HAL
open science

Différentes approches non linéaires multi-échelles pour l'analyse de signaux et des images

Sylvain Meignen

To cite this version:

Sylvain Meignen. Différentes approches non linéaires multi-échelles pour l'analyse de signaux et des images. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Grenoble, 2011. tel-00994554

HAL Id: tel-00994554

https://theses.hal.science/tel-00994554v1

Submitted on 21 May 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut National Polytechnique de Grenoble

Ecole Doctorale de Mathématiques Appliquées et d'Informatique

Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Sylvain Meignen

Différentes Approches Non Linéaires Multi-Echelles pour l'Analyse des Signaux et des Images

Soutenue le 17 février 2011

-Jury-

MM.	Patrick Flandrin	*Rapporteur*
	Jacques Liandrat	*Rapporteur*
	Michael Unser	*Rapporteur*
	Albert Cohen	*Examinateur*
	Valérie Perrier	*Examinatrice*
	Marie-Laurence Mazure	*Examinatrice, Présidente*

Table des matières

1 Curriculum vitae détaillé **7**
1.1 Curriculum vitae . . . 7
1.2 Publications . . . 8
1.2.1 Articles soumis . . . 8
1.2.2 Articles de revues internationales à comité de lecture . . . 8
1.2.3 Chapitre de livre . . . 9
1.2.4 Actes de conférences internationales avec comité de lecture . . . 9
1.2.5 Conférences sans comité de lecture . . . 9
1.3 Participation à des projets de recherche et groupes de travail . . . 10
1.4 Participation à la vie scientifique et responsabilités collectives . . . 10
1.5 Encadrement scientifique et Enseignement . . . 10
1.5.1 Encadrement scientifique . . . 10
1.5.2 Enseignement . . . 13

2 Nouvelles approches pour la Décomposition Modale Empirique **17**
2.1 Contexte général : temps-fréquence, temps-échelle, fréquence instantanée . . . 17
2.2 Introduction à la décomposition modale empirique . . . 19
2.3 Algorithme EMD originel . . . 19
2.4 Approches par optimisation sous contraintes . . . 20
2.4.1 Calcul de l'enveloppe moyenne par optimisation sous contraintes [A10] . . . 20
2.4.2 Calcul des modes par optimisation sous contraintes et en utilisant des moyennes locales [P3] . . . 22
2.5 Contributions à l'EMD bidimensionnelle [A6] . . . 26
2.5.1 Choix de la méthode d'interpolation et contributions . . . 27

3 Sur l'utilisation des *lignes de maxima* multi-échelles **29**
3.1 Introduction . . . 29
3.2 Détection de ruptures . . . 29
3.2.1 Application à la détection du temps de latence du muscle génioglosse[A2,A3] 31
3.2.2 Généralisation de la formule de reconstruction, amélioration du détecteur [A4] 33
3.2.3 Séparation du bruit lié à l'ECG dans les signaux EMG diaphragmatique [A12] 35
3.2.4 Reconstruction d'un signal en utilisant les *lignes de maxima* de la transformée de Berkner [A9] . . . 37
3.3 *Lignes de maxima* d'ondelettes et vision par ordinateur . . . 39
3.3.1 Détection de *blobs* à l'aide de *lignes de maxima* d'ondelettes . . . 39

3.3.2 Régularité Lipschitzienne et appariemment d'images [A13][C7] 42

4 Analyse de texture, et représentation par Gaussiennes généralisées 51
4.1 Caractéristiques stables pour la segmentation de texture [C2] 51
4.2 Modélisation de texture par Gaussiennes généralisées [A7] 54

5 Représentations multi-échelles linéaires et non linéaires 57
5.1 Représentations multi-échelles splines 57
5.1.1 Représentations multi-échelles fondées sur les B-splines discrètes[A5] 57
5.1.2 Analyses multi-échelles linéaires utilisant les box splines [A11] 58
5.2 Schémas de subdivision non linéaires et non séparables 64
5.2.1 Notations 64
5.2.2 Convergence des schémas de subdivision non séparables [A14] 65
5.2.3 Stabilité des schémas de subdivision dépendant des données 69
5.3 Représentations multi-échelles non linéaires et non séparables 71
5.3.1 Analyse multirésolution dépendant d'une matrice M 72
5.3.2 Convergence des représentations multi-échelles 73
5.3.3 Stabilité des représentations multi-échelles 74
5.4 Un nouveau formalisme pour les représentations multi-échelles 75
5.4.1 Convergence de ces nouvelles représentations multi-échelles 76
5.4.2 Stabilité de ces représentations multi-échelles 77
5.4.3 Opérateurs de subdivision $(\mathcal{A}, I)$-compatible 78
5.5 Exemples numériques 78

6 Perspectives 81
6.1 Perspectives concernant L'EMD 81
6.1.1 Perspectives concernant L'EMD monodimensionnel 81
6.1.2 Perspectives de l'EMD bidimensionnelle 81
6.2 Perspectives concernant les représentations multi-échelles non linéaires 82

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Patrick Flandrin, Jacques Liandrat et Michael Unser d'avoir pris le temps d'étudier ce manuscript et de rédiger un rapport.

Je souhaite aussi exprimer ma gratitude envers les autres membres du jury Albert Cohen et Marie-Laurence Mazure pour avoir accepté de relire mon travail.

Valérie Perrier a aussi accepté de faire partie de mon jury d'habilitation ; je profite de cette occasion pour la remercier pour la patience et la gentillesse qu'elle m'a témoignées tout au long de ces huit dernières années ainsi que pour nos échanges scientifiques passés et futurs.

Je souhaite aussi particulièrement remercier les collaborateurs avec lesquels j'ai eu l'occasion de travailler, je pense à Basarab Mateï, avec qui amitié et recherche vont de paire et à Pierre-Yves Guméry, pour l'ouverture sur les applications biomédicales qu'il a su m'apporter.

J'aimerais aussi mentionner Sophie Achard, Cédric Gérot, Thomas Oberlin, Christophe Damerval et Anastasia Zakharova avec qui j'ai eu des échanges scientifiques fructueux.

Mes collègues de la tour IRMA (et particulièrement ceux du premier étage) ont su créer l'ambiance agréable nécessaire à notre travail. Je les en remercie. J'ai ici une pensée pour Jean Della Dora, qui nous a quitté il y a un an et demi et, qui, je crois, est pour beaucoup dans cette ambiance de travail chaleureuse.

Finalement, je souhaite aussi remercier mes trois enfants et ma femme pour le soutien qu'ils m'apportent au quotidien, par leur joie et leur bonne humeur.

Chapitre 1

Curriculum vitae détaillé

1.1 Curriculum vitae

Sylvain Meignen

Né le 06/06/1975 à Niort (79). Nationalité Française, marié, trois enfants

Adresse : Laboratoire Jean Kuntzmann (site campus),
51 rue des mathématiques 38400 Saint Martin d'Hères, FRANCE.
Tel : (+33) (0)4.76.51.43.95 -Fax : (+33) (0)4. 76.51.43.95
email : sylvain.meignen@imag.fr

Situation Professionelle : Maître de Conférences à l'ENSIMAG (Grenoble INP) en mathématiques appliquées depuis septembre 2002.

Formation :

2009-2010 : En délégation CNRS pour 6 mois au GIPSA-lab (Grenoble)

2002-2009 : Maître de Conférence à l'ENSIMAG

2001-2002 : ATER à l'ENSIMAG

1998-2001 :

- Thèse de mathématiques appliquées, Université Joseph Fourier - Grenoble I
  Titre : "Problèmes d'échelle dans la segmentation par ondelettes d'images texturées"
  Directeur : J. Demongeot
- Moniteur de l'enseignement supérieur, ENSIMAG

1998 : DEA de mathématiques appliquées, Université Grenoble I, mention bien

1997 : Ingénieur ENSIMAG

1.2 Publications

1.2.1 Articles soumis

P3 T. Oberlin, S. Meignen, V. Perrier, "An Alternative Formulation for the Empirical Mode Decomposition", submitted.

P2 C. Gérot, B. Mateï, S. Meignen, "A New Formalism for Nonlinear and Non-Separable Multiscale Representations", submitted to Journal of Computational and Applied Mathematics, in revision, hal-00529531.

P1 B. Mateï, S. Meignen, A. Zakharova, "Smoothness Characterization and Stability of Nonlinear and Non-Separable Multiscale Representations", submitted to journal of approximation theory, in revision, hal-00472176.

1.2.2 Articles de revues internationales à comité de lecture

A14 B. Mateï, S. Meignen, A. Zakharova, "Smoothness of Nonlinear and Non-separable Subdivision Schemes", accepted for publication in Asymptotic Analysis.

A13 C. Damerval, S. Meignen, "Study of a Robust Feature : the Pointwise Lipschitz Regularity", International Journal of Computer Vision, vol. 88, no. 3 ,pp. 363-381, 2010.

A12 P-Y. Guméry, J. Fontecave, E. Aithocine, S. Meignen L. Heyer, P. Baconnier, "Modified Structural Intensity for Singularity Localization in Noisy Signals : Application to Coherent Averaging for Event-Synchronous ECG Interference Cancellation in Diaphragmatic EMG Signals", International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 24, no. 5, pp. 424-433, 2010.

A11 S. Meignen, "Application of the Convergence of the Control Net of Box Splines to Scale-Space Filtering", IEEE Transactions on Image Processing, vol. 16, no. 11, pp. 2842-2848, 2007.

A10 S. Meignen, V. Perrier, "A New Formulation for the Empirical Mode Decomposition Based on Constrained Optimization", IEEE Signal Processing Letters, vol. 14, no. 12, pp. 932-935, 2007.

A9 S. Meignen, P-Y. Guméry, "Reconstruction of Finite Signal Derivatives from Multiscale Extrema Representations : Application to Transient Estimation and Signal Approximation", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 55, no. 4, pp. 1554-1559, 2007.

A8 C. Damerval, S. Meignen, "Blob Detection with Wavelet Maxima Lines", IEEE Signal Processing Letters, vol.14, no. 1, pp. 43-46, 2007.

A7 S. Meignen, H. Meignen, "On the Modeling of Small Sample Distributions with Generalized Gaussian Density in a Maximum Likelihood Framework", IEEE Transactions on Image Processing, vol. 15, no. 6, pp. 1647-1652, 2006.

A6 C. Damerval, S. Meignen and V. Perrier, "A fast Algorithm for Bidimensional EMD", IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, no. 10, pp. 701-704, 2005.

A5 S. Meignen, "Application of the Convergence of the Control Points of B-Splines to Wavelet Decomposition at Rational Scales and Rational Location", IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, no. 1, pp. 29-32, 2005.

A4 S. Meignen , S. Achard and P-Y. Guméry, "Time Localization of Transients with Wavelet Maxima Lines", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 53, no. 6, pp. 2251-2258, 2005.

A3 P-Y. Guméry, H. Roux-Buisson, S. Meignen, F.L. Comyn, M. Dematteis, B. Wuyam, J.L. Pépin and P.Levy, "An Adaptive Detector of Genioglossus EMG Reflex Using Berkner Transform for Time Latency Measurement in OSA Pathophysiological Studies ", IEEE Transactions

on Biomedical Engineering, vol. 52, no. 8, pp. 1382-1389, 2005.

A2 S. Meignen et P-Y. Guméry, " Contribution au schéma hiérarchique de Berkner pour l'approximation de la transformée en ondelettes : application à la mesure du temps électromyographique du muscle génioglosse ", Revue Traitement du Signal, volume 20, no. 4, pages 375-388,2003.

A1 A. Tonnelier, S. Meignen, H. Bosch, J. Demongeot, "Synchronization and Desynchronization of Neural Oscillators", Neural Networks, vol. 12, pp. 1213-1228, 1999.

1.2.3 Chapitre de livre

– J. Demongeot, J. Aracena, S. Ben Lamine, S. Meignen, A. Tonnelier,"Dynamical systems and biological regulation", Complex System, 2001

1.2.4 Actes de conférences internationales avec comité de lecture

C8 B. Mateï, S. Meignen, A. Zakharova, " Interpolatory Nonlinear and Non-Separable Multiscale Representation : Application to Image Compression", submitted to the proceeding of the seventh international conference on Curves and Surfaces, hal-00466937.

C7 C. Damerval and S. Meignen, "Highlight on a Feature Extracted at Fine Scales : the Pointwise Lipschitz Regularity", Proceedings of the 2nd international conference on scale space and variational Methods, Springer, Lecture Notes in Computer Science, june 2009.

C6 S. Meignen et V. Perrier, "Une nouvelle formulation de la décomposition modale empirique fondée sur l'optimisation sous contraintes", congrés SMAI, 5 juin, 2007

C5 C. Damerval and S. Meignen, "Computation of Blob-like Structures Characteristic Scale with Wavelet Maxima Lines", Sixth International conference on Curves and Surfaces, pp. 111-120, T2, Editors : P. Chenin, T. Lyche and L. Schumaker, 2007.

C4 E. Aithocine, P-Y. Guméry, S. Meignen, L. Heyer, and S. B. Gottffried," Contribution to Structural Intensity Tool : Application to the Cancellation of ECG Interference in Diaphragmatic EMG", IEEE BME Conference, New York, 2006.

C3 P-Y. Guméry, S. Meignen, H. Roux-Buisson, E. Aithocine and P. Levy," Reconstruction Process of the Berkner Transform : Application to Scale Range Determination in a Genioglossal EMG Reflex Time-Scale Detector ", 25th Annual International Conference of the Engineering in Medicine and Biology Society, pp. 2606-2609, 2003, Cancun.

C2 S. Meignen and V. Perrier, "Texture Segmentation Using Stable Texture Features", Proceedings of the 5th internationnal conference on curves and Surfaces, pp. 313-322, T2, Editors : A. Cohen, J.L. Merrien, L. Schumaker,2003.

C1 S. Meignen and P-Y. Guméry, "Application of Berkner transform to the detection and the classification of transients in EMG signals", Congrés de la SMAI-SMF, Nice 2003.

1.2.5 Conférences sans comité de lecture

1. S. Meignen, "Estimation of transients, signal approximation and blob detection with maxima lines", Colloque Franco-Roumain de mathématiques appliquées, LAMA, Chambéry, 2006.
2. S. Meignen, "Utilisation de la convergence des points de contrôle des B-splines et des Box-splines pour l'approximation des transformées en ondelettes", Séminaire Paris-Nord, LAGA, 12 janvier 2007.
3. S. Meignen, "Présentation de l'algorithme EMD et perspectives", Séminaire Paris-Nord, LT2I, 4 avril 2007.

4. S. Meignen, "Signal Approximation in weak-IMF : A New Approach to Empirical Mode Decomposition", Third conference on the Hilbert-Huang Transform, Guangzhou, Chine, 2008.
5. S. Meignen, "Décomposition Modale Empirique : Etat de l'Art et Perspectives", Séminaire GIPSA, 27 mai 2010.
6. S. Meignen, "Nonlinear and Non-Separable Multiscale Image Representation", Séminaire de l'institute for Digital Communications, School of Engineering, Edimbourg, Ecosse, 10 décembre 2010.

1.3 Participation à des projets de recherche et groupes de travail

2008-2009 : Projet BQR INP-Grenoble : *Représentation des images géométriques par box splines.* Dans ce projet financé par l'INP-Grenoble, il s'agissait de trouver des représentations non linéaires d'images en utilisant les box splines. Des algorithmes de compression ont été mis en place [C8].

2003-2006 : Projet Tumeurs (région Rhône-Alpes) Méthode de classification et imagerie par ondelettes : aide au diagnostic pour les tumeurs cérébrales

2004-2007 : Projet Européen IHP-Breaking Complexity

2001-2003 : Projet AMOA (projet IMAG) : "Analyse Multirésolution, Ondelettes et Applications".

2001-2003 : Projet région : "Mathématiques pour l'Acquisition et la Décision conduite par le modèle".

2003-2004 : Projet MATH-STIC "Décomposition modale empirique : théorie et applications", en collaboration avec P. Flandrin de l'ENS Lyon.

1.4 Participation à la vie scientifique et responsabilités collectives

- Chef de l'équipe MOSAIC du LMC (Grenoble) 2003-2006
- Membre de la commission de spécialistes (section 26) de l'université Joseph Fourier (2005-2006). Membre de la commission de spécialiste mathématiques et informatique de l'ENSIMAG (2007-2009). Membre de la commission de spécialiste de l'école centrale de Marseille (2009).
- Rapporteur de la thèse de Sathish Ramani de L'EPFL (biomedical imaging group) : "Non-ideal Sampling and Regularized Interpolation of Noisy Data", janvier 2009.
- Responsable du séminaire de l'équipe MGMI du LJK (2007-)
- Reviewer pour les revues IEEE transactions on Image Processing, IEEE Transactions on Signal Processing, IEEE Transactions on Neural Network, IEEE signal processing letters, Signal Processing.
- Organisateur d'une journée thématique sur les schémas de subdivision (17 décembre 2009).

1.5 Encadrement scientifique et Enseignement

1.5.1 Encadrement scientifique

Septembre 2010-

Sujet de Thèse : "Compressed sensing : représentations parcimonieuses, échantillonnage non régulier et décomposition modale empirique".

Etude prévue : L'idée originelle exploitée par le *compressed sensing* repose sur le fait que la plupart des signaux ou des images admettent une représentation parcimonieuse, c'est-à-dire que, représentés dans une base adéquate, les coefficients de la décomposition sont proches de zéro. En représentant un signal comme une combinaison linéaire d'échantillons bien choisis dans une base différente de celle pour laquelle le signal donne une représentation parcimonieuse, il a été montré qu'avec très peu d'échantillons du signal, on peut récupérer la plupart de l'information. Le problème du choix des échantillons est aussi celui de la reconstruction : comment choisir les échantillons de façon à avoir une bonne reconstruction ?

La reconstruction impose la résolution d'un système linéaire indéterminé, car on a beaucoup moins d'échantillons sélectionnés que de points dans l'image. Trouver les échantillons qui minimisent la norme L^2 du signal reconstruit, c'est-à-dire l'énergie du système, n'est pas adapté et ne tient pas compte du fait que les données sont éparses. Les travaux de Tao et al. ont montré que la norme la plus adaptée pour le traitement des données éparses est la norme L^1 et que la résolution du problème de la recherche des échantillons est réalisable dans ce cas. Ses méthodes ont donné lieu a de très importants développements ces dernières années, ce qui a littéralement révolutionné le domaine du traitement de l'information.

Le domaine du *compressed sensing* est à l'heure actuelle l'un des plus compétitifs des mathématiques appliquées, mais présente encore des problèmes ouverts. Ainsi, le travail de thèse s'intéressera à l'échantillonnage efficace sur des grilles non régulières et à la recherche de points optimaux pour l'interpolation. Pour cela, on utilisera des approches multi-échelles de type "level-set" ou "adaptive-thining". Une deuxième partie s'intéressera aux liens entre points optimaux d'interpolation, *compressed sensing* et décomposition modale empirique. On approfondira cette étude avec l'analyse de la décomposition modale empirique en terme de schéma de lifting (Sweldens).

Février 2009 - Septembre 2010

Co-encadrement (50 %) du master de mathématiques appliquées de Thomas Oberlin avec Valérie Perrier (soutenu en juin 2010).

Sujet de master : *Vers une approche mathématique de la décomposition modale empirique*

L'EMD (Décomposition Modale Empirique), décompose des signaux complexes non stationnaires en modes, appelés IMFs (Intrinsic Mode Functions), qui permettent la définition de la fréquence instantanée du signal par le biais de la transformée de Hilbert. Contrairement à l'analyse de Fourier ou par ondelettes qui utilisent des bases prédéfinies, l'EMD est une analyse adaptative et locale des signaux, qui repose sur un algorithme itératif mal compris appelé *sifting process*. L'objectif du stage de master était de remplacer le *sifting process* par un procédé d'optimisation convergeant en prenant garde de conserver la significativité physique des modes obtenus. Ce stage a débouché sur la rédaction de l'article [P3].

Janvier 2009 - Septembre 2010

encadrement du post-doctorat d'Anastasia Zakharova

Sujet de post-doctorat :*Compression d'images par box splines.*

Le sujet de post-doctorat était de mettre en place des techniques non linéaires et non séparables de décomposition d'image, dans le but d'améliorer les performances des algorithmes de compresssion existants (type JPEG2000). Nous avons développé de telles techniques dans [A14,P2] ainsi qu'un algorithme de compression les utilisant [C8].

octobre 2004-avril 2008

Co-encadrement (50 %) de la thèse de mathématiques appliquées de Christophe Damerval avec Cordélia Schmid.

Sujet de Thèse :*Ondelettes pour la détection de caractéristiques en traitement d'image. Application à la détection de régions d'intérêt*, thèse de l'université Joseph Fourier.

J'ai co-signé toutes les publications de Christophe Damerval durant sa thèse ainsi que pendant l'année qui a suivi [A6,A8,A13].

Résumé de la thèse : Cette thèse en traitement d'image aborde le problème de la mise en évidence de certaines structures remarquables que nous percevons visuellement. Celles-ci peuvent être autant monodimensionnelles, comme des contours, que bidimensionnelles, correspondant à des objets plus complexes. Un problème important issu de la vision par ordinateur est de détecter de telles structures, ainsi que d'en extraire des grandeurs caractéristiques.

Dans diverses applications, comme la reconnaissance d'objets, l'appariement d'images, ou le suivi de mouvement, il s'agit d'une première étape avant d'autres opérations de plus haut niveau. Ainsi, la définition de détecteurs performants apparaît comme essentielle.

Nous montrons que ceux-ci peuvent être construits grâce à des décompositions en ondelettes ; en particulier, il est possible de définir certaines *lignes de maxima*, qui s'avèrent pertinentes vis-à-vis de ce problème : d'une part, pour détecter des objets (par des régions d'intérêt), et, d'autre part, afin de les caractériser (calculs de régularité Lipschitzienne et d'échelle caractéristique). Cette approche originale de détection fondée sur des lignes de maxima peut alors être comparée aux approches classiques.

septembre 2006-septembre 2007

Sujet de post-doctorat : *Analyse de texture en utilisant les Gaussiennes généralisées.*

Co-encadrement (50 %) du post-doctorat d'Olivier Le-Cadet avec Valérie Perrier.

mars-juin 2004

Encadrement du stage de master de Christophe Damerval sur l'étude de la décomposition modale empirique.

mars-juin 2003

Encadrement du stage de master de Manel Tayachi sur la compression et le débruitage d'images par ondelettes.

1.5.2 Enseignement

Depuis 2002, j'ai effectué sept ans d'enseignement à temps complet et une année à mi-temps. Les enseignements que j'ai effectué sont les suivants :

- Analyse mathématique en 1A Ensimag (cours et Td), poly
- Modélisation et Calcul scientifque (année speciale informatique), poly
- Mathématiques pour les télécommunications (cours et TD), poly
- Traitement d'image avancé (3A ensimag et master recherche), poly
- TP de traitement d'image
- Initiation à Scilab
- Cours de réseau de neurones (approches statistiques), poly

Les chapitres 2 à 5 retracent les différents aspects de mon travail de recherche depuis mon recrutement en tant que maître de conférences à l'ENSIMAG en 2002.

Le chapitre 6, évoque différentes perspectives de recherches que nous entendons mener dans un avenir proche.

Je rappelle ici que toutes les publications dont il est fait mention par la suite sont disponsibles à l'adresse suivante :

http ://www-ljk.imag.fr/membres/Sylvain.Meignen/recherche/

Chapitre 2

Nouvelles approches pour la Décomposition Modale Empirique

Dans ce chapitre, nous retraçons un bref historique des motivations de la décomposition modale empirique (EMD) et nous détaillons ensuite nos principales contributions. Ce travail est le fruit d'une collaboration avec V. Perrier (Laboratoire LJK), Christophe Damerval (thésard jusqu'en 2008), pour les aspects concernant les aspects bidimensionnels de l'EMD et Thomas Oberlin, pour les aspects les plus récents concernant les approches par optimisation sous contraintes (Thèse entamée en 2010).

2.1 Contexte général : temps-fréquence, temps-échelle, fréquence instantanée

L'analyse temps-fréquence est une problématique centrale du traitement du signal. Son intérêt est lié au principe d'incertitude d'Heisenberg qui stipule que l'on ne peut pas obtenir une bonne localisation à la fois temporelle et fréquentielle d'un signal. Pour tenir compte au mieux de cette limitation, de nombreuses méthodes ont été développées, parmi lesquelles on peut citer : la transformée de Fourier à fenêtre (ou de Gabor), les distributions temps-fréquence quadratiques (de Wigner-Ville, la classe de Cohen,...), ou encore les ondelettes. La notion de fréquence instantanée, compte tenu de ce qui vient d'être dit, apparaît donc peu pertinente. Cependant, celle-ci est physiquement assez intuitive. En effet, considérons le signal $s(t) = a(t)\cos(\omega(t)t + \varphi)$ pour lequel la fréquence instantanée correspond à ω. On suppose que ω oscille autour d'une valeur ω_0. On peut alors écrire $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. Pour caractériser facilement la fréquence instantanée de s, les variations de a et de ω doivent être faibles sur des intervalles de temps de l'ordre de la période centrale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Autrement dit, les spectres de a et ω sont inclus dans des supports $[-B, B]$ avec $B << f_0 = \frac{1}{T_0}$. De tels signaux sont dits quasi-monochromatiques, ou encore à bande étroite, et on peut alors caractériser l'amplitude instantanée $a(t)$ et la fréquence instantanée $\omega(t)$. Pour des signaux fortement non-monochromatiques, une telle caractérisation est impossible. Plusieurs définitions différentes, et parfois complémentaires, ont été proposées pour la fréquence instantanée. Nous allons ici présenter la plus commune, celle dite du signal analytique. Le problème revient dans ce cas à trouver, en partant de s, un signal analytique (ou complexe) s_a qui s'écrit sous sa forme polaire :

$$s_a(t) = a(t)e^{i\theta(t)}. \tag{2.1}$$

Ce signal analytique devra vérifier les propriétés suivantes :

- Le signal analytique de $s(t) = \cos(\omega t)$ est $s_a(t) = e^{j\omega t}, \forall \omega > 0$.
- L'opération qui transforme s en s_a doit être linéaire.

Une construction possible du signal analytique s_a repose sur la transformée de Hilbert.

Définition 2.1.1 *La transformée de Hilbert d'un signal $s \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par :*

$$H\{s\} = y(t) = \frac{1}{\pi} VP\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t-\tau|>\varepsilon} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau,$$

VP désignant la valeur principale au sens de Cauchy.

On peut aussi voir la transformée de Hilbert comme la convolution par le noyau $h(t) = \frac{1}{\pi t}$.

Définition 2.1.2 *On appelle signal analytique s_a de s le signal défini par : $s_a = s + iH\{s\}$. En notant $y = H\{s\}$, le signal analytique s´écrit, modulo 2π, sous la forme :*

$$s_a(t) = a_s(t) e^{i\varphi_s(t)}.$$

Cela définit ainsi l'amplitude instantanée et la phase instantanée :

$$a_s(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \text{ et } \varphi_s(t) = \arctan \frac{y(t)}{s(t)}.$$

La fréquence instantanée est la dérivée de la phase instantanée φ_s.

La méthode construit donc bien un signal analytique unique, mais sa pertinence varie en fonction des signaux. Le théorème suivant est fondamental en traitement du signal, car il donne un cadre théorique dans lequel la transformée en signaux analytiques a un sens :

Théorème 2.1.1 *(E. Bedrosian, 1962)*
Soit $a > 0$ et $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Si

$$supp(\hat{f}) \subset (-a, a) \text{ et } supp(\hat{g}) \subset (-\infty, -a) \bigcap (a, \infty),$$

ou si

$$supp(\hat{f}) \subset [0, +\infty[\text{ et } supp(\hat{g}) \subset [0, +\infty[,$$

alors la transformée de Hilbert de la fonction fg satisfait l'identité de Bedrosian :

$$H\{fg\} = fH\{g\}.$$

L'idée principale de la décomposition modale empirique que nous présentons ensuite est de trouver une suite $d^k(t) = a_k(t)\cos(\varphi_k(t))$, $k = 1, \cdots, N$ correspondant à la décomposition d'un signal s de $L^2(\mathbb{R})$ sous a forme :

$$s(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k(t)\cos(\varphi_k(t)) + r(t)$$

où r est un signal monotone. Pour trouver ensuite la fréquence instantanée de s, on calcule la transformée de Hilbert de s ce qui revient, par linéarité, à calculer les transformées de Hilbert de chacun des modes d^k. Celles-ci doivent donc avoir un sens, c'est-à-dire appartenir à l'ensemble suivant :

$$\mathcal{M} = \{f \in L^2(\mathbb{R}),\ f \text{ réel }, f(t) + iH\{f\}(t) = \rho(t)e^{i\varphi(t)}, \rho \geq 0, \varphi' \geq 0\}$$

Si l'on généralise l'identité de Bedrosian on obtient pour le mode d_k (nota bene : $\cos(\varphi_k(t)) \notin L^2(\mathbb{R})$) [56] :

$$H\{a_k(t)\cos(\varphi_k(t))\} = a_k(t)H\{\cos(\varphi_k(t))\}.$$

L'étape suivante consiste à trouver une certaine classe de phase pour laquelle on a :

$$H\{\cos(\varphi(t))\} = \sin(\varphi(t)). \tag{2.2}$$

Une telle classe de phase peut-être construite en utilisant les produits finis de Blaschke [74][35]. Il est a noté que pour les signaux quasi-monochromatiques, l'équation (2.2) est approximativement vérifiée. Dans ce qui suit, nous allons présenter un algorithme qui vise à décomposer un signal de $L^2(\mathbb{R})$ en une somme de signaux quasi-monochromatiques, connu sous le nom de *décomposition modale empirique*.

2.2 Introduction à la décomposition modale empirique

Le principe de la *décomposition modale empirique* (EMD) est de chercher à décomposer un signal s en une somme de signaux quasi-monochromatiques, appelés *intrinsic mode functions* (IMF), qui satisfont les propriétés suivantes [42] :

Définition 2.2.1 *Un signal est une IMF si*

1. *le nombre d'extrema et de passage par zéro doivent différer d'au plus un*
2. *en chaque point, l'enveloppe moyenne de s est nulle.*

Initialement introduite par Huang et al. [42], l'EMD permet l'obtention d'IMFs à partir d'un signal s grâce à un procédé itératif connu sous le nom de *sifting process* (SP). Le prinicipe du SP est de construire une enveloppe moyenne d'un signal comme moyenne de l'enveloppe supérieure et de l'enveloppe inférieure du signal. L'enveloppe supérieure (resp. inférieure) du signal est traditionnellement construite par interpolation spline des maxima (resp. minima). Par soustraction de l'enveloppe moyenne au signal, un *pseudo-mode* est obtenu puis, en itérant le SP sur celui-ci, on finit par obtenir une IMF.

La première condition de la Définition 2.2.1 est reliée au concept d' IMF-*faible* introduite pour la première fois dans [81]. Cette condition est indispensable pour que la transformée de Hilbert d'une IMF permettent la définition d'une IMF analytique qui ait du sens. La deuxième condition de la Définition 2.2.1 est beaucoup plus discutable car elle dépend directement de la manière de calculer l'enveloppe moyenne. Sauf cas particulier, cette condition ne peut pas être vérifiée stricto-sensu, et l'algorithme de l'EMD s'arrête lorsque le mode courant (i.e. obtenu après un certain nombre d'étapes de sifting) est "proche", en un sens à définir, d'une IMF. Différents critères d'arrêt ont été proposés, donnant des décompositions différentes. Nous présentons, dans un premier temps, l'algorithme EMD originel ainsi que les différents critères d'arrêt, puis nous développons des approches alternatives à cet algorithme, ces approches visant toutes à s'affranchir du SP ([A10][P3]). Nous introduisons enfin un algorithme que nous avons proposé, dans [A6], pour améliorer les performances de l'algorithme bidimensionnel.

2.3 Algorithme EMD originel

On rappelle brièvement le principe de l'EMD pour un signal $(s_n)_{n=0,\cdots,N-1}$ mono-dimensionnel :

1. Initialisation : $r = s$, $k = 1$
2. Calcul de l'enveloppe moyenne e de r (i.e. la moyenne de l'enveloppe supérieure et de l'enveloppe inférieure de r)
3. Calcul de $p^0 = r - e$ (appelé *pseudo-mode* et noté PMF) et on pose $r = e$.
4. Tant que p^i n'est pas une IMF répéter (SP)
   – Calcul de l'enveloppe moyenne e^i de p^i
   – $p^{i+1} = p^i - e^i$; $i = i + 1$
5. $\tilde{d}^k = p^i$, $r = r - \tilde{d}^k$, $k = k + 1$
6. Si r n'est pas monotone, retour à l'étape 2 sinon la décomposition est terminée.

Dans l'algorithme originel, les enveloppes des maxima et des maxima sont calculées en utilisant une interpolation spline cubique. Quand la décomposition est terminée, on peut alors écrire s de la manière suivante :

$$s = \sum_{k=1}^{K} \tilde{d}^k + r.$$

En pratique, on ne peut pas obtenir d'IMF au sens strict (pour la raison que l'enveloppe moyenne d'un mode n'est jamais nulle, sauf cas particulier), donc différents critères d'arrêt ont été définis. Le premier critère d'arrêt proposé dans [42] était fondé sur la comparaison des *pseudo-modes* successifs p^i obtenus après i itérations du SP :

$$SD = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(p_n^{i-1} - p_n^i)^2}{(p_n^{i-1})^2}.$$

Comme SD n'est pas relié à la définition d'une IMFs, le mode obtenu avec ce critère ne peut pas être une IMF. Afin d'améliorer celui-ci, dans [34], les auteurs définissent $a^i = (e^i_{\max} - e^i_{\min})/2$ (où $e^i_{\max}$ (resp. $e^i_{\min}$) est l'enveloppe des maxima (resp. minima) de p^i) et $m^i = (e^i_{\max} + e^i_{\min})/2$ et la fonction d'évaluation $\sigma^i = |\frac{m^i}{a^i}|$. Le SP continue jusqu'à ce que $\sigma^i < \theta_1$ sur une fraction $(1 - \alpha)$ du temps total, tandis que $\sigma^i < \theta_2$ sur la partie restante. Une valeur typique pour $(\alpha, \theta_1, \theta_2)$ est $(0.05, 0.05, 0.5)$. Un inconvénient majeur de cette méthode est que le nombre d'étapes de sifting dépend directement de seuils qui sont fixés a priori.

2.4 Approches par optimisation sous contraintes

Dans cette partie, nous allons détailler les différentes approches que nous avons développées pour calculer les modes sans interpolation des extrema du signal puis comment faire pour remplacer le SP par un processus convergeant.

2.4.1 Calcul de l'enveloppe moyenne par optimisation sous contraintes [A10]

Nous allons présenter un résumé du travail effectué dans [A10], qui consiste à calculer directement l'enveloppe moyenne d'un signal sans recourir à l'interpolation des extrema, comme cela est le cas dans l'algorithme originel de l'EMD. Nous avons proposé une nouvelle construction de l'enveloppe moyenne d'un signal fondée sur l'optimisation sous contraintes (le mode cherché étant alors obtenu par soustraction de cette enveloppe au signal). Cette approche permet d'éviter la plupart des problèmes posés par l'interpolation des extrema. Le modèle que l'on choisit pour l'enveloppe moyenne m de s est celui d'un polynôme de degré 3 par morceaux, de classe C^1 (l'enveloppe

moyenne n'est donc plus une spline), défini sur la subdivision t_j, $j = 1, \cdots, L$ des extrema de s. La forme générale de l'enveloppe moyenne est alors la suivante :

$$m(t) = \sum_{j=1}^{L-1} m_j(t)\chi_{[t_j,t_{j+1}[}(t),$$

où $m_j(t) = a_j t^3 + b_j t^2 + c_j t + d_j$ et $\chi_{[t_j,t_{j+1}[}(t)$ est la fonction caractéristique de $[t_j, t_{j+1}[$. Les polynômes m_j sont donc complètement définis par la connaissance de $m_j(t_j)$, $m'_j(t_j)$, $m_j(t_{j+1})$ et $m'_j(t_{j+1})$. Pour obtenir une fonction C^1 on impose $m_j(t_j) = m_{j-1}(t_j) = m(t_j)$ et $m'_j(t_j) = m'_{j-1}(t_j) = m'(t_j)$. Les inconnues sont donc les valeurs de m et de m' en chaque t_j. Si on appelle alors $\Lambda = [m(t_1), m'(t_1), m(t_2), m'(t_2), \cdots, m(t_{J-1}), m'(t_{J-1}), m(t_J), m'(t_J)]$, nous allons chercher Λ dans un espace de contraintes qui prenne en compte la symétrie des enveloppes inférieures et supérieures.

Contraintes de type inégalité

On suppose que la séquence $(s(t_{j-2}), s(t_j), s(t_{j+2}))$ est monotone (ou constante) et que s admet un minimum en t_j (le raisonnement est identique si l'on considère que s admet un maximum en t_j). Le symétrique P_j de $(t_j, s(t_j))$ par rapport à $(t_j, m(t_j))$ est $(t_j, 2m(t_j) - s(t_j))$. Dans la formulation classique de l'EMD, l'enveloppe moyenne est définie comme la moyenne de l'enveloppe supérieure et inférieure. P_j devrait donc appartenir à l'enveloppe supérieure. Comme on sait que $(t_{j-1}, s(t_{j-1}))$ et $(t_{j+1}, s(t_{j+1}))$ appartiennent à l'enveloppe supérieure, de façon à préserver la monotonie on impose que :

$$\begin{aligned} &\min(s(t_{j-1}), s(t_{j+1})) \leq 2m(t_j) - s(t_j) \leq \max(s(t_{j-1}), s(t_{j+1})) \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\min(s(t_{j-1}), s(t_{j+1})) + s(t_j)}{2} \leq e(t_j) \leq \frac{\max(s(t_{j-1}), s(t_{j+1})) + s(t_j)}{2}. \end{aligned}$$

Ces conditions, réunies à celles où $s(t_j)$ est un maximum, peuvent être écrites sous la forme de contraintes de type inégalité $M_1\Lambda \leq S_1$ (enveloppe supérieure) et $N_1\Lambda \leq S_2$ (envelope inférieure). Dans ce contexte, $N_1 = -M_1$.

Contraintes de type égalité

On considère maintenant que $s(t_j)$ est un extremum pour la séquence $(s(t_{j-2}), s(t_j), s(t_{j+2}))$. Selon les cas, on utilise la forme de l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) pour déduire celle de l'enveloppe inférieure (resp. supérieure). Si on note $\tilde{t}_j$ les abscisses des intersections (lorsqu'elles existent) entre les droites L_1 et L_2, définies par :

$$L_1 :\ f_1(t) = \frac{s(t_j) - s(t_{j-2})}{t_j - t_{j-2}} t + \frac{s(t_{j-1})(t_j - t_{j-2}) - (s(t_j) - s(t_{j-2}))t_{j-1}}{t_j - t_{j-2}}$$

et

$$L_2 :\ f_2(t) = \frac{s(t_{j+2}) - s(t_j)}{t_{j+2} - t_j} t + \frac{s(t_{j+1})(t_{j+2} - t_j) - (s(t_{j+2}) - s(t_j))t_{j+1}}{t_{j+2} - t_j}.$$

Si $\tilde{t}_j > t_j$, on impose $\frac{1}{2}(f_1(t_j) + s(t_j)) = m(t_j)$ sinon on pose $\frac{1}{2}(f_2(t_j) + s(t_j)) = m(t_j)$. Ces conditions peuvent être écrites sous la forme $Q\Lambda = S_3$. Les différents types de contraintes sont illustrés sur la Figure 2.1

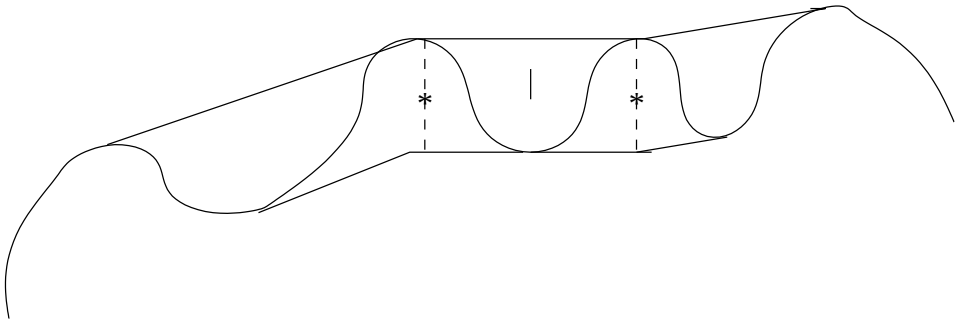


FIGURE 2.1 – Tracé des enveloppes affines permettant le calcul des contraintes de type égalité (celles correspondent au symbole $*$), une petite barre verticale indique les lieux d'une contrainte de type inégalité

Fonction coût

Comme m_j peut être vue comme l'interpolant de Hermite de m sur $[t_j, t_{j+1}]$, il peut être écrit comme :

$$m_j(t) = m(t_j)h_{j,j}(t) + m'(t_j)k_{j,j}(t) + m(t_{j+1})h_{j+1,j}(t) + m'(t_{j+1})k_{j+1,j}(t)$$

où $h_{j,l}(t) = \Big(1 - 2(t - t_j)l'_{j,l}(t_j)\Big)\, l^2_{j,l}(t)$ et $k_{j,l}(t) = (t - t_j)l^2_{j,l}(t)$, où $l_{j,l}$ est le polynôme de Lagrange de degré 1 en t_j sur l'intervalle $[t_l, t_{l+1}]$, et l appartient à $\{j, j-1\}$. Comme l'on recherche une fonction de classe C^1, il est naturel de considérer la fonctionnelle suivante :

$$J(\Lambda) \quad = \quad \sum_{l=1}^{L-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} m'_j(t)^2 dt,$$

que l'on peut après quelques calculs réécrire sous la forme $J(\Lambda) = \Lambda^T B \Lambda$, où B est une matrice symétrique, semi-définie positive. Pour construire l'enveloppe moyenne, nous devons alors résoudre :

$$\begin{cases} \min\limits_{\Lambda} \Lambda^T B \Lambda \\ M_1\Lambda \leq S_1,\ N_1\Lambda \leq S_2,\ Q\Lambda = S_3 \end{cases},$$

qui est un problème classique de minimisation quadratique. Comme B est une matrice semi-définie positive, J est une fonction convexe. L'existence d'un minimum est donc lié au fait que l'ensemble des contraintes est non vide. Il est connu qu'un tel problème d'optimisation quadratique peut alors être résolu en temps polynômial. L'approche proposée permet un calcul de l'enveloppe moyenne sans avoir recours à l'interpolation des extrema et donne des résultats très proches de ceux obtenus par calcul de l'enveloppe moyenne comme moyenne des enveloppes des maxima et des minima.

2.4.2 Calcul des modes par optimisation sous contraintes et en utilisant des moyennes locales [P3]

Comme nous l'avons vu plus haut, une notion centrale de l'EMD est celle de la définition de "moyenne locale" d'un signal. La définition originelle de cette moyenne (demi-somme des enveloppes splines) est pratique : elle s'appuie d'une part sur des outils simples (les splines), et d'autre part,

avec cette définition, l'annulation de la moyenne locale implique la symétrie des enveloppes. Cependant, cette définition est difficile à manipuler et souffre de l'instabilité du procédé d'interpolation des extrema. Nous avons proposé, dans la section précédente, une nouvelle manière de définir l'enveloppe moyenne d'un signal en imposant certaines contraintes locales. Les recherches concernant la définition de la notion de moyenne locale en lien avec l'EMD ont été très actives ces dernières années. Ainsi, dans [73], on trouve la définition suivante :

$$m(t) = \int_{t-\delta(t)}^{t+\delta(t)} s(x)dx,$$

le paramètre d'échelle δ, variant au cours du temps et étant calculé par la formule suivante :

$$\delta(t) = \frac{1}{4}|I_{j-1}| + \frac{1}{2}|I_j| + \frac{1}{4}|I_{j+1}|,$$

en notant $I_j = [t_j, t_{j+1}]$, l'intervalle délimité par les extrema de s, et contenant t. Ici, $\delta(t)$ est donc une moyenne pondérée des longueurs des intervalles autour de t. Le principal problème de cette définition est l'absence de régularité de l'enveloppe m ainsi obtenue : la fonction $t \to \delta(t)$ étant discontinue en chaque t_j. La définition de Hong et al. [41] de la moyenne locale est fondée sur l'interpolation spline de certains points caractéristiques :

Définition 2.4.1 *Soit un signal s, d'extrema localisés en t_j. L'enveloppe moyenne m de s est définie comme l'interpolant spline cubiques aux points $(\tilde{t}_j, \tilde{s}_j)$ donnés par :*

$$\begin{cases} \tilde{s}_j &= \frac{1}{t_{j+1}-t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} s(t)dt \\ \tilde{t}_j &= \frac{\int_{t_j}^{t_{j+1}} t(s(t)-\tilde{s}_j)^2 dt}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} (s(t)-\bar{e}_j)^2 dt}. \end{cases}$$

En remplaçant, dans l'algorithme originel de l'EMD, la définition de la moyenne d'un signal par cette définition, on obtient des résultats numériques significativement meilleurs. Cependant, en procédant ainsi, on ne s'affranchit pas de la dépendance au SP lorsqu'il s'agit ensuite de calculer les modes.

Dans [P3], nous avons proposé une nouvelle approche toujours par optimisation sous contraintes, permettant d'éviter l'utilisation d'un procédé itératif dans le calcul des modes. Nous avons besoin, pour que l'algorithme d'optimisation soit efficace, d'une bonne estimation de l'enveloppe moyenne du signal. Nous présentons donc tout d'abord comment obtenir une première ébauche m_0 de l'enveloppe moyenne m qui soit plus fiable que celle donnée par la Définition 2.4.1, puis nous montrons comment construire ensuite les modes sans utiliser de procédé itératif.

Calcul de l'ébauche m_0

Considérons que $(\hat{\theta}_i)_{i=1\ldots L}$ est un estimateur des abscisses des extrema du mode haute fréquence d^1 que l'on cherche à extraire : ceux-ci sont la plupart du temps les extrema du signal, mais peuvent aussi être d'autre type, comme nous le montrerons un peu plus loin. Pour construire une approximation m_0 de l'enveloppe moyenne locale du signal, on utilise une approche similaire à celle

donnée par la Définition 2.4.1, en remplaçant seulement les bornes dans la définition des intégrales :

$$\begin{aligned} \bar{s}_i &= \frac{1}{\hat{\theta}_{i+1} - \hat{\theta}_i} \int_{\hat{\theta}_i}^{\hat{\theta}_{i+1}} s(t)\, dt \\ \bar{t}_i &= \frac{\int_{\hat{\theta}_i}^{\hat{\theta}_{i+1}} t|s(t) - \bar{s}_i|^2\, dt}{\int_{\hat{\theta}_i}^{\hat{\theta}_{i+1}} |s(t) - \bar{s}_i|^2\, dt}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $\hat{\theta}$ est défini un peu plus loin. Ayant construit une subdivision τ compatible avec les abscisses $\bar{t}$, m_0 est alors la fonction B-spline qui interpole $(\bar{t}_i, \bar{s}_i)$, la base de B-splines étant définie sur la subdivision τ. On recherche alors l'enveloppe optimale dans la base de B-spline d'ordre k (notée Π_τ^k par la suite) ainsi définie :

$$m = \sum_{i=0}^{L} M_i \beta_{i,\tau}^k, \tag{2.4}$$

dont les inconnues sont les poids M_i.

Calcul des contraintes

Dans l'algorithme originel EMD, l'IMF $\tilde{d}^1$ est définie par symétrie de son enveloppe supérieure et inférieure et par le fait que ses maxima doivent être positifs tandis que ses minima doivent être négatifs.

Dans ce qui suit, on appellera h le mode approchant d^1 par la méthode que nous proposons. Supposons que les extrema de h sont situés en $(x_i)_{i=1\ldots L}$, on définit alors une contrainte linéaire sur h en chacun de ces points. En effet, considérons que λ_i est le point d'abscisse x_i, sur l'enveloppe linéaire passant par les points $(x_{i-1}, h(x_{i-1}))$ et $(x_{i+1}, h(x_{i+1}))$ (voir Figure 2.2) :

$$\lambda_i = \frac{h(x_{i+1}) - h(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) + h(x_{i-1}). \tag{2.5}$$

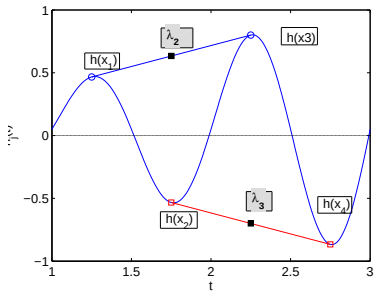


FIGURE 2.2 – Definition de λ_i

Afin de prendre en compte la symétrie des enveloppes h, nous imposerons que :

$$|h(x_i) + \lambda_i(m)| \leq \varepsilon_i.$$

Comme le seuil ε_i doit être dépendant de l'amplitude locale de h, on choisit naturellement

$$\varepsilon_i = \alpha |h(x_i) - \lambda_i(m)|,$$

où α est un paramètre global. Cette relation est très similaire au critère d'arrêt proposé dans [34] et que nous avons rappelé plus haut. Notre approche est néanmoins nouvelle concernant les deux aspects suivants : tout d'abord, les contraintes sont vérifiées uniquement aux points x_i et non pour tout t et ensuite, le calcul de h ne va pas être effectué en appliquant une procédure itérative.

Ainsi définies, les contraintes sur h ne sont pas linéaires puisque, les abscisses $(x_i)_{i=1,\cdots,L}$ des extrema de h sont *a priori* inconnues et que ε_i dépend de h. Pour résoudre ces problèmes, on suppose que $h_0 = s - m_0$ est suffisamment proche de h pour pouvoir utiliser certaines informations sur h_0. Par ailleurs, on remplace x_i par $\hat{\theta}_i$, où l'estimateur $\hat{\theta}$ a été introduit plus haut mais dont la valeur n'est pas encore connue. C'est ce que nous voyons maintenant.

Notons tout d'abord que les contraintes C n'ont de sens que lorsque le cardinal de l'estimateur $\hat{\theta}$ est égal au nombre d'extrema de d^1. En suivant la remarque faite dans [46], les abscisses des extrema des dérivées d'ordre élevé de s ont plus de chance de fournir une meilleure approximation de l'abscisse des extrema de d^1 que les extrema du signal. Dans [P3], nous avons étudié en détail, quel semble être le meilleur ordre de dérivation pour estimer les extrema de d^1, en nous basant sur l'étude du signal suivant :

$$s(t) = \cos(2\pi t) + a\cos(2\pi f t) \quad 0 < f < 1,\ a \in \mathbb{R}_+. \tag{2.6}$$

D'après une étude proposée dans [33], lorsque $af < 1$ le nombre d'extrema de s est exactement le même que celui de la composante haute fréquence, tandis que lorsque $af^2 > 1$ le nombre d'extrema de s est exactement le même que celui de la composante basse fréquence. Cette proposition s'étend facilement aux dérivées d'ordre supérieur : le nombre d'extrema de $s^{(2k+1)}$ est égal au nombre d'extrema de la composante haute (resp. basse) fréquence lorsque $af^{2k+1} < 1$ (resp. $af^{2k+2} > 1$).

Il est clair que la dérivation diminue la contribution de la partie basse fréquence dans le signal, ce qui justifie qu'une meilleure estimation de la position des extrema est obtenue en utilisant une dérivée d'ordre plus élevé. Cependant en faisant ainsi, nous sommes conscients que l'on amplifie le bruit. Ceci nous conduit a définir la procédure de compromis suivante, dont le but est de déterminer le plus entier k tel que $s^{(2k)}$ a le même nombre d'extrema que la composante haute fréquence du signal. Si on appelle t (resp. $t^{(2)}$, $t^{(4)}$) les abscisses des extrema de s (resp. $s^{(2)}$, $s^{(4)}$) et $\#X$ le cardinal de l'ensemble X. La procédure pour calculer $\hat{\theta}$, est la suivante :

- Si $\#t = \#t^{(2)}$, alors $\hat{\theta} = t$.
- Autrement, si $\#t^{(2)} = \#t^{(4)}$ et $\#t^{(2)} > \#t$, alors $\hat{\theta} = t^{(2)}$.
- Autrement, $\hat{\theta} = t^{(4)}$.

Pour le signal composé de deux modes, le résultat de la procédure sont présentés en Figure 2.3 (A).

Calcul des modes par optimisation sous contraintes

La procédure d'optimisation que nous avons alors utilisée est la suivante :

$$\hat{m} = \begin{cases} \operatorname{argmin} J(m) \\ m \in \Pi_\tau^k \\ \forall i \in 1 \ldots L,\ \frac{|\lambda_i(m) + (s-m)(\hat{\theta}_i)|}{|\lambda_i(m_0) - (s-m_0)(x_i^0)|} \leq \alpha \end{cases} \tag{2.7}$$

où $(x_i^0)_{i=1\cdots L}$ sont les extrema $s - m_0$. Dans la formulation originelle de l'EMD, le SP a deux effets distincts : il contraint les modes a avoir une enveloppe approximativement symétrique et,

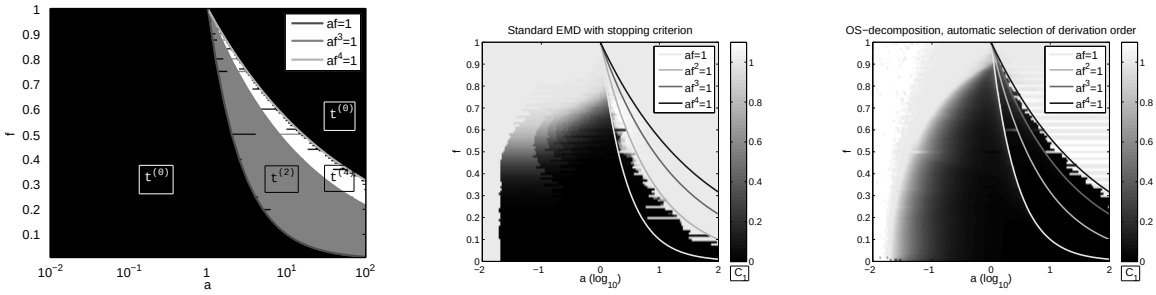
parallèlement, il a un effet régularisant sur l'enveloppe moyenne m. Dans notre approche, comme les problèmes de symétrie sont déjà pris en compte par les contraintes, il apparaît naturel de choisir la fonctionnelle à minimiser suivante :

$$J(m) = \left\| m'' \right\|^2, \tag{2.8}$$

où $\|.\|$ est la norme L^2. En notant (M_j) les coefficients de m, la fonctionnelle se réécrit comme

$$J(M) = M^T H M,$$

où H est la matrice de poids définie par : $H_{ij} = \int_0^1 (N_{i,\tau}^k)''(t)(N_{j,\tau}^k)''(t)\, dt$. L'ordre de la B-spline utilisée est discuté plus en détails dans [P3]. Après avoir soustrait l'enveloppe moyenne ainsi calculée au signal, on obtient le premier mode puis on itère la procédure sur l'enveloppe moyenne ainsi calculée. Les résultats numériques montrent que l'on obtient ainsi une décomposition adaptative, permettant une bonne séparation des modes, ceux-ci étant quasi-orthogonaux deux à deux [P3]. A titre d'illustration, La Figure 2.3 (B) représente la séparation des modes issus du signal s défini en (2.6) en utilisant l'EMD originelle avec le critère d'arrêt classique tandis que la Figure 2.3 (C) présente le résultat de la séparation des modes en utilisant la procédure d'optimisation et la sélection automatique de l'ordre de la dérivée décrit par la Figure 2.3 (A). On voit donc clairement que l'ordre de la dérivée utilisé pour approcher les extrema du premier mode influe directement sur la qualité de la séparation.



(A) (B) (C)

FIGURE 2.3 – (A) : résultat de la procédure de sélection de l'ordre de la dérivée pour calculer les extrema du premier mode, (B) : résultat de la séparation des modes en utilisant l'EMD classique, (C) : résultat de séparation des modes en utilisant la procédure d'optimisation proposée

2.5 Contributions à l'EMD bidimensionnelle [A6]

L'extension de l'algorithme de l'EMD au cas bidimensionnel (c'est-à-dire l'étude des signaux de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en utilisant un algorithme de type EMD) n'est pas du tout évidente dans la mesure où se pose la définition des extrema multi-dimensionnels. Dans [A6], nous avons proposé un algorithme d'extension de l'EMD dans le cas où les extrema sont définis comme les extrema discrets d'une fonction bidimensionnelle. Dans ce qui suit, nous nous penchons plus en détails sur la technique d'interpolation à utiliser, ainsi que sur d'autres détails techniques tout en mettant notre travail en perspective avec d'autres approches concurrentes.

2.5.1 Choix de la méthode d'interpolation et contributions

Etant donné l'ensemble des maxima et des minima d'une image, différentes techniques sont à notre disposition pour construire l'enveloppe des maxima et des minima. Une extension naturelle de l'interpolation par splines cubiques à la dimension deux consiste en les splines plaques minces, utilisées notamment dans [49]. Celles-ci correspondent à un cas particulier de fonctions à symétrie radiale utilisées comme interpolant des extrema dans [71]. De telles approches sont inadaptées pour des images contenant de nombreux extrema, pour des raisons de temps de calcul. Une approche plus rapide proposée dans [89] utilise le produit tensoriel pour construire les enveloppes des maxima et des minima mais celle-ci ne peut tenir compte de la disposition spatiale des extrema.

Nous avons proposé, dans [A6], de construire les enveloppes supérieures (resp. inférieures) en utilisant une interpolation cubique sur les triangles issus de la triangulation de Delaunay de l'ensemble des maxima (resp. minima) [88]. Nous avons fait particulièrement attention aux problèmes de bords, pour lesquels nous avons proposé une généralisation de la méthode unidimensionnelle proposée dans [33], qui consiste à symétriser un certain nombre d'extrema par rapport au bord de l'image. Nous avons ensuite montré, qu'avec notre approche, seulement 3 itérations du SP, était nécessaire pour atteindre un résultat de convergence satisfaisant. Nous avons alors proposé une définition pour les IMFs bidimensionnelles qui est une extension naturelle du cas monodimensionnel. Les résultats numériques montrent, par ailleurs, que cette nouvelle approche proposée pour la décomposition modale empirique bidimensionnelle se comporte comme un banc de filtre de la même manière que l'algorithme unidimensionnel originel (cf Figure 2.4).

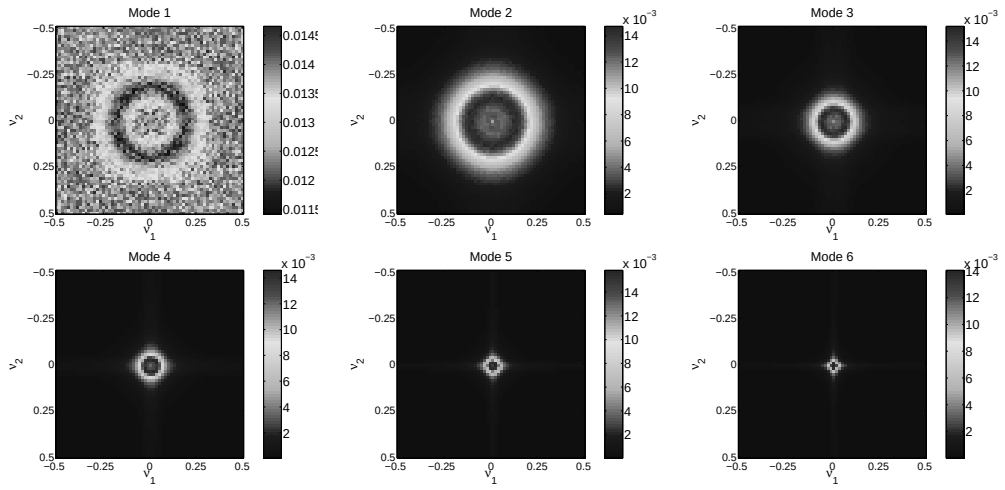


FIGURE 2.4 – De gauche à droite et de haut en bas, la transformée de Fourier des IMFs obtenues à partir de 1000 échantillons d'une image de bruit blanc Gaussien ($\sigma^2 = 1$, taille de l'image 64×64

Chapitre 3

Sur l'utilisation des *lignes de maxima* multi-échelles

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter différentes utilisations des *lignes de maxima* de décompositions de type ondelettes. Dans un premier temps, nous présentons des applications à la détection de ruptures dans les signaux électromyographiques (EMG) à l'aide d'une transformée particulière, proche d'une transformée en ondelettes, due à Berkner [10]. Cette thématique a fait l'objet d'une collaboration avec P-Y. Guméry (laboratoire TIMC, Grenoble) et S. Achard (GIPSA-Lab,Grenoble). Les différents articles relatifs à cette thématique sont les suivants [A2][A3][A4][A12]. Nous résumons, ensuite, un travail effectué sur des problèmes de reconstruction des signaux à l'aide des *lignes de maxima* de la transformée de Berkner, en insistant sur l'intérêt de ces méthodes par rapport aux décompositions en ondelettes classiques [A9].

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons aux applications des *lignes de maxima* d'ondelettes en vision par ordinateur. Une première étude porte sur la détection d'objets significatifs dans les images à l'aide de *lignes de maxima* d'ondelettes de type dérivée de Gaussiennes [A8]. Une deuxième étude a trait aux propriétés de robustesse de la régularité Lipschitzienne de certaines singularités d'une image vis-à-vis de nombreuses transformations. Cet aspect étant intéressant pour l'appariement d'images [A13][C7].

3.2 Détection de ruptures

Avant de commencer, nous rappelons brièvement le principe de la transformée de Berkner ainsi que les propriétés qui nous intéressent dans les applications. La transformée de Berkner [10] consiste en la décomposition multi-échelles d'un signal f discret suivante :

$$\bar{c}^N_{2,r}[k] = \sum_{j\in\mathbb{Z}} B^N_{2,r}[j] f(k+j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{B^N_{2,r}}[k-j] f(j), \tag{3.1}$$

où $\overline{B^N_{2,r}}[k] = B^N_{2,r}[-k]$, avec

$$B^N_{2,r}[j] = \overbrace{\rho * \cdots * \rho}^{r} * B^N_2[j]$$

où $\rho = \{1, -1\}$ et où B_2^N est défini par :

$$B_2^N[j] = \begin{cases} \frac{1}{2^N} C_N^j \text{ si } 0 \leq j \leq N \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases} = \overbrace{B_2^1 * \cdots * B_2^1}^{N} \tag{3.2}$$

où $B_2^1 = \{1/2\ 1/2\}$.

En utilisant la propriété d'approximation des Gaussiennes par des coefficients binômiaux, on peut montrer que lorsque $N \to +\infty$:

$$B_2^N[j] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\frac{\sqrt{N}}{2}} e^{-\frac{1}{2}((j-(\frac{N}{2}))/(\sqrt{N}/2))^2}, \tag{3.3}$$

qui résulte du théorème central limite. On peut alors montrer que, pour les mêmes raisons, la séquence $B_{2,r}^N$ approche la dérivée $r$ième de la Gausienne $\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi N}{2}}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ aux points $x = \frac{j - \frac{N+r}{2}}{\frac{\sqrt{N}}{2}}$ lorsque N est grand. Asymptotiquement, cette décomposition est donc équivalente à une décomposition utilisant des dérivées de Gaussiennes.

Comme, d'après la formule du "triangle de Pascal", on a que :

$$B_{2,r}^{N+1}[j] = \frac{1}{2}(B_{2,r}^N[j] + B_{2,r}^N[j-1]),$$

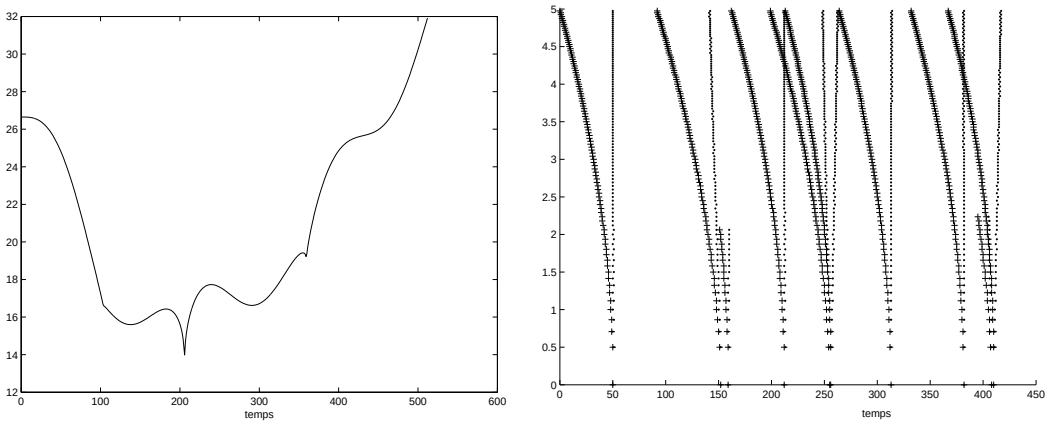
on en déduit immédiatement la relation de récurrence suivante : $\bar{c}_{2,r}^{N+1}[k] = \frac{1}{2}\left(\bar{c}_{2,r}^N[k+1] + \bar{c}_{2,r}^N[k]\right)$. Cette relation de récurrence sert à montrer que si l'on a un extremum au rang $N+1$ en k alors celui-ci provient d'un extremum situé en k ou $k-1$ au rang N dans le cas $r = 1$ [11]. Les extrema forment alors, lorsque N varie, des lignes dans le plan temps-échelles appelées *lignes de maxima* (nota bene : on parle de *lignes de maxima* mais on devrait plutôt parler de lignes d'extrema, la nature des extrema (i.e. minimum ou maximum) devant être préservée le long d'une ligne). Cette propriété signifie aussi qu'avec un tel schéma, deux *lignes de maxima* ne peuvent jamais se fondre en une seule. En effet, si tel était le cas, cela impliquerait qu'au rang $N-1$, les extrema associés soient situés en deux points voisins. Comme ceux-ci seraient respectivement associés à un minimum et à un maximum ; il ne serait pas possible qu'ils se confondent au rang N car la nature des extrema doit être préservée le long d'une *ligne de maxima*. Nous en déduisons alors la propriété de connexité suivante :

Propriété 3.2.1 *Si $r = 1$, à tout extremum au rang N, correspond un unique extremum au rang $N = 0$.*

Avec le schéma proposé par Berkner, on observe un décalage vers la gauche des lignes de maxima lorsque N augmente, nous avons donc proposé dans [A2] un algorithme pour obtenir des lignes de maxima ne présentant pas de dérive spatiale. Pour cela, il suffit de remplacer $B_{2,r}^N[j]$ par $\tilde{B}_{2,r}^N[j] = B_{2,r}^N[j + \lfloor \frac{N+r}{2} \rfloor]$ (où $\lfloor . \rfloor$ correspond à la partie entière) pour obtenir une séquence $c_{2,r}^N$ (remplaçant $\bar{c}_{2,r}^N$). Nous montrons sur la Figure 3.1 la correction de la dérive des extrema.

Nous avons par ailleurs proposé de nouvelles formules de reconstruction d'un signal f et de ses dérivées à partir des coefficients $c_{2,r}^N$ et d'une séquence d_N^r que nous allons introduire. Pour tout signal f discret définissons :

$$\text{Pour tout } r \geq 2 \quad d_r^{-1}[k] = c_{2,r-1}^0[k] = \overbrace{\rho * \cdots * \rho}^{r-1} * f(k) \text{ et } d_1^{-1}[k] = f(k)$$



(A) (B)

FIGURE 3.1 – (A) : Un exemple de signal, (B) : les lignes de maxima correspondant à la décomposition de Berkner originelle (symbole '+') et les lignes correspondant à la décomposition proposée (symbole '.'), avec $r = 1$

qui vérifie :

$$d_r^N[k] = \frac{1}{2}(d_r^{N-1}[k] + d_r^{N-1}[k-1]) \text{ si } N + r \text{ pair et } N \in \mathbb{N}$$
$$d_r^N[k] = \frac{1}{2}(d_r^{N-1}[k] + d_r^{N-1}[k+1]) \text{ si } N + r \text{ impair et } N \in \mathbb{N}$$

Nous pouvons alors reconstruire le signal f ou ses dérivées discrètes à partir des séquences d_r^N et $c_{2,r}^l$, $l \leq N$ puisque nous avons le théorème suivant [A2] :

Théorème 3.2.1 *si $r \geq 2$*
Si r est impair :

$$c_{2,r-1}^0[k] = d_r^N[k + \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor] + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N} c_{2,r}^l[k + \lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor]$$

Si r est pair :

$$c_{2,r-1}^0[k] = d_r^N[k + \lfloor \frac{N+2}{2} \rfloor] + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N} c_{2,r}^l[k + \lfloor \frac{l+2}{2} \rfloor]$$

En particulier, lorsque $r = 1$ nous avons :

$$f(k) = d_1^N[k + \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor] + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N} c_{2,1}^l[k + \lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor]$$

On reconnaît alors une décomposition proche d'une décomposition en ondelettes.

3.2.1 Application à la détection du temps de latence du muscle génioglosse[A2,A3]

Nous avons alors utilisé les *lignes de maxima* de la transformée de Berkner pour étudier des signaux EMG. Plus précisément, la contraction d'un muscle génère des transitoires qui correspondent

à des singularités sur le signal EMG correspondant que l'on va détecter dans le plan temps-échelle à l'aide de *lignes de maxima*.

Le cas qui nous intéresse est celui d'un muscle extrinsèque de la langue, le génioglosse, dont le temps de latence après stimulation (i.e. temps s'écoulant avant la réponse du muscle à une stimulation) semble être caractéristique des populations sujettes à l'apnée du sommeil. Dans [A2], nous avons mis en place une nouvelle procédure fondée sur l'étude des *lignes de maxima* de la transformée de Berkner pour détecter la contraction (dite activité réflexe) du muscle génioglosse, permettant ensuite de calculer le temps de latence.

Nous rappelons maintenant brièvement le modèle de signal utilisé. Les observations expérimentales nous conduisent à considérer le modèle de signal suivant pour l'activité du muscle génioglosse :

$$f(k) = s(k) + \sum_{i=1}^{n} s_i(k - \tau_i) + \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(k - \theta_i) \tag{3.4}$$

où s est une activité EMG de fond, s_i correspond à un transitoire réflexe à détecter, Δ_i correspond à des transitoires parasites (artefacts). Le signal s est un processus Gaussien stationnaire, sa durée est déterminée par le protocole expérimental. Le signal réflexe est un mélange complexe de transitoires s_i. Les paramètres τ_i représentent les occurrences des transitoires de l'activité réflexe. La présence du signal réflexe n'affecte pas significativement la répartition spectrale du signal s mais en augmente l'énergie. Les transitoires parasites Δ_i ont des occurrences θ_i imprévisibles et leur répartition temporelle suit une loi de Poisson.

L'objet de notre étude a alors été la détection des temps de latence τ_i associés à l'activité réflexe s_i du muscle génioglosse en mettant en évidence des comportements spécifiques des *lignes de maxima* de la transformée de Berkner générées par l'activité réflexe.

Chaque *ligne de maxima* est repérée par son indice à la plus petite échelle (on peut remonter la ligne d'après la propriété 3.2.1) et vérifie l'une des trois hypothèses suivantes :

$H_0(k)$	:	la ligne de maxima d'origine k correspond au signal s
$H_1(k)$	:	la ligne de maxima d'origine k appartient à un transitoire réflexe
$H_2(k)$	:	la ligne de maxima d'origine k appartient à un transitoire parasite

Après avoir défini une échelle caractéristique N_0 de signal, nous avons construit les *lignes de maxima* jusqu'à cette échelle. Nous travaillons alors, dans un premier temps, sous l'hypothèse Gaussienne pour les extrema au rang N de la séquence $c_{2,1}^N$, $N \leq N_0$. Sous cette hypothèse, on appelle $\mathcal{L}$ l'ensemble des *lignes de maxima* calculées sur la partie prestimulus du signal du signal s. On définit pour tout $l \in \mathcal{L}$ de longueur supérieure ou égale à $p + 1$:

$$D_{l,p} = \sum_{(k,n)\in l, n\leq p} (c_{2,1}^n[k])^2 \tag{3.5}$$

La variable $D_{l,p}$ suit alors une loi du type $\sigma^2\chi_2$. Le nombre de degré de liberté L_p ainsi que la variance σ_p^2 peuvent être estimées par la loi des moments, selon :

$$\begin{aligned} \widehat{L_p} &= Ar\left[\frac{2\widehat{\mathrm{moy}(D_{l,p})}^2}{\widehat{\mathrm{var}(D_{l,p})}}\right] \\ \widehat{\sigma_p^2} &= \frac{\widehat{\mathrm{var}(D_{l,p})}}{2\widehat{\mathrm{moy}(D_{l,p})}}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où Ar désigne l'entier le plus proche, et où moy et var correspondent respectivement à la moyenne et à la variance.

Supposons que l'on ait estimé $(\widehat{L_p}, \widehat{\sigma_p^2})_{p\in\{0,\cdots,N_0\}}$; étant donné une probabilité Pr, il existe une valeur λ_p telle que si $D_{l,p} \geq \lambda_p$ alors $D_{l,p}$ ne suit pas la loi du $\widehat{\sigma_p^2}\chi_2$ à $\widehat{L_p}$ degré de liberté avec la probabilité Pr. Soit une probabilité Pr et la famille des seuils $(\lambda_p)_{p\in\{0,\cdots,N_0\}}$ associés. Nous disons alors qu'une ligne de maxima l de longueur $p_l + 1$ vérifie l'hypothèse H_0 si :

$$I_l = \frac{\#\{p \leq \min(N_0, p_l), D_{l,p} \geq \lambda_p\}}{\min(N_0, p_l)}, \leq 0.5, \tag{3.7}$$

ce qui signifie que sur la *ligne de maxima* l la variable $D_{l,p}$ satisfait la loi du χ_2 pour plus de la moitié des rangs inférieurs à N_0 considérés. Dans le cas où l'hypothèse H_0 n'est pas vérifiée par une *ligne de maxima* nous considérons que cette dernière appartient à un transitoire. Dans ce cas, il est alors impossible, sur simple critère énergétique, de décider entre les hypothèse H_1 et H_2 ; ceci aura pour effet d'augmenter le taux de fausses alarmes. L'idée est donc de compléter l'étape décrite au-dessus par un test utilisant un critère supplémentaire. Ce critère nous est donné par le nombre de lignes de maxima contenues dans la fenêtre temporelle d'observation. Ce nombre est plus faible pour un transitoire parasite (transitoire isolé) qu'il ne l'est pour un événement réflexe (mélange de transitoires), ce qui permet la distinction entre les *lignes de maxima* associées à l'hypothèse H_1 de celles associées à l'hypothèse H_2.

L'approche retenue permet alors une estimation robuste et précise du temps de latence du muscle génioglosse. Un processus de détection expérimental a alors été développé et est détaillé dans [A3]. Celui-ci a fait l'objet d'un brevet qui a abouti à la mise en place d'un procédé expérimental utilisé aujourd'hui en physiologie de la respiration.

3.2.2 Généralisation de la formule de reconstruction, amélioration du détecteur [A4]

Dans [A4], nous avons généralisé la transformée de Berkner au cas d'un filtre de taille m et nous avons fait le lien avec les B-splines discrètes. Les B-spline discrètes d'ordre N, à l'échelle m sont définies par :

$$B_m^N = \overbrace{B_m^0 * B_m^0 * \cdots * B_m^0}^{N}, \tag{3.8}$$

où $B_m^0 = \frac{1}{m}\{1,\ 1, \cdots, 1\}$ avec pour support $\{0, \cdots, m-1\}$. Le lien entre les B-splines continues et discrètes réside dans l'équation suivante :

$$\frac{1}{m}\beta^N\left(\frac{x}{m}\right) = B_m^{N+1} * \beta^N(x).$$

Les suites B_m^N, à m fixé, sont des approximations de Gaussiennes lorsque N est grand. Plus précisément, en utilisant le théorème central limite et en supposant que $b_m^0 = \frac{1}{m}\{1,\ 1, \cdots, 1\}$ mais cette fois avec pour support $\left\{-\frac{m-1}{2}, \cdots, \frac{m-1}{2}\right\}$ (resp. $\left\{-\frac{m}{2}+1, \cdots, \frac{m}{2}\right\}$) si m est impair (resp. pair), on obtient l'approximation suivante :

$$b_m^N[p] \approx \sqrt{\frac{6}{\pi N(m^2-1)}} \exp\left(\frac{6(p-\varepsilon\frac{N}{2})^2}{N(1-m^2)}\right),$$

avec $\varepsilon = 1$ si m est pair et 0 sinon et où b_m^N est définie comme en (3.8) à partir de b_m^0. Pour obtenir des approximations des dérivées de Gaussiennes, on définit, en suivant le même modèle que précédemment, $b_{m,k}^N = \rho_k * b_m^N$ pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 3.2.2 *Pour N grand :*

$$b^N_{m,k}[p] \approx \sqrt{\tfrac{6}{\pi N(m^2-1)}}\left[\exp(\tfrac{6x^2}{N(1-m^2)})\right]^{(k)}(p-\tfrac{\varepsilon N+k}{2}).$$

Pour obtenir une approximation de la dérivée d'ordre k de la Gaussienne, on translate le filtre $b^N_{m,k}$ de manière adéquate :

$$\alpha^N_{m,k}[p] = b^N_{m,k}[p + \lfloor \frac{\varepsilon N + k}{2} \rfloor] \tag{3.9}$$

et on définit ensuite les coefficients de la décomposition par corrélation de $f(j)$ avec $\alpha^N_{m,k}[j]$ définie en (3.9) :

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad c^N_{m,k}[p] = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha^N_{m,k}[j] f(j+p) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha^N_{m,k}[j-p] f(j) \text{ pour } n \geq -1.$$

La famille $G = \left\{\alpha^{n,p}_{m,k}[j] = \alpha^n_{m,k}[j-p], p \in \mathbb{Z}, N \geq n \geq 0\right\}$ est un frame de $l_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si les séries de Fourier de $\alpha^n_{m,k}$ pour $N \geq n \geq 0$ n'ont pas de zéro en commun dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, ce qui n'est pas le cas. Cependant, si l'on ajoute à G la séquence complémentaire $\alpha^{N,p}_{m,k'}, 0 \leq k' < k$, on obtient un frame. Le signal f peut alors être écrit sous la forme :

$$f(l) = \sum_{0\leq k'<k} \sum_{p\in\mathbb{Z}} c^N_{m,k'}[p] \tilde{\alpha}^{N,p}_{m,k'}[l] + \sum_{n=0}^{N} \sum_{p\in\mathbb{Z}} c^n_{m,k}[p] \tilde{\alpha}^{n,p}_{m,k}[l] \tag{3.10}$$

où $\tilde{.}$ correspond au frame dual de

$$F^N_{m,k} = \left\{\alpha^{N,p}_{m,k'}, 0 \leq k' < k, \alpha^{n,p}_{m,k}, 0 \leq n \leq N, p \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Pour $m = 2$, on retrouve les formules de reconstruction donnée par le Théorème 3.2.4.

Après cette généralisation, nous avons proposé de construire un nouvel estimateur d'évènement transitoire (sensé se produire autour d'un certain temps T), en utilisant toujours les *lignes de maxima* jusqu'à une échelle N_0 caractéristique. Pour pouvoir exploiter les propriétés des *lignes de maxima*, nous nous sommes toujours placés dans le cas $m = 2$ (pour m plus grand que 2 l'existence des *lignes de maxima* n'est pas assurée) et $k = 1$. Dans ce cas, chaque extremum de la séquence $c^n_{2,1}$ appartient à une unique *ligne de maxima*, et on associe à chaque *ligne de maxima* l dans l'espace temps-échelle, la variable $D_{l,q}$ (lorsque l est de longueur supérieure ou égal à $q+1$) :

$$D_{l,q} = \sum_{(p,n)\in l, n\leq q} \frac{\left(c^n_{2,1}[p]\right)^2}{\|\alpha^n_{2,1}\|_2^2}$$

et $\|\alpha^n_{2,1}\|_2 = \sqrt{\sum_{p\in\mathbb{Z}} (\alpha^n_{2,1}[p])^2}$. Comme la norme des filtres $\alpha^n_{2,1}$ tend à augmenter avec n, le rôle de la normalisation est de donner la même importance relative à chaque coefficient $(c^n_{2,1})^2$ dans la somme. La variable $D_{l,q}$ n'est pas suffisante pour caractériser les fréquences du signal. On utilise donc une autre variable :

$$F_{l,q} = O(l_+(q)) - O(l),$$

où $O(l)$ est l'origine de la *ligne de maxima* l et $l_+(q)$ est la *ligne de maxima* qui suit l au rang q. Pour toute probabilité Pr, la distribution empirique de $D_{l,q}$ permet le calcul de seuils a_q et b_q tels

que $P(a_q < D_{l,q} < b_q) = Pr$ (nota bene : on ne se place plus ici sous l'hypothèse Gaussienne). Pour toute *ligne de maxima* l de longueur plus grande ou égale à $q+1$, nous avons le choix standard entre :

$$\begin{aligned} H_0(q) &: D_{l,q} \text{ appartient à } [a_q, b_q] \\ H_1(q) &: D_{l,q} \text{ n'appartient pas à } [a_q, b_q]. \end{aligned}$$

La variable $F_{l,q}$ prend des valeurs entières et on calcule sa distribution pour chaque $q \leq N_0$. Chaque probabilité Pr définit un sous-ensemble $A(q)$ de $\mathbb{N}$ tel que $A(q) = \{x, P(F_{l,q} = x) > 1 - Pr\}$. Pour chaque *ligne de maxima*, nous avons encore le choix entre :

$$\begin{aligned} H'_0(q) &: F_{\mathcal{L},q} \text{ appartient à } A(q) \\ H'_1(q) &: F_{\mathcal{L},q} \text{ n'appartient pas à } A(q). \end{aligned}$$

En résumé, étant donnée la probabilité Pr, on peut calculer a_q, b_q et $A(q)$, $0 \leq q \leq N_0$, que l'on utilise ensuite pour l'estimation. Du point de vue de la détection, $1 - Pr$ est la probabilité de fausse alarme.

On suppose que pour chaque probabilité Pr, des caractéristiques de référence $A(q), a_q$ et b_q, $0 \leq q \leq N_0$ ont été calculées sur $[0, T-d]$ considérée comme la partie de référence du signal où T est le temps de transition et d définit la distance maximale par rapport à la transition T.

On construit un test non-paramétrique pour estimer le temps de transition en utilisant les *lignes de maxima*. On considère alors les *lignes de maxima* l telles que $O(l)$ est à l'intérieur de $[T-d; T+d]$. Pour les lignes l de longueur supérieure ou égale à $q+1$, quatre cas peuvent se produire :

$$\begin{aligned} &\text{i) } l \text{ satisfait } H_0(q) \cup H'_0(q) \\ &\text{ii) } l \text{ satisfait } H_1(q) \cup H'_0(q) \\ &\text{iii) } l \text{ satisfait } H_0(q) \cup H'_1(q) \\ &\text{iv) } l \text{ satisfait } H_1(q) \cup H'_1(q). \end{aligned}$$

On scanne alors l'intervalle $[T-d, T+d]$. La première ligne l qui satisfait l'hypothèse ii) ou iv) au rang q correspond à un transitoire $T_1(q) = O(l)$, tandis que la première ligne l qui satisfait iii) ou iv) correspond à un transitoire $T_2(q) = O(l)$. Nous avons ainsi deux vecteurs T_1 et T_2 pour lesquels les rangs q les meilleurs sont ceux qui maximisent la probabilité de transition, i.e. la probabilité que la ligne l ne corresponde pas à la partie connue du signal définie sur $t \leq T-d$. Si on appelle $P(\tilde{T})$ la probabilité de transition de $\tilde{T}$, la transition estimée $\hat{T}$ est :

$$\hat{T} = \operatorname{argmin} \left\{ P(\tilde{T}), \tilde{T} \in \{ \quad T_1(\operatorname*{argmin}_{q \leq N_0} P(T_1(q))), \quad T_2(\operatorname*{argmin}_{q \leq N_0} P(T_2(q))) \} \right\}.$$

Nous avons alors comparé notre modèle à un détecteur muti-échelles fondé sur une analyse en ondelettes. Grâce à l'utilisation des *lignes de maxima*, la localisation de la transition T est mieux estimée que par des méthodes classiques utilisant des ondelettes, la qualité de la détection étant similaire aux méthodes par ondelettes.

3.2.3 Séparation du bruit lié à l'ECG dans les signaux EMG diaphragmatique [A12]

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à l'élimination de transitoires liés à la présence de signaux électrocardiographiques (ECG) dans les enregistrements électromyographiques (EMG) du

diaphragme. L'activité ECG se traduit, sur les signaux EMG, par des singularités haute-fréquence qu'il s'agit d'éliminer. Pour cela, il est primordial d'avoir une localisation temporelle précise des événements ECG. Nous avons proposé un modèle de détection se fondant sur le principe d'*intensité structurelle* que nous détaillons maintenant.

L'*intensité structurelle* a été utilisée dans la littérature pour déterminer la localisation de "landmarks" (points caractéristiques d'une courbe) via une densité de probabilité [14]. Un inconvénient majeur de ces méthodes est lié à la délocalisation progressive des singularités lorsque l'échelle augmente. Nous proposons ici une version modifiée de l'intensité structurelle se fondant sur les *lignes de maxima* de la transformée de Berkner, qui permet une bonne localisation des singularités ainsi qu'une bonne détection.

Après avoir rappelé la définition de l'intensité structurelle, nous présenterons en détails les aboutissements de notre travail. Afin d'être consistant, nous rappelons ici la transformée en ondelettes (WT) d'un signal f :

$$W_s(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Psi^*(\frac{t-x}{s})dt \tag{3.11}$$

où $\Psi(t)$ est une ondelette. Les modules maxima d'ondelettes sont obtenus comme les points (m_0, s_0), où m_0 est l'abscisse d'un maximum local de $x \to |W_{s_0}(f)(x)|$. Les modules maxima situés aux singularités de f définissent des *lignes de maxima* dans le plan temps-échelle si Ψ est une dérivée de Gaussienne. La méthode de calcul de l'intensité structurelle consiste [14] à utiliser ces *lignes de maxima* pour calculer une densité de probabilité associée à une singularité. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'intensité structurelle des maxima d'ondelettes $G_m(x)$ est définie de la manière suivante :

$$G_m(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{q} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \frac{h_i(s)}{s} \theta\left(\frac{x - m_i(s)}{s}\right) ds \tag{3.12}$$

où $h_i(s) = \frac{|W_s(f)(m_i(s))|}{s^{r+1/2}}$,$[s_{\min}, s_{\max}]$ est l'intervalle d'échelles où la ligne m_i est considérée, q est le nombre de *lignes de maxima*, θ est un noyau Gaussien, r est le nombre de moments nuls de l'ondelette, et M un facteur de normalisation de façon à ce que $G_m(x)$ soit une densité de probabilité. Le fait que $m_i(s)$ se déplace spatialement avec s se répercute sur le calcul de l'*intensité structurelle*, ce qui rend l'information calculée en un certain x peu précise.

Pour améliorer la précision du calcul de l'intensité structurelle, nous avons proposé se relier chaque extremum à son origine spatiale en "remontant" la ligne dans le plan temps-échelle. Nous avons pour cela utilisé les *lignes de maxima* de la transformée de Berkner. Pour prendre en compte la délocalisation de l'intensité structurelle, nous avons redéfini l'intensité structurelle de la manière suivante :

$$G_m^*(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{q} \sum_{N=N_{\min}}^{N=N_{\max}} \frac{h_i(N)}{N} \theta\left(\frac{x - m_i(1)}{N}\right), \tag{3.13}$$

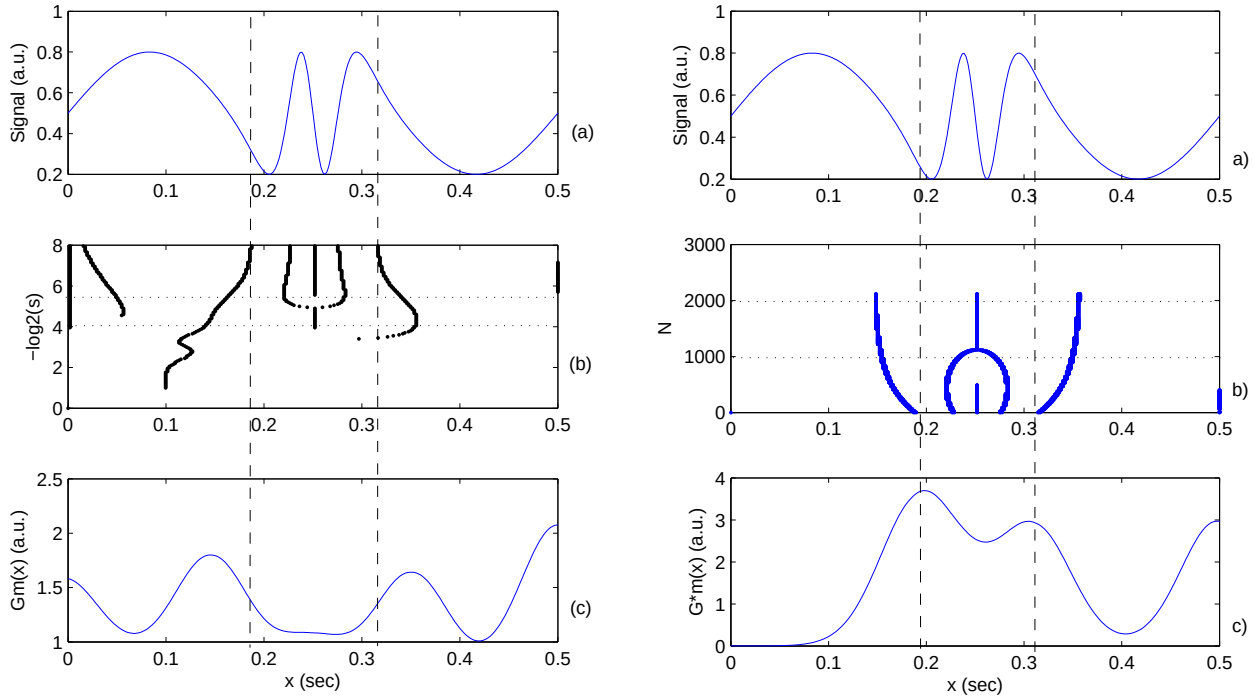
où $m_i(1)$ dénote l'origine de la ligne i. En présence de bruit, on modifie l'intensité structurelle comme suit :

$$G_m^{**}(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{q} \sum_{N=N_{\min}}^{N=N_{\max}} h_i(N) \theta\left(\frac{x - m_i(1)}{T}\right), \tag{3.14}$$

où le choix de T dépend de l'application. Le principe de la détection consiste alors à étudier les localisations des maxima des fonctions G^* ou G^{**}, les paramètres $N_{\min}$, $N_{\max}$ et T étant calculés

sur un signal ECG seul. Pour les fréquences considérées (i.e. entre $N_{\min}$ et $N_{\max}$), le signal ECG prédomine dans le calcul de l'*intensité structurelle* ce qui permet la localisation des évènements ECG.

L'intérêt d'utiliser l'origine des *lignes de maxima* pour calculer l'intensité structurelle avec plus de précision est montré en Figure 3.2 (A) et (B), où l'on compare les modèles par ondelettes avec le modèle proposé et où l'on observe très nettement une relocalisation de l'intensité structurelle en utilisant les *lignes de maxima* issues de la transformée de Berkner.



(A) (B)

FIGURE 3.2 – (A) : Signal, *lignes de maxima* et intensité structurelle calculées en utilisant la formule (3.12),(B) : Signal, *lignes de maxima* et intensité structurelle en utilisant la formule (3.13)

3.2.4 Reconstruction d'un signal en utilisant les *lignes de maxima* de la transformée de Berkner [A9]

Nous avons montré, dans cet article, comment reconstruire les dérivées discrètes d'ordre $k-1$ d'un signal f à l'aide des *lignes de maxima* associées à la dérivée d'ordre k de ce même signal. Ceci présente un avantage certain par rapport aux approches de reconstruction d'un signal en utilisant les modules maxima d'ondelettes, pour lesquels il a été montré la non unicité du signal reconstruit. De plus, la technique de reconstruction proposée permet de définir, de manière claire, une échelle caractéristique N_k associée à la $k$ème dérivée discrète du signal (donc l'échelle caractéristique est N_0, si l'on considère la reconstruction du signal). Elle permet, de ce fait, d'améliorer l'estimateur de transitoires que l'on avait introduit précédemment. Nous allons maintenant détailler un peu plus les formules de reconstruction proposées.

La représentation des images à partir des modules maxima d'ondelettes (WTMM) a suscité beaucoup d'attention dans les années 90 [59][60][62]. Ces représentations se fondent sur un échantillonnage irrégulier de la transformée en ondelettes continue aux échelles dyadiques et en des points correspondant à des singularités du signal. Cependant, Berman [13] et Meyer [66] ont montré que le signal reconstruit (discret ou continu) n'est, en général, pas unique. En dépit de la non unicité, on peut toujours reconstruire un signal consistant avec les modules maxima obtenus (décrit par la WTMM). De nombreuses méthodes de reconstruction ont été proposées pour les signaux 1-D en utilisant la WTMM comme par exemple les méthodes fondées sur des projections [59] [55][20], ou utilisant le gradient conjugué ou encore une méthode de moindres carrés [54]. En ce qui concerne la reconstruction des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en utilisant la WTMM, différentes méthodes ont été proposées reposant sur le théorème de projection sur un convexe [59][53]. Dans [84], un signal consistant est reconstruit à partir des extrema de la transformée en ondelettes discrètes et des zero-crossings.

La raison de la non unicité du signal reconstruit à l'aide de la WTMM consiste en une discrétisation trop grossière des échelles. L'analyse plus fine des échelles proposée par la transformée de Berkner permet de pallier ce défaut. Notre étude se fonde sur les théorèmes suivants que nous avons montrés dans [A9] (en considérant les mêmes notations que précédemment) :

Théorème 3.2.3 *Si $n+k$ est impair (resp. pair), et si $c_{2,k}^n[p]$ est un extremum au rang n alors soit $c_{2,k}^{n-1}[p]$ ou $c_{2,k}^{n-1}[p-1]$ (resp. $c_{2,k}^{n-1}[p]$ ou $c_{2,k}^{n-1}[p+1]$) sont des extrema de même nature.*

Ce théorème constitue une généralisation de la Propriété 3.2.1 pouvé dans [11]. On remarque alors que les *lignes de maxima* associées à la dérivée d'ordre k du signal jusqu'à l'échelle n permettent de calculer de nombreux coefficients aux échelles inférieures. Plus précisément :

Théorème 3.2.4 *Supposons que $c_{2,k}^n[p]$ soit un extremum au rang n et que la valeur du coefficient $c_{2,k}^r$ est connue le long de la ligne de maxima associée, pour $r \leq n$, on peut alors calculer $c_{2,k}^{n-2q}[l]$ pour $l \in \{p-q, \cdots, p+q\}$, $c_{2,k}^{n-2q+1}[l]$ pour $l \in \{p-q, \cdots, p+q-1\}$, quand $n+k$ est impair et $l \in \{p-q+1, \cdots, p+q\}$ quand $n+k$ est pair.*

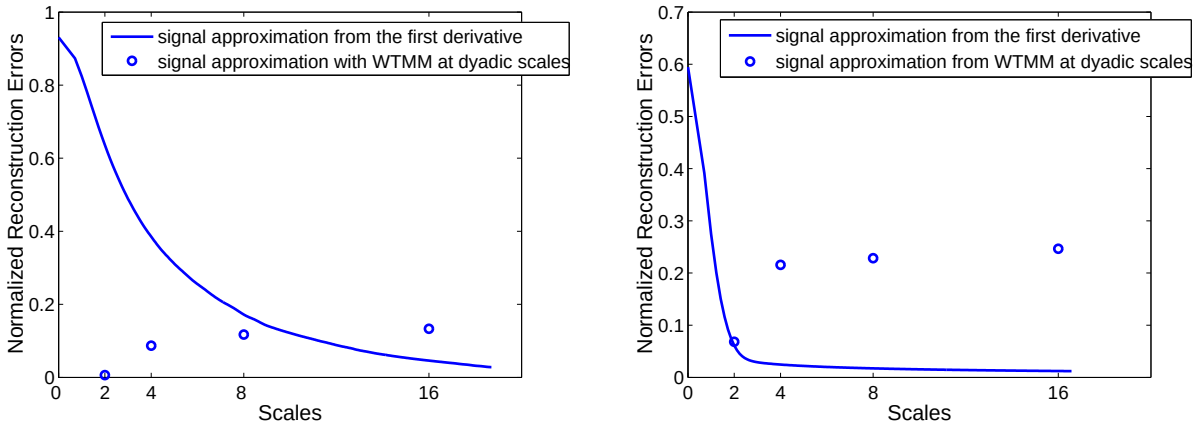
On peut alors déduire du Théorème 3.2.4 un algorithme simple de reconstruction des dérivées d'ordre $k-1$ (i.e $c_{2,k-1}^{-1}$) à partir des *lignes de maxima* de la dérivée d'ordre k. En effet, la connaissance de $c_{2,k}^l[q]$ le long de la *ligne de maxima* associée à un extremum en p au rang n permet de calculer $c_{2,k}^{-1}[l]$ pour $l \in I_k^n[p] = \{p - \frac{n+1}{2}, \cdots, p + \frac{n+1}{2}\}$ lorsque n est impair, pour $l \in I_k^n[p] = \{p - \frac{n}{2} - 1, \cdots, p + \frac{n}{2}\}$ lorsque n est pair et k impair et pour $l \in I_k^n[p] = \{p - \frac{n}{2}, \cdots, p + \frac{n}{2} + 1\}$ sinon. Une échelle caractéristique N_k associée à la reconstruction de la kième dérivée à partir de ses lignes de maxima est alors donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.2.5 *Supposons que le signal $f \neq 0$ est de support fini et que $\mathcal{S}(c_{2,k}^{-1})$ est le support de $c_{2,k}^{-1}$. Si on appelle M_k^n l'ensemble des indices correspondant à R_k^n extrema au rang n, alors l'échelle minimale de reconstruction de $c_{2,k}^{-1}$ en utilisant les lignes de maxima est donnée par :*

$$N_k = \underset{N}{argmin} \left(\bigcup_{n=-1}^{N} \bigcup_{r=1}^{R_k^n} I_k^n \left[M_k^n[r] \right] \subset \mathcal{S}(c_{2,k}^{-1}) \right).$$

Une fois que l'on a reconstruit la dérivée d'ordre k à partir des *lignes de maxima* correspondantes, on reconstruit la dérivée d'ordre $k-1$ en utilisant le Théorème et en remarquant que la séquence d_N^k tend vers 0 avec N.

On montre sur un exemple en Figure 3.3, l'intérêt d'utiliser les *lignes de maxima* de la transformée de Berkner par rapport à la WTMM pour reconstruire un signal. On constate qu'avec la WTMM, ajouter de nouvelles échelles n'améliore pas la précision de la reconstruction alors qu'il y a convergence lorsque l'on utilise les *lignes de maxima* de la transformée de Berkner.



(A) (B)

FIGURE 3.3 – (A) : calcul de l'erreur quadratique de reconstruction en utilisant la WTMM aux échelles dyadiques (points) et de l'erreur quadratique de reconstruction en utilisant la méthode fondées sur les les *lignes de maxima* de la transformée de Berkner (trait plein) pour un signal de bande fréquentielle 20-200Hz ; (B) : même calcul mais pour un signal de bande fréquentielle 200-400Hz. La fréquence d'échantillonnage est 1 kHz. Les résultats sont moyennés sur 500 réalisations.

3.3 *Lignes de maxima* d'ondelettes et vision par ordinateur

Nous reprenons maintenant une partie du travail de thèse de C. Damerval réalisée dans le domaine de la vision par ordinateur (co-encadrement C. Schmid de L'INRIA Rhône-Alpes).

3.3.1 Détection de *blobs* à l'aide de *lignes de maxima* d'ondelettes

Nous rappelons brièvement les objectifs de la détection de *blobs*, structures mal définies mais que l'on désigne souvent comme des zones de niveau de gris relativement homogènes et aux contours flous (la transcription française la plus proche serait "tâche"). La détection de *blobs* est une opération de bas niveau importante en vision par ordinateur. C'est une première étape vers des tâches plus compliquées que sont le calcul des déformations locales dans des images [50][51] ou l'extraction de points invariants à l'échelle [67][58]. La détection de *blobs* dans une approche multi-échelles est souvent réalisée grâce au calcul des extrema locaux en espace et en échelle de dérivées normalisées d'une certaine représentation linéaire espace-échelle [50].

En revanche, dans la littérature propre à la vision par ordinateur, il n'est pas fait mention des *lignes de maxima* d'ondelettes pour de tels problèmes de détection. Nous allons voir comment leur utilisation peut s'avérer bénéfique dans un tel contexte. Avec l'approche que nous proposons, la détection de *blobs* ne va plus être reliée à la présence d'un extremum en espace-échelle mais au comportement en fonction de l'échelle de certaines *lignes de maxima* d'ondelettes.

Nous présentons brièvement les *lignes de maxima* d'ondelettes que nous étudierons. On considère une transformée en ondelettes associée à une dérivée de Gaussienne dont nous avons vu qu'elle permet la définition de *lignes de maxima*. La représentation espace-échelle linéaire $L(x,t)$ consiste en un convolution avec un noyau Gaussien calculé à différentes échelles :

$$L(x,t) = g_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{t} g(\frac{x-u}{\sqrt{t}}) f(u) du.$$

où $g(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2})$ et $g_t(x_1,x_2) = \frac{1}{t}g(\frac{x_1}{\sqrt{t}},\frac{x_2}{\sqrt{t}})$. On définit ensuite $\partial_{x^\alpha} L = L_{x^\alpha} = \partial_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}} L = L_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}}$, avec $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$ (i.e. α_i est l'ordre de différentiation dans la direction x_i). Et on considère des opérateurs différentiels associés à L de la forme :

$$\mathcal{D}L = \sum_{j=1}^{I} c_j L_{x^{\alpha^j}}$$

où $|\alpha^j| = \alpha_1^j + \alpha_2^j = M$ est indépendant de j. Pour de tels opérateurs différentiels et pour tenir compte de la variation de l'ordre de grandeur des dérivées partielles en fonction de t, on normalise l'opérateur $\mathcal{D}$ de manière appropriée selon [50] :

$$\mathcal{D}_{x,\gamma norm} L = t^{\frac{M\gamma}{2}} \mathcal{D}L.$$

Un cas particulier, qui nous intéressera en pratique, consiste à calculer la matrice Hessienne de L :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} L_{x_1x_1} L_{x_1x_2} \\ L_{x_2x_1} L_{x_2x_2} \end{pmatrix}$$

puis à utiliser la caractéristique normalisée suivante [58] [51] :

$$\text{trace } (\mathcal{H}_{\gamma norm}) = t^\gamma \Delta L = t^\gamma f * (\Delta g)_t,$$

ce qui correspond, lorsque $\gamma = 1$, à la décomposition en ondelettes en utilisant l'ondelette Δg. Les extrema espace-échelle d'une telle quantité sont très souvent utilisés pour la détection de blobs.

Pour commencer, nous montrons d'abord certaines propriétés d'invariance affine satisfaites par les dérivées de la représentation espace-échelle linéaire. Pour cela, on considère le signal $f_1(u) = f(\lambda u)$, $u \in \mathbb{R}$, et on rappelle la relation qui relie la représentation espace-échelle linéaire de f_1 à celle de f. Si on pose :

$$L_1(x,t) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{t}} g(\frac{x-u}{\sqrt{t}}) f(\lambda u) du,$$

on obtient :

$$\partial^m_{x,\gamma norm} L_1(x,t) = \lambda^m \partial^m_{\gamma norm} L(\lambda x, \lambda^2 t).$$

De ceci, nous pouvons déduire que, si l'on connaît les *lignes de maxima* associées au extrema de $\partial^m_{\gamma norm} L(x,t)$, on peut construire les *lignes de maxima* associées à $\partial^m_{\gamma norm} L_1(x,t)$.

Pour étendre ce qui vient d'être dit au cas bidimensionnel, nous rappelons tout d'abord le concept de représentation espace-échelle affine et Gaussienne [50].

Etant donné une matrice symétrique définie positive Σ_t, le noyau Gaussien non-uniforme est défini par :

$$g(x, \Sigma_t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{det(\Sigma_t)}} e^{-\frac{x^T \Sigma_t^{-1} x}{2}}$$

où $x = (x_1, x_2)$. Cela nous permet de définir la représentation espace-échelle affine et Gaussienne de f par :

$$L(x, \Sigma_t) = g(., \Sigma_t) * f(x). \tag{3.15}$$

Dans le cas particulier où $\Sigma_t = t\Sigma_0$, $L(x, \Sigma_t)$ est la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathrm{d}iv(\Sigma_0 \nabla L) \\ L(x, 0) = f(x). \end{cases} \tag{3.16}$$

Cette équation est elliptique car Σ_0 est symétrique définie positive donc vérifie le principe du maximum et les modules maxima de $L(x, \Sigma_t)$ se propage vers les échelles fines. Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire l'existence des *lignes de maxima* de trace($\mathcal{H}_{\gamma norm}$), on voit qu'il suffit d'appliquer l'équation aux dérivées partielles (3.16) avec Δf comme condition initiale et que l'existence des *lignes de maxima* est assurée par principe du maximum.

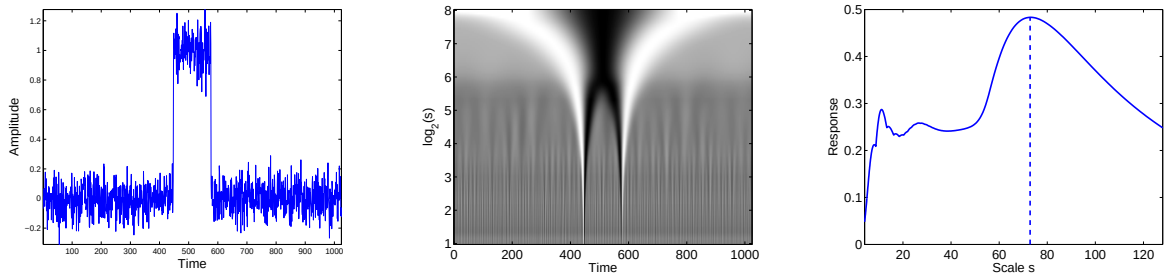
On rappelle maintenant les relations existant entre la représentation espace-échelle de f et celle de f_B satisfaisant $f(x) = f_B(Bx)$ avec B inversible. On a en effet :

$$L(x, \Sigma_t) = g(., B\Sigma_t B^T) * f_B(x).$$

Cette propriété permet de relier trace ($\mathcal{H}_{\gamma norm}$) calculée à la fois pour f et pour f_B et ensuite de prouver que l'existence des *lignes de maxima* d'ondelettes pour trace ($\mathcal{H}_{\gamma norm}$) calculée pour f entraine celle des *lignes de maxima* de la même quantité calculée pour f_B.

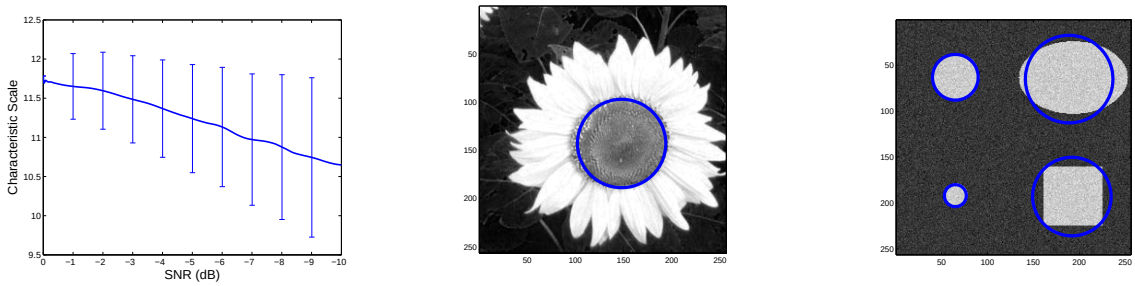
Nous allons maintenant détailler le mécanisme de détection des *blobs* en espace-échelle, à l'aide des *lignes de maxima* associées à la quantité trace ($\mathcal{H}_{\gamma norm}$). Cette détection implique le calcul d'une localisation et d'une échelle caractéristiques associées au *blob*. Etant assuré de l'existence des *lignes de maxima*, la construction de celles-ci utilisent un algorithme proposé par Mallat [59] : un maximum du module se propage de l'échelle s à l'échelle $s + 1$ si sa position à l'échelle $s + 1$ est "proche" de celle à l'échelle s et si le maximum du module a le même signe à l'échelle s et à l'échelle $s+1$ (cela veut aussi dire que nous utilisons des échelles entières). Ces *lignes de maxima* permettent de suivre le décalage progressif des extrema avec l'échelle.

Dans notre contexte, la détection de blob s'effectue en sélectionnant un certain maximum local le long d'une *ligne de maxima* d'intérêt. En faisant ainsi, on obtient simultanément l'échelle caractéristique et la localisation du blob. De plus, comme on utilise une normalisation adaptée, cette approche conduit à un détecteur invariant à l'échelle. Le principe de notre détecteur est, dans un premier temps, en étudiant le comportement des coefficients le long d'une *ligne de maxima*, de sélectionner les lignes d'intérêt. En effet, les coefficients d'ondelettes décroissent le long d'une ligne associée à du bruit, on ne considère pas de telles lignes. De plus, les lignes les plus significatives doivent perdurer un certain nombre d'échelles. Ayant éliminé les *lignes de maxima* qui ne vérifient pas les propriétés souhaitées (ce qui assurera la robustesse de notre détecteur vis-à-vis du bruit), on s'intéresse aux lignes qui se joignent à une certaine échelle. Nous avons ensuite montré comment calculer, à partir de cette jonction, une échelle caractéristique de l'objet. Dans le cas d'un *blob* isolé (voir Figure 3.4 pour un exemple monodimensionnel et Figure 3.5 pour un exemple bidimensionnel), on observe une certaine stabilité spatiale des lignes après leur jonction en (x^*, y^*, s^*). Les autres lignes associées au *blob* continuent de dévier spatialement.



(A) (B) (C)

FIGURE 3.4 – (A) : créneau avec un bruit additionnel Gaussien (SNR : 20dB) (les sauts sont en $x_1 = 448$ et en $x_2 = 576$, centrés autour de $x_0 = 512$) ; (B) : CWT en utilisant l'ondelettes Δg ; (C) : Evolution du module maxima de la CWT le long de la *ligne de maxima*, en commençant en $x_2 = 576$ (échelle fine) et terminant en $x_0 = 512$



(A) (B) (C)

FIGURE 3.5 – (A) : échelle caractéristique moyenne s^* et sa déviation standard calculée sur des images bruitées d'un disque en fonction du SNR ;(B) :Détection de blob sur une image de tournesol ; (C) :Détection de blob sur une image contenant des blobs de différentes tailles

3.3.2 Régularité Lipschitzienne et appariemment d'images [A13][C7]

L'extraction de caractéristiques robustes et invariantes à partir d'une image est un problème central en vision par ordinateur, notamment si l'on s'intéresse à l'appariemment d'images. La difficulté du problème est liée au fait que des scènes naturelles sont souvent vues sous différentes conditions, correspondant à un ensemble important de transformations (déformations géométriques ou changement d'illumination par exemple). Afin d'obtenir des propriétés d'invariance vis-à-vis de certaines transformations, on peut soit extraire des caractéristiques invariantes par ces transformations (approches directes), soit prendre en compte la transformation dans le calcul des caractéristiques (approches indirectes). Comme illustration des méthodes indirectes, on peut citer les caractéristiques liées à la théorie dite du Scale-Space [52] [87]. Ces approches mettent en évidence des régions d'interêt, qui sont stables par déformations géométriques locales [50][51]. Ces régions sont identifiées par leur localisation et leur échelle caractéristique et leur contenu peut être quan-

tifié par un descripteur robuste [58]. Un état de l'art sur les détecteurs de régions d'intérêt [68] ainsi que sur les descripteurs de régions [69] montrent qu'actuellement aucune méthode n'est plus performante dans tous les cas. Ainsi, la meilleure stratégie semble être de combiner différents types de descripteurs.

Dans ce contexte, nous avons étudié la régularité Lipschitzienne $\alpha \in \mathbb{R}$ (appelée régularité α), qui va apparaître comme une quantité invariante vis-à-vis de nombreuses transformations. Cette caractéristique donne une mesure locale des variations de niveaux de gris dans une image. Notre étude porte ici sur l'effet de déformations géométriques et autres transformations spécifiques sur la régularité α.

En une dimension, la régularité α a été utilisée en l'analyse multi-fractales ([4][5][6][7][12]), pour la caractérisation de singularités [62], ou encore pour la définition de "landmarks" [15]. Dans un contexte bidimensionnel, des méthodes fondées sur des mesures de régularité ont été aussi mise en avant pour l'analyse, la synthèse et la classification d'images de texture [30][45]. Dans toutes ces applications, la régularité α est utilisée d'un point de vue global, en supposant souvent une hypothèse de stationnarité.

Ici, nous nous intéressons à la régularité Lipschitzienne locale. Comme nous le verrons, celle-ci apparaît comme une caractéristique intéressante : elle possède à la fois des propriétés théoriques d'invariance (concernant principalement les transformations géométriques) et elle peut être facilement calculée.

Nous rappelons brièvement la définition de la régularité α :

Définition 3.3.1 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est α-Lipschitz en $x_0 \in \mathbb{R}$:*

- *Pour $\alpha \in]0, 1[$, s'il existe un voisinage V de x_0 et $A > 0$ tels que*

$$\forall x \in V; |f(x) - f(x_0)| \leq A|x - x_0|^\alpha$$

- *Pour $\alpha > 1$, soit $n = \lfloor \alpha \rfloor$, s'il existe un voisinage V de x_0, $A > 0$ et un polynôme $P_n(x)$ de degré n, $(n \leq \alpha < n + 1)$, P_n dépendant de x_0 tel que :*

$$\forall x \in V, |f(x) - P_n(x)| \leq A|x - x_0|^\alpha.$$

Le régularité α globale a alors les propriétés d'invariance suivante :

Propriété 3.3.1 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reliés par $g(x) = f(u^{-1}(x))$ où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que u est C^1, inversible et linéaire (si bien que u^{-1} est linéaire)*
$\forall \alpha > 0$; f α-Lipschitz en $x_0 \to g$ α-Lipschitz en x_0.

Propriété 3.3.2 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relié par $g(x) = c(x)f(x) + d(x)$ où $c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dans le cas $\alpha \in]0; 1[$ et c, d sont C^1, ou si $\alpha > 1$ et c, d sont C^∞ :*
$\forall \alpha > 0$, f α-Lipschitz en $x_0 \Rightarrow g$ α-Lipschitz en x_0.

L'étude de la régularité $\alpha < 0$ fait appel à la théorie des distributions. Ces cas sont, en pratique, très utiles en traitement d'image puisque les fonctions étudiées sont en général non différentiables. On rappelle, en particulier, la définition des distributions tempérées qui sont l'ensemble des distributions définies sur :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées } \}. \tag{3.17}$$

Nous considérons ici les distributions tempérées T d'ordre fini, c'est-à-dire telles qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfaisant :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}); < T, \varphi > = < f^{(n)}, \varphi >$$

où $f^{(n)}$ est la dérivée $n$ème de f au sens des distributions. Nous avons dans ce cas, la définition suivante pour la régularité α :

Définition 1 *Soit T une distribution tempérée d'ordre fini. T est dite α-Lipschitz si sa primitive est $\alpha + 1$-Lipschitz.*

On rappelle maintenant, dans le cas bidimensionnel, la notion de régularité α :

Définition 3.3.2 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Etant donné $\theta \in [0, \pi[$, on définit, $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme $f_\theta(h) = f(x_0 + hu_\theta)$, où $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, f est α-Lipschitz en $x_0 \in \mathbb{R}^2$ si*

$$\forall \theta \in [0; \pi[; f_\theta \ \alpha - Lipschitz \ en \ 0$$

La régularité Lipschitzienne est alors l'infimum des régularités calculées comme dans la définition précédente. De ce fait, au voisinage d'un bord, la régularité est minimale dans la direction normale au bord, et on calcule la régularité dans cette direction (une illustration de ce point est donnée en Figure 3.6.(a)).

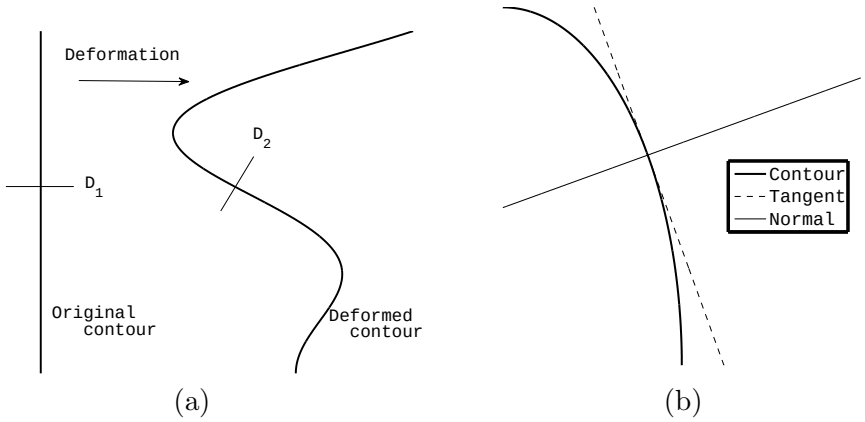


FIGURE 3.6 – (a) En un point appartenant à un contour, la régularité est minimale le long de la normale au contour ; la régularité α peut alors être précisèment calculée dans cette direction. (b) Si un bord subit une déformation qui ne modifie pas sa topologie, la régularité α est préservée (D_1 et D_2 sont les directions d'irrégularité maximale)

Nous étudions maintenant le comportement de la régularité α vis-à-vis de certaines transformations. Commençons par les cas d'un changement de contraste ou d'illumination qui peuvent être formulés de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \ g(x) = cf(x) + d, \ c \neq 0, \ d \in \mathbb{R},$$

et pour lesquels un simple calcul montre que f et g ont même régularité α. Si l'on considère ensuite le cas d'une déformation constante (ce qui inclut les rotations et les changements d'échelles, très utilisé en théorie du scale-space, [52]). Cette déformation peut être formulée de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \ g(x) = f(Bx), \ \text{avec } B \text{ matrice } 2 \times 2 \text{ inversible.}$$

Dans ce cas aussi, on peut montrer que la régularité α de f et g sont identiques. Dans notre cas, nous nous sommes intéressés au calcul de régularité α des singularités d'une image définie par la

fonction d'intensité f. Nous avons alors étudié un type particulier de singularités correspondant aux contours dans l'image. Ces contours sont définis par les maxima au sens de Canny (MC), c'est-à-dire qu'ils correspondent au maximum d'intensité du gradient dans la direction du gradient [18]. Une formulation multi-échelles des MC a été introduite dans [59], en utilisant une ondelette gradient $\Psi = \nabla\Lambda$: on calcule à chaque échelle s considérée la norme du gradient $Mf(x(s), y(s))$ ainsi que son orientation $Af(x(s), y(s))$. Les MC sont les points $(x_0(s), y_0(s))$ où Mf atteint localement un maximum le long de la direction définie par Af. Empiriquement, on constate que les MC sont connectés (mais il n'existe pas de preuve comme dans le cas du laplacien bidimensionnel). Cela nous conduit à la notion de *lignes de maxima* au sens de Canny (CML) définies de la manière suivante :

$$(x_0(s), y_0(s), Mf(x_0(s), y_0(s)), Af(x_0(s), y_0(s))) \text{ pour tout } s \in]0; z[; \text{ pour un certain } z \in \mathbb{R}_+^* \quad (3.18)$$

On peut alors calculer la régularité Lipschitzienne en suivant l'évolution des coefficients le long d'une *ligne de maxima* :

$$\log(Mf(x_0(s), y_0(s)) \leq \alpha \log(s)$$

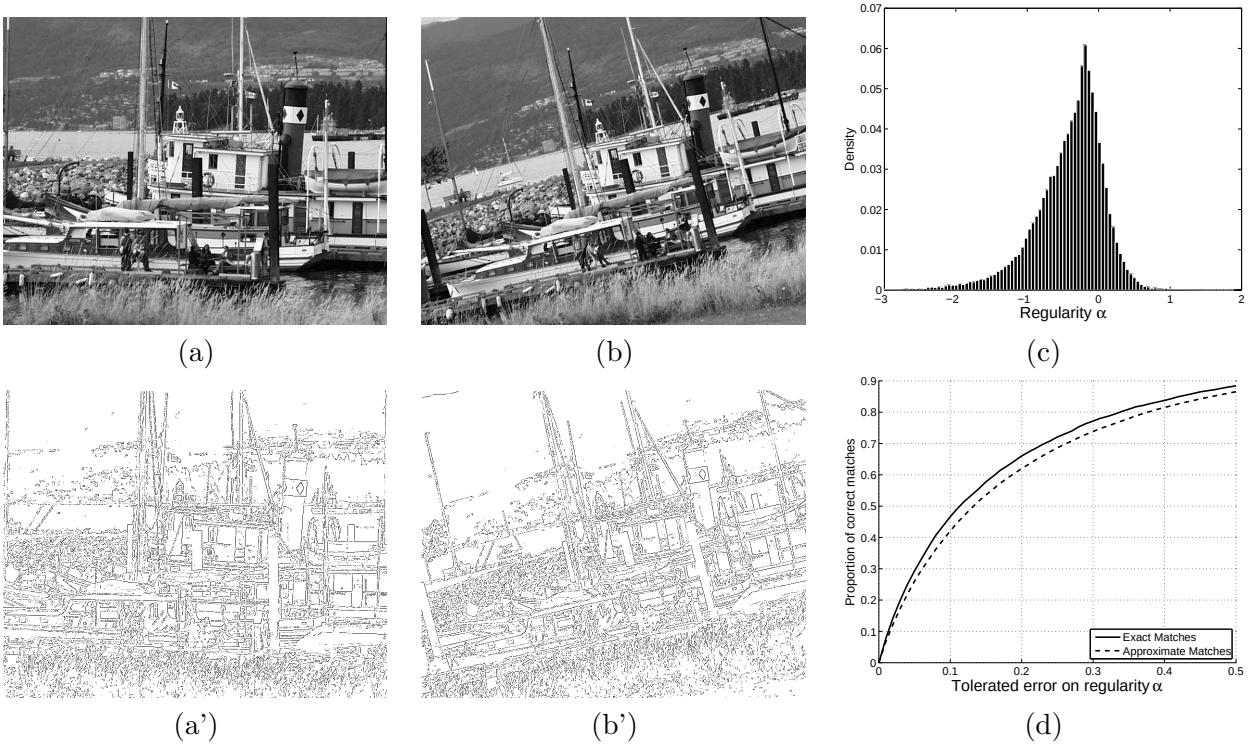


FIGURE 3.7 – (a,b) Deux images reliées par une transformation affine connue ; (a', b') Points d'intérêt détctés ; (c) spectre des régularité α, associé aux points d'intérêt calculés sur l'image (a') ; (d) Erreur dans l'estimation de α en utilisant des "correspondances exactes" (EM) et des correspondances par voisinage (AM) en utilisant les points d'intérêt mis en évidence en (a') et (b').

Les contours qui nous intéressent sont associés aux singularités suivantes, $\alpha = -2$ pour un point isolé, $\alpha = -1$ pour une ligne et $\alpha = 0$ pour un bord de type saut. On présente maintenant

le principe de l'estimation de la robustesse du calcul de α dans le cas d'images naturelles, pour lesquelles les valeurs de régularité α sont calculées aux points d'intérêt. On considère dans ce but l'image originelle X_0 (Figure 3.7.(a)) et l'image déformée X_1 (Figure 3.7.(b)), les images X_0 et X_1 étant reliées par une transformation connue. Les contours et les valeurs de α sont calculés de manière indépendante pour X_0 et X_1. Comme on connaît la transformation, on peut effectuer des correspondances point par point et ainsi comparer les valeurs estimées de α :

$$\left\{ \; P_0 = (x_0^i, y_0^i, \alpha_0^i)_i \in X_0 \text{ (voir Figure 3.7.(a'))} \; P_1 = (x_1^i, y_1^i, \alpha_1^i)_i \in X_1 \text{ (voir Figure 3.7.(b'))}, \right.$$

où (x_0^i, y_0^i) correspond à l'origine de la ligne correspondant à la $i$ème singularité dans l'image X_0. Nous avons alors testé deux techniques de mise en correspondance :

- *correspondances exactes* (EM, pour "exact match") pour lesquelles les valeurs des régularités de X_1 sont comparées à celle de leur projection sur X_0.
- *correspondance par voisinage* (AM, pour "approximate match"), pour lesquelles les valeurs des régularités de X_1 sont comparées à celle sur un voisinage de leur projection sur X_0 (en pratique, le voisinage est égal à un pixel).

Nous allons maintenant montrer, sur des exemples, comment est évaluée la pertinence de la régularité α. On considère donc 8 séquences d'images, chacune composée de 6 images $(X_k)_{0 \leq k \leq 5}$ (voir Figure 3.8). Chacune des séquences correspond à un certain type de transformation, dont l'importance augmente avec k (X_5 correspond donc à la déformation maximale pour le type de transformation considéré). Les séquences d'images retenues doivent être pertinentes : d'une part, elles doivent couvrir la plupart des types d'images : images de textures (voir Figure 3.8(a,d)) et images plus géométriques (voir Figure 3.8(b,c)). d'autre part, les conditions de prise de vue doivent être très variables : on considère donc des déformations à la fois géométriques et des transformations plus spécifique (comme la compression JPEG). Enfin, le degré de transformation doit être relativement important (changement d'échelle jusqu'au facteur 4, changement de point de vue jusqu'à 60°, compression JPEG jusqu'à 98%). A titre d'illustration, on donne un exemple de séquence en Figure 3.9, où chaque image correspond à un certain changement de point de vue par rapport à l'image initiale. On montre aussi les singularités dont les régularités α sont prises en compte dans la procédure d'évaluation dont la description suit. Pour avoir plus de détails sur la génération de ces séquences de test, on peut consulter la page `http://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/research/affine`.

Pour chaque séquence d'images on effectue alors la procédure d'évaluation suivante.

1. Pour chaque image $(X_k)_{0 \leq k \leq 5}$, détecter les singularités et calculer les valeurs de régularité α associées : $p_i^k = (x_i^k, y_i^k, \alpha_i^k), 1 \leq i \leq n_k$.
2. Pour tout k ($1 \leq k \leq 5$), déterminer l'ensemble des singularités $\mathcal{C}^k$ d'intérêt en mettant en correspondance les images X_0 et X_k (on suppose que la transformation entre les deux images est connue) :

$$\mathcal{C}^k = \left\{ \; (p_i^0, p_j^k) \text{ couple de points mis en correspondance en suivant un critère géométrique } \right\} \tag{3.19}$$

   Cela conduit à un certain nombre de correspondances (NC) $\#\mathcal{C}^k$.
3. Extraire le sous-ensemble $\mathcal{C}_\varepsilon^k$ des correspondances pour lesquelles les régularités sont suffisamment proches (la proximité étant mesurée par le paramètre $\varepsilon > 0$)

$$\mathcal{C}_\varepsilon^k = \left\{ (p_i^0, p_j^k) \in \mathcal{C}^k, d_\alpha = |\alpha_i^0 - \alpha_j^k| < \varepsilon \right\} \tag{3.20}$$

et l'on estime pour un certain ε la robustesse de la régularité α, en calculant la proportion de régularités α suffisamment proches sur l'ensemble des points mis en correspondance :

$$S_k = \frac{\#\mathcal{C}_\epsilon^k}{\#\mathcal{C}^k} \tag{3.21}$$

Si le critère (AM) est utilisé, un nombre de points significativement plus élevé sont mis en correspondance, ce qui a pour effet de diminuer la proportion de correspondances correctes et ce indépendamment de ε (voir, par exemple, Figure 3.9). Cependant, si l'on se réfère aux Figures 3.10 et 3.11, les performances associées aux deux manières de mettre les points d'intérêt en correspondance sont à peu près similaires et ce indépendamment de type de transformation considérée.

En revanche, si l'on s'intéresse à l'appariemment d'image, il est important qu'un maximum de points d'intérêt p_i soit retenu, de façon à avoir suffisamment de points pour valider l'appariemment des images. Cet aspect peut être mesuré par l'indice de répétabilité R_k défini de la manière suivante :

$$R_k = \frac{\#\mathcal{C}^k}{\min(n_0, n_k)}.$$

On constate alors, numériquement, que l'indice de répétabilité est multiplié par un facteur allant de 4 à 8 selon le type de transformations considérées, lorsque l'on passe de l'algorithme EM à l'algorithme AM (voir [A13]). En pratique, cela signifie que la probabilité d'apparier correctement les images est beaucoup plus forte avec la méthode AM qu'avec la méthode EM. Pour conclure, cette nouvelle approche utilisant la régularité Lipschitzienne permet donc un appariement d'images ayant subi de nombreux types de transformations en utilisant une seule caractéristique, alors que, dans la littérature, la plupart du temps, chaque type de structure (coin, contour,point) est associée à un détecteur particulier.

FIGURE 3.8 – Exemples d'images représentant X_0 et X_5 : (a, b) changement d'échelle et rotation ; (c,d) changement de point de vue ; (e,f) floutage ; (g) compression JPEG ; (h) changement d'illumination.

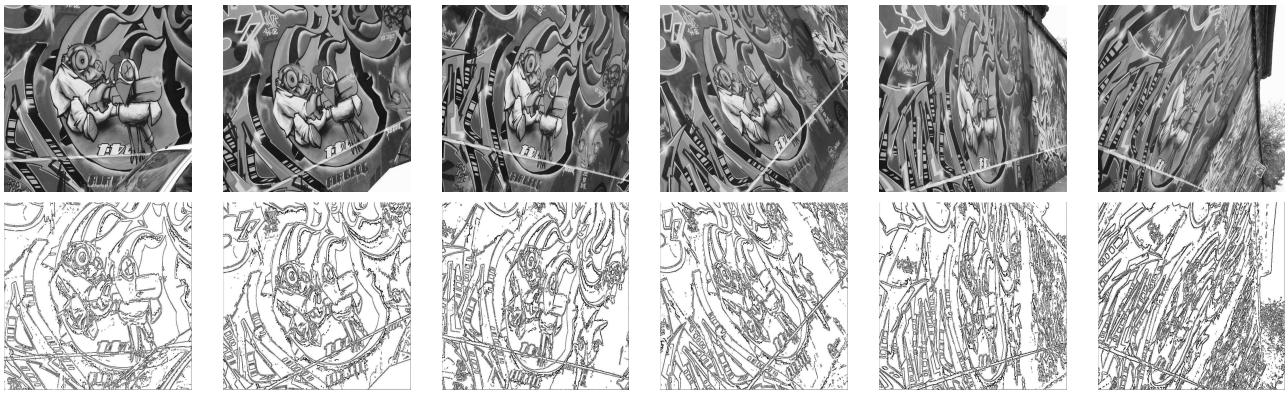
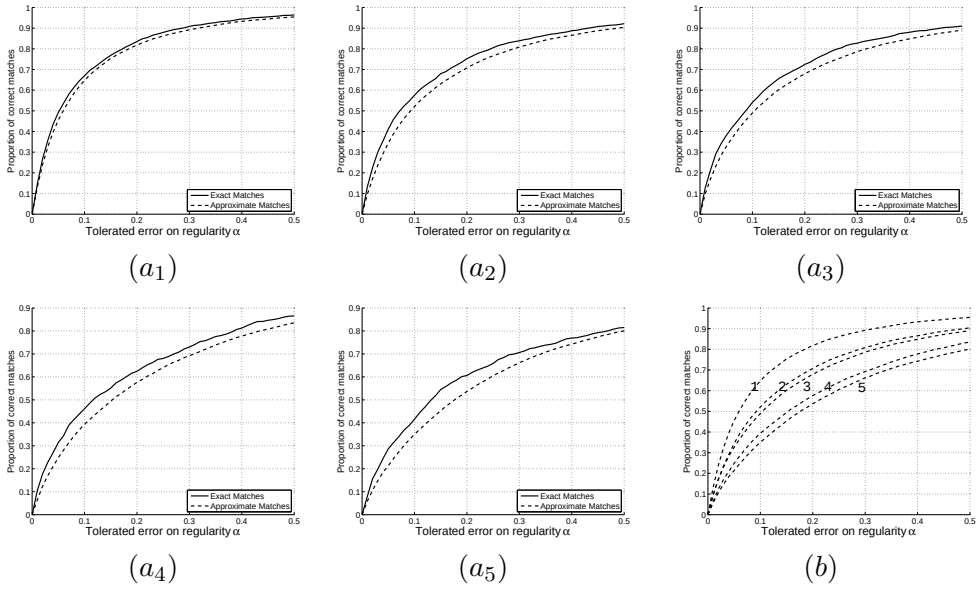


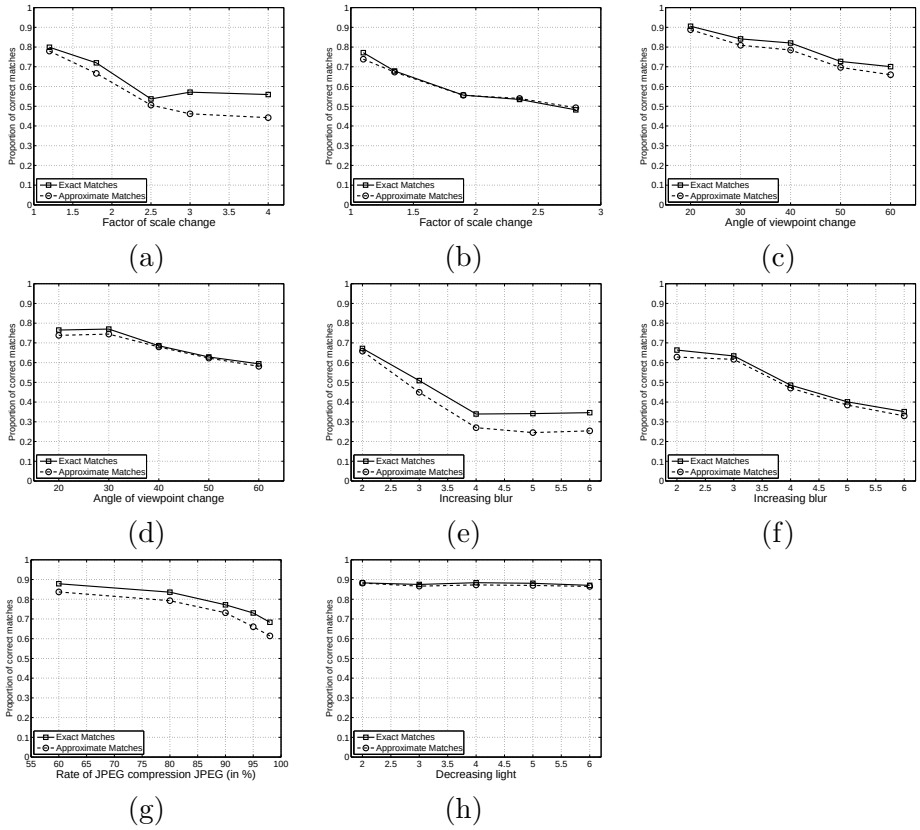
FIGURE 3.9 – En haut, séquence complète pour l'image Viewpoint1 (6 images X_0, ..., X_5) ; En bas, les points de contours calculés.



(a_1) (a_2) (a_3)

(a_4) (a_5) (b)

FIGURE 3.10 – Proportion de points correctement reconnus en fonction de la tolérance α, entre X_0 et X_k $(1 \leq k \leq 5)$ pour la séquence Viewpoint1 (voir Fig.3.9). (a_k) correspond à la comparaison entre X_0 et X_k, à la fois pour EM et AM ; (b) Comparaison entre X_0 et X_k, pour AM (les courbes 1–5 correspondent aux courbes des graphes $(a_1$–$a_5)$ pour AM)



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

(g) (h)

FIGURE 3.11 – (a–h) résultat du matching ($\varepsilon = 0.3$) pour les images test de la Figure 3.8

Chapitre 4

Analyse de texture, et représentation par Gaussiennes généralisées

Dans ce chapitre, nous rappelons dans un premier temps des travaux qui ont suivis ma thèse [C2], puis nous présentons un travail sur la modélisation de textures par Gaussiennes généralisées en nous posant notamment la question de la taille de l'échantillon en relation avec une bonne estimation des paramètres du modèle [A7].

4.1 Caractéristiques stables pour la segmentation de texture [C2]

Le principe de la discrimination de textures est de savoir dans quelle mesure deux échantillons de texture sont significativement différents. Une première étape consiste donc à trouver une description qualitative des textures. Une classe importante de méthodes d'extraction de caractéristiques consiste en une étape de filtrage suivie d'une étape non linéaire. Les méthodes fondées sur un filtrage multi-échelles ont été appliquées avec succès [21][48][79][16][70]. L'efficacité d'un tel filtrage peut être relié au fait que les cellules primaires du cortex visuel se comportent comme une filtre de Gabor à différentes échelles [36]. Une multitude de filtres multi-échelles a été utilisée pour l'analyse de texture. On peut citer, par exemple, les décompositions en ondelettes orthogonales ou en paquets d'ondelettes [21][47][70]. Néanmoins, ces dernières décompositions, n'étant pas invariantes par translation, ne permettent pas une bonne résolution spatiale [59]. Pour pallier ces inconvénients, on leur préférera plutôt une approche redondante de type frames d'ondelettes [1][2][79][48]. En ce qui concerne l'étape non linéaire qui suit l'étape de filtrage, celle-ci consiste en général en l'application d'un filtre basse fréquence sur les cartes de coefficients obtenus, permettant de calculer des énergies locales servant ensuite à l'étape de segmentation.

Nous avons utilisé pour la partie filtrage linéaire, des filtres miroir en quadrature, h et g qui permettent la définition d'un frame étroit de $l_2(\mathbb{Z}^2)$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F &= \big\{h_J[n-l]h_J[m-k], \{g_j[n-l]h_j[m-k], \\ &\quad h_j[n-l]g_j[m-k], g_j[n-l]g_j[m-k]\}_{1\leq j\leq J}\big\}_{(l,k)\in\mathbb{Z}^2} \end{aligned}$$

à condition que $|\hat{h}(\omega)|^2+|\hat{g}(\omega)|^2 = 1$, et où $h_{j+1}[k] = \sum_n h[n]h_j[k-2^j n]$, $\quad g_{j+1}[k] = \sum_n g[n]h_j[k-2^j n]$ et $h_0 = h$.

A partir du frame F, on peut construire $3J+1$ images $\tilde{f}_i = f * F_i$, ce qui signifiant qu'en chaque point de l'image initiale on dispose de $3J+1$ composantes, dont nous avons cherché à analyser la

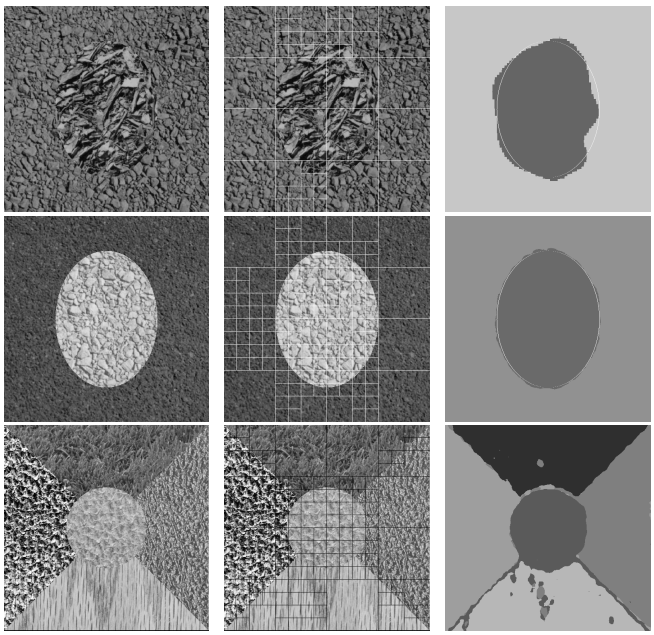


FIGURE 4.1 – Exemple d'images de texture (première colonne). La seconde colonne donne les résultats après l'étape de splitting tandis que la dernière colonne donne les résultats finaux de segmentation

pertinence. Dans ce but, nous avons, dans un premier temps, chercher à représenter de manière plus efficace la décomposition multi-échelles obtenue en calculant la transformée de Karhunen-Loeve de la matrice $\tilde{f}[n,m] = (\tilde{f}_i[n,m])$. Le principe de cette transformée consiste à calculer la matrice de covariance suivante :

$$S = \frac{1}{N^2} \sum_{n,m} \tilde{f}[n,m] \tilde{f}[n,m]^T,$$

puis à projeter les composantes $(\tilde{f}_i)_{1 \leq i \leq 3J+1}$ dans la base des vecteurs propres de S. Si le rang de S est P, les vecteurs propres de S, $\{u_i, \quad i = 1, \cdots, P\}$ correspondent aux valeurs propres positives

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_P$.

Nous avons alors cherché à étudier la stabilité des vecteurs propres et des valeurs propres en fonction de la taille de l'échantillon considéré. Nous décrivons maintenant la procédure que nous avons adoptée. Appelons S^{I_k} la matrice de covariance calculée sur la sous-image I_k de I correspondant à une seule texture. La stabilité des vecteurs propres peut être vue de la manière suivante : pour deux échantillons $I_{k'}$ et I_k de I, les vecteurs propres et les valeurs propres des matrices S^{I_k} et $S^{I_{k'}}$ doivent être proches en un sens à déterminer.

On suppose $N = 2^m$, et on décompose une image I composée d'une seule texture en sous-images de taille $K \times K$, $K = 2^{m'}$ avec $m' < m$ et ne se recouvrant pas. Considérons A_K l'ensemble de sous-images ainsi obtenues, et $\left\{S^k, k \in A_K\right\}$ l'ensemble des matrices de covariance correspondant. On appelle alors u_i^k le vecteur propre associé à la valeur propre λ_i^k (calculés pour S^k). La stabilité des vecteurs propres correspond à la colinéarité des vecteurs u_i^k et u_i. Pour mesurer cela, nous avons introduit la définition suivante concernant la stabilité des vecteurs propres :

Définition 4.1.1 *Le vecteur propre u_i est plus stable que le vecteur propre u_j si*

$$\sum_{k \in A_K} |\langle u_i^k, u_i \rangle| > \sum_{k \in A_K} |\langle u_j^k, u_j \rangle|.$$

Si l'on souhaite ensuite utiliser cette notion de stabilité dans des algorithmes de segmentation non supervisée, les vecteurs u_i seront inconnus, c'est pourquoi une caractérisation de la stabilité locale nous a semblé plus utile. En introduisant $D_K = \{(k,p) \in A_K, k \neq p\}$, on définit :

$$\mathcal{S}_1(A_K, i) := \frac{1}{\#D_K} \sum_{(k,p) \in D_K} |\langle u_i^k, u_i^p \rangle|,$$

ce qui permet de donner du sens à la notion de stabilité locale au travers de la définition suivante de stabilité des vecteurs propres à l'échelle K.

Définition 4.1.2 *Le vecteur propre u_i est dit localement plus stable que le vecteur propre u_j si*

$$\mathcal{S}_1(A_K, i) > \mathcal{S}_1(A_K, j).$$

On peut alors définir la stabilité des valeurs propres en suivant le même schéma :

Définition 4.1.3 *La valeur propre λ_i est plus stable que la valeur propre λ_j si*

$$\sum_{k \in A_K} \frac{|\lambda_i^k - \lambda_i|}{\lambda_i^k + \lambda_i} < \sum_{k \in A_K} \frac{|\lambda_j^k - \lambda_j|}{\lambda_j^k + \lambda_j}.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, selon le type d'applications, nous n'avons pas accès aux valeurs λ_i, c'est pourquoi nous définissons la stabilité locale des valeurs propres, en utilisant

$$\mathcal{S}_2(A_K, i) = \frac{1}{\#D_K} \sum_{(k,p) \in D_K} \frac{|\lambda_i^k - \lambda_i^p|}{\lambda_i^k + \lambda_i^p},$$

de la manière suivante :

Définition 4.1.4 *La valeur propre λ_i est dite localement plus stable que la valeur propre λ_j si*

$$\mathcal{S}_2(A_K, i) < \mathcal{S}_2(A_K, j)$$

Il apparaît au travers de nombreux exemples numériques que le vecteur propre u_1 (i.e. celui associé à l'espace le plus énergétique) est le plus stable. Nous construisons alors un algorithme de segmentation de texture non supervisée utilisant cette remarque : l'idée est d'associer les régions A^k présentant des vecteurs propres u_1 similaires. Cependant, bien que stable, u_1 ne constitue pas un critère suffisamment discriminant et nous considérons la valeur propre associée λ_1 comme caractéristique supplémentaire.

L'algorithme de segmentation utilise alors uniquement le couple (u_1,λ_1). Le calcul du nombre de textures s'effectue avant l'étape de segmentation, grâce à un procédé de "split and merge" : c'est-à-dire que l'on découpe une image en sous-images et l'on regroupe ensuite les différentes sous-images en fonction de leur proximité dans l'espace des caractéristiques (un critère probabibiliste nous indique alors quel est le nombre de texture le plus probable). Cette première étape permet une bonne estimation des caractéristiques des textures, qui sont ensuite utilisées dans l'étape de segmentation proprement dite, que nous ne détaillons pas ici. Des exemples de segmentation sont montrées en Figure 4.1. Il est important de remarquer que le choix d'un "bon" paramètre K est primordial pour l'estimation correct des matrices de covariance, les échantillons de texture ne devant pas être trop petits. Nous retrouverons dans la section qui suit cette problématique de la taille des échantillons mais cette fois associée à une autre modélisation des textures.

4.2 Modélisation de texture par Gaussiennes généralisées [A7]

La modélisation des distributions des coefficients produits par la transformée en cosinus discrets, ou en ondelettes, ou pyramidale peut être efficacement réalisée en ajustant les paramètres d'une *densité Gaussienne généralisée* (GGD). Les applications de ce modèle pour les sous-bandes d'une certaine transformée vont de l'analyse de texture, au débruitage d'images, en passant par le codage vidéo. L'estimation des paramètres des GGD peut se faire soit en utilisant la méthode des moments, soit par calcul d'entropie, ou encore en utilisant une approche par maximum de vraisemblance (MV). Dans toutes ces approches, le calcul des paramètres repose sur l'hypothèse que l'échantillon considéré est de taille suffisamment grande. Cependant, dans les applications en traitement d'image (on peut penser à la segmentation de textures introduite plus haut), les échantillons sont souvent de petite taille et l'existence des paramètres n'est alors plus assurée. Nous avons prouvé des conditions nécessaire et suffisante d'existence des paramètres des lois Gaussiennes généralisées dans l'approche MV. Nous en avons alors déduit un nouvel algorithme pour calculer les paramètres dans une approche de type MV, dont l'idée est de montrer l'existence des paramètres avant de les calculer. Nous avons montré l'intérêt d'une telle étude en comparant l'algorithme que nous proposons à la méthode des moments [64][9][82] et à la méthode par maximum de vraisemblance classique [85] sur des images aléatoires pour lesquelles la vraie densité de probabilité est connue. Avant de présenter l'algorithme proprement dit, nous rappelons certaines définitions et propriétés que nous avons démontrées sur lesquelles il repose.

Dans notre approche, nous considérons un échantillon $X_L = (x_1, x_2, \cdots, x_L)$ tel que chaque x_i suit une loi dont la densité est donnée par :

$$P_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(\frac{1}{\beta})} e^{-(\frac{|x|}{\alpha})^\beta}, \tag{4.1}$$

où Γ est la fonction gamma. Dans une approche par maximum de vraisemblance, on considère la fonction de log-vraisemblance (LV) sous des hypothèses d'indépendance des composantes de

l'échantillon :

$$\mathcal{L}(X_L, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{L} \log\left(P_{\alpha,\beta}(x_i)\right). \tag{4.2}$$

L'estimation $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ des paramètres se fait alors par résolution des équations d'Euler Lagrange (EL) associées [84], de la manière suivante. Etant donné $\hat{\beta}$, on obtient un unique estimateur $\hat{\alpha} = \left(\frac{\hat{\beta}}{L}\sum_i |x_i|^{\hat{\beta}}\right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$ et alors $\hat{\beta}$ satisfait :

$$g(\hat{\beta}) = 1 + \frac{\Psi(\frac{1}{\hat{\beta}})}{\hat{\beta}} - \frac{\sum_{i=1}^{L} |x_i|^{\hat{\beta}} \log|x_i|}{\sum_{i=1}^{L} |x_i|^{\hat{\beta}}} + \frac{\log\left(\frac{\hat{\beta}}{L}\sum_{i=1}^{L} |x_i|^{\hat{\beta}}\right)}{\hat{\beta}} = 0 \tag{4.3}$$

avec [37] :

$$\Psi(x) = \frac{d\log(\Gamma(x))}{dx} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right). \tag{4.4}$$

Cette équation a une unique racine en probabilité (c'est-à-dire quand L tend vers l'infini) [83] qui correspond au maximum de la fonction de log-vraisemblance (LV). Pour de grandes valeurs de L, résoudre les équations d'Euler-Lagrange revient donc à trouver un maximum pour la fonction de log-vraisemblance (au moins en probabilité). Cependant, lorsque L est fini, nous montrons que g, définie en (4.3), a soit zéro soit deux racines. En d'autres termes, résoudre l'équation d'Euler-Lagrange n'est plus équivalent à trouver un maximum pour la fonction de vraisemblance. En effet, l'étude mathématique de g conduit au théorème suivant :

Théorème 4.2.1 *Quelquesoit l'échantillon $(x_1, \cdots, x_L)$, g satisfait $\lim_{\beta\to 0} g(\beta) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{\beta\to+\infty} g(\beta) = 0^+$. C'est pourquoi, g n'a pas de racine ou au moins deux racines.*

Il s'agit donc de déterminer plus précisément les cas où g n'a pas de racine, et, lorsque g en a deux, laquelle correspond au maximum de vraisemblance.

Pour répondre à la première question, nous remarquons que la fonction de log-vraisemblance (4.2) avec β fixé a un unique maximum en $\hat{\alpha}_{ML}(\beta) = \left(\frac{\beta}{L}\sum_{i=1}^{L} |x_i|^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. C'est pourquoi, nous définissons et étudions,

$$u(\beta) := \frac{1}{L}\mathcal{L}\left(X_L, \hat{\alpha}_{ML}(\beta), \beta\right) + \log(2), \tag{4.5}$$

où la relation entre u et g est $u'(\beta) = \frac{g(\beta)}{\beta}$. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 4.2.2 *Un estimateur de maximum de vraisemblance existe si et seulement s'il existe β tel que : $u(\beta) = -\log(M)$, où M est le maximum des modules des x_i.*

Le résultat donné par le théorème précédent doit être réinterprêté pour être exploité : nous montrons qu'il est équivalent à la convergence d'une certaine suite β_n. En effet, définissons

$$\begin{aligned} f_1(\beta) &:= (1 - \frac{1}{\beta})\log(\beta) - \log\left(\Gamma(\frac{1}{\beta})\right) - \frac{1}{\beta} \\ f_2(\beta) &:= \frac{1}{\beta}\log\left(\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} |x_i|^{\beta}\right) - \log(M) \end{aligned}$$

alors $f_1(\beta) - f_2(\beta) = u(\beta) + \log(M)$ et on peut reformuler le théorème précédent sous la forme :

Théorème 4.2.3 *L'existence de β telle que $u(\beta) = -\log(M)$ est équivalente à la convergence de la suite*

$$\begin{aligned} \beta_0 &= f_1^{-1}\left(\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\log|x_i| - \log(M)\right) \\ \beta_{n+1} &= f_1^{-1}\left(f_2(\beta_n)\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Si β_n converge, on appelle $\beta_{\min}$ sa limite qui correspond à la plus petite valeur telle que $u(\beta) = -\log(M)$. On trouve ensuite à l'aide d'une suite auxiliaire β'_n la plus grande valeur telle que $u(\beta) = -\log(M)$ et l'on prouve finalement que $u(\beta) + \log(M) < 0$ sur $]-\infty, \beta_{\min}[\bigcup]\beta_{\max}, +\infty[$. Ainsi, par définition de u, la solution optimale est à rechercher dans l'intervalle $[\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ comme solution du problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\beta}_{ML} = \underset{\beta\in[\beta_{min},\beta_{max}]}{argmax}\ u(\beta). \tag{4.7}$$

Nous avons ensuite fait des simulations portant sur la détermination des paramètres des lois de densités Gaussiennes généralisées en fonction de la taille de l'échantillon. Celles-ci montrent qu'avec des échantillons plus petit que 16×16 pixels, le paramètre $\hat{\beta}_{ML}$ peut ne pas exister lorsque $\beta > 2$. Un exemple typique d'une telle situation est lorsque l'on utilise des décompositions en ondelettes orthogonales d'une image 256×256, et que l'on cherche à appliquer le modèle de Gaussiennes généralisées sur des sous-espaces de détails correspondant à une décomposition à une profondeur plus grande que 3 (la taille des sous espaces-considérés étant alors inférieure à 8×8).

Chapitre 5

Représentations multi-échelles linéaires et non linéaires

Dans ce chapitre, nous allons d'abord introduire deux types de représentations multi-échelles linéaires proches des transformées en ondelettes, se fondant sur les B-splines (cas 1D) et les box splines (cas 2D). Une deuxième partie du chapître sera consacrée à l'étude d'un certain type de schémas de subdivision non linéaires ainsi qu'à celle de représentations multi-échelles non linéaires particulières. Ce travail est le fruit d'une collaboration avec Basarab Mateï(LAGA-Paris XIII) et a été l'objet du travail de post-doctorat d'Anastasia Zakharova.

5.1 Représentations multi-échelles splines

5.1.1 Représentations multi-échelles fondées sur les B-splines discrètes[A5]

Nous montrons tout d'abord comment construire des représentations multi-échelles en une dimension en utilisant des propriétés des splines discrètes. Dans ce qui suit, B_m^N désigne comme au chapitre 3, la B-spline discrète d'ordre N.

Nous présentons tout d'abord un théorème suivant de convergence des B-splines dicrètes vers la spline continue qui nous sera utile par la suite. En effet, nous avons [76] :

$$\max_k |\beta^N(\frac{k}{m} + \frac{N+1}{2m}) - mB_m^{N+1}[k]| = O(\frac{1}{m^2}). \tag{5.1}$$

En définissant alors la fonction constante par morceaux

$$M_m^{N+1}(t) = mB_m^{N+1}[k] \quad \frac{k}{m} \leq t < \frac{k+1}{m}, \tag{5.2}$$

on obtient alors facilement en utilisant (5.1) et par développement de Taylor que : $\|M_m^{N+1} - \beta^N\|_\infty = O(\frac{1}{m})$. Nous allons maintenant voir comment utiliser la convergence des B-splines discrètes vers les B-splines continues pour écrire un nouvel algorithme de représentation multi-échelles approchant les transformées en ondelettes. Une approche similaire a été développée en utilisant des B-splines dans [86], nous allons montrer le changement apporté par l'utilisation des B-splines discrètes.

Considérons un signal spline f et une ondelette splines ψ appartenant à $L^2(\mathbb{R})$, pouvant s'écrire sous la forme suivante :

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c[k]\beta^{n_1}(x-k) \text{ et } \psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g[k]\beta^{n_2}(x-k).$$

En pratique lorsque f n'est pas une spline, on considère l'interpolant spline de f telle que $f(l) = c * \beta^{n_1}(l)$ calculé en utilisant, par exemple, l'algorithme proposé dans [80]. La décomposition en ondelettes de f en utilisant l'ondelette spline ψ à l'échelle s est définie par :

$$Wf(s,x) = \int f(t)\frac{1}{s}\psi(\frac{t-x}{s})dt$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on considère $s = \frac{m_1}{m_2}$ pour obtenir :

$$Wf(\frac{m_1}{m_2},t) \quad = \quad \frac{m_2}{m_1}\sum_{k,l} g[k]c[l]\beta^{n_2}\left(\frac{m_2}{m_1}t-k\right) * \beta^{n_1}(t-l).$$

Si on considère $t = p \in \mathbb{Z}$, le terme de droite de l'expression précédente peut être calculé de manière exacte [86] :

$$Wf(\frac{m_1}{m_2},p) \quad = \quad m_2\left(B^{n_1+n_2+1} * B^{n_1+1}_{m_2} * B^{n_2+1}_{m_1} * c_{\uparrow m_2} * g_{\uparrow m_1}\right)_{\downarrow m_2}[p],$$

où $B^{n_1+n_2+1}[k] = \beta^{n_1+n_2+1}[k]$, et où $c_{\uparrow m_1}[p] = c[k]$ si $p = m_1 k$ et zéro sinon, tandis que $c_{\downarrow m_1}[p] = c[m_1 p]$.

Si l'on considère le cas discret et que l'on exploite le fait que m_1 et m_2 peuvent être choisis arbitrairement grands (tout en préservant leur rapport), cela nous conduit à l'approximation suivante :

$$Wf(\frac{m_1}{m_2},t) \approx \frac{m_2}{m_1}\sum_{k,l} g[k]c[l]M^{n_2+1}_{m_1}\left(\frac{m_2}{m_1}t-k\right) * M^{n_1+1}_{m_2}(t-l), \tag{5.3}$$

qui utilise la définition de M^n_m (voir (5.2)) et la propriété de convergence uniforme du membre de droite vers le membre de gauche avec m_1 (le ratio entre m_1 et m_2 restant constant).

En supposant alors que $t = \frac{i}{m_2}$, $i \in \mathbb{Z}$, on obtient l'approximation suivante :

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad Wf(\frac{m_1}{m_2},\frac{i}{m_2}) \approx m_2 B^{n_1+1}_{m_2} * B^{n_2+1}_{m_1} * c_{\uparrow m_2} * g_{\uparrow m_1}[i-1] \tag{5.4}$$

En remplaçant le calcul exact par l'approximation précédente, on économise la convolution avec le filtre $B^{n_1+n_2+1}$, cependant une bonne approximation nécessite d'utiliser une valeur de m_1 plus grande que la valeur de m_1 minimale (la convergence étant en $O(\frac{1}{m_1})$). Nous montrons en Figure 5.1, la convergence vers $Wf(\frac{m_1}{m_2},\frac{i}{m_2})$ en fonction de m_1, le rapport $\frac{m_1}{m_2}$ restant constant. L'intérêt de l'écriture (5.4) est de montrer qu'en améliorant la qualité de l'approximation, on gagne naturellement une meilleure représentation spatiale de la représentation multi-échelles (effet de zoom) puisque m_2 doit augmenter dans les mêmes proportions que m_1.

5.1.2 Analyses multi-échelles linéaires utilisant les box splines [A11]

Nous allons maintenant voir comment l'approche précédente s'étend naturellement au cas bidimensionnel lorsque l'on remplace les B-splines par des box splines. Nous rappelons ici une approche que nous avons proposé dans [A11] pour construire des représentations multi-échelles utilisant les box splines. L'utilisation des box splines dans de nombreuses applications pratiques est justifiée par leur capacité à mieux tenir des géométries complexes que les approches par produit tensoriel.

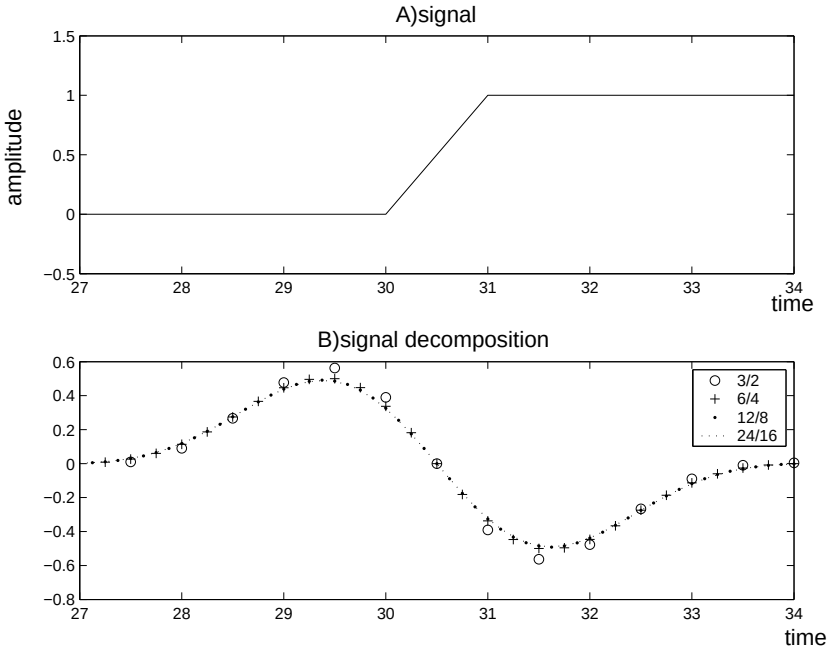


FIGURE 5.1 – A) Signal étudié, B) Décomposition du signal pour des valeurs de $\frac{m_1}{m_2}$ dans $\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{12}{8}, \frac{24}{16}\}$. On visualise à la fois la convergence et l'effet de zoom sur les coefficients.

Après un bref rappel sur les box splines, nous développons la représentation multi-échelles que nous avons proposée. Celle-ci sera applicable en dimension d quelconque c'est pourquoi nous en faisons une présentation générale bien que les illustrations seront bidimensionnelles. Considérons donc un ensemble de n vecteurs, non nécessairement distincts, dans un espace de dimension d

$$X_n = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}.$$

On suppose qu'au moins d vecteurs de X_n sont linéairement indépendants. On réarrange alors la famille X_n de telle sorte que $X_d = \{x_1, \cdots, x_d\}$ soient linéairement indépendants. En utilisant la notation $[x_1, \cdots, x_d][0,1[^s$ pour désigner l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \in [0,1[$, on définit, à partir de cet ensemble de vecteurs, une box spline de la manière suivante [25][75] :

$$\begin{aligned}
\beta(x, X_d) &= \frac{1}{|\det(x_1, \cdots, x_d)|} \chi_{[x_1,\cdots,x_d][0,1[^d}(x) \\
\beta(x, X_k) &= \int_0^1 \beta(x - tx_k, X_{k-1}) dt, \quad n \geq k > d.
\end{aligned}$$

Les box splines satisfont la relation d'échelle suivante [8] :

$$\beta(\frac{k}{m}, X_n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} b_m[p, X_n] \beta(k - p, X_n) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^d \tag{5.5}$$

avec

$$b_m[p, X_n] = \frac{1}{m^{n-s}} \left(b_m[., x_1] * \cdots * b_m[., x_n]\right)[p],$$

où $b_m[.,x_i]$ est une succession de m valeurs égales à 1 dans la direction définie par x_i et où $*$ désigne la convolution muti-dimensionnelles.

Nous pouvons tout d'abord généraliser la relation (5.5) , en considérant une matrice M inversible, de coefficients entiers, et de valeurs propres en module strictement plus grande que 1 [61]. La matrice M est supposée aussi être telle qu'il existe une permutation σ de $\{1,\cdots,n\}$ satisfaisant

$$Mx_p = \lambda_p x_{\sigma(p)} \tag{5.6}$$

avec λ_p un entier positif. Nous avons alors montré, dans [A11], la relation d'échelle suivante pour les box splines :

Théorème 5.1.1 *Supposons que M satisfait l'hypothèse (5.6) et que β est définie comme en (**??**) alors,*

$$\beta(x,X_n) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} g[p,\Lambda_n,X_{\sigma(n)}]\beta(Mx-p,X_n),$$

avec $\Lambda_n = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ et :

$$g[p,\Lambda_n,X_n] = \frac{|\det(M)|}{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}\left(b_{\lambda_1}[.,x_1]*\cdots*b_{\lambda_n}[.,x_n]\right)[p].$$

Considérons dans un premier temps une famille X_n quelconque et définissons $B(x,X_n) = \begin{pmatrix} x \\ \beta(x,X_n)\end{pmatrix}$ et $c_m^p = \begin{pmatrix} \frac{n_p}{m} \\ b_m[p,X_n]\end{pmatrix}$, où

$$n_p = p + \frac{1}{2}\left(x_1+\cdots+x_n\right). \tag{5.7}$$

Si $[x_1,\cdots,x_n]\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^d$, où $[x_1,\cdots,x_n]\mathbb{Z}^n$ correspond aux combinaisons linéaires à coefficients entiers, alors $\|c_m^p - B(x,X_n)\| = O(\frac{1}{m})$, pour tout x tel que $\beta(mx-p,X_n)\geq 0$ [29]. Cette égalité implique en particulier que :

$$|b_m[p,X_n] - \beta(x,X_n)| = O(\frac{1}{m}). \tag{5.8}$$

Si les box splines appartiennent à $C^1(\mathbb{R})$, la convergence est en $O(\frac{1}{m^2})$.

Comme dans le cas monodimensionnel utilisant les B-splines, on montre comment construire une séquence de fonctions constantes par morceaux qui convergent uniformèment vers β avec m. On rappelle pour cela que les points $\frac{n_p}{m}$, où n_p est défini en (5.7), se trouvent sur la grille $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ translaté par un facteur $\frac{1}{2m}(x_1+\cdots+x_n)$ (appelé centre de la box spline). C'est pourquoi, on considère la fonction constante par morceaux :

$$F_m(x,X_n) = b_m[p,X_n]\ \forall x\in \mathrm{supp}(\beta) \tag{5.9}$$

avec $p = \underset{q}{\mathrm{argmin}}\left(\|x-\frac{n_q}{m}\|_\infty\right)$ et où $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Réciproquement, étant donné p, l'ensemble des points x satisfaisant cette propriété est $V_p^m = \left\{x, \|x-\frac{n_p}{m}\|_\infty < \frac{1}{2m}\right\}$. De manière identique, on définit

$$V_p = \left\{x, \|x-n_p\|_\infty < \frac{1}{2}\right\}. \tag{5.10}$$

On est alors en mesure de donner alors une condition simple de convergence uniforme de F_m vers β :

Théorème 5.1.2 *Si l'on suppose que β est continûment différentiable, alors* $|F_m(x, X_n) - \beta(x, X_n)| = O(\frac{1}{m})$.

A partir de là, nous avons proposé de nouvelles représentations multi-échelles utilisant les box splines et approximant les transformées en ondelettes continues. Considérons donc la transformée en ondelettes continues définie par :

$$Wf(a,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\frac{1}{s^d}\Psi(\frac{t-x}{a})dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+t)\frac{1}{s^d}\Psi(\frac{t}{s})dt \ s > 0.$$

Dans notre contexte, nous utilisons une ondelette Ψ définie à l'aide de box splines de la manière suivante :

$$\Psi(x) = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} \alpha[p, X_n]\beta(x-p, X_n), \tag{5.11}$$

et le signal multi-dimensionnel f approché par

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} \gamma[p, X_n]\beta(x-p, X_n). \tag{5.12}$$

Pour approcher la transformée en ondelettes définie au dessus, on utilise encore une fois la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On considère $s = \frac{m_1}{m_2}$, en utilisant (5.12) et (5.15), on peut écrire :

$$\begin{aligned} W\tilde{f}(\frac{m_1}{m_2}, x) &= \left(\frac{1}{m_1}\right)^d \sum_{(p,q,k,l)\in(\mathbb{Z}^d)^4} \alpha[p, X_n]\gamma[q, X_n]b_{m_1}[k, X_n]b_{m_2}[l, X_n] \\ &\quad (\beta * \bar{\beta})(-m_2x - m_1p + m_2q - k + l, X_n), \end{aligned}$$

où $\bar{\beta}(x, X_n) = \beta(-x, X_n)$ et $\beta * \bar{\beta}(x, X_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \beta(t, X_n)\bar{\beta}(x-t, X_n)d\mathbf{t}$.

En utilisant maintenant la convergence uniforme de la fonction F_m vers β quand m tend vers $+\infty$, on peut écrire l'approximation suivante pour de grandes valeurs de m_1 et m_2, en supposant toujours que le rapport $\frac{m_1}{m_2}$ est constant :

$$W\tilde{f}(\frac{m_1}{m_2}, \frac{i}{m_2}) \approx \frac{1}{m_1^d}\left(\gamma_{\uparrow m_2} * b_{m_2} * \overline{\alpha_{\uparrow m_1}} * \overline{b_{m_1}}\right)[i, X_n]. \tag{5.13}$$

Si l'on suppose de plus que X_n satisfait l'équation (5.6), on peut montrer la relation plus générale suivante :

$$W\tilde{f}(\frac{m_1}{m_2}, \frac{M^{-m}i}{m_2}) \approx \frac{1}{m_1^d}\left((\gamma_m)_{\uparrow m_2} * b_{m_2} * \overline{(\alpha_m)_{\uparrow m_1}} * \overline{b_{m_1}}\right)[i, X_n]. \tag{5.14}$$

On voit donc que, dans ce cas de figure, la représentation multi-échelles calcule une approximation de transformées en ondelettes, en des échelles rationnelles et en des points liés à à la matrice d'échantillonage M. Plus précisément, On voit que le raffinement sera plus important dans la direction associée à la plus petite valeur propre de M^{-1} donc associée à la plus grande valeur propre de M.

Un aspect important de la méthode est le calcul de γ_m. En effet, si l'on pose $\gamma = \gamma_0$, cette séquence ne peut pas être obtenue par interpolation comme dans le cas des B-splines car la décomposition sur une famille de box splines translatée n'est en général pas unique. Nous avons détaillé dans [A11], la méthode de gradient utilisé pour le calcul de γ, γ_m étant ensuite obtenue

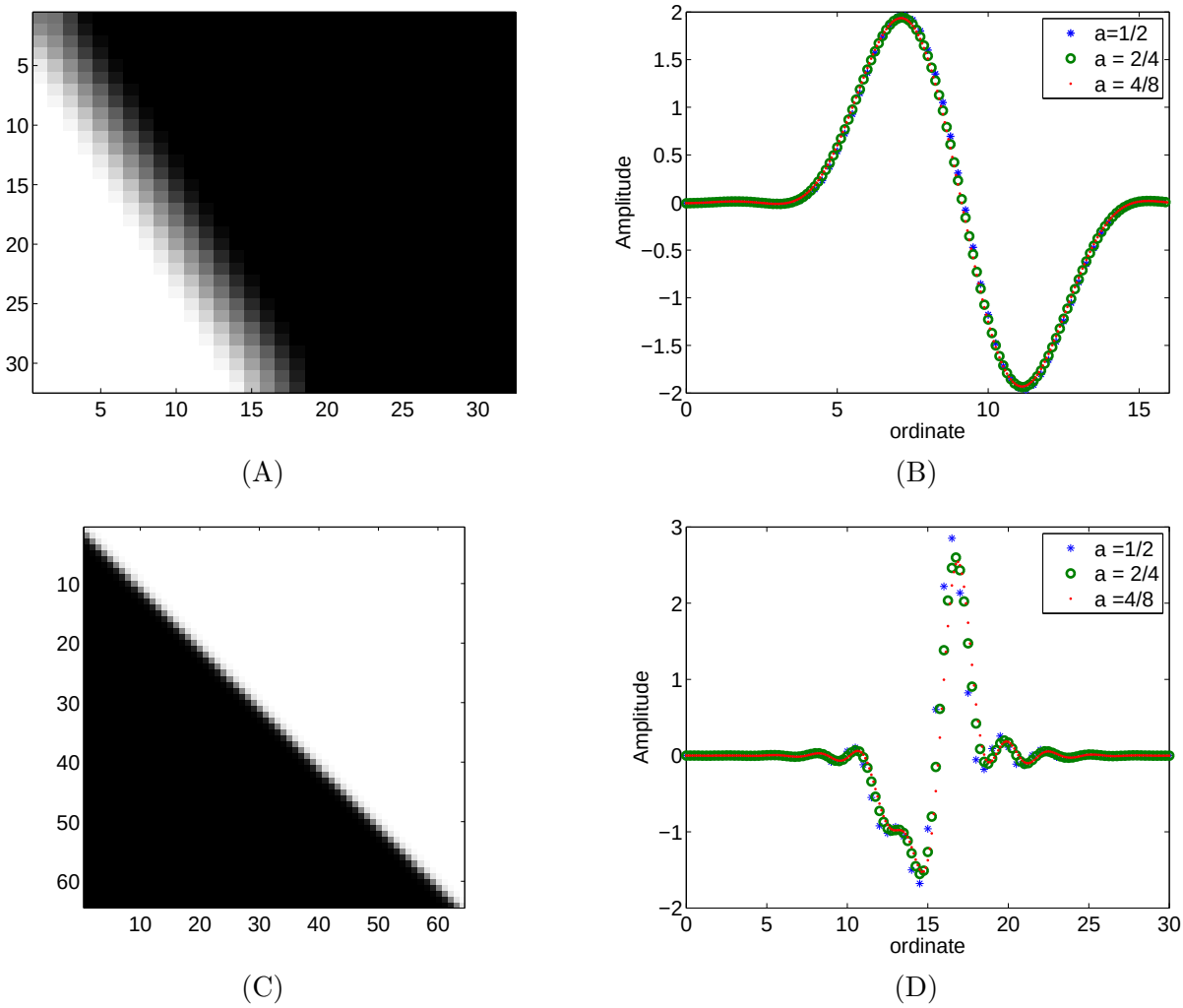


FIGURE 5.2 – (A) : image de taille 32×32 contenant un contour rectiligne dans la direction Me_2 (avec comme matrice M la matrice hexagonale) (B) : représentation multi-échelles correspondant à l'image (A) dans la direction Me_1 (toujours avec la matrice hexagonale et $m = 1$) et on étudie la convergence en considérant $m_1 = 1, m_2 = 2$ ou $m_1 = 2, m_2 = 4$ ou encore $m_1 = 4, m_2 = 8$) (C) : image de taille 64×64 contenant un contour rectiligne dans la direction Me_2 (avec comme matrice M la matrice de quincunx) (D) : représentation multi-échelles correspondant à l'image (C) dans la direction Me_1 (avec toujours comme matrice M la matrice de quincunx et $m = 1$), les valeurs de m_1 et m_2 pour étudier la convergence sont les mêmes que précédemment

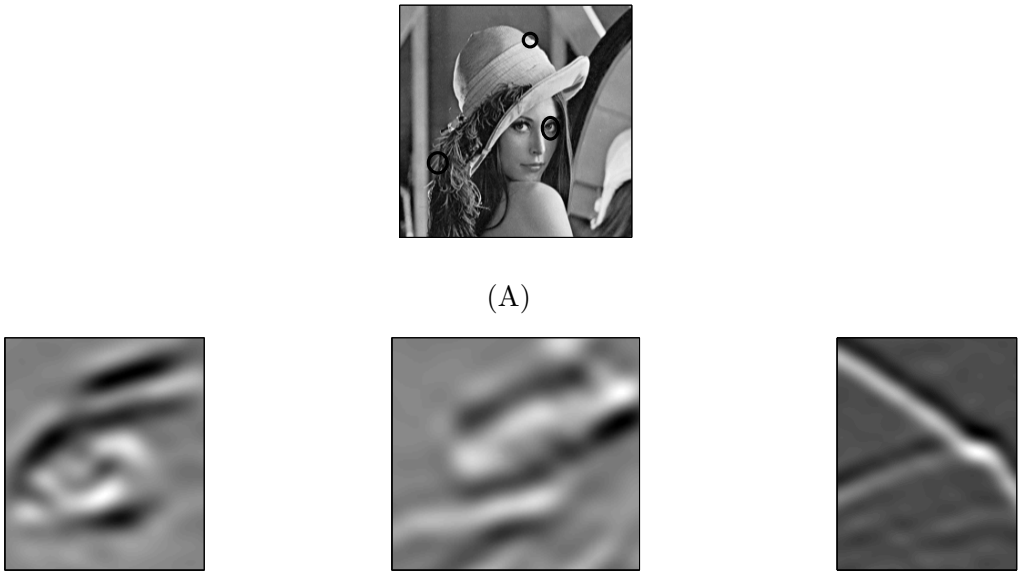
par la formule $\gamma_m = g_m * \gamma_{\uparrow M^m}$, où $\gamma_{\uparrow M^m}[p] = \gamma[k]$ si $k = M^m p$ et zéro sinon et où g_m correspond au filtre associé à m applications successives du Théorème 5.1.1. Dans ce contexte, les ondelettes que nous avons considérées sont appelées ondelettes box splines (pour des détails sur ces ondelettes consulter [77]). Elles sont de la forme :

$$\Psi(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \alpha[p] \beta(x - p, X_n), \tag{5.15}$$

avec $\sum_{p\in\mathbb{Z}^d} \alpha[p] = 0$ où α est une séquence finie. En utilisant la relation d'échelle satisfaite par les box splines, on en déduit :

$$\Psi(x) = \sqrt{|\det(M)|^m} \sum_{p\in\mathbb{Z}^s} \left(g_m[.,\Lambda_n,X_n] * \alpha_{\uparrow M^m}\right)[q]\beta(M^m x - q, X_n),$$

et l'on définit $\alpha_m = g_m * \alpha_{\uparrow M^m}$.



(A)

(B) (C) (D)

FIGURE 5.3 – (A) : image de Lena avec certaines régions d'intérêt délimitées par des cercles noirs (B) : représentation multi-échelles associée à la région de l'oeil quand $m_1 = 4$ et $m_2 = 8$; (C) : même calcul qu'en (B) pour une région correspondant aux plumes du chapeau ; (D) : même calcul qu'en (C) pour une région correspondant à un contour du chapeau.

Comme l'on s'intéresse à l'analyse d'image, nous nous penchons en particulier sur le cas $d = 2$. Dans un tel cas, les matrices M qui vérifient (5.6) satisfont $M^2 = \lambda Id$, et l'étude précédente est à considérer avec $m = 1$.

En particulier, on présente en Figure 5.2 des résultats de convergence de la représentation avec m_1 pour différents types de matrices M, soit la matrice hexagonale :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

soit la matrice de quincunx :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sur les Figures 5.2 (A) et (C), on représente une image contenant un bord rectiligne dans la direction Me_2 (M étant, dans le premier cas, la matrice hexagonale et, dans le second cas, la matrice de quincunx) représente en Figure 5.2 (B) et (D) les représentations multi-échelles dans la direction Me_1. Une autre illustration est donnée en Figure 5.3, où la représentation multi-échelles est utilisée pour zoomer sur certaines parties de l'image.

5.2 Schémas de subdivision non linéaires et non séparables

Cette partie résume un travail initié en 2008 avec Basarab Mateï(LAGA,Paris XIII). Nous avons eu pour cela un soutien financier local qui nous a permis de recruter A. Zakharova sur un contrat post-doctoral. Nous allons maintenant présenter les différents aspects de notre travail. Commençons par quelques notations qui seront utilisées par la suite.

5.2.1 Notations

Pour un multi-index $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_d) \in \mathbb{N}^d$ et un vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on définit $|\mu| = \sum_{i=1}^{d} \mu_i$, $\mu! = \prod_{i=1}^{d} \mu_i!$ et $x^\mu = \prod_{i=1}^{d} {x_i}^{\mu_i}$. Pour deux multi-index $m, \mu \in \mathbb{N}^d$, on définit :

$$\begin{pmatrix} \mu \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ m_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mu_d \\ m_d \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on définit

$$q_N = \#\{\mu, |\mu| = N\}. \tag{5.16}$$

L'espace des suites bornées est noté $\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$ et $\|u\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)}$ est la norme infinie de $\{|u_k| : k \in \mathbb{Z}^d\}$. L'espace $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ désigne les suites u définies sur $\mathbb{Z}^d$ telles que $\|u\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} < \infty$, où

$$\|u\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{for } 1 \leq p < \infty.$$

On note $L^p(\mathbb{R}^d)$, l'espace des fonctions mesurables v telles que $\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \infty$, où

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{for } 1 \leq p < \infty, \text{ et } \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |v(x)|.$$

On définit $D^\mu v(x) = D_1^{\mu_1} \cdots D_d^{\mu_d} v(x)$, où D_j est l'opérateur différentiel dans la direction définie par la $j$ème coordonnée de la base canonique. Pour une suite $(u_p)_{p \in \mathbb{Z}^d}$ et un multi-index n, nous définissons les différences mixtes d'ordre n par :

$$\nabla^n u := \nabla_{e_1}^{n_1} \nabla_{e_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot \nabla_{e_d}^{n_d} u,$$

où $\nabla_{e_i}^{n_i}$ est défini récursivement par

$$\nabla_{e_i}^{n_i} u_k = \nabla_{e_i}^{n_i - 1} u_{k+e_i} - \nabla_{e_i}^{n_i - 1} u_k.$$

Alors, on pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta^N u : \ = \{\nabla^n u, |n| = N, \ n \in \mathbb{N}^d\}.$$

Une matrice M est appelée matrice de dilatation si elle est à valeurs entières et si $\lim_{n \to \infty} M^{-n} = 0$. Dans ce qui suit, M est une matrice de dilatation inversible et m correspond à $|\det(M)|$. Pour une matrice de dilatation quelconque M et n'importe quelle fonction Φ on note $\Phi_{j,k}(x) = \Phi(M^j x - k)$.

On rappelle aussi qu'une fonction Φ est dite L^p-stable s'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ satisfaisant

$$C_1\|c\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \leq \|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\Phi(x-k)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_2\|c\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}.$$

Enfin, pour deux quantités positive A et B dépendant d'un ensemble de paramètres, la relation $A \lesssim B$ implique l'existence d'une constante positive C, indépendante des paramètres, telle que $A \leq CB$. Aussi $A \sim B$ veut dire $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.

5.2.2 Convergence des schémas de subdivision non séparables [A14]

Un schéma de subdivision est défini par l'application récursive d'un opérateur de subdivision S, linéaire ou non, partant d'une donnée initiale $v^0 \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$, selon le modèle suivant :

$$v^j = Sv^{j-1},\ j \geq 1. \tag{5.17}$$

Typiquement l'indice j est associé à une échelle. On parle d'échelle dyadique lorsque les v_k^j sont reliés aux abscisses $2^{-j}k$, k appartenant à $\mathbb{Z}^d$.

Les schémas de subdivision ont été étudiés de manière intensive durant ces vingt dernières années. Dans le cas où S est linéaire et j est associé à des échelles dyadiques, l'étude à été menée dans [32]. Dans le cas de schémas linéaires associés à une matrice de dilatation quelconque M (i.e. dans $\mathbb{Z}^d$, les échelles j sont reliées aux points $M^{-j}k$, k appartenant à $\mathbb{Z}^d$), la convergence dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et dans les espaces de Sobolev a été étudiée respectivement dans [38] et dans [43][44]. Dans ces cas de figure, la stabilité du schéma de subdivision est une conséquence directe de la régularité de la fonction limite.

Les schémas de subdivision non linéaires trouvent leur intérêt dans leur adaptation locale aux données. Les schémas de subdivision non linéaires dépendant des données ont d'abord été introduits par Harten [39][40] à travers les méthodes dites ENO (essentially non-oscillatory). Ces méthodes ont ensuite été adaptées au traitement d'images notamment au travers de la méthode ENO-EA (EA pour "edge adapted"). Diffèrentes versions de ces méthodes existent et se fondent soit sur une interpolation polynômiale comme dans [27][3] soit sur une approche par ondelettes [22], correspondant à des schémas respectivement interpolant et non interpolant.

On étudie ici les schémas de subdivision dépendant des données associés à des matrices de dilatation M inversible quelconques. Nous donnons tout d'abord quelques définitions et rappelons ensuite différents résultats obtenus en termes de convergence et de stabilité. On généralise de ce fait certains résultats prouvés dans [27] où une approche par produit tensoriel avait été utilisée.

Définition 5.2.1 *Pour $v \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$, on définit un opérateur de subdivision S dépendant des données de la manière suivante :*

$$S(v)w_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} a_{k-Ml}(v)w_l, \tag{5.18}$$

pour tout w dans $\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$ et où $a_{k-Ml}(v) \in \mathbb{R}$ est tel que

$$a_{k-Ml}(v) = 0, \quad if \quad \|k-Ml\|_\infty > K \tag{5.19}$$

pour une constante fixée K. Les coefficients $a_k(v)$ sont supposés être uniformément bornés par une constante C :

$$\exists C\ \forall v\ |a_k(v)| \leq C.$$

Remarquons que la définition des coefficients dépend d'une suite v, tandis que $S(v)$ s'applique à la suite w. Notons aussi que, d'après (5.18) et (5.19) les valeurs $S(v)w_k$ dépendent seulement des valeurs l satisfaisant $\|k - Ml\|_\infty > K$. L'opérateur de subdivision est *local* en ce sens.

Soit un opérateur de subdivision dépendant des données, on définit alors le schéma de subdivision (dit schéma de subdivision dépendant des données) associé, de la manière suivante (en supposant que M est une matrice de dilatation) :

$$v^j = S(v^{j-1})v^{j-1},\ j \geq 1. \tag{5.20}$$

On rappelle alors la notion de reproduction polynômiale associée à opérateur de subdivision dépendant des données S. Si l'on appelle $\mathbb{P}_N$ l'espace des polynômes de degré total N :

$$\mathbb{P}_N := \{P; P(x) = \sum_{|\mu| \leq N} a_\mu x^\mu\},$$

la définition de la reproduction polynomiale s'écrit :

Définition 5.2.2 *Soit $N \geq 0$ un entier fixé et S un opérateur de subdivision dépendant des données.*

1. *S reproduit les polynômes de degré total N si pour tout $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$ et $P \in \mathbb{P}_N$ il existe $Q \in \mathbb{P}_{N-1}$ tel que $(S(u)p)_k = p(M^{-1}k) + Q(k)$*
2. *S reproduit exactement les polynômes de degré total N si $Q = 0$.*

Lorsque S est un opérateur de subdivision dépendant des données et reproduisant les polynômes, on est assuré de l'existence d'un schéma aux différences (résultat prouvé dans [A14]) :

Propriété 5.2.1 *Soit S un opérateur de subdivision dépendant des données reproduisant les polynômes jusqu'au degré total N, alors il existe un opérateur aux différences S_l pour $1 \leq l \leq N+1$ satisfaisant la propriété suivante pour tout v,w appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$,*

$$\Delta^l S(v)w := S_l(v)\Delta^l w$$

Pour étudier alors la convergence des schémas de subdivision à l'aide des opérateurs aux différences, nous avons besoin de la notion de *rayon spectral joint* associé à de tels opérateurs [72] :

Définition 5.2.3 *Soit S un opérateur de subdivision dépendant des données tel que les opérateurs aux différences S_l existent pour tout $l \leq N+1$. Alors, on peut définir pour chaque opérateur S_l, $l = 0, \cdots, N+1$ (en posant $S_0 = S$) son rayon spectral joint dans $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ par*

$$\rho_{p,l}(S) := \inf_{j \geq 1} \|(S_l)^j\|^{\frac{1}{j}}_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_l}}.$$

ou de manière équivalente :

$$\rho_{p,l}(S) := \inf_{j \geq 1}\{\rho, \|\Delta^l S^j v\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_l}} \lesssim \rho^j \|\Delta^l v\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_l} \to \ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_l}} \quad \forall v \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)\} \tag{5.21}$$

où q_l est défini en (5.16).

Nous avons ensuite montré des théorèmes de convergence dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ des schémas de subdivision, ce qui correspond à la définition suivante :

Définition 5.2.4 *Le schéma de subdivision $v^j = Sv^{j-1}$ converge dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, si pour tout ensemble de points $v^0 \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$, il existe une fonction non triviale v dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, appelée fonction limite, telle que*

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

où $v_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} v_k^j \phi_{j,k}(x)$ avec $\phi(x) = \prod_{i=1}^{d} \max(0, 1 - |x_i|)$.

Dans ce qui suit, nous donnons une condition suffisante de convergence dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour les schémas de subdivision non linéaires. Ce résultat est une généralisation d'un résultat existant établi dans le cas linéaire dans [38] et qui utilise uniquement l'opérateur S_1 :

Théorème 5.2.1 *Si S est un opérateur de subdivision reproduisant les constantes et si $\rho_{p,1}(S) < m^{\frac{1}{p}}$, alors Sv^j converge dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque 5.2.1 *Dans le théorème précédant, on peut montrer que la convergence reste vraie si l'on remplace, dans la définition de v_j, ϕ par n'importe quelle fonction satisfaisant la propriété de partition de l'unité, lorsque $p = \infty$. Pour p quelconque, on peut montrer, en suivant l'approche proposée dans le cas linéaire dans [38], que la fonction limite dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ est indépendante du choix de ϕ (à condition qu'elle soit continue et à support compact).*

A partir de là, nous avons énoncé des conditions suffisantes de convergence uniforme dans C^s du schéma de subdivision avec $s < 1$:

Théorème 5.2.2 *Soit S un opérateur de subdivision dépendant des données qui reproduit les constantes et tel que $\rho_{p,1}(S) < m^{-s+\frac{1}{p}}$, pour un certain $0 < s < 1$ alors le schéma de subdivision est convergent dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et la fonction limite est dans $C^s(\mathbb{R}^d)$.*

Nous avons, ensuite, étendu les résultats établis dans [43] sur la convergence de schémas de subdivision linéaires, au cas de schémas de subdivision dépendant des données. Pour une fonction ϕ, L^p-stable et satisfaisant l'équation d'échelle $\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k \phi(Mx-k)$, nous dirons que ϕ reproduit les polynômes de degré total N lorsque l'opérateur de subdivision linéaire associé à a le fait. Nous avons alors la définition suivante pour la convergence d'un schéma de subdivision dans un espace de Sobolev [43] :

Définition 5.2.5 *On dit que $v^j = Sv^{j-1}$ converge dans l'espace de Sobolev $W_N^p(\mathbb{R}^d)$ s'il existe une fonction v dans $W_N^p(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant :*

$$\lim_{j\to+\infty} \|v_j - v\|_{W_N^p(\mathbb{R}^d)} = 0$$

où v est dans $W_N^p(\mathbb{R}^d)$, et $v_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} v_k^j \phi(M^j x - k)$. La convergence devant avoir lieu pour tout ϕ reproduisant les polynômes de degré total N.

Nous avons montré que, dans le cas non linéaire, la convergence n'est assurée que si l'on fait des hypothèses restrictives sur ϕ. Les résultats de convergence que nous avons obtenus nécessitent, de plus, que la matrice M soit isotrope :

Définition 5.2.6 *On dit qu'une matrice M est isotrope si elle est semblable à une matrice diagonale $diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$,*

$$M = \Lambda^{-1} diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)\Lambda,$$

où $|\sigma_1| = \ldots = |\sigma_d|$.

Une matrice isotrope satisfait $|\sigma_1| = \ldots = |\sigma_d| = m^{\frac{1}{d}}$. De plus, pour toute norme sur $\mathbb{R}^d$, tout entier n et tout $v \in \mathbb{R}^d$ nous avons :

$$m^{n/d}\|u\| \lesssim \|M^n u\| \lesssim m^{n/d}\|u\|. \tag{5.22}$$

Un cas particulier de matrice isotrope est celui rencontré plus haut (voir section 5.2), c'est-à-dire une matrice M telle qu'il existe un ensemble $x_1, x_2, \cdots, \cdots, x_n$ satisfaisant :

$$Mx_i = \lambda_i x_{\gamma(i)} \tag{5.23}$$

où γ est une permutation de $\{1, \cdots, n\}$.

Nous avons tout d'abord établi une généralisation dans le cas non séparable d'une propriété sur le *rayon spectral joint*, qui est utile dans les preuves de convergence :

Propriété 5.2.2 *Supposons que S reproduise les polynômes jusqu'au degré total N. Alors,*

$$\rho_{p,n+1}(S) \geq \frac{1}{\|M\|_\infty}\rho_{p,n}(S),$$

pour tout $n = 0, \ldots, N$.

Dans le cas particulier où M est isotrope, on peut remplacer $\|M\|_\infty$ par $m^{1/p}$ du fait de la relation (5.22). Nous avons ensuite démontré un théorème de convergence impliquant des matrices isotropes M générales, en supposant l'exacte reproduction des polynômes pour l'opérateur de subdivision dépendant des données :

Théorème 5.2.3 *Soit S un opérateur de subdivision dépendant des données reproduisant exactement les polynômes jusqu'au degré total N, alors le schéma de subdivision Sv^j converge dans $W_N^p(\mathbb{R}^d)$ si ϕ est dans $W_N^p(\mathbb{R}^d)$, est à support compact et reproduit exactement les polynômes de degré N et si*

$$\rho_{p,N+1}(S) < m^{\frac{1}{p}-\frac{N}{d}}.$$

Nous avons enfin montré que, lorsque la matrice M satisfait (5.23) et lorsque ϕ est une box spline engendrée par des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ vérifiant l'équation (5.23), la fonction limite est dans $W_N^p(\mathbb{R}^d)$. Pour cela, nous avons eu besoin d'utiliser certaines propriétés de régularité et de reproduction polynômiale des box splines :

Propriété 5.2.3 *$\beta(x, X_n)$ est de classe C^r si tous les sous-ensembles de X_n obtenus en enlevant $r+1$ vecteurs engendrent $\mathbb{R}^d$.*

Propriété 5.2.4 *Si $\beta(x, X_n)$ est r fois continûment différentiable alors pour tout polynôme $c(x)$ de degré total $q \leq r+1$,*

$$p(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c(i)\beta(x - i, X_n) \tag{5.24}$$

est un polynôme de degré total q, avec les mêmes coefficients dominants que ceux de c. Réciproquement, tout polynôme p satisfait (5.24) avec c polynôme ayant les même coefficients dominants que p.

En utilisant les deux propriétés précédentes, nous sommes en mesure d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 5.2.4 *Soit S un opérateur de subdivision dépendant des données reproduisant les polynômes jusqu'au degré total N et supposons que M satisfait la relation (5.23), alors le schéma de subdivision Sv^j converge dans $W_N^p(\mathbb{R}^d)$, si ϕ est une box spline de classe C^{N-1} engendrée par un ensemble de vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ qui satisfait (5.23) et si*

$$\rho_{p,N+1}(S) < m^{\frac{1}{p}-\frac{N}{d}}. \tag{5.25}$$

Remarque 5.2.2 *Si l'on compare les Théorèmes 5.2.3 et 5.2.4, nous constatons que, lorsque l'opérateur de subdivision reproduit exactement les polynômes, ce qui est le cas des schémas interpolant, la convergence est assurée lorsque ϕ reproduit exactement les polynômes. Quand l'opérateur de subdivision reproduit les polynômes (mais pas exactement) la convergence est assurée lorsque ϕ est une box spline. Remarquons par ailleurs que les conditions de convergence portant sur le rayon spectral sont identiques.*

5.2.3 Stabilité des schémas de subdivision dépendant des données

Nous allons maintenant montrer des propriétés de stabilité de schémas de subdivision dépendant des données dans les espaces de Sobolev $W_N^p(\mathbb{R}^d)$. Nous rappelons que les éléments de $W_N^p(\mathbb{R}^d)$ sont les fonctions de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dont la différentielle jusqu'à l'ordre N est dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. La norme sur $W_N^p(\mathbb{R}^d)$ est définie comme suit :

$$\|v\|_{W_k^p(\mathbb{R}^d)} = \|v\|_{L^p} + \sum_{|\mu|\leq N} \|D^\mu v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

On utilise alors la définition suivante pour la stabilité des schémas de subdivision dépendant des données dans les espaces de Sobolev :

Définition 5.2.7 *Soit $v^j = Sv^{j-1}$ un schéma de subdivision dépendant des données, celui-ci est dit stable dans $W_N^p(\mathbb{R}^d)$ si pour tout v^0 et $\tilde{v}^0$ dans $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$, et si $\tilde{v}^j = S\tilde{v}^{j-1}$ et $v^j = Sv^{j-1}$ sont tels que v_j et $\tilde{v}_j$ tendent respectivement vers v et $\tilde{v}$ appartenant à $W_N^p(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\|D^\mu v - D^\mu \tilde{v}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \quad \forall |\mu| \leq N.$$

Nous avons alors établi le théorème suivant sur la stabilité du schéma de subdivision dans $W_N^p(\mathbb{R}^d)$. Nous présentons ici l'intégralité de la démonstration puisque celle-ci n'a pas été publiée :

Théorème 5.2.5 *Soit S un opérateur de subdivision dépendant des données et reproduisant exactement les polynômes jusqu'au degré total N. Si*

$$\|S_{N+1}^n \Delta^{N+1} v^0 - S_{N+1}^n \Delta^{N+1} \tilde{v}^0)\|_{(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^{q_{N+1}}} \lesssim \rho^n \|\Delta^{N+1}(v^0 - \tilde{v}^0)\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \tag{5.26}$$

pour un certain $\rho < m^{1/p-N/d}$ et pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et si ϕ appartient à $W_N^p(\mathbb{R}^d)$ et reproduit exactement les polynômes jusqu'au degré total N, alors le schéma de subdivision est stable dans $W_N^p(\mathbb{R}^d)$.

Avant de prouver le théorème proprement dit, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemma 5.2.1 *Supposons que S est un opérateur de subdivision dépendant des données, reproduisant exactement les polynômes jusqu'au degré total N et que ϕ reproduit exactement les polynômes jusqu'au degré total N alors :*

$$\|v^j - \tilde{v}^j\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \leq m^{1/p-N/d}\|v^{j-1} - \tilde{v}^{j-1}\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + C\|\Delta^{N+1}(v^{j-1} - \tilde{v}^{j-1})\|_{(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^{q_{N+1}}} \tag{5.27}$$

Preuve : Soit ϕ une fonction d'échelle reproduisant exactement les polynômes jusqu'au degré total N, elle définit un schéma de subdivision $\tilde{S}$ qui reproduit exactement les polynômes jusqu'au degré total N. Alors, on définit pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

$$r_i(x) = \sum_{l=1}^{d} \lambda_{i,l} x_l, \quad i = 1, \ldots, d,$$

où la matrice $\Lambda = (\lambda_{i,l})_{i,l=1}^d$ est la même que dans la Définition 5.2.6. Pour un multi-index $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d) \in \mathbb{N}^d$, posons

$$r_\mu(x) := r_1^{\mu_1}(x) \cdot \ldots \cdot r_d^{\mu_d}(x)$$

et considérons l'opérateur differentiel :

$$r_\mu(D) := r_1^{\mu_1}(D) \cdot \ldots \cdot r_d^{\mu_d}(D), \text{ ou } r_i(D) = \sum_{l=1}^{d} \lambda_{i,l} D_{e_l}, \ i = 1, \ldots, d.$$

Comme Λ est inversible, l'ensemble $\{r_\mu : |\mu| = N\}$ forme une base de l'espace des polynômes de degré total N, ce qui prouve que

$$\sum_{|\mu|=N} \|D_{e_1}^{\mu_1} \ldots D_{e_d}^{\mu_d}(v - v_j)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \sim \sum_{|\mu|=N} \sum_{l \geq j} \|r_\mu(D)(v_{l+1} - v_l)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Maintenant, en utilisant le fait que M est isotrope, il vient $r_\mu(D)(\phi(M^l x)) = \sigma^{l\mu/d}(r_\mu(D)\phi)(M^l x)$ [43], où $\sigma^\mu = \prod_{i=1}^{d} \sigma_i^{\mu_i}$. Ceci permet alors d'écrire :

$$\|r_\mu(D)(v_l - v_{l-1})\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \sim m^{l(-1/p+N/d)}\|v^l - \tilde{S}v^{l-1}\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}$$

En utilisant le fait que $\tilde{S}$ reproduit exactement les polynômes jusqu'au degré total N ainsi que le schéma de subdivision dépendant des données S et de part la linéarité de l'opérateur différentiel r_μ, nous déduisons que

$$\|r_\mu(D)(v_j - \tilde{v}_j)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|r_\mu(D)(v_{j-1} - \tilde{v}_{j-1})\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + Cm^{j(-1/p+N/d)}\|\Delta^{N+1}(v^{j-1} - \tilde{v}^{j-1})\|_{(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^{q_{N+1}}}.$$

Nous obtenons finalement :

$$\|v^j - \tilde{v}^j\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \leq m^{1/p-N/d}\|v^{j-1} - \tilde{v}^{j-1}\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + C\|\Delta^{N+1}(v^{j-1} - \tilde{v}^{j-1})\|_{(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^{q_{N+1}}}$$

□

Preuve du Théorème (5.2.5) : Remarquons que :

$$\sum_{|\mu|=N} \|D^\mu(v_j - \tilde{v}_j)\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \sim \sum_{|\mu|=N} \|r_\mu(D)(v_j - \tilde{v}_j)\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}.$$

Alors, puisque la matrice M est isotrope nous pouvons écrire :

$$\|r_\mu(D)(v_j - \tilde{v}_j)\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \sim m^{j(-1/p+N/d)}\|v^j - \tilde{v}^j\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}.$$

Considérons alors les suites $\alpha^j := m^{j(-1/p+N/d)}\|v^j - \tilde{v}^j\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}$ et $\beta^j = m^{j(-1/p+N/d)}\|\Delta^{N+1}(v^j - \tilde{v}^j)\|_{(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^{q_{N+1}}}$. D'après (5.26) et le lemme 5.2.1, ces suites satisfont les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \alpha^j \leq \alpha^{j-1} + D\beta^{j-1} \\ \beta^{j-1} \leq C(\rho m^{(-1/p+N/d)})^{j-1}\alpha^0, \end{cases}$$

où $\rho_{p,N+1}(S) < \rho < m^{1/p-N/d}$ et la constante C étant indépendante de j. D'après l'inégalité précédente, nous déduisons l'estimation suivante :

$$m^{j(-1/p+N/d)}\|v^j - \tilde{v}^j\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}$$

□

Remarque 5.2.3 *Le Théorème 5.2.5 que nous avons montré implique que les schémas de subdivision reproduise exactement les polynômes. Les exemples les plus communs de tels schémas sont les schémas interpolant pour lesquels l'opérateur de subdivision est défini en utilisant des polynòmes. Des exemples de tels schémas ont été donné dans [A14].*

5.3 Représentations multi-échelles non linéaires et non séparables

Une représentation multi-échelles d'un objet v (e.g. v est la fonction d'intensité associée à une image) est définie comme $\mathcal{M}v := (v^0, d^0, d^1, d^2, \cdots)$, où v^0 est l'approximation la plus grossière de v en un certain sens et d^j, avec $j \geq 0$, sont des coefficients additionnels représentant les fluctuations entre deux niveaux successifs. De nombreuses stratégies existent pour construire de telles représentations : bases d'ondelettes, schéma de lifting et aussi schéma discret de Harten [39]. En utilisant une base d'ondelettes, on calcule $(v^0, d^0, d^1, d^2, \cdots)$ par filtrage linéaire et ainsi la représentation multi-échelles correspond à un changement de base. Bien que les ondelettes soient optimales pour des fonctions monodimensionnelles, Cela n'est plus le cas pour des objets multi-dimensionnels, comme des images, où la présence de singularités requiert un traitement spécifique. Les propriétés d'approximation liées aux bases d'ondelettes et leur utilisation en traitement d'images sont maintenant bien comprises (voir [28] et [63] pour des détails).

Arriver à mieux prendre en compte ce problème de dimension a été pendant la dernière décennie un sujet de recherche actif. Nous mentionnons quelques approches directement issue de la théorie des ondelettes : la transformée en curvelettes [17], les directionlettes [31] et la transformée en bandelettes [57]. Une autre approche proposée dans [65] et développée ensuite dans [3] utilise le schéma discret de Harten. L'avantage de cette dernière approche est de conserver naturellement la structure de multirésolution associée au cas linéaire.

Les applications au traitement d'image de ces méthodes utilisant le schéma de Harten sont nombreuses. Par exemple, dans [3], l'extension des représentations unidimensionnelles à la dimension supérieure par produit tensoriel est proposée.

Une stratégie de construction de représentations multi-échelles non linéaires consiste à définir un opérateur de *prédiction* dépendant des données P_j^{j-1} calculant l'approximation $\hat{v}^j$ de v^j en utilisant $(v_k^{j-1})_{k\in\mathbb{Z}^d}$:

$$\hat{v}^j = P_j^{j-1}v^{j-1}.$$

De plus, on suppose que cet opérateur est relié à l'opérateur *linéaire* de projection P_{j-1}^{j} des données v^j sur V_{j-1}, par la relation de consistance suivante :

$$P_{j-1}^{j} P_{j}^{j-1} = I. \tag{5.28}$$

Ayant défini l'erreur de prédiction $e^j := v^j - \hat{v}^j$, on obtient une représentation redondante de v^j :

$$v^j = \hat{v}^j + e^j. \tag{5.29}$$

La relation de consistance permet alors d'écrire e^j d'une manière non redondante d^{j-1} (en utilisant une base du noyau de la projection P_j^{j-1}). On obtient alors une représentation équivalente (v^{j-1}, d^{j-1}) et, en itérant le procédé depuis la donnée initiale v^J, on obtient sa représentation multi-échelles :

$$\mathcal{M} v^J = (v^0, d^0, \ldots, d^{J-1}). \tag{5.30}$$

Remarquons aussi qu'en dimension finie, l'égalité suivante est toujours vérifiée :

$$\|e^j\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \sim \|d^{j-1}\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}. \tag{5.31}$$

Comme les détails sont calculés de manière adaptative, la représentation multi-échelles sous-jacente n'est pas équivalente à un changement de base.

L'opérateur de prédiction dépendant des données est alors défini à partir d'un opérateur de subdivision dépendant des données de la manière suivante :

$$\hat{v}^j \quad = \quad P_j^{j-1} v^{j-1} = S(v^{j-1}) v^{j-1}. \tag{5.32}$$

5.3.1 Analyse multirésolution dépendant d'une matrice M

Nous avons étudié un nouveau type de représentation multi-échelles non linéaires et non séparables (i.e les échelles j sont associées des points M^{-j} où M est une matrice de dilatation inversible non diagonale). L'utilisation d'une matrice de dilatation non diagonale est motivée par de meilleures performances de compression [23].

Les représentation non-linéaires que nous avons étudiées reposent sur une analyse multirésolution (MRA) linéaire pour laquelle les échelles sont définies à l'aide de la matrice M :

Définition 5.3.1 *Une analyse multirésolution de V espace de Hilbert est une séquence $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces de V qui satisfont les propriétés suivantes :*

1. *Les sous-espaces sont emboités : $V_j \subset V_{j+1}$;*
2. *$f \in V_j$ si et seulement si $f(M.) \in V_{j+1}$;*
3. *$\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = V$;*
4. *$\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;*
5. *Il existe une fonction à support compact $\phi \in V_0$ telle que la famille $\{\phi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ soit une base de Riesz de V_0.*

La fonction ϕ est appelée *fonction échelle*. Puisque $V_0 \subset V_1$, ϕ satisfait l'équation suivante :

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} g_k \phi(Mx - k), \text{ with } \sum_k g_k = m. \tag{5.33}$$

On suppose de plus qu'il existe une fonction $\tilde{\phi}$ *duale* de ϕ satisfaisant l'équation d'échelle :

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d:\|n\|_\infty\leq P} \tilde{h}_n\tilde{\phi}(Mx-n), \text{ avec } \sum_k \tilde{h}_k = m. \tag{5.34}$$

La projection v_j de v sur V_j s'écrit alors :

$$v_j = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} v_n^j \phi(M^j \cdot -n). \tag{5.35}$$

où

$$v_n^j = \int v(x) m^j \tilde{\phi}(M^j x - n)dx, \quad n \in \mathbb{Z}^d. \tag{5.36}$$

Dans ce contexte, l'opérateur de projection est directement déterminé par la fonction $\tilde{\phi}$ et l'on a :

$$v_k^{j-1} = m^{-1} \sum_{\|n-Mk\|_\infty\leq P} \tilde{h}_{n-Mk} v_n^j := (P_{j-1}^j v^j)_k$$

Des représentations multi-échelles linéaires fondées sur des choix particuliers de $\tilde{\phi}$ sont communément utilisées en traitement d'image et en analyse numérique. Nous en mentionons deux particulières : la première correspond au cas des valeurs ponctuelles qui est obtenue lorsque $\tilde{\phi}$ est la distribution de Dirac et la seconde est le cas des valeurs moyennes obtenu quand $\tilde{\phi}$ est la fonction indicatrice d'un certain domaine de $\mathbb{R}^d$.

Si pour tout $k, l \in \mathbb{Z}^d$ et tout $w \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$ on pose $a_{k-Ml}(w) = g_{k-Ml}$, où g_{k-Ml} est définie par l'équation (5.33), on obtient l'opérateur de prédiction *linéaire* $\tilde{S}$. Dans le cas général, l'opérateur de prédiction P_j^{j-1} peut être vu comme une perturbation de l'opérateur de prédiction, du fait de la propriété de consistance.

5.3.2 Convergence des représentations multi-échelles

Nous allons étudier la convergence des représentations multi-échelles, c'est-à-dire étant donnée une fonction v, dans quelle mesure celle-ci peut être représentée à l'aide de ces coefficients multi-échelles non linéaires d^j. Dans [P2], nous avons montré en utilisant une caractérisation particulière des espaces de Besov, le théorème *direct* suivant :

Théorème 5.3.1 *Si pour tout $p, q \geq 1$ et un réel positif s, v appartient à $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$, si l'opérateur de subdivision dépendant des données reproduit les polynômes de degré total $N-1$ avec $N > s$, et si la matrice M est isotrope, alors*

$$\|v^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \|(m^{(s/d-1/p)j}\|(d_k^j)_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)})_{j\geq 0}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} \lesssim \|v\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.37}$$

Un théorème similaire peut être obtenu si v appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$. Les théorèmes *inverses* utilisent le fait que, lorsque l'opérateur de subdivision dépendant des données reproduit les polynômes jusqu'à l'ordre $N-1$, il existe un opérateur associé aux différences d'ordre N (voir Propriété 5.2.1).

Pour l'étude des représentations multi-échelles non linéaires, nous devons (comme pour la convergence des schémas de subdivision dépendant des données) utiliser la notion de *rayon spectral joint*. Cependant, nous devons modifier la Définition 5.2.3 du *rayon spectral joint* pour tenir compte du fait que les v^j ne sont plus associés à un schéma de subdivision. Nous utilisons donc la définition suivante :

Définition 5.3.2 *Soit S_l un opérateur aux différences d'ordre l (s'il existe) associé à l'opérateur de subdivision dépendant des données S. Le rayon spectral joint dans $(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^{q_l}$ de S_l est donné par*

$$\begin{aligned}\rho_{p,l}(S) &:= \inf_{j>0} \sup_{(w^0,\cdots,w^{j-1})\in(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^j} \|S_l(w^{j-1})\cdot\ldots\cdot S_l(w^0)\|^{1/j}_{(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^{q_l}\to(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^{q_l}} \\ &= \inf_{j>0}\{\rho, \|S_l(w^{j-1})\cdots S_l(w^0)\Delta^l v\|_{(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^{q_l}} \lesssim \rho^j\|\Delta^l v\|_{(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^{q_l}}, \forall v\in\ell^p(\mathbb{Z}^d)\}.\end{aligned}$$

Avec cette nouvelle définition du *rayon spectral joint*, plus adaptée à l'étude des représentations multi-échelles non linéaires, nous sommes en mesure d'énoncer les théorèmes *inverses* suivants :

Théorème 5.3.2 *Soit S un opérateur de subdivision dépendant des données qui reproduit les constantes. Supposons que $\rho_{p,1}(S) < m^{1/p}$, alors si*

$$\|v^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \sum_{j\geq 0} m^{-j/p}\|d^j\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} < \infty,$$

la fonction limite v appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|v^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \sum_{j\geq 0} m^{-j/p}\|d^j\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}. \tag{5.38}$$

Nous pouvons alors étendre ce résultat à la convergence dans les espaces de Besov :

Théorème 5.3.3 *Soit S un opérateur de subdivision dépendant des données reproduisant exactement les polynômes de degré $N-1$ et soit ϕ reproduisant exactement les polynômes de degré $N-1$. Supposons que $\rho_{p,N}(S) < m^{1/p-s/d}$ pour $N > s \geq N-1$. Si $(v^0, d^0, d^1, \ldots)$ sont tels que*

$$\|v^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \|(m^{(s/d-1/p)j}\|(d^j_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)})_{j\geq 0}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} < \infty,$$

la fonction limite v appartient à $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|v\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|v^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \|(m^{(s/d-1/p)j}\|(d^j_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)})_{j\geq 0}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}. \tag{5.39}$$

Remarque 5.3.1 *Nous avons donc montré que, lorsque l'opérateur de subdivision dépendant des données reproduit exactement les polynômes, la fonction v peut être totalement caractérisée par ces coefficients multi-échelles non linéaires d^j. De tels types d'opérateurs de subdivision peuvent être écrits dans le cas interpolant. Nous en verrons des exemples plus loin.*

5.3.3 Stabilité des représentations multi-échelles

Le problème de la stabilité est crucial dans les applications. En effet, il est important de comprendre comment une perturbation de la décomposition multi-échelles $(v^0, d^0, d^1, \ldots)$ en $(\tilde{v}^0, \tilde{d}^0, \tilde{d}^1, \ldots)$ affecte la fonction limite (notée v (resp. $\tilde{v}$) pour la première (resp. deuxième) représentation.

Nous avons étudié la stabilité de la représentation multi-échelles dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, qui est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5.3.4 *Soit S un opérateur de subdivision dépendant des données qui reproduit les constantes et supposons qu'il existe un $\rho < m^{1/p}$ et un n tels que :*

$$\|(S_1)^n w - (S_1)^n v\|_{(\ell^p(\mathbb{Z}^d))^d} \leq \rho^n\|v-w\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)^d} \quad \forall v, w \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)^d.$$

Supposons par ailleurs que v_j et $\tilde{v}_j$ converge respectivement vers v et $\tilde{v}$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, alors on a :

$$\|v-\tilde{v}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|v^0-\tilde{v}^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \sum_{l\geq 0} m^{-l/p}\|d^l-\tilde{d}^l\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}. \tag{5.40}$$

Au regard du théorème inverse dans les espace de Besov, il est naturel de rechercher une inégalité du type suivant pour prouver la stabilité :

$$\|v-\tilde{v}\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|v^0-\tilde{v}^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \|(m^{(s/d-1/p)j}\|d^j_\cdot-\tilde{d}^j_\cdot\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)})_{j\geq 0}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}. \tag{5.41}$$

Nous voyons donc que, tout comme dans l'étude de la stabilité des schémas de subdivision, la stabilité de la représentation multi-échelles utilise une propriété de contraction du schéma aux différences mais ne fait plus directement appel au *rayon spectral joint*.

Nous avons ensuite montré la stabilité dans les espaces de Besov au travers du théorème suivant :

Théorème 5.3.5 *Supposons que S est un opérateur de subdivision dépendant des données qui reproduit exactement les polynômes de degré $N-1$ et tel que $\rho_{p,N}(S) < m^{1/p-s/d}$ pour un certain $s > N-1$. Supposons que v_j et $\tilde{v}_j$ converge vers v et $\tilde{v}$ dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ respectivement et qu'il existe un $\rho < m^{1/p-s/d}$ et un n tels que :*

$$\|(S_N)^n w-(S_N)^n v\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_N}} \leq \rho^n\|w-v\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_N}} \quad \forall v,w\in \ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_N},$$

alors, on obtient que :

$$\|v-\tilde{v}\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|v^0-\tilde{v}^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \|(m^{-j(1/p-s/d)}\|(d^j_k-\tilde{d}^j_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)})_{j\geq 0}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}. \tag{5.42}$$

5.4 Un nouveau formalisme pour les représentations multi-échelles

Nous avons remarqué que le formalisme des schémas de subdivision dépendant des données est un trop genéral pour les applications pratiques. De plus, les théorèmes de convergence et de stabilité que nous avons prouvé jusqu'à présent ne concernent que des représentations multi-échelles construites en utilisant des opérateurs de subdivision reproduisant exactement les polynômes. Les représentations multi-échelles fondées sur les valeurs moyennes ne rentrent par conséquent pas dans ce cadre.

Nous avons présenté dans [P2] un nouveau formalisme pour les représentations multi-échelles non linéaires et non séparables qui sont construites non plus à partir de schémas de subdivision dépendant des données mais à partir d'une perturbation du schéma de subdivision linéaire associé à la fonction ϕ de l'analyse multirésolution.

Plus précisément, la plupart des représentations multi-échelles décrite dans la littérature peut être vue comme la somme d'un opérateur de subdivision linéaire et d'une perturbation qui peut être décrite à l'aide de différences finies d'un certain ordre. Il est notoire que l'ordre des différences dans la perturbation est souvent lié au degré total des polynômes reproduits par l'opérateur de subdivision linéaire. Nous en verrons des exemples dans la section suivante.

Notre étude repose sur la définition suivante de l'opérateur de subdivision, que l'on appellera par la suite opérateur de subdivision *Lipschitz-Linéaire* :

Définition 5.4.1 *Un opérateur de subdivision S est Lipschitz-Linéaire d'ordre $N+1$, s'il existe un opérateur de prédiction local et linéaire $\tilde{S}$ reproduisant les polynômes de degré total N, et une fonction Lipschitz Φ_i, $i=0,\cdots,m-1$ telle que :*

$$(Sv)_{Mk+i} = (\tilde{S}v)_{Mk+i} + \Phi_i(\Delta^{N+1}v_{k+p_1},\cdots,\Delta^{N+1}v_{k+p_q}) \quad \forall i\in \ coset(M)$$

où $\{p_1,\cdots,p_q\}$ est un ensemble fixe et où M est une matrice de dilatation.

Remarque 5.4.1 *On peut tout de suite remarquer, d'après la définition précédente, que quand $\tilde{S}$ reproduit les polynômes de degré N, il en est de même pour S.*

Comme exemples monodimensionnels, on peut citer le schéma PPH qui est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{v}^j_{2k+1} = \frac{v^{j-1}_{k+1}+v^{j-1}_k}{2} - \frac{1}{8}H(\Delta^2 v^{j-1}_{k-1}, \Delta^2 v^{j-1}_k) \\ \hat{v}^j_{2k} = v^{j-1}_k \end{array} \right. \tag{5.43}$$

où $H(x,y) := \frac{xy}{x+y}(\text{sign}(xy)+1)$. Comme H satisfait $|H(x,y)-H(x',y')| \leq 2\max\{|x-x'|,|y-y'|\}$ [50], il est Lipschitzien par rapport à (x,y) et puisque le schéma linéaire $\frac{v^{j-1}_{k+1}+v^{j-1}_k}{2}$ reproduit les polynômes de degré 1, le schéma PPH est un opérateur de prédiction *Lipschitz-Linéaire* d'ordre 2. Le schéma power-P, est une généralisation du schéma PPH en remplaçant H par

$$H_p(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{x+y}{2}\left(1 - |\frac{x-y}{x+y}|^p\right), \quad xy > 0 \\ 0, \quad xy \leq 0. \end{array} \right.$$

Cependant H_p n'est plus Lipschitzien mais seulement Lipschitzien par morceaux. Nous avons néanmoins montré dans [P2] que, modulo de petites modifications, on pouvait obtenir un opérateur de subdivision *Lipschitz-Linéaire* d'ordre 2. Nous avons aussi montré dans [P2], dans quelle mesure les opérateurs de subdivision WENO pouvaient aussi être considérés comme *Lipschitz-Linéaire.*

5.4.1 Convergence de ces nouvelles représentations multi-échelles

Nous avons, dans un premier temps, montré comment le fait de savoir que l'opérateur de subdivision est *Lipschitz-Linéaire* simplifie beaucoup l'étude de la convergence.

Tout d'abord, l'existence d'un opérateur aux différences découle directement de la définition, c'est-à-dire que si S est un opérateur *Lipschitz-Linéaire* d'ordre $N+1$, il existe pour tout $k \leq N+1$ un opérateur S_k défini par : $\Delta^k S v = S_k \Delta^k v$.

Si l'on considère une représentation multi-échelles associée à un opérateur de subdivision *Lipschitz-Linéaire*, nous avons alors prouvé le théorème *inverse* suivant :

Théorème 5.4.1 *Soit S un opérateur Lipschitz-Linéaire d'ordre $N+1$. Supposons que $\rho_{p,k}(S) < m^{1/p}$, pour un certain $k \leq N+1$ et que*

$$\|v^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \sum_{j>0} m^{-j/p}\|e^j\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} < \infty.$$

Alors, la fonction limite v appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|v^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \sum_{j>0} m^{-j/p}\|e^j\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \tag{5.44}$$

Remarque 5.4.2 *Comme dans [P2] nous n'avons pas introduit d'opérateur de projection, les détails sont donc toujours sous la forme e^j et non d^j. Nous avons donc, a priori, une représentation redondante. Si l'on cherche à utiliser ce genre de modèle pour des applications en compression par exemple, il faut veiller à ce que la représentation ne soit plus redondante. Par ailleurs, il est important de noter que la convergence dans L^p des représentations multi-échelles est, en général, associée à la condition $\rho(S^{(1)}) < m^{1/p}$ (voir Théorème 5.3.2). Si l'on considère un opérateur de*

prédiction Lipschitz - Linéaire d'ordre $N+1$, la convergence dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ est assurée à condition que $\rho_{p,k}(S) < m^{1/p}$, pour un certain $k \leq N+1$. Ceci est intéressant, car il n'existe pas de relations d'ordre entre $\rho_{p,k}(S)$ et $\rho_{p,k+1}(S)$. Enfin, et c'est le plus important, avec un tel modèle, la convergence dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ ne nécessite plus la reproduction exacte des polynômes.

De la même manière, la convergence dans les espaces de Besov ne nécessite plus la reproduction exacte des polynômes et nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 5.4.2 *Soit S un opérateur de subdivision Lipschitz-Linéaire d'ordre $N+1$. Supposons que $\rho_{p,k}(S) < m^{1/p-s/d}$ pour un certain $s \geq N$ et un certain $k \leq N+1$, et aussi que $(v^0, e^1, e^2, \ldots)$ satisfait*

$$\|v^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \|(m^{(s/d-1/p)j}\|(e_k^j)_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)})_{j>0}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} < \infty.$$

Alors, la fonction limite v appartient à $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|v\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|v^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \|(m^{(s/d-1/p)j}\|(e_k^j)_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)})_{j>0}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}. \tag{5.45}$$

On voit encore l'intérêt d'étudier les représentations multi-échelles construites à partir d'opérateurs de subdivision *Lipschitz-Linéaire* car on constate que, dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'étudier le *rayon spectral joint* de S^{N+1} pour prouver la convergence.

5.4.2 Stabilité de ces représentations multi-échelles

Les modifications par rapport au cas classique concernant la stabilité des représentations multi-échelles associées à des opérateurs de prédiction *Lipschitz-Linéaires* sont de même nature que celles portant sur la convergence. En effet, en ce qui concerne la stabilité dans L^p nous avons le théorème suivant dans [P2] :

Théorème 5.4.3 *Soit S un opérateur de prédiction Lipschitz-Linéaire d'ordre $N+1$, et supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ et un $\rho < m^{1/p}$ tels que :*

$$\|(S_k)^n v - (S_k)^n w\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_k}} \leq \rho^n \|v - w\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_k}} \quad \forall v, w \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_k},$$

pour un certain $k \leq N+1$. Supposons aussi que v_j et $\tilde{v}_j$ convergent respectivement vers v et $\tilde{v}$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, alors, on obtient :

$$\|v - \tilde{v}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{l=1}^{j} m^{-l/p} \|e^l - \tilde{e}^l\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \tag{5.46}$$

Une extension naturelle porte sur la stabilité de la représentation multi-échelles dans les espaces de Besov, pour laquelle nous avons montré le théorème suivant [P2] :

Théorème 5.4.4 *Supposons que S est un opérateur de prédiction Lipschitz-Linéaire d'ordre $N+1$ tel qu'il existe un n appartenant à $\mathbb{N}$ et $\rho < m^{1/p-s/d}$ pour un certain $s > N$ tels que :*

$$\|(S_k)^n v - (S_k)^n w\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_k}} \leq \rho^n \|v - w\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_k}} \quad \forall v, w \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)^{q_k}$$

pour un certain $k \leq N+1$. Supposons aussi que v_j et $\tilde{v}_j$ converge dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ vers v et $\tilde{v}$ respectivement. Alors nous pouvons écrire que :

$$\|v - \tilde{v}\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \|(m^{j(s/d-1/p)}\|(e_k^j - \tilde{e}_k^j)_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)})_{j>0}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}. \tag{5.47}$$

5.4.3 Opérateurs de subdivision $(\mathcal{A}, I)$-compatible

Ayant montré les simplifications apportées aux théorèmes de convergence et de stabilité lorsque l'on suppose que l'opérateur de subdivision est *Lipschitz-Linéaire*. Nous remarquons qu'il existe une sous-classe des opérateurs de subdivision *Lipschitz-Linéaires* pour laquelle l'étude de la convergence et de la stabilité est encore simplifiée. Il s'agit des opérateurs de subdivision que nous avons nommés $(\mathcal{A}, I)$-compatibles que l'on a aussi introduits dans [P2].

Etant donné une famille de multi-index I et de vecteurs $\mathcal{A}$, on définit :

$$\Delta^{\mathcal{A}_I} \quad = \quad \left\{ \Delta_{a_1}^{i_1} \cdots \Delta_{a_p}^{i_p},\ a_k \in \mathcal{A}, i_k \in I \right\}.$$

En d'autres termes, $\Delta^{\mathcal{A}_I}$ est un opérateur aux différences calculé selon la famille $\mathcal{A}$ de vecteurs, les ordres de différentiation étant donnés par I. Alors, nous introduisons la définition suivante d'opérateur de subdivision $(\mathcal{A}, I)$-compatible :

Définition 1 *Un opérateur de subdivision S est dit $(\mathcal{A}, I)$-compatible s'il existe un opérateur de subdivision linéaire local $\tilde{S}$ tel que S s'écrive :*

$$(Sv)_{Mk+i} = (\tilde{S}v)_{Mk+i} + \Phi_i(\Delta^{\mathcal{A}_I} v_{k+p_1}, \cdots, \Delta^{\mathcal{A}_I} v_{k+p_q}) \quad \forall i \in \ coset(M)$$

où $\{p_1, \cdots, p_q\}$ est un ensemble fixé, et Φ_i est une fonction Lipschitzienne et s'il existe un opérateur $\tilde{S}_{\mathcal{A}_I}$ satisfaisant :

$$\Delta^{\mathcal{A}_I} \tilde{S} v \quad = \quad \tilde{S}_{\mathcal{A}_I} \Delta^{\mathcal{A}_I} v.$$

Nous pouvons alors étendre toutes les notions décrites dans la section précédente pour les opérateurs de subdivision *Lipschitz-Linéaire* au cas des opérateurs de subdivision $(\mathcal{A}, I)$-compatibles (i.e. représentations multi-échelles, *rayon spectral joint* de $S_{\mathcal{A}_I}$, théorèmes de convergence et de stabilité).

L'intérêt d'utiliser la notion de $(\mathcal{A}, I)$-compatibilité est de donner des preuves de convergence là où, dans certain cas, l'approche classique ne fonctionne pas (ou nécessiterait beaucoup de calculs). La notion de $(\mathcal{A}, I)$-compatibilité permet aussi de réduire de manière significative le nombre des différences à calculer pour étudier le *rayon spectral joint* dans les preuves de convergence. Notons, finalement, que la notion de compatibilité développée ici n'est pas reliée à celle de reproduction polynômiale, ce qui en fait un nouvel outil d'analyse. D'un point de vue pratique, étant donné un opérateur de subdivision, nous identifions tout d'abord si celui-ci est *Lipschitz-Linéaire* ou $(\mathcal{A}, I)$-compatible et nous procédons ensuite à l'analyse de la représentation multi-échelles correspondante.

5.5 Exemples numériques

On présente ici une illustration simple unidimensionnel impliquant le schéma PPH qui correspond à un opérateur de subdivision *Lipschitz-Linéaire* d'ordre 2, pour lequel la convergence dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ a lieu lorsque $\rho_p(S_k) < 2^{1/p}$ pour $k = 1$ ou $k = 2$.

On peut en effet trouver un majorant pour $\rho_\infty(S_2)$, car on a :

$$\begin{aligned} (S_2 w)_{2i} &= \frac{1}{4} H(w_{i-1}, w_i) \\ (S_2 w)_{2i+1} &= \frac{w_i}{2} - \frac{1}{8} \left(H(w_{i-1}, w_i) + H(w_i, w_{i+1}) \right). \end{aligned} \tag{5.48}$$

En utilisant le fait que $|H(x,y)| \leq |\max(x,y)|$, on obtient immédiatement $\rho_\infty(S_2) < \frac{3}{4}$, ce qui implique la convergence de la représentation multi-échelle dans $L^\infty(\mathbb{R})$, grâce au Théorème 5.4.1. En ce qui concerne la stabilité, il a été prouvé dans [50] que :

$$\|(S_2)^2 w - (S_2)^2 v\|_\infty \leq \frac{3}{4}\|v - w\|_\infty \quad \forall v, w \in l^\infty(\mathbb{Z}^2),$$

ce qui assure la stabilité de la représentation dans L^∞ en utilisant le Théorème 5.4.3 (une autre démonstration est donnée par le Théorème 1 de [50]).

On peut de même utiliser l'écriture simple de S_2 pour trouver une nouvelle preuve de convergence et de stabilité de la représentation multi-échelles fondée sur le schéma PPH dans L^p. Nous avons montré dans [P2] que le schéma était convergent pour tout $p \geq 1$, tandis que pour la stabilité, nous avons montré une relation du type :

$$\|S_2 w - S_2 v\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \quad \leq \quad (\frac{3}{2} + \frac{1}{2^p})^{1/p}\|w - v\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}$$

ce qui prouve que la représentation multi-échelle est stable pour $p > 1$ ($i.e. \frac{3}{2} + \frac{1}{2^p} < 2$, car $m = 2$ dans ce cas), toujours en utilisant le Théorème 5.4.3.

Pour donner une illustration dans le cas bidimensionnel nous considèrons le schéma PPH suivant :

$$\begin{aligned} \hat{v}^j_{Mk+e_1} &= \frac{v^{j-1}_k + v^{j-1}_{k+Me_1}}{2} - \frac{\omega}{8} H(\Delta^2_{Me_1} v^{j-1}_k, \Delta^2_{Me_1} v^{j-1}_{k-Me_1}) \\ \hat{v}^j_{Mk} &= v^{j-1}_k. \end{aligned} \tag{5.49}$$

pour un certain $0 < \omega < 1$. Considérer $\omega < 1$, à la place de $\omega = 1$ qui est le schéma classique, apparaîtra plus clairement par la suite. Nous remarquons tout d'abord que le schéma proposé correspond à un schéma de subdivision *Lipschitz-Linéaire*, qui est aussi $(\mathcal{A}, I)$-compatible avec $\mathcal{A} = \{e_1, Me_1\}$ et $I = \{(0,2),(2,0)\}$, où M est la matrice de quincunx. Pour prouver la convergence de la représentation multi-échelles, on étudie le *rayon spectral joint* de $S_{\mathcal{A}_I}$. Nous avons montré, dans [P2], que $\rho_\infty(S_{\mathcal{A}_I}) \leq \sqrt{\frac{1+\omega}{2}} < 1$, ce qui prouve la convergence dans L^∞. De même, on peut prouver que cette représentation est convergente dans L^p, pour $\omega = 1$ et $p > 1$ et qu'elle est stable dans L^p pour $p \geq 1$ dès que $\omega < 1/2$.

Les exemples numériques donnés font tous intervenir des schémas interpolant, mais il serait aussi pertinent de trouver des illustrations faisant intervenir des schémas non interpolant (type cell-average) dont l'étude des représentations multi-échelles associées est rendue possible par le cadre théorique proposé.

Chapitre 6

Perspectives

Dans ce chapitre, nous faisons un bref tour d'horizon des perspectives à cour terme sur les différentes thématiques que nous avons abordées.

6.1 Perspectives concernant L'EMD

6.1.1 Perspectives concernant L'EMD monodimensionnel

Vue sous un autre angle, l'EMD nous apparaît comme un problème d'échantillonage où le postulat de départ est que les points importants d'un signal sont ses extrema. Il est cependant clair que l'information entre les extrema est essentielle pour reconstruire le signal. A ce titre, nous avons vu dans le chapitre 3, que les *lignes de maxima* associées à la transformée de Berkner contiennent toute l'information nécessaire à la reconstruction d'un signal. Partant de cette remarque nous allons regarder comment construire un algorithme adaptatif de décomposition des signaux utilisant les *lignes de maxima*. Cela fera partie du travail de thèse de Thomas Oberlin.

6.1.2 Perspectives de l'EMD bidimensionnelle

Si l'on revient aux perspectives de l'EMD concernant le traitement d'images, des approches ont été proposées pour chercher à capturer les oscillations (ou textures) dans une image tout en préservant les contours [78]. Dans l'EMD bidimensionnelle telle que nous l'avons proposée dans [A6], la définition d'extrema (un point est un extremum s'il est plus grand en module que ses huit plus proches voisins) ne permet pas de prendre en compte la notion de contours dans les images : les enveloppes des maxima et des minima ne contiennent pas suffisamment de points car la définition d'un extremum est trop stricte. La définition adoptée dans [78], est de considérer qu'un point est un maximum (resp. minimum) si, sur un voisinage de taille $k \times k$, seules $k-1$ sont plus grandes (resp. petites) que lui. Les enveloppes des maxima et des minima passant par ces points permettent de définir une enveloppe moyenne qui, une fois soustraite au signal permet de séparer les oscillations de la partie lisse. Il est à noté que k augmente lorsque l'on cherche à extraire ensuite les oscillations de la partie lisse définie à l'étape précédente. Bien que donnant d'excellents résultats numériques, cette méthode ne repose sur aucune base théorique, et l'analyse d'une telle méthode fera l'objet de travaux futurs.

6.2 Perspectives concernant les représentations multi-échelles non linéaires

Dans le chapitre 5, nous avons montré dans un premier temps des résultats de convergence et de stabilité portant principalement sur des opérateurs de subdivision reproduisant exactement les polynômes. Nous avons ensuite montré des preuves de stabilité pour des représentations multi-échelles se fondant sur des opérateurs de subdivision ne reproduisant pas exactement les polynômes. Les applications naturelles de ce type de représentations multi-échelles concernent principalement la compression d'images pour laquelle les représentations non interpolante (de type cell-average) sont réputées plus performants. Cependant, il n'existe pas à ma connaissance de représentations de ce type qui soit stable et convergente en même temps qu'efficace pour la compression. Nous souhaitons travailler dans cette direction dans un proche avenir.

Une autre perspective dans ce domaine consisterait à changer l'ordre d'approximation des schémas de subdivision au voisinage des singularités. Par exemple, si l'on considère le schéma PPH, au niveau des singularités la prédiction s'effectue à l'aide d'un polynôme de degré 1, alors que l'ordre d'approximation est polynomiale de degré 3 loin des singularités. La même idée est exploitée dans [26], où le support de l'opérateur de subdivision diminue au voisinage des singularités. Dans cette dernière approche, l'étude de la stabilité est reliée à une stratégie dite de "contrôle de l'erreur" (en considérant que les perturbations pouvant rendre la représentation instable proviennent uniquement des erreurs de quantification) qui semble trop réductrice. Par ailleurs, l'opérateur de subdivision pour les images est toujours obtenu par produit tensoriel d'un opérateur uni-dimensionnel. Nous pensons donc qu'il reste encore pas mal de travail pour construire des représentations multi-échelles qui soient non séparable, stable et convergente, tout en étant pertinente pour la compression d'image. Nous travaillons actuellement dans cette direction.

Bibliographie

[1] M. Acharyya and M.K. Kundu, *An adaptative approach to unsupervised texture segmentation using M-Band Wavelet transform*, Signal Processing, vol. 81, pp.1337-1356, 2001.

[2] M. Acharyya and M.K. Kundu, *Adaptative basis selection for multi-texture segmentation by M-band wavelet packet frames* Proc. Int. Conf. On Image Processing (ICIP'01), Greece, pp. 622-625, 2001.

[3] F. Arandiga,A. Cohen,R. Donat, N. Dyn and B. Matei *Approximation of Piecewise Smooth Functions and Images by edge-adapted (ENO-EA) Multiresolution Techniques*, ACHA, vol. 24, pp. 225-250, 2008.

[4] A. Arneodo, E. Bacry, and J.F. Muzy, Singularity Spectrum of Fractal Signals : Exact Results, Journal of Statistical Physics, vol. 70, pp. 635-674, 1993.

[5] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, and J.F. Muzy, Oscillating Singularities on Cantor Sets : a Grand-Canonical Multifractal Formalism, Journal of Statistical Physics, vol. 87, pp. 179–209, 1997.

[6] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, and J.F. Muzy, Singularity Spectrum of Multifractal Functions Involving Oscillating Singularities, Journal of Fourier Analysis and Applications, vol. 4(2), pp. 159-174, 1998.

[7] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, and J.F. Muzy, Oscillating Singularities and Fractal Functions. Spline Functions and the Theory of Wavelets, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 18, 315-329, 1999.

[8] T. Asahi, K. Ichige and R. Ishii, *A New Formulation for Discrete Box Splines Reducing Computational Cost and its Evaluation*, IEICE Transactions on Fundamentals, vol. E84-1,no. 3, pp. 884-892, 2001.

[9] J.F. Aujol, G. Aubert and L. Blanc-Féraud, *Wavelet-Based Level Set Evolution for Classification of Textured Images*, IEEE Trans. Image Processing, vol. 12, pp. 1634-1641, 2003.

[10] K. Berkner, R.O. Wells, *A New Hierarchical Scheme for Approximating the Continuous Wavelet Transform with Applications to Edge Detection*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 6, pp. 193-195, 1999.

[11] K. Berkner, R. O. Wells, *A Fast Approximation to the Continuous Wavelet Transform with Applications*, Proceedings of the Asimolar, 1997.

[12] A. Benassi, S. Cohen, J. Istas, and S. Jaffard, *Identification of Filtered White Noises*, Stochastic Processes and Their Applications, vol. 75(1), pp. 31-49, 1998.

[13] Z. Berman, *Generalization and properties of the multiscale-maxima and zero-crossings representation*, PhD dissertation, University of Maryland, College Park 1992.

[14] J. Bigot, *A Scale-Space Approach with Wavelets to Singlarity Estimation*, Proccedings ESAIM, vol. 9, pp. 143-164, 2005.

[15] J. Bigot, *Automatic Landmark Registration of 1d Curves*, In Recent Advances and Trends in Nonparametric Statistics, pp. 479-496, Amsterdam, Elsevier.

[16] A.C. Bovik, M. Clark and W.S. Geisler, *Multichannel texture analysis using localized spatial filters*, IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell., vol. 12, no. 1 pp. 55-73, 1990.

[17] E.J. Candès and D. L. Donoho, *New Tight Frames of Curvelets and Optimal Representations of Objects with Piecewise-C2 Singularities*, Comm. Pure Appl. Math.,vol. 57,pp. 219-266, 2002.

[18] J. Canny, *A Computational Approach to Edge Detection*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 8,pp. 679-698, 1986.

[19] Cavaretta, A.S., W. Dahmen and C.A. Michelli *Stationary Subdivision*, Memoirs of Amer. Math. Soc.,Volume 93.,1991.

[20] A. E. Cetin and R. Ansari, *Signal Recovery from Wavelet Transform Maxima*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol.42, pp. 194-196, 1994.

[21] T. Chang and C.C.J. Kuo, *Texture Analysis and Classification with Tree-structured Wavelet Transform*, IEEE Trans. Image Processing, vol. 2, no. 4, pp. 429-441, 1993.

[22] T. F. Chan, H.M. Zhou, *ENO-Wavelet Transforms for Piecewise Smooth Functions*, SIAM J. Numer. Anal. 40 (2002) 1369-1404.

[23] V. Chappelier and C. Guillemot, *Oriented Wavelet for Image Compression and Denoising*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 15, pp. 2892-2903, 2006.

[24] K. N. Chaudhury, A. Munoz-Barrutia, M. Unser, Fast Space-Variant Elliptical Filtering Using box splines, IEEE Trans Image Process, vol. 19, pp. 2290-2306, 2010.

[25] C. K. Chui, *Multivariate Splines*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1988.

[26] R. L. Claypoole, G. Davis, W. Sweldens and R. G. Baraniuk, *Nonlinear Wavelet Transforms for Image Coding via Lifting*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 12, no. 12, pp. 1449-1459, 2003.

[27] A. Cohen, N. Dyn and B. Mateï, *Quasi-linear Subdivision Schemes with Applications to ENO Interpolation*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 15 (2003) 89-116.

[28] A. Cohen, Numerical Analysis of Wavelet Method, Elsevier Publisher, 2003.

[29] C. De Boor, K. Höllig and S. Riemenschneider, *Box Splines*, Applied Mathematical Sciences 98, Springer, New York, 1993.

[30] S. Deguy, C. Debain, and A. Benassi, Classification of Texture Images Using Multi-Scale Statistical Estimators of Fractal Parameters, In British Machine Vision Conference, 2000.

[31] M.N. Do and M. Vetterli, The Contourlet Transform : an Efficient Directional Multiresolution Image Representation, IEEE Transactions Image on Processing, vol. 14, no. 12, pp. 2091-2106, 2005.

[32] N. Dyn, *Subdivision Schemes in Computer Aided Geometric Design*, Advances in Numerical Analysis II, Subdivision algorithms and Radial Functions, W.A. Light (ed.), Oxford University Press, 1992, pp. 36-104.

[33] G. Rilling, P. Flandrin, P. Gonçalves, J.M. Lilly *Bivariate Empirical Mode Decomposition*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, pp. 936-939, 2007

[34] G. Rilling, P. Flandrin and P.Goncalvès, *On Empirical Mode Decomposition and its Algorithms*, IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, NSIP-03, Grado (I), 2003.

[35] J.B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[36] C.M. Gray and W.Singer, *Stimulus-specific neural oscillations of cat visual cortex*, Proceedings of the national Academy of Sciences, USA, vol. 86, 1698-1702, 1989.

[37] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of integrals, Series and Products*, Academic Press, A. Jeffrey edition, 1980.

[38] B. Han and R. Jia, R. Multivariate Refinement Equation and Convergence of Subdivision Schemes, SIAM J. Math. Anal. 29 (1998) 1177-1199.

[39] A. Harten, *Discrete Multiresolution Analysis and Generalized Wavelets*, J. Appl. Num. Math. 12 (1993) 153-193.

[40] A. Harten, B. Enquist, S. Osher and S. Chakravarthy, *Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III*, J. Comput. Phys. 71 (1987) 231-303.

[41] H. Hong, X. Wang, Z. Tao, *Local Mean-Based Sifting for Empirical Mode Decomposition*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 16, no. 10, 2009.

[42] N.E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M.C. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung and H.H. Liu, *The Empirical mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and Non-Stationary Time Series Analysis*, Proceedings of the Royal Society London A, pp. 903-1005, 1998.

[43] R.Q. Jia, *Characterisation of Smoothness of Multivariate Refinable Functions in Sobolev Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 351, pp. 4089-4112, 1999.

[44] D. R. Chen, R. Q. Jia, S.D. Riemenschneider, *Convergence of Vector Subdivision Schemes in Sobolev Spaces*, Appl. Comput. Harmon. Anal., vol. 12, pp. 128-149, 2002.

[45] L. M. Kaplan, and C. C. Kuo, *Texture Roughness Analysis and Synthesis via Extended Self-Similar Model*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 17(11), pp. 1043-1056, 1995.

[46] Y. Kopsinis, S. McLaughlin, *Investigation and Performance Enhancement of the Empirical Mode Decomposition Method Based on a Heuristic Search Optimization Approach*, IEEE Transactions on Signal Processing, pp. 1-13, 2008.

[47] A. Laine and J. Fan, *Texture classification by wavelet packet signatures*, IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell., vol. 15, no. 11, pp. 1186-1191, 1993.

[48] A.Laine and J.Fan, *Frame representation for texture segmentation*, IEEE Trans. Image Processing, vol. 5, pp. 771-780, 1996.

[49] A. Linderhed, *2D Empirical Mode Decompositions in the Spirit of Image Compression*, Wavelet and Independent components analysis applications IX,SPIE proceedings, vol. 4738, pp. 1-8, 2002.

[50] T. Lindeberg,J. Garding, *Shape-Adapted Smoothing in Estimation of 3-D Shape Cues from Affine Deformations of Local 2-D Brightness Structure*, Image and Vision Computing, vol. 15, pp. 415-434, 1997.

[51] T. Lindeberg, *Feature Detection with Automatic Scale Selection*, International Journal of Computer Vision, vol. 30, pp. 79-116, 1998.

[52] T. Lindeberg, *Scale-Space Theory in Computer Vision*, Dordrecht Kluwer Academic, 1994.

[53] A.W.C Liew and N.F. Law, *Reconstruction from 2-D Wavelet Transform Modulus Maxima using Projection*, IEE Proc.-Vis. Image Signal Process., vol. 147, pp. 176-184, 2000.

[54] A.W.C Liew, N.F. Law and D. T. Nguyen, *Direct Reconstruction for Wavelet Transform Extrema Representation*, IEE. Proc.-Vis. Image Signal Process., vol. 144, pp. 193-198, 1997.

[55] A.W.C. Liew and D.T. Nguyen, *Reconstruction from Wavelet Transform Modulus Maxima using Non-expansive Projections*, Electron. Lett., vol. 31, pp. 1038-1039, 1995.

[56] L. Yang and H. Zhang, *The Bedrosian Identity for H^p Functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 345,pp. 975-984, 2008.

[57] E. LePennec, and S. Mallat, *Sparse Geometrical Image Approximation with Bandelets*, IEEE Transaction on Image Processing, vol. 14,pp. 423-438, 2004.

[58] D. Lowe, *Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints*, International Journal of Computer Vision (2004).

[59] S. Mallat and S. Zhong, *Characterization of Signals from Multiscale Edges*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol.14, pp. 710-732, 1992.

[60] S. Mallat, *Zero Crossings of a Wavelet Transform*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 37, pp. 1019-1033, 1991.

[61] S. Malassiotis and M.G. Strintzis, *Optimal Biorthogonal Wavelet Decomposition of Wire-Frame Meshes Using Box Splines, and its Application to the Hierarchical Coding of 3-D Surfaces* IEEE Transactions on Image Processing, vol.8,no.1, pp. 41-57, 1999.

[62] S. Mallat and W.L. Hwang, *Singularity Detection and Processing with Wavelets*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 38, pp. 617-643, 1992.

[63] S.Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, 1998.

[64] S. Mallat, *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : the Wavelet Representation*, IEEE Trans. Patt. Anal. and Machine Intel., vol. 11, pp. 675-693, 1989.

[65] B. Mateï, *Smoothness Characterization and Stability in Nonlinear Multiscale Framework : Theoretic Results*, Asymptotic Analysis, vol. 46, pp. 277-309, 2005.

[66] Y. Meyer, *Un contre-exemple à la conjecture de Marr et à celle de S. Mallat*, preprint, 1991.

[67] K. Mikolajczyk and C. Schmid, *Scale and Affine Invariant Interest Point Detectors*, International Journal of Computer Vision, vol. 60, pp. 63-86, 2004.

[68] K. Mikolajczyk and C. Schmid, *Scale and Affine Invariant Interest Point Detectors*, International Journal of Computer Vision, vol. 60(1), pp. 63-86, 2004.

[69] K. Mikolajczyk and C. Schmid, *A Performance Evaluation of Local Descriptors*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 27(10), pp. 1615-1630.

[70] A. Mojsilovic, M. V. Popovic and D.M. Rackov, *On the Selection of an Optimal Wavelet Basis for Texture Characterization*, IEEE Trans. Image Processing, vol. 9, no. 12, pp. 2043-2050, 2000.

[71] J.C. Nunes, Y. Bouaoune, E. Delechelle, O. Niang, and Ph Bunel, *Image Analysis by Bidimensional Empirical Mode Decomposition*, Image Vis. Comput, vol. 21, no. 12, 2003.

[72] S. Harizanov and P. Oswald, *Stability of Nonlinear Subdivision and Multiscale Transforms*, Constr. Approx., to appear.

[73] S. Peng and W-L. Hwang, *Adaptive Signal Decomposition Based on Local Narrow Band Signals*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, no. 7, pp. ?, 2008.

[74] B. Picibino, *On Instantaneous Amplitude and Phase of Signals*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 45, pp. 552-560, 1997.

[75] H. Prautsch, W. Boehm, M. Paluszny, *Bézier and B-spline Techniques*, Springer, 2002.

[76] R. Schaback, *Error Estimates for Approximations from control Nets*, Computer Aided Geometric Design, vol. 10, pp. 57-66.

[77] J. Stöckler, *Multivarite Wavelets*, in Wavelets : a Tutorial in Theory and Applications, C.K. Chui, Ed. New York : Academic , 1992, pp. 325-355.

[78] K. Subr,C. Soler, F.Durand, *Egde-Preserving Multiscale Image Decomposition based on Local Extrema*, Proceedings ACM SIGGRAPH, 2009.

[79] M. Unser, *Texture Classification and Segmentation Using Wavelet Frames*, IEEE Trans. Image Processing,vol. 4, pp. 1549-1560, 1995.

[80] M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden, *Fast B-Spline Transforms for Continuous Image Representation and Interpolation*, IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell., vol. 13, no. 3, pp. 277-285, 1991.

[81] R.C. Sharpley and V. Vatchev, *Analysis of the Intrinsic Mode Functions*, Construct. Approx., vol. 24, pp. 17-47, 2006.

[82] G. Van de Wouver, P. Scheunders and D. Van Dyck, *Statistical Texture Characterization from Discrete Wavelet Representation*, IEEE Trans. Image Processing, vol. 8, pp. 592-598, 1999.

[83] M.K. Varanasi and B. Aazhang, *Parametric Generalized Gaussian Density Estimation*, J. Acous. Soc. Amer., vol. 86, pp. 1404-1415,1989.

[84] Z. Cvetkovic and M. Vetterli, *Discrete-Time Wavelet Extrema Representation : Design and Consistent Reconstruction*, IEEE Trans. on Signal Process.,vol. 43, pp. 681-693, march 1995.

[85] M. N. Do and M. Vetterli, *Wavelet-Based Texture Retrieval Using Generalized Gaussian Density and Kullback-Liebler Distance*, IEEE Trans. on Image Processing, vol. 11, pp. 146-158, 2002.

[86] Yu-Ping Wang and S.L. Lee, *Scale-Space Derived from B-Splines*, IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell., vol. 20, no. 10, pp. 1040-1055, 1998.

[87] A. Witkin, *Scale-Space Filtering*, In Proceedings of the Eight International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1983.

[88] T.Y. Yang, *Finite Element Structural Analysis*, Prentice-Hall, pp. 446-449, 1986.

[89] Z. Liu and S. Peng *Boundary Processing of Bidimensional EMD Using Texture Synthesis*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, no. 1, pp. 33-36, 2005.