Comportement vibratoire de structures composites intégrant des éléments amortissants

Alexis Castel

▶ **To cite this version:**

Alexis Castel. Comportement vibratoire de structures composites intégrant des éléments amortissants. Autre. Université de Bourgogne, 2013. Français. NNT : 2013DIJOS047 . tel-00983378

HAL Id: tel-00983378

https://theses.hal.science/tel-00983378

Submitted on 25 Apr 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SPIM

Thèse de Doctorat

école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Comportement vibratoire de structures composites intégrant des éléments amortissants

Alexis CASTEL

Bourgogne Conseil régional

SPIM

Thèse de Doctorat

école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

THÈSE présentée par

Alexis CASTEL

pour obtenir le

Grade de Docteur de
l'Université de Bourgogne

Spécialité : **Mécanique**

Comportement vibratoire de structures composites intégrant des éléments amortissants

Unité de Recherche :
Département de Recherche en Ingénierie des Véhicules pour l'Environnement

Soutenue publiquement le 21 Novembre 2013 devant le Jury composé de :

Paolo VANNUCCI	Rapporteur	Professeur à l'Université de Versailles-St-Quentin
Mohamed Ali HAMDI	Rapporteur	Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne
Lorenzo DOZIO	Examinateur	Maître de conférence à l'Université Politecnico di Milano
Walid LARBI	Examinateur	Maître de conférence au Conservatoire National des Arts et Métiers
Ali EL HAFIDI	Examinateur	Maître de conférence à l'Université de Bourgogne (co-encadrant)
Alexandre LOREDO	Examinateur	Professeur à l'Université de Bourgogne (Directeur de thèse)

Remerciements

Ce travail s'inscrit dans le cadre du programme Jeune Chercheur Entrepreneur de la Région Bourgogne. Il a été réalisé au Département de Recherche en Ingénierie des Véhicules pour l'Environnement (DRIVE) de l'Institut Supérieur de l'Automobile et des Transports (ISAT) de Nevers.

Je tiens en premier lieu, à remercier sincèrement toutes les personnes, qui ont contribué, de prés ou de loin, à l'aboutissement de ce travail. Je remercie vivement Monsieur le Professeur Alexandre Loredo, directeur de thèse, et Monsieur Ali El Hafidi co-encadrant. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance pour leurs conseils avisés, leur rigueur scientifique et leur présence tout au long de ces trois années de travail.

Je souhaite aussi remercier la Région Bourgogne, qui est l'organisme financeur du projet au travers du programme Jeune Chercheur Entrepreneur. Je les remercie pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser ce travail et permis de prendre part à ce programme.

Je suis très reconnaissant envers Messieurs les Professeurs Paolo Vannucci de l'Université de Versailles-Saint-Quentin et Mohamed Ali Hamdi de l'Université de Technologie de Compiègne qui ont bien voulu rapporter sur ce travail et me faire l'honneur de participer au jury de thèse. Leurs remarques m'ont permis d'améliorer ce manuscrit.

Je tiens particulièrement à remercier Cristina Prieto García et Silvia Torres Mañueco qui, au travers de leur stage au laboratoire, ont pris part à notre équipe de recherche et ont fortement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie l'ensemble du personnel du laboratoire DRIVE et de l'ISAT pour m'avoir accueilli. Je souhaite remercier en particulier Bruno Martin pour ses nombreux conseils et suggestions lors de nos réunions. Un grand merci à Matthieu Gatellet, informaticien, qui par son aide, a permis l'aboutissement de nombreux calculs. Je souhaite aussi remercier Philippe Leclaire, directeur du laboratoire, qui a rendu possible mes déplacements à Dijon.

Je voudrais enfin remercier l'ensemble de ma famille, et particulièrement mon épouse Sarah, pour leur soutien inconditionnel au cours de ces trois dernières années.

SOMMAIRE

Introduction 1

1 État de l'art 4

1.1 Présentation générale du problème 4

1.2 Traitements amortissants des plaques 5

1.2.1 Traitement adjoints à la structure : Patchs viscoélastiques contraints et non contraints 6

1.2.2 Traitements amortissants dérivés 8

1.2.3 Amortisseurs viscoélastiques accordés 8

1.2.4 Incorporation des traitements amortissants dans les structures . . . 9

1.3 Études expérimentales des patchs viscocontraints 9

1.4 Modèles de plaque multicouche 10

1.4.1 Solutions exactes 11

1.4.2 Théories classiques des plaques 12

1.4.3 Modèles de plaque Zig-Zag 14

1.4.4 Formulations unifiées 15

1.4.5 Modélisation de l'amortissement 15

1.5 Méthodes de discrétisation adaptées aux modèles de plaque 18

1.5.1 Procédure de Navier 19

1.5.2 Méthode de Rayleigh-Ritz 19

1.5.3 Méthode des éléments finis 20

1.6 Optimisation de l'amortissement dans une structure patchée 20

1.7 Conclusion 22

2 Modèle établi sur la base du champ de déplacements 23

2.1 Définition d'un stratifié 23

2.2 Généralités sur le champ de déplacements . . . 25
2.3 Champs de déformations et de contraintes . . . 25
2.4 Énergie de déformation . . . 26
2.5 Énergie cinétique . . . 29
2.6 Équations d'équilibre du système . . . 30
2.7 Fonctions de description du cisaillement transverse : *Warpings functions* . . . 31
2.7.1 Formulation classique : Mindlin-Reissner . . . 32
2.7.2 Reddy . . . 32
2.7.3 Woodcock . . . 33
2.7.4 *Warping functions* constituées de polyômes cubiques par couche . . . 34
2.7.5 *Warping functions* issues des contraintes de cisaillement . . . 37

3 Méthodes de discrétisation 40

3.1 Méthode de Rayleigh-Ritz . . . 40
3.1.1 Problème associé . . . 41
3.1.2 Structure modélisée . . . 41
3.1.3 Base implémentée . . . 43
3.1.4 Formulation énergétique . . . 46
3.1.5 Recherche des valeurs et vecteurs propres . . . 49
3.1.6 Équations du mouvement forcé du système . . . 49
3.1.7 Post-traitement . . . 51
3.2 Procédure de Navier adaptée à un stratifié quelconque . . . 52
3.2.1 Problème associé . . . 52
3.2.2 Champ de déplacement . . . 52
3.3 Méthode des éléments finis . . . 53
3.3.1 Présentation générale . . . 54
3.3.2 Formulation soumise au blocage des plaques en cisaillement . . . 58
3.3.3 Formulation à l'aide d'éléments finis à continuité C1 . . . 60

4 Résultats numériques 66

4.1 Validation du modèle avec la méthode de Navier . . . 66
4.1.1 Plaque composite rectangulaire . . . 67

4.1.2 Panneau sandwich carré 69
4.1.3 Plaque composite bi-couche à séquence d'empilement antisymétrique 71
4.1.4 Plaque composite avec un seul pli 72
4.1.5 Plaque composite avec une séquence d'empilement symétrique . . 73
4.2 Réponse d'une plaque patchée soumise à une onde plane progressive . . 75
4.2.1 Configuration test étudiée 75
4.2.2 Comparaison avec deux modèles éléments finis tridimensionnels . . 76
4.2.3 Comparaison à plus haute fréquence avec un modèle élément finis bi-dimensionnel 77
4.2.4 Discussion 79
4.2.5 Analyse énergétique de la plaque patchée 80
4.3 Analyse inverse des paramètres matériaux d'une plaque en vibration 90
4.3.1 Méthode utilisée 91
4.3.2 Identification des paramètres caractéristiques d'un matériau viscoélastique 94
4.3.3 Discussion à propos de la méthode d'identification 100

Conclusions et perspectives **102**

Bibliographie **105**

A Lien avec le modèle de Woodcock **113**

B Matrices de Navier complètes **115**

INTRODUCTION

Depuis plusieurs siècles, les conceptions humaines sont de moins en moins le fruit d'un savoir faire empirique mais sont issues du résultat de calculs eux-mêmes basés sur les lois du monde physique. La compréhension des lois qui régissent le monde qui nous entoure est donc essentielle à l'évolution de notre savoir faire. La modélisation des structures est un point essentiel à toute conception et cette affirmation est d'autant plus valable que la technologie mise en œuvre est complexe. Le domaine des transports est un bon exemple des évolutions en matière de conception. En effet, les exigences des consommateurs sur les véhicules en matière de performances, de sécurité et de confort ayant évoluées, la conception d'un moyen de transport repose aujourd'hui majoritairement sur des simulations effectuées par des ordinateurs, impliquant souvent un processus d'optimisation.

L'évolution des capacités de calcul des ordinateurs n'est pas non plus étrangère à cette tendance. Depuis maintenant plus d'un demi siècle, la méthode des éléments finis, associée aux lois de l'élasticité tridimensionnelle, permet d'effectuer des simulations du comportement mécanique de structures complexes soumises à des chargements divers. Cependant, les capacités de calcul des ordinateurs actuels ne permettent toujours pas d'effectuer des simulations qui utiliseraient des éléments finis tridimensionnels, pour une structure complexe comme celle d'une voiture ou d'un avion, car cela créerait des systèmes d'équations de taille trop élevée. Cette limitation est encore plus marquée lorsque la finalité des simulations est d'effectuer un travail d'optimisation ; ces procédés requièrent le plus souvent plusieurs itérations et donc de nombreux calculs.

Par ailleurs, les procédés de conception, même les plus pointus, ne permettent pas à ce jour d'optimiser complétement toutes les structures. Ainsi, dans le domaine aérospatial, il est reconnu qu'environ 40% de la masse d'un satellite résulte du sur-dimensionnement qui lui permet de résister aux conditions vibratoires intenses dans lequel il se trouve lors de son lancement [1]. Étant donné les enjeux liés à la masse d'un satellite, cet exemple seul justifie l'importance de la recherche de nouveaux procédés d'amortissement ainsi que le développement des simulations et des méthodes d'optimisation pour les dispositifs actuels.

De manière générale, la maîtrise de l'amortissement est un point important lors de la conception de nombreuses structures. Afin de palier aux problèmes vibratoires de cer-

taines structures faiblement amorties, l'utilisation de patchs PCLD [1] (*Passive Constrained Layer Damping* – viscocontraints) est courante depuis leur introduction par Swallow [2] en 1939. De nos jours, cette technologie est une solution simple et économique pour réduire l'amplitude des vibrations et indirectement, le bruit rayonné par une structure. Pendant des années, ces patchs furent quasiment exclusivement réservés à l'industrie aéronautique ; toutefois Rao [3] a fait état de leur apparition dans le domaine de l'automobile.

D'autre part, les comportements d'une structure peuvent être complexes et difficiles à simuler au travers de méthodes réputées exactes. Il est donc nécessaire d'établir des modèles permettant d'approcher le comportement de la structure physique en faisant des hypothèses simplificatrices à plusieurs niveaux :

– Le comportement dynamique du matériau : le comportement d'un matériau soumis à un chargement donné n'est pas systématiquement linéaire. La complexité du phénomène est encore plus grande lorsque le phénomène d'amortissement des matériaux est pris en compte. Afin de modéliser le comportement des matériaux, plusieurs modèles rhéologiques ont été proposés dans le but de simuler différents effets tels que l'elasticité, la viscoelasticité et la plasticité.
– Le comportement de la structure : afin de limiter la taille des systèmes à résoudre, des hypothèses simplificatrices peuvent être établies sur le comportement de la structure. Les modèles de plaque où l'on choisit de poser des hypothèses sur les contraintes et les déformations dans l'épaisseur de la structure sont une très bonne illustration de cet aspect. Le plus souvent, le comportement de la plaque est basé sur des hypothèses de répartition des contraintes dans l'épaisseur de la plaque par rapport à un plan de référence où sont estimées les variables du champ de déplacements.
– La méthode de discrétisation : l'estimation de la réponse statique ou dynamique d'une structure soumise à un chargement donné ne peut que très rarement être obtenue à l'aide d'une solution analytique. Il est alors nécessaire d'utiliser une technique permettant d'évaluer le comportement d'une structure ayant une géométrie quelconque. On utilise alors une méthode de discrétisation, c'est à dire que les champs sont projetés sur des bases finies de fonctions choisies à priori, cela amenant à ne manipuler qu'un nombre fini de variables. Ces variables peuvent avoir un caractère local (comme pour la méthode des différences finies ou encore des éléments finis) ou non (comme pour la méthode de Rayleigh-Ritz). La suite du calcul peut se faire de deux façons plus ou moins équivalentes : dans certains cas, l'existence d'un principe des travaux (ou puissances) virtuels amène à formuler le problème comme la recherche d'un minimum d'énergie et dans d'autres cas, on recherchera le minimum d'un résidu dans une équation.

Ce document tente de répondre aux besoins de modélisation de structures incorporant des éléments amortissants, afin de permettre une meilleure optimisation de ces traite-

1. Afin de se conformer avec les termes communément admis dans la littérature, et donc le plus souvent en langue anglaise, ce document mentionne en priorité les acronymes couramment utilisés, puis en italique le terme anglophone approprié suivi de la traduction en français.

ments et donc d'améliorer le confort vibratoire et acoustique des véhicules.

Nous proposons ici un modèle permettant de décrire le comportement de plaques composites munies de patchs PCLD. C'est un modèle générique utilisant des jeux de fonctions de description du cisaillement transverse. Le choix de ces jeux de fonctions permet de retrouver divers modèles de plaques issus de la littérature. D'autres propositions de jeux de fonctions sont faites afin de répondre aux problèmes de modélisation posés ci-dessus. Dans un second temps, nous présentons trois méthodes de discrétisation adaptées au modèle proposé : la méthode de Rayleigh-Ritz, la méthode de Navier et la méthode des éléments finis. Finalement, nous proposons plusieurs applications : tout d'abord, afin de valider le modèle, nous le confrontons à des solutions analytiques et des résultats issus de calculs éléments finis tridimensionnels, puis, nous décrivons une étude de la répartition de l'énergie vibratoire complexe d'une plaque patchée, enfin nous proposons une méthode d'identification à partir du modèle présenté.

1

ÉTAT DE L'ART

1.1/ PRÉSENTATION GÉNÉRALE DU PROBLÈME

Le vaste problème de la modélisation des plaques est étudié depuis de nombreuses années afin de pouvoir répondre aux problèmes liés à la modélisation des structures, des impacts, du comportement acoustique ou des vibrations. Parmi les premiers travaux sur les théories des plaques, nous pouvons notamment citer ceux de Kirchhoff [4] en 1850 et de Love [5] en 1888 qui établissent un premier modèle de plaque sans prise en compte du cisaillement transverse ; ces travaux font encore à ce jour référence dans la littérature. Ces approches simples permettent d'obtenir des résultats, le plus souvent satisfaisants pour les structures fortement élancées (ces modèles sont encore appelés "modèles de plaques minces") puisque pour celles-ci, l'importance relative des contraintes de cisaillement transverse reste modérée. Toutefois, les théories classiques ne permettent pas d'atteindre une précision satisfaisante dans trois cas :

– Lorsque l'élancement de la plaque est faible, les contraintes de cisaillement transverse ne peuvent plus être négligées vis à vis des autres composantes, il est alors recommandé d'utiliser un modèle adapté aux "plaques épaisses".
– Dans le cas d'une étude dynamique, au voisinage d'un mode d'ordre élevé, le rapport entre la longueur d'onde de flexion et l'épaisseur de la plaque peut se réduire suffisamment pour que le mode de déformation s'apparente à la flexion d'une plaque épaisse.
– Lorsqu'il y a un fort ratio de module de Young entre les couches de la plaque, la variation des déformations de cisaillement au travers de la plaque est très importante et doit être prise en compte. On retrouve cette situation dans le cas de l'application d'un dispositif amortissant passif qui comporte un matériau viscoélastique à faible module de Young.

A ce jour, l'enjeu principal est de modéliser le comportement d'assemblages multicouches complexes, composés de plaques composites anisotropes, ainsi que des dispositifs amortissants passifs, impliquant des matériaux viscoélastiques à faible module de Young ou encore des patchs piézoélectriques utilisés dans le contrôle actif. Par ailleurs,

le dimensionnement de ces traitements amortissants, qui fut empirique dans un premier temps, implique de nos jours des besoins de simulation de ces systèmes afin de maximiser leur efficacité.

La simulation du comportement des structures traitées nécessite l'utilisation de modèles adaptés, permettant de prendre en compte les caractéristiques éventuellement anisotropes des matériaux, tout en tenant compte des effets induits par les dispositifs amortissants. La présence de ces derniers sur une structure rend la modélisation du comportement statique et dynamique de celle-ci bien plus complexe. En effet, l'ajout de couches de matériaux viscoélastiques à faible module de Young ou piézoélectriques, implique le plus souvent une perturbation des champs cinématiques due à une variation importante du cisaillement transverse au travers de l'épaisseur de la plaque. Or, la plupart des modèles de plaques classiques posent pour hypothèse la constance des déformations de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque. Il est donc nécessaire de développer des modèles appropriés permettant de modéliser correctement les structures munies de traitements amortissants.

1.2/ TRAITEMENTS AMORTISSANTS DES PLAQUES

Dans le domaine des transports, l'adjonction sur des plaques de dispositifs d'amortissement des vibrations passifs, semi-actifs ou actifs est une pratique courante depuis de plusieurs années. En effet, le niveau de confort des véhicules tendant à s'améliorer, les attentes des passagers évoluant, les problématiques acoustiques et vibratoires sont devenues primordiales. Le contrôle des nuisances sonores repose en partie sur la limitation des vibrations des structures qui peuvent être à l'origine du son.

C'est ainsi que l'utilisation de dispositifs d'amortissement passifs sur des plaques est devenue courante dans les véhicules terrestres et aériens ; c'est un moyen simple et économique pour améliorer le confort vibratoire et acoustique des véhicules. D'autre part, ils ont pour avantage d'être relativement peu encombrants et légers lorsqu'on les compare aux dispositifs d'isolation sonore usuels que sont les isolants acoustiques classiques (généralement constitués matériaux à densité élevée).

Les dispositifs actifs quand à eux, bien que très efficaces, sont plus chers et plus complexes à mettre en œuvre. Ils sont donc réservés à des utilisations spécifiques, notamment à la stabilisation de certains instruments dans les satellites ou d'autres applications militaires.

Cette section présente les principales technologies passives et actives d'amortissement des vibrations des plaques.

1.2.1/ Traitement adjoints à la structure : Patchs viscoélastiques contraints et non contraints

L'adjonction de traitement passifs à une structure vibrante est un moyen classique de réduire l'amplitude des vibrations de celle-ci. Les traitements sous forme de patchs permettent d'être ajoutés à la structure sans avoir à reconcevoir la pièce concernée. Parmi les patchs passifs, on distingue deux types de technologies :

– Les patchs FLD, (*Free-Layer-Damping* – viscoélastiques non contraints), sont généralement composés d'une seule couche de matériau polymère qui se déforme en extension-compression lorsque la plaque fléchit. Ce type de traitement est utilisé dans l'automobile lorsque l'on rajoute une couche de "mastic" aux planchers ou autres parties de la carrosserie. L'efficacité de ces traitements est principalement liée à l'épaisseur de la couche de matériau viscoélastique appliquée et est donc souvent limitée du fait des restrictions de poids.
– Les patchs PCLD, (*Passive-Constrained-Layer-Damping* – viscoélastiques contraints), sont composés d'une fine couche de matériau viscoélastique fortement amortissant (et à faible module de Young) recouverte d'une couche d'un matériau plus rigide, le plus souvent métallique. Lorsque la structure de base fléchit, le matériau viscoélastique est contraint de se déformer en cisaillement grâce à la couche supérieure rigide. D'un point de vue historique, les patchs PCLD sont mentionnés pour la première fois en 1939 dans un brevet britanique [2] qui décrit un système de patchs viscoélastiques contraints, collés, qui est dédié à l'amortissement des vibrations de panneaux de porte d'avion. À ce jour, cette méthode fait partie des traitements amortissants classiques utilisés dans l'industrie. Ils se présentent, le plus souvent, sous la forme de patchs autocollants à répartir sur toute ou partie de la structure. La technologie PCLD est généralement plus efficace que la FLD car d'avantage d'énergie est dissipée en chaleur dans le travail effectué par la déformation de cisaillement dans la couche viscoélastique. Par ailleurs, les couches étant plus fines que pour les patchs FLD, elle représente un gain de poids certain par rapport à la FLD, et est donc plus recommandée pour des utilisations aéronautiques.

La figure 1.1 présente ces deux types de patchs ainsi que leurs états déformés. La figure 1.2 illustre des applications de patchs viscocontraints dans une automobile. Nous remarquons que dans ce cas, et dans un souci d'efficacité, les panneaux sont entièrement recouverts de traitement amortissant. Cependant, nous pouvons supposer qu'il est possible de trouver un compromis poids efficacité au travers de calculs d'optimisation. Ceci est essentiel pour les applications aéronautiques où la réduction de la masse demeure un enjeu majeur.

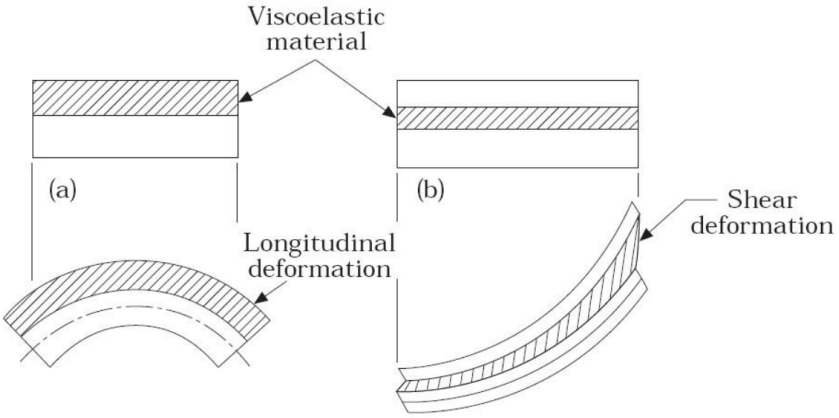


FIGURE 1.1 – (a) Patch viscoélastique non contraint dans son état non déformé en haut et déformé en bas - (b) Patch viscoélastique contraint dans son état non déformé en haut et déformé en bas.

FIGURE 1.2 – Exemple d'utilisation de patchs viscoelastiques.

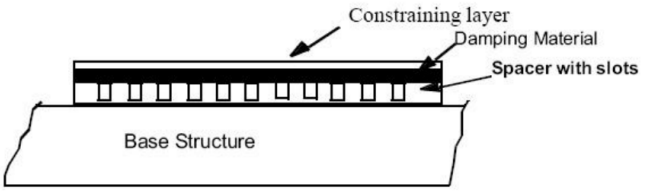


FIGURE 1.3 – Structure patchée avec une couche d'espacement entre le patch et la plaque.

1.2.2/ TRAITEMENTS AMORTISSANTS DÉRIVÉS

Une partie des traitements passifs utilisés dans les avions commerciaux se limite à appliquer localement des traitements dans le fuselage, afin de réduire l'amplitude des vibrations. En raison des restrictions de poids, les traitements sont conçus pour maximiser l'amortissement en limitant la masse ajoutée. Les traitements viscocontraints classiques fonctionnent en cisaillant le matériau viscoélastique. Cependant, dans les modes de déformation les plus bas, lorsque la courbure est faible, le matériau viscoélastique peut ne pas être suffisamment cisaillé pour être pleinement efficace. Pour surmonter ce phénomène, l'adjonction d'une couche d'espacement, entre le patch et la plaque sur laquelle il est appliqué, est une solution possible à ce problème, comme illustré dans la figure 1.3. Le matériau de cette couche d'espacement est censé, idéalement, avoir une rigidité de cisaillement infinie et une rigidité de flexion nulle. La couche d'espacement permet d'augmenter la distance entre l'axe neutre de la structure de base et le système d'amortissement. Selon Rao [3], cette couche agit donc comme un amplificateur cinématique afin d'augmenter de manière significative les déformations de cisaillement dans la couche viscoélastique et donc l'efficacité du traitement.

1.2.3/ AMORTISSEURS VISCOÉLASTIQUES ACCORDÉS

Aussi appelés *Tuned Viscoelastic Dampers* (TVD – amortisseurs harmoniques) ces dispositifs, présentés dans la figure 1.4, sont spécialement conçus pour amortir les vibrations à une fréquence donnée ou dans une bande de fréquence. Le système se résume alors à un système masse ressort amorti dont les caractéristiques ont été choisies afin de cibler une ou plusieurs bandes de fréquences prédéterminées. Ce genre de système est particulièrement efficace lorsqu'il est placé dans une zone où les amplitudes des déplacements sont grandes pour la fréquence ciblée. Un autre point déterminant est la température de fonctionnement du système, en effet, les TVD ne doivent pas opérer autour de la température de transition vitreuse du matériau viscoélastique car les dispositifs réalisés pourraient se révéler difficiles à dimensionner (les propriétés des polymères viscoélastiques variant fortement avec la température). Harrison [6] propose une étude d'un

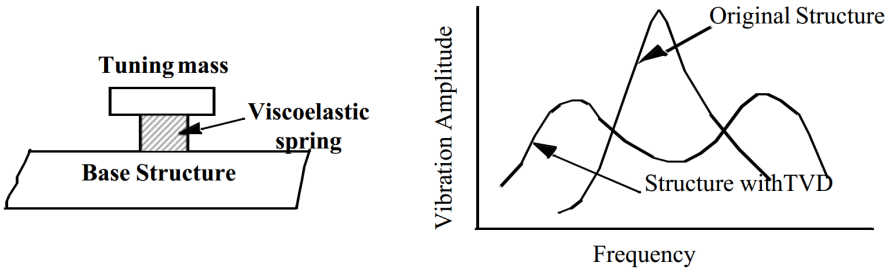


FIGURE 1.4 – Amortisseur viscoélastique accordé.

système TVD sur une plaque afin d'optimiser le comportement du patch en flexion. Pour cette étude, la nature du problème est donc différente puisque l'étude du système en flexion implque que l'on ne considère plus un système masse-ressort comme pour les amortisseurs viscoélastiques accordés classiques.

1.2.4/ INCORPORATION DES TRAITEMENTS AMORTISSANTS DANS LES STRUCTURES

De récentes applications impliquant des traitements amortissants montrent une tendance à incorporer les traitements à l'intérieur des structures vibrantes. Ces nouvelles méthodes, dont quelques exemples sont présentés par Rao [3], reviennent le plus souvent à choisir une "colle intelligente" de façon à réduire les amplitudes des vibrations de la structure. La figure 1.5 présente quelques exemples d'incorporation de matériaux viscoélastiques dans une structure aéronautique : l'interface entre les raidisseurs et la peau est réalisée par une couche de matériau viscoélastique. On peut aussi mentionner l'existence de pare-brises en "verre laminé" comme un exemple de cette tendance. Le pare brise peut être alors considéré comme une plaque sandwich amortissante dont l'âme est constituée de polyvinyl butyral et les peaux, de verre.

1.3/ ÉTUDES EXPÉRIMENTALES DES PATCHS VISCOCONTRAINTS

Dans ce domaine, Kerwin [7] fut parmi les premiers à proposer une étude d'une poutre patchée, pour laquelle il etablit le facteur de perte structurel, à partir des travaux d'Oberst. Kosmatka [8] propose une étude sur un composite muni d'un patch viscocontraint. D'autres études expérimentales ont été proposées sur des structures différentes d'une poutre ou plaque comme celle de Kumar et Singh [9] qui proposent une étude sur un panneau courbe. De manière générale, de nombreuses études expérimentales ont été réalisées sur les patchs viscocontraints. Cependant peu de travaux sont focalisés sur l'aspect purement expérimental de l'étude. Le plus souvent, ces études expérimentales visent à valider certains modèles. Dans cette catégorie on pourra notamment citer les

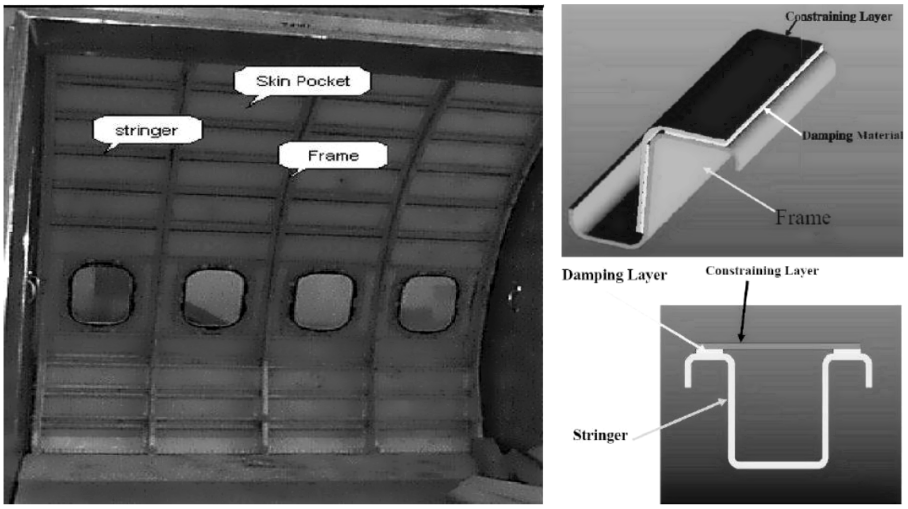


FIGURE 1.5 – Exemples de traitements amortissants intégrés à l'intérieur de la structure d'un avion.

travaux de Foin [10], de De Cazenove [11] ou encore Kung et Singh [12].

1.4/ MODÈLES DE PLAQUE MULTICOUCHE

Par modèle de plaque, on entend un modèle dans lequel on effectue une approximation de l'estimation des variables du champ de déplacement – généralement sur l'épaisseur de la structure – destinée à modéliser le comportement d'une plaque – le plus souvent multicouche –. Il n'est pas rare de rencontrer d'autres définitions d'un modèle de plaque, par exemple, Carrera [13], définit un modèle de plaque comme un modèle dans lequel le degré d'interpolation au travers de l'épaisseur est au moins d'un degré inférieur à celui des autres directions.

Parmi les modèles de plaque, on distingue deux grandes familles, les modèles *Equivalent Single Layer* (ESL – modèle couche équivalente) et les modèles *Layer-Wise* (LW – par couche). Les modèles ESL expriment chaque composante du champ de déplacement en fonction de variables définies sur un plan de référence, décrit par les coordonnées x et y dans le plan, et fonction de z la direction normale au plan x, y traduit ce qui se passe dans l'épaisseur. De manière générale, z est découplée des directions x et y. Chaque composante des champs de déplacement, de déformation et de contrainte se développe selon z à l'aide de P fonctions de la façon suivante :

$$f(x,y,z) = f_1(x,y)\,F_1(z) + \cdots + f_P(x,y)\,F_P(z) \tag{1.1}$$

De fait, le nombre de variables est alors indépendant du nombre de couches. Les fonctions $F_p(z)$ sont généralement obtenues en posant des conditions cinématiques sur le champ de déplacement.

Les formulations LW, quant à elles, proposent une variation des composantes du champ de déplacement à l'intérieur de chaque couche. Les champs sont alors exprimées pour la couche n de la façon suivante :

$$f^n(x,y,z) = f_1^n(x,y)\,F_1^n(z) + \cdots + f_P^n(x,y)\,F_P^n(z) \tag{1.2}$$

Lors de la discrétisation du système, le nombre de degrés de liberté du système est alors directement dépendant du nombre de couches. De ce fait, ce dernier type de modèle ne peut être considéré comme une formulation strictement bidimensionnelle. Bien qu'ils peuvent se révéler plus précis, ceux-ci impliquent souvent un plus grand nombre de degrés de liberté, ce qui les rend moins avantageux que les modèles ESL. Notre étude se concentrera donc essentiellement sur les modèles de plaque ESL dont le nombre de degrés de liberté ne dépend pas du nombre de couches.

De manière plus générale, la modélisation des plaques peut être réalisée au travers de plusieurs méthodes admettant une ou plusieurs approximations. Plusieurs travaux comme ceux de Noor [14, 15], Reddy [16] et Carrera [13] font l'état de l'art sur les théories des plaques. Les paragraphes de cette section présentent un résumé des principales méthodes.

1.4.1/ Solutions exactes

Même si ces solutions ne satisfont pas la définition des modèles de plaque présentée ci-dessus (puisqu'elles n'admettent aucune approximation sur la description des variables au travers de l'épaisseur de la plaque), il convient de les mentionner puisqu'elles sont souvent utilisées avec les modèles de plaques à titre de comparaison. Par ailleurs, les solutions exactes utilisées pour des plaques en flexion ne reflètent que très rarement les "cas réels". La plupart d'entre elles impliquent des conditions aux limites simplement appuyées et nécessitent un champ cinématique imposé à la plaque ce qui est difficile à reproduire expérimentalement. Leur importance est cependant cruciale puisque ce sont des méthodes exactes qui permettent le plus souvent d'évaluer la qualité des modèles de plaques, qui eux sont basés sur des hypothèses simplificatrices.

Les premières solutions exactes furent données pour des plaques en flexion cylindrique composées de matériaux isotropes. Ainsi en 1877 Lévy [17] donne une solution exacte pour les plaques isotropes rectangulaires en flexion cylindrique. Pour les cas limités aux plaques multicouches rectangulaires simplement appuyées dont les axes d'orthotropie sont confondus avec le repère de la plaque, Pagano [18, 19, 20] présente une solution pour le cas statique et Srinivas [21, 22, 23] et Kulkarni [24] pour le cas dynamique. Ces solutions font partie des solutions les plus connues et les plus employées encore à ce jour dans la littérature. Par la suite une autre méthode permettant de simuler la flexion des plaques orthotropes avec un empilement de couches symétriques a été présentée

par Reddy [25] pour le cas statique et Noor [26] pour le cas dynamique. Pour ces modèles basés sur les équations d'équilibre de la mécanique, aucune approximation n'est effectuée pour l'estimation de la distribution des contraintes et des déformations.

1.4.2/ THÉORIES CLASSIQUES DES PLAQUES

À partir de ce point, tous les indices grecs prennent les valeurs 1 ou 2, les indices latins prennent les valeurs 1, 2 ou 3. La convention de sommation d'Einstein est utilisée seulement pour les indices. La virgule, utilisée dans un indice indique une dérivée partielle pour le(s) indice(s) qui la suive(nt).

Dans la littérature, plusieurs modèles, qualifiés de modèles de plaque classiques sont souvent cités et utilisés à des fins de comparaison. Nous en faisons ici une brève description :

– La CLT (*Classical Lamination Theory* – théorie classique des stratifiés). Ce modèle est la généralisation pour des matériaux anisotropes du modèle de Love-Kirchhoff [4, 27, 5]. Cette théorie ne tient pas compte du cisaillement transverse et suppose que les déplacements de membrane, en tout point de la plaque, sont uniquement dépendants des déplacements de membrane u_1^0, u_2^0, et des dérivées de la flèche $w_{,\alpha}^0$ au plan de référence (l'exposant 0 indique que la variable est exprimée au plan de référence). Le champ de déplacement associé est présenté dans l'équation (1.3). La figure 1.6 illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff : la section de la poutre déformée reste orthogonale à l'axe neutre, les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et sur-estimer les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes. Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde de flexion, d'où son appellation de modèle de "plaques minces".

$$\begin{cases} u_\alpha(x,y,z) = u_\alpha^0(x,y) - z w_{,\alpha}^0(x,y) & \text{(1.3a)} \\ w(x,y,z) = w^0(x,y) & \text{(1.3b)} \end{cases}$$

– La FSDT (*First-Order Shear Deformation Theory* – théorie de déformation en cisaillement au premier ordre). Aussi appelé modèle de Mindlin-Reissner ou encore "théorie des plaques épaisses", ce modèle pose pour hypothèse une déformation de cisaillement transverse constante au travers de l'épaisseur de la plaque, le déplacement d'un point de la plaque dépend cette fois de u_1^0, u_2^0, des dérivées de la flèche $w_{,\alpha}^0$ et des cisaillements $\gamma_{\alpha 3}^0$. L'équation (1.4) présente le champ de déplacement associé à ce modèle. Celui-ci, développé par Reissner [28], fut le premier modèle de plaque prenant en compte les contraintes de cisaillement transverse ; Mindlin [29] développa la théorie

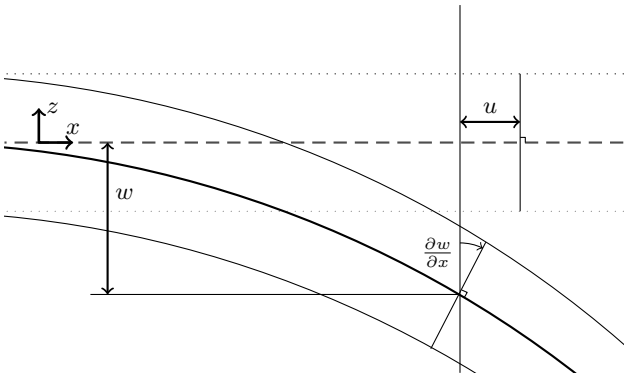


FIGURE 1.6 – Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff.

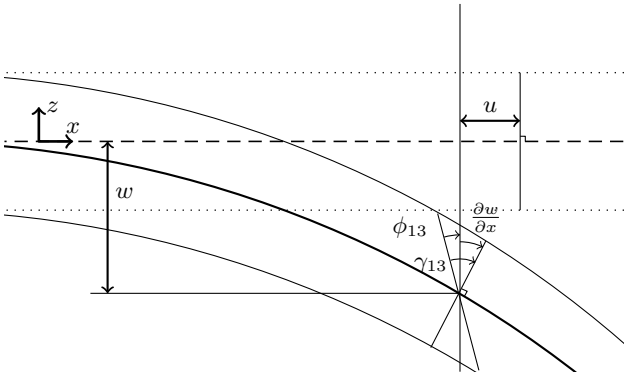


FIGURE 1.7 – Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Mindlin-Reissner.

de déformation en cisaillement au premier ordre basé sur les déplacements.

$$\begin{cases} u_\alpha(x,y,z) = u^0_\alpha(x,y) + z\left(\gamma^0_{\alpha 3}(x,y) - w^0_{,\alpha}(x,y)\right) & \text{(1.4a)} \\ w(x,y,z) = w^0(x,y) & \text{(1.4b)} \end{cases}$$

Le plus souvent, le champ de déplacement lié à la FSDT est écrit en fonction des rotations $\phi^0_\alpha(x,y) = \gamma^0_{\alpha 3}(x,y) - w^0_{,\alpha}(x,y)$. Il est donc commun de rencontrer le champ de déplacement associé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_\alpha(x,y,z) = u^0_\alpha(x,y) + z\phi_\alpha & \text{(1.5a)} \\ w(x,y,z) = w^0(x,y) & \text{(1.5b)} \end{cases}$$

– La HSDT (*Higher-order Shear Deformation Theory* – théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs). Initialement développé par Reddy [30], ce modèle,

reprenant les bases de la théorie de déformations en cisaillement au premier ordre, impose une variation des déformations de cisaillement transverse selon un polynôme du troisième ordre permettant aux contraintes de cisaillement transverses d'être nulles aux limites supérieures et inférieures du stratifié. La formulation proposée par Reddy implique donc le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_\alpha(x,y,z) = u^0_\alpha(x,y) - z w^0_{,\alpha}(x,y) + \left(z - \dfrac{4z^3}{3h^2}\right)\gamma^0_{\alpha 3}(x,y) & \text{(1.6a)} \\ w(x,y,z) = w^0(x,y) & \text{(1.6b)} \end{cases}$$

pour un stratifié défini entre $-h/2$ et $h/2$ avec h l'épaisseur totale du stratifié. Ce modèle est particulièrement efficace pour modéliser la flexion de plaques isotropes.

1.4.3/ Modèles de plaque Zig-Zag

Selon Carrera [31], les structures multicouches font apparaitre un champ de déplacement continu par morceaux au travers de l'épaisseur du stratifié. Le changement de pente d'une variable du champ de déplacement entre deux couches considérées parfaitement liées est connu sous le nom d'effet Zig-Zag (ZZ). Cet effet est du aux conditions de continuité interlaminaires des contraintes de cisaillement transverse. Cette théorie a donné lieu à plusieurs modèles ESL ou encore LW. Parmi les modèles ESL ceux-ci sont divisés par Carrera [32] en tant que *Lekhnitskii multilayered theory* [33] (LMT – théorie multicouche de Lekhnitskii) et *Ambartsumian multilayered theory* [34] (AMT – théorie multicouche de Ambartsumian) qui toute deux imposent des conditions de continuité des contraintes de cisaillement transverse, comme proposé par Whitney [35]. Le modèle *Reissner multilayered theory* (RMT – théorie de Reissner multicouche) fait quand à lui appel à des hypothèses de déplacements et de contraintes de cisaillement transverse indépendantes. Dans la continuité des modèles RMT, Murakami [36] propose un jeu de fonctions polynomiales simples capables d'émuler l'effet ZZ. Plusieurs travaux ont ensuite suivi ceux de Murakami, parmi les plus récents, on peut notamment citer ceux de Demassi [37] qui propose des fonctions Zig-Zag d'ordre plus élevées, et de Brischetto [38] qui réalise une étude sur des panneaux sandwichs basée sur des fonctions Zig-Zag.

Il convient aussi de mentionner dans la catégories des modèles ZZ les articles de Pai [39] et de Kim [40] qui proposent deux autres fonctions polynomiales par morceaux (un polynôme pour chaque couche) de description de la déformation de cisaillement transverse permettant la description de la répartition du cisaillement au travers de l'épaisseur du stratifié. Tout deux respectent les conditions de contraintes nulles aux limites supérieures et inférieures du stratifié ainsi que la continuité des contraintes aux interfaces. Les fonctions en résultant sont alors une série de polynômes du troisième ordre, continus entre chaque couche, permettant d'assurer les conditions de continuité requises.

1.4.4/ FORMULATIONS UNIFIÉES

Le nombre de modèles de plaques devenant croissants, plusieurs auteurs ont tentés de proposer des formulations unifiées permettant de réécrire les principaux modèles de plaque. La plus connue de ces formulations est la *Carrera Unified Formulation* [41] (CUF - formulation unifiée de Carrera). Cette formulation permet, en exprimant chaque variable comme présentée dans les équations (1.1) et (1.2), de décrire les modèles respectivement ESL et LW. Cependant, la plupart des travaux faisant référence à la CUF limitent les fonctions $F_i(z)$ à des puissances de z ou des polynômes de Legendre. Par ailleurs, même si la plupart des modèles de plaques peuvent s'exprimer par rapport à la CUF, cette formulation en elle même n'est pas directement un modèle de plaque.

1.4.5/ MODÉLISATION DE L'AMORTISSEMENT

De manière générale, le terme amortissement regroupe deux familles de phénomènes distincts :

- **L'amortissement propre aux matériaux**, très présent dans les matériaux polymères, est généralement dû à un comportement viscoélastique de ceux-ci. C'est à dire que les contraintes sont reliées au déformations non seulement par le module de Young, mais aussi par une constante d'amortissement liée au temps. En d'autres termes, les matériaux viscoélastiques ont une capacité à dissiper l'énergie, caractérisée par leur facteur de perte η.
- **L'amortissement de la structure en elle même** porte lui sur les frottement des pièces d'une structure les une avec les autres.

Pour cette étude, les assemblages des structures étudiées étant réputés parfait, notre modèle se limitera à la modélisation de l'amortissement propre au matériau. La modélisation de ce phénomène est réalisée avec l'aide de modèles rhéologiques. Nous faisons ici une liste des modèles rhéologiques les plus connus :

- **Le modèle de Kelvin-Voigt** est représenté par un amortisseur purement visqueux et un ressort hookéen mis en parallèle comme illustré dans la figure 1.8. Il permet de simuler à la fois les propriétés élastiques et visqueuses d'un matériau ainsi que le fluage mais ne permet cependant pas de prendre en compte les effets tels que la relaxation de contraintes, ou encore l'endommagement.
- **Le modèle de Maxwell** est représenté par ressort hookéen et un amortisseur en série (figure 1.9). Ce modèle permet de prendre en compte la relaxation de contraintes, mais pas l'amortissement hystérique ou le fluage.
- **Le modèle de Zener** est composé d'un ressort hookéen et d'un modèle de Maxwell en parallèle (figure 1.10). Ce modèle combine les aspects du modèle de Maxwell et de Kelvin-Voigt et permet de prendre en compte la relaxation de contraintes et le fluage mais reste plus complexe à mettre en œuvre.

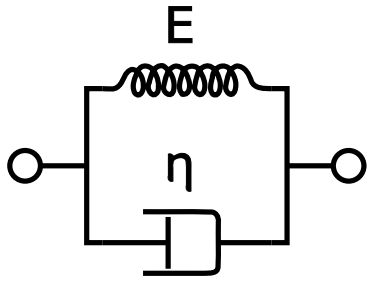


FIGURE 1.8 – Modèle de Kelvin-Voigt.

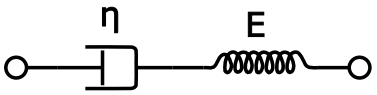


FIGURE 1.9 – Modèle de Maxwell.

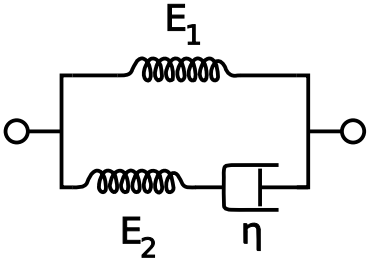


FIGURE 1.10 – Modèle de Zener.

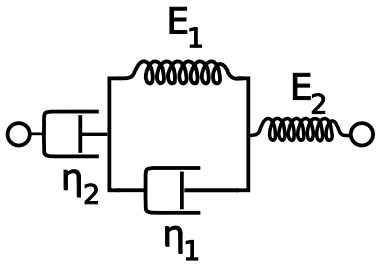


FIGURE 1.11 – Modèle de Burger.

– **Le modèle de Burger** consiste en un modèle de Maxwell et un modèle de Kelvin-Voigt mis en série (figure 1.11). Ce modèle combine lui les aspects du modèle de Maxwell et de Kelvin-Voigt et possède les même capacités de simulation mais possède un élément supplémentaire.

Plus généralement, le choix d'un modèle analogique constitué d'un ensemble de ressorts et d'amortisseurs revient à exprimer une loi de comportement qui lie une composante de la contrainte à une composante de la déformation par des opérateurs linéaires P et Q de la forme :

$$P\sigma = Q\varepsilon. \tag{1.7}$$

Cette démarche est décrite par Williams [42] et Ferry [43]. En régime harmonique, cela revient à exprimer le module de Young complexe comme une fraction polynomiale :

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{\tilde{P}(\omega)}{\tilde{Q}(\omega)} \tag{1.8}$$

Cette étude, étant appliquée au domaine des vibration, les chargements sont donc cycliques, le modèle de Kelvin-Voigt est choisi afin de modéliser le comportement viscoélastique des matériaux. L'implémentation de ce modèle est réalisée à l'aide d'un module de Young complexe. En effet, pour ce modèle, les contraintes $\sigma(t)$ à un instant t dépendent du temps et s'expriment en fonction des déformations $\varepsilon(t)$:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta^{v}\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

où E est le module de Young et η^{v} est le coefficient de viscosité du matériau associé.

Sur un système vibratoire, les variables étant exprimées sous forme complexe ($\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon\exp(j\omega t + \varphi^{''})$), les contraintes s'écrivent alors :

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma\exp(j\omega t + \varphi^{'}) \tag{1.10}$$

$$= \varepsilon\exp(j\omega t + \varphi^{''})\,(E + j\eta^{v}\omega) \tag{1.11}$$

On peut alors choisir d'exprimer un module de Young complexe $\tilde{E} = E + j\eta^{v}\omega$ le symbole ~ désignant une quantité complexe. Ceci permet alors d'écrire la loi de Hooke pour

des grandeurs complexes (contraintes, déformations et module de Young) :

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{E}(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega) \tag{1.12}$$

Il ne faut cependant pas confondre coefficient de viscosité et facteur de perte. En effet, dans la littérature, les deux quantités sont souvent notées η. Dans ce document, nous distinguerons η^v, le coefficient de viscosité et η le facteur de perte, aussi noté $\tan(\delta)$ défini de la façon suivante :

$$\eta(\omega) = \tan(\delta(\omega)) = \frac{\mathrm{Im}\left(\tilde{E}(\omega)\right)}{\mathrm{Re}\left(\tilde{E}(\omega)\right)} = \eta^v \omega \tag{1.13}$$

La prise en compte de l'amortissement dans les poutres peut être implémentée via des méthodes diverses et plusieurs travaux ont été rédigés sur le sujet. DiTaranto [44] propose un modèle prenant en compte l'amortissement sur une poutre permettant d'obtenir une équation différentielle complexe du sixième ordre de vibration de la poutre amortie. Mead et Markus [45] proposent une série de solutions pour cette équation avec des conditions aux limites données. Yan et Dowel [46] proposent une équation de vibration des poutres ou des plaques sandwich non symétriques. Mead [47] propose une comparaison des équations de modèles présentés précédemment. Rao [48, 49] résout par la suite pour des poutres et des plaques avec différentes conditions aux limites le problème des calculs de fréquences propres amorties et le calcul du facteur de perte associé.

1.5/ Méthodes de discrétisation adaptées aux modèles de plaque

Bien qu'indépendante du modèle en lui-même, la méthode de discrétisation choisie pour la simulation d'une structure ne reste pas moins essentielle. Les résultats obtenus sont issus d'un couple *modèle cinématique-méthode de discrétisation*. La qualité des résultats obtenus peut aussi être étroitement liée à la méthode de discrétisation choisie. En effet, certaines méthodes (comme par exemple la procédure de Navier) sont capables de fournir un champ cinématique proche de la solution. Ceci permet alors d'obtenir des résultats de très bonne qualité avec un système de taille réduite.

Par ailleurs le choix de la méthode de discrétisation est généralement étroitement lié au cas étudié. Par exemple, dans sa version classique, la méthode de Rayleigh-Ritz pour les modèles de plaque n'est pas adaptées aux structures non rectangulaires. Par opposition, la méthode des éléments finis, avec un choix judicieux de formulation de l'élément permet de modéliser des structures bien plus complexes. La méthode de discrétisation est donc un élément essentiel de la simulation. Nous proposons ici trois méthodes de discrétisation adaptées à notre modèle de plaque permettant de répondre à différents problèmes.

1.5.1/ Procédure de Navier

Il convient dans un premier temps de mentionner l'existence d'une méthode de discrétisation qui, sous certaines conditions, est exacte. Cette méthode est similaire à celle utilisée dans la plupart des solutions exactes mentionnées dans la section 1.4.1 à la différence qu'elle est applicable à un modèle de plaque. Nous choisissons ici de nous référer à cette méthode par le terme générique de *procédure de Navier* [50]. Cette méthode est adaptée à des cas de chargement particuliers : c'est à dire que chaque variable est projetée sur une fonction d'une base trigonométrique adaptée. Dans sa version la plus classique, cette méthode est utilisée pour simuler une plaque rectangulaire simplement appuyée chargée avec une pression de forme sinusoïdale ; la déflection associée est alors supposée sinusoïdale. Les autres degrés de liberté sont exprimés sur une base trigonométrique correspondante. Cette méthode est très utilisée puisque la qualité des résultats obtenus est uniquement liée à la qualité du modèle cinématique et non à la méthode de discrétisation.

Cette méthode peut être adaptées à un grand nombre de cas d'étude, et est communément implémentée dans le but de tester un modèle. Parmi les travaux sur la flexion des plaques, on peu notamment citer ceux de Lett [51] qui présentent une application de la méthode aux plaques soumises à de larges déformations. Dans un premier temps, uniquement réservée aux stratifiés dont les matériaux constituants ont les axes d'orthotropie confondus avec le repère, la méthode a été étendue aux problèmes dynamiques et aux stratifiés avec une séquence d'empilement antisymétrique [52].

Par ailleurs, les solutions exactes présentées dans la section 1.4.1 se basent aussi sur ces méthodes de discrétisation.

Tout comme pour les solutions exactes, ces méthodes, bien que très utiles pour évaluer la qualité d'un modèle, ne permettent en aucun cas le calcul de cas pratiques. En effet, le fait d'imposer une condition aux limites simplement appuyée sur tout le pourtour de la plaque revient à imposer un déplacement sinusoïdal sur la flèche. Elles sont donc réservées à l'étude de cas académiques.

1.5.2/ Méthode de Rayleigh-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz permet, en projetant les déplacements sur une base donnée, d'implémenter un modèle pour la simulation de plaques rectangulaires soumises à des conditions aux limites et des chargements variés. Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait que, avec un choix de base de projection adapté, les dérivées – successives – des fonctions de la base sont simples à obtenir, et par conséquent, cette méthode est tout à fait adaptée aux modèles nécessitant le calcul des dérivées multiples de la base. La qualité des résultats obtenus est souvent relative au choix de la base. Parmi celles-ci, nous pouvons mentionner la base présentée par Beslin [53] qui

est particulièrement adaptée au calculs de vibration pour diverses conditions aux limites. Cette méthode, classiquement employée en vibration, a été utilisée par Plessy [54] et Loredo [55] pour modéliser une plaque munie d'un ou plusieurs patchs amortissants. Pour ces études, Plessy et Loredo ont implémenté le modèle de Woodcock [56] avec la méthode de Rayleigh-Ritz, couplé à différents indicateurs vibroacoustiques afin de modéliser l'effet de différentes configurations de patchs PCLD.

1.5.3/ Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a progressivement fait son apparition depuis les années 1950. C'est une méthode qui permet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Couplée à des modèles physiques, elle est couramment utilisée comme méthode de discrétisation afin de simuler le comportement de structures complexes proches de cas pratiques. Les principes généraux de la méthode ainsi qu'un certain nombre de raffinements sont regroupés dans le livre de Zienkiewicz [57].

L'utilisation de cette méthode, très répandue dans la milieu industriel, a cependant certaines limites pour des modèles faisant intervenir des dérivées successives des variables. En effet, au contraire de la méthode de Navier ou de Rayleigh-Ritz, l'utilisation des dérivés multiples des fonctions de formes nécessitent l'implémentation d'éléments dont les dérivées des fonctions de forme sont continues entre les éléments. Ce type d'élément, présenté par la suite dans la section 3.3, est beaucoup plus complexe à implémenter et reste assez peu utilisé. Une autre limite de la méthode des éléments finis est le verrouillage des plaques en cisaillement. En effet, certains modèles de plaques nécessitent un degré d'interpolation inférieur pour les cisaillements transverses par rapport à la flèche. Cette contrainte, bien que théoriquement mineure, peut aussi rendre l'implémentation de ces modèles de plaque plus complexe.

1.6/ Optimisation de l'amortissement dans une structure patchée

L'optimisation du dimensionnement des traitements amortissants viscocontraints est une des finalités de la modélisation de ceux-ci. Dans le but de maximiser leur efficacité et de limiter l'ajout de masse au système, un travail d'optimisation est nécessaire.

Nous pouvons tout d'abord citer les travaux de Lifshitz [58] traitant du rapport d'épaisseurs optimal entre la couche de matériau viscoélastique et la couche de contrainte pour un sandwich. Cette étude peut être étendue aux plaques complètement recouvertes de patchs amortissants puisque ces structures peuvent également être considérées comme des sandwich asymétriques.

Dans les cas pratiques et pour des raisons de limitations de la masse, il est rare qu'une structure soit complètement recouverte, il est donc nécessaire d'optimiser la taille et l'emplacement des patchs. Lors du recouvrement partiel d'une plaque de dispositifs amortissants, tels que ceux présentés dans la section 1.2.1, un choix pertinent de la taille et la position des patchs permet de maximiser l'amortissement des amplitudes vibratoires. Or, aucune règle générale de dimensionnement des patchs n'est établie à ce jour, et de nombreux travaux mettant en œuvre une grande variété de méthodes d'optimisation ont été publiés. Plunkett et Lee [59] furent parmi les premiers à proposer une optimisation de la dimension de patchs sur une poutre. Ils proposent de couper la couche de contrainte en plusieurs sections, la taille de ces section dépendant de la rigidité totale de la poutre. Nokes et Nelson [60] furent parmi les premiers à chercher à optimiser l'amortissement d'une poutre partiellement recouverte. Cette étude montre que pour certains cas, l'amortissement maximum n'est pas nécessairement obtenu avec un recouvrement total de la poutre. Zheng [61] propose une minimisation de l'énergie vibratoire à l'aide d'un algorithme génétique pour une poutre munie d'un seul patch. Zheng [62] présente par la suite, une comparaison de quatre algorithmes d'optimisation : une approximation par la méthode des sous-problèmes, une méthode d'optimisation du premier ordre, un algorithme séquencé quadratique, et un algorithme génétique. D'autres algorithmes, tels qu'une méthode basée sur des gradients développée par Lee [63] ou encore Alvelid [64] et un automate cellulaire proposé par Chia [65, 66], ont étés implémentés ; quoi qu'il en soit, les résultats apportés par ces algorithmes n'ont pas permis d'apporter de solution générale au problème du recouvrement partiel des plaques.

Comme suggéré par Perry [67], il est donc possible de séparer les algorithmes d'optimisation en deux catégories distinctes : ceux basés sur des principes mathématiques rigoureux tels que la méthode des gradients conjugués, et les méthodes non usuelles basées sur des concepts heuristiques tels que les algorithmes génétiques.

La principale limite des méthodes heuristiques est généralement leur coût de calcul élevé : la plupart d'entre eux nécessitent de nombreux calculs sur différentes configurations avant de converger vers une solution. L'intérêt d'un modèle de plaque permettant le calcul des structures patchées prend alors tout son sens : les modèles de plaques capables de simuler de façon précise avec un nombre de degrés de liberté limité permettent de minimiser le coût d'utilisation de tels algorithmes.

Cette première catégorie d'algorithme, bien que très efficace sur des problèmes simples, peut se heurter à divers problèmes lorsque le nombre de variables à optimiser est important. Le principal problème étant que l'algorithme peut converger sur un minimum local sans trouver la solution optimale au problème.

Enfin, la plupart des études réalisées à ce jour font appel à des modèles de plaque (ou de poutre) simplifiés n'utilisant pas de description fine du cisaillement et limitant par conséquent la capacité de ces algorithmes à obtenir des résultats satisfaisants.

1.7/ CONCLUSION

Les éléments présentés dans cette section montrent de récentes tendances qui impliquent de nombreux changements dans les méthodes de calculs. D'une part, les assemblages, qui étaient jusqu'à présent composés de matériaux isotropes, deviennent des assemblages complexes, incorporant des matériaux avec et des propriétés fortement anisotropes. Les besoins de modélisation des structures évoluent fortement, et bien que la plupart des problèmes soient théoriquement résolvables avec des méthodes tridimensionnelles et que les capacités de calculs des ordinateurs modernes soient très importantes, les modèles de plaques posés sur des hypothèses cinématiques restent indispensables pour permettre le calcul sur de larges structures ou encore l'utilisation d'algorithmes d'optimisation tels que les algorithmes génétiques.

2

MODÈLE ÉTABLI SUR LA BASE DU CHAMP DE DÉPLACEMENTS

Ce chapitre présente un modèle ESL générique permettant de décrire le comportement d'une plaque multicouche composée de plusieurs plis orthotropes admettant une variation de la déformation cisaillement transverse au travers de l'épaisseur. La variation de la déformation de cisaillement transverse est décrite au moyen d'un jeu de fonctions appelées *warping functions* (fonctions de description du cisaillement transverse). Le principal avantage de cette formulation est sa souplesse : en effet, différents jeux de *warping functions* peuvent être implémentés, permettant ainsi de mettre en œuvre différents modèles. Ceci confère à cette formulation une capacité à reproduire les champs cinématiques d'autres modèles, permettant ainsi de retrouver les formulations de plaques classiques (notamment la FSDT et HSDT), les modèles issus de littérature fonctionnant à l'aide de *warping functions*, ainsi que de proposer et d'implémenter de manière aisée d'autres jeux de fonction. Du fait de sa polyvalence, ce modèle sera celui utilisé tout au long de ce document ; seuls les *warpings functions* varient. Le modèle, sous sa forme actuelle, est celui décrit en détails par Loredo [55]. Toutefois certaines publications antérieures [68, 40] comprenant des *warpings functions* utilisent un modèle similaire sans expliciter le champ de déplacements associé ou une formulation claire permettant de les implémenter.

Les sections 2.1 à 2.6 présentent le modèle, son champ de déplacements ainsi que les équations d'équilibre associées. La section 2.7 présentent différents jeux de *Warping Functions* permettant de formuler plusieurs modèles dont les modèles classiques FSDT et HSDT (il a été choisi d'ignorer les modèles de Love-Kirchhoff puisque celui-ci ne décrit pas de cisaillement transverse).

2.1/ DÉFINITION D'UN STRATIFIÉ

Pour un stratifié composé de N couches, toutes les quantités sont exprimées au plan de référence, où par convention $z = 0$. Classiquement, les modèles de plaques positionnent

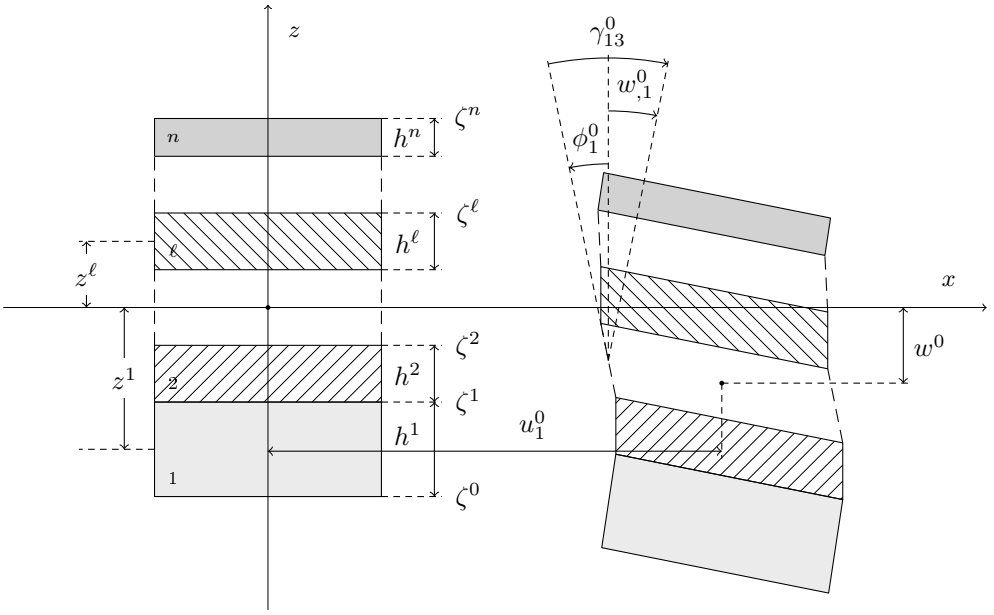


FIGURE 2.1 – Paramètres géométriques de la structure multicouche (présentée à gauche dans un état non déformé) et définition des déplacements.

les stratifiés entre $h/2$ et $-h/2$, où h est la hauteur totale du stratifié, et le plan milieu est plan de référence ; la présente formulation se veut souple et permet de choisir le plan de référence. On pourra donc choisir de prendre comme plan de référence, selon les cas :
– le plan milieu du stratifié,
– le plan milieu d'une couche de référence,
– un autre plan choisi de manière arbitraire.

Cette souplesse permet notamment l'étude de plaques inhomogènes, par exemples celles équipées de patchs viscocontraints comme présenté dans la section 1.2.1. On remarque qu'il est donc possible d'ajouter des couches au dessous de la couche de référence. Par ailleurs, afin de pouvoir formuler les *warpings functions* de certaines formulations (notamment celles de Woodcock [56, 69], Pai [39] et Kim [40]), lorsque le plan de référence est choisi à l'interface de deux couches, il faut attribuer le plan de référence à une couche donnée.

Les valeurs des variables au plan de référence sont notées avec un exposant 0. La figure 2.1 illustre les définitions suivantes :
– z^ℓ est l'excentrement du plan milieu de la couche ℓ par rapport au plan de référence.
– la $\ell^{\text{ième}}$ couche a une hauteur h^ℓ et est située entre les élévations ζ^ℓ et $\zeta^{\ell+1}$, d'où $h^\ell = \zeta^{\ell+1} - \zeta^\ell$.

2.2/ GÉNÉRALITÉS SUR LE CHAMP DE DÉPLACEMENTS

Le champ de déplacements de chaque point s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x,y,z) = u^0_\alpha(x,y) - z w^0_{,\alpha}(x,y) + \varphi_{\alpha\beta}(z)\gamma^0_{\beta 3}(x,y) & \text{(2.1a)} \\ w(x,y,z) = w^0(x,y) & \text{(2.1b)} \end{cases}$$

où l'exposant 0 représente les quantités de la couche de référence. Les variables u^0_1, w^0, $w^0_{,1}$ et γ^0_{13} sont représentées dans la figure 2.1.

La méthode choisie pour décrire cette variation de la déformation de cisaillement transverse au travers de l'épaisseur est d'utiliser la dérivée d'une *Warping Function* qui établi le lien de proportionnalité entre le cisaillement sur le plan de référence et la valeur du cisaillement en tout point de l'épaisseur de la plaque. Ceci pose donc l'hypothèse que, puisque $\varphi_{\alpha\beta,3}(z)$ ne dépend pas des coordonnées x et y, la variation du cisaillement au travers de l'épaisseur de la plaque est constante quelque soit x et y.

$$\gamma_{\alpha 3}(x,y,z) = \varphi_{\alpha\beta,3}(z)\gamma^0_{\beta 3}(x,y) \tag{2.2}$$

et on choisira donc :

$$\varphi_{\alpha\beta,3}(0) = \delta^K_{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

L'intégrale de la dérivée de la *warping function* $\int_{\zeta_0}^{z} \gamma_{\alpha 3,3}(z)\mathrm{d}z$ permet de retrouver l'angle du à la déformation de cisaillement. Les conditions cinématiques imposées par le champ de déplacement de l'équation (2.1) nous permettent d'écrire :

$$\varphi_{\alpha\beta}(0) = 0 \tag{2.4}$$

Le champ de déplacements en tout point de la plaque est ensuite décrit par l'équation (2.1) et ne dépend plus que des cinq paramètres de la couche de référence : u^0_1, u^0_2 w^0_3, γ^0_{13} et γ^0_{23}.

2.3/ CHAMPS DE DÉFORMATIONS ET DE CONTRAINTES

Le champ de déformations issu de l'équation (2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta}(x,y,z) = \varepsilon^0_{\alpha\beta}(x,y) - z w^0_{,\alpha\beta}(x,y) + \dfrac{1}{2}\left(\varphi_{\alpha\gamma}(z)\gamma^0_{\gamma 3,\beta}(x,y) + \varphi_{\beta\gamma}(z)\gamma^0_{\gamma 3,\alpha}(x,y)\right) & \text{(2.5a)} \\ \varepsilon_{\alpha 3}(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\varphi'_{\alpha\beta}(z)\gamma^0_{\beta 3}(x,y) & \text{(2.5b)} \\ \varepsilon_{33}(x,y,z) = 0 & \text{(2.5c)} \end{cases}$$

On remarque que les $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$, $w^0_{,\alpha\beta}$, $\gamma^0_{\gamma 3,\beta}$ et $\gamma^0_{\beta 3}$ forment un jeu de 12 variables généralisées indépendantes que l'on considère pour ce modèle.

Afin de réduire la relation contraintes-déformations à cinq variables comme pour tout modèle de plaque classique, on suppose un état de contraintes planes généralisées dans la structure. Cela revient donc à poser pour hypothèse que $\sigma_{33}(x,y,z) = 0$. On élimine alors ε_{33} pour obtenir la loi de Hooke modifiée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}(z) \\ \sigma_{22}(z) \\ \sigma_{23}(z) \\ \sigma_{13}(z) \\ \sigma_{12}(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1111}(z) & Q_{1122}(z) & 0 & 0 & Q_{1112}(z) \\ Q_{1122}(z) & Q_{2222}(z) & 0 & 0 & Q_{2212}(z) \\ 0 & 0 & C_{2323}(z) & C_{1323}(z) & 0 \\ 0 & 0 & C_{1323}(z) & C_{1313}(z) & 0 \\ Q_{1112}(z) & Q_{2212}(z) & 0 & 0 & Q_{1212}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(z) \\ \varepsilon_{22}(z) \\ \gamma_{23}(z) \\ \gamma_{13}(z) \\ \gamma_{12}(z) \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

où $Q_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sont les rigidités de contraintes planes généralisées avec

$$Q_{\alpha\beta\delta\gamma} = C_{\alpha\beta\delta\gamma} - \frac{C_{\alpha\beta 33} C_{33\gamma\delta}}{C_{3333}} \tag{2.7}$$

De même il est possible d'évaluer ε_{33} résultant de l'effet Poisson avec :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{C_{\alpha\beta 33}}{C_{3333}} \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{2.8}$$

Avec l'aide des équations (2.5) et (2.6), il est ensuite possible d'écrire le champ de contrainte à partir des 12 variables généralisées citées plus haut.

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(x,y,z) = Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(z) \left(\varepsilon^0_{\gamma\delta}(x,y) - z w^0_{,\gamma\delta}(x,y) + \varphi_{\gamma\mu}(z) \gamma^0_{\mu 3,\delta}(x,y) \right) & \text{(2.9a)} \\ \sigma_{\alpha 3}(x,y,z) = C_{\alpha 3 \beta 3} \varphi'_{\beta\mu}(z) \gamma^0_{\mu 3}(x,y) & \text{(2.9b)} \\ \sigma_{33}(x,y,z) = 0 & \text{(2.9c)} \end{cases}$$

La disparition du terme $1/2$ de l'équation (2.5a) dans l'équation (2.9a) n'est pas évidente. La démonstration, en omettant les x, y, et z, est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\varphi_{\gamma\mu} \gamma^0_{\mu 3,\delta} + \varphi_{\delta\mu} \gamma^0_{\mu 3,\gamma} \right) &= \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_{\gamma\mu} \gamma^0_{\mu 3,\delta} + \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_{\delta\mu} \gamma^0_{\mu 3,\gamma} \\ &= \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_{\gamma\mu} \gamma^0_{\mu 3,\delta} + \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\delta\gamma} \varphi_{\gamma\mu} \gamma^0_{\mu 3,\delta} \\ &= Q_{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_{\gamma\mu} \gamma^0_{\mu 3,\delta} \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.4/ ÉNERGIE DE DÉFORMATION

Il est possible de calculer la densité d'énergie de déformation $J = 1/2 \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}$ à partir des formules (2.5) et (2.9) intégrées au travers de l'épaisseur pour obtenir une densité d'énergie

de déformation surfacique $J(x, y)$:

$$J = \frac{1}{2}\int_{\zeta_0}^{\zeta_n} \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\mathrm{d}z \tag{2.11}$$

On remplace par le champ de déplacement et on rappelle que avec les hypothèses de contraintes planes $\sigma_{33} = 0$.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int_{\zeta_0}^{\zeta_n} \left(\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha 3}\sigma_{\alpha 3} + \varepsilon_{33}\sigma_{33}\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_{\zeta_0}^{\zeta_n} \left[\left(\varepsilon^0_{\alpha\beta} - zw^0_{,\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\varphi_{\alpha\gamma}(z)\gamma^0_{\gamma 3,\beta} + \varphi_{\beta\gamma}(z)\gamma^0_{\gamma 3,\alpha}\right)\right)\sigma_{\alpha\beta} + 2\frac{1}{2}\varphi'_{\alpha\beta}(z)\gamma^0_{\beta 3}\sigma_{\alpha 3}\right]\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_{\zeta_0}^{\zeta_n} \left[\left(\varepsilon^0_{\alpha\beta} - zw^0_{,\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\gamma}(z)\gamma^0_{\gamma 3,\beta}\right)\sigma_{\alpha\beta} + \varphi'_{\alpha\beta}(z)\gamma^0_{\beta 3}\sigma_{\alpha 3}\right]\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ce qui peut aussi être réécrit :

$$J = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^0_{\alpha\beta}N_{\alpha\beta} - w^0_{,\alpha\beta}M_{\alpha\beta} + \gamma^0_{\gamma 3,\beta}P_{\gamma\beta} + \gamma^0_{\beta 3}Q_\beta\right] \tag{2.13}$$

avec les quantités suivantes que sont les forces généralisées :

$$\begin{cases} \{N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, P_{\gamma\beta}\} = \displaystyle\int_{\zeta^0}^{\zeta^n} \{1, z, \varphi_{\alpha\gamma}(z)\}\sigma_{\alpha\beta}(z)\mathrm{d}z & \text{(2.14a)} \\ Q_\beta = \displaystyle\int_{\zeta^0}^{\zeta^n} \varphi_{\alpha\beta,3}(z)\sigma_{\alpha 3}(z)\mathrm{d}z & \text{(2.14b)} \end{cases}$$

Chaque force généralisée est associée à un déplacement généralisé dans la formule de l'énergie de déformation dans l'équation (2.13).

$N_{\alpha\beta}$ et $M_{\alpha\beta}$ sont respectivement les forces de membranes et les moments de courbure, et $P_{\alpha\beta}$ Q_α sont des moments spécifiques associés aux *warping functions*, *i. e.* associés au comportement de cisaillement transverse. On remarque que $P_{\alpha\beta} \neq P_{\beta\alpha}$ ce qui, dans le cas général, donne un jeu de 12 forces généralisées.

On remarque que dans le cas d'une plaque patchée, et donc inhomogène sur le plan (x, y), les bornes d'intégration ζ^0 et ζ^n peuvent varier en fonction de la présence d'un patch ou non.

Les calculs des forces généralisées obtenues à partir des équations (2.9) et (2.14) donnent :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon^0_{\gamma\delta} + B_{\alpha\beta\gamma\delta}(-w^0_{,\gamma\delta}) + E_{\alpha\beta\mu\delta}\gamma^0_{\mu 3,\delta} & \text{(2.15a)} \\ M_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon^0_{\gamma\delta} + D_{\alpha\beta\gamma\delta}(-w^0_{,\gamma\delta}) + F_{\alpha\beta\mu\delta}\gamma^0_{\mu 3,\delta} & \text{(2.15b)} \\ P_{\alpha\beta} = E_{\gamma\delta\alpha\beta}\varepsilon^0_{\gamma\delta} + F_{\gamma\delta\alpha\beta}(-w^0_{,\gamma\delta}) + G_{\alpha\beta\mu\delta}\gamma^0_{\mu 3,\delta} & \text{(2.15c)} \\ Q_\alpha = H_{\alpha 3\beta 3}\gamma^0_{\beta 3} & \text{(2.15d)} \end{cases}$$

où les rigidités généralisées suivantes ont été introduites :

$$\begin{cases} \{A_{\alpha\beta\gamma\delta}, B_{\alpha\beta\gamma\delta}, D_{\alpha\beta\gamma\delta}, E_{\alpha\beta\mu\delta}, F_{\alpha\beta\mu\delta}, G_{\nu\beta\mu\delta}\} = \displaystyle\int_{\zeta^0}^{\zeta^n} Q_{\alpha\beta\gamma\delta}\{1, z, z^2, \varphi_{\gamma\mu}(z), z\varphi_{\gamma\mu}(z), \varphi_{\alpha\nu}(z)\varphi_{\gamma\mu}(z)\}\mathrm{d}z \\ H_{\alpha 3\beta 3} = \displaystyle\int_{\zeta^0}^{\zeta^n} \varphi_{\gamma\alpha,3}(z) C_{\gamma 3\delta 3} \varphi_{\delta\beta,3}(z)\mathrm{d}z \end{cases} \tag{2.16a}$$

(2.16b)

L'obtention des $N_{\alpha\beta}$ et $M_{\alpha\beta}$ est directe, mais une attention particulière doit être apportée au calcul des $P_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} &= \int_{\zeta^0}^{\zeta^n} \varphi_{\mu\alpha}(z)\sigma_{\mu\beta}(z)\mathrm{d}z \\ &= \int_{\zeta^0}^{\zeta^n} \varphi_{\mu\alpha}(z) Q_{\mu\beta\gamma\delta}(z) \left(\varepsilon^0_{\gamma\delta} - z w^0_{,\gamma\delta} + \varphi_{\gamma\nu}(z)\gamma^0_{\nu 3,\delta}\right)\mathrm{d}z \\ &= E_{\gamma\delta\alpha\beta}\varepsilon^0_{\gamma\delta} + F_{\gamma\delta\alpha\beta}(-w^0_{,\gamma\delta}) + G_{\alpha\beta\mu\delta}\gamma^0_{\mu 3,\delta} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dans cette dernière expression, les $E_{\gamma\delta\alpha\beta}$ et $F_{\gamma\delta\alpha\beta}$ sont identifiés avec l'aide de la symétrie majeure du tenseur $Q_{\mu\beta\gamma\delta}(z)$.

Les tenseurs $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$ héritent des symétries du tenseur de Hooke, une symétrie pour chaque paire d'indice appelée *petite symétrie*, et la *grande symétrie* qui permet l'inversion de deux paires d'indices, cette dernière étant reliée à l'existence de l'énergie de déformation. Les tenseurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ perdent la symétrie sur la dernière paire d'indices, faisant disparaitre la grande symétrie. Le tenseur $\mathbf{G}$ perd la symétrie sur les deux paires d'indices, mais garde la grande symétrie :

$$\begin{cases} \text{Pour les tenseurs } \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D} : & A_{\beta\alpha\gamma\delta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\gamma\delta\alpha\beta} = A_{\gamma\delta\beta\alpha} \\ \text{pour les tenseurs } \mathbf{E}, \mathbf{F} : & E_{\beta\alpha\gamma\delta} = E_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq E_{\gamma\delta\alpha\beta} \neq E_{\gamma\delta\beta\alpha} \\ \text{pour les tenseurs } \mathbf{G} : & G_{\beta\alpha\gamma\delta} \neq G_{\alpha\beta\gamma\delta} = G_{\gamma\delta\alpha\beta} \neq G_{\delta\gamma\beta\alpha} \end{cases} \tag{2.18}$$

On dénombre donc 6 coefficients indépendants pour $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$, 12 pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$, 10 pour $\mathbf{G}$, et 3 pour $\mathbf{H}$. Donc ce modèle de plaque a un total de 55 coefficients de rigidité indépendants dans le cas le plus général. Il est à noter que d'autres auteurs font référence à cette même formulation écrite sous d'autres formes [55, 69, 56]. Les forces généralisées

sont alors placées dans des vecteurs :

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{22} \\ P_{12} \\ P_{21} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

et il en va de même pour les déformations généralisées :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon^0_{11} \\ \epsilon^0_{22} \\ \epsilon^0_{12} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} -w^0_{,11} \\ -w^0_{,22} \\ -2w^0_{,12} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma^0_{13,1} \\ \gamma^0_{23,2} \\ \gamma^0_{13,2} \\ \gamma^0_{23,1} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma^0_{13} \\ \gamma^0_{23} \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

Les forces généralisées sont alors liées aux déformations généralisées par deux matrices de taille 10×10 et 2×2, remplies des rigidités généralisées de l'équation (2.16) :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E^T} & \mathbf{F^T} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\Gamma} \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{Q}\} = [\mathbf{H}]\{\boldsymbol{\gamma}\} \tag{2.21}$$

2.5/ ÉNERGIE CINÉTIQUE

La densité d'énergie cinétique surfacique $E_c(x,y)$ de la structure s'écrit :

$$\begin{aligned} E_c(x,y) &= \frac{1}{2}\int_{\zeta^0}^{\zeta^n} \rho(x,y,z)\left(\dot{u}_\alpha(x,y,z)\dot{u}_\alpha(x,y,z) + \dot{w}(x,y,z)\dot{w}(x,y,z)\right) \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_{\zeta^0}^{\zeta^n} \rho(z)\Big[\left(\dot{u}^0_\alpha - z\dot{w}^0_{,\alpha} + \varphi_{\alpha\beta}(z)\dot{\gamma}^0_{\beta 3}\right)\left(\dot{u}^0_\alpha - z\dot{w}^0_{,\alpha} + \varphi_{\alpha\beta}(z)\dot{\gamma}^0_{\beta 3}\right) + (\dot{w}^0)^2\Big]\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_{\zeta^0}^{\zeta^n} \rho(z)\Big[\dot{u}^0_\alpha\dot{u}^0_\alpha - 2z\dot{u}^0_\alpha\dot{w}^0_{,\alpha} + 2\dot{u}^0_\alpha\varphi_{\alpha\beta}(z)\dot{\gamma}^0_{\beta 3} + z^2\dot{w}^0_{,\alpha}\dot{w}^0_{,\alpha} \\ &\qquad - 2z\dot{w}^0_{,\alpha}\varphi_{\alpha\beta}(z)\dot{\gamma}^0_{\beta 3} + \varphi_{\alpha\beta}(z)\dot{\gamma}^0_{\beta 3}\varphi_{\alpha\mu}(z)\dot{\gamma}^0_{\mu 3} + (\dot{w}^0)^2\Big]\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{2.22}$$

Pour des raisons de simplification d'écriture, les x et y ont été enlevés dans les deux dernières lignes de cette formule.

On voit alors que l'énergie cinétique peut s'écrire au moyen des vitesses généralisées $\dot{u}^0_1$, $\dot{u}^0_2$, $\dot{w}^0$, $\dot{\gamma}^0_{13}$ et $\dot{\gamma}^0_{23}$ et des masses généralisées :

$$\{R, S, T, U_{\alpha\beta}, V_{\alpha\beta}, W_{\alpha\beta}\} = \int_{\zeta^0}^{\zeta^n} \rho(z)\{1, z, z^2, \varphi_{\alpha\beta}(z), \varphi_{\alpha\beta}(z)z, \varphi_{\mu\alpha}(z)\varphi_{\mu\beta}(z)\}\mathrm{d}z \tag{2.23}$$

On remarque que $U_{\alpha\beta}$ et $V_{\alpha\beta}$ sont des tenseurs antisymétriques mais $W_{\alpha\beta}$ est symétrique.

Il y a donc 14 coefficients de masse indépendants à prendre en compte. La densité surfacique d'énergie cinétique peut alors s'écrire :

$$E_c(x,y) = \frac{1}{2}\Big(R\dot{u}^0_\alpha\dot{u}^0_\alpha - 2S\,\dot{u}^0_\alpha\dot{w}^0_{,\alpha} + 2U_{\alpha\beta}\dot{u}^0_\alpha\dot{\gamma}^0_{\beta 3} + T\dot{w}^0_{,\alpha}\dot{w}^0_{,\alpha} \\ - 2V_{\alpha\beta}\dot{w}^0_{,\alpha}\dot{\gamma}^0_{\beta 3} + W_{\alpha\beta}\dot{\gamma}^0_{\alpha 3}\dot{\gamma}^0_{\beta 3} + R(\dot{w}^0)^2\Big)\mathrm{d}z \tag{2.24}$$

2.6/ Équations d'équilibre du système

En négligeant les forces extérieures, et en gardant la même convention sur les indices, les équations d'équilibre de la mécanique des milieux continus, s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha 3,3} = \rho\ddot{u}_\alpha & \text{(2.25a)} \\ \sigma_{\alpha 3,\alpha} + \sigma_{33,3} = \rho\ddot{u}_3 & \text{(2.25b)} \end{cases}$$

L'intégration des équations (2.25) au travers de l'épaisseur, avec l'aide des équations (2.1), (2.14) et (2.23) donne :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta} + [\sigma_{\alpha 3}(z)]^{\zeta^n}_{\zeta^0} = R\ddot{u}^0_\alpha - S\,\ddot{w}^0_{,\alpha} + U_{\alpha\beta}\ddot{\gamma}^0_{\beta 3} & \text{(2.26a)} \\ Q^c_{\alpha,\alpha} + [\sigma_{33}(z)]^{\zeta^n}_{\zeta^0} = R\ddot{w}^0 & \text{(2.26b)} \end{cases}$$

où les Q^c_α sont les efforts tranchants. Afin d'obtenir des équations supplémentaires, les intégrales pondérées de l'équation (2.25a) au travers de l'épaisseur sont calculées. Les fonctions de pondération sont z et $\varphi_{\alpha\gamma}(z)$. Ceci donne quatre équations supplémentaires :

$$\begin{cases} M_{\alpha\beta,\beta} + [\sigma_{\alpha 3}(z)z]^{\zeta^n}_{\zeta^0} - Q^c_\alpha = S\,\ddot{u}^0_\alpha - T\ddot{w}^0_{,\alpha} + V_{\alpha\beta}\ddot{\gamma}^0_{\beta 3} & \text{(2.27a)} \\ P_{\gamma\beta,\beta} + [\varphi_{\alpha\gamma}(z)\sigma_{\alpha 3}(z)]^{\zeta^n}_{\zeta^0} - Q_\gamma = U_{\alpha\gamma}\ddot{u}^0_\alpha - V_{\alpha\gamma}\ddot{w}^0_{,\alpha} + W_{\gamma\beta}\ddot{\gamma}^0_{\beta 3} & \text{(2.27b)} \end{cases}$$

Soit $q = [\sigma_{33}(z)]^{\zeta^n}_{\zeta^0}$ la valeur du chargement sur la troisième direction. Comme on suppose qu'il n'y a pas de forces tangentielles sur les plans supérieurs et inférieurs de la plaque, donc $\sigma_{\alpha 3}(-h/2) = \sigma_{\alpha 3}(h/2) = 0$. On remarque qu'il n'y a pas de déformation généralisée correspondante aux efforts tranchants Q^c_α. Cette déformation généralisée doit donc être éliminée en remplaçant les valeurs de Q^c_α obtenues avec la formule (2.27a) dans l'équation (2.26b) ce qui permet d'écrire le système d'équations d'équilibre de la plaque :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta} = R\ddot{u}^0_\alpha - S\,\ddot{w}^0_{,\alpha} + U_{\alpha\beta}\ddot{\gamma}^0_{\beta 3} & \text{(2.28a)} \\ M_{\alpha\beta,\beta\alpha} + q = R\ddot{w}^0 + S\,\ddot{u}^0_{\alpha,\alpha} - T\ddot{w}^0_{,\alpha\alpha} + V_{\alpha\beta}\ddot{\gamma}^0_{\beta 3,\alpha} & \text{(2.28b)} \\ P_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = U_{\beta\alpha}\ddot{u}^0_\beta - V_{\beta\alpha}\ddot{w}^0_{,\beta} + W_{\alpha\beta}\ddot{\gamma}^0_{\beta 3} & \text{(2.28c)} \end{cases}$$

2.7/ FONCTIONS DE DESCRIPTION DU CISAILLEMENT TRANSVERSE : *Warpings functions*

Les *warpings functions* sont des fonctions permettant la description des déformations et contraintes de cisaillement transverses. Ces fonctions peuvent être obtenues en formant des polynômes (pouvant avoir un jeu de coefficients pour chaque couche) qui respectent (2.2) et (2.3) et une ou plusieurs des conditions suivantes :

– la continuité des *warping functions* à chaque interface afin d'assurer la continuité des déplacements

$$\lim_{z\to\zeta^{\ell}-} \varphi_{\alpha\beta}(z) = \lim_{z\to\zeta^{\ell}+} \varphi_{\alpha\beta}(z) \tag{2.29}$$

– lors de l'intégration des $\varphi^{'}_{\alpha\beta}$, les constantes d'intégration sont choisies de façon à ce que $\varphi_{\alpha\beta}(0) = 0$. Ce qui veut dire que le cisaillement transverse n'a pas d'effet sur le déplacement du plan de référence.

– le respect des conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux limites supérieures et inférieures implique au travers de l'équation (2.9) que les $\varphi^{'}_{\alpha\beta}$ sont nuls aux plans supérieurs et inférieurs du stratifié. D'où

$$\varphi^{'}_{\alpha\beta}(-h/2) = \varphi^{'}_{\alpha\beta}(h/2) = 0 \tag{2.30}$$

– le respect de la condition de continuité de contraintes de cisaillement transverse,

$$\lim_{z\to\zeta^{\ell}-} \sigma_{\alpha 3}(x,y,z) = \lim_{z\to\zeta^{\ell}+} \sigma_{\alpha 3}(x,y,z) \tag{2.31}$$

permet d'écrire une relation sur les $\varphi^{'}_{\alpha\beta}$. On rappelle que,

$$\sigma_{\alpha 3}(x,y,z) = 2C_{\alpha 3\beta 3}(z)\varepsilon_{\beta 3}(x,y,z) = C_{\alpha 3\beta 3}(z)\varphi^{'}_{\beta\gamma}(z)\gamma^{0}_{\gamma 3}(x,y) \tag{2.32}$$

D'où,

$$\lim_{z\to\zeta^{\ell}-} C_{\alpha 3\beta 3}(z)\varphi'_{\beta\gamma}(z) = \lim_{z\to\zeta^{\ell}+} C_{\alpha 3\beta 3}(z)\varphi'_{\beta\gamma}(z) \tag{2.33}$$

Ces *warping functions* sont présentées dans les sections 2.7.1 à 2.7.4.

Par ailleurs il est aussi possible d'obtenir les *warping functions* au travers de méthodes alternatives parmi lesquelles on peut mentionner :

– l'utilisation de solutions analytiques,
– l'intégration sur l'épaisseur du stratifié des équations d'équilibre de la mécanique,
– l'utilisation de résultats de calculs tridimensionnels.

Ces méthodes sont détaillées dans la section 2.7.5.

A titre d'illustration, pour les sections 2.7.1 à 2.7.5, les fonctions φ_{11} et φ_{12} sont tracées pour chaque modèle pour un stratifié composé de trois plis unidirectionnels empilés selon la séquence $[30/-30/30]$. Les caractéristiques d'un pli sont présentées dans le ta-

E_L (Pa)	E_T (Pa)	G_{TT} (Pa)	G_{LT} (Pa)	$\nu_{TT} = \nu_{LT}$
25×10^6	1×10^6	2×10^5	5×10^5	$0,25$

TABLE 2.1 – Propriétés des plis du stratifié utilisé pour les *warping functions* présentées dans ce chapitre.

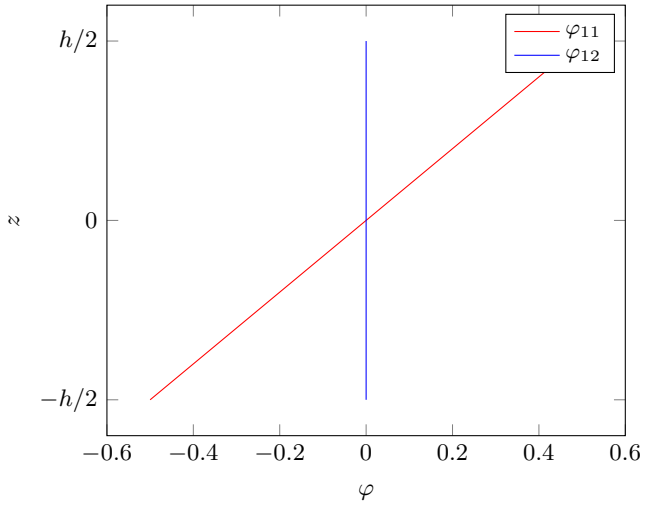


FIGURE 2.2 – *Warping functions* φ_{11} et φ_{12} pour le modèle de Mindlin-Reissner pour un stratifié compris entre $-h/2$ et $h/2$ avec $z^0 = 0$.

bleau 2.1.

2.7.1/ FORMULATION CLASSIQUE : MINDLIN-REISSNER

Le modèle présenté permet d'implémenter cette théorie classique, le choix des *warping functions* est alors fait de manière à ce que le champ de déplacements décrit dans l'équation (2.1) corresponde à celui de l'équation (1.4), d'où

$$\varphi'_{\alpha\beta} = \delta^K_{\alpha\beta} \tag{2.34}$$

2.7.2/ REDDY

Le modèle décrit par Reddy [30] n'est pas habituellement décrit au moyen de *warping functions*. Toutefois cette formulation, désormais classique, revient à l'application des conditions de l'équation (2.30), traduit par un polynôme qui en plus respectera les conditions de l'équation (2.29). En supposant que le stratifié est compris entre $-h/2$ et $h/2$, le polynôme est alors :

$$\varphi_{\alpha\beta} = \delta^K_{\alpha\beta}\left(\frac{z}{h} - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right) \tag{2.35}$$

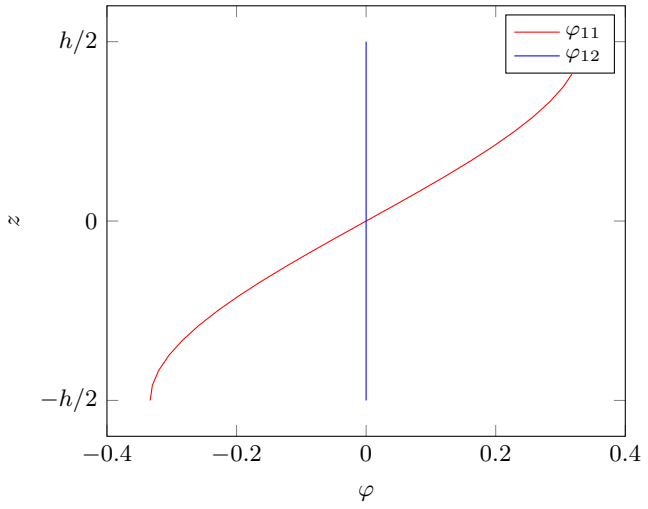


FIGURE 2.3 – *Warping functions* φ_{11} et φ_{12} pour le modèle de Reddy pour un stratifié compris entre $-h/2$ et $h/2$ avec $z^0 = 0$.

2.7.3/ WOODCOCK

Le modèle de Woodcock [56] est basé sur les hypothèses initiales du modèle de Sun & Whitney [70]. Celui-ci formule les énergies potentielle et cinétique au moyen de coefficients faisant intervenir les raideurs, les masses volumiques, ainsi que les hauteurs des couches. Le modèle écrit par Woodcock est généralisé au cas des plis hors axes [69], mais ne décrit pas explicitement le champ de déplacements. Il a été reformulé par Loredo [55] en explicitant le champ de déplacement avec des *warping functions*. Le lien entre la présente formulation et la formulation originale de Woodcock est décrit dans l'annexe A.

Ce modèle est basé sur des hypothèses de continuité de déplacements et de contraintes à chaque interface (équations (2.37) et (2.36)). Le résultat de l'application de ces conditions implique que le champ de déplacement de chaque couche $\ell \in [2..n]$ est lié à celui de la couche de référence. Le modèle décrit le cisaillement transverse avec une variation linéaire par morceaux suivant z, les déformations de cisaillement transverse à l'intérieur d'une couche sont constantes. Les $\varphi_{\alpha\beta}(z)$ sont alors des fonctions linéaires à l'intérieur de chaque couche dont la continuité est assurée aux interfaces entre les couches.

Avec ces hypothèses, le déplacement transverse w et les déformations de cisaillement transverse $\gamma^{\ell}_{\alpha 3}$ sont constants suivant z à l'intérieur de chaque couche. Ces conditions se traduisent donc par :
– la continuité des déplacements

$$u^{\ell}_{\alpha}(x, y, z^{\ell} + h^{\ell}/2) = u^{\ell+1}_{\alpha}(x, y, z^{\ell+1} - h^{\ell+1}/2) \tag{2.36}$$

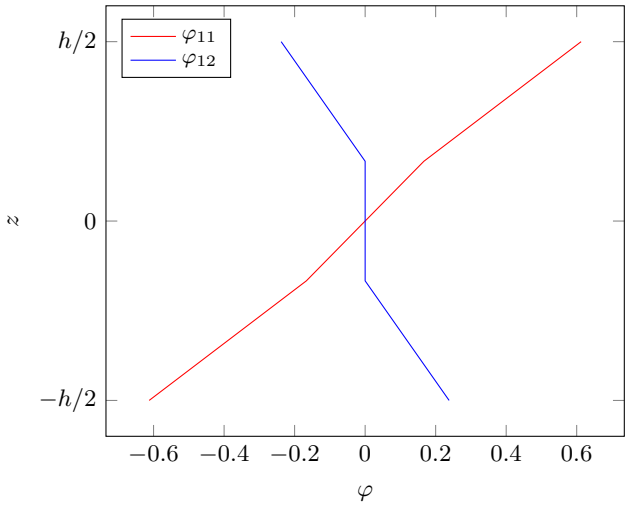


FIGURE 2.4 – *Warping functions* φ_{11} et φ_{12} pour le modèle de Sun et Whitney pour un stratifié compris entre $-h/2$ et $h/2$ avec $z^0 = 0$.

– la continuité des contraintes de cisaillement transverse

$$\sigma^{\ell}_{\alpha 3} = \sigma^{\ell+1}_{\alpha 3} \tag{2.37}$$

Les équations (2.36) et (2.37) permettent donc de lier le champ de déplacements de la couche $(\ell + 1)$ avec celui de la couche ℓ, et, récursivement, au champ de déplacements de la première couche, en suivant le procédé détaillé dans la référence [71].

La seule condition de continuité des contraintes de cisaillement transverse permet de formuler les $\varphi^{'}_{\alpha\beta}$ comme un rapport des rigidités de cisaillement transverse entre le plan de référence et les autres couches :

$$\varphi^{'}_{\alpha\beta}(z) = 4S_{\alpha 3\gamma 3}(z)C_{\gamma 3\delta 3}(0)\delta_{\delta\beta} = 4S_{\alpha 3\gamma 3}(z)C_{\gamma 3\beta 3}(0) \tag{2.38}$$

Les *warping functions* peuvent donc s'écrire :

$$\varphi_{\alpha\beta}(z) = 4C_{\gamma 3\beta 3}(0)\int_0^z S_{\alpha 3\gamma 3}(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{2.39}$$

2.7.4/ *Warping functions* CONSTITUÉES DE POLYÔMES CUBIQUES PAR COUCHE

Les $\varphi^{'}_{\alpha\beta}$ peuvent être composés d'une série de polynômes du second ordre pour chaque couche respectant des conditions des équations (2.30), (2.33) et (2.3).

Les conditions à respecter sont au nombre de $4n + 8$ où n est le nombre de couches. Il est nécessaire d'avoir pour chaque $\varphi^{'}_{\alpha\beta}$, n polynômes d'ordre 2 soit $4 \times n \times 3$ coefficients

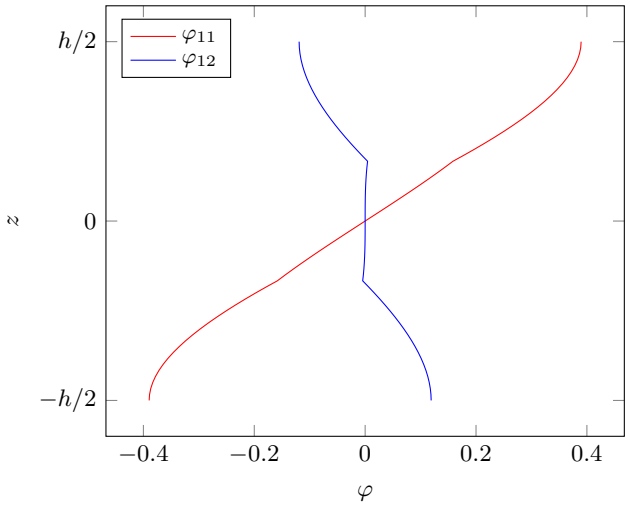


FIGURE 2.5 – *Warping functions* φ_{11} et φ_{12} pour le modèle de Kim pour un stratifié compris entre $-h/2$ et $h/2$ avec $z^0 = 0$.

de la forme

$$\varphi'^{\,i}_{\alpha\beta} = a^i_{\alpha\beta} + b^i_{\alpha\beta} z + c^i_{\alpha\beta} z^2 \tag{2.40}$$

avec avec $i \in [1, n]$. Afin d'équilibrer le nombre de conditions et d'inconnues, on choisit de mettre en commun pour toutes les couches deux des trois coefficients ce qui réduit le nombre de coefficients à $4n + 8$. Plusieurs auteurs ont proposé ce type de formulation parmi lesquels on peut citer Kim [40], qui présente des *warping functions* comme un modèle zig-zag auquel on vient superposer une variation cubique globale afin de respecter les conditions de continuité statiques et géométriques. Les polynômes sont alors de la forme :

$$\varphi'^{\,i}_{\alpha\beta} = a^i_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} z + c_{\alpha\beta} z^2 \tag{2.41}$$

On peut également citer l'article de Pai [39], qui lui propose une méthode relativement proche, les $\varphi_{\alpha\beta}$ sont de la forme

$$\varphi_{\alpha\beta}{}^i = c^i_{\alpha\beta} + d^i_{\alpha\beta} z + a^i_{\alpha\beta} z^2 + b^i_{\alpha\beta} z^3 \tag{2.42}$$

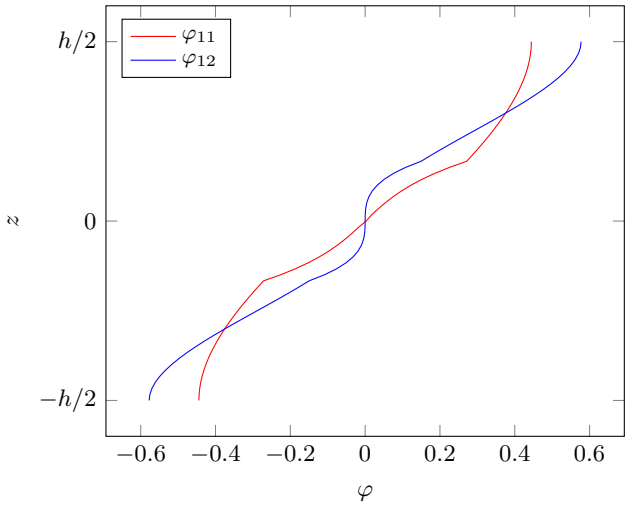


FIGURE 2.6 – *Warping functions* φ_{11} et φ_{12} pour le modèle de Pai pour un stratifié compris entre $-h/2$ et $h/2$ avec $z^0 = 0$.

et il pose les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon^0_{13}(x,y,0) = 0 & \text{(2.43a)} \\ \varepsilon^0_{23}(x,y,0) = 0 & \text{(2.43b)} \\ u^i_1(x,y,z_{i+1}) - u^{i+1}_1(x,y,z_{i+1}) = 0 & \text{(2.43c)} \\ u^i_2(x,y,z_{i+1}) - u^{i+1}_2(x,y,z_{i+1}) = 0 & \text{(2.43d)} \\ \sigma^i_1(x,y,z_{i+1}) - \sigma^{i+1}_1(x,y,z_{i+1}) = 0 & \text{(2.43e)} \\ \sigma^i_2(x,y,z_{i+1}) - \sigma^{i+1}_2(x,y,z_{i+1}) = 0 & \text{(2.43f)} \\ \varepsilon^n_{13}(x,y,z^{n+1}) = 0 & \text{(2.43g)} \\ \varepsilon^n_{23}(x,y,z^{n+1}) = 0 & \text{(2.43h)} \\ & \text{(2.43i)} \end{cases}$$

avec pour la couche de référence, notée J,

$$c^J_{\alpha\beta} = d^J_{12} = d^J_{21} = 0,\ d^J_{11} = d^J_{22} = 1 \tag{2.44}$$

et pour $i = 1 \ldots J-1, J+1 \ldots n$

$$c^i_{12} = c^i_{21} = d^i_{12} = d^i_{21} = a^i_{11} = d^i_{22} = 0,\ d^J_{11} = d^i_{22} = 1 \tag{2.45}$$

Cette méthode diffère de celle de Kim par le choix arbitraire de certains coefficients (équations (2.44) et (2.45))

2.7.5/ *Warping functions* ISSUES DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT

On peut construire des *warping functions* à partir des contraintes de cisaillement issues d'une solution analytique. Nous nous intéresserons à une solution analytique pour une plaque rectangulaire simplement appuyée sous un chargement bisinusoïdal. La méthode de discrétisation employée est celle de Navier, présentée en détails dans la section 3.2. Pour ce cas, les déplacements sont de la forme :

$$\left\{\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ w \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cccccc} u_1^{mn} & \cos(\xi x) & \sin(\eta y) & +\overline{u}_1^{mn} & \sin(\xi x) & \cos(\eta y) \\ u_2^{mn} & \sin(\xi x) & \cos(\eta y) & +\overline{u}_2^{mn} & \cos(\xi x) & \sin(\eta y) \\ w^{mn} & \sin(\xi x) & \sin(\eta y) & +\overline{w}^{mn} & \cos(\xi x) & \cos(\eta y) \\ \gamma_{13}^{mn} & \cos(\xi x) & \sin(\eta y) & +\overline{\gamma}_{13}^{mn} & \sin(\xi x) & \cos(\eta y) \\ \gamma_{23}^{mn} & \sin(\xi x) & \cos(\eta y) & +\overline{\gamma}_{23}^{mn} & \cos(\xi x) & \sin(\eta y) \end{array}\right\} \tag{2.46}$$

avec

$$\xi = \frac{m\pi}{a} \text{ and } \eta = \frac{n\pi}{b}$$

Chaque déplacement est exprimé comme la somme de deux fonctions trigonométriques complémentaires dont les amplitudes sont notées $(.)^{mn}$ et $(\overline{.})^{mn}$ pour la déformée du mode (m,n). Pour le cas statique, on choisira $m = n = 1$.

D'après l'équation (2.9b), on voit que les $\varphi'_{\alpha\beta}$ sont directement liés aux $\sigma_{\alpha 3}$; il est donc possible de proposer des $\varphi'_{\alpha\beta}$ à partir des résultats de l'élasticité tridimensionnelle. Pour cela il est nécessaire définir les $\Psi'_{\alpha\beta}$ de façon à ce que,

$$\sigma_{\alpha 3}(z) = \Psi'_{\alpha\beta}(z)\sigma^0_{\alpha 3} \tag{2.47}$$

Il est, par ailleurs, possible d'écrire la relation suivante,

$$\sigma_{\alpha 3}(z) = C_{\alpha 3\beta 3}\varepsilon_{\beta 3}(z) = C_{\alpha 3\beta 3}(z)\varphi'_{\beta\gamma}(z)\gamma^0_{\gamma 3} = 4C_{\alpha 3\beta 3}(z)\varphi'_{\beta\gamma}(z)S_{\gamma 3\delta 3}(0)\sigma^0_{\delta 3} \tag{2.48}$$

d'où, en identifiant les deux équations précédentes,

$$\Psi'_{\alpha\beta}(z) = 4C_{\alpha 3\delta 3}(z)\varphi'_{\delta\gamma}(z)S_{\gamma 3\beta 3}(0) \tag{2.49}$$

puis,

$$\varphi'_{\alpha\beta}(z) = 4S_{\alpha 3\delta 3}(z)\Psi'_{\delta\gamma}(z)C_{\gamma 3\beta 3}(0) \tag{2.50}$$

Les quatre fonctions $\Psi'_{\alpha\beta}$ sont obtenues à partir des contraintes de cisaillement transverse calculées en deux points A et B distincts de la plaque (voir figure 2.7). Puisque les déplacements de la plaque sont de la forme (2.46), les $\sigma_{\alpha 3}$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma^0_{13} = s_{13}\cos(\xi x)\sin(\eta y) + \overline{s}_{13}\sin(\xi x)\cos(\eta y) & \text{(2.51a)} \\ \sigma^0_{23} = s_{23}\sin(\xi x)\cos(\eta y) + \overline{s}_{23}\cos(\xi x)\sin(\eta y) & \text{(2.51b)} \end{cases}$$

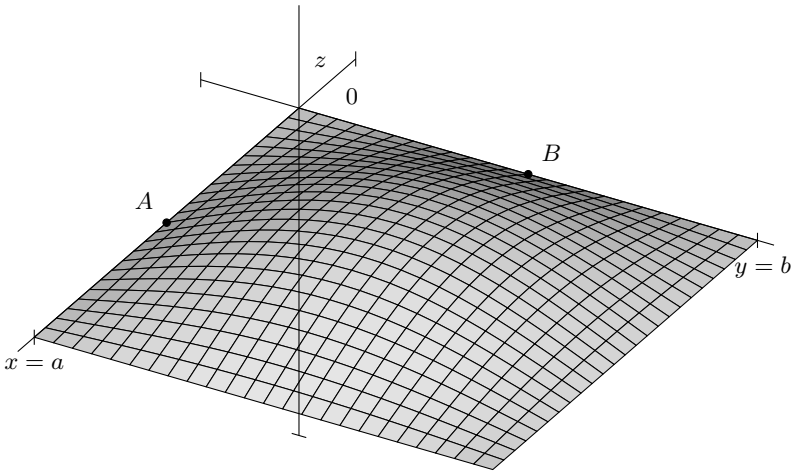


FIGURE 2.7 – Etat déformé de la plaque représentant les points d'évaluation de contraintes de cisaillement transverse.

L'évaluation des s_{13}, $\overline{s}_{13}$, s_{23} et $\overline{s}_{23}$ est donc faite aux points A et B, illustrés sur la figure 2.7. On a :

– au point A, $x = a/2$ et $y = 0$, $\sigma^0_{13} = \overline{s}_{13}$ et $\sigma^0_{23} = s_{23}$
– au point B, $x = 0$ et $y = b/2$, $\sigma^0_{13} = s_{13}$ et $\sigma^0_{23} = \overline{s}_{23}$

Remplacer ces valeurs locales dans la formule (2.47) permet d'obtenir le système suivant :

$$\begin{bmatrix} s_{13} & 0 & \overline{s}_{23} & 0 \\ 0 & s_{23} & 0 & \overline{s}_{13} \\ \overline{s}_{13} & 0 & s_{23} & 0 \\ 0 & \overline{s}_{23} & 0 & s_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi'_{11} \\ \Psi'_{22} \\ \Psi'_{12} \\ \Psi'_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{13}(B) \\ \sigma_{23}(A) \\ \sigma_{13}(A) \\ \sigma_{23}(B) \end{Bmatrix} \tag{2.52}$$

Les $\Psi'_{\alpha\beta}(z)$ sont alors obtenus à partir de la résolution de ce système ; les $\varphi'_{\alpha\beta}(z)$ sont ensuite obtenus en utilisant l'équation (2.50) et en intégrant les $\varphi'_{\alpha\beta}(z)$, avec une constante d'intégration choisie de façon à ce que $\varphi_{\alpha\beta}(0) = 0$, ce qui permet d'obtenir les *warping functions* $\varphi_{\alpha\beta}(z)$. Cette méthode permet donc d'établir les *warping functions* à partir des contraintes de cisaillement d'une plaque soumise à un état de déformation particulier.

Les $\sigma_{\alpha 3}(z)$ peuvent être obtenues de manière exacte à partir de solutions analytiques tridimensionnelles (ce qui correspond au cas décrit ci-dessus). D'autre part, il est possible d'obtenir les contraintes de cisaillement transverse au travers de l'intégration des équations d'équilibre de la mécanique dans un solide et d'obtenir un jeu de *warping functions* à partir de ces équations.

En négligeant les forces volumiques, Les équations d'équilibre de la mécanique dans un solide, s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha 3,3} = \rho \ddot{u}_\alpha & \text{(2.53a)} \\ \sigma_{\alpha 3,\alpha} + \sigma_{33,3} = \rho \ddot{u}_3 & \text{(2.53b)} \end{cases}$$

Les contraintes de cisaillement transverse, pour le cas statique, s'écrivent donc :

$$\sigma_{\alpha 3}(z) = \int_{-h/2}^{z} \sigma_{\alpha\beta,\beta}(z)\mathrm{d}z \tag{2.54a}$$

$$= \int_{-h/2}^{z} Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(z)\left(\varepsilon^{0}_{\gamma\delta,\beta}(x,y) - z w^{0}_{,\gamma\delta\beta}(x,y) + \varphi_{\gamma\mu}(z)\gamma^{0}_{\mu 3,\delta\beta}(x,y)\right)\mathrm{d}z \tag{2.54b}$$

En réutilisant les *warping functions* ainsi obtenues et en répétant ce principe, il est alors possible d'implémenter un algorithme itératif convergeant vers un nouveau jeu de *warping functions*. L'algorithme 1 peut donc être implémenté, sans garantie de convergence, dans le but d'obtenir le résultat pour un cas de chargement statique ou dynamique d'un stratifié quelconque.

Algorithme 1 : Algorithme itératif d'obtention des *warping functions.*

Étape 1 : *initialisation*;
Générer les *warping functions* du modèle HSDT;
Calculer la matrice de rigidité correspondante;
Résoudre le problème statique pour le modèle HSDT;
Assigner la flèche obtenue à la variable w^1;
Obtenir $erreur^1 = tolerance$ et $i = 1$;
Étape 2 : *itérations*;
tant que $\left|erreurr^i\right| >= tolerance$ **faire**
    Calculer les contraintes de cisaillement transverse en utilisant les équations d'équilibre;
    Calculer les nouvelles *warping functions*;
    Calculer la matrice de rigidité correspondante;
    Résoudre le problème statique;
    Assigner la flèche à la variable w^{i+1};
    $erreur^{i+1} = \frac{w^{i+1}-w^i}{w^{i+1}}$;
    $i = i + 1$;

Ces deux dernières méthodes d'obtention des jeux de *warping functions* sont liées aux lois de l'élasticité tridimensionnelle. Bien que les résultats des calculs obtenus avec ces jeux de *warping functions* se basent sur les hypothèses posées par le champ de déplacements de l'équation (2.1), on peut supposer que les résultats obtenus avec ce dernier type de *warping functions* seront de meilleure qualité.

Les résultats numériques associés aux différents jeux de *warping functions* présentés dans ce chapitre sont donnés dans la section 4.1 où la méthode de Navier est utilisée pour comparer les différents modèles et valider le modèle générique.

3

MÉTHODES DE DISCRÉTISATION

De manière générale, un couple modèle-méthode de discrétisation est adapté à la résolution d'un problème donné et produit une solution unique. Par problème, on entend l'ensemble des paramètres caractéristiques d'une simulation (type de plaque, conditions aux limites choisies, excitation) que l'on souhaite réaliser. Un modèle de plaque, est généralement caractérisé par une matrice de comportement, des équations d'équilibre ou encore l'expression de l'énergie potentielle de déformation ou cinétique. Pour un problème donné, le choix d'une méthode de discrétisation est donc souvent rattaché au modèle mécanique, et est aussi établi en fonction de la structure à modéliser, du cas de chargement et des conditions aux limites. Par ailleurs, la plupart des modèles mécaniques peuvent être implémentés avec plusieurs méthodes de discrétisation. En effet, les modèles classiques de la mécanique ainsi que le modèle générique présenté dans le chapitre 2, et de manière plus générale les formulations variationnelles sont pour la plupart résolvables avec la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode des éléments finis. Il conviendra cependant de choisir une méthode de discrétisation adaptée au modèle. Il est par exemple nécessaire de s'assurer que le degré de continuité des fonctions d'interpolation est adapté dans le cas de la méthode des éléments finis. Il en va de même pour le choix de la base de projection dans le cas de la méthode de Rayleigh-Ritz.

Nous décrivons dans ce chapitre trois méthodes de discrétisation différentes adaptées au modèle de plaque présenté dans la chapitre 2, chacune étant associée à un cas test donné. Nous présentons tout d'abord la méthode de Rayleigh-Ritz, puis, la méthode de Navier qui est une adaptation de la méthode de Rayleigh-Ritz pour l'étude d'une plaque simplement appuyée et enfin deux types d'éléments finis adaptés à notre modèle.

3.1/ MÉTHODE DE RAYLEIGH-RITZ

La méthode de Rayleigh-Ritz pour l'étude de plaques en vibration, telle que présentée dans la thèse de Plessy [54], est pour l'occasion adaptée à la simulation de plaques munies de dispositifs amortissants passifs. En effet, les déformées modales d'une plaque sont souvent relativement faciles à exprimer sur une base de projection bidimensionnelle

lorsque celle-ci est correctement choisie. Un autre avantage de la méthode est la facilité d'implémenter des modèles faisant intervenir des dérivées d'ordres supérieurs lorsque la base de projection choisie est de forme trigonométrique. La méthode est donc communément utilisée pour l'analyse des modes et fréquences propres de structures, mais aussi pour étudier la réponse dynamique d'une plaque (ou d'une poutre) soumise à un chargement donné.

3.1.1/ Problème associé

Du fait de la projection de tous les degrés de liberté sur une base, cette méthode de discrétisation est adaptée à la simulation de la vibration de plaques rectangulaires soumises à une excitation quelconque. Nous présentons la méthode au travers de l'étude d'une plaque rectangulaire, bafflée, munie d'un ou plusieurs patchs viscocontraints soumise à une excitation ponctuelle, à une onde plane incidente ou encore à un champ diffus. La figure 3.1 illustre le cas étudié.

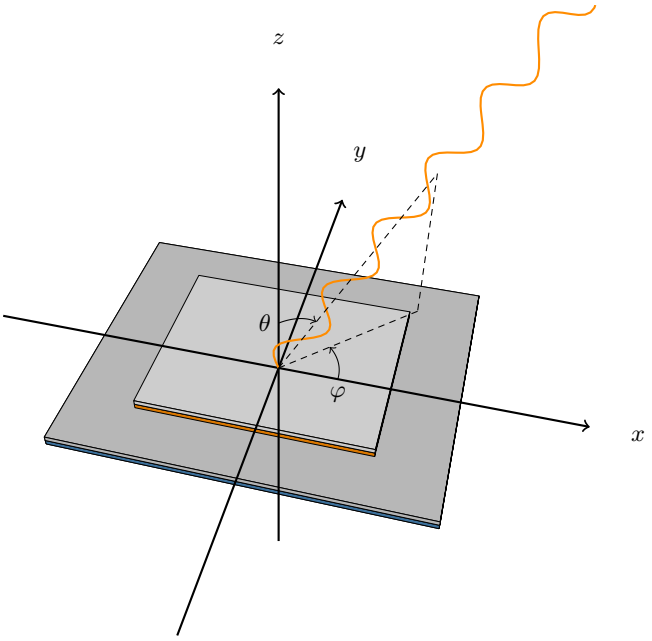


Figure 3.1 – Représentation d'une plaque rectangulaire bafflée soumise à une onde plane incidente d'angles θ et φ.

3.1.2/ Structure modélisée

Le système est constitué d'une plaque support et de un ou plusieurs patchs viscocontraints. La plaque support peut être constituée d'une ou plusieurs couches, et chaque patch peut lui aussi être constitué d'une ou plusieurs couches de matériaux orthotro-

piques dont les propriétés peuvent varier avec la fréquence. Le principe de superposition est utilisé pour obtenir les matrices de masse et de rigidité de la plaque patchée comme illustré dans la figure 3.2. L'énergie cinétique totale E_k^{tot} est composée de l'énergie cinétiqueE_k^{S} de la plaque de base sur la surface totale de la plaque S à laquelle on soustrait l'énergie cinétique de la plaque de base sur la surface du patch S_c ajoutée de l'énergie cinétique de l'empilement composé de la plaque de base et du patch E_k^{d} sur la surface du patch S_c. Le même principe est utilisé pour l'énergie de déformation E_s. On remarque par ailleurs qu'il est possible d'apposer des patchs de chaque côté de la plaque.
La figure 3.3 illustre les différentes variables mises en jeu pour décrire la géométrie de

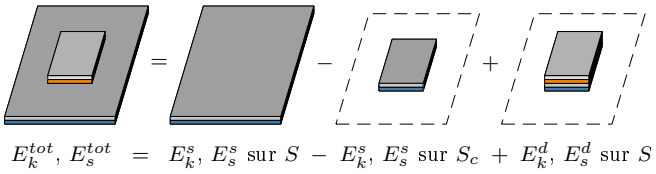


FIGURE 3.2 – Principe de superposition pour la plaque support et un patch viscocontraint.

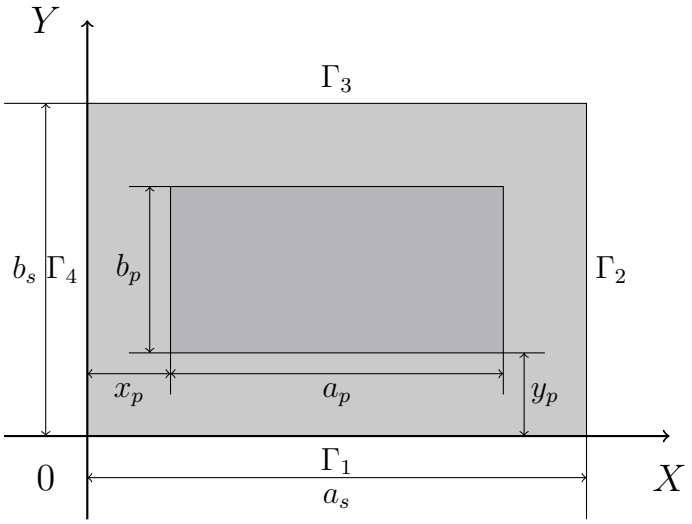


FIGURE 3.3 – Paramètre géométriques de la plaque support et des patchs viscocontraints.

la structure avec pour la plaque support :
– a_s la longueur de la plaque
– b_s la largeur de la plaque
– les Γ_i représentent les bords de la plaque sur lesquels on applique les conditions aux limites.

Et pour le patch :
– a_p la longueur du patch
– b_p la largeur du patch

– les Γ_i sont les bords de la plaque devant recevoir les conditions aux limites

Chaque couche peut être constituée d'un matériau orthotrope orienté dans lo plan (O, X, Y) avec un angle quelconque.

3.1.3/ BASE IMPLÉMENTÉE

Dans ce type de problème, les bases utilisées sont la plupart du temps de type polynomial, trigonométrique ou exponentiel. Le choix de la base est généralement conditionné par les conditions aux limites imposées à la plaque, afin que le champ de déplacement associé soit cinématiquement admissible. Ce choix a aussi son importance pour le comportement dynamique de la plaque. Lorsque les formes des fonctions de la base se rapprochent des déformées modales de la plaque, l'ordre nécessaire pour décrire la réponse de la plaque est alors moins élevé. Un choix judicieux de la base est donc essentiel et permet de réaliser des calculs dont la taille du système à résoudre est alors réduite.

Le modèle de plaque présenté dans le chapitre 2 nécessite la manipulation de dérivées secondes de la flèche w (présentes dans l'équation d'équilibre (2.28)). L'emploi d'une base trigonométrique, permettant de dériver chaque fonction plusieurs fois sans difficulté, est donc particulièrement adapté à la résolution de ce problème. Dans certains cas, les bases trigonométriques peuvent présenter l'avantage d'être orthogonales, c'est à dire que leurs éléments sont orthogonaux deux à deux. Lorsque l'on souhaite avoir de la souplesse pour imposer des conditions aux limites variées, il est intéressant de pouvoir disposer d'une unique base qui permette de traiter tous les cas. Le choix de la base de projection $\{\phi^r_{mn}(x, y)\}$ est donc un élément essentiel de la méthode de Rayleigh-Ritz. La base présentée par Plessy [54] est la suivante :

$$\{\phi^r(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \sin\left(\frac{m\pi x}{a_s}\right) & \sin\left(\frac{n\pi y}{b_s}\right) \\ \sin\left(\frac{m\pi x}{a_s}\right) & \cos\left(\frac{n\pi y}{b_s}\right) \\ \cos\left(\frac{m\pi x}{a_s}\right) & \sin\left(\frac{n\pi y}{b_s}\right) \\ \cos\left(\frac{m\pi x}{a_s}\right) & \cos\left(\frac{n\pi y}{b_s}\right) \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

avec

$$
\begin{aligned}
&\text{pour } r = 1,\ m = 1 \text{ et } n = 1\\
&\text{pour } r = 2,\ m = 1 \text{ et } n = 2\\
&\text{pour } r = 3,\ m = 1 \text{ et } n = 3\\
&\quad\vdots\\
&\text{pour } r = N,\ m = 1 \text{ et } n = N\\
&\text{pour } r = N+1,\ m = 2 \text{ et } n = 1\\
&\quad\vdots\\
&\text{pour } r = M \times N,\ m = M \text{ et } n = N
\end{aligned}
$$

Bien qu'ayant pour avantage de permettre d'imposer une grande variété de conditions aux limites, cette base est non orthogonale et impose donc l'utilisation de la matrice du tenseur métrique pour certaines opérations. De plus, il s'est avéré qu'elle induisait des problèmes de conditionnement des matrices de rigidité et de masse. Enfin, elle nécessite l'ajout de raideurs artificielles afin de simuler les conditions aux limites souhaitées, raideurs en l'absence desquelles on a une condition libre.

Afin de parer à ces inconvénients, une base présentée par Beslin [72] a été choisie puis implémentée. Celle ci est définie comme suit :

$$\{\phi^m(x)\} = \quad \left\{\sin\left(\frac{\alpha_m 2x+\beta_m}{L_x}\right)\sin\left(\frac{\gamma_m 2x+\delta_m}{L_x}\right)\right\} \tag{3.2}$$

et

$$\{\phi^r(x,y)\} = \quad \{\phi^m(x)\phi^n(y)\} \tag{3.3}$$

où les coefficients α_m, β_m, γ_m et δ_m sont donnés dans le tableau 3.1, La base étant bidimensionnelle, la correspondance entre l'indice r et les indices m et n est identique à celle de Plessy. Les coefficients α_n, β_n, γ_n et δ_n sont identiques aux α_m, β_m, γ_m et δ_m. En observant les fonctions 1 à 4 de la base de projection présentées dans la figure 3.4, il est possible d'en déduire les combinaisons de fonctions permettant d'imposer les conditions aux limites les plus classiques. Ainsi le tableau 3.2 présente le jeu de fonctions de la base à associer à chaque degré de liberté pour respecter diverses conditions aux limites. Ce tableau permet de faire un choix de fonctions de la base pour une direction de l'espace. Pour le cas bidimensionnel, le même tableau est utilisé et la base est composée à l'aide de l'équation (3.3). Cette base s'est avérée ne pas présenter de problème de conditionnement lorsque l'ordre augmente, et permet d'éviter l'implémentation de rigidité fictives ayant pour but de simuler les conditions aux limites. Toutefois, elle n'est pas orthogonale, l'utilisation de la matrice du tenseur métrique est donc nécessaire pour certaines opérations. Par ailleurs, l'étude de Beslin [72] montre que cette base est particulièrement adaptée aux plaques en vibration pour les déformées des modes d'ordre supérieur.

m	α_m	β_m	γ_m	δ_m
1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
2	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$
3	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$
4	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$
$m > 4$	$\frac{\pi}{2}(m-4)$	$\frac{\pi}{2}(m-4)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

TABLE 3.1 – Coefficients intervenant dans les termes de la base présentée par Beslin.

	u_1	u_2	w	γ_{13}	γ_{23}
Encastré-Encastré					
Encastré-Libre	ϕ_3, ϕ_4	ϕ_3, ϕ_4	ϕ_3, ϕ_4	ϕ_3, ϕ_4	ϕ_3, ϕ_4
Encastré-Appuyé	ϕ_3, ϕ_4	ϕ_3, ϕ_4	ϕ_4	ϕ_3, ϕ_4	ϕ_3, ϕ_4
Encastré-Guidé	ϕ_3, ϕ_4	ϕ_3, ϕ_4	ϕ_3	ϕ_3, ϕ_4	ϕ_3, ϕ_4
Libre-Encastré	ϕ_1, ϕ_2	ϕ_1, ϕ_2	ϕ_1, ϕ_2	ϕ_1, ϕ_2	ϕ_1, ϕ_2
Libre-Libre	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$
Libre-Appuyé	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$
Libre-Guidé	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$
Appuyé-Encastré	ϕ_1, ϕ_2	ϕ_1, ϕ_2	ϕ_2	ϕ_1, ϕ_2	ϕ_1, ϕ_2
Appuyé-Libre	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$
Appuyé-Appuyé	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	ϕ_2, ϕ_4	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$
Appuyé-Guidé	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	ϕ_2, ϕ_3	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$
Guidé-Encastré	ϕ_1, ϕ_2	ϕ_1, ϕ_2	ϕ_1	ϕ_1, ϕ_2	ϕ_1, ϕ_2
Guidé-Libre	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	ϕ_1, ϕ_3, ϕ_4	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$
Guidé-Appuyé	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	ϕ_1, ϕ_4	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$
Guidé-Guidé	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	ϕ_1, ϕ_3	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$	$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$

TABLE 3.2 – Jeu de fonctions de la base associé pour chaque degré de liberté nécessaire au respect de la condition aux limites.

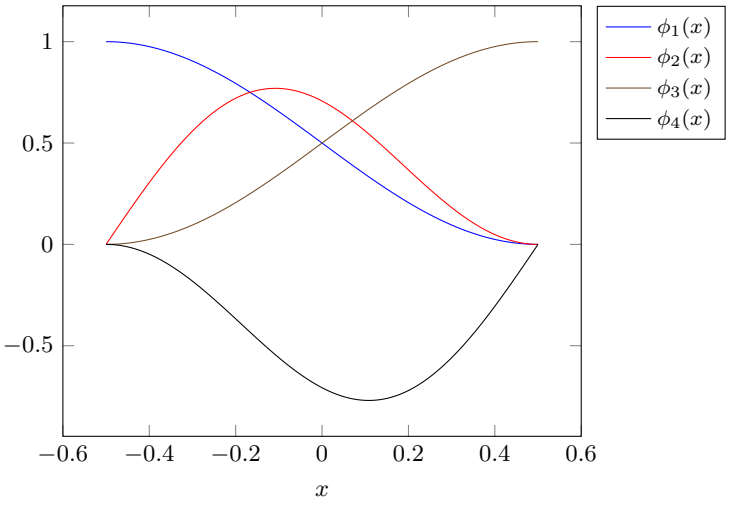


FIGURE 3.4 – Quatre premières fonctions de la base de Beslin permettant de s'adapter aux conditions aux limites.

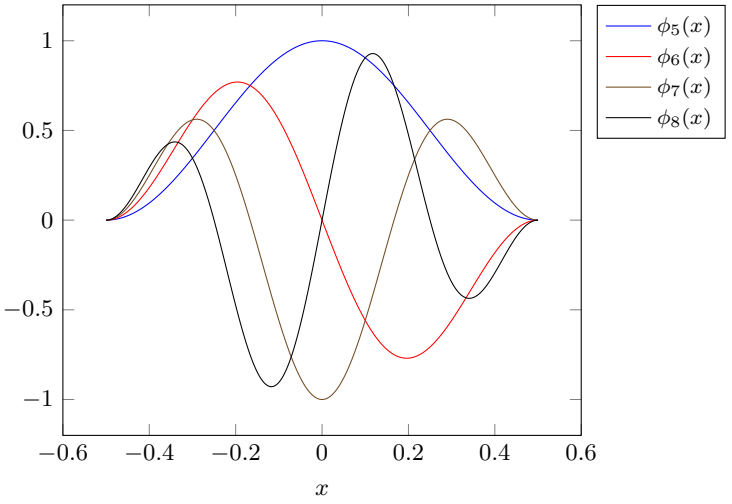


FIGURE 3.5 – Fonctions 5 à 8 de la base de Beslin.

3.1.4/ FORMULATION ÉNERGÉTIQUE

La méthode de Rayleigh-Ritz est une méthode variationnelle directe dans laquelle on recherche le minimum d'une fonctionnelle d'énergie F définie dans un sous-espace. On considère l'expression

$$I(\{\Phi\}) = \iint_S F(\{\Phi(x,y)\})\,\mathrm{d}S \tag{3.4}$$

L'objectif est donc de minimiser cette intégrale. Les variable étant projetées sur une base finie de fonctions, la solution est de la forme

$$\Phi^*(x,y) \simeq \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n(x,y) \tag{3.5}$$

où les ϕ_n respectent des conditions aux limites homogènes. Les a_n sont les coefficients de la base et $\{\Phi^*\}$ est une solution approchée de la solution exacte $\{\Phi\}$. En remplaçant l'équation (3.5) dans l'équation (3.4) et en exprimant l'intégrale $I(\{\Phi\})$ comme une fonction de N coefficients $a_1, a_2, ..., a_N$, on peut écrire :

$$I(\Phi^*) = I(a_1, a_2, ..., a_N) \tag{3.6}$$

Le minimum de la fonction I est obtenu lorsque toutes ses dérivées partielles par rapport à chaque coefficient sont nulles :

$$\frac{\partial I}{\partial a_n} = 0 \text{ pour } n = 1, 2, ..., N \tag{3.7}$$

Dans notre cas, nous appellerons $\{X\}$ le vecteur de la solution approchée $\{\Phi^*\}$.

Nous obtenons donc un jeu de N équations permettant d'obtenir la solution du système. Pour notre système mécanique, la fonctionnelle est composée de la façon suivante

$$I(\{X\}) = \iint_S (L + W_t)\,\mathrm{d}S \tag{3.8}$$

$$= \iint_S (T - V + W_t)\,\mathrm{d}S \tag{3.9}$$

$$\tag{3.10}$$

avec le lagrangien $L = T - V$ et où T et V sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle totale. W_t représente le travail total des forces extérieures. L'énergie potentielle totale, composée de la somme de l'énergie potentielle interne de déformation et de l'énergie potentielle des forces de liaison, s'écrit

$$\iint_S V\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\iint_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}(x,y,z)\,\varepsilon_{ij}(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}S + \int_\Gamma e_\Gamma \mathrm{d}\Gamma \tag{3.11}$$

avec σ le tenseur des contraintes, ε le tenseur des déformations et $\int_\Gamma e_\Gamma \mathrm{d}\Gamma$ l'énergie emmaganisées au travers des conditions aux limites.

De même, T l'énergie cinétique s'écrit :

$$\iint_S T\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\iint_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(x,y,z)\,(\dot{u_1}(x,y,z)^2 + \dot{u_2}(x,y,z)^2 + \dot{w}(x,y,z)^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}S \tag{3.12}$$

avec ρ la masse volumique, u_1, u_2, w les déplacement des points de la plaque. Puis, dans le but d'obtenir l'extremum de la fonctionnelle d'énergie, solution de l'équation 3.7, nous utilisons les équations de Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial X_j} = 0 \tag{3.13}$$

avec L le Lagrangien défini par : $L = T - V$ et les X_j les composantes du vecteur des coefficients d'approximation de Ritz d'ordre j en sachant que

$$\left\{X_j\right\} = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ w(t) \\ \gamma_x(t) \\ \gamma_y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{11}(t) \\ u_2^{11}(t) \\ W^{11}(t) \\ \gamma_x^{11}(t) \\ \gamma_y^{11}(t) \\ u_1^{12}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_y^{mn}(t) \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

et que puisque nous sommes en régime harmonique les déplacement sont de la forme $u_1(t) = u_1 e^{j\omega t}$, ..., $\gamma_y^{mn}(t) = \gamma_y^{mn} e^{j\omega t}$. Puisque l'énergie cinétique ne dépend pas des coefficients $\{X^{mn}(t)\}$ et puisque l'énergie potentielle ne dépend pas des coefficients $\left\{\dot{X}_j\right\}$, les équations de Lagrange peuvent s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\left\{\dot{X}_j(t)\right\}}\right) + \frac{\partial V}{\partial\left\{X_j(t)\right\}} = 0 \tag{3.15}$$

Il est alors possible de réécrire l'expression de l'énergie cinétique T sous forme matricielle en fonction d'une matrice de masse $[\mathbf{M}]$,

$$T(t) = \frac{1}{2}\left\{\dot{X}\right\}^T [\mathbf{M}]\left\{\dot{X}\right\} \tag{3.16}$$

et de même pour l'énergie potentielle V en fonction de la matrice de rigidité $[\mathbf{K}]$:

$$V(t) = \frac{1}{2}\{X\}^T [\mathbf{K}]\{X\} \tag{3.17}$$

En introduisant les équations (3.16) et (3.17) dans l'équation (3.15), celle-ci devient :

$$\left(-\omega^2 [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]\right)\left\{\tilde{X}\right\} = 0 \tag{3.18}$$

Il est par ailleurs possible de réécrire le système sous sa forme complexe à l'aide de matrices d'impédance associées aux matrices $\left[\tilde{\mathbf{K}}\right]$ et $\left[\tilde{\mathbf{M}}\right]$:

$$\left(-\omega^2\left[\tilde{\mathbf{M}}\right] + \left[\tilde{\mathbf{K}}\right]\right)\left\{\tilde{X}\right\} = 0 \tag{3.19}$$

$$\left(-\omega^2\left([\mathbf{M}] + j\omega[\mathbf{C_M}]\right) + \left([\mathbf{K}] + j\omega[\mathbf{C_K}]\right)\right)\left\{\tilde{X}\right\} = 0 \tag{3.20}$$

$$\left(-\omega^2[\mathbf{M}] + j\omega\left([\mathbf{C_K}] - \omega^2[\mathbf{C_M}]\right) + [\mathbf{K}]\right)\left\{\tilde{X}\right\} = 0 \tag{3.21}$$

3.1.5/ Recherche des valeurs et vecteurs propres

La recherche des valeurs propres du système conservatif associé se fait en cherchant les valeurs de ω pour lesquelles le déterminant de la matrice du système $(-\omega^2 \left[\tilde{\mathbf{M}}\right] + \left[\tilde{\mathbf{K}}\right])$ est nul. Dans le cas des matrices d'impédance complexes, il convient de réécrire le système avec une matrice d'amortissement $[\mathbf{C}]$. L'équation du système libre (3.21) peut alors s'écrire :

$$[\mathbf{M}]\left\{\ddot{X}\right\} + [\mathbf{C}]\left\{\dot{X}\right\} + [\mathbf{K}]\{X\} = \{0\} \tag{3.22}$$

Le système peut alors être augmenté à l'aide de l'identité suivante :

$$[\mathbf{M}]\left\{\dot{X}\right\} - [\mathbf{M}]\left\{\dot{X}\right\} = \{0\} \tag{3.23}$$

À l'aide des équations (3.22) et (3.23), nous pouvons réécrire un système de taille $2N$

$$[\mathbf{A}]\{\dot{y}\} + [\mathbf{B}]\{y\} = \{0\} \tag{3.24}$$

avec

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{M}] \\ [\mathbf{M}] & [\mathbf{C}] \end{bmatrix} \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -[\mathbf{M}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}] \end{bmatrix}$$

$$\{\dot{y}\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} \qquad \{y\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}$$

La solution de l'équation (3.24) permet d'obtenir les valeurs des fréquences propres (complexes) ainsi que les vecteurs des modes propres (complexes).

3.1.6/ Équations du mouvement forcé du système

Compte tenu de l'approche bidimensionnelle utilisée, les sollicitations extérieures sont toujours considérées normales au plan de référence choisi et sont ramenées à celui ci. Le travail dû aux forces extérieures inclut à la fois les forces d'excitation et la pression exercée par la charge du fluide sur la plaque. Le travail des forces extérieures $F(x, y, t)$ sur un cycle de chargement s'exprime alors :

$$W_F = \iint_S F(x, y, t) W(x, y, t) \mathrm{d}S \tag{3.25}$$

avec $W(x, y, t)$ la flèche au plan moyen intégrée sur une période t et la surface de plaque S. L'équation du mouvement de la structure est ensuite obtenue à l'aide de l'équation de Lagrange.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_j}\right) + \frac{\partial V}{\partial X_j} = \frac{\partial W_F}{\partial X_j} \tag{3.26}$$

On remarque que les effets du fluide du milieu environnant sont négligés dans cette formulation, ceci revient à poser comme hypothèse que les fluides environnant sont considérés comme des fluides légers (comme par exemple l'air), et que ceux-ci n'interagissent pas avec la plaque.

Sollicitation par une force ponctuelle

Pour une sollicitation mécanique par une force ponctuelle $F(t)$ appliquée au point (x_p, y_p) perpendiculairement à la plaque, l'expression du travail W_p de cette force s'exprime par :

$$W_p = \iint_S F(t)\delta(x - x_p)\delta(y - y_p)W(x, y, t)\mathrm{d}S \tag{3.27}$$

$$W_p = F(t)W(x, y, t) \tag{3.28}$$

A l'aide de l'équation (3.26), pour un régime harmonique, nous obtenons donc le système suivant :

$$\left(-\omega^2\left[\tilde{\mathbf{M}}\right] + \left[\tilde{\mathbf{K}}\right]\right)\left\{\tilde{X}\right\} = \left\{\tilde{F}\right\} \tag{3.29}$$

avec

$$\left\{\tilde{F}\right\} = \int_0^{a_s}\int_0^{b_s} F\delta(x - x_p)\delta(y - y_p)\left\{\phi(x, y)\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{3.30}$$

Sollicitation à l'aide d'une onde plane progressive

La plaque étudiée séparant deux milieux fluides semi-infinis, les forces dues à une onde plane progressive sont dues à une différence de pression entre les deux milieux avec $p_1(x, y, z = 0, t)$ la pression dans le milieu 1 et $p_2(x, y, z = 0, t)$ la pression dans le milieu 2. La différence de pression s'exprime alors comme la différence des pression rayonnées par la plaque entre les deux milieux $p_1^{\text{ray}} - p_2^{\text{ray}}$ augmentée de la pression incidente et de la pression réfléchie (égale à la pression incidente) :

$$\begin{aligned} &p_1(x, y, z = 0, t) - p_2(x, y, z = 0, t) = \\ &p_1^{\text{ray}} - p_2^{\text{ray}} + 2P_I \exp\left(-jk_1\left(\left(x - \frac{a_s}{2}\right)\sin(\theta)\cos(\varphi) + \left(y - \frac{b_s}{2}\right)\sin(\theta)\cos(\varphi)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Or, en gardant l'hypothèse des fluides légers, $p_1(x, y, z = 0, t)$ et $p_2(x, y, z = 0, t)$ sont bien inférieurs à la pression incidente, on peut alors choisir de négliger ces deux termes. $k_1 = \omega/c_1$ est le nombre d'onde du milieu excitateur et c_1 est la célérité du son dans ce même milieu. L'expression du travail de la force incidente résultante W_{op} s'écrit alors :

$$W_{op} = \iint_S 2P_I \exp\left(-jk_1\left(\left(x - \frac{a_s}{2}\right)\sin(\theta)\cos(\varphi) + \left(y - \frac{b_s}{2}\right)\sin(\theta)\cos(\varphi)\right)\right)\mathrm{d}S \tag{3.32}$$

Le vecteur force correspondant s'écrit alors :

$$\left\{\tilde{F}\right\} = 2P_I \int_0^{a_s} e^{-jk_1\left(\left(x-\frac{a_s}{2}\right)\sin(\theta)\cos(\varphi)\right)} \left\{\phi_m(x)\right\} \mathrm{d}x \int_0^{b_s} e^{-jk_1\left(\left(y-\frac{b_s}{2}\right)\sin(\theta)\cos(\varphi)\right)} \left\{\phi_n(y)\right\} \mathrm{d}y \tag{3.33}$$

avec $\phi(x,y) = \phi^x(x)\phi^y(y)$.

3.1.7/ POST-TRAITEMENT

Il est essentiel d'avoir plusieurs indicateurs globaux du comportement vibratoire de la plaque. Nous proposons ici plusieurs indicateurs couramment utilisés pour évaluer le comportement vibroacoustique d'une structure.

3.1.7.1/ VITESSE QUADRATIQUE MOYENNE

La vitesse quadratique moyenne est un bon indicateur du niveau d'excitation mécanique global de la plaque. Celle-ci permet de visualiser au travers d'un seul indicateur le comportement global de la structure. Elle est définie comme la vitesse moyenne sur une période et sur la surface de la plaque.

$$\langle V^2 \rangle = \frac{1}{a_s b_s} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{a_s} \int_0^{b_s} \frac{1}{2} \left| \frac{\mathrm{d}W(x,y,t)}{\mathrm{d}t} \right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{3.34}$$

En régime harmonique, l'équation (3.34) devient :

$$\langle V^2 \rangle = \frac{\omega^2}{2a_s b_s} \int_0^{a_s} \int_0^{b_s} \tilde{W}(x,y,\omega)\, \tilde{W}(x,y,\omega)^\star \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{3.35}$$

Le symbole $\star$ indique la valeur complexe conjuguée. La vitesse quadratique peut être réécrite en fonction du vecteur $\left\{\tilde{X}\right\}$ issu de la résolution de l'équation (3.29) :

$$\langle V^2 \rangle = \frac{\omega^2}{2a_s b_s} \left\{\tilde{X}\right\}^{\mathrm{T}} \left[\int_0^{a_s} \int_0^{b_s} \left\{\phi^r_{mn}(x,y)\right\} \left\{\phi^r_{mn}(x,y)\right\}^{T\star} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \right] \left\{\tilde{X}\right\}^\star \tag{3.36}$$

On remarque au passage qu'il est possible d'identifier la matrice du tenseur métrique $[\mathbf{T}]$ à partir de l'équation (3.36) :

$$[\mathbf{T}] = \int_0^{a_s} \int_0^{b_s} \left\{\phi^r_{mn}(x,y)\right\} \left\{\phi^r_{mn}(x,y)\right\}^{T\star} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{3.37}$$

3.1.7.2/ INDICATEURS ACOUSTIQUES

Il est possible d'utiliser plusieurs indicateurs acoustiques afin d'étudier les effets des patchs viscocontraints. Les deux principaux indicateurs utilisés sont la puissance acous-

tique rayonnée et la transparence acoustique. Les formules de ces deux indicateurs sont données pour la méthode de Rayleigh-Ritz dans la thèse de Plessy [54]. Celles -ci peuvent être directement utilisées avec notre base de projection.

3.2/ Procédure de Navier adaptée à un stratifié quelconque

La méthode de Navier permet de réaliser des calculs sur un stratifié pour une plaque rectangulaire simplement appuyée dans un cas de chargement particulier. Dans sa version classique, telle que présentée dans la section 1.5, la méthode est limitée aux stratifiés dont les axes d'orthotropie sont confondus avec le repère de la plaque. Nous proposons ici une variation de la méthode permettant le calcul d'un stratifié quelconque. Cette méthode de discrétisation a pour avantage de ne pas avoir une précision relative à une densité de maillage ou un ordre maximal de la base. On peut donc considérer cette méthode comme exacte, la qualité des résultats est alors uniquement dépendante du modèle. Cette méthode, proche de celles utilisées pour les solutions exactes décrites dans la section 1.4.1, est couramment utilisée dans la littérature afin de comparer différents modèles.

3.2.1/ Problème associé

La méthode de Navier telle que classiquement utilisée dans la littérature [73, 41, 74], est réservée aux stratifiés orthotropes dont les axes d'orthotropie sont confondus avec le repère de la plaque, ou pour des stratifiés avec une séquence d'empilement antisymmétrique, pour une plaque simplement appuyée. Dans ce cas, on suppose que lorsque le chargement appliqué est de la forme $\sin\left(\frac{\pi x}{a_s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b_s}\right)$, la déformée de la plaque est de la même forme. Nous proposons ici une généralisation de cette méthode permettant l'étude de stratifiés orthotropes quelconques simplement appuyés.

3.2.2/ Champ de déplacement

Le champ de déplacement associé est :

$$\left\{\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ w \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cccccc} u_1^{mn} & \cos(\xi x) & \sin(\eta y) & +\overline{u}_1^{mn} & \sin(\xi x) & \cos(\eta y) \\ u_2^{mn} & \sin(\xi x) & \cos(\eta y) & +\overline{u}_2^{mn} & \cos(\xi x) & \sin(\eta y) \\ w^{mn} & \sin(\xi x) & \sin(\eta y) & +\overline{w}^{mn} & \cos(\xi x) & \cos(\eta y) \\ \gamma_{13}^{mn} & \cos(\xi x) & \sin(\eta y) & +\overline{\gamma}_{13}^{mn} & \sin(\xi x) & \cos(\eta y) \\ \gamma_{23}^{mn} & \sin(\xi x) & \cos(\eta y) & +\overline{\gamma}_{23}^{mn} & \cos(\xi x) & \sin(\eta y) \end{array}\right\} \tag{3.38}$$

avec

$$\xi = \frac{m\pi}{a} \text{ and } \eta = \frac{n\pi}{b}$$

où $m = 1$ et $n = 1$ pour une analyse statique, ou arbitrairement choisis pour l'étude dynamique du mode (m, n).

Le chargement est de la forme :

$$q(x, y) = q_0 \sin(\xi x) \sin(\eta y) + \overline{q}_0 \cos(\xi x) \cos(\eta y) \tag{3.39}$$

Pour un m et un n donné, les équations d'équilibre du modèle (2.28) donnent une matrice de rigidité et une matrice de masse, respectivement $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{M}]$, liées au vecteur $\{U\} = \{u_1, u_2 \ldots \overline{\gamma}_{13}, \overline{\gamma}_{23}\}$. Le cas statique est traité en résolvant le système $[\mathbf{K}]\{U\} = \{F\}$, où $\{F\}$ est un vecteur force unitaire contenant q_0^{mn} sur sa troisième composante. On choisira $q_0^{mn} = 1$. Résoudre le problème dynamique consiste à faire une recherche de valeurs propres généralisées sur les matrices $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{M}]$. Dans le cas où les axes d'orthotropie du stratifié sont confondus avec le repère de la plaque ou si le stratifié possède une séquence d'empilement de ses plis antisymétrique, alors w respecte les conditions simplement appuyée, i. e. $\overline{w}_{mn} = 0$. Pour le cas le plus général, la réponse de la plaque sous une chargement bi-sinusoïdal donne $\overline{w}_{mn} \neq 0$. Puisque l'on choisi de respecter les conditions aux limites simplement appuyées, le terme $\overline{w}_{mn}$ peut être annulé si un chargement de forme bi-cosinusoïdal, d'amplitude $\overline{q}_0^{mn}$ est ajouté. L'amplitude de $\overline{q}_0^{mn}$ est obtenue en utilisant un multiplicateur de Lagrange. La matrice du système est alors de taille 11.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{C}^T & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{U} \\ \hline \overline{q}_0^{mn} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \hline 0 \end{array}\right\} \tag{3.40}$$

avec $\{C\}$ un vecteur possédant un 1 sur sa huitième composante. Pour le cas dynamique, la matrice de masse $[\mathbf{M}]$ est augmentée d'une ligne et d'une colonne de zéros pour devenir une matrice de taille 11×11. Le détail des matrices $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{M}]$ est donné dans l'annexe B. On remarque aussi qu'il est possible de garder un chargement de la forme $q = q_0^{mn} \sin(\xi x) \sin(\eta y)$, alors, dans ce cas, les conditions aux limites simplement appuyées ne sont plus respectées pour le cas le plus général.

3.3/ Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode de discrétisation devenue de nos jours incontournable. Elle a en effet pour avantage de présenter une certaine flexibilité pour l'étude des structures de géométries complexes proches de cas réels de conception. D'un point de vue général, le but est de résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. La méthode est, tout comme la méthode de Rayleigh-Ritz présentée

dans la section 3.1, une méthode variationnelle qui cherche à minimiser une énergie (ou selon les approches un résidu) et à produire une solution stable. La qualité de la solution est en grande partie fonction de l'adéquation de l'interpolation aux variations des champs du problème étudié. Par conséquent, la précision de la méthode est directement liée au maillage utilisé et aux fonctions d'interpolation choisies.

Notre modèle faisant intervenir une formulation incorporant des dérivées secondes, les éléments finis de plaque classiques ne sont pas adaptés à notre modèle. Nous proposons ici trois éléments finis de plaques, issus de la littérature, adaptés à l'étude de notre modèle. Le premier présente une écriture de la formulation avec sept degrés de liberté, cependant soumise au verrouillage en cisaillement des plaques, les deux autres sont des éléments à continuité $C1$.

3.3.1/ PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Nous présentons ici plusieurs points essentiels de la méthode des éléments finis adaptée au modèle générique décrit dans la section 2. D'un point de vue général, le but est de satisfaire les équations d'équilibre (2.28). L'ensemble des éléments et méthodes présentés dans cette section a été implémenté à l'aide du logiciel Matlab et a été validé par comparaison avec les résultats des autres codes et procédures à notre disposition. On définit dans un premier temps, et ce pour tout élément :

– Le vecteur déplacement de l'élément $\{u\}$, c'est un vecteur qui regroupe les composantes des déplacements de nœuds de l'élément. Dans le cas le plus simple, notre modèle ayant cinq degrés de liberté par nœud, pour un élément classique à n nœuds, le vecteur déplacement s'écrit :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ w^1 \\ \gamma_{13}^1 \\ \gamma_{23}^1 \\ \vdots \\ \gamma_{23}^n \end{Bmatrix} \tag{3.41}$$

– Dans un élément, chaque variable correspond aux valeurs du champ de déplacements aux noeuds. Des fonctions d'interpolation sont associées à chaque noeud. Pour un élément à n noeuds, une variable du champ de déplacements peut alors être estimée à l'intérieur d'un élément avec la relation suivante :

$$u_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} u_1^i N_i(x,y) \tag{3.42}$$

Il est alors possible d'écrire une matrice $[\mathcal{N}]$ organisée de la façon suivante,

$$[\mathcal{N}] = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & 0 & 0 & 0 & N_n(x,y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & 0 & 0 & 0 & N_n(x,y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1(x,y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_n(x,y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1(x,y) & 0 & 0 & 0 & 0 & N_n(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1(x,y) & 0 & 0 & 0 & 0 & N_n(x,y) \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

ce qui permet d'établir le déplacement en tout point de manière matricielle :

$$\{u(x,y)\} = [\mathcal{N}(x,y)]\{u\} \tag{3.44}$$

– Classiquement, les fonctions d'interpolation sont exprimées dans un repère local ξ, η, avec ξ et η variant de -1 à 1. Afin de pouvoir exprimer les dérivées des fonctions de forme $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial N_i}{\partial y}$, il faut alors utiliser la relation

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

avec $[\mathbf{J}]$ la matrice jacobienne définie de la façon suivante :

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & y_i \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

– Le vecteur des déformations généralisées est obtenu à l'aide d'une matrice $[\mathcal{B}^{\mathbf{e}}]$ composée des dérivées des fonctions de forme sur x et sur y (le détail de cette matrice est propre à chaque élément et est donné pour chaque type d'élément présenté).

$$\{\varepsilon\} = [\mathcal{B}^{\mathbf{e}}]\{u\} \tag{3.48}$$

3.3.1.1/ CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ ÉLÉMENTAIRE

Tout comme pour la méthode de Rayleigh-Ritz, il est possible de formuler la matrice de rigidité à partir de l'énergie de déformation de l'élément. Celle-ci s'écrit :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V \tag{3.49}$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \{\sigma\}^T\{\varepsilon\}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_V \{\varepsilon\}^T[\mathcal{D}]\{\varepsilon\}\,\mathrm{d}V \tag{3.50}$$

Il est alors possible de réécrire E_{def} à l'aide de l'expression (3.48) ce qui donne,

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2}\{u\}^T\left(\int_V [\mathcal{B}^{\mathbf{e}}]^T[\mathcal{D}][\mathcal{B}^{\mathbf{e}}]\,\mathrm{d}V\right)\{u\} \tag{3.51}$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \{u\}^T[\mathcal{K}^{\mathbf{e}}]\{u\}\,\mathrm{d}V \tag{3.52}$$

La matrice de rigidité s'écrit donc :

$$[\mathcal{K}^{\mathbf{e}}] = \int_V [\mathcal{B}^{\mathbf{e}}]^T[\mathcal{D}][\mathcal{B}^{\mathbf{e}}]\,\mathrm{d}V \tag{3.53}$$

La matrice $[\mathcal{D}]$ est obtenue à partir des matrices de comportement de l'équation (2.21). Les matrices de comportement prenant en compte l'épaisseur, il faut alors intégrer sur la surface S de l'élément. L'équation (3.53) devient alors :

$$[\mathcal{K}^{\mathbf{e}}] = \iint_S [\mathcal{B}^{\mathbf{e}}]^T\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} & 0\\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} & \mathbf{F} & 0\\ \mathbf{E}^T & \mathbf{F}^T & \mathbf{G} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}\end{bmatrix}[\mathcal{B}^{\mathbf{e}}]\,\mathrm{d}S \tag{3.54}$$

Il est alors possible de décomposer l'écriture de $[\mathcal{K}^{\mathbf{e}}]$ de la manière suivante :

$$[\mathcal{K}^{\mathbf{e}}] = \iint_S \left([\mathcal{B}^{\mathbf{e}}]^T\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E}\\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} & \mathbf{F}\\ \mathbf{E}^T & \mathbf{F}^T & \mathbf{G}\end{bmatrix}[\mathcal{B}^{\mathbf{e}}] + \left[\mathcal{B}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{eT}}\right][\mathbf{H}]\left[\mathcal{B}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}\right]\right)\mathrm{d}S \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned} &= \iint_S \Big([\mathcal{B}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}}]^T[\mathbf{A}][\mathcal{B}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}}] + \left[\mathcal{B}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right]^T[\mathbf{B}][\mathcal{B}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}}] + [\mathcal{B}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}}]^T[\mathbf{B}]^T\left[\mathcal{B}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right] + \\ &\left[\mathcal{B}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right]^T[\mathbf{D}]\left[\mathcal{B}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right] + \left[\mathcal{B}_{\mathbf{sd}}^{\mathbf{e}}\right]^T[\mathbf{E}][\mathcal{B}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}}] + [\mathcal{B}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}}]^T[\mathbf{E}]\left[\mathcal{B}_{\mathbf{sd}}^{\mathbf{e}}\right] + \\ &\left[\mathcal{B}_{\mathbf{sd}}^{\mathbf{e}}\right]^T[\mathbf{F}]\left[\mathcal{B}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right] + \left[\mathcal{B}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right]^T[\mathbf{F}]\left[\mathcal{B}_{\mathbf{sd}}^{\mathbf{e}}\right] + \left[\mathcal{B}_{\mathbf{sd}}^{\mathbf{e}}\right]^T[\mathbf{G}]\left[\mathcal{B}_{\mathbf{sd}}^{\mathbf{e}}\right] + [\mathcal{B}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}]^T[\mathbf{H}][\mathcal{B}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}]\Big)\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{3.56}$$

3.3.1.2/ CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE MASSE ÉLÉMENTAIRE

A partir de l'équation de la densité d'énergie surfacique (2.24), il est alors possible de former une matrice de masse en réécrivant l'énergie cinétique pour un élément

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\{u\}^T \left(\int_V \left[\mathcal{B}^{\mathbf{e}}_{\Xi}\right]^T [\Xi] \left[\mathcal{B}^{\mathbf{e}}_{\Xi}\right] \mathrm{d}S \right) \{u\} \tag{3.57}$$

$$= \frac{1}{2} \iint_S \{u\}^T [\mathcal{M}^{\mathbf{e}}] \{u\} \mathrm{d}S \tag{3.58}$$

avec

$$[\Xi] = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ w \\ -w_{,1} \\ -w_{,2} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & w & -w_{,1} & -w_{,2} & \gamma_{13} & \gamma_{23} \end{array} \\ \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & S & 0 & U_{11} & U_{12} \\ 0 & R & 0 & 0 & S & U_{21} & U_{22} \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & 0 & 0 & T & 0 & V_{11} & V_{12} \\ 0 & S & 0 & 0 & T & V_{21} & V_{22} \\ U_{11} & U_{21} & 0 & V_{11} & V_{21} & W_{11} & W_{12} \\ U_{12} & U_{22} & 0 & V_{12} & V_{22} & W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.59}$$

De même que la matrice $[\mathcal{K}^{\mathbf{e}}]$, il est alors possible d'exprimer la matrice masse $[\mathcal{M}^{\mathbf{e}}]$ en fonction d'une intégrale de surface :

$$[\mathcal{M}^{\mathbf{e}}] = \iint_S \left[\mathcal{B}^{\mathbf{e}}_{\Xi}\right]^T [\Xi] \left[\mathcal{B}^{\mathbf{e}}_{\Xi}\right] \mathrm{d}S \tag{3.60}$$

3.3.1.3/ INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Afin de réaliser l'intégration sur la surface S de l'élément, la méthode de quadrature de Gauss est utilisée. Pour cela, chaque variable est exprimée dans un élément de référence non déformé dans un repère (ξ, η) comme illustré pour un élément à neuf noeuds dans la figure 3.6. Les bornes d'intégration dans l'élément de référence étant comprises entre -1 et 1, l'intégration de(s) l'énergie(s) dans chaque élément dans ce repère se fait par la méthode de la quadrature de Gauss. On écrit alors :

$$[\mathcal{K}^{\mathbf{e}}] = \iint_S [\mathcal{B}^{\mathbf{e}}]^T [\mathcal{D}] [\mathcal{B}^{\mathbf{e}}] \mathrm{d}S \tag{3.61}$$

$$= \sum_{g=1}^{n} \left[\mathcal{B}^{\mathbf{e}}(x_g)\right]^T [\mathcal{D}] \left[\mathcal{B}^{\mathbf{e}}(x_g)\right] w_g \det\left(\left[\mathbf{J}(x_g)\right]\right) \tag{3.62}$$

où $\left[\mathcal{B}^{\mathbf{e}}(x_g)\right]$ représentent l'évaluation de la matrice $\mathcal{B}^e$ aux coordonnées des points de Gauss, w_g les poids de Gauss correspondants et $\det\left(\left[\mathbf{J}(x_g)\right]\right)$ le déterminant de la matrice Jacobienne. Le nombre et la position des points de Gauss sont choisis en fonction du degré des polynômes des fonctions d'interpolation. On est parfois amené à l'adapter pour tout ou partie des termes de l'énergie afin d'améliorer le comportement des éléments

(techniques d'intégration réduite).

3.3.2/ Formulation soumise au blocage des plaques en cisaillement

Nayak [75] propose un élément à neuf nœuds isoparamétrique adapté au modèle de Reddy. L'écriture du modèle de Reddy dans les travaux de Nayak est similaire à notre modèle générique. Nous proposons d'étendre, par analogie, la formulation proposée par Nayak à notre modèle générique.

L'élément est composé de sept degrés de liberté par nœud séparant ainsi les rotations φ_α des déformations de cisaillement $\gamma_{\alpha 3}$. Les déplacements s'écrivent donc en fonction des fonctions d'interpolation de l'élément :

$$u_1 = \sum_{i=1}^{9} N_i u_1^i,\ u_2 = \sum_{i=1}^{9} N_i u_2^i\ ,\ w = \sum_{i=1}^{9} N_i w^i\ ,\ \varphi_1 = \sum_{i=1}^{9} N_i \varphi_1^i\ ,$$
$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^{9} N_i \varphi_2^i\ ,\ \gamma_{13} = \sum_{i=1}^{9} N_i \gamma_{13}^i\ ,\ \gamma_{23} = \sum_{i=1}^{9} N_i \gamma_{23}^i$$

Par ailleurs, on sait que

$$\varphi_\alpha = \gamma_{\alpha 3} - w_{,\alpha} \tag{3.63}$$

d'où

$$-w_{,\alpha\beta} = \varphi_{\alpha,\beta} - \gamma_{\alpha 3,\beta} \tag{3.64}$$

Il est alors possible d'exprimer les vecteurs des déformations généralisées $\{\epsilon\}$, $\{\kappa\}$, $\{\Gamma\}$ et $\{\gamma\}$ de l'équation (2.20) en fonction des fonctions d'interpolation :

$$\{\varepsilon\} = [\mathcal{B}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}}]\{\delta\} \tag{3.65}$$
$$\{\kappa\} = \left[\mathcal{B}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right]\{\delta\} \tag{3.66}$$
$$\{\Gamma\} = \left[\mathcal{B}_{\mathbf{sd}}^{\mathbf{e}}\right]\{\delta\} \tag{3.67}$$
$$\{\gamma\} = [\mathcal{B}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}]\{\delta\} \tag{3.68}$$

Les matrices $[\mathcal{B}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}}]$, $\left[\mathcal{B}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right]$, $\left[\mathcal{B}_{\mathbf{sd}}^{\mathbf{e}}\right]$ et $[\mathcal{B}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}]$ relient les déformations généralisées aux degrés de liberté associés à chaque nœud. Ces matrices sont définies ainsi :

$$[\mathcal{B}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}}] = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & u_1^i & u_2^i & w^i & \varphi_1^i & \varphi_2^i & \gamma_{13}^i & \gamma_{23}^i & \\ \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdots & N_{,1}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & N_{,2}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & N_{,2}^i & N_{,1}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.69}$$

$$\left[\mathcal{B}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{e}}\right] = \begin{matrix} \\ -w_{,11} \\ -w_{,22} \\ -w_{,12} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} u_1^i & u_2^i & w^i & \varphi_1^i & \varphi_2^i & \gamma_{13}^i & \gamma_{23}^i \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{,1}^i & 0 & N_{,1}^i & 0 \\ \cdots\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{,2}^i & 0 & N_{,2}^i \ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}N_{,2}^i & \frac{1}{2}N_{,2}^i & \frac{1}{2}N_{,2}^i & \frac{1}{2}N_{,2}^i \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{3.70}$$

$$\left[\mathcal{B}_{\mathbf{sd}}^{\mathbf{e}}\right] = \begin{matrix} \\ \gamma_{13,1} \\ \gamma_{23,2} \\ \gamma_{13,2} \\ \gamma_{23,1} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} u_1^i & u_2^i & w^i & \varphi_1^i & \varphi_2^i & \gamma_{13}^i & \gamma_{23}^i \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{,1}^i & 0 \\ \cdots\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{,2}^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{,2}^i & 0 \ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{,1}^i \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{3.71}$$

$$[\mathcal{B}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}] = \begin{matrix} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} u_1^i & u_2^i & w^i & \varphi_1^i & \varphi_2^i & \gamma_{13}^i & \gamma_{23}^i \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \cdots\ 0 & 0 & N_{,1}^i & N^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{,2}^i & 0 & N^i & 0 & 0 \ \cdots \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{3.72}$$

Les fonctions d'interpolation habituellement associées à un élément isoparamétrique à neuf nœuds sont définies dans l'équation (3.73) avec la numérotation associée de la figure 3.6.

$$\begin{aligned}
N_1 &= \tfrac{1}{4}\eta\xi\,(-1+\xi)\,(-1+\eta) \\
N_2 &= -\tfrac{1}{2}\eta\,(-1+\xi)\,(1+\xi)\,(-1+\eta) \\
N_3 &= \tfrac{1}{4}\eta\xi\,(1+\xi)\,(-1+\eta) \\
N_4 &= -\tfrac{1}{2}\xi\,(-1+\eta)\,(1+\eta)\,(1+\xi) \\
N_5 &= \tfrac{1}{4}\eta\xi\,(1+\xi)\,(1+\eta) \\
N_6 &= -\tfrac{1}{2}\eta\,(-1+\xi)\,(1+\xi)\,(1+\eta) \\
N_7 &= \tfrac{1}{4}\eta\xi\,(-1+\xi)\,(1+\eta) \\
N_8 &= -\tfrac{1}{2}\xi\,(-1+\eta)\,(1+\eta)\,(-1+\xi) \\
N_9 &= (-1+\xi)\,(1+\xi)\,(-1+\eta)\,(1+\eta)
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Cette formulation est cependant soumise au verrouillage en cisaillement. C'est à dire

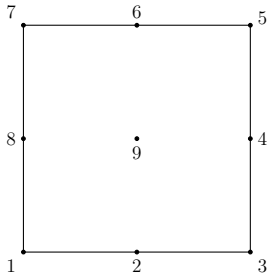


FIGURE 3.6 – Numérotation des noeuds de l'élément isoparamétrique à neuf nœuds.

que lorsque la plaque est fortement élancée, celle-ci se "verrouille" et les déplacements de la solution sont alors quasi nuls. Selon Polit [76], les problèmes de verrouillage apparaissent lorsque la convergence n'est pas indépendante de l'épaisseur de l'élément.

Le phénomène apparait généralement lorsque la plaque étudiée est fortement élancée. Une des méthodes classiques pour éviter ce phénomène est de sous interpoler le degré de liberté en cisaillement, c'est ce qui est proposé par Nayak [75] en implémentant une procédure d'interpolation mixte initialement proposée par Bathe [77, 78, 79].

Bien que viable, le principal problème de cette formulation est sa complexité de mise en œuvre. En effet, la procédure de Bathe nécessite l'implémentation d'une méthode d'interpolation difficile à mettre en œuvre et est par conséquent, une solution que nous n'avons pas réussi à valider pour la résolution de notre problème.

3.3.3/ Formulation à l'aide d'éléments finis à continuité C1

Dans le but de permettre l'implémentation directe du modèle, et en respectant l'équation d'équilibre (2.28b), il est nécessaire d'évaluer la dérivée seconde de la flèche $w_{,\alpha\beta}$ aux points de Gauss. Or, les éléments finis classiques, possèdent des fonctions d'interpolation linéaires ou quadratiques, nécessitent la continuité des dérivées premières des fonctions d'interpolation de l'élément. Pour cela, il faut utiliser des fonctions d'interpolation à continuité $C1$. C'est à dire que les fonctions sont continues entre les éléments ainsi que leurs dérivées premières. Par opposition, les fonctions des éléments usuels sont dites à continuité $C0$, c'est à dire qu'elles sont continues entre les éléments mais pas leurs dérivées.

Les éléments à continuité d'ordre supérieur à $C0$ font généralement appel à des fonctions d'interpolation de type polynômes d'Hermite, c'est à dire que les fonctions d'interpolations et leur dérivées sont associées à des degrés de liberté indépendants.

3.3.3.1/ Élément de Fox-Bogner-Schmidt

L'élément de Fox-Bogner-Schmidt [80] est un quadrangle à quatre noeuds avec des fonctions d'interpolation de type Hermite à continuité $C1$. C'est le seul élément à continuité $C1$ capable de fonctionner sur un maillage de quadrangles réguliers.

Fonctions de formes de l'élément Fox-Bogner-Schmidt

L'équation (3.74) décrit les fonctions de forme de l'élément linéaire Q4. Ces fonctions sont associées aux degrés de liberté pour lesquels la continuité $C1$ n'est pas nécessaire. Les équations (3.75), (3.76), (3.77) et (3.78) correspondent respectivement aux degrés de libertés

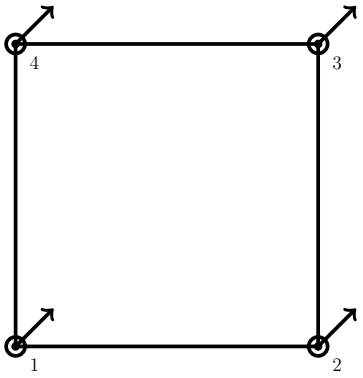


FIGURE 3.7 – Représentation de l'élément de Fox-Bogner-Schmidt. Les cercles remplis de noir représentent les points, les autres cercles représentent la continuité des dérivées, les flèches représentent les dérivées partielles croisées.

w, $w_{,1}$, $w_{,2}$ et $w_{,12}$. La figure 3.8 illustre les fonctions de formes $N^{1\mathcal{H}1}$, $N^{1\mathcal{H}2}$, $N^{1\mathcal{H}3}$ et $N^{1\mathcal{H}4}$.

$$\begin{aligned} N^{1\mathcal{L}} &= (1/4 \times (-1+\xi)) \times (-1+\eta) \\ N^{2\mathcal{L}} &= -(1/4 \times (\xi+1)) \times (-1+\eta) \\ N^{3\mathcal{L}} &= -(1/4 \times (-1+\xi)) \times (\eta+1) \\ N^{4\mathcal{L}} &= (1/4 \times (\xi+1)) \times (\eta+1) \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned} N^{1\mathcal{H}1} &= 1/16 \times (1-\xi)^2 \times (2+\xi) \times (1-\eta)^2 \times (2+\eta) \\ N^{2\mathcal{H}1} &= 1/16 \times (1+\xi)^2 \times (2-\xi) \times (1-\eta)^2 \times (2+\eta) \\ N^{3\mathcal{H}1} &= 1/16 \times (1-\xi)^2 \times (2+\xi) \times (1+\eta)^2 \times (2-\eta) \\ N^{4\mathcal{H}1} &= 1/16 \times (1+\xi)^2 \times (2-\xi) \times (1+\eta)^2 \times (2-\eta) \end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned} N^{1\mathcal{H}2} &= 1/16 \times (1-\xi^2) \times (1-\xi) \times (1-\eta)^2 \times (2+\eta) \\ N^{2\mathcal{H}2} &= 1/16 \times (-1+\xi^2) \times (1+\xi) \times (1-\eta)^2 \times (2+\eta) \\ N^{3\mathcal{H}2} &= 1/16 \times (1-\xi^2) \times (1-\xi) \times (1+\eta)^2 \times (2-\eta) \\ N^{4\mathcal{H}2} &= 1/16 \times (-1+\xi^2) \times (1+\xi) \times (1+\eta)^2 \times (2-\eta) \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned} N^{1\mathcal{H}3} &= 1/16 \times (1-\xi)^2 \times (2+\xi) \times (1-\eta^2) \times (1-\eta) \\ N^{2\mathcal{H}3} &= 1/16 \times (1+\xi)^2 \times (2-\xi) \times (1-\eta^2) \times (1-\eta) \\ N^{3\mathcal{H}3} &= 1/16 \times (1-\xi)^2 \times (2+\xi) \times (-1+\eta^2) \times (1+\eta) \\ N^{4\mathcal{H}3} &= 1/16 \times (1+\xi)^2 \times (2-\xi) \times (-1+\eta^2) \times (1+\eta) \end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned} N^{1\mathcal{H}4} &= 1/16 \times (1-\xi^2) \times (1-\xi) \times (1-\eta^2) \times (1-\eta) \\ N^{2\mathcal{H}4} &= 1/16 \times (-1+\xi^2) \times (1+\xi) \times (1-\eta^2) \times (1-\eta) \\ N^{3\mathcal{H}4} &= 1/16 \times (1-\xi^2) \times (1-\xi) \times (-1+\eta^2) \times (1+\eta) \\ N^{4\mathcal{H}4} &= 1/16 \times (-1+\xi^2) \times (1+\xi) \times (-1+\eta^2) \times (1+\eta) \end{aligned} \tag{3.78}$$

Les dérivées secondes $\frac{\partial^2 N^i}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 N^i}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 N^i}{\partial x \partial y}$ sont obtenues de la même manière que les

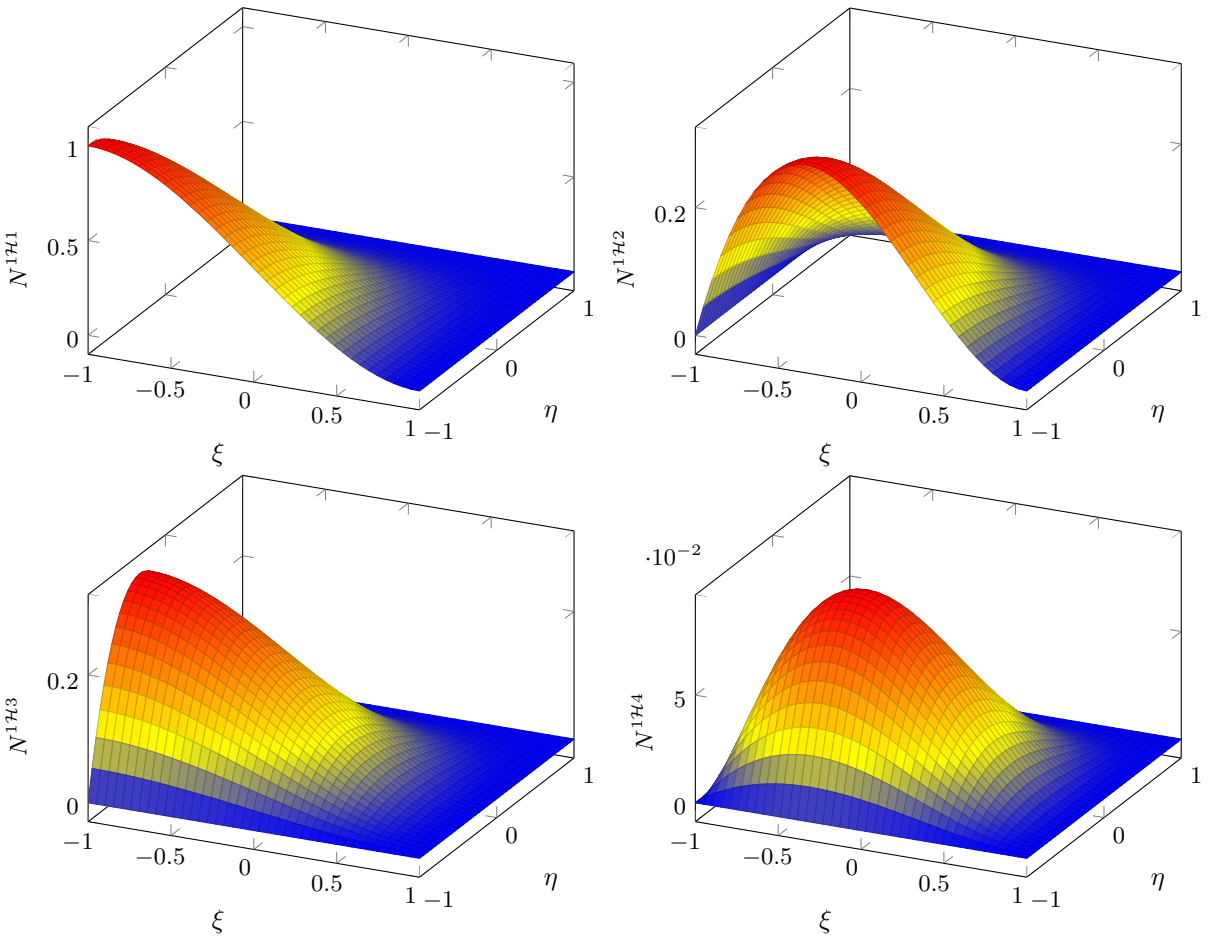


FIGURE 3.8 – Fonctions de formes $N^{1\mathcal{H}1}$, $N^{1\mathcal{H}2}$, $N^{1\mathcal{H}3}$ et $N^{1\mathcal{H}4}$.

dérivées premières en utilisant la matrice hessienne comme illustré dans l'équation (3.80).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 & \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 & 2\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 & \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 & 2\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \right) \tag{3.80}$$

Les matrices $\mathcal{B}^e_m$, $\mathcal{B}^e_b$, $\mathcal{B}^e_s$ et $\mathcal{B}^e_{sd}$ présentées ci-dessous peuvent être utilisées avec l'équation (3.56) afin de générer la matrice de rigidité élémentaire $[\mathcal{K}^{\mathbf{e}}]$.

$$\mathcal{B}^e_m = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & u^i_1 & u^i_2 & w^i & w^i_{,1} & w^i_{,2} & w^i_{,12} & \gamma^i_1 & \gamma^i_2 & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} \cdots & N^{i\mathcal{L}}_{,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & N^{i\mathcal{L}}_{,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & N^{i\ell}_{,2} & N^{i\mathcal{L}}_{,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right] \end{array} \tag{3.81}$$

$$\mathcal{B}^e_b = \begin{array}{c} \\ -w_{,11} \\ -w_{,22} \\ -2w_{,12} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & u^i_1 & u^i_2 & w^i & w^i_{,1} & w^i_{,2} & w^i_{,12} & \gamma^i_1 & \gamma^i_2 & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} \cdots & 0 & 0 & -N^{i\mathcal{H}1}_{,11} & -N^{i\mathcal{H}2}_{,11} & -N^{i\mathcal{H}3}_{,11} & -N^{i\mathcal{H}4}_{,11} & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & -N^{i\mathcal{H}1}_{,22} & -N^{i\mathcal{H}2}_{,22} & -N^{i\mathcal{H}3}_{,22} & -N^{i\mathcal{H}4}_{,22} & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & -2N^{i\mathcal{H}1}_{,12} & -2N^{i\mathcal{H}2}_{,12} & -2N^{i\mathcal{H}3}_{,12} & -2N^{i\mathcal{H}4}_{,12} & 0 & 0 & \end{array}\right] \end{array} \tag{3.82}$$

$$\mathcal{B}^e_s = \begin{array}{c} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & u^i_1 & u^i_2 & w^i & w^i_{,1} & w^i_{,2} & w^i_{,12} & \gamma^i_1 & \gamma^i_2 & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{i\mathcal{L}} & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{i\mathcal{L}} & \cdots \end{array}\right] \end{array} \tag{3.83}$$

$$\mathcal{B}^e_{sd} = \begin{array}{c} \\ \gamma_{13,1} \\ \gamma_{23,2} \\ \gamma_{13,2} \\ \gamma_{23,1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & u^i_1 & u^i_2 & w^i & w^i_{,1} & w^i_{,2} & w^i_{,12} & \gamma^i_1 & \gamma^i_2 & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{i\mathcal{L}}_{,1} & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{i\mathcal{L}}_{,2} & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{i\mathcal{L}}_{,2} & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{i\mathcal{L}}_{,1} & \end{array}\right] \end{array} \tag{3.84}$$

L'interpolation de la flèche s'écrit alors :

$$\begin{aligned} w(\xi,\eta) = &\sum_{n=1}^{4} w^n N^{n\mathcal{H}1}(\xi,\eta) + \sum_{n=1}^{4} w^n_{,\xi} N^{n\mathcal{H}2}(\xi,\eta) + \\ &\sum_{n=1}^{4} w^n_{,\eta} N^{n\mathcal{H}3}(\xi,\eta) + \sum_{n=1}^{4} w^n_{,\xi\eta} N^{n\mathcal{H}4}(\xi,\eta) \end{aligned} \tag{3.85}$$

3.3.3.2/ Triangle à 21 degrés de liberté : élément d'Argyris

Cet élément, tout comme l'élément de Fox-Bogner-Schmidt présenté à la section 3.3.3.1, assure la continuité des fonctions d'interpolation, leur dérivées, ainsi que leurs dérivées secondes. Le maillage de n'importe quelle surface s'appuyant sur un maillage de son contour est toujours possible en triangles. Même si on souhaite privilégier les quadrangles, ils peuvent être indispensables à la réalisation de certains maillages, au moins localement. Cela confère à l'élément triangle un caractère plus général. Aussi connu sous le nom de Triangle d'Argyris, il est présenté pour la première fois par Argyris [81]. A noter que Bell [82] propose lui aussi un triangle à continuité $C1$ à 18 degrés de liberté sans normale sortante. Le polynôme des fonctions de formes de cet élément est alors contraint à une variation cubique, et il y a donc 6 degrés de liberté à chaque nœud. Cet

élément triangulaire, développé par Argyris [83], est décrit par Zienkiewicz [57]. Il assure la continuité aux noeuds des degrés de liberté suivants :

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Cette formulation comprend donc 18 degrés de liberté. D'après le triangle de Pascal, un polynôme du cinquième ordre complet comprend 21 monômes. Pour compléter la liste des variables, on rajoute la dérivée normale $\partial w_n / \partial n$ comme degré de liberté aux noeuds des milieux d'arêtes. Celle-ci est définie par :

$$\frac{\partial w_n}{\partial n} = \cos\phi_n \frac{\partial w_n}{\partial x} + \sin\phi_n \frac{\partial w_n}{\partial y} \tag{3.86}$$

Les coefficients de chaque polynôme peuvent alors s'exprimer au travers d'une matrice $[\mathbf{C}]$ de taille 21×21 de la façon suivante :

$$[\mathbf{C}] = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial w_3}{\partial n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & \cdots & y_1^5 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & \cdots & y_2^5 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & \cdots & y_3^5 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 5y_1^4 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 20y_1^4 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cos\phi_3 & \sin\phi_3 & 2x_3\cos\phi_3 & \cdots & 5y_3^4 \sin\phi_3 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.87}$$

Il est alors possible de déterminer les fonctions de forme d'un triangle quelconque défini par les coordonnées de ses noeuds x_n, y_n en obtenant les coefficients du polynôme du cinquième ordre dans un vecteur $\{\boldsymbol{\alpha}\}$:

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = \left[\mathbf{C^{-1}}\right]\{a^e\} \tag{3.88}$$

Il est alors possible de formuler la matrice $[\mathcal{B}_\mathbf{b}]$ de l'équation 3.82 en un point de coordonnées x, y de la façon suivante :

$$[\mathcal{B}_\mathbf{b}] = [\mathbf{Q}]\left[\mathbf{C^{-1}}\right] \tag{3.89}$$

avec

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & \cdots & -2y^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & \cdots & -6x^2y & -12xy^2 & -20y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & \cdots & -12xy^2 & -8y^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

4

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Après avoir présenté un modèle de plaque générique dans le chapitre 2 ainsi que différentes méthodes de discrétisation dans le chapitre 3, nous proposons ici plusieurs applications et études illustrant le fonctionnement du modèle. Nous présentons, dans un premier temps, une validation du modèle ainsi qu'une étude comparative de différents jeux de *warping functions*. Les résultats numériques obtenus sont la flèche pour un chargement statique et la première fréquence de résonance pour le cas dynamique. La méthode de Navier est utilisée pour obtenir les résultats qui permettent de valider le fonctionnement du modèle. Par la suite, à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz, nous présentons une étude vibroacoustique et énergétique d'une plaque traitée avec un patch PCLD, soumise à une onde plane progressive. Nous présentons la réponse de la plaque sous forme de vitesse quadratique moyenne accompagnée d'une étude montrant l'origine de la dissipation énergétique pour un patch PCLD. Enfin, nous proposons une méthode d'identification des propriétés des matériaux viscoélastiques par méthode inverse, faisant appel à notre modèle de plaque couplé à un algorithme génétique.

4.1/ VALIDATION DU MODÈLE AVEC LA MÉTHODE DE NAVIER

La méthode de Navier étant réservée aux plaques homogènes, nous étudions ici différents stratifiés modélisés avec différents jeux de *warping functions*. À des fins de comparaison, la solution tridimensionnelle exacte est calculée pour chaque cas test. Le chargement est alors également réparti sur les plans supérieurs et inférieurs de chaque plaque. De plus, cette solution exacte est utilisée pour obtenir des *warping functions* avec la méthode décrite dans la section 2.7.5. La méthode de Navier permet aussi d'obtenir la première fréquence de résonance pour chaque stratifié pour le cas dynamique. Cette section propose l'étude de cinq stratifiés dont un panneau sandwich. Seulement deux matériaux sont utilisés, un matériau composite isotrope transverse et un matériau nid d'abeille pour le panneau sandwich. Leurs propriétés mécaniques sont données dans les tables 4.1 où les indices L et T indiquent les directions longitudinales et transverses à la direction des fibres.

E_L (Pa)	E_T (Pa)	G_{LT} (Pa)	G_{TT} (Pa)	$\nu_{LT} = \nu_{TT}$	ρ^c (kg.m^{-3})
$25E_T$	10^6	$0,5E_T$	$0,2E_T$	0,25	1500

$E_1^c = E_2^c$ (Pa)	E_3^c (Pa)	G_{12}^c (Pa)	$G_{23}^c = G_{13}^c$ (Pa)	$\nu_{12}^c = \nu_{13}^c = \nu_{23}^c$	ρ^c (kg.m^{-3})
4×10^4	5×10^5	$1,6 \times 10^4$	6×10^4	0,25	100

TABLE 4.1 – Propriétés mécaniques des matériaux utilisés.

Les simulations sont effectuées sur une plaque rectangulaire de dimensions a et b. Trois variables sont considérées et comparées à celles obtenues avec les solutions analytiques de type Pagano :

– La flèche w est adimensionnalisée à l'aide de l'équation (4.1), h étant l'épaisseur totale de la plaque et q_0 la pression de chargement.

$$w^* = \frac{100 w E^{ref} h^3}{q_0 l_x^4} \tag{4.1}$$

– La première fréquence de résonance est adimensionnalisée en utilisant l'équation (4.2).

$$\omega^* = (\omega l_x^2 / h) \sqrt{\rho^{ref} / E^{ref}} \tag{4.2}$$

– La variation de la contrainte de cisaillement transverse aux points A et B décrits dans la figure 2.7, qui elle n'est pas adimensionnalisée.

On prendra $E^{ref} = E_T^c$ et $\rho^{ref} = \rho^c$ pour les stratifiés, et $E^{ref} = E_T^f$ et $\rho^{ref} = \rho^f$ pour le panneau sandwich.

La méthode de Navier a été implémentée à l'aide du logiciel de calcul Maple. Les résultats obtenus avec les *warping functions* issues des solutions analytiques (notées 3D WF) et celles obtenues avec la procédure itérative (notées Iterative) sont comparés à ceux obtenus avec les *warping functions* correspondant aux modèles classiques (fonctions données dans la section 2.7).

4.1.1/ PLAQUE COMPOSITE RECTANGULAIRE

Cette plaque composite est composée de trois plis, dont les propriétés sont mentionnées dans la table 4.1, avec une séquence d'empilement $[0/90/0]$ et $b = 3a$.

Parmi les modèles implémentés, nous pouvons identifier trois types de modèles différents, groupés en fonction des hypothèses sur lesquels ils sont basés. La première catégorie est celle des modèles dits classiques, qui pour cette étude, ne comprend que le modèle de Mindlin-Reissner (ici noté FSDT). La seconde catégorie regroupe les modèles dont les *warping functions* sont basées sur des hypothèses mixtes (déplacements et contraintes). Pour cette étude, cela inclut les modèles de Reddy (noté HSDT), Woodcock et Pai (noté EHOPT). La dernière catégorie de modèle est celle dont les *warping functions* sont issues des équations d'équilibre de la mécanique ; ce qui inclut les mo-

dèles notés 3D WF et Iterative.

Les résultats statiques et dynamiques présentés dans les tables 4.2 et 4.3 montrent que les deux modèles dont les *warping functions* sont issues des équations d'équilibre de la mécanique donnent des résultats très satisfaisants pour tous les élancements. Ces deux modèles, générés avec deux méthodes très différentes, donnent des résultats quasi identiques. Ceci est principalement dû au fait que les deux modèles sont basés sur les équations d'équilibre de la mécanique, ce qui explique la concordance avec les résultats issus de la solution analytique. La figure 4.1 montre cette même concordance et aide à soutenir cette conclusion. La différence avec la solution analytique est expliquée par le fait que, pour celle-ci, le choix de diviser le chargement de la plaque entre les plans inférieurs et supérieurs du stratifié induit que les contraintes transverses σ_{33} ne sont pas nulles. Ainsi, en fonction des cas, lorsque l'importance relative des σ_{33} par rapport aux autres degrés de liberté devient prédominante, l'hypothèse des contraintes planes considérée dans le modèle ne peut être respectée.

a/h =	2		4		10		100	
Modèle	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur
FSDT	$6,6164$	$-18,98\%$	$2,0547$	$-27,17\%$	$0,75314$	$-18,04\%$	$0,50588$	$-0,35\%$
HSDT	$7,8943$	$-3,33\%$	$2,6411$	$-6,38\%$	$0,96222$	$4,71\%$	$0,50700$	$-0,13\%$
Woodcock	$7,8130$	$-4,32\%$	$2,7172$	$-3,68\%$	$0,88102$	$-4,12\%$	$0,50721$	$-0,09\%$
EHOPT	$6,4960$	$-20,45\%$	$2,7331$	$-3,12\%$	$0,91831$	$-0,07\%$	$0,50766$	$0,00\%$
3D WF	$8,4448$	$3,42\%$	$2,8458$	$0,88\%$	$0,92059$	$0,18\%$	$0,50767$	$0,00\%$
Iterative	ne converge pas		$2,8459$	$0,88\%$	$0,92059$	$0,18\%$	$0,50767$	$0,00\%$
Solution analytique	$8,1659$		$2,8211$		$0,91891$		$0,50766$	

TABLE 4.2 – Comparaison de la déflection statique entre les différents modèles pour une plaque composite $[0/90/0]$ pour différents élancements.

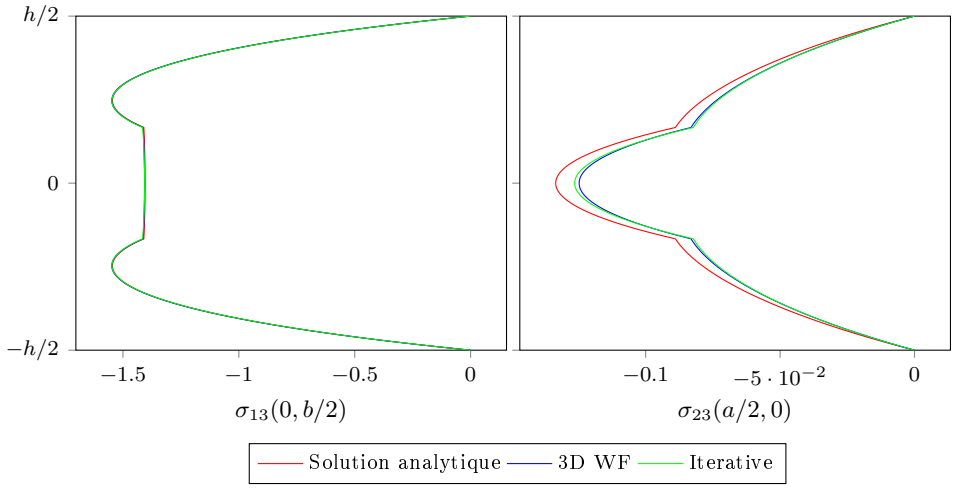


FIGURE 4.1 – Contraintes de cisaillement transverse aux points A et B pour une plaque composite $[0/90/0]$ avec $a/h = 4$.

a/h =	2		4		10		100	
Modèle	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur
FSDT	$3,8633$	$12,97\%$	$6,9503$	$17,60\%$	$11,4970$	$10,47\%$	$14,0502$	$0,11\%$
HSDT	$3,5336$	$3,33\%$	$3,1331$	$3,77\%$	$10,7501$	$3,29\%$	$14,0435$	$0,07\%$
Woodcock	$3,5485$	$3,76\%$	$6,0461$	$2,19\%$	$10,6353$	$2,19\%$	$14,0407$	$0,05\%$
EHOPT	$3,8845$	$13,59\%$	$6,0265$	$1,97\%$	$10,4182$	$0,10\%$	$14,0344$	$0,00\%$
3D WF	$3,4197$	$0,00\%$	$5,9084$	$0,03\%$	$10,4054$	$0,02\%$	$14,0342$	$0,00\%$
Iterative	ne converge pas		$5,9084$	$0,03\%$	$10,4053$	$0,02\%$	$14,0342$	$0,00\%$
Solution analytique	$3,4198$		$5,9100$		$10,4078$		$14,0343$	

TABLE 4.3 – Comparaison de la première fréquence de résonance entre les différents modèles pour une plaque composite rectangulaire $[0/90/0]$ pour différents élancements.

Par ailleurs, nous remarquons que, pour le cas dynamique, les modèles 3D WF et Iterative donnent des résultats très satisfaisants. Ceci tend à confirmer l'hypothèse du non respect de la condition de contraintes planes à cause du chargement appliqué pour la solution analytique ; en effet, la cas dynamique ne faisant pas intervenir de chargement, ce problème n'est donc pas présent.

4.1.2/ PANNEAU SANDWICH CARRÉ

Dans le but d'étudier le comportement de structures comportant une forte variation de la rigidité au travers de l'épaisseur, nous nous proposons ici d'étudier un panneau sandwich carré avec une épaisseur de plis définie par $h_1 = h_3 = 0,1h$ et $h_2 = 0,8h$. Les peaux sont constituées d'un pli du matériau composite utilisé pour les autres configurations et le cœur est composé d'un nid d'abeille dont les propriétés sont aussi données dans la table 4.1.

a/h =	2		4		10		100	
Modèle	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur
FSDT	$0,50904$	$44,74\%$	$0,16645$	$45,57\%$	$0,05797$	$34,15\%$	$0,03536$	$0,93\%$
HSDT	$0,85343$	$7,34\%$	$0,28349$	$7,30\%$	$0,08252$	$6,27\%$	$0,03563$	$0,18\%$
Woodcock	$0,90224$	$2,05\%$	$0,30453$	$0,42\%$	$0,08773$	$0,34\%$	$0,03569$	$0,01\%$
EHOPT	$0,88896$	$3,49\%$	$0,30416$	$0,54\%$	$0,08971$	$0,14\%$	$0,03569$	$0,00\%$
3D WF	$0,90893$	$1,32\%$	$0,30636$	$0,18\%$	$0,08817$	$0,16\%$	$0,03570$	$0,00\%$
Iterative	ne converge pas		$0,30638$	$0,19\%$	$0,08817$	$0,16\%$	$0,03570$	$0,00\%$
Solution analytique	$0,92108$		$0,30581$		$0,08803$		$0,03570$	

TABLE 4.4 – Comparaison de la déflection statique entre les différents modèles pour le panneau sandwich avec différents élancements.

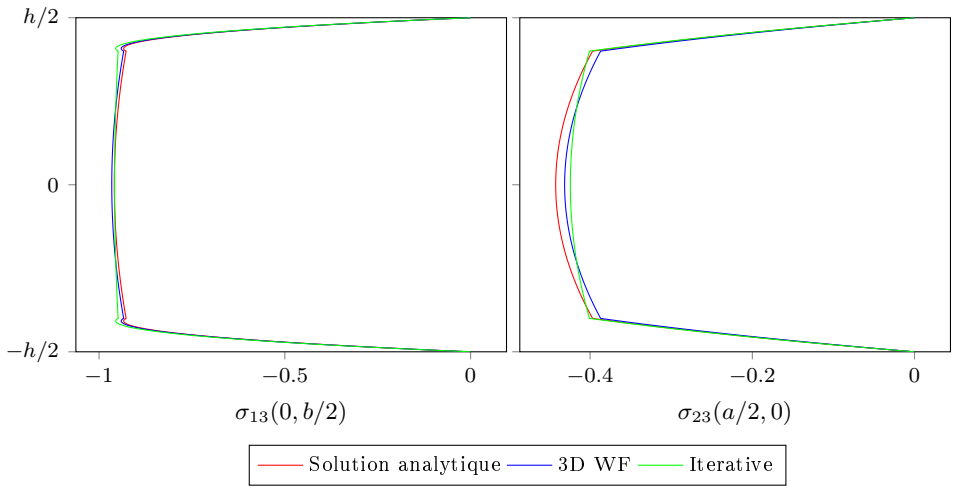


FIGURE 4.2 – Contraintes de cisaillement transverse aux points A et B pour un panneau sandwich avec $a/h = 4$ pour les trois méthodes implémentées.

a/h =	2		4		10		100	
Modèle	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur
FSDT	6,9339	29,88%	12,2334	33,77%	21,0958	22,82%	27,2469	0,36%
HSDT	5,4307	1,72%	9,4351	3,17%	17,7164	3,14%	27,1721	0,09%
Woodcock	5,2900	0,92%	9,1084	0,40%	17,1850	0,05%	27,1491	0,00%
EHOPT	5,3281	0,20%	9,1152	0,33%	17,1681	0,05%	27,1481	0,00%
3D WF	5,2917	0,88%	9,0832	0,64%	17,1427	0,20%	27,1471	0,00%
Iterative	ne converge pas		9,0840	0,88%	17,1427	0,20%	27,1471	0,00%
Solution analytique	5,3389		9,1452		17,1766		27,1479	

TABLE 4.5 – Comparaison de la première fréquence de résonance entre les différents modèles pour un panneau sandwich tri-couche pour différents élancements.

Nous pouvons remarquer que pour ce cas test, les *warping functions* du modèle de Woodcock sont particulièrement adaptées car elles peuvent traduire la forte variation des déformations de cisaillement transverse. Le modèle de Woodcock pose pour hypothèse la constance des contraintes de cisaillement transverse. En observant la variation des contraintes de cisaillement transverse sur la figure 4.2, nous pouvons voir que cette hypothèse (de constance des contraintes de cisaillement transverse) permet une approximation satisfaisante de la répartition de ces contraintes. Nous pouvons donc en conclure que, pour les structures à fort ratio de module de Young entre les couches, le modèle de Woodcock donne des résultats satisfaisants. Nous montrons dans la section 4.2 qu'il est par exemple bien adapté à la simulation de plaques traitées avec des patchs PCLD. Par ailleurs, ce modèle, au contraire des modèles dont les *warping functions* sont issues des lois de l'élasticité tridimensionnelle, ne nécessite pas de calculs préalables. Il est donc simple à implémenter.

4.1.3/ PLAQUE COMPOSITE BI-COUCHE À SÉQUENCE D'EMPILEMENT ANTISYMÉTRIQUE

Nous considérons ici une plaque composite carrée ($b = a$) composée de deux couches d'épaisseurs égales dont la séquence d'empilement est antisymétrique $[-15/15]$.

a/h =	2		4		10		100	
Modèle	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur
FSDT	$4,3448$	$4,61\%$	$1,5762$	$7,60\%$	$0,77629$	$3,29\%$	$0,62204$	$0,04\%$
HSDT	$4,3110$	$5,35\%$	$1,6594$	$2,73\%$	$0,79522$	$0,93\%$	$0,62224$	$0,01\%$
Woodcock	$3,8609$	$15,23\%$	$1,5082$	$11,59\%$	$0,76841$	$4,27\%$	$0,62197$	$0,06\%$
EHOPT	$3,9837$	$12,54\%$	$1,6197$	$5,05\%$	$0,79522$	$0,93\%$	$0,62222$	$0,02\%$
3D WF	$4,8403$	$6,27\%$	$1,7413$	$2,08\%$	$0,80668$	$0,49\%$	$0,62235$	$0,00\%$
Iterative	ne converge pas		$1,7415$	$2,09\%$	$0,80670$	$0,50\%$	$0,62235$	$0,00\%$
Solution analytique	$4,5548$		$1,7059$		$0,80272$		$0,62235$	
$\kappa(\%)$	$6,22\%$		$1,24\%$		$0,07\%$		$0,00\%$	

TABLE 4.6 – Comparaison de la déflection statique entre les différents modèles pour une plaque composite avec une séquence d'empilement antisymétrique $[-15/15]$ pour différents élancements.

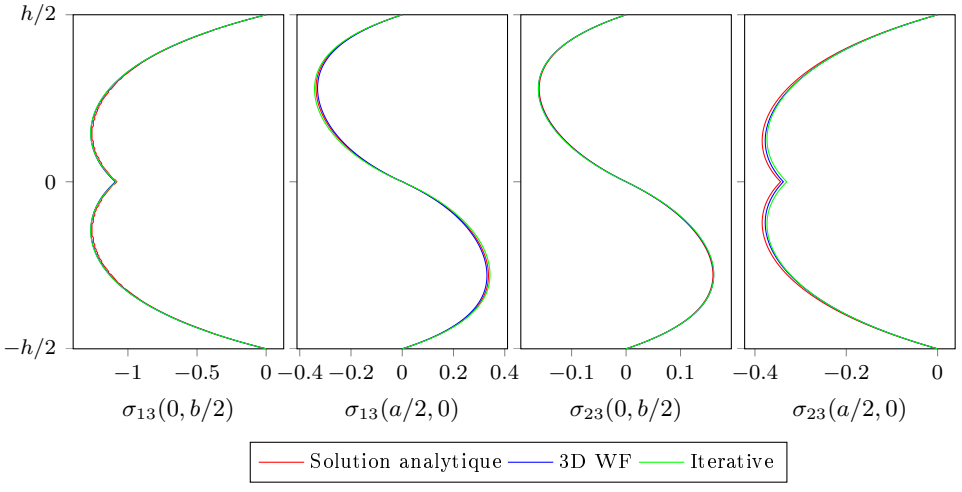


FIGURE 4.3 – Contraintes de cisaillement transverse aux points A et B pour une plaque composite avec une séquence d'empilement antisymétrique $[+15/-15]$ avec $a/h = 4$ pour les trois méthodes implémentées.

a/h =	2		4		10		100	
Modèle	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur
FSDT	$4,7206$	$5,62\%$	$7,7953$	$4,57\%$	$11,2179$	$1,74\%$	$12,6702$	$0,03\%$
HSDT	$4,7612$	$6,53\%$	$7,6324$	$2,38\%$	$11,0928$	$0,60\%$	$12,6749$	$0,01\%$
Woodcock	$4,9993$	$11,85\%$	$7,9690$	$6,90\%$	$11,2752$	$2,26\%$	$12,6770$	$0,02\%$
EHOPT	$4,9478$	$10,70\%$	$7,7274$	$3,66\%$	$11,1163$	$0,81\%$	$12,6752$	$0,01\%$
3D WF	$4,4827$	$0,30\%$	$7,4377$	$0,23\%$	$11,0126$	$0,13\%$	$12,6738$	$0,00\%$
Solution analytique	$4,4695$		$7,4548$		$11,0265$		$12,6740$	

TABLE 4.7 – Comparaison de la première fréquence de résonance entre les différents modèles pour une plaque composite avec une séquence d'empilement antisymétrique $[-15/15]$ pour différents élancements

4.1.4/ PLAQUE COMPOSITE AVEC UN SEUL PLI

Bien que cette structure puisse sembler simple à simuler, nous constatons en observant la table 4.8 que les modèles dont les *warping functions* sont issues des équations d'équilibre de la mécanique (notés 3D WF et Iterative) semblent être moins performants que les modèles classique tel que la HSDT. Ceci peut s'expliquer une nouvelle fois par le non respect des conditions de contraintes planes (nécessaires à notre modèle de plaque). En effet, dans la solution analytique, les σ_{33} sont non nuls. La raison pour laquelle les modèles classiques obtiennent de meilleurs résultats pour de faibles élancements n'est pas encore bien comprise, une analyse plus approfondie est nécessaire.

a/h =	2		4		10		100	
Modèle	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur
FSDT	$4,3108$	$3,63\%$	$1,4643$	$8,42\%$	$0,60418$	$4,82\%$	$0,43300$	$0,08\%$
HSDT	$4,5250$	$1,16\%$	$1,6205$	$1,35\%$	$0,63708$	$0,36\%$	$0,43335$	$0,00\%$
Woodcock	$4,3108$	$3,63\%$	$1,4643$	$8,42\%$	$0,60418$	$4,82\%$	$0,43300$	$0,08\%$
EHOPT	$4,5250$	$1,16\%$	$1,6205$	$1,35\%$	$0,63708$	$0,36\%$	$0,43335$	$0,00\%$
3D WF	$4,7796$	$6,85\%$	$1,6297$	$1,92\%$	$0,63711$	$0,37\%$	$0,43335$	$0,00\%$
Iterative	ne converge pas		$1,6298$	$1,93\%$	$0,63714$	$0,37\%$	$0,43335$	$0,00\%$
Solution analytique	$4,4730$		$1,5989$		$0,63477$		$0,43333$	

TABLE 4.8 – Comparaison de la déflection statique entre les différents modèles pour une plaque composite composée d'un seul pli pour différents élancements.

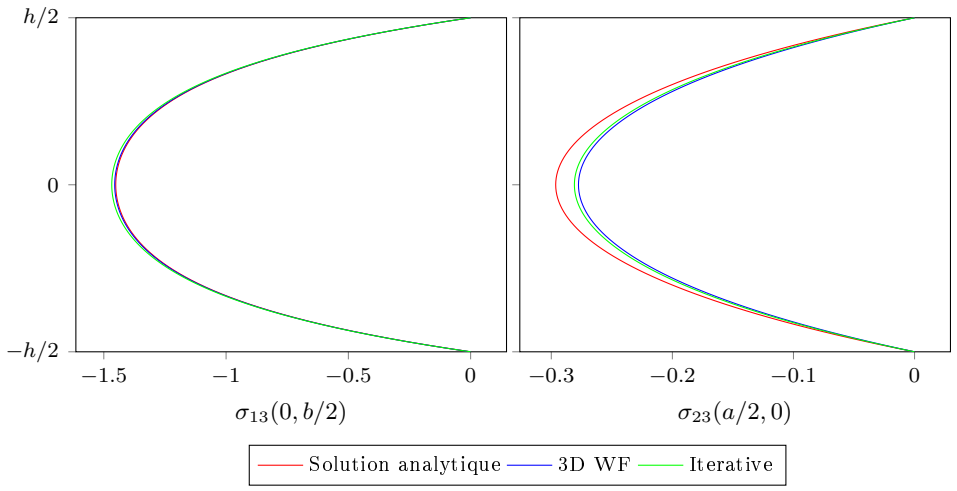


FIGURE 4.4 – Contraintes de cisaillement transverse aux points A et B pour une plaque composite composée d'un seul pli avec $a/h = 4$ pour les trois méthodes implémentées.

a/h =	2		4		10		100	
Modèle	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur
FSDT	4, 7281	4, 85%	8, 1438	5, 17%	12, 7948	2, 59%	15, 1897	0, 00%
HSDT	4, 6229	2, 52%	7, 7526	0, 12%	12, 4640	0, 06%	15, 1896	0, 00%
Woodcock	4, 7281	4, 85%	8, 1438	5, 17%	12, 7948	2, 59%	15, 1897	0, 00%
EHOPT	4, 6229	2, 52%	7, 7526	0, 12%	12, 4640	0, 06%	15, 1896	0, 00%
3D WF	4, 5043	0, 11%	7, 7311	0, 16%	12, 4636	0, 06%	15, 1896	0, 00%
Iterative	ne converge pas		7, 7311	0, 16%	12, 4636	0, 06%	15, 1896	0, 00%
Solution analytique	4, 5094		7, 7437		12, 4713		15, 1897	

TABLE 4.9 – Comparaison de la première fréquence de résonance entre les différents modèles pour une plaque composite composée d'un seul pli pour différents élancements.

4.1.5/ PLAQUE COMPOSITE AVEC UNE SÉQUENCE D'EMPILEMENT SYMÉTRIQUE

Nous considérons ici une plaque composite carrée dont la séquence d'empilement est symétrique $[0/30/0]$. Cette configuration est choisie puisqu'elle n'implique aucune simplification dans le système linéaire (3.40), i. e. la matrice $[\mathbf{K}]$ n'a pas de terme nul.

a/h =	2		4		10		100	
Modèle	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur	$\overline{w}$	Erreur
FSDT	$4,3110$	$7,72\%$	$1,4700$	$13,79\%$	$0,59897$	$8,33\%$	$0,42339$	$0,14\%$
HSDT	$4,7450$	$1,57\%$	$1,7025$	$0,15\%$	$0,64701$	$0,97\%$	$0,42390$	$0,02\%$
Woodcock	$4,4049$	$5,71\%$	$1,5616$	$8,42\%$	$0,62084$	$4,98\%$	$0,42363$	$0,08\%$
EHOPT	$4,5986$	$1,56\%$	$1,7138$	$0,51\%$	$0,65454$	$0,18\%$	$0,42399$	$0,00\%$
3D WF	$4,9866$	$6,74\%$	$1,7375$	$1,90\%$	$0,65579$	$0,37\%$	$0,42400$	$0,00\%$
Iterative	ne converge pas		$1,7376$	$1,91\%$	$0,65579$	$0,37\%$	$0,42400$	$0,00\%$
Solution analytique	$4,4730$		$1,7051$		$0,65337$		$0,42398$	

TABLE 4.10 – Comparaison de la déflection statique entre les différents modèles pour une plaque composite $[0/30/0]$ pour différents élancements.

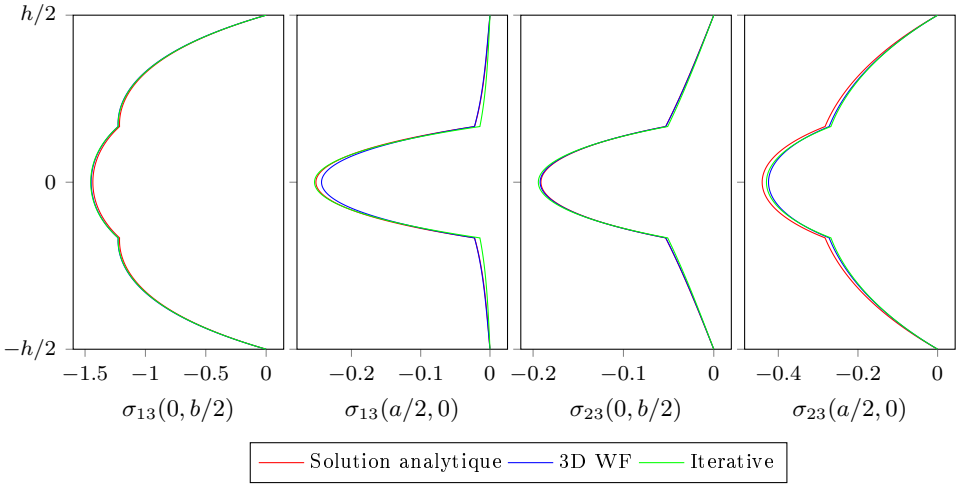


FIGURE 4.5 – Contraintes de cisaillement transverse aux points A et B pour une plaque composite $[0/30/0]$ avec $a/h = 4$ pour les trois méthodes implémentées.

a/h =	2		4		10		100	
Modèle	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur	$\overline{\omega}$	Erreur
FSDT	$4,4845$	$1,77\%$	$7,8142$	$4,24\%$	$12,4939$	$1,46\%$	$15,3647$	$0,05\%$
HSDT	$4,4994$	$2,11\%$	$7,5603$	$0,86\%$	$12,3699$	$0,61\%$	$15,3579$	$0,01\%$
Woodcock	$4,6683$	$5,94\%$	$7,8819$	$5,15\%$	$12,6245$	$2,68\%$	$15,3629$	$0,04\%$
EHOPT	$4,5753$	$3,83\%$	$7,5351$	$0,52\%$	$12,2989$	$0,03\%$	$15,3563$	$0,00\%$
3D WF	$4,4068$	$0,01\%$	$7,4847$	$0,15\%$	$12,2872$	$0,06\%$	$15,3561$	$0,00\%$
Iterative	ne converge pas		$4,4840$	$0,16\%$	$12,2871$	$0,06\%$	$15,3561$	$0,00\%$
Solution analytique	$4,4064$		$7,4961$		$12,5950$		$15,3562$	

TABLE 4.11 – Comparaison de la première fréquence de résonance entre les différents modèles pour une plaque composite $[0/30/0]$ avec différents élancements.

Pour ce cas, les résultats des modèles issus de l'élasticité tridimensionnelle sont en adéquation avec la solution analytique ce qui valide le modèle pour les stratifiés avec une séquence d'empilement n'impliquant aucune simplification dans le système (aucun terme nul dans la matrice $[\mathbf{K}]$.

4.2/ Réponse d'une plaque patchée soumise à une onde plane progressive

Nous proposons ici, l'étude d'une plaque en aluminium recouverte d'un patch PCLD sur 40% de sa surface. La plaque est soumise à une onde plane progressive. La simulation est réalisée à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz associée au modèle de Woodcock. Nous présentons dans un premier temps, une comparaison de la vitesse quadratique moyenne de la plaque obtenue de trois façons différentes : avec la méthode de Rayleigh-Ritz et le modèle de Woodcock, avec un calcul éléments finis tridimensionnel (Cast3m), et avec un calcul éléments finis faisant intervenir une formulation de plaque de type LW (FFT Actran). Puis, afin d'étudier le comportement du modèle vers de plus hautes fréquences, une étude bidimensionnelle de la plaque est proposée.

Nous proposons ensuite une analyse énergétique de la plaque patchée. Nous écrivons tout d'abord les formules permettant d'obtenir les puissances dissipées, de déformation et cinétiques à partir des grandeurs de la structure discrétisée. Puis, nous étudions la répartition de ces puissances dans la plaque patchée afin de pouvoir cibler l'origine de l'effet dissipatif du patch. Enfin, nous proposons trois critères basés sur les puissances conservées et dissipées, qui permet de quantifier l'efficacité du traitement viscocontraint.

4.2.1/ Configuration test étudiée

Dans cette section, une plaque d'aluminium rectangulaire, de dimensions $a_s = 0,6$ m, $b_s = 0,5$ m, et d'épaisseur $h = 1$ mm, est soumise à une onde plane progressive, se déplaçant vers la plaque, d'angles d'incidence $\theta = 45^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, et d'amplitude 1 Pa (voir figure 4.6). La plaque est encastrée sur ses quatre côtés. L'aluminium a les propriétés suivantes : module de Young $E = 7,24 \times 10^{10}$ Pa, densité $\rho_s = 2780$ kg.m^{-3}, coefficient de Poisson $\nu = 0,33$, et facteur de perte $\eta_s = 0,005$. Un patch PCLD, composé de deux couches, centré, avec les dimensions $a_p = 0,3795$ m, $b_p = 0,3162$ m, couvre 40% de la surface totale de la plaque. La première couche est composée de matériau viscoélastique ISD 112 et d'épaisseur de $0,2$ mm avec une densité de 1015 kg.m^{-3} et un coefficient de Poisson de $0,45$. Le tableau 4.12 présente la dépendance fréquentielle des propriétés du matériau viscoélastique à une température donnée. À des fins de programmation, une interpolation est utilisée et les formules employées sont présentées dans les équations (4.3) et (4.4). La couche de contrainte a une épaisseur de $0,2$ mm et est constituée du même aluminium que celui de la plaque.

$$E(f) = 10^{(0,4884\log(f)+5,3848)} \tag{4.3}$$

$$\eta(f) = 10^{(0,0175\log(f)^3+0,0571\log(f)^2+0,0015\log(f)-0,0874)} \tag{4.4}$$

Étant donné la grande disparité des modules de Young entre les couches et le fort élancement de la plaque étudiée, le modèle de Woodcock a été choisi. Ce modèle a pour

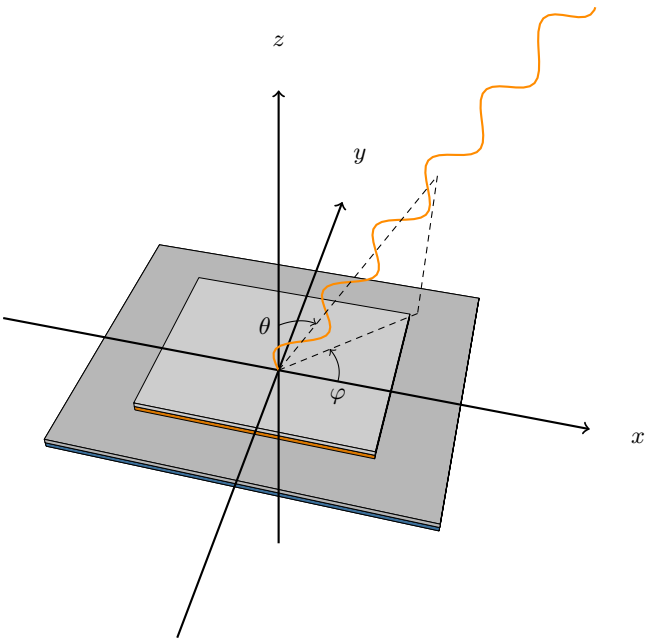


FIGURE 4.6 – Vue de la plaque patchée soumise à une onde plane progressive d'angles d'incidence θ et φ.

Frequency (Hz)	Young's Modulus (Pa)	Loss factor
10	$7,28 \times 10^5$	0,90
100	$2,34 \times 10^6$	1,00
500	$5,20 \times 10^6$	1,00
1000	$7,28 \times 10^6$	0,90
2000	$9,88 \times 10^6$	0,80
3000	$1,17 \times 10^7$	0,75
4000	$1,38 \times 10^7$	0,70

TABLE 4.12 – Variation des propriétés du matériau viscoélastique ISD 112 en fonction de la fréquence (T=25˚C).

avantage d'être relativement efficace sur ce type de configurations et de ne pas nécessiter de calculs préalables comme pour les méthodes présentées dans la section 2.7.5.

4.2.2/ COMPARAISON AVEC DEUX MODÈLES ÉLÉMENTS FINIS TRIDIMENSIONNELS

Afin de vérifier la validité du modèle utilisé pour une plaque patchée, une comparaison est réalisée avec deux types de simulations par éléments finis. Les deux modèles éléments finis associés sont de type tridimensionnels : la plaque, la couche viscoélastique et la couche de contrainte sont toutes les trois discrétisées avec un élément par couche au travers de l'épaisseur.

Ces deux modèles utilisent le même élément hexaèdre à 20 nœuds, toutefois l'élément choisi dans le code ACTRAN implémente une formulation de plaque de type LW réduisant

ainsi le degré d'interpolation sur l'épaisseur de la plaque et permettant ainsi de réduire la taille du système. L'élément choisi dans le code Cast3m utilise uniquement les équations de l'élasticité tridimensionnelle et donc n'implique pas d'hypothèses cinématiques. Afin d'éviter des temps de calcul trop longs, la taille des maillages est fixée à $59 \times 49 \times 1 + 37 \times 31 \times 2$ (91104 DDL) pour le modèle Cast3m et à $40 \times 33 \times 1 + 25 \times 21 \times 2$ (42264 DDL) pour le modèle Actran. Pour chaque modèle, il existe une fréquence au delà de laquelle une solution correcte ne peut plus être obtenue sans augmenter la taille du problème. Les calculs ne sont pas effectués au delà de ces fréquences.

4.2.2.1/ Présentation des résultats

La figure 4.7 montre l'évolution de la vitesse quadratique moyenne $\langle\langle V^2 \rangle\rangle$ en fonction du nombre de degrés de liberté (DDL) pour les deux fréquences de 400 et 3000 Hz. Pour la simulation à 400 Hz de la figure 4.7(a), il est montré que la convergence est achevée avec dix fois moins de DDL pour la formulation Layer-Wise (LW) implémentée sous Actran que pour la formulation tridimensionnelle. Le modèle bi-dimensionnel étudié est capable de donner les mêmes résultats avec deux fois moins de DDL que pour la formulation LW. Pour le cas à la fréquence 3000 Hz présenté à la figure 4.7(b), la même tendance est observée, mais la convergence avec la formulation tridimensionnelle n'a pas pu être achevée avec notre ordinateur pour cause de limitation de mémoire.

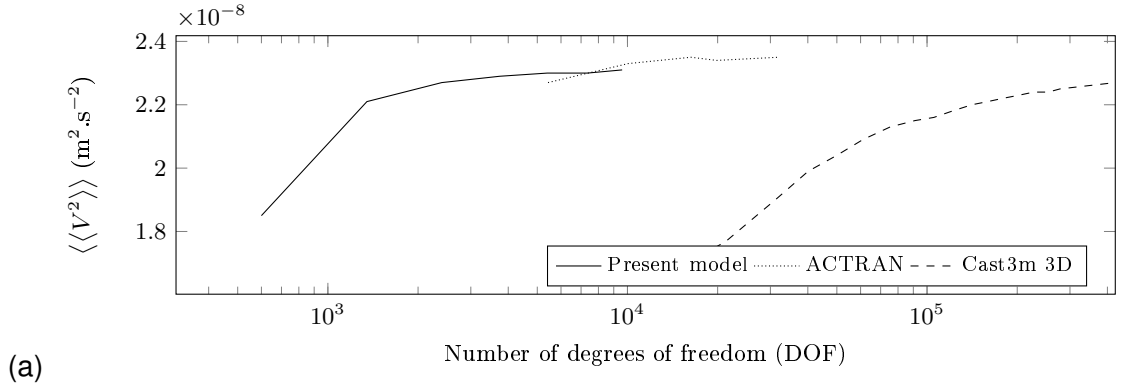
La figure 4.8 présente l'évolution de la vitesse quadratique moyenne $\langle\langle V^2 \rangle\rangle$ en fonction de la fréquence pour les trois modèles. Les calculs ont été arrêtés pour chaque code lorsque les temps de calculs commençaient à être prohibitifs.

4.2.3/ Comparaison à plus haute fréquence avec un modèle élément finis bi-dimensionnel

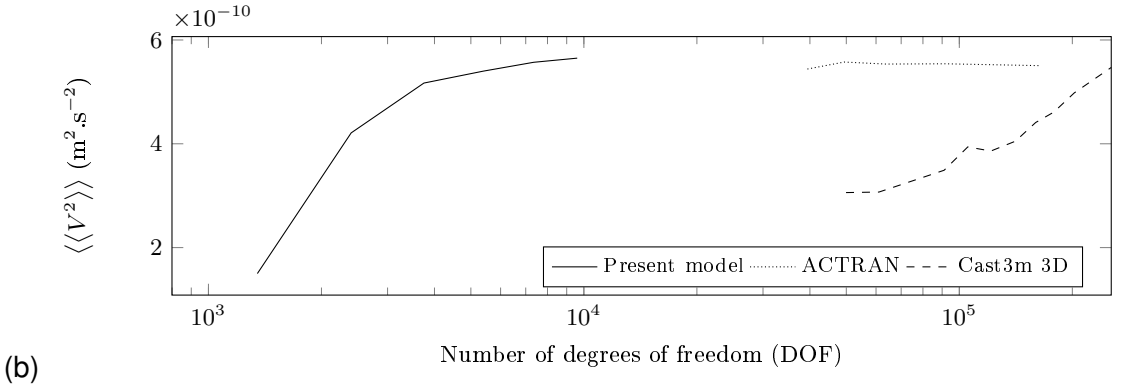
Afin de permettre une comparaison à plus haute fréquence, la taille du système doit être augmentée. Ceci ne peut être fait facilement pour les deux approches tridimensionnelles utilisées précédemment. Le modèle bi-dimensionnel présenté ici permet des simulations à de plus hautes fréquences.

4.2.3.1/ Présentation des modèles de poutre

Afin de permettre une validation du modèle à de plus hautes fréquences, un modèle poutre utilisant le même champ de déplacement a été réalisé en fixant l'ordre maximum de la base à zéro dans la direction y (permettant ainsi seulement un déplacement constant). Ensuite, une comparaison de ce modèle est réalisée avec un modèle de poutre, éléments finis, bi-dimensionnel, implémenté avec Cast3m (l'hypothèse de déformation plane a été appliquée).



(a)



(b)

FIGURE 4.7 – Étude de convergence pour les trois modèles : évolution de la vitesse quadratique moyenne $\langle\langle V^2 \rangle\rangle$ à la fréquence de 400 Hz (a) et 3000 Hz (b) en fonction du nombre de degrés de liberté.

Pour chaque modèle, le même cas test est simulé : une poutre de longueur $a = 0,6$ m et d'épaisseur $h = 1$ mm est excitée avec une onde plane acoustique d'angle d'incidence $\theta = 45^{\circ}$ et d'amplitude 1 Pa. La poutre est couverte avec un patch PCLD centré, composé de deux couches avec pour dimension $a_p = 0,3795$ m et les mêmes caractéristiques que dans les études précédentes.

L'ordre maximum de la base est de 100 dans la direction x ; cette valeur est obtenue avec une étude de convergence à 10 kHz. Le maillage du modèle éléments finis est choisi après une étude de convergence et est composé de 3000×10 éléments pour la plaque de base et 1898×2 éléments pour le patch (pour le patch, il y a un élément par couche pour la direction z).

4.2.3.2/ COMPARAISON DES RÉSULTATS

La simulation est réalisée sur la bande de fréquence $10 - 10000$ Hz. La figure 4.9 présente l'évolution de la vitesse quadratique moyenne $\langle\langle V^2 \rangle\rangle$ en fonction de la fréquence pour les deux modèles. Ceci montre que le modèle étudié est en accord avec le modèle éléments finis jusqu'à 5 kHz. Les résultats sur la bande de fréquence 5 kHz $- 10$ kHz sont similaires. Il est intéressant de remarquer que le modèle éléments finis bi-dimensionnel prend en

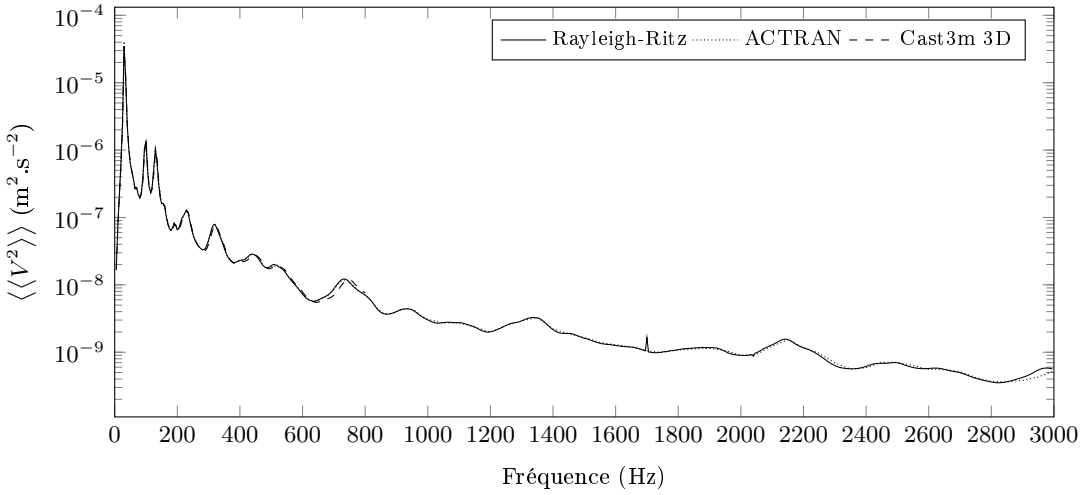


FIGURE 4.8 – Évolution de la vitesse quadratique moyenne $\langle\langle V^2\rangle\rangle$ pour les trois modèles.

compte la déformation suivant l'axe z (ε_{zz} peut être différent de zéro).

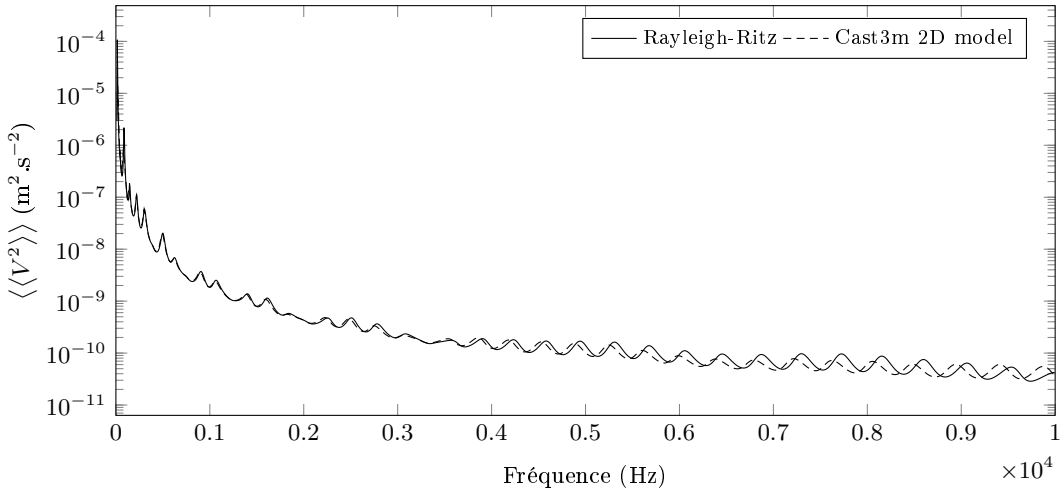


FIGURE 4.9 – Vitesse quadratique moyenne $\langle\langle V^2\rangle\rangle$ pour le modèle de poutre : comparaison du modèle étudié à un modèle élément fini bi-dimensionnel en déformation plane.

4.2.4/ DISCUSSION

Dans cette section, il est montré que la méthode des éléments finis avec une formulation tridimensionnelle de l'élasticité n'est pas adaptée à l'étude des patches PCLD. Ceci nécessiterait un maillage très fin et donc générerait de trop grands systèmes d'équations. Le modèle éléments finis tridimensionnel, avec une formulation LW, donne de meilleurs résultats. Ces deux approches ont été implémentées dans le but d'avoir une solution de référence, et il est montré que ces résultats s'accordent très bien tant qu'une convergence est possible.

Le modèle étudié, qui est aussi un modèle de plaque multi-couche, donne des résultats satisfaisants comparé aux modèles de plaque tridimensionnels tout en conservant les bonnes performances de calcul des modèles bi-dimensionnels. Ceci montre donc que les hypothèses du modèle de Woodcock sur les champs de déplacements et de contraintes du modèle étudié sont adaptées à l'étude des patchs PCLD.

4.2.5/ Analyse énergétique de la plaque patchée

Ce chapitre s'intéresse aux différents indicateurs énergétiques utiles à la compréhension du phénomène d'amortissement vibratoire d'une plaque patchée. L'énergie vibratoire répartie dans une plaque peut être divisée en deux partie, l'énergie dissipée $e_d(t)$ et l'énergie conservée $e_c(t)$. Cette dernière est également composée de l'énergie potentielle de déformation $e_s(t)$ et de l'énergie cinétique $e_k(t)$.

4.2.5.1/ Préliminaires théoriques

Les déplacements sont supposés petits. Les matériaux utilisés sont viscoélastiques avec un amortissement hystéretique. Ils sont supposés obéir à la généralisation anisotropique du modèle de Kelvin-Voigt,

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\mathrm{el}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{vi}} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \eta_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \\ \text{avec } C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad \text{et} \quad \eta_{ijkl} = \eta_{ijlk} = \eta_{klij}\end{gathered} \tag{4.5}$$

où le symbole $\dot{\varepsilon}_{kl}$ marque la dérivée temporelle de ε_{kl}. Le tenseur du second ordre des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est la somme de deux tenseurs du second ordre symétriques $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{el}}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{vi}}$, qui représentent respectivement les contributions *élastiques* et *visqueuses* des contraintes.

Pour des raisons physiques, lorsque l'on traite les structures amorties, il peut être intéressant d'accéder aux répartitions spatiales des densités de l'énergie cinétique $e_k(t)$, de l'énergie de déformation $e_s(t)$, et de la puissance dissipée $p_d(t)$. Définissons ces quantités en fonction du temps :

$$\begin{gathered}e_k(t) = \frac{1}{2}\rho v_i(t)v_i(t) \quad e_s(t) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{\mathrm{el}}(t)\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(t)\varepsilon_{ij}(t) \\ p_d(t) = \sigma_{ij}^{\mathrm{vi}}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t) = \eta_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)\end{gathered} \tag{4.6}$$

avec v_i la vitesse associée au déplacement u_i. Comme les structures amorties sont souvent modélisées en utilisant les nombres complexes, il est intéressant d'utiliser les puissances complexes, qui, comme il sera expliqué par la suite, donnent les moyennes temporelles, identifiées par le symbole $\langle\bullet\rangle$, des quantités décrites précédemment. De plus, il est possible d'écrire l'équilibre des énergies au niveau local et global en incluant la puis-

sance complexe incidente $\tilde{P}_{\text{inc}}$ et les moyennes temporelles de la puissance dissipée, de l'énergie cinétique, et de l'énergie de déformation.

Sous forme complexe, la loi comportement des matériaux (4.5) en régime harmonique devient :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl} + \mathrm{j}\,\omega\eta_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl} \tag{4.7}$$

La moyenne temporelle des quantités quadratiques des formules (4.6) peut être construite en prenant la moitié de la partie réelle du produit hermitien correspondant :

$$\langle e_k(t)\rangle = \frac{1}{4}\rho\tilde{v}_i^*\tilde{v}_i \qquad \langle e_s(t)\rangle = \frac{1}{4}\,\mathrm{Re}(\tilde{\sigma}_{ij}^{\mathrm{el}*}\tilde{\varepsilon}_{ij}) \qquad \langle p_d(t)\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\mathrm{j}\,\omega\tilde{\sigma}_{ij}^{\mathrm{vi}*}\tilde{\varepsilon}_{ij}) \tag{4.8}$$

Le symbole Re peut être omis pour l'énergie cinétique car ce terme est réel. La symétrie majeure du tenseur du quatrième ordre dans la loi de comportement ci-dessus implique que $\tilde{\sigma}_{ij}^{\mathrm{el}*}\tilde{\varepsilon}_{ij}$ est réel et que $\tilde{\sigma}^{\mathrm{vi}*}\tilde{\varepsilon}_{ij}$ est imaginaire. Puis, le symbole Re restant dans l'équation (4.8) peut aussi être omis. En effet :

$$\langle e_k(t)\rangle = \frac{1}{4}\rho\tilde{v}_i^*\tilde{v}_i \qquad \langle e_s(t)\rangle = \frac{1}{4}\tilde{\sigma}_{ij}^{\mathrm{el}*}\tilde{\varepsilon}_{ij} \qquad \langle p_d(t)\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{j}\,\omega\tilde{\sigma}_{ij}^{\mathrm{vi}*}\tilde{\varepsilon}_{ij} \tag{4.9}$$

Il peut être intéressant de remarquer que :

$$\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{ij}^*\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{ij}^{\mathrm{el}*}\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}^{\mathrm{vi}*}\tilde{\varepsilon}_{ij}) = 2\,\langle e_s(t)\rangle - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega}\,\langle p_d(t)\rangle \tag{4.10}$$

4.2.5.2/ ÉQUILIBRE LOCAL DES PUISSANCES COMPLEXES

Nous montrons ici qu'il est possible de formuler une équation d'équilibre des puissances complexes locales, valide en tout point de la structure. On remarque par ailleurs, que si l'équation est valide en tout point, elle est par conséquent valide pour le domaine entier. Par opposition, une équation d'équilibre des puissances complexes globale n'implique pas que cette équation soit vérifiée localement. L'équation locale apporte donc une information supplémentaire sur l'équilibre des puissances. Commençons par les équations d'équilibre de la mécanique :

$$\sigma_{ji,j} + \rho f_i^v = \rho\dot{v}_i \tag{4.11}$$

avec $\dot{v}_i$ l'accélération associée à v_i. Pour le problème harmonique correspondant, l'utilisation des quantités complexes permet d'écrire :

$$\tilde{\sigma}_{ji,j} + \rho\tilde{f}_i^v = \mathrm{j}\,\omega\rho\tilde{v}_i \tag{4.12}$$

L'équation d'équilibre des puissances complexes est alors obtenue en multipliant la moitié du produit hermitien de l'équation (4.12) par $\{\tilde{v}_i\}$, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\tilde{v}_i^*\tilde{\sigma}_{ji,j} + \frac{1}{2}\rho\tilde{v}_i^*\tilde{f}_i^v = \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\omega\rho\tilde{v}_i^*\tilde{v}_i \tag{4.13}$$

En faisant une intégration par partie sur le premier terme, nous pouvons écrire :

$$-\frac{1}{2}\tilde{v}_{i,j}^*\tilde{\sigma}_{ji} + \frac{1}{2}(\tilde{v}_i^*\tilde{\sigma}_{ji})_{,j} + \frac{1}{2}\rho\tilde{v}_i^*\tilde{f}_i^v = \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\omega\rho\tilde{v}_i^*\tilde{v}_i \tag{4.14}$$

D'après la symétrie du tenseur des contraintes, il est possible d'écrire :

$$-\frac{1}{2}\tilde{D}_{ij}^*\tilde{\sigma}_{ji} + (\frac{1}{2}\tilde{v}_i^*\tilde{\sigma}_{ji})_{,j} + \frac{1}{2}\rho\tilde{v}_i^*\tilde{f}_i^v = \mathrm{j}\,\omega\frac{1}{2}\rho\tilde{v}_i^*\tilde{v}_i \tag{4.15}$$

où D_{ij} est le tenseur des vitesses de déformation. Lorsque les déformations sont petites, on écrit $D_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$, ce qui implique que $\tilde{D}_{ij} = \mathrm{j}\,\omega\tilde{\epsilon}_{ij}$ pour une excitation harmonique. En introduisant $\tilde{I}_j = \frac{1}{2}\tilde{v}_i^*\tilde{\sigma}_{ji}$ comme le flux d'énergie (aussi connu sous le nom de vecteur d'intensité), on écrit :

$$\tilde{I}_{j,j} + \frac{1}{2}\rho\tilde{v}_i^*\tilde{f}_i^v = \mathrm{j}\,\omega\frac{1}{2}\rho\tilde{v}_i^*\tilde{v}_i + \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\omega\tilde{\epsilon}_{ij}^*\tilde{\sigma}_{ji} \tag{4.16}$$

Le remplacement des termes de la partie droite de l'équation avec l'aide de l'équation (4.9) et (4.10) permet d'écrire l'équation locale d'équilibre des puissances :

$$\tilde{I}_{j,j} + \frac{1}{2}\rho\tilde{v}_i^*\tilde{f}_i^v = \langle p_d(t)\rangle + 2\,\mathrm{j}\,\omega(\langle e_k(t)\rangle - \langle e_s(t)\rangle) \tag{4.17}$$

Équations discrètes correspondantes

L'équation discrétisée (4.18) avec une formulation en déplacements (e.g., en utilisant la méthode des éléments finis ou la méthode de Rayleigh-Ritz) est un système d'équations linéaires écrit avec une matrice de masse $[\mathbf{M}]$, une matrice de rigidité complexe $\left[\tilde{\mathbf{K}}\right]$, un vecteur de force $\left\{\tilde{f}\right\}$ et le vecteur des déplacements $\{\tilde{u}\}$ qui est ici l'inconnue.

$$\left(\left[\tilde{\mathbf{K}}\right] - \omega^2\,[\mathbf{M}]\right)\{\tilde{u}\} = \left\{\tilde{f}\right\} \tag{4.18}$$

Classiquement, le vecteur $\left\{\tilde{f}\right\}$ est la somme des vecteurs des forces de volume $\left\{\tilde{f}^v\right\}$ et de surface $\left\{\tilde{f}^s\right\}$. Les quantités de l'équation (4.18) peuvent ensuite être exprimées en fonction

des quantités du système discrétisé :

$$\tilde{P}_{f^s} = \oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{2} \tilde{v}_i^* \tilde{f}_i^s \mathrm{d}S = -\frac{1}{2} \mathrm{j}\,\omega \left\{\tilde{u}^{*\mathsf{T}}\right\} \left\{\tilde{f}\right\}^s \tag{4.19}$$

$$\tilde{P}_{f^v} = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \tilde{v}_i^* \tilde{f}_i^v \mathrm{d}V = -\frac{1}{2} \mathrm{j}\,\omega \left\{\tilde{u}^{*\mathsf{T}}\right\} \left\{\tilde{f}\right\}^v \tag{4.20}$$

$$\langle E_k(t) \rangle = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{4} \rho \tilde{v}_i^* \tilde{v}_i \mathrm{d}V = \frac{1}{4} \omega^2 \left\{\tilde{u}^{*\mathsf{T}}\right\} [\mathbf{M}] \{\tilde{u}\} \tag{4.21}$$

$$\langle E_s(t) \rangle = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{4} \mathrm{Re}(\tilde{\sigma}_{ij}^* \tilde{\varepsilon}_{ij}) \mathrm{d}V = \frac{1}{4} \left\{\tilde{u}^{*\mathsf{T}}\right\} \left[\mathrm{Re}(\tilde{\mathbf{K}})\right] \{\tilde{u}\} \tag{4.22}$$

$$\langle P_d(t) \rangle = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{4} \mathrm{Re}(\mathrm{j}\,\omega \tilde{\sigma}_{ij}^* \tilde{\varepsilon}_{ij}) \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \omega \left\{\tilde{u}^{*\mathsf{T}}\right\} \left[\mathrm{Im}(\tilde{\mathbf{K}})\right] \{\tilde{u}\} \tag{4.23}$$

4.2.5.3/ ÉQUILIBRE GLOBAL DES PUISSANCES COMPLEXES

Les puissances $\langle P_d(t) \rangle$, $2\omega \langle E_k(t) \rangle$, et $2\omega \langle E_s(t) \rangle$ données par les trois codes sont présentées en fonction de la fréquence dans la figure 4.10. Il est alors possible de conclure que chacun des codes de calcul utilisés donne le même résultat malgré le fait qu'ils soient basés sur des méthodes très différentes.

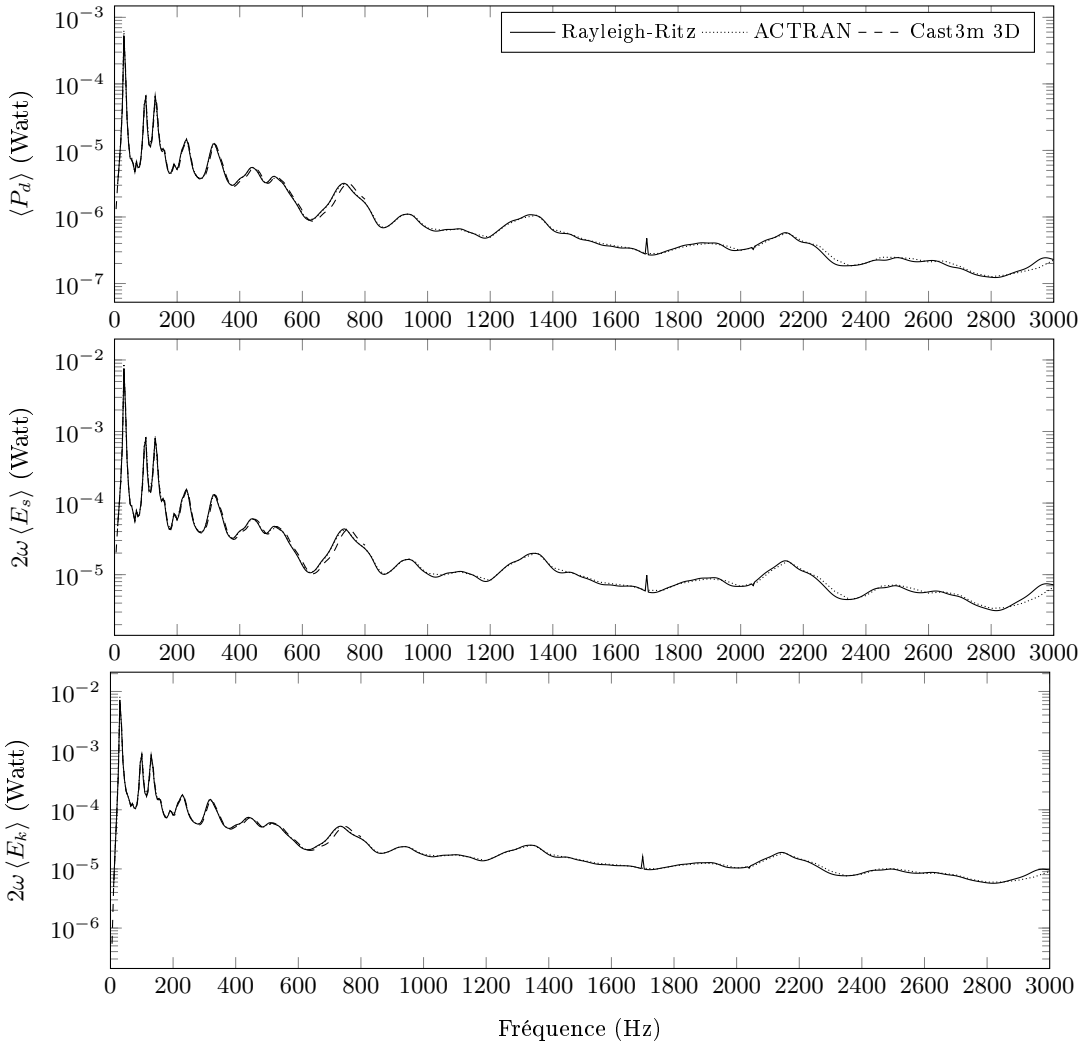


FIGURE 4.10 – Puissances $\langle P_d(t) \rangle$, $2\omega \langle E_k(t) \rangle$, and $2\omega \langle E_s(t) \rangle$ pour les trois modèles différents : Rayleigh-Ritz, le modèle Actran LW éléments finis et le code de calcul éléments finis tridimensionnel Cast3m.

Afin de vérifier l'équilibre global des puissances de l'équation (4.18), les énergies et les puissances globales sont calculées avec les vecteurs et matrices correspondants au moyen de la formule de la section 4.2.5.2. Puis, nous séparons les parties réelles et imaginaires de l'équilibre des puissances, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\tilde{P}_{f^s} + \tilde{P}_{f^v}) = \langle P_d(t) \rangle \\ \mathrm{Im}(\tilde{P}_{f^s} + \tilde{P}_{f^v}) = 2\omega(\langle E_k(t) \rangle - \langle E_s(t) \rangle) \end{cases} \tag{4.24}$$

Ces formules ont été testées pour le modèle étudié sur la bande de fréquence $5 - 1200$ Hz. L'erreur relative $\tilde{\epsilon}$ de l'équilibre des puissances a une valeur maximum réelle et imaginaire de $\mathrm{Re}(\epsilon) = 1,102 \times 10^{-8}$ et $\mathrm{Im}(\epsilon) = 1,206 \times 10^{-13}$ sur la bande de fréquence simulée. Ceci confirme la formule de la section 4.2.5.2 et montre que l'équilibre

des puissances complexes est vérifié.

4.2.5.4/ CONTRIBUTION DES COMPOSANTES DU TENSEUR AUX PUISSANCES

Il est possible de distinguer à l'intérieur de chaque couche la contribution de chaque mode de déformation. Les contributions à l'énergie de déformation,
– des composants 11, 22, et 12 du tenseur des contraintes et déformations (dans le plan),
– des déformations de cisaillement transverse autour de l'axe xz (composant 13),
– et des déformations de cisaillement transverse autour de l'axe yz (composant 23),

peuvent être calculées séparément.

Le tableau 4.13 montre ces contributions pour la structure étudiée, lorsque celle-ci est excitée par une onde plane acoustique à la frequence 80 Hz. Ce tableau présente :
– la puissance dissipée $\langle P_d(t)\rangle$
– *la puissance équivalente de déformation*[1] $2\omega\langle E_s(t)\rangle$.

Pour la structure étudiée, 80 Hz correspond à une basse fréquence non modale. Une comparaison avec les résultats du modèle éléments finis tridimensionnel montre un bon accord entre les résultats.

	Rayleigh-Ritz		**Cast3m 3D**		**Rayleigh-Ritz**		**Cast3m 3D**	
Composantes	$\langle P_d(t)\rangle$ (W)	Part	$\langle P_d(t)\rangle$ (W)	Part	$2\omega\langle E_s(t)\rangle$ (W)	Part	$2\omega\langle E_s(t)\rangle$ (W)	Part
11 22 12 (33)	$3,118\times10^{-7}$	$5,4\%$	$3,107\times10^{-7}$	$5,7\%$	$6,230\times10^{-5}$	$92,0\%$	$6,203\times10^{-5}$	$92,2\%$
13	$3,209\times10^{-6}$	$56,0\%$	$2,999\times10^{-6}$	$54,7\%$	$3,202\times10^{-6}$	$4,7\%$	$3,024\times10^{-6}$	$4,5\%$
23	$2,206\times10^{-6}$	$38,5\%$	$2,178\times10^{-6}$	$39,7\%$	$2,200\times10^{-6}$	$3,2\%$	$2,190\times10^{-6}$	$3,3\%$
Total	$5,726\times10^{-6}$		$5,488\times10^{-6}$		$6,770\times10^{-5}$		$6,724\times10^{-5}$	
Couche	$\langle P_d(t)\rangle$ (W)	Part	$\langle P_d(t)\rangle$ (W)	Part	$2\omega\langle E_s(t)\rangle$ (W)	Part	$2\omega\langle E_s(t)\rangle$ (W)	Part
Plaque	$2,477\times10^{-7}$	$4,3\%$	$2,585\times10^{-7}$	$4,7\%$	$4,953\times10^{-5}$	$73,2\%$	$5,171\times10^{-5}$	$76,9\%$
Couche viscoélastique	$5,415\times10^{-6}$	$94,6\%$	$5,177\times10^{-6}$	$94,3\%$	$5,395\times10^{-6}$	8%	$5,158\times10^{-6}$	$7,7\%$
Couche de contrainte	$6,385\times10^{-8}$	$1,1\%$	$5,189\times10^{-8}$	$1,0\%$	$1,275\times10^{-5}$	$18,9\%$	$1,038\times10^{-5}$	$15,4\%$
Total	$5,727\times10^{-6}$		$5,488\times10^{-6}$		$6,767\times10^{-5}$		$6,724\times10^{-5}$	

TABLE 4.13 – Répartition des puissances conservées et dissipées sur les différentes directions de l'espace obtenue avec la méthode de Rayleigh-Ritz et la formulation éléments finis tridimensionnelle à 80 Hz.

Ces résultats montrent clairement l'importance du rôle des déformations dues au cisaillement transverse dans la couche de matériau viscoélastique pour l'amortissement. On peut aussi remarquer l'importance de la déformation dans le plan des couches élastiques pour l'énergie de déformation. Bien sur, ceci est dû à la position de chaque couche dans la structure et aux modules de Young relatifs aux matériaux. La localisation de la déformation due au cisaillement transverse dans la couche de matériau viscoélastique et dans les couches rigides supérieures et inférieures n'est pas surprenante puisque cette

1. la puissance développée sur un cycle par les forces internes élastiques est nulle

observation est connue pour les structures sandwich. Ce qui est plus surprenant est la forte contribution de la couche viscoélastique à l'amortissement. En effet, on peut remarquer que le module de Young du matériau viscoélastique est (à cette fréquence) 35000 fois plus faible que le module de Young de l'aluminium. Avec un facteur de perte de $0,005$ pour l'aluminium et $1,0$ pour le matériau viscoélastique, la couche de matériau viscoélastique est responsable de 94,6% de la puissance dissipée sur toute la structure, tandis qu'elle occupe seulement 6,9% du volume total de la structure, 2,6% de la masse et recouvre 40% de la surface. Ceci s'explique en effet de part l'amplitude des déformations au sein de la couche de matériau viscoélastique. En effet, le gradient de déformation moyen de la couche viscoélastique est largement supérieur à celui des couches métalliques.

On remarque que les contributions des composantes 13 et 23 sont majoritairement gouvernées par la déformée, elles varient donc avec la fréquence ou l'excitation, mais leur somme est à peu près constante lorsque l'on fait varier la fréquence. Il est aussi intéressant de remarquer que la contribution mineure de la composante 33 a été ajoutée à la contribution de l'énergie "dans le plan" pour le modèle tridimensionnel.

En comparant le modèle étudié, qui peut être classé comme un modèle zig-zag équivalent monocouche (d'après la classification donnée dans [84]), avec le modèle éléments finis tridimensionnel, on remarque que celui-ci est capable de déterminer précisément les contributions de chaque couche et chaque mode de déformation des puissances conservées ou dissipées.

4.2.5.5/ Distribution de la puissance sur la surface de la plaque

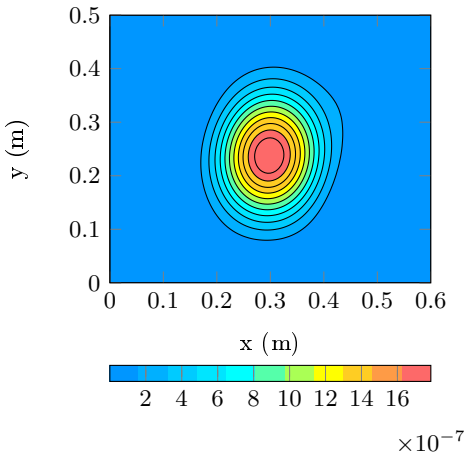
Il est possible d'obtenir les déformations à partir du champ de déplacement décrit dans [70] et ensuite de calculer les valeurs locales de $\tilde{\varepsilon}(x,y,z)$ et $\tilde{\sigma}(x,y,z)$. L'intégration de la formule (4.10) sur z et la multiplication par $(\mathrm{j}\,\omega)$ donne :

$$\frac{1}{2}\int_0^h \tilde{\sigma}^*_{ij}(x,y,z)\,\mathrm{j}\,\omega\tilde{\varepsilon}_{ij}(x,y,z)\mathrm{d}z = \int_0^h \langle p_d(x,y,z,t)\rangle \mathrm{d}z + 2\,\mathrm{j}\,\omega\int_0^h \langle e_s(x,y,z,t)\rangle \mathrm{d}z \tag{4.25}$$

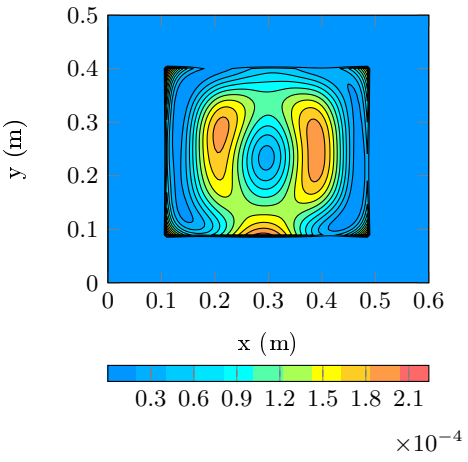
ce qui permet définir les densités de puissances surfaciques associées $\tilde{p}^s(x,y)$, $\left\langle \tilde{p}^s_d(x,y,t)\right\rangle$, et $2\omega\left\langle \tilde{e}^s_s(x,y,t)\right\rangle$:

$$\tilde{p}^s(x,y) = \left\langle p^s_d(x,y,t)\right\rangle + 2\,\mathrm{j}\,\omega\left\langle e^s_s(x,y,t)\right\rangle \tag{4.26}$$

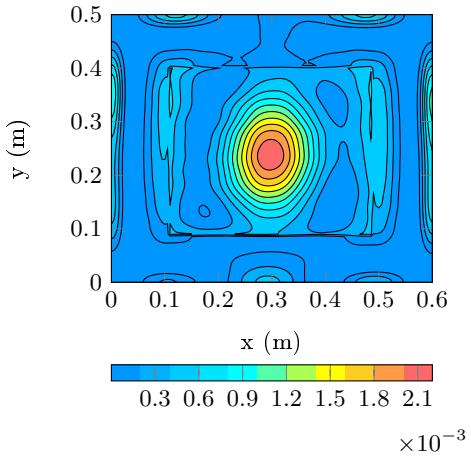
Pour le système décrit dans la section4.2.1, la vitesse quadratique $\left\langle \dot{u}^2_3(t)\right\rangle = 1/2\ \omega^2\tilde{u}^*_3\tilde{u}_3$, les deux puissances $\left\langle p^s_d(x,y,t)\right\rangle$ et $2\omega\left\langle e^s_s(x,y,t)\right\rangle$ sont cartographiées pour les deux fréquences 80 Hz et 850 Hz et sont présentées dans les figures 4.11 et 4.12. La fréquence 850 Hz a été choisie pour explorer la bande des moyennes fréquences et parce que le patch semble avoir une faible efficacité d'après les critères présentés dans la section 4.2.5.6.



(a) Vitesse quadratique $\left\langle \dot{u}_3^2(t) \right\rangle$ ($m^2.s^{-2}$).



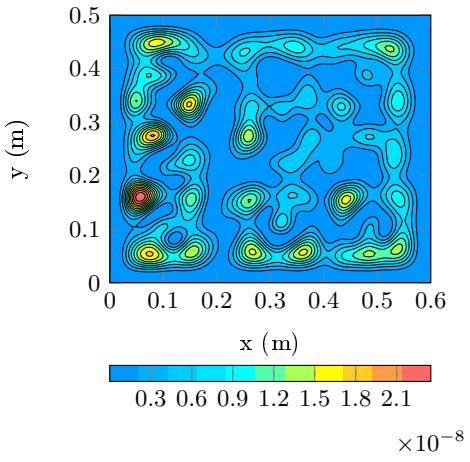
(b) Energie de déformation puissance $2\omega \left\langle e_s^s(t) \right\rangle$ ($W.m^{-2}$)



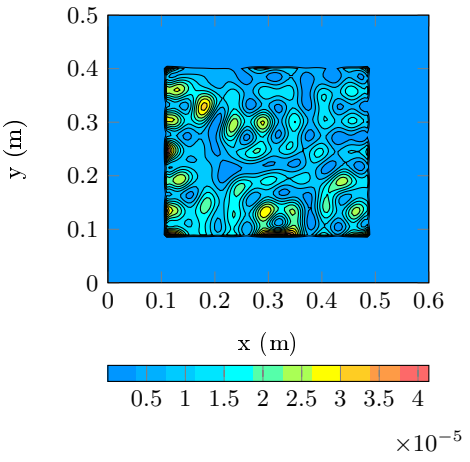
(c) Puissance dissipée $\left\langle p_d^s(t) \right\rangle$ ($W.m^{-2}$)

FIGURE 4.11 – Cartographies pour la fréquence de 80 Hz.

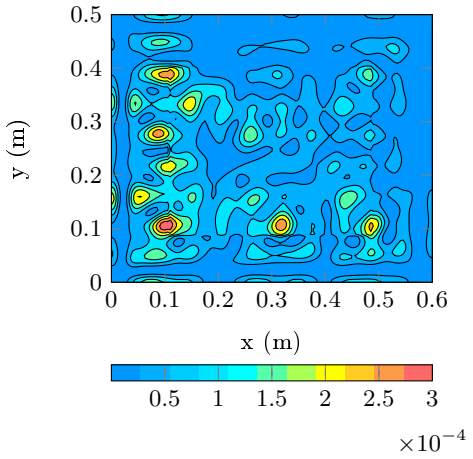
En comparant les figures 4.11(a) et 4.11(c), il est possible de remarquer un lien direct avec la vitesse quadratique et la localisation de l'énergie de déformation. La figure 4.11(b) montre que la localisation de la puissance dissipée est différente de celle de l'énergie de déformation.



(a) Vitesse quadratique $\left\langle \dot{u}_3^2(t) \right\rangle$ (m^2.s^{-2}).



(b) Energie de déformation puissance $2\omega \left\langle e_s^s(t) \right\rangle$ (W.m^{-2})



(c) Puissance dissipée $\left\langle p_d^s(t) \right\rangle$ (W.m^{-2})

FIGURE 4.12 – Cartographies pour la fréquence de 850 Hz.

À la fréquence plus élevée de 850 Hz, il est possible de conclure à partir de la figure 4.12 que la puissance associée avec l'énergie de déformation $2\omega \left\langle e_s^s(t) \right\rangle$ tend à être stockée à l'extérieur de la surface patchée ; à l'inverse, la puissance dissipée $\left\langle p_d^s(t) \right\rangle$ tend à être plus faible qu'à la fréquence de 80 Hz. Il est possible de considérer que le patch n'est pas très efficace à cette fréquence ; il est donc intéressant de calculer les ratios présentés dans la section 4.2.5.6.

Il est aussi possible de voir une asymétrie, en particulier pour le deuxième cas avec une fréquence d'excitation de 850 Hz. Ceci est dû à l'angle d'incidence de l'onde plane acoustique incidente. Les niveaux d'énergie sont plus hauts dans le coin opposé à la provenance de l'onde acoustique. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'onde plane acoustique incidente créé une onde plane progressive dans la plaque, avec une longueur d'onde correspondant à la projection de la longueur d'onde de l'onde plane incidente. Cette onde

plane progresse dans la même direction que la projection de l'onde plane incidente et apporte de l'énergie au coin opposé. Cette énergie rebondit sur les bords de la plaque, mais l'amortissement réduit la quantité d'énergie réfléchie, ce qui explique l'asymétrie observée. Ce phénomène a été observé pour plusieurs angles d'incidence et plusieurs fréquences, et il est plus facile de le voir sur une animation. Quoi qu'il en soit, le rôle présumé de ce phénomène sur l'amortissement n'a pas été étudié à ce jour.

Cet outil, permettant de visualiser la distribution de l'énergie sur la plaque, apporte un nouvel aspect au problème de la disposition optimum des patchs. Cette méthode déterministe permet aussi une meilleure compréhension de la façon dont le patch amorti les vibrations.

4.2.5.6/ INDICATEURS D'EFFICACITÉ

Comme première introduction de l'utilisation des puissances et des énergies dans les systèmes amortis, cette section propose une investigation des critères d'efficacité des patchs d'un point de vue énergétique. Un critère usuel de la transmission du son au travers d'une plaque communément rencontré dans la littérature est la transparence acoustique (*Transmission Loss* – TL), qui est définit comme le ratio entre la puissance acoustique incidente et la puissance acoustique transmise. Cependant, ce ratio n'indique pas directement l'efficacité du patch d'un point de vue strictement mécanique. En effet, la transparence acoustique est un indicateur global des vibrations de la plaque, qui inclue l'efficacité de rayonnement des modes et d'autres paramètres acoustiques. Les indicateurs présentés ici, η_1, η_2 et η_3 sont uniquement basés sur l'efficacité du patch :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\langle P_d(t)\rangle}{2\omega\,\langle E_k(t)\rangle} \\ \eta_2 &= \frac{\langle P_d(t)\rangle}{2\omega\,\langle E_s(t)\rangle} \\ \eta_3 &= \frac{\langle P_d(t)\rangle}{2\omega(\langle E_k(t)\rangle + \langle E_s(t)\rangle)} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ces indicateurs peuvent éventuellement être utilisés pour obtenir des fonctions objectif utilisées lors de l'implémentation d'algorithmes d'optimisation.

L'indicateur η_1 est adapté à l'optimisation du patch avec comme objectif l'efficacité acoustique ; l'énergie cinétique de la structure est considérée comme directement liée aux émissions acoustiques de la structure. L'indicateur η_2 est adapté à l'optimisation mécanique du patch. En effet, si l'on minimise l'énergie de déformation, cela tend à réduire le niveau de vibration de la structure. L'indicateur η_3, quant à lui, est un indicateur hybride combinant les indicateurs η_1 et η_2.

On remarque que l'indicateur η_2 est similaire à l'indicateur η présenté par Johnson et

Kienholz [85]. La principale différence est que η_2 prend en compte l'énergie dissipée totale tandis que η prend uniquement en compte l'énergie dissipée par la couche viscoélastique.

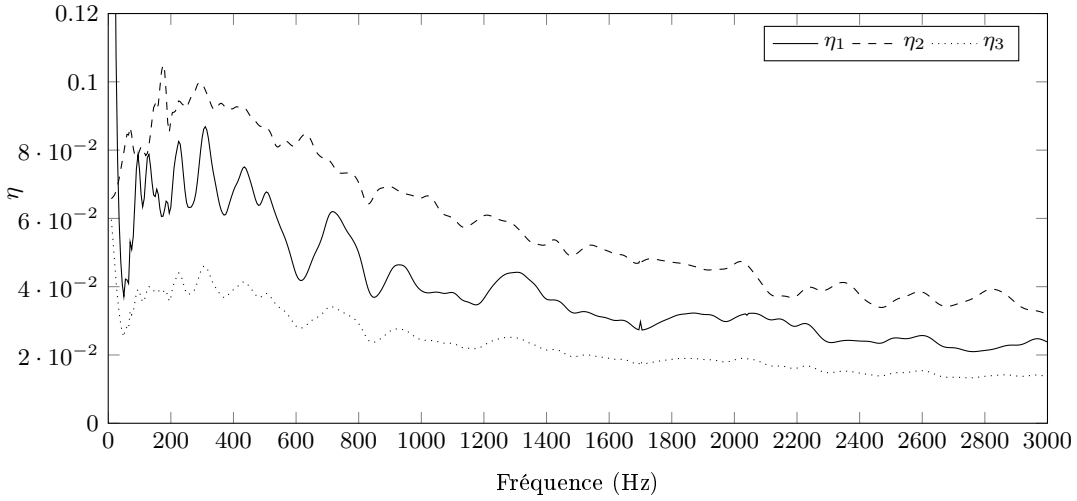


FIGURE 4.13 – Ratios η_1, η_2, et η_3 sur la bande de fréquence 5Hz–3000Hz.

Si on analyse la tendance générale des trois courbes de la figure 4.13, nous pouvons voir que les trois indicateurs tendent à diminuer lorsque la fréquence augmente. Ceci peut s'expliquer avec la logique suivante :

– Dans les basses fréquences, la déformée de la structure patchée est proche de celle de la structure nue, et seule l'amplitude des déformations de la plaque est affectée par le patch.
– Dans les plus hautes fréquences, la vitesse quadratique moyenne sur la surface du patch est plus faible que sur le reste de la plaque. La surface du patch se comporte alors quasiment comme si elle était rigide, et le reste de la plaque comme si elle n'était pas traitée.

En conclusion, il est donc possible de choisir un de ces nouveaux critères d'optimisation en fonction du but recherché pour le patch amortissant (i.e., limiter l'énergie cinétique et/ou l'énergie de déformation). Essayer de maximiser un des critères proposés à l'aide d'un algorithme d'optimisation devrait minimiser le stockage d'énergie cinétique et de déformation autour du patch comme observé sur les cartographies présentées à 850 Hz.

4.3/ ANALYSE INVERSE DES PARAMÈTRES MATÉRIAUX D'UNE PLAQUE EN VIBRATION

Nous présentons ici une méthode inverse permettant d'identifier les paramètres matériaux d'une plaque patchée. Nous avons choisi de travailler sur une poutre. La méthode

tente de faire correspondre la vitesse quadratique moyenne simulée à la vitesse quadratique moyenne mesurée expérimentalement à l'aide d'un algorithme d'optimisation. Dans notre cas, nous tentons d'identifier le module de Young et le facteur de perte du matériau viscoélastique. L'optimisation est réalisée à l'aide d'une combinaison d'un algorithme de tirage appelé *Latin Hypercube Sampling* (LHS) et d'un Algorithme Génétique (GA).

Le premier algorithme est un tirage aléatoire développé par McKay [86] comme une alternative à un tirage purement aléatoire. Cet algorithme considère un hypercube qui est l'espace de travail dans lequel des échantillons sont tirés et proposés pour l'optimisation. Le principal avantage de cet algorithme est de garantir une meilleure utilisation de tout l'espace de travail pour chaque variable et de limiter le nombre d'échantillons proposés.

Les GA sont des méthodes d'optimisation stochastiques basées sur l'évolution naturelle et les théories génétiques. Ces algorithmes sont classiquement utilisés dans les méthodes d'identification comme par exemple dans les travaux de Hwang [87] et Cunha [88] où sont combinés résultats expérimentaux et solutions numériques afin de minimiser les différences pour des systèmes non amortis.

4.3.1/ MÉTHODE UTILISÉE

Pour l'algorithme proposé, nous parlerons d'échantillon pour chaque jeu de paramètres et de génération pour chaque groupe d'échantillons simulés et comparés entre eux. Le LHS propose dans un premier temps une génération initiale d'échantillons. Chaque échantillon donne lieu à une simulation avec le modèle générique (*warping functions* de Sun & Whitney) pour obtenir la réponse à une excitation donnée sur une bande de fréquence. Un indicateur est choisi (dans notre cas la vitesse quadratique moyenne). Puis, les résultats obtenus sont comparés à la mesure expérimentale et classés en fonction d'un critère choisi. Enfin l'algorithme génétique propose une nouvelle génération en réalisant un croisement des données sur le plan binaire des meilleurs échantillons de la génération précédente. Le diagramme présenté dans la figure 4.14 montre l'algorithme dans son ensemble, les paragraphes suivants présentent les détails de l'algorithme utilisé.

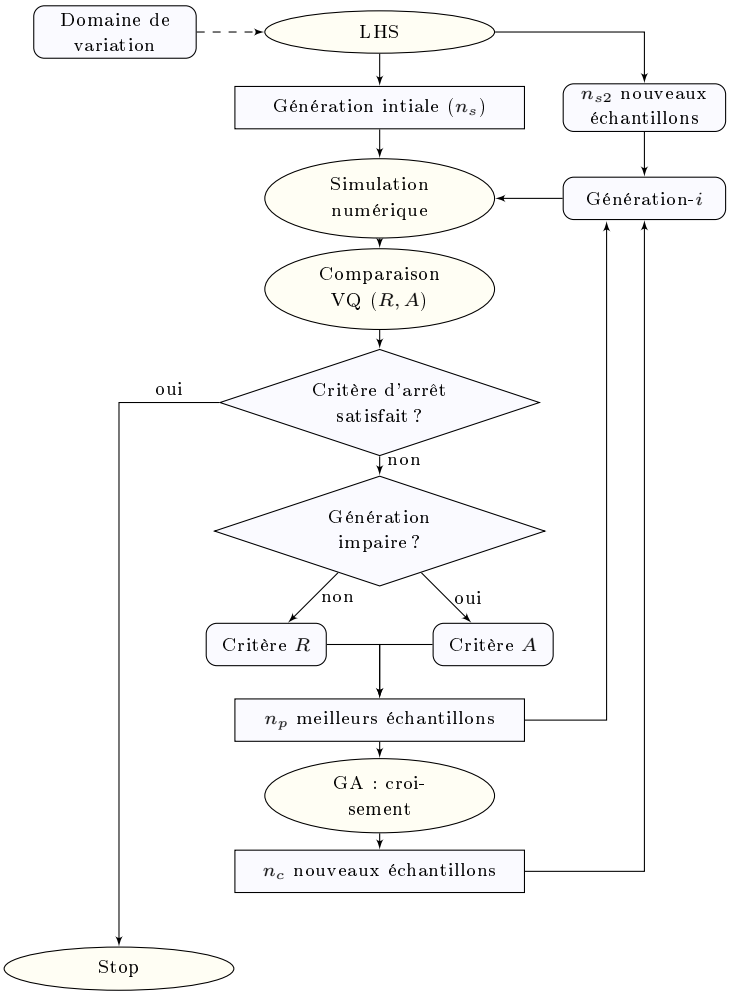


FIGURE 4.14 – Diagramme de l'algorithme utilisé

Génération initiale et selection

Une génération initiale de taille n_s est proposée par la méthode LHS. Dans le but de définir un espace de travail pour l'hypercube de l'algorithme LHS, un domaine de variation pour chaque paramètre des matériaux est proposé. Pour notre étude, ces limites sont choisies à $\pm x\%$ de la valeur probable de chaque variable. La réponse, en terme de vitesse quadratique moyenne, est calculée pour chaque échantillon.

On dispose de deux courbes de vitesse quadratique moyenne, celle qui correspond à l'échantillon simulé, et la courbe expérimentale. On calcule la corrélation entre les deux courbes (premier critère) et l'aire entre les courbes (deuxième critère). Ces deux critères sont calculées pour chaque échantillon afin de choisir les n_p meilleurs échantillons en utilisant le critère de sélection approprié. Pour la première itération, les échantillons sont choisis avec le critère de corrélation. Les étapes suivantes proposent de nouveaux échantillons en tentant d'améliorer la valeur des critères.

Évolution

La solution est recherchée en utilisant un GA avec un encodage binaire. Les n_p meilleurs échantillons, appelés parents, sont croisés au moyen d'une opération de croisement GA produisant ainsi n_c nouveaux échantillons, que nous appellerons enfants.

Après plusieurs itérations, les échantillons de chaque génération peuvent tendre à être tous identiques puisque la méthode ne recombine que d'anciennes informations pour en créer de nouvelles. Afin de parer à cela, deux stratégies ont été mises en place :
- Pour chaque génération, la méthode LHS propose n_{s2} nouveaux échantillons
- Lorsque deux échantillons sont quasiment identiques, l'un des deux est alors supprimé et remplacé par un nouvel échantillon proposé par la méthode LHS.

Chaque nouvelle génération est alors constituée de l'union de n_p, n_c et n_{s2} échantillons. Une nouvelle simulation est faite pour cette génération, les vitesses quadratiques moyennes obtenues sont comparées aux données expérimentales. Il est important de noter que le nombre d'échantillons de chaque génération reste contant.

Le choix du meilleur échantillon est effectué par un double critère. Les critères sont alternés pour chaque génération. Ceux-ci sont définis ainsi :
- Générations impaires : le critère de corrélation est utilisé

$$r_{xy} = \frac{\widehat{S}_{xy}}{\widehat{S}_x \widehat{S}_y} \tag{4.28}$$

  où $\widehat{S}_{xy}$ désigne la covariance entre les vitesses quadratiques expérimentales et simulées, et $\widehat{S}_x$ $\widehat{S}_y$ leur écart type. Ce critère tend donc vers 1 lorsque les courbes de vitesse quadratique expérimentales et simulées sont corrélées linéairement.
- Générations paires : le critère de l'aire entre les deux courbes est utilisé

$$A = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| VQ_{\text{exp}}(\omega) - VQ_{\text{sim}}(\omega) \right| \mathrm{d}\omega \tag{4.29}$$

  Les deux courbes sont alors parfaitement superposées lorsque $A = 0$.

La dualité des critères de sélection améliore la performance du processus. Pour les générations impaires, le critère de corrélation permet de "localiser les pics" tandis que le critère de l'aire aide à réduire l'amplitude entre les courbes pour les générations paires.

Critère d'arrêt

Le processus itératif est arrêté lorsque le critère de corrélation et d'aire ont tout deux acquis des valeurs stables pour plusieurs générations successives.

4.3.2/ Identification des paramètres caractéristiques d'un matériau viscoélastique

L'algorithme décrit ci-dessus est utilisé pour identifier les paramètres caractéristiques d'un matériau viscoélastique. Afin d'identifier avec précision les caractéristiques de l'aluminium utilisé et pour avoir la meilleure précision possible, la méthode est utilisée sur deux configurations différentes. Une poutre A non traitée composée d'aluminium, de dimensions $17,7$ mm $\times$ 128 mm $\times$ $0,98$ mm, avec des conditions aux limites guidée-libre, se voit imposer une accélération constante sur le bord guidé, sur la bande de fréquence $0-400\ Hz$. Cette configuration permettra de déterminer avec précision les caractéristiques de l'aluminium utilisé. Puis, dans un second temps, une poutre B totalement recouverte d'un patch PCLD, de mêmes dimensions et avec les mêmes conditions aux limites, se voit aussi imposer une accélération constante sur le bord guidé, sur la bande de fréquence $0-420\ Hz$. Les différentes couches de la structure sont composées de $0,99$ mm d'aluminium, de $0,5$ mm de matériau viscoélastique amortissant et d'une couche de contrainte en aluminium de $0,2$ mm. Le finalité de la mesure est d'obtenir le module de Young et le facteur de perte du matériau viscoélastique.

Approximation des paramètres des matériaux viscoélastiques

Pour les matériaux viscoélastiques, le module de Young et le facteur de perte varient avec la fréquence. Il est donc nécessaire d'effectuer une approximation des paramètres en fonction de la fréquence. Pour cela, nous mesurons les caractéristiques du matériau viscoélastique à l'aide d'un viscoanalyseur. Les résultats obtenus avec cette mesure sont donnés dans la figure 4.15. On remarque que pour différentes températures, la même tendance est observée, c'est pourquoi deux fonctions simples sont proposées pour représenter le mieux possible les données dans une bande de fréquence limitée :

$$E(f) = af^b \tag{4.30}$$

$$\eta(f) = k \times 10^{\left(-c(\ln(f/d))^2\right)} \tag{4.31}$$

Cette approximation nécessite de fixer la constante k à la valeur de $1,18$ pour le matériau étudié. Les coefficients a, b, c et d varient en fonction de la bande de fréquence et de la température.

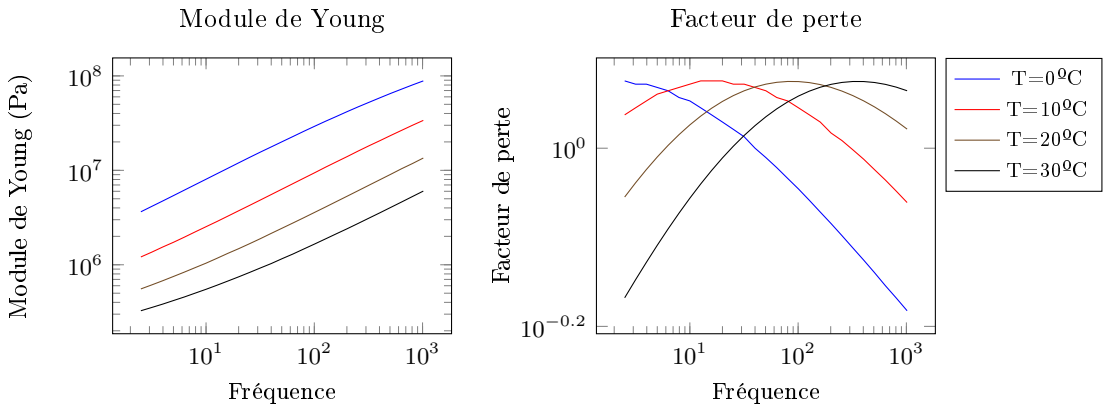


FIGURE 4.15 – Module de Young et facteur de perte mesuré avec le viscoanalyseur

Modélisation de la poutre avec la méthode de Rayleigh-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz, telle que décrite dans la section 3.1 est utilisée pour les simulations nécessaires à l'algorithme d'identification. Sur la direction x, l'ordre maximum de la base est de 50, et sur la direction y, seules les fonctions 1 à 5 sont utilisées. Un vrai problème de poutre ne nécessite, en principe, que les fonctions numéro 1 et 3 afin que les champs de déplacement soient constants dans la direction y. Cette configuration est apparue trop restrictive et n'a pas permis d'obtenir des résultats satisfaisants. C'est pourquoi les 5 premières fonctions ont été retenues pour la direction y.

Afin de simuler les conditions expérimentales de cette étude, sur le bord $x = 0$, l'accélération transverse $\ddot{w}^0(0,y) = -\omega^2 w^0(0,y)$ est imposée. Ceci est fait en imposant l'amplitude $w^0 = -\frac{\ddot{w}^0(0,y)}{\omega^2}$ sur les fonctions de la base $\phi_1(x)\phi_1(y)$ et $\phi_1(x)\phi_3(y)$ au moyen de multiplicateurs de Lagrange.

La condition aux limites guidée correspond généralement à une rotation nulle de la section. Comme ce modèle permet à chaque couche de tourner de manière indépendante, une condition plus générale est nécessaire. Toutefois, les déplacements longitudinaux $u_1\,(0,y,\pm h/2)$ sont nuls aux plans supérieurs et inférieur à cause des mors. Par conséquent, de très petites rotations (correspondant aux déformations de cisaillement) sont permises à cet endroit. C'est pourquoi la dérivée première de la flèche $w^0_{,1}(0,y)$ et les déformations de cisaillement transverse $\gamma^0_{13}(0,y)$ sont choisies nulles. D'après le modèle de Woodcock, cela implique que les déformations de cisaillement transverse $\gamma^\ell_{13}(0,y)$ de chaque couche sont nulles, et il en va de même pour les rotations associées $\varphi^\ell_1(0,y) = -w^0_{,1}(0,y) + \gamma^\ell_{13}(0,y)$. D'autres conditions aux limites ont été testées mais elles se sont révélées trop souples lorsque l'on comparait avec les résultats expérimentaux tandis que les conditions présentées ici donnent d'excellents résultats.

Les déplacements plans $u^0_1(0,y)$ et $u^0_2(0,y)$ sur le bord $x = 0$ sont aussi choisis nuls en éliminant les fonctions de la base $\phi_1(x)\phi_i(y)$. Il n'y a pas de forces imposée au système,

seulement l'accélération mentionnée plus haut.

4.3.2.1/ MESURES EXPÉRIMENTALES

Un dispositif expérimental a été développé afin de mesurer la réponse vibratoire de la poutre mentionnée ci-dessus. La figure 4.16 montre ce dispositif.

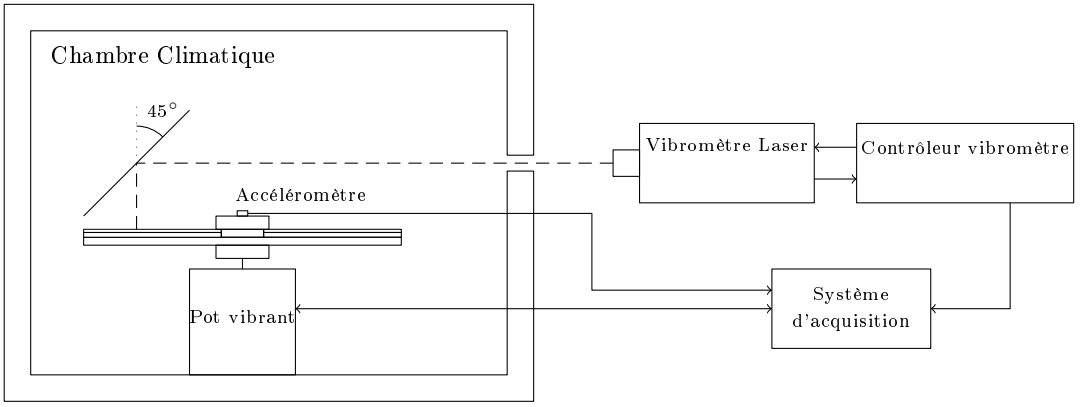


FIGURE 4.16 – Montage expérimental

La poutre est encastrée en son milieu par deux mors en aluminium. Afin d'éviter d'endommager le matériau viscoélastique au niveau de l'encastrement, le patch est retiré de la partie encastré et remplacé par un insert en alumium. En prenant en compte les conditions de symétrie, seul la moitié de la poutre est analysée.

La poutre est excitée pour un déplacement harmonique imposé pour lequel l'amplitude est choisie de façon à ce que l'accélération soit constante au niveau de l'encastrement sur une bande de fréquence. L'excitation est réalisée à l'aide d'un pot vibrant Bruel & Kjaer Type 4810, produisant une force sinusoïdale verticale, connecté aux mors en aluminium. Le niveau d'accélération est mesuré par un accéléromètre PCB 352 SN C33 et sert au contrôle du pot vibrant via un PID. La vitesse quadratique moyenne est calculée à partir de la vitesse mesurée en 26 points différents le long de la poutre. Elle est obtenue avec un vibromètre laser Polytec OFV–505 associé à un contrôleur Polytec OFV–5000.

Le dispositif est placé dans une chambre climatique Weiss Technik KWP 64/75 afin d'assurer une température constante pendant les essais. À cause des caractéristiques géométriques de la chambre climatique, il est nécessaire d'utiliser un miroir afin de réfléchir le rayon laser à $90°$.

L'acquisition est réalisée en utilisant fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz et en prenant 2000 échantillons à chaque mesure. Chaque mesure est moyennée cinq fois pour

chaque fréquence d'excitation.

La bande de fréquence $20-420$ Hz est choisie de façon à ce que les deux premiers modes de vibration puissent être mesurés. Le niveau d'accélération de 12 m.s^{-2} est choisi de façon à avoir un bon niveau de sensibilité sur la bande de fréquence.

4.3.2.2/ RÉSULTATS

L'algorithme décrit dans la section 4.3.1 est utilisé. Les valeurs des paramètres n_s, n_p, n_c et n_{s2} sont données dans la table 4.14. Certains paramètres matériaux choisis comme constants sont donnés dans la table 4.15.

n_s	n_p	n_c	n_{s2}
65	10	55	10

TABLE 4.14 – Valeur valeurs des paramètres n_s, n_p, n_c et n_{s2} pour l'application.

	Aluminium	**Matériau viscoélastique**
Densité (Kg/m^3)	2700	1000
Coefficient de Poisson	0,33	0,45

TABLE 4.15 – Propriété des matériaux qui sont considérées comme constantes

Résultats pour la poutre A

Pour la poutre A, le module de Young et le facteur de perte de l'aluminium sont les paramètres recherchés. Le calcul est arrêté après 52 itérations puisque l'algorithme n'a pas proposé de meilleur échantillon pour 10 générations successives. La table 4.16 montre les paramètres des valeurs minimales et maximales données à l'algorithme LHS et les valeurs du meilleur échantillon pour la génération 11 et la génération 52. Les bornes de variation du module de Young de l'aluminium et du facteur de perte sont choisies à $\pm 20\%$ de la valeur de référence. On remarque tout d'abord que les résultats obtenus après convergence sont des valeurs tout à fait acceptables du module de Young et du facteur de perte pour un aluminium. La figure 4.17 montre la vitesse quadratique moyenne associée aux résultats présentés dans le tableau ainsi que la vitesse quadratique moyenne mesurée expérimentalement.

On remarque sur la figure 4.17 une légère erreur de mesure expérimentale aux alentours de 185 Hz. Ceci est du à un mode de résonance du support placé sous le pot vibrant. Nous choisissons d'ignorer cette erreur de mesure expérimentale. On peut aussi voir que la différence des vitesses quadratiques entre la génération 11 et la génération 52 est très faible et difficile à percevoir à l'oeil nu. Ceci peut éventuellement laisser présager d'éventuels problèmes de sensibilité au problème considéré.

En observant la table 4.16, on remarque que, pour le facteur de perte, l'algorithme converge vers une valeur extérieure aux bornes données pour l'algorithme LHS. Ceci est possible puisque le processus de croisement de l'algorithme génétique autorise des résultats en dehors de ces bornes. Cependant, cela montre qu'un choix adapté des bornes de variation de chaque paramètre doit être fait, ceci pouvant probablement aider l'algorithme à converger plus rapidement.

Génération	**E (MPa)**	**Facteur de perte**	**R**	**Aire**
Valeur de référence	70	6,700E-03		
Valeur minimum	57,6	5,360E-03		
Valeur maximum	86,4	8,040E-03		
11	70,43	1,620E-02	9,885E-01	7,358E-02
52	70,44	8,424E-03	9,865E-01	6,529E-02

TABLE 4.16 – Résultats obtenus avec l'algorithme proposé pour deux générations différentes.

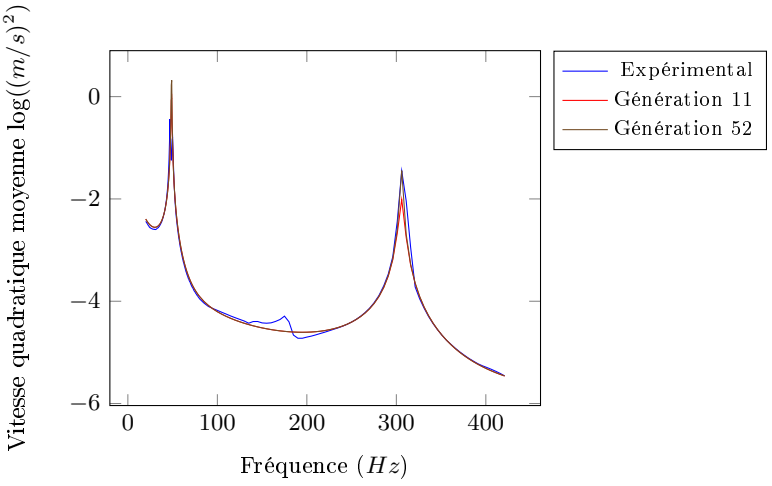


FIGURE 4.17 – Vitesse quadratique moyenne de la poutre nue : mesure expérimentale et valeur calculées du meilleur échantillon pour les générations 11 et 52.

Résultats pour la poutre B

Pour la poutre B, les paramètres **a** et **b** (intervenant dans le module de Young), les paramètres **c** et **d** (pour le facteur de perte) et le paramètre **h** (l'épaisseur de la couche de matériau viscoélastique) sont les paramètres recherchés. Les résultats obtenus pour la poutre A sont utilisés dans l'algorithme pour les paramètres du matériau aluminium. Après 76 itérations, l'algorithme ne converge toujours pas, et pour des raisons de temps de calcul, le processus est arrêté. Pour ce cas, si on s'intéresse à l'évolution du critère de l'aire en fonction des générations (figure 4.18), on remarque que le calcul ne converge

pas. Nous observons deux phénomènes :

– Nous pouvons voir une oscillation de la valeur du critère pour les générations paires ou impaires. Ceci vient du critère alternatif choisi. Ce phénomène n'empêche pas l'algorithme de converger ; on pourrait en effet considérer le calcul comme convergé si les valeurs pour toutes les générations paires et impaires étaient stables pour plusieurs générations successives.
– Pour les générations paires, on observe une variation erratique de la valeur du critère de l'aire. Cela vient du dynamisme apporté aux générations par le double critère. On peut alors dire que l'algorithme ne converge pas.

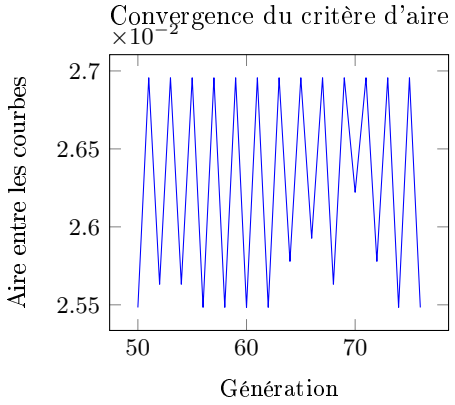


FIGURE 4.18 – Vitesse quadratique moyenne de la poutre patchée : mesure expérimentale et valeur calculées du meilleur échantillons pour la génération 76.

Cependant, nous choisissons de garder les résultats de la génération 76, le critère de l'aire étant minimum pour cette génération. Les résultats correspondants à cette génération sont donnés dans la table 4.17. Les valeurs obtenues sont plausibles bien que les variables **c** et **d** soient en dehors de la plage de variation initiale donnée à l'algorithme LHS. Les vitesses quadratiques moyennes du calcul et de la mesure expérimentale sont présentées dans la figure 4.19.

Génération	**a**	**b**	**c**	**d**	**h**	**R**	**Aire**
Valeur de référence	272352	0,5606	0,01	87,5	0,005		
Valeur minimum	217881,6	0,44848	0,008	70	0,004		
Valeur maximum	326822,4	0,67272	0,012	105	0,006		
76	319060,1	0,5149	0,016	64,4	0,000457	0,99809	0,0255

TABLE 4.17 – Résultats obtenus avec l'algorithme proposé pour la génération 76.

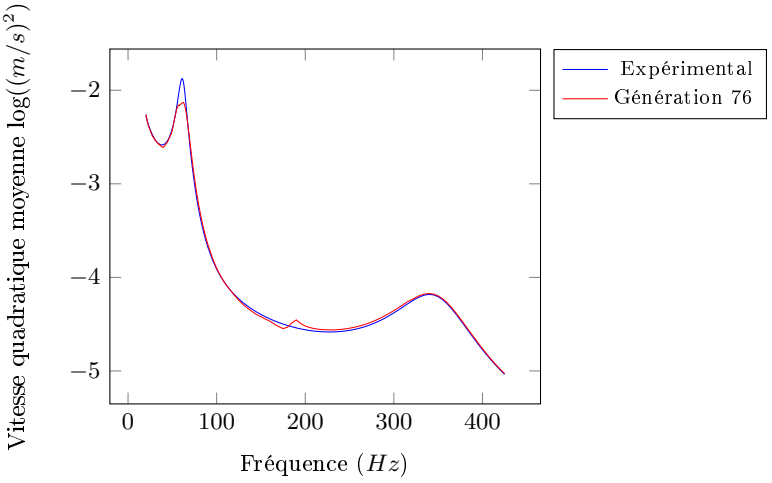


FIGURE 4.19 – Vitesse quadratique moyenne de la poutre : mesure expérimentale et valeur calculées du meilleur échantillons pour la génération 76.

4.3.3/ DISCUSSION À PROPOS DE LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION

Les résultats obtenus pour la méthode d'identification sont donc mitigés. Plusieurs résultats, relativement satisfaisants ont été obtenus. Cependant, les paramètres mesurés pour le matériau viscoélastique ne correspondent pas à ceux mesurés à l'aide du viscoanalyseur. La différence des résultats n'est cependant pas significative au point de discréditer la méthode. Les différences peuvent en effet venir d'erreur de mesures, soit, avec le viscoanalyseur, soit sur la poutre patchée. Pour la poutre patchée, l'échauffement du matériau viscoélastique n'est pas pris en compte, et la température est un paramètre qui influe sur la rigidité et l'amortissement de ce matériau.

Par ailleurs, la taille des générations et le nombre de parents ont été choisis de manière empirique après plusieurs tests. Ces choix pourraient être affinés. Il serait aussi possible de créer un critère unique combinant les deux critères choisis ici.

La méthode, telle que présentée ici, est donc validée pour une configuration simple, telle qu'une poutre nue. Une étude plus approfondie sur une plus grande plage de fréquence mériterait donc d'être faite pour l'identification des propriétés des matériaux viscoélastiques.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce document présente différentes solutions aux problématiques de modélisation des structures composites intégrant des éléments amortissants. Il a pour objectif de répondre aux besoins de modélisation des plaques composites traitées avec des dispositifs anti-vibratoires en fournissant un modèle adapté à l'utilisation d'algorithmes d'optimisation. Une des applications de ce savoir-faire est de permettre l'amélioration du confort vibratoire et acoustique des véhicules. Différents aspects de la question ont été abordés, et de nouveaux outils ont été développés pour répondre aux problèmes posés.

Nous avons tout d'abord mis en évidence les besoins actuels en matière de simulation en présentant un état de l'art de la modélisation des plaques et certaines technologies d'amortissement passifs et actifs. Ce travail nous a permis de mettre en évidence plusieurs points :

- les modèles de plaque classiques ne permettent pas de répondre avec satisfaction aux besoins de modélisation des plaques faiblement élancées ou munies de dispositifs amortissants,
- de nombreux modèles de plaque ont été proposés dans la littérature, mais leur implémentation est souvent délicate et nécessite un travail long et rigoureux,
- les dispositifs amortissants, passifs ou actifs, classiquement utilisés dans l'industrie, induisent des perturbation des champs cinématiques de la plaque,
- malgré l'augmentation des capacités de calcul des ordinateurs, le développement des processus d'optimisation implique un besoin de modèles performants. En effet, ceux-ci permettent de limiter la taille des systèmes à résoudre et autorisent l'utilisation de méthodes d'optimisation itératives tels que les algorithmes génétiques. Cela justifie, encore à l'époque actuelle, les efforts de développement de modèles de plaque "Equivalent Single Layer" que l'on constate dans la communauté scientifique.

Le problème a été abordé sous plusieurs aspects différents :

- Nous avons présenté un modèle de plaque générique, utilisant des *warping functions*. Ce modèle permet de retrouver les modèles de plaque classiques ainsi que plusieurs autres modèles issus de la littérature. L'originalité de cette approche réside dans la caractéristique générique du modèle présenté. En effet, malgré la présence de formulations unifiées pour les modèles de plaque, la littérature ne fait pas état d'un modèle générique, dédié aux formulations équivalentes simple couches (appelées ESL dans ce document), permettant l'utilisation de *warping functions* quelconques. La formulation unifiée la plus connue, telle que présentée par Carrera [41], limite les *warping functions* à une forme polynomiale.

- Nous avons proposé deux nouvelles méthodes d'obtention des *warping functions* issues de formulations tridimensionnelles. Ces deux méthodes permettent d'obtenir une précision dans la description des contraintes de cisaillement transverses jusque-là jamais atteinte pour un modèle de plaque équivalent simple couche. Les configurations les plus difficiles à simuler avec un modèle de plaque étaient jusque là, limité par la qualité de la description du cisaillement transverse. Ces méthodes apportent une réponse à ces problèmes. Il faut cependant nuancer l'importance de ces méthodes, puisque celles-ci nécessitent, soit une solution analytique à priori, soit un processus itératif. Par ailleurs, l'utilisation de *warping functions*, telle qu'implémentée dans ce modèle, suppose que la répartition du cisaillement transverse ne dépend pas de x ou de y.
- Plusieurs méthodes de discrétisation adaptées au modèle générique ont été présentées. Chacune d'elles possèdent des avantages et inconvénients. On peut donc choisir celle qui convient le mieux en fonction des besoins.
  - La procédure de Navier permet de tester la qualité d'un modèle, représenté ici par un jeu de *warping functions*. Cependant la méthode est limitée aux plaques composites orthotropes rectangulaires avec des conditions aux limites simplement appuyée et soumises à un chargement de forme bi-sinusoïdale.
  - La méthode de Rayleigh-Ritz est adaptée à la simulation de plaques rectangulaires traitées avec un ou plusieurs patchs amortissants passifs. La base proposée permet l'implémentation de plusieurs conditions limites. Plusieurs types d'excitation peuvent être utilisées afin d'évaluer la réponse de la plaque, qui elle-même peut être quantifiée au moyen de plusieurs indicateurs, comme par exemple la vitesse quadratique moyenne. Même si on peut adapter la méthode de Rayleigh-Ritz à des géométries plus complexes, elle n'en reste pas moins très limitée de ce côté là, contrairement à la méthode des éléments finis.
  - La méthode des élément finis permet de simuler le comportement de structures aux géométries plus complexes avec une grande liberté de définition des conditions aux limites, des chargements, ainsi que des couplages éventuels (autres sous-structures, autres phénomènes, etc.). Pour notre modèle, la complexité d'implémentation des éléments finis adaptés au modèle est cependant un aspect limitatif de la méthode.

  Les trois méthodes permettent de réaliser des études statiques et dynamiques (réponse à un chargement dynamique et recherche de modes propres) pour différents jeux de *waping functions*.

Afin de valider et juger des capacités du modèle générique, plusieurs investigations numériques ont été menées.

La procédure de Navier a notamment permis de valider le modèle en comparant les résultats obtenus avec une solution analytique à ceux obtenus avec le modèle générique. Cette étude a aussi permis de souligner l'importance du respect des hypothèses

de contraintes planes. En effet, la solution analytique n'est pas contrainte à respecter cette hypothèse, et pour certains cas de chargement et certains élancements, l'importance relative de σ_{33} ne permet plus de garantir cette hypothèse.

Une seconde étude basée sur la méthode de Rayleigh-Ritz a été présentée. Celle-ci montre les capacités du modèle à simuler une plaque partiellement recouverte d'un patch PCLD lorsqu'elle est soumise à une onde plane progressive. Les résultats obtenus sous forme de vitesse quadratique sont comparés à ceux obtenus avec deux codes de calcul basés sur la méthode des éléments finis tridimensionnels. Une étude énergétique de la plaque patchée a ensuite été proposée. Celle-ci permet de mener les premières investigations sur l'origine de la dissipation énergétique des patchs visco-contraints.

Une dernière étude qui propose une méthode inverse d'identification des paramètres matériaux basée sur notre modèle a été décrite. La méthode permet, à partir d'une mesure expérimentale de la vitesse quadratique, d'identifier les paramètres caractéristiques du matériau viscoélastique. Cependant, cette méthode a permis de mettre au jour les difficultés d'obtention de ces variables et soulève plusieurs questions sur le plan de la sensibilité des paramètres, du choix des observables, ainsi que sur le plan expérimental.

Perspectives

Les perspectives à l'issue de ce travail sont multiples. En effet, la simplification de l'écriture (et de l'implémentation) de plusieurs modèles de plaque ouvre la porte à de nouvelles perspectives en terme de modélisation des plaques :

- Pour les plaques inhomogènes, e.g., les plaques munies d'un patch PCLD, il serait intéressant d'adapter le modèle utilisé en fonction de la zone, patchée ou non. Pour une plaque isotrope patchée, il serait possible d'utiliser le modèle HSDT pour la patchée non traitée, et le modèle de Woodcock pour la partie patchée.
- La méthode de discrétisation des éléments finis, peut être améliorée afin de simplifier son implémentation.
- Au moyen de la méthode d'obtention des *warping functions* itératives, il est possible d'imaginer un algorithme capable d'itérer et d'obtenir un jeu de fonctions local. On obtiendrait alors des $\varphi_{\alpha\beta}(x,y,z)$, ce qui permettrait de ne plus avoir l'hypothèse de constance sur x et y de la répartition des contraintes de cisaillement au travers de l'épaisseur.
- Afin de ne plus être soumis aux problèmes liés aux hypothèses de contraintes (ou de déformations) planes, une fonction de description de la déformation transverse pourrait être implémentée

Au sujet de l'optimisation du dimensionnement des systèmes amortissants, il serait bien entendu intéressant de coupler un algorithme d'optimisation de la répartition des patchs sur la plaque au modèle développé afin de pouvoir proposer des configurations optimales. Il est possible d'implémenter un algorithme similaire à celui proposé pour notre méthode

d'identification en changeant la fonction objectif.

Certains aspects peuvent être développés au sujet du comportement énergétique des patchs. L'étude de la cartographie de l'énergie dissipée sur une configuraiton optimisée pourrait éventuellement aider à créer des règles de conception et de répartition des patchs viscocontraints.

Le sujet est donc encore vaste et plusieurs points méritent d'être étudiés.

Bibliographie

[1] Benjamin Henderson et al. « Vibro-acoustic launch protection experiment (VALPE) ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 114.4 (2003), p. 2384–2384.

[2] W. Swallow. *An improved method of damping panel vibrations*. CIB : B60R13/08 ; F16F7/02 ; F16F9/30. Oct. 1939.

[3] M.D. Rao. « Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes ». In : *Journal of Sound and Vibration* 262.3 (2003), p. 457–474. ISSN : 0022-460X.

[4] G. Kirchhoff. « Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. » In : *Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 1850.40 (jan. 1850), p. 51–88. ISSN : 0075-4102, 1435-5345.

[5] A. E. H. Love. « On the small free vibrations and deformations of elastic shells ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society* 17 (1888), p. 491–549.

[6] J.C. Harrison, W. Imaino et F.E. Talke. « Tuned Constrained Layer Damping Of A Cantilevered Plate ». In : *Journal of Sound and Vibration* 174.3 (juil. 1994), p. 413–427. ISSN : 0022-460X.

[7] Jr. Edward M. Kerwin. « Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 31.7 (1959), p. 952–962.

[8] John B. Kosmatka, Alex J. Lapid et Oral Mehmed. « Passive vibration reduction of advanced composite pretwisted plates using integral damping materials ». In : (mai 1995), p. 72–83.

[9] Navin Kumar et S.P. Singh. « Experimental study on vibration and damping of curved panel treated with constrained viscoelastic layer ». In : *Composite Structures* 92.2 (jan. 2010), p. 233–243. ISSN : 0263-8223.

[10] Olivier Foin, Jean Nicolas et Noureddine Atalla. « An efficient tool for predicting the structural acoustic and vibration response of sandwich plates in light or heavy fluid ». In : *Applied Acoustics* 57.3 (1999), p. 213–242. ISSN : 0003-682X.

[11] J. de Cazenove et al. « A numerical and experimental investigation on self-heating effects in viscoelastic dampers ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 27 (2012), p. 433–445. ISSN : 0888-3270.

[12] S.-W. KUNG et R. SINGH. « VIBRATION ANALYSIS OF BEAMS WITH MULTIPLE CONSTRAINED LAYER DAMPING PATCHES ». In : *Journal of Sound and Vibration* 212.5 (1998), p. 781–805. ISSN : 0022-460X.

[13] E. CARRERA. « Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 9.2 (2002), p. 87–140. ISSN : 1134-3060.

[14] Ahmed K. NOOR et W.Scott BURTON. « Assessment of computational models for multilayered anisotropic plates ». In : *Composite Structures* 14.3 (1990), p. 233–265. ISSN : 0263-8223.

[15] A.K. NOOR. « Mechanics of anisotropic plates and shells—A new look at an old subject ». In : *Computers & Structures* 44.3 (juil. 1992), p. 499–514. ISSN : 0045-7949.

[16] J. N. REDDY. « A Review of Refined Theories of Laminated Composite Plates ». In : *The Shock and Vibration Digest* 22 (7 1990), p. 3–17.

[17] Maurice LÉVY. « Memoire sur la theorie des plaques elastique planes ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 3.3 (1877), p. 219–306.

[18] N. J. PAGANO. « Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending ». en. In : *Journal of Composite Materials* 3.3 (juil. 1969), p. 398–411. ISSN : 0021-9983, 1530-793X.

[19] N. J. PAGANO. « Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates ». en. In : *Journal of Composite Materials* 4.1 (jan. 1970), p. 20–34. ISSN : 0021-9983, 1530-793X.

[20] N. J. PAGANO. « Influence of Shear Coupling in Cylindrical. Bending of Anisotropic Laminates ». en. In : *Journal of Composite Materials* 4.3 (juil. 1970), p. 330–343. ISSN : 0021-9983, 1530-793X.

[21] S. SRINIVAS, Akella Kameswara RAO et C. V. Joga RAO. « Flexure of Simply Supported Thick Homogeneous and Laminated Rectangular Plates ». en. In : *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 49.8 (1969), p. 449–458. ISSN : 1521-4001.

[22] S. SRINIVAS et A.K. RAO. « Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates ». In : *International Journal of Solids and Structures* 6.11 (nov. 1970), p. 1463–1481. ISSN : 0020-7683.

[23] S. SRINIVAS, C.V. JOGA RAO et A.K. RAO. « An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates ». In : *Journal of Sound and Vibration* 12.2 (juin 1970), p. 187–199. ISSN : 0022-460X.

[24] S. V. KULKARNI et N. J. PAGANO. « Dynamic characteristics of composite laminates ». In : *Journal of Sound and Vibration* 1 (1972), p. 127–143.

[25] K. J. REDDY, K. VIJAYAKUMAR et K. S. NAGARAJA. « New approach for the analysis of flexure of symmetric laminates ». In : *AIAA Journal* 29.11 (nov. 1991), p. 1960–1966. ISSN : 0001-1452, 1533-385X.

[26] Ahmed K. NOOR et W. Scott BURTON. « Three-Dimensional Solutions for the Free Vibrations and Buckling of Thermally Stressed Multilayered Angle-Ply Composite Plates ». In : *Journal of Applied Mechanics* 59.4 (1992), p. 868. ISSN : 00218936.

[27] G KIRCHHOFF. « Uber die Schwingungen einer kreisformigen elastischen Scheibe ». In : *Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff Annalen)* (1850), p. 258–264.

[28] Eric REISSNER. « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates ». In : *J. appl. Mech* 12.2 (1945), p. 69–77.

[29] RD MINDLIN. « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates ». In : *J. appl. Mech* 18.1 (1951), p. 31–38.

[30] J.N. REDDY. « A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates ». In : *Journal of Applied Mechanics* 51.4 (1984), p. 745–752.

[31] E CARRERA. « On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells ». In : *Computers & Structures* 82.7–8 (mar. 2004), p. 541–554. ISSN : 0045-7949.

[32] E. CARRERA. « Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells ». In : *Applied Mechanics Reviews* 56.3 (2003), p. 287–308.

[33] S. G LEKHNITSKII. *Anisotropic plates*. English. New York : Gordon et Breach, 1968. ISBN : 0677206704 9780677206707.

[34] Sergei Aleksandrovich AMBARTSUMIAN. *Fragments of the Theory of Anisotropic Shells*. en. World Scientific, 1991. ISBN : 9789810200251.

[35] J.M. WHITNEY et C.T. SUN. « A higher order theory for extensional motion of laminated composites ». In : *Journal of Sound and Vibration* 30.1 (1973), p. 85–97. ISSN : 0022-460X.

[36] H. MURAKAMI. « Laminated Composite Plate Theory With Improved In-Plane Responses ». In : *Journal of Applied Mechanics* 53 (1986), p. 661.

[37] Luciano DEMASI. « Refined multilayered plate elements based on Murakami zig–zag functions ». In : *Composite Structures* 70.3 (sept. 2005), p. 308–316. ISSN : 0263-8223.

[38] S. BRISCHETTO, E. CARRERA et L. DEMASI. « Improved bending analysis of sandwich plates using a zig-zag function ». In : *Composite Structures* 89.3 (juil. 2009), p. 408–415. ISSN : 0263-8223.

[39] P.F. PAI. « A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates ». In : *International Journal of Solids and Structures* 32.16 (1995), p. 2295–2313. ISSN : 0020-7683.

[40] J KIM et M CHO. « Enhanced modeling of laminated and sandwich plates via strain energy transformation ». In : *Composites Science and Technology* 66.11-12 (sept. 2006), p. 1575–1587. ISSN : 02663538.

[41] Erasmo CARRERA et Angelo CIUFFREDA. « A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems ». In : *Composite Structures* 69.3 (juil. 2005), p. 271–293. ISSN : 0263-8223.

[42] M.L. WILLIAMS. « Structural Analysis of viscoelastic materials ». In : *AIAA journal* 2 (1964), p. 785–808.

[43] J.D. FERRY. *Viscoelastic proprety of polymers*. John Willey Edution, New York., 1970.

[44] R. A. DITARANTO. « Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams ». In : *Journal of Applied Mechanics* 32.4 (déc. 1965), p. 881–886. ISSN : 0021-8936.

[45] D.J. MEAD et S. MARKUS. « The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 10.2 (sept. 1969), p. 163–175. ISSN : 0022-460X.

[46] M.-J. YAN et E. H. DOWELL. « Governing Equations for Vibrating Constrained-Layer Damping Sandwich Plates and Beams ». In : *Journal of Applied Mechanics* 39.4 (déc. 1972), p. 1041–1046. ISSN : 0021-8936.

[47] D.J. MEAD. « A comparison of some equations for the flexural vibration of damped sandwich beams ». In : *Journal of Sound and Vibration* 83.3 (août 1982), p. 363–377. ISSN : 0022-460X.

[48] D. K. RAO. « Frequency and Loss Factors of Sandwich Beams under Various Boundary Conditions ». en. In : *Journal of Mechanical Engineering Science* 20.5 (oct. 1978), p. 271–282. ISSN : 0022-2542,

[49] Mohan D. RAO et Shulin HE. « Dynamic analysis and design of laminated composite beams with multiple damping layers ». In : *AIAA Journal* 31 (avr. 1993), p. 736–745. ISSN : 0001-1452.

[50] L NAVIER. « Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques ». In : *Nouvean Bulletin des Sciences par la Sociéte Philomatique de Paris* (1823), p. 92–102.

[51] Samuel LETT. « Bending of rectangular plates with large deflections ». In : *Report-National Advisory Committee for Aeronautics* 727-751 (1942), p. 139.

[52] A.A. KHDEIR et J.N. REDDY. « Dynamic response of antisymmetric angle-ply laminated plates subjected to arbitrary loading ». In : *Journal of Sound and Vibration* 126.3 (1988), p. 437–445. ISSN : 0022-460X.

[53] O. BESLIN et J. NICOLAS. « A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 202.5 (1997), p. 633–655. ISSN : 0022-460X.

[54] Arnaud PLESSY. « Comportement vibroacoustique de plaques amorties par des patches multicouches viscoelastiques ». Thèse de doct. Université de Bourgogne, 2009.

[55] A. LOREDO et al. « Numerical vibroacoustic analysis of plates with constrained-layer damping patches ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 129.4 (2011), p. 1905–1918.

[56] Roland WOODCOCK et Jean NICOLAS. « A generalized model for predicting the sound transmission properties of generally orthotropic plates with arbitrary boundary conditions ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 97.2 (1995), p. 1099–1112.

[57] O. C. ZIENKIEWICZ et R. L. TAYLOR. *Finite Element Method Set, Fifth Edition : 3 Volume Set*. 5^{e} éd. Butterworth-Heinemann, sept. 2000. ISBN : 0750651601.

[58] J.M. LIFSHITZ et M. LEIBOWITZ. « Optimal sandwich beam design for maximum viscoelastic damping ». In : *International Journal of Solids and Structures* 23.7 (1987), p. 1027–1034. ISSN : 0020-7683.

[59] R. PLUNKETT et C. T. LEE. « Length Optimization for Constrained Viscoelastic Layer Damping ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 48.1B (1970), p. 150–161.

[60] David S. NOKES et Frederick C. NELSON. « Constrained layer damping with partial coverage ». In : *Shock and Vibration Bulletin* 38 (1968), p. 5–10.

[61] H. ZHENG, C. CAI et X.M. TAN. « Optimization of partial constrained layer damping treatment for vibrational energy minimization of vibrating beams ». In : *Computers & Structures* 82.29–30 (nov. 2004), p. 2493–2507. ISSN : 0045-7949.

[62] H. ZHENG, G.S.H. PAU et Y.Y. WANG. « A comparative study on optimization of constrained layer damping treatment for structural vibration control ». In : *Thin-Walled Structures* 44.8 (2006), p. 886–896. ISSN : 0263-8231.

[63] D.H. LEE. « Optimal placement of constrained-layer damping for reduction of interior noise ». In : *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 46.1 (2008), p. 75–83. ISSN : 0001-1452.

[64] M. ALVELID. « Optimal position and shape of applied damping material ». In : *Journal of Sound and Vibration* 310.4-5 (2008), p. 947–965. ISSN : 0022-460X.

[65] C.M. CHIA, J.A. RONGONG et K. WORDEN. « Evolution of constrained layer damping using a cellular automaton algorithm ». In : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science* 222.4 (2008), p. 585–597. ISSN : 0954-4062.

[66] C.M. CHIA, J.A. RONGONG et K. WORDEN. « Strategies for using cellular automata to locate constrained layer damping on vibrating structures ». In : *Journal of Sound and Vibration* 319.1-2 (2009), p. 119–139. ISSN : 0022-460X.

[67] M.J. PERRY, C.G. KOH et Y.S. CHOO. « Modified genetic algorithm strategy for structural identification ». In : *Computers & Structures* 84.8–9 (mar. 2006), p. 529–540. ISSN : 0045-7949.

[68] A.K. NAYAK, S.S.J. MOY et R.A. SHENOI. « Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory ». In : *Composites Part B : Engineering* 33.7 (oct. 2002), p. 505–519. ISSN : 1359-8368.

[69] Roland L. WOODCOCK. « Free vibration of advanced anisotropic multilayered composites with arbitrary boundary conditions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 312.4 ?5 (mai 2008), p. 769–788. ISSN : 0022-460X.

[70] C.T. SUN et J.M. WHITNEY. « Theories for the Dynamic Response of Laminated Plates ». In : *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 11 (1973), p. 178–183.

[71] J.L. GUYADER et C. LESUEUR. « Acoustic transmission through orthotropic multilayered plates, Part I :Plate vibration modes ». In : *Journal of Sound and Vibration* 97 (1978), p. 51–68.

[72] O. BESLIN et J. NICOLAS. « A Hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 202.5 (1997), p. 633–655.

[73] T. KANT et K. SWAMINATHAN. « Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory ». In : *Composite Structures* 53.1 (juil. 2001), p. 73–85. ISSN : 0263-8223.

[74] J. E. JAM, B. EFTARI et S. H. TAGHAVIAN. « A new improved high-order theory for analysis of free vibration of sandwich panels ». en. In : *Polymer Composites* 31.12 (2010), p. 2042–2048. ISSN : 1548-0569.

[75] A.K. NAYAK, S.S.J. MOY et R.A. SHENOI. « A higher order finite element theory for buckling and vibration analysis of initially stressed composite sandwich plates ». In : *Journal of Sound and Vibration* 286.4–5 (sept. 2005), p. 763–780. ISSN : 0022-460X.

[76] O. POLIT. *Verrouillage numérique dans le domaine des E.F plaques et coques*. 2007.

[77] K. J. BATHE. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall, fév. 1982. ISBN : 0133173054.

[78] Klaus-Jürgen BATHE et Eduardo N. DVORKIN. « A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21.2 (1985), p. 367–383. ISSN : 1097-0207.

[79] Klaus-Jürgen BATHE et Eduardo N. DVORKIN. « A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22.3 (1986), p. 697–722. ISSN : 1097-0207.

[80] F. K. BOGNER, R. L. FOX et L. A. SCHMIT. « The generation of inter-element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas ». In : *1966.* (1966), p. 397–443.

[81] J. H. ARGYRIS, I FRIED et D.W SCHARPF. « The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method ». In : *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society* 72 (1968), p. 701–709.

[82] Kolbein BELL. « A refined triangular plate bending finite element ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1.1 (1969), p. 101–122. ISSN : 1097-0207.

[83] J.H. ARGYRIS, I. FRIED et Scharpf D.W. « The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method ». In : *The Aeronaut. J., Roy. Aernaut. Soc.* 72 (1968), p. 701–9.

[84] E. CARRERA. « On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells ». In : *Computers & Structures* 82.7-8 (2004), p. 541–554. ISSN : 0045-7949.

[85] C.D. JOHNSON et D.A. KIENHOLZ. « Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers ». In : *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 20 (1982), p. 1284–1290.

[86] M. D. MCKAY, W. J. CONOVER et R. J. BECKMAN. « A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code ». In : *Technometrics* 21 (mai 1979), p. 239–245. ISSN : 0888-3270.

[87] Shun-Fa HWANG et Chao-Shui CHANG. « Determination of elastic constants of materials by vibration testing ». In : *Composite Structures* 49.2 (juin 2000), p. 183–190. ISSN : 0263-8223.

[88] Jesiel CUNHA, Scott COGAN et Christophe BERTHOD. « Application of genetic algorithms for the identification of elastic constants of composite materials from dynamic tests ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45.7 (1999), p. 891–900. ISSN : 1097-0207.

A

LIEN AVEC LE MODÈLE DE WOODCOCK

Nous présentons ici le lien entre le modèle décrit dans ce document et les coefficients proposés dans le modèle de Woodcock [69]. Chaque coefficient décrit par Woodcock correspond à un terme des matrices [**A**], [**B**], [**D**], [**E**], [**F**], [**G**] ou [**H**].

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E}^{\mathbf{T}} & \mathbf{F}^{\mathbf{T}} & \mathbf{G} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{ccc|ccc|cccc} 4\lambda_3 & 2\lambda_{21} & 2\lambda_{47} & -2\lambda_5 & -2\lambda_{15} & -\lambda_{45} & -2\lambda_6 & -2\lambda_{20} & -2\lambda_{46} & -2\lambda_{52} \\ 2\lambda_{21} & 4\lambda_9 & 2\lambda_{62} & -2\lambda_{15} & -2\lambda_{11} & -\lambda_{60} & -2\lambda_{18} & -2\lambda_{12} & -2\lambda_{61} & -2\lambda_{67} \\ 2\lambda_{47} & 2\lambda_{62} & 4\lambda_{25} & -2\lambda_{41} & -2\lambda_{56} & -\lambda_{29} & -2\lambda_{44} & -2\lambda_{59} & -2\lambda_{32} & -2\lambda_{34} \\ \hline -2\lambda_5 & -2\lambda_{15} & -2\lambda_{41} & 4\lambda_1 & 2\lambda_{13} & \lambda_{39} & 2\lambda_4 & 2\lambda_{14} & 2\lambda_{40} & 2\lambda_{48} \\ -2\lambda_{15} & -2\lambda_{11} & -2\lambda_{56} & 2\lambda_{13} & 4\lambda_7 & \lambda_{54} & 2\lambda_{16} & 2\lambda_{10} & 2\lambda_{55} & 2\lambda_{63} \\ -\lambda_{45} & -\lambda_{60} & -\lambda_{29} & \lambda_{39} & \lambda_{54} & \lambda_{22} & \lambda_{42} & \lambda_{57} & \lambda_{27} & \lambda_{28} \\ \hline -2\lambda_6 & -2\lambda_{18} & -2\lambda_{44} & 2\lambda_4 & 2\lambda_{16} & \lambda_{42} & 4\lambda_2 & 2\lambda_{17} & 2\lambda_{43} & 2\lambda_{50} \\ -2\lambda_{20} & -2\lambda_{12} & -2\lambda_{59} & 2\lambda_{14} & 2\lambda_{10} & \lambda_{57} & 2\lambda_{17} & 4\lambda_8 & 2\lambda_{58} & 2\lambda_{65} \\ -2\lambda_{46} & -2\lambda_{61} & -2\lambda_{32} & 2\lambda_{40} & 2\lambda_{55} & \lambda_{27} & 2\lambda_{43} & 2\lambda_{58} & 4\lambda_{23} & 2\lambda_{31} \\ -2\lambda_{52} & -2\lambda_{67} & -2\lambda_{34} & 2\lambda_{48} & 2\lambda_{63} & \lambda_{28} & 2\lambda_{50} & 2\lambda_{65} & 2\lambda_{31} & 4\lambda_{24} \end{array}\right] \tag{A.1}$$

et

$$[\mathbf{H}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4\lambda_{37} & 2\lambda_{69} \\ 2\lambda_{69} & 4\lambda_{38} \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
\lambda_{15} &= \lambda_{19} \\
\lambda_{25} = \lambda_{26} &= \lambda_{36}/2 \\
\lambda_{29} &= \lambda_{30} \\
\lambda_{32} &= \lambda_{33} \\
\lambda_{34} &= \lambda_{35} \\
\lambda_{41} = \lambda_{49} &= \lambda_{45}/2 \\
\lambda_{44} &= \lambda_{51} \\
\lambda_{47} &= \lambda_{53} \\
\lambda_{56} = \lambda_{64} &= \lambda_{60}/2 \\
\lambda_{59} &= \lambda_{66} \\
\lambda_{62} &= \lambda_{68}
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

B

MATRICES DE NAVIER COMPLÈTES

Nous présentons ici les matrices complètes [**K1**], [**K2**], [**K3**], [**K4**], [**M1**], [**M2**], [**M3**] et [**M4**] de l'équation (3.40) avec,

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K1} & \mathbf{K2} \\ \mathbf{K3} & \mathbf{K4} \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

et

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \mathbf{M1} & \mathbf{M2} \\ \mathbf{M3} & \mathbf{M4} \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

d'où,

$$[\mathbf{K1}] = \begin{bmatrix} -A_{1212}\eta^2 - A_{1111}\xi^2 & -A_{1122}\xi\eta - A_{1212}\xi\eta & B_{1122}\xi\eta^2 + 2B_{1212}\xi\eta^2 + B_{1111}\xi^3 & -E_{1111}\xi^2 - E_{1221}\eta^2 & -E_{1112}\xi\eta - E_{1222}\xi\eta \\ -A_{1122}\xi\eta - A_{1212}\xi\eta & -A_{2222}\eta^2 - A_{1212}\xi^2 & B_{2222}\eta^3 + B_{1122}\xi^2\eta + 2B_{1212}\xi^2\eta & -E_{2211}\xi\eta - E_{1221}\xi\eta & -E_{1222}\xi^2 - E_{2212}\eta^2 \\ B_{1122}\xi\eta^2 + 2B_{1212}\xi\eta^2 + B_{1111}\xi^3 & B_{2222}\eta^3 + B_{1122}\xi^2\eta + 2B_{1212}\xi^2\eta & -D_{1111}\xi^4 - 4D_{1212}\xi^2\eta^2 - D_{2222}\eta^4 - 2D_{1122}\xi^2\eta^2 & 2F_{1221}\xi\eta^2 + F_{1111}\xi^3 + F_{2211}\xi\eta^2 & F_{1112}\xi^2\eta + 2F_{1222}\xi^2\eta + F_{2212}\eta^3 \\ -E_{1111}\xi^2 - E_{1221}\eta^2 & -E_{2211}\xi\eta - E_{1221}\xi\eta & 2F_{1221}\xi\eta^2 + F_{1111}\xi^3 + F_{2211}\xi\eta^2 & -G_{1111}\xi^2 - G_{2121}\eta^2 - H_{1212} & -G_{1112}\xi\eta - G_{2122}\xi\eta \\ -E_{1112}\xi\eta - E_{1222}\xi\eta & -E_{1222}\xi^2 - E_{2212}\eta^2 & F_{1112}\xi^2\eta + 2F_{1222}\xi^2\eta + F_{2212}\eta^3 & -G_{1112}\xi\eta - G_{2122}\xi\eta & -G_{2222}\xi^2 - G_{1212}\eta^2 - H_{2323} \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

$$[\mathbf{K2}] = \begin{bmatrix} -2A_{1112}\xi\eta & -A_{2212}\eta^2 - A_{1112}\xi^2 & -B_{2212}\eta^3 - 3B_{1112}\xi^2\eta & -E_{1211}\xi\eta - E_{1121}\xi\eta & -E_{1122}\xi^2 - E_{1212}\eta^2 \\ -A_{2212}\eta^2 - A_{1112}\xi^2 & -2A_{2212}\xi\eta & -B_{1112}\xi^3 - 3B_{2212}\xi\eta^2 & -E_{2221}\eta^2 - E_{1211}\xi^2 & -E_{1212}\xi\eta - E_{2222}\xi\eta \\ 3B_{1112}\xi^2\eta + B_{2212}\eta^3 & 3B_{2212}\xi\eta^2 + B_{1112}\xi^3 & 4D_{1112}\xi^3\eta + 4D_{2212}\xi\eta^3 & F_{2221}\eta^3 + 2F_{1211}\xi^2\eta + F_{1121}\xi^2\eta & F_{1122}\xi^3 + F_{2222}\xi\eta^2 + 2F_{1212}\xi\eta^2 \\ -E_{1211}\xi\eta - E_{1121}\xi\eta & -E_{2221}\eta^2 - E_{1211}\xi^2 & -2F_{1211}\xi^2\eta - F_{2221}\eta^3 - F_{1121}\xi^2\eta & -2G_{1121}\xi\eta & -G_{1221}\eta^2 - H_{1213} - G_{1122}\xi^2 \\ -E_{1122}\xi^2 - E_{1212}\eta^2 & -E_{1212}\xi\eta - E_{2222}\xi\eta & -2F_{1212}\xi\eta^2 - F_{1122}\xi^3 - F_{2222}\xi\eta^2 & -G_{1221}\eta^2 - H_{1213} - G_{1122}\xi^2 & -2G_{1222}\xi\eta \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

$$[\mathbf{K3}] = \begin{bmatrix} -2A_{1112}\xi\eta & -A_{2212}\eta^2 - A_{1112}\xi^2 & 3B_{1112}\xi^2\eta + B_{2212}\eta^3 & -E_{1211}\xi\eta - E_{1121}\xi\eta & -E_{1122}\xi^2 - E_{1212}\eta^2 \\ -A_{2212}\eta^2 - A_{1112}\xi^2 & -2A_{2212}\xi\eta & 3B_{2212}\xi\eta^2 + B_{1112}\xi^3 & -E_{2221}\eta^2 - E_{1211}\xi^2 & -E_{1212}\xi\eta - E_{2222}\xi\eta \\ -B_{2212}\eta^3 - 3B_{1112}\xi^2\eta & -B_{1112}\xi^3 - 3B_{2212}\xi\eta^2 & 4D_{1112}\xi^3\eta + 4D_{2212}\xi\eta^3 & -2F_{1211}\xi^2\eta - F_{2221}\eta^3 - F_{1121}\xi^2\eta & -2F_{1212}\xi\eta^2 - F_{1122}\xi^3 - F_{2222}\xi\eta^2 \\ -E_{1211}\xi\eta - E_{1121}\xi\eta & -E_{2221}\eta^2 - E_{1211}\xi^2 & F_{2221}\eta^3 + 2F_{1211}\xi^2\eta + F_{1121}\xi^2\eta & -2G_{1121}\xi\eta & -G_{1221}\eta^2 - H_{1213} - G_{1122}\xi^2 \\ -E_{1122}\xi^2 - E_{1212}\eta^2 & -E_{1212}\xi\eta - E_{2222}\xi\eta & F_{1122}\xi^3 + F_{2222}\xi\eta^2 + 2F_{1212}\xi\eta^2 & -G_{1221}\eta^2 - H_{1213} - G_{1122}\xi^2 & -2G_{1222}\xi\eta \end{bmatrix} \tag{B.5}$$

$$[\mathbf{K4}] = \begin{bmatrix} -A_{1212}\eta^2 - A_{1111}\xi^2 & -A_{1122}\xi\eta - A_{1212}\xi\eta & -2B_{1212}\xi\eta^2 - B_{1111}\xi^3 - B_{1122}\xi\eta^2 & -E_{1111}\xi^2 - E_{1221}\eta^2 & -E_{1112}\xi\eta - E_{1222}\xi\eta \\ -A_{1122}\xi\eta - A_{1212}\xi\eta & -A_{2222}\eta^2 - A_{1212}\xi^2 & -B_{1122}\xi^2\eta - B_{2222}\eta^3 - 2B_{1212}\xi^2\eta & -E_{2211}\xi\eta - E_{1221}\xi\eta & -E_{1222}\xi^2 - E_{2212}\eta^2 \\ -2B_{1212}\xi\eta^2 - B_{1111}\xi^3 - B_{1122}\xi\eta^2 & -B_{1122}\xi^2\eta - B_{2222}\eta^3 - 2B_{1212}\xi^2\eta & -D_{1111}\xi^4 - 4D_{1212}\xi^2\eta^2 - D_{2222}\eta^4 - 2D_{1122}\xi^2\eta^2 & -F_{1111}\xi^3 - F_{2211}\xi\eta^2 - 2F_{1221}\xi\eta^2 & -F_{1112}\xi^2\eta - F_{2212}\eta^3 - 2F_{1222}\xi^2\eta \\ -E_{1111}\xi^2 - E_{1221}\eta^2 & -E_{2211}\xi\eta - E_{1221}\xi\eta & -F_{1111}\xi^3 - F_{2211}\xi\eta^2 - 2F_{1221}\xi\eta^2 & -G_{1111}\xi^2 - G_{2121}\eta^2 - H_{1212} & -G_{1112}\xi\eta - G_{2122}\xi\eta \\ -E_{1112}\xi\eta - E_{1222}\xi\eta & -E_{1222}\xi^2 - E_{2212}\eta^2 & -F_{1112}\xi^2\eta - F_{2212}\eta^3 - 2F_{1222}\xi^2\eta & -G_{1112}\xi\eta - G_{2122}\xi\eta & -G_{2222}\xi^2 - G_{1212}\eta^2 - H_{2323} \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

$$[\mathbf{M1}] = \begin{bmatrix} R & 0 & -S\xi & U_{11} & 0 \\ 0 & R & -S\eta & 0 & U_{22} \\ -S\xi & -S\eta & R + T\xi^2 + T\eta^2 & -V_{11}\xi & -V_{22}\eta \\ U_{11} & 0 & -V_{11}\xi & W_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} & -V_{22}\eta & 0 & W_{22} \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

$$[\mathbf{M2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & U_{12} \\ 0 & 0 & 0 & U_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -V_{21}\eta & -V_{12}\xi \\ 0 & U_{21} & V_{21}\eta & 0 & W_{12} \\ U_{12} & 0 & V_{12}\xi & W_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

$$[\mathbf{M3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & U_{12} \\ 0 & 0 & 0 & U_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{21}\eta & V_{12}\xi \\ 0 & U_{21} & -V_{21}\eta & 0 & W_{12} \\ U_{12} & 0 & -V_{12}\xi & W_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{B.9}$$

$$[\mathbf{M4}] = \begin{bmatrix} R & 0 & S\xi & U_{11} & 0 \\ 0 & R & S\eta & 0 & U_{22} \\ S\xi & S\eta & R + T(\xi^2 + \eta^2) & V_{11}\xi & V_{22}\eta \\ U_{11} & 0 & V_{11}\xi & W_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} & V_{22}\eta & 0 & W_{22} \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

Résumé :

Ce travail traite de la modélisation de structures composites intégrant des éléments amortissants passifs. Un modèle de plaque "équivalent simple couche" générique utilisant des fonctions de description du cisaillement transverse est présenté. Plusieurs méthodes d'obtention de ces fonctions sont décrites, permettant de retrouver des modèles classiques ou issus de la littérature. Deux nouvelles méthodes d'obtention de ces fonctions sont aussi présentées.

Plusieurs méthodes de discrétisation adaptées au modèle générique sont étudiées. La méthode de Navier permet de tester la qualité de chaque modèle associé à un jeu de fonctions de description du cisaillement transverse. La méthode de Rayleigh-Ritz permet l'étude du comportement vibratoire d'une plaque rectangulaire munie d'un ou plusieurs patchs viscocontraints. Plusieurs éléments finis issus de la littérature, adaptés au modèle, sont aussi présentés.

À l'aide de la méthode de Navier, une étude numérique du comportement statique et dynamique de plusieurs configurations de plaques permet la comparaison des différents modèles présentés. La méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour étudier le comportement vibratoire d'une plaque munie d'un patch viscocontraint. Une comparaison des résultats obtenus avec le modèle présenté et ceux issus de calculs éléments finis tridimensionnels permet de valider notre modèle. Une étude énergétique de la plaque patchée permet d'illustrer le comportement du patch. Enfin une méthode inverse d'identification des matériaux viscoélastiques, basées sur une combinaison du modèle décrit et d'un algorithme génétique, montre une application du modèle.

Mots-clés : Modèle générique, équivalent simple couche, patch viscocontraint

Abstract:

This work is on the subject of modelization of structures treated with passive damping elements. A generic "equivalent single layer" plate model using transverse shear warping functions is presented. Several methods to obtain these functions are described, allowing the implementation of classical models and others issued from the litterature. Two new methods for obtaining these functions are also presented.

Several discretization methods adapted to the generic plate model are studied. Navier's procedure allows the testing of the quality of each model associated with a set of transverse shear warping functions. Rayleigh-Ritz method allows the study of the vibrational behavior of a rectangular plate treated with one or several constrained damping patches. Several finite elements issued from the literature are also presented.

Using Navier's procedure, a numerical study of the static and dynamic behavior of several plate configurations allows the comparison of the different plate models. Rayleigh-Ritz method is used to study the vibrational response of a plate treated with a constrained damping patch. A comparison of the results with those obtained with three dimensional finite element calculations permits the model validation. An energetic study of the patched plate allow us to understand the constrainted damping patch behavior. Finally, an inverse method, allowing the identification of the properties of viscoelastic materials, based on a combination of the presented model and a genetic algorithm, shows a possible application of the model.

Keywords: Generic model, equivalent single layer, constrained damping patches

SPIM

■ École doctorale SPIM - Université de Bourgogne/UFR ST BP 47870 F - 21078 Dijon cedex
■ tél. +33 (0)3 80 39 59 10 ■ ed-spim@univ-fcomte.fr ■ www.ed-spim.univ-fcomte.fr

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE