



HAL
open science

Formulation intégrale de volume magnétostatique et calcul des densités de force magnétique : Application au couplage magnéto-mécanique

Anthony Carpentier

► **To cite this version:**

Anthony Carpentier. Formulation intégrale de volume magnétostatique et calcul des densités de force magnétique : Application au couplage magnéto-mécanique. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : . tel-00990628

HAL Id: tel-00990628

<https://theses.hal.science/tel-00990628>

Submitted on 13 May 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Génie Electrique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Anthony CARPENTIER

Thèse dirigée par **Gérard MEUNIER**

et co-encadrée par **Olivier CHADEBEC** et **Nicolas GALOPIN**

préparée au sein du **Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble**
et de l'**Ecole Doctorale E.E.A.T.S**

Formulation intégrale de volume magnétostatique et calcul des densités de force magnétique

Application au couplage magnéto-mécanique

Thèse soutenue publiquement le **12 décembre 2013**,
devant le jury composé de :

M. Frédéric BOUILLAULT

Rapporteur

M. Olivier CHADEBEC

Membre

M. Nicolas GALOPIN

Membre

M. François HENROTTE

Rapporteur

M. Gérard MEUNIER

Membre

M. Laurent NICOLAS

Président

M. Denis PREMEL

Invité



Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier l'ensemble des personnes j'ai pu rencontrer au cours de ces trois années de thèse.

Je commence par exprimer toute ma gratitude à mes encadrants. Je remercie Olivier Chadebec, co-encadrant de cette thèse, dont les connaissances sur les méthodes intégrales et les discussions m'ont été indispensables. Je remercie Nicolas Galopin, également co-encadrant de cette thèse, dont les compétences en modélisation magnéto-mécanique et la disponibilité ont grandement participé à la réussite de cette thèse. Merci à mon directeur de thèse, Gérard Meunier, dont les connaissances et la sympathie m'ont été précieuses.

Je remercie ensuite les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail. Merci à messieurs Frédéric Bouillault, professeur au Laboratoire de Génie Electrique de Paris, et François Henrotte, docteur-ingénieur à l'Université Catholique de Louvain, qui ont eu la tâche de rapporter ce travail et à Monsieur Laurent Nicolas, directeur de recherche CNRS au laboratoire Ampère, qui a présidé ce jury. Merci également à monsieur Denis Prémel pour avoir accepté de participer à ce jury en tant qu'invité.

Mes remerciements vont aux membres du groupe MIPSE et particulièrement à Bertrand Bannwarth, pour sa collaboration tout au long de ma thèse et à Patrice Labie pour son aide lors de mes débuts sur cette plateforme.

Merci à Christophe Guérin, docteur-ingénieur dans l'entreprise Cedrat, pour m'avoir permis de comparer mes résultats avec ceux issus du logiciel éléments finis Flux.

Je remercie tous les thésards, post-doctorants et stagiaires qui ont partagé mes journées au laboratoire dans l'« aquarium », parmi lesquelles : Hajer, qui installée en face de moi a été d'une agréable compagnie, Luiz, Xavier, Farshid, Long, Phu, Duc, Sang, Yasmine, Mario, Antoine, Nicolas, Oudam... Je remercie également ceux des autres salles, avec qui j'ai passé d'agréables moments en leur compagnie : Douglas, Vinh, Olivier, Pauline, Ando, Thomas... J'espère que les personnes que je n'ai pas citées ne m'en tiendront pas rigueur.

Je remercie l'ensemble du personnel du laboratoire G2Elab, qui m'ont permis de réaliser cette thèse dans d'excellentes conditions.

Enfin, je remercie mes parents pour leur soutien tout au long de mes études et pour leur présence lors de ma soutenance. Je remercie mes amis qui ont également fait le déplacement pour y assister.

Table des matières

Notations	11
Introduction générale	13
I Formulation intégrale de volume en potentiel scalaire magnétique	17
1 Présentation générale	19
1.1 Equations de la magnétostatique	19
1.1.1 Equations de Maxwell	19
1.1.2 Potentiels magnétiques	20
1.1.3 Champ magnétique créé par une distribution de courant dans le vide	20
1.1.3.1 Loi de Biot & Savart	20
1.1.3.2 Spire circulaire parcourue par un courant	21
1.1.3.3 Distribution équivalente	22
1.1.4 Champ magnétique créé par la matière aimantée	23
1.1.4.1 Aimantation d'un matériau	23
1.1.4.2 Distribution équivalente	24
1.1.4.3 Loi de comportement	25
1.2 Méthodes de résolution	26
1.2.1 Formulations différentielles	26
1.2.2 Formulations intégrales	27
1.3 Méthode intégrale de volume	28
1.3.1 Description du problème	28
1.3.2 Equations intégrales de volume	28
1.3.3 Choix d'une formulation	29
1.4 Formulation intégrale de volume en potentiel scalaire dans le cas linéaire	32
1.4.1 Formulation faible du problème discret	32
1.4.1.1 Approche en collocation	33
1.4.1.2 Approche de Galerkin	33
1.4.2 Calcul du potentiel scalaire magnétique créé par les inducteurs	34
1.4.3 Matrice d'interaction	35
1.4.4 Résolution des systèmes matriciels	36
1.4.5 Exploitation après résolution	36

1.5	Applications	38
1.5.1	Modélisation d'une sphère creuse dans un champ uniforme	38
1.5.2	Modélisation d'une poutre dans l'axe d'une bobine	43
1.6	Conclusion	47
2	Prise en compte de la non linéarité et techniques de compression	49
2.1	Prise en compte de la non linéarité	49
2.1.1	Méthode de Newton-Raphson	49
2.1.1.1	Principe	49
2.1.1.2	Utilisation pour la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire	50
2.1.2	Quelques remarques sur la méthode du point fixe	53
2.1.3	Application : TEAM Problem 13	54
2.2	Techniques de compression	58
2.2.1	Motivations	58
2.2.2	Quelques techniques de compression	59
2.2.3	Matrice hiérarchique	60
2.2.4	Méthode d'approximation en croix adaptative	63
2.2.5	Application : TEAM Problem 13	65
2.3	Conclusion	68
II	Couplage magnéto-mécanique	69
3	Calcul de forces magnétiques	71
3.1	Force d'origine électromagnétique	71
3.2	Aperçu des méthodes pour le calcul de forces magnétiques	72
3.3	Méthode des travaux virtuels	74
3.3.1	Définition des énergies magnétiques	74
3.3.2	Équilibre énergétique du système magnéto-mécanique	77
3.3.3	Principe des travaux virtuels	78
3.3.4	Calcul de la force magnétique globale	80
3.3.5	Calcul de la force magnétique locale	84
3.4	Tenseur de Maxwell	88
3.4.1	Principe	88
3.4.2	Calcul de la force magnétique globale	89
3.4.3	Calcul de la force magnétique locale	89
3.5	Applications	91
3.5.1	Modélisation d'une sphère creuse dans une spire	91
3.5.1.1	Calcul de la force magnétique globale	92
3.5.1.2	Calcul de la force magnétique locale	95
3.5.2	Modélisation d'un contacteur	98
3.5.2.1	Calcul de la force magnétique globale	98
3.5.2.2	Calcul de la force magnétique locale	100

3.6	Conclusion	102
4	Mise en œuvre du couplage magnéto-mécanique	105
4.1	Introduction au comportement magnéto-mécanique et hypothèses	106
4.2	Mécanique des milieux continus	107
4.2.1	Grandeurs physiques	107
4.2.2	Notation de Voigt	108
4.2.3	Loi de comportement	108
4.2.4	Equations d'équilibre et conditions aux limites	110
4.3	Méthode des éléments finis	110
4.3.1	Formulation faible du problème mécanique	110
4.3.2	Approche de Galerkin	111
4.4	Implémentation du couplage magnéto-mécanique	112
4.5	Application : modélisation d'un micro-actionneur	114
4.6	Conclusion	117
	Conclusion générale et perspectives	119
	Bibliographie	127
	Annexes	131
A	Formules analytiques pour le calcul des intégrales des noyaux de Green	131
A.1	Calcul du potentiel scalaire magnétique	131
A.2	Calcul du champ magnétique	133
B	Formules pour le tétraèdre de référence	135

Notations

Electromagnétisme

E	(V/m)	: champ électrique
D	(C/m ²)	: induction électrique
ρ	(C/m ³)	: densité volumique de charge
q	(C)	: charge
H	(A/m)	: champ magnétique
B	(T)	: induction magnétique
M	(A/m)	: aimantation
m	(A · m ²)	: moment magnétique dipolaire
j	(A/m ²)	: densité de courant
I	(A)	: courant
ϕ	(A)	: potentiel scalaire magnétique
A	(T · m)	: potentiel vecteur magnétique
μ	(A/m)	: perméabilité magnétique
μ_r	(sans unité)	: perméabilité magnétique relative
χ	(sans unité)	: susceptibilité magnétique
W	(J)	: énergie
W^{co}	(J)	: coénergie
w	(J/m ³)	: densité d'énergie

Mécanique

F	(N)	: force
f ou f_v	(N/m ³)	: densité volumique de force
f_s	(N/m ²)	: densité surfacique de force
u	(m)	: déplacement
$[\sigma]$	(N/m ²)	: tenseur des contraintes
$[\varepsilon]$	(sans unité)	: tenseur des déformations
$\langle C \rangle$	(N/m ²)	: tenseur d'élasticité
σ	(N/m ²)	: notation de Voigt du tenseur des contraintes
ε	(sans unité)	: notation de Voigt du tenseur des déformations
$[C]$	(N/m ²)	: notation de Voigt du tenseur d'élasticité

Opérateur

∇	: gradient
$\nabla \times$: rotationnel
$\nabla \cdot$: divergence
\cdot	: produit scalaire ou produit tensoriel contracté
$:$: produit tensoriel contracté deux fois
\times	: produit vectoriel

Géométrie et maillage

Ω	: domaine de l'espace
Γ	: frontière d'un domaine de l'espace
\mathbf{r}	: vecteur des coordonnées
V	: volume
S	: surface
\mathbf{n}	: vecteur normale à une surface
n_n	: nombre de nœuds du maillage
n_e	: nombre d'éléments du maillage
n_a	: nombre d'arêtes du maillage
n_f	: nombre de faces du maillage
α	: fonction de forme nodale
α_a	: fonction de forme d'arête
α_f	: fonction de forme de facette
α_v	: fonction de forme volumique
$[J]$: matrice jacobienne
$ J $: déterminant de la matrice jacobienne

Introduction générale

Notre problématique est née d'un besoin concernant la conception de micro-systèmes. Ces dispositifs de taille microscopique sont basés sur des couplages multiphysiques afin de réaliser des capteurs ou des actionneurs. Ils sont généralement caractérisés par des physiques intervenant à différentes échelles. Par exemple, l'équipe micro-système du Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble (G2Elab) développe des micro-actionneurs à effet magnéto-électrique [Lebedev, 2012]. L'un d'entre eux est basé sur l'interaction d'un aimant permanent avec une structure composite stratifiée de matériaux piézoélectriques et magnétostrictifs [Lafont et al., 2012]. Lors de la modélisation de tels dispositifs, le domaine électromagnétique contient généralement une forte proportion d'air, afin de prendre en compte l'ensemble des champs électromagnétiques qui participent au fonctionnement. Quant aux phénomènes mécaniques, seuls les domaines matériels sont pris en compte. La mise au point d'une nouvelle génération de structures de conversion d'énergie basées sur ce couplage électro-magnéto-mécanique requiert alors le développement de méthodes de modélisation numérique adaptées.

La méthode des éléments finis est souvent la première méthode envisagée. Développée depuis plus d'un demi siècle, cette méthode permet de modéliser des problèmes avec des géométries et des comportements complexes. La plupart des logiciels commerciaux de modélisation en électromagnétisme se basent sur cette méthode. Cependant, la méthode des éléments finis peut s'avérer inadaptée pour la modélisation de dispositifs électromagnétiques contenant une forte proportion d'air, puisqu'elle nécessite que tout l'espace soit maillé. Les méthodes intégrales sont une alternative particulièrement intéressante pour la modélisation des dispositifs rayonnant des champs électromagnétiques, puisque seuls les matériaux actifs doivent être maillés. Les formulations intégrales sont actuellement l'objet d'une forte dynamique de recherche au sein du laboratoire G2Elab, notamment à travers la plateforme de développement MIPSE (Méthodes Intégrales Pour les Systèmes Electriques). Cette plateforme de modélisation multi-méthodes a pour ambition de proposer des outils pour la modélisation de dispositifs électromagnétiques, autour d'un langage de programmation commun, le JAVA.

Notre objectif est de développer un outil de modélisation multiphysique sur cette plateforme en combinant efficacement une formulation intégrale pour la partie électromagnétique avec des formulations différentielles pour les autres domaines physiques. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à une modélisation magnéto-mécanique, dans laquelle le problème électromagnétique serait résolu par une méthode de type intégrale de volume, tandis que le problème mécanique serait résolu par la méthode des éléments finis.

La principale contrepartie des formulations intégrales, est l'obtention de matrices d'interaction pleines, car chaque élément de discrétisation est en interaction totale avec les autres. Le temps de calcul et l'espace mémoire, requis respectivement pour l'assemblage et le stockage de ces matrices, évoluent en complexité

parabolique en fonction du nombre de degrés de liberté. Des techniques de compression matricielle sont alors nécessaires afin de réduire les coûts en mémoire et en temps de calcul lors de la résolution de problèmes magnétostatiques avec un nombre relativement important d'inconnues.

La modélisation de dispositifs magnéto-mécaniques implique de pouvoir déterminer précisément les forces d'origine magnétique s'exerçant sur la matière. De plus, si le milieu constitutif est considéré déformable, il est essentiel de déterminer précisément la distribution locale de forces magnétiques. Le choix de la méthode pour le calcul des densités de force magnétique a fait l'objet de nombreuses recherches [Ren, 1994] [Barre, 2003] [Bossavit, 2011]. Ces différentes approches sont généralement utilisées dans le cadre de la méthode des éléments finis et peu de travaux concernent leur application aux formulations intégrales.

Ce document est décomposé en deux parties intitulées "Formulation intégrale de volume en potentiel scalaire magnétique" et "Couplage magnéto-mécanique".

La première partie est dédiée à la résolution de problèmes magnétostatiques par une formulation intégrale de volume en potentiel scalaire. Deux chapitres composent cette partie.

Le premier chapitre introduit les équations de la magnétostatique conduisant aux équations intégrales de volume. Les principales formulations intégrales de volume sont présentées. Celle utilisant le potentiel scalaire magnétique comme inconnue est retenue. Dans ce cas, les degrés de liberté scalaires et portés par les nœuds du maillage sont moins nombreux par rapport à ceux issus de formulations qui utilisent d'autres grandeurs physiques comme inconnues. Deux problèmes magnétostatiques linéaires sont résolus par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire afin de comparer les résultats obtenus avec une solution analytique ou avec les résultats issus d'un logiciel commercial d'éléments finis.

Le second chapitre aborde l'extension de la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire au cas non linéaire. L'implémentation de la méthode de Newton-Raphson est alors détaillée et appliquée à la résolution d'un problème magnétostatique non linéaire de référence, pour lequel une solution expérimentale est disponible. Le principal inconvénient des formulations intégrales est mis en évidence, l'assemblage et le stockage de matrices pleines. Afin de palier à cette limitation, des techniques de compression sont nécessaires afin de réduire les coûts en mémoire et en temps de calcul. Parmi ces techniques de compression, nous avons choisi celle utilisant la méthode d'approximation en croix adaptative. Le problème magnétostatique non linéaire de référence est alors repris en utilisant la méthode d'approximation en croix adaptative afin de mettre en valeur les gains en temps de calcul et en espace mémoire obtenus.

La seconde partie est dédiée à la mise œuvre du couplage magnéto-mécanique. Deux chapitres composent cette partie.

Le troisième chapitre traite du calcul de forces magnétiques dans le cadre d'une formulation intégrale de volume. Tout d'abord, un aperçu des principales méthodes de calcul des forces magnétiques est proposé. L'objectif n'est pas de comparer à nouveau ces méthodes, mais de choisir celle qui convient le mieux à la formulation intégrale de volume. A notre connaissance, peu de travaux concernent le calcul des forces magnétiques locales dans le cadre des formulations intégrales. Nous proposons alors les mises en œuvre des méthodes des travaux virtuels et du tenseur de Maxwell pour la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire afin de calculer les forces magnétiques locales et globales. Deux applications sont abordées, dans lesquelles les forces magnétiques calculées par les méthodes précédentes sont analysées et comparées à une solution analytique ou aux résultats issus de la méthode des travaux virtuels d'un

logiciel commercial d'éléments finis.

Le quatrième chapitre aborde le couplage magnéto-mécanique, ainsi que la résolution du problème mécanique par la méthode des éléments finis. Un premier essai concernant la modélisation d'un micro-actionneur magnéto-mécanique est mené, afin de valider la méthodologie proposée.

Première partie

Formulation intégrale de volume en potentiel scalaire magnétique

Chapitre 1

Présentation générale

Dans ce chapitre, les principales formulations envisageables pour résoudre un problème magnétostatique sont présentées. Dans une première partie, le problème général de la magnétostatique est mis en équations à partir des équations de Maxwell. Selon la forme choisie pour établir ces équations, deux catégories de formulations se distinguent : différentielle et intégrale, et sont l'objet de la seconde partie. Parmi les formulations intégrales, la méthode intégrale de volume est retenue dans le cadre de cette thèse. La troisième partie est dédiée au principe de la méthode intégrale de volume ainsi que ses différentes formulations couramment rencontrées. La formulation en potentiel scalaire magnétique est retenue et son application pour résoudre un problème magnétostatique linéaire est présentée en quatrième partie. Enfin la dernière partie concerne deux applications où les résultats de la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire sont comparées avec une solution analytique ou à ceux de la méthode des éléments finis.

1.1 Equations de la magnétostatique

1.1.1 Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell régissent l'ensemble des phénomènes de l'électromagnétisme classique. Dans les milieux continus, elles s'écrivent :

$$-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.4)$$

où \mathbf{H} est le champ magnétique, \mathbf{E} le champ électrique, \mathbf{B} l'induction magnétique, \mathbf{D} l'induction électrique, \mathbf{j} la densité de courant et ρ la densité volumique de charge électrique.

On suppose que les phénomènes étudiés dans cette thèse ne varient pas dans le temps. On se place alors dans l'approximation des régimes statiques. Dans ce cas, les dérivées temporelles s'annulent et les équations de Maxwell (1.1) et (1.2) deviennent :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

Les phénomènes électriques et magnétiques sont alors découplés. Les équations (1.3) et (1.5) sont l'objet de la magnétostatique dont la mise en équations et la résolution sont une des problématiques de cette thèse. Les équations (1.4) et (1.6) sont l'objet de l'électrostatique, qui ne sera pas abordée ici. La démarche suivante, appliquée à la magnétostatique, pourrait également être appliquée à l'électrostatique au regard de l'analogie des couples d'équations [(1.4), (1.6)] et [(1.3), (1.5)].

1.1.2 Potentiels magnétiques

Lorsque le domaine d'étude est simplement connexe¹, une approche classique pour résoudre une des deux équations (1.3) ou (1.5) est de chercher les champs \mathbf{H} ou \mathbf{B} sous une forme qui vérifie naturellement l'une d'entre elles [Meunier, 2002]. On parle alors de champs admissibles.

Potentiel scalaire magnétique : Pour un domaine d'étude ne portant pas de courant, l'équation (1.5) peut être vérifiée en cherchant un champ magnétique admissible \mathbf{H} qui dérive d'un potentiel scalaire magnétique Φ , tel que :

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi. \quad (1.7)$$

Potentiel vecteur magnétique : L'équation (1.3) peut être vérifiée en cherchant une induction magnétique admissible \mathbf{B} qui dérive d'un potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} , tel que :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.8)$$

Sans mention contraire, par la suite les domaines magnétiques seront considérés simplement connexes pour pouvoir appliquer les relations (1.7) et (1.8). Si ce n'est pas le cas, un domaine non simplement connexe peut être décomposé en plusieurs sous-domaines simplement connexes par l'introduction de coupures [Kalimov and Shimansky, 2012].

1.1.3 Champ magnétique créé par une distribution de courant dans le vide

Dans le vide, les courants sont la seule source de champ magnétique. Le champ magnétique, créé par une distribution de courant dans le vide, est donné par la loi de Biot & Savart.

1.1.3.1 Loi de Biot & Savart

Considérons un domaine Ω_j associé à un matériau conducteur qui porte une densité de courant \mathbf{j} (FIGURE 1.1). Soient \mathbf{r} les coordonnées du point d'observation P et \mathbf{r}' les coordonnées d'un point de la distribution de courant P' .

La loi de Biot & Savart donne les expressions de l'induction magnétique \mathbf{B} et du potentiel vecteur associée \mathbf{A} (1.8), créés par une distribution de courant dans le vide :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_j} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \quad (1.9)$$

et

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_j} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Omega', \quad (1.10)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide qui vaut $4\pi 10^{-7} H/m$.

1. Un domaine est dit simplement connexe si toute ligne continue et fermée peut être déformée continument jusqu'à être réduite à un point.

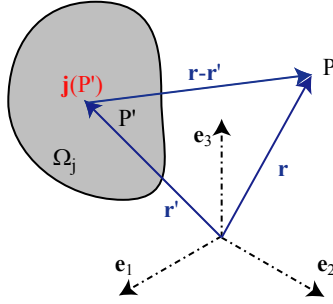


FIGURE 1.1 – Description et notation pour une distribution de courant.

Les solutions analytiques des relations (1.9) et (1.10) existent pour des géométries simples et des distributions de courant particulières [Durand, 1968]. Certaines d'entre elles [Urankar, 1980] [Urankar, 1982] sont utilisées afin de calculer le champ magnétique créé par des bobines de géométrie classique. Une approche numérique, dans laquelle la bobine est maillée, peut également être privilégiée afin de déterminer un champ magnétique source \mathbf{H}_0 , tel que :

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = \mathbf{j}. \quad (1.11)$$

Dans ce cas, la géométrie de la bobine peut être quelconque.

La loi de Biot & Savart ne permet pas d'obtenir directement l'expression du potentiel scalaire magnétique créé par la distribution de courant. Une approche consiste à trouver à partir d'une distribution de courant quelconque, une distribution équivalente où une solution analytique existe quelque soit la géométrie. Pour cela on s'intéresse au cas simple d'une spire parcourue par un courant, pour lequel une solution analytique existe [Brissonneau, 1997].

1.1.3.2 Spire circulaire parcourue par un courant

Considérons une spire circulaire filiforme de rayon R et parcourue par un courant I (FIGURE 1.2). Soient \mathbf{r} les coordonnées du point d'observation P et \mathbf{r}' les coordonnées du centre de la spire.

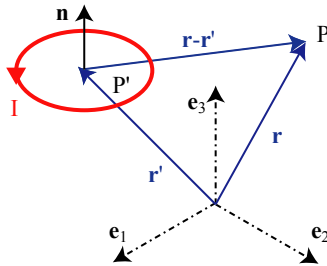


FIGURE 1.2 – Description et notation pour une spire circulaire.

Le moment magnétique dipolaire \mathbf{m} est défini par :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) \, d\Omega. \quad (1.12)$$

La quantité \mathbf{m} ne dépend pas de l'origine du repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Si cette origine est prise au centre de la spire \mathbf{r}' , le moment magnétique dipolaire de la spire s'écrit :

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{n}, \quad (1.13)$$

où S est la section de la spire et \mathbf{n} le vecteur normal à la section S selon la règle du tire-bouchon de Maxwell par rapport à la circulation du courant I .

Si le point d'observation P est très éloigné de la distribution de courant, ou d'un autre point de vue, si les dimensions de la spire sont très petites, tel que :

$$R \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (1.14)$$

alors les potentiels scalaire et vecteur magnétiques créés par une telle spire s'expriment respectivement [Brissonneau, 1997] par :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.15)$$

et

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.16)$$

Dans le cas simple d'une spire circulaire parcourue par un courant, les potentiels scalaire et vecteur magnétiques peuvent ainsi être calculés analytiquement à partir des formules (1.15) et (1.16).

1.1.3.3 Distribution équivalente

Soit \mathbf{j} une distribution de courant (FIGURE 1.1). Cherchons dans quelle mesure cette distribution de courant peut être remplacée par une spire circulaire parcourue par un courant [Jackson, 1962].

La fonction $\mathbf{r} \mapsto \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ est développée en série de Taylor en se limitant aux deux premiers termes :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|^2}\right). \quad (1.17)$$

Le développement (1.17) est inséré dans l'expression du potentiel vecteur magnétique créé par la distribution de courant (1.10) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_j} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|} d\Omega' + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \int_{\Omega_j} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\Omega' + \dots \quad (1.18)$$

Pour une distribution fermée de courant, la première intégrale du développement (1.18) est nulle. Supposons que le point d'observation P soit éloigné de la distribution de courant tel que :

$$\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'. \quad (1.19)$$

Tant que la condition (1.19) est vérifiée, le développement du potentiel vecteur (1.18) peut être réduit à son terme non nul du plus petit ordre :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \int_{\Omega_j} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\Omega'. \quad (1.20)$$

On peut démontrer [Jackson, 1962] que l'intégrale de l'expression (1.20) s'écrit également :

$$\int_{\Omega_j} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\Omega' = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega_j} \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\Omega' \right) \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (1.21)$$

L'égalité précédente (1.21) est utilisée dans l'expression (1.20) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \left(\int_{\Omega_j} \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\Omega' \right) \right) \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (1.22)$$

En utilisant la définition du moment magnétique (1.12), le potentiel vecteur magnétique (1.22) prend la forme suivante :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (1.23)$$

Cette relation (1.23) est analogue à l'expression du potentiel vecteur magnétique créé par une spire parcourue par un courant (1.16). Ainsi, pour un point d'observation P , suffisamment éloigné de la distribution de courant pour que la condition (1.19) soit vérifiée, il n'est plus possible de faire la distinction entre le comportement magnétique de la distribution de courant et celui d'une spire analogue parcourue par un courant. La formule (1.15) peut dans ce cas être utilisée pour en déduire une expression du potentiel scalaire magnétique Φ .

1.1.4 Champ magnétique créé par la matière aimantée

1.1.4.1 Aimantation d'un matériau

En présence d'un champ magnétique extérieur, les matériaux magnétiques ont la particularité de se comporter comme une source de champ magnétique. Lorsque ce dernier est fort et dans le même sens que le champ d'excitation, cette propriété est appelée ferromagnétisme. On dit alors que les matériaux ferromagnétiques s'aimantent sous l'effet d'un champ magnétique extérieur. L'origine de ce phénomène n'est pas abordée ici et peut se trouver dans des ouvrages de référence, notamment [Brissonneau, 1997] qui traite de la physique du magnétisme aux différentes échelles.

Considérons un matériau aimanté de domaine Ω_a (FIGURE 1.3). Soient \mathbf{r} les coordonnées du point d'observation P et \mathbf{r}' les coordonnées d'un point de la matière aimantée P' . Le volume élémentaire du matériau magnétique entourant le point P' est noté $d\Omega$ et son moment magnétique dipolaire élémentaire associé est noté $d\mathbf{m}$.

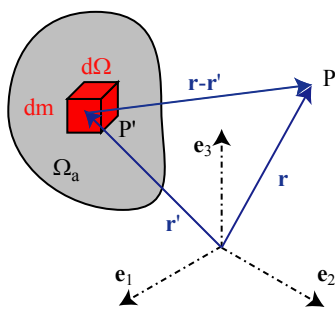


FIGURE 1.3 – Description et notation pour la matière aimantée.

Le champ magnétique \mathbf{H} peut s'écrire comme la somme du champ magnétique \mathbf{H}_0 , créé par les sources de courant, et du champ \mathbf{H}_{red} , créé par la matière aimantée :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{red}} + \mathbf{H}_0. \quad (1.24)$$

Le champ \mathbf{H}_{red} est appelé champ magnétique réduit ou champ démagnétisant. D'après l'équation (1.5), ce champ vérifie :

$$\nabla \times \mathbf{H}_{\text{red}} = \mathbf{0}. \quad (1.25)$$

L'équation (1.25) peut également être vérifiée en cherchant un champ \mathbf{H}_{red} admissible qui dérive d'un potentiel scalaire magnétique réduit Φ_{red} , tel que :

$$\mathbf{H}_{\text{red}} = -\nabla \Phi_{\text{red}}. \quad (1.26)$$

L'induction magnétique \mathbf{B} peut s'écrire comme la somme de l'induction magnétique \mathbf{B}_0 , créée par les sources de courant, et de l'induction \mathbf{B}_{red} , créée par la matière aimantée :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{red}} + \mathbf{B}_0. \quad (1.27)$$

L'induction \mathbf{B}_{red} est appelée induction magnétique réduite et d'après l'équation (1.3) elle vérifie :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{red}} = 0. \quad (1.28)$$

L'équation (1.28) peut également être vérifiée en cherchant une induction \mathbf{B}_{red} admissible qui dérive d'un potentiel vecteur magnétique réduit \mathbf{A}_{red} , tel que :

$$\mathbf{B}_{\text{red}} = \nabla \times \mathbf{A}_{\text{red}}. \quad (1.29)$$

1.1.4.2 Distribution équivalente

Comme il n'est pas possible de faire la distinction entre le champ créé par la matière aimantée et celui créé par une distribution de courant, la matière aimantée peut être remplacée par une distribution équivalente de courant qui produit la même distribution de champ magnétique dans l'air [Durand, 1968]. Les effets magnétiques se manifestent à une échelle largement inférieure (atomique) à celle d'observation [Brissonneau, 1997]. C'est pourquoi, la condition (1.19) est vérifiée pour tout point d'observation situé à l'extérieur de la matière aimantée. Les développements des sections §1.1.3.2 et §1.1.4.2 sont donc applicables.

Le moment magnétique dipolaire élémentaire $d\mathbf{m}$ contribue au potentiel scalaire magnétique (1.15) pour :

$$d\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{d\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.30)$$

L'aimantation \mathbf{M} est définie par :

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{d\Omega}. \quad (1.31)$$

En utilisant la définition de l'aimantation (1.31) dans la relation (1.30), puis en intégrant sur le domaine associé à la matière aimantée Ω_a , le potentiel scalaire réduit Φ_{red} peut s'écrire :

$$\Phi_{\text{red}}(\mathbf{M}, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_a} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega'. \quad (1.32)$$

Le gradient de l'expression précédente (1.32) conduit à l'expression du champ démagnétisant \mathbf{H}_{red} suivante :

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{M}, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\int_{\Omega_a} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \right). \quad (1.33)$$

Si le développement précédent est effectué sur le potentiel vecteur magnétique à partir de la relation (1.16), le potentiel vecteur magnétique réduit \mathbf{A}_{red} s'écrit :

$$\mathbf{A}_{\text{red}}(\mathbf{M}, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_a} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega'. \quad (1.34)$$

En prenant le rotationnel de l'expression précédente (1.34), l'induction magnétique réduite \mathbf{B}_{red} s'écrit :

$$\mathbf{B}_{\text{red}}(\mathbf{M}, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\int_{\Omega_a} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \right). \quad (1.35)$$

1.1.4.3 Loi de comportement

Dans un matériau magnétique, les différents champs de l'électromagnétisme sont liés par des relations constitutives [Vassalo, 1980]. Celle qui caractérise les matériaux magnétiques est appelée loi de comportement magnétique et est généralement donnée sous la forme :

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H}, \quad (1.36)$$

où $[\mu]$ est la perméabilité magnétique du matériau, un tenseur d'ordre 2. Seuls des matériaux homogènes et isotropes sont considérés par la suite, dans ce cas la notation de la perméabilité magnétique est simplifiée en omettant son caractère tensoriel. L'équation précédente (1.36) est alors notée :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (1.37)$$

La perméabilité relative, notée μ_r , est définie par :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (1.38)$$

Le comportement hystérétique, qui qualifie un comportement dépendant de son état passé, n'est pas considéré ici. La loi de comportement (1.37) peut être reformulée en tenant compte de l'aimantation :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (1.39)$$

La loi de comportement magnétique peut également s'exprimer en fonction des champs \mathbf{M} et \mathbf{H} :

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (1.40)$$

où χ est la susceptibilité magnétique qui caractérise le comportement du matériau. Le matériau magnétique est dit :

- diamagnétique si sa susceptibilité χ est faible et négative.
- ferrimagnétique si sa susceptibilité χ est grande et négative.
- paramagnétique si sa susceptibilité χ est faible et positive.
- ferromagnétique si sa susceptibilité χ est grande et positive.

Par la suite, les lois de comportement magnétique (1.37) et (1.40) seront décrites respectivement par les fonctions \mathcal{L} et \mathcal{K} , caractéristiques du matériau ferromagnétique et définies par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{H}) = \mathbf{M}, \quad (1.41)$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{H}) = \mathbf{B}. \quad (1.42)$$

Étant donné que le phénomène d'hystérésis n'est pas considéré, les fonctions \mathcal{L} et \mathcal{K} sont bijectives.

1.2 Méthodes de résolution

Le problème magnétostatique étant posé, il convient maintenant de choisir une méthode de résolution. Hormis des cas très simples, il n'existe pas de solution analytique au problème. Des approches numériques sont alors utilisées. Différentes méthodes numériques sont disponibles, mais il est important de bien choisir celle qui convient le mieux au besoin de la modélisation. Parmi elles, on peut citer la méthode des schémas réticulés [du Peloux de Saint Romain, 2006], basée sur une discrétisation du problème prenant en compte des hypothèses sur les trajectoires des flux magnétiques et sur la résolution d'un circuit équivalent. Cette méthode permet d'obtenir des résultats très rapidement et avec une précision acceptable pour des configurations relativement simples. Néanmoins cette méthode n'est pas appropriée pour des problèmes plus complexes ou plus généraux, d'autres approches numériques sont alors envisageables. Deux catégories de formulations se distinguent.

1.2.1 Formulations différentielles

Généralement ces formulations se basent sur la résolution d'un système d'équations comprenant les équations différentielles (1.3) et (1.5), en cherchant un champ admissible qui vérifie une des relations (1.7) ou (1.8) ainsi que la loi de comportement magnétique (1.37). L'équation (1.7) ou (1.8) restante doit alors être résolue. L'approche classique est la méthode des éléments finis. Une introduction aux éléments finis pour les phénomènes électromagnétiques ainsi que les formulations associées peuvent être trouvées dans le livre [Meunier, 2002]. Les principaux avantages et inconvénients de cette méthode sont :

Avantages :

- Elle repose sur des bases mathématiques solides [Zienkiewicz, 1971].
- Elle bénéficie d'une implémentation aisée car elle conduit à la résolution d'un système matriciel, dont la matrice principale est creuse et les intégrants sont des polynômes, donc facilement intégrables.

Inconvénients :

- Tout l'espace doit être discrétisé.
- Des conditions limites particulières sont nécessaires pour représenter l'infini [Brunotte et al., 1992].

La méthode des éléments finis est largement utilisée et développée [Zienkiewicz, 1971], y compris pour résoudre des problèmes magnétostatiques [Meunier, 2002]. Dans le contexte de cette thèse, à savoir le couplage magnéto-mécanique pour la modélisation de microsystèmes (MEMS), de tels dispositifs ont pour caractéristique d'avoir un grand volume d'air ou un gros ratio entre les différentes dimensions des objets géométriques. Les nécessités de mailler l'air et d'utiliser des conditions limites particulières pour représenter l'infini deviennent contraignantes. Des travaux ont été menés sur le calcul des forces magnétiques avec le logiciel éléments finis Flux3d [Flux3d, 2013] pour la modélisation d'un micro-contacteur [Ardon, 2007]. Ces travaux montrent que la méthode des éléments finis n'est dans ce cas pas adaptée, notamment pour le calcul des forces magnétiques où le bilan des forces n'est pas fortement vérifié. Une autre approche appartenant à la seconde catégorie de formulations doit alors être envisagée.

1.2.2 Formulations intégrales

Ces formulations se basent sur la résolution d'une équation intégrale et présentent les avantages et inconvénients suivants :

Avantages :

- Seuls les matériaux considérés actifs ou leurs surfaces doivent être discrétisés.
- Elles offrent une bonne précision pour les calculs des interactions à distance et dans l'air.
- Les conditions aux limites sont prises en compte naturellement.

Inconvénients :

- Son implémentation nécessite des précautions car elle conduit à la résolution d'un système matriciel, dont la matrice principale est pleine.
- Les intégrants sont des noyaux de Green, pour lesquels des problèmes de singularités peuvent apparaître.

Parmi ces formulations, deux familles de méthodes se distinguent. La première concerne les méthodes intégrales de frontière qui se basent sur la résolution de l'équation de Poisson² dans un domaine homogène, généralement l'air [Rasolonjanahary et al., 1992]. Elles conduisent à la résolution d'un problème équivalent où le matériau aimanté est remplacé par une distribution surfacique de masses magnétiques sur la frontière du domaine ferromagnétique conduisant au même champ [Brebbia et al., 1984]. Dans ce cas, seules les surfaces des matériaux actifs doivent être discrétisées. Ces méthodes ne sont pas applicables dans des domaines inhomogènes, ce qui exclue leurs utilisation pour la résolution de problème magnétostatique non linéaire. Néanmoins, des méthodes couplées peuvent être utilisées pour profiter des avantages des méthodes intégrales de frontière dans les domaines homogènes et celle d'une seconde méthode pour les domaines inhomogènes [Meunier et al., 1986] [Araujo et al., 2013]. Cependant, le couplage de deux méthodes conduit à des matrices qui peuvent être mal conditionnées et à l'utilisation d'un code nécessitant la gestion de deux approches différentes. La seconde famille concerne les méthodes intégrales de volume qui sont utilisées pour résoudre une équation intégrale dont le domaine d'intégration est uniquement le volume des matériaux actifs [Trowbridge, 1996] [Vuillermet, 2008]. Dans ce cas, seuls les domaines des matériaux actifs doivent être discrétisés. Des travaux au laboratoire G2Elab ont déjà été menés sur l'application d'une méthode intégrale de volume pour la modélisation d'un micro-actionneur [Ardon, 2007] afin de calculer une force magnétique qui respecte le bilan des forces. Il s'agit de la famille de méthodes retenue pour la suite.

2. $\Delta \mathbf{u} = f$

1.3 Méthode intégrale de volume

1.3.1 Description du problème

Considérons le problème magnétostatique 3D suivant (FIGURE 1.4) : un matériau ferromagnétique est contenu dans un domaine Ω_f et soumis au champ magnétique créé par une distribution de courant associée au domaine Ω_j . Ces deux domaines sont placés dans l'air de domaine Ω_0 , tel que $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_j \cup \Omega_0$. Soit Γ_f l'interface entre le matériau ferromagnétique Ω_f et l'air Ω_0 . L'utilisation d'une méthode intégrale de volume implique que seul l'espace associé au matériau ferromagnétique Ω_f est maillé. Considérons un maillage tétraédrique où les nombres de nœuds, d'arêtes, de faces et d'éléments sont notés respectivement n_n , n_a , n_f et n_e .

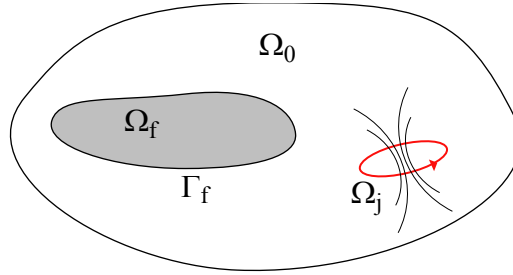


FIGURE 1.4 – Description du problème magnétostatique.

1.3.2 Equations intégrales de volume

Deux formulations sont possibles pour établir les équations intégrales de volume [Kettunen et al., 1994b]. La première est la formulation en \mathbf{H} qui considère le champ magnétique réduit \mathbf{H}_{red} écrit sous la forme (1.33) et conduit à l'écriture du champ magnétique $\overset{*}{\mathbf{H}}$ suivante :

$$\overset{*}{\mathbf{H}}(\mathbf{M}, \mathbf{r}) = \mathbf{H}_{\text{red}}(\mathbf{M}, \mathbf{r}) + \mathbf{H}_0(\mathbf{r}). \quad (1.43)$$

Le champ magnétique $\overset{*}{\mathbf{H}}$ précédent et l'induction magnétique construite à partir de loi de comportement (1.39), vérifient respectivement les équations de Maxwell (1.5) et (1.3) quelque soit l'aimantation \mathbf{M} :

$$\nabla \cdot \left[\mu_0 \left(\overset{*}{\mathbf{H}}(\mathbf{M}) + \mathbf{M} \right) \right] = 0, \quad (1.44)$$

$$\nabla \times \left[\overset{*}{\mathbf{H}}(\mathbf{M}) \right] = \nabla \times \mathbf{H}_0. \quad (1.45)$$

La seconde est la formulation en \mathbf{B} qui considère l'induction magnétique réduite \mathbf{B}_{red} écrite sous la forme (1.35) et conduit à l'écriture de l'induction magnétique $\overset{*}{\mathbf{B}}$ suivante :

$$\overset{*}{\mathbf{B}}(\mathbf{M}, \mathbf{r}) = \mathbf{B}_{\text{red}}(\mathbf{M}, \mathbf{r}) + \mathbf{B}_0(\mathbf{r}). \quad (1.46)$$

L'induction magnétique $\overset{*}{\mathbf{B}}$ précédente et le champ magnétique construit à partir de loi de comportement (1.39), vérifient respectivement les équations de Maxwell (1.3) et (1.5) quelque soit l'aimantation \mathbf{M} :

$$\nabla \cdot \left[\overset{*}{\mathbf{B}}(\mathbf{M}) \right] = 0, \quad (1.47)$$

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu_0} \overset{*}{\mathbf{B}}(\mathbf{M}) - \mathbf{M} \right] = \nabla \times \mathbf{H}_0. \quad (1.48)$$

Seule la formulation en \mathbf{H} est développée ici, celle en \mathbf{B} est moins rencontrée dans la littérature [Morandi et al., 2010] et conduit à d'autres formulations, qui peuvent être obtenues par analogie avec le raisonnement suivant.

Compte tenu de la loi de comportement (1.41), le champ magnétique \mathbf{H}^* est solution du problème magnétostatique si :

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{M}) = \mathbf{H}^*(\mathbf{M}). \quad (1.49)$$

Lors de la résolution numérique de l'équation (1.49), l'aimantation \mathbf{M} est approximée dans un espace de dimension finie et son approximation est notée $\tilde{\mathbf{M}}$. Cependant les champs $\tilde{\mathbf{M}}$ et \mathbf{H}^* étant dans des espaces de dimensions différentes, l'équation (1.49) ne peut plus être vérifiée fortement. Le problème se résume ainsi à résoudre cette équation dans le matériau ferromagnétique Ω_f , c'est-à-dire : trouver $\tilde{\mathbf{M}}$, telle que :

$$\mathcal{L}^{-1}(\tilde{\mathbf{M}}) = \mathbf{H}^*(\tilde{\mathbf{M}}), \quad (1.50)$$

où \mathbf{H}^* est construite par la relation (1.43). Dans l'équation (1.50), l'approximation de l'aimantation $\tilde{\mathbf{M}}$ a été choisie comme inconnue du problème. En considérant que cette approximation vérifie les lois de comportements (1.41) et (1.42), les approximations du champ magnétique \mathbf{H} et de l'induction magnétique \mathbf{B} , notées respectivement $\tilde{\mathbf{H}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$ peuvent également être employées. Selon le choix de l'inconnue et de son espace de discrétisation, les conditions suivantes peuvent être plus ou moins bien vérifiées :

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad (1.51)$$

et

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0. \quad (1.52)$$

La partie suivante passe en revue les principales formulations intégrales de volume (1.50) rencontrées dans la littérature, selon le choix de l'inconnue et de l'espace de discrétisation.

1.3.3 Choix d'une formulation

Formulations en aimantation : Cette formulation du problème magnétostatique considère le problème (1.50) avec l'aimantation \mathbf{M} comme inconnue. Son approximation $\tilde{\mathbf{M}}$ peut être construite avec des fonctions de forme de volume³, constantes par élément, telle que :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \sum_{i=1}^{n_e} \alpha_{v_i} \mathbf{M}_i, \quad (1.53)$$

où α_{v_i} et \mathbf{M}_i sont respectivement la fonction de forme de volume et le degré de liberté vectoriel de \mathbf{M} associés au i -ème élément du maillage. Chaque fonction de forme α_{v_i} vérifie :

$$\alpha_{v_i}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in \Omega_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.54)$$

Cette formulation (1.50) avec la discrétisation (1.53) est appelée la méthode des moments magnétiques [Chadebec et al., 2006].

3. Pour des informations sur les éléments de Whitney évoqués par la suite, c'est-à-dire les fonctions de forme nodales, d'arête, de facette et de volume, on peut se référer au livre [Bossavit, 1993].

Avantage :

- Le maillage peut être non conforme⁴ et hybride (mélange de plusieurs types d'éléments).

Inconvénients :

- L'espace de discrétisation de l'aimantation \mathbf{M} , construit avec la relation (1.53), n'est pas conforme. Les champs discrétisés ne vérifient aucunes des deux équations (1.51) et (1.52).
- Les degrés de liberté sont vectoriels et portés par les éléments du maillage.
- Pour des matériaux avec une grande perméabilité magnétique, des phénomènes de bouclage conduisent à une solution non physique [Trowbridge, 1996].

Formulation en induction : Cette formulation du problème magnétostatique considère le problème (1.50) avec l'induction magnétique \mathbf{B} comme inconnue. En utilisant la loi de comportement (1.42) et les propriétés bijectives des fonctions \mathcal{L} et \mathcal{K} , l'approximation de l'induction magnétique $\tilde{\mathbf{B}}$ vérifie le problème suivant : trouver $\tilde{\mathbf{B}}$, telle que :

$$\mathcal{K}^{-1}(\tilde{\mathbf{B}}) = \mathbf{H}^*(\mathcal{L}(\mathcal{K}^{-1}(\tilde{\mathbf{B}}))). \quad (1.55)$$

L'approximation $\tilde{\mathbf{B}}$, peut être construite avec des fonctions de forme de facette [Balasubramanian et al., 2002], telle que :

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^{n_f} \alpha_{f_i} B_i, \quad (1.56)$$

où B_i est le degré de liberté scalaire de $\tilde{\mathbf{B}}$ associé à la i -ème face du maillage. Afin d'assurer un système d'équations indépendantes, un arbre de facettes doit être utilisé [Vishnevsky et al., 2002], c'est-à-dire un ensemble de facettes passant par tous les nœuds du maillage, sans former de boucle. Il s'agit d'une formulation peu exploitée et qui fait l'objet de travaux en cours au sein du laboratoire G2Elab [Meunier, 2013].

Avantages :

- L'espace de discrétisation du champ magnétique \mathbf{B} construit avec la relation (1.56) est conforme. De plus, la relation (1.52) peut être imposée à la discrétisation du champ magnétique $\tilde{\mathbf{B}}$ grâce à l'arbre de facettes.
- Dans le cas linéaire, seules les faces du maillage situées sur la frontière sont en interaction totale, ce qui simplifie la matrice d'interaction.

Inconvénient :

- Afin d'assurer un système d'équations indépendantes, un arbre de facettes doit être utilisé.

4. Un maillage est dit conforme si tous les éléments géométriques le constituant sont d'aires non nulles et si l'intersection de deux éléments géométriques de ce maillage est soit vide, soit réduite à un sommet ou soit correspond à l'intégralité d'une arête.

Formulation en champ magnétique : Cette formulation du problème magnétostatique considère le problème (1.50) avec le champ magnétique \mathbf{H} comme inconnue. En utilisant la loi de comportement (1.41), l'approximation du champ magnétique $\tilde{\mathbf{H}}$ vérifie le problème suivant : trouver $\tilde{\mathbf{H}}$, telle que :

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{H}}^* \left(\mathcal{L} \left(\tilde{\mathbf{H}} \right) \right). \quad (1.57)$$

L'approximation $\tilde{\mathbf{H}}$ peut être construite avec des fonctions de forme d'arête [Kettunen and Turner, 1992] [Canova and Repetto, 2001], telle que :

$$\tilde{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^{n_a} \alpha_{a_i} H_i \quad (1.58)$$

où α_{a_i} et H_i sont respectivement la fonction de forme d'arête et le degré de liberté de $\tilde{\mathbf{H}}$ associés à la i -ème arête du maillage. Afin d'assurer un système d'équations indépendantes, un arbre d'arêtes doit être utilisé [Dular et al., 1995], c'est-à-dire un ensemble d'arêtes passant par tous les nœuds du maillage, sans former de boucle.

Avantage :

- L'espace de discrétisation du champ magnétique \mathbf{H} construit avec la relation (1.58) est conforme. De plus, la relation (1.51) peut être imposée à la discrétisation du champ magnétique $\tilde{\mathbf{H}}$ grâce à l'arbre d'arêtes.

Inconvénient :

- Afin d'assurer un système d'équations indépendantes, un arbre d'arêtes doit être utilisé.

Formulation en potentiel scalaire : Les calculs se faisant uniquement dans le domaine matériel actif Ω_f ne portant pas de courant, le champ magnétique total \mathbf{H} et le champ magnétique source \mathbf{H}_0 dérivent respectivement des potentiels scalaires magnétiques Φ (1.7) et Φ_0 . Ce dernier est tel que :

$$\mathbf{H}_0 = -\nabla \Phi_0. \quad (1.59)$$

Cette formulation du problème magnétostatique considère le problème (1.50) avec le potentiel scalaire magnétique total Φ comme inconnue. Ce dernier est égal à la somme du potentiel scalaire source (1.59) et du potentiel scalaire réduit créé par une distribution d'aimantation dans le domaine ferromagnétique Ω_f . Si le potentiel scalaire réduit est construit à partir de l'équation intégrale (1.32), alors le potentiel scalaire total Φ^* s'écrit :

$$\Phi^*(\mathbf{M}, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \left(\int_{\Omega_f} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \right) + \Phi_0(\mathbf{r}). \quad (1.60)$$

Considérons l'approximation du potentiel scalaire magnétique total, $\tilde{\Phi}$, vérifiant le problème suivant : trouver $\tilde{\Phi}$, telle que :

$$\tilde{\Phi} = \Phi^* \left(\mathcal{L} \left(-\nabla \tilde{\Phi} \right) \right). \quad (1.61)$$

où Φ^* est construit par (1.60). La solution du problème (1.61) à une constante près, implique que le champ magnétique (1.7) reconstruit à partir de cette solution vérifie le problème (1.57). L'approximation $\tilde{\Phi}$ peut être construite avec des fonctions de forme nodales [Han et al., 1994] [Hafsa et al., 2006a], telle que :

$$\tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^{n_n} \alpha_i \Phi_i, \quad (1.62)$$

où α_i et Φ_i sont respectivement la fonction de forme nodale et le degré de liberté de $\tilde{\Phi}$ associés au i -ème nœud du maillage.

Avantages :

- L’espace de discrétisation du champ magnétique \mathbf{H} construit avec les relations (1.7) et (1.62) est conforme, ainsi la discrétisation du champ magnétique $\tilde{\mathbf{H}}$ vérifie la relation (1.51).
- Les degrés de liberté sont scalaires et portés par les nœuds du maillage.
- Afin d’assurer l’unicité de la solution, une jauge est nécessaire. Il suffit alors d’imposer une valeur arbitraire à un degré de liberté.

Inconvénients :

- Le potentiel scalaire magnétique créé par les sources ne peut pas être calculé directement, ce qui comme nous le verrons par la suite nécessite la résolution d’un problème supplémentaire.
- Pour des domaines magnétiques non simplement connexes, le potentiel scalaire magnétique (1.7) n’existe pas. Cette limitation peut être contournée par la décomposition d’un domaine non simplement connexe en plusieurs sous-domaines simplement connexes par l’introduction de coupures [Kalimov and Shimansky, 2012].

La formulation en potentiel scalaire (1.61) avec la discrétisation (1.62) est celle retenue dans le cadre de cette thèse. Elle présente les avantages d’avoir des degrés de liberté scalaires et portés par les nœuds du maillage, ce qui correspond à un nombre d’inconnues relativement faible par rapport aux autres formulations. De plus l’unicité de la solution est facilement imposable.

1.4 Formulation intégrale de volume en potentiel scalaire dans le cas linéaire

La loi de comportement (1.41) du matériau ferromagnétique considérée linéaire et homogène peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{L}(\mathbf{H}) = \chi \mathbf{H}, \tag{1.63}$$

où la susceptibilité χ est une constante caractéristique du matériau. Le problème (1.61) s’écrit alors : trouver $\tilde{\Phi}$, telle que :

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}^* \left(-\chi \nabla \tilde{\Phi} \right), \tag{1.64}$$

où $\tilde{\Phi}^*$ est construite à partir de la relation (1.60).

1.4.1 Formulation faible du problème discret

Le problème (1.64) s’écrit également : trouver $\tilde{\Phi}$, telle que :

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \chi \frac{\nabla \tilde{\Phi}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' = \Phi_0(\mathbf{r}). \tag{1.65}$$

La formulation faible du problème discret est obtenue en multipliant la relation (1.65) par une fonction de pondération p quelconque et en intégrant sur le domaine Ω_f . En utilisant la discrétisation (1.62), cela

conduit au problème suivant : trouver Φ_i , tel que :

$$\sum_{i=1}^{n_n} \Phi_i \left(\int_{\Omega_f} p(\mathbf{r}) \alpha_i(\mathbf{r}) d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} p(\mathbf{r}) \left(\int_{\Omega_f} \chi \frac{\nabla \alpha_i(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \right) d\Omega \right) = \int_{\Omega_f} p(\mathbf{r}) \Phi_0(\mathbf{r}) d\Omega, \quad \forall p. \quad (1.66)$$

Deux approches sont envisagées pour la résolution du problème (1.66).

1.4.1.1 Approche en collocation

L'approche en collocation aux nœuds consiste à sélectionner une solution qui vérifie l'équation (1.66) à chaque nœud du maillage. C'est-à-dire, les fonctions de pondération p_i sont choisies telles que :

$$p_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} = \mathbf{r}_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \forall i \in \llbracket 1 \dots n_n \rrbracket, \quad (1.67)$$

où \mathbf{r}_i correspond aux coordonnées du i -ème nœud. Le problème (1.66) devient : trouver Φ_j , telle que :

$$\sum_{j=1}^{n_n} \left[\alpha_j(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \chi \frac{\nabla \alpha_j(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \right] \Phi_j = \Phi_0(\mathbf{r}_i), \quad \forall i \in \llbracket 1 \dots n_n \rrbracket. \quad (1.68)$$

Soit Φ le vecteur composé des degrés de liberté (Φ_i). Le problème (1.68) est équivalent à résoudre un système d'équations linéaires de la forme : trouver Φ , tel que :

$$([I] + [A(\chi)]) \Phi = \Phi_0, \quad (1.69)$$

avec

$$I_{ij} = \delta_{ij}, \quad (1.70)$$

$$A(\chi)_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \chi \frac{\nabla \alpha_j(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} d\Omega'. \quad (1.71)$$

1.4.1.2 Approche de Galerkin

L'approche de Galerkin consiste à écrire l'équation (1.66) en choisissant les fonctions de pondération comme étant les fonctions de forme de la discrétisation du potentiel scalaire magnétique (1.62). Le problème (1.66) devient : trouver Φ_j , tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_n} \left[\int_{\Omega_f} \alpha_i(\mathbf{r}) \alpha_j(\mathbf{r}) d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \alpha_i(\mathbf{r}) \left(\int_{\Omega_f} \chi \frac{\nabla \alpha_j(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \right) d\Omega \right] \Phi_j \\ = \int_{\Omega_f} \alpha_i(\mathbf{r}) \Phi_0(\mathbf{r}) d\Omega, \quad \forall i \in \llbracket 1 \dots n_n \rrbracket. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Le problème (1.72) est équivalent à résoudre un système d'équations linéaires de la forme : trouver Φ , tel que :

$$([B] + [C(\chi)]) \Phi = \mathbf{D}, \quad (1.73)$$

avec

$$B_{ij} = \int_{\Omega_f} \alpha_i(\mathbf{r}) \alpha_j(\mathbf{r}) d\Omega, \quad (1.74)$$

$$C(\chi)_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \alpha_i(\mathbf{r}) \left(\int_{\Omega_f} \chi \frac{\nabla \alpha_j(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \right) d\Omega, \quad (1.75)$$

$$D_i = \int_{\Omega_f} \alpha_i(\mathbf{r}) \Phi_0(\mathbf{r}) d\Omega. \quad (1.76)$$

1.4.2 Calcul du potentiel scalaire magnétique créé par les inducteurs

Compte tenu des hypothèses sur le domaine d'étude Ω_f (simplement connexe et ne portant pas de courant), le champ magnétique source \mathbf{H}_0 dérive d'un potentiel scalaire source Φ_0 (1.59). Le champ magnétique source peut être calculé analytiquement pour certains inducteurs. Cela sera notamment le cas lors des applications, dans lesquelles les travaux [Urunkar, 1980] et [Urunkar, 1982], ainsi que des formules disponibles dans [Durand, 1964] permettront d'obtenir son expression analytique. Notons \mathbf{H}_s le champ magnétique source calculé analytiquement. Concernant l'expression du potentiel scalaire source, il n'existe pas de formule analytique. Il doit alors être approximé à l'aide d'une méthode numérique.

Le potentiel scalaire source Φ_0 , solution de l'équation (1.59), est également solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\Phi_0} \left((\nabla \Phi_0 + \mathbf{H}_s)^2 \right). \quad (1.77)$$

La formulation faible associée au problème de minimisation précédent (1.77) s'écrit : trouver Φ_0 , tel que :

$$\int_{\Omega_f} \nabla \alpha(\mathbf{r}) \cdot \nabla \Phi_0 \, d\Omega = - \int_{\Omega_f} \nabla \alpha(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_s \, d\Omega, \quad \forall \alpha \quad (1.78)$$

Le problème (1.78) est résolu avec la méthode des éléments finis, dans laquelle l'approximation du potentiel scalaire source Φ_0 , notée $\tilde{\Phi}_0$, est construite avec des fonctions de forme nodales, telle que :

$$\tilde{\Phi}_0 = \sum_{i=1}^{n_n} \alpha_i \Phi_{0i}, \quad (1.79)$$

où Φ_{0i} est le degré de liberté de Φ_0 associée au i -ème nœud du maillage. Le problème (1.78) devient : trouver $\tilde{\Phi}_0$, telle que :

$$\sum_{j=1}^{n_n} \left(\int_{\Omega_f} \nabla \alpha_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \alpha_j(\mathbf{r}) \, d\Omega \right) \Phi_{0j} = - \int_{\Omega_f} \nabla \alpha_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_s(\mathbf{r}) \, d\Omega, \quad \forall i \in \llbracket 1 \dots n_n \rrbracket. \quad (1.80)$$

Soit Φ_0 le vecteur composé des degrés de liberté (Φ_{0i}), le problème (1.80) est équivalent à résoudre un système d'équations linéaires de la forme : trouver Φ_0 , tel que :

$$[E] \Phi_0 = F, \quad (1.81)$$

avec

$$E_{ij} = \int_{\Omega_f} \nabla \alpha_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \alpha_j(\mathbf{r}) \, d\Omega, \quad (1.82)$$

$$F_i = - \int_{\Omega_f} \nabla \alpha_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_s(\mathbf{r}) \, d\Omega. \quad (1.83)$$

Afin d'assurer l'unicité lors de la résolution du système (1.81), un potentiel est imposé à un degré de liberté arbitraire de $\tilde{\Phi}_0$.

1.4.3 Matrice d'interaction

Les matrices (1.71) et (1.75) sont appelées matrices d'interaction car elles correspondent aux interactions entre les différents éléments aimantés du maillage. Ce sont des matrices pleines dont l'assemblage et le stockage mémoire constituent le principal inconvénient des formulations intégrales. En effet, leurs assemblages nécessitent le calcul de une intégrale I^e sur chaque élément e du maillage de la forme :

$$I^e(\mathbf{r}, \mathbf{S}) = \int_{\Omega_e} \frac{\mathbf{S} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega'. \quad (1.84)$$

où Ω_e est le domaine de l'élément e et \mathbf{S} est un vecteur uniforme représentant l'aimantation constante par élément, qui est due à l'utilisation de fonctions de forme nodales du premier ordre pour la discrétisation (1.62). L'intégrale (1.84) est convergente et continue dans tout le domaine Ω [Durand, 1964]. En première approche, elle est évaluée numériquement avec des points de Gauss. Cependant, l'intégrand dans (1.84) est singulier lorsque les points de calcul et d'intégration sont confondus. De plus, lorsque le point de calcul \mathbf{r} est trop proche de l'élément d'intégration Ω_e un nombre trop important de points de Gauss est nécessaire pour avoir une précision acceptable [Carpentier et al., 2013]. Cherchons alors à réécrire l'intégrale (1.84) sous une forme où il existe une solution analytique pour des géométries de maillage simple. La relation suivante est vérifiée :

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right), \quad (1.85)$$

où ∇ et ∇' désignent les opérateurs gradients associés respectivement aux variables \mathbf{r} et \mathbf{r}' . La relation (1.85) appliquée dans l'équation (1.84) conduit à :

$$I^e(\mathbf{r}, \mathbf{S}) = - \int_{\Omega_e} \mathbf{S} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\Omega'. \quad (1.86)$$

L'identité vectorielle suivante est vérifiée :

$$\nabla \cdot (u\mathbf{V}) = \nabla u \cdot \mathbf{V} + (\nabla \cdot \mathbf{V}) u. \quad (1.87)$$

Les applications de l'identité vectorielle (1.87) et du théorème de Green-Ostrogradsky dans l'intégrale (1.86) permettent d'écrire :

$$I^e(\mathbf{r}, \mathbf{S}) = - \int_{\Gamma_e} \frac{\mathbf{S}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Gamma', \quad (1.88)$$

où Γ_e est la frontière du domaine Ω_e . Des formules analytiques pour le calcul de l'intégrale (1.88) existent pour des géométries simples [Rubeck et al., 2013] [Durand, 1964]. L'annexe 1 présente celles que nous utilisons dans le cas d'un maillage tétraédrique. Néanmoins, ces formules analytiques ont un coût en temps de calcul bien supérieur à une intégration numérique avec des points de Gauss. Pour ne pas rendre le temps d'assemblage des matrices d'interaction prohibitif, un critère sur la position du point de calcul \mathbf{r} en fonction de l'élément d'intégration Ω_e permet de décider si l'intégrale (1.84) est évaluée analytiquement ou numériquement. Par exemple, l'évaluation sera analytique lorsque le point de calcul \mathbf{r} est contenu dans un élément ayant un sommet en commun avec l'élément d'intégration Γ_e et numérique dans le cas contraire. Quant au stockage de ces matrices, il est nécessaire de stocker chaque terme de la matrice, ce qui la rend explosive en terme d'espace mémoire nécessaire. Des techniques de compression et d'accélération peuvent alors utilisées (cf. chapitre 2).

1.4.4 Résolution des systèmes matriciels

Pour les problèmes avec peu d'inconnues (moins de quelques milliers), une méthode directe peut être appliquée pour résoudre les systèmes matriciels (1.69) et (1.73). Une méthode de décomposition LU [Ciarlet, 1985] est alors utilisée. Lorsque le nombre de degrés de liberté devient conséquent, une méthode itérative est préférable. Dans le cadre de la formulation intégrale de volume, un solveur GMRES est utilisé [Saad and Schultz, 1986]. Ce solveur est intéressant car il ne nécessite pas la connaissance entière de la matrice d'interaction, il suffit de savoir faire les produits matrice-vecteur associés à la matrice principale du système matriciel. Ce solveur, en plus d'être performant, est particulièrement bien adapté aux formulations intégrales et à leurs techniques de compression [Ardon, 2010] (cf. chapitre 2).

1.4.5 Exploitation après résolution

Une fois le potentiel scalaire $\tilde{\phi}$ calculé numériquement à partir de la formulation intégrale de volume en potentiel (1.65), l'aimantation $\tilde{\mathbf{M}}$ du domaine ferromagnétique Ω_f est calculée par :

$$\tilde{\mathbf{M}} = -\chi \sum_{i=1}^{n_n} \nabla \alpha_i \Phi_i, \quad (1.89)$$

A partir de la connaissance de l'aimantation (1.89), il existe plusieurs façons de calculer le champ magnétique et le potentiel scalaire duquel ce dernier dérive :

1. La relation (1.43) conduit à l'expression du champ magnétique \mathbf{H}_1 suivante :

$$\mathbf{H}_1 = \overset{*}{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{M}}), \quad (1.90)$$

où $\overset{*}{\mathbf{H}}$ est calculé par l'équation (1.43). Cette expression du champ magnétique (1.90) garantie par construction que ce dernier vérifie fortement les équations de Maxwell (1.44) et (1.45). Le calcul du champ magnétique réduit (1.33) dans la relation (1.43) fait intervenir l'évaluation de l'intégrale \mathbf{J}^e sur chaque élément e du maillage :

$$\mathbf{J}^e(\mathbf{r}, \mathbf{S}) = \nabla \left(\int_{\Omega_e} \frac{\mathbf{S} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \right) = \nabla I^e(\mathbf{r}, \mathbf{S}), \quad (1.91)$$

où I^e est l'intégrale (1.84) et \mathbf{S} est un vecteur uniforme représentant l'aimantation constante par élément, qui est due à l'utilisation de fonction de forme nodales du premier ordre pour la discrétisation (1.62). L'intégrale (1.91) est convergente dans tout le domaine Ω , mais elle est discontinue à la traversée de la frontière Γ_e [Durand, 1964]. Le gradient de l'expression (1.88) et la relation (1.85) permettent d'écrire :

$$\mathbf{J}^e(\mathbf{r}, \mathbf{S}) = \int_{\Gamma_e} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Gamma'. \quad (1.92)$$

L'intégrale (1.92) est discontinue à la traversée de la frontière Γ_e , telle que :

$$\mathbf{J}^e(\mathbf{r}^+, \mathbf{S}) - \mathbf{J}^e(\mathbf{r}^-, \mathbf{S}) = \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, \quad (1.93)$$

où \mathbf{r}^+ et \mathbf{r}^- sont les coordonnées des deux points situés de part et d'autre de la surface Γ_e et à son voisinage immédiat. De plus si le point de calcul de l'intégrale (1.92) est un point singulier de la frontière Γ_e , c'est-à-dire situé sur une arête lorsque le domaine Ω_e est un polyèdre, alors l'intégrale

(1.92) devient infinie. Des formules analytiques existent pour l'évaluation d'une intégrale (1.92) sur des géométries simples [Rubeck et al., 2013] [Durand, 1964]. L'annexe 1 présente celles que nous utilisons dans le cas d'un maillage tétraédrique. Comme l'intégrale (1.84), elle nécessite également de prendre des précautions lors de son évaluation numérique. L'intégration à une constante près de l'expression du champ magnétique (1.90) à l'aide de la relation (1.60), permet de définir le potentiel scalaire Φ_1 duquel ce champ dérive :

$$\Phi_1 = \Phi^* \left(\tilde{\mathbf{M}} \right). \quad (1.94)$$

2. Le potentiel scalaire Φ_2 est pris comme étant l'approximation du potentiel scalaire magnétique $\tilde{\Phi}$ calculée lors de la résolution du problème (1.65) :

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^{n_n} \alpha_i \Phi_i. \quad (1.95)$$

Le champ magnétique \mathbf{H}_2 est ensuite obtenu par :

$$\mathbf{H}_2 = - \sum_{i=1}^{n_n} \nabla \alpha_i \Phi_i. \quad (1.96)$$

Cette expression n'est valable que dans le domaine maillé, c'est à dire seulement dans le matériau ferromagnétique Ω_f . Il s'agit du champ magnétique associée à la distribution d'aimantation discrète $\tilde{\mathbf{M}}$ vérifiant la loi de comportement (1.41). De plus, comme ce champ magnétique dérive d'un potentiel scalaire, l'équation de Maxwell (1.5) est vérifiée fortement. L'approximation est donc faite sur la deuxième équation de Maxwell (1.3) qui est vérifiée faiblement.

3. Afin d'écrire une expression du champ magnétique faisant intervenir les deux précédentes (1.90) et (1.96), la loi de comportement (1.39) conduit à :

$$\mu \mathbf{H}_3 = \mu_0 \left(\mathbf{H}^* \left(\tilde{\mathbf{M}} \right) + \tilde{\mathbf{M}} \right). \quad (1.97)$$

La relation (1.97) peut également s'écrire :

$$\mathbf{H}_3 = \mathbf{H}_2 + \frac{\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2}{\mu_r}. \quad (1.98)$$

Cette expression (1.98) est valable dans tout le domaine Ω et est équivalente à (1.90) dans l'air Ω_0 . Cependant, elle s'écrit comme la somme de deux champs qui sont dans des espaces de dimensions et de propriétés différentes. Le champ magnétique construit par la relation (1.98) va ainsi regrouper les inconvénients des expressions (1.90) et (1.96). L'intégration à une constante près de l'expression du champ magnétique (1.98), permet de définir le potentiel scalaire Φ_3 duquel ce champ dérive :

$$\Phi_3 = \Phi_2 + \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\mu_r}. \quad (1.99)$$

Le TABLEAU 1.1 résume les propriétés de ces différentes possibilités de calculer le potentiel scalaire et le champ magnétique une fois le problème résolu.

	Exploitation 1	Exploitation 2	Exploitation 3
Applicable dans l'air	oui	non	oui
Applicable dans le matériau	oui*	oui	oui
Présence de singularités	oui	non	oui
Vérifie $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$	oui	oui	oui
Vérifie $\nabla \cdot [\mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})] = \mathbf{0}$	oui	non	non
Vérifie $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ dans le matériau ferromagnétique	non	oui	non

*La première application (§1.5.1) montrera que ce résultat n'est pas exploitable.

TABLEAU 1.1 – Propriétés des différentes exploitations.

1.5 Applications

1.5.1 Modélisation d'une sphère creuse dans un champ uniforme

Considérons le problème d'une sphère magnétique creuse de comportement linéaire, située dans le vide et soumise à un champ magnétique source uniforme (FIGURE 1.5). Bien que le domaine ferromagnétique associé à la sphère Ω_f ne soit pas simplement connexe, le potentiel scalaire magnétique (1.7) existe car la cavité ne contient aucun courant.

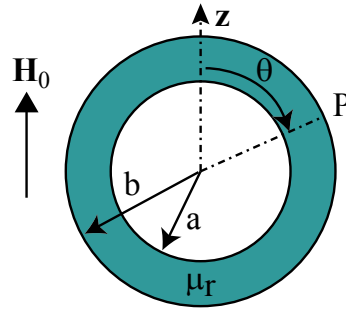


FIGURE 1.5 – Description du problème de la sphère creuse dans un champ uniforme.

Cette application a pour but de comparer les différentes façons de calculer les potentiels scalaires magnétiques Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 respectivement à partir des relations (1.94), (1.95) et (1.99) ainsi que les champs magnétiques \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 et \mathbf{H}_3 respectivement à partir des relations (1.90), (1.96) et (1.98). L'avantage de cette application est qu'une solution analytique existe. Le domaine ferromagnétique est maillé avec des éléments tétraédriques qui ne sont pas isoparamétriques. Cela implique la facettisation des frontières intérieure et extérieure de la sphère creuse. Il existe alors une erreur géométrique induite par le maillage de la sphère creuse, qu'on supposera négligeable.

Dans le repère sphérique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$, le problème présente une symétrie de révolution d'angle ϕ . L'expression analytique du potentiel scalaire magnétique [Durand, 1968] s'écrit :

$$\Phi = \begin{cases} A r H_{0z} \cos \theta & , \text{ si } r < a, \\ \left(B r + C \frac{a^3}{r^2} \right) H_{0z} \cos \theta & , \text{ si } a < r < b, \\ \left(D \frac{a^3}{r^2} - r \right) H_{0z} \cos \theta & , \text{ si } r > b, \end{cases} \quad (1.100)$$

avec :

$$A = -\frac{9\mu\mu_0}{(2\mu + \mu_0)(\mu + 2\mu_0) - 2(\mu - \mu_0)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^3}, \quad (1.101)$$

$$D = \frac{(2\mu + \mu_0)(\mu - \mu_0) \left[\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 1\right]}{(2\mu + \mu_0)(\mu + 2\mu_0) - 2(\mu - \mu_0)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^3}, \quad (1.102)$$

$$C = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu}\right) A, \quad (1.103)$$

$$B = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\mu_0}{\mu}\right) A. \quad (1.104)$$

Le champ magnétique analytique s'exprime dans le repère sphérique par :

$$\mathbf{H}(r, \theta) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -AH_{0z} \cos \theta \\ ArH_{0z} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} & , \text{ si } r < a, \\ \begin{pmatrix} \left(-B + 2C \left(\frac{a}{r}\right)^3\right) H_{0z} \cos \theta \\ \left(B + C \left(\frac{a}{r}\right)^3\right) H_{0z} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} & , \text{ si } a < r < b, \\ \begin{pmatrix} \left(2D \left(\frac{a}{r}\right)^3 + 1\right) H_{0z} \cos \theta \\ \left(D \left(\frac{a}{r}\right)^3 - 1\right) H_{0z} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} & , \text{ si } r > b. \end{cases} \quad (1.105)$$

Considérons la sphère de rayon intérieur $a = 35$ mm et de rayon extérieur $b = 50$ mm plongée dans un champ magnétique source uniforme \mathbf{H}_0 de 1000 A/m selon la direction \mathbf{z} . Le maillage utilisé est relativement uniforme et constitué de 1113 nœuds et de 4614 éléments tétraédriques (FIGURE 1.6). Le problème est résolu par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire magnétique avec l'approche en collocation (1.69). L'approximation de l'aimantation $\tilde{\mathbf{M}}$ calculée par la relation (1.89) est représentée FIGURE 1.7.

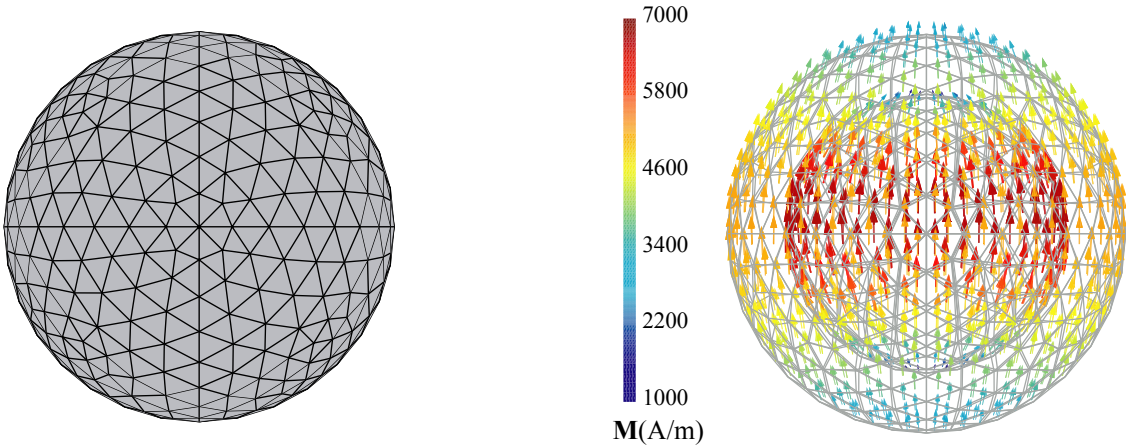


FIGURE 1.6 – Maillage utilisé pour le problème de la sphère creuse.

FIGURE 1.7 – Distribution de l'aimantation calculée dans la sphère.

Tout d'abord les calculs d'exploitation sont réalisés dans l'air Ω_0 , où les potentiels scalaires Φ_1 et Φ_3 ainsi que les champs magnétiques \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_3 sont équivalents et où les relations (1.95) et (1.96) ne sont pas applicables. Ces grandeurs sont calculées sur un demi cercle de rayon 92.5 mm discrétisé en un ensemble de points. Les résultats obtenus sont présentés en FIGURE 1.8.

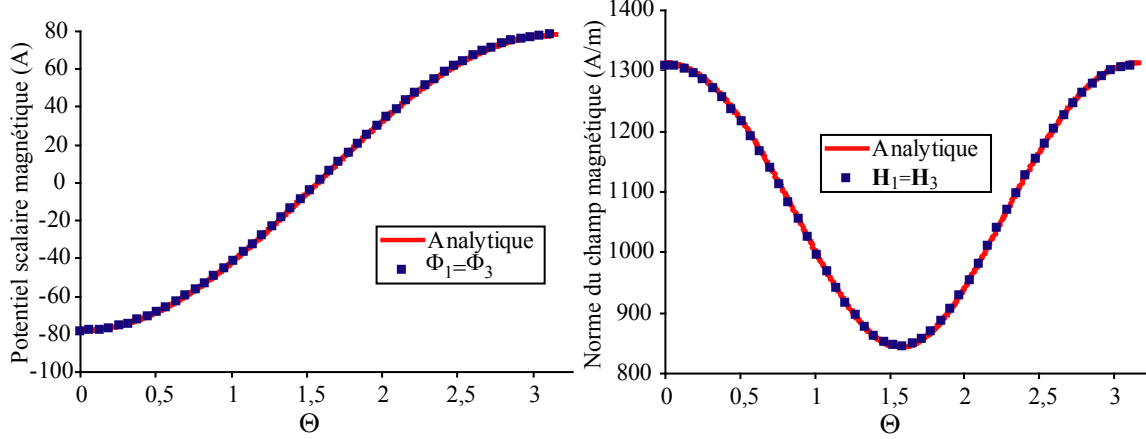


FIGURE 1.8 – Résultats pour des points situés dans l'air à une distance de 92.5 mm du centre de la sphère.

Le critère de comparaison entre deux résultats est l'écart absolu normé par la valeur absolue de l'extrémum lorsque les résultats sont trop proche de 0, sinon l'écart relatif par rapport à la solution analytique est utilisé. Les potentiels scalaires Φ_1 ou Φ_3 ont un écart absolu normé inférieur à 0.2%. Concernant les champs magnétiques \mathbf{H}_1 ou \mathbf{H}_3 , l'écart relatif est inférieur à 0.24%. Les calculs du potentiel scalaire (1.94) ou (1.99) et du champ magnétique (1.90) ou (1.98) sont donc très précis dans l'air. Cependant ces calculs sont assez coûteux car ils nécessitent, pour chaque point de calcul, les évaluations d'intégrales de la forme (1.84) et (1.91) sur chaque élément du maillage. Le problème des singularités de ces intégrales n'est pas rencontré ici, car les points de calcul sont suffisamment éloignés de la matière aimantée.

Afin de mettre en évidence ces singularités, l'ensemble des points de calcul est maintenant distribué sur un demi cercle appartenant à l'interface Γ_f extérieure de la sphère du côté de l'air. Comme précédemment, les potentiels scalaires Φ_1 et Φ_3 et les champs magnétiques \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_3 y sont calculés. Les résultats obtenus sont présentés en FIGURE 1.9 et fluctuent autour de la solution analytique. Les résultats du potentiel scalaire Φ_1 ou Φ_3 ont un écart absolu normé valant en moyenne 18.4% avec des pics montants jusque 47.0%. Concernant les champs magnétiques \mathbf{H}_1 ou \mathbf{H}_3 , l'écart relatif a une moyenne de 11.1% avec des pics montant jusque 185%. Ces fluctuations sont dues aux points de calcul singuliers situés au voisinage des arêtes du maillage. En effet, en ces points les évaluations analytiques des intégrales (1.84) et (1.91) (cf. annexe 1) tendent respectivement vers une valeur finie importante et vers l'infinie [Durand, 1964]. Les pics sont plus prononcés pour le calcul du champ magnétique car une intégrale de la forme (1.91) intervient, pour laquelle la décroissance du noyau de l'intégrale (1.91) en $\frac{1}{|\mathbf{r}|}$ est plus rapide que celle de l'intégrale (1.84) en $\frac{1}{|\mathbf{r}|^2}$. C'est pourquoi les résultats sur le champ magnétique semblent plus proches de la solution analytique que ceux du potentiel scalaire, car les pics sur le champ magnétique sont plus prononcés mais moins étendus. Il s'agit d'une limitation des méthodes intégrales de volume, pour

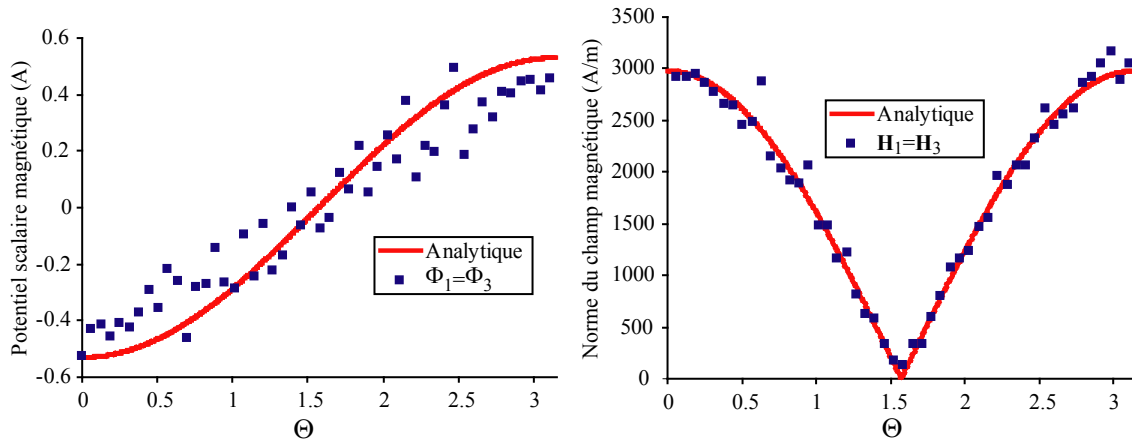


FIGURE 1.9 – Résultats pour des points situés sur l’interface extérieure de la sphère côté air.

lesquelles le calcul du champ dans l’air est très précis tant que le point d’observation est suffisamment éloigné de la matière aimantée. La solution se dégrade alors d’autant plus que le point d’observation est proche du domaine aimanté et particulièrement sur les arêtes du maillage.

Afin de calculer le champ magnétique dans le matériau ferromagnétique, l’ensemble des points de calcul est distribué sur un demi cercle de rayon 42.5 mm situé dans le matériau. Les potentiels scalaires Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 et les champs magnétiques \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 et \mathbf{H}_3 y sont calculées. Les résultats obtenus sont présentés en FIGURE 1.10.

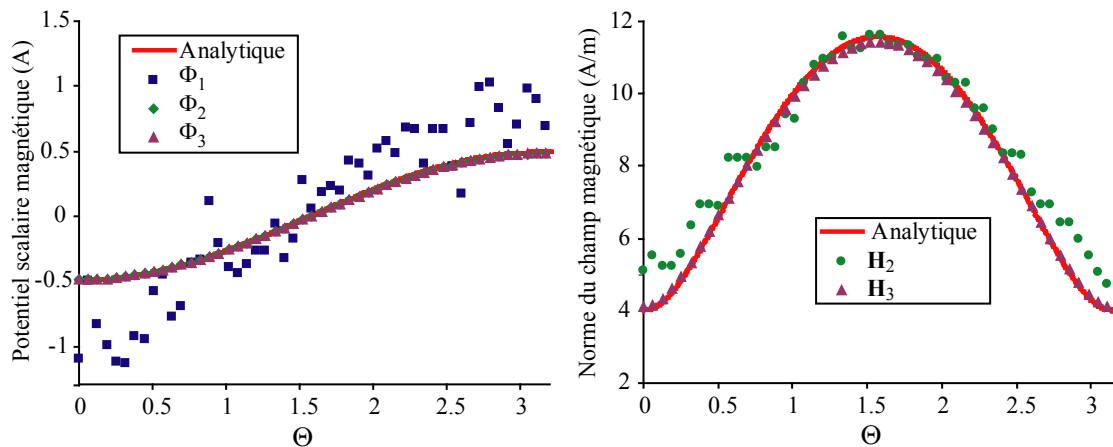


FIGURE 1.10 – Résultats pour des points situés dans le matériau ferromagnétique à une distance de 42.5 mm du centre de la sphère.

Concernant le potentiel scalaire (FIGURE 1.10), les résultats Φ_1 ont un écart absolu normé valant en moyenne 52.5% avec des pics montants jusqu’à 132%. Cet écart est dû aux points singuliers et à la décroissance du noyau des intégrales, évoquées dans le paragraphe précédent, et qui rendent ces résultats inexploitable. De même les résultats associés au champ magnétique \mathbf{H}_1 sont inexploitable et ne sont pas représentés sur la FIGURE 1.10. En effet, la résolution du problème par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire magnétique avec une approche en collocation (1.68) conduit à une approximation du potentiel scalaire $\tilde{\Phi}$ qui est égal au potentiel scalaire Φ_1 seulement aux nœuds du maillage. Le champ

magnétique \mathbf{H}_1 n'est donc pas directement contrôlé et l'erreur due aux singularités n'est plus du même ordre de grandeur que la solution et devient largement prépondérante. La relation (1.96) conduit à des résultats précis pour le potentiel scalaire Φ_2 avec un écart absolu normé inférieur à 2.29%. Concernant le champ magnétique \mathbf{H}_2 , l'écart relatif est en moyenne de 8.49% avec un maximum à 35.4%. Les résultats sur le champ magnétique \mathbf{H}_2 sont moins précis car la discrétisation du potentiel scalaire magnétique (1.62) utilise des fonctions de forme nodales du première ordre, ainsi le champ magnétique calculé par la relation (1.96) est constant sur chaque élément du maillage. Le calcul est donc beaucoup moins précis localement, mais il a l'avantage d'être obtenu très rapidement. Le potentiel scalaire Φ_3 a un écart absolu normé inférieur à 2.04%. Concernant le champ magnétique \mathbf{H}_3 , l'écart relatif est inférieur à 2.63%. Le couple de relations (1.99)–(1.98) conduit ainsi à des résultats précis pour le potentiel scalaire et le champ magnétique. Cependant, il regroupe les inconvénients des deux autres couples de relations, notamment le problème de singularité sur les arêtes du maillage. Ceci n'est pas visible ici, car la relation (1.98) peut s'interpréter comme une modification du champ magnétique \mathbf{H}_2 où le terme \mathbf{H}_1 pouvant poser problème est divisé par une perméabilité magnétique relative μ_r importante. Il n'est alors pas prépondérant. De plus, la probabilité d'avoir un point de calcul sur une arête du maillage est relativement faible.

Pour mettre le problème des singularités des relations (1.98) et (1.99) en évidence, l'ensemble des points de calcul est maintenant pris sur l'interface Γ_f extérieure de la sphère du côté matériau. Les résultats obtenus sont présentés en FIGURE 1.11. Seuls les résultats Φ_3 et \mathbf{H}_3 sont analysés, car les remarques du paragraphe précédent sur les autres grandeurs restent valables. Les résultats du potentiel scalaire Φ_1 ont un écart absolu normé valant en moyenne 5.45% avec un maximum de 9.06%. Ces résultats sont moins bon que ceux de Φ_2 mais comparés à ceux de Φ_3 l'effet des singularités géométriques a été fortement atténué. Concernant les résultats du champ magnétique \mathbf{H}_3 , l'écart relatif a une moyenne de 2.27% avec des pics montants jusque 21.7%. Hormis ces quelques pics correspondent aux points de calcul situés au voisinage d'une arête du maillage. La relation (1.98) conduit donc à un champ magnétique proche de la solution analytique.

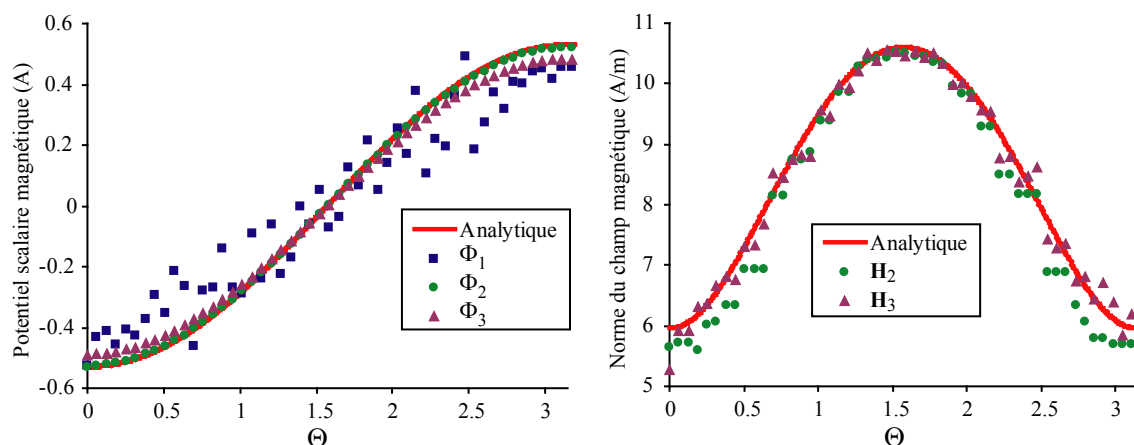


FIGURE 1.11 – Résultats pour des points situés sur l'interface extérieure de la sphère du côté matériau.

En conclusion de cette application, il existe plusieurs possibilités pour calculer le potentiel scalaire et le champ magnétique une fois le problème résolu par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire magnétique. Dans l'air le choix n'est pas possible, les couples de relations applicables (1.94)–(1.99) et (1.90)–(1.98) sont équivalentes. Cependant, pour des points de calcul situés au voisinage proche du matériau ferromagnétique, des précautions doivent être prises pour les évaluations des intégrales (1.84) et (1.91), notamment à cause des points singuliers situés sur les arêtes du maillage. Dans le matériau ferromagnétique, les relations (1.94) et (1.90) ne fournissent pas de résultats exploitables à cause des décroissances des noyaux de Green à proximité des points singuliers. Le second couple de relations (1.95)–(1.96) utilise directement les degrés de liberté calculés lors de la résolution et a l'avantage de s'obtenir très rapidement. De plus, le champ magnétique vérifie alors la loi de comportement magnétique (1.63). Cependant, à cause de l'utilisation des fonctions de forme nodales du premier ordre, le champ magnétique est constant sur chaque élément et est moins précis pour des calculs locaux. Le troisième couple de relations (1.99)–(1.98) est un composé des deux précédents. Ces relations fournissent des résultats très précis localement mais regroupent les inconvénients des précédentes (TABLEAU 1.1). Néanmoins, l'effet des points singuliers est atténué, rendant ces résultats exploitables dans le matériau ferromagnétique, tant que le point de calcul n'est pas situé sur ou au voisinage proche d'une arête. Lors de l'exploitation du potentiel ou du champ magnétique, il faut donc faire des compromis entre la précision, le coût en terme de calcul et les équations vérifiées. Sans mention contraire, par la suite les relations (1.95) et (1.96) seront utilisées par défaut pour calculer le champ magnétique dans le matériau.

1.5.2 Modélisation d'une poutre dans l'axe d'une bobine

Considérons le problème d'une poutre ferromagnétique de comportement magnétique linéaire, placée dans le vide sur l'axe d'une bobine générant un champ magnétique source (FIGURE 1.12). Cette application a pour but de comparer les résultats obtenus par les approches en collocation et de Galerkin sur une application simple et de les comparer à ceux obtenus par un logiciel commercial d'éléments finis.

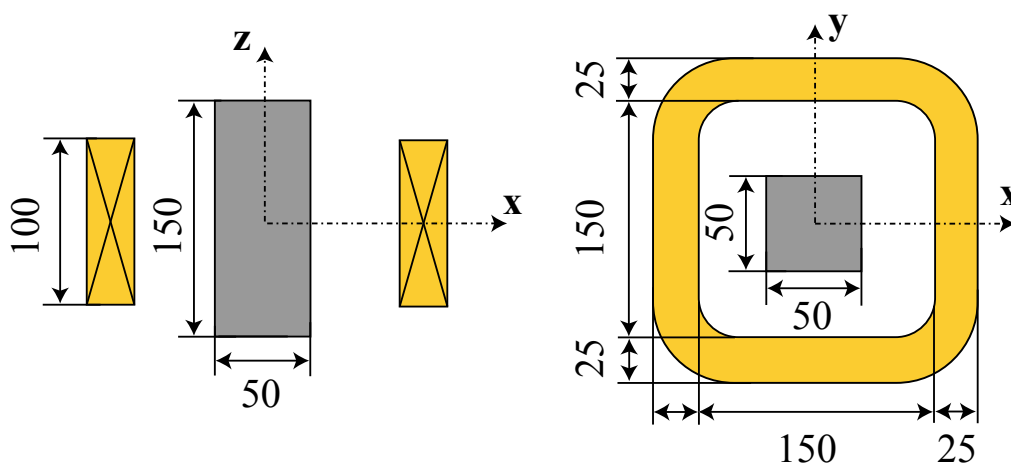


FIGURE 1.12 – Description du problème de la poutre dans l'axe d'une bobine.

Deux maillages sont utilisés afin de connaître l'influence de l'uniformité du maillage sur les résultats. Dans un premier temps, le maillage est relativement uniforme et constitué de 3552 nœuds et de 15706 éléments tétraédriques (FIGURE 1.13a). Le second est raffiné sur les coins de la poutre avec à peu près le même nombre de degrés de liberté : 3489 nœuds et 12913 éléments tétraédriques (FIGURE 1.13b).

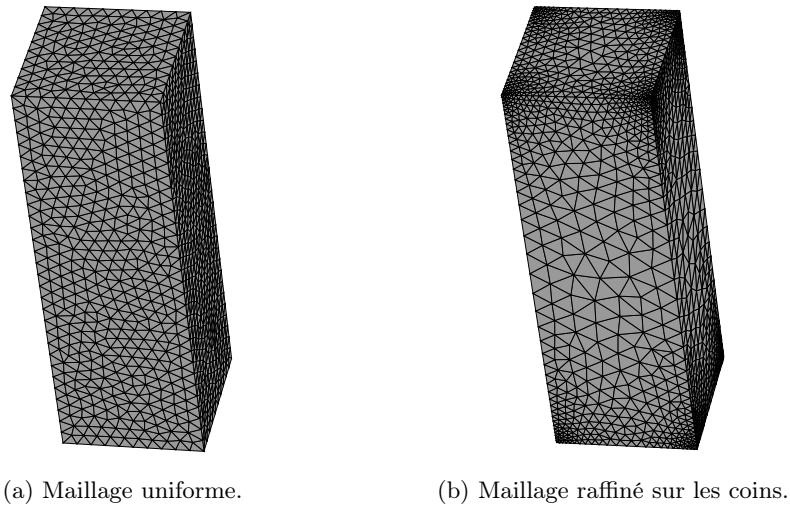


FIGURE 1.13 – Maillages utilisés pour le problème de la poutre.

Le problème magnétostatique est résolu par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire magnétique (1.65). Premièrement, le maillage uniforme est considéré, et le problème est résolu numériquement par les approches en collocation aux nœuds du maillage (1.69) (MIVCol) et de Galerkin (1.73) où 4 points de Gauss par tétraèdre sont utilisés pour les intégrations numériques (MIVGal4). La visualisation des résultats de l'induction magnétique calculée par les deux approches est présentée en FIGURE 1.14.

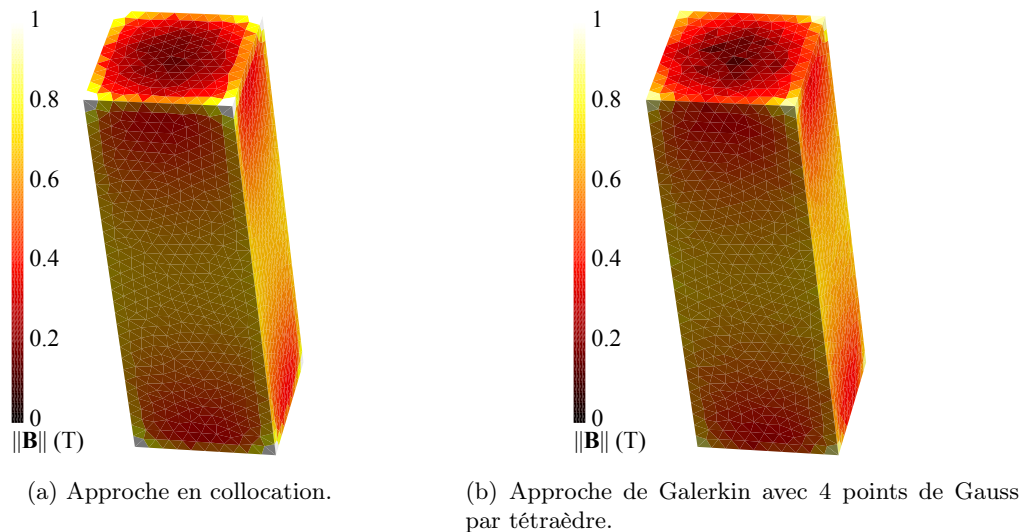


FIGURE 1.14 – Visualisation des résultats pour la norme de l'induction magnétique \mathbf{B} avec le maillage uniforme.

Les résultats obtenus sont comparés à une solution de référence calculée par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel commercial Flux[®] [Flux3d, 2013] sur un maillage raffiné du deuxième ordre. Afin de visualiser une grandeur représentative des solutions obtenues par une courbe, la FIGURE 1.15a fournit pour chaque approche les densités moyennes du flux d'induction magnétique à travers des sections de la poutre situées le long de l'axe z . Les écarts relatifs des résultats par rapport à ceux obtenus par la méthode des éléments finis sont présentés FIGURE 1.15b.

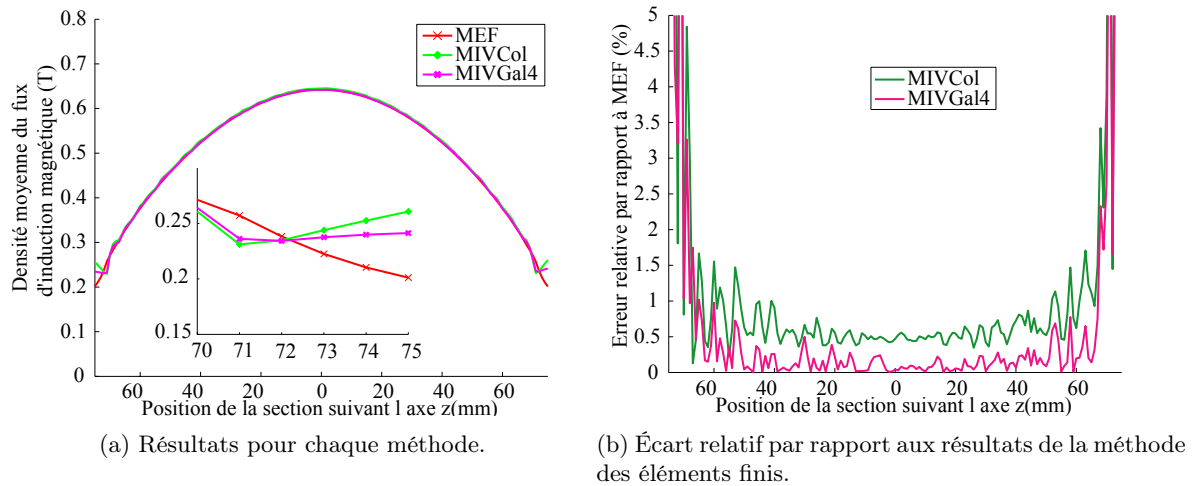
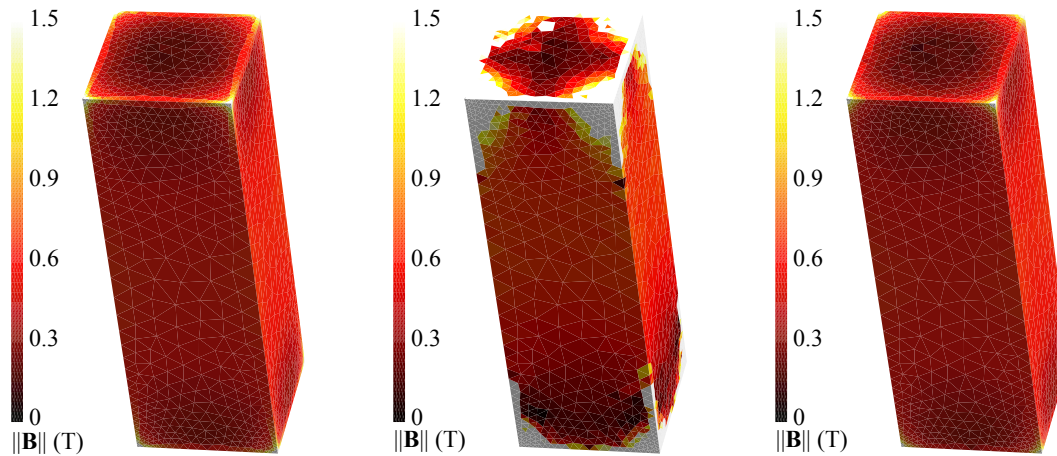


FIGURE 1.15 – Comparaison des résultats sur l'évolution de la composante normale moyenne de l'induction magnétique \mathbf{B} en fonction de la position de la section suivant l'axe z .

Ces résultats montrent que pour un maillage uniforme les approches en collocation et de Galerkin donnent des résultats relativement proches de ceux obtenus avec la méthode des éléments finis, avec un écart relatif inférieur à 2% sauf aux coins de la poutre (FIGURE 1.15b). En effet, les résultats montrent une forte concentration du champ magnétique au voisinage des coins, illustrée par l'agrandissement de la FIGURE 1.15a. Ce comportement s'explique par la singularité géométrique des degrés de liberté (aux nœuds du maillage) situés sur les coins, où le champ magnétique calculé tend vers l'infini. L'approche en collocation y est particulièrement sensible car l'équation (1.65) est calculée aux n nœuds du maillage. L'approche de Galerkin atténue ce comportement, car au lieu de résoudre l'équation (1.65) directement aux nœuds du maillage, elle est évaluée aux points de Gauss des éléments du maillage. La méthode des éléments finis est également sensible à ces singularités, c'est pourquoi cela n'a pas de sens de comparer les résultats sur les coins de la géométrie.

Afin d'améliorer la qualité des résultats sur les coins, le second maillage est maintenant utilisé. Le problème est résolu numériquement par les approches précédentes ainsi qu'une seconde approche de Galerkin avec 15 points de Gauss pour les intégrations numériques sur les tétraèdres (MIVGal15). La visualisation des résultats concernant l'induction magnétique est présentée en FIGURE 1.16. Le raffinement du maillage sur les coins a pour effet d'accroître la concentration du champ magnétique calculée pour les degrés de liberté situés sur les coins de la poutre, mais comme cet effet agit sur des éléments du maillage de plus petite dimension, l'influence sur le résultat est moindre. On constate également que l'approche de Galerkin avec 4 points de Gauss donne des résultats incohérents pour ce maillage. En effet, si les domaines d'intégration des deux intégrales de l'équation (1.72) sont deux éléments du maillage proche l'un par rapport à l'autre mais de dimension différentes, alors 4 points de Gauss ne suffisent plus pour

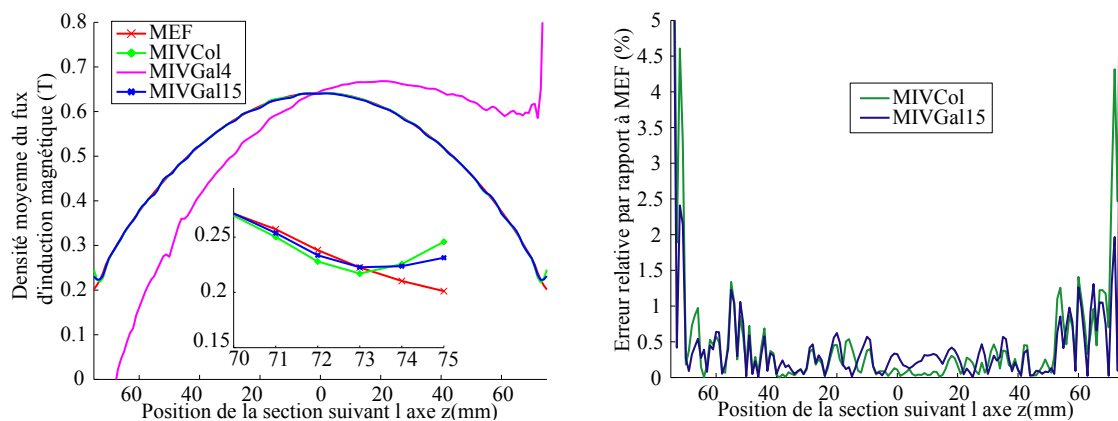


(a) Approche en collocation. (b) Approche de Galerkin avec 4 points de Gauss par tétraèdre. (c) Approche de Galerkin avec 15 points de Gauss par tétraèdre.

FIGURE 1.16 – Visualisation des résultats pour la norme de l’induction magnétique \mathbf{B} avec le maillage raffiné sur les coins.

approximer correctement la double intégrale. L’approche de Galerkin avec 15 points de Gauss donne un résultat cohérent, car le nombre de points de Gauss est plus élevé.

La FIGURE 1.17a fournit pour chaque approche les densités moyennes du flux d’induction magnétique à travers des sections de la poutre situées le long de l’axe z . Les écarts relatifs des résultats par rapport à ceux obtenus par la méthode des éléments finis sont présentés sur la FIGURE 1.17b. A part la simulation avec l’approche en Galerkin avec 4 points de Gauss, les résultats obtenus montrent que l’utilisation du second maillage raffiné sur les coins de la poutre améliore la qualité des résultats. L’écart relatif avec le résultat de la méthode des éléments finis de référence (FIGURE 1.15b) est maintenant inférieure à 1.5% hors coins.



(a) Résultats pour chaque méthode.

(b) Écart relatif par rapport aux résultats de la méthode des éléments finis.

FIGURE 1.17 – Comparaison des résultats sur l’évolution de la composante normale moyenne de l’induction magnétique \mathbf{B} en fonction de la position de la section suivant l’axe de la poutre.

Intéressons nous maintenant au temps nécessaire pour construire les matrices d'interaction $[A]$ ou $[C]$ lors de la résolution des systèmes matriciels (1.69) et (1.73) en fonction de l'approche utilisé (TABLEAU 1.2). L'approche en collocation nécessitent l'évaluation de l'intégrale I_e (1.84) à chaque nœud du maillage, tandis que l'approche de Galerkin nécessite son évaluation sur les points de Gauss de chaque élément du maillage du fait de la double intégration. C'est pourquoi l'approche en collocation est beaucoup plus légère que celle de Galerkin en terme de temps de calcul.

Approches	Maillage uniforme	Maillage raffiné aux coins
Collocation	2min	1min 53s
Galerkin avec 4 points de Gauss	1h 37min 17s	1h 7min 53s
Galerkin avec 15 points de Gauss	-	17h 12min 6s

TABLEAU 1.2 – Durée de l'assemblage de la matrice d'interaction.

En conclusion de cette application, la formulation intégrale de volume en potentiel fournit des résultats comparables à ceux issus de la méthode des éléments finis sans avoir besoin de mailler l'air, mais est assez sensible aux effets de bords. L'approche de Galerkin est plus précise mais présente deux inconvénients. Le premier est la nécessité d'adapter le nombre de points de Gauss, ou de revoir la stratégie de calcul des interactions pour des maillages non uniformes. Le second est le temps d'assemblage exorbitant de la matrice d'interaction. C'est pourquoi, malgré une précision moindre mais acceptable, l'approche en collocation est préférée par la suite.

1.6 Conclusion

Ce premier chapitre a permis de présenter les équations associées aux problèmes magnétostatiques, notamment celles conduisant aux équations intégrales de volume. Les principales méthodes numériques pour ce type de problème ont été présentées et les formulations différentielles ont été écartées au profit des formulations intégrales ne nécessitant pas le maillage de l'air. Cependant, ces dernières ont pour inconvénients de conduire à des matrices pleines. Parmi les formulations intégrales, le choix s'est porté sur une formulation intégrale de volume utilisant le potentiel scalaire magnétique comme inconnue où les degrés de liberté sont scalaires et portés par les nœuds du maillage. Dans le cas linéaire, la mise sous forme matricielle a été menée selon deux approches, en collocation aux nœuds du maillage et de Galerkin. Une application a permis de valider les résultats obtenus par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire avec les deux approches précédentes, en comparant leurs résultats avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis. On a pu également conclure que l'approche en collocation est suffisante car celle de Galerkin est trop gourmande en temps de calcul et la stratégie de calcul des termes de la matrice d'interaction est influencée par le maillage. Lors de l'étape de post-traitement, les différentes façons de calculer le potentiel scalaire et le champ magnétiques ont été abordées. Dans l'air, le choix n'est pas possible, tandis que dans le matériau deux choix sont possibles. Il faut alors faire des compromis entre la précision, le coût en terme de calculs et les équations vérifiées. Dans le chapitre suivant, on ira plus loin dans la formulation intégrale de volume en potentiel en considérant le cas non linéaire et des techniques de compression afin d'optimiser l'espace mémoire et le temps de calcul.

Chapitre 2

Prise en compte de la non linéarité et techniques de compression

La première partie de ce second chapitre est dédiée à la prise en compte du comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques. A cette fin, la méthode de Newton-Raphson est détaillée afin de résoudre un problème magnétostatique non linéaire par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire. Cette méthode est ensuite appliquée à un problème de référence, pour lequel une comparaison expérimentale est possible. Les limites de la formulation sont alors mises en valeur : le temps d'assemblage et le stockage mémoire des matrices d'interaction pleines.

La seconde partie aborde l'utilisation d'une technique de compression afin de réduire les coûts en temps de calcul et en mémoire, requis respectivement par l'assemblage et le stockage des matrices d'interaction. Celle utilisant la méthode d'approximation en croix adaptative est alors présentée dans le cadre de la formulation intégrale de volume. Les performances de cette méthode sont ensuite analysées sur l'application de la première partie.

2.1 Prise en compte de la non linéarité

Considérons le problème de recherche de zéros d'une fonction de plusieurs variables réelles suivant : trouver le vecteur \mathbf{X} , tel que

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

où \mathbf{R} est une fonction vectorielle continue. Les approches classiques pour résoudre des problème du type (2.1) sont les méthodes de Newton-Raphson et du point fixe [Dedieu, 2006].

2.1.1 Méthode de Newton-Raphson

2.1.1.1 Principe

Supposons que la fonction \mathbf{R} soit également dérivable, la méthode de Newton-Raphson repose sur le développement en série de Taylor à l'ordre 1 de la fonction \mathbf{R} en \mathbf{Y} :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) \approx \mathbf{R}(\mathbf{Y}) + [J(\mathbf{X})](\mathbf{X} - \mathbf{Y}), \quad (2.2)$$

où $[J(\mathbf{X})]$ est la matrice jacobienne de la fonction \mathbf{R} définie par :

$$(J(\mathbf{X}))_{ij} = \frac{\partial R_j(\mathbf{X})}{\partial X_i}. \quad (2.3)$$

Ainsi, une approximation du zéro de la fonction \mathbf{R} (2.1) peut être obtenue à partir du développement (2.2), en résolvant : trouver le vecteur \mathbf{X} , tel que :

$$[J(\mathbf{X})](\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = -\mathbf{R}(\mathbf{Y}). \quad (2.4)$$

L'erreur faite par l'approximation (2.4) est d'autant plus faible que le vecteur \mathbf{Y} est proche du zéro de la fonction (2.1).

La méthode de Newton-Raphson consiste à construire la suite récurrente \mathbf{X}^k , définie par une valeur initiale \mathbf{X}_0 et par la relation (2.4) en prenant le vecteur \mathbf{Y} comme étant la valeur de la suite à l'itération précédente. La suite \mathbf{X}^k est ainsi construite par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}^0 = \mathbf{X}_0 \\ [J(\mathbf{X}^k)] \Delta \mathbf{X}^k = -\mathbf{R}(\mathbf{X}^k) \\ \mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \Delta \mathbf{X}^k, \forall k \geq 0 \end{array} \right., \quad (2.5)$$

On considère que la suite (2.5) a convergé lorsqu'un critère d'arrêt est vérifié.

Avantage :

- La méthode converge généralement en peu d'itérations.
- La convergence est quadratique au voisinage de la solution.

Inconvénients :

- La méthode peut ne pas converger si :
 - la valeur initiale conduit à des cycles infinis \mathbf{H} [Neagoe and Ossart, 1994].
 - la matrice jacobienne est singulière (présence d'un extrémum local).
- La matrice jacobienne doit être calculée à chaque itération.

Lorsque la méthode ne converge pas, un coefficient de sous relaxation peut être ajouté dans la construction de la suite (2.5), telle que :

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \xi \Delta \mathbf{X}^k, \forall k \geq 0, \quad (2.6)$$

avec ξ un coefficient compris entre 0 et 1.

2.1.1.2 Utilisation pour la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire

La loi de comportement magnétique du matériau ferromagnétique (1.41) est maintenant considérée non linéaire. Considérant des matériaux magnétiques isotropes et sans hystérésis, la susceptibilité magnétique χ peut être décrite par une quantité scalaire ne dépendant que de la norme du champ magnétique. La loi de comportement s'écrit alors :

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \chi(\|\mathbf{H}\|) \mathbf{H}. \quad (2.7)$$

Le problème magnétostatique est résolu par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire avec l'approche en collocation aux nœuds du maillage (1.68). L'approximation du potentiel scalaire magnétique $\tilde{\Phi}$ est construite par la relation (1.62). Soit Φ le vecteur des degrés de liberté de $\tilde{\Phi}$. Le vecteur Φ_0 est composé des degrés de liberté du potentiel scalaire magnétique source $\tilde{\Phi}_0$ obtenu par la résolution du système matriciel (1.81).

Le problème à résoudre (1.68) est un problème de recherche du zéro d'une fonction : trouver Φ , tel que :

$$\mathbf{R}(\Phi) = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

où \mathbf{R} est le résidu défini par :

$$R_i(\Phi) = \Phi_i - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \frac{\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}')) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' - \Phi_{0i}, \quad (2.9)$$

avec l'aimantation \mathbf{M} construite par la relation (2.7) et le champ magnétique $\tilde{\mathbf{H}}$ obtenu d'après la discrétisation (1.62) par :

$$\tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}) = - \sum_{i=1}^{n_n} \nabla \alpha_i(\mathbf{r}) \Phi_i. \quad (2.10)$$

La méthode de Newton-Raphson est appliquée au problème (2.8). La matrice jacobienne (2.3) associée au résidu (2.9) s'écrit :

$$(J(\Phi))_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \frac{\partial \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}'))}{\partial \Phi_j} \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' - \Phi_{0i}. \quad (2.11)$$

Le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}'))}{\partial \Phi_j} = \left[\frac{\partial \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}'))}{\partial \mathbf{H}} \right] \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}')}{\partial \Phi_j}, \quad (2.12)$$

où $\left[\frac{\partial \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}'))}{\partial \mathbf{H}} \right]$ est la matrice de la susceptibilité incrémentale. Pour un champ magnétique \mathbf{H} donné, cette matrice est définie par :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} \right)_{ij} = \chi(\|\mathbf{H}\|) \delta_{ij} + \frac{H_i H_j}{\|\mathbf{H}\|} \frac{d\chi(\|\mathbf{H}\|)}{d\|\mathbf{H}\|}. \quad (2.13)$$

Puisque $\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \Phi_j} = \mathbf{0}$ et d'après la relation (2.10), la dérivée $\frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}')}{\partial \Phi_j}$ (2.12) vaut :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}')}{\partial \Phi_j} = -\nabla \alpha_j(\mathbf{r}'). \quad (2.14)$$

En utilisant l'expression précédente (2.14), l'équation (2.12) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}'))}{\partial \Phi_j} = - \left[\frac{\partial \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}'))}{\partial \mathbf{H}} \right] \nabla \alpha_j(\mathbf{r}'). \quad (2.15)$$

En utilisant la relation (2.15), la matrice jacobienne (2.11) est exprimée par :

$$(J(\Phi))_{ij} = \delta_{ij} + \int_{\Omega_f} \left[\frac{\partial \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{H}}(\Phi, \mathbf{r}'))}{\partial \mathbf{H}} \right] \nabla \alpha_j \cdot \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} d\Omega'. \quad (2.16)$$

Afin d'alléger les notations, on introduit les matrices d'interaction $[A(\chi)]$ et $\left[A \left(\left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right] \right) \right]$, qui pour des valeurs de χ et $\left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right]$ données, sont définies par :

$$(A(\chi))_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \chi(\mathbf{r}') \frac{\nabla \alpha_j(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} d\Omega', \quad (2.17)$$

$$\left(A \left(\left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right] \right) \right)_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right] (\mathbf{r}') \nabla \alpha_j (\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} d\Omega'. \quad (2.18)$$

En utilisant les développements précédents, l'algorithme de la méthode de Newton-Raphson appliquée à la résolution du problème magnétostatique non linéaire par la formulation intégrale de volume est présenté sur la FIGURE 2.1.

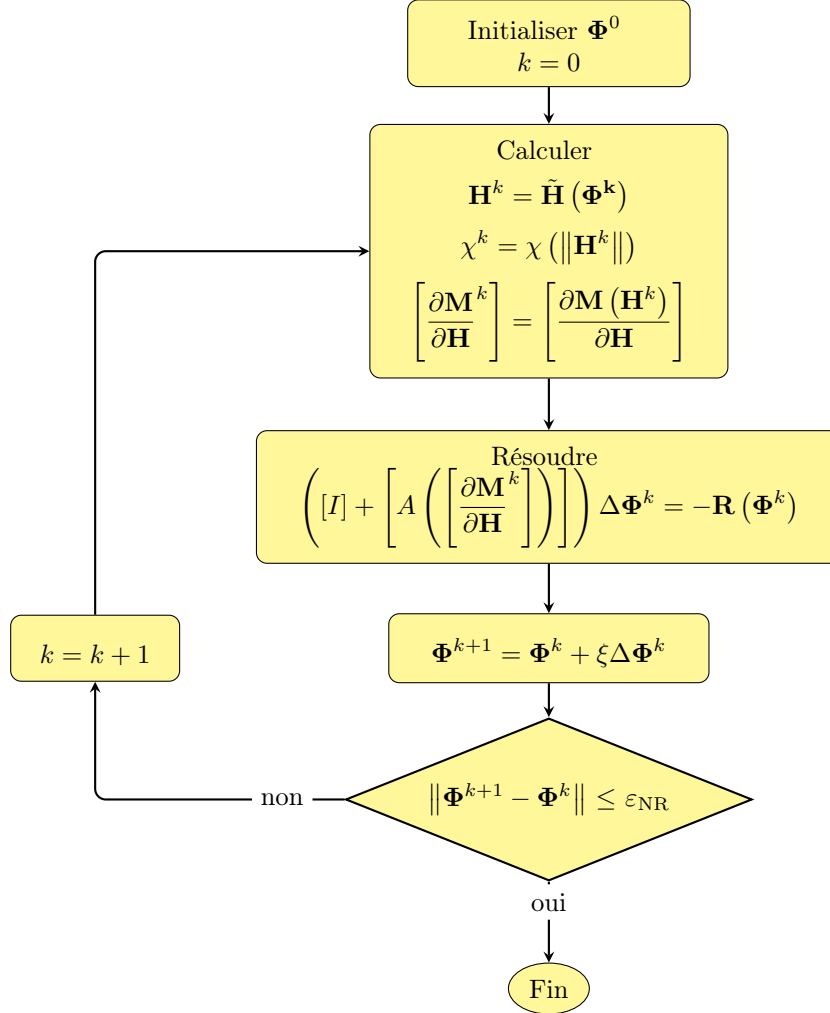


FIGURE 2.1 – Algorithme de la méthode de Newton-Raphson pour la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire.

A chaque itération k de la méthode de Newton-Raphson (FIGURE 2.1), un système d'équations linéaires doit être résolu : trouver $\Delta\Phi^k$, tel que :

$$[J(\Phi^k)] \Delta\Phi^k = -\mathbf{R}(\Phi^k). \quad (2.19)$$

La matrice principale du système (2.19) est une matrice d'interaction du type (2.18) issue du calcul du Jacobien (2.16). Cette matrice est pleine et doit être stockée en mémoire et assemblée à chaque itération, ce qui peut être coûteux en temps de calcul ainsi qu'en espace mémoire.

2.1.2 Quelques remarques sur la méthode du point fixe

Une méthode classique pour résoudre un problème du type (2.1) est de se ramener à un problème de recherche du point fixe d'une fonction de plusieurs variables réelles : trouver le vecteur \mathbf{X} , tel que :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}, \quad (2.20)$$

où \mathbf{Q} est une fonction vectorielle continue. Si la fonction \mathbf{Q} est contractante¹, on peut montrer que son point fixe est unique et que la suite \mathbf{X}^k construite par :

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{Q}(\mathbf{X}^k), \quad \forall k \geq 0, \quad (2.21)$$

converge vers ce point fixe [Dedieu, 2006]. De plus, si la fonction \mathbf{Q} est définie telle que :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}) = [\beta] \mathbf{R}(\mathbf{X}) + \mathbf{X}, \quad (2.22)$$

où $[\beta]$ est une matrice inversible, alors ce point fixe est également le zéro de la fonction \mathbf{R} .

Avantage :

- La méthode converge inconditionnellement.

Inconvénient :

- La convergence de la méthode est généralement lente.

La méthode du point fixe peut être appliquée aux différentes formulations intégrales de volume présentées dans le premier chapitre. A chaque itération, la construction de la suite (2.21) peut se faire à partir de l'inconnue de la formulation [Hafila et al., 2006b] ou à partir de la susceptibilité magnétique χ [Han et al., 1994] [Hafila et al., 2006a]. La méthode du point fixe présente l'avantage de ne pas nécessiter l'assemblage d'une matrice d'interaction à chaque itération.

La méthode du point fixe modifiée, où de nouvelles variables sont introduites [Ossart and Ionita, 1999], peut également être utilisée. Ainsi, la loi de comportement magnétique (1.40) peut s'écrire sous la forme [Canova and Repetto, 2001] :

$$\mathbf{M} = \chi_{\text{PF}} \mathbf{H} + \mathbf{S}, \quad (2.23)$$

où la non linéarité est contenue dans la variable \mathbf{S} et χ_{PF} est une constante associée à une susceptibilité fictive de point fixe. La constante χ_{PF} contrôle la convergence de la méthode du point fixe [Dlala and Arkkio, 2008] et doit être choisie afin que la fonction définie par :

$$\mathbf{H} \mapsto \mathbf{M}(\mathbf{H}) - \chi_{\text{PF}} \mathbf{H} \quad (2.24)$$

soit contractante.

Pour un problème magnétostatique, une analogie avec la méthode de polarisation [Hantila et al., 2000] permet de résoudre le problème (2.1) en prenant l'inconnue \mathbf{X} comme étant la variable \mathbf{S} (2.23) et le résidu \mathbf{R} comme étant la fonction :

$$\mathbf{R}(\mathbf{S}) = \mathbf{M}(\mathbf{H}(\mathbf{S})) - \chi_{\text{PF}} \mathbf{H}(\mathbf{S}) - \mathbf{S}. \quad (2.25)$$

1. Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite contractante si

$$\exists k \in]0, 1[\quad \|f(x) - f(y)\|_F < k \|x - y\|_E, \quad \forall (x, y) \in E^2,$$

Lorsque cette méthode est appliquée à la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire magnétique, il faut à chaque itération k , résoudre un système matriciel de la forme : trouver Φ^k , tel que :

$$([I] + [A(\chi_{\text{PF}})]) \Phi^k = \Phi_0 + \mathbf{T}^k, \quad (2.26)$$

avec

$$T_i^k = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \frac{\mathbf{S}^k \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} d\Omega', \quad (2.27)$$

où \mathbf{S}^k est la suite (2.21) construite par la méthode du point fixe modifiée.

Cette dernière méthode requiert l'assemblage d'une seule matrice d'interaction $[A(\chi_{\text{PF}})]$ (2.26). C'est pourquoi, une fois celle-ci assemblée et stockée, chaque itération s'effectue rapidement. La méthode du point fixe modifiée et celle de Newton-Raphson ont été appliquées à la résolution d'un problème magnétostatique non linéaire [Carpentier et al., 2013]. D'après les résultats, nous avons pu constater que dans certains cas la méthode de Newton-Raphson est plus rapide que la méthode du point fixe modifiée, notamment lorsque le matériau ferromagnétique est fortement saturé. En effet, dans ce cas la convergence de la méthode du point fixe modifiée est très lente. C'est pourquoi, nous avons choisi de privilégier la méthode de Newton-Raphson pour la suite.

2.1.3 Application : TEAM Problem 13

Le TEAM (Testing Electromagnetic Analysis Methods) Problem 13 est un problème magnétostatique non linéaire de référence [Team Problem 13, 2013] qui permet de confronter les résultats expérimentaux à ceux issus de simulations numériques. Le modèle (FIGURE 2.2) est constitué d'une plaque d'acier placée au centre d'une bobine et entre deux culasses d'acier en forme de U qui entourent la bobine. Cette dernière est alimentée par un courant valant 1000 AT.

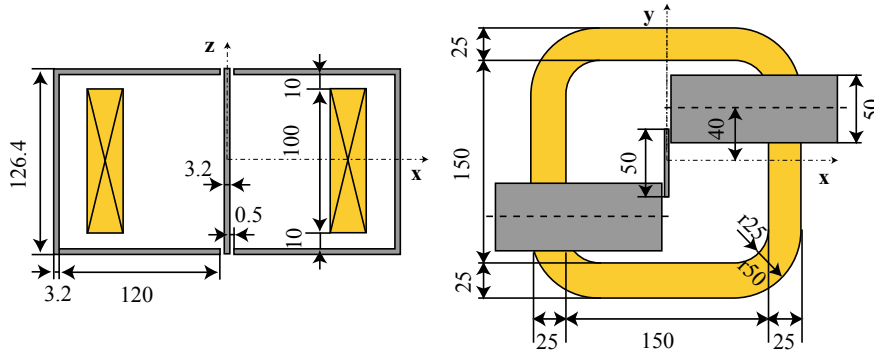


FIGURE 2.2 – Description du TEAM Problem 13.

Le comportement magnétique des plaques d'acier est non linéaire et sa caractéristique est définie dans la présentation du problème [Team Problem 13, 2013] et illustrée par la FIGURE 2.3. Les résultats expérimentaux fournissent les densités moyennes du flux de l'induction magnétique à travers des sections de la plaque et des culasses d'acier situées le long des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ (FIGURE 2.4). Les valeurs expérimentales de la norme de l'induction magnétique le long du segment $[GH]$ situé dans l'air sont également données.

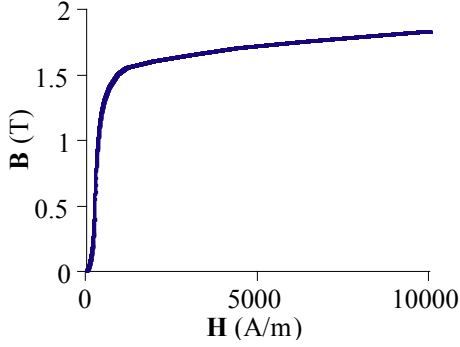


FIGURE 2.3 – Loi de comportement magnétique.

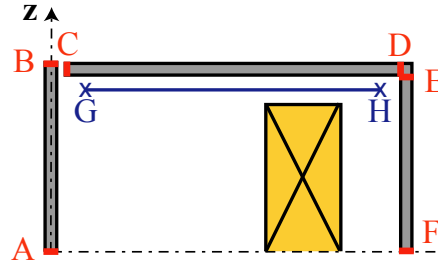


FIGURE 2.4 – Sections et points de calcul.

Plusieurs des formulations intégrales de volume présentées dans le premier chapitre ont été appliquées à la résolution de ce problème [Kettunen et al., 1994a] [Vishnevsky et al., 2002] [Morandi et al., 2010] ... La référence [Nakata et al., 1995] présente les résultats obtenus par différents codes développés par des équipes de recherche.

Nous proposons de résoudre ce problème à l'aide de la méthode de Newton-Raphson (NR) appliquée à la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire (FIGURE 2.1). Un coefficient de relaxation ξ (2.6) est utilisée lors de la construction de la suite afin d'améliorer la convergence. Il est possible de chercher la valeur optimale de ce coefficient, en minimisant le résidu $\mathbf{R}(\mathbf{X}^{k+1})$ [Fujiwara et al., 2005]. Nous avons choisi d'utiliser un coefficient de relaxation constant et des essais ont donné une convergence relativement rapide pour $\xi = 0.6$. Le critère d'arrêt de la méthode de Newton-Raphson est pris tel que :

$$\|\mathbf{B}^k - \mathbf{B}^{k-1}\|_{\infty} < \varepsilon_{\text{NR}}, \quad (2.28)$$

où \mathbf{B}^k et \mathbf{B}^{k-1} sont les inductions magnétiques calculées respectivement aux itérations k et $k-1$ et $\|\cdot\|_{\infty}$ est la norme infinie². La valeur du critère ε_{NR} est fixée 0.001T.

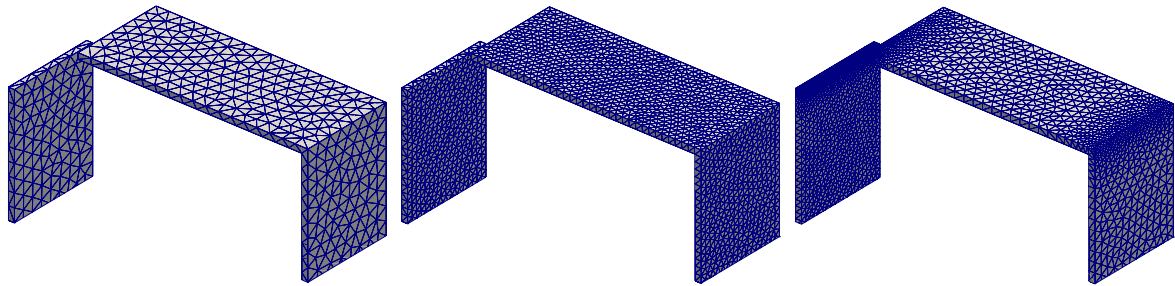
La géométrie de ce problème est caractérisée par une très faible épaisseur comparée à ses autres dimensions. Il faut alors être attentif à la qualité du maillage utilisée. C'est pourquoi trois maillages sont envisagés (FIGURE 2.5). Le premier maillage (FIGURE 2.5a) est uniforme et constitué de 9239 tétraèdres, ce qui implique une qualité médiocre du maillage avec un ratio relativement élevé entre les dimensions de chaque élément. Le second maillage (FIGURE 2.5b) est également uniforme et constitué de 31233 tétraèdres, ce qui permet d'avoir un maillage de meilleure qualité où les éléments se rapprochent de la géométrie idéale du tétraèdre régulier. Le troisième maillage (FIGURE 2.5c) est raffiné dans les coins de la géométrie ainsi que dans les zones à faible entrefer. Ce maillage est constitué de 30200 tétraèdres.

L'induction magnétique calculée par la méthode précédente et en utilisant le troisième maillage (FIGURE 2.5c) est présentée sur la FIGURE 2.6.

Les résultats obtenus sont confrontés aux valeurs expérimentales pour les densités moyennes du flux de l'induction magnétique à travers des sections de plaques d'acier (FIGURE 2.7), ainsi que pour la norme de l'induction magnétique dans l'air (FIGURE 2.8). Ces résultats sont comparés en traçant leurs écarts relatifs par rapport aux valeurs expérimentales (FIGURE 2.9). Pour chaque maillage utilisé, les

2. La norme infinie d'une suite bornée (u_n) est définie par :

$$\|u_n\|_{\infty} = \sup_n |u_n|.$$



(a) 9239 éléments.

(b) 31233 éléments.

(c) 30200 éléments.

FIGURE 2.5 – Maillages utilisés pour le TEAM Problem 13 (partiellement représentés).

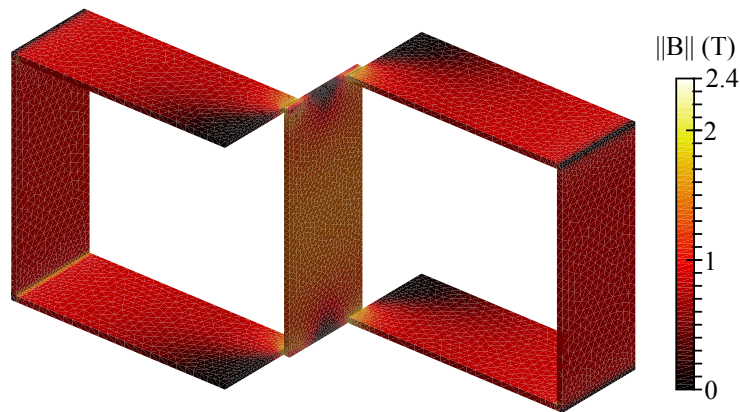


FIGURE 2.6 – Résultats de l'induction magnétique.

coûts moyens en temps de calcul pour l'assemblage d'une matrice d'interaction (2.17) ou (2.18) et pour effectuer une itération de la méthode de Newton-Raphson sont donnés dans le TABLEAU 2.1. Ce tableau fournit également la mémoire requise pour le stockage d'une matrice d'interaction pleine.

La FIGURE 2.7 montre que les résultats respectent l'allure de la courbe expérimentale sauf aux coins (positions D et E de la FIGURE 2.4), ceci certainement à cause des singularités géométriques. Les écarts relatifs entre les résultats calculés et expérimentaux (FIGURE 2.9) montrent que le maillage avec 30200 conduit aux meilleurs résultats. En effet, contrairement aux deux autres maillages, celui-ci est raffiné dans les zones où la géométrie présente un faible entrefer qui concentre le flux magnétique.

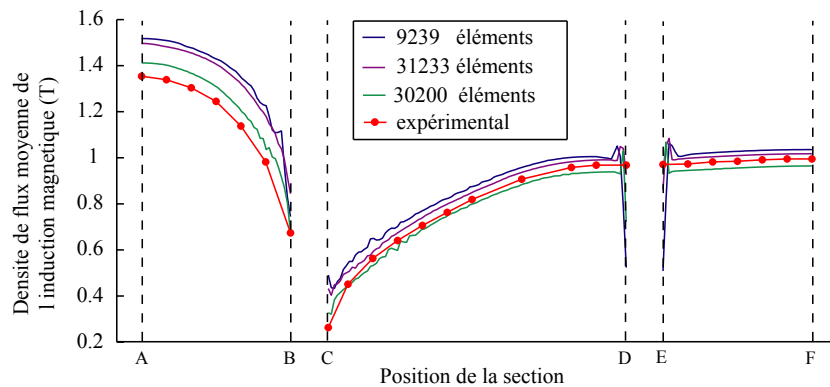


FIGURE 2.7 – Résultats de l'induction magnétique dans le domaine ferromagnétique.

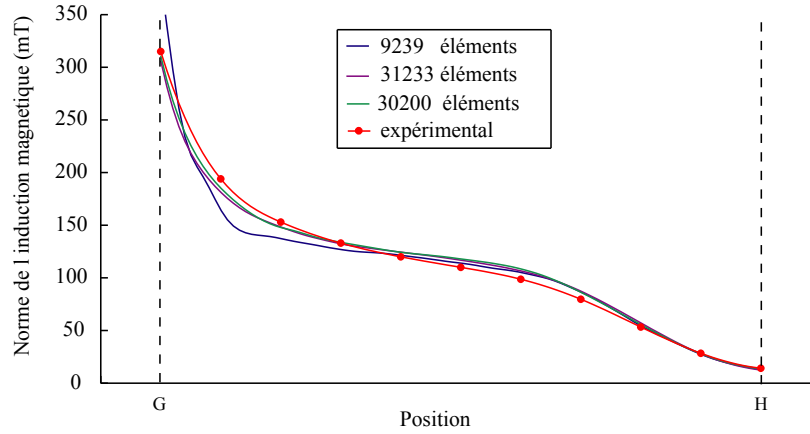
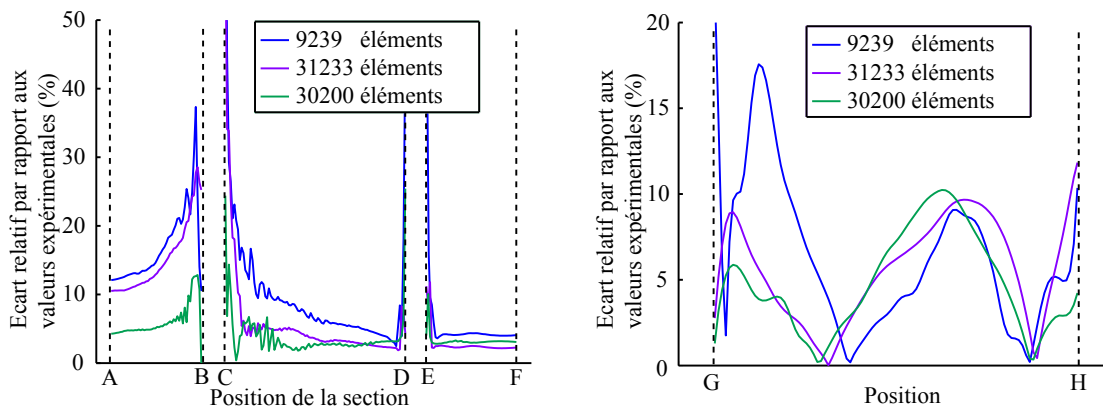


FIGURE 2.8 – Résultats de l'induction magnétique dans l'air.



(a) Densité de flux moyenne de l'induction magnétique.

(b) Norme de l'induction magnétique dans l'air.

FIGURE 2.9 – Résultats obtenus sur le TEAM Problem 13.

Concernant le calcul de l'induction magnétique dans l'air (FIGURE 2.8), les résultats semblent converger vers une courbe ayant un point d'inflexion différent dans la deuxième moitié du segment $[GH]$. C'est pourquoi les écarts relatifs entre les résultats calculés et les valeurs expérimentales (FIGURE 2.9) ne s'améliorent pas dans cette zone avec les maillages étudiés. Ce comportement se retrouve dans la littérature [Young and Gedney, 2011] [Nakata et al., 1995], on suppose qu'il s'agisse d'une erreur de mesure ou une différence entre le dispositif réel et sa représentation.

Les résultats obtenus sont fortement influencés par le choix du maillage. En effet, un maillage raffiné dans les zones où la géométrie présente un faible entrefer permet une amélioration des résultats. De plus, il serait opportun d'augmenter le nombre de couches d'éléments dans la plaque et les culasses d'acier. Cependant, le TABLEAU 2.1 montre que le besoin en mémoire de la méthode de Newton-Raphson est essentiellement dû au stockage de la matrice jacobienne (2.18) pour la résolution du système (2.19) à chaque itération. L'espace mémoire disponible doit alors être suffisant afin de stocker cette matrice d'interaction pleine, ce qui limite le nombre de degrés de liberté traitable à la capacité mémoire de la machine. Concernant le coût en temps de calculs, il est principalement dû à l'assemblage de la matrice jacobienne (2.18) à chaque itération. Le reste du temps de calculs est associé aux résolutions des systèmes d'équations linéaires par un solveur itératif FGMRES et aux assemblages des résidus (2.9). Une

amélioration envisageable serait de profiter des deux symétries de la géométries (FIGURE 2.2) afin de mailler seulement un quart du domaine ferromagnétique et ainsi diviser par 4 le nombre de degrés de liberté. Le nombre de calculs et la mémoire requise respectivement pour l’assemblage et le stockage des matrices d’interaction pourraient alors être respectivement divisés par 4 et 16.

Nombre d’éléments du maillage	9239	31233	30200
Nombre de nœuds du maillage	3004	10281	10300
Nombre d’itérations de NR	11	11	12
Durée moyenne d’une itération de NR (s)	84	991	937
Temps moyen d’assemblage d’une matrice d’interaction (s)	67	800	759
Mémoire requise pour le stockage d’une matrice d’interaction (Mo)	72	846	849

TABLEAU 2.1 – Coûts en mémoire et en temps de calcul pour la résolution du TEAM Problem 13 (PC avec un processeur Intel Core I7 2630 QM 2.0 GHz).

En conclusion de cette partie, la méthode de Newton-Raphson a été utilisée afin de résoudre un problème magnétostatique non linéaire par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire. Les résultats obtenus ont été confrontés aux valeurs expérimentales et valident la méthode proposée. Les limitations issues de la formulation intégrale de volume ont été mises en évidence : à chaque itération de la méthode de Newton-Raphson (FIGURE 2.5), un système d’équations linéaires (2.19) dont la matrice principale est pleine doit être résolu. En effet, cette dernière fait intervenir une matrice d’interaction dont l’assemblage et le stockage mémoire conduisent à des temps de calculs et des besoins mémoires très importants. Ainsi, sans précaution particulière, les évolutions des coûts en temps de calcul et en espace mémoire, requis respectivement pour l’assemblage et le stockage d’une matrice d’interaction, sont en croissance parabolique par rapport au nombre de degrés de liberté. Ce dernier est ainsi rapidement limité par les capacités de la machine. Afin de palier à ces limitations, des techniques de compressions sont envisagées afin de traiter un nombre plus important de degrés de liberté.

2.2 Techniques de compression

2.2.1 Motivations

La résolution de problèmes magnétostatiques par la formulation intégrale de volume conduit à la résolution de systèmes matriciels, que ce soit dans le cas linéaire (1.69) ou intervenant dans la méthode de Newton-Raphson (2.19) dans le cas non linéaire. Ces systèmes matriciels font intervenir des matrices d’interaction pleines de taille $n \times n$, dans notre cas n est égal au nombre de nœuds du maillage. La mémoire nécessaire pour stocker une matrice pleine évolue en $\mathcal{O}(n^2)$ unité mémoire. Par exemple, considérons une matrice composée de nombres réels stockés en double précision, où 8 octets de mémoire sont nécessaires pour stocker chaque réel. Dans ce cas, un ordinateur ayant une mémoire vive de 1Go disponible ne pourra pas stocker une matrice pleine dont la taille dépasse 11180×11180 . Il s’agit d’une première limitation des formulations intégrales où la mémoire de l’ordinateur doit permettre le stockage d’une matrice d’interaction. Une seconde limitation est la nécessité de construire entièrement la matrice d’interaction et donc d’effectuer un nombre de calculs évoluant également en $\mathcal{O}(n^2)$. De plus, si un solveur itératif, dans notre cas FGMRES, est utilisé afin de résoudre les systèmes matriciels (1.69) dans le cas linéaire ou intervenant dans la méthode de Newton-Raphson (FIGURE 2.1) dans le cas non linéaire, il est nécessaire de réaliser des produits matrice-vecteur faisant intervenir les matrices d’interaction. Sans

précaution particulière, la complexité de ces produits évolue en $\mathcal{O}(n^2)$. Pour des problèmes avec un nombre important de degrés de liberté, des techniques de compression sont nécessaires afin de réduire la taille d'allocation d'espace mémoire et les temps de calcul. La section suivante présente un aperçu de quelques techniques rencontrées dans le cadre des formulations intégrales.

2.2.2 Quelques techniques de compression

La méthode multipolaire rapide (en anglais Fast Multipol Method, abrégé FMM), développée par Greengard et Rokhlin [Greengard and Rokhlin, 1987], est utilisée pour accélérer le calcul des interactions entre N corps. Son principe est d'approcher les interactions dues à des distributions lointaines à l'aide d'un développement en harmoniques sphériques tronqué. La méthode ne fournit pas directement une approximation de la matrice d'interaction, mais celle du produit matrice-vecteur associé. La méthode multipolaire rapide à multi-niveaux adaptatifs (abrégée MLFMM en anglais), qui utilise un partitionnement de la géométrie en plusieurs niveaux, permet d'obtenir des évolutions en $\mathcal{O}(n \log(n))$ de la mémoire requise et du coût en temps de calcul pour effectuer un produit matrice-vecteur [Song and Chew, 1995]. Cette méthode est considérée comme l'une des méthodes de compression les plus efficaces. Néanmoins, son implémentation est intrusive au niveau du code de calcul et nécessite parfois des développements assez lourds. Des travaux du G2Elab ont été menés sur la MLFMM dans le cadre de méthode PEEC [Ardon, 2010] avec la perspective d'utiliser les FMM dans le cadre des formulations intégrales de volume.

La méthode de compression par ondelettes, développée par Morlet [Morlet et al., 1982], est couramment utilisée dans le domaine de la compression d'image. Ses avantages sont qu'elle ne nécessite pas d'intervention au niveau de l'assemblage de la matrice d'interaction et qu'elle se prête bien à la parallélisation [Bernabe et al., 2009]. Elle permet également d'obtenir des évolutions de la mémoire requise et du coût en temps de calcul pour effectuer un produit matrice-vecteur en $\mathcal{O}(n \log(n))$ [Rubeck, 2012]. De plus, il s'agit d'une méthode purement algébrique, dont l'implémentation est peu intrusive. L'inconvénient est que toute la matrice d'interaction doit être calculée, ainsi la complexité de son assemblage est toujours parabolique. Des travaux ont été menés au sein du G2Elab sur l'application de cette méthode de compression à une formulation intégrale en potentiel scalaire pour un problème d'électrostatique avec calcul de la matrice d'interaction sur carte graphique [Rubeck, 2012].

La méthode d'approximation en croix adaptative (Adaptive Cross Approximation en anglais, abrégé ACA), proposée par Bebendorf et Rjasanow [Bebendorf and Rjasanow, 2003], permet d'approximer des matrices d'interaction issues des équations intégrales, avec une précision contrôlée et sous certaines conditions de régularité du noyau. Couplée avec les matrices hiérarchiques [Hackbusch, 1999], elle se base sur l'approximation de sous blocs d'une matrice d'interaction représentant des interactions lointaines, par des matrices de rang faible. Ses avantages sont qu'elle ne nécessite pas de connaître en totalité la matrice d'interaction mais uniquement de savoir générer une ligne ou une colonne. La méthode permet d'obtenir des évolutions de la mémoire requise et des coûts en temps de calcul pour son assemblage et pour le produit matrice-vecteur en $\mathcal{O}(n \log(n))$ [Zhao et al., 2005]. De plus, il s'agit d'une méthode purement algébrique, dont l'implémentation est peu intrusive.

Le choix de la technique de compression n'est pas le propos de cette thèse. Nous avons choisi de nous intéresser à la méthode d'approximation en croix adaptative. Cette méthode a un fort potentiel concernant son domaine d'application. En effet, elle permet également d'approximer avec une précision contrôlée les opérations issues de l'algèbre des matrices, telles que les opérations arithmétiques ou l'inver-

sion. Cela permet par exemple de créer des outils performants pour le préconditionnement [Bebendorf, 2005]. La méthode ACA a été appliquée avec succès au sein du G2Elab pour des formulations intégrales de volume en magnéto et électrostatique [Le-Van, 2012]. Relativement récente, cette méthode fait l'objet de développement important [Börm and Grasedyck, 2005].

Ainsi, afin de réduire les coûts en espace mémoire et en temps de calcul issus de la formulation intégrale de volume, la méthode d'approximation en croix adaptative est envisagée. Pour cela, les étapes nécessaires à son application afin de compresser une matrice d'interaction sont maintenant détaillées.

2.2.3 Matrice hiérarchique

Dans un premier temps, le domaine du problème doit être partitionné afin de restructurer la matrice d'interaction. Bien que l'utilisation d'une structure de données en arbre binaire serait préférable [Börm et al., 2005], nous avons choisi d'utiliser une structure de données en octree qui avait déjà été implémentée dans le cadre de la méthode multipolaire rapide [Nguyen, 2012].

Un octree est une structure de données récursive de type arbre dans laquelle chaque nœud peut compter jusqu'à huit nœuds fils [Gervautz and Purgathofer, 1988]. Dans notre cas, un nœud est une division de l'espace en cube (FIGURE 2.10). Afin d'éviter la confusion avec les nœuds du maillage, les nœuds de l'octree sont maintenant nommés cubes. Le niveau d'un octree est défini comme étant la profondeur de l'arbre, c'est à dire la distance entre la racine (unique cube n'ayant pas de cube père et qui contient tous les degrés de liberté du maillage) et les feuilles de l'arbre (cubes n'ayant pas de fils).

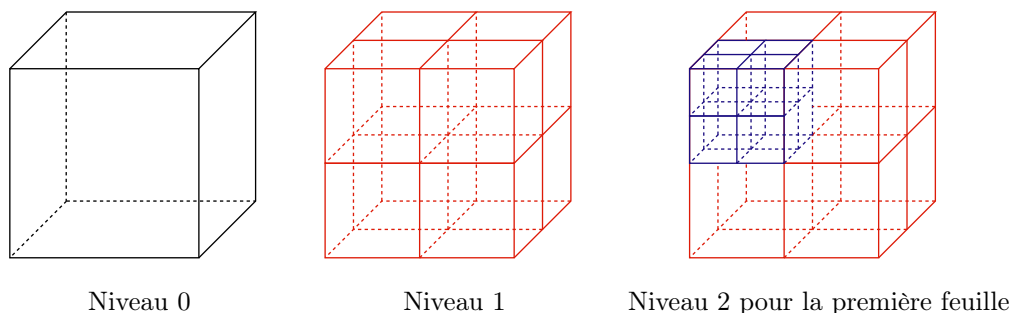


FIGURE 2.10 – Représentation de l'octree en fonction de son niveau.

L'exemple d'un octree de niveau 2 associé au maillage d'un contacteur est donné sur la FIGURE 2.11. Celui-ci a été construit à niveau fixé. Il est également possible de construire les niveaux de l'octree jusqu'à la vérification d'un critère (par exemple un nombre de degrés de liberté minimum dans chaque feuille).

Les degrés de liberté sont associés aux cubes de l'octree à l'aide d'un critère d'admissibilité. Les degrés de liberté sont ensuite renumérotés, afin d'avoir une numérotation continue dans chaque cube de l'octree et de restructurer la matrice. Cette restructuration de la matrice d'interaction pour le problème de contacteur est présentée sur la FIGURE 2.12. Cela se traduit par une organisation de la matrice d'interaction sous forme de blocs, grâce auxquels la régularité de la matrice est améliorée.

L'idée des matrices hiérarchiques (ou \mathcal{H} -matrices) est de faire apparaître à partir d'une matrice d'interaction $[A]$, des sous matrices associées à un noyau de l'intégrale suffisamment lisse pour que ces sous matrices puissent être approximées par des matrices de rang faible dont le stockage nécessite peu d'espace mémoire [Rjasanow and Steinbach, 2007].

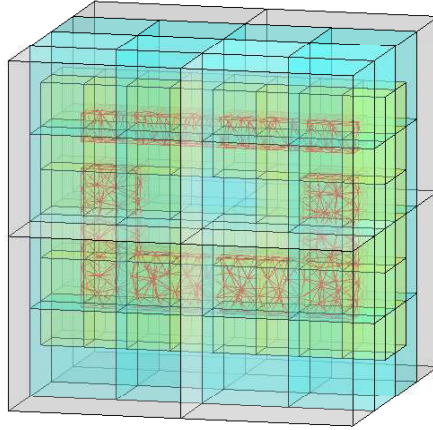


FIGURE 2.11 – Visualisation de l’octree pour le maillage d’un contacteur.

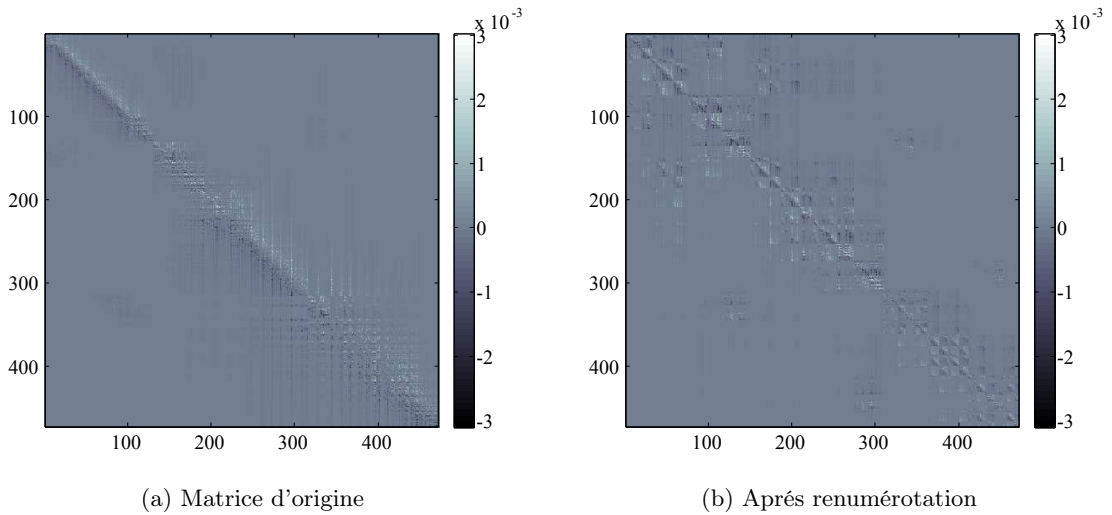


FIGURE 2.12 – Renumerotation de la matrice d’interaction.

L’octree est utilisé afin de faire apparaître des sous matrices rectangulaires $[A_{xy}]$ qui correspondent aux interactions entre les degrés de liberté associés aux cubes x et y . Il convient ensuite de définir un critère qui permet de caractériser l’interaction entre ces deux cubes. Ainsi, les cubes x et y sont considérés en interaction lointaine si :

$$(c_x + c_y) \frac{\sqrt{3}}{2} > |0_x 0_y|, \quad (2.29)$$

où c_x et c_y sont les cotés des cubes de centres 0_x et 0_y respectifs. Si le critère (2.29) n’est pas vérifié, les cubes x et y sont en interaction proche. Pour un octree donné, il existe une multitude de combinaison qui divise la matrice d’interaction en sous matrices rectangulaires $[A_{xy}]$, qui sont en interaction proche ou lointaine. Nous avons choisi de construire les sous matrices $[A_{xy}]$ telles que l’une des deux propriétés suivantes soit vérifiée :

- x et y sont deux feuilles en interaction proche.
- x et y sont deux cubes de même niveau en interaction lointaine, tels que l’un ne peut pas être en interaction lointaine avec un ancêtre de l’autre.

Une telle décomposition est appelée décomposition en matrice hiérarchique. Celle associée au problème du contacteur est présentée sur la FIGURE 2.13. Si l'on considère que le spectre de la matrice est l'image du comportement du noyau de l'intégrale, cette décomposition conduit à des blocs en interaction lointaine dont le noyau associé est lisse, contrairement aux blocs en interaction proche.

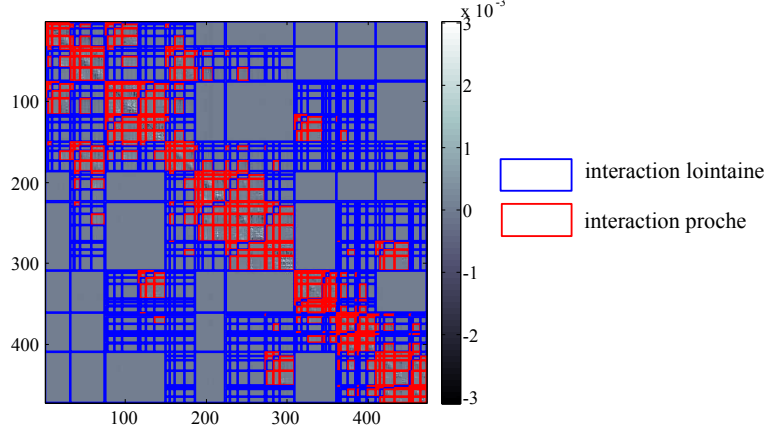


FIGURE 2.13 – Décomposition en matrice hiérarchique d'une matrice d'interaction.

Soit $[M]$ une matrice pleine de taille $l \times m$ et de rang $r = \min \{l, m\}$ associée à une interaction lointaine. Sous certaines conditions de régularité du noyau de l'intégrale, on peut supposer que si la matrice est associée à une interaction lointaine, alors le noyau de l'intégrale associée est suffisamment lisse pour qu'il puisse être approché à l'aide d'un développement en séries de Taylor tronqué [Börm et al., 2005]. La matrice $[M]$ peut alors être approximée par une matrice $[\tilde{M}]$, qui est le produit de deux matrices $[U]$ et $[V]$, respectivement de taille $l \times k$ et $k \times m$, tel que :

$$[M] \approx [\tilde{M}] = [U][V], \quad (2.30)$$

avec $k \leq r$. Tant que les matrices $[U]$ et $[V]$ sont construites telles que :

$$k \ll \frac{r}{2}, \quad (2.31)$$

leurs stockages nécessitent beaucoup moins d'espace mémoire que celui de la matrice $[M]$.

Si l'approximation (2.30) est appliquée à chaque sous matrice $[A_{xy}]$ représentant une interaction lointaine entre deux nœuds x et y de l'octree, on obtient une approximation $[\tilde{A}]$ de la matrice $[A]$ telle que :

$$\frac{\|[A] - [\tilde{A}]\|_F}{\|[A]\|_F} \leq \varepsilon, \quad (2.32)$$

où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius³ et ε la précision de l'approximation qui dépend de la construction des matrices U et V .

3. La norme de Frobenius $\|\cdot\|_F$ d'une matrice A de taille $n \times m$ est définie par :

$$\|[A]\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m A_{ij}^2 \right)}$$

Le taux de compression τ de la matrice $[A]$ est défini par :

$$\tau = 1 - \frac{\text{espace mémoire de } [\tilde{A}]}{\text{espace mémoire de } [A]}. \quad (2.33)$$

Si $\tau > 0$, on dit que la matrice $[A]$ est compressée en la matrice $[\tilde{A}]$.

Avantages :

- La mémoire nécessaire pour stocker l’approximation de la matrice d’interaction par matrices hiérarchiques évolue en $\mathcal{O}(n \log n)$ unité mémoire.
- Le produit $[U][V]\mathbf{X}$ est plus rapide que le produit $[M]\mathbf{X}$, sa complexité est aussi en $\mathcal{O}(n \log n)$.

Inconvénients :

- L’approximation $[\tilde{A}]$ est dépendante du choix de la structure du maillage, ici de la construction de l’octree.
- Le taux de compression peut être inférieure à celui d’autres méthodes.

2.2.4 Méthode d’approximation en croix adaptative

La méthode d’approximation en croix adaptative (ACA) [Bebendorf and Rjasanow, 2003] est une technique de construction des matrices $[U]$ et $[V]$ approximant la matrice $[M]$ (2.30). L’algorithme de la méthode ACA utilisée dans le cadre de la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire est présenté FIGURE 2.14. On peut remarquer que les lignes et les colonnes de la matrice $[M]$ sont générées au fil des itérations, ainsi le critère d’arrêt ne considère pas la matrice $[M]$ mais son approximation $[\tilde{M}]$ à l’itération précédente. Cela permet de s’affranchir de la connaissance entière de la matrice $[M]$.

L’erreur de l’approximation est définie par :

$$\frac{\|[M] - [U][V]\|_F}{\|[M]\|_F} \leq \varepsilon_{ACA}, \quad (2.34)$$

où ε_{ACA} est une précision souhaitée.

Si $k < \frac{1}{2} \min\{l, m\}$, la matrice $[M]$ est compressée en la matrice $[\tilde{M}]$. Le taux de compression (2.33) de la matrice $[M]$ vaut alors :

$$\tau = 1 - \frac{k(l+m)}{lm}. \quad (2.35)$$

Avantages :

- Le nombre d’opérations nécessaire pour construire $[U]$ et $[V]$ évolue en $\mathcal{O}(k(l+m))$.
- La connaissance de la matrice pleine $[M]$ n’est pas nécessaire, il suffit de pouvoir générer une ligne et une colonne.
- La méthode est peu intrusive au niveau implémentation.

Inconvénients :

- L’erreur de l’approximation n’étant pas contrôlée par la matrice $[M]$, mais par son approximation $[\tilde{M}]$, la méthode peut alors échouer pour certains noyaux issus de formulations intégrales [Börm and Grasedyck, 2005].

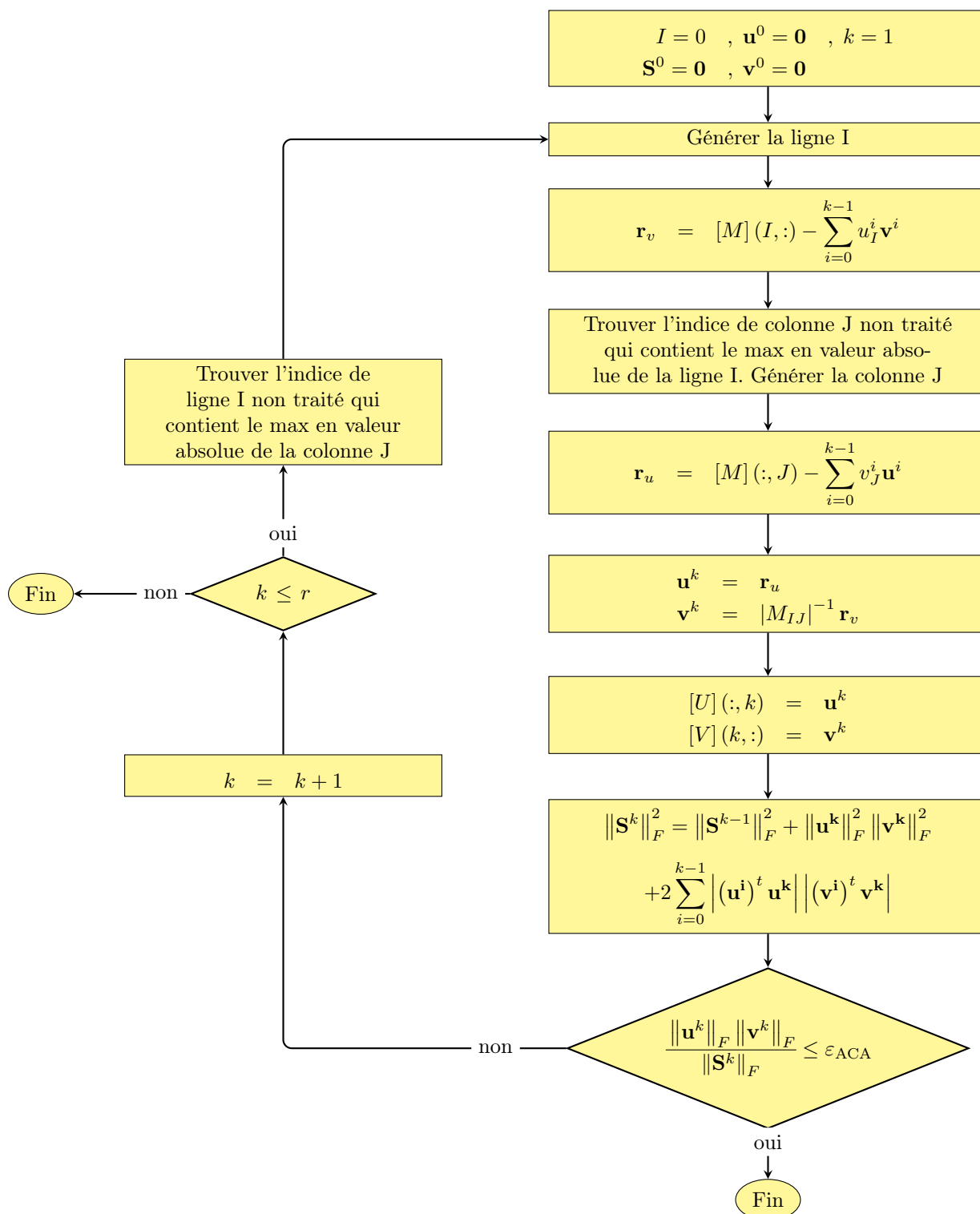


FIGURE 2.14 – Algorithme de la méthode ACA.

2.2.5 Application : TEAM Problem 13

La technique de compression ACA est appliquée au TEAM Problem 13 de la section 2.1.3 afin de pouvoir traiter un nombre de degrés de liberté plus important qu'auparavant [Takahashi et al., 2007]. En effet, lors de la résolution du problème par la méthode de Newton-Raphson (FIGURE 2.1), chaque itération nécessite la résolution d'un système matriciel (2.19) dont la matrice principale est pleine. La première partie de ce chapitre a montré que le nombre maximum de degrés de liberté traitable est rapidement limité par la capacité de la machine. La méthode ACA est alors utilisée afin d'améliorer l'espace mémoire et le coût en temps de calcul requis, respectivement, pour le stockage et l'assemblage des matrices d'interaction. De plus, une méthode itérative FGMRES est utilisée pour résoudre ces systèmes matriciels et fait intervenir les produits matrice-vecteur associés aux matrices d'interaction. La technique de compression ACA permet également d'améliorer le coût en temps de calcul de ces produits.

La première étape est la construction d'une octree tel que chaque feuille soit associée au minimum à 50 degrés de liberté et du plus haut niveau possible. Les degrés de liberté sont ensuite renumérotés afin de restructurer les matrices d'interaction. Les matrices hiérarchiques permettent ensuite d'identifier les blocs de matrices associés à des interactions lointaines (2.29) et qui seront approximés par des matrices de rang faible (2.30). Enfin, ces matrices de rang faible sont construites par la méthode ACA (FIGURE 2.14). Le critère ε_{ACA} de l'erreur de l'approximation (2.34) est fixé à $1e^{-5}$. Cette valeur assure un bon compromis entre précision, temps de calcul et taux de compression dans le cadre d'une formulation intégrale en potentiel scalaire d'un problème d'électrostatique [Le-Van, 2012]. Pour être rigoureux, il aurait fallu effectuer la même démarche pour les matrices d'interaction issues de la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire d'un problème magnétostatique. En effet, cela peut être problématique si l'erreur de l'approximation (2.34) n'est pas négligeable devant les autres erreurs induites par la modélisation.

Pour une valeur de $\left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}}\right]$ arbitraire, les évolutions de la mémoire requise pour stocker la matrice d'interaction (2.18) et du taux de compression en fonction du nombre de degrés de liberté sont présentées sur la FIGURE 2.15.

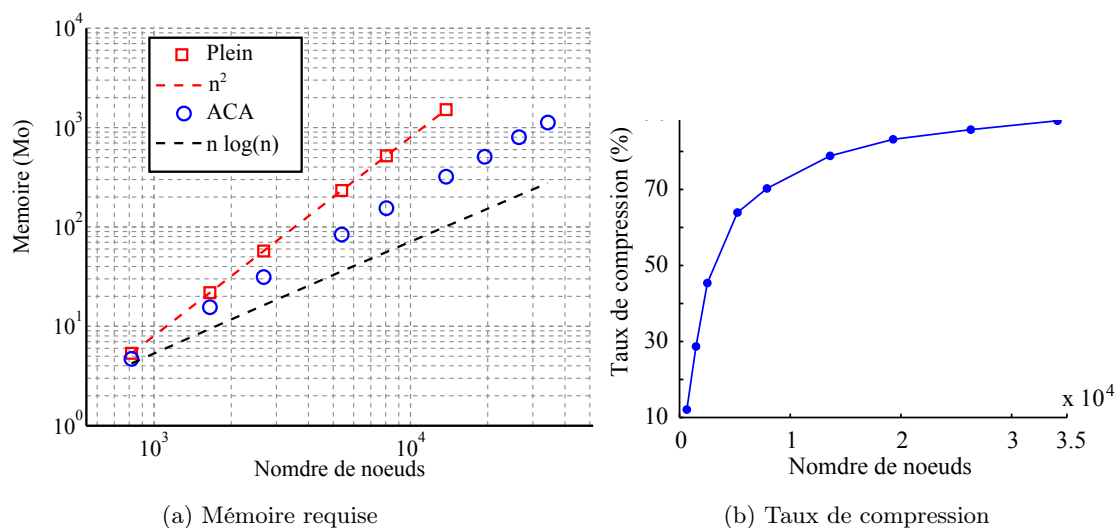


FIGURE 2.15 – Stockage de la matrice d'interaction.

La FIGURE 2.15a permet de retrouver une évolution en $\mathcal{O}(n^2)$ de la complexité du stockage complet de la matrice d'interaction. En utilisant la méthode ACA, on pourrait s'attendre à obtenir la complexité espérée en $\mathcal{O}(n \log(n))$. Cependant, en pratique cette dernière évolue entre les deux complexités précédentes. Ceci peut être dû à l'implémentation de la méthode ACA pour la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire magnétique qui utilise des fonctions de forme nodale du premier ordre (1.62). En effet, les domaines d'intégration sont les éléments du maillage, tandis qu'avec l'approche en collocation les points de calcul sont les nœuds du maillage. Lors de la création des cubes de l'octree, comme première approche, des maillages locaux sont créés dans chaque cube de l'octree, ce qui peut être coûteux en terme de temps de calcul.

En ce qui concerne l'évolution du taux de compression (FIGURE 2.15b), ce dernier est meilleur lorsque le nombre de degrés de liberté du problème est élevé. En effet, pour des problèmes avec un grand nombre de degrés de liberté, les blocs de la matrice d'interaction associés à des interactions lointaines sont de plus grande taille. La compression est alors plus efficace.

Les évolutions des coûts en temps de calcul, pour l'assemblage de la matrice d'interaction (2.18) et pour effectuer le produit matrice-vecteur associé, sont données en fonction du nombre de degrés de liberté sur la FIGURE 2.16. On retrouve que les complexités de l'assemblage complet de la matrice d'interaction et du produit matrice-vecteur associé en $\mathcal{O}(n^2)$. Pour un faible nombre de degrés de liberté, les relevés de temps ne sont pas significatifs (FIGURE 2.16b), car les coûts en temps de calcul du produit matrice-vecteur sont négligeables devant ceux de l'implémentation de la méthode ACA. Cette dernière ne permet également pas d'obtenir la complexité espérée des coûts en temps de calcul en $\mathcal{O}(n \log(n))$. En pratique, la complexité se situe entre les deux précédentes.

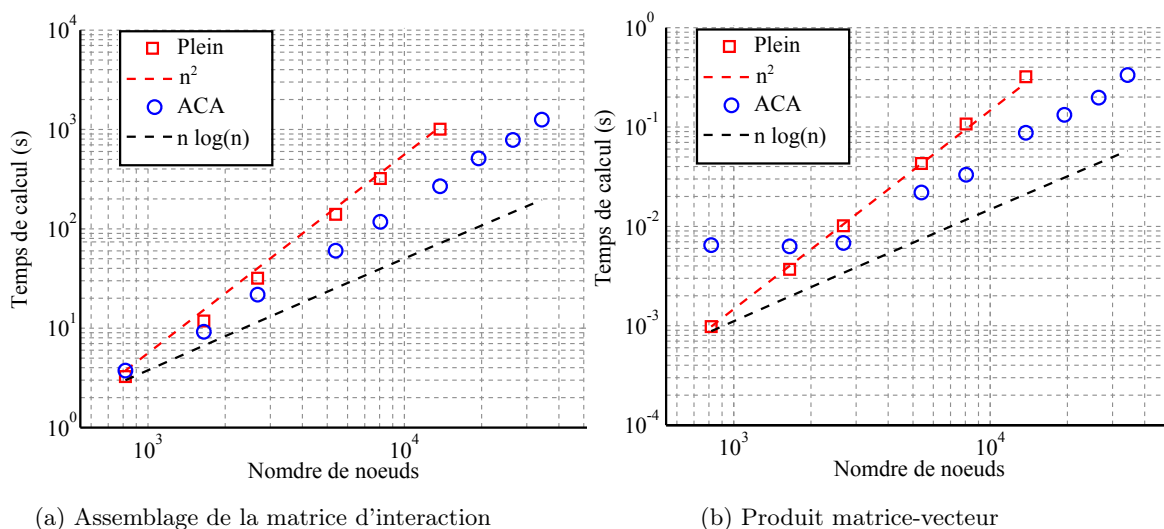


FIGURE 2.16 – Coût en temps de calcul.

Le TEAM Problem 13 peut maintenant être repris avec un maillage de meilleure qualité, c'est-à-dire suffisamment raffiné dans les coins de la géométrie et dans les zones à faible entrefer et qui possède au minimum deux couches d'éléments dans l'épaisseur de la plaque et des culasses d'acier. Le maillage alors utilisé est constitué de 122747 éléments et 29732 nœuds (FIGURE 2.17).

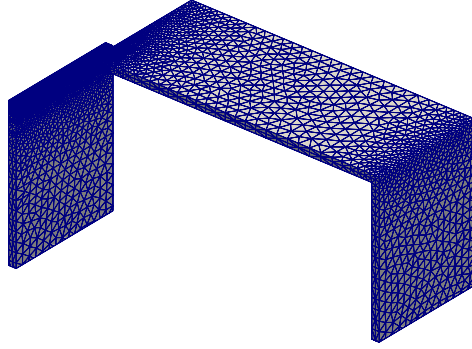
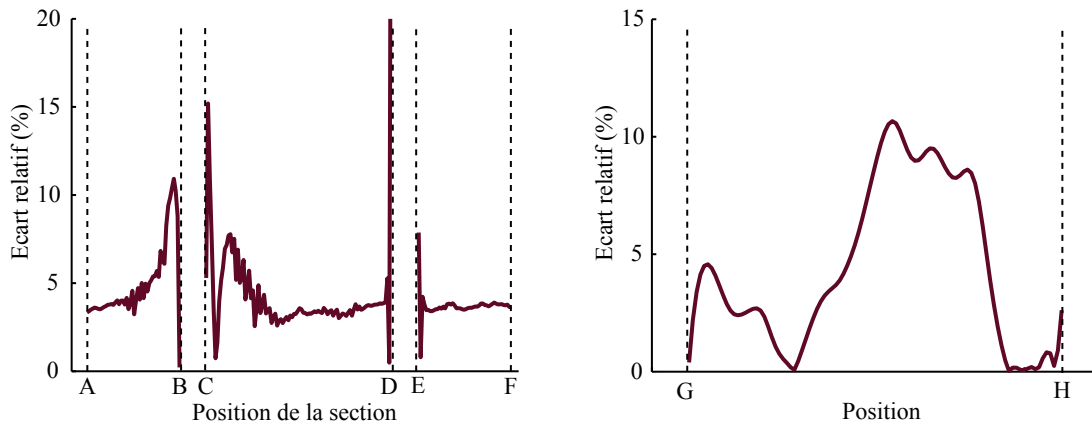


FIGURE 2.17 – Maillage du TEAM Problem 13 avec 122747 éléments (partiellement représenté).

La méthode de Newton-Raphson (FIGURE 2.1) est appliquée et converge en 15 itérations. Sans technique de compression, plus de 7071 Mo de mémoire auraient été nécessaires afin de stocker une matrice d'interaction. De plus, les temps de calcul d'intégration seraient prohibitifs. Avec la méthode ACA, 1521 Mo de mémoire sont requis afin de stocker une matrice d'interaction, ce qui correspond à un taux de compression de 78.5 %. Concernant les coûts en temps de calcul, chaque itération de la méthode de Newton-Raphson dure en moyenne 4400 s. Ce temps est majoritairement dû aux assemblages de la matrice d'interaction (2.18) (2800 s) et du résidu (2.9) (1500 s). On pourrait envisager d'utiliser des techniques de compression pour l'assemblage du résidu, qui devient coûteux en temps de calcul. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux expérimentaux pour les densités moyennes du flux de l'induction magnétique à travers des sections de la plaque et des culasses d'acier (FIGURE 2.18a) ainsi que pour la norme de l'induction magnétique dans l'air (FIGURE 2.18b).



(a) Densité de flux moyenne de l'induction magnétique (b) Norme de l'induction magnétique dans l'air

FIGURE 2.18 – Résultats obtenus sur le TEAM Problem 13 avec la méthode ACA.

Ces résultats montrent que la méthode ACA a été appliquée avec succès en utilisant le maillage avec 122747 éléments. En effet, les évolutions des écarts relatifs sont proches de celles obtenues en utilisant le maillage avec 30200 éléments (FIGURE 2.9). Par rapport à ce dernier, l'augmentation du nombre d'éléments afin d'assurer au minimum deux éléments dans l'épaisseur n'a que peu influencé la correspondance des résultats avec ceux expérimentaux. On constate néanmoins des écart relatifs plus

faibles dans la plaque d'acier centrale (FIGURE 2.18a) ainsi qu'à proximité des extrémités du segment $[GH]$ dans l'air (FIGURE 2.18b).

2.3 Conclusion

Ce chapitre a présenté les étapes de la résolution d'un problème magnétostatique non linéaire par la méthode de Newton-Raphson, appliquée à la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire. Les résultats obtenus ont été confrontés à ceux expérimentaux sur un problème de référence, afin de valider l'approche utilisée. Cependant, cette méthode nécessite l'assemblage et le stockage d'une matrice d'interaction pleine à chaque itération, ce qui conduit à des temps de calcul et des besoins mémoires très importants. Il s'agit de limitations des formulations intégrales où les matrices d'interaction sont pleines. Afin de palier à ces limitations, des techniques de compression peuvent être employées. La méthode de compression en croix adaptative a ainsi été retenue. L'application a montré que pour des problèmes avec beaucoup de degrés de liberté, elle permet de réduire considérablement les besoins en mémoire et les temps de calcul.

Deuxième partie

Couplage magnéto-mécanique

Chapitre 3

Calcul de forces magnétiques

La modélisation de dispositifs magnéto-mécaniques implique de pouvoir déterminer précisément les forces d'origine magnétique s'exerçant sur la matière. De plus, si le milieu constitutif est considéré déformable, il est essentiel de connaître la distribution locale de forces magnétiques. Les équations qui régissent les forces d'origine électromagnétique sont tout d'abord présentées en première partie. Un bref aperçu des méthodes couramment rencontrées pour le calcul de forces magnétiques est ensuite proposé dans la seconde partie. Parmi ces méthodes, deux d'entre elles, basées sur le principe des travaux virtuels ou sur l'utilisation du tenseur de Maxwell, sont prometteuses pour le calcul des forces magnétiques locales. Les troisième et quatrième parties abordent respectivement les mises en œuvre des méthodes des travaux virtuels et du tenseur de Maxwell dans le cadre de la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire. La dernière partie concerne deux applications, où les résultats des deux méthodes sont analysés et comparés à une solution analytique ou aux résultats issus de la méthode des travaux virtuels dans le cadre de la formulation éléments finis.

3.1 Force d'origine électromagnétique

A l'échelle des particules, la force d'origine électromagnétique est la force F subie par un charge q se déplaçant à la vitesse \mathbf{v} dans un champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Son expression est donnée par la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.1)$$

A l'échelle mésoscopique ou macroscopique, en utilisant la définition de la densité de courant \mathbf{j} , la densité de force électromagnétique \mathbf{f} s'écrit dans le cadre d'un milieu continu non polarisable [Woodson and Melcher, 1968b] :

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.2)$$

où ρ est la densité de charge. Dans la relation (3.2), deux densités se distinguent. La première est la densité de force électrique \mathbf{f}_{elec} qui s'exerce sur une densité de charge ρ plongée dans un champ électrique \mathbf{E} . Elle est définie par :

$$\mathbf{f}_{\text{elec}} = \rho\mathbf{E}. \quad (3.3)$$

La seconde est la densité de force magnétique \mathbf{f}_{mag} qui s'exerce sur une densité de courant \mathbf{j} plongée dans un champ magnétique \mathbf{B} . Elle est définie par :

$$\mathbf{f}_{\text{mag}} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (3.4)$$

Cette thèse concernant la magnétostatique, la densité de force magnétique est simplement notée \mathbf{f} . Les phénomènes considérés sont à l'échelle macroscopique. L'expression locale (3.4) doit alors être intégrée sur tout le domaine magnétique pour obtenir l'expression de la force magnétique globale \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega_f} \mathbf{f} \, d\Omega = \int_{\Omega_f} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \, d\Omega. \quad (3.5)$$

Dans un matériau magnétique, les phénomènes sont plus complexes. Suivant la démarche utilisée, plusieurs expressions de la densité de force magnétique peuvent être obtenues. La section suivante propose un bref aperçu des différentes méthodes de calcul de forces magnétiques couramment rencontrées dans la littérature.

3.2 Aperçu des méthodes pour le calcul de forces magnétiques

Un premier groupe de méthodes est basé sur des équivalences. L'idée est de remplacer les matériaux magnétiques par un matériau de perméabilité μ_0 et par des distributions de sources qui conduisent à la même valeur du champ ou de l'induction magnétiques. Deux de ces méthodes [Durand, 1968] [Ren, 1997], couramment employées, sont présentées ici.

- La distribution de moments magnétiques dipolaires peut être remplacée par une densité fictive de courants équivalents. Cela conduit à la méthode des courants équivalents :

$$\mathbf{j}_v = \nabla \times \mathbf{M}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad (3.7)$$

où \mathbf{j}_v et \mathbf{j}_s sont des densités de courant respectivement volumique et surfacique. Cette méthode suppose que la force magnétique exercée sur un matériau magnétique d'aimantation \mathbf{M} plongé dans une induction magnétique \mathbf{B} est identique à celle s'exerçant sur les densités fictives de courants équivalents (3.6) et (3.7). D'après l'expression (3.4), la densité de force magnétique \mathbf{f}^j peut alors s'écrire comme la somme des densités volumique \mathbf{f}_v^j et surfacique \mathbf{f}_s^j telle que :

$$\mathbf{f}_v^j = \mathbf{j}_v \times \mathbf{B}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{f}_s^j = \mathbf{j}_s \times \mathbf{B}. \quad (3.9)$$

- Par analogie avec l'électrostatique, la distribution de moments magnétiques dipolaires peut être remplacée par une densité fictive de masses magnétiques équivalentes, analogue aux charges électriques. Pour s'en rendre compte, il faudrait reprendre les développements des sections §1.1.3.2 et §1.1.3.3 en considérant à la place du moment magnétique dipolaire créé par une spire, celui créé par un dipôle magnétique [Durand, 1968]. Cela conduit à la méthode des masses magnétiques équivalentes :

$$\rho_v^* = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (3.10)$$

$$\rho_s^* = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.11)$$

où ρ_v^* et ρ_s^* sont des densités fictives de masses magnétiques, respectivement volumique et surfacique. Cette méthode suppose que la force magnétique exercée sur un matériau magnétique d'aimantation \mathbf{M} plongé dans une champ magnétique \mathbf{H} est la même que celle s'exerçant sur les densités fictives de masses magnétiques équivalentes (3.10) et (3.11). Pour cela, il faut utiliser l'analogie entre le

champ électrique \mathbf{E} et le champ magnétique \mathbf{H} ainsi que l'expression de la force électrique (3.3). La densité de force magnétique \mathbf{f}^p peut alors s'écrire comme la somme des densités volumique \mathbf{f}_v^p et surfacique \mathbf{f}_s^p telles que :

$$\mathbf{f}_v^p = \rho_v^* \mathbf{H}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{f}_s^p = \rho_s^* \mathbf{H}. \quad (3.13)$$

Un second groupe de méthodes utilise un mécanisme de tenseur, connu sous le nom de tenseur de Maxwell [Woodson and Melcher, 1968b]. L'intégration de ce tenseur sur une surface fermée permet d'obtenir une expression de la force magnétique globale agissant sur la région délimitée par la surface d'intégration. Le tenseur de Maxwell est principalement un outil mathématique et différentes expressions peuvent lui être attachées [Melcher, 1981]. Cette méthode est l'objet de la section §3.4.

Une autre approche consiste à appliquer le principe des travaux virtuels en établissant l'équilibre énergétique d'un système électro-mécanique soumis à un déplacement virtuel. Sous certaines hypothèses, une densité de force magnétique peut alors en être déduite [Carpenter, 1959] [Woodson and Melcher, 1968b]. Il est également possible de ne pas chercher à exprimer directement une densité mais d'obtenir une force magnétique en considérant uniquement l'équilibre énergétique [Coulomb, 1983]. La section §3.3 est dédiée à cette méthode.

De nombreux travaux ont été menés afin de comparer l'efficacité des différentes méthodes pour le calcul de forces magnétiques globales et locales. Les conclusions de ces travaux montrent qu'elles sont équivalentes pour le calcul de la force magnétique globale [Ren, 1994] mais qu'elles fournissent des densités avec des répartitions souvent très différentes [Sadowski et al., 1992] [Vandeveld and Melkebeek, 2001]. Le choix de la meilleure méthode pour le calcul de cette dernière est encore sujet à discussion. On peut citer notamment la thèse [Barre, 2003], où les principales méthodes de calculs de densités de forces magnétiques sont comparées sur un dispositif expérimental. Notre étude ne permet pas de conclure, néanmoins une méthode énergétique fournis des résultats relativement proche des résultats expérimentaux tandis que les méthodes basées sur des équivalences donnent des résultats éloignés. En effet, les méthodes basées sur des équivalences ne fournissent généralement pas une densité de force magnétique ayant un sens physique [Sadowski et al., 1992] [Vandeveld and Melkebeek, 2001], ces méthodes ne seront donc pas traitées par la suite. Les méthodes du tenseur de Maxwell et des travaux virtuels sont actuellement les approches classiques pour le calcul des distributions de forces magnétiques locales agissant sur les matériaux magnétiques. Des travaux ont été menés pour unifier ces deux méthodes [Henrotte and Hameyer, 2004]. La méthode du tenseur de Maxwell peut alors être vue comme un cas particulier de la méthode des travaux virtuels qui est plus générale et permet de tenir compte des comportements couplés [Bossavit, 2011]. On peut également évoquer des travaux plus récent sur la méthode eggshell [Henrotte et al., 2004] qui propose de calculer la force magnétique par intégration d'une quantité, dépendante du tenseur de Maxwell, appliquée dans l'air sur une coque entourant le matériau magnétique.

L'objectif de ce chapitre est de choisir la méthode la plus adaptée à notre problématique, c'est-à-dire à la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire avec une approche en collocation aux nœuds du maillage (1.68). En effet, la plupart des travaux sur le calcul de forces magnétiques cités précédemment ont été menés dans le cadre de la méthode des éléments finis et peu d'entre eux concernent des formulations intégrales [Hafla et al., 2008], où ils sont généralement restreints au calcul de forces magnétiques globales [Hantila et al., 2002] [Frangi et al., 2006].

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, l'air est maillé et la qualité des résultats de la méthode du tenseur de Maxwell dépend notamment du choix de la surface d'intégration [Freschi and Repetto, 2013], qui peut être prise comme étant l'interface entre l'air et le matériau magnétique [Ren, 1997]. Il est également possible d'introduire une couche d'air virtuel [Choi et al., 2008]. Dans le cadre des formulations intégrales, le choix de la surface d'intégration est également important mais le contexte est différent car l'air n'est pas maillé. L'application de la méthode du tenseur de Maxwell dans le cadre de la formulation intégrale de volume est abordée en section §3.4.

La méthode des travaux virtuels peut, dans le cadre de la formulation éléments finis, se résumer à évaluer l'influence de la déformation des éléments du maillage lorsqu'un déplacement virtuel est appliqué au système [Coulomb and Meunier, 1984] [Benhama et al., 2000]. La qualité des résultats dépend notamment de la couche constituée des éléments d'un maillage situés à l'interface entre l'air et le matériau magnétique du côté air [Ho et al., 2012]. Dans le cadre des formulations intégrales, cette couche n'existe pas et un déplacement virtuel appliquée localement modifie le comportement magnétique de l'ensemble de la structure car les éléments aimantés sont en interactions totales. La mise en œuvre de la méthode des travaux virtuels dans le cadre de la formulation intégrale de volume [Carpentier et al., 2014b] est l'objet de la section suivante.

3.3 Méthode des travaux virtuels

3.3.1 Définition des énergies magnétiques

Dans un système magnétique, les densités d'énergie et de coénergie magnétiques, notées respectivement w_{mag} et $w_{\text{mag}}^{\text{co}}$, sont définies par :

$$w_{\text{mag}} = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}', \quad (3.14)$$

et

$$w_{\text{mag}}^{\text{co}} = \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H}'. \quad (3.15)$$

La FIGURE 3.1 illustre les densités précédentes (3.14) et (3.15) pour des comportements magnétiques respectivement non linéaires et linéaires (1.37).

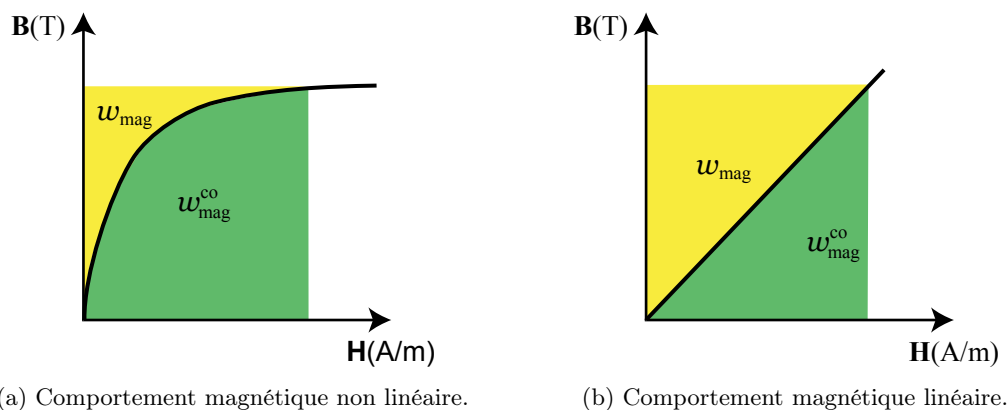


FIGURE 3.1 – Illustration des densités d'énergie et de coénergie magnétiques.

L'énergie et la coénergie magnétiques, notées respectivement W_{mag} et $W_{\text{mag}}^{\text{co}}$, sont définies par :

$$W_{\text{mag}} = \int_{\Omega} w_{\text{mag}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}' \right) d\Omega, \quad (3.16)$$

et

$$W_{\text{mag}}^{\text{co}} = \int_{\Omega} w_{\text{mag}}^{\text{co}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H}' \right) d\Omega. \quad (3.17)$$

Lorsque le matériau ferromagnétique possède une loi de comportement magnétique linéaire (FIGURE 3.1b), les équations (3.14) et (3.15) sont équivalentes et valent :

$$w_{\text{mag}} = w_{\text{mag}}^{\text{co}} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.18)$$

L'énergie (3.16) et la coénergie (3.17) s'écrivent alors :

$$W_{\text{mag}} = W_{\text{mag}}^{\text{co}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, d\Omega. \quad (3.19)$$

Considérons le problème magnétostatique défini dans la section §1.3.1 et illustré par la FIGURE 1.4. L'utilisation telle quelle de l'énergie (3.16) et de la coénergie (3.17) n'est pas adaptée lorsque le problème est résolu numériquement par une méthode intégrale de volume car les champs \mathbf{H} et \mathbf{B} doivent être connus dans tout le domaine Ω . Cherchons alors à réécrire l'énergie (3.16) et la coénergie (3.17) sous une forme qui nécessite la connaissance des champs \mathbf{H} et \mathbf{B} uniquement dans le domaine ferromagnétique Ω_f [Stratton, 1941]. Soit W_s l'énergie définie par :

$$W_s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{B}_s \, d\Omega. \quad (3.20)$$

L'énergie (3.20) correspond à l'énergie magnétique (3.19) du problème magnétostatique où le matériau ferromagnétique serait remplacé par de l'air. Tout le domaine Ω est alors rempli d'air et le champ magnétique est celui créé par les sources \mathbf{H}_s . L'induction magnétique \mathbf{B}_s est reliée au champ magnétique \mathbf{H}_s par :

$$\mathbf{B}_s = \mu_0 \mathbf{H}_s. \quad (3.21)$$

L'énergie magnétique (3.16) est réécrite en séparant les domaines de l'air Ω_0 et du matériau ferromagnétique Ω_f dans l'intégrale :

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, d\Omega + \int_{\Omega_f} \left(\int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}' \right) d\Omega. \quad (3.22)$$

L'énergie (3.20) est soustraite et ajoutée à l'équation (3.22), puis cette dernière est mise sous la forme :

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{B}_s \, d\Omega + \int_{\Omega_f} \left(\int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}' - \frac{1}{2} \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{B}_s \right) d\Omega + W_s. \quad (3.23)$$

L'égalité suivante est vérifiée dans l'air :

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{B}_s = (\mathbf{H} - \mathbf{H}_s) \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s) \text{ dans } \Omega_0. \quad (3.24)$$

La relation (3.24) et la définition du champ démagnétisant (1.24) permettent d'écrire l'équation (3.23) sous la forme :

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \mathbf{H}_{\text{red}} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s) \, d\Omega + \int_{\Omega_f} \left(\int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}' - \frac{1}{2} \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{B}_s \right) d\Omega + W_s \quad (3.25)$$

Soit T l'intégrale définie par :

$$T = - \int_{\Omega_0} \mathbf{H}_{\text{red}} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s) \, d\Omega - \int_{\Omega_f} \mathbf{H}_{\text{red}} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s) \, d\Omega. \quad (3.26)$$

Le champ démagnétisant \mathbf{H}_{red} dérivant d'un potentiel scalaire magnétique réduit Φ_{red} (1.26), l'intégrale (3.26) peut également s'écrire :

$$T = \int_{\Omega_0} \nabla \Phi_{\text{red}} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s) \, d\Omega + \int_{\Omega_f} \nabla \Phi_{\text{red}} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s) \, d\Omega. \quad (3.27)$$

L'identité vectorielle (1.87) et l'équation de Maxwell (1.3) sont utilisées dans la relation (3.27), pour obtenir :

$$T = \int_{\Omega_0} \nabla \cdot (\Phi_{\text{red}} (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s)) \, d\Omega + \int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\Phi_{\text{red}} (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s)) \, d\Omega. \quad (3.28)$$

Les champs étant nuls à l'infini, le théorème de Green-Ostrogradsky appliquée à l'équation (3.28) implique :

$$T = \int_{\Gamma_f} [\Phi_{\text{red}} (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s) \cdot \mathbf{n}]^- \, d\Gamma + \int_{\Gamma_f} [\Phi_{\text{red}} (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s) \cdot \mathbf{n}]^+ \, d\Gamma, \quad (3.29)$$

où $[\]^-$ et $[\]^+$ désignent les valeurs des intégrands de chaque côté de l'interface Γ_f de normales respectivement $[\mathbf{n}]^+$ et $[\mathbf{n}]^-$ avec $[\mathbf{n}]^+ = -[\mathbf{n}]^-$. Comme l'interface Γ_f ne porte pas de courant, le potentiel scalaire magnétique réduit et la composante normale de l'induction magnétique sont continus à son passage. L'équation (3.29) est alors nulle, d'où :

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{H}_{\text{red}} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s) \, d\Omega = - \int_{\Omega_f} \mathbf{H}_{\text{red}} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}_s) \, d\Omega. \quad (3.30)$$

En appliquant la relation (3.30) dans l'équation (3.25), l'énergie magnétique W_{mag} prend la forme suivante :

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \left(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_s - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + 2 \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}' \right) \, d\Omega + W_s. \quad (3.31)$$

Soit W_{ferro} l'énergie définie par la première intégrale de l'expression (3.31) dont le domaine d'intégration est uniquement celui du matériau ferromagnétique Ω_f :

$$W_{\text{ferro}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \left(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_s - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + 2 \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}' \right) \, d\Omega. \quad (3.32)$$

Si la coénergie magnétique (3.17) est utilisée à la place de l'énergie magnétique dans l'expression (3.32), la coénergie $W_{\text{ferro}}^{\text{co}}$ est définie par :

$$W_{\text{ferro}}^{\text{co}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \left(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_s - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + 2 \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H}' \right) \, d\Omega. \quad (3.33)$$

Dans le cas où le matériau ferromagnétique est décrit par une loi de comportement magnétique linéaire, les relations (3.32) et (3.33) deviennent :

$$W_{\text{ferro}} = W_{\text{ferro}}^{\text{co}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_s \, d\Omega. \quad (3.34)$$

Pour conclure, l'énergie (3.16) et la coénergie (3.17) magnétiques du problème magnétostatique peuvent s'écrire sous les formes :

$$W_{\text{mag}} = W_{\text{ferro}} + W_s \quad (3.35)$$

et

$$W_{\text{mag}}^{\text{co}} = W_{\text{ferro}}^{\text{co}} + W_{\text{s}}. \quad (3.36)$$

L'intérêt d'écrire l'énergie et la coénergie magnétiques sous les formes respectives (3.35) et (3.36) est que l'énergie (3.32) et la coénergie (3.33) sont des intégrales dont le domaine d'intégration est uniquement celui du matériau ferromagnétique Ω_f , tandis que l'énergie (3.20) dépend uniquement des sources de champs. De plus, il est généralement difficile (et parfois inutile) d'évaluer l'énergie magnétique dans le domaine de l'air Ω_0 , car celui-ci n'est pas borné.

3.3.2 Équilibre énergétique du système magnéto-mécanique

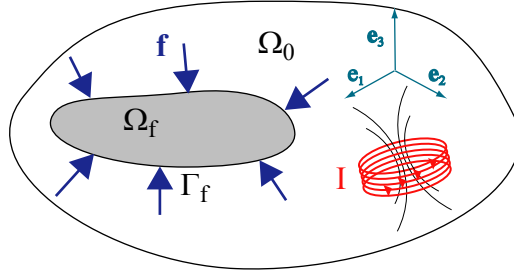


FIGURE 3.2 – Description du système magnéto-mécanique.

Considérons le problème de magnéto-mécanique 3D suivant (FIGURE 3.2), où un matériau ferromagnétique est associé au domaine Ω_f et soumis au champ magnétique créé par une bobine. Ce matériau est placé dans l'air de domaine Ω_0 tel que $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_0$. Soit Γ_f l'interface entre le matériau ferromagnétique Ω_f et l'air Ω_0 . Une densité de force magnétique f est exercée sur le matériau ferromagnétique.

Supposons que le système magnéto-mécanique est parfait (sans pertes par effet Joule, frottement...), les énergies suivantes interviennent :

- l'énergie magnétique définie par la relation (3.16).
- l'énergie électrique fournie par la bobine au système, notée W_{elec} :

$$W_{\text{elec}} = \int_0^t v(t) i(t) dt, \quad (3.37)$$

où v est la tension appliquée à la bobine, i le courant traversant la bobine et t la durée.

- le travail mécanique des forces extérieures \mathbf{F}_{ext} , c'est à dire l'énergie produite lors d'un déplacement \mathbf{u} du matériau ferromagnétique de sa position initiale, notée W_{meca} :

$$W_{\text{meca}} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{u}, \quad (3.38)$$

où \mathcal{C} est le trajet suivi lors du déplacement \mathbf{u} .

Le bilan énergétique appliqué au problème magnéto-mécanique statique et supposé sans pertes donne l'égalité entre les énergies fournies (3.37) et produites (3.16) (3.38) [Woodson and Melcher, 1968a] :

$$W_{\text{elec}} = W_{\text{mag}} + W_{\text{meca}}. \quad (3.39)$$

3.3.3 Principe des travaux virtuels

Pour un solide à l'état d'équilibre, le principe des travaux virtuels repose sur la conservation de l'équilibre énergétique lorsqu'un déplacement virtuel unitaire quelconque est appliqué à ce solide.

Un déplacement virtuel unitaire \mathbf{u} est appliquée sur la totalité ou une partie du matériau ferromagnétique. Considérons que les énergies (3.16) (3.37) (3.38) sont fonctions du déplacement virtuel unitaire \mathbf{u} et différentiables. La différentielle dW_{meca} peut s'écrire :

$$dW_{\text{meca}} = \nabla W_{\text{meca}} \cdot d\mathbf{u}. \quad (3.40)$$

Or, la différentielle dW_{meca} est également le travail virtuel des forces extérieures \mathbf{F}_{ext} lors d'un déplacement infinitésimal $d\mathbf{u}$:

$$dW_{\text{meca}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{u}. \quad (3.41)$$

En utilisant les relations (3.40) et (3.41), on en déduit que :

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \nabla W_{\text{meca}} \quad (3.42)$$

Considérons que seule la force magnétique \mathbf{F} contribue au travail mécanique. La composante de la force magnétique suivant la direction du déplacement virtuel unitaire \mathbf{u} , notée F_u , peut d'après la relation (3.42) être obtenue par :

$$F_u = \nabla W_{\text{meca}} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial W_{\text{meca}}}{\partial \mathbf{u}}, \quad (3.43)$$

où $\frac{\partial W_{\text{meca}}}{\partial \mathbf{u}}$ désigne la dérivée directionnelle de W_{meca} suivant le vecteur \mathbf{u} . L'équilibre énergétique (3.39) étant vérifié quelque soit le déplacement virtuel \mathbf{u} , l'équation (3.43) peut également s'écrire :

$$F_u = \frac{\partial W_{\text{elec}}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial W_{\text{mag}}}{\partial \mathbf{u}}. \quad (3.44)$$

Cherchons à exprimer la différentielle de l'énergie électrique dW_{elec} . La résistance de la bobine est supposée nulle, ainsi la tension aux bornes de la bobine v peut être exprimée par la force électromotrice :

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3.45)$$

où ψ est la somme des flux de l'induction magnétique à travers chaque spire de la bobine. En effectuant le changement de variable (3.45) dans l'expression de l'énergie électrique (3.37) , on obtient l'expression de l'énergie électrique suivante :

$$W_{\text{elec}} = \int_{\psi(0)}^{\psi(t)} i(\psi) d\psi, \quad (3.46)$$

D'après la relation précédente (3.46), la différentielle de l'énergie électrique dW_{elec} s'écrit :

$$dW_{\text{elec}} = I d\psi. \quad (3.47)$$

L'énergie électrique W_{elec} dans l'équation (3.44) est remplacée par l'expression précédente (3.47) pour obtenir :

$$F_u = I \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial W_{\text{mag}}}{\partial \mathbf{u}}. \quad (3.48)$$

Supposons que le flux magnétique à travers la section de la bobine ψ est maintenu constant, tel que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}} = 0. \quad (3.49)$$

Alors en utilisant la relation (3.49) dans l'équation (3.48), la composante de la force magnétique F_u s'exerçant sur le matériau ferromagnétique peut s'écrire comme l'opposée de la dérivée de l'énergie magnétique W_{mag} par rapport à un déplacement \mathbf{u} en maintenant le flux magnétique à travers la section de la bobine ψ constant [Galopin, 2007] :

$$F_u = - \left. \frac{\partial W_{\text{mag}}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\psi}. \quad (3.50)$$

La condition (3.49) est difficile à réaliser dans le cadre des formulations intégrales car elle nécessite la connaissance de l'induction magnétique dans la section de la bobine et notamment dans l'air où elle ne peut être obtenue que par post traitement. Intéressons nous à une approche utilisant la coénergie magnétique (3.17) à la place de l'énergie magnétique (3.16). L'énergie et la coénergie magnétiques sont liées par la relation :

$$W_{\text{mag}} + W_{\text{mag}}^{\text{co}} = \psi I. \quad (3.51)$$

La différentielle de l'équation (3.51) conduit à :

$$dW_{\text{mag}} + dW_{\text{mag}}^{\text{co}} = I d\psi + \psi dI. \quad (3.52)$$

En utilisant la relation (3.52) dans l'équation (3.48), l'expression de la composante de la force magnétique F_u devient :

$$F_u = \psi \frac{\partial I}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial W_{\text{mag}}^{\text{co}}}{\partial \mathbf{u}}. \quad (3.53)$$

Supposons que le courant I parcourant la bobine est maintenu constant, tel que :

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{u}} = 0. \quad (3.54)$$

En utilisant la relation (3.54) dans l'équation (3.53), la composante de la force magnétique F_u s'exerçant sur le matériau ferromagnétique peut s'écrire comme la dérivée de la coénergie magnétique $W_{\text{mag}}^{\text{co}}$ par rapport à un déplacement \mathbf{u} en maintenant le courant de la bobine I constant [Galopin, 2007] :

$$F_u = \left. \frac{\partial W_{\text{mag}}^{\text{co}}}{\partial \mathbf{u}} \right|_I. \quad (3.55)$$

Contrairement à la condition (3.49), le courant parcourant la bobine est facilement contrôlable, c'est pourquoi l'approche utilisant la coénergie magnétique (3.55) est privilégiée.

Dans la section précédente, la coénergie magnétique $W_{\text{mag}}^{\text{co}}$ a été écrite comme la somme de $W_{\text{ferro}}^{\text{co}}$ et W_s (3.36). Cette dernière dépendant uniquement de la source de champ, tant que la condition (3.54) est vérifiée, W_s ne varie pas quelque soit le déplacement \mathbf{u} appliqué au matériau ferromagnétique :

$$\left. \frac{\partial W_s}{\partial \mathbf{u}} \right|_I = 0. \quad (3.56)$$

Pour les équations suivantes, le maintien du courant I est implicite et n'est plus indiqué dans les dérivées. En utilisant la relation (3.56) dans l'équation (3.55), la composante de la force magnétique F_u s'exerçant sur le matériau ferromagnétique s'écrit :

$$F_u = \frac{\partial W_{\text{ferro}}^{\text{co}}}{\partial \mathbf{u}}. \quad (3.57)$$

La force magnétique \mathbf{F} peut ensuite être obtenue en prenant successivement le déplacement virtuel unitaire \mathbf{u} comme étant les trois vecteurs de base du repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, telle que :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial W_{\text{ferro}}^{\text{co}}}{\partial \mathbf{e}_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial W_{\text{ferro}}^{\text{co}}}{\partial \mathbf{e}_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial W_{\text{ferro}}^{\text{co}}}{\partial \mathbf{e}_3} \mathbf{e}_3 \quad (3.58)$$

L'écriture de la force magnétique \mathbf{F} sous la forme (3.58) est bien adaptée au cadre des formulations intégrales puisque le domaine d'intégration de la coénergie (3.33) est uniquement celui du matériau ferromagnétique.

3.3.4 Calcul de la force magnétique globale

Le problème de magnétostatique est résolu par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire avec une approche en collocation aux nœuds du maillage (1.68). Dans le matériau ferromagnétique de domaine Ω_f , le potentiel scalaire ϕ , le champ magnétique \mathbf{H} , l'induction magnétique \mathbf{B} et l'aimantation \mathbf{M} sont respectivement le potentiel solution du problème (1.68), le champ magnétique (1.7), l'induction magnétique et l'aimantation issus respectivement des lois de comportement magnétiques (1.37) et (1.40). Le potentiel scalaire source ϕ_0 , le champ magnétique source \mathbf{H}_s et l'induction magnétique source \mathbf{B}_s sont respectivement le potentiel solution du problème (1.80), le champ magnétique (1.59) et l'induction magnétique issus de la relation (3.21). Notons \mathbf{H}_s le champ magnétique source créé par la bobine, et \mathbf{H}_0 son approximation issue du calcul du potentiel scalaire source (1.78).

Considérons un domaine ferromagnétique Ω_f constitué d'un ou plusieurs corps (FIGURE 3.3). Un déplacement virtuel unitaire \mathbf{u} est appliqué à un sous domaine Ω_u tel que $\Omega_u \subset \Omega_f$ et $\Omega_u \cap (\Omega_f \setminus \Omega_u) = \emptyset$. Cette dernière condition implique que le sous domaine Ω_u doit être entourée d'air.

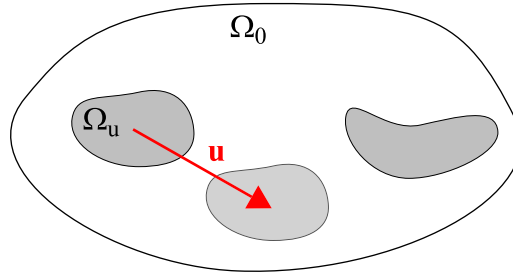


FIGURE 3.3 – déplacement virtuel unitaire appliqué à une partie du domaine ferromagnétique

En utilisant la définition de la coénergie (3.33), l'application du principe des travaux virtuels (3.58) permet de calculer la composante de la force magnétique globale s'exerçant sur ce morceau suivant la direction du déplacement virtuel unitaire (3.57) :

$$F_u = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \left(\mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{B}_s - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} + 2\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} \right) d\Omega \quad (3.59)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \left(\mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{B}_s + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{H} \right) d\Omega. \quad (3.60)$$

Intéressons nous à la façon de calculer chacune des dérivées dans l'expression précédente (3.60). Comme le maillage n'est pas distordu par le déplacement virtuel unitaire \mathbf{u} , les fonctions de forme (1.62) ne sont pas modifiées. La condition suivante est alors vérifiée :

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad \forall i \in [1..n]. \quad (3.61)$$

Calcul de $\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \mathbf{u}}$: La dérivée de l'induction magnétique créé par les sources par rapport au déplacement virtuel unitaire $\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \mathbf{u}}$ est calculée en un point de coordonnées \mathbf{r} par :

$$\frac{\partial \mathbf{B}_s(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{u}} = \mu_0 \nabla \mathbf{H}_s(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}}. \quad (3.62)$$

Le terme $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}}$ est défini par :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{cases} \mathbf{e}_u & \text{si } \mathbf{r} \in \Omega_u \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases}, \quad (3.63)$$

où \mathbf{e}_u est le vecteur directeur du déplacement virtuel unitaire \mathbf{u} . Le gradient du champ magnétique source $\nabla \mathbf{H}_s$ peut être calculé analytiquement pour des géométries d'inducteur simples [Urankar, 1980][Urankar, 1982]. Pour des inducteurs plus compliqués, ce gradient est approché par une méthode des différences finis :

$$(\nabla \mathbf{H}_s(\mathbf{r}))_{ij} \approx \frac{H_{si}(\mathbf{r} + p_j \mathbf{e}_j) - H_{si}(\mathbf{r} - p_j \mathbf{e}_j)}{2p_j}, \quad (3.64)$$

où p_j est le pas de la méthode des différences finis selon la j -ème direction du repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. La dépendance des variables avec le point d'évaluation de coordonnées \mathbf{r} est maintenant explicite et ne sera indiquée que s'il y a risque de confusion.

Calcul de $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}}$: A partir de la discrétisation du potentiel source Φ (1.62) et de la relation (1.7), le champ magnétique \mathbf{H} est obtenu par :

$$\mathbf{H} = - \sum_{i=1}^{n_n} \Phi_i \nabla \alpha_i. \quad (3.65)$$

Compte tenu de la condition (3.61), la dérivée du champ magnétique $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}}$ peut s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} = - \sum_{i=1}^{n_n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{u}} \nabla \alpha_i. \quad (3.66)$$

Soit $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}}$ le vecteur des dérivées des degrés de liberté Φ_i par rapport au déplacement \mathbf{u} .

Calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}}$: La dérivation du système matriciel (1.69) donne :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial [A(\chi)] \Phi}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}}, \quad (3.67)$$

où $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}}$ est le vecteur des dérivées des degrés de liberté Φ_{0i} par rapport au déplacement \mathbf{u} . La règle de dérivation en chaîne appliquée à la deuxième dérivée de l'équation (3.67) conduit à :

$$\frac{\partial [A(\chi)] \Phi}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial [A(\chi)] \Phi}{\partial \Phi} \Big|_{\mathbf{u}} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial [A(\chi)]}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\Phi} \Phi. \quad (3.68)$$

La matrice $\left[\frac{\partial [A(\chi)] \Phi}{\partial \Phi} \Big|_{\mathbf{u}} \right]$ est définie par :

$$\left(\frac{\partial [A(\chi)] \Phi}{\partial \Phi} \Big|_{\mathbf{u}} \right)_{ij} = - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \Phi_j}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \quad (3.69)$$

La règle de dérivation en chaine appliquée à la dérivée de l'aimantation par rapport aux degrés de liberté $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \Phi_j}$ donne :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \Phi_j} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Phi_j}. \quad (3.70)$$

D'après la relation (2.14), l'équation (3.70) peut également s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \Phi_j} = -\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \nabla \alpha_j. \quad (3.71)$$

En utilisant la relation précédente (3.71), l'expression de la matrice (3.69) devient :

$$\left(\frac{\partial [A(\chi)] \Phi}{\partial \Phi} \Big|_{\mathbf{u}} \right)_{ij} = \int_{\Omega_f} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}}(\mathbf{r}') \nabla \alpha_j(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} d\Omega'. \quad (3.72)$$

La matrice (3.72) est du type (2.18), qui peut alors s'écrire sous la forme $\left[A \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right) \right]$.

Soit a une fonction représentant l'intégrant de chaque terme de la matrice d'interaction (1.71), telle que :

$$(A(\chi))_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}') d\Omega', \quad (3.73)$$

où

$$a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}') = \chi \nabla \alpha_j(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.74)$$

Comme le domaine Ω_f n'est pas déformé par le déplacement virtuel unitaire \mathbf{u} , la dérivée de l'équation (3.73) peut être passée dans l'intégrale pour obtenir :

$$\left(\frac{\partial [A(\chi)]}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\Phi} \right)_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_f} \frac{\partial a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\Phi} d\Omega'. \quad (3.75)$$

La fonction a doit être dérivée par rapport au déplacement virtuel unitaire \mathbf{u} en maintenant constant le vecteur des degrés de liberté Φ . Cette condition est équivalente à maintenir constant le paramètre $\chi \nabla \alpha_j$ de la fonction a , car le maillage n'est pas déformé par le déplacement virtuel. Ainsi, la règle de dérivation en chaine appliquée à l'équation (3.74) conduit à :

$$\frac{\partial a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\Phi} = \nabla^i a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{u}} + \nabla' a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.76)$$

où ∇^i et ∇' désignent les opérateurs gradients associés respectivement aux coordonnées \mathbf{r}_i et \mathbf{r}' . Les termes $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{u}}$ et $\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{u}}$ sont définis de façon analogue au terme (3.63). D'après la définition de la fonction a (3.74), les termes $\nabla^i a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}')$ et $\nabla' a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}')$ s'écrivent :

$$\nabla^i a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}') = -\nabla' a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}') = \frac{3(\chi \nabla \alpha_j(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'))(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}') - \chi \nabla \alpha_j(\mathbf{r}') |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^5}. \quad (3.77)$$

Compte tenu de la définition (3.63) des termes $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}}$, $\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{u}}$ et de la relation (3.77), la dérivée (3.76) peut s'écrire :

$$\frac{\partial a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\Phi} = \begin{cases} \nabla^i a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}_i \in \Omega_u \text{ et } \mathbf{r}' \notin \Omega_u \\ \nabla' a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}_i \notin \Omega_u \text{ et } \mathbf{r}' \in \Omega_u \\ \nabla^i a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}') + \nabla' a(\chi \nabla \alpha_j, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}') = 0 & \text{si } \mathbf{r}_i, \mathbf{r}' \in \Omega_u^2 \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}_i, \mathbf{r}' \notin \Omega_u^2 \end{cases} \quad (3.78)$$

Le calcul de chaque terme de la matrice (3.75) nécessite les évaluations d'intégrales de la forme (1.91). Les précautions à prendre pour le calcul de ces intégrales ont déjà été évoquées (§1.4.5). Cependant, les termes de la matrice (3.78) sont non nuls uniquement lorsqu'un seul des points de coordonnées \mathbf{r}_i et \mathbf{r}' est dans le domaine Ω_u , ce qui implique en général que ces points sont éloignés l'un de l'autre. C'est pourquoi une intégration numérique avec des points de Gauss est suffisante dans la plupart des cas.

Finalement, le vecteur $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}}$ est la solution d'un système d'équations linéaires de la forme : trouver $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}}$, tel que

$$\left([I] + \left[A \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right) \right] \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial [A(\chi)]}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\Phi} \Phi. \quad (3.79)$$

Calcul de $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}}$: A partir de la discrétisation du potentiel source Φ_0 (1.79), la dérivée $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}}$ peut s'écrire :

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n_m} \frac{\partial \Phi_{0i}}{\partial \mathbf{u}} \alpha_i. \quad (3.80)$$

Le vecteur $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}}$ est la solution d'un système d'équations linéaires issus de la dérivation du système (1.81), c'est-à-dire : trouver $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}}$, tel que

$$[E] \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}, \quad (3.81)$$

où

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right)_i = - \int_{\Omega_f} \nabla \alpha_i \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial \mathbf{u}} d\Omega. \quad (3.82)$$

Calcul de $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{u}}$ et $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}}$: La règle de dérivation en chaîne appliquées aux dérivées $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{u}}$ et $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}}$ conduit à :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.83)$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}}, \quad (3.84)$$

où $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}}$ est la perméabilité incrémentale définie par :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \right)_{ij} = \delta_{ij} \mu(\|\mathbf{H}\|) + \frac{H_i H_j}{\|\mathbf{H}\|} \frac{\partial \mu}{\partial \|\mathbf{H}\|}(\|\mathbf{H}\|). \quad (3.85)$$

Pour conclure cette partie, la méthode des travaux virtuels a été mise en œuvre dans le cadre de la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire avec une approche en collocation aux nœuds du maillage (1.68) afin de calculer la force magnétique globale s'exerçant sur un domaine ferromagnétique entourée d'air. Cette méthode a l'avantage de ne nécessiter aucun calcul dans l'air et nécessite principalement l'assemblage et la résolution de deux systèmes d'équations linéaires supplémentaires (3.81) (3.79) pour chaque direction du repère (3.58). La matrice du système (3.81) est creuse, tandis que celles du système (3.79), $\left[A \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right) \right]$ et $\frac{\partial [A(\chi)]}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\Phi}$, sont respectivement pleine et pleine par bloc.

Remarque :

- Dans l’expression (3.60), il est également possible de choisir à la place de l’induction source \mathbf{B}_s calculée analytiquement ou par différence finie, l’induction source \mathbf{B}_0 issue du calcul du potentiel scalaire magnétique source (1.81) et définie par :

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \sum_{i=1}^{n_n} \nabla \alpha_i \phi_{0i}. \quad (3.86)$$

Ces deux inductions sont différentes par construction, cependant leur égalité est vérifiée faiblement d’après (1.78) :

$$\int_{\Omega_f} \nabla \alpha_i \cdot \mathbf{B}_0 \, d\Omega = \int_{\Omega_f} \nabla \alpha_i \cdot \mathbf{B}_s \, d\Omega, \quad \forall i \in \llbracket 1 \dots n \rrbracket. \quad (3.87)$$

En utilisant la relation précédente (3.87) et la discrétisation (1.89) de l’aimantation, on montre que :

$$\int_{\Omega_f} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 \, d\Omega = \int_{\Omega_f} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_s \, d\Omega \quad (3.88)$$

L’utilisation de l’induction source \mathbf{B}_s est privilégiée car elle utilisable dans tout le domaine Ω ce qui donne du sens à la relation (3.20) tandis que le champ source \mathbf{B}_0 est définie seulement dans le domaine Ω_f . De plus, la connaissance du champ magnétique source \mathbf{H}_s est nécessaire pour le calcul du vecteur (3.82), donc aussi pour le calcul de \mathbf{B}_0 .

- Dans le cas linéaire, les matrices des membres de gauche des systèmes (3.81) et (3.79) sont respectivement les mêmes que celles des systèmes (1.81) et (1.69). Les processus de résolution de ces dernières peuvent alors être conservés pour résoudre les systèmes (3.81) et (3.79) en changeant uniquement le second membre. Dans le cas non linéaire, si une méthode de Newton-Raphson (FIGURE 2.1) est utilisée, il est également possible de conserver les processus de résolution car la matrice $\left([I] + \left[A \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right) \right] \right)$ du système (3.79) est équivalente à la matrice Jacobienne (2.16) de la dernière itération de la méthode de Newton-Raphson.

3.3.5 Calcul de la force magnétique locale

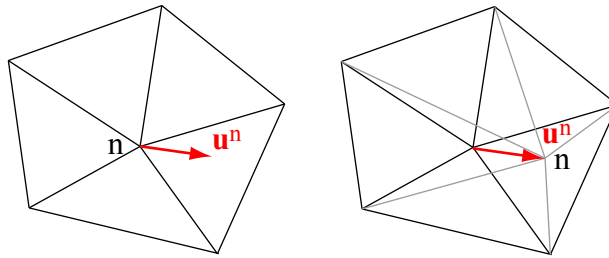


FIGURE 3.4 – Déplacement virtuel unitaire nodal (exemple d’un maillage 2D).

Dans cette partie, la loi de comportement magnétique est supposée linéaire, et la coénergie est définie par l’équation (3.34). Le problème magnétostatique est également résolu par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire avec une approche en collocation aux nœuds du maillage (1.68). Afin de calculer les forces magnétiques locales s’exerçant sur le matériau magnétique, le principe des travaux virtuels est appliqué au niveau des nœuds du maillage [Ren and Razeq, 1992]. Un déplacement virtuel unitaire nodal \mathbf{u}^n est alors appliquée à un seul nœud n du maillage (FIGURE 3.4).

Dans ce cas, le maillage est déformée par ce déplacement, ce qui implique que la condition (3.61) n'est plus vérifiée. L'application du principe des travaux virtuels (3.57) permet d'obtenir l'expression de la composante de la force nodale suivant la direction du déplacement virtuel unitaire nodal \mathbf{u}^n , notée F_u^n , telle que :

$$F_u^n = \frac{\partial W_{\text{ferro}}^{\text{co}}}{\partial \mathbf{u}^n}. \quad (3.89)$$

Soit W_e^{co} la valeur de l'énergie $W_{\text{ferro}}^{\text{co}}$ dans l'élément e du maillage, telle que :

$$W_e^{\text{co}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_s \, d\Omega. \quad (3.90)$$

La contribution de l'élément e sur la composante de la force nodale F_u^n est notée $F_u^{e,n}$:

$$F_u^{e,n} = \frac{\partial W_e^{\text{co}}}{\partial \mathbf{u}^n}. \quad (3.91)$$

La relation (3.89) peut également s'écrire :

$$F_u^n = \sum_{e=1}^{n_e} F_u^{e,n}. \quad (3.92)$$

Afin de calculer l'intégrale de l'énergie (3.90), un changement de repère entre l'élément du maillage de domaine Ω_e et l'élément de référence de domaine $\hat{\Omega}$ est utilisé (FIGURE 3.5). Soit $\hat{\mathbf{r}}$ le vecteur des coordonnées d'un point exprimé dans le repère de l'élément de référence dont les vecteurs de base sont $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$. Notons \mathbf{G}^e la transformation du passage des coordonnées associées à l'élément de référence $\hat{\mathbf{r}}$ vers les coordonnées associée au problème \mathbf{r} pour l'élément e du maillage, telle que :

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}^e(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.93)$$

Soit $[J^e]$ le jacobien de la transformation \mathbf{G}^e , définie par :

$$(J^e)_{ij} = \frac{\partial G_i^e}{\partial \hat{r}_j} \quad (3.94)$$

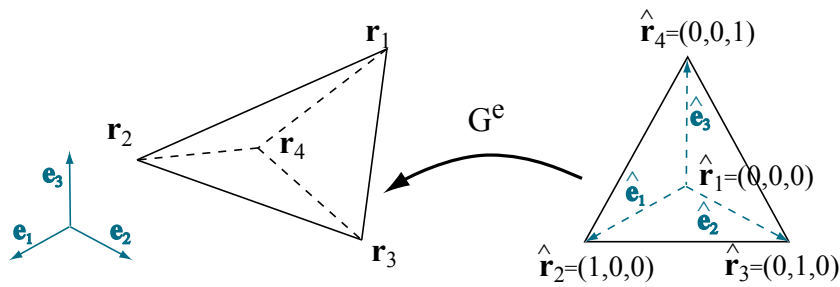


FIGURE 3.5 – Changement de repère entre l'élément e du maillage et le tétraèdre de référence.

Les fonctions de forme nodale de référence $\hat{\alpha}_i$ sont associées à chaque nœud i de l'élément de référence $\hat{\Omega}$ (cf annexe 2 pour le tétraèdre de référence). Le gradient de la fonction de forme nodal $\nabla \alpha_i$ associée au nœud i du maillage peut être calculé sur un élément de domaine Ω_e à partir du gradient de la fonction de forme nodale de référence $\hat{\nabla} \hat{\alpha}_i$:

$$\nabla \alpha_i|_{\Omega_e} = [J^e]^{-T} \hat{\nabla} \hat{\alpha}_i \quad (3.95)$$

avec l'indice \hat{i} tel que $\mathbf{G}^e(\hat{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{r}_i$. En utilisant le changement de repère précédent, la dérivée du gradient d'une fonction de forme sur un élément e par rapport au déplacement virtuel unitaire nodal, $\frac{\partial \nabla \alpha_i|_{\Omega_e}}{\partial \mathbf{u}^n}$, peut s'écrire :

$$\frac{\partial \nabla \alpha_i|_{\Omega_e}}{\partial \mathbf{u}^n} = \frac{\partial [J^e]^{-T}}{\partial \mathbf{u}^n} \nabla \hat{\alpha}_i, \forall i \in \llbracket 1 \dots n \rrbracket. \quad (3.96)$$

L'intégration par changement de variable (3.93) à partir du changement de repère précédent conduit à écrire l'équation (3.90) sous la forme :

$$W_e^{\text{co}} = \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} \mathbf{M}(\mathbf{G}^e(\hat{\mathbf{r}})) \cdot \mathbf{B}_s(\mathbf{G}^e(\hat{\mathbf{r}})) |J^e| d\hat{\Omega}, \quad (3.97)$$

où $|J^e|$ est le déterminant de la matrice jacobienne $[J^e]$. Comme précédemment, la dépendance des variables avec le paramètre $\mathbf{G}^e(\hat{\mathbf{r}})$ est indiquée seulement si nécessaire ou si un risque de confusion est possible. D'après la relation (3.97), la contribution $F_u^{e,n}$ peut être calculée par :

$$F_u^{n,e} = \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} \left[\left(\mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \mathbf{u}^n} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{u}^n} \cdot \mathbf{B}_s \right) |J_e| + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_s) \frac{\partial |J^e|}{\partial \mathbf{u}^n} \right] d\hat{\Omega}. \quad (3.98)$$

Les calculs de chaque dérivée de l'équation (3.98) sont maintenant détaillés. Ceux des dérivées $\frac{\partial \mathbf{G}^e}{\partial \mathbf{u}^n}$, $\frac{\partial [J^e]^{-T}}{\partial \mathbf{u}^n}$ et $\frac{\partial |J_e|}{\partial \mathbf{u}^n}$ sont donnés en annexe 2 pour le tétraèdre de référence. Compte tenu que la loi de comportement magnétique est supposée linéaire, la dérivée $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{u}^n}$ vaut :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{u}^n} = \chi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}^n}. \quad (3.99)$$

Calcul de $\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \mathbf{u}^n}$: En utilisant le changement de variable (3.93), la dérivée de l'induction magnétique créé par les sources par rapport au déplacement virtuel unitaire nodal $\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \mathbf{u}^n}$ peut être calculée sur un élément e par :

$$\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \mathbf{u}^n} \Big|_{\Omega_e} = \mu_0 \nabla \mathbf{H}_s \frac{\partial G_e}{\partial \mathbf{u}^n}. \quad (3.100)$$

Calcul de $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}^n}$: A partir de la relation (1.7) et de la discrétisation du potentiel scalaire Φ (1.62), on a :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}^n} = - \sum_{i=1}^{n_n} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{u}^n} \nabla \alpha_i + \Phi_i \frac{\partial \nabla \alpha_i}{\partial \mathbf{u}^n} \right). \quad (3.101)$$

Soit $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}^n}$ le vecteur des dérivées des degrés de liberté Φ_i par rapport au déplacement \mathbf{u}^n .

Calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}^n}$: Dans la relation (3.101), les dérivées des degrés de liberté $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{u}^n}$ sont obtenues par la dérivée du système d'équations linéaires (1.69) par rapport au déplacement virtuel unitaire nodal \mathbf{u}^n . Le vecteur $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}^n}$ est alors solution de : trouver $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}^n}$, tel que :

$$([I] + [A(\chi)]) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}^n} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}^n} - \left[\frac{\partial [A(\chi)]}{\partial \mathbf{u}^n} \Big|_{\Phi} \right] \Phi. \quad (3.102)$$

où $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}^n}$ est le vecteur des dérivées des degrés de liberté Φ_{0i} par rapport au déplacement \mathbf{u}^n . La dérivation de la matrice d'interaction $\frac{\partial [A(\chi)]}{\partial \mathbf{u}^n} \Big|_{\Phi}$ doit prendre en compte la distorsion du maillage engendrée par

le déplacement virtuel unitaire \mathbf{u}^n . Cette matrice d'interaction (1.71) est calculée par des intégrales de la forme (1.84). Lorsque les points de calcul ou d'intégration, respectivement de coordonnées \mathbf{r} et \mathbf{r}' , de l'intégrale précédente sont affectés par le déplacement virtuel unitaire d'un nœud associé, il faut dériver cette intégrale par rapport à \mathbf{r} ou \mathbf{r}' . Cela conduit au signe près à une intégrale de la forme (1.91). Or il a été vu au premier chapitre que le calcul d'intégrales (1.91) est singulière lorsque le point de calcul est sur une arête du maillage, ce qui arrive ici puisque la collocation est faite aux nœuds du maillage. A la place, une méthode des différences finies est appliquée lorsque le point d'intégration est trop proche du point de calcul. Dans ce cas, lorsqu'un nœud n du maillage est déplacé, sa position \mathbf{r}_n devient une variable pour la matrice d'interaction $[A(\chi, \mathbf{r}_n)]$, et le terme de la matrice correspondant $\left. \frac{\partial (A(\chi, \mathbf{r}_n))_{ij}}{\partial \mathbf{u}^n} \right|_{\Phi}$ est calculé par la méthode des différences finies suivante :

$$\left. \frac{\partial (A(\chi, \mathbf{r}_n))_{ij}}{\partial \mathbf{u}^n} \right|_{\Phi} \approx \frac{(A(\chi, \mathbf{r}_n + p\mathbf{e}_u))_{ij} - (A(\chi, \mathbf{r}_n - p\mathbf{e}_u))_{ij}}{2p} \quad (3.103)$$

où p est le pas de la méthode des différences finies et \mathbf{e}_u est le vecteur directeur unitaire du déplacement virtuel unitaire \mathbf{u}^n .

Calcul de $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}^n}$: A partir de la discrétisation du potentiel source Φ_0 (1.79), la dérivée $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}^n}$ peut s'écrire :

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}^n} = \sum_{i=1}^{n_n} \left(\frac{\partial \Phi_{0i}}{\partial \mathbf{u}^n} \nabla \alpha_i + \Phi_{0i} \frac{\partial \nabla \alpha_i}{\partial \mathbf{u}^n} \right), \quad (3.104)$$

où les dérivées des gradients des fonctions de forme $\frac{\partial \nabla \alpha_i}{\partial \mathbf{u}^n}$ sont obtenues par la relation (3.96) et celles des degrés de liberté $\frac{\partial \Phi_{0i}}{\partial \mathbf{u}^n}$ sont obtenus par la dérivée du système d'équations linéaires (1.81) par rapport au déplacement virtuel unitaire nodal \mathbf{u}^n . Le vecteur $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}^n}$ est alors solution de : trouver $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}^n}$, tel que :

$$[E] \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}^n} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^n} - \frac{\partial [E]}{\partial \mathbf{u}^n} \Phi, \quad (3.105)$$

où

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^n} \right)_i &= - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\hat{\Omega}} \left[\left(\left(\frac{\partial [J^e]^{-T}}{\partial \mathbf{u}^n} \hat{\nabla} \hat{\alpha}_i \right) \cdot \mathbf{H}_s + ([J^e]^{-T} \hat{\nabla} \hat{\alpha}_i) \cdot \left(\nabla \mathbf{H}_s \frac{\partial G_e}{\partial \mathbf{u}^n} \right) \right) |J^e| \right. \\ &\quad \left. + \left(([J^e]^{-T} \hat{\nabla} \hat{\alpha}_i) \cdot \mathbf{H}_s \right) \frac{\partial |J^e|}{\partial \mathbf{u}^n} \right] d\hat{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial [E]}{\partial \mathbf{u}^n} \right)_{ij} &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\hat{\Omega}} \left[\left(\left(\frac{\partial [J^e]^{-T}}{\partial \mathbf{u}^n} \hat{\nabla} \hat{\alpha}_i \right) \cdot ([J^e]^{-T} \hat{\nabla} \hat{\alpha}_j) + ([J^e]^{-T} \hat{\nabla} \hat{\alpha}_i) \cdot \left(\frac{\partial [J^e]^{-T}}{\partial \mathbf{u}^n} \hat{\nabla} \hat{\alpha}_j \right) \right) |J^e| \right. \\ &\quad \left. + \left(([J^e]^{-T} \hat{\nabla} \hat{\alpha}_i) \cdot ([J^e]^{-T} \hat{\nabla} \hat{\alpha}_j) \right) \frac{\partial |J^e|}{\partial \mathbf{u}^n} \right] d\hat{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Au nœud n , la force magnétique nodale \mathbf{F}^n peut être calculée à partir de la décomposition (3.58) et de la relation (3.92), telle que :

$$\mathbf{F}^n = F_{\mathbf{e}_1}^n \mathbf{e}_1 + F_{\mathbf{e}_2}^n \mathbf{e}_2 + F_{\mathbf{e}_3}^n \mathbf{e}_3. \quad (3.108)$$

La densité de forces magnétiques \mathbf{f}^n peut ensuite être obtenue par [Ren, 1997] :

$$\mathbf{f}^n = \frac{\mathbf{F}^n}{\sum_{e \in \mathcal{E}_n} \frac{V_e}{N_e}}, \quad (3.109)$$

où V_e et N_e sont respectivement le volume (ou surface pour un maillage 2D) et le nombre de nœuds de l'élément e du maillage et \mathcal{E}_n est l'ensemble des éléments du maillage contenant le nœud n . La densité de forces magnétiques peut ensuite être calculée en tout point du matériau ferromagnétique Ω_f par interpolation linéaire des valeurs aux nœuds du maillage (3.109).

Pour conclure cette partie, la méthode des travaux virtuels a été mise en œuvre afin de calculer les forces magnétiques locales ou la densité de forces magnétiques s'exerçant sur un domaine ferromagnétique ayant un comportement magnétique linéaire. L'extension au cas non linéaire n'a pas pu être menée mais il est envisageable en généralisant les étapes précédentes. L'approche proposée a l'avantage de ne nécessiter aucun calcul dans l'air. Cependant, les éléments aimantés sont en interactions totales. Ainsi un déplacement virtuel unitaire local appliqué à la structure modifiera entièrement son comportement magnétique. C'est pourquoi cette méthode nécessite principalement l'assemblage et la résolution de deux systèmes d'équations linéaires supplémentaires (3.105) et (3.102) pour chaque nœud du maillage et pour chaque direction du repère (3.58). Les matrices du système (3.105) sont creuses, tandis que celles du système (3.102), $[A(\chi)]$ et $\left[\frac{\partial [A(\chi)]}{\partial \mathbf{u}^n} \Big|_{\Phi} \right]$, sont respectivement pleine et creuse.

Remarque : Etant donné que seul le cas linéaire est considéré, les matrices des membres de gauche des systèmes (3.105) et (3.102) sont respectivement les mêmes que celles des systèmes (1.81) et (1.69). Dans ce cas, les processus de résolution de ces dernières peuvent être conservés pour résoudre les systèmes (3.105) et (3.102) en changeant uniquement le second membre.

3.4 Tenseur de Maxwell

3.4.1 Principe

Le tenseur de Maxwell est un outil mathématique qui permet d'exprimer certaines densités de forces magnétiques sous la forme de la divergence d'un tenseur de rang 2. Celui associé à l'expression de la densité de forces magnétiques (3.5) [Woodson and Melcher, 1968b] conduit à :

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot [T], \quad (3.110)$$

où $[T]$ est le tenseur de Maxwell, défini dans le cadre de la magnétostatique par :

$$T_{ij} = H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 H_k B_k. \quad (3.111)$$

La densité de forces magnétiques obtenue directement à partir de l'expression (3.110) n'a pas de signification physique [Reyne, 1987] et a pour vocation à être intégrée sur un volume afin d'obtenir la force magnétique qui s'y exerce. Selon le choix de ce volume d'intégration, la méthode du tenseur de Maxwell permet le calcul de forces magnétiques globales ou locales.

3.4.2 Calcul de la force magnétique globale

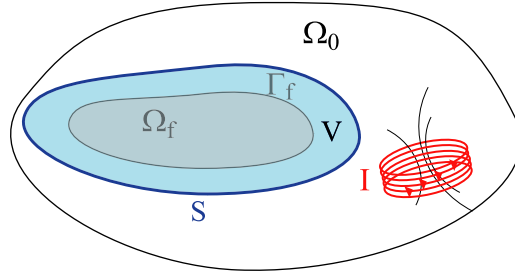


FIGURE 3.6 – Application du tenseur de Maxwell pour le calcul de la force magnétique globale

La force magnétique globale qui s'exerce sur la totalité ou une partie entouré d'air du domaine ferromagnétique Ω_f peut être calculée en intégrant la densité de forces magnétiques (3.110) dans un volume V situé dans l'air et qui entoure ce morceau (FIGURE 3.6) :

$$\mathbf{F} = \int_V \nabla \cdot [\mathbf{T}] \, dV. \quad (3.112)$$

Le théorème de Stokes permet de ramener le calcul de l'intégrale (3.112) sur la frontière S du volume V :

$$\mathbf{F} = \int_S [\mathbf{T}] \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (3.113)$$

Sur la surface S , les champs \mathbf{H} et \mathbf{B} peuvent être décomposés en :

$$\mathbf{H} = H_n \mathbf{n} + H_t \mathbf{t}, \quad \mathbf{B} = B_n \mathbf{n} + B_t \mathbf{t}. \quad (3.114)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal sortant à la surface S et \mathbf{t} le vecteur unitaire tangent. Si la matrice (3.111) est exprimée dans une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tel que l'axe \mathbf{e}_3 et le vecteur normal \mathbf{n} soient confondus, on peut montrer que le produit $[\mathbf{T}] \cdot \mathbf{n}$ s'écrit :

$$[\mathbf{T}] \cdot \mathbf{n} = (B_n H_t) \mathbf{t} + \frac{1}{2} (B_n H_n - B_t H_t) \mathbf{n}. \quad (3.115)$$

D'où la force magnétique F peut, grâce à la relation précédente (3.115), s'exprimer en fonction de l'intégrale des composantes normales et tangentielles des champs (3.115) sur la frontière S :

$$\mathbf{F} = \int_S (B_n H_t) \mathbf{t} + \frac{1}{2} (B_n H_n - B_t H_t) \mathbf{n} \, dS \quad (3.116)$$

En conclusion, la force magnétique globale s'exerçant sur un domaine ferromagnétique entouré d'air, peut être calculé par la méthode du tenseur de Maxwell (3.113) à partir d'une surface S fermée et dans l'air qui entoure ce domaine. Le choix de cette surface a fait l'objet d'études dans le cadre de la méthode des éléments finis [Freschi and Repetto, 2013]. Concernant les formulations intégrales, son influence est discutée dans la première application (§3.5.1).

3.4.3 Calcul de la force magnétique locale

La densité de forces magnétiques \mathbf{f} qui agit sur un matériau ferromagnétique peut être décomposée en la somme des densités volumique \mathbf{f}_v et surfacique \mathbf{f}_s :

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_s, \quad (3.117)$$

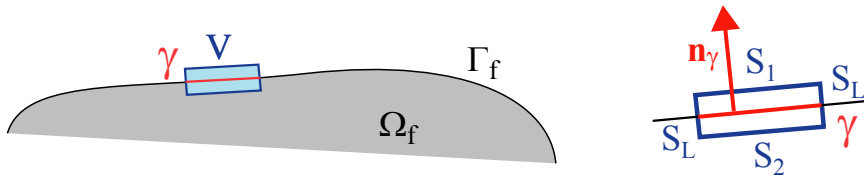


FIGURE 3.7 – Application du tenseur de Maxwell pour le calcul de la force magnétique locale

telle que :

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega_f} \mathbf{f}_v \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_s \, d\Gamma. \quad (3.118)$$

Si le matériau à un comportement magnétique linéaire, la force magnétique est principalement due au changement de perméabilité magnétique aux interfaces. La densité volumique \mathbf{f}_v est alors négligeable devant celle surfacique \mathbf{f}_s , et la force magnétique peut s'écrire :

$$\mathbf{F}_\gamma = \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_s \, d\Gamma. \quad (3.119)$$

La méthode du tenseur de Maxwell (3.112) est appliquée sur un volume V arbitraire entourant une portion γ de l'interface Γ_f . Supposons que ce volume V soit un pavé suffisamment petit pour que la portion γ soit considérée plane (FIGURE 3.7). La force magnétique s'exerçant sur l'intérieur du volume V s'exprime alors (3.113) :

$$\mathbf{F}_\gamma = \int_S [T] \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_1} [T] \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{S_2} [T] \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{S_L} [T] \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (3.120)$$

où S est la frontière du volume V telle que : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_L$ avec S_1 et S_2 les surfaces parallèles à γ et S_L les autres. Si la dimension du volume V suivant la direction perpendiculaire à l'interface Γ_f est prise infiniment petite, les intégrales de domaine S_L sont alors nulles et les surfaces S_1 et S_2 sont confondues avec la portion γ . La force (3.120) s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_\gamma = \int_\gamma \left([T]^+ - [T]^- \right) \mathbf{n}_\gamma \, d\Gamma, \quad (3.121)$$

où les indices $+$ et $-$ indiquent la position du point d'évaluation par rapport à la surface γ et orientée suivant sa normale sortante \mathbf{n}_γ . La densité surfacique de forces magnétiques est définie sur une surface élémentaire $d\Gamma$ par :

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Gamma}. \quad (3.122)$$

D'après la relation (3.121), la densité surfacique de forces magnétiques s'exerçant sur la frontière Γ_f peut alors être calculée par :

$$\mathbf{f}_s = \left([T]^+ - [T]^- \right) \mathbf{n}, \quad (3.123)$$

avec \mathbf{n} le vecteur normal unitaire sortant de la frontière Γ_f . En utilisant l'expression du tenseur de Maxwell (3.111) ainsi que la décomposition (3.114) dans la relation (3.123), la densité surfacique de force magnétique \mathbf{f}_s s'écrit :

$$\mathbf{f}_s = (B_n^+ H_t^+ - B_n^- H_t^-) \mathbf{t} + \frac{1}{2} (B_n^+ H_n^+ - B_t^+ H_t^+ - (B_n^- H_n^- - B_t^- H_t^-)) \mathbf{n}. \quad (3.124)$$

Remarque :

Lorsque les composantes normales et tangentielles, respectivement de l'induction et du champ magnétiques, sont continues au passage de l'interface Γ_f et lorsque les domaines des côtés $^+$ et $^-$ de l'interface Γ_f sont respectivement l'air et le domaine ferromagnétique de comportement magnétique linéaire, on retrouve la forme couramment rencontrée de l'expression de la densité surfacique de force magnétique par la méthode du tenseur de Maxwell [Reyne, 1987][Barre, 2003] :

$$\mathbf{f}_s = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) B_n^2 - (\mu_0 - \mu) H_t^2 \right) \mathbf{n} \quad (3.125)$$

Cependant le premier chapitre a montré, dans le cadre de la méthode intégrale de volume en potentiel scalaire, que seul le calcul du champ magnétique par la relation (1.90) à la fois dans l'air et dans le matériau ferromagnétique garantit la continuité des composantes normales et tangentielles, respectivement de l'induction et du champ magnétiques. Or, l'application de la sphère du premier chapitre a montré que la relation (1.90) ne fournit pas un champ exploitable lorsque le point d'évaluation est dans la matière aimantée. Dans ce cas, le champ magnétique est calculé à partir de la relation (1.96). Or les champs magnétiques construits à partir des relations (1.96) et (1.90) appartiennent par construction à des espaces de natures différentes (respectivement de dimensions finie et infinie) et ne garantissent pas la continuité des composantes normales et tangentielles respectivement de l'induction et du champ magnétiques. L'expression de la densité surfacique de force magnétique (3.124) est alors utilisée au lieu de (3.125).

Pour conclure cette partie, la méthode du tenseur de Maxwell permet d'exprimer la densité de force magnétique s'exerçant sur le matériau ferromagnétique (3.124). Cependant, elle nécessite des points de calcul du champ magnétique confondus avec la frontière du domaine ferromagnétique (3.121), ce qui est une condition défavorable dans le cadre de la formulation intégrale de volume. Ceci est étudiée dans l'application de la section §3.5.1 .

3.5 Applications

3.5.1 Modélisation d'une sphère creuse dans une spire

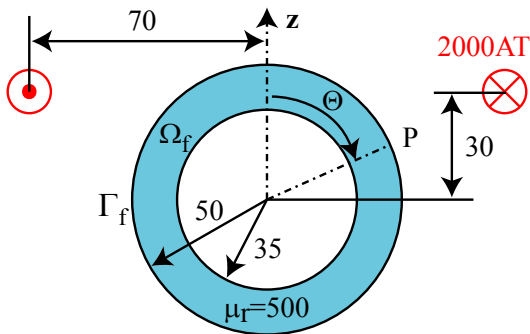


FIGURE 3.8 – Description du problème de la sphère creuse.

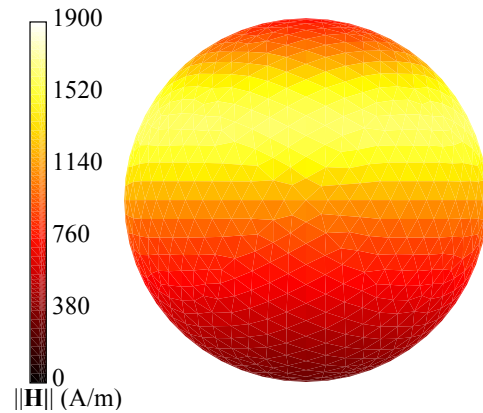


FIGURE 3.9 – Norme du champ magnétique calculée par la méthode intégrale de volume.

Considérons une sphère creuse constituée d'un matériau avec un comportement magnétique linéaire et plongée dans le champ magnétique créé par une spire parcourue par un courant (FIGURE 3.8). Le problème de magnétostatique est résolu par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire avec une approche en collocation aux nœuds du maillage (1.68). Le champ magnétique calculé pour un maillage avec 9812 éléments est présenté sur la FIGURE 3.9. Les forces magnétiques locales et globales s'exerçant sur le matériau magnétique peuvent être calculées analytiquement [Ren, 1997] et ainsi servir de référence afin de valider les résultats issus des méthodes des travaux virtuels et du tenseur de Maxwell.

3.5.1.1 Calcul de la force magnétique globale

La solution analytique fournit une valeur de référence pour la force magnétique totale s'exerçant sur le matériau magnétique valant 372.88 N suivant l'axe \mathbf{z} , les deux autres composantes étant nulles d'après la symétrie du problème.

Tout d'abord, la méthode des travaux virtuels (3.60) est utilisée afin de calculer la force magnétique globale s'exerçant sur le domaine ferromagnétique pour différents maillages. Les résultats obtenus sont présentés sur la FIGURE 3.10. Ces derniers montrent que l'évolution de la force magnétique globale calculée converge vers la valeur analytique lorsque le nombre d'éléments du maillage augmente.

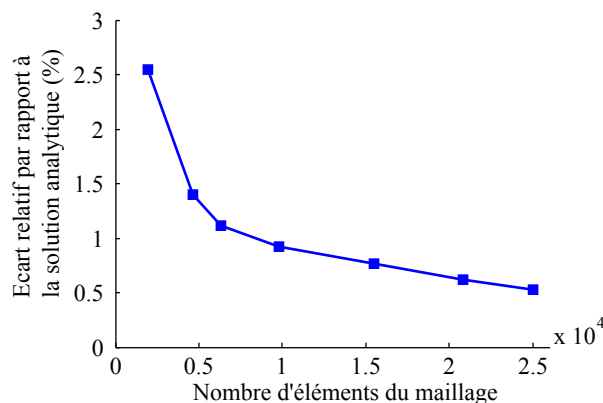


FIGURE 3.10 – Résultats pour la force magnétique globale calculée par la méthode des travaux virtuels.

Ensuite, la méthode du tenseur de Maxwell (3.113) est utilisée afin de calculer la force magnétique globale s'exerçant sur le domaine ferromagnétique. Pour cela, la surface d'intégration S envisagée du tenseur de Maxwell (3.113) est la surface d'une sphère concentrique et englobant le domaine magnétique sans contenir la spire (FIGURE 3.11a). Son rayon r_S est ainsi restreint à l'intervalle [50, 70] mm. Le champ magnétique dans l'air est calculé par la relation (1.90) une fois le problème résolu. Le maillage considéré est constitué de 4614 éléments. Comme toutes les méthodes de calcul de forces magnétiques fournissent la même force globale, on doit s'attendre à obtenir le même résultat que celui obtenu par la méthode des travaux virtuels (FIGURE 3.10), c'est à dire 367.62 N pour un maillage avec 4614 éléments.

Afin d'analyser l'influence du choix de la surface d'intégration S , les paramètres suivant varient : son rayon r_S , le nombre d'éléments triangulaires de son maillage et le nombre de points de Gauss utilisés dans chaque élément pour l'intégration numérique de la formule (3.113). Les écarts relatifs du résultat obtenu par rapport à la valeur attendue de 367.62 N sont tracés sur la FIGURE 3.11 pour différentes valeurs des paramètres précédents.

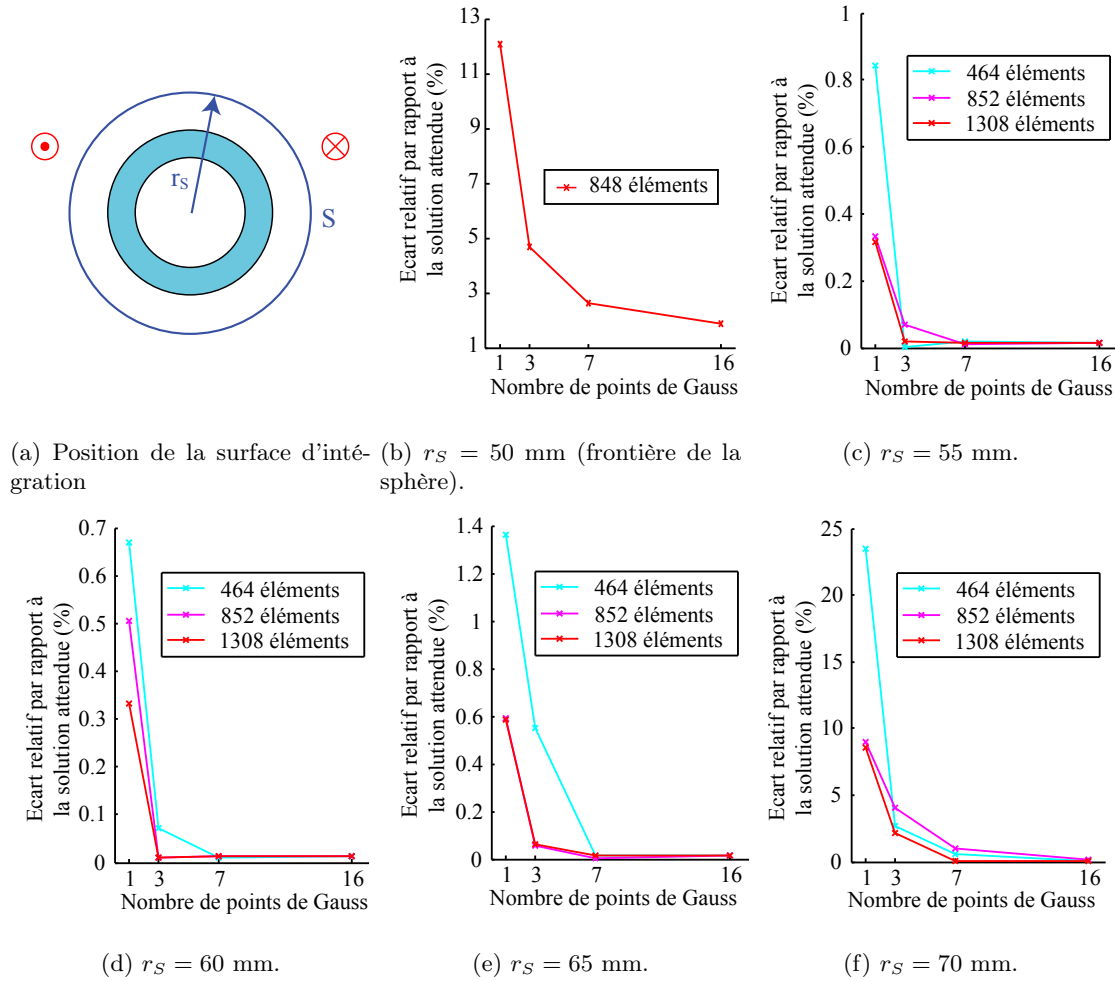


FIGURE 3.11 – Résultats de la force magnétique globale pour différentes surfaces d'intégration du tenseur de Maxwell.

Les résultats de la FIGURE 3.11 montrent que la force magnétique totale calculée dépend fortement du choix de la surface d'intégration. Si cette dernière est confondue avec l'interface du domaine ferromagnétique (FIGURE 3.11b), les maillages de la surface d'intégration et les nombres de points de Gauss utilisés ne suffisent pas pour obtenir la convergence. En effet, le champ magnétique dans l'air calculé par la relation (1.90) produit de fortes variations du champ magnétique au voisinage de la matière aimantée. Un trop grand nombre de points de Gauss est alors nécessaire pour obtenir une précision convenable pour l'intégration numérique de (3.113). Si la surface d'intégration est trop proche de la source de champ (FIGURE 3.11f), les fortes variations du champ magnétique source impliquent qu'au minimum 16 points de Gauss sont nécessaires avec les maillages utilisés pour converger vers une valeur de l'écart relatif inférieure à 0.1 %. Concernant les autres choix de rayons pour la surface d'intégration (FIGURES 3.11b - 3.11d), pour chaque maillage 3 ou 7 points de Gauss sont nécessaires pour converger vers une valeur de l'écart relatif inférieure à 0.1 %. Les paramètres de la surface S retenus, qui donnent ici la meilleure convergence, sont la surface d'une sphère de rayon 60 mm avec un maillage surfacique de 852 éléments ainsi que 3 points de Gauss pour l'intégration numérique.

La méthode du tenseur de Maxwell est maintenant utilisée afin de calculer la force magnétique globale s'exerçant sur le domaine ferromagnétique pour différents maillages. Les résultats des méthodes des travaux virtuels et du tenseur de Maxwell sont présentés sur la FIGURE 3.12. Les temps de calculs de la résolution du problème de magnétostatique par la formulation intégrale de volume en potentiel et de la force magnétique globale par les deux méthodes précédentes sont donnés dans le TABLEAU 3.1.

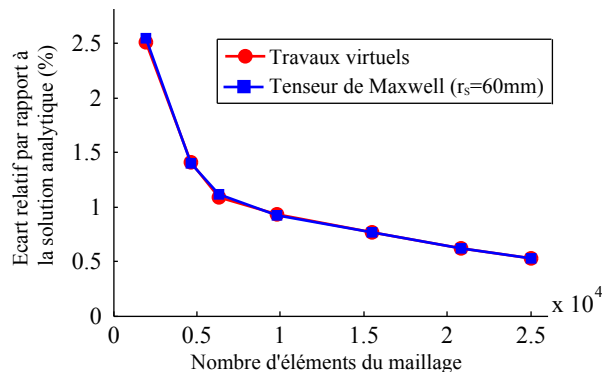


FIGURE 3.12 – Résultats de la force magnétique globale.

Nombre d'éléments	Résolution de la MIV (s)	Force Globale	
		Travaux virtuels (s)	Tenseur de Maxwell (s)
1924	2.1	0.17	122
4614	6.1	0.26	133
6328	9.9	0.32	154
9812	22	0.43	167
15460	56	0.81	171
20838	102	1.15	185
25003	145	1.52	202

TABLEAU 3.1 – Temps de calcul (PC avec un processeur Intel Core I7 2630 QM 2.0 GHz).

Les résultats (FIGURE 3.12) montrent que les deux méthodes fournissent des résultats quasi identiques qui convergent vers la solution analytique attendue. Cependant, vis à vis du temps de calcul (TABLEAU 3.1), la méthode des travaux virtuels fournit un résultat beaucoup plus rapidement. En effet, lors de la résolution du problème de magnétostatique, les processus de résolution de (1.81) et (1.69) sont conservés pour résoudre les systèmes (3.81) et (3.79) en changeant uniquement le second membre. Concernant la méthode du tenseur de Maxwell, les évaluations par post traitement du champ magnétique dans l'air sur une surface d'intégration judicieusement choisie sont trop coûteuses en terme de temps de calcul.

Pour conclure cette partie, dans le cadre de la formulation intégrale de volume, la surface d'intégration du tenseur de Maxwell (3.113) peut être source d'erreurs supplémentaires à celle due à la discrétisation si l'intégration numérique de l'équation (3.11b) n'est pas suffisamment précise, notamment dans des zones subissant de fortes variations du champ magnétique. Il faut alors trouver un compromis entre la position de la surface d'intégration, le raffinement de son maillage, son nombre de points de Gauss pour les intégrations numériques et le temps de calcul. Concernant la méthode des travaux virtuels, elle fournit dans le cas d'un comportement magnétique linéaire, un résultat pour la force magnétique globale très rapidement et sans nécessiter de calculs supplémentaires dans l'air.

3.5.1.2 Calcul de la force magnétique locale

La solution analytique fournit une valeur de référence pour la composante normale de la densité surfacique de force magnétique s'exerçant sur la surface extérieure Γ_{ext} de la sphère ferromagnétique [Ren, 1997]. Compte tenu de l'axisymétrie d'axe \mathbf{z} de la géométrie, il suffit d'évaluer cette densité sur une section de la sphère contenant l'axe \mathbf{z} .

Tout d'abord, la méthode du tenseur de Maxwell (3.124) est utilisée dans le cas où le domaine ferromagnétique est maillé avec 4614 éléments. Les résultats de la composante normale de la densité surfacique de force sur la surface extérieure de la sphère issus de ces deux méthodes sont présentés sur la FIGURE 3.13.

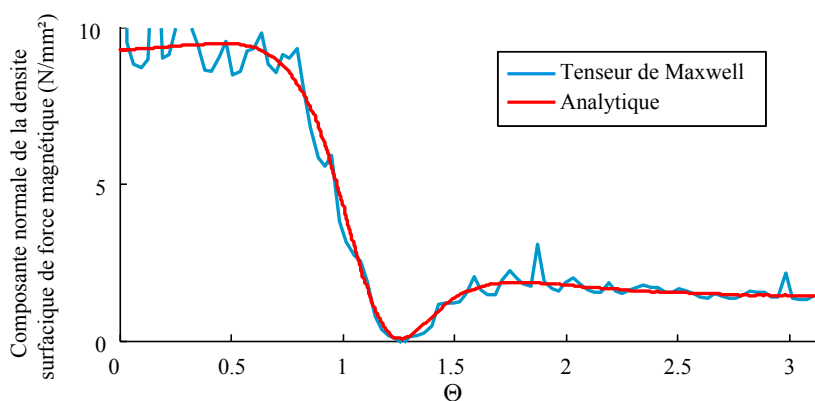


FIGURE 3.13 – Résultats de la composante normale de la densité surfacique de force sur la surface extérieure de la sphère par la méthode du tenseur de Maxwell .

Ces courbes montrent que l'application du tenseur de Maxwell conduit à de nombreux pics de valeur. Il s'agit des imprécisions du calcul du champ magnétique dans l'air par la relation (1.90) lorsque le point d'évaluation est proche de la matière aimantée. Ces pics de valeur se produisent lorsque que le point d'évaluation du champ magnétique dans l'air est proche d'une arête du maillage, à cause de l'intégrale du type (1.92). Une méthode du tenseur de Maxwell issue de la relation (3.123) où les surfaces d'intégrations de la relation (3.121) sont confondues avec chaque éléments du maillage de la frontière Γ_{ext} , est alors employée. Les forces magnétiques locales s'exerçant sur chaque élément surfacique de la frontière extérieure du domaine ferromagnétique sont alors obtenues. Une densité surfacique est ensuite calculée en divisant ces forces élémentaires par leurs surfaces d'intégration respectives. Les résultats ainsi obtenus en utilisant le maillage avec 4614 éléments sont présentés sur la FIGURE 3.14.

La méthode du tenseur de Maxwell avec moyennage sur chaque élément fournit des résultats de meilleure qualité (FIGURE 3.14), car les évaluations du champ magnétique se font aux point de Gauss des éléments. Ainsi, le problème des points d'évaluation trop proche des arêtes ne se posent plus. Néanmoins, les inconvénients sont le choix du nombres de points de Gauss permettant d'obtenir une intégration numérique précise de (3.124), ici fixé à 16 points de Gauss par triangle, et l'obtention d'une densité surfacique constante par élément.

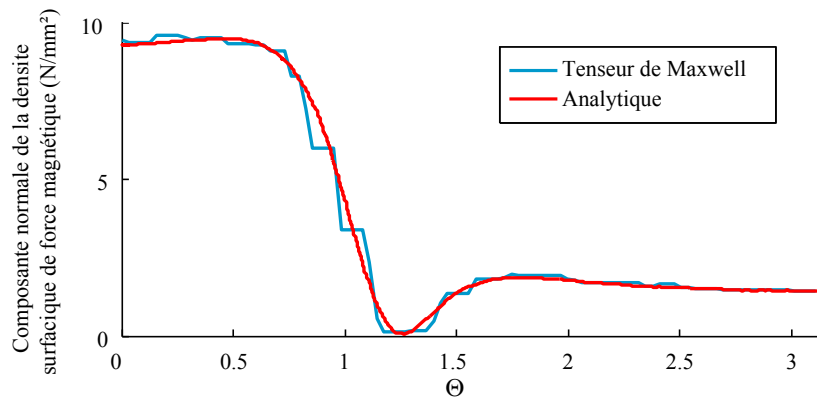


FIGURE 3.14 – Résultats de la composante normale de la densité surfacique de force sur la surface extérieure de la sphère par la méthode du tenseur de Maxwell avec moyennage sur chaque élément.

Ensuite, les méthodes des travaux virtuels (3.109) et du tenseur de Maxwell précédente sont utilisées afin de calculer la composante normale de la densité de force magnétique s'exerçant sur la frontière extérieure du domaine ferromagnétique Γ_{ext} pour différents maillages. Les résultats obtenus sont présentés sur la FIGURE 3.15 pour la méthode du tenseur de Maxwell et sur la FIGURE 3.16 pour celle des travaux virtuels.

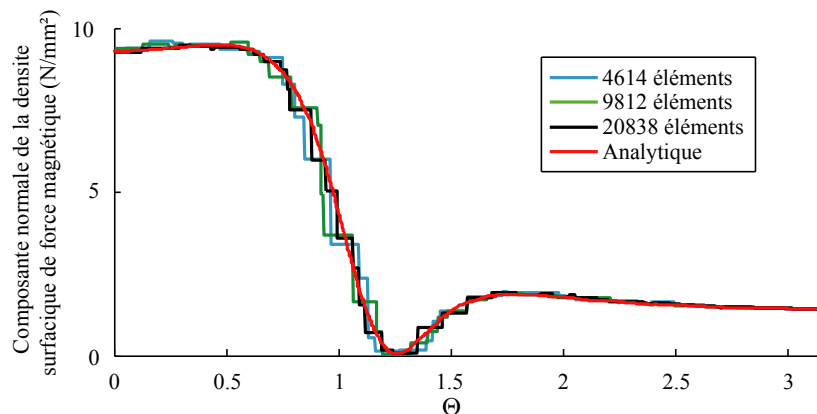


FIGURE 3.15 – Résultats de la composante normale de la densité surfacique de force sur la surface extérieure de la sphère par la méthode du tenseur de Maxwell.

Ces courbes montrent que les résultats des deux méthodes convergent vers la solution analytique attendue. On remarque que les résultats de la méthode des travaux virtuels (FIGURE 3.16) converge plus difficilement dans la zone à faibles valeurs. De plus, ces résultats sont linéaires tandis que ceux de la méthode du tenseur de Maxwell FIGURE 3.15 sont constant par élément. Concernant la méthode du tenseur de Maxwell, il faut s'assurer que l'erreur commise par rapport à l'intégration numérique précise de (3.124) est négligeable devant celle due à la discrétisation. Un nombre adéquat de points de Gauss doit alors être utilisé pour l'intégration numérique de (3.124) sur chaque triangle de la frontière Γ_{ext} , tout en conservant un compromis en temps de calcul. Nous avons ici fixé ce nombre de points de Gauss à 16 par triangle.

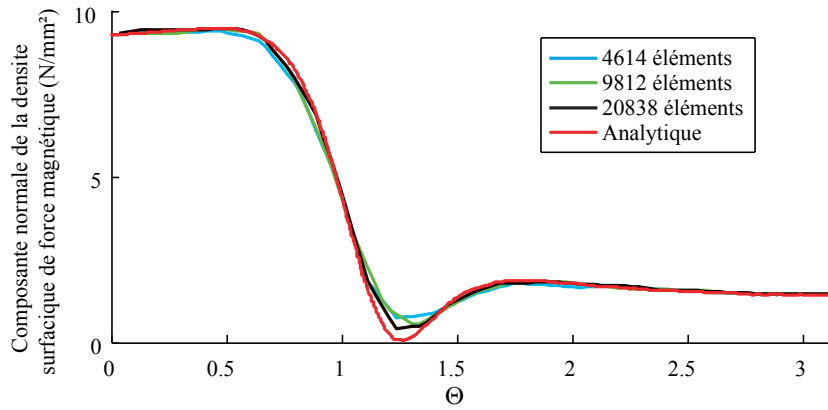


FIGURE 3.16 – Résultats de la composante normale de la densité surfacique de force magnétique sur la surface extérieure de la sphère par la méthode des travaux virtuels.

Le TABLEAU 3.2 fournit les moyennes des temps de calcul de la force magnétique à chaque nœud ou à chaque élément du maillage de la frontière Γ_{ext} respectivement pour les méthodes des travaux virtuels et du tenseur de Maxwell. Le temps de calcul de la force magnétique locale par la méthode du tenseur de Maxwell est principalement dû à l'évaluation analytique du champ magnétique dans l'air à partir d'une intégrale du type (1.92) lorsque l'élément d'intégration et le point d'évaluation sont proches. Concernant la méthode des travaux virtuels, elle nécessite principalement la résolution de deux systèmes matriciels supplémentaires (3.105) et (3.102) pour chaque nœud du maillage et chaque composante d'espace. Lors de la résolution du problème de magnétostatique, les processus de résolution de (1.69) et (1.81) sont conservés pour résoudre efficacement les systèmes (3.105) et (3.102) en changeant uniquement le second membre. Le temps de calcul de la force magnétique locale est alors principalement dû à l'assemblage de la matrice $\left[\frac{\partial [A(\chi)]}{\partial \mathbf{u}^n} \right]_{\Phi}$ du second membre du système (3.102). La formule analytique pour le calcul de la dérivée du champ magnétique produit par une spire est disponible dans [Urankar, 1980].

Nombre d'éléments du maillage	Nombre d'éléments de Γ_{ext}	Nombre de nœuds de Γ_{ext}	Résolution de la MIV (s)	Travaux virtuels temps moyen par nœud de Γ_{ext} (s)	Tenseur de Maxwell temps moyen par élément de Γ_{ext} (s)
4614	464	234	6.1	1.1	0.49
9812	1280	642	22	2.6	0.71
20838	1896	950	102	9.0	0.91

TABLEAU 3.2 – Temps de calcul (PC avec un processeur Intel Core I7 2630 QM 2.0 GHz).

En conclusion de cette application, les méthodes des travaux virtuels et du tenseur de Maxwell ont été appliquées dans le cadre de la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire avec une approche en collocation aux nœuds du maillage (1.68), afin de calculer les forces magnétiques globales et locales s'exerçant sur un matériau ferromagnétique de comportement magnétique linéaire. Leurs résultats ont été validés par rapport à la solution analytique. La méthode des travaux virtuels s'avère très efficace pour le calcul de la force magnétique globale. De plus, elle ne nécessite pas le choix d'une surface d'intégration pouvant être source d'erreurs supplémentaires, contrairement à la méthode du tenseur de Maxwell,.

Concernant le calcul de la densité de force magnétique s'exerçant sur la frontière extérieure du domaine ferromagnétique, la méthode du tenseur de Maxwell utilisant la formule couramment rencontrée

n'est pas utilisable telle quelle. En effet, les calculs s'effectuent alors sur la frontière extérieure du domaine ferromagnétique où les fortes variations de champ magnétique du côté de l'air rendent l'évaluation numérique difficile. Un moyennage de la force magnétique locale s'exerçant sur chaque élément du maillage de la frontière extérieure fournit un résultat exploitable mais nécessite un temps de calcul relativement long pour obtenir une densité surfacique de force constante par élément. De plus, il faut également s'assurer que l'erreur supplémentaire due à l'intégration numérique reste négligeable par rapport à l'erreur de discrétisation. Quant à la méthode des travaux virtuels, elle présente les avantages de ne nécessiter aucun calcul dans l'air et d'obtenir une densité de force magnétique linéaire. Cependant, sa mise en œuvre est coûteuse car elle nécessite les résolutions de deux systèmes supplémentaires pour chaque nœud du maillage et pour chaque dimension d'espace, malgré que ces résolutions peuvent être menées efficacement en réutilisant les processus de résolution du problème de magnétostatique.

3.5.2 Modélisation d'un contacteur

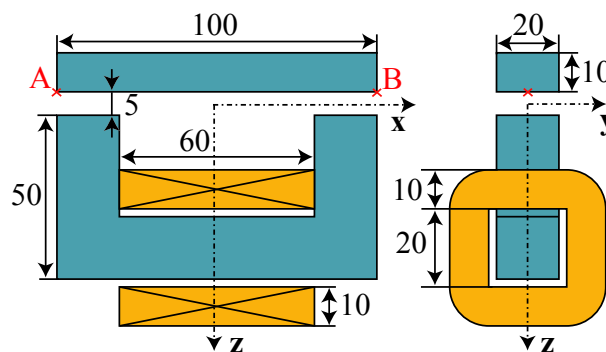


FIGURE 3.17 – Description du problème du contacteur.

Considérons le problème magnétostatique d'un contacteur décrit sur la FIGURE 3.17. Dans cette application, la méthode des travaux virtuels présentée dans la section §3.3.3 est utilisée afin de calculer des forces magnétiques locales et globales respectivement dans les cas non linéaire et linéaire. Ces résultats sont ensuite comparés à ceux issus de la méthode classique de la formulation éléments finis à l'aide d'une version non commerciale du logiciel Flux3d [Flux3d, 2013].

3.5.2.1 Calcul de la force magnétique globale

La loi de comportement du matériau ferromagnétique du contacteur est considérée comme étant non linéaire telle que :

$$\|\mathbf{M}(\|\mathbf{H}\|)\| = \frac{2J_s}{\mu_0\pi} \arctan\left(\frac{\pi(\mu_r - 1)\mu_0\|\mathbf{H}\|}{2J_s}\right), \quad (3.126)$$

où $J_s = 1.8\text{T}$ et $\mu_r = 2500$. La bobine est alimentée par 2500 AT. Ce problème est résolu par une méthode de Newton-Raphson pour la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire avec une approche en collocation aux nœuds du maillage (MIV) (1.68) ainsi que par la méthode des éléments finis (MEF) avec le logiciel Flux3d. L'induction magnétique calculée par la MIV pour un maillage avec 7566 éléments est présentée sur la FIGURE 3.18.

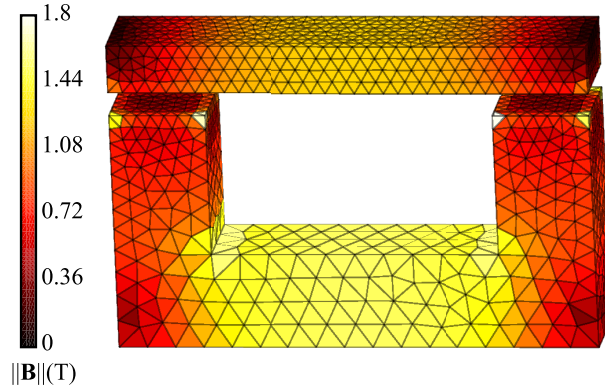


FIGURE 3.18 – Norme de l'induction magnétique calculée par la MIV.

La méthode des travaux virtuels adaptée à la MIV ainsi que celle employée dans le cadre de la MEF [Coulomb and Meunier, 1984] avec des fonctions de forme nodales d'ordre 1 et 2 sont appliquées pour calculer la force magnétique globale s'exerçant sur la partie supérieure du contacteur. Les résultats pour chaque formulation sont présentés sur la FIGURE 3.19. La valeur de référence (36.64 N) pour le calcul de l'erreur relative est celle fournie par la méthode des éléments finis d'ordre 2 avec un maillage de 185000 éléments dans le contacteur. Les résultats de chaque formulation converge vers la même valeur.

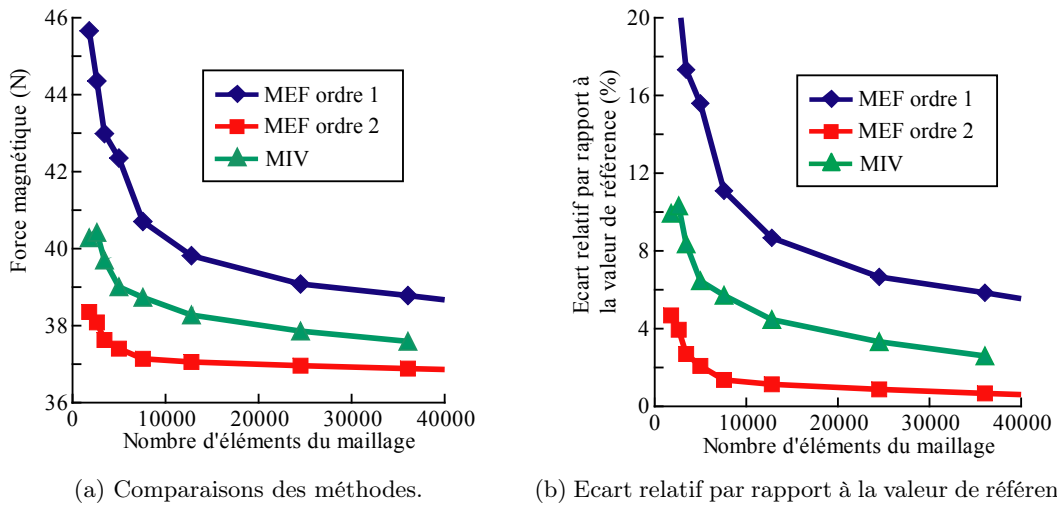


FIGURE 3.19 – Résultats pour le calcul de la force magnétique globale s'exerçant sur la partie supérieure du contacteur.

La méthode des travaux virtuels adaptée à la MIV fournis des résultats plus précis par rapport à la MEF d'ordre 1. Ceci peut être due au maillage de l'air à proximité du domaine considéré pour la MEF qui peut être source d'imprécisions [Ho et al., 2012]. Des précautions sur le maillage doivent alors être prises en compte [Rakotoarison et al., 2008], ce qui n'a pas été le cas ici. Concernant les performances, la MIV limite le nombre de nœuds du maillage afin de ne pas saturer la mémoire avec un ordinateur classique. Au delà, des méthodes de compression matricielle vu dans le second chapitre sont nécessaires. C'est pourquoi on ne dépasse ici les 36052 éléments du maillage dans le contacteur, ce qui en considérant le maillage de l'air de la MEF, représente un maillage total dépassant la centaine de milliers d'éléments.

Le TABLEAU 3.3 donne les temps de calcul nécessaire à la MIV et à la MEF d'ordre 1 pour résoudre le problème de magnétostatique et calculer la force magnétique globale. Ce tableau montrent que la mise en œuvre de la méthode des travaux virtuels adaptée à la MIV est plus lourde car elle nécessite la résolution d'un système matriciel (3.79) supplémentaire afin de calculer la force magnétique globale. Son temps de calcul est alors principalement dû à l'assemblage de la matrice $\left. \frac{\partial [A(\chi)]}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\Phi}$ du second membre du système (3.79). Les perspectives seraient d'utiliser des techniques de compression afin d'accélérer ces résolutions. La méthode de compression ACA vue dans le second chapitre pourrait être employée, il serait alors nécessaire d'adapter les développements de ce chapitre aux blocs pleins de la matrice $\left. \frac{\partial [A(\chi)]}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\Phi}$ du second membre du système (3.79), qui correspondent à des matrices d'interaction avec un noyau différent.

Nombre d'éléments	Résolution par NR		Force Globale par TV	
	MIV (s)	MEF (s)	MIV (s)	MEF (s)
1795	76	71	17	1.2
2620	137	71	29	1.3
3436	216	74	39	1.6
4986	479	81	64	2.1
7566	997	87	107	2.8
12785	2570	118	229	3.9
24508	11000	146	804	5.8

TABLEAU 3.3 – Temps de calcul (PC avec un processeur Intel Core 2 duo E8400 3.0 GHz).

3.5.2.2 Calcul de la force magnétique locale

La loi de comportement du matériau ferromagnétique du contacteur est maintenant considérée comme étant linéaire : $\mu_r = 1000$ et la bobine est alimentée par 2000 AT. L'induction magnétique calculée par la MIV pour un maillage avec 18108 éléments est présentée sur la FIGURE 3.20. La méthode des travaux virtuels de la MIV (3.109) ainsi que celle de la MEF [Ren and Razek, 1992] sont appliquées afin de calculer la densité surfacique de force magnétique s'exerçant sur la partie supérieure du contacteur. La méthode des travaux virtuels de la MIV fournit une répartition de forces magnétiques nodales (3.92) représentée sur la FIGURE 3.21.

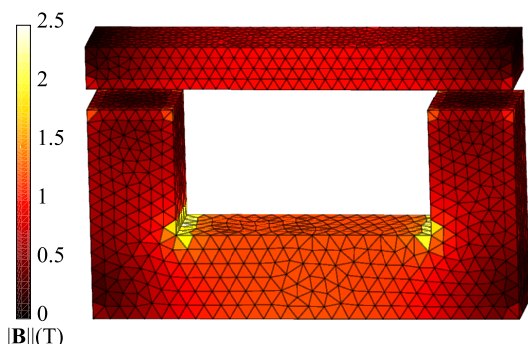


FIGURE 3.20 – Norme de l'induction magnétique calculée par la MIV.

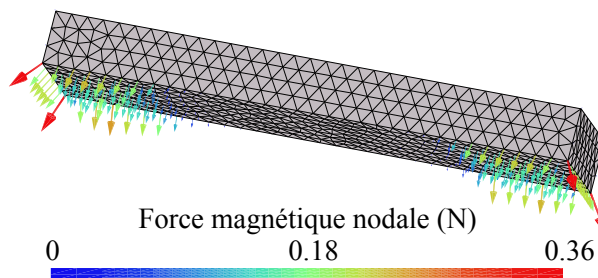


FIGURE 3.21 – Forces magnétiques nodales calculées par la méthode des travaux virtuels adaptée à la MIV.

Les évolutions de la densité surfacique de force magnétique le long du segment $[AB]$ (FIGURE 3.17) sont données sur la FIGURE 3.22 pour trois maillages de tailles différentes (3914, 6253 et 18108 éléments).

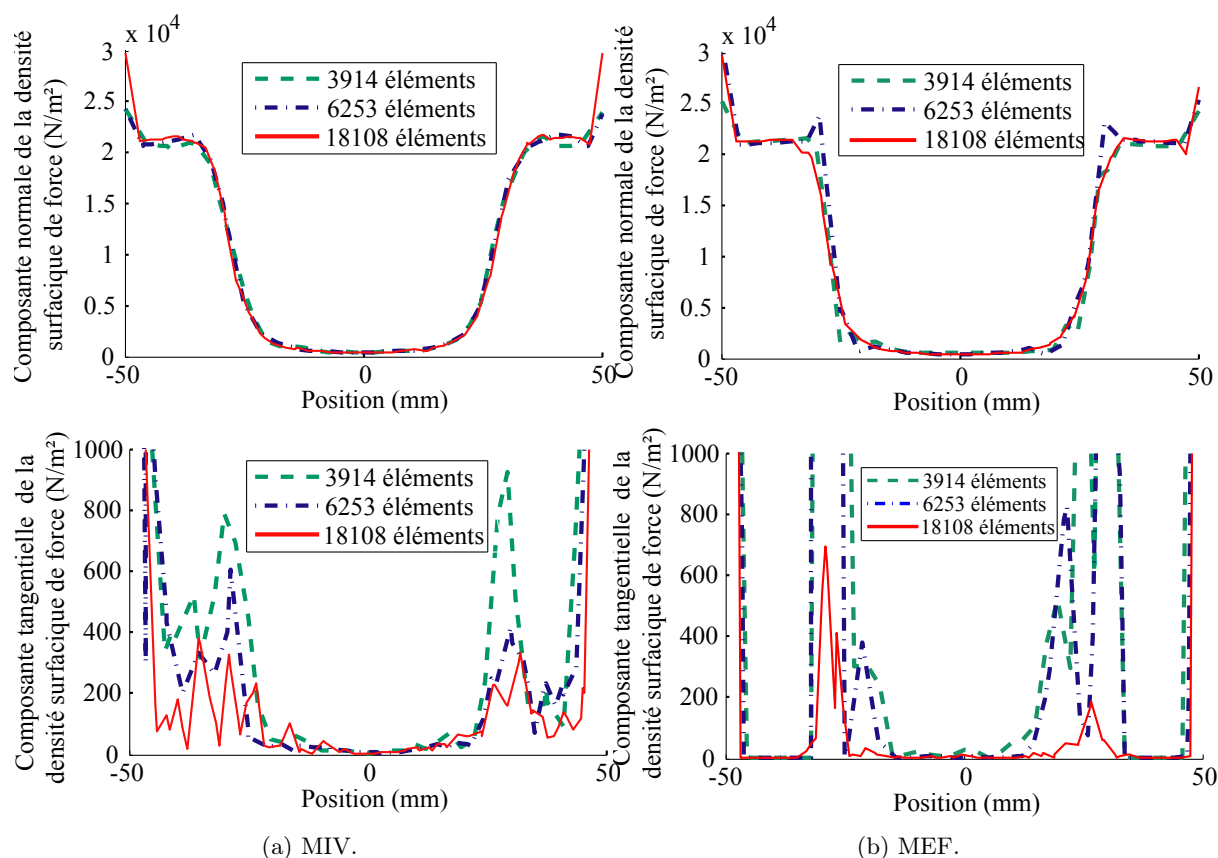


FIGURE 3.22 – Résultats pour le calcul de la densité surfacique de force magnétique.

La FIGURE 3.22 montre que les résultats de chaque formulation convergent vers la même solution. Pour les deux formulations, les résultats ne sont pas précis aux extrémités en raison des singularités géométriques. On rencontre également des pics de valeurs à -30 et $+30$ mm sur l'axe AB lorsque le point d'évaluation traverse l'entrefer et particulièrement pour la composante tangentielle de la densité surfacique de force magnétique, qui est négligeable par rapport à la composante normale. Ces pics sont plus importants avec la MEF, une raison pouvant être la mauvaise qualité du maillage de l'air dans l'entrefer avec peu d'éléments. Concernant la MIV, ces pics de valeur sont moins forts mais plus larges, probablement à cause de la répercussion sur les éléments voisins par interaction entre tous les éléments aimantés.

Le TABLEAU 3.4 donne les temps de calcul pour les forces magnétiques nodales à partir de la méthode des travaux virtuels par la MIV et par la MEF. Ce tableau montre que la mise en œuvre de la méthode des travaux virtuels de la MIV est plus coûteuse en temps de calcul que son équivalent MEF. En effet, dans le cadre de la formulation intégrale de volume, chaque élément du maillage ayant une aimantation est en interaction totale avec les autres, ainsi un déplacement virtuel appliqué à un nœud du maillage modifie l'aimantation de l'ensemble de la structure. C'est pourquoi, la résolution relativement coûteuse en temps de calcul de systèmes supplémentaires (3.105) (3.102) est nécessaire pour chaque nœud du

maillage et pour chaque direction du déplacement virtuel. Quant à la méthode des travaux virtuels par la MEF, les degrés de liberté sont maintenus constant lors du déplacement virtuel. Ce dernier n'a alors qu'une influence locale qui nécessite seulement la prise en compte des déformations locales des éléments du maillage [Ren and Razek, 1992]. Aucune résolution de systèmes supplémentaires n'est alors nécessaire, c'est pourquoi cette méthode est plus rapide.

Nombre d'éléments	Moyen par nœuds (s) / pour tous les nœuds (s)
3914	0.46/570
6253	0.72/ 1330
18108	2.5/ 11600

(a) MIV (PC avec un processeur Intel Core i7 2630 QM 2.0 GHz).

Nombre d'éléments	Pour tous les nœuds (s)
3914	8.8
6253	12
18108	26

(b) FEM (PC avec un processeur Intel Core i7-3640QM 2.70GHz).

TABLEAU 3.4 – Temps de calcul des forces magnétiques nodales.

Pour conclure cette application, la méthode des travaux virtuels a été appliquée dans le cadre de la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire avec une approche en collocation aux nœuds du maillage (1.68) et dans celui de la formulation éléments finis afin de calculer la densité surfacique de force magnétiques s'exerçant sur un matériau ferromagnétique de comportement magnétique linéaire. Leurs résultats coïncident, ce qui valident l'adaptation proposée de la méthode des travaux virtuels à la formulation intégrale de volume. Cependant, la mise en œuvre de cette dernière est plus lourde que son équivalent éléments finis. En effet, le stockage des matrices lors de la résolution par la formulation intégrale de volume limite le nombre de nœuds du maillage traitable. De plus, son coût en terme de temps de calcul est élevé du fait des résolutions et assemblages de systèmes matriciels supplémentaires, qui peuvent être très nombreux pour le calcul des forces magnétiques locales.

3.6 Conclusion

Ce troisième chapitre a présenté les méthodes des travaux virtuels et du tenseur de Maxwell, couramment utilisées dans le cadre de la méthode des éléments finis afin de calculer les forces magnétiques globales et locales. Ces méthodes sont ici appliquées dans le cadre de la formulation intégrale de volume où des précautions sont nécessaires car l'air n'est pas maillé et les éléments aimantés sont en interactions totales.

La méthode du tenseur de Maxwell requiert l'intégration d'un tenseur sur une surface fermée entourant le domaine où la force magnétique recherchée s'exerce. Pour le calcul de forces magnétiques globales, cette surface d'intégration doit éviter les zones où le champ magnétique subit de fortes variations pour ne pas recourir à un maillage trop fin ou un nombre important de points de Gauss pour bénéficier d'une intégration numérique suffisamment précise. Ces zones sont par exemple à proximité des inducteurs ou de la matière aimantée. Pour le calcul de la densité de force magnétique, la surface d'intégration du tenseur de Maxwell est confondue avec la frontière extérieure du domaine ferromagnétique où le champ magnétique du côté de l'air doit être évalué. Or, il s'agit d'un cas défavorable de la formulation intégrale de volume qui a été vu au premier chapitre. Les applications ont montré qu'il faut alors choisir judicieusement la surface d'intégration pour le calcul de la force magnétique globale et moyenner la force magnétique locale sur chaque élément afin d'avoir une densité surfacique de force exploitable.

Quand à la méthode des travaux virtuels, elle a été mise en œuvre pour la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire avec l'approche en collocation. Le calcul de forces magnétiques globales nécessite alors principalement l'assemblage et la résolution d'un système matriciel supplémentaire. Son application locale, où un déplacement virtuel unitaire est appliqué aux nœuds du maillage, permet d'en déduire les forces magnétique locales. Ce calcul, restreint ici au comportement magnétique linéaire, nécessite principalement l'assemblage et la résolution de deux systèmes matriciels supplémentaires pour chaque nœud du maillage et chaque dimension d'espace. Ces résolutions de systèmes supplémentaires peuvent être menées efficacement en réutilisant les processus de résolution de la formulation intégrale de volume. Cependant, leur nombre est très important lors du calcul des forces magnétique locales, ce qui implique un coût en terme de temps de calcul élevé. Lors des applications, la méthode des travaux virtuels du cadre de la formulation intégrale de volume a fourni des résultats comparables à ceux issus de la méthode des travaux virtuels du cadre de la formulation éléments finis. De plus, contrairement à la méthode du tenseur de Maxwell, aucun calcul de champ magnétique dans l'air n'est nécessaire. C'est pourquoi il s'agit de la méthode retenue pour le calcul de forces magnétiques locales pour réaliser le couplage magnéto-mécanique du chapitre suivant.

Les perspectives de recherche concernent la prise en compte de la non linéarité pour le calcul de la force magnétique locale et de ne plus recourir à des différences finies pour certaines dérivations. On peut également envisager d'utiliser des méthodes de compression, telles que la méthode ACA présentée au second chapitre, afin d'améliorer les coûts en mémoire et en temps de calcul.

Chapitre 4

Mise en œuvre du couplage magnéto-mécanique

Ce chapitre est dédié à la modélisation de dispositifs magnéto-mécaniques, dans lesquels des couplages entre les états magnétiques et mécaniques ont lieu. Notre étude concernera la mise en œuvre du couplage magnéto-mécanique, qui se manifestent uniquement à travers les forces d'origine magnétique. Ce sont ces forces qui engendrent la déformation de la structure. La méthode classique pour résoudre le problème mécanique est celle des éléments finis. Les phénomènes mécaniques n'émettant pas de rayonnement, le maillage de l'air n'est alors pas nécessaire, contrairement à la méthode des éléments finis utilisée en électromagnétisme, où cela peut être problématique pour des structures contenant beaucoup d'air. La formulation intégrale de volume proposée au premier chapitre est alors utilisée afin de résoudre le problème magnétostatique. De plus, le même maillage peut être utilisé pour résoudre les problèmes magnétostatique et mécanique. Le calcul des forces magnétiques est mené par la méthode des travaux virtuels du troisième chapitre.

Dans un premier temps, une brève introduction au comportement magnéto-mécanique est proposée, ainsi que les hypothèses retenues pour notre étude. Ces dernières donnent la possibilité d'établir séparément les équilibres magnétostatique et mécanique, le couplage magnéto-mécanique se manifestant à travers les forces magnétiques. De plus, ces hypothèses permettent également de se placer dans le cadre de la mécanique des milieux continus, dont les équations sont introduites dans la seconde partie. La résolution du problème mécanique, menée par la méthode des éléments finis, fait l'objet de la troisième partie. La quatrième partie propose une implémentation du couplage magnéto-mécanique en utilisant la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire pour la partie magnétique, la méthode des travaux virtuels pour le calcul de forces magnétiques et la méthode des éléments finis présentée dans ce chapitre pour la partie mécanique. La dernière partie est consacrée à un premier essai d'implémentation du couplage magnéto-mécanique pour la modélisation d'un micro-actionneur.

4.1 Introduction au comportement magnéto-mécanique et hypothèses

Dans un milieu ferromagnétique, deux niveaux de couplage magnéto-mécanique se distinguent [Hirsinger and Billardon, 1995] :

- le couplage magnéto-mécanique local, lorsque celui-ci intervient dans les définitions des lois de comportements magnétique et mécanique. Ce couplage se manifeste par des effets de magnétostriction se présentant sous deux formes : la déformation de magnétostriction, c'est-à-dire la réponse mécanique d'un solide à un changement de son aimantation et son inverse, l'effet Villari. Pour des informations sur l'origine de ces phénomènes, le lecteur peut consulter [Du Tremolet De Lacherisserie, 1993].
- le couplage magnéto-mécanique global, lorsque les équilibres mécanique et magnétostatique sont interdépendants. Par exemple, lorsque les déplacements d'une structure engendrent une modification de son état magnétique ou lorsque des forces magnétiques sollicitent mécaniquement une structure.

Le couplage magnéto-mécanique peut également être qualifié par le niveau d'interaction entre les équations d'équilibres magnétique et mécanique. Ce couplage est dit "fort" si la résolution des équations magnétiques modifie l'équilibre mécanique, et si la résolution des équations mécaniques modifie également l'équilibre magnétique. Si une seule des deux assertions précédentes est vérifiée, alors le couplage est dit "faible". Les déformations envisagées étant relativement faibles, l'hypothèse des petites perturbations est employée. Dans ce cas, les déplacements de la structure sont supposés suffisamment faibles pour négliger les modifications engendrées sur l'équilibre magnétique de la structure. Les comportements magnétique et mécanique sont alors considérés faiblement couplés.

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéressera uniquement au couplage magnéto-mécanique global faible réalisé à travers les forces magnétiques. Dans ce cas, la résolution magnétostatique ainsi que le calcul des forces magnétiques peuvent être menés séparément. Le problème mécanique est ensuite résolu en tenant compte des forces magnétiques. La résolution du problème magnétique a été abordée dans la première partie de cette thèse. Intéressons nous dorénavant à la résolution du problème mécanique. Pour cela, on se place dans l'hypothèse des milieux continus, ce qui signifie que les propriétés caractéristiques des milieux d'étude, ainsi que les transformations associées, doivent être continues. En d'autres termes, cela revient à considérer que la matière est homogène compte tenu de l'échelle d'observation. La mise en équations du problème mécanique peut alors être menée dans le cadre de la mécanique des milieux continus [Lemaitre et al., 2009].

4.2 Mécanique des milieux continus

4.2.1 Grandeurs physiques

Lorsqu'un solide déformable de domaine Ω_m est sollicité par des forces extérieures, son état mécanique est décrit par les grandeurs physiques suivantes :

- le champ de contrainte, qui représente les efforts internes du solide. En tout point du solide, le tenseur des contraintes $[\sigma]$ est un tenseur d'ordre 2 de la forme :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Chaque coefficient du tenseur des contraintes $[\sigma]$ correspond à une composante de la densité surfacique de force s'exerçant sur une facette d'un cube de dimension infinitésimal (FIGURE 4.1). A partir de la connaissance du tenseur des contraintes, on peut déterminer la force \mathbf{F} qui s'exerce sur la surface S de normale \mathbf{n} par :

$$\mathbf{F} = \int_S [\sigma(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma, \quad (4.2)$$

où \cdot est le produit tensoriel contracté.

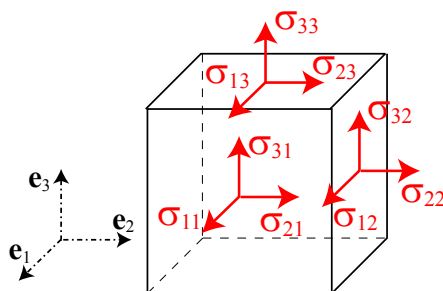


FIGURE 4.1 – Illustration du tenseur des contraintes.

- le champ de déplacement, qui représente le déplacement en tout point du solide par rapport à une position initiale (FIGURE 4.2). Dans la description Lagrangienne du mouvement [Lemaitre et al., 2009], la position d'un point P du solide à un instant t est calculée à partir de sa position à un instant antérieure t_0 et de son déplacement \mathbf{u} , telle que :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{u}(t, \mathbf{r}(t_0)), \quad (4.3)$$

où \mathbf{r} est le vecteur des coordonnées du point P .

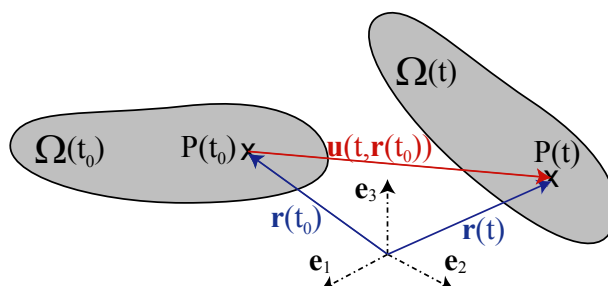


FIGURE 4.2 – Illustration du vecteur déplacement.

- le champ de déformation qui représente les déformations locales du solide. En tout point du solide, le tenseur des déformations $[\varepsilon]$ est un tenseur d'ordre 2 de la forme :

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Le tenseur des déformations ε n'est pas unique [Botsis and Deville, 2006] et seul celui appelé tenseur des déformations de Green-Lagrange est considéré. Il est relié au déplacement \mathbf{u} par la relation suivante :

$$[\varepsilon(\mathbf{u})] = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u} \right). \quad (4.5)$$

L'hypothèse des petites perturbations permet de simplifier l'écriture du tenseur des déformations (4.5) en ne gardant que les termes linéaires en \mathbf{u} :

$$[\varepsilon(\mathbf{u})] = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right). \quad (4.6)$$

4.2.2 Notation de Voigt

La notation de Voigt est une convention pour décrire un tenseur symétrique à travers un tenseur d'ordre inférieur afin de réduire le nombre de coefficients utilisés. Pour cela, cette notation tire profit des symétries dans l'écriture des tenseurs, pour ne conserver que les coefficients indépendants. Par construction, les tenseurs des contraintes (4.1) et des déformations (4.4) sont des tenseurs symétriques. La notation de Voigt associée à ces deux tenseurs d'ordre 2 est détaillée dans [François et al., 1991]. Leur connaissance peut ainsi être résumée à celle de deux vecteurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$, tels que :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

et

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

4.2.3 Loi de comportement

Lorsqu'un solide déformable est soumis à une sollicitation mécanique, les tenseurs des contraintes $[\sigma]$ et des déformations $[\varepsilon]$ sont liés entre eux par une loi de comportement mécanique, caractéristique du matériau. Par exemple, lors d'un essai de traction d'une éprouvette en acier [Degallaix, 2007], on retrouve typiquement la courbe illustrée sur la FIGURE 4.3. Deux comportements mécaniques se distinguent :

- le comportement élastique, qui traduit la déformation réversible d'un solide. C'est-à-dire, sans sollicitation le milieu retrouve son état initial.
- le comportement plastique, qui traduit la déformation irréversible d'un solide. C'est-à-dire, après une sollicitation suffisamment forte, le milieu ne retrouve pas son état initial et l'objet est déformé de manière définitive.

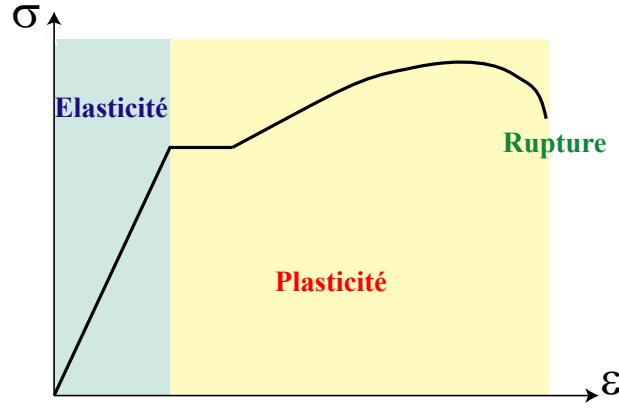


FIGURE 4.3 – Allure typique d’une courbe conventionnelle d’un essai de traction sur une éprouvette en acier.

Lorsque les déformations restent proportionnelles aux contraintes, il s’agit du comportement élastique, qui caractérisera les matériaux considérés par la suite. Dans ce cas, la loi de Hooke permet de relier les tenseurs des contraintes (4.1) et des déformation élastiques (4.4) à travers un tenseur d’ordre 4, noté $\langle C \rangle$, tel que :

$$[\sigma] = \langle C \rangle : [\varepsilon], \quad (4.9)$$

où : est le produit tensoriel contracté deux fois. Le tenseur $\langle C \rangle$ est appelé tenseur d’élasticité, dont les coefficients caractérisent entièrement le comportement élastique du matériau. En tenant compte de la symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations, le tenseur d’élasticité $\langle C \rangle$ vérifie :

$$\sigma_{ijkl} = \sigma_{jikl} = \sigma_{ijlk}. \quad (4.10)$$

De plus, par des considérations énergétiques, on peut montrer que le tenseur d’élasticité $\langle C \rangle$ est invariant par permutation des paires d’indices [Bacon and Pouyet, 2000] :

$$\sigma_{ijkl} = \sigma_{klij}. \quad (4.11)$$

Du fait de ces propriétés de symétrie (4.10) et d’invariance (4.11), la notation de Voigt est utilisée pour décrire le tenseur d’élasticité $\langle C \rangle$ à travers une matrice $[C]$, telle que :

$$[C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Dans le cas d’un matériau isotrope, le tenseur d’élasticité peut être construit à partir de la connaissance de deux coefficients. On peut alors utiliser ceux de Young E et de Poisson ν , qui sont des caractéristiques du matériau. Le tenseur d’élasticité $\langle C \rangle$ est ensuite obtenu par :

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

4.2.4 Equations d'équilibre et conditions aux limites

Considérons le problème mécanique statique 3D suivant (FIGURE 4.4) : un matériau ayant un comportement mécanique élastique linéaire est contenu dans un domaine Ω_m et soumis à une densité volumique de force \mathbf{f}_v . Soient Γ_m la frontière du solide Ω_m , Γ^σ et Γ^u sont deux parties de l'interface Γ_m , telles que $\Gamma^\sigma \cup \Gamma^u = \Gamma_m$ et $\Gamma^\sigma \cap \Gamma^u = \emptyset$. Une densité surfacique de force \mathbf{f}^σ est exercée sur la surface Γ^σ tandis qu'un déplacement \mathbf{u}_0 est imposé sur la surface Γ^u .

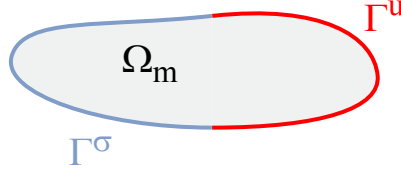


FIGURE 4.4 – Description du problème mécanique.

La mécanique des milieux continus est régie par l'équation d'équilibre locale, qui s'établit à partir de l'équilibre des forces s'exerçant sur un cube de dimension infinitésimale (FIGURE 4.1). Dans un cadre statique, l'équation d'équilibre locale s'écrit :

$$\nabla \cdot [\sigma] + \mathbf{f} = 0. \quad (4.14)$$

Les conditions aux limites du problème mécanique sont définies par :

$$[\sigma] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}^\sigma \quad \text{sur } \Gamma^\sigma, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \Gamma^u. \quad (4.16)$$

En utilisant l'équation d'équilibre locale (4.14) et les conditions aux limites (4.15) et (4.16), la formulation en déplacement du problème mécanique s'écrit : trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbf{u}_0)$, tel que :

$$\begin{cases} \nabla \cdot [\sigma(\mathbf{u})] + \mathbf{f} = 0 \\ [\sigma(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}^\sigma \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma^\sigma, \quad (4.17)$$

où $\mathcal{C}(\mathbf{u}_0)$ est l'ensemble des déplacements admissibles, défini par :

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}_0) = \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ est continu et régulier sur } \Omega_f \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } \Gamma^u \}. \quad (4.18)$$

4.3 Méthode des éléments finis

4.3.1 Formulation faible du problème mécanique

Il existe plusieurs approches conduisant à la formulation faible du problème mécanique [Bonnet and Frangi, 2006]. L'une d'entre elles consiste à établir la formulation faible de l'équation d'équilibre locale (4.14) en multipliant cette dernière par une fonction de pondération \mathbf{w} , puis en intégrant sur le domaine Ω_m . Le problème devient : trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbf{u}_0)$, tel que :

$$\int_{\Omega_m} \nabla \cdot [\sigma(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = - \int_{\Omega_m} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{C}(\mathbf{0}), \quad (4.19)$$

où $\mathcal{C}(\mathbf{0})$ est l'ensemble défini par :

$$\mathcal{C}(\mathbf{0}) = \{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \text{ est continu et régulier sur } \Omega_f \text{ et } \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma^u \}. \quad (4.20)$$

Les identités tensorielles suivantes :

$$[\sigma(\mathbf{u})] : \nabla \mathbf{w} = \nabla \cdot ([\sigma(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{w}) - \left(\nabla \cdot [\sigma(\mathbf{u})]^T \right) \cdot \mathbf{w}, \quad (4.21)$$

$$[\sigma(\mathbf{u})] : \nabla^T \mathbf{w} = \nabla \cdot \left([\sigma(\mathbf{u})]^T \cdot \mathbf{w} \right) - \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot [\sigma(\mathbf{u})]). \quad (4.22)$$

associées à la symétrie du tenseur des contraintes, permettent d'écrire :

$$[\sigma(\mathbf{u})] : [\varepsilon(\mathbf{w})] = \nabla \cdot ([\sigma(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{w}) - (\nabla \cdot [\sigma(\mathbf{u})]) \cdot \mathbf{w}. \quad (4.23)$$

La relation (4.23) est utilisée dans l'équation (4.19) pour obtenir :

$$\int_{\Omega_m} \nabla \cdot ([\sigma(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{w}) \, d\Omega - \int_{\Omega_m} [\sigma(\mathbf{u})] : [\varepsilon(\mathbf{w})] \, d\Omega = - \int_{\Omega_m} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega. \quad (4.24)$$

L'application de la formule de Green-Ostrogradsky à la première intégrale de l'équation (4.24) donne :

$$\int_{\Omega_m} \nabla \cdot ([\sigma(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{w}) \, d\Omega = \int_{\Gamma_m} \mathbf{n} \cdot ([\sigma(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{w}) \, d\Gamma, \quad (4.25)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal sortant à la surface Γ . L'associativité du produit tensoriel contracté et la condition aux limites (4.15) permettent d'écrire :

$$\int_{\Gamma_m} \mathbf{n} \cdot ([\sigma(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{w}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma^\sigma} \mathbf{f}^\sigma \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma. \quad (4.26)$$

Les relations (4.25) et (4.26) sont utilisées dans l'équation (4.24) pour obtenir :

$$\int_{\Omega_m} [\sigma(\mathbf{u})] : [\varepsilon(\mathbf{w})] \, d\Omega = \int_{\Omega_m} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma^\sigma} \mathbf{f}^\sigma \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma. \quad (4.27)$$

La loi de comportement mécanique (4.9) est ensuite introduite dans l'équation (4.27) pour obtenir la formulation faible du problème mécanique (4.17) : trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbf{u}_0)$, tel que :

$$\int_{\Omega_m} \langle C \rangle : [\varepsilon(\mathbf{u})] : [\varepsilon(\mathbf{w})] \, d\Omega = \int_{\Omega_m} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma^\sigma} \mathbf{f}^\sigma \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{C}(\mathbf{0}). \quad (4.28)$$

Si la notation de Voigt ((4.7), (4.8) et (4.12)) est utilisée, on peut remplacer les produits contractés de l'équation (4.28) par des produits matrice-vecteur. La formulation faible (4.28) devient : trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbf{u}_0)$, tel que :

$$\int_{\Omega_m} \varepsilon(\mathbf{u})^T [C] \varepsilon(\mathbf{w}) \, d\Omega = \int_{\Omega_m} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma^\sigma} \mathbf{f}^\sigma \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{C}(\mathbf{0}). \quad (4.29)$$

4.3.2 Approche de Galerkin

Le domaine Ω_m est maillé et l'approximation $\tilde{\mathbf{u}}$ du déplacement est construite avec des fonctions de forme nodale, telle que :

$$\tilde{u}_j = \sum_{i=1}^{n_n} \alpha_i u_{ji}, \quad (4.30)$$

où \tilde{u}_j est la j-ème composante du déplacement \mathbf{u} , α_i et u_{ji} sont respectivement la fonction de forme nodale et la j-ème composante du degré de liberté du déplacement \mathbf{u} associées au i-ème nœud du maillage. La relation (4.30) conduit à :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_n} \alpha_i u_{ji} \mathbf{e}_j. \quad (4.31)$$

Notons \mathbf{U} le vecteur des degrés de liberté de taille $3n_n$, construit à partir des u_{ji} ordonnées arbitrairement, tel que :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^{3n_n} \lambda_k U_k, \quad (4.32)$$

où les λ_k sont les fonctions de forme associées aux $\alpha_i \mathbf{e}_j$ issus de la relation (4.31).

L'approche de Galerkin consiste à écrire l'équation (4.29) en choisissant les fonctions de pondération comme étant les fonctions de forme de la discrétisation du déplacement (4.32). Le problème (4.29) devient : trouver les U_j , tels que :

$$\sum_{j=1}^{n_n} \left(\int_{\Omega_m} \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda_j)^T [C] \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda_i) \, d\Omega \right) U_j = \int_{\Omega_m} \mathbf{f} \cdot \lambda_i \, d\Omega + \int_{\Gamma^\sigma} \mathbf{f}^\sigma \cdot \lambda_i \, d\Gamma, \quad \forall i \in \llbracket 1 \dots 3n_n \rrbracket. \quad (4.33)$$

Le problème (4.33) est équivalent à résoudre un système d'équations linéaires, qui s'écrit sous la forme matricielle suivante : trouver \mathbf{U} , tel que :

$$[K] \mathbf{U} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}, \quad (4.34)$$

avec

$$K_{ij} = \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda_j)^T [C] \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda_i) \, d\Omega, \quad (4.35)$$

$$Q_i = \int_{\Omega_m} \mathbf{f} \cdot \lambda_i \, d\Omega, \quad (4.36)$$

$$P_i = \int_{\Gamma^\sigma} \mathbf{f}^\sigma \cdot \lambda_i \, d\Gamma. \quad (4.37)$$

Lors de la résolution du système (4.34), il convient également de prendre en compte les degrés de liberté connus à cause de la condition aux limites (4.16).

Remarques :

- Contrairement à la modélisation en électromagnétisme par la méthode des éléments finis, l'air ne doit pas être maillé car les phénomènes mécaniques n'émettent pas de rayonnement.
- La matrice $[K]$ du système (4.34) est creuse et est appelée matrice de rigidité.

4.4 Implémentation du couplage magnéto-mécanique

Considérons le problème magnéto-mécanique statique suivant (FIGURE 4.5) : un domaine magnétique Ω_f et un domaine mécanique Ω_m sont placés dans l'air de domaine Ω_0 . L'ensemble du domaine matériel est noté $\Omega_M = \Omega_f \cup \Omega_m$. Les matériaux contenus dans Ω_M ont un comportement mécanique élastique linéaire. Les matériaux contenus dans le domaine Ω_f ont également un comportement ferromagnétique tandis que ceux contenus dans le domaine Ω_m ont un comportement amagnétique. Notons respectivement Γ_f et Γ_m les frontières des domaines Ω_f et Ω_m , ainsi que Γ_c leur intersection telle que $\Gamma_c = \Gamma_f \cap \Gamma_m$. La structure magnéto-mécanique est soumise à un champ magnétique source \mathbf{H}_0 . Une densité volumique de force magnétique \mathbf{f} s'exerce sur le domaine ferromagnétique Ω_f .

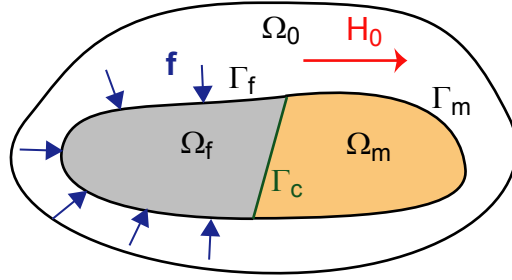


FIGURE 4.5 – Description du problème magnéto-mécanique.

Le déroulement de la résolution du problème magnéto-mécanique [Carpentier et al., 2014a] est présenté sur la FIGURE 4.6. Le problème magnétostatique est résolu par la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire présentée dans le premier chapitre. Ensuite, les forces magnétiques sont calculées par la méthode des travaux virtuels adaptée à la formulation intégrale de volume, proposée dans le troisième chapitre. Ces forces magnétiques deviennent un terme source du problème mécanique. De plus, nous utilisons le même maillage pour les problèmes magnétique et mécanique. C'est pourquoi, si les forces magnétiques sont les seules sollicitations extérieures appliquées à la structure, alors les coefficients du terme source (4.36) sont directement les forces nodales calculées par la relation (3.108).

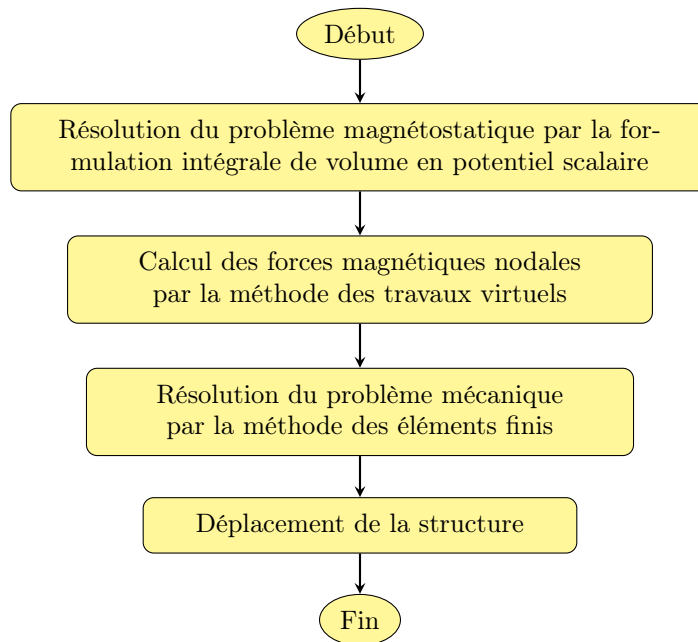


FIGURE 4.6 – Implémentation du couplage magnéto-mécanique.

Remarques :

- Il est possible d'utiliser des maillages différents pour les problèmes magnétostatique et mécanique. Une étape correspondant à la projection de la densité de forces magnétiques sur le maillage mécanique doit alors être ajoutée [Parent et al., 2009] [Journeaux et al., 2013]. Les forces magnétiques nodales sont ensuite calculées sur le maillage mécanique et deviennent le terme source du problème mécanique.

- Lorsque le déplacement de la structure est suffisamment important pour entraîner une modification non négligeable de son état magnétique, les propriétés magnétiques et mécaniques sont fortement couplées. Deux approches sont alors envisageables [Ren, 1997] : le couplage direct, où les équations magnétiques et mécaniques sont résolues simultanément, et le couplage indirect, où les équations magnétiques et mécaniques sont résolues alternativement jusqu'à convergence.
- Pour modéliser un couplage magnéto-mécanique locale tenant compte des phénomènes de magnétostriction, les lois de comportements magnétiques et mécaniques doivent faire intervenir des termes de couplage entre les grandeurs magnétiques et mécaniques. Le couplage magnéto-mécanique est alors fort, et les équations magnétiques et mécaniques doivent alors être résolues simultanément [Body et al., 1997][Galopin, 2007].

4.5 Application : modélisation d'un micro-actionneur

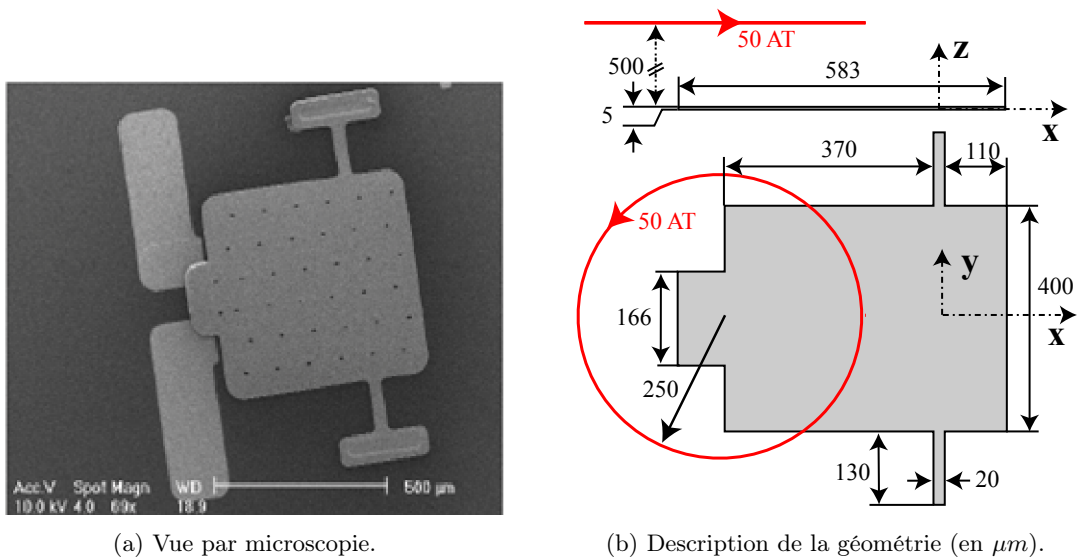


FIGURE 4.7 – Description du micro-actionneur.

Considérons le problème d'un micro-actionneur [Schneider Electric, 2006] illustré sur la FIGURE 4.7a. Ce micro-actionneur est constitué d'une membrane ferromagnétique solidaire d'un bras de torsion encastré à ses extrémités. Sous l'action d'un champ magnétique source produit par un aimant mobile, la membrane s'aimante et est soumise aux forces d'origine magnétique. Le couple des forces magnétiques sollicitent en torsion le bras, pour aboutir à la rotation du micro-actionneur autour de son axe. Lorsque l'extrémité de la membrane est en contact avec une piste, cela autorise le passage d'un signal. Ce dispositif joue ainsi le rôle d'un interrupteur, qui est en position ouverte ou fermée, selon la position de l'aimant ou l'orientation du champ source (FIGURE 4.8). Nous nous intéressons à la modélisation de cet interrupteur en position ouverte.

La modélisation de la géométrie proposée est constituée d'une plaque fixée à une poutre encastrée à ses extrémités (FIGURE 4.7b). Le champ source est remplacé par celui créé par une bobine (FIGURE 4.7b) parcourue par un courant de 50 AT. Les effets magnétostrictifs ne sont pas pris en compte et les forces magnétiques sont les seules forces extérieures sollicitant la structure. Dans le cas réel, étant données les dimensions de la structure et l'intensité du champ source produit par l'aimant, le comportement magné-

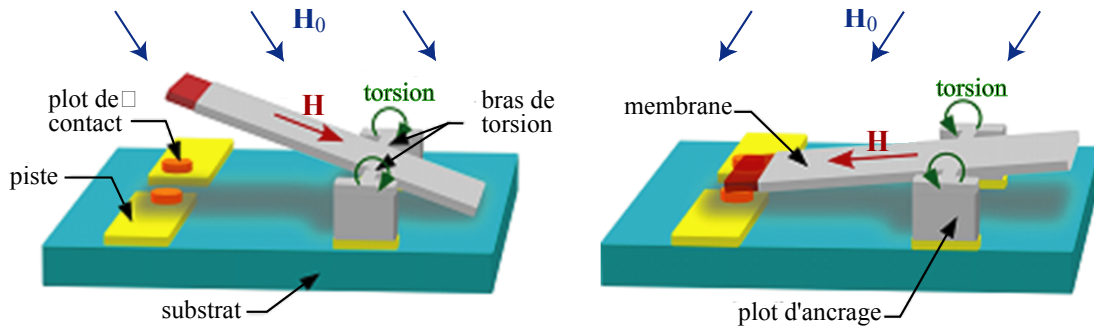


FIGURE 4.8 – Principe de fonctionnement du micro-actionneur.

tique du matériau constituant la membrane est fortement non linéaire. Cependant, les développements pour le calcul des forces magnétiques locales par la méthode des travaux virtuels, présentées dans la troisième chapitre, sont restreints au comportement magnétique linéaire. A ce stade de développement, la modélisation proposée n'est pas exploitable car nous sommes contraint de rester dans le cadre linéaire. Néanmoins, la méthodologie conserve son intérêt pour des travaux ultérieures, lorsque le calcul des force magnétiques locales dans le cas non linéaire sera implémentée.

Le micro-actionneur est constitué d'un matériau ferromagnétique homogène et isotrope, ayant un comportement magnétique linéaire caractérisé par une perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1000$. Son comportement mécanique élastique est caractérisé par un module de Young $E = 110 \text{ GPa}$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Le maillage utilisé ainsi que les conditions aux limites de Dirichlet (4.16) associées à la liaison encastrement sont présentées sur la FIGURE 4.9.

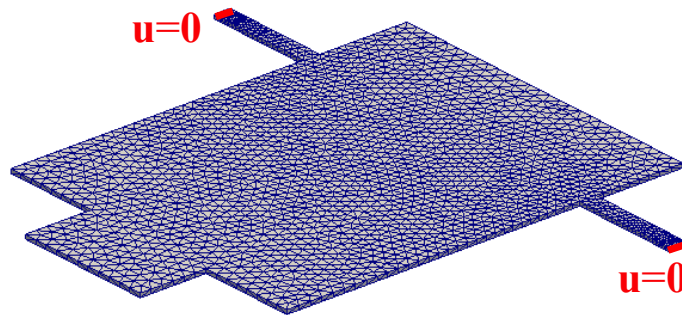


FIGURE 4.9 – Maillage et conditions aux limites.

La résolution du problème magnéto-mécanique est conduite en suivant l'implémentation de la FIGURE 4.6. Tout d'abord, la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire magnétique (1.69) est utilisée afin de résoudre le problème magnétostatique. Le champ magnétique calculé est présenté sur la FIGURE 4.10.

Le système magnéto-mécanique est composé majoritairement d'air, en comparaison du volume de la structure active. Dans ce cas, la résolution du problème magnétique par la méthode des éléments finis peut présenter des imprécisions, notamment pour le calcul des forces magnétiques [Rakotoarison et al., 2008]. Des travaux [Ardon, 2007] ont été menés sur l'étude de ce micro-actionneur en utilisant un logiciel commercial d'éléments finis comme première approche. Le calcul des forces magnétiques par la méthode

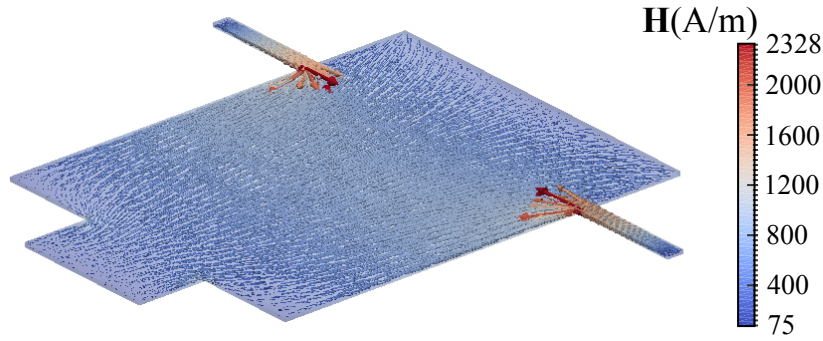


FIGURE 4.10 – Champ magnétique calculé par la formulation intégrale de volume.

des éléments finis, a alors été confronté à des difficultés concernant le maillage de l'air au voisinage de la membrane aimantée. Un maillage complexe a alors été mis en œuvre, impliquant des temps de calcul relativement long. Dans ces travaux, la formulation intégrale de volume utilisant l'aimantation comme inconnue a constitué une alternative intéressante, en fournissant des résultats comparables à ceux issus de la méthode des éléments finis sans mailler l'air. Dans le cadre de cette thèse, la formulation intégrale de volume en potentiel scalaire magnétique (1.69) est proposée pour résoudre le problème magnétique et les forces magnétiques nodales (FIGURE 4.11) sont calculées par la méthode des travaux virtuels (3.108).

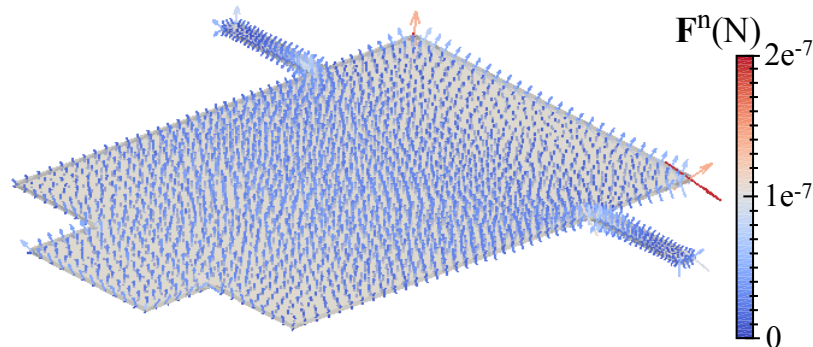


FIGURE 4.11 – Forces magnétiques nodales calculées par la méthode des travaux virtuels.

Le problème mécanique est ensuite résolu par la méthode des éléments finis (4.34). Les conditions aux limites du problème mécanique (4.15) (4.16) sont :

$$[\sigma] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma^\sigma, \quad (4.38)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma^u. \quad (4.39)$$

Le maillage utilisé est celui du problème magnéto-statique. Cela peut cependant être problématique pour le problème mécanique, car il y a peu d'éléments dans l'épaisseur de la membrane. Il aurait alors fallu développer des méthodes de projection de maillage [Journeaux et al., 2013] afin de raffiner le maillage dans l'épaisseur de la membrane. Les forces magnétiques sont les seules sollicitations extérieures appliquées à la structure. Dans ce cas, les forces magnétiques nodales sont le terme source (4.36) du système matriciel (4.34). Le déplacement calculé et la nouvelle position de la structure sont présentés sur la FIGURE 4.10. On retrouve bien un mouvement de rotation du micro-actionneur autour de son axe.

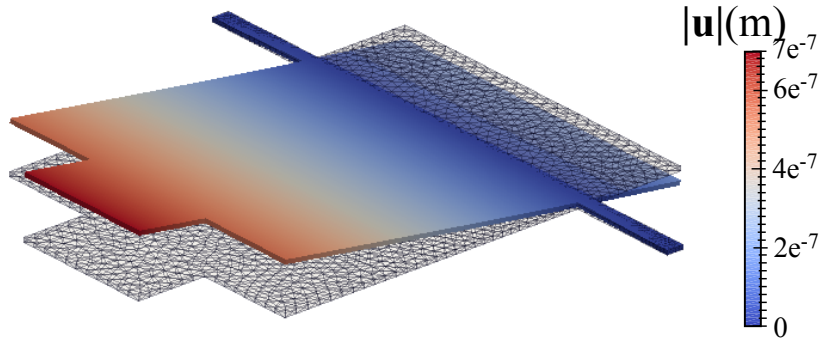


FIGURE 4.12 – Norme du déplacement calculé par la méthode des éléments finis (facteur d'échelle 100).

En conclusion, la mise en œuvre du couplage magnéto-mécanique, en suivant la méthodologie proposée, a permis de modéliser le comportement d'un micro-actionneur sans nécessiter le maillage de l'air. Cependant, le stade actuel de développement du couplage magnéto-mécanique restreint le comportement magnétique au cas linéaire, notamment à cause du calcul des forces magnétiques. Des travaux futurs, portant sur l'extension au cas non linéaire, seront nécessaires afin de réaliser des modélisations plus réalistes.

4.6 Conclusion

Ce chapitre a proposé une méthodologie pour la modélisation de dispositifs magnéto-mécaniques, qui utilise la formulation intégrale de volume du premier chapitre pour la partie magnétique et une méthode éléments finis pour la partie mécanique. Dans le cas d'un couplage magnéto-mécanique global faible, les équations d'équilibres magnétique et mécanique peuvent être résolue séparément, le couplage se manifestant à travers les forces magnétiques. Ces dernières sont calculées par la méthode des travaux virtuels adaptées à la formulation intégrale de volume proposée dans le troisième chapitre.

Les premiers résultats, obtenus pour la modélisation d'un micro-actionneur magnéto-mécanique, montrent que l'approche proposée constitue une alternative intéressante à la méthode classique des éléments finis utilisée à la fois pour les parties magnétique et mécanique. En effet, elle a pour avantage de nécessiter uniquement le maillage des matériaux actifs lors de la résolution du problème magnéto-mécanique. De plus, si le même maillage est utilisé pour les problèmes magnétique et mécanique, les forces magnétiques nodales calculées par la méthode des travaux virtuels sont directement un terme source des équations d'équilibre mécanique.

La généralisation au cas non linéaire de la méthode des travaux virtuels, adaptée à la formulation intégrale, doit être poursuivie. En effet, la restriction de l'implémentation du couplage-magnétique au comportement magnétique linéaire est un frein à l'utilisation de l'outil développé pour des dispositifs réels. Une perspective est l'utilisation d'une méthode de projection de maillage, afin de pouvoir traiter les problèmes magnétiques et mécaniques avec des maillages différents, lorsque cela est nécessaire.

Conclusion générale et perspectives

Un outil de modélisation magnéto-mécanique, qui combine une formulation intégrale de volume pour le problème magnétique et une formulation éléments finis pour le problème mécanique, a été proposé. Son développement a été intégré au sein de la plateforme de développement MIPSE du laboratoire G2Elab, dédiée à la modélisation de dispositifs électromagnétiques à l'aide de formulations intégrales.

Dans une première partie, le choix d'une formulation intégrale de volume pour la résolution du problème magnétostatique a été justifié. En pratique, les formulations différentielles classiques ont été écartées au profit de formulations intégrales de volume, qui ne nécessitent pas le maillage de l'air. Ces formulations sont adaptées à la modélisation de dispositifs électromagnétiques contenant une forte proportion d'air. Le choix s'est alors porté sur une formulation en potentiel scalaire magnétique avec des fonctions de forme nodales. Elle a ensuite été utilisée pour la résolution de problèmes magnétostatiques linéaires et non linéaires. Les difficultés du calcul du champ et du potentiel scalaire magnétiques ont été mises en évidence. Des précautions sont alors nécessaires lors de l'assemblage des matrices d'interaction et lors de l'étape de post-traitement, notamment pour leurs évaluations dans l'air et à proximité de la matière aimantée. Des travaux sont actuellement en cours au sein du laboratoire G2Elab, afin d'implémenter d'autres formulations intégrales dans la plateforme MIPSE (formulations en potentiel vecteur magnétique avec des fonctions de forme d'arête et en induction magnétique avec des fonctions de forme de facette).

Le principal inconvénient des formulations intégrales de volume est l'obtention de matrices d'interaction pleines, dont l'assemblage et le stockage peuvent être coûteux respectivement en temps de calcul et en espace mémoire. Des techniques de compression peuvent alors être employées, notamment celle utilisant la méthode d'approximation en croix adaptative qui a été présentée au cours de cette thèse. Cette dernière est purement algébrique et bénéficie d'une implémentation peu intrusive. Une application a montré que pour des problèmes avec beaucoup de degrés de liberté, cette méthode permet de réduire considérablement la mémoire requise pour le stockage des matrices pleines ainsi que les coûts en temps de calcul nécessaires à leurs assemblages et aux produits matrice-vecteur. Finalement, la méthode d'approximation croix adaptative permet d'approcher, avec une précision contrôlée, les opérations issues de l'algèbre des matrices. Ceci ouvre des perspectives pour le développement d'outils performants, notamment par l'utilisation de techniques de préconditionnement génériques. Il serait également intéressant de comparer les performances de cette méthode de compression par rapport à la méthode multipolaire rapide (FMM), couramment utilisée dans le cadre des formulations intégrales. D'autres algorithmes peuvent également être envisagés pour la construction des matrices de rang faible, notamment celui utilisé par la méthode Hybrid Cross Approximation qui combine la méthode d'approximation en croix adaptative avec une technique d'interpolation pour obtenir de meilleures performances [Börm and Grasedyck, 2005].

La seconde partie a été dédiée à la modélisation du couplage magnéto-mécanique. Les matériaux étant considérés déformables, une première étape a consisté à déterminer précisément les forces d'origine magnétique locales et globales. Parmi les méthodes disponibles dans la littérature, nous avons retenues celles des travaux virtuels et du tenseur de Maxwell. Ces dernières, courantes dans le cadre de la méthode des éléments finis, ont été mises en œuvre dans le cadre de la formulation intégrale de volume, dans laquelle l'air n'est pas maillé et les éléments aimantés sont en interactions totales. Lors d'une première application, la méthode des travaux virtuels a fourni des résultats plus précis que la méthode du tenseur de Maxwell, car aucun calcul du champ magnétique dans l'air n'est nécessaire. Lors d'une deuxième application, la méthode des travaux virtuels a fourni des résultats de forces magnétiques comparables à ceux issus de la méthode des travaux virtuels du cadre de la formulation éléments finis. Les perspectives de recherche portent sur la prise en compte de la non linéarité pour le calcul de la force magnétique locale, ainsi que de ne plus recourir à des différences finies, coûteuses en temps de calcul, pour certaines dérivations. Il est également envisageable d'utiliser des méthodes de compression, telles que la méthode d'approximation en croix adaptative afin d'améliorer les coûts en mémoire et en temps de calcul.

Une implémentation d'un couplage magnéto-mécanique globale et faible a ensuite été proposée dans le dernier chapitre. Les équations de la magnétostatique et de la mécanique peuvent alors être résolues séparément, le couplage se manifestant à travers les forces magnétiques. Les premiers résultats, obtenus pour la modélisation d'un micro-actionneur, montrent que la méthodologie proposée constitue une alternative intéressante à la méthode tout éléments finis, utilisée à la fois pour les parties magnétique et mécanique. La méthodologie proposée a pour avantage de ne nécessiter que le maillage des matériaux actifs lors de la résolution du problème magnéto-mécanique. Concernant la suite de ces travaux, deux perspectives sont envisageables. La première concerne la prise en compte des phénomènes de couplage intrinsèque : magnétostriction, effets des contraintes sur le comportement magnétique . . . Dans ce cas, le couplage magnéto-mécanique est local et fort, et les équations magnétiques et mécaniques doivent être résolues simultanément. Par ailleurs, les effets magnétostrictifs impliquent souvent un comportement magnétique non linéaire, c'est pourquoi la généralisation au cas non linéaire de la méthode des travaux virtuels adaptée à la formulation intégrale doit être poursuivie. La seconde perspective est l'utilisation d'une méthode de projection de maillage, afin de pouvoir traiter les problèmes magnétiques et mécaniques avec des maillages différents.

Bibliographie

- [Araujo et al., 2013] Araujo, D. M., Coulomb, J. L., Delinchant, B., and Chadebec, O. (2013). A hybrid method BEM-NRM for magnetostatics problems. *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, 12(2) :145–158.
- [Ardon, 2007] Ardon, V. (2007). Contribution au développement d’un logiciel de modélisation dédié à la conception de μ -systèmes magnétiques. Master’s thesis, Schneider, G2Elab, INP de Grenoble.
- [Ardon, 2010] Ardon, V. (2010). *Méthodes numériques et outils logiciels pour la prise en compte des effets capacitifs dans la modélisation CEM de dispositifs d’électronique de puissance*. PhD thesis, G2Elab, Université de Grenoble.
- [Bacon and Pouyet, 2000] Bacon, C. and Pouyet, J. (2000). *Mécanique des solides déformables*. Hermes.
- [Balasubramanian et al., 2002] Balasubramanian, S., Lalgudi, S. N., and Shanker, B. (2002). Fast-integral-equation scheme for computing magnetostatic fields in nonlinear media. *IEEE Trans. Magn.*, 38(5) :3426–3432.
- [Barre, 2003] Barre, O. (2003). *Contribution à l’étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille.
- [Bebendorf, 2005] Bebendorf, M. (2005). Hierarchical LU decomposition-based preconditioners for BEM. *Computing*, 74(3) :225–247.
- [Bebendorf and Rjasanow, 2003] Bebendorf, M. and Rjasanow, S. (2003). Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing*, 70 :1–24.
- [Benhama et al., 2000] Benhama, A., Williamson, A. C., and Reece, A. B. J. (2000). Virtual work approach to the computation of magnetic force distribution from finite element field solutions. *IEE Proc.-Electr. Power Appl.*, 147(6) :437–442.
- [Bernabe et al., 2009] Bernabe, G., Fernandez, J., and Acacio, M. E. (2009). A parallel implementation of the 2D wavelet transform using CUDA. *Proc. Euromicro International Conference on Parallel, Distributed and Network-based Processing*, :111–118.
- [Body et al., 1997] Body, C., Reyne, G., and Meunier, G. (1997). Nonlinear finite element modeling of magneto-mechanical phenomenon in giant magnetostrictive thin films. *IEEE Trans. Magn.*, 33(2) :1620–1623.
- [Bonnet and Frangi, 2006] Bonnet, M. and Frangi, A. (2006). *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Editions Ecole Polytechnique.
- [Bossavit, 1993] Bossavit, A. (1993). *Electromagnétisme, en vue de la modélisation*. Springer-Verlag.

- [Bossavit, 2011] Bossavit, A. (2011). Virtual power principle and maxwell’s tensor : Which comes first ? *COMPEL*, 30(6) :1804–1814.
- [Botsis and Deville, 2006] Botsis, J. and Deville, M. (2006). *Mécanique des milieux continus : une introduction*. PPUR.
- [Brebbia et al., 1984] Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., and Wrobel, L. (1984). *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag.
- [Brissonneau, 1997] Brissonneau, P. (1997). *Magnétisme et matériaux magnétiques*. Hermes.
- [Börm and Grasedyck, 2005] Börm, S. and Grasedyck, L. (2005). Hybrid cross approximation of integral operators. *Numerische Mathematik*, 101 :221–249.
- [Börm et al., 2005] Börm, S., Grasedyck, L., and Hackbusch, W. (2005). Hierarchical matrices. Lecture notes.
- [Brunotte et al., 1992] Brunotte, X., Meunier, G., and Imhoff, J. (1992). Finite element modeling of unbounded problems using transformations : a rigorous, powerful and easy solution. *IEEE Trans. Magn.*, 28(2) :1663–1666.
- [Canova and Repetto, 2001] Canova, A. and Repetto, M. (2001). Integral solution of nonlinear magnetostatic field problems. *IEEE Trans. Magn.*, 37(3) :1070–1077.
- [Carpenter, 1959] Carpenter, C. J. (1959). Surface-integral methods of calculating forces on magnetized iron parts. *The Institution of Electrical Engineers Monograph*, 342 :19–28.
- [Carpentier et al., 2014a] Carpentier, A., Chadebec, O., Galopin, N., and Meunier, G. (2014a). Modeling of magneto-mechanical coupling using magnetic volume integral and mechanical finite element methods. *to be published in IEEE Trans. Magn.*
- [Carpentier et al., 2013] Carpentier, A., Chadebec, O., Galopin, N., Meunier, G., and Bannwarth, B. (2013). Resolution of nonlinear magnetostatic problems with a volume integral method using the magnetic scalar potential. *IEEE Trans. Magn.*, 49(5) :1685–1688.
- [Carpentier et al., 2014b] Carpentier, A., Galopin, N., Chadebec, O., Meunier, G., and Guérin, C. (2014b). Application of the virtual work principle to compute magnetic forces with a volume integral method. *to be published in International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*.
- [Chadebec et al., 2006] Chadebec, O., Coulomb, J. L., and Janet, F. (2006). A review of magnetostatic moment method. *IEEE Trans. Magn.*, 42(4) :515–520.
- [Choi et al., 2008] Choi, H. S., Lee, S. H., Kim, Y. S., Kim, K. T., and Park, I. H. (2008). Implementation of virtual work principle in virtual air gap. *IEEE Trans. Magn.*, 44(6) :1286–1289.
- [Ciarlet, 1985] Ciarlet, P. G. (1985). *Introduction à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation*. Masson.
- [Coulomb, 1983] Coulomb, J. L. (1983). A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness. *IEEE Trans. Magn.*, 19(6) :2514–2519.
- [Coulomb and Meunier, 1984] Coulomb, J. L. and Meunier, G. (1984). Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation. *IEEE Trans. Magn.*, 20(5) :1894–1896.

- [Dedieu, 2006] Dedieu, J. P. (2006). *Points fixes, zéros et la méthode de Newton*. Springer.
- [Degallaix, 2007] Degallaix, S. (2007). *Caractérisation expérimentale des matériaux : Propriétés physiques, thermiques et mécaniques*. PPUR.
- [Dlala and Arkkio, 2008] Dlala, E. and Arkkio, A. (2008). Analysis of the convergence of the fixed-point method used for solving nonlinear rotational magnetic field problems. *IEEE Trans. Magn.*, 44(4) :473–478.
- [du Peloux de Saint Romain, 2006] du Peloux de Saint Romain, B. (2006). *Modélisation des actionneurs électromagnétiques par réseaux de réductances. Création d'un outil métier dédié au prédimensionnement par optimisation*. PhD thesis, Université Joseph Fourier.
- [Du Tremolet De Lacherisserie, 1993] Du Tremolet De Lacherisserie, E. (1993). *Magnetostriction : Theory and Applications of Magnetoelasticity*. CRC Press Inc.
- [Dular et al., 1995] Dular, P., Nicolet, A., Genon, A., and Legros, W. (1995). A discrete sequence associated with mixed finite elements and its gauge condition for vector potentials. *IEEE Trans. Magn.*, 31(3) :1356–1359.
- [Durand, 1964] Durand, E. (1964). *Electrostatique. Tome 1 : les distributions*, volume 1. Masson.
- [Durand, 1968] Durand, E. (1968). *Magnétostatique*. Masson.
- [Flux3d, 2013] Flux3d (2013). www.cedrat.com.
- [Frangi et al., 2006] Frangi, A., Ghezzi, L., and Faure-Ragani, P. (2006). Accurate force evaluation for industrial magnetostatics applications with BEM-FEM approaches. *CMES*, 15(1) :41–48.
- [François et al., 1991] François, D., Pineau, A., and Zaoui, A. (1991). *Elasticité et Plasticité*. Hermes.
- [Freschi and Repetto, 2013] Freschi, F. and Repetto, M. (2013). Natural choice of integration surface for Maxwell stress tensor computation. *IEEE Trans. Magn.*, 49(5) :1717–1720.
- [Fujiwara et al., 2005] Fujiwara, K., Okamoto, Y., Kameari, A., and Ahagon, A. (2005). The Newton-Raphson method accelerated by using a line search – comparison between energy functional and residual minimization. *IEEE Trans. Magn.*, 41(5) :1724–1727.
- [Galopin, 2007] Galopin, N. (2007). *Modélisation et caractérisation de matériaux actifs pour la conception de dispositifs magnéto-électriques*. PhD thesis, Université Paris XI.
- [Gervautz and Purgathofer, 1988] Gervautz, M. and Purgathofer, W. (1988). *Visualisierungstechniken und Algorithmen, Informatik Fachberichte 182*. Springer Verlag.
- [Greengard and Rokhlin, 1987] Greengard, L. and Rokhlin, V. (1987). A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Biology Physics*, 73 :325–348.
- [Hackbusch, 1999] Hackbusch, W. (1999). A sparse matrix arithmetic based on H -matrices. part i : Introduction to H -matrices. *Computing*, 62(2) :89–108.
- [Hafla et al., 2006a] Hafla, W., Buchau, A., and Rucker., W. M. (2006a). Solution of magnetostatic field problems with the integral equation method. *CS Newsletter*, :9–15.
- [Hafla et al., 2008] Hafla, W., Buchau, A., and Rucker, W. M. (2008). Force computation with the integral equation method. *Advanced Computer Techniques in Applied Electromagnetics*, pages 93–97.

- [Hafila et al., 2006b] Hafila, W., Groh, F., Buchau, A., and Rucker, W. M. (2006b). Magnetic field computation with integral equation method and energy-controlled relaxation. *IEEE Trans. Magn.*, 42(4) :719–722.
- [Han et al., 1994] Han, L., Tong, L.-S., and Yang, J. (1994). Integral equation method using total scalar potential for the simulation of linear or nonlinear 3D magnetostatic field with open boundary. *IEEE Trans. Magn.*, 30(5) :2897–2900.
- [Hantila et al., 2002] Hantila, F., Cranganu-Cretu, B., Preda, G., and Miya, K. (2002). Force evaluation formula for integral methods of magnetic field computation. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 14(1–4) :3–8.
- [Hantila et al., 2000] Hantila, F. I., Preda, G., and Vasiliu, M. (2000). Polarization method for static fields. *IEEE Trans. Magn.*, 36(4) :672–675.
- [Henrotte et al., 2004] Henrotte, F., Deliège, G., and Hameyer, K. (2004). The eggsheel approach for the computation of the electromagnetic forces in 2D and 3D. *COMPEL*, 23(4) :996–1005.
- [Henrotte and Hameyer, 2004] Henrotte, F. and Hameyer, K. (2004). Computation of electromagnetic force densities : Maxwell stress tensor vs. virtual work principle. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 :235–243.
- [Hirsinger and Billardon, 1995] Hirsinger, L. and Billardon, R. (1995). Magneto-elastic finite element analysis including magnetic forces and magnetostriction effects. *IEEE Trans. Magn.*, 31(3) :1877–1880.
- [Ho et al., 2012] Ho, S. L., Niu, S., Fu, W. N., and Zhu, J. G. (2012). A mesh-insensitive methodology for magnetic force computation in finite-element analysis. *IEEE Trans. Magn.*, 48(2) :287–290.
- [Jackson, 1962] Jackson, J. D. (1962). *Classical Electrodynamics Third Edition*. Wiley.
- [Journeaux et al., 2013] Journeaux, A. A., Bouillault, F., and Roger, J. Y. (2013). Multi-physics problems computation using numerically adapted meshes : application to magneto-thermo-mechanical systems. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, 61(3).
- [Kalimov and Shimansky, 2012] Kalimov, A. and Shimansky, S. (2012). Application of the integro-differential method for calculating magnetostatic fields in closed magnetic circuits. In *Proceedings of 15th Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, page 10.
- [Kettunen et al., 1994a] Kettunen, L., Forsman, F., Levine, D., and Gropp, W. (1994a). Solutions of TEAM problems 13 and 20 using a volume integral formulation. In *In Proceedings of Aix-les-Bains TEAM Workshop, Aix-les-Bains*.
- [Kettunen et al., 1994b] Kettunen, L., Forsman, F., Levine, D., and Gropp, W. (1994b). Volume integral equations in nonlinear 3D magnetostatics.
- [Kettunen and Turner, 1992] Kettunen, L. and Turner, L. R. (1992). A volume integral formulation for nonlinear magnetostatics and eddy currents using edge elements. *IEEE Trans. Magn.*, 28(2) :1639–1642.
- [Lafont et al., 2012] Lafont, T., Gimeno, L., Delamare, J., Lebedev, G., Zakharov, D. I., Viala, B., Cugat, O., Galopin, N., Garbuio, L., and Geoffroy, O. (2012). Magnetostrictive - piezoelectric composite structures for energy harvesting. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 22(9).

- [Le-Van, 2012] Le-Van, V. (2012). Compression matricielle ACA pour des formulations intégrales appliquées à l'électromagnétisme basse fréquence. Master's thesis, Grenoble INP – UJF Grenoble.
- [Lebedev, 2012] Lebedev, G. (2012). *Composites multiferroïques pour dispositifs magnéto-électriques intégrés*. PhD thesis, Université de Grenoble.
- [Lemaitre et al., 2009] Lemaitre, J., Chaboche, J. L., Benallal, A., and Desmorat, R. (2009). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.
- [Melcher, 1981] Melcher, J. R. (1981). *Continuum Electromechanics*. MIT Press.
- [Meunier, 2002] Meunier, G. (2002). *Modèles et formulations en électromagnétisme*. Hermes.
- [Meunier, 2013] Meunier, G. (2013). Formulation B de facette en magnétostatique. Technical report, G2Elab.
- [Meunier et al., 1986] Meunier, G., Coulomb, J. L., Salon, S., and Krahenbul, L. (1986). Hybrid finite element boundary element solutions for three dimensional scalar potential problems. *IEEE Trans. Magn.*, 22(5) :1040–1042.
- [Morandi et al., 2010] Morandi, A., Fabbri, M., and Ribani, P. L. (2010). A modified formulation of the volume integral equations method for 3-D magnetostatics. *IEEE Trans. Magn.*, 46(11) :3848–3859.
- [Morlet et al., 1982] Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, E., and Giard, D. (1982). Wave propagation and sampling theory ; part I, complex signal and scattering in multilayered media. *Geophysics*, 47 :203–236.
- [Nakata et al., 1995] Nakata, T., Takahashi, N., and Fujiwara, K. (1995). Summary of results for team workshop problem 13 (3-D nonlinear magnetostatic model). *COMPEL : The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 14(2/3) :91–101.
- [Neagoe and Ossart, 1994] Neagoe, C. and Ossart, F. (1994). Analysis of convergence in nonlinear magnetostatic finite elements problems. *IEEE Trans. Magn.*, 30(5) :2865–2868.
- [Nguyen, 2012] Nguyen, T. S. (2012). *Réduction de modèles issus de la méthode PEEC pour la modélisation électromagnétique des interconnexions électriques*. PhD thesis, Université de Grenoble.
- [Ossart and Ionita, 1999] Ossart, F. and Ionita, V. (1999). Convergence de la méthode du point fixe modifiée pour le calcul de champ magnétique avec hystérésis. *Eur. Phys. J. AP*, 5 :63–69.
- [Parent et al., 2009] Parent, G., Dular, P., Piriou, F., and Abakar, A. (2009). Accurate projection method of source quantities in coupled finite-element problems. *IEEE Trans. Magn.*, 45 :1132–1135.
- [Rakotoarison et al., 2008] Rakotoarison, H. L., Ardon, V., Chadebec, O., Delinchant, B., Guerin, S., and Coulomb, J. L. (2008). Formal sensitivity computation of magnetic moment method. *IEEE Trans. Magn.*, 44(6) :1014–1017.
- [Rasolonjanahary et al., 1992] Rasolonjanahary, J.-L., Krahenbuhl, L., and Nicolas, A. (1992). Computation of electric fields and potential on polluted insulators using a boundary element method. *IEEE Trans. Magn.*, 28(2) :1473–1476.
- [Ren, 1994] Ren, Z. (1994). Comparison of different force calculation methods in 3D finite element modelling. *IEEE Trans. Magn.*, 30(5) :3471–3474.
- [Ren, 1997] Ren, Z. (1997). *Contribution à la modélisation des systèmes électromagnétiques tridimensionnels : étude des formulations duales ; modélisation des systèmes électromagnétique-mécanique*. Université Paris-Sud.

- [Ren and Razek, 1992] Ren, Z. and Razek, A. (1992). Local force computation in deformable bodies using edge. *IEEE Trans. Magn.*, 28(2) :1212–1215.
- [Reyne, 1987] Reyne, G. (1987). *Analyse théorique et expérimentale des phénomènes vibratoires d'origine électromagnétique*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Grenoble.
- [Rjasanow and Steinbach, 2007] Rjasanow, S. and Steinbach, O. (2007). *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. Springer.
- [Rubeck, 2012] Rubeck, C. (2012). *Calcul hautes performances pour les formulations intégrales en électromagnétisme basses fréquences*. PhD thesis, Université de Grenoble.
- [Rubeck et al., 2013] Rubeck, C., Yonnet, J.-P., Allag, H., Delinchant, B., and Chadebec, O. (2013). Analytical calculation of magnet systems : Magnetic field created by charged triangles and polyhedra. *IEEE Trans. Magn.*, 49(1) :144–147.
- [Saad and Schultz, 1986] Saad, Y. and Schultz, M. H. (1986). GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3) :856–869.
- [Sadowski et al., 1992] Sadowski, N., Lefèvre, Y., Lajoie-Mazenc, M., and Bastos, J. P. A. (1992). Sur le calcul des forces magnétiques. *J. Phys. III France*, 2 :859–870.
- [Schneider Electric, 2006] Schneider Electric (2006). *Microsystème à commande électromagnétique*. Patent EP 1836714 A1.
- [Song and Chew, 1995] Song, J. M. and Chew, W. C. (1995). Multilevel fast multipole algorithm for solving combined field integral equation of electromagnetic scattering. *Microw. Opt. Tech. Lett.*, 10(1) :14–19.
- [Stratton, 1941] Stratton, J. A. (1941). *Electromagnetic Theory*. Mcgraw Hill Book Company.
- [Takahashi et al., 2007] Takahashi, Y., Matsumoto, C., and Wakao, S. (2007). Large-scale and fast nonlinear magnetostatic field analysis by the magnetic moment method with the adaptive cross approximation. *IEEE Trans. Magn.*, 43(3) :1277–1280.
- [Team Problem 13, 2013] Team Problem 13 (2013). 3-D non-linear magnetostatic model. <http://www.compumag.org/jsite/team.html>.
- [Trowbridge, 1996] Trowbridge, B. (1996). Integral equations in electromagnetics. *International journal of numerical modelling : electronic networks, devices and fields*, 9 :3–17.
- [Urankar, 1980] Urankar, L. K. (1980). Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, part I : Filament approximation. *IEEE Trans. Magn.*, 16(5) :1283–1288.
- [Urankar, 1982] Urankar, L. K. (1982). Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, part III : Exact computation for rectangular cross section. *IEEE Trans. Magn.*, 18(6) :1860–1867.
- [Vandeveld and Melkebeek, 2001] Vandeveld, L. and Melkebeek, J. A. A. (2001). A survey of magnetic force distributions based on different magnetization models and on the virtual work principle. *IEEE Trans. Magn.*, 37(5) :3405–3409.
- [Vassalo, 1980] Vassalo, C. (1980). *Electromagnétisme classique dans la matière*. Dunod.

- [Vishnevsky et al., 2002] Vishnevsky, A. M., Kalimov, A. G., and Lapovok, A. A. (2002). Modeling magnetization using whitney facet elements. *IEEE Trans. Magn.*, 20(2) :489–492.
- [Vuillermet, 2008] Vuillermet, Y. (2008). *Immunsation en boucle fermée - Application au sous-marin double coque. Identification de l'aimantation à partir de mesures du champ magnétique proche*. PhD thesis, Institut polytechnique de Grenoble.
- [Woodson and Melcher, 1968a] Woodson, H. H. and Melcher, J. R. (1968a). *Electromechanical Dynamics. Part I : Discrete Systems*. John Wiley & Sons.
- [Woodson and Melcher, 1968b] Woodson, H. H. and Melcher, J. R. (1968b). *Electromechanical Dynamics. Part II : Fields, Forces, and Motion*. John Wiley & Sons.
- [Young and Gedney, 2011] Young, J. C. and Gedney, S. D. (2011). A locally corrected nyström formulation for the magnetostatic volume integral equation. *IEEE Trans. Magn.*, 47(9) :2163–2170.
- [Zhao et al., 2005] Zhao, K., Vouvakis, M. N., and Lee, J. F. (2005). The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computations of EMC problems. *IEEE transactions on electromagnetic compatibility*, 47(4) :763–773.
- [Zienkiewicz, 1971] Zienkiewicz, O. C. (1971). *The finite element method in engineering science*. Mc Graw-Hill.

Annexes

Annexe A

Formules analytiques pour le calcul des intégrales des noyaux de Green

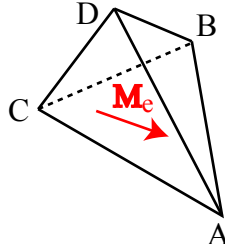


FIGURE A.1 – Tétraèdre uniformément aimanté.

Considérons un tétraèdre ferromagnétique de domaine Ω_e , possédant une aimantation \mathbf{M}_e constante (FIGURE A.1). Cherchons à calculer, au point P de coordonnées \mathbf{r} , le potentiel scalaire magnétique Φ_e et le champ magnétique \mathbf{H}_e créés par le tétraèdre aimanté et définis par :

$$\Phi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_e} \frac{\mathbf{M}_e \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega', \quad (\text{A.1})$$

et

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \left(\int_{\Omega_e} \frac{\mathbf{M}_e \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \right). \quad (\text{A.2})$$

A.1 Calcul du potentiel scalaire magnétique

Le théorème de Green-Ostrogradsky appliqué à la relation (A.1), conduit à :

$$\Phi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_e} \frac{\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Gamma', \quad (\text{A.3})$$

où Γ_e est la frontière du domaine Ω_e et \mathbf{n} sa normale sortante.

Soit Γ_f le domaine d'une face triangulaire f du tétraèdre, tel que $\Gamma_e = \bigcup_{f=1}^4 \Gamma_f$, et \mathbf{n}_f sa normale sortante. L'intégrale (A.3) est décomposée sur les 4 faces de la frontière :

$$\Phi_e(\mathbf{r}) = \sum_{f=1}^4 \Phi_f(\mathbf{r}), \quad (\text{A.4})$$

où Φ_f est le potentiel scalaire magnétique créé par la face Γ_f .

Par analogie avec l'électrostatique, le potentiel scalaire magnétique Φ_f peut s'écrire à partir de l'expression du potentiel scalaire électrique créé par un triangle uniformément chargé (FIGURE A.2), défini par :

$$\Phi_f(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s^*}{4\pi\mu_0} \int_{\Gamma_f} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Gamma', \quad (\text{A.5})$$

avec ρ_s^* une densité surfacique de masse magnétique fictive, définie par :

$$\rho_s^* = \mu_0 \mathbf{M}_e \cdot \mathbf{n}_f. \quad (\text{A.6})$$

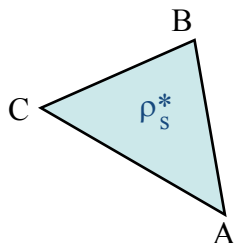


FIGURE A.2 – Triangle uniformément chargé.

Chaque face du tétraèdre est décomposée en six triangles rectangles [Rubeck et al., 2013]. Soient le triangle ABC une face du tétraèdre et H la projection du point de calcul P dans le plan du triangle ABC . Pour chaque arête du triangle ABC , deux triangles rectangles sont construits tels que le point H soit un de leurs sommets, sans être celui de l'angle droit (FIGURE A.3). De plus, un triangle rectangle ayant une intersection de surface non nulle avec le triangle ABC est signé positif, dans le cas contraire il est signé négatif.

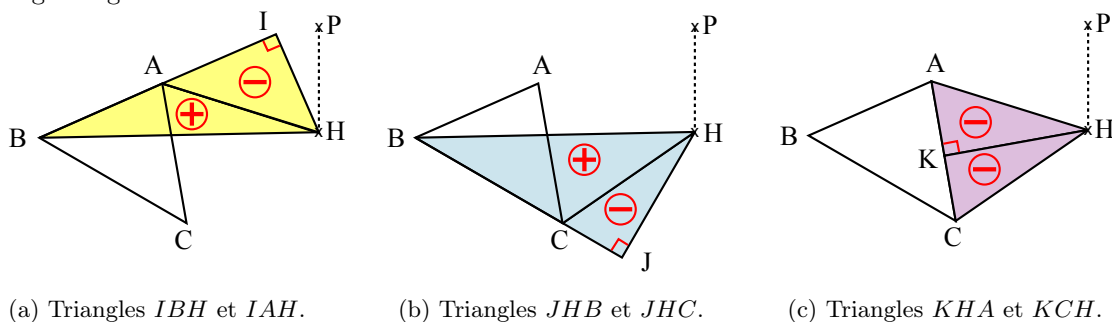


FIGURE A.3 – Décomposition en triangles rectangles.

Dans chaque triangle rectangle de la décomposition (FIGURE A.3), le repère orthonormé $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est positionné comme indiqué sur la FIGURE A.4. L'intégration directe de la relation (A.5) donne au

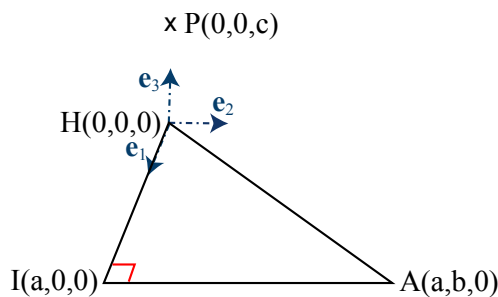


FIGURE A.4 – Position du repère pour le triangle IAH

signe près l'expression analytique du potentiel scalaire magnétique Φ_f suivante [Rubeck et al., 2013] :

$$\Phi_f(\mathbf{r}) = \pm \left(a \log \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + b}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right) - |c| \arctan \left(\frac{ab}{a^2 + c^2 + |c| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right) \right). \quad (\text{A.7})$$

Le signe de l'expression (A.7) est donné par le signe des triangles rectangles de la décomposition (FIGURE A.3).

A.2 Calcul du champ magnétique

Le théorème de Green-Ostrogradsky appliqué à la relation (A.2), conduit à :

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_e} \mathbf{M}_e \cdot \mathbf{n} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\Gamma'. \quad (\text{A.8})$$

L'intégrale (A.8) est décomposée sur les 4 faces triangulaires de la frontière :

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{r}) = \sum_{f=1}^4 \mathbf{H}_f(\mathbf{r}), \quad (\text{A.9})$$

où \mathbf{H}_f est le champ magnétique créé par la face Γ_f .

Par analogie avec l'électrostatique, le champ magnétique \mathbf{H}_f peut s'écrire à partir de l'expression du champ électrique créé par un triangle uniformément chargé (FIGURE A.2), défini par :

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s^*}{4\pi\mu_0} \int_{\Gamma_f} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\Gamma'. \quad (\text{A.10})$$

L'identité vectorielle :

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \left(\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{n}_f \right) \mathbf{n}_f + \mathbf{n}_f \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{n}_f \quad (\text{A.11})$$

est utilisée dans la relation (A.10), pour obtenir :

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s^*}{4\pi\mu_0} \left(\int_{\Gamma_f} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Gamma' \right) \mathbf{n}_f + \frac{\rho_s^*}{4\pi\mu_0} \left(\int_{\Gamma_f} \mathbf{n}_f \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\Gamma' \right) \times \mathbf{n}_f. \quad (\text{A.12})$$

La première intégrale de la relation (A.12) est l'angle solide $\Omega_{S,f}$, sous lequel on voit la face f du tétraèdre à partir du point P , défini par :

$$\Omega_{S,f}(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma_f} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Gamma'. \quad (\text{A.13})$$

Soit le triangle ABC la face f du tétraèdre, l'angle solide (A.13) peut être calculé à l'aide du théorème de Huilier :

$$\Omega_{S,f}(\mathbf{r}) = 4 \arctan \left(\sqrt{\tan \left(\frac{\theta_s}{2} \right) \tan \left(\frac{\theta_s - \theta_a}{2} \right) \tan \left(\frac{\theta_s - \theta_b}{2} \right) \tan \left(\frac{\theta_s - \theta_c}{2} \right)} \right), \quad (\text{A.14})$$

avec les angles $\theta_a = B\hat{P}C$, $\theta_b = A\hat{P}C$, $\theta_c = A\hat{P}B$ et $\theta_s = \frac{\theta_a + \theta_b + \theta_c}{2}$. L'expression (A.14) n'est pas valable sur les arêtes du triangle, sur lesquelles les points de calcul sont singuliers.

Concernant la deuxième intégrale de la relation (A.12), on utilise l'identité suivante :

$$\left(\int_{\Gamma_f} \mathbf{n}_f \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\Gamma' \right) \times \mathbf{n}_f = \left(\int_{\mathcal{C}_f} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{n}_f. \quad (\text{A.15})$$

Soit $\mathcal{C}_{f,a}$ le domaine de l'arête a de la face f du tétraèdre, tel que $\Gamma_f = \bigcup_{a=1}^3 \mathcal{C}_{f,a}$, et \mathbf{u}_a son vecteur directeur, orienté grâce à la règle de Stokes par rapport à la normale \mathbf{n}_f de la face f . L'intégrale (A.15) est décomposée sur les trois arêtes de la face f et est utilisée dans l'équation (A.12) afin d'écrire :

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = \left(\frac{\rho_s^*}{4\pi\mu_0} \Omega_{S,f} \right) \mathbf{n}_f + \sum_{a=1}^3 \mathbf{H}_{f,a}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.16})$$

où le champ magnétique $\mathbf{H}_{f,a}$ est défini pour l'arête a de la face f par :

$$\mathbf{H}_{f,a}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s^*}{4\pi\mu_0} \left(\int_{\mathcal{C}_a} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{n}_f. \quad (\text{A.17})$$

Pour chaque arête a de la face f , le repère orthonormé $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est positionné comme indiqué sur la FIGURE A.5. Pour un point P au dehors de l'arête, l'intégration directe de la relation (A.17) donne l'expression analytique du champ magnétique magnétique $\hat{\mathbf{H}}_{f,a}$ dans le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ suivante [Durand, 1964] :

$$\hat{\mathbf{H}}_{f,a}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\rho_s^*}{4\pi\mu_0} \log \left(\frac{a+c}{a-c} \right) \right) \mathbf{u}_a \times \mathbf{n}_f, \quad (\text{A.18})$$

où $a = \frac{|PA| + |PB|}{2}$ et $c = \frac{|AB|}{2}$. Le champ magnétique $\mathbf{H}_{f,a}$ est ensuite obtenu à partir de l'expression (A.18) en effectuant un changement de repère de $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vers celui du problème.

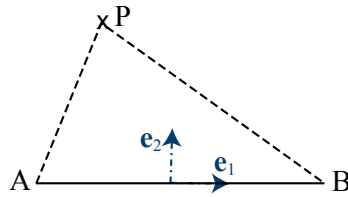


FIGURE A.5 – Position du repère pour l'arête AB

Annexe B

Formules pour le tétraèdre de référence

Considérons un tétraèdre réel de domaine Ω et un tétraèdre de référence de domaine $\hat{\Omega}$ (FIGURE B.1). Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point du repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, associé au problème réel, et $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ celles du repère $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$, associé au tétraèdre $\hat{\Omega}$.

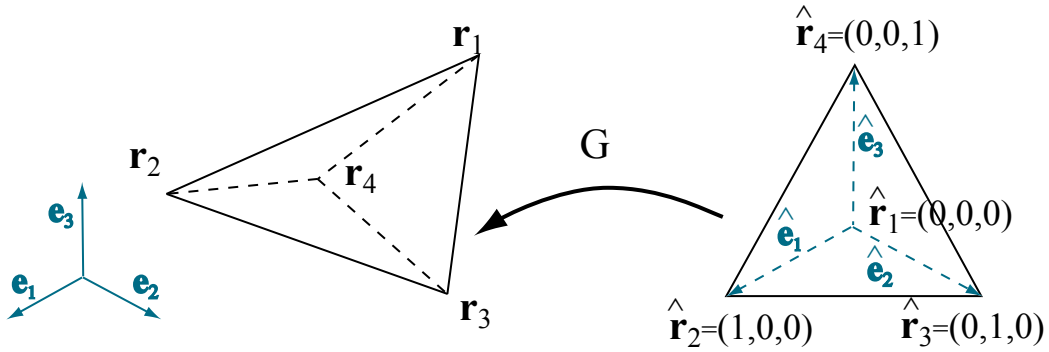


FIGURE B.1 – Tétraèdre réel et tétraèdre de référence

- Coordonnées des nœuds du tétraèdre Ω dans le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

- Coordonnées des nœuds du tétraèdre $\hat{\Omega}$ dans le repère $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$:

$$\hat{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{r}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{r}}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Fonction de passage du tétraèdre de référence $\hat{\Omega}$ au tétraèdre réel Ω :

$$\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}}) = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)\hat{x} + (x_3 - x_1)\hat{y} + (x_4 - x_1)\hat{z} + x_1 \\ (y_2 - y_1)\hat{x} + (y_3 - y_1)\hat{y} + (y_4 - y_1)\hat{z} + y_1 \\ (z_2 - z_1)\hat{x} + (z_3 - z_1)\hat{y} + (z_4 - z_1)\hat{z} + z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Jacobien de la fonction de passage :

$$[J] = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}.$$

- Dérivée de la fonction de passage par rapport au déplacement d'un nœud de l'élément Ω :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dx_1} &= \begin{pmatrix} -\hat{x} - \hat{y} - \hat{z} + 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dy_1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\hat{x} - \hat{y} - \hat{z} + 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dz_1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{x} - \hat{y} - \hat{z} + 1 \end{pmatrix}, \\ \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dx_2} &= \begin{pmatrix} \hat{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dy_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{x} \\ 0 \end{pmatrix}, & \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dz_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{x} \end{pmatrix}, \\ \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dx_3} &= \begin{pmatrix} \hat{y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dy_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{y} \\ 0 \end{pmatrix}, & \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dz_3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{y} \end{pmatrix}, \\ \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dx_4} &= \begin{pmatrix} \hat{z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dy_4} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{z} \\ 0 \end{pmatrix}, & \frac{d\mathbf{G}(\hat{\mathbf{r}})}{dz_4} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Dérivée du Jacobien par rapport au déplacement d'un nœud de l'élément Ω :

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dx_1} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{dJ}{dy_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{dJ}{dz_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \frac{dJ}{dx_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{dJ}{dy_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{dJ}{dz_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{dJ}{dx_3} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{dJ}{dy_3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{dJ}{dz_3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{dJ}{dx_4} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{dJ}{dy_4} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{dJ}{dz_4} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La dérivée de l'inverse transposée du Jacobien par rapport à une inconnue x est obtenue à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{dJ^{-T}}{dx} = J^{-T} \frac{dJ^T}{dx} J^{-T}.$$

- Dérivée du déterminant du Jacobien par rapport au déplacement d'un nœud de l'élément Ω :

$$\begin{aligned} \frac{d|J|}{dx_1} &= z_3y_4 + z_2y_3 - y_2z_3 - z_2y_4 - y_3z_4 + y_2z_4, \\ \frac{d|J|}{dy_1} &= x_4z_2 - x_4z_3 + x_3z_4 - x_3z_2 - x_2z_4 + x_2z_3, \\ \frac{d|J|}{dz_1} &= -x_2y_3 - x_3y_4 + x_4y_3 - x_4y_2 + x_2y_4 + x_3y_2, \\ \frac{d|J|}{dx_2} &= y_3z_4 - y_3z_1 - y_1z_4 - z_3y_4 + z_3y_1 + z_1y_4, \\ \frac{d|J|}{dy_2} &= -x_1z_3 - x_4z_1 + x_4z_3 + x_3z_1 + x_1z_4 - x_3z_4, \\ \frac{d|J|}{dz_2} &= x_1y_3 + x_4y_1 - x_4y_3 - x_1y_4 + x_3y_4 - x_3y_1, \\ \frac{d|J|}{dx_3} &= -z_1y_4 + z_2y_4 + y_1z_4 - z_2y_1 + y_2z_1 - y_2z_4, \\ \frac{d|J|}{dy_3} &= -x_2z_1 + x_2z_4 + x_1z_2 + x_4z_1 - x_4z_2 - x_1z_4, \\ \frac{d|J|}{dz_3} &= x_1y_4 - x_1y_2 - x_4y_1 + x_4y_2 - x_2y_4 + x_2y_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d|J|}{dx_4} &= y_2z_3 - y_2z_1 - z_3y_1 - z_2y_3 + z_2y_1 + y_3z_1, \\ \frac{d|J|}{dy_4} &= x_1z_3 - x_3z_1 - x_1z_2 + x_2z_1 + x_3z_2 - x_2z_3, \\ \frac{d|J|}{dz_4} &= x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_1y_2 - x_3y_2. \end{aligned}$$

FORMULATION INTÉGRALE DE VOLUME MAGNÉTOSTATIQUE ET CALCUL DES DENSITÉS DE FORCE MAGNÉTIQUE

APPLICATION AU COUPLAGE MAGNÉTO-MÉCANIQUE

Résumé :

Cette thèse porte sur la modélisation du couplage magnéto-mécanique, qui se manifeste à travers l'action de forces d'origine magnétique. Un outil de modélisation multiphysique, qui combine une formulation intégrale de volume pour le problème magnétique et une formulation éléments finis pour le problème mécanique, est développé. Dans une première partie, la résolution de problèmes magnétostatiques linéaires et non linéaires par une formulation intégrale de volume en potentiel scalaire est abordée. Les avantages et inconvénients de cette formulation sont mis en évidence, parmi lesquelles l'assemblage et le stockage de matrices pleines. Afin de palier à ces limitations, la méthode de compression par approximation en croix adaptative est utilisée afin de réduire l'espace mémoire et le temps de calcul requis. La seconde partie concerne l'implémentation du couplage magnéto-mécanique. Les méthodes des travaux virtuels et du tenseur de Maxwell sont tout d'abord mises en œuvre dans le cadre d'une formulation intégrale de volume, afin de calculer les forces magnétiques locales et globales. La résolution du problème mécanique par la méthode des éléments finis est ensuite abordée. Un premier essai sur la modélisation d'un micro-actionneur à l'aide de l'outil développé est proposé.

Mots clés : *formulation intégrale de volume, calcul des forces magnétiques, couplage magnéto-mécanique, méthode des éléments finis*

MAGNETOSTATIC VOLUME INTEGRAL FORMULATION AND COMPUTATION OF MAGNETIC FORCE DENSITIES

APPLICATION TO THE MAGNETOMECHANICAL COUPLING

Abstract :

This study deals with the modelling of the magnetomechanical coupling, which is due to magnetic forces. A multiphysic modelling tool, which combines a volume integral formulation for the magnetostatic problem and a finite element formulation for the mechanical problem, is developed. In the first part, the resolution of linear and nonlinear magnetostatic problems using a volume integral formulation with the scalar potential is studied. The advantages and disadvantages of this formulation are discussed, including the assembly and storage of full matrices. To overcome this limitation, the adaptive cross approximation method is used to reduce the memory and time costs. The second part is dedicated to the implementation of the magnetomechanical coupling. The virtual work method and the Maxwell's tensor are first introduced in the framework of the volume integral formulation in order to compute the local and global magnetic forces. The resolution of the mechanical problem with the finite element method is then discussed. A first test of the modelling of a micro-actuator using the developed tool is proposed.

Keywords : *volume integral formulation, computation of magnetic forces, magnetomechanical coupling, finite element method*