.35)).

Le bilan global de  $\langle E_t(\theta^+) \rangle$  (4.36), traduisant l'équilibre entre la génération des écarts de température aux parois et leur dissipation par conduction et rayonnement, s'écrit  $V+V'+VII+VII'+VIII+VIII' = 0$  en utilisant les notations précédemment introduites (§ 4.1.3) et est vérifié à 0,7 % (A), 5,4 % (B) et 2,0 % (C). Le bilan de la partie moyenne  $E_t(\langle \theta^+ \rangle)$  ( $V+VI+VII+VIII=0$ ) est vérifié à 0,7 % (A), 5,4 % (B) et 0,1 % (C) et le bilan de la partie fluctuante  $\langle E_t(\theta^{+'}) \rangle$  ( $V'+VI'+VII'+VIII'=0$ ) est vérifié à 0,8 % (A), 4,9 % (B) et 6,0 % (C). Le terme  $V'$  est nul dans les cas A et B car le flux conductif est nul aux parois adiabatiques. Les termes VIII et VIII' sont nuls dans les cas A et C, en l'absence de rayonnement volumique.

Les écarts de température moyens générés par les gradients aux parois (V) sont essentiellement détruits par dissipation moyenne. Dans le cas B, cette dissipation est à la fois conductive (VII) et radiative (VIII) et la part du rayonnement est de 18 %. De même, les écarts de température fluctuants produits par le mouvement moyen ( $VI'$ ) sont essentiellement détruits par dissipation des fluctuations. Dans le cas B, cette dissipation est à la fois

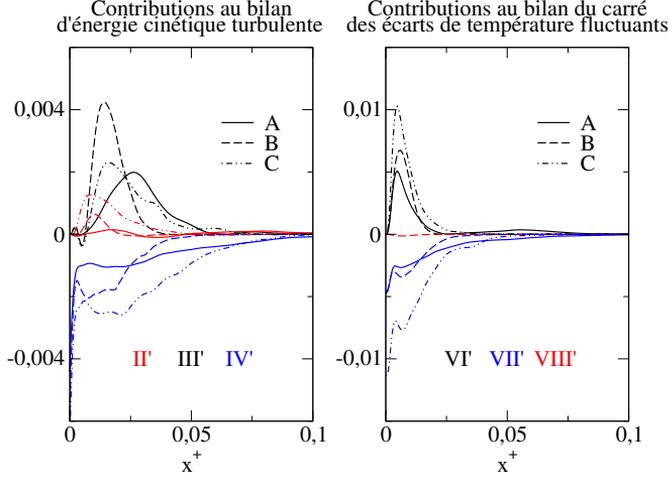


FIGURE 6.9 –  $Ra = 3 \times 10^9$ . Contributions locales au bilan d'énergie cinétique turbulente  $\langle E_c(\mathbf{u}^{+'}) \rangle$  (gauche) et au bilan du carré des écarts de température fluctuant  $\langle E_t(\theta^{+'}) \rangle$  (droite). Les profils sont tracés pour  $0 \leq x^+ \leq 0,1$ ,  $y^+ = 0,5$  et  $z^+ = 0,875$ . La définition des termes est rappelée dans les tableaux 6.3 et 6.4.

TABLE 6.4 –  $Ra = 3 \times 10^9$ . Contributions aux bilans du carré des écarts de température moyens  $E_t(\langle \theta^+ \rangle)$  (équation (4.34)) et fluctuants  $\langle E_t(\theta^{+'}) \rangle$  (équation (4.35)), intégrées en volume.

		A	B	C
V	$\frac{1}{2\sqrt{Ra}} \frac{\partial^2 \langle \theta^+ \rangle \langle \theta^+ \rangle}{\partial x_i^{+2}}$	$1,35 \times 10^{-3}$	$1,23 \times 10^{-3}$	$1,44 \times 10^{-3}$
V'	$\frac{1}{2\sqrt{Ra}} \frac{\partial^2 \langle \theta^{+'} \theta^{+'} \rangle}{\partial x_i^{+2}}$	–	–	$4,23 \times 10^{-6}$
VI' = -VI	$-\langle u_i^{+'} \theta^{+'} \rangle \frac{\partial \langle \theta^+ \rangle}{\partial x_i^+}$	$2,38 \times 10^{-5}$	$5,31 \times 10^{-5}$	$3,41 \times 10^{-4}$
-VII	$\frac{1}{\sqrt{Ra}} \frac{\partial \langle \theta^+ \rangle}{\partial x_i^+} \frac{\partial \langle \theta^+ \rangle}{\partial x_i^+}$	$1,32 \times 10^{-3}$	$1,03 \times 10^{-3}$	$1,10 \times 10^{-3}$
-VII'	$\frac{1}{\sqrt{Ra}} \left\langle \frac{\partial \theta^{+'}}{\partial x_i^+} \frac{\partial \theta^{+'}}{\partial x_i^+} \right\rangle$	$2,40 \times 10^{-5}$	$5,28 \times 10^{-5}$	$3,67 \times 10^{-4}$
-VIII	$\frac{1}{\sqrt{Ra}} \langle \theta^+ \rangle \left\langle \frac{\partial q_i^{R+}}{\partial x_i^+} \right\rangle$	–	$2,24 \times 10^{-4}$	–
-VIII'	$\frac{1}{\sqrt{Ra}} \left\langle \theta^+ \left( \frac{\partial q_i^{R+}}{\partial x_i^+} \right)' \right\rangle$	–	$2,86 \times 10^{-6}$	–

conductive (VII') et radiative (VIII') et la part du rayonnement est de 5 %.

Les termes VI', VII' et VIII' du bilan du carré des écarts de température fluctuants sont tracés sur la figure 6.9-(droite) le long d'une ligne  $0 \leq x^+ \leq 0,1$ ,  $y^+ = 0,5$  et  $z^+ = 0,875$ , soit dans la couche limite verticale près de la paroi chaude. Les observations précédentes concernant les contributions intégrées en volume sont retrouvées. Dans le cas B, le terme de dissipation radiative VIII' est négligeable devant le terme de dissipation conductive VII'. La production (VI') et la dissipation conductive (VII') sont les plus importantes dans le C.

## 6.2 Modélisation pour la simulation aux grandes échelles

La simulation aux grandes échelles pour la mécanique des fluides se situe entre la simulation numérique directe, où toutes les échelles spatiales et temporelles de l'écoulement sont résolues, et la simulation en moyenne de Reynolds, où seule une représentation moyenne de l'écoulement est recherchée. Cette approche consiste à filtrer les équations de Navier-Stokes et à résoudre uniquement les grandes échelles de l'écoulement. Les variables filtrées peuvent être discrétisées sur des maillages plus larges, ce qui limite le coût numérique de la simulation aux grandes échelles comparé à la simulation numérique directe.

Les petites échelles de l'écoulement (appelées également échelles de sous-maille) ne sont pas résolues. Néanmoins, leur impact sur la dynamique des grandes échelles doit être modélisé. Pour simuler la convection naturelle turbulente, le modèle *Spectral Vanishing Viscosity* (Karamanos et Karniadakis, 2000) a été choisi et validé à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^9$  par comparaison avec les résultats de simulation numérique directe. Les transferts radiatifs ne sont pas pris en compte dans cette partie.

### 6.2.1 Filtrage des bilans macroscopiques de masse, de quantité de mouvement et d'énergie

On considère un filtre passe-bas  $\mathcal{F}$  pour les fréquences spatiales et temporelles, de longueur de coupure  $\bar{\ell}_c$  et de temps de coupure  $\bar{t}_c$ . Les variables filtrées  $\overline{f(\mathbf{r}, t)}$  (vitesse, température...) sont définies par

$$\overline{f(\mathbf{r}, t)} = (\mathcal{F} * f)(\mathbf{r}, t), \quad (6.3)$$

où  $*$  désigne le produit de convolution, et les quantités de sous-maille  $f'(\mathbf{r}, t)$  correspondant aux échelles non résolues s'écrivent

$$f'(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) - \overline{f(\mathbf{r}, t)}. \quad (6.4)$$

Le filtre  $\mathcal{F}$  est appliqué aux bilans de masse (1.2), de quantité de mouvement (1.3) et d'énergie (1.4) afin d'établir des équations d'évolution pour les variables filtrées. Deux difficultés sont alors rencontrées :

- le filtre ne commute pas avec les opérateurs de dérivation en règle générale ;
- le terme d'advection du bilan de quantité de mouvement et le terme de convection du bilan d'énergie ne sont pas linéaires.

La solution la plus courante consiste à négliger les erreurs de commutation entre le filtre et les opérateurs différentiels et à écrire les bilans macroscopiques sous la forme

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (6.5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \rho_0 \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \rho_0 \beta (T_0 - \bar{T}) \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{\text{sm}}, \quad (6.6)$$

$$\rho_0 C_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \rho_0 C_p \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{T} = \lambda \nabla^2 \bar{T} - \overline{\nabla \cdot \mathbf{q}^R} - \nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{sm}}, \quad (6.7)$$

où le tenseur de sous-maille  $\boldsymbol{\tau}^{\text{sm}}$  et le flux enthalpique de sous-maille  $\mathbf{q}^{\text{sm}}$  définis par

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{sm}} = \rho_0 (\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}), \quad (6.8)$$

$$\mathbf{q}^{\text{sm}} = \rho_0 C_p (\overline{\mathbf{u} T} - \bar{\mathbf{u}} \bar{T}), \quad (6.9)$$

sont introduits en décomposant les termes non linéaires. Les termes de sous-maille (6.8) et (6.9) sont des inconnues supplémentaires qu'il s'agit de modéliser en les exprimant en fonction des variables filtrées  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\bar{T}$ . Ce problème de fermeture est analogue à celui rencontré pour la simulation en moyenne de Reynolds.

En pratique, le filtre  $\mathcal{F}$  n'est pas défini explicitement. On se contente de résoudre les bilans macroscopiques filtrés sur un maillage dont le plus petit pas d'espace  $\bar{\ell}_c$  est plus grand que la plus petite échelle de variation des variables de l'écoulement. Le pas de temps est généralement imposé par la stabilité du schéma de discrétisation temporel.

Les transferts radiatifs sont ici ignorés ( $\mathbf{q}^R = 0$ ).

## 6.2.2 Modélisation des termes de sous-maille

Une revue détaillée des différents modèles de sous-maille proposés dans la littérature est donnée par Sagaut (2006). Ce paragraphe discute les approches les plus fréquemment utilisées, notamment dans le cas des écoulements de convection naturelle.

L'impact macroscopique des petites échelles sur la dynamique de l'écoulement peut être comparé à celui des mouvements moléculaires sur les champs hydrodynamiques à l'échelle du milieu continu. Cette analogie conduit à modéliser les termes de sous-maille comme des termes de diffusion, soit

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{sm}} - \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\tau}^{\text{sm}})\mathbf{I} = -2\mu^{\text{sm}}\bar{\mathbf{S}}, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{q}^{\text{sm}} = -\lambda^{\text{sm}}\nabla\bar{T}, \quad (6.11)$$

où  $\mu^{\text{sm}}$  est la viscosité de sous-maille,  $\lambda^{\text{sm}}$  est la conductivité de sous-maille et  $\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\nabla\bar{\mathbf{u}} + (\nabla\bar{\mathbf{u}})^T)$  est le tenseur des déformations associé au champ de vitesse filtré. Pour un écoulement à masse volumique constante, la trace du tenseur de déformation est nulle et seul le déviateur du tenseur de sous-maille (membre de gauche de l'équation (6.10)) est modélisé.

Smagorinsky (1963) propose une estimation la viscosité de sous-maille, basée sur une analyse dimensionnelle

$$\mu^{\text{sm}}(\mathbf{r}, t) = \rho_0(C\bar{\ell}_c)^2\sqrt{2\|\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t)\|^2}, \quad (6.12)$$

où  $C$  est une constante,  $\bar{\ell}_c$  est l'échelle de longueur de la coupure et  $\|\bar{\mathbf{S}}\|^2 = \bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}$ . La constante  $C$  peut être calculée en fonction de  $\mathbf{r}$  et de  $t$  en suivant la méthode de Germano *et al.* (1991) et Lilly (1992) (modèle de Smagorinsky dynamique). La conductivité de sous-maille est évaluée soit par une expression analogue à l'équation (6.12), soit en fixant la valeur du nombre de Prandtl de sous-maille

$$\text{Pr}^{\text{sm}} = \frac{\mu^{\text{sm}}C_p}{\lambda^{\text{sm}}}. \quad (6.13)$$

Le modèle de Smagorinsky dynamique a été implémenté pour la simulation de la convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée par Peng et Davidson (2001) à  $\text{Ra} = 1,58 \times 10^9$ . D'autres modèles pour la convection naturelle ont été proposés dans la littérature comme le modèle

d'échelles mixtes (Sergent *et al.*, 2000, 2003), le modèle de Vreman (Lau *et al.*, 2012) ou les modèles de régularisation (Trias *et al.*, 2012).

Ici, le modèle *Spectral Vanishing Viscosity* a été choisi car celui-ci a été spécialement développé pour les méthodes spectrales de résolution des équations aux dérivées partielles. Ce modèle consiste à introduire un terme de dissipation artificielle pour assurer la convergence spectrale, autrement dit la décroissance des hauts modes du développement polynomial Chebyshev. Son implémentation à partir du code spectral de collocation présenté au chapitre 2 est simple : la structure de l'algorithme ne change pas, seul l'opérateur de Helmholtz est modifié. En revanche, cette modélisation ne s'appuie pas sur une analyse physique de la turbulence.

### 6.2.3 Modèle *Spectral Vanishing Viscosity*

Le modèle *Spectral Vanishing Viscosity* (SVV) pour la simulation aux grandes échelles consiste à ajouter un terme de diffusion artificielle à l'équation d'advection/diffusion

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - a \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( V \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right)}_{\text{diffusion artificielle}} = 0, \quad (6.14)$$

où  $a$  est la constante de diffusion du phénomène et  $V$  est l'opérateur de viscosité artificielle défini dans l'espace spectral de projection (Fourier, Chebyshev...) où la solution  $\bar{f}$  est recherchée. Ce terme additionnel est analogue aux termes de sous-maille  $-\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{\text{sm}}$  et  $-\nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{sm}}$  introduits dans les bilans de quantité de mouvement (6.6) et d'énergie (6.7) filtrés.

À l'origine, ce modèle a été introduit par Tadmor (1989) pour stabiliser la résolution numérique dans l'espace spectral Fourier de l'équation d'Euler pour un fluide non visqueux. Karamanos et Karniadakis (2000) ont repris cette formulation dans le cadre de la simulation aux grandes échelles. Depuis, le modèle SVV a été appliqué à des écoulement turbulents dans des cavités tournantes (Severac et Serre, 2007) ou à des sillages turbulents (Pasquetti, 2006; Biancofiore *et al.*, 2012).

#### Définition de l'opérateur de viscosité artificielle

On cherche une solution approchée  $\bar{f}^N$  qui admet une représentation spectrale sur les  $N + 1$  premiers polynômes de Chebyshev et qui vérifie l'équa-

tion (6.14) aux  $N + 1$  points de collocations  $x_i$ , soit

$$\frac{\partial \bar{f}^N}{\partial t} + \bar{u}^N \frac{\partial \bar{f}^N}{\partial x} - a \frac{\partial^2 \bar{f}^N}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( V^N \frac{\partial \bar{f}^N}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_i} = 0. \quad (6.15)$$

Appliqué à une fonction  $\phi^N$  quelconque, l'opérateur de viscosité artificielle discret  $V^N$  est défini par

$$V^N \phi^N(x_i) = \sum_{k=0}^N \check{V}_k \check{\phi}_k \mathcal{T}_k(x_i), \quad (6.16)$$

$$\check{V}_k = \begin{cases} \epsilon \exp\left(-\frac{(N-k)^2}{(M-k)^2}\right) & \text{si } k > M, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.17)$$

L'opérateur  $V^N$  est fonction de deux paramètres constants : l'ordre de coupure  $M$  et le poids  $\epsilon$ . Il n'affecte pas les bas modes Chebyshev. L'expression (6.17) a été proposée par Maday *et al.* (1993) pour des polynômes de Legendre avec  $M \approx 5\sqrt{N}$  et  $\epsilon \approx N^{-1}$ .

Les coefficients spectraux  $\check{a}_k$  du terme de diffusion artificiel tels que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( V^N \frac{\partial \bar{f}^N}{\partial x} \right) (x_i) = \sum_{k=0}^N \check{a}_k \mathcal{T}_k(x_i), \quad (6.18)$$

sont égaux à

$$\begin{aligned} \check{a}_k &= \sum_{\substack{m=k+1 \\ m+k \text{ impair}}}^N \sum_{\substack{p=m+1 \\ p+m \text{ impair}}}^N \frac{2m}{c_k} \check{V}_m \frac{2p}{c_m} \check{f}_p, \\ &= \frac{1}{c_k} \sum_{\substack{p=k+2 \\ p+k \text{ pair}}}^N \left( 4p \check{f}_p \sum_{\substack{m=k+1 \\ m+p \text{ impair}}}^{p-1} m \check{V}_m \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Pour obtenir ce résultat, on s'appuie sur l'expression des coefficients spectraux de la dérivée première (équation (2.11)). En posant  $\check{V}_m = 1 \forall m$  dans l'équation (6.19), on retrouve l'expression des coefficients spectraux de la dérivée seconde (équation (2.12)), soit  $\check{a}_k = \check{f}_k^{(2)}$ .

## Implémentation

En trois dimensions, l'opérateur de viscosité artificielle s'applique indépendamment dans chaque direction d'espace selon

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \bar{f}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( V_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \right), \quad (6.20)$$

ce qui équivaut à considérer que le tenseur d'ordre deux  $\mathbf{V}$  est diagonal. Le terme de diffusion artificielle est traité implicitement dans le schéma temporel, de la même manière que le terme de diffusion classique, afin de ne pas trop contraindre le pas de temps  $\delta t$  (voir § 2.1.2). Pour calculer l'évolution temporelle des champs de température et de vitesse, on résout des équations semblables à l'équation de Helmholtz (2.17)

$$\bar{f}_{n+1} = \left( \nabla \cdot (\nabla + \mathbf{V} \cdot \nabla) - \frac{3}{2\delta t} \right)^{-1} S_{n,n-1}, \quad (6.21)$$

où  $\bar{f}_{n+1} = \bar{f}((n+1)\delta t)$  et  $S_{n,n-1}$  est le terme source défini par l'équation (2.18). L'inversion de l'opérateur  $H^{\text{SVV}} \equiv \nabla \cdot (\nabla + \mathbf{V} \cdot \nabla) - 3/(2\delta t)$  s'effectue à nouveau par tridiagonalisation. Le reste de l'algorithme (couplage pression-vitesse, parallélisation) est inchangé. Le même opérateur  $\mathbf{V}$  est appliqué à la température et aux trois composantes de la vitesse.

### 6.2.4 Étude de validité du modèle SVV

Pour valider le modèle SVV, deux simulations aux grandes échelles à des maillages spatiaux différents sont entreprises à  $\text{Ra} = 3 \times 10^9$ . Les résultats sont comparés à ceux obtenus par la simulation numérique directe. Les paramètres choisis pour le modèle SVV sont précisés dans le tableau 6.5.

Le cas A correspond à la simulation numérique directe discutée au paragraphe 6.1. Dans le cas A-SVV1, la cavité est divisée en 8 domaines dans la direction verticale et chaque domaine est discrétisé par  $(N_x + 1) \times (N_y + 1) \times (N_z + 1) = 161 \times 161 \times 21$  points de Chebyshev-Gauss-Lobatto. L'ordre de coupure est choisi tel que  $M_x/N_x = M_y/N_y = M_z/N_z = 3/4$  et le poids, identique dans chaque direction  $\epsilon \simeq 1/(4N_x) = 1/(4N_y) = 1/(32N_z)$ . Dans le cas A-SVV2, la cavité est divisée en 4 domaines dans la direction verticale et chaque domaine est discrétisé par  $(N_x + 1) \times (N_y + 1) \times (N_z + 1) = 121 \times 121 \times 31$  points de Chebyshev-Gauss-Lobatto. L'ordre de coupure est

TABLE 6.5 – Paramètres du modèle SVV à  $Ra = 3 \times 10^9$ .

Cas	Maillage	$M_x$	$M_y$	$M_z$	$\epsilon$
A	$321 \times 321 \times (16 \times 21)$	-	-	-	-
A-SVV1	$161 \times 161 \times (8 \times 21)$	120	120	15	$1,56 \times 10^{-3}$
A-SVV2	$121 \times 121 \times (4 \times 31)$	80	80	20	$4 \times 10^{-3}$

choisi tel que  $M_x/N_x = M_y/N_y = M_z/N_z = 2/3$  et le poids, identique dans chaque direction  $\epsilon \simeq 1/(2N_x) = 1/(2N_y) = 1/(8N_z)$ . Il est à noter que la méthode spectrale diverge si les maillages spatiaux des cas A-SVV1 et A-SVV2 sont utilisés sans modèle ( $\epsilon = 0$ ).

À partir de la solution initiale obtenue dans le cas A à  $Ra = 3 \times 10^9$  à  $t^+ = 200$  (régime asymptotique), les cas A-SVV1 et A-SVV2 sont intégrés avec un pas de temps  $\delta t^+ = 10^{-3}$  pendant une période  $\Delta t^+ = 30$  pour éliminer d'éventuels effets transitoires puis pendant une période  $\Delta t^+ = 120$  pour moyennner statistiquement les résultats.

### Comparaison des champs moyens

Sont tracés sur la figure 6.10 les profils de la composante verticale de la vitesse  $\langle u_3^+ \rangle$  et de température  $\langle T^+ \rangle$  en  $y^+ = 0,5$ , et à différentes hauteurs  $z^+ = 0,25$ ,  $z^+ = 0,5$  et  $z^+ = 1$ . L'accord entre la référence A et les simulations aux grandes échelles A-SVV1 et A-SVV2 est très bon à  $z^+ = 0,25$  et à  $z^+ = 0,5$ , sur la partie laminaire de la couche limite verticale. En revanche, on observe des différences à la fois sur la forme du profil et sur les valeurs extrémales à  $z^+ = 0,75$ , dans le début de la zone turbulente. Les désaccords sont plus importants dans le cas A-SVV2 qui est le cas le moins résolu spatialement.

Une autre comparaison est proposée sur la figure 6.11 où sont tracés les profils de la composante horizontale de la vitesse  $\langle u_1^+ \rangle$  et de température  $\langle T^+ \rangle$  le long de la ligne  $x^+ = 0,5$  et  $y^+ = 0,5$ . Le profil de température vertical au cœur de la cavité est très bien prédit par les simulations aux grandes échelles. Cependant, on observe des désaccords entre les simulations sur le profil vertical de vitesse. Étant donné le faible niveau de vitesse dans cette région, ces écarts n'ont qu'une incidence minimale sur l'écoulement global.

Le nombre de Nusselt moyenné selon les plans  $x^+ = 0$ ,  $x^+ = 0,5$  et  $x^+ = 1$ , la stratification thermique  $\langle \mathcal{S} \rangle$ , la température moyenne de la paroi

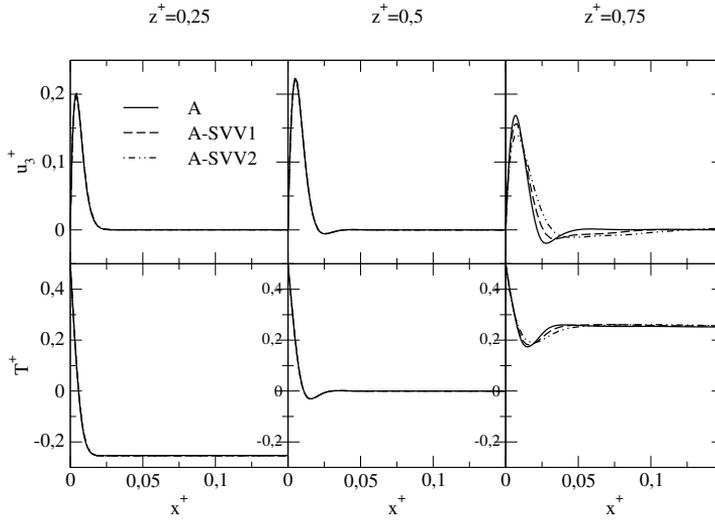


FIGURE 6.10 – Étude de validité du modèle SVV à  $Ra = 3 \times 10^9$ . Profils de vitesse verticale moyenne  $\langle u_3^+ \rangle$  (haut) et de température moyenne  $T^+$  (bas) le long des lignes  $y^+ = 0, 5$  et  $z^+ = 0, 25, z^+ = 0, 5$  et  $z^+ = 0, 75$ .

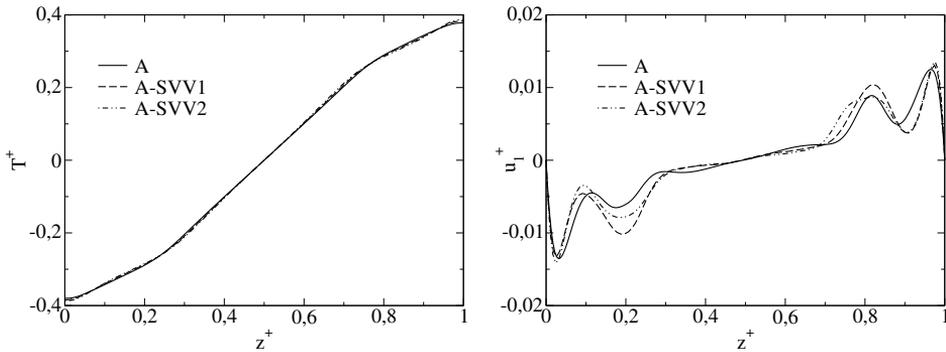


FIGURE 6.11 – Étude de validité du modèle SVV à  $Ra = 3 \times 10^9$ . Profils de vitesse horizontale moyenne  $\langle u_1^+ \rangle$  et de température moyenne  $\langle T^+ \rangle$  le long de la ligne  $x^+ = 0, 5, y^+ = 0, 5$ .

TABLE 6.6 – Étude de validité du modèle SVV à  $Ra = 3 \times 10^9$ . Nombre de Nusselt moyenné selon les plans  $x^+ = 0$ ,  $x^+ = 0,5$  et  $x^+ = 1$ , stratification thermique  $\langle \mathcal{S} \rangle = \partial \langle T^+ \rangle / \partial z^+$  au cœur de la cavité, température moyenne de la paroi haute  $\langle T^+ \rangle_{\text{haut}}$  et maximum des trois composantes de la vitesse.

Cas	A	A-SVV1	A-SVV2
$\langle \text{Nu}(x^+ = 0) \rangle$	73,82	74,19	74,60
$\langle \text{Nu}(x^+ = 0,5) \rangle$	73,90	74,15	74,65
$\langle \text{Nu}(x^+ = 1) \rangle$	73,88	74,27	74,58
$\langle \mathcal{S} \rangle$	1,01	1,01	1,02
$\langle T^+ \rangle_{\text{haut}}$	0,380	0,384	0,389
$\langle u_1^+ \rangle_{\text{max}}$	0,059	0,056	0,048
$\langle u_2^+ \rangle_{\text{max}}$	0,016	0,012	0,013
$\langle u_3^+ \rangle_{\text{max}}$	0,246	0,245	0,242

haute  $\langle T^+ \rangle_{\text{haut}}$  et le maximum des trois composantes de la vitesse sont reportés dans le tableau 6.6 pour la simulation numérique directe A et les simulations aux grandes échelles A-SVV1 et A-SVV2. Les écarts sur ces quantités sont inférieurs à 1 % (A-SVV1) et 2 % (A-SVV2), sauf pour le maximum des composantes horizontale  $\langle u_1^+ \rangle_{\text{max}}$  et transversale  $\langle u_2^+ \rangle_{\text{max}}$  de la vitesse.

### Transition de la couche limite

La simulation aux grandes échelles des écoulements de convection naturelle en cavité différentiellement chauffée est complexifiée par la présence de différents régimes d'écoulement (laminaire, transitionnel et turbulent) dans les couches limites verticales. En particulier, la hauteur de transition à partir de laquelle l'écoulement devient turbulent est une propriété difficile à prédire.

La hauteur de transition peut être estimée en observant le profil vertical du nombre de Nusselt le long de la paroi chaude en  $y^+ = 0,5$ , représenté sur la figure 6.12. Les simulations aux grandes échelles prédisent une hauteur de transition en amont de celle prédite par la simulation numérique directe :  $z^+ \simeq 0,7$  (A-SVV2),  $z^+ \simeq 0,75$  (A-SVV1) et  $z^+ \simeq 0,8$  (A). Cette observation est confirmée par la visualisation du critère  $Q$  positif sur un champ instantané, représenté sur la figure 6.13. Les rouleaux longitudinaux, typiques de l'instabilité de couche limite, apparaissent en amont dans les

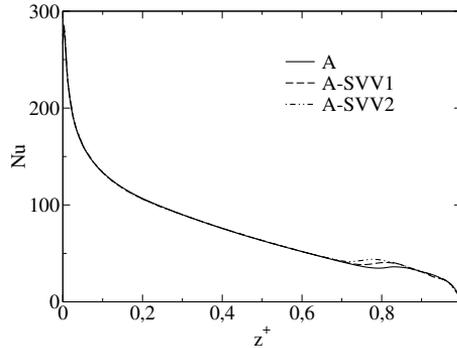


FIGURE 6.12 – Étude de validité du modèle SVV à  $Ra = 3 \times 10^9$ . Profil du nombre de Nusselt moyen  $\langle Nu \rangle$  le long de la ligne  $x^+ = 0, y^+ = 0,5$  (paroi chaude).

cas A-SVV1 et A-SVV2.

Sur la figure 6.14 sont comparées l'énergie cinétique des fluctuations statistiques du champ de vitesse  $\langle u_i^{+'} u_i^{+'} \rangle / 2$  calculée par la simulation numérique directe (A) et l'énergie cinétique des fluctuations statistiques du champ de vitesse filtré  $\langle \overline{u_i^{+'} u_i^{+'}} \rangle / 2$  calculée par les simulations aux grandes échelles (A-SVV1 et A-SVV2), dans le plan  $y^+ = 0,5$  et pour  $0 \leq x^+ \leq 0,2$  et  $0,5 \leq z^+ \leq 1$ . À nouveau, on remarque que la hauteur de transition n'est pas correctement prédite par la simulation aux grandes échelles. De plus, les niveaux d'énergie cinétique obtenus dans les cas A-SVV1 et A-SVV2 sont supérieurs à ceux obtenus dans le cas A alors qu'ils devraient théoriquement être inférieurs ou égaux (si les fluctuations statistiques des contributions de sous-maille sont négligeables).

Ces résultats pourraient être liés à un manque de dissipation par le modèle SVV, ce qui expliquerait la transition trop précoce et le surplus d'énergie cinétique turbulente.

### Conclusion sur la validité du modèle SVV

Si certaines propriétés des champs moyens sont bien reproduites par le modèle SVV, comme la stratification thermique ou le nombre de Nusselt, la hauteur de transition de la couche limite verticale et le contenu énergétique des structures turbulentes ne sont pas en accord parfait avec la simulation

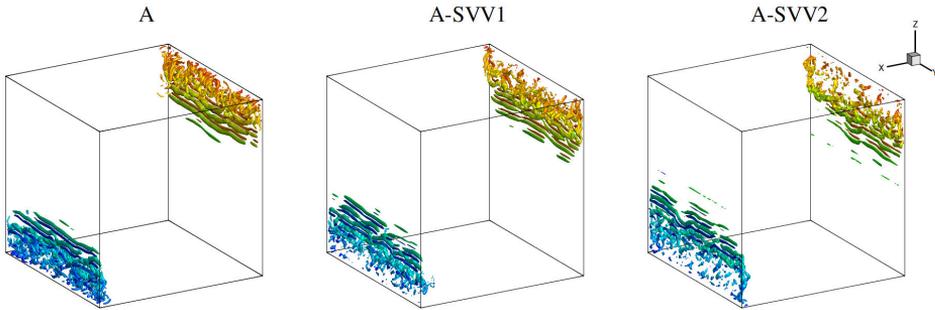


FIGURE 6.13 – Étude de validité du modèle SVV à  $Ra = 3 \times 10^9$ . Surfaces iso-valeurs du critère  $Q$  instantané  $Q = 10$ .

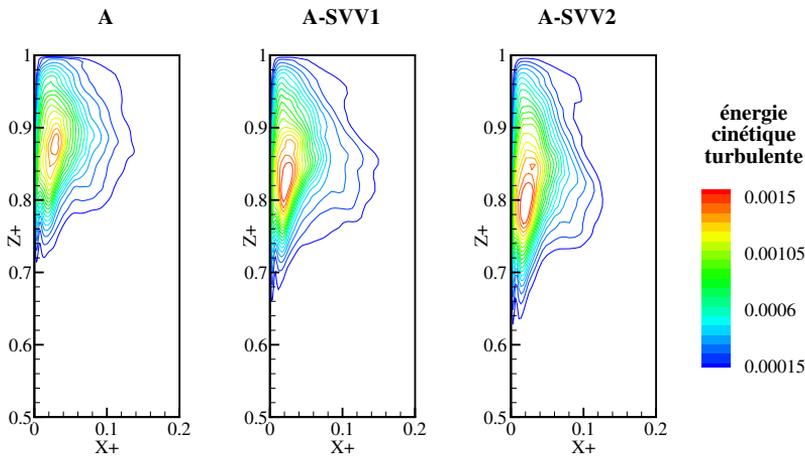


FIGURE 6.14 – Étude de validité du modèle SVV à  $Ra = 3 \times 10^9$ . Énergie cinétique turbulente  $\langle u_i^{+'} u_i^{+'} \rangle / 2$  (A) et  $\langle \overline{u_i^{+'} u_i^{+'}} \rangle / 2$  (A-SVV1 et A-SVV2) dans le plan  $y^+ = 0,5$  pour  $0 \leq x^+ \leq 0,2$  et  $0,5 \leq z^+ \leq 1$ . L'écart entre deux iso-valeurs de l'énergie cinétique est  $7,5 \times 10^{-5}$ .

numérique directe. Néanmoins, les écarts obtenus sont comparables à ceux présentés dans d'autres travaux, exploitant des modèles de sous-maille différents (Barhaghi et Davidson, 2007; Sergent *et al.*, 2013; Trias *et al.*, 2013).

Une analyse de sensibilité aux deux paramètres du modèle (l'ordre de coupure  $M$  et le poids  $\epsilon$ ) permettrait de savoir si ces résultats peuvent être améliorés et si une estimation de ces paramètres peut être proposée en fonction du nombre de Rayleigh et du maillage spatial choisi.

Le modèle SVV pourrait également être amélioré en calculant le poids  $\epsilon$  en fonction de l'espace et du temps par une méthode dynamique, comme cela a été proposé par Kirby et Karniadakis (2002). Cependant, ce choix modifierait l'algorithme de résolution de façon importante.

\*\*\*

Les effets du rayonnement du gaz et des parois sur la convection naturelle ont été étudiés à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^9$  par des simulations numériques où toutes les échelles spatiales et temporelles sont résolues. Les effets du rayonnement du gaz sur la stratification thermique ou sur l'intensité des fluctuations statistiques se sont révélés moins importants qu'à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^8$ . En revanche, les écoulements en présence de rayonnement des six parois de la cavité restent toujours très chaotiques : les zones de stratification instable en amont des couches limites verticales favorisent la turbulence le long des parois isothermes. Les transferts radiatifs influent peu sur l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh qui suit une loi puissance proche de  $\text{Ra}^{0,275}$  pour les trois cas considérés.

Le modèle SVV a été implémenté pour la simulation aux grandes échelles de la convection naturelle turbulente. Ce modèle a été choisi pour sa compatibilité avec la méthode spectrale de collocation et a été confronté aux résultats de simulation numérique directe à  $\text{Ra} = 3 \times 10^9$ . Le modèle capte l'écoulement moyen de façon satisfaisante mais ne reproduit pas exactement la hauteur de transition de la couche limite et les niveaux des fluctuations statistiques. Ces résultats sont toutefois encourageants dans la perspective de travaux futurs tenant compte des transferts radiatifs.



# Conclusion

CETTE THÈSE contribue à l'analyse des effets des transferts radiatifs pariétaux et en volume sur les écoulements de convection naturelle stationnaires, transitionnels et turbulents et à l'identification des mécanismes physiques responsables de ces effets. Des simulations numériques de référence, qui permettraient d'étudier la validité de modèles approchés, sont obtenues jusqu'à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^9$ . La cavité cubique différentiellement chauffée est choisie comme configuration d'étude pour son exploitation intensive dans la littérature passée. Des mélanges air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> sont considérés en vue d'applications au domaine de l'habitat.

Les simulations numériques de référence présentées dans ces travaux s'appuient sur une méthode spectrale de collocation pour résoudre l'écoulement de convection naturelle. Concernant les transferts radiatifs, deux approches sont mises en œuvre : une méthode de Monte Carlo statistique, permettant un traitement rigoureux en raie par raie des spectres moléculaires, et une méthode de lancer de rayons déterministe, combinée à une modélisation approchée ADF des propriétés du gaz. Dans le but d'accélérer la convergence statistique de la méthode de Monte Carlo et d'améliorer la précision numérique de la méthode de lancer de rayons appliquées aux milieux quasi-isothermes considérés, une nouvelle formulation de l'équation de transfert radiatif est introduite. Cette formulation consiste à soustraire aux champs de luminance, la luminance d'équilibre à la température minimale du système. Dans les simulations couplées, la méthode de lancer de rayons est préférée à la méthode de Monte Carlo pour deux raisons. D'une part, le modèle ADF est très précis car les gradients de température sont suffisamment faibles pour considérer le coefficient d'absorption uniforme. D'autre part, les fluctuations statistiques de la méthode de Monte Carlo sont problématiques

pour détecter les premières instationnarités de l'écoulement.

En régime stationnaire, les simulations numériques montrent des effets importants du rayonnement du gaz et des six parois de la cavité. Les échanges radiatifs gaz-gaz et gaz-parois isothermes homogénéisent le champ de température et font décroître la stratification thermique verticale. Le rayonnement du gaz a également pour effet d'épaissir les couches limites verticales, d'augmenter la circulation générale et de renforcer les aspects tridimensionnels de l'écoulement. Les échanges radiatifs entre les six parois de la cavité conduisent à des effets semblables en imposant une température proche de la température moyenne sur les parois adiabatiques, en particulier sur les parois haute et basse. Par ailleurs, l'approximation du gaz gris surestime fortement les effets du rayonnement du gaz.

L'obtention de solutions instationnaires couplées à des nombres de Rayleigh inférieurs au nombre de Rayleigh critique de transition sans rayonnement constitue un résultat important. Lorsque le gaz rayonne et que les parois adiabatiques sont parfaitement réfléchissantes, des structures tourbillonnaires orientées dans le sens de l'écoulement et transportées dans toute la cavité sont identifiées à proximité de la transition par la décomposition en modes propres orthogonaux. Une évolution temporelle chaotique de l'écoulement est obtenue. Une accentuation des forces centrifuges à la sortie des couches limites verticales est probablement responsable de la transition. Quand les six parois de la cavité sont noires et que le gaz est considéré transparent, des rouleaux instationnaires périodiques, perpendiculaires à l'écoulement, sont mis en évidence par la décomposition en modes dynamiques. La formation de ces rouleaux dans les zones de stratification thermique instable, induites par le rayonnement pariétal, suggère un mécanisme de transition de type Rayleigh-Bénard.

En régime instationnaire, les transferts radiatifs amplifient le caractère chaotique et tridimensionnel de l'écoulement. En termes de champs moyens, les résultats obtenus à plus bas nombre de Rayleigh sont retrouvés qualitativement dans l'ensemble. La production d'énergie cinétique turbulente est dominée par le cisaillement moyen plutôt que par les forces d'Archimède, en particulier lorsque le gaz rayonne.

Pour l'étude des régimes turbulents à très hauts nombres de Rayleigh, une discrétisation directe de l'espace de variation (espace, temps, et pour le

rayonnement, direction et fréquence) n'est pas envisageable aujourd'hui. Concernant les transferts radiatifs, une modélisation basée sur un filtrage spatial est proposée : les contributions filtrées sont résolues par la méthode de lancer de rayons sur un maillage lâche et les contributions de sous-maille sont résolues de manière analytique dans l'espace de Fourier. L'efficacité et la précision de ce modèle sont évaluées sur des champs de température instantanés représentatifs de la turbulence homogène, de la convection naturelle et de la convection forcée de gaz chauds. La précision des résultats est contrôlée par l'épaisseur optique correspondant à la longueur d'onde de coupure du filtre et les erreurs sont limitées à quelques pour cent tant que celle-ci reste inférieure à l'unité. L'accélération du temps de calcul par la méthode est liée au facteur de réduction de maillage choisi pour résoudre les contributions filtrées.

Le modèle de sous-maille a permis de réaliser des calculs de rayonnement couplés à la simulation numérique directe de l'écoulement de convection naturelle à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^9$ . Les effets du rayonnement du gaz se montrent moins importants dans ce cas, à la fois sur la stratification thermique moyenne et sur l'intensité des fluctuations turbulentes. Le ratio entre les termes sources radiatif et convectif diminue avec le nombre de Rayleigh si la taille de la cavité et les concentrations des espèces absorbantes restent constantes. En revanche, les écoulements en présence de rayonnement des six parois de la cavité restent toujours très chaotiques : les zones de stratification instable en amont des couches limites verticales favorisent la turbulence le long des parois isothermes.

Dans le but d'explorer de plus hauts nombres de Rayleigh, une modélisation aux grandes échelles de la convection naturelle, adaptée au code spectral de collocation, est testée. Il s'agit d'ajouter un terme de diffusion artificiel assurant la dissipation des hauts modes du développement spectral. Les résultats obtenus sont prometteurs et permettent d'envisager une utilisation plus intensive de cette approche pour des régimes d'écoulement plus turbulents.

La prise en compte des transferts radiatifs dans les simulations aux grandes échelles de l'écoulement de convection naturelle devra être entreprise dans de futurs travaux. Tant que les écarts de température restent faibles et que le coefficient d'absorption est uniforme, l'introduction d'un terme source radia-

tif ne requiert pas de modélisation supplémentaire. Les effets non-linéaires du terme d'émission et les effets de corrélation entre le coefficient d'absorption et le champ d'intensité peuvent être négligés. Cependant, comme le nombre de Rayleigh est proportionnel à l'écart de température, il paraît nécessaire d'étendre la modélisation pour étudier le régime turbulent de façon plus exhaustive. Par ailleurs, l'influence des transferts radiatifs sur la modélisation aux grandes échelles de l'écoulement devra être approfondie.

Dans l'habitat ou dans l'atmosphère, la condensation et l'évaporation peuvent être à l'origine de variations spatiales de la concentration en vapeur d'eau. La densité du fluide (moteur du mouvement) et les propriétés radiatives sont directement liées à la concentration locale et ces variations ont un impact important sur l'écoulement et les transferts de chaleur, comme cela a été montré dans des études récentes en cavité carrée différentiellement chauffée (Meftah *et al.*, 2009; Ibrahim et Lemonnier, 2009). Le transport de la vapeur d'eau pourra être résolu sans difficultés avec la méthode spectrale de collocation. En revanche, la modélisation ADF des propriétés radiatives devra être réexaminée pour prendre en compte les variations spatiales distinctes des concentrations en vapeur d'eau et en dioxyde de carbone, à moins que l'utilisation de la méthode de lancer de rayons ne soit remise en cause au profit de la méthode de Monte Carlo raie par raie.

Une autre perspective à cette thèse est l'investigation de la cavité cubique chauffée par le bas. Dans cette configuration, une grande variété d'écoulements stationnaires et instationnaires, ont été mis en évidence pour des nombres de Rayleigh inférieurs à  $1,5 \times 10^5$  et en l'absence de rayonnement (Puigjaner *et al.*, 2008, 2011). Lan *et al.* (2003) ont réalisé des simulations numériques dans des cavités 3D chauffées par le bas et remplies de fluides gris à proximité du déclenchement de la convection, mais l'effet du rayonnement sur les régimes transitionnels et turbulents reste à quantifier. Pour cela, on pourra s'appuyer sur les méthodes numériques de résolution et sur les méthodes d'analyse des écoulements (POD, DMD) mises en œuvre pour simuler et comprendre la dynamique des écoulements.

En prolongement de cette étude, une validation expérimentale des résultats de simulation obtenus serait nécessaire pour confirmer les effets des transferts radiatifs observés sur la stratification thermique ou sur les structures tridimensionnelles de l'écoulement. Comme cela a été souligné en introduction, il est difficile d'isoler thermiquement des cavités remplies d'air. De nouvelles simulations numériques intégrant la conduction dans les pa-

rois haute et basse de la cavité devront être menées, préalablement à une confrontation expérimentale.



# Annexe A

## Paramètres des simulations numériques

CETTE ANNEXE présente les paramètres utilisés pour les simulations numériques et valide les choix de discrétisation : discrétisation spatiale et temporelle pour le code spectral Chebyshev, discrétisation spatiale, temporelle et directionnelle pour la méthode de lancer de rayons. La validation de la discrétisation du modèle ADF, exploitée pour traiter les propriétés radiatives des mélanges air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub>, a été apportée au chapitre 1 (§ 1.3.2).

Les différentes configurations étudiées sont rappelées dans le tableau A.1. Pour l'ensemble des simulations, le nombre de Prandtl est pris égal à 0,707. Pour le cas C, il faut fixer la taille de la cavité  $L$  et pour les cas B et D, il faut fixer la taille de la cavité  $L$  et la fraction molaire des espèces absorbantes  $X_{\text{H}_2\text{O}}$  et  $X_{\text{CO}_2}$ . Le rapport  $X_{\text{H}_2\text{O}}/X_{\text{CO}_2}$  est toujours choisi constant et égal à 20. Les propriétés thermophysiques (conductivité thermique, diffusivité thermique) sont prises égales à celles de l'air à la température moyenne, fixée à  $T_0 = 300$  K (voir § 1.2).

TABLE A.1 – Configurations étudiées.

Cas	A	B	C	D
Parois isothermes	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$
Parois adiabatiques	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1$
Gaz	Transparent	Rayonnant	Transparent	Rayonnant

Le cas noté COND correspond au cas d'un gaz transparent contenu dans une cavité différentiellement chauffée dont les parois non isothermes sont parfaitement conductrices. Les parois  $x = 0$  et  $x = L$  restent isothermes à la température  $T_c$  et  $T_f$  et les parois horizontales et latérales ( $y = 0$ ,  $y = L$ ,  $z = 0$  et  $z = L$ ) sont à température imposée  $T(x) = T_c - x\Delta T/L$  dans ce cas.

## A.1 Simulations stationnaires

Les paramètres des simulations numériques conduisant à des régimes stationnaires, analysés au chapitre 3, sont reportés dans le tableau A.2.

**Discrétisation spatiale** Le maillage spatial convectif, choisi pour la gamme  $10^5 \leq \text{Ra} \leq 3 \times 10^7$  est conforme à ceux utilisés dans la littérature (Labrosse *et al.*, 1997; Tric *et al.*, 2000), voire plus fin. Le maillage spatial radiatif est construit en regroupant par deux les mailles du maillage convectif. L'influence de la discrétisation spatiale pour le rayonnement est discutée pour les plus hauts nombres de Rayleigh (§ A.2).

**Discrétisation temporelle** Le pas de temps  $\delta t^+$  du code spectral et la fréquence de couplage  $\alpha$  des calculs de rayonnement influencent le régime transitoire mais n'affectent pas la solution stationnaire finale tant que celle-ci est unique.

**Discrétisation angulaire** La discrétisation angulaire de la méthode de lancer de rayons  $N_\vartheta \times N_\varphi = 60 \times 60$ , s'est avérée suffisante pour calculer les transferts radiatifs dans des maillages plus fins (voir § A.2) et est donc considérée suffisante. À noter que le nombre de rayons aux parois est tel que  $N_\vartheta^p = N_\vartheta/2$  et  $N_\varphi^p = N_\varphi$ .

**Convergence** Les solutions numériques sont intégrées jusqu'à un temps  $\Delta t^+$ , nécessaire pour atteindre la stationnarité. Le critère retenu pour décrocher la stationnarité est que les variations des champs de température, vitesse et puissance radiative, pendant un intervalle de temps adimensionné de un, n'excèdent pas  $10^{-7}$ .

TABLE A.2 – Paramètres des simulations stationnaires.

Ra	cas	$L$ (m)	$X_{H_2O}$	Maillage convectif	$\delta t^+$	$\alpha$	$N_\theta \times N_\varphi$	Solution initiale	$\Delta t^+$	$t_{CPU}$ (h)
$10^5$	A	-	-	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$2 \times 10^{-3}$	-	-	$\mathbf{u}^+ = \mathbf{0}, T^+ = 0$	400	80
	B	1	0,02	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$2 \times 10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$10^5$ -A convergé	300	16000
	C	1	-	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$2 \times 10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$10^5$ -A convergé	300	160
	D	1	0,02	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$2 \times 10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$10^5$ -A convergé	300	9400
$10^6$	A	-	-	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$2 \times 10^{-3}$	-	-	$\mathbf{u}^+ = \mathbf{0}, T^+ = 0$	400	80
	B	1	0,02	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$2 \times 10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$10^6$ -A convergé	300	16000
	C	1	-	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$2 \times 10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$10^6$ -A convergé	300	160
	D	1	0,02	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$2 \times 10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$10^6$ -A convergé	300	9400
$3 \times 10^7$	D-gris	1	gris	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$2 \times 10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$10^6$ -D convergé	200	390
	A	-	-	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$10^{-3}$	-	-	$\mathbf{u}^+ = \mathbf{0}, T^+ = 0$	600	240
	B	1	0,02	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$10^6$ -A convergé	400	43000

**Temps de calcul** Le temps de calcul CPU (acronyme pour *Central Processing Unit*)  $t_{\text{CPU}}$  correspond au temps de calcul cumulé des  $N_p$  processeurs utilisés. Les temps de calcul sont indiqués pour des processeurs IBM-Power6, cadencés à 4,7 GHz.

## A.2 Simulations instationnaires

Les paramètres des simulations numériques conduisant à des régimes instationnaires, analysées au chapitre 4 et au paragraphe 6.1, sont reportés dans le tableau A.3.

**Discrétisation spatiale pour la convection** À  $\text{Ra} = 3 \times 10^8$ , les structures spatiales les plus fines sont obtenues dans le cas C (voir figure 4.19). La convergence en maillage est testée à  $\text{Ra} = 3 \times 10^8$  sur le cas COND, dont les similitudes avec le cas C ont été précédemment soulignées (§ 4.2.2). À partir d'un même état initial en régime asymptotique, la solution est calculée pendant une période  $\Delta t^+ = 100$  en utilisant deux maillages différents :  $161 \times 161 \times (8 \times 21)$  et  $241 \times 241 \times (16 \times 17)$ . Les résultats sont comparés en moyenne statistique dans le tableau A.4. Les écarts sur les nombres de Nusselt sont inférieurs à 1 %. Pour les autres quantités, qui sont, soit des quantités locales, soit des statistiques d'ordre deux, l'accord est un peu moins bon mais reste de l'ordre de quelques pourcents. Ces écarts sont comparables au niveau de convergence statistique de chacune des solutions et sont jugés satisfaisants. Dans le cas A, l'utilisation d'un maillage plus lâche selon  $y$  à  $\text{Ra} = 3 \times 10^8$  est justifiée compte tenu des faibles variations de la solution dans cette direction (voir figure 4.19).

**Discrétisation spatiale pour le rayonnement** Le maillage spatial radiatif est construit en regroupant par deux les mailles du maillage convectif pour les simulations numériques dans la plage  $\text{Ra} \in [3 \times 10^7 - 3 \times 10^8]$ . La convergence en maillage est testée à  $\text{Ra} = 3 \times 10^8$  sur le cas B. À partir d'un même état initial en régime asymptotique, la solution est calculée pendant une période  $\Delta t^+ = 200$  en utilisant des regroupements par quatre et par deux, correspondant à des maillages radiatifs de  $40^3$  points et  $80^3$  points, respectivement. Les résultats sont comparés en moyenne statistique dans le tableau A.5. Concernant les champs moyens, les écarts sont de l'ordre

TABLE A.3 – Paramètres des simulations instationnaires.

Ra	cas	$L$ (m)	$X_{\text{H}_2\text{O}}$	Maillage convectif	$\delta f^+$	$\alpha$	$N_\theta \times N_\varphi$	Solution initiale	$\Delta t_{\text{trans}}^+$	$\Delta t_{\text{stat}}^+$	$t_{\text{CPU}}$ (h)
$3 \times 10^6$	COND	-	-	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$2 \times 10^{-3}$	-	-	$\mathbf{u}^+ = \mathbf{0}, T^+ = 0$	1000	400	500
$5 \times 10^6$		1	-	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$2 \times 10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$10^6\text{-C}$ convergé	1900	400	2500
$3 \times 10^7$	B	3	0,004	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$3 \times 10^7\text{-B}$ convergé	200	172	35000
$3 \times 10^7$	B	3	0,02	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$3 \times 10^7\text{-B}$ convergé	70	-	5000
$3,5 \times 10^7$	A	-	-	$81 \times 81 \times (4 \times 21)$	$10^{-3}$	-	-	$\mathbf{u}^+ = \mathbf{0}, T^+ = 0$	2100	600	1300
$3 \times 10^8$	A	-	-	$161 \times 81 \times (8 \times 21)$	$10^{-3}$	-	-	$\mathbf{u}^+ = \mathbf{0}, T^+ = 0$	600	300	12000
$3 \times 10^8$	B	3	0,02	$161 \times 161 \times (8 \times 21)$	$10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$3 \times 10^8\text{-A}$ $t^+ = 600$	300	200	410000
$3 \times 10^8$	C	3	-	$161 \times 161 \times (8 \times 21)$	$10^{-3}$	10	$60 \times 60$	$3 \times 10^8\text{-A}$ $t^+ = 600$	300	200	27000
$3 \times 10^8$	COND	-	-	$161 \times 161 \times (8 \times 21)$	$10^{-3}$	-	-	$\mathbf{u}^+ = \mathbf{0}, T^+ = 0$	450	100	4600
$3 \times 10^9$		A	-	-	$321 \times 321 \times (16 \times 21)$	$5 \times 10^{-4}$	-	-	$3 \times 10^8\text{-A}$ $t^+ = 600$	200	120
$3 \times 10^9$	B	3	0,02	$321 \times 321 \times (16 \times 21)$	$5 \times 10^{-4}$	20	$60 \times 60$	$3 \times 10^9\text{-A}$ $t^+ = 200$	70	30	250000
$3 \times 10^9$	C	3	-	$321 \times 321 \times (16 \times 21)$	$5 \times 10^{-4}$	20	$60 \times 60$	$3 \times 10^9\text{-A}$ $t^+ = 200$	100	50	48000

TABLE A.4 – Influence de la discrétisation spatiale pour la convection. Cas COND à  $Ra = 3 \times 10^8$  calculé à partir du même état initial asymptotique sur deux maillages convectifs différents sur une période d'intégration statistique  $\Delta t^+ = 100$ .

Maillage convectif	$161 \times 161 \times (8 \times 21)$	$241 \times 241 \times (16 \times 17)$
$\langle Nu(x^+ = 0) \rangle$	35,89	35,77
$\langle Nu(x^+ = 0, 5) \rangle$	66,88	66,52
$\langle Nu(x^+ = 1) \rangle$	35,85	35,69
$\langle \mathcal{S} \rangle$	0,452	0,436
$\langle u_1^+ \rangle_{\max}$	0,170	0,170
$\langle u_2^+ \rangle_{\max}$	0,117	0,124
$\langle u_3^+ \rangle_{\max}$	0,321	0,329
$\langle u_i' u_i' \rangle / 2$	$5,44 \times 10^{-4}$	$5,32 \times 10^{-4}$
$Pr / \sqrt{Ra} \langle (\partial u_i^{+'} / \partial x_i^+)^2 \rangle$	$3,94 \times 10^{-4}$	$3,84 \times 10^{-4}$

TABLE A.5 – Influence de la discrétisation spatiale pour le rayonnement. Cas B à  $Ra = 3 \times 10^8$  calculé à partir du même état initial asymptotique sur deux maillages radiatifs différents sur une période d'intégration statistique  $\Delta t^+ = 200$ . Les maillages de  $40^3$  et  $80^3$  points correspondent respectivement à un regroupement par quatre et par deux des mailles du maillage convectif.

Maillage radiatif	$40^3$	$80^3$
$\langle Nu(x^+ = 0) \rangle$	35,89	35,58
$\langle Nu(x^+ = 0, 5) \rangle$	72,46	73,38
$\langle Nu(x^+ = 1) \rangle$	35,89	35,58
$\langle \mathcal{S} \rangle$	0,320	0,320
$\langle T^+ \rangle_{\text{haut}}$	0,225	0,228
$\langle u_1^+ \rangle_{\max}$	0,245	0,245
$\langle u_2^+ \rangle_{\max}$	0,124	0,125
$\langle u_3^+ \rangle_{\max}$	0,312	0,312
$\langle u_i' u_i' \rangle / 2$	$2,57 \times 10^{-4}$	$2,48 \times 10^{-4}$
$Pr / \sqrt{Ra} \langle (\partial u_i^{+'} / \partial x_i^+)^2 \rangle$	$1,43 \times 10^{-4}$	$1,60 \times 10^{-4}$

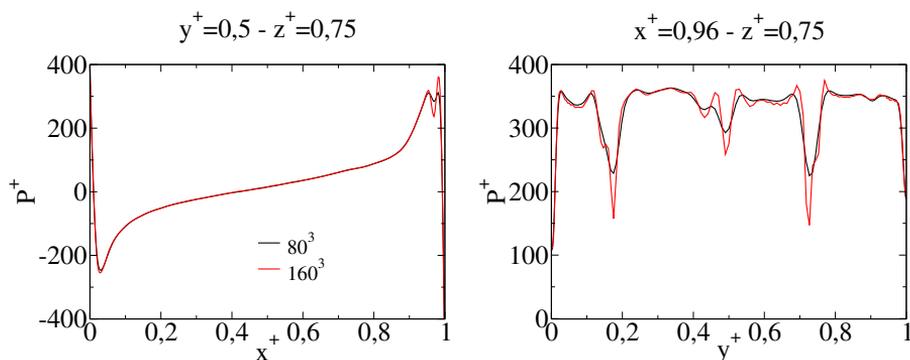


FIGURE A.1 – Influence de la discrétisation spatiale pour le rayonnement. Comparaison entre deux champs de puissance pour le cas B à  $Ra = 3 \times 10^8$  calculés à partir du même champ de température (discrétisé sur le maillage convectif de  $160^3$  points) en utilisant deux maillages radiatifs différents ( $80^3$  et  $160^3$  points). Profils de puissance instantanée selon la ligne  $y^+ = 0,5$  et  $z^+ = 0,75$  (gauche) et selon la ligne  $x^+ = 0,96$  et  $z^+ = 0,75$  (droite).

de 1 %. Concernant les statistiques d'ordre deux (l'énergie cinétique turbulente et son taux de dissipation), l'accord est un peu moins bon mais est comparable à la convergence statistique du bilan d'énergie cinétique fluctuante (§ 4.3.3). En termes de champs instantanés, on retrouve les mêmes structures thermiques et mécaniques décrites au paragraphe 4.3.2.

Une autre comparaison est proposée pour le cas B à  $Ra = 3 \times 10^8$  : un champ de puissance radiative est calculé à partir du même champ de température (discrétisé sur le maillage convectif de  $160^3$  points) en utilisant deux maillages radiatifs différents ( $80^3$  et  $160^3$  points). Deux profils de puissance le long de la ligne  $y^+ = 0,5$  et  $z^+ = 0,75$  et le long de la ligne  $x^+ = 0,96$  et  $z^+ = 0,75$  sont tracés sur la figure A.1. On observe que le regroupement de maille par deux lisse le champ de puissance radiative en amont des couches limites verticales. Les écarts locaux peuvent être importants en particulier au niveau des pics de puissance remarquables sur partie droite de la figure A.1 autour de  $y^+ \simeq 0,2$ ,  $y^+ \simeq 0,5$  et  $y^+ \simeq 0,7$ . Ces pics correspondent à des rouleaux de gaz froids qui tournent selon  $z$ . Une comparaison en termes de moyennes statistiques aurait été souhaitable mais n'a pu être envisagée compte tenu du coût de calcul important associé aux simulations couplées avec rayonnement de gaz sur un maillage radiatif de  $160^3$

points. Néanmoins, l'accord satisfaisant obtenu entre les maillages radiatifs  $40^3$  et  $80^3$  semble indiquer que ces écarts influenceront peu sur la dynamique de l'écoulement et sur les statistiques.

En ce qui concerne les simulations à  $Ra = 3 \times 10^9$ , on utilise le modèle de sous-maille du chapitre 5 avec un facteur de réduction du maillage de 4 dans chaque direction, ce qui correspond à un maillage de  $81^3$  points pour la résolution des contributions filtrées. La précision du modèle de sous-maille dans ce cas est discutée en détail au paragraphe 5.3.

**Discrétisation temporelle** Le pas de temps  $\delta t^+$  du code spectral est imposé par la contrainte de stabilité du schéma semi-implicite et est surdimensionné par rapport aux variations physiques de la température. Il est donc pertinent de n'actualiser le champ de rayonnement qu'après  $\alpha$  itérations convectives. La figure A.2 compare, pour le cas B à  $Ra = 3 \times 10^8$  et pour 3600 directions, deux solutions instationnaires obtenues avec  $\alpha = 10$  et  $\alpha = 20$  à partir du même état initial. L'évolution de plusieurs quantités, comme la température, la puissance radiative, la vitesse transversale et le nombre de Nusselt, est représentée pendant une période de  $\Delta t^+ = 8$ . Les écarts ne sont pas discernables sur les quantités locales mais sont un peu plus importants sur le nombre de Nusselt (écart maximal de 0,3 %). Une comparaison en termes de moyennes statistiques aurait été souhaitable mais n'a pu être conduite.

**Discrétisation angulaire** Le nombre de direction  $N_\vartheta \times N_\varphi$  est pris systématiquement égal à 3600 (le nombre de directions  $N_\vartheta^p \times N_\varphi^p$  est pris systématiquement égal à 1800) pour des maillages radiatifs comprenant au maximum  $80^3$  mailles. La figure A.2 compare, pour le cas B à  $Ra = 3 \times 10^8$  et pour  $\alpha = 20$ , deux solutions instationnaires obtenues avec  $N_\vartheta \times N_\varphi = 60 \times 60$  et  $N_\vartheta \times N_\varphi = 30 \times 30$ . À nouveau, les écarts ne sont pas discernables sur les quantités locales et ne dépassent pas 0,2 % pour le nombre de Nusselt. La discrétisation angulaire retenue semble donc suffisante.

**Convergence statistique** Les calculs instationnaires doivent être poursuivis sur une période d'intégration temporelle la plus longue possible afin de réaliser une analyse statistique précise des solutions. Le nombre d'échantillons statistiques doit augmenter avec le nombre de Rayleigh, car plus l'écoulement est turbulent, plus il est chaotique. En pratique, le coût numé-

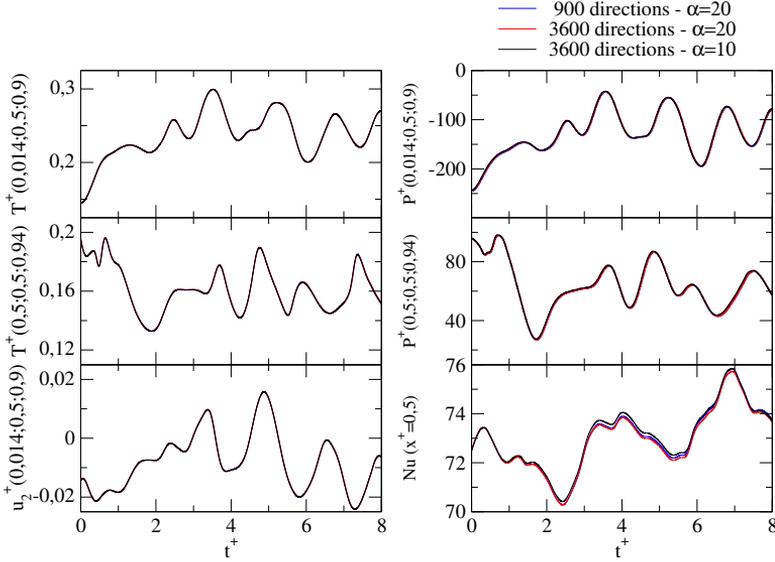


FIGURE A.2 – Influence du nombre de direction et de la fréquence de couplage. Cas B à  $Ra = 3 \times 10^8$  calculé avec un maillage radiatif de  $80^3$  mailles.

rique des simulations (particulièrement pour le cas B) limite fortement le temps d'intégration statistique.

La période temporelle associée au régime transitoire  $\Delta t_{\text{trans}}^+$ , entre l'état initial et le commencement du régime asymptotique, est estimée en observant l'évolution temporelle du nombre de Nusselt intégré dans le plan  $x^+ = 0,5$ .

**Temps de calcul** Les temps de calculs sont indiqués pour des processeurs Intel Sandy Bridge E5-4650, cadencés à 2,7 GHz.



## Annexe B

# Compléments sur le modèle de sous-maille

CETTE ANNEXE apporte des compléments au modèle de sous-maille présenté au chapitre 5. Tout d'abord, l'expression analytique du modèle de sous-maille dans l'espace de Fourier est comparée aux approximations différentielles du rayonnement, à la limite des grandes épaisseurs optiques. Un exemple d'application supplémentaire, pour lequel le coefficient d'absorption dépend de l'espace, est ensuite étudié.

### B.1 Approximations différentielles

Des expressions alternatives du modèle de sous-maille, basées sur les approximations différentielles du rayonnement, sont proposées. Ces modèles, connus pour être précis dans les milieux épais, sont comparés à la solution analytique développée dans l'espace de Fourier (§ 5.1.2). On rappelle que pour l'établissement du modèle de sous-maille, le coefficient d'absorption est supposé uniforme et la luminance de sous-maille partante des parois est négligée.

### B.1.1 Approximation P1

En utilisant l'approximation  $P_1$ , la luminance de sous-maille intégrée  $G''_\nu(\mathbf{r})$  satisfait l'équation de diffusion (Modest, 2003)

$$-\frac{1}{\kappa_\nu} \nabla \cdot \left( \frac{1}{3\kappa_\nu} \nabla G''_\nu(\mathbf{r}) \right) = 4\pi I_\nu^{o'}(\mathbf{r}) - G''_\nu(\mathbf{r}). \quad (\text{B.1})$$

Dans l'espace de Fourier, cette équation devient

$$\frac{k^2}{3\kappa_\nu^2} \hat{G}''_\nu(\mathbf{k}) = 4\pi \hat{I}_\nu^{o'}(\mathbf{k}) - \hat{G}''_\nu(\mathbf{k}), \quad (\text{B.2})$$

d'où

$$\hat{G}''_\nu(\mathbf{k}) = 4\pi \hat{I}_\nu^{o'}(\mathbf{k}) \left( 1 + \frac{k^2}{3\kappa_\nu^2} \right)^{-1}. \quad (\text{B.3})$$

### B.1.2 Approximation SP3

L'approximation  $P_N$  simplifiée ( $SP_N$ ) (Larsen *et al.*, 2002) est basée sur un développement de l'opérateur  $(1 + (\epsilon/\kappa_\nu)\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)^{-1}$  en puissances de  $\epsilon = (\kappa_{\text{ref}} L_{\text{ref}})^{-1}$  pour un milieu épais, où  $\kappa_{\text{ref}}$  et  $L_{\text{ref}}$  sont le coefficient d'absorption et l'échelle de longueur de référence. En ne retenant que les termes à l'ordre  $\mathcal{O}(\epsilon^8)$ , l'approximation  $SP_3$  permet d'écrire

$$G''_\nu(\mathbf{r}) = \frac{\gamma_2 \psi_{1,\nu}(\mathbf{r}) - \gamma_1 \psi_{2,\nu}(\mathbf{r})}{\gamma_2 - \gamma_1}, \quad (\text{B.4})$$

où les constantes  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$  sont données par  $7\gamma_i = 5 + (-1)^i 15\sqrt{6/5}$ . Les fonctions  $\psi_{i,\nu}(\mathbf{r})$ ,  $i = 1, 2$ , satisfont l'équation

$$-\frac{1}{\kappa_\nu} \nabla \cdot \left[ \frac{\mu_i}{\kappa_\nu} \nabla \psi_{i,\nu}(\mathbf{r}) \right] + \psi_{i,\nu}(\mathbf{r}) = 4\pi I_\nu^{o'}(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \quad (\text{B.5})$$

où les constantes  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2$  vérifient  $7\mu_i = 3 + (-1)^i 2\sqrt{6/5}$ . Ces deux équations sont couplées par leur condition aux limites, mais celles-ci sont ignorées pour l'établissement du modèle de sous-maille.

Dans l'espace de Fourier la solution de l'équation (B.5) s'écrit

$$\hat{\psi}_{i,\nu}(\mathbf{k}) = 4\pi \hat{I}_\nu^{o'}(\mathbf{k}) \left( \mu_i \frac{k^2}{\kappa_\nu^2} + 1 \right)^{-1}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{B.6})$$

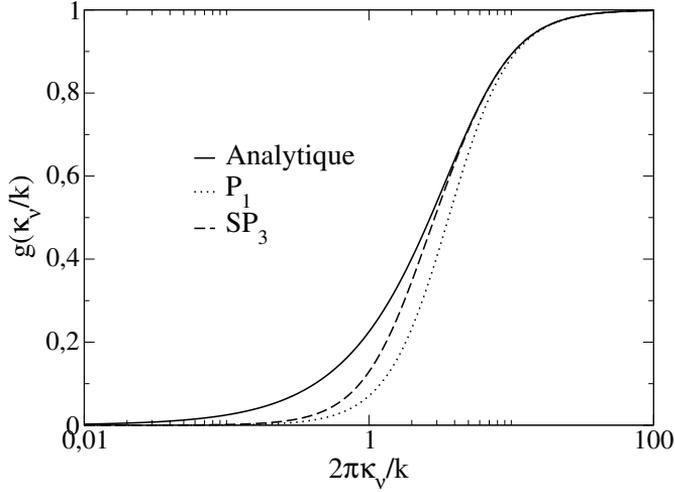


FIGURE B.1 – Fonctions  $g(\kappa_\nu/k) = \hat{G}_\nu''(\mathbf{k})/(4\pi\hat{I}_\nu^{o'}(\mathbf{k}))$  calculées de manière exacte (équation (B.8)), et par les approximations  $P_1$  (équation (B.3)) et  $SP_3$  (équation (B.7)).

En combinant ce résultat à l'expression de  $G_\nu''(\mathbf{r})$ , on obtient

$$\hat{G}_\nu''(\mathbf{k}) = \frac{4\pi\hat{I}_\nu^{o'}(\mathbf{k})}{\gamma_2 - \gamma_1} \left( \frac{\gamma_2}{\mu_1 \frac{k^2}{\kappa_\nu^2} + 1} - \frac{\gamma_1}{\mu_2 \frac{k^2}{\kappa_\nu^2} + 1} \right). \quad (\text{B.7})$$

### B.1.3 Comparaison avec la solution exacte

Les fonctions  $g(\kappa_\nu/k) = \hat{G}_\nu''(\mathbf{k})/(4\pi\hat{I}_\nu^{o'}(\mathbf{k}))$ , calculées par l'approximation  $P_1$ , l'approximation  $SP_3$  et de manière exacte, sont représentées sur la figure B.1. L'approximation  $SP_3$  et l'approximation  $P_1$  sont correctes dès que l'épaisseur optique  $2\pi\kappa_\nu/k$  est plus grande que 3 et 10, respectivement.

À la limite épaisse ( $x = k/\kappa_\nu \rightarrow 0$ ), le développement limité de la solution analytique s'écrit

$$\hat{G}_\nu''(\mathbf{k}) = 4\pi\hat{I}_\nu^{o'}(\mathbf{k}) \frac{1}{x} \arctan(x), \quad x = \frac{k}{\kappa_\nu} \quad (\text{B.8})$$

$$= 4\pi\hat{I}_\nu^{o'}(\mathbf{k}) \left( 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \mathcal{O}(x^7) \right). \quad (\text{B.9})$$

Les développements limités des équations (B.3) et (B.7) sont identiques jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(x^2)$  pour l'approximation  $P_1$  et jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(x^6)$  pour l'approximation  $SP_3$ . En revanche, à la limite mince ( $y = \kappa_\nu/k \rightarrow 0$ ), le premier terme du développement des approximations  $P_1$  et  $SP_3$  est d'ordre  $\mathcal{O}(y^2)$  alors que la solution exacte converge vers un terme d'ordre  $\mathcal{O}(y)$ .

## B.2 Application à la convection forcée de produits de combustion

L'objet de cette partie est d'appliquer le modèle de sous-maille dans un milieu où les gradients de température sont significatifs et où le coefficient d'absorption dépend fortement de l'espace. Un écoulement turbulent de produits de combustion (vapeur d'eau, dioxyde de carbone) dans un canal est considéré.

Les transferts radiatifs sont calculés à partir d'un champ de température instantané provenant de simulations numériques couplées conduites par Zhang *et al.* (2013). Cette solution est obtenue à partir d'un solveur bas Mach volume fini pour l'écoulement et à partir d'une méthode de Monte Carlo et d'un modèle CK pour le rayonnement. Un mélange  $\text{H}_2\text{O}/\text{CO}_2/\text{N}_2$  ( $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,155$ ,  $X_{\text{CO}_2} = 0,116$ ), s'écoulant à un nombre de Reynolds  $\text{Re}_\delta = 1,175 \times 10^4$  et à haute pression  $P = 40$  atm entre deux parois isothermes ( $T_f = 950$  K,  $T_c = 1150$  K) d'émissivité  $\varepsilon = 0,8$ , est considéré. Le domaine de calcul, représenté sur la figure B.2, est de taille  $2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$  ( $\delta = 0,1$  m) et discrétisé par  $200 \times 230 \times 200$  points selon les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le maillage radiatif est trois fois moins résolu dans la direction  $x$ , deux fois moins résolu dans les direction  $y$  et  $z$ . Les champs de vitesse, de température et de luminance sont considérés périodiques dans les directions  $x$  et  $z$ . Plus de détails concernant l'obtention de cette solution couplée sont donnés par Zhang *et al.* (2013).

Les présents résultats ont été obtenus dans les mêmes conditions, mis à part les points suivants. Le champ de température est interpolé sur un maillage de 200 points uniformément répartis dans les direction  $x$  et  $z$  et de 256 points de Chebyshev-Gauss-Lobatto dans la direction  $y$ , sur lequel sont calculés les transferts radiatifs. On utilise le modèle ADF pour modéliser les propriétés radiatives du mélange. Enfin, on considère des parois diffuses parfaitement réfléchissantes aux frontières dans les directions  $x$  et  $z$ , alors que Zhang *et al.* (2013) considèrent la périodicité des champs de luminance.

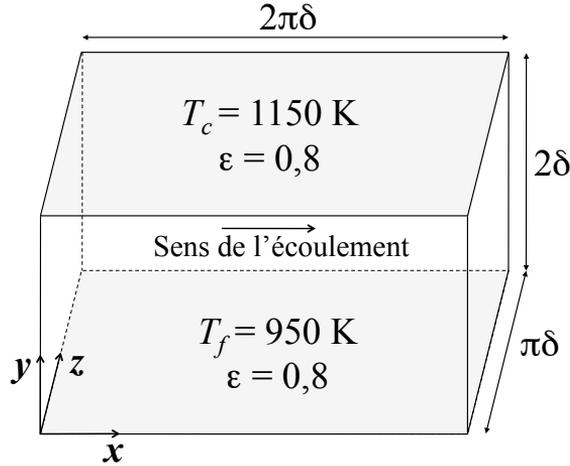


FIGURE B.2 – Cas de la convection forcée de gaz chauds. Schéma du canal et conditions aux limites. Les directions  $x$  et  $z$  sont périodiques.

### B.2.1 Modèle de sous-maille à coefficient d'absorption variable

La dépendance spatiale du coefficient d'absorption introduit des termes spatiaux non linéaires dans l'équation de transfert radiatif, complexifiant l'analyse développée au chapitre 5. Une approche pragmatique, consistant à tenir compte des variations du coefficient d'absorption dans la contribution filtrée et à les négliger dans la contribution de sous-maille, est proposée. Ce choix est justifié dans la mesure où le modèle de sous-maille n'est utile que quand le milieu est épais et quand les transferts radiatifs sont locaux.

**Modèle ADF** La dépendance spectrale des propriétés radiatives du mélange est traitée par le modèle ADF (voir § 1.3.2). En raison des variations de température considérées ici, l'hypothèse de séparabilité (équation (1.33)) n'est plus valide. Dans ce cas, la mise en œuvre du modèle ADF (Pierrot *et al.*, 1999a) consiste à remplacer l'intégration sur les fréquences  $\nu$  des champs radiatifs par une intégration, non plus sur les valeurs de la fonction  $\eta(\nu)$ , mais sur les valeurs du coefficient d'absorption dans une condition de référence  $\kappa_\nu^0$ .

On introduit les fonctions de distribution cumulées du coefficient d'ab-

sorption  $\kappa_\nu(\mathcal{T})$ , pondérées par la fonction de Planck à une température  $T_P$

$$F(\kappa, T_P, \mathcal{T}) = \frac{\pi}{\sigma T_P^4} \int_{\nu/\kappa_\nu(\mathcal{T}) \leq \kappa} I_\nu^\circ(T_P) d\nu, \quad (\text{B.10})$$

où  $\mathcal{T}$  désigne une condition thermophysique quelconque (pression, composition et température). Ces fonctions sont obtenues directement à partir des spectres à haute résolution calculés raie par raie à partir de la base de donnée du laboratoire EM2C (Taine et Soufiani, 1999).

Les valeurs du coefficient d'absorption sont discrétisées dans une condition de référence  $\mathcal{T}_0$  (de température  $T_0$ ) en intervalles  $[\kappa_i^-(\mathcal{T}_0); \kappa_i^+(\mathcal{T}_0)]$ ,  $i = 1, \dots, N_{\text{ADF}}$ . À chacun de ces intervalles est associé une valeur unique du coefficient d'absorption  $\kappa_i(\mathcal{T}_0)$  dans la condition de référence, représentative de l'intervalle. Cette discrétisation est transportée dans toute autre condition  $\mathcal{T}$  en inversant les relations implicites

$$F(\kappa_i^\alpha(\mathcal{T}), T_0, \mathcal{T}) = F(\kappa_i^\alpha(\mathcal{T}_0), T_0, \mathcal{T}_0), \quad (\text{B.11})$$

où  $\kappa_i^\alpha$  désigne aussi bien  $\kappa_i^-$ ,  $\kappa_i$  que  $\kappa_i^+$ .

Ceci permet d'affecter à chaque classe  $i$ , une valeur unique de coefficient d'absorption  $\kappa_i(\mathcal{T})$  dans chaque condition thermophysique  $\mathcal{T}$ . Le poids associé est alors calculé selon

$$a_i(\mathcal{T}) = F(\kappa_i^+(\mathcal{T}), T, \mathcal{T}) - F(\kappa_i^-(\mathcal{T}), T, \mathcal{T}), \quad (\text{B.12})$$

où  $T$  est la température associée à la condition  $\mathcal{T}$ , afin d'assurer une bonne prédiction de l'émission du mélange gazeux. À chaque classe est associée une luminance partielle  $I_i$  satisfaisant une équation de transfert identique à l'équation (1.38).

Pour l'application considérée ici, la composition du mélange gazeux et la pression sont uniformes ( $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,155$ ,  $X_{\text{CO}_2} = 0,116$ ,  $P = 40$  atm) et seule la température caractérise les conditions thermophysiques. La température de référence est prise à  $T_0 = 1500$  K. Le nombre de classes est pris égal à  $N_{\text{ADF}} = 8$ , dont une classe correspondant aux zones de transparences du gaz ( $\kappa_{i=1}(\mathcal{T}) = 0$ ).

**Filtrage** La luminance d'équilibre  $I_i^\circ(\mathbf{r})$  associée à la classe ADF  $i$  se décompose par filtrage spatial selon

$$\underbrace{\frac{\sigma}{\pi} a_i(\mathbf{r}) T^4(\mathbf{r})}_{I_i^\circ(\mathbf{r})} = \underbrace{\frac{\sigma}{\pi} \overline{a_i T^4}(\mathbf{r})}_{\overline{I_i^\circ(\mathbf{r})}} + \underbrace{\frac{\sigma}{\pi} (a_i T^4)'(\mathbf{r})}_{I_i^{\circ'}(\mathbf{r})}. \quad (\text{B.13})$$

Dans les directions  $x$  et  $z$ , on utilise le filtre Fourier (équation (5.21)) et dans la direction  $y$ , le filtre Chebyshev (équation (5.25)). Il est important de noter dans ce cas, que chaque classe ADF doit être filtrée séparément.

**Contributions filtrées** La luminance intégrée filtrée  $\tilde{G}_i(\mathbf{r})$  est calculée par la méthode de lancer de rayons à partir du terme source  $\overline{a_i T^4}(\mathbf{r})$ . Pour calculer la transmission le long des trajets optiques, le coefficient d'absorption est échantillonné sur le maillage grossier. Cette approximation reste valide tant que les variations spatiales de  $\kappa_i(\mathbf{r})$  à l'intérieur des mailles larges ne sont pas trop importantes.

**Contributions de sous-maille** La solution analytique obtenue dans l'espace de Fourier (équation (B.8)) n'est plus valable lorsque le coefficient d'absorption varie spatialement. La transformée de Fourier de l'équation de transfert radiatif

$$\iota \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} \hat{I}_\nu''(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}) = \hat{\kappa}_\nu(\mathbf{k}) * \hat{I}_\nu^{\circ'}(\mathbf{k}) - \hat{\kappa}_\nu(\mathbf{k}) * \hat{I}_\nu''(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (\text{B.14})$$

implique des produits de convolution entre la transformée de Fourier du coefficient d'absorption  $\hat{\kappa}_\nu(\mathbf{k})$  et la transformée de Fourier des luminances  $\hat{I}_\nu^{\circ'}(\mathbf{k})$  et  $\hat{I}_\nu''(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega})$ . Cependant, comme la contribution de sous-maille n'est significative que pour les nombres d'ondes épais, elle dépend faiblement des variations du coefficient d'absorption. Cette contribution est calculée en supposant le coefficient d'absorption uniforme et égal à  $\kappa_\nu^* = \kappa_\nu(T_0)$  si  $T_0$  est la température moyenne du milieu. Avec le modèle ADF, on obtient

$$\hat{G}_i''(\mathbf{k}) = 4\sigma(\widehat{a_i T^4})'(\mathbf{k}) \frac{\kappa_i^*}{k} \arctan\left(\frac{k}{\kappa_i^*}\right). \quad (\text{B.15})$$

La puissance radiative se calcule finalement par

$$\mathcal{P}^R(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{ADF}}} \left( 4\kappa_i(\mathbf{r})a_i(\mathbf{r})\sigma T^4(\mathbf{r}) - \kappa_i(\mathbf{r}) \left( \tilde{G}_i(\mathbf{r}) + G_i''(\mathbf{r}) \right) \right). \quad (\text{B.16})$$

Le calcul du terme d'émission reste déterministe.

## B.2.2 Résultats

Les résultats obtenus avec le modèle de sous-maille sont montrés sur la figure B.3 dans le plan  $y = 4,3$  mm (couche limite froide). Le niveau de filtre est  $N/\bar{N} = 4$  (maillage de 50 points uniformément répartis dans les directions  $x$  et  $z$  et maillage de 64 points de Chebyshev-Gauss-Lobatto dans la direction  $y$ ). La puissance radiative présente des structures allongées, orientées dans le sens de l'écoulement, qui sont induites par la turbulence de couche limite. Ces structures sont également remarquables sur la puissance radiative filtrée, alors que la puissance radiative de sous-maille présente des motifs de plus petites tailles, qui ne sont pas optiquement minces à cause du haut niveau de pression. L'accord avec la solution de référence (méthode de lancer de rayons appliquée sur le maillage fin) est bon, ce qui conforte les hypothèses émises pour établir le modèle de sous-maille dans le cas où le coefficient d'absorption varie spatialement. L'écart moyen normalisé est égal à  $\|\mathcal{P} - \mathcal{P}^{\text{ref}}\|/\|\mathcal{P}^{\text{ref}}\| = 0,0394$ . Les plus fortes erreurs sont localisées près des frontières périodiques car la grille utilisée est uniforme dans les directions  $x$  et  $z$ . Concernant les flux radiatifs, l'écart moyen normalisé est de  $6,9 \times 10^{-3}$  et de  $5,8 \times 10^{-3}$  pour les parois froide et chaude, respectivement.

La précision du modèle de sous-maille reste bonne pour des gradients de température plus élevés. En utilisant une distribution de température homothétique définie par  $T^\diamond(\mathbf{r}) = (T(\mathbf{r}) - 1050) \times 5 + 1500$  ( $T_c^\diamond = 1000$  K,  $T_h^\diamond = 2000$  K), l'écart moyen normalisé obtenu pour la puissance radiative est égal à 0,0344. Ce résultat confirme que le modèle de sous-maille peut être utilisé dans une grande variété de cas.

La prise en compte des variations spatiales du coefficient d'absorption affecte néanmoins les gains en termes de temps de calcul car les opérations de filtrage et de transformées de Fourier doivent être réalisées pour chacune des classes ADF. On obtient un facteur d'accélération de 65, plus faible que celui obtenu dans les exemples précédents (§§ 5.2 et 5.3) mais toujours intéressant pour des simulations numériques couplées instationnaires à haut nombre de Reynolds. Une optimisation pourrait être apportée en ne calculant pas la contribution des échelles minces, telles que  $\kappa_i^*/k_c \ll 1$ , à la puissance absorbée de sous maille étant donné que celle-ci est négligeable.

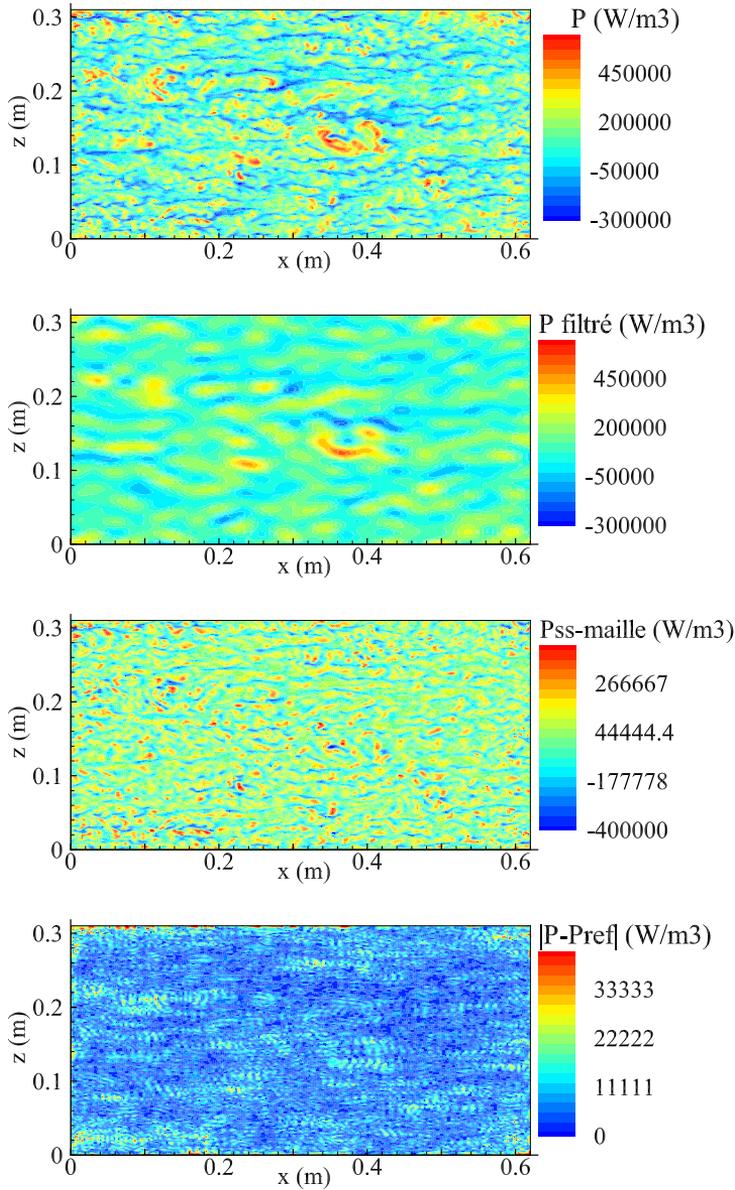


FIGURE B.3 – Cas de la convection forcée de gaz chauds. De haut en bas : puissance radiative totale, filtrée, de sous-maille et écarts absolus avec le calcul de référence. Plan dans la couche limite, près de la paroi froide à  $y = 4,3$  mm. Le niveau de filtre est  $N/\bar{N} = 4$ .



## Annexe C

# Méthode de Monte Carlo pour les milieux quasi-isothermes

CETTE ANNEXE reporte le texte de l'article *Monte Carlo methods for radiative transfer in quasi-isothermal participating media*, publié dans la revue *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* (Soucasse *et al.*, 2013). Cet article présente un algorithme de Monte Carlo adapté aux faibles écarts de température basé sur le formalisme du paragraphe 2.2.1.

Des calculs de transferts radiatifs, menés à partir d'un champ de température prescrit issu d'un calcul couplé en cavité différentiellement chauffée, sont présentés afin de comparer cette méthode de Monte Carlo, nommée ci-après *Shift Forward Method*, à l'algorithme Monte Carlo classique (*Forward Method*) et aux méthodes réciproques de Tessé *et al.* (2002) (*Emission Reciprocity Method* et *Absorption Reciprocity Method*), elles aussi adaptées aux faibles écarts de température. Comparé à l'algorithme classique, un gain d'un facteur  $(T_0/\Delta T)^2$  sur le temps de calcul est observé pour atteindre le même écart type statistique. Comparativement aux méthodes réciproques, la méthode s'avère plus précise pour le calcul des flux aux parois mais un peu moins précise pour le calcul des puissances radiatives volumiques.

L'influence de l'écart de température  $\Delta T$  est étudié, en prenant en compte les variations du spectre d'absorption raie par raie du milieu avec la température ( $\kappa_\nu(T(\mathbf{r}))$ ). Enfin, une comparaison entre la méthode de lancer de rayons ADF et la méthode de Monte Carlo raie par raie est proposée.

# Monte Carlo methods for radiative transfer in quasi-isothermal participating media

Laurent Soucasse, Philippe Rivière and Anouar Soufiani

**Abstract** Based on the superposition principle, we propose in this study a Monte Carlo (MC) formulation for radiative transfer in quasi-isothermal media which consists in directly computing the difference between the actual radiative field and the equilibrium radiative field at the minimum temperature in the medium. This shift formulation is implemented for the prediction of radiative fluxes and volumetric powers in a combined free convection – radiation problem where a differentially heated cubical cavity is filled with air with a small amount of H<sub>2</sub>O and CO<sub>2</sub>. High resolution spectra are used to describe radiative properties of the gas in this 3D configuration. We show that, compared to the standard analog MC method, the shift approach leads to a huge saving of required computational times to reach a given convergence level. In addition, this approach is compared to reciprocal MC formulations and is shown to be more efficient for the prediction of wall fluxes but slightly less efficient for volumetric powers.

## C.1 Introduction

The Monte Carlo (MC) method for radiative heat transfer calculation appears to be the most efficient way to take into account some complex aspects of radiation, like spectral gas properties, complex geometries or scattering effects, without further approximations. A review of MC application to radiative transfer is given for instance by Howell (1998). In the case of very weak temperature gradients, the standard analog MC method suffers from slow convergence rate due to the small differences between emitted and absorbed powers that are calculated separately and, thus, must be computed very accurately to capture their difference. Such small temperature gradients are encountered for instance in atmospheric studies and in thermal

building applications where radiation and natural convection are strongly coupled.

Based on the reciprocity principle, Cherkaoui *et al.* (1996, 1998) developed a net-exchange formulation suited to nearly isothermal applications. They use the MC integration technique to calculate the exchanged power between each couple of cells of the discretized medium, as in the zonal method (Hottel and Sarofilm, 1967). Despite an acceleration of convergence rate compared to conventional approaches, and the ability to allow a deep analysis of exchange mechanisms for each cell, the method exhibits an important drawback. Indeed, each net-exchange power has to be calculated separately, which involves a number of MC calculations equal to the square of the total number of cells, and may require very important computer time and storage capacities. Therefore, this formulation has mainly been applied to one dimensional problems or for validation purposes in multidimensional geometries, like by Joseph *et al.* (2009), to compute the radiative power in some selected cells. Tessé *et al.* (2002) proposed an alternative implementation of the reciprocity principle, using the same optical paths as in the standard analog MC method and without recourse to independent calculations for each couple of cells. In this way they could carry out three dimensional calculations but they only applied their formulation to combustion applications.

This paper presents an original approach, called shift method, based on the linearity of the Radiative Transfer Equation (RTE). As the ratio between exchanged and emitted power is very small in quasi-isothermal media, we strongly increase it by transforming the problem to an equivalent one where the equilibrium radiative field at the minimum temperature in the medium is subtracted from the actual radiative field. Thus, exchanged powers are computed more accurately. The shift method is implemented for the calculation of radiative fluxes and volumetric powers, based on a temperature field representative of coupled free convection and radiation in a differentially heated cubical cavity filled with an air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> mixture. High resolution absorption spectra (line by line calculations) of H<sub>2</sub>O and CO<sub>2</sub> are used for the simulations.

The paper is organized as follows. In Section C.2, the shift formulation is presented (Sec. C.2.1), then the reciprocal formulation of Tessé *et al.* (2002) is recalled (Sec. C.2.2), and numerical details of MC algorithms are provided (Sec. C.2.3). In Sec. C.3, results are analyzed and compared to

those obtained with the standard analog MC method (Sec. C.3.1) and with the reciprocity MC methods (Sec. C.3.2). The influence of the temperature difference level on the efficiency of the shift method and on the spectral radiative properties is finally discussed in Sec. C.3.3.

## C.2 Monte Carlo methods

### C.2.1 Shift formulation

First, we define the shifted intensity  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  at point  $\mathbf{r}$  and along the direction  $\boldsymbol{\Omega}$ , by subtracting to the actual intensity  $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  the uniform equilibrium intensity calculated at the minimum temperature in the medium  $I_\nu^\circ(T_{\min})$

$$\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - I_\nu^\circ(T_{\min}). \quad (\text{C.1})$$

In the same manner, we define the shifted equilibrium intensity  $\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{r})$  by

$$\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{r}) = I_\nu^\circ(T(\mathbf{r})) - I_\nu^\circ(T_{\min}). \quad (\text{C.2})$$

The linearity of the RTE allows us to write for a non scattering medium

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_\nu \left( \mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{r}) - \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \right), \quad (\text{C.3})$$

where  $\kappa_\nu$  designates the absorption coefficient. The shifted intensity leaving a surface element at point  $\mathbf{r}_p$  along the direction  $\boldsymbol{\Omega}$  such that  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} > 0$ ,  $\mathbf{n}$  being the normal to the surface directed towards the gas, is given for a diffuse reflecting wall of emissivity  $\varepsilon_\nu$  by

$$\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p) = \varepsilon_\nu \mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{r}_p) + \frac{1 - \varepsilon_\nu}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}'. \quad (\text{C.4})$$

The volumetric radiative power is equal to the difference between shifted emitted and shifted absorbed volumetric powers

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^R(\mathbf{r}) = 4\pi \int_0^\infty \kappa_\nu \mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{r}) d\nu - \int_0^\infty \int_{4\pi} \kappa_\nu \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} d\nu, \quad (\text{C.5})$$

and, in the same manner, the wall flux is given by

$$\mathbf{q}^R \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_p) = \pi \int_0^\infty \varepsilon_\nu \mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{r}_p) d\nu - \int_0^\infty \varepsilon_\nu \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}' d\nu. \quad (\text{C.6})$$

It appears then that the shifted intensity obeys exactly the same equations as the actual one and allows to calculate radiative fluxes and volumetric powers from the same expressions. The forward analog MC method can thus be applied to  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  instead of  $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ . It is implemented here with energy partitioning, *i.e.*, deterministic treatment of absorption along the stochastically generated optical paths. We designate by Forward Method (FM) and Shifted Forward Method (SFM) this algorithm, depending on whether the RTE is shifted or not. A large number of bundles  $N$  is emitted from the medium discretized in surface and volume isothermal cells. The random determination of the position  $\mathbf{r}$  inside a cell, the direction  $\boldsymbol{\Omega}$  and the frequency  $\nu$  of bundles is described in section C.2.3. The number  $N_i$  of bundles emitted by the cell  $i$  (of volume  $V_i$ , temperature  $T_i$ ) is deterministic and proportional to the power emitted by the volume cell  $i$ ,  $P_i^e$ , given by

$$P_i^e = 4\pi V_i \int_0^\infty \kappa_{i\nu} \mathcal{I}_\nu^\circ(T_i) d\nu, \quad (\text{C.7})$$

and similarly for surface elements. The power emitted by the volume cell  $i$  and absorbed by volume cell  $j$  may be written as

$$P_{ij}^{ea} = \int_0^\infty \kappa_{i\nu} \mathcal{I}_\nu^\circ(T_i) \int_{V_i} \int_{4\pi} \mathcal{A}_{ij\nu} d\boldsymbol{\Omega}_i d\mathbf{r}_i d\nu, \quad (\text{C.8})$$

where  $\mathcal{A}_{ij\nu}$  denotes the density of the absorbed power relative to the elementary power emitted in  $d\boldsymbol{\Omega}_i d\mathbf{r}_i d\nu$ . It accounts for transmission to the cell  $j$  and absorption by this cell, following all possible optical paths including reflections by diffuse walls and possible multiple crossings of cell  $j$ . Similar expressions can be derived for surface-surface or surface-volume exchanges. The exchanged radiative power of the cell  $i$  is finally calculated in the SFM method according to

$$P_i^{\text{SFM}} = P_i^e - \sum_{j=1}^M P_{ji}^{ea}, \quad (\text{C.9})$$

where  $M$  is the total number of volume and surface cells. In the FM method,  $P_i^{\text{FM}}$  is obtained by replacing  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  with  $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  in the previous expressions.

## C.2.2 Reciprocal formulation

We briefly recall here the reciprocity MC formulations given by Tessé *et al.* (2002) and Dupoirieux *et al.* (2006). Like in the FM method, a large number

of bundles are emitted from the medium but the evaluation of radiative powers is based on the expression of the exchanged power between two volume cells  $i$  and  $j$

$$P_{ij}^{\text{exch}} = \int_0^\infty \kappa_{i\nu} I_\nu^\circ(T_i) \left(1 - \frac{I_\nu^\circ(T_j)}{I_\nu^\circ(T_i)}\right) \int_{V_i} \int_{4\pi} \mathcal{A}_{ij\nu} d\Omega_i d\mathbf{r}_i d\nu. \quad (\text{C.10})$$

Note that  $P_{ij}^{\text{exch}}$  strictly vanishes when cells  $i$  and  $j$  are at the same temperature while this property is only statistically verified in the FM method. In the Emission Reciprocity Method (ERM), the radiative power exchanged by cell  $i$  is obtained by summing all the powers exchanged with cells  $j$  crossed by each bundle emitted by cell  $i$

$$P_i^{\text{ERM}} = \sum_{j=1}^M P_{ij}^{\text{exch}}. \quad (\text{C.11})$$

Thus, emission calculation remains deterministic and absorption is calculated using reciprocity. In the Absorption Reciprocity Method (ARM), the radiative power exchanged by the cell  $i$  is obtained by summing all the powers exchanged with cells  $j$  that emit bundles which will cross the cell  $i$

$$P_i^{\text{ARM}} = \sum_{j=1}^M -P_{ji}^{\text{exch}}. \quad (\text{C.12})$$

Absorption calculation is done like in the FM method and emission is calculated using reciprocity. As the same bundles are used to evaluate  $P_i^{\text{ERM}}$  and  $P_i^{\text{ARM}}$ , calculations can be led simultaneously.

### C.2.3 Implementation

This section describes the stochastic generation of emitted bundle characteristics implemented for all MC methods. First, the emission point  $\mathbf{r}$  of the bundles is randomly determined according to a uniform distribution in each volume or surface cell. The direction  $\Omega$  of the bundles is randomly determined according to a uniform distribution of the solid angle for bundles emitted from volume cells, and according to a uniform distribution of the solid angle, weighted by the cosine of the angle between the normal to the emitting surface and the propagation direction, for bundles emitted

from surface cells. Finally, the wavenumber  $\nu$  of the bundles emitted from a volume element is randomly determined using the cumulative distribution function  $R_\nu$  given by

$$R_\nu = \frac{\int_0^\nu \kappa_{\nu'}(T_0) \mathcal{I}_{\nu'}^\circ(T_0) d\nu'}{\int_0^{+\infty} \kappa_{\nu'}(T_0) \mathcal{I}_{\nu'}^\circ(T_0) d\nu'}, \quad (\text{C.13})$$

in the SFM method, where  $T_0$  is the mean temperature in the medium. In Eq. (C.13)  $\kappa_\nu$  and  $\mathcal{I}_\nu^\circ$  are taken at this fixed temperature in order to avoid the storage of a temperature dependent high resolution function  $R_\nu(T)$ . The energy of the bundle is therefore corrected by the factor

$$f_\nu = \frac{\kappa_\nu(T(\mathbf{r})) \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{r}))}{\kappa_\nu(T_0) \mathcal{I}_\nu^\circ(T_0)} \frac{\int_0^{+\infty} \kappa_{\nu'}(T_0) \mathcal{I}_{\nu'}^\circ(T_0) d\nu'}{\int_0^{+\infty} \kappa_{\nu'}(T(\mathbf{r})) \mathcal{I}_{\nu'}^\circ(T(\mathbf{r})) d\nu'}, \quad (\text{C.14})$$

in order to preserve the exact spectral distribution of the emitted bundles. Note that, according to its definition, the shifted intensity  $\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  is always positive allowing us to introduce the function  $R_\nu$ . In the FM, ERM and ARM methods,  $\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{r})$  is simply replaced by  $I_\nu^\circ(\mathbf{r})$  in the expression of  $R_\nu$ . As very small temperature gradients are considered in this work, the temperature dependency of the absorption coefficient is neglected in a first step. This assumption is discussed in Sec. C.3.3. Figure C.1 presents the high resolution absorption spectrum used in MC calculations and the associated cumulative distribution function based on  $\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{r})$  and on  $I_\nu^\circ(\mathbf{r})$ . The spectral resolution is  $0.025 \text{ cm}^{-1}$ . The figure illustrates the displacement towards high wavenumbers of the derivative of the Planck's function with respect to the temperature, which reinforces the contribution of the  $\nu_2$  band of  $\text{H}_2\text{O}$  around  $1600 \text{ cm}^{-1}$ .

The inversion of the cumulative distribution function at high resolution, which consists in solving Eq. (C.13) to find the wavenumber  $\nu$  corresponding to a random uniform number  $R$  in the range  $[0, 1]$ , is costly in terms of computational time. Several algorithms, such as the bisectional search method used by Wang and Modest (2007), can speed up this inversion. We have implemented a pre-tabulation algorithm: the values of  $\nu(R)$  are pre-tabulated for  $N_t$  regularly spaced values of  $R$  and the search for  $\nu$  is first carried out among the pre-tabulated values before refining the search inside the convenient subrange of  $R$  at high spectral resolution. As shown in Fig. C.2, the CPU time strongly decreases with the number of tabulated points and

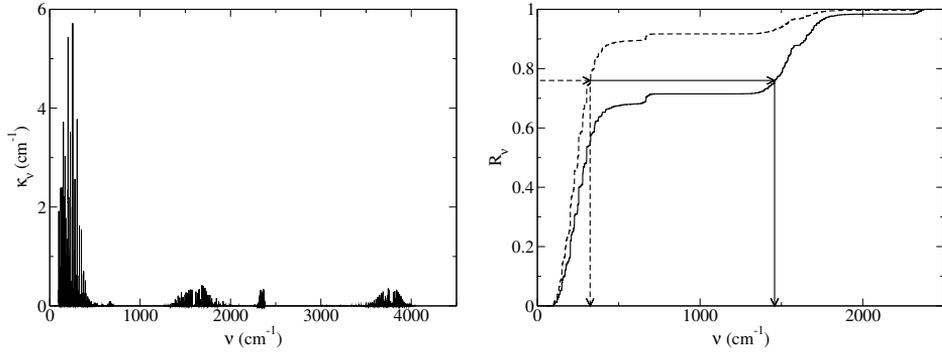


Figure C.1: Left: high resolution absorption coefficient of air/ $\text{CO}_2$ / $\text{H}_2\text{O}$  mixture at atmospheric pressure ( $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0.02$ ,  $X_{\text{CO}_2} = 0.001$ ,  $T = 300$  K). Right: associated cumulative distribution function for wavenumber generation in the shift (full line) and in the other (dashed line) approaches.

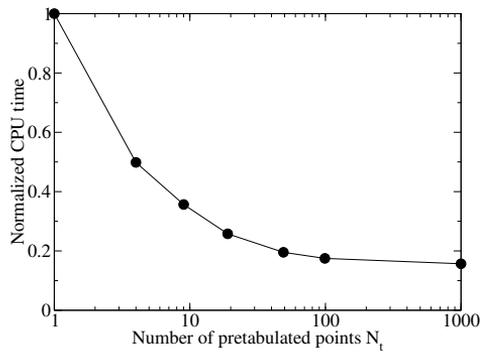


Figure C.2: CPU time for different number of pre-tabulated points of the function  $R_\nu$ , normalized by the CPU time without tabulation.

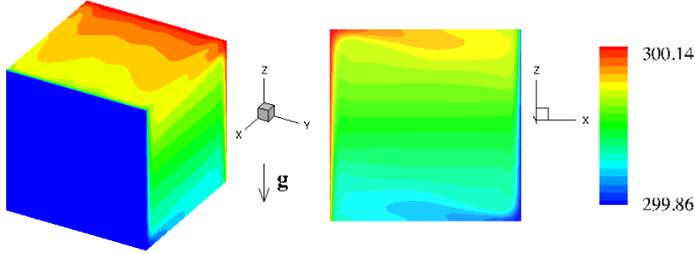


Figure C.3: Temperature field (in Kelvin) in the differentially heated cavity. Left: 3D view of wall temperature. Right: gas temperature distribution in the plane  $y = L/2$ .

reaches an asymptotic time which indicates that the  $\nu$ -determination is no longer a limiting step. With  $N_t = 100$ , the total CPU time is about 5 times smaller than without tabulation, and the time spent in the wavenumber inversion is divided by about 50. The wavenumber  $\nu$  of the bundles emitted from a surface element is randomly determined using the cumulative distribution function  $R_\nu^w$  obtained by replacing  $\kappa_\nu$  by the wall emissivity  $\varepsilon_\nu$  and  $T_0$  by the local wall temperature in Eq. (C.13).

### C.3 Results and discussion

Shift and reciprocal approaches are implemented for the calculation of radiative volumetric powers and fluxes in a quasi-isothermal configuration. We consider a differentially heated cubical cavity of edge length  $L$ , filled with an air/H<sub>2</sub>O/CO<sub>2</sub> mixture, in which we prescribe a 3D temperature field representative of a combined natural convection and radiation problem. Isothermal walls ( $x = 0$  for the hot wall and  $x = L$  for the cold one) are black, the others are perfectly diffuse reflecting. Gas radiation is due to carbon dioxide and water vapour of which the molar fractions are  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0.02$  and  $X_{\text{CO}_2} = 0.001$ .

The prescribed 3D temperature field is given in Fig. C.3. In a  $y$ -plane, the temperature distribution is characterized by thin boundary layers near the isothermal walls and a stratified core which reveals the natural convection flow motion. Moreover, 3D effects are noticeable at the horizontal top wall. This field was obtained as the steady solution of coupled calculation

of natural convection and radiation at a Rayleigh number  $Ra = 3 \times 10^7$ , with adiabatic lateral walls. Details concerning this coupled calculation are given by Soucasse *et al.* (2012). A pseudo-spectral Chebyshev method was used for the flow field and a ray tracing method, where a global ADF model described spectral gas properties, was used for radiative transfer. The mean temperature is fixed at  $T_0 = 300$  K and the cube edge length at  $L = 1$  m so that the temperature difference between the hot and cold walls is  $\Delta T = 0.328$  K.

The temperature field shown in Fig. C.3 is used here for all MC calculations at high spectral resolution, except in Sec. C.3.3 where this field is rescaled to consider higher temperature differences. The domain is discretized into  $40^3$  volume elements and  $6 \times 40^2$  surface elements according to 41 Chebyshev collocation points along the  $x$ ,  $y$  and  $z$  directions. This strongly non-uniform grid is used for accurately capturing the thin boundary layers. In order to validate the implementation of the MC methods, results from SFM method have been compared with those obtained with the deterministic ray tracing method and the ADF model (see C.4).

### C.3.1 Comparison between SFM and FM methods

Results obtained with the SFM method are first compared with those obtained with the standard FM method. We simulate the emission of  $N = 6 \times 10^9$  and  $N = 6 \times 10^{10}$  bundles for computations with SFM and FM methods, respectively. The computation time is roughly the same with the two methods for the same number of bundles and is about 10 minutes for  $N = 6 \times 10^9$  bundles distributed among 256 processors (4.7 GHz IBM power6).

Figure C.4 shows the estimated radiative flux and estimated standard deviation at the hot wall (plane  $x = 0$ ). Results for the cold wall are not presented but are very similar in terms of convergence level. Wall fluxes calculated with the SFM method present a well-converged distribution associated to a very low standard deviation level (about 0.1 %) while the FM results exhibit a chaotic distribution with a standard deviation level two orders of magnitude higher than the SFM method.

The same behaviour can be noticed on the estimated volumetric power in the  $y$ -mid plane presented in Fig. C.5. In this last figure we also show the absorbed power field which is the only quantity affected by statistical noise since emission is calculated in a deterministic way. As we expect,

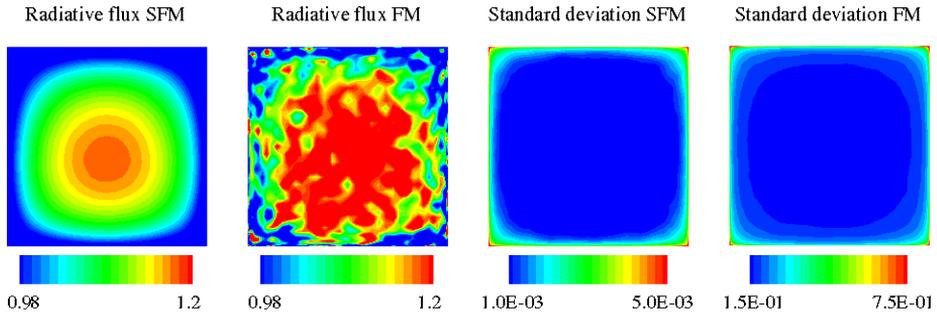


Figure C.4: Radiative flux and standard deviation (in  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ ) at the hot wall with SFM and FM methods. Note the different scales of SFM and FM standard deviations.

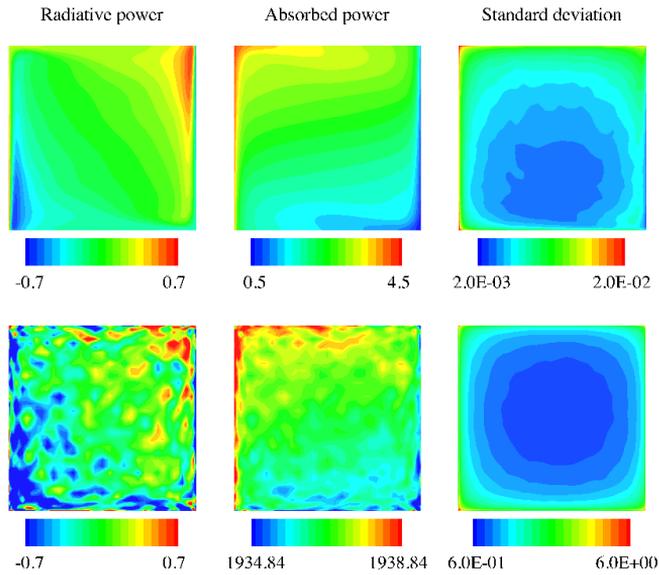


Figure C.5: Radiative volumetric power, absorbed volumetric power and standard deviation (in  $\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$ ) in the plane  $y = L/2$  with SFM (top) and FM (bottom) methods. Note the different scales of SFM and FM absorbed powers and standard deviations.

Table C.1: Global convergence results.

Method	$N$	$\sigma_S$	$\sigma_V$
FM	$6 \times 10^{10}$	$1.5 \times 10^{-1}$	1.2
SFM	$6 \times 10^9$	$9.0 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-2}$
ERM	$6 \times 10^9$	$1.3 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-2}$
ARM	$6 \times 10^9$	$1.7 \times 10^{-3}$	$3.3 \times 10^{-3}$

the radiative power and the shifted absorbed power are of the same order of magnitude which explains the good convergence level obtained with the SFM method. At the opposite, the actual absorbed power is three orders of magnitude higher than the exchanged power.

Global indicators of the convergence level of fluxes and volumetric powers,  $\sigma_S$  and  $\sigma_V$  may be defined as

$$\sigma_S = \frac{\sum_{i \in S} \sigma(P_i)}{\sum_{i \in S} |P_i|}, \quad \sigma_V = \frac{\sum_{i \in V} \sigma(P_i)}{\sum_{i \in V} |P_i|}, \quad (\text{C.15})$$

where  $\sigma(P_i)$  is the estimated standard deviation of the estimated power  $P_i$ , the subscript  $S$  or  $V$  refers to surface or volume elements. These global indicators are given in Table C.1. For the volumetric power calculation, if we assume a decrease of the standard deviation proportional to  $1/\sqrt{N}$ , the number of emitted bundles  $N$  must be of the order of  $10^{14}$  to reach with the FM method the same standard deviation level as in the SFM method. This demonstrates the high efficiency of the SFM method to predict radiative transfer in nearly isothermal media. In fact, if we assume that the standard deviation on the absorbed power, relative to the emitted power, is identical in the two methods, it is easy to show that the ratio between the number of bundles required to reach the same convergence level in the two methods approximately scales as  $(T/\Delta T)^2$ .

### C.3.2 Comparison between SFM and ERM/ARM methods

We compare now the results obtained using  $N = 6 \times 10^9$  bundles with the SFM and ERM/ARM methods. The computational time is roughly the same for each method. Table C.1 indicates that standard deviation levels

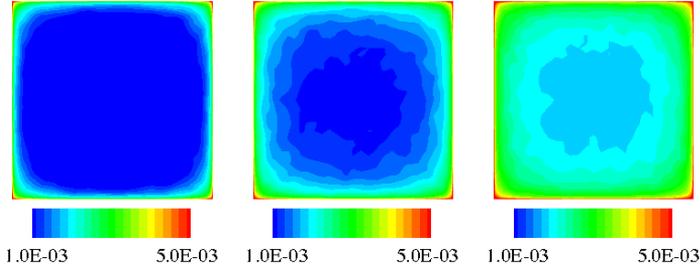


Figure C.6: Standard deviation (in  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ ) of the radiative flux calculated at the hot wall with SFM (left), ERM (middle) and ARM (right) methods.

obtained with reciprocity methods are comparable to those obtained with the shift method and, thus, that ERM and ARM methods are also well suited to predict radiative transfer in this application.

The standard deviation of the flux at the hot wall is presented in Fig. C.6 for the three methods. The distribution of the flux itself is not recalled since it is already shown in Fig. C.4, and since all methods converge towards the same distribution, the differences remaining within the standard deviations. For each method, the standard deviations at the cold wall are very similar to those presented for the hot wall. SFM approach appears to be here the most efficient method while ARM method gives the highest standard deviations. For each method, the standard deviation field at the wall follows the structure of the grid: the highest estimated errors are located in the smallest cells, near the edges of the cube.

Figure C.7 shows the volumetric radiative power and associated standard deviation along the  $x$ -axis, near the  $y$ -mid plane and at different  $z$  locations, calculated with the three methods. The distribution of the radiative power is consistent with the temperature field. Near the hot wall, the gas, which flows upstream in the differentially heated cavity, is mainly heated by the wall and thus is rather absorbing than emitting (except in a very thin region adjacent to the wall). The opposite phenomenon is observed close to the cold wall. As  $z$  increases, the gas temperature increases too as well as the net volumetric power. Concerning the standard deviation, ARM approach gives clearly the best converged results in all the domain. According to the global convergence indicators given in Table C.1, SFM is the less efficient method but its estimated deviation is sometimes lower than that of ERM

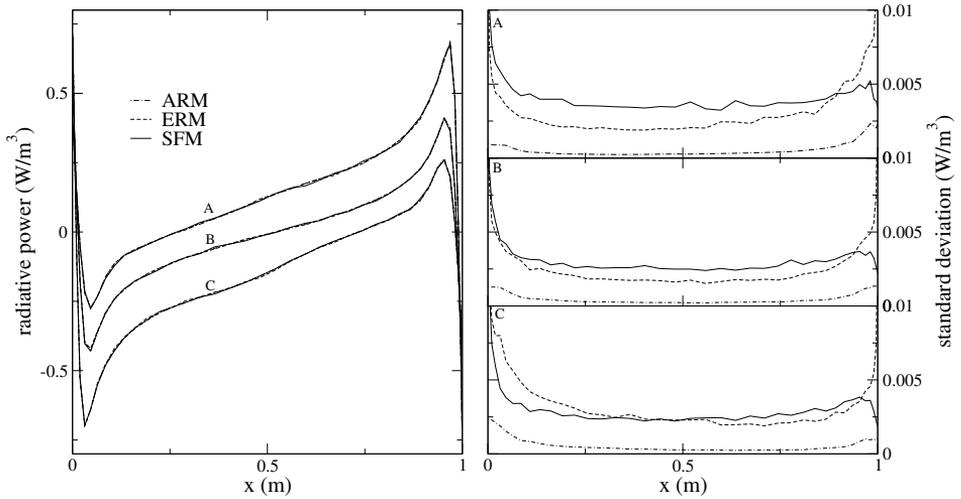


Figure C.7: Radiative power and associated standard deviation at  $y = 0.48$  m and  $z = 0.84$  m (A),  $z = 0.48$  m (B),  $z = 0.13$  m (C).

method. As observed for the flux calculations, the influence of the grid on the convergence level is again noticeable for ERM and ARM results. Moreover, the shape of the estimated deviation with SFM seems to follow the temperature field: the standard deviation strongly increases near the hot wall ( $x = 0$ ), decreases near the cold wall ( $x = 1$ ) and is higher at high  $z$ -locations where temperature is warmer due to the thermal stratification.

First explanations of the differences observed between the three methods in terms of performance can be drawn from the analysis of the distribution of the number of emitted bundles. In the reciprocity methods, the bundle distribution procedure greatly favours the emission from a wall element at the expense of emission from a volume cell (ten times greater in average). In ERM method, the standard deviation observed for a cell is directly linked to the number of emitted bundles while in ARM method, the standard deviation observed for a cell is linked to the number of bundles that cross it. This argument may explain the better behaviour of ARM compared to ERM method for volumetric power calculations and the better behaviour of ERM compared to ARM method for wall flux calculations. This behaviour is consistent with the test carried out by Tessé *et al.* (2002) in the case of a planar geometry and was also observed here, although it was attenuated,

when attributing the same number of emitted bundles to each gas cell and to each surface element.

Concerning the SFM method, the analysis is quite different since the distribution procedure follows the shifted emission. The number of emitted bundles by a volume cell or by a surface element greatly differs from hot to cold regions. As previously mentioned, standard deviation on volumetric power calculations seems to follow the temperature field. Comparing the temperature field given in Fig. C.3 and the shifted absorbed power field given in Fig. C.5, we observe that the hot regions roughly correspond to the regions where the shifted absorbed power is the highest. The estimated deviations are the highest in the regions where the shifted absorbed power is important.

### C.3.3 Influence of temperature difference

The results presented above were obtained for a very small temperature difference  $\Delta T=0.328$  K resulting from the fixed Rayleigh number and cavity length. Increasing  $\Delta T$  will modify the speed up of the FM method, as discussed in Sec. C.3.1, and would require temperature dependent absorption spectra. These effects are discussed separately in the following.

FM and SFM methods have been applied in a first step to rescaled temperature fields according to  $T'(x, y, z) = \alpha(T(x, y, z) - T_0) + T_0$  with  $\alpha = 10$  and  $\alpha = 100$  assuming a uniform absorption spectrum calculated at 300 K. In this way, the temperature difference between the hot and cold walls is increased to  $\Delta T=3.28$  K and  $\Delta T=32.8$  K respectively. Global indicators of convergence level  $\sigma_S$  and  $\sigma_V$ , obtained with the two methods, using the same number of bundles  $N = 6 \times 10^9$  and for the different values of  $\alpha$ , are given in Table C.2. Results show that the global convergence level of the SFM method is not affected by the temperature difference in the range considered here, both for radiative fluxes and volumetric powers. We have also noted similar 3D distributions of standard deviation. On the contrary, the convergence of the FM method highly improves as the temperature difference increases:  $\sigma_S$  clearly scales as the inverse of  $\alpha$ .  $\sigma_V$  also highly decreases when  $\alpha$  increases, except between  $\alpha = 1$  and  $\alpha = 10$ , but the value  $\sigma_V \simeq 1.2$  is obviously too high to be significant. Indeed, this value of  $\sigma_V$  indicates that the estimated standard deviation is of the same order of magnitude, or even higher, than the estimated mean value. Comparing these global indicators confirms that the ratio between the number of bundles required

Table C.2: Influence of temperature difference on mean standard deviations. Results are obtained with the same number of bundles  $N = 6 \times 10^9$ .

	$\sigma_S$		$\sigma_V$	
	FM	SFM	FM	SFM
$\alpha = 1$	$4.7 \times 10^{-1}$	$9.0 \times 10^{-4}$	1.2	$2.4 \times 10^{-2}$
$\alpha = 10$	$4.9 \times 10^{-2}$	$9.0 \times 10^{-4}$	1.0	$2.4 \times 10^{-2}$
$\alpha = 100$	$4.9 \times 10^{-3}$	$8.8 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-1}$	$2.3 \times 10^{-2}$

for the same convergence level using FM and SFM methods approximately scales as  $(T/\Delta T)^2$ .

In a second step, the temperature dependency of the absorption coefficient  $\kappa_\nu$  was investigated for the three cases  $\alpha = 1, 10, 100$ . Local absorption coefficients were calculated using interpolations from three high resolution spectra calculated at  $T = 280$  K,  $T = 300$  K and  $T = 320$  K, assuming in each range a linear evolution of  $\kappa_\nu^*(T) = \kappa_\nu(T) \times T$ . The use of a variable  $\kappa_\nu(T)$  did not change significantly the calculation time for a given bundle and the convergence rate of the method. The results are shown in Fig. C.8 for the radiative power. For  $\Delta T = 0.328$  K, the effects are not significant and the differences remain within the standard deviation of the MC method. For the highest temperature difference, the effects become significant and are of the order of  $\Delta T/T$ . The radiative power generally increases in absolute value when considering variable spectra.

## C.4 Conclusion

A new Monte Carlo formulation was proposed for application to radiative transfer in nearly isothermal gases, in association with high spectral resolution description of molecular gas properties. It was applied to 3D radiative calculations based on a temperature field typical of coupled natural convection and radiation in a differentially heated cavity. This formulation is shown to be orders of magnitude more efficient than the standard analog MC method. It was also compared to reciprocal ERM and ARM methods, which are applied here for the first time to 3D quasi-isothermal media. The new shift method appears to be slightly more (resp. less) efficient for the

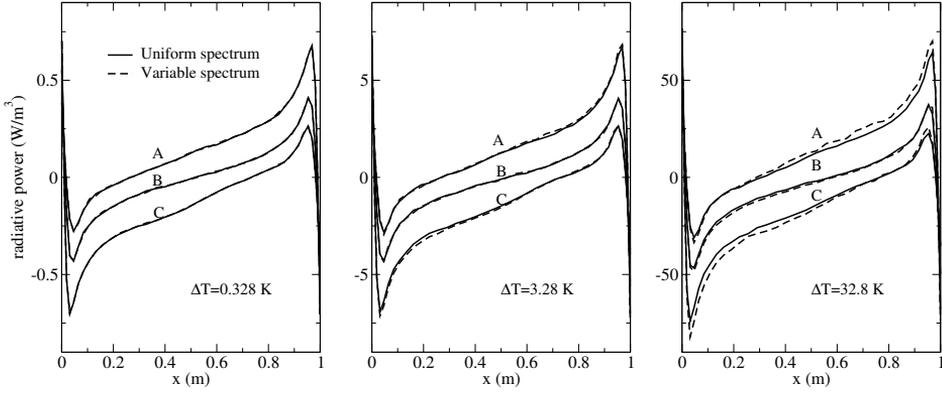


Figure C.8: Radiative power at  $y = 0.48$  m and  $z = 0.84$  m (A),  $z = 0.48$  m (B),  $z = 0.13$  m (C), for different values of  $\Delta T$  and considering uniform or  $T$ -dependent spectrum.

computation of wall fluxes (resp. volumetric powers). All of these methods are shown to be accurate and practicable tools enabling in the future coupled calculation of unsteady free convection and radiation in 3D geometries with high spectral resolution, and to provide in this way reference results for the validation of approximate models.

## Appendix: Comparisons between SFM and ray tracing methods

We compare in this appendix the results from the SFM method and the ray tracing-ADF method, used to compute the steady temperature field from the radiation and natural convection coupled problem defined at the beginning of Sec. C.3. Ray tracing calculations are achieved using the same spatial grid as SFM calculations, 1800 directions from each surface element, 3600 directions from each volume element and the global ADF model Pierrot *et al.* (1999a) to describe gas radiative properties. More details on the ray tracing-ADF model are given by Soucasse *et al.* (2012). As shown in Fig. C.9, we find very good agreement between the two approaches on radiative volumetric powers, the absolute difference between the two solutions remaining within the MC standard deviation of the SFM result. In addition, we also find

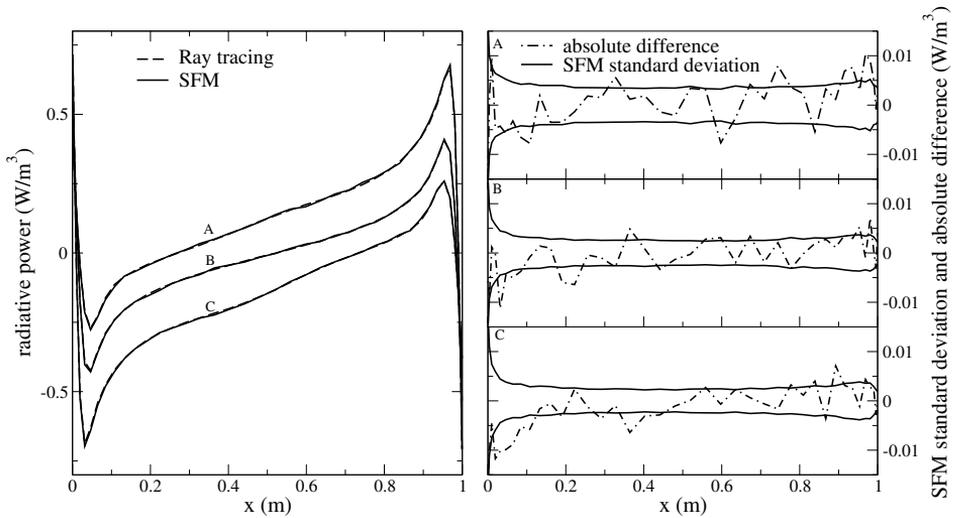


Figure C.9: Left: radiative power at  $y = 0.48$  m and  $z = 0.84$  m (A),  $z = 0.48$  m (B),  $z = 0.13$  m (C). Right: SFM standard deviation and absolute difference between radiative power calculated with SFM and ray tracing methods, at same locations.

very good agreement on wall fluxes. This constitutes a cross validation of both methods, as we have checked beforehand that the ADF model induced negligible errors for column total transmissivities in comparison with high spectral resolution calculations. The computational times are roughly the same with the two methods but only the MC method allows to deal with high resolution radiative properties. In particular, the MC method enables to take into account temperature dependent radiative properties for relatively high temperature differences without further approximations.

# Bibliographie

- ACHDOU, Y. et GUERMOND, J. L. (2000). Convergence analysis of a finite element projection/Lagrange-Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 37(3):799–826.
- AKIYAMA, M. et CHONG, Q. P. (1997). Numerical analysis of natural convection with surface radiation in a square enclosure. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 31:419–433.
- AMMOURI, F. E., SOUFIANI, A. et TAINE, J. (1994). Effects of temperature and concentration fluctuations un turbulent gas flows on combined radiative and conductive wall fluxes. In *Proceedings of the 10th International Heat Transfer Conference*.
- ARPACI, V. S. et BAYAZITOĞLU, Y. (1973). Thermal stability of radiating fluids : Asymmetric slot problem. *Physics of Fluids*, 16(5):589–593.
- AUDUNSON, T. et GEBHART, B. (1972). An experimental and analytical study of natural convection with appreciable thermal radiation effects. *Journal of Fluid Mechanics*, 52:57–95.
- BARHAGHI, D. G. et DAVIDSON, L. (2007). Natural convection boundary layer in a 5 :1 cavity. *Physics of Fluids*, 19(125106).
- BARHAGHI, D. G. et DAVIDSON, L. (2009). Large-eddy simulation of mixed convection-radiation heat transfer in a vertical channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52:3918–3928.
- BDÉOUI, F. (1998). *Effets du rayonnement des gaz sur certaines instabilités thermoconvectives*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.

- BDÉOUI, F. et SOUFIANI, A. (1997). The onset of Rayleigh–Bénard instability in molecular radiating gases. *Physics of Fluids*, 9:3858–3872.
- BERKOOZ, G., HOLMES, P. et LUMLEY, J. L. (1993). The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25:539–575.
- BIANCOFIORE, L., GALLAIRE, F. et PASQUETTI, R. (2012). Influence of confinement on obstacle-free turbulent wakes. *Computers and Fluids*, 58:27–44.
- BORGET, V. (2001). *Effets du rayonnement des gaz sur les instabilités thermoconvectives en cavités allongées. Étude théorique et mise au point d'un montage d'interférométrie holographique*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- BORGET, V., BDÉOUI, F., SOUFIANI, A. et LE QUÉRÉ, P. (2001). The transverse instability in a differentially heated vertical cavity filled with molecular radiating gases. I. Linear stability analysis. *Physics of Fluids*, 13(5):1492–1507.
- BORGET, V., SOUFIANI, A. et LE QUÉRÉ, P. (2006). Numerical simulation of the transverse instability in a differentially heated cavity filled with radiating gases. In *Proceedings of the 13th International Heat Transfer Conference*.
- BORJINI, M. N., BEN AISSIA, H., HALOUANI, K. et ZEGHMATI, B. (2008). Effect of radiative heat transfer on the three-dimensional buoyancy flow in cubic enclosure heated from the side. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29:107–118.
- BRATIS, J. C. et NOVOTNY, J. L. (1974). Radiation-convection interaction in the boundary layer regime of an enclosure. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 17:23–36.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. et ZANG, T. A. (2006a). *Spectral methods. 1. Fundamentals in single domains*. Springer-Verlag.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. et ZANG, T. A. (2006b). *Spectral methods. 2. Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics*. Springer-Verlag.

- CAPDEVILA, R., LEHMKUHL, O., TRIAS, F. X., PÉREZ-SEGARRA, C. D. et COLOMER, G. (2011). Turbulent natural convection in a differentially heated cavity of aspect ratio 5 filled with non-participating and participating grey media. *In Journal of Physics : Conference Series. 13th European Turbulence Conference*, volume 318.
- CHANG, L. C., YANG, K. T. et LLOYD, J. R. (1983). Radiation-natural convection interactions in two-dimensional complex enclosures. *Journal of Heat Transfer*, 105:89–95.
- CHEN, K. K., TU, J. H. et ROWLEY, C. W. (2012). Variants of dynamic mode decomposition : boundary condition, Koopman, and Fourier analyses. *Journal of Nonlinear Science*, 22:887–915.
- CHERKAOUI, M., DUFRESNE, J. L., FOURNIER, R., GRANDPEIX, J. Y. et LAHELLEC, A. (1998). Radiative net-exchange formulation within one-dimensional gas enclosures with reflective surfaces. *Journal of Heat Transfer*, 120:275–278.
- CHERKAOUI, M., DUFRESNE, J. L., FOURNIER, R. et LAHELLEC, A. (1996). Monte Carlo simulation of radiation in gases with a narrow-band model and a net-exchange formulation. *Journal of Heat Transfer*, 118:401–407.
- CLERGENT, Y. (2000). *Influence du rayonnement thermique sur les écoulements de convection naturelle en espace confiné*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse.
- COELHO, P. (2007). Numerical simulation of the interaction between turbulence and radiation in reactive flows. *Progress in Energy and Combustion Science*, 33:311–383.
- COLOMER, G., CÒNSUL, R. et OLIVA, A. (2007). Coupled radiation and natural convection : Different approaches of the SLW model for a non-gray gas mixture. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 107:30–46.
- COLOMER, G., COSTA, M., CÒNSUL, R. et OLIVA, A. (2004). Three-dimensional numerical simulation of convection and radiation in a differentially heated cavity using the discrete ordinates method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:257–269.

- DE GASSOWSKI, G., XIN, S. et DAUBE, O. (2003). Bifurcations et solutions multiples en cavité 3D différentiellement chauffée. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(10):705–711.
- DE VAHL DAVIS, G. et JONES, I. P. (1983). Natural convection in a square cavity : a comparison exercise. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3:227–248.
- DENISON, M. K. et WEBB, B. W. (1995). The spectral-line-based weighted-sum-of-gray-gases model in nonisothermal nonhomogeneous media. *Journal of Heat Transfer*, 117:359–365.
- DJANNA, F. (2011). *Convection naturelle turbulente en cavité différentiellement chauffée à grands nombres de Rayleigh : caractérisation expérimentale des écoulements et des transferts thermiques, étude numérique du couplage convection-rayonnement*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aérotechnique.
- DUPOIRIEUX, F., TESSÉ, L., AVILA, S. et TAINE, J. (2006). An optimized reciprocity Monte Carlo method for the calculation of radiative transfer in media of various optical thicknesses. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49:1310–1319.
- FUSEGI, T. et FAROUK, B. (1989). Laminar and turbulent natural convection-radiation interactions in a square enclosure filled with a non-gray gas. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 15:303–322.
- FUSEGI, T. et FAROUK, B. (1990). A computational study of natural convection and surface/gas radiation interactions in a square cavity. *Journal of Heat Transfer*, 112:802–804.
- GELFGAT, A. Y., BAR-YOSEPH, P. Z. et YARIN, A. L. (1999). Stability of multiple steady states of convection in laterally heated cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 388:315–334.
- GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P. et CABOT, W. H. (1991). A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A*, 3:1760–1765.
- GILLE, J. et GOODY, R. (1964). Convection in a radiating gas. *Journal of Fluid Mechanics*, 20:47–79.

- GOODY, R. M. (1956). The influence of radiative transfer on cellular convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 1:424–435.
- GOSTIAUX, L. (2006). *Étude expérimentale des ondes de gravité internes en présence de topographie. Émission, propagation, réflexion*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon.
- GROSMANN, S. et LOHSE, D. (2000). Scaling in thermal convection : a unifying theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 407:27–56.
- GUPTA, A., HAWORTH, D. C. et MODEST, M. F. (2013). Turbulence-radiation interactions in large-eddy simulations of luminous and nonluminous nonpremixed flames. *Proceedings of the Combustion Institute*, 34:1281–1288.
- HAN, C. Y. et BAEK, S. W. (2000). The effects of radiation on natural convection in a rectangular enclosure divided by two partitions. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 37:249–270.
- HENKES, R. A. W. M. et LE QUÉRÉ, P. (1996). Three-dimensional transition of natural-convection flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 319:281–303.
- HOTTEL, H. C. et SAROFILM, A. F. (1967). *Radiative Transfer*. McGraw-Hill, New York.
- HOWELL, J. R. (1998). The Monte Carlo method in radiative heat transfer. *Journal of Heat Transfer*, 120:547–560.
- HUNT, J. C. R., WRAY, A. A. et MOIN, P. (1988). Eddies, streams and convergence zones in turbulent flows. *In Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program*.
- HUTCHISON, J. E. et RICHARDS, R. F. (1999). Effect of nongray gas radiation on thermal stability in carbon dioxide. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 13(1):25–32.
- IACONA, E. et TAINE, J. (2001). Holographic interferometry applied to coupled free convection and radiative transfer in a cavity containing a vertical plate between 290 and 650 K. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44:3755–3764.

- IBRAHIM, A. et LEMONNIER, D. (2009). Numerical study of coupled double-diffusive natural convection and radiation in a square cavity filled with a N<sub>2</sub>-CO<sub>2</sub> mixture. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 36:197–202.
- JANSSEN, R. et HENKES, R. (1995). The first instability mechanism in differentially heated cavities with conducting horizontal walls. *Journal of Heat Transfer*, 117:626–633.
- JANSSEN, R. et HENKES, R. (1996). Instabilities in three-dimensional differentially-heated cavities with adiabatic horizontal walls. *Physics of Fluids*, 8(1):62–74.
- JEONG, J. et HUSSAIN, F. (1995). On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 285:69–94.
- JOSEPH, D., PEREZ, P., EL HAFI, M. et CUENOT, B. (2009). Discrete ordinates and Monte Carlo methods for radiative transfer simulation applied to computational fluid dynamics combustion modeling. *Journal of Heat Transfer*, 131.
- KARAMANOS, G. S. et KARNIADAKIS, G. E. (2000). A spectral vanishing viscosity method for large-eddy simulations. *Journal of Computational Physics*, 163:22–50.
- KASSEMI, M. et NARAGHI, M. H. N. (1993). Analysis of radiation-natural convection interactions in 1-*g* and low-*g* environments using the discrete exchange factors method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36(17):4141–4149.
- KIRBY, R. M. et KARNIADAKIS, G. E. (2002). Coarse resolution turbulence simulations with spectral vanishing viscosity-large-eddy simulations (SVV-LES). *ASME Journal of Fluids Engineering*, 124:886–891.
- KRITZSTEIN, F. et SOUFIANI, A. (1993). Infrared gas radiation from a homogeneously turbulent medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36(7):1749–1762.
- KUMAR, P. et ESWARAN, V. (2010). A numerical simulation of combined radiation and natural convection in a differentially heated cubic cavity. *Journal of Heat Transfer*, 132.

- LABROSSE, G., TRIC, E., KHALLOUF, H. et BETROUNI, M. (1997). A direct (pseudo-spectral) solver of 2D/3D Stokes problem : Transition to unsteadiness of natural-convection flow in a differentially heated cubical cavity. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 31:261–276.
- LAN, C. H., EZEKOYE, O. A., HOWELL, J. R. et BALL, K. S. (2003). Stability analysis for three-dimensional Rayleigh–Bénard convection with radiatively participating medium using spectral methods. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46:1371–1383.
- LARI, K., BANESHI, M., GANDJALIKHAN NASSAB, S. A., KOMIYA, A. et MARUYAMA, S. (2011). Combined heat transfer of radiation and natural convection in a square cavity containing participating gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54:5087–5099.
- LARI, K., BANESHI, M., GANDJALIKHAN NASSAB, S. A., KOMIYA, A. et MARUYAMA, S. (2012). Numerical study of non-gray radiation and natural convection using the full-spectrum k-distribution method. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 61:61–84.
- LARSEN, E. W., THÖMMES, G., KLAR, A., SEAÏD, M. et GÖTZ, T. (2002). Simplified  $P_N$  approximation to the equations of radiative heat transfer and applications. *Journal of Computational Physics*, 183:652–675.
- LARSON, D. W. et VISKANTA, R. (1976). Transient combined laminar free convection and radiation in a rectangular enclosure. *Journal of Fluid Mechanics*, 78:65–85.
- LAU, G. E., YEOH, G. H., TIMCHENKO, V. et REIZES, J. A. (2012). Large-eddy simulation of natural convection in an asymmetrically-heated vertical parallel-plate channel : Assessment of subgrid-scale models. *Computers and Fluids*, 59:101–116.
- LAURIAT, G. (1982). Combined radiation-convection in gray-fluids enclosed in vertical cavities. *Journal of Heat Transfer*, 104:609–615.
- LAURIAT, G. et DESRAYAUD, G. (2006). Effect of surface radiation on conjugate natural convection in partially open enclosures. *International Journal of Thermal Sciences*, 45:335–346.

- LE QUÉRÉ, P. (1991). Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number. *Computers and Fluids*, 20(1):29–41.
- LE QUÉRÉ, P. et ALZIARY DE ROQUEFORT, T. (1985). Computation of natural convection in two-dimensional cavities with chebyshev polynomials. *Journal of Computational Physics*, 57:210–228.
- LE QUÉRÉ, P. et BEHNIA, M. (1998). From onset of unsteadiness to chaos in a differentially heated square cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 359:81–107.
- LEONG, W. H., HOLLANDS, K. G. T. et BRUNGER, A. P. (1998). On a physically-realizable benchmark problem in internal natural convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41:3817–3828.
- LILLY, D. K. (1992). A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids A*, 4(3):633–635.
- MADAY, Y., OULD KABER, S. M. et TADMOR, E. (1993). Legendre pseudospectral viscosity method for nonlinear conservation laws. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 30(2):321–342.
- MEFTA, S., IBRAHIM, A., LEMONNIER, D. et BENBRIK, A. (2009). Coupled radiation and double diffusive convection in nongray air-CO<sub>2</sub> and air-H<sub>2</sub>O mixtures in cooperating situations. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 56:1–19.
- MODEST, M. F. (2003). *Radiative heat transfer 2nd edition*. Academic Press, New York.
- MODEST, M. F. et ZHANG, H. (2002). The full-spectrum correlated-k distribution for thermal radiation from molecular gas-particulate mixtures. *Journal of Heat Transfer*, 124:30–38.
- MOUFEKKIR, F., MOUSSAOUI, M. A., MEZRHAB, A., NAJI, H. et LEMONNIER, D. (2012). Numerical prediction of heat transfer by natural convection and radiation in an enclosure filled with an isotropic scattering medium. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 113:1689–1704.

- NOUANEGUE, H. F., MUFTUOGLU, A. et BILGEN, E. (2009). Heat transfer by natural convection, conduction and radiation in an inclined square enclosure bounded with a solid wall. *International Journal of Thermal Sciences*, 48:871–880.
- PAOLUCCI, S. et CHENOWETH, D. R. (1989). Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 201:379–410.
- PASQUETTI, R. (2006). Spectral vanishing viscosity method for large-eddy simulation of turbulent flows. *Journal of Scientific Computing*, 27(1-3): 365–375.
- PATTERSON, J. C. et IMBERGER, J. (1980). Unsteady natural convection in a rectangular cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 100(part 1):65–86.
- PENG, S. H. et DAVIDSON, L. (2001). Large eddy simulation for turbulent buoyant flow in a confined cavity. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 22:323–331.
- PIERROT, L., RIVIÈRE, Ph., SOUFIANI, A. et TAINE, J. (1999a). A fictitious-gas-based absorption distribution function global model for radiative transfer in hot gases. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 62:609–624.
- PIERROT, L., SOUFIANI, A. et TAINE, J. (1999b). Accuracy of narrow-band and global models for radiative transfer in H<sub>2</sub>O, CO<sub>2</sub>, and H<sub>2</sub>O-CO<sub>2</sub> mixtures at high temperature. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 62:523–548.
- PODVIN, B. et LE QUÉRÉ, P. (2001). Low-order models for the flow in a differentially heated cavity. *Physics of Fluids*, 13(11):3204–3214.
- PRASANNA, S. et VENKATESHAN, S. P. (2011). Construction of two dimensional temperature field from first derivative fields. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 35:1019–1029.
- PUIGJANER, D., HERRERO, J., SIMÒ, C. et GIRALT, F. (2008). Bifurcation analysis of steady Rayleigh-Bénard convection in a cubical cavity with conducting sidewalls. *Journal of Fluid Mechanics*, 598:393–427.

- PUIGJANER, D., HERRERO, J., SIMÒ, C. et GIRALT, F. (2011). From steady solutions to chaotic flows in a Rayleigh-Bénard problem at moderate Rayleigh numbers. *Physica D*, 240:920–934.
- PURAGLIESI, R. et LERICHE, E. (2012). Proper orthogonal decomposition of a fully confined cubical differentially heated cavity flow at Rayleigh number  $Ra=10^9$ . *Computers and Fluids*, 61:14–20.
- RAVI, M. R., HENKES, R. A. W. M. et HOOGENDOORN, C. J. (1994). On the high-Rayleigh-number structure of steady laminar natural-convection flow in a square enclosure. *Journal of Fluid Mechanics*, 262:325–351.
- ROGER, M., COELHO, P. J. et DA SILVA, C. B. (2010). The influence of the non-resolved scales of thermal radiation in large eddy simulation of turbulent flows : A fundamental study. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 53:2897–2907.
- ROTHMAN, L. S., GORDON, I. E., BARBE, A., CHRIS BENNER, D., BERNATH, P. F., BIRK, M., BOUDON, V., BROWN, L. R., CAMPARGUE, A., CHAMPION, J. P., CHANCE, K., COUDERT, L. H., DANA, V., DEVI, V., FALLY, S., FLAUD, J. M., GAMACHE, R. R., GOLDMAN, A., JACQUEMART, D., KLEINER, I., LACOME, N., LAFFERTY, W. J., MANDIN, J. Y., MASSIE, S. T., MIKHAILENKO, S. N., MILLER, C. E., MOAZZEN-AHMADI, N., NAUMENKO, O. V., NIKITIN, A. V., ORPHAL, J., PEREVALOV, V. I., PERRIN, A., PREDOI-CROSS, A., RINSLAND, C. P., ROTGER, M., ŠIMEČKOVÁ, M., SMITH, M. A. H., SUNG, K., TASHKUN, S. A., TENNYSON, J., TOTH, R. A., VANDAELE, A. C. et VANDER AUWERA, J. (2009). The HITRAN 2008 molecular spectroscopic database. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 110:533–572.
- ROUGER, N. (2009). *Sensibilité de la convection naturelle en cavité différentiellement chauffée à des variations de paramètres géométriques, thermiques et massiques*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- ROWLEY, C. W., MEZIĆ, I., BAGHERI, S., SCHLATTER, P. et HENNINGSON, D. S. (2009). Spectral analysis of nonlinear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 641:115–127.
- SAGAUT, P. (2006). *Large eddy simulation for incompressible flows*. Springer-Verlag.

- SALAT, J., XIN, S., JOUBERT, P., SERGENT, A., PENOT, F. et LE QUÉRÉ, P. (2004). Experimental and numerical investigation of turbulent natural convection in a large air-filled cavity. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 25:824–832.
- SARIC, W. S. (1994). Görtler vortices. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26:379–409.
- SCHMID, P. J. (2010). Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics*, (656):5–28.
- SERGENT, A., JOUBERT, P. et LE QUÉRÉ, P. (2003). Development of a local subgrid diffusivity model for large-eddy simulation of buoyancy-driven flows : Application to a square differentially heated cavity. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 44:789–810.
- SERGENT, A., JOUBERT, P., LE QUÉRÉ, P. et TENAUD, C. (2000). Extension du modèle d'échelles mixtes à la diffusivité de sous-maille. *Comptes Rendus Mécanique*, 328(2):891–897.
- SERGENT, A., JOUBERT, P., XIN, S. et LE QUÉRÉ, P. (2013). Resolving the stratification discrepancy of turbulent natural convection in differentially heated air-filled cavities - Part II : End walls effects using large eddy simulation. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 39:15–27.
- SEVERAC, E. et SERRE, E. (2007). A spectral vanishing viscosity for the LES of turbulent flows within rotating cavities. *Journal of Computational Physics*, 226:1234–1255.
- SIEGEL, R. et HOWELL, J. (2002). *Thermal radiation heat transfer 4th edition*. Taylor & Francis.
- SIROVICH, L. (1987). Turbulence and the dynamic of coherent structures. Part I : Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3): 561–571.
- SMAGORINSKY, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91(3):99–164.

- SOUCASSE, L., RIVIÈRE, Ph. et SOUFIANI, A. (2013). Monte Carlo methods for radiative transfer in quasi-isothermal participating media. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 128:34–42.
- SOUCASSE, L., RIVIÈRE, Ph. et SOUFIANI, A. (2014a). Subgrid-scale model for radiative transfer in turbulent participating media. *Journal of Computational Physics*, 257:442–459.
- SOUCASSE, L., RIVIÈRE, Ph., SOUFIANI, A., XIN, S. et LE QUÉRÉ, P. (2014b). Transitional regimes of natural convection in a differentially heated cavity under the effects of wall and molecular gas radiation. *Physics of Fluids*, 26(024105).
- SOUCASSE, L., RIVIÈRE, Ph., XIN, S., LE QUÉRÉ, P. et SOUFIANI, A. (2012). Numerical study of coupled molecular gas radiation and natural convection in a differentially heated cubical cavity. *Computational Thermal Sciences*, 4:335–350.
- SOUFIANI, A. (1991). Temperature turbulence spectrum for high-temperature radiating gases. *Journal of Thermophysics*, 5(4):489–494.
- SPARROW, E. M., HUSAR, R. B. et GOLDSTEIN, R. J. (1970). Observations and other characteristics of thermals. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(4):793–800.
- SPIEGEL, E. A. (1957). The smoothing of temperature fluctuations by radiative transfer. *Astrophysical Journal*, 126:202–207.
- SPIEGEL, E. A. (1960). The convective instability of a radiating fluid layer. *Astrophysical Journal*, 132:716–728.
- SUN, H., CHÉNIER, E. et LAURIAT, G. (2011). Effect of surface radiation on the breakdown of steady natural convection flows in a square, air-filled cavity containing a centered inner body. *Applied Thermal Engineering*, 31:1252–1262.
- TADMOR, E. (1989). Convergence of spectral methods for nonlinear conservation laws. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 26(1):30–44.
- TAINE, J. et SOUFIANI, A. (1999). Gas IR radiative properties : from spectroscopic data to approximate models. *Advances in Heat Transfer*, 33:295–414.

- TAN, Z. et HOWELL, J. R. (1991). Combined radiation and natural convection in a two-dimensional participating square medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34(3):785–793.
- TESSÉ, L., DUPOIRIEUX, F. et TAINE, J. (2004). Monte Carlo modeling of radiative transfer in a turbulent sooty flame. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:555–572.
- TESSÉ, L., DUPOIRIEUX, F., ZAMUNER, B. et TAINE, J. (2002). Radiative transfer in real gases using reciprocal and forward Monte Carlo methods and a correlated-k approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45:2797–2814.
- TRIAS, F. X., GOROBETS, A., OLIVA, A. et PÉREZ-SEGARRA, C. D. (2013). Dns and regularization modeling of a turbulent differentially heated cavity of aspect ratio 5. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 57:171–182.
- TRIAS, F. X., GOROBETS, A., SORIA, M. et OLIVA, A. (2010a). Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to  $10^{11}$ . Part I : Numerical methods and time-averaged flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53:665–673.
- TRIAS, F. X., GOROBETS, A., SORIA, M. et OLIVA, A. (2010b). Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to  $10^{11}$ . Part II : Heat transfer and flow dynamics. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53:674–683.
- TRIAS, F. X., SORIA, M., OLIVA, A. et PÉREZ-SEGARRA, C. D. (2007). Direct numerical simulation of a two- and three-dimensional turbulent natural convection flows in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *Journal of Fluid Mechanics*, 586:259–293.
- TRIAS, F. X., VERSTAPPEN, R., GOROBETS, A. et OLIVA, A. (2012). Spectrally-consistent regularization modeling of turbulent natural convection flows. In *Journal of Physics : Conference Series. Proceedings of the 6th European Thermal Sciences Conference*, volume 395.
- TRIC, E., LABROSSE, G. et BETROUNI, M. (2000). A first incursion into the 3D structure of natural convection of air in a differentially heated cubic

- cavity, from accurate numerical solutions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43:4043–4056.
- VANEL, J. M., PEYRET, R. et BONToux, P. (1986). A pseudo-spectral solution of vorticity-stream-function equations using the influence matrix technique. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, 2:463–475.
- VELUSAMY, K., SUNDARARAJAN, T. et SEETHARAMU, K. N. (2001). Interaction effects between surface radiation and turbulent natural convection in square and rectangular enclosures. *Journal of Heat Transfer*, 123:1062–1070.
- WANG, A. et MODEST, M. F. (2007). Spectral Monte Carlo models for nongray radiation analyses in inhomogeneous participating media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50:3877–3889.
- WANG, A. et MODEST, M. F. (2008). Monte carlo simulation of radiative heat transfer and turbulence interactions in methane/air jet flames. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 109:269–279.
- WANG, H., XIN, S. et LE QUÉRÉ, P. (2006). Étude numérique du couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surfaces en cavité carrée remplie d’air. *Comptes Rendus Mécanique*, 334:48–57.
- WU, Y., HAWORTH, D. C., MODEST, M. F. et CUENOT, B. (2005). Direct numerical simulation of turbulence/radiation interaction in premixed combustion systems. *Proceedings of the Combustion Institute*, 30:639–646.
- XIN, S., CHERGUI, J. et LE QUÉRÉ, P. (2008). 3D spectral parallel multi-domain computing for natural convection flows. *In Parallel Computational Fluid Dynamics*, pages 163–171.
- XIN, S. et LE QUÉRÉ, P. (2001). Linear stability analyses of natural convection flows in a differentially heated square cavity with conducting horizontal walls. *Physics of Fluids*, 13(9):2529–2542.
- XIN, S. et LE QUÉRÉ, P. (2002). An extended Chebyshev pseudo-spectral benchmark for the 8 : 1 differentially heated cavity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40:981–998.

- XIN, S. et LE QUÉRÉ, P. (2012). Stability of two-dimensional (2D) natural convection flows in air-filled differentially heated cavities : 2D/3D disturbances. *Fluid Dynamics Research*, 44.
- XIN, S., SALAT, J., JOUBERT, P., SERGENT, A., LE QUÉRÉ, P. et PENOT, F. (2006). Three-dimensional numerical simulations of turbulent natural convection in an air-filled differentially heated cavity. *In Proceedings of the 13th International Heat Transfer Conference*.
- XIN, S., SALAT, J., JOUBERT, P., SERGENT, A., PENOT, F. et LE QUÉRÉ, P. (2013). Resolving the stratification discrepancy of turbulent natural convection in differentially heated air-filled cavities - Part III : A full convection–conduction–surface radiation coupling. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 42:33–48.
- YU, H., LI, N. et ECKE, R. E. (2007). Scaling in laminar natural convection in laterally heated cavities : is turbulence essential in the classical scaling of heat transfer? *Physical Review E*, 76.
- YÜCEL, A., ACHARYA, S. et WILLIAMS, M. L. (1989). Natural convection and radiation in a square enclosure. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 15:261–278.
- ZHANG, Y. F., VICQUELIN, R., GICQUEL, O. et TAINÉ, J. (2013). Physical study of radiation effects on the boundary layer structure in a turbulent channel flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 61:654–666.