HAL open science

Décomposition de domaine pour des systèmes issus des équations de Navier-Stokes

David Cherel

To cite this version:

David Cherel. Décomposition de domaine pour des systèmes issus des équations de Navier-Stokes. Physique mathématique [math-ph]. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENM109 . tel-00995603v2

HAL Id: tel-00995603

https://theses.hal.science/tel-00995603v2

Submitted on 26 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques appliqueés**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

David Cherel

Thèse dirigée par **Eric Blayo**
et codirigée par **Antoine Rousseau**

préparée au sein du **Laboratoire Jean Kuntzmann**
et de **l'École Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

Décomposition de domaine pour des systèmes issus des équations de Navier-Stokes

Thèse soutenue publiquement le ,
devant le jury composé de :

M. Stéphane Labbé
Professeur à l'Université Joseph Fourier, Président
M. Charles-Henri Bruneau
Professeur à l'Université Bordeaux 1, Rapporteur
Mme Florence Hubert
Maître de Conférence à l'Université de Provence, Rapporteur
Mme Véronique Martin
Maître de Conférence à l'Université Picardie - Jules Vernes, Examinateur
M. Eric Blayo
Professeur à l'Université Joseph Fourier, Directeur de thèse
M. Antoine Rousseau
Chargé de Recherche INRIA, Co-Directeur de thèse

Table des matières

Introduction **7**

I Les équations de Navier-Stokes **11**

1 Présentation des équations **13**
1.1 Coordonnées lagrangiennes et eulériennes 13
1.1.1 Définition 13
1.1.2 Dérivée particulaire 14
1.1.3 Dérivée d'une intégrale 14
1.2 Équations de bilans 15
1.2.1 Conservation de la masse 15
1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement 15
1.3 Écoulements incompressibles 17
1.3.1 Équations de Navier-Stokes 17
1.3.2 Formulation vitesse-vorticité 18
1.3.3 Nombre de Reynolds 18
1.3.4 Les équations de Stokes et d'Euler 19

2 Conditions aux limites artificielles **21**
2.1 Conditions aux limites de Dirichlet 22
2.2 Conditions de frontière ouverte 25
2.2.1 Les conditions de frontière ouverte utilisées pour Navier-Stokes . . 25
2.2.2 Les conditions absorbantes 29

3 Schémas numériques pour Navier-Stokes **31**
3.1 Discrétisation spatiale 31
3.1.1 Maillage 31
3.1.2 Schéma de discrétisation en espace 32
3.2 Schéma de discrétisation temporelle 33
3.3 Méthode basée sur la méthode de projection 34
3.3.1 Méthode de projection 34

3.3.2 Discrétisation du terme non linéaire 37
3.3.3 Traitement des conditions aux limites 39
3.4 Méthode monolithique 40
3.4.1 Schéma de Murman 40
3.4.2 Traitement des conditions aux limites 41

4 La cavité entraînée 43
4.1 Présentation 43
4.1.1 Description 43
4.1.2 Comportement de la solution 44
4.1.3 Remarques sur la nature de l'écoulement 48
4.2 Validation du code de calcul avec schéma monolithique 48
4.2.1 La cavité entraînée à Re = 1000 49
4.3 Validation du code utilisant la méthode de projection 51

II Décomposition de domaine pour les équations de Stokes et Navier-Stokes 53

5 Décomposition de domaine : introduction 55
5.1 Méthode de Schwarz historique 55
5.2 Vers les méthodes de Schwarz optimisées 57

6 DDM pour la méthode de projection 59
6.1 Conditions de Dirichlet à l'interface 60
6.1.1 Algorithme 60
6.1.2 Discrétisation 62
6.1.3 Résultats numériques 62
6.2 Conditions optimisées à l'interface 65
6.2.1 Travaux précédents 65
6.2.2 Application numérique 67
6.2.3 Vers le global en temps 72

7 Cond de Dirichlet pour la méth monolithique 79
7.1 Expression analytique des erreurs 79
7.1.1 Décomposition du domaine et système vérifié par les erreurs . . . 80
7.1.2 Expression générale des erreurs 80
7.2 Conditions de Dirichlet à l'interface 82
7.2.1 Résultats théoriques de convergence 82
7.2.2 Résultats numériques 85
7.2.3 Conclusion 89

8 Conditions optimisées **91**
8.1 Opérateur absorbant exact . . . 91
8.1.1 Construction de l'opérateur absorbant exact . . . 92
8.1.2 Étude de l'opérateur $\hat{S}_j$ . . . 94
8.2 Discrétisation . . . 95
8.3 Convergence . . . 98
8.4 Conditions optimisées d'ordre 0 . . . 100
8.4.1 Première approximation . . . 100
8.4.2 Deuxième approximation . . . 103
8.5 Conditions optimisées d'ordre 2 . . . 105
8.5.1 Première approximation . . . 106
8.5.2 Autres approximations envisageables . . . 107

III Extension à des modèles dérivant des équations de Navier-Stokes **109**

9 DDM pour les équations d'Oseen **111**
9.1 Expression analytique des erreurs . . . 112
9.1.1 Décomposition du domaine et système vérifié par les erreurs . . . 112
9.1.2 Expression générale des erreurs . . . 113
9.2 Conditions de Dirichlet sur l'interface . . . 115
9.3 Opérateur absorbant exact . . . 118
9.3.1 Construction de l'opérateur absorbant exact . . . 118
9.3.2 Étude de l'opérateur $\hat{S}_j$ . . . 120
9.3.3 Convergence . . . 121
9.4 Opérateur absorbant approché . . . 123

10 DDM Pour Navier-Stokes hydrostatique **127**
10.1 Equations NS et NSH . . . 128
10.1.1 Modèle non-hydrostatique . . . 128
10.1.2 Dérivation des équations de Navier-Stokes hydrostatiques . . . 129
10.2 Vers le couplage NS-NSH . . . 130
10.2.1 Couplage multi-physiques et méthode de Schwarz . . . 130
10.2.2 Système de Stokes modifié . . . 131
10.2.3 Expression des erreurs . . . 132
10.2.4 Conditions absorbantes exactes . . . 134
10.2.5 Asymptotique $\delta \to 0$ . . . 135
10.2.6 Conditions absorbantes approchées . . . 136
10.3 Proposition de cas-tests numériques . . . 138
10.3.1 Cas-test NSH-NSH . . . 138
10.3.2 Cas-test NS-NSH . . . 140

Conclusion **147**

Introduction

L'océan est le plus grand réservoir de la planète, en eau bien sûr, mais également en chaleur. Il est ainsi capable d'absorber, de transporter et de restituer d'énormes quantités de chaleur sur une importante gamme d'échelles spatiales et temporelles. Sur le long terme, c'est le régulateur de notre climat. Sa capacité calorifique, 1200 fois plus importante que celle de l'atmosphère, lui permet d'absorber la chaleur dans les zones tropicales et de la redistribuer aux plus hautes latitudes, au travers de circulations océaniques complexes. Son rôle est donc évidemment crucial dans la problématique actuelle du changement climatique.

Mais l'océan a aussi un impact sur des phénomènes aux échelles de temps plus courtes. C'est le cas par exemple pour des événements météorologiques extrêmes tels que les cyclones tropicaux, dont le comportement est issu d'un couplage très fort entre l'atmosphère et la couche en surface de l'océan. La dynamique océanique a également des conséquences importantes en termes sociétaux et économiques, ce qui a justifié le développement de l'océanographie opérationnelle. Celle-ci, à l'instar de la prévision météorologique, a pour but de prévoir le comportement à court terme de l'océan, pour des applications comme la pêche, le routage en mer, la défense, ou les pollutions marines. Les applications liées aux zones côtières sont également nombreuses (inondations, surcotes, érosion...), avec un fort impact sur les populations locales (rappelons que près de 40% de la population mondiale vit à moins de 60 km du littoral, et que ce chiffre devrait doubler d'ici 2050).

Les équations fondamentales décrivant la dynamique de l'océan sont en théorie les équations de Navier-Stokes sur une sphère en rotation, auxquelles il faut ajouter une équation d'état pour la densité, et des équations de transport-diffusion pour les traceurs. Toutefois, un certain nombre de considérations physiques et de limitations pratiques ont nécessité le développement de modèles plus simples. En effet, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices sont pleinement justifiées du point de vue de la physique des mouvements océaniques, dont les principales sont les approximations de couche mince et de Boussinesq. D'autre part, étant donné les dimensions des bassins océaniques (plusieurs centaines à plusieurs milliers de kilomètres), les coûts de calculs sont un facteur pratique extrêmement limitant. On est, à l'heure actuelle, capable de simuler l'océan mondial avec une résolution de l'ordre de dix kilomètres, en utilisant des modèles dits **aux équations primitives**, dont le coût de calcul est bien inférieur à celui des équations de Navier-Stokes. On est donc bien loin d'une modélisation complète des phénomènes décrits par ces

équations, qui nécessiterait en théorie de considérer des échelles de l'ordre du millimètre.

Les équations primitives sont issues des équations complètes de la mécanique des fluides en effectuant l'approximation hydrostatique, justifiée par la faible profondeur des domaines considérés au regard de leur dimension horizontale. Dans cette thèse, nous considérerons les équations de Navier-Stokes (NS) qui sont le coeur du modèle complet évoqué ci-dessus, sans prendre en compte les équations de la densité et des traceurs (salinité, température, etc.). Nous utiliserons l'approximation hydrostatique dans le chapitre 10, et le modèle sera naturellement appelé Navier-Stokes hydrostatique (NSH). Il correspond aux équations primitives dans lesquelles on ne prendrait pas en compte la densité et les traceurs.

Au fil des années, les océanographes ont développé toute une gamme de modèles simplifiés, allant des simples équilibres de Munk [68], Stommel [84] ou Sverdrup [86] aux équations primitives, en passant par les équations *shallow-water* et les équations quasi-géostrophiques. Pour ces différentes approximations, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Pedlosky [71].

Toutefois, les progrès réalisés depuis une décennie à la fois en termes de connaissance physique, de modélisation numérique, et de puissance informatique disponible, permettent de traiter par simulation numérique des problèmes de plus en plus sophistiqués. Ainsi, la multiplication des systèmes de modélisation océanique à échelle régionale ou littorale amène ou amènera à considérer de plus en plus fréquemment des couplages complexes, notamment entre des modèles 3D hydrostatique et non hydrostatique.

En effet, dans certaines zones côtières où la dynamique est pleinement 3D, il est naturel de vouloir raccorder un modèle local non-hydrostatique (Navier-Stokes - NS) avec un modèle hydrostatique de l'océan hauturier (Navier-Stokes hydrostatique - NSH). Depuis les travaux pionniers de Marshall et al. [65] qui n'envisageaient pas réellement de couplage mais plutôt une adaptation locale d'un même modèle, peu de travaux ont été menés sur ce sujet, du fait de la difficulté mathématique et physique du couplage et du coût numérique très élevé des modèles non-hydrostatiques. On peut citer toutefois par exemple les travaux de Fringer et al. autour du modèle NS Suntans et de son couplage avec le modèle océanique régional ROMS [34, 33], même si là encore le couplage effectif NS-NSH n'est pas vraiment traité.

En raison notamment du changement de statut de la vitesse verticale w (pronostique pour NS, diagnostique pour NSH), les natures mathématiques de ces équations sont très différentes [78, 73, 19]. Ceci rend leur couplage délicat, car des conditions aux limites qui conviennent à l'une des équations ne conviennent pas nécessairement à l'autre.

De nombreux systèmes couplés ont déjà été mis en oeuvre dans le contexte océanique et/ou atmosphérique. Toutefois ces travaux sont souvent basés sur une approche essentiellement "algorithmique" (*i.e.* cherchant à “faire simple" avec les codes informatiques disponibles) en s'attachant à respecter, au moins de façon approchée, des principes de conservation (masse, quantité de mouvement, chaleur...), mais sans qu'on puisse garantir de bonnes propriétés de la solution au niveau mathématique. Autrement dit, la solution

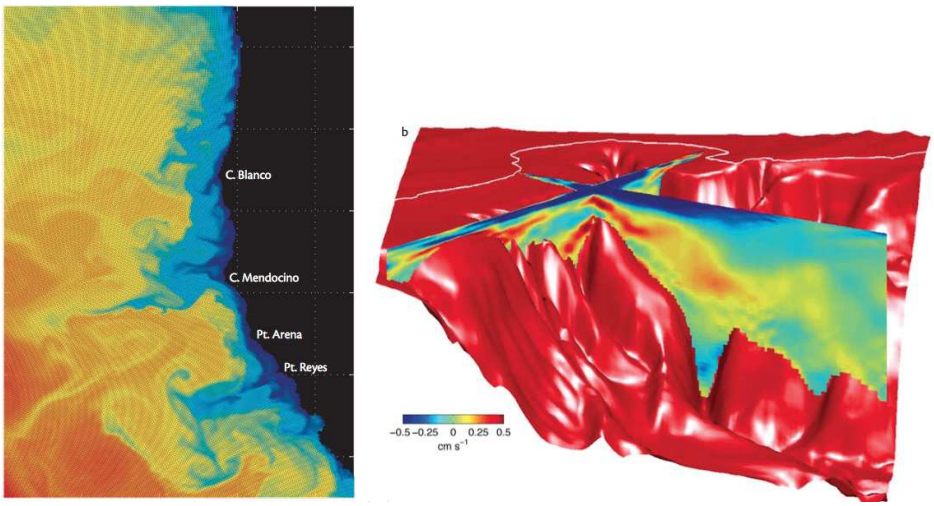


FIGURE 1 – Interaction entre modèles d'océan régional (Roms à gauche) et côtier local (Suntans à droite), d'après Fringer et al., 2006

numérique couplée n'est pas forcément une approximation convergente de la solution mathématique du problème continu, ce qui peut avoir des conséquences sur la qualité de la solution numérique obtenue (*e.g.* [18] ; [60]). Il existe toutefois des méthodes mathématiques, souvent plus complexes et coûteuses que les approches évoquées ci-dessus, visant à obtenir une solution couplée qui soit une bonne approximation de la solution théorique exacte. Ces méthodes peuvent être regroupées en quelques familles principales : méthodes de Schwarz, approches algébriques, approches variationnelles...

Les méthodes de Schwarz ont l'avantage d'être non intrusives vis-à-vis des codes de calcul, et de pouvoir gérer naturellement des maillages en espace et en temps différents par sous-domaines. Elles consistent à décomposer le domaine de calcul en plusieurs sous-domaines dans le but de simplifier le problème d'origine. Les systèmes d'EDP (qui peuvent être différents dans le cadre du couplage multi-physiques) sont alors résolus itérativement dans chacun des sous-domaines avec les méthodes numériques adaptées. Bien entendu, tous ces systèmes sont couplés via des conditions aux limites internes qui résultent de la séparation en sous-domaines, qu'on appelle aussi **conditions d'interface**. Ces conditions doivent être rigoureusement étudiées afin de fournir à la fois un couplage physiquement réaliste (conservation de masse, quantité de mouvement, flux, etc.), un problème mathématiquement bien posé (existence et unicité de la solution dans chacun des sous-domaines), et un algorithme performant qui converge le plus rapidement possible. A cet égard, des conditions d'interface remarquables sont des conditions dites **absorbantes exactes**, car elles permettent en théorie une convergence extrêmement rapide (en exactement 2 itérations dans le cas linéaire).

Toutefois ces conditions, introduites par [27], sont généralement exprimées à l'aide

d'opérateurs pseudo-différentiels non locaux en temps et en espace, et donc inapplicables en pratique. C'est pourquoi on cherche à en construire des approximations, appelées **conditions absorbantes approchées**, qui soient à la fois aussi précises que possible et utilisables en pratique.

C'est dans ce cadre que se situe le travail présenté dans cette thèse, avec l'objectif à moyen terme de pouvoir coupler de façon rigoureuse et efficace les équations de Navier-Stokes avec les équations primitives. Dans une première partie, on présentera quelques rappels sur les équations de Navier-Stokes, leur discrétisation, ainsi que le cas-test de la cavité entraînée qui sera utilisé dans tout ce document. Dans une deuxième partie, on met en œuvre les méthodes de Schwarz sur les équations de Stokes et Navier-Stokes, en dérivant notamment des conditions absorbantes exactes et approchées pour ces systèmes. Enfin, dans une troisième partie, on proposera des pistes vers le couplage Navier-Stokes/Navier-Stokes hydrostatique décrit ci-dessus.

Première partie

Les équations de Navier-Stokes

Chapitre 1

Présentation des équations

Le but de ce premier chapitre est de fournir une brève introduction aux équations de la mécanique des fluides que l'on utilisera par la suite. Pour une description plus exhaustive, le lecteur pourra se reporter par exemple aux ouvrages de Duvaut [26], de Coirier [22], ou de Landau-Lifshitz [59].

1.1 Coordonnées lagrangiennes et eulériennes

1.1.1 Définition

En mécanique des fluides, on utilise deux systèmes de coordonnées pour écrire les différentes équations mises en jeu : les coordonnées lagrangiennes et les coordonnées eulériennes.

En **représentation lagrangienne**, on se donne une particule ou un volume élémentaires de fluide dont on suivra l'évolution au cours du mouvement. Les fonctions décrivant les grandeurs dépendent de la particule considérée X (de position x_0 à un temps de référence t_0) et du temps. Si ϕ est un champ lagrangien, alors on a :

$$\phi = \phi(X(x_0, t_0), t).$$

On regarde à l'instant t la valeur du champ pour la particule qui se trouvait en x_0 à l'instant t_0. Connaître X revient à déterminer parfaitement l'évolution du système.

Dans les **coordonnées eulériennes**, on se place en un point fixe du repère et on observe l'évolution des particules qui passent par ce point. Les grandeurs associées à ces particules s'écrivent en fonction du point x auquel on se place et du temps. Si φ est un champ eulérien, alors on a :

$$\varphi = \varphi(X(x, t), t).$$

Travailler en coordonnées eulériennes revient à fixer la position X et à écrire des bilans au voisinage de ce point fixe.

En mécanique des fluides, on utilise principalement les coordonnées eulériennes pour leur simplicité de description. L'inconvénient de cette description vient de la nécessité d'avoir un système fermé pour appliquer les théorèmes de la mécanique, alors que pour une description eulérienne, le système est ouvert. On utilise alors la dérivée particulaire pour décrire correctement les variations temporelles.

1.1.2 Dérivée particulaire

On appelle **dérivée particulaire** d'une quantité associée à une particule la dérivée temporelle quand on suit la particule dans son mouvement.

En coordonnée lagrangienne, cette dérivée s'écrit naturellement $\partial\phi/\partial t$.

En revanche, en notation eulérienne, la dérivée partielle ne tient pas compte du fait que la particule qui passe par X à l'instant t est en mouvement et que ce mouvement contribue à la variation temporelle de φ. La bonne notion de dérivée temporelle en eulérien est celle de dérivée particulaire, notée $D\varphi/Dt$:

$$\begin{aligned}\frac{D\varphi}{Dt}(X(x,t),t) &= \frac{d}{dt}(\varphi(X(x,t),t)) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}(X(x,t),t)) + \frac{\partial X}{\partial t}(X(x,t),t)\cdot\nabla\varphi(X(x,t),t) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}(X(x,t),t)) + v(X(x,t),t)\cdot\nabla\varphi(X(x,t),t),\end{aligned}$$

où v désigne le champ de vitesse. Dans toute la suite on ne travaillera plus qu'en coordonnées eulériennes.

1.1.3 Dérivée d'une intégrale

On aura besoin dans la suite du chapitre de savoir calculer la dérivée lagrangienne de bilans pour pouvoir écrire les équations de conservation. Or ces bilans sont écrits sous forme intégrale. Le théorème suivant fournit un résultat sur le calcul de la dérivée d'une intégrale.

Théorème 1.1 *Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ et $\big(\varphi(t))_{t\in\mathbb{R}}\big)$ une famille de difféomorphismes de ω sur $\varphi(t)(\omega)=\Omega_t$. On suppose que l'application $t\mapsto\varphi(t)$ est aussi de classe C^1. On note $\varphi(t,x)=\varphi(t)(x)$ le point de Ω_t image du point x de ω par $\varphi(t)$. Soit f une fonction de classe C^1 dans les variables (X,t) définie sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$. On a alors la formule suivante :*

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega_t} f(X,t)\,dX = \int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\operatorname{div}(fv)\right)dX = \int_{\Omega_t}\left(\frac{Df}{Dt}+f\operatorname{div}v\right)dX \tag{1.1}$$

où v est le champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$v_i(X,t)=\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t,\phi(t)^{-1}(X)).$$

Dans le cadre de la mécanique des fluides, le champ v n'est autre que le champ de vitesse de l'écoulement.

1.2 Équations de bilans

On va établir ici les équations décrivant le mouvement d'un fluide dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, à savoir l'équation de conservation de la masse et l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

1.2.1 Conservation de la masse

On se donne un ensemble de particules que l'on suit dans leur mouvement. On note Ω_t le volume défini par ces particules à l'instant t. Le nombre de particules étant constant, la masse du système $m(t)$ l'est aussi. Ainsi, en coordonnées eulériennes :

$$\frac{Dm(t)}{Dt} = 0.$$

Or $m(t) = \int_{\Omega_t} \rho(X,t)\, dX$. L'équation de conservation de la masse s'écrit alors :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho(X,t)\, dX = 0.$$

D'après le théorème 1.1, on obtient :

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) \right) dX = 0.$$

Cette équation devant être vraie à tout instant et pour n'importe quel ensemble de particules Ω_t, on en déduit l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \tag{1.2}$$

Cette équation est aussi appelée **équation de continuité**.

1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

On se donne un fluide de masse volumique ρ, de vitesse v. La quantité de mouvement dans un volume Ω_t s'écrit :

$$\int_{\Omega_t} \rho v\, dX.$$

D'après le théorème fondamental de la dynamique, la variation temporelle de quantité de mouvement d'un volume est égale à la somme des forces extérieures qui s'appliquent sur ce volume. On compte les forces volumiques

$$\int_{\Omega_t} \rho f \, dX,$$

où f désigne la densité volumique de force, et les forces de contact

$$\int_{\partial\Omega_t} \gamma(s) \, ds,$$

où γ est la contrainte surfacique.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho v \, dX = \int_{\Omega_t} \rho f \, dX + \int_{\partial\Omega_t} \gamma(s) \, ds.$$

On utilise le théorème 1.1 pour transformer le membre de gauche, et on obtient :

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{D\rho v}{Dt} + \rho v \operatorname{div} v \right) dX = \int_{\Omega_t} \rho f \, dX + \int_{\partial\Omega_t} \gamma(s) \, ds.$$

On s'intéresse maintenant à la contrainte γ. Le théorème de Cauchy (on peut en trouver la formulation exacte dans [8, chapitre 1]) établit que l'on peut définir le tenseur des contraintes σ par la relation $\gamma = \sigma \cdot \nu$, où ν est la normale extérieure à $\partial\Omega_t$. Le terme de bord de l'équation de conservation de la quantité de mouvement se met alors sous la forme :

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div} \sigma \, dX,$$

et on peut alors avoir une relation locale :

$$\frac{D\rho v}{Dt} + \rho v \operatorname{div} v = \rho f + \operatorname{div} \sigma. \tag{1.3}$$

Afin d'expliciter le tenseur des contraintes, on commence par introduire le tenseur des déformations :

$$D(v) = \frac{1}{2} \left(\nabla v + \nabla v^T \right).$$

Quand le fluide est au repos, la seule contrainte à laquelle il est soumis est la pression hydrostatique, c'est-à-dire $-p \operatorname{Id}$. Quand le fluide est en mouvement, d'autres contraintes surfaciques viennent s'ajouter, et on a la relation :

$$\sigma = \sigma_0 - p \operatorname{Id}. \tag{1.4}$$

On va supposer que l'on travaille par la suite uniquement avec des fluides newtoniens. Cela veut dire que σ_0 dépend de façon linéaire et isotrope du tenseur des déformations $D(v)$. Sous ces hypothèses, la relation entre σ_0 et $D(v)$ se met sous la forme :

$$\sigma_0 = 2\mu D(v) + \lambda \operatorname{div} v \operatorname{Id},$$

où μ et λ sont deux cœfficients réels. On reporte alors cette relation dans l'équation (1.3) et on obtient **l'équation de conservation de la quantité de mouvement** :

$$\frac{D\rho v}{Dt} + \rho v \operatorname{div} v - \mu \Delta v + \nabla(p - (\lambda + \mu) \operatorname{div} v) = \rho f. \tag{1.5}$$

1.3 Écoulements incompressibles

1.3.1 Équations de Navier-Stokes

Le système (1.2)-(1.5) n'est pas fermé : il manque une équation pour décrire l'évolution de l'état du système. Dans toute la suite, on considérera le cas d'un écoulement incompressible. Un écoulement est dit incompressible si, pour chaque particule de fluide, la masse volumique est constante le long de la trajectoire. Cette hypothèse est vérifiée à faible **nombre de Mach** (rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse du son dans le milieu). On écrit alors

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \tag{1.6}$$

On reporte cette égalité dans l'équation de conservation de la masse (1.2) :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0 \\ \Rightarrow &\operatorname{div} v = 0. \end{aligned}$$

La divergence de la vitesse est nulle dans un fluide incompressible. Cette équation, ainsi que l'équation (1.6), vont permettre de simplifier l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.5), qui s'écrit alors :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) - \mu \Delta v + \nabla p = \rho f.$$

Les deux équations auxquelles on a abouti forment les **équations de Navier-Stokes incompressibles** :

$$\begin{cases} \rho \dfrac{Dv}{Dt} - \mu \Delta v + \nabla p = \rho f & \text{(1.7a)} \\ \operatorname{div} v = 0. & \text{(1.7b)} \end{cases}$$

1.3.2 Formulation vitesse-vorticité

On considère le système de Navier-Stokes adimensionnalisé (1.7a)-(1.7b) Si on pose $\omega = \nabla \times v$, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (v\omega) - \mu \Delta \omega = 0 & (1.8a) \\ \nabla \cdot v = 0, & (1.8b) \end{cases}$$

où ω désigne la **vorticité**. Cette formulation est connue sous le nom de formulation vitesse-vorticité, elle ne sera pas utilisée dans cette thèse. En revanche, nous utiliserons le calcul de la vorticité pour valider la méthode monolithique introduite au chapitre 4 (voir table 4.1).

1.3.3 Nombre de Reynolds

Plusieurs nombres sans dimension permettent de caractériser les écoulements fluides : nombre de Mach (voir plus haut), de Froude (rapport entre inertie et pesanteur), de Rossby (rapport entre les forces d'inertie et les forces de Coriolis)...

Dans le cadre de notre étude, nous allons nous intéresser plus particulièrement au nombre de Reynolds, qui quantifie le caractère turbulent d'un écoulement. Nous allons voir qu'il apparaît naturellement dans les équations de Navier-Stokes incompressibles, après adimensionnalisation.

On définit une longueur caractéristique L (que l'on supposera identique dans toutes les directions), et V une vitesse caractéristique du fluide. Alors, en définissant les variables et opérateurs adimensionnels par

$$v' = \frac{v}{V},\ p' = \frac{1}{\rho V^2} p,\ f' = \frac{L}{\rho V^2} f,\ \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{L}{V}\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla' = L\nabla,$$

l'équation $(1.7a)$ se réécrit, après simplification par le facteur $\rho V^2/L$:

$$\frac{Dv'}{Dt'} + \nabla' p' + \frac{\mu}{\rho L V} \Delta' v' = \rho f'. \tag{1.9}$$

Le **nombre de Reynolds** est défini comme l'inverse de la constante qui se trouve devant le terme de viscosité :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho L V}{\mu}. \tag{1.10}$$

C'est le rapport entre forces d'inertie et forces de viscosité.

Ce nombre sert à caractériser différents régimes d'écoulement, tels que les écoulements laminaires ou turbulents : on parle d'écoulement laminaire à faible valeur du nombre de Reynolds, où les forces visqueuses sont dominantes. Deux particules de fluide qui étaient voisines à un instant donné resteront voisines à l'instant suivant. Les "couches de fluide"

maintiennent leur cohésion au fil du temps. Au contraire, en écoulement turbulent, le nombre de Reynolds a une valeur élevée ; l'écoulement est dominé par les forces d'inertie, qui tendent à produire des tourbillons chaotiques et autres instabilités au sein du fluide.

Il est difficile de donner des valeurs du nombre de Reynolds définissant ces différents domaines, car la transition d'un type d'écoulement vers un autre type va dépendre du fluide considéré, ainsi que de la géométrie de l'écoulement. On en donnera un exemple concret au chapitre 4.

1.3.4 Les équations de Stokes et d'Euler

L'introduction du nombre de Reynolds va permettre de dériver deux versions simplifiées des équations de Navier-Stokes : les équations de Stokes et d'Euler.

Le système de Stokes découle des équations de Navier-Stokes en considérant que le nombre de Reynolds est faible devant l'unité : $\mathrm{Re} \ll 1$. Cette hypothèse se vérifie en pratique lorsqu'on considère de petites échelles de longueur, quand on traite des fluides très visqueux, ou si la vitesse de l'écoulement est très faible. En reprenant l'adimensionnalisation réalisée à la section précédente, on peut vérifier que cela revient à considérer que les forces de viscosité sont prédominantes devant l'inertie du fluide. Le **système de Stokes** s'écrit alors :

$$\begin{cases} -\mu \Delta v + \nabla p = \rho f & (1.11a) \\ \operatorname{div} v = 0. & (1.11b) \end{cases}$$

Il est important de toujours garder en tête les hypothèses faites pour passer du système de Navier-Stokes au système de Stokes, sous peine d'aboutir à des solutions non physiques. Par exemple, utiliser les équations de Stokes pour modéliser l'écoulement autour d'un cylindre infini mènerait à des aberrations : en effet, l'hypothèse $\mathrm{Re} \ll 1$ n'est vérifiée que localement autour du cylindre, et n'est plus du tout valide quand on s'en éloigne.

Au contraire, si on néglige la viscosité du fluide, c'est-à-dire que l'on considère que le fluide est parfait, les équations de Navier-Stokes se réécrivent en :

$$\begin{cases} \rho \left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) + \nabla p = \rho f & (1.12a) \\ \operatorname{div} v = 0. & (1.12b) \end{cases}$$

Ce sont les **équations d'Euler**. On peut noter que ce système d'équations aux dérivées partielles est hyperbolique, c'est-à-dire de nature différente des équations de Navier-Stokes, qui sont, elles, paraboliques.

Chapitre 2

Conditions aux limites artificielles pour les équations de Navier-Stokes

Depuis leur formulation telle qu'on la connaît par Stokes en 1845, les équations de Navier-Stokes constituent toujours un sujet d'étude important au sein de la communauté mathématique. Dans de nombreuses applications, on cherche à décrire et comprendre des phénomènes très localisés, comme par exemple les écoulements derrière un obstacle. Pour de telles études, considérer un domaine non borné permet une étude mathématique simplifiée des équations.

Toutefois, il est impossible de traiter numériquement un domaine non borné. Il faut donc limiter arbitrairement le domaine de calcul, en introduisant de ce fait des frontières "artificielles", n'ayant pas de réalité physique. Pour ne pas biaiser l'étude, de telles frontières devront être les plus transparentes possibles vis-à-vis de l'écoulement. Se posent alors deux questions :

1. comment choisir correctement une telle condition au bord, dite **condition aux limites artificielles** ou **condition de frontière ouverte** ?
2. le problème des équations de Navier-Stokes avec de telles conditions aux limites est-il bien posé ?

Les travaux de Leray ont été la première contribution majeure dans ce domaine, en fournissant des résultats d'existence et d'unicité en dimension deux. La question reste encore ouverte en dimension trois (c'est un des fameux problèmes du millénaire du Clay Mathematics Institute [1]).

On va chercher dans ce chapitre à dresser la liste des conditions aux limites rencontrées usuellement dans la littérature pour Navier-Stokes, et à rappeler les résultats d'existence et d'unicité associés à ces conditions. On s'intéressera en premier lieu aux conditions de Dirichlet, avant de considérer plus spécifiquement les conditions aux limites proposées

1. La formulation exacte du problème peut être trouvée à http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf

dans un contexte de frontière ouverte. Le but n'est pas ici d'être exhaustif, mais de mettre en évidence le fait que ces problèmes sont difficiles à traiter, et d'indiquer des travaux importants dans ce domaine. Une partie des conditions aux limites que l'on présentera fera l'objet d'une étude plus approfondie en vue de leur application en décomposition de domaine.

2.1 Conditions aux limites de Dirichlet

Les résultats d'existence et d'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes sont abondants dans la littérature (on pourra se référer au livre de Temam [88] et aux articles de Bresch [10] ou de Fernández-Cara [30] pour une revue des travaux existants sur Navier-Stokes compressibles et incompressibles, et les équations proches de Navier-Stokes). Le cadre applicatif de nos travaux étant lié à l'océanographie côtière et à l'hydraulique fluviale, on se limitera dans la suite aux équations de Navier-Stokes incompressibles.

On considère dans un premier temps les conditions les plus simples que l'on puisse écrire, à savoir des conditions de Dirichlet homogènes aux bords du domaine Ω :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)\, v - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v + \nabla p = f \text{ dans } \Omega \times [0,T] & (2.1a) \\ \mathrm{div}(v) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0,T] & (2.1b) \\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0,T] & (2.1c) \\ v(t=0) = v_0 \text{ dans } \Omega. & (2.1d) \end{cases}$$

C'est avec de telles conditions qu'a commencé l'étude des équations de Navier-Stokes (travaux de Leray sur les "solutions turbulentes" [62] et [63]), et de nombreuses études récentes (par exemple les travaux de Feireisl [29] ou Hoff [54] sur les fluides compressibles) continuent de considérer le cas de conditions de Dirichlet dans l'étude des propriétés des solutions des équations de Navier-Stokes, compressibles comme incompressibles.

Les démonstrations de cette section peuvent être trouvées dans le livre de Boyer et Fabrie [8].

On notera par la suite

$$V = \left\{ v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d, \mathrm{div}\, v = 0 \right\},$$

$$H = \left\{ v \in \left(L^2(\Omega)\right)^d, \mathrm{div}\, v = 0, \mathrm{tr}(v)_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

On commence par donner un résultat d'existence de solutions faibles locales en temps.

Théorème 2.1 (Existence de solutions faibles) *Soit Ω un ouvert borné connexe et lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. Soit* $\mathrm{Re} > 0$, $v_0 \in H$ *et* $f \in L^2_{loc}\left([0,\infty[, \left(H^{-1}(\Omega)\right)^d\right)$. *Alors il existe*

un couple (v,p) solution du problème de Navier-Stokes (2.1), et tel que :

$$\forall T>0, (v,p)\in L^\infty\left(]0,T[,H\right)\cap L^2\left(]0,T[,V\right)\times W^{-1,\infty}\left(]0,T[,L^2_0\left(\Omega\right)\right)$$

et

$$\frac{dv}{dt}\in L^{4/d}\left(]0,T[,V^{-1}\right)\cap L^2\left(]0,T[,V^{-d/2}\right).$$

– *si $d=2$, la solution est unique et v est continue en temps sur $[0,\infty[$ à valeur dans H. De plus :*

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2}\,d\tau=\frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2}+\int_0^t<f(\tau),v(\tau)>_{H^{-1},H^1_0}\,d\tau.$$

– *si $d=3$, v est continue en temps sur $[0,\infty[$ à valeur dans $V^{-1/4}$ et faiblement continue de $[0,\infty[$ dans H. De plus,*

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2}\,d\tau\leq\frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2}+\int_0^t<f(\tau),v(\tau)>_{H^{-1},H^1_0}\,d\tau. \quad (2.2)$$

L'unicité de telles solutions demeure un problème ouvert.

Remarque 2.1 *En dimension 3, les équations de Navier-Stokes possèdent au plus une solution dans la classe $L^\infty\left(]0,T[,H\right)\cap L^4\left(]0,T[,V\right)$. Ceci implique que dv/dt appartienne à $L^2\left(]0,T[,V'\right)$ (V' est le dual de V, pour le produit scalaire usuel dans H^1_0). On n'a cependant pas de solution globale dans cette classe.*

En supposant un peu plus de régularité sur les données du problème (conditions initiales et second membre), on est capable de fournir un résultat d'existence de solutions plus régulières que dans le théorème précédent.

Théorème 2.2 (Existence de solutions fortes) *Soit Ω un ouvert borné connexe, de classe C^1 dans $\mathbb{R}^d$. Soit $\mathrm{Re}>0$, $v_0\in V$ et $f\in L^2_{loc}\left([0,\infty[,\left(H^2\left(\Omega\right)\right)^d\cap V\right)$.*

– *si $d=2$, il existe une unique solution au problème de Navier-Stokes vérifiant :*

$$\begin{aligned} v &\in C^0\left([0,\infty[,V\right)\cap L^2_{loc}\left([0,\infty[,\left(H^2\left(\Omega\right)\right)^d\cap V\right)\\ \frac{dv}{dt} &\in L^2_{loc}\left([0,\infty[,H\right)\\ p &\in L^2_{loc}\left([0,\infty[,H^1\left(\Omega\right)\right). \end{aligned}$$

De plus :

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2}\,d\tau=\frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2}+\int_0^t\left(f(\tau),v(\tau)\right)_{L^2}d\tau.$$

– *si $d = 3$, il existe $T^* > 0$ dépendant des données et une unique solution au problème de Navier-Stokes vérifiant :*

$$\begin{aligned} v &\in C^0\left([0,T^*[,V\right) \cap L^2_{loc}\left([0,T^*[,\left(H^2\left(\Omega\right)\right)^d \cap V\right) \\ \frac{dv}{dt} &\in L^2_{loc}\left([0,T^*[,H\right) \\ p &\in L^2_{loc}\left([0,T^*[,H^1\left(\Omega\right)\right). \end{aligned}$$

On a la même égalité d'énergie qu'en dimension 2.

La contrepartie des solutions fortes données par le théorème précédent est la perte de la globalité des solutions en dimension 3. Cette perte est toutefois nuancée dans la remarque suivante.

Remarque 2.2 *Si les données sont suffisamment petites :*

$$\|\nabla v_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+,L^2)} \leq \frac{C\left(\Omega\right)}{\mathrm{Re}^2} \text{ et } \|f\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2)} \leq \frac{C\left(\Omega\right)}{\mathrm{Re}^4},$$

on a $T^* = \infty$. C'est-à-dire qu'en dimension 3, on passe de solutions locales en temps à des solutions globales en temps.

On fournit ensuite un résultat d'unicité et un théorème de régularité des solutions.

Théorème 2.3 (Unicité) *Soit u une solution faible vérifiant l'inégalité d'énergie (2.2) pour les solutions faibles. Soit v une solution faible telle qu'il existe un temps $T > 0$ pour lequel $v \in L^4\left(]0,T[,V\right)$.*
Si $u(0) = v(0)$, alors $u = v$ sur $[0,T[$.

Théorème 2.4 (Régularité) *Soit Ω un ouvert borné connexe de classe $C^{k+1,1}$ de $\mathbb{R}^d$, avec $k \geq 1$. Soit $\mathrm{Re} > 0$, $v_0 \in V$ et $f \in L^2_{loc}\left([0,\infty[,\left(L^2\left(\Omega\right)\right)^d\right)$. On suppose de plus que $v_0 \in \left(H^k\left(\Omega\right)\right)^d$ et $\partial^s f/\partial t^s \in L^2\left(]0,T[,\left(H^{k-2s-1}\left(\Omega\right)\right)^d\right)$ $\forall s \leq k/2$. Alors, si $v_0^{(s)} = 0$, les solutions fortes de l'équation de Navier-Stokes possèdent les propriétés suivantes :*

$$\forall s \leq k/2,\ \frac{\partial^s v}{\partial t^s} \in L^\infty\left(]0,T[,\left(H^{k-2s}\left(\Omega\right)\right)^d \cap V\right) \cap L^2\left(]0,T[,\left(H^{k-2s+1}\left(\Omega\right)\right)^d \cap V\right)$$

$$\forall s < k/2,\ \frac{\partial^s p}{\partial t^s} \in L^\infty\left(]0,T[,H^{k-2s-1}\left(\Omega\right)\right) \cap L^2\left(]0,T[,H^{k-2s}\left(\Omega\right)\right)$$

Remarque 2.3 (Conditions de Dirichlet non-homogènes) *Ces résultats permettent de justifier le caractère bien posé des équations de Navier-Stokes dans le cas de conditions de Dirichlet homogènes.*

Dans le cadre de la cavité entraînée (voir chapitre 4) ou pour certains problèmes de décomposition de domaine, les conditions au bord du domaine sont des conditions de Dirichlet non-homogènes. Il nous faut alors des hypothèses de régularité sur les données aux bords et de compatibilité avec la donnée initiale afin de pouvoir étendre les résultats précédents.

2.2 Conditions de frontière ouverte

Comme on l'a dit précédemment, on ne sait pas résoudre numériquement un système d'équations sur un domaine non borné. On doit donc travailler sur des domaines de taille finie. Lorsque cette limitation du domaine de résolution est artificielle, on souhaite qu'elle soit la plus transparente possible vis-à-vis des équations mises en jeu. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, cela veut dire qu'il faut que la frontière laisse le fluide s'écouler librement quand il la traverse, comme si l'on n'avait pas introduit de frontière en aval de l'écoulement. Or ce type de comportement au bord ne peut pas se modéliser via des conditions de Dirichlet, mais par des conditions dites de **frontière ouverte**.

La détermination de telles conditions est un problème complexe, crucial si l'on souhaite conserver le libre écoulement du fluide à travers la frontière. Plusieurs conditions de frontières ouvertes pour Navier-Stokes ont été proposées dans la littérature.

2.2.1 Les conditions de frontière ouverte utilisées pour Navier-Stokes

Durant les dernières années, de nombreux auteurs ont considéré la question des conditions aux limites artificielles pour différents types d'équations. Dans le cadre de notre travail, nous allons maintenant dresser une liste (la plus exhaustive possible) des conditions aux limites artificielles proposées dans la littérature pour les équations de Navier-Stokes et leur version linéarisée (équations d'Oseen), en précisant les résultats disponibles d'existence et d'unicité des solutions. Ces conditions peuvent être classifiées selon plusieurs catégories :

- conservation de l'énergie,
- imposition de flux moyens,
- conservation du tenseur des contraintes.

Conservation de l'énergie Des conditions aux limites impliquant la pression ont d'abord été étudiées dans un article de Bègue *et al* [4] pour les équations de Stokes. La valeur de la pression était directement imposée aux bords. La condition a ensuite été généralisée pour les équations de Navier-Stokes dans [5]. Les auteurs y ont proposé la condition

$$p + \frac{1}{2}\|v\|^2 = p^{ref}, \tag{2.3}$$

qui lie la pression au module de la vitesse. Alors que les simulations fournissent de bons résultats pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds, les simulations numériques effectuées par Bruneau et Fabrie [13] montrent que ce n'est pas le cas pour des valeurs élevées de celui-ci. En effet, les conditions (2.3) perturbent la solution en amont de la sortie, car les tourbillons y sont réfléchis.

Contrainte de valeurs moyennes Heywood *et al* [52] ont présenté une formulation des équations de Navier-Stokes avec des conditions aux limites portant sur des quantités moyennes. Le cadre applicatif est plutôt large, mais on peut citer en particulier la modélisation d'écoulements sanguins (voir [31] par exemple), pour lequel on ne connaît en général que la pression ou le débit moyen à travers une section de veine.

Les auteurs proposent, pour différents cas de figure, des contraintes à la frontière ouverte, consistant à imposer le flux ou une pression moyenne :

– soit on impose la valeur moyenne de la pression

$$\frac{1}{|S_i|}\int_{S_i} p\, dS = P_i(t),$$

où S_i désigne l'ouverture en entrée ou en sortie.

– soit on impose la valeur du flux

$$\int_{S_i} v \cdot n\, dS = F_i(t).$$

Les $F_i(t)$ doivent vérifier la relation $\sum_i F_i(t) = 0$, à cause de la contrainte d'incompressibilité du fluide.

Les auteurs proposent une formulation faible de chacun de ces deux problèmes, qui mène à des problèmes bien posés. Cette formulation faible fait apparaître des conditions naturelles qui s'écrivent :

$$\begin{cases} p - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial v}{\partial n} \cdot n = c_i \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} \cdot \tau = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

sur chaque ouverture S_i. La constante c_i est P_i dans le cas où l'on impose la pression moyenne à travers l'ouverture, et une constante *a priori* inconnue dans le cas où l'on impose le flux.

Ces conditions fournissent de bons résultats, même pour des valeurs raisonnablement élevées du nombre de Reynolds, comme en attestent les résultats de la figure 2.1.

Les auteurs fournissent ensuite, pour chacun des deux problèmes aux limites considérés, un résultat d'existence de solutions faibles locales en temps sous l'hypothèse de données suffisamment petites.

Théorème 2.5 (Existence) *On considère le problème constitué des équations de Navier-Stokes, admettant comme conditions aux frontières ouvertes les conditions sur la pression (2.4) introduites précédemment dans ce paragraphe. Pour n'importe quel P_i suffisamment régulier et pour n'importe quelle valeur initiale $v_0 \in J_1^* = \{\varphi \in W_2^1(\Omega) : \varphi|_{\partial\Omega} = 0, \nabla \cdot \varphi = 0\}$, il existe un nombre positif T et une unique solution faible régulière de la formulation faible de ce problème, définie sur au moins l'intervalle $0 \leq t \leq T$, et qui satisfasse $v(t = 0) = v_0$. La solution existe pour tout $t \geq 0$ si P et ∇v_0 sont suffisamment petits.*

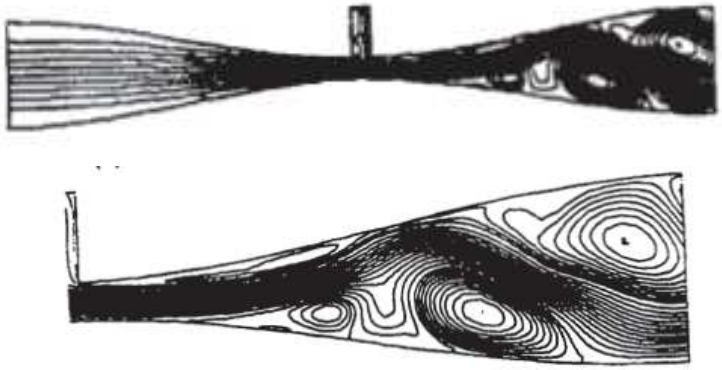


FIGURE 2.1 – Écoulement dans un conduit, mettant en jeu les conditions introduites dans Heywood *et al* [52]. Le flux est imposé à gauche, tandis que la pression est imposée sur les ouvertures supérieure et droite. Le nombre de Reynolds est égal à 1000. La figure inférieure est un zoom de l'écoulement dans la partie droite du conduit. *(d'après Heywood et al [52])*

Un résultat analogue existe en considérant le flux moyen aux ouvertures plutôt que la pression. Ce résultat est valable en dimension 2 et en dimension 3.

Dans le cas stationnaire en dimension 2, Neustupa [70] a complété ces travaux en proposant un résultat d'existence et d'unicité :

Théorème 2.6 (Existence) *Il existe ε tel que, si $\|g\|_{H^s(\Gamma_i)^2} < \varepsilon$, alors il existe une solution au problème faible (avec la fonction test prise dans $\{v \in X / \operatorname{div} v = 0$ dans $\Omega\}$ où $X = \{v \in H^1(\Omega)^2 / v = 0$ en entrée de l'écoulement$\}$).*

Théorème 2.7 (Unicité) *Il existe une constante $R > 0$ telle que, si v_1 et v_2 sont deux solutions du problème précédent telles que $\|\nabla v_1\|_{L^2(\Omega)^4} \leq R$ et $\|\nabla v_2\|_{L^2(\Omega)^4} \leq R$, alors $v_1 = v_2$.*

Conservation du tenseur des contraintes De nombreux auteurs ont utilisé le tenseur des contraintes dans leurs conditions aux limites. Ganesh [42] a considéré un problème de Stokes homogène. En écrivant la formulation variationnelle associée, le tenseur des contraintes σ est apparu naturellement comme quantité à imposer en sortie :

$$\sigma \cdot n = 0. \tag{2.5}$$

L'article présentait de bons résultats numériques à faible valeur du nombre de Reynolds.

Bruneau et Fabrie [13] ont ensuite appliqué des conditions aux limites similaires, mais non-homogènes, en imposant la contrainte issue d'un fluide de référence, à un écoulement de Navier-Stokes. La condition sur le bord en sortie s'écrit alors :

$$\sigma(v,p)\cdot n = \sigma(v^{ref},p^{ref})\cdot n \tag{2.6}$$

où v^{ref} et p^{ref} sont respectivement la vitesse et la pression issues d'un écoulement de référence. Pour celui-ci, les auteurs choisissent un écoulement de Stokes sur la même géométrie, voire une géométrie plus grande. Numériquement, les deux conditions de frontière ouverte (2.5) et (2.6) fournissent de bons résultats pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds. En revanche, on observe une très forte réflexion en sortie pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds, comme on l'observe sur la figure 2.2.

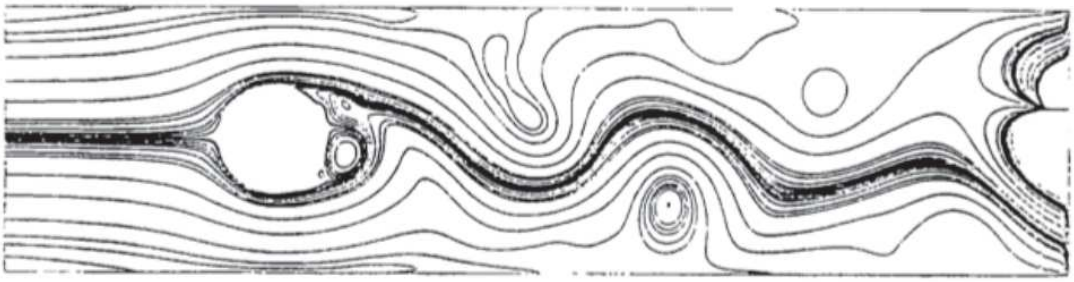


FIGURE 2.2 – Écoulement derrière un cylindre avec la condition (2.6) pour Re = 10^5, *d'après Bruneau et Fabrie [13].*

Dans ce même article, les auteurs proposent une amélioration empirique de ces conditions aux bords, en prenant en compte la non-linéarité du système de Navier-Stokes. Ils ont proposé les conditions suivantes :

$$\sigma(v,p)\cdot n + \frac{1}{2}(v\cdot n)^-(v-v^{ref}) = \sigma(v^{ref},p^{ref})\cdot n, \tag{2.7}$$

$$\text{où} \quad (v\cdot n)^- = \begin{cases} 0 & \text{si } v\cdot n > 0 \\ v\cdot n & \text{si } v\cdot n < 0 \end{cases}$$

La non-linéarité dans la condition aux limites n'est donc présente que lorsque le fluide entre dans le domaine. Quand le fluide est sortant, le terme $(v\cdot n)^-$ s'annule, et la condition (2.7) revient à imposer uniquement la contrainte issue de l'écoulement de référence. À forte valeur du nombre de Reynolds, le terme non-linéaire est crucial pour éviter les réflexions à l'interface, et l'explosion de la solution, comme on peut l'observer sur la figure 2.3. Aucun résultat rigoureux n'est toutefois encore disponible à notre connaissance pour donner une justification de la méthode, et pour comprendre précisément l'influence du terme non linéaire.

Par ailleurs, les auteurs fournissent dans [14] des résultats d'existence et d'unicité des solutions de Navier-Stokes avec ces conditions en sortie.

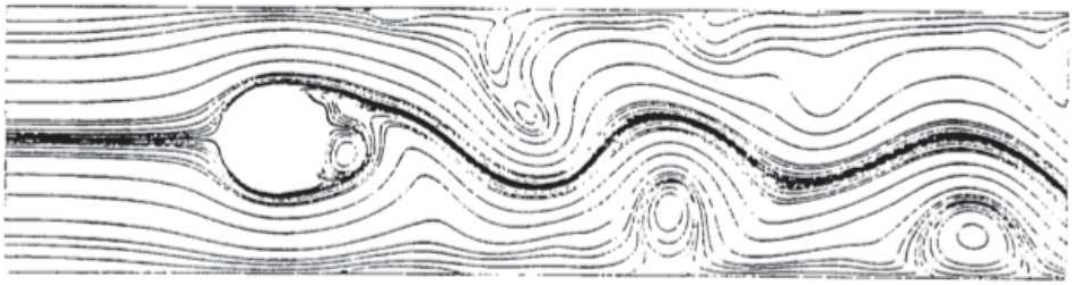


FIGURE 2.3 – Écoulement derrière un cylindre avec la condition (2.7) pour Re = 10^5, *d'après Bruneau et Fabrie [13].*

Théorème 2.8 (Existence) *Soit Ω un domaine connexe borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \leq 3$) avec des frontières régulières. Alors, en notant ici $u = v - v^{ref}$ et $q = p - p^{ref}$, pour v^{ref} dans $H^2(\Omega)$ et u_0 dans H_0, il existe au moins une solution (u, q) dans $V \times Q$ du système de Navier-Stokes avec les conditions (2.7) en sortie écrit sous formulation faible, avec $V = L^\infty([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T]; H_0^1(\Omega))$ et Q le dual de $\{\pi \in H^1([0,T]; L^2(\Omega))/\pi(T) = 0\}$.*

Théorème 2.9 (Unicité) *Soit $(u, q) \in V \times Q$ une solution du problème issu de la formulation faible des équations de Navier-Stokes avec les conditions (2.7) en sortie. Si la dimension est égale à 2, alors u est unique.*

En 2000, Bruneau [12] a étendu ces conditions au cas des équations de Navier-Stokes compressibles. Puis, Boyer et Fabrie [9] ont démontré que le problème était également bien posé dans ce cadre, en fournissant un résultat d'existence de solutions faibles globales en 2D et en 3D, la question de l'unicité restant ouverte, car la dépendance de la solution vis-à-vis de l'écoulement de référence est difficile à évaluer.

2.2.2 Les conditions absorbantes

Les conditions absorbantes sont des conditions de frontières ouvertes idéales, ne provoquant, par définition, aucune réflexion sur la frontière. Elles consistent à utiliser la relation exacte vérifiée par la quantité sortant du domaine. Une méthode générale pour dériver de telles conditions a été introduite par Engquist et Majda [27] dans le cadre des équations hyperboliques. L'idée générale consiste à réaliser une transformée de Fourier en temps et en espace, en ne conservant que la coordonnée normale à la frontière ouverte. Cette transformée de Fourier mène à une condition pseudo-différentielle sur cette frontière.

L'opérateur ainsi obtenu n'étant en général local ni en temps ni en espace, les auteurs ont proposé une méthode basée sur des approximations de Taylor et de Padé du symbole de ces opérateurs pseudo-différentiels pour arriver à des conditions aux limites qui s'expriment sous la forme d'opérateurs locaux, utilisables numériquement.

À ma connaissance, il n'existe pas à l'heure actuelle de travail donnant des conditions absorbantes pour les équations de Navier-Stokes dans leur version complète non-liénaire. Par contre Halpern [49], puis Halpern et Schatzman [50] ont proposé des conditions absorbantes exactes et approchées respectivement pour l'équation d'advection-diffusion et pour les équations de Navier-Stokes linéarisées (équations d'Oseen)

$$\begin{cases} \partial_t v + (a \cdot \nabla) v - \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta v + \nabla p = f & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times [0, T] \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times [0, T] \\ v(t = 0) = v_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Dans le cadre d'une interface en $x = 0$ entre deux domaines sur chacun desquels on résoudrait l'équation d'Oseen, alors, si on impose une condition de Dirichlet $v = g$ sur l'interface, les auteurs fournissent le résultat d'existence et d'unicité suivant pour le problème sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & v \in L^\infty \left(\mathbb{R}, H(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})\right) \\ & \nabla v \in L^2 \left(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})\right) \\ & \partial_t v \in L^2 \left(\mathbb{R}, W'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})\right) \\ & \nabla p \in L^\infty \left(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})\right) \cap L^2 \left(\mathbb{R}, H^{-1}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})\right). \end{aligned}$$

De plus, l'opérateur absorbant à l'interface entre les deux domaines est $\mathcal{L}$, de symbole L, défini dans l'espace de Fourier par :

$$L = \begin{pmatrix} \frac{ik}{|k|} a_2 + \frac{|k|}{\mathrm{Re}} + \frac{\rho}{2} & \frac{-i\sigma(a_1+\rho)}{2} \\ \frac{i\sigma(\rho - a_1)}{2} & \frac{|k|}{\mathrm{Re}} + \frac{\rho}{2} \end{pmatrix},$$

où τ est la variable de Fourier complexe associée à t, et k celle associée à y, $\rho = a_1 + 2\lambda/\mathrm{Re}$ et $\lambda = -2\frac{i(\tau + a_2 k) + |k|^2}{a_1 + \rho}$. L'opérateur $\mathcal{L}$ n'étant pas local en espace, à cause de la transformée de Hilbert nécessaire pour traiter les termes en $|k|$, Halpern et Schatzman en construisent une série d'approximations, et établissent pour ces approximations des résultats d'existence et d'unicité des solutions des équations d'Oseen.

Il est à noter que ces conditions n'ont, à ma connaissance, pas encore fait l'objet d'une implémentation numérique.

Chapitre 3

Schémas numériques pour Navier-Stokes

Dans le chapitre précédent, on a soulevé la question de la difficulté de prouver l'existence et l'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes. De plus, même si l'on était capable de les prouver, on ne serait pas en mesure de fournir d'expression analytique des solutions, sauf dans des cas très simplifiés. Il est donc nécessaire de recourir à une résolution numérique approchée.

Le but de ce chapitre est de détailler les choix réalisés en matière de discrétisation des équations de Navier-Stokes, pour les tests numériques qui seront présentés ultérieurement. On ne cherchera pas ici à détailler toutes les propriétés des schémas utilisés, ni à faire une liste exhaustive des méthodes disponibles. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter aux références citées.

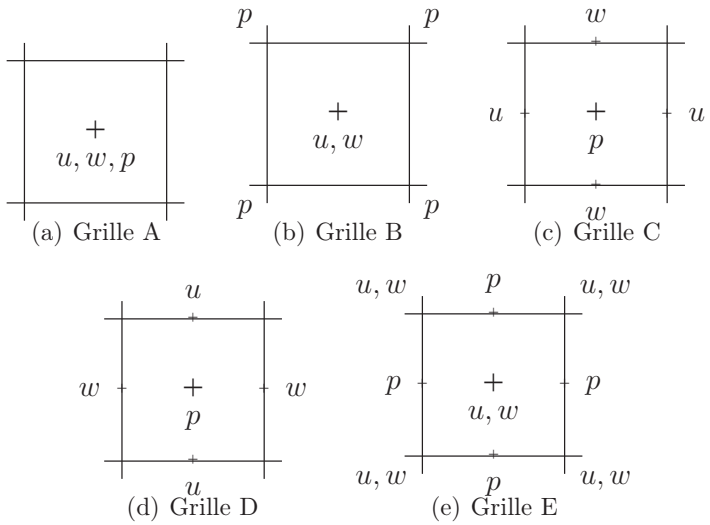
3.1 Discrétisation spatiale

On se place dans le cadre du cas-test de la cavité entraînée (voir le chapitre 4) en 2 dimensions, et on notera dans toute la suite (u, w) les composantes du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$. Cela veut dire en particulier que l'on va considérer des conditions de Dirichlet sur le bord du domaine, et on notera $\boldsymbol{g} = (g_x, g_z)^T$ la valeur de la vitesse imposée aux bords du domaine Ω :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega.$$

3.1.1 Maillage

La méthode numérique d'approximation choisie pour ce travail est la méthode des différences finies. Pour une telle discrétisation, différents choix sont disponibles pour placer les variables discrètes sur un maillage. Arakawa et Lamb [2] ont introduit cinq grilles répertoriées de A à E, qui diffèrent selon la disposition de la pression et des



(a) Grille A (b) Grille B (c) Grille C

(d) Grille D (e) Grille E

FIGURE 3.1 – Grilles d'Arakawa, respectivement de A à E.

composantes de la vitesse. Par exemple dans la grille A, toutes les inconnues sont évaluées au centre des mailles – c'est ce qu'on appelle une grille colocalisée – tandis que dans les autres grilles – dites décalées – les inconnues sont localisées en des points différents. La figure 3.1 illustre les différences de positionnement des inconnues selon les grilles.

Dans notre cas, la discrétisation spatiale se fera sur une grille C dans la classification d'Arakawa. Avant même Arakawa, cette grille a été introduite par Harlow et Welch [51], et est très largement utilisée depuis. La pression y est stockée au centre des mailles, tandis que les composantes de la vitesse sont calculées sur les arêtes des mailles.

Malgré une apparente complexité, la grille C permet de simplifier énormément les calculs de discrétisation. En effet, l'utilisation de schémas centrés pour le gradient de pression et la divergence va permettre de discrétiser l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur les arêtes du maillage et l'équation de conservation de la masse au centre des mailles.

3.1.2 Schéma de discrétisation en espace

On note N_x le nombre de mailles selon la direction horizontale, et N_z le nombre de mailles selon la direction verticale. Le pas du maillage sera Δx (respectivement Δz) dans la direction horizontale (respectivement verticale).

Les indices pour u, w et p seront entiers au centre des mailles, avec $i \in [1, N_x]$ et $j \in [1, N_z]$, et on notera en utilisant des demi-indices les inconnues localisées sur les arêtes des mailles, comme l'illustre la figure 3.2. L'inconnue discrète $u_{i-\frac{1}{2},j}$ approche la solution analytique $u\left((i-1/2)\,\Delta x,\ j\Delta y\right)$, et il en ira de même pour les autres inconnues.

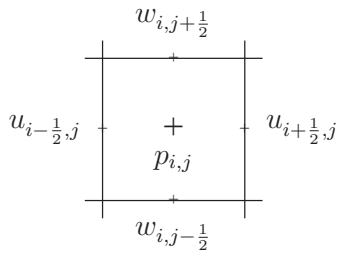


FIGURE 3.2 – Indices de discrétisation spatiale sur une grille C d'Arakawa.

Plusieurs termes des équations seront discrétisés selon des schémas centrés d'ordre 2 :

– Le laplacien (sauf indication contraire le long des bords) :

$$\Delta u_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i-\frac{3}{2},j} - 2u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\Delta z^2}.$$

– L'équation de conservation de la masse va s'écrire aux centre des mailles de la façon suivante :

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{w_{i,j+\frac{1}{2}} - w_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} = 0.$$

– Le gradient de pression est discrétisé par :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x},$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta z}.$$

On reviendra sur la discrétisation des autres termes dans les paragraphes à venir.

3.2 Schéma de discrétisation temporelle

On choisit de discrétiser en temps les équations de Navier-Stokes incompressibles à l'aide d'un schéma d'Euler d'ordre 1. Le laplacien et le gradient de pression seront traités de manière implicite, tandis que le terme non-linéaire sera en revanche discrétisé de manière explicite :

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{v}^{n+1} - \boldsymbol{v}^n}{\Delta t} + (\boldsymbol{v}^n \cdot \nabla)\boldsymbol{v}^n - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \boldsymbol{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = 0 \\ \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}^{n+1} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

À cause du terme explicite, la résolution des équations discrètes est soumise à une condition de stabilité sur les pas de temps et d'espace. Cette condition est connue sous le

nom de condition de Courant-Friedrichs-Lewy, en référence à leur article [23], ou encore CFL, et dépend autant des équations considérées que des schémas de discrétisation mis en œuvre.

Deux codes différents seront utilisés : le premier (voir §3.3) utilisera la méthode de projection ainsi qu'une discrétisation d'ordre 1 pour le terme non linéaire, tandis que le second code (cf §3.4), basé sur une résolution monolithique des équations de Navier-Stokes utilisera une discrétisation d'ordre 3 pour le terme d'auto-convection. Les paragraphes à venir vont expliciter ces différences.

3.3 Méthode basée sur la méthode de projection

3.3.1 Méthode de projection

La méthode de projection est un moyen efficace de résolution numérique des problèmes d'écoulement de fluides incompressibles instationnaires. Elle a été introduite par Chorin [20] [21] et indépendamment par Temam [87], pour la résolution des équations de Navier-Stokes, et continue de faire l'objet de nombreuses recherches (on pourra se référer aux revues récentes de Brown *et al* [11] ou de Guermond *et al* [47]). Le principal avantage de la méthode de projection est de découpler le calcul des champs de vitesse et de pression.

L'algorithme de la méthode de projection est basé sur la décomposition de Helmholtz d'un champ de vecteurs en une partie à divergence nulle et une partie à rotationnel nul. On commence par rappeler le théorème de Helmholtz.

Théorème 3.1 (Théorème de Helmholtz-Hodge) *Soit $\boldsymbol{v}$ un champ vectoriel de classe $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathrm{R}^3)$ où Ω est soit un domaine compact et connexe de frontière $\partial\Omega$ régulière, soit R^3. Alors il existe un champ vectoriel $\boldsymbol{A}$ et un champ scalaire φ tels que :*

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A} - \nabla\varphi.$$

Les termes $\nabla \times \boldsymbol{A}$ et $\nabla\varphi$ sont respectivement les composantes à divergence nulle et à rotationnel nul du champ de vecteur $\boldsymbol{v}$. Cette décomposition est appelée décomposition de Helmholtz.

Par ailleurs, ces deux champs peuvent être caractérisés par les expressions suivantes :
– Si Ω est compact,

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,d\omega' - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot d\sigma',$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,d\omega' + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\times d\sigma'.$$

– *Si* $\Omega = \mathrm{R}^3$ *et si* $\boldsymbol{v}$ *décroît à l'infini en* $O(1/r^2)$*, alors les égallités précédentes restent valables en ignorant les intégrales de surfaces. D'autre part, parmi les champs qui décroissent à l'infini (ce qui est le cas s'ils sont définis par les relations précédentes), la décomposition est unique (*φ *n'est défini qu'à une constante près, et* $\boldsymbol{A}$ *ne l'est qu'à un gradient près) et les deux termes de la décomposition sont orthogonaux avec le produit scalaire de* L^2*, c'est-à-dire :*

$$\int_\Omega \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \nabla\varphi \, d\omega = 0.$$

En domaine borné, il n'est pas toujours possible de garantir l'orthogonalité de la décomposition et elle n'est jamais unique. Des variantes de ce théorème existent. Elles portent principalement sur une relaxation des différentes hypothèses (voir [1] par exemple, où $\boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^3$ suffit, ou [35] où la décomposition de Helmholtz-Hodge est utilisée pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité des équations de Navier-Stokes avec condition initiale).

L'application de ce théorème aux équations de Navier-Stokes s'effectue de la manière suivante. On commence par réécrire l'équation de la quantité de mouvement sous la forme

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathcal{F}(\boldsymbol{v}), \tag{3.2}$$

où $\mathcal{F}(\boldsymbol{v})$ comprend les forces de viscosité ainsi que le terme d'auto-convection. On applique ensuite la décomposition de Helmholtz au champ $\mathcal{F}(\boldsymbol{v})$. Sa composante à divergence nulle sera la dérivée temporelle de la vitesse $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$, d'après l'équation de conservation de la masse, et sa composante à rotationnel nul sera le gradient de pression ∇p. Cette décomposition existe et est unique si le problème aux valeurs initiales pour les équations de Navier-Stokes est bien posé (voir [21]).

La méthode de projection est une méthode de splitting qui se base sur la décomposition de Helmholtz de l'équation (3.2). À chaque pas de temps, on calcule au début un champ de vitesse intermédiaire dans H^1. On applique alors le théorème de Helmholtz à ce champ intermédiaire. On sait donc qu'il va se décomposer en une partie à rotationnel nul, à savoir le gradient de pression, et un terme à divergence nulle, c'est-à-dire la solution au pas de temps suivant. La dernière étape du splitting en temps consiste alors à éliminer la composante à rotationnel nul du champ de vitesse intermédiaire. Cette correction correspond à une projection de ce champ de vitesse dans l'espace des fonctions à divergence nulle $\{\boldsymbol{v} \in H^1,\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\}$, et permet d'obtenir le champ de vitesse au pas de temps suivant.

De façon plus précise, les étapes s'écrivent de la façon suivante :

– À chaque pas de temps, on commence par calculer une solution sans tenir compte de la condition de divergence nulle. Pour cela, on traite d'abord le terme non-linéaire

de manière explicite :

$$\frac{\boldsymbol{v}^* - \boldsymbol{v}^n}{\Delta t} + (\boldsymbol{v}^n \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}^n = 0, \text{ dans } \Omega. \tag{3.3}$$

– Puis on prend en compte la viscosité (résolution d'un système de Helmholtz) :

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{v}^{**} - \boldsymbol{v}^*}{\Delta t} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \boldsymbol{v}^{**} = 0 \text{ dans } \Omega & \text{(3.4a)} \\ \boldsymbol{v}^{**} = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega, & \text{(3.4b)} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{g}$ désigne ici la valeur de la condition de Dirichlet imposée au bord du domaine. Dans ces systèmes, $\boldsymbol{v}^*$ et $\boldsymbol{v}^{**}$ désignent des approximations de la vitesse au temps $n+1$. La vitesse $\boldsymbol{v}^{**}$ n'est *a priori* pas à divergence nulle.

– Pour remédier à cela, on va maintenant résoudre un problème de Poisson pour la pression :

$$\begin{cases} \Delta p^{n+1} = \dfrac{1}{\Delta t} \operatorname{div} \boldsymbol{v}^{**} \text{ dans } \Omega & \text{(3.5a)} \\ \dfrac{\partial p^{n+1}}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. & \text{(3.5b)} \end{cases}$$

Pour qu'un tel problème soit bien posé, les seconds membres des deux équations (3.5a) et (3.5b) doivent vérifier la condition de compatibilité suivante :

$$\int_\Omega \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div} \boldsymbol{v}^{**} = \int_{\partial\Omega} 0 = 0.$$

Cette condition est vérifiée si et seulement si $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{g} \cdot \vec{n} = 0$ d'après le théorème de la divergence. Mais même alors, on note qu'il n'y a pas unicité de la solution de ce système. La solution fournie n'est définie qu'à une constante additive près. Il convient donc d'imposer la valeur de la pression en un point, pour lever l'indétermination sur la valeur de la constante. Le choix de cette valeur n'a cependant pas d'importance dans la mesure où seul le gradient de pression intervient dans les équations de Navier-Stokes.

– Enfin, on projette $\boldsymbol{v}^{**}$ dans un espace à divergence nulle pour obtenir $\boldsymbol{v}^{n+1}$:

$$\frac{\boldsymbol{v}^{n+1} - \boldsymbol{v}^{**}}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = 0. \tag{3.6}$$

On peut alors vérifier que la vitesse $\boldsymbol{v}^{n+1}$ ainsi construite est bien à divergence nulle. En effet, si on prend la divergence de l'équation (3.6) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{v}^{n+1} &= \operatorname{div} \boldsymbol{v}^{**} - \Delta t \Delta p^{n+1} \\ &= 0 \text{ d'après (3.5).} \end{aligned}$$

C'est une méthode très simple à mettre en œuvre : toutes les inconnues sont découplées les une des autres, et il y a juste à résoudre deux problèmes de Helmholtz et de Poisson. De plus, cette méthode fournit bien une approximation de la solution des équations de Navier-Stokes incompressibles. En effet, si on somme les équations (3.3), (3.4) et (3.6), on obtient :

$$\frac{\boldsymbol{v}^{n+1}-\boldsymbol{v}^{n}}{\Delta t}+\boldsymbol{v}^{n}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^{n}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v}^{**}+\nabla p^{n+1}=0,$$

et la vitesse $\boldsymbol{v}^{n+1}$ est à divergence nulle. Toutefois, cette facilité a pour conséquence, comme on le verra au chapitre 6, de limiter les possibilités en terme de décomposition de domaine. Enfin, la décomposition de la méthode de projection existe et est déterminée de manière unique à chaque fois que le problème de Navier-Stokes avec condition initiale est bien posé.

3.3.2 Discrétisation du terme non linéaire

Plutôt que de travailler avec le terme d'auto-convection sous la forme $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$, on utilisera la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u&=\frac{\partial\,u^2}{\partial x}+\frac{\partial\,(uw)}{\partial z}=\operatorname{div}\begin{pmatrix}u^2\\ uw\end{pmatrix}\\(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)w&=\frac{\partial\,(uw)}{\partial x}+\frac{\partial\,w^2}{\partial z}=\operatorname{div}\begin{pmatrix}uw\\ w^2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Il faut noter que l'égalité n'est vraie que dans le cas d'un écoulement incompressible.

On va vouloir discrétiser les composantes du vecteur $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ respectivement sur les arêtes verticales et horizontales du maillage pour que la discrétisation de l'équation (3.3) soit consistante. On ne donnera le détail de la discrétisation que pour la vitesse horizontale, le cas de la vitesse verticale se traite de manière similaire.

On va avoir besoin de calculer u^2 aux centres des mailles en (i,j) et le produit uw aux coins du maillage en $(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$. Ainsi, les dérivées respectivement selon x et selon z de ces deux termes s'écriront au milieu des arêtes verticales. Ces quantités sont approchées à l'aide de moyennes d'ordre 2. On utilisera la notation $\bar{\cdot}^z$ (respectivement $\bar{\cdot}^x$) pour désigner la moyenne verticale (respectivement horizontale) définie ci-dessous :

$$\begin{aligned}(\bar{u}^x)_{i,j}&=\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}+u_{i+\frac{1}{2},j}}{2}\\(\bar{u}^z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}&=\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}+u_{i+\frac{1}{2},j+1}}{2}\\(\bar{w}^x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}&=\frac{w_{i,j+\frac{1}{2}}+w_{i+1,j+\frac{1}{2}}}{2}\\(\bar{w}^z)_{i,j}&=\frac{w_{i,j+\frac{1}{2}}+w_{i,j-\frac{1}{2}}}{2}.\end{aligned}$$

En utilisant cette notation, la discrétisation du terme non-linéaire $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u$ dans (3.3) va s'écrire :

$$\frac{u^*_{i-\frac{1}{2},j}-u^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta t}+\frac{((\bar{u}^x)^n_{i,j})^2-((\bar{u}^x)^n_{i-1,j})^2}{\Delta x}+\frac{(\bar{u}^z\bar{w}^x)^n_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-(\bar{u}^z\bar{w}^x)^n_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta z}=0 \quad (3.7)$$

Cette discrétisation utilise des schémas centrés pour les dérivées du terme non-linéaire. Elle est appropriée tant que les quantités ne sont pas transportées trop loin à chaque pas de temps (en pratique sur plus d'une maille, voir [53]). Pour des écoulements plus rapides, ou pour des écoulements à forte valeur du nombre de Reynolds, la discrétisation à utiliser devrait être *upwind* plutôt que centrée (voir [85], section 6.7). Dans cet ouvrage, Strang décrit un schéma mixte, utilisant le paramètre $\gamma\in[0,1]$, défini par :

$$\gamma=\min\left(1.2\,\Delta t\,\max\left(\max_{i,j}|u|_{i-\frac{1}{2},j},\ \max_{i,j}|v|_{i,j+\frac{1}{2}}\right),\ 1\right).$$

La valeur de γ correspond à la fraction maximale de cellule que l'information peut traverser en un pas de temps, multipliée par 1.2 et bornée à 1 (on verra par la suite pourquoi). Le facteur 1.2 est issu d'expériences numériques réalisées dans [46]. La valeur du paramètre permettra d'ajuster entre un schéma centré et un schéma *upwind*.

L'implémentation de ce "choix" est réalisé de la façon suivante. Par analogie avec la notation de moyenne introduite précédemment, on introduit les deux notations $\breve{\cdot}^x$ (respectivement $\breve{\cdot}^z$) pour désigner des différences horizontales (respectivement verticales) :

$$\begin{aligned}
(\breve{u}^x)_{i,j} &= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}-u_{i-\frac{1}{2},j}}{2}\\
(\breve{u}^z)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1}-u_{i-\frac{1}{2},j}}{2}\\
(\breve{w}^x)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{w_{i,j+\frac{1}{2}}-w_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{2}\\
(\breve{w}^z)_{i,j} &= \frac{w_{i,j+\frac{1}{2}}-w_{i,j-\frac{1}{2}}}{2}.
\end{aligned}$$

Alors, l'équation (3.7) se généralise en :

$$\begin{aligned}
&\frac{u^*_{i-\frac{1}{2},j}-u^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta t}+\frac{((\bar{u}^x)^2-\gamma|\bar{u}^x|\breve{u}^x)^n_{i,j}-((\bar{u}^x)^2-\gamma|\bar{u}^x|\breve{u}^x)^n_{i-1,j}}{\Delta x}\\
&+\frac{(\bar{u}^z\bar{w}^x-\gamma|\bar{w}^x|\breve{u}^z)^n_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-(\bar{u}^z\bar{w}^x-\gamma|\bar{w}^x|\breve{u}^z)^n_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta z}=0.
\end{aligned}$$

Il est clair que pour $\gamma=0$, on obtient bien le schéma centré écrit précédemment. Concentrons-nous sur le terme $((\bar{u}^x)^2-\gamma|\bar{u}^x|\breve{u}^x)_{i,j}$. Ce terme se réécrit, suivant le signe

de $\bar{u}^x_{i,j}$ en :

$$\left((\bar{u}^x)^2 - \gamma|\bar{u}^x|\breve{u}^x\right)_{i,j} = \begin{cases} \bar{u}^x_{i,j}\left(\dfrac{1-\gamma}{2}u_{i+\frac{1}{2},j} + \dfrac{1+\gamma}{2}u_{i-\frac{1}{2},j}\right) & \text{si } \bar{u}^x_{i,j} \geq 0 \\ \bar{u}^x_{i,j}\left(\dfrac{1+\gamma}{2}u_{i+\frac{1}{2},j} + \dfrac{1-\gamma}{2}u_{i-\frac{1}{2},j}\right) & \text{si } \bar{u}^x_{i,j} < 0. \end{cases}$$

Quand $\gamma = 1$, u^2 est discrétisé en (i,j) par $\bar{u}^x_{i,j}u_{i\pm\frac{1}{2},j}$ suivant le sens de la vitesse horizontale. La discrétisation n'est plus centrée mais *upwind*. Il en va de même pour les autres termes de l'équation. Le schéma de discrétisation d'une manière générale est une combinaison convexe entre le cas $\gamma = 0$ et le cas $\gamma = 1$.

On peut écrire aussi, par analogie, la discrétisation de la composante verticale de l'équation (3.3) :

$$\frac{w^*_{i,j-\frac{1}{2}} - w^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{(\bar{u}^z\bar{w}^x - \gamma|\bar{u}^z|\breve{w}^x)^n_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (\bar{u}^z\bar{w}^x - \gamma|\bar{u}^z|\breve{w}^x)^n_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$
$$+ \frac{((\bar{w}^z)^2 - \gamma|\bar{w}^z|\breve{w}^z)^n_{i,j} - ((\bar{w}^z)^2 - \gamma|\bar{w}^z|\breve{w}^z)^n_{i,j-1}}{\Delta z} = 0.$$

3.3.3 Traitement des conditions aux limites

Les conditions aux limites sont gérées classiquement via des points "fantômes". Les points fantômes sont des nœuds fictifs du maillage, situés à l'extérieur du domaine, et qui servent généralement dans la discrétisation des conditions aux limites. Leur intérêt est de permettre de conserver les mêmes schémas de discrétisation spatiale des équations, que l'on soit sur des mailles adjacentes aux bords ou non.

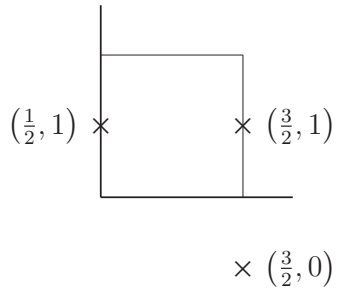


FIGURE 3.3 – Maille du coin inférieur gauche. Les nœuds du maillage pour u sont représentés, ainsi qu'un point fantôme en $\left(\frac{3}{2},0\right)$.

Les conditions de Dirichlet vont s'écrire différemment suivant que les coordonnées de la vitesse s'écrivent sur le bord ou décalées d'une demi-maille à l'extérieur du domaine.

Dans le premier cas, on écrira tout simplement pour la composante horizontale de la vitesse :

$$u_{\frac{1}{2},j} = g_{\frac{1}{2},j}.$$

Par contre, si l'on se place sur le bord inférieur du domaine, la vitesse horizontale devra être approchée à l'aide d'un schéma d'ordre 1 pour estimer la condition de Dirichlet :

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},0} + u_{i+\frac{1}{2},1}}{2} = g_{x,\, i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}},$$

où $u_{i+\frac{1}{2},0}$ est la valeur de u au point fantôme d'indice $\left(i+\frac{1}{2},0\right)$. Les conditions sur les autres bords, et celles faisant intervenir la composante verticale du gradient de la pression se traitent de manière analogue.

3.4 Méthode monolithique

Dans la méthode de projection, le calcul de la vitesse est découplé du calcul de la pression. Une alternative intéressante consiste à résoudre le système (3.1) de manière directe. On va détailler ici les différences de discrétisation opérées par rapport à la discrétisation retenue pour le code précédent.

3.4.1 Schéma de Murman

On s'intéresse ici à une discrétisation d'ordre 3 pour le terme non linéaire des équations de Navier-Stokes incompressibles. Le choix de l'ordre 3 est justifié dans un article de Leonard [61] dans lequel il explique, entre autres, que les schémas d'ordre 3 sont les schémas de plus bas niveaux possibles pour convecter les structures de manière cohérente et capturer les petits tourbillons dans les couches limites. Ces deux points en particulier sont très importants dans le cadre du cas test de la cavité entraînée.

Considèrons dans un premier temps l'équation de transport 1D

$$\partial_t v + \partial_x f(v) = 0$$

et on note $a(v) = f'(v)$, $\lambda = \Delta t/\Delta x$. Le schéma de Murman d'ordre 1, introduit dans [69], s'écrit :

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \left(a^n_{i+\frac{1}{2}}\right)^- \frac{\left(v^n_{i+1} - v^n_i\right)}{\Delta x} + \left(a^n_{i-\frac{1}{2}}\right)^+ \frac{\left(v^n_i - v^n_{i-1}\right)}{\Delta x} = 0, \tag{3.8}$$

où $a^+ = \max(a,0)$ et $a^- = \min(a,0)$ et

$$a^n_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \dfrac{f(v^n_{i+1}) - f(v^n_i)}{v^n_{i+1} - v^n_i} & \text{si } v^n_{i+1} \neq v^n_i \\ f'(v^n_i) & \text{si } v^n_{i+1} = v^n_i. \end{cases} \tag{3.9}$$

C'est un schéma stable et conservatif [69]. Cependant, il introduit aussi de la diffusion numérique.

Pour améliorer ce schéma, Bruneau et Saad [15] l'ont généralisé à l'ordre 3 en espace :

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} = v_i^n + \lambda \Bigg[& \left(-\frac{1}{3} a^n_{i+\frac{1}{2}} \Delta_{i+\frac{1}{2}} v^n - \frac{5}{6} a^n_{i-\frac{1}{2}} \Delta_{i-\frac{1}{2}} v^n + \frac{1}{6} a^n_{i-\frac{3}{2}} \Delta_{i-\frac{3}{2}} v^n \right) \chi_{\mathbb{R}^+}(a^n_{i-\frac{1}{2}}) \\ & + \left(-\frac{1}{3} a^n_{i-\frac{1}{2}} \Delta_{i-\frac{1}{2}} v^n - \frac{5}{6} a^n_{i+\frac{1}{2}} \Delta_{i+\frac{1}{2}} v^n + \frac{1}{6} a^n_{i+\frac{3}{2}} \Delta_{i+\frac{3}{2}} v^n \right) \chi_{\mathbb{R}^-}(a^n_{i+\frac{1}{2}}) \Bigg], \end{aligned} \tag{3.10}$$

où $\Delta_{i-\frac{1}{2}} v = v_i - v_{i-1}$, et $\chi_{\mathbb{R}^+}$ et $\chi_{\mathbb{R}^-}$ sont les fonctions indicatrices, respectivement sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$.

Ce schéma a été initialement écrit pour l'équation de transport. On peut l'appliquer pour la discrétisation du terme d'auto-convection dans les équations de Navier-Stokes incompressibles en identifiant a avec le champ de vitesse $\boldsymbol{v}$. En particulier, son utilisation mène à la discrétisation suivante pour le terme $(w\partial_z u)_{i-\frac{1}{2},j}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u}{\Delta z} + \frac{5}{6} w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \frac{\Delta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u}{\Delta z} - \frac{1}{6} w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}} \frac{\Delta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}} u}{\Delta z} \quad \text{si } v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} > 0 \\ & \frac{1}{3} w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \frac{\Delta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u}{\Delta z} + \frac{5}{6} w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u}{\Delta z} - \frac{1}{6} w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} \frac{\Delta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} u}{\Delta z} \quad \text{si } v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} < 0. \end{aligned}$$

Les autres composantes du terme d'auto-convection se discrétisent de façon similaire.

Ce schéma étant d'ordre 3 en espace, il risque de faire appel à des valeurs à l'extérieur du domaine si on l'utilise dans les mailles près du bord du domaine. Pour remédier à cela, on introduit deux points fantômes en dehors du domaine, sur lesquels les valeurs de la vitesse seront extrapolées en tenant compte de la valeur de la condition de Dirichlet sur le bord. Ces points fantômes permettront de continuer à utiliser le schéma de Murman d'ordre 3 pour la discrétisation du terme non linéaire, même près du bord.

3.4.2 Traitement des conditions aux limites

Contrairement au schéma précédent, on n'utilisera pas ici de points fantômes dans le traitement des conditions aux limites. Pour les traiter, on introduira des nœuds directement sur les bords du domaine. À cause de cela, la discrétisation des laplaciens va différer suivant que l'on soit sur une maille adjacente aux bords ou non. Ainsi, dans le cas où on considère une frontière sur le bord supérieur d'une maille, la discrétisation du laplacien devient :

$$\Delta u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{u^{n+1}_{i-\frac{3}{2},j} - 2u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j} + u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x^2} + \frac{4}{3} \frac{2u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - 3u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j} + u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\Delta z^2}.$$

En contrepartie, aucune approximation n'est réalisée sur l'écriture des conditions de Dirichlet, quelle que soit la frontière ou la composante de la vitesse considérée.

On peut noter que, comme dans la méthode précédente, le schéma baisse d'un ordre au bord pour traiter la condition aux limites. Dans la première méthode, l'utilisation de la moyenne altère la précision de la condition au bord (on réalise une approximation linéaire, donc d'ordre 1), mais on conserve un schéma d'ordre 2 pour le laplacien. En revanche, dans la méthode monolithique, la condition au bord est discrétisée sans introduire d'interpolation, mais le schéma de la différence finie pour la dérivée normale au bord est d'ordre 1.

Chapitre 4

La cavité entraînée

La cavité entraînée est un cas-test classique dans la validation de méthodes numériques et de codes pour les équations de Navier-Stokes, depuis sa première étude dans [17]. En effet, il s'agit d'une situation physique simple, avec des conditions aux limites également très simples et donc compatibles avec la plupart des approches numériques. De plus, pour des valeurs du nombre de Reynolds inférieures à 10 000, le régime est stationnaire, ce qui facilite bien sûr grandement son utilisation pour des benchmarks. De ce fait, beaucoup de littérature existe sur ce sujet (des références seront données dans ce chapitre), et nous l'avons donc choisi nous aussi comme cas-test pour nos expérimentations numériques.

4.1 Présentation

4.1.1 Description

Le cas-test de la cavité entraînée désigne un écoulement incompressible au sein d'un domaine 2D (voire 3D) $x - z$ carré fermé, dans lequel on impose une vitesse sur le bord supérieur, le fluide à l'intérieur du domaine étant entraîné par la paroi supérieure. On résout donc les équations de Navier-Stokes (1.7) en $x - z$ sur le domaine $[0, 1] \times [0, 1]$ avec des conditions aux limites de Dirichlet suivantes :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}(0, z, t) = \boldsymbol{v}(1, z, t) = 0, \quad \forall z, t \\
&\boldsymbol{v}(x, 0, t) = 0, \quad \forall x, t \\
&\boldsymbol{v}(x, 1, t) = 1, \quad \forall x, t.
\end{aligned}$$

L'écoulement obtenu est schématisé à la figure 4.1. On peut noter que le sens du forçage est de la gauche vers la droite sur le schéma. Ce sens sera respecté dans les simulations à venir. Il convient de noter que certains benchmarks imposent un sens opposé, c'est-à-dire un forçage de la droite vers la gauche sur le bord supérieur. Dans ce cas, leurs résultats

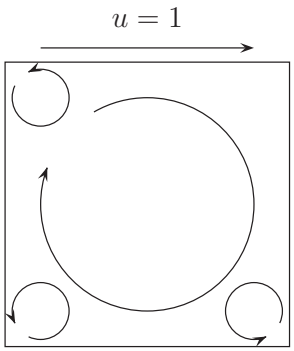


FIGURE 4.1 – Cavité entrainée : vue schématique de l'écoulement. On distingue un tourbillon principal cyclonique occupant l'essentiel du domaine, et des tourbillons secondaires anticycloniques dans les coins.

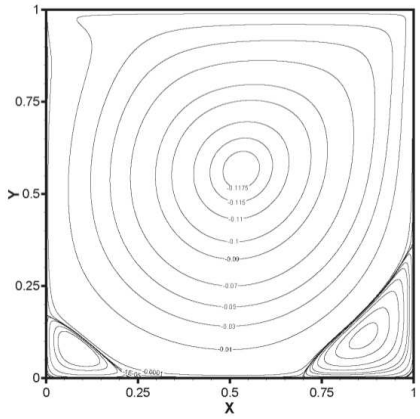
sont similaires, à une symétrie axiale près, par rapport à la droite verticale passant par le centre de la cavité.

4.1.2 Comportement de la solution

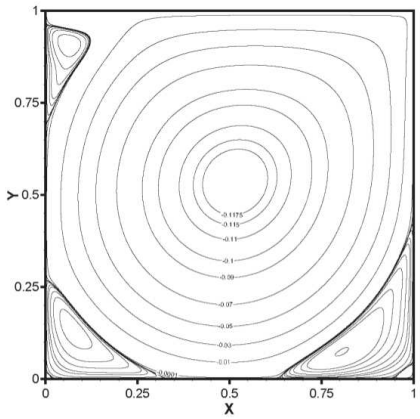
Un équilibre va peu à peu se former entre les forces de viscosité du fluide et les forces de pression, faisant apparaître un large tourbillon central, tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, et plusieurs autres petits tourbillons dans les coins supérieur gauche et inférieurs. Le nombre de tourbillons dans les coins va dépendre de la valeur du nombre de Reynolds : plus celui-ci sera élevé, plus il y aura de tourbillons (voir [28]). Ces tourbillons secondaires, puis tertiaires seront de plus en plus engoncés dans les coins, tournant à contre sens de leur tourbillon adjacent. La figure 4.2 illustre le comportement de la solution des équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Le nombre de tourbillons dans les coins inférieurs et supérieur gauche évolue bien avec le nombre de Reynolds.

De plus, le comportement à long terme des solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles non stationnaires diffère lui aussi avec la valeur du nombre de Reynolds. Ainsi la solution sera stationnaire pour Re inférieur à 5000 et périodique en temps pour un nombre de Reynolds compris en 7 500 et 12 500. La figure 4.3 décrit un cycle complet des lignes de courant de la solution périodique pour Re = 10 000. Au delà de 15 000, la solution devient chaotique : les petits tourbillons dans les coins commencent à fusionner, et peuvent même passer d'un coin à un autre. Sur la figure 4.4, on peut observer les tourbillons d'un même coin évoluer au sein de leur coin, voire fusionner.

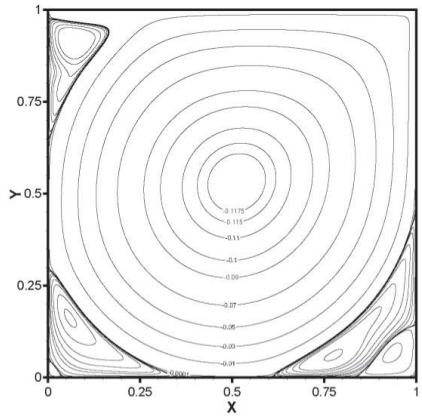
Dans la littérature, les résultats numériques sur le comportement des solutions stationnaires sont cohérents pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds (Re $\leq$ 1000) – on peut consulter entre autres les travaux de Botella et Peyret [6], de Garcia [43] ou



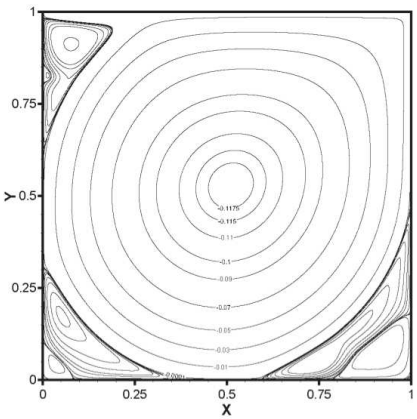
(a) Re = 1000



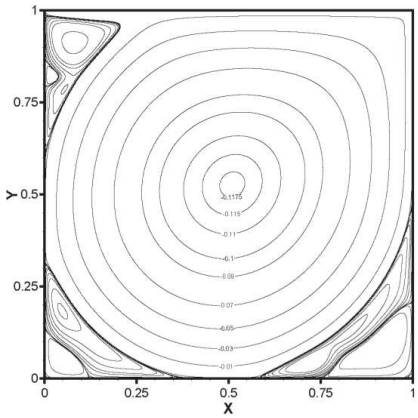
(b) Re = 5000



(c) Re = 10 000



(d) Re = 15 000



(e) Re = 20 000

FIGURE 4.2 – Lignes de courant de la solution des équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles sur une grille 601×601, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds d'après [28]. Noter le nombre de tourbillons secondaires qui croît avec le nombre de Reynolds.

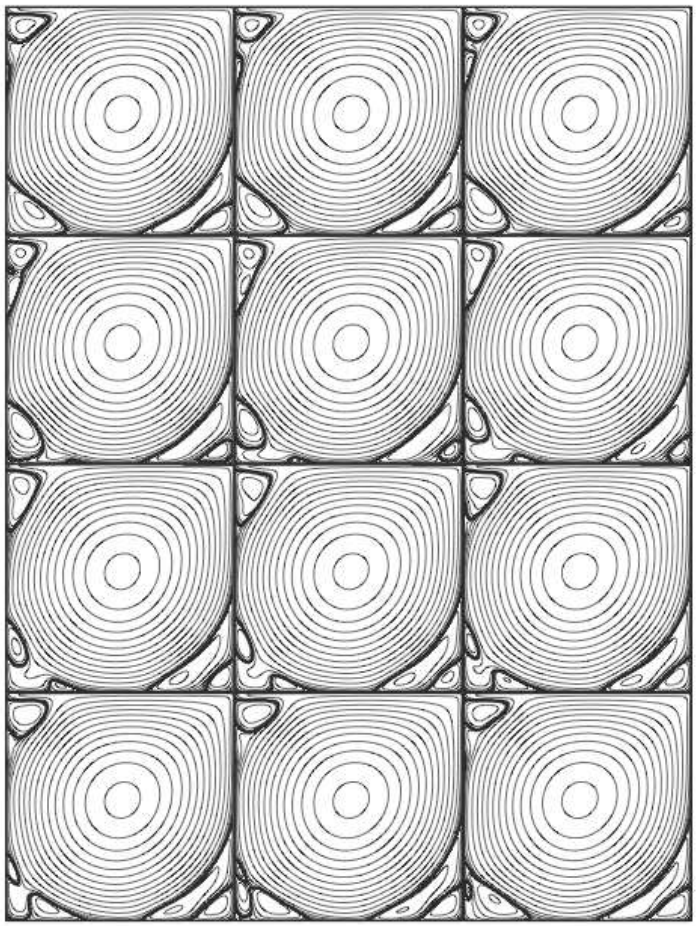


FIGURE 4.3 – Cycle de lignes de courant pour une valeur du nombre de Reynolds de 10 000, d'après [43]. Le sens de lecture est de gauche à droite, et de haut en bas. Cette suite de figures illustre le caractère périodique du régime, de sorte que la première figure (en haut à gauche) est également la suite "chronologique" de la dernière figure (en bas à droite).

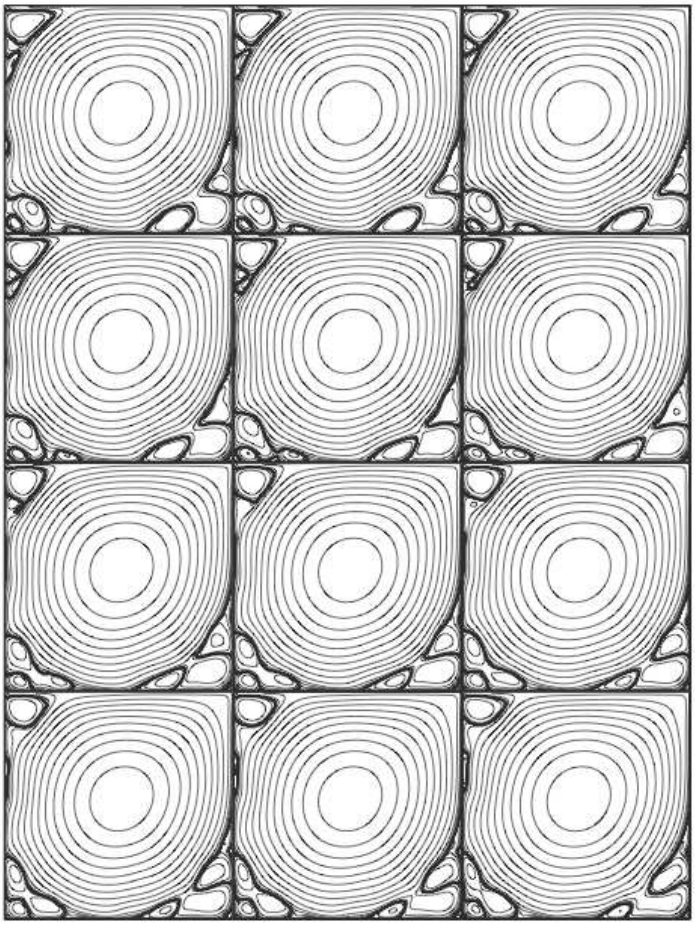


FIGURE 4.4 – Cycle de lignes de courant pour une valeur du nombre de Reynolds de 20 000, d'après [43]. Le sens de lecture est de gauche à droite, et de haut en bas. Le régime est chaotique. Il n'y a plus de schémas de répétition dans le temps des tourbillons situés dans les coins. Les tourbillons secondaires peuvent se déplacer, voire fusionner avec d'autres.

de Ghia *et al* [45]. En revanche, les résultats divergent quand la valeur du nombre de Reynolds augmente. Les analyses de stabilité hydrodynamique prévoient une première bifurcation de Hopf pour une valeur du nombre de Reynolds de 8000 (cf les travaux de Fortin *et al* [32], de Gervais *et al* [44] ou de Sahin et Owens [80] par exemple). Numériquement cette bifurcation est observée pour des valeurs du nombre de Reynolds allant de 7402 ± 4 (pour Peng *et al* [72]) à 8375 (pour Tiesinga *et al* [90]). Les écarts vont croissants pour les bifurcations suivantes. D'après Erturk *et al* [28], ces divergences s'expliquent par différents ordres spatiaux, différents maillages ou différentes méthodes numériques, en fonction des articles.

4.1.3 Remarques sur la nature de l'écoulement

Les travaux de Koseff *et al* [57], [56], [58], [76] sur la cavité entraînée 3D ont montré que l'écoulement dans la cavité possède des caractéristiques locales et globales spécifiques. Par exemple, d'un point de vue local, ils ont trouvé que des tourbillons de type Taylor-Görtler (ce sont des tourbillons à contre courant, dus aux conditions de non-glissement, qui se développent dans les couches limites) se formaient dans certaines régions. Du point de vue global, à cause des conditions de non-glissement sur les parois, l'écoulement est vraiment tridimensionnel. Leurs résultats en 3D ont montré que l'écoulement était laminaire, mais instationnaire même pour des valeurs modérées du nombre de Reynolds. L'écoulement commence à montrer des signes de turbulence à partir de $\mathrm{Re} = 6000$; au-dela de $\mathrm{Re} = 8000$, l'écoulement est pleinement turbulent.

Leurs conclusions montrent donc clairement que l'approximation bidimensionnelle pour l'écoulement dans une cavité entraînée n'est pas légitime d'un point de vue physique, même pour des valeurs modérées du nombre de Reynolds. Malgré tout, l'écoulement dans la cavité entraînée demeure un cas-test populaire pour les codes 2D $x - z$.

4.2 Validation du code de calcul avec schéma monolithique

Pour valider le code avec schéma monolithique que nous utiliserons par la suite, nous allons dans cette section comparer les résultats numériques qu'il fournit avec ceux exposés dans l'article de Bruneau et Saad [15], car ils ont introduit le schéma d'ordre 3 pour le terme non linéaire des équations de Navier-Stokes utilisé dans ce code (cf §3.4).

Les solutions observées sont les solutions stationnaires, le critère adopté pour la notion de stationnarité étant que la norme infinie de l'écart entre les solutions à deux pas de temps successifs reste inférieur à 10^{-12} sur un intervalle de temps d'une seconde. C'est le critère utilisé par Bruneau et Saad [15].

4.2.1 La cavité entraînée à Re = 1000

Pour une valeur du nombre de Reynolds de 1000, on peut observer sur la figure 4.5 que la solution stationnaire présente un large tourbillon principal, accompagné de deux tourbillons secondaires, dans les coins inférieurs. On n'observe pas de tourbillon secondaire dans le coin supérieur gauche. Ceci n'est pas dû à un problème de discrétisation, mais simplement car ce tourbillon n'apparaît que pour des valeurs plus élevées du nombre de Reynolds.

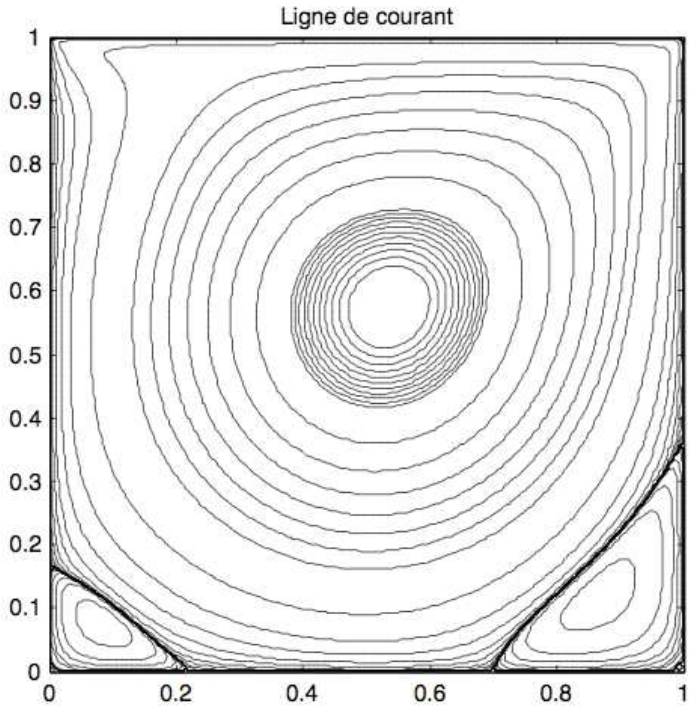


FIGURE 4.5 – Lignes de courant de la solution des équations de Navier-Stokes incompressibles sur une grille 128×128, pour une valeur du nombre de Reynolds de 1000.

La table 4.1 permet de comparer les résultats de notre code avec des résultats présentés dans les travaux de Bruneau et Saad [15]. Les autres schémas avec lesquels les comparaisons sont faites sont (on se référera aux notations du chapitre précédent) :

– Le schéma *Quickest* (voir [61])

$$u_1^{n+1} = u_i^n - \lambda \left(a^n_{i+\frac{1}{2}} \phi^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} - a^n_{i-\frac{1}{2}} \phi^{(2)}_{i-\frac{1}{2}} \right) - \lambda \left(a^n_{i+\frac{1}{2}} \phi^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} - a^n_{i-\frac{1}{2}} \phi^{(3)}_{i-\frac{1}{2}} \right),$$

où $\phi^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}$ représente

$$\phi^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(u^n_{i+1} + u^n_i\right) - \lambda a^n_{i+\frac{1}{2}}\left(u^n_{i+1} - u^n_i\right)\right)$$

et $\phi^{(3)}$ représente

$$\phi^{(3)}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{1-\left(\lambda a^n_{i+\frac{1}{2}}\right)^2}{6}\left(u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1}\right) & \text{si } a^n_{i+\frac{1}{2}} > 0 \\ \frac{1-\left(\lambda a^n_{i+\frac{1}{2}}\right)^2}{6}\left(u^n_{i+2} - 2u^n_{i+1} + u^n_i\right) & \text{sinon} \end{cases}.$$

– Le schéma de Kawamura (voir [55])

$$u^{n+1}_i = u^n_i - \begin{cases} \frac{\lambda}{6}a^n_i\left(u^n_{i+2} - 2u^n_{i+1} + 9u^n_i - 10u^n_{i-1} + 2u^n_{i-2}\right) & \text{si } a^n_i > 0 \\ -\frac{\lambda}{6}a^n_i\left(u^n_{i-2} - 2u^n_{i-1} + 9u^n_i - 10u^n_{i+1} + 2u^n_{i+2}\right) & \text{sinon} \end{cases}.$$

– Le schéma *Upwind 3*

$$u^{n+1}_i = u^n_i - \begin{cases} \frac{\lambda}{6}a^n_i\left(2u^n_{i+1} + 3u^n_i - 6u^n_{i-1} + u^n_{i-2}\right) & \text{si } a^n_i > 0 \\ -\frac{\lambda}{6}a^n_i\left(2u^n_{i-1} + 3u^n_i - 6u^n_{i+1} + u^n_{i+2}\right) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Grille	Code	$\varphi_{\max}$	$\omega_{\max}$	$x_{\max}$	$z_{\max}$
128×128	Murman 3	0.11786	2.0508	0.53125	0.5625
	Upwind 3	0.11796	2.0549	0.53125	0.5625
	Kawamura	0.11790	2.0557	0.53125	0.5625
	Quickest	0.11503	1.9910	0.53125	0.5626
	Monolithique	0.11205	2.00336	0.53906	0.59375
256×256	Murman 3	0.11865	2.0634	0.53125	0.5664
	Upwind 3	0.11870	2.0644	0.53125	0.5664
	Kawamura	0.11867	2.0636	0.53125	0.5664
	Quickest	0.11599	2.0069	0.53125	0.5664
	Monolithique	0.11565	2.03686	0.53125	0.57815

TABLE 4.1 – Comparaison de quatre schémas d'ordre 3 avec le schéma monolithique, sur le tourbillon principal à Re = 1000 : maximum $\varphi_{\max}$ de la fonction courant, vorticité $\omega_{\max}$ et position du maximum ($x_{\max}$ et $z_{\max}$). Les cellules grisées correspondent à nos résultats, tandis que les autres correspondent aux résultats issus de [15]

Les grandeurs comparées seront la valeur maximale des lignes de courant, la position de ce maximum, et la valeur de la vorticité en ce point. On peut remarquer que les résultats numériques fournis par notre code monolithique sont du même ordre de grandeur que

ceux que l'on peut trouver dans la littérature, avec un écart maximal de 5%. Les écarts par rapport à ces valeurs, et en particulier avec les résultats du code de Bruneau et Saad peuvent s'expliquer par l'absence de préconditionnement du système inversé à chaque pas de temps dans notre cas, alors que ce n'est pas le cas dans le code de Bruneau et Saad.

4.3 Validation du code utilisant la méthode de projection

À notre connaissance, aucun article ne proposait, au moment de l'écriture du code utilisant la méthode de projection, de résultats numériques portant sur l'utilisation de la méthode de projection avec comme cas-test la cavité entraînée. Nous n'avons donc pas réalisé de comparaison numérique chiffrée, comme pour le code monolithique.

Si le code ne fournit effectivement pas les mêmes résultats numériques dans le sens où la valeur de la solution $(\boldsymbol{v}, p)$ n'est pas exactement la même point par point en chaque instant que la solution fournie par le code monolithique, les deux codes fournissent néanmoins des solutions aux comportements à long terme identiques. Le comportement qualitatif des solutions des deux codes est similaire en terme de position et nombre des tourbillons secondaires. Les quelques différences numériques s'expliquent par les choix de discrétisation différents (traitement des conditions aux bords, schéma utilisé pour le terme non-linéaire).

Ces différences sont à relativiser, et à replacer dans le contexte de cette thèse. Ce qui nous intéressera principalement est, non pas la précision intrinsèque des différentes méthodes de discrétisation, mais le fait que les méthodes de décomposition de domaine mises en œuvre permettent de retrouver la solution monodomaine correspondante.

Deuxième partie

Décomposition de domaine pour les équations de Stokes et Navier-Stokes

Chapitre 5

Décomposition de domaine : introduction

Avant de s'intéresser dans les chapitres à venir au problème de décomposition de domaine pour les équations de Navier-Stokes, on souhaite ici rappeler les bases des méthodes de Schwarz telles qu'elles furent développées historiquement. On s'intéressera ensuite à une classe de méthodes plus évoluées, les méthodes de Schwarz optimisées, ainsi que les raisons pour lesquelles elles ont été développées. Pour un historique plus détaillé sur ces méthodes, on pourra par exemple se reporter à l'article de revue de Gander [37].

5.1 Méthode de Schwarz historique

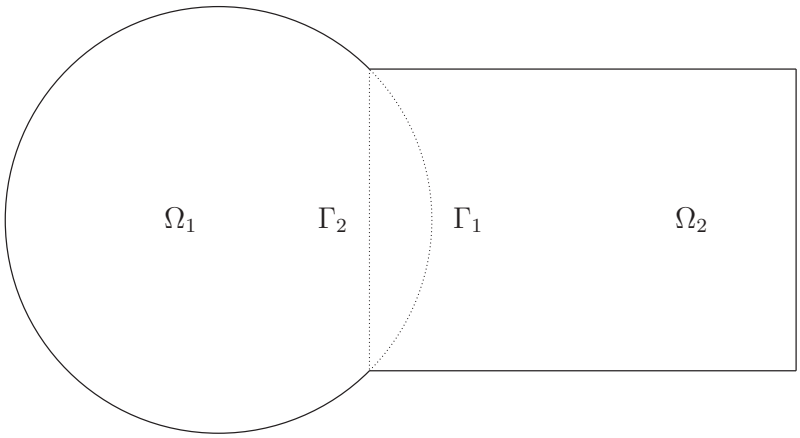


FIGURE 5.1 – Schwarz historique

La décomposition de domaine, telle qu'on la connaît actuellement fut initialement

développée par Schwarz [81] en 1870 dans le but de d'apporter une démonstration rigoureuse au principe de Dirichlet (on peut le trouver par exemple dans [48]) sur des domaines complexes. Son idée fut de décomposer le domaine complexe en plusieurs **sous-domaines** plus simples sur lesquels on savait démontrer le principe de Dirichlet.

Afin de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution du problème harmonique

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

pour un domaine Ω formé de l'union d'un disque et d'un rectangle, tel qu'on peut le voir sur la figure 5.1, Schwarz a proposé l'algorithme itératif de décomposition de domaine suivant

$$\begin{cases} \Delta u_1^m = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^m = g \text{ sur } \partial\Omega_1 \backslash \Gamma_1 \\ u_1^m = u_2^{m-1} \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \Delta u_2^m = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^m = g \text{ sur } \partial\Omega_2 \backslash \Gamma_2 \\ u_2^m = u_1^m \text{ sur } \Gamma_2, \end{cases} \tag{5.2}$$

où Ω_1 correspond au disque et Ω_2 au rectangle. C'est ce qu'on connaît maintenant sous le nom de **méthode de Schwarz**. Les frontières $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$ et $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$ sont appelées les **interfaces**. La condition aux interfaces, une condition de Dirichlet, permet au problème sur chaque sous-domaine d'avoir une solution explicitable sous forme de série de Fourier, ainsi que de satisfaire le principe de Dirichlet. Il ne reste alors plus à Schwarz qu'à démontrer la convergence des suites $(u_j^m)_{m\geq 0}$ vers la solution de (5.1), ce qu'il fait en étudiant la suite des différences $u_j^m - u_j^{m-1}$.

Avec l'avènement des ordinateurs et du calcul parallèle, les méthodes de décomposition de domaine ont suscité de plus en plus d'intérêt à partir des années 80. C'est dans ce contexte qu'une version parallèle de la méthode de Schwarz a été proposée par Lions [74]

$$\begin{cases} \Delta u_1^m = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^m = g \text{ sur } \partial\Omega_1 \backslash \Gamma_1 \\ u_1^m = u_2^{m-1} \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \Delta u_2^m = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^m = g \text{ sur } \partial\Omega_2 \backslash \Gamma_2 \\ u_2^m = u_1^{m-1} \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}. \tag{5.3}$$

La seule différence entre la méthode (5.2) et la méthode (5.3) tient dans le fait que l'information de Dirichlet transmise au sous-domaine 2 est issue de l'itération précédente $m-1$ de l'algorithme, et non plus de l'itération courante m. La première méthode sera connue sous le nom de méthode **multiplicative**, tandis que la suivante sera nommée **additive**. Cette modification va permettre une parallélisation naturelle de la méthode de Schwarz (5.3), chaque processeur résolvant séparément le problème d'un sous-domaine, l'information étant échangée au début de chaque itération. En contrepartie, l'utilisation des méthodes additives demande deux fois plus d'itérations pour converger que les méthodes multiplicatives.

5.2 Vers les méthodes de Schwarz optimisées

Les méthodes de Schwarz peuvent s'appliquer à un vaste choix d'équations aux dérivées partielles, stationnaires et même évolutives, l'idée fondamentale restant similaire quelle que soit l'équation considérée. Néanmoins, cette flexibilité n'est pas sans effets secondaires.

Un premier inconvénient, mis en évidence par Lions [75] est la nécessité d'une zone de recouvrement entre les sous-domaines. Ce recouvrement empêche tout couplage entre deux modèles différents sur les sous-domaines (ou des modèles discontinus). De plus, la solution dans la zone de recouvrement est calculée autant de fois qu'il y a de sous-domaines, ce qui se traduit par un accroissement *a priori* inutile du temps de calcul.

La vitesse de convergence est aussi une difficulté de la méthode de Schwarz historique. En effet, comme on le verra plus loin dans la thèse, elle nécessite beaucoup plus d'itérations pour converger que d'autres méthodes.

Par ailleurs, la convergence n'est pas assurée pour toutes les équations, comme en atteste la thèse de Déprès [16] à propos de l'équation de Helmholtz.

C'est ainsi que de nouvelles conditions à l'interface ont été proposées. Hagstrom, Tewarson et Jazcilevich [89] ont suggéré l'utilisation de conditions de Robin

$$\begin{cases} \Delta u_1^m = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^m = g \text{ sur } \partial\Omega_1 \backslash \Gamma \\ (\partial_{n_1} + \alpha_1) u_1^m = (\partial_{n_1} + \alpha_1) u_2^{m-1} \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta u_2^m = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^m = g \text{ sur } \partial\Omega_2 \backslash \Gamma \\ (\partial_{n_2} + \alpha_2) u_2^m = (\partial_{n_2} + \alpha_2) u_1^{m-1} \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

conditions qui furent ensuite analysées par Lions [75] qui démontra la convergence de la méthode de Schwarz ci-dessus pour une décomposition de domaine sans recouvrement (n_i désigne la normale sortante à Ω_i). Lions remarqua alors que le choix de la constante de Robin α_j influait sur la vitesse de convergence, ouvrant ainsi la voie aux méthodes de Schwarz optimisées en suggérant l'utilisation d'opérateurs locaux ou non-locaux à la place de la constante de Robin. Parallèlement, Déprès [16] proposa aussi des conditions de Robin pour l'équation de Helmholtz. D'autres conditions suivirent ensuite, on en trouvera une revue, aussi bien au niveau continu qu'au niveau discret, dans Quarteroni et Valli [77].

Les méthodes de Schwarz optimisées s'écrivent à partir du système (5.2) dans lequel on modifie les conditions à l'interface de la façon suivante

$$\begin{cases} \Delta u_1^m = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^m = g \text{ sur } \partial\Omega_1 \backslash \Gamma_1 \\ (\partial_{n_1} + S_1) u_1^m = (\partial_{n_1} + S_1) u_2^{m-1} \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta u_2^m = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^m = g \text{ sur } \partial\Omega_2 \backslash \Gamma_2 \\ (\partial_{n_2} + S_2) u_2^m = (\partial_{n_2} + S_2) u_1^{m-1} \text{ sur } \Gamma_2, \end{cases} \tag{5.4}$$

où S_j est **l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann** associé à l'équation considérée (ici l'équation de Laplace). Cet opérateur est souvent non-local, et l'algorithme ainsi obtenu

est bien trop coûteux pour être utilisé en pratique. On va donc devoir l'approcher par un opérateur local, par exemple de la forme $a_j + b_j\partial_\tau + c_j\partial_{\tau\tau}$, où ∂_τ fait référence à la dérivée tangentielle le long de l'interface, et on souhaite déterminer les cœfficients a_j, b_j et c_j qui fournissent la convergence la plus rapide. On parle alors de méthode de Schwarz **optimisée**. Quand l'équation considérée est une équation d'évolution, cette méthode est connue sous le nom de méthode de Schwarz **à relaxation d'onde**.

Ce problème est, pour une équation quelconque, généralement trop difficile pour être résolu directement. Néanmoins, dans les cas géométriquement simples, il peut être traité en utilisant l'analyse de Fourier. Si l'on reprend le système précédent, en considérant un domaine plan $x - z$ infini $\Omega = \mathbb{R}^2$, et une décomposition de domaine avec recouvrement $\Omega_1 = (-\infty, L) \times \mathbb{R}$ et $\Omega_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, on peut alors donner une expression explicite de la solution du système (5.4) dans le domaine de Fourier. En notant k la variable de Fourier associée à la direction z, et en faisant l'hypothèse légitime que u tend vers 0 quand $\|x\|$ tend vers l'infini, on a :

$$u_1^m = A_1^m\, e^{|k|x} \quad \text{et} \quad u_2^m = A_2^m\, e^{-|k|x}.$$

Alors, les conditions à l'interface permettent d'écrire une relation de récurrence entre les cœfficients A_j^m :

$$\frac{A_1^m}{A_1^{m-2}} = \frac{-|k| + \sigma_1}{|k| + \sigma_1}\,\frac{-|k| + \sigma_2}{|k| + \sigma_2} e^{-2|k|L},$$

où σ_j est le symbole de l'opérateur S_j. Le rapport précédent est connu sous le nom de **facteur de convergence**, ou taux de convergence, et peut se généraliser à d'autres équations du second degré. Plus le facteur de convergence sera petit, et plus la méthode convergera vite vers la solution monodomaine. Pour ce faire, on va donc vouloir minimiser le facteur de convergence pour toutes les fréquences mises en jeu par la géométrie et la physique du problème. Par exemple, on peut choisir S_j sous la forme $a_j\,\mathrm{Id} + b_j\frac{\partial}{\partial z} + c_j\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, c'est-à-dire $\sigma_j = a_j + ikb_j - c_jk^2$. On cherche alors la solution du problème

$$\min_{\sigma_j \in \mathbb{R}_2[X]} \max_k \left| \frac{-|k| + \sigma_1}{|k| + \sigma_1}\,\frac{-|k| + \sigma_2}{|k| + \sigma_2} e^{-2|k|L} \right|. \tag{5.5}$$

Cette classe de méthodes a été appliquée avec succès à différentes équations : l'équation de la chaleur [39], l'équation de Helmholtz [41], l'équation d'advection réaction diffusion [38], pour l'équation des ondes [40] ou l'équation de Saint-Venant [66, 67]. Nous entendons l'appliquer ici dans un premier temps aux équations de Navier-Stokes discrétisées en temps (chapitres 6, 7 et 8), puis étendre ces résultats aux équations de Navier-Stokes linéarisées (chapitre 9) et aux équations de Navier-Stokes hydrostatiques (chapitre 10).

Chapitre 6

Décomposition de domaine pour la méthode de projection

Le but de ce chapitre est de présenter nos résultats numériques sur les méthodes de décomposition de domaine sur le cas-test de la cavité entraînée (cf chapitre 4) quand on utilise une méthode de projection.

On commence par rappeler les différentes étapes de la méthode de projection déjà introduite à la section 3.3.1. À chaque pas de temps :

- On commence par calculer une solution sans tenir compte de la contrainte de divergence nulle. Pour cela, on traite d'abord le terme non-linéaire de manière explicite :

$$\frac{\boldsymbol{v}^* - \boldsymbol{v}^n}{\Delta t} + (\boldsymbol{v}^n \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}^n = 0. \tag{6.1}$$

- Puis on prend en compte la viscosité :

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{v}^{**} - \boldsymbol{v}^*}{\Delta t} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \boldsymbol{v}^{**} = 0 \text{ dans } \Omega & \text{(6.2a)} \\ \boldsymbol{v}^{**} = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega. & \text{(6.2b)} \end{cases}$$

- On calcule ensuite le champ de pression :

$$\begin{cases} \Delta p^{n+1} = \dfrac{1}{\Delta t} \operatorname{div} \boldsymbol{v}^{**} \text{ dans } \Omega & \text{(6.3a)} \\ \dfrac{\partial p^{n+1}}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. & \text{(6.3b)} \end{cases}$$

- Et on corrige le champ de vitesse intermédiaire pour le rendre à divergence nulle :

$$\frac{\boldsymbol{v}^{n+1} - \boldsymbol{v}^{**}}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = 0. \tag{6.4}$$

Les différentes étapes de la méthode de projection découplent la résolution des composantes de la vitesse, ainsi que la résolution du champ de pression. On va donc pouvoir travailler de façon indépendante sur les différentes étapes. Cela aura deux conséquences : on sera fondamentalement limité à des algorithmes de Schwarz locaux en temps, mais les problèmes à traiter seront aussi plus simples que s'il fallait traiter les équations de Navier-Stokes dans leur globalité. Plus précisément, on sera simplement ramené à traiter des problèmes de Helmholtz ou Laplace, pour lesquels des algorithmes efficaces de décomposition de domaine ont déjà été développés.

On considérera dans un premier temps des conditions de Dirichlet sur l'interface. Puis on utilisera des conditions optimisées d'ordre 0 et d'ordre 2.

6.1 Conditions de Dirichlet à l'interface

On considère ici des conditions de Dirichlet à l'interface. On rappelle qu'il est alors nécessaire d'introduire une zone de recouvrement pour assurer la convergence de l'algorithme de Schwarz. On se donnera donc dans la suite par défaut deux mailles de recouvrement, sauf indication contraire.

On reprend les équations de Navier-Stokes discrétisées selon le schéma de projection introduit au paragraphe 3.3.1.

6.1.1 Algorithme

La méthode de Schwarz est donnée, dans sa version additive, par l'algorithme 6.1.

Quelques remarques sur cet algorithme :

- On a pu séparer les boucles pour calculer le champ de vitesse intermédiaire $\boldsymbol{v}_j^{**}$ et la pression p_j^{n+1} uniquement car on travaille avec un algorithme local en temps. Avec un algorithme global en temps, cela ne sera plus possible.
  Le calcul de la pression commence donc uniquement quand les itérations sur le champ de vitesse intermédiaire $\boldsymbol{v}_j^{**}$ sont effectuées.
- On peut remarquer que la condition de Dirichlet est écrite pour le problème sur la vitesse intermédiaire (6.6) plutôt que sur l'équation vérifiée par le champ de vitesse finale (6.8). Cette condition de Dirichlet va cependant se retrouver sur le champ de vitesse finale. En effet, celui-ci vérifie à l'interface à convergence [1] :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_j^{n+1} &= \boldsymbol{v}_j^{**} - \Delta t \nabla p_j^{n+1} \\ &= \boldsymbol{v}_{j'}^{**} - \Delta t \nabla p_{j'}^{n+1} \\ &= \boldsymbol{v}_{j'}^{n+1}.\end{aligned}$$

La continuité du gradient de pression est assurée grâce à la zone de recouvrement.

1. À chaque itération de la méthode de Schwarz, seule la continuité de la composante normale du champ de vitesse est assurée par la méthode de projection.

Algorithme 6.1 Algorithme de Schwarz Dirichlet-Dirichlet pour Navier-Stokes avec la méthode de projection

Résoudre

$$\frac{\boldsymbol{v}_j^* - \boldsymbol{v}_j^n}{\Delta t} + \left(\boldsymbol{v}_j^n.\nabla\right)\boldsymbol{v}_j^n = 0 \tag{6.5}$$

$\boldsymbol{v}_j^{**,0} := \boldsymbol{v}_j^*$

Tant que $\|\boldsymbol{v}_1^{**,m} - \boldsymbol{v}_2^{**,m}\| > \varepsilon$ **faire**

Résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{v}_j^{**,m} - \boldsymbol{v}_j^*}{\Delta t} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v}_j^{**,m} = 0 \text{ dans } \Omega_j & \text{(6.6a)} \\ \boldsymbol{v}_j^{**,m} = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_j\backslash\Gamma_j & \text{(6.6b)} \\ \boldsymbol{v}_j^{**,m} = \boldsymbol{v}_{j'}^{**,m-1} \text{ sur } \Gamma_j & \text{(6.6c)} \end{cases}$$

Fin

Tant que $\left\|p_1^{n+1,m} - p_2^{n+1,m}\right\| > \varepsilon$ **faire**

Résoudre

$$\begin{cases} \Delta p_j^{n+1,m} = \dfrac{1}{\Delta t}\operatorname{div} u_j^{**} \text{ dans } \Omega_j & \text{(6.7a)} \\ \dfrac{\partial p_j^{n+1,m}}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i\backslash\Gamma_j & \text{(6.7b)} \\ p_j^{n+1,m} = p_{j'}^{n+1,m-1} \text{ sur } \Gamma_j & \text{(6.7c)} \end{cases}$$

Fin

Résoudre

$$\frac{\boldsymbol{v}_j^{n+1} - \boldsymbol{v}_j^{**}}{\Delta t} + \nabla p_j^{n+1} = 0 \tag{6.8}$$

- Les étapes (6.5) et (6.8) de cet algorithme sont explicites. Elles ne font pas pas intervenir de conditions à l'interface. Ces étapes sont donc calculées hors des itérations de l'algorithme de Schwarz.
- Le paramètre ε sert à contrôler la précision souhaitée de la convergence de la méthode de Schwarz. Plus la valeur de ε sera faible, et plus la précision sera importante. On peut abaisser sa valeur jusqu'à la précision machine, et on obtiendra alors la solution monodomaine. Une autre possibilité aurait été d'imposer un nombre fixe d'itérations.
  En pratique, on fixe tout de même bien sûr un seuil maximal d'itérations, afin d'assurer dans tous les cas l'arrêt de l'algorithme.
- Il est bien connu que les conditions de Dirichlet pour les équations de Helmholtz $-\eta^2 u - \Delta u = f$ mènent à une méthode de Schwarz divergente. Ce n'est pas le cas ici, puisque l'équation (6.6) est de la forme $\eta^2 u - \Delta u = f$, ce qui assure la convergence de la méthode de Schwarz avec des conditions de Dirichlet.

6.1.2 Discrétisation

La discrétisation des équations est réalisée comme indiqué au chapitre 3. On notera respectivement $N_{1,x}$ et $N_{2,x}$ le nombre de mailles dans la direction horizontale sur chaque sous-domaine, et N_L le nombre de mailles dans la zone de recouvrement. On va juste ici spécifier comment sont discrétisées les conditions aux interfaces.

Les conditions de Dirichlet seront toujours écrites numériquement là où sont situées les inconnues sur le maillage. On écrira donc sur le sous-domaine de gauche (voir figure 6.1) :

$$\begin{aligned} u^m_{1,N_{1,x}+1/2,j} &= u^{m-1}_{2,N_L+1/2,j} \\ w^m_{1,N_{1,x}+1,j+1/2} &= w^{m-1}_{2,N_L+1,j+1/2}, \end{aligned}$$

et une discrétisation similaire pour les conditions de Dirichlet sur le sous-domaine de droite.

6.1.3 Résultats numériques

Les courbes de convergence en norme L^2 pour la vitesse pour les algorithmes de Schwarz additif et multiplicatif sont données à la figure 6.2. Ces courbes sont tracées à un pas de temps donné. On vérifie qu'on gagne bien un facteur deux sur le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la précision machine entre l'algorithme additif et l'algorithme multiplicatif, ce qui est un résultat classique (cf chapitre 5).

On n'a regardé jusque à présent la convergence que pour la vitesse. Si l'on s'intéresse maintenant à la pression on peut remarquer sur la figure 6.3 que l'erreur L^2 sur la pression

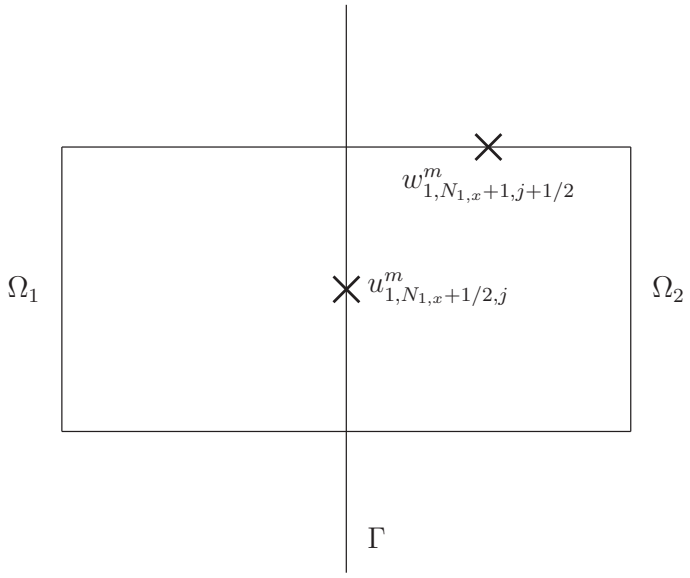


FIGURE 6.1 – Position des inconnues sur le maillage lors de la discrétisation des conditions de Dirichlet sur l'interface, sur le sous-domaine de gauche.

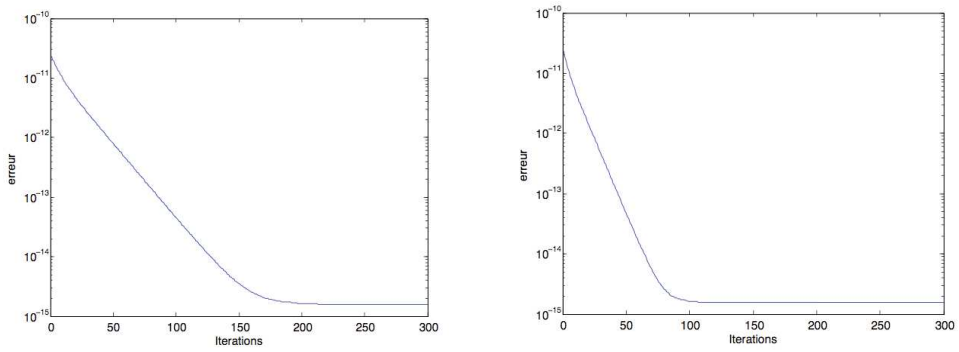


FIGURE 6.2 – Erreur L^2 de la vitesse par rapport à la solution monodomaine, pour un algorithme de Schwarz additif (à gauche) et un algorithme multiplicatif (à droite), en fonction des itérations.

converge aussi. Du fait de la non-unicité de la pression dans le cas mono-domaine, il a été nécessaire de relever la solution du sous-domaine de gauche à chaque itération de Schwarz afin qu'il y ait bien convergence. Cependant, seul le gradient de pression intervient dans les équations de Navier-Stokes, et le choix de la constante utilisée pour le relèvement est sans importance. La figure 6.4 donne la convergence en norme L^2 du gradient de pression sans faire de relèvement. On vérifie que le gradient de pression converge lors des

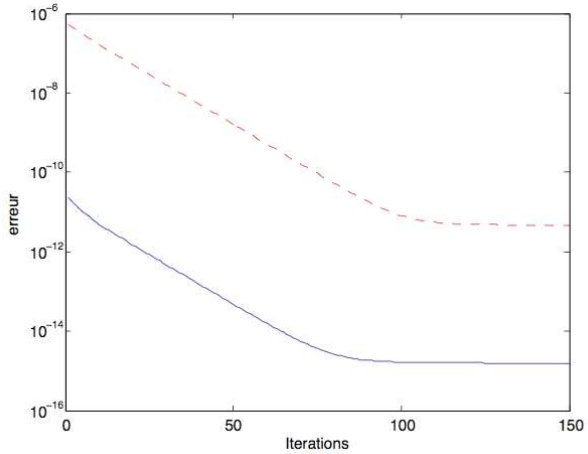


FIGURE 6.3 – Erreur L^2 de la vitesse u (courbe bleue, trait plein) et de la pression p (courbe rouge, trait pointillé), par rapport à la solution monodomaine, en fonction des itérations.

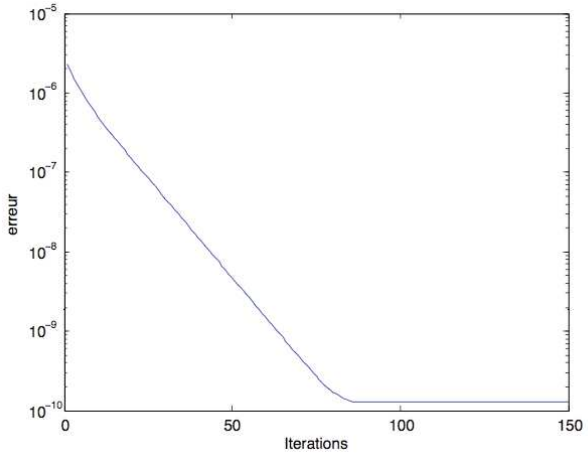


FIGURE 6.4 – Erreur L^2 du gradient de pression ∇p, par rapport à la solution monodomaine, en fonction des itérations.

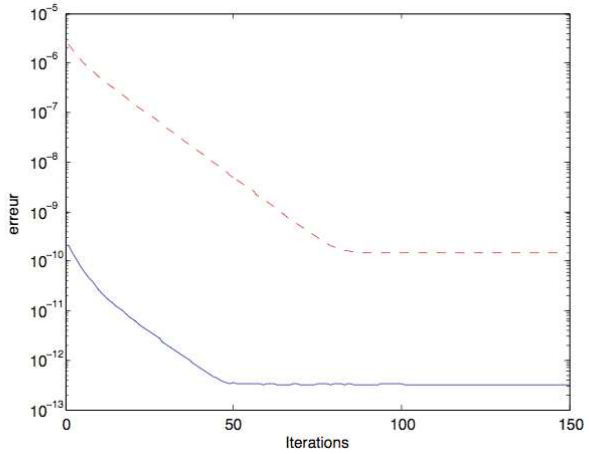


FIGURE 6.5 – Erreur H^1 de la vitesse u (trait bleu, plein) et de la pression p (trait rouge, pointillé) par rapport à la solution monodomaine, en fonction des itérations.

itérations de Schwarz.

Afin de s'assurer de la régularité des solutions sur chaque sous-domaine, on regarde également les convergences de la pression et de la vitesse en norme H^1. Les courbes de convergence données à la figure 6.5 illustrent le résultat attendu de convergence.

6.2 Conditions optimisées à l'interface

On va maintenant chercher à améliorer la convergence de la méthode de Schwarz. Pour cela, d'autres conditions à l'interface vont être considérées : des conditions optimisées. On verra ici comment utiliser les résultats concernant les conditions optimisées pour les équations de Helmholtz afin de traiter la décomposition de domaine pour les équations de Navier-Stokes. On rappelle que la zone de recouvrement introduite à la section précédente n'est nécessaire que pour des conditions de Dirichlet sur l'interface. On pourra donc ici s'en passer.

6.2.1 Travaux précédents

Comme on l'a déjà souligné, les composantes du champ de vitesse intermédiaire $\boldsymbol{v}^{**}$ sont solutions d'équations de Helmholtz (6.2), découplées les unes des autres. Les équations sont formellement identiques pour les différentes composantes. La pression, quant à elle, vérifie une équation de Poisson. Rechercher des conditions optimisées pour ces trois problèmes revient à s'intéresser aux conditions utilisées pour l'équation de Helmholtz, l'équation de Poisson pouvant être vue comme un cas particulier des équations de

Helmholtz.

Les premiers travaux sur les équations de Helmholtz remontent à Després [24] qui avait proposé des conditions de Robin à l'interface. Gander a introduit dans [36] des conditions optimisées pour ces équations. Ce sont ces conditions que l'on va introduire ici, puis utiliser. Pour plus de détails, on pourra se reporter au chapitre 5 ou directement à l'article de Gander.

On considère l'équation de Helmholtz sur $\Omega = \mathbb{R}^2$:

$$\eta u - \Delta u = f, \quad \eta \geq 0,$$

avec u qui s'annule à l'infini. L'article considère le cas $\eta > 0$, mais ses résultats peuvent aussi s'étendre au cas de l'équation de Poisson ($\eta = 0$). On introduit alors la décomposition de domaine $\Omega_1 = (-\infty, L) \times \mathbb{R}$ $\Omega_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, avec $L \geq 0$, et on se donne l'opérateur suivant le long des interfaces entre les deux sous-domaines :

$$\frac{\partial}{\partial x} + S_j.$$

Le choix de l'opérateur S_j va déterminer la convergence de l'algorithme de Schwarz.

$$\begin{cases} \eta u_1^m - \Delta u_1^m = f, \text{ dans } \Omega_1 \\ \dfrac{\partial u_1^m}{\partial x} + S_1 u_1^m = \dfrac{\partial u_2^{m-1}}{\partial x} + S_2 u_2^{m-1}, \text{ en } x = L, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \eta u_2^m - \Delta u_2^m = f, \text{ dans } \Omega_2 \\ \dfrac{\partial u_2^m}{\partial x} + S_2 u_2^m = \dfrac{\partial u_1^{m-1}}{\partial x} + S_1 u_1^{m-1}, \text{ en } x = 0. \end{cases}$$

Le facteur de convergence de cet algorithme, défini au chapitre 5, est donné par la formule :

$$\rho = \left| \frac{\sigma_1(k) - \sqrt{k^2+\eta}}{\sigma_1(k) + \sqrt{k^2+\eta}} \cdot \frac{\sigma_2(k) + \sqrt{k^2+\eta}}{\sigma_2(k) - \sqrt{k^2+\eta}} \right| e^{-2L\sqrt{k^2+\eta}}, \tag{6.9}$$

où $\sigma_j(k)$ désigne le symbole dans le domaine de Fourier de l'opérateur S_j et k est la variable de Fourier associée à la direction z. On en déduit que l'opérateur absorbant (c'est-à-dire celui qui annule le facteur de convergence) a pour symbole

$$\sigma_j = (-1)^{j+1}\sqrt{k^2+\eta}.$$

Plusieurs approximations sont envisagées dans l'article [36], en particulier une approximation polynomiale, dont les cœfficients sont déterminés de manière à minimiser le facteur de convergence. Des polynômes de degré 0 et 2 sont considérés :

$$\alpha_0 \quad \text{et} \quad \alpha_2 + \beta_2 k^2,$$

ce qui correspond respectivement aux opérateurs approchés

$$S_j u = \alpha_0 u \quad \text{et} \quad S_j u = \alpha_2 u - \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Pour chacune de ces deux approximations, Gander fournit une expression analytique des cœfficients optimaux pour les cas avec et sans recouvrement. Dans le cas qui nous intéresse, celui sans recouvrement, ces cœfficients s'écrivent :

$$\alpha_0 = \left((k_{min}^2 + \eta)(k_{max}^2 + \eta)\right)^{\frac{1}{4}} \tag{6.10}$$

$$\alpha_2 = \frac{k_{max}^2\sqrt{k_{min}^2+\eta} - k_{min}^2\sqrt{k_{max}^2+\eta}}{\sqrt{2(k_{max}^2-k_{min}^2)}((\sqrt{k_{max}^2+\eta}-\sqrt{k_{min}^2+\eta})((k_{max}^2+\eta)\sqrt{k_{min}^2+\eta}-(k_{min}^2+\eta)\sqrt{k_{max}^2+\eta})^{\frac{1}{4}}} \tag{6.11}$$

$$\beta_2 = \frac{(\sqrt{k_{min}^2+\eta}-\sqrt{k_{max}^2+\eta})^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2(k_{max}^2-k_{min}^2)}((k_{max}^2+\eta)\sqrt{k_{min}^2+\eta}-(k_{min}^2+\eta)\sqrt{k_{max}^2+\eta})^{\frac{1}{4}}}, \tag{6.12}$$

où k_{min} et k_{max} désignent les bornes de la plage de fréquences sur laquelle on travaille numériquement. Ce sont ces deux approximations qui fourniront des opérateurs d'ordre 0 et 2 avec lesquelles on va travailler dans la suite. Le facteur de convergence (6.9) a été tracé sur la figure 6.6 pour les deux approximations d'ordre 0 et d'ordre 2, en fonction des paramètres α et β, autour des valeurs optimales ci-dessus. On peut observer que, comme attendu, les conditions optimisées d'ordre 2 fournissent de meilleurs performances que celles d'ordre 0. Il reste maintenant à comparer les valeurs mesurées numériquement pour ces conditions avec celles obtenues précédemment pour des conditions de Dirichlet.

6.2.2 Application numérique

On va s'intéresser maintenant à la décomposition de domaine pour les équations de Navier-Stokes discrétisées via une méthode de projection, en utilisant comme conditions à l'interface celles introduites précédemment. On étudiera le cas sans recouvrement où l'interface verticale est située au centre du domaine.

À noter que notre but ici est de travailler sur la recherche de bons opérateurs d'interface. Une deuxième source de gains en temps de calcul consisterait ensuite à implémenter les méthodes de Schwarz sous forme d'un algorithme GMRES plutôt que sous la forme traditionnelle d'une méthode de Jacobi ou Gauss-Seidel, mais cela ne fera pas partie des objectifs de ce travail.

Conditions optimisées d'ordre 0

On considère dans un premier temps des conditions d'ordre 0 sur l'interface. L'algorithme de Schwarz est alors donné par l'algorithme 6.2. Il est important de remarquer ici

Algorithme 6.2 Algorithme de Schwarz optimisé d'ordre 0 pour Navier-Stokes, pour la méthode de projection.

Résoudre

$$\frac{\boldsymbol{v}_j^* - \boldsymbol{v}_j^n}{\Delta t} + \left(\boldsymbol{v}_j^n.\nabla\right)\boldsymbol{v}_j^n = 0 \tag{6.13}$$

$\boldsymbol{v}_j^{**,0} := \boldsymbol{v}_j^*$

Tant que $\|\boldsymbol{v}_1^{**,m} - \boldsymbol{v}_2^{**,m}\| > \varepsilon$ **faire**

Résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{v}_j^{**,m} - \boldsymbol{v}_j^*}{\Delta t} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v}_j^{**,m} = 0 \text{ dans } \Omega_j & (6.14a) \\ \boldsymbol{v}_j^{**,m} = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_j\backslash\Gamma & (6.14b) \\ \left(\dfrac{-1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{\boldsymbol{v},0}\right)\boldsymbol{v}_j^{**,m} = \left(\dfrac{-1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{\boldsymbol{v},0}\right)\boldsymbol{v}_{j'}^{**,m-1} \text{ sur } \Gamma & (6.14c) \end{cases}$$

Fin

$p_j^{n+1,0} = p^n|_{\Omega_j}$

Tant que $\left\|p_1^{n+1,m} - p_2^{n+1,m}\right\| > \varepsilon$ **faire**

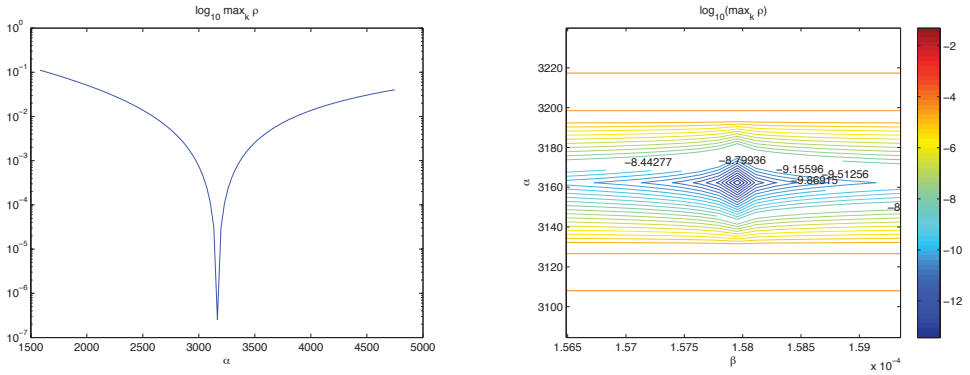
Résoudre

$$\begin{cases} -\Delta p_j^{n+1,m} = -\dfrac{1}{\Delta t}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_j^{**} \text{ dans } \Omega_j & (6.15a) \\ \dfrac{\partial p_j^{n+1,m}}{\partial\boldsymbol{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_j\backslash\Gamma & (6.15b) \\ \left(-\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{p,0}\right)p_j^{n+1,m} = \left(-\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{p,0}\right)p_{j'}^{n+1,m-1} \text{ sur } \Gamma & (6.15c) \end{cases}$$

Fin

Résoudre

$$\frac{\boldsymbol{v}_j^{n+1} - \boldsymbol{v}_j^{**,m}}{\Delta t} + \nabla p_j^{n+1} = 0 \tag{6.16}$$



(a) Approximation de degré 0

(b) Approximation de degré 2

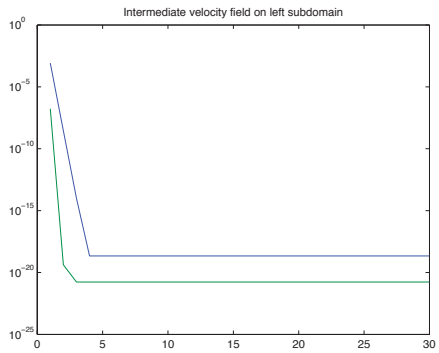
FIGURE 6.6 – Comportement du facteur de convergence (6.9) pour les deux approximations de degré 0 et de degré 2 de l'opérateur σ_j. Sur les deux figures, le taux de convergence est donné en échelle logarithmique.

que les itérations sur le calcul de la pression ne sont commencées qu'une fois les itérations sur le champ de vitesse intermédiaire terminées. On verra au paragraphe 6.2.3 comment se comporte cet algorithme si on ne considère qu'une seule boucle de Schwarz pour la vitesse intermédiaire et la pression.

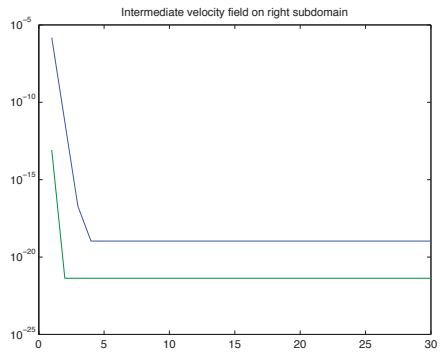
De plus, les cœfficients à optimiser $\alpha_{\boldsymbol{v},0}$ sont pris égaux pour les deux composantes de la vitesse. En effet, les deux composantes satisfont la même équation de Helmholtz, à la valeur de la condition de Dirichlet près (mais cette valeur n'intervient pas dans la convergence de l'algorithme de Schwarz, et donc dans le choix des cœfficients à optimiser). En revanche, les cœfficients des problèmes $\alpha_{\boldsymbol{v},0}$ et $\alpha_{p,0}$ pour la vitesse et pour la pression sont *a priori* différents.

Sur la figure 6.7, on peut observer l'erreur à chaque étape de l'algorithme, en fonction des itérations. On a une convergence très rapide de la vitesse : le facteur de convergence observé est de 10^{-3} pour la composante horizontale de la vitesse [2], et la composante verticale de la vitesse converge en une itération ! Cette différence de comportement entre composantes horizontale et verticale de la vitesse est due à la discrétisation sur grille C, qui introduit naturellement une zone de recouvrement d'une maille pour la composante verticale de la vitesse. La pression nécessite beaucoup plus d'itérations pour converger : son facteur de convergence numérique pour la méthode additive vaut 0.35. La figure 6.8 donne le comportement théorique du facteur de convergence en fonction des paramètres α_0, pour les valeurs habituelles des autres paramètres. Plusieurs points sont à remarquer : tout d'abord, la zone de recouvrement accélère énormément la vitesse de convergence :

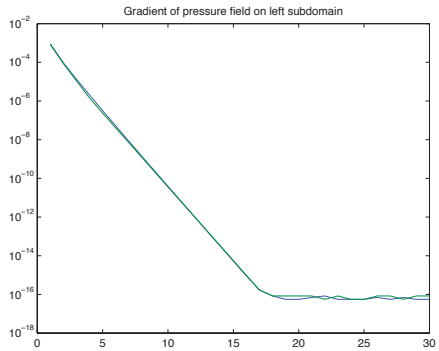
2. Cette valeur du facteur de convergence est très certainement erronée. Selon l'article de Gander [36], le facteur de convergence devrait être compris entre 0.54 et 0.64. Ceci est dû à un bug et sera corrigé d'ici la soutenance.



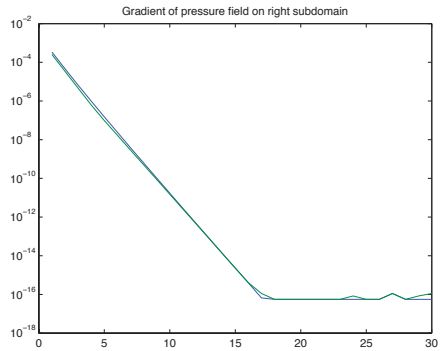
(a) Vitesse sur le sous-domaine de gauche



(b) Vitesse sur le sous-domaine de droite

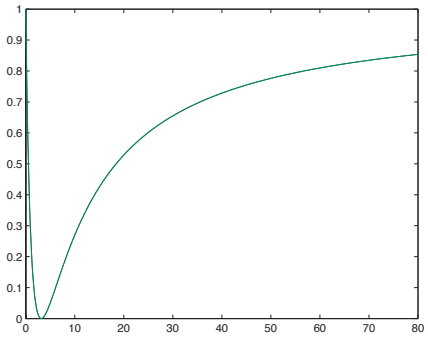


(c) Gradient de pression sur le sous-domaine de gauche

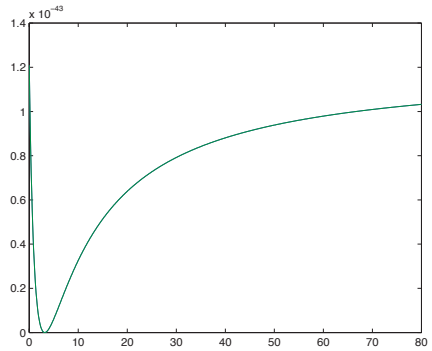


(d) Gradient de pression sur le sous-domaine de droite

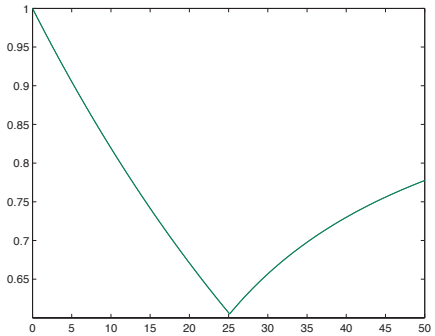
FIGURE 6.7 – Courbes de convergence de l'algorithme de Schwarz 6.2, pour $\alpha_{\boldsymbol{v},0} = 78$ et $\alpha_{p,0} = 7,3$. Les courbes bleues correspondent aux champs horizontaux, tandis que les courbes vertes correspondent aux champs verticaux.



(a) Convergence de la vitesse sans zone de recouvrement



(b) Convergence de la vitesse avec une zone de recouvrement d'une maille de largeur



(c) Convergence de la pression sans zone de recouvrement

FIGURE 6.8 – Taux de convergence théoriques pour l'algorithme de Schwarz 6.2 en fonction du paramètre α_0. Les courbes bleues correspondent aux champs horizontaux, tandis que les courbes vertes correspondent aux champs verticaux.

ainsi le facteur de convergence optimal théorique passe de $3.5\,10^{-5}$ à $4.2\,10^{-48}$ juste en rajoutant une zone de recouvrement d'une maille de largeur. On peut aussi noter que, recouvrement ou pas, la valeur théorique du paramètre optimal $\alpha_{\boldsymbol{v},0}$ (*i.e.* celui qui minimise le facteur de convergence) est de 3.2, alors que numériquement le minimum est atteint pour $\alpha_{\boldsymbol{v},0} = 78$. Cet écart de comportement se retrouve aussi pour la pression : en théorie le minimum du facteur de convergence est atteint pour $\alpha_{p,0} = 25.1$, le facteur de convergence valant alors 0.61 ; en pratique ce minimum est atteint pour $\alpha_{p,0} = 7.3$, et le facteur de convergence vaut alors 0.35.

Conditions optimisées d'ordre 2

On travaille maintenant avec des conditions optimisées d'ordre 2 sur l'interface (cf l'algorithme 6.3), et on s'attend à obtenir de meilleurs résultats qu'avec l'algorithme 6.2 d'ordre 0.

On peut observer sur la figure 6.9 l'erreur à chaque itération de l'algorithme 6.3. Différents points sont à souligner : les résultats théoriques donnés dans l'article de Gander prévoient un gain d'un facteur 4 sur le nombre d'itérations par rapport aux conditions optimisées d'ordre 0. De fait, le facteur de convergence obtenu en pratique vaut 0.13. Sa puissance 1/4 est égale à 0.60, ce qui est bien dans l'intervalle [0.54, 0.64] du facteur de convergence de la méthode optimisée d'ordre 0 [3]. Cela dit, la composante verticale continue de converger plus rapidement que la composante horizontale, pour la même raison que précédemment. De même la pression converge plus rapidement. On a gagné environ 5 itérations pour atteindre la précision machine : le facteur de convergence mesuré est passé de 0.35 pour l'algorithme d'ordre 0 à 0.26 pour l'algorithme d'ordre 2.

6.2.3 Vers le global en temps

Jusqu'à présent dans ce chapitre, dans les méthodes de Schwarz considérées, les informations ont été échangées entre les sous-domaines à chaque étape de la méthode de projection. On souhaite maintenant étudier la convergence d'une méthode de Schwarz où les informations ne sont plus échangées qu'une seule fois par pas de temps. On souhaite vérifier si ces nouvelles méthodes nécessitent plus d'itérations pour converger.

On s'intéresse donc à la convergence de l'algorithme 6.4. On va utiliser les mêmes conditions à l'interface et les mêmes valeurs des cœfficients α_2 et β_2 que dans l'algorithme 6.3, mais on réunira les deux étapes de résolution de système au sein de la même boucle. Les résultats numériques de convergence pour cet algorithme sont fournis en figure 6.10. On peut remarquer que le champ de vitesse intermédiaire ne met pas plus d'itérations pour converger que dans la version à deux boucles de l'algorithme. C'est normal dans la mesure où les valeurs de $v_j^{**,m}$ ne dépendent que des valeurs de $v_{j'}^{**,m-1}$ et pas du tout des valeurs du champ de pression.

3. On prend ici la valeur de Gander et non pas la valeur boguée 10^{-3}.

Algorithme 6.3 Algorithme de Schwarz optimisé d'ordre 2 pour Navier-Stokes, pour la méthode de projection.

Résoudre

$$\frac{\boldsymbol{v}_j^* - \boldsymbol{v}_j^n}{\Delta t} + \left(\boldsymbol{v}_j^n.\nabla\right)\boldsymbol{v}_j^n = 0 \tag{6.17}$$

$\boldsymbol{v}_j^{**,0} := \boldsymbol{v}_j^*$
Tant que $\|\boldsymbol{v}_1^{**,m} - \boldsymbol{v}_2^{**,m}\| > \varepsilon$ **faire**
Résoudre

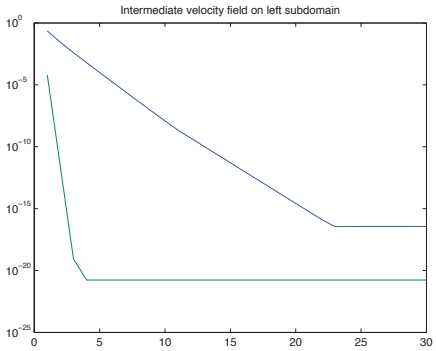
$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{v}_j^{**,m} - \boldsymbol{v}_j^*}{\Delta t} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v}_j^{**,m} = 0 \text{ dans } \Omega_j & (6.18a) \\ \boldsymbol{v}_j^{**,m} = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_j\backslash\Gamma & (6.18b) \\ \left(\dfrac{-1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{\boldsymbol{v},2} + \beta_{\boldsymbol{v},2}\dfrac{\partial}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{v}_j^{**,m} = \left(\dfrac{-1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{\boldsymbol{v},2} + \beta_{\boldsymbol{v},2}\dfrac{\partial}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{v}_{j'}^{**,m-1} \text{ sur } \Gamma & (6.18c) \end{cases}$$

Fin
$p_j^{n+1,0} = p^n|_{\Omega_j}$
Tant que $\left\|p_1^{n+1,m} - p_2^{n+1,m}\right\| > \varepsilon$ **faire**
Résoudre

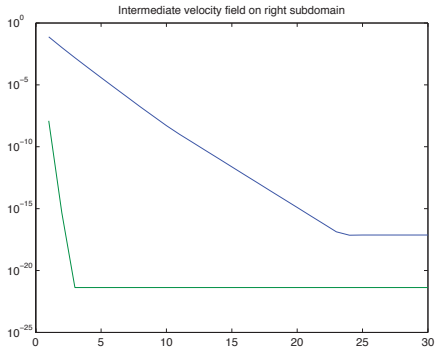
$$\begin{cases} -\Delta p_j^{n+1,m} = -\dfrac{1}{\Delta t}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_j^{**} \text{ dans } \Omega_j & (6.19a) \\ \dfrac{\partial p_j^{n+1,m}}{\partial\boldsymbol{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_j\backslash\Gamma & (6.19b) \\ \left(-\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{p,2} + \beta_{p,2}\dfrac{\partial}{\partial z^2}\right)p_j^{n+1,m} = \left(-\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{p,2} + \beta_{p,2}\dfrac{\partial}{\partial z^2}\right)p_{j'}^{n+1,m-1} \text{ sur } \Gamma & (6.19c) \end{cases}$$

Fin
Résoudre

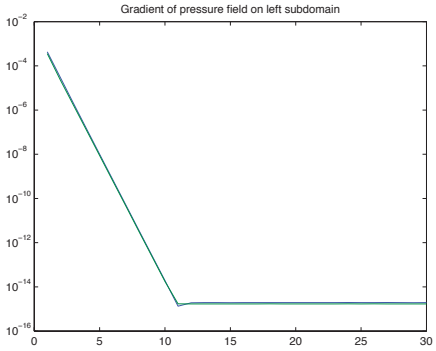
$$\frac{\boldsymbol{v}_j^{n+1} - \boldsymbol{v}_j^{**,m}}{\Delta t} + \nabla p_j^{n+1} = 0 \tag{6.20}$$



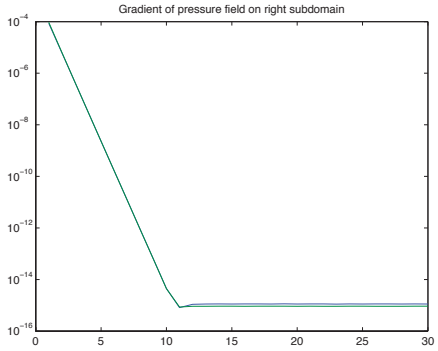
(a) Vitesse sur le sous-domaine de gauche



(b) Vitesse sur le sous-domaine de droite



(c) Gradient de pression sur le sous-domaine de gauche



(d) Gradient de pression sur le sous-domaine de droite

FIGURE 6.9 – Courbes de convergence de l'algorithme de Schwarz 6.3, pour $\alpha_{\boldsymbol{v},2} = 28$, $\beta_{\boldsymbol{v},2} = 0.01$, $\alpha_{p,2} = 5$ et $\beta_{p,2} = 0.01$. Les courbes bleues correspondent aux champs horizontaux, tandis que les courbes vertes correspondent aux champs verticaux.

Algorithme 6.4 Algorithme de Schwarz optimisé d'ordre 2 pour Navier-Stokes résolu avec une méthode de projection, avec une seule boucle de Schwarz.

Résoudre

$$\frac{\boldsymbol{v}_j^* - \boldsymbol{v}_j^n}{\Delta t} + \left(\boldsymbol{v}_j^n.\nabla\right)\boldsymbol{v}_j^n = 0 \tag{6.21}$$

$\boldsymbol{v}_j^{**,0} := \boldsymbol{v}_j^*$
$p_j^{n+1,0} = p^n|_{\Omega_j}$
Tant que $\left\|\boldsymbol{v}_1^{n+1,m} - \boldsymbol{v}_2^{n+1,m}\right\| > \varepsilon$ **faire**
Résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{v}_j^{**,m} - \boldsymbol{v}_j^*}{\Delta t} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v}_j^{**,m} = 0 \text{ dans } \Omega_j & (6.22a) \\ \boldsymbol{v}_j^{**,m} = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_j\backslash\Gamma & (6.22b) \\ \left(\dfrac{-1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{\boldsymbol{v},2} + \beta_{\boldsymbol{v},2}\dfrac{\partial}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{v}_j^{**,m} = \left(\dfrac{-1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{\boldsymbol{v},2} + \beta_{\boldsymbol{v},2}\dfrac{\partial}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{v}_{j'}^{**,m-1} \text{ sur } \Gamma & (6.22c) \end{cases}$$

Résoudre

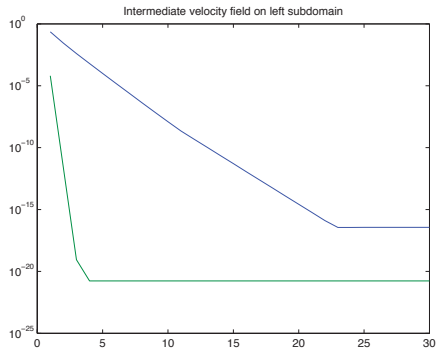
$$\begin{cases} -\Delta p_j^{n+1,m} = -\dfrac{1}{\Delta t}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_j^{**,m} \text{ dans } \Omega_j & (6.23a) \\ \dfrac{\partial p_j^{n+1,m}}{\partial\boldsymbol{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_j\backslash\Gamma & (6.23b) \\ \left(-\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{p,2} + \beta_{p,2}\dfrac{\partial}{\partial z^2}\right)p_j^{n+1,m} = \left(-\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_j} - \alpha_{p,2} + \beta_{p,2}\dfrac{\partial}{\partial z^2}\right)p_{j'}^{n+1,m-1} \text{ sur } \Gamma & (6.23c) \end{cases}$$

Fin
Résoudre

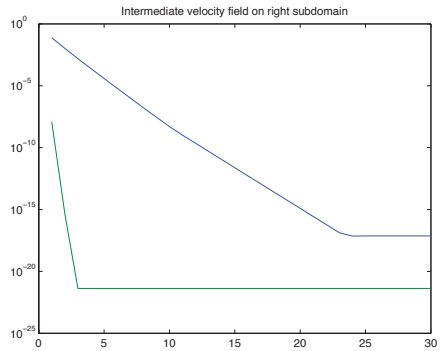
$$\frac{\boldsymbol{v}_j^{n+1,m} - \boldsymbol{v}_j^{**,m}}{\Delta t} + \nabla p_j^{n+1,m} = 0 \tag{6.24}$$

Au contraire, la pression nécessite plus d'itérations pour converger. En effet lors de l'étape (6.23), le second membre s'écrit avec le champ de vitesse intermédiaire de l'itération de Schwarz courante $\boldsymbol{v}_j^{**,m}$ et non plus avec le champ de vitesse intermédiaire convergé $\boldsymbol{v}_j^{**}$. De fait, il faut attendre que la vitesse ait convergé vers la solution monodomaine avant que la pression ne puisse le faire. Comme la convergence du champ de vitesse intermédiaire est plus lente que la convergence du champ de pression (23 itérations contre 11, cf figure 6.9), la convergence du champ de pression est plus lente que la version à deux boucles de l'algorithme de Schwarz.

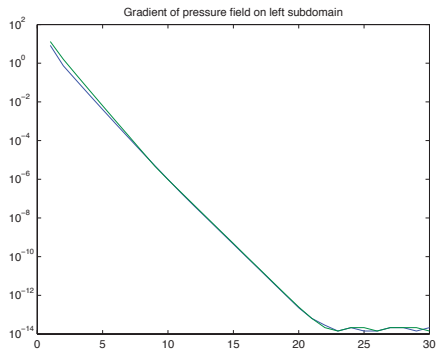
La convergence de la composante horizontale du champ de vitesse intermédiaire constituait et demeure le facteur limitant de l'algorithme 6.4. Elle influence désormais également la convergence du champ de pression.



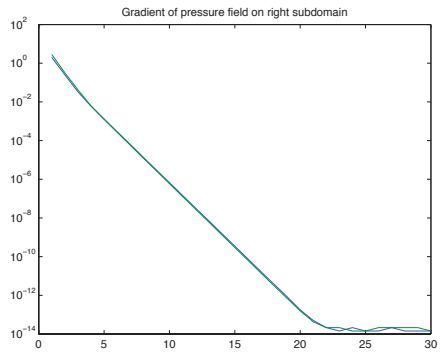
(a) Vitesse sur le sous-domaine de gauche



(b) Vitesse sur le sous-domaine de droite



(c) Gradient de pression sur le sous-domaine de gauche



(d) Gradient de pression sur le sous-domaine de droite

FIGURE 6.10 – Courbes de convergence de l'algorithme de Schwarz 6.4, pour $\alpha_{\boldsymbol{v},2} = 28$, $\beta_{\boldsymbol{v},2} = 0.01$, $\alpha_{p,2} = 5$ et $\beta_{p,2} = 0.01$. Les courbes bleues correspondent aux champs horizontaux, tandis que les courbes vertes correspondent aux champs verticaux.

En résumé, cette méthode va demander autant d'itérations au champ de vitesse et plus d'itérations à la pression que la méthode 6.2 pour converger vers la solution monodomaine. Par ailleurs ces résultats, ainsi que la nature même de la méthode de projection, font qu'une méthode de couplage globale en temps (*i.e.* une méthode de Schwarz où l'information est échangée sur tout un intervalle de temps) serait inutile en terme de performance par rapport à la méthode de Schwarz locale en temps 6.2.

Chapitre 7

Conditions de Dirichlet pour la méthode monolithique

Après avoir étudié dans le chapitre précédent le cas de la méthode de projection, on va travailler maintenant dans le cadre spécifique des équations de Navier-Stokes discrétisées en temps, selon le schéma introduit au chapitre 3 :

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{v}^{n+1}-\boldsymbol{v}^n}{\Delta t} + \boldsymbol{v}^n\nabla\boldsymbol{v}^n - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega & (7.1a) \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega & (7.1b) \\ \boldsymbol{v}^{n+1} = \boldsymbol{g}^{n+1} \text{ sur } \partial\Omega. & (7.1c) \end{cases}$$

À chaque pas de temps, on donc est amené à résoudre un problème de Stokes :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\boldsymbol{v} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{f}, \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.2}$$

dans lequel on a omis toute référence aux pas de temps. Le terme $\boldsymbol{f}$ va contenir les termes relatifs au pas de temps précédent : $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{v}^n\nabla\boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{v}^n/\Delta t$.

C'est pour ce problème que l'on va mettre en place dans un premier temps l'expression générale des erreurs. Cette expression servira ensuite à établir des résultats théoriques sur la convergence d'un algorithme de Schwarz avec des conditions de Dirichlet sur l'interface. Enfin, ces résultats seront confrontés aux valeurs obtenues numériquement avec le cas test de la cavité entraînée. Notons par ailleurs que ces développements seront utilisés dans le chapitre suivant pour l'analyse de conditions d'interface plus complexes.

7.1 Expression analytique des erreurs

Le but de cette section est d'établir une expression analytique des erreurs d'un algorithme de Schwarz pour le problème de Stokes.

7.1.1 Décomposition du domaine et système vérifié par les erreurs

On décompose le domaine Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2, avec une zone de recouvrement. Sur chaque sous-domaine Ω_j on est amené à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\Delta t}\boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v}_j^m + \nabla p_j^m = \boldsymbol{f} \text{ dans } \Omega_j \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v_j^m} = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_j\backslash\Gamma_j \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma_j. \end{array}\right. \tag{7.3}$$

On peut noter qu'aucune condition à l'interface n'a été proposée pour le moment. La condition à l'interface n'est pas nécessaire dans un premier temps pour obtenir une expression générale des erreurs. Plus tard dans ce chapitre, on considérera une condition de Dirichlet sur l'interface. De plus, sur chacun des sous-domaines, le second membre ne dépend pas de l'itération de Schwarz courante (mais uniquement des solutions au pas de temps précédent). L'erreur sur chaque sous-domaine, définie comme la différence entre la solution mono-domaine (7.2) et la solution de chaque sous-domaine (7.3) vérifiera donc un système similaire avec un second membre et une condition aux limites extérieures nuls. On travaillera donc sur le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\Delta t}\boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v}_j^m + \nabla p_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v_j^m} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_j\backslash\Gamma_j \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma_j, \end{array}\right. \tag{7.4}$$

où $\boldsymbol{v}_j^m$ et p_j^m désignent alors respectivement les erreurs sur la vitesse et sur la pression.

7.1.2 Expression générale des erreurs

Pour résoudre ce système sur chaque sous-domaine, on va réaliser une approximation en considérant un domaine Ω infini dans les deux directions x et z. On décompose alors le domaine $\mathbb{R}^2$ en deux sous-domaines $\Omega_1 = (-\infty, L)\times\mathbb{R}$ et $\Omega_2 = (0,\infty)\times\mathbb{R}$, avec $L \geq 0$. On a une zone de recouvrement de largeur L. Le système (7.4) devient donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\Delta t}\boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v}_j^m + \nabla p_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v_j^m} \to 0 \text{ quand } (x,z) \to \pm\infty \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma_j. \end{array}\right. \tag{7.5}$$

On va maintenant réaliser une transformée de Fourier en z. On note k la variable de l'espace de Fourier associée à z et $\hat{f}$ la transformée de Fourier d'une fonction f. Le

système (7.5) mène alors à

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{v}}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_j^m}{dx^2} - k^2\hat{\boldsymbol{v}}_j^m\right) + \begin{pmatrix} \dfrac{d\hat{p}_j^m}{dx} \\ ik\hat{p}_j^m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_j & (7.6a) \\ \dfrac{d\hat{\boldsymbol{v}}_j^m}{dx} + ik\hat{\boldsymbol{v}}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j & (7.6b) \\ \hat{\boldsymbol{v}}_j^m \to \mathbf{0} \text{ quand } x \to \pm\infty & (7.6c) \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma_j. & (7.6d) \end{cases}$$

Comme réalisé classiquement (*e.g.* Halpern et Schatzman [50] avec le système d'Oseen, Martin [66] avec les équations de Saint-Venant), on va chercher les solutions du système d'équations différentielles (7.6) sous forme exponentielle :

$$\hat{\boldsymbol{e}}_j^m(x) = (\hat{\boldsymbol{v}}_j^m, \hat{p}_j^m)^T(x) = \boldsymbol{\Phi}_j^m e^{\xi x}.$$

En introduisant cette solution dans les équations (7.6), on aboutit au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} + \frac{k^2-\xi^2}{\mathrm{Re}} & 0 & \xi \\ 0 & \frac{1}{\Delta t} + \frac{k^2-\xi^2}{\mathrm{Re}} & ik \\ \xi & ik & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_j^m = 0. \tag{7.7}$$

Pour que ce système admette des solutions non-triviales, il faut et il suffit d'annuler le déterminant de la matrice ci-dessus, ce qui conduit, après calculs, à quatre valeurs de ξ :

$$\xi_1 = \lambda,\ \xi_2 = |k|,\ \xi_3 = -\lambda \ \text{ et } \ \xi_4 = -|k|,$$

avec

$$\lambda = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t} + k^2}. \tag{7.8}$$

Les solutions s'écrivent alors *a priori* comme une combinaison linéaire de quatre modes

$$\hat{\boldsymbol{e}}_j^m(x) = \sum_{l=1}^{4} \gamma_{j,l}^m\, \boldsymbol{\Phi_l}\, e^{\xi_l x},$$

où les $\boldsymbol{\Phi_l}$ sont respectivement les solutions du sytème (7.7) pour chaque valeur ξ_l :

$$\boldsymbol{\Phi_1} = \begin{pmatrix} ik \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Phi_2} = \begin{pmatrix} -|k| \\ -ik \\ 1/\Delta t \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Phi_3} = \begin{pmatrix} ik \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \boldsymbol{\Phi_4} = \begin{pmatrix} |k| \\ -ik \\ 1/\Delta t \end{pmatrix}.$$

La condition $\hat{\boldsymbol{v}}_j^m \to \mathbf{0}$ quand $x \to \pm\infty$ implique que seuls les modes convergents sont conservés dans la solution. Les solutions s'écrivent donc sur chaque sous-domaine uniquement à l'aide de deux modes et non quatre :

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1^m(x) = \sum_{l=1}^{2} \gamma_{1,l}^m \, \boldsymbol{\Phi}_l \, e^{\xi_l x} \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{e}}_2^m(x) = \sum_{l=3}^{4} \gamma_{2,l}^m \, \boldsymbol{\Phi}_l \, e^{\xi_l x}.$$

On utilisera en particulier la notation suivante pour l'erreur sur la vitesse :

$$\hat{\boldsymbol{v}}_1^m(x) = M_{12} \, e^{\xi_{12} x} \, \boldsymbol{\gamma}_{12}^m \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_2^m(x) = M_{34} \, e^{\xi_{34} x} \, \boldsymbol{\gamma}_{34}^m \tag{7.9}$$

avec

$$M_{12} = \begin{pmatrix} ik & -|k| \\ -\lambda & -ik \end{pmatrix}, \; e^{\xi_{12} x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_2 x} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\gamma}_{12}^m = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^m \\ \gamma_{1,2}^m \end{pmatrix},$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} ik & |k| \\ \lambda & -ik \end{pmatrix}, \; e^{\xi_{34} x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_3 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_4 x} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\gamma}_{34}^m = \begin{pmatrix} \gamma_{2,3}^m \\ \gamma_{2,4}^m \end{pmatrix}.$$

À ce stade, on a donc obtenu l'expression générale des erreurs comme solutions de (7.6a-7.6b-7.6c). Il reste à prendre en compte la condition aux interfaces pour faire le lien entre les erreurs sur Ω_1 et Ω_2 aux différentes itérations de la méthode de Schwarz, et donc en déduire le taux de convergence de la méthode.

7.2 Conditions de Dirichlet à l'interface

On va considérer dans un premier temps des conditions de Dirichlet sur les interfaces, à savoir

$$\boldsymbol{v}_j^m = \boldsymbol{v}_{j'}^{m-1} \text{ sur } \Gamma_j.$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire d'introduire de conditions pour la pression sur l'interface, le problème sur chaque sous-domaine étant bien posé sans. Ce sont les conditions les plus simples que l'on puisse avoir. On les utilisera pour établir des premiers résultats de convergence d'un algorithme de Schwarz. Ces résultats seront ensuite validés numériquement.

7.2.1 Résultats théoriques de convergence

On reprend donc dans un premier temps le système (7.4) dans lequel on spécifie des conditions de Dirichlet aux interfaces :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \boldsymbol{v}_j^m + \nabla p_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v}_j^m \to 0 \text{ quand } x \to \pm\infty \\ \boldsymbol{v}_j^m = \boldsymbol{v}_{j'}^{m-1} \text{ sur } \Gamma_j. \end{cases} \tag{7.10}$$

Comme expliqué précédemment, l'expression des erreurs fournie par l'équation (7.9) est valable quelle que soit la condition à l'interface choisie. Le choix de la condition à l'interface va néanmoins déterminer la relation entre les cœfficients $\boldsymbol{\gamma}^m$. Pour la condition de Dirichlet retenue, on va écrire :

$$\begin{aligned} M_{12}\, e^{\xi_{12} L}\, \boldsymbol{\gamma}_{12}^m &= M_{34}\, e^{\xi_{34} L}\, \boldsymbol{\gamma}_{34}^{m-1} \\ M_{34}\, e^{\xi_{34} 0}\, \boldsymbol{\gamma}_{34}^m &= M_{12}\, e^{\xi_{12} 0}\, \boldsymbol{\gamma}_{12}^{m-1}. \end{aligned}$$

Ces deux équations permettent d'établir une relation matricielle entre les valeurs des cœfficients γ_{12} de deux itérations successives :

$$\boldsymbol{\gamma}_{12}^m = e^{-\xi_{12} L}\, M_{12}^{-1}\, M_{34}\, e^{\xi_{34} L}\, M_{34}^{-1}\, M_{12}\, \boldsymbol{\gamma}_{12}^{m-2}.$$

Cette relation a été écrite pour les cœfficients $\boldsymbol{\gamma}_{12}$ mais une relation équivalente aurait pu être écrite pour $\boldsymbol{\gamma}_{34}$. Ces deux relations fournissant les mêmes résultats du point de vue de la convergence de l'algorithme de Schwarz, on étudiera juste la relation écrite ci-dessus. On définit alors la matrice d'amplification des erreurs par :

$$M_{amp} = e^{-\xi_{12} L}\, M_{12}^{-1}\, M_{34}\, e^{\xi_{34} L}\, M_{34}^{-1}\, M_{12}.$$

La relation de récurrence permet alors d'écrire $\boldsymbol{\gamma}_{12}^m$ en fonction de $\boldsymbol{\gamma}_{12}^0$:

$$\boldsymbol{\gamma}_{12}^m = M_{amp} \boldsymbol{\gamma}_{12}^{m-2} = M_{amp}^{m/2} \boldsymbol{\gamma}_{12}^0.$$

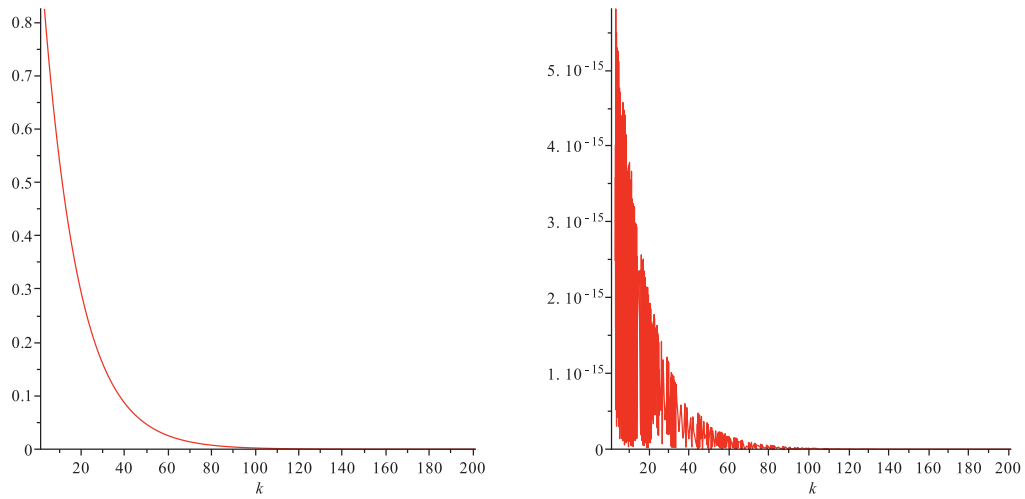
La décroissance de l'erreur au fur et à mesure des itérations va donc dépendre des valeurs propres de M_{amp}. Son expression est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{\left(2\,|k|\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,L}+k^2\mathrm{e}^{-\lambda\,L}-4\,|k|\lambda\,\mathrm{e}^{-|k|L}+\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda\,L}\right)\mathrm{e}^{-\lambda\,L}}{(-|k|+\lambda)^2} & \frac{2\,ik\left(\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,L}+|k|\mathrm{e}^{-\lambda\,L}-\mathrm{e}^{-|k|L}\lambda-\mathrm{e}^{-|k|L}|k|\right)\mathrm{e}^{-\lambda\,L}}{(-|k|+\lambda)^2} \\ \frac{2\,i\lambda\,k\left(\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,L}|k|+k^2\mathrm{e}^{-\lambda\,L}-\mathrm{e}^{-|k|L}|k|\lambda-\mathrm{e}^{-|k|L}k^2\right)\mathrm{e}^{-|k|L}}{(-k^2+|k|\lambda)^2} & -\frac{\left(4\,|k|\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,L}-\lambda^2\mathrm{e}^{-|k|L}-2\,|k|\lambda\,\mathrm{e}^{-|k|L}-k^2\mathrm{e}^{-|k|L}\right)\mathrm{e}^{-|k|L}}{(-|k|+\lambda)^2} \end{pmatrix},$$

et ses valeurs propres, obtenues à l'aide d'un outil de calcul formel, sont :

$$\begin{aligned} \rho_1 = \Bigg[& (k^2+\lambda^2)\left(\left(e^{\lambda L}+e^{|k|L}\right)^2 - 2e^{L(|k|+\lambda)}\right) + 2|k|\lambda\left(\left(e^{\lambda L}-e^{|k|L}\right)^2 - 2e^{L(|k|+\lambda)}\right) \\ & + e^{-2L(|k|+\lambda)}\left(e^{\lambda L}-e^{|k|L}\right)^2\left(k^2+|k|\lambda\right)\Bigg(\left(\lambda^2+k^2\right)\left(e^{|k|L}+e^{\lambda L}\right)^2 \\ & + 2|k|\lambda\left(\left(e^{\lambda L}-e^{|k|L}\right)^2 - 4e^{L(|k|+\lambda)}\right)\Bigg)\Bigg]\frac{e^{-2L(|k|+\lambda)}}{2(|k|-\lambda)^2} \\ \rho_2 = \Bigg[& (k^2+\lambda^2)\left(\left(e^{\lambda L}+e^{|k|L}\right)^2 - 2e^{L(|k|+\lambda)}\right) + 2|k|\lambda\left(\left(e^{\lambda L}-e^{|k|L}\right)^2 - 2e^{L(|k|+\lambda)}\right) \\ & - e^{-2L(|k|+\lambda)}\left(e^{\lambda L}-e^{|k|L}\right)^2\left(k^2+|k|\lambda\right)\Bigg(\left(\lambda^2+k^2\right)\left(e^{|k|L}+e^{\lambda L}\right)^2 \\ & + 2|k|\lambda\left(\left(e^{\lambda L}-e^{|k|L}\right)^2 - 4e^{L(|k|+\lambda)}\right)\Bigg)\Bigg]\frac{e^{-2L(|k|+\lambda)}}{2(|k|-\lambda)^2}. \end{aligned}$$

La figure 7.1 montre le comportement des valeurs propres ρ_1 et ρ_2 en fonction du nombre d'onde $k \in \left[\frac{\pi}{H} \frac{\pi}{\Delta z}\right]$, avec $H = 1$ (valeur habituelle pour la cavité entraînée) et $\Delta z = 1/64$, pour une zone de recouvrement de deux mailles (soit 2/64 pour la grille usuelle 64×64).



(a) $|\rho_1|$ (b) $|\rho_2|$

FIGURE 7.1 – Valeurs propres de la matrice d'amplification des erreurs pour le système (7.10). Les graphes ont été tracés avec les valeurs numériques suivantes : Re $= 10^3$, $\Delta t = 10^{-4}$, $\Delta z = 1/64$ et deux mailles de recouvrement ($L = 2\Delta x$).

On remarque que si la deuxième valeur propre est nulle à l'erreur machine près, la première atteint un maximum en $k = k_{min} = \frac{\pi}{H}$ et que la valeur de ce maximum est 0.82. Cette valeur va correspondre au facteur de convergence théorique de l'algorithme de Schwarz 7.1. C'est un taux de convergence plutôt lent, mais c'était à prévoir avec des conditions de Dirichlet sur l'interface et une faible zone de recouvrement.

On peut également noter que ces deux valeurs propres ont un facteur commun $e^{-2L(|k|+\lambda)}$, qui fait intervenir la largeur L de la zone de recouvrement. La présence de cette exponentielle décroissante en fonction de la largeur de la zone de recouvrement est un résultat classique en décomposition de domaine, qui peut être mis en évidence pour n'importe quelle équation (voir par exemple les travaux de Gander sur l'équation de Helmholtz [36]). Ce résultat quantifie le fait que plus la largeur de la zone de recouvrement sera importante, plus les valeurs propres de la matrice d'amplification des erreurs seront petites, et donc plus la convergence de l'algorithme de Schwarz vers la solution monodomaine sera rapide. Dans le cas limite où la largeur de la zone de recouvrement est nulle, la matrice d'amplification se simplifie en la matrice identité, dont les valeurs propres sont égales à 1. On retrouve bien le fait que l'algorithme de Schwarz ne converge

plus vers la solution monodomaine.

7.2.2 Résultats numériques

Algorithme

La méthode de Schwarz dans sa version additive est donnée par l'algorithme 7.1. On

Algorithme 7.1 Algorithme de Schwarz additif avec des conditions de Dirichlet pour Navier-Stokes avec une résolution monolithique

$\boldsymbol{v}_j^{n,0} = \boldsymbol{v}_j^{n-1}$
Tant que $\left\|\boldsymbol{v}_j^{n,m} - \boldsymbol{v}_{j'}^{n,m}\right\| > \varepsilon$ **faire**
Résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{v}_j^{n,m} - \boldsymbol{v}_j^{n-1}}{\Delta t} + \boldsymbol{v}_j^{n-1}\nabla\boldsymbol{v}_j^{n-1} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v}_j^{n,m} + \nabla p_j^{n,m} = 0 \text{ dans } \Omega_j & \text{(7.11a)} \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}_j^{n,m} = 0 \text{ dans } \Omega_j & \text{(7.11b)} \\ \boldsymbol{v}_j^{n,m} = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_j & \text{(7.11c)} \\ \boldsymbol{v}_j^{n,m} = \boldsymbol{v}_{j'}^{n,m-1} \text{ sur } \Gamma_j. & \text{(7.11d)} \end{cases}$$

Fin

peut remarquer dans cet algorithme que sur chaque sous-domaine, la pression est définie à une constante près, c'est-à-dire que le problème discret sur chaque sous-domaine est *a priori* mal posé. Il faut définir sur chaque sous-domaine une valeur de la constante de pression. Or dans le problème mono-domaine, cette pression de référence n'est définie qu'en un seul point. Étant donné que la zone de recouvrement est une zone commune à chaque sous-domaine, on choisit d'imposer la valeur de la constante de pression dans cette zone. Ainsi les problèmes de chaque sous-domaine respectif sont bien posés, et à convergence, on aura défini la valeur de la constante de pression en un seul point.

Discrétisation de la condition à l'interface

La discrétisation des équations est réalisée comme indiqué au chapitre 3. On notera respectivement $N_{1,x}$ et $N_{2,x}$ le nombre de mailles dans la direction horizontale sur chaque sous-domaine, et N_L le nombre de mailles dans la zone de recouvrement. Il nous reste juste ici à spécifier comment on va discrétiser les conditions à l'interface.

Les conditions de Dirichlet seront toujours écrites numériquement là où sont situées

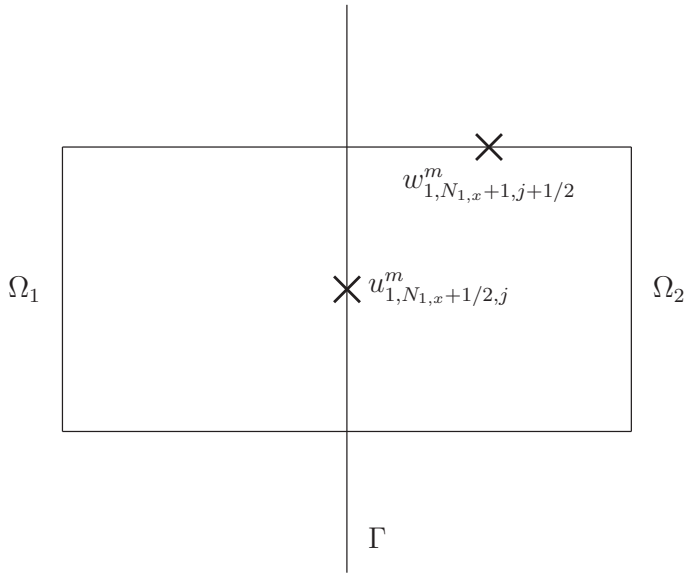


FIGURE 7.2 – Position des inconnues sur le maillage lors de la discrétisation des conditions de Dirichlet sur l'interface, sur le sous-domaine de gauche.

les inconnues sur le maillage. On écrira donc (voir figure 7.2.2) :

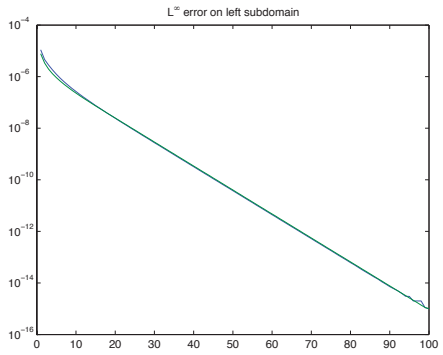
$$\begin{aligned} u^m_{1,N_{1,x}+1/2,j} &= u^{m-1}_{2,N_L+1/2,j} \\ w^m_{1,N_{1,x}+1,j+1/2} &= w^{m-1}_{2,N_L+1,j+1/2} \end{aligned}$$

Cas test de la cavité entraînée

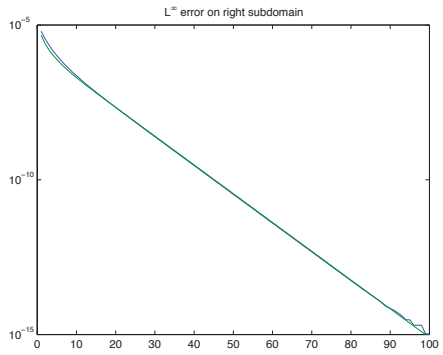
On va s'attacher maintenant à observer numériquement comment se comporte l'algorithme 7.1.

Les tests suivants sont réalisés, comme dans toute cette thèse, sur le cas test de la cavité entraînée. Sauf indication contraire, les erreurs sont calculées en utilisant la norme L^∞ à l'instant $t = 1$. On a travaillé avec les valeurs usuelles des paramètres : $\mathrm{Re} = 10^3$, $\Delta t = 10^{-4}$, sur une grille 64×64, avec deux mailles de recouvrement $N_{1,x} = 34$, $N_{2,x} = 32$.

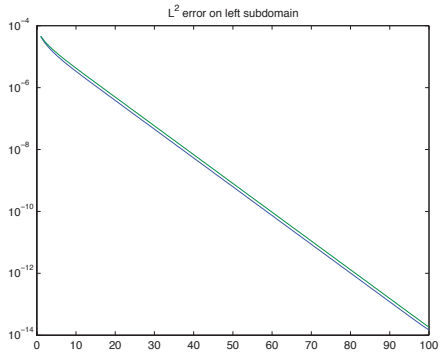
Convergence en normes L^∞, L^2 et H^1 On vérifie sur la figure 7.3 que les erreurs sur les champs de vitesse convergent aussi bien en normes L^∞, L^2 ou H^1. Les facteurs de convergence de la méthode additive, obtenus numériquement, sont très proches quelle que soit la norme considérée : ils varient entre 0.8903 et 0.8976. On peut donc utiliser



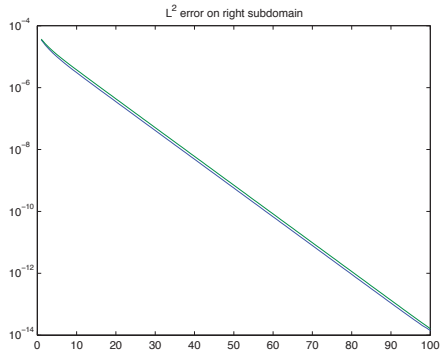
(a) Erreur L^∞ sur le sous-domaine de gauche



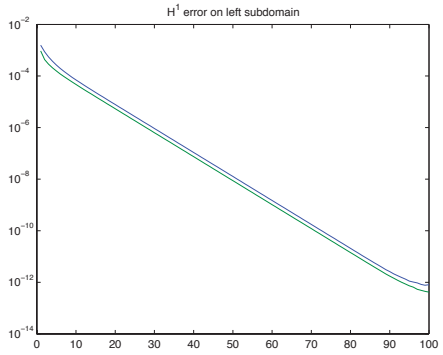
(b) Erreur L^∞ sur le sous-domaine de gauche



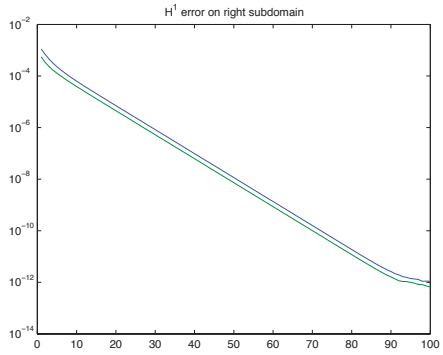
(c) Erreur L^2 sur le sous-domaine de gauche



(d) Erreur L^2 sur le sous-domaine de droite



(e) Erreur H^1 sur le sous-domaine de gauche

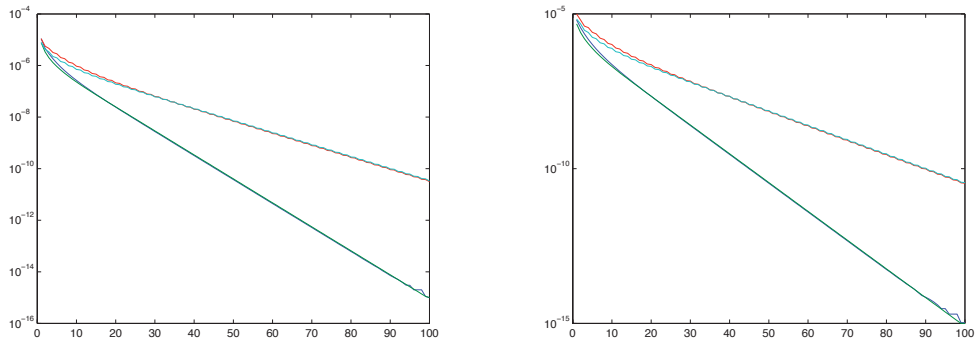


(f) Erreur H^1 sur le sous-domaine de droite

FIGURE 7.3 – Courbes de convergence en normes L^∞, L^2 et H^1 de la version multiplicative de la méthode de Schwarz 7.1, avec deux mailles de recouvrement. Les courbes bleues correspondent aux champs horizontaux, tandis que les courbes vertes correspondent aux champs verticaux. En abscisse : le nombre d'itérations.

indifféremment l'une ou l'autre de ces normes. On considérera dans la suite la norme L^∞ pour l'étude numérique des convergences.

Comparaison additif/multiplicatif Les courbes de la figure 7.4 sont les courbes de convergence en norme L^∞ de l'erreur entre la solution monodomaine et la solution bidomaine, suivant que l'on considère la version additive ou multiplicative de la méthode de Schwarz 7.1. Le facteur de convergence de la méthode de Schwarz additive vaut 0.94



(a) Erreurs L^∞ additives et multiplicatives sur le sous-domaine de gauche

(b) Erreurs L^∞ additives et multiplicatives sur le sous-domaine de droite

FIGURE 7.4 – Courbes de convergence de l'algorithme de Schwarz 7.1, avec deux mailles de recouvrement. Sur chaque graphe, les courbes du haut correspondent à la version additive de la méthode de Schwarz, tandis que celles du bas correspondent à la méthode multiplicative. En abscisse : le nombre d'itérations.

tandis que celui de la version multiplicative vaut 0.89. Ces chiffres sont cohérents : on retrouve bien le fait que le facteur de convergence de la version additive est le carré du facteur de convergence de la version multiplicative. On vérifie aisément sur les graphes que l'on gagne exactement un facteur deux sur le nombre d'itérations pour atteindre une précision donnée en utilisant la version multiplicative de la méthode de Schwarz par rapport à la version additive.

De plus, la valeur du facteur de convergence mesurée dans le cas additif est de 0.89 pour une valeur théorique de 0.82. Ces valeurs sont relativement proches l'une de l'autre, l'écart étant expliqué par le fait que la valeur théorique est obtenue en supposant le domaine de taille infinie, et pour les équations continues et non pas discrétisées.

Ces approximations, sur lesquelles on a basé les calculs réalisés dans la première section de ce chapitre, semblent donc raisonnables dans ce cas précis.

Évolution de la convergence en fonction de la largeur de la zone de recouvrement Sur la figure 7.5, on décrit l'évolution de la valeur du facteur de convergence

obtenu par simulations numériques en fonction de la largeur de la zone de recouvrement. On rappelle que les deux valeurs propres de la matrice d'amplification avaient comme facteur commun $e^{-2L(|k|+\lambda)}$, où L est la largeur de la zone de recouvrement. En traçant le logarithme du facteur de convergence en fonction de la largeur de la zone de recouvrement, on s'attend à obtenir une droite, ce qui est en effet bien le cas ici.

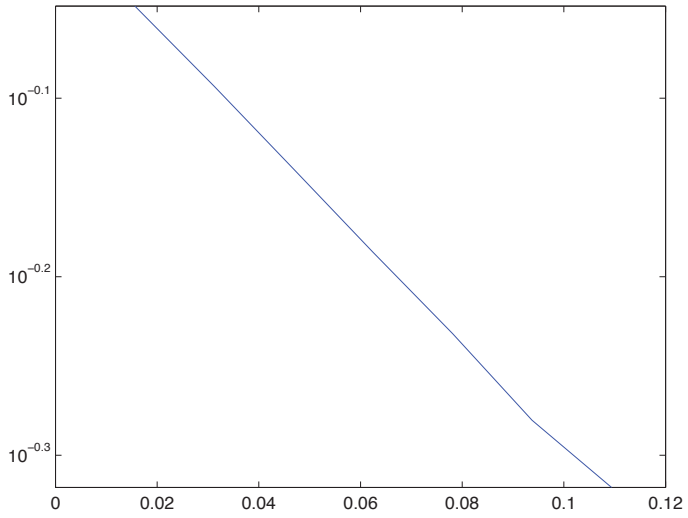


FIGURE 7.5 – Évolution du facteur de convergence en fonction de la largeur de la zone de recouvrement.

7.2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a mis en place un cadre théorique pour l'analyse de convergence des méthodes de Schwarz pour les équations de Navier-Stokes discrétisées en temps (7.1). Puis ce cadre a été utilisé pour évaluer la convergence pour des conditions simples le long de l'interface, à savoir des conditions de Dirichlet. Enfin, les résultats établis analytiquement ont été vérifiés numériquement. Ces conditions nécessitent une zone de recouvrement pour converger, et la convergence peut être très lente lorsque la zone de recouvrement est étroite. On va donc chercher dans la suite à développer d'autres conditions aux limites, qui allégeront ces deux contraintes.

Chapitre 8

Conditions optimisées pour les équations de Stokes

Dans le chapitre précédent, on a introduit un cadre permettant d'étudier les méthodes de Schwarz pour les équations de Stokes correspondant à la discrétisation (7.1) des équations de Navier-Stokes. On y a étudié l'usage des conditions de Dirichlet et on a vu que celles-ci étaient peu performantes. On va maintenant utiliser ce cadre pour définir un opérateur absorbant basé sur le tenseur des contraintes de ces équations (7.1), que l'on approchera ensuite par des opérateurs différentiels allant de l'ordre 0 à l'ordre 2.

On peut noter qu'une approche alternative à été utilisée par Doléan [25] pour le équations de Stokes, basée sur une factorisation de Smith de l'opérateur de Stokes.

On avait vu qu'il était nécessaire d'avoir une zone de recouvrement pour assurer la convergence de la méthode assortie de conditions de Dirichlet. On supposera dans la suite du chapitre qu'il n'y a pas de zone de recouvrement. On notera alors

$$\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2.$$

8.1 Opérateur absorbant exact

On va dans un premier temps construire un opérateur absorbant exact, puis on l'étudiera pour déterminer comment il peut être approché.

8.1.1 Construction de l'opérateur absorbant exact

On rappelle que les erreurs vérifient sur chaque sous-domaine le système d'équations (7.4) :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \boldsymbol{v}_j^m + \nabla p_j^m = 0 \quad \text{dans } \Omega_j \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_j^m = 0 \quad \text{dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ sur } \partial\Omega_j \backslash \Gamma_j \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma, \end{cases}$$

Pour construire la condition qui sera retenue à l'interface, nous allons suivre la démarche employée par Martin [66, 67] dans le cas des équations de Saint-Venant. Elle consiste à décomposer la condition à l'interface en deux parties. La première est issue de la quantité naturellement transmise par les équations à travers l'interface. Pour les équations de Stokes, cela correspond au tenseur des contraintes (on a d'ailleurs indiqué à la section 2.2 quelques références qui illustrent le fait que le tenseur des contraintes constitue un bon point de départ en tant qu'opérateur sur les frontières). La seconde quantité présente dans la condition à l'interface est un opérateur de relaxation S_j, qui va servir pour aboutir à une condition absorbante exacte, puis à des conditions approchées. La condition à l'interface s'écrit alors

$$-\sigma_j^m \cdot \boldsymbol{n}_j - S_j \boldsymbol{v}_j^m = -\sigma_{j'}^m \cdot \boldsymbol{n}_j - S_j \boldsymbol{v}_{j'}^{m-1} \text{sur } \Gamma, \tag{8.1}$$

où $\boldsymbol{n}_j = ((-1)^{j-1}, 0)^T$ désigne le vecteur normal à l'interface du sous-domaine Ω_j et σ_j^m est le tenseur des contraintes sur le sous-domaine Ω_j, déjà introduit au chapitre 1 dans l'équation (1.4). On considérera ici la version non symétrique de ce tenseur. Dans le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles, son expression se simplifie en :

$$\sigma_j^m = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla \boldsymbol{v}_j^m - p_j^m I.$$

Pour obtenir les conditions absorbantes exactes, on repart du système (7.6) vérifié par les erreurs dans l'espace de Fourier :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{v}}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_j^m}{dx^2} - k^2\hat{\boldsymbol{v}}_j^m\right) + \begin{pmatrix} \dfrac{d\hat{p}_j^m}{dx} \\ ik\hat{p}_j^m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_j \\ \dfrac{d\hat{\boldsymbol{v}}_j^m}{dx} + ik\hat{\boldsymbol{v}}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \hat{\boldsymbol{v}}_j^m \to \mathbf{0} \text{ quand } x \to \pm\infty \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma. \end{cases}$$

On rappelle que celui-ci avait été obtenu en supposant le domaine infini, à la fois en x (pour simplifier l'expression analytique des erreurs grâce à la condition aux limites) et en z (pour pouvoir utiliser une transformée de Fourier). En reprenant maintenant l'équation sur la composante verticale de la conservation de la quantité de mouvement de (7.6), on peut établir une expression de l'erreur sur la pression

$$\hat{p}_j^m = \frac{i}{k}\left[\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{k^2}{\mathrm{Re}}\right)\hat{w}_j^m - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\hat{w}_j^m}{dx^2}\right].$$

On remplace alors la pression dans les conditions à l'interface (8.1) dans le domaine de Fourier pour les réécrire uniquement en fonction de la vitesse sur chaque sous-domaine :

$$M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_1^m}{dx^2} + N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_1^m}{dx} + P\hat{\boldsymbol{v}}_1^m - \hat{S}_1\hat{\boldsymbol{v}}_1^m = M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx^2} + N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx} + P\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} - \hat{S}_1\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} \quad (8.2)$$

$$-M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_2^m}{dx^2} - N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^m}{dx} - P\hat{\boldsymbol{v}}_2^m - \hat{S}_2\hat{\boldsymbol{v}}_2^m = -M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}}{dx^2} - N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}}{dx} - P\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1} - \hat{S}_2\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1} \quad (8.3)$$

avec les matrices M, N et P définies par

$$M = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = -\frac{1}{\mathrm{Re}}I_2 \ \text{ et } \ P = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{k}\lambda^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste alors plus qu'à remplacer les vitesses $\hat{\boldsymbol{v}}_j^m$ et leurs dérivées par leur expression matricielle (7.9) :

$$\hat{\boldsymbol{v}}_1^m(x) = M_{12}\, e^{\xi_{12}x}\, \boldsymbol{\gamma}_{12}^m \quad \text{ et } \quad \hat{\boldsymbol{v}}_2^m(x) = M_{34}\, e^{\xi_{34}x}\, \boldsymbol{\gamma}_{34}^m$$

avec

$$M_{12} = \begin{pmatrix} ik & -|k| \\ -\lambda & -ik \end{pmatrix},\ e^{\xi_{12}x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_2 x} \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \boldsymbol{\gamma}_{12}^m = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^m \\ \gamma_{1,2}^m \end{pmatrix},$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} ik & |k| \\ \lambda & -ik \end{pmatrix},\ e^{\xi_{34}x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_3 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_4 x} \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \boldsymbol{\gamma}_{34}^m = \begin{pmatrix} \gamma_{2,3}^m \\ \gamma_{2,4}^m \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs S_j qui annulent les seconds membres des conditions à l'interface (8.1) sont les opérateurs absorbants exacts recherchés, et leur expression dans le domaine de Fourier est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= MQ_{34}^2 + NQ_{34} + P \\ \hat{S}_2 &= -MQ_{12}^2 - NQ_{12} - P, \end{aligned}$$

où

$$Q_{12} = M_{12}\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} M_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -ik \\ -ik\frac{\lambda}{|k|} & \lambda + |k| \end{pmatrix}$$

$$Q_{34} = M_{34}\begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_4 \end{pmatrix} M_{34}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -ik \\ -ik\frac{\lambda}{|k|} & -\lambda - |k| \end{pmatrix}.$$

Après simplification, ces opérateurs $\hat{S}_j$ se réécrivent en :

$$\hat{S}_1 = \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|k|}(\lambda + |k|) & -\frac{ik}{|k|}\lambda \\ \frac{ik}{|k|}\lambda & \lambda + |k| \end{pmatrix} \text{ et } \hat{S}_2 = \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|k|}(\lambda + |k|) & \frac{ik}{|k|}\lambda \\ -\frac{ik}{|k|}\lambda & \lambda + |k| \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Ces opérateurs font intervenir des valeurs absolues et des racines carrées de k via l'expression de λ (7.8)

$$\lambda = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t} + k^2}.$$

Une transformée de Fourier inverse conduirait à un opérateur pseudo-différentiel non local en espace, qui serait alors inutilisable numériquement car trop coûteux. On va donc devoir approcher cet opérateur S_j exact par un opérateur local en espace.

On peut noter dès maintenant que pour chaque matrice $\hat{S}_j$, la somme des termes antidiagonaux est nulle, et que les cœfficients de ces deux matrices sont identiques au signe des termes antidiagonaux près. On souhaitera conserver ces propriétés lors des approximations à venir.

8.1.2 Étude de l'opérateur $\hat{S}_j$

Avant de se lancer dans les calculs de conditions approchées, on souhaite quantifier les ordres de grandeur des termes qui composent les matrices $\hat{S}_j$. Ces ordres de grandeurs sont tracés sur la figure 8.1, pour $\Delta x = \Delta z = 1/64$, $\mathrm{Re} = 10^3$ et $\Delta t = 10^{-4}$. On peut y voir que le cœfficient $\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\lambda}{|k|}(\lambda + |k|)$ est très supérieur aux autres cœfficients, qui sont eux du même ordre de grandeur. On s'attend donc à retrouver ces ordres de grandeur dans les approximations des opérateurs S_j à venir.

Comme on l'a dit plus tôt, deux problèmes se posent pour exprimer les opérateurs S_j dans le domaine réel : le module de k et la racine carrée dans l'expression de λ. Nous allons approcher ces termes en réalisant des développements limités de l'opérateur absorbant exact (8.4) en fonction d'un petit paramètre que l'on va introduire.

On considère que $k^2 \ll \frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}$. C'est une approximation justifiée numériquement : pour le cas-test de la cavité entraînée, le nombre d'onde k appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{H}, \frac{\pi}{\Delta z}] = [3.14, 200.06] \ll \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}} = 10^{3.5}$. En posant $\varepsilon = |k|\sqrt{\Delta t/\mathrm{Re}}$ on peut alors réaliser un développement limité de λ pour ε petit :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}(1 + \varepsilon^2)} = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t}}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)\right).$$

On en déduit une expression approchée pour les $\hat{S}_i$:

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} |k|(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} + 1 + \frac{\varepsilon}{2}) & ik(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}) \\ -ik(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}) & |k|(\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \frac{\varepsilon}{2}) \end{pmatrix} + o(\varepsilon) \tag{8.5}$$

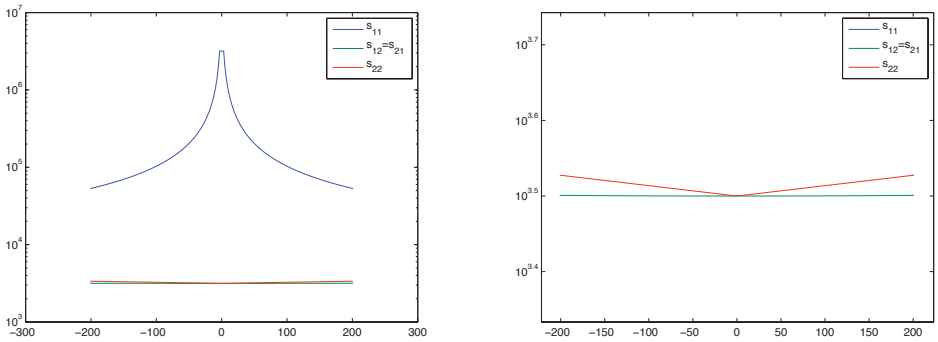


FIGURE 8.1 – Ordres de grandeur des cœfficients des matrices $\hat{S}_i$ en fonction du nombre d'onde k. Tous les cœfficients sont représentés sur la figure de gauche. Sur celle de droite, un zoom a été fait sur les courbes du bas.

et un résultat similaire pour $\hat{S}_1$. On peut noter que les ordres de grandeur des cœfficients obtenus après développements limités sont analogues à ceux observés sur la figure 8.1 : le cœfficient en haut à gauche est en $1/\varepsilon^2$ tandis que les autres cœfficients sont en $1/\varepsilon$. On vérifie également que les termes antidiagonaux sont toujours opposés.

8.2 Discrétisation de la condition à l'interface

On va expliciter dans cette section les choix effectués quant à la discrétisation des conditions à l'interface. On rappelle que celles retenues s'écrivent, dans leur version additive

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \boldsymbol{v}_1^m}{\partial x} + p_1^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - S_1 \boldsymbol{v}_1^m = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \boldsymbol{v}_2^{m-1}}{\partial x} + p_2^{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - S_1 \boldsymbol{v}_2^{m-1}$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \boldsymbol{v}_2^m}{\partial x} + p_2^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - S_2 \boldsymbol{v}_2^m = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \boldsymbol{v}_1^{m-1}}{\partial x} + p_1^{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - S_2 \boldsymbol{v}_1^{m-1}.$$

Il est nécessaire que la discrétisation de la condition à l'interface se fasse en accord avec le schéma de discrétisation retenu pour les équations monodomaines, si l'on souhaite que la méthode converge à la précision machine près vers la solution numérique monodomaine. Sans cette précaution, les solutions sur chaque sous-domaine ne seraient plus égales à la solution monodomaine qu'à un $O(\Delta x^{o_x})$ près, o_x désignant l'ordre du schéma de discrétisation spatiale dans la direction x.

On se place dans cette section sur le sous-domaine de gauche, les conditions à l'interface sur le sous-domaine de droite se traitant de manière similaire. On considère

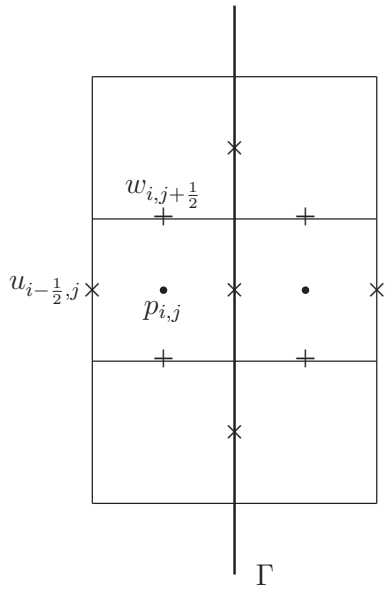


FIGURE 8.2 – Indices de discrétisation spatiale le long de l'interface. Les $\times$ correspondent aux nœuds du maillage où est discrétisée la composante horizontale u du champ de vitesse, les $+$ à la composante verticale w du champ de vitesse et les $\cdot$ au champ de pression.

également que l'opérateur S_1 s'écrit sous la forme générale suivante

$$S_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

où ses différents cœfficients sont considérés constants, le principe de la discrétisation restant le même pour des opérateurs plus complexes.

Enfin, on rappelle que les indices de la discrétisation sont entiers au centre des mailles. On pourra se reporter à la figure 8.2 pour plus de clarté.

On va décrire dans un premier temps la discrétisation de la composante horizontale de la condition du sous-domaine de droite sur l'interface. Pour ce faire, on part de l'équation monodomaine (7.3) discrétisée en espace au point d'indice $(i + 1/2, j)$:

$$\frac{1}{\Delta t} u_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{3}{2},j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}}{\Delta z^2} \right) + \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} = f_{i+\frac{1}{2},j}, \tag{8.6}$$

dans laquelle, après multiplication par $-\Delta x$, on scinde les termes en $O(\Delta x)$ de manière

à faire apparaître le pseudo-tenseur des contraintes sur chaque sous-domaine :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\Delta x}{2\Delta t}u_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}-u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x}-\frac{\Delta x}{2}\frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1}-2u_{i+\frac{1}{2},j}+u_{i+\frac{1}{2},j+1}}{\Delta z^2}\right)+p_{i,j}\\
&=-\Delta x\, f_{i+\frac{1}{2},j}+\frac{\Delta x}{2\Delta t}u_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j}-u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x}+\frac{\Delta x}{2}\frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1}-2u_{i+\frac{1}{2},j}+u_{i+\frac{1}{2},j+1}}{\Delta z^2}\right)+p_{i+1,j}.
\end{aligned}
$$

Les termes en $O(\Delta x)$ ont été divisés par deux et répartis de chaque côté du signe égal pour "symétriser" l'équation. Ce sont ces termes, issus de l'équation monodomaine, qui sont nécessaires pour assurer la convergence numérique à la précision machine près. Les autres termes correspondent bien à une discrétisation du pseudo-tenseur des contraintes.

Pour conserver la convergence vers la solution à l'erreur machine près, tous les autres termes intervenant dans la condition à l'interface (ici $-\alpha u-\beta w$) doivent être rajoutés de manière équlibrée, de part et d'autre du signe égal

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\Delta x}{2\Delta t}u^m_{1;i+\frac{1}{2},j}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{u^m_{1;i+\frac{1}{2},j}-u^m_{1;i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x}-\frac{\Delta x}{2}\frac{u^m_{1;i+\frac{1}{2},j-1}-2u^m_{1;i+\frac{1}{2},j}+u^m_{1;i+\frac{1}{2},j+1}}{\Delta z^2}\right)+p^m_{1;i,j}\\
&-\alpha u^m_{1;i+\frac{1}{2},j}-\beta w^m_{1;i+\frac{1}{2},j}\\
&=-\Delta x\, f_{i+\frac{1}{2},j}+\frac{\Delta x}{2\Delta t}u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{u^{m-1}_{2;i+\frac{3}{2},j}-u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x}+\frac{\Delta x}{2}\frac{u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j-1}-2u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j}+u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j+1}}{\Delta z^2}\right)\\
&+p^{m-1}_{2;i+1,j}-\alpha u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j}-\beta w^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j},
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

de façon à ce qu'à convergence, la condition à l'interface (8.7) corresponde à l'équation monodomaine (8.6).

Dans l'équation précédente, on a introduit le terme $w^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j}$. Or la composante verticale de la vitesse n'est pas définie au point d'indice $(i+\frac{1}{2},j)$. Sa valeur en ce point va être calculée en moyennant les valeurs des quatre nœuds les plus proches :

$$
w_{1;i+\frac{1}{2},j}=\frac{1}{4}\left(w_{1;i,j-\frac{1}{2}}+w_{1;i,j+\frac{1}{2}}+w_{1;i+1,j-\frac{1}{2}}+w_{1;i+1,j+\frac{1}{2}}\right).
$$

La même équation décrit $w_{2;i+\frac{1}{2},j}$. On remarque que les deux termes $w_{1;i+1,j-\frac{1}{2}}$ et $w_{1;i+1,j+\frac{1}{2}}$ (respectivement $w_{2;i,j-\frac{1}{2}}$ et $w_{2;i,j+\frac{1}{2}}$) n'existent pas dans le sous-domaine Ω_1 (respectivement dans Ω_2). Pour pallier à ce problème, on choisit d'étendre le sous-domaine Ω_1 d'une demi-maille vers la droite (respectivement Ω_2 d'une demi-maille vers la gauche). On introduit ainsi une zone de recouvrement d'une maille de largeur pour le champ de vitesse

vertical w. La condition à l'interface (8.7) se discrétise alors sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\Delta x}{2\Delta t}u^m_{1;i+\frac{1}{2},j} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{u^m_{1;i+\frac{1}{2},j} - u^m_{1;i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}\frac{u^m_{1;i+\frac{1}{2},j-1} - 2u^m_{1;i+\frac{1}{2},j} + u^m_{1;i+\frac{1}{2},j+1}}{\Delta z^2}\right) + p^m_{1;i,j} \\
&-\alpha u^m_{1;i+\frac{1}{2},j} - \frac{\beta}{4}\left(w^m_{1;i,j-\frac{1}{2}} + w^m_{1;i,j+\frac{1}{2}} + w^m_{1;i+1,j-\frac{1}{2}} + w^m_{1;i+1,j+\frac{1}{2}}\right) \\
&= -\Delta x\, f_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\Delta x}{2\Delta t}u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{u^{m-1}_{2;i+\frac{3}{2},j} - u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2}\frac{u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j-1} - 2u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j} + u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j+1}}{\Delta z^2}\right) \\
&+p^{m-1}_{2;i+1,j} - \alpha u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j} - \frac{\beta}{4}\left(w^{m-1}_{2;i,j-\frac{1}{2}} + w^{m-1}_{2;i,j+\frac{1}{2}} + w^{m-1}_{2;i+1,j-\frac{1}{2}} + w^{m-1}_{2;i+1,j+\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

La composante verticale de la condition à l'interface se discrétise de manière similaire en $(i+1, j+1/2)$:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\Delta x}{2\Delta t}w^m_{1;i+1,j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{w^m_{1;i+1,j+\frac{1}{2}} - w^m_{1;i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}\frac{w^m_{1;i+1,j+\frac{3}{2}} - 2w^m_{1;i+1,j+\frac{1}{2}} + w^m_{1;i+1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z^2}\right) \\
&-\frac{\Delta x}{2}\frac{p^m_{1;i+1,j+1} - p^m_{1;i+1,j}}{\Delta y} - \delta w^m_{1;i+1,j+\frac{1}{2}} - \frac{\gamma}{2}\left(u^m_{1;i+\frac{1}{2},j} + u^m_{1;i+\frac{1}{2},j+1}\right) \\
&= -\Delta x\, f_{i+1,j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x}{2\Delta t}w^{m-1}_{2;i+1,j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x}{2}\frac{p^m_{2;i+1,j+1} - p^m_{2;i+1,j}}{\Delta y} \\
&-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{w^{m-1}_{2;i+1,j+\frac{1}{2}j} - w^{m-1}_{2;i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2}\frac{w^{m-1}_{2;i+1,j+\frac{3}{2}} - 2w^{m-1}_{2;i+1,j+\frac{1}{2}} + w^{m-1}_{2;i+1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z^2}\right) \\
&-\delta w^{m-1}_{2;i+1,j+\frac{1}{2}} - \frac{\gamma}{2}\left(u^{m-1}_{2;i+\frac{1}{2},j} + u^{m-1}_{2;i+\frac{3}{2},j}\right).
\end{aligned}
$$

Le terme $\gamma u_{i+1,j+\frac{1}{2}}$ a été discrétisé en utilisant les deux points $u_{i+\frac{1}{2},j}$ et $u_{i+\frac{1}{2},j+1}$, ce qui correspond bien à une discrétisation de $u_{i+1,j+\frac{1}{2}}$ à un $O(\Delta x)$ près. Contrairement à ce qui a été fait pour la composante horizontale de la condition à l'interface, les deux points $u_{i+\frac{3}{2},j}$ et $u_{i+\frac{3}{2},j+1}$ n'ont pas été utilisés, car cela aurait conduit à augmenter à nouveau la largeur de la zone de recouvrement, celle-ci serait alors plus large d'une maille que ce qu'on souhaitait initialement, ce qui n'est pas acceptable.

8.3 Convergence de la méthode de Schwarz utilisant des opérateurs approchés

Avant de regarder en détails différentes approximations possibles de l'opérateur S_j, on souhaite maintenant fournir au lecteur les bases permettant d'analyser la convergence d'une méthode de Schwarz utilisant des opérateurs approchés.

Comme on l'a vu un peu plus tôt, les opérateurs absorbants exacts donnés par transformée de Fourier inverse de $\hat{S}_j$ (8.4) ne sont pas utilisables numériquement car pseudo-différentiels. Il faut donc les approcher, et utiliser dans la méthode de Schwarz leur

approximation que l'on notera S_j^{app}. L'algorithme de Schwarz, avec toujours l'approximation de domaine infini utile pour l'étude théorique de la convergence, se réécrit alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\Delta t}\boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v}_j^m + \nabla p_j^m = 0 \quad \text{dans } \Omega_j \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}_j^m = 0 \quad \text{dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v_j^m} \to 0 \text{ quand } |x| + |z| \to \pm\infty \\ -\sigma_j^m \cdot \boldsymbol{n}_j - S_j^{app}\boldsymbol{v}_j^m = -\sigma_{j'}^m \cdot \boldsymbol{n}_j - S_j^{app}\boldsymbol{v}_{j'}^{m-1} \quad \text{sur } \Gamma. \end{array}\right. \tag{8.8}$$

Différents opérateurs S_j^{app} seront envisagés plus loin dans le chapitre. D'un point de vue analytique, il conviendrait d'étudier le caractère bien posé du système (8.8) pour chaque opérateur S_j^{app}. Néanmoins, ce qui nous intéresse dans cette section est d'expliciter la démarche pour l'étude de la convergence de la méthode de Schwarz (8.8).

Cette convergence va dépendre du choix des opérateurs approchés S_j^{app}. En reprenant la démarche de la section 8.1, on peut réécrire les équations (8.2) et (8.3) pour l'opérateur approché S_j^{app} en remplaçant simplement son symbole dans le domaine de Fourier :

$$\begin{aligned} M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_1^m}{dx^2} + N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_1^m}{dx} + P\hat{\boldsymbol{v}}_1^m - \hat{S}_1^{app}\hat{\boldsymbol{v}}_1^m &= M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx^2} + N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx} + P\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} - \hat{S}_1^{app}\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} \\ -M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_2^m}{dx^2} - N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^m}{dx} - P\hat{\boldsymbol{v}}_2^m - \hat{S}_2^{app}\hat{\boldsymbol{v}}_2^m &= -M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}}{dx^2} - N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}}{dx} - P\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1} - \hat{S}_2^{app}\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}. \end{aligned}$$

L'expression des vitesses $\hat{\boldsymbol{v}}_j^m$ précédemment établie en (7.9), ainsi que les deux équations ci-dessus, permettent alors d'écrire sur chaque sous-domaine une relation de récurrence entre les vitesses pour deux itérations de la méthode de Schwarz (8.8) :

$$M_{12}^{-1}\hat{\boldsymbol{v}}_1^m = \hat{H}_{11}^{-1}\hat{H}_{12}\hat{H}_{22}^{-1}\hat{H}_{21}M_{12}^{-1}\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-2},$$

où les opérateurs H ont pour expression dans le domaine de Fourier :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{11} &= MM_{12}\begin{pmatrix} \xi_1^2 & 0 \\ 0 & \xi_2^2 \end{pmatrix} + NM_{12}\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} + PM_{12} - \hat{S}_1^{app}M_{12} \\ \hat{H}_{12} &= MM_{34}\begin{pmatrix} \xi_1^2 & 0 \\ 0 & \xi_2^2 \end{pmatrix} + NM_{34}\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} + PM_{34} - \hat{S}_1^{app}M_{34} \\ \hat{H}_{22} &= -MM_{34}\begin{pmatrix} \xi_3^2 & 0 \\ 0 & \xi_4^2 \end{pmatrix} - NM_{34}\begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_4 \end{pmatrix} - PM_{34} - \hat{S}_2^{app}M_{34} \\ \hat{H}_{21} &= -MM_{12}\begin{pmatrix} \xi_3^2 & 0 \\ 0 & \xi_4^2 \end{pmatrix} - NM_{12}\begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_4 \end{pmatrix} - PM_{12} - \hat{S}_2^{app}M_{12}. \end{aligned}$$

La convergence de la méthode de Schwarz (8.8) est donc déterminée par la matrice

$$\hat{H} = \hat{H}_{11}^{-1}\hat{H}_{12}\hat{H}_{22}^{-1}\hat{H}_{21}. \tag{8.9}$$

Cette matrice est la matrice d'amplification des erreurs, et dépend des opérateurs approchés S_j^{app} choisis. L'algorithme de Schwarz est convergent si le rayon spectral de $\hat{H}$ est inférieur à 1. Plus le rayon spectral est proche de 0, et plus la convergence est rapide. On peut noter que dans le cas particulier des opérateurs absorbants ($S_j^{app} = S_j$ définis en (8.4)), les matrices $\hat{H}_{12}$ et $\hat{H}_{21}$ sont nulles. La convergence est alors immédiate.

Pour un opérateur S_j^{app} quelconque, l'expression de la matrice d'amplification des erreurs dans le domaine de Fourier $\hat{H}$ dépend de manière non triviale du nombre d'onde k, ce qui implique *a priori* que l'expression de ses valeurs propres en dépend aussi. Pour qu'il y ait convergence, il faudra donc que le rayon spectral (qui est alors fonction de k) soit inférieur à 1 pour toute valeur de k dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{H}, \frac{\pi}{\Delta z}\right]$, soit

$$\max_{k\in\left[\frac{\pi}{H},\frac{\pi}{\Delta z}\right]} \max_{\lambda\in Sp(\hat{H})} |\lambda(k)| < 1. \tag{8.10}$$

C'est ce type de critère que l'on va maintenant étudier pour diverses formes de S_j^{app}.

8.4 Conditions optimisées d'ordre 0

On va maintenant s'intéresser, en s'appuyant sur les développements limités de la section 8.1.2, à différentes approximations possibles pour l'opérateur S_j. On considérera dans un premier temps des opérateurs différentiels d'ordre 0 (c'est-à-dire que le symbole de l'opérateur S_j sera approché dans le domaine de Fourier par un polynôme de degré 0 en k). Puis, à la section 8.5, on utilisera des opérateurs différentiels d'ordre 2.

Les opérateurs approchés seront construits ici en utilisant le développement limité (8.5) de l'opérateur $\hat{S}_j$ (8.4). La première approximation sera déterminée en considérant l'ordre le plus faible (en $\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$) du développement limité, tandis que les approximations suivantes utiliseront un ordre plus élevé $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$.

8.4.1 Première approximation

À l'ordre le plus petit, le développement limité (8.5) de l'opérateur $\hat{S}_j$ dans le domaine de Fourier s'écrit simplement

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} |k|/\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Une transformation de Fourier inverse d'un tel opérateur est possible, le module de k s'exprimant dans le domaine réel à l'aide d'une transformée de Hilbert (on pourra se reporter aux ouvrages de Stein [83] et [82] pour plus de renseignements à ce sujet). Cependant, l'opérateur ainsi obtenu est non-local en espace, et de fait coûteux en temps de calcul. On ne travaillera donc pas directement avec les modules de k, et on choisira

de les approcher par des constantes dans le domaine réel. Une première approximation pour les opérateurs $\hat{S}_j$ s'écrira alors

$$\hat{S}_j^{app} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.11}$$

où α sera une constante dont la valeur reste à déterminer. Cette approximation respecte les ordres de grandeur observés sur la figure 8.1.

Analyse théorique

Pour étudier la convergence d'une méthode de Schwarz avec un tel opérateur, on a besoin de connaître le rayon spectral de la matrice d'amplification (8.9) correspondant à l'opérateur de relaxation (8.11). Le calcul des valeurs propres, réalisé sous Maple, fournit l'expression des deux valeurs propres de la matrice d'amplification :

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{\left(-k^2\,|k|\,\lambda + k^2\,|k|\,\alpha\ \mathrm{Re} + \lambda^4 - \lambda^2\alpha\ |k|\,\mathrm{Re}\right)^2}{\left(k^2\,|k|\,\lambda + k^2\,|k|\,\alpha\ \mathrm{Re} - \lambda^4 - \lambda^2\alpha\ |k|\,\mathrm{Re}\right)^2}. \tag{8.12}$$

Une des valeurs propres de la matrice d'amplification est égale à 1, ce qui implique que son rayon spectral sera au moins égal à 1, et donc qu'un algorithme de Schwarz écrit avec cet opérateur à l'interface ne convergerait en théorie pas.

L'existence de cette valeur propre égale à 1 peut facilement être expliquée. En effet, si on réécrit composante par composante la condition à l'interface (8.1) en remplaçant S_j par l'opérateur approché (8.11), on obtient comme condition sur l'interface Γ pour le sous-domaine Ω_1

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u_1^m}{\partial x} + p_1^m - \alpha u_1^m &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u_2^{m-1}}{\partial x} + p_2^{m-1} - \alpha u_2^{m-1} \\ -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial w_1^m}{\partial x} &= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial w_2^{m-1}}{\partial x}, \end{aligned}$$

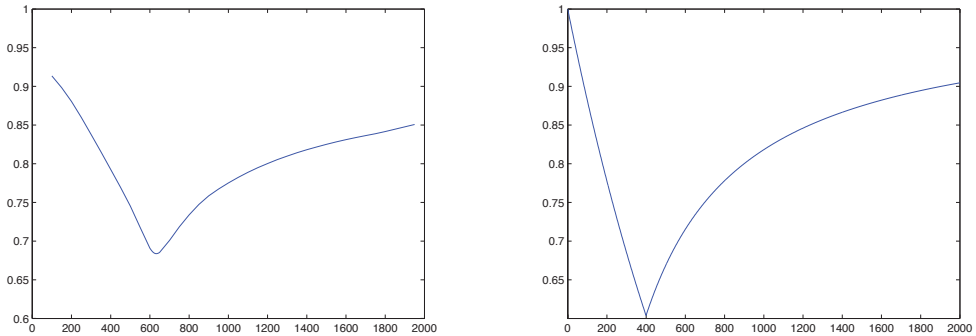
et un résultat similaire pour l'autre sous-domaine Ω_2

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u_2^m}{\partial x} - p_2^m - \alpha u_2^m &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u_1^{m-1}}{\partial x} - p_1^{m-1} - \alpha u_1^{m-1} \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial w_2^m}{\partial x} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial w_1^{m-1}}{\partial x}. \end{aligned}$$

On peut noter que, si la première composante de la condition à l'interface évolue d'une itération à l'autre (le signe devant le tenseur des contraintes changeant suivant que l'on soit sur Ω_1 ou Ω_2), il n'en va pas de même pour la quantité transmise par la deuxième composante, du fait de l'absence de terme dans la deuxième composante de l'opérateur approché (8.11). Ainsi, la valeur de la dérivée $\frac{\partial w}{\partial x}$ sur Γ restera "bloquée" à sa valeur initiale, et ne convergera pas vers la valeur monodomaine. Il est alors normal que la matrice d'amplification des erreurs possède une valeur propre égale à 1.

Résultats numériques

Cependant, l'implémentation numérique de telles conditions fournit des résultats pratiques différents, puisqu'ils sont obtenus après discrétisation spatiale, et en domaine borné et non pas infini. On peut observer sur la figure 8.3(a) le facteur de convergence numérique en fonction du paramètre α. Il apparaît ainsi que quelles que soient les valeurs de α entre 0 et 2000, la méthode de Schwarz converge. La convergence la plus rapide est atteinte pour $\alpha = 630$, le facteur de convergence valant alors 0.684. À titre de comparaison, on rappelle qu'on avait obtenu un facteur 0.89 avec les conditions de Dirichlet présentées au chapitre précédent pour deux mailles de recouvrement. En pratique, cela correspond à un gain d'un facteur 6 sur le nombre d'itérations (voir figure 8.4).

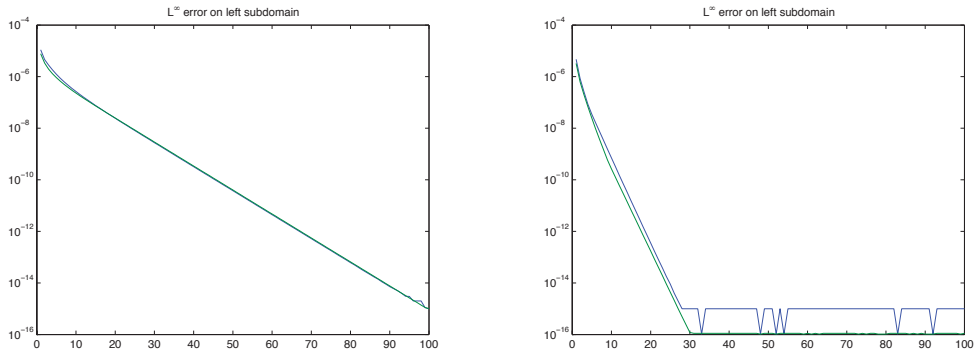


(a) Facteur de convergence numérique de la méthode de Schwarz

(b) Comportement théorique de la deuxième valeur propre (8.12)

FIGURE 8.3 – Comparaison du comportement du taux d'amplification des erreurs numériques en fonction du paramètre α pour l'approximation (8.11), avec le comportement de la deuxième valeur propre (8.12).

Si on compare maintenant le graphe 8.3(a) avec celui de la deuxième valeur propre (8.12) – on a tracé sur la figure 8.3(b) le maximum en k de cette valeur propre en fonction de α – on peut remarquer une assez forte similarité entre les deux graphes : une décroissance rapide jusqu'à un minimum, puis une remontée plus lente. Ces deux graphes vont néanmoins différer sur les valeurs du paramètre α réalisant le minimum, ainsi que sur la valeur atteinte en ce minimum. Tout a l'air de se passer comme si la première valeur propre (8.12) devenait en pratique plus petite que la deuxième, la deuxième valeur propre théorique devenant alors la plus grande valeur propre pratique. Une autre raison est à prendre en compte pour expliquer la convergence de la méthode de Schwarz avec ces conditions à l'interface : la discrétisation de celles-ci, détaillée dans la section 8.2, est réalisée en utilisant une zone de recouvrement d'une maille de largeur pour l'équation sur la composante verticale de la vitesse. Or c'était pour cette composante que la condition



(a) Conditions de Dirichlet (2 mailles de recouvrement)

(b) Conditions optimisées (8.11)

FIGURE 8.4 – Comparaison du nombre d'itérations de versions multiplicatives des méthodes de Schwarz 7.1 et (8.8) : erreur L^∞ sur le sous-domaine de gauche en fonction du nombre d'itérations.

à l'interface empêchait toute évolution de sa valeur sur l'interface. Comme pour le cas de conditions de Dirichlet, la zone de recouvrement permet de résoudre ce problème, et donc à la méthode de Schwarz de converger.

8.4.2 Deuxième approximation

L'approximation qui vient d'être réalisée se basait sur un développement limité à l'ordre -2 en ε de l'opérateur $\hat{S}_j$. On va maintenant regarder si une approximation à un ordre supérieur en ε fournit un opérateur approché plus efficace en terme de convergence. Le développement limité (8.5) s'écrit à l'ordre -1 en ε :

$$\hat{S}_j = \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} |k|(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}) & \mp ik\frac{1}{\varepsilon} \\ \pm ik\frac{1}{\varepsilon} & |k|\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

On peut noter que les cœfficients diagonaux sont des fonctions paires de k, alors que les cœfficients anti-diagonaux sont des fonctions impaires de k. On rappelle que l'on se limite dans cette section à une approximation des cœfficients par un polynôme de degré 0 en k. Dans notre cas, cela signifie que l'on va approcher l'opérateur $\hat{S}_j$ par

$$\hat{S}_j^{app} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}. \tag{8.13}$$

Les cœfficients antidiagonaux sont nuls pour respecter l'imparité en k de ces cœfficients.

Comme précédemment l'étude de la convergence de la méthode de Schwarz (8.8) avec l'approximation (8.13) est réalisée en étudiant le rayon spectral de la matrice d'amplification des erreurs $\hat{H}$. Ses valeurs propres, obtenues avec un logiciel de calcul formel, sont

données par :

$$\frac{1}{\left(-k^2\,|k|\,\lambda - k^2\beta\,\lambda\,\mathrm{Re} - k^2\alpha\,|k|\,\mathrm{Re} - k^2\alpha\,\mathrm{Re}^2\beta + \lambda^4 + \lambda^3\beta\,\mathrm{Re} + \alpha\,|k|\,\mathrm{Re}\,\lambda^2 + \lambda\,\alpha\,|k|\,\mathrm{Re}^2\beta\right)^2}$$
$$\times\Bigg[\lambda^8 + k^6\lambda^2 + \lambda^6\beta^2\mathrm{Re}^2 + \alpha^2k^2\mathrm{Re}^2\lambda^4 - 2\,k^4\alpha^2\mathrm{Re}^2\lambda^2 - 2\,k^2\lambda^5\,|k| - 2\,k^2\lambda^4\beta\,\mathrm{Re}^2\alpha$$
$$-4\,\lambda^5\alpha\,|k|\,\mathrm{Re}^2\beta - 2\,k^2\lambda^4\beta^2\mathrm{Re}^2 + k^4\beta^2\lambda^2\mathrm{Re}^2 + k^6\alpha^2\mathrm{Re}^2 - 4\,k^4\beta\,\lambda\,\mathrm{Re}^2\alpha\,|k| + \lambda^2\alpha^2k^2\mathrm{Re}^4\beta^2$$
$$-2\,k^2\lambda\,\alpha^2\,|k|\,\mathrm{Re}^4\beta^2 + k^4\alpha^2\mathrm{Re}^4\beta^2 + 12\,k^2\lambda^3\beta\,\mathrm{Re}^2\alpha\,|k| - 2\,k^4\lambda^2\alpha\,\mathrm{Re}^2\beta$$
$$+2\Big(\mathrm{Re}^2\,(k-\lambda)^2\,(k+\lambda)^2\,(\alpha\,|k| - \beta\,\lambda)^2\Big(\lambda^2\alpha^2k^2\mathrm{Re}^4\beta^2 - 2\,k^4\lambda^2\alpha\,\mathrm{Re}^2\beta + k^6\lambda^2$$
$$-2\,k^2\lambda\,\alpha^2\,|k|\,\mathrm{Re}^4\beta^2 + 8\,k^2\lambda^3\beta\,\mathrm{Re}^2\alpha\,|k| - 2\,k^4\beta\,\lambda\,\mathrm{Re}^2\alpha\,|k| - 2\,\lambda^5\alpha\,|k|\,\mathrm{Re}^2\beta - 2\,k^2\lambda^5\,|k|$$
$$+k^4\alpha^2\mathrm{Re}^4\beta^2 - 2\,k^2\lambda^4\beta\,\mathrm{Re}^2\alpha + \lambda^8\Big)\Big)^{1/2}\Bigg] \tag{8.14}$$

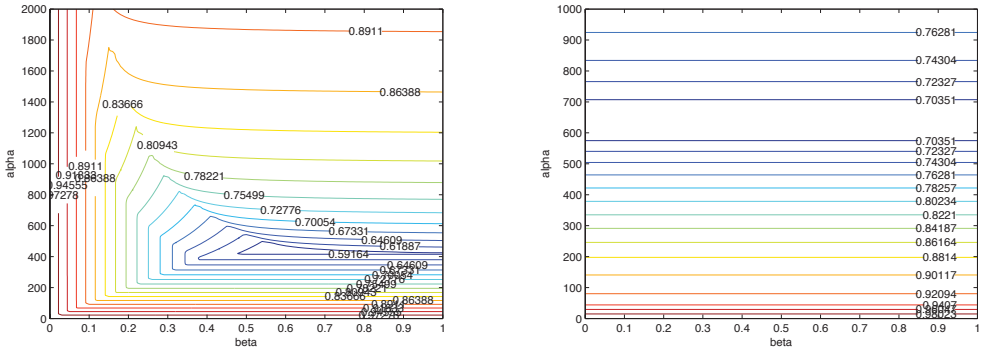
et

$$\frac{1}{\left(-k^2\,|k|\,\lambda - k^2\beta\,\lambda\,\mathrm{Re} - k^2\alpha\,|k|\,\mathrm{Re} - k^2\alpha\,\mathrm{Re}^2\beta + \lambda^4 + \lambda^3\beta\,\mathrm{Re} + \alpha\,|k|\,\mathrm{Re}\,\lambda^2 + \lambda\,\alpha\,|k|\,\mathrm{Re}^2\beta\right)^2}$$
$$\times\Bigg[\lambda^8 + k^6\lambda^2 + \lambda^6\beta^2\mathrm{Re}^2 + \alpha^2k^2\mathrm{Re}^2\lambda^4 - 2\,k^4\alpha^2\mathrm{Re}^2\lambda^2 - 2\,k^2\lambda^5\,|k| - 2\,k^2\lambda^4\beta\,\mathrm{Re}^2\alpha$$
$$-4\,\lambda^5\alpha\,|k|\,\mathrm{Re}^2\beta - 2\,k^2\lambda^4\beta^2\mathrm{Re}^2 + k^4\beta^2\lambda^2\mathrm{Re}^2 + k^6\alpha^2\mathrm{Re}^2 - 4\,k^4\beta\,\lambda\,\mathrm{Re}^2\alpha\,|k| + \lambda^2\alpha^2k^2\mathrm{Re}^4\beta^2$$
$$-2\,k^2\lambda\,\alpha^2\,|k|\,\mathrm{Re}^4\beta^2 + k^4\alpha^2\mathrm{Re}^4\beta^2 + 12\,k^2\lambda^3\beta\,\mathrm{Re}^2\alpha\,|k| - 2\,k^4\lambda^2\alpha\,\mathrm{Re}^2\beta$$
$$-2\Big(\mathrm{Re}^2\,(k-\lambda)^2\,(k+\lambda)^2\,(\alpha\,|k| - \beta\,\lambda)^2\Big(\lambda^2\alpha^2k^2\mathrm{Re}^4\beta^2 - 2\,k^4\lambda^2\alpha\,\mathrm{Re}^2\beta + k^6\lambda^2$$
$$-2\,k^2\lambda\,\alpha^2\,|k|\,\mathrm{Re}^4\beta^2 + 8\,k^2\lambda^3\beta\,\mathrm{Re}^2\alpha\,|k| - 2\,k^4\beta\,\lambda\,\mathrm{Re}^2\alpha\,|k| - 2\,\lambda^5\alpha\,|k|\,\mathrm{Re}^2\beta - 2\,k^2\lambda^5\,|k|$$
$$+k^4\alpha^2\mathrm{Re}^4\beta^2 - 2\,k^2\lambda^4\beta\,\mathrm{Re}^2\alpha + \lambda^8\Big)\Big)^{1/2}\Bigg].$$

Les valeurs propres connues, il ne reste alors plus qu'à étudier le maximum en k du rayon spectral, en fonction des paramètres α et β. La figure 8.5(a) illustre le comportement théorique de ce taux d'amplification des erreurs. On peut y observer la présence d'un minimum pour $\alpha = 457$ et $\beta = 0.599$, le taux d'amplification des erreurs valant alors 0.5609. C'est donc nettement mieux, d'un point de vue théorique, qu'avec l'approximation (8.11). Ceci s'explique par l'introduction du terme β sur la deuxième composante de l'opérateur approché (8.13). Il permet à la composante verticale de la quantité transmise à travers l'interface d'évoluer d'une itération à l'autre, et donc potentiellement de converger.

Résultats numériques

Après implémentation numérique, on trace sur la figure 8.5(b) la valeur du taux de convergence en fonction des paramètres α et β. On peut remarquer que ce taux de



(a) Taux d'amplification des erreurs théorique (b) Taux d'amplification des erreurs numérique

FIGURE 8.5 – Comportement du taux d'amplification des erreurs en fonction des paramètres α et β pour l'approximation (8.13).

convergence pratique ne dépend pas de la valeur du paramètre β. On retrouve d'ailleurs dans une certaine mesure ce comportement sur la figure théorique 8.5(a) : au-delà d'une certaine valeur seuil de β, de grandes lignes horizontales illustrent l'indépendance du facteur de convergence vis-à-vis de β.

De plus la dépendance en α est identique à celle observée lors de l'approximation précédente. On pourra se reporter à la figure 8.3(a) pour connaître l'évolution du taux d'amplification des erreurs en fonction du paramètre α.

Cette approximation (8.13) n'apporte donc pas d'amélioration pratique par rapport à l'approximation (8.11).

8.5 Conditions optimisées d'ordre 2

Dans la section précédente, on a vu qu'approcher les cœfficients de l'opérateur S_j par des opérateurs différentiels d'ordre 0 fournit deux approximations possibles pour S_j. On observe numériquement que ces deux approximations sont équivalentes, dans le sens où la valeur du paramètre β de l'approximation (8.13) n'influe pas sur le taux d'amplification des erreurs.

En gardant ce point en tête, on va maintenant essayer d'approcher plus finement l'opérateur $\hat{S}_j$ en utilisant des polynômes d'ordre 2 en k.

8.5.1 Première approximation

On rappelle que le développement limité (8.5) s'écrit à l'ordre le plus petit en ε

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} |k|/\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Le seul cœfficient non nul de ce développement limité va être approché par un polynôme de degré 2 en k. Comme on l'avait déjà remarqué dans la section précédente, ce cœfficient est pair. Cela va impliquer que le terme de degré 1 du polynôme est nul. On va donc approcher l'opérateur $\hat{S}_j$ par :

$$\hat{S}_j^{app} = \begin{pmatrix} \alpha - \delta k^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.15}$$

où les valeurs des réels α et δ sont à optimiser. Comme précédemment, on s'intéresse aux valeurs propres de la matrice d'amplification des erreurs, avant de pouvoir étudier le rayon spectral. Les valeurs propres sont ici données par :

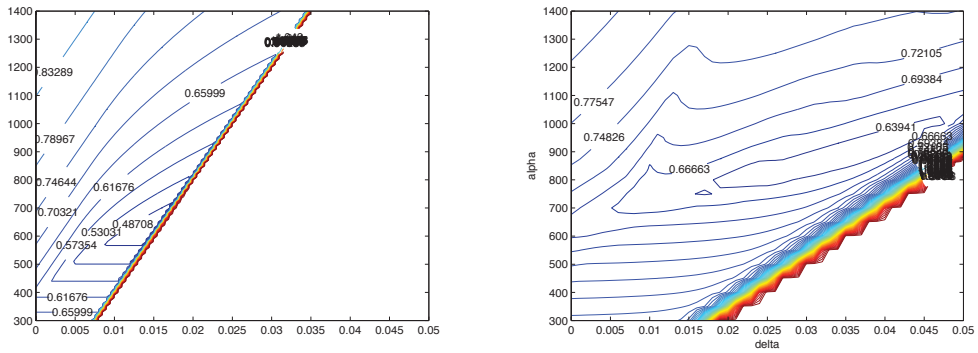
$$1 \quad \text{et} \quad \frac{\left(-k^2\,|k|\,\lambda + k^2\alpha\,|k|\,\mathrm{Re} - k^4\,|k|\,\mathrm{Re}\,\delta + \lambda^4 - \alpha\,|k|\,\mathrm{Re}\,\lambda^2 + \lambda^2\,|k|\,\mathrm{Re}\,\delta\,k^2\right)^2}{\left(k^2\,|k|\,\lambda + k^2\alpha\,|k|\,\mathrm{Re} - k^4\,|k|\,\mathrm{Re}\,\delta - \lambda^4 - \alpha\,|k|\,\mathrm{Re}\,\lambda^2 + \lambda^2\,|k|\,\mathrm{Re}\,\delta\,k^2\right)^2}. \tag{8.16}$$

Il s'agit des valeurs propres (8.12) dans lesquelles on a substitué α par $\alpha - \delta k^2$. On retrouve donc une valeur propre égale à 1, l'interprétation en ayant été donnée précédemment.

Réultats numériques

Par analogie avec le comportement observé à l'ordre 0, où la valeur propre prépondérante en pratique était approximativement la seconde valeur propre théorique, on va s'intéresser au comportement de cette seconde valeur propre. La figure (8.6(a)) illustre son maximum en k en fonction des paramètres α et δ. On peut observer un minimum d'une valeur théorique de 0.4432 pour $\alpha = 639$ et $\delta = 0.0155$, ce qui constitue une nette amélioration par rapport aux opérateurs d'ordre 0. Dans la zone droite de la figure, la valeur propre est supérieure à 1.

L'implémentation numérique de cet opérateur dans la méthode de Schwarz (8.8) confirme cette hypothèse que le comportement pratique est proche du comportement de la seconde valeur propre théorique, comme on peut le voir sur la figure 8.6. Les valeurs optimales obtenues numériquement pour $\alpha = 877$ et $\delta = 0.036$, le facteur de convergence numérique valant alors 0.6122. C'est donc une amélioration sensible par rapport à l'opérateur d'ordre 0, dont le facteur de convergence optimal valait 0.684. En pratique, cela se traduit par un gain d'environ 20% en nombre d'itérations.



(a) Comportement théorique de la deuxième valeur propre (8.16)

(b) Facteur de convergence numérique de la méthode de Schwarz

FIGURE 8.6 – Comportement du maximum en k de la deuxième valeur propre en fonction des paramètres α et δ pour l'approximation (8.15).

8.5.2 Autres approximations envisageables

Beaucoup d'autres approximations seraient possibles pour approcher l'opérateur absorbant exact. On pourrait par exemple envisager de travailler avec les approximants de Padé (voir [7] pour une utilisation sur l'équation de Helmholtz).

Dans la droite ligne des approximations proposées précédemment, on peut proposer une approximation basée sur le développement limité (8.5) à l'ordre -1 en ε. On écrit alors :

$$\hat{S}_j = \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} |k|(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}) & \mp ik\frac{1}{\varepsilon} \\ \pm ik\frac{1}{\varepsilon} & |k|\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

On peut choisir d'approcher les différents cœfficients de la matrice $\hat{S}_j$ par des polynômes de degré 2. Les termes diagonaux sont des fonctions paires de k, donc les cœfficients polynomiaux de degré impair seront nuls. Les termes antidiagonaux sont quant à eux des fonctions impaires de k, et les cœfficients polynomiaux de degrés pairs seront nuls. Ainsi, l'approximation résultante sera

$$\hat{S}_j^{app} = \begin{pmatrix} \alpha_0 - \alpha_2 k^2 & \mp \gamma ik \\ \pm \gamma ik & \beta_0 - \beta_2 k^2 \end{pmatrix},$$

où les valeurs des constantes α_0, α_2, γ, β_0 et β_2 seraient à déterminer pour minimiser le facteur de convergence. On peut noter que par rapport aux approximations précédentes, on a maintenant un nombre important de paramètres à optimiser. Si l'optimisation du facteur de convergence théorique ne devrait pas être une difficulté (les valeurs propres de la matrice d'amplification des erreurs se calculant aisément à l'aide d'un logiciel de calcul formel), la localisation de ces minima peut s'avérer délicate en pratique.

Des approximations intermédiaires sont néanmoins envisageables, en se limitant par exemple à des fonctions polynomiales de degré 1, l'opérateur approché s'écrivant alors

$$\hat{S}_j^{app} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \mp\gamma ik \\ \pm\gamma ik & \beta_0 \end{pmatrix}.$$

On est alors ramené à seulement trois degrés de liberté à optimiser.

Troisième partie

Extension à des modèles dérivant des équations de Navier-Stokes

Chapitre 9

Décomposition de domaine pour les équations d'Oseen

Après avoir étudié aux chapitres précédents la convergence d'un algorithme de Schwarz pour les équation de Stokes (obtenues par discrétisation en temps des équation des Navier-Stokes), on va maintenant se placer dans le cas plus général des équations de Navier-Stokes linéarisées, c'est-à-dire les équations d'Oseen :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}\nabla \boldsymbol{v} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \boldsymbol{v} + \nabla p = 0 \text{ dans } \Omega \times [0,T] \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \text{ dans } \Omega \times [0,T] \\ \boldsymbol{v}(t=0) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega \times [0,T], \end{cases} \tag{9.1}$$

dans lesquelles on supposera que le vecteur $\bar{\boldsymbol{v}}$ est stationnaire et homogène (c'est-à-dire constant en temps et en espace).

L'étude de ce système intervient de façon naturelle lorsqu'on souhaite mettre en place un algorithme de Schwarz pour Navier-Stokes. En effet, une linéarisation locale des équations au voisinage d'un point de l'interface à un instant donné mène aux équations d'Oseen, pour lesquelles on va rechercher des conditions d'interface efficaces. Ces conditions, qui vont *a priori* dépendre de la valeur locale de la solution, seront ensuite de bonnes candidates pour être utilisées directement dans le système de Navier-Stokes, en utilisant à chaque point d'interface la valeur instantanée de la solution locale.

On va mettre en place dans un premier temps l'expression générale des erreurs d'un algorithme de Schwarz. Cette expression servira ensuite à établir des résultats théoriques sur la convergence avec des conditions de Dirichlet. Enfin, on mettra en place un opérateur absorbant exact basé sur les quantités naturellement transportées par cette équation, et l'on en proposera une approximation.

Des conditions approchées pour les équations d'Oseen ont déjà été proposées d'un point de vue théorique par Halpern et Schatzman [50]. Ces conditions approchées étaient

basées sur un développement en approximants de Paddé de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann. À notre connaissance, ces conditions n'ont toutefois jamais été testées numériquement.

9.1 Expression analytique des erreurs

Le but de cette section est d'établir une expression analytique des erreurs d'un algorithme de Schwarz pour les équations d'Oseen.

9.1.1 Décomposition du domaine et système vérifié par les erreurs

On décompose le domaine Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2, avec une zone de recouvrement pour pouvoir traiter ultérieurement le cas des conditions de Dirichlet sur l'interface. Sur chaque sous-domaine Ω_j on est amené à résoudre le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_j^m}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}\nabla \boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \boldsymbol{v}_j^m + \nabla p_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0,T] \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0,T] \\ \boldsymbol{v}_j^m(t=0) = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v}_j^m = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_j \backslash \Gamma_j \times [0,T] \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma_j \times [0,T]. \end{cases} \tag{9.2}$$

On peut noter que les conditions d'interface n'ont pas été précisées pour le moment. En effet, elles ne sont pas nécessaires dans un premier temps pour obtenir une expression générale des erreurs. Plus tard dans ce chapitre, on considérera différentes conditions sur l'interface. L'erreur sur chaque sous-domaine, définie comme la différence entre la solution mono-domaine (9.1) et la solution de chaque sous-domaine (9.2) vérifiera un système similaire avec un second membre et une condition aux limites extérieures nuls. On travaillera donc sur le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_j^m}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}\nabla \boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \boldsymbol{v}_j^m + \nabla p_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0,T] \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0,T] \\ \boldsymbol{v}_j^m(t=0) = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ sur } \partial\Omega_j \backslash \Gamma_j \times [0,T] \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma_j \times [0,T], \end{cases} \tag{9.3}$$

où $\boldsymbol{v}_j^m$ et p_j^m désignent désormais respectivement les erreurs sur la vitesse et sur la pression.

9.1.2 Expression générale des erreurs

Pour résoudre ce système sur chaque sous-domaine, on va réaliser une approximation en considérant un domaine Ω infini dans les deux directions x et z. On décompose alors le domaine $\mathbb{R}^2$ en deux sous-domaines $\Omega_1 = (-\infty, L) \times \mathbb{R}$ et $\Omega_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, avec $L \geq 0$. On a une zone de recouvrement de largeur L. Le système (9.3) devient donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_j^m}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}} \nabla \boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \boldsymbol{v}_j^m + \nabla p_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0, T] \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0, T] \\ \boldsymbol{v}_j^m(t = 0) = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v}_j^m \to 0 \text{ quand } (x, z) \to \pm\infty \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma_j \times [0, T]. \end{cases} \tag{9.4}$$

On supposera dans toute la suite du chapitre que $\bar{u}$, la composante horizontale de $\bar{\boldsymbol{v}}$, est positive. Ce choix n'est pas restrictif, le cas $\bar{u}$ négatif se traitant de manière similaire.

On va maintenant réaliser une transformée de Fourier dans la direction z, ainsi qu'une transformée de Laplace en temps. On note k la variable de l'espace de Fourier associée à z, ω la variable associée au temps, et $\hat{f}$ la transformée de Fourier-Laplace d'une fonction f. Le système (9.4) mène alors à

$$\begin{cases} \omega \hat{\boldsymbol{v}}_j^m + \bar{u} \dfrac{d\hat{\boldsymbol{v}}_j^m}{dx} + ik\bar{w}\hat{\boldsymbol{v}}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \left(\dfrac{d^2 \hat{\boldsymbol{v}}_j^m}{dx^2} - k^2 \hat{\boldsymbol{v}}_j^m \right) + \begin{pmatrix} \dfrac{d\hat{p}_j^m}{dx} \\ ik\hat{p}_j^m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_j & (9.5a) \\ \dfrac{d\hat{\boldsymbol{v}}_j^m}{dx} + ik\hat{\boldsymbol{v}}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j & (9.5b) \\ \hat{\boldsymbol{v}}_j^m(t = 0) = 0 \text{ dans } \Omega_j & (9.5c) \\ \hat{\boldsymbol{v}}_j^m \to \mathbf{0} \text{ quand } x \to \pm\infty & (9.5d) \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma_j. & (9.5e) \end{cases}$$

Comme nous l'avons fait au chapitre 7 avec les équations de Stokes, on va chercher les solutions du système d'équations différentielles (9.5) sous forme exponentielle :

$$\hat{\boldsymbol{e}}_j^m(x) = (\hat{\boldsymbol{v}}_j^m, \hat{p}_j^m)^T(x) = \boldsymbol{\Phi}_j^m e^{\xi x}.$$

En introduisant cette solution dans les équations (9.5), on aboutit au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \omega + \bar{u}\xi + ik\bar{w} - \frac{\xi^2 - k^2}{\mathrm{Re}} & 0 & \xi \\ 0 & \omega + \bar{u}\xi + ik\bar{w} - \frac{\xi^2 - k^2}{\mathrm{Re}} & ik \\ \xi & ik & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_j^m = 0. \tag{9.6}$$

Pour que ce système admette des solutions non-triviales, il faut et il suffit d'annuler le déterminant de la matrice ci-dessus. Celui-ci s'écrit :

$$-(\xi^2 - k^2) \left(\omega + \bar{u}\xi + ik\bar{w} - \frac{1}{\mathrm{Re}}(\xi^2 - k^2) \right).$$

Le facteur de gauche de cette expression s'annule en $\pm|k|$. Le facteur de droite est un trinôme du second degré. Son discriminant

$$\Delta = \bar{u}^2 + \frac{4}{\mathrm{Re}}\left(\omega + ik\bar{w} + \frac{k^2}{\mathrm{Re}}\right)$$

est un nombre complexe. Les deux autres valeurs de ξ annulant le déterminant du système (9.6) sont alors données par

$$\theta_\pm = \frac{\mathrm{Re}}{2}(\bar{u} \pm \Delta^{1/2}). \tag{9.7}$$

Pour simplifier les notations à venir, on indexe les valeurs de ξ de la manière suivante :

$$\xi_1 = \theta_+,\ \xi_2 = |k|,\ \xi_3 = \theta_-,\ \xi_4 = -|k|.$$

Les solutions de l'équation différentielle ordinaire s'écrivent alors *a priori* comme une combinaison linéaire de quatre modes

$$\hat{\boldsymbol{e}}_j^m(x) = \sum_{l=1}^{4} \gamma_{j,l}^m\, \boldsymbol{\Phi_l}\, e^{\xi_l x},$$

où les $\boldsymbol{\Phi_l}$ sont respectivement les solutions du sytème (9.6) pour chaque valeur ξ_l :

$$\boldsymbol{\Phi_1} = \begin{pmatrix} ik \\ -\theta_+ \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Phi_2} = \begin{pmatrix} -|k| \\ -ik \\ \omega + \bar{u}|k| + ik\bar{w} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Phi_3} = \begin{pmatrix} ik \\ -\theta_- \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\Phi_4} = \begin{pmatrix} |k| \\ -ik \\ \omega - \bar{u}|k| + ik\bar{w} \end{pmatrix}.$$

La condition $\hat{\boldsymbol{v}}_j^m \to \mathbf{0}$ quand $x \to \pm\infty$ implique que seuls les modes convergents sont conservés dans les solutions. Elles s'écrivent donc sur chaque sous-domaine uniquement à l'aide de deux modes et non quatre :

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1^m(x) = \sum_{l=1}^{2} \gamma_{1,l}^m\, \boldsymbol{\Phi}_l\, e^{\xi_l x} \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{e}}_2^m(x) = \sum_{l=3}^{4} \gamma_{2,l}^m\, \boldsymbol{\Phi}_l\, e^{\xi_l x}.$$

On utilisera en particulier la notation suivante pour l'erreur sur la vitesse :

$$\hat{\boldsymbol{v}}_1^m(x) = M_{12}\, e^{\xi_{12} x}\, \boldsymbol{\gamma}_{12}^m \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_2^m(x) = M_{34}\, e^{\xi_{34} x}\, \boldsymbol{\gamma}_{34}^m \tag{9.8}$$

avec

$$M_{12} = \begin{pmatrix} ik & -|k| \\ -\theta_+ & -ik \end{pmatrix},\ e^{\xi_{12}x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_2 x} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\gamma}_{12}^m = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^m \\ \gamma_{1,2}^m \end{pmatrix},$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} ik & |k| \\ -\theta_- & -ik \end{pmatrix},\ e^{\xi_{34}x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_3 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_4 x} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\gamma}_{34}^m = \begin{pmatrix} \gamma_{2,3}^m \\ \gamma_{2,4}^m \end{pmatrix}.$$

À ce stade, on a donc obtenu l'expression générale des erreurs comme solution de (9.5a-9.5b-9.5d). Il reste à prendre en compte la condition aux interfaces pour faire le lien entre les erreurs sur Ω_1 et Ω_2 aux différentes itérations de la méthode de Schwarz, et donc en déduire le taux de convergence de la méthode.

9.2 Conditions de Dirichlet sur l'interface

On va considérer dans un premier temps des conditions de Dirichlet sur les interfaces. Comme précédemment, on verra qu'il sera nécessaire d'introduire une zone de recouvrement, de largeur notée L : $\Omega_1 = (-\infty, L) \times \mathbb{R}$ et $\Omega_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, avec $L \geq 0$. La condition de Dirichlet sur l'interface s'écrit alors naturellement

$$\boldsymbol{v}_j^m = \boldsymbol{v}_{j'}^{m-1} \text{ sur } \Gamma_j.$$

Notons que, comme pour le système de Stokes, il n'est pas nécessaire d'introduire de conditions pour la pression sur l'interface, le problème sur chaque sous-domaine étant bien posé sans. Ce sont les conditions les plus simples que l'on puisse avoir. On les utilisera pour établir des premiers résultats de convergence d'un algorithme de Schwarz.

Résultats théoriques de convergence

On reprend donc dans un premier temps le système (9.3) dans lequel on spécifie des conditions de Dirichlet aux interfaces :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_j^m}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}} \nabla \boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \boldsymbol{v}_j^m + \nabla p = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0, T] \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0, T] \\ \boldsymbol{v}_j^m(t = 0) = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{m}} \to 0 \text{ quand } (x, z) \to \pm\infty \\ \boldsymbol{v}_j^m = \boldsymbol{v}_{j'}^{m-1} \text{ sur } \Gamma_j \times [0, T]. \end{cases} \tag{9.9}$$

Comme expliqué précédemment, l'expression des erreurs fournie par l'équation (9.8) est valable quelle que soit la condition à l'interface choisie. Le choix de la condition à l'interface va néanmoins déterminer la relation entre les cœfficients $\boldsymbol{\gamma}^m$. Pour la condition de Dirichlet retenue, on va écrire :

$$\begin{aligned} M_{12}\, e^{\xi_{12} L}\, \boldsymbol{\gamma}_{12}^m &= M_{34}\, e^{\xi_{34} L}\, \boldsymbol{\gamma}_{34}^{m-1} \\ M_{34}\, e^{\xi_{34} 0}\, \boldsymbol{\gamma}_{34}^m &= M_{12}\, e^{\xi_{12} 0}\, \boldsymbol{\gamma}_{12}^{m-1}. \end{aligned}$$

Ces deux équations permettent d'établir une relation matricielle entre les valeurs des cœfficients γ_{12} de deux itérations successives :

$$\boldsymbol{\gamma}_{12}^m = e^{-\xi_{12} L}\, M_{12}^{-1}\, M_{34}\, e^{\xi_{34} L}\, M_{34}^{-1}\, M_{12}\, \boldsymbol{\gamma}_{12}^{m-2}.$$

Cette relation a été écrite pour les cœfficients $\boldsymbol{\gamma}_{12}$ mais une relation équivalente aurait pu être écrite pour $\boldsymbol{\gamma}_{34}$. Ces deux relations fournissant les mêmes résultats du point de vue de la convergence de l'algorithme de Schwarz, on étudiera juste la relation écrite ci-dessus. On définit alors la matrice d'amplification des erreurs par :

$$M_{amp} = e^{-\xi_{12} L}\, M_{12}^{-1}\, M_{34}\, e^{\xi_{34} L}\, M_{34}^{-1}\, M_{12}.$$

La relation de récurrence permet alors d'écrire $\boldsymbol{\gamma}_{12}^m$ en fonction de $\boldsymbol{\gamma}_{12}^0$:

$$\boldsymbol{\gamma}_{12}^m = M_{amp}\boldsymbol{\gamma}_{12}^{m-2}.$$

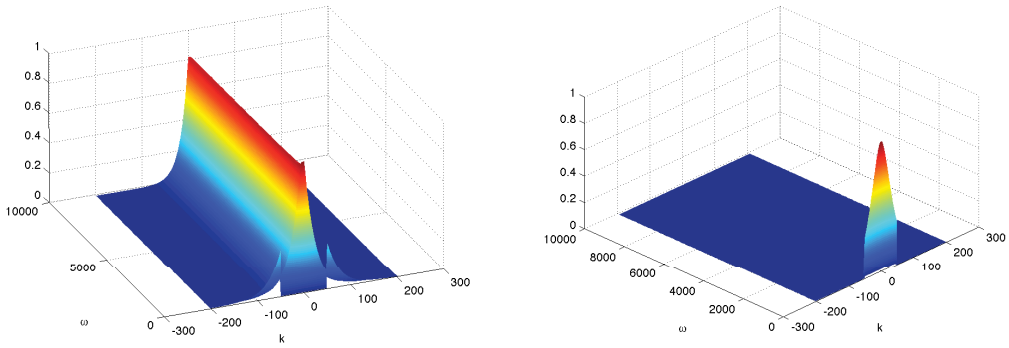
La décroissance de l'erreur au fur et à mesure des itérations va donc dépendre des valeurs propres de M_{amp}. Son expression est donnée par

$$\begin{aligned}
M_{amp}(1,1) =& \frac{\mathrm{e}^{-\theta_{12}L}}{(-k^2+|k|\,\theta_{12})\,(k^2+|k|\,\theta_{34})}\big(-k^4\mathrm{e}^{\theta_{34}L}+|k|\,k^2\mathrm{e}^{\theta_{34}L}\theta_{34}-2\,|k|\,\mathrm{e}^{-|k|L}\theta_{34}k^2 \\
& -|k|\,k^2\mathrm{e}^{\theta_{34}L}\theta_{12}+(|k|)^2\,\theta_{12}\mathrm{e}^{\theta_{34}L}\theta_{34}+2\,k^2\mathrm{e}^{-|k|L}\theta_{12}\,|k|\,\big) \\
M_{amp}(1,2) =& \frac{2\,i\mathrm{e}^{-\theta_{12}L}k\,|k|\,\left(-k^2\mathrm{e}^{\theta_{34}L}+\mathrm{e}^{\theta_{34}L}\,|k|\,\theta_{34}-|k|\,\mathrm{e}^{-|k|L}\theta_{34}+\mathrm{e}^{-|k|L}k^2\right)}{(-k^2+|k|\,\theta_{12})\,(k^2+|k|\,\theta_{34})} \\
M_{amp}(2,1) =& \frac{-i\mathrm{e}^{-|k|L}k}{(-k^2+|k|\,\theta_{12})\,(k^2+|k|\,\theta_{34})}\Big(k^2\mathrm{e}^{\theta_{34}L}\theta_{12}-k^2\mathrm{e}^{\theta_{34}L}\theta_{34}+\mathrm{e}^{-|k|L}\theta_{34}\,|k|\,\theta_{12} \\
& +\mathrm{e}^{-|k|L}\theta_{34}k^2+\mathrm{e}^{\theta_{34}L}\,|k|\,{\theta_{12}}^2-\theta_{12}\mathrm{e}^{\theta_{34}L}\,|k|\,\theta_{34}-\mathrm{e}^{-|k|L}{\theta_{12}}^2\,|k|-k^2\mathrm{e}^{-|k|L}\theta_{12}\Big) \\
M_{amp}(2,2) =& \frac{\mathrm{e}^{-|k|L}}{(-k^2+|k|\,\theta_{12})\,(k^2+|k|\,\theta_{34})}\Big(2\,|k|\,k^2\mathrm{e}^{\theta_{34}L}\theta_{12}-2\,|k|\,k^2\mathrm{e}^{\theta_{34}L}\theta_{34} \\
& +\mathrm{e}^{-|k|L}\theta_{34}\,(|k|)^2\,\theta_{12}+|k|\,\mathrm{e}^{-|k|L}\theta_{34}k^2-k^2\mathrm{e}^{-|k|L}\theta_{12}\,|k|-k^4\mathrm{e}^{-|k|L}\Big).
\end{aligned}$$

Nous ne donnerons pas ici l'expression de ses valeurs propres, celles-ci étant trop longues, et n'apportant pas grand chose.

La figure 9.1 montre le comportement des valeurs propres en fonction du nombre d'onde $k \in \left[\frac{\pi}{H}\frac{\pi}{\Delta z}\right]$ et de $\omega \in \left[\frac{\pi}{T_f}, \frac{\pi}{\Delta t}\right]$, avec $H = 1$ (valeur habituelle pour la cavité entraînée), $\Delta z = 1/64$, $\Delta t = 10^{-4}$ et $T_f = 400$ le temps final de la simulation (cette valeur correspond au temps nécessaire pour atteindre l'état stationnaire pour notre valeur du nombre de Reynolds), pour une zone de recouvrement de deux mailles (soit 2/64 sur la grille usuelle 64×64). Comme pour l'équation de Stokes, on remarque que si la deuxième valeur propre est nulle à l'erreur machine près, la première atteint un maximum en $k = k_{min} = \frac{\pi}{H}$ et que la valeur de ce maximum est 0.82. Cette valeur va correspondre au facteur de convergence théorique de la méthode de Schwarz (9.9). C'est une convergence plutôt lente, mais c'était à prévoir avec des conditions de Dirichlet sur l'interface et une zone de recouvrement étroite.

Un autre point que l'on souhaite étudier est la dépendance du taux de convergence vis-à-vis de la largeur de la zone de recouvrement. Celle-ci a été tracée sur la figure 9.2. On vérifie que le taux d'amplification des erreurs est bien une fonction décroissante de la largeur de la zone de recouvrement. On retrouve ainsi un résultat déjà illustré précédemment.



(a) $|\rho_1|$ (b) $|\rho_2|$

FIGURE 9.1 – Valeurs propres de la matrice d'amplification des erreurs pour le système (9.9). Les graphes ont été tracés avec les valeurs numériques suivantes : Re $= 10^3$, $\Delta t = 10^{-4}$, $\Delta z = 1/64$ et deux mailles de recouvrement ($L = 2\Delta x$).

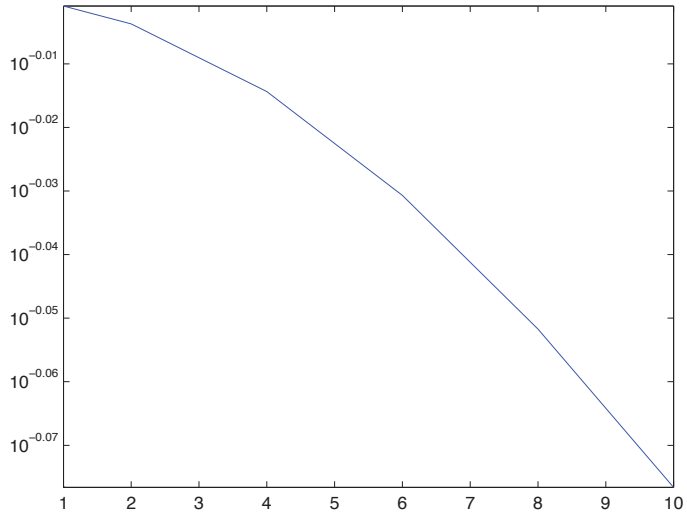


FIGURE 9.2 – Comportement du maximum en k et ω du taux d'amplification des erreurs théoriques du système (9.9), en fonction du nombre de mailles dans la zone de recouvrement.

9.3 Opérateur absorbant exact

Dans la première section de ce chapitre, on a introduit un cadre permettant d'étudier les méthodes de Schwarz pour les équations de Navier-Stokes linéarisées en temps (9.1). On a ensuite étudié l'usage de conditions de Dirichlet et on a vu que celles-ci étaient peu performantes. On va maintenant utiliser ce cadre pour définir un opérateur absorbant basé sur la quantité naturellement transmise par ces équations (9.1) à travers une interface.

On va dans un premier temps construire un opérateur absorbant exact, puis on l'étudiera pour voir comment il peut être approché.

9.3.1 Construction de l'opérateur absorbant exact

On rappelle que les erreurs vérifient sur chaque sous-domaine le système d'équations (9.3) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_j^m}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}\nabla \boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \boldsymbol{v}_j^m + \nabla p_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0,T] \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0,T] \\ \boldsymbol{v}_j^m(t=0) = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ sur } \partial\Omega_j \backslash \Gamma_j \times [0,T] \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma_j \times [0,T]. \end{cases}$$

Pour construire la condition qui sera retenue à l'interface, nous allons suivre la démarche employée pour les équations de Stokes au chapitre 8. Elle consiste à décomposer la condition à l'interface en deux parties. La première est issue de la quantité naturellement transmise par les équations à travers l'interface. Pour les équations d'Oseen, cette quantité va s'écrire

$$(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot n)\boldsymbol{v} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial n} + pn,$$

où n désigne la normale sortante à l'interface. La seconde quantité présente dans la condition à l'interface est un opérateur de relaxation S_j, qui va servir pour aboutir à une condition absorbante exacte, puis à des conditions approchées. La condition à l'interface s'écrit alors

$$(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot n_j)\boldsymbol{v}_j^m - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \boldsymbol{v}_j^m}{\partial n_j} + p_j^m n_j - S_j \boldsymbol{v}_j^m = (\bar{\boldsymbol{v}} \cdot n_j)\boldsymbol{v}_{j'}^m - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \boldsymbol{v}_{j'}^m}{\partial n_j} + p_{j'}^m n - S_j \boldsymbol{v}_{j'}^{m-1}, \quad (9.10)$$

où $\boldsymbol{n}_j = ((-1)^{j-1}, 0)^T$ désigne le vecteur normal à l'interface du sous-domaine Ω_j.

Pour obtenir les conditions absorbantes exactes, on repart du système (9.5) vérifié

par les erreurs dans l'espace de Fourier-Laplace :

$$\begin{cases} \omega\hat{\boldsymbol{v}}_j^m + \bar{u}\dfrac{d\hat{\boldsymbol{v}}_j^m}{dx} + ik\bar{w}\hat{\boldsymbol{v}}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_j^m}{dx^2} - k^2\hat{\boldsymbol{v}}_j^m\right) + \begin{pmatrix} \dfrac{d\hat{p}_j^m}{dx} \\ ik\hat{p}_j^m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_j \\ \dfrac{d\hat{\boldsymbol{v}}_j^m}{dx} + ik\hat{\boldsymbol{v}}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \hat{\boldsymbol{v}}_j^m \to \mathbf{0} \text{ quand } x \to \pm\infty \\ \text{Conditions aux limites à préciser sur } \Gamma_j. \end{cases}$$

On rappelle que celui-ci avait été obtenu en supposant le domaine infini, à la fois en x (pour simplifier l'expression analytique des erreurs grâce à la condition aux limites) et en z (pour pouvoir utiliser une transformée de Fourier dans cette direction). En reprenant maintenant l'équation sur la composante verticale de la conservation de la quantité de mouvement de (9.5), on peut établir une expression de l'erreur sur la pression

$$\hat{p}_j^m = \frac{i}{k}\left[\left(\omega + ik\bar{w} + \frac{k^2}{\mathrm{Re}}\right)\hat{w}_j^m + \bar{u}\frac{d\hat{w}_j^m}{dx} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\hat{w}_j^m}{dx^2}\right].$$

On remplace alors la pression dans les conditions à l'interface (9.10) dans le domaine de Fourier-Laplace pour les réécrire uniquement en fonction de la vitesse sur chaque sous-domaine :

$$M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_1^m}{dx^2} + N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_1^m}{dx} + P\hat{\boldsymbol{v}}_1^m - \hat{S}_1\hat{\boldsymbol{v}}_1^m = M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx^2} + N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx} + P\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} - \hat{S}_1\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} \tag{9.11}$$

$$-M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_2^m}{dx^2} - N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^m}{dx} - P\hat{\boldsymbol{v}}_2^m - \hat{S}_2\hat{\boldsymbol{v}}_2^m = -M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}}{dx^2} - N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}}{dx} - P\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1} - \hat{S}_2\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1} \tag{9.12}$$

avec les matrices M, N et P définies par

$$M = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mathrm{Re}} & \frac{i}{k}\bar{u} \\ 0 & -\frac{1}{\mathrm{Re}} \end{pmatrix} \text{ et } P = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} \bar{u} & \frac{i}{k}\left(\omega + ik\bar{w} + \frac{k^2}{\mathrm{Re}}\right) \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}.$$

Il ne reste alors plus qu'à remplacer les vitesse $\hat{\boldsymbol{v}}_j^m$ et leurs dérivées par leur expression matricielle (9.8) :

$$\hat{\boldsymbol{v}}_1^m(x) = M_{12}\, e^{\xi_{12}x}\, \boldsymbol{\gamma}_{12}^m \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_2^m(x) = M_{34}\, e^{\xi_{34}x}\, \boldsymbol{\gamma}_{34}^m$$

avec

$$M_{12} = \begin{pmatrix} ik & -|k| \\ -\theta_+ & -ik \end{pmatrix},\ e^{\xi_{12}x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_2 x} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\gamma}_{12}^m = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^m \\ \gamma_{1,2}^m \end{pmatrix},$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} ik & |k| \\ -\theta_- & -ik \end{pmatrix}, \; e^{\xi_{34}x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_3 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_4 x} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\gamma}_{34}^m = \begin{pmatrix} \gamma_{2,3}^m \\ \gamma_{2,4}^m \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs S_j qui annulent les seconds membres des conditions à l'interface (9.10) sont les opérateurs absorbants exacts recherchés, et leur expression dans le domaine de Fourier-Laplace est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= MQ_{34}^2 + NQ_{34} + P \\ \hat{S}_2 &= -MQ_{12}^2 - NQ_{12} - P, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Q_{12} &= M_{12} \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} M_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -ik \\ -ik\dfrac{\theta_+}{|k|} & \theta_+ + |k| \end{pmatrix} \\ Q_{34} &= M_{34} \begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_4 \end{pmatrix} M_{34}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -ik \\ ik\dfrac{\theta_-}{|k|} & \theta_- - |k| \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Après simplification, ces opérateurs $\hat{S}_j$ se réécrivent en :

$$\hat{S}_1 = \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} \dfrac{\theta_- - \bar{u}\,\mathrm{Re}}{|k|}(\theta_- - |k|) & \dfrac{ik}{|k|}(\theta_- - \bar{u}\,\mathrm{Re}) \\ -\dfrac{ik}{|k|}\theta_- & |k| - (\theta_- - \bar{u}\,\mathrm{Re}) \end{pmatrix} \tag{9.13}$$

$$\text{et } \hat{S}_2 = \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} \dfrac{\theta_+ - \bar{u}\,\mathrm{Re}}{|k|}(\theta_+ + |k|) & \dfrac{ik}{|k|}(\theta_+ - \bar{u}\,\mathrm{Re}) \\ -\dfrac{ik}{|k|}\theta_+ & |k| + \theta_+ - \bar{u}\,\mathrm{Re} \end{pmatrix}.$$

Ces opérateurs font intervenir des valeurs absolues et des racines carrées de k via l'expression des θ (9.7). Une transformée de Fourier-Laplace inverse conduirait à un opérateur pseudo-différentiel non local en espace et temps, qui serait alors inutilisable numériquement. On va donc devoir approcher cet opérateur S_j exact par un opérateur local.

Les opérateurs absorbants exacts (9.13) pour l'équation d'Oseen sont plus complexes que ceux obtenus au chapitre 8 pour l'équation de Stokes. Cette complexité peut s'expliquer principalement par le terme d'advection dans les équations d'Oseen, ce qui se traduit par le fait que θ_- n'est plus l'opposé de θ_+. On peut néanmoins vérifier facilement que ces opérateurs (9.13) sont égaux à leur équivalent (8.4) pour l'équation de Stokes, en posant $\omega = 1/\Delta t$ et $\bar{\boldsymbol{v}} = 0$.

9.3.2 Étude de l'opérateur $\hat{S}_j$

Avant de se lancer dans les calculs de conditions approchées, on souhaite regarder les ordres de grandeur des termes qui composent les matrices $\hat{S}_j$. Ces ordres de grandeurs

sont tracés sur la figure 9.3, pour $\Delta x = \Delta z = 1/64$, $\mathrm{Re} = 10^3$, $\Delta t = 10^{-4}$ et $\bar{u} = \bar{w} = 1$. On peut remarquer, comme pour les équations de Stokes, que le cœfficient d'indice $(1,1)$ de ces opérateurs est d'un ordre de grandeur très supérieur aux autres cœfficients, qui sont eux du même ordre de grandeur entre eux. On s'attend à retrouver ces écarts dans les approximations à venir.

Comme on l'a dit plus tôt, deux problèmes se posent pour exprimer les opérateurs S_j dans le domaine réel : le module de k et les racines carrées dans l'expression de $\theta_\pm$. Nous allons approcher ces termes en réalisant des développements limités de l'opérateur absorbant exact (9.13). Contrairement à l'opérateur absorbant exact de l'équation de Stokes, on ne va pas pouvoir introduire de petit paramètre dépendant des nombres d'onde k et ω, ceux-ci n'étant pas nécessairement sur les mêmes échelles de grandeur. Le développement limité sera donc réalisé en faible viscosité, autrement dit pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds.

Le développement limité en grand Re pour $\theta_\pm$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\theta_- &= -\frac{\omega + ik\bar{w}}{\bar{u}} - \frac{1}{\bar{u}\,\mathrm{Re}}\left(k^2 + \left(\frac{\omega + ik\bar{w}}{\bar{u}}\right)^2\right) + o\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right) \\
\theta_+ &= \mathrm{Re}\,\bar{u} + \frac{\omega + ik\bar{w}}{\bar{u}} + \frac{1}{\bar{u}\,\mathrm{Re}}\left(k^2 + \left(\frac{\omega + ik\bar{w}}{\bar{u}}\right)^2\right) + o\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right).
\end{aligned}$$

On peut alors écrire les développements limités des opérateurs $\hat{S}_j$ (9.13) à l'ordre 0 en $1/\mathrm{Re}$:

$$\hat{S}_1 = \begin{pmatrix} \bar{u} + \dfrac{\omega + ik\bar{w}}{|k|} & -\bar{u}\dfrac{ik}{|k|} \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix} + o(1) \quad \text{et} \quad \hat{S}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega + ik\bar{w}}{|k|} & 0 \\ -\bar{u}\dfrac{ik}{|k|} & 0 \end{pmatrix} + o(1). \tag{9.14}$$

Si certains termes se prêtent bien aux transformées de Fourier-Laplace (en particulier le terme $\omega + ik\bar{w}$), ce n'est pas le cas des fractions en $1/|k|$, qui conduiraient à des opérateurs non-locaux en espace. On va voir dans la suite comment ces termes peuvent être approchés.

9.3.3 Convergence de la méthode de Schwarz utilisant des opérateurs approchés

Comme on l'a vu un peu plus tôt, les opérateurs absorbants exacts donnés par transformée de Fourier-Laplace inverse de $\hat{S}_j$ (9.13) ne sont pas utilisables numériquement car pseudo-différentiels. Il faut donc les approcher, et utiliser dans la méthode de Schwarz leur approximation que l'on notera S_j^{app}. L'algorithme de Schwarz, avec toujours l'approximation de domaine infini utile pour l'étude théorique de la convergence, se réécrit

alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_j^m}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}\nabla \boldsymbol{v}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \boldsymbol{v}_j^m + \nabla p = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0,T] \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ dans } \Omega_j \times [0,T] \\ \boldsymbol{v}_j^m(t=0) = 0 \text{ dans } \Omega_j \\ \boldsymbol{v}_j^m = 0 \text{ sur } \partial\Omega_j \backslash \Gamma_j \times [0,T] \\ (\bar{\boldsymbol{v}} \cdot n_j)\boldsymbol{v}_j^m - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \boldsymbol{v}_j^m}{\partial n_j} + p_j^m n_j - S_j \boldsymbol{v}_j^m = (\bar{\boldsymbol{v}} \cdot n_j)\boldsymbol{v}_{j'}^m - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \boldsymbol{v}_{j'}^m}{\partial n_j} + p_{j'}^m n - S_j \boldsymbol{v}_{j'}^{m-1} \text{ sur } \Gamma_j \times [0,T]. \end{cases} \tag{9.15}$$

Différents opérateurs S_j^{app} seront envisagés plus loin dans le chapitre. La démarche qui sera utilisée ici pour l'étude de la convergence de la méthode de Schwarz (9.15) est la même que celle déjà introduite précédemment à la section 8.3.

Cette convergence va dépendre du choix des opérateurs approchés S_j^{app}. En reprenant la démarche de la section 9.3, on peut réécrire les équations (9.11) et (9.12) pour l'opérateur approché S_j^{app} en remplaçant simplement son symbole dans le domaine de Fourier :

$$\begin{aligned} M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_1^m}{dx^2} + N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_1^m}{dx} + P\hat{\boldsymbol{v}}_1^m - \hat{S}_1^{app}\hat{\boldsymbol{v}}_1^m &= M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx^2} + N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx} + P\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} - \hat{S}_1^{app}\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} \\ -M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_2^m}{dx^2} - N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^m}{dx} - P\hat{\boldsymbol{v}}_2^m - \hat{S}_2^{app}\hat{\boldsymbol{v}}_2^m &= -M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}}{dx^2} - N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}}{dx} - P\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1} - \hat{S}_2^{app}\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}. \end{aligned}$$

L'expression des vitesses $\hat{\boldsymbol{v}}_j^m$ précédemment établie en (9.8), ainsi que les deux équations ci-dessus, permettent alors d'écrire sur chaque sous-domaine une relation de récurrence entre les vitesses pour deux itérations de la méthode de Schwarz (9.15) :

$$M_{12}^{-1}\hat{\boldsymbol{v}}_1^m = \hat{H}_{11}^{-1}\hat{H}_{12}\hat{H}_{22}^{-1}\hat{H}_{21}M_{12}^{-1}\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-2},$$

où les opérateurs H ont pour expression dans le domaine de Fourier :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{11} &= MM_{12}\begin{pmatrix} \xi_1^2 & 0 \\ 0 & \xi_2^2 \end{pmatrix} + NM_{12}\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} + PM_{12} - \hat{S}_1^{app}M_{12} \\ \hat{H}_{12} &= MM_{34}\begin{pmatrix} \xi_1^2 & 0 \\ 0 & \xi_2^2 \end{pmatrix} + NM_{34}\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} + PM_{34} - \hat{S}_1^{app}M_{34} \\ \hat{H}_{22} &= -MM_{34}\begin{pmatrix} \xi_3^2 & 0 \\ 0 & \xi_4^2 \end{pmatrix} - NM_{34}\begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_4 \end{pmatrix} - PM_{34} - \hat{S}_2^{app}M_{34} \\ \hat{H}_{21} &= -MM_{12}\begin{pmatrix} \xi_3^2 & 0 \\ 0 & \xi_4^2 \end{pmatrix} - NM_{12}\begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_4 \end{pmatrix} - PM_{12} - \hat{S}_2^{app}M_{12}. \end{aligned}$$

La convergence de la méthode de Schwarz (9.15) est donc déterminée par la matrice d'amplification des erreurs

$$\hat{H} = \hat{H}_{11}^{-1}\hat{H}_{12}\hat{H}_{22}^{-1}\hat{H}_{21}. \tag{9.16}$$

Comme précédemment, l'algorithme de Schwarz est convergent si le rayon spectral de $\hat{H}$ est inférieur à 1. Plus le rayon spectral est proche de 0, et plus la convergence est rapide. On peut noter que dans le cas particulier des opérateurs absorbants ($S_j^{app} = S_j$ définis en (9.13)), les matrices $\hat{H}_{12}$ et $\hat{H}_{21}$ sont nulles. La convergence est alors immédiate.

Pour un opérateur S_j^{app} quelconque, l'expression de la matrice d'amplification des erreurs dans le domaine de Fourier $\hat{H}$ dépend de manière non triviale du nombre d'onde k et du symbole de Laplace ω, ce qui implique *a priori* que l'expression de ses valeurs propres en dépend aussi. Pour qu'il y ait convergence, il faudra donc que le rayon spectral (qui est alors fonction de k et ω) soit inférieur à 1 pour toute valeur de (k, ω) dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{H}, \frac{\pi}{\Delta z}\right] \times \left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t}\right]$, soit

$$\max_{\omega \in \left[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t}\right]} \max_{k \in \left[\frac{\pi}{H}, \frac{\pi}{\Delta z}\right]} \max_{\lambda \in Sp(\hat{H})} |\lambda(k)| < 1. \tag{9.17}$$

C'est ce type de critère qu'il faudra étudier pour proposer diverses formes de S_j^{app}, et on va maintenant en présenter une première version simple.

9.4 Opérateur absorbant approché

On reprend le développement limité (9.14), dans lequel on va approcher les cœfficients des matrices définies dans (9.14) par des polynômes de degré 0 en ω et k. L'approximation s'écrit alors :

$$\hat{S}_1^{app} = \begin{pmatrix} \bar{u} + \alpha_1 & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{S}_2^{app} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.18}$$

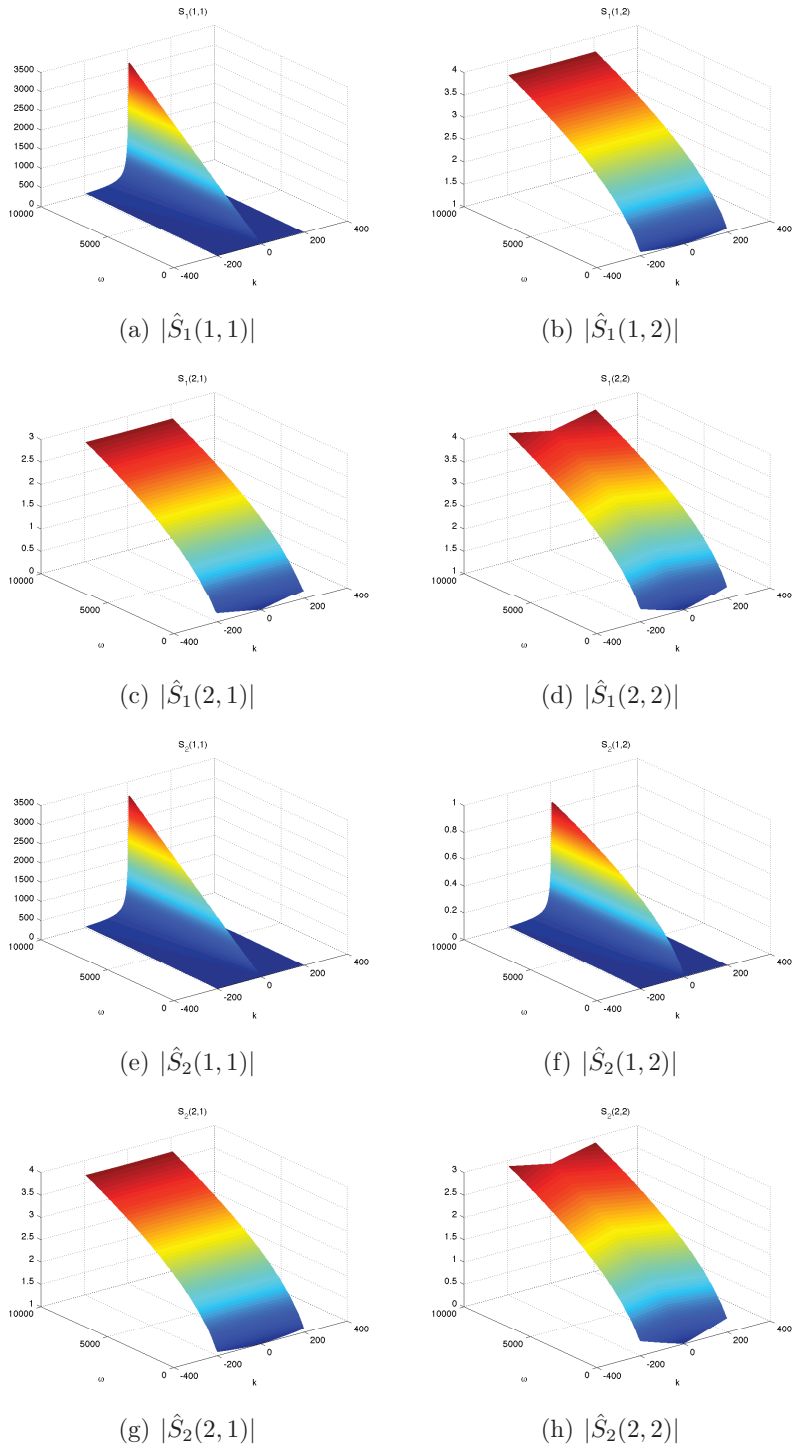
où α_1 et α_2 sont des constantes, *a priori* différentes, dont les valeurs serviront à optimiser le taux de convergence. Deux remarques peuvent être faites sur ces opérateurs :

- Ils sont très semblables à l'opérateur approché d'ordre 0 (8.11) que l'on avait obtenu pour les équations de Stokes.
- Le terme supplémentaire $\bar{u}$ présent ici provient du terme d'advection des équations d'Oseen, non présent dans les équations de Stokes. De plus, ce terme est présent uniquement dans l'opérateur S_1^{app} du sous-domaine de gauche. Cela vient du fait que l'on a supposé que $\bar{u}$ était positif.

On s'attend à ce que la similitude avec les équations de Stokes, étudiées au chapitre 8, se transpose aussi à la convergence d'une méthode de Schwarz (9.15).

Une étude exhaustive n'a pas été réalisée pour l'instant sur cette approximation. Toutefois nos résultats préliminaires mettent en évidence un facteur de convergence théorique de l'ordre de 1.1 dans le cas $\bar{u} = 1$, c'est-à-dire la vitesse maximale observée dans la cavité entraînée (ce qui est intuitivement le cas le plus défavorable – à confirmer). Ces résultats seraient à comparer d'une part avec des résultats théoriques pour d'autres valeurs de $\bar{u}$, et d'autre part avec les valeurs du facteur de convergence mesurées à partir d'un code numérique qu'il faudrait développer pour les équations d'Oseen. Rappelons en effet que

pour les équations de Stokes, malgré un facteur théorique de convergence égale à 1, on observait une valeur pratique de l'ordre de 0.7.



(a) $|\hat{S}_1(1,1)|$ (b) $|\hat{S}_1(1,2)|$

(c) $|\hat{S}_1(2,1)|$ (d) $|\hat{S}_1(2,2)|$

(e) $|\hat{S}_2(1,1)|$ (f) $|\hat{S}_2(1,2)|$

(g) $|\hat{S}_2(2,1)|$ (h) $|\hat{S}_2(2,2)|$

FIGURE 9.3 – Valeurs des cœfficients des opérateurs exacts $\hat{S}_j$ (9.13) en valeur absolue, en fonction de k et ω.

Chapitre 10

Décomposition de domaine pour les équations de Navier-Stokes hydrostatiques

Dans cet ultime chapitre, nous voudrions proposer quelques idées de poursuite de ce travail dans le cadre de la décomposition de domaine multi-physiques pour l'océanographie. Plus précisément, nous voudrions nous intéresser au couplage hauturier-côtier, réalisé grâce à un modèle hydrostatique (au large) et un modèle complet non-hydrostatique (côtier). Pour que ce système couplé soit tout à fait représentatif des écoulements océaniques, il est clair que les modèles correspondants devraient inclure l'évolution de la densité avec l'hypothèse classique de Boussinesq[1]. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux équations de Navier-Stokes (NS) dans lesquelles la densité est considérée comme constante. Afin d'effectuer un couplage hauturier-côtier dans ce contexte, nous travaillerons donc d'une part avec les équations de Navier-Stokes non-hydrostatiques, qui sont les équations habituelles évoquées tout au long de ce manuscrit, et d'autre part avec les équations de Navier-Stokes hydrostatiques (NSH) dans lesquelles l'équation de conservation du moment vertical de la vitesse est simplifiée (voir la dérivation de ce modèle dans la section 10.1.2).
Le couplage entre modèles non-hydrostatique (NS) et hydrostatique (NSH) est délicat, d'une part car chacun de ces modèles fait encore l'objet de nombreuses études (en particulier l'existence et l'unicité de solutions) mais aussi parce que les *natures* mathématiques des deux systèmes sont différentes. En effet, comme nous le rappelons ci-dessous (voir l'équation (10.3c)), l'approximation hydrostatique qui différencie (NS) de (NSH) a pour conséquence de modifier le statut de la vitesse verticale w : de variable pronostique, elle devient diagnostique, c'est-à-dire que dans (NSH) elle est calculée non pas en intégrant

1. L'approximation de Boussinesq (voir par exemple [26]) consiste à supposer que la densité du fluide est constante dans toutes les équations, sauf dans le terme de flottabilité $-\rho g$ qui apparait dans l'équation de conservation du moment de la vitesse verticale.

une équation de conservation des moments, mais grâce à la conservation de la masse (10.1d). Ce changement dans les équations doit naturellement se traduire dans les conditions aux limites : pour (NSH), on s'attend à ne pas requérir de condition aux limites pour w, contrairement à (NS).

Ce couplage est donc un véritable programme de travail en soi (d'autant plus si l'on souhaite le développer dans un cadre opérationnel), nous allons ici donner simplement quelques pistes. Notre idée dans ce chapitre est de mettre en place les équations de Navier-Stokes, munies des conditions aux limites étudiées dans les chapitres précédents, dans un cadre hydrostatique. En effet, le modèle de (NS) peut *a fortiori* convenir pour simuler un écoulement hydrostatique (même si ce n'est pas ce que l'on recommande dans un cadre opérationnel). Dans la mesure où l'approximation hydrostatique provient d'une asymptotique $\delta \to 0$, où $\delta = H/L$ est le rapport d'aspect du domaine (voir figure 10.1), nous allons reprendre les conditions aux limites étudiées dans les chapitres précédents et y faire apparaître explicitement δ, afin d'étudier le comportement de ces conditions lorsque $\delta \to 0$.

10.1 Equations de Navier-Stokes hydrostatiques et non-hydrostatiques

10.1.1 Modèle non-hydrostatique

Dans ce chapitre, lorsque nous parlerons du modèle non-hydrostatique, nous ferons référence au modèle de Navier-Stokes à densité constante évoqué tout au long de cette thèse, que nous rappelons ici dans sa version complète (en dimension 3) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} - \nu_H\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \nu_V\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = F_u & \text{(10.1a)} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} - \nu_H\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \nu_V\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \dfrac{\partial p}{\partial y} = F_v & \text{(10.1b)} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} - \nu_H\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \nu_V\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \dfrac{\partial p}{\partial z} = F_w & \text{(10.1c)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 & \text{(10.1d)} \end{cases}$$

Bien entendu, ce système est muni de conditions initiales et de conditions aux limites, ainsi qu'il en a été discuté dans les chapitres précédents. Les forces extérieures F_u, F_v et F_w n'ayant pas d'influence dans l'étude qui va suivre (en particulier sur le choix des conditions aux limites), nous ne les considèrerons pas dans la suite. Néanmoins, elles

doivent être prises en compte dans les configuration réalistes, en particulier le terme de gravité $-g$ dans l'équation (10.1c).

10.1.2 Dérivation des équations de Navier-Stokes hydrostatiques

Nous nous intéressons maintenant à la dérivation mathématique du modèle hydrostatique correspondant. Introduisons pour commencer les variables sans dimensions suivantes (les détails peuvent être consultés dans [3, 64]) :

$$\begin{aligned}
x &= L\,x', & z &= H\,z', & \delta &= \frac{H}{L},\\
u &= U\,u', & W &= W\,w', & &\text{où } W = \delta U,\\
t &= \frac{L}{U}\,t', & p &= P\,p', & &\text{où } P = U^2,\\
\nu_H &= \frac{L^2}{T}\nu_0, & \nu_V &= \frac{H^2}{T}\nu_0 = \delta^2\frac{L^2}{T}\nu_0.
\end{aligned}$$

Le paramètre important dans cet adimensionnement est le rapport d'aspect $\delta = H/L$, qui mesure le caractère peu profond du domaine lorsque $H \ll L$, ce qui sera notre cas ici (voir figure 10.1).

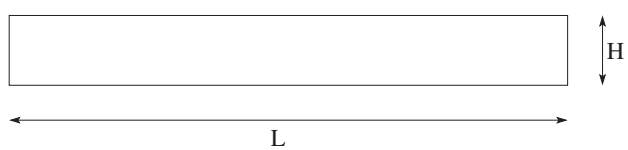


FIGURE 10.1 – Dimensions caractéristiques H et L de notre domaine.

Si l'on introduit les nombres et variables sans dimensions ci-dessus dans les équations (10.1), on obtient pour les variables sans dimension x', z', u', w', etc. les équations suivantes (on omet les *prime* pour la clarté des notations) :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 & \text{(10.2a)}\\
\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 & \text{(10.2b)}\\
\dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{\delta^2}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 & \text{(10.2c)}\\
\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 & \text{(10.2d)}
\end{cases}$$

où $\mathrm{Re} = 1/\nu_0$ est le nombre de Reynolds. L'approximation hydrostatique, qui différencie les équations de Navier-Stokes traditionnelles des équations (NSH), consiste à ne considérer que le terme principal (en $O(1/\delta^2)$) de l'équation (10.2c), de sorte que l'on obtient les équations de Navier-Stokes hydrostatiques suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 & \text{(10.3a)} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 & \text{(10.3b)} \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 & \text{(10.3c)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 & \text{(10.3d)} \end{cases}$$

Ces équations ont fait l'objet de nombreuses études dans la littérature. Lorsque l'on considère les équations avec densité (et le terme de gravité dans les forces extérieures), on les appelle *équations primitives*. Elles sont beaucoup utilisées dans la simulation de la circulation océanique à grande échelle, d'où l'intérêt que nous leur portons dans ce travail. Le lecteur intéressé pourra consulter les références suivantes (cas visqueux [73] et non visqueux [79]), ainsi que les nombreux ouvrages cités dans ces deux articles de *survey*.

10.2 Vers le couplage NS-NSH

10.2.1 Couplage multi-physiques et méthode de Schwarz

Au delà de la décomposition de domaine, les méthodes de Schwarz sont également un cadre de travail adéquat pour le couplage multi-physiques. Supposons que l'on souhaite coupler deux systèmes d'EDP s'écrivant de façon formelle $L_i = f_i$ sur Ω_i $(i = 1, 2)$ au travers d'une interface Γ (on omet ici les conditions initiales et les conditions aux limites autres que sur Γ). La physique du phénomène impose en général des conditions physiques de raccord (conservation de la masse, de l'énergie...) au travers de Γ, que nous noterons symboliquement $F_1 u_1 = F_2 u_2$. L'algorithme de Schwarz de couplage de ces deux systèmes s'écrit alors :

$$\begin{cases} L_1 u_1^m &= f_1 \quad \text{sur } \Omega_1 \\ B_1 u_1^m &= B_2 u_2^{m-1} \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L_2 u_2^m &= f_2 \quad \text{sur } \Omega_2 \\ C_2 u_2^m &= C_1 u_1^{m-1} \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où les opérateurs B_i et C_i sont à choisir de telle sorte qu'ils assurent la convergence de l'algorithme et que les conditions physiques de raccord soient satisfaites à convergence.

Les équations vérifiées par les erreurs s'écrivent alors, en posant $e_i^m = u_i^m - u_i$, et avec les habituelles hypothèses de linéarité :

$$\begin{cases} L_1 e_1^m &= 0 & \text{sur } \Omega_1 \\ B_1 e_1^m &= B_2 e_2^{m-1} + B_2 u_2 - B_1 u_1 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L_2 e_2^m &= 0 & \text{sur } \Omega_2 \\ C_2 e_2^m &= C_1 e_1^{m-1} + C_1 u_1 - C_2 u_2 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Il est donc nécessaire de satisfaire des relations de compatibilité $B_1 u_1 = B_2 u_2$ et $C_1 u_1 = C_2 u_2$, ce qui peut être obtenu par exemple en choisissant des B_i et C_i dérivant des conditions physiques de raccord (par exemple des combinaisons linéaires indépendantes des équations du système $F_1 u_1 = F_2 u_2$). De plus, pour que la convergence soit rapide, il faudrait idéalement que $B_2 e_2^1 = 0$ et $C_1 e_1^1 = 0$, ce qui correspond à la définition des conditions absorbantes exactes des équations de départ. Rien n'assure évidemment que ces conditions impliqueraient par ailleurs les relations de compatibilité précédentes, mais on doit par contre pouvoir en construire des approximations qui resteraient performantes en termes de vitesse de convergence et qui assureraient ces conditions.

En résumé, coupler efficacement les deux systèmes d'EDP initiaux par méthode de Schwarz revient à chercher les opérateurs absorbants exacts de chacun de ces systèmes, et à en construire des approximations qui vérifient les conditions de compatibilité, elles-mêmes impliquant la satisfaction des conditions physiques de raccord.

Dans notre cas, afin de coupler (NS) et (NSH), il nous faut donc calculer leurs conditions absorbantes exactes, et en réaliser des approximations. Ce travail a été fait aux chapitres précédents pour (NS). Nous allons ici tenter de le réaliser pour (NSH). Pour cela, nous allons reprendre les calculs des chapitres 7 et 8, par lesquels on a dérivé les conditions absorbantes exactes du système de Navier-Stokes, puis proposé des approximations utilisant des opérateurs locaux, et nous allons tenter d'en déduire des conditions qui pourraient être utilisées dans le cadre hydrostatique des équations (NSH). Nous allons donc nous placer dans un cadre "proche de l'hydrostatique", c'est à dire qu'on va faire apparaitre explicitement la dépendance en $\delta = H/L$ tout au long des calculs, et étudier le cas limite $\delta \to 0$.

10.2.2 Système de Stokes modifié

On repart des équations de Navier-Stokes adimensionnalisées (10.2), mais cette fois dans le cas 2-D vertical, comme pour les chapitres précédents. On considère donc le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 & (10.4a) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{\delta^2}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 & (10.4b) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 & (10.4c) \end{cases}$$

où toutes les variables sont maintenant adimensionnelles. La discrétisation en temps 3.1 avec schéma d'Euler et traitement explicite du terme non-linéaire mène alors à étudier à chaque pas de temps un système de Stokes modifié :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\, u - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial x} = f_x & (10.5a) \\ \dfrac{1}{\Delta t}\, w - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{\delta^2}\dfrac{\partial p}{\partial z} = f_z & (10.5b) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 & (10.5c) \end{cases}$$

10.2.3 Expression des erreurs

On va maintenant reprendre les calculs menés au paragraphe 7.1 pour obtenir l'expression analytique des erreurs lors des itérations de Schwarz appliquées au système précédent (10.5). Avec les notations usuelles, le système vérifié par ces erreurs, qui était auparavant le système (7.4) pour le système de Stokes, est maintenant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\, u_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_j^m}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p_j^m}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } \Omega_j & (10.6a) \\ \dfrac{1}{\Delta t}\, w_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 w_j^m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w_j^m}{\partial z^2}\right) + \dfrac{1}{\delta^2}\dfrac{\partial p_j^m}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } \Omega_j & (10.6b) \\ \dfrac{\partial u_j^m}{\partial x} + \dfrac{\partial w_j^m}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } \Omega_j & (10.6c) \\ \boldsymbol{v_j^m} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_j \setminus \Gamma & (10.6d) \\ \text{Conditions d'interface à préciser sur } \Gamma & \end{cases}$$

En réalisant l'approximation d'un domaine infini dans les deux directions et en utilisant une transformée de Fourier en z, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\, \hat{u}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 \hat{u}_j^m}{\partial x^2} + \dfrac{k^2}{\mathrm{Re}}\, \hat{u}_j^m + \dfrac{\partial \hat{p}_j^m}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } \Omega_j & (10.7a) \\ \dfrac{1}{\Delta t}\, \hat{w}_j^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 \hat{w}_j^m}{\partial x^2} + \dfrac{k^2}{\mathrm{Re}}\, \hat{w}_j^m + \dfrac{ik}{\delta^2}\, \hat{p}_j^m = 0 \quad \text{dans } \Omega_j & (10.7b) \\ \dfrac{\partial \hat{u}_j^m}{\partial x} + ik\hat{w}_j^m = 0 \quad \text{dans } \Omega_j & (10.7c) \\ \hat{\boldsymbol{v}}_j^m \to 0 \text{ quand } x \to \pm\infty & (10.7d) \\ \text{Conditions d'interface à préciser sur } \Gamma & \end{cases}$$

qui est le pendant du système (7.6) que l'on avait pour Stokes. En introduisant a priori les solutions sous la forme exponentielle

$$\hat{\boldsymbol{e}}^m(x) = (\hat{\boldsymbol{v}}_j^m, \hat{p}^m)^T(x) = \boldsymbol{\Phi}^m e^{\xi x}$$

dans (10.7), on aboutit au système :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\Delta t} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}(k^2 - \xi^2) & 0 & \xi \\ 0 & \dfrac{1}{\Delta t} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}(k^2 - \xi^2) & \dfrac{ik}{\delta^2} \\ \xi & ik & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}^m = 0. \tag{10.8}$$

Les valeurs de ξ qui annulent le déterminant de cette matrice sont :

$$\xi_1 = \lambda,\ \xi_2 = \frac{|k|}{\delta},\ \xi_3 = -\lambda \ \text{ et } \ \xi_4 = -\frac{|k|}{\delta}$$

avec toujours

$$\lambda = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t} + k^2} \tag{10.9}$$

Les modes associés sont alors respectivement :

$$\boldsymbol{\Phi_1} = \begin{pmatrix} ik \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Phi_2} = \begin{pmatrix} -|k|\,\delta\,\beta \\ -ik\,\beta \\ 1/\Delta t \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Phi_3} = \begin{pmatrix} ik \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \boldsymbol{\Phi_4} = \begin{pmatrix} |k|\,\delta\,\beta \\ -ik\,\beta \\ 1/\Delta t \end{pmatrix}.$$

en introduisant le rapport $\beta = \dfrac{\lambda^2 - k^2}{\delta^2\lambda^2 - k^2}$. On obtient alors, en tenant compte de la condition aux limites quand $x \to \pm\infty$:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1^m(x) = \sum_{l=1}^{2} \gamma_{1,l}^m\, \boldsymbol{\Phi}_l\, e^{\xi_l x} \qquad \text{(domaine de gauche, } x < 0,\ \xi_l \text{ positifs)}$$

et

$$\hat{\boldsymbol{e}}_2^m(x) = \sum_{l=3}^{4} \gamma_{2,l}^m\, \boldsymbol{\Phi}_l\, e^{\xi_l x} \qquad \text{(domaine de droite, } x > 0,\ \xi_l \text{ négatifs)}$$

On utilisera en particulier la notation suivante pour la vitesse :

$$\hat{\boldsymbol{v}}_1^m(x) = M_{12}\, e^{\xi_{12} x}\, \boldsymbol{\gamma}_{12}^m \quad \text{ et } \quad \hat{\boldsymbol{v}}_2^m(x) = M_{34}\, e^{\xi_{34} x}\, \boldsymbol{\gamma}_{34}^m \tag{10.10}$$

avec

$$M_{12} = \begin{pmatrix} ik & -|k|\,\delta\,\beta \\ -\lambda & -ik\beta \end{pmatrix},\ e^{\xi_{12}x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_2 x} \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \boldsymbol{\gamma}_{12}^m = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^m \\ \gamma_{1,2}^m \end{pmatrix}$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} ik & |k|\,\delta\,\beta \\ \lambda & -ik\beta \end{pmatrix},\ e^{\xi_{34}x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_3 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_4 x} \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \boldsymbol{\gamma}_{34}^m = \begin{pmatrix} \gamma_{2,3}^m \\ \gamma_{2,4}^m \end{pmatrix}$$

10.2.4 Conditions absorbantes exactes

Les conditions absorbantes exactes sont maintenant obtenues en reprenant les calculs du paragraphe 8.1.1.

La composante en z de (10.7) donne

$$\hat{p}_j = \frac{i\delta^2}{k}\left[\left(\frac{1}{\Delta t}+\frac{k^2}{\mathrm{Re}}\right)\hat{w}_j - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\hat{w}_j}{dx^2}\right] = \frac{i\delta^2}{k\,\mathrm{Re}}\left[\lambda^2\hat{w}_j - \frac{d^2\hat{w}_j}{dx^2}\right]$$

Les conditions d'interface (8.2)et (8.3) se réécrivent alors :

$$M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_1^m}{dx^2} + N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_1^m}{dx} + P\hat{\boldsymbol{v}}_1^m - \hat{S}_1\hat{\boldsymbol{v}}_1^m = M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx^2} + N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx} + P\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} - \hat{S}_1\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} \quad (10.11)$$

$$-M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_2^m}{dx^2} - N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^m}{dx} - P\hat{\boldsymbol{v}}_2^m - \hat{S}_2\hat{\boldsymbol{v}}_2^m = -M\frac{d^2\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}}{dx^2} - N\frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1}}{dx} - P\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1} - \hat{S}_2\hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1} \quad (10.12)$$

avec les matrices M, N et P définies par

$$M = -\frac{\delta^2}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = -\frac{1}{\mathrm{Re}}I_2 \ \text{ et } \ P = -\frac{\delta^2}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{k}\lambda^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.13)$$

Les formules analytiques fournissant les opérateurs absorbants exacts dans le domaine de Fourier sont alors encore valables :

$$\hat{S}_1 = MQ_{34}^2 + NQ_{34} + P \qquad \text{et} \qquad \hat{S}_2 = -MQ_{12}^2 - NQ_{12} - P$$

avec

$$Q_{12} = M_{12}\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}M_{12}^{-1} \qquad \text{et} \qquad Q_{34} = M_{34}\begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_4 \end{pmatrix}M_{34}^{-1}$$

Après calcul, on obtient :

$$Q_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -ik \\ -ik\dfrac{\lambda}{|k|\delta} & \lambda + \dfrac{|k|}{\delta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_{34} = \begin{pmatrix} 0 & -ik \\ -ik\dfrac{\lambda}{|k|\delta} & -\lambda - \dfrac{|k|}{\delta} \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont donc en fait indépendantes de la quantité β que l'on avait dû introduire précédemment. On a alors finalement :

$$\hat{S}_1 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{|k|}(\lambda\delta + |k|) & -\dfrac{ik}{|k|}\lambda\delta \\ \dfrac{ik}{|k|}\dfrac{\lambda}{\delta} & \dfrac{\lambda\delta + |k|}{\delta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{S}_2 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{|k|}(\lambda\delta + |k|) & \dfrac{ik}{|k|}\lambda\delta \\ -\dfrac{ik}{|k|}\dfrac{\lambda}{\delta} & \dfrac{\lambda\delta + |k|}{\delta} \end{pmatrix} \quad (10.14)$$

On remarque que les termes antidiagonaux ne sont plus opposés comme c'était le cas pour les conditions absorbantes exactes (8.4). C'est d'ailleurs ce qui va mener dans la suite à la réduction du nombre de conditions lors du passage de (NS) à (NSH). On peut noter qu'en remplaçant δ par 1 dans l'opérateur (10.14), on retrouve bien l'opérateur absorbant exact (8.4) de l'équation de Stokes.

10.2.5 Asymptotique $\delta \to 0$

Quand $\delta \to 0$, $M \to 0$, N est inchangée, et $P \to 0$. $\hat{S}_j$ comportant des termes en $1/\delta$, ce sont donc ces termes qui vont subsister *in fine*. Les conditions d'interface (10.11)-(10.12) deviennent donc asymptotiquement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_1^H \hat{\boldsymbol{v}}_1^m = \hat{S}_1^H \hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} \\ \hat{S}_2^H \hat{\boldsymbol{v}}_2^m = \hat{S}_2^H \hat{\boldsymbol{v}}_1^{m-1} \end{array} \right.$$

avec

$$\hat{S}_1^H = \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{ik\lambda}{|k|} & |k| \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{S}_2^H = \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{ik\lambda}{|k|} & |k| \end{pmatrix}$$

c'est à dire sous forme explicite :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{ik\lambda}{|k|}\hat{u}_1^m + |k|\,\hat{w}_1^m & = \dfrac{ik\lambda}{|k|}\hat{u}_2^{m-1} + |k|\,\hat{w}_2^{m-1} \\ -\dfrac{ik\lambda}{|k|}\hat{u}_2^m + |k|\,\hat{w}_2^m & = -\dfrac{ik\lambda}{|k|}\hat{u}_1^{m-1} + |k|\,\hat{w}_1^{m-1} \end{array} \right.$$

ou encore en simplifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda\hat{u}_1^m - ik\,\hat{w}_1^m & = \lambda\hat{u}_2^{m-1} - ik\,\hat{w}_2^{m-1} \\ \lambda\hat{u}_2^m + ik\,\hat{w}_2^m & = \lambda\hat{u}_1^{m-1} + ik\,\hat{w}_1^{m-1} \end{array} \right. \tag{10.15}$$

Ce résultat amène immédiatement quelques remarques :

- Comme nous l'anticipions, on n'a plus qu'une seule condition au lieu de deux précédemment, ce qui est normal car on a une variable pronostique de moins dans le modèle hydrostatique.
- Les deux équations du système (10.15) sont bien indépendantes, ce qui est une condition nécessaire pour espérer la convergence de l'algorithme.
- Ce calcul ne prouve pas que ces conditions seraient celles que l'on obtiendrait par un calcul direct sur les équations de Navier-Stokes hydrostatiques. On peut toutefois vérifier par un calcul analogue à celui qui vient d'être fait que tel est bien le cas.

Ce calcul a été fait dans l'espace de Fourier, et il nous faut donc maintenant nous ramener à des conditions dans l'espace physique. Par transformation de Fourier inverse, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} TF^{-1}(\lambda\hat{u}_1^m) - \dfrac{\partial w_1^m}{\partial z} & = TF^{-1}(\lambda\hat{u}_2^{m-1}) - \dfrac{\partial w_2^{m-1}}{\partial z} \\ TF^{-1}(\lambda\hat{u}_2^m) + \dfrac{\partial w_2^m}{\partial z} & = TF^{-1}(\lambda\hat{u}_1^{m-1}) + \dfrac{\partial w_1^{m-1}}{\partial z} \end{array} \right.$$

soit en utilisant la condition de non-divergence (10.6c) :

$$\left\{\begin{array}{ll} TF^{-1}(\lambda\hat{u}_1^m) + \dfrac{\partial u_1^m}{\partial x} & = TF^{-1}(\lambda\hat{u}_2^{m-1}) + \dfrac{\partial u_2^{m-1}}{\partial x} \\ TF^{-1}(\lambda\hat{u}_2^m) - \dfrac{\partial u_2^m}{\partial x} & = TF^{-1}(\lambda\hat{u}_1^{m-1}) - \dfrac{\partial u_1^{m-1}}{\partial x} \end{array}\right. \tag{10.16}$$

10.2.6 Conditions absorbantes approchées

La transformée de Fourier inverse des premiers termes est complexe du fait de l'expression de λ, et mènerait à des conditions non locales en espace. On va donc, comme aux chapitres 8 et 9, proposer des approximations de ces conditions absorbantes exactes.

Avant de réfléchir à un choix d'approximations pour l'opérateur λ, on va avoir besoin de l'expression analytique des erreurs après le passage à la limite $\delta \to 0$. En particulier, comme seule la composante horizontale de la vitesse intervient dans les conditions à l'interface (10.16), seule l'expression analytique de son erreur nous intéressera. Pour ce faire, on reprend l'expression (10.10) obtenue pour δ quelconque, dans laquelle on fait tendre δ vers 0. L'erreur sur la composante horizontale de la vitesse s'écrit alors

$$\hat{u}_1^m = \gamma_1^m\, ik\, e^{\lambda x} \quad \text{et} \quad \hat{u}_2^m = \gamma_2^m\, ik\, e^{-\lambda x}. \tag{10.17}$$

Il convient de noter que le passage à la limite fait que les erreurs (et pas seulement celle sur la composante horizontale de vitesse) ne dépendent plus que d'un seul mode sur chaque sous-domaine, contre deux auparavant, car $e^{\xi_2 x} \to 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et $e^{\xi_4 x} \to 0$ sur $\mathbb{R}^+$ quand $\delta \to 0$. Ce point va grandement simplifier les calculs à venir, puisque cela revient à traiter un problème scalaire et non plus vectoriel comme c'était le cas jusqu'à maintenant.

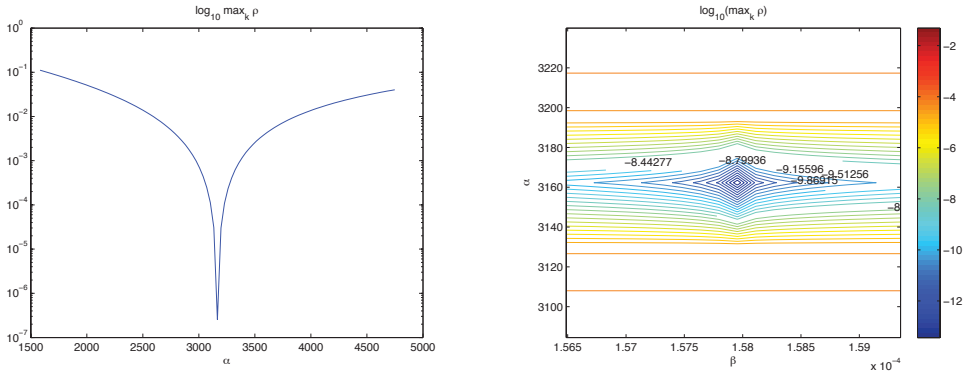
On considère maintenant λ^* une approximation de l'opérateur absorbant exact λ dans l'espace de Fourier, correspondant à l'opérateur local Λ^* dans l'espace réel. Les conditions à l'interface se réécrivent alors

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u_1^m}{\partial x} + \Lambda^*\, u_1^m & = \dfrac{\partial u_2^{m-1}}{\partial x} + \Lambda^*\, u_2^{m-1} \\ \dfrac{\partial u_2^m}{\partial x} - \Lambda^*\, u_2^m & = \dfrac{\partial u_1^{m-1}}{\partial x} - \Lambda^*\, u_1^{m-1} \end{array}\right. \tag{10.18}$$

Le taux de convergence de l'algorithme (10.6) avec ces conditions à l'interface s'écrit alors simplement, à l'aide de l'équation (10.17),

$$\left(\frac{\lambda^* - \lambda}{\lambda^* + \lambda}\right)^2. \tag{10.19}$$

C'est exactement le facteur de convergence d'une équation de Helmholtz $(\eta - \Delta)u$, de paramètre $\eta = \mathrm{Re}\,/\Delta t$, pour une décomposition de domaine sans recouvrement. Des



(a) Approximation de degré 0

(b) Approximation de degré 2

FIGURE 10.2 – Comportement du facteur de convergence (10.19) pour les deux approximations de degré 0 et de degré 2 du paramètre λ. Sur les deux figures, le taux de convergence est donné en échelle logarithmique.

approximations pour cette équation, basées sur les travaux de Gander [36], ont déjà été introduites au paragraphe 6.2.1.

On va considérer les deux approximations polynomiales, respectivement de degré 0 et de degré 2 en k de l'opérateur λ

$$\lambda_0^* = \alpha_0 \quad \text{et } \lambda_2^* = \quad \alpha_2 + \beta_2 k^2,$$

ce qui correspond respectivement aux opérateurs approchés

$$\Lambda_0^* u = \alpha_0 u \quad \text{et} \quad \Lambda_2^* u = \alpha_2 u - \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

On rappelle que l'expression des cœfficients optimaux, c'est-à-dire minimisant le facteur de convergence pour k dans l'intervalle $[k_{min},\, k_{max}]$, est donnée par :

$$\alpha_0 = \left((k_{min}^2 + \eta)(k_{max}^2 + \eta)\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\alpha_2 = \frac{k_{max}^2\sqrt{k_{min}^2+\eta} - k_{min}^2\sqrt{k_{max}^2+\eta}}{\sqrt{2(k_{max}^2-k_{min}^2)}((\sqrt{k_{max}^2+\eta}-\sqrt{k_{min}^2+\eta})((k_{max}^2+\eta)\sqrt{k_{min}^2+\eta}-(k_{min}^2+\eta)\sqrt{k_{max}^2+\eta})^{\frac{1}{4}}}$$

$$\beta_2 = \frac{(\sqrt{k_{min}^2+\eta}-\sqrt{k_{max}^2+\eta})^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2(k_{max}^2-k_{min}^2)}((k_{max}^2+\eta)\sqrt{k_{min}^2+\eta}-(k_{min}^2+\eta)\sqrt{k_{max}^2+\eta})^{\frac{1}{4}}},$$

Pour ces deux approximations, on a tracé sur la figure 10.2 le comportement du facteur de convergence en fonction des paramètres α et β le cas échéant, pour des valeurs autour des valeurs optimales. On peut remarquer que l'approximation de degré 2 fournit

un facteur de convergence optimal bien meilleur que l'approximation de degré 0. On peut également noter que le terme de degré 0 optimal est dans les deux approximations très proche de la valeur $\sqrt{\mathrm{Re}/\Delta t}$, ce qui revient à dire que le terme de degré 0 correspond, pour les valeurs retenues de Re et Δt à un développement en fréquence faible de l'opérateur λ.

Il reste maintenant à tester numériquement ces approximations.

10.3 Proposition de cas-tests numériques

Dans cette section, nous voudrions proposer deux cas-tests qui s'appuient sur des configurations dans lesquelles l'approximation hydrostatique peut être utilisée. Le premier cas-test (le plus simple) consiste à considérer un couplage NSH-NSH, qui peut par exemple être utilisé pour la simulation océanique à grande échelle (décomposition de grands domaines). Le second, plus intéressant, constitue un couplage multi-physiques NS-NSH qui s'appliquerait typiquement pour l'intéraction entre modèles hauturier et côtier. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, dans cette seconde configuration, il n'est *a priori* pas possible de concevoir de solution monodomaine qui servirait de référence au modèle couplé.
Nous ne proposerons pas d'implémentation numérique de ces cas-tests dans la mesure où ils nécessitent un solveur hydrostatique que nous n'avons pas eu le temps de développer. Cela pourrait faire l'objet de développements futurs.

10.3.1 Cas-test NSH-NSH

On va considérer ici une version adaptée du cas-test de la cavité entraînée aux équations de Navier-Stokes hydrostatiques : le domaine ne sera plus carré mais rectangulaire, avec un petit ratio entre la largeur et la hauteur du domaine. Les conditions sur le bord sont inchangées par rapport à la version présentée au chapitre 4.

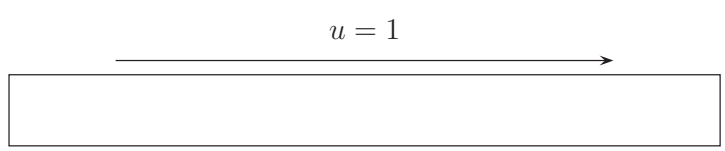


FIGURE 10.3 – Cavité entraînée revisitée pour les équations de Navier-Stokes hydrostatiques.

On rappelle que les équations de Navier-Stokes hydrostatiques s'obtiennent par passage à la limite $\delta \to 0$ dans les équations de Navier-Stokes adimensionnalisées (10.4).

Elles s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 & (10.20a) \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 & (10.20b) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, & (10.20c) \end{cases}$$

ce qui donne après discrétisation suivant le schéma (3.1) déjà introduit précédemment :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\, u - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial x} = f_x & (10.21a) \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 & (10.21b) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0. & (10.21c) \end{cases}$$

Les conditions sur le bord pour les équations de Navier-Stokes hydrostatiques sont déterminées de la façon suivante :

- Le champ de vitesse horizontale est une inconnue pronostique. Sa valeur est imposée par les conditions aux limites, à savoir $u = 1$ sur le bord supérieur de la cavité entraînée, et $u = 0$ sinon.
- Le champ de vitesse vertical w est quant à lui diagnostique. Sa valeur est connue sur les bords inférieur et supérieur du domaine ($w = 0$ dans les deux cas), et sa valeur sur les bord latéraux est donnée par intégration de l'équation de conservation de la masse (10.21c), ce qui nous donne pour la cavité entraînée également $w = 0$.

Par souci de clarté, on notera dans la suite $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}$ les conditions de Dirichlet sur le champ de vitesse aux bords.

La méthode de Schwarz pour les équations de Navier-Stokes hydrostatiques à chaque pas de temps s'écrit alors

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\, u_1^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_1^m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1^m}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p_1^m}{\partial x} = f_x \text{ dans } \Omega_1 \\ \dfrac{\partial p_1^m}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \dfrac{\partial u_1^m}{\partial x} + \dfrac{\partial w_1^m}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \boldsymbol{v}_1^m = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_1 \backslash \Gamma \\ \dfrac{\partial u_1^m}{\partial x} + \Lambda_o^*\, u_1^m = \dfrac{\partial u_2^{m-1}}{\partial x} + \Lambda_o^*\, u_2^{m-1} \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{10.22}$$

$$\text{et} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\Delta t}\, u_2^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \left(\dfrac{\partial^2 u_2^m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2^m}{\partial z^2} \right) + \dfrac{\partial p_2^m}{\partial x} = f_x \text{ dans } \Omega_2 \\ \dfrac{\partial p_2^m}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \dfrac{\partial u_2^m}{\partial x} + \dfrac{\partial w_2^m}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \boldsymbol{v}_2^m = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_2 \backslash \Gamma \\ \dfrac{\partial u_2^m}{\partial x} - \Lambda_o^*\, u_2^m = \dfrac{\partial u_1^{m-1}}{\partial x} - \Lambda_o^*\, u_1^{m-1} \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \tag{10.23}$$

où Γ désigne l'interface entre les deux sous-domaines, passant par le centre de la cavité entraînée et Λ_o^* est l'opérateur absorbant approché d'ordre o défini dans la section précédente.

Il s'agira donc là d'un test classique (par opposition au paragraphe suivant), dans la mesure où l'on dispose d'une solution monodomaine de référence, pour lequel on cherchera à obtenir la convergence la plus rapide possible avec la classe d'approximations considérée.

10.3.2 Cas-test NS-NSH

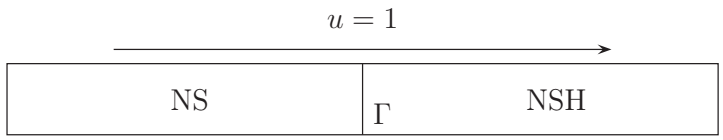


FIGURE 10.4 – Couplage entre les équations de Navier-Stokes et les équations de Navier-Stokes hydrotatiques.

On reprend le cas-test introduit à la sous-section précédente, et on s'intéresse maintenant au couplage entre les équations de Navier-Stokes et les équations de Navier-Stokes hydrostatiques, comme illustré sur la figure 10.4. On va donc chercher à résoudre à chaque pas de temps les systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\Delta t}\, u_1 - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + \dfrac{\partial p_1}{\partial x} = f_x \text{ dans } \Omega_1 \\ \dfrac{1}{\Delta t}\, w_1 - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \left(\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) + \dfrac{\partial p_1}{\partial z} = f_z \text{ dans } \Omega_1 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_1 \backslash \Gamma \end{array} \right. \tag{10.24}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\, u_2 - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) + \dfrac{\partial p_2}{\partial x} = f_x \text{ dans } \Omega_2 \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_2 \backslash \Gamma, \end{cases} \tag{10.25}$$

dans lesquels les conditions à l'interface n'ont pas encore été spécifiées.

On a vu de plus au chapitre 8 qu'à travers une interface Γ de normale sortante $\boldsymbol{n}$, les solutions du système de Stokes conservent les quantités suivantes :

$$\boldsymbol{v} \text{ et } -\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}} + p\boldsymbol{n}.$$

Le système composé des équations (10.24), (10.25) et des équations

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 & \text{(10.26a)} \\ -\dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial \boldsymbol{n}} + p_1 \boldsymbol{n} = -\dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \boldsymbol{n}} + p_2 \boldsymbol{n} & \text{(10.26b)} \end{cases}$$

sur l'interface constitue donc notre solution de référence.

Pour mettre en place une méthode de Schwarz, on propose de considérer la condition à l'interface suivante :

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}} + p\boldsymbol{n} - S\boldsymbol{v}. \tag{10.27}$$

L'opérateur S sera déterminé comme usuellement de manière à obtenir un système homogène pour les erreurs. On reviendra plus loin dans ce paragraphe sur ce point.

Un problème se pose néanmoins dans le cas du couplage des équations de Navier-Stokes avec les équations de Navier-Stokes hydrostatiques : ces deux systèmes ne nécessitent pas le même nombre de conditions aux bords. En effet, il en faut deux pour les équations de Navier-Stokes, alors qu'une seule suffit pour les équations de Navier-Stokes hydrostatique. Par ailleurs, les équations de Navier-Stokes hydrostatique dérivant des équations de Navier-Stokes quand le rapport d'aspect δ tend vers 0, on a vu dans la section 10.2.5 que la quantité $-\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}} + p\boldsymbol{n} - S\boldsymbol{v}$ se réécrit, après passage à la limite $\delta \to 0$, en

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - S_H u, \tag{10.28}$$

avec ici aussi un opérateur S_H à définir. On va donc considérer la méthode de Schwarz

définie par les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{\Delta t}\,u_1^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_1^m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1^m}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p_1^m}{\partial x} = f_x \text{ dans } \Omega_1 \\
\dfrac{1}{\Delta t}\,w_1^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 w_1^m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w_1^m}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p_1^m}{\partial z} = f_z \text{ dans } \Omega_1 \\
\dfrac{\partial u_1^m}{\partial x} + \dfrac{\partial w_1^m}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\
\boldsymbol{v}_1^m = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_1 \backslash \Gamma \\
-\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial \boldsymbol{v}_1^m}{\partial x} + p_1^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - S\boldsymbol{v}_1^m = -\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial \boldsymbol{v}_2^{m-1}}{\partial x} + p_2^{m-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - S\boldsymbol{v}_2^{m-1} \text{ sur } \Gamma
\end{array}\right. \tag{10.29}$$

$$\text{et} \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{\Delta t}\,u_2^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_2^m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2^m}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p_2^m}{\partial x} = f_x \text{ dans } \Omega_2 \\
\dfrac{\partial p_2^m}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\
\dfrac{\partial u_2^m}{\partial x} + \dfrac{\partial w_2^m}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\
\boldsymbol{v}_2^m = \boldsymbol{g} \text{ sur } \partial\Omega_2 \backslash \Gamma \\
\dfrac{\partial u_2^m}{\partial x} - S_H\, u_2^m = \dfrac{\partial u_1^{m-1}}{\partial x} - S_H\, u_1^{m-1} \text{ sur } \Gamma,
\end{array}\right. \tag{10.30}$$

avec des opérateurs S et S_H à définir.

Pour étudier la convergence d'une cette méthode, on définit les erreurs sur les sous-domaines comme la différence entre la solution de référence (10.24), (10.25) et (10.26) et celle du système des itérations de Schwarz (10.29) (10.30). Ces erreurs vérifient donc les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{\Delta t}\,u_1^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_1^m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1^m}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p_1^m}{\partial x} = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\
\dfrac{1}{\Delta t}\,w_1^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 w_1^m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w_1^m}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p_1^m}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\
\dfrac{\partial u_1^m}{\partial x} + \dfrac{\partial w_1^m}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\
\boldsymbol{v}_1^m = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \backslash \Gamma \\
-\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial \boldsymbol{v}_1^m}{\partial x} + p_1^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - S\boldsymbol{v}_1^m = -\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial \boldsymbol{v}_2^{m-1}}{\partial x} + p_2^{m-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - S\boldsymbol{v}_2^{m-1} + S\boldsymbol{v}_2 - S\boldsymbol{v}_1 \text{ sur } \Gamma
\end{array}\right.$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\, u_2^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_2^m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2^m}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial p_2^m}{\partial x} = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \dfrac{\partial p_2^m}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \dfrac{\partial u_2^m}{\partial x} + \dfrac{\partial w_2^m}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \boldsymbol{v}_2^m = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \backslash \Gamma \\ \dfrac{\partial u_2^m}{\partial x} - S_H\, u_2^m = \dfrac{\partial u_1^{m-1}}{\partial x} - S_H\, u_1^{m-1} + S_H u_1 - S_H u_2 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

dans lesquels $\boldsymbol{v}$ et p désignent respectivement les erreurs sur la vitesse et sur la pression. Pour que les systèmes vérifiés par les erreurs soient homogènes, il faut que $S\boldsymbol{v}_2 = S\boldsymbol{v}_1$ et que $S_H u_1 = S_H u_2$. Comme on l'a déjà expliqué à la section 10.2.1, ceci sera réalisé si ces égalités sont des combinaisons linéaires des deux équations de (10.26). Ce ne sera *a priori* pas le cas ici. Toutefois les opérateurs S et S_H qui vont être calculés dans la suite de ce paragraphe seront en pratique approchés par des opérateurs locaux, qui pourront être choisis de manière à respecter cette contrainte. Par ailleurs, pour un couplage multi-physique du type de celui considéré ici, *i.e.* où il n'y a pas de discontinuité physique entre les solutions sur chaque sous-domaine (la transition d'un système d'équations à l'autre est extrêmement progressive), l'interface doit être positionnée dans une zone où les deux systèmes sont physiquement valides. Ceci garantit donc que les contraintes $S\boldsymbol{v}_2 = S\boldsymbol{v}_1$ et que $S_H u_1 = S_H u_2$ soient satisfaites, ce qui apporte plus de liberté dans le choix des opérateurs S et S_H.

Comme précédemment, pour déterminer l'expression des opérateurs S et S_H qui permettrait une expression en deux itérations de l'algorithme de Schwarz, on fait l'hypothèse des domaines infinis ($\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ et $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$), afin de réaliser une transformée de Fourier selon la direction z, et on note k la variable de Fourier associée. Le système vérifié par les erreurs se réécrit alors

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\, \hat{u}_1^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{d^2 \hat{u}_1^m}{dx^2} - k^2 \hat{u}_1^m\right) + \dfrac{d\hat{p}_1^m}{dx} = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \dfrac{1}{\Delta t}\, \hat{w}_1^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{d^2 \hat{w}_1^m}{dx^2} - k^2 \hat{w}_1^m\right) + ik\, \hat{p}_1^m = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \dfrac{d\hat{u}_1^m}{dx} + ik\, \hat{w}_1^m = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_1^m = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \backslash \Gamma \\ -\dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{d\hat{\boldsymbol{v}}_1^m}{dx} + \hat{p}_1^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sigma \boldsymbol{v}_1^m = -\dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx} + \hat{p}_2^{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sigma \hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{10.31}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\,\hat{u}_2^m - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{d^2\hat{u}_2^m}{dx^2} - k^2\hat{u}_2^m\right) + \dfrac{d\hat{p}_2^m}{dx} = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ ik\,\hat{p}_2^m = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \dfrac{d\hat{u}_2^m}{dx} + ik\,\hat{w}_2^m = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_2^m = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2\backslash\Gamma \\ \dfrac{d\hat{u}_2^m}{dx} - \sigma_H\,\hat{u}_2^m = \dfrac{d\hat{u}_1^{m-1}}{dx} - \sigma_H\,\hat{u}_1^{m-1} \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \tag{10.32}$$

où σ et σ_H désignent respectivement les symboles dans le domaine de Fourier des opérateurs S et S_H. La résolution de ces systèmes a déjà été effectuée au chapitre 7 pour le système (10.31) et dans ce chapitre pour le système (10.32). Ceci avait conduit à l'expression suivante pour les erreurs dans le domaine de Fourier :

$$\hat{\boldsymbol{v}}_1^m(x) = M_{12}\,e^{\xi_{12}x}\,\boldsymbol{\gamma}_{12}^m \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_2^m(x) = M_{34}\,e^{\lambda x}\,\gamma_3^m$$

avec

$$M_{12} = \begin{pmatrix} ik & -|k| \\ -\lambda & -ik \end{pmatrix},\ e^{\xi_{12}x} = \begin{pmatrix} e^{\xi_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\xi_2 x} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\gamma}_{12}^m = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}^m \\ \gamma_{1,2}^m \end{pmatrix},$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} ik \\ \lambda \end{pmatrix},$$

avec $\xi_1 = \lambda$ et $\xi_2 = |k|$. Les conditions aux interfaces vont servir à déterminer l'expression des symboles σ et σ_H qui conduit à des systèmes homogènes pour les erreurs, et donc à une convergence en deux itérations de la méthode de Schwarz (10.29)-(10.30). On a donc le système

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{d\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1}}{dx} + \hat{p}_2^{m-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sigma\hat{\boldsymbol{v}}_2^{m-1} = 0 & \text{(10.33a)} \\ \dfrac{d\hat{u}_1^{m-1}}{dx} - \sigma_H\,\hat{u}_1^{m-1} = 0. & \text{(10.33b)} \end{cases}$$

La résolution de la première équation (10.33a) de ce système conduit facilement à l'expression de σ dans le domaine de Fourier :

$$\sigma = \frac{1}{\mathrm{Re}}\lambda I_2 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{\Delta t} + k^2}\,I_2. \tag{10.34}$$

L'opérateur S associé à ce symbole est non-local en temps. Il pourra être approché classiquement par un polynôme de degré 0 ou 2 en ik, ce qui assurera le caractère local de l'opérateur S.

En revanche, des difficultés apparaissent quand on souhaite résoudre la deuxième équation (10.33b) :

$$\sigma_H\hat{u}_1^m = \frac{d\hat{u}_1^m}{dx} = \gamma_1^m\lambda\,ik\,e^{\lambda x} - \gamma_2^m\,k^2\,e^{|k|x}. \tag{10.35}$$

On ne peut pas aboutir à une expression de σ_H indépendante de $\hat{u}_1^m$, car les deux modes en λ et $|k|$ sont linéairement indépendants. Notons σ_H^{app} une approximation de l'opérateur σ_H qui approche de manière identique λ et $|k|$ par un opérateur local a sur l'intervalle $[k_{\min}, k_{\max}]$. On aurait alors :

$$\sigma_H^{app}\hat{u}_1^m = \gamma_1^m a\, ik\, e^{\lambda x} - \gamma_2^m\, a|k|\, e^{|k|x} = a\hat{u}_1^m. \tag{10.36}$$

La difficulté consistera donc à trouver un tel opérateur, ce qui fera l'objet d'un travail futur.

Conclusions

Un cadre général de ce travail est l'étude des problématiques de couplage de modèles dans le contexte applicatif de l'hydraulique et de l'océanographie. Ce sont des domaines dans lesquels les besoins sont nombreux, utilisant une vaste gamme de modèles tels que les équations de Saint-Venant, de Navier-Stokes, de Navier-Stokes hydrostatique ou les équations primitives. Pour aborder ces questions de couplage, nous avons choisi d'utiliser les méthodes de Schwarz, pour leur caractère non-intrusif vis-à-vis des codes de calcul. Nous avons proposé et implémenté des algorithmes de décomposition de domaine pour les équations de Navier-Stokes à partir des méthodes de Schwarz classiques et optimisées. Notre étude se décompose en trois parties principales, chacune divisée en plusieurs chapitres.

Dans la première partie, nous avons rappelé les équations de Navier-Stokes (NS), et indiqué les deux schémas numériques temporels utilisés dans ce travail : la méthode de projection d'une part, bien connue et très souvent utilisée, et un schéma monolithique d'autre part qui, contrairement à la méthode de projection, résout simultanément les équations du mouvement et la contrainte d'incompressibilité. Avant d'implémenter ces méthodes numériques dans un contexte de décomposition de domaine, nous les avons validées sur le célèbre cas-test de la cavité entraînée en dimension 2 d'espace, qui a fait l'objet de nombreuses études antérieures et qui est donc parfaitement documenté.

Dans une deuxième partie, nous avons donc mis en place les méthodes de décomposition de domaine pour chacun des deux schémas évoqués ci-dessus. Il a fallu introduire, dans chacun des cas, des conditions aux limites internes (conditions d'interfaces) qui décrivent les interactions entre les différents sous-domaines. Nous avons commencé par vérifier que l'algorithme de Schwarz classique (conditions aux limites de Dirichlet) fonctionnait correctement dans le cas où une zone de recouvrement était introduite. Puis, en vue d'obtenir un couplage plus efficace, nous avons introduit des conditions optimisées qui s'appuient sur des approximations des conditions absorbantes exactes. En effet, compte tenu de la complexité des équations considérées, les conditions idéales (dites absorbantes) que l'on devrait prescrire aux interfaces des sous-domaines sont non locales : elles font intervenir des opérateurs pseudo-différentiels qui ne sont pas utilisables en pratique (en tout cas pas dans des configurations opérationnelles). Nous avons donc utilisé

des petits paramètres qui ont permis, grâce à des développements asymptotiques à différents ordres, d'approcher les conditions absorbantes par des conditions aux limites locales (donc faciles à implémenter) qui présentent toutefois des propriétés de convergence bien supérieures à la méthode de Schwarz originelle. Dans cette partie, nous avons tiré profit d'une discrétisation en temps des équations de Navier-Stokes pour utiliser des résultats déjà établis pour les équations d'Helmholtz.

Enfin, dans une troisième partie, nous proposons un cadre pour l'extension de notre travail à des équations qui dérivent des équations de Navier-Stokes. Nous commençons par les équations d'Oseen, pour lesquelles nous reproduisons l'analyse effectuée dans la partie précédente sans que la discrétisation en temps ne soit requise (on utilise dans ce cas une transformée de Laplace). Pour terminer, nous considérons l'asymptotique $\delta \to 0$ où $\delta = H/L$ est le rapport d'aspect du domaine de calcul considéré. Nous nous plaçons alors dans le cadre des équations de Navier-Stokes hydrostatiques (NSH, appelées équations primitives dans la cadre de l'océanographie opérationnelle) pour lesquelles nous dérivons des conditions absorbantes aux interfaces. De plus, bien que nous n'ayons pas de code de calcul hydrostatique à notre disposition, nous proposons des cas-tests qui permettraient de tester notre approche de couplage.. En particulier, nous proposons un couplage NS-NSH qui pourra faire l'objet d'études ultérieures dans le cadre de modèles océaniques couplant la haute mer (NSH) à une zone côtière (NS).

Les perspectives de ce travail sont diverses. D'autres approximations des conditions optimisées pour les équations de Navier-Stokes discrétisées en temps sont envisageables. Certaines ont d'ailleurs été proposées sans être testées numériquement. De plus, le travail sur les équations d'Oseen et de Navier-Stokes hydrostatique demande à être complété, puis validé par des codes de calcul.

Bibliographie

[1] C. Amrouche, C. Bernaud, M. Dauge, and V. Girault. Vector Potentials in Three-Dimensianal Nonsmooth Domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21 :823–864, 1998.

[2] A. Arakawa and V. R. Lamb. Computational design of the basic dynamical process of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics*, 17 :173, 1977.

[3] P. Azerad and F. Guillén. Mathematical Justification of the Hydrostatic Approximation In the Primitive Equations of Geophysical Fluids Dynamics. *SIAM J. Math. Anal.*, 33(4) :847–859, 2001.

[4] C. Bègue, C. Conca, F. Murat, and O. Pironneau. À nouveau sur les équations de Stokes et de Naiver-Stokes avec des conditions aux limites sur la pression. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 304 :23–28, 1987.

[5] C. Bègue, C. Conca, F. Murat, and O. Pironneau. Les équations de Stokes et de Navier-Stokes avec des conditions aux limites sur la pression. In *Nonlinear partial differential equations and their aplications. Collège de France Seminar, Vol IX*, volume 181 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 179–264. Longman Sci. Tech., Harlow, 1988.

[6] Botella and Peyret. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers and Fluids*, 27(4) :421–433, 1998.

[7] Y. Boubendir, X. Antoine, and C. Geuzaine. A Quasi-Optimal Non-Overlapping Domain Decomposition Algorithm for the Helmholtz Equation. *Journal of Computational Physics*, 231(2) :262–280, 2012.

[8] F. Boyer and P. Fabrie. *Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*. Springer, 2000.

[9] F. Boyer and P. Fabrie. Outflow Boundary Conditions For The Incompressible Non-Homogeneous Navier-Stokes Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 7(2) :219–250, 2007.

[10] D. Bresch. Solutions faibles et équations de Navier-Stokes. De Jean Leray à Pierre-Louis Lions. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.*, 36 :63–86, 2006.

[11] D. L. Brown, R. Cortez, and M. L. Minion. Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 168 :464–499, 2001.

[12] C.-H. Bruneau. Boundary conditions on artifical frontiers for incompressible and compressible Navier-Stokes equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 34(2) :303–314, 2000.

[13] C.-H. Bruneau and P. Fabrie. Effective downstream boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equation. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 19 :893–705, 1994.

[14] C.-H. Bruneau and P. Fabrie. New efficient boundary conditions for incompressible Naier-Stokes equation : a well-posedness result. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 30(7) :815–840, 1996.

[15] C.-H. Bruneau and M. Saad. The 2D lid-driven cavity problem revisited. *Computers and Fluids*, 35(3), 2006.

[16] Bruno Déprès. Méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de propagation d'ondes en régime harmonique. Master's thesis, Paris IX, 1991.

[17] O. R. Burggraf. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 24 :113–151, 1966.

[18] S. Cailleau, V. Fedorenko, B. Barnier, E. Blayo, and L. Debreu. Comparison of different numerical methods used to handle the open boundary of a regional ocean circulation omdel of the Bay of Biscay. *Ocean Modeling*, 25 :1–16, 208.

[19] C. Cao and E. S. Titi. Global Well-Posedness of The Three-Dimensional Viscous Primitive Equations of Large Scale Ocean And Atmosphere Dynamics. *Annals Mathematics*, 166 :245–267, 2007.

[20] A. J. Chorin. The Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations For an Incompressible Fluid. *Bull. Amer. Math. Soc*, 73 :928–931, 1967.

[21] A. J. Chorin. Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations. *Math. of Computation*, 22 :745–762, 1968.

[22] J. Coirier. *Mécanique des milieux continus*. Dunod, 1997.

[23] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *Mathematische Annalen*, 100 :32–74, 1928.

[24] B. Després. Décomposition de domaine et problème de Helmholtz. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 311(6) :313–316, 1990.

[25] V. Dolean, F. Nataf, and G. Rapin. Deriving a new domain decomposition method for the stokes equations using the smith factorization. *Math. of Computation*, 78(266) :789–814, April 2009.

[26] G. Duvaut. *Mécanique de mileux continus*. Masson, 1990.

[27] B. Engquist and A. Majda. Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves. *Math. of Computation*, 31(139) :629–651, 1977.

[28] E. Erturk, T. Corke, and C. Cölçöl. Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 48 :747–774, 2005.

[29] E. Feireisl. On the motion of a viscous, compressible and heat conducting fluid. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(4) :1705–1738, 2004.

[30] E. Fernández-Cara. A review of basic theoretical results concerning the Navier-Stokes and other similar equations. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.*, (32) :45–73, 2005.

[31] L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, and F. N. ad Alfio Quarteroni. Numerical treatment of defective boundary conditions for the Navier-Stokes equations. Technical report, INRIA, 2001.

[32] A. Fortin, M. Jardak, J. J. Gervais, and R. Pierre. Localization of Hopf bifurcations in fluid flow problems. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 24(11) :1185–1210, 1997.

[33] O. B. Fringer, M. Gerritsen, and R. Street. An unstructured-grid, finite-volume, nonhydrostatic, parallel coastal-ocean simulator. *Ocean Modeling*, 14 :139–278, 2006.

[34] O. B. Fringer, J. M. Williams, and R. L. Street. A new hybrid model for coastal simulations. *Ocean Modeling*, 19 :64–77, 2006.

[35] H. Fujita and T. Kato. On the Navier-Stokes initial value problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 16 :269–315, 1964.

[36] M. J. Gander. Optimized Schwarz Methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(2) :699–731, 2006.

[37] M. J. Gander. Schwarz methods over the course of time. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 31 :228–255, 2008.

[38] M. J. Gander and L. Halpern. Optimized Schwarz waveform relaxation methods for advection reaction diffusion problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45 :153–176, 2007.

[39] M. J. Gander, L. Halpern, and F. Nataf. Optimal convergence for overlapping and non-overlapping Scwarz waveform relaxation. In *Eleventh International Conference on domain Decomposition Methods (London, 1998)*. DDM.org Augsburg, 1999.

[40] M. J. Gander, L. Halpern, and F. Nataf. Optimized Schwarz waveform relaxation for the one dimensional wave equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41 :1643–1681, 2003.

[41] M. J. Gander, F. Margoulès, and F. Nataf. Optimized Schwarz Methods without Overlap for the Helmholtz Equation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(1) :38–60, 2002.

[42] R. K. Ganesh. Évaluation of the drag force by integrating the energy dissipation rate in Stokes flow for 2D domains using FEM. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 13 :557–620, 1991.

[43] S. Garcia. The Lid-Driven Square Cavity Flow : From Stationary to Time Periodic anc Chaotic. *Communications In Computational Physics*, 2(5) :900–932, 2007.

[44] J. J. Gervais, D. Lemelin, and R. Pierre. Some experiments with stability analysis of discrete incompressible flows in the lid-driven cavity. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 24 :477–492, 1997.

[45] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. *Journal of Computational Physics*, 48 :387–411, 1982.

[46] M. Griebel, T. Dornseifer, and T. Neunhoeffer. *Numerical simulation in fluid dynamics : A practical introduction*. SIAM, 1998.

[47] J. L. Guermond, P. Minev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :6011–6045, 2006.

[48] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, 1983.

[49] L. Halpern. Artificial boundary conditions for the linear advection diffusion equation. *Math. of Computation*, 46 :425–438, 1986.

[50] L. Halpern and M. Schatzman. Artificial boundary conditions for incompressible flow. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(2) :308–353, 1989.

[51] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *Phys. Fluids.*, 8 :2182, 1965.

[52] J. Heywood, R. Rannacher, and S. Turek. Artificial Boundaries and Flux and Pressure Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 22 :325–352, 1996.

[53] C. W. Hirt, B. D. Nichols, and N. C. Romero. SOLA : A numerical solution algorithm for transient fluid flows. *NASA STI/Recon Technical Report N*, 75, 1975.

[54] D. Hoff. Uniqueness of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations of Multidimensional Compressible Flow. *SIAM J. Math. Anal.*, 37(6) :1742–1760, 2006.

[55] T. Kawamura, H. Takami, and K. Kuwahara. New Higher-order upwind scheme for incompresible Navier-Stokes equations. *Lect. Notes Phys.*, 218, 1985.

[56] J. R. Koseff and R. L. Street. On end wall effects in lid driven cavity flow. *AMSE Journal of Fluids Engineering*, 106 :385–389, 1984.

[57] J. R. Koseff and R. L. Street. The lid-driven cavity flow : a synthesis of qualitative and quantitative observations. *Journal of Computational Physics*, 106 :390–398, 1984.

[58] J. R. Koseff and R. L. Street. Visualization sutdies of a shear driven three-dimensionnal recirculating flow. *AMSE Journal of Fluids Engineering*, 106 :21–29, 1984.

[59] L. Landau and E. Lifshitz. *Physique théorique : mécanique des fluides*, volume 6 of *Traduit du Russe*. Mir, Moscow, 1998.

[60] F. Lemarié. *Méthodes numériques pour le couplage océan-atmosphère*. PhD thesis, Université Jospeh Fourier, 2008.

[61] B. Leonard. The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensinal advection. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 88(1), 1991.

[62] J. Leray. Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 63 :193–248, 1934.

[63] J. Leray. Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent les parois. *J. Maths. Pures et Appliquées*, 13 :331–418, 1934.

[64] C. Lucas and A. Rousseau. New developments and cosine effect in the viscous shallow water and quasi-geostrophic equations. *Multiscale Model. Simul.*, 7(2) :796–813, 2008.

[65] J. Marshall, C. Hill, L. Perelman, and A. Adcroft. Hydrostatic, quasihydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling. *J. Geophys. Res.*, pages 5733–5752, 1997.

[66] V. Martin. *Méthodes de décomposition de domaine de type relaxation d'ondes pour des équations de l'océanographie*. PhD thesis, Université Paris 13, 2003.

[67] V. Martin. Schwarz waveform relaxation method for the viscous shallow water equations. In *Domain decomposition methods in science and engineering*, volume 40 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 653–660. Springer, Berlin, 2005.

[68] W. Munk. On the wind-driven ocean circulation. *J. Meteorol*, 7 :79–93, 1950.

[69] E. Murman and J. Cole. Calculation of plane steady transonic flows. *AIAA Journal*, 9 :114–121, 1971.

[70] T. Neustupa. The Problem Of Boundary Condition On The Outflow For An Incompressible Flow Through A Cascade of Profiles. In *V European Conference on Computational Fluid Dynamics*, 2010.

[71] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, 1987.

[72] Y.-F. Peng, Y.-H. Shiau, and R. R. Hwang. Transition in a 2-D lid-driven cavity flow. *Computers and Fluids*, 32(3) :337–352, 2003.

[73] M. Petcu, R. Temam, and M. Ziane. Mathematical problems for the primitive equations with viscosity. In P. G. Ciarlet, editor, *Handb. Numer. Anal.* Elsevier, New York, 2008.

[74] Pierre-Louis Lions. On the Schwarz alternating method. I. In SIAM, editor, *First International Symposium on Domain Decomosition Methods for Partial Differential Equations*, pages 1–42, Philadelphia, 1988.

[75] Pierre-Louis Lions. On the Schwarz alternating method. III : a variant for nonoverlapping subdomains. In SIAM, editor, *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Equations*, 1990.

[76] A. K. Prasad and J. R. Koseff. Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity-flow. *Phys. Fluids*, 1 :208–218, 1989.

[77] A. Quarteroni and A. Valli. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Euations*. Oxford University Press, 1999.

[78] A. Rousseau, R. M. Temam, and J. J. Tribbia. *Boundary value problems for the inviscid primitive equations in limited domain*, volume 14 of *Handbook of Numerical Analysis*. Elsevier, 2008.

[79] A. Rousseau, R. M. Temam, and J. J. Tribbia. *Boundary value problems for the inviscid primitive equations in limited domain*, volume 14 of *Handbook of Numerical Analysis*. Elsevier, 2008.

[80] M. Sahin and R. G. Owens. A novel fully-implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity flow problem. Part II. Linear stability analysis. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 42(1) :79–88, 2003.

[81] H. A. Schwarz. Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahre. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gessellschaft in Zürich*, 1870.

[82] E. M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Number 32 in Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[83] Stein, Elias M. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Number 30 in Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[84] W. Stommel. The westward intensification of wind-driven oceancurrents. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 29 :202–206, 1948.

[85] G. Strang. *Computational Science and Engineering*. Wellesley-Cambrigde Press, 2007.

[86] H. Sverdrup. Wind-Driven Currents in a Baroclinic Ocean ; with Application to the Equatorial Currents of the Eastern Pacific. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 33 :318–326, 1947.

[87] R. Temam. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (II). *Arch. Rational Mech. Anal.*, 33 :377–385, 1969.

[88] R. Temam. *Navier-Stokes Equations : Theory and Numerical Analyis*. North-Holland Pub. Company, 1977.

[89] Thomas Hagstrom and R. P. Tewarson and Aron Jazcilevich. Numerical experiments on a domain decomposition algorithms for nonlinear elliptic boundary value problems. *Appl. Math. LEtt.*, 1, 1988.

[90] G. Tiesinga, F. W. Wubs, and A. E. P. Veldman. Bifurcation analysis of incompressible flow in a driven cavity by the Newton-Picard method. *Journal of Computational and Applied Matheatics*, 42(1-2) :751–772, 2002.