



HAL
open science

Convergence asymptotique des niveaux de temps quasi-concaves dans un espace temps à courbure constante

Mehdi Belraouti

► **To cite this version:**

Mehdi Belraouti. Convergence asymptotique des niveaux de temps quasi-concaves dans un espace temps à courbure constante. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Avignon, 2013. Français. NNT : 2013AVIG0410 . tel-00978618

HAL Id: tel-00978618

<https://theses.hal.science/tel-00978618>

Submitted on 14 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ D'AVIGNON
ET DES PAYS DE VAUCLUSE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

ACADÉMIE D'AIX-MARSEILLE
UNIVERSITÉ D'AVIGNON ET DES PAYS DU VAUCLUSE

THÈSE

présentée à l'Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse
pour l'obtention du grade de Docteur

SPÉCIALITÉ : Mathématiques-Géométrie différentielle

École Doctorale numéro ED 536

Laboratoire de Mathématiques d'Avignon (EA 2151)

*Convergence asymptotique des niveaux de
temps quasi-concaves dans un espace-temps à
courbure constante*

par

Mehdi BELRAOUTI

Soutenue publiquement le 20 Juin 2013 devant un jury composé de :

Marie-Claude ARNAUD-DELABRIÈRE	Examineur
Thierry BARBOT	Directeur de thèse
Riccardo BENEDETTI	Rapporteur (Excusé)
François BÉGUIN	Rapporteur
Frederic PAULIN	Président
Jean-Marc SCHLENKER	Examineur
Abdelghani ZEGHIB	Examineur

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse Thierry Barbot. Combien j'essayerai, je ne saurais lui exprimer toute ma gratitude. Il a, durant ces années de thèse, dirigé mes travaux avec beaucoup d'intérêt et d'enthousiasme, me permettant ainsi d'apprendre de très belles mathématiques. J'ai pu bénéficier de son intuition, de ses conseils ainsi que de sa rigueur mathématique. Il a été à mes côtés tout au long de ce travail. Sa disponibilité et ses encouragements tant sur le plan personnel que professionnel ont été cruciaux.

Je remercie François Béguin pour les échanges bénéfiques que nous avons eu. Avec Riccardo Benedetti, je leur suis infiniment reconnaissant d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse, pour leurs remarques et conseils.

Frédéric Paulin, Jean-Marc Schlenker, Abdelghani Zeghib et Marie-Claude Arnaud me font le grand honneur de faire partie du jury de soutenance. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je me souviens d'Abdelghani Zeghib qui m'a fait découvrir le monde de la géométrie et grâce à qui j'ai rencontré Thierry Barbot. Au travers de nos nombreuses conversations, il a partagé ses intuitions et ses connaissances. Les mots sont insuffisants pour lui exprimer tout mon respect et ma reconnaissance.

Je remercie Marie-Claude Arnaud pour ses encouragements et sa gentillesse.

Je voudrais également remercier Francesco Bonsante pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, pour les enrichissantes conversations que j'ai eues avec lui.

Je remercie tous les membres du Laboratoire de Mathématiques d'Avignon pour leur amitié et leur soutien. Je tiens à remercier particulièrement Philippe Bolle et Andrea Venterelli pour leurs encouragements. Je remercie mon compagnon de route, Mohammed, pour son amitié, sa générosité, ses encouragements et sa disponibilité dans les moments difficiles. Je remercie Julie et Clara pour leur amitié et leur soutien.

Je remercie tous les membres de l'Institut Fourier qui m'ont accueilli en tant qu'ATER durant cette dernière année. Je remercie en particulier Benoît Klockner pour ses conseils et les discussions stimulantes que nous avons eues.

À mes parents qui m'ont donné tant d'affection et d'amour. Je dois à leur soutien inconditionnel toutes les plus belles choses qui me sont arrivées. Je ne les en remercierai jamais assez. À mes soeurs et frères, mes tantes et oncles, en particulier ma soeur Imene et tata Arbia (avec son excellent couscous) et à toute la grande famille. Un très grand merci à tous.

Enfin, je remercie tous mes amis d'Alger, de Lyon, d'Avignon et de Grenoble avec une pensée particulière pour Adem, Nassim, Mohamed, Salah, Izac, Jalal, Youssef et Michael.

À Maria et Meryem

Table des matières

0.1	De la géométrie lorentzienne au espaces métriques	7
0.2	Domaines réguliers, singularité initiale	11
0.3	Présentation des résultat	11
0.4	Organisation de la thèse	13
1	espace-temps, hyperbolicité globale et maximalité	14
1.1	espace-temps	14
1.1.1	La notion d'espace-temps	14
1.1.2	Orientation chronologique	15
1.1.3	Relations de causalité	16
1.2	Hyperbolicité globale	17
1.2.1	Une définition via les hypersurfaces de Cauchy	17
1.2.2	Une définition via les fonctions temps de Cauchy	18
1.2.3	Causalité forte, topologie d'Alexandrov et hyperbolicité globale	19
1.2.4	Une notion de compacité	20
1.3	Maximalité	21
2	Espaces métriques de longueur	22
2.1	Généralités sur les espaces métriques	22
2.2	Les espaces métriques de longueur	23
2.2.1	Une première définition	24
2.2.2	Une deuxième définition	25
2.3	Les espaces CAT(0)	26
2.4	Arbres réels	27
2.5	Les espaces hyperboliques au sens de Gromov	28
2.6	Diverses notions de convergence d'espaces métriques	29
2.6.1	Convergence compacte-ouverte	29
2.6.2	Convergence Lipschitz	30
2.6.3	4-Points limite	31
2.6.4	Convergence de Hausdorff-Gromov	31
2.6.5	Convergence de Hausdorff-Gromov pointée	34
2.6.6	Ultralimites	34
2.7	Convergence de Γ -espaces métriques	36
2.7.1	Convergence spectrale	36
2.7.2	Convergence compacte ouverte de Γ -espaces métriques	36
2.7.3	Ultra-limite de Γ -espaces métriques	37
2.7.4	Topologie de Gromov équivariante	37
2.7.5	Relations entre les différentes notions de convergence	38

3	Fonctions temps en expansion	40
3.1	espaces-temps plats	40
3.1.1	Espace de Minkowski	40
3.1.2	Domaines réguliers	43
3.1.3	espaces-temps <i>MGHC</i> non élémentaires	47
3.2	Fonction temps quasi-concave	49
3.2.1	Fonction temps cosmologique	49
3.2.2	Fonction temps CMC	50
3.2.3	Une propriété d'expansion des temps quasi-concaves	51
3.3	Convergence spectrale des niveaux d'un temps quasi-concave	52
4	Comportement asymptotique des hypersurfaces de Cauchy dans un espace-temps plat de dimension 2+1	55
4.1	Laminations géodésiques mesurées	55
4.2	Arbre réel dual à une lamination	57
4.3	Classification des espaces-temps <i>MGHC</i> non élémentaires via les laminations géodésiques mesurées	57
4.3.1	Domaines réguliers associés à une lamination géodésique mesurée	58
4.3.2	Lamination géodésique mesurée associée à un domaine régulier	59
4.4	La géométrie de la singularité initiale cosmologique	61
4.4.1	Comportement asymptotique des niveaux cosmologique	61
4.4.2	La structure d'arbre réel induite sur la singularité initiale	62
4.5	Convergence Gromov equivariante des niveaux d'un temps quasi-concave	63
5	Comportement asymptotique dans un espace-temps de Sitter	65
5.1	Classifications des espaces-temps de Sitter	65
5.1.1	Espace de Sitter	65
5.1.2	espace-temps dS standard : Première définition	68
5.1.3	espace-temps dS standard : Deuxième définition	69
5.2	Singularité initiale cosmologique d'un espace-temps de Sitter	71
5.2.1	Propriétés du temps cosmologique	71
5.2.2	Le bord passé d'un espace-temps de Sitter	72
5.3	Comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps quasi-concave	73
5.4	Classification des espaces-temps de Sitter de dimension 2 + 1 via les rotations de Wick	74
5.4.1	Rotation de Wick	74
5.4.2	Espaces dS standard associé à un domaine régulier plat	74
5.5	Convergence Gromov équivariante des niveaux d'un temps quasi-concave	76
6	Comportement asymptotique dans un espace-temps anti de-Sitter	79
6.1	Classification des espaces-temps anti de Sitter	79
6.1.1	L'espace anti-de Sitter	79
6.1.2	Domaine régulier de l'espace anti-de Sitter : Première définition	82
6.1.3	Domaine régulier de l'espace anti-de Sitter : deuxième définition	85
6.2	Singularité initiale cosmologique d'un espace-temps anti-de Sitter	86
6.2.1	Propriétés du temps cosmologique	87
6.2.2	Le bord passé d'un espace-temps anti-de Sitter	87
6.3	Comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps quasi-concave	88
6.4	Classification des espaces-temps anti-de Sitter de dimension 2 + 1 via les rotations de Wick	88
6.4.1	Domaine régulier anti-de Sitter associé à un domaine régulier plat	89

6.5	Convergence Gromov équivariante des niveaux d'un temps quasi-concave . . .	90
7	Comportement asymptotique dans un espace-temps plat de dimension supérieure à 2+1	93
7.1	espaces-temps <i>MGHC</i> élémentaires et comportement asymptotique	93
7.1.1	espaces-temps de translations	93
7.1.2	espace-temps de Misner	94
7.2	Une autre façon de voir les espaces-temps non élémentaires	95
7.3	Comportement asymptotique dans le passé	97
7.4	Comportement asymptotique dans le futur	102

Introduction

0.1 De la géométrie lorentzienne aux espaces métriques

Depuis le début du 20ème siècle, la géométrie lorentzienne s'est naturellement imposé comme la nouvelle géométrie à étudier. Poincaré disait à ce propos ([44]) :

”Parmi ces axiomes, il en est un qui semble mériter quelque attention, parce qu'en l'abandonnant, on peut construire une quatrième géométrie aussi cohérente que celle d'Euclide, de Lobatchevsky et de Riemann... Je ne citerai qu'un de ces théorèmes et je ne choisirai pas le plus singulier : une droite réelle peut être perpendiculaire à elle-même”.

Le développement de la géométrie lorentzienne est dû essentiellement à la théorie de la relativité générale ; la notion d'espace-temps telle qu'on la connaît aujourd'hui en est le pur fruit. Ainsi un espace-temps est une variété lorentzienne (munie d'une orientation temporelle) solution de la célèbre équation d'Einstein. Les moyens classiques et historiques de trouver des solutions de l'équation d'Einstein sont les suivantes :

1) La recherche des modèles cosmologiques qui sont des solutions particulières de l'équation d'Einstein possédant beaucoup de symétries. Ceci inclut le modèle de Robertson-Walker, développé dans les années 20, qui modélise la forme globale de l'univers et qui est à l'origine même de la théorie du Big Bang. Un autre exemple est celui du modèle de Schwarzschild-Kruskal, développé en 1916, destiné à modéliser la forme de l'univers au voisinage d'un astre sphérique isolé et qui est à l'origine du concept de trou noir.

2) La formulation sous forme d'un problème de Cauchy de l'équation d'Einstein, permettant de calculer numériquement quelques solutions de cette équation. Il s'agit :

- de se placer dans une variété différentiable $M \times \mathbb{R}$;
- de se fixer une métrique riemannienne et un champ H de formes bilinéaires sur M satisfaisant les équations de Gauss-Codazzi ;
- de chercher alors une métrique lorentzienne g satisfaisant l'équation d'Einstein, définie sur un voisinage de $M \times \{0\}$ et telle que le couple (h, H) soit égal à (g_0, Π) , où g_0 est la restriction à $M \times \{0\}$ de la métrique lorentzienne g et Π est la seconde forme fondamentale de $M \times \{0\}$.

Une autre question qui a intéressé les physiciens et les mathématiciens est de savoir quels sont les événements qui peuvent influencer un événement donné. En des termes plus mathématiques, quels sont les points de la variété lorentzienne qui peuvent être joints par une courbe causale i.e. une courbe dont tous les vecteurs tangents sont de norme négative ou nulle. On parle alors de théorie de la causalité. La grande partie de cette théorie a été développée durant la fin des années 60 et pendant les années 70 par Ellis, Geroch, Hawking, Penrose, Sachs, Wu et d'autres (voir [33], [35], [40], [46] et [17]) conduisant ainsi à la démonstration des célèbres théorèmes de singularités de Hawking et Penrose. Ces travaux se sont aussi soldés par l'établissement d'une hiérarchie entre les différentes notions de causalités, dont la plus forte et la plus importante est l'hyperbolicité globale. Pour les besoins de

cette introduction, mentionnons sobrement ici dans un premier temps la définition la plus rapide de cette notion dans un cas particulier : un espace-temps est *globalement hyperbolique spatialement compact* s'il admet une hypersurface de Cauchy compacte i.e une hypersurface plongée compacte telle que toute courbe causale inextensible la rencontre en un point et un seul. Un tel espace-temps, s'il est solution de l'équation d'Einstein, est dit *maximal* s'il n'admet pas d'extension qui soit toujours solution de l'équation d'Einstein et à courbure constante.

D'autres travaux plus récents sur la théorie de la causalité sont dûs à Bernal, Fathi, Sánchez et Siconolfi (voir [20], [21], [47], [31]).

La plupart des travaux actuels en géométrie lorentzienne tournent autour de ces différentes questions faisant de la géométrie lorentzienne un pont reliant l'analyse à la géométrie différentielle.

Un aspect important de la géométrie lorentzienne qui demeure toujours insuffisamment étudié est celui des espaces-temps à courbure constante. Du point de vue de la relativité générale, ces espaces-temps sont très restrictifs. Cependant, la découverte des trous noirs *BTZ* par les physiciens au début des années 90 a constitué une importante source d'intérêt pour les espaces-temps à courbure constante puisqu'alors un phénomène comme "*l'existence du trou noir*" qu'on pensait relié à l'explosion de la courbure, pouvait se produire dans un espace-temps à courbure constante. Les espaces-temps à courbure constante ont aussi joué, depuis la fin des années 80, un rôle central dans l'élaboration et l'étude de la théorie de la gravité quantique en dimension 3.

D'un point de vue mathématique, ces espaces-temps constituent une famille à la fois importante et naturelle dans laquelle on peut espérer comprendre beaucoup de questions fondamentales. Bien qu'ils possèdent une géométrie locale triviale, leur géométrie globale est beaucoup plus riche. Jusqu'au début des années 90, l'intérêt pour ces espaces-temps était limité et se réduisait essentiellement au cas compact, ce qui n'est pas pertinent du point de vue de la causalité puisqu'alors la relation de causalité est triviale.

Dans [51], Witten proposait de classer les espaces temps globalement hyperboliques à courbure constante. Une première réponse à ce problème est venue de Mess dans [38], où il classe les espaces-temps plats et anti-de Sitter globalement hyperboliques spatialement compacts maximaux de dimension $2 + 1$. De manière plus précise, il établit une correspondance bijective entre ces espaces-temps et les laminations géodésiques mesurées sur les surfaces hyperboliques compactes. La réponse à la question de Witten dans le cas de Sitter est venue un peu plus tard dans la thèse de Scannell [48], où sont classifiés les espaces-temps globalement hyperboliques Cauchy compacts maximaux localement de Sitter et de dimension quelconque. Vient ensuite le travail de Barbot [9], qui donne une classification complète des espaces-temps globalement hyperboliques Cauchy compacts maximaux plats de dimension quelconque. Bonsante ([25]) a complété ensuite cette classification en introduisant et en étudiant la notion de domaine régulier plat ; une notion qui par la suite va s'avérer fondamentale.

Un des résultats de la théorie de la causalité est la caractérisation alternative suivante, due à Geroch ([33]), de l'hyperbolicité globale : un espace-temps est globalement hyperbolique si et seulement s'il admet une fonction temps de Cauchy, c'est-à-dire une fonction $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante le long des courbes causales dont la restriction de à n'importe quelle courbe causale inextensible est surjective. Ainsi, l'existence de fonction temps de Cauchy dont les niveaux ont une géométrie canonique constitue un problème important (autant d'un point de vue mathématique que physique) à étudier ; on parle alors de fonction temps géométrique. On retrouve dans ce sens :

1) Le temps cosmologique qui est défini en un point p comme étant la borne supérieure des longueurs des courbes causales passées issues de p : son importance dans notre cadre se devine déjà dans le fait que dans le cas d'un espace-temps globalement hyperbolique spa-

tialement compact maximal plat de dimension quelconque, le temps cosmologique est de Cauchy (voir [25], [9]). Il est aussi de Cauchy dans le cas d'un espace-temps globalement hyperbolique spatialement compact maximal de Sitter ou anti de Sitter de dimension $2 + 1$, au moins dans un voisinage de la singularité initiale (voir [18]).

2) Le temps *CMC* : il s'agit d'une fonction temps de Cauchy $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ dont les niveaux $T^{-1}(a)$ sont à courbure moyenne constante a . L'existence d'une telle fonction est montrée par Andersson, Moncrief et Tromba [8] dans le cadre d'un espace-temps globalement hyperbolique de dimension $2 + 1$ admettant une hypersurface de Cauchy à courbure moyenne constante. Ultérieurement, l'existence de la fonction temps *CMC* est montrée par Andersson [2] dans le cadre d'un espace-temps globalement hyperbolique spatialement compact maximal plat de dimension quelconque mais sous des hypothèses restrictives. Dans [15], Barbot, Béguin et Zeghib montrent l'existence et l'unicité de la fonction temps *CMC* dans le cadre d'un espace-temps globalement hyperbolique spatialement compact maximal plat de dimension $2 + 1$. Ce travail est suivi par le papier [16], toujours par les mêmes personnes, où ils montrent l'existence et l'unicité de la fonction temps *CMC* dans le cadre d'un espace-temps globalement hyperbolique spatialement compact anti-de Sitter de dimension $2 + 1$. Le résultat de [15] est généralisé dans [4] par Andersson, Barbot, Béguin et Zeghib au cas d'un espace-temps globalement hyperbolique spatialement compact maximal plat ou anti-de Sitter de dimension quelconque. Dans [4], il a été montré qu'un espace-temps globalement hyperbolique spatialement compact maximal de Sitter de type hyperbolique, de dimension $2 + 1$ admet une fonction temps *CMC*. Les choses se compliquent davantage en dimension supérieure pour ne donner qu'une existence locale de la fonction temps *CMC* (voir [4]).

3) Le *K*-temps : il s'agit d'une fonction temps de Cauchy $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ dont les niveaux $T^{-1}(a)$ sont à *K*-courbure (courbure de Gauss-Killing-Kronecker-Lipschitz) égale à a . Dans [10], Barbot, Béguin et Zeghib montrent l'existence et l'unicité d'une telle fonction dans le cadre d'un espace-temps de dimension trois à courbure constante. Plus précisément, ils montrent que tout espace-temps plat ou de Sitter globalement hyperbolique spatialement compact maximal de dimension trois admet un unique *k*-temps. Dans le cas d'un espace-temps globalement hyperbolique spatialement compact maximal localement anti-de Sitter, l'existence (et l'unicité) est montrée en dehors du coeur convexe.

Ces différentes fonctions temps (cosmologique, *CMC* et *K*-temps) ont certaines propriétés géométriques en commun ; la convexité qu'on définit comme suit en est la plus importante : une hypersurface $S \subset M$ est convexe si son futur est localement géodésiquement convexe (cette définition est équivalente à la positivité de la seconde forme fondamentale dans le cadre C^2). Plus précisément

1) Le temps cosmologique est une fonction temps concave (et donc à niveau convexe) dans le cas d'un espace-temps plat (voir [25]). Dans le cas d'un espace-temps de Sitter la convexité des niveaux cosmologique a été montrée par Scannell [48]. Cependant, les niveaux du temps cosmologique ne sont convexes qu'au voisinage de la singularité initiale dans un espace-temps anti-de Sitter.

2) Le temps *CMC* est une fonction temps à niveaux convexes dans le cas plat : un résultat surprenant dû à Treibergs [50] montre que les hypersurfaces *CMC* de l'espace de Minkowski sont convexes (ou concaves). La convexité n'est plus assurée dans le cadre de Sitter et anti-de Sitter.

3) Par définition même, le *K*-temps est une fonction à niveaux convexes qu'il soit défini sur un espace-temps plat, de Sitter ou anti de Sitter.

Se distingue alors une famille particulière de fonctions temps de Cauchy, qu'on appelle les fonctions temps *quasi-concaves* : celles dont les niveaux sont convexes.

Soit M un espace-temps globalement hyperbolique spatialement compact maximal à courbure constante. La donnée d'une fonction temps de Cauchy $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ définit naturellement une famille à un paramètre de variétés riemanniennes $(T^{-1}(a), g_a)_{a \in \mathbb{R}}$ ou, de manière équivalente, à une famille à un paramètre $(T^{-1}(a), d_a)$ d'espaces métriques. Se pose alors la question naturelle et importante, qui fait l'objet d'étude dans cette thèse, du comportement de ce type de famille vis à vis du temps et ce dans deux cas de figure : quand le temps tend vers 0 et quand il tend vers l'infini. Bien sûr, des conditions géométriques supplémentaires sur la fonction temps choisie seront nécessaires pour une étude plus appropriée. Il se trouve qu'ici dans notre cas la quasi-concavité des fonctions temps est la condition la mieux adaptée : elle permet en quelque sorte d'assurer l'existence des limites au moins quand le temps tend vers 0.

Une source de motivation qui nous conduit à l'étude du comportement asymptotique des hypersurfaces de Cauchy est celle de donner un sens mathématique à la notion de *singularité initiale*. Plus précisément : une particularité importante des espaces-temps globalement hyperboliques spatialement compacts à courbure constante, au moins dans les cas plats et de Sitter, est qu'une fois convenablement temporellement orientés, ils sont géodésiquement complets dans le futur, mais par contre sont toujours incomplets vers le passé (sauf dans les cas élémentaires) ; on dit alors qu'ils admettent une singularité initiale. Donner un sens mathématique à un tel objet constitue un problème important en relativité générale. Il existe dans la littérature plusieurs façons d'associer un bord à un espace-temps ; on citera par exemple le bord de Penrose ou la *b*-boundary. Cependant, ces constructions ne sont généralement pas uniques comme c'est le cas avec le bord de Penrose et présentent toutes des inconvénients. On espère alors, à travers l'étude d'une telle question, donner un sens le plus intrinsèque possible à la notion de singularité initiale.

Pour les notions de convergence, le cadre dans lequel il convient de se placer est celui des Γ -espaces métriques : des espaces métriques munis d'une action isométrique d'un groupe Γ de type fini. Dans notre situation, la fonction temps de Cauchy $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ se relève en une fonction temps de Cauchy $\pi_1(M)$ -invariante $\tilde{T} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ sur le revêtement universel \tilde{M} de M ; on obtient ainsi une famille à un paramètre $(\pi_1(M), \tilde{T}^{-1}(a), \tilde{d}_a)$ de $\pi_1(M)$ -espaces métriques, dont nous nous attachons à étudier le comportement asymptotique. En particulier nous nous retrouvons à étudier trois types remarquables de famille : celle associée au temps cosmologique, celle associée au temps *CMC* et enfin celle associée au *K*-temps.

Une autre source de motivation pour nous est celle du comportement asymptotique dans l'espace de Teichmüller. Plus précisément : on se place dans un espace-temps M globalement hyperbolique spatialement compact de dimension $2 + 1$ admettant une surface de Cauchy S de genre ≥ 2 . Une fonction temps de Cauchy $T : M \rightarrow]0, +\infty[$ définit naturellement une courbe (S, g_a^T) dans l'espace $\text{Met}(S)$ des métriques riemanniennes sur S . Ceci nous permet d'étudier le comportement de la projection $(S, [g_a^T])$ de (S, g_a^T) dans l'espace de Teichmüller $\text{Teich}(S)$ qui, en tant qu'espace topologique, est plus sympathique que l'espace de $\text{Met}(S)$. Notre étude du comportement asymptotique s'inscrit alors en quelque sorte dans la continuité des travaux, apportant une interprétation géométrique à la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller, de Paulin ([41], [42]) et Bestvina ([22]).

La famille des $\pi_1(M)$ -espaces métriques pouvant être munie de plusieurs types de topologie, une autre question se pose alors implicitement quand on parle de comportement asymptotique : quelle est la topologie la mieux adaptée à notre problème ? Les candidats potentiels à ce rôle sont :

- la topologie de la convergence uniforme ;
- la topologie de Gromov équivariante ;
- ou encore la topologie spectrale.

Nous renvoyons au chapitre 2 pour les définitions de ces différentes notions de convergence. La plus faible de ces topologies, la topologie spectrale, est la plus facile à démontrer ; nous l'établirons dans cette thèse dans la plupart des cas. La plus forte, celle de la convergence uniforme, implique la topologie de Gromov équivariante, et nous parviendrons à l'établir dans certains cas.

0.2 Domaines réguliers, singularité initiale

La notion de domaine régulier (voir section 3.1.2) est une notion importante et centrale dans la classification des espaces-temps plats. Ainsi un espace-temps globalement hyperbolique spatialement compact maximal plat est obtenu comme le quotient d'un convexe Ω de l'espace de Minkowski, appelé domaine régulier, par un sous groupe discret sans torsion du groupe d'isométries de l'espace de Minkowski. Cette notion a été introduite séparément par Barbot (voir [9]) et Bonsante (voir [25]). Ces domaines ont la particularité d'être soit géodésiquement complets dans le futur soit géodésiquement complets dans le passé.

Soit Ω un domaine régulier. Quitte à inverser l'orientation chronologique, on peut supposer qu'il est complet dans le futur. Son bord $\partial\Omega$ est le graphe d'une application 1-lipschitzienne convexe ; il admet donc une pseudo-distance d_Ω : la pseudo-distance entre deux points de $\partial\Omega$ est la borne inférieure de la longueur des chemins reliant ces deux points et contenus dans $\partial\Omega$. Le $\pi_1(M)$ -pseudo-espace métrique $(\partial\Omega, d_\Omega)$ sera appelé l'horizon. Soit Σ le sous-ensemble des points de $\partial\Omega$ par lesquels passe un hyperplan support à Ω de type espace. D'après un résultat de Bonsante, la restriction de la pseudo-distance d_Ω à Σ s'avère être une distance qu'on note d_Σ : le $\pi_1(M)$ -espace métrique (Σ, d_Σ) est alors appelé singularité initiale. Un des objectifs de notre thèse sera la généralisation de la notion de singularité initiale aux espaces-temps de Sitter et anti de Sitter (au moins dans le cas de la dimension $2 + 1$) ainsi que l'étude de ses propriétés.

0.3 Présentation des résultats

Dans [19], Benedetti et Guadagnini étaient les premiers à soulever le problème du comportement asymptotique lorentzien. Ils ont observé que la famille à un paramètre de $\pi_1(M)$ -espaces métriques associée au temps cosmologique dans le cas plat convergeait probablement pour la topologie de Gromov équivariante vers la singularité initiale. Cette intuition a été prouvée ultérieurement par Bonsante dans sa thèse (voir [25]). Benedetti et Guadagnini conjecturaient aussi que dans le cas d'un espace-temps plat de dimension $2 + 1$, les niveaux *CMC* devaient converger spectralement vers la singularité initiale. Une première réponse positive à cette question est apportée par Andersson [3], dans un cas très restrictif : celui des espaces-temps plats "simpliciaux" de dimension quelconque (comme nous ne considérons pas cette notion dans cette thèse, il n'est pas utile ici d'en donner la définition). Notre premier résultat consiste à étendre ce résultat à des espaces-temps plats quelconques (non nécessairement simpliciaux), et ce dans le cas d'une fonction temps quasi-concave quelconque. Nous apportons ainsi une réponse positive à la conjecture de Benedetti et Guadagnini, et ce, en toute dimension :

Théorème A. *Soit M un espace-temps plat (de Sitter ou anti-de Sitter) globalement hyperbolique spatialement compact maximal non élémentaire de dimension quelconque. Il existe alors un $\pi_1(M)$ -espace métrique $(\pi_1(M), X, d)$ tel que pour toute fonction temps de Cauchy T quasi-concave C^2 définie sur M , les niveaux de \tilde{T} munis de l'action de $\pi_1(M)$, où \tilde{T} est le relèvement de T au revêtement universel \tilde{M} de M , convergent quand le temps tend vers 0 pour la topologie spectrale vers $(\pi_1(M), X, d)$. De plus dans le cas plat, la limite n'est autre que la singularité initiale $(\pi_1(M), \Sigma, d_\Sigma)$ associée à M .*

Notre deuxième résultat consiste à traiter le comportement asymptotique passé dans le cadre particulier de la dimension $2 + 1$:

Théorème B. *Soit $M(\lambda, \mu)$ un espace-temps plat (respectivement de Sitter, anti-de Sitter) globalement hyperbolique spatialement compact maximal futur complet de dimension $2 + 1$, où (λ, μ) est la lamination géodésique mesurée qui lui est associée. Soit T une fonction de Cauchy C^2 quasi-concave définie sur M . Alors les niveaux de \tilde{T} , le relèvement de T au revêtement universel \tilde{M} de M , munis de l'action de $\pi_1(M)$ convergent quand le temps tend vers 0 pour la topologie de Gromov équivariante vers l'arbre réel dual à la lamination géodésique mesurée (λ, μ) .*

Notre troisième résultat traite les propriétés de la singularité initiale passé en dimension supérieure à $2 + 1$ dans le cas plat :

Théorème C. *Soit M un espace-temps plat globalement hyperbolique spatialement compact maximal non élémentaire de dimension quelconque. Soit Ω^+ son domaine régulier futur complet associé. Notons respectivement par (Σ, d_Σ) , $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ et $(\partial\Omega^+ / \sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ la singularité initiale, son complété et le métrisé de l'horizon associés à M . Alors :*

- (Σ, d_Σ) se plonge isométriquement dans $(\partial\Omega^+ / \sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ qui à son tour se plonge isométriquement dans $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$;
- pour tout x et y dans Σ il existe une unique géodésique α de $(\partial\Omega^+ / \sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ reliant x à y ;
- l'espace métrique $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ est un espace $CAT(0)$.

Nous espérons montrer un peu plus i.e que $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ soit hyperbolique au sens de Gromov voire même un arbre réel ?

Notre quatrième résultat traite le comportement asymptotique passé en dimension supérieure à $2 + 1$ dans le cas plat et constitue une sorte de généralisation du Théorème B :

Théorème D. *Soit M un espace-temps plat globalement hyperbolique spatialement compact maximal non élémentaire de dimension quelconque. Soit T une fonction de Cauchy C^2 quasi-concave définie sur M . Les niveaux de \tilde{T} , le relèvement de T au revêtement universel \tilde{M} de M , munis de l'action isométrique de $\pi_1(M)$ convergent quand le temps tend vers 0 pour la topologie de Gromov équivariante vers un espace métrique $CAT(0)$. De plus, la limite ne dépend pas de la fonction temps choisie.*

Une autre interrogation, elle aussi évoquée par Benedetti et Guadagnini dans [19], concerne le comportement asymptotique futur. Un premier résultat dans ce sens est apporté par Bonsante ([25]) dans le cas du temps cosmologique d'un espace-temps plat. Notre quatrième résultat consiste à traiter, dans le cas plat, cette question pour une fonction temps quasi-concave :

Théorème E. *Soit M un espace-temps plat globalement hyperbolique spatialement compact de dimension quelconque. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction temps T quasi-concave C^2 , les niveaux de \tilde{T} , le relèvement de T au revêtement universel \tilde{M} de M , convenablement renormalisés près de l'infini sont C -quasi-isométriques à la variété hyperbolique compacte $\mathbb{H}^n / \pi_1(M)$. En particulier, les niveaux de T renormalisés admettent des valeurs d'adhérences pour la topologie de Gromov équivariante, et toutes ces valeurs d'adhérences sont C -quasi-isométriques les unes aux autres.*

0.4 Organisation de la thèse

Cette thèse comporte sept chapitres. On trouve dans le :

Chapitre 1 Une introduction à la géométrie lorentzienne : on y définit certaines notions de bases telle que la notion d'espace-temps, l'hyperbolicité globale, les fonctions temps de Cauchy.

Chapitre 2 Un panorama sur les espaces métriques (et les pseudo-espaces métriques) où on présente différentes notions classiques de convergence d'espaces métriques.

Chapitre 3 Une étude approfondie du caractère expansif des fonctions temps quasi-concave dans le cas d'un espace-temps plat qui nous mène à la démonstration du Théorème A dans le cas plat.

Chapitre 4 Une étude du comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps quasi-concave dans le cadre d'un espace-temps plat de dimension $2 + 1$, ce qui nous mène à la démonstration du Théorème B dans le cas plat.

Chapitre 5 Une étude du comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps quasi-concave dans le cadre d'un espace-temps de Sitter de dimension $2 + 1$, ce qui nous mène à la démonstration du Théorème A ainsi que le Théorème B dans le cas de Sitter.

Chapitre 6 Une étude du comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps quasi-concave dans le cadre d'un espace-temps anti-de Sitter de dimension $2 + 1$, ce qui nous mène à la démonstration du Théorème A ainsi que le Théorème B dans le cas anti-de Sitter.

Chapitre 7 Une étude de la singularité initiale et du comportement asymptotique dans le cadre d'un espace-temps plat de dimension quelconque, ce qui nous mène à la démonstration des Théorèmes D et E.

Chapitre 1

espace-temps, hyperbolicité globale et maximalité

Dans cette partie, nous passons en revue quelques notions classiques de géométrie lorentzienne, notamment les notions de :

- espace-temps : variété lorentzienne, relation de causalité, orientation chronologique.
- Hyperbolicité globale : hypersurfaces de Cauchy, fonction temps de Cauchy.
- Maximalité.

Pour les démonstrations et plus de détails nous renvoyons à [17], [40], [12].

1.1 espace-temps

1.1.1 La notion d'espace-temps

Soit M une variété différentiable lisse de dimension $n + 1$.

Définition 1.1.1. Une métrique lorentzienne g sur M est une métrique pseudo-riemannienne de signature $(1, n)$ i.e une application $TM \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que sa restriction sur chaque espace tangent $T_p M$ à M est une forme quadratique non dégénérée de signature $(1, n)$.

Définition 1.1.2. Le couple (M, g) est appelé une variété lorentzienne.

Exemple 1.1.3. Considérons l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+1} , muni de sa base canonique (e_0, e_1, \dots, e_n) . On définit la forme quadratique $q_{1,n} = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ où (x_0, x_1, \dots, x_n) désignent les coordonnées dans la base canonique. L'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ est la variété lorentzienne $(\mathbb{R}^{1,n}, q_{1,n})$.

Exemple 1.1.4. Soit (N, h) une variété riemannienne. Alors la variété produit $\mathbb{R} \times N$ munie de la métrique produit $-dt^2 \oplus h$ est une variété lorentzienne.

Remarque 1.1.5. Contrairement au cas riemannien, toute variété n'admet pas de métrique lorentzienne. En effet, le fibré tangent d'une variété lorentzienne admet un sous fibré de dimension 1, ce que certaines variétés n'admettent pas. Par exemple dans le cas d'une variété différentiable compacte, l'existence d'un sous fibré du fibré tangent de M est équivalent à l'annulation de la caractéristique d'Euler de M (voir [49, Théorème 40.11, Corollaire 40.12, Théorème 40.13]). Ainsi les seules variétés compactes de dimension 2 qui admettent des métriques lorentziennes sont le tore et la bouteille de Klein.

Définition 1.1.6. Soit (M, g) une variété lorentzienne. Soit v un vecteur de $T_p M$, où p est dans M . Alors le vecteur v est :

- de type espace si $g_p(v, v) \geq 0$;
- de type temps si $g_p(v, v) < 0$;
- de type lumière (isotrope) si $g_p(v, v) = 0$ et $v \neq 0$;
- de type causal s'il est de type temps ou de type lumière.

Notons ainsi que selon ces conventions, un vecteur de type temps ou lumière n'est jamais nul.

Dans le même esprit on a la définition suivante :

Définition 1.1.7. Soit (M, g) une variété lorentzienne. Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe C^1 . Alors la courbe α est :

- de type espace si $\dot{\alpha}(s)$ est de type espace pour tout s dans $[0, 1]$;
- de type temps si $\dot{\alpha}(s)$ est de type temps pour tout s dans $[0, 1]$;
- de type lumière si $\dot{\alpha}(s)$ est de type lumière pour tout s dans $[0, 1]$;
- de type causale si $\dot{\alpha}(s)$ est de type causal pour tout s dans $[0, 1]$.

Définition 1.1.8. Une courbe causale $\alpha : I \rightarrow M$ est dite inextensible s'il n'existe aucune courbe causale $\beta : J \rightarrow M$ telle que J contient strictement I et $\beta|_I = \alpha$.

1.1.2 Orientation chronologique

Soit (M, g) une variété lorentzienne. Chaque espace tangent de M étant muni d'une structure d'espace de Minkowski, les vecteurs de type temps de TM définissent en fait un champ de cônes au dessus de M . Chaque cône C_p est l'union de deux demi-cônes et un choix continu d'un de ces deux demi-cônes dans chaque espace tangent est ce qu'on appelle une orientation chronologique sur M . Plus formellement :

Définition 1.1.9. On dit que la variété lorentzienne (M, g) est chronologiquement orientée si elle admet un champ de vecteurs continu $\xi : M \rightarrow TM$ qui est partout de type temps.

Exemple 1.1.10. Le champ de vecteurs constant partout égal à e_0 est un champ de vecteurs partout de type temps qui définit une orientation chronologique sur l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$.

Théorème 1.1.11. ([17, Théorème 2.3]). Toute variété lorentzienne admet un revêtement double chronologiquement orientable.

Définition 1.1.12. Un espace-temps est une variété lorentzienne (M, g) orientée et chronologiquement orientée.

Exemple 1.1.13. L'espace de Minkowski muni de l'orientation chronologique définie dans 1.1.10 est un espace-temps.

Soit (M, g) une variété lorentzienne. Soit $\xi : M \rightarrow TM$ une orientation chronologique de (M, g) i.e un champ de vecteurs continu partout de type temps.

Définition 1.1.14. Soit v un vecteur dans $T_p M$, où p est dans M , de type causal. On dit que :

- v est orienté vers le futur si $g_p(v, \xi_p) < 0$;
- v est orienté vers le passé sinon i.e $g_p(v, \xi_p) > 0$.

Remarque 1.1.15. Si $\xi' : M \rightarrow TM$ est un champ de vecteurs continu partout de type temps, alors $g(\xi, \xi')$ est partout non nul et donc soit partout négatif soit partout positif. Dans le premier cas, un vecteur v qui est orienté vers le futur vérifie forcément $g(v, \xi') < 0$

ce qui montre qu'il est aussi orienté vers le futur pour l'orientation chronologique définie sur M par ξ' . Dans le deuxième cas, un vecteur v qui est orienté vers le futur est en fait orienté vers le passé pour l'orientation chronologique définie sur M par ξ' . Une variété lorentzienne chronologiquement orientable admet donc exactement deux orientations chronologiques.

1.1.3 Relations de causalité

Soit (M, g) un espace-temps.

Définition 1.1.16. Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe C^1 de type causal. On dit que :

- la courbe α est orientée vers le futur si pour tout s dans $[0, 1]$, $\dot{\alpha}(s)$ est orienté vers le futur ;
- la courbe α est orientée vers le passé si pour tout s dans $[0, 1]$, $\dot{\alpha}(s)$ est orienté vers le passé.

Remarque 1.1.17. On peut définir l'orientation chronologique d'une courbe causale C^1 par morceaux. Cependant, il faut pour cela qu'à chaque point de discontinuité de la dérivée, le vecteur limite à gauche et le vecteur limite à droite soit simultanément orientés vers le futur ou vers le passé.

Remarque 1.1.18. Dans la suite on utilisera l'abréviation courbe causale future (respectivement passée) pour signifier une courbe causale orientée vers le futur (respectivement le passé).

Définition 1.1.19. Soient p et q deux points de M . On dit que q est dans le futur strict de p ou de manière équivalente que p est dans le passé strict de q s'il existe une courbe $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ future de type temps C^1 par morceaux de p à q .

Exemple 1.1.20. Dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$, un point q est dans le futur strict d'un autre point p si et seulement si $\mathfrak{q}_{1,n}(q - p, q - p) < 0$ et $\mathfrak{q}_{1,n}(q - p, e_0) < 0$.

Définition 1.1.21. On appelle futur strict (respectivement le passé strict) d'un point p de M et on note $I^+(p)$ (respectivement $I^-(p)$) l'ensemble des points q dans M qui sont dans le futur strict (respectivement dans le passé strict) de p .

De façon analogue on définit :

Définition 1.1.22. On appelle futur causal (respectivement le passé causal) d'un point p de M et on note $J^+(p)$ (respectivement $J^-(p)$) l'ensemble des points q dans M qui sont dans le futur causal (respectivement dans le passé causal) de p .

Considérons les deux relations \prec et \preceq définies par : $p \prec q$ si et seulement si $q \in I^+(p)$ et $p \preceq q$ si et seulement si $q \in J^+(p)$.

Proposition 1.1.23. Les relations \prec et \preceq sont transitives.

Lemme 1.1.24. ([17, Lemme 2.5]). Soit p dans M . Alors $I^+(p)$ et $I^-(p)$ sont ouverts.

Remarque 1.1.25. On peut aussi de manière générale parler du futur strict (passé strict, futur causal, passé causal) d'un sous-ensemble A donné de M . On les note alors respectivement $I^+(A)$, $I^-(A)$, $J^+(A)$ et $J^-(A)$. Notons que $A \subset J^\pm(A)$.

Remarque 1.1.26. Dans toute la suite de cette thèse, nous utiliserons le terme futur pour désigner le futur strict.

Définition 1.1.27. Un sous ensemble A de M est dit futur (respectivement passé) s'il est égal à son futur (respectivement son passé).

Définition 1.1.28. *Un espace-temps (M, g) est dit futur complet (respectivement passé complet) si toute géodésique causale inextensible est complète dans le futur (respectivement dans le passé).*

Exemple 1.1.29. *Le futur d'un hyperplan de type lumière ou de type espace de l'espace de Minkowski est un espace-temps futur complet.*

1.2 Hyperbolicité globale

1.2.1 Une définition via les hypersurfaces de Cauchy

Soit (M, g) un espace-temps de dimension $n + 1$.

Définition 1.2.1. *Soit V un ouvert de M . Un sous-ensemble $S \subset V$ est dit achronal relativement à V s'il n'existe aucune courbe de type temps contenue dans V qui relie deux points de S . Lorsque $V = M$, on dit simplement que S est achronal.*

Définition 1.2.2. *Soit V un ouvert de M . Un sous-ensemble $S \subset V$ est dit acausal relativement à V s'il n'existe aucune courbe de type causale contenue dans V qui relie deux points de S . Lorsque $V = M$, on dit simplement que S est acausal.*

Définition 1.2.3. *Un sous ensemble S de M est dit :*

- *localement achronal si pour tout point p de S , il existe un voisinage V de p dans M tel que $V \cap S$ est achronal relativement à V ;*
- *localement acausal si pour tout point p de S , il existe un voisinage V de p dans M tel que $V \cap S$ est acausal relativement à V .*

Définition 1.2.4. *Un sous ensemble S de M est localement achronal sans bord si pour tout point p de S , il existe un voisinage V de p dans M tel que :*

- *$V \cap S$ est achronal relativement à V ;*
- *toute courbe causale de V reliant un point dans le futur de p et un point dans le passé de p rencontre S .*

Remarque 1.2.5. *De manière analogue, on définit la notion de partie localement acausale sans bord.*

Exemple 1.2.6. *Une hypersurface proprement plongée lisse de type espace i.e dont tout les vecteurs tangents sont de type espace est un exemple typique de sous-ensemble localement acausal sans bord.*

Nous venons maintenant à la notion de développement de Cauchy :

Définition 1.2.7. *Soit S un sous-ensemble achronal de M . On appelle :*

- *développement de Cauchy futur de S , qu'on note $\mathbf{D}^+(S)$, l'ensemble des points p dans $J^+(S)$ tels que toute courbe causale passée inextensible issue de p rencontre S ;*
- *développement de Cauchy passé de S , qu'on note $\mathbf{D}^-(S)$, l'ensemble des points p dans $J^-(S)$ tels que toute courbe causale future inextensible issue de p rencontre S ;*
- *développement de Cauchy de S , qu'on note $\mathbf{D}(S)$, la réunion de $\mathbf{D}^+(S)$ et de $\mathbf{D}^-(S)$.*

Remarque 1.2.8. *Notons qu'on a toujours $S \subset \mathbf{D}(S)$.*

Définition 1.2.9. *Une hypersurface de Cauchy de M est une partie achronale sans bord S de M telle que $\mathbf{D}(S) = M$. En d'autres termes, c'est une hypersurface de M telle que toute courbe causale inextensible de M la rencontre en un unique point.*

Définition 1.2.10. *Un espace-temps (M, g) est dit globalement hyperbolique s'il admet une hypersurface de Cauchy.*

Exemple 1.2.11. *L'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ est un espace-temps globalement hyperbolique. Les hyperplans de dimension n de type espace sont des hypersurfaces de Cauchy.*

1.2.2 Une définition via les fonctions temps de Cauchy

Soit (M, g) un espace-temps.

Définition 1.2.12. Une fonction temps sur (M, g) est une application continue $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui est strictement croissante le long des courbes causales futures.

Remarque 1.2.13. Notons que les niveaux d'une fonction temps sont toujours acausaux.

Définition 1.2.14. Une fonction temps $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ est dite temporelle si elle est de classe C^1 et si son gradient ∇T est partout de type temps.

Exemple 1.2.15. Soit (N, h) une variété riemannienne et soit M l'espace-temps produit direct de N et \mathbb{R} i.e $(\mathbb{R} \times N, -dt^2, -dt^2 \oplus h)$. Alors la fonction $T : \mathbb{R} \times N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(t, x) = t$ est une fonction temps.

Nous allons maintenant définir le temps cosmologique. Le temps cosmologique est en fait un candidat potentiel de fonction temps et même, comme nous allons le voir dans la suite, un outil précieux et incontournable tout au long de cette thèse.

Définition 1.2.16. Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe causale C^1 par morceaux. Le temps propre de α , noté $\mathcal{L}(\alpha)$, est défini comme suite :

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int \sqrt{-|\dot{\alpha}(s)|^2}$$

Considérons la fonction $T_{cos} : M \rightarrow]0, +\infty]$ définie par :

$$T_{cos}(p) = \sup \{ \mathcal{L}(\alpha) : \alpha \text{ courbe causale passée issue de } p \}$$

Définition 1.2.17. La fonction T_{cos} est le temps cosmologique.

Le temps cosmologique peut prendre des valeurs infinies ; il peut même être partout infini comme c'est le cas dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ - et il peut donc en général ne pas être une fonction temps !

Définition 1.2.18. Le temps cosmologique $T_{cos} : M \rightarrow]0, +\infty]$ est dit régulier si :

- T_{cos} prend partout des valeurs fini ;
- pour toute courbe causale passée inextensible $\alpha : [0, +\infty[\rightarrow M$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} T_{cos}(\alpha(s)) = 0$.

Théorème 1.2.19. ([5, Théorème 1.2]). Soit (M, g) un espace-temps à temps cosmologique T_{cos} régulier. Alors :

- M est globalement hyperbolique ;
- le temps cosmologique est une fonction temps ;
- le temps cosmologique T_{cos} est localement lipschitzienne et admet une dérivée et une dérivée seconde presque partout.

Remarque 1.2.20. L'inverse du théorème 1.2.19 n'est pas vrai : l'espace de Minkowski est bien globalement hyperbolique mais n'est pas à temps cosmologique régulier.

Définition 1.2.21. Une fonction temps $T : M \rightarrow]a, b[$ (avec $a < b$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$) est dite fonction temps de Cauchy si sa restriction à toute courbe causale inextensible est surjective.

Bien évidemment, les niveaux d'une fonction temps de Cauchy sont des hypersurfaces de Cauchy et donc :

Proposition 1.2.22. Soit (M, g) un espace-temps. On suppose que M admet une fonction temps de Cauchy $T : M \rightarrow]a, b[$. Alors (M, g) est un espace-temps globalement hyperbolique.

La réciproque est beaucoup moins évidente mais reste tout de même vraie comme le montre le théorème suivant :

Théorème 1.2.23. ([33], [46, page 1155]). *Un espace-temps est globalement hyperbolique si et seulement s'il admet une fonction temps de Cauchy.*

Le Théorème 1.2.23 peut être lissé comme le montre le résultat suivant :

Théorème 1.2.24. ([20, Théorème 1]). *Toute variété lorentzienne globalement hyperbolique admet une fonction temps de Cauchy lisse.*

Remarque 1.2.25. *Une autre preuve du théorème reposant sur des techniques de KAM faible et entièrement indépendante de celle de [20] est donnée dans [31, Théorème 1.3].*

Remarque 1.2.26. *Bien sûr, il se peut que le temps cosmologique soit régulier sans qu'il soit pour autant un temps de Cauchy.*

Une conséquence immédiate du Théorème 1.2.23 est :

Corollaire 1.2.27. ([12, Proposition 8.25]). *Le revêtement universel d'un espace-temps globalement hyperbolique est globalement hyperbolique.*

1.2.3 Causalité forte, topologie d'Alexandrov et hyperbolicité globale

L'existence d'une fonction temps dans un espace-temps (M, g) permet d'exclure les paradoxes temporels : un espace-temps admettant une fonction temps n'admet aucune courbe causale qui se referme et donc un point ne peut pas être dans le futur strict de lui même. Cependant, exclure les paradoxes temporels reste une condition faible qui ne permet pas d'assurer l'existence de fonctions temps. Nous allons présenter ici quelques notions de causalité tout en décrivant les différentes relations entre elles ainsi que les propriétés à attendre en terme de fonction temps pour chacune de ces notions.

Définition 1.2.28. *Un espace-temps (M, g) est causal s'il n'admet pas de courbe causale qui se referme.*

Proposition 1.2.29. ([17, Proposition 2.6]). *Soit (M, g) un espace-temps compact. Alors (M, g) n'est pas causal ; il contient toujours une courbe temporelle qui se referme.*

Définition 1.2.30. *Soit (M, g) un espace-temps. Un domaine U de M est causalement convexe si toute courbe causale reliant deux points de U est contenue dans U .*

Une condition un peu plus forte que la causalité est la suivante :

Définition 1.2.31. *Un espace-temps est dit fortement causal si, pour tout p dans M et tout voisinage U de p , il existe un voisinage $V \subset U$ de p qui est causalement convexe.*

Proposition 1.2.32. *Un espace-temps fortement causal est un espace-temps causal.*

Proposition 1.2.33. *Un espace-temps admettant une fonction temps est fortement causal.*

Soit (M, g) un espace-temps. Considérons la topologie, dite d'Alexandrov, définie sur M comme étant la topologie engendrée par les intervalles ouverts $I^+(p) \cap I^-(q)$, où p et q sont des éléments de M .

Proposition 1.2.34. ([17, Proposition 2.7]). *Un espace-temps est fortement causal si et seulement si sa topologie d'Alexandrov coïncide avec sa topologie originelle i.e celle de la variété.*

Nous venons maintenant à la notion de causalité stable :

Définition 1.2.35. *Un espace-temps (M, g_1) est dit stablement causale s'il existe une autre métrique lorentzienne g_2 sur M telle que :*

- tout vecteur causal pour g_1 est temporel pour g_2 ;
- (M, g_2) est un espace-temps causal.

La causalité stable est la condition la mieux adaptée pour assurer l'existence des fonctions temps et plus particulièrement celle des fonctions temporelles; elle est même équivalente comme le montre le résultat suivant :

Théorème 1.2.36. ([31, Théorème 1.1]). *Un espace-temps est stablement causal si et seulement s'il admet une fonction temporelle.*

Remarque 1.2.37. *Il existe plusieurs tentatives (certaines, erronées) de preuve du Théorème 1.2.36. Voir [20], [21] et [47] pour un compte rendu des erreurs qui émaillent cette littérature.*

Comme conséquence directe du Théorème 1.2.36 on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.38. *Un espace-temps stablement causal est fortement causal.*

Théorème 1.2.39. ([35, pag 211-212]). *Un espace-temps est globalement hyperbolique si et seulement si :*

- il est fortement causal;
- pour tout p dans M et q dans $J^+(p)$, l'intervalle $J^+(p) \cap J^-(q)$ est compact.

Théorème 1.2.40. ([12, Théorème 8.46]). *Soit (M, g) un espace-temps globalement hyperbolique. Alors il existe une hypersurface de Cauchy S telle que :*

- l'espace-temps M est difféomorphe à $S \times \mathbb{R}$;
- on peut choisir le difféomorphisme de sorte que la projection sur le deuxième facteur soit un temps de Cauchy.

Proposition 1.2.41. ([40, Corollaire 14.32]). *Les hypersurfaces de Cauchy sont homéomorphes les unes aux autres.*

1.2.4 Une notion de compacité

Disposer, d'une façon ou une autre, d'une hypothèse de compacité rend l'étude des espaces-temps globalement hyperbolique plus confortable. Cependant imposer à l'espace-temps tout entier d'être compact n'est pas intéressant d'un point de vue de la causalité; une telle hypothèse n'est pas compatible avec les différentes notions de causalités définies ci-dessus (voir la Proposition 1.2.29). Une bonne notion permettant de maintenir l'équilibre entre les notions de causalité et de compacité est celle de la compacité spatiale dite de Cauchy dans certaines références [17], [40], [12].

Soit (M, g) un espace-temps globalement hyperbolique.

Définition 1.2.42. *On dit que M est spatialement compact s'il admet une hypersurface de Cauchy compacte.*

Remarque 1.2.43. *Grâce à la Proposition 1.2.41, toutes les hypersurfaces de Cauchy d'un espace-temps spatialement compact sont compactes.*

Proposition 1.2.44. ([12, Proposition 10.25]). *Une hypersurface de type espace connexe plongée est une hypersurface de Cauchy.*

Corollaire 1.2.45. ([12, Corollaire 10.27]). *L'espace-temps (M, g) est spatialement compact si et seulement s'il admet une hypersurface compacte de type espace immergée.*

1.3 Maximalité

Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux espaces-temps globalement hyperboliques.

Définition 1.3.1. *Un plongement de Cauchy de M_1 dans M_2 est un plongement isométrique lisse $f : M_1 \rightarrow M_2$ tel que l'image de toute hypersurface de Cauchy de M_1 soit une hypersurface de Cauchy de M_2 .*

Remarque 1.3.2. *Pour qu'un plongement isométrique $f : M_1 \rightarrow M_2$ soit de Cauchy il suffit qu'il existe une hypersurface de Cauchy S_1 de M_1 telle que $f(S_1)$ soit une hypersurface de Cauchy de M_2 (voir [12, corollaire 10.3]).*

Définition 1.3.3. *Un espace-temps (M, g) est dit maximal si tout plongement de Cauchy de M dans un autre espace-temps N est surjectif.*

Théorème 1.3.4. ([12, Théorème 10.7]). *Tout espace-temps globalement hyperbolique admet un plongement de Cauchy dans un espace-temps globalement hyperbolique maximal.*

L'extension maximale donnée par le Théorème 1.3.4 n'est pas unique en général. L'unicité d'une telle extension nécessite une restriction à une certaine catégorie d'espaces-temps.

Définition 1.3.5. *Soit (M, g) un espace-temps plat (respectivement de Sitter, anti de Sitter) globalement hyperbolique. Une extension maximale plate (respectivement de Sitter, anti de Sitter) de M est un espace-temps plat maximal globalement hyperbolique au sens de la Définition 1.3.3.*

Le théorème suivant est un cas particulier d'un théorème de Choquet-Bruhat et Geroch [30] :

Théorème 1.3.6. ([12, Théorème 10.17]). *Soit (M, g) un espace-temps plat (respectivement de Sitter, anti de Sitter) globalement hyperbolique. Alors M admet une extension maximale parmi les espaces-temps globalement hyperboliques plats (respectivement de Sitter, anti de Sitter), qui est unique à isométries près.*

Remarque 1.3.7. *On utilise la notation MGH pour désigner un espace-temps maximal globalement hyperbolique, et $MGHC$ pour désigner un espace-temps maximal globalement hyperbolique spatialement compact.*

Chapitre 2

Espaces métriques de longueur

Dans ce chapitre, nous allons parler de différentes notions de convergence d'espaces métriques. Pour les démonstrations et plus de détails nous renvoyons essentiellement à [27], [26].

2.1 Généralités sur les espaces métriques

Soit X un ensemble.

Définition 2.1.1. Une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est une pseudo-distance si :

- 1) d est symétrique c'est-à-dire $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous x, y dans X ;
- 2) d vérifie l'inégalité triangulaire c'est-à-dire $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tous x, y, z dans X .

Le couple (X, d) est appelé un pseudo-espace métrique. Si en plus de la condition 1) et 2), d vérifie une troisième condition :

- 3) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,

alors d est une distance et le couple (X, d) est appelé espace métrique. Une pseudo-distance définit naturellement une topologie sur X mais qui n'est pas à priori séparée ; elle est séparée si et seulement si d est une distance.

Remarque 2.1.2. Nous aurons l'habitude de noter les (pseudo-)espaces métriques en ne mentionnant que l'ensemble X ; toute ambiguïté sera levée en notant la pseudo-distance par d_X , où encore, par d_n lorsque seront considérées des suites de pseudo-espaces métriques (X_n, d_n) .

Soit d une pseudo-distance donnée sur X , la relation \sim définie par : $x \sim y$ si et seulement si $d(x, y) = 0$ est une relation d'équivalence. L'application d passe au quotient de X par \sim définissant ainsi un espace métrique $(X/\sim, \bar{d})$ appelé le métrisé de (X, d) .

Voici un exemple qui sera fondamental dans cette thèse :

Exemple 2.1.3. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 1-lipschitzienne définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Considérons le graphe $S = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\}$. On le voit comme un sous-ensemble achronal de $(\mathbb{R}^{1,n}, \mathbf{q}_{1,n})$. Pour p et q dans S , définissons la quantité $d(p, q)$ comme étant la borne inférieure de $\int_a^b \sqrt{\mathbf{q}_{1,n}(\dot{\alpha}(t))} dt$ où $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ est une courbe lipschitzienne reliant p et q . Notons que comme f est 1-lipschitzienne, la quantité $\mathbf{q}_{1,n}(\dot{\alpha}(t))$, définie presque partout, est positive ou nulle partout là où elle est définie. Donc d est une pseudo-distance sur S . Si de plus f est contractante alors d est une distance.

Remarquons que lorsque $f(x) = \sqrt{q_{0,n}(x,x) + 1}$, le graphe S n'est autre que le modèle lorentzien de l'espace hyperbolique réel de dimension n et d sa distance hyperbolique associée.

Exemple 2.1.4. Considérons l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 . Soit $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ l'application :

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|.$$

Alors d est une pseudo-distance. Tout point de \mathbb{R}^2 est à pseudo-distance nulle de la diagonale, et d s'y restreint en une distance. Le métrisé est isométrique à la droite réelle.

Les notions de limite, complétude, compacité s'étendent naturellement aux pseudo-espaces métriques. Cependant, une suite peut admettre plusieurs limites, mais qui sont alors à pseudo-distance nulle les unes des autres. Ainsi, un pseudo-espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy admet une limite (qui n'est pas forcément unique!). Il est dit compact s'il est séquentiellement compact c'est-à-dire toute suite admet une valeur d'adhérence. Il est localement compact si tout point admet un voisinage compact. Il est dit propre si les boules fermées sont compactes.

Proposition 2.1.5. Un pseudo-espace métrique (X, d) est complet (compact, localement compact, propre) si et seulement si son métrisé $(X/\sim, \bar{d})$ est complet (compact, localement compact, propre).

Démonstration. Supposons que (X, d) est complet. Soit $(\bar{x}_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy de $(X/\sim, \bar{d})$ et soit pour tout $n \geq 0$, x_n un représentant de \bar{x}_n . On a $d(x_n, x_m) = \bar{d}(\bar{x}_n, \bar{x}_m)$ et donc $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy de (X, d) . Ce qui implique que $(x_n)_{n \geq 0}$ admet une valeur d'adhérence x dans (X, d) . La projection de x dans $(X/\sim, \bar{d})$ est alors une limite de la suite $(\bar{x}_n)_n$. Réciproquement, supposons que $(X/\sim, \bar{d})$ est complet. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy de (X, d) , elle se projette en une suite de Cauchy de $(X/\sim, \bar{d})$ qui converge donc vers un \bar{x} dans $(X/\sim, \bar{d})$. Tous les relevés de \bar{x} sont alors des limites de $(x_n)_{n \geq 0}$. Le reste se démontre de manière analogue. \square

Exemple 2.1.6. Soit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ muni de la métrique induite d de l'exemple 2.1.4. Son métrisé est non complet et non propre.

Définition 2.1.7. Deux pseudo-espaces métriques (X, d) et (X', d') sont isométriques s'il existe une application $f : X \rightarrow X'$ vérifiant :

- $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ pour tout x, y dans X ;
- tout point de X' est à pseudo-distance nulle de $f(X)$.

Dans ce cas, f est appelée une isométrie.

Proposition 2.1.8. Les pseudo-espaces métriques (X, d) et (X', d') sont isométriques si et seulement si leurs métrisés $(X/\sim, \bar{d})$ et $(X'/\sim, \bar{d}')$ sont isométriques.

Démonstration. Supposons que f est une isométrie entre (X, d) et (X', d') . Il est évident que cette application définit une isométrie entre les espaces métriques quotients. Réciproquement, supposons que $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \bar{X}'$ est une isométrie. Pour chaque classe d'équivalence \bar{x}' de $(X'/\sim, d')$ choisissons un représentant x' de X' . Soient \bar{x} dans $(X/\sim, d)$ et \bar{x}' dans $(X'/\sim, d')$ tel que $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{x}'$. Considérons la fonction $f : X \rightarrow X'$ qui envoie un élément x de X sur le représentant x' - que nous venons de choisir - de la classe $\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x})$. Cette application est clairement une isométrie de pseudo-espaces métriques. \square

2.2 Les espaces métriques de longueur

Parmi l'ensemble des espaces métriques se distingue par ses propriétés géométriques la famille des espaces métriques riemanniens. Une particularité de ces espaces métriques est que la distance entre deux points est donnée par la borne inférieure des longueurs des courbes C^1 les joignant. Une généralisation naturelle est celle des espaces métriques de longueur.

2.2.1 Une première définition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ une courbe continue. Pour toute subdivision $S = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[0, 1]$, définissons $S(\alpha) = \sum d(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1}))$. La borne supérieure des $S(\alpha)$ sur toutes les subdivisions de $[0, 1]$ est la longueur $L(\alpha)$ de la courbe α . Une courbe α est dite rectifiable si elle est de longueur finie. La fonction L permet de définir une distance d_L (au sens de la définition 2.1.1) sur X de la manière suivante :

$$d_L(x, y) = \inf\{L(\alpha) \mid \alpha \text{ est une courbe rectifiable joignant } x \text{ et } y\},$$

et $d_L(x, y) = +\infty$ s'il n'existe pas de courbe rectifiable joignant x et y .

Définition 2.2.1. *Un espace métrique (X, d) est appelé espace de longueur si les distances d et d_L coïncident.*

Remarque 2.2.2. *La distance d_L n'est une vraie distance que si (X, d) est connexe par arcs rectifiables.*

La proposition suivante résume les propriétés de la fonction L :

Proposition 2.2.3. ([27, Proposition 2.3.4], [26, Proposition I.1.20]).

- 1) L est additive : $L(\alpha_{[t_1, t_2]}) = L(\alpha_{[t_1, t_3]}) + L(\alpha_{[t_3, t_2]})$, pour tout $t_1 < t_3 < t_2$ dans $[0, 1]$ et α continue.
- 2) Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ est rectifiable alors $L(\alpha_{[0, t]})$ est une fonction continue en t .
- 3) L est invariante par reparamétrisation : $L(\alpha \circ f) = L(\alpha)$ où f est un homéomorphisme.
- 4) L est semi-continue inférieurement : si α_i est une suite de chemins rectifiables convergeant uniformément vers α , alors $\liminf L(\alpha_i) \geq L(\alpha)$
- 5) $L(\alpha) \geq d(x, y)$ pour toute courbe continue α reliant x et y .

Définition 2.2.4. *Une courbe rectifiable $\alpha : [0, l] \rightarrow X$ reliant deux points x et y est dite géodésique si et seulement si $\alpha(0) = x$, $\alpha(l) = y$ et $d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = |t_1 - t_2|$.*

Dans le cas où $d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = a|t_1 - t_2|$ pour un certain a positif, on parle de géodésique paramétrée à vitesse constante. Un espace de longueur (X, d) est dit géodésique si pour tous x et y dans X , il existe une géodésique α les reliant. Il est dit uniquement géodésique si cette géodésique est unique. Un sous-ensemble $C \subset X$ est dit géodésiquement convexe si C , muni de la restriction de d , est géodésique.

Remarque 2.2.5. *Comme toute courbe rectifiable peut être paramétrée par sa longueur d'arc, on peut se restreindre dans la définition 2.2.4 aux courbes 1-lipschitziennes.*

Exemple 2.2.6. *Considérons l'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni de sa métrique euclidienne d_{euc} usuelle. Alors $(\mathbb{R}^n, d_{\text{euc}})$ est un espace de longueur uniquement géodésique. Dans ce cas, la longueur $L(\alpha)$ d'une courbe α n'est autre que $\int |\dot{\alpha}(t)| dt$.*

Il est clair qu'un espace métrique géodésique possède la *propriété du point milieu* : pour tous x, y dans X , il existe au moins un point z dans X tel que : $d(x, z) = d(y, z) = \frac{1}{2}d(x, y)$. De même, un espace de longueur possède la *propriété du point milieu approximative* : pour tous x, y dans X et $\epsilon > 0$ il existe un z dans X tel que $d(x, z) \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \epsilon$ et $d(y, z) \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \epsilon$. La réciproque reste vraie dans le cas d'un espace métrique complet comme le montre le théorème suivant :

Théorème 2.2.7. ([27, Théorème 2.4.16]). *Soit (X, d) un espace métrique complet.*

- 1) *Si (X, d) possède la propriété du milieu, alors (X, d) est un espace géodésique.*
- 2) *Si (X, d) possède la propriété du milieu approximative, alors (X, d) est un espace métrique de longueur.*

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème d'Ascoli-Arzéla et de la semi-continuité inférieure de la fonction L :

Théorème 2.2.8. ([27, Théorème 2.4.23]). *Un espace de longueur complet localement compact est géodésique.*

L'exemple suivant montre que sans hypothèse de complétude le théorème est faux :

Exemple 2.2.9. *Considérons l'espace $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ muni de la distance euclidienne induite où $n \geq 1$. C'est un espace de longueur non géodésique. En effet, deux points symétriques par rapport à 0 n'ont pas de point milieu dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

2.2.2 Une deuxième définition

Soit X un espace topologique. Considérons \mathcal{A} un ensemble de courbes $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) Si $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ est une courbe dans \mathcal{A} , alors la restriction de α à $[c, d] \subset [a, b]$ est une courbe de \mathcal{A} .
- 2) Si $\alpha : [a, c] \rightarrow X$ et $\beta : [c, b] \rightarrow X$ sont deux courbes concaténables dans \mathcal{A} , alors la courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ telle que $\gamma = \alpha$ sur $[a, c]$ et $\gamma = \beta$ sur $[c, b]$ est une courbe de \mathcal{A} .
- 3) Cet ensemble est invariant par reparamétrisation des courbes.

Dans ce cas l'ensemble \mathcal{A} est appelé *classe admissible* et les courbes de \mathcal{A} sont appelées *courbes admissibles*.

Exemple 2.2.10. *Un exemple typique de classe admissible est celui de l'ensemble des courbes continues d'un espace métrique donné. Un autre exemple est donné par les courbes 1-lipschitziennes d'un espace métrique, ou encore, des courbes C^1 par morceaux lorsque l'espace est une variété.*

Définition 2.2.11. *Soit $\mathcal{L} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction vérifiant les conditions 1), 2) et 3) de la proposition 2.2.3. On dit que \mathcal{L} est une pseudo-structure de longueur.*

Soit \mathcal{L} une pseudo-structure de longueur sur X , on obtient naturellement une pseudo-distance $d_{\mathcal{L}}$ sur X définie par :

$$d_{\mathcal{L}}(x, y) = \inf\{\mathcal{L}(\alpha) \mid \alpha \text{ est une courbe admissible joignant } x \text{ et } y\}.$$

Définition 2.2.12. *Si $d_{\mathcal{L}}$ est une distance (définie positive), on dit que \mathcal{L} est une structure de longueur. Dans ce cas la distance $d_{\mathcal{L}}$ est dite intrinsèque.*

Proposition 2.2.13. ([27, Proposition 2.4.1]). *Soit \mathcal{L} une structure de longueur. Alors l'espace métrique $(X, d_{\mathcal{L}})$ est un espace métrique de longueur.*

Une conséquence immédiate de cette proposition est le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.14. *Soit \mathcal{L} une pseudo-structure de longueur. Alors le métrisé $(X / \sim, \bar{d}_{\mathcal{L}})$ est un espace de longueur.*

Exemple 2.2.15. *Soit (M, g) une variété Riemannienne de classe C^1 . On prend comme classe admissible \mathcal{A} l'ensemble des courbes C^1 par morceaux, et on définit la pseudo-longueur $\mathcal{L}(\alpha)$ d'un élément α de \mathcal{A} comme dans l'exemple 2.2.6 comme étant l'intégrale des normes des vecteurs tangents le long de tous les segments différentiables de α . Alors, $(M, d_{\mathcal{L}})$ est un espace métrique de longueur.*

Bien que les distances d_L et $d_{\mathcal{L}}$ coïncident, les structures de longueur L et \mathcal{L} ne coïncident pas en général. En effet l'item (4) la Proposition 2.2.3 montre que la semi-continuité inférieure de la structure de longueur \mathcal{L} est une condition nécessaire pour que les deux structures de longueur L et \mathcal{L} coïncident. Le théorème suivant montre que cette condition est en fait suffisante :

Théorème 2.2.16. ([27, Théorème 2.4.3]). *Si \mathcal{L} est une structure de longueur semi-continue inférieurement, alors \mathcal{L} coïncide avec la structure de longueur induite par la distance $d_{\mathcal{L}}$.*

Définition 2.2.17. *Un espace métrique géodésique est dit géodésiquement complet si toute géodésique se prolonge en une géodésique définie sur \mathbb{R} tout entier.*

Le théorème suivant est une généralisation naturelle au cadre des espaces de longueur du Théorème de Hopf-Rinow pour les variétés Riemanniennes.

Théorème 2.2.18. ([26, Proposition I.3.7]). *Soit (X, d) un espace métrique de longueur complet localement compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) X est complet;
- 2) les boules fermées sont compactes;
- 3) X est géodésiquement complet.

2.3 Les espaces CAT(0)

La notion d'espace métrique CAT(0) a été introduite par Alexandroff ([1]) généralisant ainsi la notion de courbure scalaire non positive pour les variétés riemanniennes lisses.

Dans toute la suite, (X, d) désigne un espace métrique géodésique. Un triangle Δ est la donnée de trois point x, y et z (appelés sommets) et trois géodésiques $[x, y]$, $[y, z]$ et $[x, z]$ (appelés côtés) joignant les trois points x, y et z . Soit $\bar{\Delta}([x, y], [y, z], [z, x])$ un triangle géodésique de X . Un triangle de comparaison de Δ dans l'espace modèle \mathbb{R}^2 (resp $\frac{1}{\sqrt{|k|}}\mathbb{H}^2$ pour un certain $k \neq 0$) est un triangle $\bar{\Delta}([\bar{x}, \bar{y}], [\bar{y}, \bar{z}], [\bar{z}, \bar{x}])$ de \mathbb{R}^2 (resp $\frac{1}{\sqrt{|k|}}\mathbb{H}^2$) vérifiant : $d(x, y) = d_{euc}(\bar{x}, \bar{y})$, $d(y, z) = d_{euc}(\bar{y}, \bar{z})$ et $d(x, z) = d_{euc}(\bar{x}, \bar{z})$. Un tel triangle existe toujours et est unique à isométrie près. Soit p un point de $[x, y]$. Un point \bar{p} dans $[\bar{x}, \bar{y}]$ est dit point de comparaison à p si $d(x, p) = d_{euc}(\bar{x}, \bar{p})$. On définit de manière similaire les points de comparaison pour les deux autres côtés $[y, z]$ et $[z, x]$.

Définition 2.3.1. *L'espace métrique (X, d) est un espace CAT(0) (respectivement CAT(k) où $k < 0$) si pour tout triangle Δ dans X et tout point p et q sur les côtés de Δ , on a $d(p, q) \leq d_{euc}(\bar{p}, \bar{q})$ où \bar{p}, \bar{q} dans $\bar{\Delta}$ sont des points de comparaison de p et q et $\bar{\Delta}$ le triangle de comparaison de Δ dans \mathbb{R}^2 (respectivement dans $\frac{1}{\sqrt{|k|}}\mathbb{H}^2$).*

Exemple 2.3.2. *L'espace euclidien \mathbb{R}^n est un espace CAT(0).*

Définition 2.3.3. *Un espace géodésique est dit à courbure négative ou nulle (noté NPC) s'il est localement CAT(0) : pour tout x dans X , il existe un $r > 0$ tel que la boule $B(x, r)$ est un espace CAT(0).*

Proposition 2.3.4. ([26, Proposition II.1.4]). *Soit (X, d) un espace métrique CAT(0). Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon)$ tel que si p est un point milieu de la géodésique $[x, y]$ et si p' est un point vérifiant*

$$\max \{d(x, p'), d(y, p')\} \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \delta,$$

alors $d(p, p') < \epsilon$.

Dans un espace géodésique, la fonction distance d est dite *convexe* si pour toutes les géodésiques $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow X$ et $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow X$ paramétrées à vitesse constante, l'application $d : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(s, t) \mapsto d(\alpha_1(s), \alpha_2(t))$ est convexe ou de manière équivalente :

$$d(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \leq (1-t)d(\alpha_1(0), \alpha_2(0)) + td(\alpha_1(1), \alpha_2(1)).$$

Une conséquence immédiate de la convexité de la distance est qu'un tel espace est uniquement géodésique. Une autre conséquence est le fait que les boules sont convexes.

Proposition 2.3.5. ([26, Proposition II.2.2]). *Soit (X, d) un espace CAT(0). Alors X est un espace à distance convexe.*

Corollaire 2.3.6. *Un espace métrique CAT(0) est uniquement géodésique.*

Le théorème suivant montre que dans le cas d'une variété riemannienne suffisamment lisse la propriété CAT(0) est équivalente à la négativité de la courbure sectionnelle :

Théorème 2.3.7. ([29], [1], [26, Théorème II.1.A.6]). *Soit M une variété riemannienne compléte simplement connexe de classe C^3 . Alors (M, d) , où d est la distance riemannienne associée, est un espace métrique CAT(0) si et seulement si M est à courbure sectionnelle négative.*

Il existe plusieurs autres caractérisations équivalentes de la notions CAT(0) comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.3.8. ([26]). *Soit X un espace métrique géodésique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) X est CAT(0) ;
- 2) Pour tout triangle géodésique $\Delta([x, y], [y, z], [z, x])$ et tout p dans $[x, y]$ tel que $d(x, p) = d(y, p)$, on a $d(z, p) \leq d(\bar{z}, \bar{p})$;
- 3) X vérifie l'inégalité de Bruhat-Tits i.e pour tout x, y , et z dans X et pour tout p dans X tel que $d(x, p) = d(y, p) = \frac{1}{2}d(x, y)$ on a

$$d(x, z)^2 + d(y, z)^2 \geq 2d(p, z)^2 + \frac{1}{2}d(x, y)^2.$$

Soit X un espace métrique donné. On dit que X vérifie la CAT(0) condition des 4-points si pour tout quadruplet de points (x_1, y_1, x_2, y_2) il existe un quadruplet de points $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ dans \mathbb{R}^2 tel que : $d(x_i, y_j) = d(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ pour $i, j \in \{1, 2\}$, et $d(x_1, x_2) \leq d(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $d(y_1, y_2) \leq d(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$. La CAT(0) condition des 4-points constitue une reformulation de l'inégalité CAT(0) en terme de la géométrie des quadrilatères. En effet, une conséquence immédiate de la définition de l'espace CAT(0) est qu'un tel espace possède la CAT(0) condition des 4-points. La réciproque reste vraie dans un cadre un peu plus restreint :

Proposition 2.3.9. *Soit X un espace métrique complet. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) X est un espace CAT(0);
- 2) X possède la propriété du point milieu approximative et la CAT(0) condition des 4-points.

La proposition 2.3.9 nous permet de définir la notion de CAT(0) pour les pseudo-espaces métrique complets. Ainsi :

Définition 2.3.10. *Un pseudo-espace métrique complet est CAT(0) s'il possède la propriété du point milieu approximative et la CAT(0) condition des 4-points.*

On obtient facilement la proposition suivante :

Proposition 2.3.11. *Un pseudo-espace métrique est CAT(0) si et seulement si son métrisé est CAT(0).*

2.4 Arbres réels

Un arbre réel est un espace métrique géodésique dans lequel deux points quelconques sont joints par un unique arc. On peut aussi le voir comme étant un espace métrique uniquement géodésique tel que si $[x, y]$ est la géodésique reliant deux points distincts x et y , alors tout point z dans $]x, y[$ déconnecte x de y . On le note généralement par T . Il est clair qu'un arbre réel est un espace CAT(0).

Exemple 2.4.1. *La droite réelle est un arbre réel. De même un segment est un arbre réel.*

Exemple 2.4.2. *Considérons \mathbb{R}^2 muni de la distance définie par $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2|$ si $x_1 \neq x_2$ et $d((x, y_1), (x, y_2)) = |y_1 - y_2|$. On peut le voir comme étant la droite ($y = 0$) sur laquelle on attache en tout point une droite verticale. Ainsi la géodésique reliant (x_1, y_1) à (x_2, y_2) est l'union de la géodésique $[(x_1, y_1), (x_1, 0)]$, de la géodésique $[(x_1, 0), (x_2, 0)]$ et de la géodésique $[(0, y_2), (x_2, y_2)]$. C'est un arbre réel.*

Définition 2.4.3. *Un arbre réel est dit simplicial si l'ensemble des points x tel que $T \setminus \{x\}$ admet au moins trois composantes connexes est un ensemble discret fermé.*

Soit Γ un groupe de type fini agissant par isométries sur T . Un élément γ est dit *elliptique* s'il a un point fixe. Il est dit *hyperbolique* si $\ell_T(\gamma) = \inf_{x \in T} \{d(x, \gamma x)\}$ est non nul. Un axe de translation d'un élément γ est une partie isométrique à \mathbb{R} sur lequel γ agit par translation. Morgan et Shalen ([39]) ont montré que l'ensemble $A_\gamma = \{x \in T \text{ tel que } d(x, \gamma x) = \ell_T(\gamma)\}$ est un axe de translation si et seulement si γ est hyperbolique. Un bout de T est une classe d'équivalence de rayons dans T où deux rayons sont identifiés si leur intersection est un rayon. L'action de Γ sur T est minimale si le seul convexe Γ invariant non vide est T . Elle est irréductible s'il n'existe pas de bout fixé par Γ .

Proposition 2.4.4. [42, Proposition 2.4] *Soit T un arbre réel muni d'une action isométrique de Γ . Alors, l'action de Γ est minimale si et seulement si T est l'union des axes de translations des éléments hyperboliques de Γ .*

Définition 2.4.5. *On appelle fonction longueur d'un arbre réel T la fonction $\ell_T : \Gamma \rightarrow [0, +\infty[$ définie par $\ell_T(\gamma) = \inf_{x \in T} \{d(x, \gamma x)\}$.*

D'après Morgan et Shalen [39] les arbres réels minimaux irréductibles sont caractérisés par leurs fonctions de longueur. Autrement dit s'ils ont la même fonction de longueur alors ils sont isométriques. Nous aurons par la suite besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.6. [42, Lemme 4.3] *Tout segment compact d'un arbre réel muni d'une action minimal et irréductible d'un groupe Γ de type fini, est contenu dans un axe de translation.*

Définition 2.4.7. *On appelle Γ -arbre réel un arbre réel T muni d'une action isométrique de Γ .*

2.5 Les espaces hyperboliques au sens de Gromov

Les espaces métriques hyperboliques au sens de Gromov ont été introduits par Gromov dans [34]. Toutefois il existe plusieurs définitions équivalentes de cette notion que nous allons rappeler dans cette partie.

Soit X un espace métrique et δ un réel positif.

Définition 2.5.1. *L'espace métrique X est dit δ -hyperbolique si pour tout triangle géodésique (x, y, z) de X , la géodésique $[x, y]$ est contenue dans le δ -voisinage de la réunion des géodésiques $[y, z]$ et $[x, z]$. Il est dit hyperbolique s'il est δ -hyperbolique pour un certain $\delta \geq 0$.*

Exemple 2.5.2. *L'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 constitue un exemple typique d'espace hyperbolique au sens de Gromov. C'est un espace $\ln(1 + \sqrt{2})$ -hyperbolique.*

Remarque 2.5.3. *D'après l'exemple 2.5.2, les espaces $\text{CAT}(k)$ avec $k < 0$ sont des espaces hyperboliques au sens de Gromov avec des constantes d'hyperbolicité ne dépendant que de k .*

Proposition 2.5.4. *Toute variété riemannienne simplement connexe, complète de classe C^3 à courbure sectionnelle $k < a < 0$ est hyperbolique au sens de Gromov.*

Démonstration. Conséquence du Théorème 2.3.7 et de la Remarque 2.5.3. □

Soit (x, y, z) un triangle géodésique de X . Considérons le tripode $T(x, y, z)$ i.e l'unique arbre simplicial à quatre sommets $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ et \bar{o} et à trois arêtes $[\bar{x}, \bar{o}]$, $[\bar{y}, \bar{o}]$ et $[\bar{z}, \bar{o}]$ de longueur a, b et c respectivement défini par :

- $d(x, y) = a + b$;
- $d(x, z) = a + c$;
- $d(y, z) = b + c$.

Il existe alors une unique fonction modulo isométrie, appelée *fonction de comparaison*, du triangle géodésique (x, y, z) sur le tripode $T(x, y, z)$ envoyant les x, y et z sur \bar{x}, \bar{y} et \bar{z} et telle que sa restriction à chaque côté du triangle (x, y, z) est une isométrie.

Définition 2.5.5. *Un espace métrique géodésique X est dit δ -hyperbolique si pour tout triangle géodésique, la pré-image par la fonction de comparaison de \bar{o} est de diamètre inférieur à δ .*

Il existe une autre définition de l'hyperbolicité qui ne fait intervenir que la distance.

Définition 2.5.6. *On appelle produit de Gromov de y et z par rapport à x la quantité définie par :*

$$(y.z)_x = \frac{1}{2}(d(y, x) + d(z, x) - d(y, z)).$$

Définition 2.5.7. *L'espace métrique X est dit δ -hyperbolique si pour tout x, y, z et e dans X on a :*

$$(x.y)_e \geq \min((x.z)_e, (y.z)_e) - \delta.$$

Remarque 2.5.8. *La définition 2.5.7 a la particularité de se généraliser aux pseudo-espaces métriques et aux espaces non géodésiques.*

Proposition 2.5.9. ([26, Proposition III.1.17, Proposition III.1.22]). *Les définitions 2.5.1, 2.5.5 et 2.5.7 sont deux à deux équivalentes pour les espaces métriques géodésiques.* □

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace CAT(0) soit hyperbolique :

Théorème 2.5.10. ([26, Théorème III.1.5]). *Un espace CAT(0) propre muni d'une action cocompacte d'un groupe Γ est hyperbolique si et seulement s'il n'admet pas de sous espace isométrique à \mathbb{R}^2 .*

Exemple 2.5.11. *Un arbre réel est un espace métrique 0-hyperbolique. En fait c'est même équivalent : un arbre réel est un espace métrique géodésique qui est 0-hyperbolique.*

2.6 Diverses notions de convergence d'espaces métriques

Nous allons dans cette section passer en revue diverses notions de convergence d'espaces métriques.

2.6.1 Convergence compacte-ouverte

Cette notion est la plus forte comme le montrent les propriétés que nous allons établir. Son grand inconvénient est de ne faire sens que lorsque les espaces métriques X_n sont tous homéomorphes à un espace fixé. Cependant, cette notion reste la plus adaptée à notre contexte et sera ainsi la vedette de cette thèse amenant à la preuve de nos théorèmes principaux. Considérons une famille de distances d_n sur le même ensemble X , et γ définissant la même topologie.

Définition 2.6.1. Les espaces métriques (X, d_n) convergent uniformément vers un espace métrique (\bar{X}, \bar{d}) si et seulement si les applications $d_n : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ convergent uniformément vers une pseudo-distance $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ tel que (\bar{X}, \bar{d}) est l'espace métrique quotient de (X, d) .

Définition 2.6.2. On dit que les espaces métriques (X, d_n) convergent uniformément sur les compacts vers un espace métrique (\bar{X}, \bar{d}) si les applications $d_n : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ convergent uniformément sur les compacts vers une pseudo-distance d telle que (\bar{X}, \bar{d}) soit isométrique à l'espace métrique quotient de (X, d) .

Il n'est pas vrai que la limite pour la convergence uniforme sur les compacts d'espaces métriques complets soit complète comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.6.3. Pour tout $n \geq 0$ soit $f_n :]0, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ un homéomorphisme égal à l'identité sur $[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}]$. Soit d_n la distance image réciproque par f_n de la distance usuelle de \mathbb{R} définie sur $X =]0, 2[$. Alors (X, d_n) est une famille d'espaces métriques complets convergeant uniformément sur les compacts vers X muni de la distance induite qui est un espace métrique non complet.

L'exemple suivant est un cas particulier où l'espace limite hérite les mêmes propriétés que les (X, d_n) :

Exemple 2.6.4. Soit (X, d_n) une famille d'espaces métriques convergeant uniformément sur les compacts vers un espace métrique (\bar{X}, \bar{d}) tel que $d_n \leq d$ où d est la pseudo-distance sur X dont \bar{d} est isométrique au métrisé.

Si on suppose que les (X, d_n) sont propres, alors (\bar{X}, \bar{d}) est propre. En effet, soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans X qui se projette dans une boule fermée B de (\bar{X}, \bar{d}) . Comme $d_1 \leq d$, l'image réciproque de B dans X est forcément contenue dans un compact K de X (compact pour la topologie induite sur X par les distances d_n) et donc la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence x dans K . Comme les d_n convergent uniformément sur K vers d , x est aussi valeur d'adhérence de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour d . Donc la projection de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la projection de x dans (\bar{X}, \bar{d}) .

Si on suppose que les (X, d_n) sont propres et complets, alors (\bar{X}, \bar{d}) est complet. En effet, si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite dans X qui se projette en une suite de Cauchy de (\bar{X}, \bar{d}) pour \bar{d} , alors c'est une suite de Cauchy de (X, d) et donc une suite de Cauchy pour tous les d_n . Or les (X, d_n) sont propres, ce qui montre que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a une limite et donc que (\bar{X}, \bar{d}) est complet.

Si on suppose que la convergence est uniforme et que les (X, d_n) sont complets, alors (\bar{X}, \bar{d}) est complet.

2.6.2 Convergence Lipschitz

On se donne deux espaces métriques X_1 et X_2 . Pour toute fonction lipschitzienne $f : X_1 \rightarrow X_2$ on définit

$$\text{dil}(f) = \sup_{x_1 \neq y_1 \in X_1} \frac{d_{X_2}(f(x_1), f(y_1))}{d_{X_1}(x_1, y_1)}.$$

C'est la dilatation de l'application lipschitzienne f . Considérons la distance d_L définie par :

$$d_{Lip}(X_1, X_2) = \inf \log(\max \{ \text{dil}(f), \text{dil}(f^{-1}) \}),$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des homéomorphismes bi-lipschitziennes entre X_1 et X_2 . S'il n'existe pas d'homéomorphisme bi-lipschitzienne entre X_1 et X_2 , alors on pose $d_{Lip}(X_1, X_2) = +\infty$.

Théorème 2.6.5. ([27, Théorème 7.2.4]). *La distance d_{Lip} est une distance sur l'ensemble des espaces métriques compacts modulo isométrie.*

Définition 2.6.6. *On appelle topologie Lipschitz la topologie induite par la distance d_{Lip} . Ainsi une suite d'espaces métriques X_n converge vers un espace métrique X pour la topologie Lipschitz si et seulement si $d_{Lip}(X_n, X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

2.6.3 4-Points limite

Soient (X, d) un espace métrique et $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques tels que : pour tout quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) de points de X et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers n pour lesquels il existe des quadruplets $(x_1(n), x_2(n), x_3(n), x_4(n))$ dans X_n vérifiant : pour tout $1 \leq i, j \leq 4$,

$$|d(x_i, x_j) - d_n(x_i(n), x_j(n))| < \epsilon.$$

Définition 2.6.7. *L'espace (X, d) est une 4-points valeur d'adhérence des espaces métriques (X_n, d_n) .*

Théorème 2.6.8. ([26, Théorème II.3.9]). *Soit $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques CAT(0) (respectivement CAT(k) où $k < 0$) et soit (X, d) un espace métrique complet et vérifiant la propriété du milieu approximative. On suppose que (X, d) est une 4-points limite des espaces (X_n, d_n) . Alors X est un espace CAT(0) (respectivement CAT(k)).*

Il n'est pas vrai en général que le complété d'un espace géodésique soit géodésique. Cependant, comme le complété d'un espace métrique (X, d) est de manière évidente une 4-point valeur d'adhérence de la suite constante où chaque (X_n, d_n) est (X, d) , on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.6.9. *Le complété d'un espace métrique CAT(0) est un espace CAT(0).*

2.6.4 Convergence de Hausdorff-Gromov

Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout sous-ensemble S de X et $r > 0$, le r -voisinage de S est l'ensemble défini par $V_r(S) = \cup_{x \in S} B(x, r)$.

Définition 2.6.10. *La distance de Hausdorff entre deux sous-ensembles non vides S_1, S_2 de X est définie par $d_H(S_1, S_2) = \inf \{r > 0 : S_1 \subset V_r(S_2) \text{ et } S_2 \subset V_r(S_1)\}$ si un tel r existe et $d_H(S_1, S_2) = +\infty$ sinon.*

A moins de se restreindre aux sous-ensemble fermés de X , d_H n'est pas une distance sur l'ensemble $P(X)$ des parties de X . En effet :

Proposition 2.6.11. ([27, Proposition 7.3.3]). *Soit (X, d) un espace métrique.*

- 1) d_H est une pseudo-distance sur l'ensemble $P(X) \setminus \{\emptyset\}$ des parties non vides de X ;
- 2) $d_H(S_1, S_2) = 0$ si et seulement si $\overline{S_1} = \overline{S_2}$.

Un corollaire immédiat de la proposition précédente est le fait que l'ensemble $F(X)$ des sous-ensemble fermés non vides de X muni de la distance de Hausdorff d_H est un espace métrique qui s'identifie à l'espace métrique quotient $(\overline{P(X)}, \bar{d})$.

Proposition 2.6.12. ([27, Proposition 7.3.7, Théorème 7.3.8]). *Soit (X, d) un espace métrique.*

- 1) Si (X, d) est complet, alors $(F(X), d_H)$ est complet.
- 2) Si (X, d) est compact, alors $(F(X), d_H)$ est compact.

La distance de Hausdorff-Gromov est définie entre deux espaces métriques quelconques, l'idée est d'identifier les espaces isométriques. Ce qui amène à se restreindre aux espaces compacts.

Définition 2.6.13. *La distance de Hausdorff-Gromov entre deux espaces métriques X_1 et X_2 est définie comme étant la borne inférieure des $r > 0$ pour lesquels il existe un espace métrique X et deux sous espaces métriques X'_1 et X'_2 isométriques à X_1 et X_2 respectivement vérifiant $d_H(X'_1, X'_2) < r$. On la note $d_{GH}(X_1, X_2)$.*

Dans la définition précédente au lieu de prendre tous les espaces métriques X qui admettent des plongements isométriques de X_1 et X_2 , on peut se restreindre aux espaces métriques qui sont obtenus comme des espaces quotients de l'union disjointe de X_1 et X_2 par une pseudo-distance d vérifiant : $d|_{X_1} = d_1$ et $d|_{X_2} = d_2$. En d'autres termes, $d_{GH}(X_1, X_2)$ est la borne inférieure des $r > 0$ pour lesquels il existe une pseudo-distance d sur l'union disjointe $X_1 \cup X_2$, prolongeant les distances d_1 et d_2 et vérifiant $d_H(X_1, X_2) < r$. En effet, soit X un espace métrique et soit f_1, f_2 deux plongements isométriques de X_1, X_2 dans X tel que $d_H(f_1(X_1), f_2(X_2)) < r$. Définissons la pseudo-distance d sur $X_1 \cup X_2$ par : si $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$ alors $d(x_1, x_2) = d_X(f_1(x_1), f_2(x_2))$. Pour cette pseudo-distance on a $d_H(X_1, X_2) < r$.

Proposition 2.6.14. ([27, Proposition 7.3.13]). *La distance de Hausdorff-Gromov vérifie l'inégalité triangulaire :*

$$d_{GH}(X_1, X_3) \leq d_{GH}(X_1, X_2) + d_{GH}(X_2, X_3).$$

Il existe une autre formulation de la distance de Hausdorff-Gromov utilisant la notion de correspondance :

Définition 2.6.15. *Une correspondance entre deux ensembles X_1 et X_2 est un sous-ensemble $R \subset X_1 \times X_2$ tel que les projections $\pi_1 : R \rightarrow X_1$ et $\pi_2 : R \rightarrow X_2$ soient surjectives.*

Définition 2.6.16. *Soit R une correspondance entre deux espaces métriques X_1 et X_2 . La distorsion de R est définie par :*

$$dis(R) = \sup \{ |d_{X_1}(x_1, y_1) - d_{X_2}(x_2, y_2)| : (x_1, x_2) \in R \text{ et } (y_1, y_2) \in R \}.$$

Le théorème suivant donne une autre définition équivalente à celle de 2.6.13 de la distance de Hausdorff-Gromov.

Théorème 2.6.17. ([27, Théorème 7.3.25]). *Soient X_1, X_2 deux espaces métriques non vides. Alors*

$$d_{GH}(X_1, X_2) = \frac{1}{2} \inf \{ dis(R), \text{ où } R \text{ est une correspondance entre } X_1 \text{ et } X_2 \}.$$

□

Soit $f : X_1 \rightarrow X_2$ une isométrie entre X_1 et X_2 . Considérons la correspondance R définie par $R = \{(x, f(x)) : x \in X_1\}$. Dans ce cas $dis(R) = 0$. Réciproquement, si R est une correspondance entre X_1 et X_2 telle que $dis(R) = 0$, alors il existe une isométrie $f : X_1 \rightarrow X_2$ telle que $R = \{(x, f(x)) : x \in X_1\}$. En effet, pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ dans R on a $d_{X_1}(x_1, y_1) = d_{X_2}(x_2, y_2)$. Ceci implique en particulier que pour tout x_1 dans X_1 , il existe un unique $f(x_1) = x_2$ dans X_2 tel que $(x_1, f(x_1)) \in R$. Il est clair que f est l'isométrie voulue. On obtient en particulier que si X_1 et X_2 sont isométriques, alors $d_{GH}(X_1, X_2) = 0$. La réciproque reste vraie dans le cas compact :

Théorème 2.6.18. ([27, Théorème 7.3.30]). *La distance de Hausdorff-Gromov définit une distance sur l'espace des classes d'isométries des espaces métriques non vide compacts c'est-à-dire $d_{GH}(X_1, X_2) = 0$ si et seulement si X_1 et X_2 sont isométriques.*

Remarque 2.6.19. Si $d_{GH}(X_1, X_2) = 0$ avec X_1 compact et X_2 complet, alors X_2 est compact et donc isométrique à X_1 . En effet, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une correspondance R telle que $\text{dis}(R) < \epsilon$. Comme X_1 est compact, il existe un sous ensemble fini X' tel que $\text{dist}(x_1, X') < \epsilon$ pour tout x_1 dans X_1 . Notons Y l'ensemble des x_2 dans X_2 pour lesquels il existe x_1 dans X' vérifiant $(x_1, x_2) \in R$. Il est clair que $\text{dist}(x, Y) < 2\epsilon$ pour tout x dans X_2 . Comme X_1 est compact, il existe donc un sous-ensemble fini Y' de Y tel que pour tout x dans X_2 on ait $\text{dist}(x, Y') < 4\epsilon$. Le ϵ étant quelconque et X_2 étant complet, ceci implique que X_2 est compact.

Le théorème 2.6.18 permet de définir une notion de convergence entre espaces métriques compacts :

Définition 2.6.20. On dit qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'espaces métriques non vides converge pour la topologie de Hausdorff-Gromov vers un espace métrique non vide compact X si et seulement si

$$d_{GH}(X_n, X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Une conséquence directe du Théorème 2.6.17 est le corollaire suivant :

Corollaire 2.6.21. Une suite d'espaces métriques non vides X_n converge pour la topologie de Hausdorff-Gromov vers un espace métrique non vide compact X si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que : pour tout $n \geq n_0$, il existe une correspondance R_n entre X_n et X vérifiant :

$$|d_{X_n}(x_n, y_n) - d_X(x, y)| < 2\epsilon, \text{ pour tous } (x_n, x), (y_n, y) \text{ dans } R_n.$$

Exemple 2.6.22. Soit $(X, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques non vides compacts convergent uniformément vers un espace métrique (X, d) . Alors $(X, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (X, d) pour la topologie de Hausdorff-Gromov.

La proposition suivante résume les propriétés de la convergence au sens de Hausdorff-Gromov.

Proposition 2.6.23. [26, Proposition I.5.38] Soit X un espace métrique complet. On suppose que X est une limite Hausdorff-Gromov d'espaces métriques X_n .

- 1) Si chaque X_n est un espace de longueurs, alors X est un espace de longueurs.
- 2) Si chaque X_n est propre, alors X est propre.
- 3) Si chaque X_n est propre et géodésique, alors X est propre et géodésique.
- 4) Si chaque X_n est CAT(0), alors X est CAT(0).

Définition 2.6.24. Une famille d'espaces métriques compacts $(X_i, d_i)_{i \in I}$ est dite uniformément compacte si :

- 1) Il existe une constante C telle que $\text{diam}(X_i) \leq C$ pour tout i ;
- 2) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel $N(\epsilon)$ tel que pour tout i , X_i contient un ensemble fini ϵ -dense Y_i (c'est-à-dire $\text{dist}(x, Y_i) \leq \epsilon$ pour tout x dans X_i) de cardinal inférieur à N .

Le théorème suivant est un théorème de pré-compacité dû à Gromov :

Théorème 2.6.25. ([26, Théorème I.5.41]). Toute famille uniformément compacte d'espaces métriques compacts est pré-compact pour la topologie de Hausdorff-Gromov. En d'autres termes toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de cette famille admet une sous-suite convergente pour la topologie de Hausdorff-Gromov.

2.6.5 Convergence de Hausdorff-Gromov pointée

La topologie de Hausdorff-Gromov est définie entre espaces métriques quelconques mais elle est peu adaptée aux espaces non compacts. En effet, la distance de Hausdorff-Gromov entre un espace compact et un autre non compact est toujours infinie. La convergence de Hausdorff-Gromov pointée est une version de la convergence de Hausdorff-Gromov adaptée aux espaces métriques propres non compacts.

Définition 2.6.26. *Un espace métrique pointé est la donnée d'un espace métrique (X, d) muni d'un point base $x_0 \in X$.*

On se donne une suite d'espaces métriques pointés $(X_n, d_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout $r > 0$, notons $\bar{B}_n(r)$ la boule fermée de X_n de centre x_n et de rayon r .

Définition 2.6.27. *On dit que les espaces métriques pointés (X_n, x_n) convergent au sens de la topologie de Hausdorff-Gromov pointée vers un espace métrique pointé (X, x) si et seulement si les boules $\bar{B}_n(r)$ convergent quand n tend vers $+\infty$ pour la topologie de Hausdorff-Gromov vers la boule $\bar{B}(r)$ pour tout $r > 0$.*

On a l'analogie de la proposition 2.6.23 dans le cas de la convergence de Hausdorff-Gromov pointée :

Proposition 2.6.28. *Soit (X, x) un espace métrique pointé complet. On suppose que (X, x) est obtenu comme limite Hausdorff-Gromov pointée d'espaces (X_n, x_n) .*

- 1) *Si chaque X_n est un espace de longueurs, alors X est un espace de longueurs.*
- 2) *Si chaque X_n est propre, alors X est propre.*
- 3) *Si chaque X_n est propre et géodésique, alors X est propre et géodésique.*
- 4) *Si chaque X_n est CAT(0), alors X est CAT(0).*

Démonstration. La proposition découle immédiatement de la Proposition 2.6.23 □

De la même que pour la topologie de Hausdorff-Gromov, on a un théorème de pré-compacité :

Théorème 2.6.29. ([26, Théorème I.5.45]). *Soit (X_n, x_n) une suite d'espaces métriques pointés. On suppose que pour tout $r > 0$ et $\epsilon > 0$, il existe un entier $N(r, \epsilon)$ tel que chaque $\bar{B}_n(r)$ possède un ensemble fini ϵ -dense de cardinal inférieur à $N(r, \epsilon)$. Alors la suite $(X_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite extraite convergente pour la topologie de Hausdorff-Gromov pointée.*

Remarque 2.6.30. *Considérons l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ muni de sa métrique $q_{1,n} = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$. Pour tout réel $t > 0$, posons :*

$$\mathbb{H}_t^n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) : q_{1,n}(x) = -t^2 \text{ et } x_0 > 0\}.$$

La restriction de la métrique lorentzienne q à chaque \mathbb{H}_t^n induit une métrique riemannienne g_t . Ce sont des variétés riemanniennes simplement connexes et complètes à courbures $\frac{-1}{t^2}$. Pour tout $t > 0$, soit x_t un point base de \mathbb{H}_t^n . Comme le volume de la boule $B(x_t, a)$ est $\sinh^2(\frac{a}{2t})$, tout ensemble fini ϵ -dense est de cardinal $N(\epsilon) \geq \frac{\sinh^2(\frac{a}{2t})}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{2t})}$. Donc la suite de boules $B(x_{t_n}, a)$ n'admet pas de sous-suite convergente pour la topologie de Hausdorff-Gromov quand t_n tend vers 0.

2.6.6 Ultralimites

Définition 2.6.31. *Un filtre sur \mathbb{N} est une fonction $\mu : P(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}$ vérifiant :*

- $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\mathbb{N}) = 1$;

- Si $S_1 \subset S_2$, alors $\mu(S_1) \leq \mu(S_2)$;
- Si $\mu(S_1) = \mu(S_2) = 1$, alors $\mu(S_1 \cap S_2) = 1$.

Dans la définition précédente, si μ vérifie :

- $\mu(S) + \mu(\mathbb{N} \setminus S) = 1$ pour tout S dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$,

alors μ est appelé un ultra-filtre.

Définition 2.6.32. Un ultra-filtre μ est dit non principal si $\mu(S) = 0$ lorsque S est fini.

L'existence d'un ultra-filtre non principal est assurée grâce au lemme de Zorn. En effet, considérons la relation d'ordre \leq sur l'ensemble des filtres de \mathbb{N} définie par : $\mu_1 \leq \mu_2$ si et seulement si $\mu_1(S) \leq \mu_2(S)$ pour tout S dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Un filtre μ est maximal pour cette relation si et seulement si c'est un ultra-filtre. Soit $\omega : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\omega(S) = 1$ si et seulement si $\mathbb{N} \setminus S$ est fini. C'est un filtre sur \mathbb{N} . Remarquons qu'un ultra-filtre μ est non principal si et seulement si $\omega \leq \mu$. Une application du lemme de Zorn aux filtres de \mathbb{N} vérifiant $\omega \leq \mu$ montre l'existence d'un ultra-filtre non principal. L'intérêt des ultra-filtres, comme le montre le lemme suivant, est de sélectionner une limite parmi les valeurs d'adhérences de toute suite bornée.

Lemme 2.6.33. Soit μ un ultra-filtre non principal défini sur \mathbb{N} . Pour toute suite bornée de nombres réels x_n , il existe un unique réel x tel que $\mu \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \epsilon\} = 1$ pour tout $\epsilon > 0$.

Remarque 2.6.34. Le réel x du lemme 2.6.33 est noté $\lim_\mu x_n$ et appelé l'ultra-limite de la suite x_n suivant l'ultra-filtre non principal μ .

Soit maintenant μ un ultra-filtre non principal. Soient $(X_i, d_i, p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques pointés. Considérons l'ensemble

$$X_\infty = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_i X_i : \lim_\mu d_i(x_i, p_i) < +\infty \right\}$$

pointé en $p_\infty = (p_i)_i$. Considérons la pseudo-distance d_∞ définie sur X_∞ par :

$$d_\infty(x, y) = \lim_\mu d_i(x_i, y_i).$$

Définition 2.6.35. Le métrisé $(X_\infty / \sim, \bar{d}_\infty)$ de (X_∞, d_∞) par la pseudo-distance d_∞ pointé en l'image de p_∞ est l'ultra-limite de la suite $(X_n, d_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivant l'ultra-filtre non principal μ . On le note généralement (X_μ, d_μ, p_μ) .

Exemple 2.6.36. [26, Remarque I.5.55] Soit (X, d) un espace métrique dont le complété est propre et soit x_0 un point fixé de X . Pour tout ultra-filtre non principal μ , l'ultra-limite des $(X_n, d_n, x_n) = (X, d, x_0)$ suivant μ est isométrique au complété de X .

Remarque 2.6.37. [26, Remarque I.5.55] Dans l'exemple précédent, l'hypothèse de propreté du complété est importante. En effet, si X est un ensemble dénombrable (infini) muni de la distance $d(x, y) = 1$ pour tout $x \neq y$, son ultra-limite est un espace non dénombrable, alors que (X, d) est déjà lui-même complet.

Un cas particulier d'ultra-limite est celui du cône asymptotique. On se donne un espace métrique (X, d) , une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X et une suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tendant vers l'infini. Considérons la suite $(X_n, d_n, *n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'espaces métriques pointés définie par : $X_n = X$, $d_n = \frac{1}{\lambda_n} d$ et $*n = p_n$.

Définition 2.6.38. L'ultra-limite de cette suite d'espaces métriques pointés suivant l'ultra-filtre non principal μ est appelée un cône asymptotique de X et est noté $\text{Cone}_\mu(X)$.

La proposition suivante résume les propriétés de l'ultra-limite :

Proposition 2.6.39. [26, Page 79] Soit $(X_n, d_n, *_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et soit X_μ son ultra-limite suivant le filtre non principal μ . On a :

- 1) L'espace métrique X_μ est complet.
- 2) Si les X_n sont des espaces de longueur, alors X_μ est un espace de longueur ;
- 3) Si les X_n sont des espaces géodésiques, alors X_μ est un espace géodésique ;
- 4) Si les X_n sont des espaces CAT(0) (CAT(k)), alors X_μ est un espace CAT(0) (CAT(k)) ;
- 5) Si les X_n sont δ_n -hyperboliques avec $\lim_\mu \delta_n = \delta < \infty$, alors X_μ est δ -hyperbolique. En particulier si $\delta = 0$ alors X_μ est un arbre réel.

2.7 Convergence de Γ -espaces métriques

Soit Γ un groupe de type fini.

Définition 2.7.1. Un Γ -espace métrique est la donnée d'un triplet (X, d, ρ) tel que

- 1) (X, d) est un espace métrique ;
- 2) ρ est une représentation de Γ dans le groupe d'isométrie de (X, d) .

Définition 2.7.2. Un Γ -espace métrique pointé est un quadruplet (X, d, ρ, p_*) tel que (X, d, ρ) est un Γ -espace métrique et p_* un point fixé de X .

Dans cette section, nous allons voir diverses notions de convergence de Γ -espaces métriques. En particulier les notions de convergence définies dans la section précédente admettent chacune une version équivariante.

2.7.1 Convergence spectrale

Soit (X, d, Γ, ρ) un Γ -espace métrique. Comme pour les Γ -arbres réel, la distance de translation d'un élément γ de Γ est défini par :

$$l_X(\gamma) = \inf_{x \in X} d(x, \gamma x).$$

Définition 2.7.3. On appelle fonction distance de translation de l'espace métrique (X, d) la fonction $l_X : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à chaque élément γ associe son spectre $l_X(\gamma)$.

Considérons $T(\Gamma)$ la collection des Γ -espaces métriques (X, d, Γ, ρ) . Il est naturellement muni d'une topologie dite *topologie spectrale* définie de la manière suivante : une suite $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $T(\Gamma)$ convergent vers un (X, d) pour cette topologie si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, pour tout P partie finie de Γ , il existe n_0 positif tel que : pour tout γ dans P

$$n \geq n_0 \implies |l_X(\gamma) - l_{X_n}(\gamma)| < \epsilon.$$

Exemple 2.7.4. Soit $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ et soit $(X_n, d_n) = (\mathbb{R}^2, \frac{1}{n}d_{\mathbb{R}^2})$. Alors les (X_n, d_n) convergent spectralement vers le Γ -espace trivial réduit à un point.

2.7.2 Convergence compacte ouverte de Γ -espaces métriques

Soient (X, d_n, ρ_n) une famille de Γ -espaces métriques. Remarquons que si les (X, d_n) convergent uniformément vers (\bar{X}, \bar{d}) , alors Γ agit par isométrie sur (\bar{X}, \bar{d}) .

Définition 2.7.5. On dit que les Γ -espaces métriques (X, d_n, ρ_n) convergent au sens de la topologie compacte ouverte équivariante vers un Γ -espace métrique $(\bar{X}, \bar{d}, \Gamma, \rho)$ si :

- les espaces métriques (X, d_n) convergent au sens de la topologie compacte ouverte vers l'espace métrique (\bar{X}, \bar{d}) ;
- pour tout γ dans Γ et x dans X : $\rho_n(\gamma)x$ tend vers $\rho(\gamma)x$ quand n tend vers l'infini.

2.7.3 Ultra-limite de Γ -espaces métriques

Soit Γ un groupe de type fini et μ un ultra-filtre non principal. Soit (X_n, d_n, ρ_n, p_n) une famille de Γ -espaces métriques pointés et soit X_∞ l'ultra-limite de la suite (X_n, d_n) suivant l'ultra-filtre non principal μ . Supposons de plus que pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\lim_{\mu} d_n(p_n, \rho_n(\gamma)p_n) < \infty.$$

L'action diagonale ρ_∞ de Γ sur X_∞ définie par :

$$\rho_\infty(\gamma)(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\rho_n(\gamma)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une action isométrique pour d_∞ et donc induit une action isométrique ρ_μ de Γ sur l'espace quotient X_μ pointé. Le Γ -espace métrique $(X_\mu, d_\mu, p_\mu, \rho_\mu)$ est l'ultra-limite des Γ -espaces $(X_n, d_n, p_n, \rho_n)_n$ suivant l'ultra-filtre non principal μ .

2.7.4 Topologie de Gromov équivariante

Soit \mathcal{E} un ensemble de Γ -espaces métriques. Pour tout (X, d, Γ, ρ) dans \mathcal{E} , pour toute partie finie K de X , pour toute partie finie P de Γ et pour tout $\epsilon > 0$, soit $\mathcal{V}_{K,P,\epsilon}(X)$ l'ensemble des (X', d', Γ, ρ') dans \mathcal{E} tels qu'il existe une partie finie K' de X' et une correspondance \mathcal{R} entre K et K' telle que :

$$\forall x, y \in K, \forall x', y' \in K', \forall \gamma \in P, x\mathcal{R}x', y\mathcal{R}y' \implies |d(x, \rho(\gamma)y) - d'(x', \rho(\gamma)y')| < \epsilon.$$

L'ensemble des $\mathcal{V}_{K,P,\epsilon}(X)$ est un système fondamental de voisinages de X pour une topologie sur \mathcal{E} , appelée *topologie de Gromov équivariante*.

Définition 2.7.6. Une suite $(X_n, d_n, \Gamma, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Γ -espaces converge vers un Γ -espace (X, d, Γ, ρ) pour la topologie de Gromov équivariante si et seulement si, pour toutes les parties finies K de X et P de Γ , et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, il existe une partie finie K_n de X_n et une correspondance \mathcal{R}_n entre K et K_n vérifiant :

$\forall x, y \in K, \forall x_n, y_n \in K_n, \forall \gamma \in P$, si $x\mathcal{R}_n x_n$ et $y\mathcal{R}_n y_n$, alors

$$|d(x, \rho(\gamma)y) - d_n(x_n, \rho(\gamma)y_n)| < \epsilon.$$

Remarque 2.7.7. Dans la première définition donnée par Paulin [41], les parties K étaient supposées compactes mais ceci équivaut à la définition ci dessus.

Exemple 2.7.8. La topologie de Gromov équivariante a été élaborée par Paulin [41]. Elle lui a permis d'apporter un nouveau point de vue sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller $\text{Teich}(S)$ d'une surface S orientée connexe et compacte. Plus précisément : pour toute suite d'éléments $(\sigma_i)_{i \geq 1}$ de $\text{Teich}(S)$ convergeant vers un point du bord de Thurston i.e une classe d'homothétie de lamination géodésique mesurée \mathcal{L} , alors il existe une suite t_i de nombres réels strictement positifs tendant vers 0 tels que les $(t_i \mathbb{H}^2, \rho_{\sigma_i})$ convergent pour la topologie de Gromov équivariante vers l'arbre réel associé à \mathcal{L} .

La topologie de Gromov équivariante n'est pas séparée. Une suite donnée peut avoir plusieurs limites. En effet, si une suite X_n converge vers un espace X , alors elle converge vers tout sous espace Γ -équivariant de X .

Le théorème suivant est un résultat de pré-compacité pour cette topologie :

Théorème 2.7.9. Soit $(X_n, d_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Γ -espaces métriques $\text{CAT}(k_n)$ avec $k_n < k < 0$. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X_n , telle que pour toute partie finie P de Γ , les adhérences des enveloppes convexes $\text{Conv}(\rho_n(P)x_n)$ sont uniformément compactes. Alors quitte à extraire une sous-suite, les $(X_n, d_n, \Gamma, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettent une limite pour la topologie de Gromov équivariante.

La proposition suivante montre qu'en plus, dans le théorème précédent, toute limite est à courbure strictement négative.

Proposition 2.7.10. *Soit (X, d, Γ, ρ) un Γ -espace géodésique et k un réel négatif. Supposons qu'il existe une suite $(X_n, d_n, \Gamma, \rho_n)_n$ de Γ -espaces CAT(k) convergeant vers (X, d, Γ, ρ) . Alors (X, d, Γ, ρ) est un espace CAT(k).*

Démonstration. Nous ne traitons que le cas $k = 0$. Soit $\Delta(x, y, z)$ un triangle géodésique dans X . Soient p, q deux éléments de $\Delta(x, y, z)$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $p \in [x, y]$ et que $q \in [x, z]$. Il existe des parties finies $K_n = \{x_n, y_n, z_n, p_n, q_n\}$ convergeant vers $\{x, y, z, p, q\}$ au sens de la définition 2.6.7. Considérons $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ (resp $\bar{\Delta}(\bar{x}_n, \bar{y}_n, \bar{z}_n)$) le triangle de comparaison correspondant à $\Delta(x, y, z)$ (resp $\Delta(x_n, y_n, z_n)$) et \bar{p}, \bar{q} (resp \bar{p}_n, \bar{q}_n) les points de comparaison correspondant à p et à q (resp p_n, q_n). Les triangles de comparaisons $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ et $\bar{\Delta}(\bar{x}_n, \bar{y}_n, \bar{z}_n)$ peuvent être choisis dans une région compacte de \mathbb{R}^2 . Il s'en suit donc que les $\bar{\Delta}_n$ convergent vers $\bar{\Delta}$. Ce qui donne que les $d_{\mathbb{R}^2}(\bar{p}_n, \bar{q}_n)$ tendent vers $d_{\mathbb{R}^2}(\bar{p}, \bar{q})$. Or les (X_n, d_n) sont CAT(0), donc $d(p_n, q_n) \leq d(\bar{p}_n, \bar{q}_n)$. En passant à la limite, on en déduit que $d(p, q) \leq d(\bar{p}, \bar{q})$ et donc (X, d) est CAT(0). \square

L'exemple suivant, à comparer avec la remarque 2.6.30, illustre dans un cas élémentaire un des résultats principaux de cette thèse :

Exemple 2.7.11. *Considérons l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ muni de sa métrique lorentzienne $q = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$. Notons par*

$$\mathbb{H}_t^n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) : \mathfrak{q}_{1,n}(x) = -t^2 \text{ et } x_0 > 0\}.$$

La restriction de q à chaque \mathbb{H}_t^n induit une métrique riemannienne g_t . Les \mathbb{H}_t^n sont obtenus à partir de l'espace $\mathbb{H}_1^n \approx \mathbb{H}^n$ en multipliant par t . Le groupe d'isométries des \mathbb{H}_t^n est $SO(1, n)$. Soit Γ un réseau uniforme de $SO(1, n)$. L'action de Γ sur chaque \mathbb{H}_t^n est libre, cocompacte et proprement discontinue. Alors \mathbb{H}_t^n/Γ converge quand t tend vers 0 au sens de la topologie de Gromov équivariante vers l'espace $(\{0\}, d = 0)$.

2.7.5 Relations entre les différentes notions de convergence

Les différentes notions de convergence d'espaces métriques ou de Γ -espaces métriques sont naturellement reliées les unes aux autres. Les propositions suivantes établissent une certaine hiérarchie entre ces différentes notions de convergence.

Proposition 2.7.12. *Soient (X_n, d_n, p_n) une suite d'espaces métriques pointés. Si (X_n, d_n) converge au sens de Hausdorff-Gromov alors elle converge au sens de Hausdorff-Gromov pointée.*

La proposition suivante met en évidence la relation entre ultra-limite et la convergence Hausdorff Gromov.

Proposition 2.7.13. [26, Exercice I.5.52] *Soient $(X_n, d_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques propres pointés convergeant au sens de Hausdorff-Gromov vers un espace métrique $(X_\infty, d_\infty, x_\infty)$ complet. Alors, pour tout ultra-filtre non principal μ , l'ultra-limite (X_μ, d_μ, x_μ) est isométrique à $(X_\infty, d_\infty, x_\infty)$.*

Proposition 2.7.14. [27, Exemple 7.4.2] *La convergence uniforme d'espaces métriques entraîne la convergence de Hausdorff-Gromov.*

Comme la convergence Lipschitz est un cas particulier de la convergence uniforme :

Proposition 2.7.15. [27, Exercice 7.2.6, Exemple 7.4.2] *Si X est une limite Lipschitz d'espaces métriques compacts X_n , alors c'est une limite de Hausdorff-Gromov de ces espaces métriques.*

Proposition 2.7.16. *Soient $(X_n, d_n, x_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Γ -espaces métriques pointés. Pour tout ultra-filtre non principal μ , l'ultra-limite $(X_\mu, d_\mu, x_\mu, \rho_\mu)$ est une limite Gromov équivariante de la suite de Γ -espaces métriques pointés $(X_n, d_n, x_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Proposition 2.7.17. *Soit $(X, d_n, \Gamma, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Γ -espaces métriques convergeant uniformément sur les compacts. Alors $(X, d_n, \Gamma, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour la topologie Gromov équivariante.*

Proposition 2.7.18. *Soit (X_n, d_n, p_n) une suite d'espaces métriques munis d'actions isométriques de Γ . Supposons que Γ est le groupe trivial. Si les (X_n, d_n, p_n) convergent au sens de Hausdorff-Gromov pointée alors les (X_n, d_n) convergent au sens de Gromov équivariante.*

Chapitre 3

Fonctions temps en expansion

Dans ce chapitre nous étudions le caractère expansif des fonctions temps convexes dans un espace-temps plat de dimension $n + 1$ admettant une hypersurface de Cauchy hyperbolique. Ceci va nous permettre d'étudier ensuite le comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps quasi-concave au sens de la topologie spectrale. Nous généralisons ainsi un résultat obtenu par Bonsante [25] dans le cas de la fonction temps cosmologique. Nous commençons d'abord par rappeler la classification des espaces-temps plats *MGHC* dans le cas particulier où l'espace-temps admet une hypersurface de Cauchy hyperbolique. Cette classification fait intervenir la notion de domaine régulier que nous allons étudier en détail dans ce chapitre. Nous étudions ensuite l'existence des fonctions temps dites quasi-concaves ainsi que leurs propriétés. Nous finissons par montrer la première partie du Théorème A, dont l'objet est l'étude de la convergence spectrale des niveaux d'une fonction temps quasi-concave en dimension quelconque, dans le cas plat.

3.1 espaces-temps plats

Dans les années 90 G. Mess [38] a classifié les espaces-temps plats non élémentaires de dimension $2+1$. Cette classification a été généralisée par la suite en dimension quelconque dans les travaux de Barbot [9], Bonsante [25]. Ils sont essentiellement obtenus comme quotients de domaines convexes de l'espace de Minkowski par des sous groupe discrets de $SO^+(1, n) \ltimes \mathbb{R}^{1, n}$. Dans cette partie nous exposons quelques éléments de cette classification, cependant nous nous restreignons au cas où l'on a une hypersurface de Cauchy difféomorphe à une variété hyperbolique compacte, en repoussant le cas général au chapitre 7.

3.1.1 Espace de Minkowski

Rappelons tout d'abord que l'espace de Minkowski de dimension $n + 1$, qu'on note généralement par $\mathbb{R}^{1, n}$, est l'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni d'une forme quadratique de signature $(1, n)$. En d'autres termes, on munit l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+1} de sa base canonique (e_0, e_1, \dots, e_n) . On définit la forme quadratique $q_{1, n} = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ où (x_0, x_1, \dots, x_n) désignent les coordonnées dans la base canonique. C'est un espace-temps plat c'est-à-dire un espace-temps à courbure nulle. Ceci permet d'identifier, grâce au transport parallèle, chaque espace tangent $T_p \mathbb{R}^{1, n}$ avec $\mathbb{R}^{1, n}$. Il est naturellement muni d'une orientation chronologique définie par le champ de vecteurs constant partout égal à e_0 qu'on note généralement par $\nu = \frac{\partial}{\partial x_0}$.

Le groupe $O(1, n)$ est le groupe des isométries linéaires de $\mathbb{R}^{1, n}$, celles qui fixent l'origine. La composante connexe de l'identité $O^+(1, n)$ est le groupe des isométries linéaires préservant l'orientation chronologique. Le groupe des isométries de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1, n}$ préservant l'orientation et l'orientation chronologique est $SO^+(1, n) \ltimes \mathbb{R}^{1, n}$.

Les géodésiques de Minkowski, au sens auto-parallèle de la connexion de Levi-Civita, sont les courbes de la forme $x + tv$ où x est un point de l'espace de Minkowski, v un vecteur et où t décrit \mathbb{R} . On distingue trois types de géodésiques :

- 1) les géodésiques de type temps : ce sont les courbes de la forme $x + tv$ où v est un vecteur de type temps ;
- 2) les géodésiques de type lumière : ce sont les courbes de la forme $x + tv$ où v est un vecteur de type lumière ;
- 3) les géodésiques de type espace : ce sont les courbes de la forme $x + tv$ où v est un vecteur de type espace.

De manière analogue les sous-espaces de dimension n totalement géodésiques de l'espace de Minkowski sont les hyperplans de la forme $x + n^\perp$ où n est un vecteur. Ainsi, ils sont de type :

- 1) espace si et seulement si n est de type temps ;
- 2) temps si et seulement si n est de type espace ;
- 3) lumière si et seulement si n est de type lumière.

Exemple 3.1.1. *Considérons l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,2}$ muni de sa forme quadratique $\mathfrak{q}_{1,2}$. Fixons une origine O . Soit C le cône lumière définie par $C = \{p \in \mathbb{R}^{1,2} : \mathfrak{q}_{1,n}(p, p) = 0\}$. Alors :*

- 1) *Les sous-espaces totalement géodésiques de type espace passant par O sont les hyperplans qui ne rencontrent C qu'au point O ;*
- 2) *Les sous-espaces totalement géodésiques de type temps (de dimension 2) passant par O sont les hyperplans qui rencontrent C en exactement deux droites de type lumière passant par O ;*
- 3) *Les sous-espaces totalement géodésiques de type lumière passant par O sont les hyperplans qui rencontrent C en exactement une droite géodésique lumière.*

Le fait que la norme d'un vecteur peut être négative ne permet pas de donner un sens à la notion de géodésique minimisante. Cependant on a toujours une notion de longueur donnée par :

$$l(\alpha) = \int \sqrt{|\mathfrak{q}_{1,n}(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t))|}$$

où α est une courbe C^1 par morceaux. Notons que pour cette longueur, la distance induite est triviale. En effet, toute paire de points de l'espace de Minkowski peut être reliée par une courbe C^1 par morceaux formée de segments géodésiques lumière. Notons aussi que parmi les courbes temporelles reliant deux points donnés x et y , la droite est la courbe qui maximise cette longueur.

Dans l'espace de Minkowski les sous-ensembles achronaux (acausaux) sont bien caractérisés. Ils sont des graphes de fonctions 1-Lipschitz comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3.1.2. *Soit S une partie de $\mathbb{R}^{1,n}$. Alors :*

- *S est achronale si et seulement s'il existe Λ sous-ensemble de \mathbb{R}^n et une application 1-Lipschitz $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$S = G(f) = \{(f(x), x) : x \in \Lambda\};$$

- *S est achronale sans bord si et seulement si Λ est ouvert dans \mathbb{R}^n*

Démonstration. 1) On se place dans un système de coordonnées (x_0, x_1, \dots, x_n) . Considérons la projection $\pi_2 : \mathbb{R}^{1,n} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Les fibres de π_2 sont des droites temporelles. Chacune de ses fibres rencontre donc S au plus une fois. Ceci montre qu'il existe une fonction $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Lambda = \pi_2(S)$ et $S = G(f)$. Le fait que f est Lipschitz découle immédiatement de l'achronalité de S . La réciproque est triviale.

2) On suppose de plus que S est sans bord. Soit x dans Λ , il existe donc un voisinage ouvert V de $p = (f(x), x)$ tel que toute courbe causale qui relie un point de $I^-(p) \cap V$ et un point de $I^+(p) \cap V$ rencontre $S \cap V$. Il s'en suit que si y est un point assez proche de x , la fibre $\pi_2^{-1}(y)$ rencontre S et donc y appartient à Λ . Réciproquement, supposons que Λ est ouvert. Soit $p = (f(x), x)$ un élément de Λ et soit $\epsilon > 0$ tel que la boule B de centre x et de rayon ϵ soit contenue dans Λ . Soit maintenant l'ouvert $V =]-\epsilon, +\epsilon[\times B$ et soit (t_1, x_1) dans $I^+(p) \cap V$ et (t_2, x_2) dans $I^-(p) \cap V$. Soit $\alpha : t \rightarrow (t, x(t))$ est une courbe causale reliant ces deux points. Comme $t \rightarrow x(t)$ est 1-Lipschitz et que t varie dans $]t_1; t_1[\cup]-\epsilon, +\epsilon[$ chaque $x(t)$ est à distance au plus ϵ de x_1 ou de x_2 , et donc à distance au plus 2ϵ de x : il appartient donc à B . On peut donc considérer l'application $t \rightarrow f(x(t)) - t$. Cette application est continue, positive en t_2 et négative en t_1 . Elle s'annule donc, ce qui signifie que la courbe α rencontre bien S . \square

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la Proposition 3.1.2 :

Corollaire 3.1.3. *S est fermé achronal sans bord si et seulement s'il est le graphe d'une application 1-Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$*

Démonstration. S est le graphe d'une application 1-Lipschitz $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ avec Λ ouvert. Cette application s'étend de manière unique à l'adhérence. Comme S est fermé ce ci entraîne que Λ est fermé et donc $\Lambda = \mathbb{R}^n$. \square

Remarque 3.1.4. *La proposition précédente et son corollaire sont vrais en remplaçant achronal par acausal. Dans ce cas la fonction f est contractante.*

Dans $\mathbb{R}^{1,n}$ les parties localement achronales sont en fait globalement achronales comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3.1.5. *Toute partie localement achronale de $\mathbb{R}^{1,n}$ sans bord fermée et connexe est globalement achronale.*

Démonstration. Soit S un ensemble fermé localement achronal sans bord de $\mathbb{R}^{1,n}$. La restriction $\pi_{2,S}$ de π_2 à S est un homéomorphisme local (voir Proposition 3.1.2) dont l'image est \mathbb{R}^n tout entier (par le Corollaire 3.1.3). Montrons que cette application a la propriété des relèvement des chemins. Comme \mathbb{R}^n est simplement connexe et que S est connexe, ceci montrera comme voulu que $\pi_{2,S}$ est un homéomorphisme global.

Soit p_0 dans S et $x_0 = \pi_{2,S}(p_0)$ dans \mathbb{R}^n . Soit maintenant α une courbe continue définie sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R}^n telle que : $\alpha(0) = x_0$. Considérons I l'ensemble des réels s tels qu'il existe une courbe $\bar{\alpha}_s$ issue de p_0 dans S vérifiant $\pi_{2,S} \circ \bar{\alpha}_s(t) = \alpha(t)$ pour tout t dans $[0, s[$. Comme $\pi_{2,S}$ est un homéomorphisme local, il existe un ouvert U de p_0 dans S et une boule ouverte B autour de x_0 tel que $\pi_{2,S}$ soit un homéomorphisme de U dans B . Comme α est continue, il existe un $s > 0$ tels que $\alpha_{[0,s[}$ soit contenue dans B . Donc la courbe définie par $\bar{\alpha}_s = \pi_{2,S}^{-1}(\alpha_{[0,s[}) \cap U$ vérifie : $\pi_{2,S} \circ \bar{\alpha}_s(t) = \alpha(t)$ pour tout t dans $[0, s[$; ce qui montre que I est non vide. De plus I est connexe donc c'est un intervalle de la forme $[0, 1]$ ou de la forme $[0, s_{max}[$ avec $0 < s_{max} < 1$. Le deuxième cas est exclu. En effet, la courbe $\bar{\alpha}_{s_{max}}$ est lipschitz et donc se prolonge par continuité en s_{max} . Donc $I = [0, 1]$. \square

Le théorème suivant caractérise les domaines globalement hyperboliques de $\mathbb{R}^{1,n}$.

Théorème 3.1.6. ([14, Théorème 1.5.1]). *Le développement de Cauchy d'un fermé achronal sans bord de l'espace de Minkowski est soit futur complet, soit passé complet soit compris entre deux hyperplans lumières parallèles.*

Un exemple typique de domaine globalement hyperbolique de $\mathbb{R}^{1,n}$ est le futur ou le passé d'un fermé achronal S . Nous verrons par la suite que des hypothèses supplémentaires sur S telles que l'invariance par un sous groupe discret de $SO^+(1, n) \ltimes \mathbb{R}^{1,n}$ ou la maximalité du domaine associé impliquent des restrictions importantes sur la géométrie de S .

3.1.2 Domaines réguliers

Les domaines réguliers sont un ingrédient essentiel de la classification des espaces-temps plats. Ils ont été introduits séparément par T. Barbot [9] et F. Bonsante [25]. Dans cette partie nous allons étudier les propriétés de ces domaines.

Soit $\mathbb{R}^{1,n}$ l'espace de Minkowski muni de la forme quadratique $q_{1,n} = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ dans un système de coordonnées donné. Rappelons qu'un hyperplan de type lumière P est défini par la donnée d'un point x et d'un vecteur de type lumière n . Il s'écrit alors sous la forme $x + n^\perp$. Un tel vecteur n peut être vu comme orienté vers le futur ($x_0 > 0$) ou orienté vers le passé ($x_0 < 0$). L'espace des vecteurs n de type lumière orientés vers le futur tel que $\|n\| = 1$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne $dx_0^2 + \dots + dx_n^2$ de \mathbb{R}^{n+1} muni de la restriction de q n'est autre que la sphère ronde de dimension $n - 1$. Notons la \mathbb{S}^{n-1} .

Considérons l'espace \mathfrak{P} des hyperplans de type lumière de Minkowski. Soit $\phi : \mathfrak{P} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ l'application qui à chaque hyperplan $P = x + n^\perp$ de \mathfrak{P} associe le couple $(n, Q(n, x))$. Comme $Q(n, x)$ est indépendant du choix du point x dans P , cette application est bien définie et est une bijection.

Soit \mathfrak{A} un sous-ensemble de \mathfrak{P} . On définit le sous-ensemble $\Omega^+(\mathfrak{A})$ de $\mathbb{R}^{1,n}$ par :

$$\Omega^+(\mathfrak{A}) = \bigcap_{P \in \mathfrak{A}} I^+(P).$$

De manière similaire, on définit le sous-ensemble $\Omega^-(\mathfrak{A})$ en remplaçant dans la définition ci dessus les futurs $I^+(P)$ des hyperplans P par leurs passés $I^-(P)$.

Définition 3.1.7. *Si \mathfrak{A} contient au moins deux éléments, et si $\Omega^+(\mathfrak{A})$ ($\Omega^-(\mathfrak{A})$) est un ouvert non vide alors il est appelé domaine régulier futur (respectivement passé).*

Il découle immédiatement de la définition qu'un domaine régulier $\Omega^+(\mathfrak{A})$ ($\Omega^-(\mathfrak{A})$) est convexe et futur complet (respectivement passé complet). Dans toute la suite nous allons supposer, quitte à inverser l'orientation que nous avons affaire à des domaines futurs complets. La proposition suivante relie les propriétés de $\Omega^+(\mathfrak{A})$ à celles de \mathfrak{A} :

Proposition 3.1.8. *Soit \mathfrak{A} un sous-ensemble de \mathfrak{P} contenant au moins deux éléments.*

- 1) *Si \mathfrak{A} est fermé alors $\Omega^+(\mathfrak{A})$ est ouvert ;*
- 2) *Si $\Omega^+(\mathfrak{A})$ est un domaine régulier alors $\Omega^+(\mathfrak{A}) = \Omega^+(\bar{\mathfrak{A}})$.*

Démonstration. 1) On suppose que \mathfrak{A} est fermé dans \mathfrak{P} . Si $\Omega^+(\mathfrak{A})$ est vide, alors il est ouvert. Sinon supposons que $\Omega^+(\mathfrak{A})$ n'est pas ouvert, son complémentaire $\Omega^+(\mathfrak{A})^c$ dans $\mathbb{R}^{1,n}$ est donc contenu strictement dans son adhérence. Ce qui montre qu'il existe une suite p_n d'élément de $\Omega^+(\mathfrak{A})^c$ convergeant vers un élément p de $\Omega^+(\mathfrak{A})$. Pour chaque n , il existe donc $P_n = (x_n, t_n) \in \mathfrak{A}$ tel que $\langle p_n, x_n \rangle \geq t_n$. Quitte à extraire une sous suite, les x_n convergent vers un x dans \mathbb{S}^{n-1} . D'autre part comme p est dans $\Omega^+(\mathfrak{A})$, on a $\langle p, x_n \rangle < t_n$ pour tout entier n . Comme les p_n convergent vers p , il s'en suit que t_n converge vers $\langle p, x \rangle$. L'ensemble \mathfrak{A} étant fermé, $(x, \langle p, x \rangle) \in \mathfrak{A}$. Ce qui contredit le fait que p appartient à $\Omega^+(\mathfrak{A})$.

2) Supposons maintenant que $\Omega^+(\mathfrak{A})$ est un domaine régulier. On a que $\Omega^+(\bar{\mathfrak{A}}) \subset \Omega^+(\mathfrak{A})$. Supposons qu'il existe p un élément de $\Omega^+(\bar{\mathfrak{A}})$ tel que $\langle p, x \rangle \geq t$ pour un certain $P = (x, t) \in \bar{\mathfrak{A}}$. Soit (x_n, t_n) une suite d'éléments de \mathfrak{A} convergeant vers (x, t) . En passant à la limite on obtient que $\langle p, x \rangle = t$. Comme $\Omega^+(\mathfrak{A})$ est ouvert on peut trouver un élément q de $\Omega^+(\mathfrak{A})$ tel que $\langle q, x \rangle > t$. Mais par le même argument ci dessus on a que $\langle q, x \rangle = t$ ce qui donne la contradiction. \square

Remarque 3.1.9. *La preuve du théorème précédent montre que $\Omega^+(\bar{\mathfrak{A}})$ contient l'intérieur de $\Omega^+(\mathfrak{A})$.*

Corollaire 3.1.10. *Soit \mathfrak{A} un sous-ensemble de \mathfrak{P} . Alors $\text{int}(\Omega^+(\mathfrak{A})) = \Omega^+(\bar{\mathfrak{A}})$.*

Démonstration. Par la remarque précédente $\text{int}(\Omega^+(\mathfrak{A})) \subset \Omega^+(\bar{\mathfrak{A}})$. Par la proposition précédente $\Omega^+(\bar{\mathfrak{A}})$ est ouvert et comme il est contenu dans $\Omega^+(\mathfrak{A})$, on a $\Omega^+(\bar{\mathfrak{A}}) \subset \text{int}(\Omega^+(\mathfrak{A}))$. \square

Exemple 3.1.11. *Considérons l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^{1,n}, \mathfrak{q}_{1,n})$ avec une origine 0. Soit $C_{<} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{1,n} : \mathfrak{q}_{1,n}(p, p) < 0 \text{ et } x_0 > 0\}$ le cône futur issu de 0. Alors $C_{<}$ est un domaine régulier futur complet associé au sous-ensemble \mathfrak{A} de \mathfrak{P} de tous les hyperplans lumières passant par 0.*

Un autre exemple de domaine régulier auquel on peut penser est celui ou l'ensemble \mathfrak{A} est fini.

Exemple 3.1.12. *Soit \mathfrak{A} un sous-ensemble contenant exactement deux éléments de \mathfrak{P} . Le domaine régulier $\Omega^+(\mathfrak{A})$ associé est appelé bande de Misner.*

Proposition 3.1.13. *Soit \mathfrak{A} un sous-ensemble fermé de \mathfrak{P} contenant au moins deux éléments. Alors les domaines $\Omega^+(\mathfrak{A})$ et $\Omega^-(\mathfrak{A})$ qui lui sont associés sont non vides si et seulement si \mathfrak{A} est compact.*

Démonstration. Supposons que $\Omega^+(\mathfrak{A})$ est un domaine régulier futur complet i.e non vide . Soit p dans $\Omega^+(\mathfrak{A})$, alors pour tout (v, s) dans \mathfrak{A} on a $\langle p, v \rangle < s$. Comme \mathbb{S}^{n-1} est compacte, la quantité $\langle p, v \rangle < s$ est minorée par une constante C_1 . Donc $s > C_1$ pour tout (v, s) dans \mathfrak{A} . De manière similaire on montre que si $\Omega^-(\mathfrak{A})$ est un domaine régulier passé complet alors il existe une constante C_2 telle que pour tout (v, s) dans \mathfrak{A} on a $s < C_2$. Donc \mathfrak{A} est compact.

Inversement supposons que \mathfrak{A} est compact . Il existe donc une constante C_1 et une constante C_2 telles que pour tout (v, s) dans \mathfrak{A} on a $C_1 < s < C_2$. Les hyperplans lumières (v, C_1) où v parcourt \mathbb{S}^{n-1} s'intersectent tous au même point p formant ainsi un cône lumière au dessus de p . Le point p vérifie alors en particulier $\langle p, v \rangle = C_1 < s$ pour tout (v, s) dans \mathfrak{A} . Donc p appartient à $\Omega^+(\mathfrak{A})$ ce qui montre qu'il est non vide. De la même façon on montre que le domaine $\Omega^-(\mathfrak{A})$ est non vide. \square

Définition 3.1.14. *Soit Ω un domaine futur complet de Minkowski et P un hyperplan. On dit que P est un hyperplan support de Ω si et seulement si Ω est contenu dans un des deux demi-espaces bordés par P .*

Remarque 3.1.15. *La définition classique d'hyperplan support suppose généralement que $P \cap \bar{\Omega}$ soit non vide. On peut voir que la définition 3.1.14 est celle utilisée dans [25] et nous l'avons choisie pour des raisons pratiques.*

L'existence d'au moins deux hyperplans lumières dans la définition du domaine régulier assure l'existence d'un hyperplan support de type espace. Plus précisément, si $p_1 + v_1^\perp$ et $p_2 + v_2^\perp$ sont deux hyperplans de type lumière alors ils s'intersectent le long d'un sous espace affine A de type espace de dimension $n-1$. De plus le couple (v_1, v_2) engendre un plan de type temps P . Pour tout n dans P et tout p dans A , l'hyperplan $p + n^\perp$ est un hyperplan support de type espace. Une première conséquence est qu'un domaine régulier ne peut être futur d'un hyperplan de type temps ni l'espace de Minkowski tout entier. Elle permet aussi d'éviter le cas trivial du futur d'un hyperplan de type lumière. La proposition suivante montre que les domaines réguliers jouissent de la jolie propriété d'avoir un temps cosmologique régulier.

Proposition 3.1.16. ([25, Proposition 4.3]). *Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet. Alors :*

- Pour tout p dans Ω^+ , il existe un unique $r(p)$ dans $\partial\Omega^+$ réalisant le temps cosmologique i.e tel que $T_{\text{cos}}(p) = \mathfrak{q}_{1,n}(p - r(p), p - r(p))$;
- La fonction $r : \Omega^+ \rightarrow \partial\Omega^+$ est une fonction continue.
- Le temps cosmologique T_{cos} de Ω^+ est régulier ;

Démonstration. Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet. Soit p un point de Ω^+ . On sait que Ω^+ admet un hyperplan support de type espace, ce qui implique que $J^-(p) \cap \partial\Omega^+$ est compact. Ceci entraîne que le $\sup_{q \in J^-(p) \cap \partial\Omega^+} d(p, q)$ est atteint en un point $r(p)$ de $J^-(p) \cap \partial\Omega^+$. La distance $d(p, r(p))$ étant finie, ceci montre que T_{cos} est un temps fini. S'il existe un autre point $r'(p)$ dans $J^-(p) \cap \partial\Omega^+$ tel que $T_{cos}(p) = d(p, r'(p))$, alors $r(p)$ et $r'(p)$ sont dans le même hyperboloïde contenu dans le cône passé issu de p . D'un coté le segment $]r(p), r'(p)[$ est dans le futur de $\partial\Omega^+$ et donc de distance lorentzienne inférieure ou égale à $d(p, r(p))$. D'un autre coté le segment $]r(p), r'(p)[$ est strictement contenu dans le passé de l'hyperboloïde contenant $r(p)$ et $r'(p)$ et donc à distance strictement supérieure à $d(p, r(p))$ contradiction. Le temps cosmologique s'exprime alors sous la forme $T_{cos}(p) = \sqrt{-q(p - r(p), p - r(p))}$.

Soit p_n une suite d'éléments de Ω^+ qui convergent vers p dans Ω^+ . Il existe alors un compact K de Ω^+ contenant les p_n . On sait que $J^-(K) \cap \partial\Omega^+$ est compact. D'autre part si les $r(p_n)$ convergent vers un r dans $J^-(K) \cap \partial\Omega^+$ alors r réalise le temps cosmologique de p et donc égale à $r(p)$. Ceci suffit pour montrer que $r(p_n)$ converge vers $r(p)$ et donc la continuité de r .

Si p_n est une suite d'éléments de Ω^+ qui converge vers un élément \bar{p} de $\partial\Omega^+$ alors, quitte à prendre une sous suite, les $r(p_n)$ convergent vers un point r de $\partial\Omega^+$ qui est dans le passé causal de \bar{p} . On a que $T_{cos}(p_n) = |p_n - r(p_n)|$ converge vers $|\bar{p} - r|$ et le fait que $\partial\Omega^+$ soit achronal montre que $T_{cos}(p_n)$ tend vers 0. Ceci suffit pour conclure que le temps cosmologique est régulier. \square

Remarque 3.1.17. *La proposition précédente est vraie dans un cadre un peu plus général que les domaine réguliers. Plus précisément la convexité et l'existence d'un hyperplan support de type espace suffisent.*

Proposition 3.1.18. ([25, Lemme 4.9]). *Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet. Alors :*

- Ω^+ est globalement hyperbolique ;
- Le temps cosmologique T_{cos} de Ω^+ est un temps de Cauchy.

Démonstration. Le fait que Ω^+ soit globalement hyperbolique découle immédiatement du fait qu'il soit futur complet. Montrons que T_{cos} est un temps de Cauchy. Soit $\alpha :]0, +\infty[\rightarrow \Omega^+$ une courbe causale inextensible future. On ne perd pas de généralité en supposant que le point origine de $\mathbb{R}^{1,n}$ est le point limite de α . On peut toujours écrire α sous la forme $\alpha(t) = (t, c(t))$. Dans ce cas on a que $\tau(\alpha(t)) \geq \sqrt{t^2 - \|c(t)\|^2}$. Il s'en suit que $\tau(\alpha(t)) \geq 2t$. Comme τ est une fonction qui croit strictement le long des courbes causales, ceci implique qu'elle tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Le résultat découle alors de la régularité du temps cosmologique. \square

Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet et soit r la fonction rétraction associée. Considérons la fonction $N : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{H}^n$ définie par :

$$N(p) = \frac{1}{T_{cos}(p)}(p - r(p)).$$

Lemme 3.1.19. ([9], [25, Lemme 4.15]). *Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet. On suppose que la fonction normale N est surjective. Alors la restriction de N à un niveau cosmologique est une fonction propre.*

Démonstration. Soit $\Sigma_1^{T_{cos}}$ le niveau 1 de la fonction temps cosmologique. Soit K un compact de \mathbb{H}^n et $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $N^{-1}(K) \cap \Sigma_1^{T_{cos}}$. Quitte à extraire une sous suite on peut supposer que les $N(p_i)$ convergent vers un point n_∞ dans K . Comme l'application N est surjective, il existe un p_∞ dans $\Sigma_1^{T_{cos}}$ tel que $N(p_\infty) = n_\infty$. Il est facile de voir que la limite des segments $[p_\infty, p_i]$ est un segment partant de p_∞ ou un rayon partant de p_∞ .

Notons le par R . Supposons qu'on est dans le deuxième cas. On peut facilement montrer que le rayon R est contenu dans $(p_\infty + n_\infty^+) \cap \Sigma_1^{T_{cos}}$. Il existe donc un v de type espace tel que $R = p_\infty + \mathbb{R}_+ v$. On a donc $\langle v, p_\infty \rangle = 0$.

Soit n dans \mathbb{H}^n tel que $\langle p_\infty, n \rangle > 0$ et soit q dans $\Sigma_1^{T_{cos}}$ tel que $N(q) = n$. On montre alors facilement que $\langle p_\infty + tv - q, n_\infty - n \rangle \geq 0$ pour tout $t > 0$. Donc $\langle p_\infty - q, n_\infty - n \rangle + t \langle v, n_\infty - n \rangle \geq 0$ pour tout $t > 0$. Or $\langle v, n_\infty - n \rangle < 0$ ce qui donne une contradiction. \square

Remarque 3.1.20. *Bien sûr on obtient les mêmes résultats dans le cas d'un domaine régulier passé complet Ω^- .*

Singularité initiale associée à un domaine régulier

Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet. Soit $r : \Omega^+ \rightarrow \partial\Omega^+$ son application rétraction associée.

Définition 3.1.21. *On appelle singularité initiale le sous-ensemble $\Sigma = r(\Omega^+)$ de $\partial\Omega^+$.*

Soit p un point de Ω^+ . L'hyperplan $r(p) + (p - r(p))^\perp$ est un hyperplan support de type espace de Ω^+ . En effet, tous les points de $(r(p) + (p - r(p))^\perp) \cap I^-(p)$ sont à distance Lorentzienne inférieure à $T_{cos}(p)$. Donc si le passé de $(r(p) + (p - r(p))^\perp)$ rencontre Ω^+ , alors Ω^+ rencontre le passé de l'hyperboloïde à distance $\tau(p)$ dans le cône passé de p . Ce qui contredit le fait que $r(p)$ est maximisant. Ceci montre aussi que si $r + (p - r)^\perp$ est un hyperplan support Ω^+ passant par un point r de $\partial\Omega^+$ alors $r = r(p)$. On a donc la caractérisation suivante de Σ :

Proposition 3.1.22. ([25, Corollaire 4.5]). *La singularité initiale Σ est l'ensemble des points de $\partial\Omega^+$ par lesquels passent un hyperplan support de type espace.*

Remarque 3.1.23. *A noter qu'un point de Σ peut être contenu dans plusieurs hyperplans support de type espace.*

Exemple 3.1.24. *Soit $C_<$ le cône futur de $\mathbb{R}^{1,n}$ issu de 0. La rétraction est dans ce cas l'application constante qui associe à chaque élément de $C_<$ le point origine 0. Donc la singularité initiale Σ est réduite au point 0. Tous les hyperplans de type espace passant par 0 sont des hyperplans support à C .*

La proposition suivante caractérise les points de Σ via les propriétés géométriques de $\partial\Omega^+$:

Proposition 3.1.25. ([25, Lemme 4.11, Proposition 4.12]). *Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet et r sa rétraction associée. Alors :*

- Par tout point de $\partial\Omega^+$ passe un rayon lumière qui est contenu entièrement dans $\partial\Omega^+$;
- La singularité initiale Σ est exactement l'ensemble des points de $\partial\Omega^+$ par lesquels passent au moins deux rayons lumières contenus entièrement dans $\partial\Omega^+$;
- Pour tout point q de Σ , $r^{-1}(q)$ est l'intersection de Ω^+ avec l'enveloppe convexe des rayons lumières partant de q et contenus dans $\partial\Omega^+$.

Exemple 3.1.26. *Dans $\mathbb{R}^{1,2}$ considérons un segment de type espace d'extrémités r_1 et r_2 . Notons par \mathcal{U} le futur de ce segment. Alors \mathcal{U} est un domaine régulier futur complet de $\mathbb{R}^{1,2}$. Il est formé de deux demi-cônes entre lesquels on a inséré une bande de Misner i.e le produit du cône futur de dimension 1 + 1 par le segment $[r_1, r_2]$. La singularité initiale Σ associée à \mathcal{U} est le segment $[r_1, r_2]$. Par tout point de ce segment passent deux rayons lumières entièrement contenus dans le bord de \mathcal{U} sauf les points r_1 et r_2 par lesquels passent une infinité de rayons lumières entièrement contenus dans le bord de \mathcal{U} .*

Proposition 3.1.27. ([25, Proposition 4.14]). *Soit Ω^+ un domaine régulier futur-complet. Soient r_1 et r_2 dans Σ . Alors :*

- L'hyperplan $(r_1 - r_2)^\perp$ sépare au sens large $N(r^{-1}(r_1))$ de $N(r^{-1}(r_2))$ i.e pour tout $n_1 \in N(r^{-1}(r_1))$ et $n_2 \in N(r^{-1}(r_2))$ on a $\langle r_1 - r_2, n_1 \rangle \geq 0$ et $\langle r_1 - r_2, n_2 \rangle \leq 0$;
- Le segment $[r_1, r_2]$ est contenu dans Σ si et seulement si $N(r^{-1}(r_1)) \cap N(r^{-1}(r_2)) \neq \emptyset$
- Si $N(r^{-1}(r_1)) \cap N(r^{-1}(r_2)) \neq \emptyset$ alors pour tout r dans $[r_1, r_2]$ on a :

$$\begin{aligned}
N(r^{-1}(r)) &= N(r^{-1}(r_1)) \cap (r_1 - r_2)^\perp \\
&= N(r^{-1}(r_2)) \cap (r_1 - r_2)^\perp \\
&= N(r^{-1}(r_1)) \cap N(r^{-1}(r_2))
\end{aligned}$$

3.1.3 espaces-temps MGHC non élémentaires

Soit Γ un réseau cocompact de $SO^+(1, n)$ i.e un sous groupe discret tel que $SO^+(1, n)/\Gamma$ soit compact. On suppose de plus qu'il est sans torsion. Le groupe Γ agit librement et proprement discontinuement sur le cône solide $C_<$ tout en préservant le temps cosmologique T_{cos} de $C_<$. Les niveaux cosmologiques sont alors des hypersurfaces de Cauchy munies chacune d'une action isométrique cocompacte de Γ .

Définition 3.1.28. *Le quotient de $C_<$ par Γ est un espace-temps globalement hyperbolique maximal spatialement compact appelé espace-temps standard statique. Ses hypersurfaces cosmologiques sont des variétés hyperboliques compactes.*

Cependant comme nous le verrons dans la suite les espaces-temps globalement hyperboliques maximaux sont loin d'être tous de la forme 3.1.28. Soit Γ un sous groupe discret cocompact sans torsion de $SO^+(1, n)$.

Définition 3.1.29. *Une déformation affine de Γ est la donnée d'un morphisme $\rho : \Gamma \rightarrow SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$ tel que $\pi \circ \rho : \Gamma \rightarrow SO^+(1, n)$, où π est le morphisme partie linéaire de $SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$ dans $SO^+(1, n)$, n'est autre que l'inclusion.*

Fixons 0 comme origine de l'espace de Minkowski.

Définition 3.1.30. *Un cocycle de Γ est la donnée d'une application $\tau : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{1, n}$ vérifiant : $\tau(\gamma \cdot \gamma') = \gamma \tau(\gamma') + \tau(\gamma)$.*

Remarque 3.1.31. *Un exemple typique de cocycle est celui du cobord i.e un cocycle de la forme $\tau(\gamma) = \gamma \cdot v - v$ où v est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^{1, n}$.*

Soit $\tau : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{1, n}$ un cocycle de Γ . Considérons l'application $\rho_\tau : \Gamma \rightarrow SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$ définie par : $\rho_\tau(\gamma) = \gamma + \tau(\gamma)$ i.e pour tout $x \in \mathbb{R}^{1, n}$, $\rho_\tau(\gamma) \cdot x = \gamma \cdot x + \tau(\gamma)$. Un simple calcul montre que cette application est un morphisme préservant la partie linéaire et donc une déformation affine de Γ .

Réciproquement, soit $\rho : \Gamma \rightarrow SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$ une déformation affine de Γ . Il existe donc une application $\tau : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{1, n}$ telle que : pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $x \in \mathbb{R}^{1, n}$, $\rho(\gamma) \cdot x = \gamma \cdot x + \tau(\gamma)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^{1, n}$ et pour tout $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ on a $\rho(\gamma \gamma') \cdot x = \gamma \gamma' \cdot x + \tau(\gamma \gamma')$ et donc $\tau(\gamma \gamma') = \rho(\gamma \gamma') \cdot x - \gamma \gamma' \cdot x$. Or ρ est un morphisme, donc $\tau(\gamma \gamma') = \gamma \gamma' \cdot x + \gamma \tau(\gamma') + \tau(\gamma) - \gamma \gamma' \cdot x$. Il s'en suit que $\tau(\gamma \gamma') = \gamma \tau(\gamma') + \tau(\gamma)$. Ce qui montre que se donner un cocycle est équivalent à se donner une déformation de Γ .

Si deux déformations affines ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées par une pure translation au but, alors leurs cocycles respectifs diffèrent par un cobord. Ceci permet d'identifier l'espace des déformations affines modulo conjugaison par une translation avec le groupe des cocycles modulo cobord, c-à-d le groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathbb{R}^{1, n})$.

Désormais nous notons par Γ_τ l'image dans $SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$ par la déformation affine de Γ définie par le cocycle τ .

Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet Γ_τ -invariant et soit r la fonction rétraction associée. Comme les éléments de Γ_τ sont des isométries de $\mathbb{R}^{1, n}$, ils préservent le temps

cosmologique T_{cos} et donc la fonction rétraction associée r i.e $r(\gamma_\tau p) = \gamma_\tau r(p)$. Considérons la fonction $N : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{H}^n$ définie par :

$$N(p) = \frac{1}{T_{cos}(p)}(p - r(p)).$$

C'est une fonction Γ -équivariante c'est-à-dire $N(\gamma_\tau p) = \gamma N(p)$

Proposition 3.1.32. ([25, Lemme 3.12, Corollaire 4.5]). *Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet Γ_τ -invariant. Alors la restriction de l'application normale N à un niveau cosmologique \tilde{S}_t est surjective.*

Démonstration. L'ensemble des vecteurs v orthogonaux à des hyperplans supports à Ω^+ est un cône convexe contenu dans la fermeture du cône solide $\tilde{C} = \{p \text{ tel que } q(p, p) \leq 0\}$. Sa projection K dans l'espace projectif \mathbb{P}^n est un convexe Γ -invariant de \mathbb{H}^n . Le sous groupe Γ étant cocompact, l'ensemble K est \mathbb{H}^n tout entier. La surjectivité en découle immédiatement. \square

Proposition 3.1.33. ([9, Proposition 4.16]). *Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet muni d'une action isométrique de Γ_τ , où Γ est un réseau cocompact sans torsion de $SO^+(1, n)$ et τ un cocycle de Γ . Alors l'action de Γ_τ est libre et proprement discontinue et l'espace quotient Ω^+/Γ est un espace-temps globalement hyperbolique spatialement compact.*

Démonstration. Considérons l'espace $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^{1, n}$ muni de l'action de Γ_τ définie par : $\gamma_\tau \cdot (n, p) = (\gamma \cdot n, \gamma \cdot p + \tau(\gamma))$. Comme Γ agit librement et proprement discontinuement sur \mathbb{H}^n , l'action de Γ_τ sur $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^{1, n}$ est libre et proprement discontinue. Soit $\Phi : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^{1, n}$ la fonction définie par $\Phi(p) = (N_p, p)$, où N est la fonction normale associée au domaine régulier Ω^+ . La fonction normale N étant continue et propre, on en déduit que la fonction Φ est une fonction continue, propre et injective. De plus cette fonction préserve l'action de Γ_τ . Ceci permet de montrer que l'action de Γ_τ sur Ω^+ est libre et proprement discontinue. Cette action préserve le temps cosmologique, qui est une fonction temps de Cauchy. Donc Ω^+/Γ_τ est un espace-temps globalement hyperbolique. Reste à montrer qu'il est spatialement compact. Soit \tilde{S}_1 le niveau cosmologique 1. La fonction normale restreinte $N : \tilde{S}_1 \rightarrow \mathbb{H}^n$ est une fonction propre qui préserve l'action de Γ . Or Γ agit cocompactement sur \mathbb{H}^n , ce qui montre que l'action de Γ_τ sur \tilde{S}_1 est cocompacte. \square

Définition 3.1.34. *Un espace-temps obtenu comme dans la Proposition 3.1.33 est appelé espace-temps standart.*

Théorème 3.1.35. ([25, Théorème 2.4]). *On considère un réseau cocompact Γ de $SO^+(1, n)$. Alors pour tout cocycle $[\tau]$ dans $H^1(\Gamma, \mathbb{R}^{1, n})$, il existe un unique domaine régulier maximal Γ_τ -invariant futur complet Ω_τ^+ tel que $\Omega_\tau^+/\Gamma_\tau$ soit un espace-temps globalement hyperbolique maximal spatialement compact futur complet i.e un espace-temps standart maximal.* \square

On note généralement $M_\tau(\Gamma)$ l'espace-temps globalement hyperbolique maximal spatialement compact futur complet donné par le Théorème 3.1.35

Réciproquement le théorème suivant montre que tout espace-temps plat non élémentaire est obtenu de cette façon.

Définition 3.1.36. *Soit M un espace-temps et soit $\rho : \pi_1(M) \rightarrow SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$ son morphisme d'holonomie. On note par $L : \pi_1(M) \rightarrow SO^+(1, n)$ sa partie linéaire. On dit alors que M est non élémentaire si $L(\pi_1(M))$ est un sous groupe non élémentaire de $SO^+(1, n)$.*

Théorème 3.1.37. ([38], [9, Théorème 1.2]). *Soit M un espace-temps MGHC plat non élémentaire futur complet. Alors M est le quotient d'un domaine régulier futur complet Ω^+ par un sous groupe discret de $SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$.*

3.2 Fonction temps quasi-concave

Soit M un espace-temps plat $MGHC$ futur complet non élémentaire de dimension $n+1$. On sait grâce au Théorème 3.1.37 que M s'identifie au quotient d'un domaine régulier futur complet Ω^+ par un sous groupe discret sans torsion Γ de $SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$. Soit S une hypersurface de Cauchy de M . Elle se relève en une hypersurface de Cauchy complète \tilde{S} de $\mathbb{R}^{1, n}$. La seconde forme fondamentale Π de \tilde{S} est définie comme suit : pour tous champs de vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^{1, n}$ tangents à \tilde{S} , $\nabla(X, Y) = \bar{\nabla}(X, Y) + \Pi(X, Y)\mathbf{n}$, où ∇ et $\bar{\nabla}$ sont respectivement les connexions de la métrique ambiante de Minkowski et de sa restriction à \tilde{S} et \mathbf{n} est la fonction normale de l'hypersurface \tilde{S} .

Définition 3.2.1. Soit \tilde{S} une hypersurface de classe C^2 de $\mathbb{R}^{1, n}$. On dit que \tilde{S} est dite convexe si et seulement si sa seconde forme fondamentale Π est positive.

Remarque 3.2.2. Il n'est pas difficile de voir qu'une hypersurface est convexe si et seulement si elle est future convexe, en d'autres termes que $J^+(\tilde{S})$ est un sous-ensemble convexe de Minkowski. Ceci permet en particulier de définir la notion de convexité même pour des hypersurfaces qui ne sont pas C^2 .

Soit T une fonction temps de Cauchy définie sur M . Quitte à reparamétriser nous supposons toujours qu'elle prend ses valeurs dans tout $]0, +\infty[$. Cette fonction se relève en une fonction temps de Cauchy Γ -invariante $\tilde{T} : \Omega^+ \rightarrow]0, +\infty[$. Ses niveaux sont alors des hypersurfaces plongées de $\mathbb{R}^{1, n}$ munie chacune d'une action isométrique cocompact de Γ

Définition 3.2.3. La fonction temps de Cauchy \tilde{T} est dite quasi-concave si et seulement si tous ses niveaux sont convexes.

Un cas particulier est celui où la fonction est concave i.e vérifie $\tilde{T}(tx + (1-t)y) \geq t\tilde{T}(x) + (1-t)\tilde{T}(y)$. En effet si $\tilde{T}(x) = \tilde{T}(y)$ alors $\tilde{T}(tx + (1-t)y) \geq \tilde{T}(x)$.

3.2.1 Fonction temps cosmologique

Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet. Soit T_{cos} la fonction temps cosmologique associée.

Proposition 3.2.4. ([25, Proposition 4.3]). Le temps cosmologique T_{cos} de Ω^+ est une fonction temps concave et donc quasi-concave au sens de la définition 3.2.3.

Démonstration. Soit x, y dans Ω^+ . Pour chaque $t \in [0, 1]$, posons $r_t = tx + (1-t)r(y)$. Comme Ω^+ est convexe, on a que r_t est dans Ω^+ . Donc,

$$T_{cos}(tx + (1-t)y)^2 = -|(tx + (1-t)y) - r(tx + (1-t)y)|^2 \geq -|tx + (1-t)y - r_t|^2$$

donc

$$T_{cos}(tx + (1-t)y)^2 \geq t^2T_{cos}(x)^2 + (1-t)^2T_{cos}(y)^2 - 2t(1-t)\langle x - r(x), y - r(y) \rangle$$

Or $x - r(x)$ et $y - r(y)$ sont des vecteurs temps futurs, et donc $-\langle x - r(x), y - r(y) \rangle \geq \sqrt{T_{cos}(x)^2 T_{cos}(y)^2}$. Par suite

$$T_{cos}(tx + (1-t)y)^2 \geq (tT_{cos}(x) + (1-t)T_{cos}(y))^2$$

□

3.2.2 Fonction temps CMC

Soit M un espace-temps plat $MGHC$ non élémentaire. Soit Ω^+ le domaine régulier Γ -invariant futur complet associé. Soit \tilde{S} une hypersurface complète de type espace Γ -invariante de Ω^+ et Π sa seconde forme fondamentale. Rappelons que la courbure moyenne $H_{\tilde{S}}$ en un point de \tilde{S} est définie par : $H_{\tilde{S}} = \frac{\text{tr}(\Pi)}{n}$ i.e $H_{\tilde{S}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n}$, où les λ_i sont les valeurs principales en un point de \tilde{S} .

Définition 3.2.5. *L'hypersurface \tilde{S} est une hypersurface CMC si H est constante.*

Une des particularités surprenante des hypersurfaces CMC dans l'espace de Minkowski est le résultat suivant dû à Treibergs [50]

Proposition 3.2.6. *Une hypersurface CMC complète de $\mathbb{R}^{1,n}$ est soit strictement convexe i.e toutes ses valeurs principales sont négatives, soit strictement concave i.e toutes ses valeurs principales sont positives.*

Il en découle immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 3.2.7. *Les hypersurfaces CMC dans un espace-temps plat $MGHC$ futur complet non élémentaire sont strictement convexes.*

Remarque 3.2.8. *Bien sûr on a un résultat analogue lorsque nous considérons un espace-temps passé complet. Dans ce cas les hypersurfaces CMC sont strictement concaves.*

Ainsi le corollaire 3.2.7 permet de fournir un exemple s'il existe! de fonction temps quasi-concave.

Définition 3.2.9. *Une fonction temps $T : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction temps CMC si et seulement si chaque niveau $T^{-1}(t)$ de T est à courbure moyenne constante $H = -\frac{1}{t}$.*

Les hypersurfaces CMC ont été étudiées dans plusieurs travaux (voir [32], [45], [6]). Un principe général est que l'existence d'une hypersurface à courbure prescrite peut se faire par la méthode des barrières. Dans le cas CMC, le résultat suivant a été prouvé par Gerhardt [32].

Définition 3.2.10. *Soit a un élément de \mathbb{R} . Une paire de a -barrières de M est la donnée d'une paire (Σ^-, Σ^+) d'hypersurfaces de Cauchy C^2 telles que :*

- Σ^- est dans le passé de Σ^+ .
- La courbure moyenne de Σ^- est majorée par a .
- La courbure moyenne de Σ^+ est minorée par a .

Théorème 3.2.11. [32]. *Soit (Σ^-, Σ^+) une paire de a -barrières dans Ω^+ , où a est un réel positif. Alors il existe une hypersurface de Cauchy lisse Σ à courbure moyenne constante a . De plus Σ est dans le futur de Σ^- et le passé de Σ^+ .*

En utilisant le Théorème 3.2.11 Andersson, Moncrief et Tromba montrent l'existence du feuilletage CMC dans le cadre des espaces-temps de dimension $2 + 1$ qui admettent une hypersurface de Cauchy CMC [8]. Dans [2] Andersson montre l'existence du feuilletage CMC en toute dimension mais dans le cas très particulier d'un espace-temps plat $MGHC$ de type hyperbolique i.e admettant une hypersurface de Cauchy hyperbolique. Enfin le cas général d'un espace-temps $MGHC$ plat est traité dans [15],[4] (voir le Théorème 3.2.15 ci dessous). Cette preuve est plus générale et plus géométrique que celle donnée dans [2]. Elle a la particularité de se généraliser aux espaces-temps à courbure constante (voir [4], [16]). Elle repose entre autre sur la généralisation de la notion de barrières aux hypersurfaces de type espaces qui sont seulement C^0 .

Définition 3.2.12. Soit a un nombre réel. Une hypersurface C^0 de type espace S est dite à courbure moyenne majorée (minorée) par a en un point p de S s'il existe un ouvert U géodésiquement convexe de p et une hypersurface lisse S_p^- (S_p^+) dans U contenant p tels que :

1) S_p^- (S_p^+) est dans le passé (futur) de $S \cap U$ dans U ; 2) L'hypersurface S_p^- (S_p^+) est à courbure moyenne majorée (minorée) par a

Ainsi le résultat suivant obtenu dans un premier temps pour les hypersurfaces de Cauchy lisses [32] se généralise facilement au cas C^0 :

Théorème 3.2.13. ([4, Théorème 5.9]). Soit (Σ^-, Σ^+) une paire de a -barrières C^0 dans Ω^+ , où a est un réel positif. Alors il existe une hypersurface de Cauchy lisse Σ à courbure moyenne constante a . De plus Σ est dans le futur de Σ^- et le passé de Σ^+ .

Un autre ingrédient utilisé dans la preuve du Théorème 3.2.15 est le résultat d'estimation suivant :

Théorème 3.2.14. ([4, Théorème 4.4]). Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$. Pour tout a dans $]0, +\infty[$ l'hypersurface CMC Σ_a est à courbure moyenne majorée par $-\frac{1}{na}$ et minorée par $-\frac{1}{a}$.

Théorème 3.2.15. ([4, Théorème 1.2]). Soit M un espace-temps MGHC plat futur complet admettant une hypersurface de Cauchy hyperbolique. Alors :

- Il existe une unique fonction temps CMC globalement définie $T_{cmc} : M \rightarrow]-\infty, 0[$;
- La fonction temps T_{cmc} est comparable à la fonction temps cosmologique T_{cos} . Plus précisément :

$$\frac{-1}{T_{cos}} \leq T_{cmc} \leq \frac{-1}{nT_{cos}}.$$

3.2.3 Une propriété d'expansion des temps quasi-concaves

Soit $T : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction temps de Cauchy de classe C^2 . On note $\xi_T = -\nabla T$ son gradient Lorentzien et on considère le flot Φ_T^t engendré par ξ_T . On note par $\tilde{\Sigma}_1^T$ le niveau $T^{-1}(1)$ de T .

Proposition 3.2.16. Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$ une courbe de type espace contenue dans le passé de $\tilde{\Sigma}_1$. Alors la longueur de la courbe α est inférieure à celle de α_1 où $\alpha_1(s) = \Phi^{1-T(\alpha(s))}(\alpha(s))$ est la projetée de α sur le niveau $\tilde{\Sigma}_1$ le long des orbites de Φ_T .

Démonstration. Soit X un champ de vecteurs tangent à $\tilde{\Sigma}_1$. On le prolonge en un champ de vecteurs \hat{X} sur Ω via le flot Φ_T^t : pour tout q dans Ω , on pose $\hat{X}_q = D_p \Phi^t(X_p)$ ou (p, t) est l'unique élément de $\tilde{\Sigma}_1 \times \mathbb{R}$ tel que $q = \Phi^t(p)$. Remarquons que $[\xi, \hat{X}] = 0$.

Pour tout $t_0 \geq 0$, on note par \hat{X}_{t_0} la restriction du champ de vecteurs \hat{X} au niveau $\tilde{\Sigma}_{t_0+1}$. Soit maintenant la fonction $f : \tilde{\Sigma}_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(p, t) = |D_p \Phi^t(X)|^2$. Pour tout p fixé dans $\tilde{\Sigma}_1$, $f(p, \cdot)$ est une fonction croissante en t . En effet,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |D\Phi^t(X)|_{t=t_0}^2 = \frac{1}{2} \xi \cdot |\hat{X}|^2 = \langle \hat{X}_{t_0}, \nabla_\xi \hat{X}_{t_0} \rangle.$$

Or $[\xi_T, \hat{X}] = 0$ donc,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |D\Phi^t(X)|_{t=t_0}^2 = \langle \hat{X}_{t_0}, \nabla_{\hat{X}_{t_0}} \xi \rangle = \langle \hat{X}_{t_0}, \nabla_{\hat{X}_{t_0}} (\lambda \mathbf{n}) \rangle.$$

où λ est fonction de Ω dans \mathbb{R} définie par $\lambda = \frac{1}{\sqrt{-|\nabla T|^2}}$. On en déduit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |D\Phi^t(X)|_{t=t_0}^2 = \left\langle \widehat{X}_{t_0}, \lambda \nabla_{\widehat{X}_{t_0}} \mathbf{n} + \widehat{X}_{t_0}(\lambda) \mathbf{n} \right\rangle = \lambda \left\langle \widehat{X}_{t_0}, \nabla_{\widehat{X}_{t_0}} \mathbf{n} \right\rangle = \lambda \Pi(\widehat{X}_{t_0}, \widehat{X}_{t_0}) \geq 0.$$

Ceci implique que si α_1 est une courbe contenue dans $\widetilde{\Sigma}_1$ alors $\Phi^t(\alpha_1)$ ($t < 0$) est de longueur plus petite que celle de α_1 . Soit maintenant α une courbe dans le passé de $\widetilde{\Sigma}_1$. Soit $\alpha_1(s) = \Phi^{1-T(s)}(\alpha(s))$. On sait que $\dot{\alpha}(s) = -T'(s)\xi_{\alpha(s)} + D_{\alpha_1(s)}\Phi^{1-T(s)}.\dot{\alpha}_1(s)$. Par suite

$$|\dot{\alpha}(s)|^2 = \left| -T'(s)\xi_{\alpha(s)} + D_{\alpha_1(s)}\Phi^{1-T(s)}.\dot{\alpha}_1(s) \right|^2.$$

Mais comme $\dot{\alpha}_1(s)$ est orthogonale à $\xi_{\alpha_1(s)}$ on obtient :

$$|\dot{\alpha}(s)|^2 = |T'(s)\xi_{\alpha(s)}|^2 + \left| D_{\alpha_1(s)}\Phi^{1-T(s)}.\dot{\alpha}_1(s) \right|^2.$$

Donc,

$$|\dot{\alpha}(s)|^2 \leq \left| D_{\alpha_1(s)}\Phi^{1-T(s)}.\dot{\alpha}_1(s) \right|^2.$$

Or $\left| D_{\alpha_1(s)}\Phi^{1-T(s)}.\dot{\alpha}_1(s) \right|^2 \leq |\dot{\alpha}_1(s)|^2$ donc,

$$|\dot{\alpha}(s)|^2 \leq |\dot{\alpha}_1(s)|^2,$$

ce qui donne le résultat voulu. □

Remarque 3.2.17. *Bien que la proposition 3.2.16 exige que le temps de Cauchy soit C^2 , on pourrait la généraliser pour des fonctions temps qui sont plus au moins sympathiques ($C^{1,1}$ par exemple).*

3.3 Convergence spectrale des niveaux d'un temps quasi-concave

Dans cette section nous allons montrer la première partie du Théorème A dans le cas plat. Plus précisément nous montrons le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Soit T une fonction temps quasi-concave. Alors les niveaux de T convergent spectralement vers un espace métrique. De plus cette limite est indépendante de la fonction temps choisie.*

Nous reprenons les notations de la section précédente : ξ_T est le gradient de T , et Φ_T^t le flot engendré par ξ_T .

Pour chaque $t > 0$, notons Σ_t le niveau $T^{-1}(t)$ et d_t^T la distance riemannienne définie par g_t^T la restriction de la métrique lorentzienne g aux niveaux Σ_t de T . Notons par X_T l'espace des lignes du gradient de la fonction temps T . Rappelons que chaque ligne du gradient de T est une courbe temporelle inextensible et donc intersecte chaque niveau de T en un unique point. Ceci permet d'identifier chaque niveau de T avec X_T . On peut donc transporter la métrique d_t^T définie sur le niveau Σ_t en une métrique sur X_T que nous désignons aussi par d_t^T . De plus, comme le transport d'un niveau à l'autre le long du flot Φ_T^t est un homéomorphisme, ces distances induisent la même topologie sur X_T .

Proposition 3.3.2. *Soit T une fonction temps de Cauchy quasi-concave. Les distances d_t^T définies sur X_T convergent pour la topologie uniforme sur les compacts vers une pseudo-distance d_0^T*

Démonstration. Soient x, y fixés dans X_T . Par la Proposition 3.2.16 la suite $(d_t^T(x, y))_{t>0}$ est décroissante donc admet une limite $d_0^T(x, y)$. Autrement dit la suite des distances $d_t^T : X_T \times X_T \rightarrow \mathbb{R}_+$ convergent simplement vers une pseudo-distance d_0^T .

On suppose que $t < 1$. Par l'inégalité triangulaire on a que pour tout x, y, x' et y' ,

$$|d_t^T(x, y) - d_t^T(x', y')| \leq d_t^T(x, x') + d_t^T(y, y').$$

Par la Proposition 3.2.16 on obtient que,

$$|d_t^T(x, y) - d_t^T(x', y')| \leq d_1^T(x, x') + d_1^T(y, y').$$

La famille $(d_t^T)_{t<1}$ est donc une famille équicontinue d'applications définies sur $X_T \times X_T$.

Par la même Proposition 3.2.16, pour tout compact K de X_T et tout $t < 1$,

$$d_t^T|_{K \times K} \leq d_1^T|_{K \times K} \leq C_K.$$

Ce qui montre que $(d_t^T)_{t<1}$ est une famille bornée sur les compacts. Notre proposition découle du Théorème d'Ascoli-Arzelà. □

Rappelons que le spectre d'un espace métrique muni d'une action isométrique d'un groupe Γ est l'application qui à chaque γ associe $\inf_{x \in X} d(x, \gamma.x)$. Une conséquence de la Proposition 3.2.16 est le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.3. *Soit T une fonction temps de Cauchy quasi-concave Γ -invariante. Alors les Γ -espaces (X_T, d_t^T, ρ) convergent spectralement vers l'espace (X_T, d_0^T, ρ)*

Démonstration. Soit $\gamma \in \Gamma$ et $x \in X_T$. On sait que $l_t(\gamma) \leq d_t^T(x, \gamma.x)$, donc

$$\limsup_{t \rightarrow 0} l_t(\gamma) \leq d_0^T(x, \gamma.x).$$

Comme x est arbitraire, on en déduit que $\limsup_{t \rightarrow 0} l_t(\gamma) \leq l_0(\gamma)$

D'autre part, on sait que

$$d_0^T(x, \gamma.x) \leq d_t^T(x, \gamma.x),$$

donc,

$$l_0(\gamma) \leq \liminf_{t \rightarrow 0} l_t(\gamma),$$

ce qui prouve que $\lim_{t \rightarrow 0} l_t(\gamma) = l_0(\gamma)$ □

Soient T_1 et T_2 deux fonctions temps de Cauchy quasi-concaves définies sur Ω^+ . Soient X_{T_1} (respectivement X_{T_2}) les espaces de lignes du gradient de T_1 (respectivement T_2). Les lignes du gradient de la fonction T_1 (respectivement T_2) étant des courbes temporelles inextensibles, elles intersectent chaque niveau de la fonction T_2 (respectivement T_1), qui est une hypersurface de Cauchy, en un unique point. Il s'en suit que chaque niveau de T_1 (resp T_2) s'identifie à l'espace X_{T_2} (resp X_{T_1}). On note par $d_t^{T_1}$ la distance définie sur le niveau $\tilde{\Sigma}_t^{T_1} = T_1^{-1}(t)$ par la métrique riemannienne sur $\tilde{\Sigma}_t^{T_1}$ induite par la restriction de la métrique Lorentzienne ambiante. Chaque $d_t^{T_1}$ se transporte donc en une distance sur l'espace X_{T_2} qu'on note $\delta_t^{T_1}$. Comme les hypersurfaces de Cauchy sont homéomorphes les unes aux autres, ces distances définissent la même topologie sur X_{T_2} . On définit de la même façon les distances $\delta_t^{T_2}$ sur l'espace des lignes du gradient de T_1 .

Proposition 3.3.4. *Soient T_1 et T_2 deux fonctions temps de Cauchy convexes Γ -invariantes. Alors, quitte à extraire une sous suite, la suite $(\delta_{t_n}^{T_1})_{n \geq 0}$ (resp $(\delta_{t_n}^{T_2})_{n \geq 0}$) converge uniformément sur les compacts vers une pseudo-distance $\delta_0^{T_1}$ (resp $\delta_0^{T_2}$) quand n tend vers ∞ . De plus,*

$$\begin{aligned} \delta_0^{T_1} &\leq d_0^{T_2}; \\ \delta_0^{T_2} &\leq d_0^{T_1}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $0 < a < 1$. Soit K un compact de X_{T_2} . On sait que K s'identifie avec un compact de $\tilde{\Sigma}_a^{T_1}$ qu'on note par abus de langage K . Comme T_2 est Γ -invariante et que Ω est spatialement compact, il existe $a' > 0$ tel que : $T_2(K) < a'$. Il s'en suit donc par la Proposition 3.2.16 que pour tout x, y dans K on a :

$$\delta_a^{T_1}(x, y) \leq d_{a'}^{T_2}(x, y).$$

Donc la famille $(\delta_t^{T_1})_{t < 1}$ est localement bornée.

D'autres part, par l'inégalité triangulaire on sait que pour tout x, y, x' , et y' dans X_{T_2} :

$$|\delta_a^{T_1}(x, y) - \delta_a^{T_1}(x', y')| \leq \delta_a^{T_1}(x, x') + \delta_a^{T_1}(y, y'),$$

donc

$$|\delta_t^{T_1}(x, y) - \delta_t^{T_1}(x', y')| \leq d_{a'}^{T_2}(x, x') + d_{a'}^{T_2}(y, y').$$

Ce qui montre que la famille $(\delta_t^{T_1})_{t < 1}$ est équicontinue. On peut donc appliquer le Théorème d'Ascoli-Arzelà pour déduire que la famille $(\delta_t^{T_1})_{t < 1}$ admet une valeur d'adhérence $\delta_0^{T_1}$ pour la topologie uniforme sur les compacts.

Soit maintenant $t_0 > 0$. Comme Ω est spatialement compact, il existe un $a_{t_0} > 0$ tel que :

- 1) a_{t_0} tend vers 0 quand t_0 tend vers 0 ;
- 2) pour tout $t \leq t_0$, l'hypersurface de Cauchy $\tilde{\Sigma}_t^{T_1}$ est dans le passé de l'hypersurface $\tilde{\Sigma}_{a_{t_0}}^{T_2}$.

Par 2) on a : pour tout $t \leq t_0$, $\delta_t^{T_1} \leq d_{a_{t_0}}^{T_2}$. Par 1) on en déduit que $\delta_0^{T_1} \leq d_0^{T_2}$. La démonstration pour les $\delta_t^{T_2}$ est similaire. □

Notons par $l_{0,T_1}, l_{0,T_2}, l'_{0,T_1}$ et l'_{0,T_2} les spectres respectifs des espaces métriques $(X_{T_1}, d_0^{T_1})$, $(X_{T_2}, d_0^{T_2})$, $(X_{T_2}, \delta_0^{T_1})$ et $(X_{T_1}, \delta_0^{T_2})$ munis de l'action isométrique de Γ . Sous ces hypothèses on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.5. *Les spectres $l_{0,T_1}, l_{0,T_2}, l'_{0,T_1}$ et l'_{0,T_2} sont deux à deux égaux.*

Démonstration. Soit γ un élément de Γ . D'après la Proposition 3.3.4, on $\delta_0^{T_1} \leq d_0^{T_2}$. Donc, pour tout élément x de X_{T_2} , on a $l'_{0,T_1}(\gamma) \leq \delta_0^{T_1}(x, \gamma.x) \leq d_0^{T_2}(x, \gamma.x)$. Comme x est arbitraire, on obtient

$$l'_{0,T_1}(\gamma) \leq l_{0,T_2}(\gamma).$$

D'autre part, pour tout x dans X_{T_2} , et tout $a > 0$, la distance $\delta_a^{T_1}(x, \gamma.x)$ est la distance $d_a^{T_1}(x_a, \gamma.x_a)$ entre x_a et $\gamma.x_a$ dans le niveau $\Sigma_a^{T_1}$, où x_a est l'intersection entre $\Sigma_a^{T_1}$ et la ligne de gradient de $T_2 x$. Ceci implique que $\delta_a^{T_1}(x, \gamma.x) \geq l_{a,T_1}(\gamma) \geq l_{0,T_1}(\gamma)$. Comme a est arbitraire, on a donc $\delta_0^{T_1}(x, \gamma.x) \geq l_{0,T_1}(\gamma)$. On en déduit :

$$l_{0,T_1}(\gamma) \leq l'_{0,T_1}(\gamma) \leq l_{0,T_2}(\gamma).$$

De manière analogue, en échangeant les rôles de T_2 et T_1 , on montre :

$$l_{0,T_2}(\gamma) \leq l'_{0,T_2}(\gamma) \leq l_{0,T_1}(\gamma).$$

Ce qui donne l'égalité $l_{0,T_1}(\gamma) = l_{0,T_2}(\gamma) = l'_{0,T_1}(\gamma) = l'_{0,T_2}(\gamma)$. □

Preuve du Théorème 3.3.1 Le corollaire précédent avec la Proposition 3.3.5 montre que si T_1 et T_2 sont deux fonctions temps convexes définies sur Ω , leurs niveaux respectifs convergent alors spectralement vers le même espace métrique. □

Chapitre 4

Comportement asymptotique des hypersurfaces de Cauchy dans un espace-temps plat de dimension $2+1$

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux espaces-temps plats de dimension $2 + 1$. Nous étudions le comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps de Cauchy quelconque au voisinage de la singularité initiale. Ce travail a été fait dans le cadre du temps cosmologique dans les travaux [19], [25] de Benedetti, Bonsante et Guadinini. Bien que d'un point de vue de régularité, le temps cosmologique soit peu régulier ($C^{1,1}$), son utilisation sera ici cruciale dans notre étude; ceci est dû particulièrement à la nature de la singularité initiale associée au temps cosmologique ainsi qu'à la simplicité de ses lignes du gradient, qui sont des droites. Un des avantages que présente le cadre de la dimension $2 + 1$ est sa rigidité : la singularité initiale s'avère être un objet de dimension 1! Un autre avantage est le résultat de Mess [38] qui met en avant la relation entre les laminations géodésiques mesurées et les espaces-temps de dimension $2 + 1$: les laminations géodésiques mesurées encodent les espaces-temps de dimension $2 + 1$. Nous commençons par étudier les laminations géodésiques mesurées. Ensuite nous présentons la classification des espaces-temps *MGHC* plats de dimension $2 + 1$ via les laminations. Dans une troisième partie nous parlons du comportement au voisinage de 0 des niveaux cosmologiques ce qui nous permet ensuite de finir la preuve du Théorème A dans le cas plat. Enfin, nous finissons par montrer le Théorème B, dont l'objet est l'étude de la convergence Gromov équivariante des niveaux d'une fonction temps quasi-concave en dimension $2 + 1$, dans le cas plat.

4.1 Laminations géodésiques mesurées

Soit S une surface hyperbolique complète sans bord.

Définition 4.1.1. *On appelle lamination géodésique une collection de géodésiques simples disjointes, appelées feuilles de la lamination géodésique, dont l'union est un fermé de S . On la note généralement par λ .*

Définition 4.1.2. *Le fermé L de S formé par la réunion des feuilles de la lamination λ est appelé support de la lamination géodésique λ .*

Chaque feuille de la lamination géodésique λ est donc, ou bien une géodésique définie sur tout \mathbb{R} , ou bien une géodésique fermée.

Exemple 4.1.3. *L'exemple le plus simple est celui où la lamination λ est une union finie de géodésiques disjointes.*

Remarque 4.1.4. *L'ensemble des feuilles de λ avec celui des composantes connexes de $S \setminus \lambda$ forme une stratification de S . Une strate est alors une composante connexe de $S \setminus \lambda$.*

Définition 4.1.5. *Une sous-lamination est un fermé de λ qui est réunion disjointe de géodésiques simples.*

Définition 4.1.6. *Un arc différentiable k est dit transverse à une lamination géodésique λ si et seulement si pour tout $x \in k \cap L$, la feuille l de λ passant par x intersecte transversalement k .*

Définition 4.1.7. *Une mesure transverse μ à une lamination géodésique λ est une mesure qui associe à chaque arc transverse k une mesure borélienne μ_k vérifiant :*

- 1) si k' est un sous arc de k alors $\mu_{k'} = \mu_k(k')$;
- 2) le support de μ_k est exactement $k \cap L$;
- 3) si k et k' sont deux arcs transverses homotopes via une famille d'arcs transverses alors l'homotopie envoie μ_k sur $\mu_{k'}$.

Définition 4.1.8. *Une lamination géodésique λ munie d'une mesure transverse μ est appelée lamination géodésique mesurée et est notée (λ, μ) .*

Remarque 4.1.9. *A noter que pour les laminations géodésiques mesurées, on a une autre notion de support ; elle est définie comme suite : c'est la réunion des supports de toutes les mesures boréliennes μ_k associées aux arcs transverses k à λ . Cependant, la condition 2) de la définition 4.1.7 assure que le support de la lamination géodésique mesurée coïncide avec celui de la lamination géodésique.*

Si k est un arc transverse à λ , alors il existe une subdivision finie de k en sous arcs k_i pour tout $i = 1, \dots, n$ telle que : k_i intersecte chaque feuille de λ en au plus un point. Chaque sous arc k_i est homotope à la géodésique reliant x_i et x_{i+1} , où x_i et x_{i+1} sont les deux extrémités de k_i , via une famille d'arcs transverses. Ceci implique que l'arc transverse k est homotope à un arc transverse qui est une géodésique par morceaux. On conclut donc que la mesure transverse μ est entièrement déterminée par les mesures sur les géodésiques transverses.

Le sous-ensemble λ_S de λ défini par la collection des feuilles isolées de λ est la *partie simpliciale* de la lamination géodésique λ . Elle n'est pas fermée en général et donc ne constitue pas une sous lamination. Notons aussi qu'elle ne dépend pas de la mesure transverse λ . On note par L_S la réunion des feuilles isolées de λ .

Exemple 4.1.10. *Soit λ une lamination géodésique constituée d'un nombre fini de géodésiques simples disjointes de \mathbb{H}^2 . Dans ce cas la lamination coïncide avec sa partie simpliciale. Pour chaque feuille l_i de λ , soit t_i un nombre réel positif. Pour tout arc transverse k , posons $\mu_k = \sum_i t_i |k \cap l_i|$. Alors μ est une mesure transverse sur λ .*

L'ensemble λ_W est constitué des feuilles chargées de (λ, μ) i.e les feuilles l de λ pour lesquelles il existe un arc transverse k vérifiant : $k \cap l$ est un atome de μ . On l'appelle la *partie chargée* de la lamination géodésique mesurée (λ, μ) et on la note λ_W . Cette partie dépend bien évidemment de la mesure transverse μ . On note généralement par L_W la réunion des feuilles chargées de λ . Notons que par le 2) de la définition 4.1.7 on a $\lambda_S \subset \lambda_W$ mais en général cette inclusion est stricte comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 4.1.11. *Considérons \mathbb{H}^2 avec un point x_∞ fixé dans $\partial\overline{\mathbb{H}^2}$. Soit λ la lamination constituée de toutes les géodésiques complètes avec point limite x_∞ . Remarquons que le support de λ est \mathbb{H}^2 tout entier.*

Soit x_n une suite de points de $\partial\overline{\mathbb{H}^2}$ dense dans $\partial\overline{\mathbb{H}^2}$. Pour chaque n dans \mathbb{N} soit α_n la droite géodésique de \mathbb{H}^2 reliant les deux points à l'infini x_∞ et x_n . Considérons la mesure transverse μ sur λ définie par : $\mu_k = \sum_n 2^{-n} |k \cap \alpha_n|$. Il est clair que dans ce cas $\lambda_S = \emptyset$ et L_W est dense dans \mathbb{H}^2 .

On se place désormais dans le cadre où S est une surface hyperbolique compacte sans bord. En d'autres termes $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ où Γ est un réseau uniforme de $SO(1, 2)$. Toute lamination géodésique mesurée (λ, μ) de S se relève en une lamination géodésique mesurée Γ -invariante $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ de $\tilde{S} = \mathbb{H}^2$.

Soit $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ une lamination géodésique mesurée Γ -invariante de \mathbb{H}^2 . Par chaque point du support \tilde{L} de la lamination $\tilde{\lambda}$ passe une unique géodésique simple contenue dans $\tilde{\lambda}$ (Voir [23, pag 10]). Ce qui montre que la décomposition de \tilde{L} en réunion disjointe de géodésiques complètes est unique. La lamination est dans ce cas uniquement déterminée par son support.

Remarque 4.1.12. *Dans ce cas particulier la partie chargée coïncide avec la partie simpliciale. En particulier la partie chargée ne dépend pas de la mesure transverse.*

4.2 Arbre réel dual à une lamination

Considérons une lamination géodésique mesurée (λ, μ) sans atomes sur une surface hyperbolique compacte S sans bord. Relevons cette lamination à \tilde{S} et considérons la pseudo-distance définie par $d_{(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})}(x, y)$ étant la borne inférieure des $\tilde{\mu}(\alpha)$, où α parcourt l'ensemble des courbes transverses par morceaux reliant x à y . Notons par $T(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ l'espace métrique quotient de \tilde{S} par la relation d'équivalence xRy si et seulement si $d_{(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})}(x, y) = 0$, muni de la distance $\bar{d}_{(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})}$ induite par $d_{(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})}$.

Proposition 4.2.1. ([37]). *$(T(\lambda, \mu), \bar{d}_{(\lambda, \mu)})$ est un arbre réel minimal à petit stabilisateurs.*

Définition 4.2.2. *L'arbre réel ainsi défini est appelé arbre réel dual à la lamination (λ, μ)*

Exemple 4.2.3. *Soit $C_< = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{1,2} \text{ tel que } \mathfrak{q}_{1,2}(x, x) < 0 \text{ et } x_0 > 0\}$ le cône solide futur de dimension $2+1$. Soit \mathbb{H}^2 le modèle lorentzien de l'espace hyperbolique et P un plan de type temps de $\mathbb{R}^{1,2}$. En d'autres termes P est isométrique à $\mathbb{R}^{1,1}$. L'intersection de P avec C est un cône solide de dimension $1+1$. On appelle cône fracturé l'espace obtenu en insérant dans le cône solide C la bande de Misner $(P \cap C) \times [0, a]$, où a est un réel strictement positif. L'espace ainsi obtenu est un domaine régulier futur complet. Sa singularité initiale est un segment de longueur a . Pour tout point p à l'intérieur du segment, $N(r^{-1}(p))$ n'est autre que la droite géodésique α définie par l'intersection du plan P et de \mathbb{H}^2 . On considère la lamination géodésique mesurée (α, a) ; l'arbre réel dual associé est un arbre réel simplicial isométrique à la singularité initiale.*

4.3 Classification des espaces-temps *MGHC* non élémentaires via les laminations géodésiques mesurées

Dans cette partie nous construisons une correspondance entre les arbres réels minimaux à petits stabilisateurs et les espaces-temps plats *MGHC* non élémentaires de dimension $2+1$ futurs complets. Ce travail a été fait par G. Mess [38]. Grâce au Théorème 3.1.37, il suffit de construire cette correspondance entre les domaines réguliers futurs complets qui sont préservés par une action d'un réseau uniforme Γ de $SO(1, 2)$ et les laminations géodésiques mesurées Γ -invariantes.

4.3.1 Domaines réguliers associés à une lamination géodésique mesurée

Dans cette section nous allons associer à chaque lamination géodésique mesurée sur une surface compacte un domaine régulier futur complet. Soit S une surface hyperbolique compacte sans bord. Soit (λ, μ) une lamination géodésique mesurée sur S . Notons par $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ son relevé à $\tilde{S} \simeq \mathbb{H}^2$.

On fixe 0 comme origine de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ et on voit \mathbb{H}^2 comme étant plongé dans $\mathbb{R}^{1,n}$ i.e sous son modèle lorentzien. Soit n_0 un point fixé de \mathbb{H}^2 . On suppose que n_0 n'est pas dans \tilde{L}_W . Soit k un arc transverse à $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ reliant n_0 et un point n dans $\mathbb{H}^2 \setminus \tilde{L}_W$. Soit x dans $k \cap \tilde{L}$ et soit l la feuille de $\tilde{\lambda}$ contenant x . On sait que l est l'intersection d'un 2-plan P de type temps et de \mathbb{H}^2 . Notons par $v(x)$ le vecteur unitaire de type espace orthogonal à P qui pointe dans la direction de n . Soit $\psi : \mathbb{H}^2 \setminus \tilde{L}_W \rightarrow \mathbb{R}^{1,2}$ la fonction définie par :

$$\psi_{n_0}(n) = \int_k v(x) d\mu(x).$$

Elle vérifie les propriétés suivantes :

- 1) Elle ne dépend pas du choix de l'arc transverse. En effet, si k' est un arc transverse à homotope à k alors pour x' dans $k' \cap l$ on a $v(x) = v(x')$;
- 3) Elle est constante sur les strates de $\tilde{\lambda}$.

Considérons le domaine défini par :

$$\Omega_{n_0} = \bigcap_{n \in \mathbb{H}^2 \setminus \tilde{L}_W} I^+(\psi_{n_0}(n) + n^\perp).$$

Proposition 4.3.1. ([18, § 5.3.1]). *Le domaine Ω_{n_0} est un domaine régulier futur complet. De plus $\psi_0(n)$ est dans $\partial\Omega_{n_0}$ pour tout n dans $\mathbb{H}^2 \setminus \tilde{L}_W$.*

Démonstration. Soit \mathcal{F} une strate de $\tilde{\lambda}$ et v un point de $\partial\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} \cap \partial\mathbb{H}^2$ et une suite n_i d'éléments de \mathcal{F} qui convergent vers v . La fonction ψ_{n_0} étant constante sur les strates de $\tilde{\lambda}$, les hyperplans de type espace $\psi_{n_0}(\mathcal{F}) + n_i^\perp$ convergent vers l'hyperplan de type lumière $\psi_{n_0}(\mathcal{F}) + v^\perp$. De plus $\psi_{n_0}(\mathcal{F}) + v^\perp$ est un hyperplan support de Ω_{n_0} . On a ainsi l'inclusion $\Omega_{n_0} \subset I^+(\psi_{n_0}(\mathcal{F}) + v^\perp)$. Il s'en suit que $\Omega_{n_0} \subset \bigcap_{v \in \partial\mathcal{F}} I^+(\psi_{n_0}(\mathcal{F}) + v^\perp)$ et donc

$$\Omega_{n_0} \subset \bigcap_{\mathcal{F}} \bigcap_{v \in \partial\mathcal{F}} I^+(\psi_{n_0}(\mathcal{F}) + v^\perp).$$

D'autre part toute strate \mathcal{F} est l'enveloppe convexe de ses points à l'infini donc pour chaque strate \mathcal{F} et tout n dans \mathcal{F} on a

$$\bigcap_{v \in \partial\mathcal{F}} I^+(\psi_{n_0}(\mathcal{F}) + v^\perp) \subset I^+(\psi_{n_0}(n) + n^\perp).$$

Par suite Ω_{n_0} coïncide avec l'intersection des futurs de ses hyperplans support de type lumières. Pour montrer que Ω_{n_0} est un domaine régulier il reste à montrer qu'il est non vide. Soit n dans $\mathbb{H}^2 \setminus \tilde{L}_W$, pour tout n' dans $\mathbb{H}^2 \setminus \tilde{L}_W$ on a :

$$\langle \psi_{n_0}(n') - \psi_{n_0}(n), n' \rangle \geq 0.$$

En effet pour tout x dans $[n, n']$ on a $\langle v(x), n' \rangle \geq 0$. On en déduit que pour tout $t > 0$, $\psi_{n_0}(n) + tn$ est dans Ω_{n_0} . \square

Pour tout n_0 fixé dans $\mathbb{H}^2 \setminus \tilde{L}_W$ l'application $\tau : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{1,2}$ défini par $\tau(\gamma) = \psi_{n_0}(\gamma.n_0)$ est un cocycle. En effet, on a que $\psi_{n_0}(\gamma.n_0) = \int_k v(x) d\mu(x)$ où k est la géodésique reliant n_0

et $\gamma.n_0$. Donc $\psi_{\gamma'.n_0}(\gamma'\gamma.n_0) = \gamma'\psi_{n_0}(\gamma.n_0)$. La réunion des géodésique k et $\gamma'(k)$ est un arc transverse reliant n_0 et $\gamma'\gamma.n_0$ donc $\psi_{n_0}(\gamma'\gamma.n_0) = \psi_{n_0}(\gamma'.n_0) + \psi_{\gamma'.n_0}(\gamma'\gamma.n_0)$ et on obtient comme voulu que τ est un cocycle.

La fonction ψ_{n_0} est donc Γ -équivariante i.e $\psi_{n_0}(\gamma.n) = \gamma.\psi_{n_0}(n) + \tau(\gamma)$. On obtient donc la proposition suivante :

Proposition 4.3.2. ([18, § 5.3.1]) *Le domaine Ω_{n_0} est Γ_τ -invariant. L'action de Γ_τ sur Ω_{n_0} est donc libre et proprement discontinue.*

Démonstration. Soit γ dans Γ . On a $\gamma_\tau I^+(\psi_{n_0}(n) + n^\perp) = I^+(\psi_{n_0}(\gamma.n) + (\gamma.n)^\perp)$ donc le domaine Ω_{n_0} est Γ_τ invariant. Par la Proposition 3.1.33 l'action est libre et propre. \square

Définition 4.3.3. *Le domaine Ω_{n_0} est le domaine régulier associé à la lamination géodésique mesurée (λ, μ) . On le note par $M(\lambda, \mu)$.*

4.3.2 Lamination géodésique mesurée associée à un domaine régulier

Dans cette partie nous allons associer à tout espace-temps M non élémentaire *MGHC* futur complet de dimension $2 + 1$ une lamination géodésique mesurée. Cette correspondance est réciproque à celle donnée dans la section 4.3.1. Ce travail est dû à Mess [38], il a été généralisé par la suite par Bonsante et Benedetti [18] dans le cadre des espaces-temps globalement hyperboliques Cauchy complets.

Proposition 4.3.4. ([38, Proposition 13]). *Tout espace-temps M non élémentaire *MGHC* futur complet de dimension $2 + 1$ avec une surface de Cauchy S hyperbolique détermine une lamination géodésique mesurée (λ, μ) sur S telle que $M = M(\lambda, \mu)$.*

Caractère expansif du temps cosmologique

Soit M un espace-temps *MGHC* non élémentaire futur complet de dimension $n + 1$. On sait que M s'identifie au quotient d'un domaine régulier Ω^+ de $\mathbb{R}^{1,n}$ par une déformation Γ_τ d'un réseau cocompact Γ de $SO(1, n)$. Rappelons qu'au domaine régulier Ω^+ est associé :

- Un temps cosmologique T_{cos} régulier qui est une fonction temps de Cauchy Γ_τ invariante i.e $T_{cos}(\gamma.p + \tau(\gamma)) = T_{cos}(p)$;
- Une application rétraction $r : \Omega^+ \rightarrow \partial\Omega^+$ continue qui est Γ_τ invariante
- Une singularité initiale $\Sigma \subset \partial\Omega^+$ donnée par $r(\Omega^+)$ et caractérisée par : Σ est le lieu des points de $\partial\Omega^+$ par lesquels passe un hyperplan support de type espace ou d'une manière équivalente deux hyperplans supports de type lumière.
- Une application normale $N : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{H}^n$ qui est Γ -équivariante i.e $N(\gamma.p + \tau(\gamma)) = \gamma.N(p)$.

Proposition 4.3.5. [4, Corollaire 4.7]. *Le temps cosmologique T_{cos} de Ω^+ est une fonction $C^{1,1}$. En particulier N est localement lipschitz.*

Remarque 4.3.6. *La proposition précédente montre que la restriction de r à un niveau cosmologique $T_{cos}^{-1}(t)$ induit une application localement lipschitz. En effet tout élément p de Ω^+ s'écrit sous la forme $r(p) + T_{cos}(p)N_p$.*

Lemme 4.3.7. [25, Corollaire 4.6] *Pour tout p et q dans Ω^+ et pour tout a et b réels positifs on a $0 \leq \langle r(p) - r(q), aN_p - bN_q \rangle$.*

Démonstration. Soit p et q deux points de Ω^+ . L'hyperplan $P_p = r(p) + N_p^\perp$ est un hyperplan support pour Ω^+ . En d'autres termes, tout point de $\partial\Omega^+$ est dans le futur causal de P_p . En particulier $r(q)$ est dans le futur causal de P_p ; ce qui se traduit par :

$$0 \leq \langle r(p) - r(q), N_p \rangle,$$

et donc

$$0 \leq \langle r(p) - r(q), aN_p \rangle$$

pour tout $a > 0$. En échangeant les rôles de p et q on obtient :

$$0 \leq \langle r(q) - r(p), bN_q \rangle.$$

Il suffit alors de sommer pour obtenir

$$0 \leq \langle r(p) - r(q), aN_p - bN_q \rangle$$

pour tout $a > 0$ et $b > 0$. □

Bien que le temps cosmologique ne soit pas assez lisse, la Proposition 3.2.16 reste vraie dans ce cadre. Le résultat suivant est montré dans [10] :

Proposition 4.3.8. ([10, Proposition 8.1]). *Soit α une courbe lipschitz incluse dans le passé d'un niveau cosmologique $\Sigma_a^{T_{cos}}$ de T_{cos} dans Ω^+ . Alors la projection de α le long des lignes du gradient cosmologique N est de longueur plus grande que celle de α .*

La preuve de la Proposition 4.3.8 utilise principalement un résultat dû à Bonsante qui assure que le passage d'un niveau cosmologique à un autre augmente les longueurs :

Proposition 4.3.9. ([25, Lemme 7.4]). *Soit $\Sigma_a^{T_{cos}}$ et $\Sigma_b^{T_{cos}}$ deux niveaux du temps cosmologique T_{cos} de Ω^+ avec $a < b$. Soit α une courbe lipschitz contenue dans $\Sigma_a^{T_{cos}}$, alors la projection de α sur $\Sigma_b^{T_{cos}}$ le long des lignes du gradient cosmologique N augmente les longueurs.*

Preuve de la Proposition 4.3.4

On se place dans le cadre de la dimension $2 + 1$. Pour chaque point r_0 de Σ , soit $\mathcal{F}(r_0)$ le sous-ensemble de \mathbb{H}^2 défini par $\mathcal{F}(r_0) = N(r^{-1}(r_0))$. Par la Proposition 3.1.25 ce sont des sous-ensembles convexes de \mathbb{H}^2 qui sont deux à deux disjoints. Par la Proposition 3.1.32 l'application N est surjective donc la famille des $\mathcal{F}(r_0)$, où r_0 parcourt la singularité initiale Σ , forme une stratification de \mathbb{H}^2 .

Considérons maintenant le sous-ensemble λ de \mathbb{H}^2 défini par :

$$\tilde{\lambda} = \bigcup_{\dim \mathcal{F}(r_0)=1} \mathcal{F}(r_0) \cup \bigcup_{\dim \mathcal{F}(r_0)=2} \partial \mathcal{F}(r_0).$$

Le sous-ensemble λ forme une lamination géodésique de \mathbb{H}^2 . Il reste à lui associer une mesure μ . Toute l'idée repose essentiellement sur la proposition suivante :

Proposition 4.3.10. ([18, Proposition 3.6.1]). *Soit k un arc transverse à la lamination $\tilde{\lambda}$. Alors il existe une courbe lipschitz α contenue dans $\Sigma_1^{T_{cos}}$ le niveau cosmologique un telle que $N \circ \alpha = k$.*

Construction de la mesure transverse. Soit Y l'ensemble des points x de \mathbb{H}^2 tel que $N^{-1}(x)$ contient plus d'un élément. Notons que la mesure de Lebesgue de Y est nulle et qu'il est formé par une réunion de feuille de λ . Soit k un arc transverse dont les deux extrémités qui sont hors de Y . Par la Proposition 4.3.10, il existe une courbe lipschitz α telle que $N \circ \alpha = k$. Sa projection $r \circ \alpha$ est une courbe dérivable presque partout et $\dot{r}(s) \in T_{N(s)}\mathbb{H}^2$. Définissons μ par :

$$\mu_k(k) = \int |\dot{r}(s)| ds$$

c'est une mesure transverse sur la lamination géodésique $\tilde{\lambda}$.

Il reste alors à montrer que l'espace-temps M est bien celui associé à la lamination géodésique mesurée qu'on vient de construire. Pour cela, on se fixe un point n_0 dans $\mathbb{H}^2 \setminus Y$ et on considère l'application ψ_{n_0} définie précédemment dans §4.3.1. Soit $n \in \mathbb{H}^2 \setminus Y$ et soit k la géodésique reliant n_0 à n ; on a alors $\psi_{n_0}(n) = \int_k v(x) d\mu(x)$. D'après la Proposition 3.1.27, pour tout t tel que $k(t) \in \tilde{L}$ on a $\dot{r}(t) \in T_{k(t)} \mathcal{F}(r_t)^\perp$. On a alors $\dot{r}(t) = |\dot{r}(t)| v(r(t))$ et donc $r(N^{-1}(n)) - r(N^{-1}(n_0)) = \int_k v(x) d\mu(x) = \psi_{n_0}(n)$. Ce qui montre que $M = M(\lambda, \mu)$. \square

4.4 La géométrie de la singularité initiale cosmologique

Dans cette section nous allons voir comment Bonsante munit la singularité initiale d'une métrique, et esquisser sa preuve du théorème suivant :

Théorème 4.4.1. [18, Proposition 3.7.2] *Soit $M(\lambda, \mu)$ un espace-temps plat non élémentaire MGHC futur complet de dimension $2 + 1$ associé à une lamination géodésique mesurée (λ, μ) . Alors la singularité initiale cosmologique associée est isométrique à l'arbre réel dual à la lamination géodésique mesurée (λ, μ) .*

4.4.1 Comportement asymptotique des niveaux cosmologiques

Dans [25] Bonsante étudie le comportement asymptotique des niveaux cosmologiques dans un espace-temps plat, donnant ainsi un sens métrique à la singularité initiale. Ce travail ne se restreint pas qu'au cas de la dimension $2 + 1$, il est vrai en toute dimension. Commençons par rappeler :

Théorème 4.4.2. ([25, Proposition 7.6, Corollaire 7.9]). *Soit $M \simeq \Omega^+ / \Gamma_\tau$ un espace-temps plat MGHC non élémentaire futur complet de dimension $n + 1$. Alors il existe une distance d_Σ bien définie sur la singularité initiale Σ telle que : les niveaux $\Sigma_a^{T_{cos}}$ de la fonction temps cosmologique T_{cos} de Ω^+ , munis de leurs distances $d_a^{T_{cos}}$ i.e celles induites par la restriction de la métrique ambiante de $\mathbb{R}^{1,n}$, convergent pour la topologie uniforme sur les compacts vers l'espace métrique (Σ, d_Σ) .*

Remarque 4.4.3. *Notons qu'une conséquence immédiate du Théorème 4.4.2, est que les espaces $(\Gamma, \Sigma_a^{T_{cos}}, d_a)$ convergent pour la topologie de Gromov équivariante vers l'espace $(\Gamma, \Sigma, d_\Sigma)$. En effet, d'après 2.7.17 la convergence uniforme sur les compacts implique la convergence de Gromov équivariante. En particulier, les espaces $(\Gamma, \Sigma_a^{T_{cos}}, d_a)$ convergent spectralement vers l'espace $(\Gamma, \Sigma, d_\Sigma)$.*

Définition 4.4.4. *La singularité initiale Σ munie de la distance d_Σ est appelée singularité initiale cosmologique.*

Idée de la preuve du Théorème 4.4.2. Soit $X_{T_{cos}}$ l'espace des lignes de gradient du temps cosmologique T_{cos} . Soit $(d_a)_{a>0}$ la famille des distances cosmologique définie sur $X_{T_{cos}}$ (voir 3.3). Chaque ligne x de $X_{T_{cos}}$ est une droite de Ω^+ normale au niveaux cosmologique et qui a un point limite dans Σ . Elle se rétracte donc sur un seul point $r(x)$. Par la Proposition 4.3.9 et la Proposition 3.3.2 ces distances convergent uniformément sur les compacts vers une pseudo-distance d_0 sur $X_{T_{cos}}$. De plus pour tout x et y dans $X_{T_{cos}}$ on ait $d_0(x, y) = 0$ si et seulement si $r(x) = r(y)$. Ce qui montre que l'espace métrique quotient de $X_{T_{cos}}$ par d_0 s'identifie à Σ . La convergence spectrale est donnée par le corollaire 3.3.5. \square

L'objet de la proposition suivante est de démontrer la deuxième partie du Théorème A :

Proposition 4.4.5. *Soit T une fonction temps de Cauchy quasi-concave Γ -équivariante définie sur Ω^+ . Alors les niveaux Σ_a^T de T munis de leurs action isométrique de Γ convergent pour la topologie spectrale vers la singularité cosmologique $(\Gamma, \Sigma, d_\Sigma)$.*

Démonstration. Par le Théorème 3.3.2 on sait que les $(\Gamma, \Sigma_a^T, d_a)$ convergent spectralement vers un espace métrique indépendant de la fonction T . Grâce à la Proposition 4.3.8 les mêmes arguments de la Proposition 3.3.4 et de la Proposition 3.3.5 s'appliquent au temps cosmologique. On obtient ainsi en utilisant le Théorème 4.4.2 le résultat voulu. \square

4.4.2 La structure d'arbre réel induite sur la singularité initiale

Soit $M \simeq \Omega^+/\Gamma_\tau$ un espace-temps plat *MGHC* non élémentaire de dimension $2+1$. Soit $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ la lamination géodésique mesurée définie sur \mathbb{H}^2 associée à Ω^+ . Elle se transporte en une lamination géodésique mesurée $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ sur le niveau cosmologique $\Sigma_1^{T_{cos}}$. Soit l une feuille de $\bar{\lambda}$, deux cas de figure se présentent : le premier est celui où l est une feuille contenue dans Y (rappelons que Y est l'ensemble des x dans \mathbb{H}^2 tels que $N^{-1}(x)$ contient exactement un élément), le second est celui où l n'est pas contenue dans Y . Notons que dans le premier cas l'ensemble des r dans Σ tel que $l \subset \mathcal{F}(r)$ est un segment d'extrémités $r_-(l)$ et $r_+(l)$. Dans le second cas c'est un unique point $r(l)$ de Σ .

Si la feuille l n'est pas contenue dans Y , alors $\bar{l} = N^{-1}(l) \cap \Sigma_1^{T_{cos}} = l + r$. C'est une géodésique de $\Sigma_1^{T_{cos}}$ car $N : \Sigma_1^{T_{cos}} \rightarrow \mathbb{H}^2$ est une application 1-lipschitz. Sinon $N^{-1}(l) \cap \Sigma_1^{T_{cos}} = l + [r_-(l), r_+(l)]$. Cet ensemble est feuilleté par les géodésiques $\bar{l}(t) = l + tr_-(l) + (1-t)r_+(l)$. L'ensemble $\bar{\lambda}$ est donc une lamination géodésique. La mesure transverse est tout simplement définie par $\bar{\mu}(\bar{k}) = \mu(N(\bar{k}))$ si les extrémités de k ne sont pas dans Y . Sinon $\bar{\mu}(\bar{k}) = \int |\dot{r}(s)| ds$.

Proposition 4.4.6. ([18, Lemme 3.5.3]). *Soit p et q dans $\Sigma_1^{T_{cos}}$ tels que N_p et N_q ne sont pas dans Y et $r(p) \neq r(q)$. Alors la géodésique $\bar{\alpha}$ de $\Sigma_1^{T_{cos}}$ reliant p et q est un arc transverse à la lamination géodésique $\bar{\lambda}$ de masse totale $\bar{\mu}(\bar{\alpha})$ égale à $\bar{\mu}(k)$, où k est l'arc géodésique reliant N_p et N_q dans \mathbb{H}^2 .*

Démonstration. Comme les feuilles de la lamination géodésique $\bar{\lambda}$ sont des géodésiques de $\Sigma_1^{T_{cos}}$ et que les points p et q ne sont pas sur la même strate, la géodésique $\bar{\alpha}$ est un arc transverse à $\bar{\lambda}$.

Chaque feuille de $\bar{\lambda}$ sépare $\Sigma_1^{T_{cos}}$ en deux sous espaces. Donc si une feuille déconnecte p et q , alors elle intersecte forcément $\bar{\alpha}$. Sinon l'intersection est vide. Ceci montre que $N(\bar{\alpha})$ est homotope à k l'arc transverse à $\tilde{\lambda}$ reliant N_p et N_q . Donc $\bar{\mu}(\bar{\alpha}) = \bar{\mu}(k)$. \square

Remarque 4.4.7. *Une conséquence immédiate de la Proposition 4.4.6 est le fait que la mesure transverse $\bar{\mu}$ soit contrôlée par la structure de longueur induite sur $\Sigma_1^{T_{cos}}$ par la structure lorentzienne ambiante. En effet, $\bar{\mu}(\bar{\alpha}) = \bar{\mu}(k) = l(r \circ \bar{\alpha}) \leq l(\bar{\alpha})$. \square*

Pour tout r_0 et r_1 dans Σ , soit k est une géodésique reliant deux points de $\mathcal{F}(r_0)$ et $\mathcal{F}(r_1)$ respectivement. Soit $\bar{\alpha}$ une paramétrisation de $N^{-1}(k) \cap \Sigma_1^{T_{cos}}$. La projection $r \circ \bar{\alpha}$ est une courbe de Σ passant par r_0 et r_1 . Dans le cas où aucun des $\mathcal{F}(r_i)$ n'intersecte Y , les points r_i sont les extrémités de $r \circ \bar{\alpha}$. Si maintenant un des $\mathcal{F}(r_i)$ (ou les deux!) a une intersection non vide avec Y , alors le point r_i n'est pas forcément une extrémité de la projection $r \circ \bar{\alpha}$. Soit p et q deux points de $\bar{\alpha}$. Comme nous l'avons mentionné auparavant les points p et q s'identifient avec les lignes de gradient du temps cosmologique passant par ces deux points. Il s'en suit que $d_a^T(p, q) \geq l(r \circ \bar{\alpha}_a)$ où $\bar{\alpha}_a$ est une géodésique de (X_T, d_T) reliant p et q . Par définition même de la mesure transverse $\bar{\mu}$, la longueur de la courbe $r \circ \bar{\alpha}_a$ n'est autre que le poids total de la projection sur $\Sigma_1^{T_{cos}}$ le long des lignes du gradient cosmologique de la géodésique $\bar{\alpha}_a$ qui à son tour est supérieure à la masse du sous arc $\tilde{\alpha}_{p,q}$ de $\bar{\alpha}$ reliant p et q . D'autre part la masse du sous arc $\tilde{\alpha}_{p,q}$ est supérieure à $d_\Sigma(p, q)$. En passant à la limite on obtient que $r \circ \bar{\alpha}_{p,q}$ est la géodésique reliant $r(p)$ et $r(q)$. On obtient ainsi :

Proposition 4.4.8. ([18, Proposition 3.7.1]). *Soit $M \simeq \Omega^+/\Gamma_\tau$ un espace-temps plat *MGHC* non élémentaire de dimension $2+1$. Soit (λ, μ) la lamination géodésique mesurée associée à*

Ω^+ . Alors l'espace métrique (Σ, d_Σ) est un espace métrique géodésique. De plus pour chaque r_0 et r_1 dans Σ , la courbe $r \circ \alpha$ est une géodésique passant par les points r_0 et r_1 de longueur égale à $\tilde{\mu}(k)$ où k est la géodésique de \mathbb{H}^2 reliant deux points de $\mathcal{F}(r_0)$ et $\mathcal{F}(r_1)$.

Preuve du Théorème 4.4.1. Montrons que (Σ, d_Σ) est un arbre réel. Soient p et q deux points de $\Sigma_1^{T_{cos}}$ tel que $r(p) \neq r(q)$. Soit α l'unique géodésique de $\Sigma_1^{T_{cos}}$ reliant p et q . Soit z un point de la courbe $r \circ \alpha$ différent de $r(p)$ et de $r(q)$. D'une part la strate $r^{-1}(z)$ sépare $\Sigma_1^{T_{cos}}$ en deux ouverts connexes disjoints Σ_1 et Σ_2 . D'autre part, la Proposition 4.4.6 nous assure que la géodésique α est un arc transverse à la lamination $\tilde{\mu}$. Donc Σ_1 et Σ_2 se retractent sur des sous-ensembles disjoints de Σ l'un contenant $r(p)$ et l'autre $r(q)$. Comme la retraction r est continue ils sont connexes.

Montrons maintenant que c'est bien l'arbre réel dual à (λ, μ) . Soient r_0 et r_1 deux points de Σ tels que $\mathcal{F}(r_0) \cap \mathcal{F}(r_1) = \emptyset$. Par la Proposition 4.4.8 la géodésique reliant r_0 et r_1 est de longueur égale au poids de toute géodésique de \mathbb{H}^2 reliant un point de $\mathcal{F}(r_0)$ et un point de $\mathcal{F}(r_1)$. Le Théorème 4.4.1 en découle. \square

4.5 Convergence Gromov équivariante des niveaux d'un temps quasi-concave

Dans cette partie nous allons montrer le Théorème B dans le cas plat. Plus précisément nous montrons le théorème suivant :

Théorème 4.5.1. *Soit $M(S, \lambda)$ un espace-temps MGHC plat non élémentaire futur-complet. Soit T une fonction temps de Cauchy quasi-concave C^2 . Alors les niveaux de T convergent pour la topologie de Gromov équivariante vers l'arbre réel dual à (S, λ) . En particulier la limite ne dépend pas de la fonction temps choisie.*

Démonstration. Soit $M \simeq \Omega^+/\Gamma_\tau$ un espace-temps MGHC plat non élémentaire futur-complet de dimension $2+1$. Soit T une fonction temps de Cauchy quasi-concave C^2 . Elle se relève en une fonction temps de Cauchy Γ_τ invariante sur Ω^+ . Soit \tilde{T}_{cos} la fonction temps cosmologique de Ω^+ . Nous reprenons les notations du paragraphe §3.3 :

- $X_{\tilde{T}_{cos}}$ l'espace des lignes du gradient cosmologique ;
- $d_a^{\tilde{T}_{cos}}$ les distances définies sur l'espace $X_{\tilde{T}_{cos}}$ par la fonction \tilde{T}_{cos} ;
- $\delta_a^{\tilde{T}}$ les distances définies sur l'espace $X_{\tilde{T}_{cos}}$ par la fonction \tilde{T} ;
- $\rho_a = \rho$ pour tout $a > 0$.

D'après la Proposition 2.7.17, pour montrer que les Γ -espaces métriques $(X_{\tilde{T}_{cos}}, \delta_a^{\tilde{T}}, \Gamma, \rho_a)$ convergent pour la topologie de Gromov équivariante, il suffit de montrer qu'ils convergent uniformément sur les compacts. Mais comme les actions ρ_a sont toutes identiques, il suffit alors de démontrer que toutes les limites au sens de la topologie uniforme sur les compacts $\delta_0^{\tilde{T}}$ de suites extraites de la famille $\delta_a^{\tilde{T}}$ sont égales à la pseudo-distance $d_0^{\tilde{T}_{cos}}$ sur $X_{\tilde{T}_{cos}}$. D'après le Théorème 4.4.2 et le Théorème 4.4.1 on sait que les $(X_{\tilde{T}_{cos}}, d_a^{\tilde{T}_{cos}})$ convergent pour la topologie uniforme sur les compacts vers $(X_{\tilde{T}_{cos}}, d_0^{\tilde{T}_{cos}})$ de sorte que le métrisé $(\hat{X}_{\tilde{T}_{cos}}, d_0^{\tilde{T}_{cos}})$ soit isométrique à l'arbre réel dual à la lamination géodésique mesurée (S, λ) . D'après la Proposition 4.2.1, $(\hat{X}_{\tilde{T}_{cos}}, d_0^{\tilde{T}_{cos}})$ est minimal et irréductible. Soient x, y deux éléments de $X_{\tilde{T}_{cos}}$. D'après le Lemme 2.4.6 il existe un élément γ de Γ dont l'axe de translation A_γ contient le segment $[\bar{x}, \bar{y}]$, où \bar{x}, \bar{y} sont les projetés de x, y dans le métrisé. Quitte à remplacer γ par une de ses puissances, on peut supposer que $[\bar{x}, \bar{y}]$ est contenu dans le segment $[\bar{x}, \gamma.\bar{x}]$. Or, d'après la Proposition 3.2.16, et comme \bar{x} est dans A_γ :

$$l_{0, \tilde{T}}(\gamma) \leq \delta_0^{\tilde{T}}(\bar{x}, \gamma.\bar{x}) \leq d_0^{\tilde{T}_{cos}}(\bar{x}, \gamma.\bar{x}) = l_{0, \tilde{T}_{cos}}(\gamma).$$

D'après le Corollaire 3.3.5, les deux termes aux extrémités de cette suite d'inégalités sont égaux, donc toutes les inégalités sont égales. En particulier :

$$\delta_0^{\tilde{T}}(\bar{x}, \gamma.\bar{x}) = d_0^{\tilde{T}cos}(\bar{x}, \gamma.\bar{x}).$$

Donc :

$$d_0^{\tilde{T}cos}(\bar{x}, \bar{y}) + d_0^{\tilde{T}cos}(\bar{y}, \gamma.\bar{x}) = d_0^{\tilde{T}cos}(\bar{x}, \gamma.\bar{x}) = \delta_0^T(\bar{x}, \gamma.\bar{x}) \leq \delta_0^T(\bar{x}, \bar{y}) + \delta_0^T(\bar{y}, \gamma.\bar{x})$$

ce qui donne comme voulu, en utilisant à nouveau la Proposition 3.2.16, l'égalité $\delta_0^T(x, y) = d_0^{\tilde{T}cos}(x, y)$.

□

Chapitre 5

Comportement asymptotique dans un espace-temps de Sitter

Dans ce chapitre nous allons étudier le comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps quasi-concave dans un espace-temps de Sitter. Nous généralisons ainsi le résultat 4.5.1 obtenu dans la section précédente au cas des espaces-temps modelés sur l'espace de Sitter. Ceci est dû particulièrement au fait que les espaces-temps de Sitter de dimension $2 + 1$ peuvent être obtenus par une rotation de Wick à partir des espaces-temps plats. Nous commençons par rappeler quelques éléments de la classification des espaces-temps de Sitter de dimension $n + 1$ quelconque. Ce qui nous permet de montrer le Théorème A dans le cas de Sitter. Nous traitons ensuite le cas de la dimension $2 + 1$ où nous exposons la classification des espaces-temps de Sitter via les rotations de Wick, pour ensuite montrer le Théorème B, dont l'objet est l'étude de la convergence Gromov équivariante des niveaux d'une fonction temps quasi-concave en dimension $2 + 1$, dans le cas de Sitter.

5.1 Classifications des espaces-temps de Sitter

Bien que nous ne serons pas amenés dans cette thèse à traiter le comportement asymptotique dans le cas d'un espace-temps de Sitter de dimension $n + 1 \geq 4$, nous avons préféré parler de la classification en toute sa généralité afin de donner un exposé plus au moins complet des espaces-temps de Sitter.

5.1.1 Espace de Sitter

Modèle linéaire de l'espace de Sitter

Considérons l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n+1}$ de dimension $n + 1$ muni de la forme quadratique $q_{1,n+1} = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2 + dx_{n+1}^2$.

Définition 5.1.1. *Le modèle linéaire de l'espace de Sitter est l'hyperboloïde à une nappe défini par :*

$$dS_{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{1,n+1} \text{ tel que } q_{1,n+1}(x) = 1\}$$

muni de la métrique lorentzienne induite par q .

Remarque 5.1.2. 1) *L'application $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \rightarrow dS_{n+1}$ définie par :*

$$(x, t) \mapsto (\sinh(t), \cosh(t)x)$$

est un difféomorphisme entre l'espace de Sitter et $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. La restriction de q s'écrit alors $g = -dt^2 + \cosh(t)^2 dx^2$ où dx^2 est la métrique riemannienne de la sphère ronde \mathbb{S}^n . Ceci montre en particulier que l'espace de Sitter dS_{n+1} est une variété lorentzienne connexe.

2) Le groupe d'isométrie de dS_{n+1} est $O(1, n+1)$.

Comme dans le cas de l'espace hyperbolique on a le résultat suivant :

Proposition 5.1.3. *Les sous espaces totalement géodésiques de dS_{n+1} sont les composantes connexes des intersections des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{1,n+1}$ avec dS_{n+1} .*

On obtient ainsi 3 types de sous-espaces totalement géodésiques :

- Ceux de type espace : ce sont les intersections entre dS_{n+1} et les sous-espaces vectoriels de type espace de $\mathbb{R}^{1,n+1}$. Ils sont isométriques à \mathbb{S}^k ($k \leq n$);
- Ceux de type temps : ce sont les composantes connexes des intersections entre dS_{n+1} et les sous-espaces vectoriels de type temps de $\mathbb{R}^{1,n+1}$. Ils sont isométriques à dS_k ($k \leq n$);
- Ceux dégénérés : ce sont les intersections entre dS_{n+1} et les sous-espaces vectoriels de type lumière de $\mathbb{R}^{1,n+1}$.

En particulier on obtient trois types de géodésiques :

- géodésiques de type espace : ce sont les intersections entre les plans de type espace et dS_{n+1} ;
- géodésiques de type temps : ce sont les composantes connexes des intersections entre les plans de type temps et dS_{n+1} ;
- géodésiques de type lumière : ce sont les composantes connexes des intersections entre les plans lumières et dS_{n+1} .

Remarque 5.1.4. *Les géodésiques de type espace de dS_{n+1} sont fermées contrairement à ceux de type temps ou lumière qui ne le sont jamais.*

L'espace de Sitter dS_{n+1} est naturellement orienté. En effet, l'orientation chronologique de l'espace de Minkowski induit une orientation chronologique sur dS_{n+1} pour laquelle les courbes causales futures sont aussi des courbes causales futures pour Minkowski. Ainsi le groupe des isométries de dS_{n+1} préservant l'orientation et l'orientation chronologique est $SO^+(1, n)$. La restriction de la coordonnée x_0 à dS_{n+1} induit une fonction temps de Cauchy faisant de l'espace de Sitter un espace globalement hyperbolique.

Espace d'Einstein

Considérons l'espace $\mathbb{R}^{2,n+1}$ i.e l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+3} muni de la métrique $q_{2,n+1} = -du^2 - dv^2 + dx_0^2 + \dots + dx_n^2$. Soit C le lieu d'annulation de $Q_{2,n+1}$.

Définition 5.1.5. *L'espace d'Einstein, noté Ein_{n+1} , est la projection dans la sphère des rayons $S(\mathbb{R}^{2,n+1})$ de C .*

Notons par π l'application projection de $\mathbb{R}^{2,n+1}/\{0\}$ dans $S(\mathbb{R}^{2,n+1})$.

Proposition 5.1.6. *L'espace d'Einstein Ein_{n+1} est muni d'une classe conforme lorentzienne canonique conformément équivalente à $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1, dx^2 - dt^2)$, où dx^2 est la métrique ronde de \mathbb{S}^n et dt^2 celle de \mathbb{S}^1 .*

Démonstration. Soit U un ouvert de Ein_{n+1} et soit $s : U \rightarrow C$ une section de π au dessus de U . Pour chaque p dans U et chaque w dans $T_p Ein_{n+1}$ considérons le vecteur w' dans $T_{s(p)}C$ défini par : $d_{s(p)}\pi(w') = w$. Si w'_1 et w'_2 sont tels que $d_{s(p)}\pi(w'_1) = d_{s(p)}\pi(w'_2) = w$, alors $w'_1 - w'_2$ est dans $\pi^{-1}(p)$. Or $\pi^{-1}(p)$ est contenu dans $(T_{s(p)}C)^\perp$ et donc $q_{2,n+1}(w')$ ne dépend pas du choix de w' . Ceci nous permet donc de définir une métrique g_s sur U par $g_s(w) = q_{2,n+1}(w')$.

Si maintenant s' est une autre section de U , alors il existe une fonction positive $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $s = fs'$ et dans ce cas $g_s = f^2 g'_s$. Ce qui montre que l'espace Ein_{n+1} est muni d'une classe conforme lorentzienne.

Dans le cas particulier où s est la section qui prend ses valeurs dans la sphère euclidienne de rayon 2, la métrique ds est isométrique à $dx^2 - dt^2$ sur $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ et donc Ein_{n+1} est conformément équivalent à $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1, dx^2 - dt^2)$. \square

Comme la structure de causalité est préservée par changement conforme on peut parler de causalité dans l'espace d'Eistein Ein_{n+1} . Ainsi :

Définition 5.1.7. Une courbe dans Ein_{n+1} est :

- causale si elle l'est pour $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1, dx^2 - dt^2)$;
- temporelle si elle l'est pour $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1, dx^2 - dt^2)$.

Il se trouve que comme dans le cas de l'espace de Minkowski on sait décrire les courbes causales de l'espace Ein_{n+1} :

Proposition 5.1.8. ([13, Lemme 5.1]). Toute courbe causale α de l'espace d'Einstein Ein_{n+1} est de la forme $t \rightarrow (x(t), (\cos(t), \sin(t)))$, où $t \rightarrow x(t)$ est une courbe 1-Lipschitz de \mathbb{S}^n . Si de plus la courbe $t \rightarrow x(t)$ est 1-contractante alors la courbe α est temporelle.

Définition 5.1.9. L'univers d'Einstein, noté \widetilde{Ein}_{n+1} , est défini comme étant le revêtement universel de l'espace d'Einstein muni de sa classe lorentzienne conforme.

Proposition 5.1.10. L'univers d'Einstein \widetilde{Ein}_{n+1} est conformément équivalent à $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, dx^2 - dt^2)$, où dx^2 est la métrique ronde de \mathbb{S}^n et dt^2 est celle de \mathbb{R} .

Proposition 5.1.11. ([13, Corollaire 5.5]). L'univers d'Einstein est globalement hyperbolique.

Démonstration. Une courbe causale inextensible de \widetilde{Ein}_{n+1} est forcément le graphe d'une application 1-Lipschitz $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$. Comme $\widetilde{Ein}_{n+1} \approx \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ on obtient que la projection sur le deuxième facteur est une fonction temps de Cauchy et donc que l'univers d'Einstein \widetilde{Ein}_{n+1} est globalement hyperbolique. \square

La proposition suivante est l'analogie de la Proposition 3.1.2 dans le cas de l'univers d'Einstein, elle décrit les parties achronales (respectivement acausales) de l'espace \widetilde{Ein}_{n+1} :

Proposition 5.1.12. ([13, Corollaire 5.2]). Soit S une partie de \widetilde{Ein}_{n+1} . Alors :

- S est achronale si et seulement si il existe un sous-ensemble Λ de \mathbb{S}^n et une application 1-Lipschitz $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$S = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \Lambda\};$$

- S est achronale sans bord si et seulement si Λ est un ouvert de \mathbb{S}^n ;
- S est achronale fermée sans bord si et seulement si Λ est \mathbb{S}^n tout entier.

Démonstration. La preuve est identique à celle de la Proposition 3.1.2. \square

Plongement conforme de l'espace de Sitter

Soit x un vecteur de type temps de $\mathbb{R}^{2,n+1}$. Soit P_x l'hyperplan affine défini par : $P_x = \{p \in \mathbb{R}^{2,n+1} / \mathfrak{q}_{2,n+1}(x, p) = 1\}$. Considérons $U(x)$ la projection dans Ein_{n+1} de l'intersection du lieu d'annulation C de $\mathfrak{q}_{2,n+1}$ et de l'hyperplan affine P_x . Considérons la section $s_x : U(x) \rightarrow C$ qui envoie chaque rayon de $U(x)$ sur son intersection avec l'hyperplan affine $P_{e_0} = \{p \in \mathbb{R}^{2,n+1} / \mathfrak{q}_{2,n+1}(p, e_0) = 1\}$, ce qui définit une métrique ds_x sur $U(x)$. Quitte à composer par un élément de $O(2, n+1)$, on peut supposer que $x = (0, 1, 0, \dots, 0)$ et dans ce cas $(U(x), ds_x)$ est isométrique au modèle linéaire dS_{n+1} de l'espace de Sitter. Nous avons montré :

Proposition 5.1.13. *Le modèle linéaire de l'espace de Sitter dS_{n+1} est conformément équivalent à $(\mathbb{S}^n \times]\Theta, \Theta + \pi[, dx^2 - dt^2)$.*

Modèle de Klein de l'espace de Sitter

Définition 5.1.14. *On appelle modèle de Klein de l'espace de Sitter dS_{n+1} la projection dans $S(\mathbb{R}^{1,n+1})$ de dS_{n+1} munie de la métrique image directe. On le note généralement par \mathbb{DS}_n .*

Remarque 5.1.15. *Les sous espaces totalement géodésiques du modèle de Klein \mathbb{DS}_n sont les projections dans $S(\mathbb{R}^{1,n+1})$ des sous espaces totalement géodésiques de dS_{n+1} . En d'autres termes ce sont les composantes connexes des intersections entre les hyperplans projectifs et \mathbb{DS}_n .*

Soit $H_+^n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) / \mathfrak{q}_{1,n+1}(x, x) = -1 \text{ et } x_0 > 0\}$. Notons par \mathbb{H}_+^n sa projection dans $S(\mathbb{R}^{1,n+1})$. On définit de la même façon H_-^n et \mathbb{H}_-^n . Notons que le complémentaire de l'adhérence de \mathbb{DS}_n dans $S(\mathbb{R}^{1,n+1})$ n'est autre que la réunion de \mathbb{H}_+^n et de \mathbb{H}_-^n . Notons aussi que le bord de \mathbb{DS}_{n+1} est constitué de la réunion de deux sphères \mathbb{S}_+^n et \mathbb{S}_-^n données par la projection dans $S(\mathbb{R}^{1,n+1})$ du cône d'annulation de $\mathfrak{q}_{1,n+1}$. Comme dS_{n+1} est conformément équivalent à $(\mathbb{S}^n \times]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[, dx^2 - dt^2)$, les géodésiques inextensibles futures de \mathbb{DS}_{n+1} (qui sont les projetées des géodésiques inextensibles futures de dS_{n+1}) vont de \mathbb{S}_-^n à \mathbb{S}_+^n . Ce qui amène à considérer les deux sphères conformes \mathbb{S}_-^n et \mathbb{S}_+^n comme étant respectivement le bord passé et le bord futur de l'espace de Sitter \mathbb{DS}_{n+1} .

On obtient ainsi une description précise des géodésiques de \mathbb{DS}_{n+1} :

- Si une droite projective intersecte transversalement les sphères \mathbb{S}_-^n et \mathbb{S}_+^n , alors son intersection avec \mathbb{DS}_{n+1} a exactement deux composantes connexes et ce sont des géodésiques temporelles ;
- Si une droite projective est tangente aux deux sphères \mathbb{S}_-^n et \mathbb{S}_+^n , \mathbb{DS}_{n+1} ; alors son intersection avec \mathbb{DS}_{n+1} a exactement deux composantes connexes et ce sont des géodésiques lumières ;
- Si une droite projective n'intersecte pas les deux sphères \mathbb{S}_-^n et \mathbb{S}_+^n , alors c'est une géodésique de type espace.

Soit maintenant x un point de \mathbb{DS}_{n+1} . Considérons l'ensemble $\partial^+ I^+(x)$ des points de \mathbb{S}_+^n qui sont limite d'une géodésique de type temps future issue de x . En utilisant le modèle conforme, il n'est pas difficile de voir que pour tout x dans \mathbb{DS}_{n+1} , $\partial^+ I^+(x)$ est une boule ronde ouverte de \mathbb{S}_+^n . Inversement toute boule ronde ouverte de \mathbb{S}_+^n correspond à un unique point de \mathbb{DS}_{n+1} : c'est le point $(x_0, \frac{\pi}{2} - r)$, où x_0 est le centre de la boule et r est son rayon. Ceci permet d'identifier \mathbb{DS}_{n+1} et l'espace des boules rondes ouvertes de \mathbb{S}_+^n . Pour cette identification un point x' est dans le futur d'un autre point x si et seulement si la boule $\partial^+ I^+(x)$ contient la boule $\partial^+ I^+(x')$. De la même façon on peut identifier \mathbb{DS}_{n+1} et l'espace des boules rondes ouvertes de \mathbb{S}_-^n . Pour cette identification un point x' est dans le passé d'un autre point x si et seulement si la boule $\partial^- I^-(x)$ contient la boule $\partial^- I^-(x')$.

5.1.2 espace-temps dS standard : Première définition

Cette première définition est dû à Scannell [48], elle consiste à associer à chaque variété de Möbius simplement connexe de type hyperbolique \tilde{S} un espace-temps globalement hyperbolique futur complet localement de Sitter homéomorphe à $\tilde{S} \times]0, +\infty[$.

Définition 5.1.16. *Une variété de Möbius est une variété équipée d'une (G, X) -structure, où $G = O^+(1, n)$ est le groupe de Möbius et $X = \mathbb{S}^n$ est la sphère de dimension n .*

On obtient ainsi trois types de variétés de Möbius simplement connexes :

- Celles dites elliptiques : elles sont conformément équivalentes à la sphère \mathbb{S}^n ;

- Celles dites paraboliques : elles sont conformément équivalentes à la sphère \mathbb{S}^n moins un point ;
- Et celles dites hyperboliques : si elles sont ni elliptique ni parabolique.

Soit \tilde{S} une variété de Möbius simplement connexe de dimension n . Soit $d : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{S}^n$ une application développante.

Définition 5.1.17. *Une boule ronde ouverte de \tilde{S} est un ouvert connexe U de \tilde{S} sur lequel d est un homéomorphisme et tel que $d(U)$ est une boule ronde ouverte de \mathbb{S}^n .*

Considérons l'espace \mathfrak{B}_{max} des boules rondes de \tilde{S} qui sont maximales pour l'inclusion. Soit U un élément de \mathfrak{B}_{max} et soit $\overline{d(U)}$ l'adhérence de $d(U)$ dans \mathbb{S}^n . Comme $\overline{d(U)}$ est une boule ronde fermée de \mathbb{S}^n , elle est conformément équivalente au compactifié $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ de l'espace hyperbolique. Notons par \hat{U} l'enveloppe convexe dans $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ du complémentaire de $d(\hat{U})$ dans $\overline{d(U)}$. Prenons enfin $C(U) = d^{-1}(\hat{U}) \cap U$.

Proposition 5.1.18. [48, Proposition 4.1] *Si \tilde{S} est de type hyperbolique alors pour tout x dans \tilde{S} , il existe une unique boule ronde maximale $U(x)$ de \mathfrak{B}_{max} telle que $x \in C(U(x))$.*

Corollaire 5.1.19. *Les convexes $C(U(x))$, où x parcourt \tilde{S} forment une stratification de \tilde{S} appelée stratification canonique de \tilde{S} .*

Supposons que \tilde{S} est de type hyperbolique. Soit x un élément de \tilde{S} et soit $U(x)$ l'unique boule ronde maximale donnée par la Proposition 5.1.18. Notons par y le point de \mathbb{DS}_{n+1} correspondant à $U(x)$. Définissons la courbe $\alpha_x : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{DS}_{n+1}$ comme étant la géodésique temporelle future issue de y et qui a pour point limite x . Ceci définit une application $D : \tilde{S} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{DS}_{n+1}$.

Proposition 5.1.20. ([48, Proposition 5.1]). *L'application D définie ci dessus est un difféomorphisme local. Il induit une structure lorentzienne faisant ainsi de $\tilde{S} \times]0, +\infty[$ un espace-temps globalement hyperbolique futur complet qui est localement de Sitter. De plus pour chaque $t \in]0, +\infty[$, l'hypersurface $\tilde{S} \times \{t\}$ est une hypersurface de Cauchy.*

Définition 5.1.21. *L'espace-temps ainsi obtenu est appelé espace-temps standard de Sitter.*

5.1.3 espace-temps dS standard : Deuxième définition

Cette construction est due à Béguin, Barbot et Zeghib [4]. Elle est largement inspirée du papier de Kulkarni et Pinkall [36].

Soit \tilde{S} une variété de Möbius simplement connexe de dimension n . Soit $d : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{S}^n$ une application développante.

Définition 5.1.22. *Une boule ronde U de \tilde{S} est dite propre si $d(\bar{U})$ est une boule fermée de \mathbb{S}^n .*

Lemme 5.1.23. ([11, Lemme des assiettes emboîtées]).

Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme local entre deux variétés X et Y . Soient U_1 et U_2 deux ouverts connexes de X sur lesquels f est injective. Si de plus $U_1 \cap U_2$ est non vide et $f(U_1) \subset f(U_2)$, alors $U_1 \subset U_2$.

Démonstration. Montrer que $U_1 \subset U_2$ revient à montrer que $U_1 \cap U_2 = U_1$. Comme U_1 et U_2 sont des ouverts connexes, il suffit donc de montrer que $U_1 \cap U_2$ est fermé de U_1 . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $U_1 \cap U_2$ qui converge vers un élément x de U_1 . Notons par f_{U_2} la restriction de f à U_2 . Les $x_n = f_{U_2}^{-1}(f(x_n))$ convergent vers $f_{U_2}^{-1}(f(x)) = x$ qui est donc un élément de U_2 . \square

Lemme 5.1.24. [11, Lemme de fermeture des assiettes]

Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme local entre deux variétés X et Y . Soit U un ouvert connexe de X sur lequel f est injective. On suppose de plus que pour tout point q de $\overline{f(U)}$ et tout voisinage ouvert V de q , il existe un voisinage ouvert $W \subset V$ de q tel que $W \cap f(U)$ soit connexe. Alors f est injective sur l'adhérence de U .

Démonstration. Par l'absurde, soient x et x' deux points différents de \bar{U} qui ont la même image y par f . Soient U_1 et U_2 deux ouverts connexes disjoints contenant x_1 et x_2 respectivement et sur lesquels f est injective. Quitte à prendre des ouverts plus petits on peut supposer qu'ils ont la même image V par f et que $V \cap f(U)$ est connexe. Définissons l'ouvert connexe $W_1 = U_1 \cap f^{-1}(V) \cap f^{-1}(f(U))$. De la même façon on définit W_2 . Il est clair que le couple d'ouverts (W_1, U) vérifie les hypothèses du lemme 5.1.23 et donc $W_1 \subset U$. De la même manière $W_2 \subset U$ mais comme f coïncide sur W_1 et W_2 , on obtient que $W_1 = W_2$. Par suite $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ contradiction. \square

Remarque 5.1.25. Grâce au Lemme 5.1.24 la restriction de d à \bar{U} , où U est une boule ronde propre, est injective.

Notons par $B(S)$ l'espace des boules rondes ouvertes de \tilde{S} et par $B_0(\tilde{S})$ l'espace des boules rondes ouvertes propres de \tilde{S} . Nous allons définir une topologie sur $B_0(\tilde{S})$ de sorte que $B_0(\tilde{S})$ soit une variété.

Soit U un élément de $B_0(\tilde{S})$. Définissons $W(U)$ comme étant l'ensemble des V dans $B_0(\tilde{S})$ tels que $\bar{V} \subset U$.

Soit U_1 et U_2 deux éléments de $B_0(\tilde{S})$ tels que $\bar{U}_1 \subset U_2$. Notons par $W(U_1, U_2)$ le sous-ensemble de $B_0(\tilde{S})$ formé des boules rondes propres V vérifiant : $\bar{U}_1 \subset V$ et $\bar{V} \subset U_2$.

Définition 5.1.26. On appelle topologie d'Alexandrov sur $B_0(\tilde{S})$ la topologie engendrée par les $W(U_1, U_2)$ et les $W(U)$.

Remarque 5.1.27. Nous avons vu plus haut que l'espace de Sitter $\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$ s'identifie avec l'espace des boules ouvertes de \mathbb{S}_+^n . En d'autres termes il y a une identification canonique ϕ entre l'espace de Sitter $\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$ et $B_0(\mathbb{S}_+^n)$.

Proposition 5.1.28. ([4, Lemme 7.12]). L'espace de Sitter $\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$ est homéomorphe à l'espace $B_0(\mathbb{S}_+^n)$ muni de sa topologie d'Alexandrov.

Démonstration. Soit U et V deux éléments de $B_0(\mathbb{S}_+^n)$ tels que $\bar{U} \subset V$ et soient x et y les deux points de $\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$ correspondants. On a que $J^+(x) \subset I^+(y)$. Donc $W(U, V)$ correspond à $I^-(x) \cap I^+(y)$. Comme $\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$ est globalement hyperbolique, sa topologie est engendrée par les $I^-(x) \cap I^+(y)$. On obtient donc que l'identification est un homéomorphisme. \square

Considérons l'application développante $d : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{S}_n$. Elle induit une application $d' : B_0(\tilde{S}) \rightarrow B_0(\mathbb{S}_+^n)$. La composée de d' et de l'homéomorphisme canonique ϕ entre $B_0(\mathbb{S}_+^n)$ et $\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$ définit une application naturelle $D : B_0(\tilde{S}) \rightarrow \mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$. Pour tout U dans $B_0(\tilde{S})$, la restriction de D à $W(U)$ est un homéomorphisme sur son image $I^+(D(U))$. Les $W(U)$ forment donc des cartes de $B_0(\tilde{S})$.

Soient U_1 et U_2 deux éléments de $B_0(\tilde{S})$. Supposons que tout ouvert de U_1 dans $B_0(\tilde{S})$ rencontre tout ouvert de U_2 dans $B_0(\tilde{S})$. Soient V_1 et V_2 deux éléments de $B_0(\tilde{S})$ tels que $\bar{U}_1 \subset V_1$ et $\bar{U}_2 \subset V_2$. Par hypothèse $W(V_1) \cap W(V_2)$ est non vide, et donc $V_1 \cap V_2$ est non vide. Par le Lemme 5.1.23 la restriction de D à $W(V_1) \cup W(V_2)$ est un homéomorphisme sur son image $I^+(D(V_1)) \cup I^+(D(V_2))$. Or $I^+(D(V_1)) \cup I^+(D(V_2))$ est séparé, donc $W(V_1) \cup W(V_2)$ l'est aussi et c'est ce qui montre que $U_1 = U_2$. Nous avons ainsi montré que $B_0(\tilde{S})$ muni de la topologie d'Alexandrov admet une structure de variété.

L'application $D : B_0(\tilde{S}) \rightarrow \mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$ est un homéomorphisme local. On peut donc définir une métrique sur $B_0(\tilde{S})$ en tirant en arrière la métrique de de Sitter $\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$. Notons par

$B_0^+(\tilde{S})$ l'espace $B_0(\tilde{S})$ muni de cette structure lorentzienne. On obtient donc la proposition suivante :

Proposition 5.1.29. ([4, Proposition 7.13]). *Un espace-temps du type $B_0^+(\tilde{S})$ est un espace-temps globalement hyperbolique futur complet localement de Sitter.*

Définition 5.1.30. *L'espace-temps simplement connexe $B_0^+(\tilde{S})$ est appelé espace-temps dS standard futur complet.*

Définition 5.1.31. *Un espace-temps dS standard futur complet $B_0^+(\tilde{S})$ est dit :*

- elliptique si \tilde{S} est elliptique ;
- parabolique si \tilde{S} est parabolique ;
- hyperbolique si \tilde{S} est hyperbolique.

Remarque 5.1.32. *On définit de la même manière l'espace-temps dS standard passé complet $B_0^-(\tilde{S})$ en remplaçant $B_0(\mathbb{S}_+^n)$ par $B_0(\mathbb{S}_-^n)$.*

Remarque 5.1.33. *Le seul espace-temps dS standard qui soit elliptique est l'espace de Sitter lui même. Les espaces-temps dS standard futurs complets paraboliques sont les futurs dans $\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$ des points du bord conforme à l'infini \mathbb{S}_-^n .*

Proposition 5.1.34. ([4, Remarque 8.9]). *Les définitions 5.1.21 et 5.1.30 sont équivalentes.*

Théorème 5.1.35. ([48, Théorème 1.1]). *Tout espace-temps de Sitter globalement hyperbolique spatialement compact maximal de dimension $n + 1$ est le quotient d'un espace-temps dS standard par un sous groupe discret sans torsion de $SO^+(1, n + 1)$.*

5.2 Singularité initiale cosmologique d'un espace-temps de Sitter

Soit M un espace-temps de Sitter $MGHC$ futur complet. Soit $B_0^+(\tilde{S})$ son domaine dS standard futur complet associé i.e $M \simeq B_0^+(\tilde{S})/\Gamma$, où Γ est un sous groupe discret sans torsion de $SO^+(1, n + 1)$.

5.2.1 Propriétés du temps cosmologique

L'application D définie dans la section 5.1.3 n'est pas en général injective. Cependant, comme nous allons le voir il existe des régions de $B_0(\mathbb{S}_+^n)$ qui se plongent isométriquement dans $\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$. Soit x un élément de \tilde{S} et soit $U(x)$ la réunion de toutes les boules rondes contenant x .

Définition 5.2.1. *L'ouvert $U(x)$ est appelé le voisinage canonique de x dans \tilde{S} .*

Proposition 5.2.2. *La restriction de l'application d à $U(x)$ est injective.*

Démonstration. Soit x un élément de \tilde{S} et soit $U(x)$ son voisinage canonique associé. Supposons qu'ils existent deux éléments x_1 et x_2 de \tilde{S} qui ont la même image par d . Soit U_1 (respectivement U_2) une boule ronde contenant x et x_1 (respectivement x et x_2). Notons par d_{U_1} la restriction de d à l'ouvert connexe U_1 . Considérons l'ouvert connexe défini par $V = d_{U_1}^{-1}(d(U_1) \cap d(U_2))$. On sait que $d(V) \subset d(U_2)$ et que l'intersection de V et de U_2 est non vide car $x \in V$. Donc en appliquant le Lemme 5.1.23 on obtient que $V \subset U_2$. Or $x_1 \in V$, donc $x_1 \in U_2$ et donc égale à x_2 . \square

Proposition 5.2.3. ([4, Proposition 7.16]). *Soit $d : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{S}_n$ une application développante de \tilde{S} . On suppose que d est injective. Alors l'espace-temps dS standard associé à \tilde{S} se plonge isométriquement dans $\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$.*

En combinant les deux propositions 5.2.2 et 5.2.3 on obtient la proposition suivante :

Proposition 5.2.4. ([4, Corollaire 7.22]). *Pour tout x dans \tilde{S} , l'espace-temps dS standard $B_0^+(U(x))$ associé au voisinage canonique $U(x)$ de x est isométrique à un domaine de \mathbb{DS}_{n+1} .*

Remarque 5.2.5. *Il n'est pas difficile de voir que si U est une boule ronde propre et que si x appartient à U , alors $B_0^+(U(x))$ contient le passé de U dans $B_0^+(\tilde{S})$. En effet, si V est une boule ronde propre dans le passé de U alors V contient U et donc x . Donc V est dans $B_0(U(x))$.*

Désormais on suppose que \tilde{S} est une variété de Mobius de type hyperbolique.

Proposition 5.2.6. ([4, Proposition 8.1]). *L'espace-temps dS standard $B_0^+(\tilde{S})$ est à temps cosmologique régulier.*

Démonstration. Notons par T_{cos} la fonction temps cosmologique associée à $B_0^+(\tilde{S})$. Montrons d'abord que T_{cos} est finie partout.

Supposons qu'il existe U dans $B_0^+(\tilde{S})$ tel que $T_{cos}(U) = +\infty$. Il existe donc une famille de courbes temporelles passées $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow B_0^+(S)$ vérifiant : pour tout n , $\alpha_n(0) = U$ et la longueur de α_n est supérieure à n . Fixons d'abord quelques notations, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons :

- par U_n l'extrémité passée de α_n i.e $U_n = \alpha_n(1)$;
- par β_n l'image par D de la courbe α_n i.e $\beta_n = D \circ \alpha_n$;
- par x l'image de U par D dans \mathbb{DS}_{n+1} et par x_n l'image de U_n .

Quitte à extraire une sous suite les x_n convergent vers un point x' dans \mathbb{S}^n . Considérons maintenant U' la limite inférieure des boules rondes propres U_n définie par $U' = \bigcup_{m \geq 0} \bigcap_{n \geq m} U_n$. Comme \mathbb{DS}_{n+1} s'identifie avec $B_0(\mathbb{S}_+^n)$, on peut voir les x_n comme des boules rondes de \mathbb{S}_+^n et donc comme des images par d des boules U_n . Comme la restriction de d à U' est injective, la limite inférieure des x_n n'est autre que l'image par d de la limite inférieure des U_n . Mais les x_n convergent vers le point x' dans \mathbb{S}_+^n , donc $d(U')$ est le complémentaire d'un point point dans \mathbb{S}_+^n . Donc par le Lemme 5.1.24 \tilde{S} est de type elliptique ou parabolique ce qui contredit l'hypothèse.

Soit $\alpha : [0, \infty[\rightarrow B_0^+(S)$ une courbe causale inextensible passée issue d'un point $U = \alpha(0)$. La courbe α est donc contenue dans le passé causal $J^-(U)$ de U . Donc la courbe α est contenue dans $B_0^+(U(x))$, où x est dans U . Le temps cosmologique T_{cos} de $B_0^+(\tilde{S})$ restreint à $J^-(U)$ peut être remplacé par le temps cosmologique \tilde{T}_{cos} de $B_0^+(U(x))$. Mais comme $B_0^+(U(x))$ est isométrique à un domaine de \mathbb{DS}_{n+1} , il s'en suit que $\tilde{T}_{cos}(\alpha(t))$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. \square

Définition 5.2.7. *Une hypersurface de Cauchy C^0 dans un espace-temps dS standard futur complet est dite convexe si elle est contenue dans le futur causal de ses hyperplans tangents.*

Proposition 5.2.8. ([48, Proposition 6.2]). *Les niveaux cosmologiques d'un espace-temps dS standard sont convexes.*

5.2.2 Le bord passé d'un espace-temps de Sitter

Considérons l'espace $B(\tilde{S})$ des boules rondes de \tilde{S} muni de la topologie d'Alexandrov définie à la section 5.1.3. Les mêmes arguments utilisés dans la section 5.1.3 montrent que $B(\tilde{S})$ a une structure de variété à bord et que l'application $D : B_0^+(\tilde{S}) \rightarrow \mathbb{DS}_{n+1}$ s'étend en un homéomorphisme local de $B(\tilde{S})$ dans \mathbb{DS}_{n+1} . Considérons l'ensemble défini par : $H^-(\tilde{S}) = B(\tilde{S}) \setminus B_0(\tilde{S})$.

Définition 5.2.9. *On appelle bord à l'infini de l'espace-temps dS standard $B_0^+(\tilde{S})$, le sous-ensemble $H^-(\tilde{S})$.*

Remarque 5.2.10. *Dans le cas particulier où l'application développante d de \tilde{S} est injective, le bord à l'infini $H^-(\tilde{S})$ n'est autre que le bord topologique dans $\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$ de l'image par D de $B_0^+(\tilde{S})$.*

Soit U un point de $B_0^+(\tilde{S})$ et soit α une courbe causale inextensible passée issue de U . Les points de α forment une famille croissante de boules rondes propres de \tilde{S} . Comme α est inextensible leur réunion est donc une boule ronde dans $H^-(\tilde{S})$. Réciproquement si U est une boule ronde dans $H^-(\tilde{S})$, alors il existe une famille croissante de boules rondes propres U_n de \tilde{S} telle que $\bigcup_n U_n = U$. Donc tout point de $H^-(\tilde{S})$ est un point limite d'une courbe causale passée inextensible issue d'un point de $B_0^+(\tilde{S})$.

La proposition 5.2.3 et la Remarque 5.2.10 montre que le bord passé $H^-(\tilde{S})$ de $B_0^+(\tilde{S})$ est localement une hypersurface convexe de $\mathbb{S}(\mathbb{R}^{1,n+1})$. Ce qui fait que tant qu'on s'intéresse au caractère local du bord passé, on ne perd pas de généralité en supposant que \tilde{S} est une partie de \mathbb{S}_+^n . La proposition suivante décrit les points de $H^-(\tilde{S})$ qui réalisent le temps cosmologique :

Proposition 5.2.11. ([4, Proposition 8.7]). *Supposons que \tilde{S} est une partie de \mathbb{S}_+^n . Pour tout p dans $B_0^+(\tilde{S})$, il existe un unique point $r(p)$ de $H^-(\tilde{S})$ réalisant le temps cosmologique de p i.e la géodésique temporelle passée inextensible α issue de p et qui a pour point limite le point $r(p)$, vérifie $T_{\text{cos}}(p) = -l(\alpha)$.*

Définition 5.2.12. *La fonction $r : B_0^+(\tilde{S}) \rightarrow H^-(\tilde{S})$ définie par la Proposition 5.2.11 est appelée fonction de retraction. L'image de $B_0^+(\tilde{S})$ par r est appelée singularité initiale associée au domaine dS standard futur complet $B_0^+(\tilde{S})$. Elle est notée par Σ .*

La proposition suivante caractérise l'ensemble des points de Σ en terme d'hyperplans supports :

Proposition 5.2.13. [4, Proposition 8.6] *Supposons que \tilde{S} est une partie de \mathbb{S}_+^n . Soit r_0 un point de $B_0^+(\tilde{S})$. Alors :*

- *Le point r_0 est dans Σ si et seulement s'il existe un hyperplan de type espace support à $B_0^+(\tilde{S})$ en r_0 ;*
- *Si $C(r_0)$ est l'ensemble des vecteurs unitaires futurs de $T_{r_0}\mathbb{D}\mathbb{S}_{n+1}$ qui sont orthogonaux à un hyperplan support de $B_0^+(\tilde{S})$ en r_0 , alors $C(r_0)$ est l'enveloppe convexe de ses éléments lumières.*

5.3 Comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps quasi-concave

Soit M un espace-temps de Sitter *MGHC* futur complet. Soit $B_0^+(\tilde{S})$ son domaine dS standard futur complet associé i.e $M \simeq B_0^+(\tilde{S})/\Gamma$, où Γ est un sous groupe discret sans torsion de $SO^+(1, n+1)$. Soit T une fonction temps de Cauchy définie sur M . Elle se relève en une fonction temps de Cauchy Γ -invariante de $B_0^+(\tilde{S})$. Notons comme dans le chapitre 2 le flot du gradient de T par Φ_T . Dans cette section nous généralisons le Théorème 3.3.1 démontré précédemment dans le cas plat au cas de Sitter.

Définition 5.3.1. *Une fonction temps de Cauchy Γ -invariante T de classe C^2 définie sur $B_0^+(\tilde{S})$ est dite en expansion si et seulement si la seconde forme fondamentale de chaque niveau de T est positive.*

Les arguments utilisés pour démontrer la Proposition 3.2.16 restent valables dans le cas de Sitter. On obtient ainsi :

Proposition 5.3.2. *Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow B_0^+(S)$ une courbe de type espace contenue dans le passé de $\tilde{\Sigma}_1$, où $\tilde{\Sigma}_1$ est le niveau 1 de la fonction temps T . Alors la longueur de la courbe α est inférieure à celle de α_1 où $\alpha_1(s) = \Phi^{1-T(\alpha(s))}(\alpha(s))$ est la projetée de α sur le niveau $\tilde{\Sigma}_1$ le long des lignes de Φ_T .*

Le Théorème 3.3.1 étant essentiellement basé sur la Proposition 3.2.16 et des arguments classiques qui restent aussi valables pour le cas de Sitter, il se généralise donc sans changement au cas de Sitter. Nous avons ainsi montré le Théorème A dans le cas de Sitter :

Théorème 5.3.3. *Si T_1 et T_2 sont deux temps de Cauchy Γ -invariants quasi-concaves définis sur $B_0^+(\tilde{S})$, alors les niveaux respectifs de T_1 et de T_2 convergent spectralement vers la même limite. \square*

5.4 Classification des espaces-temps de Sitter de dimension $2 + 1$ via les rotations de Wick

On se place désormais dans le cadre de la dimension $2 + 1$. Dans cette section nous allons classer les espaces-temps *MGHC* de Sitter via les rotations de Wick. Ceci nous permettra de démontrer le Théorème B dans le cas d'un espace-temps de Sitter.

5.4.1 Rotation de Wick

Définition 5.4.1. *Soit M une variété équipée de deux métriques lorentziennes g_1 et g_2 . Soit ξ un champ de vecteurs partout non nul. On dit que la métrique lorentzienne g_2 est obtenue par une rotation de Wick à partir de la métrique lorentzienne g_1 le long du champ de vecteurs ξ si :*

- 1) pour tout p dans M , les sous espaces g_1 -orthogonal et g_2 -orthogonal à ξ_p coïncident ;
- 2) il existe une fonction positive f telle que : $g_2 = fg_1$ sur le sous espace engendré ξ_p ;
- 3) il existe une fonction positive h telle que : $g_2 = hg_1$ sur ξ_p^\perp .

De la même façon on peut définir la rotation de Wick entre une métrique riemannienne et une autre lorentzienne :

Définition 5.4.2. *Soit M une variété équipée d'une métrique riemannienne g et d'une métrique lorentzienne g' . Soit ξ un champ de vecteurs partout non nul. On dit que la métrique riemannienne g est obtenue par une rotation de Wick à partir de la métrique lorentzienne g' le long du champ de vecteurs ξ si :*

- 1) le champ de vecteurs ξ est temporelle pour la métrique g' ;
- 2) pour tout p dans M , les sous espaces g -orthogonal et g' -orthogonal à ξ_p coïncident ;
- 3) il existe une fonction positive f telle que $g = -fg'$ sur $\mathbb{R}\xi_p$.

Remarque 5.4.3. *Dans le cas où la métrique g est égale à hg' sur $\langle \xi_p \rangle^\perp$ pour une certaine fonction positive h , on dit alors que c'est une rotation de Wick conforme.*

5.4.2 Espaces *dS* standard associé à un domaine régulier plat

Dans la suite nous allons voir comment obtenir un espace-temps *dS* standard à partir d'un domaine régulier futur complet plat.

Théorème 5.4.4. ([18, Théorème 4.4.2]). *Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet plat de dimension $2 + 1$. Notons par Ω_1^+ le futur dans Ω^+ du niveau cosmologique 1 et par g sa métrique lorentzienne. Alors il existe une fonction $D : \Omega_1^+ \rightarrow \mathbb{H}^3$ telles que :*

- D est un C^1 -difféomorphisme local ;

- L'image réciproque g' de la métrique hyperbolique par D est une métrique riemannienne sur Ω_1^+ qui coïncide avec la métrique riemannienne obtenue sur Ω_1^+ par une rotation de Wick conforme à partir de la métrique lorentzienne g de Ω_1^+ le long du gradient cosmologique $\xi_{T_{\text{cos}}}$ de Ω_1^+ avec $g' = -\frac{1}{T_{\text{cos}}^2-1}g$ sur $\mathbb{R}\xi_{T_{\text{cos}}}$ et $g' = \frac{1}{(T_{\text{cos}}^2-1)^2}g$ sur $\langle \xi_{T_{\text{cos}}} \rangle^\perp$.

Par définition même de la fonction D (voir la formule 4.5 dans [18]), les lignes du gradient cosmologique de Ω_1^+ sont envoyées sur des rayons géodésiques de \mathbb{H}^3 . Plus précisément, pour tout p dans $\Sigma_1^{T_{\text{cos}}}$ la demi-ligne du gradient cosmologique $]p, +\infty[$ est envoyée sur un rayon géodésique issu d'un point de \mathbb{H}^3 . On associe donc à chaque p de $\Sigma_1^{T_{\text{cos}}}$ l'extrémité infinie du rayon géodésique associé. Ceci permet donc de définir une application $d : \Sigma_1^{T_{\text{cos}}} \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Théorème 5.4.5. ([18, Théorème 4.3.6]). *L'application d est une C^1 application conforme. En particulier c'est une application développante d'une structure de Möbius sur $\Sigma_1^{T_{\text{cos}}}$.*

Remarque 5.4.6. *Le Théorème 5.4.5 permet d'obtenir par une rotation de Wick conforme une structure projective sur $\Sigma_1^{T_{\text{cos}}}$ à partir de la structure lorentzienne ambiante de Ω^+ .*

Le théorème suivant permet d'associer à chaque domaine régulier futur complet plat de dimension $2 + 1$ un espace-temps de Sitter :

Théorème 5.4.7. ([18, Théorème 5.2.1]). *Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet plat de dimension $2 + 1$. Notons par Ω_2^+ le passé dans Ω^+ du niveau cosmologique 1 et par g_1 sa métrique lorentzienne induite. Alors il existe une fonction $\hat{D} : \Omega_2^+ \rightarrow \mathbb{DS}_3$ telle que :*

- \hat{D} est un C^1 -difféomorphisme local ;
- L'image réciproque de la métrique de Sitter par \hat{D} est une métrique lorentzienne g_2 localement de Sitter sur Ω_2^+ . Elle coïncide avec la métrique lorentzienne obtenue sur Ω_2^+ par une rotation de Wick à partir de la métrique lorentzienne g_1 de Ω_2^+ le long du gradient cosmologique $\xi_{T_{\text{cos}}}$ de Ω_1^+ avec $g_2 = \frac{1}{1-T_{\text{cos}}^2}g_1$ sur $\mathbb{R}\xi_{T_{\text{cos}}}$ et $g_2 = \frac{1}{(1-T_{\text{cos}}^2)^2}g_1$ sur $\langle \xi_{T_{\text{cos}}} \rangle^\perp$.
- l'espace $(\Omega_2^+, \hat{D}^*(g_{\mathbb{DS}_3}))$ est un espace-temps dS standard de type hyperbolique associé à la structure de Möbius sur $\Sigma_1^{T_{\text{cos}}}$ donnée par le Théorème 5.4.5.

Remarque 5.4.8. *Une des conséquences immédiates du Théorème 5.4.7 est que la correspondance entre les espaces-temps dS standards de type hyperbolique et les domaines réguliers futurs complets plats est en fait une correspondance bijective.*

Toute la construction précédente peut être faite d'une manière équivariante. Si Γ est un sous groupe discret sans torsion cocompact de $SO^+(1, 2)$ et si $\rho : \Gamma \rightarrow SO^+(1, 2) \ltimes \mathbb{R}^{1,2}$ est la représentation d'holonomie d'un domaine régulier Ω^+ plat, alors d'après [18, §5.3] il existe une représentation $\rho' : \Gamma \rightarrow SO(1, 3)$ telle que :

$$\hat{D} \circ \rho(\gamma) = \rho'(\gamma) \circ \hat{D}$$

pour tout γ dans Γ

On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 5.4.9. ([18, Théorème 5.3.2]). *La correspondance entre les domaines réguliers plats et les espaces-temps dS standards de type hyperbolique induit une correspondance bijective entre les espaces-temps MGHC plats futurs complets et les espaces-temps MGHC de Sitter futurs complets de type hyperbolique.*

Corollaire 5.4.10. *Il existe une correspondance bijective entre les espaces-temps MGHC de Sitter futurs complets de type hyperbolique de dimension $2 + 1$ et les laminations géodésiques mesurées sur les surfaces hyperboliques compactes.*

Remarque 5.4.11. *Quitte à inverser l'orientation on obtient des résultats analogues pour les espaces-temps passés complets*

On se donne un espace-temps dS standard futur complet de type hyperbolique $B_0^+(\tilde{S})$. Notons par Ω_2^+ l'unique domaine plat qui lui est associé (voir le Théorème 5.4.7). Rappelons qu'il s'agit d'un domaine régulier plat à partir duquel on obtient, par une rotation de Wick décrite dans le Théorème 5.4.7, l'espace-temps $B_0^+(\tilde{S})$. Soit τ_{cos} le temps cosmologique de Ω_2^+ et T_{cos} le temps cosmologique de $B_0^+(\tilde{S})$. D'après la Proposition 5.2.6 on sait que le temps cosmologique T_{cos} de $B_0^+(\tilde{S})$ est régulier. Le but de la proposition suivante est de montrer que c'est un temps de Cauchy :

Proposition 5.4.12. *Le temps cosmologique T_{cos} de $B_0^+(\tilde{S})$ est un temps de Cauchy. De plus :*

$$T_{cos} = \arctan(\tau_{cos})$$

où τ_{cos} est le temps cosmologique du domaine Ω_2^+ .

Démonstration. Soit p un élément de Ω_2^+ . Soit $\alpha : [0, a] \rightarrow \Omega_2^+$ une courbe temporelle passée pour la métrique de $B_0^+(\tilde{S})$ issue de p . On a :

$$\dot{\alpha}(s) = \dot{r}(s) + \dot{\tau}(s)N(s) + \tau(s)\dot{N}(s).$$

La norme de $\dot{\alpha}(s)$ pour la métrique de $B_0^+(S)$ est donc égale à $|\dot{\alpha}(s)|_2^2 = -\frac{\dot{\tau}^2(s)}{(1-\tau^2(s))^2} + \frac{|\dot{r}(s) + \tau\dot{N}(s)|_1^2}{1-\tau^2(s)}$, où $|\cdot|_1$ est la norme de la métrique lorentzienne plate du domaine Ω_2^+ . Par suite,

$$-|\dot{\alpha}(s)|_2^2 < \frac{\dot{\tau}^2(s)}{(1-\tau^2(s))^2}.$$

En intégrant on obtient $\arctan(\tau(a)) - \arctan(\tau(0)) > l_2(\alpha)$, où $l_2(\alpha)$ est le temps propre de α pour la métrique lorentzienne de $B_0^+(\tilde{S})$. Ce qui donne que le temps propre de α pour la métrique de $B_0^+(\tilde{S})$ est inférieur à $\operatorname{argth}(\tau(p))$. D'autre part, la courbe β définie par : $\beta(s) = r(\alpha(s)) + sN(\alpha(s))$ est une courbe temporelle pour la métrique de $B_0^+(\tilde{S})$ issue de p qui a un temps propre égale à $\operatorname{argth}(\tau(p))$. Donc $\tau = T$.

Montrons maintenant que T est une fonction temps de Cauchy. Soit $\alpha :]a, b[\rightarrow \Omega_2^+$ une courbe temporelle futur inextensible paramétrée par la longueur d'arc pour la métrique de $B_0^+(\tilde{S})$. Comme T est croissante sur α , $\sup \tau(\alpha(s)) = \lim_{s \rightarrow b} \tau(\alpha(s)) = k$. Supposons que $k < 1$. La courbe inextensible définie par $\beta(s) = r(s) + N(s)$ est une courbe contenue dans le niveau 1 de τ . Soit $s_0 > a$, pour tout $s > s_0$ on a :

$$\frac{\tau(s_0)}{1-k^2} \left| \dot{\beta}(s) \right| < \frac{\dot{\tau}(s)}{1-\tau^2(s)}.$$

Ce qui montre en particulier que la longueur de la courbe β sur $[s_0, b[$ est finie mais comme le niveau 1 de τ est complet, il s'en suit que β est extensible en b ce qui contredit le fait que β est inextensible. Le même raisonnement montre que $\inf \tau(s) = 0$. \square

Remarque 5.4.13. *Comme les lignes de la fonction temps cosmologique T sont les mêmes que les lignes de la fonction temps cosmologique τ , la singularité initiale cosmologique définie dans 5.2.12 s'identifie canoniquement à celle définie dans 3.1.21.*

5.5 Convergence Gromov équivariante des niveaux d'un temps quasi-concave

Dans cette partie nous allons montrer le Théorème B dans le cas de Sitter. Plus précisément nous montrons le théorème suivant :

Théorème 5.5.1. *Soit M un espace-temps de Sitter MGHC futur complet de dimension $2 + 1$. Soit T une fonction temps de Cauchy quasi-concave C^2 . Alors les niveaux de T convergent pour la topologie de Gromov équivariante vers l'arbre réel dual à la lamination géodésique mesurée (λ, μ) associée à M . De plus la limite ne dépend pas de la fonction temps choisie.*

Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet et soit Ω_2^+ le passé dans Ω^+ du niveau cosmologique 1. Munissons Ω_2^+ de la métrique de Sitter obtenue par une rotation de Wick canonique à partir de la métrique plate de Ω^+ comme dans 5.4.4. Soit T la fonction temps cosmologique de l'espace Ω_2^+ muni de sa métrique de Sitter et soit τ la fonction temps cosmologique de l'espace Ω_2^+ muni de sa métrique plate. La proposition suivante est une généralisation de la Proposition 4.3.9 dans le cas de Sitter :

Proposition 5.5.2. *Soient Σ_a^T et Σ_b^T deux niveaux de la fonction temps cosmologique T avec $a < b$. Soit α une courbe lipschitz contenue dans le niveau Σ_a^T . Alors la projection de α sur Σ_b^T le long des lignes du flot du gradient de T augmente la longueur.*

Démonstration. D'après la Proposition 5.4.12 on a $\tau = \tanh(T)$, donc les niveaux cosmologiques Σ_a^T et Σ_b^T de T correspondent aux niveaux cosmologiques $\Sigma_{\tanh(a)}^\tau$ et $\Sigma_{\tanh(b)}^\tau$. De plus la projection de la courbe $\alpha \subset \Sigma_a^T$ sur Σ_b^T le long des lignes du gradient de T n'est autre que la projection de $\alpha \subset \Sigma_{\tanh(a)}^\tau$ sur $\Sigma_{\tanh(b)}^\tau$ le long des lignes du gradient de τ . D'après le Théorème 5.4.4, la longueur de Sitter $l_1(\alpha) = \frac{1}{1-\tanh^2(a)}l(\alpha)$, où l est la longueur par rapport à la métrique plate. Sa projection $\Phi_T^{b-a}(\alpha)$ est de longueur de Sitter $l_1(\Phi_T^{b-a}(\alpha)) = \frac{1}{1-\tanh^2(b)}l(\Phi_T^{b-a}(\alpha))$. Comme $\frac{1}{1-\tanh^2(a)} \leq \frac{1}{1-\tanh^2(b)}$ et $l(\alpha) \leq l(\Phi_T^{b-a}(\alpha))$, la proposition découle. \square

Nous obtenons ainsi le théorème suivant qui généralise le Théorème 4.4.2 dans le cas de Sitter de dimension $2 + 1$:

Théorème 5.5.3. *Soit $M \simeq B_0^+(\tilde{S})/\Gamma$ un espace-temps de Sitter MGHC futur complet de dimension $2 + 1$. Soit \tilde{T}_{cos} la fonction temps cosmologique définie sur l'espace dS standard $B_0^+(\tilde{S})$. Alors les niveaux $\Sigma_a^{\tilde{T}_{cos}}$ de la fonction temps cosmologique \tilde{T}_{cos} munis de leurs distances $d_a^{\tilde{T}_{cos}}$ i.e celles induites par la restriction de la métrique ambiante de $B_0^+(\tilde{S})$ à chaque niveau $\Sigma_a^{\tilde{T}_{cos}}$, convergent pour la topologie uniforme sur les compacts vers l'espace métrique (Σ, d_Σ) , où (Σ, d_Σ) est la singularité initiale cosmologique du domaine canonique Ω_2^+ associé à $B_0^+(\tilde{S})$.*

Démonstration. Soit Ω_2^+ le domaine canonique associé à $B_0^+(\tilde{S})$. Notons par $\tilde{\tau}_{cos}$ son temps cosmologique plat. D'une part grâce à la Proposition 5.5.2 la même preuve que pour la Proposition 3.3.2 permet de montrer que les distances $d_a^{\tilde{T}_{cos}}$ convergent pour la topologie uniforme sur les compacts vers une pseudo-distance d_0 .

D'autre part pour chaque $a > 0$ on a : $d_a^{\tilde{T}_{cos}}(x, y) = \frac{1}{1-\tanh^2(a)}d_{\tanh(a)}^{\tilde{\tau}_{cos}}(x, y)$, où $d_{\tanh(a)}^{\tilde{\tau}_{cos}}$ est la distance induite par la restriction de la métrique plate ambiante au niveau cosmologique $\Sigma_a^{\tilde{T}_{cos}}$. Ce qui montre que $(\Sigma_a^{\tilde{T}_{cos}}, d_a^{\tilde{T}_{cos}})$ convergent vers la singularité initiale cosmologique (Σ, d_Σ) . \square

Corollaire 5.5.4. *Soit M un espace-temps de Sitter MGHC futur complet de dimension $2+1$. Les niveaux cosmologique de \tilde{M} munis de l'action de $\pi_1(M)$ convergent pour la topologie de Gromov équivariante vers l'arbre réel dual à la lamination géodésique mesurée (λ, μ) associée à M . En particulier les espaces $(\Gamma, \Sigma_a^{\tilde{T}_{cos}}, d_a^{\tilde{T}_{cos}})$ convergent spectralement vers l'arbre réel dual à la lamination géodésique mesurée (λ, μ) associée à M muni de l'action de Γ .*

Démonstration. Soit $M \simeq B_0^+(\tilde{S})/\Gamma$ un espace-temps de Sitter *MGHC* futur complet de dimension $2 + 1$ et Ω_2^+ le domaine canonique associé à $B_0^+(\tilde{S})$. D'après le Théorème 6.5.3 et le Théorème 4.4.1, les espaces métriques $(\Sigma_a^{\tilde{T}^{cos}}, d_a^{\tilde{T}^{cos}})$ convergent pour la topologie uniforme sur les compacts vers l'arbre réel dual à la lamination géodésique mesurée (λ, μ) associée à M . Comme les actions ρ_a sont toutes identiques, la Proposition 2.7.17 montre que les Γ -espaces métriques $(\Sigma_a^{\tilde{T}^{cos}}, d_a^{\tilde{T}^{cos}}, \Gamma, \rho_a)$ convergent pour la topologie de Gromov équivariante vers l'arbre réel dual à la lamination géodésique mesurée (λ, μ) associée à M muni de l'action de Γ . \square

La proposition 3.2.16 se généralise à son tour au cas de Sitter :

Proposition 5.5.5. *Soit Σ_a^T un niveau de la fonction temps cosmologique T . Soit α une courbe de type espace contenue dans le passé de Σ_a^T . Alors la longueur pour la métrique de Sitter de la projection de α le long des lignes du gradient de T est plus grande que celle de α .*

Démonstration. Notons par ξ le gradient du temps cosmologique T et par Φ_T son flot associé. Notons aussi par N le gradient cosmologique de τ et par Φ_τ son flot associé. Soit a un réel positif et soit α une courbe contenue dans le passé de Σ_a^T . Considérons $\alpha_a(s) = \Phi^{a-T(s)}(\alpha(s))$ la projetée de α sur Σ_a^T . On a $\dot{\alpha}(s) = T'(s)\xi_{\alpha(s)} + D_{\alpha_a(s)}\Phi_T^{T(s)-a}.\dot{\alpha}_a(s)$. Donc

$$\dot{\alpha}(s) = \tau'(s)N_{\alpha(s)} + D_{\alpha_a(s)}\Phi_\tau^{\tanh(\tau(s))-\tanh(a)}.\dot{\alpha}_a(s).$$

Il s'en suit

$$|\dot{\alpha}(s)|_1^2 = \left| \tau'(s)N_{\alpha(s)} + D_{\alpha_a(s)}\Phi_\tau^{\tanh(\tau(s))-\tanh(a)}.\dot{\alpha}_a(s) \right|_1^2.$$

Et donc

$$|\dot{\alpha}(s)|_1^2 = |\tau'(s)N_{\alpha(s)}|_1^2 + \left| D_{\alpha_a(s)}\Phi_\tau^{\tanh(\tau(s))-\tanh(a)}.\dot{\alpha}_a(s) \right|_1^2.$$

Ce qui entraîne que :

$$|\dot{\alpha}(s)|_1^2 = -(\tau'(s))^2 \frac{1}{(1-\tau^2(s))^2} + \frac{1}{1-\tau^2(s)} \left| D_{\alpha_a(s)}\Phi_T^{T(s)-a}.\dot{\alpha}_a(s) \right|_1^2.$$

Donc,

$$|\dot{\alpha}(s)|_1^2 \leq \frac{1}{1-\tau^2(s)} \left| D_{\alpha_a(s)}\Phi_T^{T(s)-a}.\dot{\alpha}_a(s) \right|_1^2$$

$$\text{Or } \frac{1}{1-\tau^2(s)} \left| D_{\alpha_a(s)}\Phi_T^{T(s)-a}.\dot{\alpha}_a(s) \right|_1^2 \leq \frac{1}{1-\tanh(a)^2} |\dot{\alpha}_a(s)|_1^2$$

$$\text{donc } |\dot{\alpha}(s)|_1^2 \leq |\dot{\alpha}_a(s)|_1^2.$$

\square

Preuve du Théorème 5.5.1 Grâce au corollaire 5.5.4 et à la Proposition 5.5.5, on peut reprendre la preuve du Théorème 4.5.1 sans aucune modification pour montrer le Théorème 5.5.1. \square

Chapitre 6

Comportement asymptotique dans un espace-temps anti-de-Sitter

Dans ce chapitre on s'intéresse au comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps quasi-concave dans un espace-temps localement modelé sur l'espace anti-de Sitter. Le but est de généraliser les résultats 3.3.1, 4.5.1, 5.3.3 et 5.5.1 obtenus dans le cas plat et le cas de Sitter au cas anti-de Sitter. Nous commençons par des rappels concernant la classification des espaces-temps anti-de Sitter de dimension $n + 1$. Ce qui nous permet de montrer le Théorème A dans le cas anti-de Sitter. Nous nous intéressons ensuite au cas particulier de la dimension $2 + 1$ où nous verrons que comme dans le cas de Sitter, il existe un procédé canonique qui permet de passer des espaces-temps plats aux espaces-temps anti-de Sitter, pour ensuite montrer le Théorème B, dont l'objet est l'étude de la convergence Gromov équivariante des niveaux d'une fonction temps quasi-concave en dimension $2 + 1$, dans le cas anti-de Sitter.

6.1 Classification des espaces-temps anti de Sitter

On ne s'intéresse qu'aux espaces-temps *MGHC* localement anti-de Sitter. Ils ont été classifiés par Mess [38] dans le cas de la dimension $2 + 1$ mais les mêmes arguments se généralisent aux cas de la dimension quelconque [4].

6.1.1 L'espace anti-de Sitter

Modèle linéaire de l'espace anti-de Sitter

Considérons l'espace $\mathbb{R}^{2,n}$ i.e l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+2} muni de la métrique $\mathfrak{q}_{2,n} = -du^2 - dv^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ de signature $(2, n)$.

Définition 6.1.1. *Le modèle linéaire de l'espace anti-de Sitter AdS_{n+1} est le lieu défini par :*

$$AdS_{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{2,n} \text{ tel que } \mathfrak{q}_{2,n}(x, x) = -1\}$$

muni de la métrique lorentzienne induite par $\mathfrak{q}_{2,n}$.

Remarque 6.1.2. 1) L'application $AdS_{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^n$ définie par :

$$(u, v, x) \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}u, \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}v, \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}} \right)$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne de x , est un difféomorphisme entre l'espace anti-de Sitter et $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^n$.

- 2) Contrairement au cas hyperbolique, l'espace anti-de Sitter est connexe.
3) Le groupe d'isométrie de AdS_{n+1} est $O(2, n)$.

Proposition 6.1.3. Les hypersurfaces totalement géodésiques de AdS_{n+1} sont les composantes connexes des intersections des hyperplans de $\mathbb{R}^{2,n}$ avec AdS_{n+1} .

On obtient ainsi deux types d'hypersurfaces totalement géodésiques :

- Les hypersurfaces totalement géodésiques de type espace : ce sont les composantes connexes des intersections entre AdS_{n+1} et les hyperplans de type $(1, n)$ de $\mathbb{R}^{2,n}$. Elles sont isométriques à \mathbb{H}^n ;
- Les hypersurfaces totalement géodésiques de type temps : ce sont les composantes connexes des intersections entre les hyperplans de type $(2, n-1)$ et AdS_{n+1} . Elles sont isométriques à AdS_n .

On obtient de même trois types de géodésiques :

- Ceux de type espaces : ce sont les intersections entre les hyperplans de type $(1, 1)$ et AdS_{n+1} . Elles sont isométriques à \mathbb{H}^1 ;
- Ceux de type temps : ce sont les intersections entre les hyperplans définies négatifs de dimension 2 et AdS_{n+1} ;
- Ceux de type lumière : ce sont les intersections entre les hyperplans dégénérés de dimension 2 et AdS_{n+1} .

Le champ de vecteur $v\partial/\partial u - u\partial/\partial v$ est un champ de vecteurs de type temps tangent à AdS_{n+1} . Il définit donc une orientation chronologique sur AdS_{n+1} . Le groupe $O^+(2, n)$ des isométries de AdS_{n+1} qui préserve cette orientation chronologique n'est autre que la composante neutre $O_0(2, n)$.

Plongement conforme de l'espace anti-de Sitter

Nous allons procéder comme dans le cas de Sitter. Soit Ein_{n+1} l'espace d'Einstein de dimension $n+1$. Rappelons qu'il est conformément équivalent à $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1, dx^2 - dt^2)$, où dx^2 est la métrique ronde de \mathbb{S}^n et dt^2 celle de \mathbb{S}^1 .

Soit x un vecteur de type espace de $\mathbb{R}^{2,n}$. Soit C le cône d'annulation de $\mathfrak{q}_{2,n}$. Considérons la projection $U(x)$ dans Ein_{n+1} de l'intersection de C et de l'hyperplan affine $\{p \in \mathbb{R}^{2,n+1} \text{ tel que } : \mathfrak{q}_{2,n}(x, p) = 1\}$. Quitte à composer par un élément de $O(2, n)$, on peut supposer que $x = (0, 0, \dots, 1)$.

Considérons la section $s_x : U(x) \rightarrow C$ qui envoie chaque rayon de $U(x)$ sur son unique intersection avec l'hyperplan affine $\{p \in \mathbb{R}^{2,n+1} \text{ tel que } : \mathfrak{q}_{2,n}(x, p) = 1\}$. Ceci définit une métrique g_{s_x} sur $U(x)$. Dans ce cas $(U(x), g_{s_x})$ est isométrique au modèle linéaire AdS_{n+1} de l'espace anti-de Sitter. D'autre part, l'identification conforme entre Ein_{n+1} et $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1, dx^2 - dt^2)$ induit une isométrie conforme entre AdS_{n+1} et $(\mathbb{D}^n \times \mathbb{S}^1, dx^2 - dt^2)$. Ainsi on obtient la proposition suivante :

Proposition 6.1.4. ([16, Proposition 4.16]). Le modèle linéaire AdS_{n+1} de l'espace anti-de Sitter est conformément équivalent à $(\mathbb{D}^n \times \mathbb{S}^1, dx^2 - dt^2)$, où dx^2 est la métrique ronde de \mathbb{S}^n et dt^2 celle de \mathbb{S}^1 .

Remarque 6.1.5. *L'ensemble des hyperplan de type lumière de $\mathbb{R}^{2,n}$ constitue le bord de Penrose de l'espace anti-de Sitter AdS_{n+1} . Ainsi l'espace $AdS_{n+1} \cup \partial AdS_{n+1}$ est conformément équivalent à $(\mathbb{D}^n \times \mathbb{S}^1, dx^2 - dt^2)$. De la même façon on obtient que ∂AdS_{n+1} est conformément équivalent à $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1, dx^2 - dt^2)$, où dx^2 est la métrique de \mathbb{S}^{n-1}*

Définition 6.1.6. *On appelle espace anti-de Sitter universel, qu'on note \widetilde{AdS}_{n+1} , le revêtement universel de l'espace anti-de Sitter AdS_{n+1} muni de la métrique lorentzienne relevée. De la même manière on définit le bord universel $\partial \widetilde{AdS}_{n+1}$ de l'espace anti-de Sitter comme étant le revêtement universel du bord ∂AdS_{n+1} .*

Proposition 6.1.7. *L'espace anti-de Sitter universel est conformément équivalent à $(\mathbb{D}^n \times \mathbb{R}, dx^2 - dt^2)$, où dx^2 est la métrique ronde de \mathbb{S}^n et dt^2 celle de \mathbb{R} .*

Démonstration. Elle découle immédiatement de la Proposition 6.1.4. □

Remarque 6.1.8. *Le bord universel $\partial \widetilde{AdS}_{n+1}$ de l'espace anti-de Sitter est conformément équivalent à $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}, dx^2 - dt^2)$.*

Lemme 6.1.9. *Deux points de \widetilde{AdS}_{n+1} sont causalement reliés si et seulement s'ils sont causalement reliés dans \widetilde{Ein}_{n+1} .*

Démonstration. Soient p et q deux points de \widetilde{AdS}_{n+1} . Supposons que q est dans le futur causal de p dans \widetilde{AdS}_{n+1} . Comme \widetilde{AdS}_{n+1} se plonge conformément dans \widetilde{Ein}_{n+1} p est aussi dans le futur de p dans \widetilde{Ein}_{n+1} .

Réciproquement supposons que q est dans le futur causal de p dans \widetilde{Ein}_{n+1} . On écrit $p = (x_p, t_p)$ (resp $q = (x_q, t_q)$) avec x_p (resp x_q) dans \mathbb{D}^n et t (resp t_q) dans \mathbb{R} . On a donc $t_q - t_p > d_{\mathbb{S}^n}(x_q, x_p)$, où d est la distance définie sur \mathbb{S} par sa métrique ronde. Considérons la courbe α définie par $\alpha(s) = (x(s), \frac{t_q - t_p}{d_{\mathbb{S}^n}(x_q, x_p)} s)$, où $x(s)$ est la géodésique dans \mathbb{D}^n reliant x_p et x_q . La courbe α est donc une courbe de type temps reliant les deux points p et q dans \widetilde{AdS}_{n+1} . Donc q est dans le futur causal de p dans \widetilde{AdS}_{n+1} . □

Remarque 6.1.10. *Grâce au Lemme 6.1.9 on peut facilement voir que l'espace anti-de Sitter universel \widetilde{AdS}_{n+1} n'est pas globalement hyperbolique. En effet, si O représente le point $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$, alors l'intervalle $J^+(O, -\frac{\pi}{2}) \cap J^-(O, \frac{\pi}{2})$ est l'ensemble des points (x, t) de $\mathbb{D}^n \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ tels que $|t| \leq \frac{\pi}{2} - d_{\mathbb{S}^n}(O, x)$ qui n'est clairement pas compact.*

Une autre conséquence du Lemme 6.1.9 est le corollaire suivant :

Corollaire 6.1.11. *Une partie S de \widetilde{AdS}_{n+1} est achronale si et seulement si elle est le graphe d'une application 1-lipschitz d'une partie de \mathbb{D}^n dans \mathbb{R} . En particulier toute partie fermée achronale sans bord de \widetilde{AdS}_{n+1} est le graphe d'une application 1-lipschitz de \mathbb{D}^n dans \mathbb{R} .*

On obtient aussi le corollaire suivant :

Corollaire 6.1.12. *Une partie S de $\partial \widetilde{AdS}_{n+1}$ est achronale si et seulement si elle est le graphe d'une application 1-lipschitz d'une partie de \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R} . En particulier toute partie fermée achronale sans bord de $\partial \widetilde{AdS}_{n+1}$ est le graphe d'une application 1-lipschitz de \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R} .*

Modèle de Klein de l'espace anti-de Sitter

Définition 6.1.13. On appelle modèle de Klein de l'espace anti-de Sitter AdS_{n+1} la projection dans $S(\mathbb{R}^{2,n})$ de AdS_{n+1} munie de la métrique image directe. On le note généralement par $\mathbb{A}DS_{n+1}$.

Remarque 6.1.14. Le modèle de Klein de l'espace anti-de Sitter peut être vu de manière équivalente comme la projection dans $S(\mathbb{R}^{2,n})$ du cône $\{p \in \mathbb{R}^{2,n} \text{ tel que } \mathfrak{q}_{2,n}(p, p) < 0\}$. Ce qui montre que le bord topologique $\partial\mathbb{A}DS_{n+1}$ de $\mathbb{A}DS_{n+1}$ dans $S(\mathbb{R}^{2,n})$ est la projection du cône d'annulation C de $\mathfrak{q}_{2,n}$.

Proposition 6.1.15. 1) La projection π induit une isométrie entre le modèle linéaire AdS_{n+1} de l'espace anti-de Sitter et son modèle de Klein $\mathbb{A}DS_{n+1}$.

2) L'isométrie entre AdS_{n+1} et $\mathbb{A}DS_{n+1}$ s'étend en un homéomorphisme entre $\partial AdS_{n+1} \cup AdS_{n+1}$ et $\partial\mathbb{A}DS_{n+1} \cup \mathbb{A}DS_{n+1}$

Les sous espaces totalement géodésiques de $\mathbb{A}DS_{n+1}$ sont les composantes connexes des intersections entre les sous espaces projectifs et $\mathbb{A}DS_{n+1}$. En particulier les géodésiques de $\mathbb{A}DS_{n+1}$ sont les composantes connexes des intersections des lignes projectives avec $\mathbb{A}DS_{n+1}$.

Soit P un hyperplan de $\mathbb{R}^{2,n}$ de type $(1, n)$. Sa projection $S(P)$ dans $S(\mathbb{R}^{2,n})$ intersecte donc $\mathbb{A}DS_{n+1}$ en un sous espace totalement géodésique de type espace de $\mathbb{A}DS_{n+1}$.

Définition 6.1.16. Un domaine affine de $\mathbb{A}DS_{n+1}$ est une des deux composantes connexes de $\mathbb{A}DS_{n+1} \setminus S(P)$. Son bord dans $\partial\mathbb{A}DS_{n+1}$ est appelé bord affine du domaine affine.

Remarque 6.1.17. Un domaine affine de l'espace anti-de Sitter $\mathbb{A}DS_{n+1}$ peut être défini comme étant le sous-ensemble $\{x \in \mathbb{A}DS_{n+1} : \langle x, v \rangle < 0\}$, où v est un élément de $\mathbb{A}DS_{n+1}$.

Remarque 6.1.18. Un domaine affine de $\mathbb{A}DS_{n+1}$ est simplement connexe. Donc on peut le voir comme une partie de \widetilde{AdS}_{n+1} qu'on appelle aussi domaine affine de \widetilde{AdS}_{n+1} .

Soit x un vecteur de $\mathbb{A}DS_{n+1}$ et soit U son domaine affine associé. On sait que $S(\mathbb{R}^{2,n}) \setminus v^\perp$ a deux composantes connexes dont une contenant U , notons la par V . Quitte à composer par une isométrie de $SO^+(2, n)$, on peut supposer que $x = (1, 0, \dots, 0)$. Dans ce cas la composante connexe V n'est autre que la projection dans $S(\mathbb{R}^{2,n})$ du demi espace $\{(u, v, x_1, x_2, \dots, x_n) : u > 0\}$. Ceci permet de définir un difféomorphisme entre V et \mathbb{R}^{n+1} :

$$(u, v, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \frac{1}{u}(v, x_1, \dots, x_n).$$

Ce qui montre que le domaine affine s'identifie avec la partie $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathfrak{q}_{2,n}(y, y) < 1\}$. Dans ce cas le bord affine s'identifie avec $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathfrak{q}_{2,n}(y, y) = 1\}$.

6.1.2 Domaine régulier de l'espace anti-de Sitter : Première définition

Dans cette section on définit le domaine régulier comme étant un sous-ensemble du modèle linéaire AdS_{n+1} de l'espace anti-de Sitter. Soit \tilde{S} une partie fermée achronale de $\partial\widetilde{AdS}_{n+1}$. Soit S sa projection dans ∂AdS_{n+1} .

Définition 6.1.19. Le domaine invisible $E(\tilde{S})$ de \tilde{S} dans $\widetilde{AdS}_{n+1} \cup \partial\widetilde{AdS}_{n+1}$ est défini par :

$$E(\tilde{S}) = (\widetilde{AdS}_{n+1} \cup \partial\widetilde{AdS}_{n+1}) \setminus (J^+(\tilde{S}) \cup J^-(\tilde{S}))$$

où $J^+(\tilde{S})$ et $J^-(\tilde{S})$ sont respectivement le futur et le passé de \tilde{S} dans $\widetilde{AdS}_{n+1} \cup \partial\widetilde{AdS}_{n+1}$.

Proposition 6.1.20. ([4, Remarque 3.5]). *Soit $E(\tilde{S})$ un domaine invisible de l'espace anti-de Sitter. Alors il existe deux fonctions f_1 et f_2 définies sur \mathbb{D}^n à valeurs dans \mathbb{R} telles que :*

$$E(\tilde{S}) = \left\{ (x, t) \in \mathbb{D}^n \times \mathbb{R} : f_1(x) < t < f_2(x) \right\}.$$

Démonstration. Soit \tilde{S} une partie fermée achronale de $\partial\widetilde{AdS}_{n+1}$. Il existe donc une application 1-lipschitz $f : \lambda \rightarrow \mathbb{R}$, où λ est un sous-ensemble fermé de \mathbb{S}^{n-1} . Définissons f_1, f_2 comme suit :

$$f_1(x) = \sup_{y \in \lambda} \{f(y) - d_{\mathbb{S}^n}(x, y)\};$$

$$f_2(x) = \inf_{y \in \lambda} \{f(y) + d_{\mathbb{S}^n}(x, y)\}.$$

Soit (x, t) un élément de $E(\tilde{S})$. Pour tout y dans λ on a $f(y) - d_{\mathbb{S}^n}(x, y) \leq t \leq f(y) + d_{\mathbb{S}^n}(x, y)$. Ce qui montre que $E(\tilde{S}) = \left\{ (x, t) \in \mathbb{D}^n \times \mathbb{R} : f_1(x) < t < f_2(x) \right\}$. \square

Remarque 6.1.21. *Le domaine invisible peut être vide. En effet, si Λ est une partie de \mathbb{S}^{n-1} et f une application 1-lipschitz définie sur Λ telles que : Λ contient deux éléments antipodaux x et $-x$ vérifiant $f(x) = f(-x) + \pi$. Alors pour tout y dans \mathbb{D}^n on a $f_1(y) = f_2(y) = f(x) - d_{\mathbb{S}^n}(x, y)$. On dit dans ce cas que le fermé achronal $\tilde{S} = G(f)$ est purement de type lumière.*

Proposition 6.1.22. ([4, Corollaire 7.3]). *Soit \tilde{S} une $(n-1)$ -sphère topologique de $\partial\widetilde{AdS}_{n+1}$ i.e une hypersurface fermée achronale de $\partial\widetilde{AdS}_{n+1}$. Alors*

- *Le domaine invisible $E(\tilde{S})$ est contenu dans \widetilde{AdS}_{n+1} ;*
- *$E(\tilde{S}) \cap \partial\widetilde{AdS}_{n+1} = \tilde{S}$*

Démonstration. Soit \tilde{S} une $(n-1)$ -sphère topologique. Il existe alors une application 1-lipschitz $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $G(f) = \tilde{S}$.

1) Soit maintenant (x, t) dans $E(\tilde{S})$. Supposons que x est dans \mathbb{S}^{n-1} . D'après la Proposition 6.1.20 on a $f(x) < t < f(x)$ ce qui est une contradiction. Donc $E(\tilde{S}) \subset \widetilde{AdS}_{n+1}$.

2) Soit (x, t) dans $E(\tilde{S}) \cap \partial\widetilde{AdS}_{n+1}$, alors d'après la Proposition 6.1.20 on a $t = f(x)$ et donc (x, t) est dans \tilde{S} . Réciproquement, si (x, t) est tel que $t = f(x)$ alors toujours par la Proposition 6.1.20 il est forcément dans $E(\tilde{S})$. \square

Définition 6.1.23. *On appelle domaine régulier de l'espace anti-de Sitter la projection dans $AdS_{n+1} \cup \partial AdS_{n+1}$ d'un domaine invisible $E(\tilde{S})$, où \tilde{S} est une $(n-1)$ -sphère topologique i.e une hypersurface fermée achronale de $\partial\widetilde{AdS}_{n+1}$.*

Remarque 6.1.24. *Comme $J^+(\tilde{S}) \cup J^-(\tilde{S})$ ne dépend que de la projection S , le domaine régulier ne dépend que de la projection S . On peut donc le noter $E(S)$.*

Proposition 6.1.25. ([4, Corollaire 3.6]). *Soit \tilde{S} un fermé achronal non vide de $\partial\widetilde{AdS}_{n+1}$ et soit S sa projection dans ∂AdS_{n+1} . Alors la projection du domaine invisible $E(\tilde{S})$ sur le domaine régulier $E(S)$ est bijective.*

Démonstration. Soit $(x, t) \in E(\tilde{S})$. Par la Proposition 6.1.20 on a $f_1(x) \leq t \leq f_2(x)$. D'autre part il existe un $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que $d_{\mathbb{S}^n}(x, y) \leq \frac{\pi}{2}$. Il s'en suit donc que $f_2(x) \leq f_1(x) + \pi$. On obtient donc $E(\tilde{S}) \subset \{(x, t) : f_1(x) \leq t \leq f_1(x) + \pi\}$. Or la restriction de la projection à $\{(x, t) : f_1(x) \leq t \leq f_1(x) + \pi\}$ est bijective. On en déduit donc que la projection induit une bijection entre le domaine invisible $E(\tilde{S})$ et le domaine régulier $E(S)$. \square

Proposition 6.1.26. ([14, Proposition 2.4.13]). *Soit \tilde{S} un fermé achronal sans bord de $\partial\widetilde{AdS}_{n+1}$ qui n'est pas purement de type lumière. Alors il existe un fermé acausal sans bord A de \widetilde{AdS}_{n+1} tel que $\partial A = \tilde{S}$.*

Démonstration. Soit \tilde{S} un fermé achronal sans bord de $\partial\widetilde{AdS}_{n+1}$. Soit f son application 1-lipschitz associée i.e $G(f) = \tilde{S}$. Soit f_1 et f_2 les deux fonctions définies dans la Proposition 6.1.20. On ne perd pas de généralité en supposant que les fonction f_1 et f_2 sont positives.

Soit x un élément de \mathbb{D}^n . Pour chaque k dans \mathbb{N} , définissons

$$h_k(x) = \max \left\{ f_1(x), \left(1 - \frac{1}{k}\right)f_2(x) - \frac{1}{k} \right\}.$$

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_1 \leq h_k \leq f_2$. Donc la série de fonctions h définie par :

$$h(x) = \sum \frac{h_k(x)}{2^k}$$

est absolument convergente. De plus cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

- 1) elle coïncident avec f sur \mathbb{S}^{n-1} . En effet, chaque h_k est égale à f sur \mathbb{S}^{n-1} ;
- 2) la fonction h est contractante : chaque h_k est une fonction lipschitz et donc h est 1-lipschitz. Pour montrer qu'elle est contractante raisonnons par l'absurde. Supposons donc qu'il existe $x_1 \neq x_2$ dans \mathbb{D}^n tels que : $h(x_1) - h(x_2) = d_{\mathbb{S}^n}(x_1, x_2)$. Donc

$$\sum \frac{h_k(x_1) - h_k(x_2)}{2^k} = d_{\mathbb{S}^n}(x_1, x_2).$$

Or chaque h_k est 1-lipschitz, donc on a $h_k(x_1) - h_k(x_2) = d_{\mathbb{S}^n}(x_1, x_2)$ pour tout k dans \mathbb{N} .

D'autre part comme $(1 - \frac{1}{k})f_2 - \frac{1}{k}$ convergent vers f_2 quand k tend vers l'infini on obtient que $(1 - \frac{1}{k})f_2 - \frac{1}{k} = h_k$ pour k suffisamment grand. L'application $(1 - \frac{1}{k})f_2 - \frac{1}{k}$ étant contractante on obtient une contradiction. Le graphe de la restriction de h à \mathbb{D}^n est le fermé acausal voulu. \square

Proposition 6.1.27. ([14, Proposition 2.6.2]). *Soit \tilde{S} un fermé achronal sans bord qui n'est pas purement de type lumière. Alors le domaine invisible $E(\tilde{S})$ associé à \tilde{S} est globalement hyperbolique.*

Démonstration. D'après la Proposition 6.1.26 il existe un fermé acausal sans bord A de \widetilde{AdS}_{n+1} tel que $\partial A = \tilde{S}$. Montrons que l'intérieur du développement de Cauchy de A est égale à $E(\tilde{S})$. Notons par $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application 1-lipschitz dont le graphe est \tilde{S} . Notons aussi par $h : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application 1-lipschitz dont le graphe est A .

Montrons d'abord que \tilde{S} est contenu dans l'intérieur du développement de Cauchy de A . Soit (x, t) dans $E(\tilde{S})$, on a donc $f_1(x) < t < f_2(x)$. Supposons que $t \leq h(x)$. Soit $s \rightarrow (\alpha(s), s)$ une courbe causale inextensible future orientée issue de (x, t) et définie sur $[t, a[$ avec une limite $\alpha(a)$ dans \mathbb{S}^{n-1} . Comme α est une courbe 1-lipschitz on obtient bien $d_{\mathbb{S}^n}(x, \alpha(a)) \leq a - t$. Supposons que pour tout s dans $[t, a[$ on a $s < h(\alpha(s))$. Par passage à la limite on obtient $a \leq h(\alpha(a)) = f(\alpha(a))$. Mais comme $f_1(x) < t$, on obtient que $a < t + d_{\mathbb{S}^n}(x, \alpha(a))$ ce qui est en contradiction avec le fait que $d_{\mathbb{S}^n}(x, \alpha(a)) \leq a - t$. Donc la courbe $s \rightarrow (\alpha(s), s)$ rencontre forcément A et donc (x, t) est dans le développement de Cauchy de A . Le cas $t \geq h(x)$ se traite de manière analogue.

Réciproquement soit (x, t) un élément de $E(\tilde{S})^c$. On peut supposer sans perdre de généralité que $t \geq f_2(x)$. Si $t > f_2(x)$, il existe donc un élément x' de \mathbb{S}^{n-1} vérifiant $t > f(x') + d_{\mathbb{S}^n}(x, x')$. Considérons le rayon géodésique lumière défini sur $[0, d_{\mathbb{S}^n}(x, x')]$ par :

$$s \rightarrow (\alpha(s), t - s)$$

où $\alpha : [0, d_{\mathbb{S}^n}(x, x')] \rightarrow \mathbb{D}^n$ est la géodésique reliant x à x' . Il est clair que ce rayon géodésique évite A et donc (x, t) n'est pas dans le développement de Cauchy de A . Si maintenant $t = f_2(x)$ alors on peut l'approximer par des (x_k, t_k) vérifiant $t_k > f_2(x_k)$. Chacun des (t_k, x_k) ne peut être dans le développement de Cauchy de A , ce qui entraîne que (x, t) ne peut pas être dans l'intérieur de ce développement de Cauchy. \square

6.1.3 Domaine régulier de l'espace anti-de Sitter : deuxième définition

Dans cette section on définit le domaine régulier comme étant un sous-ensemble du modèle de Klein \mathbb{ADS}_{n+1} de l'espace anti-de Sitter.

Définition 6.1.28. *Un cône convexe C de $\mathbb{R}^{2,n}$ est un convexe stable par multiplication positive i.e pour tout x dans C et tout $\lambda > 0$, λx est dans C .*

Définition 6.1.29. *Un cône convexe C est dit propre s'il est non vide et s'il ne contient pas de droite affine.*

Définition 6.1.30. *Soit C un cône convexe de $\mathbb{R}^{2,n}$. Son dual convexe, qu'on note par C^* , est défini comme étant l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^{2,n}$ vérifiant $\langle x, y \rangle < 0$ pour tout y non nul dans C .*

Définition 6.1.31. *Un convexe de $S(\mathbb{R}^{2,n})$ est la projection dans $S(\mathbb{R}^{2,n})$ d'un cône convexe de $\mathbb{R}^{2,n}$. Il est dit propre s'il est projection d'un cône convexe propre de $\mathbb{R}^{2,n}$.*

Soit C un convexe de $S(\mathbb{R}^{2,n})$ et soit C de $\mathbb{R}^{2,n}$ son cône convexe associé.

Définition 6.1.32. *Le dual convexe de C , qu'on note C^* , dans $S(\mathbb{R}^{2,n})$ est la projection dans $S(\mathbb{R}^{2,n})$ du cône dual C^* de C .*

Soit \tilde{S} un fermé achronal sans bord de $\partial \widetilde{AdS}_{n+1}$ et soit S sa projection dans $\partial \widetilde{AdS}_{n+1}$. D'après la Proposition 6.1.15 la projection π induit un homéomorphisme entre $\partial \widetilde{AdS}_{n+1}$ et $\partial \mathbb{ADS}_{n+1}$ on peut donc voir S comme un sous-ensemble de $\partial \mathbb{ADS}_{n+1}$.

Définition 6.1.33. *On appelle domaine régulier de \mathbb{ADS}_{n+1} associé à S le domaine défini comme étant le dual convexe de l'enveloppe convexe de S dans $S(\mathbb{R}^{2,n})$. On le note par $\mathcal{E}(S)$.*

Dans la suite nous allons voir qu'un domaine régulier de \mathbb{ADS}_{n+1} est forcément l'image par la projection π d'un domaine régulier de AdS_{n+1} . Supposons que \tilde{S} n'est pas purement de type lumière. Soit $E(S)$ le domaine régulier associé à S qu'on voit comme un sous-ensemble de $\mathbb{ADS}_{n+1} \cup \partial \mathbb{ADS}_{n+1}$.

Lemme 6.1.34. ([13, Lemme 8.27]). *Il existe un domaine affine U de \mathbb{ADS}_{n+1} tel que S et $E(S)$ soient contenus dans $U \cup \partial U$*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application 1-lipschitz dont le graphe est \tilde{S} . Soit (x, t) tel que $f_1(x) < t < f_2(x)$. Donc pour tout y, z dans \mathbb{S}^{n-1} , on a

$$f(z) - d_{\mathbb{S}^n}(x, z) < t < f(y) + d_{\mathbb{S}^n}(x, y).$$

En particulier $f(y) - d_{\mathbb{S}^n}(x, y) < t < f(y) + d_{\mathbb{S}^n}(x, y)$ et $f(-y) - d_{\mathbb{S}^n}(x, -y) < t < f(-y) + d_{\mathbb{S}^n}(x, -y)$, où y et $-y$ sont deux points antipodaux fixés de \mathbb{S}^{n-1} . On a alors

$$\sup(f(y) - d_{\mathbb{S}^n}(x, y), f(-y) - d_{\mathbb{S}^n}(x, -y)) < t < \min(f(y) + d_{\mathbb{S}^n}(x, y), f(-y) + d_{\mathbb{S}^n}(x, -y)).$$

Ce qui montre que $E(\tilde{S})$ est contenu dans un domaine de Sitter et donc le domaine régulier $E(S)$, qui n'est autre que la projection de $E(\tilde{S})$ dans \mathbb{ADS}_{n+1} , est contenu dans un domaine affine U de \mathbb{ADS}_{n+1} . \square

Nous aurons aussi besoin de la proposition suivante :

Proposition 6.1.35. ([16, Proposition 4.19], [13, Proposition 5.10]). *Soit U un domaine affine de ADS_{n+1} . Soit p un élément du bord affine ∂U de U et soit q un élément de $U \cup \partial U$. Alors p et q sont causalement reliés dans $U \cup \partial U$ si et seulement si $\langle p, q \rangle \geq 0$.*

On obtient en particulier la proposition suivante :

Proposition 6.1.36. *Soit S un sous-ensemble de $\partial \text{ADS}_{n+1}$. Alors S est achronal si et seulement si pour tout p et q dans S on a : $\langle p, q \rangle \leq 0$.*

Démonstration. Soit \tilde{S} un achronal de $\partial \widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$ et soit S sa projection qu'on voit comme un sous-ensemble de $\partial \text{ADS}_{n+1}$. Par le lemme 6.1.34, il existe un domaine affine U de ADS_{n+1} tel que S soit contenu dans son bord affine ∂U . Soit p et q deux point de S . Comme il n'existe pas de courbe temporelle reliant p et q alors par la Proposition 6.1.35 la quantité $\langle p, q \rangle$ est non positive.

Réciproquement soit S un sous-ensemble de $\partial \text{ADS}_{n+1}$, si pour tout p et q dans S la quantité $\langle p, q \rangle$ est non positive alors par la Proposition 6.1.35 il n'existe pas de courbe temporelle reliant p à q et donc S est achronal. \square

En combinant la définition 6.1.23 d'un domaine régulier ainsi que le Lemme 6.1.34 et la Proposition 6.1.35 on obtient la proposition suivante :

Proposition 6.1.37. ([4, Proposition 3.14]). *Soit \tilde{S} une sphère topologique i.e une hypersurface fermée achronale de $\partial \widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$ qui n'est pas purement de type lumière. Soit S sa projection dans $\partial \text{AdS}_{n+1}$ qu'on identifie avec son image dans $\partial \text{ADS}_{n+1}$. Alors :*

$$E(S) = \{p \in \partial \text{ADS}_{n+1} : \langle p, q \rangle < 0 \text{ pour tout } q \in S\}.$$

Une autre formulation de la Proposition 6.1.37 est donnée par la proposition suivante :

Proposition 6.1.38. *Soit \tilde{S} une hypersurface fermée achronale de $\partial \widetilde{\text{AdS}}_{n+1}$. Soit $E(S)$ son domaine régulier donné par la définition 6.1.23 et soit $\mathcal{E}(S)$ son domaine régulier associé donné par la définition 6.1.33. Alors*

$$E(S) = \mathcal{E}(S)$$

où $E(S)$ est vu comme étant dans ADS_{n+1} .

Le théorème suivant est dû à Mess [38]. Le résultat de Mess a été prouvé dans le cadre de la dimension $2 + 1$. Cependant les mêmes argument restent valables en toute dimension :

Théorème 6.1.39. ([4, Théorème 3.18]). *Tout espace-temps anti-de Sitter maximal globalement hyperbolique spatialement compact de dimension $n + 1$ est le quotient d'un domiane régulier de AdS_{n+1} par un sous groupe discret sans torsion de $SO^+(2, n)$.*

6.2 Singularité initiale cosmologique d'un espace-temps anti-de Sitter

Soit M un espace-temps *MGHC* localement modelé sur l'espace anti-de Sitter de dimension $n + 1$. Soit $E(S)$ son domaine régulier associé i.e $M \simeq E(S)/\Gamma$, où Γ est un sous groupe discret sans torsion de $SO^+(2, n)$.

6.2.1 Propriétés du temps cosmologique

Soit \tilde{S} une hypersurface fermée achronale de $\partial\widetilde{AdS}_{n+1}$ qui se projette sur S . Soit $E(\tilde{S})$ le domaine invisible associé \tilde{S} . D'après la Proposition 6.1.25 le domaine invisible $E(\tilde{S})$ et le domaine régulier $E(S)$ sont en bijection. Donc, pour étudier les propriétés du temps cosmologique de $E(S)$, il suffit d'étudier celles de $E(\tilde{S})$.

Proposition 6.2.1. ([4, Proposition 4.1]). *Le domaine régulier $E(S)$ est à temps cosmologique régulier.*

Démonstration. Soit \tilde{T} le temps cosmologique de $E(\tilde{S})$. La Proposition 6.1.20 montre que $\overline{E(\tilde{S})}$ est compact dans $\widetilde{AdS}_{n+1} \cup \partial\widetilde{AdS}_{n+1}$. Par la Proposition 6.1.22 on a que $\overline{E(\tilde{S})} \cap \partial\widetilde{AdS}_{n+1} = \tilde{S}$. D'autre part pour p dans $E(\tilde{S})$, on a $J^-(p)$ disjoint de \tilde{S} . Donc $J^-(p) \cap \overline{E(\tilde{S})}$ est un compact de \widetilde{AdS}_{n+1} . En d'autres termes $J^-(p) \cap E(\tilde{S})$ est conformément équivalent à un domaine compact causalement convexe de $(\mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{R}, dx^2 - dt^2)$ et donc à temps cosmologique régulier. \square

6.2.2 Le bord passé d'un espace-temps anti-de Sitter

Soit $E(S)$ un domaine régulier associé à un fermé achronal sans bord de ∂AdS_{n+1} . Le bord dans AdS_{n+1} de $E(S)$ est composé d'une union disjointe de deux fermés achronaux un dans le futur de l'autre, qu'on note $\mathcal{H}^+(S)$ et $\mathcal{H}^-(S)$.

Définition 6.2.2. *On appelle bord à l'infini passé (respectivement futur) du domaine régulier $E(S)$, le sous-ensemble $\mathcal{H}^-(S)$ (respectivement $\mathcal{H}^+(S)$).*

Remarque 6.2.3. 1) *Dans le modèle conforme $(\mathbb{D}^n \times \mathbb{S}^1, dx^2 - dt^2)$, le bord à l'infini passé et le bord à l'infini futur du domaine régulier $E(S)$ correspondent respectivement aux graphes de l'application f_1 et de l'application f_2 définies dans la Proposition 6.1.20.*

2) *Vu comme sous-ensemble du modèle de Klein $\mathbb{A}DS_{n+1}$, le domaine régulier $E(S)$ est un domaine convexe dont le bord n'est autre que la réunion des bords infinis passé et futur vu comme des sous-ensemble de $\mathbb{A}DS_{n+1}$.*

Grâce à la Remarque 6.2.3 on peut pour un point de $\mathcal{H}^-(S) \cup \mathcal{H}^+(S)$ parler d'hyperplans support à $E(S)$ passant par p . Les sous espaces totalement géodésiques correspondant sont soit de type espace soit de type lumière. Ceci est dû au fait que $\mathcal{H}^-(S)$ et $\mathcal{H}^+(S)$ sont des sous-ensembles achronaux.

Définition 6.2.4. *On appelle le passé fin, qu'on note $E^-(S)$, d'un domaine régulier $E(S)$ le passé strict de l'hypersurface cosmologique $T_{cos} = \frac{\pi}{2}$.*

La proposition suivante décrit les points de $\mathcal{H}^-(S)$ qui réalisent le temps cosmologique :

Proposition 6.2.5. *Soit \tilde{S} une hypersurface fermée achronale de $\partial\widetilde{AdS}_{n+1}$ qui n'est pas purement de type lumière. Pour tout p dans $E^-(S)$ le passé fin du domaine régulier $E(S)$, il existe un unique point $r(p)$ de $\mathcal{H}^-(S)$ réalisant le temps cosmologique de p i.e la géodésique temporelle passée inextensible α issue de p et qui a pour point limite le point $r(p)$, vérifie $T_{cos}(p) = -l(\alpha)$.*

Définition 6.2.6. *La fonction $r : E^-(S) \rightarrow \mathcal{H}^-(S)$ définie par la Proposition 6.2.5 est appelée fonction de rétraction. L'image de $E^-(S)$ par r est appelée singularité initiale passée associée au domaine régulier $E(S)$. Elle est notée par Σ^- .*

La proposition suivante caractérise l'ensemble des point de Σ^- en terme d'hyperplans supports :

Proposition 6.2.7. ([4, Proposition 4.2]).

Supposons que \tilde{S} une hypersurface fermée achronale sans bord qui n'est pas purement de type lumière de $\partial \text{AdS}_{n+1}$. Soit r_0 un point de $\mathcal{H}^-(S)$. Alors :

- Le point r_0 est dans Σ^- si et seulement s'il existe un hyperplan de type espace support à $E^-(S)$ en r_0 ;
- Si $C(r_0)$ est l'ensemble des vecteurs unitaires futurs de $T_{r_0} \text{AdS}_{n+1}$ qui sont orthogonaux à un hyperplan support de $E^-(S)$ en r_0 , alors $C(r_0)$ est l'enveloppe convexe de ses éléments lumières.

6.3 Comportement asymptotique des niveaux d'une fonction temps quasi-concave

Soit M un espace-temps anti-de Sitter *MGHC* de dimension $n+1$. Soit $E(S)$ son domaine régulier associé i.e $M \simeq E(S)/\Gamma$, où Γ est un sous groupe discret sans torsion de $SO^+(2, n)$. Soit T une fonction temps de Cauchy définie sur M . Elle se relève en une fonction temps de Cauchy Γ invariante de $E(S)$. Notons comme dans le chapitre 3 le flot du gradient de T par Φ_T . Dans cette section nous généralisons le Théorèmes 3.3.1 démontré précédemment dans le cas plat et le cas de Sitter au cas anti-de Sitter. Notons par $T_{E^-(S)}$ la restriction de T au passé fin $E^-(S)$.

Définition 6.3.1. Supposons que la fonction temps de Cauchy Γ -invariante $T_{E^-(S)}$ est de classe C^2 . Alors elle est dite convexe si et seulement si la seconde forme fondamentale de chaque niveau de $T_{E^-(S)}$ est positive.

Les arguments utilisés pour démontrer la Proposition 3.2.16 restent valables dans le cas anti-de Sitter. On obtient ainsi :

Proposition 6.3.2. Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow E^-(S)$ une courbe de type espace contenue dans le passé de $\tilde{\Sigma}_a^T$, où $\tilde{\Sigma}_a^T$ est le niveau a de la fonction temps $T_{E^-(S)}$. Alors la longueur de la courbe α est inférieure à celle de α_1 où $\alpha_a(s) = \Phi^{a-T(\alpha(s))}(\alpha(s))$ est la projection de α sur le niveau $\tilde{\Sigma}_a^T$ le long des lignes de Φ_T .

La preuve du Théorème 3.3.1 étant basée essentiellement sur la Proposition 6.3.2-dont la Proposition 6.3.2 est l'exact analogue dans le cadre anti-de Sitter- et des arguments classiques qui restent valables pour le cas anti-de Sitter, il se généralise donc sans changement au cas anti-de Sitter. Nous avons ainsi montré le Théorème A dans le cas anti-de Sitter :

Théorème 6.3.3. Si T_1 et T_2 sont deux fonctions temps de Cauchy Γ -invariantes définies sur $E^-(S)$ alors les niveaux respectifs de T_1 et de T_2 convergent spectralement vers la même limite.

6.4 Classification des espaces-temps anti-de Sitter de dimension $2 + 1$ via les rotations de Wick

On se place désormais dans le cadre de la dimension $2 + 1$. Dans cette section nous allons classer les espaces-temps *MGHC* anti-de Sitter via les rotations de Wick. Nous utilisons ensuite cette relations pour démontrer le Théorème B dans le cadre d'un espace-temps anti-de Sitter.

6.4.1 Domaine régulier anti-de Sitter associé à un domaine régulier plat

Dans la suite nous allons voir comment obtenir un domaine régulier anti-de Sitter à partir d'un domaine régulier futur complet plat.

Théorème 6.4.1. ([18, Proposition 6.2.1]). *Soit Ω_0^+ un domaine régulier plat de dimension $2+1$ et soit g_1 sa métrique plate. Soit T_{cos} sa fonction temps cosmologique et soit $\xi_{T_{\text{cos}}}$ son gradient associé. Alors il existe une fonction $\mathcal{D} : \Omega_0^+ \rightarrow \mathbb{A}\mathbb{D}\mathbb{S}_{2+1}$ telle que :*

- \mathcal{D} est un C^1 -difféomorphisme local ;
- L'image réciproque de la métrique anti-de Sitter par \mathcal{D} est une métrique lorentzienne g_2 sur Ω_0^+ qui coïncide avec la métrique lorentzienne obtenue sur Ω^+ par une rotation de Wick à partir de la métrique lorentzienne plate g_1 le long du gradient cosmologique $\xi_{T_{\text{cos}}}$ de Ω^+ avec $g_2 = \frac{1}{T_{\text{cos}}^2+1}g_1$ sur $\mathbb{R}\xi_{T_{\text{cos}}}$ et $g_2 = \frac{1}{(T_{\text{cos}}^2+1)^2}g_1$ sur $\xi_{T_{\text{cos}}}^\perp$.

Soit Ω_0^+ un domaine régulier plat muni de sa métrique plate g_0 . Considérons la métrique anti-de Sitter obtenue sur Ω_0^+ par le Théorème 6.4.1, qu'on note par g_{-1} . Notons par M l'espace-temps anti-de Sitter obtenue comme extension maximale de l'espace-temps anti-de Sitter (Ω_0^+, g_{-1}) . Par construction même, l'espace-temps M est un domaine régulier $E(S)$ de l'espace anti-de Sitter. Le théorème suivant montre que le procédé établi lors du théorème précédent et qui consiste à associer à chaque domaine régulier plat un unique espace-temps anti-de Sitter s'étend au théorème suivant :

Théorème 6.4.2. ([18, Proposition 6.3.5]). *L'espace-temps (Ω_0^+, g_{-1}) coïncide avec le passé fin $E^-(S)$ du domaine régulier $E(S)$.*

Le Théorème 6.4.2 nous procure une correspondance dans une seule direction entre les domaines réguliers plats et ceux de l'espace anti-de Sitter. L'objet du théorème suivant est de montrer que cette correspondance est en fait inversible :

Théorème 6.4.3. ([18, Théorème 6.4.5]). *Soit $E(S)$ un domaine régulier anti-de Sitter non vide et soit g_1 sa métrique anti-de Sitter. Soit τ_{cos} son temps cosmologique et $\xi_{\tau_{\text{cos}}}$. Alors :*

- 1) L'espace-temps $(E^-(S), g_2)$, où g_2 est la métrique lorentzienne obtenu par une rotation de Wick sur $E^-(S)$ le long du gradient du temps cosmologique τ_{cos} à partir de la métrique anti-de Sitter g_1 de $E^-(S)$ avec $g_2 = \frac{1}{\cos^2(\tau_{\text{cos}})}g_1$ sur $\mathbb{R}\xi_{\tau_{\text{cos}}}$ et $g_2 = \frac{1}{\cos^4(\tau_{\text{cos}})}g_1$ sur $\xi_{\tau_{\text{cos}}}^\perp$, est un domaine régulier plat futur complet ;
- 2) L'espace-temps obtenu comme une rotation de Wick donné par le Théorème 6.4.1 sur $(E^-(S), g_2)$ coïncide avec le passé fin $(E^-(S), g_1)$.

Remarque 6.4.4. *Il n'est pas difficile de voir que les rotations de Wick données par le Théorème 6.4.1 et le Théorème 6.4.3 sont inverses l'une à l'autre. Cependant tout le problème consiste à prouver que l'espace-temps plat obtenu par une rotation de Wick à partir d'un domaine régulier anti-de Sitter est bien un domaine régulier plat.*

Toute la construction précédente peut être faite de manière équivariante pour obtenir ainsi le théorème suivant :

Théorème 6.4.5. ([18, Théorème 1.7.1]). *La correspondance entre les domaines réguliers plats et les domaines réguliers anti-de Sitter induit une correspondance bijective entre les espaces-temps MGHC plats futur complets et ceux MGHC localement anti-de Sitter.*

Remarque 6.4.6. *Quitte à inverser l'orientation on obtient des résultats analogues pour les espaces-temps passés complets.*

Corollaire 6.4.7. *Il existe une correspondance bijective entre les espaces-temps MGHC anti-de Sitter futurs complets de dimension $2+1$ et les laminations géodésiques mesurée sur les surfaces hyperboliques compactes.*

On se donne un domaine régulier anti-de Sitter $E(S)$. Soit $E^-(S)$ son passé fin. Notons par (Ω_0^+, g_0) l'unique domaine régulier plat qui lui est associé par le Théorème 6.4.2. Rappelons que $E^-(S)$ est isométrique au domaine anti-de Sitter (Ω_0^+, g_{-1}) associé à (Ω_0^+, g_0) . Soit T_{cos} le temps cosmologique de (Ω_0^+, g_0) et τ_{cos} le temps cosmologique de $E^-(S)$ ou de manière équivalente celui de (Ω_0^+, g_{-1}) . D'après la Proposition 5.2.6 on sait que le temps cosmologique τ_{cos} est régulier. Le but de la proposition suivante est de montrer que le temps cosmologique τ_{cos} est un temps de Cauchy :

Proposition 6.4.8. ([18, Proposition 6.2.2]). *Le temps cosmologique τ_{cos} de $E^-(S)$ est un temps de Cauchy. De plus :*

$$\tau_{cos} = \arctan(T_{cos}).$$

Démonstration. Rappelons que (Ω_0^+, g_0) et (Ω_0^+, g_{-1}) désignent respectivement le domaine régulier plat et son domaine anti-de Sitter associé. Soit p un point de Ω_0^+ et soit v un vecteur dans $T_p\Omega_0^+$. Supposons que $|v|_{-1} \leq 0$, où $|\cdot|_{-1}$ est la norme pour la métrique anti-de Sitter de Ω_{-1}^+ . Ecrivons $v = aN + u$, où N est le gradient du temps cosmologique T_{cos} de (Ω_0^+, g_0) et u est dans N^\perp et a un réel. On a alors $|v|_{-1}^2 = -a^2 \frac{1}{(1+T_{cos}(p))^2} + \frac{1}{1+T_{cos}^2(p)} |u|^2$, où $|\cdot|$ est la norme pour la métrique plate g_0 de Ω_0^+ . Or $|v|^2 = -a^2 + |u|^2$. Il s'en suit :

$$|v|^2 \leq -a^2 \frac{1}{(1+T_{cos}(p))^2} + \frac{1}{1+T_{cos}^2(p)} |u|^2 \leq 0$$

et donc v est causal pour la métrique plate g_0 de Ω_0^+ . Ceci montre en particulier que toute courbe causale pour (Ω_0^+, g_{-1}) l'est pour (Ω_0^+, g_0) et donc les niveaux cosmologique de T_{cos} sont des hypersurfaces de Cauchy de (Ω_0^+, g_{-1}) .

Soit α une courbe causale dans (Ω_0^+, g_{-1}) passée issue d'un point p . Alors c'est une courbe causale pour la métrique plate g_0 de Ω_0^+ . On l'écrit donc :

$$\alpha(s) = T_{cos}(s)N(s) + r(s)$$

donc

$$\dot{\alpha} = \dot{T}_{cos}N + T_{cos}\dot{N} + \dot{r}.$$

Il s'en suit $|\dot{\alpha}|_{-1}^2 = -\frac{\dot{T}_{cos}^2}{(1+T_{cos}^2)^2} + \frac{|T_{cos}\dot{N} + \dot{r}|^2}{1+T_{cos}^2}$ et donc $-|\dot{\alpha}|_{-1}^2 \leq \frac{\dot{T}_{cos}^2}{(1+T_{cos}^2)^2}$. Ce qui montre que

$$\tau_{cos}(p) \leq \arctan(T_{cos}(p)).$$

D'autre part la courbe $\alpha(s) = r(p) + sN(p)$ est une courbe causale de temps propre $\arctan(T_{cos}(p))$ pour la métrique de (Ω_0^+, g_{-1}) . Donc $\tau_{cos} = \arctan(T_{cos})$. \square

Remarque 6.4.9. *Comme les lignes de la fonction temps cosmologique T_{cos} sont les mêmes que les lignes de la fonction temps cosmologique τ_{cos} , la singularité initiale donnée dans la définition 6.2.6 est la même que celle donnée dans la définition 3.1.21.*

Définition 6.4.10. *Soit $E(S)$ un domaine régulier anti-de Sitter et soit Ω_0^+ l'unique domaine régulier plat qui lui est associé. On appelle singularité initiale cosmologique associée à $E(S)$ la singularité initiale cosmologique associée à Ω_0^+ .*

6.5 Convergence Gromov équivariante des niveaux d'un temps quasi-concave

Dans cette partie nous allons montrer le Théorème B dans le cas anti-de Sitter. Plus précisément nous montrons le théorème suivant :

Théorème 6.5.1. *Soit M un espace-temps anti-de Sitter MGHC futur complet de dimension $2 + 1$. Soit T une fonction temps de Cauchy quasi-concave C^2 . Alors les niveaux de T convergent pour la topologie de Gromov équivariante vers l'arbre réel dual à la lamination géodésique mesurée (λ, μ) associée à M . De plus la limite ne dépend pas de la fonction temps choisie.*

Soit Ω_0^+ un domaine régulier futur complet. Munissons Ω_0^+ de la métrique anti-de Sitter obtenue par une rotation de Wick canonique à partir de la métrique plate de Ω_0^+ comme dans 6.4.1. On note respectivement par g_0 et par g_{-1} la métrique plate et la métrique anti-de Sitter définie sur Ω_0^+ . Soit τ_{cos} la fonction temps cosmologique de l'espace (Ω_0^+, g_{-1}) et soit T_{cos} la fonction temps cosmologique de l'espace (Ω_0^+, g_0) . La proposition suivante est une généralisation de la Proposition 4.3.9 dans le cas anti-de Sitter :

Proposition 6.5.2. *Soient $\Sigma_a^{\tau_{cos}}$ et $\Sigma_b^{\tau_{cos}}$ deux niveaux de la fonction temps τ_{cos} de (Ω_0^+, g_{-1}) avec $a < b$. Soit α_a une courbe Lipschitz contenue dans le niveau $\Sigma_a^{\tau_{cos}}$. Alors la projection α_b de α_a sur $\Sigma_b^{\tau_{cos}}$ le long des lignes du flot du gradient de τ_{cos} est de longueur $l_{-1}(\alpha_b)$ supérieure à $\frac{1+\tan^2(a)}{1+\tan^2(b)}l_{-1}(\alpha_a)$.*

Démonstration. D'après la Proposition 6.4.8 on a $T_{cos} = \tan(\tau_{cos})$, donc les niveaux cosmologique $\Sigma_a^{\tau_{cos}}$ et $\Sigma_b^{\tau_{cos}}$ de τ_{cos} correspondent respectivement aux niveaux cosmologique $\Sigma_{\tan(a)}^{T_{cos}}$ et $\Sigma_{\tan(b)}^{T_{cos}}$. De plus la projection de la courbe $\alpha_a \subset \Sigma_a^{\tau_{cos}}$ sur $\Sigma_b^{\tau_{cos}}$ le long des lignes du gradient de τ_{cos} n'est autre que la projection de $\alpha_a \subset \Sigma_{\tan(a)}^{T_{cos}}$ sur $\Sigma_{\tan(b)}^{T_{cos}}$ le long des lignes du gradient de T_{cos} . D'après le Théorème 6.4.1 on a $l_{-1}(\alpha_a) = \frac{1}{1+\tan^2(a)}l(\alpha_a)$, où l est la longueur par rapport à la métrique plate et l_{-1} par rapport à celle anti-de Sitter. Sa projection $\Phi_{\tau_{cos}}^{b-a}(\alpha_a)$ est de longueur de Sitter $l_{-1}(\Phi_{\tau_{cos}}^{b-a}(\alpha_a)) = \frac{1}{1+\tan^2(b)}l(\Phi_{\tau_{cos}}^{b-a}(\alpha_a))$. Or $l(\Phi_{\tau_{cos}}^{b-a}(\alpha_a)) \geq l(\alpha_a)$. Donc

$$l_{-1}(\Phi_{\tau_{cos}}^{b-a}(\alpha_a)) \geq \frac{1 + \tan^2(a)}{1 + \tan^2(b)}l_{-1}(\alpha_a).$$

□

Nous obtenons ainsi le théorème suivant qui généralise le Théorème 4.4.2 dans le cas anti-de Sitter de dimension $2 + 1$:

Théorème 6.5.3. *Soit $M \simeq E(S)/\Gamma$ un espace-temps anti-de Sitter MGHC de dimension $2 + 1$. Soit τ_{cos} la fonction temps cosmologique définie sur le domaine régulier $E(S)$. Alors les niveaux $\Sigma_a^{\tau_{cos}}$ pour $a < \frac{\pi}{2}$, de la fonction temps cosmologique τ_{cos} munis de leurs distances $d_a^{\tau_{cos}}$ i.e celles induites par la restriction de la métrique ambiante de $E(S)$ à chaque niveau $\Sigma_a^{\tau_{cos}}$, convergent pour la topologie uniforme sur les compacts vers l'espace métrique (Σ, d_Σ) , où (Σ, d_Σ) est la singularité initiale cosmologique associée à $E(S)$.*

Démonstration. Soit (Ω_0^+, g_{-1}) le domaine anti-de Sitter associé à $E(S)$ (voir Théorème 6.4.1). Notons par T_{cos} son temps cosmologique plat i.e le temps cosmologique de (Ω_0^+, g_0) . On a pour chaque $0 < a < \frac{\pi}{2}$

$$d_a^{\tau_{cos}}(x, y) = \frac{1}{1 + \tanh^2(a)}d_{\tan(a)}^{T_{cos}}(x, y)$$

, où $d_{\tan(a)}^{T_{cos}}$ est la distance induite par la restriction de la métrique plate ambiante au niveau cosmologique $\Sigma_a^{\tau_{cos}}$. Comme les distances $d_{\tan(a)}^{T_{cos}}$ convergent vers d_Σ quand a tend vers 0, les distances sur les compacts $d_a^{\tau_{cos}}$ elles aussi convergent uniformément vers d_Σ . Ce qui montre que $(\Sigma_a^{\tau_{cos}}, d_a^{\tau_{cos}})$ convergent vers la singularité initiale cosmologique (Σ, d_Σ) .

□

En combinant le Théorème 6.5.3 et le Théorème 4.4.1 on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 6.5.4. *Les niveaux cosmologiques d'un espace-temps anti-de Sitter MGHC futur complet M de dimension $2 + 1$ convergent pour la topologie de Gromov équivariante vers l'arbre réel dual à la lamination géodésique mesurée (λ, μ) associée à M .*

Proposition 6.5.5. *Soit $\Sigma_a^{\tau_{cos}}$ un niveau de la fonction temps cosmologique τ_{cos} . Soit α une courbe de type espace contenue dans le passé de $\Sigma_a^{\tau_{cos}}$. Alors la longueur pour la métrique anti-de Sitter de la projection de α le long des lignes du gradient de τ_{cos} est plus grande que $(1 + \tan(a)^2)l(\alpha)$.*

Démonstration. Notons par ξ le gradient du temps cosmologique τ_{cos} et par $\Phi_{\tau_{cos}}$ son flot associé. Notons aussi par N le gradient cosmologique de T_{cos} et par $\Phi_{T_{cos}}$ son flot associé. Soit a un réel positif inférieur à $\frac{\pi}{2}$ et soit α une courbe contenue dans le passé de $\Sigma_a^{\tau_{cos}}$. Considérons $\alpha_a(s) = \Phi_{\tau_{cos}}^{\alpha - \tau(s)}(\alpha(s))$ la projection de α sur $\Sigma_a^{\tau_{cos}}$. On a $\dot{\alpha}(s) = \tau'_{cos}(s)\xi_{\alpha(s)} + D_{\alpha_a(s)}\Phi_{\tau_{cos}}^{\tau_{cos}(s)-a}.\dot{\alpha}_a(s)$. Donc

$$\dot{\alpha}(s) = T'_{cos}(s)N_{\alpha(s)} + D_{\alpha_a(s)}\Phi_{T_{cos}}^{\tan(T_{cos}(s))-\tan(a)}.\dot{\alpha}_a(s).$$

Il s'en suit

$$|\dot{\alpha}(s)|_{-1}^2 = \left| T'_{cos}(s)N_{\alpha(s)} + D_{\alpha_a(s)}\Phi_{T_{cos}}^{\tan(T_{cos}(s))-\tan(a)}.\dot{\alpha}_a(s) \right|_1^2,$$

et donc

$$|\dot{\alpha}(s)|_{-1}^2 = |T'_{cos}(s)N_{\alpha(s)}|_{-1}^2 + \left| D_{\alpha_a(s)}\Phi_{T_{cos}}^{\tan(T_{cos}(s))-\tan(a)}.\dot{\alpha}_a(s) \right|_{-1}^2.$$

Ce qui entraîne que :

$$|\dot{\alpha}(s)|_{-1}^2 = -(T'_{cos}(s))^2 \frac{1}{(1 + T_{cos}^2(s))^2} + \frac{1}{1 + T_{cos}^2(s)} \left| D_{\alpha_a(s)}\Phi_{\tau_{cos}}^{\tau_{cos}(s)-a}.\dot{\alpha}_a(s) \right|^2.$$

Donc,

$$|\dot{\alpha}(s)|_{-1}^2 \leq \frac{1}{1 + T_{cos}^2(s)} \left| D_{\alpha_a(s)}\Phi_{\tau_{cos}}^{\tau_{cos}(s)-a}.\dot{\alpha}_a(s) \right|^2.$$

$$\text{Or } \frac{1}{1 + T_{cos}^2(s)} \left| D_{\alpha_a(s)}\Phi_{\tau_{cos}}^{\tau_{cos}(s)-a}.\dot{\alpha}_a(s) \right|^2 \leq \frac{1 + \tan(a)^2}{1 + T_{cos}^2(s)} \frac{1}{1 + \tan(a)^2} |\dot{\alpha}_a(s)|^2$$

$$\text{donc } |\dot{\alpha}(s)|_{-1}^2 \leq (1 + \tan(a)^2) |\dot{\alpha}_a(s)|_{-1}^2.$$

□

Preuve du Théorème 6.5.1 Grâce au corollaire 6.5.4 et à la Proposition 6.5.5, on peut reprendre la preuve du Théorème 4.5.1 sans grande modification pour montrer le Théorème 6.5.1. □

Chapitre 7

Comportement asymptotique dans un espace-temps plat de dimension supérieure à 2+1

Dans ce chapitre on s'intéresse aux espaces-temps plats de dimension supérieure à trois. Nous allons étudier le comportement asymptotique des niveaux d'un temps quasi-concave donné. Nous donnons dans un premier temps une généralisation du Théorème 4.5.1 obtenu dans le cadre d'un espace-temps plat de dimension 2+1 (voir chapitre 4). Un premier résultat obtenu dans ce sens est dû à L. Andersson [3], où il a étudié le comportement asymptotique des niveaux de la fonction temps *CMC* dans le cas très restrictif des espaces-temps simpliciaux de dimension quelconque. L'autre cas de figure que nous allons étudier est celui du comportement asymptotique au voisinage de l'infini. Ce travail a été fait dans le cadre du temps cosmologique par F. Bonsante [25], nous le généralisons aux temps quasi-concaves. Tout au long de ce chapitre nous fixons 0 comme origine de l'espace de Minkowski et nous considérons \mathbb{H}^n comme étant plongée dans l'espace de Minkowski.

7.1 espaces-temps *MGHC* élémentaires et comportement asymptotique

7.1.1 espaces-temps de translations

On se place dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ de dimension $n + 1$. Soient v_1, v_2, \dots, v_n une famille de n vecteurs de type espace de $\mathbb{R}^{1,n}$ linéairement indépendants. Notons par P le n -hyperplan de type espace engendré par cette famille.

Définition 7.1.1. *On appelle groupe de translation de l'espace de Minkowski le groupe discret engendré par les translations de vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n . On le note par G .*

Proposition 7.1.2. *L'action de G sur \mathbb{R} est libre et proprement discontinue.*

Démonstration. Le fait que l'action soit libre découle immédiatement du fait que les vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n sont linéairement indépendants. Soit maintenant K un compact de $\mathbb{R}^{1,n}$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que pour tout g dans G vérifiant $gK \cap K \neq \emptyset$ on a $\|g\| \leq C$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^{n+1} . Or G est groupe discret donc $\{g \in G : \|g\| \leq C\}$ est un ensemble fini. \square

Notons par $M(G)$ l'espace-temps quotient $\mathbb{R}^{1,n}/G$.

Définition 7.1.3. *L'espace-temps $M(G)$ est appelé espace-temps de translation.*

Proposition 7.1.4. *Un espace-temps de translation est globalement hyperbolique spatialement compact maximal.*

Démonstration. Soit $M(G)$ un espace de translation et soit P son hyperplan de type espace associé. Il existe n dans \mathbb{H}^n tel que $n^\perp = P$. Considérons alors la fonction $\mathbb{R}^{1,n} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{T}(x) = -\langle n, x \rangle$ pour tout x dans $\mathbb{R}^{1,n}$. Les niveaux de cette fonction sont des hyperplans affines de type espace de l'espace de Minkowski. Donc c'est une fonction temps de Cauchy. D'autre part elle est invariante par l'action du groupe G , elle se projette donc en une fonction temps $T : M(G) \rightarrow \mathbb{R}$ au quotient. De plus comme les courbes causales inextensibles de $M(G)$ sont les projetées des courbes causales inextensibles de $\mathbb{R}^{1,n}$, la projection T est une fonction temps de Cauchy de $M(G)$. Donc $M(G)$ est globalement hyperbolique. \square

La fonction \tilde{T} est l'unique fonction temps de Cauchy quasi-concave de $\mathbb{R}^{1,n}$ qui soit G -invariante. En effet, soit \tilde{S} une hypersurface de Cauchy convexe et G -invariante. Pour chaque p dans \tilde{S} , notons par P_p l'hyperplan support à \tilde{S} en p . On a alors deux cas de figures :

- 1) Soit il existe un p dans \tilde{S} tel que P_p n'est pas parallèle à P : dans ce cas $\bigcap_{g \in G} gI^+(P_p) = \emptyset$ mais $I^+(\tilde{S}) \subset \bigcap_{g \in G} gI^+(P_p)$, donc ce cas est impossible ;
- 2) Le deuxième est celui où tout les hyperplans P_p sont parallèles à P et dans ce cas \tilde{S} est exactement P .

Par passage au quotient on obtient que les niveaux de la fonction temps T sont des tores euclidiens totalement géodésiques. Ceci rend l'étude du comportement asymptotique des niveaux de \tilde{T} (ou T) triviale. On a ainsi :

Proposition 7.1.5. *Soit $M(G)$ un espace de translation. Alors les niveaux de T convergent quand t tend vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) vers le tore euclidien P/G .*

7.1.2 espace-temps de Misner

On considère l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ avec la forme quadratique $q_{1,n} = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$. Notons par P l'hyperplan de type espace de codimension 2 défini par : $P = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{1,n} \text{ tel que } x_0 = x_1 = 0\}$. Soit G le sous groupe de $SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1,n}$ défini par : pour chaque élément g de G :

- 1) la partie linéaire de g agit trivialement sur P ;
- 2) la partie de translation de g appartient à P .

Le sous groupe G est un groupe libre abélien de rang n . En d'autres termes c'est un sous groupe isomorphe à \mathbb{R}^n .

Considérons le domaine régulier futur complet Ω^+ défini par :

$$\Omega^+ = I^+(P).$$

Proposition 7.1.6. *Le groupe G agit librement et proprement discontinuement sur Ω^+ . \square*

Soit $\tilde{T}_{cos} : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction temps cosmologique de Ω^+ . Le domaine Ω^+ s'écrit : $\Omega^+ = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{1,n} \text{ tel que } -x_0^2 + x_1^2 < 0 \text{ et } x_0 > 0\}$. La fonction \tilde{T}_{cos} s'écrit alors

$$\tilde{T}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_0^2 - x_1^2}.$$

La fonction temps cosmologique \tilde{T}_{cos} est un temps de Cauchy concave G -invariante. Ses niveaux sont exactement les orbites de l'action de G sur Ω^+ .

Définition 7.1.7. *Soit Γ un réseau uniforme de G . On appelle espace-temps de Misner, qu'on note $M^+(\Gamma)$, l'espace-temps défini par Ω^+/Γ .*

Proposition 7.1.8. *Un espace-temps de Misner $M^+(\Gamma)$ est un espace-temps maximal globalement hyperbolique spatialement compact futur complet.*

Remarque 7.1.9. *De manière analogue on peut définir l'espace-temps de Misner passé complet $M^-(\Gamma)$.*

La projection T_{cos} de la fonction temps \tilde{T}_{cos} dans $M^+(\Gamma)$ est fonction temps de Cauchy. Le sous groupe Γ étant isomorphe à \mathbb{Z}^n les niveaux de t sont des tores euclidiens plats. Cependant contrairement aux espaces de translations ces tores ne sont pas totalement géodésiques.

Proposition 7.1.10. *Soit $M^+(\Gamma) \simeq \Omega^+/\Gamma$ un espace-temps de Misner futur complet. Pour chaque $a > 0$ notons par $\Sigma_a^{T_{cos}}$ le niveau dans Ω^+ de la fonction temps cosmologique T_{cos} correspondant à la valeur cosmologique a et par $d_a^{T_{cos}}$ sa distance induite par la métrique lorentzienne ambiante. Alors :*

- 1) *les Γ -espaces métriques $(\Sigma_a^{T_{cos}}, d_a^{T_{cos}}, \Gamma)$ convergent pour la topologie de Gromov équivariante, quand a tend vers 0, vers le Γ espace métrique (P, d_{euc}, Γ) .*
- 2) *les Γ -espaces métriques normalisés $(\Sigma_a^{T_{cos}}, \frac{1}{a}d_a^{T_{cos}}, \Gamma)$ convergent pour la topologie de Gromov équivariante, quand a tend vers 0, vers le Γ espace métrique $(\mathbb{H}^1, d_{\mathbb{H}^1}, L(\Gamma))$, où $L(\Gamma)$ est la partie linéaire de Γ .*

Démonstration. Notons respectivement par N et r la fonction normale et l'application retraction associé à Ω^+ . Il n'est pas difficile de voir que Ω^+ est isométrique à $\mathbb{H}^1 \times P$ muni de la métrique $g_P - t^2 g_{\mathbb{H}^1}$. On obtient alors que la distance $d_a^{T_{cos}}(p, q) = d_{euc}(r(p), r(q)) + T_{cos}(p)d_{\mathbb{H}^1}(N_p, N_q)$. La proposition s'en suit alors. □

7.2 Une autre façon de voir les espaces-temps non élémentaires

Dans §3.1.3 nous avons étudié les propriétés des espaces-temps *MGHC* non élémentaires. On a vu qu'ils sont obtenus comme quotients de domaines réguliers de l'espace de Minkowski par un sous groupe discret de $SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$. Une famille particulière de tels espaces est celle des espaces-temps standards i.e ceux obtenus comme quotient d'un domaine régulier par une déformation affine d'un réseau uniforme de $SO^+(1, n)$. Dans [9] une autre façon de voir les espaces-temps *MGHC* non élémentaires est décrite; c'est un procédé qui permet d'obtenir tous les espaces *MGHC* non élémentaires à partir des standards.

Soit (M, g_M) un espace-temps plat de dimension $n + 1$ et soit \mathbb{T}^k un tore euclidien plat muni de la métrique $g_{\mathbb{T}^k}$ induite par celle de \mathbb{R}^k . Sur la variété produit $\tilde{M} \times \mathbb{T}^k$ considérons la métrique lorentzienne plate g définie comme étant la somme directe de la métrique g_M et $g_{\mathbb{T}^k}$.

Pour chaque morphisme $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{T}^k$ du groupe fondamental $\pi_1(M)$ dans le groupe \mathbb{T}^k des translations de \mathbb{T}^k considérons l'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M} \times \mathbb{T}^k$ définie par :

$$\gamma.(p, x) = (\gamma p, x + \rho(\gamma)).$$

Cette action est libre et proprement discontinue. De plus elle préserve la métrique lorentzienne g .

Définition 7.2.1. *On appelle suspension plate de l'espace-temps (M, g_M) associée au morphisme ρ , l'espace-temps quotient de $\tilde{M} \times \mathbb{T}^k$ par l'action diagonale de $\pi_1(M)$. On le note par M_ρ .*

Remarque 7.2.2. Notons que la projection $p : \tilde{M} \times \mathbb{T}^k \rightarrow M_\rho$ de $\tilde{M} \times \mathbb{T}^k$ sur M_ρ est un revêtement.

Soit $p_1 : M_\rho \rightarrow M$ la projection de M_ρ sur M .

Proposition 7.2.3. Soit $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction temps de Cauchy de M , alors $T \circ p_1$ est une fonction temps de Cauchy de M_ρ .

Démonstration. Il suffit de montrer que les courbes causales inextensibles de M sont les projections par p_1 des courbes causales inextensibles de M_ρ . Notons déjà que les courbes causales de M sont exactement les projections de celles de M_ρ . En effet, si α est une courbe causale de M , notons par $(\tilde{\alpha}, x_0)$ la courbe qui à chaque s associe $(\tilde{\alpha}(s), x_0)$ de $\tilde{M} \times \mathbb{T}^k$ où $\tilde{\alpha}$ est un relevé de α dans \tilde{M} , et x_0 un élément de \mathbb{T}^k fixé. La projection par p_1 de la courbe causale $p \circ (\tilde{\alpha}, x_0)$ n'est autre que α . Réciproquement, si $\tilde{\alpha}$ est une courbe causale de M_ρ , sa projection est évidemment causale. Donc les courbes causales de M sont exactement les projections par p_1 des courbes causales de M_ρ .

Si maintenant α est une courbe causale inextensible de M , alors par la Remarque 7.2.2 toute courbe de la forme $p \circ (\tilde{\alpha}, x_0)$ est inextensible. Réciproquement, soit $\tilde{\alpha}$ une courbe causale inextensible de M_ρ . Notons par α sa projection $p_1 \circ \tilde{\alpha}$. Il reste donc à montrer qu'elle est inextensible. Supposons que ce n'est pas le cas, elle admet donc un point limite, disons passé, y . On peut rajouter alors une portion β à la courbe α de sorte que la courbe $\alpha \cup \beta$ soit une courbe causale contenant le point limite y et prolongeant α . Les fibres de p_1 étant des tores, donc compactes, la préimage par p_1 de la portion β est un compact. Il s'en suit que $\tilde{\alpha}$ admet un point limite passé et donc contradiction. De manière analogue on traite le cas d'un point limite futur. □

Réciproquement :

Proposition 7.2.4. Soit $\bar{T} : M_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction temps de Cauchy de M_ρ , alors il existe une fonction temps de Cauchy $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\bar{T} = T \circ p_1$.

Démonstration. Soit $\bar{T} : M_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction temps de Cauchy définie sur M_ρ . Le groupe \mathbb{T}^k agit par translation sur le deuxième facteur de $\tilde{M} \times \mathbb{T}^k$. De plus cette action commute avec celle du $\pi_1(M)$, donc \mathbb{T}^k agit naturellement sur M_ρ . On définit la fonction $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\Phi(p) = \int_{\mathbb{T}^k} T(x.p) dx.$$

où dx est la mesure de Haar de \mathbb{T}^k . Il existe alors une unique fonction $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $T \circ p_1 = \bar{T}$. On obtient facilement que la fonction T est une fonction temps de Cauchy. □

On obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire 7.2.5. L'espace-temps M est globalement hyperbolique si et seulement si M_ρ est globalement hyperbolique.

Le théorème suivant est un théorème de classification qui relie les espaces-temps standard et les espaces-temps non élémentaires :

Théorème 7.2.6. [9, Théorème 1.2] Un espace-temps MGHC plat est à revêtements finis près une suspension plate d'un espace-temps s .

Corollaire 7.2.7. Un espace-temps MGHC plat est à revêtements finis près, un espace de translation, un espace de Misner ou la suspension plate d'un espace-temps standard.

7.3 Comportement asymptotique dans le passé

Le but de cette section est de montrer les Théorèmes C et D. Plus précisément, nous montrons le théorème suivant :

Théorème 7.3.1. *Soit $M \simeq \Omega^+/\Gamma$ un espace-temps plat globalement hyperbolique spatialement compact maximal non élémentaire de dimension quelconque, où Ω^+ est un domaine régulier futur complet et Γ un sous groupe discret sans torsion de $SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$. Notons respectivement par (Σ, d_Σ) , $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ et $(\partial\Omega^+/\sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ la singularité initiale, son complété et l'horizon associée à M . Soit T une fonction de Cauchy C^2 quasi-concave définie sur \tilde{M} . Alors :*

- (Σ, d_Σ) se plonge isométriquement dans $(\partial\Omega^+/\sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ qui à son tour se plonge isométriquement dans $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$;
- pour tout x et y dans Σ il existe une unique géodésique α de $(\partial\Omega^+/\sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ reliant x à y ;
- l'espace métrique $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ est un espace $CAT(0)$;
- Les niveaux de la fonction temps T munis de l'action isométrique de $\pi_1(M)$ convergent pour la topologie de Gromov équivariante vers le complété $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ de la singularité initiale (Σ, d_Σ) . En particulier, la limite ne dépend pas de la fonction temps choisie.

Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet muni d'une action isométrique d'un sous groupe discret Γ de $SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$. Notons par $\partial\Omega^+$ son bord topologique. Soit $\Sigma \subset \partial\Omega^+$ la singularité initiale associée à Ω^+ et soit d_Σ la distance définie sur Σ comme dans 4.4.2. Soit T_{cos} la fonction temps cosmologique de Ω^+ . Notons par $\Sigma_a^{T_{cos}}$, où $a > 0$, les niveaux de T_{cos} .

Lemme 7.3.2. ([25, Lemme 3.11]). *Le bord $\partial\Omega^+$ du domaine régulier Ω^+ est le graphe d'une application convexe 1-Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.*

Le Lemme 7.3.2 nous permet de définir une pseudo-distance sur $\partial\Omega^+$. En effet, les vecteurs tangents des courbes 1-Lipschitz contenues dans $\partial\Omega^+$ sont de norme positive ou nulle. On définit alors la pseudo-distance comme suit : pour tout p et q dans $\partial\Omega^+$

$$d_{\partial\Omega^+}(p, q) = \inf \{ l(\alpha) \text{ où } \alpha \text{ est une courbe 1-lipschitzienne contenue dans } \partial\Omega^+ \text{ reliant } p \text{ et } q \}.$$

Notons par $(\partial\Omega^+/\sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ le métrisé du pseudo-espace métrique $(\partial\Omega^+, d_{\partial\Omega^+})$.

Proposition 7.3.3. *L'espace métrique $(\partial\Omega^+/\sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ est un espace de longueur.*

Démonstration. La structure de longueur induite, sur $\partial\Omega^+$, par la métrique ambiante de l'espace de Minkowski est une pseudo-structure de longueur (voir définition 2.2.11). Le corollaire 2.2.14 montre donc que $(\partial\Omega^+/\sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ est un espace de longueur. \square

La proposition suivante montre que l'inclusion de Σ dans $\partial\Omega^+/\sim$ est un plongement isométrique une fois qu'ils sont munis de leurs distances respectives d_Σ et $\bar{d}_{\partial\Omega^+}$

Proposition 7.3.4. ([25, Proposition 7.8]). *Pour tout x, y dans Σ on a : $d_\Sigma(x, y) = \bar{d}_{\partial\Omega^+}(x, y)$.*

Nous allons montrer la proposition suivante :

Proposition 7.3.5. *Pour tout x et y dans Σ , il existe une géodésique dans $(\partial\Omega^+/\sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ reliant x à y*

Nous commençons par montrer le lemme suivant :

Lemme 7.3.6. *On se place dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ et soit n_1, n_2 dans \mathbb{H}^n avec $n_1 \neq n_2$. Alors l'ensemble K défini par :*

$$K = \{v \in dS_n \text{ tel que } \langle v, n_1 \rangle \geq 0 \text{ et } \langle v, n_2 \rangle \leq 0\}$$

est précompact.

Démonstration. Soit n_1 et n_2 dans \mathbb{H}^n et v dans $\mathbb{R}^{1,n}$ tel que $|v|^2 = 1$. Supposons que : $\langle v, n_1 \rangle \geq 0$ et $\langle v, n_2 \rangle \leq 0$. Le vecteur v s'écrit $v = -\langle v, n_1 \rangle n_1 + v_1$, où v_1 est dans n_1^\perp . On a alors :

$$-\langle v, n_1 \rangle^2 + |v_1|^2 = 1$$

et donc

$$\|v\|^2 = 1 + 2\langle v, n_1 \rangle^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^{n+1} . Donc pour montrer que v reste dans un compact, il faut montrer que $\langle v, n_1 \rangle$ est borné indépendamment de v .

De manière analogue on écrit $n_2 = -\langle n_1, n_2 \rangle n_1 + u_1$, où u_1 est dans n_1^\perp . Donc

$$-\langle n_2, n_1 \rangle^2 + |u_1|^2 = -1.$$

D'autre part, on a $\langle v, n_2 \rangle \leq 0$ et donc

$$-\langle n_1, n_2 \rangle \langle n_1, v \rangle + \langle v_1, u_1 \rangle \leq 0$$

ceci entraîne que

$$0 \leq \langle v, n_1 \rangle \leq \frac{\langle v_1, u_1 \rangle}{\langle n_1, n_2 \rangle}.$$

On écrit $v_1 = -\langle v_1, u_1 \rangle u_1 + v'_1$, où v'_1 est dans $n_1^\perp \cap u_1^\perp$. Donc

$$-\langle v, n_1 \rangle^2 + \langle v_1, u_1 \rangle^2 + |v'_1|^2 = 1.$$

Il s'en suit donc que

$$-\frac{\langle v_1, u_1 \rangle^2}{\langle n_1, n_2 \rangle^2} + \langle v_1, u_1 \rangle^2 + |v'_1|^2 \leq 1$$

et donc

$$\langle v_1, u_1 \rangle^2 \leq \frac{\langle n_1, n_2 \rangle^2}{\langle n_1, n_2 \rangle^2 - 1}$$

ce qui montre que

$$0 \leq \langle v, n_1 \rangle \leq \frac{1}{\sqrt{\langle n_1, n_2 \rangle^2 - 1}}.$$

□

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 7.3.7. [25, Lemme 7.7] *Soit $\mathbb{R}^{1,n}$ l'espace de Minkowski. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 1-Lipschitz convexe. Alors pour tout O dans \mathbb{R}^n minimum de ϕ et pour tout y dans \mathbb{R}^n , il existe une géodésique $\alpha(s) = (\phi(x(s)), x(s))$ dans $G(f)$, le graphe de ϕ , reliant $(\phi(O), O)$ et $(\phi(y), y)$ telle que $\phi(s) = \phi(x(s))$ est une fonction croissante. □*

Nous obtenons comme conséquence du Lemme 7.3.7 la proposition suivante :

Proposition 7.3.8. *Pour $a > 0$ soit p et q dans $\Sigma_a^{T_{cos}}$. Soit $\alpha : [0, l] \rightarrow \Sigma_a^{T_{cos}}$ la géodésique de $\Sigma_a^{T_{cos}}$ reliant p à q . Alors pour tout s dans $[0, l]$ on a*

$$\langle \dot{\alpha}(s), N_p \rangle \leq 0 \text{ et } \langle \dot{\alpha}(s), N_q \rangle \geq 0$$

où N_p et N_q sont les normales de $\Sigma_a^{T_{cos}}$ en p et q .

Démonstration. On se place dans un système de coordonnées (x_0, x_1, \dots, x_n) tel que $p = (0, \dots, 0)$ et $N_p = (1, 0, \dots, 0)$. L'hypersurface $\Sigma_a^{T_{cos}}$ est alors le graphe d'une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 1-Lipschitz convexe. Considérons la fonction $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(s) = \langle \alpha(s), N_p \rangle$. On a alors $f(s) = -\phi(s)$ et donc $\langle \dot{\alpha}(s), N_p \rangle = \dot{f}(s) = -\dot{\phi}(s)$. Or d'après le Lemme 7.3.7, ϕ est croissante, il s'en suit donc que $\langle \dot{\alpha}(s), N_p \rangle \leq 0$.

Le même raisonnement appliqué à la courbe $\beta(s) : [0, l] \rightarrow \Sigma_a^{T_{cos}}$ définie par $\beta(s) = \alpha(l - s)$ montre que $\langle \dot{\alpha}(s), N_p \rangle \geq 0$. □

Preuve de la Proposition 7.3.5. Notons par $\bar{\Sigma}$ la fermeture de Σ dans $\partial\Omega^+$ et par $\pi : \partial\Omega^+ \rightarrow \partial\Omega^+ / \sim$ la projection de $\partial\Omega^+$ dans le métrisé de $\partial\Omega^+$. Notons aussi par d_{euc} la métrique euclidienne usuelle de \mathbb{R}^{n+1} . Remarquons déjà que si K est un compact de $\partial\Omega^+$, alors $\pi(K)$ est un compact du métrisé Ω^+ / \sim muni de sa distance $\bar{d}_{\partial\Omega^+}$. En effet, si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K , alors quitte à extraire une sous suite on peut supposer qu'elle converge vers un x dans K . Or la pseudo-distance $d_{\partial\Omega^+}$ est majorée par la distance euclidienne d_{euc} de \mathbb{R}^{n+1} , ce qui montre que les x_i converge aussi vers x pour $d_{\partial\Omega^+}$ et donc $\pi(K)$ est compact.

Maintenant soient p et q dans $X_{T_{cos}}$ l'espace des lignes du gradient cosmologique. On veut montrer qu'il existe une géodésique dans $(\partial\Omega^+ / \sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ qui relie $r(p)$ et $r(q)$. On distingue deux cas :

1) Si $N_p = N_q$ alors par la Proposition 3.1.27 $r(p) + s(r(p) - r(q))$ est contenu dans $\partial\Omega^+$ pour tout s dans $[0, 1]$ et donc $r(p) + s(r(p) - r(q))$ est clairement une géodésique de $(\partial\Omega^+ / \sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ reliant $r(p)$ et $r(q)$.

2) Si maintenant $N_p \neq N_q$. Notons par L la structure de longueur définie sur $\partial\Omega^+ / \sim$ par la distance $\bar{d}_{\partial\Omega^+}$ et par \mathcal{L} celle induite par la métrique ambiante de Minkowski. Notons enfin par L_{euc} la structure de longueur définie sur \mathbb{R}^{n+1} par la distance euclidienne d_{euc} . Pour tout $0 < a < 1$, soit $\alpha_a : [0, l_a] \rightarrow \Sigma_a^{T_{cos}}$ la géodésique de $\Sigma_a^{T_{cos}}$ reliant p et q i.e reliant le point d'intersection de p avec $\Sigma_a^{T_{cos}}$ avec celui de l'intersection de q avec $\Sigma_a^{T_{cos}}$. Par la Proposition 7.3.8 on a : pour tout $0 < a < 1$, pour tout s dans $[0, l_a]$:

$$\langle \dot{\alpha}_a(s), N_p \rangle \leq 0 \text{ et } \langle \dot{\alpha}_a(s), N_q \rangle \geq 0.$$

Il s'en suit donc, par le Lemme 7.3.6, qu'il existe un compact $K \subset dS_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : pour tout $0 < a < 1$, pour tout s dans $[0, l_a]$, les $\dot{\alpha}_a(s)$ sont contenus dans K . Ce qui montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que les géodésiques α_a sont de longueurs euclidiennes $L_{euc}(\alpha_a)$ inférieures à C . En d'autres termes, les α_a sont contenues dans un compact K' de Ω^+ .

Comme $J^-(K') \cap \partial\Omega^+$ est un compact de $\partial\Omega^+$, les courbes $\pi \circ r \circ \alpha_a$ restent dans un compact de $(\partial\Omega^+ / \sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$. D'autres part, pour tout $0 < a < 1$, pour tout s_1, s_2 dans $[0, l_a]$ on a :

$$\begin{aligned} \bar{d}_{\partial\Omega^+}(\pi(r(\alpha_a(s_1))), \pi(r(\alpha_a(s_2)))) &= d_{\Sigma}(r(\alpha_a(s_1)), r(\alpha_a(s_2))) \\ &\leq d_a^{T_{cos}}(\alpha_a(s_1), \alpha_a(s_2)) \end{aligned}$$

et donc

$$\bar{d}_{\partial\Omega^+}(\pi(r(\alpha_a(s_1))), \pi(r(\alpha_a(s_2)))) \leq |s_1 - s_2|.$$

Ce qui montre que la famille des courbes $\pi \circ r \circ \alpha_a$ est une famille équicontinue. On peut donc appliquer le Théorème d'Ascoli-Arzelà et conclure que les $\pi \circ r \circ \alpha_a$ convergent uniformément dans $(\partial\Omega^+ / \sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ vers une courbe α d'extrémités $r(p)$ et $r(q)$.

Comme $L(\pi \circ r \circ \alpha_a) \leq \mathcal{L}(\pi \circ r \circ \alpha_a)$ et que $\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}(\pi \circ r \circ \alpha_a) = \bar{d}_{\partial\Omega^+}(r(p), r(q))$, on en déduit que $\lim_{a \rightarrow 0} L(\pi \circ r \circ \alpha_a) = \bar{d}_{\partial\Omega^+}(r(p), r(q))$. Or la structure de longueur L est semie-continue inférieurement, donc $L(\alpha) = \bar{d}_{\partial\Omega^+}(r(p), r(q))$. \square

On enchaîne avec la proposition suivante qui met en avant la relation entre l'espace métrique $(\partial\Omega^+ / \sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ et le complété $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ de (Σ, d_Σ) :

Proposition 7.3.9. *L'espace métrique $(\partial\Omega^+ / \sim, \bar{d}_{\partial\Omega^+})$ se plonge naturellement dans le complété $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ de (Σ, d_Σ) .*

Pour la preuve nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 7.3.10. ([25, Lemme 4.11]). *Pour tout point x dans $\partial\Omega^+$, il existe un vecteur v lumière tel que $x + \mathbb{R}_+v$ soit contenu dans $\partial\Omega^+$.*

Preuve de la Proposition 7.3.9. Soit $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ le complété de l'espace métrique (Σ, d_Σ) . Rappelons que $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ est définie comme étant le métrisé du pseudo-espace métrique $(\Sigma_\infty, d_\infty)$ où Σ_∞ est l'ensemble des suite de Cauchy de (Σ, d_Σ) et d_∞ est la pseudo-distance définie par : si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son deux suite de Cauchy de (Σ, d_Σ) , alors $d_\infty((x_i)_i, (y_i)_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} d_\Sigma(x_i, y_i)$. Notons par $\pi' : \Sigma_\infty \rightarrow \tilde{\Sigma}$ la projection de Σ_∞ dans Σ^\star .

Nous allons tout d'abord montrer qu'étant donné un point x dans $\partial\Omega^+$, il existe une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Σ convergeant vers un point y tel que $d_{\partial\Omega^+}(x, y) = 0$. Soit x dans $\partial\Omega^+ \setminus \Sigma$. Soit $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω^+ convergeant vers x et telle que : $T_{\cos}(p_{i+1}) < T_{\cos}(p_i)$ pour tout i dans \mathbb{N} . Comme les p_i restent dans un compact de $\bar{\Omega}^+$, on obtient que les $r(p_i)$ restent dans un compact de $\partial\Omega^+$. Donc quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que les $r(p_i)$ convergent vers un élément y de $\partial\Omega^+$. Donc le vecteur $x - y$ est limite des $p_i - r(p_i)$: il est donc causal. Comme $\partial\Omega^+$ est achronal, $x - y$ s'il est non nul, est de type lumière, et donc y doit appartenir à un rayon lumière passant par x qui d'après le Lemme 7.3.10 est unique.

On définit alors la fonction $f : \partial\Omega^+ \rightarrow \Sigma^\star$ qui à chaque x dans $\partial\Omega^+$ associe l'image par π' d'une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de Σ convergeant vers un point y de $\bar{\Sigma}$ tel que $d_{\partial\Omega^+}(x, y) = 0$. Cette fonction est bien définie. En effet,

- Une suite de Σ qui converge est de Cauchy pour la distance euclidienne d_{euc} de \mathbb{R}^{n+1} et donc de Cauchy pour d_Σ ;
- Si deux suites de Σ convergent vers deux points à pseudo-distance $d_{\partial\Omega^+}$ nulle, alors elles se projettent sur le même point par π' .

Le fait que la fonction f soit un plongement isométrique est immédiat. \square

Il nous reste maintenant à étudier les propriétés du complété de la singularité initiale (Σ, d_Σ) .

Proposition 7.3.11. *Le complété $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ de la singularité initiale (Σ, d_Σ) est un espace $CAT(0)$.*

Démonstration. Nous allons tout d'abord montrer que $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ possède la propriété du milieu approximative. Pour cela, il suffit de le montrer pour (Σ, d_Σ) car (Σ, d_Σ) est dense dans $(\tilde{\Sigma}, \tilde{d}_\Sigma)$.

Soient p, q deux points de $X_{T_{\cos}}$ et soit $\epsilon > 0$. Pour tout $a > 0$, notons par z_a le point de $X_{T_{\cos}}$ tel que $d_a(p, z_a) = d_a(q, z_a) = \frac{1}{2}d_a(p, q) + \frac{\epsilon}{3}$. Soit $a_0 > 0$ tel que : pour tout $0 < a \leq a_0$ on a $|d_\Sigma(r(p), r(q)) - d_a(p, q)| < \frac{\epsilon}{3}$. Soit $a_1 > 0$ tel que : pour tout $0 < a \leq a_1$ on a $|d_\Sigma(r(p), r(q)) - d_a(p, z_{a_0})| < \frac{\epsilon}{3}$. Alors pour tout $0 < a < \min(a_0, a_1)$ on a :

$$d_\Sigma(r(p), r(z_{a_0})) \leq d_a(p, z_{a_0}) + \frac{\epsilon}{3}.$$

Or $d_a(p, z_{a_0}) \leq d_{a_0}(p, z_{a_0})$ pour tout $0 < a < \min(a_0, a_1)$. Donc

$$d_\Sigma(r(p), r(z_{a_0})) \leq \frac{1}{2}d_a(p, q) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \leq \frac{1}{2}d_\Sigma(r(p), r(q)) + \epsilon.$$

De manière analogue on montre qu'il existe un a'_0 tel que $d_\Sigma(r(q), r(z_{a'_0})) \leq \frac{1}{2}d_\Sigma(r(p), r(q)) + \epsilon$. On obtient ainsi un point milieu ϵ approximatif en prenant $z = z_{\min(a_0, a'_0)}$.

Comme $(\Sigma^\star, d_\Sigma^\star)$ est complet, 4-point valeur d'adhérence d'espaces $CAT(0)$, alors par le Théorème 2.3.9 il est $CAT(0)$. \square

Soit $T : \Omega^+ \rightarrow]0, +\infty[$ une fonction temps quasi-concave Γ -invariante. Pour chaque $a > 0$, notons comme précédemment par :

- Σ_a^T le niveau de T correspondant à la valeurs a i.e $\Sigma_a^T = T^{-1}(a)$;
- d_a^T la distance sur le niveau Σ_a^T définie par la métrique Riemannienne g_a de Σ_a^T ;
- Toujours par d_a^T la distance d_a^T du niveau Σ_a^T transportée sur l'espace des lignes du gradient de T ;
- δ_a^T la distance d_a^T transportée à l'espace des lignes du gradient cosmologique $X_{T_{cos}}$;
- $\delta_a^{T_{cos}}$ la distance $d_a^{T_{cos}}$ transportée à l'espace des lignes du gradient de T .

Le but de la proposition suivante est de donner une description plus précise du comportement asymptotique de la famille des distances $(\delta_a^T)_{a>0}$.

Proposition 7.3.12. *Les distances δ_a^T , où $a > 0$, convergent pour la topologie uniforme sur les compacts vers la distances d_Σ .*

Démonstration. Dans la Proposition 3.3.4, nous avons montré que la famille $(\delta_a^T)_{a>0}$ a des valeurs d'adhérences pour la topologie uniforme sur les compacts et que toute valeur d'adhérence δ_0^T de cette famille vérifie : $\delta_0^T \leq d_\Sigma$. Donc pour montrer que $(\delta_a^T)_{a>0}$ converge vers d_Σ , il suffit de montrer que toutes ses valeurs d'adhérences sont égales à d_Σ .

Soit $(\delta_{a_i}^T)_{i \in \mathbb{N}}$ une sous suite de $(\delta_a^T)_{a>0}$ convergeant vers δ_0^T . Soient \mathbf{p} et \mathbf{q} dans $X_{T_{cos}}$. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, notons par respectivement par p_i, q_i les points d'intersections du niveau $\Sigma_{a_i}^T = T^{-1}(a_i)$. Remarquons déjà que les $J^-(p_i) \cap \bar{\Omega}^+$ (respectivement $J^-(q_i) \cap \bar{\Omega}^+$) forment une suite décroissante de compacts qui convergent vers $r(\mathbf{p})$ (respectivement $r(\mathbf{q})$).

Soit $i \in \mathbb{N}$, il existe alors un $\alpha(a_i)$ tel que l'hypersurface $\Sigma_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}$ soit dans le passé de l'hypersurface $\Sigma_{a_i}^T$. Notons respectivement par $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ les lignes du gradient de T passant par les points p_i et q_i de $\Sigma_{a_i}^T$. Notons aussi respectivement par $x_{\alpha(a_i)}, y_{\alpha(a_i)}$ les points d'intersections des lignes \mathbf{x}_i et \mathbf{y}_i avec le niveau $\Sigma_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}$. On a alors :

$$d_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \delta_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + d_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{p}, x_i) + d_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{q}, y_i).$$

Or par la Proposition 3.2.16 on a : $\delta_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \leq d_{a_i}^T(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = \delta_{a_i}^T(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, donc

$$d_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \delta_{a_i}^T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{p}, x_i) + d_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{q}, y_i).$$

D'une part les quantités $d_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{p}, x_i)$ (resp $d_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{q}, y_i)$) sont majorées par $\|p_{\alpha(a_i)} - x_i\|$ (resp $\|q_{\alpha(a_i)} - y_i\|$), où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^{n+1} et $p_{\alpha(a_i)}$ (resp $q_{\alpha(a_i)}$) est le point d'intersection de la ligne \mathbf{p} (resp \mathbf{q}) avec le niveau $\Sigma_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}$. Or les $x_i, p_{\alpha(a_i)}$ (resp $y_i, q_{\alpha(a_i)}$) convergent quand i tend vers ∞ vers le même point qui est $r(\mathbf{p})$ (resp $r(\mathbf{q})$). Ce qui montre que les $d_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{p}, x_i)$ et $d_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}(\mathbf{q}, y_i)$ tendent vers 0 quand i tend vers ∞ .

D'autre part, les distances $d_{\alpha(a_i)}^{T_{cos}}$ et $\delta_{a_i}^T$ convergent respectivement quand i tend vers ∞ vers d_Σ et δ_0^T . On obtient donc que

$$d_\Sigma^{T_{cos}} \leq \delta_0^T$$

et donc $d_\Sigma^{T_{cos}} = \delta_0^T$. \square

Ceci achève la preuve du Théorème 7.3.1.

7.4 Comportement asymptotique dans le futur

Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet de type standard i.e muni d'une action isométrique d'une déformation affine Γ_τ dans $SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$ d'un réseau uniforme Γ de $SO^+(1, n)$. Dans cette section nous allons montrer le Théorème E. Plus précisément, nous montrons le théorème suivant :

Théorème 7.4.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction temps T quasi-concave définie sur Ω^+ , les niveaux de $(T^{-1}(a), \frac{1}{\sup_{T^{-1}(a)} T_{cos}} d_a)$ pour a assez grand sont C -quasi-isométriques à la variété hyperbolique compacte \mathbb{H}^n/Γ . En particulier, les niveaux $(T^{-1}(a), \frac{1}{\sup_{T^{-1}(a)} T_{cos}} d_a)$ admettent des valeurs d'adhérences pour la topologie Gromov équivariante qui sont des variétés Riemanniennes C -quasi-isométriques les unes aux autres.*

Commençons par l'exemple élémentaire suivant qui illustre un peu le comportement asymptotique au voisinage de l'infini :

Exemple 7.4.2. *On considère le cône futur $C_<$ muni de l'action isométrique de Γ . Les niveaux cosmologiques $(\Sigma_a^{T_{cos}}, \frac{1}{a} d_a)$ renormalisés sont tous isométriques à $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$. Les niveaux cosmologique $(\Sigma_a^{T_{cos}}, \frac{1}{a} d_a)$ convergent donc trivialement pour la topologie de Gromov équivariante vers $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$.*

Le fait que la métrique lorentzienne du cône soit isométrique à un produit direct de la forme $-dt^2 \oplus h_{\mathbb{H}^n}$ rend l'étude du comportement asymptotique au voisinage de l'infini triviale. Dans le cadre général les choses se compliquent davantage ; la métrique lorentzienne est loin d'être un produit direct et les niveaux cosmologiques ne sont plus homothétiques les uns aux autres. Cependant comme le montre le résultat ci dessous les niveaux cosmologiques ont tendance à s'uniformiser quand le temps tend vers l'infini.

Notons comme précédemment :

- T_{cos} le temps cosmologique de Ω^+ ;
- $\Sigma_a^{T_{cos}}$ le niveau cosmologique correspondant à la valeurs cosmologique a et $\frac{1}{a} d_a^{T_{cos}}$ la distance de $\Sigma_a^{T_{cos}}$ renormalisée ;

Proposition 7.4.3. ([25, Proposition 7.1]). *Les niveaux cosmologiques $(\Sigma_a^{T_{cos}}, \frac{1}{a} d_a^{T_{cos}})$ renormalisés convergent pour la topologie uniforme sur les compacts vers l'espace $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$.*

Corollaire 7.4.4. ([25, Corollaire 7.5]). *Les espaces $(\Gamma, \Sigma_a^{T_{cos}}, \frac{1}{a} d_a^{T_{cos}})$ convergent spectralement vers l'espace $(\Gamma, \mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$*

Remarque 7.4.5. *Une conséquence immédiate du Théorème 7.4.3, est que les espaces $(\Gamma_\tau, \Sigma_a^{T_{cos}}, \frac{1}{a} d_a)$ convergent pour la topologie de Gromov équivariante vers l'espace $(\Gamma, \Sigma, d_\Sigma)$. En effet, d'après la Proposition 2.7.17 la convergence uniforme sur les compacts implique la convergence de Gromov équivariante.*

Soit $N : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{H}^n$ la fonction temps normale associée au temps cosmologique T_{cos} . Nous commençons par montrer la proposition suivante qui nous permet d'avoir un contrôle uniforme sur la fonction normale d'une hypersurface convexe donnée :

Proposition 7.4.6. *Soit $S \subset \Omega^+$ une hypersurface convexe Γ invariante. Soit $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbb{H}^n$ son application de Gauss. Alors pour tout p dans S on a :*

$$|\langle N_p, \mathbf{n}_p \rangle| \leq \frac{\sup_S T_{cos}}{\inf_S T_{cos}}.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 7.4.7. Soient deux niveaux cosmologiques $\Sigma_a^{T_{cos}}$ et $\Sigma_b^{T_{cos}}$ avec $b < a$. Alors pour tout q dans $\Sigma_b^{T_{cos}}$, pour tout $x \in \mathbb{H}^n$ tels que $\Sigma_a^{T_{cos}} \subset J^+(q + x^\perp)$ on a :

$$|\langle N_q, x \rangle| \leq \frac{a}{b}.$$

Démonstration. Soit q dans $\Sigma_b^{T_{cos}}$ et soit $x \in \mathbb{H}^n$ tels que $\Sigma_a^{T_{cos}} \subset J^+(q + x^\perp)$. Donc pour tout y dans $\Sigma_a^{T_{cos}}$ on a :

$$\langle q - y, x \rangle \geq 0$$

donc

$$\langle y, x \rangle \leq \langle q, x \rangle$$

il s'en suit

$$\langle r(y) + aN_y, x \rangle \leq \langle r(q) + bN_q, x \rangle$$

donc

$$\langle r(y), x \rangle + a \langle N_y, x \rangle \leq \langle r(q), x \rangle + b \langle N_q, x \rangle$$

ce qui montre que

$$a \langle N_y, x \rangle \leq b \langle N_q, x \rangle + \langle r(q) - r(y), x \rangle.$$

Par la Proposition 3.1.32 la fonction normale $N : \Sigma_a^{T_{cos}} \rightarrow \mathbb{H}^n$ est surjective. Donc il existe un y dans $\Sigma_a^{T_{cos}}$ tel que $N_y = x$. Donc $\langle r(q) - r(y), x \rangle \leq 0$ ce qui montre que

$$-a = a \langle N_y, x \rangle \leq b \langle N_q, x \rangle.$$

On obtient donc

$$|\langle N_q, x \rangle| \leq \frac{a}{b}.$$

□

Preuve de la Proposition 7.4.6 Comme l'action de Γ sur l'hypersurface $S \subset \Omega^+$ est cocompacte, les $\sup_S T_{cos}$ et $\inf_S T_{cos}$ sont atteints. Notons les par $a = \sup_S T_{cos}$ et $b = \inf_S T_{cos}$. L'hypersurface S est donc dans le passé de l'hypersurface cosmologique $\Sigma_a^{T_{cos}}$ et dans le futur de l'hypersurface cosmologique $\Sigma_b^{T_{cos}}$. Soit p dans S et soit $P_p = p + \mathbf{n}_p^\perp$ l'hyperplan tangent de S en p . Comme S est convexe, elle est contenue entièrement dans le futur causal de P_p i.e $S \subset J^+(P_p)$ et donc $\Sigma_a^{T_{cos}} \subset J^+(P_p)$. Le point $q = r(p) + bN_p \in \Sigma_b^{T_{cos}}$ étant dans le passé de p , on en déduit donc que $\Sigma_a^{T_{cos}} \subset J^+(q + \mathbf{n}_p^\perp)$. Donc pour montrer que pour tout p dans S on a $|\langle N_p, \mathbf{n}_p \rangle| \leq \frac{a}{b}$, il suffit de montrer que pour tout q dans $\Sigma_b^{T_{cos}}$, pour tout $x \in \mathbb{H}^n$ tels que $\Sigma_a^{T_{cos}} \subset J^+(q + x^\perp)$ on a $|\langle N_q, x \rangle| \leq \frac{a}{b}$. Ce qui découle du Lemme 7.4.7. □

Remarque 7.4.8. Dans le Lemme 7.4.7 nous nous sommes restreint au cas des espaces-temps standard essentiellement pour disposer de la surjectivité de la fonction temps normale que nous savons vraie dans ce cas. Néanmoins, une légère modification de la preuve montre que la Proposition 7.4.6 reste vraie même dans le cas des espaces-temps MGHC non élémentaires plats. En effet, considérons deux niveaux cosmologiques $\Sigma_a^{T_{cos}}$ et $\Sigma_b^{T_{cos}}$ avec $b < a$. Soit q dans $\Sigma_b^{T_{cos}}$. Soit S_a l'hyperboloïde défini au dessus de $r(q)$ i.e :

$$S_a = \left\{ y \in \mathbb{R}^{1,n} \text{ tel que } |y - r(q)|^2 = -a^2 \right\}.$$

Remarquons que S_a est contenue dans le futur de $\Sigma_a^{T_{cos}}$. On a alors pour tout y dans S_a :

$$\langle y, x \rangle \leq \langle q, x \rangle$$

et donc

$$\langle y, x \rangle \leq \langle r(q), x \rangle + b \langle N_q, x \rangle$$

il s'en suit

$$\langle y - r(q), x \rangle \leq b \langle N_q, x \rangle$$

Il existe y dans S_a tel que $y - r(q) = ax$ et donc $\langle y - r(q), x \rangle = -a$ donc,

$$-a \leq b \langle N_q, x \rangle$$

et donc

$$|\langle N_q, x \rangle| \leq \frac{a}{b}.$$

□

Proposition 7.4.9. Soit $S \subset \Omega^+$ une hypersurface convexe Γ invariante et soit d la distance définie sur S par la métrique Riemannienne obtenue comme restriction de la métrique Lorentzienne ambiante de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ à S . Alors (S, d) est K -bilipschitz à $(\Sigma_{\sup_S T_{cos}}^{T_{cos}}, d_{\sup_S T_{cos}}^{T_{cos}})$ où $K = \frac{\sup_S T_{cos}}{\inf_S T_{cos}}$

Remarque 7.4.10. Bien sûr il n'est pas question ici de montrer que (S, d) est bilipschitz à $(\Sigma_{\sup_S T_{cos}}^{T_{cos}}, d_{\sup_S T_{cos}}^{T_{cos}})$, car ceci découle de la cocompacité de l'action de Γ , mais plutôt de montrer que la constante bilipschitz K dépend des hypersurfaces barrières future et passée et non de l'hypersurface S .

Nous commençons par la proposition suivante qui montre que les niveaux cosmologiques sont bilipschitz les uns aux autres :

Proposition 7.4.11. ([25, Lemme 7.4]). Les niveaux cosmologiques $\Sigma_a^{T_{cos}}$ et $\Sigma_b^{T_{cos}}$ sont $\frac{a}{b}$ -bilipschitz l'un à l'autre.

Preuve de la Proposition 7.4.9. Soit S une hypersurface convexe Γ invariante de Ω^+ et soit d sa distance associée que nous pouvons voir comme étant définie sur $X_{T_{cos}}$ l'espace des lignes du gradient cosmologique. Notons par $a = \sup_S T_{cos}$ et par $b = \inf_S T_{cos}$. Nous voulons montrer que (S, d) est $\frac{a}{b}$ -bilipschitz à $(\Sigma_a^{T_{cos}}, d_a^{T_{cos}})$ i.e $(\frac{b}{a})^2 d_a^{T_{cos}} \leq d \leq (\frac{a}{b})^2 d_a^{T_{cos}}$. Comme $d \leq d_a$ alors grâce à la Proposition 7.4.11 il nous suffit de montrer que $\frac{b}{a} d_a^{T_{cos}} \leq d$. Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ une courbe Lipschitz. On a alors pour presque tout s dans $[0, 1]$,

$$\alpha(s) = r(\alpha(s)) + T_{cos}(\alpha(s))N(\alpha(s))$$

donc,

$$\dot{\alpha}(s) = \dot{r}(s) + \dot{T}_{cos}(s)N_s + T_{cos}(s)\dot{N}(s)$$

ce qui montre que

$$|\dot{\alpha}(s)|^2 = |\dot{r}(s)|^2 + T_{cos}(s)^2 |\dot{N}(s)|^2 + T_{cos}(s) \langle \dot{r}(s), \dot{N}(s) \rangle - \dot{T}_{cos}(s)^2$$

or $|\dot{r}(s)|^2 \geq 0$, $|\dot{N}(s)|^2 \geq 0$ et $\langle \dot{r}(s), \dot{N}(s) \rangle$, donc

$$|\dot{\alpha}(s)|^2 \geq |\dot{r}(s)|^2 + b^2 |\dot{N}(s)|^2 + b \langle \dot{r}(s), \dot{N}(s) \rangle - \dot{T}_{cos}(s)^2.$$

En d'autres termes

$$|\dot{\alpha}(s)|^2 \geq |\dot{r}(s) + b\dot{N}(s)|^2 - \dot{T}_{cos}(s)^2.$$

D'autre part on a

$$\dot{T}_{cos}(s) = d_{\alpha(s)}T_{cos} \cdot \dot{\alpha}(s) = \langle N(\alpha(s)), \dot{\alpha}(s) \rangle.$$

On décompose $N(\alpha(s)) = f(s)\mathbf{n}_{\alpha(s)} + v(s)$, où \mathbf{n} est l'application normale de S et v_s est dans $\mathbf{n}(\alpha(s))^\perp$. Par la Proposition 7.4.6 : $|\langle N_{\alpha(s)}, \mathbf{n}(\alpha(s)) \rangle| \leq \frac{a}{b}$ et donc $|v(s)|^2 \leq (\frac{a}{b})^2 - 1$. Par suite

$$\left| \dot{T}_{cos}(s) \right| = |\langle v(s), \dot{\alpha}(s) \rangle| \leq |v(s)| |\dot{\alpha}(s)|$$

et donc

$$\dot{T}_{cos}(s)^2 \leq \left(\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 1 \right) |\dot{\alpha}(s)|^2.$$

On obtient donc

$$|\dot{\alpha}(s)|^2 \geq \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left| \dot{r}(s) + b\dot{N}(s) \right|^2$$

ce qui montre que

$$\frac{b}{a} d_b^{T_{cos}} \leq d$$

□

Remarque 7.4.12. *La preuve de la Proposition 7.4.9 repose essentiellement sur la Proposition 7.4.6, ce qui fait qu'elle reste vraie même dans le cas d'un espace-temps MGHC plat futur complet non élémentaire.*

Corollaire 7.4.13. *Soit M un espace-temps MGHC non élémentaire plat futur complet. Soit $T : \tilde{M} \rightarrow]-\infty, 0[$ sa fonction temps CMC associé. Alors pour tout $a > 0$, l'hypersurface $(\Sigma_{-\frac{1}{a}}^T, d_{-\frac{1}{a}}^T)$ est n^2 -bilipschitz à l'hypersurface $(\Sigma_a^{T_{cos}}, d_a^{T_{cos}})$.*

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la Proposition 3.2.15 et de la Proposition 7.4.9. □

La proposition suivante donne un contrôle sur les couples de barrières cosmologiques au voisinage de l'infini des niveaux d'une fonctions temps quasi-concave donnée :

Proposition 7.4.14. *Soit $M \simeq \Omega^+/\Gamma_\tau$ un espace-temps MGHC non élémentaire plat de type standard, où Ω^+ est un domaine régulier et Γ_τ est une déformation affine d'un réseau cocompact Γ de $SO^+(1, n)$. Il existe un $M > 0$, tel que pour toute fonction temps de Cauchy quasi-concave Γ invariante $T : \Omega^+ \rightarrow]0, +\infty[$ on a*

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sup_{\Sigma_b^T} T_{cos}}{\inf_{\Sigma_b^T} T_{cos}} \leq M$$

Démonstration. Soit Ω^+ un domaine régulier muni d'une action isométrique de Γ_τ . Soit $K \subset \mathbb{H}^n$ un domaine fondamental (compact) pour l'action de Γ sur \mathbb{H}^n . Par la Proposition 3.1.32 et le Lemme 3.1.19 on a que $K' = r(N^{-1}(K))$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ_τ sur Σ dont la fermeture est un compacte de $\mathbb{R}^{1,n}$. On a donc que pour tout p dans Ω^+ , il existe γ dans Γ tel que $\gamma N_p \in K$ et $\gamma_\tau r(p) \in r(N^{-1}(K))$. On a aussi que la quantité $\langle r_1 - r_2, n \rangle$ est bornée sur $K' \times K' \times K$. Notons alors par $M_1 = \sup_{K' \times K' \times K} |\langle r_1 - r_2, n \rangle|$.

Soit maintenant S une hypersurface de Cauchy convexe de Ω^+ . Comme l'action de Γ_τ sur S est cocompacte, il existe un p dans S tel que $\sup_S T_{cos} = T_{cos}(p) = a$. Quitte à composer par une isométrie β_τ , on peut supposer que N_p est dans K et $r(p)$ est dans K' . L'hypersurface S est donc contenue dans le passé causal de $\Sigma_a^{T_{cos}}$. Le point p étant contenu dans $S \cap \Sigma_a^{T_{cos}}$ et S est convexe, on en déduit donc que l'hyperplan tangent P_p à S en p est en fait un hyperplan tangent à $\Sigma_a^{T_{cos}}$ en p . On obtient donc que pour tout γ dans Γ , $\gamma_\tau \cdot P_p$

est l'hyperplan tangent à la fois à S et à $\Sigma_a^{T_{cos}}$ en $\gamma_\tau.p$. En d'autres termes : pour tout x dans S et tout γ dans Γ on a

$$\langle \gamma_\tau p - x, \gamma.N_p \rangle \geq 0$$

et donc

$$\langle x, \gamma.N_p \rangle \leq \langle \gamma_\tau p, N_p \rangle$$

Mais $\gamma_\tau p = \gamma.p + \tau(\gamma)$ et $x = r(x) + T_{cos}(x)N_x$, donc

$$T_{cos}(x) \langle N_x, \gamma.N_p \rangle \leq \langle p, N_p \rangle - \langle r(x), \gamma.N_p \rangle + \langle \tau(\gamma), \gamma.N_p \rangle$$

donc

$$T_{cos}(x) \langle N_x, \gamma.N_p \rangle \leq \langle p, N_p \rangle - \langle \gamma^{-1}r(x) + \tau(\gamma^{-1}), N_p \rangle$$

par suite

$$T_{cos}(x) \langle N_x, \gamma.N_p \rangle \leq -T_{cos}(p) + \langle r(p) - r(\gamma_\tau^{-1}x), N_p \rangle$$

et donc

$$\left| \frac{T_{cos}(p)}{\langle N_x, \gamma.N_p \rangle} \right| - \left| \frac{\langle r(p) - r(\gamma_\tau^{-1}x), N_p \rangle}{\langle N_x, \gamma.N_p \rangle} \right| \leq T_{cos}(x)$$

ce qui montre

$$\left| \frac{1}{\langle \gamma^{-1}.N_x, N_p \rangle} \right| - \frac{1}{a} \left| \frac{\langle r(p) - r(\gamma_\tau^{-1}x), N_p \rangle}{\langle \gamma^{-1}.N_x, N_p \rangle} \right| \leq \frac{T_{cos}(x)}{a}$$

Pour chaque x dans S , il existe un γ_x dans Γ tel que $\gamma_x^{-1}.N_x$ est dans K et $r((\gamma_x)_\tau^{-1}x)$ dans K' . Donc

$$\frac{1}{M} - \frac{1}{a} \frac{M_1}{M} \leq \frac{T_{cos}(x)}{a}$$

où $M = \inf_{K \times K} |\langle n, n' \rangle|$

Comme cette dernière inégalité est vraie pour tout x dans S , on obtient donc

$$\frac{1}{M} - \frac{1}{a} \frac{M_1}{M} \leq \frac{\inf_S T_{cos}}{a}$$

En d'autres termes

$$\frac{1}{M} - \frac{1}{\sup_S T_{cos}} \frac{M_1}{M} \leq \frac{\inf_S T_{cos}}{\sup_S T_{cos}}$$

Soit maintenant $T : \Omega^+ \rightarrow]0, +\infty[$ fonction temps de Cauchy quasi-concave Γ invariante. On a alors

$$\frac{1}{M} - \frac{1}{\sup_{\Sigma_b^T} T_{cos}} \frac{M_1}{M} \leq \frac{\inf_{\Sigma_b^T} T_{cos}}{\sup_{\Sigma_b^T} T_{cos}}$$

Il est claire que quand b tend vers $+\infty$, la quantité $\sup_{\Sigma_b^T} T_{cos}$ tend vers $+\infty$. On obtient donc :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sup_{\Sigma_b^T} T_{cos}}{\inf_{\Sigma_b^T} T_{cos}} \leq M$$

□

Preuve du Théorème 7.4.1. Soit Ω^+ un domaine régulier futur complet de type standard i.e muni d'une action isométrique d'une déformation affine Γ_τ dans $SO^+(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n}$ d'un réseau uniforme Γ de $SO^+(1, n)$. Soit $T : \Omega^+ \rightarrow]0, +\infty[$ une fonction temps quasi-concave Γ -invariante. Notons comme nous avons pris l'habitude par :

- $X_{T_{cos}}$ l'espace des lignes du gradient cosmologique ;

- $d_a^{T_{cos}}$ la distance du niveau $\Sigma_a^{T_{cos}}$ transportée à l'espace des lignes du gradient cosmologique $X_{T_{cos}}$;
- δ_a^T la distance d_a^T du niveau Σ_a^T transportée à l'espace des lignes du gradient cosmologique $X_{T_{cos}}$.

Soit $a > 0$. Notons par $a_+ = \sup_{\Sigma_a^T} T_{cos}$ et par $a_- = \inf_{\Sigma_a^T} T_{cos}$. Par la proposition 7.4.9 on a : pour tout x et y dans $X_{T_{cos}}$,

$$\frac{a_-}{a_+} d_{a_-}^{T_{cos}}(x, y) \leq \delta_a^T(x, y) \leq d_{a_+}^{T_{cos}}(x, y)$$

donc

$$\left(\frac{a_-}{a_+}\right)^2 \frac{d_{a_-}^{T_{cos}}(x, y)}{a_-} \leq \frac{\delta_a^T(x, y)}{a_+} \leq \frac{d_{a_+}^{T_{cos}}(x, y)}{a_+}$$

Par la proposition 7.4.14, il existe un C (qui dépend que de l'espace-temps) tel que $\frac{a_+}{a_-} \leq C$ pour a assez grand. On utilise alors la proposition 7.4.3 pour conclure que : pour a assez grand la distance δ_a^T est C -quasi-isométrique à la distance hyperbolique $d_{\mathbb{H}^n}$. Toujours par la proposition 7.4.3 on obtient que les valeurs d'adhérences de la famille $(\delta_a^T)_{a>0}$ sont toutes C -bilipschitz à la distance hyperbolique.

Bibliographie

- [1] A. D. Aleksandrov. Ruled surfaces in metric spaces. *Vestnik Leningrad. Univ.*, 12(1) :5–26, 207, 1957.
- [2] L. Andersson. Constant mean curvature foliations of flat space-times. *Comm. Anal. Geom.*, 10(5) :1125–1150, 2002.
- [3] L. Andersson. Constant mean curvature foliations of simplicial flat spacetimes. *Comm. Anal. Geom.*, 13(5) :963–979, 2005.
- [4] L. Andersson, T. Barbot, F. Béguin, and A. Zeghib. Cosmological time versus cmc time in spacetimes of constant curvature. *Asian J. Math.*, (1) :37–88, 2012.
- [5] L. Andersson, G. J. Galloway, and R. Howard. The cosmological time function. *Classical Quantum Gravity*, 15(2) :309–322, 1998.
- [6] Lars Andersson. The global existence problem in general relativity. In *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, pages 71–120. Birkhäuser, Basel, 2004.
- [7] Lars Andersson, Gregory J. Galloway, and Ralph Howard. A strong maximum principle for weak solutions of quasi-linear elliptic equations with applications to Lorentzian and Riemannian geometry. *Comm. Pure Appl. Math.*, 51(6) :581–624, 1998.
- [8] Lars Andersson, Vincent Moncrief, and Anthony J. Tromba. On the global evolution problem in $2 + 1$ gravity. *J. Geom. Phys.*, 23(3-4) :191–205, 1997.
- [9] T. Barbot. Globally hyperbolic flat space-times. *J. Geom. Phys.*, 53(2) :123–165, 2005.
- [10] T. Barbot, F. Béguin, and A. Zeghib. Prescribing Gauss curvature of surfaces in 3-dimensional spacetimes, Application to the Minkowski problem in the Minkowski space. *Ann. Inst. Fourier*, 61(2) :511–591, 2011.
- [11] Thierry Barbot. Variétés affines radiales de dimension 3. *Bull. Soc. Math. France*, 128(3) :347–389, 2000.
- [12] Thierry Barbot. Géométrie lorentzienne, causalité et convexité. www.umpa.ens-lyon.fr/~barbot/, 2005-2006.
- [13] Thierry Barbot. Causal properties of AdS-isometry groups. I. Causal actions and limit sets. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 12(1) :1–66, 2008.
- [14] Thierry Barbot. *Domaines globalement hyperboliques de l'espace de Minkowski et de l'espace anti-de Sitter*. Algèbre, dynamique et analyse pour la géométrie : aspects récents, Proceedings des Écoles de Géométrie et Systèmes dynamiques, Algérie, 2004-2007. Ellipse, 2010.
- [15] Thierry Barbot, François Béguin, and Abdelghani Zeghib. Feuilletages des espaces temps globalement hyperboliques par des hypersurfaces à courbure moyenne constante. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(3) :245–250, 2003.
- [16] Thierry Barbot, François Béguin, and Abdelghani Zeghib. Constant mean curvature foliations of globally hyperbolic spacetimes locally modelled on AdS_3 . *Geom. Dedicata*, 126 :71–129, 2007.

- [17] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, and K.L. Easley. *Global Lorentzian Geometry*. Marcel Dekker, 1996.
- [18] R. Benedetti and F. Bonsante. Canonical Wick rotations in 3-dimensional gravity. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 198(926) :viii+164, 2009.
- [19] R. Benedetti and E. Guadagnini. Cosmological time in $(2 + 1)$ -gravity. *Nuclear Phys. B*, 613(1-2) :330–352, 2001.
- [20] Antonio N. Bernal and Miguel Sánchez. On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch’s splitting theorem. *Comm. Math. Phys.*, 243(3) :461–470, 2003.
- [21] Antonio N. Bernal and Miguel Sánchez. Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes. *Comm. Math. Phys.*, 257(1) :43–50, 2005.
- [22] Mladen Bestvina. Degenerations of the hyperbolic space. *Duke Math. J.*, 56(1) :143–161, 1988.
- [23] Francis Bonahon. Geodesic laminations on surfaces. In *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, volume 269 of *Contemp. Math.*, pages 1–37. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [24] F. Bonsante. *Deforming the Minkowskian cone of a closed hyperbolic manifold*. PhD thesis, Pisa, 2005.
- [25] F. Bonsante. Flat spacetimes with compact hyperbolic Cauchy surfaces. *J. Differential Geom.*, 69(3) :441–521, 2005.
- [26] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1999.
- [27] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2001.
- [28] Luis A. Caffarelli and Xavier Cabré. *Fully nonlinear elliptic equations*, volume 43 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 1995.
- [29] Élie Cartan. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier-Villars, Paris, 1951. 2d ed.
- [30] Yvonne Choquet-Bruhat and Robert Geroch. Global aspects of the Cauchy problem in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 14 :329–335, 1969.
- [31] Albert Fathi and Antonio Siconolfi. On smooth time functions. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 152(2) :303–339, 2012.
- [32] Claus Gerhardt. H -surfaces in Lorentzian manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 89(4) :523–553, 1983.
- [33] Robert Geroch. Domain of dependence. *J. Mathematical Phys.*, 11 :437–449, 1970.
- [34] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, 1987.
- [35] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, London, 1973. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.
- [36] Ravi S. Kulkarni and Ulrich Pinkall. A canonical metric for Möbius structures and its applications. *Math. Z.*, 216(1) :89–129, 1994.
- [37] G. Levitt and F. Paulin. Geometric group actions on trees. *Amer. J. Math.*, 119(1) :83–102, 1997.
- [38] G. Mess. Lorentz spacetimes of constant curvature. *Geom. Dedicata*, 126 :3–45, 2007.
- [39] J.W. Morgan and P.B. Shalen. Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures. I. *Ann. of Math. (2)*, 120(3) :401–476, 1984.

- [40] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry : With Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [41] F. Paulin. Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels. *Invent. Math.*, 94(1) :53–80, 1988.
- [42] F. Paulin. The Gromov topology on \mathbf{R} -trees. *Topology Appl.*, 32(3) :197–221, 1989.
- [43] F. Paulin. Sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller. In *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*, volume 18 of *Sémin. Congr.*, pages 421–443. Soc. Math. France, Paris, 2009.
- [44] Henri Poincaré. *La Science et l' Hypothèse*. Flammarion, 1917.
- [45] Alan D. Rendall. Theorems on existence and global dynamics for the Einstein equations. *Living Rev. Relativ.*, 5 :2002–6, 62 pp. (electronic), 2002.
- [46] R. K. Sachs and H. Wu. General relativity and cosmology. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(6) :1101–1164, 1977.
- [47] Miguel Sánchez. Causal hierarchy of spacetimes, temporal functions and smoothness of Geroch's splitting. A revision. *Mat. Contemp.*, 29 :127–155, 2005.
- [48] Kevin P. Scannell. Flat conformal structures and the classification of de Sitter manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 7(2) :325–345, 1999.
- [49] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton Mathematical Series, vol. 14. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.
- [50] Andrejs E. Treibergs. Entire spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space. *Invent. Math.*, 66 :39–56, 1982.
- [51] Edward Witten. On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity. *Nuclear Phys. B*, 340(2-3) :281–332, 1990.