



**HAL**  
open science

# Traitement des signaux circulaires appliqués à l'altimétrie par la phase des signaux GNSS

Georges Stienne

► **To cite this version:**

Georges Stienne. Traitement des signaux circulaires appliqués à l'altimétrie par la phase des signaux GNSS. Autre [cs.OH]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2013. Français. NNT : 2013DUNK0344 . tel-00980907

**HAL Id: tel-00980907**

**<https://theses.hal.science/tel-00980907>**

Submitted on 19 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 2 décembre 2013

pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université du Littoral Côte d'Opale**

(Discipline : Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal)

par

**Georges STIENNE**

## Traitements des signaux circulaires appliqués à l'altimétrie par la phase des signaux GNSS



### Composition du jury

<i>Président :</i>	<b>René Garello</b> Professeur à Télécom Bretagne
<i>Rapporteurs :</i>	<b>Thierry Chonavel</b> Professeur à Télécom Bretagne <b>Pierre-André Farine</b> Professeur à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne
<i>Examineurs :</i>	<b>Mohamed Sahmoudi</b> Maître de Conférences à l'ISAE - Supaéro <b>François Soulat</b> Ingénieur de Recherche à Collecte Localisation Satellites
<i>Directeurs de Thèse :</i>	<b>Mohammed Benjelloun</b> Professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale <b>Serge Reboul</b> Maître de Conférences à l'Université du Littoral Côte d'Opale



*À ma mère*



## Remerciements

La fin d'un travail de thèse, et traditionnellement le début de celle-ci, se doit d'être l'occasion de remercier l'ensemble des personnes qui, à un moment ou à un autre, l'ont rendue possible ou ont pris part à son amélioration. Je pense tout d'abord à Monsieur Serge Rebol, dont j'ai continuellement apprécié l'encadrement pendant ces trois années. Ses compétences scientifiques, sa motivation, sa disponibilité et son humanité m'ont été indispensables pour mener à bien ce travail. Merci à lui également pour m'avoir proposé cette thèse et pour m'avoir donné envie de la réaliser, plus d'une année avant la fin de mon master. Je tiens également à remercier Monsieur Mohammed Benjelloun pour avoir dirigé mes travaux et permis à cette thèse de se faire. Il a su, à chaque étape-clé, me placer dans les meilleures conditions pour poursuivre mon travail. J'associe également à mon encadrement Monsieur Jean-Bernard Choquel, dont les qualités d'engagement, de compétences et de connaissance du monde scientifique m'ont été très utiles. C'est avant tout à ces trois personnes que je dois d'avoir pris plaisir dans ce travail de thèse.

Je tiens également à remercier l'ensemble des membres de mon jury de thèse. Je pense bien sûr à Monsieur René Garello, qui l'a présidé avec la cordialité dont il sait faire preuve ; à Messieurs Thierry Chonavel et Pierre-André Farine, qui m'ont été d'une grande aide par leur travail précis et constructif de rapporteurs, et à Messieurs Mohamed Sahmoudi et François Soulat qui ont également su juger et améliorer ce document de thèse avec discernement.

Je tiens à remercier l'ensemble des personnes qui m'ont soutenu, aidé, conseillé ou encore distrait (au sens positif du terme !), durant cette thèse, au sein du Laboratoire d'Informatique, Signal et Image de la Côte d'Opale. J'adresse ma reconnaissance à son directeur, Monsieur Christophe Renaud, pour m'avoir permis de m'y intégrer, ainsi qu'à sa secrétaire, Madame Magali Nion, pour son dévouement à nous accompagner dans les démarches administratives. Je remercie également Monsieur Jean-Luc Lefebvre, technicien à l'ULCO, pour avoir aidé à plusieurs reprises au bon fonctionnement des systèmes mécaniques développés et utilisés durant ce travail de thèse. Je pense enfin aux enseignants-chercheurs ainsi qu'à l'ensemble des doctorants du laboratoire pour les bons moments passés ensemble, et plus particulièrement à Messieurs Monir Azmani et Jean-Christophe Kucwaj, qui m'ont accompagné respectivement en début et fin de thèse sur les questions d'ordre scientifique, et à Monsieur Benoît Fortin, ami de plus de dix ans et parfait voisin de bureau pendant ces trois années.

Je profite également de ces quelques lignes pour exprimer toute ma reconnaissance et mon amour à ma famille pour son affection et son soutien. Il va sans dire que cette thèse n'aurait jamais pu se faire sans tout ce qu'elle m'a apportée, dans mon éducation comme dans ma façon de penser et de percevoir les choses.

Je souhaite enfin exprimer ma gratitude au Syndicat Mixte de la Côte d'Opale, qui a fait le choix de financer mon travail de thèse.

Georges STIENNE



# Table des matières

<b>Glossaire</b>	<b>1</b>
<b>Abréviations</b>	<b>5</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>Chapitre 1 - Réflectométrie GNSS</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.2 Réflectométrie : principe et applications . . . . .	12
1.2.1 Radar multistatique . . . . .	12
1.2.2 Applications de la réflectométrie GNSS . . . . .	19
1.2.3 Systèmes classiques d'observation de la Terre . . . . .	21
1.2.4 Missions satellitaires d'observation de la Terre par GNSS-R . . . . .	23
1.3 Cas de l'altimétrie au sol . . . . .	24
1.3.1 Géométrie du système au sol . . . . .	24
1.3.2 Différentes approches . . . . .	25
1.4 Traitements des signaux pour la réflectométrie GPS . . . . .	30
1.4.1 Structure du signal . . . . .	30
1.4.2 Architectures de traitement . . . . .	34
1.4.3 Positionnement GPS . . . . .	38
1.4.4 Architecture pour la réflectométrie . . . . .	41
1.5 Conclusion . . . . .	42
<b>Chapitre 2 - Statistiques circulaires</b>	<b>45</b>
2.1 Introduction . . . . .	45
2.2 Distributions circulaires . . . . .	47
2.2.1 Distribution de von Mises $\mathcal{CN}$ . . . . .	47
2.2.2 Distribution Wrapped Normal $\mathcal{WN}$ . . . . .	48

2.3	Approximations $\mathcal{CN} \approx \mathcal{WN}$ et $\mathcal{WN} \approx \mathcal{CN}$ et inversion de la fonction $A = I_1/I_0$	50
2.3.1	Inversion de $A$ : développements limités	50
2.3.2	Inversion de $A$ : méthode de Newton	51
2.3.3	Inversion de $A$ : méthode de Runge-Kutta	53
2.3.4	Comparaison des méthodes	53
2.4	Estimation des paramètres des distributions circulaires	54
2.4.1	Estimation de la moyenne ( $\mathcal{CN}$ et $\mathcal{WN}$ )	55
2.4.2	Estimation du paramètre de concentration ( $\mathcal{CN}$ )	56
2.4.3	Estimation de l'écart-type ( $\mathcal{WN}$ )	57
2.4.4	Représentation complexe	58
2.5	Tests d'hypothèse pour la distribution de von Mises	58
2.5.1	Tests sur la moyenne	59
2.5.2	Tests sur le paramètre de concentration	61
2.6	Estimateurs de précision dans le domaine circulaire	63
2.6.1	Distance circulaire	64
2.6.2	Dispersion circulaire	64
2.6.3	Variance circulaire	64
2.7	Conclusion	65

**Chapitre 3 - Traitement du signal circulaire : cas linéaire. Application à l'estimation de la phase des signaux GNSS en boucle ouverte** **67**

3.1	Introduction	67
3.2	Fusion d'informations circulaires	70
3.3	Filtre circulaire récursif	76
3.3.1	Filtre scalaire	76
3.3.2	Cas vectoriel	80
3.3.3	Application au filtrage de la phase et de la fréquence d'un signal GNSS	83
3.4	Cas particuliers de mesures d'angles aberrantes	85
3.4.1	Cadre de la fusion d'informations circulaires	86
3.4.2	Cadre du filtrage circulaire	87
3.5	Poursuite de la phase d'un signal GNSS en boucle ouverte	88
3.6	Expérimentations	91
3.6.1	Signal GPS-L2C	91
3.6.2	Données synthétiques	92
3.6.3	Données réelles	97

3.7	Conclusion . . . . .	98
<b>Chapitre 4 - Traitement du signal circulaire : cas non-linéaire. Application à la correction de sauts de cycle dans la phase des signaux GNSS</b>		<b>101</b>
4.1	Introduction . . . . .	101
4.2	Estimation de la phase . . . . .	103
4.2.1	Inférence statistique . . . . .	103
4.2.2	Filtre particulaire . . . . .	105
4.3	Détecteur de rupture circulaire . . . . .	107
4.3.1	Test d'hypothèses . . . . .	107
4.3.2	Règle de décision . . . . .	109
4.3.3	Estimation de l'instant et de l'amplitude de la rupture . . . . .	110
4.3.4	Correction de la rupture . . . . .	111
4.4	Architecture pour le traitement du signal . . . . .	111
4.5	Positionnement GPS par la phase . . . . .	114
4.6	Expérimentations . . . . .	116
4.6.1	Données synthétiques . . . . .	117
4.6.2	Données réelles . . . . .	123
4.7	Conclusion . . . . .	128
<b>Chapitre 5 - Application à l'altimétrie au sol et résolution de l'ambiguïté de phase</b>		<b>129</b>
5.1	Introduction . . . . .	129
5.2	Système altimétrique utilisé . . . . .	131
5.2.1	Altimètre mobile au sol . . . . .	131
5.2.2	Géométrie du système . . . . .	133
5.2.3	Estimation de la différence de trajet par la phase . . . . .	134
5.3	Résolution de l'ambiguïté de phase . . . . .	136
5.3.1	Position du problème . . . . .	136
5.3.2	Approche proposée . . . . .	137
5.4	Architecture du récepteur . . . . .	140
5.4.1	Calibration . . . . .	140
5.4.2	Traitement du signal . . . . .	141
5.5	Expérimentations . . . . .	141
5.5.1	Caractéristiques de la carte d'acquisition . . . . .	141
5.5.2	Planification des expérimentations . . . . .	142

5.5.3 Résultats . . . . .	143
5.6 Conclusion . . . . .	150
<b>Conclusion générale</b>	<b>153</b>
<b>Annexe A - Définition de l'étape de correction du filtre sur des données linéaires</b>	<b>157</b>
<b>Annexe B - Définition de l'étape de correction du filtre sur des données circulaires</b>	<b>159</b>
<b>Annexe C - Définition de <math>\Psi_l</math></b>	<b>161</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>163</b>
<b>Table des figures</b>	<b>165</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>169</b>

# Glossaire

## Réfectométrie

$R$	: position du récepteur
$E$	: position de l'émetteur
$S$	: point de réflexion spéculaire
$\theta_i$	: angle d'incidence du signal
$\theta_e$	: angle d'élévation du satellite
$h$	: hauteur d'eau à estimer
$H$	: hauteur de l'antenne LHCP
$\Delta H$	: différence de hauteur entre les antennes RHCP et LHCP
$\Delta d$	: différence de trajet entre les signaux direct et réfléchi
$\cdot^d$	: indique le signal direct
$\cdot^r$	: indique le signal réfléchi
$\mathfrak{R}$	: coefficient de réflexion de Fresnel
$\mathfrak{R}_{h/v}$	: composantes horizontale et verticale de $\mathfrak{R}$
$\mathfrak{R}_{l/r}$	: composantes circulaires gauche et droite de $\mathfrak{R}$
$\Gamma$	: pourcentage de puissance réfléchi
$\epsilon_r$	: permittivité relative de la surface

## Signaux GNSS

$\lambda$	: longueur d'onde du signal
$A_e$	: puissance d'émission du signal
$d(t)$	: message de navigation émis à l'instant $t$
$n(t)$	: message de navigation reçu à l'instant $t$
$C/A(t)$	: code pseudo-aléatoire civil C/A à l'instant $t$
$P(t)$	: code pseudo-aléatoire militaire P à l'instant $t$
$CM(t)$	: code pseudo-aléatoire civil CM à l'instant $t$
$CL(t)$	: code pseudo-aléatoire civil CL à l'instant $t$

$\oplus$	: l'opérateur de multiplexage des codes civils sur L2C
$f_1$	: fréquence de la porteuse L1
$f_2$	: fréquence de la porteuse L2
$A_s$	: puissance du signal reçu pour le satellite $s$
$f_s$	: fréquence du signal reçu après descente en fréquence pour le satellite $s$
$f_{OL}$	: fréquence utilisée pour la descente en fréquence
$\theta_s$	: phase du signal reçu pour le satellite $s$
$\phi_s$	: phase mesurée du signal reçu pour le satellite $s$
$\tau_s$	: décalage de code pour le satellite $s$
$\rho_s$	: pseudo-distance satellite-récepteur pour le satellite $s$
$\Lambda$	: fonction d'autocorrélation
$T_I$	: durée d'intégration cohérente
$C/N_0$	: rapport signal sur densité de bruit
$I/Q$	: composantes en phase/en quadrature d'un signal
$E/P/L$	: répliques du code reçu en avance/en phase/en retard
$T_c$	: période d'un code CDMA
$f_e$	: fréquence d'échantillonnage
$f_{r,k}$	: décalage en fréquence à l'itération $k$
$\phi_{r,k}$	: délai de phase mesuré à l'itération $k$
$\theta_{r,k}$	: délai de phase réel à l'itération $k$

### Statistiques circulaires

$\theta$	: angle
$\phi$	: angle affecté de bruit
$\cdot_k^{(i)}$	: indique la réalisation numéro $k$ de la $i^{\text{ème}}$ distribution considérée $k = 1 \dots n, i = 1 \dots N$
$f_{CN}$	: densité de probabilité de la distribution de von Mises
$f_{WN}$	: densité de probabilité de la distribution Wrapped Normal
$f_N$	: densité de probabilité de la distribution normale
$\mathcal{CN}(\theta \mu, \kappa)$	: indique que $\theta$ suit une distribution de von Mises de moyenne $\mu$ , de paramètre de concentration $\kappa$
$\mathcal{WN}(\theta \mu, \rho)$	: indique que $\theta$ suit une distribution Wrapped Normal de moyenne $\mu$ , de variance $\sigma^2 = -2\log(\rho)$
$A$	: fonction d'approximation, ratio de $I_1$ et $I_0$
$I_0$	: fonction de Bessel modifiée de la première espèce, d'ordre 0

---

$I_1$	: fonction de Bessel modifiée de la première espèce, d'ordre 1
$J_0$	: fonction de Bessel de la première espèce
$\arctan^*$	: fonction arctangente "quadrant-specific"
$S$	: somme des sinus d'un vecteur d'angles
$C$	: somme des cosinus d'un vecteur d'angles
$f(\cdot)/f(\cdot/\cdot)$	: densités de probabilité
$\alpha$	: seuil défini par l'utilisateur
$d_c$	: distance circulaire
$D_v$	: dispersion circulaire
$V_c$	: variance circulaire

### Estimation

$\theta$	: angle à estimer
$\Theta$	: vecteur à estimer
$\phi$	: mesure d'angle
$\cdot_k^{(i)}$	: indique le $k^{\text{ème}}$ élément d'un vecteur, pour le capteur numéro $i$
$\kappa_R$	: paramètre de concentration du bruit de mesure
$\kappa_Q$	: paramètre de concentration du bruit de modèle
$\phi_f$	: mesure d'angle fusionnée
$\kappa_f$	: paramètre de concentration associé à $\phi_f$
$\hat{\cdot}$	: estimée d'un paramètre
$dt$	: période d'estimation
$\hat{\theta}_{k/k-1}$	: angle prédit par le filtre
$P_{\theta_{k/k-1}}$	: paramètre de concentration de l'angle prédit
$F$	: matrice de transition
$H$	: matrice d'observation
$x_k^i$	: particule $i$ à l'itération $k$
$M$	: taille de la fenêtre de travail
$l$	: position dans la fenêtre de travail
$r$	: position de la rupture
$\nu$	: amplitude de la rupture
$\epsilon_l$	: innovation
$\hat{\theta}_{0,l}$	: angle affecté d'une rupture, avant correction
$\hat{\theta}_{c,l}$	: angle affecté d'une rupture, après correction
$\tilde{\phi}_l$	: mesure d'angle sans bruit



# Abréviations

BPSK	: Binary Phase Shift Keying
C/A	: Coarse/Acquisition
CDMA	: Code Division Multiple Access
CL	: Code Long
CM	: Code Moderate
$\mathcal{CN}$	: Circular Normal
CNES	: Centre National d'Etudes Spatiales
CYGNSS	: CYclone Global Navigation Satellite System
DDM	: Delay-Doppler Map
DLL	: Delay Lock Loop
DOD	: Department Of Defense
DOP	: Dilution of Precision
E, P, L	: Early, Prompt, Late
EGNOS	: European Geostationary Navigation Overlay System
EKF	: Extended Kalman Filter
EQM	: Erreur Quadratique Moyenne
ERS	: European Remote-Sensing Satellites
ESA	: European Space Agency
FDMA	: Frequency Division Multiple Access
FFT	: Fast Fourier Transform
FLL	: Frequency Lock Loop
GLONASS	: GLObalnaya Navigatinnaya Spoutinkovaya Sistema
GLR	: Generalized Likelihood Ratio
GNSS	: Global Navigation Satellite System
GNSS-R	: Global Navigation Satellite System Reflectometry
GOES	: Geostationary Operational Environmental Satellite
GPS	: Global Positioning System
IRNSS	: Indian Regional Navigation Satellites System

LHCP	: Left Hand Circular Polarization
LIDAR	: LIght Detection And Ranging
MAP	: Maximum A Posteriori
NASA	: National Aeronautics and Space Administration
NAVSTAR	: NAVigation System by Timing And Ranging
P	: Precision
PARIS	: PAssive Reflectometry and Interferometry System
PLL	: Phase Lock Loop
POL	: Phase Open Loop
PPP	: Precise Point Positioning
QZSS	: Quasi-Zenith Satellite System
RHCP	: Right Hand Circular Polarization
RSB	: Rapport Signal sur Bruit
RTK	: Real Time Kinematic
SAR	: Synthetic Aperture Radar
SBAS	: Satellite Based Augmentation System
SIR-C	: Spaceborne Imaging Radar
SMOS	: Soil Moisture and Ocean Salinity satellite
TCXO	: Temperature Compensated Crystal Oscillator
TDM	: Time Division Multiplexing
TLM	: TeLeMetry word
TOW	: Time Of Week
UK-DMC	: United Kingdom - Disaster Monitoring Constellation
WAAS	: Wide Area Augmentation System
WGS 84	: World Geodetic System 1984
$\mathcal{WN}$	: Wrapped Normal

# Introduction générale

Le sujet de recherche développé dans cette thèse porte sur l'étude et le traitement de données angulaires. Dans ce contexte, nous avons développé des estimateurs définis dans le domaine circulaire suivant une approche probabiliste et un cadre Bayésien. Les techniques ainsi développées seront appliquées au traitement de la phase des signaux GNSS (Global Navigation Satellite System), tels que les signaux GPS (Global Positioning System) L1 ou L2C. Les applications décrites sont le positionnement et le calcul de hauteurs d'eau. La précision visée est d'ordre centimétrique, pour une durée d'intégration minimale d'une milliseconde. Les activités de recherche développées durant ce doctorat s'inscrivent dans les axes de recherche du Groupement d'Intérêt Scientifique Campus de la Mer, qui a pour objet d'associer les acteurs concernés par les thématiques mer et littoral de l'axe Manche - Mer du Nord, ainsi que dans le cadre des activités scientifiques du Syndicat Mixte de la Côte d'Opale, porteur de projet pour l'aménagement du Littoral Côte d'Opale.

Dans un grand nombre de domaines de recherche, les paramètres étudiés sont des angles. Les mesures angulaires sont définies périodiquement sur un intervalle fermé de longueur  $2\pi$ . De telles variables suivent ainsi une statistique entièrement différente des variables aléatoires réelles. En particulier, la périodicité de l'intervalle de définition ne permet pas de définir de notion d'ordre pour les angles, et nécessite de redéfinir les notions de moyenne ou encore de distance. La longueur restreinte de l'intervalle de définition implique d'utiliser des distributions statistiques spécifiques au bruit sur les mesures d'angles. Ainsi, les outils classiques de traitement du signal dans le cas de données réelles, définis généralement à partir de la distribution statistique normale, doivent être redéfinis à partir de distributions statistiques circulaires. On s'intéressera dans cette thèse aux outils suivants :

- Les estimateurs récurrents, ou filtres, qui ont pour but de retrouver les valeurs prises par une série temporelle à partir de mesures bruitées, ou incomplètes, et d'une modélisation *a priori* de l'évolution de ces valeurs.
- Les opérateurs de fusion, qui permettent, à partir de plusieurs mesures bruitées d'un même angle, de définir une combinaison de ces mesures statistiquement moins bruitée

que celles-ci.

- Les détecteurs-estimateurs de ruptures qui, à partir d'une série temporelle bruitée et affectée de sauts de moyenne, ont pour but de déterminer la position dans le temps des sauts ainsi que leur amplitude.

Originellement, les systèmes GNSS servent au positionnement d'un utilisateur au sol à partir d'une constellation de satellites émetteurs et d'un récepteur construit pour capter et traiter les signaux émis. Il est nécessaire d'utiliser au minimum les signaux de quatre satellites, dans un principe de triangulation à quatre inconnues, pour positionner ce récepteur. Les constellations satellitaires utilisées par ces systèmes sont telles que le positionnement est rendu possible en tout lieu de la planète et à tout moment. La bande fréquentielle allouée aux signaux GNSS les rend par ailleurs particulièrement résistants aux perturbations climatiques. Du fait de ces avantages particuliers, d'autres utilisations des signaux GNSS ont vu le jour, parmi lesquelles la réflectométrie GNSS (GNSS-R). Cette technique voisine du radar vise à réaliser des mesures de télédétection à partir des satellites émetteurs déjà présents en orbite et d'un récepteur pouvant capter plusieurs signaux utiles en même temps. Un récepteur GNSS-R percevra des signaux réfléchis en plusieurs points de la surface du sol, permettant ainsi de réaliser plusieurs mesures d'observation de la Terre : mesures de hauteur, d'humidité des sols ou encore de rugosité de la surface de l'eau. L'avantage de la technique GNSS-R sur les techniques classiques d'observation de la Terre porte principalement sur l'existence des constellations satellitaires émettrices et sur la possibilité d'effectuer plusieurs mesures simultanément. Les systèmes radar classiques utilisent un même véhicule porteur pour l'émetteur et le récepteur, ont un coût de développement plus élevé et ne permettent généralement que des mesures au nadir du véhicule porteur. De plus, la technique GNSS-R offre une couverture spatio-temporelle plus importante que la technique radar classique, couverture qui augmentera encore avec le développement des nouveaux systèmes GNSS.

Les traitements des signaux GNSS sont traditionnellement basés sur l'estimation de trois paramètres essentiels, à savoir le délai de code, la fréquence et la phase du signal reçu. On s'intéressera dans cette thèse à l'estimation de la fréquence et de la phase des signaux GNSS. Généralement, ces deux paramètres sont calculés récursivement par l'intermédiaire de boucles fermées, dans lesquelles les mesures peuvent être modélisées par des variables aléatoires réelles. Dans le cadre de la réflectométrie GNSS, la phase du signal réfléchi est généralement estimée en boucle ouverte. On montre par ailleurs que l'utilisation d'un filtre récursif à l'intérieur d'une boucle fermée est à l'origine d'imprécisions et de perturbations additionnelles au bruit déjà présent sur le signal à sa réception. L'estimation de la phase ainsi que de la fréquence des signaux

GNSS sera donc effectuée dans cette thèse par l'intermédiaire de boucles ouvertes, aussi bien pour les applications de réflectométrie que de positionnement. Dans ce contexte, les mesures de phase sont définies comme des angles évoluant entre  $-\pi$  et  $\pi$ . On les modélisera donc à l'aide d'une distribution statistique circulaire, à savoir la distribution de von Mises, et l'on proposera plusieurs techniques visant à en extraire une information libre de bruit sur la phase et sur la fréquence du signal reçu.

Les techniques développées seront présentées par l'intermédiaire de cinq chapitres. Dans le premier d'entre eux, principalement bibliographique, on exposera de manière détaillée le principe de la réflectométrie GNSS. On s'intéressera en particulier à la géométrie du système de réflectométrie, à la modélisation de la réflexion du signal sur la surface de la Terre et aux informations ainsi portées par le signal réfléchi. On présente différentes applications ayant vu le jour et les principales méthodes de traitement des signaux utilisées dans le cadre de la réflectométrie. Une attention particulière sera portée à l'application pour laquelle les contributions de cette thèse seront employées, à savoir l'altimétrie sur l'eau. On présentera également dans ce chapitre les traitements numériques généralement utilisés pour l'exploitation des signaux de type GPS L1, qui seront également les signaux utilisés dans notre application finale.

Le second chapitre, également bibliographique, sera consacré à la modélisation mathématique des variables angulaires. Après avoir positionné la particularité de telles variables, on y présentera les distributions statistiques qui seront utilisées dans le reste de la thèse pour représenter la phase des signaux GNSS. On définira dans ce chapitre les équivalents circulaires de la moyenne, de la distance ou encore de la variance linéaire, qui seront nécessaires à l'évaluation des estimateurs développés pour des mesures d'angles. On présentera également des estimateurs pour les paramètres définissant les distributions étudiées, ainsi que quelques uns des tests d'hypothèse circulaires existants pour ces paramètres. Une fonction non-linéaire et non-inversible, qui intervient régulièrement dans le domaine des statistiques circulaires, sera également étudiée en profondeur dans ce chapitre. Par l'intermédiaire d'évaluations des performances des différents outils mathématiques présentés, on souhaitera montrer dans ce chapitre le caractère particulier de la statistique des données angulaires.

Le troisième chapitre verra le développement et la mise en œuvre d'un opérateur de fusion et d'un filtre récursif pour l'estimation de données angulaires. Il seront définis dans un cadre Bayésien suivant la statistique de von Mises. Le filtre récursif proposé, développé dans le cas scalaire et dans le cas vectoriel, permettra le lissage de mesures d'angles suivant une dynamique d'évolution supposée linéaire. On verra dans ce chapitre que les données angulaires sont parti-

culièrement sujettes, aussi bien dans le cadre de la fusion d'informations que du filtrage, à des mesures aberrantes, et l'on proposera des techniques permettant leur rejet ou leur correction. Ces différentes méthodes seront utilisées pour l'estimation en boucle ouverte de la phase et de la fréquence de signaux de type GPS-L2C. Les performances des différents outils proposés seront illustrées par des expérimentations sur signaux synthétiques et réels, en comparaison avec les outils classiques de traitement des signaux GNSS.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéressera aux ruptures pouvant apparaître dans les mesures de phase des signaux GNSS. Ces ruptures de moyennes dans les mesures d'angles portent le nom dédié de sauts de cycle. L'occurrence de telles perturbations peut fausser grandement le calcul de position par les signaux GNSS. Pour les corriger on proposera un détecteur-estimateur de ruptures circulaire défini suivant la statistique de von Mises. On supposera que la phase évolue linéairement dans une fenêtre autour de chaque saut de cycle. Le développement de l'estimateur de rupture verra l'apparition d'une fonction non-linéaire qu'il sera nécessaire d'inverser récursivement. Pour cela, on définira également dans ce chapitre un filtre particulière circulaire, défini pour estimer la phase et sa dérivée. Les outils ainsi développés dans le cadre d'une poursuite en boucle ouverte seront évalués sur données synthétiques et réelles pour le positionnement relatif par la phase des signaux GNSS. Le principe d'un tel positionnement sera rappelé dans une section dédiée.

Le dernier chapitre sera consacré à la présentation du système altimétrique développé durant ce doctorat. On définira le principe de la mesure effectuée pour pouvoir déterminer, à partir de l'étude des phases d'un même signal GPS L1 arrivant de manière directe et après réflexion, la hauteur d'une surface d'eau réfléchissante. Ce chapitre sera également l'occasion de présenter une méthode originale de résolution de l'ambiguïté de phase, qui correspond au nombre inconnu de périodes de phase accumulées dans le signal lors de son parcours du satellite émetteur au récepteur. Cette ambiguïté doit être déterminée pour permettre un positionnement, ou un calcul de hauteur, absolu. On détaillera dans ce chapitre la planification et la mise en place des expérimentations permettant de définir sur signaux réels la précision des techniques de résolution d'ambiguïté et d'altimétrie proposées.

Une conclusion générale viendra finalement dresser le bilan des travaux décrits dans cette thèse et proposera des perspectives dans le cadre de la réflectométrie GNSS.

# Chapitre 1

## Réflexométrie GNSS

### 1.1 Introduction

Le système de géopositionnement par satellite (Global Navigation Satellite System) a été imaginé au début des années 1960 par le Department of Defense (DOD) Américain. Le but premier était de rendre possible le positionnement précis en 3 dimensions d'un utilisateur se trouvant en un point quelconque de la Terre. Le positionnement devait être réalisable par une méthode de triangulation, à tout moment et quelles que soient les conditions climatiques. Le premier système visant à atteindre ces objectifs fut TRANSIT, un réseau de 5 satellites encore utilisé de nos jours pour le positionnement d'utilisateurs à faible dynamique. Le système NAVSTAR GPS (NAVigation System by Timing And Ranging Global Positioning System) fut développé par la suite pour devenir le premier système global de géopositionnement par satellite, avec en 1995 une constellation de 24 satellites à défilement offrant une couverture suffisante à la triangulation en tout point du globe. Plusieurs satellites de remplacement sont également présents et actifs en orbite, portant le nombre de satellites total du système à 32. D'abord prévu à des fins militaires, le système GPS se vit en partie rendu disponible aux civils à partir de 1983.

Parallèlement au développement de ce système Américain, le système GNSS Russe GLO-NASS connu une phase de fonctionnement au milieu des années 90 avant que plusieurs satellites ne tombent en panne. Ce système est maintenant redevenu pleinement opérationnel avec une trentaine de satellites en orbite. En vue d'indépendance, de nombreux autres systèmes de géopositionnement se sont développés au cours des dernières années, certains avec un objectif global (tels que le système Européen Galileo et le système Chinois Compass), d'autres avec un objectif local (tels le système Indien IRNSS ou le système Japonais QZSS). Parallèlement, plusieurs satellites géostationnaires visant à augmenter la précision du positionnement déjà dis-

ponible par l'utilisation du GPS ou de GLONASS ont été lancés (tels EGNOS en Europe ou WAAS aux Etats-Unis). Ces systèmes portent le nom de SBAS : Satellite Based Augmentation Systems et ont une couverture locale.

Ces signaux, résistant aux conditions climatiques, transmettent avec une grande précision la position de leur émetteur et sont disponibles en tout lieux. C'est pour cette raison qu'en 1993, Martin-Neira, pour l'Agence Spatiale Européenne, eu l'idée de s'en servir comme des signaux radar pour mesurer la hauteur des océans [72]. Dans cette application, les signaux GNSS réfléchis à la surface du sol étaient utilisés en plus des signaux arrivant directement au récepteur. La réflectométrie GNSS (GNSS-R) était née.

Le but de ce premier chapitre est dans une première partie de présenter le principe de la réflectométrie et les nombreuses applications qui furent ensuite imaginées sur ce principe pour l'observation de la Terre. Le cas particulier de l'altimétrie par GNSS avec récepteur basé au sol, cadre applicatif de ce travail de thèse, sera présenté par la suite. Pour finir, les traitements nécessaires à l'utilisation des signaux GNSS pour la réflectométrie seront présentés.

## 1.2 Réflectométrie : principe et applications

### 1.2.1 Radar multistatique

Classiquement, l'observation de la Terre par radar se fait de manière active et monostatique. Le terme actif indique que le système radar émet lui même son signal. Le terme monostatique indique que l'antenne émettrice et l'antenne réceptrice du signal utilisé se trouvent à la même position. Dans le cadre de la réflectométrie GNSS, le principe est totalement différent : il s'agit d'un système multistatique et passif. En effet, il utilise plusieurs signaux déjà disponibles dans son environnement, on parle alors de signaux d'opportunité, qui sont envoyés par des émetteurs dont la position est indépendante de la position du récepteur.

L'intérêt d'un tel radar se situe bien évidemment en termes de coût, l'émetteur n'étant pas à développer, mais aussi en termes de géométrie. En effet, Martin-Neira note dans [72] que les radars altimétriques utilisés traditionnellement dans les satellites doivent se situer à la verticale du sol pour que le signal émis puisse être reçu après sa réflexion au sol. Dans le cadre de la réflectométrie multistatique, cette limitation n'existe plus. En effet, un même récepteur reçoit simultanément les signaux réfléchis par le sol et émis par l'ensemble des satellites visibles par l'antenne de réflectométrie. Ce type de réflectométrie appliquée à l'observation de la Terre a été

réalisée par la suite avec d'autres signaux d'opportunité tels que les signaux de communication [98] ou les rayons solaires [101].

### Géométrie du système

On supposera ici que la surface de réflexion au sol est uniforme et de même nature. Le point de réflexion spéculaire  $S$  est défini géométriquement figure 1.1. La réflexion spéculaire est celle pour laquelle la distance parcourue par le signal réfléchi est la plus courte. La première zone de Fresnel, centrée sur le point de réflexion spéculaire, est celle pour laquelle la puissance du signal réfléchi est la plus grande. La figure 1.2 présente la géométrie locale du système radar. Le signal arrivant dans la zone dite de scintillement est diffusé vers le récepteur lors de la réflexion. Dans ce cadre, le signal, incohérent, est de plus faible puissance. L'utilisation d'une antenne directive permet de sélectionner la zone de scintillement observée, voire de réduire la visibilité à la première zone de Fresnel.

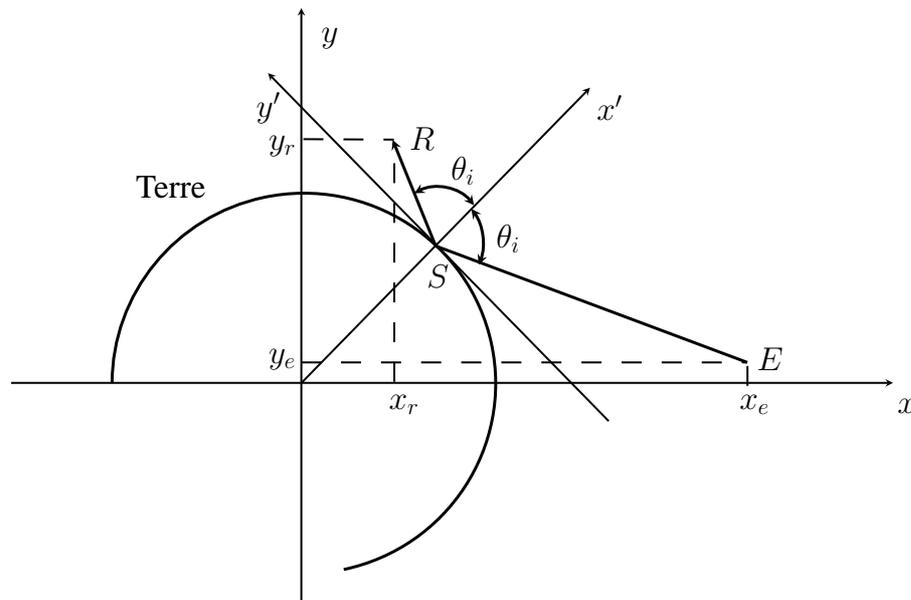


FIGURE 1.1 – Géométrie du système radar bistatique

Dans la figure 1.1,  $E$  est la position de l'émetteur,  $R$  la position du récepteur et  $S$  la position du point de réflexion spéculaire. On note que l'angle  $\theta_i$  d'incidence de l'onde électromagnétique et l'angle de réflexion sont identiques lors d'une réflexion spéculaire. Dans le plan  $(S, x', y')$ ,

on a également :

$$\frac{x'_e}{y'_e} = \frac{x'_r}{y'_r} \quad (1.1)$$

où  $(x'_e, y'_e)$  et  $(x'_r, y'_r)$  sont les coordonnées de  $E$  et  $R$  dans ce plan.

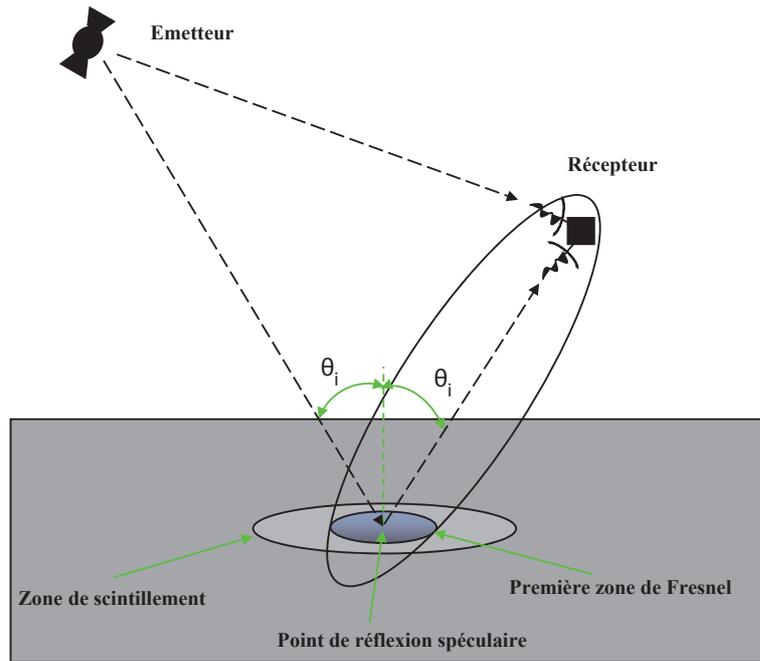


FIGURE 1.2 – Géométrie locale du système radar bi-statique

Concernant les autres composantes du signal réfléchi, en provenance de la zone de scintillement, on définit les lignes d'iso-distance, qui correspondent aux positions des points de réflexion pour lesquelles la distance parcourue par le signal réfléchi est constante. Ces lignes d'iso-distance sont, dans le cas parfait considéré ici, des ellipses centrées sur le point de réflexion spéculaire, comme indiqué figure 1.3.

On peut également définir les lignes d'iso-Doppler. L'effet Doppler est la modification de fréquence du signal due au mouvement satellite-récepteur. Les lignes d'iso-Doppler correspondent ainsi aux positions des points de réflexion pour lesquelles la fréquence du signal réfléchi est constante. Si l'on suppose que l'émetteur est très éloigné du sol comparé au récepteur, c'est le mouvement du récepteur qui détermine très majoritairement la position des lignes d'iso-Doppler. Dans le cas parfait considéré ici, il s'agit d'hyperboles orientées suivant le vecteur vitesse du récepteur  $\vec{v}_r$ , comme décrit figure 1.3. Le centre de symétrie  $N$  des lignes d'iso-

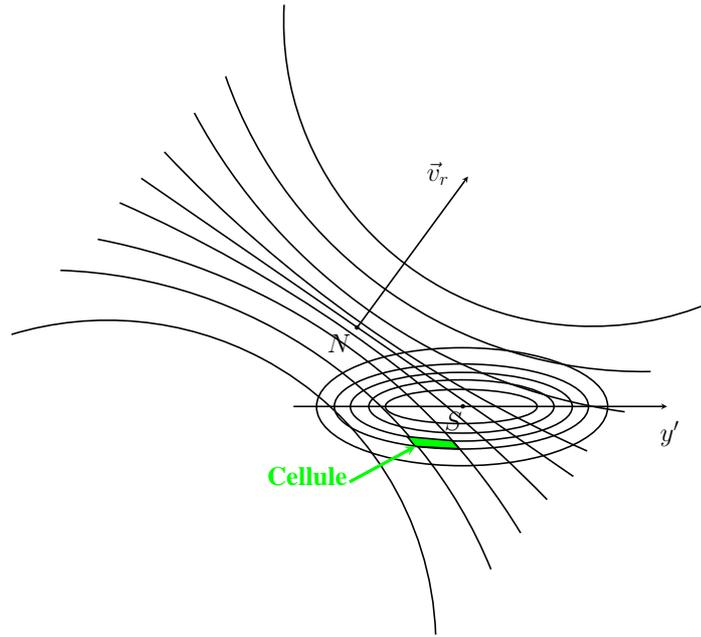


FIGURE 1.3 – Lignes d’iso-distance et d’iso-Doppler au sol

Doppler est défini pour un émetteur à la verticale du récepteur. En effet, le point de réflexion est alors au nadir de l’émetteur et du récepteur et les points  $N$  et  $S$  sont confondus.

### Physique du système

De nombreuses recherches ont été effectuées concernant la puissance du signal réfléchi dans un système radar. Concernant la réflectométrie GNSS, la majorité des travaux actuels se basent sur la modélisation proposée dans [122]. Gleason réécrit cette équation en fonction du délai de code  $\hat{\tau}$  et de la fréquence  $\hat{f}$  sous la forme suivante [42] :

$$A_s(\hat{\tau}, \hat{f}) = \frac{T_I^2 A_e \lambda^2}{4\pi^3} \int \int_A \frac{G_E G_R \sigma^0}{R_E^2 R_R^2} \Lambda^2(\hat{\tau} - \tau) \text{sinc}^2(\hat{f} - f) dA \quad (1.2)$$

avec :

- $A_s$  la puissance du signal réfléchi reçu ;
- $A_e$  la puissance du signal émis ;
- $\lambda$  la longueur d’onde du signal ;
- $A$  la surface de réflexion effective ;
- $G_E$  et  $G_R$  les gains des antennes respectivement émettrice et réceptrice ;
- $\sigma^0$  la surface équivalente radar, qui caractérise la nature et la forme de la surface réfléchissante ;

- $R_E$  et  $R_R$  la distance parcourue respectivement de l'émetteur au point de réflexion et du point de réflexion au récepteur ;
- $T_I$  le temps d'intégration cohérente utilisé (voir section 1.4, ainsi que pour les items suivants) ;
- $\Lambda$  la fonction de corrélation du signal GNSS ;
- $\tau$  le délai de code du signal reçu,  $\hat{\tau}$  étant le délai de code du signal répliqué ;
- $f$  la fréquence du signal reçu,  $\hat{f}$  étant la fréquence du signal répliqué.

L'obtention d'une carte "Delay-Doppler Map" (DDM), qui représente la puissance du signal réfléchi reçu en fonction du délai et de la fréquence du signal, permet d'étudier les propriétés de la permittivité de la surface de réflexion en tout point de la zone de scintillement. La sélection d'un délai et d'une fréquence donnés permet de s'intéresser plus particulièrement à une "cellule" de la carte (cf figure 1.3). En effet, un délai correspond à un écart entre le point de réflexion observé et le point de réflexion spéculaire et une fréquence à une ligne iso-Doppler donnée. L'intersection des deux constitue une cellule. Cette approche est la plus utilisée lorsque le récepteur est embarqué sur un satellite [43] ou sur un avion [89]. Pour les applications au sol, la résolution étant beaucoup plus faible, on s'intéresse uniquement à la réflexion spéculaire [19].

Le paramètre  $\sigma^0$  dépend de nombreuses variables recherchées dans les applications d'observation de la Terre :

$$\sigma^0 = \frac{\pi |\mathfrak{R}|^2 \vec{q}^4}{q_v^4} P \left( -\frac{\vec{q}_h}{q_z} \right) \quad (1.3)$$

avec :

- $\mathfrak{R}$  le coefficient de réflexion de Fresnel ;
- $\vec{q}$  le vecteur unité de diffusion, porté par la bissectrice aux signaux incident et réfléchi ;
- $\vec{q}_h$  et  $\vec{q}_v$  les composantes horizontale et verticale de ce vecteur ;
- $P$  la densité de probabilité de l'inclinaison de la surface.

Le coefficient de réflexion de Fresnel se décompose en composantes de polarisation linéaire horizontale et verticale par [122] :

$$\mathfrak{R}_h = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i}} \quad (1.4)$$

$$\mathfrak{R}_v = \frac{\epsilon_r \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i}}{\epsilon_r \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i}} \quad (1.5)$$

avec  $\epsilon_r$  la permittivité relative de la surface et  $\theta_i$  l'angle d'incidence du signal. La permittivité relative dépend en particulier de la nature de la surface et de la fréquence de l'onde incidente. Pour l'eau de mer, la température et la salinité de l'eau ont une influence qu'on pourra trouver dans [68].

Les signaux GNSS sont émis avec une polarisation circulaire droite (RHCP : Right-Hand Circular Polarization) et les antennes réceptrices GNSS classiques ne sont sensibles qu'aux signaux ayant cette polarisation. Cependant, lorsqu'une réflexion se produit, une partie du signal est renvoyé par la surface en polarisation circulaire gauche (LHCP : Left Hand Circular Polarization), la réflexion faisant de plus perdre de la puissance au signal. Les composantes circulaires du signal réfléchi peuvent être calculées en fonction des composantes linéaires par les formules :

$$\mathfrak{R}_r = \frac{1}{2}(\mathfrak{R}_v + \mathfrak{R}_h) \quad (1.6)$$

$$\mathfrak{R}_l = \frac{1}{2}(\mathfrak{R}_v - \mathfrak{R}_h) \quad (1.7)$$

où  $\mathfrak{R}_r$  est la composante RHCP du coefficient de réflexion et  $\mathfrak{R}_l$  sa composante LHCP. On représente figure 1.4 ces composantes pour une réflexion sur du sable pur et en fonction de la quantité d'eau de mer présente [38, 125, 122]. En pratique, la permittivité apparente, ou constante diélectrique, qui correspond à la partie réelle de  $\epsilon_r$ , prend des valeurs allant de 2.56 à 73.0.

On observe sur cette figure que, quelle que soit l'humidité du sable, la signal est principalement réfléchi en polarisation droite pour de faibles angles d'élévation (réflexion rasante) et qu'il est principalement réfléchi en polarisation gauche pour des angles d'élévation élevés. L'angle pour lequel les coefficients de réflexion en RHCP et en LHCP sont égaux est dit angle de Brewster. On remarquera que l'angle de Brewster est d'autant plus faible que le sable est humide. En particulier, pour une réflexion sur l'eau, cet angle est inférieur à  $10^\circ$ . Il est à noter que les signaux GNSS provenant de satellites à élévation basse présentent un faible rapport signal sur bruit, en raison des caractéristiques des antennes émettrices embarquées dans les satellites [56]. On ne considérera donc généralement que des réflexions de signaux arrivant avec un angle d'élévation supérieur à  $10^\circ$ , c'est-à-dire principalement réfléchis en polarisation LHCP. L'antenne destinée à la réception sera donc en polarisation LHCP, et le maximum de réflexion sera obtenu pour des satellites au zénith du récepteur.

Dans le cadre de l'approximation de Kirchoff, la liaison entre le coefficient de Fresnel LHCP

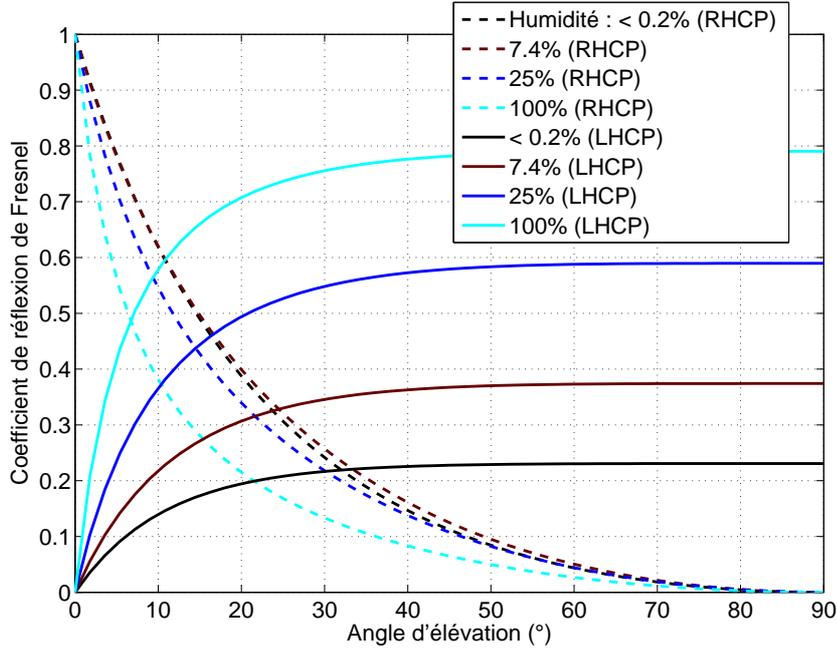


FIGURE 1.4 – Coefficients de réflexion de Fresnel d'une onde GPS-L1

$\mathfrak{R}_l$  et le pourcentage de puissance réfléchi  $\Gamma$  est obtenue par la formule suivante [76] :

$$\Gamma = |\mathfrak{R}_l|^2 \exp(-r_h^2 \cos^2 \theta) \quad (1.8)$$

$$r_h = \frac{4\pi}{\lambda} \sigma_h \quad (1.9)$$

avec  $\sigma_h$  l'écart-type sur la hauteur de la surface. En effet, les variations de hauteur de la surface sont supposées suivre une distribution aléatoire Gaussienne centrée.  $r_h$  est appelé paramètre de rugosité de la surface. On montre sur la partie gauche de la figure 1.5 le pourcentage de puissance réfléchi en polarisation gauche pour des surfaces supposées quasiment planes ( $\sigma_h = 8$  mm) de sable pur et en fonction de la quantité d'eau de mer présente.

Cette figure reflète le comportement du coefficient de réflexion de Fresnel. On remarquera que plus le sol est humide, plus la réflexion est importante. Pour le cas d'une réflexion sur l'eau (et suivant la salinité et la température de celle-ci), les signaux réfléchis considérés présenteront généralement un pourcentage de puissance supérieur à 50% par rapport à la puissance du signal direct.

On montre, dans la partie droite de cette figure, la perte de puissance du signal réfléchi en polarisation LHCP par rapport au signal direct, en décibels (dB). On remarque que les pertes de

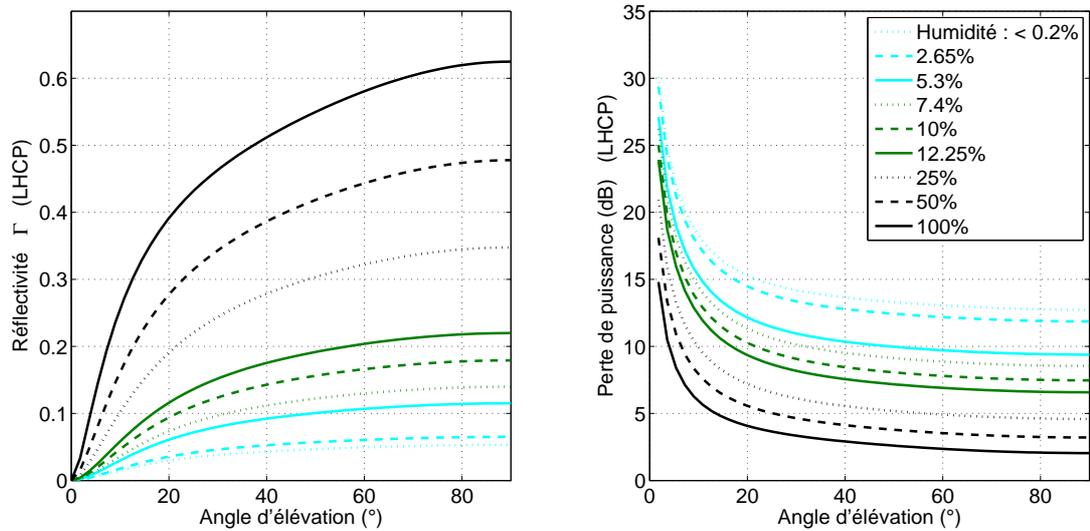


FIGURE 1.5 – Puissance réfléchiée en polarisation LHCP suite à la réflexion d’une onde GPS-L1 sur du sable

puissance sur l’eau sont assez faibles, contrairement aux pertes sur sable sec. Sur sable sec, il est très difficile de traiter un signal GNSS réfléchi. En effet, un récepteur classique peut traiter des signaux dont le rapport signal sur densité de bruit ( $C/N_0$ ) est compris entre 50 dB Hz, dans les meilleurs cas, et 30 dB Hz. Dans le cas de signaux réfléchis sur sable sec, les rapports signal sur bruit correspondants sont compris entre 35 et 15 dB Hz. De tels signaux ne peuvent pas être traités avec un récepteur classique et il est nécessaire d’utiliser des récepteurs dédiés à la réflectométrie, qui utilisent les informations disponibles sur le signal direct pour extraire les informations du signal réfléchi.

## 1.2.2 Applications de la réflectométrie GNSS

De nombreuses applications d’observation de la Terre ont été développées suite aux premiers travaux de Martin-Neira destinés à l’altimétrie des océans. Les possibilités varient selon le positionnement du récepteur dans l’espace, dans un avion ou à proximité du sol.

### Altimétrie

La première application historique de la réflectométrie GNSS est l’étude de la hauteur de la surface de réflexion. Le système GPS reposant sur le système géodésique WGS 84, les hauteurs mesurées sont généralement calculées par rapport à cet ellipsoïde de référence. Quelle que soit la position du récepteur et par suite la taille de la surface de réflexion observée, les travaux publiés portent uniquement sur la recherche de la hauteur du point de réflexion spéculaire [93]. Par

ailleurs, l'altimétrie n'est appliquée qu'à des surfaces plates fortement réfléchissantes, telles que l'eau [46] ou la glace lisse [33]. Pour un récepteur statique et proche de la surface de réflexion, l'altimétrie a également été appliquée sur le sol [90]. En effet, dans ce cas, l'intégration longue du signal réfléchi permet d'extraire les informations qu'il contient. Les détails de l'application d'altimétrie pour un récepteur proche du sol seront abordés section 1.3.

## État de mer

La caractérisation de la surface des mers ou océans en termes de hauteurs de vagues et par suite l'obtention de la direction et de la vitesse des vents marins fut la seconde application de la réflectométrie GNSS [39, 40]. On observe pour cette application la diffusion du signal sur les vagues à l'intérieur de la surface de réflectométrie. Généralement, on cherche à réaliser cette étude sur une zone assez étendue à l'aide de DDM, et donc avec un récepteur placé dans un avion ou un satellite. Cependant, les courants locaux ont également été étudiés à l'aide d'un récepteur placé au sol [102]. La diffusion du signal sur la surface rendue rugueuse par les vagues induit des modifications aussi bien de délai que de Doppler du signal réfléchi [31].

## Détection de tsunamis

Une application porteuse de la réflectométrie GNSS voisine de l'étude d'état de mer est la détection de tsunamis [110]. Il ne s'agit pas ici de prédire l'apparition future d'un tsunami mais de le détecter et de mesurer son importance avec une grande rapidité pour réduire la gravité de ses conséquences sur les zones côtières. Cette application nécessite une grande résolution et donc un récepteur embarqué dans un satellite. C'est la technique radar la plus adaptée dans cette application de surveillance de la Terre car la couverture satellitaire est permanente. En plus de l'estimation directe de la hauteur de vagues, il est possible de détecter la présence d'un tsunami en étudiant les perturbations ionosphériques qu'il génère à l'aide de signaux GNSS [3].

## Humidité des sols

La réflectométrie GNSS est perçue comme un excellent outil pour mesurer le taux d'humidité des sols. En effet, la bande de fréquence allouée aux signaux GNSS est entièrement comprise dans la bande de fréquence considérée optimale pour l'observation de l'humidité des sols [80], à savoir entre 1 et 3 GHz. Les signaux se trouvant dans cette bande fréquentielle peuvent pénétrer les sols jusqu'à une profondeur de 5 centimètres. L'étude de l'humidité des sols par réflectométrie GNSS s'est fortement développée dans les années 2000 [75]. Là encore, l'antenne réceptrice peut aussi bien être positionnée au sol [63], embarquée dans un avion [76]

ou dans un satellite [43]. La plupart des travaux effectués ont détecté des écarts de taux d'humidité suite à des journées de pluie ou des périodes sèches, sans permettre cependant d'obtenir une estimation absolue du taux d'humidité du sol. Les obstacles pour obtenir ce résultat absolu sont la sensibilité du signal à la présence de végétation et à la rugosité du sol [30], ainsi que les difficultés à obtenir une mesure précise de l'amplitude du signal reçu à partir de la puissance du signal GNSS [14]. En effet, l'estimation du taux d'humidité est produite à partir des équations 1.2 à 1.5 liant la permittivité du sol, dépendante du taux d'humidité, à la puissance du signal réfléchi.

### **Salinité, évolution de la banquise**

De manière comparable à la dépendance permittivité/humidité des sols, la permittivité des eaux dépend de leur salinité et de leur température [101]. Quelques études ont ainsi porté sur la salinité des océans par réflectométrie GNSS [94]. Cette application est cependant plus complexe à mettre en œuvre que les applications d'altimétrie ou d'état de mer [101] car elle nécessite des modèles de terrain pour une estimation exploitable de la salinité des océans et de la permittivité des sols. Des études concernant la couverture de la banquise et l'âge des glaces ont également été menées [10]. La distinction entre les zones glacées ou non des océans est obtenue en étudiant la température de la surface réfléchissante.

### **Hauteur des couches de neige**

Des travaux de caractérisation des couches supérieures de neige par réflectométrie GNSS ont également été proposés [118, 13]. Les signaux GNSS pénètrent en effet la neige jusqu'à une profondeur de quelques mètres en étant réfléchi partiellement par chaque couche de neige rencontrée. Les délais de chaque composante résultante dans le signal réfléchi permettent de modéliser la profondeur de chaque couche [32].

Des données de réflectométrie GPS pour un récepteur embarqué dans un avion et un récepteur au sol peuvent être trouvées dans [20].

### **1.2.3 Systèmes classiques d'observation de la Terre**

L'observation de la Terre par réflectométrie GNSS est complémentaire de bon nombre d'autres systèmes existants pour des applications voisines ou identiques. De nombreux satellites porteurs de radars monostatiques et actifs ont été lancés depuis les années 1970 pour améliorer les performances d'observations de la Terre. Les avions sont également porteurs de nombreux

radars, en particulier pour leur positionnement, mais aussi pour des applications d'observation de la Terre. Parmi ces radars, on retrouve :

- des radars à synthèse d'ouverture (SAR), qui fournissent des images en 2 dimensions du sol. Ils peuvent être utilisés à plusieurs dans un rôle d'interféromètre pour fournir une reconstruction en 3 dimensions. Ces radars à visée latérale fonctionnent en traitant les images d'une même zone obtenues successivement pendant le déplacement du porteur ;
- des altimètres radar, pour estimer les hauteurs, se basent sur le délai de parcours du signal entre son émission et sa réception ;
- des diffusiomètres, qui étudient la forme du signal après réflexion pour estimer les variations de la surface de réflexion ;
- des LIDAR (LIght Detection And Ranging), dont le principe est celui d'un altimètre radar, mais utilisant les bandes fréquentielles du visible ou de l'infrarouge.

Ces radars fonctionnent avec des signaux de fréquences différentes selon les applications. Ils sont souvent accompagnés d'autres instruments de télédétection pour l'observation de la Terre. Ces instruments passifs (n'émettant pas de signaux) sont généralement des radiomètres, qui mesurent l'intensité du rayonnement électromagnétique de la surface terrestre, des imageurs stéréographiques permettant de créer une image en 3 dimensions de la zone observée, des spectromètres décomposant une onde observée (lumière, infrarouges, ...) en fréquences, permettant par exemple la surveillance de la couche d'ozone, ou des sondes aérologiques permettant de mesurer la température ou l'humidité de l'atmosphère.

Parmi les satellites d'observation de la Terre, on peut nommer :

- la série des GOES (Geostationary Operational Environmental Satellite) américains qui depuis 1976 fournissent les données météorologiques des Etats-Unis. Aucun élément radar n'est cependant embarqué dans ces satellites ;
- au contraire, le satellite américain Seasat, lancé en 1978, comportait aussi bien un SAR qu'un altimètre et un diffusiomètre. Ce satellite n'a cependant fonctionné que 108 jours ;
- le satellite TOPEX/POSEIDON, fonctionnel de 1992 à 2005 et ses successeurs du type JASON, lancés en 2001 et 2008, sont dédiés à l'altimétrie radar monostatique. Ces satellites ont été développés en partenariat par la NASA et le CNES ;
- l'altimétrie est également le rôle des satellites américains Geosat et Geosat Follow-On lancés respectivement en 1985 et 1998 ;
- les deux satellites ERS (European Remote-Sensing Satellites) de l'Agence Spatiale Européenne (ESA), lancés en 1991 et 1995, embarquent des altimètres, des SAR, des radiomètres, des diffusiomètres, des sondes et des spectromètres. Ces satellites sont complétés

ou remplacés par les satellites ENVISAT (lancement en 2002), MetOp (lancements en 2006, 2012 et 2017) et Sentinelle (famille de 6 satellites lancés à partir de 2013), qui sont tous équipés d'instruments semblables ;

- Cryosat pour l'Union Européenne (2005) et ICESat (2003) pour les Etats-Unis sont quant à elles des familles de satellites dédiées à la surveillance de la banquise par SAR ou par LIDAR ;
- Le satellite SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity satellite), lancé par l'ESA en 2009, utilise un radiomètre interféromètre pour déterminer le taux d'humidité des sols et la salinité des océans. Pour cette dernière application, l'Argentine a également mis en orbite un satellite du nom d'Aquarius en 2011.

L'observation de la Terre peut également se faire localement au sol. Par exemple, la hauteur des eaux peut être mesurée à l'aide de jauges.

#### 1.2.4 Missions satellitaires d'observation de la Terre par GNSS-R

Plusieurs projets de missions d'observation de la Terre à l'aide de systèmes radars bistatiques GNSS emportés dans des satellites ont été développés pendant les deux dernières décennies. Le premier d'entre eux fut le système PARIS (PASSive Reflectometry and Interferometry System) proposé par Martin-Neira en 1993 [72]. Un satellite de démonstration, le PARIS In-orbit Demonstrator (PARIS IoD), est en cours de développement pour expérimenter et évaluer les performances de ce système dans l'espace [74]. En revanche, des expérimentations utilisant ce principe avec un récepteur placé au sol ou dans un avion ont été réalisées.

La première observation depuis l'espace d'un signal GNSS réfléchi à la surface de la Terre fut réalisée fortuitement par le radar SIR-C de la NASA en 1994, puis présentée en 2002 [67]. Cependant, la première mission satellitaire dédiée au GNSS-R ne démarra qu'en 2003 lors du lancement du satellite UK-DMC (United Kingdom - Disaster Monitoring Constellation) du Royaume-Uni [42]. Les objectifs étaient de démontrer qu'un satellite en orbite terrestre basse peut observer des signaux GNSS réfléchis par les océans, les sols, la glace, avec de grandes variétés de types de surfaces (en termes de rugosité, température ou végétation), et de démontrer le potentiel de la réflectométrie GNSS-R pour les applications d'état de mer et vitesses de vents et d'humidité des sols.

Une nouvelle mission satellitaire GNSS-R à venir devrait prendre la forme d'une constellation de 8 nanosatellites en orbite terrestre basse sous le nom de CYGNSS (CYclone Global

Navigation Satellite System) [92]. L'objet de cette mission est d'étudier et modéliser l'œil des cyclones tropicaux par diffusiométrie GNSS.

## 1.3 Cas de l'altimétrie au sol

Les travaux réalisés durant cette thèse dans le domaine du traitement du signal seront appliqués à l'estimation de la hauteur de plans d'eau par réflectométrie GNSS au sol. Cette application a été explorée au sein de nombreux travaux de recherche et les méthodes de traitement du signal pour la résolution du système géométrique sont multiples. Le système peut comporter une seule antenne réceptrice pour les signaux direct et réfléchi ou deux antennes réceptrices différentes. On considérera ici une position d'antenne unique. Dans le cas de deux antennes, leurs positions relatives doivent être connues pour permettre les corrections géométriques liées à cette considération. De plus, ces deux antennes seront suffisamment proches pour que les effets ionosphériques et troposphériques pouvant affecter le signal GNSS direct soient identiques pour le signal réfléchi.

### 1.3.1 Géométrie du système au sol

La géométrie du système est présentée figure 1.6. Dans l'application au sol, la rotondité de la Terre n'est pas prise en compte. Les signaux directs et réfléchis en provenance du satellite sont considérés parallèles lors de leur descente vers le sol, les distances du satellite au sol et à l'antenne étant largement plus grandes que la distance du point de réflexion spéculaire à l'antenne. La surface de réflexion est considérée perpendiculaire à la verticale passant par l'antenne, ce qui est *a priori* le cas pour une réflexion sur l'eau.

Dans ces conditions, la différence de trajet entre le signal réfléchi et le signal direct est la distance  $\Delta d$  telle qu'indiquée sur la figure. Il s'agit de la distance du point de réflexion spéculaire  $S$  à la position de l'antenne réceptrice  $R$ , à laquelle on ôte la distance  $a$  de  $R$  à la projection orthogonale de  $S$  sur le chemin du signal direct. De plus, l'angle d'élévation du satellite  $\theta_e$  est le même au point spéculaire de réflexion qu'au niveau de l'antenne réceptrice. On a donc :

$$\sin \theta_e = \frac{H + h}{RS} \quad (1.10)$$

$$\cos 2\theta_e = \frac{RS - \Delta d}{RS} \quad (1.11)$$

$H$  et  $h$  étant la hauteur respectivement de l'antenne réceptrice par rapport au sol et du sol

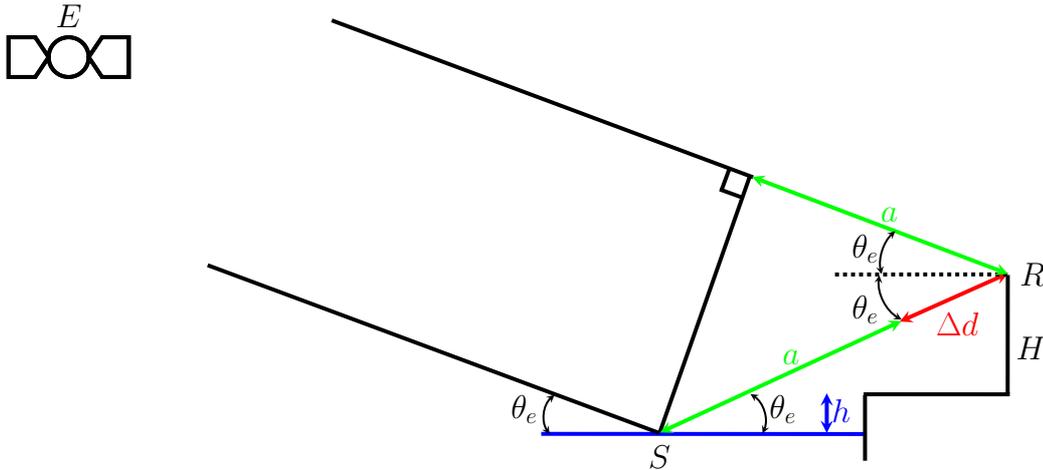


FIGURE 1.6 – Géométrie d'un système d'altimétrie au sol

par rapport au niveau de l'eau. On obtient la différence de trajet en fonction de la hauteur d'antenne par rapport à la surface de réflexion  $H + h$  et de l'angle d'élévation par simplification trigonométrique :

$$\Delta d = RS (1 - \cos 2\theta_e) \quad (1.12)$$

$$= \frac{H + h}{\sin \theta_e} (1 - \cos 2\theta_e) \quad (1.13)$$

$$= 2(H + h) \sin \theta_e \quad (1.14)$$

Les différentes approches d'altimétrie ont pour but de résoudre cette dernière formule.

### 1.3.2 Différentes approches

Dans toutes les approches présentées dans ce paragraphe, la connaissance précise de la position de l'antenne réceptrice et de l'angle d'élévation est nécessaire à la résolution du système géométrique. Les méthodes d'estimation de ces deux paramètres sont indépendantes du principe de réflectométrie, et seront présentées dans la section 1.4.3 pour le positionnement par GPS.

#### Interférométrie des signaux

La méthode proposée originellement par Martin-Neira pour un récepteur dans l'espace [72], expérimentée par la suite au sol [88], est indépendante de la structure des signaux observés. Il s'agit ici de capter les signaux direct et réfléchi en provenance d'un seul satellite. Pour cela, on utilise une antenne directionnelle, dont l'orientation peut être modifiée au cours du temps

pour viser différents satellites successivement. Il est également possible d'utiliser une antenne multi-lobes pour séparer les signaux provenant de différents satellites.

Le traitement d'interférométrie consiste ensuite à affecter un décalage temporel variable au signal direct et à le comparer au signal réfléchi par corrélation (cf section 1.4.2). Le décalage pour lequel la corrélation atteint son maximum correspond théoriquement à la différence entre le trajet du signal direct et celui du signal réfléchi. On montre figure 1.7 le résultat d'une corrélation entre signaux direct et réfléchi.

Cette méthode peut être appliquée en utilisant des signaux d'opportunité autres que les signaux GNSS, tels que les signaux de télécommunication, dont la puissance est plus élevée [98]. Dans ce cas, c'est le signal numérique porté qui prend le rôle de code pseudo-aléatoire. Les limitations sont alors la nécessité de positionner précisément l'antenne réceptrice et de connaître l'angle d'élévation du satellite observé (on peut utiliser pour cela des satellites géostationnaires). En effet, cela est nécessaire à la fois pour diriger l'antenne directionnelle vers l'impact au sol du satellite observé et pour résoudre la géométrie du système. Par ailleurs, lorsqu'un second satellite entre dans la zone de visibilité déterminée par la directivité de l'antenne, les délais caractérisant les réflexions ne sont pas nécessairement les mêmes pour les deux signaux satellitaires. Dans ce cas, les performances de cette méthode se dégradent car le nombre de pics observés dans la corrélation augmente et leur amplitude diminue. Il devient alors difficile de les détecter et de les associer aux différents satellites visibles.

### **Interférométrie des codes réfléchis observé et modélisé**

Cette approche est utilisée dans l'ensemble des applications de réflectométrie pour un récepteur dans l'espace [67, 42] ou dans un avion [40]. Elle consiste à modéliser la réflexion du signal selon l'équation 1.2 à partir du signal direct. Le modèle ainsi construit par le récepteur est ensuite comparé au signal réfléchi reçu par l'antenne. On peut utiliser pour cette application des antennes omnidirectionnelles pour les signaux directs et réfléchis. En effet, contrairement à la méthode précédente, cette méthode permet de séparer les signaux issus des différents satellites par leurs codes pseudo-aléatoires.

Cependant, les déformations communes pouvant affecter les signaux direct et réfléchi (telles que celles produites par la troposphère et l'ionosphère) sont difficilement toutes observées dans le signal direct et correctement modélisées dans le signal généré par le récepteur. Cela implique une perte de précision sur les paramètres estimés. À l'inverse, dans le cadre de l'interférométrie

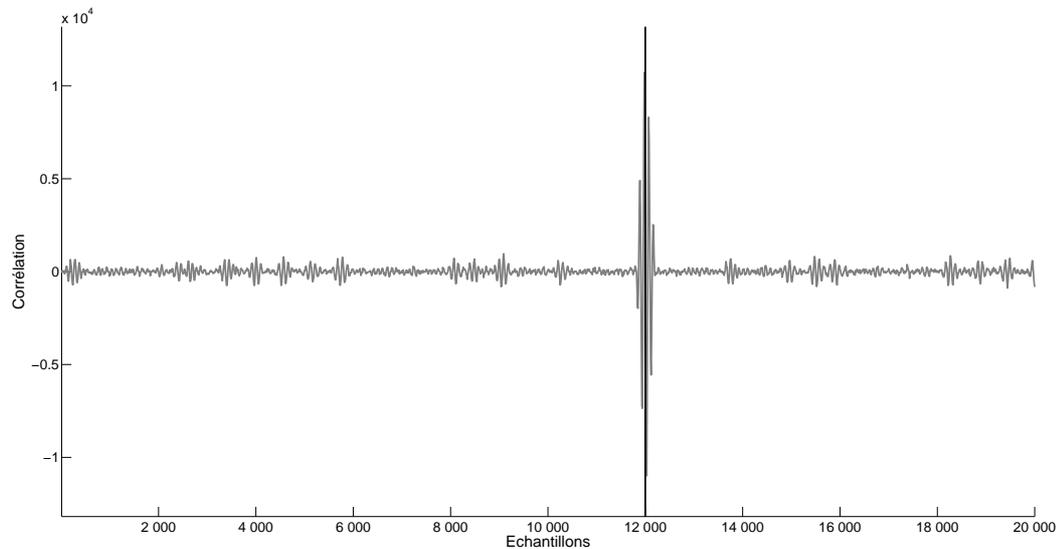


FIGURE 1.7 – Résultat de corrélation dans le cadre d’une interférométrie des signaux

des signaux, qui compare directement les signaux direct et réfléchi, ce type de perte de précision est évité. Par ailleurs, la méthode précédente permet d’utiliser la composante militaire du signal GNSS, dont le code n’est pas public et donc non modélisable.

Pour les applications d’altimétrie, on s’intéresse plus particulièrement aux codes contenus dans les signaux GNSS [76]. On montre figure 1.8 le code GPS d’un signal satellitaire reçu en direct (en haut) et après réflexion (en bas). On remarquera que ces deux codes, au bruit près, sont translatés temporellement. Le signal direct et le signal réfléchi sont ainsi affectés de délais de code différents (voir 1.4.2), proportionnellement à la différence de trajet  $\Delta d$ , qui peut atteindre 300 km (période spatiale du code).

### Différence de phase

L’utilisation de la phase du signal est considérée comme la technique la plus précise lorsque le récepteur est proche du sol [113]. En effet, la phase du signal GPS peut théoriquement fournir une précision subcentimétrique, à mettre en comparaison avec une précision décimétrique à métrique pour le délai de code. Cela est dû d’une part à la continuité des valeurs de phase, qui permet une mesure continue du décalage entre les signaux, tandis que le délai de code est stationnaire par morceaux, mais également à la bande passante limitée du code (cf section 1.4.3). Lorsque le récepteur est éloigné du sol, l’étendue de la zone de scintillement implique une incohérence de la phase. Celle-ci est moyennée sur des hauteurs d’eau différentes et affectée par

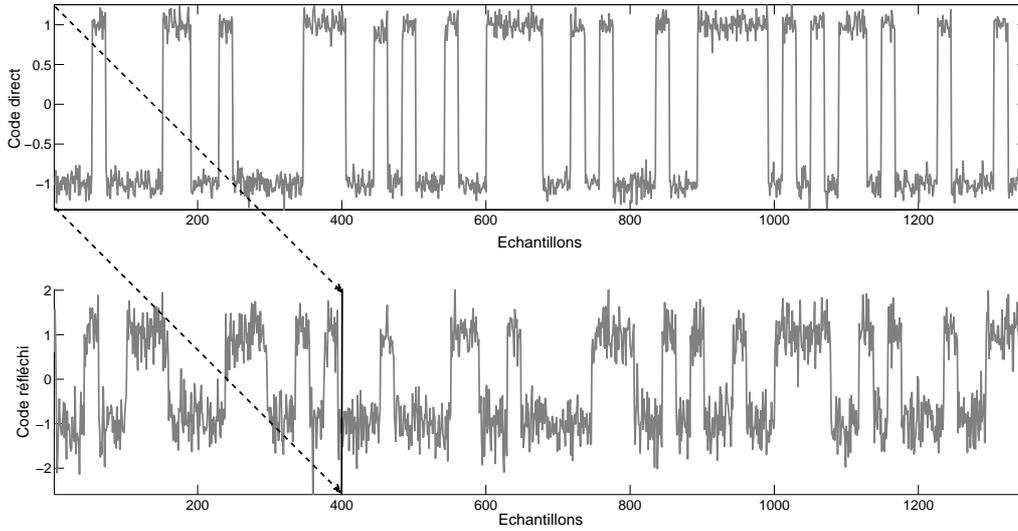


FIGURE 1.8 – Codes GNSS direct et réfléchi

les déformations du sol sur cette zone. C'est pourquoi la phase n'est pas utilisée dans les applications aéroportées ou embarquées dans un satellite.

Cette méthode, comme la précédente, utilise deux antennes omnidirectionnelles différentes pour les signaux direct et réfléchi. La différence de phase  $\Delta\theta$  entre les deux signaux est proportionnelle à la différence de trajet :

$$\Delta\theta \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \Delta d [2\pi] \quad (1.15)$$

avec  $\lambda$  la longueur d'onde du signal, de 19.03 cm pour le système GPS par exemple. Ainsi, cette formule ne permet d'estimer que des différences de trajets inférieures à 19 centimètres. Cette formule seule ne peut résoudre le système géométrique que dans le cas où la hauteur de la surface de réflexion à l'antenne est inférieure à quelques dizaines de centimètres. Dans le cas contraire, il est nécessaire de résoudre l'ambiguïté de phase, qui correspond au nombre de cycles  $[0; 2\pi[$  accumulés par la phase dans chaque signal. On peut également procéder à un calcul de hauteur différentiel en laissant l'angle d'élévation du satellite varier au cours du temps [33, 96]. En effet, si l'on considère deux instant  $t_1$  et  $t_2$  entre lesquels la phase a été estimée continuellement, c'est-à-dire sans saut de cycle, on obtient :

$$\Delta\theta_{t_2} - \Delta\theta_{t_1} = \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta d_{t_2} - \Delta d_{t_1}) + 2(k_{t_2} - k_{t_1})\pi \quad (1.16)$$

où  $k_{t_1}$  et  $k_{t_2}$  représentent les ambiguïtés de phase aux instants considérés, dont la différence  $k_{t_2} - k_{t_1}$  est déterminée par la poursuite de la phase. D'après l'équation 1.14, on a alors :

$$2(H+h)(\sin\theta_{e,t_2} - \sin\theta_{e,t_1}) = (\Delta\theta_{t_2} - \Delta\theta_{t_1} - 2(k_{t_2} - k_{t_1})\pi) \frac{\lambda}{2\pi} \quad (1.17)$$

Dans ce cas, pour obtenir une mesure altimétrique précise, il est nécessaire d'enregistrer le signal pendant plusieurs heures pour que la différence  $\sin\theta_{e,t_2} - \sin\theta_{e,t_1}$  entre les sinus des angles d'élévation soit élevée.

On montre figure 1.9 les phases d'un signal direct et d'un signal réfléchi. La phase du signal réfléchi est plus bruitée que la phase du signal direct. De plus, elle est décalée du déphasage résiduel  $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta d$  et d'un nombre inconnu de périodes correspondantes à l'ambiguïté.

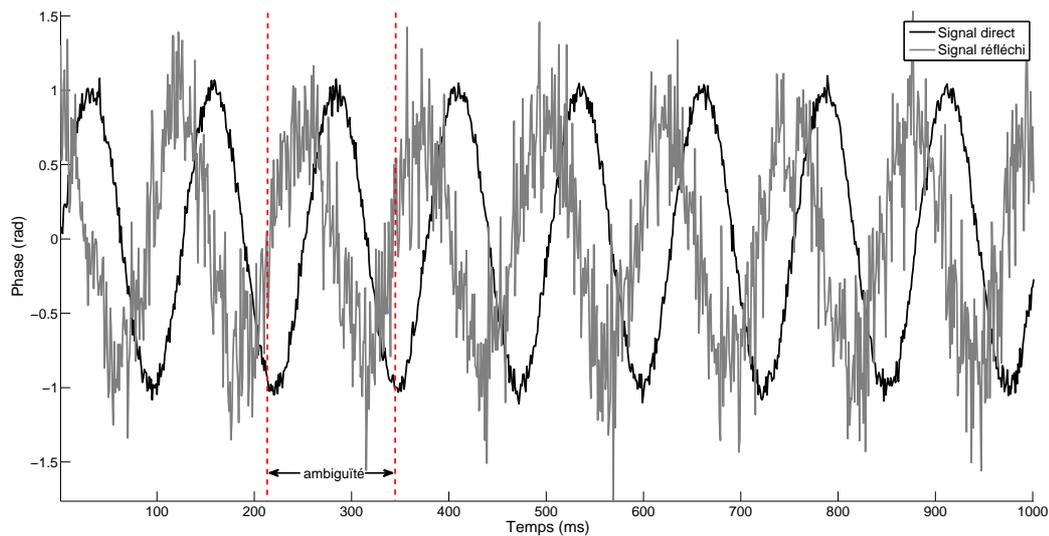


FIGURE 1.9 – Phases GNSS des signaux direct et réfléchi

### Oscillations d'amplitude

Une dernière méthode consiste à intégrer les signaux direct et réfléchi en un signal composite, en n'utilisant qu'une seule antenne ou en sommant les signaux obtenus par les deux antennes. On observe alors la fréquence d'oscillation de l'amplitude du signal résultant. En effet, on montre que l'amplitude de ce signal est affectée par la différence de phase entre les deux

signaux direct et réfléchi de la manière suivante [63] :

$$A_s = \sqrt{A_d^2 + A_r^2 + 2A_dA_r \cos \Delta\theta} \quad (1.18)$$

avec  $A_s$ ,  $A_d$  et  $A_r$  les puissances des signaux respectivement composite, direct et réfléchi. Avec les équations 1.14 et 1.15, on montre par ailleurs que :

$$\Delta\theta \equiv 4\pi\lambda(H+h)\sin\theta_e[2\pi] \quad (1.19)$$

L'angle d'élévation, et par suite son sinus, changent au cours du temps, on peut noter  $t = \sin\theta_e$ . L'amplitude du signal composite varie donc au cours du temps à une fréquence fonction de la hauteur :

$$A_s = \sqrt{A_d^2 + A_r^2 + 2A_dA_r \cos(4\pi\lambda(H+h)t)} \quad (1.20)$$

L'observation de la fréquence d'oscillation du signal composite permet ainsi de déterminer la hauteur de l'antenne à la surface de réflexion. Cette méthode ne nécessite pas de résoudre d'ambiguïté sur les valeurs de phase, mais ici encore, il est nécessaire de laisser évoluer l'angle d'élévation et donc d'enregistrer plusieurs heures de signaux pour pouvoir pratiquer une altimétrie précise. Au cours du temps, la puissance du signal change, car elle est soumise à des effets indépendants de l'application d'altimétrie, comme l'intercorrélation entre les signaux des satellites visibles [14]. Ces effets rendent l'estimation de la fréquence d'oscillation moins précise. Par ailleurs, les résultats parus dans la littérature pour cette méthode [63, 62] n'ont pas encore atteint les performances obtenues par la méthode de différence de phase [113, 73].

## 1.4 Traitements des signaux pour la réflectométrie GPS

Cette thèse sera appliquée à la réflectométrie par signaux GPS L1. Ainsi, on ne décrira pas ici les structures et traitements des autres signaux GNSS actuellement disponibles ou en cours de développement.

### 1.4.1 Structure du signal

#### Signal émis

Les signaux civil et militaire consistent en un message binaire commun comportant les informations de navigation, multiplexés par deux codes binaires différents et modulés par une porteuse sinusoïdale commune. Ainsi, le signal émis par les satellites GPS à la fréquence L1 a

la forme suivante [56] :

$$S_e(t) = A_e d(t) C/A(t) \sin(2\pi f_1 t) + \frac{A_e}{\sqrt{2}} d(t) P(t) \cos(2\pi f_1 t) \quad (1.21)$$

avec :

- $C/A(t)$  le code pseudo-aléatoire civil Coarse/Acquisition cadencé à 1.023 MHz ;
- $P(t)$  le code pseudo-aléatoire militaire Precision cadencé à 10.23 MHz ;
- $d(t)$  le message de navigation cadencé à 50 bit/s ;
- $A_e$  la puissance d'émission de référence ;
- $f_1$  la fréquence de la porteuse  $L_1$ , à savoir 1575.42 MHz.

Chaque satellite GPS dispose de ses propres codes binaires  $C/A$  et  $P$ . Ces codes permettent (code civil public) ou restreignent (code militaire secret) l'accès aux informations de navigation portées dans le message  $d$  et l'identification des satellites émetteurs. On parle de technique CDMA (Code Division Multiple Access), en opposition par exemple à la méthode FDMA (Frequency Division Multiple Access) où c'est la fréquence porteuse du signal qui permet de reconnaître le satellite émetteur. On ne s'intéressera pas ici à la partie du signal réservée aux militaires américains.

Le code  $C/A$  d'un satellite est généré suivant la somme logique binaire des sorties de deux registres à décalage de code, comme présenté figure 1.10 [50]. La longueur des codes ainsi générés est de 1023 bits, soit une milliseconde.

Ces codes sont choisis pour leur forte orthogonalité : l'intercorrélacion entre les codes ainsi générés est très faible. De plus, l'autocorrélacion d'un code est très discriminante en matière de décalage temporel. La corrélation de deux signaux  $X_1$  et  $X_2$  de période  $T$  est définie sur cette période par :

$$R(\tau) = \left| \frac{1}{T} \int_0^T X_1(t) X_2(t + \tau) dt \right| \quad (1.22)$$

avec  $\tau$  un décalage temporel compris entre 0 et  $T$ . L'autocorrélacion d'un signal est quant à elle :

$$\Lambda(\tau) = \left| \frac{1}{T} \int_0^T X_1(t) X_1(t + \tau) dt \right| \quad (1.23)$$

Ainsi, avec  $\tau \in [0; 1023]$  bits, pour deux codes  $C/A$  différents, on aura  $R(\tau) \approx 0$  pour toute valeur de  $\tau$ . Pour deux codes  $C/A$  identiques, on aura  $\Lambda(\tau)$  élevé pour  $\tau = 0$  et proche de 0 pour tout autre valeur de  $\tau$ , comme indiqué figure 1.11.

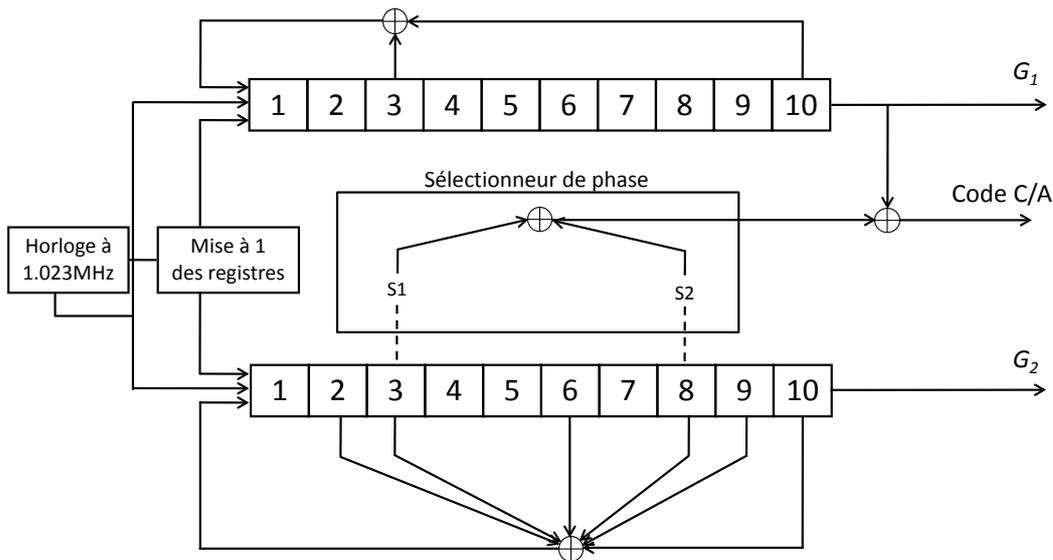


FIGURE 1.10 – Registre générateur des codes C/A

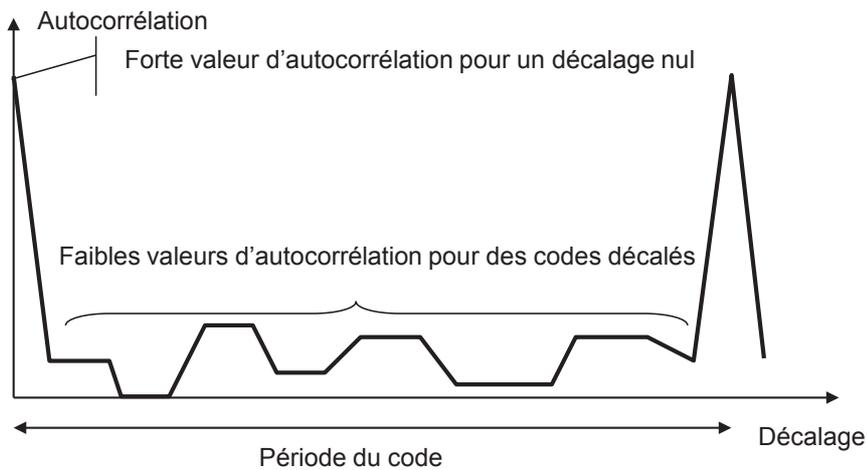


FIGURE 1.11 – Fonction d'autocorrélation d'un code C/A

Les informations de navigation sont contenues dans le message de navigation, dont chaque bit dure 20 millisecondes, s'étalant donc sur 20 périodes de codes. Il transporte des informations de datation de l'émission du signal, de positionnement du satellite émetteur (éphémérides) et de positionnement approché des autres satellites GPS (almanachs). Il transporte également des informations de correction d'horloge pour la datation précise du signal et des informations de corrections ionosphériques. Ces informations permettent de modéliser l'état de la ionosphère terrestre, qui affecte la propagation du signal. La structure complète du message de navigation

est fournie dans le document de spécification [50]. La transmission de toutes ces informations dure 12 minutes et 30 secondes avant qu'un nouveau message ne commence. Toutes les 6 secondes, une succession de bits appelée TLM (TeLeMetry word, 10001011) est transmise pour permettre au récepteur au sol de se synchroniser. Le TLM est suivi d'informations de datation qui permettent de retrouver l'heure d'émission de chaque code  $C/A$ .

### Signal reçu

Pendant son trajet direct jusqu'au récepteur, le signal GPS subit des modifications et perd de sa puissance. La composante civile du signal en sortie d'antenne réceptrice peut être modélisée dans le domaine temporel par :

$$S_r(t) = \sum_{s \in S} A_s(t) n_s(t) C/A_s(t + \tau_s) \sin(2\pi f_{s_0}(t)t + \theta_s(t)) + \nu_{s_0}(t) \quad (1.24)$$

avec :

- $s \in S$  définissant un satellite dans l'ensemble  $S$  des satellites visibles ;
- $A_s$  la puissance du signal reçu ;
- $n_s$  le message reçu, décalé dans le temps par rapport au message envoyé  $d$  ;
- $\tau_s$  le décalage de code ;
- $f_{s_0}$  la fréquence du signal reçu ;
- $\theta_s$  la phase du signal reçu ;
- $\nu_{s_0}$  le bruit sur le signal, comprenant ici les perturbations dues à la propagation du signal, à sa réception par l'antenne, mais également la partie militaire du signal.

$\nu_s$  est modélisé par un bruit blanc gaussien centré. Le décalage  $\tau_s$  correspond à l'intervalle de temps entre la réception du premier bit de code et le début d'une période de code, inférieur donc à une milliseconde. La fréquence de réception  $f_{s_0}$  diffère de la fréquence d'émission  $f_1$  du fait de l'effet Doppler. Il s'agit de la variation de fréquence associée au mouvement relatif émetteur-récepteur.  $\theta_s$ , le délai de phase, à la manière de  $\tau_s$ , le délai de code, dépend de l'instant de réception du signal, et appartient à  $[-\pi; \pi]$ .

On estime la qualité du signal reçu par la mesure de rapport signal sur densité de bruit  $C/N_0$ , en dB Hz par la formule suivante :

$$C/N_0 = 20 \log_{10} \left( \frac{\bar{\Lambda}(\tau_s)}{\sigma_{\Lambda}(\tau_s)} \right) - 10 \log_{10}(T_I) \quad (1.25)$$

où  $\bar{\Lambda}(\tau_s)$  est la moyenne de la fonction d'autocorrélation en son maximum et  $\sigma_{\Lambda(\tau_s)}$  est son écart-type, qui définit le niveau de bruit.  $T_I$  est la durée d'intégration cohérente du signal. La fonction de  $T_I$  dans cette formule est de normaliser le rapport obtenu. En effet, lorsque le temps d'intégration augmente, l'écart-type  $\sigma_{\Lambda(\tau_s)}$  diminue. Le rapport  $C/N_0$  est ainsi une mesure de la puissance du signal reçu indépendante du temps d'intégration utilisé par le récepteur.

Il est à noter que le signal est converti par le récepteur du domaine analogique au domaine numérique en vue d'être traité. Cette conversion se traduit d'abord par une descente en fréquence porteuse. Le signal est pour cela multiplié par un signal sinusoïdal, généré par l'oscillateur local, de fréquence  $f_{OL}$  proche de  $f_1$ . Le signal résultant se trouve à une fréquence dite intermédiaire  $f_s = f_{s_0} - f_{OL}$  permettant de procéder ensuite à son échantillonnage dans le respect du théorème de Shannon-Nyquist, c'est-à-dire telle que  $f_e > 2f_s$ . La fréquence d'échantillonnage  $f_e$  utilisée correspond à la résolution temporelle avec laquelle le signal pourra être traité et observé. Lors de la conversion, le signal est également quantifié sur un nombre de bits fixe. Plus le nombre de bits utilisé est important, plus des variations de faible amplitude du signal seront visibles. Ces paramètres ont ainsi une influence sur la précision obtenue par positionnement GPS. Le signal civil numérique traité par le récepteur a la forme suivante :

$$S_r(n) = \sum_{s \in S} A_s(n) n_s(n) C/A_s(n + \tau_s) \sin(2\pi f_s(n) t_n + \theta_s(n)) + \nu_s(n) \quad (1.26)$$

avec  $n$  l'échantillon de signal considéré et  $t_n$  l'indice de temps correspondant à cet échantillon.

## 1.4.2 Architectures de traitement

Pour pouvoir déterminer les valeurs du message de navigation, le récepteur doit démoduler le signal en fréquence et démultiplexer son code. Pour cela, il est nécessaire d'identifier le satellite observé  $s$ , d'estimer la fréquence  $f_s$ , le décalage de code  $\tau_s$  et la phase  $\theta_s$  du signal. Le récepteur initialise ces paramètres dans une étape d'acquisition puis estime leurs variations au cours du temps dans une étape de poursuite. On présentera ici succinctement ces deux étapes. L'acquisition et la poursuite des signaux GPS font l'objet de nombreux livres et thèses, dans lesquels on pourra obtenir plus de détails sur ces traitements. Les livres de référence sont [56, 83], nous utilisons plus particulièrement les modèles présentés dans [124] et l'on pourra se rapporter aux thèses [15, 4] pour plus de détails sur l'implémentation logicielle privilégiée au LISIC.

### Acquisition du signal

L'acquisition utilise le principe de corrélation de deux signaux pour identifier les satellites visibles et estimer le délai de code et la fréquence de chaque signal satellitaire reçu. Le récepteur calcule ainsi pour chaque satellite  $s$  la corrélation entre le signal reçu échantillonné et un signal répliqué échantillonné sous la forme  $C/A_s(n + \hat{\tau}_s) \sin(2\pi \hat{f}_s t_n)$  avec  $\hat{\tau}_s$  variant sur un ensemble des valeurs de décalage de code testées, en échantillons.  $\hat{f}_s$  varie autour de la fréquence porteuse GPS descendue en fréquence sur un intervalle fonction de l'application, qui définit le Doppler maximum possible. La corrélation obtenue sur ces deux dimensions prend classiquement la forme présentée figure 1.12 pour un satellite visible (absence de pic dans le cas contraire). La forme de la corrélation est très discriminante pour le délai de code (à un échantillon près), beaucoup moins pour la fréquence porteuse.

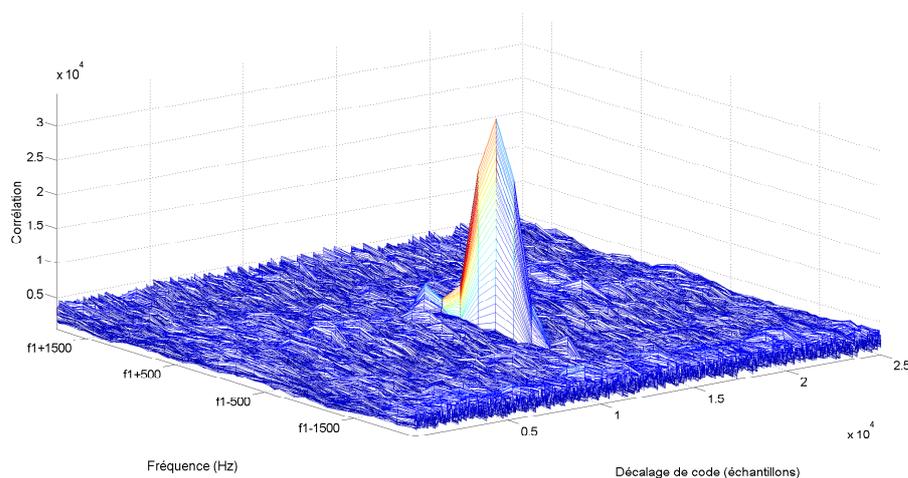


FIGURE 1.12 – Exemple de résultat d'acquisition sur signal réel

Pour améliorer l'estimation du décalage de code et de la fréquence du signal par cette méthode, il est possible d'effectuer la corrélation sur plusieurs périodes de code. Deux méthodes existent : l'intégration dite cohérente, pour laquelle plusieurs millisecondes de signaux reçus et répliqués sont corrélés en une seule fois, et l'intégration non-cohérente, pour laquelle les résultats de plusieurs corrélations sont sommés. Les performances de l'intégration cohérente sont supérieures car le pic de corrélation ressort plus vite que la puissance du bruit avec le temps d'intégration. Cependant, l'intégration cohérente est limitée par la possibilité d'un changement de signe du signal dû au message de navigation.

Pour diminuer les temps de traitement de l'acquisition, les récepteurs GPS utilisent généralement une transformée de Fourier rapide pour passer le signal dans le domaine fréquentiel, où la corrélation est réalisée, avant de revenir dans le domaine temporel par une transformée de Fourier inverse. Le principe de l'acquisition fréquentielle est défini figure 1.13.

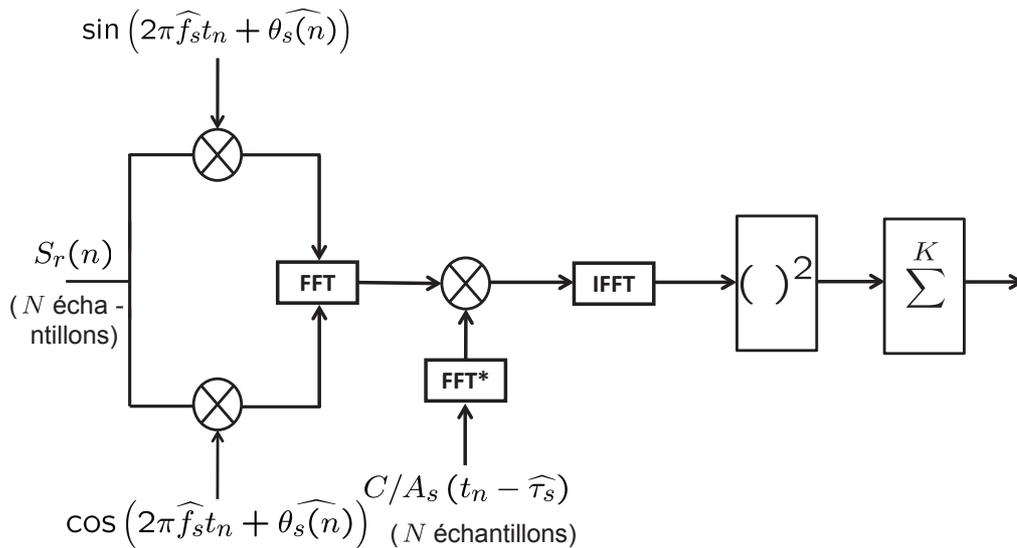


FIGURE 1.13 – Principe de l'acquisition fréquentielle

### Poursuite du signal

La poursuite du signal consiste à estimer les variations de fréquence, de code et de phase de chaque signal satellitaire reçu au cours du temps. En effet, ces paramètres changent avec les perturbations de trajet du signal, et plus particulièrement l'effet Doppler. La durée du code GPS peut ainsi être augmentée ou diminuée suivant les mouvements satellite-récepteur. Pour estimer le décalage de code au cours du temps, le récepteur utilise également le principe de corrélation, mais uniquement au voisinage du décalage précédent. Trois valeurs de corrélation sont ainsi calculées, pour le cas d'un code synchrone, d'un code en avance et d'un code en retard. Les valeurs ainsi calculées sont respectivement nommées Prompt, Early et Late. L'intervalle entre ces trois valeurs est classiquement d'un demi-chip (un chip correspondant à la durée d'un bit de code), mais peut également être inférieur pour augmenter la précision du traitement [115].

Pour déterminer si le code reçu est en avance ou en retard, le récepteur ne calcule généralement pas le maximum de ces trois valeurs, mais utilise plutôt un discriminant permettant de

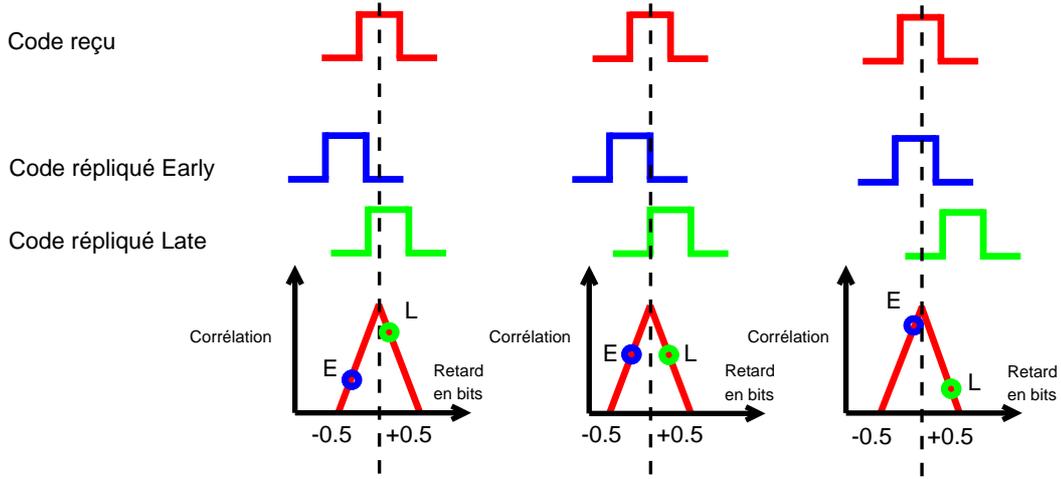


FIGURE 1.14 – Principe de la poursuite du code à l’aide du discriminant Early-minus-Late

déterminer la position de ces valeurs sur le pic de corrélation. On utilisera dans cette thèse le discriminant Early-minus-Late, mais plusieurs autres discriminants existent [56]. Le principe du discriminant Early-minus-Late est décrit figure 1.14 pour un espacement d’un chip entre les codes Early et Late. Concrètement, lorsque la valeur Early (resp. Late) sera supérieure à la valeur Late (resp. Early), le code répliqué sera recalé d’un bit en avance (resp. retard). On cherche ainsi à obtenir une réplique du code telle qu’on reste le plus près possible de la position d’équilibre (au centre de la figure 1.14) tout au long de la poursuite. Le principe de cette poursuite est celui d’une boucle fermée de code (DLL : Delay Lock Loop) : le code répliqué est corrigé à chaque itération. Le discriminant de code dans une telle boucle peut être filtré récursivement pour accroître la robustesse au bruit.

La poursuite de la phase du signal est généralement réalisée dans une boucle fermée dite de Costas [65]. Dans cette boucle (PLL : Phase Lock Loop), la phase résiduelle entre le signal reçu et sa réplique est estimée, et la réplique est ainsi corrigée à chaque itération. Pour estimer cette erreur, une réplique déphasée de  $\frac{\pi}{2}$  du signal est également corrélée au signal direct. On obtient ainsi deux valeurs de corrélation, dites en phase et en quadrature, pour chaque décalage de code testé  $\hat{\tau}_s$  :

$$I_s(k, \hat{\tau}_s) = \sum_{n=0}^N \left( A_s(n) n_s(n) C/A_s(n + \tau_s(n)) C/A_s(n + \hat{\tau}_s(k)) \cos \left( 2\pi \left( f_s(n) - \hat{f}_s(k) \right) t_n + \theta_s(n) - \hat{\theta}_s(k-1) \right) + \nu_s^I(n) \right) \quad (1.27)$$

$$Q_s(k, \hat{\tau}_s) = \sum_{n=0}^N \left( A_s(n) n_s(n) C/A_s(n + \tau_s(n)) C/A_s(n + \hat{\tau}_s(k)) \right. \\ \left. \sin \left( 2\pi \left( f_s(n) - \hat{f}_s(k) \right) t_n + \theta_s(n) - \hat{\theta}_s(k-1) \right) + \nu_s^Q(n) \right) \quad (1.28)$$

avec  $N$  le nombre d'échantillons sur lequel est réalisée l'intégration cohérente du signal et  $k$  l'indice de la période considérée.  $\nu_s^I(n)$  et  $\nu_s^Q(n)$  sont des bruits blancs gaussiens. Les termes en  $2\pi \left( f_s(n) - \hat{f}_s(k) \right) t_n$  des sinus et cosinus sont éliminés par l'intégration, dans un effet de moyennage des hautes fréquences. On peut alors estimer la phase résiduelle moyenne du signal sur la durée d'intégration,  $\Delta\theta_s(k) = \theta_s(k) - \hat{\theta}_s(k-1)$ , à l'aide du discriminant arctangente :

$$\widehat{\Delta\theta}_s(k) = \arctan \left( \frac{Q_s(k, \hat{\tau}_s)}{I_s(k, \hat{\tau}_s)} \right) \quad (1.29)$$

La phase du signal reçu peut ainsi être estimée récursivement en intégrant les valeurs obtenues pour  $\widehat{\Delta\theta}_s(k)$ . La fréquence du signal peut être estimée à partir des variations de phase obtenues, qui sont proportionnelles à la dérivée de la phase. La fréquence du signal répliqué est corrigée dans le principe d'une boucle fermée de fréquence (FLL : Frequency Lock Loop). Généralement, la phase résiduelle est lissée par un filtre de boucle qui fournira les valeurs de fréquence résiduelle.

On présente figure 1.15 l'architecture en boucles fermées qui permet de "poursuivre" un signal GPS en corrigeant à chaque itération le décalage de code, la phase et la fréquence du signal répliqué. Sur cette figure, les indices  $E/P/L$  représentent les résultats obtenus pour les valeurs Early, Prompt et Late.

### 1.4.3 Positionnement GPS

Le positionnement par GPS repose sur le principe d'une triangulation. Si l'on suppose connus trois points de l'espace (les satellites) et trois distances les unissant à un même point (le récepteur), alors on peut connaître la position en trois dimensions de ce point : il s'agit d'un système de trois équations à trois inconnues. En réalité, le lieu ainsi défini comprend deux points dont l'un peut être rejeté car éloigné de la surface terrestre. La position du récepteur est ainsi obtenue par l'intersection de trois sphères, dont les centres sont les satellites GPS et dont les rayons sont les distances satellite-récepteur. La position des satellites est fournie dans le message de navigation du signal GPS, de même qu'une datation de l'émission du signal qui permet de déterminer le temps de parcours de ce signal.

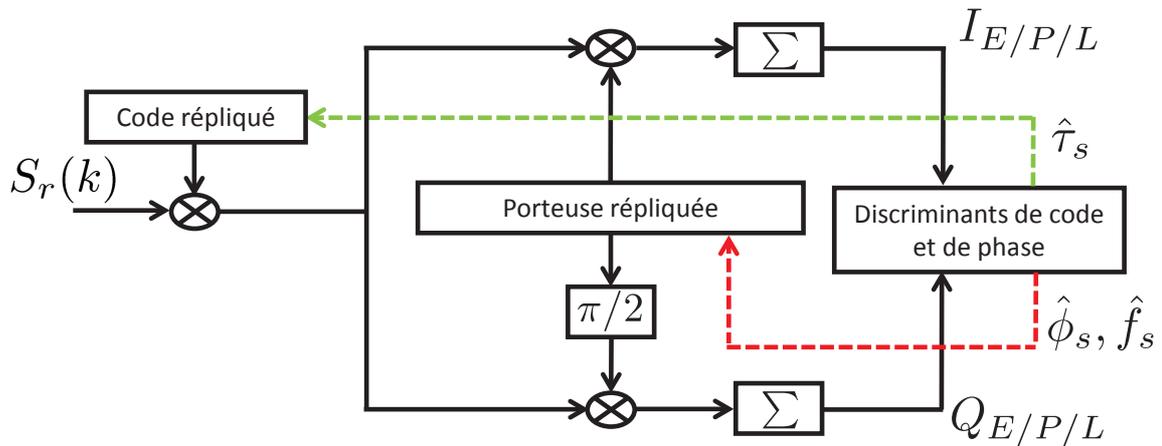


FIGURE 1.15 – Architecture classique pour la poursuite du signal GPS

Cependant, ce principe comporte plusieurs limites majeures :

- le signal est déformé lors du passage dans la troposphère et surtout la ionosphère ;
- la précision de la triangulation est dépendante de la géométrie de la constellation visible ;
- l’horloge du récepteur et l’horloge des satellites ne sont pas synchrones ;
- la vitesse du signal étant celle de la lumière, une erreur de datation d’une nanoseconde implique une erreur de distance de 30 centimètres.

Le signal GPS transporte également des informations permettant de modéliser l’effet de la troposphère et de la ionosphère sur le signal. Ces effets peuvent également être modélisés par des méthodes de différenciation sur les différentes fréquences allouées aux signaux de géopositionnement [23]. Il est également possible de prédire l’importance des erreurs dues à un fort regroupement des satellites au zénith du récepteur, ou à un alignement des satellites, par les mesures de dilution de précision (DOP : Dilution of Precision). Les satellites embarquent des horloges atomiques de très grande précision, corrigées régulièrement à l’aide d’horloges à l’hydrogène, au césium et au rubidium placées au sol. Ainsi, les horloges satellitaires sont synchronisées entre elles avec une très grande précision. L’erreur d’horloge est donc uniquement due aux dérives de l’horloge du récepteur et peut être considérée comme une quatrième inconnue du système, impliquant la nécessité d’un quatrième couple satellite/distance. La disponibilité d’un nombre plus important de satellites visibles représentant bien sûr un avantage pour la précision de la triangulation. Pour chaque satellite, on a donc :

$$\rho_s = \sqrt{(x_s - X)^2 + (y_s - Y)^2 + (z_s - Z)^2} + e^h + e_s^i + e_s^t + e_s^o + e_s^p \quad (1.30)$$

avec :

- $\rho_s$  la pseudo-distance satellite-récepteur obtenue par le signal GPS ;
- $x_s, y_s, z_s$  les coordonnées du satellite dans le repère WGS84 ;
- $X, Y, Z$  les coordonnées du récepteur dans le repère WGS84 ;
- $e^h$  l'erreur due à l'horloge récepteur ;
- $e_s^i$  l'erreur ionosphérique ;
- $e_s^t$  l'erreur troposphérique ;
- $e_s^o$  l'erreur sur la position du satellite (erreur orbitale) ;
- $e_s^p$  les erreurs dues aux bruits, aux traitements ou aux multi-trajets.

Les mesures sont les pseudo-distances  $\rho_s$  et les inconnues à estimer sont les coordonnées  $X, Y, Z$  et l'erreur  $e_h$ . La résolution de ce système non-linéaire peut se faire par exemple par la méthode des moindres carrés [65] ou par l'utilisation de filtres non-linéaires tels que le filtre de Kalman étendu. La principale source d'erreur de positionnement restant, en l'absence de multi-trajets liés à la réflexion du signal avant son arrivée au récepteur, est l'erreur liée aux traitements effectués par le récepteur.

Pour un positionnement par le code, la précision du positionnement est affectée en particulier par l'échantillonnage : une fréquence d'échantillonnage de 100 MHz représente une résolution spatiale de l'ordre du mètre. Ceci peut influencer le positionnement absolu du mot de télémétrie dans le signal reçu. C'est en effet ce mot qui est daté dans le signal, permettant de calculer une première pseudo-distance. En pratique, la résolution sera améliorée par un sur-échantillonnage du code répliqué au niveau de l'étape d'acquisition. Le positionnement relatif à la première pseudo-distance mesurée est quant à lui directement affecté par l'intervalle entre les valeurs Early, Prompt et Late. Là encore, l'erreur sera de l'ordre métrique, dans le cas où aucune intégration n'est pratiquée. Mais la principale limitation de précision du positionnement par le code est liée à la bande passante limitée de ce dernier. En effet, plus cette bande est étroite, plus le pic de corrélation entre les codes reçu et répliqué sera aplati, et plus le maximum de corrélation sera difficilement localisable dans le bruit.

Pour un positionnement par la phase, les erreurs de positionnement relatif sont d'ordre centimétrique, y compris lorsque la position est estimée à chaque milliseconde, c'est-à-dire sans intégration. En effet, la phase est continue, contrairement au code qui est constant par morceaux. Cependant, l'obtention d'une première valeur de positionnement absolu nécessite de résoudre l'ambiguïté de phase, ce qui reste l'objet de nombreuses études. L'ambiguïté de phase est de 19 cm tandis que l'ambiguïté de code est de 300 km. Par ailleurs, la phase peut être sujette à

des sauts de cycle, qui s'apparentent à des ruptures de continuité, et doivent être détectées et corrigées. En particulier, lors d'un masquage du satellite, par exemple par un bâtiment, la valeur de l'ambiguïté de phase est perdue, contrairement à l'ambiguïté de code.

### 1.4.4 Architecture pour la réflectométrie

Les traitements des signaux GPS en réflectométrie sont particuliers à cette application. En effet, le signal réfléchi est généralement de faible puissance, rendant sa poursuite en boucle fermée difficile ou impossible. De ce fait, les récepteurs GNSS-R utilisent les paramètres de décalage de code, de phase et de fréquence obtenus sur les signaux directs pour estimer les paramètres correspondant sur le signal réfléchi. Dans ce cas, des boucles ouvertes asservies sont utilisées, comme indiqué figure 1.16. Sur cette figure,  $S_r^d$  représente le signal direct et  $S_r^r$  le signal réfléchi. Pour former une Delay-Doppler Map, on fait varier les valeurs de décalage de code et de fréquence estimées sur le signal direct. La Delay-Doppler Map représente les valeurs de corrélation obtenues sur le signal réfléchi à partir de ces décalages.

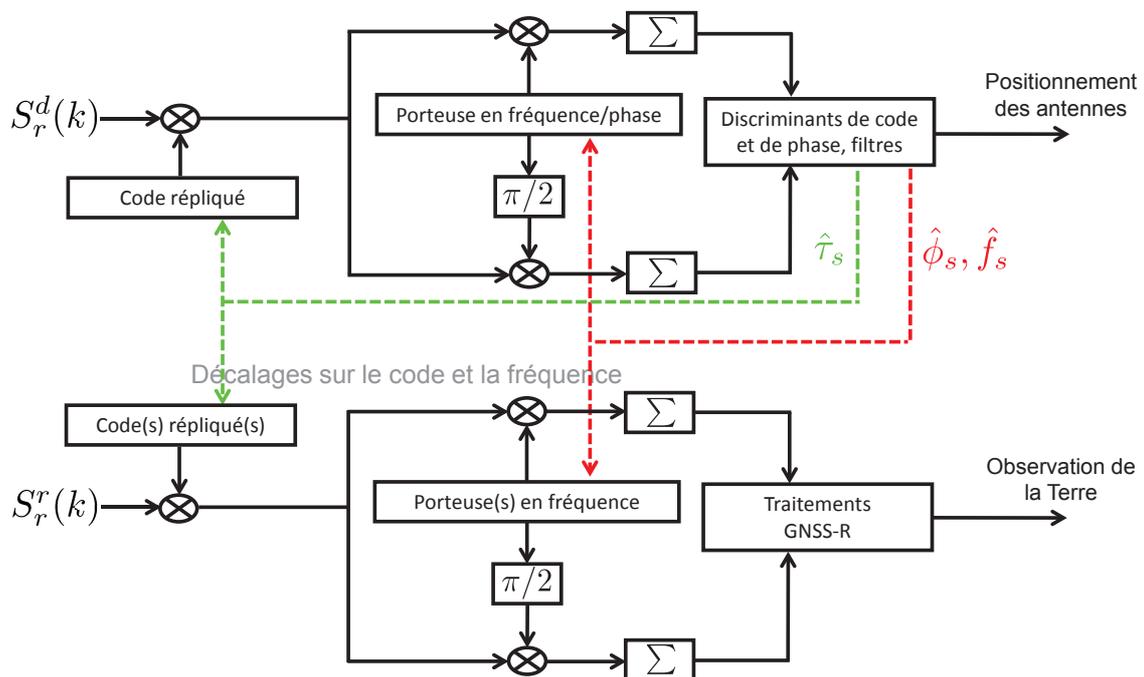


FIGURE 1.16 – Architecture de traitement en GNSS-R

Dans ce cadre, la conception matérielle du système d'acquisition des signaux présente plusieurs contraintes. Par exemple, la position, l'orientation, la directivité des antennes influera sur

les résultats de réflectométrie. Les longueurs des câbles utilisés pour lier les antennes réceptrices aux convertisseurs analogique-numérique doivent être connues précisément, ajoutant un écart de phase entre les signaux. Un même oscillateur doit être utilisé pour la numérisation des signaux direct et réfléchi, le bruit d'oscillateur ajoutant des variations de fréquence comparables à un effet Doppler au signal numérisé. L'ensemble du système de réception et numérisation doit être synchronisé avec une grande précision pour les applications telles que l'altimétrie. Pour cette application, le délai temporel entre les signaux est une information primordiale. En effet, c'est ce délai temporel qui permettra d'estimer la hauteur de l'antenne par rapport à la surface de réflexion. Une calibration du récepteur est ainsi préconisée dans [24] pour modéliser les erreurs dues à des manques de parallélisme dans la structure d'un récepteur GNSS-R.

La plupart des récepteurs GNSS-R existants sont des récepteurs logiciels [81]. Plusieurs récepteurs matériels ont cependant été expérimentés, reprenant en grande majorité le principe de boucles ouvertes asservies. L'objet de ces récepteurs est pour l'utilisateur d'obtenir en temps réel les observables utiles aux applications GNSS-R, généralement sous la forme de DDM. On peut citer les récepteurs PDMR (Parallel Delay Mapping Receiver) de la NASA [40], Oceanpal de la société Starlab [19], GOLD-RTR (GPS Open-Loop Differential Real-Time Receiver) de l'IEEC (Institut d'Estudis Espacials de Catalunya) [81], OpenGPS du GFZ (GeoForschungsZentrum) [49] et griPAU (GPS reflectometer instrument for Passive Advanced Unit) de l'UPC (Universitat Politècnica de Catalunya) [18, 114]. Le récepteur PIR (PARIS Interferometric Receiver) de l'ESA [88] fonctionne différemment du fait de l'approche par interférométrie des signaux : la corrélation des signaux direct et réfléchi est l'observable fourni par le circuit de traitement du signal.

## 1.5 Conclusion

La réflectométrie GNSS est une science récente : le concept fut imaginé il y a vingt ans et sa réalisabilité pour un récepteur placé dans l'espace ne fut prouvée qu'il y a dix ans. Ce système multi-statique est en plein développement, ce qui génère un intérêt grandissant pour la réflectométrie GNSS. En effet, la présence et le développement indépendant d'un nombre de plus en plus important d'émetteurs permet d'améliorer la couverture d'un tel système pour l'observation de la Terre. Cet intérêt s'est traduit par la commercialisation de matériels dédiés à la réflectométrie ainsi que par une présence de plus en plus marquée de la réflectométrie dans la littérature scientifique des domaines du radar et du géopositionnement par satellites.

La réflectométrie GNSS réunit en effet les problèmes scientifiques du radar et du traitement

des signaux GNSS pour permettre l'estimation de très nombreux paramètres d'observation de la Terre. Les recherches portent sur la modélisation des océans en termes de hauteur d'eau, de vitesse des vents, de salinité et de glaciation. Sur les sols, l'estimation du taux d'humidité est l'application principale, mais l'étude des couches de neige est également un enjeu pour la prévention des avalanches.

Les traitements des signaux à effectuer pour obtenir des résultats satisfaisants en matière de précision et de robustesse sont particuliers à cette application. Les chapitres 3 et 4 de cette thèse présenteront des architectures originales de traitement du signal ainsi que des outils dédiés au traitement de la phase GPS en boucle ouvertes, qui seront utilisées aussi bien pour les signaux directs et le positionnement que pour les signaux réfléchis dans le cadre de la réflectométrie GPS par différenciation de phase. Le chapitre 5 concernera l'expérimentation de ces outils dans le cadre de l'étude de la hauteur d'eau par altimétrie GPS.



# Chapitre 2

## Statistiques circulaires

### 2.1 Introduction

De nombreuses applications scientifiques reposent sur des données mesurées en angles. La direction et le sens d'un véhicule, la direction et le sens du vent et des vagues, le roulis et le tangage d'un bateau ou la phase d'un signal sont autant d'informations généralement décrites par des angles [45, 87, 86, 27, 84]. Certaines modélisations angulaires moins évidentes existent également : les couleurs d'une image peuvent par exemple être représentées sur le cercle [78]. En trois dimensions, la direction d'observation d'un astre est définie par un couple d'angles, sur la sphère. Les phénomènes périodiques peuvent généralement être décrits sur le cercle, à commencer par la représentation d'une demi-journée sur le cadran d'une horloge.

Les mesures d'angles sont effectivement définies périodiquement en radians sur un intervalle de longueur  $2\pi$ . Cet intervalle est généralement  $[0; 2\pi[$ , ou encore  $[-\pi; \pi[$ , pour avoir, comme pour les données définies sur l'axe des réels, 0 au centre de l'intervalle de définition. Le fait est que pour des données angulaires, la définition d'une direction de référence est arbitraire. Par exemple, un angle mathématique est généralement calculé sur le cercle trigonométrique à partir du point cartésien  $(1, 0)$ . Mais la direction d'un véhicule sera pour sa part calculée sur ce même cercle à partir du point  $(0, 1)$  correspondant au Nord géographique. De même, le sens de rotation dans ces deux cas est opposé, également choisi arbitrairement. Il n'existe pas de notion d'ordre sur le cercle : on ne peut pas dire que la direction Est est supérieure à la direction Nord ou que  $90^\circ$ , qui peut tout aussi bien s'écrire  $-270^\circ$  est supérieur à  $0^\circ$ .

On peut considérer la périodicité des données angulaires comme la raison de cette absence de direction zéro et d'ordre pour les angles. Il s'en suit que les statistiques du domaine linéaire

des réels ne peuvent pas décrire correctement la distribution de données angulaires : les notions de moyenne ou de distance ne peuvent par exemple pas être définies sur le cercle comme elles le sont sur la droite des réels. On présente figure 2.1 deux exemples de moyennes entre deux angles. À gauche, la moyenne obtenue par la statistique linéaire entre des angles de  $20^\circ$  et  $340^\circ$  est de  $180^\circ$  alors qu'elle devrait visiblement être de  $0^\circ$ . De même, la distance de  $20^\circ$  à  $340^\circ$  ne doit pas être de  $320^\circ$  mais de  $40^\circ$ . À droite, la définition des angles entre  $-\pi$  et  $\pi$  permet d'obtenir la bonne moyenne arithmétique : 0. Mais une définition centrée en 0 des angles ne solutionne pas le problème de la moyenne : la moyenne arithmétique de  $8\pi/9$  et  $-8\pi/9$  serait également de 0, alors qu'elle devrait être de  $-\pi$  pour ces angles. Nous verrons section 2.4.1 que la moyenne entre plusieurs angles peut être obtenue par l'utilisation des nombres complexes. Cependant, les nombres complexes ne permettent pas de résoudre l'ensemble des autres particularités statistiques liées à la périodicité des données.

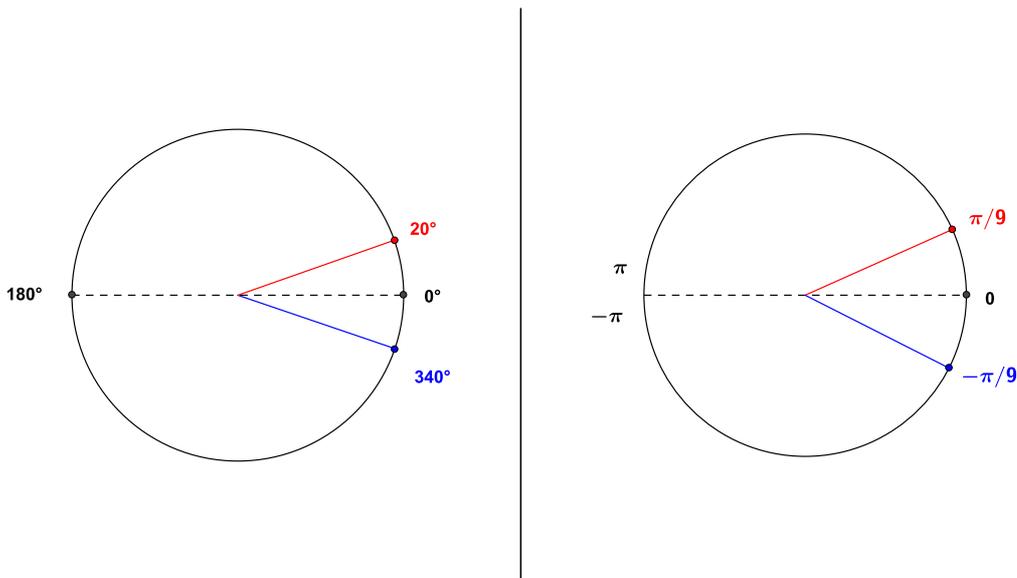


FIGURE 2.1 – Problèmes liés à l'utilisation de la moyenne linéaire pour des angles

Dans ce chapitre, nous exposerons plusieurs modèles statistiques pour la description de variables définies sur le cercle. Ces modèles permettront de définir, indépendamment d'une direction zéro de référence, plusieurs des paramètres les plus nécessaires à la caractérisation de variables, telles que les notions de moyenne, de distance ou de variance. Les éléments mathématiques théoriques définis dans ce chapitre serviront de base de travail pour les deux chapitres suivants, consacrés au traitement de la phase des signaux GNSS.

Suite à cette introduction permettant de positionner le problème, nous présenterons deux des distributions circulaires les plus utilisées. La troisième section sera consacrée aux approximations liant ces deux distributions, qui seront utilisées dans les outils de traitement des signaux proposés par la suite, et plus particulièrement à l'inversion d'une fonction nécessaire à ces approximations. Nous proposons deux méthodes d'inversion que nous comparons avec la méthode classique. La quatrième section s'intéressera à l'estimation, au sens du maximum de vraisemblance, des paramètres statistiques des distributions circulaires choisies et la cinquième section à la définition de tests d'hypothèse sur les paramètres de la distribution de von Mises. La cinquième section sera consacrée à la définition de plusieurs indicateurs de précision utilisés pour l'évaluation des performances d'estimation de la phase dans les chapitres à venir. Le chapitre sera clôt par une conclusion.

## 2.2 Distributions circulaires

### 2.2.1 Distribution de von Mises $\mathcal{CN}$

La distribution de von Mises, ou distribution circulaire normale ( $\mathcal{CN}$ ) [9], décrit une variable aléatoire circulaire qui suit une direction préférentielle [69]. Cette distribution peut être considérée comme l'équivalent circulaire de la distribution normale pour des variables aléatoires réelles [77]. La densité de probabilité  $f_{\mathcal{CN}}(\theta; \mu, \kappa)$  décrit ainsi la distribution d'une variable circulaire  $\theta$  autour d'une moyenne  $\mu$ , avec paramètre de concentration  $\kappa$ .  $\kappa$  varie de 0 à l'infini. Comme son nom l'indique, plus  $\kappa$  est élevé, plus les réalisations de  $f_{\mathcal{CN}}(\theta; \mu, \kappa)$  sont concentrées autour de  $\mu$ ,  $\kappa$  se comportant ainsi à l'inverse de la variance utilisée pour des variables aléatoires réelles.  $\theta$  peut prendre n'importe quelle valeur réelle,  $f_{\mathcal{CN}}$  étant  $2\pi$ -périodique. Pour de faibles valeurs de  $\kappa$ , la distribution de von Mises a une répartition uniforme entre 0 et  $2\pi$ , pour laquelle aucune direction particulière n'est privilégiée. Pour de grandes valeurs de  $\kappa$ , la distribution de von Mises tend vers une distribution normale de variance  $1/\kappa$ , comme on peut l'observer sur la figure 2.2.

La densité de probabilité de la distribution de von Mises est donnée par :

$$f_{\mathcal{CN}}(\theta; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)} \quad (2.1)$$

avec  $\theta$  la direction angulaire aléatoire, évoluant sur un intervalle quelconque de longueur  $2\pi$ .  $\mu$  est la direction moyenne et  $\kappa$  le paramètre de concentration.

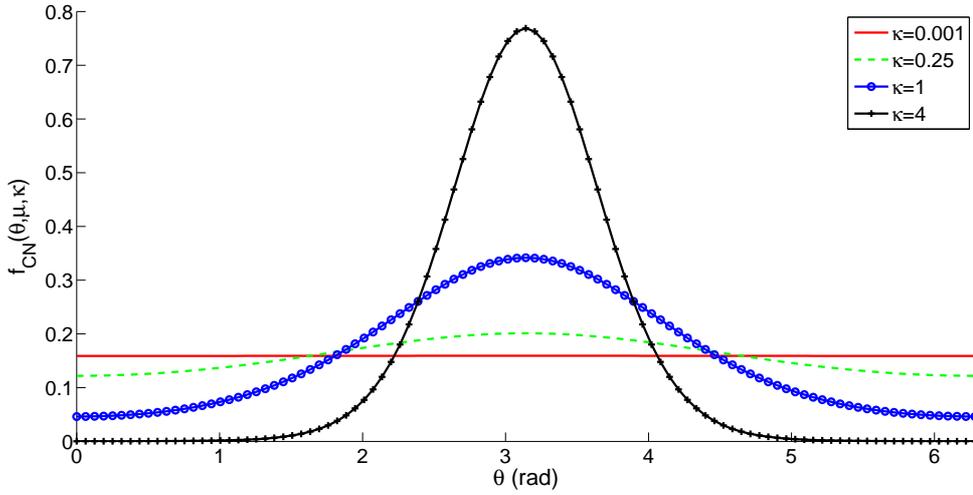


FIGURE 2.2 – Distribution de von Mises de moyenne  $\mu = \pi$

$I_0$  est la fonction de Bessel modifiée de la première espèce et d'ordre 0.  $I_0(\kappa)$  peut être considéré comme une constante de normalisation [51].

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cdot \cos \theta} d\theta = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2r} \left(\frac{1}{r!}\right)^2 \quad (2.2)$$

Comme le cosinus qui caractérise son caractère circulaire, la distribution de von Mises est symétrique et uni-modale sur une période [26]. Notons que la distribution  $\mathcal{CN}$  possède la propriété d'additivité : la somme de deux variables aléatoires suivant des distributions  $\mathcal{CN}(\mu_1, \kappa_1)$  et  $\mathcal{CN}(\mu_2, \kappa_2)$  est également une distribution  $\mathcal{CN}$ , de moyenne la somme  $\mu_1 + \mu_2$ , mais de paramètre de concentration impossible à déterminer analytiquement.

La distribution de von Mises est la distribution circulaire la plus utilisée en sciences appliquées. De ce fait, elle a fait l'objet de nombreuses recherches. C'est également cette distribution qui sera utilisée au cours de cette thèse, étant celle qui définit au mieux l'évolution de la phase des signaux GNSS selon [17].

## 2.2.2 Distribution Wrapped Normal $\mathcal{WN}$

La distribution circulaire Wrapped Normal ( $\mathcal{WN}$ ) est construite en enroulant ("wrapping") la distribution normale (ou Gaussienne) autour du cercle : il s'agit d'une mixture de distributions normale centrées sur  $\{\mu, \mu + 2\pi, \mu - 2\pi, \mu + 4\pi, \dots\}$ , avec  $\mu$  la moyenne de la distribution, définie entre 0 et  $2\pi$  [51]. Le second paramètre statistique d'une distribution Wrapped Normal

est l'écart-type des Gaussiennes à partir de laquelle elle est créée. Mathématiquement, on aura :

$$f_{WN}(\theta, \mu, \sigma) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_N(\theta + 2k\pi, \mu, \sigma) \quad (2.3)$$

avec  $f_{WN}$  la densité de probabilité de la distribution Wrapped Normal et  $f_N$  la densité de probabilité de la distribution normale :

$$f_N(\theta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.4)$$

On obtient la densité de probabilité suivante, représentée figure 2.3 :

$$f_{WN}(\theta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\theta-\mu+2k\pi)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.5)$$

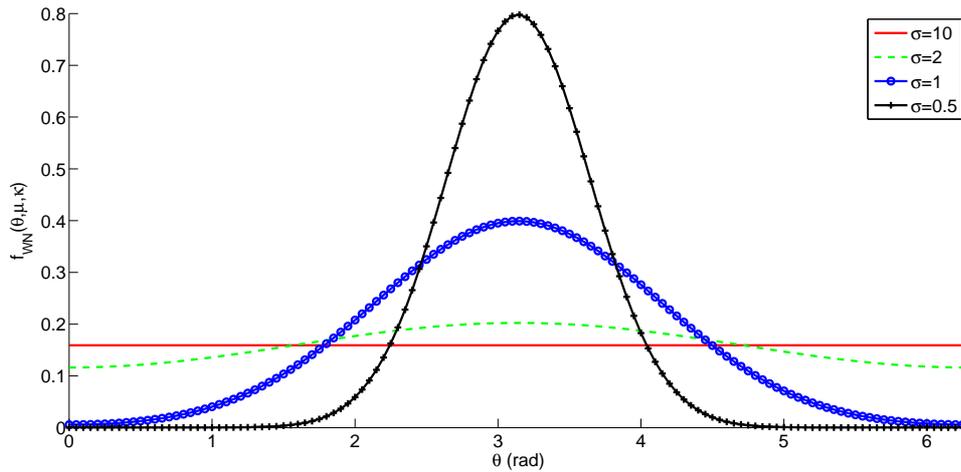


FIGURE 2.3 – Distribution Wrapped Normal de moyenne  $\mu = \pi$

Lorsque  $\sigma$  est faible, la majorité des réalisations de  $f_N(\theta, \mu, \sigma)$  se situe à proximité de la moyenne  $\mu$ . Dans ce cas, il est clairement possible d'approcher  $f_{WN}(\theta, \mu, \sigma)$  en ne considérant qu'un nombre fini de terme de la somme sur  $k$ . En effet, peu de périodes de longueur  $2\pi$  suffisent à englober la majorité des réalisations de  $f_N$ .

La distribution Wrapped Normal est également symétrique et uni-modale sur une période. Comme la distribution normale, la distribution Wrapped Normal possède la propriété d'additivité de deux variables aléatoires : la somme de deux variables aléatoires suivant une distribution

$\mathcal{WN}$  est également une distribution  $\mathcal{WN}$ , de paramètres statistiques définis par :

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta_1 \sim \mathcal{WN}(\mu_1, \rho_1) \text{ et } \theta_2 \sim \mathcal{WN}(\mu_2, \rho_2) \text{ sont indépendantes,} \\ \text{alors } \theta_1 + \theta_2 \sim \mathcal{WN}(\mu_1 + \mu_2, \rho_1 \rho_2) \text{ avec } \rho_1 = \exp(-\sigma_1^2/2) \text{ et } \rho_2 = \exp(-\sigma_2^2/2) \end{aligned}$$

La notation  $\theta \sim \mathcal{WN}(\mu, \rho)$  avec  $\rho = \exp(-\sigma^2/2)$  où  $\sigma$  est l'écart-type de la distribution sera celle utilisée par la suite pour décrire toute variable suivant une distribution Wrapped Normal.

## 2.3 Approximations $\mathcal{CN} \approx \mathcal{WN}$ et $\mathcal{WN} \approx \mathcal{CN}$ et inversion de la fonction $A = I_1/I_0$

Comme suggéré par leurs représentations graphiques très voisines, il est possible d'approcher la distribution de von Mises par une distribution Wrapped Normal [51], avec de très faibles pertes de précision [36, 103]. Cette approximation est définie pour une moyenne  $\mu$  et un paramètre de concentration  $\kappa$  par  $\mathcal{CN}(\mu, \kappa) \approx \mathcal{WN}(\mu, A(\kappa))$ .  $\mathcal{WN}(\mu, A(\kappa))$  est une distribution Wrapped Normal de moyenne  $\mu$ , de variance  $\sigma^2 = -2\ln(A(\kappa))$ . La fonction  $A$  est définie par :

$$A(\kappa) = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \quad (2.6)$$

où  $I_1$  est la fonction de Bessel modifié de la première espèce et d'ordre 1, qui correspond à la dérivée de  $I_0$  par rapport à  $\kappa$  :

$$I_1(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta e^{\kappa \cdot \cos \theta} d\theta = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2r+1} \left(\frac{1}{r!(r+1)!}\right) \quad (2.7)$$

Inversement, l'approximation d'une distribution de von Mises par une Wrapped Normal est définie par  $\mathcal{WN}(\mu, \rho) \approx \mathcal{CN}(\mu, A^{-1}(\rho))$ , avec  $\kappa = A^{-1}(\rho) = A^{-1}(\exp(-\frac{\sigma^2}{2}))$ . Il n'existe malheureusement pas de forme analytique pour la réciproque de la fonction  $A$ . Pour obtenir l'approximation  $\mathcal{WN} \approx \mathcal{CN}$ , [37, 4] proposent donc d'utiliser les développements limités de Taylor de  $A$  en 0 et à l'infini.

### 2.3.1 Inversion de $A$ : développements limités

En effectuant un développement limité à l'ordre 3, on obtient :

– Pour  $\kappa \rightarrow \infty$  :

$$x = A(\kappa) \approx 1 - \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{8\kappa^2} - \frac{1}{8\kappa^3} + \dots \quad (2.8)$$

– Pour  $\kappa \rightarrow 0$  :

$$x = A(\kappa) \approx \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^3}{16} + \dots \quad (2.9)$$

On représente graphiquement figure 2.4 la fonction  $A$  ainsi que ses développements de Taylor à l'ordre 2 et 3 en 0 et à l'infini. Il apparaît que ces développements n'approximent correctement  $A$  qu'aux voisinages de 0 et de l'infini. Pour des valeurs intermédiaires de  $\kappa$ , les développements limités ne conviennent plus, et augmenter l'ordre du développement n'améliore pas nécessairement l'approximation sur ces valeurs éloignées à la fois de 0 et de  $\infty$  (on l'observe ici pour le développement à l'infini).

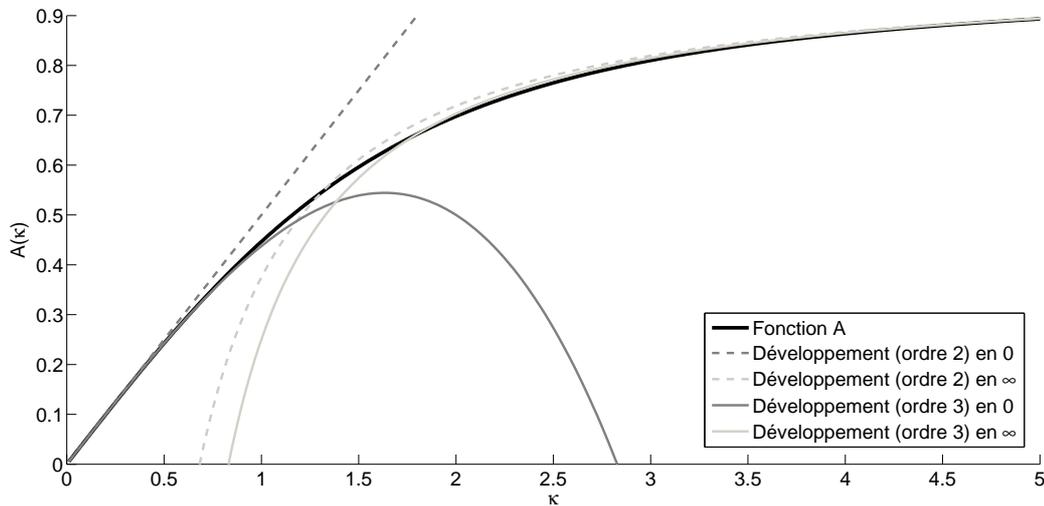


FIGURE 2.4 – Développements de Taylor de la fonction  $A$  aux ordres 2 et 3

Dans [37], il est proposé de considérer trois intervalles où  $A$  et par suite  $A^{-1}$  seront approximées respectivement par le développement limité en 0, par un polynôme d'interpolation et par le développement limité à l'infini. Les intervalles considérés et les ordres des polynômes d'interpolation sont fixés de manière à obtenir une certaine précision. Avec cette méthode, il est difficile de régler cette précision car les intervalles considérés et l'ordre des polynômes d'interpolation doivent être réglés manuellement.

### 2.3.2 Inversion de $A$ : méthode de Newton

Pour plus de souplesse et de précision, on propose ici de calculer les images de  $A^{-1}$  à l'aide de la méthode de Newton, méthode utilisable sur la totalité de l'intervalle de définition de  $A^{-1}$ , à

savoir  $[0; 1]$ . Cette méthode récursive, basée sur une linéarisation locale récursive de la fonction par sa tangente, converge vers une solution précise à plusieurs décimales en quelques itérations. Pour résoudre l'équation  $A(\kappa) = x$  en fonction de  $\kappa$ , la méthode de Newton, qui ne dépend que de la connaissance de la dérivée de  $A$ , est la suivante :

$$\hat{\kappa}_0 = 0 \quad (2.10)$$

$$\hat{\kappa}_{k+1} = \hat{\kappa}_k - \frac{A(\hat{\kappa}_k) - x}{\frac{\partial A}{\partial \kappa}(\hat{\kappa}_k)} \quad (2.11)$$

Or [51],

$$\frac{\partial A}{\partial \kappa}(\kappa) = 1 - \frac{A(\kappa)}{\kappa} - A^2(\kappa) \quad (2.12)$$

La formule récursive de la méthode de Newton peut directement être obtenue pour la fonction  $A$  par :

$$\hat{\kappa}_{k+1} = \hat{\kappa}_k - \frac{A(\hat{\kappa}_k) - x}{1 - \frac{A(\hat{\kappa}_k)}{\hat{\kappa}_k} - A^2(\hat{\kappa}_k)} \quad (2.13)$$

On remarquera qu'une division par 0 apparaît lors de la première itération. Cependant, on sait par le développement limité en 0 de  $A$  que  $\frac{\partial A}{\partial \kappa}(0) = 0.5$ . Ainsi,

$$\hat{\kappa}_1 = 0 - \frac{A(0) - x}{\frac{\partial A}{\partial \kappa}(0)} = 2x \quad (2.14)$$

Cette méthode permet de fixer aisément le rapport précision/temps de calcul en fixant un seuil de convergence plus ou moins élevé. L'algorithme proposé pour l'estimation récursive de  $A^{-1}(x)$  est le suivant :

Initialisation :

$$\hat{\kappa} = 2x, \delta\hat{\kappa} = 2x \quad (2.15)$$

Tant que  $\delta\hat{\kappa} < \text{seuil}$

$$a = A(\hat{\kappa}) \quad (2.16)$$

$$\delta\hat{\kappa} = \frac{a - x}{1 - \frac{a}{\hat{\kappa}} - a^2} \quad (2.17)$$

$$\hat{\kappa} = \hat{\kappa} - \delta\hat{\kappa} \quad (2.18)$$

Fin Tant que

Les résultats obtenus par cette méthode sont très robustes et précis. Cependant, l'utilisation

à chaque itération de la fonction  $A$  implique un temps de calcul élevé. Les fonctions de Bessel modifiées de première espèce emploient en effet un temps de calcul important.

### 2.3.3 Inversion de $A$ : méthode de Runge-Kutta

On propose également une méthode intermédiaire en matière de précision et de temps de calcul entre les deux méthodes précédentes. Celle-ci consiste à décrire la fonction  $A^{-1}$  à l'aide d'une équation différentielle, puis de résoudre cette équation par la méthode de Runge-Kutta [28]. De cette manière, on évite à la fois l'utilisation répétée de  $A$  dans le calcul de  $A^{-1}$  (gourmande en temps de calcul) et les approximations par des polynômes (imprécises).

À partir de l'équation 2.12, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial x}(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{A^{-1}(x)} - x^2} \quad (2.19)$$

Et l'on peut choisir pour condition initiale  $A^{-1}(0) = 0$ .

### 2.3.4 Comparaison des méthodes

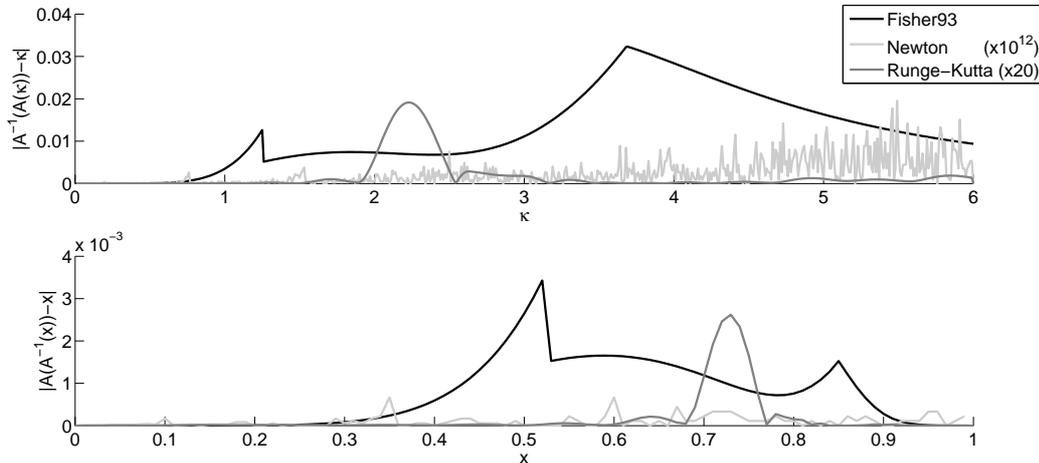


FIGURE 2.5 – Comparaison des méthodes d'obtention de  $A^{-1}$

On compare ici les méthodes proposées à la fois en termes de précision (figure 2.5 et tableau 2.1) et en termes de temps de calcul (tableau 2.2). On présente figure 2.5 les erreurs effectuées sur le calcul des images de  $A^{-1}$  en calculant les images de  $A^{-1}(A)$  et  $A(A^{-1})$  par les méthodes

proposées ici (la méthode de Newton utilisant un seuil de  $10^{-7}$ ) et par la méthode classique proposée dans [37]. Pour représenter l'ensemble de ces erreurs sur une même figure, les erreurs produites par la méthode de Newton sont multipliées par  $10^{12}$  et celles produites par la méthode de Runge-Kutta par 20. Ces facteurs figurent les différences de performance des différentes méthodes présentées tableau 2.1. Notons que l'on utilisera dans les outils de traitement des signaux proposés dans les chapitres à suivre la fonction  $A^{-1}$  pour le calcul de  $A^{-1}(A)$  plutôt que pour le calcul de  $A(A^{-1})$ .

	Fisher 93	Newton	Runge-Kutta
$ A^{-1}(A(\kappa)) - \kappa $	1.22e-2	2.36e-15	8.60e-5
$ A(A^{-1}(x)) - x $	6.97e-4	9.57e-17	8.11e-6

TABLE 2.1 – Précisions moyennes obtenues pour l'inversion de  $A$ .

On présente tableau 2.2 le temps de calcul pris par chaque méthode pour calculer 15 000 images de  $A^{-1}$ . Le coût de calcul de la méthode de Newton est nettement supérieur à ceux des autres méthodes. Il est lié au coût de calcul de  $A = I_1/I_0$  intervenant à chaque itération (18 des 23 secondes de la méthode de Newton). Diminuer le seuil de convergence pour la méthode de Newton ne diminue que très peu le temps de calcul, la convergence étant généralement obtenue après très peu d'itérations.

	Fisher 93	Newton	Runge-Kutta
Temps de calcul (s)	5.0	22.9	7.7

TABLE 2.2 – Temps de calcul pour 15 000 inversions de  $A$ , en secondes.

Dans une implantation matérielle, pour réduire les temps de calcul, il serait également possible d'utiliser une version tabulée de la fonction  $A$  (voire de  $A^{-1}$ ) approchée avec une précision de plusieurs décimales.

## 2.4 Estimation des paramètres des distributions circulaires

On considérera dans cette section un vecteur d'angles  $\phi_{1\dots n}$ . On supposera ces angles comme étant des observations bruitées d'un même angle  $\theta$ , suivant une distribution de von Mises ou une distribution Wrapped Normal. On décrira les estimateurs des paramètres statistiques de ces distributions au sens du maximum de vraisemblance.

### 2.4.1 Estimation de la moyenne ( $\mathcal{CN}$ et $\mathcal{WN}$ )

Nous avons vu dans la section 2.1 de ce chapitre que la moyenne de plusieurs angles ne peut être obtenue par la formule utilisée dans le domaine linéaire, du fait de l'absence d'une direction zéro pour les données définies sur le cercle. L'approche la plus intuitive pour calculer la moyenne d'un angle est de projeter ses observations sur le cercle par l'intermédiaire d'une représentation complexe. La moyenne intuitive  $\mu$  d'un vecteur d'angles  $\phi_{1\dots n}$  est estimée par :

$$\hat{\mu} = \text{Arg} \left( \sum_{k=1}^n e^{j\phi_k} \right) \quad (2.20)$$

avec  $j$  le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ . [51] définit l'estimateur du maximum de vraisemblance de la moyenne de plusieurs angles suivant une même distribution de von Mises. On généralisera section 3.2 cette détermination pour des angles suivant des distributions de von Mises de même moyenne et de paramètres de concentration différents. L'estimateur du maximum de vraisemblance de la moyenne est :

$$\hat{\mu} = \arctan^* \left( \sum_{k=1}^n \sin(\phi_k), \sum_{k=1}^n \cos(\phi_k) \right) \quad (2.21)$$

avec  $\arctan^*$  la réciproque "quadrant-specific" de la fonction tangente, définie entre  $-\pi$  et  $\pi$  :

$$\arctan^*(S, C) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{S}{C}\right) & \text{si } C > 0 \\ \arctan\left(\frac{S}{C}\right) + \pi & \text{si } S \geq 0, C < 0 \\ \arctan\left(\frac{S}{C}\right) - \pi & \text{si } S < 0, C < 0 \\ \pi/2 & \text{si } C = 0, S > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } C = 0, S < 0 \\ \text{indéfini} & \text{si } C = 0, S = 0 \end{cases}$$

En réalité, l'estimateur 2.21 et la moyenne intuitive 2.20 sont identiques : la moyenne de  $n$  angles, premier paramètre statistique des distributions  $\mathcal{CN}$  et  $\mathcal{WN}$ , peut être obtenue par l'équation 2.20.

### 2.4.2 Estimation du paramètre de concentration ( $\mathcal{CN}$ )

L'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance  $\hat{\kappa}$  du paramètre de concentration de  $n$  angles suivant une distribution  $\mathcal{CN}(\mu, \kappa)$  est défini dans [51] par :

$$\hat{\kappa} = A^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\phi_k) - \hat{\mu} \right) \quad (2.22)$$

$$= A^{-1} \left( \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n e^{j\phi_k} \right| \right) \quad (2.23)$$

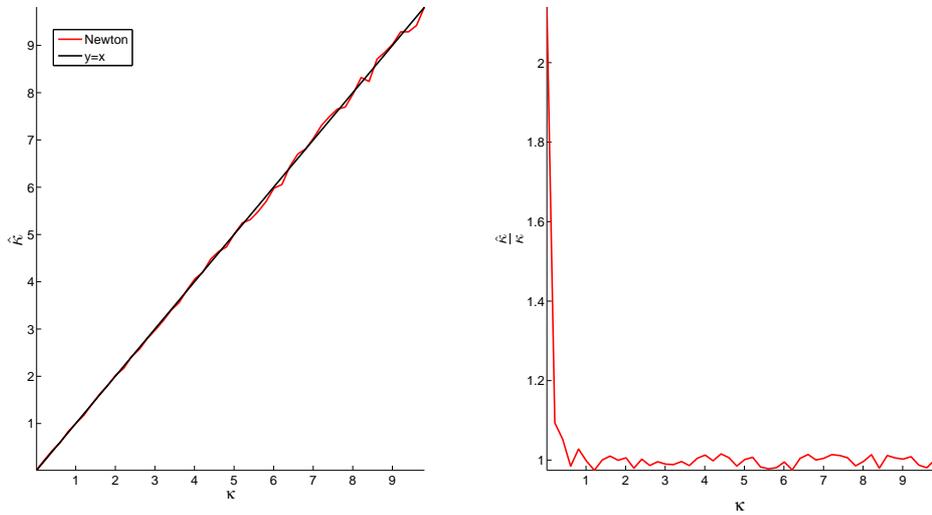


FIGURE 2.6 – Performance de l’estimation de  $\kappa$  pour 10 000 observations

On présente sur la partie gauche de la figure 2.6 les performances de cet estimateur en utilisant la méthode de Newton pour inverser  $A$ , avec  $n = 10\,000$ . Les performances semblent meilleures lorsque  $\kappa$  est faible : le paramètre de concentration estimé est plus proche du paramètre de concentration réel. On présente sur la droite de cette figure le ratio  $\hat{\kappa}/\kappa$ . On remarque ici qu’au contraire, les performances d’estimation de  $\kappa$  sont en réalité moins bonnes pour de faibles valeurs, relativement aux valeurs prises par  $\kappa$  : lorsque  $\kappa$  est élevé, ce ratio est proche de 1 et il s’en éloigne pour de petites valeurs de  $\kappa$ .

Cela s’explique par le fait que pour de faibles valeurs de  $\kappa$ , la distribution de von Mises s’apparente à une distribution uniforme sur  $[-\pi; \pi[$ . La différence entre deux distributions  $\mathcal{CN}(\mu, \kappa_1)$  et  $\mathcal{CN}(\mu, \kappa_2)$ , lorsque  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont faibles, est négligeable.

Plus le nombre d'observations disponibles est élevé, plus l'estimation des paramètres statistiques de la distribution est précise. Notons que les erreurs provoquées par l'utilisation d'une version approchée de  $A^{-1}$  pour l'estimation de  $\kappa$  ont une part négligeable dans les erreurs produites par cet estimateur, pourtant optimal, lorsque peu d'observations sont considérées, comme on l'observera figure 2.7. Sur cette figure, on ignore les faibles valeurs de  $\kappa$  pour plus de lisibilité. On observe des différences non négligeables dans l'estimation de  $\kappa$  par la méthode proposée dans [37] lorsque le nombre d'observations est supérieur à 10 000. Les différences entre les résultats obtenus par la méthode de Newton et la méthode de Runge-Kutta n'apparaissent, sur les réalisations effectuées, que lorsque ce nombre d'observations est supérieur à 100 000. Ainsi, l'estimation de  $\kappa$  est généralement peu affectée par la méthode d'inversion de  $A$  choisie.

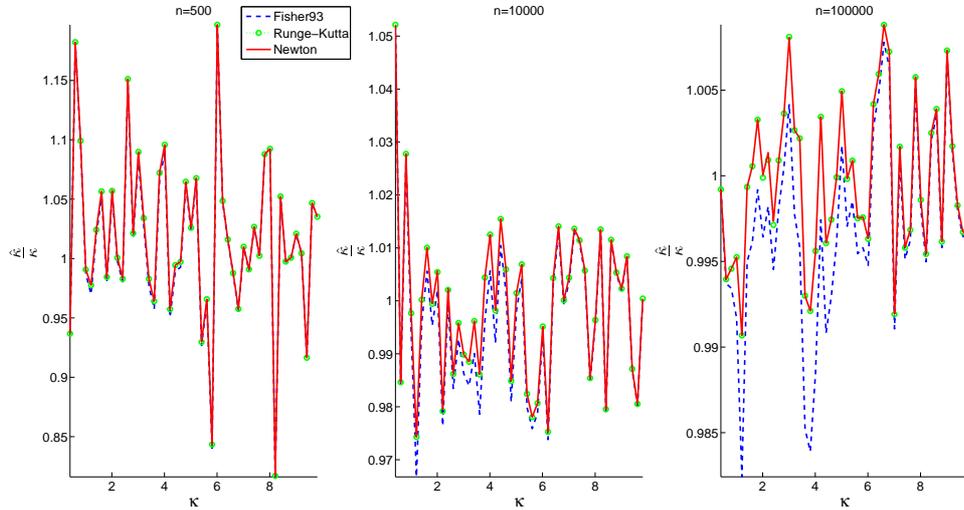


FIGURE 2.7 – Comparaison des erreurs d'estimation de  $\kappa$  pour les différentes méthodes d'inversion de  $A$

### 2.4.3 Estimation de l'écart-type ( $\mathcal{WN}$ )

L'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance  $\hat{\sigma}$  de l'écart-type de  $n$  angles suivant une distribution  $\mathcal{WN}(\mu, \sigma)$  est défini par :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{-2 \ln \left( \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n e^{j\phi_k} \right| \right)} \quad (2.24)$$

Comme pour l'estimateur de  $\kappa$ , l'estimateur de  $\sigma$  approchera plus difficilement des valeurs élevées de  $\sigma$ . Notons que cet effet n'apparaît pas lors de l'estimation de la variance d'une dis-

tribution normale. En effet, même lorsque la variance d'une distribution normale est élevée, la "queue" de la gaussienne permet de distinguer la distribution d'une distribution uniforme et de déterminer la variance avec précision. Dans le cadre de données circulaires, la distribution ne présente pas de "queue" du fait de la restriction à un intervalle de longueur  $2\pi$ .

## 2.4.4 Représentation complexe

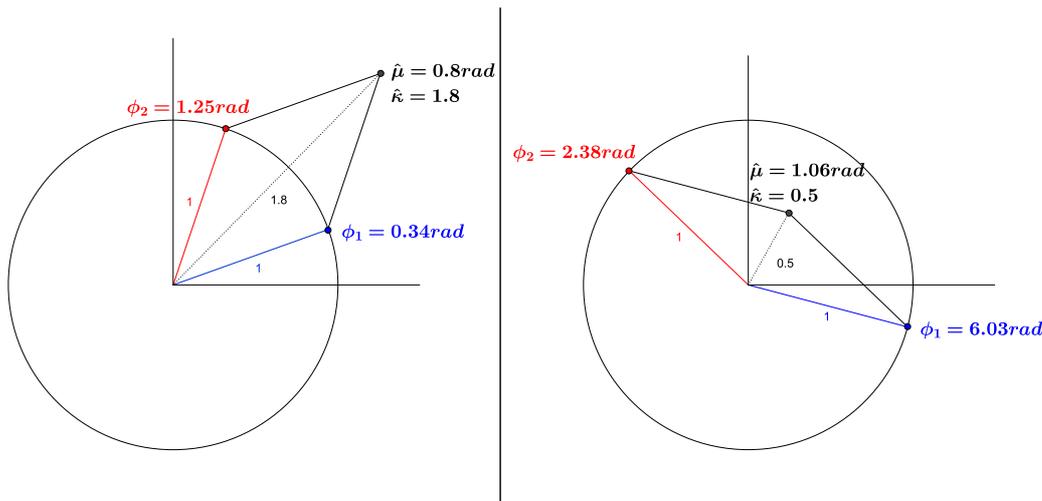


FIGURE 2.8 – Représentation complexe de  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\kappa}$  dans le cas de deux observations

On représente sur le cercle trigonométrique figure 2.8 les estimateurs de la moyenne et du paramètre de concentration de deux observations  $\phi_1$  et  $\phi_2$  distribuées suivant une loi de von Mises. La représentation des angles comme nombres complexes permet de voir la moyenne comme l'argument de la somme de ces complexes et le paramètre de concentration comme son module (cf équations 2.20 et 2.23). On notera que dans le cas où les angles sont séparés de moins de  $\pi/2$  radians (en valeur absolue et modulo  $2\pi$ ), le paramètre de concentration obtenu est supérieur à 1, et inversement, indiquant effectivement la concentration des observations autour de leur moyenne.

## 2.5 Tests d'hypothèse pour la distribution de von Mises

Dans cette section, on présentera les principales méthodes existantes pour le test des paramètres de la distribution de von Mises [51, 25]. On indiquera ainsi les tests les plus utilisés sur la valeur de la moyenne et du paramètre de concentration d'une distribution de von Mises, ainsi

que ceux sur l'égalité des moyennes et paramètres de concentration de deux distributions de von Mises. On proposera au chapitre 4 un test d'hypothèse pour une rupture de moyenne dans le cadre de données distribuées dans le temps suivant une loi de von Mises.

### 2.5.1 Tests sur la moyenne

#### Test sur la valeur de la moyenne d'une distribution de von Mises

Soit  $\phi_{1\dots n}$  un vecteur d'angles supposés suivre une distribution de von Mises  $\mathcal{CN}(\mu, \kappa)$ . On considère les deux hypothèses suivantes :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (2.25)$$

On définit  $R_\phi$  et  $\bar{\phi}$  par :

$$R_\phi = \sqrt{C^2 + S^2} \quad (2.26)$$

$$\bar{\phi} = \arctan^*(S, C) \quad (2.27)$$

où :

$$C = \sum_{k=1}^n \cos \phi_k \quad (2.28)$$

$$S = \sum_{k=1}^n \sin \phi_k \quad (2.29)$$

$R_\phi$  est une mesure de variance circulaire. On pose également :

$$V_\phi = \sum_{k=1}^n \cos(\phi_k - \mu_0) \quad (2.30)$$

$$= R_\phi \cos(\bar{\phi} - \mu_0) \quad (2.31)$$

Le ratio  $V_\phi/R_\phi$  est équivalent à une distance entre la moyenne circulaire estimée  $\bar{\phi}$  et la moyenne testée  $\mu_0$ . Le test du rapport de vraisemblance entre les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  correspond à :

$$\begin{array}{c} H_1 \\ \frac{V_\phi}{R_\phi} > \alpha \\ H_0 \end{array} \quad (2.32)$$

où  $\alpha$  est un seuil de confiance à définir.

Il est à noter que la distribution de  $V_\phi/R_\phi$  dépend du paramètre de concentration  $\kappa$ . Dans le cas où  $\kappa$  est inconnu, on utilise un test basé sur la distribution conditionnelle de  $R_\phi$  sachant  $V_\phi$ , indépendante de  $\kappa$ . Ce test consiste à rejeter  $H_0$  si  $V_\phi$  est trop faible pour un  $R_\phi$  donné ou si  $R_\phi$  est trop élevé pour un  $V_\phi$  donné. Ce test est défini par [51] :

$$P(R_\phi \geq r_0/V_\phi) = \int_{r_0}^n f(r/V_\phi) dr \underset{H_0}{\overset{H_1}{> <}} \alpha \quad (2.33)$$

où :

$$f(r/v) = \frac{r\Psi_n(r)}{\sqrt{r^2 - v^2}f_0(v)\pi} \quad (2.34)$$

$$\Psi_n(r) = \int_0^\infty J_0(rt)J_0^n(t)dt \quad (2.35)$$

$$f_0(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J_0^n(t) \cos(vt)dt \quad (2.36)$$

avec  $J_0$  la fonction de Bessel de première espèce définie par :

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jt \cos \theta} d\theta \quad (2.37)$$

avec  $j$  le complexe tel que  $j^2 = -1$ .

Le principe de ce test est le suivant : pour un seuil  $\alpha$  fixé par l'utilisateur, et pour une valeur calculée de  $V_\phi$  à partir des observations disponibles, il n'existe qu'une valeur  $r_0$  telle que  $\int_{r_0}^n f(r/V_\phi)dr = \alpha$ . En pratique, on déterminera cette valeur critique de  $r_0$  et on rejettera l'hypothèse  $H_0$  lorsque  $R_\phi$  lui est supérieur.

### Test sur l'égalité des moyennes de deux distributions de von Mises

Soient  $\phi_{1\dots n_1}^{(1)}$  et  $\phi_{1\dots n_2}^{(2)}$  deux vecteurs d'angles supposés suivre des distributions de von Mises  $\mathcal{CN}(\mu^{(1)}, \kappa)$  et  $\mathcal{CN}(\mu^{(2)}, \kappa)$ . On suppose donc un même paramètre de concentration pour ces deux distributions. On considère les deux hypothèses suivantes :

$$H_0 : \mu^{(1)} = \mu^{(2)} \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu^{(1)} \neq \mu^{(2)} \quad (2.38)$$

Soient :

$$R_\phi^{(1)} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n_1} \cos \phi_k^{(1)}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n_1} \sin \phi_k^{(1)}\right)^2} \quad (2.39)$$

$$R_\phi^{(2)} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n_2} \cos \phi_k^{(2)}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n_2} \sin \phi_k^{(2)}\right)^2} \quad (2.40)$$

$$R_\phi = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n_1} \cos \phi_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n_2} \cos \phi_k^{(2)}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n_1} \sin \phi_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n_2} \sin \phi_k^{(2)}\right)^2} \quad (2.41)$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$\left|R_\phi^{(1)} - R_\phi^{(2)}\right| \leq R_\phi \leq R_\phi^{(1)} + R_\phi^{(2)} \quad (2.42)$$

Lorsque  $\mu_1 \approx \mu_2$ ,  $S_\phi = R_\phi^{(1)} + R_\phi^{(2)} \approx R_\phi$ . On considérera donc le test suivant :

$$P(S_\phi \geq s_0/R_\phi) = \int_{s_0}^{n_1+n_2} f(s/R_\phi) ds \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \alpha \quad (2.43)$$

La distribution conditionnelle de  $R_\phi^{(1)}$  et  $R_\phi^{(2)}$  sachant  $R_\phi$  étant définie par la densité de probabilité :

$$f(R_\phi^{(1)}, R_\phi^{(2)}/R_\phi) = \frac{R_\phi^{(1)} \Psi_{n_1}(R_\phi^{(1)}) R_\phi^{(2)} \Psi_{n_2}(R_\phi^{(2)})}{\Psi_{n_1+n_2}(R_\phi)} \int_0^\infty J_0(R_\phi t) J_0(R_\phi^{(1)} t) J_0(R_\phi^{(2)} t) t dt \quad (2.44)$$

## 2.5.2 Tests sur le paramètre de concentration

### Test sur la valeur du paramètre de concentration d'une distribution de von Mises

Soit  $\phi_{1...n}$  un vecteur d'angles supposés suivre une distribution de von Mises  $\mathcal{CN}(\mu, \kappa)$ . On considère les deux hypothèses suivantes :

$$H_0 : \kappa = \kappa_0 \quad \text{contre} \quad \kappa \neq \kappa_0 \quad (2.45)$$

Si la moyenne  $\mu$  est connue, le test d'hypothèse peut être basé sur :

$$V_\phi = \sum_{k=1}^n (\cos \phi_k - \mu_0) \quad (2.46)$$

Le paramètre  $V_\phi$  est distribué suivant la densité :

$$f(V_\phi) = \frac{e^{\kappa V_\phi}}{\pi I_0^n(\kappa)} \int_0^\infty J_0^n(t) \cos(vt) dt \quad (2.47)$$

Pour un paramètre testé  $\kappa_0$  différent de 0, le test se fera par :

$$P(V_\phi \leq v_1) + P(V_\phi \geq v_2) = \int_0^{v_1} f(v) dv + \int_{v_2}^n f(v) dv \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \alpha \quad (2.48)$$

Pour  $\kappa_0 = 0$ , c'est à dire pour tester l'uniformité de la distribution, le test se fera par :

$$P(V_\phi \geq v_0) = \int_{v_0}^n f_0(v) dv \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \alpha \quad (2.49)$$

où la densité de probabilité  $f_0$  a été définie équation 2.36.

Lorsque la moyenne  $\mu$  de la distribution est inconnue, on procédera aux mêmes types de test, mais en utilisant le paramètre  $R_\phi$  défini équation 2.26. Pour  $\kappa_0 \neq 0$ , on considérera le test :

$$P(R_\phi \leq r_1) + P(R_\phi \geq r_2) = \int_0^{r_1} f(r) dr + \int_{r_2}^n f(r) dr \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \alpha \quad (2.50)$$

et, pour  $\kappa_0 = 0$ , le test :

$$P(R_\phi \geq r_0) = \int_{r_0}^n f_0(r) dr \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \alpha \quad (2.51)$$

avec :

$$f(r) = \frac{I_0(\kappa r)}{I_0^n(\kappa)} r \Psi_n(r) \alpha \quad (2.52)$$

$$f_0(r) = r \Psi_n(r) \quad (2.53)$$

### Test sur l'égalité des paramètres de concentration de deux distributions de von Mises

Soient  $\phi_{1\dots n_1}^{(1)}$  et  $\phi_{1\dots n_2}^{(2)}$  deux vecteurs d'angles supposés suivre des distributions de von Mises  $\mathcal{CN}(\mu^{(1)}, \kappa^{(1)})$  et  $\mathcal{CN}(\mu^{(2)}, \kappa^{(2)})$ . On considère les deux hypothèses suivantes :

$$H_0 : \kappa^{(1)} = \kappa^{(2)} \quad \text{contre} \quad H_1 : \kappa^{(1)} \neq \kappa^{(2)} \quad (2.54)$$

À partir de l'équation 2.22 pour l'estimation du paramètre de concentration et des équations 2.39, 2.40 et 2.41, et sachant que la fonction  $A^{-1}$  est monotone, on considère le paramètre :

$$D = \left| \frac{R_\phi^{(1)}}{n_1} - \frac{R_\phi^{(2)}}{n_2} \right| \quad (2.55)$$

et l'on rapporte le test à :

$$P(D \geq d_0/R_\phi) = \int_{d_0}^{n_1+n_2} f(d/R_\phi) dd \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \alpha \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} \quad (2.56)$$

où la densité de probabilité  $f(d/r)$  peut être retrouvée à partir de 2.44.

## 2.6 Estimateurs de précision dans le domaine circulaire

Lorsque les paramètres étudiés sont définis sur  $\mathbb{R}$ , affectés d'imprécisions dues par exemple à un bruit de mesure, les erreurs effectuées sont évaluées par leur distance à la valeur non bruitée du paramètre ainsi que par la variance de cette distance. Pour des paramètres angulaires, ces estimateurs de précision ne sont pas adaptés : ils sont liés au zéro de référence de l'axe des réels, qui n'existe pas en circulaire, et ne prennent pas en compte la périodicité des valeurs angulaires. Il est donc nécessaire d'établir des mesures de référence qui serviront à déterminer l'importance des imprécisions affectant un paramètre circulaire. Les trois mesures les plus utilisées dans la littérature sont la distance circulaire, la dispersion circulaire et la variance circulaire.

On considèrera, pour définir ces estimateurs, deux vecteurs d'angles notés  $\underline{\phi}^{(1)} = \{\phi_k^{(1)}\}$  et  $\underline{\phi}^{(2)} = \{\phi_k^{(2)}\}$  avec  $k = 1 \dots n$ .

### 2.6.1 Distance circulaire

La distance circulaire entre deux angles est définie par l'équation [51] :

$$d_c(\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}) = 1 - \cos(\phi_k^{(1)} - \phi_k^{(2)}) \quad (2.57)$$

Lorsque  $|\phi_k^{(1)} - \phi_k^{(2)}| \equiv 0[2\pi]$ , c'est-à-dire que  $\phi_k^{(1)}$  et  $\phi_k^{(2)}$  sont positionnés au même endroit sur le cercle trigonométrique, la distance circulaire  $d_c$  atteint 0, son minimum. À l'inverse, lorsque  $|\phi_k^{(1)} - \phi_k^{(2)}| \equiv \pi[2\pi]$ ,  $\phi_k^{(1)}$  et  $\phi_k^{(2)}$  sont diamétralement opposés sur le cercle et la distance circulaire prend la valeur 2, son maximum. Dans le cas d'une observation bruitée  $\phi$  d'un angle  $\theta$ ,  $\phi$  sera donc d'autant plus précise que  $d_c(\phi, \theta)$  sera faible.

### 2.6.2 Dispersion circulaire

La dispersion circulaire entre les deux vecteurs d'angles est obtenue par [51] :

$$D_v(\underline{\phi}^{(1)}, \underline{\phi}^{(2)}) = \frac{1}{n} \left( n - \sum_{k=1}^n \cos(\phi_k^{(1)} - \phi_k^{(2)}) \right) \quad (2.58)$$

La dispersion circulaire est en fait la moyenne des distances circulaires entre les éléments des deux ensembles d'angles. On aura donc les mêmes observations que pour la distance circulaire : la dispersion circulaire évolue entre 0 et 2 ; 0 indiquant une égalité des deux ensembles d'angles et 2 des ensembles d'angles diamétralement opposés.

### 2.6.3 Variance circulaire

La variance circulaire entre les deux vecteurs d'angles est donnée par [69] :

$$V_c(\underline{\phi}^{(1)}, \underline{\phi}^{(2)}) = 1 - \bar{R}(\underline{\phi}^{(1)}, \underline{\phi}^{(2)}) \quad (2.59)$$

$$\bar{R}(\underline{\phi}^{(1)}, \underline{\phi}^{(2)}) = \sqrt{(\bar{C}(\underline{\phi}^{(1)}, \underline{\phi}^{(2)}))^2 + (\bar{S}(\underline{\phi}^{(1)}, \underline{\phi}^{(2)}))^2} \quad (2.60)$$

$$\text{Avec : } \bar{C}(\underline{\phi}^{(1)}, \underline{\phi}^{(2)}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\phi_k^{(1)} - \phi_k^{(2)}) \quad \text{et} \quad \bar{S}(\underline{\phi}^{(1)}, \underline{\phi}^{(2)}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(\phi_k^{(1)} - \phi_k^{(2)})$$

La variance circulaire ainsi définie varie entre 0 et 1. Ici, à la manière de la variance du domaine linéaire, un biais constant entre les deux vecteurs pour  $k = 1 \dots n$  n'influence pas  $V_c$ , qui serait dans ce cas égale à 0 (cas de la formule trigonométrique  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ). C'est lorsque la différence entre les deux angles des vecteurs est fortement variable que la variance circulaire approchera 1.

Notons que pour des observations bruitées  $\underline{\phi} = \{\phi_k\}$  suivant une distribution de von Mises centrée sur un vecteur d'angles  $\underline{\theta} = \{\theta_k\}$  (avec  $k = 1 \dots n$ ), de paramètre de concentration  $\kappa$ , on aura l'approximation suivante :

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow E[V(\underline{\phi}, \underline{\theta})] \approx 1 - E[\bar{R}(\underline{\phi}, \underline{\theta})] \approx 1 - \left( A(\kappa) + \frac{1}{2n\kappa} \right) \quad (2.61)$$

## 2.7 Conclusion

On a défini dans ce chapitre les principaux éléments théoriques nécessaires à l'établissement d'outils de traitement des signaux circulaires. La distribution statistique de von Mises, qui est la plus utilisée en sciences appliquées et qui, surtout, décrit au mieux les données de phase des ondes électromagnétiques, a été définie. Les estimateurs des deux paramètres qui définissent cette distribution ont été définis, au sens du maximum de vraisemblance, ainsi que des tests d'hypothèse sur ces paramètres. La distribution circulaire Wrapped Normal a été présentée de la même manière. Cette dernière, bien que moins appropriée pour la description des données utilisées dans cette thèse, sera indispensable lorsqu'il sera nécessaire de connaître la statistique de la somme de deux variables suivant une distribution de von Mises.

À plusieurs reprises, il a été nécessaire d'utiliser une même fonction, notée  $A$ , définie sous la forme d'une fraction de sommes infinies ou d'intégrales. L'inversion de cette fonction n'est pas possible analytiquement et plusieurs approches ont été proposées, produisant chacune son propre niveau d'erreurs. Le choix d'une de ces approches repose sur le rapport précision/temps de calcul voulu. La méthode classiquement utilisée et présentée n'étant pas la plus performante en termes de précision, nous choisirons d'utiliser dans ce travail la fonction réciproque obtenue par la méthode de Runge-Kutta.

Ce chapitre a également permis, au travers des évaluations effectuées pour l'estimation du paramètre de concentration de mesures d'un angle, de prendre du recul sur les performances que nous sommes en droit d'attendre suivant le nombre d'observations disponibles et leur dispersion autour de leur moyenne. Par exemple, le fort gain de précision permis par l'utilisation de

la méthode de Newton pour l'inversion de  $A$  n'améliore que très peu l'estimation du paramètre de concentration, même pour un nombre d'observations élevé. Nous avons également vu que la représentation des angles sous forme complexe permet de mieux comprendre le fonctionnement des distributions circulaires.

Dans les chapitres suivants, le développement d'un opérateur de fusion circulaire permettra d'élargir le concept d'estimation des paramètres de la distribution de von Mises. La définition de filtres et d'un détecteur de ruptures circulaires originaux permettront d'élargir le cadre de l'estimation récursive des paramètres de la distribution de von Mises et des tests d'hypothèse en cas de sauts de moyenne.

# Chapitre 3

## Traitement du signal circulaire : cas linéaire. Application à l'estimation de la phase des signaux GNSS en boucle ouverte

### 3.1 Introduction

Depuis que les premiers satellites GNSS ont commencé à émettre, de nombreux outils de traitement ont été développés pour le démultiplexage et la démodulation des signaux GNSS reçus. Le but de ces techniques est d'estimer les délais de fréquence et de phase de la porteuse du signal GNSS ainsi que le délai de code CDMA. Dans le domaine de la recherche, des études ont plus particulièrement porté sur le cas d'un récepteur se trouvant dans un environnement pouvant générer des interférences sur ces signaux : multitrajets, perturbations électromagnétiques et atténuation de puissance lors de la propagation du signal [116]. Dans ce contexte, trois principales approches se distinguent dans la littérature pour améliorer la précision et la robustesse du traitement : l'utilisation de récepteurs aidés de capteurs additionnels, l'intégration cohérente du signal et la modélisation de l'altération de la fonction d'autocorrélation du code CDMA dans l'architecture réceptrice. Par exemple, les traitements récents des multitrajets et signaux interférents prennent en compte la distorsion de la forme de la fonction d'autocorrélation pour estimer le délai de code [100, 16, 95]. Les nouveaux systèmes aidés utilisent une boucle de poursuite vectorielle pour estimer les paramètres du signal reçu avec l'intégration ou non de capteurs externes [120, 64]. Dans tous les cas, les observables fournis par les boucles de poursuite sont les délais de code, de phase et de fréquence pour chaque satellite, et c'est l'intégration longue du signal qui permet d'extraire celui-ci du bruit [85].

Un récepteur GNSS poursuit le signal reçu dans le but d'estimer les délais de code et de phase, qui dépendent des mouvements satellite-récepteur. Dans cette thèse, le but des méthodes de traitement des signaux développées sera d'abord d'augmenter la robustesse au bruit (problème important en réflectométrie, les signaux réfléchis ayant une puissance atténuée), d'augmenter la précision de positionnement et plus accessoirement d'augmenter la robustesse aux conditions de dynamique élevée. Ce problème est de moindre importance pour l'application de réflectométrie dans laquelle notre récepteur sera statique. L'application du travail de thèse se fera sur signal GPS-L1, mais des travaux ont tout de même été effectués en cours de thèse sur des signaux GNSS plus modernes, qui se distinguent par des structures différentes. L'une des particularités de ces signaux est la présence d'une voie dite pilote, ne contenant pas de message de navigation, séparée de la voie de données classique. Cette voie additionnelle constitue une opportunité importante pour l'amélioration du positionnement en termes de robustesse et de précision, permettant en particulier de réaliser une intégration longue plus efficace. Par exemple, le signal GPS-L2C est composé de deux voies civiles multiplexées respectivement par les codes CM (Code Moderate) et CL (Code Long), puis multiplexés ensemble par division de temps (TDM : Time Division Multiplexing). Les voies pilote et données du signal GPS-L5 sont quant à elles multiplexées par deux codes orthogonaux et modulés par deux porteuses en quadrature [50]. Sur le signal GPS-L2C, il est possible de fusionner les observations de délai de phase et de fréquence pour accroître la précision de leur estimation [53], la porteuse étant unique.

Lorsque le signal reçu présente un faible rapport signal sur bruit (RSB), c'est la boucle de poursuite de phase qui décroche la première : l'estimation du délai de phase devient erronée et il est difficile à une boucle simple de pouvoir corriger cette estimation par la suite. En effet, la poursuite de la phase se fait classiquement en boucle fermée (PLL : Phase Lock Loop), et une estimée correcte de la phase est nécessaire à un instant  $k$  pour pouvoir produire une estimée correcte à l'instant  $k + 1$ . De plus, lorsque le discriminant utilisé est cohérent, comme le discriminant Early-minus-Late, la boucle de poursuite du délai de code décroche rapidement lorsque l'estimée du délai de phase est trop éloignée de sa valeur réelle. Pour augmenter la robustesse d'une PLL, le signal peut être intégré sur plusieurs périodes de code, et des boucles d'estimation de la fréquence peuvent être ajoutées aux architectures de poursuite [85, 57].

Dans ce chapitre, nous proposerons de poursuivre la phase des signaux GNSS en boucle ouverte. Cette méthode permet d'éviter la corrélation temporelle qui apparaît lorsqu'un filtre de boucle est utilisé dans une boucle fermée, ainsi que d'estimer la fréquence du signal comme multiple de la dérivée de la phase. Les observations fournies par une boucle ouverte de pour-

suite de phase (POL : Phase Open Loop) sont les délais de phase, définis dans le domaine circulaire, mesurés en radians dans un intervalle de longueur  $2\pi$  (nous choisirons ici arbitrairement l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ ). Au contraire, les mesures obtenues dans une PLL décrivent en fait les variations de délai de phase et doivent être intégrées pour fournir une observation de délai de phase en cycles. Les PLL permettent ainsi d'obtenir des mesures proches de zéro, pouvant être considérées comme définies sur un domaine linéaire et suivant une distribution statistique normale : on n'observe pas dans une boucle fermée de transitions  $-\pi/\pi$  liées au caractère circulaire du délai de phase. Le domaine linéaire est bien connu, ayant fait l'objet d'un très grand nombre de travaux de recherche en traitement du signal. En particulier, lorsque des paramètres suivent un modèle d'évolution linéaire et une distribution normale, il est possible de les estimer récursivement (respectivement de les fusionner) de manière optimale (au sens du maximum de vraisemblance comme des moindres carrés) en employant le filtrage de Kalman [55, 123] (respectivement l'opérateur de fusion somme pondérée [47, 44]). À l'inverse, peu de travaux ont été proposés pour l'estimation récursive et la fusion dans le cas d'observations angulaires. Aucun des filtres qui sont habituellement utilisés, à savoir le filtre de Kalman étendu (EKF) [8] ou les filtres particuliers [35, 52, 1], n'est optimal.

Nous présenterons dans ce chapitre un filtre récursif ainsi qu'un opérateur de fusion définis suivant une inférence Bayésienne circulaire. Ces outils sont développés suivant la distribution de von Mises présentée au chapitre précédent. En effet, dans [17], la distribution de von Mises est déterminée comme étant celle décrivant le mieux la statistique de l'observable de phase des signaux GNSS. Plusieurs travaux utilisant cette distribution ont été publiés pour la modélisation de diverses données circulaires. Par exemple, dans [70, 86, 79, 97], les statistiques de mesures issues de différents capteurs furent décrites à l'aide de la distribution de von Mises. Dans [99, 91], elle était utilisée pour la modélisation de processus de décision Markoviens. Des filtres circulaires développés dans un cadre Bayésien furent proposés dans quelques travaux récents. Dans le cas scalaire, un mélange de distributions de von Mises était utilisé pour la poursuite de données angulaires dans [71]. Dans le cas vectoriel, la distribution circulaire de Bingham fut également utilisée pour l'estimation d'angles dans [59].

Le filtre proposé ici a été développé avec la même inférence que le filtre de Kalman, en cherchant à obtenir l'estimateur du maximum *a posteriori* dans le cadre statistique de von Mises. Le système est décrit suivant une équation d'état et une équation de mesure linéaires, dans les cas scalaire et vectoriel. Nous cherchons à obtenir l'estimateur qui maximise la distribution *a posteriori* de l'état sachant la mesure. Le filtre est structuré entre une étape de prédiction et une étape de correction, définies respectivement à partir de la résolution de l'équation de

Chapman-Kolmogorov et de la maximisation de la vraisemblance de la mesure. Toutefois, il est nécessaire d'utiliser les approximations définies au chapitre précédent pour résoudre l'équation de Chapman-Kolmogorov. L'opérateur de fusion proposé est défini au sens du maximum de vraisemblance. Cependant, lorsque les observations sont fortement bruitées, des mesures aberrantes apparaissent. Des solutions ad hoc seront proposées pour appréhender ce problème.

L'architecture en boucle ouverte pour la poursuite de la phase ainsi que les différents outils de traitement des signaux circulaires proposés seront évalués dans des expérimentations sur données synthétiques et réelles. Le filtre récursif et l'opérateur de fusion développés seront utilisés à l'intérieur de l'architecture de poursuite proposée pour accroître la précision de l'estimation du délai de phase sur des signaux de type GPS-L2C. Les expérimentations seront effectuées sur données synthétiques pour pouvoir comparer les performances de ces outils en termes d'estimation de la phase avec les outils classiques du domaine linéaire (filtre de Kalman utilisé dans une PLL et opérateur somme pondérée). Les expérimentations sur données réelles permettront de démontrer l'intérêt pratique de l'architecture proposée pour l'estimation de la phase.

Le chapitre est organisé comme suit. Après cette introduction, nous présenterons l'opérateur de fusion développé, qui permet de combiner plusieurs mesures d'angles. La troisième section sera réservée au filtre circulaire vectoriel proposé. Dans la quatrième partie de ce chapitre, nous expliquerons le problème de mesures angulaires aberrantes et nous y proposerons des solutions. L'architecture pour la poursuite d'un signal GNSS sera présentée section 5, et plus particulièrement le principe de poursuite de phase en boucle ouverte. La sixième partie de ce chapitre consistera en l'évaluation des techniques proposées en comparaison avec les techniques conventionnelles. La septième et dernière section conclura le chapitre.

## 3.2 Fusion d'informations circulaires

Considérons un ensemble de  $N$  variables aléatoires circulaires distribuées selon une distribution de von Mises  $\mathcal{CN}$ . On propose de définir dans ce contexte leur opérateur de fusion au sens du maximum de vraisemblance. Cet opérateur de fusion intégrera ainsi la périodicité des variables circulaires et sera indépendant de la direction zéro de référence, à l'inverse d'un opérateur défini à partir de variables aléatoires linéaires.

Notons  $\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}$  les mesures angulaires,  $k$  étant l'indice de temps (pour l'application au GNSS,  $k$  est la période de code CDMA considérée). Le but est d'obtenir une mesure fusion-

née à l'instant  $k$   $\phi_{f,k}$  à partir de la séquence  $\{\phi_k^{(i)}\}_{i=1:N}$ .

Les erreurs de mesure (en tant que variables aléatoires) sont supposées indépendantes et identiquement distribuées suivant une distribution de von Mises de moyenne  $\theta_k$  et de paramètres de concentration  $\kappa_R^{(1)} \dots \kappa_R^{(N)}$ . La fonction de vraisemblance de l'état  $\theta_k$  sachant les mesures  $\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}$  est donnée par :

$$L(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)} | \theta_k) = f_{CN}(\phi_k^{(1)} | \theta_k, \kappa_R^{(1)}) f_{CN}(\phi_k^{(2)} | \theta_k, \kappa_R^{(2)}) \dots f_{CN}(\phi_k^{(N)} | \theta_k, \kappa_R^{(N)}) \quad (3.1)$$

$$\text{avec : } f_{CN}(\phi_k^{(i)} | \theta_k, \kappa_R^{(i)}) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})} \exp\left(\kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)} - \theta_k)\right) \quad (3.2)$$

$$\text{par suite : } L(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)} | \theta_k) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(1)})} \dots \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(N)})} \exp\left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)})\right) \quad (3.3)$$

Pour obtenir le maximum de vraisemblance, nous calculons d'abord le logarithme de cette fonction de vraisemblance, qui est donné par :

$$l = \ln L(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)} | \theta_k) = -\sum_{i=1}^N \ln\left(2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})\right) + \left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)})\right) \quad (3.4)$$

On cherche alors la racine de la dérivée de cette fonction de log-vraisemblance par rapport à  $\theta_k$ . On obtient l'équation de vraisemblance suivante :

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_k} = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin(\theta_k - \phi_k^{(i)}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\cos(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin(\phi_k^{(i)}) - \sin(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)}) = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{soit } S_k \cos(\theta_k) - C_k \sin(\theta_k) = 0 \quad (3.7)$$

$$\text{avec } S_k = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin(\phi_k^{(i)}) \quad (3.8)$$

$$\text{et } C_k = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)}) \quad (3.9)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta_k$ , noté  $\phi_{f,k}$ , est obtenu suivant l'équation

3.7 par :

$$\phi_{f,k} = \arctan^*(S_k, C_k), \quad (3.10)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \arctan\left(\frac{S_k}{C_k}\right) \text{ si } C_k > 0 \\ \arctan\left(\frac{S_k}{C_k}\right) + \pi \text{ si } S_k \geq 0, C_k < 0 \\ \arctan\left(\frac{S_k}{C_k}\right) - \pi \text{ si } S_k < 0, C_k < 0 \end{array} \right\}$$

$$= \text{Arg} \left( \sum_{i=1}^N e^{j\kappa_R^{(i)} \phi_k^{(i)}} \right) \quad (3.11)$$

avec  $j$  le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ . L'estimateur obtenu peut cependant correspondre à un minimum de la fonction de vraisemblance. Pour qu'il s'agisse bien d'un maximum, il faut que la dérivée seconde de la fonction de vraisemblance (ou de son logarithme) par rapport à  $\theta_k$  soit négative en ce point. La dérivée seconde de la log-vraisemblance est :

$$\frac{\partial^2 l}{\partial^2 \theta_k} = \sum_{i=1}^N -\kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)}) = -C_k \cos(\theta_k) - S_k \sin(\theta_k) \quad (3.12)$$

Toute combinaison linéaire d'un sinus et d'un cosinus de périodes égales peut s'écrire comme un sinus de même période, mais affecté d'une phase et d'une amplitude différentes. L'équation précédente peut ainsi être réécrite comme suit :

$$\frac{\partial^2 l}{\partial^2 \theta_k} = \sqrt{S_k^2 + C_k^2} \sin(\theta_k + \varphi_k) \quad (3.13)$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \arctan^*(-C_k, -S_k), \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan^*(-S_k, -C_k), \\ &= \left\{ \begin{array}{l} -\arctan\left(\frac{S_k}{C_k}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ si } C_k < 0 \\ -\arctan\left(\frac{S_k}{C_k}\right) - \frac{\pi}{2} \text{ si } C_k > 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

D'après 3.10 et 3.14, on a ainsi  $\phi_{f,k} + \varphi_k \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ . La valeur de 3.13 atteinte en  $\theta_k = \phi_{f,k}$  est donc négative, égale à  $-\sqrt{S_k^2 + C_k^2}$ . Ainsi, l'estimateur  $\phi_{f,k}$  maximise bien la fonction de vraisemblance.

Ce maximum est global sur une période de longueur  $2\pi$ . En effet, pour un ensemble donné de  $\kappa_R^{(i)}$ , le premier terme de l'équation 3.4 est fixé et le second terme est un cosinus présentant un maximum unique. Ainsi, l'opérateur de fusion  $\phi_{f,k}$  obtenu équation 3.10 est bien l'opérateur

de fusion optimal au sens du maximum de vraisemblance, défini évidemment à  $2\pi$  près. Il reste à définir le paramètre de concentration  $\kappa_{f,k}$  associé à cet opérateur.

La densité de probabilité jointe associée aux mesures  $\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}$  est donnée par :

$$f_{CN}(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N 2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})} \exp\left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)})\right) \quad (3.15)$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^N 2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})} \exp\left(\kappa_{f,k} \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)\right) \quad (3.16)$$

L'égalité des exponentielles donne :

$$\kappa_{f,k} \cos(\phi_{f,k} - \theta_k) = \kappa_{f,k} \cos(\theta_k) \cos(\phi_{f,k}) + \kappa_{f,k} \sin(\theta_k) \sin(\phi_{f,k}) \quad (3.17)$$

$$= \cos(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)}) + \sin(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin(\phi_k^{(i)}) \quad (3.18)$$

On en déduit par identification :

$$\kappa_{f,k} \cos \phi_{f,k} = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos \phi_k^{(i)} \quad (3.19)$$

$$\kappa_{f,k} \sin \phi_{f,k} = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin \phi_k^{(i)} \quad (3.20)$$

On obtient ainsi le paramètre de concentration suivant :

$$\kappa_{f,k} = \sqrt{(\kappa_{f,k} \cos \phi_{f,k})^2 + (\kappa_{f,k} \sin \phi_{f,k})^2} \quad (3.21)$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos \phi_k^{(i)}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin \phi_k^{(i)}\right)^2} \quad (3.22)$$

$$= \left| \sum_{i=1}^N e^{j\kappa_R^{(i)} \phi_k^{(i)}} \right| \quad (3.23)$$

On remarque que le paramètre de concentration de l'opérateur de fusion dépend des mesures, ce qui constitue une différence majeure en comparaison avec l'opérateur optimal du domaine linéaire (la somme pondérée). Dans le paragraphe suivant, on montrera que la variance circulaire de la moyenne des mesures fusionnées est inférieure à la variance circulaire de chaque mesure. Pour cela, on considérera d'abord le cas de mesures en provenance de deux capteurs.

## Fusion des mesures de deux capteurs

On considère  $n$  observations d'angles  $\phi_{1:n}^{(1)}$  et  $\phi_{1:n}^{(2)}$  effectuées par deux capteurs au cours du temps. La variance circulaire  $V_{c,f}$  de l'opérateur de fusion est définie à partir de 2.59 par :

$$V_{c,f} = 1 - \bar{R} \quad (3.24)$$

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2} \quad (3.25)$$

$$\text{Avec : } \bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\phi_{f,k} - \theta_k) \text{ et } \bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(\phi_{f,k} - \theta_k) \quad (3.26)$$

Dans le cas de la somme pondérée, et lorsque les bruits sont indépendants et identiquement distribués, la variance de l'opérateur de fusion est obtenu par :

$$\frac{1}{V_f} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{V^{(i)}} \quad (3.27)$$

où  $V^{(1)}$  et  $V^{(2)}$  sont les variances des mesures obtenues par chaque capteur. Il apparait dans ce cas que l'opérateur de fusion diminue la variance des mesures :

$$V_f < \min\{V^{(1)}, V^{(2)}\} \quad (3.28)$$

On cherche à montrer que la propriété 3.28 est conservée pour la variance circulaire de l'opérateur de fusion proposée. On présente figure 3.1 la variance circulaire estimée par l'expression 3.24 pour l'opérateur proposé et la variance qu'une somme pondérée circulaire obtiendrait théoriquement par l'expression 3.27. On fixe le paramètre de concentration des mesures fournies par le premier capteurs  $\kappa_R^{(1)}$  à 1 et on considère des valeurs différentes pour  $\kappa_R^{(2)}$ , paramètre de concentration des mesures fournies par le second capteur. On indique également les variances circulaires de chaque vecteur de mesures.

Cette figure montre une bonne cohérence entre les estimées théoriques et pratiques de la variance circulaire (sur 1 000 réalisations). Il apparait que la fusion circulaire proposée fournit les mêmes performances que la somme pondérée. Les expressions 3.27 et 3.28 restent valides pour  $N$  capteurs.

On représente figure 3.2 l'opérateur de fusion et son paramètre de concentration associé sur le cercle trigonométrique. On observe qu'en décrivant les angles observés et leurs paramètres de concentration respectivement comme l'argument et le module de nombres complexes, on obtient directement l'angle fusionné et son paramètre de concentration associé comme argument

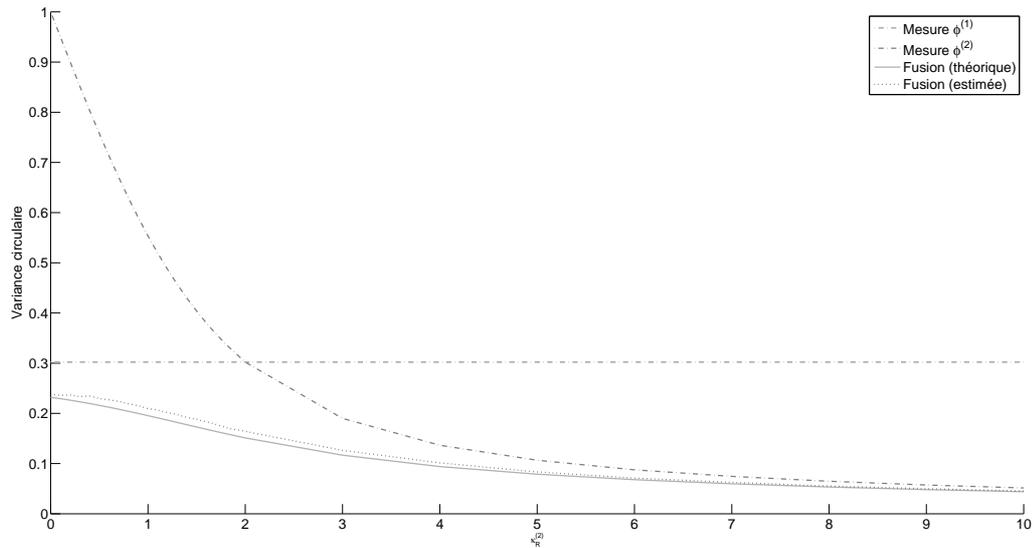


FIGURE 3.1 – Variances circulaires des mesures et de l'opérateur de fusion en fonction de  $\kappa_R^{(2)}$

et module de la somme des nombres complexes. Cela est en concordance avec ce qui avait été montré section 2.4.4 dans le cas d'observations ayant un même paramètre de concentration.

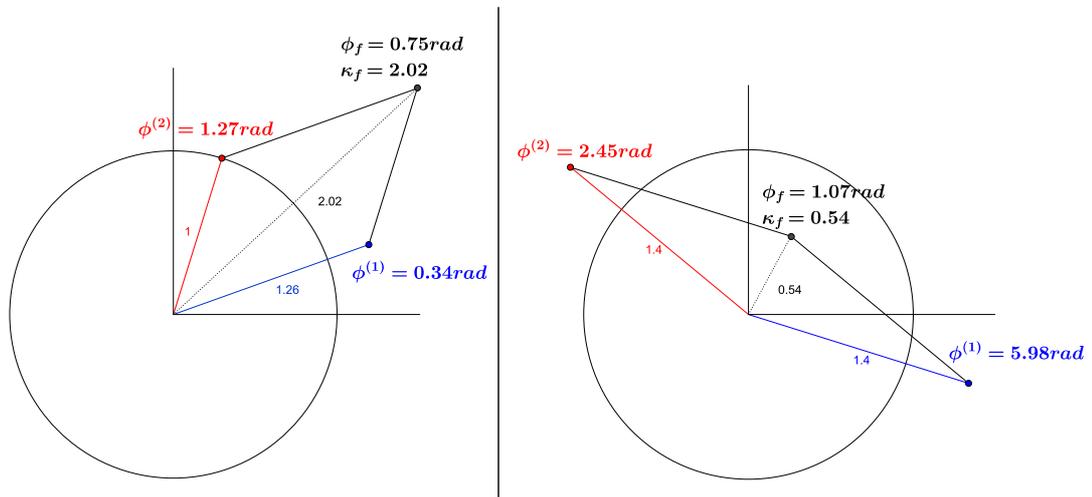


FIGURE 3.2 – Représentation complexe de  $\phi_f$  et  $\kappa_f$  dans le cas de deux mesures

On notera dans le cas de la figure de droite que le paramètre de concentration de la mesure fusionnée peut, lorsque les angles observés sont éloignés les uns des autres, être inférieur aux

paramètres de concentration des mesures à fusionner. Cette particularité du domaine circulaire est liée à la dépendance du paramètre de concentration fusionné aux mesures, comme vu équation 3.22. Ce problème sera discuté plus en profondeur, et une solution sera proposée, section 3.4.

Des versions successives de l'opérateur de fusion circulaire furent présentées lors des conférences "Fusion", en 2011 [105], et "Position Location and Navigation Symposium" (PLANS), en 2012 [108], et cette dernière version fut publiée dans la revue Information Fusion en 2013 [107]. Dans cette dernière, l'opérateur de fusion était utilisé pour combiner les mesures angulaires en provenance d'un magnétomètre.

### 3.3 Filtre circulaire récursif

On décrit dans cette section l'expression d'un filtre récursif circulaire défini dans un cadre Bayésien. On supposera que les erreurs d'état et de mesure suivent des distributions de von Mises.

#### 3.3.1 Filtre scalaire

On définit un système à temps discret de loi initiale  $f(\theta_0)$ , de loi de transition  $f(\theta_k | \theta_{k-1}, \kappa_Q)$  et de fonction de vraisemblance  $f(\phi_{f,k} | \theta_k, \kappa_f)$ . Les observations  $\phi_{f,k}$  sont obtenues par fusion circulaire des mesures fournies par plusieurs capteurs. Les équations d'état et de mesure sont :

$$\begin{cases} \theta_k & = h\theta_{k-1} + v_{k-1} \\ \phi_{f,k} & = \theta_k + w_k \end{cases} \quad (3.29)$$

où  $w_k$  est un bruit de mesure qui suit une distribution de von Mises centrée en 0, de paramètre de concentration  $\kappa_f$ .  $v_{k-1}$  est un bruit de modèle d'état qui suit également une distribution de von Mises centrée en 0, de paramètre de concentration  $\kappa_Q$ . Le filtre récursif circulaire proposé est dérivé à partir de la distribution *a posteriori*. Chaque estimation fournie par le filtre est définie par la loi de transition et par la fonction de vraisemblance. Le traitement récursif du filtre est défini par :

$$\begin{aligned} P(\theta_{k-1} | \phi_{f,1:k-1}) & \xrightarrow{\text{prédiction}} P(\theta_k | \theta_{k-1}) \\ P(\theta_k | \phi_{f,1:k-1}) & \xrightarrow{\text{correction}} P(\theta_k | \phi_{f,1:k}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Le filtre sera implémenté, comme dans le cas linéaire du filtre de Kalman, avec une étape de prédiction, basée sur l'équation d'état, et une étape de correction, ou mise-à-jour, basée sur les mesures.

### Étape de prédiction

On suppose que la probabilité *a posteriori*  $f(\theta_{k-1} | \phi_{f,1:k-1})$ , obtenue à l'instant  $k-1$ , suit une distribution de von Mises, c'est-à-dire :

$$\theta_{k-1} | \phi_{f,1:k-1} \sim \mathcal{CN}(\theta_{k-1} | \hat{\theta}_{k-1}, P_{\theta_{k-1}}) \quad (3.31)$$

où  $\hat{\theta}_{k-1}$  et  $P_{\theta_{k-1}}$  sont respectivement la moyenne *a posteriori* et le paramètre de concentration de  $\theta_{k-1}$ . L'équation de Chapman-Kolmogorov définit la distribution de l'état prédit :

$$f(\theta_k | \phi_{f,1:k-1}) = \int f(\theta_k | \theta_{k-1}, \phi_{f,1:k-1}) f(\theta_{k-1} | \phi_{f,1:k-1}) d\theta_{k-1} \quad (3.32)$$

Dans le cas d'une distribution de von Mises, l'étape de prédiction est donc définie par :

$$\mathcal{CN}(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) \propto \int \mathcal{CN}(\theta_k | \theta_{k-1}, \kappa_Q) \mathcal{CN}(\theta_{k-1} | h\hat{\theta}_{k-1}, P_{\theta_{k-1}}) d\theta_{k-1} \quad (3.33)$$

Cette équation ne peut pas être résolue analytiquement. On propose d'utiliser les approximations définies au chapitre précédent liant une distribution de von Mises  $\mathcal{CN}(\mu, \kappa)$  à une distribution Wrapped Normal  $\mathcal{WN}(\mu, \rho)$  pour  $\rho = A(\kappa)$  et  $\kappa = A^{-1}(\rho)$ . On utilise donc les approximations :

$$\mathcal{CN}(\theta_k | h\theta_{k-1}, \kappa_Q) \approx \mathcal{WN}(\theta_k | h\theta_{k-1}, A(\kappa_Q)) \quad (3.34)$$

$$\mathcal{CN}(\theta_{k-1} | \hat{\theta}_{k-1}, P_{\theta_{k-1}}) \approx \mathcal{WN}(\theta_{k-1} | \hat{\theta}_{k-1}, A(P_{\theta_{k-1}})) \quad (3.35)$$

avec :

$$\mathcal{WN}(\theta_k | h\theta_{k-1}, A(\kappa_Q)) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\theta_{k-1} + 2\pi n)^2}{2\sigma_1^2}\right) \quad (3.36)$$

$$\mathcal{WN}(\theta_{k-1} | \hat{\theta}_{k-1}, A(P_{\theta_{k-1}})) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-(\theta_{k-1} - \hat{\theta}_{k-1} + 2\pi m)^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (3.37)$$

$$\text{où } \sigma_1^2 = -2 \ln(A(\kappa_Q)) \quad \text{et} \quad \sigma_2^2 = -2 \ln(A(P_{\theta_{k-1}})).$$

L'intégrale 3.32 peut donc être réécrite sous la forme :

$$\mathcal{CN}(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) \approx \int \mathcal{WN}(\theta_k | h\theta_{k-1}, A(\kappa_Q)) \mathcal{WN}(\theta_{k-1} | \hat{\theta}_{k-1}, A(P_{\theta_{k-1}})) d\theta_{k-1} \quad (3.38)$$

D'après la propriété d'homomorphisme des distributions construites par enroulement autour du cercle [69], l'équation 3.38 peut être écrite :

$$\approx \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\theta_{k-1} + 2\pi n)^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(\frac{-(\theta_{k-1} - \hat{\theta}_{k-1} + 2\pi n)^2}{2\sigma_2^2}\right) d\theta_{k-1} \quad (3.39)$$

Pour  $n = 0$ , le produit de deux lois Gaussiennes de moyennes  $h\theta_{k-1}$  et  $\hat{\theta}_{k-1}$  peut être réécrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} (\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)} \sqrt{\frac{(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}{2\pi(\sigma_1^2 \sigma_2^2)}} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1})^2}{2(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}\right) \exp\left(-\frac{B}{2} \left(\theta_{k-1} - \left(\frac{h\theta_k}{B\sigma_1^2} + \frac{\hat{\theta}_{k-1}}{B\sigma_2^2}\right)\right)^2\right) \quad (3.40)$$

où  $B = \frac{\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$ .

L'intégrale 3.32 est définie, dans le cadre des distributions périodiques  $\mathcal{WN}$ , par :

$$\mathcal{CN}(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} (\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi n)^2}{2(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta_{k-1}, n) d\theta_{k-1} \quad (3.41)$$

$$\text{Avec } g(\theta_{k-1}, n) = \sqrt{\frac{B}{2\pi}} \exp\left(-\frac{B}{2} \left(\theta_{k-1} - \left(\frac{h\theta_k}{B\sigma_1^2} + \frac{\hat{\theta}_{k-1}}{B\sigma_2^2}\right) + 2\pi n\right)^2\right) \quad (3.42)$$

On reconnaît dans  $g(\theta_{k-1}, n)$  une loi Gaussienne de moyenne  $\frac{h\theta_k}{B\sigma_1^2} + \frac{\hat{\theta}_{k-1}}{B\sigma_2^2}$  et de variance  $\frac{1}{B}$ .

Par suite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta_{k-1}, n) d\theta_{k-1} = 1 \quad \forall (n) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.43)$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{CN}(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) \approx \\
 & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi n)^2}{2(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}\right) \approx \\
 & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi(-4\ln(A(h^2P_{\theta_{k-1}})A(\kappa_Q)))}} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi n)^2}{(-4\ln(A(h^2P_{\theta_{k-1}})A(\kappa_Q)))}\right) \approx \\
 & \mathcal{WN}(\theta_k | h\hat{\theta}_{k-1}, A(h^2P_{\theta_{k-1}})A(\kappa_Q)) \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

### Étape de correction

Dans l'étape de correction, on définit  $\hat{\theta}_k$ , l'estimée de  $\theta_k$ , et son paramètre de concentration associé  $P_{\theta_k}$ . L'équation de correction est déduite de la distribution de probabilité *a posteriori*  $f(\theta_k | \phi_{f,1:k})$  définie par :

$$\underbrace{f(\theta_k | \phi_{f,1:k})}_{\text{distribution a posteriori}} \propto \underbrace{f(\theta_k | \phi_{f,1:k-1})}_{\text{distribution a priori}} \underbrace{f(\phi_{f,k} | \theta_k)}_{\text{vraisemblance}} \quad (3.45)$$

Dans notre modèle, la distribution *a priori* et la vraisemblance suivent des lois de von Mises. Par la règle de Bayes, on dérive la distribution *a posteriori* par :

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) = \frac{1}{Z_k} \mathcal{CN}(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) \mathcal{CN}(\phi_{f,k} | \theta_k, \kappa_f) \quad (3.46)$$

où  $Z_k = \mathcal{CN}(\phi_{f,k} | \phi_{f,1:k-1})$  est une constante de normalisation. Par suite :

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) \propto \exp\left(P_{\theta_{k/k-1}} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1}) + \kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)\right)$$

De l'équation 3.46, on obtient :

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) \propto \exp\left(P_{\theta_{k/k-1}} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1})\right) * \exp\left(\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)\right) \quad (3.47)$$

$$\propto \exp\left(P_{\theta_{k/k-1}} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1}) + \kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)\right) \quad (3.48)$$

$$\propto \exp(C_k \cos(\theta_k) + S_k \sin(\theta_k)) \quad (3.49)$$

$$\text{avec : } C_k = P_{\theta_{k/k-1}} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_f \cos \phi_{f,k} \quad (3.50)$$

$$S_k = P_{\theta_{k/k-1}} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_f \sin \phi_{f,k} \quad (3.51)$$

Finalemment :

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) \propto \exp\left(\sqrt{C_k^2 + S_k^2} \cos(\theta_k - \arctan^*(S_k, C_k))\right) \quad (3.52)$$

$$\text{avec : } \hat{\theta}_k = \arctan^*(S_k, C_k) \quad (3.53)$$

$$P_{\theta_k} = \sqrt{C_k^2 + S_k^2} \quad (3.54)$$

Dans [51], il est démontré que  $\hat{\theta}_k$  suit une loi de von Mises, de moyenne  $\arctan^*(S_k, C_k)$  et de paramètre de concentration  $\sqrt{C_k^2 + S_k^2}$ . La distribution *a posteriori*  $f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k})$  est donc une loi de von Mises définie par :

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) = \mathcal{CN}(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) = \frac{1}{2\pi I_0(P_{\theta_k})} \exp\left(P_{\theta_k} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_k)\right) \quad (3.55)$$

### 3.3.2 Cas vectoriel

On suppose ici que l'on dispose de mesures de l'angle et des variations d'angle (qui correspondent à la vitesse angulaire multipliée par l'intervalle de temps). On définit dans cette section une version vectorielle du filtre récursif circulaire proposé. L'équation d'état est dans ce cas :

$$\Theta_k = F \Theta_{k-1} + V_{k-1} \quad (3.56)$$

À chaque instant  $k$ ,  $\Theta_k = [\theta_k, \dot{\theta}_k]$  est l'état à estimer, avec  $\theta_k$  une variable aléatoire décrivant l'angle et  $\dot{\theta}_k$  une variable aléatoire décrivant les variations d'angle. La notation  $\dot{\theta}_k$  ne décrit pas ici la dérivée de l'angle. La dérivée angulaire et les variations d'angle sont cependant proportionnelles, à la période d'estimation  $dt$  près.  $F$  est la matrice de transition, définie par

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \dot{\theta}_{k-1} + \nu_{1,k-1} \quad (3.57)$$

$$\dot{\theta}_k = \dot{\theta}_{k-1} + \nu_{2,k-1} \quad (3.58)$$

Le vecteur de bruits  $V_{k-1} = [\nu_{1,k-1}, \nu_{2,k-1}]^T$  représente l'erreur sur le modèle d'état.  $\nu_{1,k-1}$  et  $\nu_{2,k-1}$  sont respectivement le bruit sur  $\theta_k$  et sur  $\dot{\theta}_k$ . Ces bruits sont supposés suivre des distributions de von Mises centrées en 0, de paramètres de concentration respectifs  $\kappa_{1,Q}$  et  $\kappa_{2,Q}$ . À l'instant  $k$ , une observation de l'état est obtenue sous la forme :

$$\Phi_{f,k} = H \Theta_{k-1} + W_k \quad (3.59)$$

où  $H$  est la matrice d'observation :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Phi_{f,k} = [\phi_{f,k}, \dot{\phi}_k]^T$  est le vecteur de mesures d'angles.

Le vecteur de bruits  $W_k = [w_{1,k}, w_{2,k}]^T$  représente les erreurs de mesure.  $w_{1,k}$  et  $w_{2,k}$  sont deux bruits suivant des distributions de von Mises respectives  $\mathcal{CN}(0, \kappa_{1,R})$  et  $\mathcal{CN}(0, \kappa_{2,R})$ .

On note  $\hat{\Theta}_{k/k-1} = [\hat{\theta}_{k/k-1}, \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1}]^T$  l'estimée de l'état prédit,  $\hat{\Theta}_k = [\hat{\theta}_k, \hat{\dot{\theta}}_k]^T$  l'état estimé et  $P_{\theta_k}$  et  $P_{\dot{\theta}_k}$  les paramètres de concentration de  $\hat{\Theta}_k$ . L'étape de prédiction est obtenue par la résolution de l'équation de Chapman-Kolmogorov dans le cas d'une indépendance entre les deux composantes du vecteur et comme dans le cas scalaire. On obtient les équations suivantes :

$$\hat{\theta}_{k/k-1} = \hat{\theta}_{k-1} + \hat{\dot{\theta}}_{k-1} \quad (3.60)$$

$$P_{\theta_{k/k-1}} = A^{-1} \left( A(\kappa_{1,Q}) A(P_{\theta_{k-1}}) A(P_{\dot{\theta}_{k-1}}) \right) \quad (3.61)$$

où les estimées  $\hat{\theta}_{k-1}$  et  $\hat{\dot{\theta}}_{k-1}$  sont respectivement distribués suivant  $\mathcal{WN}(\hat{\theta}_{k-1}, A(P_{\theta_{k-1}}))$  et  $\mathcal{WN}(\hat{\dot{\theta}}_{k-1}, A(P_{\dot{\theta}_{k-1}}))$ . La propriété d'additivité des variables suivant des lois Wrapped Normal (voir section 2.2.2) nous permet de conclure que l'équation 3.57 est distribuée suivant  $\mathcal{WN}(\hat{\theta}_{k-1} + \hat{\dot{\theta}}_{k-1}, A(P_{\theta_{k-1}}) A(P_{\dot{\theta}_{k-1}}))$ . On peut alors définir la distribution 3.35 utilisée dans l'équation de Chapman-Kolmogorov par  $\mathcal{WN}(\theta_{k-1} | \hat{\theta}_{k-1} + \hat{\dot{\theta}}_{k-1}, A(P_{\theta_{k-1}}) A(P_{\dot{\theta}_{k-1}}))$ .

Cependant, l'étape de prédiction telle que définie par le modèle 3.57 introduit une corrélation entre les états qui n'est pas prise en compte dans la résolution de l'équation de Chapman-Kolmogorov. Cela a pour conséquence une sous-estimation du paramètre de concentration  $P_{\theta_{k/k-1}}$ . On verra dans l'étape de correction comment compenser cette sous-estimation.

On peut dériver l'équation de prédiction associée à l'équation d'état 3.58 pour obtenir :

$$\hat{\dot{\theta}}_{k/k-1} = \hat{\dot{\theta}}_{k-1} \quad (3.62)$$

$$P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} = A^{-1} \left( A(\kappa_{2,Q}) A(P_{\dot{\theta}_{k-1}}) \right) \quad (3.63)$$

Pour définir l'étape de correction dans le cas circulaire, on procède par analogie au domaine linéaire. Dans l'annexe A, l'étape de correction d'un filtre alpha-bêta est définie dans le domaine

linéaire par la somme pondérée suivante :

$$\hat{x}_k = \beta_{11}\hat{x}_{k/k-1} + \beta_{12}z_k + \beta_{13}(\dot{z}_k + \hat{x}_{k-1}) \quad (3.64)$$

$$\hat{\dot{x}}_k = \beta_{21}\hat{\dot{x}}_{k/k-1} + \beta_{22}\dot{z}_k + \beta_{23}(z_k - \hat{x}_{k-1}) \quad (3.65)$$

où  $\hat{X}_k = [\hat{x}_k, \hat{\dot{x}}_k]^T$  est l'état estimé,  $\hat{X}_{k/k-1} = [\hat{x}_{k/k-1}, \hat{\dot{x}}_{k/k-1}]^T$  est l'état prédit et  $Z_k = [z_k, \dot{z}_k]^T$  définit la mesure. Par analogie, on définit dans le domaine circulaire l'angle estimé comme somme pondérée circulaire de  $\hat{\theta}_{k/k-1}$ ,  $\phi_{f,k}$  et  $\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}$ . Les variations angulaires estimées sont définies comme somme pondérée circulaire de  $\dot{\phi}_k$ ,  $\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}$  et  $\hat{\theta}_{k/k-1}$ . La somme pondérée circulaire est celle qui a été définie section 3.2 en tant qu'opérateur de fusion circulaire. On montre dans l'annexe B que l'estimateur ainsi défini est l'estimateur du maximum *a posteriori*. On obtient :

$$P_{\theta_k} = \sqrt{C_{\theta_k}^2 + S_{\theta_k}^2} \quad (3.66)$$

$$P_{\dot{\theta}_k} = \sqrt{C_{\dot{\theta}_k}^2 + S_{\dot{\theta}_k}^2} \quad (3.67)$$

$$\hat{\theta}_k = \arctan^*(S_{\theta_k}, C_{\theta_k}) \quad (3.68)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_k = \arctan^*(S_{\dot{\theta}_k}, C_{\dot{\theta}_k}) \quad (3.69)$$

avec :

$$C_{\theta_k} = \alpha_{11} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{12} \cos \phi_{f,k} + \alpha_{13} \cos (\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}) \quad (3.70)$$

$$S_{\theta_k} = \alpha_{11} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{12} \sin \phi_{f,k} + \alpha_{13} \sin (\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}) \quad (3.71)$$

où :

$$\alpha_{11} = P_{\theta_{k/k-1}} \quad (3.72)$$

$$\alpha_{12} = \kappa_{1,R} \quad (3.73)$$

$$\alpha_{13} = A^{-1}(A(P_{\theta_{k-1}})A(\kappa_{2,R})) \quad (3.74)$$

et, pour les variations d'angles :

$$C_{\dot{\theta}_k} = \alpha_{21} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{22} \cos \dot{\phi}_k + \alpha_{23} \cos (\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}) \quad (3.75)$$

$$S_{\dot{\theta}_k} = \alpha_{21} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{22} \sin \dot{\phi}_k + \alpha_{23} \sin (\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}) \quad (3.76)$$

avec :

$$\alpha_{21} = P_{\hat{\theta}_{k/k-1}} \quad (3.77)$$

$$\alpha_{22} = \kappa_{2,R} \quad (3.78)$$

$$\alpha_{23} = A^{-1}(A(P_{\theta_{k-1}})A(\kappa_{1,R})) \quad (3.79)$$

Les équations définissant  $C_{\theta_k}$ ,  $S_{\theta_k}$ ,  $C_{\dot{\theta}_k}$  et  $C_{\ddot{\theta}_k}$  se comportent à la manière des sommes pondérées 3.64 et 3.65 dans le domaine circulaire. Dans ces expressions, les coefficients  $\alpha$  des sommes pondérées sont les paramètres de concentration de variables circulaires suivant des lois de von Mises. Le poids  $\alpha_{11}$  est sous-estimé en raison de la non-prise en compte de la corrélation introduite dans l'équation 3.57. En pratique, on pourra modifier le paramètre  $\kappa_{1,Q}$  pour que cette sous-estimation soit compensée dans le filtre.

Ce filtre récursif circulaire a été publié dans la revue "Information Fusion" en 2013 [107]. Dans cet article, le filtre est utilisé pour l'estimation de données en provenance d'un magnéto-mètre.

### 3.3.3 Application au filtrage de la phase et de la fréquence d'un signal GNSS

Dans un récepteur GNSS, on dispose de mesures du délai de phase à partir desquelles on cherche à poursuivre la phase et la fréquence du signal. On désire augmenter la robustesse de l'estimation de la phase à des effets de dynamique importants en utilisant la version vectorielle du filtre proposée. On désire également disposer d'une estimation de la fréquence. Le filtre sera donc utilisé comme indiqué figure 3.3.

Dans ce cas, les équations de prédiction restent :

$$\hat{\theta}_{k/k-1} = \hat{\theta}_{k-1} + \hat{\dot{\theta}}_{k-1} \quad (3.80)$$

$$P_{\theta_{k/k-1}} = A^{-1}(A(\kappa_{1,Q}) A(P_{\theta_{k-1}}) A(P_{\dot{\theta}_{k-1}})) \quad (3.81)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_{k/k-1} = \hat{\dot{\theta}}_{k-1} \quad (3.82)$$

$$P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} = A^{-1}(A(\kappa_{2,Q}) A(P_{\dot{\theta}_{k-1}})) \quad (3.83)$$

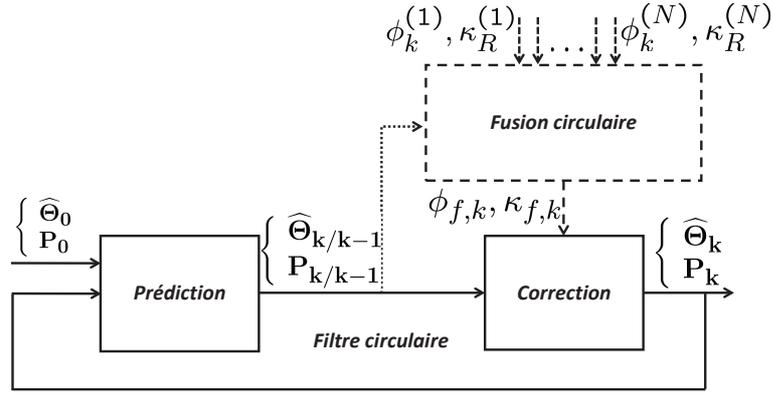


FIGURE 3.3 – Architecture pour l'estimation récursive d'un angle à partir de  $N$  mesures

mais les équations de correction, du fait de l'absence de mesures de fréquence, deviennent :

$$\hat{\theta}_k = \arctan^*(S_{\theta_k}/C_{\theta_k}) \quad (3.84)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_k = \arctan^*(S_{\dot{\theta}_k}/C_{\dot{\theta}_k}) \quad (3.85)$$

$$P_{\theta_k} = \sqrt{C_{\theta_k}^2 + S_{\theta_k}^2} \quad (3.86)$$

$$P_{\dot{\theta}_k} = \sqrt{C_{\dot{\theta}_k}^2 + S_{\dot{\theta}_k}^2} \quad (3.87)$$

avec :

$$C_{\theta_k} = P_{\theta_{k/k-1}} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_R \cos \phi_k \quad (3.88)$$

$$S_{\theta_k} = P_{\theta_{k/k-1}} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_R \sin \phi_k \quad (3.89)$$

$$C_{\dot{\theta}_k} = P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \tilde{\kappa} \cos(\phi_k - \hat{\theta}_{k-1}) \quad (3.90)$$

$$S_{\dot{\theta}_k} = P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \tilde{\kappa} \sin(\phi_k - \hat{\theta}_{k-1}) \quad (3.91)$$

où  $\tilde{\kappa} = A^{-1}(A(\kappa_{1,R})A(P_{\theta_{k-1}}))$ .

Cette version du filtre récursif circulaire fit l'objet d'une communication à la conférence "Position Location and Navigation Symposium" en 2012 [108] et d'un article dans la revue "Signal Processing" [106], en 2013, pour le traitement de la phase des signaux GNSS.

### 3.4 Cas particuliers de mesures d'angles aberrantes

On a vu section 2.2.1 que lorsque le paramètre de concentration d'une distribution de von Mises est faible, la distribution s'apparente à une distribution uniforme entre 0 et  $2\pi$ , pour laquelle aucune direction n'est privilégiée. En termes de traitement des signaux, cela signifie que lorsque des mesures d'un angle sont entachées d'un bruit très important, il est impossible de déterminer leur moyenne. Ce problème est beaucoup plus important dans le domaine circulaire que dans le domaine linéaire, où, même lorsque la variance de mesures est grande, celles-ci restent centrées sur la moyenne.

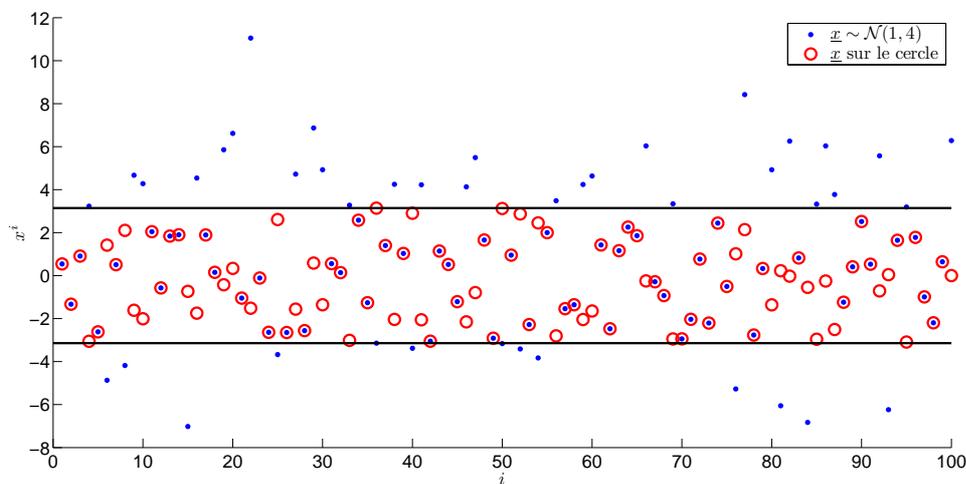


FIGURE 3.4 – Cas de mesures d'angles fortement bruitées : différence avec le domaine linéaire

On présente cette différence figure 3.4. Sur cette figure, on représente cent réalisations  $x^1, \dots, x^{100}$  d'une loi normale centrée sur 1, de variance 4. Lorsque l'on estime la moyenne de ces réalisations, on obtient un résultat proche de 1 (d'autant plus proche si l'on considère un grand nombre de mesures). On représente également par des cercles rouges les valeurs de ces réalisations vues comme des angles, définies sur le cercle entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Il apparaît que la distribution de  $\underline{x}$ , rapportée sur le cercle, semble être une distribution uniforme. En pratique, la moyenne circulaire des réalisations vues sur le cercle change effectivement à chaque nouveau tirage de  $\underline{x}$ .

On proposera dans cette section des méthodes ad hoc pour résoudre le problème de mesures aberrantes ou fortement bruitées dans le cadre de l'opérateur de fusion et du filtre récursif

circulaires. L'apport de ces méthodes sera montré dans les expérimentations sur données synthétiques.

### 3.4.1 Cadre de la fusion d'informations circulaires

Reprenons le cas de deux mesures d'un même angle distribuées selon la loi de von Mises. Les mesures sont notées  $\phi^{(1)}$  et  $\phi^{(2)}$  et leurs paramètres de concentration associés  $\kappa^{(1)}$  et  $\kappa^{(2)}$ . On a vu que le paramètre de concentration de la mesure fusionnée est :

$$\kappa_f = \sqrt{(\kappa^{(1)})^2 + (\kappa^{(2)})^2 + 2\kappa^{(1)}\kappa^{(2)}\cos(\phi^{(1)} - \phi^{(2)})} \quad (3.92)$$

Le paramètre de concentration ayant un rôle inverse à celui de la variance dans le domaine linéaire, c'est-à-dire d'indiquer la confiance que l'on peut apporter à sa mesure associée, il est nécessaire pour que la fusion d'information soit efficace que  $\kappa_f > \max(\kappa^{(1)}, \kappa^{(2)})$ . Les mesures  $\phi^{(1)}$  et  $\phi^{(2)}$  étant définies dans l'intervalle  $[-\pi; \pi[$ , cette condition n'est pas toujours vérifiée. En effet, lorsque  $|\phi^{(1)} - \phi^{(2)}| > \pi/2$ ,  $\cos(\phi^{(1)} - \phi^{(2)}) < 0$ . Dans ce cas de deux angles séparés de plus de  $\pi/2$ ,  $\kappa_f$  est inférieur à  $\kappa^{(1)}$  ou à  $\kappa^{(2)}$  (ou aux deux).

Pour résoudre ce problème, on propose l'opérateur de fusion corrigé suivant, défini pour  $N$  mesures :

$$\text{Meilleure mesure : } m = \underbrace{\max}_{i \in [1; N]} (\{\kappa^{(i)}\}) \quad (3.93)$$

Si,  $\kappa_f > \kappa^{(m)}$

$$\phi_f = \arctan(S/C) \quad (3.94)$$

$$\kappa_f = \sqrt{S^2 + C^2} \quad (3.95)$$

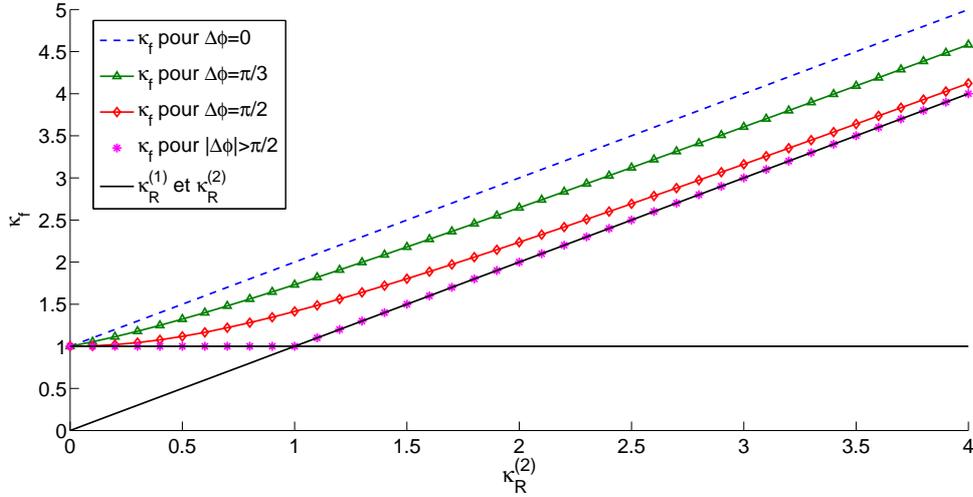
Sinon,

$$\phi_f = \phi^{(m)} \quad (3.96)$$

$$\kappa_f = \kappa^{(m)} \quad (3.97)$$

avec  $S$  et  $C$  définis par les équations 3.8 et 3.9. Cet opérateur revient en fait à choisir la meilleure mesure lorsque la fusion est reconnue non-efficace. Notons que cela se produit rarement lorsque les mesures disponibles présentent une variance circulaire faible.

Pour le cas de deux mesures, on montre figure 3.5 l'évolution de  $\kappa_f$  pour différentes valeurs de  $\Delta\phi = \phi^{(1)} - \phi^{(2)}$ . Dans cette figure, on laisse le paramètre de concentration de la première


 FIGURE 3.5 – Evolution de  $\kappa_f$  en fonction de  $\Delta\phi = \phi^{(1)} - \phi^{(2)}$ 

mesure à 1 et l'on fait évoluer le paramètre de concentration de la seconde mesure. Il apparaît que le paramètre de concentration fusionné est toujours supérieur ou égal aux paramètres des mesures disponibles, quel que soit la valeur de  $\Delta\phi$ , ce qui démontre l'apport de l'opérateur de fusion corrigé. Il est également à noter que plus les mesures sont proches, plus le paramètre de concentration de la mesure fusionnée, c'est-à-dire la confiance en cette mesure, est élevé.

### 3.4.2 Cadre du filtrage circulaire

Considérons des mesures  $\phi_{1\dots n}$  d'un vecteur d'angles  $\theta_{1\dots n}$ . Lorsque le bruit de mesure est important et que des mesures aberrantes apparaissent, on propose d'utiliser la distance circulaire  $d_c$  (définie équation 2.57) de la mesure à la prédiction du filtre pour les détecter. Dans le cas où la distance de la mesure à l'état prédit est supérieure à  $\pi/2$ , on corrige ladite mesure de  $\pi$  :

$$\text{Si } d_c(\hat{\theta}_{k/k-1}, \phi_k) > d_c(\hat{\theta}_{k/k-1} + \pi, \phi_k) \quad (3.98)$$

$$\text{Alors } \phi_k = \phi_k + \pi \quad (3.99)$$

Le choix d'une correction par  $\pi$  est lié à la conservation des propriétés statistiques de la mesure. On choisira ainsi, de  $\phi_k$  ou  $\phi_k + \pi$ , la mesure qui est la plus proche de l'état prédit. On présente figure 3.6 le principe de correction de mesures aberrantes de l'angle  $\theta$  à l'itération  $k$ . On suppose sur cette figure un écart entre l'angle à estimer  $\theta_k$  et l'angle prédit par le filtre  $\hat{\theta}_{k/k-1}$ . En principe, cet écart diminue rapidement au cours du filtrage récursif. On représente deux cas de mesures qui seront corrigées en tant que mesures aberrantes. En effet,  $\phi_k^{(1)}$  et  $\phi_k^{(2)}$  sont

éloignées de  $\hat{\theta}_{k/k-1}$  de plus de  $\pi/2$  et seront donc diamétralement corrigées (ici, toute mesure dans la partie gauche du cercle sera corrigée, toute mesure dans la partie droite conservée).

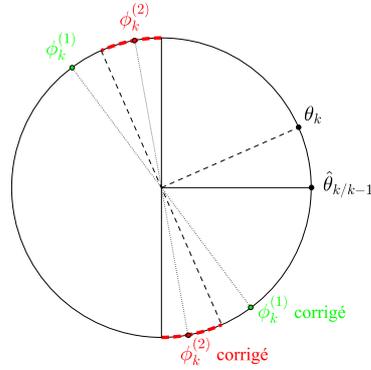


FIGURE 3.6 – Correction des mesures d’angle aberrantes dans le cadre du filtre

Il apparaît cependant que la mesure  $\phi_k^{(2)}$ , par cette correction, devient une mesure aberrante de l’angle  $\theta_k$ . L’erreur entre l’angle prédit  $\hat{\theta}_{k/k-1}$  et la valeur réelle de l’angle  $\theta_k$  provoquera donc des erreurs dans la correction des mesures : les deux arcs du cercle trigonométrique indiqués par des pointillés rouges seront mal perçus par notre algorithme de correction. Chacun de ces arcs de cercle a pour longueur la distance  $d_c(\hat{\theta}_{k/k-1}, \theta_k)$ . Ainsi, il sera d’autant moins probable d’effectuer des erreurs dans nos corrections de mesures que l’angle prédit sera proche de l’angle à estimer. En pratique, on observe une nette amélioration dans les résultats d’estimation lorsque les mesures d’angles sont fortement bruitées, comme on le verra dans la section 3.6.2.

### 3.5 Poursuite de la phase d’un signal GNSS en boucle ouverte

Généralement, le délai de phase des signaux GNSS est estimé dans une boucle fermée dite PLL (Phase Lock Loop), comme présenté au premier chapitre, section 1.4.2. Ce principe permet d’obtenir des mesures proches de zéro, qui seront modélisées suivant une distribution normale, pour laquelle les outils de traitement des signaux existants sont nombreux. En effet, la mesure fournie au filtre de boucle est dans ce cas la différence entre la mesure de délai de phase obtenue à un instant  $k$  et l’estimée de délai de phase obtenue à l’instant précédent  $k - 1$ , comme présenté figure 3.7. On observera cependant que, dans un tel système de poursuite, une erreur sur l’estimée  $\hat{\theta}_{k-1}$  est vue par le filtre de boucle comme un bruit additionnel sur la mesure en-

trante  $\phi_k - \hat{\theta}_{k-1}$ . La nouvelle estimée  $\hat{\theta}_k$  sera donc liée à l'estimée précédente par l'équation d'état qui définit l'étape de prédiction du filtre, mais également par l'étape de correction du filtre. Concrètement, le filtrage du signal provoquera des oscillations qui apparaîtront au cours du temps dans l'estimation du délai de phase.

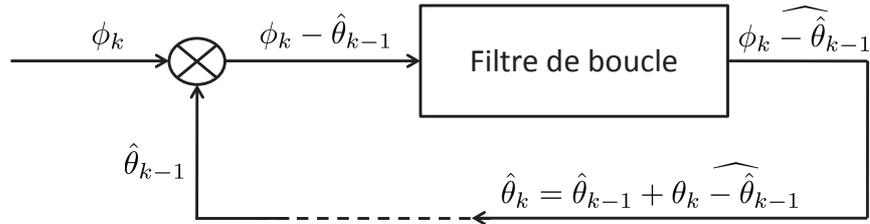


FIGURE 3.7 – Corrélation temporelle produite par le filtrage dans une boucle fermée

L'architecture de poursuite du délai de phase en boucle ouverte (POL : Phase Open Loop) proposée dans ce chapitre a pour but premier d'éviter ces problèmes de corrélation temporelle. En effet, les mesures fournies au filtre de boucle seront dans notre approche les délais de phase observés, à l'inverse des mesures de variations de délais de phase dans le cas d'une PLL. Ces délais étant définis entre  $-\pi$  et  $\pi$ , nous utiliserons comme filtre de boucle le filtre circulaire défini dans ce chapitre. Dans le cas où plusieurs mêmes mesures de délai de phase sont disponibles, comme sur les voies pilote et de données du signal GPS-L2C, les mesures sont fusionnées à l'aide de l'opérateur circulaire défini dans ce chapitre. L'architecture de poursuite proposée est présentée figure 3.8.

Comme pour l'architecture classique décrite section 1.4.2, la fréquence de démodulation et le délai de code sont initialisés dans l'étape dite d'acquisition. Le délai de phase est généralement initialisé à 0. L'étape de poursuite a pour but d'estimer les délais de code  $\tau$ , de phase  $\theta_r$  et de fréquence  $f_r$  entre le signal reçu  $S$  et le signal répliqué. Dans notre architecture, le délai de code est poursuivi dans une boucle fermée DLL (Delay Lock Loop) et la phase et la fréquence dans la POL. Comme dans le cas classique, la phase et le code sont estimés à l'aide de discriminants, respectivement arctangente et Early-minus-Late. Ces discriminants sont basés sur la multiplication en phase ( $I$ ) et en quadrature ( $Q$ ) du signal reçu par le signal répliqué. Il est à noter qu'en boucle ouverte, on utilisera la fonction arctangente "quadrant-specific". Les mesures de délai de phase obtenues par cette fonction peuvent être affectées par le message de navigation et subir une ambiguïté de  $\pi$ . On utilisera donc le signe du message de navigation

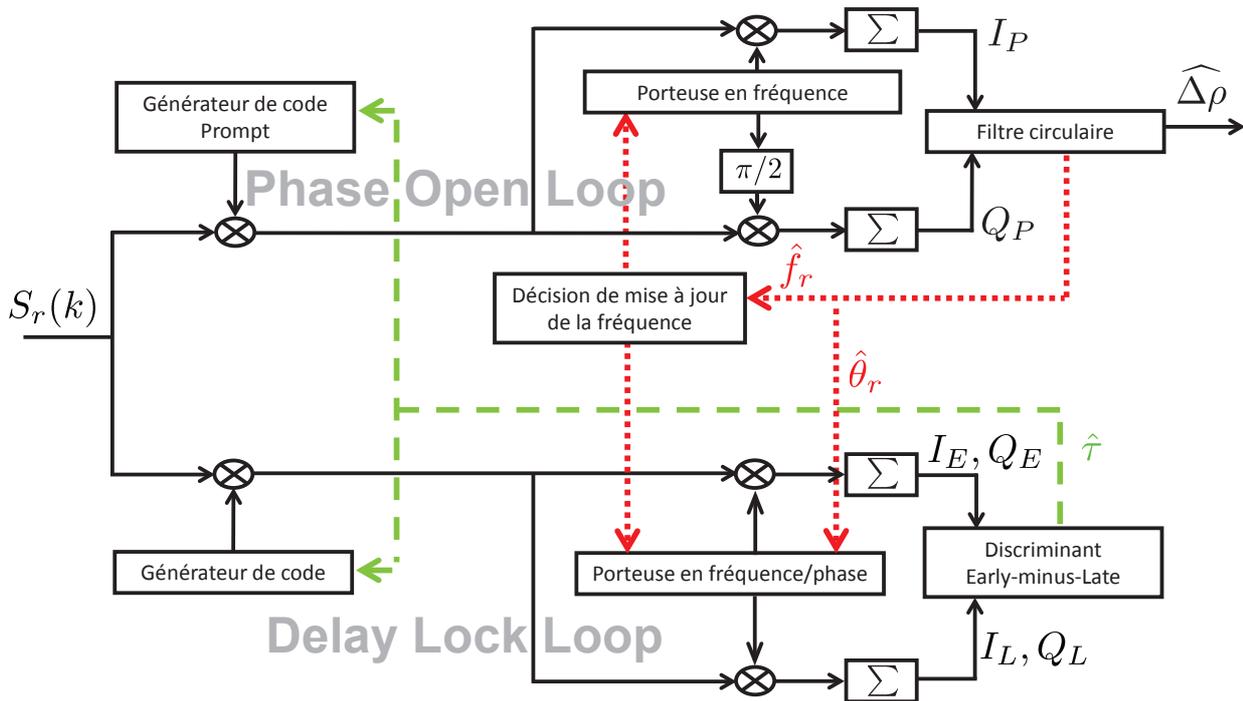


FIGURE 3.8 – Architecture de poursuite proposée

obtenu sur la composante en phase de la boucle DLL :

$$\phi_{r,k} = \arctan^* \left( \frac{Q_{P,k}^{POL} \text{signe}(I_{P,k}^{PLL})}{I_{P,k}^{POL} \text{signe}(I_{P,k}^{PLL})} \right) \quad (3.100)$$

où  $\arctan^*$  est définie section 2.4.1.

Les indices  $E$ ,  $P$  et  $L$  indiquent des codes répliqués générés en avance (Early), en phase (Prompt) et en retard (Late) par rapport au délai de code précédent et à la durée normale d'une période de code. Notons qu'il est nécessaire de fournir à la boucle de poursuite de code un signal répliqué dont la porteuse est la plus proche possible de la porteuse du signal reçu en termes de délai de phase. Une porteuse répliquée mal réglée en phase aurait pour effet de diminuer la hauteur du pic de corrélation des codes.

Notons qu'en cas de courtes pertes de signal (par exemple, pour un récepteur en mouvement, lorsque le satellite n'est plus visible en raison de la présence d'un bâtiment), il est possible, en boucle ouverte, de continuer à produire des estimées proches des vraies valeurs de phase et de fréquence en utilisant le filtre circulaire en prédiction pure. On verra au chapitre suivant que

les variations de pseudo-distances  $\Delta\rho$ , utilisées pour le positionnement du récepteur, seront estimées à partir de la phase et de la fréquence estimées.

## 3.6 Expérimentations

Les expérimentations pour ce chapitre seront séparées en deux parties. Les performances de chacun des outils de traitement des signaux proposés seront d'abord appliqués au traitement de la phase de signaux GPS-L2C simulés. L'opérateur de fusion circulaire proposé sera comparé à l'opérateur somme pondéré du domaine linéaire pour la combinaison de mesures d'angles. Les angles considérés ici seront les délais de phase simulés d'une voie pilote et d'une voie de données d'un signal GNSS. Le filtre circulaire proposé, utilisé dans une POL, sera comparé au filtre de Kalman utilisé dans une PLL. Pour chacune de ces expérimentations, les résultats présentés porteront sur la moyenne de 200 réalisations de la simulation des signaux à différents rapports signal sur bruit et pour différentes dynamiques satellite-récepteur. Ces résultats seront exprimés en termes de distance et dispersion circulaires (comme définies section 2.6).

La deuxième partie de ces expérimentations portera sur l'estimation de la phase d'un signal GPS-L2C réel. On utilisera pour cela d'une part l'architecture en boucle ouverte proposée, aidée du filtre récursif circulaire et de l'opérateur de fusion circulaire proposés, et d'autre part une architecture classique en boucle fermée, aidée d'un filtre de Kalman et de l'opérateur de fusion somme pondérée.

### 3.6.1 Signal GPS-L2C

Le signal émis dans la bande GPS L2 est le suivant :

$$S_{L_2}(t) = \sqrt{2}A_e d(t)P(t)\sin(2\pi f_2 t) + \sqrt{2}A_e [(CM(t)d(t)) \oplus CL(t)]\cos(2\pi f_2 t) \quad (3.101)$$

avec :

- $f_2$  la fréquence de la porteuse (1227.42 MHz) ;
- $A_e$  la puissance du signal émis ;
- $d(t)$  le message de navigation, émis à la fréquence de 50 bits par seconde ;
- $CM(t)$  le code pseudo-aléatoire  $CM$  (Code Moderate), émis à 511.5 kHz ;
- $CL(t)$  le code pseudo-aléatoire  $CL$  (Code Long), émis à 511.5 kHz ;
- $P(t)$  le code pseudo-aléatoire militaire  $P$  (Precise) ;
- $\oplus$  l'opérateur de multiplexage des deux codes civils.

Le signal civil GPS-L2C se différencie ainsi du signal civil GPS L1 (voir section 1.4.1) par la présence de deux voies sur la même porteuse, chacune ayant son propre code. La voie de donnée est construite comme pour le signal GPS L1, à la différence que le code  $CM$  est plus long que le code  $C/A$ , à savoir de période 20 millisecondes. Il est ainsi parfaitement synchronisé avec le message de navigation. La voie pilote ne porte pas de message de navigation, ainsi composée uniquement de la porteuse et du code  $CL$ , de durée 1.5 secondes. Les deux voies sont multiplexées par division de temps (TDM : Time Division Multiplexing), c'est-à-dire que chaque bit du type  $CM(t)d(t)$  est suivi d'un bit du type  $CL(t)$ , de manière à obtenir un signal GPS-L2C émis à la fréquence de 1023 kHz [50].

### 3.6.2 Données synthétiques

Dans ces expérimentations, la fréquence d'échantillonnage du signal simulé est de 20 MHz. La bande passante du signal est fixée à 4 MHz. La DLL utilise le discriminant Early-minus-Late avec un espacement entre les codes Early et Prompt de  $T_b/2$  pour le corrélateur, où  $T_b$  correspond à un chip. Les perturbations de l'horloge récepteur sur la fréquence et la phase du signal numérisé (voir équation 4.46) sont modélisées comme des marches aléatoires Gaussiennes. Elles sont définies pour un oscillateur TCXO (Temperature Compensated Crystal Oscillator) [124].

On montre d'abord figure 3.9 la différence entre les mesures de délai de phase obtenues dans une boucle ouverte POL et la somme cumulée des variations de délais de phase obtenues dans une boucle fermée PLL. Les deux boucles sont utilisées sans filtre. La figure est basée sur la voie de données d'un signal GPS-L2C dont le rapport signal sur bruit est de 35 dB Hz. On observe le même résultat sur signaux synthétiques et signaux réels, à savoir que la différence des mesures obtenues est très proche de 0, c'est-à-dire que les mesures obtenues en PLL et en POL sont très proches. La différence, qui atteint un maximum de  $1.5 \times 10^{-8}$  radians après dix secondes de traitement, est due à des bruits de calcul différents liés à l'utilisation du discriminant arctangente. En effet, les bruits de calcul seront cumulés dans les mesures de délai de phase en boucle fermée, mais pas dans les mesures de délai de phase en boucle ouverte.

### Évaluation de l'opérateur de fusion proposé

On compare dans cette section l'opérateur de fusion proposé à l'opérateur classique du domaine linéaire, à savoir la somme pondérée. On cherche à fusionner deux mesures de délai de phase, obtenues sur les deux voies par le traitement en boucle ouverte d'un signal GPS-L2C

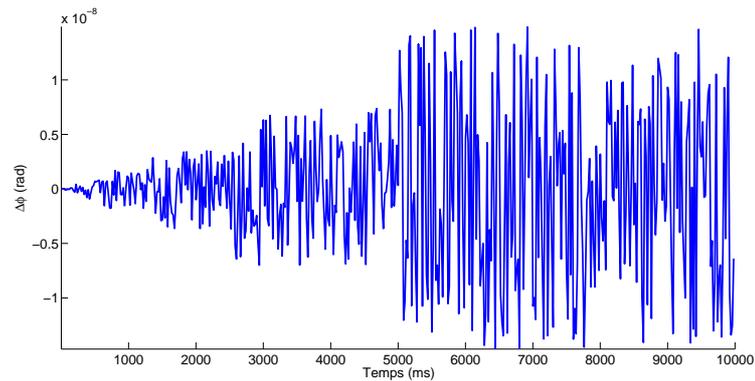


FIGURE 3.9 – Différence entre les mesures de délai de phase en boucles ouverte et fermée

simulé. Ainsi, les mesures à fusionner sont des angles définis entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Les résultats sont produits pour des durées de signaux d'une minute, c'est à dire pour 3 000 mesures. En effet, on effectuera une mesure à chaque période du code  $CM$ . Le même "degré de confiance" (c'est-à-dire le même paramètre de concentration ou la même variance suivant l'opérateur considéré) sera accordé aux mesures obtenues sur chaque voie.

On présente figure 3.10 les résultats obtenus pour l'une des réalisations de cette expérimentation. Le rapport  $C/N_0$  du signal simulé est ici de 35 dB Hz. Sur la partie gauche de la figure, on présente les résultats de la fusion des mesures par chaque opérateur testé ainsi que le délai de phase simulé sans bruit, que l'on cherche à estimer. La partie droite de la figure présente la distance circulaire entre chacune des mesures fusionnées et ce délai à estimer. Il apparaît qu'à chaque transition entre  $-\pi$  et  $\pi$ , l'opérateur de fusion du domaine linéaire produit de fortes erreurs. En effet, au voisinage de ces transitions, il arrive que les mesures obtenues sur l'une des voies soit légèrement supérieure (au sens linéaire du terme) à  $-\pi$  et sur l'autre voie légèrement inférieure à  $\pi$ . Dans ce cas, la mesure fusionnée produite par l'opérateur somme pondérée sera proche de 0 au lieu d'être proche de  $\pm\pi$ . Cette constatation est confirmée par la figure de gauche.

En dehors des zones de transition entre  $-\pi$  et  $\pi$ , les deux opérateurs fournissent les mêmes mesures fusionnées. On constate ainsi que l'opérateur de fusion proposé fonctionne bien à la manière d'une somme pondérée, et ce aussi bien lorsque les mesures sur chaque voie sont situées de part et d'autre de l'intervalle de définition que lorsqu'elles sont proches de zéro. Pour confirmer cette conclusion, on présente tableau 3.1 la moyenne des résultats obtenus par chaque opérateur de fusion considérés en termes de dispersion circulaire autour de l'angle à estimer.

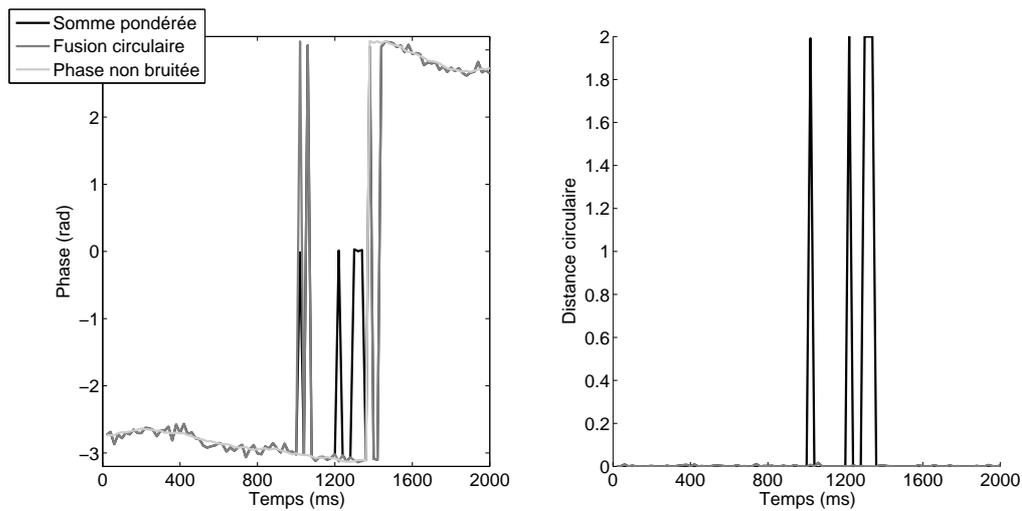


FIGURE 3.10 – Comparaison des opérateurs de fusion de délais de phase mesurés sur les voies d’un signal GPS-L2C

$C/N_0$ (dB Hz)	45	35	25	25+R.A.
Mesure (voie de données)	2.5e-4	2.4e-3	3.1e-2	3.1e-2
Somme pondérée linéaire	7.1e-3	2.3e-2	9.3e-2	9.3e-2
Opérateur de fusion proposé	1.3e-4	1.2e-3	2.0e-2	1.7e-2

TABLE 3.1 – Dispersion circulaire pour le délai de phase fusionné (moyenne sur 200 réalisations).

Les différentes colonnes de ce tableau présentent les résultats obtenus après moyennage sur 200 réalisations de signaux ayant des rapports  $C/N_0$  de 45, 35 et 25 dB Hz. La dernière colonne présente les résultats obtenus pour les mêmes réalisations que la colonne précédente, mais avec utilisation, dans l’opérateur de fusion proposé, de la méthode de résolution d’ambiguïté circulaire proposée section 3.4.1. Pour chacune des autres colonnes de résultats, l’ambiguïté circulaire n’est pas résolue. En fait, le problème d’ambiguïté circulaire n’apparaît que pour un bruit important sur les mesures, correspondant à un  $C/N_0$  inférieur à 35 dB Hz.

Les résultats présentés dans ce tableau confirment les conclusions tirées de la figure précédente. D’une part, l’opérateur optimal du domaine linéaire n’est pas capable de fusionner correctement des mesures angulaires. En effet, la non prise en compte de la périodicité des mesures par cet opérateur a pour conséquence une précision moindre de la mesure fusionnée par rapport aux mesures sur chaque voie. D’autre part, l’opérateur de fusion circulaire proposé

fonctionne bien à la manière d'une somme pondérée circulaire puisqu'il divise par deux la dispersion circulaire des deux mesures disponibles. Ce résultat n'est cependant pas atteint lorsque le bruit sur les mesures est tel que l'on peut avoir sur chaque voie des mesures d'angles séparées de plus de  $\pi/2$ . Dans ce cas (ici pour  $C/N_0 = 25$  dB Hz), la méthode de résolution d'ambiguïté circulaire proposée diminue bien la dispersion circulaire de la mesure fusionnée, mais ne permet pas d'obtenir une division par 2 de la dispersion circulaire par rapport aux mesures de départ. Cela est dû au fait qu'aucune fusion n'est en fait réalisée lorsque les mesures sont séparées de plus de  $\pi/2$ .

### Évaluation du filtre proposé

On compare ici le filtre circulaire proposé, utilisé dans une POL, au filtre de Kalman utilisé dans une PLL. Les signaux synthétiques sont simulés pour plusieurs rapports signal sur bruit, comme pour l'évaluation des opérateurs de fusion. On simule également différents types de dynamique satellite-récepteur. Les accélérations satellite-récepteur simulées impliquent dans le signal des variations de fréquence Doppler variables. Les trois cas présentés décrivent des dynamiques allant de très faible à très élevée, sur le satellite et sur le récepteur. On modélise ces types de dynamique par le paramètre  $m$ , qui correspond à la variation de fréquence Doppler moyenne, et le paramètre  $M$ , qui correspond à la variation maximale de fréquence Doppler. Le cas  $m/M = 5/10$  Hz/s correspond au cas classique d'un récepteur embarqué sur une voiture et d'un satellite à élévation moyenne. Les résultats présentés sont obtenus sur la voie de données des signaux GPS-L2C simulés. Les paramètres des filtres sont fixés pour obtenir un résultat le plus précis possible, en termes de dispersion circulaire, sur un signal présentant un rapport  $C/N_0$  de 35 dB Hz et une dynamique moyenne. Pour le filtre de Kalman utilisé en boucle fermée, la covariance des bruits d'état sur la phase et la fréquence sont respectivement fixés à 50 et 0.2. La covariance du bruit de mesure est fixée à 2. Le filtre circulaire utilise pour paramètres :  $\kappa_{1,R} = 40$ ,  $\kappa_{1,Q} = 100$  et  $\kappa_{2,Q} = 10000$ . On considérera par ailleurs une erreur dans l'estimation initiale de la fréquence Doppler de 3 Hz.

On présente tout d'abord figure 3.11 l'estimation par un filtre de Kalman de mesures fournies par la boucle ouverte. Il apparaît que ce type de filtrage a pour effet de lisser les transitions entre  $-\pi$  et  $\pi$  : comme l'opérateur de fusion somme pondérée, le filtrage de Kalman n'est pas approprié pour estimer des angles.

On présente figure 3.12 les estimées de délai de phase obtenues par la méthode proposée et par la méthode classique, ainsi que les délais à estimer. Le rapport  $C/N_0$  est ici encore de 35 dB Hz, et la dynamique choisie pour  $m/M = 5/10$  Hz/s. On observe que les estimées

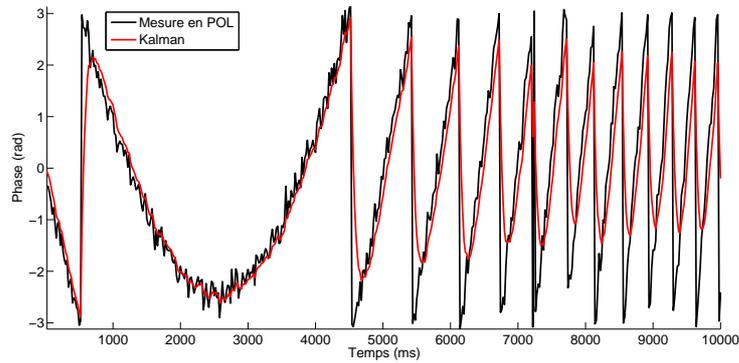


FIGURE 3.11 – Filtrage des délais de phase par un filtre de Kalman

fournies par notre méthode, comme les estimées fournies par un filtre de Kalman utilisé dans une PLL, sont centrées sur les délais à estimer. On montre sur la droite de cette figure la distance circulaire entre les estimées fournies par chaque méthode et le délai de phase réel du signal simulé. Il apparaît que l'estimation par un Kalman utilisé en boucle fermée est moins efficace que l'estimation proposée en boucle ouverte. Cela est dû aux oscillations provoquées par la corrélation temporelle qui apparaît entre deux estimées successives dans un filtrage en boucle fermée.

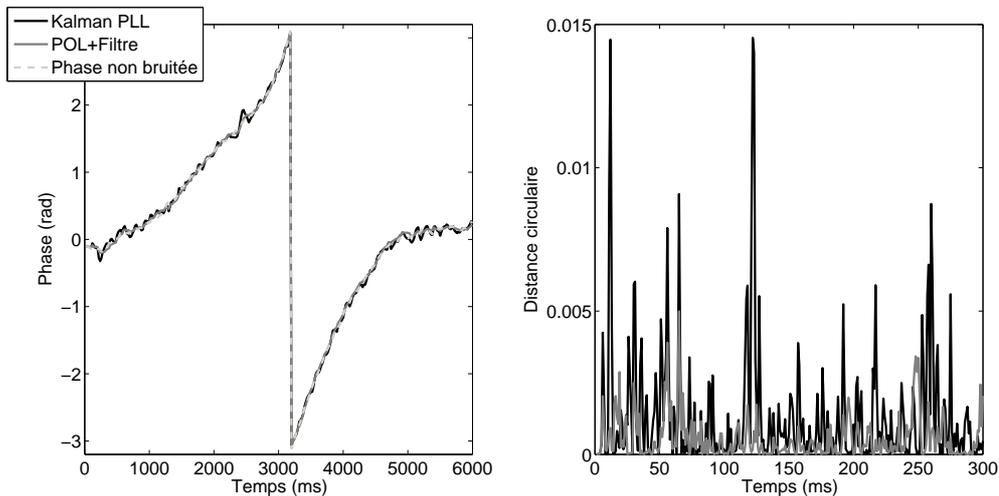


FIGURE 3.12 – Comparaison des méthodes de filtrage pour l'estimation des délais de phase de la voie de données d'un signal GPS-L2C

Ces résultats sont confirmés par le tableau 3.2. Dans ce tableau, on reporte la dispersion

circulaire entre les délais de phase réels et les délais estimés par chaque méthode, sur la voie de données de signaux GPS-L2C simulés. La dernière colonne du tableau montre l'amélioration des résultats d'estimation lorsque la méthode de résolution d'ambiguïté circulaire présentée section 3.4.2 est utilisée pour des signaux au rapport  $C/N_0$  de 25 dB Hz. Chaque cas contient les résultats pour le filtrage des observables fournis par une PLL et dans une POL.

Variations Doppler (Hz/s) (moyenne/max)	$C/N_0$ (dB Hz)			
	45	35	25	25 + R.A.
0/0.04	1.8e-4/1.3e-4	1.5e-3/8.9e-4	1.8e-2/6.9e-3	1.8e-2/6.7e-3
5/10	1.9e-4/1.3e-4	1.6e-3/8.9e-4	2.4e-2/9.7e-3	2.4e-2/9.2e-3
100/170	2.1e-4/1.6e-4	5.8e-3/1.3e-3	9.1e-2/1.0e-2	9.1e-2/9.3e-3

TABLE 3.2 – Dispersion circulaire des délais de phase estimés, moyenne sur 200 réalisations (PLL/POL).

Les résultats apparaissant dans ce tableau permettent de porter les mêmes conclusions que la figure précédente. En effet, on observe que les estimées obtenues par le filtre Kalman PLL sont plus dispersées autour de l'angle à estimer, en particulier lorsque le rapport signal sur bruit diminue. Pour une dynamique faible, le rapports d'augmentation de la précision d'estimation est de 1.4, 1.7 et 2.6 respectivement pour les  $C/N_0$  testés (45, 35 et 25 dB Hz). Pour une dynamique élevée, ces pourcentages sont respectivement de 1.3, 4.5 et 9.1. Par ailleurs, l'utilisation de la solution proposée aux problèmes d'ambiguïté circulaire apparaissant pour  $C/N_0 = 25$  dB HZ permet d'améliorer légèrement l'estimation de la phase.

On présente tableau 3.3 l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) du décalage en fréquence estimé, en fonction du  $C/N_0$  simulé et des variations Doppler moyennes et maximales. Les résultats sont obtenus pour le filtre proposé dans une POL et pour le filtre de Kalman dans une PLL. Il apparait que le filtre proposé produit une estimation plus précise et plus robuste de la fréquence. En effet, on observe des rapports d'augmentation de l'estimation de la fréquence proche de 20 lorsque le rapport signal sur bruit est supérieur à 35 dB Hz et la dynamique du système peu élevée. Dans des conditions plus extrêmes de réception, la qualité de l'estimation de la fréquence en PLL est très faible, jusqu'à 80 fois moindre qu'en boucle ouverte.

### 3.6.3 Données réelles

On ne présentera dans cette partie que les résultats obtenus par la méthode proposée, comparés aux résultats obtenus par la méthode classique, sur l'estimation des délais de phase et de

Variations Doppler (Hz/s) (moyenne/max)	$C/N_0$ (dB Hz)		
	45	35	25
0/0.04	2.0e-2/1.2e-3	1.3e-1/8.7e-3	3.5/3.9e-2
5/10	2.2e-2/1.4e-3	1.4e-1/8.9e-3	5.5/6.1e-2
100/170	8.6e-2/1.9e-3	23/4.6e-2	71/9.2e-1

TABLE 3.3 – Erreur Quadratique Moyenne sur les délais de fréquence estimés par les filtres en (PLL/POL)

fréquence d'un signal GPS-L2C réel acquis par l'antenne positionnée sur le toit du laboratoire. En effet, le nombre de satellites émettant le signal GPS-L2C est encore trop faible pour pouvoir effectuer un positionnement à l'aide de ce signal. On comparera au chapitre suivant les positions obtenues par l'utilisation de la boucle ouverte de poursuite de phase pour le traitement d'un signal GPS L1.

La méthode dite classique est composée d'une PLL, de l'opérateur de fusion somme pondérée (utilisé ici sur les variations de délai de phase mesurés) et d'un filtre de Kalman. La méthode proposée est composée d'une POL, de l'opérateur de fusion circulaire proposé et du filtre vectoriel circulaire proposé. On présente figure 3.13 la mesure de phase sur la voie de données et la mesure fusionnée, obtenues en boucle ouverte. Comme cela avait été montré figure 3.9, les mesures obtenues en boucle fermée sont très proches et leur représentation n'apporterait pas d'information supplémentaire. On présente également les résultats de filtrage obtenus à partir des mesures fusionnées. On observe ici encore la présence d'oscillations résiduelles dans le cadre du filtrage de Kalman en boucle fermée. La méthode proposée en boucle ouverte semble fournir une bonne estimation de la phase du signal reçu.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle technique de poursuite des signaux GNSS. L'architecture récepteur proposée permet de mesurer les délais de phase entre le signal reçu et le signal répliqué en boucle ouverte, à l'inverse de la méthode classique qui repose sur des mesures de variations de délais de phase en boucle fermée. Les mesures obtenues en boucle ouverte ayant un caractère angulaire, nous avons également proposé un opérateur de fusion et un filtre récursif circulaires, définis tous deux dans un contexte Bayésien à partir de la statistique de von Mises.

L'opérateur de fusion ainsi développé est optimal au sens du maximum de vraisemblance

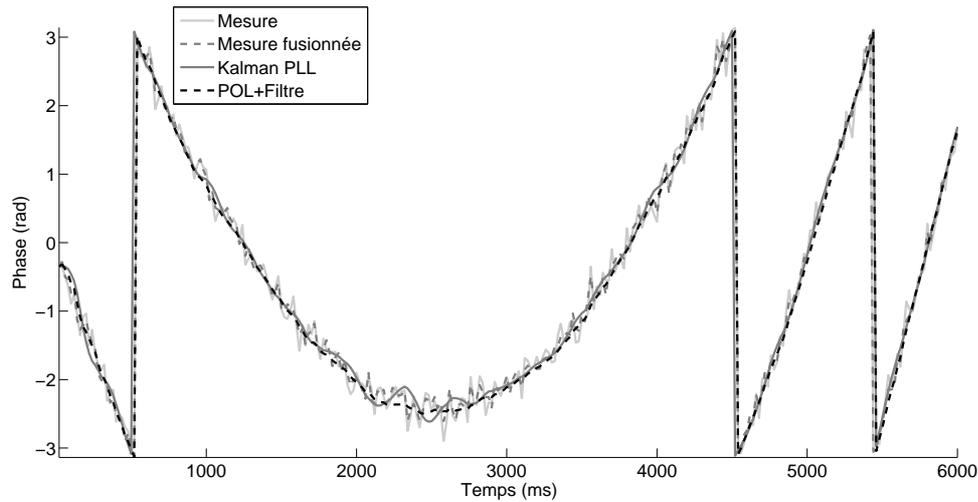


FIGURE 3.13 – Comparaison de la PLL et de la POL pour l’estimation de la phase d’un signal GPS-L2C réel

pour la distribution de von Mises. On montre que ses performances, lorsque le bruit sur les angles à fusionner est faible, sont identiques à celles de l’opérateur de fusion somme pondérée lorsque ce dernier est utilisé sur des données linéaires. Cependant, le caractère particulier des angles fait que lorsque le bruit est très important, la mesure fusionnée peut se voir affectée d’une confiance inférieure à celle apportée aux mesures à fusionner. Lorsque cela se produit, on propose pour solution de choisir la meilleure des mesures disponibles. On montre également qu’il n’est pas approprié d’utiliser l’opérateur somme pondérée pour la fusion de données angulaires. En effet, cet opérateur ne prend pas en compte la périodicité des mesures au voisinage des transitions entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

Le filtre circulaire proposé est un estimateur récursif de l’angle observé à partir d’un ensemble de mesures. Il repose sur une équation d’état qui modélise l’évolution de l’angle et de ses variations. Il est construit dans un cadre Bayésien à partir de la distribution *a posteriori* de l’angle sachant les mesures, supposée être une loi de von Mises. Dans ce contexte, la résolution de l’équation de Chapman-Kolmogorov, qui définit l’étape de prédiction du filtre, nécessite d’utiliser l’approximation de la loi de von Mises par une loi Wrapped Normal. Par ailleurs, quand l’observation est séparée de l’angle à estimer de plus de  $\pi/2$ , la mesure est aberrante vis-à-vis de cet angle. Nous proposons une méthode ad hoc pour traiter ce type d’observations. Cette méthode se base sur la distance circulaire entre la mesure et l’angle prédit par le filtre.

Les expérimentations effectuées dans ce chapitre sur données synthétiques permettent d’éva-

luer les différents outils proposés dans ce chapitre. On montre ainsi que l'opérateur de fusion défini suivant la statistique circulaire est à même de combiner des mesures d'angles obtenues sur les deux voies d'un signal GPS-L2C. On montre aussi que l'opérateur de fusion classique, la somme pondérée, est moins performant lorsque les mesures sont proches des extrémités de l'intervalle de définition des angles. Dans le cas du filtrage, on montre que l'utilisation du filtre proposé dans une boucle ouverte de poursuite de la phase estime les délais de phase plus précisément qu'un filtre de Kalman utilisé dans une boucle fermée. En effet, cette technique classique induit une corrélation temporelle entre deux estimées successives. Nous montrons également l'intérêt des techniques proposées pour le traitement des mesures angulaires aberrantes.

On montre que la technique proposée est particulièrement robuste à l'augmentation du niveau de bruit affectant le signal considéré, ainsi qu'à des variations importantes de la fréquence du signal, liées à une dynamique satellite-récepteur élevée. Cependant, nous n'avons pas ici pris en compte de possibles occurrences de sauts de cycle dans les mesures observées, particulièrement fréquentes dans ces conditions. Dans le chapitre suivant, nous proposerons des techniques supplémentaires de traitement des signaux GNSS pour résoudre ce problème dans le cadre de la poursuite de phase en boucle ouverte.

# Chapitre 4

## Traitement du signal circulaire : cas non-linéaire. Application à la correction de sauts de cycle dans la phase des signaux GNSS

### 4.1 Introduction

L'observable de phase des signaux GNSS permet théoriquement d'obtenir une précision centimétrique de positionnement, là où le positionnement par le code ne permet qu'une précision d'ordre métrique [60]. Nous avons montré au chapitre précédent l'intérêt d'estimer la phase dans une boucle de poursuite ouverte. Cependant, nous n'avons pas pris en compte la possible apparition de sauts de cycle dans les mesures de phase. Ces discontinuités, qui apparaissent principalement pour des rapports signal sur bruit faibles ou pour de fortes dynamiques satellite-récepteur, forment cependant un sujet de recherche très actifs pour la communauté de traitements de signaux GNSS [66]. Il existe relativement peu d'articles concernant la détection et la correction des sauts de cycle en n'utilisant qu'un seul récepteur GNSS [11]. Dans ce cadre, les techniques consistent généralement en une utilisation conjointe des mesures de pseudo-distances obtenues par la phase et par le code sur plusieurs porteuses pour détecter les sauts de cycle. Deux types d'observations sont alors construites : la différence entre les mesures de phase obtenues sur les signaux émis aux différentes fréquences porteuses (il est supposé que la probabilité d'avoir des sauts de cycle simultanément sur les différentes porteuses est très faible) et la différence entre les pseudo-distances obtenues par le code et par la phase sur une même fréquence [12]. Ces observations définissent un processus continu par morceaux présen-

tant une rupture lors de l'occurrence d'un saut de cycle. En pratique, la continuité est faible en raison des perturbations ionosphériques affectant les signaux, et plusieurs approches ont été proposées pour la détection et la correction de sauts de cycle dans ce cadre [61], [66]. Nous proposons dans ce chapitre de détecter et corriger les sauts de cycle à la manière d'un détecteur de ruptures GLR (Generalized Likelihood Ratio) pendant la poursuite de la phase. Notre but est d'obtenir des estimées plus précises, à une fréquence de mesure supérieure. Le test de détection développé est ainsi celui du Maximum À Posteriori. Cette approche est permise par la poursuite de la phase en boucle ouverte, où les sauts de cycle apparaissent comme des ruptures classiques de continuité dans l'estimation de la phase. De plus, lorsque les mesures sont effectuées à haute fréquence, moins de sauts de cycle liés aux perturbations atmosphériques apparaissent dans le signal.

Les mesures de phase en boucle ouverte étant définies sur le cercle, nous proposerons dans ce chapitre un détecteur-estimateur de rupture en ligne dédié aux données circulaires. À notre connaissance, un seul détecteur de ce genre fut proposé [6], suivant une modélisation scalaire. Nous proposerons également un filtre particulière pour des données circulaires. La raison principale motivant la réalisation d'un tel filtre est que l'estimation de l'amplitude de la rupture dans l'estimateur de rupture proposé nécessite l'inversion d'une fonction non-linéaire définie dans le domaine linéaire. Une telle opération ne peut pas être effectuée à l'aide du filtre présenté au chapitre précédent. À l'inverse, le filtrage particulière est un outil d'estimation récursive robuste lorsque les équations modélisant le système sont non-linéaires. Par ailleurs, le filtre présenté dans ce chapitre est capable de prendre en compte la corrélation entre la phase et la fréquence, contrairement au filtre présenté au chapitre précédent. Quelques autres filtres dédiés à l'estimation de données angulaires dans les cas d'équations d'évolution et de mesure non-linéaires ont été développés et présentés dans la littérature. Ceux-ci se basent généralement soit sur une linéarisation locale du système, par l'intermédiaire de filtres de Kalman étendus [84, 5, 121], soit sur l'utilisation de filtres particuliers [87].

Les performances de l'estimateur de phase proposé dans ce chapitre sont montrées sur données synthétiques et réelles. Nous montrons que le filtre particulière circulaire proposé pour filtrer la phase dans une boucle ouverte est plus précis et plus robuste qu'un filtre de Kalman employé dans une boucle fermée. Nous montrons que l'estimateur de rupture GLR circulaire proposé, appliqué aux mesures de phase produites par une boucle ouverte, est plus précis qu'un estimateur de rupture GLR classique basé sur le filtrage de Kalman [44]. Nous montrons que l'approche proposée est meilleure à la fois en termes de détection que d'estimation de l'amplitude des ruptures, en particulier lorsque le rapport signal sur bruit est faible. Finalement, la faisa-

bilité de l'architecture proposée est montrée en effectuant un positionnement par la phase sur un signal GPS-L1 réel. En effet, nous définirons également dans ce chapitre les équations permettant de lier l'évolution des délais de phase et de fréquence aux variations de pseudo-distances, permettant ainsi un positionnement relatif du récepteur avec une précision centimétrique. Il apparaît que la technique proposée produit des positions estimées plus précises en comparaison avec un traitement classique en boucle fermée.

Le chapitre est organisé comme suit. Le prochain paragraphe décrit le filtre particulière développé durant la thèse, ainsi que la modélisation du problème. Le détecteur-estimateur de rupture est présenté dans la troisième partie de ce chapitre. La quatrième section est dédiée à la description de l'architecture, modifiée de la structure en boucle ouverte pour intégrer la correction des sauts de cycle. La cinquième partie est consacrée à la modélisation du signal permettant le calcul de position par utilisation des délais de phase estimés. Les expérimentations, sur données synthétiques puis réelles, sont présentées dans la sixième section. Une conclusion clot le chapitre.

## 4.2 Estimation de la phase

### 4.2.1 Inférence statistique

La modélisation de l'évolution de la phase est identique à celle proposée au chapitre précédent. Cependant, on considèrera ici le fait que lorsque la dynamique de l'ensemble satellite-récepteur est trop élevée, des sauts de cycle peuvent apparaître dans les mesures de phase, en particulier lorsque le rapport signal sur bruit est faible. Ce phénomène apparaît aussi bien lors d'une poursuite en boucle ouverte qu'en boucle fermée. Dans le cas d'une poursuite de la phase en boucle ouverte, les mesures de phase produites peuvent être considérées comme linéaires par morceaux. On modélise la phase, sur chaque intervalle où elle est linéaire, par :

$$\phi_k = (m_i + v_i dt (k - t_{i-1}) + \epsilon_k) \mod 2\pi \quad t_{i-1} + 1 \leq k \leq t_i \quad (4.1)$$

où :

- $t_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  instant de rupture ;
- $m_i$  est la valeur initiale de la phase à l'instant  $t_{i-1}$  ;
- $v_i$  est la vélocité angulaire dans l'intervalle  $[t_{i-1} t_i]$  et  $dt$  la période de mesure ;
- $\epsilon_k$  est un bruit centré distribué aléatoirement suivant une distribution de von Mises.

On définit  $\nu_i = m_{i+1} - m_i$  l'amplitude de la rupture à  $t_i$  dans le processus linéaire par morceau. Comme au chapitre précédent, on considère l'équation d'état suivante pour les paramètres à estimer dans les parties linéaires comme :

$$\Theta_k = F \Theta_{k-1} + V_{k-1} \quad (4.2)$$

où  $\Theta_k = [\theta_k, \dot{\theta}_k]$  est le vecteur d'état à estimer.  $F$  est la matrice de transition, que l'on considèrera ici différente de celle proposée au chapitre précédent :  $F = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Les équations d'état sur chaque composante sont donc :

$$\theta_k = \theta_{k-1} + dt \dot{\theta}_{k-1} + v_{k-1}^{[1]} \quad (4.3)$$

$$\dot{\theta}_k = \dot{\theta}_{k-1} + v_{k-1}^{[2]} \quad (4.4)$$

Le bruit d'état  $V_{k-1} = [v_{k-1}^{[1]}, v_{k-1}^{[2]}]^T$  représente l'erreur sur le modèle d'état.  $v_{k-1}^{[1]}$ ,  $v_{k-1}^{[2]}$ , bruits respectivement sur le modèle d'état de l'angle et de sa dérivée, suivent respectivement une distribution de von Mises centrée en 0, de paramètre de concentration  $\kappa_Q$  et une distribution normale centrée en 0 de variance  $v_Q$ .

Dans notre application, nous ne disposons que des mesures  $\phi_k$  de l'angle  $\theta_k$  : aucune mesure de  $\dot{\theta}_k$  n'est disponible. L'équation de mesure est donc la suivante :

$$\phi_k = \theta_{k-1} + w_k \quad (4.5)$$

$w_k$  est le bruit de mesure sur l'angle, centré en 0 et suivant une distribution de von Mises de paramètre de concentration  $\kappa_R$ .

On considère une fenêtre de travail de taille  $M$  pour le détecteur de rupture. Celle-ci est définie entre les instants  $k$  et  $k - M + 1$ . On présente figure 4.1 l'amplitude de rupture  $\nu_i$  et l'instant de rupture  $t_i$ , qui doivent être estimés par le détecteur de rupture. Lorsqu'une rupture est détectée, le saut de cycle est corrigé par l'amplitude estimée.

En pratique, la vélocité angulaire, qui correspond à la dérivée de l'angle, est supposée constante dans la fenêtre de travail. Une estimée de l'angle et de sa dérivée à l'instant  $k - M + 1$ ,  $\hat{\Theta}_{k-M+1} = [\hat{\theta}_{k-M+1}, \hat{\dot{\theta}}_{k-M+1}]^T$ , est fournie par le filtre circulaire alpha-bêta du chapitre 3 au détecteur de rupture. Le choix de ce filtre comme filtre de boucle s'explique par des performances proches de celles du filtre particulaire développé ici conjuguées à un fonctionnement

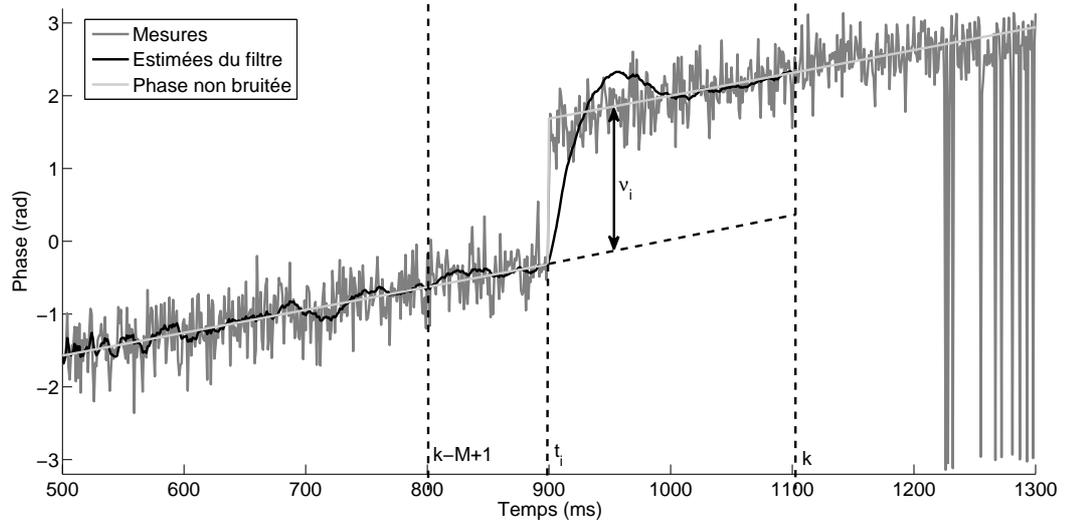


FIGURE 4.1 – Instant et amplitude de rupture dans les observations de phase

plus rapide et une paramétrisation plus simple. Lorsqu'une rupture est détectée, les estimées sur la fenêtre  $\hat{\theta}_{k-M+1:k}$  sont corrigées comme décrit section 4.3.

Pour plus de clarté, les notations qui seront utilisées dans ce chapitre pour la variable angulaire à estimer sont listées ici :

- $[\theta_k^i, \dot{\theta}_k^i]^T$  sont les particules du filtre ;
- $[\hat{\theta}_k, \hat{\dot{\theta}}_k]^T$  sont les estimées fournies par le filtre de boucle ;
- $\hat{\theta}_{0,l}$  est l'angle estimé à la position  $l$  de la fenêtre de travail du détecteur circulaire ;
- $\hat{\theta}_{c,l}$  est l'angle estimé corrigé.

## 4.2.2 Filtre particulaire

Le principe du filtrage particulaire se découpe en trois étapes principales qui se répètent à chaque itération, à savoir la prédiction, qui consiste à générer des particules pseudo-aléatoirement suivant l'équation d'état ; la mise-à-jour, ou correction, qui consiste en une pondération des particules suivant les mesures ; et un possible rééchantillonnage des particules, qui permet de redistribuer les particules à intervalles réguliers suivant la distribution de l'état sachant les mesures, en vue d'éviter une possible dégénération. Plusieurs méthodes de rééchantillonnage existent [2], chacune avec ses avantages et ses inconvénients. On choisit ici de suivre la structure du "filtre particulaire générique" défini dans cet article.

Dans notre application au filtrage de données circulaires, l'algorithme de filtrage particulaire est donc comme suit :

1. Initialisation :  $N$  particules, notées  $x_0^i = (\theta_0^i, \dot{\theta}_0^i)^T$  pour  $i = 1, \dots, N$ , sont d'abord générées suivant une première distribution *a priori*. Les particules sur l'angle  $\theta_0^i$  suivent une distribution de von Mises de moyenne  $\phi_0$  et de paramètre de concentration  $\kappa_0^R$  et les particules sur la vitesse angulaire  $\dot{\theta}_0^i$  suivent une distribution normale de moyenne 0, de variances  $v_0^R$ . Les particules sont affectées de poids initialisés à  $w_0^i = 1/N$ .
2. Prédiction : les particules sont propagées sur la composante de vitesse angulaire par la formule suivante :

$$x_k^i = \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_{k-1}^i + \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_k^i \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

où  $\nu_k^i$  suit une distribution normale de moyenne 0, de variance  $v_0^Q$ .

3. Mise-à-jour : les poids sont calculés suivant les mesures d'angle :

$$w_k^i = w_{k-1}^i f_{CN}(\phi_k; \theta_k^i, 2\kappa_0^R) \quad (4.7)$$

où  $f_{CN}$  est la fonction de répartition de la distribution de von Mises définie équation 2.1. Les poids sont ensuite normalisés :

$$w_k^i = \frac{w_k^i}{\sum_{i=1}^N w_k^i} \quad (4.8)$$

4. Estimation : l'angle et sa dérivée sont estimés par les formules :

$$\hat{\theta}_k = \arg \left( \sum_{i=1}^N w_k^i e^{j\theta_k^i} \right) \quad (4.9)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_k = \sum_{i=1}^N w_k^i \dot{\theta}_k^i \quad (4.10)$$

où  $j$  est le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ . Ces équations correspondent aux sommes pondérées pour des données respectivement circulaires (comme définies section 3.2) et Gaussiennes.

Comme au chapitre précédent, une observation  $\phi_k$  peut être associée aux valeurs  $\hat{\theta}_k$  ou  $\hat{\theta}_k + \pi$  du paramètre à estimer. L'ambiguïté circulaire de  $\pi$  ainsi induite est résolue comme

précédemment :

$$\text{Si } d_c(\hat{\theta}_{k-1}, \phi_k) > d_c(\hat{\theta}_{k-1} + \pi, \phi_k), \quad (4.11)$$

$$\text{alors } \phi_k = \phi_k + \pi \quad (4.12)$$

avec  $d_c$  la distance circulaire définie équation 2.57.

5. Rééchantillonnage : le rééchantillonnage est effectué suivant l'algorithme 2 de [2] avec la condition suivante sur le nombre de particules effectives  $N_{eff}$  :

$$\frac{1}{\underbrace{\sum_{i=1}^N w_k^i}_N} < N_{lim} \quad (4.13)$$

où  $N_{lim}$  est un paramètre fixe du filtre, inférieur à  $N$ . Le principe de ce rééchantillonnage est, lorsque le nombre de particules de poids important devient inférieur à  $N_{lim}$ , d'effectuer un tirage multinomial de  $N_{eff}$  particules dans l'ensemble des  $N$  particules existantes, de multiplier les occurrences des particules ainsi choisies suivant leur poids pour en obtenir  $N$  et de réinitialiser les poids des particules à  $\frac{1}{N}$ .

Une première version du filtre particulaire circulaire présenté dans ce paragraphe fut publiée dans les actes de la conférence "Fusion" 2011 pour l'estimation de la phase des signaux GPS-L2C [105]. Dans cette version, la corrélation entre les estimées de l'angle et de sa dérivée n'avait pas été prise en compte.

## 4.3 Détecteur de rupture circulaire

### 4.3.1 Test d'hypothèses

Le détecteur de rupture traite le signal dans une fenêtre de travail. On considère deux hypothèses :

- $H_1$  : il y a une rupture à un instant  $r$  dans la fenêtre de travail.
- $H_0$  : il n'y a pas de rupture dans la fenêtre de travail.

Soit  $l$  un instant considéré entre  $k - M + 1$  et  $k$ . Supposons que l'on dispose de mesures non bruitées  $\tilde{\phi}_l$  de l'angle  $\theta_l$ . On montre figure 4.2 l'angle estimé  $\hat{\theta}_{0,l}$  de  $\theta_l$  dans la fenêtre de travail.  $\hat{\theta}_{0,l}$  est obtenu par le filtre récursif défini au chapitre précédent suivant une modélisation

scalaire :

$$\hat{\theta}_{0,l} = \arctan^*(S_l, C_l) \quad (4.14)$$

$$P_{0,l} = \sqrt{C_l^2 + S_l^2} \quad (4.15)$$

avec

$$C_l = P_{0,l/l-1} \cos(\hat{\theta}_{0,l/l-1}) + R \cos(\phi_l) \quad (4.16)$$

$$S_l = P_{0,l/l-1} \sin(\hat{\theta}_{0,l/l-1}) + R \sin(\phi_l) \quad (4.17)$$

et

$$\hat{\theta}_{0,l/l-1} = \hat{\theta}_{0,l-1} + \Delta\theta \quad (4.18)$$

$$P_{0,l/l-1} = A^{-1}(A(P_{0,l-1})A(\kappa_Q)) \quad (4.19)$$

où  $\Delta\theta$  est la variation angulaire ( $\Delta\theta = \hat{\theta}_{k-M+1} dt$ ). On représente également figure 4.2 la fonction  $\rho_l(\nu) = \tilde{\phi}_l - \hat{\theta}_{0,l}$  définie après l'instant de la rupture  $r$ .

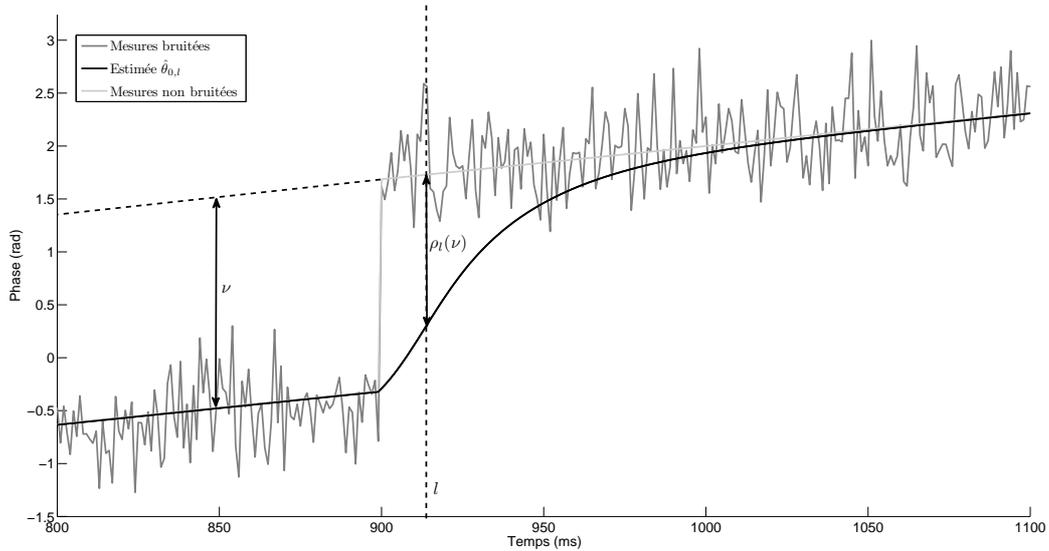


FIGURE 4.2 – Définition de  $\rho_l(\nu)$  dans la fenêtre de travail

Dans le cas d'une rupture à l'instant  $r$ , on montre dans l'annexe C que pour des mesures non bruitées et pour  $l \geq r$  :

$$\hat{\theta}_{0,l} = \Psi_{l-r} + \hat{\theta}_{0,l-1} + \Delta\theta \quad (4.20)$$

avec

$$\Psi_{l-r} = \arctan \left( \frac{R \sin \left( \nu - \sum_{i=0}^{l-r-1} \Psi_i \right)}{P_{0,l/l-1} + R \cos \left( \nu - \sum_{i=0}^{l-r-1} \Psi_i \right)} \right) \quad (4.21)$$

et

$$\Psi_0 = \arctan \left( \frac{R \sin(\nu)}{P_{0,r/r-1} + R \cos(\nu)} \right) \quad (4.22)$$

Par suite :

$$\rho_l(\nu) = \tilde{\phi}_l - \hat{\theta}_{0,l} = \nu - \sum_{i=0}^{k-r} \Psi_i \quad (4.23)$$

### 4.3.2 Règle de décision

On définit l'innovation par :

$$\epsilon_l = \phi_l - \hat{\theta}_{0,l} \quad (4.24)$$

avec :

$$P_{\epsilon,l} = A^{-1}(A(P_{0,l})A(\kappa_R)) \quad (4.25)$$

$\epsilon_l$  est distribué suivant une distribution de von Mises de paramètre de concentration  $P_\epsilon$ . Si une rupture se produit à l'instant  $r$ , alors  $\epsilon_{r:k}$  sont des observations bruitées de  $\rho_{r:k}(\nu)$ . Dans ce contexte, pour une amplitude de rupture  $\nu$  à l'instant  $r$ , les hypothèses de départ deviennent :

– Hypothèse  $H_1$  : rupture à l'instant  $r$ , alors :

$$\epsilon_{r:k} \sim \mathcal{M}(\rho_{r:k}(\nu), P_\epsilon) \quad (4.26)$$

– Hypothèse  $H_0$  : pas de rupture, alors :

$$\epsilon_{r:k} \sim \mathcal{M}(0, P_\epsilon) \quad (4.27)$$

On obtient alors la log-vraisemblance de la règle de décision MAP (Maximum À Posteriori) suivante :

$$\ell(r, \nu) = \sum_{i=r}^k P_{\epsilon,i} \cos(\epsilon_i) - \sum_{i=r}^k P_{\epsilon,i} \cos(\epsilon_i - \rho_i(\nu)) \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \begin{array}{l} H_0 \\ H_1 \end{array} \quad (4.28)$$

où les deux hypothèses sont supposées équiprobables. En pratique, les valeurs de  $\nu$  et de  $r$  sont inconnues et doivent être estimées dans la fenêtre de travail. C'est l'objet du paragraphe suivant.

### 4.3.3 Estimation de l'instant et de l'amplitude de la rupture

L'instant estimé de la rupture  $\hat{r}$  est obtenu par la maximisation suivante :

$$\{\hat{r}\} = \underset{k-M+1 \leq r \leq k}{\operatorname{argmax}} \{\ell(r, \hat{\nu}_r)\} \quad (4.29)$$

où  $\hat{\nu}_r$  est l'estimée de  $\nu$  calculée par les mesures  $\epsilon_{r:k}$ . Nous adoptons ici une approche circulaire Bayésienne pour le calcul de cette estimée. Soit l'équation d'état suivante, pour  $\nu$  supposée constante au cours du temps (c'est le cas pour un saut de cycle observé en boucle ouverte) :

$$\nu_l = \nu_{l-1} + v_l \quad (4.30)$$

Soit l'équation de mesure suivante :

$$\epsilon_l = \rho_l(\nu_{l-1}) + \omega_l \quad \text{pour } r \leq l \leq k \quad (4.31)$$

où  $v_l$  et  $\omega_l$  sont des bruits centrés distribués selon des distributions de von Mises.  $\rho_l(\dots)$  est une fonction non-linéaire définie par l'équation 4.23. La non-linéarité de cette fonction nous amène à estimer l'amplitude de rupture  $\nu_l$  à l'aide du filtre particulière circulaire décrit à la section précédente.

Finalement, la décision est effectuée, pour un seuil  $\alpha$  défini par l'utilisateur, suivant le test :

$$\sum_{i=\hat{r}}^k P_{\epsilon,i} \cos(\epsilon_i) - \sum_{i=\hat{r}}^k P_{\epsilon,i} \cos(\epsilon_i - \rho_i(\hat{\nu}_{\hat{r}})) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \alpha \begin{matrix} H_0 \\ H_1 \end{matrix} \quad (4.32)$$

#### 4.3.4 Correction de la rupture

On définit  $\hat{\theta}_{c,k}$ , l'angle corrigé, à l'aide des estimées  $\hat{\theta}_k$  et  $\hat{\theta}_{0,k}$ . Par suite, on distingue deux cas dans la définition de l'estimée finale de l'angle :

- Lorsqu'une rupture est détectée, la correction suivante est effectuée dans la fenêtre de travail :

$$\hat{\theta}_{c,l} = \hat{\theta}_{0,l} + \rho_l(\hat{\nu}_{\hat{r}}) - \hat{\nu}_{\hat{r}} - \nu_l \quad \text{for } \hat{r} \leq l \leq k \quad (4.33)$$

$$\nu_{k+1} = \nu_k + \hat{\nu}_{\hat{r}} \quad (4.34)$$

- Lorsqu'aucune rupture n'est détectée :

$$\hat{\theta}_{c,k} = \hat{\theta}_k - \nu_k \quad (4.35)$$

$$\nu_k = \nu_{k-1} \quad (4.36)$$

## 4.4 Architecture pour le traitement du signal

On présente ici l'architecture de poursuite. On suppose que l'initialisation de la fréquence porteuse répliqué  $f_d$ , des estimées de délai de code  $\tau$  et de délai de phase  $\theta_r$  est réalisée dans l'étape d'acquisition. L'architecture proposée est présentée figure 4.3. Comme au chapitre précédent, son principe est de poursuivre le délai de code en boucle fermée (DLL, au bas de la figure) et les délais de phase et de fréquence dans une boucle ouverte de phase (POL, en haut de la figure). La DLL utilise le discriminant cohérent Early-minus-Late.

Les mesures de délai de phase  $\phi_r$  sont effectuées toutes les millisecondes, et sont filtrées par le filtre présenté au chapitre précédent dans son format alpha-bêta. Ce filtre produit également une estimée du décalage en fréquence, qui est proportionnel aux variations angulaires. Les estimées de phase et de fréquence, ainsi que les mesures de phase, sont les trois valeurs fournies comme entrées pour l'estimateur de sauts de cycle. Les estimées de phase corrigées par le détecteur-estimateur sont uniquement employées pour le calcul de pseudo-distance.

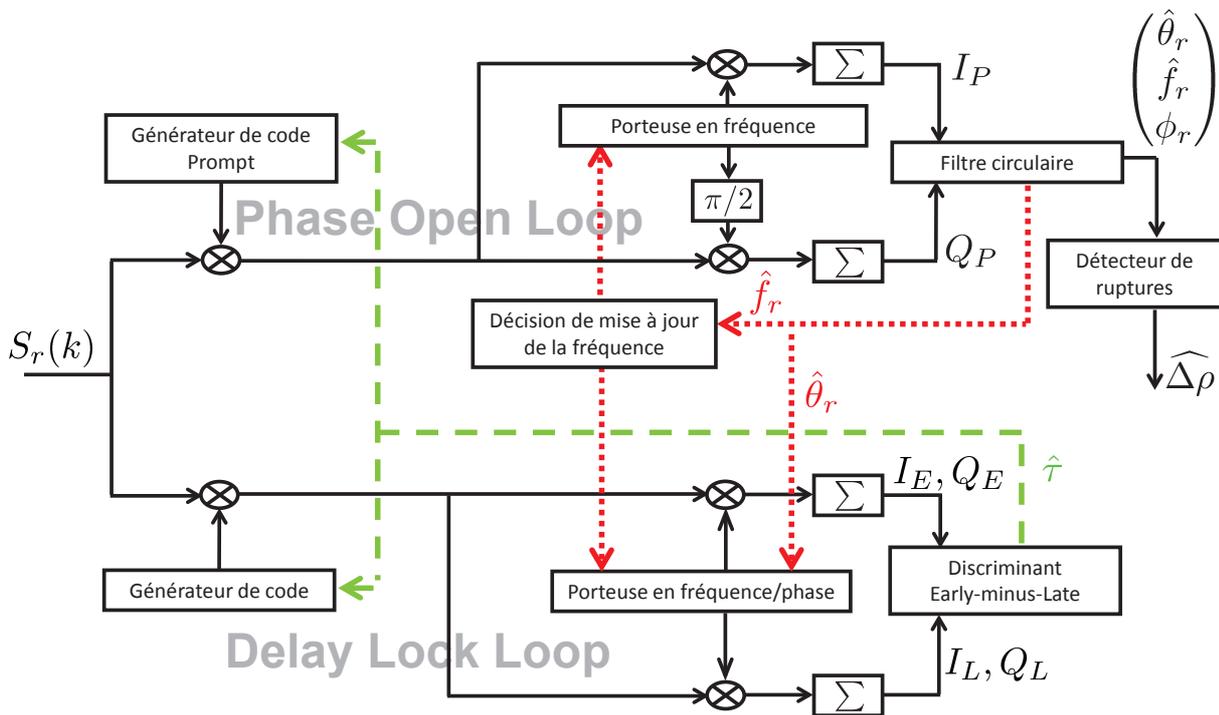


FIGURE 4.3 – Architecture de poursuite proposée

Le but visé par la poursuite de la phase en boucle ouverte plutôt qu'une poursuite classique en boucle fermée (PLL aidée d'une FLL) est ici encore d'éviter la corrélation temporelle induite par le procédé de filtrage récursif en boucle fermée. Cela implique de plus que, pour des rapports signal sur bruit faibles, une poursuite en boucle ouverte produira un nombre réduit de sauts de cycle observés en comparaison avec une boucle fermée. En effet, suivant la méthode utilisée pour extraire le message de navigation du signal reçu, une estimée de phase affectée d'un bruit supérieur à  $\pi/2$  ou de  $\pi$  provoquera un saut de cycle respectivement de  $\pi$  ou de  $2\pi$ , comme nous allons le montrer dans la suite de ce paragraphe.

D'après l'équation 1.27, lorsque le code du signal répliqué est proche du code du signal reçu, on a :

$$I_{P,k} \approx A_k n_k \cos(\widehat{\Delta\theta}_{r,k}) \quad (4.37)$$

où  $A_k$  représente la puissance du signal reçu et  $n_k$  le signe du bit de message de navigation à l'instant  $k$ . Pour une PLL, une méthode classique consiste à supposer l'estimée de variation de

décali de phase  $\widehat{\Delta\theta}_r$  inférieure à  $\pi/2$ . En effet, la boucle fermée a pour objectif de maintenir cette valeur la plus proche possible de zéro. Ainsi, le signe de  $I_P$  est supposé porter l'information sur le message de navigation.

De même, pour une POL, nous avons proposé équation 3.100 de considérer le signe de  $I_P$  obtenu sur la DLL comme donnant le signe du message de navigation. Dans cette DLL, les composantes  $I_P$  et  $Q_P$  sont également obtenues avec une porteuse répliquée qui tient compte de la fréquence et de la phase estimée, et le décali de phase entre les signaux peut donc être supposé proche de zéro.

Cependant, d'après l'équation précédente, lorsque le décali de phase  $\Delta\theta_r$  est supérieur à  $\pi/2$  en valeur absolue, c'est-à-dire lorsque l'estimation de la phase est sujette à un bruit supérieur à  $\pi/2$ , le cosinus n'est plus positif et le signe de  $IP$  est opposé au signe du message de navigation. Lorsque le discriminant utilisé pour la phase prend en compte le signe du message de navigation par l'utilisation de  $\arctan^*$  (comme équation 3.100), une erreur de signe est ainsi effectuée et la phase estimée est faussée de  $\pi$ . Lorsque le discriminant utilisé pour la phase est l'arctangente, et que le signe du message de navigation n'est pas pris en compte, une erreur de  $\pi$  est également réalisée car  $\arctan$  produit des valeurs entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ .

Une deuxième approche est de déterminer le message de navigation hors-ligne. Dans ce cas, la mesure en boucle ouverte ou fermée est donnée par :

$$\hat{\theta}_r = \arctan^* \left( \frac{Q_{P,k}^{POL} \text{signe}(n_k)}{I_{P,k}^{POL} \text{signe}(n_k)} \right) \quad (4.38)$$

$$\text{ou } \widehat{\Delta\theta}_r = \arctan^* \left( \frac{Q_{P,k}^{PLL} \text{signe}(n_k)}{I_{P,k}^{PLL} \text{signe}(n_k)} \right) \quad (4.39)$$

Ceci ne provoquera d'erreurs que lorsque l'erreur d'estimation sur l'angle est supérieure à  $\pi$  (resp. inférieure à  $-\pi$ ). En effet, dans ce cas, la fonction  $\arctan^*$ , qui retourne des valeurs entre  $-\pi$  et  $\pi$ , induira une erreur d'estimation de  $2\pi$ .

L'estimation de la phase par une PLL étant moins précise que l'estimation par une POL, on observera plus souvent ces phénomènes, sous forme de sauts de cycle, dans une poursuite en boucle fermée.

## 4.5 Positionnement GPS par la phase

Le filtre circulaire proposé section 3.3 et le détecteur-estimateur de rupture présenté section 4.3 (et donc le filtre particulaire présenté section 4.2.2) sont appliqués à la poursuite de la phase et de la fréquence d'un signal GNSS en boucle ouverte en vue d'obtenir un positionnement précis par la phase.

Dans ce paragraphe, nous allons décrire comment obtenir une mesure de pseudo-distance à partir des mesures de délais de phase et de fréquence fournies par le filtre. L'utilisation des pseudo-distances obtenues pour procéder à un positionnement a été présentée section 1.4.3. Étant donné que le récepteur mesure un délai de phase, c'est-à-dire la différence entre la phase du signal observé et la phase du signal répliqué localement, il est nécessaire pour effectuer un positionnement absolu de résoudre l'ambiguïté de phase, ou d'obtenir une première mesure de pseudo-distance à l'aide du code contenu dans le signal. Cette dernière méthode n'est cependant précise qu'à l'ordre du mètre. Nous reviendrons sur ce problème section 5.3, où nous proposerons une nouvelle méthode de résolution de l'ambiguïté. En supposant connue une première valeur de pseudo-distance  $\rho_0$ , la pseudo-distance  $\rho_n$  à la  $n^{\text{ème}}$  itération est obtenue par :

$$\rho_n = \rho_0 + \sum_{k=1}^n \Delta\rho_k \quad (4.40)$$

avec  $\rho_0$  la première pseudo-distance obtenue soit par le code, soit par résolution d'ambiguïté, et  $\Delta\rho_k = \rho_k - \rho_{k-1}$ .

On s'intéressera ici à l'utilisation des variations de pseudo-distances pour obtenir un positionnement précis au centimètre, relativement à la première position. Les variations de pseudo-distance peuvent être obtenues par les formules suivantes :

$$\Delta\rho_k = v_{k-1}T_c \quad (4.41)$$

$$v_{k-1} = -f_{d,k-1} \frac{C}{f_{OL}} \quad (4.42)$$

où  $v_k$  est la vitesse relative satellite-récepteur et  $f_{d,k}$  est la fréquence du signal reçu à l'itération  $k$ . Ces paramètres évoluent au cours du temps en raison de l'effet Doppler.  $T_c$  est la période du code,  $C$  est la vitesse de la lumière et  $f_{OL}$  est la fréquence par laquelle le signal est descendu en fréquence (cf section 1.4.1).

Rappelons que le signal GNSS capté par l'antenne est descendu en fréquence (en vu d'être

échantillonné en respectant les conditions énoncées dans le théorème de Shannon-Nyquist) à l'aide d'un oscillateur local. Une réplique du signal numérique obtenu est alors générée par le récepteur en vue de démoduler et de décoder le message de navigation. Les boucles de poursuite estiment les délais de code, de phase et de fréquence entre les signaux numériques observés et répliqués. Dans notre approche, nous prenons en compte les perturbations liées à l'horloge de l'oscillateur local, ce qui se traduit par une modélisation des bruits sur les délais de phase et de fréquence comme marches aléatoires [124]. On notera par la suite  $f_l$  la fréquence du signal local répliqué (fréquence de démodulation) et  $f$  le décalage en fréquence estimé dans la boucle de poursuite (fréquence résiduelle du signal démodulé).  $f$  est ainsi défini par :

$$f_k = (f_{d,k} + W_{f_k}) - f_{l,k} \quad (4.43)$$

où  $W_f$  est le bruit d'oscillateur sur la fréquence. Ce décalage en fréquence provoque des variations de délai de phase au cours du temps :

$$\theta_k = \theta_{k-1} + 2\pi f_k T_c + W_{\theta_k} \quad (4.44)$$

où  $\theta_k$  est le délai de phase et  $W_\theta$  est le bruit d'oscillateur sur le délai de phase. Finalement, on obtient :

$$\Delta\rho_k = - (f_{l,k-1} + f_{k-1} - W_{f_{k-1}}) \frac{C T_c}{f_{OL}} \quad (4.45)$$

$$= - \left( f_{l,k-1} T_c + \frac{\Delta\theta_{k-1}}{2\pi} - W_{f_{k-1}} T_c - \frac{W_{\theta_{k-1}}}{2\pi} \right) \frac{C}{f_{OL}} \quad (4.46)$$

où  $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ . Les bruits produits par l'oscillateur local  $W_{f_k}$  et  $W_{\theta_k}$  étant communs à l'ensemble des signaux satellitaires observés, ils sont supprimés lors du processus de positionnement par l'utilisation d'un quatrième satellite dans la triangulation. Ainsi, la pseudo-distance estimée peut être ramenée à :

$$\widehat{\Delta\rho}_k = - \left( f_{l,k-1} T_c + \frac{\Delta\hat{\theta}_{c,k-1}}{2\pi} \right) \frac{C}{f_{OL}} \quad (4.47)$$

où  $\Delta\hat{\theta}_{c,k-1}$  est la différence entre deux estimées successives de délai de phase, définies dans l'intervalle  $[-\pi; \pi[$ . D'après l'équation 4.44, lorsque le décalage en fréquence  $f_k$  entre le signal observé et le signal répliqué est trop grand, la variation de délai de phase saute de  $\pi$  à  $-\pi$  (ou

inversement). Cela se produit lorsque :

$$|2\pi fT_c + W_\theta| > \pi \quad (4.48)$$

$$\iff |f| > \frac{1}{2T_c} - \left| \frac{W_\theta}{\pi} \right| \quad (4.49)$$

Lorsque ce seuil est atteint, la fréquence du signal répliqué doit être mise à jour (et les paramètres du filtre circulaire réinitialisés) par :

$$f_{l,k} = f_{l,k-1} + \hat{f}_{k-1} \quad (4.50)$$

avec  $\hat{f}_{k-1}$  le décalage en fréquence estimé par le filtre circulaire.

En pratique, pour des applications classiques de positionnement (positionnement statique, positionnement d'une voiture ou d'un avion), la mise-à-jour de la fréquence de démodulation ne devra être effectuée qu'après un grand nombre d'itérations. En effet, la pratique montre que même dans le cas d'un satellite émetteur observé à faible élévation et d'un récepteur embarqué dans un avion, la mise-à-jour de la fréquence ne survient qu'après plusieurs secondes, donc après plusieurs milliers d'itérations. En se basant sur cette remarque, on peut conclure que le rebouclage de la fréquence conditionné par 4.48 n'impliquera pas de corrélation temporelle entre les estimées successives de fréquence.

## 4.6 Expérimentations

Dans ces expérimentations, on cherche à évaluer les outils proposés, à savoir le filtre particulaire, le détecteur-estimateur de sauts de cycle et leur intégration à l'architecture proposée. L'évaluation se fera d'abord sur signaux synthétiques puis sur signaux réels. Le filtre est comparé à un filtre de Kalman classique en termes de distance et dispersion circulaires (définies équations 2.57 et 2.58, section 2.6) pour l'estimation de la phase, et en termes d'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) pour l'estimation de la fréquence. Le détecteur de rupture circulaire est comparé à un détecteur de rupture GLR linéaire classique, basé sur le filtrage de Kalman (nommé par la suite Kalman GLR). Dans le cas réel, on estimera la position du récepteur au cours du temps dans les cas statique et dynamique.

### 4.6.1 Données synthétiques

#### Estimation de la phase

Dans cette expérimentation, nous comparerons le filtre particulière circulaire proposé, utilisé en boucle ouverte, au filtre de Kalman utilisé en boucle fermée et au filtre circulaire alpha-bêta présenté au chapitre précédent. Comme dans les expérimentations du chapitre précédent, le signal simulé est échantillonné à 20 MHz. La bande passante du signal est ici encore fixée à 4 MHz et l'espacement entre les codes répliqués Early et Prompt est de  $T_c/2$ . On considèrera des rapports signal sur bruit  $C/N_0$  de 50 dB Hz, 40 dB Hz et 30 dB Hz, ainsi que les mêmes différents scénarii d'accélération relative satellite-récepteur qu'au chapitre précédent. Ici encore, on considèrera une erreur initiale sur la fréquence de démodulation de 3 Hz. Le signal simulé ici sera cependant un signal GPS L1, les paramètres ne seront donc plus évalués après une intégration de 20 millisecondes (période du code  $CM$ ), mais de 1 milliseconde (période du code  $C/A$ ). On considèrera par ailleurs que le message de navigation est connu, c'est-à-dire que les discriminants utilisés en boucles ouverte et fermée sont définis par les équations 4.38 et 4.39.

Les paramètres des filtres seront ici encore fixés pour un rapport  $C/N_0$  de 40 dB Hz et une dynamique satellite-récepteur moyenne (récepteur embarqué dans une voiture et satellite à élévation moyenne). On choisit pour le filtre de Kalman une covariance des bruits d'état sur la phase et la fréquence de 50 et 0.002 et une covariance du bruit de mesure de 2. Les paramètres du filtre proposé au chapitre précédent sont :  $\kappa_{1,R} = 1$ ,  $\kappa_{1,Q} = 100$  et  $\kappa_{2,Q} = 50\,000$ . Enfin, les paramètres du filtre particulière circulaire sont quant à eux :  $N = 500$ ,  $v_0^Q = 0.01$ ,  $\kappa_0^R = 1$  et  $N_{lim} = 0.45$ .

On montre sur la partie gauche de la figure 4.4 la phase obtenue pour une réalisation de signal simulé et les phases estimées sur cette réalisation par le filtre particulière proposé, le filtre de Kalman et le filtre circulaire du chapitre précédent. Sur la partie droite, on représente la distance circulaire entre les délais de phase estimées par chaque méthode et la valeur réelle de la phase. On notera que les estimations de phase sont bien centrées sur la valeur à estimer, mais que les filtres proposés présentent de meilleurs résultats en termes de distance circulaire, autrement dit que les estimées proposées sont plus concentrées autour de l'angle à estimer. Cela est dû à la corrélation temporelle qu'un filtre utilisé en boucle fermée induit, et qui a pour conséquence des oscillations dans l'estimée produite. Le filtre particulière présente pour cette réalisation des performances d'estimation de la phase légèrement inférieures à celles du filtre décrit au chapitre précédent.

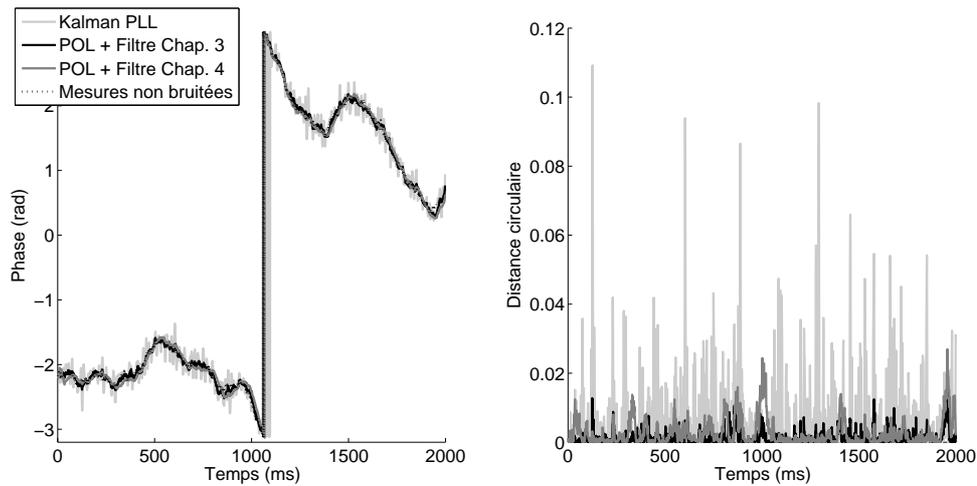


FIGURE 4.4 – Comparaison entre les estimées en boucles ouverte et fermée

On présente figure 4.5 un agrandissement de la figure précédente. Sur cette figure, on observe plus facilement les oscillations provoquées par le filtrage en boucle fermée, qui sont la source des mauvaises performances de l'architecture de poursuite classique.

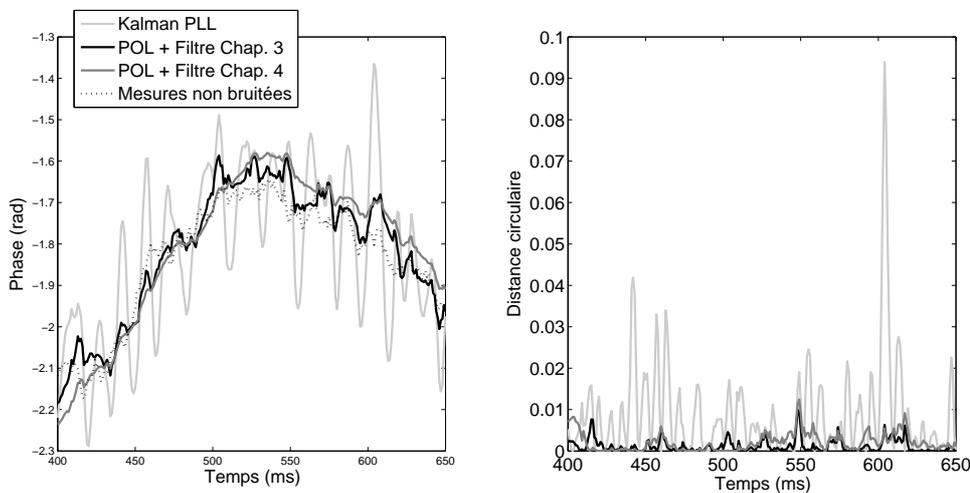


FIGURE 4.5 – Comparaison entre les estimées en boucles ouverte et fermée (agrandissement)

On reporte dans le tableau 4.1 la dispersion circulaire de la phase estimée en fonction du  $C/N_0$  et de la moyenne et du maximum de taux de variations Doppler. Il apparaît que l'estimation de la phase est de 2 à 10 fois plus précise en utilisant les méthodes proposées plutôt que la méthode Kalman PLL classique. Ce facteur augmente lorsque le rapport signal sur bruit

diminue. Les performances des deux filtres circulaires proposés sont relativement proches, mais il apparaît que le filtre du chapitre précédent est plus efficace lorsque le rapport signal sur bruit diminue et pour une dynamique faible. En effet, on observe que les performances du filtre particulière sont moins sensibles aux changements de variations Doppler.

Variations Doppler (Hz/s) (moyenne/max)	$C/N_0$ (dB Hz)		
	50	40	30
0/0.04	1.0e-3/4.2e-4/4.6e-4	7.7e-3/1.6e-3/2.6e-3	1.5e-1/1.5e-2/2.5e-2
5/10	1.0e-3/4.3e-4/4.6e-4	7.9e-3/1.6e-3/2.6e-3	1.7e-1/1.4e-2/2.8e-2
100/170	1.2e-3/6.8e-4/5.1e-4	8.0e-3/3.4e-3/2.9e-3	1.9e-1/2.1e-2/2.8e-2

TABLE 4.1 – Dispersion circulaire du délai de phase estimé pour les filtres en (PLL/POL chap. 3/POL chap. 4)

On reporte tableau 4.2 l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) du décalage en fréquence estimé, en fonction du  $C/N_0$  simulé et des variations Doppler considérées, par le filtre particulière proposé en POL, par le filtre de Kalman en PLL et par le filtre proposé au chapitre précédent en POL. Il apparaît que les filtres proposés produisent une estimation nettement plus précise et robuste de la fréquence que le filtre de Kalman utilisé en PLL. L'estimation de la fréquence par un filtre en boucle fermée est en effet fortement affectée par les oscillations qui surviennent dans l'estimation des variations de délais de phase, en particulier en l'absence de mesures de fréquence. Cet effet est d'autant plus important lorsque les durées d'intégration sont courtes. Cela explique pourquoi la technique Kalman PLL est moins performante en termes d'estimation de la fréquence sur les signaux GPS L1 que sur les signaux GPS-L2 (cf tableau 3.3). En effet, la corrélation temporelle entre deux estimées séparées d'une milliseconde est plus importante que lorsque ces estimées sont séparées de 20 millisecondes. Concernant les filtres proposés, on tire les mêmes conclusion qu'avec le tableau 4.1 : le filtre particulière circulaire fournit des performances légèrement inférieures à celles du filtre proposé au chapitre 3, excepté dans le cas d'une forte dynamique et pour  $C/N_0$  supérieur à 40 dB Hz.

On montre également figure 4.6 le cas de l'estimation des délais de phase pour un signal fortement bruité ( $C/N_0 = 30$  dB Hz) et dont le message de navigation n'est pas connu. On utilise donc les discriminants définis équations 1.29 et 3.100 pour les boucles fermée et ouverte, et des erreurs de  $\pm\pi$  peuvent survenir, comme cela a été annoncé section 4.4. On remarque sur cette figure que la PLL produit ce type d'erreur à plusieurs reprises, à savoir à chaque fois que l'erreur sur l'estimée de phase est supérieure à  $\pi/2$  en valeur absolue. La POL, pour cette réalisation, ne produit pas d'erreur de ce type, car l'erreur sur l'estimée de phase est toujours inférieure à

Variations Doppler (Hz/s) (moyenne/max)	$C/N_0$ (dB Hz)		
	50	40	30
0/0.04	2.4/0.22/0.28	18/0.51/0.69	322/1.45/1.92
5/10	2.6/0.24/0.30	18.2/0.53/0.71	375/1.28/2.25
100/170	3.2/0.39/0.34	18.6/0.83/0.77	428/2.03/2.22

TABLE 4.2 – Erreur Quadratique Moyenne sur les délais de fréquence estimés par les filtres en (PLL/POL chap. 3/POL chap. 4)

$\pi/2$ . On peut en conclure que l'utilisation d'un filtre dans une boucle fermée provoque un plus grand nombre de sauts de cycle, en raison des oscillations induites par la corrélation temporelle entre deux estimées successives.

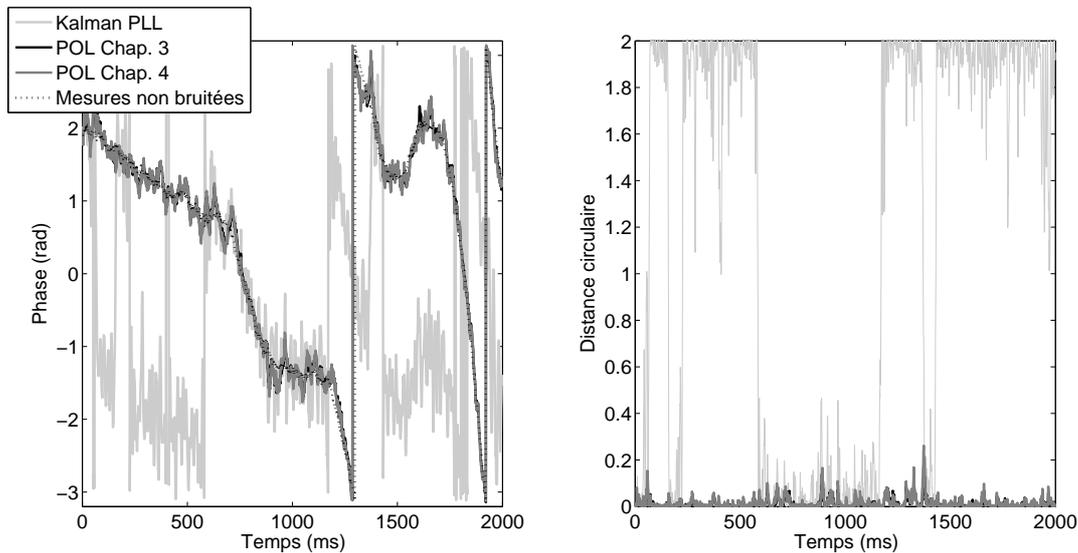


FIGURE 4.6 – Comportement des estimateurs de délais de phase lors de l'occurrence de sauts de cycle

Dans cette expérimentation, nous avons montré que la méthode de poursuite proposée dans une POL est plus précise que la boucle PLL classique utilisant un filtre de Kalman, en l'absence de détecteurs de ruptures. En effet, les résultats en termes de dispersion circulaire sur la phase aussi bien qu'en termes d'EQM sur la fréquence montrent une diminution des erreurs d'estimation. La méthode proposée est également plus robuste au bruit, en particulier lorsque le couple satellite-récepteur est soumis à une forte dynamique. Ces résultats sont dus au fait que le filtre de Kalman utilisé en boucle fermée provoque des oscillations résiduelles dues à une corrélation temporelle entre les estimées. Une conséquence est que la poursuite en PLL provoque un

nombre plus important de sauts de cycle, en particulier dans le cas de faibles rapports signal sur bruit, ce qui ajoute aux pertes de précision de l'estimation de la phase. Nous montrerons dans les expérimentations sur données réelles les conséquences de ces pertes de précision pour l'estimation de phase en termes de précision de positionnement. Concernant les filtres circulaires proposés, il apparaît que le filtre proposé au chapitre 3 produit des estimées de phase légèrement plus précises. Cependant, le filtre particulière circulaire proposé dans ce chapitre est plus robuste à de fortes dynamiques satellite-récepteur.

### Détection-estimation de saut de cycle

Dans cette seconde expérimentation, un estimateur de saut de cycle est associé aux filtres de boucle. Le détecteur de rupture GLR circulaire proposé est comparé au détecteur GLR linéaire classique avec filtre de Kalman intégré [119]. Dans le cas classique, les mesures de phase sont produites en cycles par une PLL tandis que dans l'architecture proposée, les mesures sont obtenues en radians, en boucle ouverte. Pour pouvoir corriger les sauts de cycle, il est nécessaire de les détecter, d'estimer leur position et d'estimer leur amplitude. Ces trois étapes sont évaluées pour des rapports signal sur bruit différents et un saut de cycle d'amplitude 1 rad. La poursuite est effectuée sur le satellite de PRN 21, avec une vitesse relative satellite-récepteur moyenne de 416 m/s et des variations Doppler moyennes de 4.830 Hz/s.

La taille de la fenêtre de travail est fixée à  $M = 20$  échantillons. Les paramètres du détecteur de ruptures circulaire sont  $R = 10$  et  $Q = 1000$ . Les paramètres du détecteur de rupture Kalman GLR sont  $R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $Q = \begin{bmatrix} 5e-3 & 0 \\ 0 & 1e-3 \end{bmatrix}$ . On reporte tableau 4.3 les seuils de détection des deux détecteurs pour les différents RSB simulés.

$C/N_0$ (dB Hz)	50	40	38	30
Kalman GLR	0.0025	0.023	0.04	4.7
GLR circulaire	0.072	0.35	0.55	3

TABLE 4.3 – Seuils de détection utilisés

On montre figure 4.7 un exemple de comportement de délai de phase présentant un saut de cycle à l'instant  $k = 80$  ms et un exemple de signal corrigé. Sur la droite de cette figure, on présente la probabilité de détection de saut de cycle pour  $C/N_0 = 30$  dB Hz. Notons sur cette figure que plusieurs paramètres peuvent être définis pour évaluer la détection : la dispersion de l'erreur sur l'instant estimé de rupture et la probabilité de détection. L'amplitude estimée

de la rupture détectée est un autre paramètre à évaluer. Pour que l'évaluation du détecteur soit complète, la probabilité de détection doit être estimée conjointement à la probabilité de fausse alarme. Les seuils de détections des deux méthodes comparées sont en fait fixés pour produire une probabilité de fausse alarme fixe. De plus, pour obtenir une estimation précise de l'amplitude de rupture, une rupture n'est retenue que pour la fenêtre telle que  $\hat{r} = k - M + 1$ . Cela permet de disposer d'un plus grand nombre d'observations pour estimer la moyenne avant la rupture dans la fenêtre de travail.

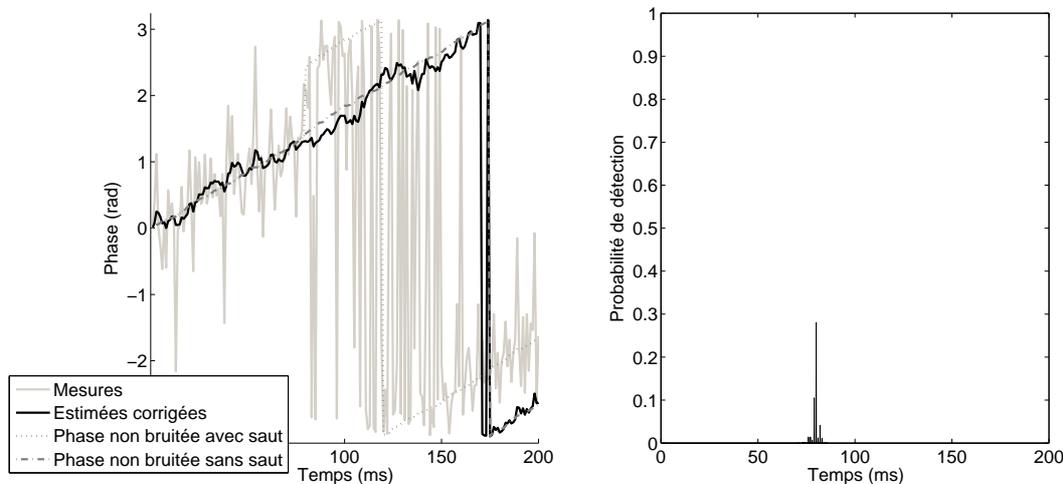


FIGURE 4.7 – Détection et estimation de saut de cycle

On reporte tableau 4.4 la probabilité de détection associée à une probabilité de fausse alarme fixée  $P_f = 0.001$  pour les détecteurs circulaire et Kalman GLR évalués.

$C/N_0$ (dB Hz)	50	40	38	30
Kalman GLR	1	0.996	0.883	0.002
GLR circulaire	1	1	1	0.494

TABLE 4.4 – Probabilité de détection

On reporte tableau 4.5 l'Erreur Quadratique Moyenne entre l'instant de rupture estimée et sa valeur réelle.

On reporte tableau 4.6 la dispersion circulaire sur l'amplitude estimée de la rupture pour les deux méthodes comparées.

$C/N_0$ (dB Hz)	50	40	38	30
Kalman GLR	0	0.1	0.2	2.5
GLR circulaire	0	0.1	0.2	1.5

TABLE 4.5 – Erreur Quadratique Moyenne sur l’instant estimé en millisecondes

$C/N_0$ (dB Hz)	50	40	38	30
Kalman GLR	8.6e-4	7.7e-3	1.1e-2	1.5
GLR circulaire	8.5e-4	3.6e-3	5.1e-3	6.6e-2

TABLE 4.6 – Dispersion circulaire sur l’amplitude estimée de la rupture

Pour un  $C/N_0$  élevé (50 ou 40 dB Hz), les probabilités de détection sont les mêmes pour le GLR circulaire et le Kalman GLR. Lorsque le rapport signal sur bruit est faible, les observations de phase fournies en boucle fermée sont plus bruitées et un plus grand nombre de ruptures surviennent. Ces sauts de cycle additionnels augmentent la probabilité de fausse alarme du détecteur Kalman GLR. Ainsi, pour des signaux à faible RSB, la probabilité de détection est supérieure pour l’approche proposée car cet effet n’apparaît pas dans les observations de délai de phase produites par une POL. Les instants de rupture estimés sont obtenus avec une précision comparable par les deux détecteurs, mais en termes d’estimation de l’amplitude de rupture, le GLR circulaire proposé est plus précis que le Kalman GLR classique.

On peut conclure que la méthode proposée améliore la détection et la correction des sauts de cycle dans la poursuite de signaux GNSS, en particulier en termes de probabilité de détection et d’estimation de l’amplitude des sauts. La précision de l’estimation pourrait être encore augmentée en utilisant des fenêtres de travail plus grandes, mais cette technique doit être limitée pour respecter le postulat d’une vitesse constante pour les données traitées.

#### 4.6.2 Données réelles

Nous considérons dans cette expérimentation sur données réelles les cas statique et dynamique. Un numériseur échantillonne et enregistre le signal capté par une antenne GPS-L1. La fréquence d’échantillonnage est de 25 MHz, ce qui permet d’échantillonner le code C/A, dont la bande passante est de 2 MHz. La bande passante du système est de 50 MHz. Dans le cas statique, l’acquisition dure 8 secondes et 10 secondes dans le cas dynamique. Dans le cas statique, l’antenne est positionnée sur le toit du laboratoire. Dans le cas dynamique, nous avons réalisé

une trajectoire circulaire à l'aide d'une antenne située à l'extrémité d'un bras métallique tournant horizontalement autour d'un poteau fixé verticalement. Le système utilisé dans ce dernier cas est présenté figure 4.8, pendant sa rotation.

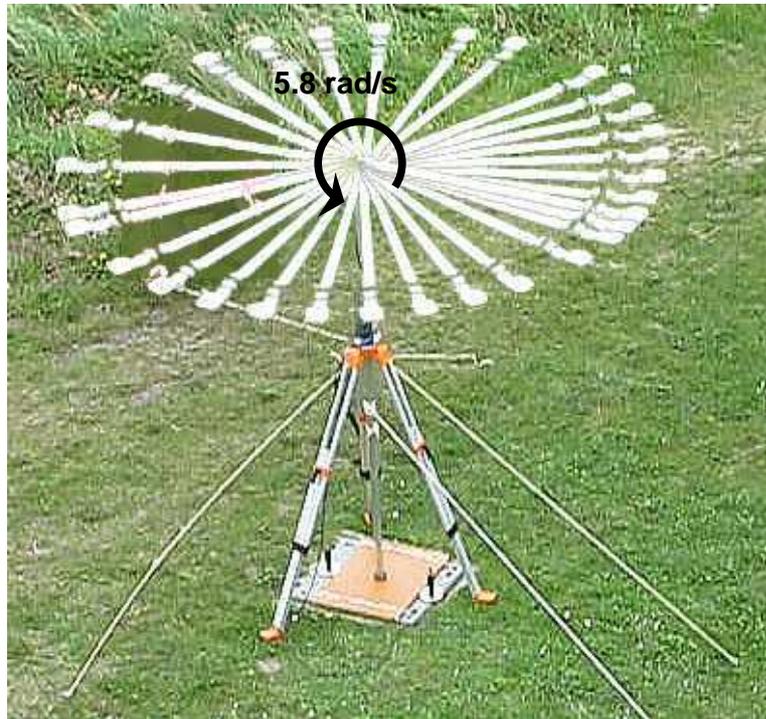


FIGURE 4.8 – Système rotatif utilisé pour l'expérimentation dynamique

### Positionnement statique

La constellation des satellites visibles pendant cette expérimentation est décrite tableau 4.7, ainsi que le rapport signal sur bruit de chacun des signaux satellitaires correspondants. L'ensemble des satellites présentés dans ce tableau est utilisé pour le calcul de position. On présente figure 4.9 les erreurs de positions estimées dans ce cas statique. Les positions sont calculées à chaque milliseconde, la période du code  $C/A$ . L'erreur de position correspond à la position calculée dans un système de coordonnées centré sur la position réelle de l'antenne réceptrice. Sur cette figure, on affiche les positions obtenues par une poursuite classique avec PLL sans filtre de boucle, par une poursuite avec PLL et filtre de Kalman (notée PLL+Filtre) et par la méthode proposée en boucle ouverte, ici implémentée avec le filtre circulaire proposé au chapitre précédent (notée POL+Filtre), pour parfaire l'évaluation de ce filtre.

PRN	1	11	14	17	19	20	23	28	31	32
$C/N_0$ (dB Hz)	51.2	49.8	44	48.4	41.7	49.8	45.4	43.0	44.8	50.7

TABLE 4.7 – Constellation satellitaire pour l'expérimentation statique

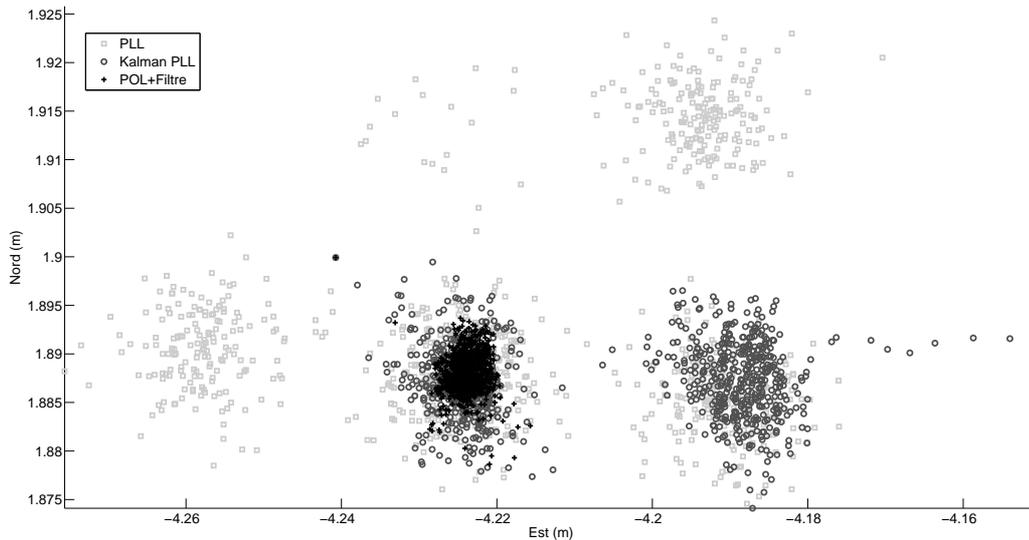


FIGURE 4.9 – Positions estimées dans le cas statique

Il apparaît sur cette représentation graphique que les mesures de phase en PLL sont sujettes à des sauts de cycle sur au moins l'un des signaux satellitaires. Cet effet apparaît moins dans les estimées de phase de la PLL lorsqu'elles sont filtrées par un filtre de Kalman. Aucun saut de cycle n'apparaît pour des estimées de phase en POL. On observe ici encore que le filtrage des mesures de phase par le filtre proposé permet de diminuer le nombre de sauts de cycle liés au bruit de mesure. De plus, on note que les positions obtenues par la méthode proposée sont plus concentrées que celles obtenues par le filtre de boucle fermée classique : même en l'absence de sauts de cycle, la méthode proposée serait plus précise. On retrouve ici les conséquences en termes de positionnement des conclusions qui avaient été apportées, pour l'estimation de la phase, par la section 4.6.1 sur données synthétiques.

On reporte tableau 4.8 l'écart-type des erreurs de position obtenues figure 4.9 dans les directions Nord et Est. On reporte également la moyenne et l'écart-type sur les distances entre positions estimées et position réelle.

	Ecart-type Est ( $\sigma$ )	Ecart-type Nord ( $\sigma$ )	Distance ( $m/\sigma$ )
PLL	2.5e-2	1.2e-2	(4.6/2.2e-2)
PLL+Filtre	1.9e-2	3.9e-3	(4.6/1.7e-2)
POL+Filtre	1.9e-3	2.0e-3	(4.6/1.9e-3)

TABLE 4.8 – Erreur dans le cas statique, sur données réelles

Les paramètres statistiques sur l'erreur de positionnement présentés tableau 4.8 confirment les commentaires sur les résultats présentés figure 4.9. En effet, les résultats de la méthode proposée en termes d'écart-type sont meilleurs que pour la méthode classique. La distance moyenne n'est pas nulle car les perturbations ionosphérique et troposphérique ne sont pas corrigées dans le calcul de position. La variance de ce paramètre est inférieure pour la méthode proposée, ce qui indique également que les positions estimées sont plus concentrées sur la position réelle. La précision obtenue en relatif (en matière de variations de position au cours du temps) est, comme attendu, d'ordre centimétrique, et ce sans intégration des mesures de phase ou de pseudo-distance.

### Positionnement dynamique

Dans le cas dynamique, la trajectoire de l'antenne est un cercle dans le plan horizontal, de diamètre 2.44 mètres. Lors de l'expérimentation, 9 révolutions furent enchainées en 10 secondes. On montre figure 4.10 les positions estimées à chaque milliseconde (le système de coordonnées est centré sur la position récepteur obtenue par un récepteur Novatel OEM4) et un cercle représentant la trajectoire théorique supposée de l'antenne. Dans cette expérimentation, nous comparons les positions obtenues par la POL proposée, utilisant uniquement son filtre de boucle, et les positions obtenues par la POL avec filtre et détecteur de rupture GLR circulaire pour l'estimation et la correction des sauts de cycle pouvant apparaître dans ces conditions de forte dynamique.

Le cercle théorique de diamètre 2.44 mètres est adapté pour correspondre au mieux aux positions estimées (les positions fournies lors de cette expérimentation par le récepteur Novatel ne peuvent pas être précises au centimètre près). La distance moyenne et l'écart-type de l'erreur résiduelle entre les positions estimées et le cercle théorique sont reportées tableau 4.9.

Tableau 4.9, la distance moyenne et l'écart-type de l'erreur dans les directions Est et Nord sont inférieures lorsque les sauts de cycle sont détectés et corrigés. On peut observer figure 4.10 l'effet des sauts de cycle sur la position estimée. Lorsque ceux-ci ne sont pas corrigés, des écarts soudains apparaissent dans les trajectoires estimées, dus aux erreurs de pseudo-distance

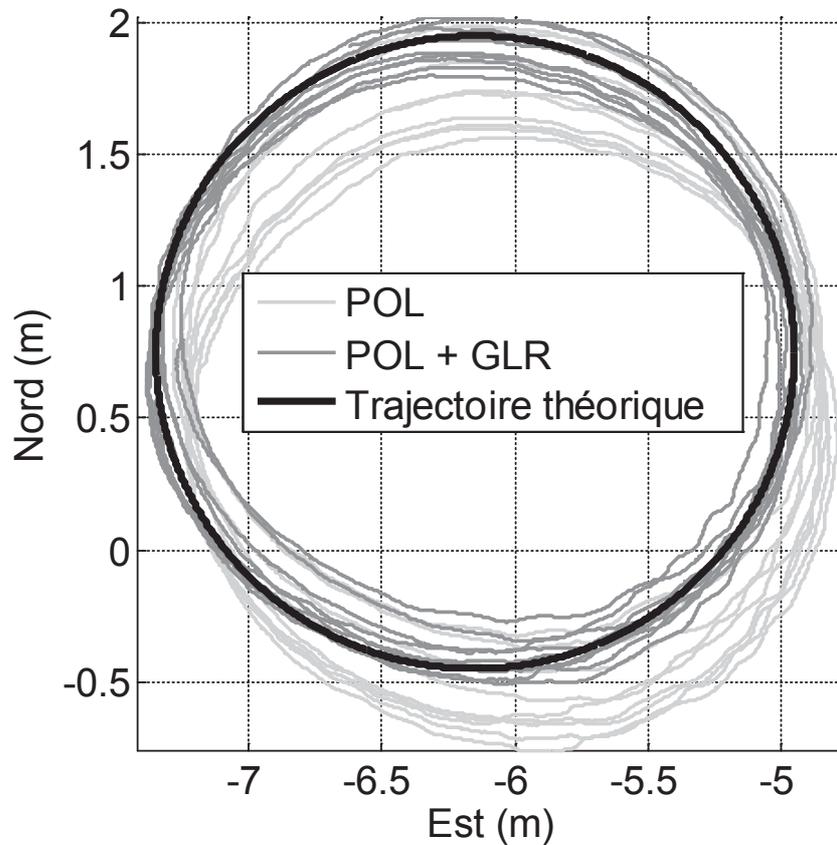


FIGURE 4.10 – Positions estimées dans le cas dynamique

	Ecart-type Est	Ecart-type Nord	Distance moyenne
POL + Filtre	1.1e-2	3.7e-2	1.5e-1
POL + Filtre + GLR	2.6e-3	3.3e-3	3.6e-3

TABLE 4.9 – Erreurs de trajectoire dans le cas dynamique

associées aux délais de phase corrompus par une rupture. Une rupture non corrigée sur un seul des signaux satellitaires traités affectera l'estimation de la position. Comme la pseudo-distance est calculée à partir de l'accumulation des mesures de phase, les cercles obtenus sont de plus en plus excentrés lors de l'apparition de ruptures. Lorsque le détecteur-estimateur de rupture circulaire est utilisé, la trajectoire circulaire estimée reste centrée sur un même point, car l'erreur de pseudo-distance cumulée est plus faible.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un détecteur-estimateur de ruptures défini dans une inférence Bayésienne avec des distributions circulaires de von Mises. On a également défini un filtre particulière circulaire dédié à la résolution récursive de l'équation non-linéaire apparaissant dans le développement de l'estimateur de rupture. Ces outils ont été appliqués au traitement des sauts de cycle dans les mesures de phase d'un signal GNSS en boucle ouverte.

On a vu dans ce chapitre qu'en plus d'éviter la corrélation temporelle entre deux estimations qui apparaît lorsque des filtres sont utilisés à l'intérieur de boucles fermées, le traitement de la phase en boucle ouverte pour les signaux GNSS permet de diminuer le nombre d'occurrences de sauts de cycle dans les mesures de délais de phase. En effet, le nombre de sauts de cycles survenant lors du traitement d'un signal est fonction de la qualité de l'estimation de ce signal par le filtre de boucle.

Dans une boucle ouverte, les observations de phase ne sont pas obtenues en cycles comme dans une PLL classique, mais en radians, comme des données angulaires définies dans l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ . Dans ce contexte, il a été nécessaire de développer des outils de traitement de données circulaires pour prendre en compte les transitions entre  $-\pi$  et  $\pi$ , qui sont vues comme des ruptures par les outils de traitement de signaux définis dans le domaine linéaire. Pour l'estimation de données circulaires suivant des équations d'état ou de mesure non-linéaires, nous avons défini un filtre particulière à l'aide de la distribution statistique de von Mises. En effet, le filtre présenté au chapitre précédent n'est utilisable que pour la résolution récursive d'un système d'équations linéaires. Ainsi, c'est le filtre particulière proposé dans ce chapitre qui est utilisé pour inverser la fonction non-linéaire apparaissant dans la construction du détecteur-estimateur de ruptures circulaire GLR.

Les outils ainsi développés aux chapitres 3 et 4 permettent un traitement complet de l'observable de phase des signaux GNSS en boucle ouverte et l'estimation de leur fréquence. Un opérateur de fusion utilisable lorsque deux signaux sont émis à la même fréquence par un même satellite (comme sur la fréquence GPS-L2), deux filtres pour des systèmes d'évolution linéaire et non-linéaire ainsi qu'un détecteur-estimateur de sauts de cycle ont été construits suivant la statistique de von Mises. Ces différents éléments permettent un positionnement relatif robuste avec une précision d'ordre centimétrique à chaque milliseconde. Le chapitre suivant proposera une nouvelle technique pour obtenir un positionnement absolu précis à partir de ce positionnement relatif, ainsi que l'application de ces techniques de positionnement pour l'altimétrie.

# Chapitre 5

## Application à l'altimétrie au sol et résolution de l'ambiguïté de phase

### 5.1 Introduction

La première suggestion de réflectomètres utilisant les signaux GNSS en tant que signaux d'opportunités avait pour application le calcul de la hauteur des océans [72]. Aujourd'hui, de nombreuses autres applications d'observations de la Terre à l'aide de signaux GNSS ont été étudiées, telles que la caractérisation de l'état de mer [40], la salinité des eaux [94] ou encore l'humidité des sols [75]. Ces différentes applications sont particulièrement utiles pour l'observation des zones côtières ou des zones humides. Dans ce cadre local, les réflectomètres au sol ou embarqués dans des avions à basse altitude sont favorisés en comparaison à des réflectomètres embarqués dans des satellites, du fait de zones de scintillement plus petites et de précisions plus importantes dans l'estimation des paramètres de la surface de réflexion. L'utilisation de signaux GNSS pour la réflectométrie offre de multiples avantages : précision, stabilité, faible sensibilité aux perturbations atmosphériques et à la météo, couverture globale et permanente de la planète par plusieurs constellations d'émetteurs déjà présents en orbite. De plus, la bande L à laquelle les signaux GNSS sont émis est reconnue comme la plus sensible pour percevoir la salinité des eaux et l'humidité des sols [80]. Toutes ces remarques montrent l'intérêt de développer un système radar GNSS multi-statique, au sol, pour s'adapter aux différentes contraintes d'observation des zones côtières et des zones humides.

Ce chapitre est dédié à l'application des outils développés lors de la thèse pour la réalisation d'un altimètre au sol utilisant les signaux GNSS. On souhaite ici mesurer des hauteurs d'eau. La hauteur d'une surface d'eau sur laquelle un signal GNSS se réfléchit peut être déterminée à

partir de la modélisation de la géométrie du système et du calcul de la différence de trajets entre les signaux parvenant directement et après réflexion au récepteur. Plusieurs techniques ont été proposées pour estimer cette différence, comme indiqué section 1.3.2. Une précision centimétrique a été avancée pour plusieurs de ces techniques, basées sur l'utilisation de la phase des signaux observés [113, 73, 33, 96], sur une interférométrie directe des signaux [88] ou sur la modélisation des oscillations du rapport signal sur bruit du signal intégrant les signaux direct et réfléchi [62]. Cependant, comme indiqué dans cette section, ces différentes méthodes souffrent de plusieurs inconvénients, en particulier la nécessité de mesures obtenues sur de longues durées (de l'ordre de plusieurs heures).

Dans ce chapitre, nous utiliserons la technique basée sur l'estimation des pseudo-distances par la phase. Les originalités de ce travail sont l'utilisation des architectures et filtres présentés dans les deux chapitres précédents ainsi qu'une nouvelle technique de résolution de l'ambiguïté de phase. Cette technique repose sur l'estimation des délais de code à partir de l'observable de phase. Une estimation précise du délai de code du premier échantillon de signal reçu est rendue possible par une technique d'interpolation du code C/A à l'aide des données de phase. On souhaite ainsi surmonter les limites de précision liées à l'échantillonnage du code CDMA et à sa bande passante limitée. Par suite, les dates d'émission et de réception du signal peuvent être obtenues avec une grande précision dans le message de navigation. Contrairement aux techniques habituelles de résolution d'ambiguïté qui utilisent des approches multi-différentielles [58, 29], cette approche est réalisable avec un récepteur GPS unique, monofréquence, avec un seul signal satellitaire et sur une période de signal courte ; une seule époque (6 secondes) de signal étant nécessaire.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Après cette introduction, le système altimétrique, et plus particulièrement sa géométrie et le principe d'altimétrie par la phase, seront présentés. La troisième section est dédiée à la méthode originale de résolution de l'ambiguïté de phase. Dans la quatrième partie de ce chapitre, l'architecture du récepteur logiciel est présentée. Des mesures de hauteur d'eau réalisées par notre altimètre sur un bassin artificiel sont présentées dans la cinquième section pour l'évaluation des techniques proposées. Une conclusion clôt ce dernier chapitre.

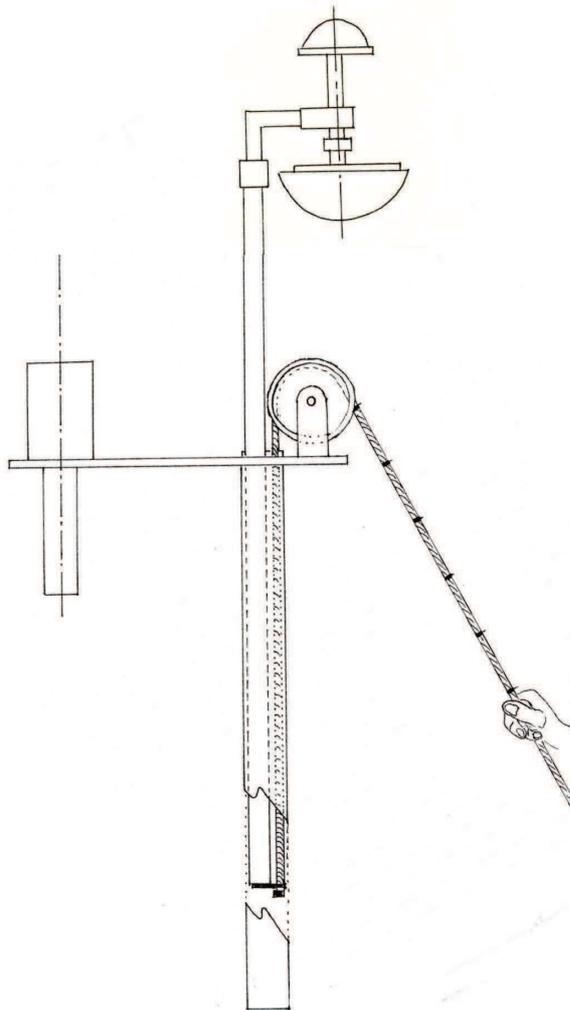


FIGURE 5.1 – Vue schématique des antennes et du système additionnel pour des variations précises de hauteur d’antenne

## 5.2 Système altimétrique utilisé

### 5.2.1 Altimètre mobile au sol

L’altimètre au sol a été développé pour permettre l’observation de larges zones humides. Dans le but de pouvoir étudier successivement plusieurs de ces zones et d’effectuer plusieurs mesures avec un même système altimétrique, l’altimètre est embarqué sur une voiture instrumentée. Les antennes réceptrices sont placées sur un mât télescopique pouvant monter de 2 à 10 mètres au dessus du sol. Cela permet en particulier de choisir la distance à laquelle se trouvera le point de réflexion spéculaire par rapport à la base du mât. Cette distance est également fonction de l’angle d’élévation du satellite observé. La montée du mât s’effectue à l’aide d’un compres-

seur pneumatique. Un système additionnel a été ajouté au mât, comme schématisé figure 5.1. Ce système permet de faire varier la hauteur de l'antenne d'une valeur précise, inférieure à 50 centimètres, par la traction d'une corde graduée. L'évaluation du système de réflectométrie se basera sur la mesure de cette variation de hauteur. Sur la figure 5.2, le mât est déployé à 2 mètres de haut tandis que le système additionnel précis, situé à droite du mât, n'est pas déployé. La figure 5.3 montre ce système additionnel ainsi que le couple d'antennes réceptrices pour les signaux direct et réfléchi. Ces antennes sont respectivement orientées en polarisation droite (RHCP) et gauche (LHCP). Elles sont liées par câble à des numériseurs cadencés par un même oscillateur et se trouvant à l'intérieur du véhicule. Les signaux digitaux obtenus en sortie des numériseurs sont traités par le récepteur logiciel qui sera présenté section 5.4.



FIGURE 5.2 – Système altimétrique embarqué sur la voiture instrumentée



FIGURE 5.3 – Antennes réceptrices au sommet du mât

### 5.2.2 Géométrie du système

Dans ce contexte, la géométrie approchée du système radar bi-statique correspond à celle présentée à la section 1.3.1 du premier chapitre. On s'attardera ici cependant sur la prise en compte de la différence de position des antennes réceptrices. Le système d'antennes réceptrices est construit de façon à ce que cette différence ne soit que verticale, comme indiqué figure 5.4. On supposera que le mât est également vertical. Les distances entre les objets au sol étant très faibles par rapport à la distance du satellite  $E$  au sol, on peut considérer que les angles d'arrivée du signal direct à l'antenne réceptrice  $R_d$  et du signal réfléchi à l'antenne réceptrice  $R_r$  sont les mêmes. Contrairement à l'impression que peut donner la figure, la distance  $\Delta H$  entre les antennes est nettement inférieure à la hauteur  $H$  de l'antenne réceptrice, de l'ordre de 25 centimètres pour notre système expérimental. Les modifications de l'équation 1.14 impliquées par la prise en compte de cet écart entre les antennes sont comme suit :

$$\sin \theta_e = \frac{H + h}{R_r S} \quad (5.1)$$

$$\cos 2\theta_e = \frac{R_r S - \Delta d + \Delta H \sin \theta_e}{R_r S} \quad (5.2)$$

$$\Delta d = R_r S (1 - \cos 2\theta_e) + \Delta H \sin \theta_e \quad (5.3)$$

$$= \frac{H + h}{\sin \theta_e} (1 - \cos 2\theta_e) + \Delta H \sin \theta_e \quad (5.4)$$

$$= 2 \left( H + \frac{\Delta H}{2} + h \right) \sin \theta_e \quad (5.5)$$

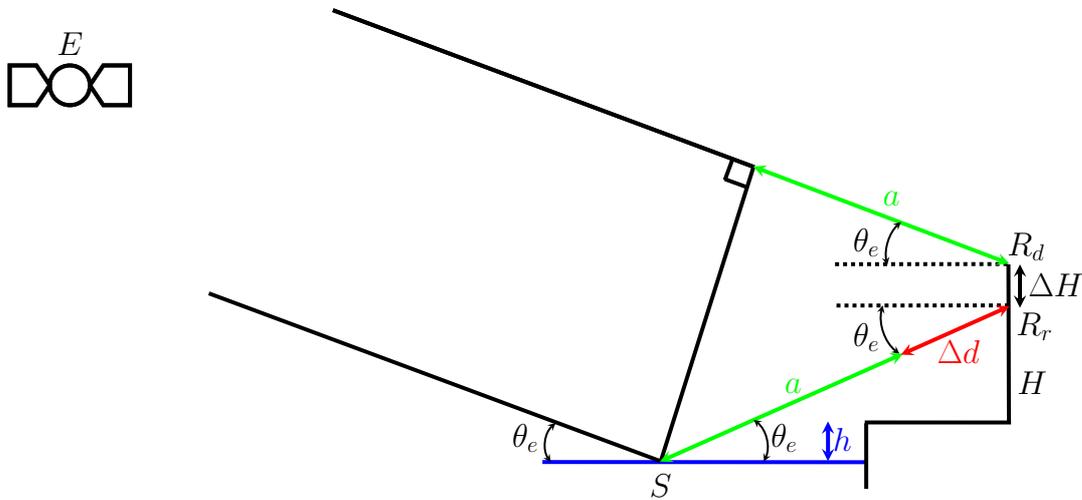


FIGURE 5.4 – Géométrie de l'altimètre GNSS-R au sol

Les positions du satellite et de l'antenne réceptrice RHCP, et par suite l'angle d'élévation  $\theta_e$ , sont obtenus par positionnement GPS classique, et  $\Delta H$  est connu. Le calcul de la hauteur d'eau  $h$  est ainsi directement obtenu par l'obtention de la différence de trajet  $\Delta d$ , et donné par la formule :

$$h = \frac{\Delta d}{2 \sin \theta_e} - H - \frac{\Delta H}{2} \quad (5.6)$$

### 5.2.3 Estimation de la différence de trajet par la phase

Rappelons d'abord que les distances obtenues par l'étude des signaux GNSS sont sujettes à de nombreuses erreurs telles que celles provoquées par l'imprécision de l'horloge récepteur, par la ionosphère et par la troposphère [56]. C'est pour cette raison que les distances obtenues sont appelées pseudo-distances. Cependant, dans les applications de réflectométrie au sol, ces erreurs peuvent être supposées communes aux signaux direct et réfléchi. En effet, la réception des signaux est synchronisée sur une même horloge récepteur, et les trajets parcourus par les signaux direct et réfléchi dans l'atmosphère sont très proches lorsque le récepteur est au sol. En conclusion, la différence de pseudo-distances calculée correspond bien à la différence de distances réelles  $\Delta d$ .

On utilise l'équation 4.46 liant la phase d'un signal à la pseudo-distance parcourue par ce

signal :

$$\Delta\rho_k = -\left(f_{l,k-1}T_c + \frac{\Delta\theta_{r,k-1}}{2\pi} - W_{f_{r,k-1}}T_c - \frac{W_{\theta_{r,k-1}}}{2\pi}\right)\frac{C}{f_{OL}} \quad (5.7)$$

$k$  représente l'indice de l'itération (c'est-à-dire le nombre de périodes d'intégration cohérente passées),  $\Delta\rho$  la variation de pseudo-distance entre deux itérations,  $f_l$  la fréquence de la porteuse répliquée,  $T_c$  la période d'un code (1 ms pour le signal GPS-L1),  $\Delta\theta_r$  la variation de phase entre deux itérations, définie entre  $-\pi$  et  $\pi$ ,  $C$  la vitesse de la lumière et  $f_{OL}$  la fréquence par laquelle le signal reçu est descendu en fréquence avant numérisation.  $W_{f_r}$  et  $W_{\theta_r}$  sont les bruits d'oscillateur local respectivement sur la fréquence et sur la phase.

Comme indiqué au paragraphe 5.2.1, les bruits d'oscillateur sont identiques pour les signaux direct et réfléchi. De ce fait, la différence dans le temps et l'espace entre les distances estimées sur les signaux direct et réfléchi (espace) et entre deux itérations (temps) est :

$$\widehat{\nabla}d_k = \widehat{\Delta\rho}_k^r - \widehat{\Delta\rho}_k^d \quad (5.8)$$

$$= \left( (f_{l,k-1}^d - f_{l,k-1}^r)T_c + \frac{\widehat{\Delta\theta}_{r,k-1}^d - \widehat{\Delta\theta}_{r,k-1}^r}{2\pi} \right) \frac{C}{f_{OL}} \quad (5.9)$$

où les exposants  $d$  et  $r$  représentent respectivement les paramètres des signaux direct et réfléchi. De plus, nous utiliserons (comme dans la plupart des travaux publiés sur le sujet) la fréquence de démodulation du signal direct comme fréquence de démodulation du signal réfléchi :  $f_l^d = f_l^r$ . On obtient dans cette condition :

$$\widehat{\nabla}d_k = \frac{\widehat{\nabla}\theta_{r,k-1}}{2\pi} \frac{C}{f_{OL}} \quad (5.10)$$

où  $\widehat{\nabla}\theta_r$  est la différence spatiale et temporelle estimée entre les signaux direct et réfléchi et entre deux itérations successives.

Cette formule est utilisée pour calculer les variations de  $\Delta d$  au cours du temps. En termes de distance, l'intervalle de définition de la phase représente 19.03 centimètres lorsque  $f_{OL}$  est la fréquence GPS-L1. Cette formule n'est donc pas suffisante pour l'estimation de la hauteur absolue d'eau : seules des variations relatives de hauteur peuvent être obtenues et il est nécessaire de déterminer une première valeur absolue de hauteur par un autre procédé, appelé résolution d'ambiguïté de phase. En effet, connaissant une première estimée absolue  $\Delta d_0$  de la différence de trajets entre les signaux, les valeurs de différence de trajets peuvent être estimées avec une

précision centimétrique par la formule :

$$\widehat{\Delta d}_k = \widehat{\Delta d}_0 + \sum_{i=1}^k \widehat{\nabla d}_i \quad (5.11)$$

## 5.3 Résolution de l'ambiguïté de phase

### 5.3.1 Position du problème

Lorsque la position est calculée en utilisant l'observable de phase, l'ambiguïté sur la pseudo-distance est résolue en recherchant l'ambiguïté de phase. Cette ambiguïté correspond au nombre entier de périodes de phase présentes dans le signal reçu au début du processus de poursuite [29]. En effet, la définition de la phase dans un intervalle de longueur  $2\pi$  ne permet de connaître sa valeur que modulo  $2\pi$ . De nombreuses méthodes ont été proposées pour la résolution de l'ambiguïté de phase [58], et ce sujet reste l'un des plus actifs dans la recherche sur les systèmes GNSS, en particulier pour les applications PPP (Precise Point Positioning) [117] et RTK (Real Time Kinematic) [112, 41]. Ces méthodes sont utilisées dans des conditions de forte dynamique pour obtenir un positionnement précis. On distingue deux approches principales : l'utilisation de données de code lissées par la porteuse ("carrier-smoothed code data") [48] et la recherche de l'ambiguïté par la méthode des moindres carrés avec solution entière [111]. L'amélioration de telles méthodes porte principalement sur l'utilisation conjointes de signaux émis à différentes fréquences porteuses (par exemple L1 et L2) [34] et/ou de plusieurs récepteurs [22]. Les sauts de cycle pouvant apparaître dans les données de phase, les multitrajets et les interférences atmosphériques doivent être rigoureusement prises en compte dans ces approches de filtrage récursif. Cependant, notre altimètre étant statique, il peut être positionné et réalisé de manière à éviter au maximum les multitrajets (liés à la configuration spatiale de l'environnement) et les sauts de cycle (principalement liés au bruit et à la dynamique satellite-récepteur). Comme il a été dit précédemment, les interférences atmosphériques sont supposées communes aux signaux direct et réfléchi et n'affecteront pas la résolution d'ambiguïté dans le cadre de l'altimétrie au sol.

Le positionnement GPS repose sur la datation de l'émission du signal reçu, la différence entre la date de réception et la date d'émission étant proportionnelle à la pseudo-distance. Sur L1, cette datation est rendue possible par la présence dans le message de navigation du mot "Time Of Week" (TOW), qui indique la date précise d'émission du mot de télémétrie (TLM) précédent du message. Ce mot, défini par les bits 10001011 dans le message de navigation, apparaît à chaque "époque" du signal, à savoir toutes les six secondes. La datation de l'émission du signal est réalisée avec une grande précision grâce à l'horloge atomique du satellite émet-

teur. Le problème est donc de connaître le plus précisément possible la position du TLM dans le message de navigation pour que sa date de réception soit connue avec précision dans l'heure locale du récepteur.

Chaque bit du message dure 20 périodes de code et est donc synchronisé avec le code. Ainsi, l'obtention d'une bonne précision sur les délais de code impliquera une précision identique sur la datation du message de navigation. Cependant, la technique la plus précise de lecture des informations du signal est l'utilisation de l'observable de phase, du fait de la continuité de la phase et de la limitation de précision liée à la bande passante du code CDMA (cf section 1.4.3).

### 5.3.2 Approche proposée

À partir des équations permettant de lier les délais de code et de phase aux pseudo-distances satellite-récepteur, on propose d'estimer les délais de code à l'aide des délais de phase :

$$\widehat{\Delta\rho} = C\widehat{\Delta\tau} \quad (5.12)$$

$$\widehat{\Delta\rho} = - \left( f_l T_c + \frac{\widehat{\Delta\theta_r}}{2\pi} \right) \frac{C}{f_{OL}} \quad (5.13)$$

$$\Rightarrow \widehat{\Delta\tau}^\theta = - \frac{f_l T_c + \frac{\widehat{\Delta\theta_r}}{2\pi}}{f_{OL}} \quad (5.14)$$

avec  $\widehat{\Delta\tau}^\theta$  les variations de délai de code estimées à l'aide des estimées de variations de phase.

Comme dans les chapitres précédents, les délais de code et de phase sont d'abord estimés durant l'acquisition et l'étape de poursuite a ensuite pour but d'estimer leurs variations. Ici, nous réalisons de plus plusieurs acquisitions successives sur un nombre fini  $N_{acq}$  d'itérations : les  $N_{acq}$  premiers délais de code, notés  $\tau_{1,\dots,N_{acq}}^{acq}$  sont estimés au cours du temps en calculant l'autocorrélation des codes reçus et répliqués. Ceci est effectué en vue d'obtenir des estimées robustes de délais de code en :

- réalisant une intégration cohérente sur plusieurs périodes de code ;
- retirant le message de navigation du signal reçu de façon à rendre cette intégration efficace ;
- obtenant des mesures de maximum de corrélation qui serviront d'indices de confiance pour les délais de code estimés.

À partir d'un délai de code  $\hat{\tau}_k^{acq}$  ainsi estimé à la  $k^{\text{ième}}$  milliseconde (ou période de code), il est ainsi possible d'obtenir des estimées du délai de code à l'origine  $\hat{\tau}_0^{\theta,k}$  en soustrayant les variations estimées par la phase obtenues par l'équation 5.14 :

$$\hat{\tau}_i^{\theta,k} = \hat{\tau}_k^{acq} - \sum_{j=i}^{k-1} \widehat{\Delta\tau}_j^{\theta} \quad (5.15)$$

On montre, figure 5.5, 500 délais de code  $\hat{\tau}_{1,\dots,500}^{acq}$  estimés à partir d'acquisitions successives réalisées sur un signal GPS-L1 réel. On reporte également trois exemples d'estimées de délais de codes  $\hat{\tau}^{\theta,300}$ ,  $\hat{\tau}^{\theta,320}$  et  $\hat{\tau}^{\theta,340}$  obtenues au cours du temps à partir de  $\hat{\tau}_{300}^{acq}$ ,  $\hat{\tau}_{320}^{acq}$  et  $\hat{\tau}_{340}^{acq}$  et des estimées de phase obtenues pendant la poursuite du signal. Suivant la position de  $\hat{\tau}_k^{acq}$  sur une partie stationnaire, on obtient différentes estimées de délai de code à l'origine  $\hat{\tau}_0^{\theta,k}$ .

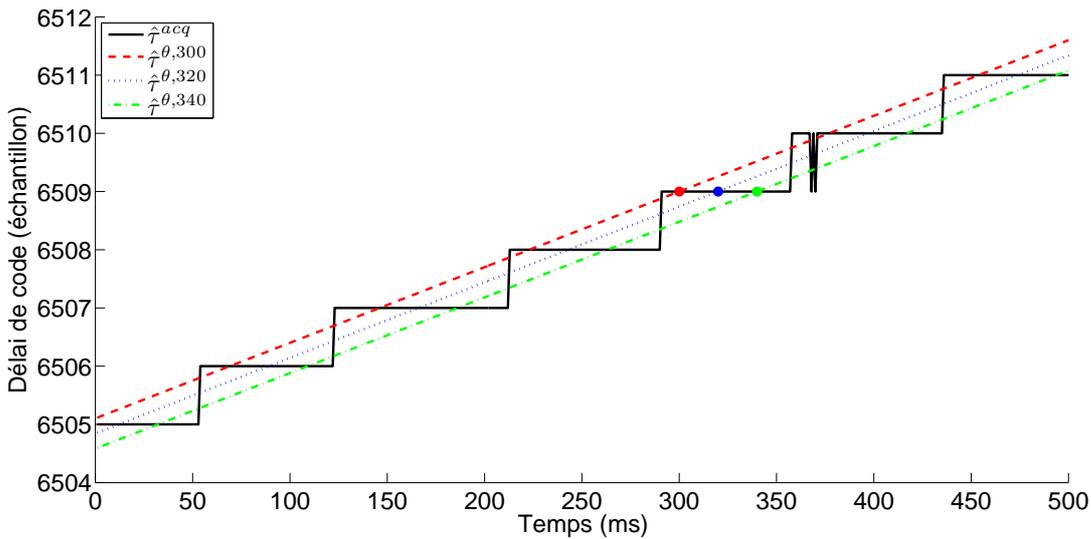


FIGURE 5.5 – Délais de code estimés à l'aide de l'observable de phase

Pour le même signal, la distribution de  $\hat{\tau}_0^{\theta,k}$  pour  $k \in [0, N_{acq}]$  est montré figure 5.6, avec  $N_{acq} = 5000$  acquisitions successives. On peut montrer que cette distribution s'approche de la somme de deux distributions uniformes. L'échantillonnage, étant ponctuel, indique la partie entière du délai de code réellement contenu dans le signal. Il est donc nécessaire d'ajouter un demi-échantillon à la moyenne de cette distribution pour obtenir une estimée flottante  $\hat{\tau}_0$  du premier délai de code reçu. Pour diminuer l'influence de possibles mesures aberrantes et obtenir ainsi une précision supérieure, cette moyenne est pondérée, par la valeur du maximum

de corrélation et à chaque instant  $k$ , comme indiqué dans la formule suivante :

$$\hat{\tau}_0 = \sum_{k=1}^{N_{acq}} \frac{\max_k^\Lambda \hat{\tau}_0^{\theta,k}}{\sum_{k=1}^{N_{acq}} \max_k^\Lambda} + \frac{1}{2} \quad (5.16)$$

avec  $\max_k^\Lambda$  le maximum de corrélation (la hauteur du pic de corrélation) correspondant au délai  $\hat{\tau}_k^{acq}$  estimé à l'itération  $k$ .

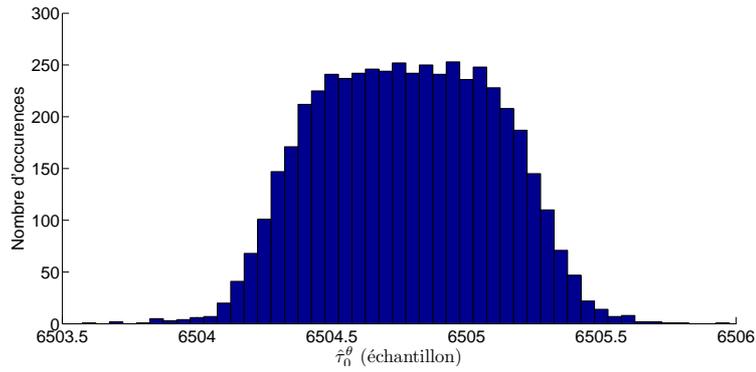


FIGURE 5.6 – Distribution des délais de code flottants estimés à l'origine

Finalement, la première pseudo-distance estimée  $\hat{\rho}_0$  est obtenue par la formule :

$$\hat{\rho}_0 = \left( t_0^r - \underbrace{\left( t_{TLM}^e - \widehat{\text{pos}}_{TLM} T_c - \frac{\hat{\tau}_0}{f_e} \right)}_{t_0^e} \right) C \quad (5.17)$$

où  $t_0^r$  (resp.  $t_0^e$ ) est la date de réception (resp. d'émission) du premier échantillon de signal reçu et  $t_{TLM}^e$  est la date d'émission du TLM indiquée dans le TOW correspondant.  $\widehat{\text{pos}}_{TLM}$  est le nombre de périodes de codes entières passées entre le premier échantillon reçu et le début du TLM observé, autrement dit la position estimée du TLM dans le signal reçu en millisecondes. Pour l'application d'altimétrie, on a :

$$\widehat{\Delta d}_0 = \hat{\rho}_0^r - \hat{\rho}_0^d \quad (5.18)$$

Une première version, élémentaire, de cette méthode d'interpolation du code pour la résolution d'ambiguïté, également utilisée dans le cadre d'un altimètre au sol, a été présentée lors de la conférence GNSS+R 2012 [109].

## 5.4 Architecture du récepteur

### 5.4.1 Calibration

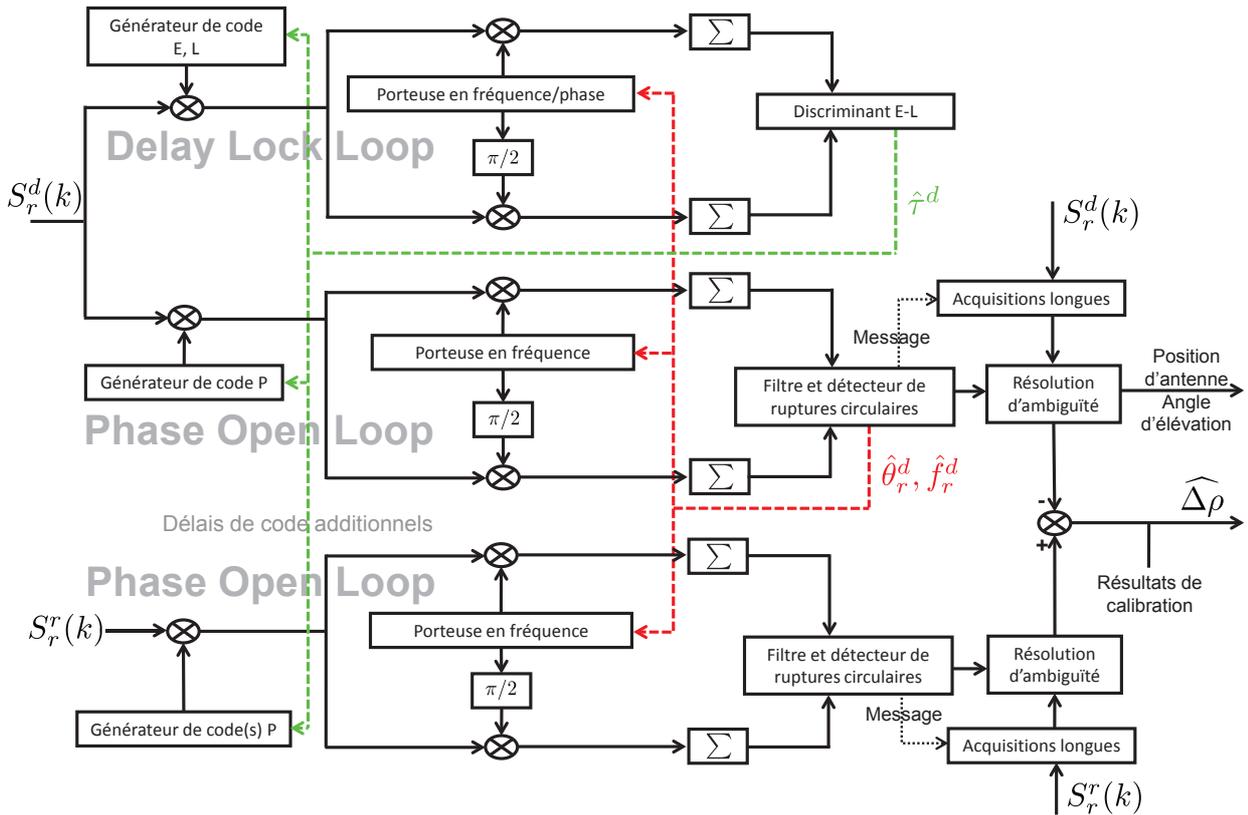


FIGURE 5.7 – Architecture du récepteur logiciel

Comme indiqué dans [24], plusieurs perturbations locales peuvent affecter le système altimétrique, impliquant des délais différents sur les signaux direct et réfléchi. Par exemple, une différence de longueur entre les câbles liant les antennes réceptrices aux numériseurs provoque une différence additionnelle dans les pseudo-distances estimées. Pour réduire ces effets matériels, nous calibrons l'altimètre en estimant les pseudo-distances obtenues par les structures directe et réfléchi du récepteur liées à l'antenne RHCP seule. Les différences de pseudo-distances obtenues pour chaque satellite visible entre les deux structures de réception sont moyennées et la moyenne obtenue est utilisée comme erreur de référence qui doit ensuite être ôtée des mesures altimétriques.

## 5.4.2 Traitement du signal

L'architecture de traitement du signal est présentée figure 5.7. Elle est composée de deux boucles parallèles pour la poursuite du signal direct ( $S^d$ ), permettant la poursuite de la phase en boucle ouverte à la manière du chapitre 4, ainsi qu'une boucle ouverte asservie pour la poursuite du signal réfléchi ( $S^r$ ). Dans les structures GNSS-R classiques, la poursuite du signal direct est effectuée en boucle fermée et la poursuite du signal réfléchi en boucle ouverte [7]. Ici, poursuivre également la phase du signal direct en boucle ouverte permet d'éviter les effets de corrélation temporelle induits par le filtrage en boucle fermée.

Les boucles utilisées pour estimer les phases des signaux direct et réfléchi sont asservies à la boucle maître composée d'une DLL, utilisée pour la poursuite du code du signal direct. La fréquence et les variations de délai de code utilisées pour générer le signal répliqué dans chacune de ces boucles asservies sont les mêmes. Le délai absolu de code au démarrage de la poursuite est estimé indépendamment sur chaque signal par la technique proposée dans ce chapitre. Les lettres E, P et L dénotent respectivement les versions Early, Prompt et Late du code répliqué. Les paramètres sont estimés à chaque milliseconde, période d'un code C/A.

Dans les boucles asservies, la même architecture de poursuite de la phase est utilisée, à savoir une boucle ouverte aidée du filtre de boucle présenté au chapitre 3 et du détecteur de rupture présenté au chapitre 4. Les estimées de phase obtenues sont utilisées pour procéder au calcul de différence de trajet présenté section 5.2.3. Le principe présenté pour la résolution de l'ambiguïté de phase est effectué en parallèle de ces deux poursuites.

## 5.5 Expérimentations

### 5.5.1 Caractéristiques de la carte d'acquisition

Les deux antennes sont liées à deux voies d'une même carte d'acquisition "SiFEn-R - One by one", produite par l'entreprise Silicom. Cette carte dispose en réalité de 3 canaux entrants synchronisés à la nanoseconde. Le même oscillateur interne est employé pour convertir les signaux analogues entrants en signaux numériques à une fréquence d'échantillonnage  $f_e$  pouvant atteindre 200 MHz et une quantification  $q$  allant jusqu'à 8 bits, avec la contrainte  $f_e \times q < 300$  Mbit/s. Pendant les expérimentations, la fréquence d'échantillonnage était de 25 MHz et le signal était quantifié sur 1 bit. Le récepteur est utilisable sur la bande fréquentielle GNSS complète (de 1 164 MHz à 2 500 MHz). La fréquence de descente avant numérisation  $f_{OL}$  peut être définie par l'utilisateur. Pour ces expérimentations, le signal était descendu en fréquence autour

de 0 Hz, c'est-à-dire avec  $f_{OL} = f_1$ , la fréquence du signal GPS L1.

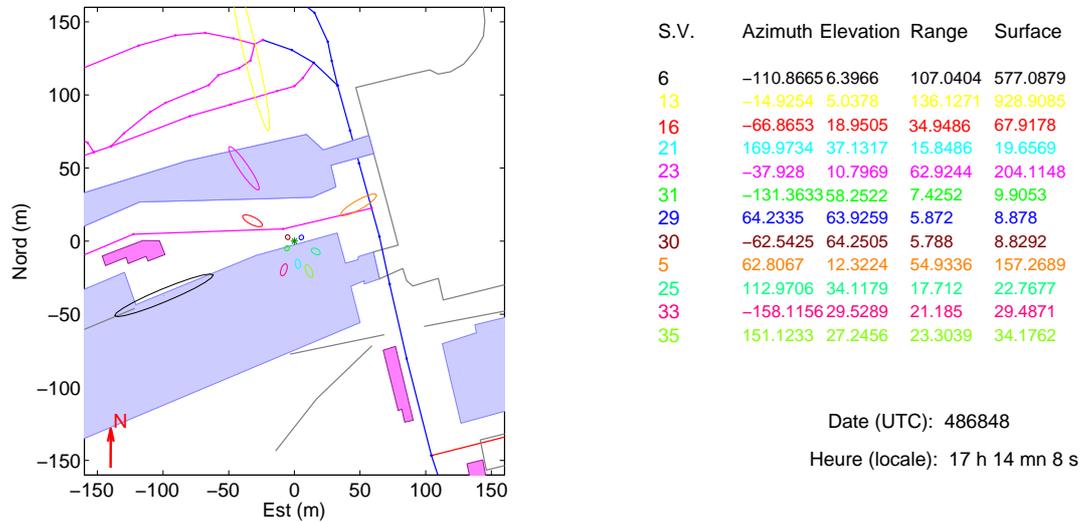


FIGURE 5.8 – Empreintes des satellites visibles obtenues par le logiciel de planification

## 5.5.2 Planification des expérimentations

Une application a été développée pendant la thèse dans le but de planifier les expérimentations. Cette application utilise des éphémérides satellites, ainsi qu'un système d'informations géographiques sous forme de carte au format XML, disponibles sur internet [21, 82]. La carte, éditable en ligne, contient plusieurs données sur chacun de ses éléments, tels que routes, bâtiments, plans d'eau, etc. Il est par exemple possible de spécifier la hauteur des bâtiments, ce qui permet de prédire de possibles multitrajets ou occultations des signaux. L'application de planification est réalisée pour que l'utilisateur, après avoir défini le lieu et la date de l'expérimentation, obtienne la location approchée des empreintes des satellites visibles. Plusieurs paramètres d'intérêt sont également calculés. Les prédictions obtenues par ce logiciel pour l'expérimentation présentée dans cette section sont représentées figure 5.8. Pour un satellite visible donné, les paramètres calculés sont :

- le numéro PRN identifiant le satellite (S.V.) ;
- la direction cardinale dans laquelle le point de réflexion spéculaire est vu par l'antenne (azimuth) ;
- l'angle d'élévation du satellite, en degrés (elevation) ;
- la distance entre le point de réflexion spéculaire et la base du mât (range) ;

- la surface de l’empreinte (surface).

Les deux derniers paramètres de cette liste, ainsi que leur représentation sur la carte présentée sur la figure de gauche, nécessitent une connaissance approchée de la hauteur des surfaces de réflexion et ne peuvent donc être considérés que comme des ordres de grandeurs. Le but de cette application est de pouvoir déterminer le meilleur horaire ou la meilleure position d’antenne pour obtenir un maximum d’empreintes sur la surface de réflexion étudiée. Une large palette dans les angles d’élévation des satellites observés en réflexion peut également être un objectif de la planification de l’expérimentation.

### 5.5.3 Résultats

Les expérimentations réalisées dans ce chapitre portent uniquement sur signaux réels. Elles sont réalisées dans le cadre d’une mesure de réflectométrie GNSS réalisée avec un récepteur statique, sur signaux GPS L1, avec pour but final l’estimation de la hauteur d’une surface d’eau réfléchissante. Le seul indicateur de précision utilisable dans ce cadre est la différence métrique observée entre deux mesures successives. Les résultats présentés se sépareront en trois parties. Dans la première d’entre elles, on estimera la précision de la technique de résolution d’ambiguïté préconisée seule, en réalisant cette technique à plusieurs reprises sur un même signal, à différentes positions dans ce signal. Les seconds résultats présentés porteront sur le positionnement absolu de l’antenne RHCP utilisée pour capter les signaux directs à partir de trois enregistrements de signaux différents, réalisés successivement en moins d’une minute pour limiter des différences d’influence des erreurs orbitales, ionosphériques, troposphériques ou de multitrajets. La dernière partie portera sur les résultats de mesures altimétriques obtenus par notre système. La validation de ces résultats portera d’une part sur la différence de hauteur calculée par l’utilisation des signaux en provenance de plusieurs satellites différents et d’autre part sur la réalisation successive de plusieurs mesures altimétriques en déplaçant verticalement le couple d’antennes d’une hauteur connue. Le niveau de la hauteur d’eau réfléchissante reste en effet constant.

#### Résolution d’ambiguïté

On considère ici un unique signal satellitaire GPS L1 arrivant directement à une antenne RHCP placée sur le toit du laboratoire. La dynamique du système satellite-récepteur considéré est entièrement définie par le satellite utilisé. On utilise dans cette expérimentation le satellite de PRN 32, sur lequel la fréquence Doppler observée est de -921 Hz, les variations de Doppler de 0.48 Hz/s et le rapport  $C/N_0$  de 50 dB Hz. On réalise la poursuite du signal et la technique

de résolution d'ambiguïté proposée section 5.3 en se positionnant successivement après 0, 200, 400 et 600 millisecondes dans le signal reçu. On obtient ainsi quatre résultats de résolution d'ambiguïté indépendants dans leur méthode d'obtention, mais qui sont sensés être identiques. L'architecture de poursuite utilisée est celle présentée au chapitre 4. Le nombre d'acquisitions successives utilisé pour chacune des résolutions est de  $N_{acq} = 5000$ . Le temps d'intégration cohérent après retrait du message de navigation est de  $T_I = 10$  ms.

On montre figure 5.9 les résultats obtenus par la technique de résolution d'ambiguïté proposée en termes de délais de code. Sur cette figure, on présente en trait plein les délais de code estimés par acquisitions longues en se plaçant après 0, 200, 400 et 600 millisecondes de signal. On représente par des étoiles les estimées précises de premier délai de code  $\hat{\tau}_0$  obtenues en utilisant l'équation 5.16. Les pointillés représentent les variations de code estimées par la phase à partir de ces estimées précises de premier délai de code, comme défini équation 5.15.

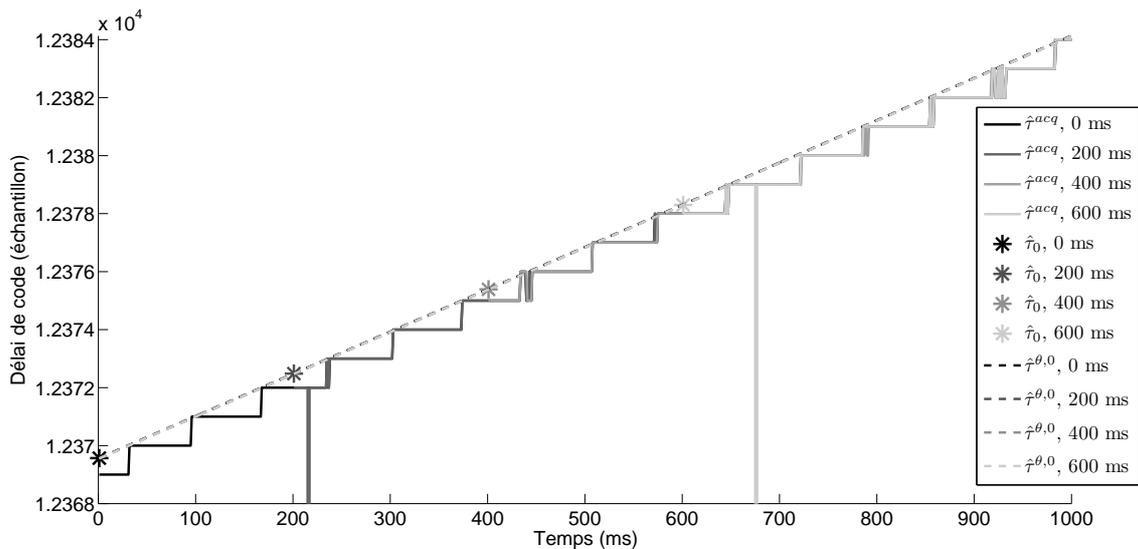


FIGURE 5.9 – Résultats obtenus par la technique de résolution d'ambiguïté proposée en se plaçant à différentes positions d'un même signal

On observe que les délais de code mesurés en commençant le traitement à différentes positions dans le signal reçu sont souvent identiques, mais que quelques différences apparaissent. En particulier, deux mesures aberrantes de délai de code sont observées pour des traitements commencés après 200 et 400 millisecondes alors qu'elles ne sont pas observées lorsque le traitement est commencé après 0 millisecondes. Le moyennage pondéré effectué dans l'équation 5.16 permet toutefois de limiter l'influence de ces mesures aberrantes et les délais de code  $\hat{\tau}_0$

obtenus par chaque traitement, ramenés à l'origine, sont confondus à l'échelle de la figure. On présente donc figure 5.10 un agrandissement de cette figure au voisinage de l'origine, et l'on présente tableau 5.1 les délais  $\hat{\tau}_0$  estimés lors de chaque traitement par la moyenne pondérée figurant équation 5.16 ainsi que la variance pondérée correspondante.

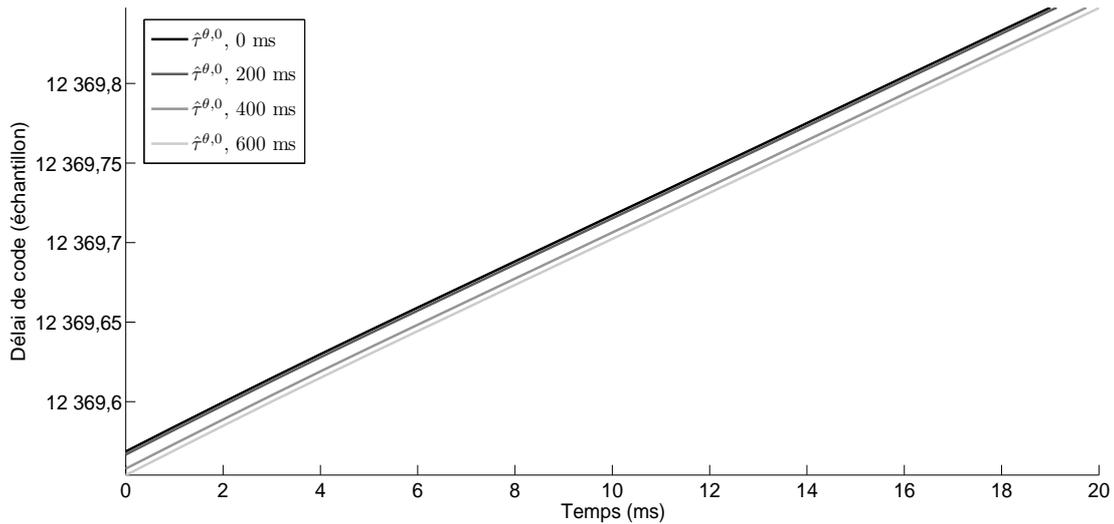


FIGURE 5.10 – Résultats obtenus par la technique de résolution d'ambiguïté proposée en se plaçant à différentes positions d'un même signal (agrandissement)

Position de départ (ms)	0	200	400	600
Moyenne	12369.5687	12369.5668	12369.5579	12369.5539
Variance	8.82e-2	8.88e-2	8.92e-2	8.88e-2

TABLE 5.1 – Moyenne et variance des  $\hat{\tau}_0^{\theta,k}$  obtenus

Les délais de code flottants estimés par la technique proposée en se plaçant à différentes positions du signal ne diffèrent au maximum que de 0.015 échantillons. On peut en conclure que la technique proposée fournit bien une estimée précise du premier délai de code, avec une précision près de 100 fois supérieure à celle obtenue par l'étape d'acquisition, qui ne considère en effet que des délais entiers de code. Les variances calculées sont faibles, ce qui indique que la durée d'intégration de 10 millisecondes utilisée pour les acquisitions longues est suffisante.

On montre figure 5.11 les résultats de résolution d'ambiguïté obtenus en termes de pseudo-distance estimée, relativement à la pseudo-distance calculée en se plaçant au début du signal.

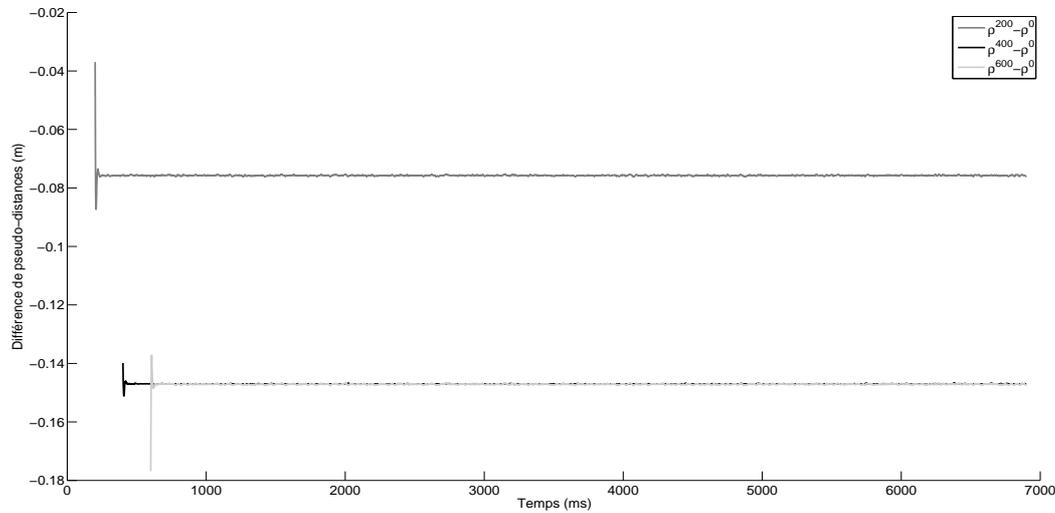


FIGURE 5.11 – Résultats obtenus par la technique de résolution d'ambiguïté en termes de pseudo-distances

Dans cette figure, le paramètre  $\rho^t$  dénote la pseudo-distance obtenue en se commençant le traitement après  $t = \{0, 200, 400, 600\}$  millisecondes de signal. Les différences de pseudo-distances observées, après une courte étape de stabilisation du filtre sur la phase, apparaissent très stables. On observe des différences entre les pseudo-distances estimées de l'ordre d'une dizaine de centimètres. Les pseudo-distances obtenues pour des traitements effectués après 400 et 600 millisecondes de signal sont très voisines. On reporte tableau 5.2 la moyenne et la variance des différences de pseudo-distances obtenues et présentées sur la figure 5.11.

Position de départ (ms)	200	400	600
Moyenne (m)	7.57e-2	1.47e-1	1.47e-1
Ecart-type (m)	6.71e-4	1.62e-4	5.39e-4

TABLE 5.2 – Moyenne et variance des différences de pseudo-distances estimées par plusieurs résolutions d'ambiguïté

On observe dans ce tableau que les moyennes des différences de pseudo-distances estimées sont au maximum de 14.7 centimètres. La différence entre les pseudo-distances obtenues pour des traitements commencés après 400 et 600 millisecondes de signal sont identiques au millimètres près. Les écarts-type sont quant à eux de l'ordre de  $10^{-4}$  mètres, ce qui est le reflet d'une

estimation précise de la phase. En effet, cela indique que les phases obtenues pour chacun des traitements indépendants effectués sont très voisines les unes des autres. En conclusion, on peut s'attendre à ce que la technique de résolution d'ambiguïté proposée représente la plus grande part d'erreur dans les applications de positionnement et de calcul de hauteur par la phase. Cette technique permet d'obtenir, pour cette expérimentation, une précision de l'ordre d'une dizaine de centimètres.

### **Positionnement des antennes**

Pour cette expérimentation, on utilise à nouveau l'antenne située sur le toit du laboratoire. On considère trois enregistrements successifs de signaux réalisées, chaque enregistrement durant 7 secondes et les trois enregistrements étant réalisés en moins d'une minute. L'antenne n'est pas déplacée pendant l'expérimentation et les différentes sources d'erreur dues à l'environnement et pouvant détériorer le positionnement sont supposées constantes sur cette courte durée. La constellation satellitaire considérée est également très peu modifiée durant l'expérimentation. Ainsi, on peut supposer que les résultats de positionnement obtenus suite aux traitements des signaux ainsi reçus doivent être identiques. On réalise les traitements de positionnement proposés dans cette thèse à partir de l'architecture de poursuite du chapitre 4 et de la méthode de résolution d'ambiguïté proposée dans ce chapitre. Les positions obtenues sont présentées sur la partie gauche de la figure 5.12. Sur la partie droite de cette figure, on présente les positions obtenues en déterminant les pseudo-distances à l'origine à l'aide du code du signal uniquement.

Comme dans les expérimentations du chapitre précédent, on observe pour chaque acquisition considérée des nuages de points très concentrés, ce qui indique que le positionnement relatif obtenu par la poursuite de phase est précis. Chacun des nuages de points peut être contenu dans un carré de 3 centimètres de côté. D'autre part, les distances entre les nuages de points obtenus indiquent les erreurs liées à la résolution d'ambiguïté sur chaque signal satellitaire reçu. On observe des distances inférieures au mètre sur l'Est et légèrement supérieures au mètre sur le Nord. Ces erreurs de positionnement absolu sont directement liées à des erreurs dans la technique de résolution d'ambiguïté proposée. Lorsque le positionnement absolu est estimé sans résolution de l'ambiguïté, les erreurs observées sont d'un ordre 10 fois supérieur, allant jusqu'à 18 mètres sur l'Est. On montre ainsi que la technique de positionnement absolu proposée, quoique n'atteignant pas la précision centimétrique espérée, permet de diminuer fortement les erreurs provoquées par l'utilisation du code pour obtenir les pseudo-distances à l'origine, et ce sans utilisation de techniques de double différence.

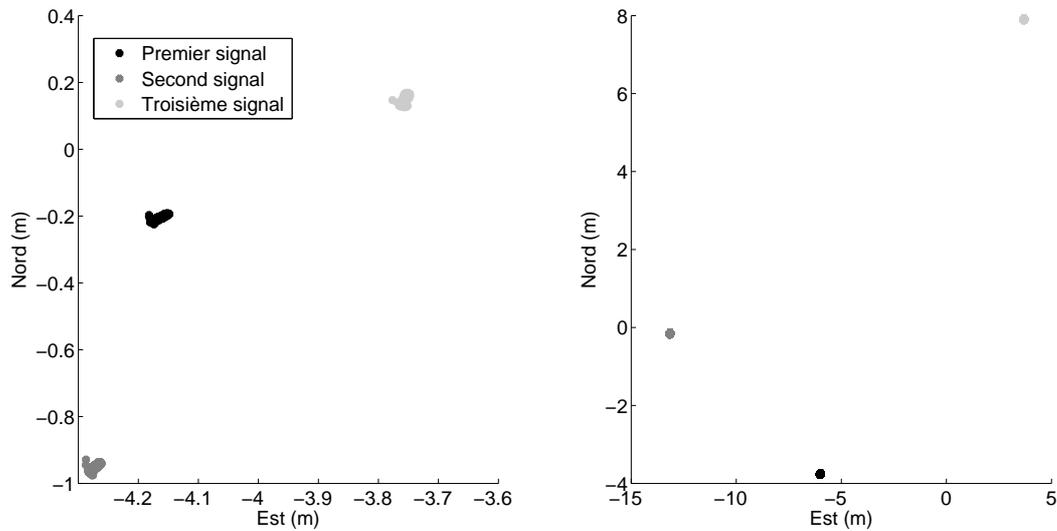


FIGURE 5.12 – Résultats obtenus par la technique de résolution d'ambiguïté proposée en termes de position

### Altimétrie

L'expérimentation pour l'évaluation des performances d'altimétrie a été réalisée sur un bassin artificiel, à la position et dans les conditions indiquées figure 5.8. Au moment de l'expérimentation, le niveau d'eau du bassin était maintenu constant par une écluse. Durant cette expérimentation, deux signaux satellitaires réfléchis sur la surface du bassin, correspondants aux PRN 21 et 25, sont utilisés pour obtenir des mesures altimétriques. Le mât est déployé au maximum de sa hauteur, à savoir 10 mètres. On utilise l'architecture de traitement présentée figure 5.7 pour obtenir les mesures de hauteur d'eau. Pour permettre d'évaluer les performances du système altimétrique proposé, on cherche à obtenir un nombre supérieur aux deux calculs de hauteur absolue permis par ces satellites. Pour cela, on utilise le système additionnel permettant d'effectuer avec précision des variations de hauteur de mât. Après avoir effectué la calibration du système (voir section 5.4), on réalise ainsi successivement trois acquisitions de signaux en surélevant le couple d'antennes réceptrices de 20 puis 40 centimètres. On obtient ainsi six mesures altimétriques par l'utilisation des signaux réfléchis des deux satellites considérés.

Les rapports  $C/N_0$  obtenus sur les signaux direct et réfléchi du satellite de PRN 21 sont respectivement de 46.8 et 41.7 dB Hz. Pour le satellite de PRN 25, ces rapports sont de 45.2 et 39.9 dB Hz. On présente figure 5.13 les résultats obtenus en termes de hauteur d'eau par rapport à l'antenne RHCP. En termes de hauteur absolue, les résultats attendus sont d'une part une

même hauteur obtenue par les signaux des satellites 21 et 25 et d'autre part des changements de hauteur estimée de 20 et 40 centimètres entre les trois acquisitions effectuées. On attend des variations de hauteur d'eau au cours du temps assez faibles. Ces variations doivent en effet décrire les légères vagues observées sur le bassin durant l'expérimentation ainsi que le mouvement perturbateur provoqué par le vent sur le mât et par suite sur les antennes.

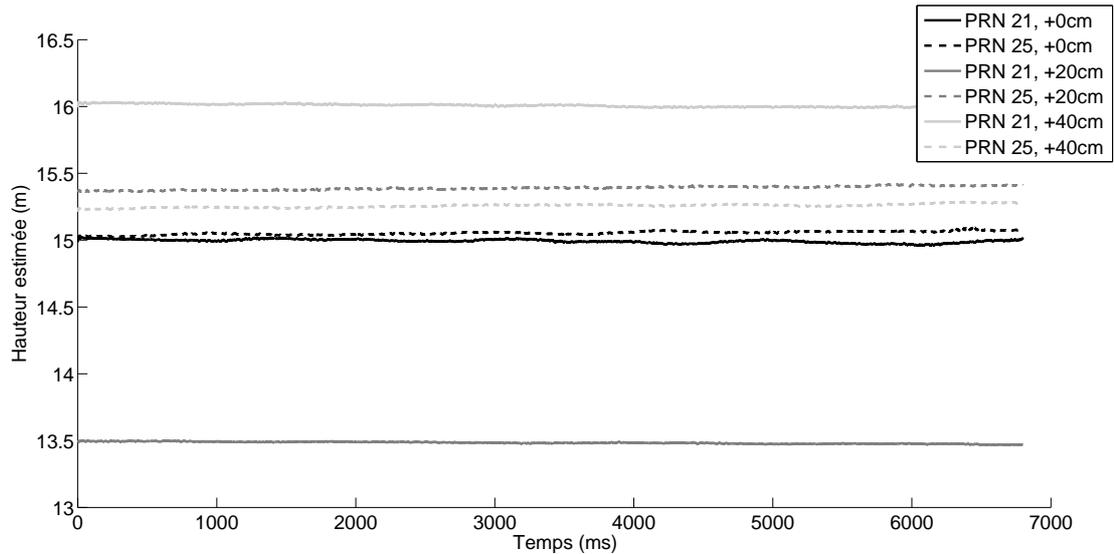


FIGURE 5.13 – Résultats altimétriques obtenus

On observe que les résultats obtenus en utilisant le premier signal reçu, le système additionnel n'étant pas déployé, semblent se correspondre pour les deux signaux satellitaires utilisés avec une précision de l'ordre d'une dizaine de centimètres. En effet, les hauteurs estimées à l'aide de ces deux signaux sont situées entre 14.9 mètres et 15.1 mètres. Cependant, il apparaît pour les résultats obtenus après avoir déplacé l'antenne verticalement que la cohérence entre les hauteurs estimées par les deux signaux satellitaires est perdue : après un déplacement de 20 centimètres, la différence d'estimation est de 180 centimètres et de 60 centimètres après un déplacement de 40 centimètres. Il apparaît par ailleurs que l'utilisation du signal du satellite de PRN 21 semble provoquer des erreurs d'estimation importantes. Les erreurs liées à l'utilisation du signal du satellite de PRN 25 sont inférieures, mais ne traduisent pas correctement les variations apportées à la hauteur des antennes de réception. En effet, après un déplacement de 20 centimètres, la variation estimée est de l'ordre de 40 centimètres. Après un déplacement de 40 centimètres, la variation estimée est de l'ordre de 20 centimètres. Ainsi, les erreurs effectuées lors des traitements de ce signal satellitaire sont de l'ordre de 20 centimètres.

Par ailleurs, on observe une stabilité importante des hauteurs estimées au cours du temps, et ce pour tous les traitements effectués. Ceci indique à la fois que la phase a été correctement estimée au cours du temps, mais également un effet négligeable du vent sur le système altimétrique. En effet, une mauvaise estimation de la phase au cours du temps ou des effets importants dus au vent sur le système altimétrique auraient eu pour conséquence des variations dans les hauteurs estimées.

Ici encore, les résultats nous amènent à conclure que les erreurs observées ne sont pas les conséquences d'imprécisions dans l'estimation récursive de la phase, mais plutôt d'erreurs liées à l'utilisation de la technique de résolution d'ambiguïté proposée, à l'occurrence de multitrajets ou à une mauvaise technique de calibration de l'altimètre.

## **5.6 Conclusion**

Dans ce dernier chapitre, nous avons décrit l'altimètre au sol développé durant cette thèse. Cet altimètre utilise la réflexion des signaux GNSS sur la surface, dont on calcule la hauteur par rapport à l'antenne GNSS. Le système altimétrique a été développé pour pouvoir être utilisé dans la surveillance des zones humides et des zones côtières. Ce système au sol est ainsi aisément déplaçable et configurable pour observer des empreintes satellitaires se trouvant à différentes distances des antennes réceptrices.

Plusieurs des éléments matériels utilisés sont dédiés à cette application : l'antenne LHCP permettant de capter les signaux réfléchis, le mât permettant de capter des réflexions se produisant à plusieurs mètres de distance ou encore la carte d'acquisition multi-voies, dotée d'un oscillateur unique et dont les voies sont synchronisées avec une grande précision. La partie logiciel de l'altimètre, consacrée au traitement des signaux direct et réfléchis, est basée sur l'ensemble des outils présentés dans les deux chapitres précédents, ainsi que sur une technique originale de résolution de l'ambiguïté de phase.

En effet, ce chapitre a été l'occasion de présenter une nouvelle méthode visant à obtenir une précision de positionnement absolu proche de la précision de positionnement relatif atteinte au chapitre précédent. Cette méthode consiste en une interpolation des observables de code par l'observable de phase. Le but est d'éviter la limitation de résolution à laquelle un signal peut être observé, liée à la fréquence d'échantillonnage de ce signal. En effet, il est possible d'exprimer les variations de phase observées, qui sont continues, comme des observations de délais de code, ceux-ci étant caractérisés dans leur estimation classique par une évolution constante par

morceaux.

Les expérimentations réalisées montrent des résultats concluants en termes de variations de pseudo-distances et par suite de variations de positions et de hauteurs estimées. L'estimation de ces variations est liée à l'estimation de la phase telle que présentée dans les deux chapitres précédents. La précision atteinte est ici encore d'ordre centimétrique. Concernant l'estimation absolue de la pseudo-distance par la technique de résolution d'ambiguïté proposée, la précision est inférieure, les erreurs observées étant supérieures à dix centimètres. Dans le cadre des applications au positionnement et à l'altimétrie, les erreurs atteignent le mètre, mais restent toutefois très inférieures aux erreurs liées à l'utilisation du code seul pour l'estimation absolue de la pseudo-distance. La perspective principale de ce chapitre se situe dans la détermination de la source des erreurs observées.



# Conclusion générale

Le travail présenté dans cette thèse porte sur le traitement de données circulaires appliqué à l'estimation de la phase des signaux GNSS. Plusieurs estimateurs y sont définis dans un cadre Bayésien. Ces estimateurs sont définis dans le but de fusionner plusieurs mesures d'un même angle, d'estimer récursivement les valeurs prises par une série temporelle d'angles et de détecter et corriger des sauts de moyenne dans une telle série. Pour la construction de ces estimateurs, les variables aléatoires angulaires considérées sont supposées suivre une distribution de von Mises. L'application à l'estimation de la phase des signaux GNSS permet de déterminer le positionnement d'un récepteur au sol avec une précision visée d'ordre centimétrique, à chaque milliseconde. Elle permet également, dans le cadre de la réflectométrie GNSS, d'estimer avec le même objectif de précision la hauteur à laquelle se situe une surface réfléchissante, ici de l'eau.

Le mémoire est constitué de cinq chapitres. Le premier d'entre eux a pour but de présenter le principe de réflectométrie GNSS (GNSS-R) ainsi que les traitements numériques des signaux réalisés par les récepteurs traditionnels GNSS et GNSS-R. La réflectométrie est une science relativement jeune, ayant fait son apparition en 1991. D'abord consacrée à l'estimation de la hauteur des océans à partir de l'observations des signaux GNSS réfléchis sur ceux-ci, elle vit son cadre applicatif développé à un grand nombre de domaines de l'observation de la Terre. Il a été ainsi montré que la technique GNSS-R permet de déterminer plus ou moins approximativement l'état de la surface de mer et par suite la vitesse et la direction des vents sur l'eau. Elle a également été utilisée pour déterminer la salinité des océans, l'évolution de la banquise, l'humidité des sols ou encore la hauteur des différentes couches constituant un amas de neige. La précision atteinte dépend en particulier des traitements effectués pour extraire les paramètres des signaux observés du bruit. Ce bruit est lié à la propagation d'un signal dans l'espace et l'atmosphère, à sa réflexion sur la Terre, à l'antenne réceptrice, à la chaîne d'acquisition ou encore à sa numérisation. Les paramètres à déterminer pour modéliser avec précision un signal GNSS reçu sont son délai de code, sa phase et sa fréquence. Généralement, pour les applications de positionnement, ces paramètres sont estimés dans des boucles fermées de poursuite du

signal GNSS. Dans le cadre de la réflectométrie GNSS, les paramètres des signaux réfléchis sont estimés dans des boucles ouvertes pour augmenter la robustesse face au bruit et exploiter les informations fournies par le signal direct.

Le second chapitre est consacré à la modélisation de données angulaires par les distributions statistiques circulaires de von Mises et Wrapped Normal. La distribution de von Mises est en effet celle qui décrit au mieux la phase d'un signal GNSS. Cependant, sa définition ne permet pas de déterminer entièrement la distribution suivie par la somme de deux variables aléatoires de von Mises. La statistique d'une telle somme est cependant utilisée pour la construction de filtres et d'opérateurs de fusion en traitement du signal. C'est pourquoi la distribution Wrapped Normal, qui permet de déterminer cette statistique par approximations, est également présentée. L'approximation est définie par une fonction non-linéaire et non-inversible que l'on étudie en détail dans ce chapitre. On propose dans ce chapitre deux méthodes d'approximation qui permettent d'améliorer la méthode classique d'inversion de cette fonction. Les paramètres des distributions circulaires ont leurs estimateurs propres, totalement différents de ceux du domaine linéaire, de part la périodicité de l'intervalle de définition des angles. Ces estimateurs sont également présentés dans ce chapitre, ainsi que des tests d'hypothèse sur leur détermination. Des estimateurs de précision correspondant à la moyenne ou à la variance du domaine linéaire sont également définis. La conclusion que l'on peut tirer de ce chapitre est que la statistique des données angulaires est foncièrement différente de celles des données définies sur la droite des réels, et que le comportement de telles données ne peut pas être perçu comme sur  $\mathbb{R}$ .

Dans le troisième chapitre, nous proposons une architecture originale de poursuite de la phase et de la fréquence, en boucle ouverte, pour la démodulation d'un signal GNSS. À l'aide de mesures de phase produites par ce type de boucle de poursuite, définies comme des angles entre  $-\pi$  et  $\pi$ , on cherche à retrouver la phase réelle du signal, c'est-à-dire celle qui serait observée à partir de mesures non bruitées. On développe pour cela deux estimateurs de données circulaires. Le premier d'entre eux est un opérateur de fusion, permettant de combiner deux ou plusieurs mesures d'un même angle pour diminuer la puissance du bruit. Le second d'entre eux est un estimateur récursif, qui a pour but de filtrer au cours du temps les valeurs prises par une série de mesures d'angles, à l'aide d'une modélisation *a priori* de son évolution. Là encore, le but est de diminuer l'effet du bruit de mesure sur l'angle estimé. Ces deux estimateurs sont définis dans un cadre Bayésien avec la distribution circulaire de von Mises. On observe qu'en raison du caractère particulier des angles, il est nécessaire de traiter en particulier les mesures aberrantes apparaissant pour de fortes réalisations de bruit. Les expérimentations effectuées sur des signaux GPS-L2C synthétiques et réels montrent d'une part que les outils classiques de

traitement des signaux linéaires ne sont pas adaptés au traitement des données circulaires, mais surtout que la poursuite de la phase en boucle ouverte, aidée du filtre et de l'opérateur de fusion proposés, est plus précise et robuste au bruit que la poursuite effectuée en boucle fermée aidée des outils équivalents du domaine linéaire.

Le quatrième chapitre de la thèse est dédié à la prise en compte des sauts de cycle pouvant apparaître dans le traitement des observables de phase. Il s'agit de ruptures abruptes n'ayant pas de correspondances réelles avec les mouvements satellite-récepteur qui définissent la phase. Dans notre application, les mesures de phase étant circulaires, on choisit de développer un détecteur-estimateur de ruptures suivant la statistique de von Mises. En effet, un détecteur-estimateur classique, défini sur le domaine linéaire, considérerait à tort les transitions de  $-\pi$  à  $\pi$  qui caractérisent les angles comme des ruptures. L'émergence d'une fonction non-linéaire à inverser pour le développement de l'estimateur de rupture nous amène à proposer un filtre vectoriel circulaire capable de réaliser récursivement cette inversion. Les quatre outils ainsi développés sont utilisés pour l'estimation de la phase en boucle ouverte, et par suite pour le positionnement précis d'un récepteur GNSS. Les expérimentations de ce chapitre portent sur le calcul de position à partir de signaux GPS L1 synthétiques et réels. On confirme dans ces expérimentations l'intérêt de poursuivre la phase en boucle ouverte. On montre que les outils proposés sont aptes à produire des mesures de position plus précises et plus robustes au bruit et à la dynamique satellite-récepteur que les techniques classiques.

Le cinquième chapitre est consacré à l'application des techniques développées au long de la thèse à la réflectométrie GNSS. Dans ce chapitre, on présente le système utilisé pour déterminer la hauteur d'un plan d'eau en utilisant la réflexion des signaux GNSS sur sa surface. On présente également une technique originale de résolution de l'ambiguïté de phase utilisable dans un cadre mono-récepteur et mono-fréquentiel. La détermination de l'ambiguïté de phase est reportée ici à l'estimation de la pseudo-distance à l'origine. Lorsque cette pseudo-distance est estimée à partir du délai de code obtenu à l'acquisition, son imprécision, supérieure au mètre, est liée à la fréquence d'échantillonnage du signal. La technique proposée consiste à reconstruire le délai de code à l'origine à l'aide des délais de code obtenus à chaque instant. Pour cela, on utilise les variations de pseudo-distance calculées avec la phase. Les délais à l'origine ainsi obtenus, et donc les pseudo-distances à l'origine, sont moyennés pour améliorer la précision. Les expérimentations, réalisées sur signaux réels, ont pour but de montrer d'une part la précision atteinte par la méthode de résolution d'ambiguïté et d'autre part la précision atteinte par le système altimétrique développé. Les résultats obtenus montrent que la technique de résolution d'ambiguïté proposée est efficace, mais que sa précision n'atteint pas celle du positionnement relatif obtenu

au chapitre quatre. Par ailleurs, les résultats obtenus en termes d'altimétrie montrent que la hauteur de la surface d'eau réfléchissante peut être estimée avec une précision d'ordre métrique par le système développé.

Les perspectives aux travaux présentés dans cette thèse portent sur les modèles utilisés pour développer les outils de traitement des signaux circulaires, sur leur application à d'autres domaines de recherche et sur leur implémentation au sein d'un système de réflectométrie plus complet pour l'observation des zones côtières.

Le filtre récursif circulaire présenté au chapitre trois peut être amélioré par la prise en compte de la corrélation entre les composantes du vecteur à estimer. Pour cela, il serait nécessaire d'étudier les indicateurs mathématiques existants pour mesurer la dépendance entre des données circulaires, ainsi qu'entre des données circulaires et linéaires. En effet, la distribution de von Mises, qui décrit au mieux la phase des signaux GNSS, n'intègre pas dans sa définition la corrélation entre variables aléatoires. Dans cette thèse, le filtre particulière circulaire proposé au chapitre quatre permet de s'affranchir de ces problèmes de corrélation, mais son coût de calcul reste important.

La technique de poursuite de la phase et de la fréquence en boucle ouverte, ainsi que les outils de traitement associés, de par leurs bons résultats dans le cadre d'un bruit important sur le signal ainsi que d'une dynamique satellite-récepteur élevée, peuvent être utilisés pour le traitement de signaux GNSS reçus en environnement couvert ou par un récepteur aéroporté. Par ailleurs, ces méthodes peuvent également être utilisées dans un grand nombre d'autres domaines de recherche, allant du traitement des données issues d'une centrale inertielle à celui des couleurs d'une image. La méthode de résolution d'ambiguïté proposée peut être utilisée dans le cadre classique de résolution des ambiguïtés entières en permettant de restreindre le domaine dans lequel l'ambiguïté entière de phase doit être recherchée.

Enfin, le système altimétrique peut être développé et amélioré pour permettre également l'étude de l'humidité des sols, de la rugosité de la mer ou de la salinité des eaux, en faisant ainsi un capteur complet pour l'observation des zones côtières. Son implémentation matérielle est également une perspective possible, impliquant entre autres le développement de filtres circulaires dans un composant programmable.

## Annexe A

# Définition de l'étape de correction du filtre sur des données linéaires

Les équations classiques du filtre de Kalman qui lient le vecteur d'état  $\hat{X}_k = [\hat{x}_k, \hat{x}_k]^T$  à l'état prédit  $\hat{X}_{k/k-1} = [\hat{x}_{k/k-1}, \hat{x}_{k/k-1}]^T$  et aux mesures  $Z_k = [z_k, \dot{z}_k]^T$  sont les estimateurs du Maximum A Posteriori définies dans [123] par les équations suivantes :

$$\hat{X}_k = \frac{P_k}{P_{k/k-1}} \hat{X}_{k/k-1} + \frac{P_k * H^T}{R} Z_k \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{1}{P_k} = \frac{1}{P_{k/k-1}} + \frac{H^T}{R} \quad (\text{A.2})$$

Dans le cas scalaire, l'expression A.1 est une somme pondérée (avec poids normalisés) entre la mesure et l'état prédit. Dans ces expressions,  $P_k, P_{k/k-1}$  définissent respectivement les matrices de covariance des états estimé et prédit.  $R$  est la matrice de covariance des erreurs de mesure et  $H$  la matrice d'observation.

On utilise comme matrices d'observation et de transition :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et comme matrices de bruits sur la mesure et sur l'état :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$$

A partir de ces formes matricielles, on obtient les relations suivantes pour l'équation de correction A.1 :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k/k-1} \\ \hat{z}_{k/k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-a) & b \\ c & (1-d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ \dot{z}_k \end{bmatrix}$$

Avec l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k/k-1} &= \hat{x}_{k-1} + \hat{x}_{k-1} \\ \hat{z}_{k/k-1} &= \hat{z}_{k-1} \end{aligned}$$

On dérive la somme pondérée suivante pour obtenir  $\hat{x}_k$  :

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= a \hat{x}_{k/k-1} + (1-a) z_k + b (\dot{z}_k - \hat{x}_{k/k-1}) \\ &= a \hat{x}_{k/k-1} + (1-a) z_k + b (\dot{z}_k - (\hat{x}_{k/k-1} - \hat{x}_{k-1})) \\ &= (a-b) \hat{x}_{k/k-1} + (1-a) z_k + b (\dot{z}_k + \hat{x}_{k-1}) \\ &= \beta_{11} \hat{x}_{k/k-1} + \beta_{12} z_k + \beta_{13} (\dot{z}_k + \hat{x}_{k-1}) \end{aligned} \tag{A.3}$$

avec

$$\beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13} = 1$$

Et pour  $\hat{z}_k$  :

$$\begin{aligned} \hat{z}_k &= d \hat{x}_{k/k-1} + (1-d) \dot{z}_k + c (z_k - \hat{x}_{k/k-1}) \\ &= d \hat{x}_{k/k-1} + (1-d) \dot{z}_k + c (z_k - (\hat{x}_{k/k-1} - \hat{x}_{k-1})) \\ &= (d-c) \hat{x}_{k/k-1} + (1-d) \dot{z}_k + c (z_k - \hat{x}_{k-1}) \\ &= \beta_{21} \hat{x}_{k/k-1} + \beta_{22} \dot{z}_k + \beta_{23} (z_k - \hat{x}_{k-1}) \end{aligned} \tag{A.4}$$

avec

$$\beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23} = 1$$

Les sommes pondérées A.3 et A.4 sont les estimateurs du Maximum A Posteriori des états sachant les états prédits et les mesures. Ces poids sont définis avec les variances et la covariance des états prédits et des mesures [54].

## Annexe B

# Définition de l'étape de correction du filtre sur des données circulaires

On définit ici  $f(\theta_k|\hat{\theta}_k, P_k)$ , la distribution *a posteriori* de l'état connaissant l'estimée. Cette distribution est définie par analogie avec le cas linéaire. Dans un filtre de Kalman alpha-bêta, l'angle est observé par la mesure, par l'état prédit et par la somme entre la variation angulaire mesurée (seconde composante du vecteur) et l'état prédit (c'est la formule A.3). En supposant les observations  $\phi_{f,k}$  et  $\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}$  indépendantes, la règle de Bayes implique que la distribution *a posteriori* de l'angle est :

$$f(\theta_k|\hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) = \frac{1}{\alpha_k} \mathcal{M}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) \mathcal{M}(\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}|\theta_k, \tilde{\kappa}_1) \mathcal{M}(\phi_{f,k}|\theta_k, \kappa_R) \quad (\text{B.1})$$

où  $\alpha_k = \mathcal{M}(\phi_{f,k}|\phi_{f,1:k-1})$  est une constante de normalisation et  $\tilde{\kappa}_1 = A^{-1}(A(P_{\theta_{k-1}})A(\kappa_{2,R}))$  est le paramètre de concentration associé à la somme  $\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}$  [106].

Le même raisonnement (par analogie avec la formule A.4) nous permet de définir la distribution *a posteriori*  $f(\dot{\theta}_k|\hat{\theta}_k, P_{\dot{\theta}_k})$ . La règle de Bayes implique que les variations angulaires ont pour distribution *a posteriori* :

$$f(\dot{\theta}_k|\hat{\theta}_k, P_{\dot{\theta}_k}) = \frac{1}{\beta_k} \mathcal{M}(\dot{\theta}_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\dot{\theta}_{k/k-1}}) \mathcal{M}(\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}|\dot{\theta}_k, \tilde{\kappa}) \mathcal{M}(\dot{\phi}_k|\dot{\theta}_k, \kappa_{2,R}) \quad (\text{B.2})$$

où  $\beta_k$  est également une constante de normalisation et où  $\tilde{\kappa}_2 = A^{-1}(A(\kappa_{1,R})A(P_{\theta_{k-1}}))$  est le paramètre de concentration associé à la différence  $\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}$ .

Alors :

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) \propto \exp\left(P_{\theta_{k/k-1}} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1})\right) \quad (\text{B.3})$$

$$* \exp\left(\tilde{\kappa}_2 \cos(\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1} - \theta_k)\right) \exp\left(\kappa_{f,R} \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)\right)$$

$$f(\dot{\theta}_k | \hat{\theta}_k, P_{\dot{\theta}_k}) \propto \exp\left(P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} \cos(\dot{\theta}_k - \hat{\theta}_{k/k-1})\right) \quad (\text{B.4})$$

$$* \exp\left(\tilde{\kappa}_2 \cos(\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1} - \dot{\theta}_k)\right) \exp\left(\kappa_{2,R} \cos(\dot{\phi}_k - \dot{\theta}_k)\right)$$

Finalement, l'estimateur du Maximum A Posteriori peut être dérivé comme dans 3.2 en dérivant le logarithme de  $f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k})$  et  $f(\dot{\theta}_k | \hat{\theta}_k, P_{\dot{\theta}_k})$ . On obtient alors :

$$\hat{\theta}_k = \arctan^*(S_{\theta_k}, C_{\theta_k}) \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{\dot{\theta}}_k = \arctan^*(S_{\dot{\theta}_k}, C_{\dot{\theta}_k}) \quad (\text{B.6})$$

où  $\arctan^*$  a été définie équation 2.22, et avec :

$$C_{\theta_k} = P_{\theta_{k/k-1}} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \tilde{\kappa}_1 \cos(\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}) + \kappa_{f,R} \cos \phi_{f,k} \quad (\text{B.7})$$

$$S_{\theta_k} = P_{\theta_{k/k-1}} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \tilde{\kappa}_1 \sin(\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}) + \kappa_{f,R} \sin \phi_{f,k} \quad (\text{B.8})$$

$$C_{\dot{\theta}_k} = P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \tilde{\kappa}_2 \cos(\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}) + \kappa_{2,R} \cos \dot{\phi}_k \quad (\text{B.9})$$

$$S_{\dot{\theta}_k} = P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \tilde{\kappa}_2 \sin(\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}) + \kappa_{2,R} \sin \dot{\phi}_k \quad (\text{B.10})$$

Ces estimées sont distribuées suivant :

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) \propto \exp\left(P_{\theta_k} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_k)\right)$$

$$f(\dot{\theta}_k | \hat{\dot{\theta}}_k, P_{\dot{\theta}_k}) \propto \exp\left(P_{\dot{\theta}_k} \cos(\dot{\theta}_k - \hat{\dot{\theta}}_k)\right)$$

avec :

$$P_{\theta_k} = \sqrt{C_{\theta_k}^2 + S_{\theta_k}^2} \quad (\text{B.11})$$

$$P_{\dot{\theta}_k} = \sqrt{C_{\dot{\theta}_k}^2 + S_{\dot{\theta}_k}^2} \quad (\text{B.12})$$

## Annexe C

### Définition de $\Psi_l$

Cette annexe vise à définir le paramètre  $\Psi_l$  utilisé dans le développement du détecteur de rupture (section 4.3). On suppose la présence d'une rupture à l'instant  $r$ . On suppose que l'on dispose de mesures non bruitées  $\tilde{\phi}_l$  dans la fenêtre de travail. D'après les équations 4.14, 4.16 et 4.17, on obtient :

$$C_l \sin(\hat{\theta}_{0,l}) = D_l \cos(\hat{\theta}_{0,l}) \quad (\text{C.1})$$

$$P_{0,l/l-1} \sin(\hat{\theta}_{0,l/l-1} - \hat{\theta}_{0,l}) = R \sin(\hat{\theta}_{0,l} - \tilde{\phi}_l) \quad (\text{C.2})$$

– **Pour  $l=r$ ,**  $\tilde{\phi}_r = \hat{\theta}_{0,r-1} + \nu + \Delta\theta$

$$-P_{0,r/r-1} \sin(\hat{\theta}_{0,r} - (\hat{\theta}_{0,r-1} + \Delta\theta)) = R \sin(\hat{\theta}_{0,r} - (\hat{\theta}_{0,r-1} + \nu + \Delta\theta)) \quad (\text{C.3})$$

alors :

$$\hat{\theta}_{0,r} = \arctan\left(\frac{R \sin(\nu)}{P_{0,r/r-1} + R \cos(\nu)}\right) + \hat{\theta}_{0,r-1} + \Delta\theta \quad (\text{C.4})$$

On note :

$$\hat{\theta}_{0,r} = \Psi_0 + \hat{\theta}_{0,r-1} + \Delta\theta \quad (\text{C.5})$$

– **Pour  $l=r+1$ ,**  $\tilde{\phi}_{r+1} = \hat{\theta}_{0,r} + \nu + \Delta\theta - \Psi_0$

$$-P_{0,r+1/r} \sin(\hat{\theta}_{0,r+1} - (\hat{\theta}_{0,r} + \Delta\theta)) = R \sin(\hat{\theta}_{0,r+1} - (\hat{\theta}_{0,r} + \nu + \Delta\theta - \Psi_0)) \quad (\text{C.6})$$

alors :

$$\hat{\theta}_{0,r+1} = \arctan\left(\frac{R \sin(\nu - \Psi_0)}{P_{0,r+1}/r + R \cos(\nu - \Psi_0)}\right) + \hat{\theta}_{0,r} + \Delta\theta \quad (\text{C.7})$$

$$\hat{\theta}_{0,r+1} = \Psi_1 + \hat{\theta}_{0,r} + \Delta\theta \quad (\text{C.8})$$

- **Pour  $l=r+m$ ,**  $\tilde{\phi}_{r+m} = \hat{\theta}_{0,r+m-1} + \nu + \Delta\theta - \sum_{i=0}^{m-1} \Psi_i$

On obtient finalement l'expression suivante :

$$\hat{\theta}_{0,r+m} = \arctan\left(\frac{R \sin(\nu - \sum_{i=0}^{m-1} \Psi_i)}{P_{0,r+m}/r+m-1 + R \cos(\nu - \sum_{i=0}^{m-1} \Psi_i)}\right) + \hat{\theta}_{0,r+m-1} + \Delta\theta \quad (\text{C.9})$$

$$\hat{\theta}_{0,r+m} = \Psi_m + \hat{\theta}_{0,r+m-1} + \Delta\theta \quad (\text{C.10})$$

# Liste des tableaux

2.1	Précisions moyennes obtenues pour l'inversion de $A$ .	54
2.2	Temps de calcul pour 15 000 inversions de $A$ , en secondes.	54
3.1	Dispersion circulaire pour le délai de phase fusionné (moyenne sur 200 réalisations).	94
3.2	Dispersion circulaire des délais de phase estimés, moyenne sur 200 réalisations (PLL/POL).	97
3.3	Erreur Quadratique Moyenne sur les délais de fréquence estimés par les filtres en (PLL/POL)	98
4.1	Dispersion circulaire du délai de phase estimé pour les filtres en (PLL/POL chap. 3/POL chap. 4)	119
4.2	Erreur Quadratique Moyenne sur les délais de fréquence estimés par les filtres en (PLL/POL chap. 3/POL chap. 4)	120
4.3	Seuils de détection utilisés	121
4.4	Probabilité de détection	122
4.5	Erreur Quadratique Moyenne sur l'instant estimé en millisecondes	123
4.6	Dispersion circulaire sur l'amplitude estimée de la rupture	123
4.7	Constellation satellitaire pour l'expérimentation statique	125
4.8	Erreur dans le cas statique, sur données réelles	126
4.9	Erreurs de trajectoire dans le cas dynamique	127
5.1	Moyenne et variance des $\hat{\tau}_0^{\theta,k}$ obtenus	145
5.2	Moyenne et variance des différences de pseudo-distances estimées par plusieurs résolutions d'ambiguïté	146



# Table des figures

1.1	Géométrie du système radar bistatique . . . . .	13
1.2	Géométrie locale du système radar bi-statique . . . . .	14
1.3	Lignes d'iso-distance et d'iso-Doppler au sol . . . . .	15
1.4	Coefficients de réflexion de Fresnel d'une onde GPS-L1 . . . . .	18
1.5	Puissance réfléchiée en polarisation LHCP suite à la réflexion d'une onde GPS-L1 sur du sable . . . . .	19
1.6	Géométrie d'un système d'altimétrie au sol . . . . .	25
1.7	Résultat de corrélation dans le cadre d'une interférométrie des signaux . . . . .	27
1.8	Codes GNSS direct et réfléchi . . . . .	28
1.9	Phases GNSS des signaux direct et réfléchi . . . . .	29
1.10	Registre générateur des codes $C/A$ . . . . .	32
1.11	Fonction d'autocorrélation d'un code $C/A$ . . . . .	32
1.12	Exemple de résultat d'acquisition sur signal réel . . . . .	35
1.13	Principe de l'acquisition fréquentielle . . . . .	36
1.14	Principe de la poursuite du code à l'aide du discriminant Early-minus-Late . . . . .	37
1.15	Architecture classique pour la poursuite du signal GPS . . . . .	39
1.16	Architecture de traitement en GNSS-R . . . . .	41
2.1	Problèmes liés à l'utilisation de la moyenne linéaire pour des angles . . . . .	46
2.2	Distribution de von Mises de moyenne $\mu = \pi$ . . . . .	48
2.3	Distribution Wrapped Normal de moyenne $\mu = \pi$ . . . . .	49
2.4	Développements de Taylor de la fonction $A$ aux ordres 2 et 3 . . . . .	51
2.5	Comparaison des méthodes d'obtention de $A^{-1}$ . . . . .	53
2.6	Performance de l'estimation de $\kappa$ pour 10 000 observations . . . . .	56
2.7	Comparaison des erreurs d'estimation de $\kappa$ pour les différentes méthodes d'inversion de $A$ . . . . .	57
2.8	Représentation complexe de $\hat{\mu}$ et $\hat{\kappa}$ dans le cas de deux observations . . . . .	58

3.1	Variances circulaires des mesures et de l'opérateur de fusion en fonction de $\kappa_R^{(2)}$	75
3.2	Représentation complexe de $\phi_f$ et $\kappa_f$ dans le cas de deux mesures . . . . .	75
3.3	Architecture pour l'estimation récursive d'un angle à partir de $N$ mesures . . .	84
3.4	Cas de mesures d'angles fortement bruitées : différence avec le domaine linéaire	85
3.5	Evolution de $\kappa_f$ en fonction de $\Delta\phi = \phi^{(1)} - \phi^{(2)}$ . . . . .	87
3.6	Correction des mesures d'angle aberrantes dans le cadre du filtre . . . . .	88
3.7	Corrélation temporelle produite par le filtrage dans une boucle fermée . . . . .	89
3.8	Architecture de poursuite proposée . . . . .	90
3.9	Différence entre les mesures de délai de phase en boucles ouverte et fermée . .	93
3.10	Comparaison des opérateurs de fusion de délais de phase mesurés sur les voies d'un signal GPS-L2C . . . . .	94
3.11	Filtrage des délais de phase par un filtre de Kalman . . . . .	96
3.12	Comparaison des méthodes de filtrage pour l'estimation des délais de phase de la voie de données d'un signal GPS-L2C . . . . .	96
3.13	Comparaison de la PLL et de la POL pour l'estimation de la phase d'un signal GPS-L2C réel . . . . .	99
4.1	Instant et amplitude de rupture dans les observations de phase . . . . .	105
4.2	Définition de $\rho_l(\nu)$ dans la fenêtre de travail . . . . .	108
4.3	Architecture de poursuite proposée . . . . .	112
4.4	Comparaison entre les estimées en boucles ouverte et fermée . . . . .	118
4.5	Comparaison entre les estimées en boucles ouverte et fermée (agrandissement)	118
4.6	Comportement des estimateurs de délais de phase lors de l'occurrence de sauts de cycle . . . . .	120
4.7	Détection et estimation de saut de cycle . . . . .	122
4.8	Système rotatif utilisé pour l'expérimentation dynamique . . . . .	124
4.9	Positions estimées dans le cas statique . . . . .	125
4.10	Positions estimées dans le cas dynamique . . . . .	127
5.1	Vue schématique des antennes et du système additionnel pour des variations précises de hauteur d'antenne . . . . .	131
5.2	Système altimétrique embarqué sur la voiture instrumentée . . . . .	132
5.3	Antennes réceptrices au sommet du mât . . . . .	133
5.4	Géométrie de l'altimètre GNSS-R au sol . . . . .	134
5.5	Délais de code estimés à l'aide de l'observable de phase . . . . .	138
5.6	Distribution des délais de code flottants estimés à l'origine . . . . .	139
5.7	Architecture du récepteur logiciel . . . . .	140

5.8	Empreintes des satellites visibles obtenues par le logiciel de planification . . . .	142
5.9	Résultats obtenus par la technique de résolution d'ambiguïté proposée en se plaçant à différentes positions d'un même signal . . . . .	144
5.10	Résultats obtenus par la technique de résolution d'ambiguïté proposée en se plaçant à différentes positions d'un même signal (agrandissement) . . . . .	145
5.11	Résultats obtenus par la technique de résolution d'ambiguïté en termes de pseudo-distances . . . . .	146
5.12	Résultats obtenus par la technique de résolution d'ambiguïté proposée en termes de position . . . . .	148
5.13	Résultats altimétriques obtenus . . . . .	149



# Bibliographie

- [1] P.O. Amblard, J.M. Brossier, and E. Moisan. Phase tracking : What do we gain from optimality ? Particle filtering versus phase-locked loops. *Signal Processing*, 83(1) :151–167, 2003.
- [2] S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(2) :174–188, 2002.
- [3] E. Astafyeva, P. Coisson, P. Lognonne, G. Occhipinti, and G. Rolland. Ionospheric effects generated by the 11/03/2011 Tohoku earthquake and tsunami. Analysis of innovative measuring techniques. In *2nd CNES CCT workshop on passive reflectometry using radiocom space signals (Space Reflecto)*, 2011.
- [4] M. Azmani. *Fusion non-linéaire appliquée aux voies pilote et données du signal GPS L2C*. PhD thesis, Université du Littoral Côte d’Opale, 2010.
- [5] M. Azmani, S. Reboul, J.B. Choquel, and M. Benjelloun. A recursive fusion filter for angular data. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2009.
- [6] M. Azmani, S. Reboul, J.B. Choquel, and M. Benjelloun. Etude et mise en oeuvre d’un estimateur récursif des paramètres statistiques d’une distribution circulaire de von Mises et d’une distribution Log-normale. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 44(4-5) :525–545, 2010.
- [7] W. Bai, Y. Sun, Y. Fu, G. Zhu, Q. Du, Y. Zhang, Y. Han, and C. Cheng. GNSS-R open-loop difference phase altimetry : Results from a bridge experiment. *Advances in Space Research*, 50 :1150–1157, 2011.
- [8] Y. Bar-Shalom and X.R. Li. *Estimation and Tracking : Principles, Techniques and Software*. Artech House Publishers, 1993.
- [9] E. Batschelet. *Circular statistics in biology*. New York, NY : Academic Press, 1981.
- [10] M. Belmonte Rivas. *Bistatic scattering of global positioning system signals from Arctic sea ice*. PhD thesis, University of Colorado, 2007.

- [11] S.B. Bisnath. Efficient, automated cycle-slip correction of dual-frequency kinematic GPS data. In *Proceedings of ION GPS*, pages 145–154, 2000.
- [12] G. Blewitt. An automatic editing algorithm for GPS data. *Geophysical Research Letters*, 17(3) :199–202, 1990.
- [13] C. Botteron, N. Dawes, J. Leclère, J. Skaloud, S.V. Weis, and P.A. Farine. Soil moisture & snow properties determination with GNSS in alpine environments : challenges, status, and perspectives. *Remote Sensing*, 5(7) :3516–3543, 2013.
- [14] A. Bourkane, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, B. Amami, and M. Benjelloun.  $C/N_0$  inversion for soil moisture estimation using land-reflected bi-static radar measurements. In *Workshop on Reflectometry Using GNSS and Other Signals of Opportunity (GNSS+R)*, 2012.
- [15] S. Boutoille. *Systèmes de fusion pour la segmentation hors-ligne de signaux GPS multi-porteuses*. PhD thesis, Université du Littoral Côte d’Opale, 2007.
- [16] F. Brahim, T. Chonavel, and O. Rabaste. An MCMC algorithm for BOC and AltBOC signaling acquisition in multipath environments. In *Position Location and Navigation Symposium (PLANS)*, pages 424–432, 2008.
- [17] J. Cai, E.W. Grafarend, and C. Hu. The statistical property of the GNSS carrier phase observations and its effects on the hypothesis testing of the related estimators. In *Proceedings of ION GNSS*, pages 25–28, 2007.
- [18] A. Camps, X. Bosch-Lluis, I. Ramos-Pérez, J.F. Marchán-Hernández, B. Izquierdo, and N. Rodríguez-Álvarez. New instrument concepts for ocean sensing : Analysis of the PAU-Radiometer. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(10) :3180–3192, 2007.
- [19] M. Caparrini, A. Egido, F. Soulat, O. Germain, E. Farres, S. Dunne, and G. Ruffini. Oceanpal® : Monitoring sea state with a GNSS-R coastal instrument. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pages 5080–5083, 2007.
- [20] E. Cardellach, F. Fabra, O. Nogués-Correig, S. Oliveras, S. Ribó, and A. Rius. GNSS-R ground-based and airborne campaigns for ocean, land, ice, and snow techniques : Application to the GOLD-RTR data sets. *Radio Science*, 46, 2011.
- [21] [www.celestrak.org](http://www.celestrak.org).
- [22] X.W. Chang and C.C. Paige. An algorithm for combined code and carrier phase based GPS positioning. *BIT Numerical Mathematics*, 43(5) :915–927, 2003.
- [23] A.J. Coster, M.M. Pratt, B.P. Burke, and P.N. Misra. Characterization of atmospheric propagation errors for DGPS. In *54th Meeting of the Institute of Navigation*, pages 327–336, 1998.

- 
- [24] J. Dampf, T. Pany, N. Falk, B. Riedl, and J. Winkel. Galileo altimetry, using AltBOC and RTK techniques. *Inside GNSS*, 8(1) :54–63, 2013.
- [25] S. Degerine. *Etude des structures statistiques associées aux lois de von Mises*. PhD thesis, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1975.
- [26] S. Degerine. Lois de von Mises et lois liées. *Annales de l’I.H.P, section B*, 1(15) :63–77, 1999.
- [27] N. Dobigeon and J.Y. Tourneret. Joint segmentation of wind speed and direction using a hierarchical model. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51 :5603–5621, 2006.
- [28] J.R. Dormand and P.J. Prince. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational Applied Mathematics*, 6 :19–26, 1980.
- [29] S. Durand. *Amélioration de la précision de la localisation différentielle temps réel par mesure de phase des systèmes GNSS : étude détaillée des équations d’observation et du problème de résolution des ambiguïtés entières*. PhD thesis, Observatoire de Paris, 2003.
- [30] A. Egido, G. Ruffini, M. Caparrini, C. Martin, E. Farres, and X. Banque. Soil moisture monitorization using GNSS reflected signals. In *Proceedings of 1st Colloquium on Scientific and Fundamental Aspects of the Galileo Programme*, 2007.
- [31] T. Elfouhaily, D.R. Thompson, and L. Linstrom. Delay-Doppler analysis of bistatically reflected signals from the ocean surface : theory and application. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 40(3) :560–573, 2002.
- [32] F. Fabra, E. Cardellach, O. Nogues-Correig, S. Oliveras, S. Ribo, A. Rius, G. Macelloni, S. Pettinato, and S. D’Addio. An empirical approach towards characterization of dry snowlayers using GNSS-R. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pages 4379–4382, 2011.
- [33] F. Fabra, E. Cardellach, A. Rius, S. Ribo, S. Oliveras, O. Nogues-Correig, M.B. Rivas, M. Semmling, and S. D’Addio. Phase altimetry with dual polarization GNSS-R over sea ice. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 50(6) :2112–2121, 2012.
- [34] U. Fernández-Plazaola, T.M. Martín-Guerrero, and J.T. Entrambasaguas. A new method for three-carrier GNSS ambiguity resolution. *Journal of Geodesy*, 82(4-5) :269–278, 2008.
- [35] E. Fischler and B.Z. Bobrovsky. Mean time to loose lock of phase tracking by particle filtering. *Signal Processing*, 86(11) :3481–3485, 2006.
- [36] N.I. Fisher. Problem with the current definition of the standard deviation of wind direction. *Journal of Climate and Applied Meteorology*, 26 :1522–1529, 1987.

- [37] N.I. Fisher. *Statistical analysis of circular data*. Cambridge University press, 1993.
- [38] J.P. Frangi, D.C. Richard, X. Chavanne, I. Bexi, F. Sagnard, and V. Guilbert. New in situ techniques for the estimation of the dielectric properties and moisture content of soils. *Comptes Rendus Geoscience*, 341(10) :831–845, 2009.
- [39] J.L. Garrison, S.J. Katzberg, and M.I. Hill. Effect of sea roughness on bistatically scattered range coded signals from the Global Positioning System. *Geophysical research letters*, 25(13) :2257–2260, 1998.
- [40] J.L. Garrison, A. Komjathy, V.U. Zavorotny, and S.J. Katzberg. Wind speed measurement using forward scattered GPS signals. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 40(1) :50–65, 2002.
- [41] J. Geng, F.N. Teferle, X. Meng, and A.H. Dodson. Towards PPP-RTK : Ambiguity resolution in real-time precise point positioning. *Advances in Space Research*, 47(10) :1664–1673, 2011.
- [42] S. Gleason. *Remote Sensing of Ocean, Ice and Land Surfaces Using Bi-statically Scattered GNSS Signals From Low Earth Orbit*. PhD thesis, University of Surrey, 2007.
- [43] S. Gleason, M. Adjrard, and M. Unwin. Sensing ocean, ice and land reflected signals from space : results from the UK-DMC GPS reflectometry experiment. In *Proceedings of the 2005 ION GNSS Technical Meeting*, pages 13–16, 2005.
- [44] F. Gustafsson. *Adaptative filtering and change detection*. Wiley, 2001.
- [45] F. Gustafsson, F. Gunnarsson, N. Bergman, U. Forsell, J. Jansson, R. Karlsson, and P.J. Nordlund. Particle filters for positioning, navigation and tracking. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 50(2) :425–437, 2002.
- [46] G.A. Hajj and C. Zuffada. Theoretical description of a bistatic system for ocean altimetry using the GPS signal. *Radio Science*, 38(5), 2003.
- [47] D.L. Hall and S.A.H. McMullen. *Mathematical Techniques in Multisensor Data Fusion*. Artech House Publishers, 2004.
- [48] R. Hatch. Instantaneous ambiguity resolution. *Kinematic systems in geodesy, surveying and remote sensing*, pages 299–308, 1991.
- [49] A. Helm. Ground-based GPS altimetry with the L1 OpenGPS receiver using carrier phase-delay observations of reflected GPS signals. Technical report, Deutsches GeoForschungsZentrum (GFZ), 2008.
- [50] *IS-GPS-200G : NAVSTAR GPS Space segment/navigation user interfaces*, 2013.
- [51] S.R. Jammalamadaka and A. Sengupta. *Topics in Circular Statistics*. World Scientific Publishing Company, 2001.

- 
- [52] C. Jianjun, F. Guoyu, H. Mengjun, and F. Qiang. Application of particle filter for angle measure. In *International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems*, 2010.
- [53] O. Julien. Carrier-phase tracking of future data/pilot signals. In *Proceedings of the 18th International Technical Meeting of The ION*, pages 113–124, 2005.
- [54] J. Kacemi, S. Reboul, and M. Benjelloun. Information fusion in a multi-frequencies GPS receiver. In *Position Location and Navigation Symposium (PLANS)*, pages 399–404, 2004.
- [55] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82 :32–45, 1960.
- [56] E.D. Kaplan and C.J. Hegarty. *Understanding GPS, principles and applications, second edition*. Artech House Publishers, 2006.
- [57] P.J. Kazemi, C. O’Driscoll, and G. Lachapelle. Digital phase lock loop with frequency rate feedback. In *Proceedings of the 22nd International Technical Meeting of the ION*, pages 201–208, 2009.
- [58] D. Kim and R.B. Langley. GPS ambiguity resolution and validation : methodologies, trends and issues. In *Proceedings of the 7th GNSS Workshop-International Symposium on GPS/GNSS, Seoul, Korea*, volume 30, 2000.
- [59] G. Kurz, I. Gilitschenski, S. Julier, and U.D. Hanebeck. Recursive estimation of orientation based on the Bingham distribution. In *Proceedings of the 16th International Conference on Information Fusion (FUSION)*, 2013.
- [60] G. Lachapelle. GNSS carrier phase positioning. In *ESA International Summer School on GNSS*, 2011.
- [61] M. Lacy, M. Reguzzoni, F. Sans, and G. Venuti. The Bayesian detection of discontinuities in a polynomial regression and its application to the cycle-slip problem. *Journal of Geodesy*, 82(9) :527–542, 2008.
- [62] K.M. Larson, J.S. Löfgren, and R. Haas. Coastal sea level measurements using a single geodetic GPS receiver. *Advances in Space Research*, 51(8) :1301–1310, 2013.
- [63] K.M. Larson, E.E. Small, E. Gutmann, A. Bilich, P. Axelrad, and J. Braun. Using GPS multipath to measure soil moisture fluctuations : initial results. *GPS solutions*, 12(3) :173–177, 2008.
- [64] M. Lashley, D.M. Bevely, and J.Y. Hung. Performance analysis of vector tracking algorithms for weak GPS signals in high dynamics. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 3(4) :661–673, 2009.

- [65] A. Leick. *GPS Satellite Surveying*. John Wiley and Sons publication, 1995.
- [66] Z. Liu. A new automated cycle slip detection and repair method for a single dual-frequency GPS receiver. *Journal of Geodesy*, 85(3) :171–183, 2011.
- [67] S.T. Lowe, J.L. LaBrecque, C. Zuffada, L.J. Romans, L.E. Young, and G.A. Hajj. First spaceborne observation of an Earth-reflected GPS signal. *Radio Science*, 37(1) :7–1, 2002.
- [68] T. Lurton. *Modélisation et simulation de l'interaction entre onde électromagnétique et surfaces de mer*. PhD thesis, Télécom Bretagne, 2010.
- [69] K.V. Mardia and P.E. Jupp. *Directional Statistics*. Wiley, 1999.
- [70] I. Markovic and I. Petrovic. Speaker localization and tracking with a microphone array on a mobile robot using von Mises distribution and particle filtering. *Robotics and Autonomous Systems*, 58(11) :1185–1196, 2010.
- [71] I. Markovic and I. Petrovic. Bearing-only tracking with a mixture of von Mises distributions. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 707–712, 2012.
- [72] M. Martín-Neira. A Passive Reflectometry and Interferometry System (PARIS) - Application to ocean altimetry. *ESA journal*, 17(4) :331–355, 1993.
- [73] M. Martín-Neira, P. Colmenarejo, G. Ruffini, and C. Serra. Altimetry precision of 1 cm over a pond using the wide-lane carrier phase of GPS reflected signal. *Canadian Journal of Remote Sensing*, 50(6) :394–403, 2002.
- [74] M. Martín-Neira, S. D'Addio, C. Buck, N. Floury, and R. Prieto-Cerdeira. The PARIS ocean altimeter in-orbit demonstrator. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 49(6) :2209–2237, 2011.
- [75] D. Masters, V. Zavorotny, S. Katzberg, and W. Emery. GPS signal scattering from land for moisture content determination. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, volume 7, pages 3090–3092, 2000.
- [76] D.S. Masters. *Surface remote sensing applications of GNSS bistatic radar : Soil moisture and aircraft altimetry*. PhD thesis, University of Colorado, 2004.
- [77] C. Mello. Circular statistics and their uses in psychology. *Tutorials in Quantitative Methods for Psychology*, 1(1) :11–17, 2005.
- [78] N. Nikolaidis and I. Pitas. Nonlinear processing and analysis of angular signals. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 46(12) :3181–3194, 1998.
- [79] D. Nikovski. *State-Aggregation Algorithms for Learning Probabilistic Models for Robot Control*. PhD thesis, Carnegie Mellon University, 2002.

- 
- [80] E.G. Njoku and D. Entekhabi. Passive microwave remote sensing of soil moisture. *Journal of Hydrology*, 184(1) :101–129, 1996.
- [81] O. Nogués-Correig, E. Cardellach Gali, J. Sanz Campderros, and A. Rius. A GPS-reflections receiver that computes Doppler/Delay Maps in real time. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(1) :156–174, 2007.
- [82] [www.openstreetmap.org](http://www.openstreetmap.org).
- [83] B. Parkinson, J. Spilker, and P.Y.C. Hwang. *Global Positioning System : Theory and Applications*. AIAA (American Institute of Aeronautics & Astronautics), 1996.
- [84] H. Qi and J.B. Moore. Direct Kalman filtering approach for GPS/INS integration. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 38(2) :687–693, 2002.
- [85] A. Razavi, D. Gebre-Egziabher, and D.M. Akos. Carrier loop architectures for tracking weak GPS signals. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, 44(2) :679–709, 2008.
- [86] S. Reboul and M. Benjelloun. Joint segmentation of the wind speed and direction. *Signal Processing*, 86 :744–759, 2006.
- [87] B. Ristic and M.S. Arulampalam. Tracking a manoeuvring target using angle-only measurements : algorithms and performance. *Signal Processing*, 83 :1223–1238, 2003.
- [88] A. Rius, O. Nogués-Correig, S. Ribó, E. Cardellach, S. Oliveras, E. Valencia, H. Park, J.M. Tarongí, A. Camps, H. van der Marel, et al. Altimetry with GNSS-R interferometry : first proof of concept experiment. *GPS solutions*, 16(2) :231–241, 2012.
- [89] N. Rodriguez-Alvarez, R. Acevo, A. Aguasca, E. Valencia, A. Camps, M. Vall-llossera, X. Bosch-Lluis, and I. Ramos-Perez. Altimetry study performed using an airborne GNSS-Reflectometer. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pages 3833–3836, 2010.
- [90] N. Rodriguez-Alvarez, A. Camps, M. Vall-Llossera, X. Bosch-Lluis, A. Moneris, I. Ramos-Perez, E. Valencia, J.F. Marchan-Hernandez, J. Martinez-Fernandez, G. Baroncini-Turricchia, et al. Land geophysical parameters retrieval using the interference pattern GNSS-R technique. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 49(1) :71–84, 2011.
- [91] N. Roy, G. Gordon, and S. Thrun. Finding approximate POMDP solutions through belief compression. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 23 :1–40, 2005.
- [92] C.S. Ruf, S. Gleason, Z. Jelenak, S. Katzberg, A. Ridley, R. Rose, J. Scherrer, and V. Zavorotny. The CYGNSS nanosatellite constellation hurricane mission. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pages 214–216, 2012.

- [93] G. Ruffini, F. Soulat, M. Caparrini, O. Germain, and M. Martín-Neira. The Eddy Experiment : Accurate GNSS-R ocean altimetry from low altitude aircraft. *Geophysical research letters*, 31(12), 2004.
- [94] R. Sabia, M. Caparrini, and G. Ruffini. Potential synergetic use of GNSS-R signals to improve the sea-state correction in the sea surface salinity estimation : Application to the SMOS mission. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(7) :2088–2097, 2007.
- [95] M. Sahmoudi and M. G. Amin. Robust tracking of weak GPS signals in multipath and jamming environments. *Signal Processing*, 89 :1320–1333, 2009.
- [96] M. Semmling, G. Beyerle, R. Stosius, G. Dick, J. Wickert, F. Fabra, E. Cardellach, S. Ribó, A. Rius, A. Helm, et al. Detection of Arctic ocean tides using interferometric GNSS-R signals. *Geophysical Research Letters*, 38(4), 2011.
- [97] A. Sengupta and A.K. Laha. A Bayesian analysis of the change-point problem for directional data. *Journal of Applied Statistics*, 35 :693–700, 2008.
- [98] R. Shah, J.L. Garrison, and M.S. Grant. Demonstration of bistatic radar for ocean remote sensing using communication satellite signals. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 9(4) :619–623, 2012.
- [99] H. Shatkay and L. Pack Kaelbling. Learning geometrically-constrained hidden Markov models for robot navigation : Bridging the topological-geometrical gap. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 16 :167–207, 2002.
- [100] J. Soubielle, I. Fijalkov, P. Duvaut, and A. Bibaut. GPS positioning in a multipath environment. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 50(1) :141–150, 2002.
- [101] F. Soulat. *Sea Surface Remote Sensing with GNSS and Sunlight Reflections*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2003.
- [102] F. Soulat, M. Caparrini, O. Germain, P. Lopez-Dekker, M. Taani, and G. Ruffini. Sea state monitoring using coastal GNSS-R. *Geophysical Research Letters*, 31(21), 2004.
- [103] M.A. Stephens. Random walk on a circle. *Biometrika*, 50 :385–390, 1963.
- [104] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, S. Boutoille, J.B. Choquel, and M. Benjelloun. Bayesian change-points estimation applied to GPS signal tracking. *ISRN Signal Processing*, pages 1–11, 2011.
- [105] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, and M. Benjelloun. A multi-sensor circular particle filter applied to the fusion of the GPS-L2C channels. In *Proceedings of the 14th International Conference on Information Fusion (FUSION)*, Chicago, pages 1–8, 2011.

- 
- [106] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, and M. Benjelloun. GNSS dataless signal tracking with a delay semi-open loop and a phase open loop. *Signal Processing*, pages 1192–1209, 2013.
- [107] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, and M. Benjelloun. A multi-temporal multi-sensor circular fusion filter. *Information Fusion*, pages 1–15, 2013.
- [108] G. Stienne, S. Reboul, J.B. Choquel, and M. Benjelloun. Circular data processing tools applied to a phase open loop architecture for multi-channels signals tracking. In *Position Location and Navigation Symposium (PLANS), Myrtle Beach*, pages 633–642, 2012.
- [109] G. Stienne, S. Reboul, J.B. Choquel, and M. Benjelloun. GNSS code and phase processing techniques in a ground-based mobile altimetry system. In *Workshop on Reflectometry Using GNSS and Other Signals of Opportunity (GNSS+ R), Lafayette*, pages 1–5, 2012.
- [110] R. Stosius, G. Beyerle, M. Semmling, A. Helm, A. Hoechner, J. Wickert, and J. Lauterjung. Tsunami detection from space using GNSS Reflections : Results and activities from GFZ. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pages 3047–3050, 2010.
- [111] P.J.G. Teunissen. Least-squares estimation of the integer GPS ambiguities. In *Invited lecture, section IV theory and methodology, IAG general meeting, Beijing, China*, 1993.
- [112] P.J.G. Teunissen, D. Odijk, and B. Zhang. PPP-RTK : Results of CORS network-based PPP with integer ambiguity resolution. *Journal of Aeronautics, Astronautics and Aviation, Series A*, 42(4) :223–230, 2010.
- [113] R.N. Treuhaft, S.T. Lowe, C. Zuffada, and Y. Chao. 2-cm GPS altimetry over Crater Lake. *Geophysical Research Letters*, 28(23) :4343–4346, 2001.
- [114] E. Valencia, A. Camps, J.F. Marchan-Hernandez, X. Bosch-Lluis, N. Rodriguez-Alvarez, and I. Ramos-Perez. Advanced architectures for real-time Delay-Doppler Map GNSS-reflectometers : The GPS reflectometer instrument for PAU (griPAU). *Advances in Space Research*, 46(2) :196–207, 2010.
- [115] A.J. Van Dierendonck, P. Fenton, and T. Ford. Theory and performance of narrow correlator spacing in a GPS receiver. *Navigation*, 39(3) :265–283, 1992.
- [116] F. van Graas, A. Soloviev, M.U. de Haag, and S. Gunawardena. Closed-loop sequential signal processing and open-loop batch processing approaches for GNSS receiver design. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 3(4) :571–586, 2009.
- [117] G.Q. Wang. Millimeter-accuracy GPS landslide monitoring using Precise Point Positioning with Single Receiver Phase Ambiguity (PPP-SRPA) resolution : a case study in Puerto Rico. *Journal of Geodetic Science*, 3(1) :22–31, 2013.

- [118] M. Wiehl, B. Legrésy, and R. Dietrich. Potential of reflected GNSS signals for ice sheet remote sensing. *Progress in Electromagnetics Research*, 40 :177–205, 2003.
- [119] A.S. Willsky and H.L. Jones. A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(1) :108–112, 1976.
- [120] J. Won, D. Dötterböck, and B. Eissfeller. Performance comparison of different forms of Kalman filter approach for a vector-based GNSS signal tracking loop. In *Proceedings of the International Meeting of the Satellite Division of The ION*, 2009.
- [121] X. Yun and E.R. Bachmann. Design, implementation and experimental results of a quaternion-based Kalman filter for human body motion tracking. *IEEE Transactions on Robotics*, 22 :1216–1227, 2006.
- [122] V.U. Zavorotny and A.G. Voronovich. Scattering of GPS signals from the ocean with wind remote sensing application. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(2) :951–964, 2000.
- [123] Y. Zhu, Z. You, J. Zhao, K. Zhang, and X.R. Li. The optimality for the distributed Kalman filtering fusion with feedback. *Automatica*, 37 :1489–1493, 2001.
- [124] N.I. Ziedan. *GNSS Receivers for Weak Signals*. Artech House Publishers, 2006.
- [125] Z. Ziheng, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, and M. Benjelloun. Fusion of the GPS L2 time multiplexing pilot and data channels signals : Application to soil moisture estimation. In *Proceedings of the IEEE Oceanic Engineering Society Workshop (PASSIVE 2010)*, 2010.



## Résumé

Lorsqu'une grandeur est observée par une série temporelle de mesures périodiques, telles que des mesures d'angles, les outils statistiques du domaine linéaire ne sont plus adaptés à l'estimation des paramètres statistiques de cette série. Nous proposons des filtres et un opérateur de fusion adaptés aux grandeurs aléatoires circulaires. Ils sont développés dans un cadre bayésien avec la distribution circulaire normale de von Mises. De plus, on propose un estimateur circulaire GLR (Global Likelihood Ratio) de ruptures dans un signal angulaire s'appuyant sur un filtre particulaire défini dans le domaine circulaire.

Le traitement des signaux GNSS repose traditionnellement sur l'estimation récursive, en boucles fermées, de trois paramètres : le délai de code, la phase et la fréquence de la porteuse du signal reçu. On montre dans cette thèse que l'estimation de la phase et de la fréquence en boucle fermée est à l'origine d'imprécisions et de perturbations additionnelles. On propose une nouvelle approche pour l'estimation de ces paramètres en boucle ouverte. Dans ce cas, les mesures de phase sont des angles, définis entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Statistiquement, elles peuvent être modélisées par la distribution circulaire de von Mises et l'on utilise donc les outils d'estimation circulaire développés dans cette thèse pour les traiter. On montre l'intérêt de l'approche proposée pour le positionnement et pour l'altimétrie par réflectométrie des signaux GNSS. La précision obtenue est de l'ordre du centimètre, pour des durées d'intégration d'une milliseconde. On propose également une technique de résolution de l'ambiguïté de phase, utilisable dans une approche mono-récepteur et mono-fréquence.

**Mots-clés:** Estimation angulaire, Traitement des signaux GNSS, Positionnement par la phase, Réflectométrie GNSS.

## Abstract

When a value is observed by a temporal series of periodic measurements, such as angle measurements, the statistic tools of the linear domain are no longer adapted to the estimation of the statistical parameters of this series. We propose several filters and a fusion operator adapted to angular random variables estimation. They are developed in a Bayesian framework with the von Mises circular normal distribution. Moreover, we propose a Global Likelihood Ratio circular change estimator which relies on a particle filter defined in the circular domain.

GNSS signal processing traditionally relies on the recursive estimation of three parameters in lock loops : the code delay, the phase and the frequency of the received signal carrier. We show in this thesis that the phase and frequency estimations, when realized in a lock loop, cause imprecisions and additional perturbations. We propose a new approach for the estimation of these parameters in an open loop. In this context, the phase measurements are angles defined between  $-\pi$  and  $\pi$ . They can be modeled using the von Mises distribution, thus we use the developed circular estimation tools in order to process them. We show the benefit of the proposed approach for positioning and for height estimation using the GNSS-Reflectometry technique. The obtained precision is of the centimeter order, for integration times of one millisecond. We also propose a phase ambiguity resolution technique which can be used in a mono-receiver, mono-frequency approach.

**Keywords:** Angular estimation, GNSS signal processing, Phase positioning, GNSS-Reflectometry.