HAL open science

Mouvements par courbure moyenne et méthode de champs de phase

Elie Bretin

To cite this version:

Elie Bretin. Mouvements par courbure moyenne et méthode de champs de phase. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2009. Français. NNT : . tel-00995323

HAL Id: tel-00995323

https://theses.hal.science/tel-00995323v1

Submitted on 23 May 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque
|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

T H E S E

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'Institut polytechnique de Grenoble

Spécialité : « Mathématiques appliquées »

préparée au laboratoire JEAN KUNTZMANN

dans le cadre de l'Ecole Doctorale

« Mathématiques, Sciences et Technologie de l'information, informatiques »

présentée et soutenue publiquement par

Elie BRETIN

le 21 avril 2009

Mouvements Par Courbure Moyenne et Méthode de Champ de Phase

DIRECTEUR DE THESE : Valérie PERRIER
CO-DIRECTEUR : Eric BONNETIER

JURY

M. COTTET Georges-Henri , Président
M. CHAMBOLLE Antonin , Rapporteur
M. GOUT Christian , Rapporteur
Mme PERRIER Valérie , Directeur de thèse
M. BONNETIER Eric , Co-encadrant
M. MISBAH Chaouqi , Examinateur
M. BELLETTINI Giovanni , Examinateur
M. OUDET Edouard , Examinateur

Table des matières

Introduction **1**

I Mouvement d'interface isotrope **7**

1 Etat de l'art des méthodes numériques pour les mouvements d'interfaces **9**
1.1 Introduction . . . 9
1.2 Méthodes paramétriques . . . 10
1.3 Méthode Level set . . . 12
1.4 Méthode de champ de phase . . . 16
1.5 Algorithme de Bence Merriman Osher . . . 21

2 Etude de l'équation d'Allen-Cahn **23**
2.1 Introduction . . . 23
2.2 Existence et unicité des solutions de l'équation d'Allen-Cahn . . . 24
2.3 Convergence de l'équation d'Allen-Cahn . . . 35
2.4 Discrétisation et méthode de splitting . . . 39
2.5 Tests numériques préliminaires . . . 49
2.6 Tests numériques classiques . . . 53

3 Terme de Forçage et Contrainte de volume **57**
3.1 Introduction . . . 57
3.2 Introduction des deux modèles de réaction-diffusion . . . 60
3.3 Quelques points théoriques du deuxième modèle . . . 63
3.4 Algorithmes et simulations numériques . . . 76
3.5 Application à la conservation de volume . . . 81

4 Contraintes de bord non périodiques **91**
4.1 Principe de symétrisation pour l'équation de la chaleur . . . 92
4.2 Conditions aux limites pour les équations de champ de phase . . . 96
4.3 Généralisation des conditions de Neumann . . . 101
4.4 Contrainte de non pénétration . . . 111

II Mouvement par courbure moyenne anisotrope **115**

5 Anisotropie dans le contexte de la géométrie de Finsler **121**
5.1 Contexte mathématique . . . 121
5.2 Périmètre anisotrope et mouvement par courbure moyenne anisotrope . . . 130
5.3 Méthodes numériques . . . 138

6 Équation d'Allen-Cahn anisotrope linéarisée **143**
6.1 Motivations . . . 143
6.2 Définition de l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$ . . . 146
6.3 Estimation d'erreur entre les deux opérateurs de diffusion anisotrope . . . 151
6.4 Simulations numériques de mouvement par courbure moyenne anisotrope . . . 163
6.5 Conclusion sur notre méthode numérique . . . 169

7 Application à des anisotropies non convexes **173**
7.1 Motivations . . . 173
7.2 Propriété du périmètre anisotrope P_{ϕ^o} . . . 175
7.3 Mouvement minimisant de P_{ϕ^o} . . . 179
7.4 Énergie de Ginzburg-Landau et équation de réaction-diffusion . . . 180
7.5 Simulations numériques de l'équation d'Allen-Cahn . . . 181
7.6 Régularisation et opérateur $\tilde{\triangle}_{\phi^o}$ . . . 189
7.7 Quelques simulations de mouvements d'interfaces en dimension 3 . . . 193
7.8 Discussion et conclusion . . . 197

III Analyse multirésolution et curvelets **199**

8 Introduction à l'analyse multirésolution et aux ondelettes **201**
8.1 Motivations . . . 201
8.2 Construction des ondelettes . . . 202
8.3 Ondelettes et opérateurs elliptiques . . . 205
8.4 Résultat d'approximation non linéaire dans les bases d'ondelettes . . . 207
8.5 Vers d'autres familles d'analyse multirésolution . . . 208

9 Les curvelets : une analyse multirésolution anisotrope directionnelle **211**
9.1 Objectif . . . 211
9.2 Construction du frame des curvelets en dimension 2 . . . 211
9.3 Approximation non linéaire dans la base des curvelets . . . 217
9.4 Curvelets, opérateur FIO et équations des ondes . . . 217
9.5 Algorithme de décomposition rapide en curvelets . . . 219

10 Nouvelle base d'analyse multirésolution : les β-curvelets **231**
10.1 Motivations . . . 231
10.2 Construction du frame de β-curvelets . . . 232
10.3 β-curvelets et opérateur FIO . . . 235
10.4 Résultat d'approximation non-linéaire dans le frame des β-curvelets . . . 242
10.5 Conclusion sur le frame des β-curvelets . . . 250

Conclusion et perspectives **250**

A Annexe 1 : Quelques lemmes de Gronwall **259**

B Annexe 2 : Localisation fréquentielle d'un ridge **261**

C Annexe3 : Algorithme de calcul des formes de Wulff **265**

Bibliographie. **267**

Introduction générale

Contexte mathématique

Ce manuscrit expose mes travaux de thèse réalisés au laboratoire Jean Kuntzmann de Grenoble sur le thème de la modélisation de mouvements d'interface. Plus précisément, mes recherches portent sur le développement de méthodes numériques rapides pour la simulation de mouvements par courbure moyenne.

Un flot de mouvement par courbure moyenne $\Omega(t)$ est défini comme une évolution d'interface où la vitesse normale est proportionnelle à la courbure :

$$V_n = \kappa.$$

Cette dynamique peut également être obtenue comme la meilleure façon de minimiser le périmètre

$$P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 ds.$$

L'intérêt de ces évolutions est qu'elles apparaissent dans de nombreux systèmes physiques et biologiques comme par exemple en croissance cristalline.

Les premiers résultats théoriques sur le mouvement par courbure moyenne sont dûs à Huisken [73], Gage et Hamilton [63] et Grayson [64]. Ces auteurs étudient l'existence de mouvements réguliers ainsi que leur comportement asymptotique. Ils démontrent en particulier que les ensembles initialement convexes restent convexes et se réduisent à un point en temps fini, tout en devenant asymptotiquement sphériques. Ces propriétés ne sont plus vérifiées lorsque la forme initiale est non convexe en dimension supérieure à trois, et l'évolution présente même dans certains cas des singularités en temps fini [65]. Les questions d'existence et d'unicité deviennent alors délicates. Une façon de les traiter est d'introduire une formulation level-set du problème [92] : l'interface $\partial\Omega(t)$ est alors représentée comme la ligne de niveau zéro d'une fonction φ, solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi suivante :

$$\varphi_t = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right)|\nabla\varphi|.$$

L'existence et l'unicité [34, 55] pour cette équation s'obtiennent au sens des solutions de viscosité [37] et permettent ainsi de généraliser le mouvement par courbure moyenne après l'apparition de singularités. Un principe de comparaison sur l'équation d'Hamilton-Jacobi implique un principe d'inclusion pour ces mouvements par courbure moyenne généralisés.

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser aux méthodes de champ de phase, qui sont une alternative aux méthodes level-set, et qui sont aussi basées sur une description implicite de l'interface. Introduites dans le cas du mouvement par courbure moyenne par Allen et Cahn [76],

ces méthodes reviennent à approcher le mouvement d'une interface par une ligne de niveau de la solution u_ϵ de l'équation

$$u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u).$$

Le paramètre ϵ est un paramètre d'approximation qui représente l'épaisseur d'une interface diffuse, et W est un potentiel double puits positif. Cette équation, connue sous le nom d'équation d'Allen-Cahn, peut être vue comme le flot de gradient de l'énergie de Ginzburg-Landau

$$J_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\epsilon \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{1}{\epsilon} W(u) \right) dx.$$

Le lien entre l'équation d'Allen-Cahn et le mouvement par courbure moyenne s'établit alors avec un résultat d'approximation du périmètre P par J_ϵ au sens de la Γ-convergence. Ce résultat est démontré par Modica et Mortola [83].

Outre le mouvement par courbure moyenne, nous allons nous intéresser à des mouvements où l'interface évolue suivant la loi $V_n = \kappa + g$. Les termes g sont des termes de forçage qui apparaissent lorsqu'on ajoute des énergies de la forme $\int_\Omega g(x)dx$ à J_ϵ. L'approche classique en terme de champ de phase revient alors à considérer l'équation de réaction-diffusion suivante :

$$u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} \left[W^{'}(u) - \epsilon c_W g \right],$$

avec $c_W = \int_0^1 \sqrt{2W(s)} ds$.

Nous nous intéresserons également au mouvement par courbure moyenne conservé [62], pour lequel la vitesse d'interface vérifie $V_n = \kappa - \fint_{\partial\Omega} \kappa ds$. L'intérêt est que dans ce cas, le volume des domaines $\Omega(t)$ reste constant au cours du temps. Notons qu'il n'existe aucune preuve d'existence au sens généralisé pour cette dynamique d'interface, la difficulté étant que ces mouvements ne vérifient pas de principe d'inclusion. L'équation de réaction diffusion s'écrit alors [16, 97]

$$u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u) + \frac{1}{\epsilon^2} \fint W'(u) dx.$$

Enfin, les derniers mouvements étudiés seront les mouvements par courbure moyenne anisotrope, définis comme les meilleures directions de descente du périmètre anisotrope

$$P_\gamma(\Omega) = \int_\Gamma \gamma(\vec{n}) ds,$$

où $\gamma : S^{d-1} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction d'anisotropie. En dimension 2, les vitesses normales des interfaces suivent la loi

$$V_n = \gamma(\vec{n}) \kappa_\gamma,$$

où la courbure anisotrope est définie par $\kappa_\gamma = \kappa \left(\gamma(\vec{n}) + \gamma''(\vec{n}) \right)$. On sait montrer des théorèmes d'existence lorsque l'anisotropie est régulière et convexe. Le cas d'anisotropies non convexes est par contre encore complètement ouvert, le périmètre $P_\gamma(\Omega)$ n'étant plus dans ce cas semi-continu inférieurement. Une formulation champ de phase possible du mouvement est donnée par l'équation d'Allen-Cahn anisotrope suivante [13] :

$$u_t = \operatorname{div} \left(\phi^o(\nabla u) \phi^o_\xi(\nabla u) \right) - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u),$$

avec pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\phi^o(\xi) = |\xi|\gamma(\arg(\xi))$.

Pour tous ces modèles de champ de phase, lorsque la convergence de l'approximation champ de phase est établie [85, 31, 12, 11], l'ordre d'approximation est en $O(\epsilon^2 \log(\epsilon)^2)$. Des preuves de convergence d'approximations numériques de u_ϵ par différences finies ou par éléments finis ont de plus été établies [33, 93].

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser aux trois problèmes ci-dessous.

Les pertes de volume introduites par les méthodes de champ de phase

Les méthodes de champ de phase appliquées au mouvement par courbure moyenne conservé $V_n = \kappa - \fint_{\partial\Omega} \kappa ds$ conduisent généralement à l'équation d'Allen-Cahn non locale

$$u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u) + \frac{1}{\epsilon^2} \fint W'(u(t,x))dx.$$

Le terme $\frac{1}{\epsilon^2} \fint W'(u)dx$ peut être interprété comme un multiplicateur de Lagrange, qui préserve la masse des solutions u_ϵ de l'équation, $\int u_\epsilon dx = C$. Bien qu'à notre connaissance, aucun résultat théorique ne soit démontré, les tests numériques laissent envisager un ordre de convergence en $O(\epsilon)$ pour cette équation. En pratique, cela peut se traduire par des pertes de volume conséquentes dans certaines simulations. Nous essaierons de développer dans cette thèse un nouveau modèle de champ de phase qui approche la même dynamique d'interface avec un ordre d'erreur en $O(\epsilon^2 \log(\epsilon)^2)$, observé numériquement.

La présence d'angle de contact entre l'interface et le bord des domaines de calculs

Les mouvements d'interface sont effectués en pratique dans un domaine de calcul borné $E = [0,1]^d$. La dynamique d'interface au bord de ce domaine est alors directement liée au choix des conditions aux limites imposées à l'équation d'Allen-Cahn. Ces conditions sont traditionnellement de type périodiques ou Neumann. Nous essayerons d'introduire de nouvelles dynamiques d'interface "plus physiques", qui permettent la minimisation d'une énergie de la forme

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_I} 1ds + \sigma \int_{\Gamma_B} 1ds,$$

où Γ_I représente la partie de l'interface située strictement à l'intérieur de E, Γ_B la partie située sur le bord de E, et σ un coefficient de tension de surface. L'intérêt est de modéliser la présence d'angles de contact, donnés par la loi de Young et observés par exemple sur les formes optimales d'une goutte déposée sur un substrat. Ces conditions de bord généralisent dans un certain sens les conditions de Neumann, qui correspondent au cas particulier $\sigma = 0$.

La difficulté de la résolution des équations d'Allen-Cahn anisotropes :

La simulation de mouvement par courbure moyenne anisotrope nécessite la résolution de l'équation

$$u_t = \operatorname{div}\left(\phi^o(\nabla u)\phi^o_\xi(\nabla u)\right) - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u)$$

Les premières difficultés proviennent du traitement numérique de l'opérateur

$$\operatorname{div}\left(\phi^o(\nabla u)\phi^o_\xi(\nabla u)\right).$$

Cet opérateur, fortement non linéaire, conduit à des méthodes dont le coût en temps de calcul est plus élevé que dans le cas isotrope. Nous chercherons à introduire une approximation de l'opérateur $\mathrm{div}\big(\phi^o(\nabla u)\phi^o_\xi(\nabla u)\big)$, basée sur une linéarisation dans l'espace de Fourier, et qui facilitera la résolution numérique.
Une deuxième difficulté apparaît dans le traitement d'anisotropies non convexes car l'opérateur de diffusion devient "forward backward parabolic". Nous chercherons à régulariser cette équation afin d'observer l'influence de la non convexité de l'anisotropie ϕ^o sur les solutions.
Enfin, nous proposerons une alternative à la base de Fourier, construite à partir de bases d'analyse multirésolution, permettant de traiter le cas d'anisotropies dépendant de la position spatiale, $\phi^o(x,\xi)$.

Les solutions u_ϵ des équations de champ de phase présentent de fortes variations localisées sur un voisinage de taille ϵ de l'interface. Il nous a semblé intéressant d'utiliser des familles d'analyse multirésolution comme base d'approximation de Galerkin dans la résolution de ces équations.

Depuis les années 80, les bases d'ondelettes [77, 81, 82, 40, 36] ont soulevé beaucoup d'intérêt dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées. Initialement introduites par Morlet et Grossman [67] comme une alternative à la transformée de Fourier, elles ont connu un essor considérable suite à la construction d'algorithmes de décomposition rapides, via le formalisme d'analyse multirésolution de Mallat [77]. Les ondelettes possèdent en effet de très bonnes propriétés, à la fois pour représenter des fonctions régulières par morceaux [36], mais aussi comme base d'approximation dans la résolution d'opérateurs elliptiques [75].

Dans les années 2000, de nouvelles familles d'ondelettes géométriques [23, 25, 96, 78] ont été introduites pour encore améliorer les propriétés des ondelettes en compression d'images. L'idée est de prendre en compte la géométrie des discontinuités avec des éléments de base anisotropes et directionnels. Parmi ces familles, les curvelets de Candès et Donoho [19, 18] possèdent des propriétés intéressantes pour les équations de champ de phase. Elles possédent en effet des propriétés quasi-optimales pour représenter les fonctions régulières par morceaux en dimension deux [25]. Elles sont de plus très appropriées pour la résolution d'opérateurs FIO (Fourier Integral Operator) et pour la résolution d'équations des ondes [21, 17], généralisant ainsi les propriétés des ondelettes pour les opérateurs elliptiques.

Un objectif de cette thèse était de savoir si les curvelets étaient potentiellement intéressantes pour approcher les solutions des équations de champ de phase. En effet, d'une part le frame des curvelets est quasi-optimal pour représenter ces solutions, et d'autre part l'équation d'Allen-Cahn agit indirectement comme une équation de transport sur l'interface.

L'équation d'Allen-Cahn fait apparaître la somme d'un opérateur de diffusion (le Laplacien) et d'un opérateur de réaction. Nous nous sommes rendus compte qu'une méthode de splitting en temps entre ces deux opérateurs permettait d'obtenir une méthode numérique simple et rapide, consistant à résoudre d'une part une équation de la chaleur et d'autre part une EDO. L'utilisation du frame des curvelets pour la résolution de l'équation d'Allen-Cahn présente un intérêt moindre, les algorithmes de décomposition rapide en curvelets étant plus coûteux que ceux associés à la transformée de Fourier. Il semble donc plus efficace d'utiliser la base de Fourier pour la résolution du Laplacien. En revanche, dans le cadre des mouvements par courbure moyenne avec une anisotropie dépendant de la variable spatiale, la base de Fourier n'est plus utilisable et le frame des curvelets semblent être une bonne alternative.

Plan de thèse

La première partie de thèse est consacrée au mouvement par courbure moyenne isotrope.

Dans le premier chapitre, nous effectuons une étude comparative des méthodes numériques des mouvements d'interfaces, avec notamment une introduction aux méthodes paramétriques [48], aux méthodes level set [92, 101, 90], aux méthodes de champ de phase [76] et enfin aux algorithmes BMO (Bence-Merriman-Osher)[80].
Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques propriétés [3, 49] des solutions de l'équation d'Allen-Cahn comme par exemple, l'existence de solution, un principe de comparaison et une preuve de convergence des solutions vers le mouvement par courbure moyenne. Nous proposons ensuite une méthode de splitting pour laquelle nous établissons un résultat de convergence et de stabilité. Une analyse numérique de l'erreur ainsi que quelques simulations sont également présentées.
Le troisième chapitre traite du problème de la conservation de volume. Nous introduisons tout d'abord un nouveau modèle de champ de phase pour les mouvements d'interface de loi $V_n = \kappa + g$. Une analyse asymptotique formelle ainsi qu'une preuve rigoureuse de convergence sont présentées. Nous utilisons ensuite ce modèle pour imposer la conservation du volume. L'équation de réaction diffusion résultante présente alors d'un point de vue numérique un ordre de convergence en $O(\epsilon^2 \log(\epsilon))$ et nous présentons des simulations comparatives avec l'équation Allen-Cahn conservée.
Nous expliquons *dans le quatrième chapitre* comment adapter les méthodes numériques précédentes pour prendre en compte des conditions de bords non périodiques. Dans un premier temps, des principes de symétrisation [106] permettent de traiter le cas des conditions de bord classiques de type Dirichlet ou Neumann. Puis nous généralisons le procédé afin d'imposer numériquement des angles de contacts entre l'interface et le bord du domaine de calcul. Des simulations numériques valident enfin ce procédé.

La deuxième partie de thèse traite le cas des mouvements par courbure moyenne anisotrope.

Le cinquième chapitre est une introduction au mouvement par courbure moyenne anisotrope [13], avec les définitions de courbure anisotrope, de diagramme de Frank et de forme de Wulff. La méthode de champ de phase conduira à l'équation

$$u_t = \operatorname{div}\left(\phi^o(\nabla u)\phi^o_\xi(\nabla u)\right) - \frac{1}{\epsilon^2}W'(u).$$

Comme l'opérateur $\operatorname{div}\left(\phi^o(\nabla u)\phi^o_\xi(\nabla u)\right)$ pose de nombreuses difficultés numériques, dues à sa non-linéarité, nous introduisons dans *le sixième chapitre* une équation approchée :

$$u_t = \tilde{\triangle}_\phi u - \frac{1}{\epsilon^2}W'(u), \tag{1}$$

où l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi u$ est obtenu comme le linéarisé de $\operatorname{div}\left(\phi^o(\nabla u)\phi^o_\xi(\nabla u)\right)$ par rapport à la base de Fourier. Nous étudions théoriquement la conséquence de cette linéarisation et nous observons numériquement une convergence en $O(\epsilon)$ de cette nouvelle méthode.
Le cas d'anisotropies non convexes est traité *dans le septième chapitre*. L'opérateur approché $\tilde{\triangle}_\phi$ peut toujours être défini et l'équation correspondante reste bien posée : elle ne possède pas le caractère "fordward barckward parabolic" du modèle original. Nous effectuons des simulations numériques de ce nouveau modèle et nous essayons d'interpréter physiquement les dynamiques

d'interfaces obtenues.

La dernière partie de thèse traite enfin des bases d'analyses multirésolution avec une introduction aux ondelettes et aux curvelets *(chapitres huit et neuf)*. Notre intérêt pour les curvelets réside dans le traitement d'anisotropies non locales de la forme $\phi^o(x, \xi)$ où l'anisotropie dépend de la position spatiale. Nous généralisons *dans le dixième chapitre* le concept des curvelets en donnant la construction de nouvelles familles d'ondelettes géométriques, les β-curvelets, dans lesquelles, nous établissons un résultat d'approximation non linéaire.

Première partie

Mouvement d'interface isotrope

Chapitre 1

Etat de l'art des méthodes numériques pour les mouvements d'interfaces

1.1 Introduction

1.1.1 Motivation

L'objet de cette thèse est, pour une part, l'élaboration de méthodes numériques efficaces en temps de calcul pour les mouvements d'interfaces $t \to \Gamma_t$, évoluant au cours du temps suivant une loi V_n, où V_n représente la vitesse normale de l'interface.

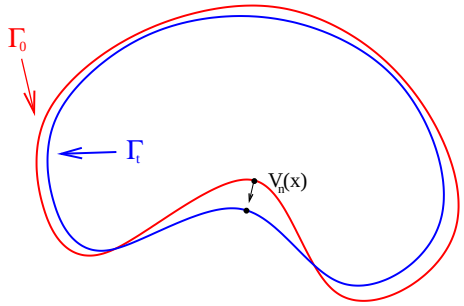


FIG. 1.1 – Un Mouvement d'interfaces

Dans les cas les plus simples, ceux des mouvements isotropes, $V_n(x)$ dépend uniquement de la position de l'interface. Mais nous nous intéresserons à d'autres types de loi prenant en compte la géométrie de l'interface, comme par exemple les mouvements anisotropes avec $V_n(x, \vec{n})$ ou encore les mouvements par courbure moyenne où le terme de courbure $\kappa\big(x(t), t\big)$ est utilisé dans l'expression de V_n. Le lecteur trouvera de nombreuses applications de ces mouvements dans le recueil d'Elliot [49] et dans le livre de Sethian [101].

Il existe de nombreuses méthodes qui traitent de ce type de problèmes. Les plus populaires sont les méthodes paramétriques, les méthodes level set, les méthodes de champ de phase, ou encore l'algorithme Bence-Merrian-Osher. Bien que cette thèse se consacre tout particulièrement aux méthodes de champ de phase, nous commençons par exposer dans ce premier chapitre une synthèse de ces différentes techniques, tout en essayant d'expliciter les avantages de chacune d'entre elles.

1.2 Méthodes paramétriques

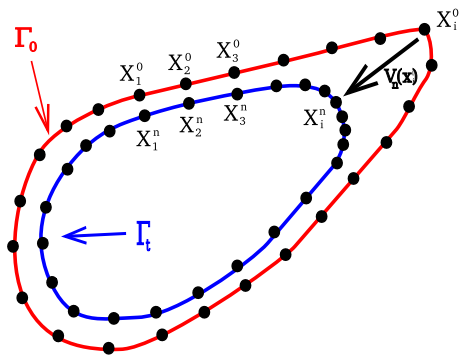


Fig. 1.2 – Paramétrisation de l'interface

Une technique naturelle pour modéliser ces mouvements d'interfaces en dimension 2 est de représenter Γ_t à l'aide d'une paramétrisation de la position de l'interface, noté $X(s,t)$, où $s \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, T]$ et $X(s,t) = \big(x(s,t), y(s,t)\big) \in \mathbb{R}^2$. L'équation vérifiée par X s'écrit alors

$$X_t = V_n\left(X, \frac{X_s}{|X_s|}, \left(\frac{X_s}{|X_s|}\right)_s\right).$$

1.2.1 Résolution explicite

La résolution de cette équation peut s'effectuer en discrétisant la paramétrisation X à l'aide de points $X_i^n = X(i\delta_s, n\delta_t) = (x_i^n, y_i^n)$ évoluant au cours du temps, δ_s et δ_t représentant respectivement les pas de discrétisation en espace et en temps. Des formules d'approximation de la normale et de la courbure en fonction de la position de ces points s'obtiennent facilement, comme par exemple

$$\vec{n}(X_i^n) = \frac{1}{\big((x_{i+1}^n - x_{i-1}^n)^2 + (y_{i+1}^n - y_{i-1}^n)^2\big)^{1/2}} \begin{pmatrix} y_{i+1}^n - y_{i-1}^n \\ -x_{i+1}^n + x_{i-1}^n \end{pmatrix},$$

$$\kappa(X_i^n) = 4\frac{(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n)(x_{i+1}^n - x_{i-1}^n) - (x_{i+1}^n - 2x_i^n + x_{i-1}^n)(y_{i+1}^n - y_{i-1}^n)}{\big((x_{i+1}^n - x_{i-1}^n)^2 + (y_{i+1}^n - y_{i-1}^n)^2\big)^{3/2}}.$$

La résolution du mouvement d'interfaces s'effectue simplement en déterminant une estimation de la nouvelle position des points X_i^{n+1} à l'instant t_{n+1} de manière explicite :

$$X_i^{n+1} = X_i^n + \delta_t\, V_n\big(X_i^n, \vec{n}(X_i^n), \kappa(X_i^n)\big)\, \vec{n}(X_i^n).$$

Ces méthodes sont très efficaces en dimension deux tant que Γ_t reste régulier et que la courbure n'est pas trop élevée. En fait, le traitement explicite des équations fait apparaître des conditions de stabilité qui dépendent de la valeur de la courbure. La figure 1.3 représente une simulation d'un tel mouvement par courbure moyenne, où l'interface initiale est un cercle de rayon 1. Nous observons qu'après un certain nombre d'itérations, la méthode numérique devient instable. Il est bien entendu possible d'utiliser des schémas numériques d'ordre plus élevé afin de stabiliser la méthode, ou encore, comme nous l'exposons maintenant, d'utiliser des méthodes implicites.

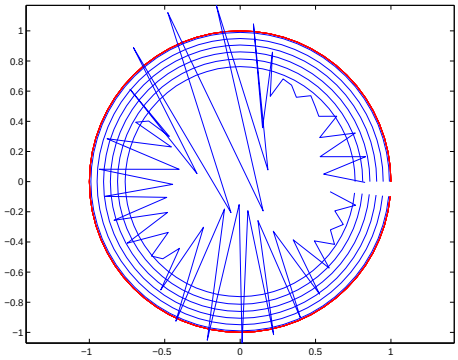


FIG. 1.3 – Simulation d'un mouvement par courbure moyenne à l'aide d'une résolution paramètrique explicite où le pas de temps δ_t est égal à $1e^{-2}$ et le nombre de points utilisés est $M = 2^7$.

1.2.2 Résolution semi-implicite

Dans le cas du mouvement par courbure moyenne, la paramétrisation X vérifie

$$\begin{cases} X_t = \frac{1}{|X_s|}\left(\frac{X_s}{|X_s|}\right)_s, \quad s \in [0, 2\pi], \quad t \in [0, T], \\ X(s,t) = X(s + 2\pi, t), \quad X(.,0) = X_0. \end{cases}$$

Si l'interface est suffisamment régulière et si $|X_s| \geq c_0 > 0$ pour $t \in [0, T]$, alors une formulation faible de ce problème est

$$\int_0^{2\pi} X_t |X_s| \eta ds + \int_0^{2\pi} \frac{X_s}{|X_s|} \eta_s ds = 0,$$

où la fonction test $\eta \in H^1\big([0, 2\pi]\big)$ et vérifie des conditions aux limites périodiques, $\eta(0) = \eta(2\pi)$. On utilisera dans la suite la notation $H^1_{2\pi}$ pour cet espace de fonctions.

La résolution de cette EDP peut s'effectuer avec une méthode de Galerkin sur un espace d'approximation de $H^1_{2\pi}$ noté S^M. Un exemple classique est la base S^M composée de l'ensemble des fonctions triangle $\{\phi_j\}$ pour $j = 0...M$, définies sur une discrétisation uniforme de l'intervalle $[0, 2\pi]$. La paramétrisation $X(s)$ est approchée par

$$X(t) = \sum_{i=0}^{M} X_i(t)\phi_i(s),$$

et la formulation faible de ce problème impose que

$$\frac{1}{2}\partial_t(X_i)(h_i + h_{i+1}) = \frac{X_{i+1} - X_i}{h_{i+1}} - \frac{X_i - X_{i-1}}{h_i}, \quad \forall i = 1 : M - 1.$$

où $h_i = |X_i - X_{i-1}|$.
Une discrétisation temporelle naturelle est alors le schéma semi-implicite suivant

$$\frac{1}{2}(h_i^{n-1} + h_{i+1}^{n-1})\left(\frac{X_i^n - X_i^{n-1}}{\delta_t}\right) = \frac{X_{i+1}^n - X_i^n}{h_i^{n-1}} - \frac{X_i^n - X_{i-1}^n}{h_i^{n-1}}, \quad \forall i = 1 : M - 1.$$

Cet algorithme a un coût numérique très faible puisqu'il nécessite uniquement la résolution d'un système linéaire tridiagonal de taille $M \times M$ à chaque pas de temps. Les convergences

de ces algorithmes ainsi que des extensions à des mouvements d'interfaces plus complexes ont été étudiés par Deckelnick et Dziuk [48, 41, 42, 43]. Les simulations observées sur la figure 1.4 montrent que la méthode est stable, même lorsque les interfaces introduisent des courbures "infinies".

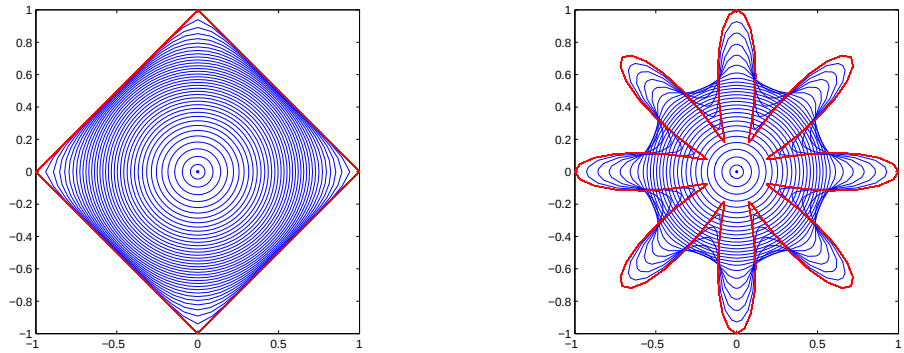


Fig. 1.4 – Simulation du mouvement par courbure moyenne à l'aide d'une résolution paramètrique semi-implicite où le pas de temps δ_t est égal à $1e^{-2}$ et le nombre de points utilisés est $M = 2^7$.

1.2.3 Bilan des méthodes paramétriques

La deuxième méthode numérique est très stable et a un coût algorithmique très faible pour simuler des mouvements d'interfaces. Un inconvénient des méthodes paramétriques est qu'il est difficile de les généraliser en dimension supérieure. On note tout de même certains travaux récents, comme ceux par exemple de Barrett, Garcke et Nurnberg [7, 6] qui utilisent des bases d'éléments finis sur des maillages d'interfaces en dimension 3. Un deuxième difficulté est la prise en compte des changements de topologie. En effet, de nombreux mouvements d'interfaces font intervenir de tels changements. Il est alors nécessaire de redéfinir une nouvelle paramétrisation de l'interface à chaque fois qu'un tel phénomène apparaît. Les méthodes paramétriques en perdent beaucoup d'efficacité. La plupart des autres méthodes numériques utilisent une représentation implicite de l'interface, comme la ligne de niveau zéro d'une fonction φ : c'est le point clé des méthodes level set.

1.3 Méthode Level set

Les méthodes de level set ont été introduites par Osher et Sethian [92] dans le cas de mouvements d'interfaces où les vitesses dépendent d'une fonction de la courbure : $V_n = f(\kappa)$.

1.3.1 Une représentation implicite de l'interface

L'idée de ces méthodes est de représenter l'interface Γ_t à l'aide de la ligne de niveau zéro d'une fonction φ :

$$\Gamma_t = \{x \in [0,1]^d,\ \varphi(x,t) = 0\}$$

Cette représentation a l'avantage de se généraliser en dimension supérieure et d'être adaptée aux changements de topologie.

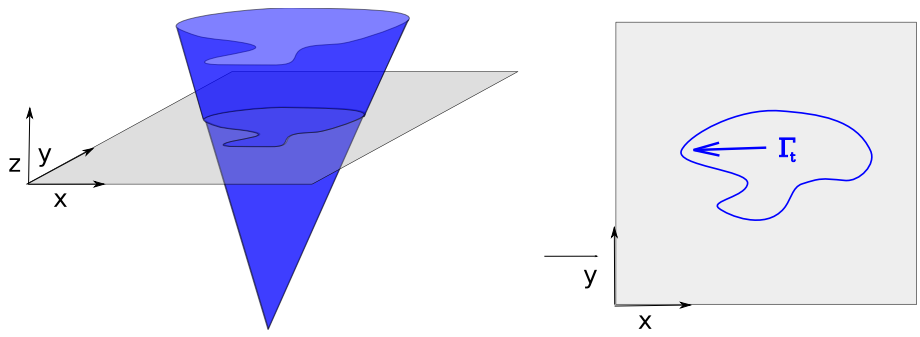


FIG. 1.5 – Exemple de fonction level set.

Un exemple de fonction φ est la fonction distance signée à l'interface $\varphi(x,t) = \overline{dist}(x, \Gamma_t)$. Nous verrons par la suite que les méthodes dites "fast marching" permettent d'obtenir rapidement de telles fonctions.

1.3.2 Particularité géométrique des fonctions level set φ

Les mouvements d'interfaces étudiés utilisent des vitesses normales V_n dépendant de la normale $\vec{n}(x)$ et de la courbure moyenne $\kappa(x)$. Les propriétés géométriques de la fonction distance impliquent que, sur l'interface,

$$\begin{cases} \vec{n}(x) = \nabla \overline{dist}(x, \Gamma_t), \\ \kappa(x) = -\operatorname{Tr}\left(\nabla^2 \overline{dist}(x, \Gamma_t)\right) = -\triangle \overline{dist}(x, \Gamma_t). \end{cases}$$

Remarque 1. *Avec ces définitions, la courbure moyenne d'une forme convexe est négative.*

Ainsi, lorsque le contour Γ_t est régulier (au moins de classe C^2), φ est deux fois différentiable sur un voisinage de l'interface et vérifie, sur Γ_t,

$$\begin{cases} \vec{n}(x) = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}, \\ \kappa(x) = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right). \end{cases}$$

On utilise par la suite la notation

$$F(x, \nabla\varphi, \nabla^2\varphi) = -\, V_n\left(x, \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}, -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right)\right).$$

1.3.3 Equation d'Hamilton Jacobi sur φ

L'équation du mouvement d'interfaces vérifiée par φ se traduit par une équation de type Hamilton-Jacobi :

$$\begin{cases} \varphi_t = F(x, \nabla\varphi, \nabla^2\varphi)|\nabla\varphi|, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x). \end{cases}$$

Dans le cas du mouvement par courbure moyenne, on obtient

$$\varphi_t = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right)|\nabla\varphi| = \triangle\varphi - \frac{< \nabla^2\varphi\nabla\varphi, \nabla\varphi >}{|\nabla\varphi|^2}.$$

Lorsque F est strictement positive, le domaine Ω_t ne fait que s'accroître au cours du temps, et il devient possible de décomposer $\varphi(x,t)$ sous la forme

$$\varphi(x,t) = \psi(x) - t,$$

où $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ vérifie l'équation eikonale

$$\begin{cases} |\nabla\psi|F = 1, \\ \psi(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma_0. \end{cases}$$

L'interface Γ_t est alors définie par $\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^d, \psi(x) = t\}$.

1.3.4 Solutions de viscosité

Pour les équations eikonales

Ces types de problèmes n'ont pas de solution classique mais admettent plusieurs solutions variationnelles. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas où $F = 1$ en dimension 1, avec $\Gamma_0 = \{-1\} \cup \{1\}$. La fonction ψ est alors la solution du problème

$$\begin{cases} 1 - |\psi'| = 0, \\ \psi(-1) = 0 \text{ et } \psi(1) = 0. \end{cases}$$

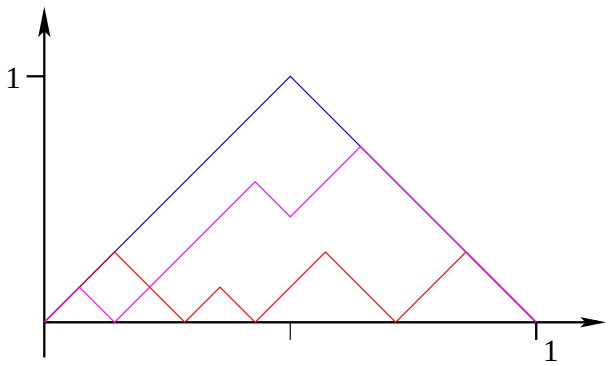


Fig. 1.6 – Plusieurs solutions faibles de $|\nabla\psi| = 1$ avec $\psi(-1) = \psi(1) = 0$

Il est clair que ce problème n'admet pas de solution $\mathbb{C}^1([-1,1])$. En effet, si c'était le cas, il existerait $x^* \in]-1,1[$ tel que $\psi'(x^*) = 0$ car $\psi(-1) = 0$ et $\psi(1) = 0$. Par ailleurs, ce problème admet plusieurs solutions faibles comme en témoigne la figure 1.6. Les solutions de viscosité ont été introduites par P. Louis Lions [37] pour donner un sens particulier aux solutions des équations d'Hamilton-Jacobi. Elles choisissent alors une solution particulière parmi toutes les solutions faibles. Le terme viscosité vient du fait que ces solutions peuvent être obtenues comme la limite lorsque $\epsilon \to 0$ des fonctions ψ_ϵ définies comme les solutions du problème régularisé

$$\begin{cases} 1 - |\psi_\epsilon'| = \epsilon\triangle\psi_\epsilon, \\ \psi_\epsilon(-1) = 0 \quad \text{et} \quad \psi_\epsilon(1) = 0. \end{cases}$$

Dans l'exemple précédent, la solution de viscosité est alors la fonction distance signée à l'intervalle $[-1,1]$, c'est à dire

$$\psi(x) = -(x+1)\mathbb{1}_{[-\infty,0]}(x) + (x-1)\mathbb{1}_{[0,+\infty]}(x).$$

.

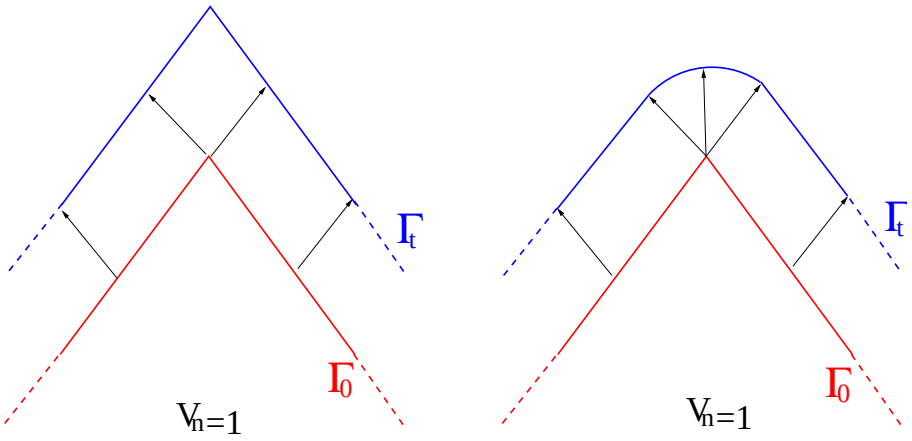


FIG. 1.7 – Deux solutions de l'équation $\varphi_t = |\nabla\varphi|$.

Pour les équations d'Hamilton-Jacobi

Lorsqu'une interface admet une irrégularité, par exemple lorsqu'un changement de topologie se produit, le mouvement n'a plus de solution classique. Ainsi sur la figure 1.7 où l'interface est supposée suivre la loi $V_n = 1$, nous n'avons à priori aucune préférence pour l'une des deux solutions exposées.

Les solutions de viscosité des équations d'Hamilton-Jacobi permettent alors non seulement de donner un sens aux solutions de ces équations, mais aussi de définir les mouvements d'interfaces après l'apparation de telles irrégularités. Dans l'exemple illustré par la figure 1.7, c'est la deuxième solution qui sera retenue.

Définition 1. *Une solution u est dite solution de viscosité de $u_t + H(x, \nabla u) = 0$ si pour toute fonction test $v \in C^\infty\big([0,T], C^\infty(\mathbb{R}^n)\big)$,*
1) si $u - v$ admet un maximum local en (x_0, t_0), alors

$$v_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0, t_0)) \leq 0;$$

2) si $u - v$ admet un minimum local en (x_0, t_0), alors

$$v_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0, t_0)) \leq 0.$$

Ces solutions peuvent de plus être obtenues comme la limite des solutions u_ϵ des problèmes

$$u_t + H(x, \nabla u) = \epsilon \triangle u.$$

Le lecteur pourra consulter les travaux de G. Barles [5] pour plus de détails au sujet des solutions de viscosité.

L'étude des équations non linéaires paraboliques dégénérées de type

$$\varphi_t = F(x, \nabla\varphi, \nabla^2\varphi)|\nabla\varphi|$$

a été effectuée par Evans et Spruck [55, 56, 57, 58] ainsi que par Chen, Giga et Goto [34].

1.3.5 Méthodes numériques

De nombreuses méthodes numériques (voir le livre de Sethian [101], et ceux de Osher [90, 91] ont été développées pour résoudre efficacement ce type d'équations. Parmi elles,

La méthode de "fast marching" est une méthode adaptative qui résoud les équations eikonales $F|\nabla\varphi| = 1$ lorsque F est de signe constant. Entre autre, elle est utilisée pour construire les fonctions distance à une interface donnée.

La méthode de "narrow band level set" est une méthode adaptative pour la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi $\varphi_t = F(x,\varphi)|\nabla\varphi|$. A chaque itération, le terme $F(x,\varphi)$ est traité de manière explicite, et l'interface est déplacée vers sa nouvelle position. Comme ce transport dégrade la forme générale de φ, il est de temps en temps nécessaire de redéfinir la fonction level set de l'interface. Un moyen est d'utiliser la méthode "fast marching".

Un point délicat et qui nécessite le plus grand soin est le transport de la fonction level set une fois le terme $F(x,\varphi)$ explicitement déterminé. Une technique courante est l'utilisation de schémas Weno, très robustes pour ce type d'opération, voir par exemple [90].

1.4 Méthode de champ de phase

La méthode de champ de phase appliquée au mouvement par courbure moyenne aboutit à l'équation d'Allen-Cahn

$$u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u). \tag{1.1}$$

Cette équation fut initialement introduite par Allen et Cahn [76] afin d'analyser des problèmes de transformation de phases.

Nous allons maintenant introduire la méthode de champ de phase de deux manières différentes. La première approche consiste à utiliser une approximation de l'équation vérifiée par la fonction distance à l'interface. La seconde introduit des énergies de Ginzburg-Landau. Ces deux approches sont complémentaires et permettront d'anticiper des généralisations futures.

1.4.1 Notion de potentiel double puits W et de profil associé q

Le premier ingrédient à introduire dans la méthode de champ de phase est un potentiel double puits W. Dans cette thèse, nous utiliserons exclusivement le potentiel $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$. A ce potentiel est ensuite associé une fonction de phase q d'après la définition suivante :

Définition 2. *Soit W un potentiel double puits, alors le profil q est défini comme la solution du problème de minimisation*

$$\min\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left|\gamma'(s)\right|^2 + W\big(\gamma(s)\big)\right]ds, \gamma \in H^1_{loc}(\mathbb{R}), \gamma(-\infty) = 1, \gamma(+\infty) = 0, \gamma(0) = 1/2\right\}$$

Proposition 1. *Soit W un potentiel double puits de classe C^2. Alors le profil q défini comme la solution du problème de minimisation*

$$\min\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left|\gamma'(s)\right|^2 + W\big(\gamma(s)\big)\right]ds, \gamma \in H^1_{loc}(\mathbb{R}), \gamma(-\infty) = 1, \gamma(+\infty) = 0, \gamma(0) = 1/2\right\},$$

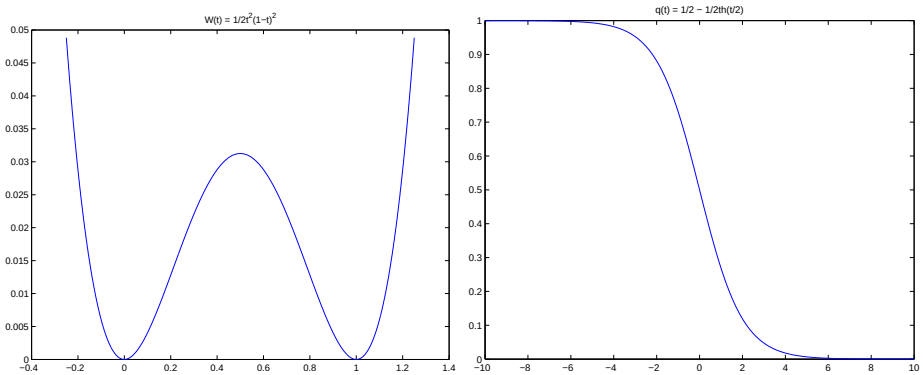


FIG. 1.8 – Exemple de potentiel double puits et de son profil associé.

vérifie

$$q^{'}(s) = -\sqrt{2W'\big(q(s)\big)}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$$q^{''}(s) = W^{'}\big(q(s)\big), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Démonstration de la proposition 1.

L'équation d'Euler du problème de minimisation implique que $\forall v \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \Big(-q^{''}(s) + W^{'}(q(s))\Big)\, v(s)dt$$

On en déduit alors l'égalité $q^{''}(s) = W^{'}\big(q(s)\big)$ pour presque tout $s \in \mathbb{R}$.

Comme le potentiel W est de de classe C^2, le profil q devient strictement monotone et les fonctions tests v peuvent s'exprimer sous la forme $v = q^{'}\tilde{v}$ avec $q^{'} < 0$.
L'équation d'Euler précédente peut se réécrire de la façon suivante : $\forall \tilde{v} \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Big(-q^{''}(s)q^{'}(s) + W^{'}\big(q(s)\big)q^{'}(s)\Big)\,\tilde{v}(s)dt &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{2}\left(q^{'}(s)\right)^2 + W\big(q(s)\big)\right)\tilde{v}(s)dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{2}\left(q^{'}(s)\right)^2 + W\big(q(s)\big)\right)\tilde{v}^{'}ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

L'intégration par parties est justifiée car $q \in H^1(\mathbb{R})$ et $q^{'}(-\infty) = q^{'}(+\infty) = 0$.
On en déduit que l'égalité $q^{'}(s) = -\sqrt{2W'\big(q(s)\big)}$ est vérifiée presque partout. Si la solution q est de plus de classe C^1 et que $W^{'}$ est continu, alors cette égalité est vraie $\forall s \in \mathbb{R}$. □

Nous effectuons maintenant un calcul explicite de q dans le cas particulier du potentiel $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$. L'égalité (1.2) montre que q est solution de l'EDO

$$\begin{cases} q^{'}(s) = -q(s)\big(1 - q(s)\big), \\ q(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Avec $\tilde{q} := q + 1/2$, il en ressort que

$$\frac{2\tilde{q}^{'}(s)}{1-\left(2\tilde{q(s)}\right)^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{q}(0) = 0$$

Au final,

$$\tilde{q}(s) = -\frac{1}{2}\ \tanh\left(\frac{s}{2}\right) \quad \text{et} \quad q(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \tanh\left(\frac{s}{2}\right)$$

1.4.2 Première approche : propriété géométrique de la fonction distance

La première méthode consiste à

- déterminer l'EDP vérifiée par la fonction distance signée à Ω sur l'interface. Par exemple, dans le cas du mouvement par courbure moyenne, $d(x,t) = dist(x, \Omega_t)$ vérifie

$$d_t = \triangle d.$$

- injecter la fonction u_ϵ dans cette EDP où la fonction u_ϵ est définie par l'expression

$$u_\epsilon(x,t) = q\left(\frac{d(x,\Gamma_t)}{\epsilon}\right).$$

En effet, lorsque ϵ est assez petit, la fonction u_ϵ "ressemble" à une fonction caractéristique lissée de l'ensemble Ω_t, et ses variations sont uniquement localisées sur un voisinage Γ_t^ϵ de taille ϵ autour de Γ_t.

Définition 3. *Le domaine Γ_t^ϵ sera appelé, dans la suite de cette thèse, "l'interface diffuse". Sa largeur caractéristique est de l'ordre de ϵ.*

Nous allons maintenant appliquer la méthode décrite ci-dessus dans le cas du mouvement par courbure moyenne. Les calculs des dérivées successives de $u_\epsilon(x,t)$ montrent que

$$\nabla u_\epsilon = q^{'}\left(\frac{d(x,\Gamma_t)}{\epsilon}\right)\frac{\nabla d(x,\Gamma_t)}{\epsilon},$$

$$\nabla^2_{i,j} u_\epsilon = q^{''}\left(\frac{d(x,\Gamma_t)}{\epsilon}\right)\frac{\nabla_i d(x,\Gamma_t)\nabla_j d(x,\Gamma_t)}{\epsilon^2} + q^{'}\left(\frac{d(x,\Gamma_t)}{\epsilon}\right)\frac{\nabla^2_{i,j} d(x,\Gamma_t)}{\epsilon},$$

$$\triangle u_\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}W^{'}(u_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}q^{'}\left(\frac{d(x,\Gamma_t)}{\epsilon}\right)\triangle d \quad \text{d'après} \quad (1.3),$$

$$(u_\epsilon)_t = \frac{1}{\epsilon}q^{'}\left(\frac{d(x,\Gamma_t)}{\epsilon}\right)d_t,$$

où nous avons utilisé la notation $\nabla^2_{i,j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Dans le cas du mouvement par courbure moyenne, la fonction distance signée à Ω vérifie sur l'interface $d_t = \triangle d$. On en déduit donc que la fonction $u_\epsilon = q\left(\frac{d}{\epsilon}\right)$ vérifie "approximativement"

$$(u_\epsilon)_t = \triangle u_\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}W^{'}(u_\epsilon).$$

L'équation d'Allen-Cahn est ainsi retrouvée.
Cette approche, comme nous le détaillerons dans le prochain chapitre, apparaît dans les démonstrations de convergence de la méthode de champ de phase. Nous verrons de plus qu'elle conduira à une nouvelle équation de réaction diffusion dans le cas du mouvement par courbure moyenne avec terme de forçage.

1.4.3 Deuxième approche : énergie de Ginzburg-Landau

Principe

La deuxième approche nécessite que le mouvement d'interfaces soit la conséquence de la minimisation d'une énergie surfacique définie sur ces mêmes interfaces. De manière générale, ces énergies, notées $J(E)$, sont définies sur les ensembles mesurables réguliers et bornés de $\mathbb{R}^n$, et s'expriment sous la forme

$$J(E) = \int_{\partial E} f\left(x, \nabla d_E, \nabla^2 d_E)\right) ds,$$

où d_E représente la fonction distance signée à l'ensemble E. L'idée consiste à approcher par Γ-convergence ces énergies surfaciques à l'aide d'une suite d'énergies volumiques notée $J_\epsilon(u)$. C'est ce qu'on appelle couramment les énergies de Ginzburg-Landau :

$$J_\epsilon(u^\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(x, \frac{\nabla u^\epsilon}{|\nabla u^\epsilon|}, \frac{1}{|\nabla u^\epsilon|^2}\left(I_d - \frac{\nabla u^\epsilon}{|\nabla u^\epsilon|} \otimes \frac{\nabla u^\epsilon}{|\nabla u^\epsilon|}\right)\nabla^2 u^\epsilon\right)\left(\epsilon\frac{|\nabla u^\epsilon(x,t)|^2}{2} + \frac{1}{\epsilon}W(u^\epsilon(x,t))\right) dx,$$

où I_d représente la matrice identité en dimension d. Finalement, l'équation de champ de phase est obtenue comme le flux de gradient de cette énergie volumique :

$$u_t = -\frac{1}{\epsilon}J_\epsilon'(u).$$

Notion de Γ-convergence

La notion de Γ-convergence donne un sens à la limite d'une suite de fonctionnelles J_ϵ. Le lecteur pourra consulter le livre de Braides [15] pour plus de détails à ce sujet.

Définition 4. *Une suite de fonctionnelles $J_\epsilon : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Γ-converge vers $J : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si $\forall u \in X$,*
– si $u_\epsilon \to u$, alors

$$J(u) \leq \liminf J_\epsilon(u_\epsilon),$$

– il existe une suite $u_\epsilon \to u$ telle que

$$\limsup J_\epsilon(u_\epsilon) \leq J(u)$$

Nous utiliserons dans la suite la notation $J^\epsilon \xrightarrow{\Gamma} J$.

L'intérêt de cette notion de convergence est qu'elle garantit qu'une suite u_ϵ de minima de J_ϵ "converge" au sens de la topologie utilisée vers un minima de J.

Avant d'énoncer plus précisément les résultats de Γ-convergence qui relient J_ϵ à J, il est nécessaire d'éclaircir le choix de l'espace topologique X utilisé pour un tel résultat. En effet, $J(E)$ est définie sur les ensembles de $\mathbb{R}^d$ alors que $J_\epsilon(u)$ prend en argument des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^d)$. Le chapitre 2 du livre de Henrot et Pierre [72] traite des différentes topologies sur les domaines de $\mathbb{R}^d$. Il en ressort notamment que la convergence $E_n \to E$ au sens de la norme L^1 des fonctions caractéristiques a de bonnes propriétés pour notre problématique : le périmètre est par exemple semi-continu inférieurement pour cette topologie. La fonctionnelle J est alors naturellement étendue à l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} J(u) = \displaystyle\int_{\partial E} f\left(x, \nabla d_E, \nabla^2 d_E\right) ds & \text{si } u = \mathbb{1}_E, \\ J(u) = +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les résultats de Γ-convergence peuvent maintenant s'expliciter sous la forme

$$J_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} c_W \overline{J} \text{ pour la topologie } L^1(\mathbb{R}^d)$$

où $\overline{J}$ est l'enveloppe semi-continue inférieure de J pour cette topologie et c_W une constante qui dépend uniquement du potentiel double puits W,

$$c_W = \int_0^1 \sqrt{2W(s)}ds.$$

Le lecteur trouvera la démonstration de ce type de résultats avec des hypothèses sur f (convexité par rapport à ∇d_E et coercivité par rapport à $\nabla^2 d_E$) dans les travaux de Bellettini [9].

Application dans le cas particulier du mouvement par courbure moyenne

Remarque 2. *Nous rappellons que si Ω est un ensemble régulier (au moins de classe C^1), alors le périmètre de Ω est déterminé par l'intégrale*

$$P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1ds$$

Plus généralement, lorsque les domaines Ω sont des domaines bornés et mesurables de $\mathbb{R}^d$, nous appelons "périmètre de Ω", le nombre

$$P(\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi)dx \ ; \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)\right\},$$

où $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ représente l'ensemble des vecteurs C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Cette définition coincide avec la définition précédente lorsque Ω est régulier.

Dans le cas du mouvement par courbure moyenne,

$$J(\Omega) = P(\Omega) \quad \text{et} \quad J_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\epsilon\frac{|\nabla u(x,t)|^2}{2} + \frac{1}{\epsilon}W\big(u(x,t)\big)\right)dx.$$

La notion de dérivation de domaine permet d'effectuer le lien entre le mouvement par courbure moyenne et la minimisation du périmètre. Le lecteur trouvera la démonstration de la propriété suivante dans le livre d'Allaire [1] :

Proposition 2. *Si $\Omega_{t,g} = (Id + tg)(\Omega)$ où g est un champ vectoriel de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ et Id, l'application identité. Alors*

$$\frac{d}{dt}P(\Omega_{t,g})_{|t=0} = -\int_\Gamma \kappa \ g.\vec{n} \ ds.$$

Cette propriété montre que la meilleure direction de descente $h^* \in L^2(\Gamma)$ qui minimise le périmètre dans le sens où

$$h^* = \underset{h\in L^2(\Gamma)}{\arg\min}\left\{\frac{d}{dt}P(\Omega_{t,h\vec{n}})_{|t=0} \ ; \ \|h\|_{L^2(\Omega)} \leq 1\right\}$$

est obtenue dans le cas du mouvement par courbure moyenne :

$$h^*(s) = \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\int_\Gamma \kappa(s)^2 ds}}.$$

En effet, d'une part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $\forall h \in L^2(\Gamma)$, $\|h\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$,

$$\int_\Gamma \kappa\ h\ ds \leq \sqrt{\int_\Gamma \kappa^2 ds}$$

Et d'autre part, avec $h = \dfrac{\kappa(s)}{\int_\Gamma \kappa(s)^2 ds}$,

$$\int_\Gamma \kappa\ h\ ds = \frac{\displaystyle\int_\Gamma \kappa(s)^2 ds}{\sqrt{\displaystyle\int_\Gamma \kappa(s)^2 ds}} = \sqrt{\int_\Gamma \kappa(s)^2 ds}$$

Le lien entre la minimisation du périmètre et le mouvement par courbure moyenne est donc établi.
Le premier résultat de Γ-convergence entre le périmètre et l'énergie J_ϵ fut démontré par Modica et Mortola [83, 84].

Finalement, l'équation d'Allen-Cahn peut être retrouvée en déterminant le gradient de la fonctionelle J_ϵ :

$$\left\langle J_\epsilon^{'}(u), v \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \left(-\epsilon \triangle u + \frac{1}{\epsilon} W^{'}(u) \right) v\ dx,$$

Et,

$$u_t = -\frac{1}{\epsilon}\ J_\epsilon^{'}(u) = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u)$$

L'interprétation de l'équation d'Allen-Cahn comme le flux de gradient de J_ϵ permet entre autre de montrer l'existence de ses solutions. Ces résultats sont présentés dans le chapitre suivant.

1.5 Algorithme de Bence Merriman Osher

L'algorithme de Bence Merriman Osher est souvent considéré comme un cadre dégénéré de l'équation d'Allen-Cahn. Nous allons maintenant expliquer brièvement son principe.

1.5.1 Principe de l'algorithme de Bence Merriman Osher

Bence, Merriman et Osher ont développé [80] un algorithme qui permet de calculer le mouvement par courbure moyenne d'un domaine initial E. Il se présente de la manière suivante :

Pour un domaine E de $\mathbb{R}^d$ et $h > 0$, on défini $T_h(E)$ l'ensemble

$$T_h(E) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \quad u(x,h) \geq \frac{1}{2} \right\},$$

où u est la solution du problème

$$\begin{cases} u_t = \triangle u \\ u(.,0) = \mathbb{1}_E \end{cases}$$

Une approximation du mouvement par courbure moyenne de E, noté $E_h(t)$ est alors obtenue en considérant

$$E_h(t) = T_{t-[t/h]}\big(E_h([t/h])\big),$$

où $[t/h]$ désigne la partie entière de t/h.
Ils ont en effet conjecturé que $E_h(t) \to E(t)$ lorsque h tend vers zéro où $E(t)$ représente le mouvement par courbure moyenne du domaine initial E.

D'un point de vue numérique, avec la discrétisation temporelle $t_n = t_0 + n\ h$, cet algorithme se décompose en deux étapes :
– application de l'opérateur de diffusion

$$u^{n+1/2} = K_h * u^n;$$

– la solution courante est alors réhaussée pour obtenir la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{E_h(t_n)}$:

$$u^n = round(u^{n+1/2}).$$

Le noyau K_h représente le noyau de la chaleur avec un pas de temps h :

$$K_h(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-4\pi^2|\xi|^2 h}\right](x) = \frac{1}{(4\pi h)^{\frac{d}{2}}}\ e^{-\frac{|x|^2}{4h}}$$

De nombreuses généralisations de cet algorithme sont présentent dans la littérature. Par exemple, Ruuth et Merriman ont proposé [100] d'utiliser des noyaux K dont la forme géométrique permet de supposer que l'algorithme convergera vers des mouvements par courbure moyenne anisotropes. D'un autre côté, Chambolle et Novaga [28] ont étudié la convergence d'une extension de cet algorithme dans le cadre anisotrope, où l'opérateur laplacien est remplacé par un laplacien anisotrope défini dans la géométrie de Finsler (voir la deuxième partie de cette thèse). Finalement, l'étude de cet algorithme dans un cadre général a été réalisée par Ishhi, Pires et Souganidis [74].

1.5.2 Lien avec l'équation d'Allen-Cahn

L'équation d'Allen-Cahn se décompose en deux opérateurs : l'opérateur de diffusion déplace la position de l'interface de la solution, et l'opérateur de réaction W' redresse la solution pour maintenir la zone de l'interface diffuse à une taille de l'ordre de ϵ. Ainsi, l'algorithme de Bence-Merriman-Osher peut être interprété comme un cadre dégénéré de l'équation d'Allen-Cahn, où le potentiel double puits utilisé vérifierait

$$\tilde{W}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t = 0 \quad \text{ou} \quad t = 1, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'avantage de cet algorithme est qu'il n'introduit pas de contrainte de stabilité, contrairement aux méthodes traditionnelles de discrétisation de l'équation d'Allen-Cahn. Nous verrons dans la suite de cette thèse l'intérêt de l'interface diffuse, notamment pour la prise en compte de termes de forçage ou encore de contraintes sur le volume. De plus, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, un traitement exact de l'opérateur de réaction permet de rendre les schémas numériques de l'équation d'Allen-Cahn inconditionnellement stables.

Chapitre 2

Etude de l'équation d'Allen-Cahn

2.1 Introduction

Ce chapitre traite des différentes propriétés de l'équation d'Allen-Cahn

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Le premier point traité est l'étude des solutions u^ϵ de cette équation : quelles sont leur régularité, leur particularité ? Dans une première partie, nous effectuerons une synthèse de travaux classiques de la littérature portant sur l'existence, l'unicité et des principes de comparaison de ces solutions. La plupart des démonstrations présentées vient du chapitre 15 des travaux d'Ambrosio [3]. Cette synthèse a pour but, d'une part, de présenter des outils classiques pour ce type de problème, mais aussi de développer une intuition sur le comportement des solutions u^ϵ afin d'adapter ce travail par la suite à des équations de réaction-diffusion plus complexes.

Dans la deuxième partie, nous expliquerons en quoi les solutions de l'équation d'Allen-Cahn, avec comme condition initiale $u_0 = q\left(\frac{d(x,\Omega_0)}{\epsilon}\right)$, permettent d'obtenir une bonne approximation du mouvement par courbure moyenne de Ω_0 lorsque le paramètre ϵ est assez petit. En effet, pour l'instant, le seul argument qui relie les solutions de l'équation d'Allen-Cahn au mouvement par courbure moyenne est le théorème de Modica-Mortola [83, 84].

Puis, nous proposerons une nouvelle méthode de discrétisation qui utilise une technique de splitting entre les opérateurs de diffusion et de réaction. Dans un premier temps, les deux opérateurs seront traités indépendamment de manière exacte et les schémas numériques obtenus seront inconditionnellement stables. Nous étudierons ensuite une alternative qui consiste à traiter l'opérateur de diffusion de manière exacte et l'opérateur de réaction de manière explicite. Dans ce cas, un principe de comparaison discret appliqué à nos solutions permettra de ressortir une condition de stabilité classique (voir par exemple [53, 33]) du type

$$\delta_t \leq C\ \epsilon^2$$

où la constante C ne dépend que du potentiel double puits W : .

Enfin, dans une dernière partie, des tests numériques valideront les algorithmes proposés et retrouveront l'ordre de convergence en $\epsilon^2 ln(\epsilon)^2$ des méthodes de champ de phase.

2.2 Existence et unicité des solutions de l'équation d'Allen-Cahn

Nous exposons maintenant des preuves d'existence de solution du problème :

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \triangle u(x,t) - W'(u(x,t)) \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T] \\ u(x,0) = q\left(\frac{d(x,\Omega_0)}{\epsilon}\right) \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

où W est un potentiel double puits régulier de classe $C^2(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$W'' \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}) \tag{2.1}$$

$$W(t) \geq \alpha t^2 + \beta \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

avec $\alpha > 0$, et $\beta \in \mathbb{R}$.
On rappelle qu'une fonction W est considérée comme un potentiel double puits si elle possède deux minimums locaux (strictement), positionnés en x_0 et x_1.

Remarque 3.
Jusqu'à présent, un facteur $\frac{1}{\epsilon^2}$ apparaissait devant le terme de réaction $W'(u)$ de l'équation d'Allen-Cahn. Par souci de rendre la démonstration plus lisible, ce terme est caché dans le potentiel double puits, $\tilde{W} = \frac{1}{\epsilon^2}W$.

Dans un premier temps, l'équation d'Allen-Cahn est considérée sur le tore $x \in [0,\tau]^d$ avec des conditions aux limites périodiques. L'existence de solution est obtenue dans les espaces $u \in L^\infty([0,\infty[, H^1_\tau) \cap H^1_{loc}([0,\infty[, L^2_\tau)$.

Lorsque la condition initiale est de la forme $q\left(\frac{d(x,\Omega_0)}{\epsilon}\right)$, la solution u peut être explicitée sous la forme $u = q\left(\frac{z_\epsilon(x,t)}{\epsilon}\right)$, où z^ϵ vérifie $Lip(|z^\epsilon|) \leq 1$. On rappelle que

$$Lip(f) = \sup_{(x,y)\in(\mathbb{R}^d)^2} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \right\}$$

Cette propriété donne ainsi suffisamment d'informations sur la régularité des solutions périodiques pour obtenir l'existence de solution de l'équation d'Allen-Cahn sur $\mathbb{R}^d$ tout entier dans les espaces

$$L^\infty([0,\infty[, H^1(B_R)) \cap H^1_{loc}([0,\infty[, L^2(B_R)), \qquad \forall R > 0$$

où la boule $B_R := \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ |x| \leq R\right\}$.

Enfin, un principe de comparaison, démontré dans une dernière partie, garantit l'unicité de ces solutions.

2.2.1 Existence de la solution dans $[0,\tau]^d$

Le problème est tout d'abord résolu avec des conditions périodiques sur $[0,\tau]^d$.

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \triangle u(x,t) - W'(u(x,t)) \quad (x,t) \in [0,\tau]^d \times [0,T] \\ u(x,0) = u_0 \in H^1([0,\tau]^d) \cap L^\infty([0,\tau]^d) \end{cases}$$

Nous utiliserons dans la suite les notations suivantes

$$\|u\|^2_{L^2_\tau} := \int_{[0,\tau]^d} |u(x)|^2 dx$$
$$\|u\|^2_{H^1_\tau} := \int_{[0,\tau]^d} |u(x)|^2 dx + \int_{[0,\tau]^d} \nabla u(x).\nabla u(x) dx$$

Nous allons donner la démonstration du théorème suivant :

Théorème 1. *Si $u_0 \in H^1_\tau \cap L^\infty_\tau$, alors il existe une fonction*

$$u \in L^\infty([0,\infty[, H^1_\tau) \cap H^1_{loc}([0,\infty[, L^2_\tau)$$

solution du problème précédent avec comme condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$.

Démonstration du théorème 1.

Nous rappelons que nous ne faisons que reproduire la démonstration du théorème *31* présentée dans les notes d'Ambrosio [3].

Le point clef de la démonstration consiste à identifier le terme de droite de l'EDP comme le gradient de l'énergie suivante :

$$J(u) = \int_{(0,\tau)^d} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + W(u) \right) dx \quad u \in H^1_\tau$$

où $J'(u)$ est la dérivée Gateaux de J pour la topologie L^2_τ.

$$J'(u)(v) = \int_{(0,\tau)^d} (-\triangle u + W'(u))\ v dx =< J'(u), v >_{L^2_\tau}$$

Cette démonstration se décompose en 3 étapes :
Dans la première étape, une suite de solutions linéaires par morceaux en temps est construite suivant l'algorithme de Almgren-Taylor-Wang [2]. Des inégalités d'énergie permettent ensuite le passage à la limite vers une fonction u lorsque le pas de temps tend vers zéro. On vérifie enfin que la fonction u est bien une solution de notre problème et qu'elle appartient à l'espace $L^\infty([0,\infty[, H^1_\tau) \cap H^1_{loc}([0,\infty], L^2_\tau)$.

Première étape de la démonstration

Soit $h > 0$, formellement h représente un pas de temps. La suite de fonction $u^j_h \in L^2_\tau(\mathbb{R}^d)$ avec $u^0_h = u_0$ est définie de manière récursive comme la solution du problème de minimisation suivant

$$u^{j+1}_h := \underset{v \in H^1_\tau}{\arg\min} \left\{ \tilde{J}_{u^j_h}(v) = J(v) + \frac{1}{2h} \int_{(0,\tau)^d} |v - u^j_h|^2 dx \right\} \tag{2.3}$$

L'équation d'Euler associée au problème de minimisation s'écrit

$$J'(u^{j+1}_h) + \frac{1}{h}\ (u^{j+1}_h - u^j_h) = 0 \tag{2.4}$$

Nous montrons maintenant que la suite de fonctions $(u^j_h)_{j\in\mathbb{N}}$ est bien définie, notamment en prouvant l'existence et l'unicité du problème de minimisation pour un pas de temps h assez petit.

i) Existence

La minimisation (2.3) peut s'effectuer sur un domaine borné de H^1_τ puique si $v \in H^1_\tau$ telle que $\tilde{J}_{u_h^j}(v) \leq \tilde{J}_{u_h^j}(u_h^j)$, alors

$$\begin{aligned} J(u_h^j) &\geq J(v) + \frac{1}{2h}\int_{(0,\tau)^d} |v - u_h^j|^2 dx \\ &\geq \int_{(0,\tau)^d} \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} + W(v)\right) dx + \frac{1}{2h}\int_{(0,\tau)^d} |v - u_h^j|^2 dx \\ &\geq \int_{(0,\tau)^d} \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} + \alpha|v|^2\right) dx + \int_{(0,\tau)^d} \beta dx \quad \text{d'après} \quad (2.2) \\ &\geq C\ \|v\|_{H^1_\tau} + \beta\tau^d \end{aligned}$$

Et

$$\|v\|_{H^1_\tau} \leq \frac{1}{C}\left(J(u_h^j) - \beta\tau^d\right) \tag{2.5}$$

Ainsi, la continuité inférieure de la fonctionnelle J pour la topologie faible de H^1_τ assure l'existence de minimum de (2.3).

ii) Unicité :

Remarque 4.
Si la condition initiale est contenue entre les deux puits (que l'on note x_0 et x_1), alors la définition u_h^j comme une solution du problème de minimisation précédent implique que $\forall j \in \mathbb{N}$, u_h^j est encore compris entre ces deux puits.
En effet, supposons que cela ne soit pas le cas. Alors il existe $j^* \in \mathbb{N}$ tel que $u_h^{j^*} \subset [x_0, x_1]$ et $u_h^{j^*+1} \notin [x_0, x_1]$. Soit $\tilde{u}_h^{j^*+1} \in H^1_\tau$, la fonction définie par l'expression suivante

$$\tilde{u}_h^{j^*+1}(x) = \min\{max\{u_h^{j^*+1}(x), x_0\}, x_1\}$$

Alors d'une part, comme W admet des minimums stricts en x_0 et x_1,

$$J(\tilde{u}_h^{j^*+1}) \leq J(u_h^{j^*+1})$$

et d'autre part, comme $u_h^{j^*} \subset [x_0, x_1]$,

$$\|u_h^{j^*+1} - u_h^{j^*}\|^2_{L^2_\tau} > \|\tilde{u}_h^{j^*+1} - u_h^{j^*}\|^2_{L^2_\tau}.$$

Ainsi,

$$J(u^{j^*+1}) + \frac{1}{2h}\int_{(0,\tau)^d} |u^{j^*+1} - u_h^{j^*}|^2 dx \quad > \quad J(\tilde{u}^{j^*+1}) + \frac{1}{2h}\int_{(0,\tau)^d} |\tilde{u}^{j^*+1} - u_h^{j^*}|^2 dx.$$

Et cette inégalité est en contradiction avec le fait que $u_h^{j^*+1}$ soit solution du problème de minimisation (2.3).

Plus généralement, si la condition initiale est bornée, $\|u_0\|_{L^\infty([0,\tau]^d)} \leq R$, alors il existe $\tilde{R} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall j \in \mathbb{N}$, u_h^j est bornée et

$$u_h^j \subset [x_0, x_1] \cup [-R, R] \subset [-\tilde{R}, \tilde{R}],$$

car la valeur de W croît en s'éloignant des puits.

Ainsi sous l'hypothèse que $\frac{1}{h} > M := \|W''\|_{L^\infty([-\tilde{R},\tilde{R}])}$, la solution du problème (2.3) est unique. En effet, supposons que u et $\tilde{u}$ soient deux solutions du problème de minimisation (2.3), d'une part la remarque 4 montre

$$\begin{aligned}\langle J'(u) - J'(\tilde{u}), u - \tilde{u}\rangle_{L^2_\tau} &= \langle \triangle\tilde{u} - \triangle u, u - \tilde{u}\rangle_{L^2_\tau} + \langle (W'(u) - W'(\tilde{u})), u - \tilde{u}\rangle_{L^2_\tau} \\ &\geq -M\|u - \tilde{u}\|^2_{L^2_\tau},\end{aligned}$$

et d'autre part l'équation d'Euler (2.4) implique que

$$\left\langle J'(u) - J'(\tilde{u})\,,\, u - \tilde{u}\right\rangle_{L^2_\tau} \quad = \quad -\frac{1}{h}\,\|u - \tilde{u}\|^2_{L^2_\tau}$$

Il s'ensuit de ces deux inégalités que $M\ b\|u - \tilde{u}\|^2_{L^2_\tau} \geq \frac{1}{h}\ b\|u - \tilde{u}\|^2_{L^2_\tau}$, et l'hypothèse $\frac{1}{h} > M$ permet de conclure sur l'unicité des solutions du problème de minimisation : $u = \tilde{u}$.

iii)Construction de $u_h(t,x)$:

La fonction $u_h(t,x)$, linéaire par morceaux en temps, est alors définie par

$$u_h(t,x) := u_h^{[\frac{t}{h}]}(x) + \left(\frac{t}{h} - \left[\frac{t}{h}\right]\right)\left(u_h^{[\frac{t}{h}+1]}(x) - u_h^{[\frac{t}{h}]}(x)\right) \qquad \forall t \geq 0. \tag{2.6}$$

On vérifie de plus que $u_h \in L^2_{loc}([0,\infty), H^1_\tau)$ car $\forall j \in \mathbb{N}$, $u_h^j \in H^1_\tau$.

Deuxième étape de la démonstration

Le but de cette partie est de montrer que la famille $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans l'espace de fonction

$$H^1_{loc}([0,\infty[, L^2_\tau) \cap L^\infty([0,\infty[, H^1_\tau)$$

Nous pourrons alors extraire une sous-suite $h(k)$ et une fonction $u(t,x)$ telle que $u_{h(k)}(t)$ converge faiblement vers $u(t)$ pour la topologie H^1_τ, $\quad \forall t \in [0,\infty)$.

Tout d'abord, la fonction $t \to J(u_h(t,x)))$ est décroissance. En effet, le minimum de la fonctionnelle $v \to J(v) + \frac{1}{2h}\int_{(0,\tau)^d} |v - u_h^j|^2 dx$ est atteint pour $v = u_h^{j+1}$ et alors

$$\frac{1}{2h}\|u_h^{j+1} - u_h^j\|^2_{L^2_\tau} \leq J(u_h^j) - J(u_h^{j+1})$$

Deuxièmement, la suite de fonction $u_h(t,x)$ est uniformément bornée dans $L^\infty([0,\infty), H^1_\tau)$: En reprenant l'inégalité 2.5, il ressort que

$$\|u_h(t,h)\|_{H^1_\tau} \leq \frac{1}{C}\left(J(u_0) - \beta\tau^d\right).$$

Enfin la suite de fonction $u_h(t,x)$ est uniformément bornée dans $H^1_{loc}([0,\infty), L^2_\tau)$. En effet,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|\partial_t u(t,x)\|^2_{L^2_\tau} dt &= \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{\infty} \|u_h^{j+1} - u_h^j\|^2_{L^2_\tau} \\ &\leq 2\sum_{j=0}^{\infty}\Big(J(u_h^j) - J(u_h^{j+1})\Big) \\ &\leq 2J(u_0)\end{aligned}$$

Ces deux inclusions permettent d'obtenir l'existence d'une sous-suite $h(k)$ et d'une fonction $u(t) \in L^\infty([0,T], H^1_\tau([0,\tau]^d))$ tels que $\forall t \in [0,T]$, la sous-suite $u_{h(k)}(t)$ converge faiblement vers $u(t)$ pour la topologie $H^1_\tau([0,\tau]^d)$. Et comme, $\forall h$, $u_h(0) = u_0$, la fonction u vérifie de plus que $u(0,x) = u_0(x)$.

Troisième étape de la démonstration
Nous devons maintenant vérifier que u est bien solution de l'équation d'Allen-Cahn. Pour cela, on interprète $\partial_t u(t,x)$ au sens des distributions : $\forall \phi \in C_c^\infty([0,\infty) \times [0,\tau]^d)$,

$$\langle \partial_t u\,,\, \phi\rangle = -\,\langle u\,,\, \phi_t\rangle_{L^2([0,T]\times\Omega)}$$

D'après la définition (2.6) de la fonction $u_h(t,x)$, $\forall h > 0$,

$$\begin{aligned}\partial_t u_h(t,x) &= \frac{1}{h}\,(u_h^{\left[\frac{t}{h}+1\right]}(x) - u_h^{\left[\frac{t}{h}\right]}(x)) \\ &= -J'(u_h^{\left[\frac{t}{h}+1\right]}) \\ &= -J'\left(u_h\left(h\left[\frac{t}{h}+1\right]\right)\right)\end{aligned}$$

Soit $\phi \in C_c^\infty([0,\infty) \times [0,\tau]^d))$. Alors

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^+\times\ [0,\tau]^d}\left[\triangle u_h\left(h\left[\frac{t}{h}+1\right],x\right) - W'\left(u_h\left(h\left[\frac{t}{h}+1\right],x\right)\right)\right]\phi(t,x)dt\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^+\times[0,\tau]^d} -J'\left(u_h\left(h\left[\frac{t}{h}+1\right],x\right)\right)\ \phi(t,x)dt\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^+\times[0,\tau]^d} \partial_t u_h(t,x)\ \phi(t,x)dt\ dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^+\times[0,\tau]^d} u_h(t,x)\ \phi_t(t,x)dt\ dx\end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^+\times[0,\tau]^d} u_h(t,x)\phi_t(t,x)dt\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^+\times\ [0,\tau]^d}\left[W'\left(u_h\left(h\left[\frac{t}{h}+1\right],x\right)\right)\ \phi(t,x) + \nabla u_h\left(h\left[\frac{t}{h}+1\right],x\right)\ \nabla\phi(t,x)\right]dt\ dx\end{aligned}$$

La fonction $u_h(h[t/h+1],.))$ converge faiblement vers $u(t,.)$ pour la topologie H^1_τ quand $h \to 0$, nous pouvons donc passer à la limite dans l'égalité précédente et en déduire que

$$\int_{\mathbb{R}^+\times[0,\tau]^d} u(t,x)\ \phi_t(t,x) = \int_{\mathbb{R}^+\times\ [0,\tau]^d} \left[W'(u(t,x)) - \triangle u(t,x)))\right]\ \phi(t,x)dt\ dx$$

La fonction u est donc une solution faible du problème de réaction-diffusion .

$$u_t(t,x) = \triangle u(t,x)) - W'(u(t,x))$$

□

Remarque 5. *Existence de solution dans le cas d'un potentiel double obstacle :*
Soit W un potentiel double obstacle, comme par exemple

$$W(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-s^2) & si \qquad s \in [-1,1] \\ \infty & sinon \end{cases}$$

Cette fonction admet des valeurs infinies en dehors de l'intervalle $[-1,1]$. D'après la construction des $\{u_h^j\}_{j>0}$, il suit que $\forall j > 0$, $u_h^j \subset [-1,1]$ d'après la remarque 4.

Ainsi, si la condition initiale u_0 n'est pas incluse dans l'intervalle $[x_0,x_1]$, la solution u obtenue admettra une discontinuité en temps en 0 et il semble alors difficile de vérifier l'inclusion $u \in H^1_{loc}([0,\infty], L^2_\tau(\mathbb{R}^n))$.

En revanche, si $u_0 \subset [-1,1]$, $u(t,x)$ sera incluse dans le même intervalle $\forall t > 0$ (voir remarque 4), et il semble à priori possible d'utiliser les mêmes estimations que dans le cas régulier car les potentiels double obstacle sont réguliers dans l'intervalle $[-1,1]$.

2.2.2 Régularité de la solution

Soit $u^\epsilon(t,x)$ la solution du problème

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \triangle u(t,x) - \frac{1}{\epsilon^2}W'(u(t,x)) & (x,t) \in [0,\tau]^n \times [0,T] \\ u(0,x) = q\left(\frac{d(x,\Omega_0)}{\epsilon}\right) \in H^1_\tau \end{cases}$$

où Γ_t est supposé régulier pour tout $t \in [0,T]$.
Le choix particulier de la condition initiale implique que pour tout $t \in [0,T]$, la solution $u^\epsilon(t,x)$ du problème est comprise entre les deux puits du potentiel W. Il est alors possible d'exprimer $u^\epsilon(t,x)$ sous la forme

$$u^\epsilon(t,x) = q\left(\frac{z^\epsilon(t,x)}{\epsilon}\right)$$

où $z^\epsilon(x,0) = d(x,\Omega_0)$.
Nous allons maintenant déterminer l'équation vérifiée par z^ϵ afin d'en déduire de la régularité supplémentaire sur u^ϵ. En effet, on s'attend à ce que le comportement de z^ϵ ressemble au comportement de la fonction $d(\Gamma_t,x)$ et que $|\nabla z^\epsilon| \simeq 1$.

Proposition 3. *Avec comme condition initiale $u_0 = q(d(x,\Gamma_0)/\epsilon)$, et si on suppose de plus que, $s \to \frac{W'(q(s))}{\sqrt{2W(q(s))}}$ est strictement croissant, alors la solution de l'équation d'Allen-Cahn s'explicite sous la forme $u^\epsilon = q(z^\epsilon/\epsilon)$ et $z^\epsilon(t,x)$ est une fonction de $[0,T] \times [0,\tau]^d \to \mathbb{R}$ qui vérifie la propriété*

$$Lip(|z^\epsilon(t,.)|) \leq 1, \qquad \forall t \in [0,T]$$

Cette propriété est une légère variante du lemme *10* des notes d'Ambrosio [3]. Dans ce lemme, le potentiel double puits est égal à $W(s) = \frac{s^2(1-s)^2}{4}$ et l'avantage et qu'il vérifie

$$\frac{W^{'}(q(s))}{\sqrt{2W(q(s))}} = -q(s)$$

En fait, l'un des arguments clefs de la démonstration est que la fonction $s \to \frac{W^{'}(q(s))}{\sqrt{2W(q(s))}}$ doit être strictement croissante, ce qui est le cas pour le potentiel $W(s) = \frac{s^2(1-s)^2}{4}$ puisque le profil $q(s)$ associé est strictement décroissant.

Nous cherchons maintenant une condition sur le potentiel W pour que la fonction

$$f : s \to \frac{W^{'}(q(s))}{\sqrt{2W(q(s))}}$$

soit strictement croissante sans pour autant se restreindre au potentiel $W(s) = \frac{s^2(1-s)^2}{4}$. Pour simplifier les choses, nous supposons que les potentiels considérés sont C^∞ entre les deux puits. Cette hypothèse implique que le profil q a une régularité infinie, et la fonction f vérifie

$$\begin{aligned} f^{'}(s) &= \left(\frac{W^{'}(q(s))}{\sqrt{2W(q(s))}}\right)^{'} = -\left(\frac{q^{''}(s)}{q^{'}(s)}\right)^{'} \quad \text{d'après la proposition 1,} \\ &= \frac{(q^{''}(s))^2 - W^{''}(q(s))(q^{'}(s))^2}{(q^{'}(s))^2}, \\ &= \frac{(W^{'}(q(s)))^2 - 2W^{''}(q(s))W(q(s))}{(q^{'}(s))^2}. \end{aligned}$$

La fonction f est alors strictement croissance entre les deux puits si la fonction $s \to (W^{'}(s))^2 - 2W^{''}(s)W(s)$ est positive sur $]0,1[$ (on choisit les puits égaux à 0 et 1). La difficulté se situe alors au voisinage de ces puits, car $W^{''}$ y est positive. Supposons que W admette un zéro d'ordre p en 0, $W(s) \simeq Cs^p$ au voisinage de zéro, alors

$$W^{'}(s))^2 - 2W^{''}(s)W(s) \simeq C^2(p^2 - 2p(p-1))s^{2p-2}$$

Finalement, la condition obtenue s'écrit $p^2 - 2p(p-1) \geq 0$ ou encore $p \leq 2$. La conclusion de cette remarque est que le degré des zéros des potentiels double puits doit être inférieur à 2 pour que f soit strictement croissante.

Démonstration de la proposition 3.

Nous rappelons que cette démonstration est plus qu'inspirée de la démonstration du lemme *10* de [3].

La remarque 4 justifie le fait de pouvoir exprimer la solution de l'équation d'Allen-Cahn u^ϵ sous la forme $u^\epsilon = q(z^\epsilon/\epsilon)$. En injectant $q(z^\epsilon/\epsilon)$ dans l'équation d'Allen-Cahn, il en ressort que z^ϵ est solution de l'EDP suivante :

$$\begin{cases} z_t - \triangle z = \frac{W^{'}(q(z/\epsilon))}{\epsilon\sqrt{2W(q(z/\epsilon))}}(1 - |\nabla z|^2) \\ z(x,0) = d(x,\Omega_0) \end{cases}$$

Et réciproquement, si z^ϵ est solution de cette EDP, alors $u^\epsilon = q(z^\epsilon/\epsilon)$ est solution de l'équation d'Allen-Cahn.

La démonstration de la proposition s'effectue par l'absurde.

Supposons qu'il existe un triplet (t_0, x_0, y_0) tel que

$$z(t_0, x_0) - z(t_0, y_0) > |x_0 - y_0|$$

Soit w_λ, avec $\lambda > 0$, la fonction définie par l'expression suivante :

$$w_\lambda(t, x, y) := z(t, x) - z(t, y) - \sqrt{1+\lambda}\,|x - y|$$

L'existence du triplet (t_0, x_0, y_0) montre que le maximum de w_λ, atteint au point $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$, est strictement positif pour λ suffisamment petit. Il ressort de plus que $\bar{x} \neq \bar{y}$ et $\bar{t} > 0$ puisque ce maximum est strictement positif et que $z(0, x) = d(x, \Gamma_0)$.

L'équation d'Euler de ce problème de maximisation montre que :

$$\nabla z(\bar{t}, \bar{x}) = -\nabla z(\bar{t}, \bar{y}) = \sqrt{1+\lambda}\,\frac{\bar{x} - \bar{y}}{|\bar{x} - \bar{y}|},$$

et

$$\begin{cases} z_t(\bar{t}, \bar{x}) \geq z_t(\bar{t}, \bar{y}) & \text{si} \quad \bar{t} = T \\ z_t(\bar{t}, \bar{x}) = z_t(\bar{t}, \bar{y}) & \text{si} \quad \bar{t} < T \end{cases}.$$

En reprenant l'équation vérifiée par z^ϵ, on obtient

$$\triangle z(\bar{t}, \bar{x}) - \triangle z(\bar{t}, \bar{y}) \geq \frac{\lambda}{\epsilon}\left[\frac{W'(q(z(\bar{t}, \bar{x})/\epsilon))}{\sqrt{2W(q(z(\bar{t}, \bar{x})/\epsilon))}} - \frac{W'(q(z(\bar{t}, \bar{y})/\epsilon))}{\sqrt{2W(q(z(\bar{t}, \bar{y})/\epsilon))}}\right]$$

Et comme $z(\bar{t}, \bar{x}) > z(\bar{t}, \bar{y})$ et que $s \to \frac{W'(q(s))}{\sqrt{2W(q(s))}}$ est strictement croissante, il s'ensuit que $\triangle z(\bar{t}, \bar{x}) > \triangle z(\bar{t}, \bar{y})$.

D'un autre côté, la fonction

$$t \to w(\bar{t}, \bar{x} + t\xi, \bar{y} + t\xi)$$

admet un maximum en zéro. Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\left\langle \nabla^2 z(\bar{t}, \bar{x})\xi\,,\,\xi \right\rangle \;\leq\; \left\langle \nabla^2 z(\bar{t}, \bar{y})\xi\,,\,\xi \right\rangle$$

Ce qui implique que

$$\triangle z(\bar{t}, \bar{x}) \leq \triangle z(\bar{t}, \bar{y})$$

La contradiction est obtenue avec l'égalité précédente, la démonstration de la proposition (3) est terminée. □

2.2.3 Existence de solution dans $\mathbb{R}^d$

Nous possédons maintenant les ingrédients nécessaires pour montrer l'existence de solution de l'équation d'Allen-Cahn sur $\mathbb{R}^d$ tout entier :

Théorème 2. *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$, $E \neq \mathbb{R}^d$ et E non vide. Alors l'EDP d'Allen-Cahn avec comme condition initiale $u_0(x) = q(\frac{\bar{d}(x,E)}{\epsilon})$ admet une unique solution bornée*

$$u \in L^\infty([0,\infty], H^1(B_R)) \cap H^1_{loc}([0,\infty], L^2(B_R)), \qquad \forall R > 0$$

Démonstration du théorème 2.
La démonstration de ce théorème est extraite de la démonstration du corollaire *2* de [3].

Nous commençons par "périodiser" E. Soit E_τ, le domaine défini par $E_\tau = [E \cap [0,\tau]^d] + \tau Z^d$. Alors pour τ suffisamment grand, E_τ est non vide et on note u_0^τ la condition initiale associée

$$u_0^\tau = q\left(\frac{\bar{d}(x, E_\tau)}{\epsilon}\right).$$

Le théorème 1 assure l'existence, $\forall \tau \in \mathbb{R}$, d'une fonction u_τ solution de notre problème sur $[0,\tau]^d$. Afin de passer à la limite quand $\tau \to \infty$, il est nécessaire de montrer que (u_τ) est une famille uniformément bornée dans $L^\infty([0,\infty], H^1(B_R)) \cap H^1_{loc}([0,\infty], L^2(B_R))$.

En utilisant la propriété 3, u_τ s'exprime sous la forme $u_\tau = q(\frac{z_\tau^\epsilon}{\epsilon})$, où z_τ^ϵ vérifie $|\nabla z_\tau^\epsilon| \leq 1$. Il en ressort que u_τ est uniformément bornée dans $L^\infty([0,\infty], H^1(B_R))$.

L'inclusion dans le deuxième espace est démontrée en vérifiant que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u_\tau(t,x))^2 \phi(t,x) dt dx \leq C(\phi, T)$$

où $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^d, [0,\infty))$.

Soit I_τ l'énergie définie par

$$I_\tau(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}|\nabla u_\tau|^2 + \frac{1}{\epsilon^2} W(u_\tau)\right) \phi dx,$$

alors

$$\begin{aligned}
I_\tau^{'}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\nabla u_\tau \partial_t(\nabla u_\tau) + \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u_\tau) \partial_t u_\tau\right) \phi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_\tau \left(-\triangle u_\tau + \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u_\tau)\right) \phi dx - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u_\tau . \nabla \phi \ \partial_t u_\tau \ dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u_\tau)^2 \phi dx - \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\nabla u_\tau . \nabla \phi}{\sqrt{\phi}}\right) \left(\sqrt{\phi} \partial_t u_\tau\right) \ dx \\
&\leq -\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u_\tau)^2 \phi dx + \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^d} u_{\tau,t}^2 \phi dx + \int_{\phi>0} \frac{|\nabla \phi|^2}{\phi} |\nabla u_\tau|^2\right] dx \\
&\leq -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u_\tau)^2 \phi dx + max|\nabla^2 \phi| \int_{\phi>0} |\nabla u_\tau|^2 dx \quad car \quad \frac{|\nabla \phi|^2}{2\phi} \leq max|\nabla^2 \phi|.
\end{aligned}$$

La suite de fonction u_τ est donc uniformément bornée dans $H^1_{loc}([0,\infty], L^2(B_R))$, en effet

$$\int_0^T \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_t u_\tau)^2\phi dxdt \quad \leq \quad T\ max|\nabla^2\phi|\ \|u_\tau\|_{L^\infty([O,T],H^1_\tau)} + I_\tau(0) - I_\tau(T) \leq C\|u_\tau\|_{L^\infty([O,T],H^1_\tau)}$$

Au final, on en déduit une sous-suite $\tau(k)$ et d'une fonction u telle que $\forall t \in [0,T]$, $u_{\tau(k)}(t,.)$ converge faiblement vers $u(t,.)$ dans $H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Et, comme pour le précédent théorème d'existence, il est possible de montrer que u est bien solution de l'équation d'Allen-Cahn, et

$$u \in L^\infty([0,\infty], H^1(B_R)) \cap H^1_{loc}([0,\infty], L^2(B_R)), \qquad \forall R > 0$$

□

2.2.4 Principe de comparaison et unicité

Le dernier point démontré est un principe de comparaison pour les solutions de l'équation d'Allen-Cahn. Il permettra ainsi d'obtenir l'unicité des solution de l'équation d'Allen-Cahn et s'explicite sous la forme du théorème suivant

Théorème 3. *Soient u et v, deux solutions bornées de l'équation d'Allen-Cahn de régularité*

$$L^2_{loc}([0,\infty); H^1(B_R)) \cup H^1_{loc}([0,\infty); L^2(B_R)) \quad \forall R > 0$$

associées aux conditions initiales u_0 et v_0. Si $u_0 \leq v_0$, alors

$$u(t,x) \leq v(t,x) \quad dans \quad [0,\infty[\times\mathbb{R}^d$$

Démonstration du théorème 3.
La démonstration de ce théorème est extraite de la démonstration du théorème *32* de [3].

Soit ψ la fonction $\psi(s) = max(s,0)$, alors $(\psi^2)' = 2\psi\psi' = 2\psi$. On introduit de plus une famille de fonctions $(\phi_n)_{n\geq 1}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\phi_n \in C^2_c(B_{n+1},[0,1]), \quad \phi_n = 1\ dans\ B_n, \quad C := \sup_{x,h}|\nabla^2\phi_h(x)| \leq \infty$$

où $B_n = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| \leq n\}$.

Avec

$$I_n(t) = \int_{\mathbb{R}^d}[\psi\,(u(t,x) - v(t,x))]^2\ \phi_n(x)dx,$$

on vérifie que

$$\begin{aligned} I_n'(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} 2\,[\psi(u-v)]\ (u_t - v_t)\phi_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 2\,[\psi(u-v)]\ (\triangle u - \triangle v)\phi_n dx - \int_{\mathbb{R}^d} 2\,[\psi(u-v)]\ (W'(u) - W'(v))\phi_n dx \\ &\leq -\int_{E_t} 2 < \nabla\phi_n, \nabla u - \nabla v > \psi(u-v)dx - \int_{E_t} 2|\nabla u - \nabla v|^2\phi_n dx + 2||W''||_{L^\infty(0,1)} I_h(t) \end{aligned}$$

où $E_t = \{u(.,t) \leq v(.,t)\}$

De plus, en remarquant que,

$$\begin{aligned}
-\int_{E_t} \langle \nabla\phi_n \,,\, \nabla u - \nabla v\rangle\, \psi(u-v)dx &\leq \int_{E_t} |\nabla\phi_n|\ |\psi(u-v)|\ |\nabla u - \nabla v|dx \\
&\leq \int_{\{\phi_n>0\}\cup E_t} \frac{|\nabla\phi_h|\ |\psi(u-v)|}{\sqrt{\phi_n}}\sqrt{\phi_n}|\nabla u - \nabla v|dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_{\{\phi_n>0\}\cup E_t} \frac{|\nabla\phi_n|^2\ |\psi(u-v)|^2}{\phi_n}dx + \int_{E_t} \phi_n|\nabla u - \nabla v|^2 dx\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
I_n^{'}(t) &\leq \int_{E_t\cup\phi_n>0} \frac{|\nabla\phi_n|^2|\psi(u-v)|^2}{\phi_n}dx + 2||W^{''}||_{L^\infty} I_n(t) \\
&\leq \int_{\phi_n>0} 2\ C|\psi(u-v)|^2 dx + 2||W^{''}||_{L^\infty} I_n(t) \quad car \quad \frac{|\nabla\phi|^2}{2\phi} \leq max|\nabla^2\phi| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} 2C|\psi(u-v)|^2\phi_{n+1}dx + 2||W^{''}||_{L^\infty} I_n(t) \\
&\leq (2C + 2||W^{''}||_{L^\infty})I_{n+1}(t) = C_1 I_{n+1}(t)
\end{aligned}$$

où $C = max|\nabla^2\phi_h|$ et $C_1 = 2C + 2||W^{''}||_{L^\infty}$.
On introduit finalement la fonction

$$I(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}^{\infty} \frac{1}{2^n}\omega_d^{-1}(n+1)^{-d} I_n(t)$$

Comme u et v sont comprises dans $[0,1]$, $I_n(t) \leq 2|B_{n+1}| \simeq 2\omega_d(n+1)^d$ où w_d est le volume de la boule en dimension d. Cette inégalité montre que $I(t)$ est absolument continue et vérifie pour presque tous t

$$\begin{aligned}
I^{'}(t) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n}\omega_d^{-1}(n+1)^{-d} I_n^{'}(t) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2^{-n}\omega_d^{-1}(n+1)^{-d} C_1 I_{n+1} \\
&\leq 2^{d+1}C_1 \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \omega_d^{-1} 2^{-(n+1)}(n+1)^{-d} I_{n+1} \\
&\leq 2^{d+1}C_1 I(t)
\end{aligned}$$

Enfin, comme $I(0) = 0$, on en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}$, $I(t) = 0$ et la démonstration du théorème 3 est terminée. □

L'unicité des solutions peut être déduite de ce principe de comparaison. En effet, supposons que le problème associé à la condition initiale u_0 admette deux solutions u et $\tilde{u}$ différentes, alors ce théorème nous affirme que

$$u \leq \tilde{u} \quad \text{et} \quad \tilde{u} \leq u$$

Ce qui implique que $u = \tilde{u}$, et l'unicité des solutions de l'équation d'Allen-Cahn est démontrée.

2.3 Convergence de l'équation d'Allen-Cahn

2.3.1 Historique

Un paramètre d'approximation ϵ est introduit dans les méthodes de champ de phase. Soit Γ_t un flot de mouvement par courbure moyenne pour $t \in [0,T]$ et u^ϵ la solution de l'équation d'Allen-Cahn associée à la condition initiale $u_0 = q\left(\frac{d(x,\Omega_0)}{\epsilon}\right)$. Dans le cas où le potentiel admet ses puits en -1 et 1, l'interface Γ_t^ϵ est définie par

$$\Gamma_t^\epsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^d; u^\epsilon(x,t) = 0\right\}$$

L'étude de la convergence de l'équation d'Allen-Cahn vers le mouvement par courbure moyenne consiste à étudier la limite du flot Γ_t^ϵ lorsque ϵ tend vers 0 et plus précisément, à montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{t \in [0,T]} \{dist(\Gamma_t^\epsilon, \Gamma_t)\} = 0$$

Les premiers résultats rigoureux de convergence des solutions de l'équation d'Allen-Cahn vers les mouvements par courbure moyenne ont été démontrés par Mottoni et Schatzman [85] en utilisant un développement asymptotique de u par rapport à ϵ. D'autres types de preuves ont ensuite permis d'obtenir une estimation de l'erreur de convergence de la méthode : Chen [31] a tout d'abord fourni une première estimation en $O(\epsilon|log(\epsilon)|)$, puis ce résultat a été amélioré en $O(\epsilon^2|log(\epsilon)|^2)$ par Bellettini et Paolini [12]. Plus généralement, Evans, Soner et Souganidis [54] ont démontré un résultat de convergence des solutions des équations d'Allen-Cahn vers les solutions de viscosité de la formulation level set. En fait, cette preuve est démontrée lorsque le mouvement par courbure moyenne ne fait pas intervenir de phénomène de "fattening".

Des résultats analogues ont été démontrés dans le cas de potentiel double obstacle. Un premier résultat dû à Chen et Elliott [32] montre un ordre de convergence en $O(\epsilon)$. Cette estimation fut ensuite améliorée en $O(\epsilon^2)$ par Nochetto, Paolini et Verdi [88] [87].

Dans cette partie, nous exposerons un exemple de preuve dans le cas d'un potentiel W double obstacle particulier. Ces potentiels ont l'avantage d'introduire des profils q qui admettent des variations uniquement localisées sur un compact de $\mathbb{R}$, et rend ainsi la démonstrations moins technique. Le lecteur trouvera l'origine de cette preuve dans l'article de Chen et Elliott [32] ou encore dans le recueil d'Elliott [49].

2.3.2 Propriété géométrique de la fonction distance signée à l'interface

Soit $d(x,t)$ la fonction distance signée à l'interface Γ_t. Le théorème 10 de [3] montre que la fonction distance signée vérifie au voisinage de l'interface l'égalité

$$d_t(x,t) = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\mu_i}{1 - d\mu_i}$$

où μ_i sont les valeurs propres de la hessienne de d. Ainsi, elle vérifie notamment sur l'interface

$$d_t(x,t) = -\kappa = \sum_{\mu_i} \mu_i = \mathrm{Tr}(\nabla^2 d) = \triangle d$$

Mais, cela implique aussi que sur voisinage tubulaire suffisamment petit de Γ_t, d vérifie l'inégalité :

$$|d_t - \triangle d| \leq |d| \sum_{\mu} \frac{\mu^2}{1 - d(x,t)\mu} \leq D_0|d|, \quad \text{pour} \quad |d| \leq \delta \tag{2.7}$$

où D_0 ne dépend que des courbures $-\mu(t)$ et de δ.

2.3.3 Enoncé du résultat de convergence des méthodes de champ de phase

Théorème 4. *Soit Γ_t un flot de mouvement par courbure moyenne suffisamment régulier pour $t \in [0,T]$ tel que*

$$|d_t - \triangle d| \leq D_0|d| \quad pour \quad |d| \leq \delta, \quad t \in [0,T]$$

Alors si ϵ vérifie

$$\frac{1}{2}\pi\epsilon \leq \delta(1 + 2e^{2D_0T})^{-1}$$

$\forall t \in [0,T]$, on vérifie

$$d(x,t) \geq \frac{1}{2}\pi\epsilon(1 + 2e^{2D_0t}) \quad \Rightarrow \quad u^\epsilon(x,t) = 1$$

$$d(x,t) \leq -\frac{1}{2}\pi\epsilon(1 + 2e^{2D_0t}) \quad \Rightarrow \quad u^\epsilon(x,t) = -1$$

où la fonction u^ϵ est la solution du problème

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \triangle u(x,t) - \frac{1}{\epsilon^2}W'(u(x,t)) \\ u(x,0) = q\left(\frac{d(x,\Gamma_0)}{\epsilon}\right) \end{cases}$$

Avec le potentiel W double obstacle suivant

$$W(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-s^2) & si \quad s \in [-1,1] \\ \infty & sinon \end{cases}$$

Et le profil q associé :

$$q(s) = \begin{cases} -1 & s \geq \frac{\pi}{2} \\ -sin(s) & |s| \leq \frac{\pi}{2} \\ +1 & s \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Démonstration du théorème 4.
Nous rappelons que cette démonstration est extraite de la preuve du théorème p 21 présentée dans les notes d'Elliott [49].

La démonstration explicite une sous-solution notée v^ϵ du problème d'Allen-Cahn. Soit z^ϵ définie à partir de la fonction distance signée à l'interface $d(x,t) = \bar{d}(\Gamma_t, t)$:

$$z^\epsilon(x,t) = d(x,t) - \pi\epsilon e^{2D_0t}$$

L'interface diffuse, notée Γ_t^ϵ, est l'ensemble suivant

$$\Gamma_t^\epsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ ; \ |z^\epsilon(x,t)| < \frac{1}{2}\epsilon\pi \right\}$$

L'hypothèse du théorème $\frac{1}{2}\pi\epsilon \leq \delta(1+2e^{2D_0T})^{-1}$ permet de vérifier que $\forall x \in \Gamma_t^\epsilon$, $|d(x,t)| \leq \delta$.

Ainsi, $\forall t \in [0,T]$ et $\forall x \in \Gamma_t^\epsilon$,

$$\begin{aligned} z_t^\epsilon - \triangle z^\epsilon &= d_t - \triangle d - 2\pi D_0 \epsilon e^{2D_0 t} \\ &\leq D_0\left(|d| - 2\pi\epsilon e^{2D_0 t}\right) \leq D_0\left(|z| - \pi\epsilon e^{2D_0 t}\right) \\ &\leq D_0\left(\frac{1}{2}\epsilon\pi - \pi\epsilon e^{2D_0 t}\right) \leq D_0\epsilon\pi\left(\frac{1}{2} - e^{2D_0 t}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

La sous solution du problème d'Allen-Cahn s'explicite alors sous la forme

$$v^\epsilon(x,t) = q\left(\frac{z^\epsilon(x,t)}{\epsilon}\right)$$

La constrution de $v^\epsilon(x,t)$ implique directement que

$$-1 \leq v^\epsilon(x,0) \leq u^\epsilon(x,0)$$

Les calculs suivants montrent que $\forall x \in \Gamma_t^\epsilon$ et $\forall t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} v_t^\epsilon - \triangle v^\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}v^\epsilon &= \frac{z_t^\epsilon}{\epsilon}q' - \frac{\triangle z^\epsilon}{\epsilon}q' - \frac{|\nabla z^\epsilon|^2}{\epsilon^2}q'' - \frac{1}{\epsilon^2}q \\ &= \frac{q'}{\epsilon}(z_t^\epsilon - \triangle z^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon^2}(q'' - q) \quad \text{car} \quad |\nabla z^\epsilon|^2 = 1 \\ &= \frac{q'}{\epsilon}(z_t^\epsilon - \triangle z^\epsilon) \quad \text{car} \quad q''\left(\frac{z^\epsilon}{\epsilon}\right) = -q\left(\frac{z^\epsilon}{\epsilon}\right) \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma_t^\epsilon \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Finalement la construction de v^ϵ implique $-1 \leq v^\epsilon(x,t) \leq 1$, et alors $W'(v^\epsilon) = v^\epsilon$. On déduit du calcul précédent que $v^\epsilon(x,t)$ est bien une sous solution de l'équation d'Allen-Cahn.

Soit $\psi \in L^2([0,T], H^1(\Omega))$, alors

$$\int_0^T \int_{\Gamma_t^\epsilon} \left[v_t^\epsilon\psi + \nabla v^\epsilon \nabla\psi - \frac{1}{\epsilon^2}v^\epsilon\psi\right] dxdt = \int_0^T \int_{\Gamma_t^\epsilon} \left[v_t^\epsilon - \triangle v^\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}v^\epsilon\right]\psi dxdt$$

car la fonction v^ϵ est constante à l'extérieur de Γ_t^ϵ.
Dans le cas particulier où $\psi = (v^\epsilon - u^\epsilon)_+$, on trouve que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left[v_t^\epsilon(v^\epsilon - u^\epsilon)_+ + \nabla v^\epsilon \nabla(v^\epsilon - u^\epsilon)_+ - \frac{1}{\epsilon^2}v^\epsilon(v^\epsilon - u^\epsilon)_+\right] dxdt \leq 0 \tag{2.8}$$

car $(v^\epsilon - u^\epsilon)_+$ est nul à l'extérieur de Γ_t^ϵ.

D'un autre côté, on rappelle que u^ϵ est solution de l'équation d'Allen-Cahn, ce qui s'écrit dans le cas du potentiel double obstacle comme une inclusion :

$$u_t - \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2}u \in \beta(u)/\epsilon^2$$

où

$$\beta(u) = \begin{cases} (-\infty, 0] & u = -1 \\ 0 & |u| < 1 \\ [0, \infty) & u = 1 \end{cases}$$

Une autre manière de montrer que u^ϵ est bien solution, est de vérifier l'inégalité variationnelle parabolique : $u(.,t) \in K$

$$\langle u_t\,,\,\eta - u\rangle + \langle \nabla u_t\,,\,\nabla\eta - \nabla u\rangle \quad \geq \quad \frac{1}{\epsilon^2}\langle u\,,\,\eta - u\rangle \quad \forall \eta \in K$$

avec $K = \left\{\eta \in H^1(\mathbb{R}^d)\ ;\ |\eta| < 1\right\}$. Le choix $|\eta| < 1$ correspond à forcer l'inclusion de η entre les puits du potentiel double obstacle.
Alors, cette inégalité avec $\eta = u^\epsilon + (v^\epsilon - u^\epsilon)_+ \in K$ montre que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left[u_t^\epsilon (v^\epsilon - u^\epsilon)_+ + \nabla u^\epsilon \nabla (v^\epsilon - u^\epsilon)_+ - \frac{1}{\epsilon^2} u^\epsilon (v^\epsilon - u^\epsilon)_+ \right] dxdt \geq 0 \tag{2.9}$$

Au final, en soustrayant 2.9 avec 2.8, on montre que

$$\int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(v^\epsilon - u^\epsilon)_+\|^2 + \|\nabla(v^\epsilon - u^\epsilon)_+\|^2 \leq \int_0^T \frac{1}{\epsilon^2}\|(v^\epsilon - u^\epsilon)_+\|^2$$

Et comme $v^\epsilon(x,0) \leq u^\epsilon(x,0)$, l'inégalité $u^\epsilon(x,t) \geq v^\epsilon(x,t)$ est démontrée $\forall x \in \mathbb{R}^d$ et $\forall t \in [0,T]$.
En conclusion, l'hypothèse $d(x,t) \geq \frac{1}{2}\pi\epsilon(1 + 2e^{2D_0 t})$ implique que $z^\epsilon \geq \frac{1}{2}\pi\epsilon$ et donc que $v^\epsilon = 1$.
Et comme $u^\epsilon(x,t) \geq v^\epsilon(x,t)$, la première propriété du théorème est démontrée :

$$d(x,t) \geq \frac{1}{2}\pi\epsilon(1 + 2e^{2D_0 t}) \quad \Rightarrow \quad u^\epsilon(x,t) = 1$$

La deuxième propriété est démontrée de manière similaire en considérant la fonction

$$z^\epsilon(x,t) = d(x,t) + \pi\epsilon e^{2D_0 t}$$

□

Ce théorème nous assure que le calcul de l'évolution des mouvements par courbure moyenne $t \to \Gamma_t$ comme la ligne de niveau zéro de u^ϵ fournit une bonne approximation de la position de l'interface lorsque ϵ est suffisamment petit. En fait, l'erreur commise sur cette position après un instant T est majorée, d'après la démonstration précédente, par $\pi\epsilon e^{2D_0 T}$, où encore en $O(\epsilon)$.
Lorsque le potentiel W est un potentiel double puits, la taille de l'interface diffuse est de l'ordre de $\epsilon|log(\epsilon)|$, et la même technique de démonstration permet d'obtenir uniquement une erreur de la méthode de champs en $O(\epsilon|log(\epsilon)|)$.

2.4 Discrétisation et méthode de splitting

Nous trouvons dans la littérature de nombreux travaux de référence sur l'étude de schémas de discrétisation de l'équation d'Allen-Cahn, voir l'article d'Elliott [49] pour une synthèse à ce sujet. Nous pensons notamment à l'analyse de convergence d'un schéma aux différences finies réalisé par Chen dans [33] ainsi qu'à l'étude d'une méthode des éléments finis effectuée par Paolini dans[93].

Notre stratégie est ici différente. Nous souhaitons utiliser une méthode de splitting entre les opérateurs de diffusion et de réaction afin de traiter indépendamment chacun de ces deux opérateurs de manière exacte et d'obtenir ainsi des schémas inconditionnellement stables. L'équation d'Allen-Cahn est résolut avec des conditions périodiques en espace :

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \triangle u(x,t) - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u(x,t)), & (x,t) \in [0,1]^d \times [0,T] \\ u(x,0) = q\left(\frac{d(x,\Gamma_0)}{\epsilon}\right) & \text{avec des conditions de bord périodiques} \end{cases}$$

Le choix d'imposer de telles conditions se justifie par le fait que la plupart des mouvements d'interfaces s'effectue strictement à l'intérieur du domaine $[0,1]^d$. Et comme la fonction u^ϵ admet des variations uniquement sur l'interface diffuse Γ_t^ϵ, le choix des conditions aux limites périodiques n'a pas d'influence sur le comportement de la fonction u^ϵ à l'intérieur du domaine de calcul.

L'intérêt de telles conditions est qu'elles ont l'avantage de pouvoir utiliser la base de Fourier pour traiter de manière exacte l'opérateur de diffusion. Nous verrons comment imposer d'autres types de conditions de bord en conservant ces mêmes statégies dans le cinquième chapitre.

2.4.1 Ordre de convergence d'une méthode de splitting de Lie

Nous allons analyser une méthode de splitting pour l'équation d'Allen-Cahn

$$\begin{cases} u_t & = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u), \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ u_0(x) & = q\left(\frac{d(x,\Gamma_0)}{\epsilon}\right) \end{cases}$$

Nous supposons que le potentiel W' est continue et $M = \|W''\|_{L^\infty([0,1])} < +\infty$ et que la condition initiales $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$.
On note

$S(t)$ le flot total de cette équation
$e^{t\triangle}$ le flot de l'équation de diffusion
$Y(t)$ le flot de l'équation de réaction

Nous considérons le splitting de Lie $L(t) = Y(t)e^{t\triangle}$, et nous allons montrer le théorème suivant. Je tiens tout particulièrement à remercier Brigitte Bidégaray pour m'avoir suggéré cette démonstration.

Théorème 5. *Pour tout $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ et pour $T > 0$, il existe deux constantes C et h_0 tels que $\forall h \in]0, h_0[$ et pour tout n tel que $nh \leq T$,*

$$\|L(h)^n u_0 - S(nh)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{M}{\epsilon^2}\sqrt{h}\|\nabla u_0\|_{L^\infty}$$

L'ordre global de la méthode est donc 1/2 en temps.

Estimations sur le semi-groupe de la chaleur : $e^{\triangle t}$

Si w est une fonction bornée, alors la solution $e^{\triangle t}w$ s'écrit comme le produit de convolution avec le noyau de la chaleur :

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

Proposition 4. *Si $w \in L^\infty(R^d)$ et $t \geq 0$, alors*

$$\|e^{\triangle t}w\|_{L^\infty(R^d)} \leq \|w\|_{L^\infty(R^d)}$$

La démonstration de cette propriété est immédiate, le noyau de la chaleur est en effet positif et d'intégrale égale à 1.

Proposition 5. *Si $w \in W^{1,\infty}(R^d)$, alors $\forall t \geq 0$,*

$$\|e^{\triangle t}w - w\|_{L^\infty(R^d)} \leq C\sqrt{t}\|\nabla w\|_{L^\infty(R^d)}$$

Démonstration de la propriété 5.

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} e^{\triangle t}w - w &= \int_0^t \partial_s \left[e^{\triangle s}\right] w ds = \int_0^t \partial_s (K_s * w) ds \\ &= \int_0^t \triangle (K_s * w) ds = \int_0^t \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} K_s * \partial_{x_i} w \; ds \end{aligned}$$

Or

$$\partial_{x_i} K_s = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} \left[-2\frac{x_i}{4s} exp\left(\frac{-x_i^2}{4s}\right)\right] \prod_{j \neq i} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi s}} exp\left(\frac{-x_j^2}{4s}\right)\right]$$

Il en ressort que

$$\|\partial_{x_i} K_s\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \frac{2}{\sqrt{4\pi s}}$$

Et enfin

$$\begin{aligned} \|e^{\triangle t}w - w\|_{L^\infty} &\leq \sum_{i=1}^d \|\partial_{x^i} w\|_{L^\infty} \int_0^t \|\partial_{x_i} K_s\|_{L^1} ds \\ &\leq \frac{d}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{t} \|\nabla w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

□

Estimation sur Y(t)

La solution de l'EDO $u_t + \frac{1}{\epsilon^2} W'(u) = 0$ s'intègre en

$$u(t) = u(0) - \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^t W'(u(\tau)) d\tau,$$

et alors

$$Y(t)w = w - \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^t W'(Y(\tau)w) d\tau.$$

Proposition 6. *Si $w \in L^\infty(R^d)$ et $t \geq 0$, alors*

$$\|Y(t)w\|_{L^\infty(R^d)} \leq exp\left(\frac{Mt}{\epsilon^2}\right)\|w\|_{L^\infty(R^d)}$$

Démonstration de la propriété 6.

Avec $M = \|W''\|_{L^\infty}$ et en remarquant que $W'(0) = 0$, il s'ensuit que

$$\|W'(v)\|_{L^\infty(R^d)} = \|W'(v) - W'(0)\|_{L^\infty(R^d)} \leq M\|v\|_{L^\infty(R^d)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|Y(t)w\|_{L^\infty(R^d)} &\leq \|w\|_{L^\infty(R^d)} + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \|W'(Y(\tau)w)\|_{L^\infty(R^d)}d\tau \\ &\leq \|w\|_{L^\infty(R^d)} + \frac{M}{\epsilon^2}\int_0^t \|Y(\tau)w\|_{L^\infty(R^d)}d\tau\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall classique présenté dans l'annexe 1 permet de conclure que

$$\|Y(t)w\|_{L^\infty(R^d)} \leq exp\left(\frac{Mt}{\epsilon^2}\right)\|w\|_{L^\infty(R^d)}$$

□

Remarque 6. *Le potentiel utilisé dans les équations de champ de phase est très particulier et nous pouvons vérifier facilement que si l'image de w s'identifie à $[0,1]$, alors*

$$\|Y(t)w\|_{L^\infty(R^d)} \leq \|w\|_{L^\infty(R^d)}$$

Proposition 7. *Si w_1 et w_2 sont $L^\infty(R^d)$, alors $\forall t \geq 0$*

$$\|Y(t)w_1 - Y(t)w_2\|_{L^\infty(R^d)} \leq exp\left(\frac{Mt}{\epsilon^2}\right)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty(R^d)}$$

Il suffit de reprendre la démonstration de la propriété 6

Proposition 8. *Si $w \in W^{1,\infty}(R^d)$, alors $\forall t > 0$,*

$$\|\nabla Y(t)w\|_{L^\infty(R^d)} \leq exp\left(\frac{Mt}{\epsilon^2}\right)\|\nabla w\|_{L^\infty(R^d)}$$

Démonstration de la propriété 8. En estimant le gradient de $Y(t)w = w - \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t W'(Y(\tau)w)d\tau$, on montre que

$$\partial_{x_i}Y(t)w = \partial_{x_i}w - \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t W''(Y(\tau)w)\,\partial_{x_i}(Y(\tau)w)\,d\tau,$$

Ainsi

$$\|\partial_{x_i}Y(t)w\|_{L^\infty(R^d)} \leq \|\partial_{x_i}Y(0)w\|_{L^\infty(R^d)} + \frac{M}{\epsilon^2}\int_0^t \|\partial_{x_i}Y(\tau)w\|_{L^\infty(R^d)}d\tau$$

Et le lemme de Gronwall permet une nouvelle fois de conclure la démonstration.

□

Estimation sur le flot total S(t)

Soit u^ϵ la solution de l'équation d'Allen-Cahn associée à la condition initiale $u_0 = q\left(\frac{d(\Omega,x)}{\epsilon}\right) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Nous supposons que $\forall t \in [0,T]$,

$$u(t,x) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \|\nabla u(t,x)\|_{L^\infty} \leq \|\nabla u_0(x)\|_{L^\infty}$$

Nous nous intéressons au splitting de Lie suivant :

$$L(t) = Y(t)e^{t\triangle}$$

Ainsi, si $w \in W^{1,\infty}$, $L(t)w$ vérifie

$$L(t)w = Y(t)(e^{t\triangle}w) = e^{t\triangle}w - \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t W'\left(Y(\tau)\left(e^{t\triangle}w\right)\right)d\tau$$

Nous allons tout d'abord montrer au résultat de régularité lipschitzienne sur $L(t)$:

Proposition 9. *Si $w_1, w_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\forall t \geq 0$,*

$$\|L(t)w_1 - L(t)w_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq exp\left(\frac{Mt}{\epsilon^2}\right)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

Démonstration de la propriété 9. D'après l'expression de $L(t)$,

$$L(t)w_1 - L(t)w_2 = e^{t\triangle}(w_1 - w_2) - \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \left[W'\left(Y(\tau)e^{t\triangle}w_1\right) - W'\left(Y(\tau)e^{t\triangle}w_2\right)\right]d\tau$$

Et alors, en utilisant les propriétés démontrées pour chacun des opérateurs,

$$\begin{aligned}
\|L(t)w_1 - L(t)w_2\|_{L^\infty} &\leq \|e^{t\triangle}(w_1 - w_2)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \left\|W'\left(Y(\tau)e^{t\triangle}w_1\right) - W'\left(Y(\tau)e^{t\triangle}w_2\right)\right\|_{L^\infty} d\tau \\
&\leq \|w_1 - w_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \frac{M}{\epsilon^2}\int_0^t \left\|Y(\tau)e^{t\triangle}w_1 - Y(\tau)e^{t\triangle}w_2\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} d\tau \\
&\leq \|w_1 - w_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \frac{M}{\epsilon^2}\int_0^t exp\left(\frac{M\tau}{\epsilon^2}\right)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} d\tau \\
&\leq exp\left(\frac{Mt}{\epsilon^2}\right)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

□

Nous estimons de plus une erreur locale en temps de la méthode de splitting :

Proposition 10. *Si la condition initiale $w_0 \in W^{1,\infty}$, alors il existe un réel $\alpha > 1$ et un temps $t_0 > 0$ telle que $\forall t < t_0$,*

$$\|S(t)w_0 - L(t)w_0\|_{L^\infty} \leq t\sqrt{t}\alpha\frac{2M}{\epsilon^2}exp\left(\frac{Mt}{\epsilon^2}\right)\|\nabla w_0\|_{L^\infty}$$

Démonstration de la propriété 10.
La formulation de Duhamel permet d'obtenir l'expression de $S(t)w_0$ suivante :

$$S(t)w_0 = e^{t\triangle}w_0 - \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t e^{\triangle(t-\tau)}W'\left(S(\tau)w_0\right)d\tau$$

L'erreur locale $L(t)w_0 - S(t)w_0$ vérifie alors

$$\begin{aligned}
L(t)w_0 - S(t)w_0 &= \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t e^{\triangle(t-\tau)}W'\left(S(\tau)w_0\right)d\tau - \int_0^t W'\left(Y(\tau)e^{t\triangle}w\right)d\tau \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t e^{\triangle(t-\tau)}\left[W'\left(S(\tau)w_0\right) - W'\left(L(\tau)w_0\right)\right]d\tau \\
&+ \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \left[e^{\triangle(t-\tau)}W'\left(Y(\tau)e^{\triangle\tau}w_0\right) - W'\left(Y(\tau)e^{\triangle\tau}w_0\right)\right]d\tau \\
&+ \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \left[W'\left(Y(\tau)e^{\triangle\tau}w_0\right) - W'\left(Y(\tau)e^{\triangle t}w_0\right)\right]d\tau \\
&= (1) + (2) + (3).
\end{aligned}$$

La premier terme est majoré par

$$(1) \leq \frac{M}{\epsilon^2}\int_0^t \|S(\tau)w_0 - L(\tau)w_0\|_{L^\infty}\,d\tau$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}
\left\|e^{\triangle(t-\tau)}W'\left(Y(\tau)e^{\triangle\tau}w_0\right) - W'\left(Y(\tau)e^{\triangle\tau}w_0\right)\right\|_{L^\infty} &\leq \sqrt{t-\tau}\left\|\nabla\left[W'\left(Y(\tau)e^{\triangle\tau}w_0\right)\right]\right\|_{L^\infty} \\
&\leq \sqrt{t-\tau}\ M\ \left\|\nabla\left[\left(Y(\tau)e^{\triangle\tau}w_0\right)\right]\right\|_{L^\infty} \\
&\leq \sqrt{t-\tau}Mexp\left(\frac{M\tau}{\epsilon^2}\right)\|\nabla w_0\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

le deuxième terme est majoré par

$$(2) \leq t^{3/2}\frac{M}{\epsilon^2}exp\left(\frac{Mt}{\epsilon^2}\right)\|\nabla w_0\|_{L^\infty}$$

Enfin, avec

$$\begin{aligned}
\left\|W'\left(Y(\tau)e^{\triangle\tau}w_0\right) - W'\left(Y(\tau)e^{\triangle t}w_0\right)\right\|_{L^\infty} &\leq M\left\|Y(\tau)e^{\triangle\tau}w_0 - Y(\tau)e^{\triangle t}w_0\right\|_{L^\infty} \\
&\leq Mexp\left(\frac{M\tau}{\epsilon^2}\right)\left\|e^{\triangle\tau}w_0 - e^{\triangle t}w_0\right\|_{L^\infty} \\
&\leq Mexp\left(\frac{M\tau}{\epsilon^2}\right)\sqrt{t-\tau}\left\|\nabla\left[e^{\triangle\tau}w_0\right]\right\|_{L^\infty} \\
&\leq Mexp\left(\frac{M\tau}{\epsilon^2}\right)\sqrt{t-\tau}\,\|\nabla w_0\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

Le troisième terme est majoré par

$$(3) \leq t^{3/2}\frac{M}{\epsilon^2}exp\left(\frac{Mt}{\epsilon^2}\right)\|\nabla w_0\|_{L^\infty}$$

Au final, on en déduit que

$$\|S(t)w_0 - L(t)w_0\|_{L^\infty} \leq \frac{M}{\epsilon^2}\int_0^t \|S(\tau)w_0 - L(\tau)w_0\|_{L^\infty}\, d\tau + \frac{2M}{\epsilon^2} exp\left(\frac{Mt}{\epsilon^2}\right) t^{3/2} \|\nabla w_0\|_{L^\infty}$$

Le deuxième lemme de Gronwall présenté dans l'annexe 1 montre qu'il existe un réel $\alpha > 1$ et un temps t_0 telle que $\forall t < t_0$,

$$\|S(t)w_0 - L(t)w_0\|_{L^\infty} \leq t\sqrt{t}\alpha \frac{2M}{\epsilon^2} exp\left(\frac{Mt}{\epsilon^2}\right) \|\nabla w_0\|_{L^\infty}$$

□

Nous pouvons enfin démontrer le théorème 5

La quantité $\|L(h)^n u_0 - S(nh)u_0\|_{\mathbb{L}^\infty}$ peut être évaluée de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\|L(h)^n u_0 - S(nh)u_0\|_{\mathbb{L}^\infty} &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|L(h)^{n-j-1}L(h)S(jh)w_0 - L(h)^{n-j-1}S((j+1)h)u_0\|_{\mathbb{L}^\infty} \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} exp\left(\frac{Mh}{\epsilon^2}\right)^{n-j-1} \|L(h)S(jh)u_0 - S((j+1)h)u_0\|_{\mathbb{L}^\infty}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\|L(h)S(jh)u_0 - S((j+1)h)u_0\|_{\mathbb{L}^\infty} &= \|(L(h) - S(h))S(jh)u_0\|_{\mathbb{L}^\infty} \\
&\leq h\sqrt{h}\alpha \frac{M}{\epsilon^2} exp\left(\frac{Mh}{\epsilon^2}\right) \|\nabla S(jh)u_0\|_{\mathbb{L}^\infty} \\
&\leq h\sqrt{h}\alpha \frac{M}{\epsilon^2} exp\left(\frac{Mh}{\epsilon^2}\right) \|\nabla u_0\|_{\mathbb{L}^\infty}
\end{aligned}$$

En sommant, on obtient une erreur de l'ordre de

$$\|L(h)^n u_0 - S(nh)u_0\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \frac{M}{\epsilon^2}\sqrt{h}\|\nabla u_0\|_{\mathbb{L}^\infty}$$

La démonstration du théorème 5 est terminée. Nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement aux méthodes numériques qui permettent d'estimer les quantités issues de
- L'action de l'opérateur de diffusion : $e^{t\triangle}u_0$
- L'action de l'opérateur de réaction : $Y(t)u_0$

2.4.2 Méthode numérique pour l'estimation de $e^{t\triangle}u_0$

Le problème est résolu avec des conditions périodiques, il est donc naturel de décomposer u sous la forme de sa série de Fourier :

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k(t)e^{2i\pi k.x}$$

où les coefficients de Fourier c_n sont déterminés d'après les formules suivantes

$$c_k(t) = \int_{x\in[0,1]^d} u(x,t)e^{-2i\pi k.x}dx$$

Nous allons utiliser des approximations de u notées $u_N(x,t)$ et définies comme les approximations linéaires de u dans la base de Fourier. Elles sont construites en conservant les N^d premiers coefficients de la série de Fourier de u

$$u_N(x,t) = \sum_{k_1,k_2\ldots,k_d=-N/2}^{N/2-1} c_k(t)e^{2i\pi k.x}$$

Remarque 7. *Le calcul des coefficients c_k s'effectue en pratique par la transformée de Fourier discrète d'un échantillonnage de la fonction u sur $[0,1]^d$ avec l'algorithme FFT.*

Le traitement de l'opérateur de diffusion s'effectue de manière exacte, il suffit de multiplier chacun de ces coefficients par $e^{-4\pi^2|k|^2t}$ et

$$e^{\triangle t}u_N = \sum_{k_1,k_2\ldots,k_d=-N/2}^{N/2-1} e^{-4\pi^2|k|^2t}c_k(t)e^{2i\pi k.x}$$

2.4.3 Méthode numérique pour l'estimation de $Y(t)u_0$

Soit u la solution de l'EDO

$$\begin{cases} u_t = -\frac{1}{\epsilon^2}W'(u) \\ u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

Expression exacte de $u(t)$

Nous supposons que le potentiel double-puits W est égal à

$$W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$$

Et comme $W'(s) = s(1-s)(1-2s)$, cette EDO s'écrit sous la forme

$$\frac{u_t}{u(1-u)(1-2u)} = \frac{u_t}{u} + \frac{4u_t}{1-2u} - \frac{u_t}{1-u} = -\frac{1}{\epsilon^2}$$

Après intégration,

$$\begin{cases} u(x,t) = \frac{1}{2} & \text{si } u_0(x) = 1/2 \\ \frac{u(x,t)(1-u(x,t))}{(1-2u(x,t))^2} = e^{-\frac{t}{\epsilon^2}}\ \frac{u_0(x)(1-u_0(x))}{(1-2u_0(x))^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Et au final, avec $c(t,\epsilon,u_0(x)) = e^{-\frac{t}{\epsilon^2}}\frac{u_0(x)(1-u_0(x))}{(1-2u_0(x))^2}$

$$\begin{cases} u(x,t) = \frac{1}{2} & \text{si } u_0(x) = 1/2 \\ u(x,t) = \frac{\sqrt{1+4\ c(t,\epsilon,u_0)}+1}{2\sqrt{1+4\ c(t,\epsilon,u_0)}} & \text{si } u_0(x) > 1/2 \\ u(x,t) = 1 - \frac{\sqrt{1+4\ c(t,\epsilon,u_0)}+1}{2\sqrt{1+4\ c(t,\epsilon,u_0)}} & \text{si } u_0(x) < 1/2 \end{cases}$$

La première image de la figure (2.1) présente un exemple d'évolution $t \to S(t)u_0$ d'une condition initiale donnée.

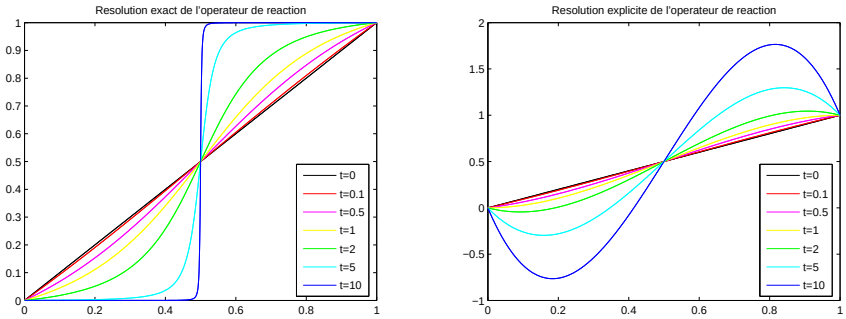


FIG. 2.1 – Exemple d'évolution de $t \to Y(t)u_0$ avec $\epsilon = 1$. Avec une résolution exacte. A droite : avec une résolution explicite d'ordre 1

Résolution explicite et contrainte de stabilité

Toujours avec le potentiel double-puits $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$, une intégration explicite d'ordre 1 de $Y(t)u_0$ consiste à effectuer l'opération

$$u(t) = u_0 - \frac{t}{\epsilon^2}\left(u_0\ (1-u_0)\ (1-2u_0)\right)$$

Nous affichons sur la deuxième image de la figure (2.1) une telle méthode de résolution. Le paramètre ϵ est fixé à 1, et la figure (2.1) montre que les solutions deviennent instables lorsque $t > 1$.

2.4.4 Schémas numériques

Algorithm 1 Equation Allen-Cahn, Exact-Exact

DONNÉES: Entrées : U^0, δ_t et ϵ

1: **pour** $n \geq 0$ **,**

2: Calculer l'action de l'opérateur de diffusion

$$\begin{cases} U^n_{Fourier} = FFT[U^n] \\ U^{n+1/2}_{Fourier}[k] = e^{-4\pi^2|k|^2\delta_t} U^n_{Fourier}[k] \\ U^{n+1/2} = IFFT[U^{n+1/2}_{Fourier}] \end{cases}$$

3: Calculer l'action de l'opérateur de réaction

$$\begin{cases} C = e^{-\frac{\delta_t}{\epsilon^2}} \frac{u^{n+1/2}(1-u^{n+1/2})}{(1-2u^{n+1/2})^2} \\ \begin{cases} u^{n+1}(x) = \frac{1}{2} & \text{si } u^{n+1/2}(x) = 1/2 \\ u^{n+1}(x) = \frac{\sqrt{1+4\ C(x)}+1}{2\sqrt{1+4\ C(x)}} & \text{si } u^{n+1/2}(x) > 1/2 \\ u^{n+1}(x) = 1 - \frac{\sqrt{1+4\ C(x)}+1}{2\sqrt{1+4\ C(x)}} & \text{si } u^{n+1/2}(x) < 1/2 \end{cases} \end{cases}$$

4: **fin**

Dans l'algorithme 1, les opérateurs de diffusion et de réaction sont traités de manière exacte tandis que pour l'algorithme 2, l'opérateur de réaction est traité de manière explicite.

Algorithm 2 Equation Allen-Cahn, Exact-Explicite

Données: Entrées : U^0, δ_t et ϵ

1: **pour** $n \geq 0$ **,**

2: Calculer l'action de l'opérateur de diffusion

$$\begin{cases} U^n_{Fourier} = FFT[U^n] \\ U^{n+1/2}_{Fourier}[k] = e^{-4\pi^2|k|^2\delta_t} U^n_{Fourier}[k] \\ U^{n+1/2} = IFFT[U^{n+1/2}_{Fourier}] \end{cases}$$

3: Calculer l'action de l'opérateur de réaction

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} - \frac{\delta_t}{\epsilon^2} W'(U^{n+1/2})$$

4: **fin**

Remarque 8. *Lorsque l'opérateur de diffusion est traité de manière exacte, l'action de* $e^{\triangle\delta_t}$ *consiste à multiplier la transformée de Fourier de* U_i *par le symbole*

$$\sigma(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2\delta_t}.$$

Si nous avions opté pour un schéma d'Euler en temps d'ordre 1*, le symbole aurait été*

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{1 + 4\pi^2|\xi|^2\delta_t}$$

De même, le symbole associé au schéma de Crank-Nicholson est égal à

$$\sigma(\xi) = \frac{1 - 2\pi^2|\xi|^2\delta_t}{1 + 2\pi^2|\xi|^2\delta_t}$$

Le coût algorithmique de ces deux schémas est de l'ordre de $O(N^d \, logN \, T/\delta_t)$. Cette estimation correspond au calcul de la transformée de Fourier de U^N à chaque itération.

Nous allons maintenant étudier la stabilité des algorithmes proposés. En fait, il suffit d'étudier indépendamment la stabilité des schémas numériques associés à la résolution de l'opérateur de réaction et à celle de l'opérateur de diffusion puisque nous avons déjà montré la convergence de la méthode de splitting.

Dans le cas du premier algorithme, le traitement des deux opérateurs étant effectué de manière exacte, il est clair que les schémas numériques associés sont inconditionnellement stables.

Pour le deuxième algorithme, c'est un peu plus compliqué. Nous rappelons que nous traitons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \triangle u(x,t) - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u(x,t)), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,T] \\ u(x,0) = q\left(\frac{d(x,\Gamma_0)}{\epsilon}\right) \quad \text{avec des conditions de bord périodiques} \end{cases}$$

Comme le potentiel W est un potentiel double puits avec des puits situés en 0 et 1, le choix de la condition initiale implique que pour tous les temps positifs, $0 \leq U(x,t) \leq 1$, $\forall x \in [0,1]^d$. Nous allons faire apparaître la condition de stabilité du schéma numérique en imposant ce principe de comparaison numériquement.

Proposition 11. *Avec un traitement explicite du terme W', si le potentiel W est un potentiel double puits régulier, et que $M = \sup_{s\in[0,1]}\left\{W''(s)\right\}$. Alors sous l'hypothèse $\delta_t < M^{-1}\epsilon^2$,*

$$\forall n, \forall x \in [0,1]^d \quad U^n(x) \in [0,1]$$

Démonstration de la proposition 11.

Soit g la fonction définie par :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s \to s - \frac{\delta_t}{\epsilon^2} W'(s)$$

Nous allons tout d'abord montrer par l'absurde que $g([0,1]) \subset [0,1]$.
Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors, comme g est dérivable et que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, il existe un point $s^* \in [0,1]$ tel que $g'(s^*) = 0$, ce qui est absurde puisque :

$$M \geq W''(s^*) = \frac{\epsilon^2}{\delta_t} > M$$

Au final

$$\forall s \in [0,1] \quad , \quad \left(s - \frac{\delta_t}{\epsilon^2} W'(s)\right) \in [0,1]$$

La reste de la démonstration s'effectue par récurrence. La fonction $U^n([0,1]^d)$ vérifie $U^n([0,1]^d) \subset [0,1]$. Comme le noyau de la chaleur est positif d'intégrale à 1, $U^{n+1/2}([0,1]^d) \subset [0,1]$, et comme $g([0,1]) \subset [0,1]$, $g(U^{n+1/2}([0,1]^d)) \subset [0,1]$, et

$$U^{n+1}(x) \in [0,1], \quad \forall x \in [0,1]^d.$$

□

Dans le cas du potentiel $W(s) = \frac{1}{2}(1-s)^2\, s^2$, $W''(s) = 1 - 6s + 6s^2$ et $M = 1$. La condition de stabilité habituelle est retrouvée.

$$\delta_t \leq \epsilon^2$$

Ainsi, les hypothèses de la propriété 11 permettent de rendre stable les schémas numériques utilisées lorsque le terme de réaction est traité de manière explicite.

En résumé

Nous avons développé des schémas numériques qui utilisent une méthode de splitting entre les opérateurs de diffusion et les opérateurs de réaction.
– L'algorithme (1) est conditionnellement stable

– L'algorithme (2) est stable sous la condition

$$\delta_t < M^{-1}\epsilon^2 \quad \text{avec} \quad M = \|W''\|_{L^\infty([0,1])}$$

Dans la suite de cette thèse, nous utiliserons en général le deuxième algorithme. En fait, l'algorithme (1) présente clairement de meilleures propriétés mais comme cette technique ne pourra pas se généraliser pour toutes les équations de champ de phase traitées dans cette thèse, (voir par exemple l'équation d'Allen-Cahn conservée), nous préférons conserver une certaine uniformité entre toutes les simulations.

2.5 Tests numériques préliminaires

Nous allons tester les schémas numériques précédents et la convergence de la méthode de champ de phase. Nous utiliserons pour cela le potentiel double puits régulier

$$W(s) = \frac{1}{2}\, s^2\, (1-s)^2 \tag{2.10}$$

où la contrainte de stabilité s'écrit

$$\delta_t \leq \epsilon^2 \tag{2.11}$$

Dans un premier temps, nous observerons numériquement l'influence du paramètre ϵ sur la taille de l'interface diffuse Γ^ϵ.
Puis, nous testerons la contrainte de stabilité (2.11) des schémas numériques issus d'un traitement explicite de l'opérateur de réaction. Parallèlement, nous observerons que ces mêmes schémas deviennent stables grâce au traitement exact de $W^{'}$.
Dans le dernier test, nous effectuerons le mouvement par courbure moyenne d'un cercle afin d'analyser l'influence des erreurs de champ de phase et des erreurs de convergence des schémas algorithmiques sur les simulations de mouvement par courbure moyenne.

2.5.1 Influence du paramètre ϵ

La taille de l'interface diffuse est théoriquement de l'ordre de $O(\epsilon ln(\epsilon))$, avec une constante qui dépend du potentiel double puits utilisé. Nous affichons sur la figure (2.2) les solutions de l'équation d'Allen-Cahn obtenues pour différentes valeurs du paramètre ϵ. Les autres paramètres de simulation sont fixés à $N = 2^8$ et $\delta_t = \frac{1}{N^2}$. Ces simulations illustrent bien la taille réelle de ces interfaces en fonction de ϵ. Nous utiliserons par la suite des valeurs du paramètre ϵ de l'ordre de 1 à 2 fois le pas d'espace lorsque nous utiliserons ce potentiel double puits.

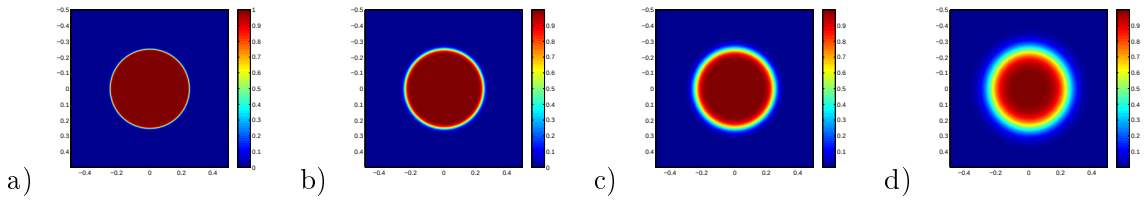


FIG. 2.2 – Épaisseur de l'interface diffuse en fonction du paramètre ϵ : (a) avec $\epsilon = 1/N$, (b) avec $\epsilon = 2/N$, (c) avec $\epsilon = 4/N$ et (d) avec $\epsilon = 8/N$

2.5.2 Contrainte de stabilité

Avec un traitement explicite de $W^{'}$
La contrainte de stabilité (2.11) avait été obtenue en imposant un principe de comparaison discret à nos solutions. Il suffisait de vérifier que u^ϵ était bien compris dans l'intervalle $[0, 1]$ pour retrouver cette condition entre δ_t et ϵ. Nous allons maintenant montrer que cette condition est une bonne estimation de la stabilité numérique de nos solutions. Dans ce test, nous effectuerons plusieurs résolutions numériques de l'équation d'Allen-Cahn jusqu'au temps T où nous utiliserons différentes valeurs du rapport $\frac{\delta}{\epsilon}$. Les résultats des tests sont présentés sur la figure 2.3 :

- La première image représente la condition intiale u_0 utilisée pour chacune de ces simulations.
- La deuxième image représente la solution u^ϵ obtenue au temps $t = 0.015$ avec le rapport $\delta_t = \epsilon^2$. La condition de stabilité est vérifiée et cette solution semble correcte et présente tous les signes d'une solution stable.
- La troisième image représente la solution u^ϵ obtenue au temps $t = 0.015$ avec le rapport $\delta_t = 2\ \epsilon^2$. Bien que la condition de stabilité ne soit pas vérifiée, cette solution est stable. On remarque tout de même qu'elle ne vérifie plus le principe de comparaison discret. Elle prend en effet des valeurs plus petites que 0 et plus grandes que 1 sur l'interface diffuse.
- La quatrième image représente la solution u^ϵ obtenue au temps $t = 0.015$ avec le rapport $\delta_t = 4\ \epsilon^2$. Cette solution est maintenant clairement instable : Elle garde tout de même des valeurs comprises entre -0.2 et 1.2 car nous avons tronqué la solution au cours des itérations.

En conclusion, la condition de stabilité (2.11) analyse bien le comportement de la stabilité de l'algorithme 2.

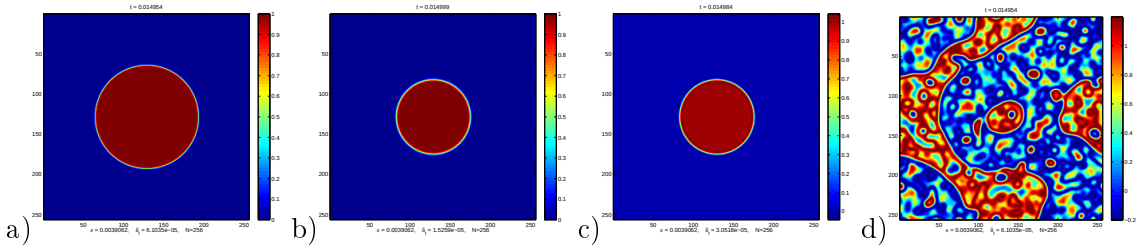


FIG. 2.3 – Solution de l'équation d'Allen-Cahn avec un traitement explicite de l'opérateur de réaction avec $N = 2^8$ et $\epsilon = 1/N$. (a) – u_0, (b) – $u(0.015)$ avec $\delta_t = \epsilon^2$, (c) – $u(0.015)$ avec $\delta_t = 2\ \epsilon^2$, (d) – $u(0.015)$ avec $\delta_t = 4\ \epsilon^2$

Avec un traitement exact de W'

Le même test est effectué avec l'algorithme 1 et les résultats sont présentés sur la figure (2.4). Toutes les solutions sont dans l'intervalle $[0, 1]$ et les simulations sont toutes stables. On note tout de même que la taille de l'interface diffuse dépend du pas de temps δ_t et que cela est sûrement une conséquence de la méthode de splitting. En conclusion, le traitement exact de l'opérateur de réaction permet de rendre inconditionnellement stables la résolution de l'équation d'Allen-Cahn.

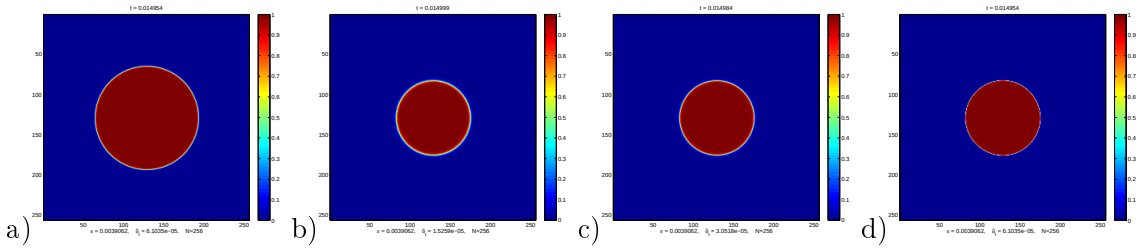


FIG. 2.4 – Solution de l'équation d'Allen-Cahn avec un traitement exact de l'opérateur de réaction. $N = 2^8$ et $\epsilon = 1/N$. (a) – u_0, (b) – $u(0.015)$ avec $\delta_t = \epsilon^2$, (c) – $u(0.015)$ avec $\delta_t = 2\ \epsilon^2$ et (d) – $u(0.015)$ avec $\delta_t = 4\ \epsilon^2$

2.5.3 Erreurs de champ de phase & erreurs des schémas numériques

Nous souhaitons distinguer l'influence des erreurs de la méthode de champ de phase de celles issues des erreurs numériques avec l'utilisation de nos algorithmes dans la résolution de l'équation d'Allen-Cahn. Nous effectuerons pour cela une résolution avec la condition initiale définie par $u_0 = q\left(\frac{d(x,\Omega_0)}{\epsilon}\right)$, où Ω_0 représente un cercle de rayon R_0. L'intérêt d'une telle condition initiale est que le mouvement par courbure moyenne théorique est explicite et l'interface Γ_t à l'instant t est un cercle de rayon $R(t)$ où R vérifie l'EDO

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dR}{dt} & = & -\frac{1}{R} \\ R(0) & = & R_0 \end{array} \right. ,$$

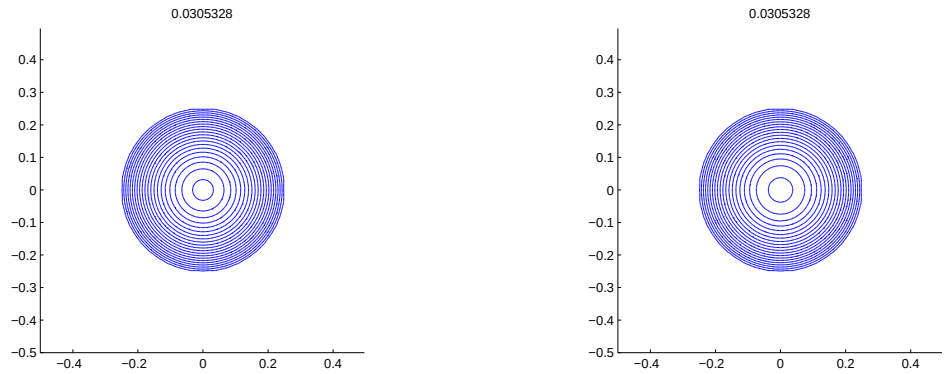
ou encore,

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2t}.$$

Un critère facile à mesurer est le temps d'extinction du domaine $t_{ext} = \frac{1}{2}R_0^2$ à partir duquel le domaine $\Omega(t)$ est vide. Nous allons alors comparer les interfaces $\tilde{\Gamma}(t)$ par rapport au mouvement théorique Γ_t, et cela, pour différentes valeurs des paramètres δ_t, N et ϵ.

$$\tilde{\Gamma}(t) := \left\{ x \in [0,1]^2; \quad u^\epsilon(t,x) = \frac{1}{2} \right\}$$

Les images de la figure (2.5) présentent quelques interfaces $\tilde{\Gamma}(t)$ obtenues numériquement. Les interfaces correspondent bien à des cercles qui diminuent au cours du temps et une observation plus fine montre que le paramètre ϵ influence la taille de ces cercles. En effet, la taille de ces cercles n'est pas strictement identique sur chacune de ces images et seul le paramètre ϵ varie entre ces deux simulations. Afin d'obtenir plus de précision sur ce point, nous allons comparer l'évolution de l'aire de ces cercles au cours du temps $t \to \pi\tilde{R}(t)^2$ pour différentes valeurs de ϵ.



(a) (b)

FIG. 2.5 – Simulation d'un mouvement par courbure moyenne d'un cercle de rayon R_0. Sur chacune des images, $\tilde{\Gamma}(t)$ pour différentes valeurs du temps t, avec $N = 2^8$ et $\delta_t = (1/N)^2$: a) – $\epsilon = 2/N$, b) – $\epsilon = 6/N$

Mise en évidence de l'erreur de la méthode de champ de phase

Nous utilisons l'algorithme 2 avec les paramètres $N = 2^8$, $\delta_t = (1/N)^2$. Nous affichons sur la première figure de (2.6) les fonctions $t \to |\tilde{\Omega}^\epsilon(t)|$ pour différentes valeurs de ϵ. L'erreur obtenue

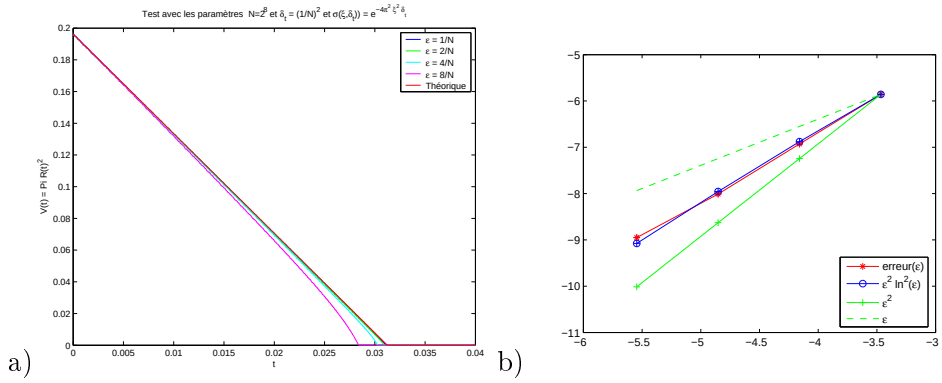


FIG. 2.6 – Avec l'algorithme 2, (a) – $t \to |\tilde{\Omega}^{\epsilon}(t)|$ pour différentes valeurs de ϵ, (b) – $\epsilon \to |t_{ext} - t^{\epsilon}_{ext}|$ en échelle logarithmique

sur l'aire de $\tilde{\Omega}^{\epsilon}$ décroît en fonction de ϵ et s'avère d'autant plus importante que les courbures sont élevées. La deuxième image (2.6) représente l'erreur commise sur le temps d'extinction des domaine $\tilde{\Omega}(t)$ en fonction du paramètre ϵ, le tout en échelle logarithmique. Nous retrouvons ainsi une erreur en $O(\epsilon^2 ln(\epsilon)^2)$.

Mise en évidence de l'erreur de discrétisation

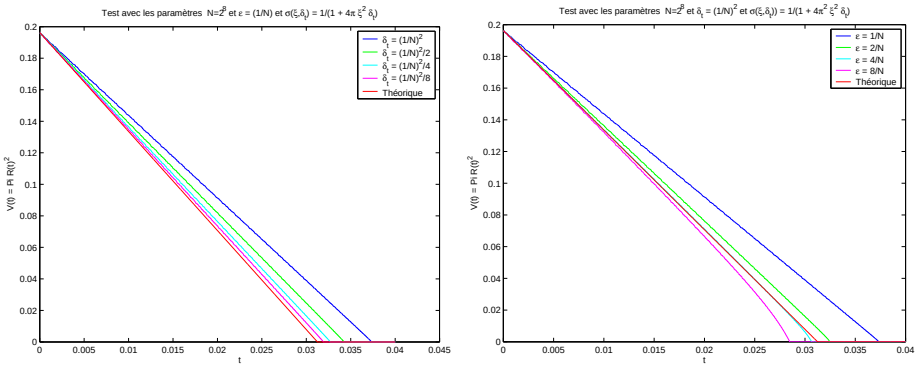


FIG. 2.7 – Avec un traitement implicite d'ordre 1 de l'opérateur de diffusion, $\sigma(\xi, \delta_t) = \frac{1}{1+4\pi^2|\xi|^2\delta_t}$. A gauche : $t \to |\tilde{\Omega}^{\delta_t}(t)|$ pour différentes valeurs de δ_t. A droite : $t \to |\tilde{\Omega}^{\epsilon}(t)|$ pour différentes valeurs de ϵ.

Nous voulons maintenant mesurer le réel impact du traitement exact de l'opérateur de diffusion. Pour cela, nous effectuons les mêmes simulations mais avec un traitement implicite d'ordre 1 du laplacien, ce qui correspond à utiliser l'opérateur de symbole

$$\sigma(\xi, \delta_t) = \frac{1}{1 + 4\pi|\xi|^2\delta_t}$$

En fixant le paramètre ϵ égal à $\frac{1}{N}$, nous affichons sur la première image de la figure (2.7), les fonctions $g : t \to |\tilde{\Omega}^{\delta_t}(t)|$ obtenues pour différentes valeur de pas de temps δ_t. L'erreur se répercute directement sur la pente de g et apparait à un ordre de $O(\delta_t)$ sur le temps d'extinction. Dans la pratique, lorsque les méthodes de champ de phase sont implémentées avec un traitement

implicite de l'opérateur de diffusion, l'habitude consiste à utiliser une valeur du paramètre ϵ égale à 3 ou 4 fois la taille du paramètre de discrétisation spatiale en fonction du potentiel double puits utilisé. Or,

- Le premier test (voir la figure (2.6)) a permis de mettre en évidence le type d'erreur de champ de phase.
- Le deuxième test (voir la première image de (2.7)) a permis de mettre en évidence le type d'erreur de discrétisation.
- Ces deux types d'erreurs ont des conséquences opposées.

Il existe donc un ϵ^* optimal qui minimise la somme de ces deux erreurs.
La deuxième figure de (2.7) représente les fonctions $t \to |\tilde{\Omega}^\epsilon(t)|$ pour différentes valeurs de ϵ où il ressort que le meilleur ϵ dans ce cas est égal à $\epsilon = 4\delta_x = \frac{4}{N}$. Bien entendu, si l'opérateur de diffusion avait été traité de manière exacte, le meilleur ϵ aurait été le plus petit ϵ vérifiant la condition de stabilité, c'est à dire ici, $\epsilon = \frac{1}{N}$.

Conclusion

Nous avons ainsi mis en évidence d'un point de vue numérique que le traitement exact de l'opérateur de diffusion permettait de rendre négligeables les erreurs de discrétisation des schémas numériques devant les erreurs de champ de phase.

Or l'analyse théorique de la méthode de splitting conduisait un ordre d'erreur en $0\left(\frac{\sqrt{\delta_t}}{\epsilon^2}\right)$. Cette estimation théorique ne semble donc pas optimale. En fait, nous analysons uniquement l'erreur sur les lignes de niveau 1/2 des solutions, et comme l'opérateur de réaction est nul sur ces interfaces $W'(1/2) = 0$, formellement, nous nous attendons à une erreur en $0\left(\sqrt{\delta_t}\right)$. De plus, cette estimation est en norme L^∞, ce qui correspond à une erreur en $\epsilon\sqrt{\delta_t}$ sur position de la ligne de niveau $\frac{1}{2}$ des solutions u^ϵ. Au final, l'erreur de champ de phase est en $O(\epsilon^2|ln(\epsilon|^2)$ et l'erreur de dicrétisation en $0(\epsilon\sqrt{\delta_t})$. Ainsi, avec un pas de temps de l'ordre de ϵ^2, les erreurs de discrétisation deviennent négligeable devant les erreurs de champ de phase.

Dans les tests numériques que nous présenterons par la suite, nous utiliserons pour un paramètre ϵ donné, le plus grand pas de temps δ_t satisfaisant la condition de stabilité, c'est à dire

$$\delta_t = \epsilon^2$$

2.6 Tests numériques classiques

La figure (2.8) présente quelques résultats de simulation numériques de mouvement par courbure moyenne en dimension 2. Toutes ces simulations sont satisfaisantes et témoignent des grandes possibilités des méthodes de champ de phase.

Nous présentons de plus sur la figure (2.9) quelques simulations de mouvement par courbure moyenne en dimension trois. La première simulation prend comme condition initiale un tore qui se réduit vers un cercle. L'intérêt de la deuxième simulation est qu'elle fait apparaître un changement de topologie bien que sa condition initiale soit régulière (ceci est impossible en dimension 2). Enfin, la troisième simulation représente le mouvement par courbure moyenne du lapin de Stanford.

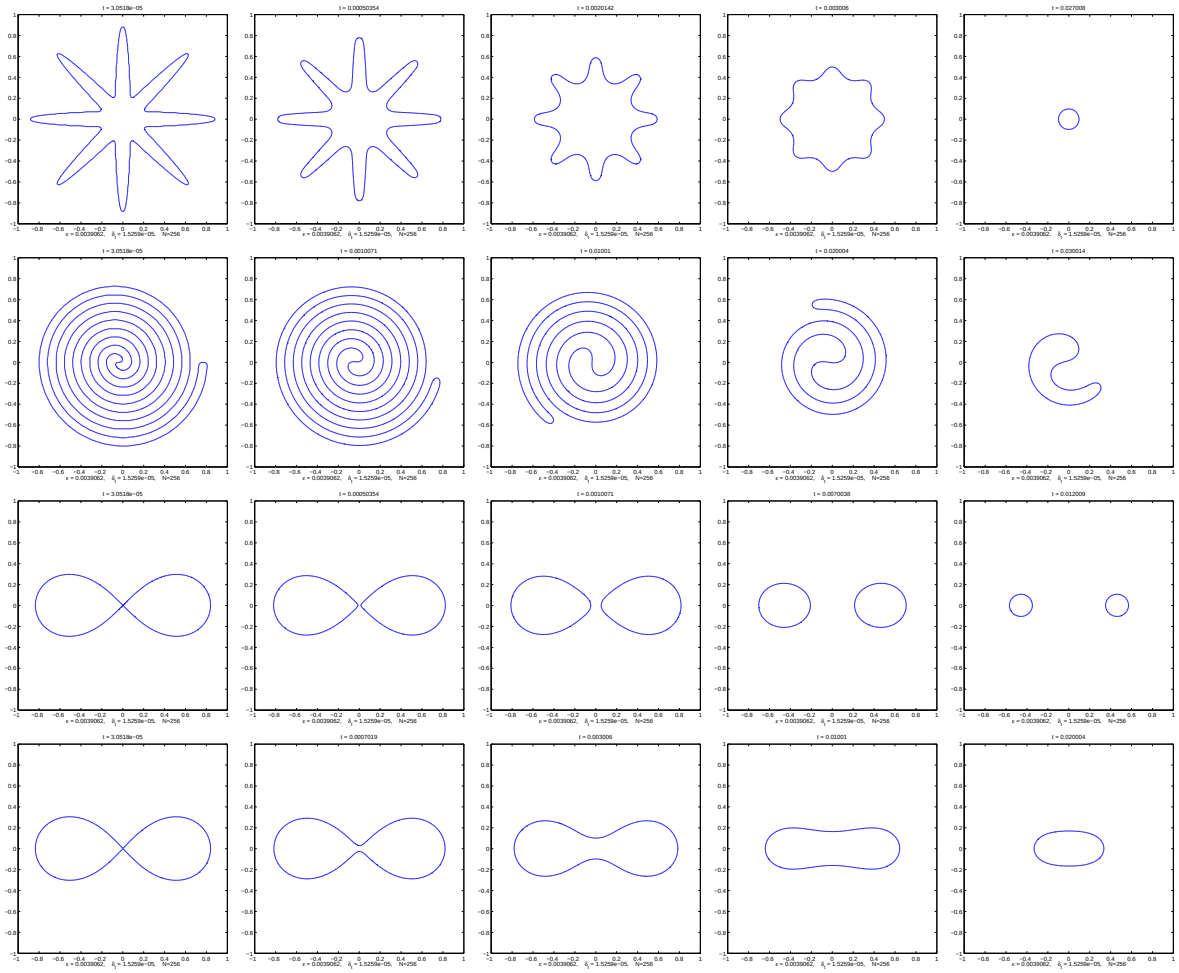


FIG. 2.8 – Quelques simulations de mouvement par courbure moyenne

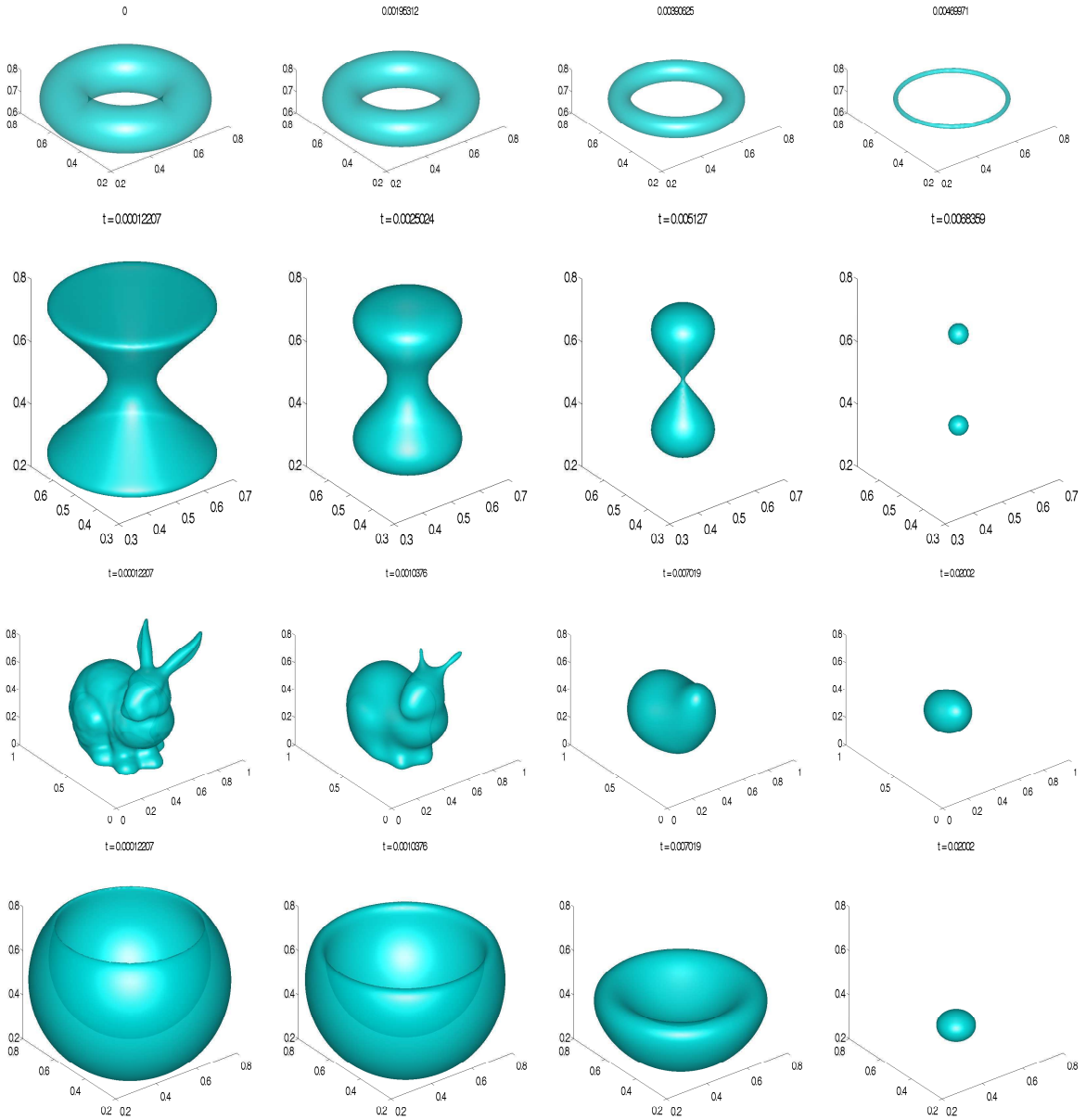


FIG. 2.9 – Quelques simulations de mouvement par courbure moyenne, avec $N = 2^7$, $\epsilon = 1/N$ et $\delta_t = \epsilon^2$

Chapitre 3

Terme de Forçage et Contrainte de volume

3.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés aux mouvements par courbure moyenne et à l'équation d'Allen-Cahn. Dans cette partie, nous appliquerons la méthode de champ de phase à des mouvements de domaines où les vitesses d'interfaces vérifient

$$V_n = \kappa + g$$

où $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est supposée régulière. Nous traiterons aussi formellement le cas des termes de forcing vectoriel où $V_n = \kappa + g + \vec{f}.\vec{n}$.

Les méthodes traditionnelles que nous trouvons généralement dans la littérature des champs de phase (voir par exemple [12, 27]) conduisent aux équations de réaction-diffusion suivantes :

$$\begin{cases} u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2}\left(W'(u(x,t)) - \epsilon c_W \left[\frac{\vec{f}.\nabla u}{|\nabla u|} + g\right]\right) \\ u(0,x) = q\left(\frac{d(x,\Omega_0)}{\epsilon}\right) \end{cases}$$

où c_W est une constante qui ne dépend que du potentiel double puits utilisé :

$$c_W = \int_0^1 \sqrt{2W(s)}ds$$

Nous appellerons dans la suite ces équations, premier modèle d'équation de réaction-diffusion. Paolini et Bellettini ont par exemple montré dans [12] des résultats de convergence des solutions u^ϵ de ces équations vers les dynamiques d'interfaces souhaitées avec un ordre de convergence en $O(\epsilon^2 ln(\epsilon)^2)$.

3.1.1 Motivations

Dans l'exemple particulier où les fonctions $f = 0$ et $g = 1$, cette EDP peut s'identifier à une équation d'Allen-Cahn avec un potentiel double puits $W_{1,\epsilon}$ (voir figure 3.1) défini par sa dérivée

$$W_{1,\epsilon}^{'}(s) = W'(s) - \epsilon c_W$$

L'inconvénient est alors que les solutions u^ϵ ne s'explicitent plus sous la forme $u^\epsilon = q\left(\frac{z^\epsilon}{\epsilon}\right)$. En effet, le potentiel $W_{1,\epsilon}$ admet des positions de puits légèrement différentes de celles de W.

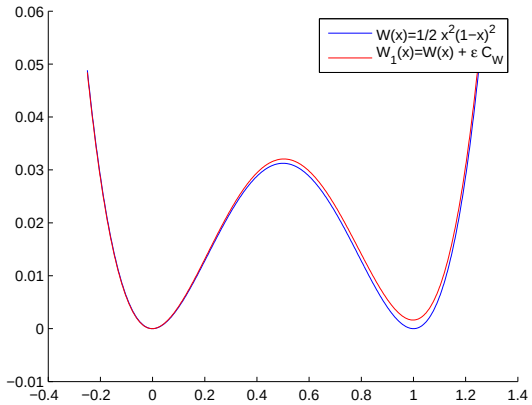


FIG. 3.1 – Comparaison des potentiels W et $W_{1,\epsilon}$

Pour s'en convaincre, il suffit de choisir la condition initiale $u_0 = 0$. Dans ce cas, la solution stationnaire n'est plus $u(\infty, x) = 0$ mais $u(\infty, x) = c_\epsilon$ où c_ϵ vérifie

$$c_\epsilon = \frac{c_W}{\epsilon} W'(c_\epsilon)$$

Plus précisément, des développements asymptotiques des solutions u^ϵ de ces équations (voir par exemple la section 4 de [12]) indique formellement que

$$u^\epsilon(x) = q\left(\frac{d(x, \Omega^\epsilon)}{\epsilon}\right) + O(\epsilon), \quad \text{avec} \quad \Omega^\epsilon(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ u^\epsilon(x,t) = \frac{1}{2}\right\}$$

Ainsi, ce léger déplacement de la position des puits, qui n'est a priori pas gênant pour modéliser les termes de forçage, aura une grande responsabilité dans **la perte de volume classique** des méthodes de champ de phase où l'on utilise couramment l'approximation $|\Omega^\epsilon| \simeq \int_{\mathbb{R}^d} u^\epsilon dx$.

Remarque 9. *Lorsque les termes de forçage sont nuls, ces mêmes développements asymptotiques montrent que*

$$u^\epsilon(x) = q\left(\frac{d(x, \Omega^\epsilon)}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2)$$

3.1.2 Objectif

Comme dans les travaux de Fierro [59], nous allons introduire un deuxième modèle de réaction-diffusion,

$$\begin{cases} u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2}\left(W'(u(t,x)) - \epsilon\left[\frac{\vec{f}.\nabla u}{|\nabla u|} + g\right]\sqrt{2W(u(x,t))}\right) \\ u(0,x) = q\left(\frac{d(x,\Omega_0)}{\epsilon}\right) \end{cases}$$

L'existence de solutions de ce problème est obtenue, au moins sous les hypothèses que $f = 0$ et si g est suffisamment régulière. Il suffit de reprendre les résultats du chapitre précédent appliqués au potentiel double puits $W_{2,\epsilon}$ (voir figure 3.2) défini par

$$W'_{2,\epsilon}(t) = W'(t) - \epsilon g\sqrt{2W(t)}$$

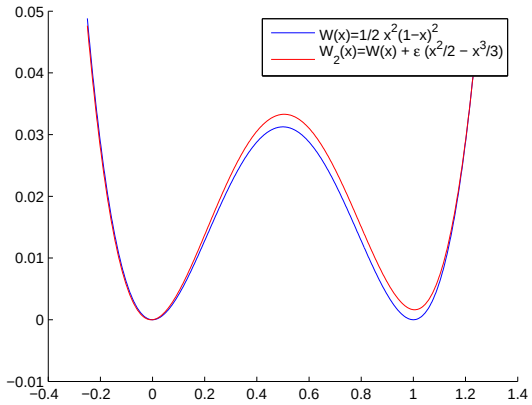


FIG. 3.2 – Comparaison des potentiels W et $W_{2,\epsilon}$

L'avantage de ce nouveau modèle est que les potentiels $W_{2,\epsilon}$ et W ont les mêmes puits, et les solutions u^ϵ pourront s'exprimer sous la forme

$$u^\epsilon = q\left(\frac{z^\epsilon}{\epsilon}\right).$$

En fait, une analyse asymptotique formelle permettra d'expliciter les solutions u^ϵ, de cette EDP sous la forme

$$u^\epsilon(x) = q\left(\frac{d(x,\Omega^\epsilon)}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2),$$

pour des termes de forçage non nuls.

3.1.3 Plan du chapitre

Dans une première partie, nous introduirons chacun de ces deux modèles de réaction-diffusion et nous essayerons d'extraire le lien qui les unis vers le même mouvement d'interface.

Dans une deuxième partie, nous étudierons plus rigoureusement le deuxième modèle avec une analyse asymptotique formelle ainsi qu'une preuve de convergence des solutions de ces équations vers le mouvement par courbure moyenne forcé.

Nous présenterons ensuite quelques tests numériques et nous verrons que l'ordre de convergence de ces modèles sera équivalent.

Enfin, dans une dernière partie, nous traiterons la question de la conservation de volume : chacun des deux modèles précédents conduira à une équation différente et nous justifierons ainsi tout l'intérêt de notre modèle puisque celui-ci présentera beaucoup moins de perte de volume que pour le premier modèle.

3.2 Introduction des deux modèles de réaction-diffusion

Avant d'introduire les deux modèles de réaction-diffusion, nous devons initialement déterminer l'énergie $J(\Omega)$ qui régit le mouvement d'interface Γ suivant une vitesse normale

$$V_n = \kappa + g$$

3.2.1 Énergie de forme à minimiser

Des résultats classiques (voir par exemple [1] [72]) montrent que la dérivée de forme de l'énergie $J_1(\Omega) = \int_\Omega g dx$ vérifie

$$\frac{d}{dt} J_1(\Omega_{t,h\vec{n}})_{|t=0} = \nabla J_1(\Omega)(h\vec{n}) = \int_\Gamma ghds$$

où $\Omega_{t,h\vec{n}} = (Id + th\vec{n})(\Omega)$.
Ainsi, la dérivée de forme de $J(\Omega) = \int_\Gamma 1ds - \int_\Omega gdx$ dans la direction $h\vec{n}$ est égale à

$$\nabla J(\Omega)(h\vec{n}) = -\int_\Gamma (\kappa + g)hds$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\nabla J(\Omega)(h\vec{n}) \geq -\sqrt{\int_\Gamma (\kappa+g)^2 ds}\sqrt{\int_\Gamma h^2 ds} \geq -\|\kappa + g\|_{L^2(\Gamma)}\|h\|_{L^2(\Gamma)}$$

La meilleure direction de descente $h^* \in L^2(\Gamma)$ qui minimise J dans le sens où

$$h^* = \arg\min_h \left\{\nabla J(\Omega)(h\vec{n}) \ ; \ \|h\|_{L^2(\Gamma)} \leq 1\right\}$$

est obtenue pour

$$h^* = \frac{\kappa + g}{\|\kappa + g\|_{L^2(\Gamma)}}.$$

En effet,

$$\nabla J(\Omega)\left(\frac{\kappa+g}{\|\kappa+g\|_{L^2(\Gamma)}}\vec{n}\right) = -\frac{1}{\|\kappa+g\|_{L^2(\Gamma)}}\int_\Gamma (\kappa+g)^2 ds = -\|\kappa+g\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Ainsi, nous en déduisons que l'énergie $J(\Omega)$ qui régit le mouvement par courbure moyenne avec un terme de forçage g vérifie

$$J_g(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1ds - \int_\Omega g(x)dx \tag{3.1}$$

3.2.2 Premier modèle de réaction-diffusion

Les propriétés de stabilité de la Γ-convergence assurent le fait que si $J_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} J$, alors pour toute fonction continue f,

$$J_\epsilon + f \xrightarrow{\Gamma} J + f.$$

Le lecteur trouvera une démonstration de cette propriété dans le livre de Braides [15].
Nous allons appliquer cette propriété dans le cas où

$$\begin{cases} J_\epsilon(u) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \left[\epsilon\frac{\nabla u^2}{2} + \frac{1}{\epsilon}W'(u)\right] dx, \\ f(u) = -c_W \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g(x)u(x)dx. \end{cases}$$

On remarque de plus que la fonction f est bien continue pour la topologie $L^1(\mathbb{R}^d)$ sous l'hypothèse que g soit bornée. Nous en déduisons donc que

$$J_\epsilon + f \xrightarrow{\Gamma} c_W J_g \text{ où } J_g \text{ est définie dans (3.1).}$$

L'équation de réaction-diffusion s'obtient finalement en prenant le flux de gradient de $J_\epsilon + f$

$$u_t = -\left(\nabla J_\epsilon(u) + \nabla f(u)\right)/\epsilon = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u) + \frac{c_W}{\epsilon} g.$$

Nous venons ainsi d'introduire le premier modèle de réaction-diffusion.

Définition 5. *Le premier modèle d'équation de réaction-diffusion associé aux mouvements d'interfaces de loi $V_N = \kappa + g + \vec{f}.\vec{n}$ est défini par l'EDP*

$$\begin{cases} u_t = \triangle u - \dfrac{1}{\epsilon^2}\left(W^{'}(u) - \epsilon\, c_W \left(g + \dfrac{\vec{f}.\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right), \\ u_0 = q\left(\dfrac{d(\Omega_0, x)}{\epsilon}\right). \end{cases}$$

3.2.3 Deuxième modèle de réaction-diffusion

Avec un argument géométrique

En reprenant les arguments géométriques du chapitre précédent, la fonction distance signée à l'interface, $d = \overline{dist(x, \Omega_t)}$, vérifie sur l'interface Γ_t l'égalité

$$\partial_t d_t = \triangle d - g(x),$$

Nous allons maintenant déduire l'équation de réaction-diffusion du deuxième modèle en injectant la fonction $u^\epsilon = q\left(\frac{d}{\epsilon}\right)$ dans cette égalité.

$$\begin{aligned} \triangle d - g(x) &= -\frac{\epsilon}{\sqrt{2W(u_\epsilon)}}\left(\triangle u_\epsilon - \frac{W^{'}(u_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) - g(x) \\ &= -\frac{\epsilon}{\sqrt{2W(u_\epsilon)}}\left(\triangle u_\epsilon - \frac{W^{'}(u_\epsilon) - \epsilon g(x)\sqrt{2W(u_\epsilon)}}{\epsilon^2}\right) \end{aligned}$$

Le deuxième modèle conduit finalement à l'équation suivante

$$\partial_t u_\epsilon = -d_t \frac{\sqrt{2W(u_\epsilon)}}{\epsilon} = \triangle u_\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}\left[W^{'}(u_\epsilon) - \epsilon g(x)\sqrt{2W(u_\epsilon)}\right] \tag{3.2}$$

Avec une énergie de type Ginzburg-Landau

Plus précisément, l'équation (3.2) peut être aussi introduite comme le flux de gradient de l'énergie :

$$F_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d}\left[\epsilon\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{1}{\epsilon}W(u)\right]dx - \int_{\mathbb{R}^d} G(u)\; g dx,$$

où $G(s) = \int_0^s \sqrt{2W(\ell)}d\ell$.
Ainsi, sous l'hypothèse que W soit borné, $G(s)$ est uniformément lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et en ajoutant le fait que $\|g\|_{L^\infty} < \infty$, on en déduit facilement que $u \to \int_{\mathbb{R}^d} G(u)\; g dx$ est continu pour la topologie $L^1(\mathbb{R}^d)$. L'ajout de ce terme à l'énergie initiale J_ϵ n'est donc qu'une perturbation continue et en remarquant enfin que $G(\mathbb{1}_\Omega(x)) = c_W \mathbb{1}_\Omega(x)$, il ressort que F_ϵ Γ-converge vers $c_W J_g$.

Définition 6. *Le deuxième modèle d'équation de réaction-diffusion associé aux mouvements d'interface de loi $V_N = -\kappa + g + \vec{f}.\vec{n}$, conduit à l'EDP suivante*

$$\begin{cases} u_t = \triangle u - \dfrac{1}{\epsilon^2}\left(W'(u) - \epsilon\left(g + \vec{f}.\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\sqrt{2W(u)}\right) \\ u_0 = q\left(\dfrac{d(\Omega_0, x)}{\epsilon}\right). \end{cases}$$

3.2.4 Comparaison des deux modèles

Deux modèles d'équations de réaction-diffusion ont été introduits pour approcher le même mouvement d'interface. Or ces deux modèles semblent a priori différents.

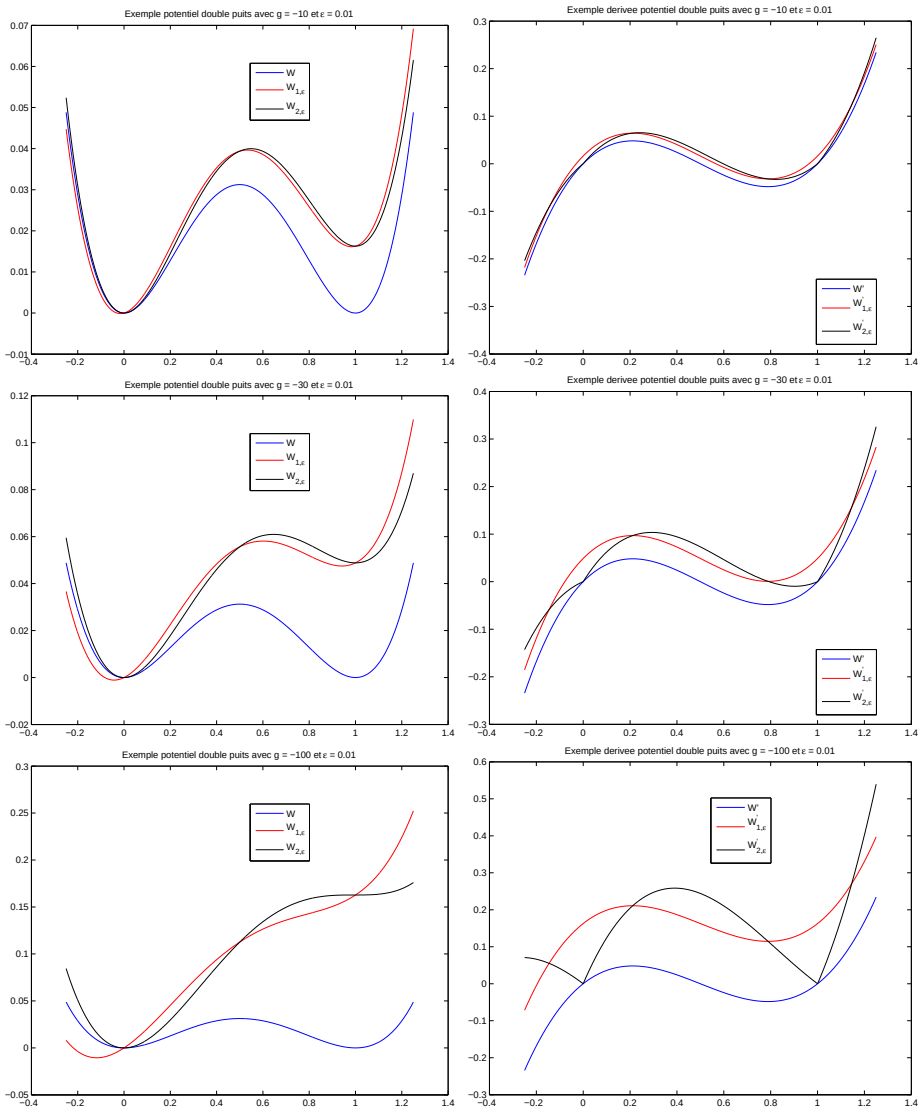


FIG. 3.3 – Comparaison des potentiels W, $W_{1,\epsilon}$ et $W_{2,\epsilon}$ et de leurs dérivées pour différentes valeurs du terme de forcing g.

Par exemple, dans le cas où le terme de forçage est constant, $g = C_0$, ces deux équations peuvent

s'écrire sous la forme

$$u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon} W'_{i,\epsilon}(u)$$

où les potentiels $W_{1,\epsilon}$ et $W_{2,\epsilon}$ (associés respectivement au premier et deuxième modèle) vérifient

$$\begin{cases} W'_{1,\epsilon}(s) = W'(s) - \epsilon C_0 c_W & \text{avec } W_{1,\epsilon}(0) = W(0), \\ W'_{2,\epsilon}(s) = W'(s) - \epsilon C_0 \sqrt{2W(s)} & \text{avec } W_{2,\epsilon}(0) = W(0). \end{cases}$$

Lorsque le paramètre ϵ est suffisamment petit, les fonctions $W_{1,\epsilon}$ et $W_{2,\epsilon}$ restent des potentiels double puits.
La position des puits de $W_{1,\epsilon}$ est alors légèrement modifiée par rapport à celle de W et la différence de hauteur entre ces puits est égale à

$$h_1 = |W_{1,\epsilon}(\tilde{x}_1) - W_{1,\epsilon}(\tilde{x}_0)| \simeq \epsilon C_0 c_W$$

La position des puits de $W_{2,\epsilon}$ n'est pas modifiée par rapport à W et la différence de hauteur entre ces puits est égale à

$$h_2 = |W_1(x_1) - W_1(x_0)| = \int_0^1 C_0 \epsilon \sqrt{2W(s)} ds = \epsilon C_0 c_W$$

Ainsi, ce qui relie ces deux modèles est la différence de hauteur des puits des potentiels double puits associés. Nous affichons sur la figure 3.3 trois exemples de ces potentiels pour différentes valeurs de g. Le troisième exemple est un cadre limite dans lequel $g = \frac{1}{\epsilon}$. Dans ce cas, les potentiels $W_{1,\epsilon}$ et $W_{2,\epsilon}$ ne sont plus à proprement parler des potentiels double puits puisqu'ils ne possèdent plus qu'un seul minimum local strict.

3.3 Quelques points théoriques du deuxième modèle

3.3.1 Analyse asymptotique du deuxième modèle de réaction diffusion

Soit u^ϵ la solution du problème

$$(P_1) \quad \begin{cases} u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u) + \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2\ W(u)} g \\ u(x,0) = q\left(\dfrac{d(x,\partial\Omega_0)}{\epsilon}\right) \end{cases}$$

Nous présentons maintenant une analyse asymptotique des solutions u_ϵ du problème (P_1) dans le cas radial en dimension 2. En utilisant des coordonnées polaires, nous supposons que le terme de forçage g s'exprime sous la forme $g(x) = g(r)$ et que la condition initiale Ω_0 est un cercle de rayon 1 :

Notons $\Omega(t)$, le mouvement par courbure moyenne de la condition initiale Ω_0 obtenu suivant la loi $V_n = \kappa + g$. Le domaine $\Omega(t)$ est alors un cercle de rayon $R(t)$ où $R(t)$ est défini comme la solution de l'EDO suivante

$$R'(t) + \frac{1}{R(t)} = g(R(t)), \quad R(0) = 1.$$

La solution $u_\epsilon(x,t)$ de (P_1) est dans ce cas aussi radiale et vérifie l'EDP suivante

$$\partial_t u_\epsilon(r,t) - \frac{\partial_r}{r}\left(r\partial_r u_\epsilon(r,t)\right) + \frac{1}{\epsilon^2} W'(u_\epsilon(r,t)) - \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(u_\epsilon(r,t))} g(r) = 0 \tag{3.3}$$

Notons alors $R^\epsilon(t)$, le rayon du cercle défini à l'instant t comme la ligne de niveau $\frac{1}{2}$ de $u^\epsilon(x,t)$

$$R^\epsilon(0) = 1, \quad u_\epsilon(R^\epsilon(t), t) = \frac{1}{2}$$

L'idée consite à introduire la variable $y = \dfrac{r - R^\epsilon(t)}{\epsilon}$ et la fonction $U^\epsilon(y,t)$ définie par

$$U^\epsilon(y,t) = u^\epsilon\left(R^\epsilon(t) + \epsilon y, t\right), \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

et solution de

$$\partial_t U^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} R'_\epsilon \partial_y U^\epsilon - \frac{1}{\epsilon r}\partial_y U^\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}\partial_{yy} U^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} W'(U^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(U^\epsilon(r,t))}g(r) = 0 \tag{3.4}$$

L'analyse asymptotique s'effectue en considérant les développements de U^ϵ et R^ϵ suivants :

$$U^\epsilon(y,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i U_i(y,t), \quad R^\epsilon(y,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i R_i(y,t),$$

où $U_0(0,t) = \frac{1}{2}$, $R_0(0) = R(0)$ et pour tout $i \geq 1$, $U_i(0,t) = 0$ et $R_i(0) = 0$.
Ainsi,

$$\partial_t U^\epsilon = \partial_t U_0 + O(\epsilon), \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\epsilon} R'_\epsilon \partial_y U^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\left(R'_0 \partial_y U_0\right) + \left(R'_1 \partial_y U_0 + R'_0 \partial_y U_1\right) + O(\epsilon), \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{\epsilon^2}\partial_{yy} U^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2}\partial_{yy} U_0 + \frac{1}{\epsilon}\partial_{yy} U_1 + \partial_{yy} U_2 + O(\epsilon), \tag{3.7}$$

et

$$\frac{1}{\epsilon^2} W'(U^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} W'(U_0) + \frac{1}{\epsilon} W''(U_0)\,(U_1) + \left(W'''(U_0)U_1 + W''(U_0)U_2\right) \tag{3.8}$$

En remarquant de plus que

$$\frac{1}{r} = \left(\epsilon y + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i R_i(t)\right)^{-1} = \frac{1}{R_0(t)} - \epsilon \frac{y + R_1}{R_0(t)^2} + O(\epsilon^2),$$

on en déduit que

$$\frac{1}{\epsilon r}\partial_y U^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1}{R_0(t)}\partial_y U_0\right) + \left(\frac{1}{R_0(t)}\partial_y U_1 - \frac{y + R_1}{R_0(t)^2}\partial_y U_0\right) + O(\epsilon). \tag{3.9}$$

Enfin, avec

$$g(r) = g\left(\epsilon\, y + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i R_i(t)\right) = g(R_0(t)) + \epsilon\, g'(R_0(t))(y + R_1(t)) + O(\epsilon^2),$$

il ressort que

$$\frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(U^\epsilon)}g(r) = \frac{1}{\epsilon} g(R_0)\sqrt{2W(U_0)} + \left(g'(R_0)(y + R_1)\sqrt{2W(U_0)} + \frac{W'(U_0)}{\sqrt{2W(U_0)}} g(R_0) U_1\right) + O(\epsilon) \tag{3.10}$$

En injectant les inégalités (3.5) (3.6) (3.7), (3.8) (3.9) (3.10) dans (3.4), il ressort ainsi que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\epsilon^2}\left[\partial_{yy}U_0 - W^{'}(U_0)\right] + \frac{1}{\epsilon}\left[\partial_{yy}U^1 - W^{''}(U_0)U_1 + \partial_y U_0\left(R_0^{'}(t) + \frac{1}{R_0(t)}\right) + \sqrt{2W(U_0)}g(R_0(t))\right] \\
&+ \left[-\partial_t U_0 + \left(R_1^{'}(t)\partial_y U_0 + R_0^{'}(t)\partial_y U_1\right) + \partial_{yy}U_2 + \left(\frac{1}{R_0(t)}\partial_y U_1 - \frac{y+R_1(t)}{R_0(t)^2}\partial_y U_0\right)\right. \\
&- \left.\left(W^{'''}(U_0)U_1 + W^{''}(U_0)U_2\right) + \left(g(R_0(t))\frac{W^{'}(U_0)}{\sqrt{2W(U_0)}}U_1 + g^{'}(R_0(t))(y+R_1(t))\sqrt{2W(U_0)}\right)\right] + O(\epsilon)
\end{aligned}$$

Analyse des termes d'ordre ϵ^{-2}

Le terme $U_0(.,t)$ est solution de

$$\partial_{yy}U_0 = W^{'}(U_0), \quad \text{avec } U_0(0) = \frac{1}{2},$$

et s'identifie au profil q :

$$U_0(y,t) = q(y), \ \forall t > 0$$

Analyse des termes d'ordre ϵ^{-1}

Come la fonction $U_0(y,t)$ s'identifie à $q(y)$, il ressort notamment que $\partial_y U_0 = -\sqrt{2W(U_0)}$ et alors U_1 et R_0 sont solutions de

$$\partial_{yy}U^1 - W^{''}(U_0)U_1 = -\partial_y U_0\left(R_0^{'}(t) + \frac{1}{R_0(t)} - g(R_0(t))\right)$$

En multipliant cette égalité par $\partial_y U_0$ et en l'intégrant sur $\mathbb{R}$,

$$\left(R_0^{'}(t) + \frac{1}{R_0(t)} - g(R_0(t))\right)\int_{\mathbb{R}}(\partial_y U_0)^2 dy = -\int_{\mathbb{R}}\left(\partial_{yy}U^1 - W^{''}(U_0)U_1\right)\partial_y U_0 = 0,$$

on montre que $R_0(t)$ satisfait

$$R_0^{'}(t) = -\frac{1}{R_0(t)} + g(R_0(t).$$

Les fonctions $R_0(t)$ et $R(t)$ sont alors solutions de la même EDO et possèdent la même condition initiale $R(0) = R_0(0) = 1$, elles sont donc égales et

$$R_0(t) = R(t), \quad \forall t > 0$$

On en déduit de plus que U_1 est solution de l'EDP

$$\partial_{yy}U^1 - W^{''}(U_0)U_1 = 0.$$

Il existe alors une fonction $t \to \alpha(t)$ tel que $U_1(y,t) = \alpha(t)q'(y)$. En effet, le noyau de l'opérateur $L(v) = v'' - W^{''}(q)v$ s'identifie à $Vec\{q'\}$ dans $H^2(\mathbb{R})$ (voir par exemple la section 3 de [12]). Mais comme $U_1(0,t) = 0$, il ressort finalement que $\alpha(t) = 0$ et $U_1(y,t) = 0, \quad \forall t > 0$.

Remarque 10. *L'analyse asymptotique du premier modèle de réaction diffusion conduirait à l'égalité*

$$\begin{aligned}
\partial_{yy}U^1 - W^{''}(U_0)U_1 &= -\partial_y U_0\left(R_0^{'}(t) + \frac{1}{R_0(t)}\right) + C_W g(R_0(t)) \\
&= -\partial_y U_0\left(R_0^{'}(t) + \frac{1}{R_0(t)} - g(R_0(t))\right) - g(R_0(t))\left(\partial_y U_0 - c_W\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant cette égalité par $\partial_y U_0$ et en intégrant sur $\mathbb{R}$, on trouverait une nouvelle fois que $R_0^{'}(t) + \frac{1}{R_0(t)} - g(R_0(t)) = 0$ car

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \partial_y U_0 \left[\partial_y U_0 - C_W\right] dy &= \int_{\mathbb{R}} -q^{'}(y)\sqrt{2W(q(y))}dy + c_W \int_{\mathbb{R}} q^{'}(y)dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{2W(s)}ds - c_W = 0\end{aligned}$$

Ainsi $R_0(t) = R(t)$, mais cette fois-ci, U_1 serait solution de

$$\partial_{yy}U^1 - W^{''}(q)U_1 = g(R_0(t))\left(c_W + q'\right)$$

En introduisant η, définie comme la solution de

$$\eta^{''}(y) - W^{''}(q(y))\eta(y) = \left(c_W + q'(y)\right), \quad \eta(0) = 0,$$

La fonction U_1 s'exprimerait alors sous la forme $U_1(y,t) = g(R_0(t))\eta_1(y)$. A noter que

$$\lim_{y\to-\infty} \eta_1(y) = \frac{c_W}{W''(1)}, \quad \lim_{y\to+\infty} \eta_1(y) = \frac{c_W}{W''(0)}$$

La figure (3.4) présente une estimation numérique de la fonction η dans le cas du potentiel $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$. Ainsi, le profil modifié associé $s \to q(s) + \epsilon\eta(s)$ admettrait les limites $1 + \epsilon\frac{C_W}{W''(1)}$ et $\frac{C_W}{W''(0)}$ respectivement en $-\infty$ et $+\infty$. Ces deux limites correspondent en fait à la position des puits du potentiel $W_{1,\epsilon}(s) = W(s) - \epsilon C_W s$.

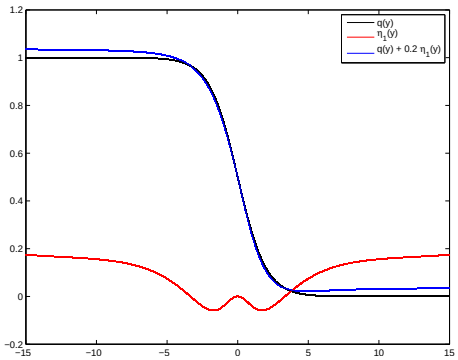


FIG. 3.4 – Estimation numérique de la fonction η_1 dans le cas du potentiel $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$.

Analyse des termes d'ordre ϵ^0

En prenant en compte le fait que $U_1 = 0$ et $\partial_t U_0 = 0$, les fonctions U_2 et R_1 vérifie

$$\partial_{yy}U_2 - W^{'}(U_0)U_2 = \partial_y U_0 \left(\frac{y + R_1(t)}{R_0(t)^2} - R_1'(t) + g'(R_0(t))(y + R_1(t))\right)$$

En multipliant cette égalité par $\partial_y U_0$ et en l'intégrant sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(R_1' - \frac{R_1(t)}{R_0(t)^2} &- g'(R_0(t))R_1(t))\int_{\mathbb{R}} (\partial_y U_0)^2 dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \left(\partial_{yy}U^2 - W^{''}(U_0)U_2\right)\partial_y U_0 + \left(\frac{1}{R_0(t)^2} + g'(R_0(t))\right)\int_{\mathbb{R}} y(\partial_y U_0)^2 dy = 0,\end{aligned}$$

on en déduit que R_1 est solution de

$$R_1'(t) = \frac{R_1(t)}{R_0(t)^2} + g'(R_0(t))R_1(t)$$

Mais comme $R_1(0) = 0$, il ressort que pour tout $t \geq 0$, $R_1(t) = 0$. Au final, la fonction $U_2(y,t)$ est solution de

$$\partial_{yy}U_2 - W''(U_0)U_2 = y\ \partial_y U_0 \left(\frac{1}{R_0(t)^2} + g'(R_0(t))\right),$$

et avec $\xi \in H^1(\mathbb{R})$ définie comme la solution de

$$\eta''(y) - W''(q(y))\eta(y) = yq'(y),$$

U_2 s'identifie à

$$U_2(y,t) = \xi(y)\left(\frac{1}{R_0(t)^2} + g'(R_0(t))\right)$$

<u>*Conclusion*</u>
Ce développement asymptotique, bien que formel, permet de justifier la convergence du deuxième modèle de réaction diffusion en $O(\epsilon^2)$ et d'expliciter les solutions u_ϵ sous la forme

$$u_\epsilon(x,t) = q\left(\frac{d(x,\Omega^\epsilon)}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2)$$

3.3.2 Convergence des solutions de l'équation de réaction-diffusion

Nous présentons maintenant une preuve plus rigoureuse de convergence de ce modèle de champ de phase. Cette démonstration est une adaptation de la preuve de Bellettini et Paolini [12] pour ce modèle de réaction diffusion.

Notations et hypothèses de régularité sur $\partial\Omega(t)$ et $g(x,t)$

Soit $T > 0$. Pour tout $t \in [0,T]$, on suppose que le flot $\partial\Omega(t)$ est un flot par coubure moyenne suivant la loi $V_N = \kappa + g$ où le terme de forçage g vérifie les hypothèses suivantes :

$$g(.,t) \in W^{3,\infty}(\mathbb{R}^d), \quad \partial_t g \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d \times (0,T)); \tag{3.11}$$

L'interface $\partial\Omega(t)$ est alors supposée régulière pour tout $t \in [0,T]$ et le vecteur $n(x,t)$ est défini pour tout $x \in \partial\Omega(t)$ comme le vecteur normal à $\Omega(t)$, qui par convention est dirigé vers l'extérieur de $\Omega(t)$. Le signe des courbures principales notées $\kappa_1(x,t)$,...,$\kappa_{d-1}(x,t)$ est choisi de telle sorte que ces courbures principales soient négatives sur les domaines $\Omega(t)$ convexes. Les fonctions κ et h sont alors définies sur l'interface par

$$\kappa(x,t) = \sum_{i=1}^{d-1} \kappa_i(x,t), \quad h(x,t) = \sum_{i=1}^{d-1} \kappa_i^2(x,t)$$

On rappelle que l'évolution de $\partial\Omega(t)$ est décrite par la loi

$$V_n(x,t) = \kappa(x,t) + g(x,t), \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega(t) \tag{3.12}$$

où, pour tout $t \in [0,T]$, V_n représente la vitesse de $\partial\Omega(t)$, positive dans la direction $n(.,t)$.
La fonction distance signée $d : \mathbb{R}^d \times [0,T] \to T$ de $\partial\Omega(t)$ est définie par

$$d(x,t) = \begin{cases} dist(x,\partial\Omega(t)) & si\ t \in [0,T],\ \text{et}\ x \in \Omega^c(t) \\ 0 & si\ t \in [0,T],\ \text{et}\ x \in \partial\Omega(t) \\ -dist(x,\partial\Omega(t)) & si\ t \in [0,T],\ \text{et}\ x \in \Omega(t), \end{cases}$$

et,

$$\nabla d(x,t) = n(x,t) \quad \forall t \in [0,T],\ \forall x \in \partial\Omega(t)$$

Soit $D > 0$, le voisinage tubulaire de $\partial\Omega(t)$ noté $\Lambda(t)$ est défini pour tout $t \in [0,T]$ par

$$\Lambda(t) = \Big\{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ |d(x,t)| \leq D\Big\} \quad \text{et} \quad \Lambda = \cup_{t\in[0,T]}\Lambda(t) \times \{t\}$$

Nous supposons alors que le flot $\partial\Omega(t)$ satisfait les hypothèses de régularités suivantes :

$$d, \partial_t d, \partial_t\partial_{xx} d, \in C^0(\bar{\Lambda}) \tag{3.13}$$

Si de plus D est suffisamment petit, il est aussi possible d'associer à tout couple $(x,t) \in \Lambda$, une unique projection $s(x,t)$ sur $\partial\Omega(t)$ tel que

$$dist(s(x,t),x) = |d(x,t)|$$

Dans ce cas, il est possible d'associer à toute fonction scalaire ou vectorielle f définie à priori sur $\partial\Omega(t)$, une extension notée $\bar{f}$, définie sur Λ par

$$\bar{f}(x,t) = f(s(x,t),t).$$

Si f est scalaire, on vérifie de plus que $\nabla d \cdot \nabla \bar{f} = 0$ sur Λ. Les hypothèses (3.13) permettent alors de vérifier que

$$\|\bar{h}\|_{L^\infty(\Lambda)},\ \|\partial_t\bar{h}\|_{L^\infty(\Lambda)},\ \|\nabla\bar{h}\|_{L^\infty(\Lambda)}, \|\triangle\bar{h}\|_{L^\infty(\Lambda)} < +\infty$$

Les propriétés géométriques de la fonction distance d implique que

$$\begin{cases} \triangle d(x,t) = \sum_{i=1}^{d-1} \dfrac{-\bar{\kappa}_i}{1-d(x,t)\bar{\kappa}_i} = -\bar{\kappa}(x,t) - d(x,t)\bar{h}(x,t) + O(d^2(x,t)) \\ \partial_t d(x,t) = -\bar{V}_n(x,t) = -\bar{\kappa} - \bar{g}(x,t) \end{cases}$$

Ainsi, la dynamique du flot $\partial\Omega(t)$ est décrite par l'équation suivante vérifiée par d :

$$d_t - \triangle d = -\bar{g}(x,t) + d(x,t)\bar{h}(x,t) + O(d^2(x,t)), \quad \forall (x,t) \in \Lambda. \tag{3.14}$$

Modèle de champ de phase

Soit $W : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$, le potentiel double puits défini par $W(s) = \frac{1}{2}(1-s^2)^2$. Pour tout $\epsilon > 0$, on note u_ϵ la solution classique du problème

$$(P_1) \begin{cases} \partial_t u_\epsilon = \triangle u_\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}\left[W'(u_\epsilon) - \sqrt{2W(u_\epsilon)}g\right], & \text{dans } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ u_\epsilon(.,0) = q\left(\dfrac{d(x,0)}{\epsilon}\right) \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d), & \text{dans } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

où le profil q est une nouvelle fois défini par

$$q = \arg\min_\zeta \left\{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\zeta'(s)^2 + W(\zeta(s))ds\ ;\ \zeta \in H^1_{loc}(\mathbb{R}),\ \zeta(-\infty) = 1,\ \zeta(+\infty) = -1,\ \zeta(0) = 0\right\}.$$

L'équation d'Euler implique que

$$\Big\{q''(s) = W'(q), \quad \forall s \in \mathbb{R}, q'(s) = -\sqrt{2W(q(s))}, \forall s \in \mathbb{R},$$

et un calcul explicite montre que $q(s) = -\tanh(s)$. Il existe alors une constante positive c telle que

$$|q(s)+1| \leq -cq'(s), \quad \forall s \in]0,+\infty[$$

On introduit de plus (voir l'analyse asymptotique de section précédente) la fonction $\xi \in H^2(\mathbb{R})$ définie comme la solution du problème

$$\xi''(s) - W''(q(s))\xi(s) = sq'(s), \quad \xi(0) = 0$$

Nous renvoyons le lecteur à la section 3 de [12] pour la preuve d'existence d'une telle fonction ainsi que la majoration suivante :

$$|\xi(s)| \leq -c(1+s^2)q'(s), \quad |\xi'(s)| \leq -c(1+s^2)q'(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Lemme de comparaison

Un argument indispensable pour démontrer la convergence de ce modèle de champ de phase est un principe de comparaison décrit par le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit $\epsilon > 0$, et $u, v \in L^2(0,T,H^2(\mathbb{R}^d)) \cap H^1(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$ tels que*

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u + \frac{1}{\epsilon^2}W'(u) - \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(u)}g \geq \partial_t v - \triangle v + \frac{1}{\epsilon^2}W'(v) - \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(v)}g & \text{dans } \mathbb{R}^d \times (0,T) \\ u(x,0) \geq v(x,0), & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

alors

$$u \geq v, \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times (0,T)$$

Démonstration du lemme 1 .
Soit $e = max(v-u,0)$. alors en multipliant l'hypothèse et en intégrant sur $\mathbb{R}^d$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|e(.,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \frac{2}{\epsilon^2}\left\langle W'(u) - W'(v)\,,\, e\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{2}{\epsilon}\left\langle \left(\sqrt{2W'(u)} - \sqrt{2W(v)}\right) g\,,\, e\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \frac{2}{\epsilon^2}\left\langle W'_{g(x)}(u) - W'_{g(x)}(v)\,,\, e\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

où le potentiel $W_{g(x)}(s)$ est défini par

$$W'_{g(x),\epsilon}(s) = W'(s) - \epsilon\sqrt{2W(s)}g(x), \quad W(0) = 0.$$

L'idée est alors de décomposer les fonctions $W'_{g(x)}(s)$ sous la forme

$$W'_{g(x),\epsilon}(s) = W'_{l,g(x),\epsilon}(s) + W'_{i,g(x),\epsilon}(s)$$

où $W'_{l,g(x),\epsilon}(s)$ est Lipschitz continu sur $\mathbb{R}$, et $W'_{i,g(x),\epsilon}(s)$ croissante. Ainsi, en remarquant que $e(x,0) = 0$, il ressort que

$$\begin{aligned} \|e(.,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq 2 \quad \epsilon^{-2}\int_0^t |\left\langle W'_{g(x)}(u) - W'_{g(x)}(v)\,,\, e(.,\tau)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| d\tau \\ &\leq \left(\frac{2\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\{lip(W'_{l,g(x),\epsilon})\}}{\epsilon^2}\right)\int_0^t \|e(.,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\tau. \end{aligned}$$

Remarque 11. *L'hypothèse que g soit bornée assure que $\{lip(W'_{l,g(x),\epsilon})\} < +\infty$*

Le lemme de Gronwall montre que pour presque tout $t \in (0,T)$, $\|e(.,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$, ou encore, $e = 0$ presque partout dans $\mathbb{R}^d \times (0,T)$

□

Construction d'une sous-solution du problème (P_1)

Dans cette section, nous allons construire une sous-solution du problème (P_1) notée v_ϵ^- en exploitant la forme des solutions u_ϵ introduite à la section 3.3.1.

Introduction de profils modifiés
Soit $\delta \geq 3$, un entier naturel et pour tout $\epsilon > 0$, on note $s_\epsilon = \delta|\log(\epsilon)|$ qui vérifie

$$\begin{cases} q(s_\epsilon) = -1 + 2\epsilon^{2\delta}(1+\epsilon^{2\delta})^{-1} = -1 + O(\epsilon^{2\delta}), & q'(s_\epsilon) = -(1-q^2(s_\epsilon)) = O(\epsilon^{2\delta}) \\ |\xi(s_\epsilon)| = |\log(\epsilon)|^2 O(\epsilon^{2\delta}), & |\xi'(s_\epsilon)| = |\log(\epsilon)|^2 O(\epsilon^{2\delta}) \end{cases}$$

Les deux fonctions q_ϵ et ξ_ϵ sont alors définies par

$$q_\epsilon(s) = \begin{cases} q(s) & 0 \leq s \leq s_\epsilon \\ P_q(s) & s_\epsilon \leq s \leq 2s_\epsilon \\ -1 & s > 2s_\epsilon \\ -q_\epsilon(-s) & s < 0 \end{cases}, \quad \xi_\epsilon(s) = \begin{cases} \xi(s) & 0 \leq s \leq s_\epsilon \\ P_\xi(s) & s_\epsilon \leq s \leq 2s_\epsilon \\ 0 & s > 2s_\epsilon \\ -\xi_\epsilon(-s) & s < 0 \end{cases}$$

où $P_q(s)$ et $P_\xi(s)$ sont des polynômes de degré 3 définies de telle sorte que les fonctions q_ϵ et ξ_ϵ soient $C^1(\mathbb{R})$:

Remarque 12. *Un calcul explicite de $P_q(s)$. Nous imposons tout d'abord les deux égalités $P_q(2s_\epsilon) = -1$ et $P_q'(2s_\epsilon) = 0$ en choisissant $P_q(s)$ de la forme*

$$P_q(s) = \alpha\left(\frac{2s_\epsilon - s}{s_\epsilon}\right)^3 + \beta\left(\frac{2s_\epsilon - s}{s_\epsilon}\right)^2 - 1.$$

Ensuite, les égalités $P_q(s_\epsilon) = q(s_\epsilon)$ et $P_q'(s_\epsilon) = q'(s_\epsilon)$ conduisent au système

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 1 = q(s_\epsilon) \\ -3\alpha - 2\beta = s_\epsilon q'(s_\epsilon) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -s_\epsilon q'(s_\epsilon) - 2q(s_\epsilon) - 2 \\ \beta = 2q(s_\epsilon) + 3 + s_\epsilon q'(s_\epsilon), \end{cases}$$

et alors,

$$P_q(s) = -\left(\frac{2s_\epsilon - s}{s_\epsilon}\right)^3 \left[2(1+q(s_\epsilon)) + s_\epsilon q'(s_\epsilon)\right] + \left(\frac{2s_\epsilon - s}{s_\epsilon}\right)^2 \left[s_\epsilon q'(s_\epsilon) + 3(1+q(s_\epsilon))\right] - 1.$$

De la même façon, on montre que

$$P_\xi(s) = -\left(\frac{2s_\epsilon - s}{s_\epsilon}\right)^3 \left[2\xi(s_\epsilon)) + s_\epsilon \xi'(s_\epsilon)\right] + \left(\frac{2s_\epsilon - s}{s_\epsilon}\right)^2 \left[s_\epsilon \xi'(s_\epsilon) + 3\xi(s_\epsilon))\right].$$

Il ressort ainsi que

$$\begin{aligned} \|P_q + 1\|_{L^\infty(s_\epsilon, 2s_\epsilon)} &\leq C(|q(s_\epsilon) + 1| + s_\epsilon|q'(s_\epsilon)|), & \|P_\xi\|_{L^\infty(s_\epsilon, 2s_\epsilon)} &\leq C(|q(s_\epsilon)| + s_\epsilon|q'(s_\epsilon)|) \\ \|P_q'\|_{L^\infty(s_\epsilon, 2s_\epsilon)} &\leq \frac{C}{s_\epsilon}(|q(s_\epsilon) + 1| + s_\epsilon|q'(s_\epsilon)|), & \|P_\xi'\|_{L^\infty(s_\epsilon, 2s_\epsilon)} &\leq \tfrac{C}{s_\epsilon}(|q(s_\epsilon)| + s_\epsilon|q'(s_\epsilon)|) \\ \|P_q''\|_{L^\infty(s_\epsilon, 2s_\epsilon)} &\leq \frac{C}{s_\epsilon^2}(|q(s_\epsilon) + 1| + s_\epsilon|q'(s_\epsilon)|), & \|P_\xi''\|_{L^\infty(s_\epsilon, 2s_\epsilon)} &\leq \tfrac{C}{s_\epsilon^2}(|q(s_\epsilon)| + s_\epsilon|q'(s_\epsilon)|). \end{aligned}$$

Nous pouvons alors déduire de ces majorations que

$$\|q_\epsilon - q\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = o\left(\epsilon^{2\delta - 1}\right), \quad \|\xi_\epsilon - \xi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = o\left(\epsilon^{2\delta - 1}\right), \tag{3.15}$$

et

$$q_\epsilon'' - W'(q_\epsilon) = o\left(\epsilon^{2\delta-1}\right),\ q_\epsilon' + \sqrt{2W(q_\epsilon)} = o\left(\epsilon^{2\delta-1}\right),\ \xi_\epsilon'' - W'(q_\epsilon)\xi_\epsilon - sq_\epsilon = o\left(\epsilon^{2\delta-1}\right) \quad (3.16)$$

Définition de la sous-solutions v_ϵ^- du problème (P_1)

Pour tout $\epsilon > 0$, on introduit tout d'abord la fonction distance modifiée $d_\epsilon^-(x,t)$ définie par

$$d_\epsilon^-(x,t) = d(x,t) + c_1(t)\epsilon^2|log(\epsilon)|^2, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]$$

où $c_1 : [0,T] \to]0,+\infty[$ est une fonction continue indépendante de ϵ que l'on déterminera plus tard. Pour tout $t \in [0,T]$, on note de plus,

$$\Lambda_\epsilon^-(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ |d_\epsilon^-| < 2\delta\epsilon|\log(\epsilon)|\right\},$$

et

$$\Lambda_\epsilon^- = \cup_{t\in[0,T]}\Lambda_\epsilon^-(t) \times \{t\}$$

Il est alors possible d'expliciter $\epsilon_0 > 0$ (qui dépend que de $\delta, c_1(.), D$) tel que $\Lambda_\epsilon^-(t) \subset \Lambda(t)$ pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$ et $t \in [0,T]$. Ainsi,

$$d(x,t) = O(\epsilon|log(\epsilon)|), \quad \forall (x,t) \in \Lambda_\epsilon^-. \quad (3.17)$$

En remarquant que $\nabla d_\epsilon^- = \nabla d$ et $\nabla d_\epsilon^- \cdot \nabla \bar{h} = 0$ dans Λ_ϵ, il ressort de plus de (3.14) que

$$\begin{aligned} \partial_t d_\epsilon^- - \triangle d_\epsilon^- &= \partial_t d - \triangle d + c_1'\epsilon^2|\log(\epsilon)|^2 && (3.18)\\ &= -\bar{g} + d_\epsilon^-\bar{h} + \epsilon^2|\log(\epsilon)|^2\left(-c_1\bar{h} + c_1'\right) + O(\epsilon^2|\log(\epsilon)|^2) && (3.19)\end{aligned}$$

Avec la notation $y(x,t) = d_\epsilon^-(x,t)/\epsilon$, la fonction v_ϵ est finalement définie dans $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ par

$$v_\epsilon^-(x,t) = \begin{cases} q_\epsilon(y) + \epsilon^2(\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\xi_\epsilon(y) - c_2\epsilon^3|log(\epsilon)|^2 & \text{dans } \Lambda_\epsilon, \\ -1 - c_2\epsilon^3|\log(\epsilon)|^2 & \text{dans } \{d_\epsilon^- \geq 2\delta\epsilon|\log(\epsilon)|\}, \\ +1 - c_2\epsilon^3|\log(\epsilon)|^2 & \text{dans } \{d_\epsilon^- \leq -2\delta\epsilon|\log(\epsilon)|\}, \end{cases}$$

où c_2 est une constante indépendante de ϵ qu'on déterminera ultérieurement. Au vue de la régularité de la fonction d sur Λ, il suit que $v_\epsilon \in L^2(0,T;H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)) \cap H^1(0,T;L^2_{loc}(\mathbb{R}^d))$.

Comparaison entre $u_\epsilon(.,0)$ et $v_\epsilon(.,0)$

Dans le but d'appliquer le principe de comparaison 1 aux fonctions $u_\epsilon(.,0)$ et $v_\epsilon^-(.,0)$, nous devons tout d'abord montrer que

$$v_\epsilon(x,0) \leq u_\epsilon(x,0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (3.20)$$

Pour cela, introduisons la fonction $w_\epsilon(x)$ définie par

$$w_\epsilon(x) = q(y(x,0)) + \epsilon^2(\bar{h}(x,0) + \nabla d(x,0) \cdot \nabla g(x,0))\xi(y(x,0)) - \frac{c_2}{2}\epsilon^3|\log(\epsilon)|^2$$

L'égalité (3.20) peut alors s'obtenir à partir de l'inégalité suivante

$$w_\epsilon(x) \leq u_\epsilon(x,0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

En effet, les inégalités (3.15) montrent que pour ϵ suffisamment petit,

$$\begin{aligned} v_\epsilon^- &= (v_\epsilon^-(x,0) - w_\epsilon(x)) + w_{\epsilon(x)} \leq w_\epsilon(x) - \frac{c_2}{2}\epsilon^3|\log(\epsilon)|^2 + o\left(\epsilon^{2\delta-1}\right) \\ &\leq u_\epsilon(x,0) - \frac{c_2}{2}\epsilon^3|\log(\epsilon)|^2 + o(\epsilon^{2\delta-1}) \leq u_\epsilon(x,0), \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $w_\epsilon(x)$ est bien inférieure à $u_\epsilon(x,0)$:

$$\begin{aligned} w_\epsilon(x) - u_\epsilon(x,0) &= \left[q(d_\epsilon^-(x,0)/\epsilon) - q(d(x,0)/\epsilon)\right] \\ &+ \epsilon^2(\bar{h}(x,t) + \nabla d(x,0)\cdot\nabla g(x,0))\xi(y(x,0)) - \frac{c_2}{2}\epsilon^3|\log(\epsilon)|^2 \end{aligned}$$

Nous devons tout d'abord montrer le lemme suivant :

Lemme 2. *Avec $z = d(x,0)/\epsilon$ et $y = d_\epsilon^-(x,0)/\epsilon = z + c_1(0)\epsilon\log(\epsilon)^2$, il suit que*

$$2q'(y) \leq q'(s) \leq \frac{1}{2}q'(y),$$

pour tout $s \in [z,y]$ et ϵ suffisamment petit

Démonstration. Il suffit de remarquer que $(\log(q'))' = \frac{q''}{q'} = \frac{W'(q)}{-\sqrt{2W(q)}} = 2q \in L^\infty(\mathbb{R})$, ainsi, $\log(q')$ est 2 lipschitzienne et

$$\left|\log\left(\frac{q'(t_1)}{q'(t_2)}\right)\right| = \left|\log(q'(t_1)) - \log(q'(t_2))\right| \leq 2|t_2 - t_1|$$

Ainsi, pour ϵ suffisamment petit, avec $|t_2 - t_1| \leq c_1(0)\epsilon\log(\epsilon)^2$, d'une part,

$$\frac{q'(t_1)}{q'(t_2)} \geq exp(-2|t_2 - t_1|) \geq exp(-2c_1(0)\epsilon|\log(\epsilon)|^2) \geq \frac{1}{2},$$

et d'autre part,

$$\frac{q'(t_1)}{q'(t_2)} \leq exp(2|t_2 - t_1|) \leq exp(2c_1(0)\epsilon|\log(\epsilon)|^2) \leq 2.$$

□

Ce lemme permet alors de montrer que

$$\begin{aligned} I_1 &= q(d_\epsilon^-(x,0)/\epsilon) - q(d(x,0)/\epsilon) = q(d_\epsilon^-(x,0)/\epsilon) - q\left(\frac{d_\epsilon^-(x,0) - c_1(0)\epsilon^2|log(\epsilon)|^2}{\epsilon}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}q'(d_\epsilon^-(x,0)/\epsilon)c_1(0)\epsilon|log(\epsilon)|^2 \end{aligned}$$

De plus, avec

$$I_2 = \epsilon^2(\bar{h}(x,0) + \nabla d(x,0)\cdot\nabla g(x,0))\xi(y) \leq -c\epsilon^2(1+|y|^2)q'(y)$$

D'une part, si $|y| = |d_\epsilon/\epsilon| > 2|\log(\epsilon)|$, alors $|q'(y)| \leq c\epsilon^2$ et le terme I_2 est contrôlé par le terme négatif $-\frac{c_2}{2}\epsilon^3|log(\epsilon)|^2$. D'autre part, si $|y| < 2|\log(\epsilon)|$, alors c'est le terme I_1 qui permet de contrôler I_2. Ainsi, un choix de la constante c_2 suffisamment grande permet de garantir l'inégalité

$$v_\epsilon(.,0) \leq u_\epsilon(.,0)$$

La fonction v_ϵ^- est une sous-solution du problème (P_1) :

On rappelle que

$$v_\epsilon^-(x,t) = \begin{cases} q_\epsilon(d_\epsilon^-/\epsilon) + \epsilon^2(\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\xi_\epsilon(d_\epsilon^-/\epsilon) - c_2\epsilon^3|log(\epsilon)|^2 & \text{dans } \Lambda_\epsilon, \\ -1 - c_2\epsilon^3|\log(\epsilon)|^2 & \text{dans } \{d_\epsilon^- \geq 2\delta\epsilon|\log(\epsilon)|\}, \\ 1 - c_2\epsilon^3|\log(\epsilon)|^2 & \text{dans } \{d_\epsilon^- \leq -2\delta\epsilon|\log(\epsilon)|\}, \end{cases}$$

Nous allons maintenant montrer que

$$\partial_t v_\epsilon^- - \triangle v_\epsilon^- + \frac{1}{\epsilon^2}W'(v_\epsilon^-) - \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(v_\epsilon^-)}g \leq 0, \quad \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T) \tag{3.21}$$

On suppose tout d'abord que $(x,t) \in \Lambda_\epsilon$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \partial_t v_\epsilon^- &= \frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'(y)\partial_t d_\epsilon^- + \epsilon^2(\partial_t\left[\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g\right])\xi_\epsilon(y) + \epsilon(\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\xi_\epsilon'(y)\partial_t d_\epsilon & (3.22) \\ &= \frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'(y)\partial_t d_\epsilon^- + O(\epsilon), & (3.23) \end{aligned}$$

$$\nabla v_\epsilon^- = \frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'(y)\nabla d_\epsilon^- + \epsilon^2(\nabla\left[\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g\right])\xi_\epsilon(y) + \epsilon(\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\xi_\epsilon'(y)\nabla d_\epsilon^-$$

et

$$\triangle v_\epsilon^- = \frac{1}{\epsilon^2}q_\epsilon''(y) + \frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'(y)\triangle d_\epsilon^- + (\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\xi_\epsilon''(y) + O(\epsilon) \tag{3.24}$$

En utilisant les inégalités (3.23), (3.24) et (3.18), on en déduit que

$$\begin{aligned} \partial_t v_\epsilon^- - \triangle v_\epsilon^- &= -\frac{1}{\epsilon^2}q_\epsilon''(y) + \frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'(y)\partial_t d_\epsilon^- - \frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'(y)\triangle d_\epsilon - (\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\xi_\epsilon''(y) \\ &= -\frac{1}{\epsilon^2}q_\epsilon''(y) + \frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'(y)\left[\partial_t d_\epsilon^- - \triangle d_\epsilon^-\right] - (\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\xi_\epsilon''(y) \\ &= -\frac{1}{\epsilon^2}q_\epsilon''(y) + \frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'(y)\left[-\bar{g} + \epsilon y\bar{h} - \epsilon^2|\log(\epsilon)|^2\left(c_1\bar{h} - c_1'\right)\right] \\ &- (\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\xi_\epsilon''(y) + O(\epsilon\log(\epsilon)^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_t v_\epsilon^- - \triangle v_\epsilon^- &= \frac{1}{\epsilon^2}q_\epsilon''(y) - \frac{1}{\epsilon}\left[q_\epsilon'(y)\bar{g}\right] + \left[q_\epsilon'(y)y\bar{h} - (\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\xi_\epsilon''(y)\right] & (3.25) \\ &- \epsilon|\log(\epsilon)|^2\left[q_\epsilon'(y)\left(c_1\bar{h} - c_1'\right)\right] + O(\epsilon|\log(\epsilon)|^2) & (3.26) \end{aligned}$$

Par ailleurs, dans Λ_ϵ,

$$\begin{aligned} g(x,t) &= g(s(x,t) + d\nabla d, t) = \bar{g} + d\nabla d \cdot \bar{\nabla} g + O(d^2) \\ &= \bar{g} + \epsilon y\nabla d_\epsilon \cdot \bar{\nabla} g - c_1\epsilon^2|\log(\epsilon)|^2\nabla d_\epsilon \cdot \bar{\nabla} g + O(\epsilon^2|log(\epsilon)|^2) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{\epsilon^2}W'(v_\epsilon^-) = \frac{1}{\epsilon^2}W'(q_\epsilon) + W''(q_\epsilon)(\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\xi_\epsilon - W''(q_\epsilon)c_2\epsilon\log(\epsilon)^2 + O(\epsilon), \tag{3.27}$$

Et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(v_\epsilon^-)}g &= \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(q_\epsilon)}g + O(\epsilon) \\
&= \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(q_\epsilon)}\left[\bar{g} + \epsilon y \nabla d_\epsilon \cdot \bar{\nabla} g - c_1\epsilon^2|\log(\epsilon)|^2 \nabla d_\epsilon^- \cdot \bar{\nabla} g\right] + O(\epsilon\log(\epsilon)^2) \\
&= -\frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'\left[\bar{g} + \epsilon y \nabla d_\epsilon^- \cdot \bar{\nabla} g - c_1\epsilon^2|\log(\epsilon)|^2 \nabla d_\epsilon^- \cdot \bar{\nabla} g\right] + O(\epsilon\log(\epsilon)^2) \\
&= -\frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'\left[\bar{g} + \epsilon y \nabla d_\epsilon^- \cdot \nabla g - c_1\epsilon^2|\log(\epsilon)|^2 \nabla d_\epsilon^- \cdot \nabla g\right] + O(\epsilon\log(\epsilon)^2)
\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{cases} q_\epsilon' + \sqrt{2W(q_\epsilon)} = o(\epsilon^{2\delta-1}) \\ y q_\epsilon' \nabla d \cdot (\nabla g - \bar{\nabla} g) = O(\epsilon|log(\epsilon)|) \end{cases}$$

Ainsi, on en déduit bien que

$$\frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(v_\epsilon^-)}g = -\frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'\left[\bar{g} + \epsilon y \nabla d_\epsilon^- \cdot \nabla g - c_1\epsilon^2|\log(\epsilon)|^2 \nabla d_\epsilon \cdot \nabla g\right] + O(\epsilon\log(\epsilon)^2) \quad (3.28)$$

Au final, en utilisant les inégalités (3.26), (3.26) et (3.28), on en déduit que

$$\partial_t v_\epsilon^- - \triangle v_\epsilon^- + \frac{1}{\epsilon^2}W'(v_\epsilon^-) - \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(v_\epsilon^-)}g = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + O(\epsilon\log(\epsilon)^2)$$

Avec,

$$\begin{cases} I_1 &= -\frac{1}{\epsilon^2}\left[q_\epsilon''(y) - W'(q_\epsilon(y))\right] = o(\epsilon^{2\delta-3}), \\ I_2 &= \frac{1}{\epsilon}q_\epsilon'\left[\bar{g} - \bar{g}\right] = 0, \\ I_3 &= -(\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\left[\xi_\epsilon''(y) - W''(q_\epsilon)\xi_\epsilon - y q_\epsilon'\right] = o(\epsilon^{2\delta-1}) \\ I_4 &= \epsilon\log(\epsilon)^2\left[-q_\epsilon'(c_1\bar{h} - c_1' - c_1\nabla d \cdot \bar{\nabla} g) - c_2 W''(q_\epsilon)\right] \end{cases}$$

Il reste maintenant à déterminer la fonction c_1 et la constante c_2 pour que le terme I_4 soit suffisamment négatif pour compenser le terme en $O(\epsilon\log(\epsilon)^2)$. Ainsi, avec $K = \|h\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d\times(0,T))}$, la fonction $c_1(t)$ est alors définie par

$$c_1(t) = c\ exp((1+K)t),$$

de telle sorte que

$$-\epsilon\log(\epsilon)^2 q_\epsilon'(c_1\bar{h} - c_1' - \nabla d \cdot \bar{\nabla} g c_1) \leq c_1(t)\epsilon\log(\epsilon)^2 q_\epsilon'$$

Ainsi,

$$I_4 \leq -\epsilon\log(\epsilon)^2 c_2\left(-\frac{c_1(t)}{c_2}q_\epsilon' + W''(q_\epsilon)\right)$$

En remarquant enfin que $-c_3 q_\epsilon' + W''(q_\epsilon)$ est uniformément positif pour une valeur de c_3 suffisamment grande, il suffit de choisir une configuration judicieuse des constantes c et c_2, pour que l'égalité suivante soit assurée :

$$\partial_t v_\epsilon - \triangle v_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\left[W'(v_\epsilon) - g\sqrt{2W(v_\epsilon)}\right] \leq 0, \quad \text{dans}\Lambda_\epsilon$$

On suppose maintenant que (x,t) n'est pas dans Λ_ϵ :

L'expression de v_ϵ est la suivante :

$$v_\epsilon = \pm 1 - c_2\epsilon^3|\log(\epsilon)|^2.$$

Ainsi $\partial_t v_\epsilon = 0$, $\triangle v_\epsilon = 0$ et

$$\begin{cases} \frac{1}{\epsilon^2} W'(v_\epsilon) & = \frac{1}{\epsilon^2}\left[W'(\pm 1) - W''(\pm 1) c_2 \epsilon^3 |\log(\epsilon)|^2 + O(\epsilon^3)\right] = -W''(\pm 1) c_2 \epsilon |\log(\epsilon)|^2 + O(\epsilon) \\ \frac{1}{\epsilon}\sqrt{2W(v_\epsilon)} g & = \frac{1}{\epsilon}\left[\sqrt{2W(\pm 1)} g - \left(\sqrt{2W}\right)'(\pm 1) g c_2 \epsilon^3 |\log(\epsilon)|^2 + O(\epsilon^3)\right] = O(\epsilon^2 \log(\epsilon)^2) \end{cases}$$

Ainsi, en remarquant que $W''(\pm 1) > 0$, il suffit de choisir c_2 suffisamment grand pour assurer que

$$\partial_t v_\epsilon - \triangle v_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\left[W'(v_\epsilon) - g\sqrt{2W(v_\epsilon)}\right] \leq 0, \text{dans } \mathbb{R}^d \setminus \Lambda_\epsilon$$

En conclusion, le principe de comparaison montre que

$$v_\epsilon^-(x,t) \leq u_\epsilon(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]$$

Remarque 13. *Nous pouvons appliquer le même raisonnement à la fonction*

$$v_\epsilon^+(x,t) = \begin{cases} q_\epsilon(y) + \epsilon^2(\bar{h} + \nabla d \cdot \nabla g)\xi_\epsilon(y) + c_2 \epsilon^3 |\log(\epsilon)|^2 & \textit{dans } \Lambda_\epsilon, \\ -1 + c_2 \epsilon^3 |\log(\epsilon)|^2 & \textit{dans } \{d_\epsilon \geq 2\delta\epsilon |\log(\epsilon)|\}, \\ +1 + c_2 \epsilon^3 |\log(\epsilon)|^2 & \textit{dans } \{d_\epsilon \leq -2\delta\epsilon |\log(\epsilon)|\}, \end{cases}$$

avec $y = d_\epsilon^+/\epsilon$ *et*

$$d_\epsilon^+(x,t) = d(x,t) - c_1(t)\epsilon^2 \log(\epsilon)^2.$$

On en déduira ainsi de manière similaire que

$$v_\epsilon^+(x,t) \geq u_\epsilon(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]$$

Preuve de convergence du modèle de champ de phase

Nous avons maintenant les ingrédients pour démontrer la convergence du modèle de champ de phase. Ce résultat s'explicite sous la forme du théorème suivant :

Théorème 6. *Soit* $\partial\Omega(t)$ *un flot de mouvement par courbure moyenne de régularité* (3.13) *avec le terme de forçage* g *satisfaisant les hypothèses (3.11). Pour tout* $\epsilon > 0$*, Soit* u_ϵ *la solution du problème de l'équation de champ de phase avec la condition initiale* $q\left(\frac{d(x,0)}{\epsilon}\right)$*. Avec* $\partial\Omega_\epsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ u_\epsilon(x,t) = 0\right\}$*, il existe alors* $\epsilon_0 > 0$ *et une constante* C *dépendant uniquement de* $\partial\Omega$*,* g *et* T *tels que pour tout* $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$

$$\partial\Omega_\epsilon(t) \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ dist(x, \partial\Omega(t)) \leq C\epsilon^2 |\log(\epsilon)|^2\right\}, \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.29}$$

$$\tag{3.30}$$

Démonstration du théorème 6.
Nous allons montrer l'inclusion (3.29). Soit $t \in [0,T]$ et $x \in \partial\Omega_\epsilon$.
Nous allons tout d'abord montrer que $x \in \Lambda(t)$. En effet $u_\epsilon(x,t) = 0$ et

$$v_\epsilon^-(x,t) \leq u_\epsilon(x,t) = 0 \leq v_\epsilon^+(x,t) \tag{3.31}$$

Supposons que $x \notin \Lambda(t)$. Alors comme $\Lambda_\epsilon^\pm(t) \subseteq \Lambda(t)$, il ressort que $x \notin \Lambda_\epsilon^\pm(t)$, et ainsi, pour ϵ suffisamment petit, on en déduit que $v_\epsilon^-(x,t)$ et $v_\epsilon^+(x,t)$ ont le même signe : or ceci est en contradition avec (3.31). Ainsi, $x \in \Lambda(t)$. A noter que $v_\epsilon^-(x,t) = q_\epsilon\left(\frac{d_\epsilon^-(x,t)}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2) \leq 0$ et

donc $q_\epsilon\left(\frac{d_\epsilon^-(x,t)}{\epsilon}\right) \leq O(\epsilon^2)$. Mais comme $q'(0) = -1$, on en déduit que $d_\epsilon^-(x,t)/\epsilon \geq O(\epsilon^2)$, ce qui montre que $d(x,t) \geq O(\epsilon^2|\log(\epsilon)|^2)$. De même en remarquant que $v_\epsilon^+ = q_\epsilon\left(\frac{d_\epsilon^+(x,t)}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2) \geq 0$, on en déduit que $d_\epsilon^+(x,t)/\epsilon \leq O(\epsilon^2)$ et que $d(x,t) \leq O(\epsilon^2|\log(\epsilon)|^2)$. Au final,

$$|d(x,t)| \leq O(\epsilon^2 \log(\epsilon)^2).$$

L'égalité (3.29) est ainsi démontrée.

□

3.4 Algorithmes et simulations numériques

3.4.1 Etude des schémas numériques

Comme dans le chapitre précédent, nous utilisons des schémas numériques pour chacun des deux modèles qui consistent à traiter de manière exacte l'opérateur de diffusion $\triangle u$, et par un schéma explicite les opérateurs de réaction, $W'_{1,\epsilon}(u)$ ou $W'_{2,\epsilon}(u)$.

Algorithm 3 Première méthode, Équation Allen-Cahn forcée

DONNÉES: Entrées : U^0, δ_t et ϵ

1: **pour** $n \geq 0$ **,**

2: Calculer l'action de l'opérateur de diffusion

$$\begin{cases} U^n_{Fourier} = FFT[U^n] \\ U^{n+1/2}_{Fourier}[k] = e^{-4\pi^2|k|^2\delta_t} U^n_{Fourier}[k] \\ U^{n+1/2} = IFFT[U^{n+1/2}_{Fourier}] \end{cases}$$

3: Calculer l'action de l'opérateur de réaction

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} - \frac{\delta_t}{\epsilon^2}\left[W'(U^{n+1/2}) - \epsilon\, C_W\left(g + \vec{f}.\frac{\nabla U^{n+1/2}}{|\nabla U^{n+1/2}|}\right)\right]$$

4: **fin**

L'étude de la stabilité de ces schémas montre que les conditions de stabilité sont légèrement différentes par rapport à celles obtenues dans le chapitre précédent. Par exemple, pour l'algorithme (6), avec $C_\infty = sup|g| + |\nabla f|$, nous allons déterminer une condition entre δ_t et ϵ qui permet d'imposer un principe de comparaison discret

$$\forall s \in [0,1] \quad , \quad \left(s - \frac{\delta_t}{\epsilon^2}\left(W'(s) + \epsilon\sqrt{2W(s)}C_\infty\right)\right) \in [0,1]$$

Il suffit juste de vérifier que $g : s \to s - a\left(W'(s) + C_\infty\epsilon\sqrt{2W(s)}\right)$ n'admet pas de maximum ou de minimum dans l'intervalle $[0,1]$. Voici un exemple de calcul dans le cas particulier du potentiel $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$, alors $W''(s) = 6s^2 - 6s + 1$, $\sqrt{2W(s)} = (1-s)s$ et $\left[\sqrt{2W(s)}\right]' = 1 - 2s$. Ainsi.

$$\begin{aligned} g'(s) &= 1 - a(W''(s) + C_\infty\epsilon\sqrt{2W(s)}') \\ &= 1 - a\left[(6s^2 - 6s + 1) + C_\infty\epsilon(1-2s)\right] \\ &= -6a\left[s^2 - s\left(1 + \frac{C_\infty\epsilon}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{C_\infty\epsilon}{6} - \frac{1}{6a}\right)\right] \end{aligned}$$

Algorithm 4 Deuxième méthode, Équation Allen-Cahn forcée

Données: Entrées : U^0, δ_t et ϵ

1: **pour** $n \geq 0$,

2: Calculer l'action de l'opérateur de diffusion

$$\begin{cases} U^n_{Fourier} = FFT[U^n] \\ U^{n+1/2}_{Fourier}[k] = e^{-4\pi^2|k|^2\delta_t} U^n_{Fourier}[k] \\ U^{n+1/2} = IFFT[U^{n+1/2}_{Fourier}] \end{cases}$$

3: Calculer l'action de l'opérateur de réaction

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} - \frac{\delta_t}{\epsilon^2}\left[W'(U^{n+1/2}) - \epsilon\ \left(g + \vec{f}.\frac{\nabla U^{n+1/2}}{|\nabla U^{n+1/2}|}\right)\sqrt{2W(U^{n+1/2})}\right]$$

4: **fin**

Les racines de ce polynôme sont

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/2 + C_\infty\epsilon/6 - \sqrt{\frac{1+2/a}{12} + (C_\infty\epsilon/6)^2} \\ x_2 &= 1/2 + C_\infty\epsilon/6 + \sqrt{\frac{1+2/a}{12} + (C_\infty\epsilon/6)^2} \end{aligned}$$

La condition $x_1 \leq 0$ est équivalente à

$$\begin{aligned} x_1 \leq 0 \iff & 1/2 + C_\infty\ \epsilon/6 \leq \sqrt{\frac{1+2/a}{12} + (C_0\ \epsilon/6)^2} \\ \iff & (1/2 + C_\infty\ \epsilon/6)^2 \leq \frac{1+2/a}{12} + (C_\infty\ \epsilon/6)^2 \\ \iff & 1/4 + C_\infty\ \epsilon/6 \leq \frac{1+2/a}{12} \\ \iff & 1 + C_\infty\epsilon \leq 1/a \\ \iff & a \leq \frac{1}{1+C_\infty\ \epsilon}. \end{aligned}$$

Et la condition $x_2 \geq 1$ est équivalente à

$$\begin{aligned} x_2 \geq 1 \iff & 1/2 - C_\infty\ \epsilon/6 \leq \sqrt{\frac{1+2/a}{12} + (C_0\ \epsilon/6)^2} \\ \iff & (1/2 - C_\infty\ \epsilon/6)^2 \leq \frac{1+2/a}{12} + (C_\infty\ \epsilon/6)^2 \\ \iff & 1/4 - C_\infty\ \epsilon/6 \leq \frac{1+2/a}{12} \\ \iff & 1 - C_\infty\epsilon \leq 1/a \\ \iff & a \leq \frac{1}{1-C_\infty\ \epsilon} \end{aligned}$$

Au final, la condition de stabilité qui ressort de ce calcul est de la forme

$$\delta_t \leq \frac{\epsilon^2}{1+|C_\infty|\ \epsilon}$$

Plus généralement, si le potentiel W est un potentiel double puits régulier, et

$$M = \sup_{s\in[0,1]} \left\{ W''(s) + |C_\infty|\epsilon\sqrt{W(s)}' \right\}$$

Alors l'hypothèse $\delta_t < M^{-1}\epsilon^2$ devrait assurer la stabilité des schémas précédents.

Remarque 14. *Si la constante C_∞ est supérieure à $\frac{1}{\epsilon}$, les potentiels double puits $W_{1,\epsilon}$ et $W_{2,\epsilon}$ ne sont plus vraiment des potentiels double puits dans le sens où ils ne possèdent plus qu'un seul puits. Le choix d'introduire un terme de forçage dans le potentiel double puits nécessite donc d'utiliser des termes de forçage petit devant le paramètre ϵ^{-1}.*

3.4.2 Validation numérique des algorithmes

L'objectif est de comparer numériquement la convergence des deux modèles d'équations de réaction-diffusion lorsque l'interface suit un mouvement par courbure moyenne avec un terme de forcing constant égal à $\frac{1}{c}$.

Lorsque la condition initiale est un cercle de rayon R_0, le mouvement de l'interface Γ_t est explicite et s'avère être un cercle (car le problème est isotrope) dont le rayon $R(t)$ vérifie l'EDO

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = -\frac{1}{R} + \frac{1}{c} \\ R(0) = R_0 \end{cases}$$

Après résolution,

$$R(t) + c\ ln(|c - R(t)|) = R_0 + c\ ln(|c - R_0|) + t/c$$

Et le temps d'extinction de ce mouvement (seulement si $1/c < 1/R_0$) vérifie

$$t_{ext} = -c\left(c\ ln\left(1 - \frac{R_0}{c}\right) + R_0\right)$$

Remarque 15. *Un développement limité à l'ordre 2 sur C au voisinage de ∞ permet de retrouver le temps d'extinction du mouvement par courbure moyenne d'un cercle de rayon R_0.*

Nous allons maintenant estimer numériquement l'erreur que l'on commet sur le temps d'extinction pour chacun des deux modèles en fonction du paramètre ϵ. La figure (3.5) présente cette erreur en échelle logarithmique. En conclusion, l'ordre de convergence est équivalent pour chacun des deux deux modèles et nous retrouvons l'ordre théorique de la convergence des méthodes de champ de phase en $O(\epsilon^2|ln(\epsilon)|^2)$.

3.4.3 Exemple de simulations obtenues avec des termes de forçage scalaires et vectoriels

Les figures (3.6), (3.7) et (3.8) présentent quelques simulations de mouvement par courbure moyenne avec des termes de forçage scalaires et vectoriels. Toutes ces simulations sont obtenues en utilisant le deuxième modèle de réaction-diffusion qui correspond à l'algorithme 6. Nous avons de plus utilisé les paramètres $N = 2^8$, $\epsilon = \frac{1}{N}$ et $\delta_t = \epsilon^2$ et $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$.

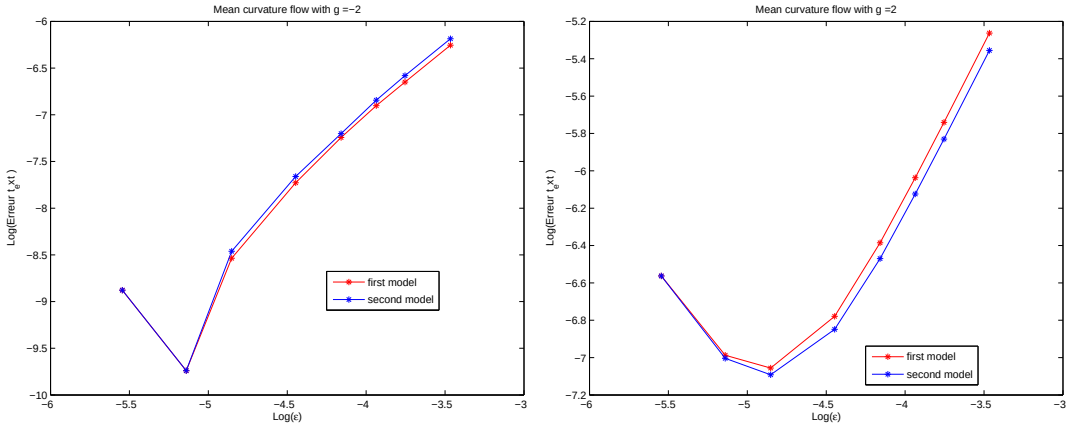


FIG. 3.5 – Erreur sur le temps d'extinction pour chacun des deux modèles : A gauche, avec $g = -2$, A droite, avec $g = 2$

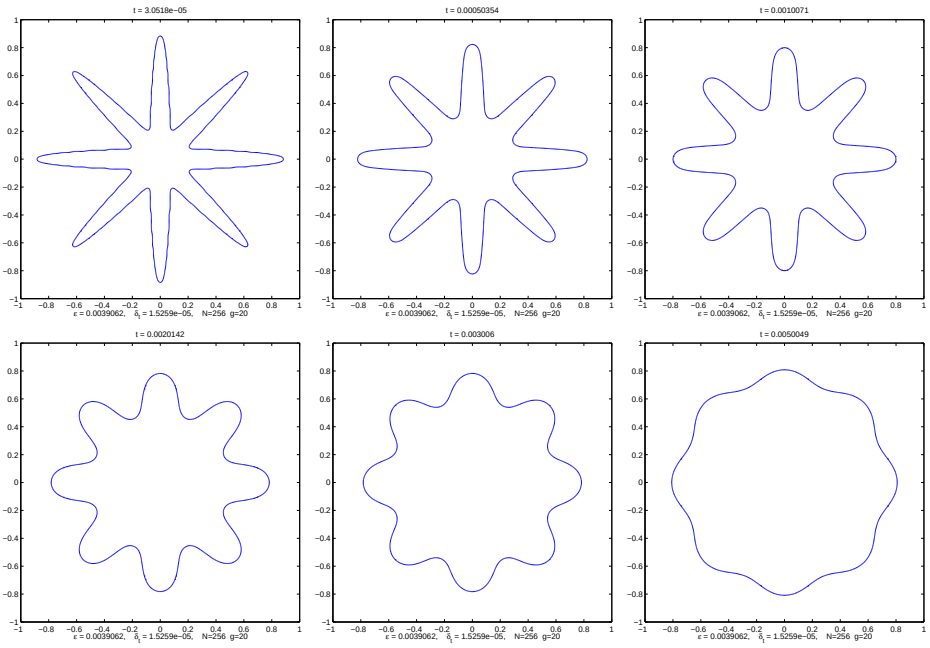


FIG. 3.6 – Simulation d'un mouvement par courbure moyenne avec un terme de forcing $g = 20$

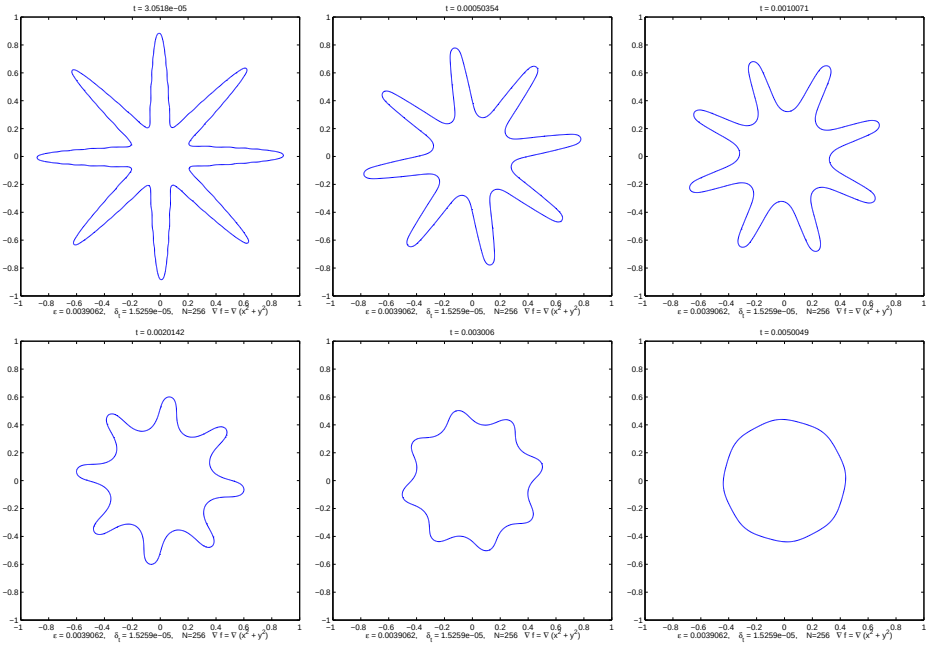


FIG. 3.7 – Simulation d'un mouvement par courbure moyenne avec un terme de forcing $f(x) = 256\nabla^{\perp}\|x\|^2_{\ell^2}$

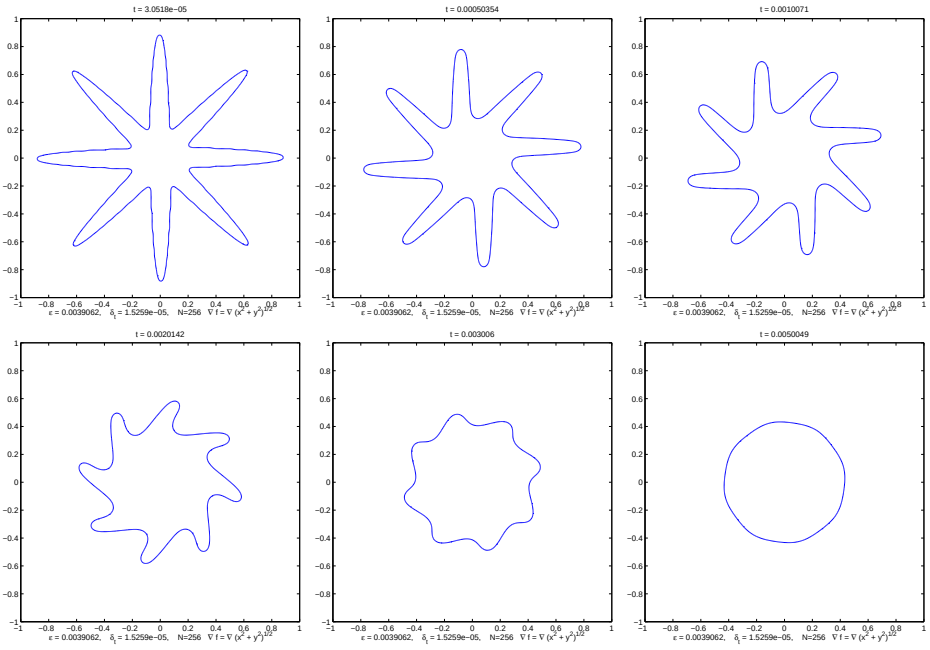


FIG. 3.8 – Simulation d'un mouvement par courbure moyenne avec un terme de forcing $f(x) = 256\nabla^{\perp}\|x\|_{\ell^2}$

3.5 Application à la conservation de volume

Nous allons maintenant utiliser les modèles précédents afin d'imposer des contraintes de volume supplémentaires aux mouvements d'interfaces :

3.5.1 Idée de base : conservation de masse $\simeq$ conservation de volume

Définition 7. *On appelle mouvement par courbure moyenne conservé, un mouvement de domaine $\Omega(t)$ dont la vitesse de l'interface Γ_t suit la loi*

$$V_N = -\kappa(x) + \bar{\kappa} = -\kappa + \fint_{\Gamma_t} \kappa(s)ds$$

Nous pouvons ainsi utiliser les modèles précédents avec le terme de forçage $g(t) = \int_{\Gamma_t} \kappa(s)ds$ pour obtenir une approximation du mouvement par courbure moyenne conservé. Une idée naturelle consisterait à traiter explicitement ce terme, en obtenant une estimation numérique de cette intégrale à partir des valeurs de $u_\epsilon(x,t)$. Il est assez difficile en pratique d'obtenir une bonne estimation de $g(t) = \int_{\Gamma_t} \kappa(s)ds$. L'idée qui est plus courramment exploiter est que si le flot Γ_t est suffisamment régulier alors, la fonction u_ϵ est une approximation de la fonction caractéristique de $\Omega(t)$ lorsque ϵ est petit et,

$$|\Omega(t)| \simeq \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)dx.$$

Plus précisément, nous allons montrer la propriété suivante :

Proposition 12. *Soit E, un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Nous notons de plus $u_\epsilon = q\left(\frac{\bar{dist}(x,E)}{\epsilon}\right)$. On suppose que le potentiel double puits W associé à q possède ses puits en 0 et 1 et est symétrique par rapport à l'axe $\{s = \frac{1}{2}\}$, de telle sorte que $\forall s \in \mathbb{R}, \quad q(s) = 1 - q(-s)$. Si le profil q est de plus à décroissance exponentielle en $+\infty$, alors,*

$$|E| = \int_{R^d} u_\epsilon dx + O(\epsilon^2)$$

Remarque 16. *Dans le cas particulier du potentiel double puits $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$, le profil q est égal à $q(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}th\left(\frac{s}{2}\right)$. Nous vérifions facilement que pour ce potentiel double puits, $q(s) = 1 - q(s)$ et que $q(s) \simeq e^{-s}$ en $+\infty$.*

Démonstration de la propriété 12.
Cette démonstration s'effectue en utilisant la formule de la co-aire : tout d'abord,

$$\begin{aligned}
\int_{R^d} u_\epsilon dx &= \int_{R^d} q\left(\frac{\bar{dist}(x,E)}{\epsilon}\right) dx = \int_R h(s) q\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \\
&= \int_{s<0} h(s)ds + \int_{s<0} h(s)\left(q(s/\epsilon) - 1\right) ds + \int_{s>0} h(s)\left(q(s/\epsilon)\right) ds \\
&= |E| + \int_{s>0} -h(-s)q(s/\epsilon)ds + \int_{s>0} h(s)\left(q(s/\epsilon)\right) ds \\
&= |E| + \int_{s>0} \left[h(s) - h(-s)\right] q(s/\epsilon)ds \\
&= |E| + \epsilon \int_{s>0} \left[h(s\epsilon) - h(-s\epsilon)\right] q(s)ds,
\end{aligned}$$

où $h(s) = |D\chi_{\bar{d}\leq s}|(\mathbb{R}^d)$.
Le profil q est à décroissance rapide et la fonction $s \to h(s)$ est à croissance polynômiale ($h(s) \simeq s^{d-1}$ quand $s \to +\infty$), alors, pour ϵ suffisamment petit,

$$\int_{s>0} [h(s\epsilon) - h(-s\epsilon)]\, q(s)ds = \int_{s\in[0,|ln(\epsilon)|]} [h(s\epsilon) - h(-s\epsilon)]\, q(s)ds + 0(\epsilon).$$

Le domaine E est supposé de plus régulier, la fonction h est donc dérivable au voisinage de zéro et

$$\int_{s\in[0,|ln(\epsilon)|]} [h(s\epsilon) - h(-s\epsilon)]\, q(s)ds = \int_{s\in[0,|ln(\epsilon)|]} \left[2h^{'}(0)s\epsilon + O(\epsilon^2 s^2)\right] q(s)ds = O(\epsilon),$$

car $\int_{s>0} s^m q(s)ds < \infty$ pour $m \in \mathbb{N}$.
Au final, on en déduit que

$$\int_{R^d} u_\epsilon dx = |E| + O(\epsilon^2).$$

□

Nous allons maintenant déterminer un terme de forçage $k(t)$ qui permet de conserver la masse de u_ϵ :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_\epsilon(x,t)dx = V_0$$

C'est ici qu'apparaît l'intérêt de notre modèle. En effet, sous l'hypothèse d'un terme de forçage non nul, les solutions u_ϵ^1 du premier modèle de réaction diffusion s'expriment sous la forme

$$u_\epsilon^1 = q\left(\frac{d(x,\Omega_1^\epsilon)}{\epsilon}\right) + O(\epsilon), \quad \text{avec} \quad \Omega_1^\epsilon(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ u_\epsilon^1(x) = \frac{1}{2}\right\},$$

et

$$|\Omega_1^\epsilon| = \int_{\mathbb{R}^d} u_\epsilon^1 dx + O(\epsilon).$$

Pour le deuxième modèle de réaction diffusion, les solutions u_ϵ^2 devraient s'exprimer sous la forme

$$u_\epsilon^2 = q\left(\frac{d(x,\Omega_2^\epsilon)}{\epsilon}\right) + O(\epsilon^2), \quad \text{avec} \quad \Omega_2^\epsilon(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ u_\epsilon^2(x) = \frac{1}{2}\right\},$$

et

$$|\Omega_2^\epsilon| = \int_{\mathbb{R}^d} u_\epsilon^2 dx + O(\epsilon^2).$$

Ainsi, la méthode d'approximation de la conservation de volume devrait être d'ordre $O(\epsilon)$ pour le premier modèle d'équations de réaction-diffusion, alors que pour notre modèle, on devrait commettre une erreur en $O(\epsilon^2)$.

3.5.2 Avec le premier modèle de réaction-diffusion

Pour déterminer le terme de forçage $k : t \to k(t)$ qui permet d'imposer cette conservation de masse, nous supposons que u_ϵ est solution du problème

$$\begin{cases} u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2}(W^{'}(u) - \epsilon c_W k(t)) \\ u_0 = q\left(\frac{d(x,\Omega_0}{\epsilon}\right), \text{ Avec des CL périodiques et } \ x \in [0,1]^d \end{cases}$$

Après intégration en espace,

$$\partial_t \left(\int_{[0,1]^d} u_\epsilon(x,t)dx \right) = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{[0,1]^d} W^{'}(u_\epsilon)dx - \frac{1}{\epsilon} k(t) c_W,$$

l'hypothèse de conservation de masse implique que

$$k(t) = \frac{1}{c_W \epsilon} \int_{[0,1]^d} W^{'}(u_\epsilon)dx.$$

Au final, nous retrouvons l'équation d'Allen-Cahn conservée (3.32)

$$u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} \left(W^{'}(u) - \int_{[0,1]^d} W^{'}(u)dx \right). \tag{3.32}$$

Cette équation fut initialement introduite par Rubinstein et Sternberg [97]. Ils étudièrent ainsi la convergence des solutions de (3.32) vers le mouvement par courbure moyenne conservé. Une analyse plus rigoureuse de cette équation a ensuite été réalisée dans les travaux de Bronsard et Stoth [16].

Plus généralement, lorsque Γ_t est un mouvement d'interface régulier pour $t \in [0,T]$ où les vitesses normales d'interface vérifient

$$V_N = -\kappa + g + \nabla f.\vec{n} + \int_{\Gamma_t} \left[\kappa(s) - g(s) - \nabla f(s).\vec{n}(s) \right] ds,$$

la même stratégie conduit aux équations de réaction-diffusion suivantes

$$u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} \left(W^{'}(u) - \epsilon c_W g - \epsilon c_W \frac{\vec{f}.\nabla u}{|\nabla u|} + k(t) \right),$$

où la fonction k est définie par

$$k(t) = \int_{[0,1]^d} \left[\epsilon c_W g + c_W \frac{\vec{f}.\nabla u}{|\nabla u|} - W^{'}(u) \right] dx.$$

3.5.3 Avec le deuxième modèle de réaction-diffusion

Comme pour le premier modèle, nous allons déterminer le terme de forçage $k(t)$ qui permet d'assurer la conservation de la masse u^ϵ, où u^ϵ est solution de :

$$u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u) + \frac{1}{\epsilon} \sqrt{2W(u)} g(t)$$

Le problème est considéré sur $\mathbb{R}^d$ tout entier et une intégration en espace montre que

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_t(x,t)dx = -\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}^d} \left[W^{'}(u(x,t)) - \epsilon \sqrt{2W(u(x,t))} k(t) \right] dx.$$

On en déduit alors

$$k(t) = 1/\epsilon \; \frac{\int_{\mathbb{R}^d} W^{'}(u(x,t))dx}{\int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{2W(u(x,t))}dx}.$$

Ainsi, l'équation de réaction-diffusion du deuxième modèle associée au mouvement par coubure moyenne conservé est définie par

$$\begin{cases} u_t^\epsilon(x,t) = \triangle u^\epsilon(x,t) - \dfrac{1}{\epsilon^2}\left[W'(u^\epsilon) - \dfrac{\int_{\mathbb{R}^d} W'(u^\epsilon(x,t))dx}{\int_{\mathbb{R}^d}\sqrt{2W(u^\epsilon(x,t))dx}}\sqrt{2W(u^\epsilon)}\right] \\ u^\epsilon(x,0) = q\left(\dfrac{d(x,\Gamma_0)}{\epsilon}\right). \end{cases}$$

Plus généralement, lorsque le mouvement d'interface suit la loi

$$V_N = -\kappa + g + \nabla f.\vec{n} + \int_{\Gamma_t} [\kappa(s) - g(s) - \nabla f(s).\vec{n}(s)]\, ds,$$

le deuxième modèle d'équation de réaction-diffusion conduit à l'équation

$$u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2}\left(W'(u) - \epsilon\left[g + \vec{f}.\frac{\nabla u}{|\nabla u|} - k(t)\right]\sqrt{2W(u)}\right),$$

où la fonction k qui permet d'assurer la conservation du volume vérifie

$$k(t) = \frac{\int_{\mathbb{R}^d}\left[\epsilon g\sqrt{2W(u)} + \epsilon\frac{\vec{f}.\nabla u}{|\nabla u|}\sqrt{2W(u)} - W'(u)\right]dx}{\epsilon\int_{\mathbb{R}^d}\sqrt{2W(u)}dx}.$$

3.5.4 Schémas numériques et simulations numériques

Les schémas numériques de conservation de volume associés à la première et à la deuxième méthode sont présentés ci-dessous. L'étude de leur stabilité n'est pas traitée.

Algorithm 5 Première méthode, Équation Allen-Cahn forcée avec conservation de volume

DONNÉES: Entrées : U^0, δ_t et ϵ

1: **pour** $n \geq 0$,

2: Calculer l'action de l'opérateur de diffusion

$$\begin{cases} U^n_{Fourier} = FFT[U^n] \\ U^{n+1/2}_{Fourier}[k] = e^{-4\pi^2|k|^2\delta_t}U^n_{Fourier}[k] \\ U^{n+1/2} = IFFT[U^{n+1/2}_{Fourier}] \end{cases}$$

3: Calculer l'action de l'opérateur de réaction

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} - \frac{\delta_t}{\epsilon^2}\left[W'(U^{n+1/2}) - \epsilon\, C_W\left(g + \vec{f}.\frac{\nabla U^{n+1/2}}{|\nabla U^{n+1/2}|}\right)\right]$$

4: Application de la conservation du volume

$$U^{n+1} = U^{n+1} + \fint U^0 dx - \fint U^{n+1} dx$$

5: **fin**

Nous allons aborder la comparaison de ces deux modèles d'un point de vue numérique et notamment en mesurant l'impact numérique du "léger déplacement de puits". Chacune des simulations est effectuées avec le potentiel double puits $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$.

Algorithm 6 Deuxième méthode, Équation Allen-Cahn forcée avec conservation de volume

Données: Entrées : U^0, δ_t et ϵ

1: **pour** $n \geq 0$,

2: Calculer l'action de l'opérateur de diffusion

$$\begin{cases} U^n_{Fourier} = FFT[U^n] \\ U^{n+1/2}_{Fourier}[k] = e^{-4\pi^2|k|^2\delta_t} U^n_{Fourier}[k] \\ U^{n+1/2} = IFFT[U^{n+1/2}_{Fourier}] \end{cases}$$

3: Calculer à priori la perte de volume de l'opérateur de réaction

$$k = -\frac{\int \left[W'(U^{n+1/2}) - \epsilon \left(g + \vec{f}.\frac{\nabla U^{n+1/2}}{|\nabla U^{n+1/2}|} \right) \sqrt{W(U^{n+1/2})} \right] dx}{\epsilon \int \left[\sqrt{W(U^{n+1/2})} \right] dx}$$

4: Calculer l'action de l'opérateur de réaction

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} - \frac{\delta_t}{\epsilon^2} \left[W'(U^{n+1/2}) - \epsilon \left(g + \vec{f}.\frac{\nabla U^{n+1/2}}{|\nabla U^{n+1/2}|} + k \right) \sqrt{W(U^{n+1/2})} \right]$$

5: **fin**

Comparaison des deux modèles de réaction-diffusion

Dans un premier test, nous effectuons le mouvement par courbure moyenne conservé d'une condition initiale Ω_0 correspondant à un cercle de rayon $R_0 = 0.25$. La conservation de volume implique que $\Omega(t) = \Omega_0$ pour tous les temps strictement positifs. Nous effectuons ainsi plusieurs résolutions numériques avec différentes valeurs du paramètre ϵ pour chacun des deux modèles. Nous affichons sur la figure (3.9), l'erreur obtenue sur le volume des domaines $\Omega^\epsilon(t)$ au temps $t = 0.1$. Les paramètres de simulation utilisés sont les suivant : $\delta_x = 2^{-8}$ et $\delta_t = \delta_x^2$. Nous pouvons ainsi conclure que d'un point de vue numérique, l'erreur de volume est en $O(\epsilon)$ pour le premier modèle et en $O(\epsilon^2)$ pour le deuxième.

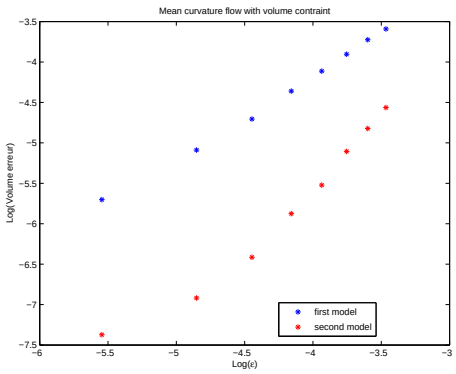


FIG. 3.9 – Ordre de convergence sur l'erreur de volume en fonction de ϵ pour les deux modèles

Dans un deuxième test, nous rajoutons des termes de forçage g pour montrer que les pertes de volume présentes dans le premier modèle peuvent être importantes. Nous utilisons ainsi une

condition initiale correspondant à un cercle centré en zéro, de rayon $R_0 = 0.25$ et un terme de forçage isotrope, comme par exemple $g = c_g\ cos(8\pi|x|)$, de telle sorte que l'interface n'évolue pas au cours du temps. Nous allons alors varier la constante c_g et comparer les cercles obtenus pour chacune des méthodes. Bien que théoriquement le rayon de ces cercles ne doit pas dépendre de la valeur du paramètre c_g, nous observons des variations de rayon sur la première figure de (3.10), correspondant à la première méthode. En revanche, ceci n'est pas le cas pour la deuxième figure de (3.10) où nous avons utilisé la deuxième méthode.
Ce test met donc en évidence le fait que lorsque les termes de forçage sont élevés, la première méthode introduit des pertes de volume importantes contrairement à notre méthode où les pertes de volume restent négligeables.

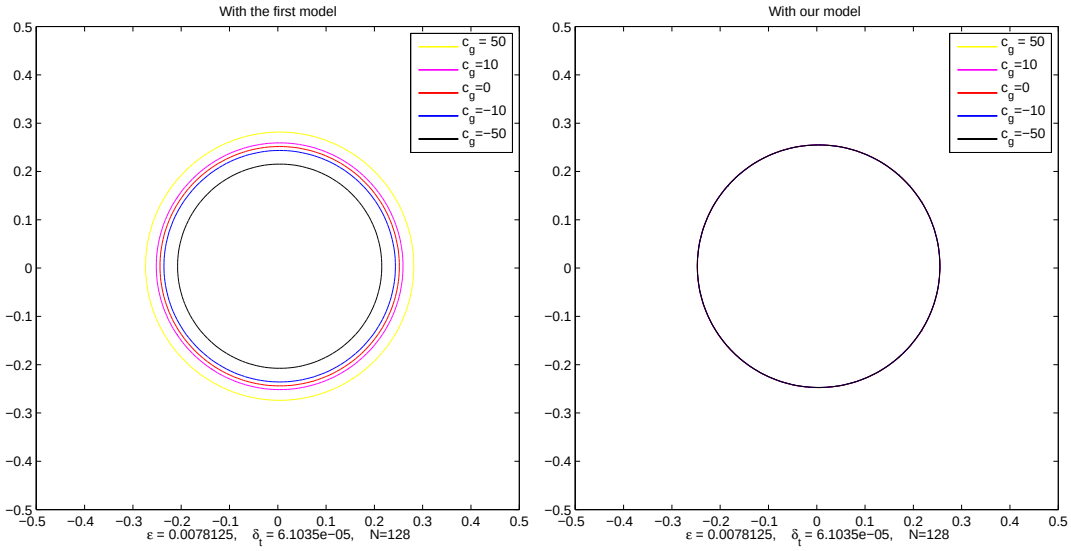


FIG. 3.10 – Stabilité de la conservation du volume en fonction des termes de forcing : à gauche avec le premier modèle, à droite avec le deuxième modèle

Avant de présenter un large panel de simulations numériques, nous souhaitons contrôler la dynamique d'interface de ces méthodes. Nous avons en effet pour l'instant uniquement testé les pertes de volume. Nous effectuons ainsi un mouvement par courbure moyenne conservé où la condition initiale correspond à deux cercles disjoints notés $C0$ et $C1$ et de rayon respectif R_0 et R_1 avec $R_1 > R_0$. Le mouvement par courbure moyenne conservé est dans ce cas explicite et, à l'instant t, le domaine $\Omega(t)$ est constitué de deux cercles de rayon $R_0(t)$ et $R_1(t)$ où $R_0(t)$ et $R_1(t)$ sont les solutions du système d'EDO couplé suivant

$$\begin{cases} \frac{dR_0}{dt} = -\frac{1}{R_0} + \frac{2}{R_0+R_1} \\ \frac{dR_1}{dt} = -\frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_0+R_1} \end{cases}$$

Remarque 17. *En sommant la première égalité multipliée par $R_0(t)$ avec la seconde multipliée par $R_1(t)$, on trouve que*

$$\frac{dR_0(t)}{dt}R_0(t) + \frac{dR_1(t)}{dt}R_1(t) = \frac{1}{2}\frac{d\left(R_0^2(t) + R_1^2(t)\right)}{dt} = 0$$

On en déduit ainsi que $R_0^2(t) + R_1^2(t)$ est constant par rapport au temps, ce qui conforte bien le fait que le volume du domaine $\Omega(t)$ constitué de ces deux cercles est constant.

De plus, en sommant ces deux inégalités multipliées par $R_0(t) + R_1(t)$*, il ressort que*

$$\frac{d\left[R_0(t)R_1(t)\right]}{dt} = 2 - \frac{R_0^2 + R_1^2}{R_0(t)R_1(t)},$$

et

$$\frac{1}{2}\left(R_0(t)R_1(t) - R_0R_1\right) + \frac{R_0^2 + R_1^2}{2} ln\left(\frac{R_1(t) - R_0(t)}{R_1 - R_0}\right) = t.$$

Ainsi, le rayon $R_0(t)$ *diminue jusqu'à s'annuler au temps d'extinction*

$$t_{ext} = \frac{R_0^2 + R_1^2}{4} ln\left(1 + \frac{2R_0R_1}{(R_1 - R_0)^2}\right) - \frac{R_0R_1}{2}.$$

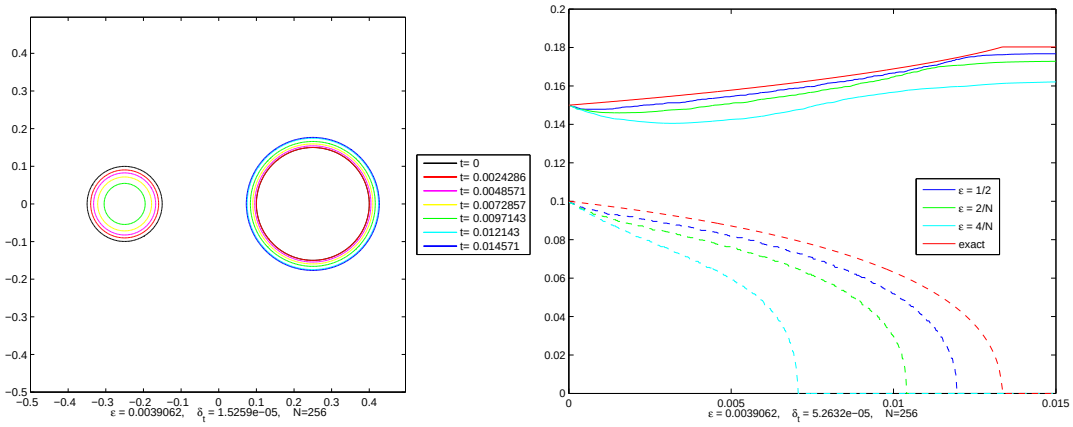


FIG. 3.11 – Simulation d'un mouvement par courbure moyenne conservé avec le premier modèle : la condition initiale est constituée de deux cercles de rayon $R_0 = 0.1$ et $R_1 = 0.15$

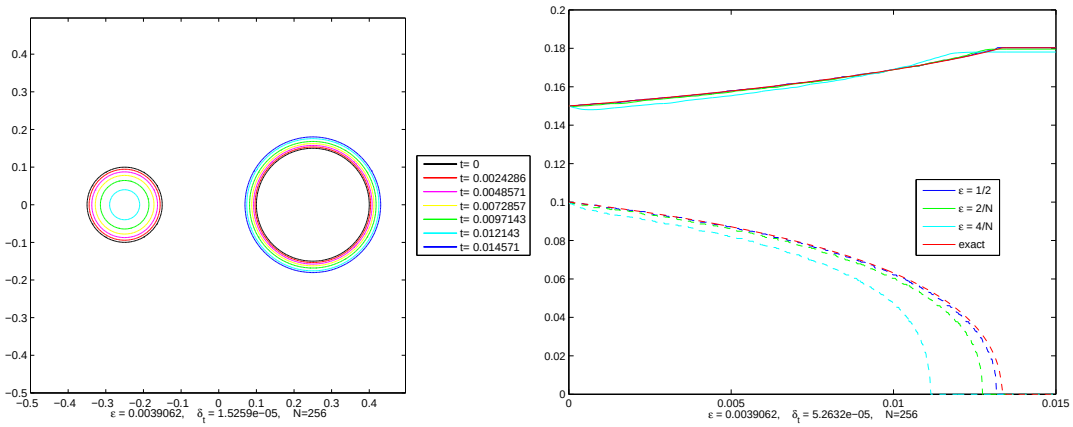


FIG. 3.12 – Simulation d'un mouvement par courbure moyenne conservé avec le deuxième modèle : la condition initiale est constituée de deux cercles de rayon $R_0 = 0.1$ et $R_1 = 0.15$

La figure (3.11) présente les résultats d'une simulation effectuée avec le premier modèle. Nous affichons tout d'abord sur la première image, les interfaces $\partial\Omega^\epsilon(t)$ obtenues à différents temps t. L'évolution coïncide alors avec l'évolution théorique $\Omega(t)$ puisque le plus petit cercle diminue

jusqu'à disparaître tandis que le second grossit jusqu'à atteindre son volume maximal de $V_{max} = \pi\left(R_0(0)^2 + R_1(0)^2\right)$. La deuxième image présente les rayons $t \to R_0^\epsilon(t)$ et $t \to R_1^\epsilon(t)$ estimés pour différentes valeurs du paramètre ϵ et que nous comparons successivement à l'évolution théorique de ces rayons (préalablement obtenue à l'aide d'une méthode Runge-Kutta d'ordre 4). Visuellement, il est alors facile de voir que l'erreur commise sur le temps d'extinction du plus petit cercle est en $O(\epsilon)$: ceci conforte ainsi notre intuition sur la convergence de l'équation d'Allen-Cahn conservée en $O(\epsilon)$.

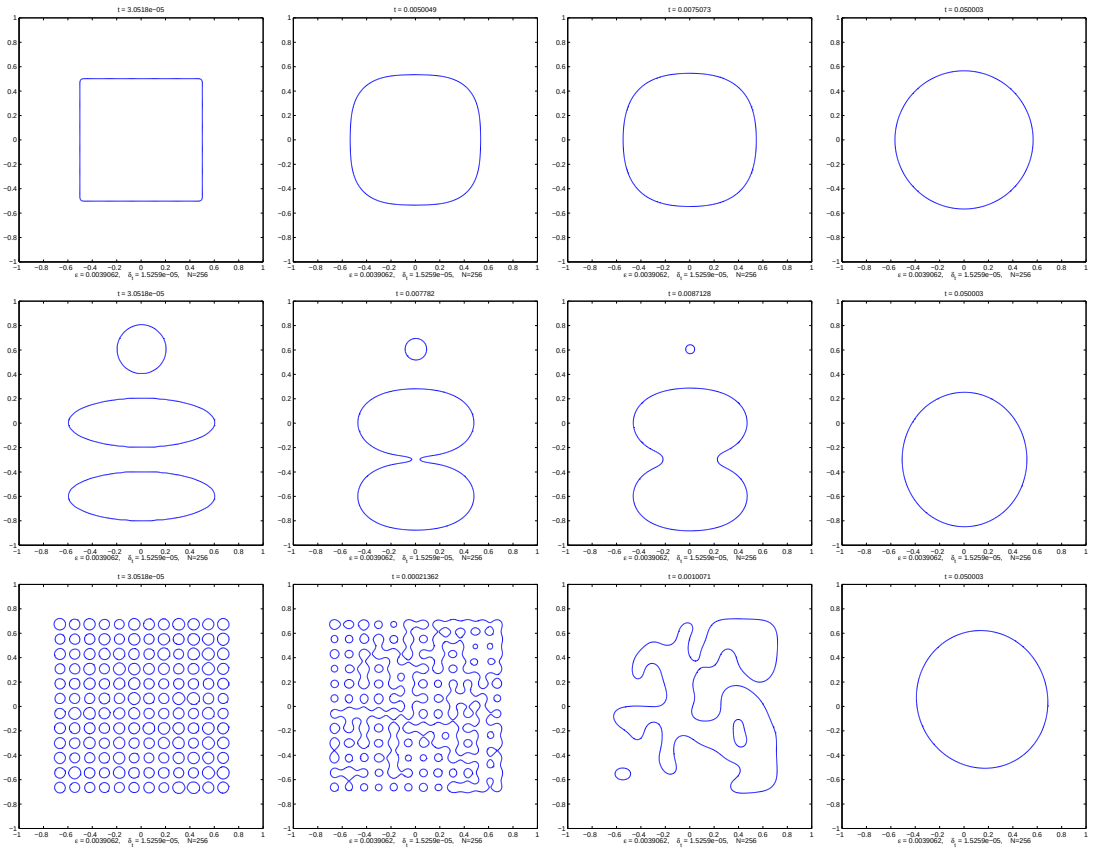
La figure (3.12) présente les résultats d'une simulation analogue obtenue cette fois-ci avec le deuxième modèle. La première figure, où sont tracés les interfaces $\partial\Omega^\epsilon(t)$, montre une nouvelle-fois la cohérence de ces simulations numériques. Quant à la deuxième figure, nous observons maintenant une erreur sur le temps d'extinction du petit cercle en $O(\epsilon^2)$. Il semble donc, au moins d'un point de vue numérique, que ce nouveau modèle de champ de phase converge en $O(\epsilon^2 \log(\epsilon)^2)$.

En conclusion, nous avons mis en évidence l'origine des pertes de volume introduites par les méthodes de champ de phase. Nous avons alors proposé un nouveau modèle qui semble les reduire considérablement. Dans tous les tests suivants, nous utiliserons ce nouveau modèle de conservation de volume.

Quelques simulations avec le deuxième modèle

La figure (3.13) présentent des résultats de simulations de mouvements par courbure moyenne conservé en dimension deux. Nous nous sommes inspirés des travaux de Ruuth et Wetton [99] pour le choix des conditions initiales. Les domaines $\Omega(t)$ ont un volume constant V_0 au cours du temps et se stabilisent vers un disque de volume V_0. Le troisième test témoigne de toute l'efficacité de la méthode de champ de phase lorsque les domaines étudiés admettent un grand nombre de changements de topologie. Enfin, la dernière figure (3.13) présente une simulation d'un mouvement par courbure moyenne avec un terme de forçage $\vec{f}$ qui agit comme une force de rotation.
Nous effectuons enfin des mouvement par courbure moyenne conservé en dimension 3 avec comme condition intiale un tore et le lapin Stanford, voir les figures (3.14). Les paramètres utilisés sont $N = 2^7$, $\epsilon = \frac{1}{N}$ et $\delta_t = \epsilon^2$.

Simulations sans terme de forçage



Simulation avec un terme de forçage $\vec{f}(x) = 500\nabla^{\perp}\|x\|^2_{\ell^2}$

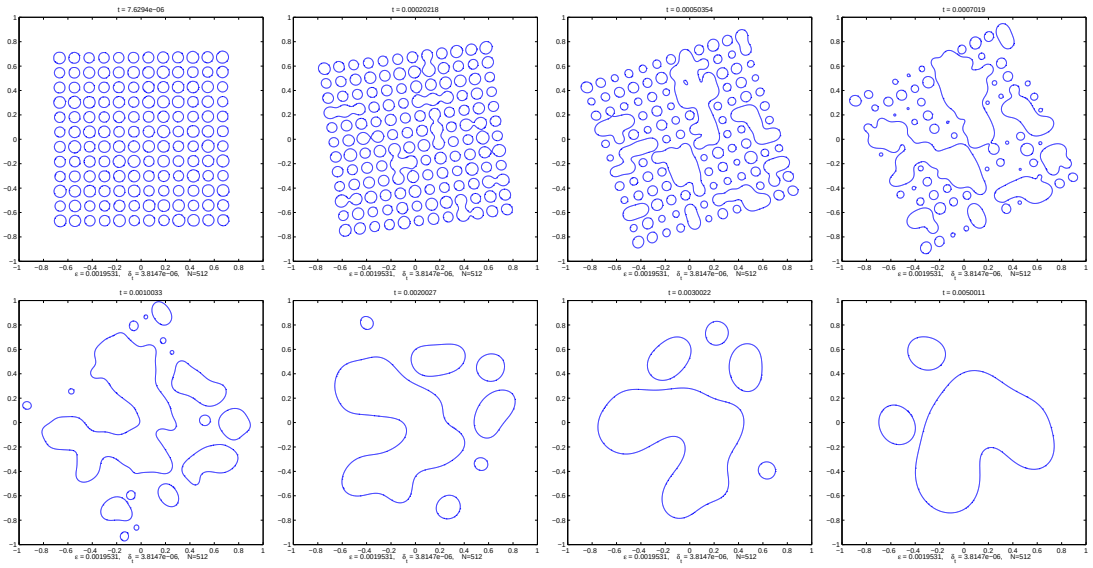


FIG. 3.13 – Simulation de mouvements par courbure moyenne avec conservation de volume

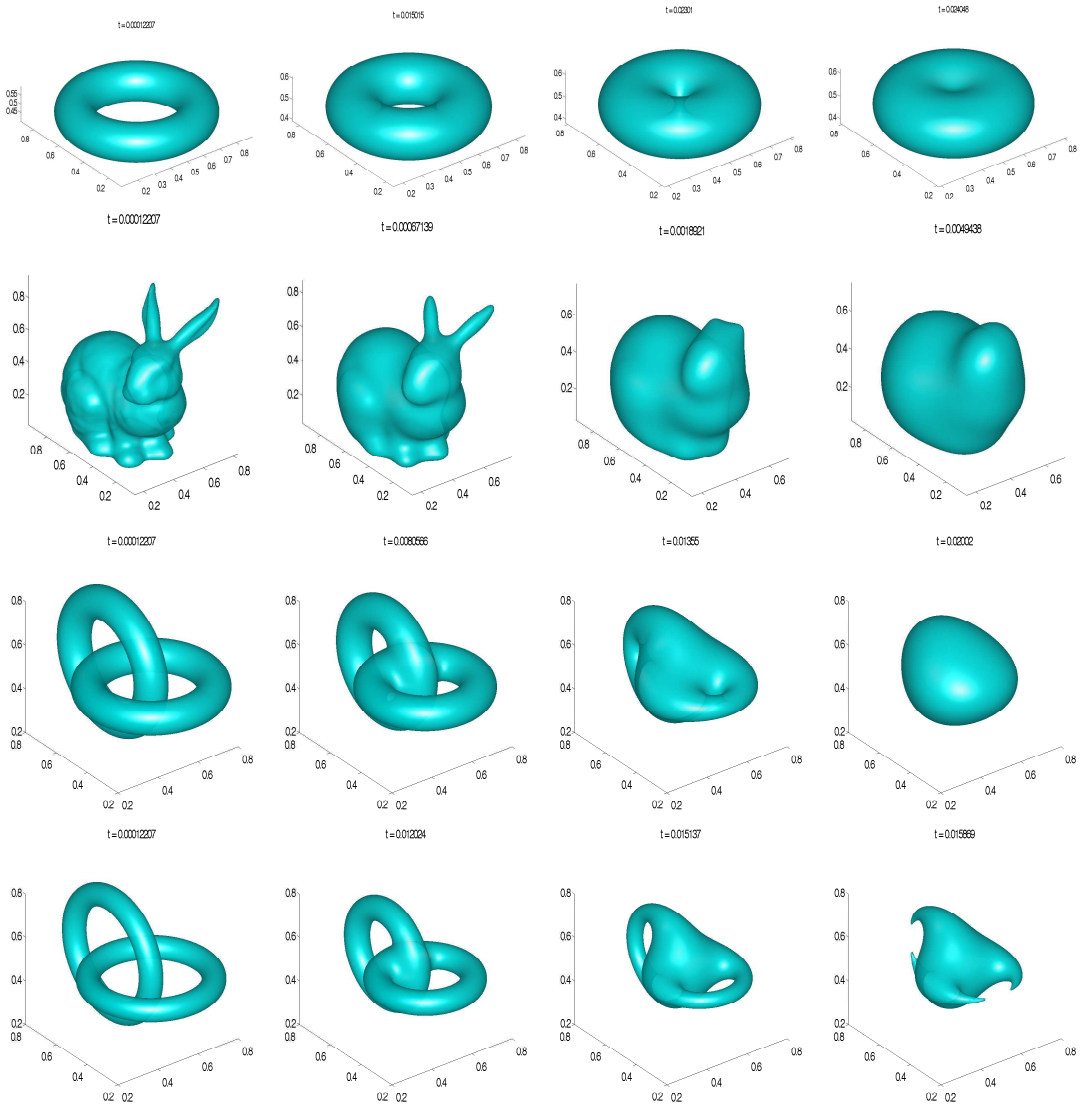


FIG. 3.14 – Quelques simulations de mouvement par courbure moyenne conservé. Les paramètres de simulation utilisés sont : $N = 2^7$, $\epsilon = 1/N$, $\delta_t = \epsilon^2$

Chapitre 4

Contraintes de bord non périodiques

Introduction

Motivation

Les mouvements d'interfaces évoluaient jusqu'à présent **strictement à l'intérieur du domaine de calcul**. Les solutions des équations de champ de phase étant "nulles" à l'extérieur de l'interface diffuse, le choix des conditions de bord n'avait pas beaucoup influencé le comportement de ces solutions. Nous avions alors imposé des conditions aux limites périodiques pour simplifier la résolution numérique de l'opérateur de diffusion. Nous allons maintenant modéliser des mouvements d'interfaces qui "touchent" les bords du domaine de calcul.

Dans un premier temps, les domaines de calcul E seront des hypercubes, $E = [0,1]^d$, et ce sera le choix du type de conditions aux limites imposées aux équations de réaction-diffusion qui dictera implicitement la loi de l'interface. Nous nous intéresserons notamment aux conditions de Dirichlet et de Neumann.

Nous essaierons alors d'interpréter physiquement les dynamiques d'interfaces associées à ces conditions de bord. Par exemple, en décomposant l'interface Γ comme la somme

$$\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_I$$

où $\Gamma_E = \Gamma \cap \partial E$ et $\Gamma_I = \Gamma \setminus \Gamma_E$, nous expliquerons en quoi les conditions de bord de type Neumann permettent de minimiser l'énergie $J(\Omega) = \int_{\Gamma_I} 1ds$ au lieu de $J(\Omega) = \int_{\Gamma} 1ds$. Nous proposerons alors une généralisation de ces conditions pour la minimisation des énergies de type

$$\tilde{J}_\sigma(\Omega) = \int_{\Gamma_I} 1ds + \sigma \int_{\Gamma_E} 1ds$$

où le paramètre σ sera contenu dans l'intervalle $[0,1]$. L'intérêt est de prendre en compte la gestion de points triples.

Dans un deuxième temps, nous utiliserons des domaines de calcul E plus complexes et nous expliquerons comment l'utilisation de termes de forçage, agissant comme une pénalisation, permet d'imposer des contraintes de non pénétration à l'extérieur de E .

Techniques développées

Toute l'efficacité des schémas numériques précédents s'explique par le traitement **exact et rapide** de l'opérateur de diffusion dans la base de Fourier. Or la base de Fourier n'est généralement pas adaptée aux conditions de bord différentes des conditions périodiques.

Nous allons ici nous inspirer des travaux de A. Wiegmann [106] où l'auteur résoud des EDP elliptiques sur des grilles de calcul rectangulaires avec des conditions de bord de type Dirichlet ou Neumann, tout en utilisant la transformée de Fourier. Ces techniques de résolution sont alors quasi-optimales puisqu'elles ne nécessitent aucune résolution de système linéaire. Dans ce travail, nous allons reproduire les techniques de symétrisation de Wiegmann pour les appliquer au semi-groupe de la chaleur, et en proposer quelques généralisations qui traitent des conditions de bord plus complexes.

4.1 Principe de symétrisation pour l'équation de la chaleur

4.1.1 Avec des conditions de Dirichlet

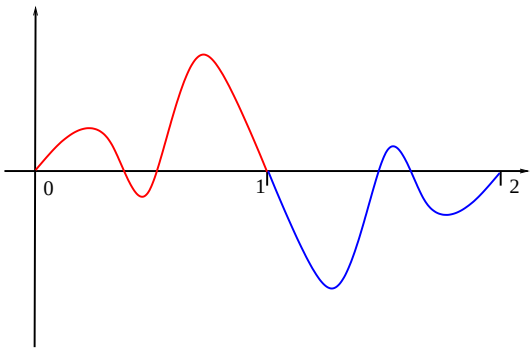


FIG. 4.1 – Principe de symétrisation pour les conditions de Dirichlet homogènes

Soit u la solution de l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes :

$$(P_1) \quad \begin{cases} u_t(t,x) = \triangle u(t,x) & \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1] \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

La famille $\mathbb{B} = \{\sin(n\pi x) \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$ forme une base de vecteurs propres du laplacien de $H_0^1([0,1])$. Après avoir déterminé la décomposition de u_0 dans cette base,

$$u_0(x) = \sum b_n \sin(n\pi x),$$

la solution u s'obtient simplement en considérant la fonction

$$u(t,x) = \sum b_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin(n\pi x).$$

On remarque alors que la fonction $u(t,x)$ est aussi la solution du problème

$$(\tilde{P}_1) \quad \begin{cases} u_t(t,x) = \triangle u(t,x), \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2] \\ u(0,x) = \tilde{u}_0(x) \quad \text{avec des conditions aux limites périodiques} \end{cases}$$

où $\tilde{u}_0(x)$ est définie d'après le principe de symétrisation illustré par la figure 4.1 sur $[0,2]$ par

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} \tilde{u}_0(x) = u_0(x) \quad si \quad x \in [0,1] \\ \tilde{u}_0(x) = -u_0(2-x) \quad si \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

En effet, ce principe de symétrisation montre que la série de Fourier de $\tilde{u}_0$ sur $[0,2]$ vérifie

$$\tilde{u}_0(0,x) = \tilde{a}_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \tilde{a}_n \cos(n\pi x) + \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \tilde{b}_n \sin(n\pi x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \tilde{b}_n \sin(n\pi x)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= 1/2 \int_0^2 \tilde{u}_0(x)dx = 0 \\ \tilde{a}_n &= \int_0^2 \tilde{u}_0(0,x)\cos(n\pi x)dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \tilde{b}_n &= \int_0^2 \tilde{u}_0(0,x)\sin(n\pi x)dx \\ &= 2\int_0^1 u_0(0,x)\sin(n\pi x)dx = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $u(t,x) = \sum b_n e^{-\pi^2 n^2 t}\sin(n\pi x)$ est donc bien solution du problème $\tilde{P}_1$.

Numériquement, les solutions u du problème P_1 seront obtenues en déterminant les solutions du problème $\tilde{P}_1$. Les algorithmes de transformée de Fourier rapide permettent d'obtenir les coefficients b_n à partir de la transformée de Fourier de $\tilde{u}_0$.

Ce principe de symétrie se généralise en dimension quelconque. Par exemple, en dimension deux, il suffit de considérer la fonction $\tilde{u}(x,y)$ définie par

$$\tilde{u}_0(x,y) = \begin{cases} u_0(x,y) & si \quad x \in [0,1], \quad y \in [0,1] \\ -u_0(2-x,y) & si \quad x \in [1,2], \quad y \in [0,1] \\ -u_0(x,2-y) & si \quad x \in [0,1], \quad y \in [1,2] \\ u_0(2-x,2-y) & si \quad x \in [1,2], \quad y \in [1,2] \end{cases}$$

4.1.2 Avec des conditions de Dirichlet non homogènes

Soit u la solution du problème

$$(P_2) \quad \begin{cases} u_t(t,x) = \triangle u(t,x) & \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1] \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in [0,1] \\ u(t,0) = a_0, \ u(t,1) = a_1 & \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

La bonne méthode consisterait à déterminer tout d'abord la solution u^* du problème

$$\begin{cases} \triangle u^*(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \\ u^*(0) = a_0 \qquad u^*(1) = a_1, \end{cases}$$

il suffira ensuite d'appliquer la technique précédente à la condition initiale $u_0^* = u_0 - u^*$. Dans cette thèse, nous allons procéder différemment, et nous allons montrer que la solution $\tilde{u}$ du problème

$$(\tilde{P}_2) \quad \begin{cases} u_t(t,x) = \triangle u(t,x), \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2] \\ u(0,x) = \tilde{u}_0(x) \quad \text{avec des conditions aux limites périodiques,} \end{cases}$$

où $\tilde{u}_0(x)$ est définie par

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) \quad si \quad x \in [0,1] \\ 2\ a_1 - u_0(2-x) \quad si \quad x \in [1,3/2] \\ 2\ a_0 - u_0(2-x) \quad si \quad x \in [3/2,2] \end{cases}$$

est en fait une bonne approximation de la solution u. Plus précisément, sous l'hypothèse que $\|u_0\|_{L^\infty(0,1)}$ soit bornée, nous allons montrer la propriété suivante

Proposition 13.

$$\tilde{u}(t,0) = a_0 + O\left(exp\left(-\frac{1}{8t}\right)\right) \ et\ \tilde{u}(t,1) = a_1 + O\left(exp\left(-\frac{1}{8t}\right)\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Démonstration de la propriété 13.
On note $\tilde{u}_{0,per}$ la fonction périodique de période 2 qui s'identifie à $\tilde{u}_0$ sur $[0,2]$. La solution $\tilde{u}(t,x)$ de $\tilde{P}_2$ s'obtient finalement en considérant

$$\tilde{u}(t,x) = \tilde{u}_{0,per} * K_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}_{0,per}(y) K_t(x-y) dy$$

où $K_t(x)$ est le noyau de la chaleur égal à

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

En effet, avec $\tilde{u}_{0,per}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\pi n x}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}_{0,per}(x-y) K_t(y) dy &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y)^2}{4t}} e^{i\pi n(x-y)} dy \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ e^{i\pi n x} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{4t}} e^{-i\pi n y} dy \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ e^{i\pi n x} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]\left(\frac{n}{2}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-\pi^2 n^2 t}\ e^{i\pi n x}. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t,0) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}_{0,per}(x) K_t(x) dx \\ &= \int_{[-1,1]} \tilde{u}_{0,per}(x) K_t(x) dx + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \tilde{u}_{0,per}(x) K_t(x) dx, \end{aligned}$$

et que

$$\left|\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \tilde{u}_{0,per}(x)K_t(x)dx\right| \leq 2\|u_0\|_{L^\infty(0,1)} \int_1^{+\infty} K_t(x)dx \leq 2\ exp\left(-\frac{1}{8t}\right)\|u_0\|_{L^\infty(0,1)},$$

en effet,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} K_t(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{1}{\sqrt{4t}}}^{+\infty} e^{-x^2}(x)dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{8t}}\int_{\frac{1}{\sqrt{4t}}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(x)dx \leq e^{-\frac{1}{8t}}.\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_{[-1,1]} \tilde{u}_{0,per}(x)K_t(x)dx &= \int_{[-1,0]}(2a_0 - u_0(-x))K_t(x)dx + \int_{[0,1]} u_0(x)K_t(x)dx \\ &= a_0\int_{[-1,1]} K_t(x)dx = a_0\left(1 + O\left(exp\left(-\frac{1}{8t}\right)\right)\right),\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\tilde{u}(t,0) = a_0 + O\left(exp\left(-\frac{1}{8t}\right)\right).$$

□

Nous déterminerons alors numériquement les solutions du problème $\tilde{P}_2$ pour obtenir une bonne aproximation des solutions du problème P_2. L'ordre d'erreur en norme L^∞ de cette approximation est de plus en $O\left(exp\left(-\frac{1}{8t}\right)\right)$. Cette technique de symétrie se généralise aussi en dimension supérieure, mais dans ce cas, l'ordre de la méthode sera en $O(\sqrt{t})$.

4.1.3 Avec des conditions de Neumann

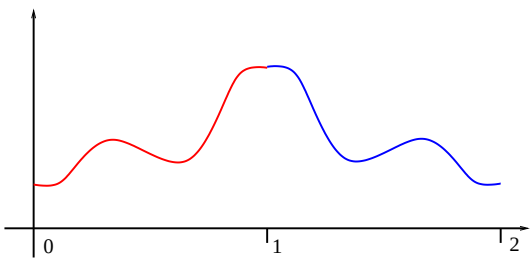


FIG. 4.2 – Principe de symétrisation pour les conditions de Neumann

Soit u la solution de l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites de type Neumann

$$(P_3)\quad \begin{cases} u_t(t,x) = \triangle u(t,x) & \forall (t,x) \in [0,T]\times[0,1] \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in [0,1] \\ \partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,0) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

La famille $\mathbb{B} = \{\cos(n\pi x)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ forme une base de vecteurs propres du laplacien de l'espace $\{u \in L^2([0,1])\ ;\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0\}$. Après avoir déterminé la décomposition de u_0 dans cette base,

$$u_0(x) = \sum a_n \cos(n\pi x),$$

la solution u s'obtient simplement en considérant la fonction

$$u(t,x) = \sum a_n e^{-\pi^2 n^2 t} \cos(n\pi x).$$

On remarque de plus que la fonction $u(t,x)$ est aussi la solution du problème

$$(\tilde{P}_3) \quad \begin{cases} u_t(t,x) = \triangle u(t,x), & \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,2] \\ u(0,x) = \tilde{u}_0(x) & \text{avec des conditions aux limites périodiques} \end{cases}$$

où $\tilde{u}_0$ est définie d'après le principe de symétrisation illustré par la figure 4.2,

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & si \quad x \in [0,1] \\ u_0(2-x) & si \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

En effet, la série de Fourier de $\tilde{u}_0$ vérifie

$$\tilde{u}_0(0,x) = \tilde{a}_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \tilde{a}_n \cos(n\pi x) + \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \tilde{b}_n \sin(n\pi x).$$

Le principe de symétrisation 4.2 implique donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{b}_n = 0$ et la fonction

$$\tilde{u}(t,x) = \tilde{a}_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \tilde{a}_n e^{-4\pi^2 n^2 t} \cos(n\pi x),$$

est la solution de $\tilde{P}_3$. Enfin, ce principe de symétrie implique aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \tilde{a}_n$. La solution u du problème P_3 est donc aussi la solution du problème $\tilde{P}_3$.
Ce principe est extensible en dimension supérieure. Par exemple, en dimension 2, il suffit de considérer la fonction

$$u_1(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y) = u_0(x,y) & si \quad x \in [0,1], \quad y \in [0,1] \\ u_1(x,y) = u_0(2-x,y) & si \quad x \in [1,2], \quad y \in [0,1] \\ u_1(x,y) = u_0(x,2-y) & si \quad x \in [0,1], \quad y \in [1,2] \\ u_1(x,y) = u_0(2-x,2-y) & si \quad x \in [1,2], \quad y \in [1,2] \end{cases}$$

Numériquement, il sera alors plus avantageux de déterminer les solutions du problème symétrisé car les conditions aux limites périodiques permettent d'utiliser la transformée de Fourier rapide.

4.2 Conditions aux limites pour les équations de champ de phase

L'objectif est maintenant de définir une méthode numérique pour obtenir les solutions des équations de réaction-diffusion avec des conditions de bord de type Dirichlet ou Neumann.
Soit u^ϵ la solution de

$$\begin{cases} u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u) \\ u_0 = q\left(\frac{d(x,\Omega_0)}{\epsilon}\right) \quad + \quad \text{CL} \end{cases}$$

Nous allons encore une fois utiliser une méthode de splitting entre les opérateurs de diffusion et de réaction. Les conditions de bord seront alors intégrées dans la résolution de l'opérateur

de diffusion. L'opérateur de réaction sera quant à lui traité indépendemment des conditions de bord.
En effet, l'action de l'opérateur de réaction sur la solution u^ϵ ne modifie pas les valeurs des solutions au bord du domaine de calcul si les conditions de Dirichlet sont choisies dans $\{0, 1/2, 1\}$, car

$$W^{'}(s) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \{0, 1/2, 1\}.$$

où $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$. De même, l'opérateur de réaction n'influence pas l'orientation des gradients puisque $u_t = W^{'}(u)$ est une EDO.

L'application de l'opérateur de réaction sur les solutions u^ϵ ne modifie donc pas, à la fois les conditions de bord de type Dirichlet dans $\{0, 1\}$, mais aussi celles de type Neumann.
Au final, les méthodes numériques utilisées dans le cas de mouvements par courbure moyenne avec termes de forçage et contrainte de volume sont détaillées dans l'algorithme 7.

Remarque 18. *Le rajout des termes de forçage ne pose pas de problème supplémentaire car le potentiel $W_{2,\epsilon}$ possède encore ses puits en 0 et 1.*
En revanche, la prise en compte de la conservation de volume est plus délicate car jusqu'à présent, l'action de l'opérateur de diffusion ne modifiait pas la masse de la solution en conditions périodiques. Ceci est toujours le cas pour des conditions de Neumann mais devient faux pour des conditions de Dirichlet. Il est alors nécessaire d'effectuer un traitement externe qui mesure la perte du volume après l'application de l'opérateur de diffusion. Le volume perdu sera alors récupéré en modifiant en conséquence l'opérateur de réaction.

4.2.1 Simulation avec des conditions de Dirichlet homogènes

Les conditions de type Dirichlet homogènes empêchent l'interface de se rapprocher du bord du domaine de calcul. Il est possible d'interpréter cette situation comme si la deuxième phase était présente avec une concentration infinie à l'extérieur du domaine de calcul. Ainsi, quelles que soient les forces exercées sur la première phase, celle-ci ne pourra s'approcher infiniment du bord. Une telle condition est utile par exemple lorsque le mouvement considéré est un mouvement par courbure moyenne conservé. Le domaine $\Omega(t)$ tend ainsi vers un cercle tout en s'éloignant du bord, comme le montre la simulation présentée sur la figure (4.3). L'interface $\Gamma(t)$ s'est donc bien déplacée comme nous l'avions prévu mais dans l'état stationnaire, la distance entre l'interface $\Gamma(t)$ et le bord du domaine n'est pas nulle. Cette distance est en fait de l'ordre de $\epsilon|ln(\epsilon)|$ et correspond à la taille de l'interface diffuse.

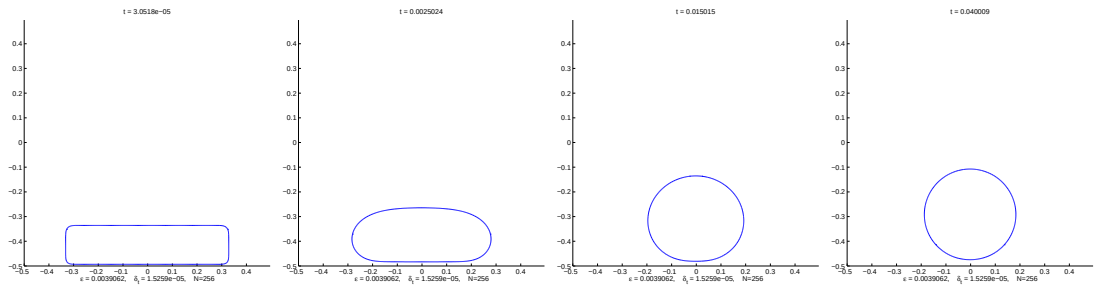


FIG. 4.3 – Simulation d'un mouvement par courbure moyenne avec contrainte de volume et conditions de Dirichlet homogènes

Algorithm 7 Equation Allen-Cahn forcée avec condition Neumann et Dirichlet

DONNÉES: Entrées : U^0, δ_t et ϵ

1: **pour** $n \geq 0$ **,**

2: Symétrisation de la solution

$$V^n = Symetrisation(U^n)$$

3: Calculer l'action de l'opérateur de diffusion

$$\begin{cases} V^n_{Fourier} = FFT[V^n] \\ V^{n+1/2}_{Fourier}[k] = e^{-4\pi^2|\frac{k}{2}|^2\delta_t} V^n_{Fourier}[k] \\ V^{n+1/2} = IFFT[V^{n+1/2}_{Fourier}] \end{cases}$$

4: Récupération de la partie centrale

$$U^{n+1/2} = Symetrisation_{inv}(V^{n+1/2})$$

5: **si** Conservation Volume activée **alors**

6: Calculer a posteriori la perte de volume de l'opérateur de diffusion

$$h = \fint U^0 - \fint U^{n+1/2}$$

7: Calculer a priori la perte de volume de l'opérateur de réaction

$$k = -\frac{\int \left[W'(U^{n+1/2}) - \epsilon \left(g + \vec{f}.\frac{\nabla U^{n+1/2}}{|\nabla U^{n+1/2}|}\right)\sqrt{W(U^{n+1/2})}\right] dx}{\epsilon \int \left[\sqrt{W(U^{n+1/2})}\right] dx}$$

8: **sinon**

9: $h = 0$, $k = 0$

10: **fin si**

11: Calculer l'action de l'opérateur de réaction

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} - \frac{\delta_t}{\epsilon^2}\left[W'(U^{n+1/2}) - \epsilon \left(g + \vec{f}.\frac{\nabla U^{n+1/2}}{|\nabla U^{n+1/2}|} + k + \frac{\epsilon}{\delta_t C_W} h\right)\sqrt{W(U^{n+1/2})}\right]$$

12: **fin**

4.2.2 Simulation avec des conditions de Dirichlet à valeurs dans $\{0, 1\}$

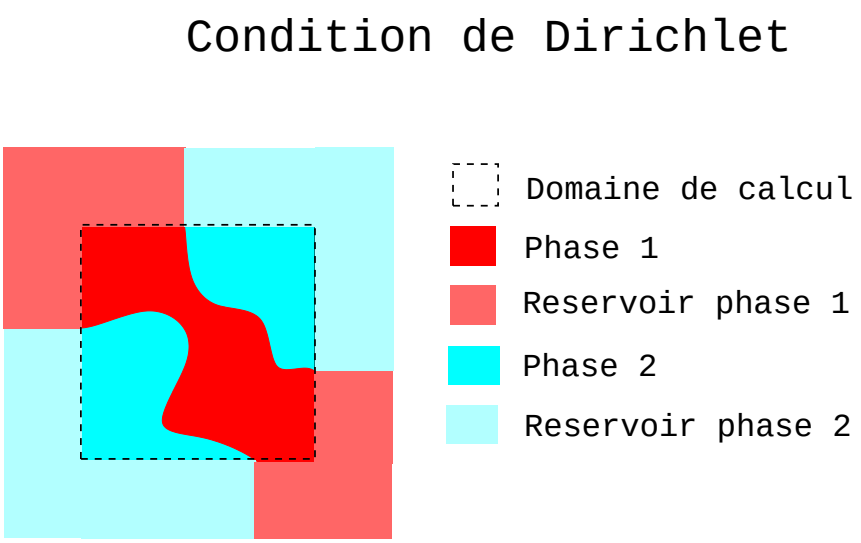


FIG. 4.4 – Schéma modélisation des conditions de Dirichlet

Nous imposons maintenant des valeurs aux bords égales à 0 et 1 afin d'influencer la dynamique d'interface en forçant la présence ou non de la phase sur une partie du bord. Nous pouvons interpréter physiquement cette situation comme si des réservoirs de chacune des deux phases étaient présents le long du bord du domaine de calcul comme le montre la figure (4.4).

La figure (4.5) présente deux résultats de simulations numériques de mouvements par courbure moyenne avec de telles conditions de bord.
Dans le premier test où la condition initiale est un peigne, le domaine $\Omega(t)$ évolue en se réduisant au voisinage du bord sur lequel la condition de Dirichlet 1 a été imposée. Encore une fois, nous retrouvons l'influence du paramètre ϵ, puisque le domaine $\Omega(t)$ ne disparaît pas complètement mais conserve une épaisseur finale de l'ordre de ϵ.
Dans le deuxième test, nous imposons une condition de bord égale à 1 sur deux intervalles $I_1 = [a_1, b_1]$ et $I_2 = [b_2, a_2]$ positionnés sur deux cotés différents du domaine de calcul. L'interface $\Gamma(t)$ évolue alors jusqu'à ce qu'elle forme deux droites entre les points a_1, a_2 et b_1, b_2. Cet exemple montre que l'interface évolue ici vers un minimum local du problème de minimisation.

Nous effectuons enfin deux simulations supplémentaires en conservant les configurations précédentes tout en imposant une conservation de volume supplémentaire. Les résultats des simulations numériques sont présentés sur la figure (4.6).
Dans la première simulation, l'interface $\Gamma(t)$ évolue vers une portion de cercle collée au bord du domaine et dont le volume correspond à celui de la condition initiale. Pour le deuxième test, $\Gamma(t)$ semble évoluer encore une fois vers un minimum local.

Conclusion : Ces simulations numériques valident l'approche que nous avons utilisée pour imposer les conditions de bord de Dirichlet sur les équations de champ de phase. L'influence des principes de symétrisation apparaît à l'échelle ϵ car les pas de temps utilisés sont de l'ordre de ϵ^2. Les erreurs d'approximation via le principe de symétrisation implique de plus un ordre de convergence en $O(\epsilon|ln(\epsilon)|)$.

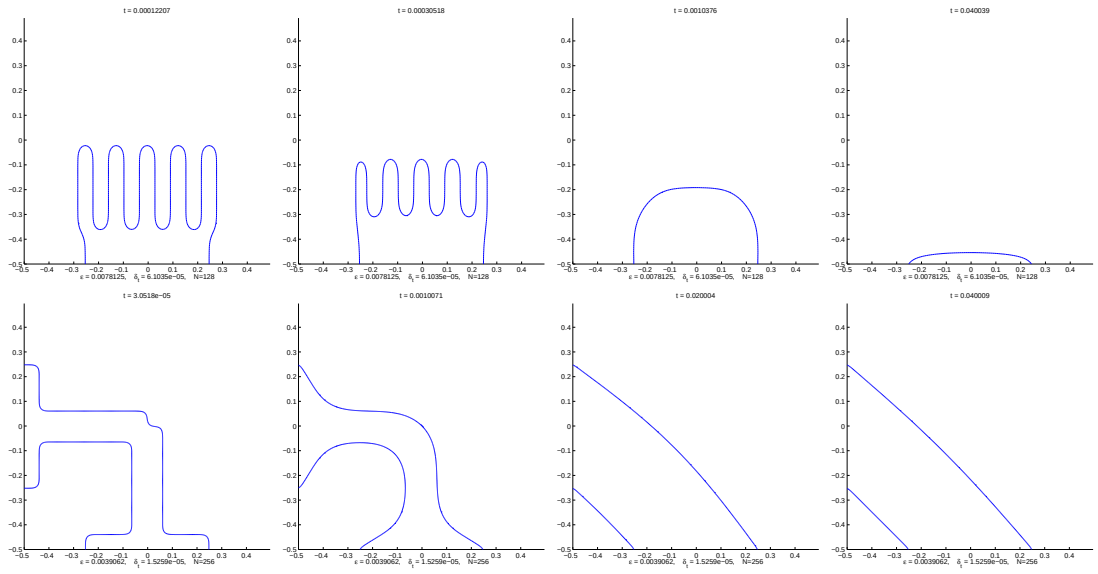


FIG. 4.5 – Simulation de mouvements par courbure moyenne avec conditions de Dirichlet non nulles

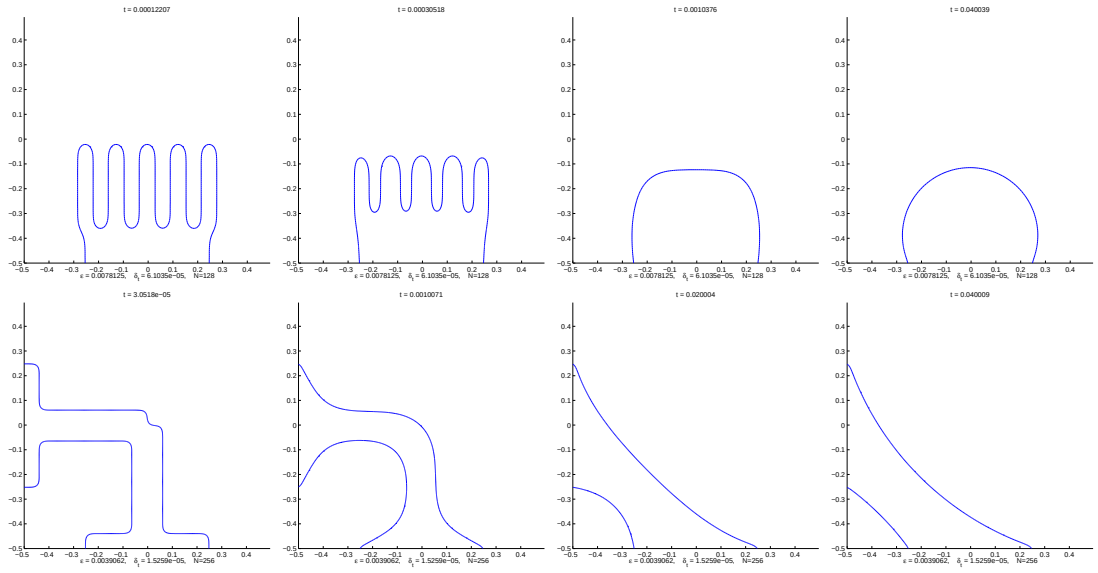


FIG. 4.6 – Simulation de mouvements par courbure moyenne avec conditions de Dirichlet et de volume

4.2.3 Simulation avec des conditions de Neumann

Lorsque nous imposons des conditions de Neumann aux solutions de ces équations, cela implique que $\nabla u^\epsilon.\vec{n} = 0$ sur le bord du domaine de calcul où $\vec{n}$ représente la direction normale du bord du domaine.
Ainsi, lorsque l'interface $\Gamma(t)$ touche le bord du domaine de calcul, elle forme avec celui-ci un angle de 90°. Ce principe permet de guider une dynamique d'évolution d'interface particulière. Nous discuterons dans une prochaine partie d'une interprétation physique d'une telle condition de bord.

Nous présentons maintenant quelques résultats de simulations numériques, toujours avec les mêmes configurations initiales que dans le cas des conditions de Dirichlet.
La figure (4.7) présente des mouvements sans contrainte de volume. Dans le premier test où la condition initiale est un peigne, le domaine $\Omega(t)$ évolue vers un demi cercle, puis, en conservant toujours la même géométrie, $\Omega(t)$ continue à perdre du volume jusqu'à disparaître complètement. La deuxième évolution fait apparaître au cours des itérations un quart de couronne, un quart de cercle puis, celui-ci diminue encore et disparait au coin du domaine de calcul.
Sur la figure (4.8), nous affichons les résultats de simulations analogues avec conservation de volume. Cette fois-ci, le premier mouvement converge vers un demi cercle et le deuxième vers un quart de cercle situé au coin gauche du domaine.

Conclusion : Ces simulations semblent encore une fois cohérentes et valident la méthode utilisée. De plus, il ne nous semble pas que le traitement de l'opérateur de diffusion par les techniques de symétrisation, introduise de nouvelles erreurs comme dans le cas des conditions de Dirichlet.

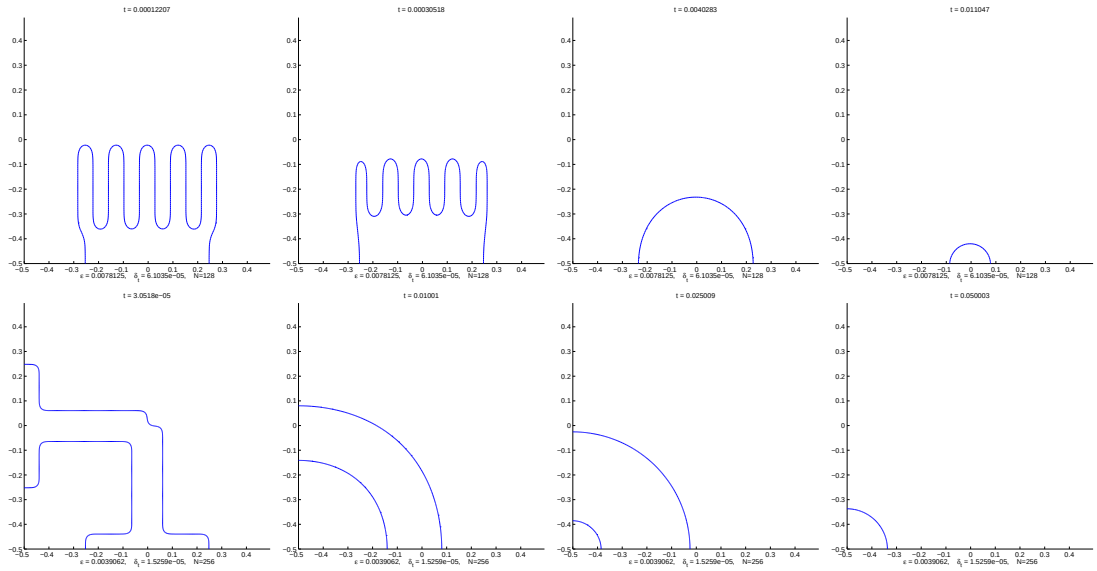


FIG. 4.7 – Simulation de mouvements par courbure moyenne avec conditions de Neumann

4.3 Généralisation des conditions de Neumann

Dans la suite, le domaine de calcul est noté E et son bord associé ∂E. Nous décomposons ainsi l'interface Γ du domaine Ω comme l'union de l'interface Γ_I située strictement dans le domaine

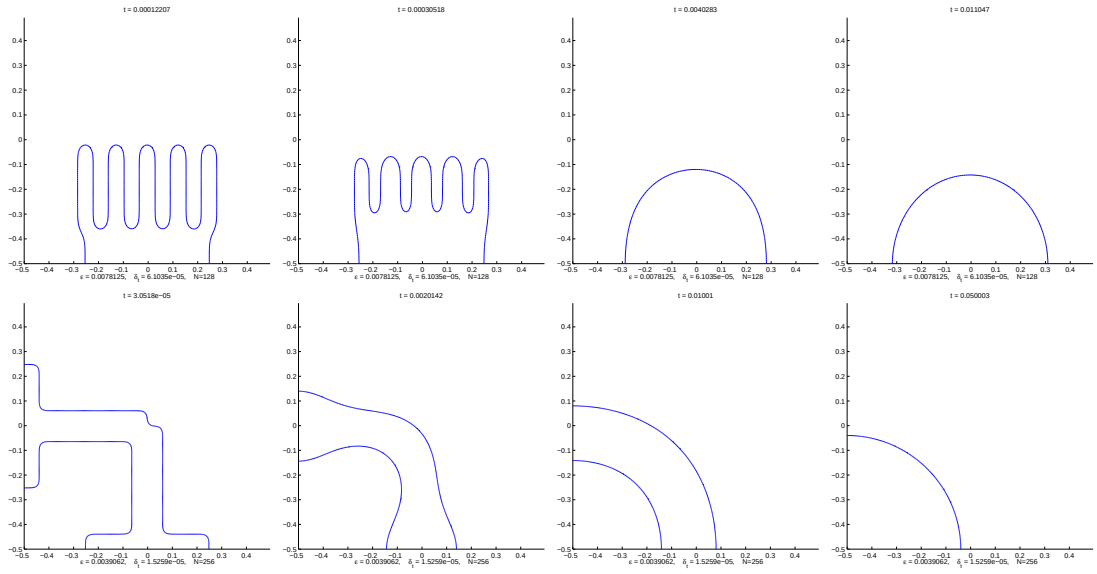


FIG. 4.8 – Simulation de mouvements par courbure moyenne avec conditions de Neumann et contrainte de volume

de calcul et de l'interface Γ_E définie comme l'intersection de Γ avec ∂E.

$$\Gamma = \Gamma_I \bigcup \Gamma_E$$

Nous avons déjà expliqué pourquoi le mouvement par courbure moyenne est en quelque sorte la meilleure manière de minimiser le périmètre :

$$J(\Omega) = \int_\Gamma 1ds = \int_{\Gamma_I} 1ds + \int_{\Gamma_E} 1ds$$

Or, l'introduction des conditions de Neumann modifie la dynamique d'interface. Nous pensons que cette nouvelle dynamique peut être associée à une nouvelle énergie noté $\tilde{J}_\sigma$, et qui s'exprimerait sous la forme :

$$\tilde{J}_\sigma(\Omega) = \int_{\Gamma_I} 1ds + \sigma \int_{\Gamma_E} 1ds$$

Lorsque l'interface Γ touche le bord ∂E en un point donné, ce même point peut être considéré comme un point triple où l'angle de contact est défini par la loi de Young. Ainsi, la valeur du paramètre σ détermine cet angle θ d'après la formule

$$\theta = arcos(2\sigma).$$

Pour les conditions de Neumann, on en déduit que $\sigma = 0$ et l'énergie associée à de telles conditions de bord vérifie

$$\tilde{J}_0(\Omega) = \int_{\Gamma_I} 1ds$$

Dans cette partie, nous proposons de nouvelles techniques de symétrisation qui permettent de modèliser des dynamiques d'interfaces associées aux énergies

$$\tilde{J}_\sigma(\Omega) = \int_{\Gamma_I} 1ds + \sigma \int_{\Gamma_E} 1ds$$

pour une valeur de σ donnée dans l'intervalle $[0, 1]$.

4.3.1 Forme d'optimale et angle de contact

Nous cherchons tout d'abord la forme optimale Ω^* qui minimise $\tilde{J}_\sigma(\Omega)$ pour un volume V_0 et un paramètre σ donnés.

Sur un bord du domaine E

Dans un premier temps, le domaine Ω^* est positionné loin des voisinages des coins de E. Nous prenons comme hypothèse que cette forme optimale est convexe et que la courbure sur l'interface Γ_I^* est constante.
Ainsi, nous cherchons un domaine Ω^* dont la forme est illustrée par le schéma (4.9).

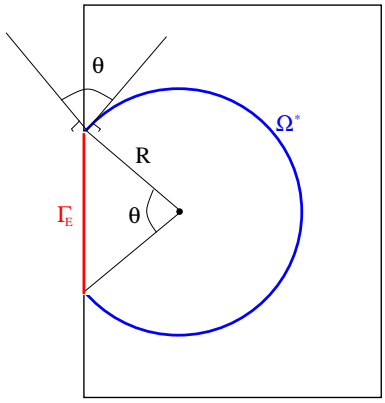


FIG. 4.9 – Forme optimale Ω^* pour la minimisation $\tilde{J}_\sigma$ en fonction de σ

Le volume du domaine Ω^* est égal à

$$V_0 = \left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) R^2 + \frac{1}{2}\sin(\theta) R^2,$$

Le rayon R s'exprime en fonction de V et θ de la manière suivante :

$$R = \sqrt{\frac{V_0}{\pi + \frac{1}{2}(\sin(\theta) - \theta))}}$$

Et l'énergie $\tilde{J}_\sigma$ vérifie :

$$\tilde{J}_\sigma = (2\pi - \theta)R + 2\sigma \sin(\theta/2) R$$

Les paramètres de la forme optimale s'obtiennent en déterminant le minimum de la fonction

$$f_V : \theta \to \sqrt{V_0}\left[\frac{(2\pi - \theta) + 2\sigma\sin(\theta/2)}{\sqrt{\pi + \frac{1}{2}(\sin(\theta) - \theta))}}\right].$$

La fonction dérivée de f_V vérifie

$$\begin{aligned} f_V'(\theta) &= \sqrt{V_0}\left[\frac{[\sigma\cos(\theta/2) - 1]\left[\pi + \frac{1}{2}(\sin(\theta) - \theta)\right] - [\pi - \theta/2 + \sigma\sin(\theta/2)]\left[\frac{1}{2}(\cos(\theta) - 1)\right]}{\left|\pi + \frac{1}{2}(\sin(\theta) - \theta))\right|^{3/2}}\right] \\ &= \sqrt{V_0}\left[\frac{[\sigma\cos(\theta/2) - 1][\pi - \theta/2 + \cos(\theta/2)\sin(\theta/2)] - \left[\cos(\theta/2)^2 - 1\right][\pi - \theta/2 + \sigma\sin(\theta/2)]}{\left|\pi + \frac{1}{2}(\sin(\theta) - \theta))\right|^{3/2}}\right], \end{aligned}$$

et s'annule pour $\sigma = \cos(\theta/2)$ par identification. L'angle de contact θ^* ne dépend donc pas du volume V_0 et vérifie

$$\theta^* = 2arcos(\sigma)$$

Ainsi, comme nous l'avons déjà explicité, dans le cas des conditions de Neumann, l'angle obtenu est égal à $\theta = \pi$ et correspond à un coefficient de tension de surface nul sur le bord du domaine : $\sigma = 0$.

Sur un coin du domaine E

Nous déterminons aussi la forme optimale Ω^* qui minimise $\tilde{J}_\sigma$ lorsque Ω^* est située sur un voisinage d'un coin du domaine de calcul E. Notamment, nous nous intéressons aux formes schématisées par la figure (4.10). Comme précédemment, nous prenons comme hypothèse que l'angle de contact θ est donné par la loi de Young : $\theta^* = 2arcos(\sigma)$. En ajoutant à cela une hypothèse de convexité de la forme optimale, nous devons distinguer deux cas selon que θ^* est supérieur ou inférieur à $\frac{\pi}{2}$. L'expression du volume de Ω^* en fonction de θ et R vérifie ainsi

$$V_0 = \begin{cases} [\pi - \theta + 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)]\, R^2 & \text{si } \theta < \pi/2 \\ \left[(\frac{3\pi}{4} - \theta/2) + \cos(\theta/2)\sin(\theta/2) + \cos(\theta/2)^2\right] R^2 & \text{si } \theta > \pi/2 \end{cases}$$

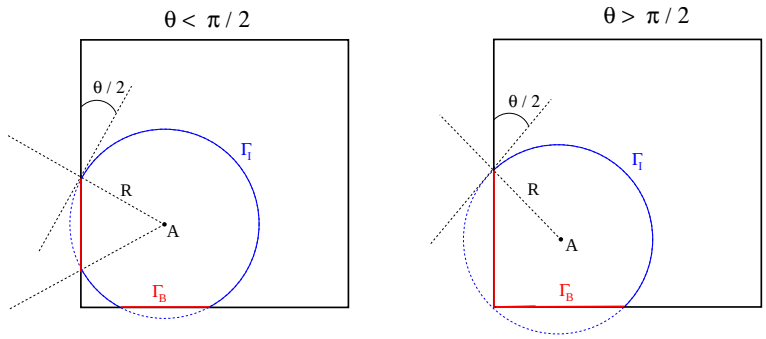


FIG. 4.10 – Forme optimale Ω^* pour la minimisation $\tilde{J}_\sigma$ en fonction de σ au voisinage d'un coin

Cette estimation permet d'obtenir une forme optimale Ω^* en fonction du volume V_0 et du paramètre σ. Dans la suite, nous allons comparer ces formes avec celles obtenues avec les principes de symétrisation.

4.3.2 Technique de symétrisation et angle associé

Lorsque que l'interface Γ touche le bord du domaine en un point x_A, la fonction $u^\epsilon(x_A) = \frac{1}{2}$. La technique de symétrisation présentée sur la figure (4.11) met en avant le fait que ce point est stable si le produit de convolution de la fonction u^ϵ avec le noyau de la chaleur K_t ne modifie pas la valeur de u^ϵ en x_A. On en déduit alors que localement, le point x_A n'est stable que si l'angle que fait l'interface avec le bord est égal à $\pi/2$. En effet, l'action de l'opérateur de diffusion consiste à moyenner cette fonction au voisinage de ce point et si cet angle était différent de $\pi/2$, alors

$$e^{t\triangle}u^\epsilon(x_A) \simeq \frac{2\pi - \theta}{2\pi} \neq \frac{1}{2}$$

Cette estimation s'obtient facilement en remarquant que le principe de symétrisation impose que la fonction u^ϵ soit égale à 1 dans la troisième phase, voir la figure (4.11).

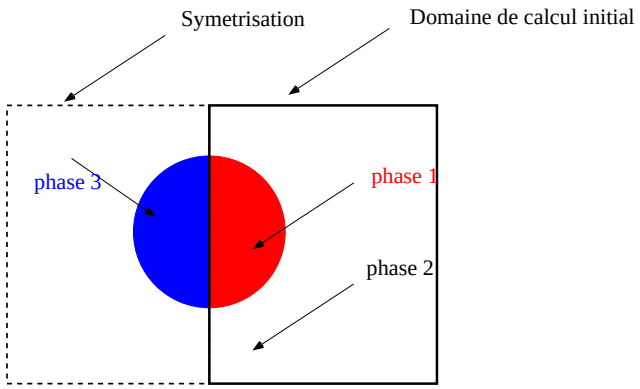


FIG. 4.11 – Un problème multiphase

Notre idée consiste à multiplier la partie symétrique (donc la troisième phase) par un paramètre α. Nous pensons en effet que la valeur de α devrait modifier l'angle que forme l'interface avec le bord du domaine de calcul. Et plus précisément, comme le montre la figure (4.12), une multiplication par α de la partie symétrique, devrait conduire à un angle stable de contact θ vérifiant l'expression :

$$1 + \alpha = \frac{\pi}{\pi - \theta/2}$$

En conclusion, la minimisation de l'énergie $\tilde{J}_\sigma$ peut s'effectuer en considérant la valeur de α :

$$\alpha = \frac{\pi}{\pi - arcos(\sigma)} - 1$$

A noter que ce résultat est en accord avec les conditions de Neumann où $\sigma = 0$ et $\alpha = 1$.

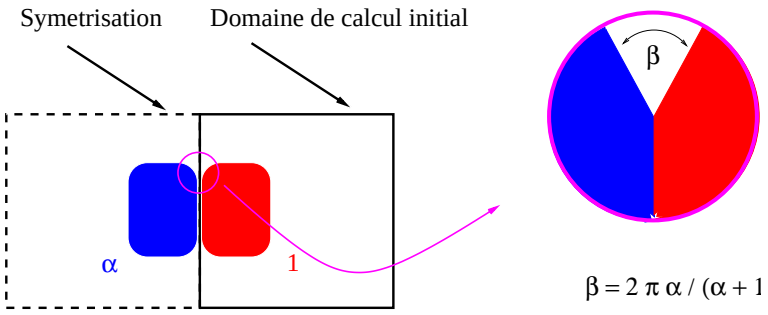


FIG. 4.12 – Un problème multiphase généralisé

4.3.3 Petite correction et validation de la méthode

L'expression de α obtenue en fonction de σ nécessite finalement une petite correction car la formule précédente ne prend pas en compte l'épaisseur non nulle de l'interface diffuse. La figure (4.13) suppose que la valeur caractéristique de la première phase et de la troisième phase n'est pas tout à fait égale à 1 et α, au voisinage du bord du domaine.
La taille caractéristique du noyau de la chaleur K_{δ_t} implique que les valeurs de phases qui nous intéressent sont celles localisées sur un voisinage de taille $\sqrt{\delta_t}$ du bord. Ainsi, si le pas de temps

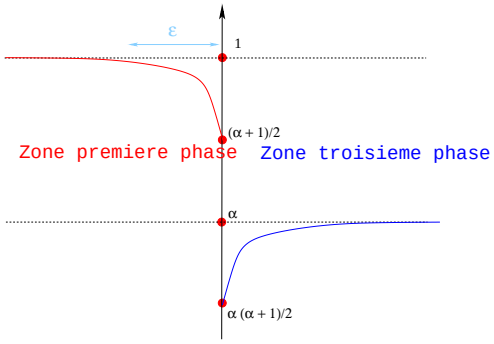


FIG. 4.13 – Coupe orthogonale de u^ϵ au voisinage d'un bord après symétrisation

δ_t utilisé est très petit devant ϵ^2, ces valeurs correspondent à $\frac{\alpha+1}{2}$ pour la première phase et à $\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ pour la troisième (voir figure 4.13). La nouvelle expression de α obtenue d'après la figure (4.12) en fonction de θ est alors

$$\frac{\tilde{\alpha}+1}{2} + \frac{\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}+1)}{2} = \frac{\pi}{\pi - \theta/2}$$

Et

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{2\pi}{\pi - arcos(\sigma)}} - 1$$

Plus généralement, l'expression du profil dans la première phase est proche de

$$q_1(x/\epsilon) = (1-\alpha)q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \alpha$$

Pour un pas de temps δ_t donné, nous allons alors estimer numériquement la quantité

$$C_{\epsilon,\delta_t} = \int_{\mathbb{R}^-} q\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi\delta_t}} e^{-\frac{x^2}{4\delta_t}} dx,$$

pour en déduire les valeurs caractéristiques de chacune des phases, égale à $(1-\alpha)C_{\epsilon,\delta_t} + \alpha$ pour la première phase et $\alpha(1-\alpha)C_{\epsilon,\delta_t} + \alpha^2$ pour la troisième phase.

Finalement, nous utiliserons le paramètre $\tilde{\tilde{\alpha}}$ défini comme la solution de

$$\left((1-\alpha)C_{\epsilon,\delta_t} + \alpha\right)(\alpha+1) = \frac{\pi}{\pi - arcos(\sigma)}$$

et

$$\tilde{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{2(1-C_{\epsilon,\delta_t})}\left[\sqrt{\frac{4(1-C_{\epsilon,\delta_t})\pi}{\pi - arcos(\sigma)} + 1 - 4(1-C_{\epsilon,\delta_t})C_{\epsilon,\delta_t}} - 1\right]$$

Remarque 19. *Nous avons pris les valeurs $C_{\epsilon,\delta_t} = 1$ et $C_{\epsilon,\delta_t} = \frac{1}{2}$ respectivement dans la première et deuxième estimation de α.*

Nous allons maintenant tester numériquement cette méthode. Pour un paramètre σ donné compris entre $[0,1]$, nous effectuons l'algorithme de résolution de l'équation d'Allen-Cahn avec

condition de Neumann et contrainte de volume, et, durant l'étape de symétrisation, la partie symétrique sera multipliée par α_σ. En partant d'une condition initiale touchant un bord du domaine, nous allons comparer la forme finale $\tilde{\Omega}^*_\sigma(\infty)$ obtenue numériquement avec la forme optimale théorique Ω^*_σ de même volume qui minimise $\tilde{J}_\sigma$. Les résultats des simulations effectuées sont présentés sur la figure (4.15). Dans ces simulations, nous avons varié les valeurs des paramètres σ et du volume V_0.

En conclusion, nous notons que la forme optimale théorique est retrouvée systématiquement et confirme numériquement que la technique de symétrisation qui consiste à multiplier la partie symétrique par α_σ, permet de minimiser l'énergie $\tilde{J}_\sigma$. Nous avons ainsi développé une technique qui permet la gestion des points triples et ceci pour un coût algorithmique équivalent au mouvement par courbure moyenne standard.
Nous proposons enfin de tester cette méthode numérique sur l'exemple schématisé par la figure (4.16). L'idée consiste à laisser tomber une goutte sur un plan dont le coefficient de tension de surface $\sigma(x)$ varie en fonction de la position dans l'espace. Intuitivement, la goutte devrait se déplacer vers le minimum de σ. Les figures (4.17) et (4.18) présentent deux simulations numériques où le coefficient de tension de surface σ varie entre 0 et 1, de manière linéaire pour la première, et de manière quadratique pour la deuxième.

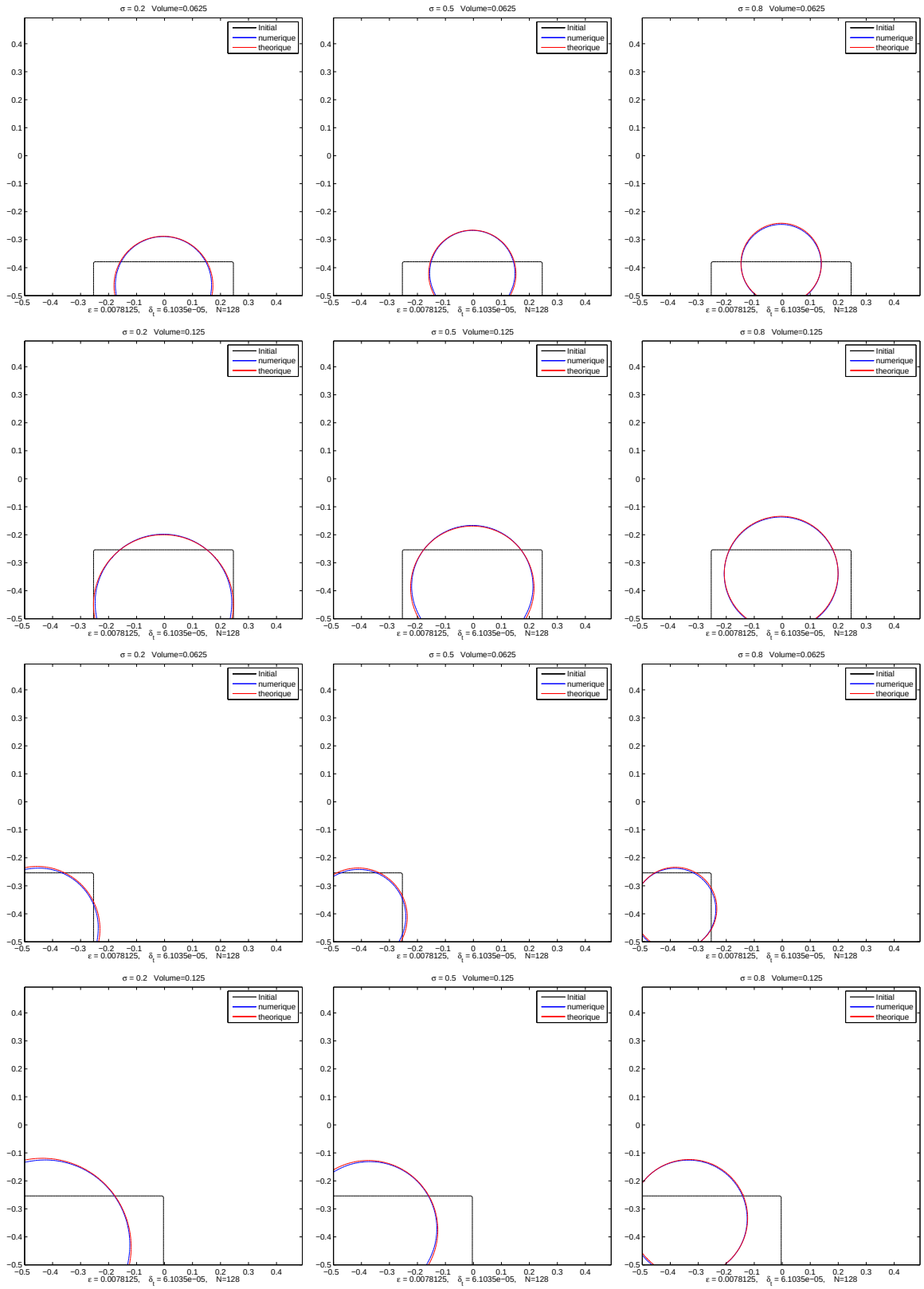


FIG. 4.14 – Minimisation de $\tilde{J}_\sigma$ pour différentes valeurs de σ et du volume V_0, avec $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$, $N = 2^7$, $\epsilon = \frac{1}{N}$ et $\delta_t = \epsilon^2$.

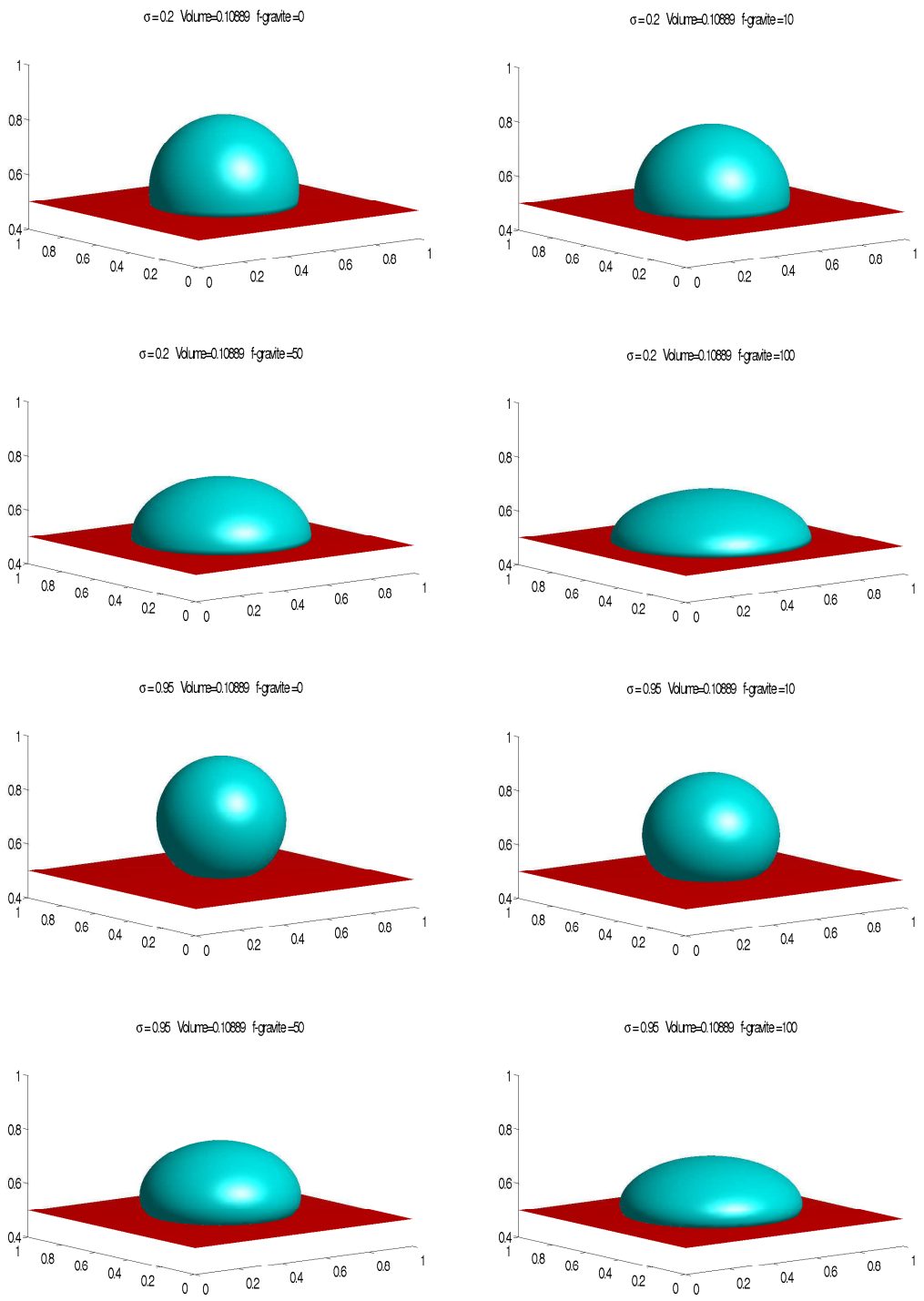


FIG. 4.15 – Minimisation de $\tilde{J}_\sigma$ pour différentes valeurs de σ et du volume V_0 avec une force de gravité. Les paramètres de simulation sont $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$, $N = 2^7$, $\epsilon = \frac{1}{N}$ et $\delta_t = \epsilon^2$.

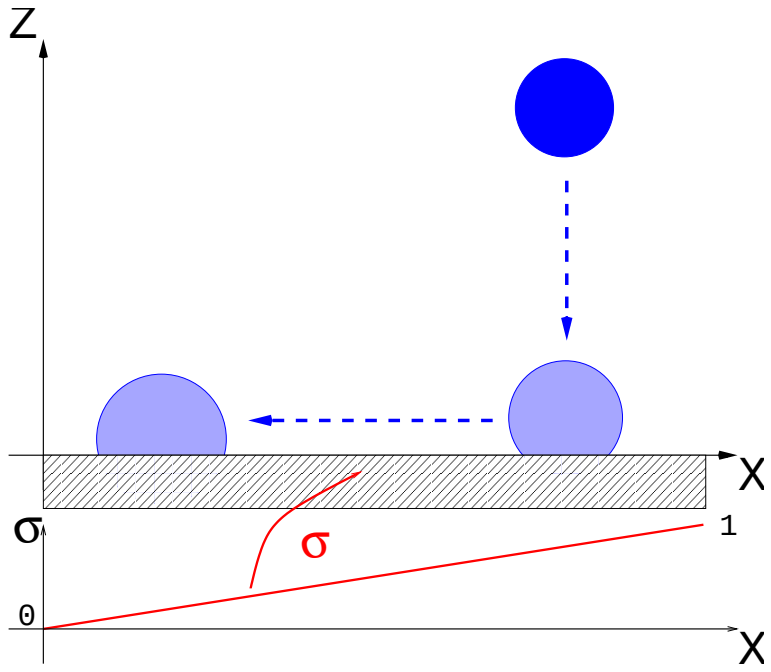


FIG. 4.16 – Variation locale de la tension de surface

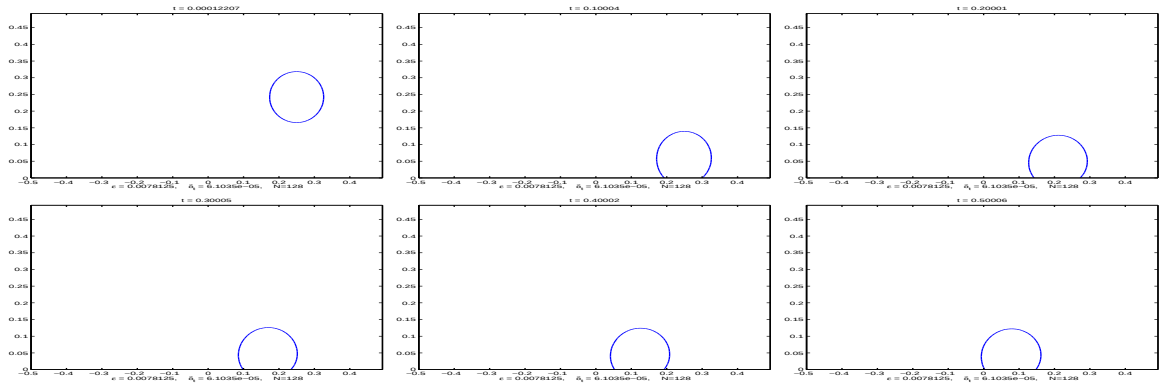


FIG. 4.17 – Simulation avec une variation locale linéaire de la tension de surface

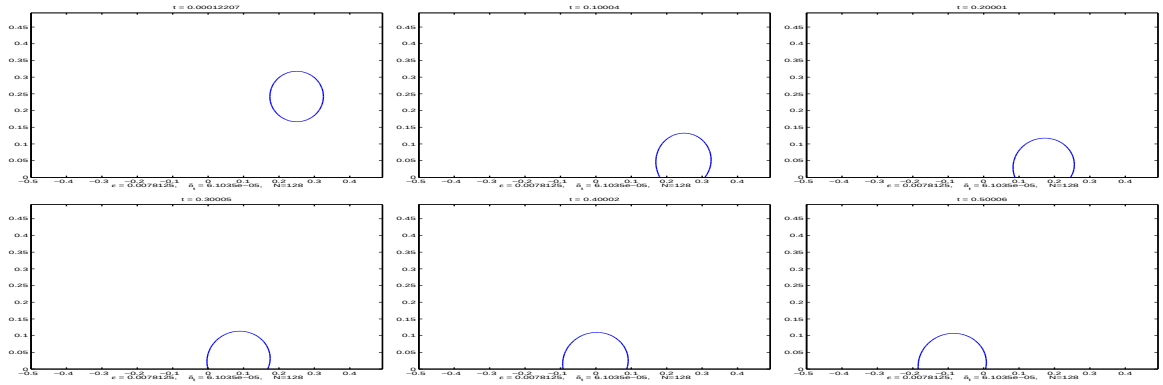


FIG. 4.18 – Simulation avec une variation locale quadratique de la tension de surface

4.4 Contrainte de non pénétration

Nous considérons maintenant des grilles de calcul E plus complexes et l'idée consiste à utiliser un terme de pénalisation pour forcer l'évolution des domaines $\Omega(t)$ à rester dans E. Nous imposons pour cela une vitesse normale des interfaces suivant la loi :

$$V_N = \begin{cases} \kappa & \text{si} \quad x \in E \\ -\infty & \text{si} \quad x \neq E \end{cases}$$

Ainsi, lorsqu'une interface approche le bord du domaine de calcul, le terme $-\infty$ empêche la pénétration de l'interface à l'extérieur de E. Inversement l'interface suit un mouvement par courbure moyenne traditionnel dans le domaine de calcul. En pratique, un terme de pénalisation de l'ordre de $\frac{1}{\epsilon}$ suffit et l'équation de réaction diffusion correspondante s'écrit

$$\begin{cases} u_t = \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2}\left(W'(u) + \epsilon b\sqrt{2W(u)}\right) \\ b(x) = \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{E^c}(x) \end{cases}$$

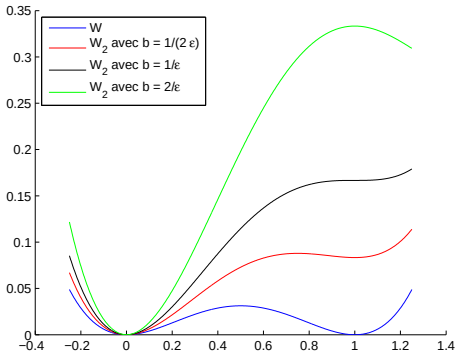


FIG. 4.19 – Allure du potentiel double puits selon la valeur de la contrainte de pénalisation b

En effet, comme nous l'illustrons sur la figure (4.19),

- **Si** $b < \frac{1}{\epsilon}$,
  le potentiel associée W_2 possède encore un minimum local strict en 1 et la phase peut donc être présente dans E^c.
- **Si** $b > \frac{1}{\epsilon}$,
  le potentiel W_2 possède un maximum local en 1, le principe de comparaison n'est plus vérifié et l'EDP ainsi posée devient instable.
- **Si** $b = \frac{1}{\epsilon}$,
  le potentiel possède simplement un minimum local (pas strict) en 1, ce qui assure à la fois la stabilité de la solution et empêche la phase d'être présente dans E^c.

Bien entendu, ce principe se généralise avec des termes de forçage et des contraintes de volume. Nous ne détaillons pas d'avantage l'étude de ce terme de pénalisation et nous présentons maintenant quelques simulations numériques qui valident cette approche. Tout d'abord en dimension 2, avec le résultat d'une simulation présentée sur la figure (4.20) où l'interface reste clairement

dans le domaine de calcul. Puis, en dimension 3, avec la figure (4.21) où une sphère sous l'action d'une force de gravité percute un cône et se transforme en tore. Une deuxième simulation est présentée sur la figure (4.22), cette fois ci, la sphère rencontre un muret avant de se couper en deux.

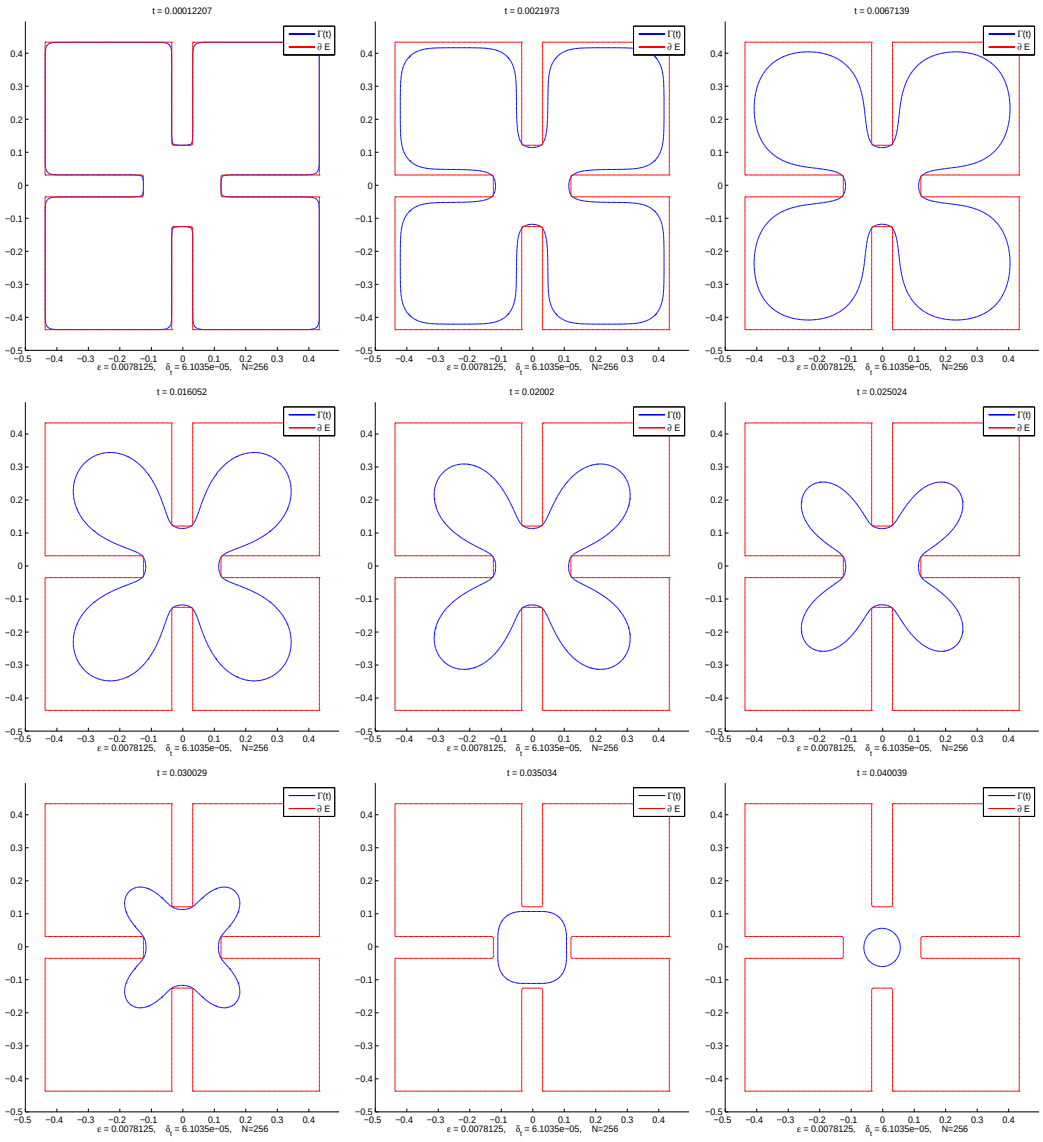


FIG. 4.20 – Mouvement par courbure moyenne sans contrainte de volume et contrainte de non pénétration, avec $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$, $N = 2^8$, $\epsilon = \frac{1}{N}$ et $\delta_t = \epsilon^2$.

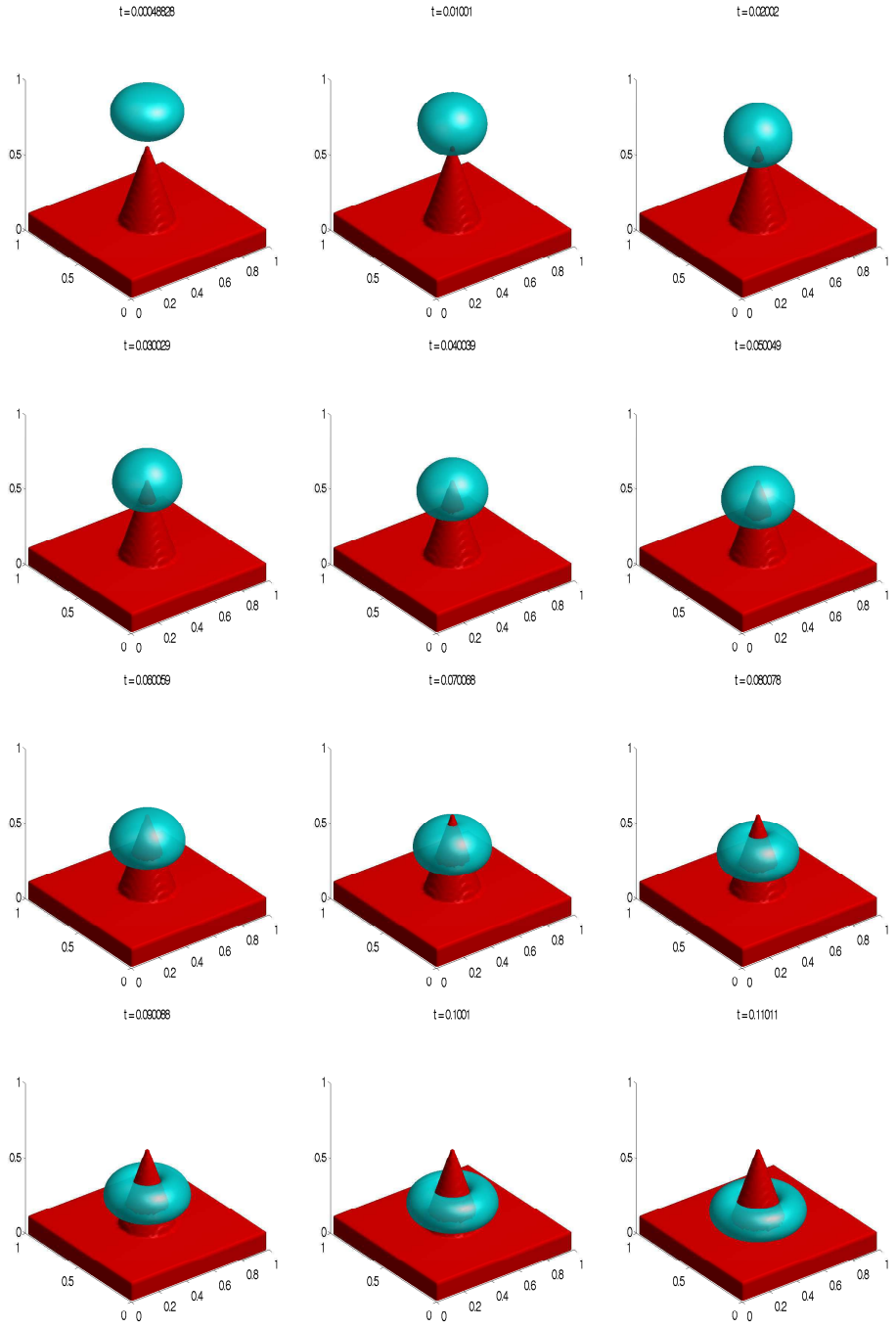


FIG. 4.21 – Mouvement par courbure moyenne, avec une contrainte de volume, un contrainte de non pénétration et une force de gravité $f = 15$ où $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$, $N = 2^7$, $\epsilon = \frac{1}{N}$ et $\delta_t = \epsilon^2$.

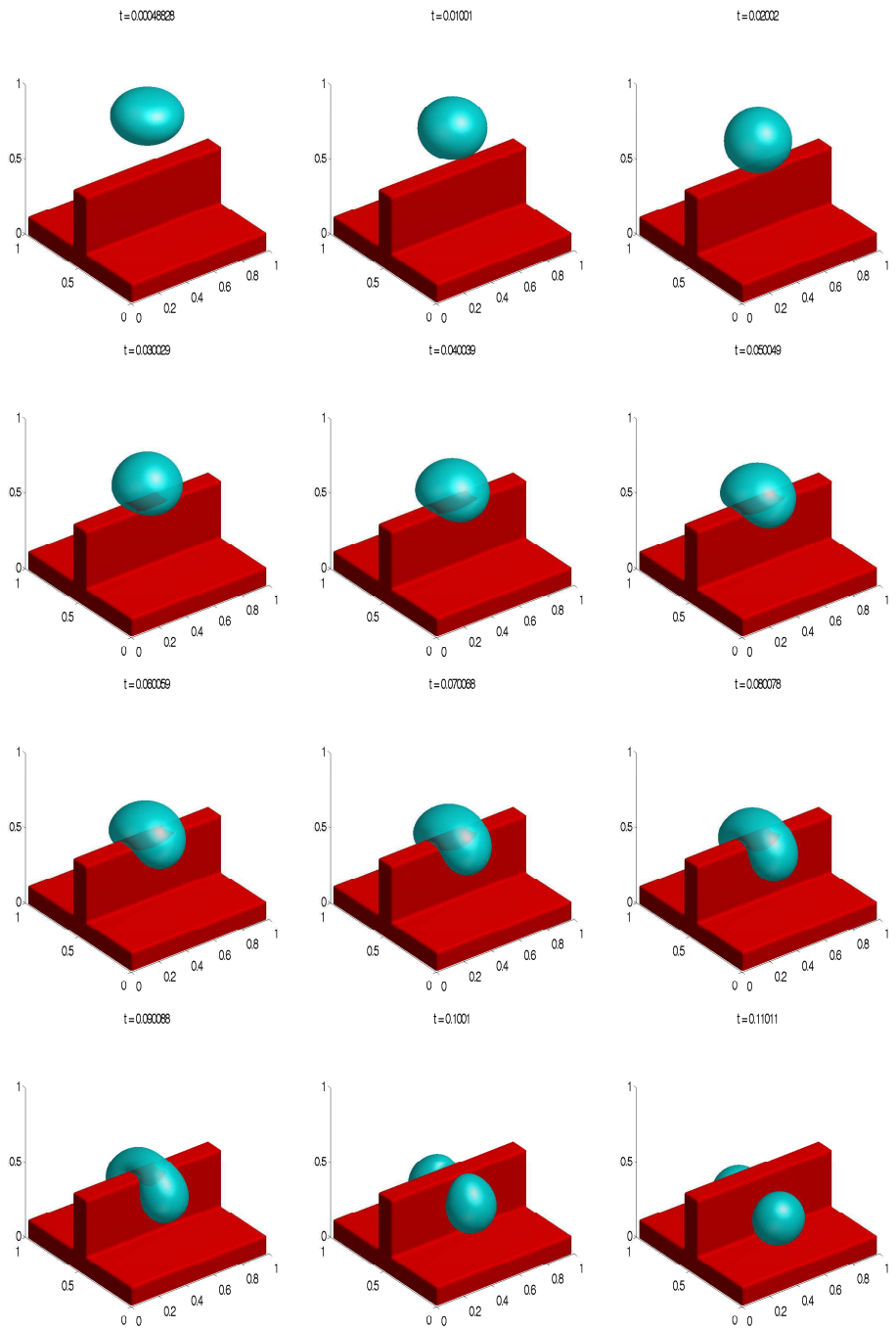


FIG. 4.22 – Mouvement par courbure moyenne, avec une contrainte de volume, contrainte de non pénétration et une force de gravité $f = 15$ où $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$, $N = 2^7$, $\epsilon = \frac{1}{N}$ et $\delta_t = \epsilon^2$.

Deuxième partie

Mouvement par courbure moyenne anisotrope

Introduction aux mouvements par courbure moyenne anisotrope

De nombreux problèmes physiques introduisent des tensions de surface anisotropes. Ces énergies sont de la forme

$$J(\Omega) = \int_\Gamma \gamma(\vec{n}) ds$$

Une dynamique d'interface naturelle pour minimiser cette énergie consiste à effectuer un mouvement par courbure moyenne anisotrope. En dimension 2, ces mouvements ont des vitesses normales d'interface qui vérifient

$$V_n = \gamma(\vec{n}) \left(\gamma(\vec{n}) + \gamma^{''}(\vec{n}) \right) \kappa$$

Ces dynamiques ont par exemple été introduites dans les différents travaux [71, 104, 68].

En fait, la notion de flot de mouvement par courbure moyenne anisotrope nécessite que l'anisotropie soit convexe, c'est à dire que $\gamma + \gamma^{''}$ reste positif. Lorsque l'anisotropie est convexe, des principes d'inclusion garantissent en effet l'unicité de tel mouvement. Mais ces principes ne sont plus vérifiés lorsque les anisotropies sont non convexes (voir par exemple [70]) et l'existence du mouvement par courbure moyenne anisotrope reste encore un problème largement ouvert à ce jour.

Nous allons dans cette thèse développer une méthode numérique d'approximation du mouvement par courbure moyenne anisotrope, dont le coût algorithmique sera équivalent au cas isotrope de la première partie de thèse. De plus, ces algorithmes pourront être implémentés à toutes sortes d'anisotropies : régulières, convexes, cristallines et non convexes, au moins à titre expérimental dans ce dernier cas.

Opérateurs de diffusion anisotrope

Avant de mettre en place la stratégie que nous avons adoptée, nous allons détailler quelques méthodes issues de la littérature pour implémenter ces mouvements d'interface. Nous rappelons que dans le cas isotrope, un opérateur de diffusion, et plus précisément le laplacien, permettait de déplacer l'interface. Dans le cas anisotrope, nous trouvons deux classes d'opérateurs de diffusion :
- des opérateurs différentiels non linéaires
- des opérateurs de convolution

Première approche avec des opérateurs de diffusion non linéaires

Les modèles de champ de phase s'obtiennent en approchant les périmètres anisotropes avec des énergies de Ginzburg Landau. Avec la notation $\phi^o(\xi) = |\xi|\gamma(arg(\xi))$, Bellettini a établi [9]

des résultats de Γ-convergence de l'énergie J_ϵ définie ci-dessous vers le périmètre anisotrope $J(\Omega) = \int_\Gamma \gamma(\vec{n})ds$,

$$J_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\epsilon \frac{\phi^o(\nabla u)^2}{2} + \frac{1}{\epsilon}\, W(u) \right) dx.$$

Le flot de gradient de cette énergie conduit finalement à l'EDP de réaction-diffusion suivante :

$$u_t = \operatorname{div}\left(\phi^o_\xi(\nabla u)\phi^o(\nabla u)\right) - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u)$$

Nous détaillerons davantage cette approche dans le prochain chapitre.

Cette approche a été étudiée dans de nombreux contextes, des anisotropies régulières dans les travaux [13, 94, 29], des anisotropies cristallines [10, 89]. Enfin, des simulations numériques pour des anisotropies non convexes sont présentées dans [60]. Cette approche permet donc de traiter toutes sortes d'anisotropies, mais les méthodes numériques qui en découlent ne sont généralement pas très rapides à cause du traitement de l'opérateur de diffusion non linéaire $\operatorname{div}\left(\phi^o_\xi(\nabla u)\phi^o(\nabla u)\right)$ qui pose de nombreuses difficultés numériques.

Deuxième approche avec des opérateurs de convolution

Par ailleurs, Ruuth et Merriman ont proposé une généralisation de l'algorithme BMO (Bence Merriman Osher) en utilisant des noyaux de convolution différents du noyau de la chaleur $K(x)$,

$$K(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-4\pi^2|\xi|^2}\right](x).$$

Ils ont ainsi montré formellement [100] que pour effectuer un mouvement par courbure moyenne anisotrope en dimension 2, où l'interface possède une vitesse normale égale à

$$V_n = \gamma(\vec{n})\left(\gamma(\vec{n}) + \gamma^{''}(\vec{n})\right)\kappa,$$

il suffit d'utiliser un noyau K_γ positif, dont le rayon caractéristique $r(\theta)$ dans la direction θ vérifie

$$r(\theta) = \sqrt{6\gamma(\theta+\pi/2)\left(\gamma(\theta+\pi/2) + \gamma^{''}(\theta+\pi/2)\right)\delta_t}.$$

Une étude théorique rigoureuse de ces algorithmes a de plus été effectuée dans [74].
Nous faisons aussi référence aux travaux de Da Lio, Forcadel et Monneau [39] où les auteurs montrent qu'il est possible d'utiliser des équations eikonales non locales pour approcher des mouvement par courbure moyenne anisotrope.

Cette méthode conduit ainsi à des algorithmes extrêmment simples et rapides [98] [100]. Néanmoins, les simulations obtenues ne sont pas toujours convaincantes, l'ordre de convergence de la méthode doit être assez faible. De plus, elle ne modélise que les anisotropies régulières et convexes (au moins de classe $C^2((\mathbb{R}^*)^d)$) et les adaptions en dimension supérieure sont limitées dans le sens où même lorsque les anisotropies sont régulières et convexes, il n'est pas toujours possible de les traiter.

Objectifs et plan des chapitres suivants :

Dans le premier chapitre, nous introduirons les propriétés des mouvements par courbure moyenne anisotrope et leur lien avec la notion de périmètre anisotrope. Nous présenterons ainsi une

synthèse des travaux de Bellittini et Paolini [13]. Les méthodes de champ de phase résultantes aboutissent en particulier à l'équation d'Allen-Cahn anisotrope

$$u_t = \triangle_\phi u - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u)$$

où $\triangle_\phi$ est le laplacien anisotrope en géométrie de Finsler.

Dans le deuxième chapitre, nous associerons en quelque sorte les deux approches décrites précédemment, et pour ce faire, nous introduirons un nouvel opérateur, noté $\tilde{\triangle}_\phi$ et défini comme le linéarisé du laplacien anisotrope par rapport à la base de Fourier. Nous tenterons ensuite, au moins formellement, d'estimer la différence obtenue lorsqu'on applique ces deux opérateurs $\triangle_\phi$ et $\tilde{\triangle}_\phi$ sur des fonctions de type champ de phase. Ces résultats permettront ainsi de justifier que les solutions de l'équation d'Allen-Cahn anisotrope linéarisée

$$u_t = \tilde{\triangle}_\phi u - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u),$$

permettent d'obtenir une bonne approximation des mouvements par courbure moyenne anisotrope lorsque le paramètre ϵ est suffisamment petit. Nous présenterons alors des simulations numériques qui valideront cette technique.

Dans le dernier chapitre, nous appliquerons notre méthode pour des anisotropies non convexes, et nous expliquerons de manière heuristique, en quoi les dynamiques d'interfaces obtenues sont intéressantes.

Chapitre 5

Anisotropie dans le contexte de la géométrie de Finsler

Une manière très générale d'introduire de l'anisotropie est d'utiliser le cadre de la géométrie de Finsler. Nous allons dans ce chapitre rappeler ce formalisme et des résultats issus des travaux de Bellettini et Paolini [13].

5.1 Contexte mathématique

5.1.1 Introduction du couple d'anisotropies (ϕ, ϕ^o)

Nous allons tout d'abord introduire le couple d'anisotropie (ϕ, ϕ^o). Soit $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ une fonction continue vérifiant les propriétés suivantes :
– la fonction ϕ est strictement positive et homogène de degré 1 par rapport à la variable ξ :

$$\phi(x, t\xi) = |t|\phi(x, \xi) \quad x \in \mathbb{R}^d,\ \xi \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R},$$

$$\lambda|\xi| \leq \phi(x, \xi) \leq \Lambda|\xi| \quad x \in \mathbb{R}^d,\ \xi \in \mathbb{R}^d,$$

– la fonction ϕ est strictement convexe par rapport à ξ.
On note de plus $B_\phi(x)$ la pseudo-boule positionnée en x et définie par

$$B_\phi(x) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^d\ ;\ \phi(x, \xi) \leq 1\right\}$$

Dans le cas isotrope, ϕ s'identifie à la norme l^2, $\phi(x, \xi) = |\xi| = \|\xi\|_{l^2}$, et $B_\phi(x)$ est la boule euclidienne positionnée en x.

La fonction ϕ^o est alors définie comme le dual de ϕ.

Définition 8. *La fonction $\phi^o : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ est définie par*

$$\phi^o(x, \xi^*) := \sup\left\{\xi^* \cdot \xi\ ;\ \xi \in B_\phi(x)\right\}$$

Définition 9. *On définit $M(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des couples d'anisotropie (ϕ, ϕ^o) tels que les fonctions ϕ et ϕ^o soient strictement convexes et de classe $C^2\left(\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})\right)$.*

Présentons quelques exemples de calcul explicite de ϕ^o.

– Lorsque ϕ est une norme l^p,

$$\phi(x,\xi) = |\xi|_{l^p}, \quad 1 < p < \infty,$$

alors l'inégalité de Hölder permet d'obtenir que la fonction ϕ^o est la norme l^q où q satisfait $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

– Si l'anisotropie ϕ est définie par

$$\phi(x,\xi) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} a_i \xi_i^2}$$

avec des a_i strictement positifs, alors ϕ^o est donnée par

$$\phi^o(x,\xi) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} a_i^{-1} \xi_i^2}.$$

En effet, pour tout $\eta \in \mathbb{R}^d$, il existe $\xi \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\phi^o(x,\eta) = \frac{\eta \cdot \xi}{\phi(x,\xi)}.$$

Mais dans ce cas,

$$\phi^o(x,\eta) = \frac{1}{\phi(x,\xi)} \sum_{i=1}^{d} \eta_i \xi_i = \frac{1}{\phi(x,\xi)} \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{1}{\sqrt{a_i}} \eta_i\right) \left(\sqrt{a_i} \xi_i\right) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} a_i^{-1} \eta_i^2}.$$

Cette borne est de plus atteinte pour $\xi = \left(a_1^{-1}\eta_1, \ldots, a_d^{-1}\eta_d\right)$ et il en ressort que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\phi^o(x,\xi) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} a_i^{-1} \xi_i^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

– Un dernier exemple est le cas des anisotropies dépendant de la variable d'espace x mais isotropes en ξ : $\phi(x,\xi) = a(x)|\xi|$, où la fonction $x \to a(x)$ est strictement positive et bornée. Il est alors facile de voir que dans ce cas, $\phi^o(x,\xi) = \frac{1}{a(x)}|\xi|$.

Lorsque les anisotropies ne sont pas locales, c'est-à-dire lorsqu'elles ne dépendent pas de la variable d'espace, $\phi(\xi,x) = \phi(\xi)$, on appelle B_ϕ la forme de Wulff et $B_{\phi^o} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^d \ ; \ \phi^o(\xi) \leq 1\right\}$ le diagramme de Frank.

5.1.2 Propriétés de dualité entre ϕ et ϕ^o

Le rapport de dualité entre ϕ et ϕ^o s'exprime aussi sous la forme des lemmes suivants, qui seront très utiles par la suite. Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\phi_\xi(x,\xi) = \nabla_\xi \phi(x,\xi) \quad \text{et} \quad \phi_x(x,\xi) = \nabla_x \phi(x,\xi).$$

Les fonctions ϕ et ϕ^o sont homogènes de degré 1 en ξ, ainsi, $\forall t > 0$,

$$\phi_\xi(x,t\xi) = \frac{t}{|t|}\phi_\xi(x,\xi), \qquad \phi_{\xi\xi}(x,t\xi) = \frac{1}{|t|}\phi_{\xi\xi}(x,\xi),$$

$$\phi^o_\xi(x,t\xi^*) = \frac{t}{|t|}\phi^o_\xi(x,\xi^*), \qquad \phi^o_{\xi\xi}(x,t\xi^*) = \frac{1}{|t|}\phi^o_{\xi\xi}(x,\xi^*),$$

et

$$\phi(x,\xi) = \phi_\xi(x,\xi)\cdot\xi, \tag{5.1}$$
$$\phi^o(x,\xi^*) = \phi^o_\xi(x,\xi^*)\cdot\xi^*. \tag{5.2}$$

Lemme 3. *Soit $\phi \in M(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout x de $\mathbb{R}^d$ et tout couple (ξ,ξ^*) de $\left(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\right)^2$,*

$$\phi\left(x,\phi^o_\xi(x,\xi^*)\right) = \phi^o\left(x,\phi_\xi\left(x,\xi\right)\right) = 1.$$

Démonstration du lemme 3.

Pour plus de lisibilité, nous supposons que la fonction ϕ n'a pas de dépendance spatiale, c'est à dire $\phi(x,\xi) = \phi(\xi)$. Soit $\eta \in \mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, et

$$\phi^o(\eta) = \sup_\xi \left\{\eta\cdot\xi\ ;\ \phi(\xi)\le 1\right\}.$$

Supposons que ce maximum soit atteint pour $\xi = \eta^*$, $\phi^o(\eta) = \eta\cdot\eta^*$. Alors, $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$, la fonction

$$f_\xi : t \to \eta\cdot\left(\frac{\eta^*+t\xi}{\phi(\eta^*+t\xi)}\right)$$

admet une dérivée nulle en $t=0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f'_\xi(t) &= \frac{\eta\cdot\xi}{\phi(\eta^*+t\xi)} - \frac{\left(\eta\cdot(\eta^*+t\xi)\right)\left(\phi_\xi(\eta^*+t\xi)\cdot\xi\right)}{\phi(\eta^*+t\xi)^2} \\ f'_\xi(t)_{|t=0} &= \frac{\eta\cdot\xi}{\phi(\eta^*)} - \frac{\left(\eta\cdot\eta^*\right)\left(\phi_\xi(\eta^*)\cdot\xi\right)}{\phi(\eta^*)^2} = 0 \end{aligned}$$

Cette égalité est vérifiée pour tout $\xi\in\mathbb{R}^d$, il en ressort que

$$\phi(\eta^*)\eta = (\eta\cdot\eta^*)\,\phi_\xi(\eta^*) = \phi^o(\eta)\phi_\xi(\eta^*).$$

Avec $\phi(\eta^*) = 1$ et en appliquant ϕ^o à l'égalité précédente, on obtient

$$\phi^o(\phi_\xi(\eta^*)) = 1.$$

Comme ϕ_ξ est homogène de degré zéro, on en déduit que $\forall\xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$,

$$\phi^o(\phi_\xi(\xi)) = 1.$$

□

Lemme 4. *Soit $\phi \in M(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout x de $\mathbb{R}^d$ et tout couple (ξ,ξ^*) de $\left(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\right)^2$,*

$$\phi^o(x,\xi^*)\phi_\xi(x,\phi^o_\xi(x,\xi^*)) = \xi^*,$$
$$\phi(x,\xi)\phi^o_\xi(x,\phi_\xi(x,\xi)) = \xi.$$

Démonstration du lemme 4.

Nous supposons une nouvelle fois que la fonction ϕ n'a pas de dépendance spatiale. Soit $\xi\in\mathbb{R}^d$ tel que $\phi(\xi) = 1$, alors, avec $\eta = \phi_\xi(\xi)$ et $\eta^* = \phi^o_\xi(\eta)$,

$$\begin{aligned} &\phi(\xi) = 1 \\ &\xi.\eta = \xi.\phi_\xi(\xi) = \phi(\xi) = 1 \quad \text{d'après l'égalité 5.1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\phi(\eta^*) &= \phi(\phi_\xi^o(\eta)) = 1 \quad \text{d'après le lemme 3}\\ \eta.\eta^* &= \eta.\phi_\xi^o(\eta) = \phi^o(\eta) = \phi^o(\phi_\xi(\xi)) = 1\end{aligned}$$

Mais d'après la définition de la fonction ϕ^o,

$$\phi^o(\eta) = \sup_{\tilde{\xi}} \left\{ \eta.\tilde{\xi} \ ; \ \phi(\tilde{\xi}) \leq 1 \right\} = 1$$

Ce maximum est donc atteint à la fois pour $\tilde{\xi} = \xi$ et pour $\tilde{\xi} = \eta^*$. Mais comme ϕ est strictement convexe, on en déduit que $\xi = \eta^*$ ou encore $\xi = \phi_\xi^o(\phi_\xi(\xi))$.

Alors, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, l'égalité précédente appliquée à $\dfrac{\xi}{\phi(\xi)}$ montre que $\dfrac{\xi}{\phi(\xi)} = \phi_\xi^o(\phi_\xi(\xi))$ car ϕ_ξ est homogène de degré zéro.

□

Définition 10. *Soit $T(x,.)$ et $T^o(x,.)$ les deux applications de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définies par*

$$\begin{cases} T(x,\xi) = \phi\,(x,\xi)\,\phi_\xi\,(x,\xi) \\ T^o(x,\xi) = \phi^o(x,\xi)\phi_\xi^o\,(x,\xi) \end{cases}$$

Lemme 5. *Soit $\phi \in M(\mathbb{R}^d)$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^d$,*

$$TT^o = T^oT = I_d \quad \textit{dans} \quad \mathbb{R}^d$$

Démonstration du lemme 5.
Soit $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} TT^o(\xi) &= T(\phi^o(x,\xi)\phi_\xi^o(x,\xi)) \\ &= \phi\left(x, \phi^o(x,\xi)\ \phi_\xi^o(x,\xi)\right)\ \phi_\xi\left(x, \phi^o(x,\xi)\phi_\xi^o(x,\xi)\right) \\ &= \phi^o(x,\xi)\ \phi\left(x, \phi_\xi^o(x,\xi)\right)\ \phi_\xi(x, \phi_\xi^o(x,\xi)) \\ &= \phi^o(x,\xi)\ \phi_\xi\left(x, \phi_\xi^o(x,\xi)\right) \\ &= \xi \end{aligned}$$

□

5.1.3 Définition de quelques outils de la géométrie de Finsler

Nous pouvons maintenant définir les notions de dérivation et de mesure dans la géométrie de Finsler :

Définition 11. *Définition d'un gradient, d'une divergence et d'un laplacien anisotrope :*
Soit $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $\eta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ deux fonctions régulières. On définit alors
– le gradient anisotrope de u :

$$\nabla_\phi u = T^o(\nabla u),$$

– la divergence anisotrope de η :

$$\operatorname{div}_\phi \eta = \operatorname{div} \eta + \eta \cdot \nabla\left(log(det_d\phi)\right), \quad \textit{où} \quad det_d\phi(x) = |B_\phi(x)|^{-1}$$

– *le laplacien anisotrope de u :*

$$\triangle_\phi u = \operatorname{div}_\phi \nabla_\phi u.$$

En reprenant les exemples d'anisotropies précédents, ces opérateurs s'explicitent sous la forme :
– avec $\phi^o(\xi) = |\xi|_{l^s} = (\xi_1^s + \xi_2^s)^{\frac{1}{s}}$ telle que s soit entier et pair, alors

$$\nabla_\phi u = ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{1/s-1} \begin{pmatrix} (\partial_1 u)^{s-1} \\ (\partial_2 u)^{s-1} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{div}_\phi \eta = \operatorname{div} \eta,$$

et,

$$\begin{aligned} \triangle_\phi u &= \partial_{11} u\ (s-1)(\partial_1 u)^{s-2}\ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-1} \\ &+ \partial_{22} u\ (s-1)(\partial_2 u)^{s-2}\ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-1} \\ &+ \partial_{11} u\ (2-s)\ (\partial_1 u)^{2s-2}\ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-2} \\ &+ \partial_{22} u\ (2-s)\ (\partial_2 u)^{2s-2}\ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-2} \\ &+ 2\ \partial_{12} u\ (2-s)\ (\partial_1 u)^{s-1}\ (\partial_1 u)^{s-1}\ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-2}. \end{aligned}$$

– Avec $\phi^o(\xi) = \sqrt{\sum_{i=1}^d a_i \xi_i^2}$, alors

$$\nabla_\phi u = (a_1\xi_1, a_2\xi_2 \cdots a_d\xi_d), \quad \operatorname{div}_\phi \eta = \operatorname{div} \eta \quad \text{et} \quad \triangle_\phi u = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

– Enfin, lorsque $\phi^o(x,\xi) = a(x)|\xi|$, alors $w_d\ det_d(\phi) = \frac{1}{a(x)^d}$ et

$$\operatorname{div}_\phi \eta = \operatorname{div} \eta + \eta.\nabla \left[log \left(\frac{1}{a(x)^d} \right) \right] = \operatorname{div} \eta - d\ \frac{\eta.\nabla a}{a},$$

$$\nabla_\phi u = T^o(\nabla u) = \phi^o(x, \nabla u)\phi_\xi^o(x, \nabla u) = a(x)^2\ \nabla u,$$

$$\triangle_\phi u = a(x)^2 \triangle u - (d-2)a(x)\nabla a.\nabla u.$$

Définition 12. *Définition d'un couple de vecteurs normaux (n_ϕ, ν_ϕ) et d'une coubure anisotrope κ_ϕ à une interface $\partial\Omega$:*

Pour un domaine régulier Ω (au moins de classe C^2) de $\mathbb{R}^d$ tel que u soit une fonction level set de Ω,

$$\Gamma = \partial\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^d\ ;\ u(x) = 0 \right\},$$

Alors, $\forall x \in \partial\Omega$, on note $\nu(x) = \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}$ le vecteur normal à $\partial\Omega(x)$ pour la géométrie euclidienne et,
– *le vecteur normal anisotrope n_ϕ est défini par,*

$$n_\phi(x) := \phi_\xi^o(x, \nabla u(x)) = \frac{\nabla_\phi u}{\phi^o(x, \nabla u)}.$$

Le terme $\phi^o(x, \nabla u)$ renormalise le vecteur $\nabla_\phi u$ et permet de vérifier $\phi(x, n_\phi) = 1$.
– *le vecteur normal anisotrope dual ν_ϕ est défini par*

$$\nu_\phi(x) := \frac{\nu(x)}{\phi^o(x, \nu(x))} = \frac{\nabla u}{\phi^o(x, \nabla u)},$$

et $\phi^o(x, \nu_\phi) = 1$.

– *la courbure anisotrope* κ_ϕ *est définie par*

$$\kappa_\phi = -\operatorname{div}_\phi n_\phi = -\operatorname{div} n_\phi - n_\phi.\nabla\left(log(det_d\phi)\right) = -F(x, \nabla u, \nabla^2 u),$$

où

$$F(x,p,X) = \sum_{i=1}^{d} \phi^o_{x^i,\xi^i}(x,p) + \sum_{i,j=1}^{d} \phi^o_{\xi^i\xi^j}(x,p)X_{ij} + \sum_{i=1}^{d} \phi^o_{\xi^i}(x,p)\frac{\partial}{\partial x^i}(log(det_d\phi))$$

On définit de plus le vecteur de courbure anisotrope H_ϕ *par*

$$H_\phi = \kappa_\phi \nu_\phi$$

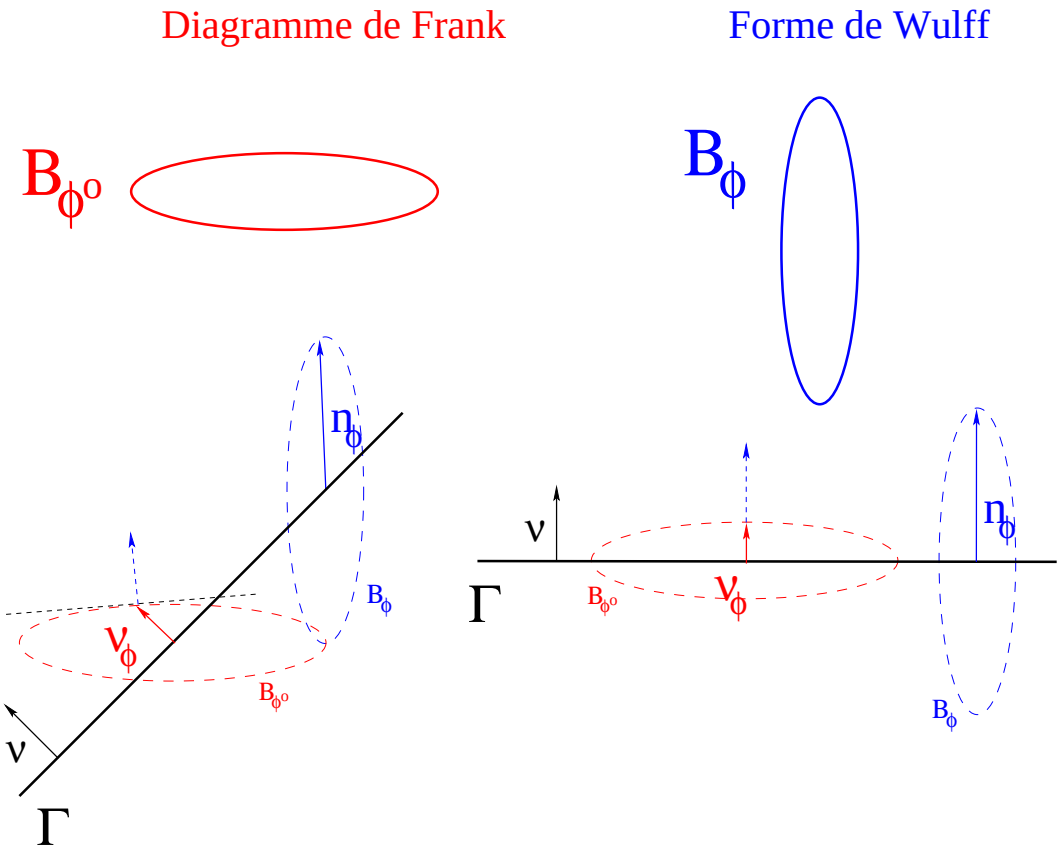


FIG. 5.1 – Méthode géométrique qui détermine le couple (n_ϕ, ν_ϕ) à partir de ν. Dans cette exemple, l'anisotropie est égale à $\phi(\xi) = \sqrt{4\xi_1^2 + \frac{1}{4}\xi_2^2}$

La figure 5.1 explicite une technique géométrique pour déterminer le couple (n_ϕ, ν_ϕ) à partir de ν et la figure 5.2 montre des exemples de couple (n_ϕ, ν_ϕ) à une interface $\partial\Omega$ représentant un cercle. La propriété suivante exprime de plus le rapport de dualité entre n_ϕ et ν_ϕ.

Proposition 14.

$$n_\phi = T^o(\nu_\phi), \qquad \nu_\phi = T(n_\phi)$$

et

$$n_\phi.\nu_\phi = 1$$

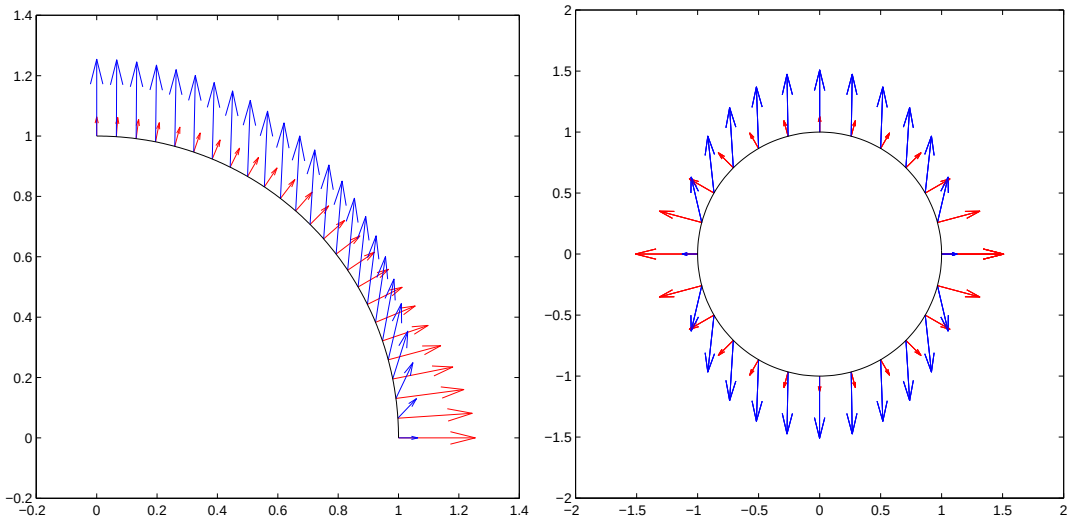


FIG. 5.2 – Exemple de couple (n_ϕ, ν_ϕ) dans le cas de l'anisotropie $\phi(\xi) = \sqrt{4\xi_1^2 + \frac{1}{4}\xi_2^2}$. A gauche, $\partial\Omega$ représente un quart de cercle. A droite, $\partial\Omega$ représente un cercle.

Démonstration de la proposition 14.

Tout d'abord,

$$T^o(\nu_\phi) = T^o\left(\frac{\nabla u}{\phi^o(x, \nabla u)}\right) = \frac{\nabla_\phi u}{\phi^o(x, \nabla u)} = n_\phi,$$

$$T(n_\phi) = ToT^o\,(\nu_\phi) = \nu_\phi \quad \text{d'après le lemme 5.}$$

Par ailleurs,

$$n_\phi.\nu_\phi = \frac{\phi^o(x, \nabla u)\ \phi^o_\xi(x, \nabla u).\nabla u}{\phi^o(x, \nabla u)^2} = \frac{\phi^o(x, \nabla u)^2}{\phi^o(x, \nabla u)^2} = 1.$$

□

Nous pouvons enfin définir les notions de mesure, de périmètre anisotrope et de distance anisotrope.

Définition 13.

- *On note tout d'abord* $det_d\phi : \mathbb{R}^d \to]0, +\infty[$, *la fonction continue et différentiable définie par l'expression*

$$det_d\phi(x) = \Big(\mathcal{H}^d(B_\phi(x))\Big)^{-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

  où $d\mathcal{H}^d$ *est la mesure euclidienne sur* $\mathbb{R}^d$.
- *la mesure* $d\mathcal{H}^d_\phi$ *anisotrope est définie par*

$$d\mathcal{H}^d_\phi = \omega_d\ det_d\phi\ d\mathcal{H}^d.$$

  où ω_d *représente le volume de la boule unité en dimension* d. *Ainsi,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\ d\mathcal{H}^d_\phi = \int_{\mathbb{R}^d} f\ \omega_d\ det_d\phi\ d\mathcal{H}^d = \omega_d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) det_d\phi(x) dx.$$

– *Soit Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^d$, le périmètre anisotrope P_ϕ de Ω est défini par*

$$P_\phi(\Omega) = \omega_d \int_{\partial\Omega} \phi^o(x, \nu(x))\ det_d\phi\ d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial\Omega} d\mathcal{P}_\phi^{d-1}$$

où

$$d\mathcal{P}_\phi^{d-1} = \omega_d\ \phi^o(x, \nu(x))\ det_d\phi\ d\mathcal{H}^{d-1}$$

Définition 14. *Pour tout couple $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^d\right)^2$, la distance anisotrope $d_\phi(x, y)$ entre x et y est définie par*

$$d_\phi(x, y) = \inf_\gamma \left\{ \int_0^1 \phi(\gamma, \gamma')dt\ ;\ \gamma \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}^d), \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y \right\}$$

On définit de plus la fonction distance signée anisotrope $d_\phi(x, \partial\Omega)$ à un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ par

$$d_\phi(x, \partial\Omega) = \inf_y \{d_\phi(x, y)\ ;\ y \in \Omega\} - \inf_y \left\{ d_\phi(x, y)\ ;\ y \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \right\}$$

Proposition 15. *Soit $\phi \in M(\mathbb{R}^d)$ et Ω un domaine fermé borné de $\mathbb{R}^d$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}^d$ tel que $d_\phi(x, \Omega)$ soit différentiable en x,*

$$\phi^o\left(\nabla d_\phi(x, \Omega)\right) = 1$$

Le lecteur trouvera la démonstration de cette proposition dans les travaux de Paolini et al, voir par exemple le théorème 3.1 de [14]. Voici maintenant plusieurs exemples d'estimation de la courbure anisotrope :

Exemple 1

Soit $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $0 < \lambda \leq a \leq \Lambda$. On considère $\phi(x, \xi) = \frac{1}{a(x)}|\xi|$ et $\phi^o(x, \xi^*) = a(x)|\xi^*|$.

Le volume de la boule B_ϕ est égal à $|B_\phi| = \omega_d\ a(x)^d$, et donc

$$det_d\phi = \frac{1}{w_d a^d} \quad \text{et} \quad \nabla(log(det_d\phi)) = -d\frac{\nabla a}{a}$$

Le périmètre anisotrope $P_\phi(\Omega)$ s'écrit alors

$$P_\phi(\Omega) = \int_{\partial\Omega} a(x)^{1-d} d\mathcal{H}^{d-1}$$

et

$$n_\phi = a\nu, \qquad div(n_\phi) = \nabla a.\nu - a\kappa \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

La courbure anisotrope est donnée par

$$\kappa_\phi = a\kappa + (d-1)\nabla a.\nu \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

Exemple 2

En dimension 2, l'expression de la courbure anisotrope κ_ϕ associée à une anisotropie $\phi \in M(\mathbb{R}^d)$ s'écrit

$$\kappa_\phi = \kappa[\nu^\perp.\phi^o_{\xi\xi}(x, \nu)\nu^\perp] - \sum_{i=1}^{2} \phi^o_{x^i\xi^i}(x, \nu) - \phi^o_\xi(x, \nu).\nabla(log(det_2\phi))$$

Exemple 3

Des exemples courants sont les anisotropies qui s'expriment sous la forme $\phi^o(x, \xi) = \rho\gamma(\theta)$ en

dimension 2, où $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ et $\theta = artan\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)$.
La courbure anisotrope s'identifie à

$$\kappa_\phi = \kappa(\gamma + \gamma^{''})$$

En effet,

$$\phi^o_{\xi_1} = \frac{d\phi^o}{d\theta}\frac{d\theta}{d\xi_1} + \frac{d\phi^o}{d\rho}\frac{d\rho}{d\xi_1} = \rho\gamma^{'}\ \frac{-\sin(\theta)}{\rho} + \gamma\ \cos(\theta) = \gamma\ \cos(\theta) - \gamma^{'}\sin(\theta)$$

Et par le même procédé,

$$\phi^o_{\xi_1\xi_1} = \rho^{-1}(\gamma+\gamma^{''})\sin^2(\theta)\ \ ,\ \phi^o_{\xi_1\xi_2} = -\rho^{-1}(\gamma+\gamma^{''})\sin(\theta)\cos(\theta)\ \text{ et }\ \phi^o_{\xi_2\xi_2} = \rho^{-1}(\gamma+\gamma^{''})\cos^2(\theta)$$

5.1.4 Généralisation de quelques propriétés usuelles du cas euclidien

Nous allons maintenant montrer une formule de Green anisotrope et exprimer le lien entre $\triangle_\phi$, d_ϕ et κ_ϕ.

Proposition 16. *Une formule de Green anisotrope :*
Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ et u et g deux fonctions définies respectivement dans les espaces $C^1(\Omega;\mathbb{R})$ et $C^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\int_\Omega u\ \operatorname{div}_\phi(g)\ d\mathcal{H}^d_\phi + \int_\Omega \nabla u.g\ d\mathcal{H}^d_\phi = \int_{\partial\Omega} u\ g.\nu_\phi\ d\mathcal{P}^{d-1}_\phi$$

Démonstration de la proposition 16.
La définition de la divergence anisotrope implique que

$$\begin{aligned} u\ \operatorname{div}_\phi g\ \omega_d\ det_d\phi &= \omega_d\ u\ \operatorname{div} g\ det_d\phi + \omega_d\ ug.\nabla\left(log(det_d\phi)\right)\ det_d\ \phi \\ &= \operatorname{div}(ug\ det_d\phi)\omega_d - \nabla u.g\ \omega_d\ det_d\phi \end{aligned}$$

En intégrant sur Ω, et en appliquant la formule de Green,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u\ \operatorname{div}_\phi g\ d\mathcal{H}^d_\phi &= \int_\Omega u\ \operatorname{div}_\phi g\ \omega_d\ det_d\phi d\mathcal{H}^d \\ &= \int_\Omega \left[\operatorname{div}(ug\ det_d\phi)\omega_d - \nabla u.g\ \omega_d\ det_d\phi\right] d\mathcal{H}^d \\ &= \omega_d \int_{\partial\Omega} u\ g.\nu\ d\mathcal{H}^{d-1} - \int_\Omega \nabla u.g\ d\mathcal{H}^d_\phi \\ &= \int_{\partial\Omega} u\ g.\nu_\phi\ d\mathcal{P}^{d-1}_\phi - \int_\Omega \nabla u.g\ d\mathcal{H}^d_\phi \end{aligned}$$

□

Lorsque Ω est un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^d$, l'expression de la courbure κ sur l'interface $\partial\Omega$ vérifie

$$\kappa = -\triangle d(x,\Omega)$$

La propriété suivante généralise cette égalité dans le cas anisotrope.

Proposition 17. *Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$ de classe C^2 et $d_\phi(x,\Omega)$ la fonction distance signée anisotrope à Ω, alors*

$$\nabla d_\phi(x,\Omega) = \nu_\phi \quad sur \quad \partial\Omega$$

et

$$\kappa_\phi = -\triangle_\phi d_\phi(x,\Omega) \quad sur \quad \partial\Omega$$

Démonstration de la propriété 17.
Soit $x \in \Gamma$. Le vecteur ∇d_ϕ est orthogonal à Γ pour le produit scalaire euclidien car le contour $\partial\Omega$ est bien représenté par la ligne de niveau zéro de d_ϕ. Il existe donc un réel μ tel que $\nabla d_\phi = \mu\nu(x)$. La proposition 15 montre de plus que $\phi^o(x,\nabla d_\phi) = 1$, on en déduit ainsi que $\nu_\phi = \nabla d_\phi$ et,

$$\begin{aligned}\kappa_\phi &= -\operatorname{div}_\phi(n_\phi) = -\operatorname{div}_\phi(T^o(\nu_\phi)) \\ &= -\operatorname{div}_\phi(T^o(\nabla d_\phi)) = -\operatorname{div}_\phi(\nabla_\phi d_\phi)) = -\triangle_\phi d_\phi\end{aligned}$$

□

5.2 Périmètre anisotrope et mouvement par courbure moyenne anisotrope

Le mouvement par courbure moyenne anisotrope $\Omega(t)$ est un mouvement de domaine où l'interface $\partial\Omega$ évolue avec une vitesse normale égale à

$$V_n = \phi^o(\vec{n})\kappa_\phi.$$

Comme pour le cas isotrope, nous allons montrer que le mouvement par courbure moyenne anisotrope est le mouvement qui fait décroitre le plus rapidement le périmètre anisotrope P_ϕ.

Puis nous montrerons que les formes qui minimisent le périmètre anisotrope à volume fixé sont les formes de Wulff B_ϕ.

5.2.1 Première variation du périmètre anisotrope

Le théorème suivant présente un résultat de dérivée de forme du périmètre anisotrope.

Théorème 7. *Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ de classe C^2, et $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ tels que $\Omega = \{u \leq 0\}$, $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ u(x) = 0\}$ et $\nabla u \neq 0$ sur $\partial\Omega$. Soit U un voisinage de $\partial\Omega$ et $g \in C_0^1(U;\mathbb{R}^d)$. On note Φ_t l'application de $\Phi_t : U \to \mathbb{R}^d$ définie par $\Phi_t(x) = x + t\ g(x)$. La fonction Φ_t est alors étendue à l'extérieur de l'ouvert U par l'application identité. Ainsi, pour t suffisamment petit, le flot $\Omega_t := \Phi_t(\Omega)$ est bien défini et*

$$\frac{d}{dt}P_\phi(\Omega_t)_{|t=0} = -\int_{\partial\Omega} H_\phi.g\ dP_\phi^{d-1}$$

De plus, dans le cas particulier où $g = hn_\phi$, l'égalité précédente se réécrit sous la forme

$$\frac{d}{dt}P_\phi(\Omega_t)_{|t=0} = -\int_{\partial\Omega} \kappa_\phi h\ dP_\phi^{d-1}$$

La preuve que nous allons exposer est issue de [13]. Cette démonstration nécessite tout d'abord le lemme suivant

Lemme 6.

$$\phi^o_{x^i}(x,\nu_\phi) + \sum_j n^j_\phi \frac{\partial(\nu_\phi)_j}{\partial x^i} = 0$$

$$\phi_{x^i}(x,n_\phi) + \sum_j \nu^j_\phi \frac{\partial(n_\phi)_j}{\partial x^i} = 0$$

Et

$$\phi_x(x,n_\phi) = -\phi^o_x(x,\nu_\phi)$$

Démonstration du lemme 6.
La première égalité est obtenue en différenciant l'égalité $\phi^o(x,\nu_\phi) = 1$.

$$\begin{aligned} 0 &= \phi^o_{x^i}(x,\nu_\phi) + \phi^o_\xi(x,\nu_\phi)\frac{\partial \nu_\phi}{\partial x^i} \\ &= \phi^o_{x^i}(x,\nu_\phi) + T^o(\nu_\phi)\frac{\partial \nu_\phi}{\partial x^i} \quad \text{car} \quad \phi^o(x,\nu_\phi) = 1 \\ &= \phi^o_{x^i}(x,\nu_\phi) + \sum_j n^j_\phi \frac{\partial(\nu_\phi)_j}{\partial x^i} \end{aligned}$$

La deuxième égalité est obtenue de la même façon en différenciant $\phi(x,n_\phi) = 1$.
Enfin, en remarquant que $n_\phi.\nu_\phi = 1$, il ressort que

$$\sum_j n^j_\phi \frac{\partial(\nu_\phi)_j}{\partial x^i} = -\sum_j \nu^j_\phi \frac{\partial(n_\phi)_j}{\partial x^i},$$

et on en déduit la dernière égalité.

□

Démonstration du théorème 7.

Supposons pour l'instant que $g = h\ n_\phi$. Il existe un voisinage $\tilde{U}$ de $\partial\Omega$ tel que pour t suffisamment petit, la fonction

$$v(x + t\ h(x)\ n_\phi(x)) = u(x)$$

est correctement définie sur $\tilde{U}$, $\Omega_t = \{v(x) = 0\ ;\ x \in U\}$ et $\nabla v(x) \neq 0$ pour $x \in \partial E_t$. La fonction v est donc une fonction level set de Ω_t et

$$P_\phi(\Omega_t) \quad = \quad \omega_d \int_{\Omega_t} \phi^o \left[x, \frac{\nabla v}{|\nabla v|}\right] det_d\phi\ d\mathcal{H}^{d-1}$$

Les formules de changement de variable sur les surfaces (voir par exemple le lemme 2.24 de [102]) montrent que

$$P_\phi(\Omega_t) = \omega_d \int_{\partial\Omega} \phi^o \left[x + t\ h\ n_\phi, \frac{\nabla v(x + t\ h\ n_\phi)}{|\nabla v|(x + t\ h\ n_\phi)}\right] det_d\phi(x + t\ h\ n_\phi)\ Jac_{\partial\Omega}\,(x + t\ h\ n_\phi)\ d\mathcal{H}^{d-1}$$

où $Jac_{\partial\Omega}\,(x + t\ h\ n_\phi)$ représente la Jacobienne surfacique de $x + t\ h\ n_\phi$, définie par

$$Jac_{\partial\Omega}(x + t\ h\ n_\phi) = \left|Jac(x + t\ h\ n_\phi)^{-1}\ \nu\right| Jac(x + t\ h\ n_\phi)$$

et $Jac(x+t\ h\ n_\phi)$, la Jacobienne de $x+t\ h\ n_\phi$:

$$Jac(x+t\ h\ n_\phi)_{(i,j)} = \left[\frac{\partial}{\partial x^j}(x+t\ h\ n_\phi)_i\right]$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P_\phi(\Omega_t)_{|t=0} &= \omega_d \int_{\partial\Omega} \phi_x^o(x,\nu).n_\phi h\ det_d\phi(x)\ d\mathcal{H}^{d-1} \\
&+ \omega_d \int_{\partial\Omega} \phi_\xi^o(x,\nu).\frac{d}{dt}\left[\frac{\nabla v}{|\nabla v|}(x+th)n_\phi\right]_{|t=0} det_d\phi(x)\ d\mathcal{H}^{d-1} \\
&+ \int_{\partial\Omega} \nabla(log(det_d\phi)).n_\phi h d\mathcal{P}_\phi^{d-1} \\
&+ \omega_d \int_{\partial\Omega} \phi^o(x,\nu)\ det_d\phi(x)\ \frac{d}{dt}\left[Jac_{\partial\Omega}(x+t\ h\ n_\phi)\right]_{|t=0}\ d\mathcal{H}^{d-1} \\
&= I_1+I_2+I_3+I_4
\end{aligned}$$

Nous nous intéressons tout d'abord au **quatrième terme** :

$$\frac{d}{dt}\left[Jac_{\partial\Omega}(x+t\ h\ n_\phi)\right]_{|t=0}.$$

Le lemme 2.25 de [102] montre que

$$Jac_{\partial\Omega}(x+t\ h\ n_\phi) = 1+t[\mathrm{div}_{\partial\Omega}(hn_\phi)]+o(t)$$

où $\mathrm{div}_{\partial\Omega}$ est la divergence surfacique obtenue d'après l'expression suivante

$$\mathrm{div}_{\partial\Omega}(hn_\phi) = \mathrm{div}(hn_\phi)-(J\nu).\nu,$$

et J, la jacobienne de hn_ϕ :

$$J_{i,j} = \left[\frac{\partial}{\partial x^j}(hn_\phi^i)\right]_{i,j}.$$

Ainsi,

$$\frac{d}{dt}\left[Jac_{\partial\Omega}(x+t\ h\ n_\phi)\right]_{|t=0} = \mathrm{div}_{\partial\Omega}(hn_\phi) = \mathrm{div}(hn_\phi)-(J\nu).\nu$$

et

$$I_4 = \int_{\partial\Omega}(\mathrm{div}(h\ n_\phi)-(J\nu).\nu)d\mathcal{P}_\phi^{d-1}.$$

Nous nous intéressons maintenant **au deuxième terme** :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\nabla v(x+thn_\phi)}{|\nabla v(x+thn_\phi)|}\right]_{|t=0}$$

On rappelle que $v(x+t\ h(x)\ n_\phi(x)) = u(x)$. Ainsi $\nabla v = (Id+tJ)^{-1}\nabla u$ et

$$\frac{d}{dt}\nabla v_{|t=0} = -J\nabla u$$

Il ressort que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{\nabla v(x+thn_\phi)}{|\nabla v(x+thn_\phi)|}\right]_{|t=0} &= -\frac{J\nabla u}{|\nabla u|}+((J\nabla u).\nabla u)\frac{\nabla u}{|\nabla u|^3} \\
&= -J\nu+((J\nu).\nu)\nu
\end{aligned}$$

Et

$$I_2 = \int_{\partial\Omega} (-(J\nu_\phi).n_\phi + (J\nu).\nu) d\mathcal{P}_\phi^{d-1}$$

Nous étudions enfin le **premier terme** :

$$\omega_d \int_{\partial\Omega} \phi_x^o(x,\nu).n_\phi h \; det_d\phi(x) \; dH^{d-1}$$

Le lemme 6 implique que

$$\begin{aligned}
(J\nu_\phi)_i &= \sum_j (\nu_\phi)_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(hn_\phi^j\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} h + \sum_j (\nu_\phi)_j h \frac{\partial n_\phi^j}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} h - h\phi_{x_i}(x, n_\phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} h + h\phi_{x_i}^o(x,\nu_\phi)
\end{aligned}$$

Et

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} (J\nu_\phi - \nabla h).n_\phi \; d\mathcal{P}_\phi^{d-1}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} P_\phi(\Omega_t)_{|t=0} &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\
&= \int_{\partial\Omega} \mathrm{div}(n_\phi) h d\mathcal{P}_\phi^{d-1} + \int_{\partial\Omega} \nabla(log(det_d\phi)).n_\phi \; h \; d\mathcal{P}_\phi^{d-1} \\
&= -\int_{\partial\Omega} \kappa_\phi \; h \; d\mathcal{P}_\phi^{d-1}
\end{aligned}$$

La démonstration dans le cas d'un champ de vecteurs $g \in C^1(U;\mathbb{R}^d)$ quelconque s'établit en considérant la décomposition $g = g^\tau + (g.\nu_\phi)\, n_\phi$. Le champ de vecteurs g^τ est alors un champ de vecteur tangent à $\partial\Omega$ car

$$(g - (g\cdot\nu_\phi)\, n_\phi)\cdot\nu_\phi = g\cdot\nu_\phi - g\cdot\nu_\phi = 0$$

En reprenant la démonstration précédente avec g au lieu hn_ϕ, toutes les intégrales I_1, I_2, I_3 et I_4 sont linéaires en g, et la démonstration s'obtient en remarquant que g^τ n'a pas contribution dans la variation première du périmètre anisotrope. □

Définition 15. *Soit Ω un domaine borné régulier de R^d et $\Gamma = \partial\Omega$. Soit $\phi \in M(\mathbb{R}^d)$, alors l'ensemble $L^2_\phi(\Gamma,\mathbb{R}^d)$ est défini par l'ensemble des champs de vecteurs $g : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ tels que*

$$\|g\|^2_{\Gamma,\phi} = \int_\Gamma (\phi(x,g))^2 d\mathcal{P}_\phi^{d-1} < \infty$$

La variation du périmètre P_ϕ, noté dP_ϕ est interprétée comme un élément du dual de l'espace $L^2_\phi(\Gamma,\mathbb{R}^d)$. Enfin, la propriété suivante permet de montrer que la meilleure direction de descente pour minimiser P_ϕ est donnée par le mouvement par courbure moyenne anisotrope.

Proposition 18. *Le champ de vecteur $\frac{\kappa_\phi \; n_\phi}{\|\kappa_\phi \; n_\phi\|^2_{\Gamma,\phi}}$ est solution du problème*

$$\min_g \left\{ \langle dP_\phi \, , \, g\rangle \;\; ; \;\; g \in L^2_\phi(\Gamma,\mathbb{R}^d), \quad \|g\|_{\Gamma,\phi} \le 1 \right\}$$

Démonstration de la propriété 18.
Tout d'abord, avec $g = hn_\phi$ et $\phi(x,g) = h\phi(x,n_\phi) = h$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\begin{aligned}\langle dP_\phi\,,\,g\rangle &= -\int_{\partial\Omega}\kappa_\phi\ h\ d\mathcal{P}_\phi^{d-1}\\ &\geq -\sqrt{\int_{\partial\Omega}\kappa_\phi^2 d\mathcal{P}_\phi^{d-1}}\sqrt{\int_{\partial\Omega}\ h^2 d\mathcal{P}_\phi^{d-1}}\\ &\geq -\sqrt{\int_{\partial\Omega}\kappa_\phi^2 d\mathcal{P}_\phi^{d-1}}\end{aligned}$$

D'un autre côté, avec $g^* = \dfrac{\kappa_\phi n_\phi}{\sqrt{\int_{\partial\Omega}\ \kappa_\phi^2 d\mathcal{P}_\phi^{d-1}}}$, on vérifie simplement que

$$\|g^*\|_{\Gamma,\phi} = \int_\Gamma(\phi(x,g^*))^2 d\mathcal{P}_\phi^{d-1} = \frac{1}{\int_{\partial\Omega}\ \kappa_\phi^2 d\mathcal{P}_\phi^{d-1}}\int_\Gamma(\phi(x,\kappa_\phi n_\phi))^2 d\mathcal{P}_\phi^{d-1} = 1$$

Et

$$\langle dP_\phi\,,\,g^*\rangle = -\frac{\int_{\partial\Omega}\kappa_\phi^2\ dP_\phi^{d-1}}{\sqrt{\int_{\partial\Omega}\kappa_\phi^2 dP_\phi^{d-1}}} = -\sqrt{\int_{\partial\Omega}\kappa_\phi^2 dP_\phi^{d-1}}$$

□

Remarque 20. *La première proposition du théorème 7 montre que dans le cas général où g vérifie $\|g\|^2_{\Gamma,\phi} < +\infty$,*

$$\langle dP_\phi\,,\,g\rangle = -\int_{\partial\Omega}\kappa_\phi\ g.\nu_\phi\ d\mathcal{P}_\phi^{d-1}.$$

Ainsi,

$$g^{**} = \frac{\phi^o(x,\nu)\kappa_\phi\nu}{\|\phi^o(x,\nu)\kappa_\phi\nu\|_{L^2_\phi(\Gamma,\mathbb{R}^d)}}$$

est aussi une solution du problème de minimisation

$$\min_g\{\langle dP_\phi\,,\,g\rangle\ ;\ \|g\|_{\Gamma,\phi}\leq 1\},$$

car

$$\langle dP_\phi\,,\,g^{**}\rangle = -\frac{\int_{\partial\Omega}\kappa_\phi^2\phi^o(x,\nu)\nu.\nu_\phi\ d\mathcal{P}_\phi^{d-1}}{\sqrt{\int_{\partial\Omega}\kappa_\phi^2\ d\mathcal{P}_\phi^{d-1}}} = -\sqrt{\int_{\partial\Omega}\kappa_\phi^2\ d\mathcal{P}_\phi^{d-1}}$$

Une interface suit donc un mouvement par courbure moyenne d'anisotropie ϕ si la vitesse de cette interface vérifie $\vec{v} = \kappa_\phi n_\phi$ ou $\vec{v} = \phi^o(\nu)\kappa_\phi\nu$.

5.2.2 Forme de Wulff

L'anisotropie est supposée non locale $\phi(x,\xi) = \phi(\xi)$ et l'objectif est de montrer que la courbure anisotrope κ_ϕ est constante sur les formes de Wulff.

Définition 16. *Les formes de Wulff B_{ϕ,R_0,x_0} sont définies par*

$$B_{\phi,R_0,x_0} = \left\{y\in\mathbb{R}^d\ ;\ \phi(y-x_0)\leq R_0\right\},$$

avec $R_0 > 0$. et $x_0\in\mathbb{R}^d$.

Nouvelle expression de la courbure anisotrope

L'interface $\partial\Omega$ est supposée régulière de classe C^2. Nous allons déterminer plusieurs expressions de κ_ϕ au point $x^* \in \partial\Omega$ à partir de l'égalité $\kappa_\phi(x^*) = -\triangle_\phi d_\phi(x^*)$ où d_ϕ représente la distance anisotrope signée à Ω.
Nous utilisons pour cela un développement limité à l'ordre 2 de d_ϕ afin de faciliter l'expression de $\triangle_\phi d_\phi(x^*)$

$$\tilde{d}_\phi(x,\Omega) = d_\phi(x^*,\Omega) + \langle \nu_\phi\,,\, x - x^* \rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\langle B(x-x^*)\,,\, x-x^*\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)}$$

où $\nu_\phi = \nabla d_\phi(x^*) = \frac{\nabla d(x^*)}{\phi^o(\nabla d(x^*))} = \frac{\nu}{\phi^o(\nu)}$ et $B = \nabla^2 d_\phi(x^*)$.

Ainsi,

$$\begin{cases} \nabla\tilde{d}_\phi(x) = \nu_\phi + B(x-x^*) \\ T^o(\nabla\tilde{d}_\phi)(x) = \phi^o\left(\nu_\phi + B(x-x^*)\right)\phi^o_\xi(\nu_\phi + B(x-x^*)) \end{cases}$$

Et alors

$$\begin{aligned} \triangle_\phi d_\phi(x^*) &= \phi^o(\nu_\phi)\left\langle B\,,\, \phi^o_{\xi\xi}(\nu_\phi)\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^{d\times d})} + \left\langle B\phi^o_\xi(\nu_\phi)\,,\, \phi^o_\xi(\nu_\phi)\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \phi^o(\nu)\left\langle B\,,\, \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^{d\times d})} + \left\langle B\phi^o_\xi(\nu)\,,\, \phi^o_\xi(\nu)\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Lemme 7. *Avec les notations $B = \nabla^2 d_\phi(x^*)$ et $A = \nabla^2 d(x^*)$,*

$$\begin{cases} \left\langle B\phi^o_\xi(\nu)\,,\, \phi^o_\xi(\nu)\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} = 0 \\ \kappa_\phi(x^*) = -\phi^o(\nu)\left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\,,\, B\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^{d\times d})} = -\left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\,,\, A\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^{d\times d})} \end{cases}$$

Remarque 21.
Les propriétés géométriques de la fonction distance impliquent que

$$\left\langle \nabla^2 d\ \nabla d\,,\, \nabla d\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} = 0$$

Ce lemme est donc une généralisation de cette égalité dans le cas anisotrope avec

$$\left\langle \nabla^2 d_\phi \nabla_\phi d_\phi\,,\, \nabla_\phi d_\phi\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{\phi^o(\nu)^2}\left\langle \nabla^2 d_\phi \phi^o_\xi(\nu)\,,\, \phi^o_\xi(\nu)\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

car $\phi^o_\xi(\nu) = \phi^o(\nu)\nabla_\phi d_\phi$.

Démonstration du lemme 7.
La définition de la fonction d_ϕ implique qu'au voisinage de $\partial\Omega$,

$$\nabla d_\phi = \nu_\phi = \frac{\nabla d}{\phi^o(\nabla d)}.$$

Ainsi, la hessienne de la fonction distance anisotrope vérifie sur ce voisinage

$$\left(\nabla^2 d_\phi\right)_{i,j} = \frac{1}{\phi^o(\nabla d)}\left(\nabla^2 d\right)_{i,j} - \frac{(\nabla d)_i\ \left(\sum_{k=1}^d \phi^o_{\xi_k}(\nabla d)(\nabla^2 d)_{k,j}\right)}{\phi^o(\nabla d)^2},\ \forall (i,j)\in[1,d]^2,$$

et

$$B = \nabla^2 d_\phi = \frac{1}{\phi^o(\nu)} A - \frac{1}{\phi^o(\nu)^2} \left[(\nu) \times \left(A\phi^o_\xi \right) \right].$$

Nous pouvons maintenant en déduire que $\left\langle B\phi^o_\xi(\nu)\,,\, \phi^o_\xi(\nu) \right\rangle = 0$. En effet,

$$\left\langle B\phi^o_\xi(\nu)\,,\, \phi^o_\xi(\nu) \right\rangle = \frac{1}{\phi^o(\nu)} \left\langle A\phi^o_\xi(\nu)\,,\, \phi^o_\xi(\nu) \right\rangle - \frac{1}{\phi^o(\nu)^2} \left\langle \left[(\nu) \times \left(A\phi^o_\xi \right) \right] \phi^o_\xi(\nu)\,,\, \phi^o_\xi(\nu) \right\rangle,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi^o(\nu)^2} \left\langle \left[(\nu) \times \left(A\phi^o_\xi \right) \right] \phi^o_\xi(\nu)\,,\, \phi^o_\xi(\nu) \right\rangle &= \frac{\phi^o_\xi(\nu).\nu}{\phi^o(\nu)^2} \left\langle A\phi^o_\xi\,,\, \phi^o_\xi(\nu) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\phi^o(\nu)} \left\langle A\phi^o_\xi(\nu)\,,\, \phi^o_\xi(\nu) \right\rangle. \end{aligned}$$

La première égalité est démontrée. Par ailleurs, le terme de l'égalité $\phi^o(\nu) \left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\,,\, B \right\rangle$ s'identifie à

$$\begin{aligned} \phi^o(\nu) \left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\,,\, B \right\rangle &= \left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\,,\, A \right\rangle + \frac{1}{\phi^o(\nu)} \left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\,,\, \nu \times \left(A\phi^o_\xi \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\,,\, A \right\rangle + \frac{1}{\phi^o(\nu)} \left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\nu\,,\, A\phi^o_\xi \right\rangle \\ &= \left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\,,\, A \right\rangle \end{aligned}$$

L'homogénéité de ϕ^o implique en effet que pour tout $\xi \neq 0$, $\phi(\xi) = \phi_\xi.\xi$ et $\phi_\xi(\xi) = \phi_{\xi\xi}(\xi)\xi + \phi_\xi(\xi)$. Ainsi, pour tout $\xi^* \in (\mathbb{R}^*)^d$, $\phi_{\xi\xi}(\xi^*)\xi^* = 0$. □

Proposition 19. *Les deux expressions suivantes permettent d'obtenir une nouvelle expression de la courbure anisotrope k_ϕ,*

$$\kappa_\phi(x^*) = -\left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nabla d(x^*))\,,\, \nabla^2 d(x^*) \right\rangle,$$

et

$$\kappa_\phi(x^*) = -\phi^o(\nabla d(x^*)) \left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nabla d(x^*))\,,\, \nabla^2 d_\phi(x^*) \right\rangle.$$

La démonstration est immédiate d'après le lemme 7. Nous retrouvons par exemple l'expression standard en dimension 2 :

$$\begin{aligned} \kappa_\phi &= -\left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\,,\, \nabla^2 d(x^*) \right\rangle \\ &= \kappa \left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\nu^\perp\,,\, \nu^\perp \right\rangle, \end{aligned}$$

car $\nabla^2 d$ admet deux valeurs propres, zéro et $-\kappa$ respectivement dans les directions ν et $\nu^\perp$.

Estimation de la courbure anisotrope d'une forme de Wulff

Proposition 20. *La courbure anisotrope κ_ϕ est constante sur les formes de Wulff, B_{ϕ,R_0,x_0} et*

$$\kappa_\phi(x^*) = -\frac{d-1}{R_0} \;\forall x^* \in \partial B_{\phi,R_0,x_0}.$$

Démonstration de la propriété 20

La fonction distance anisotrope s'identifie à la fonction

$$d_\phi(B_{\phi,R_0}, x) = \phi(x - x_0) - R_0,$$

et

$$\nabla^2 d_\phi(x^* - x_0) = \phi_{\xi\xi}(x^* - x_0).$$

Le lemme 3 montre que

$$\phi(\xi)\phi^o_\xi(\phi_\xi(\xi)) = \xi, \quad \forall \xi \neq 0.$$

Une différentiation supplémentaire implique que

$$\phi_\xi(\xi) \times \phi^o_\xi(\phi_\xi(\xi)) + \phi(\xi)\phi^o_{\xi\xi}(\phi_\xi(\xi))\phi_{\xi\xi}(\xi) = Id$$

En appliquant l'opérateur trace à cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} d &= \phi_\xi(\xi).\phi^o_\xi(\phi_\xi(\xi)) + \phi(\xi)\left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\phi_\xi(\xi)), \phi_{\xi\xi}(\xi)\right\rangle \\ &= \phi^o(\phi_\xi(\xi)) + \phi(\xi)\left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\phi_\xi(\xi)), \phi_{\xi\xi}(\xi)\right\rangle \\ &= 1 + \phi(\xi)\left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\phi_\xi(\xi)), \phi_{\xi\xi}(\xi)\right\rangle \end{aligned}$$

On utilise enfin la propriété $\phi^o(\phi_\xi(\xi)) = 1$ pour en déduire que

$$\phi^o(\phi_\xi(\xi))\left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\phi_\xi(\xi)), \phi_{\xi\xi}(\xi)\right\rangle = \frac{d-1}{\phi(\xi)}$$

Nous appliquons finalement cette égalité dans le cas particulier de $\xi = (x^* - x_0) \in \partial B_{\phi,R_0,x_0}$, et nous montrons ainsi que $\forall x^* \in \mathbb{R}^d$ tel que $(x^* - x_0) \in \partial B_{\phi,R_0,x_0}$,

$$\begin{aligned} \kappa_\phi(x^* - x_0) &= -\phi^o(\nabla d(x^* - x_0))\left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\nabla d(x^* - x_0)), \nabla^2 d_\phi(x^* - x_0)\right\rangle \\ &= -\phi^o(\phi_\xi(x^* - x_0))\left\langle \phi^o_{\xi\xi}(\phi_\xi(x^* - x_0)), \phi_{\xi\xi}(x^* - x_0)\right\rangle \\ &= -\frac{d-1}{\phi(x^* - x_0)} = -\frac{d-1}{R_0} \end{aligned}$$

■

Mouvement anisotrope d'une forme de Wulff

Proposition 21. *Le mouvement par courbure moyenne anisotrope d'une forme de Wulff B_{ϕ,R_0,x_0} est une forme de Wulff $B_{\phi,R(t),x_0}$ où le rayon caractéristique $R(t)$ vérifie*

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2(d-1)t}$$

Le démonstration est immédiate d'après la propriété précédente.

5.3 Méthodes numériques

5.3.1 Méthode level set et équation d'Hamilton-Jacobi

La méthode level set consiste à exprimer l'interface comme la ligne de niveau zéro de la fonction φ : l'information de la dynamique d'interface s'exprime alors comme une équation d'Hamilton Jacobi sur φ avec

$$\varphi_t = \phi^o(x, \nabla\varphi)F(x, \nabla\varphi, \nabla^2\varphi),$$

où

$$F(x,p,X) := \sum_i \phi^o_{x^i,\xi^i}(x,p) + \sum_{i,j} \phi^o_{\xi^i\xi^j}(x,p)X_{ij} + \sum_i \phi^o_{\xi^i}(x,p)\frac{\partial}{\partial x^i}(log(det_n\phi)))$$

L'existence de solution de viscosité de ce type d'équation a déjà été démontrée, voir par exemple les travaux d'Evans et Spruck [55, 56, 57, 58]. Nous ne développons pas cette approche dans cette thèse car, comme nous l'avons déjà expliqué dans la première partie, les méthodes numériques de type "Narrow band method" impliquent un traitement explicite de l'opérateur de diffusion et nécessite une bonne estimation de la courbure anisotrope. De telles méthodes numériques ne pourront donc pas s'appliquer à des anisotropies non régulières contrairement à des approches où l'anisotropie est résolue de manière implicite.

5.3.2 Méthode de champ de phase

Nous supposons encore une fois que l'anisotropie est non locale. Les équations d'Allen-Cahn anisotropes sont obtenues avec un résultat de Γ-convergence d'une énergie de type Ginzburg-Landau vers le périmètre anisotrope. Ce résultat nécessite, comme dans le cas isotrope, une définition généralisée du périmètre anisotrope sur l'ensemble des domaines mesurables de $\mathbb{R}^d$.

Définition généralisée du périmètre anisotrope

Nous avons pour l'instant défini le périmètre anisotrope pour l'ensemble des domaines Ω bornés réguliers de $\mathbb{R}^d$ avec

$$C_\phi \int_\Gamma \phi^o(\nu)ds \quad \text{où} \quad C_\phi = w_d\ det_d(\phi)$$

Une définition généralisée de ce périmètre pour l'ensemble des domaines mesurables de $\mathbb{R}^d$ s'explicite alors sous la forme

Définition 17. *Le périmètre anisotrope d'un ensemble mesurable Ω dans $\mathbb{R}^d$ est défini par*

$$P_\phi(\Omega) := C_\phi\ \sup\left\{\int_\Omega \mathrm{div}(\varphi)dx\ ;\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d), \|\phi(\varphi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq 1\right\},$$

où $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ représente l'ensemble de fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Remarque 22. *Cette définition du périmètre anisotrope explique notamment la notation P_ϕ au lieu de P_{ϕ^o} car elle utilise uniquement l'expression de ϕ et pas celle de ϕ^o.*

Proposition 22. *Si Ω est un ouvert de classe C^1, alors*

$$P_\phi(\Omega) = C_\phi \int_{\partial\Omega} \phi^o(\vec{n})ds$$

Démonstration de la propriété 22.

La formule de Green implique que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi(x))dx &= \int_{\partial\Omega} \varphi(x).\nu dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \phi^o(\nu)\varphi(x).\nu_\phi dx\end{aligned}$$

La définition de $\phi^o(\xi^*)$, $\phi^o(\xi^*) = \sup\{\xi^*.\xi \ ; \ \xi \in B_\phi\}$ et l'hypothèse $\phi(\varphi(x)) \leq 1$ assure que

$$\varphi(x).\nu_\phi \leq \sup\{\nu_\phi.\xi \ ; \ \phi(\xi) \leq 1\} \leq \phi^o(\nu_\phi) = 1$$

Et alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$,

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi(x))dx \leq \int_{\partial\Omega} \phi^o(\vec{n})ds$$

Pour obtenir l'égalité dans l'autre sens, il suffit d'exhiber une fonction φ telle que $\varphi = n_\phi = \phi^o_\xi(\nu)$ sur $\partial\Omega$ puisque $\phi(n_\phi) = 1$ et $n_\phi.\nu_\phi = 1$.

□

Semi-continuité inférieure du périmètre anisotrope

Nous pouvons maintenant montrer que P_ϕ est semi-continu inférieurement pour la topologie issue de la convergence L^1 des fonctions caractéristiques des domaines de $\mathbb{R}^d$:

Proposition 23. *Si* $\mathbb{1}_{\Omega_n} \to \mathbb{1}_\Omega$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *alors*

$$P_\phi(\Omega) \leq \liminf P_\phi(\Omega_n)$$

Démonstration de la propriété 23.

Si $\varphi \in D(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, alors

$$\begin{aligned}C_\phi \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi(x))dx &= C_\phi \liminf_n \int_{\Omega_n} \operatorname{div}(\varphi(x))dx \\ &\leq C_\phi \liminf_n \left(\sup_\varphi \left\{ \int_{\Omega_n} \operatorname{div}(\varphi) \ ; \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d), \quad \|\phi(\varphi)\|_{L^\infty} \leq 1 \right\} \right) \\ &\leq C_\phi \liminf_n P_\phi(\Omega_n)\end{aligned}$$

□

Résultat de Γ-convergence

Les résultats de Γ-convergence sont obtenus pour la topologie $L^1(\mathbb{R}^d)$, avec

$$\begin{cases} J(u) = P_\phi(\Omega) \ \text{ si } \ u = \mathbb{1}_\Omega \\ J(u) = +\infty \ \text{ sinon.} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} J_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\epsilon \frac{(\phi^o(x, \nabla u))^2}{2} + \epsilon^{-1} W(u) \right] d\mathcal{H}^d_\phi \ \text{ si } u \in H^1(\mathbb{R}^d) \\ J_\epsilon(u) = +\infty \ \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, Bellettini a établi [9] que

$$\Gamma - \lim_{\epsilon \to 0} J_\epsilon = c_W J \ \text{ dans } \ L^1(\mathbb{R}^d)$$

Équation d'Allen-Cahn anisotrope

L'équation d'Allen-Cahn anisotrope dérive alors du flux de gradients de J_ϵ,

$$\begin{aligned} F_\epsilon^{'}(u)(v) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\epsilon \nabla_\phi u.\nabla v + \frac{1}{\epsilon} W^{'}(u) v\right] d\mathcal{H}_\phi^d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[-\epsilon \triangle_\phi u + \frac{1}{\epsilon} W^{'}(u)\right] v \; d\mathcal{H}_\phi^d \end{aligned}$$

et,

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \triangle_\phi u(x,t) - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u(x,t)) \\ u(x,0) = q\left(\frac{d_\phi(x,\Omega_0)}{\epsilon}\right). \end{cases}$$

Convergence de la méthode de champ de phase

La convergence de l'équation d'Allen-Cahn anisotrope vers le mouvement par courbure moyenne anisotrope a été établie [11] avec un ordre de convergence en $O(\epsilon^2 ln(\epsilon)^2)$. Cette preuve utilise une sous et sur solutions de l'équation d'Allen-Cahn anisotrope. Dans leurs travaux [13], Bellettini et Paolini effectue un développement asymptotique formel de u^ϵ qui indique que les solutions u^ϵ devraient être de la forme

$$u^\epsilon = q\left(\frac{d_\phi(x,\Omega^\epsilon)}{\epsilon}\right)$$

Nous avons trouvé intéressant de reproduire ce développement ici.

Supposons que $\forall t \in [0,T]$, l'interface $\Gamma^\epsilon(t)$, définie comme la ligne de niveau $\frac{1}{2}$ de $u^\epsilon(.,t)$, se déplace dans la direction n_ϕ avec une vitesse V^ϵ. C'est à dire,

$$\frac{d}{dt} d_\phi^\epsilon = -V^\epsilon \quad \text{sur} \quad \Gamma^\epsilon(t)$$

où d_ϕ^ϵ est la distance anisotrope signée à $\Gamma^\epsilon(t)$.

Si x suffisamment proche de $\Gamma^\epsilon(t)$, ils introduisent les variables $y(x,t) = \frac{d_\phi^\epsilon(x,t)}{\epsilon}$ et $s(x,t) \in \Gamma^\epsilon(t)$, défini comme le point de l'interface qui atteint le minimum la distance anisotrope entre x et $\Gamma^\epsilon(t)$:

$$s(x,t) = \underset{y \in \Gamma^\epsilon(t)}{\arg\min} \left\{d_\phi^\epsilon(x,y)\right\}$$

Le fonction u^ϵ est alors redimensionnée par rapport à ϵ en posant $U^\epsilon(y(x,t), s(x,t), t) := u^\epsilon(x,t)$ et les fonctions U^ϵ et V^ϵ sont recherchées sous la forme :

$$U^\epsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i U_i, \qquad V^\epsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i V_i$$

Alors,

$$\frac{d}{dt} U^\epsilon(y,s,t) = \frac{1}{\epsilon}(\partial_y U^\epsilon)(\partial_t d_\phi^\epsilon) + (\partial_s U^\epsilon)(\partial_t s) + (\partial_t U^\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon}(\partial_y U_0) V_0 + O(1)$$

$$\nabla U^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}(\partial_y U^\epsilon)\nabla d_\phi^\epsilon + (\partial_s U^\epsilon)\nabla s(x,t) = \frac{1}{\epsilon}(\partial_y U^\epsilon)\nabla d_\phi^\epsilon$$

$$\nabla_\phi U^\epsilon = \phi^o\left(x, \frac{1}{\epsilon}(\partial_y U^\epsilon)\nabla d_\phi^\epsilon\right)\phi_\xi^o(x, \nabla d_\phi^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}(\partial_y U^\epsilon)\nabla_\phi d_\phi^\epsilon$$

L'égalité $\nabla d_\phi^\epsilon.\nabla_\phi d_\phi^\epsilon = \nu_\phi.n_\phi = 1$ montre que

$$\operatorname{div}(\nabla_\phi U^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}(\partial_{yy}U^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}(\partial_y U^\epsilon)\operatorname{div}(\nabla_\phi d_\phi^\epsilon)$$

Et

$$\operatorname{div}_\phi(\nabla_\phi U^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}(\partial_{yy}U^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}(\partial_y U^\epsilon)\operatorname{div}(\nabla_\phi d_\phi^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}(\partial_y U^\epsilon)\nabla_\phi d_\phi^\epsilon.\nabla(log(det_d\phi))$$

On en déduit ainsi que

$$\triangle_\phi U^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2}(\partial_{yy}U_0) + \frac{1}{\epsilon}(\partial_y U_0)\triangle_\phi d_\phi^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}(\partial_{yy}U_1) + O(1)$$

Il ne reste plus qu'à estimer l'action de l'opérateur de réaction sur U^ϵ :

$$W'(U^\epsilon) = W'(U_0) + \epsilon W''(U_0)\sum_{i=1}^{\infty}\epsilon^{i-1}U_i + O(\epsilon^2)$$

Ainsi, en injectant toutes ces égalités dans l'équation $u_t = \triangle_\phi u - \frac{1}{\epsilon^2}W'(u)$, et en identifiant à zéro la somme des termes en $\frac{1}{\epsilon^2}$, on déduit que

$$(\partial_{yy}U_0(y,t)) - W'(U_0(y,t)) = 0$$

La fonction U_0 s'identifie donc au profil q et $U_0(y) = q(y)$.
De même, en identifiant à zéro la somme des termes en $\frac{1}{\epsilon}$, on remarque que

$$(\partial_{yy}U_1(y,t)) - W''(U_0)U_1 = (\partial_y U_0)(\kappa_\phi - V_0)$$

Et,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}(\partial_y U_0)^2(\kappa_\phi - V_0)\,dy &= \int_{\mathbb{R}}\Big[(\partial_{yy}U_1(y,t)) - W''(U_0)U_1\Big](\partial_y U_0)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\Big[(\partial_{yyy}U_0(y,t)) - W''(U_0)(\partial_y U_0)\Big]U_1 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\partial_y\Big((\partial_{yy}U_0(y,t)) - W'(U_0(y,t))\Big)U_1 dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, il en ressort que $\kappa_\phi = V_0$ et $U_1 = 0$.

En fin de compte, $V^\epsilon \to \kappa_\phi$ lorsque $\epsilon \to 0$ et le résultat de convergence est obtenu formellement.

5.3.3 Mouvement minimisant et algorithme de Almgren-Taylor-Wang

Dans la démonstration de l'existence de solution de l'équation d'Allen-Cahn, nous avions introduit une suite de solutions linéaires en temps à l'aide de l'approche de Almgren-Taylor-Wang. Cette suite convergeait finalement vers la solution de l'équation d'Allen-Cahn. Dans cette section, nous allons montrer que cette approche est toujours valide lorsque le mouvement est un mouvement par courbure moyenne anisotrope.
Soit Ω un domaine régulier (de classe C^2) de $\mathbb{R}^d$, et $\tau > 0$ un pas de temps. Nous considérons alors le flot minimisant $\Omega(t)$ défini à l'instant τ comme le minimum de

$$J_\tau(E) = P_\phi(E) + \frac{1}{\tau}\int_{\Omega\triangle E} d_\phi(x,\partial\Omega)d\mathcal{H}_\phi^d,$$

où $\Omega \triangle E = (\Omega \setminus E) \cup (E \setminus \Omega)$

L'énergie J_τ s'exprime aussi sous la forme

$$J_\tau(E) = P_\phi(E) - \frac{1}{\tau}\int_E d_\phi(x, \partial\Omega) d\mathcal{H}^d_\phi + C$$

où C ne dépend que de Ω. Supposons que le minimum de J_τ soit atteint pour $E = E^*$.

$$E^* = \arg\min_E \left\{ J_\tau(E) \ ; \ E \text{ domaine borné de } \mathbb{R}^d \right\}$$

Nous allons déterminer l'équation d'Euler de ce problème de minimisation pour obtenir des informations sur E^*. Nous reprenons les notations de la démonstration du théorème 7. Nous considérons alors un voisinage U de ∂E^* et un champ de vecteur $g \in C^1_0(U; \mathbb{R}^d)$. L'application Φ_t est définie de U dans $\mathbb{R}^d$ et vérifie $\Phi_t(x) = x + t\ g(x)$ et on note $E^*_t = \Phi_t(E^*)$. L'équation d'Euler de 5.3 s'écrit

$$\frac{d}{dt} J_\tau(E^*_t)_{|t=0} = 0$$

Le théorème 2.22 de [102] montre que

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{E^*_t} d_\phi(y, \partial\Omega)\omega_d det_d\phi d\mathcal{H}^d\right]_{t=0} = \int_{E^*} \omega_d \operatorname{div}\left(d_\phi\ det_d\phi g\right) d\mathcal{H}^d$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_{\phi_t(E^*)} d_\phi d\mathcal{H}^d_\phi(y)\right]_{t=0} &= \omega_d \int_{E^*} \nabla d_\phi . g\ det_d\phi\ d\mathcal{H}^d + \omega_d \int_{E^*} d_\phi\ \operatorname{div}(g)\ det_d\phi\ d\mathcal{H}^d \\
&+ \omega_d \int_{E^*} d_\phi\ \nabla(log(det_d\phi)).g\ det_n\phi\ d\mathcal{H}^d \\
&= \int_{E^*} d_\phi \operatorname{div}_\phi(g)\ d\mathcal{H}^d_\phi + \int_{E^*} \nabla d_\phi . g\ d\mathcal{H}^d_\phi \\
&= -\int_{\partial E^*} d_\phi\ g \cdot \nu_\phi\ d\mathcal{P}^{d-1}_\phi \text{ d'après la propriété 16}
\end{aligned}$$

De plus, le théorème 7 montre que

$$\frac{d}{dt}\left[P_\phi(E^*_t)\right]_{|t=0} = \int_{\partial E^*} \kappa_\phi\ g \cdot \nu_\phi\ d\mathcal{P}^{d-1}_\phi$$

L'équation d'Euler de ce problème de minimisation en E^* implique que

$$0 = \frac{d}{dt} J_\tau(E^*_t)_{|t=0} = \int_{\partial E^*} (-\kappa_\phi + \frac{1}{\tau} d_\phi)\ g \cdot \nu_\phi\ d\mathcal{P}^{d-1}_\phi$$

Et

$$d_\phi(x, \partial\Omega) = \tau\kappa_\phi(x) \quad \forall x \in \partial E^*$$

Le mouvement de domaine associé à l'approche de Almgren-Taylor-Wang admet donc une vitesse de κ_ϕ dans la direction n_ϕ et correspond au mouvement par courbure moyenne anisotrope.

Chapitre 6

Équation d'Allen-Cahn anisotrope linéarisée

6.1 Motivations

Nous considérons maintenant des anisotropies régulières non locales et symétriques :

$$\phi^o(x,\xi) = \phi^o(\xi), \quad \phi^o \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), \quad \phi^o(\xi) = \phi^o(-\xi).$$

La méthode de champ de phase conduit à la résolution de l'équation d'Allen-Cahn anisotrope

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \triangle_\phi u(x,t) - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u(x,t)) \\ u(x,0) = q\left(\frac{d_\phi(x,\Gamma_0)}{\epsilon}\right) \end{cases}$$

La difficulté est que l'opérateur $\triangle_\phi$ n'est généralement pas linéaire. Par exemple, lorsque ϕ^o est une norme l^s avec $s = 4$, $\phi^o(\xi) = (\xi_1^s + \xi_2^s)^{1/s}$ et le calcul explicite suivant montre que $\triangle_\phi u$ n'est pas linéaire.

$$\nabla\phi^o(\nabla u) = ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{1/s-1} \begin{pmatrix} (\partial_1 u)^{s-1} \\ (\partial_2 u)^{s-1} \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{aligned} \triangle_\phi u &= \partial_{11} u\ (s-1)(\partial_1 u)^{s-2}\ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-1} \\ &+ \partial_{22} u\ (s-1)(\partial_2 u)^{s-2}\ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-1} \\ &+ \partial_{11} u\ (2-s)\ (\partial_1 u)^{2s-2}\ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-2} \\ &+ \partial_{22} u\ (2-s)\ (\partial_2 u)^{2s-2}\ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-2} \\ &+ 2\ \partial_{12} u\ (2-s)\ (\partial_1 u)^{s-1}\ (\partial_1 u)^{s-1}\ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-2} \end{aligned}$$

Nous ne pouvons donc plus appliquer les mêmes méthodes numériques que dans la première partie de thèse. Bien entendu, il est possible de traiter le terme de diffusion de manière explicite, mais dans ce cas, la solution discrétisée converge trop lentement en temps. Une autre façon de procéder consisterait à résoudre l'opérateur de diffusion anisotrope de manière semi-implicite où seuls les termes de dérivées secondes seraient traités implicitement. Une telle méthode numérique nécessiterait alors la résolution d'un système linéaire différent à chaque pas de temps et son coût algorithmique serait bien plus élevé que celui des méthodes numériques isotropes. Enfin, nous pourrions introduire une discrétisation implicite en temps avec l'approche d'Almgren-Taylor-Wang (voir par exemple les travaux de Chambolle et Novaga [27]) mais là encore, la méthode

nécessiterait la résolution du problème de minimisation à chaque pas de temps et son coût algorithmique serait une nouvelle fois trop élevé.

L'objectif de cette partie est d'obtenir une méthode d'approximation de mouvements par courbure moyenne anisotrope dont la résolution numérique a un coût algorithmique **équivalent** au cas isotrope.

Un peu comme dans les travaux de Ruuth et Merriman [100], nous allons utiliser un opérateur de diffusion anisotrope proche de $\triangle_\phi$, mais linéaire afin de simplifier la résolution de l'EDP

$$u_t = \tilde{\triangle}_\phi u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u)$$

6.1.1 Heuristique

Les solutions des équations de champ de phase ont une forme bien particulière, $u(x,t) \simeq q\left(\frac{d_\phi(\Omega_t,x)}{\epsilon}\right)$ et convergent vers les fonctions caractéristiques des domaines $\Omega(t)$ lorsque ϵ tend vers zéro. C'est l'argument essentiel que nous allons maintenant exploiter.
Si l'opérateur de diffusion anisotrope s'explicite sous la forme

$$\triangle_\phi u = h\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \triangle u,$$

l'action de $\triangle_\phi$ revient à diffuser l'information située au voisinage d'un point x^* de l'interface avec un coefficient de diffusion proportionnel à $h(\vec{n}(x^*))$ où $\vec{n}(x^*)$ représente la normale de l'interface en ce point. Au vu de la forme de u^ϵ, cette information (à diffuser) est située dans le domaine des fréquences le long de la droite de direction $\vec{n}(x^*)$ suivant l'échelle parabolique, voir la figure (6.1.1). Intuitivement, un candidat potentiel pour notre opérateur linéaire $\tilde{\triangle}_\phi$ est

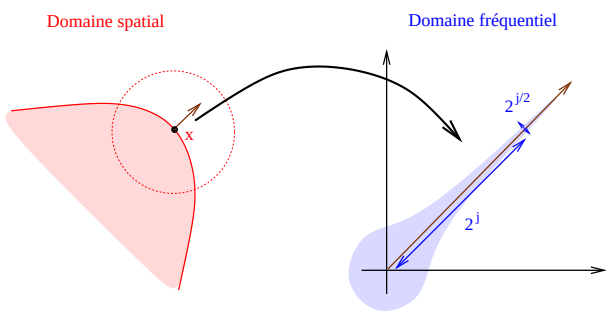


FIG. 6.1 – Localisation fréquentielle de l'information située au voisinage d'un point x^* de l'interface $\partial\Omega$.

alors l'opérateur associé au symbole $\sigma(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2 h(arg(\xi))$, qui est aussi obtenu comme le linéarisé de $\triangle_\phi$ par rapport à la base de Fourier.

Remarque 23. *Nous définissons aussi à partir de cet opérateur de diffusion, un noyau de la chaleur anisotrope*

$$K_{t,h}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-4\pi^2|\xi|^2 h(arg(\xi))t}\right](x).$$

Cette approche est donc différente de celle de Ruuth et Merriman et rien n'assure la positivité de $K_{t,h}(x)$. Un avantage est que cette construction s'adapte pour des anisotropies non régulières contrairement à celle de Ruuth et Merriman qui nécessite des anisotropies C^2.

6.1.2 Plan du chapitre

Dans un premier temps, nous allons construire et étudier quelques propriétés de l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$, défini comme le linéarisé de $\triangle_\phi$ par rapport à la base de Fourier. Initialement défini sur l'ensemble des fonctions $H^2(\mathbb{R}^d)$, nous étendrons sa définition sur une sous-classe des distributions. Nous lui associerons ensuite le semi-groupe $e^{\tilde{\triangle}_\phi t}$, présenté comme un opérateur de convolution où le noyau $K_{\phi,t}$ satisfait

$$K_{\phi,t}(x) := \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-4\pi^2\phi^o(\xi)^2\ t}\right](x)$$

Ce noyau n'admettra pas de moment d'ordre 2, c'est à dire que la fonction $x \to |x|^2 K_{\phi,t}(x)$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, mais nous montrerons tout de même que l'intégrale

$$I_N := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\frac{x^2}{N^2}} 4\pi^2|x|^2 K_{\phi,1}(x)dx$$

admet une limite bornée avec une vitesse de convergence en $1/N^2$.

Dans un deuxième temps, nous allons estimer une grandeur caractéristique de l'écart que l'on commet lorsqu'on applique successivement les opérateurs $\triangle_\phi$ et $\tilde{\triangle}_\phi$ sur des fonctions de champ de phase. Nous nous intéresserons typiquement à des fonctions de la forme $u^\epsilon = q\left(\frac{d(x,\Omega)}{\epsilon}\right)$ où le domaine borné Ω de $\mathbb{R}^d$ est supposé régulier de classe C^2. Nous essayerons alors de montrer que lorsque x^* est situé sur un voisinage de l'interface Γ,

$$|\triangle_\phi u^\epsilon(x^*) - \tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon(x^*)| = O(1) \quad \text{lorsque} \quad \epsilon \to 0$$

Cette démonstration s'effectuera en considérant un développement limité d'ordre 2 de u^ϵ en x^*, noté u^ϵ_{2,x^*}, et en montrant que

$$\triangle_\phi u^\epsilon(x) = \tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x) + \frac{1}{\epsilon}O\left(|x - x^*|\right)$$

Formellement, nous obtiendrons l'estimation précédente en supposant que $K_{\phi,t}$ admet un moment d'ordre 2 et en vérifiant que

$$\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon(x^*) = \tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x^*) + O(1)$$

Dans une troisième partie, nous déterminerons les solutions numériques du problème

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \tilde{\triangle}_\phi u(x,t) - \frac{1}{\epsilon^2}W'(u(x,t)) \\ u(x,0) = q\left(\frac{d_\phi(x,\Gamma_0)}{\epsilon}\right). \end{cases}$$

Les résultats théoriques précédents justifieront en effet que les lignes de niveau 1/2 des solutions u^ϵ de ces EDPs permettent d'obtenir une approximation des mouvements par courbure moyenne anisotrope. En effet, comme la distance entre ces deux opérateurs de diffusion reste bornée, l'erreur, suite à l'utilisation de l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$, correspond à imposer un terme de forçage de l'ordre de $O(\epsilon)$. Nous nous attendons donc à ce que les solutions du problème précédent convergent en $O(\epsilon)$ vers le mouvement par courbure moyenne anisotrope. Des tests numériques en dimensions 2 et 3 justifieront cet ordre d'erreur.

6.2 Définition de l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$

6.2.1 Élément de Fourier "vecteurs propres"

Les éléments de la base de Fourier sont des vecteurs propres du laplacien anisotrope :

Proposition 24. *Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$, alors la fonction $f : x \to e^{2i\pi x.\xi}$ vérifie*

$$\triangle_\phi f(x) = -4\pi^2 \phi^o(\xi)^2 f(x)$$

Remarque 24. *Nous utilisons dans cette démonstration les égalités suivantes*

$$\begin{aligned} \phi^o(z\xi) &= |z|\phi^o(\xi) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall \xi \in \mathbb{R}^d \\ \phi^o_\xi(z\xi) &= \frac{z}{|z|}\phi^o_\xi(\xi) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*, \forall \xi \in (\mathbb{R}^*)^d, \end{aligned}$$

qui nécessitent que l'anisotropie soit symétrique, c'est à dire que pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\phi^o(\xi) = \phi^o(-\xi)$.

Démonstration de la proposition 24.

Cette démonstration utilise essentiellement les propriétés d'homogénéité d'ordre 1 de l'anisotropie ϕ^o :

$$\begin{aligned} \triangle_\phi f(x) &= \operatorname{div}(T^o(\nabla f)) = \operatorname{div}\left(\phi^o(\nabla f)\phi^o_\xi(\nabla f(x))\right) \\ &= \operatorname{div}\left(\phi^o(2i\pi\ \xi\ f)\phi^o_\xi(2i\pi\ \xi\ f)\right) = \operatorname{div}\left(2i\pi\ f\phi^o(\xi)\phi^o_\xi(\xi)\right) \\ &= 2i\pi\ \phi^o(\xi)\ \phi^o_\xi(\xi).\nabla f = -4\pi^2\ \phi^o(\xi)\ \phi^o_\xi(\xi).\xi\ f \\ &= -4\pi^2\ \phi^o(\xi)^2\ f(x) \end{aligned}$$

□

6.2.2 Définition de $\tilde{\triangle}_\phi$ au sens classique

Définition 18. *L'opérateur $\tilde{\triangle} : H^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ est défini par*

$$\tilde{\triangle}_\phi u = \mathcal{F}^{-1}\left[-4\pi^2\phi^o(\xi)^2\mathcal{F}[u](\xi)\right] \ \forall u \in H^2(\mathbb{R}^d).$$

Cet opérateur est continu de $H^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ car pour tout $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} &= \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\triangle u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(4\pi^2|\xi|^2\right)^2 \mathcal{F}[u](\xi)^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $\tilde{\triangle}_\phi u$ appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ car ϕ^o est homogène de degré 1 et vérifie $\lambda|\xi| \leq \phi^o(\xi) \leq \Lambda|\xi|$.

$$\|\tilde{\triangle}_\phi u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \Lambda^2 \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}$$

Dans la suite, nous appliquerons cet opérateur à des fonctions qui ne seront pas forcément $H^2(\mathbb{R}^d)$, comme par exemple à un front $u(x) = q\left(\frac{x.e_\nu}{\epsilon}\right)$ où e_ν est une direction donnée. Nous allons donc étendre cette première définition sur un sous-espace des distributions tempérées.

6.2.3 Définition de $\tilde{\triangle}_\phi$ au sens des distributions

Définition 19. *La transformée de Fourier au sens des distributions tempérées d'une distribution $T \in S'(\mathbb{R}^d)$, notée $\mathcal{F}[T]$ est définie par :*

$$\langle \mathcal{F}[T]\,,\,\varphi\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} := \langle T\,,\,\mathcal{F}[\varphi]\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\,,\ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Par exemple en dimension 1, $\mathcal{F}[\{1\}] = \delta$, $\mathcal{F}[\{-2i\pi x\}] = \delta'$ et $\mathcal{F}[\{-4\pi^2x^2\}] = \delta''$ où δ est la masse de Dirac.

Si T est une distribution d'ordre strictement inférieur à 1, $\phi^o(\xi)^2T(\xi)$ est bien définie au sens des distributions car $\phi^o(\xi)^2$ admet une dérivée première continue. En revanche, $\phi^o(\xi)^2T(\xi)$ n'est pas toujours bien définie pour toute distribution $T \in S'(\mathbb{R}^d)$. Par exemple, si T est une distribution d'ordre 2, et si $\{0\}$ est inclus dans le support de partie d'ordre 2, alors $\phi^o(\xi)^2T$ est mal définie car la dérivée seconde de $\phi^o(\xi)^2$ n'est pas continue en 0.

Remarque 25. *La fonction d'anisotropie $\phi^o_{\xi\xi}$ n'est pas définie en zéro. La fonction ϕ^o est homogène de degré 1 en ξ, ainsi*

$$\begin{cases} \phi^o(t\xi) = |t|\phi^o(\xi) \\ \phi^o_\xi(t\xi) = \frac{t}{|t|}\phi^o_\xi(\xi) \\ \phi^o_{\xi\xi}(t\xi) = \frac{1}{|t|}\phi^o_{\xi\xi}(\xi) \end{cases}$$

En revanche, la fonction $\phi^o(\xi)^2$ admet une dérivée seconde, bornée et discontinue en zéro.

$$\begin{aligned} &\left(\phi^o(\xi)^2\right)_\xi(\xi) = 2\phi^o_\xi\phi^o \\ &\left(\phi^o(\xi)^2\right)_{\xi\xi}(\xi) = 2\phi^o_{\xi\xi}(\xi)\phi^o(\xi) + 2\phi^o_\xi(\xi)\otimes\phi^o_\xi(\xi) \\ &\left(\phi^o(\xi)^2\right)_{\xi\xi}(t\xi) = 2\phi^o_{\xi\xi}(\xi)\phi^o(\xi) + 2\phi^o_\xi(\xi)\otimes\phi^o_\xi(\xi) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier de la distribution $T = \dfrac{\partial^2\delta}{\partial\xi_i\partial\xi_j}$, nous allons tout de même donner un sens à $\phi^o(\xi)^2T(\xi)$. Il faut pour cela introduire une approximation de la masse de Dirac δ. Soit $\rho \in S(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^+}\rho(r)r^{d-1}dr = \frac{1}{|S^{d-1}|} \quad \text{et} \quad \rho'(r) = 0$$

où $|S^{d-1}|$ représente l'aire de la sphère de dimension d.
La suite de fonctions $n^d\rho(n|\xi|)$ est alors une approximation de la masse de Dirac

$$\left\{n^d\rho(n|\xi|)\right\} \xrightarrow{S'} \delta,$$

car pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left\langle n^d\rho(n|\xi|)\,,\,\varphi\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} n^d\rho(n|\xi|)\varphi(\xi)d\xi \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\rho(|\xi|)\varphi(\frac{\xi}{n})d\xi \\ &= \varphi(0)\int_{\mathbb{R}^d}\rho(|\xi|)d\xi = \varphi(0) =< \delta,\varphi >_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \end{aligned}$$

Le passage à la limite s'obtient en appliquant le théorème de convergence dominée.

Soit T_n la distribution régulière définie par

$$T_n := \left\{ n^d \frac{\partial^2 \rho(n|\xi|)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\}$$

Les distributions $T_n(\xi)\phi^o(\xi)^2$ sont alors régulières car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(\xi)\phi^o(\xi)^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Nous allons déterminer, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$, la limite de $\langle T_n(\xi)\phi^o(\xi)^2 \, , \, \varphi \rangle$ lorsque $n \to +\infty$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \langle T_n(\xi)\phi^o(\xi)^2 \, , \, \varphi \rangle &= \lim_{n\to+\infty} \langle T_n(\xi) \, , \, \phi^o(\xi)^2 \varphi \rangle \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left\langle n^d \rho(n|\xi|) \, , \, \frac{\partial^2 \left[\phi^o(\xi)^2 \varphi\right]}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\rangle \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left\langle n^d \rho(n|\xi|) \, , \, \frac{\partial^2 \left[\phi^o(\xi)^2\right]}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \varphi \right\rangle ,
\end{aligned}$$

car $\phi^o(0)^2 = 0$ et $\phi^o_\xi(0)\phi^o(0) = 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \langle T_n(\xi)\phi^o(\xi)^2 \, , \, \varphi \rangle &= \lim_{n\to+\infty} \left\langle n^d \rho(n|\xi|) \frac{\partial^2 \phi^o(\xi)^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \, , \, \varphi \right\rangle \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \rho(r) \left[\int_{S^{d-1}} \frac{\partial^2 (\phi^o)^2(\theta)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \varphi\left(\frac{r}{n}, \theta\right) d\theta \right] r^{d-1} dr \\
&= \varphi(0) \int_{S^{d-1}} \left[\frac{\partial^2 (\phi^o)^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\theta) \right] d\theta \int_{R^+} \rho(r) r^{d-1} dr \\
&= \left[\fint_{S^{d-1}} \frac{\partial^2 (\phi^o)^2(\theta)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} d\theta \right] \varphi(0),
\end{aligned}$$

où $\fint$ est une intégrale moyennée.
La distribution $\frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \phi^o(\xi)^2$ est alors définie comme la limite de la suite de distributions $T_n(\xi)\phi^o(\xi)^2$,

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \phi^o(\xi)^2 := \left[\fint_{S^{d-1}} \frac{\partial^2 (\phi^o)^2(\theta)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} d\theta \right] \delta.$$

A noter cependant que cette définition dépend explicitement du choix de l'approximation de δ.

Définition 20. *Plus généralement, si*

$$T = \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi_i \partial \xi_j},$$

alors $\phi^o(\xi)^2 T$ est définie par

$$\phi^o(\xi)^2 T = \left[\fint_{S^{d-1}} \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial^2 (\phi^o)^2(\theta)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} d\theta \right] \delta$$

Définition 21. *Soit $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathcal{F}[u]$ soit une distribution d'ordre inférieur à deux, alors $\tilde{\triangle}_\phi u$ est défini au sens des distributions par*

$$\left\langle \tilde{\triangle}_\phi u \, , \, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle -4\pi^2 \phi^o(\xi)^2 \mathcal{F}[u](\xi) \, , \, \bar{\mathcal{F}}[\varphi](\xi) \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \, , \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$$

6.2.4 Propriété du semi-groupe $e^{\tilde{\triangle}_\phi t}$

Définition 22. *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, l'opérateur $e^{\tilde{\triangle}_\phi t}$ est défini par*

$$e^{\tilde{\triangle}_\phi t} u_0 = u(t,x),$$

où u est la solution de

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \tilde{\triangle}_\phi u(t,x) \\ u(0,x) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

Remarque 26. *Le semi-groupe $e^{t\tilde{\triangle}_\phi}$ peut être explicité comme un opérateur de convolution où le noyau $K_{\phi,t}$ vérifie*

$$K_{\phi,t}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-4\pi^2\phi^o(\xi)^2 t}\right](x)$$

et,

$$e^{t\tilde{\triangle}_\phi} u_0 = K_{\phi,t} * u_0, \quad \forall u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Le laplacien de la fonction $\xi \to e^{-\phi^o(\xi)^2}$ n'est généralement pas continu en zéro (lorsque les formes de Wulff ne sont pas des ellipses), la fonction $x \to |x|^2 K_\phi(x)$ n'est donc pas $L^1(\mathbb{R}^d)$, où $K_\phi = K_{\phi,1/(4\pi^2)}$. Nous allons tout de même étudier le comportement de la suite I_N définie par

$$I_N = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\frac{|x|^2}{N^2}} 4\pi^2 |x|^2 K_\phi(x) dx.$$

Proposition 25. *La suite I_N converge vers*

$$\lim_{N\to\infty} I_N = \fint_{S^{d-1}} 2\left(|\phi^o_\xi(\theta)|^2 + \phi^o(\theta) Tr\left(\phi^o_{\xi\xi}(\theta)\right)\right) d\theta$$

Il existe de plus une constante $C(\phi^o)$ telle que $\forall N > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-\pi\frac{|x|^2}{N^2}}) 4\pi^2 |x|^2 K_\phi(x) dx \leq \frac{C(\phi^o)}{N^2}$$

Démonstration de la propriété 25.
Le laplacien de la fonction $e^{-\phi^o(\xi)^2}$ est discontinu en $\xi = 0$ mais reste tout de même borné.

$$\begin{cases} \nabla e^{-\phi^o(\xi)^2} = -2\phi^o(\xi)\phi^o_\xi(\xi) e^{-\phi^o(\xi)^2} \\ \nabla^2 e^{-\phi^o(\xi)^2} = -2\left(\phi^o_\xi(\xi)\otimes\phi^o_\xi(\xi)\right) e^{-\phi^o(\xi)^2} - 2\phi^o(\xi)\phi^o_{\xi\xi}(\xi) e^{-\phi^o(\xi)^2} + 4\phi^o(\xi)^2\left(\phi^o_\xi(\xi)\otimes\phi^o_\xi(\xi)\right) e^{-\phi^o(\xi)^2} \\ \triangle e^{-\phi^o(\xi)^2} = -2|\phi^o_\xi(\xi)|^2 e^{-\phi^o(\xi)^2} - 2\phi^o(\xi) Tr\left(\phi^o_{\xi\xi}(\xi)\right) e^{-\phi^o(\xi)^2} + 4\phi^o(\xi)^2 |\phi^o_\xi(\xi)|^2 e^{-\phi^o(\xi)^2} \end{cases},$$

où pour tout $\nu, \mu \in \mathbb{R}^d$, la matrice $A = \nu \otimes \mu$ est définie par $A_{i,j} = \nu_i\ \mu_j$.
Ainsi, d'après le théorème de Plancherel,

$$\begin{aligned} I_N &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\frac{|x|^2}{N^2}} 4\pi^2 |x|^2 K_\phi(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^d} N^d e^{-\pi N^2|\xi|^2} \triangle\left[e^{-\phi^o(\xi)^2}\right] d\xi \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|\xi|^2} \triangle\left[e^{-\phi^o(\xi)^2}\right]\left(\frac{\xi}{N}\right) d\xi \end{aligned}$$

L'intégrale I_N est décomposée comme la somme des trois termes $I_{N,1}$, $I_{N,2}$ et $I_{N,3}$ suivants :

$$\begin{aligned} I_N = & \int_{\mathbb{R}^d} 2|\phi^o_\xi(\xi)|^2 e^{-\left(\pi|\xi|^2+\phi^o\left(\frac{\xi}{N}\right)^2\right)} d\xi \quad + \int_{\mathbb{R}^d} 2\phi^o(\xi) Tr\left(\phi^o_{\xi\xi}(\xi)\right) e^{-\left(\pi|\xi|^2+\phi^o\left(\frac{\xi}{N}\right)^2\right)} d\xi \\ & - \int_{\mathbb{R}^d} 4\phi^o\left(\frac{\xi}{N}\right)^2 |\phi^o_\xi(\xi)|^2 e^{-\left(\pi|\xi|^2+\phi^o\left(\frac{\xi}{N}\right)^2\right)} d\xi \end{aligned}$$

Étude de $I_{N,1}$
Il est possible d'encadrer cette première intégrale car $|\phi^o_\xi(\xi)|^2 \geq 0$ et $\lambda|\xi| \leq \phi^o(\xi) \leq \Lambda|\xi|$. Ainsi, en coordonnées sphériques, il ressort que :

$$2\int_0^\infty \int_{S^{d-1}} e^{-\pi(1+\frac{\lambda^2}{N^2})r^2} |\phi^o_\xi(\theta)|^2 r^{d-1} dr d\theta \leq I_{N,1} \leq 2\int_0^\infty \int_{S^{d-1}} e^{-\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})r^2} |\phi^o_\xi(\theta)|^2 r^{d-1} dr d\theta,$$

et par Fubini,

$$\left(\int_0^\infty e^{-\pi(1+\frac{\lambda^2}{N^2})r^2} r^{d-1} dr\right) \int_{S^{d-1}} 2|\phi^o_\xi(\theta)|^2 d\theta \leq I_{N,1} \leq \left(\int_0^\infty e^{-\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})r^2} r^{d-1} dr\right) \int_{S^{d-1}} 2|\phi^o_\xi(\theta)|^2 d\theta$$

Il existe de plus une constante $C_\Lambda < \infty$ telle que

$$\int_0^\infty e^{-\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})r^2} r^{d-1} dr \simeq \left(\int_{S^{d-1}} 1 d\theta\right)^{-1} - \frac{C_\Lambda}{N^2}$$

En effet, en dimension 2,

$$\int_0^\infty e^{-\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})r^2} r dr = \left[\frac{-e^{-\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})r^2}}{2\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})}\right]_0^\infty = \frac{1}{2\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})} \simeq \frac{1}{2\pi} - \frac{\Lambda^2}{2\pi N^2}$$

Et en dimension $d = 3$,

$$\int_0^\infty e^{-\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})r^2} r^2 dr = \int_0^\infty \frac{e^{-\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})r^2}}{2\pi(1+\frac{\Lambda}{N})} dr = \frac{1}{4\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})^{3/2}} \simeq \frac{1}{4\pi} - \frac{3\Lambda^2}{8\pi N^2}$$

Et plus généralement, si d est pair,

$$\int_0^\infty e^{-\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})r^2} r^{d-1} dr = \int_0^\infty \frac{\left[\prod_{i=1}^{\frac{d-2}{2}}(d-2i)\right] e^{-\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})r^2} r}{(2\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2}))^{(d-2)/2}} dr = \frac{\left[\prod_{i=1}^{\frac{d-2}{2}}(d-2i)\right]}{\left(2\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})\right)^{d/2}}$$

Et si d est impair,

$$\int_0^\infty e^{-\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})r^2} r^{d-1} dr = \int_0^\infty \frac{\left[\prod_{i=1}^{\frac{d-1}{2}}(d-2i)\right] e^{-\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2})r^2}}{(2\pi(1+\frac{\Lambda^2}{N^2}))^{(d-1)/2}} dr = \frac{\left[\prod_{i=1}^{\frac{d-1}{2}}(d-2i)\right]}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}\left((1+\frac{\Lambda^2}{N^2})\right)^{d/2}}$$

Au final, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{N\to\infty} I_{N,1} = \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}} 2|\phi^o_\xi(\theta)|^2 d\theta = \fint_{S^{d-1}} 2|\phi^o_\xi(\theta)|^2 d\theta,$$

Il existe de plus une constance C_1 qui ne dépend que de λ et Λ telle que $\forall N > 0$

$$\left| I_{N,1} - \fint_{S^{d-1}} 2|\phi^o_\xi(\theta)|^2 d\theta \right| \leq C_1 \frac{1}{N^2}$$

Étude de $I_{N,2}$
La convexité de l'anisotrope ϕ^o implique que

$$\phi^o(\xi) Tr\left(\phi^o_{\xi\xi}(\xi)\right) \geq 0.$$

En utilisant la même démarche que pour l'intégrale $I_{N,1}$, on montre que

$$\lim_{N\to\infty} I_{N,2} = \fint_{S^{d-1}} 2\phi^o(\theta) Tr\left(\phi^o_{\xi\xi}(\theta)\right) d\theta,$$

ainsi que l'existence d'une constante C_2 telle que $\forall N > 0$

$$\left| I_{N,2} - \fint_{S^{d-1}} 2\phi^o(\theta) Tr\left(\phi^o_{\xi\xi}(\theta)\right) d\theta \right| \leq C_2 \frac{1}{N^2}$$

Étude de $I_{N,3}$
L'étude de la troisième intégrale s'obtient plus facilement, en effet

$$\begin{aligned} |I_{N,3}| &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|\xi|^2} \phi^o\left(\frac{\xi}{N}\right)^2 |\phi^o_\xi(\xi)|^2 e^{-\phi^o\left(\frac{\xi}{N}\right)^2} d\xi \\ &\leq \frac{4}{N^2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|\xi|^2} \phi^o(\xi)^2 |\phi^o_\xi(\xi)|^2 e^{-\phi^o\left(\frac{\xi}{N}\right)^2} d\xi \\ &\leq \frac{C_3}{N^2}. \end{aligned}$$

Étude de I_N
Nous déduisons finalement des inégalités précédentes l'existence d'une constante C telle que $\forall N > 0$

$$\left| I_N - \fint_{S^{d-1}} 2\left(|\phi^o_\xi(\theta)|^2 + \phi^o(\theta) Tr\left(\phi^o_{\xi\xi}(\theta)\right)\right) d\theta \right| \leq \frac{C}{N^2}$$

Et

$$\lim_{N\to\infty} I_N = \fint_{S^{d-1}} 2\left(|\phi^o_\xi(\theta)|^2 + \phi^o(\theta) Tr\left(\phi^o_{\xi\xi}(\theta)\right)\right) d\theta < \infty$$

□

Remarque 27. *Cette propriété montre que le noyau K_ϕ n'admet pas de moment d'ordre 2 mais que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 K_\phi dx$ est en fait une intégrale impropre à laquelle nous pouvons donner une estimation. Une conséquence directe est que le noyau K_ϕ n'est certainement pas positif, les propriétés de monotonie du laplacien ne seront donc pas préservées pour cet opérateur anisotrope.*

6.3 Estimation d'erreur entre les deux opérateurs de diffusion anisotrope

Nous allons appliquer successivement les deux opérateurs $\triangle_\phi$ et $\tilde{\triangle}_\phi$ sur des fonctions typiques des solutions de champ de phase afin d'analyser l'erreur engendrée par l'utilisation de $\tilde{\triangle}_\phi$. Soient

un profil q régulier et Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^d$. Les fonctions de champ de phase s'expriment sous la forme

$$u^\epsilon(x) = q\left(\frac{\bar{d}(x,\Omega)}{\epsilon}\right)$$

Pour simplifier les choses, nous nous plaçons sur un voisinage de l'interface diffuse Γ^ϵ de telle sorte que la fonction distance signée $\bar{d}(x,\Omega)$ admette un développement limité d'ordre 2 en x^* :

$$\bar{d}(x,\Omega) = \bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\, x-x^*\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\langle A(x-x^*)\,,\, x-x^*\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} + O\left(|x-x^*|^3\right),$$

où $\nu = \nabla\bar{d}(x^*,\Omega)$ et $A = \nabla^2\bar{d}(x^*,\Omega)$.
Nous allons dans un premier temps comparer l'action des deux opérateurs sur un front où la courbure A est nulle :

$$u^\epsilon_{0,x^*}(x) = q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\, x-x^*\rangle}{\epsilon}\right)$$

L'erreur obtenue sera alors nulle.
Puis, nous supposerons que la courbure A est non nulle et nous nous intéresserons aux fonctions du type

$$u^\epsilon_{1,x^*}(x) = q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\, x-x^*\rangle + \frac{1}{2}\langle A(x-x^*)\,,\, x-x^*\rangle}{\epsilon}\right).$$

L'erreur sera cette fois-ci non nulle et nous essayerons de montrer qu'elle est toute fois uniformément bornée par rapport à ϵ.

6.3.1 Erreur caractéristique sur un front droit

Proposition 26. *Si la fonction u^ϵ_{0,x^*} est un front et s'exprime sous la forme*

$$u^\epsilon_{0,x^*}(x) = q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\, x-x^*\rangle}{\epsilon}\right),\ \textit{avec } |\nu| = 1$$

alors,

$$\triangle_\phi u^\epsilon_{0,x^*}(x) = \tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{0,x^*}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Démonstration de la proposition 26.

Estimation de $\triangle_\phi u^\epsilon_{0,x^*}(x)$

Tout d'abord,

$$\nabla u^\epsilon_{0,x^*}(x) = \frac{\nu}{\epsilon} q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\, x-x^*\rangle}{\epsilon}\right),$$

et,

$$\nabla_\phi u^\epsilon_{0,x^*}(x) = T^o\left(\nabla u^\epsilon_{0,x^*}(x)\right) = \frac{\phi^o(\nu)\phi^o_\xi(\nu)}{\epsilon} q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\, x-x^*\rangle}{\epsilon}\right),$$

où $T^o(\xi) = \phi^o_\xi(\xi)\phi^o(\xi)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\triangle_\phi u^\epsilon_{0,x^*}(x) &= \operatorname{div}\left(\nabla_\phi u^\epsilon_{0,x^*}(x)\right) \\
&= \frac{\phi^o(\nu)}{\epsilon}\ \phi^o_\xi(\nu).\nabla\left(q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle\nu\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right)\right) \\
&= \frac{\phi^o(\nu)}{\epsilon^2}\ \phi^o_\xi(\nu)\cdot\nu\ q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle\nu\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right) \\
&= \frac{\phi^o(\nu)^2}{\epsilon^2}\ q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle\nu\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right),
\end{aligned}$$

car pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\phi^o(\xi) = \phi^o_\xi(\xi).\xi$. Au final,

$$\boxed{\triangle_\phi u^\epsilon_{0,x^*}(x) = \frac{\phi^o(\nu)^2}{\epsilon^2}\ q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle\nu\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right)}$$

Estimation de $\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{0,x^*}(x)$

Nous utilisons deux nouvelles coordonnées dans l'estimation de l'action de l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$, un dans le domaine spatial noté $(x_\nu, x_{\nu^\perp})$ et un dans le domaine fréquentiel noté $(\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp})$ où x_ν,$\xi_\nu \in \mathbb{R}$, $x_{\nu^\perp}$,$\xi_{\nu^\perp} \in \mathbb{R}^{d-1}$. On rappelle que $|\nu| = 1$. Ces repères sont alors définis par

$$\begin{cases} x_\nu = (x-x^*)\cdot\nu & (x_{\nu^\perp})_j = (x-x^*)\cdot e_{\nu^\perp,j} & \text{pour } j = 1:d-1 \\ \xi_\nu = \xi\cdot\nu & (\xi_{\nu^\perp})_j = \xi\cdot e_{\nu^\perp,j} & \text{pour } j = 1:d-1 \end{cases}$$

où la famille $\{e_{\nu^\perp,j}\}_{j=1:d-1}$ représente une base orthonormée du sous-espace vectoriel $\left\{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \langle x\,,\,\nu\rangle = 0\right\}$ et,

$$x - x^* = x_\nu\nu + \sum_{j=1}^{d-1}(x_{\nu^\perp})_j e_{\nu^\perp,j} \qquad \xi = \xi_\nu\nu + \sum_{j=1}^{d-1}(\xi_{\nu^\perp})_j e_{\nu^\perp,j}$$

Dans ce nouveau repère, u^ϵ_{0,x^*} est égale à

$$u^\epsilon_{0,x^*}(x) = q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle\nu\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right) = q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right).$$

On pose alors

$$\tilde{u}^\epsilon_{0,x^*}(x_\nu, x^\perp_\nu) = q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right).$$

A noter que

$$\mathcal{F}\left[u^\epsilon_{0,x^*}(x)\right](\xi) = e^{2i\pi x^*.\xi}\tilde{\mathcal{F}}\left[\tilde{u}^\epsilon_{0,x^*}(x)\right](\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp}),$$

où la distribution $\mathcal{F}\left[\tilde{u}^\epsilon_{0,x^*}\right](\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp})$ s'identifie à

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\tilde{u}^\epsilon_{0,x^*}\right](\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp}) &= \mathcal{F}_1\left[q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\ \mathcal{F}_{d-1}\left[1\right](\xi_{\nu^\perp}) \\
&= \mathcal{F}_1\left[q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\ \delta_{\{\xi_{\nu^\perp}=0\}},
\end{aligned}$$

où $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_{d-1}$ désignent respectivement la transformée de Fourier en dimension 1 et $d-1$. Comme cette distribution est d'ordre 0, $\phi^o(\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp})^2\mathcal{F}[\tilde{u}^\epsilon_{0,x^*}](\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp})$ est bien définie et vérifie

$$-4\pi^2\phi^o(\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp})^2\mathcal{F}\left[\tilde{u}^\epsilon_{0,x^*}\right](\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp}) = -4\pi^2\xi_\nu^2\phi^o(\nu)^2\mathcal{F}_1\left[q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\ \delta_{\{\xi_{\nu^\perp}=0\}}$$

Et alors, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\triangle}_\phi \tilde{u}^\epsilon_{0,x^*} \, , \, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \left\langle -4\pi^2 \phi^o(\xi)^2 \mathcal{F}\left[\tilde{u}^\epsilon_{0,x^*}\right] \, , \, \bar{\mathcal{F}}[\varphi] \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\
&= \left\langle -4\pi^2 \phi^o(\nu)^2 |\xi_\nu|^2 \mathcal{F}_1 \left[q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + x_\nu}{\epsilon} \right) \right] (\xi_\nu) \; \delta_{\{\xi_{\nu^\perp}=0\}} \, , \, \bar{\mathcal{F}}\left[\varphi\right](\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp}) \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\
&= \phi^o(\nu)^2 \left\langle \mathcal{F}_1 \left[q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + x_\nu}{\epsilon} \right) \right] (\xi_\nu) \; \delta_{\{\xi_{\nu^\perp}=0\}} \, , \, -4\pi^2 |\xi_\nu|^2 \bar{\mathcal{F}}[\varphi](\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp}) \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\
&= \phi^o(\nu)^2 \left\langle q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + x_\nu}{\epsilon} \right) \, , \, \frac{\partial^2 \varphi(x_\nu, x_{\nu^\perp})}{\partial x_\nu^2} \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\
&= \left\langle \phi^o(\nu)^2 \frac{1}{\epsilon^2} q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + x_\nu}{\epsilon} \right) \, , \, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

La distribution $\triangle_\phi u^\epsilon_{0,x^*}$ est régulière et s'identifie à la fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ définie dans le repère initial :

$$\boxed{\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{0,x^*}(x) = \frac{\phi^o(\nu)^2}{\epsilon^2} \; q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu \, , \, x - x^* \rangle_{l^2}}{\epsilon} \right)}$$

□

6.3.2 Erreur caractéristique sur un front courbé

La fonction u^ϵ est maintenant supposée être un front courbé et s'exprime sous la forme

$$u^\epsilon_{1,x^*} = q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu \, , \, x - x^* \rangle + \frac{1}{2} \langle A(x - x^*) \, , \, x - x^* \rangle}{\epsilon} \right).$$

où A est symétrique et admet une valeur propre nulle dans la direction ν.
La difficulté réside ici dans le calcul de $\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x^*)$ car, contrairement à la démonstration précédente, le support fréquentiel de cette fonction n'est pas inclus dans la droite d'orientation ν. Nous allons alors introduire une nouvelle fonction, notée u^ϵ_{2,x^*}, définie par un développement limité de u^ϵ_{1,x^*} en x^* et qui a la particularité de découpler les variables x_ν et $x_{\nu^\perp}$:

$$u^\epsilon_{2,x^*}(x) = q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu \, , \, x - x^* \rangle}{\epsilon} \right) + q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu \, , \, x - x^* \rangle}{\epsilon} \right) \frac{\langle A(x - x^*) \, , \, x - x^* \rangle}{2\epsilon},$$

et

$$u^\epsilon_{2,x^*}(x) = u^\epsilon_{1,x^*}(x) + \frac{1}{\epsilon} o\left(|x - x^*|^2 \right).$$

Ainsi, dans ce travail, nous allons,

- **Estimer la fonction** $\triangle_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x)$. Comme l'opérateur $\triangle_\phi$ est local, c'est à dire que $\triangle_\phi u(x)$ dépend uniquement des valeurs de $\nabla u(x)$ et $\nabla^2 u(x)$ en x^*, l'estimation de $\triangle_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x^*)$ permet d'obtenir l'expression de $\triangle_\phi u^\epsilon(x)$ pour tout x au voisinage de $\partial\Omega$.

- **Estimer la fonction** $\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x)$ définie initialement comme une distribution et qui s'avère être au final une distribution régulière.

– **Comparer les fonctions** $\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x)$ **et** $\triangle_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x)$ et montrer que

$$\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x) = \triangle_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x) + \frac{1}{\epsilon} O\left(|x - x^*|\right)$$

– **Estimer l'écart entre** $\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x^*)$ **et** $\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x^*)$ en utilisant les propriétés de moment d'ordre 2 du noyau $K_{\phi,t}$ afin d'en déduire que

$$\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x^*) = \tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x^*) + O(1)$$

Estimation de $\triangle_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x)$

Lemme 8. *Avec les notations précédentes,*

$$\begin{aligned}
\triangle_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x) &= \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\phi^o\left(\nu + A(x-x^*)\right)\left\langle A\,,\, \phi^o_{\xi\xi}(\nu + A(x-x^*))\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^{d\times d})}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\left\langle A\phi^o_\xi(\nu + A(x-x^*))\,,\, \phi^o_\xi(\nu + A(x-x^*))\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon^2} q''\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu + A(x-x^*))^2\right],
\end{aligned}$$

où $d(x) = \bar{d}(x^*, \Omega) + \langle \nu\,,\, x - x^*\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\langle A(x-x^*)\,,\, x-x^*\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)}$.

Démonstration du lemme 8 .

Tout d'abord,

$$\nabla u^\epsilon_{1,x^*}(x) = \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\nu + A(x-x^*)\right].$$

Et alors

$$\begin{aligned}
T^o\left(\nabla u^\epsilon_{1,x^*}\right)(x) &= \phi^o\left(\nabla u^\epsilon_{1,x^*}\right)(x)\ \phi^o_\xi\left(\nabla u^\epsilon_1\right)(x) \\
&= \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\phi^o\left(\nu + A(x-x^*)\right)\phi^o_\xi\left(\nu + A(x-x^*)\right)\right].
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\triangle_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x) &= \operatorname{div}\left(T^o\left(\nabla u^\epsilon_1\right)\right)(x) \\
&= \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu + A(x-x^*))\operatorname{div}\left(\phi^o_\xi\left(\nu + A(x-x^*)\right)\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\left\langle \nabla\left(\phi^o\left(\nu + A(x-x^*)\right)\right)\,,\, \phi^o_\xi(\nu + A(x-x^*))\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}\phi^o(\nu + A(x-x^*))\left\langle \nabla\left(q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\right)\,,\, \phi^o_\xi(\nu + A(x-x^*))\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu + A(x-x^*)))\left\langle A\,,\, \phi^o_{\xi\xi}(\nu + A(x-x^*))\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^{d\times d})}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\left\langle A\phi^o_\xi(\nu + A(x-x^*)))\,,\, \phi^o_\xi(\nu + A(x-x^*))\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon^2} q''\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu + A(x-x^*)))^2\right],
\end{aligned}$$

car A est symétrique. □

L'opérateur $\triangle_\phi$ est local, il n'introduit uniquement que les valeurs de $\nabla u(x^*)$ et $\nabla^2 u(x^*)$ dans l'estimation de $\triangle_\phi u(x^*)$. Ainsi, il est clair que $\triangle_\phi u^\epsilon(x^*) = \triangle_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x^*)$ et la propriété suivante est immédiate.

Proposition 27. *La fonction $\triangle_\phi u^\epsilon$ s'identifie à*

$$\begin{aligned}\triangle_\phi u^\epsilon(x) &= \frac{1}{\epsilon}q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\phi^o\left(\frac{\nabla u^\epsilon(x)}{|\nabla u^\epsilon(x)|}\right)\left\langle \nabla\left[\frac{\nabla u^\epsilon(x)}{|\nabla u^\epsilon(x)|}\right], \phi^o_{\xi\xi}\left(\frac{\nabla u^\epsilon(x)}{|\nabla u^\epsilon(x)|}\right)\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^{d\times d})} \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon}q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left\langle \nabla\left[\frac{\nabla u^\epsilon(x)}{|\nabla u^\epsilon(x)|}\right]\phi^o_\xi\left(\frac{\nabla u^\epsilon(x)}{|\nabla u^\epsilon(x)|}\right), \phi^o_\xi\left(\frac{\nabla u^\epsilon(x)}{|\nabla u^\epsilon(x)|}\right)\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2}q''\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\phi^o\left(\frac{\nabla u^\epsilon(x)}{|\nabla u^\epsilon(x)|}\right)^2\end{aligned}$$

Démonstration de la propriété 27.
Il suffit d'appliquer la propriété précédente avec $A = \nabla\left[\frac{\nabla u^\epsilon(x)}{|\nabla u^\epsilon(x)|}\right]$ et $\nu = \frac{\nabla u^\epsilon(x)}{|\nabla u^\epsilon(x)|}$. On vérifie en effet que pour des fonctions de la forme $u^\epsilon = q\left(\frac{d(x,\Omega)}{\epsilon}\right)$, la matrice A est bien symétrique. □

Estimation de $\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x)$ au sens des distributions

On rappelle que la fonction u^ϵ_{2,x^*} est égale à

$$u^\epsilon_{2,x^*}(x) = q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\, x - x^*\rangle}{\epsilon}\right) + q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\, x - x^*\rangle}{\epsilon}\right)\frac{\langle A(x-x^*)\,,\, x - x^*\rangle}{2\epsilon}.$$

Nous allons montrer le lemme suivant

Lemme 9. *Avec les notations définies précédemment,*

$$\begin{aligned}\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x) &= \frac{1}{\epsilon}q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle x - x^*\,,\,\nu\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)}}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu)\ \left\langle A\,,\,\phi^o_{\xi\xi}(\nu)\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^{d\times d})} + \left\langle A\phi^o_\xi(\nu)\,,\,\phi^o_\xi(\nu)\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)}\right] \\ &+ \frac{1}{\epsilon^2}q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\, x - x^*\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)}}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu)^2 + 2\phi^o(\nu)\left\langle A(x-x^*)\,,\,\phi^o_\xi(\nu)\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)}\right] \\ &+ \frac{1}{2\epsilon^3}q'''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\, x - x^*\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)}}{\epsilon}\right)\phi^o(\nu)^2\left\langle A(x-x^*)\,,\, x-x^*\right\rangle_{l^2(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 9.
La fonction u^ϵ_{2,x^*} se décompose comme la somme des deux fonctions suivantes

$$\begin{aligned}u^\epsilon_{2,x^*}(x) &= q\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + <\nu, x - x^*>}{\epsilon}\right) + q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\, x - x^*\rangle}{\epsilon}\right)\frac{\langle A(x-x^*)\,,\, x-x^*\rangle}{2\epsilon} \\ &= u^\epsilon_{0,x^*}(x) + u^\epsilon_{3,x^*}(x)\end{aligned}$$

Nous utilisons une nouvelle fois les repères $(x_\nu, x_{\nu^\perp})$ et $(\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp})$ introduits précédemment.
La propriété 26 implique que

$$\boxed{\triangle_\phi u^\epsilon_{0,x^*}(x) = \frac{\phi^o(\nu)^2}{\epsilon^2}\, q^{''}\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle \nu\,,\, x-x^*\rangle}{\epsilon}\right)}$$

Il reste à estimer la quantité $\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{3,x^*}(x)$. L'intérêt de ce développement limité est que la fonction $u^\epsilon_{3,x^*}(x)$ s'écrit comme un produit tensoriel de deux fonctions dont les variations ont des directions orthogonales :

$$u^\epsilon_{3,x^*}(x) = q^{'}\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle \nu\,,\, x-x^*\rangle}{\epsilon}\right)\frac{\langle A(x-x^*)\,,\, x-x^*\rangle}{2\epsilon}.$$

Dans le nouveau repère, on pose alors

$$\tilde{u}^\epsilon_{3,x^*}(x_\nu, x_\nu^\perp) = q^{'}\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\frac{\left\langle \tilde{A}x_{\nu^\perp}\,,\, x_{\nu^\perp}\right\rangle}{2\epsilon}$$

où $\tilde{A}$ est la représentation de A dans la nouvelle base. Les propriétés géométriques de la fonction distance implique que $A\nu = 0$ et assurent l'existence d'une matrice $\tilde{A}$ telle que

$$\langle A(x-x^*)\,,\, x-x^*\rangle = \left\langle \tilde{A}x_{\nu^\perp}\,,\, x_{\nu^\perp}\right\rangle$$

L'estimation de la transformée de Fourier au sens des distributions tempérées peut maintenant s'effectuer en séparant les variables x_ν et $x_{\nu^\perp}$:

$$\left\langle \mathcal{F}[\tilde{u}^\epsilon_{3,x^*}]\,,\, \bar{\mathcal{F}}[\varphi]\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \left\langle \frac{1}{2\epsilon}\mathcal{F}_1\left[q^{'}\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\mathcal{F}_{d-1}\left[\left\langle \tilde{A}x_{\nu^\perp}\,,\, x_{\nu^\perp}\right\rangle\right](\xi_{\nu^\perp})\,,\, \bar{\mathcal{F}}[\varphi]\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

où $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$.
Nous allons pour le moment nous intéresser aux propriétés de la distribution $T_{\xi_\nu} \in S^{'}(\mathbb{R}^{d-1})$ lorsque $\xi_\nu \neq 0$,

$$T_{\xi_\nu} : \xi_{\nu^\perp} \to \phi^o(\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp})^2\mathcal{F}_{d-1}\left[\left\langle \tilde{A}x_{\nu^\perp}\,,\, x_{\nu^\perp}\right\rangle\right](\xi_{\nu^\perp})$$

La hessienne de la fonction $\xi_{\nu^\perp} \to \phi^o(\xi_\nu, \xi_{\nu^\perp})^2$ est continue (car $\xi_\nu \neq 0$), cette distribution est bien définie et

$$\begin{aligned} T_{\xi_\nu}(\xi_{\nu^\perp}) &= \mathcal{F}\left[-4\pi^2\left\langle \tilde{A}x_{\nu^\perp}\,,\, x_{\nu^\perp}\right\rangle\right](\xi_{\nu^\perp})\phi^o(\xi_\nu,\xi_{\nu^\perp})^2 \\ &= \mathcal{F}\left[-4\pi^2\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i(x_{\nu^\perp})_j\right](\xi_{\nu^\perp})\phi^o(\xi_\nu,\xi_{\nu^\perp})^2 \end{aligned}$$

Remarque 28. *En dimension 1, si f est $C^2(\mathbb{R})$, alors, la distribution $f\delta^{''}$ est bien définie et s'identifie à la distribution $\delta^{''}f(0) + 2\delta^{'}f^{'}(0) + \delta f^{''}(0)$. En effet*

$$\left\langle f\delta^{''}\,,\, \varphi\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \left\langle \delta^{''}\,,\, \varphi f\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = (\varphi f)^{''}(0) = f(0)\varphi^{''}(0) + 2f^{'}(0)\varphi^{'}(0) + f^{''}(0)\varphi(0).$$

Et plus généralement en dimension d, si $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, alors,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}[-4\pi^2\xi_i\xi_j]f &= \frac{\partial^2\delta}{\partial x_i\partial x_j}f \\ &= \delta\frac{\partial^2[f]}{\partial x_i x_j}(0) + \frac{\partial\delta}{\partial x_i}\frac{\partial[f]}{\partial x_j}(0) + \frac{\partial\delta}{\partial x_j}\frac{\partial[f]}{\partial x_i}(0) + \frac{\partial^2\delta}{\partial x_i x_j}f(0) \end{aligned}$$

En ajoutant à cela l'hypothèse de symétrie de $\tilde{A}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
T_{\xi_\nu}(\xi_{\nu^\perp}) &= \mathcal{F}\left[-4\pi^2 \sum_{i,j=1}^{d-1} \tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i(x_{\nu^\perp})_j\right](\xi_{\nu^\perp})\phi^o(\xi_\nu,\xi_{\nu^\perp})^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{d-1} \mathcal{F}\left[-4\pi^2\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i(x_{\nu^\perp})_j\right](\xi_{\nu^\perp})\phi^o(\xi_\nu,0)^2 \\
&+ 2\sum_{i,j=1}^{d-1} \mathcal{F}\left[-2i\pi\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i\right](\xi_{\nu^\perp})\frac{\partial(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\xi_\nu,0) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{d-1} \mathcal{F}[1](\xi_{\nu^\perp})\tilde{A}(i,j)\frac{\partial^2(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_i\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\xi_\nu,0).
\end{aligned}$$

Les propriétés d'homogénéité de ϕ^o montrent alors que

$$\begin{aligned}
T_{\xi_\nu}(\xi_{\nu^\perp}) &= \sum_{i,j=1}^{d-1} \mathcal{F}\left[\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i(x_{\nu^\perp})_j\right](\xi_{\nu^\perp})\phi^o(\nu)^2(-4\pi^2\xi_\nu^2) \\
&+ 2\sum_{i,j=1}^{d-1} \mathcal{F}\left[\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i\right](\xi_{\nu^\perp})\frac{\partial(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\nu)(-2i\pi\xi_\nu) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{d-1} \mathcal{F}[1](\xi_{\nu^\perp})\tilde{A}(i,j)\frac{\partial^2(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_i\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\nu).
\end{aligned}$$

Lorsque $\xi_\nu = 0$, la distribution $T_{\xi_\nu=0}(\xi_{\nu^\perp})$,

$$T_{\xi_\nu=0}(\xi_{\nu^\perp}) := \mathcal{F}\left[-4\pi^2 < \tilde{A}x_{\nu^\perp}, x_{\nu^\perp} >\right](\xi_{\nu^\perp})\phi^o(0,\xi_{\nu^\perp})^2,$$

est a priori mal définie. Mais comme nous l'avons expliqué précédemment, nous pouvons donner un sens à cette distribution :

$$T_{\xi_\nu=0}(\xi_{\nu^\perp}) = \left[\fint_{\xi\in S^{d-1}\cap<\xi,\nu>=0} \sum_{i,j=1}^{d-1} A(i,j)\frac{\partial^2(\phi^o)^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi)d\sigma\right]\mathcal{F}[1](\xi_{\nu^\perp}).$$

Remarque 29. *La distribution $T(\xi_\nu,\xi_{\nu^\perp}) = T_{\xi_\nu}(\xi_{\nu^\perp})$ est a priori mal définie pour $\xi_\nu = 0$, en revanche le produit de distribution*

$$\frac{1}{2\epsilon}\mathcal{F}_1\left[q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)T(\xi_\nu,\xi_{\nu^\perp})$$

est lui bien posé.
En fait, c'est le terme

$$\sum_{i,j=1}^{d-1} \mathcal{F}_{d-1}[1](\xi_{\nu^\perp})\tilde{A}(i,j)\frac{\partial^2(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_i\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\nu) = f(\xi_\nu)\ \delta_{\{\xi_{\nu^\perp}=0\}}$$

qui pose problème puisque $f(\xi_\nu)$ n'est pas bien définie pour $\xi_\nu = 0$. Mais comme la distribution $\mathcal{F}_1\left[q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right]$ est une distribution régulière, il ressort que la valeur utilisée en 0 pour

la fonction f n'a pas d'influence sur la distribution

$$f(\xi_\nu)\delta_{\{\xi_{\nu^\perp}=0\}}\mathcal{F}\left[q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right]$$

En effet, la valeur de

$$\left\langle f(\xi_\nu)\delta_{\{\xi_{\nu^\perp}=0\}}\mathcal{F}_1\left[q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\,,\,\bar{\mathcal{F}}[\varphi]\right\rangle = \left\langle f(\xi_\nu)\mathcal{F}_1\left[q'\left(\frac{x_\nu}{\epsilon}\right)\right]\,,\,\bar{\mathcal{F}}[\varphi](\xi_\nu,0)\right\rangle$$

ne dépend pas de $f(0)$.

En résumé, la distribution T était a priori mal définie car la fonction $(\phi^o)^2$ n'admet pas de dérivée seconde continue en zéro. Nous avons donné un sens à cette distribution, définie comme la limite d'une suite de distributions régulières, qui étaient elles-mêmes définies à partir d'une approximation régulière $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la masse de Dirac δ. Ainsi, la distribution T dépendait à priori du choix de l'approximation $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Mais comme $\mathcal{F}_1\left[q'\left(\frac{x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)$ est régulière, il ressort au final que le produit $T(\xi)\mathcal{F}\left[q'\left(\frac{x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)$ est bien défini et ne dépend plus du choix de $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Finalement, la distribution $\mathcal{F}[\tilde{u}^\epsilon_{3,x^*}]\phi^o(\xi)^2 = \frac{1}{2\epsilon}\mathcal{F}_1\left[q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)T(\xi_\nu,\xi_{\nu^\perp})$ se décompose sous la somme des trois distributions T_1, T_2 et T_3 suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\tilde{u}^\epsilon_{3,x^*}](\xi)\phi^o(\xi)^2 &= T_1(\xi)+T_2(\xi)+T_3(\xi)\\
&= \frac{1}{2\epsilon}\mathcal{F}_1\left[q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\mathcal{F}_{d-1}\left[\phi^o(\nu)^2\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i(x_{\nu^\perp})_j\right](\xi_{\nu^\perp})(-4\pi^2\xi_\nu^2)\\
&+ \frac{1}{2\epsilon}\mathcal{F}_1\left[q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\mathcal{F}_{d-1}\left[2\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i\frac{\partial(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\nu)\right](\xi_{\nu^\perp})(-2i\pi\xi_\nu)\\
&+ \frac{1}{2\epsilon}\mathcal{F}_1\left[q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\mathcal{F}_{d-1}\left[\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)\frac{\partial^2(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_i\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\nu)\right](\xi_{\nu^\perp})
\end{aligned}$$

Soit $\varphi\in S(\mathbb{R}^d)$, alors avec $d_{x^*}=\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu$

$$\begin{aligned}
\langle T_1\,,\,\bar{\mathcal{F}}[\varphi]\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \left\langle\frac{1}{2\epsilon}\mathcal{F}\left[q'\left(\frac{d_{x^*}}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\mathcal{F}\left[\phi^o(\nu)^2\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i(x_{\nu^\perp})_j\right](\xi_{\nu^\perp})(-4\pi^2\xi_\nu^2)\,,\,\bar{\mathcal{F}}[\varphi]\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\\
&= \left\langle\frac{1}{2\epsilon}\mathcal{F}\left[q'\left(\frac{d_{x^*}}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\mathcal{F}\left[\phi^o(\nu)^2\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i(x_{\nu^\perp})_j\right](\xi_{\nu^\perp})\,,\,(-4\pi^2\xi_\nu^2)\bar{\mathcal{F}}[\varphi]\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\\
&= \left\langle\frac{1}{2\epsilon}q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\phi^o(\nu)^2\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i(x_{\nu^\perp})_j\,,\,\frac{\partial^2\varphi(x_\nu,x_{\nu^\perp})}{\partial x_\nu^2}\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\\
&= \left\langle\frac{1}{2\epsilon^3}q'''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\phi^o(\nu)^2\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i(x_{\nu^\perp})_j\,,\,\varphi\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle T_2\,,\,\bar{\mathcal{F}}[\varphi]\rangle &= \left\langle \frac{1}{2\epsilon}\mathcal{F}\left[q'\left(\frac{d_{x^*}}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\mathcal{F}\left[2\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i\frac{\partial(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\nu)\right](\xi_{\nu^\perp})(-2i\pi\xi_\nu)\,,\,\bar{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\
&= \left\langle \frac{1}{\epsilon}\mathcal{F}\left[q'\left(\frac{d_{x^*}}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\mathcal{F}\left[\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i\frac{\partial(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\nu)\right](\xi_{\nu^\perp})\,,\,-2i\pi\xi_\nu\bar{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\
&= \left\langle \frac{1}{\epsilon}q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i\frac{\partial(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\nu)\,,\,-\frac{\partial\varphi(x_\nu,x_{\nu^\perp})}{\partial x_\nu}\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\
&= \left\langle \frac{1}{\epsilon^2}q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)(x_{\nu^\perp})_i\frac{\partial(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\nu)\,,\,\varphi\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle T_3\,,\,\bar{\mathcal{F}}[\varphi]\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \left\langle \frac{1}{2\epsilon}\mathcal{F}\left[q'\left(\frac{\bar{d}_{x^*},\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\right](\xi_\nu)\mathcal{F}\left[\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)\frac{\partial^2(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_i\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\nu)\right](\xi_{\nu^\perp})\,,\,\bar{\mathcal{F}}[\varphi]\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\
&= \left\langle \frac{1}{2\epsilon}q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+x_\nu}{\epsilon}\right)\sum_{i,j=1}^{d-1}\tilde{A}(i,j)\frac{\partial^2(\phi^o)^2}{\partial(\xi_\nu^\perp)_i\partial(\xi_\nu^\perp)_j}(\nu)\,,\,\varphi\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}
\end{aligned}
$$

Et dans le repère initial, la distribution $\triangle_\phi u^\epsilon_{3,x^*}$ s'identifie à la fonction

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{3,x^*}(x) &= \frac{1}{\epsilon}q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle x-x^*\,,\,\nu\rangle}{\epsilon}\right)\left(\phi^o(\nu)\ \left\langle A\,,\,\phi^o_{\xi\xi}(\nu)\right\rangle\ +\left\langle A\phi^o_\xi(\nu)\,,\,\phi^o_\xi(\nu)\right\rangle\right) \\
&+ \frac{2}{\epsilon^2}q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle x-x^*\,,\,\nu\rangle}{\epsilon}\right)\phi^o(\nu)\left\langle A(x-x^*)\,,\,\phi^o_\xi(\nu)\right\rangle \\
&+ \frac{1}{2\epsilon^3}q'''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle x-x^*\,,\,\nu\rangle}{\epsilon}\right)\phi^o(\nu)^2\left\langle A(x-x^*)\,,\,(x-x^*)\right\rangle
\end{aligned}
}
$$

En conclusion, l'expression de la fonction $\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_2$ vérifie

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x) &= \frac{1}{\epsilon}q'\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle x-x^*\,,\,\nu\rangle}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu)\ \left\langle A\,,\,\phi^o_{\xi\xi}(\nu)\right\rangle\ +\left\langle A\phi^o_\xi(\nu)\,,\,\phi^o_\xi(\nu)\right\rangle\right] \\
&+ \frac{1}{\epsilon^2}q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle \nu\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu)^2+2\phi^o(\nu)\left\langle A(x-x^*)\,,\,\phi^o_\xi(\nu)\right\rangle\right] \\
&+ \frac{1}{2\epsilon^3}q'''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega)+\langle x-x^*\,,\,\nu\rangle}{\epsilon}\right)\phi^o(\nu)^2\left\langle A(x-x^*)\,,\,x-x^*\right\rangle
\end{aligned}
}
$$

□

Comparaison des fonctions $\triangle_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x)$ et $\tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x)$

Les lemmes 8 et 9 permettent de montrer la proposition suivante :

Proposition 28. *Toujours avec les notations précédentes,*

$$\triangle_\phi u^\epsilon_{1,x^*}(x) = \tilde{\triangle}_\phi u^\epsilon_{2,x^*}(x) + \frac{1}{\epsilon} O\left(|x - x^*|\right)$$

Démonstration de la propriété 28.
Nous rappelons que

$$\begin{aligned}
\triangle_\phi u^\epsilon_1(x) &= I_1 + I_2 + I_3 \\
&= \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu + A(x-x^*)))\left\langle A\,,\, \phi^o_{\xi\xi}(\nu + A(x-x^*)))\right\rangle\right] \\
&+ \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\left\langle A\phi^o_\xi(\nu + A(x-x^*)))\,,\, \phi^o_\xi(\nu + A(x-x^*)))\right\rangle\right] \\
&+ \frac{1}{\epsilon^2} q''\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu + A(x-x^*)))^2\right]
\end{aligned}$$

Avec $d(x) = \bar{d}(x^*, \Omega) + \langle \nu\,,\, x - x^*\rangle + \frac{1}{2}\langle A(x-x^*)\,,\, x - x^*\rangle$
La démonstration consiste à effectuer des développements limités sur chacun des termes I_1, I_2 et I_3.

<u>*Étude du premier terme*</u> :

$$I_1 = \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu + A(x-x^*))\left\langle A\,,\, \phi^o_{\xi\xi}(\nu + A(x-x^*))\right\rangle\right]$$

La fonction $\xi \to \phi^o(\xi)\phi_{\xi\xi}(\xi)$ est absolument continue au voisinage de ν et homogène de degré 0, alors

$$\left[\phi^o(\nu + A(x-x^*)))\left\langle A\,,\, \phi^o_{\xi\xi}(\nu + A(x-x^*))\right\rangle\right] = \phi^o(\nu)\left\langle A\,,\, \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\right\rangle + O\left(|x - x^*|\right)$$

D'un autre côté,

$$\frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{\bar{d}(x^*, \Omega) + \langle \nu\,,\, x - x^*\rangle}{\epsilon}\right) + \frac{1}{\epsilon^2} O\left(|\,\langle A(x-x^*)\,,\, x - x^*\rangle\,|\right)$$

Au final

$$I_1 = \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{\bar{d}(x^*, \Omega) + \langle \nu\,,\, x - x^*\rangle}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu)\left\langle A\,,\, \phi^o_{\xi\xi}(\nu)\right\rangle\right] + \frac{1}{\epsilon} O\left(|x - x^*|\right)$$

<u>*Étude du deuxième terme*</u> :

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\left\langle A\phi^o_\xi(\nu + A(x-x^*))\,,\, \phi^o_\xi(\nu + A(x-x^*))\right\rangle\right]$$

Les mêmes arguments aboutissent à

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon} q'\left(\frac{\bar{d}(x^*, \Omega) + \langle \nu\,,\, x - x^*\rangle}{\epsilon}\right)\left[\left\langle A\phi^o_\xi(\nu)\,,\, \phi^o_\xi(\nu)\right\rangle\right] + \frac{1}{\epsilon} O\left(|x - x^*|\right)$$

Étude du troisième terme :

$$I_3 = \frac{1}{\epsilon^2} q''\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu + A(x-x^*))^2\right]$$

Le troisième terme nécessite d'effectuer des développements limités d'ordre 2 à cause du facteur $\frac{1}{\epsilon^2}$. D'une part,

$$\phi^o(\nu + A(x-x^*)))^2 = \phi^o(\nu)^2 + 2\phi^o(\nu)\left\langle A(x-x^*)\,,\,\phi^o_\xi(\nu)\right\rangle + O\left(|x-x^*|^2\right)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} q''\left(\frac{d(x)}{\epsilon}\right) &= q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right) \\ &+ q'''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right)\left[\frac{1}{2}\frac{\langle A(x-x^*)\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right] \\ &+ \frac{1}{\epsilon^2} O\left(|\,\langle A(x-x^*)\,,\,x-x^*\rangle\,|^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{\epsilon^2} q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right)\left[\phi^o(\nu)^2\right] \\ &+ \frac{1}{\epsilon^2} q''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right)\left[2\phi^o(\nu)\left\langle A(x-x^*)\,,\,\phi^o_\xi(\nu)\right\rangle\right] \\ &+ \frac{1}{\epsilon^3} q'''\left(\frac{\bar{d}(x^*,\Omega) + \langle \nu\,,\,x-x^*\rangle}{\epsilon}\right)\left[\frac{1}{2}\langle A(x-x^*)\,,\,x-x^*\rangle\right]\left[\phi^o(\nu)^2\right] \\ &+ \frac{1}{\epsilon} O\left(|x-x^*|\right) \end{aligned}$$

Enfin, la somme des trois termes montre que

$$I_1 + I_2 + I_3 = \tilde{\triangle}_\phi u_2^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} O\left(|x-x^*|\right)$$

La démonstration de cette propriété est terminée.

□

6.4 Simulations numériques de mouvement par courbure moyenne anisotrope

Nous allons introduire une méthode numérique pour déterminer les solutions de l'équation d'Allen-Cahn anisotrope linéarisée :

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \tilde{\triangle}_\phi u(t,x) - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u(t,x)) \\ u(0,x) = q\left(\frac{d_\phi(x,\Omega)}{\epsilon}\right) \end{cases}$$

L'existence de solution de ce type d'EDP peut s'obtenir en procédant comme dans le cas isotrope et en considérant l'énergie suivante

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^d} 2\pi^2 \phi^o(\xi)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\epsilon^2} W(u) dx$$

Les techniques du chapitre 2 devraient en effet s'adapter puisqu'il y a équivalence de norme entre

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \approx \|u\|^2_{H^1_\phi(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \phi^o(\xi)^2\right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

De plus, l'analyse d'erreur entre les opérateurs $\tilde{\triangle}_\phi$ et $\triangle_\phi$ nous laisse penser que les lignes de niveau 1/2 des solutions u^ϵ de ces équations devraient être une bonne approximation des mouvements par courbure moyenne anisotrope avec un ordre de convergence en $O(\epsilon)$.

6.4.1 Méthodes numériques

Les méthodes numériques utilisées dans le cadre anisotrope sont similaires aux méthodes isotropes à l'exception du symbole $e^{-4\pi^2|\xi|^2}$ qui est remplacé par $e^{-4\pi^2\phi^o(\xi)^2}$ (voir les algorithmes (8) et (12) du chapitre (2)). Le coût algorithmique et les contraintes de stabilité restent de plus inchangés.

Algorithm 8 Équation Allen-Cahn linéarisée sans conservation de volume

Données: Entrées : U^0, δ_t et ϵ

1: **pour** $n \geq 0$,

2: Calculer l'action de l'opérateur de diffusion

$$\begin{cases} U^n_{Fourier} = FFT[U^n] \\ U^{n+1/2}_{Fourier}[k] = e^{-4\pi^2\phi^o(k)^2\delta_t} U^n_{Fourier}[k] \\ U^{n+1/2} = IFFT[U^{n+1/2}_{Fourier}] \end{cases}$$

3: Calculer l'action de l'opérateur de réaction

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} - \frac{\delta_t}{\epsilon^2}\left[W'(U^{n+1/2})\right]$$

4: **fin**

6.4.2 Simulations et tests numériques

Pour un couple d'anisotropie (ϕ, ϕ^o), le mouvement par courbure moyenne $\Omega(t)$ d'un domaine initial $\Omega_0 = B_{\phi,R_0}$ est explicite : à l'instant t, $\Omega(t) = B_{\phi,R(t)}$ où le rayon $R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2t}$. Les

Algorithm 9 Équation Allen-Cahn linéarisée avec conservation de volume

DONNÉES: Entrées : U^0, δ_t et ϵ

1: **pour** $n \geq 0$,

2: Calculer l'action de l'opérateur de diffusion

$$\begin{cases} U^n_{Fourier} = FFT[U^n] \\ U^{n+1/2}_{Fourier}[k] = e^{-4\pi^2\phi^o(k)^2\delta_t} U^n_{Fourier}[k] \\ U^{n+1/2} = IFFT[U^{n+1/2}_{Fourier}] \end{cases}$$

3: Calculer a priori la perte de volume de l'opérateur de réaction

$$k = -\frac{\int W'(U^{n+1/2})dx}{\epsilon \int \left[\sqrt{W(U^{n+1/2})}\right] dx}$$

4: Calculer l'action de l'opérateur de réaction

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} - \frac{\delta_t}{\epsilon^2}\left[W'(U^{n+1/2}) - \epsilon\, k\sqrt{W(U^{n+1/2})}\right]$$

5: **fin**

anisotropies utilisées, présentées sur la figure (6.2) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \phi^o_1(\xi) &= \|\xi\|_{\ell^4} = \left(|\xi_1|^4 + |\xi_2|^4\right)^{\frac{1}{4}} \\ \phi^o_2(\xi) &= \|\xi\|_{\ell^{\frac{4}{3}}} = \left(|\xi_1|^{\frac{4}{3}} + |\xi_2|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \\ \phi^o_3(\xi) &= \left(|\xi_1|^{1,001} + |\tfrac{1}{2}\xi_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\xi_2|^{1,001} + |\tfrac{1}{2}\xi_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\xi_2|^{1,001}\right)^{\frac{1}{1,001}} \end{aligned}$$

Pour chacune d'entre elles, nous effectuons des résolutions numériques de l'équation d'Allen-Cahn anisotrope linéaire pour différentes valeurs du paramètre ϵ et avec comme condition initiale la forme de Wulff correspondante de rayon R_0. A une solution u^ϵ est ensuite associée une évolution d'interface $\tilde{\Gamma}(t) := \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ u(t,x) = 1/2\right\}$. L'objectif de ces premiers tests est d'observer l'influence du paramètre ϵ à la fois sur la forme de ces interfaces, mais aussi sur la vitesse

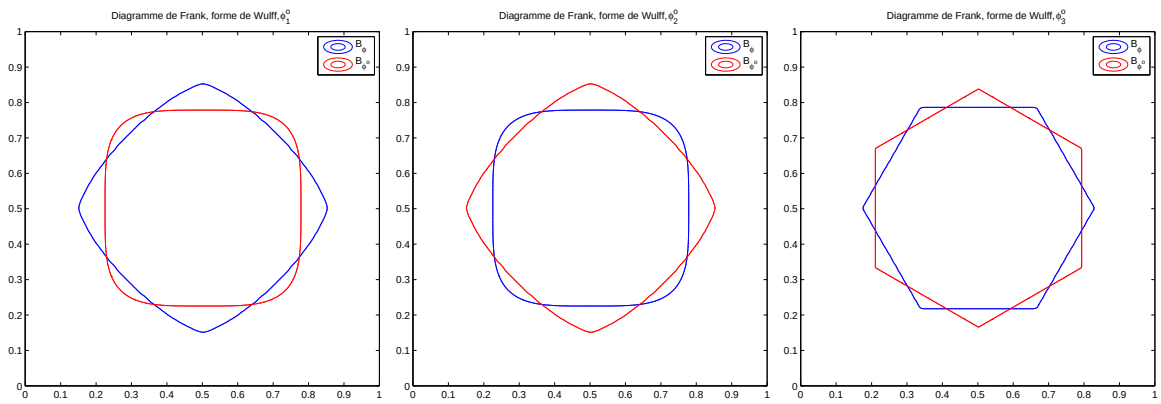


FIG. 6.2 – Forme de Wulff et diagramme de Frank pour les trois couples d'anisotropies (ϕ_1, ϕ^o_1), (ϕ_2, ϕ^o_2) et (ϕ_3, ϕ^o_3)

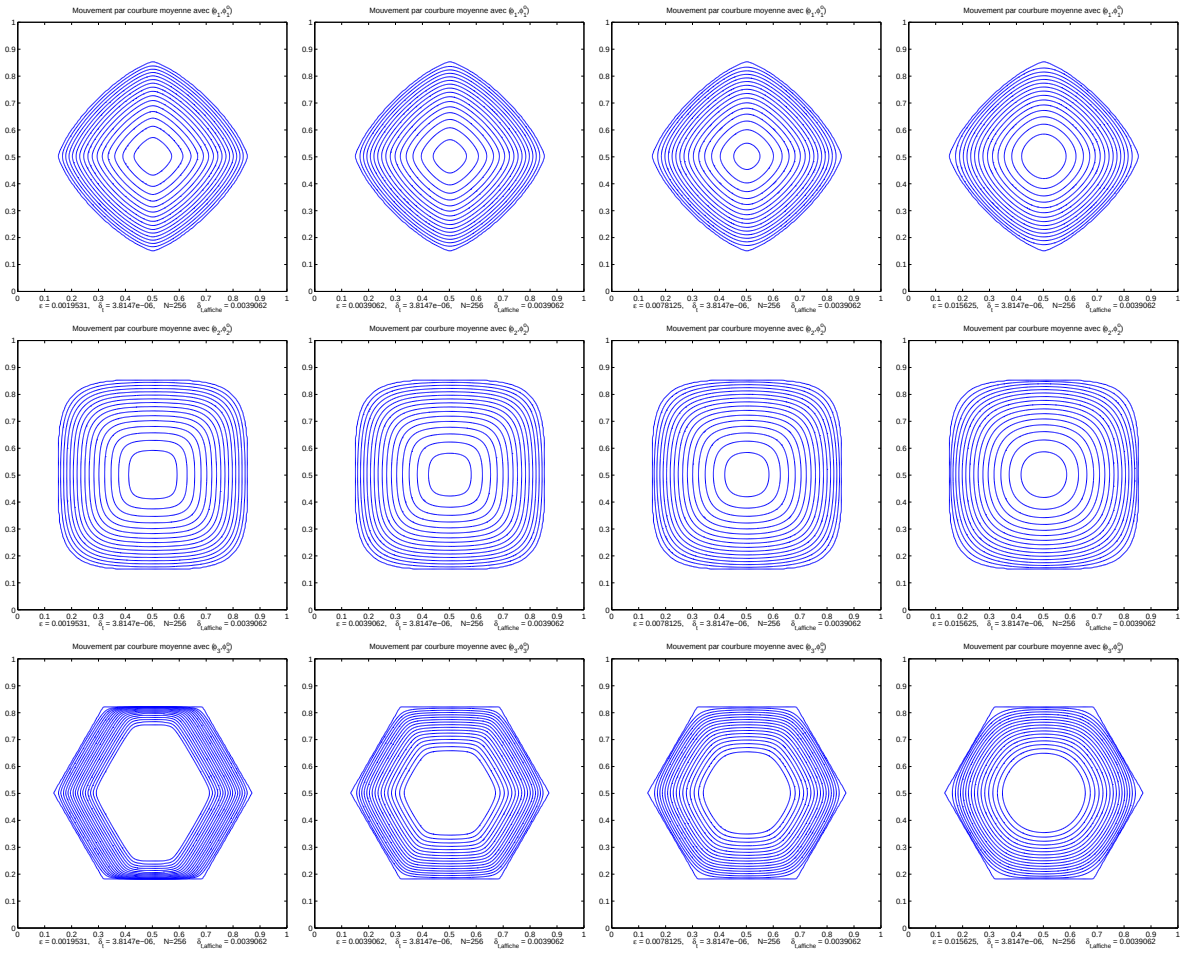


FIG. 6.3 – Évolution d'une forme de Wulff pour les couples d'anisotropies (ϕ_1, ϕ_1^o), (ϕ_2, ϕ_2^o) et (ϕ_3, ϕ_3^o) et pour différentes valeurs du paramètre ϵ.

d'évolution en observant par exemple le temps d'extinction à partir duquel la solution u^ϵ devient plus petite que $1/2$.

Allure de l'interface $\tilde{\Gamma}(t)$

La figure (6.3) présente quelques unes de ces évolutions avec une résolution $N = 2^8$, un pas de temps $\delta_t = (1/(2N))^2$ et pour des valeurs $\epsilon = 1/(2N)$, $\epsilon = 1/N$, $\epsilon = 2/N$ et $\epsilon = 4/N$.

Une première remarque est que les formes de Wulff sont mieux préservées lorsque les paramètres ϵ sont petits. L'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$ semble en effet lisser les fortes courbures, et ce point n'était pas observé avec l'opérateur $\triangle_\phi$.

Un autre type d'erreur apparaît avec l'observation de la première évolution d'interface $\tilde{\Gamma}(t)$ pour la troisième forme d'anisotropie. L'évolution perd en effet sa symétrie mais nous pensons que c'est une conséquence de la discrétisation numérique lorsque le paramètre ϵ est trop petit.

En conclusion, il est assez difficile de distinguer les erreurs de champ de phase, des erreurs issues de l'utilisation de l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$ et des erreurs de discrétisation.

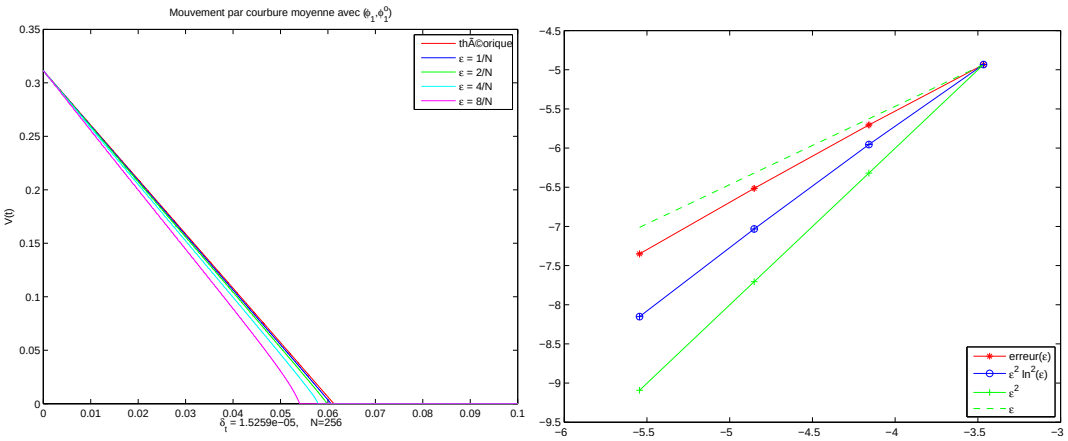


FIG. 6.4 – Pour l'anisotropie (ϕ_1, ϕ_1^o), A gauche : $t \to R^\epsilon(t)$, A droite : erreur sur le temps d'extinction en fonction de epsilon.

Vitesse d'évolution et temps d'extinction

Un deuxième point important est de contrôler la vitesse d'évolution des interfaces $\tilde{\Gamma}^\epsilon(t)$. Nous allons ainsi comparer les décroissances des volumes des domaines $\tilde{\Omega}^\epsilon(t)$. En dimension 2, le rayon $R(t)$ de la forme Wulff à l'instant t vérifie $R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2t}$. Ainsi la décroissance théorique du volume vérifie

$$V(t) = |B_\phi| \left(R_0^2 - 2t\right)$$

La première image de la figure (6.4) montre que l'erreur numérique se répercute sur la pente de décroissance des volumes des domaines $\Omega^\epsilon(t)$. Nous rappelons que dans le cas isotrope, les erreurs de champ de phase apparaissaient uniquement pour les fortes courbures. Le deuxième graphique de (6.4) montre que l'erreur sur le temps d'extinction est de l'ordre de ϵ.

Forme de Wulff numérique

Nous représentons sur les figures (6.5) quelques unes de ces formes de Wulff pour différentes valeurs de ϵ. Il en ressort une nouvelle fois que ces formes sont d'autant plus proches des formes théoriques que le paramètre ϵ est petit.

Afin d'analyser plus précisément l'ordre d'erreur de la méthode, nous traçons sur les figures (6.6) les fonctions

$$log(\epsilon) \to log\left(\|\chi_{\Omega^\epsilon} - \chi_\Omega\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}\right)$$

où Ω^ϵ représente les formes de Wulff obtenues avec nos algorithmes. Nous trouvons ainsi un ordre d'erreur en $O(\epsilon)$ sur le premier et le troisième test qui correspondent aux anisotropies ϕ_1^o et ϕ_2^o. L'erreur obtenue est de plus, relativement plus importante pour l'anisotropie $\phi_2^o(\xi) = \|\xi\|_{l^{\frac{4}{3}}}$ que pour $\phi_1^o(\xi) = \|\xi\|_{l^4}$, une explication serait la non régularité de l'anisotropie ϕ_2^o. Le deuxième graphe présente le résultat d'un test isotrope où nous retrouvons bien l'erreur en $O(\epsilon^2)$. Ce test montre clairement que l'ordre de la méthode de champ de phase après substitution de l'opérateur $\triangle_\phi$ par $\tilde{\triangle}_\phi$ n'est plus de l'ordre de $ln(\epsilon)^2\epsilon^2$ comme l'ont montré Bellettini, Goglione et Novaga dans [11] mais en $O(\epsilon)$. L'utilisation du laplacien de Finsler linéarisé dégrade donc l'ordre de convergence de la méthode de champ de phase comme nous l'avions prévu théoriquement. L'utilisation de l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$ est toutefois intéressante puisqu'elle conduit à des méthodes numériques optimales en coût de calcul.

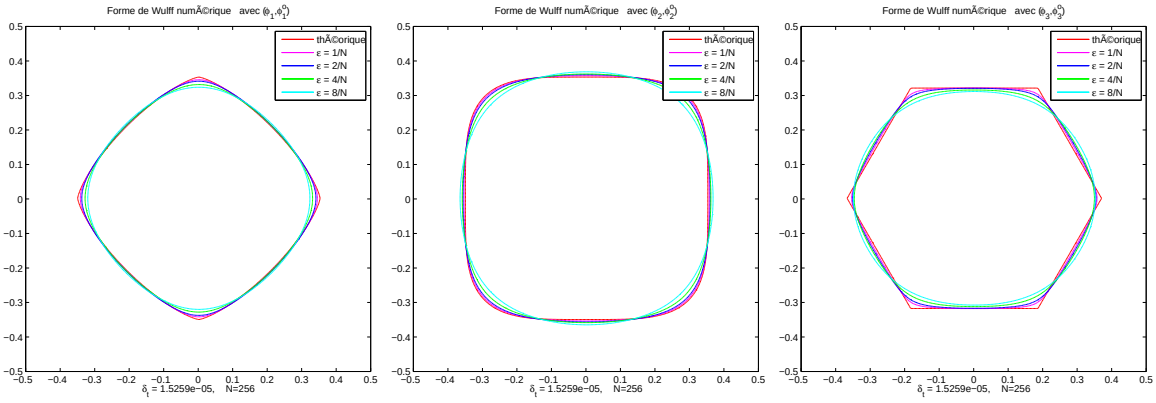


FIG. 6.5 – Formes de Wulff obtenues numériquement pour différentes valeurs du paramètre $\epsilon = 1/N, 2/N, 4/N$ et $8/N$ où $N = 256$.

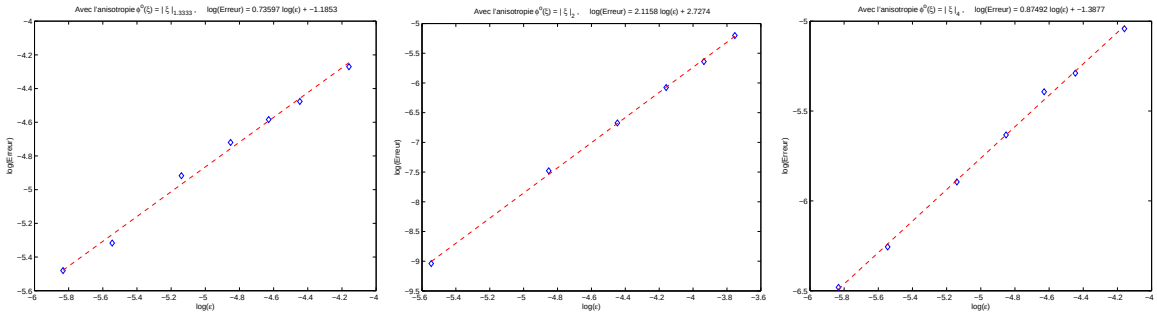


FIG. 6.6 – Erreur commise sur la forme de Wulff en fonction du paramètre ϵ : à gauche avec $\phi_2^o(\xi) = \|\xi\|_{\ell^{4/3}}$, au centre avec $\phi^o(\xi) = \|\xi\|_{\ell^2}$, à droite avec $\phi_1^o(\xi) = \|\xi\|_{\ell^4}$

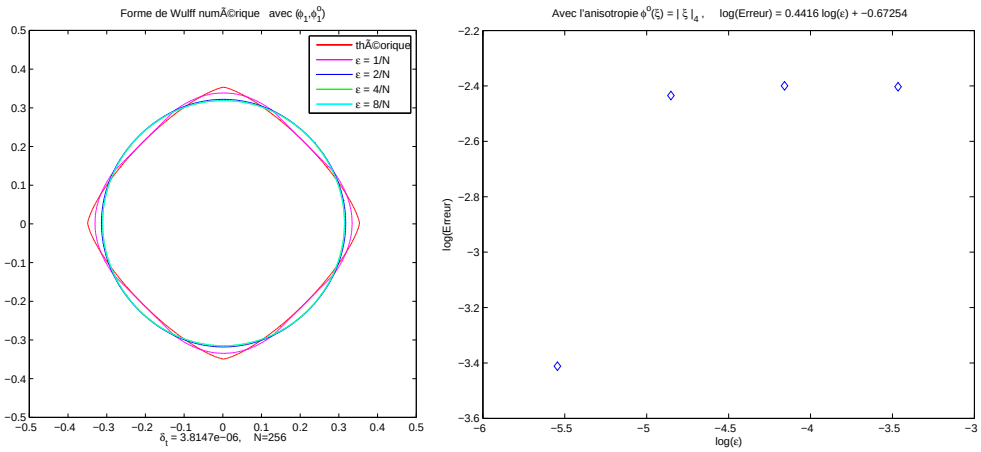


FIG. 6.7 – Erreur commise sur la forme de Wulff avec l'approche Ruuth Merriman. L'anisotropie utilisée est $\phi^o(\xi) = \|\xi\|_{\ell^4}$

Comparaison avec l'approche Ruuth-Merriman

Dans l'introduction, nous avions fait référence aux travaux de Ruuth et Merriman [100] qui modélisent des mouvements par courbure moyenne anisotrope. Pour une anisotropie $\phi^o(\xi) = |\xi| b(arg(\xi))$ donnée, ils montrent formellement que l'algorithme de Bence-Merriman-Osher avec le noyau de convolution,

$$\tilde{K}_{\delta_t,\phi}(x) = C_\phi \; e^{-\frac{x^2}{4\delta_t r(arg(x))}} \quad \text{où} \quad C_\phi = \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2}{4\delta_t r(arg(x))}} dx \right)^{-1}$$

et

$$r(\theta) = \gamma(\theta + \pi/2) \left(\gamma(\theta + \pi/2) + \gamma''(\theta + \pi/2) \right),$$

permet d'approcher les mouvements par courbure moyenne anisotrope.

Nous allons maintenant tester ce noyau de convolution dans nos algorithmes numériques, en utilisant le noyau $\tilde{K}_{\delta_t,\phi}(x)$ à la place de $K_{\delta_t,\phi}(x)$.
Cette méthode ne s'applique que pour des anisotropies ϕ^o de classe $C^2((\mathbb{R}^*)^d)$. Par exemple, le cas de l'anisotropie $\phi^o(\xi) = \|\xi\|_{l^{\frac{4}{3}}}$ ne peut pas être traité. Dans les tests suivants, nous utilisons l'anisotropie $\phi^o(\xi) = \|\xi\|_{l^4}$. La première figure de (6.7) présente les formes de Wulff obtenues pour différentes valeurs du paramètre ϵ et, mis à part le cas où $\epsilon = \frac{1}{N}$, toute les formes obtenues sont isotropes. Il semble que cette approche ne converge que lorsque l'interface est raide. La deuxième figure de (6.7) présente une erreur en ϵ beaucoup plus importante que dans les tests précédents effectués avec le noyau $K_{\delta_t,\phi}(x)$.

En conclusion, l'approche de Ruuth-Merriman ne traite que les anisotropies régulières, et ne semble efficace que dans le cas des interfaces raides. Notre approche, au moins du point de vue numériques, est donc beaucoup plus flexible à toutes sortes d'anisotropies et semble converger plus rapidement.

Quelques simulations en dimension 3

Nous affichons sur les figures (6.8), pour différentes anisotropies ϕ^o, les diagrammes de Frank, les formes de Wulff théoriques et les formes de Wulff obtenues avec notre méthode numérique.

Remarque 30. *Les formes de Wulff théoriques sont obtenues en estimant numériquement le dual de ϕ^o, notée ϕ^{oo} et qui s'identifie à ϕ dans le cas des anisotropies convexes. Ces algorithmes, pour les dimensions 2 et 3, sont présentés dans la troisième annexe.*

Les formes de Wulff sont une nouvelle fois retrouvées bien qu'elles subissent toujours un lissage au niveau des arêtes. Enfin, les figures (6.9), (6.10) et (6.11) présentent trois simulations de mouvement par courbure anisotrope. La condition initiale est un tore et les anisotropies utilisées sont les suivantes : $\phi^o(\xi) = max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, $\phi^o(\xi) = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} + |\xi_3|$ et $\phi^o(\xi) = |\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3|$,

6.5 Conclusion sur notre méthode numérique

L'intérêt de notre approche, qui consiste à utiliser dans l'équation d'Allen-Cahn l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$ au lieu du laplacien anisotrope traditionnel, permet de rendre la résolution numérique de mouvement par courbure moyenne anisotrope à un coût algorithmique optimal dans le sens où ce coût est exactement le même que pour des mouvements isotropes. L'utilisation de l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$ a tout de même des répercutions sur l'ordre de convergence des méthodes de champ de phase, puisque, comme nous l'avons observé, cet ordre semble être maintenant en $O(\epsilon)$ au lieu de $O(\epsilon^2 ln(\epsilon)^2)$. Au final, les simulations présentées introduisent les bonnes directions d'anisotropies et les dynamiques d'interface semblent converger.

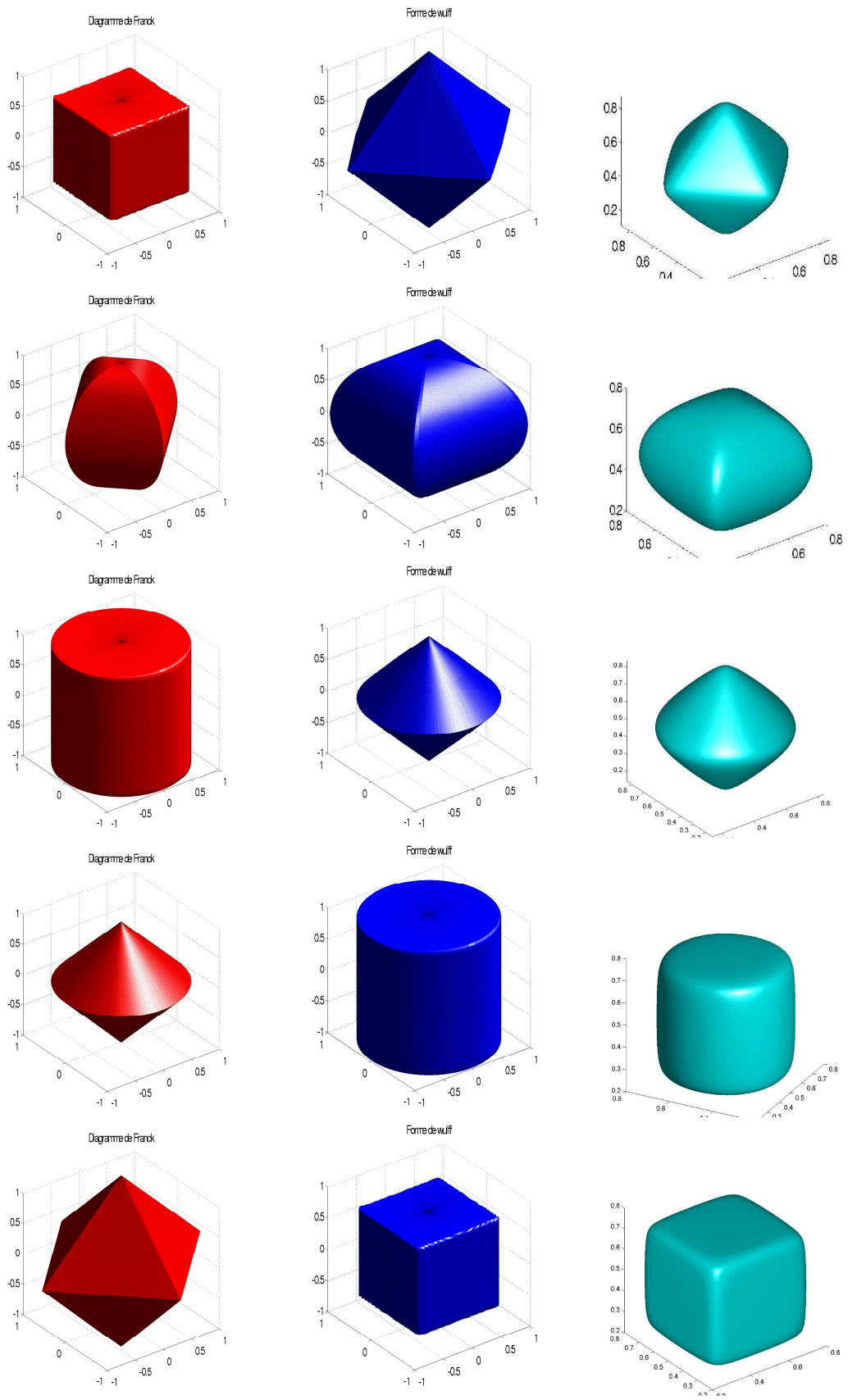


FIG. 6.8 – Diagrammes de Frank, formes de Wulff théoriques et numériques associées aux anisotropies $\phi^o(\xi) = max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, $\phi^o(\xi) = \sqrt{(\xi_1+\xi_2)^2+\xi_3^2}$, $\phi^o(\xi) = \sqrt{max\{\xi_3^2, \xi_1^2+\xi_2^2\}}$, $\phi^o(\xi) = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} + |\xi_3|$ et $\phi^o(\xi) = |\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3|$. Les paramètres de simulation utilisés sont $N = 2^7$, $\epsilon = \frac{1}{N}$, et $\delta_t = \epsilon^2$.

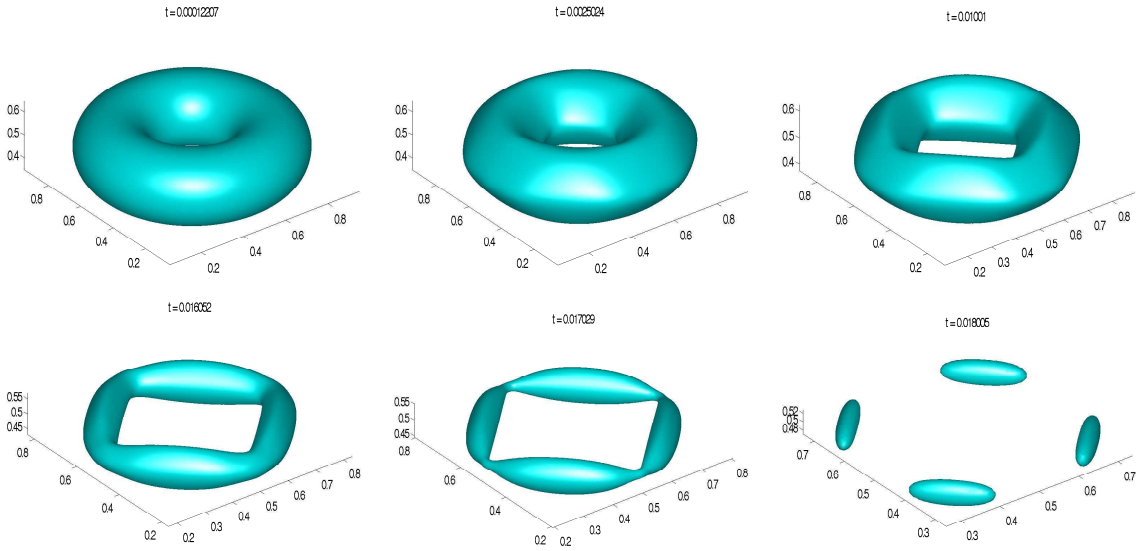


FIG. 6.9 – Evolution d'un tore avec l'anisotropie $\phi^o(\xi) = max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$

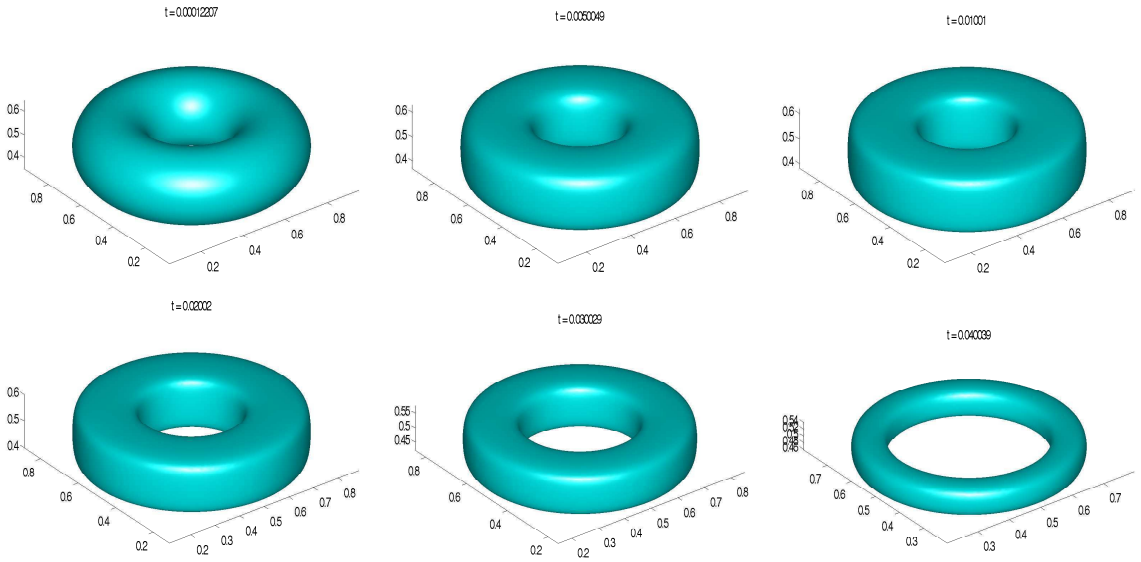


FIG. 6.10 – Evolution d'un tore avec l'anisotropie $\phi^o(\xi) = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} + |\xi_3|$

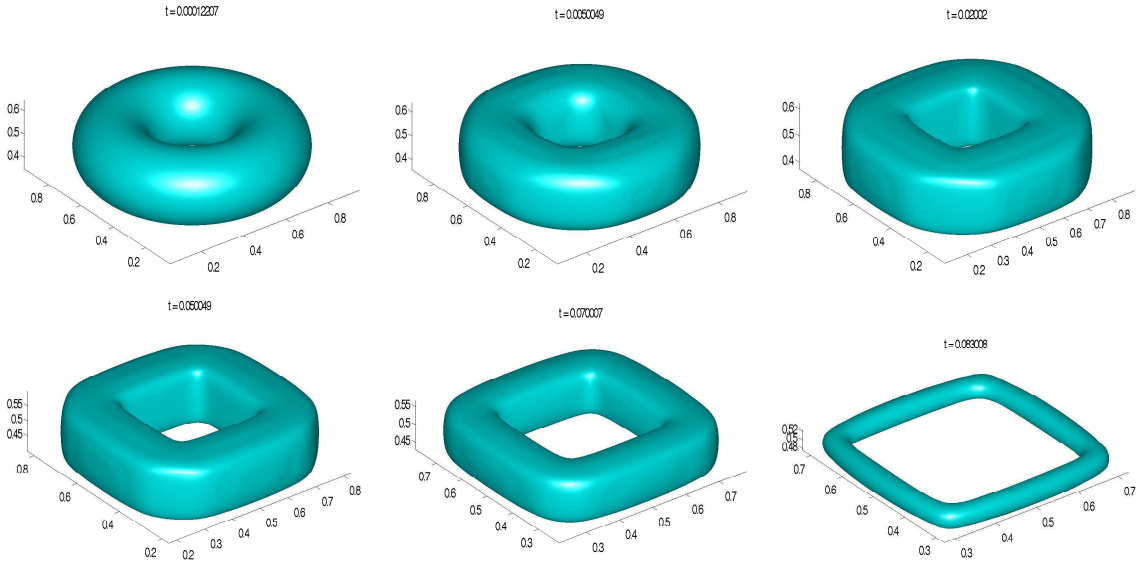


FIG. 6.11 – Evolution d'un tore avec l'anisotropie $\phi^o(\xi) = |\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3|$

Chapitre 7

Application à des anisotropies non convexes

7.1 Motivations

Jusqu'à présent, les anisotropies ϕ et ϕ^o étaient toutes convexes. En fait, la convexité de la fonction ϕ^o est une implication directe de sa définition comme le dual de ϕ. Le sup de fonctions convexes est en effet convexe.

Dans ce chapitre, nous utiliserons des fonctions ϕ^o non convexes. Pour ce faire, nous allons reprendre les différentes définitions de la géométrie de Finsler, mais en utilisant le couple d'anisotropies (ϕ^{oo}, ϕ^o) au lieu de (ϕ, ϕ^o), où ϕ^{oo} est définie comme le dual de ϕ^o et s'identifie à ϕ dans le cadre des anisotropies convexes.

Nous pourrons ainsi définir un opérateur Laplacien anisotrope, noté cette fois-ci $\triangle_{\phi^o}$ (au lieu de $\triangle_\phi$) et défini par

$$\triangle_{\phi^o} = \operatorname{div}\left(\phi^o_\xi(\nabla u)\phi^o(\nabla)\right).$$

A noter que cet opérateur n'est plus elliptique si ϕ^o n'est pas convexe.

De même, nous définirons un périmètre anisotrope noté P_{ϕ^o} de telle sorte que pour tout domaine Ω, borné régulier de $\mathbb{R}^d$,

$$P_{\phi^o}(\Omega) = \int_\Gamma \phi^o(n)ds$$

Et, sous l'hypothèse de non-convexité de ϕ^o, ce périmètre ne sera plus semi-continu inférieurement pour la topologie des fonctions caractéristiques des domaines de $\mathbb{R}^d$.

Remarque 31. *Pour simplifier les notations utilisées dans la suite, nous supposons que l'anisotropie ϕ^o n'a pas de dépendance spatiale et que $|B_{\phi^{oo}}| = \omega_d$ de telles sorte que $\omega_d\ det_d\phi^{oo} = 1$.*

Dans une première partie, nous étudierons quelques propriétés de ce périmètre anisotrope, et plus précisément, nous allons montrer qu'il n'est pas semi-continu inférieur, et que son enveloppe semi-continue inférieure est le périmètre anisotrope $P_{\phi^{o,*}}$ où $\phi^{o,*}$ est définie comme l'enveloppe convexe de ϕ^o (voir par exemple les travaux [70]).
Nous en déduirons alors que les formes qui minimisent P_{ϕ^o} à volume fixé sont les formes de Wulff

associées à l'anisotropie $\phi^{o,*}$.

Nous obtiendrons ensuite quelques caractéristiques des mouvements minimisant de P_{ϕ^o}, obtenus par le principe d'Almgren-Taylor-Young. Bien que la non continuité de P_{ϕ^o} ne garantisse plus l'existence et l'unicité de ces mouvements, nous justifierons les propriétés suivantes :
- le mouvement minimisant d'une forme de Wulff B_{ϕ^{oo},R_0} est unique et s'identifie au mouvement par courbure moyenne anisotrope associé à $\phi^{o,*}$.
- le mouvement d'une condition initiale quelconque ne fait intervenir que des directions normales admissibles pour les temps $t > 0$. Les directions admissibles $\Theta(\phi^o)$ d'une anisotropie ϕ^o sont définies comme l'ensemble des orientations $\theta \in S^{d-1}$ telle que $\phi^{o,*}$ soit strictement convexe dans la direction θ.
$$\Theta(\phi^o) = \left\{\theta \in S^{d-1} \ ; \ \mathrm{Tr}\left(\phi^{o,*}_{\xi\xi}(\theta)\right) > 0\right\}$$

Remarque 32. *Lorsque l'anisotropie n'est pas régulière, $\phi^{o,*}_{\xi\xi}(\theta)$ n'est pas définie pour tout $\theta \in S^{d-1}$. Dans ce cas, il est nécessaire d'introduire les notions de sous gradient et de sous-différentielle.*

Dans la section suivante, nous introduirons les énergies de Ginzburg-Landau, et bien que les outils de Γ-convergence ne sont pas adaptés ici, nous expliquerons pourquoi l'équation d'Allen-Cahn anisotrope (7.2),

$$u_t = \triangle_{\phi^o} u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u) \tag{7.1}$$

devrait tout de même minimiser P_{ϕ^o}.

Mais comme l'opérateur $\triangle_{\phi^o}$ n'est plus elliptique, mais "fordward backward parabolic ", l'existence de solution de ces équations reste un problème encore largement ouvert à ce jour. Le lecteur pourra tout de même trouver des simulations de cette équation dans [60]. Voir aussi les travaux [26, 69] où les auteurs rajoutent des termes de régularisation à cette équation pour rendre le problème bien posé.

Dans ce travail, nous allons une nouvelle fois utiliser notre opérateur $\tilde{\triangle}_{\phi^o}$, et nous intéresser à l'équation

$$u_t = \tilde{\triangle}_{\phi^o} u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u). \tag{7.2}$$

L'opérateur $\tilde{\triangle}_{\phi^o}$ régularise en quelque sorte l'équation d'Allen-Cahn anisotrope puisque même lorsque la fonction ϕ^o n'est pas convexe, l'existence et l'unicité des solutions de (7.2) s'obtient facilement en adaptant les étapes de la démonstration de l'équation d'Allen-Cahn du deuxième chapitre. Cette stratégie ressemble donc indirectement aux travaux [26, 69]. Il nous reste tout de même à comprendre en quoi l'unique solution de l'EDP (7.2) permet de sélectionner "le bon" mouvement minimisant de P_{ϕ^o}.

Nous analyserons ensuite plusieurs simulations numériques pour extraire les dynamiques d'interfaces des mouvements d'interface obtenues. Heuristiquement, nous essaierons de comprendre en quoi, les solutions de (7.2) permettent de minimiser un périmètre anisotrope régularisé du type

$$P_{\phi^o,\epsilon}(\Omega) \simeq \int_\Gamma \left(\phi^o(\vec{n}) + \epsilon|\kappa_\phi|\right) ds$$

L'ajout du terme $\epsilon|\kappa_{\phi^o}|$ agit en effet comme un terme de régularisation lorsque les courbures introduites deviennent trop importantes et permettent ainsi de rendre semi-continu inférieurement le périmètre $P_{\phi^o,\epsilon}(\Omega)$. Nous pourrons ainsi lui associer un unique mouvement minimisant noté Γ_ϵ et nous espérons dans de futurs travaux montrer le lien entre les solutions de l'équation Allen-Cahn anisotrope linéarisée et les mouvements minimisant de $P_{\phi^o,\epsilon}(\Omega)$.

7.2 Propriété du périmètre anisotrope P_{ϕ^o}

7.2.1 Continuité

La démonstration de la semi-continuité inférieure de P_ϕ présentée dans le chapitre précédent utilisait la définition généralisée suivante :

$$P_\phi(E) = \int_{\partial E} \phi^o(n)ds = \left\{ \int_E \mathrm{div}(\varphi)dx \ ; \ \varphi \in D(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n), \quad \|\phi(\varphi)\|_{\mathbb{L}^\infty(R^d)} \leq 1 \right\}$$

Cette définition permettait ainsi de définir le périmètre anisotrope à partir l'unique expression de la fonction ϕ. Mais comme nous ne pouvons pas associer une fonction ϕ à ϕ^o lorsque ϕ^o n'est pas convexe, nous utiliserons par la suite la notation P_{ϕ^o} pour le périmètre anisotrope associé à l'anisotropie ϕ^o.

Remarque 33. *Nous pourrions utiliser le dual de ϕ^o à la place de ϕ dans la définition généralisée de ce périmètre. Mais alors, cette définition coïnciderait avec le périmètre anisotrope associée à la fonction d'anisotropie $\phi^{o,*}$ définie comme le dual de ϕ^{oo}, qui est de plus l'enveloppe convexe de ϕ^o. Cette approche a par exemple été étudiée dans [70].*

Nous allons maintenant montrer que si ϕ^o n'est pas convexe, alors P_{ϕ^o} n'est pas semi-continue inférieurement.

Proposition 29. *Si ϕ^o n'est pas convexe, alors il existe une suite de domaines Ω_n et un domaine Ω tels que $\mathbb{1}_{\Omega_n} \to \mathbb{1}_\Omega$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\liminf P_{\phi^o}(\Omega_n) < P_{\phi^o}(\Omega)$$

Démonstration de la propriété 29.

Nous nous contentons d'effectuer une démonstration en dimension 2. Le principe de la démonstration s'adapte en dimension supérieure mais nécessite un formalisme plus complexe. La fonction ϕ^o n'est pas convexe, il existe $(\xi,\mu) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, et $\lambda \in [0,1]$ tels que

$$\phi^o(\lambda\xi + (1-\lambda)\mu) > \lambda\phi^o(\xi) + (1-\lambda)\phi^o(\mu)$$

Il n'est pas restrictif de supposer que $|\xi| = |\mu| = 1$ puisque ϕ^o est homogène de degré 1.

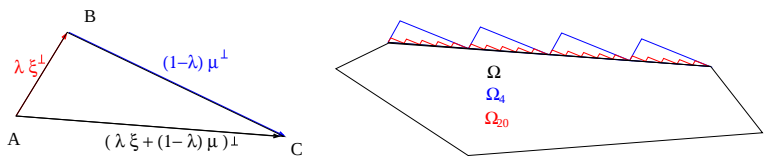


FIG. 7.1 – Existence de $(\xi,\mu) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, et $\lambda \in [0,1]$ lorsque ϕ^o n'est pas convexe

Sur la figure (7.1), le périmètre anisotrope du triangle ABC vérifie

$$\begin{aligned} P_{\phi^o}([A,B,C]) &= P_{\phi^o}([A,B]) + P_{\phi^o}([B,C]) + P_{\phi^o}([C,A]) \\ &= \lambda\phi^o(\xi) + (1-\lambda)\phi^o(\mu) + |\lambda\xi + (1-\lambda)\mu|\phi^o\left(\frac{\lambda\xi + (1-\lambda)\mu}{|\lambda\xi + (1-\lambda)\mu|}\right), \end{aligned}$$

Et

$$P_{\phi^o}([C,A]) > P_{\phi^o}([A,B]) + P_{\phi^o}([B,C])$$

Il suffit alors de définir un ensemble Ω ayant une facette dans la direction $(\lambda\xi + (1-\lambda)\mu)^\perp$. Chaque domaine Ω_n s'obtient alors en identifiant $\partial\Omega_n$ à $\partial\Omega$ à l'exception de la facette qui est remplacée par n triangles comme le suggère la figure (7.1). Ainsi, la fonction caractéristique de Ω_n converge vers la fonction caractéristique de Ω pour la topologie induite de la norme $L^1(\mathbb{R}^d)$ et,

$$\liminf P_{\phi^o}(\Omega_n) = P_{\phi^o}(\Omega) + L\left(\lambda\phi^o(\xi) + (1-\lambda)\phi^o(\mu) - \phi^o(\lambda\xi + (1-\lambda)\mu)\right) < P_{\phi^o}(\Omega).$$

où L représente la longueur de la facette.
Nous pouvons ainsi conclure que le périmètre anisotrope n'est pas semi-continu inférieurement pour la topologie de la norme L^1 des fonctions caractéristiques.

□

7.2.2 Enveloppe semi-continue inférieurement

Nous rappelons que la fonction $\phi^{o,*}$ est initialement définie comme le dual de ϕ^{oo}, mais elle s'identifie aussi à l'enveloppe convexe de ϕ^o, c'est à dire

$$\phi^{o,*} = \sup_f \{f \leq \phi^o \ ; \ f \text{ convexe}\}$$

On définit de plus $\tilde{P}_{\phi^o}$ comme l'enveloppe semi-continue inférieurement de P_ϕ au sens de la topologie des fonctions caractéristiques des domaines de $\mathbb{R}^d$. C'est à dire,

$$\tilde{P}_{\phi^o}(\Omega) = \liminf_{\Omega_n \xrightarrow{\chi} \Omega} P_{\phi^o}(\Omega_n) \quad \forall\Omega \text{ domaine borné de } \mathbb{R}^d.$$

Définition 23. *L'ensemble des directions admissibles de ϕ^o noté $\Theta(\phi^o)$ est défini comme l'ensemble les directions $\theta \in S^{d-1}$ telles que $\phi^{o,*}$ soit strictement convexe dans la direction θ.*

L'ensemble Θ peut être aussi défini comme l'ensemble des directions présentes dans les formes de Wulff associées à $\phi^{o,*}$. Ainsi,

$$\phi^o(\theta) = \phi^{o,*}(\theta), \ \forall\theta \in \Theta(\phi^o)$$

Nous allons tout d'abord montrer le lemme suivant :

Lemme 10. *Pour tout Ω, domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, il existe une suite de domaines (Ω_n) admettant que des directions admissibles tels que $\mathbb{1}_{\Omega_n} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^d)} \mathbb{1}_\Omega$ et,*

$$\lim_{n\to\infty} P_{\phi^{o,*}}(\Omega_n) = P_{\phi^{o,*}}(\Omega)$$

Il ressort de plus que

$$\lim_{n\to\infty} P_{\phi^o}(\Omega_n) \leq P_{\phi^o}(\Omega),$$

et si Ω possède de plus des directions non admissibles, alors

$$\lim_{n\to\infty} P_{\phi^o}(\Omega_n) < P_{\phi^o}(\Omega)$$

Démonstration du lemme 7.3.2.
Nous ne présentons qu'une démonstration en dimension 2. Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^2$. Le premier point de la démonstration consiste à introduire une suite de domaines polygonaux notée $\left\{\tilde{\Omega}_n\right\}_{n>0}$ dont des arêtes sont de taille $\frac{1}{n}$. Nous pouvons par exemple prendre parmi les domaines autorisés, le domaine $\tilde{\Omega}_n$ qui est inclus dans Ω et qui minimise la distance de Hausdorff avec Ω. L'intérêt de cette suite est que $\lim_{n\to\infty} P_{\phi^{o,*}}(\tilde{\Omega}_n) = P_{\phi^{o,*}}(\Omega)$ car non seulement $\Omega_n \xrightarrow{\chi} \Omega$ mais leur première forme fondamentale converge aussi.

Pour chaque domaine $\tilde{\Omega}_n$, le deuxième point de la démonstration consiste à remplacer chaque arête dont les normales ne sont pas admissibles par un triangle comme le suggère la figure (7.1). Supposons que $\tilde{\Omega}_n$ possède une arête dans la direction θ de telle sorte que θ ne soit pas admissible, alors, il existe un couple de directions $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta^2$ tel que

$$\theta = \alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2 \quad \text{et} \quad \phi^{o,*}(\theta) = \alpha\phi^{o,*}(\theta_1) + (1-\alpha)\phi^{o,*}(\theta_2)$$

La deuxième égalité vient du fait que $\phi^{o,*}$ définie comme l'enveloppe convexe de ϕ^o est cristalline entre les directions $[\theta_1, \theta_2]$. Nous notons finalement le domaine Ω_n une fois que toutes les arêtes interdites ont été remplacées. L'égalité $\phi^{o,*}(\theta) = \alpha\phi^{o,*}(\theta_1) + (1-\alpha)\phi^{o,*}(\theta_2)$ implique que $P_{\phi^{o,*}}(\Omega_n) = P_{\phi^{o,*}}(\tilde{\Omega}_n)$ et on vérifie de plus que $\Omega_n \xrightarrow{\chi} \Omega$ car $dist_\chi\left(\tilde{\Omega}_n, \Omega_n\right) \leq \frac{1}{n}$. Finalement la suite Ω_n vérifie de plus $\lim_{n\to\infty} P_{\phi^{o,*}}(\Omega_n) = P_{\phi^{o,*}}(\Omega)$.
Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} P_{\phi^o}(\Omega_n) = \lim_{n\to\infty} P_{\phi^{o,*}}(\Omega_n) = P_{\phi^{o,*}}(\Omega) \leq P_{\phi^o}(\Omega)$$

Le fait que Ω possède des directions non admissibles implique que $P_{\phi^{o,*}}(\Omega) < P_{\phi^o}(\Omega)$ et alors,

$$\lim_{n\to\infty} P_{\phi^o}(\Omega_n) < P_{\phi^o}(\Omega).$$

□

Nous pouvons maintenant montrer la propriété suivante :

Proposition 30. *L'enveloppe semi-continue inférieurement de P_{ϕ^o} est le périmètre $P_{\phi^{o,*}}$*

$$\tilde{P}_{\phi^o}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \phi^{o,*}(\nu)ds$$

Démonstration de la propriété 30.
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$.
i) La fonction $\phi^{o,*}$ est l'enveloppe convexe de ϕ^o, on en déduit que $\phi^{o,*} \leq \phi^o$ et,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\phi^o}(\Omega) &= \liminf_{\Omega_n} P_{\phi^o}(\Omega_n). \\ &\geq \liminf_{\Omega_n} P_{\phi^{o,*}}(\Omega_n) \geq P_{\phi^{o,*}}(\Omega) \end{aligned}$$

La dernière inégalité s'obtient en remarquant que le périmètre $P_{\phi^{o,*}}$ est semi-continu inférieurement.
ii) Le lemme 7.3.2 montre l'existence d'une suite Ω_n^* telle que

$$\tilde{P}_{\phi^o}(\Omega) \leq \lim_{n\to\infty} P_{\phi^o}(\Omega_n^*) = \lim_{n\to\infty} P_{\phi^{o,*}}(\Omega_n^*) = P_{\phi^{o,*}}(\Omega)$$

L'égalité $\lim_{n\to\infty} P_{\phi^o}(\Omega_n^*) = \lim_{n\to\infty} P_{\phi^{o,*}}(\Omega_n^*)$ est vérifiée car Ω_n^* n'admet que des directions admissibles.
En conclusion, $P_{\phi^{o,*}}(\Omega) = \tilde{P}_{\phi^o}(\Omega)$.

□

7.2.3 Forme de Wulff associée à ϕ^o

Les formes de Wulff de volume V_0 sont les domaines $\Omega^*_{V_0}$ qui minimisent P_{ϕ^o} pour un volume donné V_0 :

$$\arg\inf_{\Omega} \{P_{\phi^o}(\Omega) \ ; \ |\Omega| = V_0\} \tag{7.3}$$

Proposition 31. *Les périmètres P_{ϕ^o} et $P_{\phi^{o,*}}$ ont les mêmes formes de Wulff.*

Démonstration de la proposition 31

Le premier point de la démonstration consiste à vérifier que les formes de Wulff associées à $\phi^{o,*}$ n'introduisent que des directions admissibles. Dans le cas convexe, les formes de Wulff peuvent être définies par

$$W_{\phi^{o,*}} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ x.n \leq \phi^{o,*}(n), n \in S^d\right\}, \quad \partial W = \left\{\phi^{o,*}_{\xi}(n) \ ; \ n \in S^d\right\},$$

voir par exemple les travaux de Fonseca-Müller [61]. Or, si $\tilde{n} \notin \Theta$, alors la convexité de $\phi^{o,*}$ montre l'existence de deux directions $(n_1, n_2) \in \Theta^2$ et de $\alpha \in [0,1]$ tels que

$$\begin{cases} \tilde{n} = \alpha n_1 + (1-\alpha) n_2 \\ \phi^{o,*}(\tilde{n}) = \alpha \phi^{o,*}(n_1) + (1-\alpha)\phi^{o,*}(n_2). \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ x.\tilde{n} \leq \phi^{o,*}(\tilde{n})\right\} &= \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ x.(\alpha n_1 + (1-\alpha)n_2) \leq \alpha\phi^{o,*}(n_1) + (1-\alpha)\phi^{o,*}(n_2)\right\} \\ &\supseteq \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ x.n_1 \leq \phi^{o,*}(n_1)\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ x.n_2 \leq \phi^{o,*}(n_2)\right\}, \end{aligned}$$

et

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ -\phi^{o,*}(\tilde{n}) \leq x.\tilde{n} \leq \phi^{o,*}(\tilde{n})\right\} \supseteq \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ x.n \leq \phi^{o,*}(n), \ n \in \Theta\right\}.$$

On en déduit une nouvelle expression de la formes de Wulff de $\phi^{o,*}$:

$$W_{\phi^{o,*}} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ x.n \leq \phi^{o,*}(n), \ n \in \Theta\right\},$$

qui implique que les formes de Wulff associées à $\phi^{o,*}$ n'introduisent que des directions admissibles. Ainsi, si Ω^* est une forme de Wulff de $\phi^{o,*}$, alors

$$P_{\phi^o}(\Omega^*) = P_{\phi^{o,*}}(\Omega^*).$$

Supposons maintenant que Ω^{**} est un domaine régulier satisfaisant la condition de volume $|\Omega^{**}| = V_0$ et qu'il n'est pas une forme de Wulff de $\phi^{o,*}$. Alors, en remarquant que $\phi^{o,*} \leq \phi^o$, on en déduit

$$P_{\phi^o}(\Omega^{**}) \geq P_{\phi^{o,*}}(\Omega^{**}) > P_{\phi^{o,*}}(\Omega^*) \geq P_{\phi^o}(\Omega^*)$$

L'inégalité stricte est obtenue d'après l'unicité de la forme géométrique des formes de Wulff dans le cas d'anisotropie convexe. Au final, cette inégalité montre que le problème de minimisation (7.3) est bien atteint et que les solutions recherchées sont les formes de Wulff de $\phi^{o,*}$ de volume V_0.

■

7.3 Mouvement minimisant de P_{ϕ^o}

Nous reprenons les mêmes notations que dans le cas d'une anisotropie convexe régulière. Soit $\Omega \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$, et $\tau > 0$ un pas de temps. L'évolution du flot par courbure moyenne anisotrope n'est a priori pas définie mais nous allons construire un flot de mouvement défini à l'instant τ comme le minimum $\Omega(\tau)$ de la fonctionelle d'énergie suivante

$$J_{\tau,\phi^o}(E) = P_{\phi^o}(E) + \frac{1}{\tau}\int_{\Omega\triangle E} d_{\phi^{oo}}(x,\partial\Omega)d\mathcal{H}^d_{\phi^{oo}} \tag{7.4}$$

où $\Omega\triangle E = (\Omega \setminus E) \cup (E \setminus \Omega)$.

Remarque 34. *La convexité de l'anisotropie assure la semi-continuité de la P_{ϕ^o}, qui elle-même, démontre l'existence de solution de ce problème de minimisation lorsque le pas de temps τ est suffisamment petit. Ce n'est malheureusement plus le cas lorsque l'anisotropie n'est plus convexe.*

7.3.1 Lorsque Ω est une forme de Wulff

Nous supposons que la condition initiale Ω_0 est une forme de Wulff et qu'elle s'explicite de la manière suivante :

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^d;\ \phi^{oo}(x) \leq R_0\right\}.$$

Nous savons dans ce cas que la solution Ω^*_τ du problème de minimisation est explicite et s'avère être une forme de Wulff.

$$J_{\tau,\phi^{o,*}}(E) = P_{\phi^{o,*}}(E) + \frac{1}{\tau}\int_{\Omega\triangle E} d_{\phi^{oo}}(x,\partial E)d\mathcal{H}^d_{\phi^{oo}}, \tag{7.5}$$

est explicite et s'avère être une forme de Wulff. En utilisant une nouvelle fois les remarques que $\phi^{o,*} \leq \phi^o$ et que les formes de Wulff n'introduisent que des directions admissibles, on en déduit que les solutions de (7.4) sont alors identiques aux solutions (7.5).

Remarque 35. *Bien que l'existence de tels mouvements minimisants ne soit généralement pas vérifié, lorsque la condition initiale initiale est une forme de Wulff, alors ce problème devient bien posé (existence plus unicité) et la dynamique d'interface s'identifie au mouvement par courbure moyenne anisotrope, dont l'anisotropie est donnée par $\phi^{o,*}$.*

7.3.2 Lorsque Ω_0 est quelconque

Proposition 32. *Pour $\tau > 0$, les solutions Ω_τ du problème (7.4) n'admettent que des directions admissibles.*

Démonstration de la propriété 32.

La démonstration s'effectue par l'absurde. Supposons qu'une solution de (7.4) notée Ω_τ admette des directions non admissibles, alors, le lemme montre l'existence d'une suite de domaines Ω_n telle que

$$\Omega_n \to \Omega_\tau \text{ et } \lim_{n\to\infty} P_{\phi^o}(\Omega_n) < P_{\phi^o}(\Omega_\tau)$$

Il suffit alors de choisir n suffisamment grand pour que

$$J_{\tau,\phi^o}(\Omega_n) < J_{\tau,\phi^o}(\Omega_\tau),$$

et ceci soulèvera une contradiction avec l'hypothèse que Ω_τ est solution de 7.4.

□

Remarque 36. *Nous n'avons pas montré que le problème (7.4) admettait une solution, en revanche, mais si Ω_τ est une solution, alors toutes ces directions sont admissibles.*

7.4 Énergie de Ginzburg-Landau et équation de réaction-diffusion

Comme dans les chapitres précédents, nous allons approcher le périmètre anisotrope avec une énergie de type Ginzburg-Landau.

$$J_{\epsilon,\phi^o}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\epsilon \frac{1}{2} \phi^o(\nabla u)^2 + \frac{1}{\epsilon} W(u) \right) dx$$

L'argument qui justifiait rigoureusement une telle approche était alors le résultat de Γ-convergence suivant

$$J_{\epsilon,\phi^o} \xrightarrow{\Gamma} c_W P_{\phi^o}$$

Or dans ce chapitre, cette notion de Γ-convergence n'est pas bien adaptée puisqu'elle nécessite que P_{ϕ^o} soit semi-continu inférieur. En revanche, nous pouvons tout de même montrer qu'avec

$$u^\epsilon = q\left(\frac{d(x,\Omega)}{\phi^o(\nabla d(x,\Omega))\epsilon} \right)$$

alors

$$\lim_{\epsilon \to 0} J_{\epsilon,\phi^o}(u^\epsilon) = c_W P_{\phi^o}(\Omega)$$

Il suffit en effet de remarquer que $J_\epsilon(u)$ peut se mettre sous la forme

$$J_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi^o\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \left[\epsilon \phi^o\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \frac{1}{2} (\nabla u)^2 + \frac{1}{\epsilon \phi^o\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)} W(u) \right] dx$$

Remarque 37. *Lorsque ϕ^o est convexe, alors $d_\phi(x,\Omega) = \frac{d(x,\Omega)}{\phi^o(\nabla d(x,\Omega))}$ au voisinage de Γ.*

Ainsi, bien qu'on ne puisse pas relier J_ϵ avec P_{ϕ^o} par un résultat de Γ-convergence, il semble tout de même intéressant de considérer le flot de gradients de J_ϵ et l'équation d'Allen-Cahn anisotrope même lorsque ϕ^o n'est pas convexe.

$$u_t = \triangle_{\phi^o} u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u) \tag{7.6}$$

La réelle difficulté est que la non convexité de ϕ^o n'assure plus la propriété elliptique de l'opérateur $\triangle_\phi$. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer l'expression de $\triangle_\phi u$ où ϕ^o est une pseudo norme l_s avec $s < 1$.

$$\begin{aligned}
\triangle_\phi u &= \partial_{11} u \ (s-1)(\partial_1 u)^{s-2} \ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-1} \\
&+ \partial_{22} u \ (s-1)(\partial_2 u)^{s-2} \ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-1} \\
&+ \partial_{11} u \ (2-s) \ (\partial_1 u)^{2s-2} \ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-2} \\
&+ \partial_{22} u \ (2-s) \ (\partial_2 u)^{2s-2} \ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-2} \\
&+ 2 \ \partial_{12} u \ (2-s) \ (\partial_1 u)^{s-1} \ (\partial_1 u)^{s-1} \ ((\partial_1 u)^s + (\partial_2 u)^s)^{2/s-2}
\end{aligned}$$

Rien ne garantit à priori l'unicité des solutions de (7.6) et l'existence de solution n'est pas établi. La résolution numérique de cette équation n'a donc pas vraiment de sens a priori. Par exemple, dans ses travaux de thèse, Morgan Brassel à remarqué que la résolution de ces équations obtenues

avec une méthode d'élements finis explicite conduisait à des solutions dépendant fortement du maillage utilisé. Dans les travaux de Fierro et all [60], le lecteur pourra observer sur la première simulation de la figure (4.13) une forme de Wulff qui n'est pas préservée au cours des itérations. Le résultat de cette simulation numérique n'est donc pas très convaincante.

L'intérêt de notre approche est que l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$ garde de bonnes propriétés et cela même lorsque l'anisotropie n'est pas convexe. En effet, les techniques de démonstration de l'existence de solution de l'équation d'Allen-Cahn présentée dans le deuxième chapitre devrait s'adapter à l'équation (7.7).

$$u_t = \tilde{\triangle}_\phi u - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u) \tag{7.7}$$

Il suffit de remarquer que cette équation est le flot de gradients de l'énergie (7.8).

$$\tilde{J}_\epsilon(u) = \epsilon \int_{\mathbb{R}^d} 2\pi^2 \phi^o(\xi)^2 |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^d} W(u) dx \tag{7.8}$$

Avec

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{J}_\epsilon(u) v &= \epsilon \int_{\mathbb{R}^d} 4\pi^2 \phi^o(\xi)^2 \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^d} W^{'}(u(x)) v(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[-\epsilon \tilde{\triangle}_\phi u(x) \;\; v(x) + \frac{1}{\epsilon} W^{'}(u(x)) v(x) \right] dx \\ &= < -\epsilon \tilde{\triangle}_\phi u + \frac{1}{\epsilon} W^{'}(u), v >_{L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Cette énergie apporte ainsi suffisamment de compacité puisque même sans l'hypothèse de convexité, le terme de gauche de (7.8) reste équivalent à la norme $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Dans la prochaine partie, nous allons montrer quelques simulations numériques de l'équation d'Allen-Cahn linéarisée :

$$\begin{cases} u_t = \tilde{\triangle}_\phi u - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u) \\ u(0,x) = q\left(\frac{d_{\phi^{oo}(x,\Omega_0)}}{\epsilon} \right) \end{cases}$$

L'idée est de comparer les mouvements d'interface obtenus avec les principes décrits en début de ce chapitre. Les méthodes numériques utilisées sont toujours les mêmes : traitement exact de l'opérateur de diffusion dans la base de Fourier et traitement explicite de l'opérateur de réaction.

7.5 Simulations numériques de l'équation d'Allen-Cahn

Les simulations que nous effectuons maintenant valident dans un certain sens les propriétés décrites précédemment sur le comportement attendu de la dynamique d'interface d'un mouvement par courbure anisotrope avec une anisotropie non convexe.

Le premier test consiste à effectuer un mouvement par courbure moyenne anisotrope avec conservation de volume. Nous allons ainsi vérifier que les formes de Wulff associées à ϕ^o et $\phi^{o,*}$ sont bien les mêmes numériquement.

Ensuite, nous effectuons des mouvements par courbure moyenne avec une forme de Wulff comme condition initiale et nous observerons que les dynamiques des interfaces Γ_1 et Γ_2 associées respectivement à ϕ^o et $\phi^{o,*}$ seront identiques.

Les tests suivants utilisent des conditions initiales dont les directions ne sont pas toutes admissibles : les directions non autorisées feront alors place à des marches d'escalier pour les temps strictement positifs. Bien que les dynamiques des interfaces Γ_1 et Γ_2 soient très différentes, les deux interfaces se retrouveront à chaque fois après un certain temps écoulé, ce qui peut paraître a priori très étonnant mais conforte bien notre idée que les dynamique d'interface Γ_1 et Γ_2 sont étroitement liées même lorsque la condition initiale n'est pas une forme de Wulff.

Fonctions d'anisotropie

Nous allons utiliser trois fonctions d'anisotropie non convexes, notées ϕ_1^o, ϕ_2^o et ϕ_3^o. Leur enveloppe convexe est, de plus, notée $\phi_1^{o,*}$, $\phi_2^{o,*}$ et $\phi_3^{o,*}$.

La première fonction ϕ_1^o est une norme $\|\|_{\ell^p}$ avec $p < 1$:

$$\phi_1^o(\xi) = \|\xi\|_{\ell^p} \quad \text{avec} \quad p = 0.8$$

Son enveloppe convexe est alors la norme ℓ^1 :

$$\phi_1^{o,*}(\xi) = \|\xi\|_{\ell^1}$$

Leur diagramme de Frank et leur forme de Wulff sont présentés sur la figure (7.2)

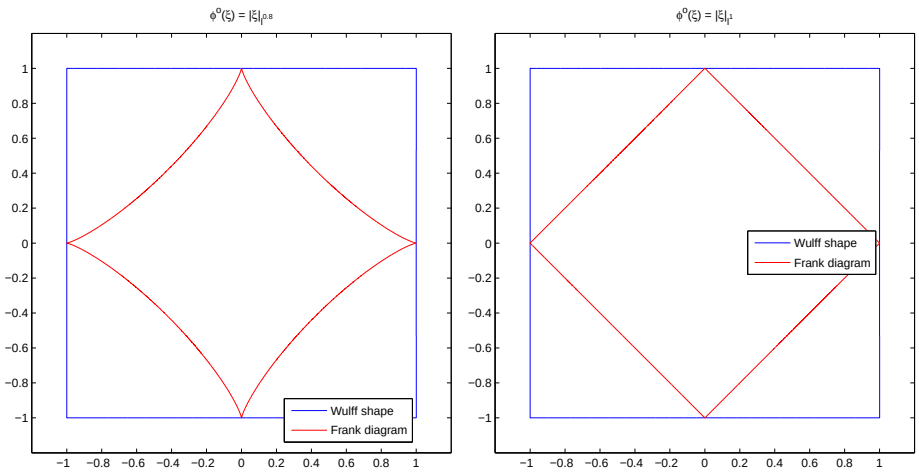


FIG. 7.2 – Diagramme de Frank et forme de Wulff : A gauche, ϕ_1^o, A droite, $\phi_1^{o,*}$

La deuxième fonction d'anisotropie ϕ_2^o est définie en coordonnée polaire par :

$$\phi_2^o(\xi) = r\left(|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|\right)^4 \qquad \text{avec} \qquad r = |\xi| \qquad \text{et} \qquad \theta = arg(\xi)$$

L'enveloppe convexe de ϕ_2^o est encore la norme $\|\|_{\ell_1}$. La figure (7.3) représente le diagramme de Frank et les formes de Wulff de ϕ_2^o et $\phi_2^{o,*}$.

La troisième fonction ϕ_3^o est inspirée des travaux [60] avec

$$\phi_3^o(\xi) = \phi_2^o(r,\theta) = \begin{cases} r & \text{si} \quad |\theta| \leq \pi/4 \\ (1 - \cos(2\theta))\, r & \text{sinon} \end{cases}$$

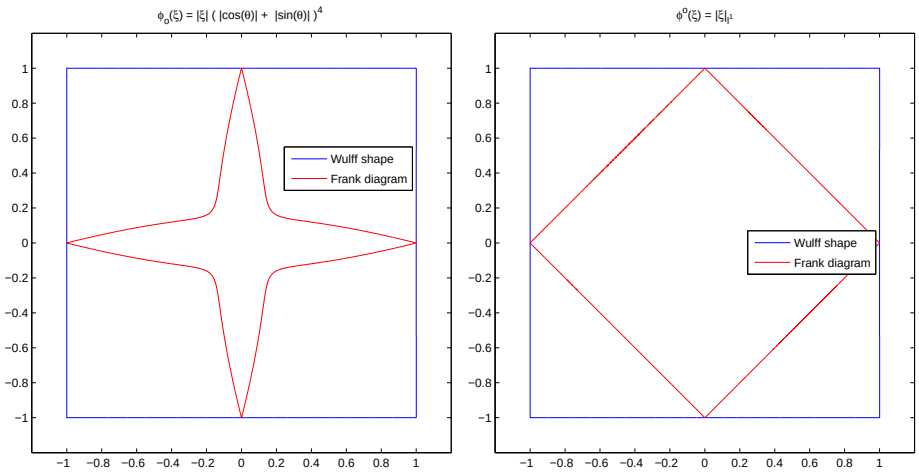


FIG. 7.3 – Diagramme de Frank et forme de Wulff : A gauche, ϕ_2^o, A droite, $\phi_2^{o,*}$

L'expression de son enveloppe convexe est alors

$$\phi_3^{o,*}(\xi) = \phi_1^o(r,\theta) = \begin{cases} r & \text{si} \quad |\theta| \leq \pi/4 \\ (1 - cos(2\theta))^{1/2}\ r & \text{sinon} \end{cases}$$

La figure (7.4) représente le diagramme de Frank et les formes de Wulff de ϕ_3^o et $\phi_3^{o,*}$.

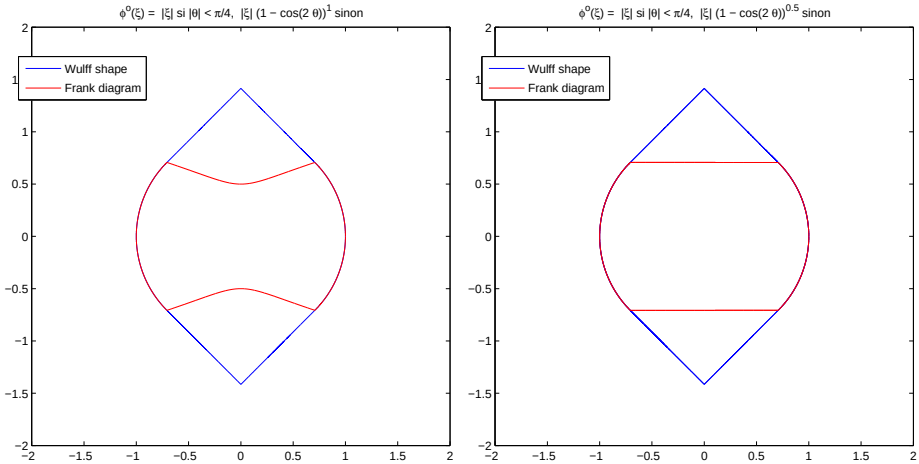


FIG. 7.4 – Diagramme de Frank et forme de Wulff : A gauche, ϕ_3^o, A droite, $\phi_3^{o,*}$

7.5.1 Simulation avec une contrainte de volume

Pour chacun des couples $(\phi_1^o, \phi_1^{o,*})$, $(\phi_2^o, \phi_2^{o,*})$ et $(\phi_3^o, \phi_3^{o,*})$, nous effectuons un mouvement par courbure moyenne anisotrope avec conservation de volume en partant d'une condition initiale représentant un cercle. Les solutions stationnaires sont tracées sur les figures (7.5). Les formes de Wulff sont retrouvées mais comme pour le cas convexe, les fortes courbures sont légèrement lissées en fonction du paramètre ϵ utilisé.

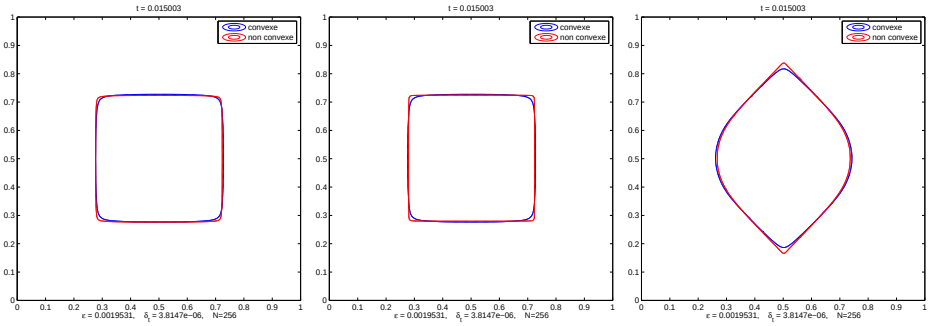


FIG. 7.5 – Formes de Wulff obtenues pour les anisotropies $(\phi_1^o, \phi_1^{o,*})$, $(\phi_2^o, \phi_2^{o,*})$ et $(\phi_3^o, \phi_3^{o,*})$

7.5.2 Simulation d'une forme de Wulff comme condition initiale

Nous représentons sur la figure (7.6) les résultats de plusieurs simulations numériques effectuées avec chacune des trois anisotropies ϕ_1^o, ϕ_2^o et ϕ_3^o. Les conditions initiales sont les formes de Wulff correspondant aux anisotropies et nous comparons l'évolution de la dynamique des interfaces Γ_1 et Γ_2 associées respectivement à ϕ^o et son enveloppe convexe $\phi^{o,*}$.
En conclusion, les dynamiques de Γ_1 et Γ_2 sont donc très similaires.

Remarque 38. *Au vu de ces simulations, nous pourrions penser que la non convexité influence la vitesse d'évolution de la forme de Wulff. En effet, sur la première et la troisième simulation, l'anisotropie n'est pas fortement non convexe et les boules B_{ϕ^o} et $B_{\phi^{o,*}}$ ont un volume très proche. Nous observons dans la deuxième simulation un décalage très net entre les vitesses d'évolution du mouvement convexe et celui du mouvement non convexe. De plus, le volume de la boule B_{ϕ^o} est presque deux fois plus grand que le volume de $B_{\phi^{o,*}}$ (Voir figure 7.3). Mais des simulations supplémentaires non présentées dans cette thèse montrent que ce décalage diminue et devient négligeable lorsqu'on utilise des paramètres ϵ suffisamment petits.*

7.5.3 Simulation de mouvement avec une condition initiale contenant des directions interdites

Nous utilisons maintenant des conditions initiales dont les normales font intervenir des orientations non admissibles. Nous rappelons que les directions admissibles sont les directions $\theta \in S^{d-1}$ vérifiant $\phi^o(\theta) = \phi^{o,*}(\theta)$. Pour les anisotropies ϕ_1^o et ϕ_2^o, nous avons, à un modulp π près,

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\},$$

et pour la troisième forme d'anisotropie,

$$\Theta_3 = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

La figure (7.7) présente les simulations obtenues avec notre méthode numérique.

Analyse de la première simulation :

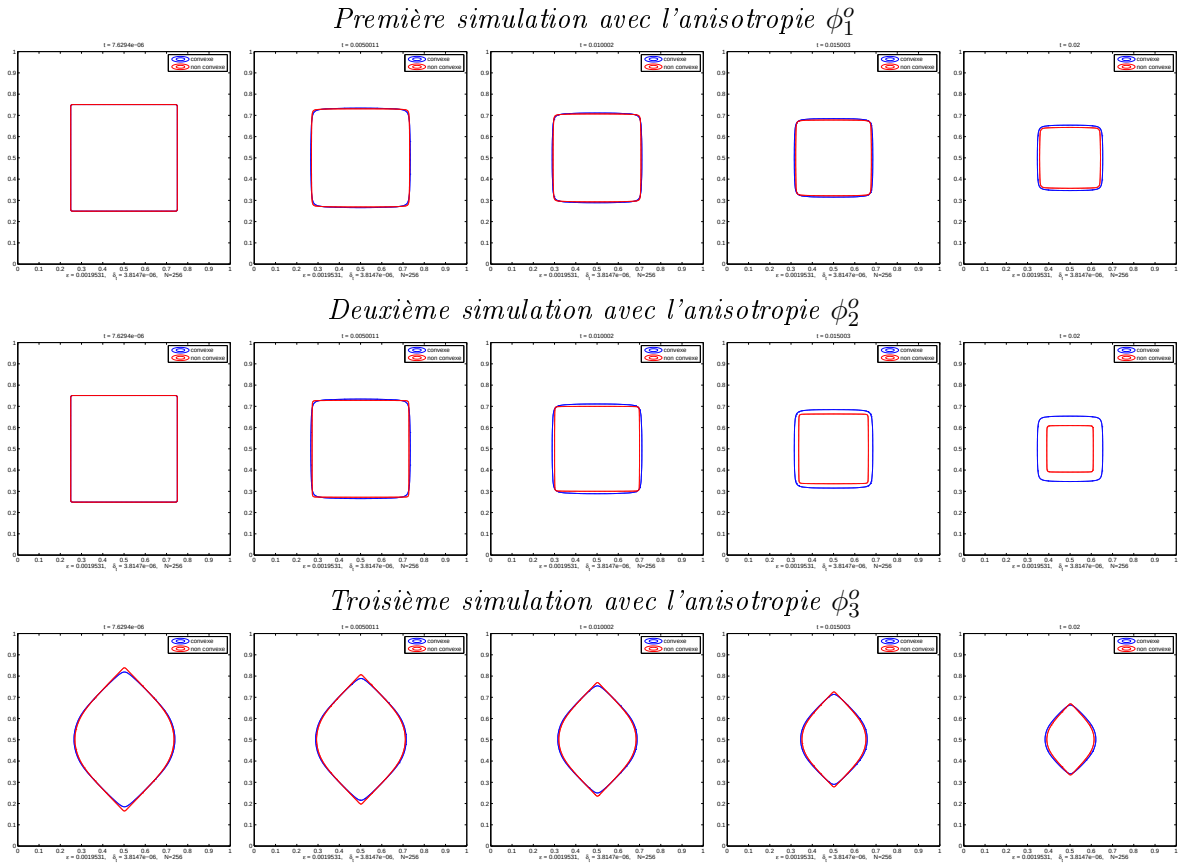


FIG. 7.6 – Simulation de mouvement par courbure moyenne pour les anisotropies $(\phi_1^o, \phi_1^{o,*})$, $(\phi_2^o, \phi_2^{o,*})$ et $(\phi_3^o, \phi_3^{o,*})$

Les deux évolutions d'interfaces Γ_1 et Γ_2 sont très similaires. L'interface $\Gamma_1(t)$ (associée à ϕ_1^o) ne fait pas apparaître de marche d'escalier et contient encore des directions interdites pour les temps strictement positifs. En revanche, bien que la condition initiale soit convexe, les domaines $\Omega_1(t)$ ne conservent pas cette caractéristique pour tous les temps t. De plus, après un certain temps d'évolution, les interfaces Γ_1 et Γ_2 redeviennent identiques. Sur la première image de la figure (7.8), nous affichons les énergies $J_{\epsilon,1}(u_1^\epsilon)$ et $J_{\epsilon,2}(u_2^\epsilon)$ au cours de l'évolution. L'énergie $J_{\epsilon,1}(u_1^\epsilon)$ est alors plus importante que $J_{\epsilon,2}(u_2^\epsilon)$ à l'initialisation puisque la condition initiale comporte des directions non admissibles. Mais, au cours de l'évolution, $J_{\epsilon,1}(u_1^\epsilon)$ décroît plus rapidement puis rattrape $J_{\epsilon,2}(u_1^\epsilon)$. Finalement, nous pensons que l'évolution Γ_1 conserve des directions interdites au cours du temps car deux principes sont ici en compétition :

- **L'anisotropie non convexe** qui est censée interdire des directions et créer des marches d'escalier.
- **L'utilisation de l'opérateur** $\tilde{\triangle}_{\phi^o}$ qui régularise les interfaces aux petites échelles.

Ainsi, dans cette simulation, il semblerait que la régularisation ait une action trop importante devant la non convexité de l'anisotropie ϕ_1^o. Nous utilisons maintenant l'anisotropie ϕ_2^o qui possède une très forte non convexité.

Analyse de la deuxième simulation :

L'interface Γ_1 ne fait plus intervenir de directions interdites après quelques itérations et nous observons la création de marches d'escalier. Comme pour la première simulation, après un certain temps d'évolution, les deux interfaces Γ_1 et Γ_2 se retrouvent. L'analyse de l'énergie $J_{\epsilon,1}(u_1^\epsilon)$ admet des sauts. Une première discontinuité apparaît au début de la simulation et correspond à la période de création des marches d'escalier. La deuxième discontinuité, au temps $t = 0.25$, intervient lorsque l'interface Γ_1 se transforme en une forme de Wulff. Cependant, l'énergie $J_{\epsilon,1}(u_1^\epsilon)$ devient à ce moment plus petite que $J_{\epsilon,2}(u_2^\epsilon)$: ceci semble être une erreur numérique et disparaît avec un raffinement des paramètres de simulation.

Analyse de la troisième simulation :

Les observations de cette simulation font ressortir une caractéristique très importante de ces mouvements minimisants : l'anisotropie est en effet assez forte pour créer des marches d'escalier et ne subit pas de perturbations numériques comme dans l'exemple précédent.

Nous distinguons 5 plages de temps dans l'évolution de l'interface Γ_1 :

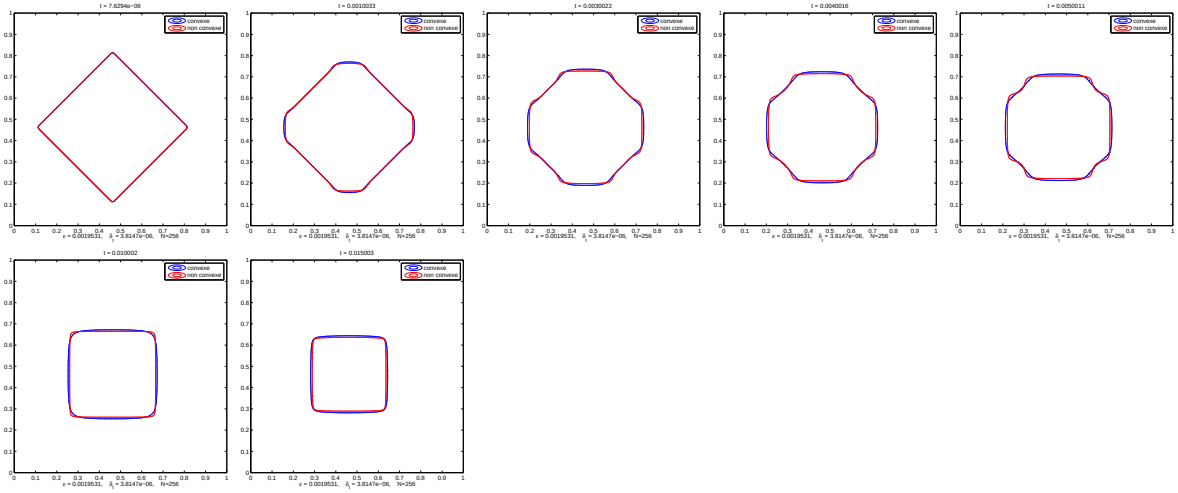
- $t \in [0, 0.0015]$: entre le début de la simulation et le temps $t = 0.002$, l'interface fait apparaître des marches d'escalier, ce qui fait diminuer énormément l'énergie $J_{\epsilon,1}(u_1^\epsilon)$. Nous pouvons alors compter 6 pics par côté.
- $t \in [0.0015, 0.0035]$: l'énergie $J_{\epsilon,1}(u_1^\epsilon)$ continue de diminuer linéairement puis admet une discontinuité en $t = 0.0035$, le nombre de pics vient de passer à 4.
- $t \in [0.0035, 0.007]$: l'énergie $J_{\epsilon,1}(u_1^\epsilon)$ continue de diminuer linéairement puis admet une discontinuité en $t = 0.07$, le nombre de pics vient de passer à 2.
- $t \in [0.007, 0.0135]$: l'énergie $J_{\epsilon,1}(u_1^\epsilon)$ continue de diminuer linéairement puis admet une discontinuité en $t = 0.0135$, l'interface Γ_1 ne possède plus de marche d'escalier et vient d'atteindre sa forme de Wulff. Les interfaces Γ_1 et Γ_2 se sont de plus retrouvées, et l'énergie $J_{\epsilon,1}(u_1^\epsilon)$ a rattrapé l'énergie $J_{\epsilon,2}(u_2^\epsilon)$.
- $t \in [0.0135, \infty]$: nous retrouvons le comportement naturel de l'évolution par courbure moyenne anisotrope d'une forme de Wulff.

Nous présentons quelques simulations supplémentaires, toujours avec l'anisotropie ϕ_3^o et en utilisant différents paramètres ϵ et de nouvelles conditions initiales afin d'analyser plus en détail la dynamique des marches d'escalier : les résultats sont présentés sur la figure (7.9) et nous retrouvons exactement ces mêmes phénomènes décrits précédemment.

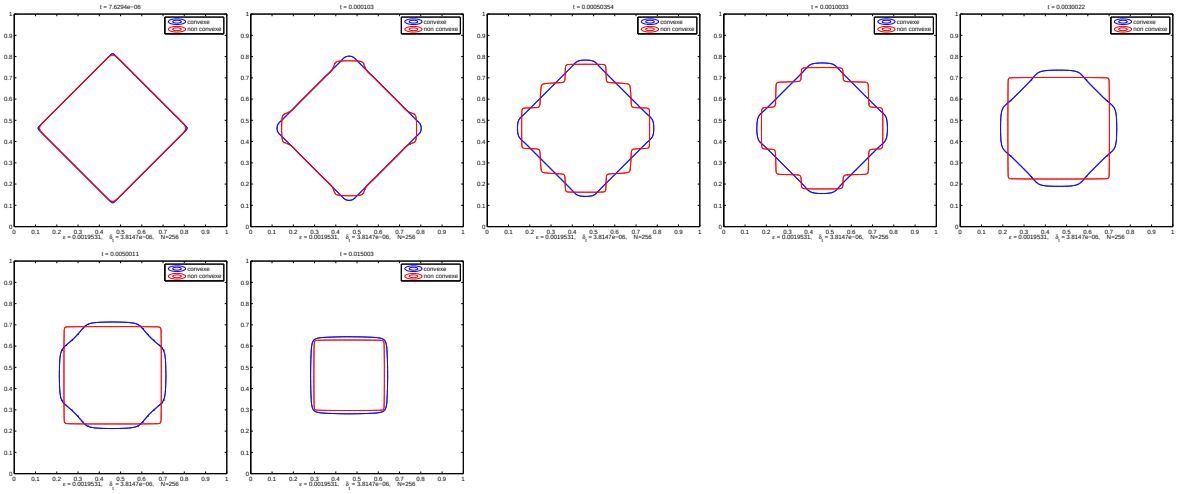
Mise en défaut d'un principe d'inclusion numérique

Dans cette partie, nous effectuons une simulation numérique avec l'anisotropie ϕ_3^o dans le but de montrer qu'un principe d'inclusion n'est pas vérifié pour ces mouvements d'interface. Nous utilisons deux conditions initiales dont l'une est incluse dans l'autre et nous observons que cette inclusion n'est pas préservée au cours des itérations.

Première simulation avec l'anisotropie ϕ_1^o



Deuxième simulation avec l'anisotropie ϕ_2^o



Troisième simulation avec l'anisotropie ϕ_3^o

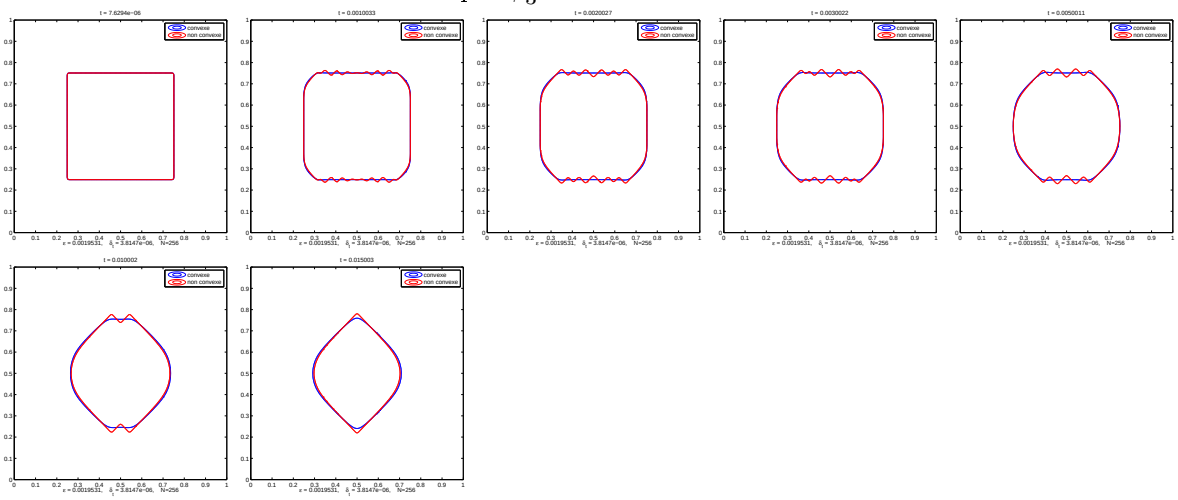


FIG. 7.7 – Simulation de mouvement par courbure moyenne pour les anisotropies $(\phi_1^o, \phi_1^{o,*})$, $(\phi_2^o, \phi_2^{o,*})$ et $(\phi_3^o, \phi_3^{o,*})$

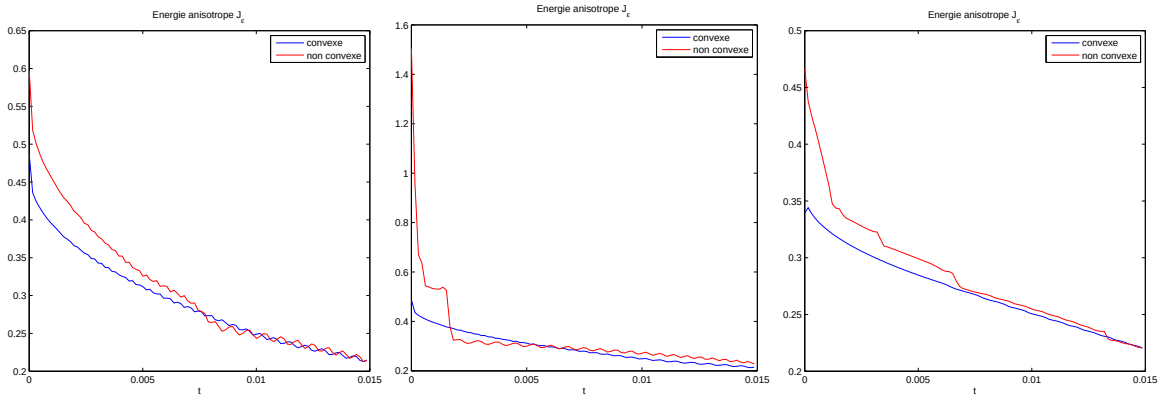


FIG. 7.8 – Energies $t \to J^{\epsilon}_{\phi}(u^{\epsilon}(x,t))$ associées aux trois simulations de la figure 7.7

7.6 Régularisation et opérateur $\tilde{\triangle}_{\phi^o}$

Remarque 39. *L'analyse que nous effectuons maintenant est purement heuristique.*

A partir des simulations présentées sur les figures (7.7), nous mettons en évidence plusieurs faits :
- Les directions interdites coûtent très cher et la première partie de l'évolution de Γ_1 consiste à créer des marches d'escalier pour éviter ces directions et diminuer ainsi radicalement l'énergie $J_{\epsilon,1}(u^{\epsilon}_1)$.
- Le coût d'un pic n'est pas nul et semble dépendre du paramètre ϵ. L'analyse de l'énergie $J_{\epsilon,1}(u^{\epsilon}_1)$ dans les premières simulations montre par exemple que le poids de 4 pics est environ égal à 0.01. Ce poids est responsable des dynamiques d'interfaces observées puisqu'elles évoluent en cherchant à minimiser ce nombre de pics.

La méthode d'Allen-Cahn anisotrope linéarisée (avec l'opérateur $\tilde{\triangle}_{\phi}$) impose donc indirectement un poids à ces pics. Or les simulations traditionnelles de l'équation d'Allen Cahn anisotrope, voir par exemple [60], montrent que ce phénomène n'apparaît pas avec l'opérateur $\triangle_{\phi}$. Ce phénomène est donc une conséquence indirecte de l'utilisation de l'opérateur $\tilde{\triangle}_{\phi}$.

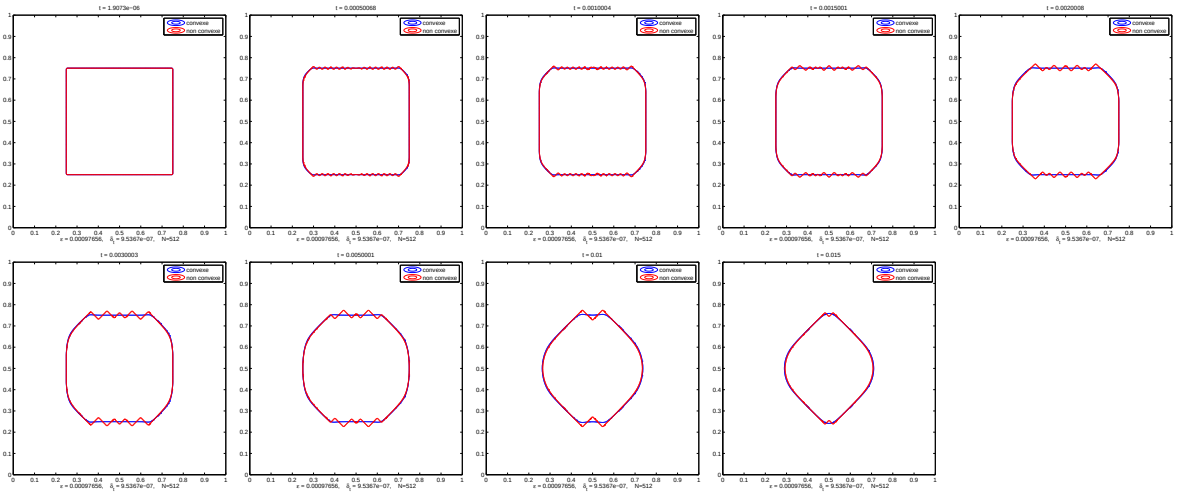
D'un point de vue géométrique, nous pensons qu'un périmètre anisotrope perturbé de la forme

$$P^{\epsilon}_{\phi^o}(\Omega) = \int_{\Gamma} \left(\phi^o(\vec{n}) + \epsilon |\kappa|^{d-1} \right) ds$$

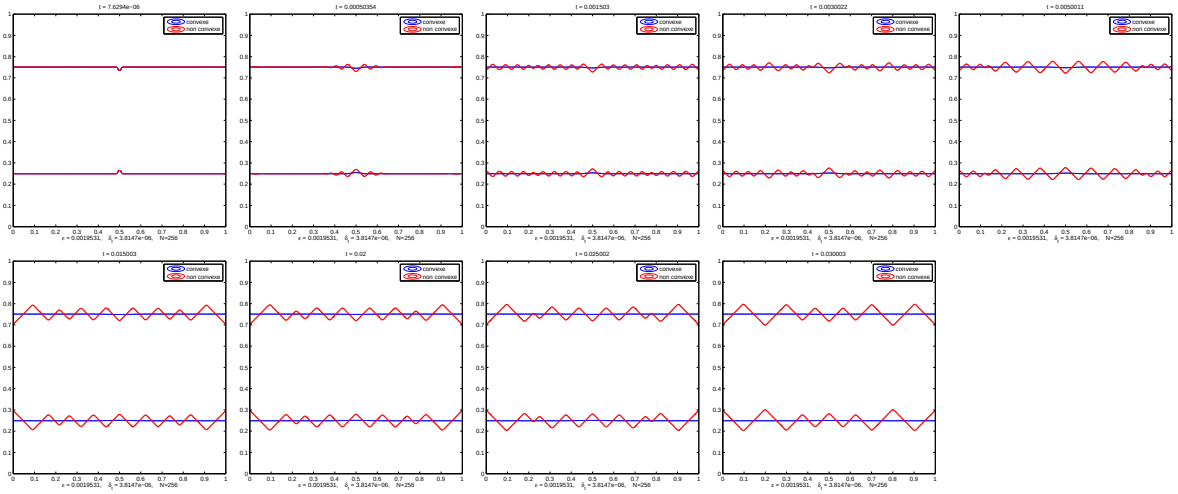
pourrait conduire à une telle dynamique d'interface (voir par exemple l'approche de A. DiCarlo, M. E. Gurtin, and P. Podio-Guidugli [44]). En effet, ce périmètre régularise les pics et leur impose ainsi un coût de l'ordre ϵ. De plus, aux grandes échelles, ce périmètre agit comme un périmètre anisotrope non convexe ϕ^o, alors que pour les petites échelles ($\kappa >> \frac{1}{\epsilon}$), il agit comme une énergie de courbure isotrope.

Ainsi, en pertubant de cette façon le périmètre anisotrope, nous le rendons semi-continu inférieur car le terme $(\epsilon|\kappa|)^{d-1}$ agit comme de la compacité et régularise les interfaces considérées. Nous pourrons ainsi définir un unique mouvement minimisant associé à $P^{\epsilon}_{\phi^o}$ et pourquoi pas, montrer la convergence de l'équation d'Allen-Cahn anisotrope linéarisée vers ce mouvement d'interface.

Quatrième simulation avec l'anisotropie ϕ_3^o



Cinquième simulation avec l'anisotropie ϕ_3^o



Sixième simulation avec l'anisotropie ϕ_3^o

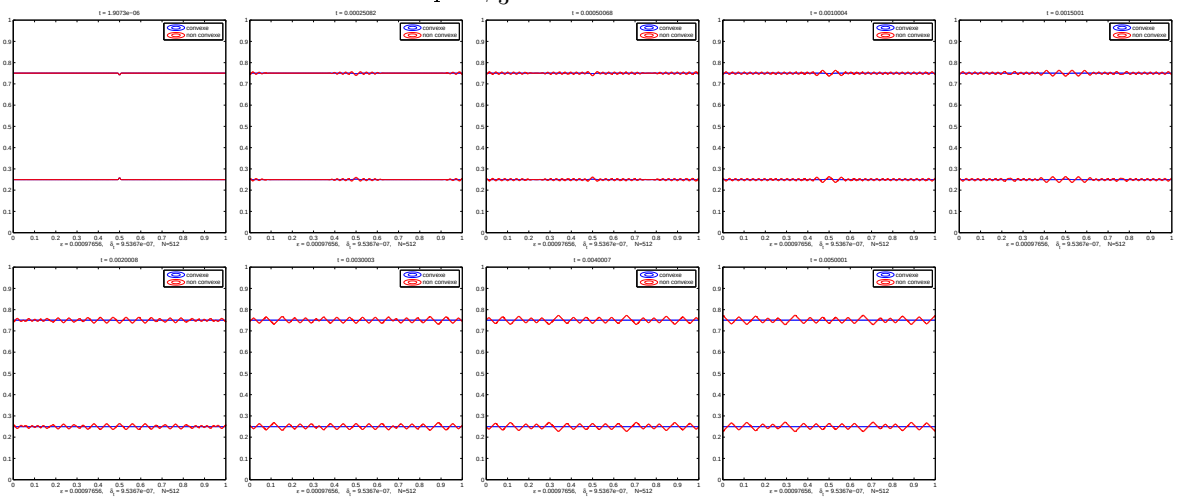


FIG. 7.9 – Simulation d'un mouvement par courbure moyenne avec les anisotropies $(\phi_3^o, \phi_3^{o,*})$

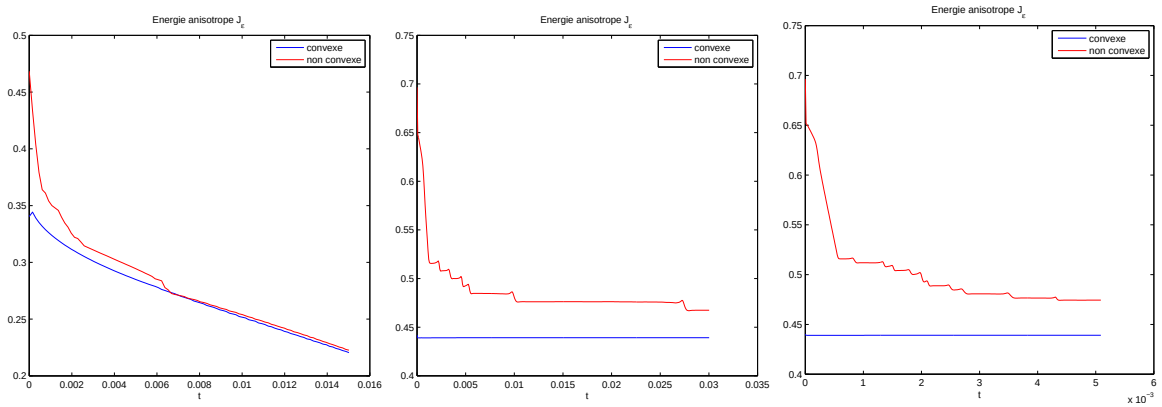


FIG. 7.10 – Energies $t \to J^{\epsilon}_{\phi}(u^{\epsilon}(x,t))$ associées aux trois simulations de la figure 7.9

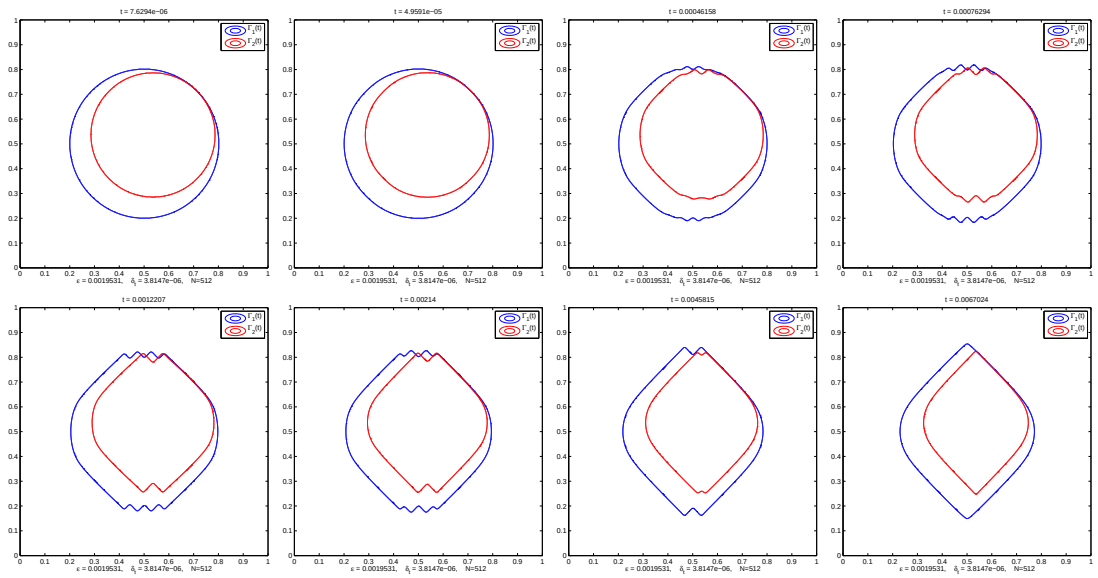


FIG. 7.11 – Simulation d'un mouvement par courbure moyenne anisotrope où le principe d'inclusion n'est pas vérifié.

Les formes de Wulff associées à $P^{\epsilon}_{\phi^o}$ dépendraient donc a priori de l'échelle caractéristique considérée R_0 et s'obtiendrait en observant les anisotropies $\phi^{o,\epsilon,R_0} = \phi^o(\xi) + C\ \epsilon R_0|\xi|$. La figure (7.12) présente par exemple les formes de Wulff associées à ϕ^{o,ϵ,R_0} pour les anisotropies $\phi_3^{o,*}$ et ϕ_3^o et nous observons comme dans nos simulations numériques que les formes de Wulff dans le cas d'anisotropie non convexe présentent des angles beaucoup mieux marqués que pour les enveloppes convexes de ces mêmes anisotropies.

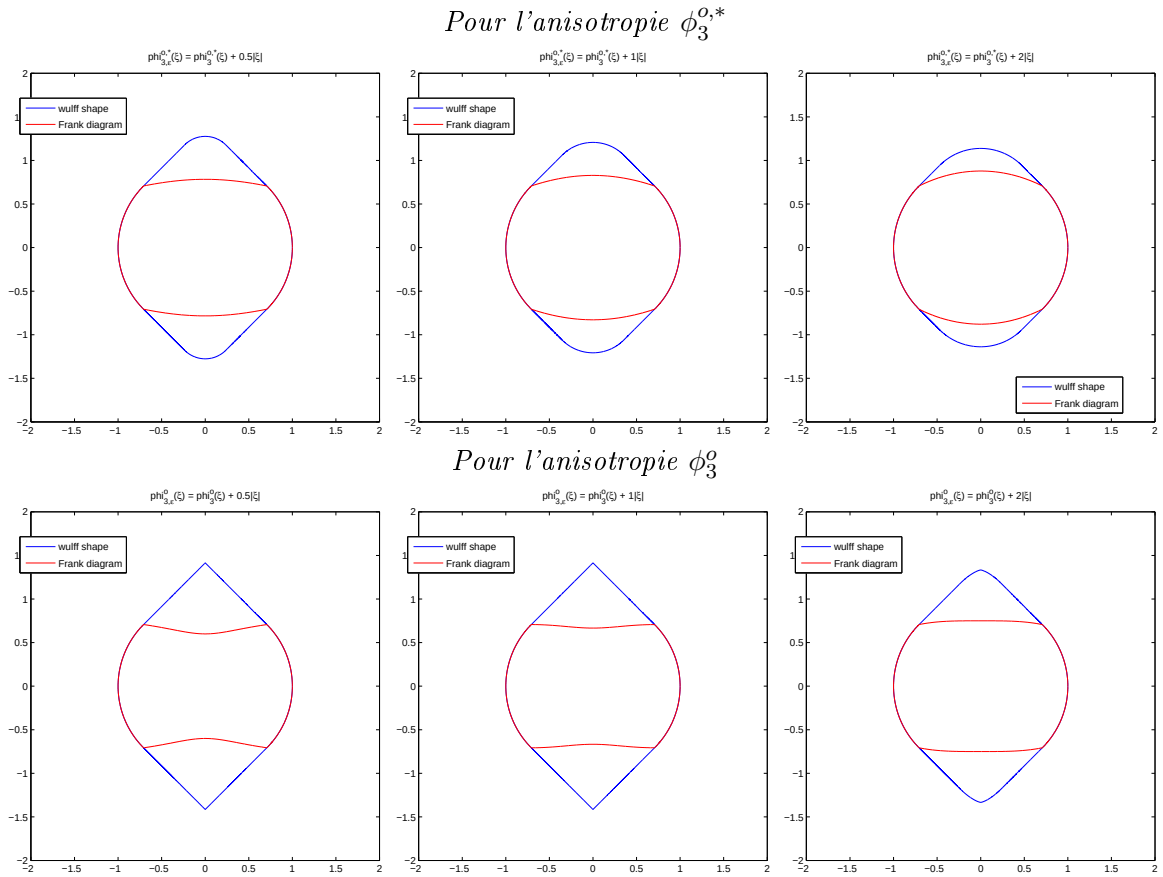


FIG. 7.12 – Exemple de formes de Wulff lissées associées aux anisotropies ϕ^{o,ϵ,R_0}

7.7 Quelques simulations de mouvements d'interfaces en dimension 3

Nous présentons tout d'abord quelques exemples de calcul de formes de Wulff sur la figure (7.13). Les anisotropies utilisées sont définies par les formules suivantes où nous avons utilisé les notations $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\theta_1 = atan\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)$, $\theta_2 = atan\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}\right)$, $\theta_3 = atan\left(\frac{\xi_2}{\xi_3}\right)$ et $\theta_4 = atan\left(\frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\right)$.

$$\phi_4^o(\xi) = C_4 \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \frac{4}{5}(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi_5^o(\xi) = C_5 \begin{cases} |\xi| & \text{si} \quad |\theta_4| \leq \frac{\pi}{4} \\ |\xi|(1 - cos(2\ \theta_4))^{3/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\phi_6^o(\xi) = C_6\ |\xi| \prod_{i\in\{1,2,3\}} (1 - b\ -\ b\ |\sin(4\theta_i)|) \quad \text{avec} \quad b = 0.4$$

$$\phi_7^o(\xi) = C_7\ |\xi| \prod_{i\in\{1,2,3\}} (1 - b\ -\ b\ |\sin(6\theta_i)|) \quad \text{avec} \quad b = 0.4$$

Les formes de Wulff obtenues par la méthode de champ de phase sont donc très proches des formes de Wulff théoriques et ceci même lorsque les anisotropies considérées sont fortement non convexes et très irrégulières comme par exemple pour ϕ_6^o et ϕ_7^o.

Nous présentons maintenant des dynamiques d'interface avec conservation de volume pour les anisotropies ϕ_4 et ϕ^5. Pour les premières simulations, présentées sur la figure (7.14), la condition initiale est un cube, ce qui, pour chacune de ces deux anisotropies, introduit des directions interdites. Nous affichons enfin sur la figure (7.15) deux simulations où l'interface initiale est un plan horizontal légèrement bruité. L'objectif est ici d'illustrer la complexité de l'évolution des "pics" (en dimension 3) selon l'anisotropie imposée.

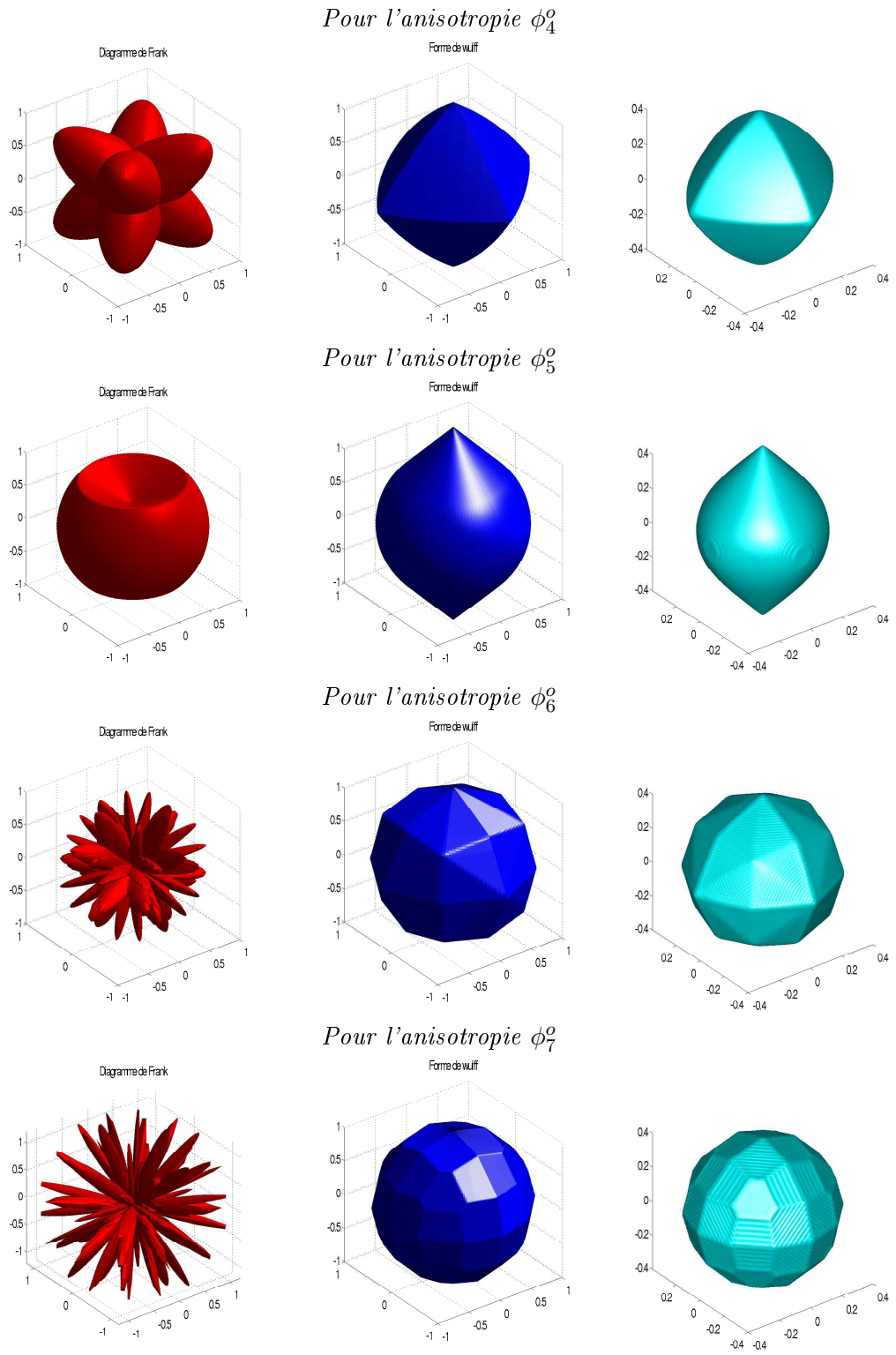


FIG. 7.13 – Exemple de calcul de formes de Wulff pour différentes anisotropies ϕ^o. Nous représentons, A gauche le diagramme de Frank B_{ϕ^o}, Au centre la forme de Wulff théorique $B_{\phi^{oo}}$, A droite la forme de Wulff obtenue avec notre méthode numérique

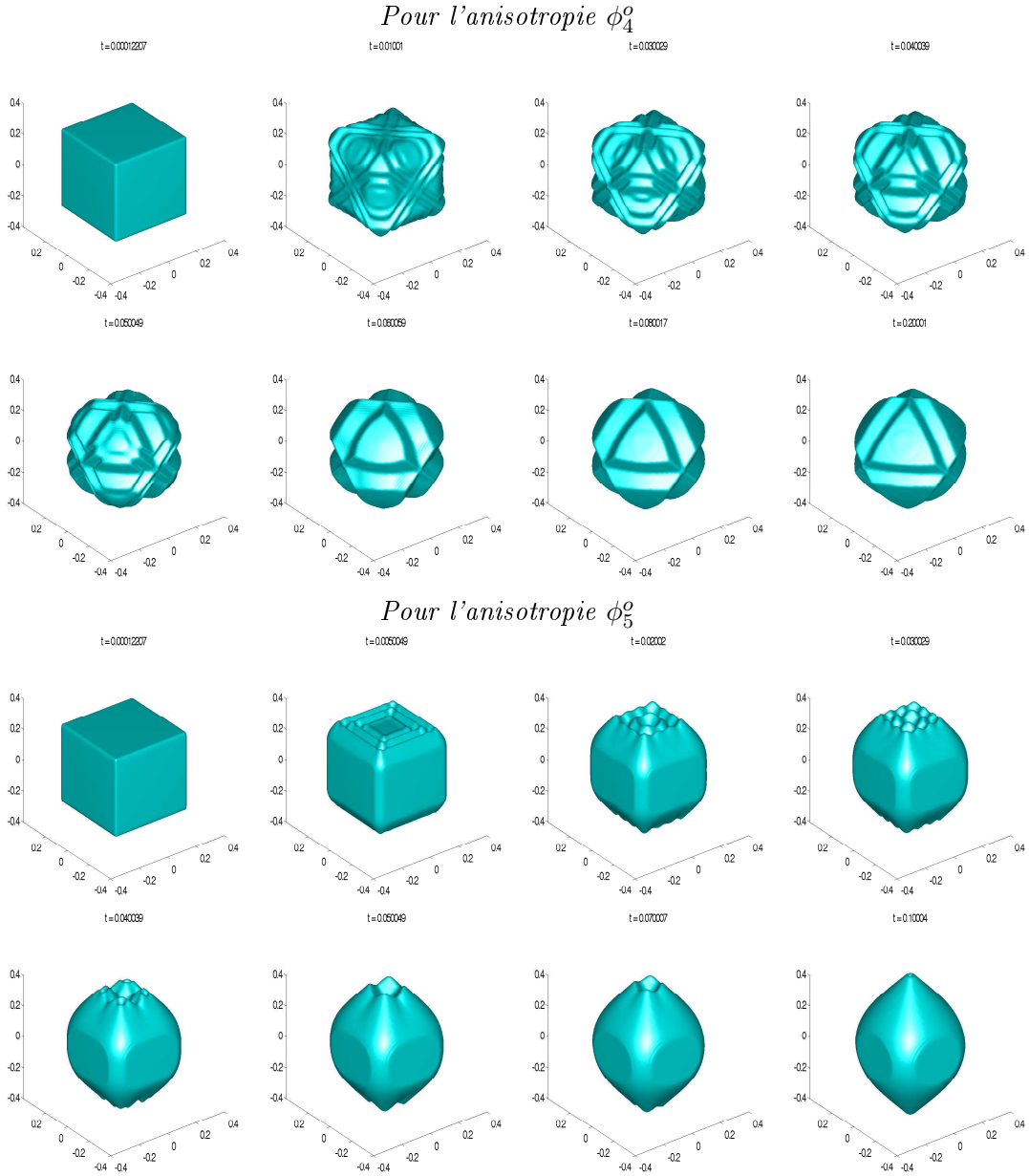


FIG. 7.14 – Mouvement par courbure moyenne anisotrope avec les anisotropies ϕ_4^o et ϕ^5. La condition initiale est un cube et les paramètres de simulation sont $N = 2^7$, $\epsilon = \frac{1}{N}$ et $\delta_t = \epsilon^2$.

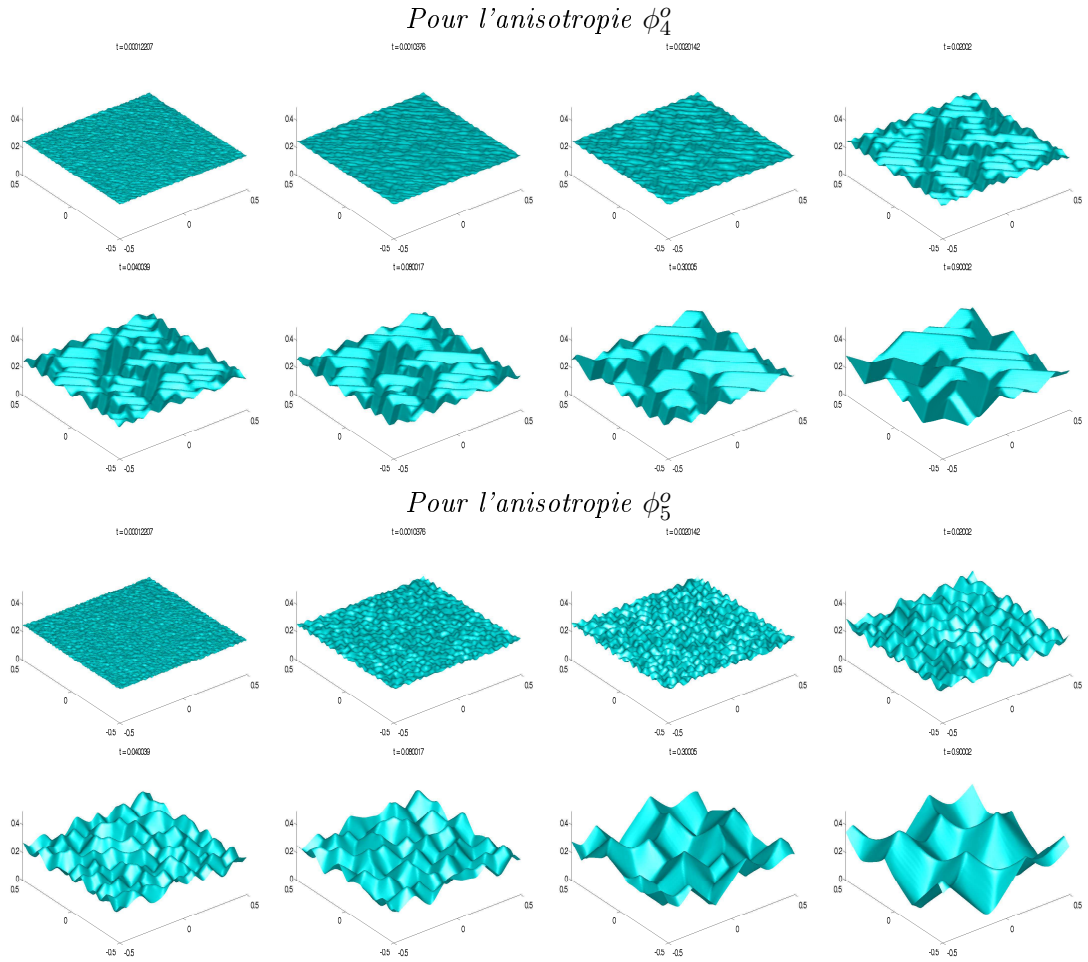


FIG. 7.15 – Mouvement par courbure moyenne anisotrope avec les anisotropies ϕ_4^o et ϕ^5. L'interface de la condition initiale est un plan horizontal légèrement bruité et les paramètres de simulation sont $N = 2^7$, $\epsilon = \frac{1}{N}$ et $\delta_t = \epsilon^2$.

7.8 Discussion et conclusion

L'existence et l'unicité des mouvements par courbure moyenne anisotrope sont des questions difficiles lorsque l'anisotropie ϕ^o n'est pas convexe. En fait, nous ne pensons pas que l'unicité de ces mouvements minimisants soit vérifiée sans imposer d'hypothèses supplémentaires. Nous envisageons par exemple les deux stratégies suivantes :

- Nous pourrions tout d'abord imposer un principe d'inclusion à la dynamique d'interface : dans ce cas, cela revient à autoriser un nombre de "pic" infini, voir [70], et le périmètre réellement minimisé serait l'enveloppe semi-continue inférieurement de P_{ϕ^o}. Cette stratégie ne prendrait pas réellement en compte la présence d'anisotropie non convexe puisque la dynamique d'interface correspondante s'identifierait à celle obtenue par l'enveloppe convexe de ϕ^o.
- Une autre façon de procéder consisterait à imposer un poids énergétique c_ϵ sur chaque pic. Le nombre de "pics" serait naturellement limité. Le périmètre modifié deviendrait alors semi-continue inférieurement et imposerait l'unicité de ces mouvements minimisants. Dans ce cas, le principe d'inclusion ne serait plus vérifié mais la non convexité de l'anisotropie ϕ^o jouerait réellement son rôle par l'introduction de directions interdites. Il serait alors intéressant d'introduire la dynamique d'interface limite lorsque C_ϵ tendrait vers 0.

Ces deux stratégies permettent finalement de rendre semi-continue inférieurement le périmètre anisotrope de deux façons différentes : la première consiste à utiliser l'enveloppe semi-continue inférieurement de P_{ϕ^o} pour la topologie L^1 des fonctions caractéristiques, la deuxième en utilisant l'enveloppe semi continue inférieurement de P_{ϕ^o} pour une topologie plus fine et qui correspondrait surement à imposer en plus la convergence des premières formes fondamentales.
D'un point de vue champ de phase, il ne nous semble pas que l'équation d'Allen-cahn anisotrope

$$u_t = \triangle_{\phi^o} u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u)$$

permette d'ajouter un poids au pics. Nous observons certes l'apparition de "pics" dans certaines simulations [60], mais leur taille dépend intrinsèquement du maillage utilisé, et leur présence semble être purement numérique. Cette équation devrait donc correspondre à la première stratégie.

En revanche, les simulations présentées précédemment montrent clairement que l'équation d'Allen-Cahn anisotrope linéarisée

$$u_t = \tilde{\triangle}_{\phi^o} u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u)$$

ajoute un poids au pic dépendant du paramètre ϵ. Cette équation semble donc avoir un réel intérêt mathématique et devrait correspondre à la deuxième stratégie.

Troisième partie

Analyse multirésolution et curvelets

Chapitre 8

Introduction à l'analyse multirésolution et aux ondelettes

8.1 Motivations

Nous avons présenté dans les deux premières parties des méthodes numériques pour la résolution d'équation d'Allen-Cahn anisotrope :

$$u_t = \triangle_\phi u - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u).$$

Elles consistaient à utiliser une méthode de splitting entre les opérateurs de réaction et de diffusion, et toute la difficulté numérique consistait à déterminer l'action du laplacien anisotrope. Les éléments de la base de Fourier étant des vecteurs propres de ce laplacien, cette résolution s'effectuait simplement à l'aide d'une méthode spectrale en considérant l'opérateur $\tilde{\triangle}_\phi$.
Néanmoins, les éléments de la base de Fourier ne sont plus des vecteurs propres du laplacien anisotrope si l'anisotropie considérée est locale de la forme $\phi^o(x,\xi)$.
Supposons par exemple que l'anisotropie ait une dépendance locale en x de type $\phi^o(x,\xi) = a(x)|\xi|$ où $0 < a(x) < +\infty$. Avec les notations de la géométrie de Finsler,

$$\begin{cases} w_d \; det_d(\phi) = \frac{1}{a(x)^d}, \\ \operatorname{div}_\phi \eta = \operatorname{div} \eta + \eta.\nabla \left[log \left(\frac{1}{a(x)^d} \right) \right] = \operatorname{div} \eta - d \; \frac{\eta.\nabla a}{a}, \\ \nabla_\phi u = T^o(\nabla u) = \phi^o(x, \nabla u) \phi^o_\xi(x, \nabla u) = a(x)^2 \; \nabla u, \\ \triangle_\phi u = a(x)^2 \triangle u - (d-2) a(x) \nabla a . \nabla u. \end{cases}$$

Le choix de cette anisotropie en dimension 2 conduit donc à l'équation d'Allen-Cahn anisotrope suivante

$$u_t = a(x)^2 \triangle u - \frac{1}{\epsilon^2} W^{'}(u).$$

Il sera maintenant difficile de déterminer une méthode spectrale pour la résolution de l'opérateur $a(x)^2 \triangle u$. En revanche, une possibilité est d'utiliser un schéma d'Euler implicite en temps qui conduit à la résolution d'EDP elliptiques

$$L u^{n+1} = f, \tag{8.1}$$

où $L = Id - \delta_t a(x)^2 \triangle$ et $f = u^n - \frac{\delta_t}{\epsilon^2} W^{'}(u^n)$.
Ces problèmes elliptiques peuvent être ensuite résolus avec une méthode de Galerkin. Nous devons ainsi introduire des espaces d'approximation V_N générés par des bases $\mathbb{B}_N = \{\varphi_k\}_{k=1:N}$.
La résolution se réduit finalement au système linéaire suivant

$$A \; x = b$$

où

$$A(i,j) =< L\varphi_i, \varphi_j > \quad \text{et} \quad b(i) =< f, \varphi_i >$$

Un enjeu important est alors de déterminer des bases qui faciliteront cette résolution et notamment, nous nous intéressons aux deux caractéristiques suivantes :

- **La capacité des bases $\mathbb{B}_N$ à bien représenter les fontions f :** cela se traduit par le caractère creux du vecteur b et s'établit avec des résultats d'approximation non linéaire.
- **Les éléments de base φ_k doivent être assez proches des vecteurs propres de L :** cela se traduit par le caractère creux et bien organisé des matrices A. Formellement, cette caractéristique exprime une sorte de découplage entre les espaces propres de A et permet par la suite de déterminer des matrices de préconditionnement simples, très utiles en pratique puisque le conditionnement de A est de l'ordre de N^s, où N et s représentent respectivement le nombre d'éléments de base et l'ordre de l'opérateur L.

Par exemple, les bases d'éléments finis (avec adaptation de maillage) permettent une représentation creuse des fonctions f mais conduisent à des matrices A mal organisées. L'intérêt des bases d'analyse multirésolution comme celles des ondelettes est qu'elles possèdent de meilleures propriétés pour le deuxième critère.

Depuis maintenant plus de 20 ans, de nombreux travaux de recherche ont montré l'efficacité des ondelettes à résoudre des problèmes, et cela dans de nombreux domaines d'activité. Initialement introduites par Morlet et Grossman [67] comme une alternative à la transformée de Fourier, elles eurent un essor considérable grâce au formalisme de l'analyse multirésolution et aux algorithmes de décomposition rapide (voir Y. Meyer [81], S. Mallat [77] et I. Daubechies [40]).

Dans ce chapitre, nous présenterons rapidement les techniques de construction des ondelettes en dimension 1 puis leur généralisation en dimension 2. Nous expliquerons ensuite l'intérêt de ces bases pour la résolution des opérateurs elliptiques. Enfin, nous présenterons des propriétés d'approximation non linéaire dans les bases d'ondelettes. Ces propriétés qui sont optimales en dimension 1, pourront être améliorées en dimensions supérieures et conduiront à l'élaboration de nouvelles analyses multirésolution, notamment celles des curvelets qui seront introduites par la suite.

8.2 Construction des ondelettes

8.2.1 Construction des ondelettes en dimension 1

Une manière simple d'introduire les ondelettes est d'utiliser les notions d'analyse multirésolution :

Définition 24. *Une suite $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ est une analyse multirésolution si elle vérifie les six propriétés suivantes :*
- $\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2$, $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^{-j}k) \in V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}$, $V_j \subset V_{j+1}$
- $\forall j \in \mathbb{Z}$, $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$
- $\lim_{j\to-\infty} V_j = 0$
- $\lim_{j\to+\infty} V_j = L_2(\mathbb{R})$
- *il existe θ tel que $\{\theta_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz de V_0*

Le théorème suivant dont le lecteur trouvera une démonstration dans [77] permet d'obtenir une base orthogonale de V_j de la forme $\{\phi_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ à partir d'une analyse multirésolution standard.

Théorème 8. *Soit $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ une analyse multi-résolution de fonction d'échelle θ. On note ϕ la fonction dont la transformée de Fourier est*

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\hat{\theta}(\xi)}{(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(\xi+k)|^2)^{1/2}}.$$

Et on pose

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi\left(2^j\ x - k\right).$$

Alors ϕ est une fonction d'échelle et la famille $\{\phi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_j pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

A chaque fonction d'échelle ϕ, nous associons une ondelette notée ψ : l'idée consiste, d'après les hypothèses d'analyse multirésolution, à décomposer la fonction ϕ sous la forme

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]\phi_{1,k}(x).$$

De cette formule, nous pouvons extraire un filtre noté h et défini par sa transformée de Fourier

$$\hat{h}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]e^{-2i\pi\xi k}\right).$$

Le filtre d'ondelette g est alors déterminé par

$$\hat{g}(\xi) := e^{-2i\pi\xi}\overline{\hat{h}(\xi+1/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} g[k]e^{-2i\pi\xi k}\right),$$

et permet de définir la transformée de Fourier de l'ondelette mère ψ avec :

$$\hat{\psi}(2\xi) := \hat{g}(\xi)\ \hat{\phi}(\xi)$$

La famille d'ondelettes $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{N}}$ est ensuite déduite par dilatation et translation de l'ondelette mère :

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi\left(2^j\ x - k\right).$$

Au final, la famille $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{N}} \cup \{\phi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ peut être de plus décomposé comme la somme des espaces $V_0 \oplus_{j\in\mathbb{N}} W_j$, où W_j est engendré par la base orthonormée $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

8.2.2 Localisation fréquentielle et spatiale des ondelettes

Les ondelettes sont principalement caractérisées par les quatre propriétés suivantes :
- La régularité de l'ondelette.
- Le nombre de moments nuls : on dit que ψ possède m moments nuls si $\forall k \leq m-1$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)x^k dx = 0$$

- La localisation spatiale :

$$support\{\psi_{j,k}(x)\} \simeq [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$$

- La localisation fréquentielle :

$$support\{\hat{\psi}_{j,k}(\xi)\} \simeq [2^j, 2^{j+1}]$$

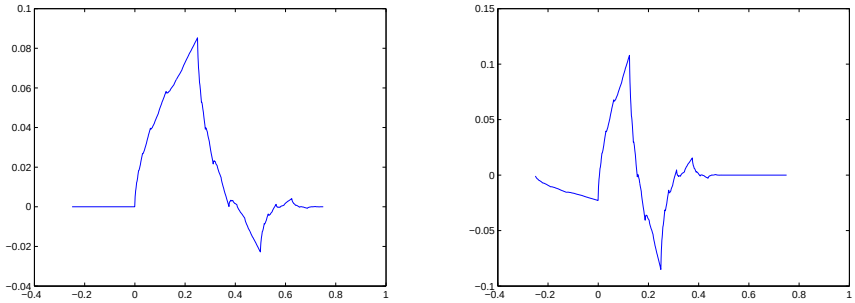


Fig. 8.1 – Fonction d'échelle (gauche) et ondelette (droite) de Daubechies 1D avec 2 moments nuls

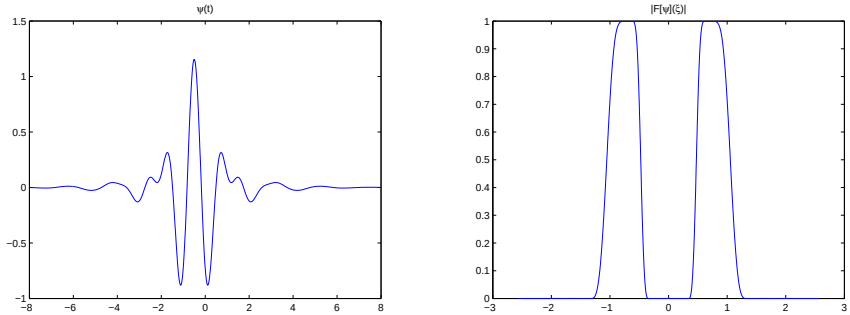


Fig. 8.2 – Ondelette de Meyer ψ et le module de sa transformée de Fourier, calculés avec Wavelab [105]

Nous pouvons retenir, parmi les ondelettes les plus célèbres, celles de Haar, de Shannon, de Meyer et enfin celle de Dauchechies.
La première est à support compact, discontinue et possède uniquement 1 moment nul.
Celle de Shannon a une transformée de Fourier discontinue à support compact. Elle est donc $C^\infty(\mathbb{R})$, possède une infinité de moments nuls et décroît lentement à l'infini dans le domaine spatial.
Quant à Meyer, (voir figure 8.2) son ondelette possède les mêmes propriétés que celle de Shannon hormis le fait que sa transformée de Fourier est plus régulière (de classe C^3), ce qui implique une décroissance plus rapide dans le domaine spatial.
Enfin l'ondelette de Dauchechies (voir figure 8.1) est à support compact avec m moments nuls, où m est un paramètre de la construction pouvant varier. Ces ondelettes ont alors la particularité de minimiser la taille de leur support par rapport au nombre de moments nuls imposés.

8.2.3 Ondelettes isotropes en dimension 2

Il existe différentes techniques de généralisation des bases d'ondelettes en dimension 2 (isotrope, anisotrope, directionnelle, hexagonale ...). Nous présentons une de ces constructions, qui utilise des produits tensoriels d'espaces d'ondelettes 1D :

$$\begin{aligned} V_{j+1} \otimes V_{j+1} &= (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j) \\ &= (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j) \oplus (V_j \otimes V_j) \end{aligned}$$

Trois ondelettes génératrices sont maintenant nécessaires (voir par exemple la figure 8.3) :

$$\begin{aligned} \psi^H(x_1,x_2) &= \phi(x_1)\psi(x_2) \quad \text{et} \quad \psi^H_{j,(k_1,k_2)}(x_1,x_2) := 2^j\psi^H\left(2^jx_1-k_1, 2^jx_2-k_2\right) \\ \psi^V(x_1,x_2) &= \psi(x_1)\phi(x_2) \quad \text{et} \quad \psi^V_{j,(k_1,k_2)}(x_1,x_2) := 2^j\psi^V\left(2^jx_1-k_1, 2^jx_2-k_2\right) \\ \psi^D(x_1,x_2) &= \psi(x_1)\psi(x_2) \quad \text{et} \quad \psi^D_{j,(k_1,k_2)}(x_1,x_2) := 2^j\psi^D\left(2^jx_1-k_1, 2^jx_2-k_2\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_j \otimes W_j &= Vect(\{\psi^H_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^2}) \\ W_j \otimes V_j &= Vect(\{\psi^V_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^2}) \\ W_j \otimes W_j &= Vect(\{\psi^D_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^2}) \end{aligned}$$

La famille

$$\{\psi^H_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^2,j\in\mathbb{N}} \cup \{\psi^V_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^2,j\in\mathbb{N}} \cup \{\psi^D_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^2,j\in\mathbb{N}} \cup \{\phi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$$

est alors une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

8.3 Ondelettes et opérateurs elliptiques

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, un des intérêts des décompositions multi-échelle est leur capacité à préconditionner un grand nombre d'opérateurs elliptiques. Les lecteurs pourront consulter les livres [82], [36], ainsi que les nombreuses thèses à ce sujet [79] [35] [4] [30]

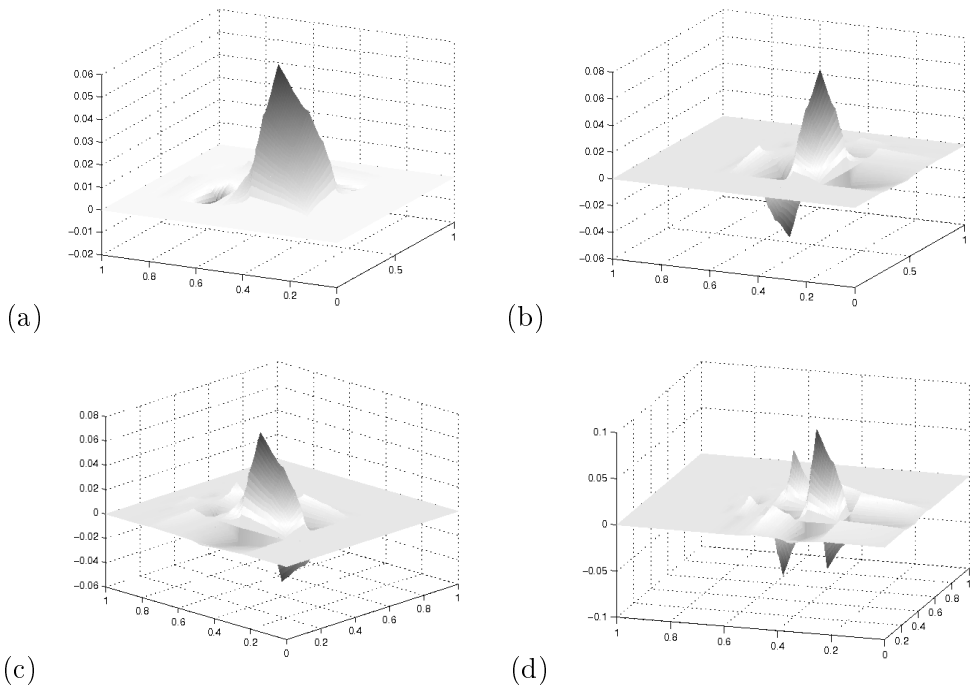


FIG. 8.3 – Ondelettes de Daubechies 2D avec 2 moments nuls, (a) –> ψ ; (b) –> ψ^H ; (c) –> ψ^V ; (d)–> ψ^D

qui ont développé en pratique l'utilisation des bases d'ondelettes pour la résolution d'EDP elliptiques.

$$Lu = f$$

Plus précisément, nous associons à cet opérateur elliptique L, une forme bilinéaire

$$a(u,v) =< Lu, v >_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

et un espace de Hilbert H inclus dans $L^2(\Omega)$ tel que

$$\|u\|_H \simeq a(u,u)$$

Dans l'exemple classique du laplacien, l'espace H s'identifie à $H = H^1(\mathbb{R}^d)$. Une méthode de Galerkin dans l'espace d'approximation V_j conduit au système linéaire

$$A_j U_j = F_j \quad \text{avec} \quad A_J(\mu, \mu') =< L\psi_\mu, \psi_{\mu'} > \quad \text{et} \quad F_j(\mu) =< f, \psi_\mu >$$

où $\mu = (j,k)$ et $\mu' = (j', k')$. Le conditionnement de la matrice A_j est alors de l'ordre de 2^{js} où s représente l'ordre de l'opérateur L. L'intérêt des bases d'ondelettes est que la matrice de préconditionnement diagonale $D_J = (2^{2s|j|}\delta_{\mu,\mu'})$ permet de réduire ce conditionnement, voir [75]. Ce résultat s'énonce sous la forme du théorème suivant :

Théorème 9. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
– H est caractérisé par l'équivalence de norme

$$\|f\|_H^2 \simeq \sum_{j,k} 2^{2sj} |c_{j,k}(f)|^2, \quad \text{où} \quad c_{j,k}(f) =< f, \psi_{j,k} >$$

– *Le conditionnement de la matrice $D_J^{-1}A_J$ est borné indépendamment de J. On rappelle que le conditionnement d'une matrice A est égal à $K(A) = \frac{\|A\|}{\|A^{-1}\|}$.*

Le lecteur trouvera une démonstration de ce résultat dans le livre de Cohen [36]. La méthode du gradient conjugué permet finalement une résolution très rapide du système linéaire $D_J^{-1}A_JU_j = D_J^{-1}F_j$ puisque l'ordre de convergence de cette méthode est géométrique avec un taux ρ

$$\rho = \frac{\sqrt{K(D_J^{-1}A_J)} - 1}{\sqrt{K(D_J^{-1}A_J)} + 1}$$

8.4 Résultat d'approximation non linéaire dans les bases d'ondelettes

8.4.1 Optimalité en dimension 1

Nous allons maintenant présenter un résultat d'approximation pour les fonctions régulières par morceaux dans les bases d'ondelettes orthogonales.

Définition 25. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un ouvert, on note $C^\alpha(\Omega)$ l'espace des fonctions α-höldériennes d'ordre α sur Ω. On peut considérer des exposants de régularités $\alpha > 0$ non nécessairement entiers. Ce sont alors des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ayant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $[\alpha]$ et vérifiant*

$$\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} := max\left(\sup_{(x,y)\in\Omega^2} \frac{\left|f^{(E(\alpha))}(x) - f^{(E(\alpha))}(y)\right|}{|x-y|^{E(\alpha)-\alpha}}, \max_{n\leq\alpha}\left(\sup_{x\in\Omega}\left|f^{(n)}(x)\right|\right)\right) \leq \infty$$

avec

$$E(\alpha) := \begin{cases} [\alpha] & si \quad \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha - 1 & si \quad \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit f_N l'approximation de f en conservant uniquement les N plus grands coefficients d'ondelettes sur une base d'ondelettes fixée, engendrée par ψ.

On peut montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est une fonction C^α par morceaux et si ψ est à support compact et possède $m > \alpha$ moments nuls, alors

$$\|f - f_N\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\ N^{-2\alpha}$$

où C est une constante qui ne dépend que de f.

Cette décroissance asymptotique est optimale pour les fonctions régulières par morceaux. A titre de comparaison, l'approximation non linéaire dans la base de Fourier fournit une décroissance asymptotique en N^{-1}. Le lecteur trouvera une démonstration de ce résultat dans [77] ainsi que des preuves plus complexes dans le cadre général des espaces de Besov et BV dans le livre de Cohen [36].

8.4.2 Résultat d'approximation non linéaire dans les bases d'ondelettes en dimension 2

Dans le cadre particulier où nous nous intéressons aux fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ par morceaux de contour C^2, l'erreur d'approximation non linéaire dans les bases d'ondelettes 2D est de l'ordre de

$$\|f - f_N\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\ N^{-1}$$

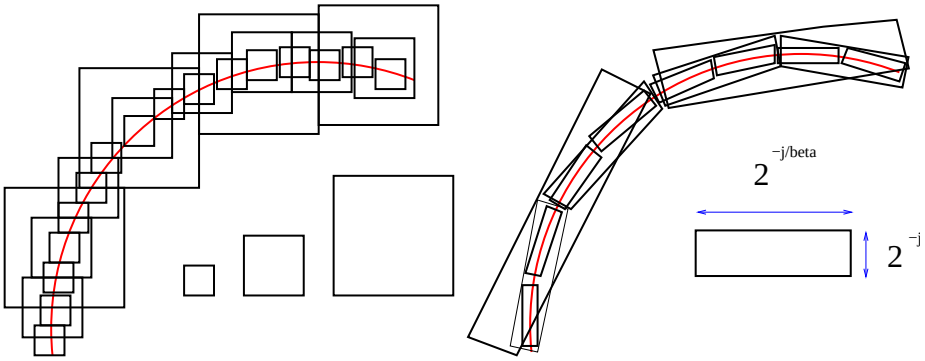


FIG. 8.4 – Nombre de coefficients d'ondelettes utiles à chaque échelle

En effet, le schéma de gauche de la figure (8.4) montre que le nombre d'ondelettes positionnées le long de la discontinuité est de l'ordre de $O(2^j)$ à l'échelle j. Or l'ordre de grandeur caractéristique de ces coefficients est de l'ordre $O(2^{-j})$. En notant que $c_{(n)}$ est le nième plus grand coefficient d'ondelettes, il ressort de ces deux estimations que $c_{(n)} \simeq n^{-1}$. Et au final, l'erreur asymptotique d'approximation non linéaire vérifie

$$\|f - f_N\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \sum_{n>N} c^2_{(n)} \simeq \sum_{n>N} n^{-2} \simeq N^{-1}$$

Afin d'améliorer la décroissance asymptotique de l'erreur d'approximation non linéaire, il est possible d'utiliser une analyse multirésolution anisotrope directionnelle comme l'indique le schéma de droite de la figure (8.4). Ainsi, en appliquant le même raisonnement effectué pour les bases d'ondelettes, le nombre de coefficients utiles à l'échelle j est cette fois-ci de l'ordre de $O(2^{\frac{j}{\beta}})$ alors que la taille caractéristique de ces coefficients est en $O(2^{-j\frac{(\beta+1)}{2\beta}})$. La taille du nième plus grand coefficient de cette base est donc de l'ordre de $c_{(n)} \simeq n^{-\frac{\beta+1}{2}}$ et

$$\|f - f_N\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \sum_{n>N} c^2_{(n)} \simeq \sum_{n>N} n^{-(\beta+1)} \simeq N^{-\beta}$$

Cet argument permet d'expliquer formellement pourquoi les ondelettes ne sont plus optimales pour représenter des fonctions régulières par morceaux en dimension supérieure ou égale à 2.

8.5 Vers d'autres familles d'analyse multirésolution

De nombreuses familles d'analyse multirésolution ont été proposées afin d'améliorer ces propriétés d'approximation. L'idée est de prendre en compte la géométrie de discontinuités. Nous pouvons classer l'ensemble de ces familles en deux catégories :

- Des familles fixes : parmi lesquelles, les ridgelets de Candès et Donoho [23] puis celles de Vetterli et M. Do [46], les curvelets de Candes [25] [19] [18] ou encore les contourlets de Vetterli et M. Do [47].
- Des familles dépendant de la géométrie de l'image : comme par exemple les bandelettes de S. Mallat et E. Le Pennec [78] ou encore les bandelettes seconde génération de S. Mallat et G. Peyré [95].

Dans cette thèse, nous nous intéressons essentiellement à la famille des curvelets, car outre le fait de vérifier des propriétés quasi-optimales d'approximation non linéaire pour les fonctions C^2 par morceaux [25] [24], elles possèdent aussi de bonnes propriétés comme base d'approximation pour les opérateurs de type FIO [21] et pour les équations des ondes [17]. Les contourlets [45] vérifient théoriquement les mêmes propriétés que les curvelets (localisation spatiale et fréquentielle), mais leur formalisme est moins pratique pour les résultats que l'on souhaite montrer. En fait, la grande différence se trouve dans l'implémentation, les curvelets sont construites dans le domaine fréquentiel alors que les contourlets utilisent des filtres directionnels.

Chapitre 9

Les curvelets : une analyse multirésolution anisotrope directionnelle

9.1 Objectif

Les curvelets forment une famille multiéchelle, anisotrope et directionnelle. Il existe deux techniques de construction du frame des curvelets :
- Les curvelets 99, qui utilisent des transformées locales de ridgelets [24].
- Les curvelets nouvelle génération [25] dont la construction est détaillée dans la suite de cette thèse.

Nous présenterons tout d'abord la construction du frame des curvelets nouvelle génération. Nous rappellerons ensuite quelques unes des propriétés qui ont fait toute la popularité des curvelets. Nous détaillerons de plus les algorithmes de décompositions en curvelets et les difficultés engendrées par la quête d'algorithmes rapides, [22] [38]. Nous proposerons enfin une extension qui fournit une décomposition non linéaire en curvelets dont la particularité est de minimiser le nombre de coefficients utiles.

9.2 Construction du frame des curvelets en dimension 2

Ce travail est une synthèse de la construction du frame des curvelets présentée dans l'article de Candes et Donoho [25].

9.2.1 Une famille multiéchelle, anisotrope et directionnelle.

Le frame des curvelets permet une analyse multirésolution anisotrope directionnelle des images. Cette famille est indexée à l'aide de 3 paramètres : un paramètre d'échelle j, un paramètre d'orientation $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ et un paramètre de position $k = (k_1, k_2)$.

Soient ψ et ϕ respectivement une ondelette et une fonction d'échelle. Nous introduisons tout d'abord une curvelet mère, notée φ et définie par :

$$\varphi(x) = \psi(x_1)\ \phi(x_2)$$

Avec $P_{j,\theta}$ la dilatation directionnelle de $\mathbb{R}^2$,

$$P_{j,\theta} = \begin{pmatrix} 2^j & 0 \\ 0 & 2^{j/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

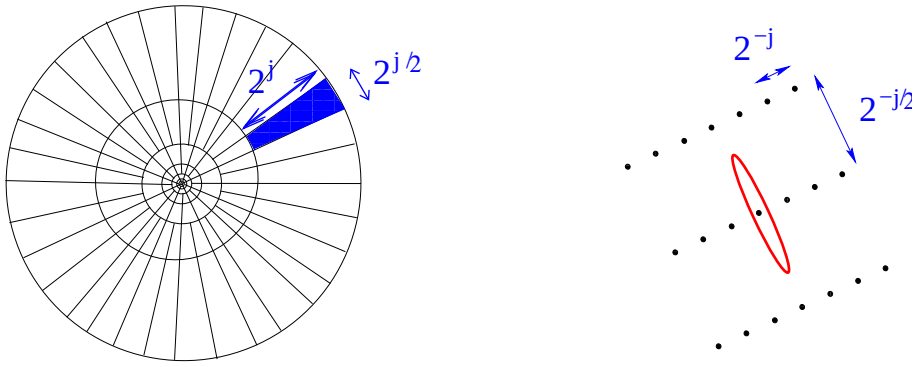


FIG. 9.1 – Localisation fréquentielle et spatiale d'une curvelet

les autres éléments de la famille des curvelets sont obtenus d'après la formule :

$$\varphi_{j,\theta,k} = \varphi(P_{j,\theta}(x - P_{j,\theta}^{-1}k)) \ \det(P_{j,\theta})^{1/2} = 2^{\frac{3j}{4}}\varphi(P_{j,\theta}x - k).$$

9.2.2 Construction du frame des curvelets

Nous avons pour le moment défini un ensemble de fonctions $\varphi_{j,\theta,k}$ indexées par trois paramètres. La construction du frame des curvelets consiste à élaborer une discrétisation de ces paramètres.

Discrétisation du paramètre d'échelle j et du paramètre d'orientation θ

Cette discrétisation débute par un pavage du plan fréquentiel comme le montre le schéma de gauche de la figure (9.1). Nous allons dans la suite utiliser les coordonnées polaires avec

$$\xi = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Soient w_0 et w_1 deux fonctions régulières et paires telles que

$$w_0^2(r) + \sum_{j=0}^{\infty} w_1^2(2^{-j}r) = 1, \ \forall r > 0. \tag{9.1}$$

La fonction w_0 joue le rôle d'un filtre passe bas, associé à une fonction d'échelle et sélectionnant les fréquences trop basses pour être analysées par des curvelets. Les fonctions $w_{j,1}(r) = w_1(2^{-j}r)$ sont en revanche des filtres passe-bande, ou encore des filtres d'ondelettes qui sélectionnent les fréquences utiles à l'échelle j. Nous avons besoin d'introduire une dernière fonction v, C^∞, à support dans $]-\pi,\pi[$ telle que

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} v^2(\theta - l\pi) = 1, \ \forall\theta \in \mathbb{R}. \tag{9.2}$$

En pratique, Candes [25] utilise une fenêtre sinus pour la fonction v et la transformée de Fourier de l'ondelette de Meyer pour les fonctions w_0 et w_1. Les fenêtres $W_{j,l}$, formant la partition du domaine fréquentiel, sont finalement construites en considérant pour tout couple $J = (j,l)$ tel que $j \in \mathbb{N}$ et $l \in (1..2^{j-[j/2]})$,

$$W_{j,l}(\xi) = w_1(2^{-j}r)v(2^{j-[j/2]}(\theta - \theta_{j,l})),$$

où $\theta_{j,l} = \pi l 2^{[j/2]-j}$. Nous ajoutons une dernière fenêtre, associée aux basses fréquences et attribuée à la valeur $J = -1$ avec

$$W_{-1}(\xi) = w_0(r).$$

Avec la notation $\Delta_J = \{(j,l) \in \mathbb{N}^2, \text{tels que } l \in (1..2^{j-[j/2]})\} \cup \{-1\}$, les égalités (9.1) et (9.2) permettent de montrer facilement la propriété suivante :

Propriété 1.

$$\sum_{J \in \Delta_J} W_J^2(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Démonstration de la propriété 1

$$\begin{aligned}
\sum_{J \in \Delta_J} W_J^2(\xi) &= w_0^2(r) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{j-[j/2]}} W_{j,l}(\xi)^2 \\
&= w_0^2(r) + \sum_{j=0}^{\infty} w_1(2^{-j}r)^2 \sum_{l=1}^{2^{j-[j/2]}} v^2\left(2^{j-[j/2]}(\theta - \theta_{j,l})\right) \\
&= w_0^2(r) + \sum_{j=0}^{\infty} w_1(2^{-j}r)^2 \sum_{l=1}^{2^{j-[j/2]}} v^2\left(2^{j-[j/2]}\theta - l\pi\right) \\
&= w_0^2(r) + \sum_{j=0}^{\infty} w_1(2^{-j}r)^2 = 1.
\end{aligned}$$

■.

On remarque de plus que $W_J(\xi) = W_{j,0}(R_{\theta_{j,l}}^{-1}\xi)$ où $R_{\theta_{j,l}}$ est la rotation d'angle $\theta_{j,l}$. Cette égalité sera utile par la suite pour montrer l'invariance par rotation des curvelets.

Discrétisation des paramètres de translation (k_1, k_2)

La discrétisation des paramètres $k = (k_1, k_2)$ consiste à utiliser une base locale orthonormée sur chaque support des fenêtres $W_{j,l}$. Pour l'ensemble des couples (j,l), une fenêtre rectangulaire $D_{j,l}$ est utilisée de telle sorte que le support de $W_{j,l}$ y soit inclus :

$$supp(W_{j,l}) \subset D_{j,l} = R_{\theta_{j,l}} D_{j,0}.$$

Il est en effet plus facile de construire des bases de $L^2(D_{j,l})$, définies comme des produits tensoriels de base $1D$. La taille de $D_{j,l}$ est de l'ordre de $2^j \times 2^{[j/2]}$. Une nouvelle grille cartésienne est associée à chaque couple (j,l),

$$\Lambda_{j,l} = \{k : k = R_{\theta_{j,l}}\left(n_1 2^{-j}, n_2 2^{-[j/2]}\right), (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Et les éléments de la base orthonormée de $L^2(D_{j,l})$ s'explicitent comme :

$$e_{j,l,k}(\xi) = 2^{-\frac{j+[j/2]}{2}} \; e^{2i\pi <k,\xi>}, \quad \text{avec} \quad k \in \Lambda_{j,l}.$$

Propriété 2.
La famille $\{e_{j,l,k}\}_{k \in \Lambda_{j,l}}$ *forme une base orthonormée de* $L^2(D_{j,l})$.

Au final, les curvelets $\varphi_{j,l,k}$ sont définies par leur transformée de Fourier :

Définition 26.

$$\varphi_{j,l,k}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[W_{j,l}(\xi)\ e_{j,l,k}(\xi)\right](x), \quad \textit{avec} \quad k \in \Lambda_{j,l}$$

Le frame des curvelets : invariance par rotation et translation

D'après les égalités $e_{j,l,k}(\xi) = e_{j,0,k}(R^{-1}_{\theta_{j,l}}\xi)$ et $W_J(\xi) = W_{j,0}(R^{-1}_{\theta_{j,l}}\xi)$, et en utilisant la notation $\varphi_j = \varphi_{j,0,0}$, il ressort que

$$\begin{aligned}
\varphi_{j,0,k}(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left[W_{j,0}\ e_{j,0,k}\right](x) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left[2^{-\frac{j+[j/2]}{2}} W_{j,0}\ e^{2i\pi<k,\xi>}\right](x) \\
&= \varphi_j(x-k).
\end{aligned}$$

Et

$$\varphi_{j,l,k}(x) = \varphi_j(R_{\theta_{j,l}}(x - R^{-1}_{\theta_{j,l}}k)),\ k \in \Lambda_{j,l}.$$

Ainsi, à une échelle j fixée, toutes les curvelets $\varphi_{j,l,k}$ sont déduites comme la rotation et la translation de l'unique curvelet mère φ_j.

9.2.3 La famille des curvelets : un frame étroit

Propriété 3. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, alors*

$$f = \sum_{(j,l)\in\Delta_J, k\in\Lambda_{j,l}} < f, \varphi_{j,l,k} > \varphi_{j,l,k}.$$

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \sum_{(j,l)\in\Delta_J, k\in\Lambda_{j,l}} < f, \varphi_{j,l,k} >^2 .$$

Démonstration de la propriété 3

La démonstration de ces deux égalités utilise les propriétés (1) et (2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\xi) &= \hat{f}(\xi) \sum_{j,l} W^2_{j,l}(\xi) = \sum_{j,l} \left(\hat{f}(\xi)\ W_{j,l}\right) W_{j,l}(\xi) \\
&= \sum_{j,l} \left(\sum_{k\in\Lambda_{j,l}} < \hat{f}(\xi) W_{j,l}, e_{j,l,k} >_{L^2(D_{j,l})} e_{j,l,k} \right) W_{j,l}(\xi) \\
&= \sum_{j,l,k} < \hat{f}, W_{j,l}\ e_{j,l,k} >_{L^2(\mathbb{R}^2)} W_{j,l}\ e_{j,l,k}(\xi) \\
&= \sum_{j,l,k} < f, \varphi_{j,l,k} > \mathcal{F}[\varphi_{j,l,k}](\xi).
\end{aligned}$$

La deuxième égalité se démontre de la même façon :

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_{j,l} W^2_{j,l}(\xi) d\xi \\
&= \sum_{j,l} \int_{D_{j,l}} |W_{j,l}\hat{f}|^2 d\xi = \sum_{j,l} \sum_{k\in\Lambda_{j,l}} \left| \left\langle W_{j,l}\hat{f}\,,\, e_{j,l,k} \right\rangle_{L^2(D_{j,l})} \right|^2 \\
&= \sum_{j,l,k} \left| \left\langle \hat{f}\,,\, \mathcal{F}\left[\varphi_{j,l,k}\right] \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right|^2 = \sum_{j,l,k} |\langle f\,,\, \varphi_{j,l,k}\rangle|^2 .
\end{aligned}$$

■

9.2.4 Existence de bases orthogonales de curvelets ?

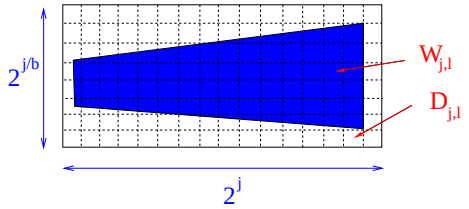


FIG. 9.2 – Représentation d'une fonction $W_{j,l}$ dans la fenêtre $D_{j,l}$

La construction du frame des curvelets introduit une discrétisation des paramètres de translation qui s'effectue en utilisant une base locale de Fourier sur chaque support des fonctions $W_{j,l}$. Si une hypothèse de régularité sur $W_{j,l}$ est imposée en plus, alors ces fonctions ne sont pas à support disjoint. Et comme Balian-Low ont montré que, pour tout u_0 et ξ_0, il n'existe aucune fenêtre différentiable g à support compact telle que

$$\{g(t - nu_0)exp(ik\xi_0 t)\}$$

soit une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, il semble difficile de concevoir de cette façon une base orthogonale de curvelets. Le lecteur trouvera plus de détails à ce sujet dans le chapitre "transformées orthogonales à recouvrement" du livre de Mallat [77]. En revanche si la condition de différentiabilité des fenêtres $W_{j,l}$ est relaxée, alors nous pouvons déterminer un ensemble de fonctions $W_{j,l}$ dont les supports sont disjoints. Mais comme ces supports ne sont pas rectangulaires, il est tout de même nécessaire d'introduire de nouvelles fenêtres $D_{j,l}$ rectangulaires contenant le support de $W_{j,l}$ comme le montre la figure (9.2). La base locale de Fourier utilisée est en réalité une base de $L^2(D_{j,l})$, et la conséquence directe est la redondance des éléments de la famille des curvelets. En conclusion, il est difficile d'aboutir à une base orthogonale de curvelets en suivant une telle construction.

9.2.5 Extension du principe des curvelets en dimension d

En suivant les même étapes que pour la dimension 2, cette famille est indexée par trois paramètres. Un paramètre d'échelle $j \in \mathbb{Z}$, un paramètre d'orientation $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{d-1}) \in [-\pi/2, \pi/2]^{d-1}$ et un paramètre de position $k = (k_1, k_2, ..., k_d) \in \mathbb{R}^d$. Soient ψ_1,ϕ_2...ϕ_{d-1} respectivement une ondelette et $d-1$ fonctions d'échelles. La curvelet mère est définie par l'expression suivante :

$$\varphi(x) = \psi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)...\phi_{d-1}(x_d).$$

Avec les coordonnées "sphériques" en dimension d,

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos(\theta_1), \\ x_2 &= r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2), \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= r\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)...\cos(\theta_{d-1}), \\ x_d &= r\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)...\sin(\theta_{d-1}). \end{aligned}$$

La rotation R_θ d'angle $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{d-1})$ vérifie par définition

$$(x_1, x_2, ..., x_d) = R_\theta(1, 0, ..., 0)^t.$$

Avec $P_{j,\theta}$ la dilatation anisotrope directionnelle de $\mathbb{R}^d$ définie ci-dessous,

$$P_{j,\theta} = \begin{pmatrix} 2^j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2^{j/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2^{j/2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^{j/2} \end{pmatrix} R_\theta.$$

Les éléments de la famille des curvelets en dimension d sont finalement déduits à partir de la curvelet mère de la manière suivante :

$$\varphi_{j,\theta,k} = \varphi(P_{j,\theta}(x - P_{j,\theta}^{-1}k))\ det(P_{j,\theta})^{1/2} = 2^{\frac{(d+1)j}{4}}\varphi(P_{j,\theta}x - k).$$

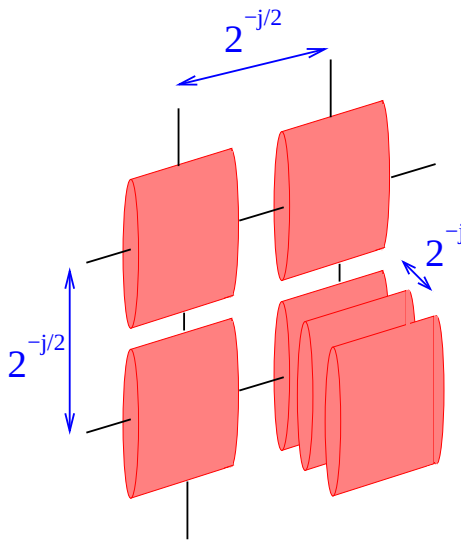


Fig. 9.3 – Représentation de la localisation spatiale des curvelets en dimension 3

Une curvelet en dimension 3 ressemble alors à une plaque qui se collera aux discontinuités le long d'une variété de codimension 1, voir la figure (9.3).

9.3 Approximation non linéaire dans la base des curvelets

Nous allons maintenant présenter un résultat d'analyse de la décroissance asymptotique des coefficients de curvelets lorsque les images considérées sont C^2 par morceaux de contour C^2. Nous allons tout d'abord donner la définition de l'ensemble des fonctions considérées puis nous énoncerons le théorème de Candes et Donoho dont le lecteur trouvera une démonstration dans l'article [25].

Définition 27. $\forall A \in \mathbb{R}^+, Star^2(A)$ *:*
Cet espace contient un ensemble des domaines B dont le contour ∂B est de régularité C^2. En particulier, lorsque le domaine B s'explicite en coordonnées polaires sous la forme : $x \in B \Leftrightarrow |x| \leq \rho(\theta)$ avec $\rho(\theta) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$, alors

$$\rho \leq \rho_0 \quad et \quad \|\rho\|_{C^2} = \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |\rho''(\theta)| \leq A. \tag{9.3}$$

Finalement, un domaine B appartient à $Star^2(A)$ si $B \in [0,1]^2$, et s'il est le translaté d'un ensemble $\tilde{B}$ vérifiant l'égalité 9.3.

Définition 28. $C^2_{0,A}(\Omega)$ *:*
On note $C^2_{0,A}(\Omega)$ l'ensemble de fonctions f, C^2 dont le support est strictement compris dans Ω telles que

$$\|f\|_{C^2(\Omega)} \leq A$$

Définition 29. PC^2_A *:*
Au final, cet ensemble contient les fonctions f définies sur $[-1,1]^2$ telles que

$$f = f_0 + f_2 \mathbb{1}_B,$$

où $B \in Star^2(A)$ et $f_0, f_1 \in C^2_{0,A}([-1,1]^d)$.

Le résultat de Candes et Donoho s'énonce sous la forme du théorème suivant :

Théorème 10.
Soit $f \in PC^2(A)$, alors l'erreur d'approximation non linéaire vérifie l'inégalité

$$\|f - f_N\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\ N^{-2} log(N)^3.$$

Cette décroissance est, de plus, optimale au facteur log près pour l'ensemble de ces fonctions.

9.4 Curvelets, opérateur FIO et équations des ondes

Nous exposons tout d'abord la définition de l'ensemble des opérateurs FIO (Fourier Integral Operator).

Définition 30. *Un opérateur T est de type FIO s'il est de la forme*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\phi(x,\xi)} \sigma(x,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Avec
– La phase $\phi(x,\xi)$ est C^∞, homogène de degré un en ξ, c'est à dire que pour $\lambda > 0$,

$$\phi(x, \lambda\xi) = \lambda\phi(x,\xi).$$

– *$\phi_{x,\xi} = \nabla_x \nabla_\xi \phi$ vérifie la condition de non dégénérescence suivante*

$$|det\phi_{x,\xi}| > c > 0.$$

– *L'amplitude σ est un symbole de degré m, c'est à dire que $\sigma \in C^\infty$ et vérifie*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}.$$

Par exemple, le laplacien est un opérateur FIO avec $\phi(x,\xi) = 2i\pi x.\xi$ et $\sigma(x,\xi) = -4\pi^2\xi^2$. Dans la suite, on note M_T la matrice de représentation de l'opérateur T dans la base des curvelets :

$$M_T(\mu,\mu^{'}) =< T\varphi_\mu, \varphi_{\mu'} >_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Avec $\mu = (j,l,k)$ et $\mu' = (j',l',k')$

Remarque 40. *A chaque curvelet φ_μ, nous pouvons associer :*
– *une position spatiale : x_μ,*
– *une position fréquentielle : ξ_μ,*
– *une direction $\theta_{j,l}$ et $\vec{e}_\mu = R_{\theta_{j,l}}(1,0,...,0)^t$.*

Candes et L. Demanet ont montré dans les articles [17] et [21] que la matrice M_T est bien organisée et creuse. Avec l'introduction de $w(\mu,\mu')$, une pseudo-distance dans l'indexation de coefficients de curvelets :

Définition 31.

$$w(\mu,\mu') = 2^{|j-j'|}\ \Big(1 + min(2^j, 2^{j'})d(\mu,\mu')\Big)$$

où

$$d(\mu,\mu') = \|\theta_\mu - \theta_{\mu'}\|^2_{l^2([0,\pi]^{d-1})} + \|x_\mu - x_{\mu'}\|^2_{l^2(\mathbb{R}^d)} + |< e_\mu, x_\mu - x_{\mu'} >_{l^2(\mathbb{R}^d)}|.$$

Ce résultat s'énonce sous la forme du théorème suivant :

Théorème 11. *Soit T un opérateur FIO dont le symbole σ est d'ordre m, alors $\forall N > 0$*

$$|M_T(\mu,\mu^{'})| \leq C_N\ 2^{mj_0}(w(\mu,h(\mu^{'})))^{-N},$$

où $j_0 = min(j,j^{'})$ et $h : (x,\xi) \to (y,\nu)$ est associée à ϕ avec

$$x = \nabla_\xi(y,\xi) \qquad \nu = \nabla_x(y,\xi).$$

Candes et Demanet ont de plus montré dans l'article [17] un résultat similaire pour les EDPs de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_k A_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + B(x)u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x).$$

9.5 Algorithme de décomposition rapide en curvelets

Tous les tests numériques présentés ont été effectués à l'aide de la librairie curvelab [38]. Nous allons maintenant détailler les principes de ces différents algorithmes

9.5.1 Les curvelets 99

Le premier algorithme de curvelets, qui a donné lieu aux curvelets 99, utilisait des algorithmes de transformée en ridgelet :

La transformée en ridgelets continues

La transformée en ridgelets [23, 20] utilise dans sa définition une ondelette $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie la condition d'admissibilité suivante :

$$\int |\hat{\Psi}(\xi)|^2/|\xi|^2 < \infty.$$

En supposant que Ψ est normalisée, c'est à dire que $\int_0^\infty |\hat{\Psi}(\xi)|^2/|\xi|^2 = 1$, alors $\forall a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$ et $\forall \theta \in [0, 2\pi[$, la ridgelet $\Psi_{a,b,\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (voir figure 9.4) est donnée par la formule suivante :

$$\Psi_{a,b,\theta}(x) := a^{-1/2}\ \Psi((x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) - b)/a).$$

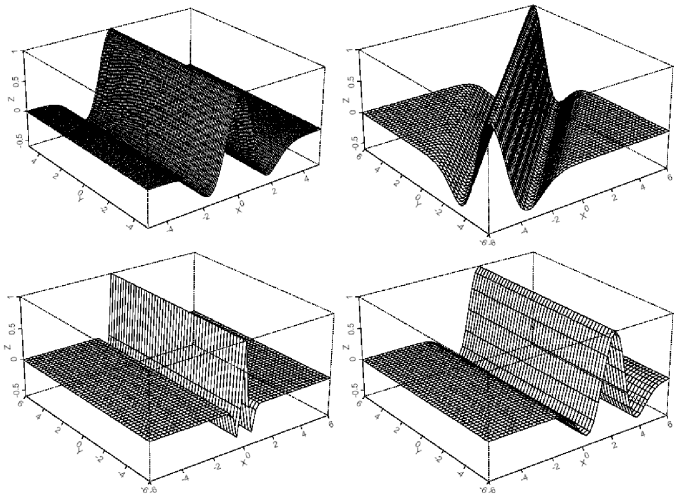


FIG. 9.4 – Quelques exemples de ridgelets

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, les coefficients de ridgelet sont obtenus comme

$$R_f(a, b, \theta) = \int \overline{\Psi}_{a,b,\theta}(x) f(x) dx.$$

Et une formule de reconstruction nous dit que, $\forall f \in L^2(R^2) \cap L^1(R^2)$,

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} R_f(a, b, \theta) \Psi_{a,b,\theta}(x) \frac{da}{a^3} db \frac{d\theta}{4\pi}.$$

La transformée en ridgelets peut être interprétée comme une transformée en ondelettes sur le domaine de Radon où la transformée de Radon d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est un ensemble de coefficients paramétrés par $(\theta, t) \in [0, 2\pi[\times R$ tels que

$$R_f(\theta, t) = \int f(x_1, x_2)\delta(x_1 cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) - t)dx_1 dx_2,$$

où δ est un dirac .

Algorithme de la transformée en ridgelets

La méthode utilise successivement une transformée de Radon puis une décomposition en ondelettes $1D$.
Les algorithmes de transformée de Radon rapides consistent à effectuer les quatre étapes suivantes :
- Une transformée de Fourier $2d$
- Une interpolation de cette transformée de Fourier sur une grille pseudo polaire (voir figure gauche 9.5)
- Un réordonnement des coefficients obtenus par lignes de direction.
- Une transformée de Fourier inverse $1d$ sur chacune de ces lignes.

Ce principe algorithmique est en fait une simple application du "slicing theorem", dont le lecteur trouvera la démonstration dans le livre de Natterer [86].
Il suffit finalement d'appliquer une transformée d'ondelettes 1D sur chacune de ces lignes pour obtenir les coefficients de ridgelets, voir figure (9.5).

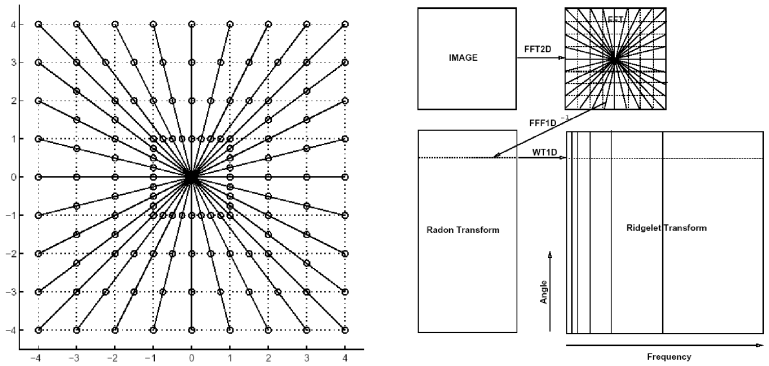


FIG. 9.5 – Grille pseudo polaire et Algorithme de la transformée en ridgelets

Algorithme de décomposition en curvelets 99

Les différentes échelles de notre image sont tout d'abord séparées : des filtres passe-bandes $f_j = \Delta_j f$ sélectionnant les fréquences comprises dans l'intervalle $[2^j, 2^{j+1}]$ permettent de décomposer l'image sous la somme suivante : $f = \sum_j f_j$. Puis, pour chaque échelle j, l'image f_j est découpée en sous-domaines de taille caractéristique $2^{-j/2} \times 2^{-j/2}$ sur chacun desquels nous appliquons une transformée en ridgelets locale. Parmi l'ensemble des coefficients obtenus, nous récupérons les coefficients correspondant aux curvelets. La figure (9.6) détaille ces différentes étapes.
En fait, le filtre passe-bande Δ_j détermine la largeur des curvelets à l'échelle j, $l = 2^{-j}$, alors que la longueur de curvelets est déterminée par la taille des sous-domaines sur lesquels nous appliquons des transformées en ridgelets, c'est à dire $L = 2^{-j/2}$. Ainsi, l'échelle parabolique des curvelets est retrouvée.

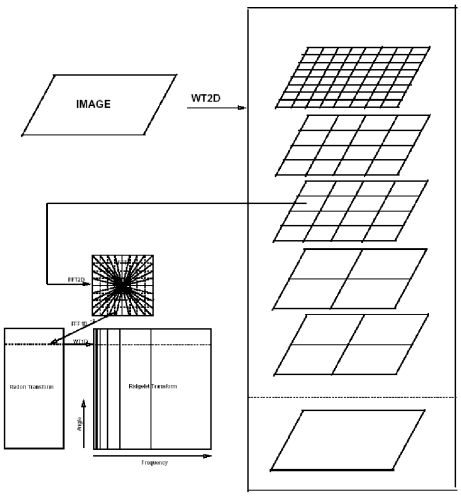


FIG. 9.6 – Algorithme de la transformée en curvelet 99

L'avantage d'une telle méthode est qu'elle utilise l'implémentation des ridgelets. Mais cet algorithme décompose en fait notre image sur une famille de ridgelets multiéchelle où seuls sont non nuls les coefficients correspondant à des ridgelets dont l'échelle est parabolique. Ainsi, un petit nombre des coefficients calculés est vraiment utile et l'algorithme des curvelets 99 s'avère très redondant en pratique.

9.5.2 les curvelets nouvelle génération

Le lecteur intéressé trouvera une étude des algorithmes de décomposition rapides en curvelets nouvelle génération dans [22]. La figure (9.7) résume les différentes étapes de ces algorithmes :

La construction du frame des curvelets présentée en début de chapitre introduit les coordonnées polaires. L'inconvénient est qu'il est alors nécessaire d'utiliser des interpolations $2D$, dont le coût algorithmique est trop élevé pour obtenir des algorithmes de décomposition rapides. Une première alternative proposée par Candes [22] est de relaxer la contrainte d'invariance par rotation. Ainsi, comme sur la figure (9.8), les curvelets deviennent invariantes par "shear" et non par rotation. Les méthodes de décomposition associées n'ont alors recours qu'à des interpolations $1D$ et sont considérées comme rapides. Ces curvelets sont couramment appelées dans la littérature "les curvelets invariantes par shear". Il existe une deuxième alternative, dite la "wrapping method", proposée par L. Demanet [22]. L'idée consiste à utiliser des fenêtres $D_{j,l}$ plus grandes afin de ne plus avoir recours aux interpolations (voir figure (9.9)). Les algorithmes obtenus deviennent alors plus simples et plus rapides mais ces curvelets sont plus redondantes que celles dites par "shear".

9.5.3 Quelques images de curvelets

Voici quelques images de curvelets obtenues avec l'algorithme par "shear". La figure (9.10) présente une fenêtre $W_{j,l}$ observée dans un support $D_{j,l}$. Nous affichons sur la figure (9.11) plusieurs curvelets à différentes échelles dans les domaines spatial et fréquentiel. Enfin, les images de la figure (9.12) présentent une coupe dans la longueur et dans la largeur d'une curvelet.

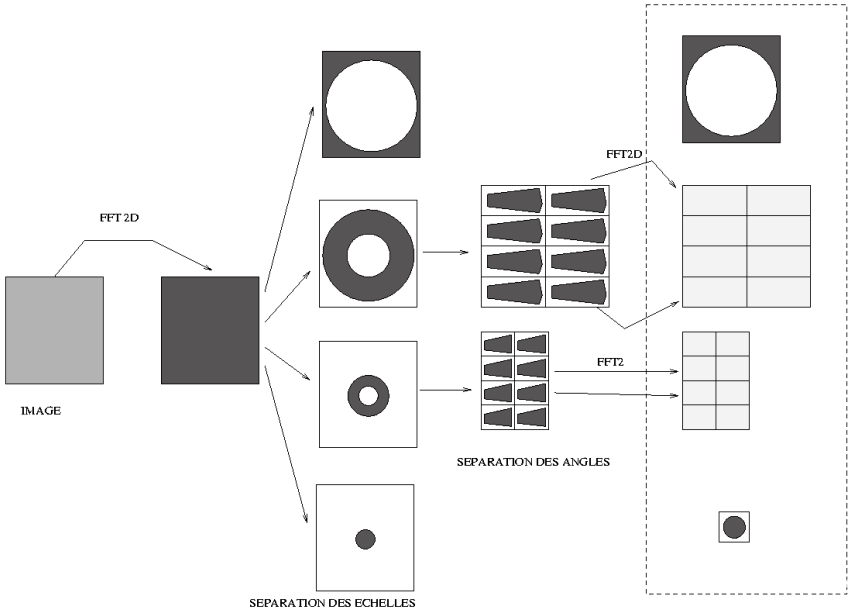


Fig. 9.7 – Idée générale de l'algorithme de décomposition en curvelets nouvelle génération

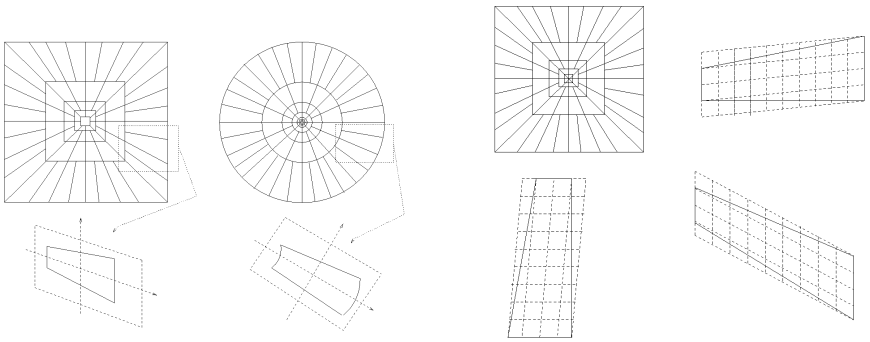


Fig. 9.8 – Curvelets invariantes par rotation // curvelets invariantes par "shear"

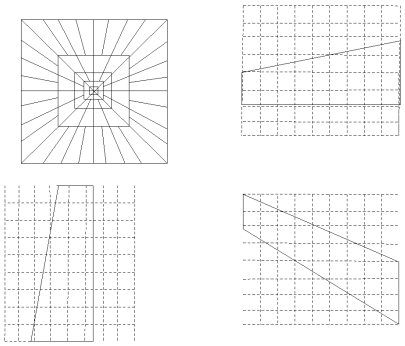


Fig. 9.9 – Principe de la "wrapping method"

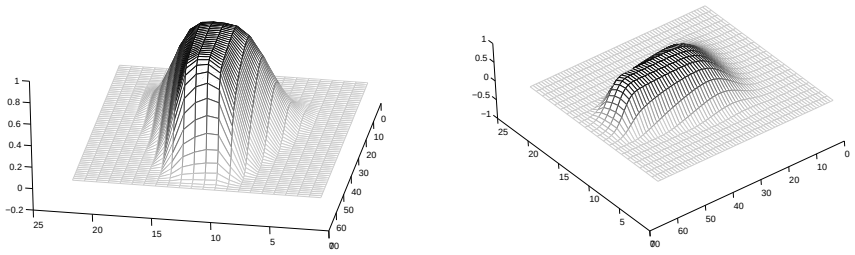


FIG. 9.10 – La fonction $W_{j,l}$ observée dans $D_{j,l}$

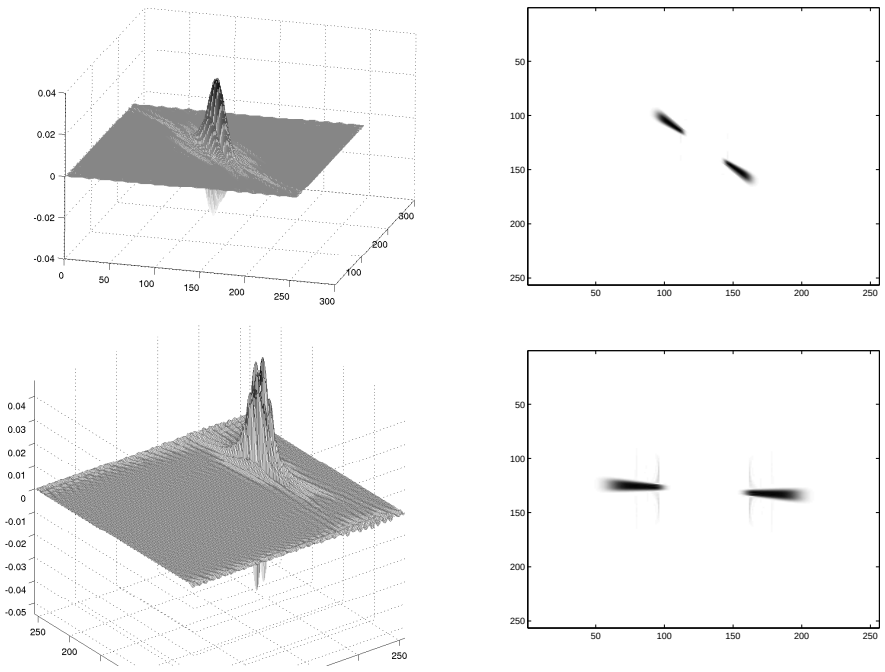


FIG. 9.11 – En haut : $\varphi_{j=5}$ – en bas : $\varphi_{j=6}$ – A gauche : dans le domaine spatial – A droite : dans le domaine fréquentiel – Avec $N = 2^8$

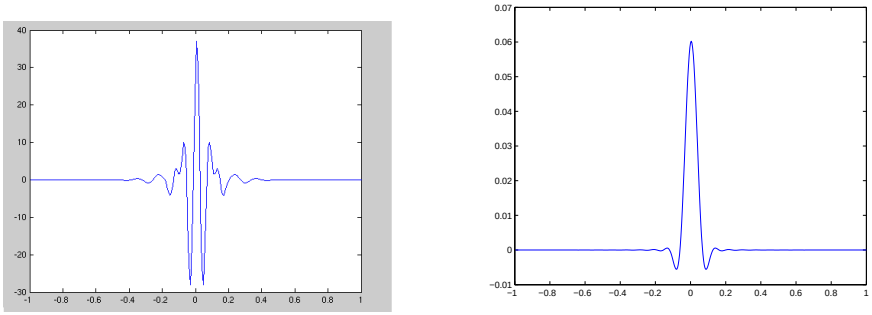


FIG. 9.12 – Coupe dans la longueur et dans la largeur d'une curvelet $\varphi_{j=5}$

9.5.4 Vers de nouvelles décompositions en curvelets

La famille des curvelets est redondante, il existe plusieurs décompositions possibles. Parmi ces décompositions, les algorithmes présentés précédemment renvoient celle obtenue avec le calcul des produits scalaires, comme dans l'équation (9.4).

$$f = \sum_{j,l,k} < f, \varphi_{j,l,k} > \varphi_{j,l,k}. \tag{9.4}$$

Mais il est possible de déterminer d'autres décompositions en curvelets :

$$f = \sum_{j,l,k} \alpha_{j,l,k} \varphi_{j,l,k},$$

où $\alpha_{j,l,k} \neq < f, \varphi_{j,l,k} >$.

Le but de ce travail est de déterminer la meilleure décomposition possible dans le sens où nous cherchons à minimiser le nombre de coefficients de curvelets utiles. Par exemple, l'application des algorithmes précédents à l'image d'une curvelet $\varphi_{j=6,l,k=0}$, fournit une trentaine de coefficients non nuls. Pour s'en convaincre, il suffit de calculer la transformée de Fourier locale de la fonction $W_{j,l}$ dans le domaine $D_{j,l}$ (voir figure (9.10)). Nous allons alors appliquer un algorithme de type glouton dans le frame des curvelets, (voir travaux [8]). Bien entendu, cette technique aura un coût très élevé.

Il faut tout d'abord comprendre l'origine de la redondance des curvelets. Elle est la conséquence de deux faits :

– les fenêtres $W_{j,l}$ ne sont pas disjointes : les curvelets ne sont pas orthogonales entre elles à différentes échelles j et à différentes orientations θ_l.

– les fenêtres $D_{j,l}$ sont plus grandes que les fenêtres $W_{j,l}$: à j et l fixés, les curvelets ne sont pas orthogonales entre elles.

Nous traitons ici uniquement le deuxième type de redondance et le problème se parallélise sur chaque fenêtre $D_{j,l}$. La méthode utilisée est décrite par l'algorithme (10).

Algorithm 10 Optimisation de la décomposition en curvelets

Données: Entrées : $prec$, $R = W_{j,l}\ \hat{f}_{|D_{j,l}}$

Résultat: $\alpha_k + FFT2(R)$

1: Initialisation

$$\alpha_k = 0, n = 10$$

2: **tantque** $\|W_{j,l}^2\ \hat{f}_{|D_{j,l}} - \sum_k \alpha_k e_{j,l,k}\ W_{j,l}\|_{l_2(D_{j,l})} > prec$,

3: Déterminer la décomposition linéaire en curvelets

$$\beta_k = FFT(R)$$

4: Déterminer l'indice du plus gros coefficient de β_k

$$k_i = \arg\max\{|\beta_k|; k \in \Lambda_{j,l}\}$$

5: Déterminer le meilleur coefficient C_{k_i} qui minimise l'erreur d'approximation :

$$C_{k_i} = \arg\min_{\lambda\in\mathbb{R}} \left\{\|W_{j,l}(R - \lambda e_{j,l,k_i})\|_{l_2(D_{j,l})}\right\}$$

6: Enregistrer les modifications

$$\alpha_{k_i} = \alpha_{k_i} + C_{k_i} - \frac{1}{n} \quad , \quad R = R - C_{k_i} e_{j,l,k_i}\ \mathbb{1}_{supp(W_{j,l})} \quad , \quad n = n + 1$$

7: **fin tant que**

Le problème de minimisation de l'algorithme (10) est quadratique et se résout explicitement. En effet avec

$$g(\lambda) = \|W_{j,l}\ (R - \gamma e_{j,l,k_i})\|^2,$$

nous pouvons vérifier que

$$g(\lambda) =< W_{j,l}\ e_{j,l,k_i}, W_{j,l}\ e_{j,l,k_i} > \lambda^2 - 2 < W_{j,l}\ R, W_{j,l}\ e_{k_i} > \lambda + < W_{j,l}R, W_{j,l}R > .$$

Et

$$g^{'}(\lambda) = 2 < W_{j,l}\ e_{j,l,k_i}, W_{j,l}e_{j,l,k_i} > \lambda - 2 < W_{j,l}R, W_{j,l}e_{j,l,k_i} > .$$

La solution est alors :

$$C_{k_i} = \arg\min(\|W_{j,l}(R - \lambda e_{j,l,k_i})\|^2) = \frac{< W_{j,l}R, W_{j,l}e_{j,l,k_i} >_{L^2(D_{j,l})}}{< W_{j,l}e_{j,l,k_i}, W_{j,l}e_{j,l,k_i} >_{L^2(D_{j,l})}}.$$

Remarque 41. *Les curvelets sont "presque" normalisées $L^2(\mathbb{R}^d)$ mais*

$$\|\varphi_{j,l,k}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} =< W_{j,l}e_{j,l,k}, W_{j,l}e_{j,l,k} >_{L^2(D_{j,l})} \neq 1.$$

En effet, comme elles vérifient les propriétés de frame étroit avec une constante égale à 1, si elles étaient normalisées $L^2(\mathbb{R}^d)$, elles formeraient une base orthogonale, ce qui n'est pas le cas.

Nous allons maintenant démontrer la proposition 33 qui permet de comparer l'énergie associée aux coefficients de curvelets, $\|\{\alpha_{j,l,k}\}_{j,l,k}\|_{l^2}$ avec la norme $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

Proposition 33. *Si* $(\alpha)_{j,l,k}$ *vérifie*

$$\hat{f}\ W_{j,l}^2 = \sum_k \alpha_{j,l,k} W_{j,l}\ e_{j,l,k}\ \forall (j,l), \tag{9.5}$$

et

$$(\alpha)_{j,l,k} \neq < f, \varphi_{j,l,k} >, \tag{9.6}$$

alors

$$\sum \alpha_{j,l,k}^2 > \sum < f, \varphi_{j,l,k} >^2 = \|f\|^2.$$

Et l'énergie des coefficients tend à augmenter.

Démonstration :

On note $\beta_{j,l,k} =< f, \varphi_{j,l,k} >$ les produits scalaires. Soient (j,l) et le domaine $D_{j,l}$ muni de la base exponentielle orthonormée $e_{j,l,k}$. Les coefficients $(\beta_{j,l,k})_k$ vérifient alors

$$\|\hat{f}\ W_{j,l}\|_{L^2(D_{j,l})}^2 = \sum_k \beta_{j,l,k}^2$$

Alors l'hypothèse (9.5) implique que

$$\left(\hat{f}\ W_{j,l}\right) = \sum_k \alpha_{j,l,k} e_k \text{ dans le support de } W_{j,l}.$$

Et l'hypothèse (9.6) montre que

$$\left(\sum_k \alpha_{j,l,k} e_{j,l,k}\right) \neq 0 \text{ en dehors du support de } W_{j,l}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_k \alpha_{j,l,k}^2 &= (\|\sum_k \alpha_{j,l,k} e_{j,l,k}\|)_{L^2(D_{j,l})}^2 \\
&= \|\hat{f}\ W_{j,l}\|_{L^2(supp(W_{j,l}))}^2 + \|\sum_k \alpha_{j,l,k} e_{j,l,k}\|_{L^2(D_{j,l} \setminus supp(W_{j,l}))}^2 \\
&> \sum_k \beta_{j,l,k}^2
\end{aligned}$$

■.

Cette propriété montre qu'il n'est pas possible de rendre la décomposition en curvelets plus creuse tout en conservant la propriété d'égalité d'énergie. En revanche, en posant une contrainte sur la valeur de $\|\sum_k \alpha_{j,l,k} e_{j,l,k}\|_{L^2(D_{j,l} \setminus supp(W_{j,l}))}^2$, il est possible de contrôler l'énergie des coefficients associée à la nouvelle décomposition obtenue.

Le nouvel algorithme de décomposition est testé sur l'image d'une curvelet $\varphi_{j,l,k}$ et les résultats obtenus sont observés sur la figure (9.13). La décomposition fournit plus d'un seul coefficient non nul, ce qui n'est pas étonnant puisque le premier type de redondance n'a pas été traité. Nous observons tout de même une meilleure concentration de l'énergie autour d'un seul coefficient. Pour améliorer ce premier résultat, il faut supposer que les fenêtres $W_{j,l}$ soient disjointes, et dans ce cas, l'égalité $W_{j,l} = W_{j,l}^2$ est vérifiée. Nous allons alors imposer l'égalité suivante à la place de (9.5) :

$$\hat{f}\ W_{j,l} = \sum_k \alpha_{j,l,k} W_{j,l}\ e_k.$$

Les résultats obtenus sur la figure (9.14) montrent qu'un seul coefficient de curvelet est non nul, ce qui est optimal. D'autre tests avec des images un peu plus compliquées présentés sur les figures (9.15) et (9.16) confirment l'optimalité de cette nouvelle décomposition. Malheureusement, le coût de cette décomposition est bien plus élevé que celui des algorithmes initiaux. La question naturelle est alors de déterminer des applications où une telle décomposition pourrait être utile.

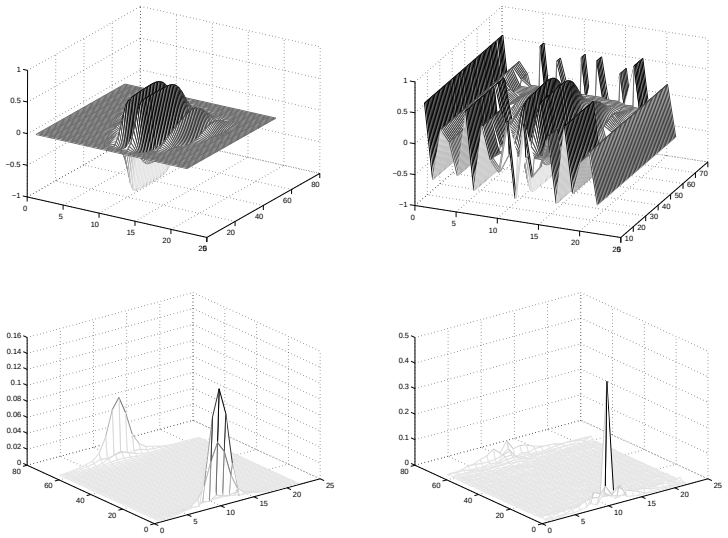


FIG. 9.13 – Analyse en curvelets d'une curvelet (algorithme standard à gauche, algorithme optimisé à droite). En haut à gauche : $\sum_k \beta_k e_k$ – en haut à droite : $\sum_k \alpha_k e_k$ – en bas à gauche : β_k – en bas à droite : α_k

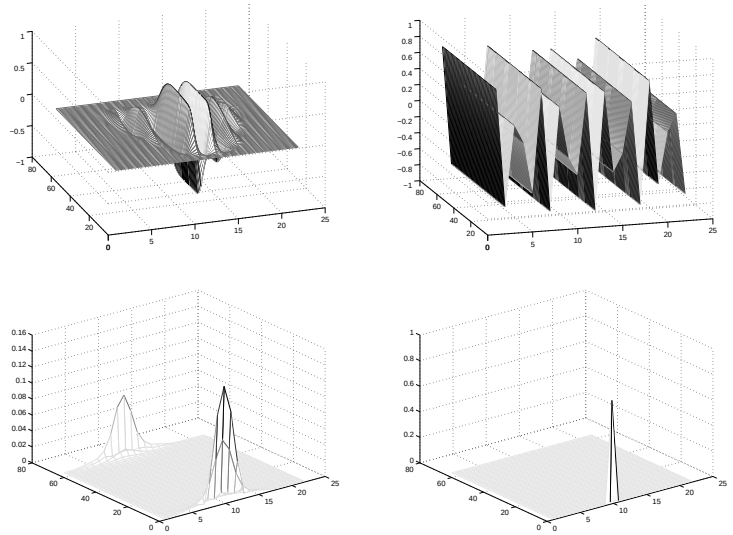


Fig. 9.14 – Analyse en curvelets d'une curvelet (algorithme standard à gauche, algorithme optimisé à droite). En haut à gauche : $\sum_k \beta_k e_k$ – en haut à droite : $\sum_k \alpha_k e_k$ – en bas à gauche : β_k – en bas à droite : α_k

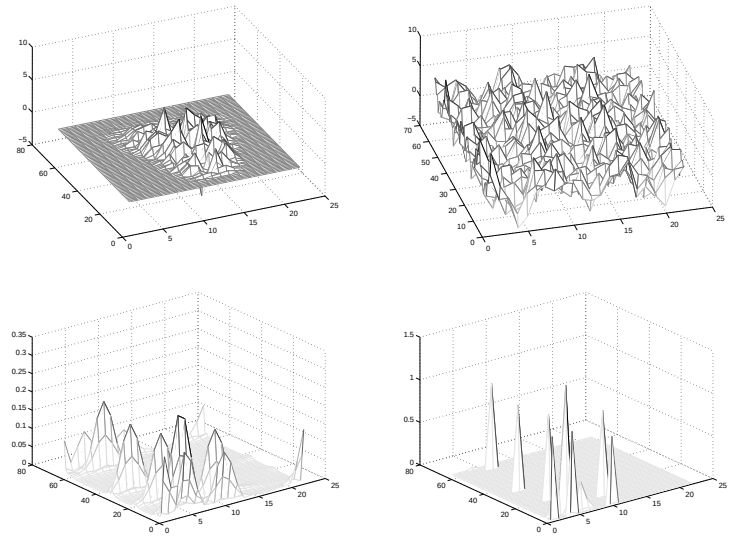


Fig. 9.15 – Analyse en curvelets de plusieurs curvelets (algorithme standard à gauche, algorithme optimisé à droite). En haut à gauche : $\sum_k \beta_k e_k$ – en haut à droite : $\sum_k \alpha_k e_k$ – en bas à gauche : β_k – en bas à droite : α_k

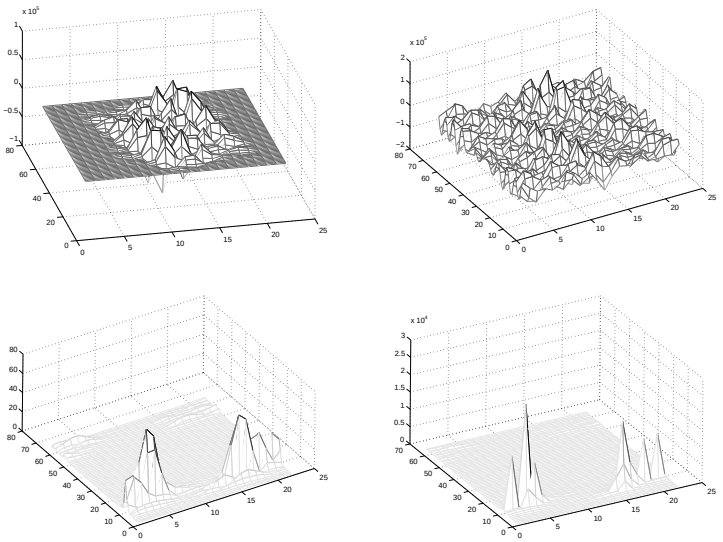


FIG. 9.16 – Analyse en curvelets d'une image quelconque (algorithme standard à gauche, algorithme optimisé à droite). En haut à gauche : $\sum_k \beta_k e_k$ – en haut à droite : $\sum_k \alpha_k e_k$ – en bas à gauche : β_k – en bas à droite : α_k

Chapitre 10

Nouvelle base d'analyse multirésolution : les β-curvelets

10.1 Motivations

Nous venons d'achever la présentation de la construction du frame des curvelets et nous cherchons maintenant à comprendre en quoi les curvelets pourraient être utiles dans la résolution des équations de champs de phase. A priori, lorsque les mouvements sont isotropes ou anisotropes avec une anisotropie non locale, l'utilisation des curvelets est compromis, les algorithmes de décomposition rapide utilisent en effet une transformée de Fourier.

Lorsque l'anisotropie est purement locale, c'est à dire, $\phi^o(x,\xi) = a(x)|\xi|$, les éléments finis ou encore les bases d'ondelettes ont déjà montré leur efficacité pour la résolution des opérateurs du type $a(x)^2\triangle u$.

En revanche, pour des anisotropies générales, les ondelettes (et donc les éléments finis) ne possèdent pas une localisation fréquentielle assez précise pour prendre en compte les directions d'anisotropies. Les curvelets semblent donc avoir un meilleur compromis entre la localisation spatiale et fréquentielle pour prendre en compte respectivement, la localité de l'anisotropie et l'anisotropie directionnelle. Nous pourrions ainsi imaginer une sorte de linéarisation de l'opérateur $\triangle_\phi$ par rapport à ce frame. Les curvelets ne sont certes pas vecteurs propres de $\triangle_\phi$ mais nous avons l'approximation suivante :

$$\triangle_\phi \varphi_{j,l,k} \simeq \phi^o(x_\nu, e_\nu)^2 \triangle \varphi_{j,l,k}.$$

Nous pourrions ainsi considérer les opérateurs $\tilde{\tilde{\triangle}}_\phi$ définis par

$$\tilde{\tilde{\triangle}}_\phi u = \sum_{j,l,k} c_{j,l,k}\ \phi^o(x_\nu, e_\nu)^2\ \triangle \varphi_{j,l,k}.$$

Remarque 42. *On rappelle que pour une curvelet φ_ν, où $\nu = (j,l,k)$, nous avions associé, une position spatiale notée x_ν et une direction notée $e_\nu = R_{\theta_{j,l}}(1,0,...,0)^t$.*

Dans ce chapitre, nous n'allons pas insister davantage sur une potentielle linéarisation du laplacien anisotrope par rapport au frame des curvelets, et nous allons plutôt définir de nouvelles bases d'analyse multirésolution, les β-curvelets (voir figure (10.1)), qui vérifieront les mêmes propriétés que les curvelets à l'exception de l'échelle d'anisotropie qui ne sera plus parabolique mais qui satisfera $l = L^\beta$. L'intérêt des β-curvelets est que leur localisation fréquentielle, encore plus

précise que celle des curvelets, permet une meilleure représentation des fonctions régulières par morceaux de contours polygonaux. En effet, les solutions des équations d'Allen-Cahn anisotrope appartiennent à cette catégorie de fonctions lorsque les anisotropies considérées sont cristallines...

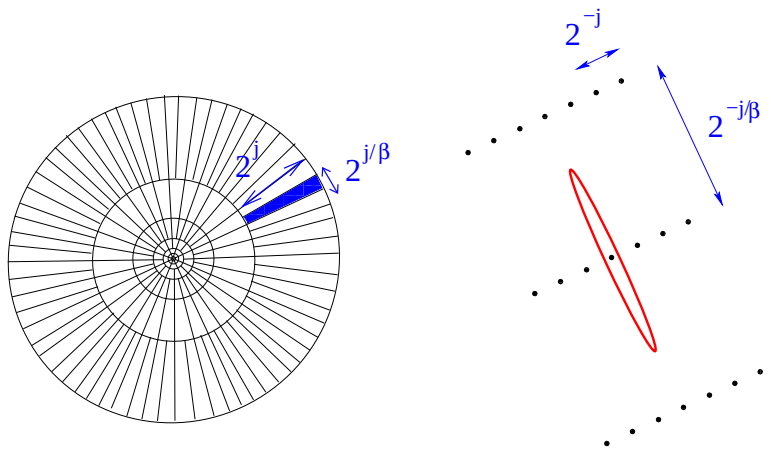


FIG. 10.1 – Localisation spatiale et fréquentielle des β-curvelets

10.2 Construction du frame de β-curvelets

10.2.1 Principe de base

Les β-curvelets (avec $\beta > 1$) sont des curvelets dont l'échelle d'anisotropie ne vérifie plus le principe parabolique mais suit la loi $hauteur \simeq largeur^{\beta}$. Ainsi, cette famille est une nouvelle fois indexée à l'aide des 3 paramètres j, $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{d-1})$ et $k = (k_1, k_2, ..., k_d)$. Une fonction mère est déduite de la formule :

$$\varphi(x) = \psi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)...\phi_{d-1}(x_d)$$

Avec $P_{j,\theta,\beta}$ la dilatation anisotrope directionnelle de $\mathbb{R}^d$ définie par

$$P_{j,\theta,\beta} = \begin{pmatrix} 2^j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2^{j/\beta} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2^{j/\beta} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^{j/\beta} \end{pmatrix} R_\theta$$

L'ensemble de la famille des β-curvelets est obtenu avec la formule

$$\varphi_{j,\theta,k} = \phi(P_{j,\theta,\beta}(x - \phi(P^{-1}_{j,\theta,\beta}k))det(P_{j,\theta,\beta})^{1/2} = 2^{\frac{d-1+\beta}{2\ \beta}j}\phi(P_{j,\theta,\beta}x - k)$$

10.2.2 Le frame des β-curvelets

Comme dans le cas de curvelets en dimension 2, nous allons construire un pavage du plan fréquence avec des fonctions $W_{j,l}$. Soient w_0 et w_1 telles que

$$w_0^2(r) + \sum_{j=0}^{\infty} w_1^2(2^{-j}r) = 1,\ \forall r > 0$$

et v, $C^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $]-\pi,\pi[$ telle que

$$\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} v^2(\theta - l\pi) = 1,\ \forall\theta\in\mathbb{R}, \tag{10.1}$$

Nous avons plusieurs paramètres de direction, $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{d-1}) \in [-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]^{d-2}$. A priori, il faudrait définir un découpage **uniforme** de la sphère de rayon 2^j en dimension $d-1$ avec des hypercubes de coté $\pi 2^{[j/\beta]}$. Mais ceci n'est pas facile lorsque $d>2$ et comme ce n'est pas vraiment l'objet de notre travail, nous allons simplement supposer que chaque angle θ_{l_i} est discrétisé à l'aide d'un paramètre $l_i \in [1..2^{j-\left[\frac{j}{\beta}\right]}]$ et

$$\theta_{j,l_i} = \pi l_i 2^{[\frac{j}{\beta}]-j}$$

En fait, cette difficulté est évitée si nous considérons des curvelets invariantes par "shear".

Ainsi, pour tout couple $(j,l) = (j,(l_1,l_2,...,l_{d-1}))$ tel que $\forall\ i\ l_i \in (1..2^{j-\left[\frac{j}{\beta}\right]})$, nous posons $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$,

$$W_{j,l}(\xi) = w_1(2^{-j}r)\prod_{i=1}^{d-1} v(2^{j-\left[\frac{j}{\beta}\right]}(\theta_i - \theta_{j,l_i})),$$

et, pour $J=-1$,

$$W_{-1}(r,\theta) = w_0(r)$$

Avec la notation $\Delta_J = \left\{(j,l) = (j,l_1,l_2,..,l_{d-1}) \in \mathbb{N}^d, \text{tel que } l_i \in (1..2^{j-[\frac{j}{\beta}]})\right\} \cup \{-1\}$
Les fonctions W_j, l vérifient la propriété suivante :

Proposition 34.

$$\sum_{J\in\Delta_J} W_J^2(\xi) = 1 \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^d.$$

Démonstration de la propriété 34.

$$\begin{aligned}
\sum_J W_J^2(\xi) &= W_{-1}^2(\xi) + \sum_{(j,l)} W_J^2(\xi) \\
&= w_0^2(|\xi|) + \sum_j\sum_l W_J^2(\xi) \\
&= w_0^2(r) + \sum_j w_1^2(2^{-j}r)\sum_l\prod_{i=1}^{d-1} v^2(2^{j-\left[\frac{j}{\beta}\right]}(\theta_i - \theta_{j,l_i})) \\
&= w_0^2(r) + \sum_j w_1^2(2^{-j}r) \quad \text{en appliquant } d-1 \text{ fois l'égalité } (10.1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Nous introduisons une base locale orthogonale exponentielle discrète dans chaque support des fenêtres $W_{j,l}$:
Pour chaque couple (j,l), une fenêtre rectangulaire $D_{j,l}$ de taille $2^j \times (2^{[j/\beta]})^{d-1}$ est introduite de telle sorte que

$$supp(W_{j,l}) \subset D_{j,l} = R_{\theta_{j,l}} D_{j,0}.$$

Ainsi, une grille cartésienne d'échelle j sur chacun de ces sous-domaines est définie avec :

$$\Lambda_{j,l} = \{k : k = R_{\theta_l}(k_1 2^{-j}, k_2 2^{-[j/\beta]}, k_3 2^{-[j/\beta]} ..., k_d 2^{-[j/\beta]}), k_1, k_2 ... k_d \in Z\}.$$

Nous allons alors utiliser la base de Fourier locale de l'espace $L_2(D_{j,l})$:

$$e_{j,l,k}(\xi) = 2^{-\frac{j+(d-1)\left[\frac{j}{\beta}\right]}{2}} e^{2i\pi<k,\xi>}, k \in \Lambda_{j,l}. \tag{10.2}$$

Nous remarquons de plus que $e_{j,l,k}(\xi) = e_{j,0,k}(R^{-1}_{\theta_{j,l}}\xi)$
et

$$\mathcal{F}\left[\varphi_{j,l,k}\right](\xi) = W_{j,l}(\epsilon) e_{j,l,k}(\xi),\ k \in \Lambda_{j,l}.$$

Cette famille est donc en quelque sorte invariante par rotation et translation.
Nous utiliserons dans la suite les notations

$$\varphi_j(x) = \varphi_{j,0,0}(x) = 2^{-\frac{j+(d-1)\left[\frac{j}{\beta}\right]}{2}} \mathcal{F}^{-1}\left[W_{j,0}\right](x),$$

et plus généralement

$$\begin{aligned}
\varphi_{j,0,k}(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left[W_{j,0} e_{j,0,k}\right](x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\ 2^{-\frac{j+(d-1)\left[\frac{j}{\beta}\right]}{2}}\ \mathcal{F}^{-1}\left[W_{j,0}\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{2i\pi<k,\xi>}\right](x) \\
&= \varphi_j * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{2i\pi<k,\xi>}\right](x) \\
&= \varphi_j(x-k),
\end{aligned}$$

et

$$\varphi_{j,k,l}(x) = \varphi_j(R_{\theta_{j,l}}(x - R^{-1}_{\theta_{j,l}} k)),\ k \in \Lambda_{j,l}$$

Remarque 43. *La notation $\varphi_j * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{2i\pi<k,\xi>}\right](x)$ est formelle puisque $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{2i\pi<k,\xi>}\right]$ n'est pas une distribution régulière.*

10.2.3 La famille des β-curvelets : un frame étroit

La famille des β-curvelets forme un frame étroit.

Proposition 35. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$f = \sum_{j,l,k} \langle f\ ,\ \varphi_{j,l,k}\rangle\, \varphi_{j,l,k}$$

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{j,l,k} |\langle f\ ,\ \varphi_{j,l,k}\rangle|^2$$

Démonstration de la proposition 35.
i) Première égalité :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\xi) &= \hat{f}\sum_{j,l} W_{j,l}^2(\xi) = \sum_{j,l}\left(\hat{f}(\xi)W_{j,l}\right)W_{j,l}(\xi) \\
&= \sum_{j,l}\left(\sum_{k\in\Lambda_{j,l}}\left\langle \hat{f}(\xi)W_{j,l}\,,\, e_{j,l,k}\right\rangle_{L^2(D_{j,l})} e_{j,l,k}\right)W_{j,l}(\xi) \\
&= \sum_{j,l,k}\left\langle \hat{f}\,,\, W_{j,l}e_{j,l,k}\right\rangle_{L^2(D_{j,l})} W_{j,l}e_{j,l,k}(\xi) \\
&= \sum_{j,l,k}\langle f\,,\,\varphi_{j,l,k}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,\mathcal{F}[\varphi_{j,l,k}](\xi)
\end{aligned}$$

ii) Deuxième égalité :

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d}|\hat{f}(\xi)|^2\sum_{j,l}W_{j,l}^2(\xi)d\xi \\
&= \sum_{j,l}\int_{D_{j,l}}|W_{j,l}\hat{f}|^2 d\xi = \sum_{j,l}\sum_{k\in\Lambda_{j,l}}\left|\left\langle W_{j,l}\hat{f}\,,\, e_{j,l,k}\right\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{j,l,k}\left|\left\langle \hat{f}\,,\,\mathcal{F}[\varphi_{j,l,k}]\right\rangle\right|^2 = \sum_{j,l,k}|\langle f\,,\,\varphi_{j,l,k}\rangle|^2
\end{aligned}$$

□

10.3 β-curvelets et opérateur FIO

Afin de comprendre le comportement du frame de β-curvelet sous l'action d'un opérateur FIO, nous reprenons les grandes lignes de la démonstration de Candes et de Demanet présenté dans les articles [17] et [21] dans le cas des curvelets classiques ($\beta = 2$), en l'adaptant au cas β quelconque.

10.3.1 Formellement, qu'est-ce qui se passe ?

Candes et Demanet étudient le comportement d'une curvelet φ_μ sous l'action de l'opérateur T défini à la définition 30 dans la section 9.4 :

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\phi(x,\xi)}\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Ils commencent par linéariser la phase $\phi(x,\xi)$ au voisinage de (ξ_μ) comme sur la figure (10.2).

$$\phi(x,\xi) = \phi_\xi(x,\xi_\mu).\xi + \delta(x,\xi), \qquad \phi_\mu(x) = \phi_\xi(x,\xi_\mu)$$

Puis ils décomposent l'opérateur T de la manière suivante

$$T = T_{2,\mu}T_{1,\mu},$$

où

$$(T_{1,\mu}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{+2i\pi x.\xi}e^{i\delta(\phi_\mu^{-1}(x),\xi)}\sigma(\phi_\mu^{-1}(x),\xi)\hat{f}(\xi)d\xi, \qquad (T_{2,\mu}f)(x) = f(\phi_\mu(x))$$

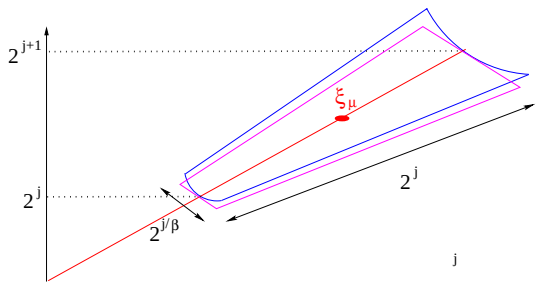


FIG. 10.2 – Linéarisation de la phase $\phi(x, \xi)$ à x fixé

Étude de l'opérateur $T_{2,\mu}$

On utilise par la suite la notation

$$T_{2,\mu}(\mu, \mu') = \left\langle T_{2,\mu}\varphi_\mu \, , \, \varphi_{\mu'} \right\rangle$$

Ils montrent tout d'abord que l'action de l'opérateur $T_{2,\mu}$ sur une curvelet φ_μ transforme cette curvelet en une somme finie de curvelets $\varphi_{h(\mu)}$ uniformement bornée selon l'échelle j de la β-curvelet. L'action de cet opérateur, comme nous essayons de le schématiser sur la figure (10.3), transforme la curvelet φ_μ en une sorte de curvelet $\tilde{\varphi}_\mu$ dont le support caractéristique a maintenant une taille de $2^{-\frac{2j}{\beta}} \times 2^{-\frac{j}{\beta}}$. Ainsi, le nombre caractéristique de curvelets $\varphi_{\mu'}$, ayant la même orientation que $\tilde{\varphi}_\mu$ et dont le support intersepte celui de $\tilde{\varphi}_\mu$ est de l'ordre de $O(2^{j\frac{\beta-2}{\beta}})$. Ce nombre reste finalement borné quand $j \to +\infty$ si l'anisotropie de la β-curvelet est inférieure à 2, c'est à dire $\beta \leq 2$. Au final, ils obtiennent une inégalité du type

$$|T_{2,\mu}(\mu, \mu')| \leq C \, \left\langle \varphi_{h(\mu)} \, , \, \varphi_{\mu'} \right\rangle .$$

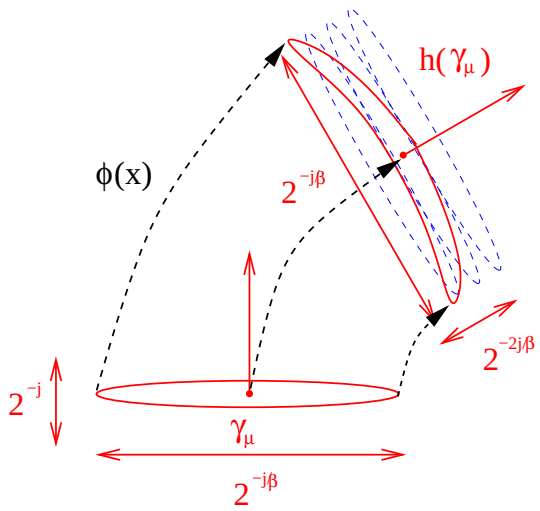


FIG. 10.3 – Action de l'opérateur $T_{2,\mu}$ sur une curvelet d'échelle j

Étude de l'opérateur $T_{1,\mu}$

De même, nous utilisons la notation

$$T_{1,\mu}(\mu,\mu') = \left\langle T_{1,\mu}\varphi_\mu \, , \, \varphi_{\mu'} \right\rangle$$

La linéarisation de la phase par rapport à ξ introduit le terme $\delta(x,\xi)$. Un argument essentiel dans cette étape de la démonsation de Candes est que le terme

$$b(x,\xi) = e^{i\delta(\phi_\mu^{-1}(x),\xi)}\sigma(\phi_\mu^{-1}(x),\xi),$$

ne soit pas oscillant sur le support de la β-curvelet φ_μ. Or ceci n'est vérifié que sous l'hypothèse $\beta \geq 2$ et dans ce cas, ils obtiennent

$$\begin{aligned} |T_{1,\mu}(\mu,\mu')| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} C_{0,0}(1+|\xi|)^m \hat{\varphi}_\mu(\xi)\hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)d\xi \\ &\leq C_{0,0}(1+2^{mj_0}) \left\langle \varphi_\mu \, , \, \varphi_{\mu'} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

<u>*Conclusion de la démonstration*</u>

La conclusion de la démonstration s'obtient en montrant que les curvelets sont des familles presque-orthogonales, c'est à dire

$$\left| \left\langle \varphi_\mu \, , \, \varphi_{\mu'} \right\rangle \right| \leq C_N (w(\mu,\mu'))^{-N}, \quad \forall N \leq R.$$

où la pseudo-distance $w(\mu,\mu')$ est définie dans la définition 31

Remarque 44. *Nous voyons maintenant pourquoi nous ne pouvons pas nous attendre à obtenir ce même résultat dans une base d'ondelettes ou de β-curvelets avec $\beta \neq 2$ puisque un ingrédient essentiel est l'échelle parabolique des curvelets. Nous allons tout de même nous intéresser à une sous-classe d'opérateurs FIO, les opérateurs pseudo-différentiels qui sont des opérateurs T dont la phase s'écrit $\phi(x,\xi) = x.\xi$. Nous allons ainsi étudier le comportement d'une β-curvelet sous l'action de ce type d'opérateur lorsque $\beta \neq 2$. Pour cela, nous considérons la nouvelle fonction distance dans les coefficients de β-curvelets :*

Définition 32. *La nouvelle fonction distance w_β utilisée dans l'indexation des coefficients de β-curvelets s'écrit*

$$w_\beta(\mu,\mu') = 2^{|j-j'|} \, (1 + 2^{2j_0(\beta-1)/\beta}|\theta_\mu - \theta_{\mu'}|^2 + 2^{2j_0/\beta}|x_\mu - x_{\mu'}|^2 + 2^{j_0}| < \vec{e_\mu}, x_\mu - x_{\mu'} > |$$

avec $j_0 = min(j,j')$, $\mu = (j,k,l)$, $\mu' = (j',k',l')$ et $\vec{e_\mu}$ est introduit à la remarque 40 de la section 9.4.

10.3.2 Etude du comportement d'une β-curvelet sous l'action d'un opérateur pseudo-différentiel

Nous avons introduit dans la définition des β-curvelets la fonction mère

$$\varphi(x) = \psi(x_1)\phi_1(x_2)...\phi_{d-1}(x_d),$$

où ψ est une ondelette et $\phi_1...\phi_{d-1}$, $d-1$ fonctions d'échelle. De manière analogue aux travaux de Candes, nous allons introduire maintenant la notion de molécules de β-curvelets de régularité R. Elles s'obtiennent en imposant des hypothèses sur la régularité et sur le nombre de moments nuls de la fonction φ. Les molécules de curvelets sont des sortes de curvelets qui admettent différentes curvelets mères selon l'échelle j considérée.

Définition 33. *Une famille de fonctions $(m_\mu)_\mu$ est une famille de molécules de $\beta-$curvelets de régularité R si elle s'exprime comme*

$$m_\mu(x) = 2^{j\frac{\beta+1}{2\beta}} a^\mu(D^\beta_{2^{-j}} R_{\theta_\mu} x - k'), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

pour $j > 0$, où a^μ vérifie les propriétés suivantes :
• *Régularité et localisation spatiale : $\forall |\alpha| \leq R$, $\forall M \leq R, \exists C_M < +\infty$ tel que*

$$\forall \mu, \forall x \in \mathbb{R}^d \quad |\partial^\alpha_x a^\mu(x)| \leq C_M \ (1+|x|)^{-M}$$

• *Moments nuls : $\forall N = 0, 1, ..., R$, $\exists C_N < +\infty$ tel que*

$$\forall \mu, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad |\hat{a}^\mu(\xi)| \leq C_N \ min(1, 2^{-j}|\xi_1| + 2^{-j/\beta}|\xi_2|)^N$$

L'intérêt de définir les molécules de curvelets est que l'action d'un opérateur simple comme le laplacien transforme une famille de curvelets en une famille de molécules de curvelets. Cette approche est très similaire aux travaux portant sur les notions d'ondelettes-vaguelettes.

Théorème 12. *Soit $(m_\mu)_\mu$ et $(p_{\mu'})_{\mu'}$, 2 familles de molécules de curvelets de régularité R. Soit T un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole $\sigma(x,\xi)$ est de degré m :*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2i\pi <x,\xi>} \sigma(x,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

Alors, il existe une fonction g, avec $\lim_{R\to+\infty} g(R) = +\infty$, telle que $\forall j, j' \geq 0$ et $\forall N \leq g(R)$,

$$\left| \left\langle T(m_\mu) \, , \, p_{\mu'} \right\rangle \right| \leq C_N \ 2^{j_0 m} w_\beta(\mu, \mu')^{-N}$$

où $j_0 = min(j, j')$ et w_β, la nouvelle pseudo-distance introduite dans la définition 32

Remarque 45. *Nous allons simplement estimer $\left|\left\langle m_\mu \, , \, p_{\mu'} \right\rangle\right|$. Il sufffit de démontrer que les molécules de β-curvelets forment des familles presque orthogonales au sens de l'analyse harmonique. En effet, d'après le support fréquentiel des curvelets, on a*

$$| < T(m_\mu), p'_\mu > | \leq 2^{min\{j,j'\}m} \left|\left\langle m_\mu \, , \, p_{\mu'} \right\rangle\right| .$$

Remarque 46. *Nous ne présentons la démonstration du théorème 12 qu'en dimension 2.*

La démonstration utilise dans un premier temps le support fréquentiel des curvelets, puis leur support spatial.

Prise en compte du support fréquentiel des β-curvelets

on note

$$S_{\mu_{0,0}} := min(1, 2^{-j}(1+|\xi|)) \ (1 + |2^{-j}\xi_1| + |2^{-j/\beta}\xi_2|)^{-1}, \quad \text{avec} \quad \mu_{0,0} = (j, 0, 0)$$

et $S_\mu(\xi) := S_{\mu_{0,0}}(R_{\theta_\mu}\xi), \quad \forall \mu = (j, l, k)$.
La fonction S_μ représente le support fréquentiel de m_μ. La normalisation $L^2(\mathbb{R}^d)$ des β-curvelets nous donne l'inégalité suivante

$$|\hat{m}_\mu(\xi)| \leq C_N \ 2^{-j\frac{\beta+1}{2\beta}} \ S_\mu(\xi)$$

avec $N \leq R$.
nous allons alors démontrer la proposition suivante :

Proposition 36.

$$\int |S_\mu(\xi)S_{\mu'}(\xi)|^N d\xi \leq C\ 2^{j\frac{\beta+1}{2\beta}}\ 2^{j'\frac{\beta+1}{2\beta}}\ 2^{-|j-j'|N}\ (1+2^{2\frac{\beta-1}{\beta}j'}|\triangle\theta|^2)^{-N}$$

où $\triangle\theta = \theta_\mu - \theta_{\mu'}$

Démonstration de la proprosition 36.

Remarque 47. *La démonstration de cette propriété dans le cas $\beta = 2$ est présentée dans l'annexe A.1 de [17].*

Nous supposons sans restriction que $j' < j$. Avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= rcos(\theta) \qquad (R_{\triangle\theta}\xi)_1 = rcos(\theta+\triangle\theta), \\ \xi_2 &= r\sin(\theta) \qquad (R_{\triangle\theta}\xi)_2 = r\sin(\theta+\triangle\theta), \end{aligned}$$

nous avons,

$$\min\left(1, 2^{-j}(1+|\xi|)\right) = min\left(1, 2^{-j}(1+r)\right),$$

En remarquant tout d'abord que

$$\frac{\left(1+2^{-j}r+2^{-j/\beta}r|\sin(\theta)|\right)}{\left(1+2^{-j}r|\cos(\theta)|+2^{-j/\beta}r|\sin(\theta)|\right)} \leq 2 \quad \forall r\in\mathbb{R}^+$$

$$\frac{(1+2^{-j}r)\ (1+a|\sin(\theta)|)}{\left(1+2^{-j}r+2^{-j/\beta}r|\sin(\theta)|\right)} \leq 1 \quad \forall r\in\mathbb{R}^+$$

où $a = \dfrac{2^{-j/\beta}r}{1+2^{-j}r}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \left(1+|2^{-j}\xi_1|+|2^{-j/\beta}\xi_2|\right)^{-1} &= \left(1+2^{-j}r|cos(\theta)|+2^{-j/\beta}r|\sin(\theta)|\right)^{-1} \\ &\lesssim \left(1+2^{-j}r+2^{-j/\beta}r|\sin(\theta)|\right)^{-1} \\ &\lesssim (1+2^{-j}r)^{-1}\ (1+a|\sin(\theta)|)^{-1}, \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int |S_\mu(\xi)S_{\mu'}(\xi)|^N d\xi \ &\lesssim \ \int_0^\infty \frac{\min\left(1,2^{-j}(1+r)\right)^N}{(1+2^{-j}r)^N}\frac{\min(1,2^{-j'}(1+r))^N}{(1+2^{-j'}r)^N} \\ &\quad \left[\int_0^{2\pi}[1+a|\sin(\theta)|]^{-N}\left[1+a'|\sin(\theta+\triangle\theta)|\right]^{-N}d\theta\right] rdr. \end{aligned}$$

avec $a' = \frac{2^{-j'/\beta}r}{1+2^{-j'}r}$. Et comme

$$\frac{[1+a|\theta|]\,[1+a'|\theta+\triangle\theta|]}{[1+a|\sin(\theta)|]\,[1+a'|\sin(\theta+\triangle\theta)|]} \leq \pi^2, \quad \forall r\in\mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \int |S_\mu(\xi)S_{\mu'}(\xi)|^N d\xi \ &\lesssim \ \int_0^\infty \frac{\min\left(1,2^{-j}(1+r)\right)^N}{(1+2^{-j}r)^N}\frac{\min(1,2^{-j'}(1+r))^N}{(1+2^{-j'}r)^N} \\ &\quad \left[\int_0^{2\pi}[1+a|\theta|]^{-N}\left[1+a'|\theta+\triangle\theta|\right]^{-N}d\theta\right] rdr, \end{aligned}$$

Le lecteur trouvera la démonstration de l'inégalité (10.3) dans [103] p.56

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, [1+a|\theta|]^{-N} \left[1+a'|\theta+\triangle\theta|\right]^{-N} \leq C\frac{1}{a}\frac{1}{[1+a'|\triangle\theta|]^N}, \tag{10.3}$$

avec $a > a' > 0$.

Ainsi,

$$\int |S_\mu(\xi)S_{\mu'}(\xi)|^N d\xi \lesssim (1+2^{j'}|\triangle\theta|^2)^{-N}\ 2^{j/\beta}\int_0^\infty \frac{\min\left(1,2^{-j}(1+r)\right)^N}{(1+2^{-j}r)^{N-1}}\frac{\min(1,2^{-j'}(1+r))^N}{(1+2^{-j'}r)^N}dr.$$

car

$$|a'| \leq 2^{j'/\beta} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$$

Les termes prédominants de l'intégrale sur r sont majorés par

$$\int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{\min\left(1,2^{-j}(1+r)\right)^N}{(1+2^{-j}r)^{N-1}}\frac{\min(1,2^{-j'}(1+r))^N}{(1+2^{-j'}r)^N}dr \simeq \int_{2^j}^{2^{j+1}} 2^{-(j-j')N}dr \simeq 2^j 2^{-(j-j')N}$$

et

$$\int_{2^{j'}}^{2^{j'+1}} \frac{\min\left(1,2^{-j}(1+r)\right)^N}{(1+2^{-j}r)^{N-1}}\frac{\min(1,2^{-j'}(1+r))^N}{(1+2^{-j'}r)^N}dr \simeq \int_{2^{j'}}^{2^{j'+1}} 2^{-(j-j')N}dr \simeq 2^{j'} 2^{-(j-j')N}$$

Nous venons de montrer que $\forall N \leq R$,

$$\int |S_\mu(\xi)S_{\mu'}(\xi)|^N d\xi \leq C\ 2^{j\frac{\beta+1}{\beta}}\ 2^{-|j-j'|N}\ (1+2^{2\frac{\beta-1}{\beta}j'}|\triangle\theta|^2)^{-N}.$$

Pour terminer la démonstration, il suffit d'introduire une fonction $g(R) \leq R$ telle que $\forall \tilde{N} \leq g(R)$,

$$\int |S_\mu(\xi)S_{\mu'}(\xi)|^{\tilde{N}} d\xi \leq C\ 2^{j\frac{\beta+1}{2\beta}}\ 2^{j'\frac{\beta+1}{2\beta}}\ 2^{-|j-j'|\tilde{N}}\ (1+2^{2\frac{\beta-1}{\beta}j'}|\triangle\theta|^2)^{-\tilde{N}}.$$

□

La proposition **??** permet ainsi de vérifier que

$$|\left\langle m_\mu\,,\,p'_\mu\right\rangle| \leq C_N\left(2^{|j-j'|}\ (1+2^{2j_0(\beta-1)/\beta}|\theta_\mu-\theta_{\mu'}|^2\right)^{-N} \quad \text{avec} \quad j_0=\min(j,j').$$

La deuxième partie de l'inégalité du théorème 12 s'obtient en analysant la localisation spatiale des β-curvelets. Pour simplifier les notations, nous supposons par la suite que le triplet $\mu_0=(j,0,0)$ et $\mu'_0=(j',l',0)$ avec $\triangle\theta=\theta_{j,l'}$.

Prise en compte de la localisation spatiale des β-curvelets

La localisation spatiale des β-curvelets permet de montrer que la dérivée partielle d'ordre $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ de $\hat{m}_{\mu_0}(\xi)$ vérifie

$$\partial_\xi^\alpha \hat{m}_{\mu_0}(\xi) \lesssim 2^{-j(\beta+1)/(2\beta)}\ 2^{-j(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{\beta})}\ |S_\mu(\xi)|^N.$$

Ainsi,

$$|\triangle_\xi \hat{p}_{\mu_0'}(\xi)| \lesssim 2^{-j'(\beta+1)/(2\beta)}\ 2^{-2j'/\beta}\ |S_{\mu'}(\xi)|^N,$$

où $\triangle$ est le laplacien, et

$$|\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}\hat{p}_{\mu_0'}(\xi)| \lesssim 2^{-j'(\beta+1)/(2\beta)}\ (2^{-2j'} + 2^{-2j'/\beta}|\sin(\triangle\theta)|)\ |S_{\mu'}(\xi)|^N.$$

On introduit l'opérateur L suivant :

$$L = I_d - 2^{2j_0/\beta}\ \triangle_\xi - \frac{2^{2j_0}}{1+2^{2j_0(\beta-1)/\beta}|\triangle\theta|^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2},$$

et comme

$$\begin{array}{lcl} |\hat{m}_{\mu_0'}| & \lesssim & 2^{-j(\beta+1)/(2\beta)}|S_{\mu'}(\xi)|^N \\ \left|2^{2j_0/\beta}\ \triangle_\xi\ \hat{m}_\mu\right| & \lesssim & 2^{-j(\beta+1)/(2\beta)}|S_{\mu'}(\xi)|^N \\ \left|\frac{2^{2j_0}}{1+2^{2j_0(\beta-1)/\beta}|\triangle\theta|^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\hat{m}_\mu\right| & \lesssim & 2^{-j(\beta+1)/(2\beta)}|S_{\mu'}(\xi)|^N, \end{array}$$

on en déduit que $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$|L^k(\hat{m}_{\mu_0}\hat{p}_{\mu_0'})(\xi)| \leq C\ 2^{-(j+j')\frac{\beta+1}{2\beta}}\ |S_\mu(\xi)|^N\ |S_{\mu'}(\xi)|^N.$$

De plus, on remarque que

$$L^k(e^{-2i\pi(x_\mu - x_{\mu'})\cdot\xi}) = [1+2^{2j_0/\beta}|x_\mu - x_{\mu'}|^2 + \frac{2^{2j_0}}{1+2^{2j_0(\beta-1)/\beta}|\triangle\theta|^2}|\vec{e}_\mu\cdot(x_\mu - x_{\mu'})|^2]^k e^{-2i\pi(x_\mu - x_{\mu'})\cdot\xi}$$

Nous avons maintenant les ingrédients démontrer le théorème 12.

Démonstration du théorème 12.

Dans le domaine fréquentiel,

$$\langle m_\mu\,,\,p_{\mu'}\rangle = \int \hat{m}_{\mu_0}\hat{p}_{\mu_0'}e^{-2i\pi(\triangle x).\xi}d\xi.$$

L'application de N "intégrations par partie" avec l'opérateur L montre que

$$\begin{array}{lcl} |\langle m_\mu\,,\,p_{\mu'}\rangle| & \lesssim & 2^{-(j+j')\frac{\beta+1}{2\beta}}\int_{\mathbb{R}^2}|S_\mu|^N|S_{\mu'}|^N d\xi \\ & & \left[1+2^{2j_0\beta}|x_\mu - x_{\mu'}|^2 + \frac{2^{2j_0}}{1+2^{2j_0(\beta-1)/\beta}|\triangle\theta|^2}|\vec{e}_\mu\cdot(x_\mu - x_{\mu'})|^2\right]^{-N}. \end{array}$$

La proposition **??** permet alors de montrer que

$$\begin{array}{lcl} |\langle m_\mu\,,\,p_{\mu'}\rangle| & \lesssim & C2^{-|j-j'|N}. \\ & & \left[1+2^{2j_0/\beta}|x_\mu - x_{\mu'}|^2 + 2^{2j_0(\beta-1)/\beta}|\triangle\theta|^2 + \frac{2^{2j_0}}{1+2^{2j_0(\beta-1)/\beta}|\triangle\theta|^2}|\vec{e}_\mu\cdot(x_\mu - x_{\mu'})|^2\right]^{-N}. \end{array}$$

Enfin, en remarquant que

$$1+2^{2j_0(\beta-1)/\beta}|\triangle\theta|^2 + \frac{2^{2j_0}|\vec{e}_\mu\cdot(x_\mu - x_{\mu'})|^2}{1+2^{2j_0(\beta-1)/\beta}|\triangle\theta|^2} \geq 2^{j_0}|\vec{e}_\mu\cdot(x_\mu - x_{\mu'})|,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} |\langle m_\mu , p_{\mu'} \rangle| &\lesssim 2^{-|j-j'|N} \left[1 + 2^{2j_0(\beta-1)/\beta}|\triangle\theta|^2 + 2^{2j_0/\beta}|x_\mu - x_{\mu'}|^2 + 2^{j_0}|\vec{e}_\mu \cdot (x_\mu - x_{\mu'})|\right]^{-N} \\ &\lesssim w_\beta(\mu,\mu')^{-N}. \end{aligned}$$

□

10.4 Résultat d'approximation non-linéaire dans le frame des β-curvelets

Nous allons dans cette partie présenter un résultat d'approximation non linéaire dans le frame de β-curvelets. Les fonctions qui nous intéressent sont des fonctions régulières par morceaux où les lignes de discontinuité sont polygonales. Nous ne pouvons pas ici utiliser les mêmes hypothèses que pour les résultats démontrés par Candes et Donoho dans [25] où les lignes de discontinuité sont C^2. L'argument est que lorsque $\beta > 2$, les β-curvelets sont trop anisotropes pour se "coller" à une ligne de discontinuité courbée.

Définition 34. *L'ensemble $PC^s(\mathbb{R}^d)$ contient les fonctions qui s'écrivent de la manière suivante :*

$$f = f_0 + f_1.1_B$$

ou f_0 et f_1 appartiennent à $C^s_{0,A}$ et 1_B représente la fonction caractéristique d'une région B donc le contour est un polygone.

Le résultat d'approximation non linéaire s'énonce sous la forme du théorème suivant :

Théorème 13.
Si f appartient à l'espace $PC^s(\mathbb{R}^d)$, et si on suppose de plus que $\beta \geq 2\frac{d-1}{d}s$, alors, il existe une constante C telle que $\forall N > 0$,

$$\|f - f_N\|^2_{L_2} \leq C\ N^{-2s/d}\ log(N)^{2s/d+1}.$$

Remarque 48. *De ce résultat, nous pouvons déduire un résultat d'approximation non linéaire dans le frame des curvelets en dimension d avec des discontinuités C^2. En effet, l'étude des discontinuités le long de courbes peut se ramener à une étude le long de droites dans le cas où $\beta \leq 2$. L'argument qui justifie ce point est que cette transformation peut s'effectuer par application d'un opérateur de type T_2. Or nous avons vu dans la partie précédente que l'opérateur T_2, lorsque $\beta = 2$, a une représentation creuse et bien organisée dans le frame des curvelets. Ainsi, l'ordre de la décroissance asymptotique des coefficients de curvelets n'est pas modifié par application de ce type d'opérateur.*
Au final, dans le cas des curvelets ($\beta = 2$), ce théorème nous autorise des valeurs maximales de s inférieures à $\frac{d}{d-1}$ et l'erreur d'approximation obtenue est de l'ordre de

$$\|f - f_N\|^2_{L_2} \leq C\ N^{-2/(d-1)}\ log(N)^{2/(d-1)+1}.$$

Nous rappelons que ce type de résultat pour les ondelettes conduit à une erreur d'approximation égale à

$$\|f - f_N\|^2_{L_2} \leq C\ N^{-1/(d-1)}.$$

La démonstration du théorème 13 reproduit les différentes étapes de la démonstration de Candes et Donoho [25] et utilise une extension du théorème 3.1 démontré dans [20], dont la démonstration est présentée dans l'annexe.3.

10.4.1 Plan des différentes étapes de la démonstration du théorème 13

Soit $f \in PC^s(\mathbb{R}^d)$. Ce théorème est démontré en estimant la taille caractéristique du nième coefficient de β-curvelets issu de la décomposition de f. Ce coefficient est noté par la suite $|C_n(f)|$. L'idée est d'utiliser les espaces l_p faibles dont la norme est définie par :

$$\|(C_\mu(f))_\mu\|^p_{wl_p} := \sup_\epsilon \{N_\epsilon \epsilon^p\}$$

où N_ϵ représente le nombre de coefficients supérieurs à ϵ contenus dans le vecteur $(C_\mu(f))_\mu$. Nous pourrons ainsi utiliser des estimations du type

$$|C_n(f)| \leq n^{-1/p} \|C_\mu(f)\|_{wl_p}$$

La valeur de p utilisée est ici égale à $p^* = (s/d + 1/2)^{-1}$ et nous allons montrer que

$$\|(C_\mu)_\mu\|^{p^*}_{wl_{p^*}} \leq C \tag{10.4}$$

L'inégalité (10.4) s'obtient en décomposant les coefficients C_μ selon l'échelle j de la curvelet associée. Ainsi, à une échelle j fixée, nous allons introduire une partition de l'unité notée $(w_Q)_{Q\in\square}$, telle que

$$\sum_{Q\in\square} w_Q(x) = 1\ , \quad \forall x \in [-1,1]^d,$$

où $w_Q = w(2^{j/\beta}x_1 - k_1, 2^{j/\beta}x_2 - k_2, ..., 2^{j/\beta}x_d - k_d)$ et w est une fonction C^∞ qui s'annule à l'extérieur du cube $[-1,1]^d$.

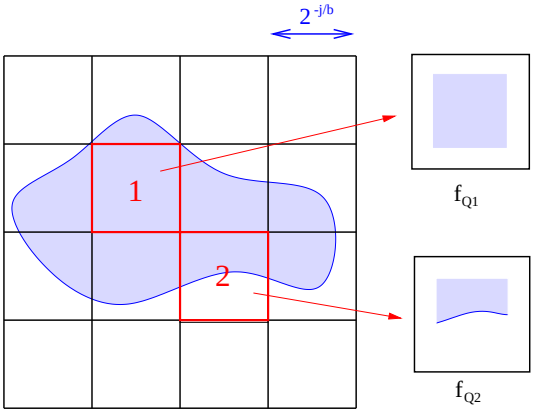


FIG. 10.4 – Décomposition de f en somme de fonctions localisées de support $(2^{-\frac{j}{\beta}})^d$

La fonction f peut alors être décomposée en somme de fonctions locales notées f_Q

$$f = \sum_Q f\ w_Q = \sum_Q f_Q,$$

et l'idée consiste à distinguer comme sur la figure (10.4) les élements Q selon qu'ils intersectent ou non une ligne de discontinuité :

- L'ensemble $\square_1$ contient les élements de la partition $\square$ d'intersection non vide avec le contour de B
- L'ensemble $\square_2$ contient les élements de la partition $\square$ d'intersection vide avec le contour de B

Dans la suite, nous utilisons la notation $C_{j,Q}(f)$ pour faire appel à l'ensemble des coefficients de β-curvelets, d'échelle j et issus de la décomposition de la fonction $f_Q = fw_Q$. Le gros de la preuve du théorème se décompose sous la forme des deux propriétés suivantes :

Proposition 37. *Si $Q \in \square_1$, alors*

$$\|C_{j,Q}(f)\|_{wl_{p^*}} \leq C\ 2^{-j\frac{\beta+d-1}{2\beta}}.$$

Proposition 38. *Si $Q \in \square_2$, alors*

$$\|C_{j,Q}(f)\|_{wl_{p^*}} \leq C\ 2^{js\frac{(\beta-1)}{\beta}}\ 2^{-j(s+\frac{d}{2\beta})}.$$

Ces deux propriétés permettent finalement d'obtenir simplement l'estimation (10.4) sous l'hypothèse $\beta \geq \frac{2(d-1)}{d}s$.

10.4.2 Analyse de $\|C_{j,Q}(f)\|_{wl_{p^*}}$ lorsque $Q \in \square_1$

Nous supposons que $Q \in \square_1$ et que Q n'intersecte pas un coin de ∂B, ces derniers cas ne seront pas traités dans cette thèse. Sous cette hypothèse, la fonction f_Q peut s'exprimer sous la forme

$$f_Q(x_1, x_2, ..x_d) = w(2^{j/\beta}x_1 - k_1, 2^{j/\beta}x_2 - k_2, 2^{j/\beta}x_d - k_d)\ g(x_1, x_2, ..., x_d)\ 1_{x_1 \geq 0}$$

où w est une fonction régulière à support dans $[-1, 1]^d$ et $g \in C^s(\mathbb{R}^d)$.
Dans l'analyse de $\|C_{j,Q}(f)\|_{wl_{p^*}}$, nous allons pour un $\epsilon > 0$ donné, estimer de deux manières différentes la valeur de N_ϵ. Dans un premier temps, nous prendrons en compte le support fréquentiel des β-curvelets, puis dans un deuxième temps, nous utiliserons leur support spatial.

Démonstration de la propriété 37.
Première estimation de $N_{j,e_\theta,\epsilon}$ avec le support fréquentiel des β-curvelets

Pour une orientation de β-curvelet donnée, $\vec{e}_\theta$, nous allons sommer l'énergie associée à toutes les curvelets orientées de cette façon. Pour cela, nous allons estimer l'intégrale

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\Lambda_{j,\theta}} |< f_Q, \varphi_{j,\theta,k} >|^2 &\lesssim \int |\hat{f}(\xi)|^2 S_\mu(\xi) d\xi \\ &\lesssim 2^{j\frac{d-1}{\beta}} \int_{I_j} |\hat{f}|^2(re_\theta) dr,\end{aligned}$$

où $I_j = [2^j, 2^{j+1}]$.

Nous utilisons la notation $N(j, e_\theta, \epsilon)$ pour faire référence au nombre de coefficients de β-curvelets, d'orientation $\vec{e}_\theta$ et d'échelle j, supérieurs à ϵ. Nous pouvons alors évaluer $N(j, e_\theta, \epsilon)$ en remarquant que

$$N(j, e_\theta, \epsilon)\ \epsilon^2 \leq \sum_{k\in\Lambda_{j,\theta}} |\langle f_Q\ ,\ \varphi_{j,\theta,k}\rangle|^2.$$

Tout le travail consiste donc à déterminer une bonne estimation de

$$\int_{I_j} |\hat{f}(re_\theta)|^2 dr.$$

Nous allons introduire une renormalisation de f_Q, notée F et définie par

$$F(x) = f_Q(2^{-j/\beta}x) = w(x_1, x_2, ...x_d)\ g(2^{-j/\beta}x_1, 2^{-j/\beta}x_2..., 2^{-j/\beta}x_d)1_{x_1\geq 0}.$$

Le support de F est alors compris dans $[-1,1]^d$ et sa transformée de Fourier vérifie

$$\hat{F}(\xi) = \hat{f_Q}(2^{j/\beta}\xi)2^{\frac{jd}{\beta}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{r\in 2^{-j/\beta}\ I_j} |\hat{F}(re_\theta)|^2 dr &= 2^{\frac{2dj}{\beta}} \int_{r\in 2^{-j/\beta}\ I_j} |\hat{f}(2^{j/\beta}re_\theta)|^2 d\lambda \\ &= 2^{\frac{(2d-1)j}{\beta}} \int_{r\in I_j} |\hat{f}(re_\theta)|^2 dr,\end{aligned}$$

et

$$\int_{r\in I_j} |\hat{f}(re_\theta)|^2 dr = 2^{-\frac{(2d-1)j}{\beta}} \int_{r\in 2^{-j/\beta}\ I_j} |\hat{F}(re_\theta)|^2 dr.$$

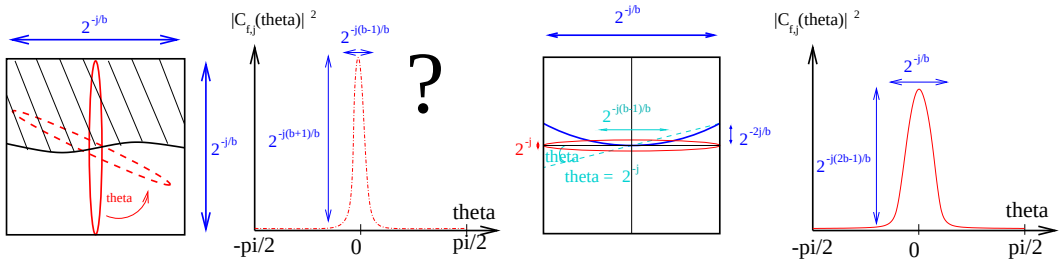


FIG. 10.5 – Analyse de l'energie $\sum_{k\in\Lambda_{j,\theta}} | < f_Q, \varphi_{j,\theta,k} > |^2$ en fonction de θ

Proposition 39. *Soit f telle que*

$f(x_1, x_2, ..., x_d) = 1_{\{x_1>0\}}\tilde{g}(x_1, x_2, ..., x_d)$, *avec* $\tilde{g} \in W_p^s(\mathbb{R}^d)$ *et* $Supp\{\tilde{g}\} = [-1,1]^d$ *et* $p \geq 2(d-1)$

On définit alors g par

$$g(2^{-j/(\beta-1)}x_1, 2^{-j/(\beta-1)}x_2..., 2^{-j/(\beta-1)}x_d) := \tilde{g}(x_1, x_2, ...x_d).$$

Alors $\exists C$ tel que $\forall j$,

$$\int_{2^j}^{2^{j+1}} |\hat{f}(r,\theta)|^2 dr \leq C\varepsilon_j^2(\theta)2^{-j}2^{-2j\sigma_{s,p}}\|g\|^2_{W_p^s(\mathbb{R}^d)} + C\ 2^{-j}\min\left(1, 2^{-2j\sigma_{s,p}}|\sin\theta|^{-2\sigma_{s,p}}\right)\ \|g\|^2_{W_p^s(\mathbb{R}^d)},$$

avec $\sum_j |S^{d-2}| \int \varepsilon_j^2(\theta)(\sin(\theta)^{d-2}d\theta \leq 1$,

$$\sigma_{s,p} = s + \frac{d-2}{2} + \min\left(s\ \frac{1-d/p}{\beta-1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right),$$

et $|S^{d-2}|$ représente le volume de boule unité en dimension $d-2$.
On utilise les notations $\hat{f}(r,\theta) = \hat{f}(re_\theta)$ et $< e_\theta, (1,0,..,0) >=< e_\theta, e_1 >= \cos(\theta)$

Remarque 49. *Cette propriété dont la preuve est donnée en annexe 2 est une légère adaptation dans les espaces $W_p^s(\mathbb{R}^d)$ du théorème (3.1) démontré par Candes dans l'article [20]. Le théorème de Candes utilise des espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ alors que dans notre adaptation, nous introduisons des espaces $W_p^s(\mathbb{R}^d)$. L'intérêt est que cela nous permet de gagner un coefficient $1/2$ dans l'estimation finale.*

La proposition 39 permet d'obtenir une estimation de

$$\int_{r\in 2^{-j/\beta}\ I_j} |\hat{F}(re_\theta)|^2 dr,$$

avec les paramètres $\tilde{j} = j(\beta-1)/\beta$, $\tilde{s} = s$, $\tilde{\beta} = \beta$ et $p \to +\infty$.
Ainsi, nous en déduisons que

$$\int_{r\in 2^{-j/\beta}\ I_j} |\hat{F}(re_\theta)|^2 dr \leq C\ 2^{-j\frac{(\beta-1)}{\beta}}\ (1+2^{j\frac{(\beta-1)}{\beta}}\sin(\theta))^{-2(\sigma+1/2)}.$$

Et finalement

$$\sum_{k\in\Lambda_{j,\theta}} |<f_Q,\varphi_{j,\theta,k}>|^2 \leq C\ 2^{-j\frac{d}{\beta}}\ 2^{-j\frac{(\beta-1)}{\beta}}\ (1+2^{j\frac{(\beta-1)}{\beta}}\sin(\theta))^{-2(\sigma+1/2)},$$

où $\sigma = s + (d-2)/2$.
Au final, avec $l_{j,e_\theta} = 1 + 2^{j\ \frac{(\beta-1)}{\beta}}|\sin(\theta)|$, la première estimation de $N_{j,e_\theta,\epsilon}(\epsilon)$ s'explicite de la manière suivante :

$$N_{j,e_\theta,\epsilon}(\epsilon) \leq C\ \epsilon^{-2}\ 2^{-j\frac{d}{\beta}}\ 2^{-j\frac{(\beta-1)}{\beta}}\ l_{j,e_\theta}^{-2(\sigma+1/2)}. \tag{10.5}$$

Deuxième estimation de $N_{j,e_\theta,\epsilon}$ et utilisation du support spatial des curvelets

Les curvelets qui nous intéressent sont les curvelets qui intersectent la ligne de discontinuité. Pour une orientation e_θ donnée, le nombre de curvelets dont le support n'est pas disjoint avec la ligne de discontinuité est de l'ordre de

$$\frac{2^{-\frac{j}{\beta}}|\sin(\theta)|}{2^{-j}}.$$

La figure (10.6) schématise ce résultat, nous avons alors l'estimation

$$N_{j,\epsilon} \lesssim l_{j,e_\theta}. \tag{10.6}$$

Estimation finale de $N_{j,e_\theta,\epsilon}$

Les deux estimations (10.5) et (10.6) permettent de montrer que

$$N_{j,e_\theta,\epsilon} \leq C\ min\left(\epsilon^{-2}\ 2^{-j\frac{d}{\beta}}\ 2^{-j\frac{(\beta-1)}{\beta}}\ l_{j,e_\theta}^{-2(\sigma+1/2)}, l_{j,e_\theta}\right)$$

Ainsi, avec $(p^*)^{-1} = \frac{2s+d}{2d}$, on obtient que

$$N_{j,e_\theta,\epsilon} \leq \epsilon^{-p^*}\ 2^{-j\frac{dp^*}{2\beta}}\ 2^{-j\frac{(p^*(\beta-1))}{2\beta}}\ l_{j,e_\theta}^{-(\sigma+1/2)p^*+1-p^*/2}.$$

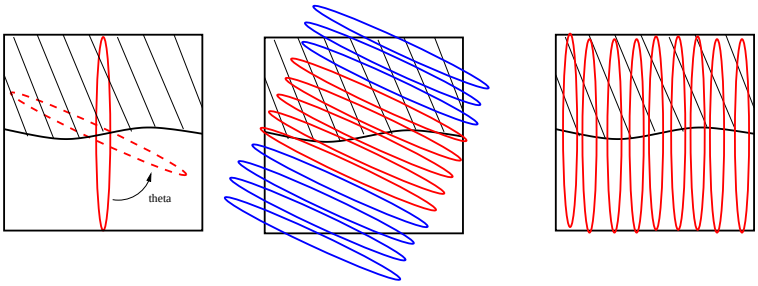


FIG. 10.6 – Deuxième estimation de $N_{j,e_\theta,\epsilon}$

En effet, si $x \leq \min(a,b)$, alors $x \leq a^{\frac{p^*}{2}} b^{1-\frac{p^*}{2}}$.

Estimation finale de $N_{j,\epsilon}$

Il suffit maintenant de sommer sur les différentes orientations des β-curvelets pour obtenir une majoration de $N_{j,\epsilon}$. Tout d'abord, en remarquant que $\sigma = s + \frac{d-2}{2}$ et $p^* = \frac{2d}{2s+d}$, il ressort que

$$-\left(\sigma + \frac{1}{2}\right) p^* + 1 - \frac{p^*}{2} = -(d-1).$$

Ainsi, on en déduit que

$$\begin{aligned} N_{j,\epsilon} &= \sum_\theta N_{j,e_\theta,\epsilon} \\ &\lesssim \epsilon^{-p}\ 2^{-j\frac{dp^*}{2\beta}}\ 2^{-j\frac{(p^*(\beta-1))}{2\beta}} \sum_\theta l_{j,e_\theta}^{-(\sigma+1/2)p^*+1-p^*/2} \\ &\lesssim \epsilon^{-p^*}\ 2^{-j\frac{dp^*}{2\beta}}\ 2^{-j\frac{(p^*(\beta-1))}{2\beta}} \sum_\theta l_{j,e_\theta}^{-d-1} \end{aligned}$$

L'utilisation des coordonnées sphériques dans S^{d-1}

$$\theta_l = \theta_{l_1}\ \theta_{l_2} ... \theta_{l_{d-1}},$$

montre que le nombre d'orientations possibles à l'échelle j est de l'ordre de $2^{j\frac{(d-1)(\beta-1)}{\beta}}$, où

$$\theta_l = \pi(2^{-j(\beta-1)/\beta} l_1)\ \pi(2^{-j(\beta-1)/\beta} l_2) ... \pi(2^{-j(\beta-1)/\beta} l_{d-1}),$$

avec $l = (l_1, l_2, ..., l_{d-1})$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} I &= \sum_l l_{j,l}^{-(\sigma+1/2)p^*+1-p^*/2} \\ &\lesssim \sum_{l_1,l_2...l_3} (1 + 2^{-j(\beta-1)/\beta} |\sin\theta_l|)^{-(d-1)} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^{d-1} \sum_{l_i=0}^{2^{j(\beta-1)/\beta}} (1 + 2^{-j(\beta-1)/\beta} |\sin\theta_{l_{1_i}}|)^{-1}, \end{aligned}$$

avec $k_0 = 2^{j(\beta-1)/\beta}\ C_1$ pour C_1 petit.

Si $l_i \leq k_0$ alors $\theta_l = o(1)$,

$$\sum_{l_i=0}^{k_0}(1+2^{-j(\beta-1)/(\beta)}|\sin\theta_{l_{1_i}}|)^{-1} \lesssim \sum_{l_i=0}^{k_0}(1+l_i)^{-1} \lesssim ln(k_0),$$

Et si $l_i \geq k_0$,

$$\sum_{l_i=k_0}^{2^{j(\beta-1)/(\beta)}}(1+2^{-j(\beta-1)/\beta}|\sin\theta_{l_{1_i}}|)^{-1} \lesssim \sum_{l_i=k_0}^{2^{j(\beta-1)/\beta}}(1+2^{j(\beta-1)/\beta}\ \sin(C_1\pi))^{-1} \leq C.$$

Au final,

$$N_{j,\epsilon} \lesssim \epsilon^{-p^*}\ 2^{-j\frac{dp^*}{2\beta}}\ 2^{-j\frac{(p^*(\beta-1))}{2\beta}},$$

et

$$\|C_{j,Q}(f)\|_{wl_{p^*}} \lesssim 2^{-j\frac{\beta+d-1}{2\beta}}.$$

□

10.4.3 Analyse de $\|C_{j,Q}(f)\|_{wl_{p^*}}$ lorsque $Q \in \square_2$

Nous supposons maintenant que $Q \in \square_2$, la fonction f_Q peut alors s'exprimer sous la forme

$$f_Q(x_1, x_2..., x_d) = w(2^{j/\beta}x_1, 2^{j/\beta}x_2..., 2^{j/\beta}x_d)\ g(x_1, x_2..., x_d),$$

où w est une fonction régulière à support dans $[-1,1]^d$.

Démonstration de la propriété 38

Le support de $f_Q = w\ g$ est alors inclus dans un hypercube de côté $2 \times 2^{-j/\beta}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|C_{j,Q}(f)\|_{l_2}^2 &\lesssim \int_{|\xi|\in I_j} |\mathcal{F}\left[f_Q\right](\xi)|^2 d\xi \\
&\lesssim 2^{-2js}\int_{|\xi|\in I_j} |\mathcal{F}\left[\nabla^s f_Q\right](\xi)|^2 d\xi \\
&\lesssim 2^{-2js}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla^s\left[g\ w\right]|^2 dx
\end{aligned}$$

Le terme $\nabla^s\left[g\ w\right]$ est alors décomposé comme la somme

$$\nabla^s\left[g\ w\right] = \sum_{i=0}^{s} C_s^i\ \nabla^{s-p}\ g\ \nabla^i w = \sum_{i=0}^{s} T_i,$$

et en remarquant que $|\nabla^i T_i| \lesssim |\nabla^{2i} w|\ \|g\|_{C^s(\mathbb{R}^d)} \lesssim 2^{ij/\beta}\|g\|_{C^s(\mathbb{R}^d)}$, on en déduit que pour tout $i \in [0,s]$,

$$2^{-2js}\int_{\mathbb{R}^d}|T_i|^2 dx \lesssim 2^{-2js}2^{-2ij}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla^i T_i|^2 dx \lesssim 2^{-2js}2^{-dj/\beta}2^{-2ij}2^{2ij/\beta}\|g\|_{C^s(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Sous l'hypothèse que $\beta \geq 1$, les termes 2^{-2ij} et $2^{2ij/\beta}$ se compensent et finalement,

$$\|C_{j,Q}(f)\|_{l_2}^2 \leq 2^{-2js}2^{-dj/\beta}\|g\|_{C^s(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Remarque 50. *Le nombre de curvelets à l'échelle j est de l'ordre 2^{dj} et le nombre de curvelets à l'échelle j qui intersectent le support de f_Q est de l'ordre de $2^{j\frac{d(\beta-1)}{\beta}}$*

L'inégalité de Hölder :

$$\|X\|_{l_p} \leq n^{1/p-1/2}\|X\|_{l_2}, \quad \text{où } n \text{ représente la taille de } X,$$

permet de montrer que

$$\begin{aligned} \|C_{j,Q}(f)\|_{l_p^*} &\leq 2^{j\frac{d(\beta-1)}{\beta}\ (1/p^*-1/2)}\ 2^{-js-\frac{jd}{2\beta}} \\ &\leq 2^{js\frac{(\beta-1)}{\beta}}\ 2^{-js-\frac{jd}{2\beta}}. \end{aligned}$$

Et au final,

$$\|C_{j,Q}(f)\|_{wl_{p^*}} \leq C\ 2^{js\frac{(\beta-1)}{\beta}}\ 2^{-js-jd/(2\beta)}$$

■.

10.4.4 Estimation de $C_{(n)}$

La grandeur caractéristique de $C_{(n)}(f)$, défini comme le nième plus grand coefficient de curvelets, s'obtient en comptant le nombre d'éléments dans les ensemble $\square_1$ et $\square_2$:

$$|\square_1| \lesssim 2^{j(d-1)/\beta}, \qquad |\square_2| \lesssim 2^{jd/\beta}.$$

L'estimation de $\|C_j(f)\|_{wl_p}^p$ s'obtient en utilisant l'inégalité suivante,

$$\|C_j(f)\|_{wl_p}^p \leq \sum_Q \|C_{j,Q}(f)\|_{wl_p}^p \leq |\square_1| \sup_{Q\in\square_1} \|C_{j,Q}(f)\|_{wl_p}^p + |\square_2| \sup_{Q\in\square_2} \|C_{j,Q}(f)\|_{wl_p}^p.$$

Or le premier terme de cette somme, $|\square_1|\ \sup_{Q\in\square_1} \|C_{j,Q}(f)\|_{wl_p}^p$ est uniformément borné par rapport à j si l'égalité

$$(\frac{d}{2\beta} + \frac{\beta-1}{2\beta})p^* \geq \frac{d-1}{\beta}$$

est vérifiée, ce qui est toujours le cas sous l'hypothèse $\beta \geq 2(d-1)s/d$.
Quant au deuxième terme, l'inégalité $|\square_2|\ \sup_{Q\in\square_2} \|C_{j,Q}(f)\|_{wl_p}^p \leq C$ est toujours vérifiée car

$$\left(s + \frac{d}{2\beta} - \frac{s(\beta-1)}{\beta}\right) p^* \geq d/\beta.$$

Ainsi, sous l'hypothèse $\beta \geq 2(d-1)s/d$, nous venons de montrer qu'il existe une constante C indépendante de j telle que $\|C_j(f)\|_{wl_p} \leq C$. Cette majoration permet ainsi de vérifier que

$$\sharp\{n\ ;\ |\theta_j|(n) > \varepsilon\} \leq C\ \varepsilon^{-p^*}.$$

Or, d'après la normalisation L^2 de la β-curvelet,

$$|C_{j,l,k}(f)| \leq C_2\ \|f\|_\infty \sqrt{|supp\,\{\varphi_{j,k,l}\}|} \leq C_2\ \|f\|_\infty 2^{-\frac{j(\beta+(d-1))}{2\beta}},$$

Il existe une échelle j_ε à partir de laquelle tout les coefficients sont plus petits que ε, et plus précisément, j_ε vérifie

$$j_\varepsilon \leq \frac{2\beta}{\beta+d-1}(log_2(\varepsilon^{-1}) + log_2(\|f\|_\infty) + log_2(C_2)) \leq \frac{2\beta}{\beta+d-1} log_2(\varepsilon^{-1}).$$

Et alors,

$$\sharp\{(j,k,l)\ ;\ |C_{j,k,l}(f)|>\varepsilon\} \leq \sum_j \sharp\{(k,l)\ ;\ |C_{j,k,l}(f)|>\varepsilon\} \leq C\ log_2(\varepsilon^{-1})\ \varepsilon^{-p^*}.$$

Le terme de droite de l'inégalité précédente estimé avec le paramètre ε égal à

$$\varepsilon = n^{-\frac{1}{p^*}}\ log(n)^{\frac{1}{p^*}} = n^{-(s/d+1/2)}\ log(n)^{s/d+1/2},$$

permet de conclure que

$$|C_{(n)}(f)| \leq C\ n^{-(s/d+1/2)}\ (log(n))^{s/d+1/2}.$$

10.4.5 Démonstration du théorème 13

La famille des β-curvelets est un frame étroit et vérifie la propriété de conservation d'énergie :

$$\|f\|_{L_2}^2 = \sum_{j,l,k} |\langle f\ ,\ \varphi_{j,l,k}\rangle|^2\ .$$

Il ressort que

$$\begin{aligned}
\|f-f_N\|_{L_2}^2 &= \sum_{j,l,k} |\langle f-f_N\ ,\ \varphi_{j,l,k}\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |C_n(f-f_N)|^2 \\
&= \sum_{n>N} |C_{(n)}(f)|^2 \\
&\leq \sum_{n>N} C\ n^{-(2s/d+1)}(log(n))^{(2s/d+1)} \\
&\leq C\ log(N)^{(2s/d+1)} N^{-2s/d}.
\end{aligned}$$

La démonstration du théorème est terminée.

10.5 Conclusion sur le frame des β-curvelets

Nous avons défini une nouvelle famille d'analyse multirésolution, les β-curvelets. Nous avons ensuite construit un frame étroit de β-curvelets puis nous avons montré que ce frame était une famille presque-orthogonale au sens de l'analyse harmonique. Finalement, nous avons démontré un résultat d'approximation non linéaire dans ces bases lorsque les fonctions considérées sont régulières par morceaux à l'exception de **lignes** de discontinuités. Ce résultat montre que le frame des β-curvelets, lorsque $\beta > 2$, admet de meilleures propriétés que les curvelets pour ce type de fonctions. En revanche, lorsque les lignes de discontinuité deviennent **courbes**, la décroissance asymptotique des coefficients de β-curvelet est optimale pour $\beta = 2$.

Conclusion et perspectives

Résumé

Les thèmes abordés dans cette thèse concernent essentiellement des aspects de modélisation et de simulation de mouvements par courbure moyenne par approximation de champ de phase.

La première partie aborde quelques mouvements par courbure moyenne isotrope.

Nous avons introduit et étudié dans le troisième chapitre un modèle modifié d'équations de réaction-diffusion pour approcher les mouvements d'interface de loi $v_n = \kappa + g$. Nous avons notamment effectué une analyse asymptotique et établi une preuve rigoureuse de convergence. Nous avons alors utilisé ce modèle pour traiter des contraintes de conservation de volume, et ainsi réduire, au moins numériquement, les pertes de volume observées couramment avec des techniques plus classiques.

Dans le quatrième chapitre, nous avons adapté les algorithmes précédents pour prendre en compte des conditions de bord non périodiques. En utilisant des principes de symétrie [106], nous avons tout d'abord traité le cas des conditions de type Dirichlet et Neumann. Nous avons ensuite généralisé ces principes de symétrie pour imposer des angles de contacts entre l'interface et le bord du domaine de calcul.

La deuxième partie de thèse aborde le cas des mouvements par courbure moyenne anisotrope.

Nous avons proposé dans le sixième chapitre une alternative à l'équation d'Allen-Cahn anisotrope classique. Avec $\tilde{\triangle}_\phi$, l'opérateur défini comme le linéarisé de $\triangle_\phi$ par rapport à la base de Fourier, cette méthode consiste alors à résoudre l'équation modifiée

$$u_t = \tilde{\triangle}_\phi u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u).$$

Bien que nous n'avons pas réussit à établir une convergence rigoureuse de ce modèle, nous observons numériquement un ordre de convergence en $O(\epsilon)$. L'intérêt de ce modèle vient alors de la simplicité et de la stabilité des méthodes numériques associées.

Dans le septième chapitre, nous nous sommes intéressés au cas des anisotropies non convexes pour lesquelles, l'équation d'Allen-Cahn anisotrope modifiée reste encore bien posée (ce qui n'est pas le cas pour le modèle original). Nous avons ainsi effectué une analyse numérique des solutions u_ϵ et interprété de manière heuristique les conséquences de la non convexité de l'anisotropie sur les dynamiques d'interface observées.

La troisième partie de thèse traite des notions d'analyses multirésolutions.

Dans le dernier chapitre, nous avons étendu le concept des curvelets en définissant les familles de β-curvelets et nous avons établi un résultat d'approximation non-linéaire dans ce frame.

Perspectives

Ce travail de thèse ouvre bien entendu de nombreuses perspectives :

- Dans le troisième chapitre, nous avons développé une méthode numérique rapide pour la prise en compte d'angles de contacts entre l'interface et le bord du domaine de calcul. Bien qu'une étude de convergence de ces algorithmes soit nécessaire pour sa validation, nous pensons dans l'avenir adapter ces techniques de symétrisation pour des modèles multiphases. L'intérêt serait alors la simplicité de la méthode et son faible coût algorithmique.

- A propos de l'équation d'Allen-Cahn anisotrope, nous avons proposé une méthode numérique rapide, dont les solutions numériques semblent converger en $O(\epsilon)$ vers le mouvement par courbure moyenne anisotrope. Une étude théorique rigoureuse de cette équation dans le cas régulier et convexe, bien que déjà entamée, reste une de nos priorités pour justifier tout l'intérêt de cette méthode. La rapidité de la résolution numérique nous laisse alors envisager de nombreuses applications en dimension 3 comme par exemple la croissance cristalline.

- Les solutions de l'équation d'Allen-Cahn anisotrope linéarisée présentent des dynamiques d'interfaces très intéressantes puisque non seulement elles minimisent le périmètre anisotrope, mais leur dynamique d'évolution est aussi déterminée par le poids énergétique de chaque pic. Il semble donc intéressant d'étudier d'un point de vue théorique les mouvements par courbure moyenne anisotrope régularisée Ω^η où le périmètre serait de la forme

$$P^\epsilon_{\phi^o}(\Omega) = P_{\phi^o}(\Omega) + \eta \int_\Gamma |\kappa|^{d-1} dx$$

  Nous pourrions ainsi déterminer la limite Ω des évolutions Ω^η lorsque η tend vers zéro, et donner un sens à la notion de mouvement par courbure moyenne anisotrope généralisée dans le cadre des anisotropies non convexes.

- Toutes les méthodes numériques présentées devraient s'adapter dans le cas de la simulation de diffusion de surface anisotrope, notamment avec l'équation de Cahn-Hilliard anisotrope linéarisée (voir les travaux d'Elliot [50], [51] et [52]).

$$u_t = -\tilde{\triangle}_\phi \left(\tilde{\triangle}_\phi - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u) \right) \tag{10.7}$$

  Les solutions de cette équation ont en effet la particularité de minimiser le périmètre anisotrope tout en introduisant une conservation de volume local contrairement au mouvement par courbure moyenne conservée qui vérifie uniquement une conservation globale du volume. La figure (10.7) présente deux simulations de l'équation de Cahn Hilliard en dimension 2 obtenues avec comme condition initiale un bruit blanc et la figure (10.8) présente deux simulations de l'équation de Cahn Hilliard en dimension 3 obtenues avec comme condition initiale une plaque mince. Ces simulations semblent indiquer que (10.7) pourrait être un modèle intéressant par exemple pour des problèmes de démouillage solide.

- Dans son travail de thèse, Morgan Brassel a étudié un algorithme de croissance de marches basé sur l'utilisation d'un périmètre isotrope dépendant de la variable spatiale. Il serait alors intéressant de comparer cette approche avec un périmètre anisotrope multi-échelles où l'anisotropie pourrait varier selon l'échelle considérée. Par exemple, à une interface Γ donnée, nous pourrions associer une interface lissée Γ^σ et considérer le périmètre multi-échelles suivant

$$P^\sigma_{\phi_1+\phi_2}(\Omega) = \int_\Gamma \phi_1(\vec{n}) ds + C_\sigma \int_{\Gamma^\sigma} \phi_2(\vec{n}) ds.$$

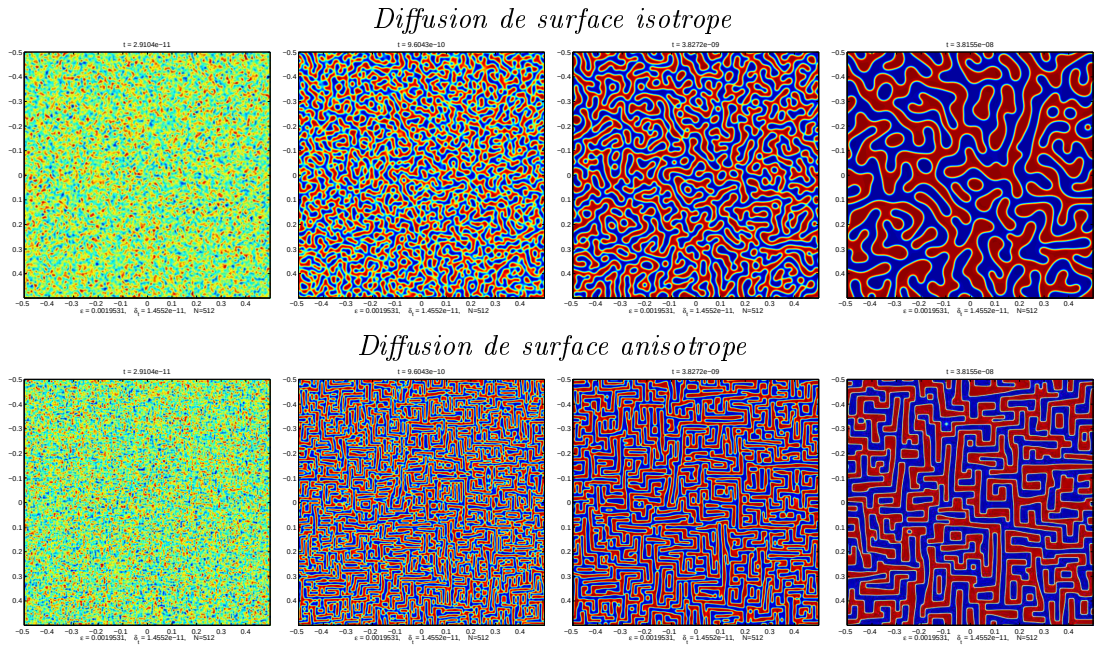


Fig. 10.7 – Exemple de simulation de l'équation de Cahn-Hilliard en dimension deux. La condition initiale est un buit blanc

L'opérateur de diffusion anisotrope multi-échelles associé serait construit de la manière suivante

$$\mathcal{F}\left[\tilde{\triangle}_{\phi_1,\phi_2,\sigma} u\right](\xi) = \begin{cases} -4\pi^2 \phi_2^o(\xi)^2 \hat{u}(\xi) & si \quad |\xi| < \sigma \\ -4\pi^2 \phi_1^o(\xi)^2 \hat{u}(\xi) & si \quad |\xi| > \sigma \end{cases}$$

La figure (10.9) présente un exemple de simulation obtenue avec cette approche.

– Enfin, nous avons introduit dans la dernière partie de thèse des outils d'analyses multirésolution comme les curvelets. Il serait alors intéressant de développer l'idée de linéariser le laplacien anisotrope par rapport au frame des curvelets lorsque l'anisotropie admet des dépendances spatiales.

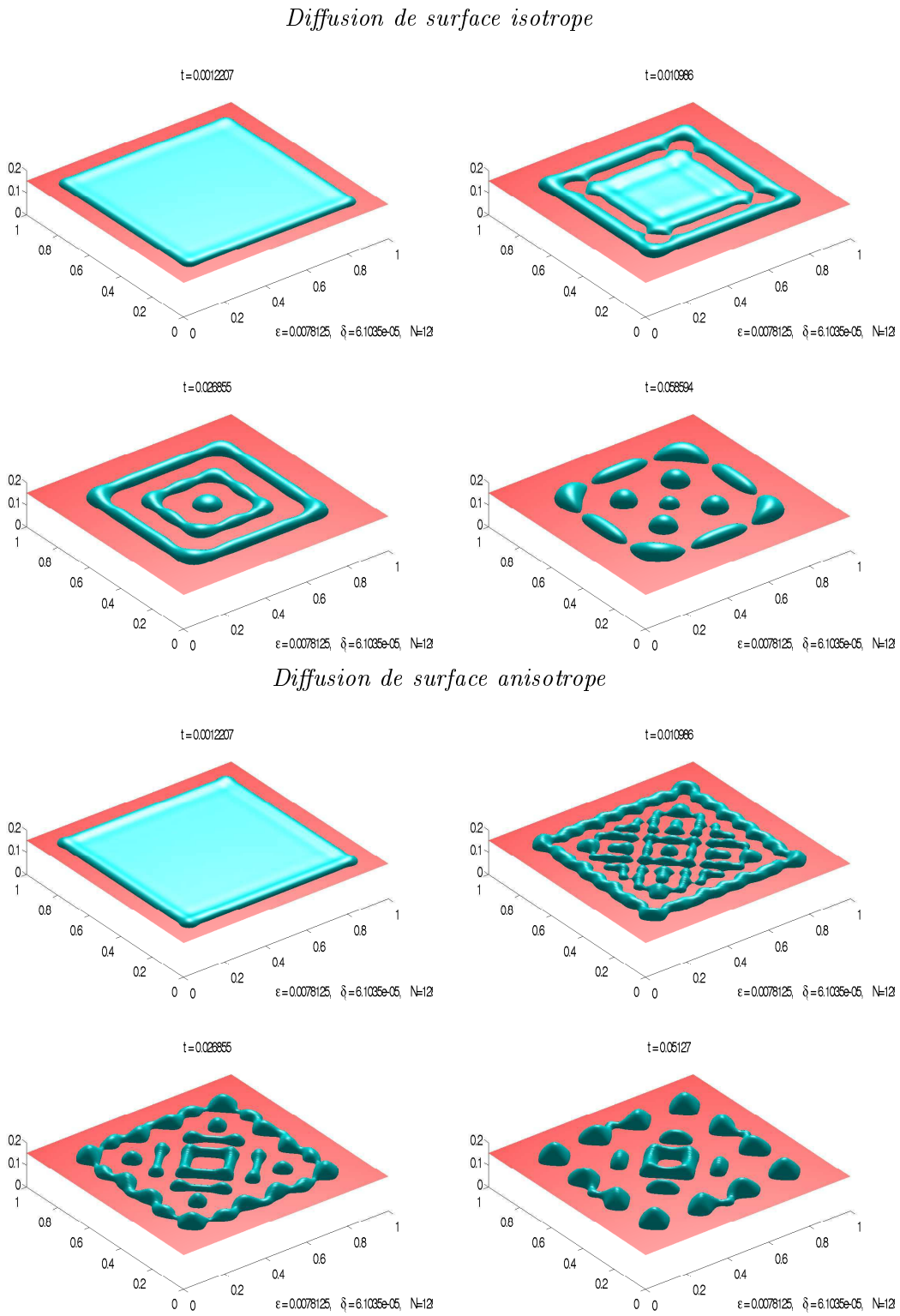


FIG. 10.8 – Exemple de simulation de l'équation de Cahn-Hilliard en dimension trois. La condition initiale est une plaque mince

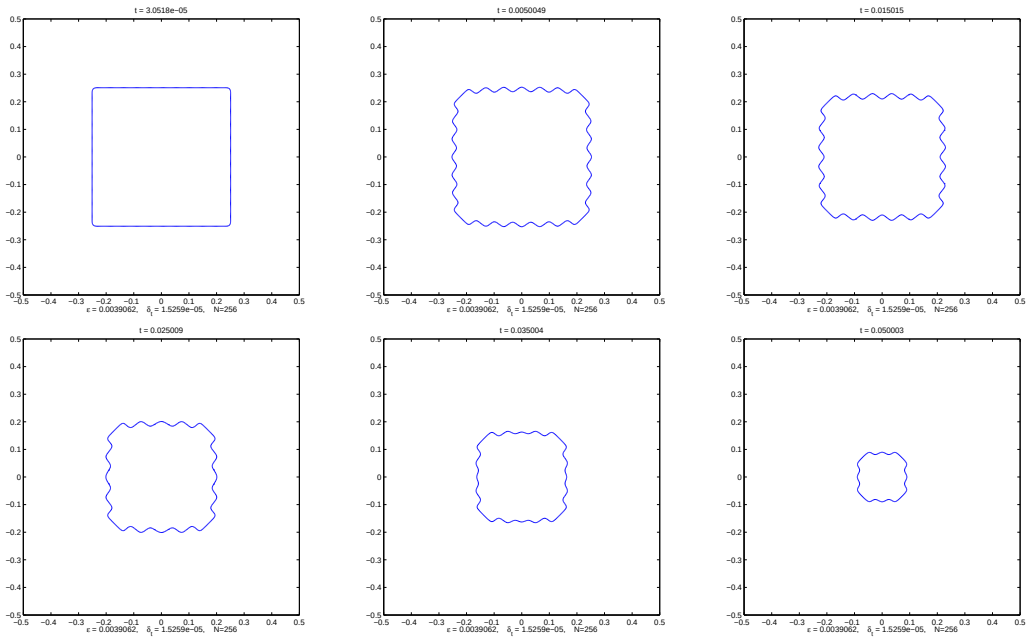


Fig. 10.9 – Simulation à partir d'une forme initiale carré d'un mouvement par courbure moyenne anisotrope multiéchelle : les directions privilégiées sont, aux basses fréquences, les directions horizontales et verticales, et aux hautes fréquences, les directions obliques.

Annexes

Annexe A

Annexe 1 : Quelques lemmes de Gronwall

Lemme 11. *Lemme de Gronwall classique :*
Soit p une fonction positive. On suppose que la fonction ϕ vérifie l'inéquation intégrale

$$0 \leq \phi(t) \leq \phi(0) + \int_0^t p(\tau)\phi(\tau)d\tau$$

Alors pour tout temps $t \geq 0$,

$$\phi(\tau) \leq \phi(0)exp\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right)$$

Démonstration du lemme 11
Il suffit de poser la fonction

$$\psi(t) = \left[\phi(0) + \int_0^t p(\tau)\phi(\tau)d\tau\right] exp\left(-\int_0^t p(\tau)d\tau\right)$$

Et alors

$$\begin{aligned}
\psi^{'}(t) &= p(t)\phi(t)exp\left(-\int_0^t p(\tau)d\tau\right) \\
&- \left[\phi(0) + \int_0^t p(\tau)\phi(\tau)d\tau\right] p(t)exp\left(-\int_0^t p(\tau)d\tau\right) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Et alors

$$\psi(t) \leq \psi(0), \quad \forall t > 0$$

Et

$$\phi(t) \leq \psi(t)exp\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right) \leq \phi(0)exp\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right)$$

■

Lemme 12. *Lemme de Gronwall modifié :*
Soit p une fonction positive, nulle en zéro et de dérivée positive sur $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe une constante C positive telle que pour tout $t > 0$,

$$0 \leq \phi(t) \leq \phi(0) + p(t) + C\int_0^t \phi(\tau)d\tau$$

Alors pour tout $\alpha > 1$, il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $0 \leq t \leq t_0$,

$$\phi(t) \leq \phi(0)e^{Ct} + \alpha p(t)$$

Démonstration du lemme 12
Soit

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \left[\phi(0) + p(t) + C\int_0^t \phi(\tau)d\tau\right] exp(-Ct) \\
\psi^{'}(t) &= \left\{p^{'}(t) + C\phi(t) - C\left[\phi(0) + p(t) + C\int_0^t \phi(\tau)d\tau\right]\right\} exp(-Ct)
\end{aligned}$$

Et $\psi^{'}(t) \leq p^{'}(t)exp(-Ct)$. De plus, comme $\psi(0) = \phi(0)$,

$$\psi(t) - \psi(0) \leq \int_0^t p^{'}(\tau)exp(-C\tau)d\tau$$

Au final,

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leq \psi(t)exp(Ct) \\
&\leq \phi(0)exp(Ct) + \left[\int_0^t p^{'}(\tau)exp(-C\tau)d\tau\right] exp(Ct) \\
&\leq \phi(0)exp(Ct) + \int_0^t p^{'}(\tau)exp(-C(t-\tau))d\tau \\
&\leq \phi(0)exp(Ct) + exp(Ct)p(t), \quad \text{car} \quad p^{'} \geq 0
\end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir t_0 suffisamment petit de tel sorte que $exp(Ct_0) \leq \alpha$, et alors $\forall t \leq t_0$,

$$\phi(t) \leq \phi(0)exp(Ct) + \alpha p(t)$$

■

Annexe B

Annexe 2 : Localisation fréquentielle d'un ridge

Proposition 40. *Soit f une fonction telle que*

$f(x_1, x_2, ..., x_d) = 1_{\{x_1>0\}}\tilde{g}(x_1, x_2, ..., x_d)$, *avec* $\tilde{g} \in W_p^s(\mathbb{R}^d)$ *et* $Supp\{\tilde{g}\} = [-1,1]^d$ *et* $p \geq 2(d-1)$

Avec la fonction g définie par

$$g(2^{-j/(\beta-1)}x_1, 2^{-j/(\beta-1)}x_2..., 2^{-j/(\beta-1)}x_d) = \tilde{g}(x_1, x_2, ...x_d)$$

Alors, il existe une constante C telle que $\forall j$,

$$\int_{2^j}^{2^{j+1}} |\hat{f}(r,\theta)|^2 dr \leq C\varepsilon_j^2(\theta)2^{-j}2^{-2j\sigma_{s,p}}\|g\|^2_{W_p^s(\mathbb{R}^d)} + C\ 2^{-j}min\left(1, 2^{-2j\sigma_{s,p}}|\sin\theta|^{-2\sigma_{s,p}}\right)\ \|g\|^2_{W_p^s(\mathbb{R}^d)}$$

où $\sum_j |S^{d-2}| \int \varepsilon_j^2(\theta)\sin(\theta)^{d-2}d\theta \leq 1$,

$$\sigma_{s,p} = s + (d-2)/2 + \min\left(s\ \frac{1-d/p}{\beta-1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$$

et $|S^{d-2}|$ *représente le volume de la sphère unité en dimension* $d-1$

Nous utilisons dans la suite les notations $\hat{f}(r,\theta) = \hat{f}(re_\theta)$ et $\cos(\theta) = e_\theta \cdot (1,0,..,0) = e_\theta \cdot e_1$.
La démonstration de cette propriété se fait par récurrence sur s avec s entier.

Cas où s=0
Avec $I_j(\theta) = \int_{2^j}^{2^{j+1}} |\hat{f}(r,\theta)|^2 dr$, on vérifie que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(d-1)j} \int_{S^{d-1}} I_j(\theta)d\theta &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(d-1)j} \int_{S^{d-1}} \int_{2^j}^{2^{j+1}} |\hat{f}(r,\theta)|^2 dr d\theta \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{S^{d-1}} \int_{2^j}^{2^{j+1}} |\hat{f}(r,\theta)|^2 r^{d-1} dr d\theta \\
&\leq \|f\|_{L_2} \leq \|\tilde{g}\|_{L_2} \leq 2^d\|\tilde{g}\|_{C^0} \leq 2^d\|g\|_{C^0}
\end{aligned}$$

Il ressort que

$$I_j(\theta) \leq \varepsilon_j(\theta)^2\ 2^{-(d-1)j}\ \|g\|_{C^0}$$

où

$$\varepsilon_j(\theta)^2 = \frac{2^{(d-1)j} I_j}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(d-1)j} \int_{S^{d-1}} I_j(\theta) d\theta} \quad \text{vérifie} \quad \sum_j \int_{S^{d-1}} \varepsilon_j(\theta)^2 d\theta = 1$$

Le résultat est démontré dans le cas où $s = 0$.

Cas général, n=s

Nous supposons que la propriété est vraie pour $n = s - 1$,
Les hypothèses de la propriété implique que $f = \tilde{g}\ H$ où $\tilde{g} \in W_p^s([-1,1]^d)$ et $H = 1_{\{x_1>0\}}$.
Pour simplifier les notations, nous utilisons le vecteur $u := \frac{\xi}{|\xi|}$. Alors,

$$\begin{aligned} i|\xi|\hat{f}(\xi) &= u.(i\xi\hat{f}(\xi)) \\ &= u.F\{\nabla f(\xi)\} \\ &= u.F\{(\nabla g)H\}(\xi) + \frac{\xi_1}{|\xi|} F\{\tilde{g}\delta_{x_1=0}\}(\xi) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier chacun des termes de cette égalité indépedemment :

Premier terme : $u.F\{(\nabla g)H\}(\xi)$

Ce premier terme se décompose comme la somme de d termes,

$$|u.F\{\nabla\tilde{g})H\}|^2(\xi) \leq |F\{\tilde{g_1}H\}|^2(\xi) + |F\{\tilde{g_2}H\}|^2(\xi) + ... + F\{\tilde{g_d}H\}|^2(\xi)$$

où la fonction $\tilde{g_i}$ est définie par $\tilde{g_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{g}$.

Nous pouvons alors appliquer l'hypothèse de récurence pour chacun de ces termes en remarquant que les fonctions $\tilde{g_1}$, $\tilde{g_2}$ ... et $\tilde{g_d}$ appartiennent toutes à l'espace $W_p^{s-1}([-1,1]^d)$. Il ressort que

$$\begin{aligned} \int_{2^j}^{2^{j+1}} | \quad u.F \quad \{(\nabla g).H\}(r,\theta)|^2 dr \lesssim & \\ & \varepsilon_j^2(\theta) 2^{-j}\ 2^{-2j\sigma_{s-1,p}}\ 2^{-2j\frac{1-d/p}{\beta-1}} \|g\|_{W_p^s}^2 \\ + \quad & 2^{-j} \min\left(1, 2^{-2j\sigma_{s-1,p}} |\sin\theta|^{-2\sigma_{s-1,p}}\right) 2^{-2j\frac{1-d/p}{\beta-1}}\ \|g\|_{W_p^s}^2 \end{aligned}$$

Pour cela, nous avons utilisé le fait que

$$\|\nabla\tilde{g}\|_{H^{s-1}} \lesssim \|\nabla\tilde{g}\|_{W_p^{s-1}} \lesssim 2^{-j\frac{1-d/p}{\beta-1}} \|\nabla g\|_{W_p^{s-1}} \lesssim 2^{-j\frac{1-d/p}{\beta-1}} \|g\|_{W_p^s}$$

Au final,

$$\int_{2^j}^{2^{j+1}} |u.F\{(\nabla g)H\}(\xi)|^2 \lesssim 2^{2j}\ \left[\varepsilon_j^2(\theta) 2^{-j} 2^{-2j\sigma_{s,p}} + 2^{-j} \min\left(1, 2^{-2j\sigma_{s,p}} |\sin\theta|^{-2\sigma_{s,p}}\right)\ \right] \|g\|_{W_p^s}^2$$

Deuxième terme : $\frac{\xi_1}{|\xi|} F\{\tilde{g}\ \delta_{x_1=0}\}(\xi)$

La fonction $|F\{g\ \delta_{x_1=0}\}|^2$ est constante dans la direction e_1. De plus, en exprimant le vecteur e_θ sous la forme $e_\theta = \cos(\theta)e_1 + sin(\theta)\tilde{e}_\theta$, il ressort que

$$\begin{aligned}\int_{2^j}^{2^{j+1}} |F\{g\ \delta_{x_1=0}\}|^2(re_\theta)dr &= \int_{2^j}^{2^{j+1}} |F\{g\ \delta_{x_1=0}\}(r\sin(\theta)\tilde{e}_\theta)|^2\, dr \\ &= \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left|\hat{h}(r\sin(\theta)\tilde{e}_\theta)\right|^2 dr \\ &= |\sin(\theta)|^{-1} \int_{|\sin(\theta)|2^j}^{|\sin(\theta)|2^{j+1}} \hat{h}^2(r\tilde{e}_\theta)dr\end{aligned}$$

où la fonction h est définie comme la trace de g sur l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ x_1 = 0\}$,

$$h := (x_2, x_3, ..., x_d) \to g(0, x_2, x_3, ..., x_d),$$

et la transformée de Fourier (sur l'hyperplan de dimension $d-1$) de h est notée $\hat{h}$.

Nous allons dans un premier temps supposer que $|2^j \sin(\theta)| \geq 1$:
Les résultats classiques des théorèmes de trace (voir par exemple [66]) montrent que

$$\|h\|^2_{W_p^{s-1/p}} \lesssim \|\tilde{g}\|^2_{W_p^s}$$

Avec la notation $\tilde{\xi} = (\xi_2, ..., \xi_d)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\|h\|^2_{H^{s-1/p}(\mathbb{R}^{d-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (1+|\tilde{\xi}|)^{2(s-1/p)}|\hat{h}(\tilde{\xi})|^2 d\xi_2 d\xi_3 ... d\xi_d \\ &\gtrsim \sum_j (2^j|\sin(\theta)|)^{d-2}|S^{d-2}|\ |\sin(\theta)|^{-1} \int_{2^j|\sin(\theta)|}^{2^{j+1}|\sin(\theta)|} (1+|r|)^{2(s-1/p)}|\hat{h}(r\tilde{e}_\theta)|^2 dr \\ &\gtrsim |S^{d-2}| \sum_j |2^j\sin(\theta)|^{2(s-1/p+(d-2)/2)}\ |\sin(\theta)|^{-1} \int_{2^j|\sin(\theta)|}^{2^{j+1}|\sin(\theta)|} |\hat{h}(r\tilde{e}_\theta)|^2 dr\end{aligned}$$

Ainsi, avec

$$I_j(\theta) = \int_{2^j}^{2^{j+1}} |F\{g\ \delta_{x_1=0}\}|^2(re_\theta)dr$$

il ressort que

$$I_j \leq C\ \mu_j^2(\theta)|2^j\sin(\theta)|^{-2(s-1/p+(d-2)/2)}\ \|\tilde{g}\|^2_{W_p^s}$$

où

$$\mu_j^2(\theta) = \frac{|2^j\ \sin(\theta)|^{2(s-1/p+(d-2)/2)}\ I_j}{\sum_j |2^j\sin(\theta)|^{-2(s-1/p+(d-2)/2)} I_j(\theta)},$$

Nous vérifions de plus $\sum_j \mu_j^2(\theta) \leq 1$.
Au final,

$$\int_{2^j}^{2^{j+1}} |F\{g\ \delta_{x_1=0}\}|^2(\xi)dr \leq C\ 2^j\ |2^j\sin(\theta)|^{-2(s+1/2-1/p+\frac{d-2}{2})}\ \|g\|^2_{W_p^s} \tag{B.1}$$

Remarque 51. *Le fait de se placer dans les espaces $W_p^s(\mathbb{R}^d)$ au lieu des espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ permet ainsi de gagner un facteur $2^{-j(1/2-1/p)}$ dans la majoration de cette intégrale.*

Nous supposons maintenant que $|2^j \sin(\theta)| < 1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\int_{2^j}^{2^{j+1}} |F\{g\ \delta_{x_1=0}\}|^2(r,\theta)dr &= \int_{2^j}^{2^{j+1}} |\hat{h}(\sin(\theta)r\tilde{e}_\theta)|^2 dr \\ &\lesssim 2^j \sup_{r<2^j} \left\{|\hat{h}(r\tilde{e}_\theta)|^2\right\} \\ &\lesssim 2^j \|h\|_{L_1}^2 \leq C2^j \|h\|_{L_2}^2 \lesssim C2^j \|\tilde{g}\|_{H^s}^2 \lesssim 2^j \|g\|_{W_p^s}^2\end{aligned}$$

Les inégalités de la dernière ligne se justifient car
- la transformée de Fourier est continue de L_1 dans L_∞,
- la fonction h est à support compact,
- L'opérateur trace est continu de H^s dans $H^{s-1/2}$

Et au final,

$$\int_{2^j}^{2^{j+1}} |F\{g\ \delta_{x_1=0}\}|^2(\xi)dr \leq C2^j \|g\|_{W_p^s}^2 \tag{B.2}$$

Les inégalités B.1 et B.2 permettent ainsi de montrer que

$$\int_{2^j}^{2^{j+1}} |F\{g.\delta_{x_1=0}\}|^2(\xi)dr \leq 2^j \min\left(1, |2^j \sin(\theta)|^{-2\sigma_{s,p}}\right) \|g\|_{W_p^s}^2$$

Tous les termes : $u.F\{(\nabla g)H\}(\xi) + \frac{\xi_1}{|\xi|}F\{\tilde{g}\delta_{x_1=0}\}(\xi)$

La démonstration de la propriété est terminée puisque en remarquant que

$$i|\xi|\hat{f}(\xi) = u.F\{(\nabla g)H\}(\xi) + \frac{\xi_1}{|\xi|}F\{g\ \delta_{x_1=0}\}(\xi),$$

On en déduit que

$$\int_{2^j}^{2^{j+1}} |\hat{f}(r,\theta)|^2 dr \leq C\ 2^{-j}\left[\varepsilon_j^2(\theta)2^{-2j\sigma_s} + \min\left(1, 2^{-2j\sigma_s}|\sin\theta|^{-2j\sigma_{s,p}}\right)\right] \|g\|_{W_{s,p}^s}^2$$

■.

Annexe C

Annexe3 : Algorithme de calcul des formes de Wulff

Nous présentons deux algorithmes en dimension 2 et 3 qui déterminent les formes de wulff associées à une anisotropie ϕ^o donnée. Le principe de ces méthodes consiste simplement à déterminer une approximation du dual de ϕ^o d'après la définition

$$\phi^{oo}(\xi) = \max_{\xi^*} \{< \xi, \xi^* >; \phi^o(\xi^*) \leq 1\}$$

Algorithm 11 Algorithme de calcul de forme de Wulff en dimension 2

Données: Entrées : anisotropie ϕ^o, précision N.

1: Déterminer une paramétrisation du cercle :

$$\Theta = linspace(0, \pi/2, N)$$

2: Déterminer le rayon du diagramme de Frank dans les directions Θ

$$R_{Frank} = \frac{1}{\phi^o(\Theta)}$$

3: **pour** $\theta \in \Theta$ **,**

4: Déterminer le rayon de la forme de Wulff dans la direction θ

$$R_{Wulff}(\theta) = \frac{1}{\max_\Theta \{\cos(\Theta - \theta) R_{Frank}\}}$$

5: **fin**

Algorithm 12 Algorithme de calcul de forme de Wulff en dimension 3

DONNÉES: Entrées : anisotropie ϕ^o, précision N.

1: Déterminer une paramétrisation de la sphère :

$$[\Theta, \Phi] = [linspace(0, \pi/2, N/2), linspace(0, \pi/2, N)]$$

2: Déterminer le rayon du diagramme de Frank dans les directions $(\theta, \phi) \in [\Theta, \Phi]$

$$R_{Frank}(\theta, \phi) = \frac{1}{\phi^o((\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi), \sin(\phi)))}$$

3: **pour** $(\theta, \phi) \in [\Theta, \Phi]$ **,**

4: Déterminer le rayon de la forme de Wulff dans la direction θ

$$Scalaire(\theta, \phi, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) = R_{Frank}(\theta, \phi)\left(\cos(\phi)\cos(\tilde{\phi})\ (\cos(\theta - \tilde{\theta})) + \sin(\phi)\sin(\tilde{\phi})\right)$$

$$R_{Wulff}(\theta, \phi) = \frac{1}{\max_{(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \in [\Theta, \Phi]}\left\{Scalaire(\theta, \phi, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})\right\}}$$

5: **fin**

Bibliographie

[1] G. Allaire. *Conception optimal de structure.* Springer, 2006,.

[2] F. Almgren, J. E. Taylor, and L.-H. Wang. Curvature-driven flows : a variational approach. *SIAM J. Control Optim.*, 31 :387–438, 1993.

[3] L. Ambrosio. Geometric evolution problems, distance function and viscosity solutions. In *Calculus of variations and partial differential equations.* Springer, 2000.

[4] J. Baccou. Analyses multirésolutions et problémes de bord : applications au traitement d'images et à la résolution numérique d'equations aux dérivées partielles, 2004. Thèse de doctorat de l'Université de la Méditerranée Aix-Marseille II.

[5] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Mathématiques & Applications (Paris).17. Paris.* Springer-Verlag, 1994.

[6] J.W. Barrett, H. Garcke, and R. Nürnberg. On the parametric finite element approximation of evolving hypersurfaces in r3. *J. Comput. Phys.*, 227(9) :4281–4307, 2008.

[7] J.W. Barrett, H. Garcke, and R. Nurnberg. A variational formulation of anisotropic geometric evolution equations in highter dimension. *NUMER MATH*, 109 :1–44, 2008.

[8] A. Barron, W. Dahmen, and R. DeVore. Approximation and learning by greedy algorithms. 2006.

[9] G. Bellettini. Variational approximation of functionals with curvatures and related properties. *J. Convex Anal. 4*, 1 :91–108, 1997.

[10] G. Bellettini, V. Caselles, A. Chambolle, and M. Novaga. The volume preserving crystalline mean curvature flow of convex sets in R^N. preprint.

[11] G. Bellettini, R. Goglione, and M. Novaga. Approximation to driven motion by crystalline curvature in two dimensions. *Adv. Math. Sci. and Appl.*, 2000.

[12] G. Bellettini and M. Paolini. Quasi-optimal error estimates for the mean-curvature flow with forcing term. *Differential Integral Equations*, 8 :735–752, 1995.

[13] G. Bellettini and M. Paolini. Anisotropic motion by mean curvature in the context of Finsler geometry. *Hokkaido Math. J.*, 25 :537–566, 1996.

[14] G. Bellettini and S. Paolini, M. Venturini. Some results on surface measures in calculus of variations. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1996.

[15] A. Braides. *Gamma-convergence for beginners.* Oxford University Press, 2002,.

[16] L. Bronsard and B. Stoth. Volume-preserving mean curvature flow as a limit of nonlocal Ginzburg-Landau equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 28 :769–807, 1997.

[17] E. J. Candès and L. Demanet. The curvelet representation of wave propagators is optimaly sparse. *Comm. Pure Appl. Math*, 58 :1472–1528, 2004.

[18] E. J. Candès and D. L. Donoho. Continuous curvelet transform :II. Discretization and frames. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 19 :198–222, 2000.

[19] E. J. Candès and D. L. Donoho. Continuous curvelet transform :I. Resolution of the wavefront set. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 19 :162–197, 2002.

[20] E.J. Candès. Ridgelets and the representation of mutilated sobolev functions. *SIAM J. Math. Anal.*, 33 :197–218, 1999.

[21] E.J. Candès and L. Demanet. Curvelets and Fourier Integral Operators. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I*, 336 :395–398, 2001.

[22] E.J. Candès, L. Demanet, D.L. Donoho, and L. Ying. Fast discrete curvelet transforms, 2005.

[23] E.J. Candès and D. L. Donoho. Ridgelets : a key to higher-dimensional intermittency. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.*, 357 :2495–2509, 1999.

[24] E.J. Candès and D. L. Donoho. Curvelets and curvilinear integrals. *J. Approx. Theory*, 113 :59–90, 2000.

[25] E.J. Candès and D. L. Donoho. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise-c2 singularities. *Comm. Pure Appl. Math*, 57 :219–266, 2000.

[26] T. Cecil and S. Osher. Regularized Wulff Flows, Nonconvex Energies and Backwards Parabolic Equations.

[27] A. Chambolle and M. Novaga. Implicit time discretization of the mean curvature flow with a discontinuous forcing term. *Preprint CMAP n° 571.*

[28] A. Chambolle and M. Novaga. Convergence of an algorithm for anisotropic mean curvature motion. *SIAM J. Math. Analysis*, 2006.

[29] A. Chambolle and M. Novaga. Approximation of the anisotropic mean curvature flow. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 17 :833–844, 2007.

[30] P. Charton. Produits de matrices rapides en bases d'ondelettes : application à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, 1996. Thèse de doctorat de l'Université de Paris Nord.

[31] X. Chen. Generation and propagation of interface in reaction-diffusion equation. *J. Diff. Eqns*, 96 :116–141, 1992.

[32] X. Chen and C.M. Elliot. Asymptotics for a parabolic double obstacle problem. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.*, 444 :429–445, 1994.

[33] X. Chen, C.M. Elliott, A. Gardiner, and J. Jing Zhao. Convergence of numerical solutions to the allen–cahn equation. *Appl. Anal.*, 69 :47–56, 1998.

[34] Y. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geom.*, 33(3) :749–786, 1991.

[35] G. Chiavassa. Algorithmes Adaptatifs en Ondelettes pour la Résolution d'Equation aux Dérivées Partielles, 1997. Thèse de doctorat de l'Université de la Méditerranée Aix-Marseille II.

[36] A. Cohen. *Numerical Analysis of Wavelet Methods.* Elsevier, 2003.

[37] M. G. Crandall and P. L. Lions. Condition d'unicite pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1981.

[38] CurveLab. www.curvelet.org.

[39] F. Da Lio, N. Forcadel, and R. Monneau. Convergence of a non-local eikonal equation to anisotropic mean curvature motion. application to dislocations dynamics. *accepté au Journal of the European Mathematical Society.*

[40] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM, Philadelphia, 1992.

[41] K. Deckelnick and G. Dziuk. On the approximation of the curve shortening flow. In *Calculus of variations, applications and computations (Pont-a-Mousson, 1994)*. Longman Sci. Tech., 1995.

[42] K. Deckelnick and G. Dziuk. Discrete anisotropic curvature flow of graphs. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33 :1203–1222, 1999.

[43] K. Deckelnick and G. Dziuk. Error estimates for a semi implicit fully discrete finite element scheme for the mean curvature flow of graphs. *Interfaces Free Bound.*, 2 :341–359, 2000.

[44] A. DiCarlo, M. E. Gurtin, and P. Podio-Guidugli. A regularized equation for anisotropic motion-by-curvature. *SIAM J. Appl. Math.*, 52 :1111–1119., 1992.

[45] M. N. Do. *Directional Multiresolution Image Representations.* PhD thesis, 2001. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

[46] M.N. Do and M. Vetterli. The finite ridgelet transform for image representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12 :16–28, 2003.

[47] M.N. Do and M. Vetterli. The contourlet transform : an efficient directional multiresolution image representation. *IEEE Transactions Image on Processing*, 14(12) :2091–2106, 2005.

[48] G. Dziuk. Convergence of semi-discrete scheme for the curve shortening flow. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 4 :589–606, 1994.

[49] C.M Elliott. Approximations of curvature dependent interface motion.

[50] C.M. Elliott and D.A. French. Numerical studies of the Cahn–Hilliard equation for phase separation. *IMA J. Appl. Math.*, 38(2) :97–128, 1987.

[51] C.M Elliott, D.A. French, and F.A. Milner. A second order splitting method for the Cahn–Hilliard equation. *Numer. Math.*, 54 :575–590, 1989.

[52] C.M. Elliott and H. Garcke. Existence results for diffusive surface motion laws. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 7 :467–490, 1997.

[53] C.M. Elliott and A.M. Stuart. The global dynamics of discrete semilinear parabolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30 :1622–1663, 1993.

[54] L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Phase transitions and generalized motion by mean curvature. *Commun. Pure Appl. Math.*, 45 :1097–1123, 1992.

[55] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature I. *J. Differential Geom.*, 33 :635–681, 1991.

[56] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 330 :321–332, 1992.

[57] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature III. *J. Geom. Anal.*, 2 :121–150, 1992.

[58] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature IV. *J. Geom. Anal.*, 5 :77–114, 1995.

[59] F. Fierro. Convergence past singularities to the forced mean curvature flow for a modified reaction-diffusion approach.

[60] F. Fierro, R. Goglione, and M. Paolini. Numerical simulations of mean curvature flow in presence of a nonconvex anisotropy. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 4 :573–601, 1998.

[61] I. FONSECA and S. MÜLLER. A uniqueness proof for the wulff theorem. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics*, 119 :125–136, 1991.

[62] M. Gage. On an area-preserving evolution equation for plane curves. *Contemporary Mathematics*, 51 :51–62, 1986.

[63] M. Gage and R.S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geom.*, 23 :69–96, 1986.

[64] M.A. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *J. Differential Geom.*, 26 :285–314, 1987.

[65] M.A. Grayson. A short note on the evolution of a surface by its mean curvature. *Duke Math. J.*, 58 :555–558, 1989.

[66] P. Grisvard. *Elliptic problem in nonsmooth domains.* Longman Sc. Tech., 1985.

[67] A. Grossman and J. Morlet. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *Siam J. Math. Anal.*, 15 :723–736, 1984.

[68] M. E. Gurtin. *Thermomechanics of Evolving Phase Boundaries in the Plane.* Oxford University Press Oxford, 1993.

[69] M. E. Gurtin and M. E. Jabbour. Interface evolution in three dimensions with curvature-dependent energy and surface difusion : Interface-controlled evolution, phase transitions, epitaxial growth of elastic films. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2002.

[70] M. E. Gurtin, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Anisotropic motion of an interface relaxed by the formation of infinitesimal wrinkles. *Journal of differential equations*, 119 :54–108, 1995.

[71] M.E. Gurtin and A. Struthers. Multiphase thermomechanics with interfacial structure. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 112 :97–160, June 1990.

[72] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes, une analyse géométrique.* Springer, 2005.

[73] E. Huisken. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *J. Differential Geom.*, 20 :237–266, 1984.

[74] H. Ishii, G. E. Pires, and P. E. Souganidis. Threshold dynamics type approximation schemes for propagating fronts. *J. Math. Soc. Japan*, 1999.

[75] S. Jaffard. Wavelet methods for fast resolution of elliptic problems. *S.I.A.M. Journal of Numerical Analysis*, 1992.

[76] S. M. Allen and J.W. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metall.*, 27 :1085–1095, 1979.

[77] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing.* Academic Press, 1998.

[78] S. Mallat and E. Le Pennec. Bandelet Image Approximation and Compression. *SIAM Journ. of Multiscale Modeling and Simulation*, 4 :992–1039, 2005.

[79] R. Masson. Méthode d'ondelettes en simulation numérique pour les problémes elliptiques et de point selle, 1999. Thèse de doctorat de Paris Nord.

[80] B. Merriman, J. K. Bence, and S. Osher. Diffusion generated motion by mean curvature. *Computational Crystal Growers Workshop, J. E. Taylor, ed., Sel. Lectures Math., AMS, Providence, RI*, 1992.

[81] Y. Meyer. *Wavelets.* Springer Verlag, 1989.

[82] Y. Meyer. *Ondelettes et Opérateurs I : ondelettes.* Paris, Hermann, 1990.

[83] L. Modica and S. Mortola. Il limite nella Γ-convergenza di una famiglia di funzionali ellittici. *Boll. Un. Mat. Ital. A (5)*, 14 :526–529, 1977.

[84] L. Modica and S. Mortola. Un esempio di Γ-convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)*, 14 :285–299, 1977.

[85] P. Mottoni and M. Schatzmann. Evolution géométrique d'interfaces. *CRAS*, 309 :453–458, 1989.

[86] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography.* SIAM, Philadelphia, 2001.

[87] R. H. Nochetto, M. Paolini, and C. Verdi. Sharp error analysis for curvature dependent evolving front. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 3 :711–723, 1993.

[88] R. H. Nochetto, M. Paolini, and C. Verdi. Optimal interface error estimates for the mean curvature flow. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 21 :193–212, 1994.

[89] M. Novaga and M. Paolini. Nonuniqueness for crystalline curvature flow. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2007.

[90] S. Osher and R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces.* Springer-Verlag New York, Applied Mathematical Sciences, 2002.

[91] S. Osher and N. Paragios. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[92] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed : Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations. *Journal of Computational Physics*, 1988.

[93] M. Paolini. A quasi-optimal error estimate for a discrete singularly perturbed approximation to the prescribed curvature problem. *Math. Comp.*, 66 :45–67, 1997.

[94] M. Paolini and F. Pasquarelli. Numerical simulation of crystalline curvature flow in 3D by interface diffusion. *Free Boundary Problems : theory and applications II, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 14 (N. Kenmochi ed.), Gakkötosho, Tokyo*, 2000.

[95] G. Peyré. Géométrie multi-échelles pour les images et les textures, 2005. Thèse de l'école polytechnique.

[96] D. Po and M.N. Do. Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(6) :1610–1620, 2006.

[97] J. Rubinstein and P. Sternberg. Nonlocal reaction-diffusion equations ans nucleations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1992.

[98] S.J. Ruuth. Efficient algorithms for diffusion-generated motion by mean curvature. *J. Comput. Phys.*, 144 :603–625, 1998.

[99] S.J. Ruuth, T. Brian, and R. Wetton. A Simple Scheme for Volume-Preserving Motion by Mean Curvature. *J. Sci. Comput.*, 19(1-3) :373–384, 2003.

[100] S.J. Ruuth and B. Merriman. Convolution-generated motion and generalized Huygens principles for interface motion. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60(3) :51 :836–861, 2000.

[101] J. A. Sethian. *Level Set Method and Fast Marching Methods, Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science.* CAMBRIDGE University PRESS, 1996.

[102] J. Simon. Différentiation de problèmes aux limites par rapport au domaine. Université de Séville, 1991.

[103] A. Stein. *Harmonic Analysis.* Princeton university Press, 1993.

[104] J.E. Taylor, J.W. Cahn, and C.A. Handwerker. Geometric models of crystal growth. *Acta metall. mater.*, 1992.

[105] WaveLab. www-stat.stanford.edu/w̃avelab.

[106] A. Wiegmann. Fast elliptic solvers on rectangular parallelepipeds. Technical report, LBNL Technical Report, 1999.