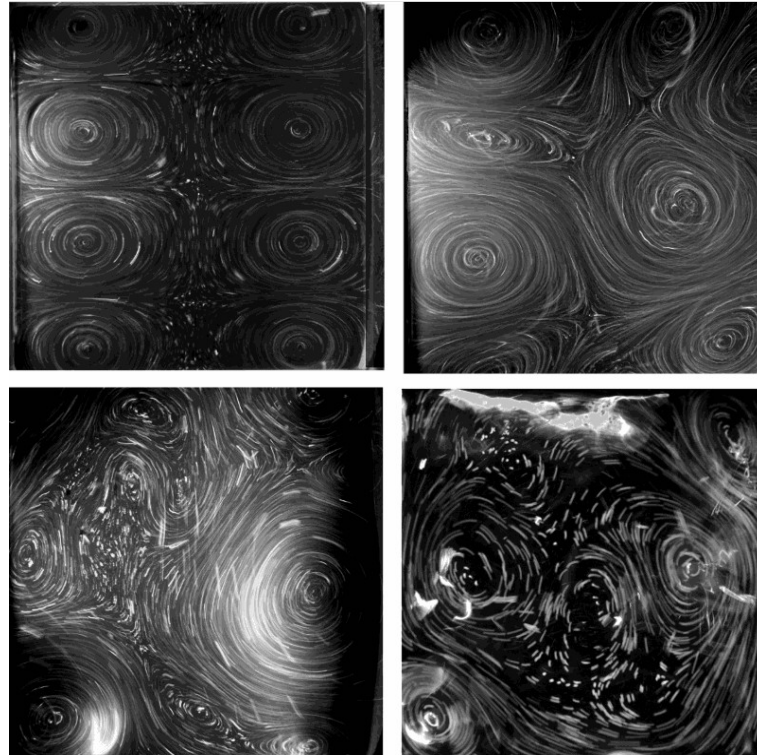




Dynamique des structures cohérentes en turbulence magnétohydrodynamique

Johann Herault



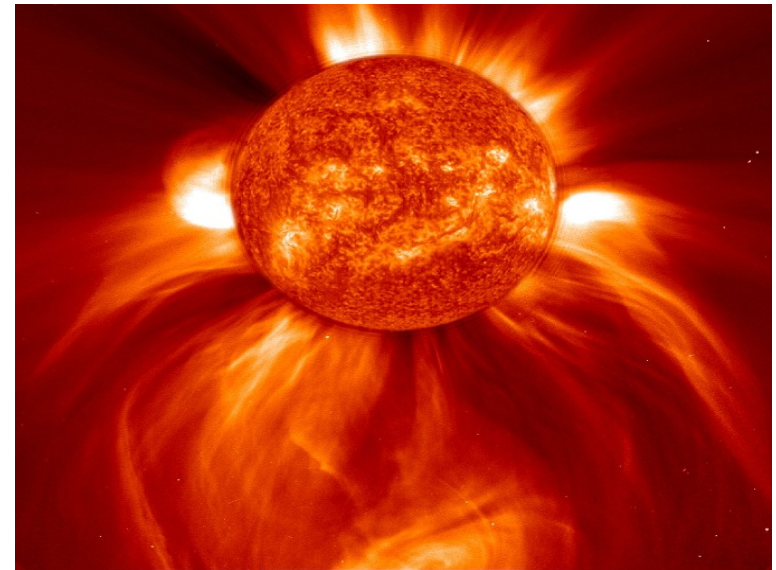
Groupe de physique non-linéaire
Laboratoire de Physique Statistique, UMR 8550, ENS-PARIS

Les écoulements turbulents

Turbulence hydrodynamique



Turbulence magnétohydrodynamique



Structure spatiale complexe : continuum d'échelles spatiales

Dynamique imprédictible : sensibilité aux conditions initiales

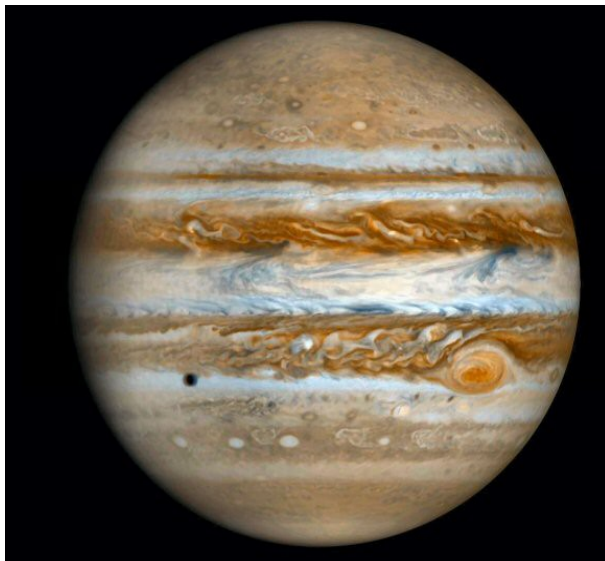
Les structures cohérentes dans les écoulements turbulents

Structure spatiale : tourbillons, concentration de vorticité $\omega = \nabla \times u$



Dynamique cohérente

Temps de cohérence (>300 ans) > Temps de retournement (6 jours)



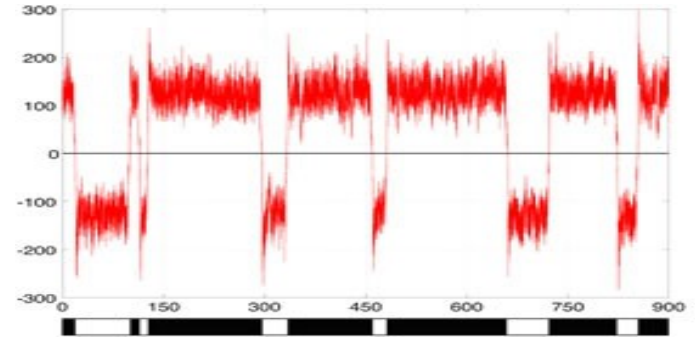
Grande tache rouge de Jupiter

Les structures cohérentes et les symétries

Instabilité Dynamo : *Expérience von Karman Sodium*

Mode dipolaire à grande échelle engendré par un écoulement turbulent

Mode symétrique : $D \longrightarrow -D$



Résultats

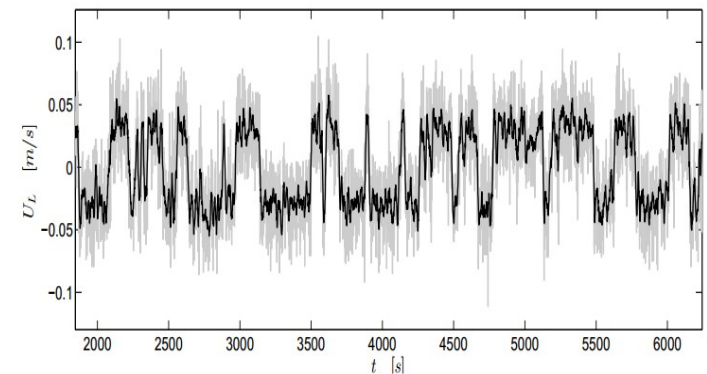
Etude de la relaxation des modes magnétiques

Effet des turbines ferromagnétiques

Circulation grande échelle en turbulence bidimensionnelle

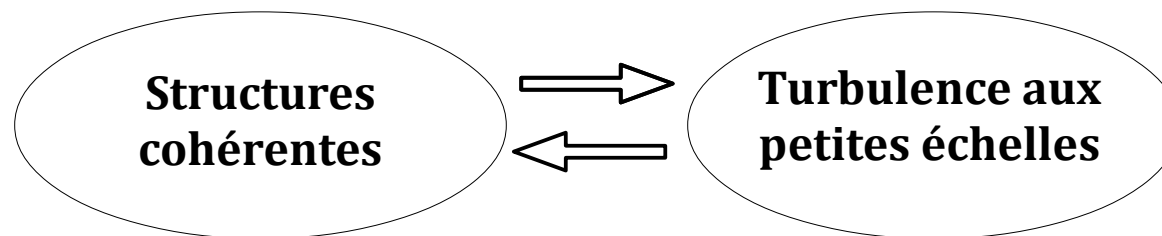
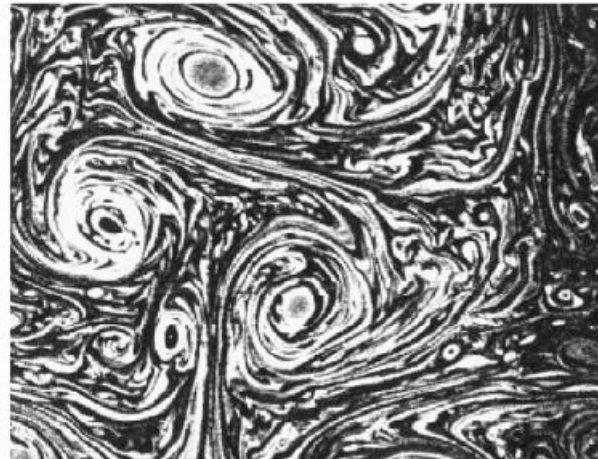
Écoulement à grande échelle U_L

Symétrie du forçage : $U_L \longrightarrow -U_L$



Les structures cohérentes en turbulence bidimensionnelle

Définition: écoulement plan ne dépendant que de deux composantes $u(x, y, t)$

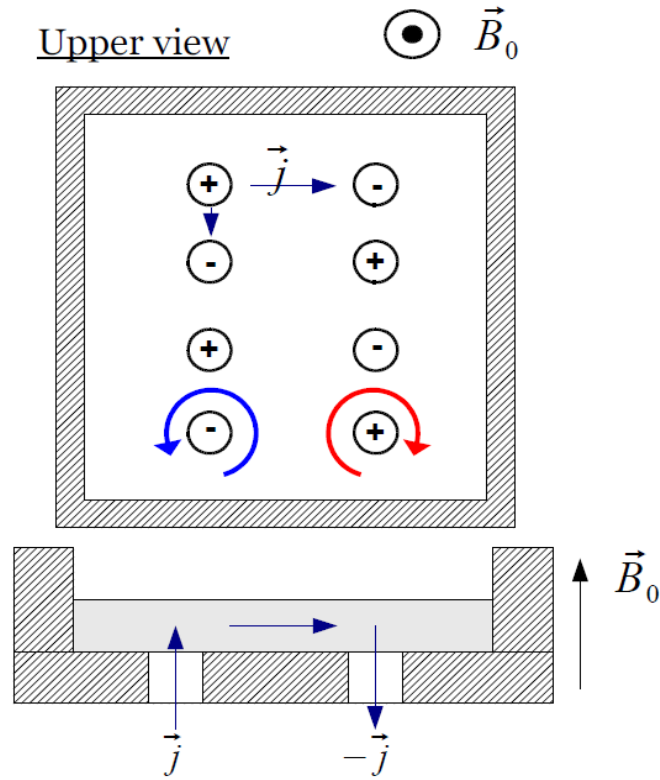


Comment déterminer et quantifier l'émergence des structures aux grandes échelles ?
Quelles sont la dynamique temporelle et la signature fréquentielle de ces structures ?

Écoulement bidimensionnel forcé périodiquement

Le montage Cellule remplie de Galinstan (métal liquide)

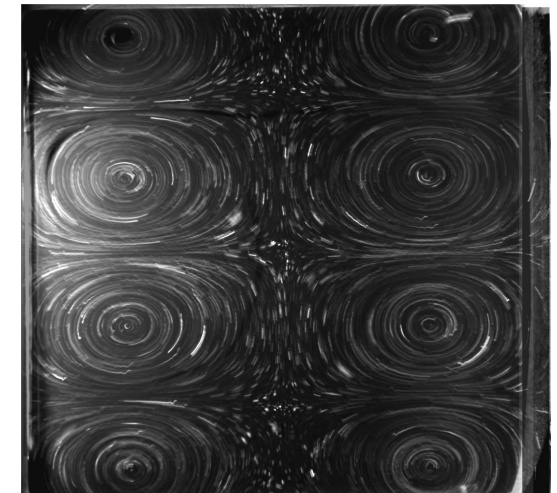
| | |
|------------------|---------------------|
| Hauteur | $h=2\text{cm}$ |
| Largeur | $L=12\text{cm}$ |
| Champ magnétique | $B_0=10^3\text{ G}$ |
| Courant continu | $I=10^2\text{ A}$ |



Le forçage électromagnétique $\mathbf{j} = j_r \mathbf{e}_r$ $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$

La force de Laplace

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 = -j B_0 \mathbf{e}_\theta$$



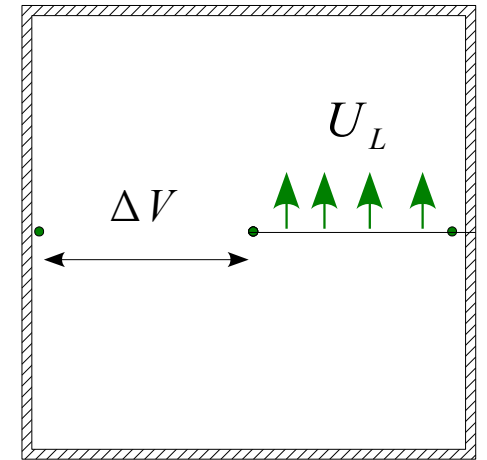
Techniques de mesure

Sondes Vives

Force électromotrice $E = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0$

Tension aux bornes des sondes Vives $\Delta V = -\mathbf{B}_0 \int \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z d l$

Vitesse moyenne $U_L = \frac{2}{L} \frac{\Delta V}{B_0}$



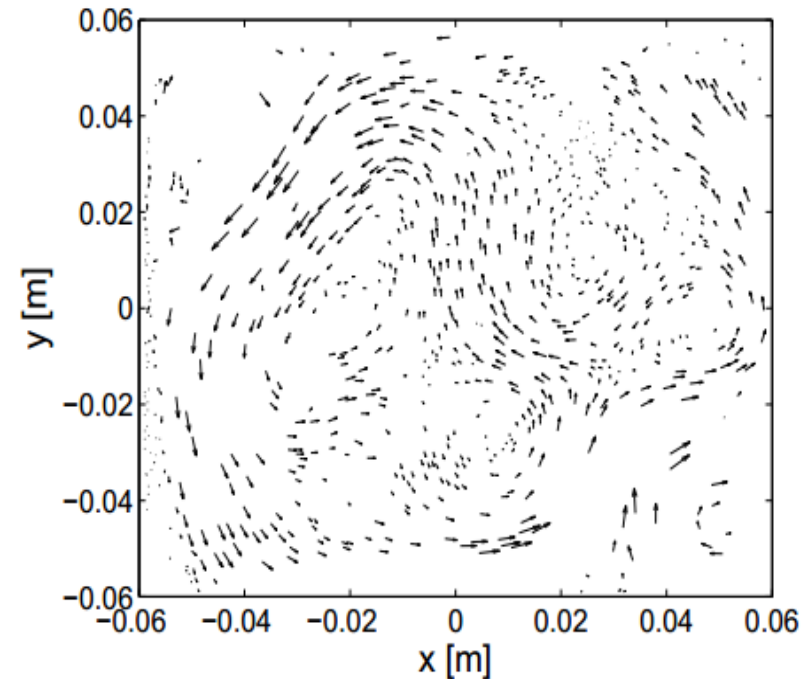
Velocimétrie par suivi de particules

Surfaceensemencée par plus de 1 000 particules

Positions des particules échantillonnées à 60Hz

Reconstruction trajectoires

Champ de vitesse convolué par un filtre gaussien



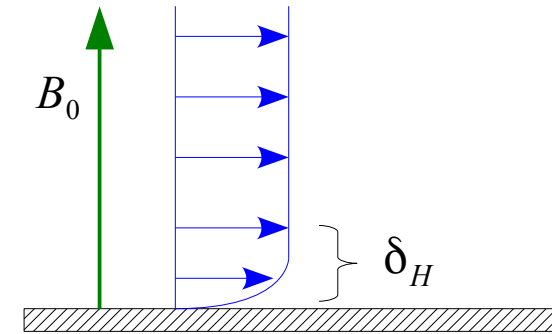
Velocimétrie par mesures Doppler ultrason

Écoulement quasi-bidimensionnel

Processus de bidimensionalisation

Amortissement magnétique des perturbations dépendantes de z

Couche limite de Hartmann $\delta_H = \sqrt{\frac{\rho \nu}{\sigma B_0^2}}$ et $Ha = \frac{h}{\delta_H} = 10^2$



L'équation de Navier-Stokes 2D

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\tau_H} \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$\tau_H = \frac{h \delta_H}{\nu}$ Temps d'amortissement par friction due à la couche de Hartmann

Paramètres sans dimension vitesse, longueur: U, L

Le nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]}{[\nu \Delta \mathbf{u}]} = \frac{UL}{\nu} \sim 10^4$$

$$Rh = \frac{[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]}{[\tau_H^{-1} \mathbf{u}]} = \frac{U \tau_H}{L} \sim 10$$

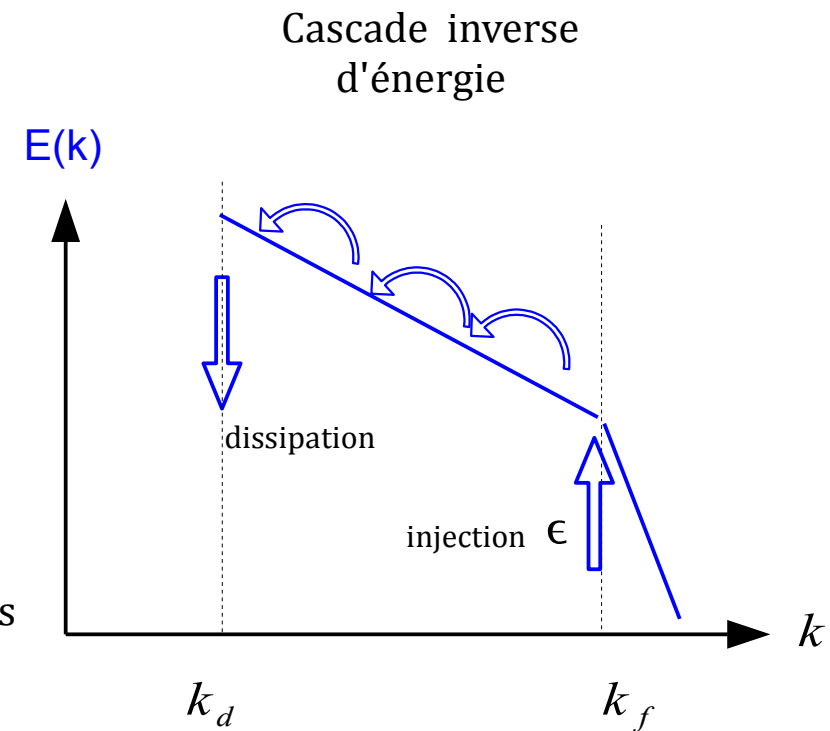
Turbulence bidimensionnelle $Re \gg 1, Rh \gg 1$

Cascades : la théorie KBL

Conservation de l'énergie $|\mathbf{u}|^2$ et enstrophie $|\boldsymbol{\omega}|^2$

Transfert d'énergie préférentiellement vers les grandes échelles

Transfert d'enstrophie préférentiellement vers les petites échelles

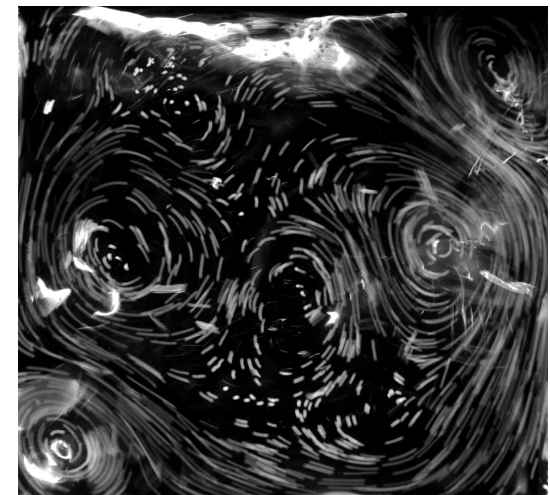


La condensation

Echelle de dissipation $l_d \sim L$ échelle de la cellule

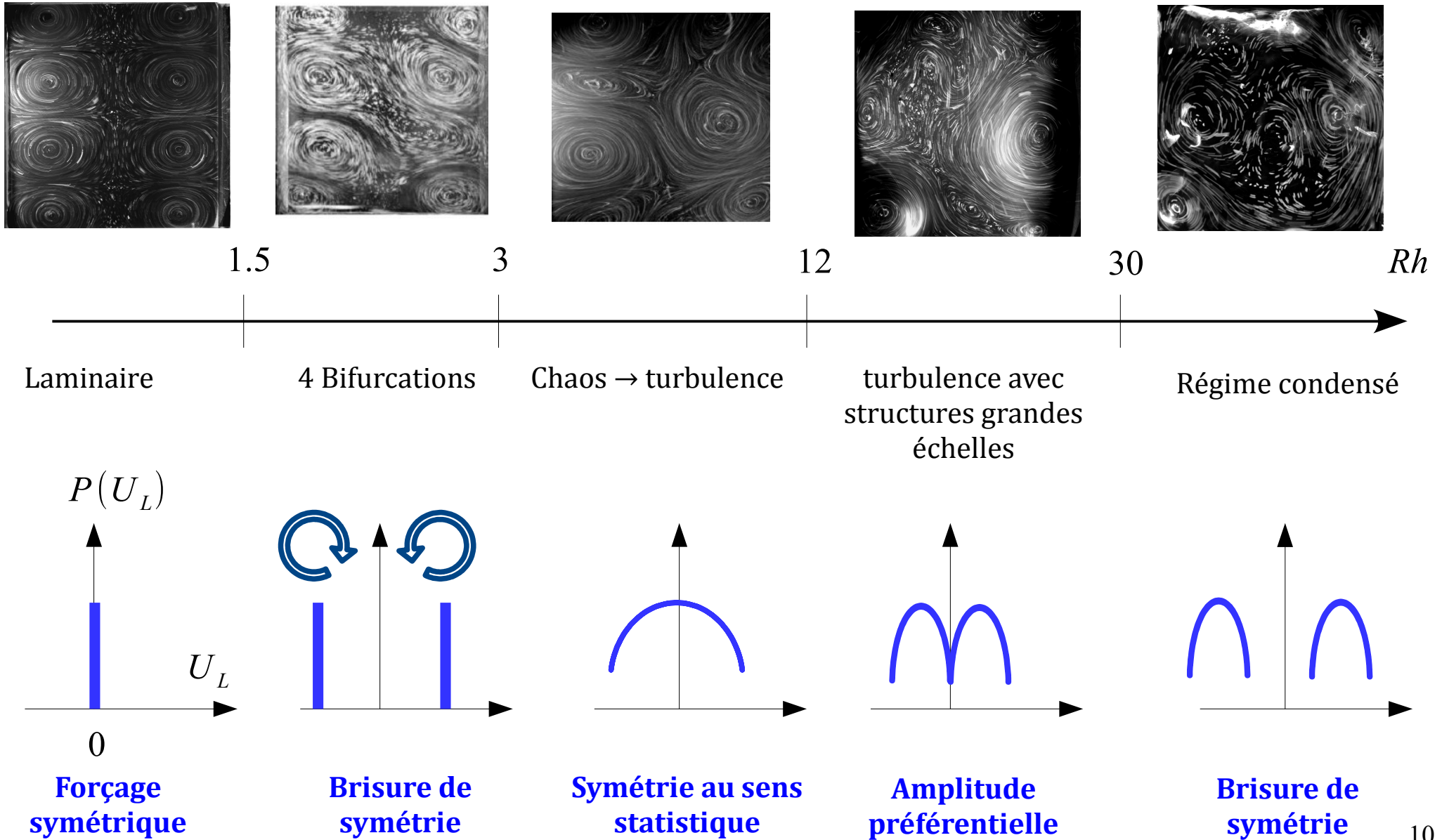
Accumulation/condensation de l'énergie dans le mode à l'échelle de la cellule

Circulation à l'échelle de la cellule



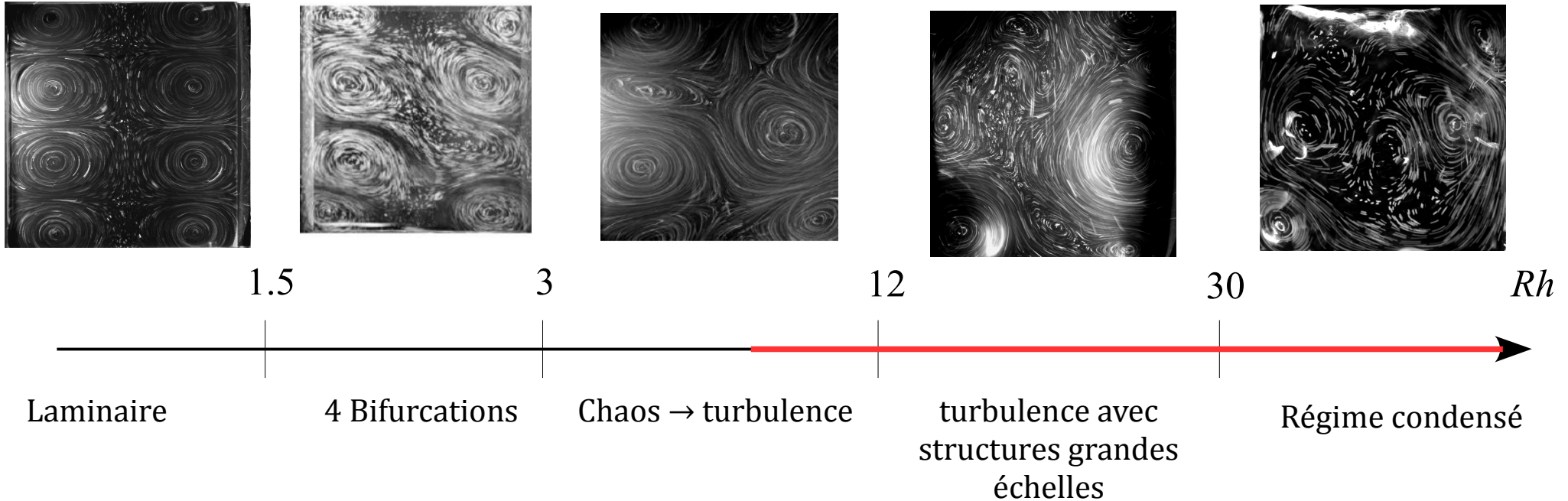
Les régimes d'écoulement

Paramètres de contrôle Rh ($Re/Rh \propto 10^3$)



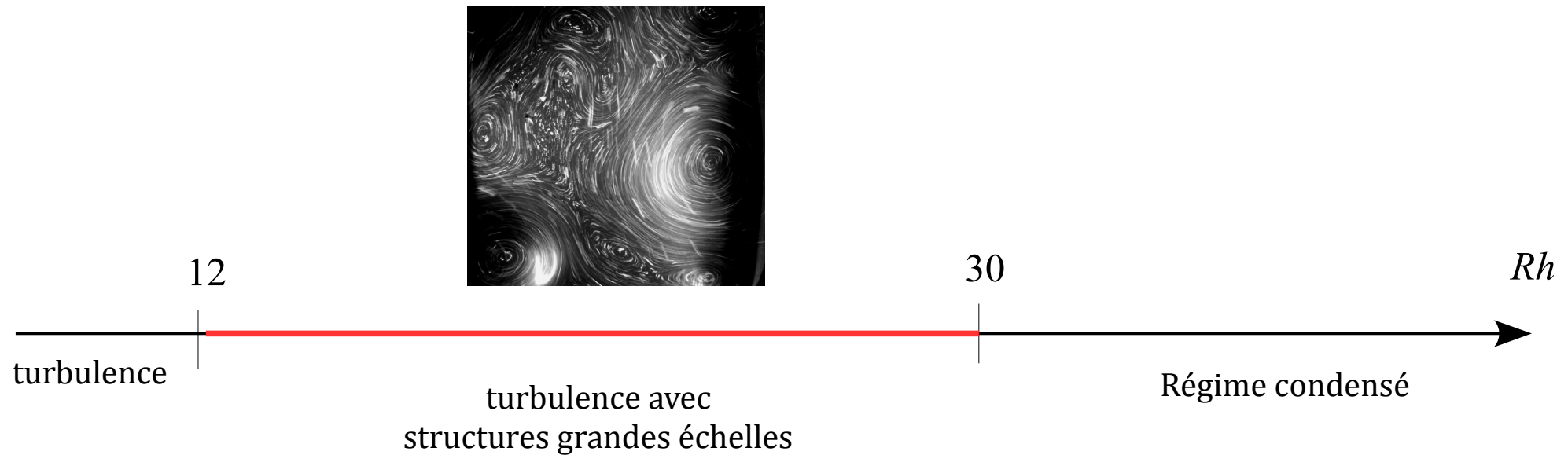
Les régimes d'écoulement

Paramètres de contrôle Rh ($Re/Rh \propto 10^3$)



Comment déterminer et quantifier l'émergence des structures aux grandes échelles ?
Quelles sont la dynamique temporelle et la signature fréquentielle de ces structures ?

Propriétés statistiques du régime turbulent

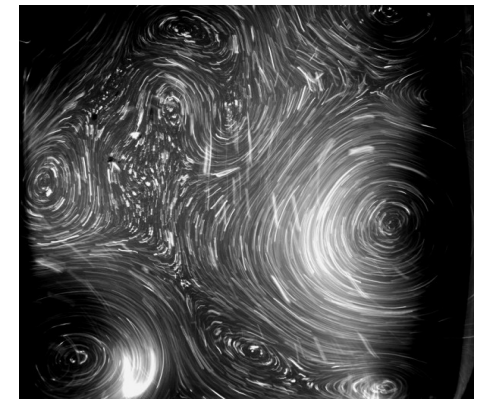


Etude de l'amplitude de la circulation à grande échelle U_L

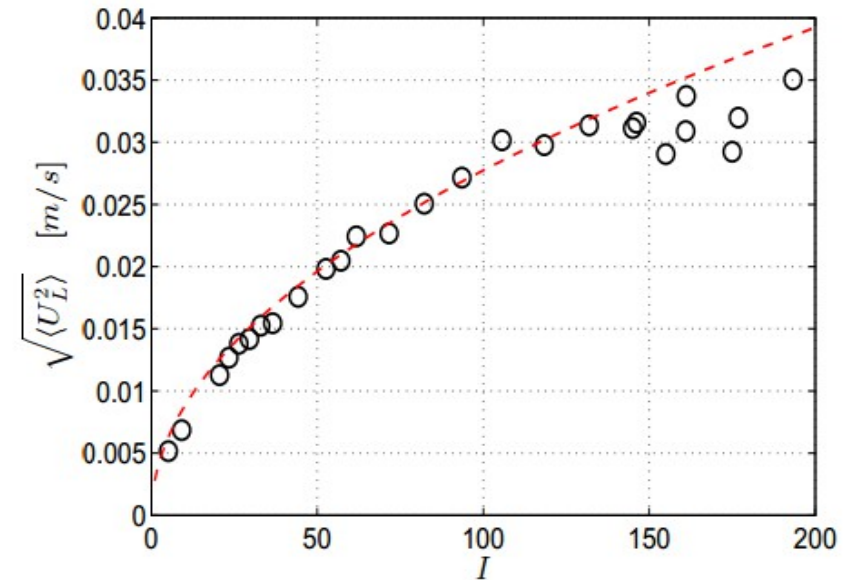
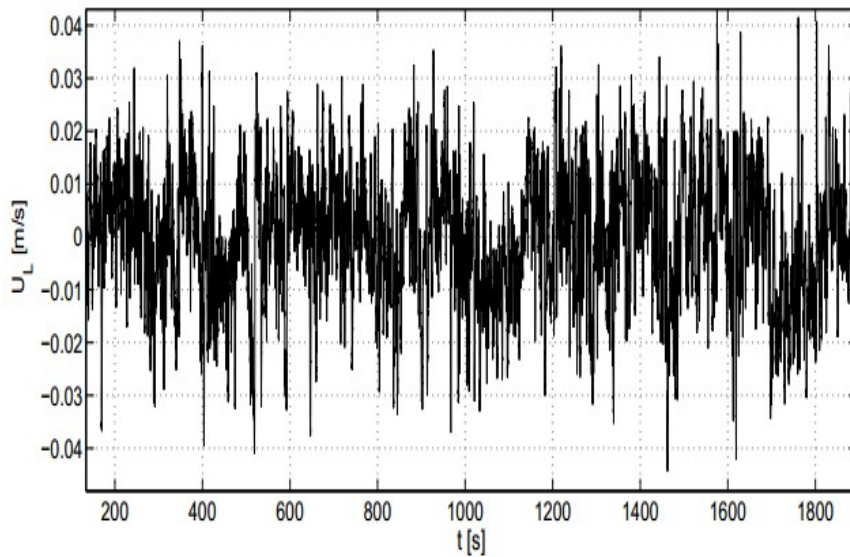
Emergence d'une amplitude préférentielle de la circulation

Spectres fréquentiels aux basses fréquences

Propriétés statistiques du régime turbulent



Etude de la norme de U_L : $\langle U_L^2 \rangle^{1/2}$



Pour $I < 150A$ soit $Rh < 30$, $\langle U_L^2 \rangle^{1/2} \propto I^{1/2}$

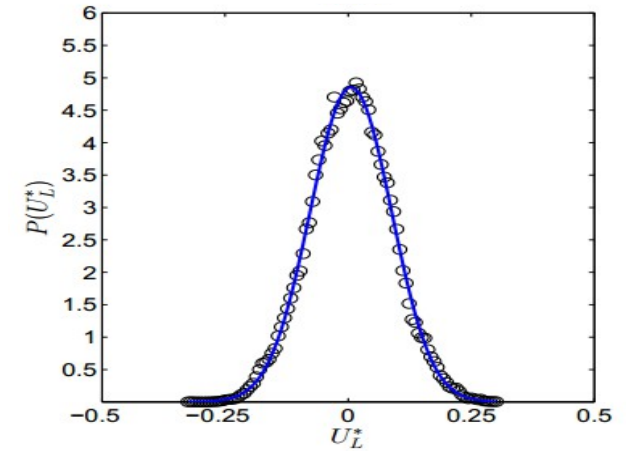
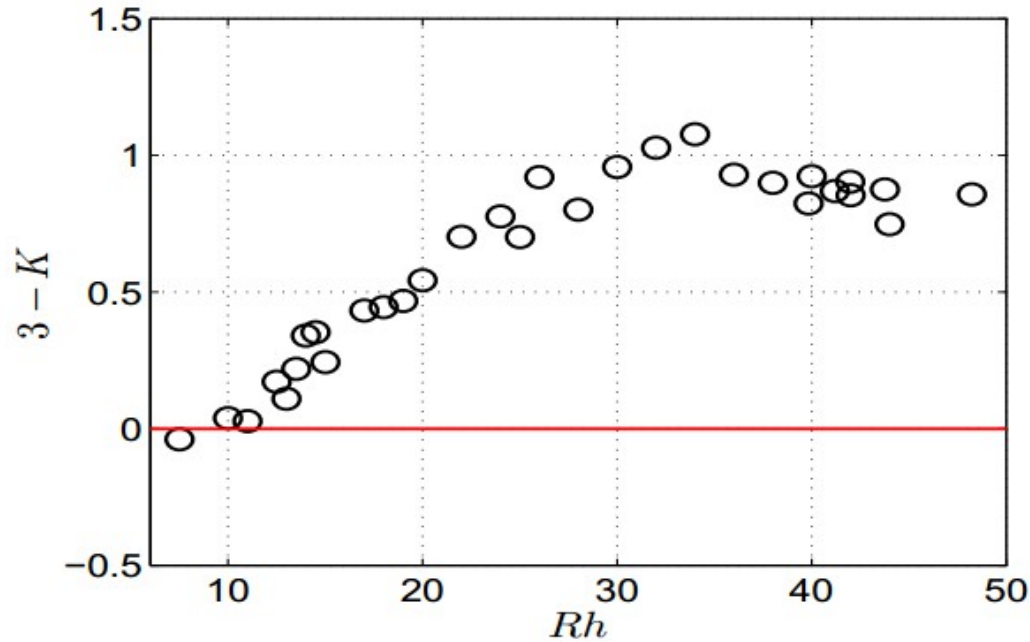
Equilibre entre terme inertiel et le forçage $[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] \propto [f] \longrightarrow \frac{U_L^2}{L} \propto f$

Amplitude des fluctuations turbulentes $\langle U_L^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{f L} \propto \sqrt{I}$

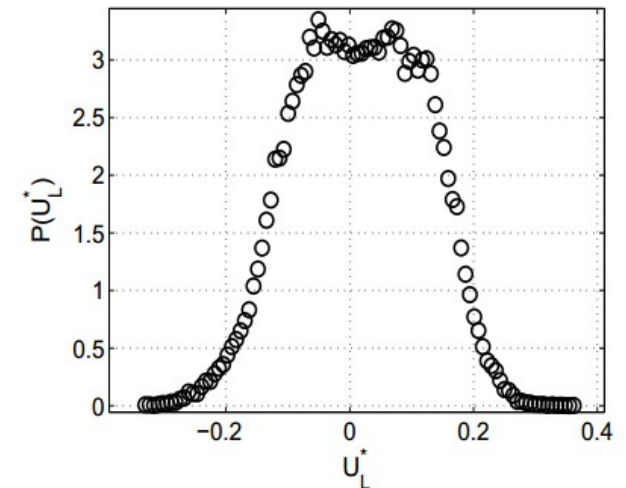
Propriétés statistiques du régime turbulent

Coefficient d'aplatissement

$$K = \frac{\langle U_L^4 \rangle}{\langle U_L^2 \rangle^2}$$



$Rh = 10$



$Rh = 20$

Ecart au régime gaussien pour $Rh > 12$.

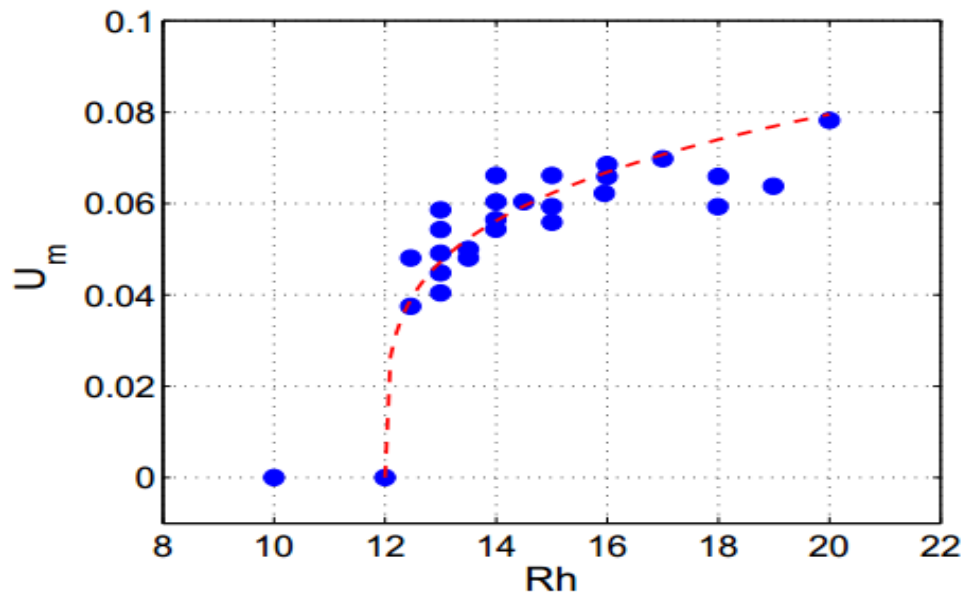
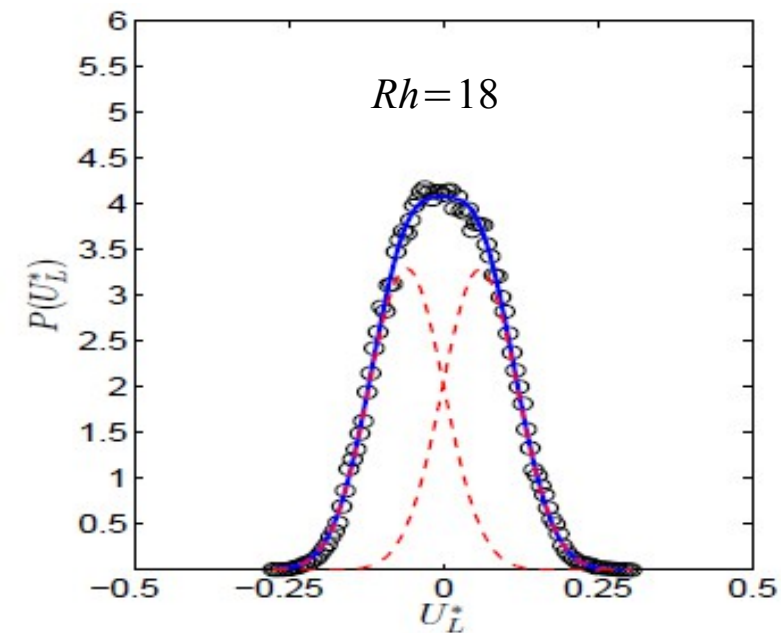
La distribution devient bi-modale pour $Rh > 20$.

Propriétés statistiques du régime turbulent

Décomposition des distributions (Guillaume Michel)

Somme de deux gaussiennes centrées en U_M et de variance σ^2

$$P(U_L^*) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(U_L^* - U_m)^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(U_L^* + U_m)^2}{2\sigma^2}\right)$$



La variance σ^2 varie peu

Bifurcation de l'amplitude la plus probable

Estimation : $U_M \propto (Rh - Rh_c)^{1/4}$

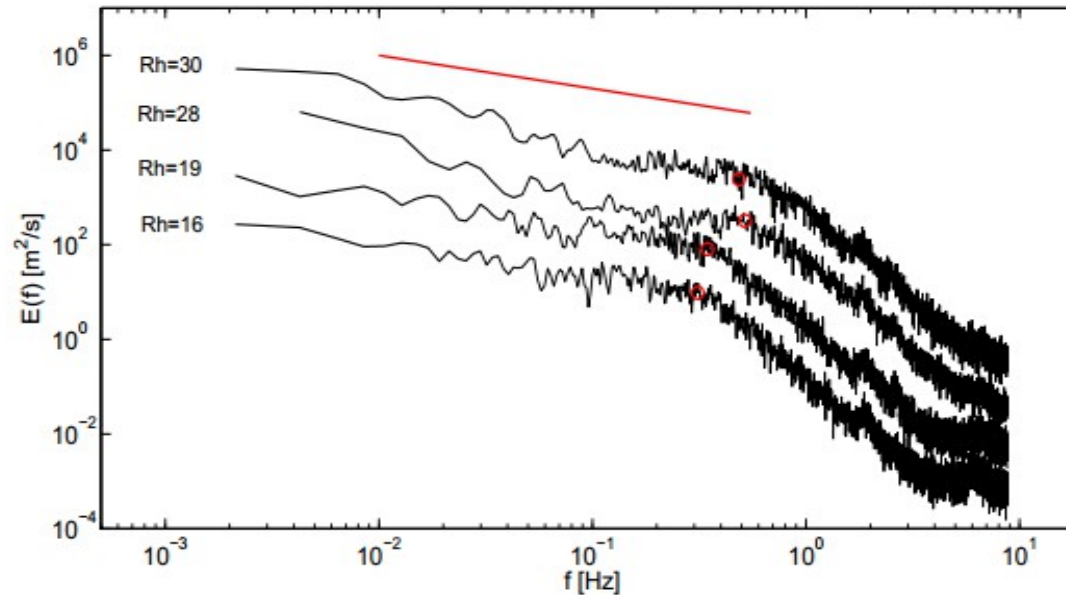
Transition à Rh=12 : apparition d'une amplitude préférentielle de rotation

Propriétés spectrales du régime turbulent

Spectre fréquentiel

$$\hat{U}_L(f) = \int U_L(t) \exp(i2\pi f t) dt$$

$$E(f) = \frac{1}{T} \langle \hat{U}_L(f) \hat{U}_L(-f) \rangle$$



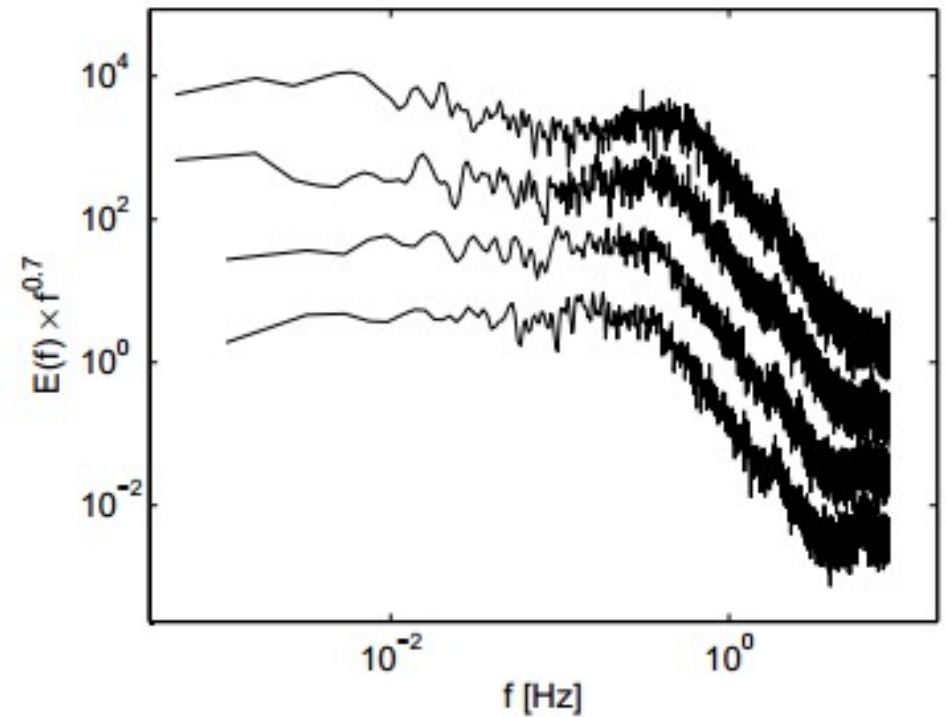
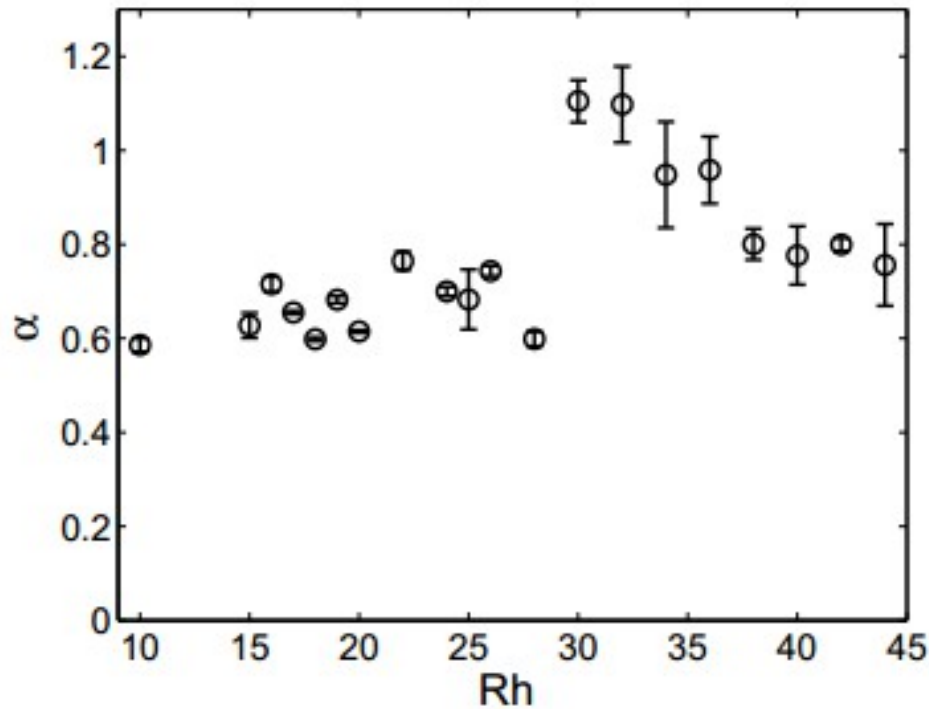
Hautes fréquences: décroissance rapide du spectre $E(f) \propto f^{-4}$ ou $\exp(-f/f_0)$

Basses fréquences: Loi de puissance $E(f) \propto f^{-\alpha}$ avec $\alpha = 0,7$

Signature de la dynamique cohérente

$$f < \frac{\langle U_L^2 \rangle^{1/2}}{L} \approx 0,4 \text{ Hz}$$

Propriétés spectrales du régime turbulent



Pour $Rh < 30$, le spectre aux basses fréquences : $E(f) \propto f^{-\alpha}$ avec $\alpha = 0,7 \pm 0,1$

Loi de puissance aux basses fréquences avec $\alpha = 0,7$.

Absence de fréquence de coupure aux basses fréquences.

Observé sur les signaux des sondes Doppler

Propriétés spectrales du régime turbulent

Bruit en 1/f :

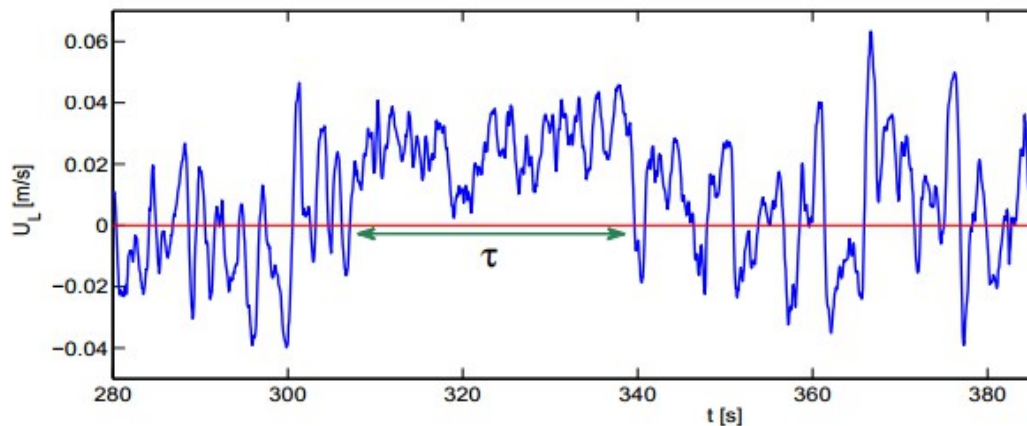
Loi de puissance aux basses fréquences avec $E(f) \propto f^{-\alpha}$, α compris entre 0 et 2

Processus auto-similaire: absence de temps caractéristique.

Fréquence de coupure : $f_c \propto \frac{1}{T}$ avec T la durée de la mesure.

Systemes complexes : fluctuations de résistivité, percolation, pluviométrie, écoulement von Karman...

Présence d'une dynamique lente : **Comment cette dynamique lente affecte les spectres ?**

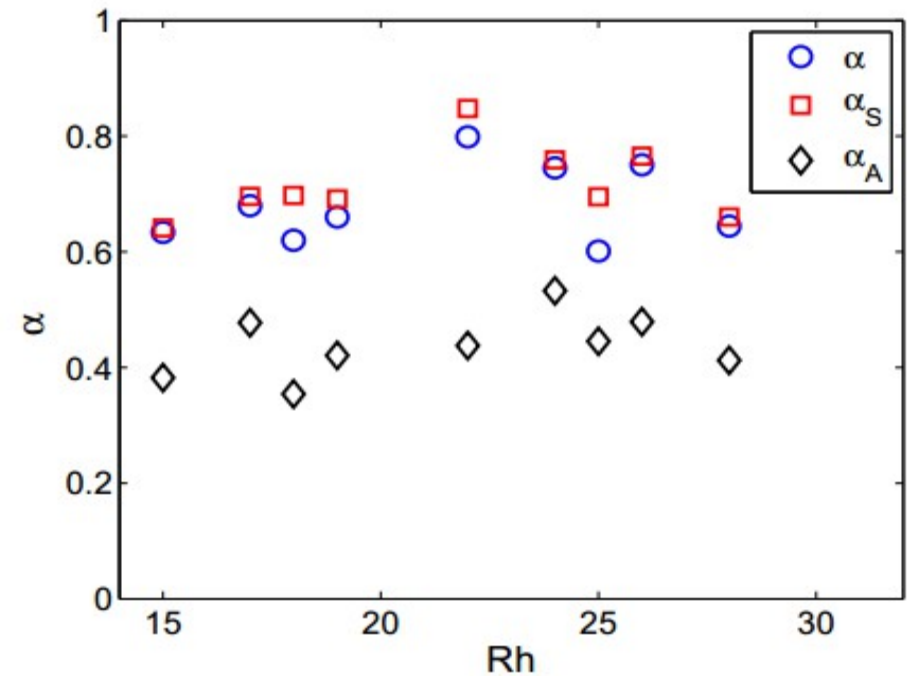
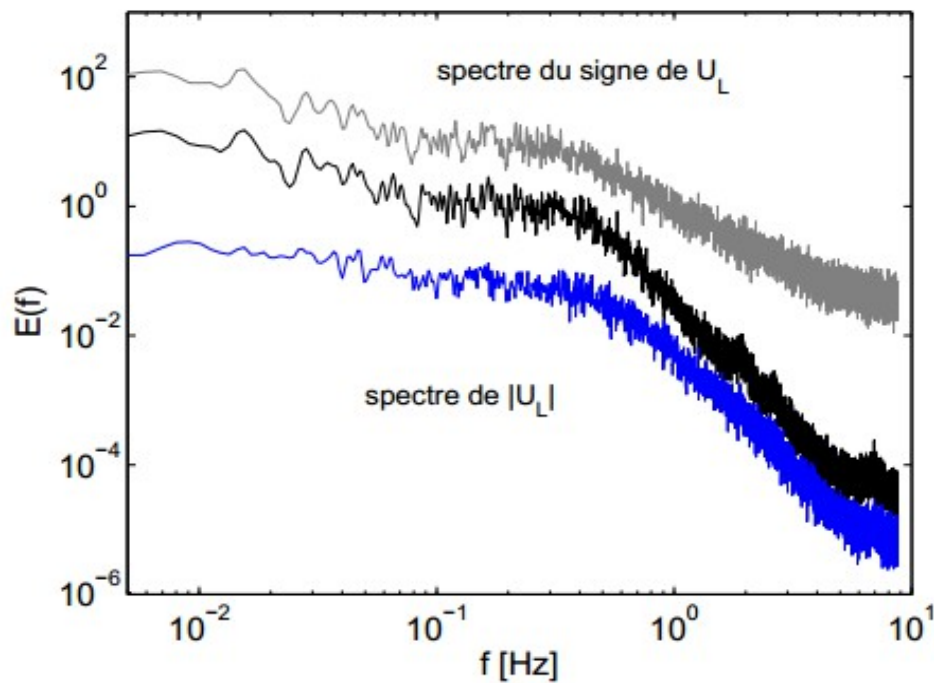


Présence d'évènements longs de polarité constante

Propriétés spectrales du régime turbulent

Origine du bruit en $1/f$: évènements longs de polarité constante.

Quantification: transitions entre les états $U_L < 0$ et $U_L > 0$: étude du signe de U_L .

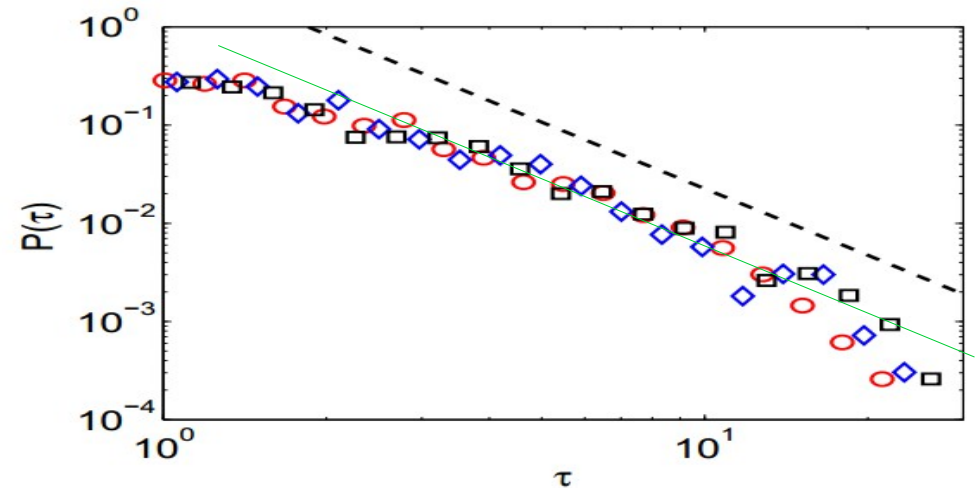
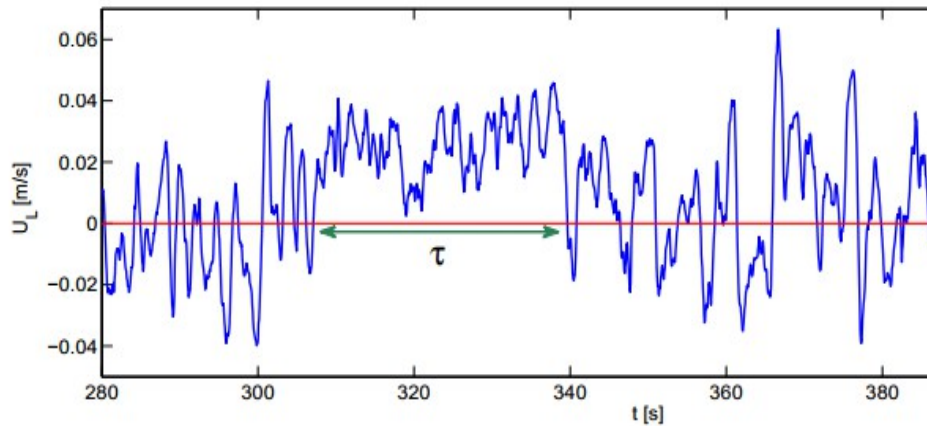


Même information dans les spectres de U_L et $sign(U_L)$.

Propriétés statistiques de cette dynamique lente ?

Propriétés spectrales du régime turbulent

Distribution des durées entre deux changements de signe successifs $P(\tau)$



Loi de puissance aux temps longs $P(\tau) \propto \tau^{-\beta}$ avec $\beta = 2,25$.

Décroissance lente de la distribution : événements longs probables.

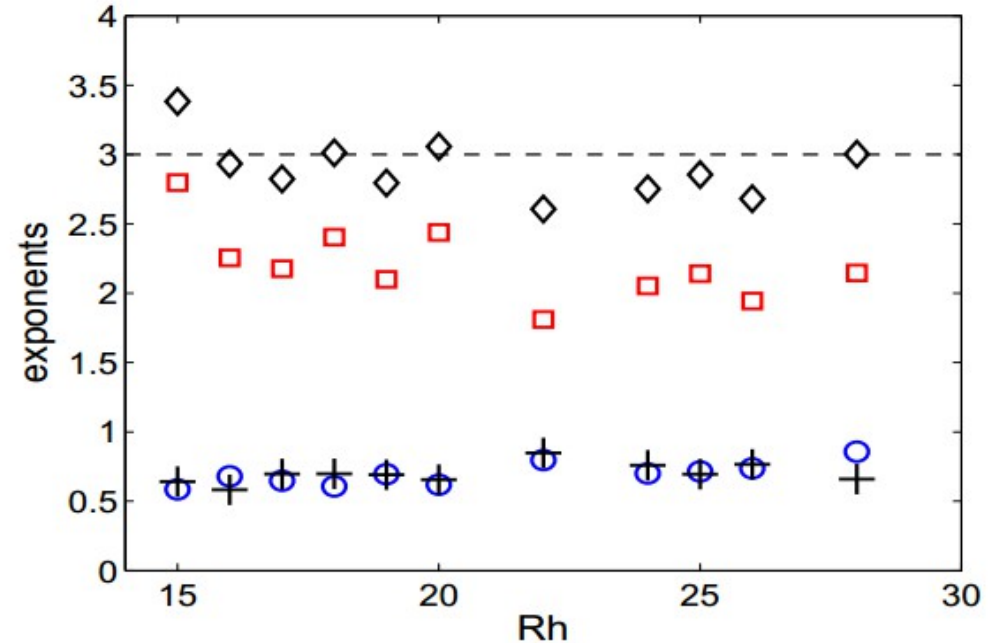
Correspondance entre la gamme fréquentielle et temporelle : $\tau > \frac{L}{\langle U_L^2 \rangle^{1/2}} \approx 2.5 s$

Existe-il une relation entre α et β ?

Propriétés spectrales du régime turbulent

Les exposants

- α Spectre de U_L
- + α_S Spectre du signe de U_L
- β Distribution $P(\tau)$
- ◇ $\beta + \alpha$ Somme des exposants



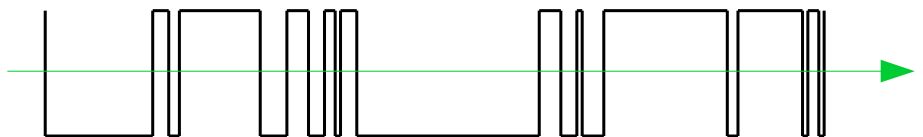
Les exposants suivent la loi : $\alpha + \beta = 2.95 \pm 0.35$

Prédiction théorique

Lowen and Teich, P.R.E, 1993
Niemann et al., P.R.L., 2013

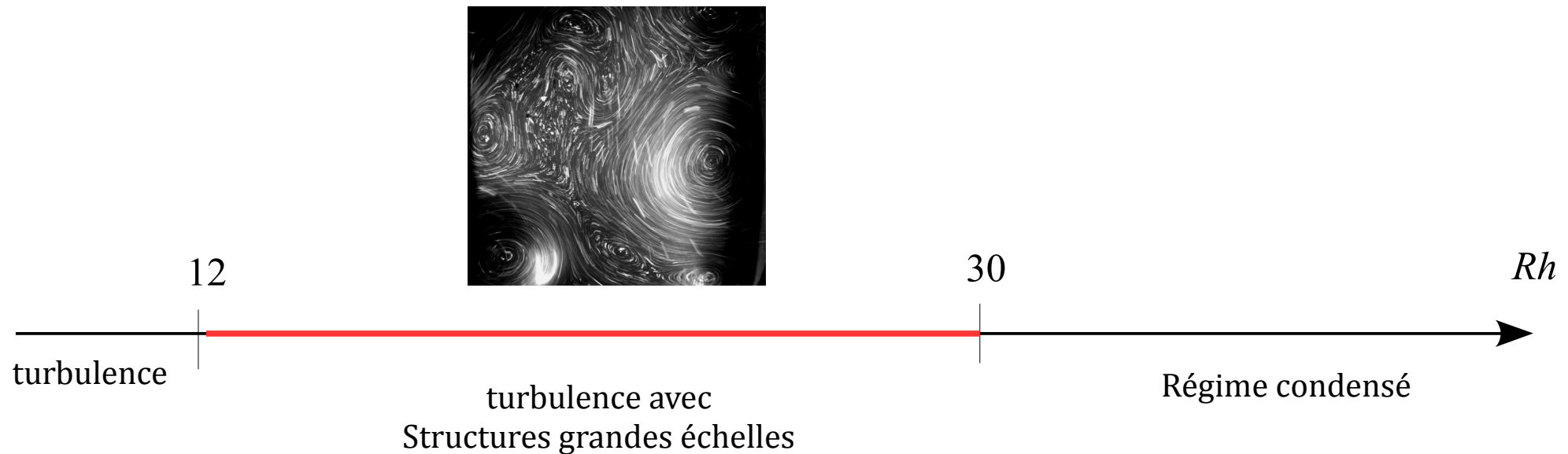
Systeme à 2 états avec distribution des temps de séjour $P(\tau) \propto \tau^{-\beta}$ alors

$$\alpha = 3 - \beta$$



L'exposant β contrôle la valeur de l'exposant α du spectre.

Turbulence avec structures aux grandes échelles



Distributions non gaussiennes pour $Rh > 12$.

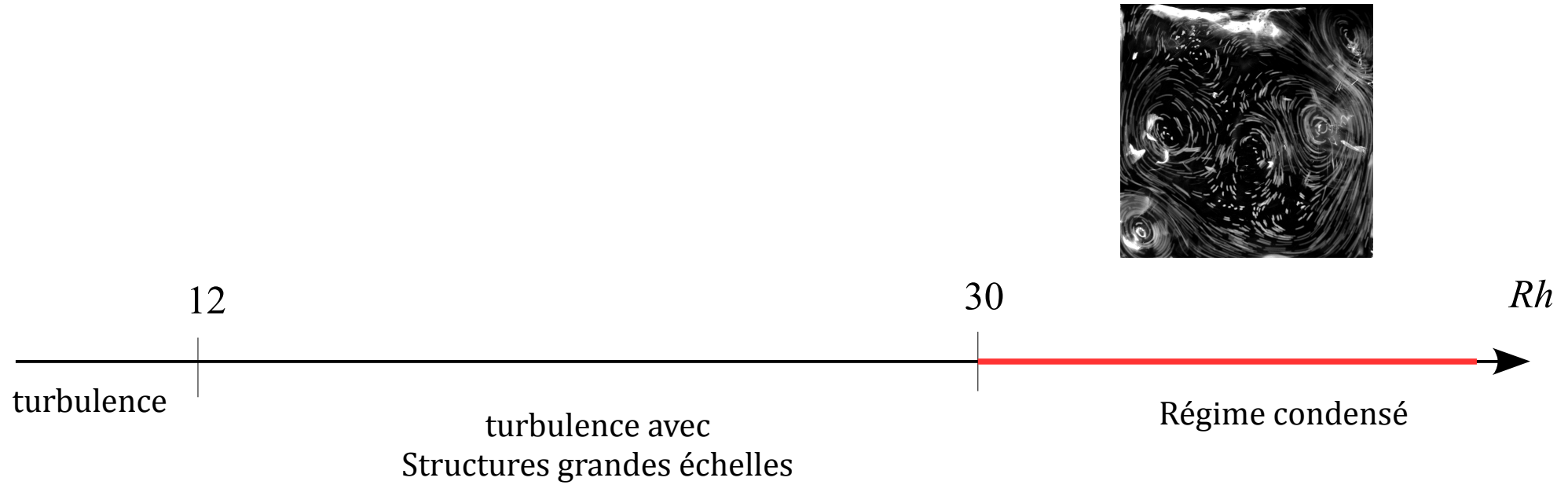
Amplitude préférentielle de la circulation à grande échelle.

Bruit en $1/f$ aux basses fréquences $E(f) \propto f^{-\alpha}$

Dynamique lente : distribution des durées $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$

Relation $\alpha = 3 - \beta$

Transition vers l'état condensé



Emergence d'une configuration préférentielle de vorticité

Renversement circulation grande échelle.

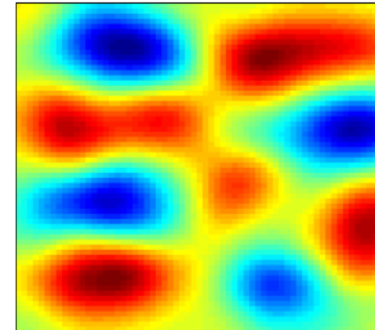
Transition vers l'état condensé

Champs moyen de vorticité sur 100 temps de retournements

Emergence d'une configuration de vorticité

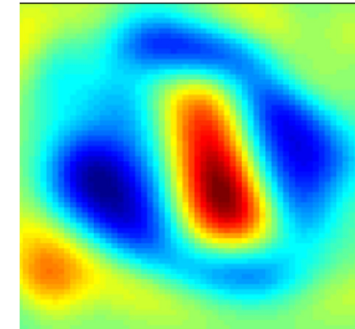
Turbulence : ergodicité/récurrences

$Rh = 21$



Turbulence avec
structures grande échelle

$Rh = 39$



Régime condensé

Changement de la structure de l'attracteur turbulent ?

Récurrence dans les systèmes dynamiques

Eckmann et al, EPL, 1987

Analyse du flot et de zones préférentielles dans l'espace des phases.

Présence de point fixe, cycle instable...

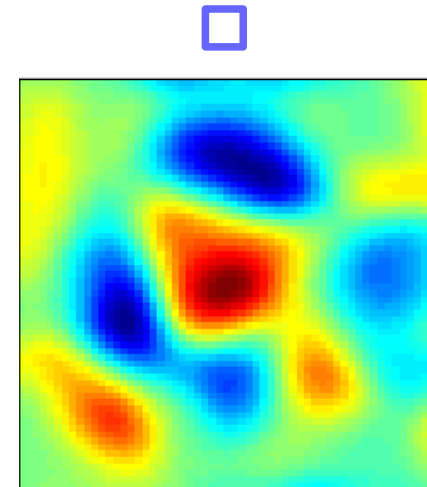
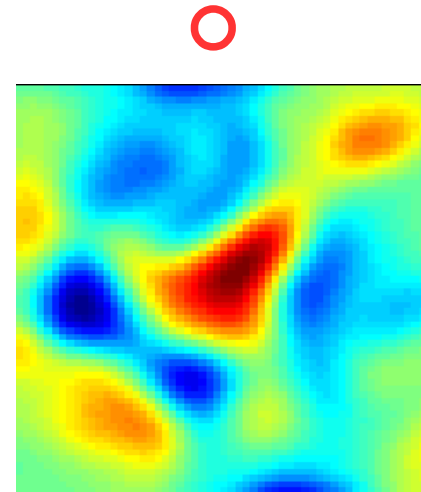
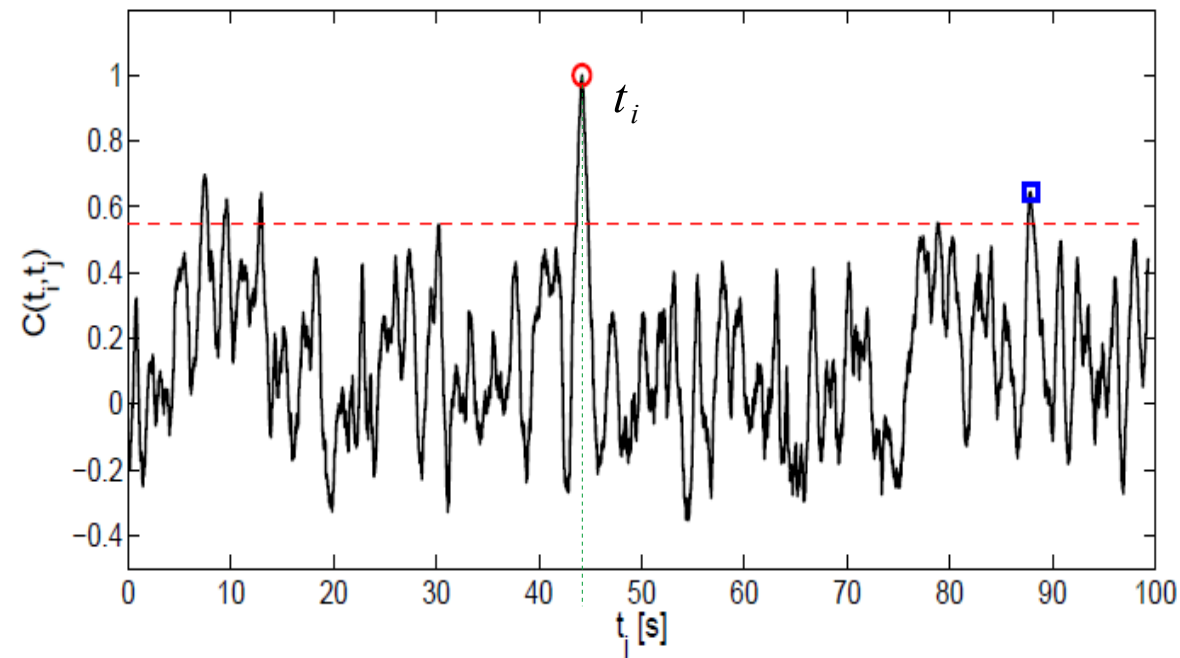
Transition vers l'état condensé

Méthode de capture des récurrences

Produit scalaire entre les deux vecteurs unitaires $\omega'(x_k, t_i), \omega'(x_k, t_j)$

Corrélation spatiale aux deux instants t_i, t_j

$$c(t_i, t_j) = \sum_k \omega'(x_k, t_i) \omega'(x_k, t_j)$$

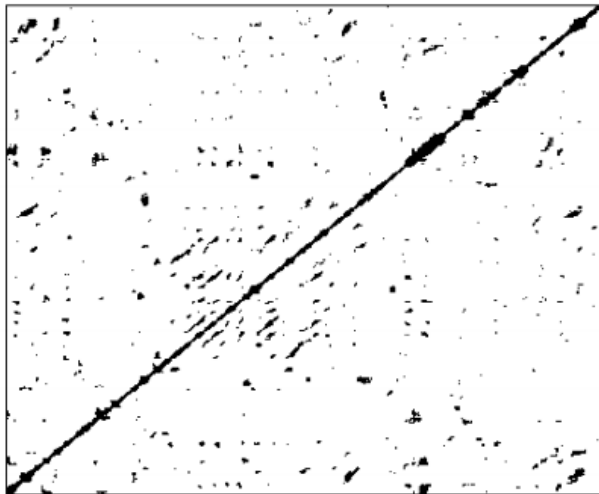


Transition vers l'état condensé

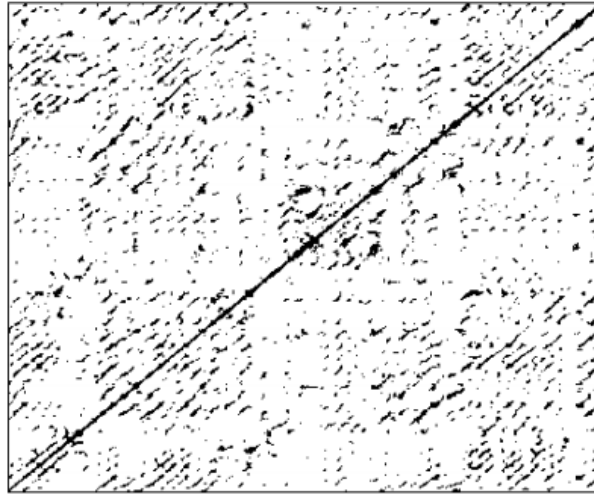
Fonction indicatrice de récurrence $C_{i,j}(\epsilon_c)$ | $C_{i,j}=0$ si $c(t_i, t_j) < \epsilon_c$ (blanc)
 $C_{i,j}=1$ si $c(t_i, t_j) > \epsilon_c$ (noir)

Tracé de récurrences sur 100 secondes (6000 instantanés) $\epsilon_c = 0.55$

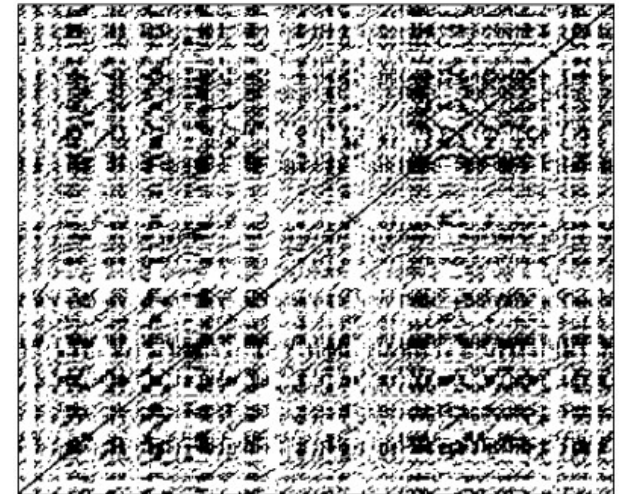
Rh 28



Rh 30



Rh 39



En augmentant Rh, l'écoulement passe de plus en plus de temps proche d'une configuration de vorticité

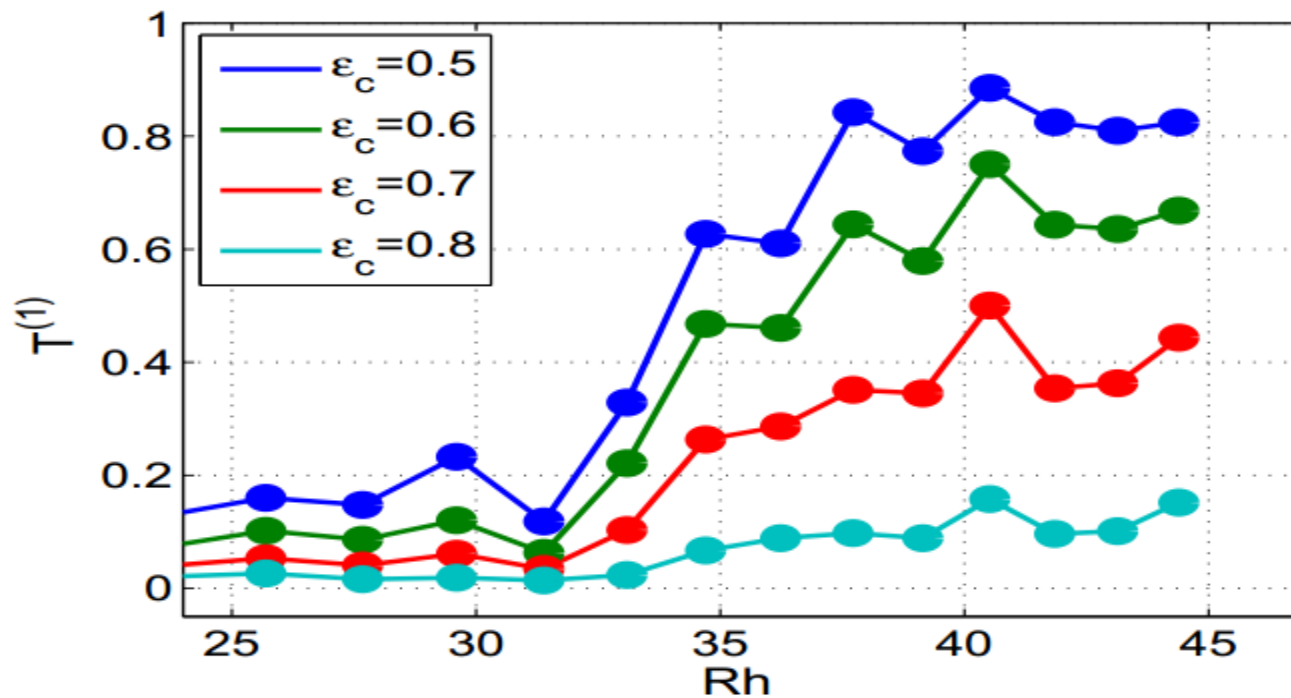
Transition vers l'état condensé

Pourcentage de temps passé au voisinage du champ de vorticité $\omega'(x_k, t_i)$

$$T_i = \frac{1}{N} \sum_j C_{i,j}(\epsilon_c) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{N} < T_i < 1$$

N : le nombre d'instantanés de vorticité

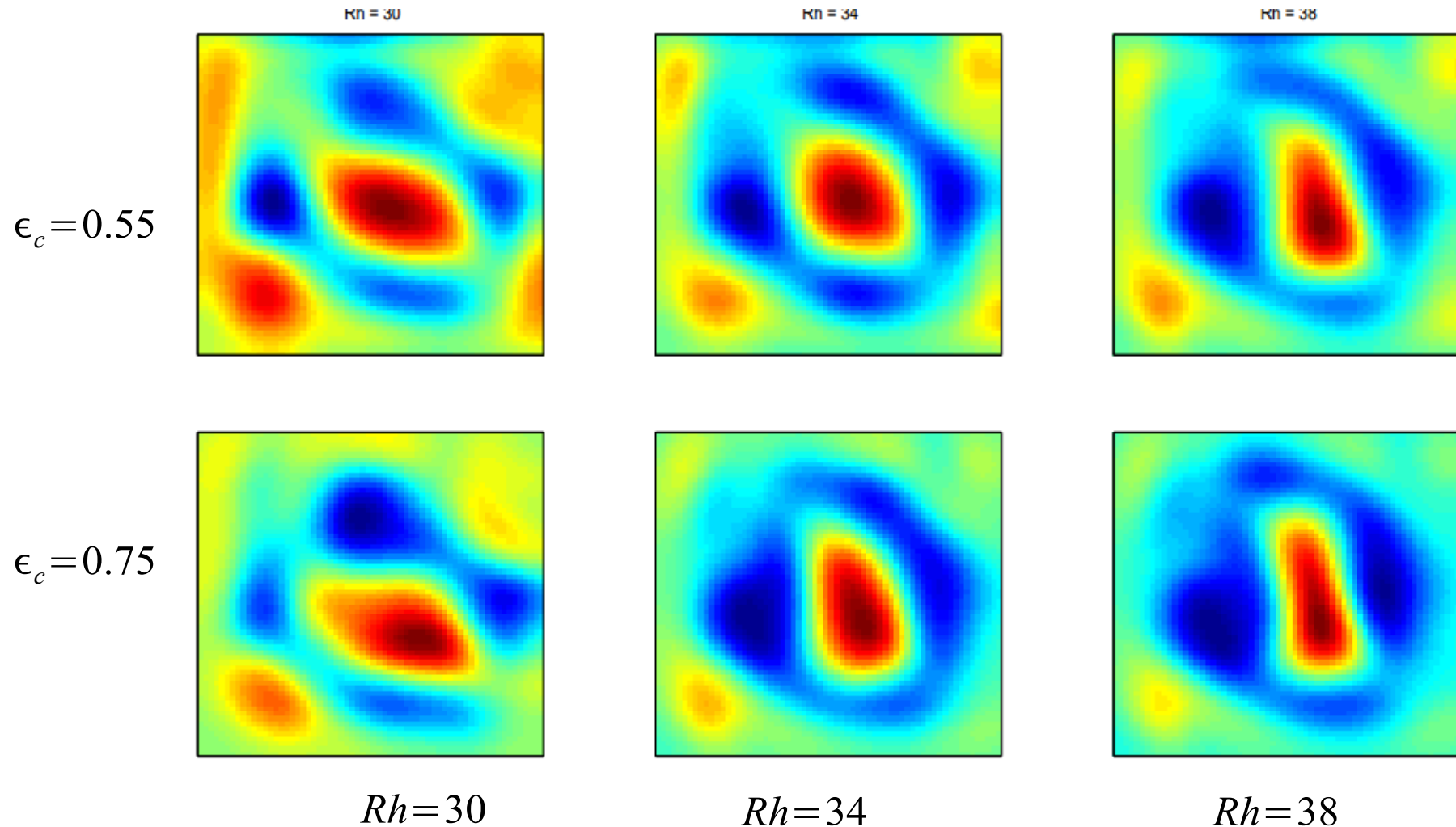
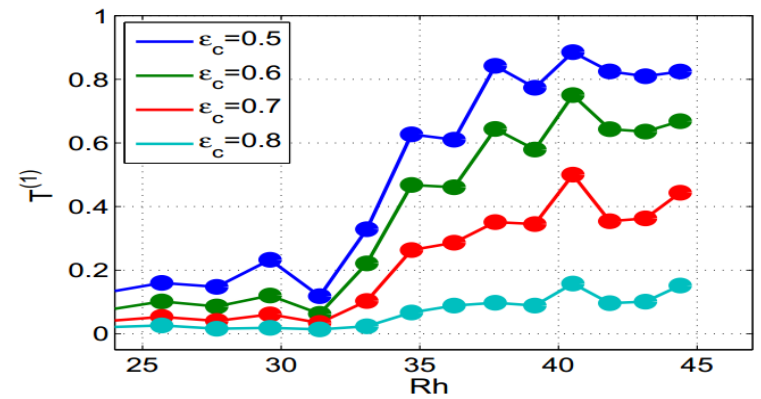
Mode le plus probable $T^{(1)} = \max_i(T_i)$



Transition vers $Rh=30$

Transition vers l'état condensé

Moyenne cohérente et structure du mode le plus probable



Transition vers l'état condensé

Décomposition de Fourier

$$\omega(x, y) = \sum \hat{\omega}(n_x, n_y) \sin\left(n_x \pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(n_y \pi \frac{y}{L}\right)$$

Structure de l'écoulement

Vorticité à petite échelle $(n_x, n_y) = (3, 3), (3, 5)$

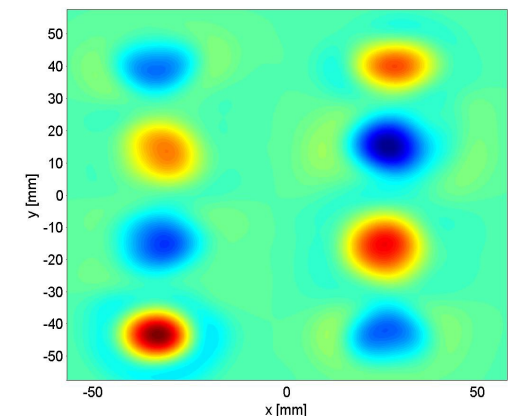
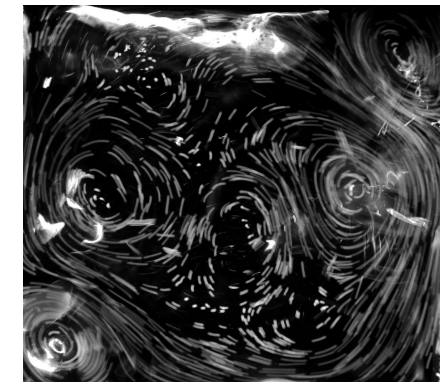
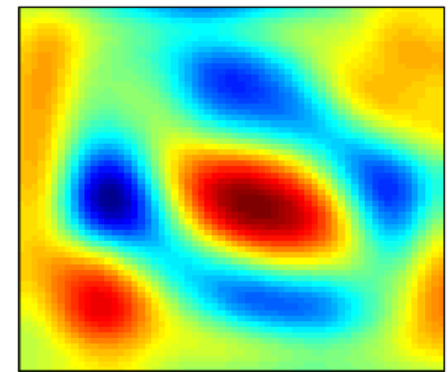
Écoulement à grande échelle $(n_x, n_y) = (1, 1)$

Mode du forçage $(n_x, n_y) = (2, 4)$

Interactions triadiques

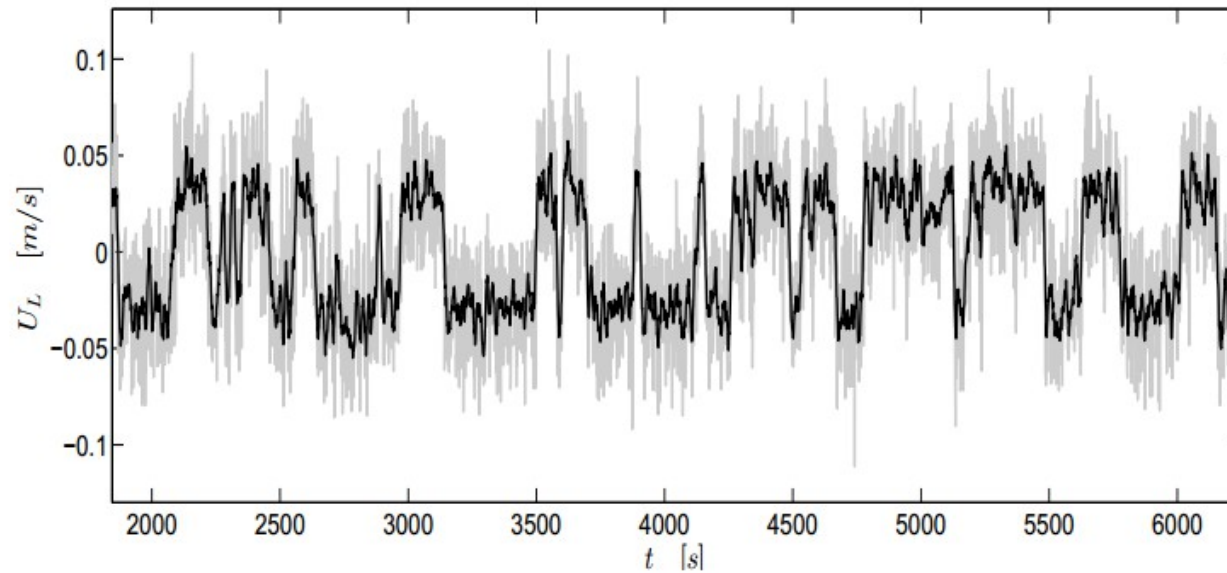
Etat condensé pour un forçage stationnaire

Gallet and Young, 2013

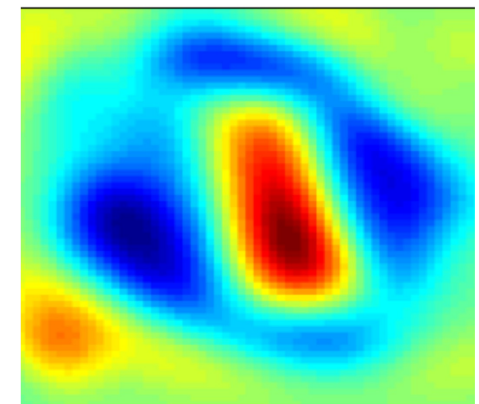
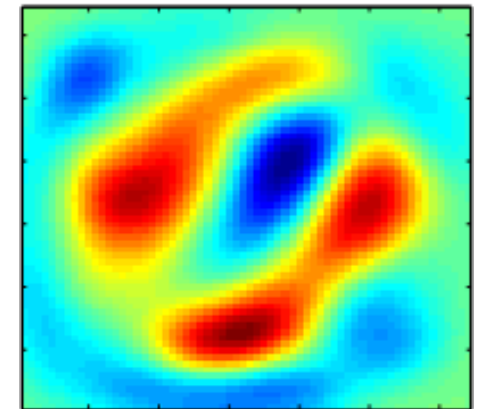


Dynamique de l'état condensé

Renversements entre deux états symétriques

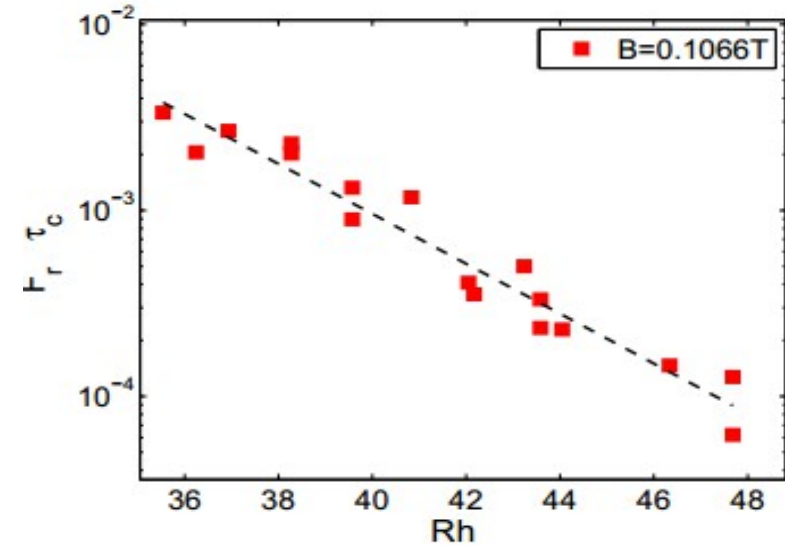
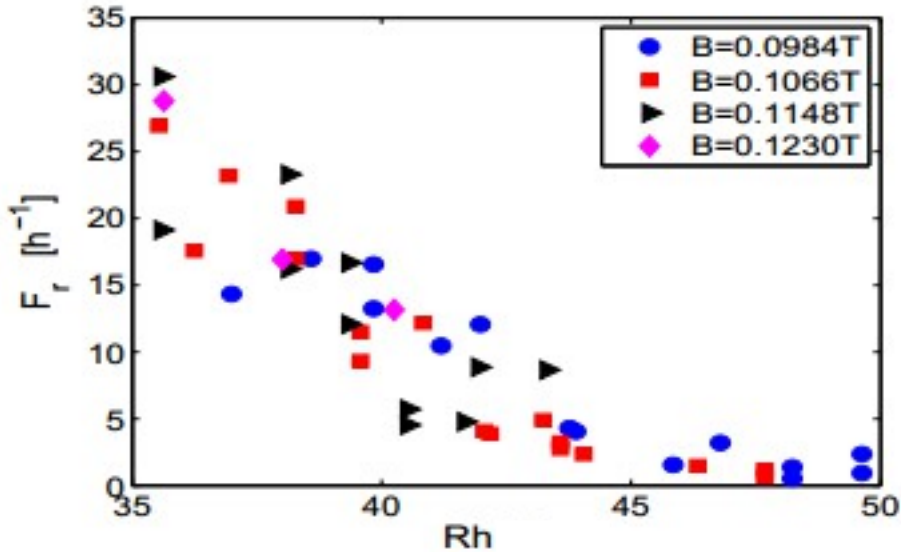


Renversements erratiques entre les deux sens de rotation.



Dynamique de l'état condensé

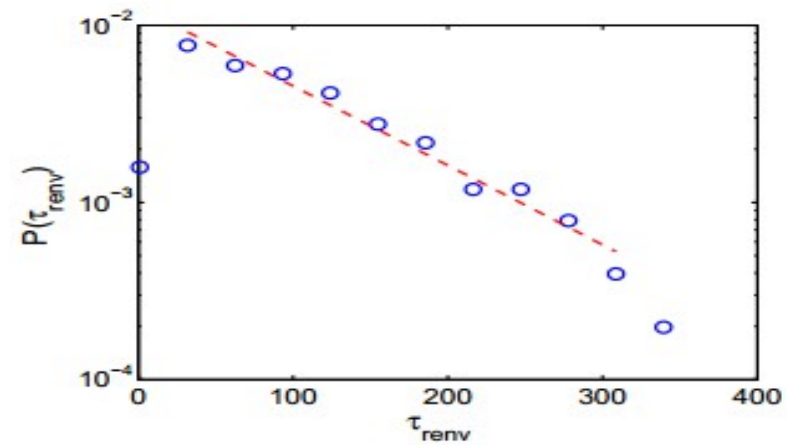
Fréquence des renversements $F_r = \frac{N_r}{T_f}$



Décroissance exponentielle de la fréquence $F_r = \tau_c^{-1} C \exp(-\alpha Rh)$ avec $\tau_c^{-1} = \sqrt{f/L}$

Distribution des temps entre renversements

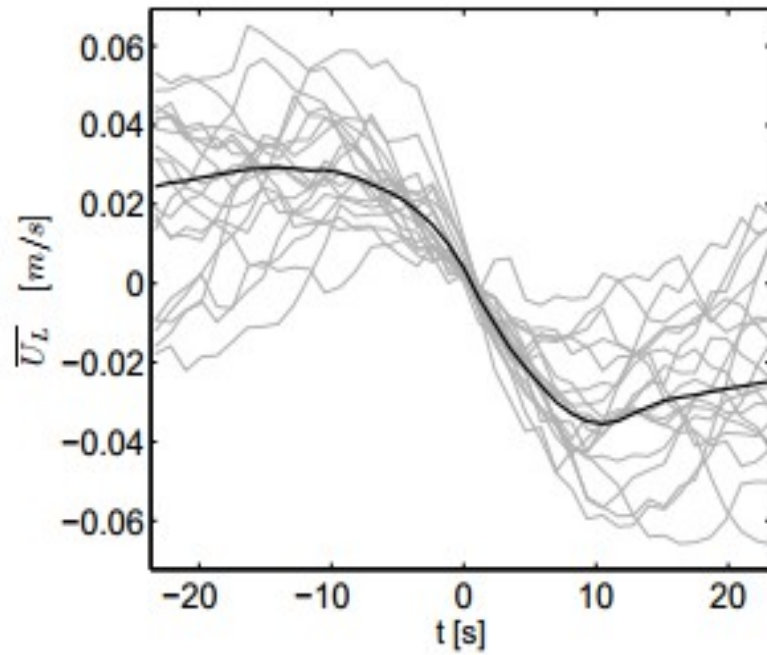
$$P(\tau_{renv}) = C \exp(-\tau_{renv}/\tau_0)$$



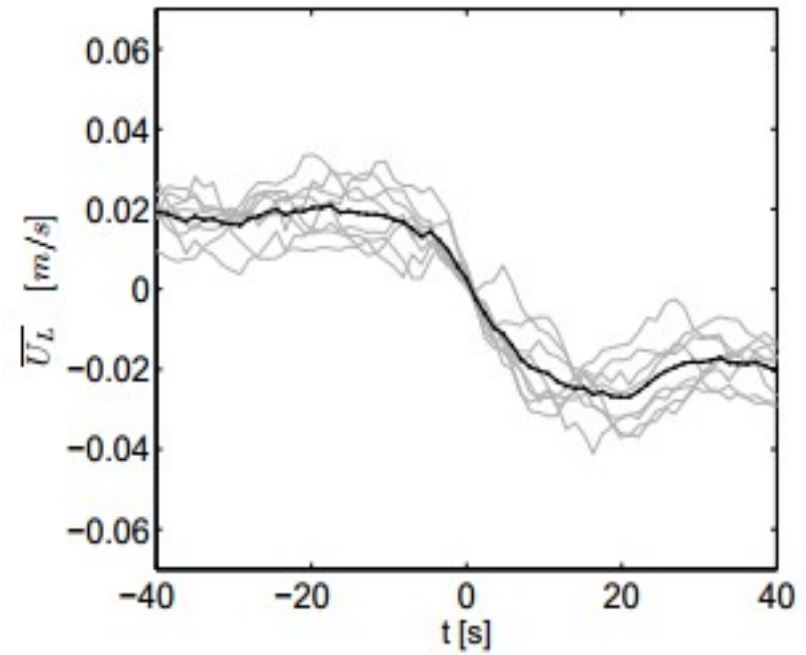
Dynamique de l'état condensé

Dynamique des renversements

$Rh=38$



$Rh=48$



Concentration des trajectoires lorsque Rh augmente

Dynamique de l'état condensé

Dynamique de basse dimension?

À Rh grand, concentration des trajectoires et simplification des renversements.

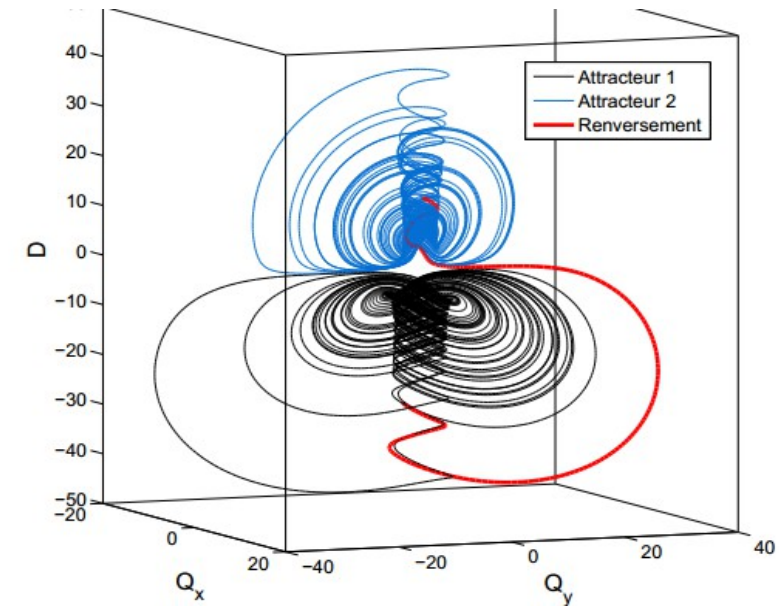
Structure de l'état condensé indique une dynamique de basse dimension.

L'intermittence de crise.

Collision entre deux attracteurs chaotiques.

Loin du seuil de collision, renversements complexes.

Distribution exponentielle des temps entre renversements.



Trajectoires complexes

Trajectoires simples

Rh_s

Pas de renversements

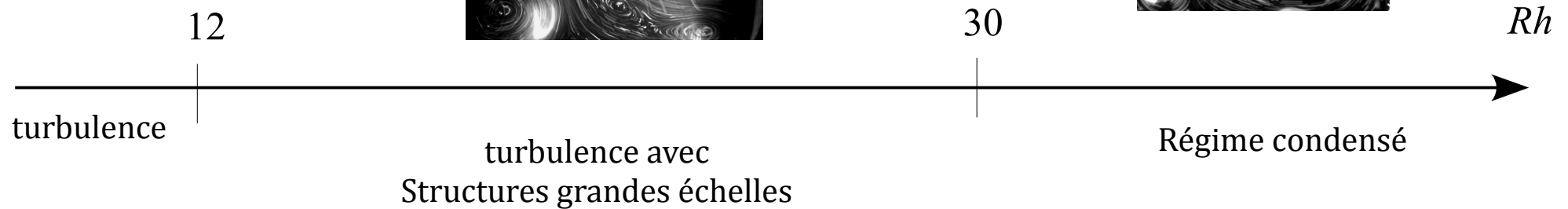
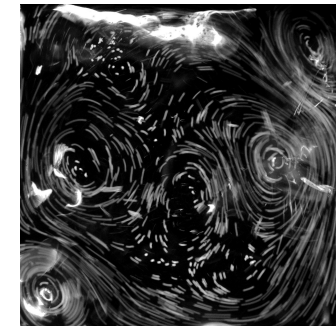
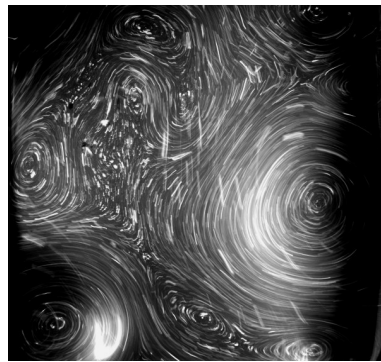
Rh

Attracteurs entremêlés

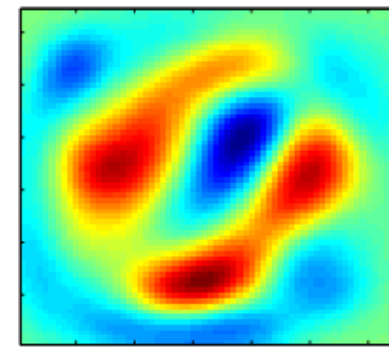
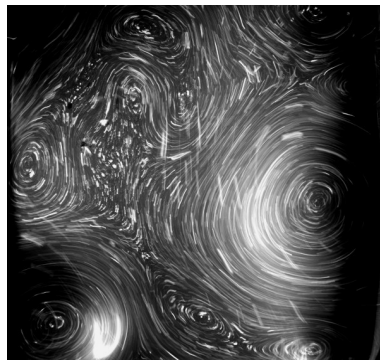
Collision

Conclusion

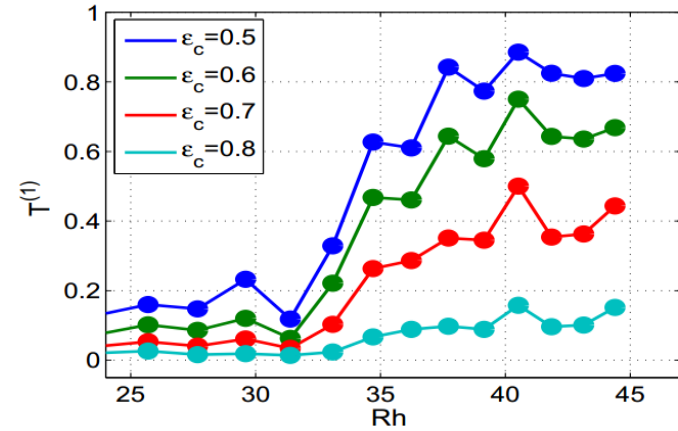
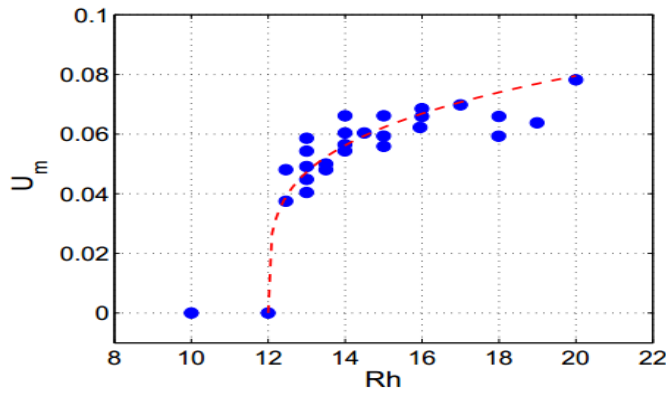
Comment déterminer et quantifier l'émergence des structures aux grandes échelles ?
Quelles sont la dynamique temporelle et la signature fréquentielle de ces structures ?



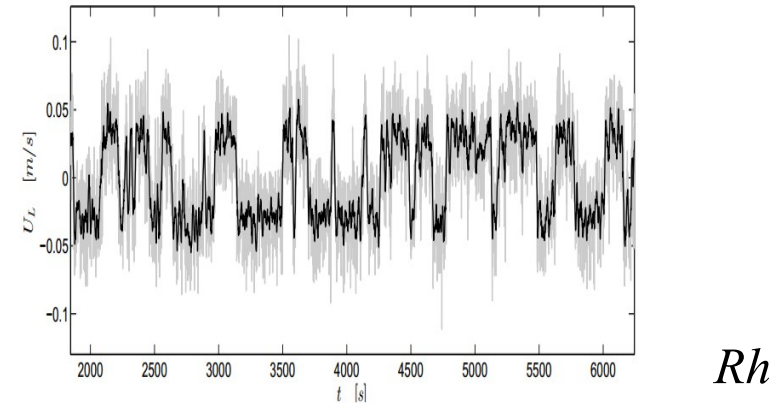
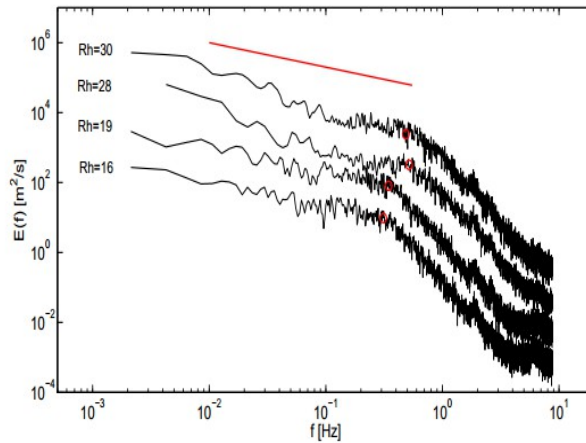
Conclusion



Transition



Dynamique temporelle



turbulence

turbulence avec structures grandes échelles

Régime condensé

Conclusion

Turbulence avec structures grandes échelles $12 < Rh < 30$

Distributions non gaussiennes.

Emergence d'une amplitude préférentielle de la circulation

Spectre en $1/f$: $E(f) \propto f^{-\alpha}$

Distribution $P(\tau) \propto \tau^\beta$

Relation entre les exposants α, β : $\alpha + \beta = 3$

Etat condensé $Rh > 30$

Emergence d'une structure de vorticité particulière.

Interactions entre l'écoulement à grande échelle et le forçage.

Renversements de la circulation .

Fréquence des renversements décroît avec Rh .

Simplification des renversements à haut Rh .

Perspectives

Turbulence avec structures grandes échelles $12 < Rh < 30$

Comprendre la transition à $Rh=12$: origine de la décomposition en deux gaussiennes ?

Piste : bruit dans forme normale / processus stochastique.

Origine de la distribution en loi de puissance : $P(\tau) \propto \tau^{-\beta}$?

Piste : analyser la stabilité des structures à grande échelles.

Etendre l'approche à d'autres systèmes comportant du bruit en $1/f$.

Piste : écoulement von Karman

Etat condensé $Rh > 30$

Origine de la structure préférentielle de vorticité : point fixe, cycle limite.. ?

Piste : outil numérique : capture cycle instable (*Chandler and Kerswell, 2013*).

Etudier la dynamique des renversements à Rh grand.

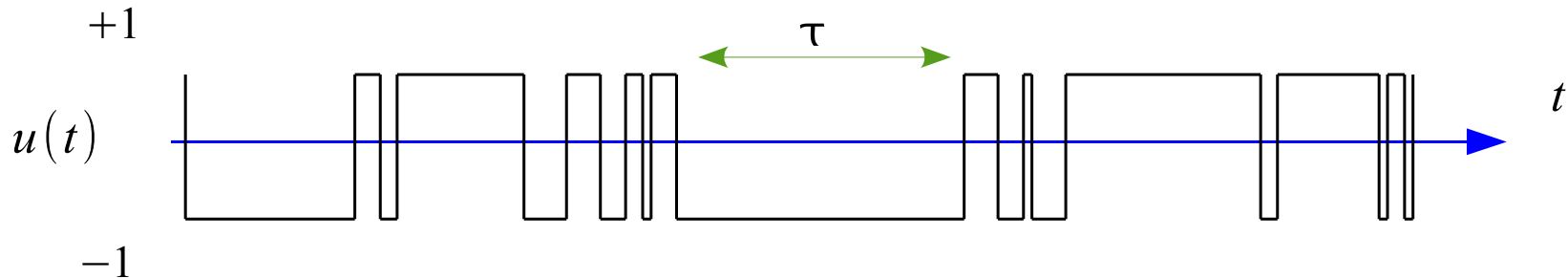
Piste : adapter le montage pour injecter des courants plus importants.

Merci de votre attention

Propriétés spectrales du régime turbulent

Arguments qualitatifs $2 < \beta < 3$

Signal $u(t) = \pm 1$ avec des durées de séjour dans chaque polarité, distribuées par $P(\tau) \sim \tau^{-\beta}$



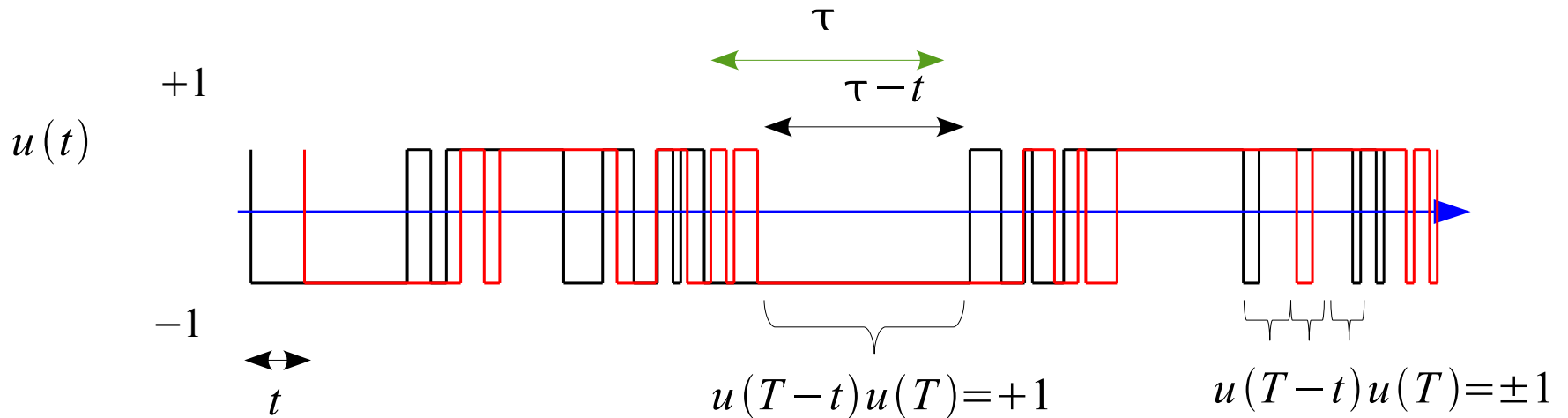
Stratégie: calcul du spectre à partir de la fonction d'auto-corrélation (Wiener-Khintchine)

Fonction d'auto-corrélation :
$$C(t) = \frac{1}{T_f} \int u(T-t)u(T) dT$$

Wiener-Khintchine
$$E(f) = \int C(t) \exp(i 2 \pi f t) dt$$

Propriétés spectrales du régime turbulent

Calcul de la fonction d'auto-corrélation $C(t) = \frac{1}{T_f} \int u(T-t)u(T) dT$



L'auto-corrélation est dominée par la contribution des phases de durée $\tau > t$

$$C(t) \approx \frac{1}{T_f} \int_t^{T_f} (\tau - t) \langle n \rangle P(\tau) d\tau$$

avec $\langle n \rangle = \frac{T_f}{\langle \tau \rangle}$

contribution
Nombre de phases de durée $[\tau, \tau + d\tau]$

Propriétés spectrales du régime turbulent

Calcul de la fonction d'auto-corrélation

$$C(t) \approx \frac{1}{T_f} \int_t^{T_f} (\tau - t) \langle n \rangle P(\tau) d\tau$$

$$P(\tau) = C \tau^{-\beta} \quad 2 < \beta < 3$$

Application

$$C(t) \propto \int_t^{T_f} \tau^{-\beta+1} d\tau \quad \text{ainsi} \quad C(t) \propto t^{-\beta+2}$$

$$E(f) \propto \int t^{-\beta+2} e^{i2\pi f t} dt \quad \text{en posant} \quad E(f) \propto f^{\beta-3} \int u^{-\beta+2} e^{i2\pi u} du$$

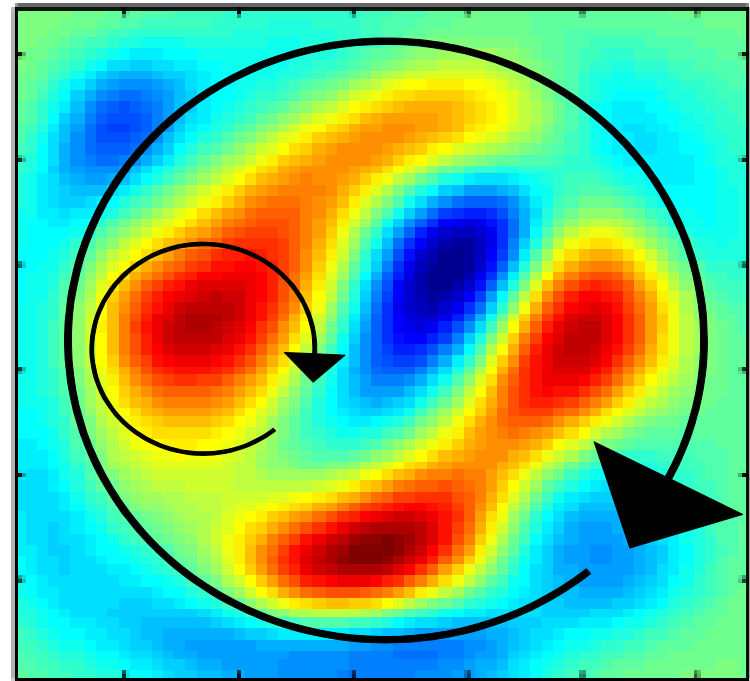
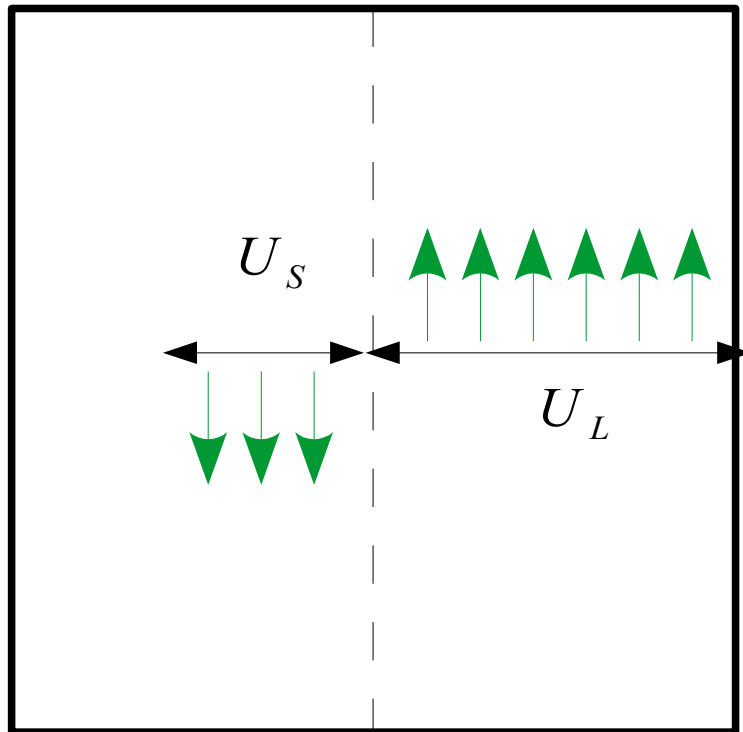
$u = ft$

Finalement

$$E(f) \propto f^{-\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha + \beta = 3$$

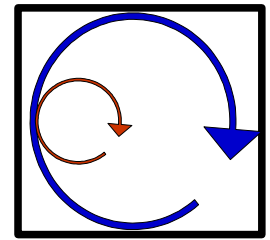
Dynamique de l'état condensé

Espace des phases (U_L, U_S)



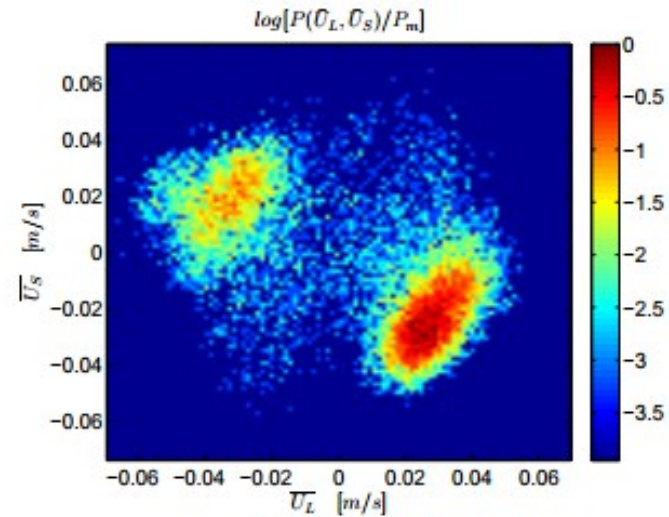
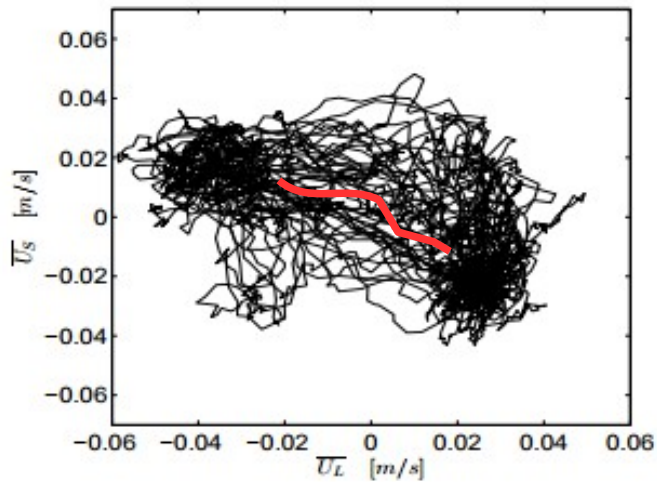
La vitesse moyenne entre le centre et la moitié de la cellule U_S

Dynamique de l'état condensé

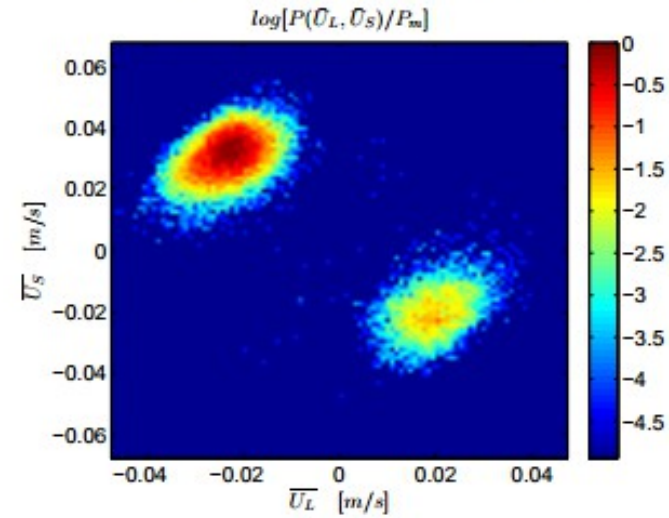
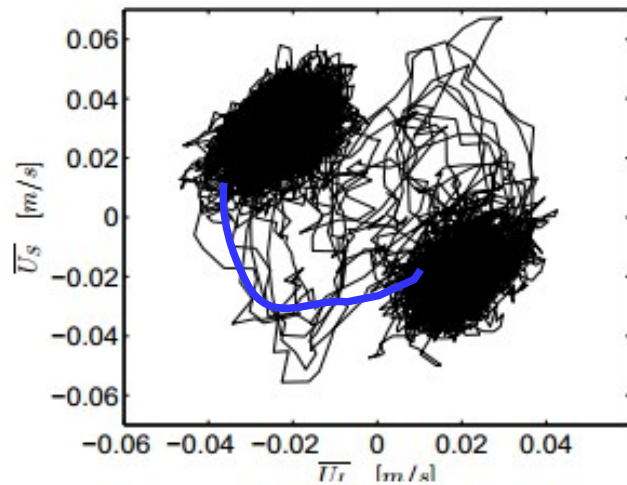


Espace des phases (U_L, U_S)

$Rh=38$



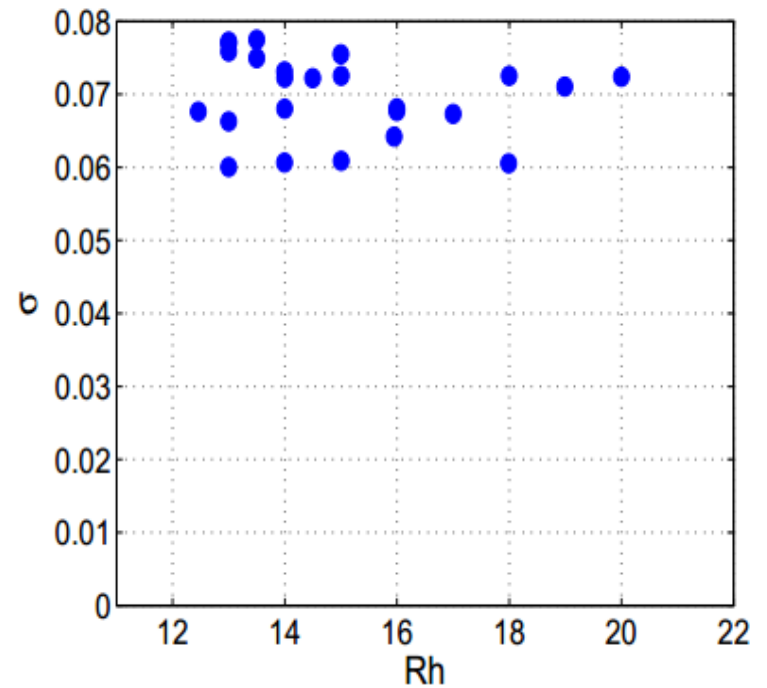
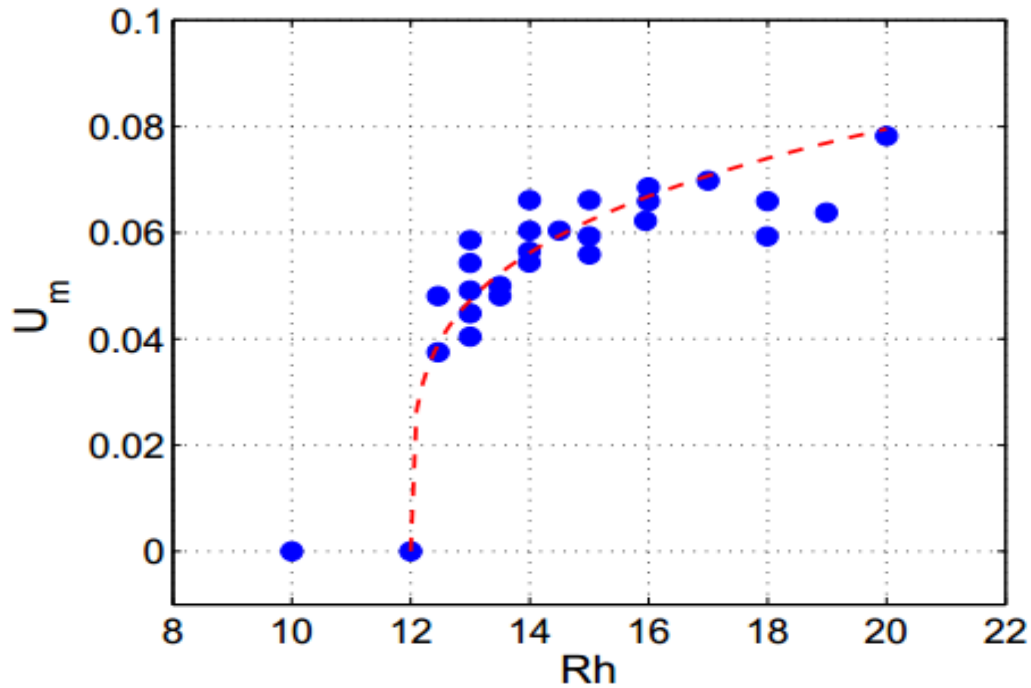
$Rh=48$



Renversements chaotiques passant proche de l'origine

Renversements déterministes

Propriétés statistiques du régime turbulent



La grandeur U_M indique une bifurcation : $U_M \propto (Rh - Rh_c)^{1/4}$ $Rh_c = 12$

La variance σ^2 varie faiblement

Propriétés statistiques du régime turbulent

$$K = \frac{U_M^4 + 6\sigma^2 U_M^2 + 3\sigma^4}{U_M^4 + 2\sigma^2 U_M^2 + \sigma^4}$$

