



Intégration des flux inverses dans la gestion des stocks et de la production

Mohamed Hichem Zerhouni

► To cite this version:

Mohamed Hichem Zerhouni. Intégration des flux inverses dans la gestion des stocks et de la production. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2009. Français. NNT : . tel-00999267

HAL Id: tel-00999267

<https://theses.hal.science/tel-00999267>

Submitted on 3 Jun 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GRENOBLE INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'Institut polytechnique de Grenoble

Spécialité : "Génie Industriel"

préparée au laboratoire G-SCOP

(Grenoble Sciences pour la Conception et l'Optimisation de la Production)

dans le cadre de l'**École Doctorale " Ingénierie - Matériaux Mécanique Énergétique
Environnement Procédés Production "**

présentée et soutenue publiquement

par

Mohamed Hichem ZERHOUNI

le 6 Novembre 2009

Intégration des flux inverses **dans la gestion des stocks et de la production**

Directeurs de thèse : Yannick FREIN et Jean-Philippe GAYON

JURY

M. Fikri Karaesmen
M. Yves DALLERY
M. Jean-Claude HENNET
M. Jean-Philippe GAYON
M. Yannick FREIN

Président
Rapporteur
Rapporteur
Co-directeur
Directeur de thèse

Introduction Générale

Le recyclage et la réutilisation de produits et de matériaux a originellement commencé pour des raisons économiques. Par exemple, la récupération de bouteilles de verres, de papier ou encore de déchets métalliques est plus économique que leur destruction. Depuis quelques années, la réutilisation est en plein essor, non plus seulement pour des raisons économiques mais aussi pour des raisons écologiques. Des législations ont été mises en place obligeant les industriels à recycler leurs produits. Aux Pays-Bas, les constructeurs automobiles sont contraints de récupérer les voitures en fin de vie. Ainsi sommes-nous en train de passer d'une société industrielle fortement dissipatrice en matières premières à une société basée sur le recyclage (Mathieux, 2002). Toujours aux Pays-Bas, environ la moitié des déchets industriels sont recyclés. En termes logistiques, cette évolution sociétale donne lieu à un flux grandissant de matières du consommateur au producteur. On appelle communément *logistique inverse* la gestion de ces flux retours qui s'opposent au flux traditionnels du producteur au consommateur (Fleischmann & Kuik, 2003). Ces flux retournés sont d'ailleurs appelés *flux inverses*.

Nos travaux de thèse s'inscrivent dans un contexte de flux et de logistique inverses; c'est donc logiquement que nous commencerons au Chapitre 1 de ce document par présenter les raisons (économiques, environnementales et légales) qui ont contribué à l'apparition et au développement des flux inverses. Nous présenterons également les particularités de ces flux, notamment leur caractère fortement aléatoire, avant d'introduire la notion de logistique inverse et ce qui l'oppose à la logistique dite traditionnelle. Nous verrons alors que la logistique inverse doit faire face à des problèmes : **(i)** de distribution des produits retournés, **(ii)** de traitement des produits retournés **(iii)** et de gestion des stocks liés aux retours.

En ce qui nous concerne, nous focaliserons nos recherches sur la dernière catégorie de problèmes et présenterons, toujours au Chapitre 1, une comparaison entre la gestion des stocks traditionnelle et celle liée à la logistique inverse. L'idée principale étant que les flux inverses, en s'ajoutant aux flux de production initiaux, perturbent et compliquent la gestion classique des stocks et de la production (DeCroix *et al.*, 2005). Le manager doit impérativement intégrer ces flux retours dans la gestion des stocks afin d'éviter des stocks en excès.

Nous nous attacherons donc à étudier des problèmes de gestion des stocks avec flux inverses.

Bien évidemment, s'agissant d'une thèse de doctorat en Génie Industriel et avant d'entamer nos travaux de recherche, nous avons souhaité vérifier que la gestion des

flux inverses est une problématique industrielle d'actualité, et ce afin de garantir la pertinence de notre thème de recherche. Par conséquent, et en vue de « valider » notre choix de sujet, nous avons, au tout début de cette thèse, pris contact avec deux acteurs majeurs de l'industrie grenobloise que sont les entreprises HP et BULL. Nous avons donc eu plusieurs entretiens, avec des responsables de chacune des deux entreprises, afin de savoir si la gestion des flux inverses faisait partie de leur quotidien de managers. Ainsi, nous avons appris que les ingénieurs d'HP s'appliquent à réaliser des simulations de leurs flux inverses. Ces simulations sont effectuées en tenant compte de trois dimensions que sont les coûts logistiques, le facteur temporel et la localisation ainsi que la capacité logistique des clients. Le responsable rencontré nous a cependant précisé que l'entreprise manquait de ressources humaines internes dédiées à la gestion des retours de produits. Ce dernier point souligne les difficultés organisationnelles engendrées par la gestion des flux inverses.

S'agissant de nos entretiens avec les responsables de l'entreprise BULL, ils nous ont permis de constater la grande variété de flux inverses auxquels doit faire face l'entreprise. Certains de ces flux inverses pouvant être très importants. Nous avons à ce moment constaté que la nature des flux inverses rencontrés par HP (retours de produits) était très différente de celle des flux rencontrés par BULL (qui doit principalement faire face à des retours de composants). Cependant, et indépendamment des flux retournés, nous avons constaté l'importance qu'accordent les responsables de ces entreprises à la gestion des flux inverses et avons remarqué les difficultés managériales que cela pouvait engendrer. La gestion des flux inverses semble donc être une problématique assez bien ancrée dans la réalité industrielle.

Étant donné l'intérêt que nous portons à ces nouveaux problèmes industriels liés aux flux inverses, et plus particulièrement aux problèmes de gestion des stocks qui en découlent, nous avons choisi de considérer des modèles de systèmes de production qui nous permettront de développer nos travaux sur ce thème.

L'objectif de cette thèse est donc de proposer des modèles de gestion des stocks qui intègrent des flux inverses. Autrement dit, nous allons considérer un certain nombre de modèles de systèmes de production sur lesquels nous rechercherons des stratégies performantes d'approvisionnement des stocks, qui prennent en compte les flux inverses (aléatoires), et ce afin de réduire le coût global du système.

Notre objectif étant ainsi défini, nous présenterons au Chapitre 2 une revue de la littérature des travaux préalablement réalisés sur des modèles avec flux inverses. Cette étude bibliographique permet de mieux positionner nos travaux et de mettre en exergue nos contributions. En effet, compte tenu de cet état de l'art, nous avons pu identifier des modèles qui nous semblaient intéressants à étudier. Nous verrons, à la fin du Chapitre 2, que notre choix s'est porté sur cinq modèles et nous pourrions alors entamer l'étude de ces différents modèles qui constituent le cœur de nos travaux, et sur lesquels nous nous sommes attelés à la recherche de politiques performantes d'approvisionnement des stocks.

C'est ainsi que nous commencerons, au Chapitre 3, par une première étude d'un modèle de base avec flux inverses sur lequel nous expliquerons, en détail, la démarche analytique de résolution appliquée à tous nos modèles. Nous poursuivrons

au Chapitre 4 par deux modèles qui tiennent compte de la dépendance entre les produits retournés et les produits demandés. Quant aux chapitres 5 et 6, ils seront dédiés, respectivement, à un modèle dans lequel il est possible de rejeter les produits retournés ou pour lequel le gestionnaire de production dispose d'une information avancée sur les produits retournés. Les hypothèses formulées sur ces différents modèles seront précisées et expliquées aux chapitres concernés. Par ailleurs, et au delà de la recherche de stratégies performantes d'approvisionnement des stocks, une part importante de nos contributions réside dans les études numériques qui seront menées sur nos modèles afin de tester la validité, l'utilité ou la pertinence de certaines hypothèses.

Enfin, et après avoir présenté nos cinq modèles, nous terminerons par une conclusion générale qui résumera l'ensemble de nos travaux, leur valeur ajoutée, leurs limites et les perspectives de recherche qui en découlent.

Table des matières

Introduction Générale	3
1 Problématique de la logistique inverse	19
1.1 Flux et logistique <i>traditionnels</i>	19
1.2 Gestion de la chaîne logistique	20
1.3 Flux inverses	21
1.3.1 Définition	21
1.3.2 Qu'est ce qui motive les flux inverses ?	22
1.3.3 Caractéristiques	24
1.3.4 Typologie	24
1.4 Logistique inverse	26
1.5 Problèmes liés à la logistique inverse	27
1.5.1 La distribution inverse	27
1.5.2 Le traitement des flux inverses	28
1.5.3 La gestion des stocks	30
1.6 Gestion des stocks dans un contexte de flux inverses	30
1.6.1 GDS avec flux inverses vs GDS classique	30
1.6.2 Gestion des stocks avec flux inverses : Deux grandes familles	31
1.7 Champs de recherche et objectifs des travaux	32
2 Modèles de gestion des stocks avec flux inverses : État de l'art	35
2.1 Modèles à réutilisation directe	37
2.1.1 Modèles avec indépendance demande/retours et sans option de rejet	38
2.1.2 Dépendance demande/retours	40
2.1.3 Option de rejet	42
2.2 Modèles à réutilisation indirecte	44
2.2.1 Modèles de base : coordonner production et remanufacturing	45
2.2.2 Séparation ou partage des ressources ?	48
2.2.3 Différenciation des produits neufs et remanufacturés	49
2.2.4 Coordination de la production, du remanufacturing et de l'op- tion de rejet	49
2.2.5 Évaluation de l'option de rejet	52
2.3 Opportunités de recherche	53

2.4	Modélisation adoptée et hypothèses	58
2.5	Modèles étudiés	60
3	Modèle avec retours de produits indépendants de la demande	63
3.1	Description du modèle et hypothèses	63
3.2	Formulation MDP et uniformisation	66
3.2.1	Description d'une formulation MDP	66
3.2.2	Processus d'uniformisation	67
3.3	Équations d'optimalité	74
3.4	Caractérisation de la politique optimale	75
3.4.1	Politique optimale	76
3.4.2	Calcul du base-stock levels optimal S^*	77
3.4.3	Influence des paramètres du système sur les base-stock levels (seuils) optimaux	78
3.5	Extension au coût moyen	80
3.5.1	Convexité du coût moyen	81
3.5.2	Calcul du base stock level optimal S^*	81
3.6	Conclusion	82
4	Modèles avec retours corrélés de produits	83
4.1	Description des modèles	83
4.2	Modèle dépendant avec retours immédiats	85
4.2.1	Équations d'optimalité	85
4.2.2	Caractérisation de la politique optimale	86
4.2.3	Calcul du base-stock level optimal S^*	87
4.2.4	Influence des paramètres du système sur les base-stocks opti- maux	87
4.2.5	Extension au coût moyen	88
4.3	Modèle dépendant avec retours différés	90
4.3.1	Cas des retours observables	91
4.3.2	Heuristique pour le cas des retours non observables	93
4.3.3	Calcul de S^* et $S^*(y)$	94
4.4	Étude numérique	95
4.4.1	Retours instantanés de produits : impact de la dépendance . .	95
4.4.2	Retours non instantanés de produits : impact de la dépen- dence, retours observables vs non observables, influence du délai de retour	101
4.5	Conclusion	105
5	Modèle avec option de rejet	107
5.1	Description du modèle et hypothèses	108
5.2	Caractérisation de la politique optimale	110
5.3	Extension au profit moyen	112
5.3.1	Évaluation de performance d'une politique (R, S)	112
5.3.2	Calcul des paramètres optimaux (R^*, S^*)	114

5.4	Extension au cas back-order	115
5.5	Étude numérique : évaluation de l'option de rejet	118
5.5.1	Bénéfice lié à l'intégration d'une option de rejet	119
5.5.2	Influence du taux de retours	119
5.5.3	Influence du coût de remanufacturing	121
5.6	Conclusion	122
6	Modèle avec information avancée sur les retours	123
6.1	Description du modèle et hypothèses	123
6.2	Politique optimale lorsque l'information avancée sur les retours (ARI) est utilisée	125
6.3	Politique optimale lorsque l'ARI est ignorée	127
6.4	Comparaison numérique des politiques optimales : importance de l'ARI	128
6.5	Conclusion	130
	Conclusion générale	131
	Bibliographie	137
	Glossaire	144
A	Annexes du Chapitre 3	149
A.1	Problèmes équivalents minimisation / maximisation (Modèle 1) . . .	149
A.2	Description générale du processus d'uniformisation	151
	Phase 1 : Processus de Décision Markovien à temps continu & formulation MDP	151
	Phase 2 : Uniformisation $\longrightarrow$ Processus équivalent de Décision Markovien à temps continu	153
	Phase 3 : Processus de Décision Markovien à temps discret	156
A.3	Calcul de $r(s, a)$: processus d'uniformisation phase 1	156
A.4	Preuve du lemme 1	158
A.5	Preuve du lemme 2	159
A.6	Preuve de la propriété 1	161
A.7	Calcul du S^* optimal	162
B	Annexes du Chapitre 4	167
B.1	Preuve du lemme 3	167
B.2	Preuve du théorème 4	168
B.3	Preuve du théorème 5	169
B.4	Preuve du théorème 6	169
B.5	Calcul du S^* optimal	169
C	Annexes du Chapitre 5	171
C.1	Preuve du Théorème 7	171

TABLE DES MATIÈRES	12
---------------------------	-----------

D Annexes du Chapitre 6	173
D.1 Preuve du Lemme 4	173

Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre les flux physiques traditionnels et les flux inverses	24
1.2	Typologie des flux inverses	25
1.3	Flux inverses par industrie	25
1.4	Traitements possibles des flux inverses	29
2.1	Terminologie	37
2.2	Bilan bibliographique	55
4.1	Répartition de ΔC pour les instances avec $S_{ind}^*, \tilde{S}^* > 0$	100
4.2	Répartition de ΔC	102
5.1	Profit additionnel lié à l'intégration d'une option de rejet	119
A.1	Préservation de la submodularité et de la supermodularité par les opérateurs	159
B.1	Préservation de la submodularité et de la supermodularité par les opérateurs	168

Table des figures

1.1	Supply chain ou Chaîne logistique.	20
1.2	Flux inverses	21
1.3	Chaîne logistique en boucle fermée (closed loop supply chain)	27
1.4	Flux inverses : réutilisation directe et indirecte	32
1.5	Objectifs des travaux	33
2.1	Modèle à réutilisation directe	37
2.2	Politique (s, S) à temps continu	39
2.3	Politique (s_p, Q, s_d) , Ouyang & Zhu (2008)	43
2.4	Modèle à réutilisation indirecte	44
2.5	<i>PUSH strategy</i> et <i>PULL strategy</i> , Van der Laan <i>et al.</i> (1999)	46
2.6	<i>PUSH-disposal strategy</i> et <i>PULL-disposal strategy</i> , Van der Laan et Salomon (1997)	51
2.7	Modélisation adoptée : les bases	58
3.1	Modèle 1 : demande et retours indépendants	64
3.2	Processus d'uniformisation (Puterman, 1994)	68
3.3	Période T : temps séparant deux événements	70
3.4	Représentation uniformisée	72
3.5	Uniformisation : transition Phase 1 $\rightarrow$ Phase 2	72
3.6	Convexité de $C(S)$ et calcul de S^* sur le modèle avec retours indépendants	82
4.1	Modèle 2 : Retours dépendants et immédiats	85
4.2	Modèle 3 : Retours dépendants et différés	90
4.3	Politique optimale : problème actualisé & retours observables	93
4.4	Influence de la probabilité de retour p sur les politiques optimales ($\lambda = \mu = 1, c_h = 1, c_r = 16, c_l = 128$)	96
4.5	Influence du coût unitaire de retour c_r sur les politiques optimales $p = 0.2, \lambda = \mu = 1, c_h = 1, c_l = 32$)	98
4.6	Influence de la probabilité de retour sur l'accroissement relatif du coût ΔC ($\lambda = 0.5, \mu = 1, c_h = 1, c_l = 100, c_r = 10$)	101
4.7	Comparaison de l'heuristique et des politiques optimales	104
5.1	Modèle 4 avec retours indépendants et option de rejet	109
5.2	Représentation de la chaîne de Markov $X(t)$ lorsque $R \leq S$	113

5.3	Représentation de la chaîne de Markov $X(t)$ lorsque $R \leq S$ (cas des demandes mises en attente).	115
5.4	Évolution du $\text{Gain relatif} = \frac{\pi^*(R^*, S^*) - \check{\pi}^*(\check{S}^*)}{\check{\pi}^*(\check{S}^*)}$ en fonction de $p = \delta/\lambda$ ($\lambda = 1.2, \mu = 1, g = 80, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 50, c_r = 40, c_d = 20$)	120
5.5	Évolution de R^*, S^* et $\check{S}^*$ en fonction du taux de retours δ ($\lambda = 1.2, \mu = 1, g = 80, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 50, c_r = 40, c_d = 20$)	120
5.6	Évolution du Gain relatif et de R^* en fonction de c_r ($\lambda = 1, \mu = 1, p = 0.3, g = 80, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 50, c_d = 20$)	121
6.1	Modèle 5 avec information avancée sur les retours (ARI)	124
6.2	Exemple de courbe de commutation relative au Modèle 5.	127
6.3	Évolution de ΔC en fonction de p ($\mu = 1, \gamma = 0.75, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 10, c_r = 0$)	129
6.4	Évolution de ΔC en fonction de $1/\gamma$ ($\mu = 1, \delta = 0.25, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 100, c_r = 0$)	130
A.1	Processus d'uniformisation (Puterman, 1994)	151
A.2	Période T : temps séparant deux événements	152
A.3	Représentations équivalentes (après formulation MDP)	153
A.4	Représentation uniformisée	154
A.5	Uniformisation : transition Phase 1 $\rightarrow$ Phase 2	155

Chapitre 1

Problématique de la logistique inverse

1.1 Flux et logistique *traditionnels*

La notion de chaîne logistique est née en grande partie suite aux changements qui ont bouleversé les marchés et le secteur industriel au fil des décennies. En effet, et dès la seconde moitié du 20^{ème}, la notion de compétitivité est montée en puissance et a obligé les entreprises à réfléchir à de nouvelles solutions afin d'améliorer leur offre en terme de qualité, de délais, de services rendus au client et de coûts (Jemai, 2003). Ces entreprises/industries se sont alors rendues compte que l'atteinte de ces objectifs ne pouvait se faire sans inclure d'autres acteurs tels que les fournisseurs et les distributeurs. Dorénavant, il s'agira d'améliorer le fonctionnement de toute cette chaîne Fournisseurs-Producteurs-Distributeurs afin de satisfaire le client à moindre coût et de se distinguer de la concurrence. Cette chaîne Fournisseurs-Producteurs-Distributeurs sera appelée *Chaîne Logistique* ou *Supply Chain* (Jemai, 2003).

Ainsi, une définition assez globale de la chaîne logistique donnée par le *Supply Chain Council* est la suivante : "La chaîne logistique est la suite des étapes de production et distribution d'un produit depuis les fournisseurs des fournisseurs du producteur jusqu'aux clients de ses clients". La chaîne logistique ainsi définie est présentée en figure 1.1 (Pimor, 1998).

Cette représentation de la chaîne logistique est toutefois assez simpliste car, comme le précise Stadtler (2002), la chaîne logistique est en fait un réseau d'organisations impliquées dans différents process et activités et qui produisent de la valeur sous forme de produits et services destinés au consommateur final. La notion de réseau est très importante ici car elle implique : plusieurs fournisseurs pour un même producteur, plusieurs sites de production pour une même entreprise, plusieurs canaux de distribution différents et non pas forcément le canal Producteur → Grossiste → Détaillant → Client, plusieurs types de *consommateurs finaux*, le consommateur final n'étant pas forcément un client particulier. Il peut être en effet une autre entreprise qui utilise les pièces de la première entreprise pour réaliser ses propres produits. Cela étant dit, la représentation simplifiée de la figure 1.1 suffit à mettre en avant le fondement de la chaîne logistique qui est de dire que cette

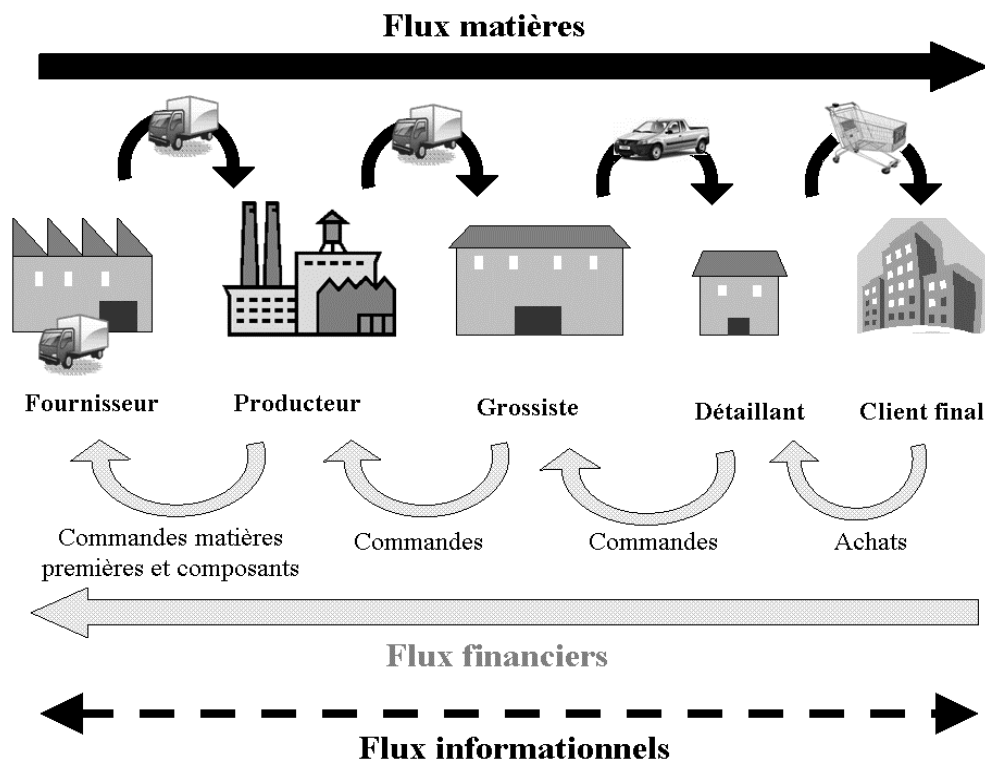


Figure 1.1 – Supply chain ou Chaîne logistique.

dernière est constituée de trois types de flux :

Les flux physiques : matières premières, composants et produits finis. Ces flux vont des fournisseurs aux clients finaux.

Les flux d'information : qui peuvent commencer chez les clients et remonter jusqu'aux fournisseurs (quantités de commandes, spécifications des produits), mais qui peuvent être aussi des flux internes : interactions entre les différents acteurs, informations transmises suite à des problèmes de pannes ou de suivi de production, etc. Les flux d'information sont donc divers et variés et circulent dans les deux sens tout au long de la chaîne.

Les flux financiers : qui commencent chez les clients et remontent jusqu'aux fournisseurs.

La prise en compte de ces trois types de flux est nécessaire à la bonne marche de la chaîne logistique. C'est pourquoi nous prendrons en compte lors de travaux tous ces flux en nous basant particulièrement sur les flux physiques.

1.2 Gestion de la chaîne logistique

La chaîne logistique fait donc intervenir plusieurs acteurs dont il faudra coordonner les activités afin d'éviter tout problème pouvant avoir un impact sur le client

final. Ce travail de coordination est appelé *Gestion de la Chaîne Logistique* ou *Supply Chain Management (SCM)* et est défini par Stadtler (2002) comme suit :

Définition 1 (Supply chain Management) *"Le terme gestion de la chaîne logistique ou Supply Chain Management est défini par l'activité d'intégration des unités organisationnelles tout au long de la chaîne logistique ainsi que la coordination des flux matières, informationnels et financiers en vue de satisfaire les demandes des clients en ayant pour objectif d'améliorer la compétitivité de la chaîne logistique dans sa globalité"*

1.3 Flux inverses

1.3.1 Définition

Il est possible de définir les flux inverses comme étant les produits ou matières qui sont retournés par les consommateurs vers les producteurs.

Dans le même esprit, Fleischmann *et al.* (1997) voient les flux inverses comme étant *"les flux matières qui s'opposent aux flux conventionnels de la chaîne logistique"*.

Les flux inverses sont donc des flux physiques dont le parcours est opposé en direction à celui des flux physiques de la chaîne logistique traditionnelle (figures 1.1 et 1.2).

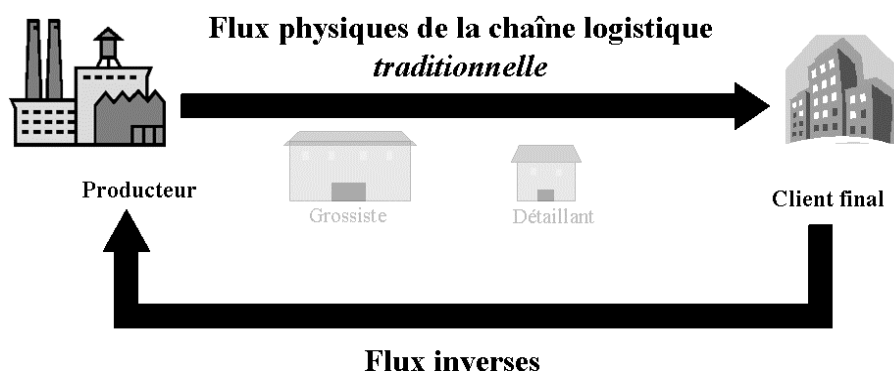


Figure 1.2 – Flux inverses

Cependant, présentés comme tels, les flux inverses restent difficiles à cerner. Plusieurs questions viennent alors à l'esprit du lecteur : pourquoi les consommateurs retourneraient-ils des produits et quelles sont leurs motivations ? Quels sont ces produits ? Qu'est ce qui caractérise ces flux ? Comment prendre en charge ces retours ? Et s'agissant de flux physiques, est-ce que les flux inverses modifient la gestion traditionnelle de la chaîne logistique ? Si oui, en quoi ?

Autant de questions auxquelles nous allons tenter d'apporter des éléments de réponse dans ce qui suit.

1.3.2 Qu'est ce qui motive les flux inverses ?

Le phénomène des flux inverses a commencé à prendre de l'ampleur il y a quelques années déjà pour diverses raisons. Il est possible de résumer les principaux facteurs ayant encouragé ces retours comme suit :

Facteur environnemental

Les effets de l'industrialisation massive ont commencé à faire leur apparition il y a plusieurs années poussant les entreprises, certains gouvernements ainsi que le monde de la recherche à investiguer des techniques ou méthodes par lesquelles il serait possible de réduire les méfaits dûs à la surproduction. L'une des solutions identifiées a été d'encourager les consommateurs ainsi que les producteurs à réutiliser les produits/matières autant que possible en vue de réduire les déchets industriels et de ménager les ressources et matières premières (non illimitées). Cette montée en puissance du facteur environnemental a contribué à certains changements :

- Une prise de conscience collective et un intérêt croissant de l'opinion publique vis-à-vis des aspects écologiques et environnementaux qui impactent de façon certaine les mentalités et le mode de vie des consommateurs.
- Une adaptation de la part des entreprises. Face à cette évolution sociétale, les entreprises tentent d'attirer cette nouvelle catégorie de clients sensibles à l'écologie en mettant en avant l'image propre de leurs produits qui passe - entre autres - par le recyclage et la réutilisation des produits/matières.

Cependant, il est vrai que le souci environnemental seul ne suffit pas à convaincre les entreprises à modifier leurs modes de production et de gestion, d'autres facteurs externes, tels que la législation, étant nécessaires (Lambert & Riopel, 2003).

Facteur légal

Dans la perspective d'une lutte pro-environnementale qui vient d'être abordée, les gouvernements des pays industrialisés ont alors décidé de légiférer et de soumettre les entreprises à un certain nombre de directives et de lois. Celles-ci ont fortement favorisé (parfois créé) les flux inverses dans différents secteurs de l'industrie. Nous pouvons, à titre d'exemple, citer la directive européenne 94/62/CE de 1994 relative aux emballages et aux déchets d'emballages (Gonzalez-Torre *et al.*, 2004). Cette directive vise à harmoniser les mesures nationales concernant la gestion des emballages et des déchets d'emballages afin de prévenir et de réduire leur incidence sur l'environnement. De plus, elle tient pour responsables les producteurs/utilisateurs, de tous types d'emballages, de la gestion de la fin de vie d'un certain pourcentage de leurs produits placés sur le marché afin d'encourager la prévention des déchets d'emballages, la réutilisation, le recyclage et les autres formes de valorisation.

Plus récemment, la Directive 2002/96/CE du Parlement européen et du Conseil du 27 janvier 2003 relative aux déchets d'équipements électriques et électroniques, plus connue sous le nom de DEEE a été votée. Cette directive a des objectifs similaires à la précédente directive, mais en direction des équipements électriques et électroniques.

Facteur économique

La rentabilité économique reste évidemment - avec l'obligation légale - la principale raison pour laquelle les entreprises fournissent des efforts en vue de gérer et de traiter les flux inverses. L'utilisation des flux inverses peut en effet s'avérer très utile, voire même nécessaire, dans le processus de production et de création de nouveaux produits car permettant de récupérer la valeur résiduelle se trouvant dans les produits retournés (Gonzalez-Torre *et al.*, 2004).

Parmi les exemples connus d'entreprises utilisant les flux inverses dans leur processus de production, il est possible de citer le producteur de photocopieurs Xerox qui fut l'un des premiers à investir dans le traitement des flux inverses. En effet, nombre de pièces détachées des produits Xerox sont conçues et fabriquées afin d'avoir plusieurs cycles de vies : les pièces détachées des anciennes machines retournées sont réutilisées - après remise à neuf - sur de nouvelles machines (Kerr & Ryan, 2001). Toutefois, la rentabilité économique des flux inverses doit forcément passer par une gestion rigoureuse et complète des retours. Ce point sera abordé en section 1.4.

Facteur social et culturel

Le mode de vie des individus ayant beaucoup évolué ces dernières décennies, de nouveaux défis et problématiques sont alors apparus auxquels les marchés ont dû faire face. Il est ainsi possible d'expliquer - en partie - les retours de produits par un certain nombre d'éléments sociaux et culturels nouveaux :

Différentiation de l'offre : La différenciation d'une offre que l'entreprise propose, par rapport aux concurrents, se fait souvent, à produit équivalent, par les services que l'entreprise propose en plus en vue d'influencer le choix des clients, d'où l'apparition de Services Après Vente (SAV) élaborés avec aide téléphonique (hotline), offre de maintenance, période de garantie de plus en plus prolongée, etc. Ces prestations de service supplémentaires ont encouragé le phénomène des flux inverses. Les clients profitent des services après vente pour par exemple retourner leurs produits en cas de non satisfaction, ou les renvoyer pour maintenance afin de bénéficier de la garantie.

Internet : avec l'apparition d'internet et des multitudes de possibilités offertes par ce dernier, les entreprises ont découvert un nouveau mode de commercialisation de leur produits : *la vente en ligne*. Mais la vente par internet comporte un désavantage certain qui est que, à partir du moment où les clients ne peuvent voir, toucher, mesurer et surtout essayer les articles proposés, il arrive souvent que les articles vendus, une fois livrés, ne correspondent finalement pas aux attentes des clients. Ceci donne lieu à d'importantes quantités de produits retournés. Ces flux inverses liés au e-commerce ont d'ailleurs atteint aux USA en 2001 la valeur de 11 milliards de dollars, soit l'équivalent, en valeur, de l'ensemble des achats en ligne effectués l'année précédente (Tedeschi, 2001). Un autre exemple est celui des sites de vêtements féminins américains qui doivent faire face à un taux de retours de 40% de leur produits (Tedeschi, 2001).

1.3.3 Caractéristiques

Afin de faire ressortir les principales caractéristiques des flux inverses, nous présentons ci-dessous un tableau comparatif entre les flux physiques de la chaîne logistique traditionnelle et les flux inverses. Ce tableau est directement adapté des travaux de Lambert & Riopel (2003) et de Fleischmann *et al.* (1997).

Aspects	Flux physiques chaîne logistique	Flux inverses
Prévision	Relativement simple	Plus difficile
Point de distribution	Un à plusieurs	Plusieurs à un
Qualité des produits	Uniforme	Non uniforme
Contrôlabilité de la qualité	Maîtrisable	Impossible
Destination / route	Définie	Indéfinie
Options de rejet	Claires	Mal définies
Prix	Relativement uniforme	Dépend de plusieurs facteurs
Coût de distribution	Facilement identifiable	Dépend de plusieurs facteurs
Gestion des stocks	Contrôlable	Difficilement contrôlable
Visibilité	Transparence	Moins de transparence

Tableau 1.1 – Comparaison entre les flux physiques traditionnels et les flux inverses

Partant du tableau 1.1, il ressort que les flux inverses se caractérisent principalement par une grande incertitude en termes de :

- Qualité : des flux inverses de bonne qualité peuvent justifier des coûts élevés de distribution inverse alors qu'un transport massif de flux de faible valeur n'a pas forcément d'intérêt économique (même si ces derniers n'en sont, parfois, pas moins nécessaires comme dans le cas d'industries soumises à des obligations légales de récupération de produits). De plus, et pour un même produit, la qualité des produits retournés peut être très différente d'un retour à l'autre. C'est le cas par exemple des produits sous garantie retournés pour réparation.
- Quantité : prévoir les quantités de produits retournés s'avère très difficile étant donné l'incertitude et le manque d'information liés à ces retours. Pour plus d'informations, quelques travaux de prévision des flux inverses sont présentés par Zuluaga (2001).

Nous verrons en section 1.4 que cette incertitude perturbe fortement la gestion des flux inverses.

1.3.4 Typologie

Connaissant les principales causes des flux inverses, comment alors caractériser ces flux ? Quels sont ces produits retournés ?

Les produits retournés par les consommateurs peuvent être de natures diverses. Une typologie assez générale des flux inverses est résumée dans le tableau 1.2 (Fleischmann *et al.*, 1997; de Brito *et al.*, 2002).

Produits retournés	Exemples
Produits en fin de vie et pièces détachées	Électroménagers, voitures
Matières recyclables	Plastique, métal, verre
Emballages	Palettes de transport Bouteilles en verre
Retours commerciaux	Produits sous garantie Produits non conforme
Produits en fin de location/utilisation	Machines Industrielles

Tableau 1.2 – Typologie des flux inverses

Il est à noter que, dans le tableau 1.2, les emballages (palettes, bouteilles) constituent des flux inverses particuliers. Ces derniers sont en effet loués au clients qui doivent les retourner après un certain délai. Cela implique des taux assez élevés de retours (en tenant compte des pertes chez les clients).

Cette typologie (tableau 1.2), certes non exhaustive, nous montre néanmoins que la diversité des produits retournés implique une grande variété d'industries concernées par ces flux. Ainsi, Rogers & Tibben-Lembke (1998) ont résumé l'importance, en terme de quantité, des flux inverses en présentant, pour différents types d'industries, le ratio de produits retournés sur le nombre total de produits vendus, voire tableau 1.3.

Industrie	Exemples
Publication de livres	20 – 30%
Matériel Électronique	10 – 12%
Fabricants d'ordinateurs	10 – 20%
Appareils imprimeurs / Imprimantes	4 – 8%
Biens de grande consommation	4 – 15%
Industrie automobile (pièces détachées)	4 – 6%

Tableau 1.3 – Flux inverses par industrie

Le tableau 1.3 montre bien que les retours de produits, encouragés par les différents facteurs économiques, légaux, écologiques, etc. atteignaient déjà en 1998 d'importantes proportions. La gestion des flux inverses est alors devenue un défi à relever de la part des entreprises.

Il a été précédemment souligné, en section 1.3.2, que les diverses entreprises concernées par les retours de produits doivent faire évoluer leurs organisations traditionnelles en vue de rentabiliser ces flux retours. Il s'agira en fait de mettre en place tout une logistique nouvelle, appelée *Logistique Inverse*, qui organisera le parcours des flux inverses du moment où ils sont retournés jusqu'à ce qu'ils soient traités.

1.4 Logistique inverse

La prise en charge des retours de produits est un domaine d'activité relativement nouveau comparé aux activités logistiques traditionnelles. Ce domaine d'activité est généralement appelé *logistique inverse (LI)* ou *Reverse Logistics* s'agissant de gestion de flux physiques inverses, ainsi que des flux informationnels et financiers qui y sont liés mais que nous n'aborderons que de façon sommaire dans nos travaux.

La logistique inverse a été définie de diverses manières au fil des ans. Ces définitions - qui ne divergent pas fondamentalement les unes des autres - reflètent la plupart du temps le métier, le domaine ou l'angle de vue des auteurs. Ainsi Pohlen & Farris (1992) définissent la LI comme étant :

".. les mouvements de biens du consommateur vers le producteur via un canal de distribution ...".

Kopicky *et al.* (1993) définissent la reverse logistique en gardant l'idée des flux opposés aux flux matières traditionnels. Cette définition se présente comme suit : *" La logistique inverse est un terme général qui se rapporte à la gestion de la chaîne logistique ainsi qu'à la gestion des déchets rejetés, dangereux et non dangereux, provenant des emballages et des produits. Elle inclue la distribution des flux inverses ... qui cause la circulation des produits et de l'information dans un sens opposé à celui des activités logistiques normales".*

Cela étant, et parmi le panel de définitions faites de la reverse logistics, celle de Rogers & Tibben-Lembke (1998) est la plus couramment rencontrée. Ces auteurs définissent la logistique inverse comme étant :

*" The process of planning, implementing and controlling the efficient, cost effective flow of raw materials, in-process inventory, finished goods, and related information from the point of consumption to the point of origin for the purpose of recapturing value of proper disposal "*¹. Cette définition est elle même basée sur la définition de la logistique faite par le CLM Council of Logistics Management (Lambert & Riopel, 2003).

Même si les définitions de la logistique inverse impliquent souvent que les produits soient retournés vers le producteurs d'origine, il faut préciser qu'il existe deux circuits pour le traitement des flux inverses (de Brito *et al.*, 2002; Fleischmann *et al.*, 1997) :

1. La *Chaîne logistique en boucle fermée* (closed loop supply chain) : où les produits sont retournés au producteur d'origine ;
2. La *Chaîne logistique en boucle ouverte* (open loop supply chain) : où les produits sont retournés à un tiers (entreprise spécialisée dans le recyclage, le traitement des déchets, etc) ;

Ce travail de thèse ne concerne que la *Logistique en boucle fermée* (voir figure 1.3).

1. Traduction : "le processus de planification, d'implantation, et de contrôle de l'efficacité, de la rentabilité des matières premières, des en-cours de production, des produits finis, et l'information relative du point d'utilisation jusqu'au point d'origine dans le but de reprendre ou générer de la valeur ou pour une destruction adéquate".

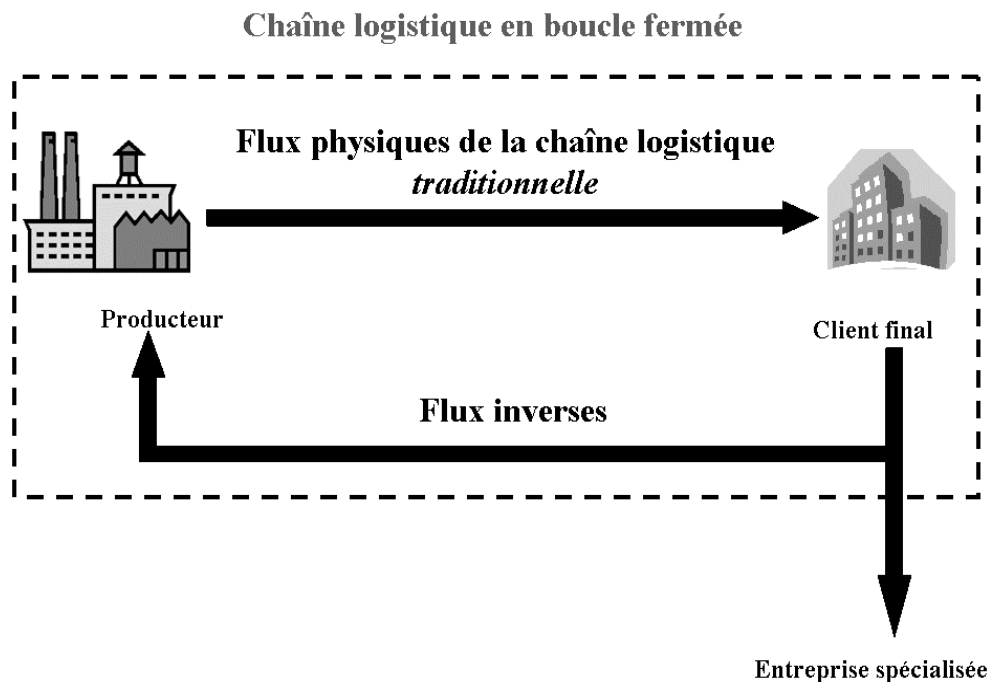


Figure 1.3 – Chaîne logistique en boucle fermée (closed loop supply chain)

Autre remarque importante, la logistique inverse ne s'oppose pas et ne vient pas en contradiction avec la logistique traditionnelle ; elles sont au contraire complémentaires dans le contexte actuel. Ainsi la gestion globale de la chaîne logistique passe, d'une part, par la gestion de la chaîne logistique traditionnelle qui achemine les produits vers les clients et, d'autre part, par la logistique inverse qui se charge de gérer les retours de produits vers le producteur.

$$\text{Logistique} = \text{logistique (traditionnelle)} + \text{logistique inverse}$$

1.5 Problèmes liés à la logistique inverse

La logistique inverse a donc pour mission de prendre en charge les produits retournés par les utilisateurs afin d'assurer la meilleure utilisation de ces retours. Plus concrètement, Fleischmann *et al.* (1997) ont classé les problématiques rencontrées par la logistique inverse en trois catégories principales :

- Les problèmes liés au transport et à la distribution des flux inverses
- Les problèmes liés au traitement des produits retournés
- Les problèmes liés à la gestion des stocks

Dans ce qui suit sera décrite chacune de ces trois catégories.

1.5.1 La distribution inverse

Fleischman *et al.* (1997) définissent la distribution inverse comme étant *la collecte et le transport des flux inverses*. Les principaux travaux liés à la distribution inverse

concernent le design ou la conception d'un tel réseau logistique. La conception de ces réseaux est d'autant plus difficile que les flux inverses se caractérisent par une grande incertitude en termes de qualité et de quantité. Compte tenu de ces incertitudes, la conception d'un réseau de distribution inverse doit venir en réponse à plusieurs interrogations parmi lesquelles :

Où placer les centres de collecte des flux inverses ? Faut-il créer de nouvelles installations/entrepôts ? Fleischmann *et al.* (1997) ainsi que Zuluaga (2001) décrivent quelques uns des travaux menés dans ce domaine. De plus, quelques études de cas sont présentées par Fleischmann *et al.* (2000).

Est-il possible d'utiliser les installations logistiques existantes ? Ou, autrement dit, quelle interaction entre la distribution inverse et la distribution traditionnelle des produits dans la chaîne logistique ? (Fleischmann *et al.*, 1997, 2000).

Comment planifier la distribution des flux inverses ? Comment mettre en place les routes pour la collecte des produits ? Ces problèmes dits de *vehicle routing* ont fait l'objet d'un certain nombre de travaux que l'on peut retrouver dans Lambert & Riopel (2003) ainsi que dans de Brito *et al.* (2002).

Enfin, il est à noter que le travail de collecte et de distribution peut être fait par le destinataire final des flux inverses (le producteur, le recycleur) ou, si les ressources de ce derniers sont limitées, par un sous-traitant appelé dans la littérature *third party provider* (Krumwiede & Sheu, 2002).

1.5.2 Le traitement des flux inverses

Les problèmes liés au traitement des produits retournés peuvent être eux mêmes divisés en deux sous-familles (Fleischmann *et al.*, 1997) :

- Sélection de l'option de réutilisation (autrement dit, que faire du produit retourné ?)
- Planification cette opération de traitement en tenant compte des ressources disponibles.

Sélection du l'option de traitement

La sélection de l'option de traitement dépend fortement des contraintes techniques (faisabilité) ainsi que de l'attractivité économique de l'option choisie (Fleischmann *et al.*, 1997). Partant de ce constat, et à partir de différentes classifications de traitements de flux inverses rencontrées dans la littérature, il est possible de présenter le tableau 1.4 basé sur le travail de Rogers & Tibben-Lembke (1998) et Lambert & Riopel (2003).

Il est utile de noter que certains travaux ont été menés en vue de formaliser ce processus de sélection de l'option de réutilisation des flux inverses (Fleischmann *et al.*, 1997).

Par ailleurs, il est possible de remarquer sur le tableau 1.4 que les flux inverses ont été divisés en Produits et Emballages en vue de souligner que les emballages offrent

Flux inverses	Traitement	Type de traitement
Produits	Retour au fournisseur	<i>Réutilisation directe</i>
	Revendre	
	Vendre via magasin entrepôt	
	Reconditionner	<i>Réutilisation moyennant faibles travaux</i>
	Remettre en état	
	Remettre à neuf (Remanufacturing)	<i>Réutilisation après désassemblage</i>
	Récupérer tout ou partie des matériaux/composants (pièces détachées)	
	Recycler	
	Rejeter/Enfouir	<i>Non réutilisation</i>
Emballages	Réutiliser	<i>Réutilisation directe</i>
	Remettre en état	<i>Réutilisation moyennant faibles travaux</i>
	Récupérer tout ou partie des matériaux/composants	<i>Réutilisation après désassemblage</i>
	Recycler	
	Rejeter/Enfouir	<i>Non réutilisation</i>

Tableau 1.4 – Traitements possibles des flux inverses

moins de possibilités de traitements que les autres produits retournés.

Planification des opérations de traitement

Une fois le traitement des produits retournés choisi, reste à planifier ces nouvelles activités. La planification de ces activités peut s'avérer relativement simple lorsqu'il s'agit de recyclage ou de modifications mineures, mais s'agissant de réparations ou de remises à neuf (remanufacturing) la tâche se complique sérieusement étant donné **(i)** le fait que le traitement dépend de l'état de la pièce retournée qui diffère d'une pièce à une autre (incertitude liée à la qualité), **(ii)** le fait que les produits désassemblés sont sources de multiples composants dont il faudra coordonner le traitement (problème de coordination), **(iii)** le fait que certains problèmes de partage des ressources se posent lorsque le nombre de pièces à traiter est important, etc. (Fleischmann *et al.*, 1997).

Pourtant, différentes études liées à la planification des opérations de traitement des flux inverses ont été publiées se basant sur la méthode MRP généralement utilisée

pour la planification *traditionnelle* de la production (voir Giard (2003)). Une revue de littérature de ces travaux est présentée dans Fleischmann *et al.* (1997) alors que Guide (2000) et Thierry *et al.* (1995) présentent des études de cas ainsi que des pratiques de planification (réutilisation et remanufacturing) rencontrées en industrie.

1.5.3 La gestion des stocks

C'est dans ce domaine de recherche que s'inscrivent nos travaux. Les problèmes liés à la gestion des stocks dans un contexte de flux inverse seront détaillés dans la section suivante 1.6.

Ainsi, et parmi tous les problèmes liés à la logistique inverse, cette thèse s'intéresse uniquement aux problèmes liés à la gestion des stocks. La distribution et le traitement des produits retournés ne faisant pas partie du contexte de nos recherches.

1.6 Gestion des stocks dans un contexte de flux inverses

La Gestion Des Stocks (GDS) constitue l'un des trois principaux domaines de recherche liés à la logistique inverse (section 1.5.1). C'est également celui sur lequel porte ce travail de thèse.

Avant de décrire les spécificités de la gestion des stocks dans un contexte de flux inverses, il est utile de rappeler que la gestion *traditionnelle* des stocks doit essentiellement répondre à trois questions (Dekker *et al.*, 2004) :

1. A quelle fréquence vérifier les stocks ?
2. Quand réapprovisionner les stocks ?
3. En quelles quantités ?

1.6.1 GDS avec flux inverses vs GDS classique

L'apparition des flux inverses ne modifie en rien la fonction de la gestion des stocks. Celle-ci sera toujours de répondre aux trois questions préalablement citées. La différence réside dans le fait que les réponses à ces questions sont plus complexes et plus difficiles à trouver dans un contexte de flux inverses. En effet, la logistique et les flux inverses impliquent certains changements dans la gestion des stocks de produits/composants. Les principales différences entre GDS traditionnelle et GDS avec flux inverses sont les suivantes (Dekker *et al.*, 2004) :

Plusieurs sources d'approvisionnement : Les retours de produits constituent une source additionnelle d'approvisionnement qui, en plus des fournisseurs et/ou du processus principal de production, peut être utilisée pour satisfaire de nouvelles demandes. Ceci permet d'étendre les trois questions liées à la GDS à une quatrième question qui serait la suivante : *De quelle source réapprovisionner les stocks ?* La question de coordination entre les différentes sources se pose alors. De plus, cette source additionnelle de produits que sont les flux

inverses induit une complexité accrue du fait que ces flux sont limités en quantité et que leur coût est différent de celui des produits neufs (car provenant d'un circuit différent).

Source non contrôlable : L'incertitude liée à la quantité et à la qualité des produits retournés (section 1.3.3) rend cette source additionnelle non fiable. Les modèles déterministes de gestion de stocks peuvent alors fournir des résultats limités.

Par ailleurs, des retours de produits non contrôlables impliquent une non prévisibilité de l'augmentation du niveau de stock de produits finis. En effet, le niveau de stock de produits finis peut augmenter par moments lorsque des produits sont retournés. Comme les retours sont difficiles à prévoir et à contrôler, l'éventuelle augmentation des stocks sera irrégulière d'une période à l'autre. Ainsi, il arrivera que des produits soient retournés alors que le stock est suffisamment important pour garantir un taux de service satisfaisant, d'où des sur-stocks. Un autre problème peut alors se poser qui est celui de ne pas pouvoir borner les stocks, à moins d'opter pour une politique d'acceptation/rejet des retours appropriée (voir sections 2.1.3 et 2.2.4).

1.6.2 Gestion des stocks avec flux inverses : Deux grandes familles

Avant de présenter, au chapitre 2, un état de l'art des modèles de systèmes de production avec flux inverses ainsi que des politiques de GDS qui y sont appliquées, il est important de remarquer que les politiques/méthodes de gestion des stocks liées au flux inverses appartiennent à deux grandes familles de problèmes en fonction de la nature des produits retournés :

1.6.2.1 Problèmes à réutilisation directe

La réutilisation directe concerne principalement les retours commerciaux de produits, autrement dit, les produits qui peuvent être réutilisés directement ou moyennant des actions mineures (nettoyage, inspection, emballage). Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de différencier les stocks de produits neufs ou retournés (Dekker *et al.*, 2004). De tels systèmes comportent alors un seul stock (commun aux produits neufs et retournés), voire figure 1.4.

1.6.2.2 Problèmes à réutilisation indirecte

Par opposition à la réutilisation directe, la réutilisation indirecte permet d'ajouter de la valeur aux produits retournés ce qui implique des process plus élaborés. Le débit de ces produits retournés nécessitant des opérations non instantanées de (re)traitement, que l'on appelle *remanufacturing*, est généralement important et très variable. De plus, la qualité des produits retournés varie d'une unité à l'autre. Cette incertitude rend la planification des opérations de (re)traitement encore plus difficile et accroît la variabilité des délais de traitement (Dekker *et al.*, 2004).

La réutilisation indirecte concerne principalement les produits qui ont été utilisés puis renvoyés pour réparation, maintenance, etc. La valeur ajoutée ainsi que les coûts liés au (re)traitement de ces produits nécessitent la mise en place d'un stock additionnel amont des produits retournés avant que ces derniers ne soient traités (figure 1.4).

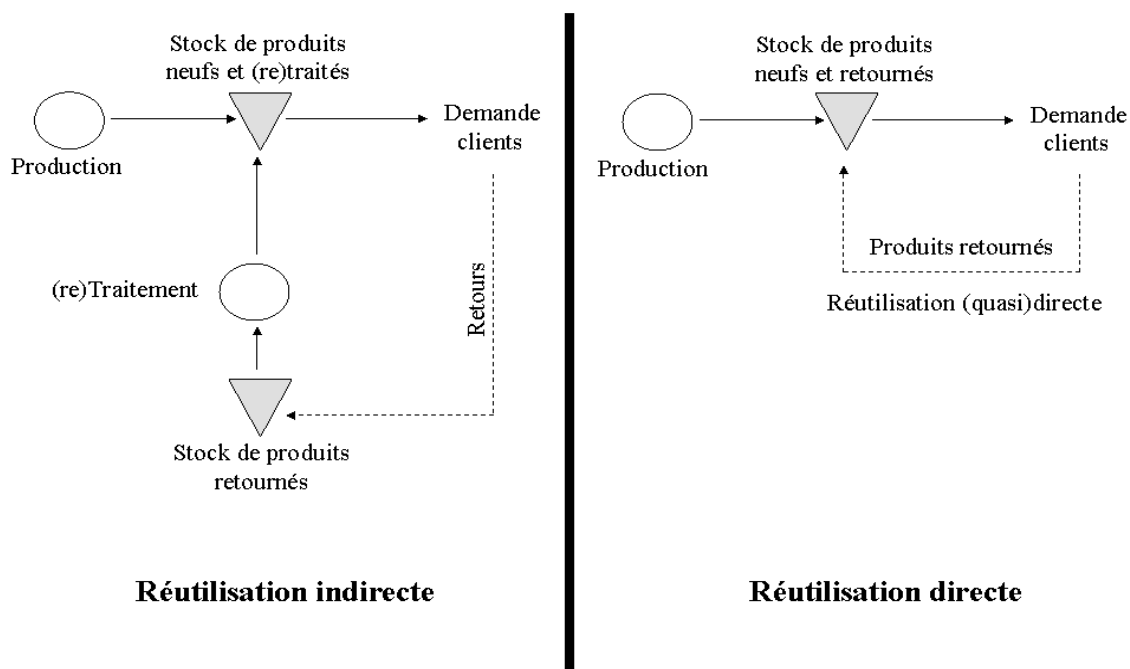


Figure 1.4 – Flux inverses : réutilisation directe et indirecte

L'intégration des flux inverses complique donc la gestion des produits et composants en stock. Les politiques traditionnellement appliquées en GDS ne sont plus applicables vu les différences qui viennent d'être présentées. C'est pourquoi de nouvelles méthodes/politiques de GDS incluant les flux inverses ont été développées et qui, parfois, sont des adaptations de techniques de GDS classiques. Nous présentons au Chapitre 2 un état de l'art des modèles quantitatifs de logistique inverse en mettant en avant les différentes politiques de GDS appliquées.

1.7 Champs de recherche et objectifs des travaux

Il est à présent établi que l'intégration des flux inverses complique de façon certaine la gestion de la chaîne logistique. Les problèmes liés au transport et au traitement de ces flux restent très intéressants mais ne font pas l'objet de ce travail de thèse. Dans notre cas, nous nous intéressons exclusivement aux problèmes de gestion des stocks liés et induits par des retours de produits. Nous étudierons ainsi des modèles quantitatifs de stocks avec flux inverses.

Sur un système (modèle) donné avec flux inverses, l'industriel devra faire face :

- À la demande des clients qu'il devra satisfaire ;
- Aux retours de produits qu'il devra intégrer, et éventuellement traiter, afin de les utiliser pour servir une partie de la demande. Ces retours peuvent être utilisés en tant que pièces détachées, composants, produits finis, etc.

La principale question qui se pose est alors : comment approvisionner / produire les pièces neuves, sachant les retours aléatoires de produits, en vue de ne pas trop surcharger les stocks et tout en satisfaisant les demandes des clients à moindre coût ?

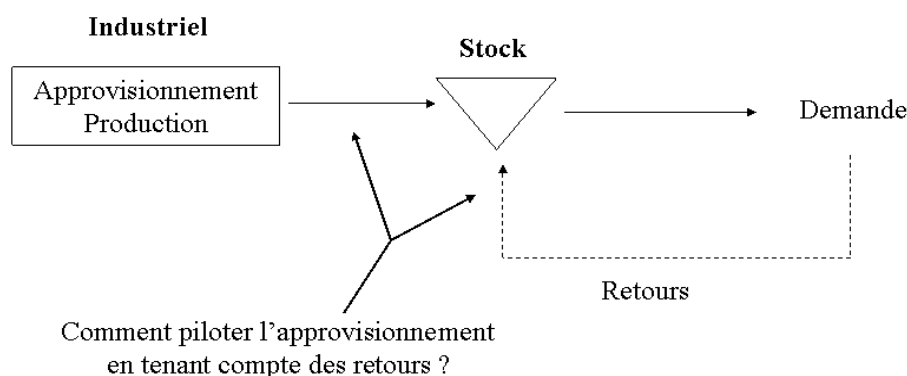


Figure 1.5 – Objectifs des travaux

Par conséquent, l'objectif de ce travail de thèse peut se résumer comme suit :

- Considérer différents modèles de systèmes de production avec flux inverses qui peuvent être différenciés par les hypothèses qui y sont faites. La nature incertaine des flux inverses ayant été soulignée en section 1.3.3, nous considérons que la demande et les retours de produits sont stochastiques (aléatoires). Ces hypothèses sont commentées en section 2.4.
- Alors, trouver la meilleure politique ou *politique optimale de gestion des stocks* qui permet de savoir précisément quand produire ? et en quelle quantité ? en tenant compte des retours (aléatoires de produits qui participent à renflouer le stock) en vue de minimiser le coût total du système.

Ainsi, sur ces modèles, nous rechercherons des politiques optimales qui ajustent au mieux la production (l'approvisionnement) sachant les retours aléatoires de produits.

Il faut préciser que le terme *politique de gestion des stocks* n'est pas le terme le plus pertinent car il s'agit en fait de politique de Production / Approvisionnement & Gestion des stocks. Mais par abus de langage, et tout au long de ce document, nous utiliserons de manière indifférente les termes : politique, politique de production, politique de GDS, ou stratégie pour désigner la manière choisie d'approvisionner le stock.

Cette notion de politique peut ne pas sembler claire à ce niveau, c'est pourquoi, et avant de présenter les politiques liées à nos travaux, un certain nombre de politiques utilisées dans la littérature seront présentées au Chapitre 2.

Chapitre 2

Modèles de gestion des stocks avec flux inverses : État de l'art

Un état de l'art des modèles de production/gestion des stocks avec flux inverses est présenté dans cette section. C'est ainsi que nous citerons un certain nombre de publications que l'on peut retrouver dans la littérature et où chaque article sera synthétisé en termes de modèle étudié, hypothèses formulées et principaux résultats obtenus.

Cet état de l'art ne se veut certainement pas exhaustif mais permet, à notre avis, d'avoir une vue globale sur la diversité des modèles étudiés, les questions traitées et les réponses apportées. Ce travail de recherche bibliographique permettra, en section 2.3, de positionner notre sujet de thèse de façon précise et de pouvoir mettre en exergue la valeur ajoutée de notre travail.

D'ailleurs, en vue de faciliter le positionnement de notre sujet de thèse, il est nécessaire de structurer et d'ordonner l'état de l'art qui va être présenté. Il existe en effet plusieurs manières de catégoriser les modèles de gestion des stocks avec flux inverses. Par exemple :

- Modèles *déterministes* où tous les paramètres des modèles sont connus et modèles *stochastiques* où la demande et/ou les retours de produits sont stochastiques (Fleischmann *et al.*, 1997) ;
- Modèles à revue continue (resp. périodique) des stocks, dans le cas de modèles stochastiques, où les décisions sont prises à chaque instant (resp. période) en fonction du niveau des stocks ;
- Modèles avec retours de produits indépendants des demandes et modèles avec retours dépendants (Guide *et al.*, 1999) ;
- Modèles à réutilisation directe et modèles à réutilisation indirecte (voir section 2.2). Cette catégorisation des politiques en réutilisation directe et indirecte a été proposée par Dekker *et al.* (2004) relativement à des politiques stochastiques et il est possible de l'étendre à toutes les politiques (déterministes et stochastiques).

Les travaux et modèles que nous allons présenter pourraient être classés selon n'importe lequel des critères qui viennent d'être énoncés. Cela étant, nous avons décidé d'établir cet état de l'art selon le dernier critère qui est de distinguer, d'une part

les modèles où les produits retournés peuvent être (quasi-directement) réintroduits en stock, et d'autre part, les modèles dans lesquels les produits retournés doivent être stockés avant d'être remanufacturés et rejoindre le stock de produits finis (voir section 2.2).

La classification des modèles en « réutilisation directe vs réutilisation indirecte » comporte un avantage principal qui est celui de pouvoir analyser ces modèles selon un ordre de complexité croissant. Ainsi seront d'abord présentés des modèles simples (réutilisation directe) puis, au fur et à mesure, des modèles de plus en plus « élaborés » seront décrits. Aussi, tout au long de cet état de l'art, diverses questions seront abordées, questions annexes à la recherche d'une politique performante de gestion des stocks.

Il est à noter que nous avons établi un tableau récapitulatif (Tableau 2.2), à la fin de ce chapitre en section 2.3, page 53, qui résume l'ensemble des modèles étudiés, leurs caractéristiques, les hypothèses qui y sont faites, etc. Ce tableau permet de mieux cerner le champs des modèles étudiés.

Quant au tableau 2.1 suivant, il résume les termes clés utilisés lors de cet état de l'art. Ces termes font également partie du Glossaire présenté à la fin de ce document.

Termes	Description
Demande mises en attente & demandes perdues	Les modèles étudiés sont principalement des modèles à capacité finie d'approvisionnement. Il s'agira alors de gérer l'excès de demandes en cas de saturation du système d'approvisionnement. Ainsi, les demandes en excès, non satisfaites car le stock est nul, seront soit mises en attente, et dans ce cas le client attend jusqu'à ce que sa demande puisse être satisfaite, soit elles seront perdues, et dans ce cas le client quitte le système et va satisfaire sa demande ailleurs.
Dépendance demande / retours	Selon les modèles, il arrive parfois que les auteurs considèrent explicitement une dépendance (quantitative) ou corrélation entre les produits retournés et les produits vendus.
Option de rejet	Le producteur peut se réserver le droit de rejeter (ou pas) les produits retournés. Cette possibilité est considérée par certains modèles et est appelée <i>option de rejet</i> . Cependant, le rejet ne signifie pas forcément la mise au rebut des produits retournés. Cela signifie simplement que les produits retournés ne réintégreront pas le système de production, ils peuvent alors être vendus sur un marché de l'occasion, recyclés par des entreprises spécialisées, mis au rebut, etc.
Remanufacturing	Il arrive que les produits retournés doivent passer par une étape de remanufacturing afin de les remettre à neuf.

Termes	Description
Stock / Niveau de stock	Nous utilisons, dans ce document de thèse, le terme stock (ou niveau de stock) pour désigner le nombre de produits réellement disponibles en stock à un instant donné (sans les encours de production), cette définition correspond à ce que l'on retrouve dans la littérature sous le nom d'<i>on hand stock</i>. D'autres notions existent dans la littérature. Par exemple, Axäter (2006) définit l'<i>inventory level</i> ou <i>stock level</i> comme étant le stock on hand - demandes en attente. Ou bien la notion d'<i>inventory position</i>, que l'on a appelé dans ce document stock généralisé, qu'il définit comme étant égale au stock on hand + les ordres en cours de réalisation - les demandes en attentes (s'il y en a). Cela étant, et sauf précision contraire, nous utilisons toujours le terme stock pour désigner l'<i>on hand stock</i>.

Tableau 2.1 – Terminologie

2.1 Modèles à réutilisation directe

Ces modèles se présentent généralement selon le schéma suivant (figure 2.1). Ces modèles comportent un seul stock (commun aux produits neufs et retournés) et pas d'étape de remanufacturing (ou bien une étape instantanée de remanufacturing). Tous les modèles présentés dans cette section sous le nom de *modèles de stocks* seront, implicitement, des modèles de gestion des stocks à réutilisation directe.

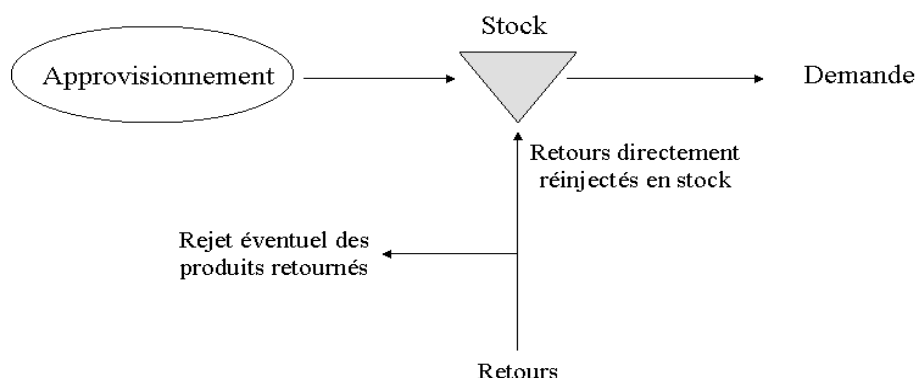


Figure 2.1 – Modèle à réutilisation directe

Les travaux menés sur ces modèles de stocks impliquent la mise en place de politiques de gestion des stocks, qu'elles soient optimales ou pas. Ces politiques seront

citées, parfois décrites et expliquées, sur l'ensemble des travaux. Une attention particulière sera apportée aux politiques les plus utilisées. Il s'agira également de mettre en avant certains thèmes abordés par les auteurs sur les modèles à réutilisation directe tels que la corrélation entre demande et retours ou l'intégration d'une option de rejet.

Ainsi, nous commençons par présenter en section 2.1.1 des travaux réalisés sur des modèles sans corrélation ni option de rejet et sur lesquels des politiques performantes ont été appliquées/recherchées. Nous aborderons ensuite, en section 2.1.2, des modèles avec dépendance entre les retours et la demande en décrivant les travaux qui y ont été menés. Enfin, nous terminerons en section 2.1.3 par des modèles incluant une option de rejet des produits retournés.

2.1.1 Modèles avec indépendance demande/retours et sans option de rejet

Parmi les premiers travaux sur des modèles à réutilisation directe, Cohen *et al.* (1980) proposent un modèle périodique de stocks avec retours déterministes et demande stochastique. Ils considèrent sur ce modèle une politique de production sur seuil ou politique de type *base-stock* (produire ssi le niveau de stock est inférieur à un seuil donné) dont ils montrent l'optimalité lorsque le délai de retour des produits est égal à une période.

Fleischmann & Kuik (2003) étudient un modèle de stock similaire au précédent avec demande et retours de produits stochastiques, les délais d'approvisionnement et de remanufacturing éventuel étant déterministes. Il n'existe pas de stock de produits retournés (avant remanufacturing). En utilisant des résultats liés à la formulation MDP (Markov Decision Process), il est montré que, d'une part, le modèle étudié peut se rapporter à un modèle équivalent sans retours de produits et que, d'autre part, la politique (s, S) est une politique optimale. Cette politique (s, S) consiste à approvisionner, dès que le niveau de stock atteint (ou descend sous) la limite inférieure s , la quantité nécessaire en vue d'atteindre un niveau S (figure 2.2).

Fleischmann *et al.* (2002) considèrent quant à eux un modèle de stock à temps continu. Les produits sont approvisionnés selon un délai fixe pour faire face à une demande poissonnienne (stochastique). De plus, un flux indépendant de produits retournés arrive selon un processus de Poisson. Ces retours peuvent alors servir à satisfaire la demande. Les auteurs montrent sur ce modèle l'optimalité d'une politique (s, Q) en vue d'une minimisation du coût moyen et calculent les valeurs optimales des paramètres s et Q . La politique (s, Q) consiste à réapprovisionner Q unités dès que le niveau de stock devient inférieur ou égal au seuil s sous l'effet de la demande.

Une comparaison numérique est également réalisée sur ce modèle entre la politique optimale (s, Q) et une politique (s_{net}, Q_{net}) sur un modèle dit de *netting* ou de compensation. Ce dernier consiste à considérer le même modèle que le premier en déduisant le flux entrant des produits retournés de la demande, considérant ainsi que les retours vont satisfaire une partie de cette demande. Autrement dit, le modèle de compensation comportera uniquement une source d'approvisionnement sans

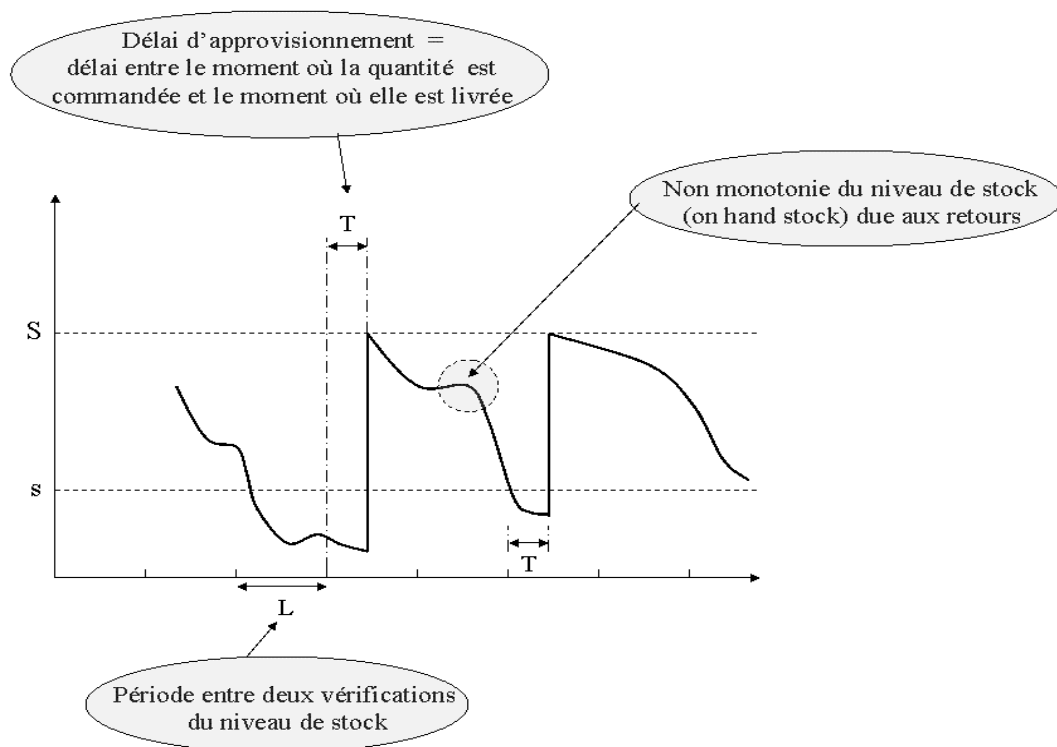


Figure 2.2 – Politique (s, S) à temps continu

retours de produits pour faire face à une *Demande nette* décrite comme étant un processus de Poisson de taux $= \text{Taux}_{\text{demande initiale}} - \text{Taux}_{\text{retours}}$. Le résultat de cette comparaison est que le coût moyen associé à la politique (s, Q) optimale est meilleur (inférieur) que celui de la politique $(s_{\text{net}}, Q_{\text{net}})$, mais cette dernière constitue une bonne approximation en cas de faibles taux de retours.

DeCroix *et al.* (2005) étudient un modèle avec demande positive ou négative (retours) et délai fixe d'approvisionnement. Après avoir rappelé que la politique *base-stock* (toujours produire jusqu'à un seuil S donné) est optimale pour un modèle simple à réutilisation directe, ils appliquent cette politique à un modèle de système en série multi-échelons en en mentionnant l'optimalité. De plus, un algorithme exact ainsi que plusieurs algorithmes d'approximation sont présentés permettant d'évaluer la performance, coût, d'un tel système multi-échelon. Les auteurs proposent aussi sur ce système en série multi-échelons d'appliquer une politique base stock particulière qui n'utilise qu'une information locale. Cette dernière n'est pas optimale mais est parfois plus simple à implémenter. Enfin, ils étendent leur analyse au cas où les retours de produits peuvent survenir à différents niveaux (échelons, stocks) et au cas où le remanufacturing des produits retournés se fait suivant un délai non nul (réutilisation indirecte).

Par ailleurs, Gayon (2007) considère un système modélisé par une $M/M/1$ make-to-stock queue avec retours de produits, back-orders, et délais exponentiels d'approvisionnement. La demande et les retours de produits sont supposés être des processus

de Poisson indépendants. L’auteur prouve sur ce modèle l’optimalité d’une politique base-stock et calcule analytiquement le seuil optimal de production dans le cas des coûts actualisés et moyens. Nous verrons au Chapitre 3 que cet article représente le point de départ de nos travaux.

Enfin, il n’est pas rare de rencontrer dans la littérature des modèles de location d’emballages (palettes, bouteilles en verre, etc.). Ces derniers se prêtent assez bien à une modélisation à réutilisation directe étant donné, d’une part, que les produits loués sont en grande partie retournés (les autres pouvant être endommagés ou perdus) et que, d’autre part, les produits retournés peuvent être directement réutilisés moyennant un nettoyage rapide ou une réparation mineure (voir section 2.2). Ainsi, Kelle & Silver (1989) considèrent un modèle périodique dans lequel des conteneurs sont vendus et éventuellement retournés. Les demandes et les retours sont supposés aléatoires. Les auteurs souhaitent minimiser le coût d’achat et de stockage des nouveaux conteneurs sur un horizon fini tout en assurant un taux de service donné. Pour ce faire, le problème stochastique initial est transformé en un modèle déterministe de lot-sizing pour lequel des solutions exactes et approchées sont connues. Ce travail d’approximation passe par la prévision de la demande nette, du stock disponible, etc. sur plusieurs périodes.

2.1.2 Dépendance demande/retours

Buchanan & Abad (1998) étudient également un modèle (de stock) de location de conteneurs (palettes de transport) devant faire face à une demande aléatoire sur plusieurs périodes. Ce modèle considère que le pourcentage de produits retournés à chaque période est une fonction aléatoire du nombre de produits se trouvant chez les clients, ce qui revient à dire que le temps de séjour des produits dans le marché (avant retour) est exponentiellement distribué. Les auteurs déterminent sur ce modèle la politique optimale d’approvisionnement sur une, puis sur plusieurs périodes en vue de minimiser le coût. Leur recherche de la politique optimale se base sur deux variables d’état du système : le stock de produits disponibles et le nombre de produits se trouvant chez les clients.

Sur ce dernier modèle de Buchanan & Abad (1998), l’hypothèse du temps de séjour exponentiel marque une distinction importante avec les modèles décrits auparavant et qui est de prendre en compte une certaine corrélation ou dépendance entre les produits vendus (loués) et les produits retournés. D’autres travaux, ne se rapportant pas forcément à la location de conteneur, ont également intégré la dépendance entre demande et retours de produits parmi lesquels Kiesmüller & van der Laan (2001) qui considèrent un modèle de stock où les retours aléatoires de produits sont directement, de façon probabiliste, dépendants de la demande (stochastique). Le principal résultat de cette étude est que, pour une politique de GDS donnée (prédéterminée), le fait de négliger la dépendance demande/retours conduit à de mauvaises performances du système en terme de coût moyen. Aussi, les auteurs parviennent à calculer **(i)** la probabilité minimale qu’un produit soit retourné et remanufacturé **(ii)** la longueur minimale de l’horizon de planification pour lesquels

il devient profitable de réutiliser les produits retournés.

Yuan & Cheung (1998) considèrent un modèle de stock à temps continu où chaque produit est instantanément approvisionné pour faire face à une demande qui arrive selon un processus de Poisson. Une fois le produit vendu, ce dernier pourra, éventuellement, être retourné par le client après un délai exponentiel. Cette hypothèse rappelle le modèle de Buchanan & Abad (1998). Les retours de produits sont ainsi considérés comme fortement liés et dépendants de la demande. Sur ce modèle, où le délai d'approvisionnement est instantané, une politique de GDS de type (s, S) est adoptée et un algorithme de calcul des paramètres optimaux de réapprovisionnement est développé (voir figure 2.2).

Il est toutefois important de noter que le niveau de stock considéré pour cette politique (s, S) ne comprend pas uniquement les produits réellement en stock. Le niveau de stock considéré est en fait l'*inventory position* qui est ici défini comme :

Inventory position = Produits physiquement en stock - Demandes mises en attente (back-orders) + Produits potentiellement retournés

Une nouvelle forme de corrélation entre demande et retours est également considérée sur un autre type de modèles présenté par Mukhopadhyay & Setoputro (2004) qui se penchent sur un modèle de vente de produits par internet et sur les fortes quantités de produits retournés qui s'y rapportent. Ce modèle est très général, et ne s'inscrit pas forcément dans la catégorie des modèles à réutilisation directe, mais il reste intéressant à citer car il suggère que la demande est positivement influencée (dépendance) par la politique de retour adoptée (par le montant remboursé en cas de retour d'un produit). Les quantités de produits retournés sont également influencées de la même façon par la politique de retour adoptée. Les auteurs définissent sur ce modèle les valeurs optimales des deux principaux paramètres qui sont : le prix de vente et le montant remboursé en cas de retour qui maximisent le profit total. Une étude numérique vient aussi montrer la sensibilité de ces paramètres à la nature du marché et à ses variations, ce qui permet d'en déduire certaines intuitions managériales destinées aux industriels.

Une fois encore, la catégorie de problèmes abordée par Mukhopadhyay & Setoputro (2004), à savoir la vente de produits sur internet, se prête elle aussi très bien à une modélisation à réutilisation directe, avec retours de produits, étant donné le taux élevé des retours et la réutilisabilité des produits retournés. Mostard *et al.* (2005) considèrent eux aussi un modèle de vente de produits par internet (produits de mode ou fashion products). Dans ce cas, la vente de produits en ligne est caractérisée par un taux élevé de retours de produits. De plus, et particulièrement pour des produits de mode, le délai de production/approvisionnement est généralement important. Le vendeur se voit alors dans l'obligation de commander les produits qu'il devra vendre en une seule fois avant le début de la saison. Ainsi, Mostard *et al.* (2005) considèrent un modèle de stock de vente de produits de mode par internet, avec retours de produits dépendants, sur lequel la demande - difficilement estimable dans le cas de produits de mode - n'est donnée que par une valeur moyenne et une variance. La quantité à approvisionner, en vue de maximiser le profit, est calculée de la même façon que pour un *News-boy problem* pour lequel une demande nette

(sans retours) est partiellement estimée (bornée).

Le résultat obtenu (quantité à ordonner en début de période/saison) est ensuite comparé à la solution optimale dans le cas où la distribution de la demande nette est parfaitement connue, et cela pour différentes distributions (Normale, Lognormale et Uniforme). Cette comparaison permet de déterminer l'extra profit engendré par une meilleure connaissance de la demande.

Ainsi, l'étude de la dépendance demande/retours sur des modèles de location de conteneurs ou de vente par internet semble très intéressante et reflète l'un des points abordés dans la littérature des modèles de stock à réutilisation directe.

2.1.3 Option de rejet

Nous abordons à présent la section concernant les modèles incluant une *option de rejet* des produits retournés ou des produits en stock. L'un des premiers articles traitant d'un modèle de stock à réutilisation directe avec option de rejet est celui d'Heyman (1977) dans lequel la politique optimale est recherchée. Néanmoins, la politique optimale, sur ce modèle, ne concerne pas la production ou le remanufacturing des pièces (tous deux instantanés) mais le rejet des produits retournés. Autrement dit, l'auteur recherche la politique ou le seuil optimal du niveau de stock à partir duquel il faudra rejeter les pièces retournées, l'objectif étant de minimiser le coût d'un tel système. Heyman (1977) montre l'équivalence de ce modèle avec un modèle file d'attente $G/G/1/N$. De plus, dans le cas de demandes et retours poissonniens, il parvient à calculer le niveau optimal de rejet et montre que cette politique à un seul paramètre (niveau de rejet) est optimale. Dans le cas de demande et retours distribués selon une loi générale, il trouve une solution approximée.

L'introduction d'une option de rejet implique, parfois, de faire appel à des politiques plus « élaborées » que celles que nous avons vu jusqu'à présent. C'est le cas de Pinçe *et al.* (2008) qui considèrent un modèle de stock mono-produit où la satisfaction de la demande (stochastique Normale) peut se faire soit par une source d'approvisionnement maîtrisable à délai constant, soit par une source de produits secondaire et stochastique (Normale) constituée par les retours de produits. Sur ce modèle, l'option de rejet des produits en stock est envisageable lorsque le niveau de stock est trop important. Une politique (S, s, r, Q) est alors appliquée et les paramètres optimaux de cette politique sont évalués en vue de minimiser le coût sous une contrainte de taux de satisfaction des clients. La politique (S, s, r, Q) peut être décrite comme suit :

- Approvisionner une quantité Q dès que le niveau de stock descend sous le seuil r . Les paramètres Q et r sont alors des variables de décision relatives à l'approvisionnement.
- Dès que le niveau de stock dépasse le seuil S , alors le stock est considéré comme étant trop important et une certaine quantité est rejetée du stock afin de se ramener à un niveau $s \leq S$. Dans ce cas s et S sont les variables de décision relatives au rejet.

Enfin, l'impact de l'option de rejet sur le coût du système est évalué sur une étude numérique. Cette évaluation est réalisée en comparant la politique (S, s, r, Q) à une

politique (s, Q) . Les résultats de l'étude numérique montrent que l'option de rejet peut - sous certaines conditions - mener à des économies de coûts considérables, même dans le cas de coûts de rejet non nuls.

Plus récemment, Ouyang & Zhu (2008) proposent un modèle avec production, remanufacturing instantané et option de rejet des produits retournés dans lequel la demande et les retours arrivent selon des processus de Poisson. Sur ce modèle est appliquée une politique (s_p, Q, s_d) décrite comme suit :

- $s_p + Q < s_d$;
- Lorsqu'un produit est retourné, si le niveau de stock est strictement inférieur à s_d alors le produit est immédiatement remanufacturé et placé en stock. Autrement, si le niveau de stock est égal à s_d le produit est directement rejeté ;
- Lorsqu'une demande arrive faisant décroître le stock d'une unité, si le niveau de stock descend à une valeur égale à s_p alors un ordre de production de Q unités est lancé en vue de ramener le stock à un niveau $s_p + Q$. Les Q unités commandées arrivent en stock après un délai fixe et déterminé, voir figure 2.3.

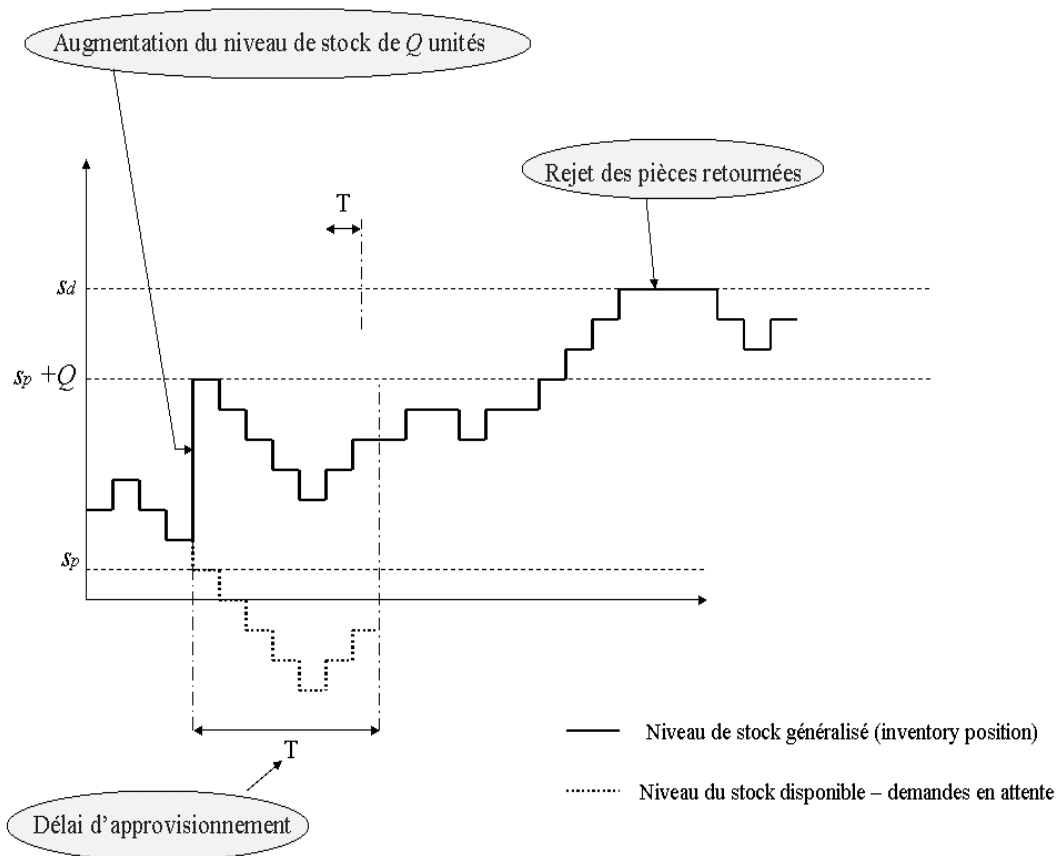


Figure 2.3 – Politique (s_p, Q, s_d) , Ouyang & Zhu (2008)

Le coût total associé à la politique (s_p, Q, s_d) est calculé ainsi que les bornes supérieures et inférieures des paramètres s_p , Q , et s_d . De plus, une étude numérique de ce modèle évalue l'intérêt de l'option de rejet et montre qu'en général il est intéres-

sant de pouvoir rejeter les produits retournés, surtout dans le cas de taux de retours élevés.

Pour en terminer avec les modèles à réutilisation directe, il a été vu que, dans la plus part des travaux, l'objectif des politiques appliquées est de minimiser le coût total du système (modèle). Deux variantes du coût reviennent alors régulièrement : le coût moyen et le coût actualisé. van der Laan (2003) présente un modèle de stock avec production instantanée, retours de produits selon un processus de Poisson, remanufacturing instantané et demande selon un processus de Poisson. La politique appliquée est une politique $(s = 0, Q)$. L'objectif de cet article n'est pas d'évaluer cette politique mais de comparer, via des études numériques, l'utilisation d'une approche actualisée des coûts/profits à celle d'une approche coût moyen. D'après l'auteur, la performance de l'approche coût moyen dépend principalement du choix des paramètres relatifs aux coûts de stockage.

2.2 Modèles à réutilisation indirecte

Ces modèles, décrits en section 2.2, se caractérisent par une étape de remanufacturing non instantanée des produits retournés, ainsi que par l'existence de plusieurs stocks, généralement deux, l'un dédié aux produits finis et l'autre aux produits retournés. Ces modèles se présentent schématiquement sous la forme suivante (voire figure 2.4)

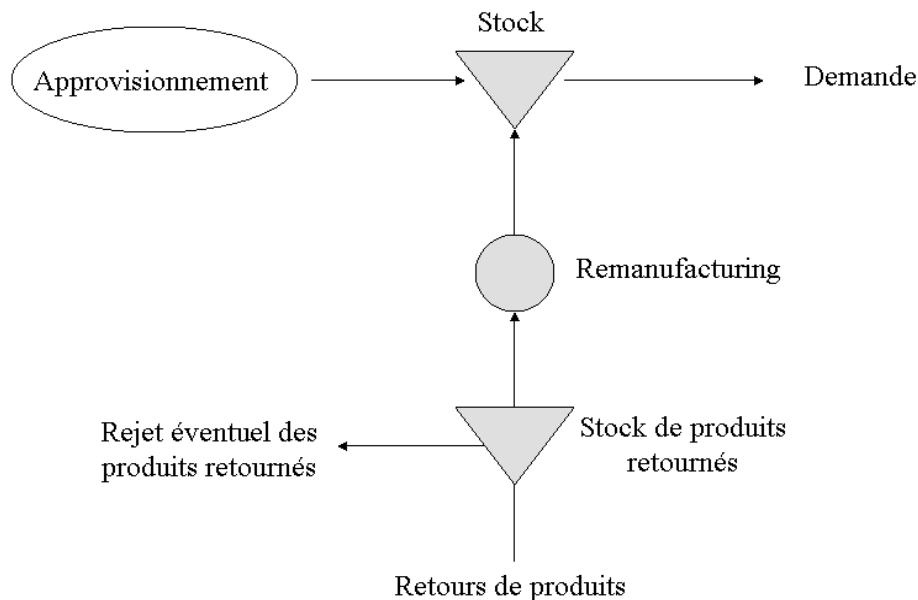


Figure 2.4 – Modèle à réutilisation indirecte

De même que pour les modèles à réutilisation directe, la présente section décrit les politiques appliquées par les auteurs sur des modèles à réutilisation indirecte, ainsi

que les études complémentaires menées sur ces modèles telles que le partage des ressources ou la différenciation des produits.

Nous commençons par présenter en section 2.2.1 des modèles de base qui coordonnent l'approvisionnement et le remanufacturing des produits retournés, aucune autre alternative telle que l'option de rejet n'étant possible. Par la suite, nous nous intéressons en section 2.2.2 aux travaux qui comparent le fait de partager les ressources, au fait de dédier des ressources spécifiques à la production et au remanufacturing. D'autres travaux, présentés en section 2.2.3 préfèrent distinguer les produits neufs et remanufacturés, hypothèse qui n'a pas été considérée jusqu'à présent. Enfin, nous introduisons en section 2.2.4 des modèles à réutilisation indirecte incluant une option de rejet ainsi que les travaux qui y sont menés (recherche/évaluation de politiques), avant de nous intéresser en section 2.2.5 à des travaux qui évaluent la pertinence même d'intégrer l'option de rejet.

2.2.1 Modèles de base : coordonner production et remanufacturing

Parmi les premiers modèles à réutilisation indirecte, Muckstadt & Isaac (1981) considèrent un modèle similaire à celui d'Heyman (1977) où le délai de remanufacturing est décrit comme étant non instantané (mais sans distribution particulière). Par contre, les auteurs ne considèrent pas l'existence d'une option de rejet. Par conséquent, et contrairement à Heyman (1977), il ne s'agira pas de trouver la politique optimale de rejet, mais d'appliquer plutôt une politique (s, Q) qui consiste à approvisionner (délai non nul) Q unités dès que le niveau de stock descend sous la valeur s . Les auteurs proposent une méthode basée sur le stock net en vue de trouver les valeurs optimales des paramètres s et Q qui minimisent le coût. Un travail similaire est ensuite mené par Muckstadt & Isaac (1981) sur un modèle multi-échelons (1 entrepôt pour N détaillants). van der Laan *et al.* (1996b) étudient le même modèle que le précédent en y appliquant également une politique (s, Q) . Ils développent à leur tour une méthode d'approximation du coût total et des paramètres optimaux et montrent sur une étude numérique la nécessité d'une option de rejet des produits retournés en vue de réguler le niveau de stock.

Les modèles de gestion des stocks, à réutilisation indirecte, traités dans la littérature ont pour principal objectif de coordonner la production de pièces neuves et le remanufacturing des pièces retournées. Ainsi, van der Laan *et al.* (1999) utilisent des politiques *PUSH* et *PULL* sur un modèle avec demandes et retours stochastiques où les délais de production et de remanufacturing sont également stochastiques. Cet article décrit ces politiques *PUSH* et *PULL* comme suit :

- La politique (s_m, Q_m, Q_r, s_d) *PUSH* : consiste à remanufacturer dès que le stock de produits retournés est exactement égal à Q_r . Les Q_r unités sont alors remanufacturées. Quant à la production, cette dernière est lancée, par lots de Q_m unités, dès que le niveau de stock (inventory position) atteint, sous l'effet de la demande, un niveau s_m . Cette politique est appelé *PUSH* car les produits sont poussés (*pushed*) vers le remanufacturing dès que possible, indépendamment de la demande et du stock de produits finis. (voire figure

2.5).

- La politique (s_m, Q_m, s_r, S_r) *PULL* : il s'agira de lancer le remanufacturing dès que le niveau de stock est inférieur ou égal à la valeur s_r et que le stock de produits retournés contient suffisamment de pièces pour élever le niveau de stock à un niveau S_r (voire figure 2.5). La production, par lots de Q_m unités, est lancée dès que le niveau de stock descend à un niveau $s_m \leq s_r$. Cette stratégie est dite *PULL* car elle tire les produits retournés vers le remanufacturing seulement en cas de besoin en vue de satisfaire la demande.

L'étude menée par van der Laan *et al.* (1999) a pour but d'évaluer l'effet des délais de production/remanufacturing ainsi que de leur variabilité sur le coût total moyen du système. Parmi les principaux résultats de cette étude, les auteurs constatent que le changement du délai de production a un impact plus important sur le coût du système que le délai de remanufacturing.

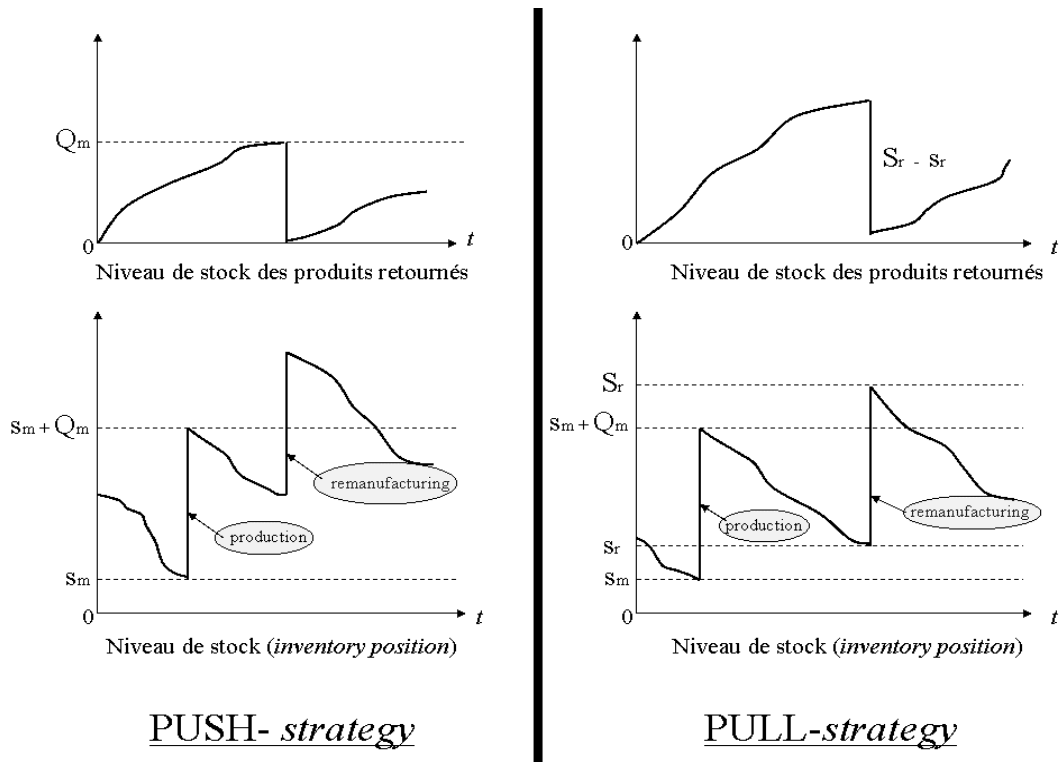


Figure 2.5 – *PUSH strategy* et *PULL strategy*, Van der Laan *et al.* (1999)

Mahadevan *et al.* (2003) considèrent une politique particulière de type *PUSH* qu'ils décrivent et sur laquelle ils tentent de déterminer les valeurs des paramètres optimaux afin de savoir quand est ce qu'il y a lieu de remanufacturer les produits retournés et quelle quantité faut-il produire à chaque période? Ils développent ainsi des heuristiques afin de déterminer des bornes minimales, maximales ainsi que des valeurs approximatives des paramètres optimaux de la politique appliquée. Ils étudient enfin le comportement de ces heuristiques par rapport à la variation de différents paramètres.

Kiesmüller (2003) propose de son côté une nouvelle approche de gestion d'un système avec retours de produit lorsque les délais de production et de remanufacturing sont différents, l'objectif étant de déterminer : combien de pièces faut-il produire, combien faut-il remanufacturer et à quelles périodes en vue de minimiser le coût total moyen. L'approche proposée diffère de celle généralement appliquée sur ce type de modèles par le fait que les variables de décision utilisées ne sont plus les niveaux de stock (*on hand*) des produits neufs et retournés, mais des niveaux de stock agrégés incluant les produits en cours de production/remanufacturing (Kiesmüller, 2003). L'heuristique proposée par l'auteur est ensuite comparée, sur une étude numérique, à une autre approche identique mais simplifiée. Il est ainsi montré que la performance (coût moyen) du système peut être substantiellement améliorée par cette nouvelle approche, spécialement pour de grandes différences entre les délais de production et de remanufacturing.

L'influence des délais de production et de remanufacturing semble être une question récurrente, sur les modèles à réutilisation indirecte, vu qu'elle a été traitée par van der Laan *et al.* (1999) et par d'autres auteurs comme nous le verrons par la suite.

De leur côté, Tang & Grubbström (2005) voient les modèles de stock avec retours de produits comme étant des modèles avec deux sources d'approvisionnement (*dual sourcing*). Ils comparent, sur un modèle avec manufacturing / remanufacturing, deux politiques :

- Politique cyclique (*Cycle ordering policy*) : qui consiste à alimenter le stock alternativement de la fabrication puis du remanufacturing (les délais étant nuls ou stochastiques) ;
- Politique d'approvisionnement multi-sources : où à chaque fois l'ordre d'alimentation du stock est divisé simultanément entre production et remanufacturing (ce dernier étant considéré comme une source à part entière de produits).

Le fait de considérer plusieurs sources d'approvisionnement (seconde politique) peut ainsi, parfois, induire un coût moyen moindre en fonction des valeurs des paramètres choisis.

Bien que nous ayons principalement restreint nos modèles à réutilisation indirecte à des modèles à 2 stocks, il faut noter que certains auteurs considèrent des systèmes plus complexes à multiples stocks (on parle alors de stocks ou d'échelons). C'est le cas de Mitra (2009) qui considère un modèle général à 3 échelons : un stock de produits retournés à remanufacturer et deux stocks de produits finis (1 dépôt et un distributeur). Deux situations sont alors envisagées **(i)** le cas où les demandes/retours sont déterministes **(ii)** et le cas où elles sont stochastiques Normales. Dans chacun des deux cas, une politique (simple) prédéterminée est appliquée, l'objectif étant de calculer dans chaque cas les paramètres optimaux de la politique associée qui minimisent le coût total.

DeCroix & Zipkin (2005) traitent également un modèle de stock à plusieurs échelons d'une unité d'assemblage avec flux inverses. Ils parviennent à déterminer les conditions sous lesquelles ce système peut se rapporter à un système d'assemblage équivalent résoluble et proposent deux heuristiques permettant de minimiser le coût

actualisé.

Il est à noter, enfin, que la coordination entre production et remanufacturing peut prendre différentes formes. Dobos & Richter (2006) considèrent un modèle déterministe de type EOQ (*Economic Order Quantity*, voir Dobos & Richter (2004) et Dobos & Richter (2006)) avec production/remanufacturing et rejet éventuel des produits retournés où une politique prédéterminée de GDS est appliquée. En minimisant le coût d'un tel système, les auteurs parviennent à montrer que la stratégie optimale n'est pas de combiner production et remanufacturing mais d'adopter une des deux *stratégies pures*, ce qui revient à satisfaire la demande : soit en ne produisant que du neuf, soit en n'utilisant que des produits retournés remanufacturés. Une étude similaire est menée par ces même auteurs Dobos & Richter (2004) sur un modèle avec coûts linéaires. Les auteurs aboutissent au même résultat.

La formulation EOQ sur des modèles avec approvisionnement et remanufacturing (réparation) avait déjà été présentée auparavant par Mabini *et al.* (1992) sur un modèle déterministe où ils déterminent les quantités (tailles du lot) à approvisionner et à réparer dans le cas mono et multi-produits tout en tenant compte d'une contrainte de coûts de rupture de stock.

2.2.2 Séparation ou partage des ressources ?

Tout comme pour les modèles à réutilisation directe, les travaux menés sur les modèles à réutilisation indirecte ne se restreignent pas à trouver la politique optimale et/ou paramètres optimaux d'une politique donnée de gestion des stocks. D'autres questions sont parfois soulevées en vue d'analyser la structure même de ces modèles. Par exemple, Francas & Minner (2009) tentent de configurer un système multi-produits avec production et remanufacturing où les demandes et retours de produits sont incertains. D'après leur étude numérique, et sous les hypothèses retenues, il est préférable de spécialiser 2 sites séparés, l'un pour la production l'autre pour le remanufacturing, lorsque les produits neufs et remanufacturés sont dédiés à des marchés distincts. Symétriquement, il semble plus avantageux de configurer un seul et unique site de production flexible si tous les produits sont destinés au même marché. Les auteurs finissent par étudier l'effet du taux de retours des produits et concluent qu'une augmentation des retours ne remet pas en cause les résultats obtenus. De la même manière, Teunter *et al.* (2008) montrent, sur un modèle déterministe, que le fait d'avoir deux lignes séparées et dédiées, respectivement à la production et au remanufacturing, implique une baisse significative des coûts de stockage et du coût total par rapport à une seule ligne qui réaliserait les deux types d'opérations. Cette réduction est induite par une baisse des taux de production et une plus grande flexibilité dans la planification des opérations.

Par ailleurs, la question de la corrélation entre demande et retours de produits a été soulevée par Mukhopadhyay & Setoputro (2005) tout comme ils l'avaient fait auparavant dans Mukhopadhyay & Setoputro (2004). Ils considèrent un modèle de fabrication à la commande où les produits vendus peuvent être renvoyés et remboursés un certain montant r . Les auteurs mettent en avant le fait que permettre

des retours de produits (remboursés en l'occurrence) a une influence certaine sur la demande des clients. Ainsi, et en utilisant la modularité du produit fabriqué, une politique optimale de retours (montant r optimal) qui maximise le profit est proposée.

2.2.3 Différenciation des produits neufs et remanufacturés

Inderfurth (2004) propose un modèle dans lequel les produits neufs et remanufacturés doivent être différenciés. Ainsi, les produits neufs et remanufacturés (qualité inférieure, moindre prix) sont dédiés à deux marchés distincts. Il est toutefois possible de substituer, en cas de rupture, un produit remanufacturé par un produit neuf. Dans ce contexte, une politique optimale de coordination de la production et du remanufacturing est présentée en vue de maximiser le profit. Par ailleurs, il est montré que cette politique optimale change en fonction de la relation entre le délai de production et le délai de remanufacturing.

L'une des originalités d'Inderfurth (2004) est de distinguer plusieurs classes de produits. Cette idée est également traitée, de manière plus générale, par Kleber *et al.* (2002) qui se demandent s'il faut stocker l'excès de produits retournés pour des demandes futures sur un modèle où plusieurs classes de demandes (marchés différents) peuvent survenir en même temps, et quelle demande satisfaire avec les produits retournés. Ils déterminent ainsi une politique optimale de production/remanufacturing/rejet en vue de minimiser le coût linéaire du système considéré.

2.2.4 Coordination de la production, du remanufacturing et de l'option de rejet

D'autres modèles de gestion des stocks avec flux inverses s'intéressent à coordonner la production, le remanufacturing et le rejet des produits retournés. C'est le cas de van der Laan *et al.* (1996a) où les auteurs considèrent la possibilité de rejeter des produits retournés et, par conséquent, ne pas leur donner accès au remanufacturing.

Sur ce modèle, avec demande et retours stochastiques, trois stratégies (le terme stratégie est employé au lieu de politique) d'approvisionnement/gestion des stocks sont comparées :

- La stratégie (s_p, Q_p, s_d, N) : qui consiste à approvisionner un ordre de quantité $Q_p \geq 1$ dès que le niveau de stock (inventory position) descend sous le seuil $(s_p + 1)$ ($s_p \geq 0$). Aussi, et dès que le niveau de stock est égal à s_d ou que le nombre de produits en attente de remanufacturing est égal à N , alors tous les produits retournés seront rejetés.
- La stratégie (s_p, Q_p, s_d) : qui est équivalente à la stratégie (s_p, Q_p, s_d, N) lorsque $N = \infty$.
- La stratégie (s_p, Q_p, N) : qui est équivalente à la stratégie (s_p, Q_p, s_d, N) lorsque $s_d = \infty$.

Les auteurs déterminent pour chacune la formule du coût total correspondant et concluent que la stratégie (s_p, Q_p, s_d, N) engendre une réduction raisonnable du coût

comparée aux deux autres stratégies.

Par la suite, van der Laan & Salomon (1997) analysent deux politiques (stratégies) en vue de coordonner la production, le remanufacturing et le rejet des produits retournés sur un modèle avec demande/retours stochastiques. Ce modèle comporte deux stocks et, par conséquent, deux niveaux de stock qui sont le niveau de produits retournés (à remanufacturer) et le niveau de stock (inventory position) de pièces finies défini comme étant : Stock de produits finis - Demandes mises en attente + Nombre produits en cours de production + Nombre produits en cours de remanufacturing.

Les deux politiques considérées sont appelées *PUSH-disposal strategy* et *PULL-disposal strategy* et comportent un avantage certain, comparées à certaines autres politiques utilisées dans la littérature, qui est qu'elles sont effectivement appliquées/envisagées par une grande entreprise allemande de fabrication de photocopieuses (van der Laan & Salomon, 1997), c'est pourquoi nous en détaillerons le contenu. Les deux politiques sont des extensions de celles de van der Laan *et al.* (1999) présentées au début de cette section et peuvent être décrites comme suit :

- (s_m, Q_m, Q_r, s_d) *PUSH-disposal strategy* : elle consiste à pousser (*to push*) les produits vers le remanufacturing et si les stocks de produits neufs + stocks produits remanufacturés ne suffisent pas à satisfaire la demande, alors un ordre de fabrication est lancé. De manière plus précise, cette politique consiste à remanufacturer dès que le stock de produits retournés est exactement égal à Q_r . La production, par lots de Q_m unités, commence dès que le niveau de stock (inventory position) atteint, sous l'effet de la demande, un niveau s_m . Les produits retournés quant à eux sont rejetés lorsque le niveau de stock devient trop important sous l'effet de la production et du remanufacturing et qu'il atteint (ou dépasse) un niveau s_d . Cette politique fait que le stock de produits retournés ne dépasse pas $Q_r - 1$ et que le niveau de stock est borné par la valeur $s_d + Q_r - 1$ (voir figure 2.6).
- $(s_m, Q_m, s_r, S_r, s_d)$ *PULL-disposal strategy* : le processus de remanufacturing est tiré (*pulled*) uniquement si besoin il y a sous l'effet de la demande. Si les pièces remanufacturées ne suffisent pas à satisfaire la demande alors un ordre de production est lancé. Autrement dit, il s'agira d'entamer le remanufacturing dès que le niveau de stock est inférieur ou égal à la valeur s_r et que le stock de produits retournés contient suffisamment de pièces pour élever le niveau de stock à un niveau S_r (voir figure 2.6). La production, par lots de Q_m unités, commence lorsque le niveau de stock descend à un niveau $s_m \leq s_r$. Les produits retournés commencent à être rejetés dès que le niveau de stock des produits retournés est égal au niveau de rejet s_d .
- l'une des principales différences entre la *PUSH-disposal strategy* et la *PULL-disposal strategy* est que les décisions de remanufacturing et de rejet ne dépendent pas (forcément) du même niveau de stock (van der Laan & Salomon, 1997).
- les politiques *PUSH-disposal strategy* et *PULL-disposal strategy* ont en fait été adaptées de deux autres politiques (sans option de rejet) qui sont les politiques

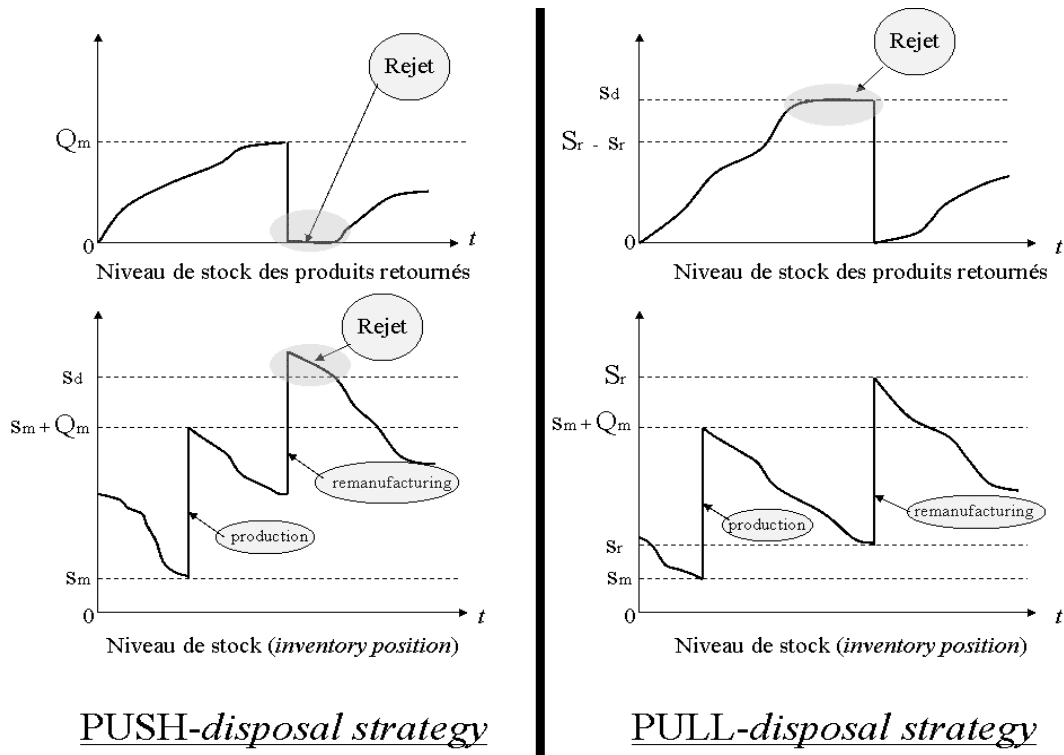


Figure 2.6 – *PUSH-disposal strategy* et *PULL-disposal strategy*, Van der Laan et Salomon (1997)

PUSH-strategy et *PULL-strategy* (van der Laan *et al.*, 1999) et auxquelles elle sont comparées au cours de cette étude en vue d'évaluer la pertinence de l'option de rejet. Il est à noter que pour $s_d = \infty$, la *PUSH-disposal strategy* est équivalente à la *PUSH strategy* sans rejet et que pour, $s_d = \infty$, la *PULL-disposal strategy* est équivalente à la *PULL strategy* sans rejet.

Le principal résultat de cette étude est que le fait de considérer une option de rejet réduit la variabilité des niveaux de stock et, par conséquent, le coût total du système comparé à l'application de ces mêmes politiques *PUSH* et *PULL* sans option de rejet.

Concernant le choix entre *PUSH-disposal strategy* et *PULL-disposal strategy*, il semble dépendre de la relation de dominance entre les coûts des deux stocks (stocks de produits neufs et retournés). Ainsi, si le coût de stockage des produits retournés à remanufacturer est suffisamment faible comparé à celui des produits neufs, alors la *PULL-disposal strategy* est favorable, et vice-versa.

S'agissant toujours de coordonner la production, le remanufacturing et le rejet des produits retournés, Dobos (2003) propose une politique optimale sur un modèle avec production/remanufacturing et option de rejet, tous les délais/processus étant déterministes. En se basant sur les variables de décision (niveau de stock des produits neufs, celui des produits retournés et les taux de production/remanufacturing/rejet

déterministes), la politique développée permet de minimiser le coût quadratique de ce modèle. Par ailleurs, et suivant cette politique optimale, l'auteur constate que les activités de production et de rejet sont dominantes alors que l'activité de remanufacturing est une activité résiduelle. Minner & Kleber (2001) utilisent le principe de « Pontryagin's Maximum » pour trouver la politique optimale de production/remanufacturing/rejet sur un modèle où les demandes et les retours sont déterministes mais dynamiques et où la mise en attente des demandes n'est pas autorisée. La méthode d'optimisation utilisée nécessite la linéarité des différents coûts considérés. Suivant cette méthode, la coordination optimale des opérations ainsi que les prises de décisions dépendent des deux niveaux de stock : stock produits finis et stock produits retournés. Un modèle plus général est proposé par Takahashi *et al.* (2007) où les nombreux échelons (au nombre de trois) sont alimentés par : la fabrication de produits finis, l'achat de matières premières, la fabrication de composants et la décomposition des produits retournés. Sur ce modèle, deux politiques de production/achat/remanufacturing/rejet sont proposées et comparées. La seconde politique semble engendrer moins de stocks (coûts inférieurs) mais ce résultat reste pondéré par le fait qu'aucun coût fixe de lancement (set up) n'ait été considéré.

Au delà de la recherche/évaluation d'une politique de gestion des stocks, certains travaux proposent, comme pour les modèles à réutilisation directe, des études annexes permettant une vision plus précise des modèles étudiés. Inderfuth (1997), par exemple, étudie un modèle stochastique sur lequel il parvient à trouver les règles optimales de production, remanufacturing et rejet qui minimisent le coût actualisé. L'auteur montre surtout que la complexité de ces règles optimales de décision dépend des délais d'approvisionnement / remanufacturing et de la relation entre ces délais.

Inderfuth & van der Laan (2001) appliquent une politique *PUSH disposal* (s_m, Q_m, Q_r, S_d) sur un modèle de stock avec production, remanufacturing et rejet éventuel des produits retournés, demande et retours de produits stochastiques. Ils montrent que la performance de la politique appliquée peut être considérablement améliorée en établissant une meilleure définition du niveau de stock (inventory position). Selon les auteurs, l'établissement d'une définition appropriée du niveau de stock peut se faire en introduisant le délai de remanufacturing en tant que variable de décision du système.

2.2.5 Évaluation de l'option de rejet

S'agissant de modèles de stocks avec rejet éventuel des produits retournés, certains travaux ont été menés en vue, justement, d'analyser la pertinence ou l'importance de cette option de rejet. Ce travail a été mené par van der Laan & Salomon (1997) comme nous l'avons vu au début de cette section. De la même manière, Teunter & Vlachos (2002) se demandent s'il est nécessaire d'inclure une option de rejet sur un modèle à temps discret avec demande et retours de produits stochastiques. En appliquant une politique *PULL* modifiée (et appliquée au cas discret), ils constatent grâce à la simulation que, en général, il n'est pas nécessaire d'avoir une option de

rejet des produits retournés. La pertinence ou l'utilité de l'option de rejet a également été traitée sur d'autres modèles à réutilisation directe (Ouyang & Zhu, 2008; Pinçe *et al.*, 2008; van der Laan *et al.*, 1996b).

Pour clore cet état de l'art relatif aux modèles à réutilisation indirecte, parlons du travail de Teunter *et al.* (2000) qui mettent en avant l'importance d'une définition pertinente des coûts de stockage, tout comme van der Laan (2003) sur son modèle mono échelon (section 2.1.3). Les auteurs comparent 5 méthodes permettant d'établir les coûts de stockage des produits neufs et retournés sur un modèle avec demande et retours stochastiques sur lequel une politique *PULL* est appliquée. Ils constatent ainsi qu'en vue de minimiser le DFC (Discounted Cash Flow), il est nécessaire d'inclure, de façon pertinente, le coût d'opportunité (actualisation) dans le coût de stockage des produits retournés.

2.3 Opportunités de recherche

Un état de l'art bibliographique vient d'être présenté relativement aux nombreux travaux qui ont été menés sur des modèles de gestion des stocks avec flux inverses. Il est possible de résumer cet état de l'art comme suit :

- Considérer des modèles de gestion des stocks à réutilisation directe et indirecte ;
- Décrire, voire expliquer, les politiques de gestion des stocks proposées sur ces modèles (application de politiques existantes ou recherche de politiques optimales) ;
- Introduire les études, autres que celles liées à la recherche d'une politique performante, menées par les auteurs sur ces modèles telles que : l'évaluation d'une option de rejet, la corrélation demande/retours, le partage des ressources, etc.

Un bilan global de ces travaux résumant les modélisations choisies, les hypothèses, les caractéristiques et les études menées est fourni dans le tableau 2.2 suivant ¹.

1. Les cases vides du tableau 2.2 correspondent soit à une information (hypothèse) indisponible dans l'article en question, soit à une conséquence des hypothèses effectuées : par exemple, un modèle sans remanufacturing n'aura pas de délai de remanufacturing (case vide).

Auteurs	Remanufacturing	Rejet	Réutilisation directe	Réutilisation indirecte	Demande	Perdue	Mise en attente	Corrélation	Retours	Délai Appro	Délai remanufacturing	Développer une politique optimale	Appliquer / évaluer une politique existante
Buchanan & Abad (1998)			X		Stochastique		X	Oui	Stochastique	Instantané	Déterministe	X	
Cohen <i>et al.</i> (1980)	X	X	X		Stochastique	X		Non	Déterministe	Instantané	Déterministe	X	
DeCroix <i>et al.</i> (2005)	X		X	X	Stochastique		X	Non	Stochastique	Déterministe	Instantané	X	X
DeCroix & Zipkin (2005)	X			X	Stochastique		X	Non	Stochastique	Déterministe	Instantané		
Dobos (2003)	X	X		X	Déterministe			Non	Déterministe	Déterministe	Déterministe	X	
Dobos & Richter (2006)	X	X		X	Déterministe		X	Non	Déterministe	Déterministe	Déterministe		X
Dobos & Richter (2004)	X	X		X	Déterministe		X	Non	Déterministe	Déterministe	Déterministe		X
Flapper <i>et al.</i> (2002)			X		Markovienne		X	Non	Markovien	Déterministe			X
Fleischmann & Kuik (2003)	X		X		Stochastique		X	Oui	Stochastique	Déterministe	Déterministe		X
Francas & Minner (2009)	X			X	Stochastique	X		Non	Stochastique			X	
Gayon (2007)			X		Stochastique		X	Non	Stochastique	Stochastique			
Heyman (1977)	X	X	X		Stochastique		X	Non	Stochastique	Instantané	Instantané	X	
Inderfuth (1997)	X	X		X	Stochastique		X	Non	Stochastique	Déterministe	Déterministe	X	
Inderfurth (2004)	X	X		X	Stochastique		X	Non	Stochastique	Déterministe	Déterministe	X	
Inderfurth & van der Laan (2001)	X	X		X	Markovienne		X	Non	Markovien	Déterministe	Déterministe		
Kelle & Silver (1989)			X		Stochastique		X	Non	Stochastique	Déterministe			X
Kiesmüller (2003)	X			X	Stochastique		X	Non	Stochastique	Déterministe	Déterministe		X
Kiesmüller & van der Laan (2001)	X	X	X		Stochastique		X	Oui	Stochastique				
Kleber <i>et al.</i> (2002)	X	X		X	Déterministe			Non	Déterministe	Instantané	Instantané	X	
Mabini <i>et al.</i> (1992)	X		X		Déterministe		X	Non	Déterministe	Déterministe	Déterministe		X
Mahadevan <i>et al.</i> (2003)	X			X	Markovienne		X	Non	Markovien	Déterministe	Déterministe		X
Minner & Kleber (2001)	X	X		X	Déterministe			Non	Déterministe	Déterministe	Déterministe	X	

Auteurs	Remanufacturing	Rejet	Réutilisation directe	Réutilisation indirecte	Demande	Perdue	Mise en attente	Corrélation	Retours	Délai Appro	Délai remanufacturing	Développer une politique optimale	Appliquer / évaluer une politique existante
Mitra (2009)	X			X	Déterministe Stochastique		X	Non	Déterministe stochastique	Déterministe	Instantané		X
Mostard <i>et al.</i> (2005)			X		Stochastique	X		Oui	Stochastique	Déterministe			X
Mukhopadhyay & Setoputro (2004)					Déterministe			Oui	Déterministe				X
Mukhopadhyay & Setoputro (2005)				X	Déterministe			Oui				X	
Muckstadt & Isaac (1981)	X		X		Stochastique	X	X	Non	Stochastique	Déterministe	Non nul		X
Ouyang & Zhu (2008)	X	X	X		Markovienne		X	Non	Markovien	Déterministe	Instantané		X
Pinçe <i>et al.</i> (2008)		X	X		Stochastique		X	Non	Stochastique	Déterministe	Instantané		X
Takahashi <i>et al.</i> (2007)	X	X		X	Markovienne	X		Non	Markovien	Markovien	Markovien		X
Tang & Grubbström (2005)	X				Déterministe		X	Non	Déterministe	Instantané / Stochastique	Instantané / Stochastique		X
Teunter & Vlachos (2002)	X	X		X	Markovienne / Normal		X	Non	Markovien /Normal	Déterministe	Déterministe		
Teunter <i>et al.</i> (2000)	X	X		X	Markovienne		X	Non	Markovien	Déterministe	Déterministe		
Teunter <i>et al.</i> (2008)	X			X	Déterministe			Non	Déterministe	Déterministe	Déterministe		
van der Laan <i>et al.</i> (1996b)	X	X			Markovienne		X	No	Markovian	Déterministe	Stochastique		X
van der Laan (2003)	X		X		Markovienne	X		Non	Markovien	instantané	Instantané		
van der Laan <i>et al.</i> (1996a)	X	X	X		Markovienne		X	Non	Markovien	Déterministe	Markovien		X
van der Laan & Salomon (1997)	X	X		X	Stochastique		X	Oui	Stochastique	Déterministe	Déterministe		X
van der Laan <i>et al.</i> (1999)	X			X	Markovienne		X	Non	Markovien	Stochastique	Stochastique		
Yuan & Cheung (1998)			X		Markovienne		X	Oui	Exponentiel	Instantané			X

Tableau 2.2 – Bilan bibliographique

L'analyse du bilan de l'état de l'art fournie par le tableau 2.2 nous permet de remarquer que :

- Une grande majorité des modèles répertoriés (32 sur 40) considèrent des délais d'approvisionnement déterministes sans tenir compte des limitations de capacités d'approvisionnement/production. Nous pensons que l'aspect fini de la capacité d'approvisionnement est une contrainte forte d'un système de production, particulièrement en cas de demandes importantes, et qui peut accroître l'importance des flux inverses qui peuvent combler le surplus de demande.
- Sur l'ensemble des articles pour lesquels des politiques optimales ont été développées, seuls 7 sont avec des hypothèses stochastiques. Pourtant, 30 modèles sur 40 présentés dans les tableaux sont des modèles stochastiques. La recherche d'une politique optimale sur les modèles stochastiques peut alors sembler ardue. De notre point de vue, nous pensons préférable de tenir compte des aspects stochastiques dans nos modèles (sections 1.7 et 2.4). Nous pensons, en particulier, qu'il est plausible de considérer que les demandes, ainsi que les retours de produits, arrivent de manière aléatoire.
- Une grande majorité des articles (plus de la moitié) s'applique à utiliser des politiques prédéterminées et d'y évaluer les paramètres et/ou les performances. Seul un quart des articles tente de trouver une politique optimale.
- 18 des modèles répertoriés sont des modèles à réutilisation directe, soit près de la moitié des articles. Aussi, nous pensons que dans une démarche de recherche de l'optimalité, il est préférable de considérer en premier lieu des modèles à réutilisation directe comportant moins de paramètres.
- L'étude de la corrélation demande/retours, ainsi que l'étude de l'intérêt de l'option de rejet (5 articles 40) semblent être des questions intéressantes mais assez peu étudiées. Pourtant, les produits retournés sont en fait des produits qui ont été vendus auparavant et qui retournent (après un certain délai) au système de production. Faut-il négliger cette relation entre demande et retours ? est ce que le délai de retour a un impact sur la gestion du système considéré ? est ce que le fait de pouvoir rejeter les produits retournés, moyennant un certain coût, peut s'avérer bénéfique pour des modèles stochastiques tels que les nôtres ?

Étant donné les remarques qui viennent d'être faites, il est possible de décrire précisément le positionnement ainsi que les contributions apportées lors de ce travail de thèse comme suit :

Recherche de politiques optimales

- Nous étudions plusieurs modèles de gestion des stocks avec flux inverses. La modélisation choisie pour nos modèles est décrite ci-dessous en section 2.4. Néanmoins, il faut préciser que les modèles que nous étudions sont des modèles de type *Make-to-stock Queue*. Les modèles *Make-to-stock Queues* sont caractérisés par des capacités de production limitées. Nous nous distinguons ainsi des travaux généralement menés qui ne prennent pas cette contrainte en considération. Nous introduisons les *Make-to-stock Queues* à la fin de ce chapitre, avant d'entamer l'étude de nos différents modèles.
- Sur ces modèles, nous rechercherons principalement les *politiques optimales* de gestion des stocks. Le bilan bibliographique montre bien que ce choix constitue une réelle contribution comparé aux études réalisées.
- Nous considérons des modèles (Make-to-stock Queues) stochastiques avec demande et retours poissonniens (voire section 2.4). Cette hypothèse semble d'ailleurs souvent adoptée par les différents auteurs. De plus, les modèles étudiés seront des modèles à réutilisation directe. La revue de littérature montre que la recherche de l'optimalité s'avère difficile lorsque une étape de remanufacturing, des produits retournés, est nécessaire.

Études complémentaires

La seconde partie de nos contributions réside dans les études annexes menées sur nos différents modèles :

- Étude de la corrélation entre demande et retours de produits, en vue de compléter, à notre niveau, les quelques études préalablement menées. Nous voulons ainsi vérifier s'il est nécessaire de prendre en compte le fait que les retours de produits proviennent - à la base - de demandes clients préalablement satisfaites.
- Étude du délai de retour des produits sur les performances du système. Nous avons remarqué que certaines études ont été menées concernant l'influence des délais de production et de remanufacturing. De notre côté, il nous a semblé intéressant d'investiguer l'effet du délai selon lequel un produit est retourné, après qu'il ait été vendu, sur les performances du système en terme de coût. Aussi, est-il possible de gérer le système de la même-façon si les délais de retours de produits sont très courts ou très longs ?
- Étude de l'option de rejet des produits retournés, là aussi pour contribuer, à notre niveau, à la compréhension des modèles avec flux inverses. Le rejet des produits retournés est un choix qu'il faut, peut-être, donner au gestionnaire de production. Ces rejets peuvent cependant être accompagnés d'un certain coût. Nous rappelons que le terme « rejet » n'implique pas forcément la mise au rebut des produits retournés (voir tableau 2.1), d'autres options peuvent exister.
- Étude d'une information avancée sur les retours (*ARI* pour *Advance return*

information) (Zerhouni *et al.*, 2009). Il n'existe pas, à notre connaissance, de travaux menés à ce sujet. Cette étude fera l'objet du Chapitre 6, dans lequel nous tenterons de savoir si le fait d'avoir des informations avancées sur les retours est bénéfique au système considéré.

Nous avons donc mis en avant les contributions que nous comptons apporter par ce travail de thèse comme étant l'étude de modèles de stocks avec flux inverses, en vue d'y rechercher des politiques optimales en plus de certaines études complémentaires. Nous présentons dans ce qui suit, en section 2.4, la modélisation générale choisie pour nos modèles, avant de présenter en section 2.5 les modèles en question.

2.4 Modélisation adoptée et hypothèses

Parmi les contributions apportées lors de ce travail de thèse, nous avons choisi de rechercher des politiques optimales sur des modèles de stocks avec flux inverses. Afin d'étudier ces différents modèles, il est nécessaire de définir clairement la modélisation choisie, les hypothèses admises ainsi que leur justification. Voici globalement la modélisation de base adoptée pour nos modèles :

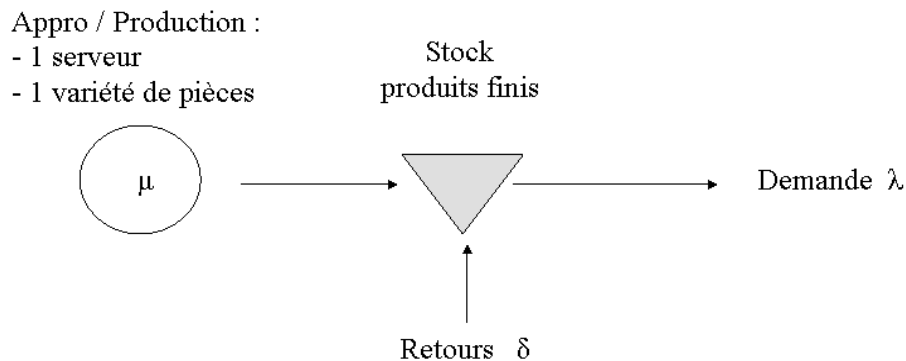


Figure 2.7 – Modélisation adoptée : les bases

Les modèles : Considérer cinq modèles de système de production, comme celui présenté ci-dessus (figure 2.7). Des précisions seront apportées au fur et à mesure de l'étude des différents modèles. Notons que la représentation de nos modèles selon la figure 2.7 correspond à une représentation $M/M/1$ make-to-stock-queue décrite dans ce qui suit.

Une seule source de production : Sur chaque modèle, la source de production est représentée par une seule machine globale (1 seul serveur).

Une production unitaire : Bien que le seul, et unique, serveur ou machine de production représente l'ensemble du système de production, nous considérons

que la production se fait de manière unitaire, par lots de 1 pièce, toujours en vue de simplifier le problème.

Une production aléatoire exponentielle : Considérer que la production (unitaire) des pièces se fait selon un processus exponentiel de taux μ . Cette hypothèse permettra d'utiliser certains outils mathématiques spécifiques que sont les chaînes de Markov pour trouver la politique optimale. Le fait de considérer une production aléatoire peut se justifier, d'une part, par le fait que nous modélisons l'ensemble du système de production de façon agrégée par un seul serveur. Ainsi ce serveur inclut toutes les interactions d'un système de production (pannes, rupture de stocks, congés, arrêts de production) qui font que le taux de production n'est pas constant dans le temps. D'autre part, l'hypothèse d'une production aléatoire (exponentielle) nous permettra d'utiliser les chaînes de Markov.

Une Demande aléatoire poissonnienne : Considérer une demande aléatoire de produits, on parlera également de demande stochastique. Cette hypothèse est raisonnable dans le contexte actuel des marchés incertains et fortement concurrentiels. De plus cette hypothèse semble souvent adoptée par les différents auteurs.

La demande aléatoire sera représentée par un processus de Poisson de taux λ . Ce choix peut se justifier par le fait que, par ce processus, l'occurrence d'une demande est indépendante des demandes faites par d'autres clients auparavant, ce qui semble assez plausible. En effet, le processus de Poisson est un processus sans mémoire pour lequel l'occurrence d'un événement ne dépend pas des événements passés.

Des retours aléatoires poissonniens : Considérer des flux inverses aléatoires en quantité. On parlera alors de retours de produits stochastiques. L'aléa relatif aux flux inverses a été décrit en section 1.3.3. Il faut cependant noter que l'incertitude liée à la qualité des produits retournés sera précisée, s'il y a lieu, au fur et à mesure de l'étude des différents modèles.

Les retours aléatoires des produits seront également représentés, la plus part du temps, par un processus de Poisson de taux δ pour des raisons similaires à celles invoquées pour la demande.

Retours à réutilisation directe : Les modèles que nous étudions dans le cadre de cette thèse sont des modèles à réutilisation directe (voir section 2.2).

Le choix de cette modélisation peut être, au moins en partie, justifié par l'étude bibliographique qui vient d'être menée et qui montre que les hypothèses que nous faisons sont généralement admises et adoptées dans la littérature.

De plus, cette modélisation ainsi que ces hypothèses seront complétées et précisées lors de la présentation de nos différents modèles.

$M/M/1$ Make-to-stock Queue

Suite aux hypothèses que nous venons de présenter, soulignons le fait que les modèles que nous allons considérer sont tous des modèles de type $M/M/1$ *Make-to-stock Queue avec retours de produits*. Ce point a d'ailleurs été mis en avant en section 2.3 où l'on a expliqué que les $M/M/1$ *Make-to-stock Queues* permettent de modéliser des systèmes de production à capacité finie. Contrainte que nous estimons importante.

Afin de compléter et de préciser notre modélisation, nous revenons donc de manière un peu plus précise sur cette notion de $M/M/1$ *Make-to-stock Queue*.

La $M/M/1$ *Make-to-stock Queue* peut être considérée comme une adaptation ou une extension de la file $M/M/1$ simple aux systèmes de production. Elle est une représentation (modèle) d'un système dans lequel la production se fait par *anticipation* (voir figure 2.7). La production (exponentielle de taux μ) alimente un stock de produits finis. La demande pour ces produits arrive selon un processus de Poisson de taux λ . Lorsqu'une demande ne peut être satisfaite (stock nul), elle sera perdue, nous parlerons alors d'une vente perdue (Lost sale).

Plusieurs questions peuvent être traitées sur les modèles de type $M/M/1$ *Make-to-stock Queue*. Les questions principales restent cependant la recherche de la politique optimale ainsi que des paramètres optimaux de cette politique. Ainsi, il est généralement montré (voir Buzacott & Shanthikumar (1993)) que la politique *Base-stock* de production/ approvisionnement sur seuil est une politique optimale sur un modèle $M/M/1$ *Make-to-stock Queue* sans retours de produits, optimale au sens de minimisation du coût total. La politique *Base-stock* a pour paramètre S appelé *Base-stock level* et consiste à produire (réapprovisionner) tant que le niveau de stock est strictement inférieur à S .

La détermination de la politique optimale et le calcul des paramètres optimaux qui s'y rapportent sur des $M/M/1$ *Make-to-stock Queues* requiert l'utilisation d'outils mathématiques spécifiques tels que les *chaînes de Markov* et les *Processus de Decision Markoviens* (ou *MDP* pour *Markov Decision Processes*). Ces outils sont également ceux que nous allons principalement utiliser dans l'étude de nos modèles. L'utilisation de ces outils sera ainsi explicitée au fur et à mesure de l'étude de nos différents modèles.

2.5 Modèles étudiés

La description de l'état de l'art a permis de mieux positionner notre travail, de cibler les gaps ou questions peu abordées dans la littérature et ainsi de mettre en avant l'apport de ce travail de thèse. Par la suite, la modélisation adoptée lors de nos travaux a été présentée. Cela étant fait, il est à présent possible d'introduire les modèles qui ont été étudiés lors de nos travaux.

- Modèle 1 de base : avec retours de produits indépendants de la demande, sur lequel sera recherchée la politique optimale (Chapitre 3).

- Modèles 2 et 3 corrélés : avec retours de produits corrélés à la demande et grâce auxquels pourront être étudiés l'effet de la corrélation demande/retours ainsi que l'effet du délai de retour d'un produit sur les performances du système (Chapitre 4).
- Modèle 4 avec option de rejet : où sera spécifiée la politique optimale ainsi que la pertinence de l'option de rejet en le comparant au modèle de base (Chapitre 5).
- Modèle 5 avec information avancée sur les retours (*ARI* ou *Advance return information*) (Chapitre 6).

Chacun des modèles introduits ci-dessus fait l'objet d'un chapitre de cette thèse selon le plan du document décrit en introduction générale.

Dans ce qui suit sont regroupées les principales notations utilisées dans nos modèles :

$X(t)$	=	Niveau de stock à l'instant t
x	=	niveau de stock (produits neufs et retournés) à l'instant $t = 0$
y	=	nombre de produits en cours de retours à l'instant $t = 0$
μ	=	taux de la loi exponentielle selon laquelle sont fabriqués les produits
λ	=	taux du processus de Poisson selon lequel arrive la demande des clients
δ	=	taux du processus de Poisson selon lequel arrive les retours de produits.
γ	=	taux du délai (exponentiel) de retour d'un produit.
p (q)	=	probabilité qu'une demande satisfaite soit (ne soit pas) retournée
c_h	=	coût de possession d'une unité de stock par unité de temps
c_p	=	coût de production unitaire
c_l	=	coût unitaire de vente perdue
c_r	=	coût unitaire de retour de produit
α	=	taux d'actualisation

Chapitre 3

Modèle avec retours de produits indépendants de la demande

Le premier modèle que nous avons étudié est un modèle simple avec retours de produits indépendants de la demande. Ce modèle a été étudié au préalable par Gayon (2007) dans le cas back-orders alors que nous avons choisi d'étendre ces travaux au cas lost-sales. Ce modèle constitue la base de nos travaux et sera désigné dans le suite de ce document par le Modèle 1.

Nous commençons, en section 3.1, par décrire le modèle et les hypothèses qui y sont faites avant d'introduire la formule du coût total actualisé correspondante. L'expression optimale de ce coût est obtenue par un processus dit d'uniformisation décrit en section 3.2. La formule qui résulte de ce processus, permettant d'obtenir le coût optimal, est présentée en section 3.3. Par la suite, nous caractériserons la politique optimale minimisant le coût de notre modèle en section 3.4. Notons que tous les coûts considérés lors de l'étude de ce modèle sont des coûts actualisés. Une extension au cas du coût moyen est présentée en section 3.5. Aucune étude numérique n'est présentée dans ce chapitre sur ce modèle, mais il sera utilisé lors des chapitres 4 et 5 dans diverses études numériques comparatives.

3.1 Description du modèle et hypothèses

Considérons une $M/M/1$ make-to-stock queue produisant une seule catégorie de produits (1 seul produit fabriqué par lots de 1 unité). Le producteur a la possibilité d'arrêter et de reprendre la production à n'importe quel moment. Ce premier modèle est représenté en figure 3.1 et les hypothèses qui y sont faites sont les suivantes :

- Le délai de production est exponentiellement distribué de moyenne $1/\mu$;
- Chaque pièce produite engendre un coût de production c_p par unité de temps ;
- Les pièces produites sont placées en stock où elles induisent un coût de stockage c_h par pièce par unité de temps ;
- La demande, pour ces pièces en stock, arrive selon un processus aléatoire qui est un processus de Poisson de taux λ ;
- Une demande qui ne peut être immédiatement satisfaite (stock nul) est alors perdue et est accompagnée d'un coût de vente perdue (*Lost sale cost*) qui est

de c_l par demande perdue. Ce coût comprend les pertes des marges et profits, la dégradation de l'image de marque de l'entreprise, diverses pénalités, etc.

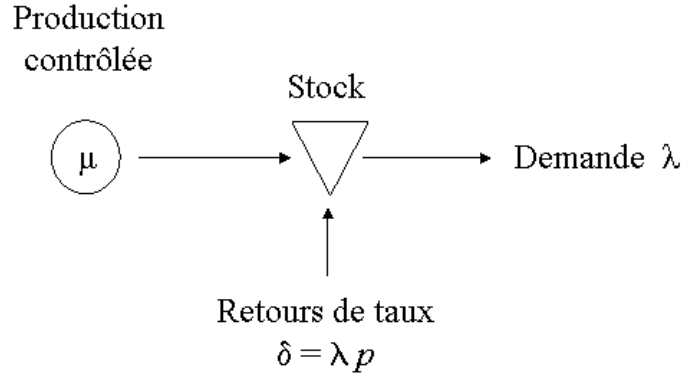


Figure 3.1 – Modèle 1 : demande et retours indépendants

Nous supposons également des retours de produits (Figure 3.1) qui peuvent être immédiatement mis en stock pour servir de nouvelles demandes. Le fait de considérer des retours directement (ou quasi-directement) réutilisables a été discuté en section 2.2. Cette hypothèse est, d'ailleurs, tout à fait plausible dans le cas de retours commerciaux de produits vendus sur internet par exemple.

Dans ce premier modèle, les retours de produits arrivent selon un processus de poisson de taux δ , *indépendant* du processus de demande.

Soit $p := \delta/\lambda$, la proportion des produits retournés si toutes les demandes étaient satisfaites, et soit $q := 1 - p$. Il est à noter que p est moins importante ($\leq$) que la proportion effective de produits retournés vu que certaines demandes ne seront probablement pas satisfaites (ventes perdues). En vue de garantir la stabilité du niveau de stock, nous supposons que $\delta < \lambda$ (ou de manière équivalente $0 \leq p < 1$).

Chaque retour de produit induit un coût de retour de c_r par pièce retournée. Ce coût englobe les coûts logistiques de retours (ré-emballage, manutention) ainsi que la perte de profit ou marge due à l'éventuel remboursement du client.

La relation entre le coût de retour, c_r , et de vente perdue, c_l , n'est pas très claire et dépend de la relation entre les coûts logistiques des retours, les coûts d'image/pénalités et les remboursements des clients. Il serait alors possible d'avoir soit $c_r < c_l$, $c_r = c_l$ ou $c_r > c_l$. Par exemple, il est possible d'avoir $c_r = c_l$ si le client, en retournant le produit, se voit rembourser exactement de la somme qu'il avait déboursée au moment de l'acquisition et que les coûts logistiques de retour sont nuls.

Voici un résumé des principales notations utilisées :

- μ = taux de service (production)
- λ = taux de demande
- δ = taux de retours des produits
- c_h = coût de stockage par pièce par unité de temps
- c_p = coût de production unitaire
- c_l = coût d'une vente perdue
- c_r = coût d'un retour de produit

Définition 2 Une politique π spécifie quand est-ce qu'il faut produire ou pas, et ce pour chaque état (niveau de stock) du système.

L'objectif du producteur est de trouver la politique optimale qui minimise le coût total actualisé du système à horizon infini. Notons que nous pouvions tout aussi bien nous intéresser à maximiser le profit ; d'ailleurs, nous montrons en Annexe A.1, sur ce modèle 1, une équivalence entre le problème de minimisation du coût que l'on considère dans ce chapitre et un problème de maximisation du profit.

L'objectif est donc de trouver la politique optimale qui minimise le coût total actualisé du système à horizon infini. Ce problème peut être modélisé par un Processus de Décision Markovien (Markov Decision Process) à temps continu comme nous le verrons dans la section suivante. Notons, par ailleurs, que nous restreignons notre analyse aux politiques stationnaires markoviennes étant donné qu'il existe toujours une politique optimale stationnaire markovienne comme montré par Puterman (1994).

S'agissant de trouver la politique qui minimise le coût, il est alors impératif d'établir l'expression du coût total. Pour ce faire, nous définissons les processus stochastiques suivants associés à une politique π quelconque et à une stock initial du système x :

- $W_x^\pi(t)$: nombre de produits ayant été fabriqués jusqu'à l'instant t
- $X_x^\pi(t)$: niveau de stock disponible (on hand stock) à l'instant t
- $Y_x^\pi(t)$: nombre de demandes clients n'ayant pas été satisfaites jusqu'à l'instant t
- $Z_x^\pi(t)$: nombre de produits ayant été retournés jusqu'à l'instant t

Il est alors possible de définir $v^\pi(x)$ qui est le coût total actualisé associé à une politique π et à un stock initial x . Si α est le taux d'actualisation ($\alpha > 0$), alors $v^\pi(x)$ est la somme des coûts de production, de stockage, de ventes perdues, et de retours¹ :

1. L'intégrale définissant $v^\pi(x)$ n'est pas une intégrale de Riemann traditionnelle mais une intégrale de Riemann-Stieltjes. Cette dernière permet de prendre en compte le fait que les fonctions $W_x^\pi(t)$, $X_x^\pi(t)$, $Y_x^\pi(t)$ et $Z_x^\pi(t)$ aient des points de discontinuité dans le temps sachant que $e^{-\alpha t}$ est une fonction continue. Pour plus d'informations, nous référons le lecteur aux ouvrages dédiés au calculs d'intégrales.

$$\begin{aligned}
v^\pi(x) = E \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} c_p dW_x^\pi(t) + \int_0^\infty e^{-\alpha t} c_h dX_x^\pi(t) + \int_0^\infty e^{-\alpha t} c_l dY_x^\pi(t) \right. \\
\left. + \int_0^\infty e^{-\alpha t} c_r dZ_x^\pi(t) \right] \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Nous cherchons à trouver la politique optimale que nous appellerons π^* minimisant le coût $v^\pi(x)$. Nous dénoterons $v^*(x) := v^{\pi^*}(x)$ la valeur optimale du coût :

$$v^*(x) = \min_{\pi} v^\pi(x)$$

Ce problème peut être modélisé comme un processus de décision markovien à temps continu (MDP pour Markov Decision Process). La formulation MDP de notre problème est décrite dans la section suivante (section 3.2). Nous verrons ainsi comment est obtenue l'expression finale de $v^*(x)$ sous forme de ce que l'on appelle des *équations d'optimalité*.

Partant de ces équations d'optimalité, il est possible de déterminer la politique optimale (section 3.4). Mais avant cela, il est utile d'expliquer la formulation MDP ainsi que le processus, dit d'uniformisation, qui ont permis d'obtenir ces équations.

3.2 Formulation MDP et uniformisation

Nous allons dans cette section montrer comment s'exprime, d'après les travaux de Puterman (1994), la formulation MDP de notre problème et comment, à partir de cette dernière, procéder à une uniformisation conduisant aux équations d'optimalité qui permettent, par la suite, de déterminer la politique optimale.

3.2.1 Description d'une formulation MDP

Sur notre modèle avec retours indépendants de produits, la formulation MDP consiste principalement à définir :

- S : l'ensemble des états du système (valeurs du niveau de stock).
- A : l'ensemble des actions a ou décisions à prendre (produire, ne pas produire) lorsque le système est dans un état s donné.
- $\beta(s, a)$: le taux tel que le temps de séjour dans un état $s \in S$, et sachant que l'action $a \in A$ est prise, suit une loi exponentielle de taux $\beta(s, a)$.
- Une période T est le temps séparant deux événements. Autrement dit, T représente le temps de séjour dans un état donné : lorsque le système est dans un état s et que l'action $a \in A$ est prise, un temps T s'écoule avant le passage à un autre état j . T est exponentiellement distribué de taux $\beta(s, a)$ (voir figure 3.3 dans ce qui suit en page 70).
- $r(s, a)$: l'espérance du coût sur une période T étant dans l'état s et sachant que l'action $a \in A$ est prise.

Soient également :

- π : la politique qui spécifie l'action a à prendre (produire ou pas) à tout moment (dans chaque état s).
- $C(X_s^\pi(t))$: le coût total par unité de temps lorsque le système est dans l'état $X_s^\pi(t)$ à l'instant t , sachant qu'il était initialement dans l'état s et que la politique π est appliquée.
- α : le taux d'actualisation avec $0 < \alpha < 1$.

Alors, le coût total du système défini précédemment (équation 3.1) peut être écrit de manière agrégée comme suit :

$$v_\alpha^\pi(s) = E_s^\pi \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} C(X_s^\pi(t)) dt \right]$$

Où $v_\alpha^\pi(s)$ représente donc le coût total actualisé à horizon infini lorsque le système est initialement dans l'état s .

La définition de ces différents ensembles d'états (S), d'actions (A), des différents taux ($\beta(s, a)$ et α) et des différents coûts ($r(s, a)$ et $v_\alpha^\pi(s)$) constitue une partie de la formulation MDP de notre problème initial.

L'objectif, partant de cette formulation MDP du problème, est alors de trouver une formule itérative du coût $v_\alpha^\pi(s)$ *optimal* dénoté v_α^* , permettant de déduire la politique optimale π^* qui minimise $v_\alpha^\pi(s)$. Nous nous limiterons dans nos recherches à l'ensemble des politiques stationnaires comme expliqué par Puterman (1994).

La recherche de cette formule itérative (qui constitue ce que l'on appelle les équations d'optimalité), et donc de π^* , devra alors passer par trois grandes étapes ou phases qui constituent le processus d'uniformisation décrit ci-dessous.

3.2.2 Processus d'uniformisation

Le processus d'uniformisation consiste à ramener un problème à temps continu (CTMDP²) à un problème à temps discret afin d'y appliquer les méthodes et algorithmes connus pour ce dernier.

Ce processus comprend trois phases comme montré dans la figure 3.2.

Le processus d'uniformisation expliqué ici est directement adapté des travaux de Puterman (1994).

Sur notre premier modèle décrit en section 3.1, nous allons appliquer les trois phases du processus d'uniformisation en vue d'obtenir les équations d'optimalité.

Nous avons défini δ tel que $\lambda p = \delta$. Nous remplacerons, systématiquement, dans la suite de nos développements λp par δ afin de bien distinguer les flux retournés de la demande et en vue de souligner l'indépendance des deux phénomènes.

Il est à noter que nous présentons en Annexe A une description générale et détaillée du processus d'uniformisation, pour notre modèle avec retours indépendants. Cette description est, sur certains points, plus détaillée que celle que nous verrons

2. Continuous Time Markov Decision Process

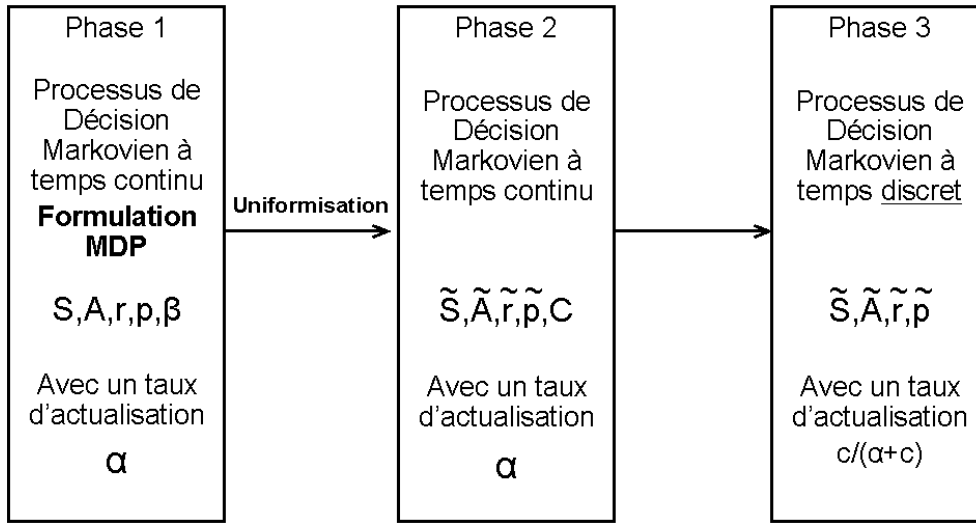


Figure 3.2 – Processus d'uniformisation (Puterman, 1994)

dans ce qui suit et permet ainsi une meilleure compréhension du processus d'uniformisation.

Phase 1 : Formulation MDP du modèle

La formulation MDP de notre modèle consiste à définir les éléments suivants :

Ensemble S des états possibles du stock x : $x \in \{0, 1, \dots, M\}$

Où M est un entier suffisamment grand tel que le niveau de stock s ne puisse jamais dépasser cette valeur³.

Ensemble A des décisions ou actions à prendre (produire ou ne pas produire) lorsque le système est dans un état s donné :

$$\begin{cases} a = 1 & \text{si production} \\ a = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lorsque $s = M$, une seule action est possible, l'action $a = 0$.

Autrement dit :

$$A = \begin{cases} \{0, 1\} & \text{si } s < M \\ \{0\} & \text{si } s = M \end{cases}$$

Distribution de $\beta(s, a)$ qui représente le taux du temps de séjour (exponentiel) dans un état $s \in S$ donné et sachant que l'action a est prise.

$$\beta(s, a) = \begin{cases} \lambda + \mu a + \delta & \text{si } s < M \\ \lambda & \text{si } s = M \text{ et donc } a = 0 \end{cases}$$

3. Dans le cas présent M peut tendre vers infini, mais il peut sembler réaliste de considérer M comme étant une valeur maximale (finie) du stock.

Probabilités de transition : $p(j | s, a) \forall a \in A \forall s \in S$ avec :

$p(j | s, a)$ = probabilité d'aller en j sachant que le système est initialement en s et que l'action a est prise.

Dans notre cas, ces probabilités de transitions sont données par :

$$\begin{aligned}
 Si \quad j = 0 \quad & \begin{cases} p(j+1 | j, a) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{a+\delta}{a+\delta} \\ p(j | j, a) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{a+\delta}{a+\delta} \\ p(j-1 | j, a) \text{ Non définie} \end{cases} \\
 Si \quad 0 < j < M \quad & \begin{cases} p(j+1 | j, a) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{a+\delta}{a+\delta} \\ p(j | j, a) = 0 \\ p(j-1 | j, a) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{a+\delta}{a+\delta} \end{cases} \\
 Si \quad j = M \quad & \begin{cases} p(j+1 | j, a) \text{ Non définie} \\ p(j | j, a) = 0 \\ p(j-1 | j, a) = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Structure des coûts : enfin, il faudra établir la valeur de $r(s, a)$ représentant l'espérance du coût sur une période T étant dans l'état s et sachant que l'action $a \in A$ est prise. La formule générale de $r(s, a)$ est donnée par :

$$r(s, a) = \frac{C(s, a)}{\alpha + \beta(s, a)} + \frac{\beta(s, a)}{\alpha + \beta(s, a)} K'(s, a) + K(s, a) \quad (3.2)$$

Le détail du calcul de $r(s, a)$ ainsi que la signification de ce coût sont donnés en Annexes A.2 et A.3. Cependant, nous allons à présent expliquer globalement les termes qui constituent $r(s, a)$.

Afin de décrire le coût $r(s, a)$, nous devons d'abord introduire la notion suivante :

Définition 3 Une période, appelée T , désigne le temps qui sépare deux occurrences d'événements.

Dans le cas présent, sachant que le système est dans l'état s et que l'action $a \in A$ est prise, alors T est exponentiellement distribué de taux $\beta(s, a)$ (figure 3.3).

Ainsi, le système restera dans l'état s un certain temps T avant la prochaine occurrence d'événement (avant de passer à un autre état j).

Il est alors possible de définir dans l'équation 3.2 :

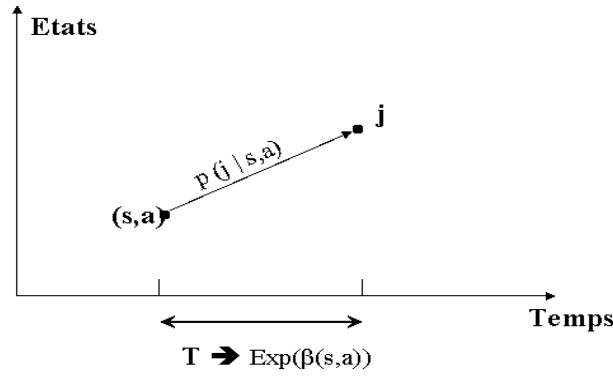


Figure 3.3 – Période T : temps séparant deux événements

- $K(s, a)$ qui est le coût en début de période T . Nous supposons que $K(s, a) = 0$ car nous considérons qu'aucun coût (de réglage ou autre) n'est engendré lorsque la décision a est prise.
- $C(s, a)$ qui est le coût généré pendant la période T sur un laps de temps dt ($dt \in [0, T]$) lorsqu'à l'instant 0 le système est dans l'état s et que l'action a est prise. Dans notre cas, $C(s, a) = c_h s$ qui est le coût de possession d'un stock s par unité de temps.
- $K'(s, a)$ qui est le coût instantané intervenant en fin de période T (à l'occurrence du prochain événement). Ce coût sera à définir selon les cas comme nous le verrons dans ce qui suit.

Finalement, $r(s, a)$ est donnée, selon les cas, par :

Si $0 < s < M$

$$r(s, 0) = \frac{1}{\alpha + \beta(s, 0)} [c_H s] + \frac{\beta(s, 0)}{\alpha + \beta(s, 0)} \left[\frac{\delta}{\lambda + \delta} c_r \right]$$

soit : $r(s, 0) = \frac{1}{\alpha + \beta(s, 0)} [c_H s + \delta c_r]$

Où c_r représente $K'(s, a)$ et $\delta/(\lambda + \delta)$ est la probabilité qu'un produit soit retourné à la fin de la période (le prochain événement est un retour de produit).

$$r(s, 1) = \frac{1}{\alpha + \beta(s, 1)} \left[c_H s + \frac{\delta}{\lambda + \mu + \delta} \beta(s, 1) c_r + \frac{\mu}{\lambda + \mu + \delta} \beta(s, 1) c_p \right]$$

Où $K'(s, a)$ est réparti entre le coût unitaire de production c_p et le coût de retour d'un produit c_r , $\mu/(\lambda + \mu + \delta)$ (resp. $\delta/(\lambda + \mu + \delta)$) est la probabilité de produire (resp.

est la probabilité qu'un produit soit retourné) à la fin de la période, à l'occurrence du prochain événement, et $\beta(s, 1) = \lambda + \mu + \delta$. Nous obtenons alors :

$$r(s, 1) = \frac{1}{\alpha + \beta(s, 1)} [c_H s + \delta c_r + \mu c_p]$$

Si $s = 0$

$$\begin{aligned} r(0, 0) &= \frac{\beta(0, 0)}{\alpha + \beta(0, 0)} \left[\frac{\lambda}{\lambda + \delta} c_l + \frac{\delta}{\lambda + \delta} c_r \right] \\ r(0, 1) &= \frac{\beta(0, 1)}{\alpha + \beta(0, 1)} \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu + \delta} c_p + \frac{\lambda}{\lambda + \mu + \delta} c_l + \frac{\delta}{\lambda + \mu + \delta} c_r \right] \end{aligned}$$

Où :

- $K'(s, a)$ est réparti entre le coût d'une vente perdue c_l , le coût de retour d'un produit c_r , et (si production) le coût unitaire de production c_p ;
- $\mu/(\lambda + \mu + \delta)$ est la probabilité de produire à la fin de la période (le prochain événement est une production) ;
- $\lambda/(\lambda + \mu + \delta)$ est la probabilité qu'une demande arrive à la fin de la période (le prochain événement est l'arrivée d'une demande) ;
- $\delta/(\lambda + \mu + \delta)$ est la probabilité qu'il y ait un retour en fin de période.

Si $s = M$

$$r(M, 0) = \frac{1}{\alpha + \beta(M, 0)} [c_H M]$$

$r(M, 1)$ ne peut être calculé car l'action $a = 1$ ne peut être prise en M .

Phase 2 : Uniformisation

A ce niveau sera établi un nouveau système qu'il faudra caractériser (ensemble d'états, actions, etc.). Il est également montré, dans Puterman (1994), que ce système est équivalent au précédent (Phase 1) en termes de coût optimal et de politique optimale correspondante.

Soit :

$$\mathcal{C} \geq \beta(s, a), \forall s \in S \forall a \in A$$

Par exemple : $\mathcal{C} = \sum_{s,a} \beta(s, a)$ ou bien $\mathcal{C} = \max \beta(s, a)$.

Nous considérerons dans la suite de nos développements que :

$$\mathcal{C} = \sum_{s,a} \beta(s, a)$$

Sur le nouveau modèle que nous considérons, il est alors possible de représenter les transitions, d'un état à un autre, par la figure 3.4 suivante :

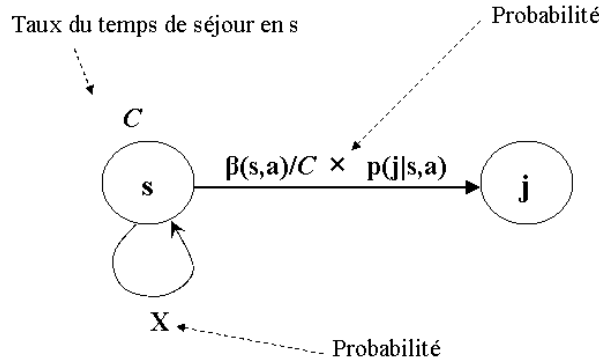
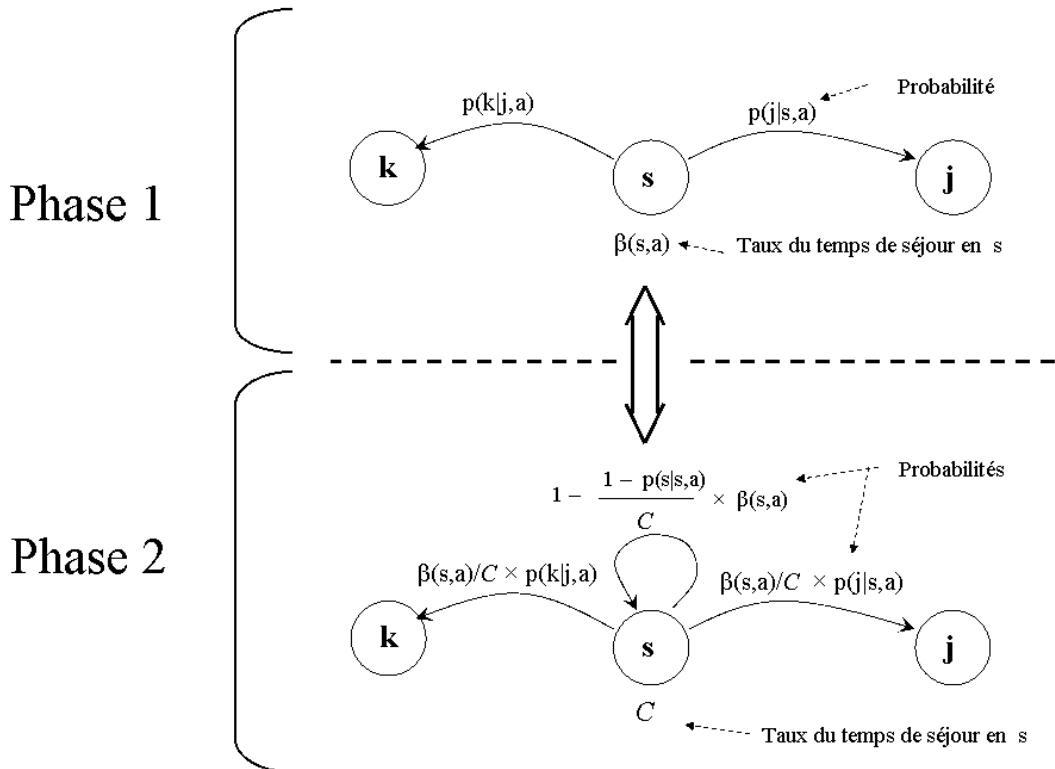


Figure 3.4 – Représentation uniformisée

Avec ⁴ : $X = 1 - \frac{1-p(s|s,a)}{C} \beta(s,a)$ qui vérifie que $\sum_{j \neq s} \frac{\beta(s,a)}{C} p(j|s,a) + X = 1$.

L'uniformisation se résume donc à considérer un système où l'on reste un temps exponentiel de taux C constant dans un état donné. Il est possible de résumer de manière générale la transition **Phase 1** $\rightarrow$ **Phase 2** par la figure 3.5 suivante :

Figure 3.5 – Uniformisation : transition Phase 1 $\rightarrow$ Phase 2

Pour plus d'informations, nous référons le lecteur à l'Annexe A.

4. $X = 1 - \sum_{j \neq s} \frac{\beta(s,a)}{C} p(j|s,a)$, et $\sum_{j \neq s} p(j|s,a) = 1 - p(s|s,a)$.

La caractérisation uniformisée de ce nouveau système (représentée par des $\sim$) est la suivante :

$$\tilde{S} = S \text{ et } \tilde{A} = A.$$

$$\tilde{\beta}(s, a) = \mathcal{C} = \sum_{s,a} \beta(s, a) \quad \forall s \in S \quad \forall a \in A$$

$$Si \quad j = 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{p}(j+1 | j, a) &= \frac{\mu \cdot a + \delta}{\mathcal{C}} \\ \tilde{p}(j | j, a) &= 1 - \frac{\mu \cdot a + \delta}{\mathcal{C}} \\ \tilde{p}(j-1 | j, a) & \text{Non définie} \end{array} \right.$$

$$Si \quad 0 < j < M \quad \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{p}(j+1 | j, a) &= \frac{\mu \cdot a + \delta}{\mathcal{C}} \\ \tilde{p}(j | j, a) &= 1 - \frac{\lambda + \mu \cdot a + \delta}{\mathcal{C}} \\ \tilde{p}(j-1 | j, a) &= \frac{\lambda}{\mathcal{C}} \end{array} \right.$$

$$Si \quad j = M \quad \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{p}(j+1 | j, a) & \text{Non définie} \\ \tilde{p}(j | j, a) &= 1 - \frac{\lambda}{\mathcal{C}} \\ \tilde{p}(j-1 | j, a) &= \frac{\lambda}{\mathcal{C}} \end{array} \right.$$

Les coûts sont toujours donnés par la formule :

$$\tilde{r}(s, a) = r(s, a) \frac{\alpha + \beta(s, a)}{\alpha + \mathcal{C}}$$

Finalement, le système ainsi caractérisé est équivalent, en termes de coût optimal et de politique optimale, à celui présenté lors de la phase 1 (Puterman, 1994).

Phase 3 : Discrétisation

Puterman (1994) montre que le système décrit en phase 2 est équivalent (coût optimal, politique optimale) à un système à temps discret où l'ensemble des états $\tilde{S}$, des actions $\tilde{A}$, des coûts $\tilde{r}(s, a)$ ainsi que les probabilités $\tilde{p}(j|s, a)$ restent les mêmes. Alors que le taux d'actualisation devient :

$$\tilde{\lambda} = \frac{\mathcal{C}}{\alpha + \mathcal{C}}$$

Il est alors possible d'utiliser les théories des MDP appliquées aux processus de décision Markoviens à temps discret afin de trouver le coût total optimal, ce qui reviendra à retrouver le coût total optimal du problème initialement posé (phase 1) de part l'équivalence entre les phases 1, 2 et 3.

En effet, pour un Processus de Décision Markovien à temps discret, la formule du coût total à horizon infini est donnée par :

$$\tilde{v}^*(s) = \min_a \left[\tilde{r}(s, a) + \sum_j \tilde{\lambda} \tilde{p}(j | s, a) \tilde{v}^*(j) \right]$$

Puterman (1994) a montré que cette équation se transforme en une formule itérative qui permet d'obtenir une solution optimale (coût optimal correspondant à une politique π^* optimale) qui sera également la solution optimale du système initial décrit en phase 1. La formule itérative qui découle de cette équation constitue les équations d'optimalité qui, relativement à notre modèle avec retours indépendants, sont les suivantes :

$$\tilde{v}^*(s) = \frac{1}{\alpha + \lambda + \mu + \delta} [c_h s + \mu T_1 \tilde{v}^*(s) + \lambda T_2 \tilde{v}^*(s) + \delta T_3 \tilde{v}^*(s)] \quad (3.3)$$

avec :

$$T_1 \tilde{v}^*(s) = \begin{cases} \min[\tilde{v}^*(s); c_p + \tilde{v}^*(s+1)] & \text{si } s < M \\ \tilde{v}^*(s) & \text{si } s = M \end{cases}$$

$$T_2 \tilde{v}^*(s) = \begin{cases} \tilde{v}^*(s-1) & \text{si } s > 0 \\ \tilde{v}^*(s) + c_l & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

$$T_3 \tilde{v}^*(s) = \begin{cases} c_r + \tilde{v}^*(s+1) & \text{si } s < M \\ \tilde{v}^*(s) & \text{si } s = M \end{cases}$$

Le coût optimal actualisé, lorsque le système est initialement dans l'état s , est ainsi donné par les équations d'optimalité. Ces équations fournissent une formule recursive qui permet d'atteindre, dans un premier temps et selon le critère d'arrêt choisi, le coût optimal, pour ensuite en déduire la politique π^* correspondante. Elles correspondent aux équations d'optimalité de notre modèle avec retours de produits indépendants de la demande où l'on remplace $\tilde{v}^*(s)$ par $v^*(x)$ (voir section 3.4 suivante). Ces équations, à temps discret, permettent d'obtenir le coût optimal de notre problème initial, à temps continu, étant donné l'équivalence entre les phases 1, 2 et 3.

3.3 Équations d'optimalité

Pour revenir à notre modèle avec retours de produits indépendants de la demande, et partant de l'expression du coût actualisé de la section 3.1, nous formulons le problème sous forme d'un MDP que nous uniformisons avec un taux $\mathcal{C} = \beta + \lambda + \mu + \delta$ (voir section précédente 3.2.2). Nous avons alors montré que la valeur optimale du coût satisfait les équations d'optimalité 3.3 qui viennent d'être présentées.

A présent, nous allons reprendre ces équations d'optimalité dans le cas général où

le stock n'est pas borné par une valeur M . Le fait d'introduire, ou pas, une borne M ne modifie en rien la suite de nos résultats. La valeur optimale du coût de notre Modèle 1 satisfait alors les équations d'optimalité suivantes :

$$v^*(x) = Tv^*(x), \forall x \in \mathbb{N}$$

Où l'opérateur T est défini comme suit :

$$Tv(x) := \frac{1}{C} [c_h x + \mu T_1 v(x) + \lambda T_2 v(x) + \delta T_3 v(x)] \quad (3.4)$$

et

$$\begin{aligned} T_1 v(x) &:= \min[v(x), v(x+1) + c_p] \\ T_2 v(x) &:= \begin{cases} v(x-1) & \text{if } x > 0 \\ v(x) + c_l & \text{if } x = 0 \end{cases} \\ T_3 v(x) &:= v(x+1) + c_r \end{aligned}$$

L'opérateur T_1 est associé à la décision optimale de production. L'opérateur T_2 est associé à la demande et l'opérateur T_3 aux retours de produits.

Partant de ces équations d'optimalité, il est possible de déterminer la politique optimale (section 3.4).

Nous nous intéresserons également au problème avec coût moyen :

$$\min_{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^\infty c_p dW_x^\pi(t) + \int_0^T c_h dX_x^\pi(t) + \int_0^\infty c_l dY_x^\pi(t) + \int_0^\infty c_r dZ_x^\pi(t) \right]}{T}$$

En effet, et bien que toutes les démonstrations faites sur notre modèle soient liées aux coûts actualisés, nous étendrons nos résultats en section 3.5 au cas du coût moyen.

3.4 Caractérisation de la politique optimale

Nous venons de montrer l'origine des équations d'optimalité, ces équations permettent de caractériser la politique optimale qui minimise le coût total actualisé du système.

Nous soulignons également le fait que la section 3.5 présente une extension de nos résultats (politique optimale, calcul des paramètres optimaux) lorsque le coût moyen du système est considéré. Pour le moment, nous continuons de travailler sur le coût actualisé de notre système.

3.4.1 Politique optimale

Commençons par rappeler l'expression du coût total actualisé ainsi que les équations d'optimalité du modèle avec retours indépendants.

Coût total actualisé :

$$\begin{aligned} v^\pi(x) = E \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} c_p W_x^\pi(t) dt + \int_0^\infty e^{-\beta t} c_h X_x^\pi(t) dt + \int_0^\infty e^{-\beta t} c_l dY_x^\pi(t) \right. \\ \left. + \int_0^\infty e^{-\beta t} c_r dZ_x^\pi(t) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Equations d'optimalité :

$$v^*(x) = Tv^*(x), \forall x \in \mathbb{N}$$

Avec

$$Tv(x) := \frac{1}{\mathcal{C}} [c_h x + \mu T_1 v(x) + \lambda T_2 v(x) + \delta T_3 v(x)] \quad (3.6)$$

avec $\mathcal{C} = \alpha + \lambda + \mu + \delta$ et

$$\begin{aligned} T_1 v(x) &:= \min[v(x), v(x+1)] \\ T_2 v(x) &:= \begin{cases} v(x-1) & \text{if } x > 0 \\ v(x) + c_l & \text{if } x = 0 \end{cases} \\ T_3 v(x) &:= v(x+1) + c_r \end{aligned}$$

Partant de ces expressions, nous pouvons montrer que la politique optimale du modèle avec retours indépendants appartient à la classe des politiques *base-stock*.

Définition 4 Une politique *base-stock*, avec un *base-stock level* S , préconise de produire tant que le niveau de stock est strictement inférieur à S et de ne pas produire autrement.

Théorème 1 La fonction à valeur optimale du coût actualisé v^* appartient à $\mathcal{U}$ (voir Définition 5) et la politique optimale du modèle de base avec retours indépendants de produits est une politique *base-stock*.

La politique optimale est donc une production sur seuil. Ce dernier étant S est appelé *base-stock level*.

Démonstration

En vue de prouver l'optimalité de la politique *base-stock*, il suffit de montrer que le coût total optimal (actualisé) $v^*(x)$ est convexe suivant le niveau de stock x . Une fonction v dans $\mathbb{N}$ est dite convexe si et seulement si $\Delta v(x) := v(x+1) - v(x)$ est non-décroissant en x . Nous utiliserons également la notation $\Delta^2 v(x) := \Delta v(x+1) -$

$\Delta v(x)$. Avec cette dernière notation, v est convexe si et seulement si $\Delta^2 v(x) \geq 0$, pour tout x .

Expliquons brièvement en quoi la convexité du coût optimal actualisé implique une structure de type base-stock de la politique optimale. La convexité de v^* assure l'existence d'un seuil $S^* = \min[x | \Delta v^*(x) + c_p > 0]$, potentiellement infini, tel que $\Delta v^* + c_p \leq 0$ si et seulement si x est inférieur à ce seuil. Par ailleurs, les équations d'optimalité préconisent de produire lorsque $\Delta v^* + c_p < 0$ et d'abandonner la production quand $\Delta v^* + c_p > 0$. Si $\Delta v^* + c_p = 0$, alors il est équivalent de produire ou pas dans l'état x . Nous décidons arbitrairement de produire dans ce cas vu que cela n'affecte pas le coût optimal mais augmente le pourcentage de demandes satisfaites. La politique base-stock assure l'existence d'un seuil $S^* = \min[x | \Delta v^*(x) + c_p > 0]$ ce qui assure donc bien la convexité du coût v^* qui elle même respecte les équations d'optimalité.

En vue de prouver la convexité de v^* , nous définissons $\mathcal{U}$ un ensemble de fonctions à valeurs réelles dans $\mathbb{N}$ avec les propriétés suivantes :

Définition 5 $v \in \mathcal{U}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{N}$, v satisfait les conditions suivantes :

- Condition C.1 : $\Delta v(x+1) \geq \Delta v(x)$ ($\Leftrightarrow \Delta^2 v(x) \geq 0$)
- Condition C.2 : $\Delta v(x) \geq -c_l$

La première condition établit la convexité de v alors que la seconde signifie qu'il est préférable de satisfaire une demande qui arrive. Nous savons (Puterman, 1994) qu'une séquence de fonction à valeurs réelles $v^{n+1} = Tv^n$ converge vers la fonction à valeur optimale, v^* , pour tout $v^0 \in \mathcal{U}$. Afin de montrer que, dans notre cas, $v^* \in \mathcal{U}$, il suffit par conséquent de prouver le lemme suivant.

Lemme 1 Si $v \in \mathcal{U}$ alors $Tv \in \mathcal{U}$.

La démonstration de ce lemme est présentée en Annexe A.4. Aussi, partant d'un vecteur v^0 appartenant à $\mathcal{U}$ (v^0 nul par exemple), et comme conséquence directe du lemme 1, nous obtenons le théorème 1.

3.4.2 Calcul du base-stock levels optimal S^*

Contrairement au coût moyen, que nous verrons par la suite, il n'existe pas de démarche numérique simplifiée pour le calcul du seuil (base-stock level) optimal S^* minimisant le coût actualisé. Il ne peut être non plus obtenu par une formule analytique. Ce seuil S^* est en fait calculé numériquement lors du calcul de v^* partant des équation d'optimalité 3.6 : l'opérateur T est défini tel que $v^* = Tv^*$. Par conséquent, la séquence $v^{n+1} = Tv^n$ converge vers v^* pour n'importe quel v^0 (théorème du point fixe, (Puterman, 1994)) et en particulier si v^0 est la fonction nulle qui appartient à $\mathcal{U}$. Ainsi, et partant de la fonction nulle, nous implémentons un programme dynamique

$v^{n+1} = Tv^n$ sous le langage de programmation JAVA. Ce programme converge lorsque :

$$v^{n+1} - v^n \rightarrow \epsilon \quad \text{ce qui implique que} \quad v^* = v^{n+1}$$

Avec $\epsilon := \text{Span semi-norm}$ (critère d'arrêt) décrit dans Puterman (1994).

Le calcul de v^* est en fait un calcul vectoriel, et l'implémentation numérique de ce programme dynamique permet, en réalité, le calcul de v^* et de S^* . Ce programme fournit comme résultats les deux vecteurs suivants :

- Vecteur V^* : qui donne le coût total optimal actualisé $v^*(x)$ pour différents états initiaux x ($x \in [0, x_{max}]$)⁵.
- Vecteur A^* : qui est le vecteur décisionnel de production spécifiant, pour chaque état i du système, s'il faut produire ($A[i] = 1$) ou pas ($A[i] = 0$). Lors de l'atteinte du coût optimal V^* , les éléments du vecteur A^* se présentent sous la forme suivante :

$A[i] = 1 \forall i \leq S^*$ et $A[i] = 0$ sinon, Autrement dit :

$$\underbrace{A[0] = 1, A[1] = 1, \dots, A[S^*] = 1}_{\text{Produire}}, \underbrace{A[S^* + 1] = 0, A[S^*] = 0, \dots, A[x_{max}] = 0}_{\text{Ne pas produire}}$$

Ce qui est en concordance avec la politique base-stock identifiée comme étant optimale. L'implémentation de ce programme dynamique et son exécution ont été réalisées sous JAVA.

Afin de mieux comprendre le calcul de V^* et S^* , nous proposons en Annexe une version du programme dynamique utilisé pour le calcul de V^* et S^* relatifs au Modèle 1.

3.4.3 Influence des paramètres du système sur les base-stock levels (seuils) optimaux

A présent, nous voulons étudier l'influence des paramètres du système sur la politique optimale. Par exemple, comment est influencé le seuil (base-stock level) optimal par un taux croissant de la demande ? La méthodologie de cette section est inspirée de Cil *et al.* (2007).

Dans cette section, le base-stock optimal ainsi que le coût optimal correspondant à un paramètre donné β du système seront dénotés respectivement S_β^* et v_β^* , où β appartient à l'ensemble des paramètres $\{\lambda, \mu, p, c_h, c_r, c_l\}$ (taux de demande, taux de production, ratio des retours $p := \delta/\lambda$, coût de possession, coût de retour, coût de vente perdue). La valeur du coût optimal v_β^* satisfait les équations d'optimalité suivantes :

5. x_{max} est défini, pour des contraintes de programmation, comme étant suffisamment grand afin que le niveau réel du stock ne puisse jamais atteindre cette valeur. En pratique, la valeur de x_{max} est choisie de façon à ce que le passage d'un x_{max} à un autre $x_{max} + \theta > x_{max}$ ne modifie plus le coût total du système.

$$v_\beta^*(x) = T_\beta v_\beta^*(x)$$

Où T_β correspond à l'opérateur T défini à l'équation (3.6), indexé par β , le paramètre en considération.

Afin d'étudier l'influence des paramètres du système sur le base-stock optimal, il est nécessaire de définir la submodularité et la supermodularité d'une fonction v_β relativement à un état x , et au paramètre du système en considération β :

La fonction v_β est dite submodulaire en β et x (dénnotée $SubM(\beta, x)$) si et seulement si :

$$\Delta v_\beta(x) \geq \Delta v_{\beta+\epsilon}(x), \forall x \in \mathbb{N}, \forall \beta, \forall \epsilon \geq 0$$

La supermodularité en β et x (dénnotée $SuperM(\beta, x)$) correspond à l'inégalité opposée :

$$\Delta v_\beta(x) \leq \Delta v_{\beta+\epsilon}(x), \forall x \in \mathbb{N}, \forall \beta, \forall \epsilon \geq 0$$

Où $v_\beta^*(x)$ est $SubM(\beta, x)$ signifie que le base-stock level optimal $S_\beta = \min[x | \Delta v_\beta^*(x) > 0]$ est non-décroissant en β , et $v_\beta^*(x)$ $SuperM(\beta, x)$ veut dire que le base-stock level optimal $S_\beta^* = \min[x | \Delta v_\beta^*(x) > 0]$ est non-croissant en β .

La séquence des fonctions à valeurs réelles $v_\beta^{n+1} = T_\beta v_\beta^n$ converge vers la fonction optimale v_β^* . Nous voulons prouver que v_α^* possède les propriétés de modularité désirées. Il est alors suffisant de prouver le lemme suivant :

Lemme 2

- $\forall \beta \in \{\mu, \delta, c_h, c_r\}$, si v_β est $SuperM(\beta, x)$ et appartient à $\mathcal{U}$ alors $T_\beta v_\beta(x)$ est $SuperM(\beta, x)$ et appartient à $\mathcal{U}$.
- $\forall \beta \in \{\lambda, c_l, c_r\}$, si v_β est $SubM(\beta, x)$ et appartient à $\mathcal{U}$ alors $T_\beta v_\beta(x)$ est $SubM(\beta, x)$ et appartient à $\mathcal{U}$.

La preuve de ce lemme est donnée en Annexe A.5. Nous déduisons directement du lemme 2 le théorème suivant.

Théorème 2 La fonction optimale v_β^* est $SuperM(\beta, x)$ pour $\beta \in \{\mu, \delta, c_h, c_r\}$ et $SubM(\beta, x)$ pour $\beta \in \{c_l, \lambda, c_r\}$.

Par conséquent, le base-stock optimal du modèle avec retours indépendants de produits est non-croissant avec le taux de production (service), μ , le taux de retour, δ , le coût de possession, c_h , non-décroissant avec le taux d'arrivée de la demande, λ , le coût de vente perdue, c_l , et indépendant du coût de retour, c_r .

Il existe une alternative simple pour prouver que le base-stock optimal est indépendant de c_r : il suffit de noter que les coûts de retours prévisionnels sont indépendants de la politique appliquée.

3.5 Extension au coût moyen

Il est important de noter que pour certains modèles, tels que le présent modèle avec retours de produits indépendants de la demande, il est possible de considérer deux coûts :

- Le coût actualisé : autrement dit celui que nous avons considéré jusqu'à présent, et avec lequel il est possible de déterminer/prouver la politique optimale. Les paramètres optimaux, associés à cette politique, peuvent être calculés numériquement lors du calcul de v^* par la formule itérative (voir section 3.4.2) ;
- Le coût moyen : dont il est possible d'obtenir une formule analytique pour le présent modèle avec retours indépendants. Il est également possible de montrer que la politique optimale minimisant le coût actualisé est également optimale en considérant la minimisation du coût moyen. De plus, grâce au coût moyen, il est possible d'établir une procédure simplifiée de recherche des paramètres optimaux.

Ayant préalablement traité le cas du coût actualisé, nous allons étendre à présent notre travail au cas du coût moyen.

Le coût total moyen du modèle associé à la politique optimale peut être obtenu comme étant la limite du coût actualisé, de cette même politique optimale, lorsque le taux d'actualisation α tend vers zéro (Weber & Stidham, 1987).

$$\min_{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^\infty c_p dW_x^\pi(t) + \int_0^T c_h dX_x^\pi(t) + \int_0^\infty c_l dY_x^\pi(t) + \int_0^\infty c_r dZ_x^\pi(t) \right]}{T}$$

D'après Puterman (1994), il est montré que, pour ce qui est du coût moyen de ce premier modèle sans retours, la politique optimale le minimisant est une politique de type base-stock et les seuils (base-stock levels) optimaux possèdent les propriétés de monotonie présentées au théorème 2.

Le coût moyen associé à la politique optimale peut être calculé par différents algorithmes, l'un des exemples étant le calcul par itération de valeur, tout comme pour le coût actualisé (Puterman, 1994). Nous présentons à présent une alternative ou démarche simplifiée afin de calculer, de manière plus efficace, le coût moyen associé à la politique optimale et la base-stock level associé.

En supposant l'application d'une politique base-stock (optimale) avec un base-stock level S donné (quelconque), le niveau de stock évolue selon une chaîne de Markov à temps continu avec des taux de transition q_{ij} donnés par :

$$\begin{cases} q_{x,x+1} = \mu + \delta & \text{si } x \leq S - 1 \\ q_{x,x+1} = \delta & \text{si } x \geq S \\ q_{x,x-1} = \lambda & \text{si } x \geq 1 \\ q_{xy} = 0 & \text{Autrement} \end{cases}$$

Afin d'assurer la stabilité de cette chaîne de Markov, nous supposons que $\delta < \lambda$ ou, de manière équivalente, $p := \delta/\lambda < 1$. Nous obtenons les relations suivantes

entre les probabilités stationnaires :

$$\begin{cases} \pi_x(S) = \rho_1^{-x} \pi_0(S) & \text{si } 0 \leq x \leq S \\ \pi_x(S) = \rho_1^{-S} p^{x-S} \pi_0(S) & \text{si } x \geq S \end{cases}$$

Avec $\rho_1 := \frac{\lambda}{\mu + \delta}$. En utilisant la condition de normalisation $\sum_{x=0}^{\infty} \pi_x = 1$, nous obtenons :

$$\pi_0 = \begin{cases} \rho_1^S \left(\frac{1 - \rho_1^{S+1}}{1 - \rho_1} + \frac{p}{q} \right)^{-1} & \text{si } \rho_1 \neq 1 \\ \frac{q}{1 + Sq} & \text{si } \rho_1 = 1 \end{cases}$$

A présent il est possible de calculer le coût moyen de stockage, $C_h(S)$, de production, $C_p(S)$, de ventes perdues, $C_l(S)$, et de retours $C_r(S)$:

$$\begin{aligned} C_h(S) &= c_h \sum_{x=0}^{\infty} x \pi_x(S) = \begin{cases} c_h \pi_0 \left(\frac{\rho_1^{S+1} - \rho_1 - \rho_1 S + S}{\rho_1^S (1 - \rho_1)^2} + \frac{1}{\rho_1^S} \frac{p(1+qS)}{q^2} \right) & \text{si } \rho_1 \neq 1 \\ c_h \pi_0 \left[\frac{S(S+1)}{2} + \frac{p(1+qS)}{q^2} \right] & \text{si } \rho_1 = 1 \end{cases} \\ C_p(S) &= \mu c_p (1 - \pi_S) = \mu c_p (1 - \rho_1^{-S} \pi_0) \\ C_l(S) &= \lambda c_l \pi_0 \\ C_r(S) &= \delta c_r \end{aligned}$$

3.5.1 Convexité du coût moyen

Le coût total moyen, $C(S)$, associé à la politique base-stock optimal et pour un seuil S donné, est alors la somme de ces quatre coûts. Reste à calculer le coût total moyen optimal, C^* , ainsi que le base-stock optimal, S^* qui lui est associé. Pour ce faire, nous utilisons la propriété suivante :

Propriété 1 *Le coût moyen $C(S)$ est convexe en S si $\rho_1 \leq 1$ et $c_l \geq c_p$.*

La preuve de cette propriété est donnée en Annexe A.6.

Malheureusement, lorsque $\rho_1 > 1$ ou bien $c_l < c_p$, la convexité de $C(S)$ n'est pas systématique. Par exemple, le coût total moyen n'est pas convexe pour l'instance suivante : $c_h = 1, c_l = 16, c_r = 4, c_p = 0, \lambda = 1.4, \mu = 1, p = 0.1$. Pour cette instance, $\rho_1 = 1.23 > 1$ et la seconde dérivée de $C(S)$ est négative en $S = 10$: $C''(10) = -0.0195$.

3.5.2 Calcul du base stock level optimal S^*

A cet effet, nous pouvons réutiliser la borne supérieure, du base-stock level, développée par Ha (1997) dans la cas d'une $M/M/1$ make-to-stock queue sans retours de produits. Cette borne supérieure est valable dans notre cas vu que le base-stock level optimal (seuil de production optimal) est nécessairement inférieur lorsque des retours de produits sont pris en considération.

Propriété 2 (*Directement adaptée de Ha (1997)*) Soit S_u le plus petit entier non négatif supérieur à $(\rho - 1)/(h'\rho) + 1/\ln \rho - 1$ avec $\rho = \lambda/\mu$ et $h' = c_h/(\lambda c_l)$. Pour $\rho > 1$, $S^* \leq S_u$.

Ainsi, il s'agira de faire varier S sur un intervalle $[0, S_u]$, puis d'implémenter un programme calculant $C(S)$ pour chaque valeur de S dans l'intervalle, alors :

- Si $C(S)$ est convexe ($c_l \geq c_p$ et $\rho_1 \leq 1$) : S^* est donné par la dernière valeur de S pour laquelle $C(S) - C(S - 1) \leq 0$ (convexité). Voir figure 3.6. Le coût optimal associé est alors $C^* = C(S^*)$.

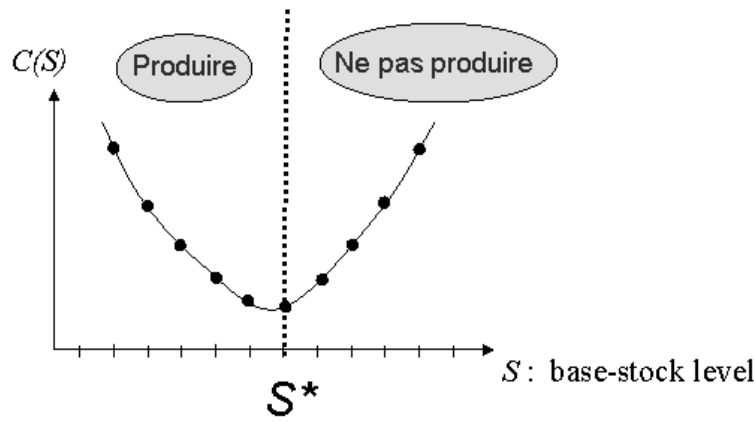


Figure 3.6 – Convexité de $C(S)$ et calcul de S^* sur le modèle avec retours indépendants

- Si $C(S)$ n'est pas convexe ($\rho_1 > 1$ ou $c_l < c_p$) : S^* est celui qui minimise $C(S)$ sur un intervalle $[0, S_u]$. Si l'on considère le cas extrême où $(\lambda = 10, \mu = 1, c_h = 1, c_l = 1000)$, alors $S_u = 9000$. Le temps de calcul du base-stock level optimale pour cette instance requiert d'évaluer $C(S)$ pour $S \in \{0, 1, \dots, 9000\}$, ce qui prend moins d'une seconde sur un ordinateur personnel standard.

3.6 Conclusion

Nous venons de présenter le premier modèle étudié dans le cadre de cette thèse. Ce modèle, que nous avons appelé « modèle de base », est celui sur lequel nous avons apporté le plus d'hypothèses simplificatrices. Nous avons ainsi choisi de commencer par un modèle avec retours indépendants de la demande où tous les produits retournés sont directement réinjectés en stock. Nous avons prouvé, sur ce modèle, l'optimalité de la politique base-stock et avons montré l'influence des paramètres du système sur le base-stock level optimal S^* . De plus, et lorsque le coût moyen du système est considéré, nous avons proposé une méthode simplifiée de calcul du seuil optimal de production S^* basée sur la formule analytique de ce coût moyen.

Le Modèle 1 sera utilisé par la suite, lors des études numériques des Chapitres 4 et 5.

Chapitre 4

Modèles avec retours corrélés de produits

Nous avons choisi de commencer l'extension du modèle indépendant de base en prenant en compte le phénomène de *dépendance* entre la demande et les retours. Nous parlerons indifféremment de *dépendance* ou de *corrélacion* entre la demande et les retours.

Le phénomène de corrélation a été négligé lors de l'étude du Modèle 1. De manière plus générale, la plupart des modèles de stocks présentés lors de l'état de l'art du Chapitre 2 ne prennent pas en considération la relation entre retours et demande. de Brito & Dekker (2001) ont exploré les hypothèses généralement faites sur des modèles stochastiques avec retours de produits dont l'hypothèse d'indépendance entre la demande et les retours de produits. Ils concluent qu'il est nécessaire de rompre avec cette hypothèse. Pourtant, la majeure partie des modèles avec retours de produits suppose une indépendance totale, ou partielle, entre la demande et les retours. Ceci est dû à la grande complexité induite par la relaxation de cette hypothèse. Parmi les quelques auteurs qui considèrent la corrélation demande/retours, Kiesmüller & van der Laan (2001) développent un modèle périodique avec délais fixes d'approvisionnement et de retour. Ils comparent le cas des retours dépendants et indépendants et obtiennent numériquement que le coût moyen est meilleur (moindre) dans le cas dépendant. Cheung & Yuan (2003) considèrent un modèle corrélé à vérification continue (continuous review model) avec demande poissonnienne, délai exponentiel de retour et approvisionnement instantané. Ils adoptent un politique (s, S) et développent un algorithme de calcul des paramètres optimaux. Cela étant, aucun de ces modèles n'évalue l'impact de la non prise en compte de la corrélation demande/retours.

4.1 Description des modèles

Lors de ce chapitre, et s'agissant de *modèles corrélés ou dépendants*, la formulation du problème ainsi que les paramètres utilisés restent les mêmes que lors du précédent modèle (Chapitre 3). Ainsi nous considérons une $M/M/1$ make-to-stock

queue fabriquant un unique produit et où il est possible d'arrêter et de reprendre la production à n'importe quel moment. La production est exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu$. Les pièces produites sont ensuite placées dans un stock (unique) où elles induisent un coût de stockage c_h par pièce par unité de temps. La demande, pour ces pièces, arrive selon un processus de Poisson de taux λ et une demande qui ne peut être immédiatement satisfaite (stock nul) est alors perdue et est accompagnée d'un coût de vente perdue (*Lost sale cost*) qui est de c_l par demande perdue. Ce coût comprend les pertes des marges et profits, la dégradation de l'image de marque de l'entreprise, diverses pénalités, etc.

Toutefois, l'hypothèse d'indépendance (des retours avec la demande) est levée dans le cas présent. Désormais, une demande satisfaite conduit au retour d'un produit avec une probabilité p .

Dans ce contexte, nous avons choisi de mener nos recherches en considérant les deux cas suivants :

- Les produits demandés reviennent au bout d'un délai nul ;
- Les produits demandés reviennent en stock au bout d'un délai exponentiel de taux γ .

Par conséquent, nous étudierons deux modèles différents correspondants aux deux cas que nous venons de distinguer. Nous pouvons remarquer à ce niveau que le premier cas est un cas limite du second lorsque $\gamma \rightarrow \infty$.

Nous commençons ainsi, en section 4.2, par le modèle où les produits demandés reviennent de manière instantanée. Nous décrivons sur ce modèle les équations d'optimalité, nous y déterminons la politique optimale et nous fournissons des explications quant au calcul des paramètres optimaux. De plus, nous étendons les résultats obtenus lorsque le coût moyen du système est considéré au lieu du coût actualisé. Par la suite, en section 4.3, nous considérons le modèle où les produits demandés reviennent au système au bout d'un délai exponentiel non nul. Sur ce modèle, deux configurations devront être distinguées sur lesquelles nous caractériserons partiellement les politiques qui minimisent le coût actualisé.

Enfin, les études numériques menées à la fin de ce chapitre, en section 4.4, permettront :

- Partant du modèle avec retours immédiats de produits : d'évaluer l'impact de la prise en compte de la corrélation (demande/retours) sur les performances du système en termes de coûts.
- Partant du modèle avec délai de retours exponentiel : d'étudier également l'importance de la dépendance demande/retours, et de comprendre l'influence du délai de retour des produits sur les performances du système considéré.

4.2 Modèle dépendant avec retours immédiats

Ce modèle représenté par la figure 4.1 est similaire au Modèle 1 décrit en 3.1 avec, dans ce cas, la prise en compte que chaque demande satisfaite conduit au retour du produit avec une probabilité p et de façon immédiate. Ce qui correspond à un pourcentage p de clients, non satisfaits de leur acquisition, qui retournent leur produit.

Le fait d'assumer un délai de retour nul constitue une bonne approximation des systèmes avec de courts délais de retours que l'on retrouve typiquement lorsque le client a la possibilité de retourner le produit, mais qu'il ne dispose que d'une période relativement courte, après l'avoir acheté, pour le renvoyer. Il est à noter que la notion de délai immédiat est relative, on peut négliger le délai de retour lorsque ce dernier est très petit comparé à la durée de vie du produit.

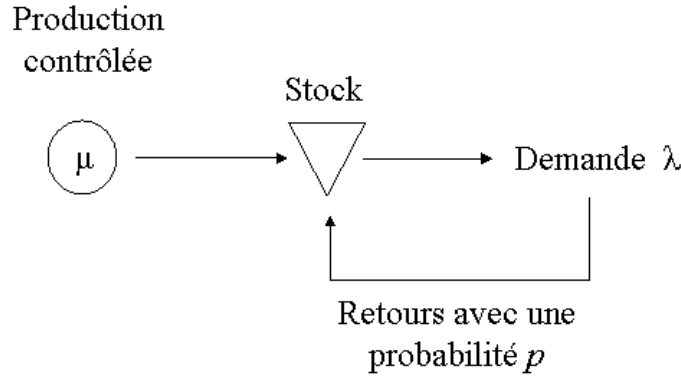


Figure 4.1 – Modèle 2 : Retours dépendants et immédiats

Contrairement au Modèle 1 avec retours de produits indépendants de la demande, il est supposé sur ce modèle que la probabilité de retour peut atteindre la valeur 1 ($0 \leq p \leq 1$). En effet, il n'est pas nécessaire, dans ce cas, de supposer une inégalité stricte $p < 1$ étant donné que les retours sont directement corrélés aux demandes et ne peuvent pas conduire à des niveaux de stocks infinis.

Le présent modèle avec retours de produits dépendants et immédiats sera désigné par le Modèle 2 dans la suite de ce document.

4.2.1 Équations d'optimalité

Pour ce modèle, et en adoptant la même démarche que pour le premier modèle (sections 3.2.2 et 3.3), à savoir formulation MDP et uniformisation, il est possible de montrer que le coût total actualisé $v^*(x)$ satisfait les équations d'optimalité suivantes :

$$v^*(x) = Tv^*(x), \forall x \in \mathbb{N}$$

Où l'opérateur T est défini comme

$$Tv(x) := \frac{1}{\mathcal{C}} [c_h x + \mu T_1 v(x) + \lambda(1-p)T_2 v(x) + \lambda p T_3 v(x)] \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} T_1 v(x) &:= \min[v(x), v(x+1) + c_p] \\ T_2 v(x) &:= \begin{cases} v(x-1) & \text{if } x > 0 \\ v(x) + c_l & \text{if } x = 0 \end{cases} \\ T_3 v(x) &:= \begin{cases} v(x) + c_r & \text{if } x > 0 \\ v(x) + c_l & \text{if } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'opérateur T_1 est associé à la décision optimale de production. L'opérateur T_2 est associé aux demandes qui ne sont pas retournées et l'opérateur T_3 aux demandes retournées.

4.2.2 Caractérisation de la politique optimale

Là aussi, la caractérisation de la politique optimale se fera en utilisant le coût total actualisé du système et les équations d'optimalité qui viennent d'être présentées. Par la suite, nous verrons que cette politique est également optimale au sens de la minimisation du coût moyen et qu'il est possible, dans le cas de coût moyen, d'établir une procédure simplifiée de calcul des paramètres optimaux.

Ainsi, pour ce modèle avec retours de produits dépendants et immédiats, nous pouvons étendre le Lemme 1 et donc prouver l'optimalité de la politique base-stock, lorsque $c_l \geq p c_r$.

A cet effet, nous définissons là aussi $\mathcal{U}$ l'ensemble de fonctions à valeurs réelles dans $\mathbb{N}$, avec les propriétés suivantes :

Définition 6 $v \in \mathcal{U}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{N}$, v satisfait les conditions suivantes :

- Condition C.1 : $\Delta v(x+1) \geq \Delta v(x)$ ($\Delta^2 v(x) \geq 0$)
- Condition C.2 : $q\Delta v(x) + c_l - p c_r \geq 0$

La première condition établit la convexité de v alors que la seconde signifie qu'il est préférable de satisfaire une demande qui arrive. Nous savons (Puterman, 1994) qu'une séquence de fonction à valeurs réelles $v^{n+1} = Tv^n$ converge vers la fonction à valeur optimale, v^* , pour tout $v^0 \in \mathcal{U}$. Afin de montrer que, dans notre cas, $v^* \in \mathcal{U}$, il suffit par conséquent de prouver le lemme suivant.

Lemme 3 Si $v \in \mathcal{U}$ alors $Tv \in \mathcal{U}$.

La preuve du Lemme 3 est similaire à celle du Lemme 1 et est présentée en Annexe B.1.

En adoptant le même raisonnement que pour la section 3.4, une conséquence directe du Lemme 3 est qu'en partant d'un $v^0 \in \mathcal{U}$ (v^0 nul par exemple), alors $v^* \in \mathcal{U}$ lorsque $c_l \geq p c_r$, ce qui implique que la politique optimale est de type base-stock.

Quelle est alors la structure de la politique optimale lorsque $c_l < p < c_r$? Étant donné que nous avons restreint notre analyse à l'ensemble des politiques stationnaires, il existe nécessairement un entier, potentiellement infini, $S^* := \min[x : \Delta v^* = v^*(x+1) - v^*(x) + c_p > 0]$. Si le niveau de stock initial à l'instant $t = 0$ est inférieur ou égal à S^* , alors le niveau de stock n'excédera jamais S^* et la politique est équivalente à une politique base stock. Cet argument n'est pas valable pour le Modèle 1 car le niveau de stock peut dépasser le base stock level de par les retours de produits qui sont indépendants de la demande.

Finalement, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3 *La politique optimale du modèle avec retours dépendants et instantanés est telle que :*

- Si $c_l \geq p < c_r$, la valeur optimale du coût actualisé v^* est convexe et il existe une politique base-stock optimale pour ce modèle.
- Si $c_l < p < c_r$, alors ce n'est que sous l'hypothèse d'un stock initial nul qu'il existe certainement une politique base-stock optimale pour ce modèle .

4.2.3 Calcul du base-stock level optimal S^*

Le seuil S^* ne peut être obtenu analytiquement. Il est calculé numériquement lors du calcul de v^* partant des équations d'optimalités 4.1. L'implémentation numérique des équations d'optimalité, permettant le calcul de v^* et de S^* , se concrétise, comme pour le Modèle 1, par un programme dynamique codé sous le langage de programmation JAVA (voir section 3.4.2).

Suite à l'exécution de ce programme dynamique, nous obtenons, d'une part, un vecteur donnant le coût total optimal (actualisé) pour différents états initiaux du système ($x \in [0, x_{max}]$). D'autre part, un vecteur décisionnel optimal A^* est fourni tel que :

$$\underbrace{A[0] = 1, A[1] = 1, \dots, A[S^*] = 1}_{\text{Produire}}, \underbrace{A[S^* + 1] = 0, A[S^* + 2] = 0, \dots, A[x_{max}] = 0}_{\text{Ne pas produire}}$$

Ce qui est en concordance avec la politique base-stock identifiée comme étant optimale. L'implémentation de ce programme dynamique et son exécution ont été réalisées sous JAVA, (voir également l'Annexe B.5).

4.2.4 Influence des paramètres du système sur les base-stocks optimaux

La méthodologie sera également similaire à celle du modèle avec retours indépendants mais nos résultats sont limités au cas $c_l = c_r$.

Théorème 4 Si $c_l = c_r = c$, le coût optimal v_β^* est $SuperM(\beta, x)$ pour $\beta \in \{\mu, p, c_h\}$ et $SubM(\beta, x)$ pour $\beta \in \{c, \lambda\}$.

Par conséquent, le base-stock level optimal est non-croissant avec le taux de service, μ , la probabilité de retour, p , le coût de stockage, c_h et non-décroissant avec le taux d'arrivée de la demande, λ , le coût de vente perdue, $c_l = c$.

La preuve de ce théorème est donnée en Annexe B.2.

4.2.5 Extension au coût moyen

Le modèle corrélié avec retours immédiats de produits permet aussi bien d'analyser son coût total actualisé que son coût total moyen. Nous avons pu, grâce à l'expression du coût actualisé, montrer l'optimalité de la politique base-stock, prouver quelques propriétés de monotonie de S^* selon les paramètres du système et avons expliqué comment v^* et S^* sont calculés numériquement. Considérons à présent le coût moyen de notre modèle avec retours immédiats.

Le coût total moyen du modèle associé à la politique optimale peut être obtenu comme étant la limite du coût actualisé, de cette même politique optimale, lorsque le taux d'actualisation α tend vers zéro (Weber & Stidham, 1987). Il en découle, d'après Puterman (1994), que la politique base-stock optimale minimisant le coût actualisé est également optimale concernant le coût moyen et que les seuils (base-stock levels) optimaux possèdent les propriétés de monotonie présentées au théorème 4.

Dans le présent modèle, les produits sont retournés instantanément avec une probabilité p . Si l'on suppose une politique base-stock (optimale) avec un seuil S , le niveau de stock évolue alors comme dans une $M/M/1$ make-to-stock queue basique sans retours de produits, avec une demande de taux λq où $q := 1 - p$. Les taux de transitions sont donnés par :

$$\begin{cases} \tilde{q}_{x,x+1} = \mu & \text{si } x \leq S - 1 \\ \tilde{q}_{x,x-1} = \lambda q & \text{si } 1 \leq x \leq S \\ \tilde{q}_{xy} = 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Nous définissons le ratio $\rho_2 = \frac{q\lambda}{\mu}$. Les probabilités stationnaires sont alors données, lorsque $0 \leq x \leq S$, par :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_x(S) &= \rho_2^{-x} \tilde{\pi}_0(S) \\ \tilde{\pi}_0(S) &= \begin{cases} \frac{\rho_2^S (1 - \rho_2)}{1 - \rho_2^{S+1}} & \text{si } \rho_2 \neq 1 \\ \frac{1}{S+1} & \text{si } \rho_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme pour le modèle avec retours indépendants, nous pouvons calculer les coûts

moyens de possession, de production, de ventes perdues et de retours :

$$\tilde{C}_h(S) = \begin{cases} c_h \frac{\rho_2^{S+1} - \rho_2 - \rho_2 S + S}{(1-\rho_2)(1-\rho_2^{S+1})} & \text{si } \rho_2 \neq 1 \\ c_h \frac{S}{2} & \text{si } \rho_2 = 1 \end{cases}$$

$$\tilde{C}_p(S) = \mu c_p (1 - \tilde{\pi}_S) \quad (4.2)$$

$$\tilde{C}_l(S) = \lambda c_l \tilde{\pi}_0(S) \quad (4.3)$$

$$\tilde{C}_r(S) = \lambda p c_r (1 - \tilde{\pi}_0(S)) \quad (4.4)$$

Le coût total moyen, $\tilde{C}(S)$, est là aussi la somme de ces quatre coûts. Il représente alors le coût total moyen du système lorsque la politique base-stock, optimale, est appliquée avec un seuil S . Reste à calculer le S^* optimal minimisant ce coût moyen.

Malheureusement, il n'est pas possible de montrer, de manière générale, que ce coût total moyen est convexe en S . En effet, les coûts moyens $\tilde{C}_r(S)$ et $\tilde{C}_l(S)$ ne sont jamais simultanément convexes vu que leur dérivées secondes sont de signes opposés d'après les équations (4.3) et (4.4).

Cependant, nous pouvons encore utiliser la borne supérieure développée par Ha (1997) et présentée dans la propriété 3.

Propriété 3 (*Directement adaptée de Ha (1997)*)

Soit S_u le plus petit entier non négatif supérieur à $(\rho - 1)/(h'\rho) + 1/\ln \rho - 1$ avec $\rho = \lambda/\mu$ et $h' = c_h/(\lambda c_l)$. Pour $\rho > 1$, $\tilde{S}^* \leq S_u$.

L'expression du coût moyen permet alors, comme pour le modèle avec retours indépendants, de calculer le paramètre $\tilde{S}^*$ qui sera celui qui minimise $\tilde{C}(S)$ sur l'intervall $[0, S_u]$.

4.3 Modèle dépendant avec retours différés

Dans ce modèle, chaque demande peut induire, avec une probabilité p , un retour de produit selon un délai exponentiel de taux γ .

Dans ce modèle à réutilisation directe, les produits retournés peuvent être utilisés afin de servir de nouvelles demandes (Figure 4.2). Le stock est alors commun aux produits neufs et retournés. Ce modèle sera désigné par le Modèle 3 dans la suite de ce document.

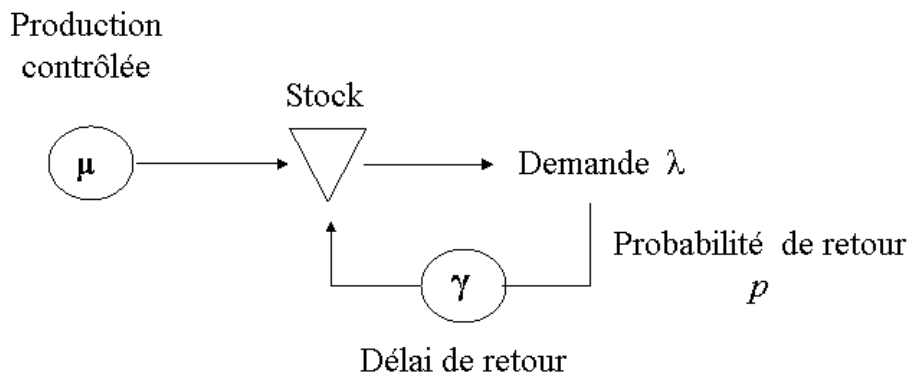


Figure 4.2 – Modèle 3 : Retours dépendants et différés

Dans ce modèle, l'état du système peut être résumé par deux variables $(X(t), Y(t))$ où à un instant t : $X(t)$ est le niveau de stock (incluant les produits neufs et retournés) et $Y(t)$ est le nombre produits en train d'être retournés¹ à l'instant t . Nous devons alors distinguer deux cas :

- Le cas *observable* : le responsable de production connaît $Y(t)$ à chaque instant et prend ses décisions en se basant sur cette information.
- Le cas *non observable* : le responsable ne connaît pas le nombre $Y(t)$.

Nous étudierons chacun de ces deux cas séparément (sections 4.3.1 et 4.3.2), en essayant de trouver dans chaque cas la politique qui minimise le coût. Puis, en section 4.4, nous terminerons par une étude numérique en vue, entre autres, de comparer ses deux cas et d'évaluer l'importance de la prise en compte de $Y(t)$ et de l'observabilité des retours.

La structure du coût est rappelée dans le tableau suivant qui résume également les principales notations utilisées.

1. Nombre de demandes ayant été satisfaites et qui sont en train d'être retournées.

x	= niveau de stock (produits neufs et retournés) à l'instant $t = 0$
y	= nombre de produits en cours de retour à l'instant $t = 0$
μ	= taux de production
λ	= taux de demande
γ	= taux du délai de retour
$p(q)$	= probabilité qu'une demande satisfaite soit (ne soit pas) retournée
c_h	= coût de possession d'une unité de stock par unité de temps
c_p	= coût de production unitaire
c_l	= coût unitaire de vente perdue
c_r	= coût unitaire de retour de produit
α	= taux d'actualisation

Rappelons qu'une politique π spécifie quand est-ce qu'il faut produire ou pas, pour chaque état du système, l'objectif étant de trouver la politique minimisant le coût total actualisé sur un horizon infini. En adoptant la démarche utilisée pour les modèles 1 et 2, nous montrons que ce problème peut être modélisé par un processus de décision markovien (MDP) dans le cas observable. Pour le cas non-observable, le problème peut être modélisé par un processus de décision markovien partiellement observable (POMDP pour Partially Observed Markov Decision Process).

4.3.1 Cas des retours observables

4.3.1.1 Équations d'optimalité

La structure de la politique optimale dans le cas observable sera discutée dans la section suivante. Dans la présente section, nous présentons les équations d'optimalité qui permettent de calculer le coût optimal actualisé associé à la politique optimale dans le cas observable. Nous restreignons notre analyse aux politiques markoviennes stationnaires étant donné qu'il existe une politique optimale stationnaire markovienne d'après Puterman (1994). Nous définissons les processus stochastiques suivants lorsqu'une politique π (quelconque) est appliquée, partant initialement d'un stock x et d'un nombre y de produits en train d'être retournés :

- $U_{x,y}^\pi(t)$: nombre de demandes clients n'ayant pas été satisfaites jusqu'à l'instant t
- $V_{x,y}^\pi(t)$: nombre de produits ayant été retournés jusqu'à l'instant t
- $W_{x,y}^\pi(t)$: nombre de pièces ayant été fabriquées jusqu'à l'instant t
- $X_{x,y}^\pi(t)$: niveau du stock à l'instant t

Ayant souligné que le cas observable peut être modélisé par un MDP, nous définissons également $v^\pi(x, y)$ comme le coût total actualisé associé à une politique π et à l'état initial (x, y) . Si α est le taux d'actualisation ($\alpha > 0$), alors $v^\pi(x, y)$ est la somme des coûts de production, de possession des stocks, de ventes perdues et de retours :

$$v^\pi(x, y) = E \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} (c_l dU(t) + c_r dV(t) + c_p dW(t) + c_h dX(t)) \right]$$

Nous cherchons à trouver la politique optimale π^* minimisant $v^\pi(x, y)$. Soit $v^*(x, y) := v^{\pi^*}(x, y)$ la fonction optimale du coût, alors :

$$v^*(x, y) = \min_{\pi} v^\pi(x, y)$$

Nous modélisons ce problème par MDP à temps continu. En vue d'uniformiser ce MDP, nous supposons que y est borné par M . Cette dernière hypothèse n'est pas cruciale vu que nos résultats restent valables pour n'importe quel M . Nous pouvons alors uniformiser ce MDP (Lippman, 1975; Puterman, 1994) avec un taux $\mathcal{C} = \lambda + \mu + \gamma M$. Il peut ensuite être montré que la valeur optimale de la fonction de coût vérifie les équations d'optimalité suivantes :

$$v^*(x, y) = Tv^*(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Où l'opérateur T est défini par

$$Tv(x, y) := \frac{1}{\mathcal{C} + \alpha} [c_H x + \mu T_0 v(x, y) + \lambda p T_1 v(x, y) + \lambda (1 - p) T_2 v(x, y) + \gamma T_3 v(x, y)]$$

et

$$T_0 v(x, y) := \min [v(x, y); c_p + v(x + 1, y)]$$

$$T_1 v(x, y) := \begin{cases} v(x - 1, y + 1) & \text{si } x > 0 \text{ et } y < M \\ v(x, y) + c_l & \text{si } x = 0 \\ v(x - 1, y) & \text{si } x > 0 \text{ et } y = M \end{cases}$$

$$T_2 v(x, y) := \begin{cases} v(x - 1, y) & \text{si } x > 0 \\ v(x, y) + c_l & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$T_3 v(x, y) := \begin{cases} y [v(x + 1, y - 1) + c_r] + (M - y) v(x, y) & \text{si } y > 0 \\ M v(x, y) & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

L'opérateur T_0 est associé à la décision optimale de production. L'opérateur T_1 (resp. T_2) est associé à une demande qui induira (resp. n'induit pas) un retour de produit. Finalement, l'opérateur T_3 correspond au retour d'un produit.

Partant de ces équations d'optimalité, la fonction optimale du coût v^* ainsi que la politique optimale S^* peuvent être calculées par itération de valeur (Puterman, 1994), suivant une méthode dynamique similaire à celles présentées pour les modèles 1 et 2 (sections 3.4.2 et 4.2.3).

4.3.1.2 Structure de la politique optimale dans le cas observable

Sur la base des études numériques que nous avons menées selon l'approche (calcul du coût optimal) présentée ci-dessus, nous conjecturons que la politique optimale dans le cas observable est du type suivant :

Conjecture 1 *Il existe une courbe de commutation $S(y)$ telle qu'il est optimal de produire si et seulement si $x < S(y)$. De plus, cette courbe possède la propriété suivante :*

$$S(y) - 1 \leq S(y + 1) \leq S(y)$$

Le terme « de commutation » dans la Conjecture 1 se réfère à la frontière entre la production et la non production.

Cette politique optimale peut être vue comme une politique base-stock dépendante :

- Base-stock car il s'agit de toujours produire jusqu'à un seuil $S(y)$ donné ;
- Et dépendante car ce seuil $S(y)$ dépend du nombre de produits y en cours de retours.

La figure 4.3 présente la politique optimale pour un exemple numérique.

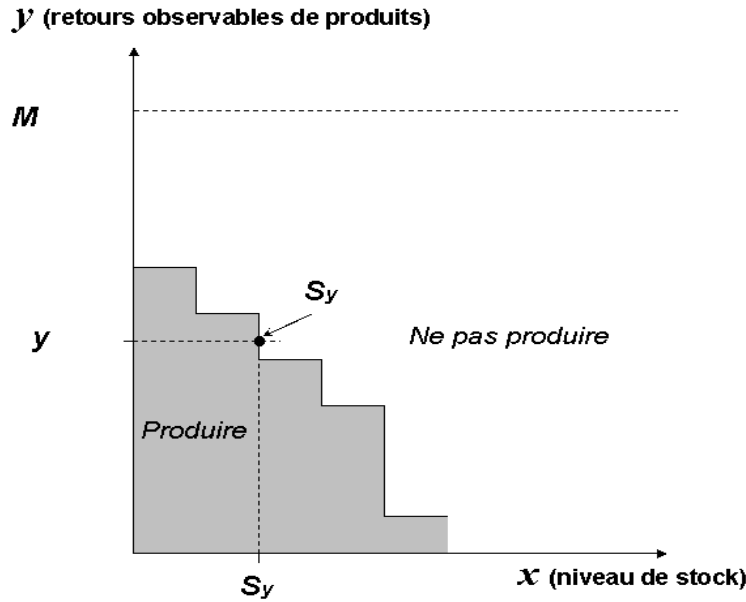


Figure 4.3 – Politique optimale : problème actualisé & retours observables
($\lambda = 0.9, \mu = 1, p = 0.10, \alpha = 0.1, \gamma = 10, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 45, c_r = 15$)

La démonstration analytique de la Conjecture 1 s'avère difficile à cause de la forte corrélation entre la demande et les retours. Nous rappelons cependant que nous avons démontré analytiquement l'optimalité de la politique base-stock lors de retours observables dans le cas particulier où le délai moyen de retour $1/\gamma \rightarrow 0$. Ce cas particulier n'est autre que le Modèle 2 que nous avons présenté au début de ce chapitre (section 4.2).

4.3.2 Heuristique pour le cas des retours non observables

Lorsque le nombre de produits retournés n'est pas observable, nous considérons une heuristique basée uniquement sur le niveau de stock. Cette heuristique est une politique base-stock telle que le système produit si et seulement si le niveau de stock est inférieur à S , ce dernier étant inchangé dans le temps. Notons $\tilde{v}_S(x, y)$ le coût

actualisé à horizon infini associé à cette politique. La fonction $\tilde{v}_S(x, y)$ satisfait les mêmes équations d'optimalité que v^* excepté le fait que l'opérateur T_0 , associé à la décision de production, est dans ce cas remplacé par l'opérateur $\tilde{T}_0$ défini comme suit :

$$\tilde{T}_0 v(x, y) := \begin{cases} v(x+1, y) + c_p & \text{si } x < S \\ v(x, y) & \text{autrement} \end{cases}$$

Nous pouvons alors rechercher numériquement le base-stock level $\tilde{S}$ minimisant $\tilde{v}_S(0, 0)$ ². Nous dénotons alors $\tilde{v}(0, 0) := \min_S \tilde{v}_S(0, 0)$. Le $\tilde{S}$ obtenu est fixe et ne dépend pas de y .

Une politique plus élaborée pourrait tenir compte de $N(t)$, le nombre de pièces qui sont dans le marché (nombre d'unités vendues moins le nombre d'unités retournées). Alors nous savons que $Y(t)$, le nombre de produits dans le marché qui vont être retournés, est distribué selon une loi binomiale $\mathcal{B}(N(t), p)$. Nous ne considérerons cependant pas cette politique lors de cette étude.

4.3.3 Calcul de S^* et $S^*(y)$

Le calcul du base-stock level optimal $S^*(y)$ relatif au cas observable (resp. S^* relatif au cas non observable) se fait numériquement lors du calcul du coût optimal actualisé qui lui est associé, et ce suivant le même principe que pour les modèles 1 et 2 (voir sections 3.4.2 et 4.2.3).

2. Bien que les tests numériques ont tous montré que $\tilde{S}$ est le même quel que soit le $\tilde{v}_S(x, y)$ minimisé, nous nous focaliserons principalement sur le $\tilde{S}$ minimisant $\tilde{v}_S(0, 0)$ car c'est pour un système initialement neutre ($x = 0, y = 0$) que nous réaliserons notre étude numérique en section 4.4.

4.4 Étude numérique

Cette étude numérique utilise les résultats préalablement établis dans chacun des deux modèles étudiés lors de ce chapitre, l'objectif principal étant d'évaluer l'impact de la dépendance demande/retours sur les performances des systèmes considérés. Ainsi, nous subdivisons cette étude en deux parties :

- Retours immédiats de produits ($1/\gamma \rightarrow 0$) : où nous étudions le phénomène de dépendance entre demande et retours de produits sur le Modèle 2 avec retours dépendants instantanés.
- Retours non instantanés de produits ($1/\gamma > 0$) : où non seulement nous étudions le phénomène de dépendance sur le Modèle 3 avec retours dépendants non immédiats, mais nous comparerons également les cas observable et non observable. De plus, le Modèle 3 nous permet d'étudier l'influence du délai de retour des produits.

4.4.1 Retours instantanés de produits : impact de la dépendance

L'objectif de cette section est d'étudier le phénomène de dépendance entre la demande et les retours de produits pour des retours dépendants instantanés. Ce travail sera réalisé en comparant le Modèle 1 indépendant au Modèle 2 avec dépendance directe. Nous distinguons les modèles 1 et 2 comme suit : C^* (resp. S^*) est le coût total moyen (resp. base stock level) optimal du Modèle 1 avec retours indépendants. Alors que $\tilde{C}^*$ (resp. $\tilde{S}^*$) est le coût total moyen (resp. base stock level) optimal du Modèle 2 avec retours dépendants immédiats.

Lors de cette étude numérique, nous considérons donc les expressions des coûts moyens. Afin de calculer les politiques optimales, nous utilisons les résultats analytiques des sections 3.5 et 4.2.5. Tout d'abord, nous comparons l'influence du coût de retour, c_r , et de la probabilité de retour, p , sur les politiques optimales des modèles 1 et 2 ce qui nous permettra de comprendre le comportement de ces deux modèles. Ensuite, nous évaluons l'impact dû à la négligence de la corrélation entre la demande et les retours.

4.4.1.1 Modèle 1 vs Modèle 2 : comparaison des politiques optimales en fonction de c_r et de p

La figure 4.4 présente les seuils optimaux de production (base stock levels optimaux) S^* and $\tilde{S}^*$ ainsi que les coûts optimaux C^* and $\tilde{C}^*$ en fonction de la probabilité de retour p sur un exemple.

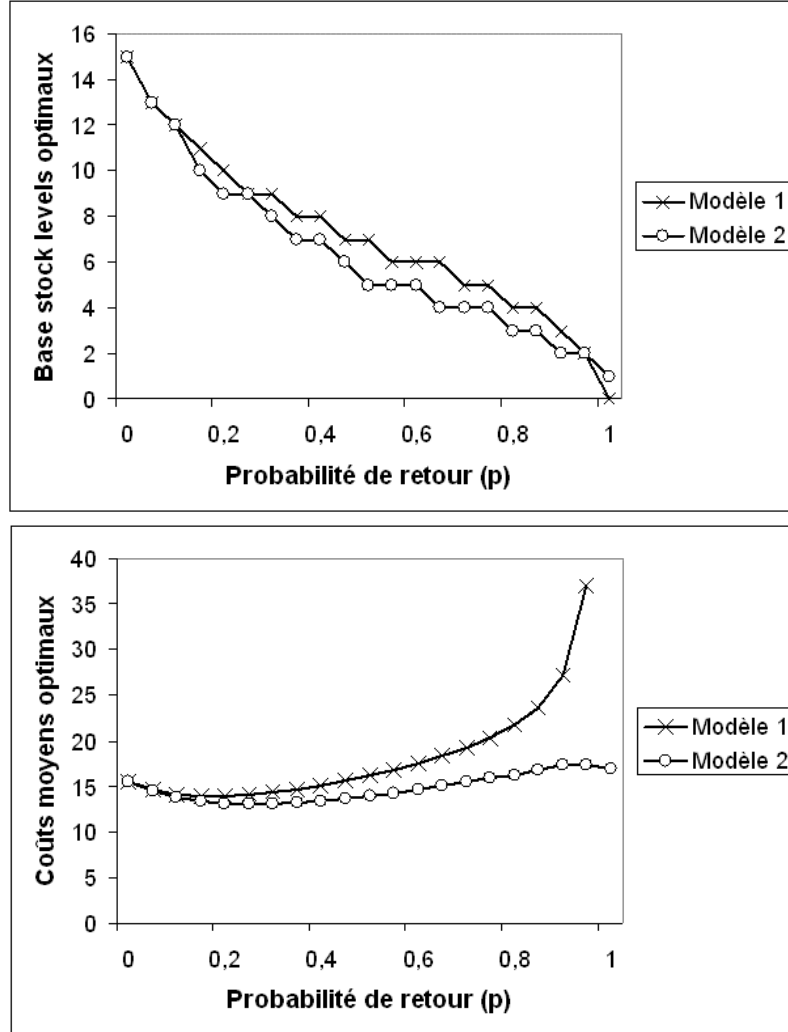


Figure 4.4 – Influence de la probabilité de retour p sur les politiques optimales ($\lambda = \mu = 1$, $c_h = 1$, $c_r = 16$, $c_l = 128$)

Nous avons réalisé nos calculs pour plus de 27950 instances qui correspondent aux combinaisons suivantes des paramètres : $c_r, c_l \in \{1, 2, 4, 8, \dots, 1024\}$, $\lambda \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, \dots, 2\}$, $p \in \{0, 0.05, 0.1, 0.15, \dots, 1\}$, $c_p = 0$. Nous posons $\mu = 1$ et $c_h = 1$.

Lorsque $p = 0$, les modèles 1 et 2 se comportent tous deux comme une $M/M/1$ make-to-stock queue basique avec un taux de demande λ , un taux de service μ , un coût de vente perdue c_l et un coût de stockage c_h . Par conséquent nous obtenons $C^* = \tilde{C}^*$ et $S^* = \tilde{S}^*$ lorsque $p = 0$.

Lorsque p augmente, nous observons que S^* et $\tilde{S}^*$ sont non croissants en p , ce qui est en adéquation avec les théorèmes 2 et 4. D'autre part, C^* et $\tilde{C}^*$ sont non monotones en p . Lorsque p augmente, le coût moyen de retour et le coût moyen de stockage tendent à croître tandis que le coût moyen de ventes perdues tend à décroître. Selon l'importance relative de ces coûts moyens, le coût total moyen peut

croître ou décroître. Quand p tend vers 1, il est possible de déduire les limites du coût total moyen et du base stock optimal d'après le théorème suivant.

Théorème 5

$$\lim_{p \rightarrow 1} S^* = 0$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} \tilde{S}^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda c_l < c_h + \lambda c_r \\ 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

Nous expliquons ici brièvement le raisonnement suivi : lorsque $p \rightarrow 1$, le Modèle 1 dispose alors d'une source indépendante, et non maîtrisable, de produits de taux λ égal à la demande. Par conséquent, et même en cas d'arrêt de la production, le stock de produits peut potentiellement tendre vers l'infini. Le tracé de la chaîne de Markov du Modèle 1 permet, dans ce cas, de se rendre compte de l'éventuelle évolution du stock vers l'infini.

Concernant le Modèle 2, soit il s'agit de ne pas produire ($\tilde{S}^* = 0$) et d'assumer la perte de toutes les ventes avec un coût λc_l , soit il suffit de produire une seule unité ($\tilde{S}^* = 1$) qui sera systématiquement ($p = 1$) et instantanément retournée permettant ainsi de satisfaire toutes les demandes. Dans ce dernier cas, le coût supporté est le coût de possession de l'unité en stock³ (c_h) en plus du coût de retour systématique⁴ (λc_r). Le choix entre $\tilde{S}^* = 0$ et $\tilde{S}^* = 1$ se fait alors en fonction de la relation entre les coûts λc_l d'une part, et $c_h + \lambda c_r$ d'autre part.

Les coûts moyens des deux modèles lorsque $p \rightarrow 1$ sont alors obtenus par simple passage à la limite partant de leurs expressions analytiques (sections 3.5 4.2.5) :

$$\lim_{p \rightarrow 1} C^* = +\infty$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} \tilde{C}^* = \min[\lambda c_l, c_h + \lambda c_r]$$

La preuve de ce Théorème est donnée en Annexe B.3.

La figure 4.5 présente les base stock levels et les coûts moyens optimaux en fonction de c_r . Lorsque $c_r = 0$, les modèles 1 et 2 se comportent comme une $M/M/1$ make-to-stock queue basique avec une demande de taux modifié égal à $q \lambda$, un taux de service μ , un coût de vente perdue c_l et un coût de possession des stocks c_h . Ainsi, nous obtenons que $C^* = \tilde{C}^*$ et que $S^* = \tilde{S}^*$ quand $c_r = 0$. Lorsque c_r augmente, nous observons que S^* est constant et que $\tilde{S}^*$ est non croissant en c_r , ce qui est en adéquation avec les théorèmes 2 et 4. D'autres résultats relatifs à l'influence de c_r sont présentés dans le théorème suivant.

3. A chaque fois que cette pièce satisfait une demande (de taux λ), elle est toujours retournée de façon immédiate et est ainsi toujours disponible en stock.

4. Toutes les demandes (λ) sont satisfaites par cette pièce en stock, mais elle sont également toutes retournées car $p = 1$.

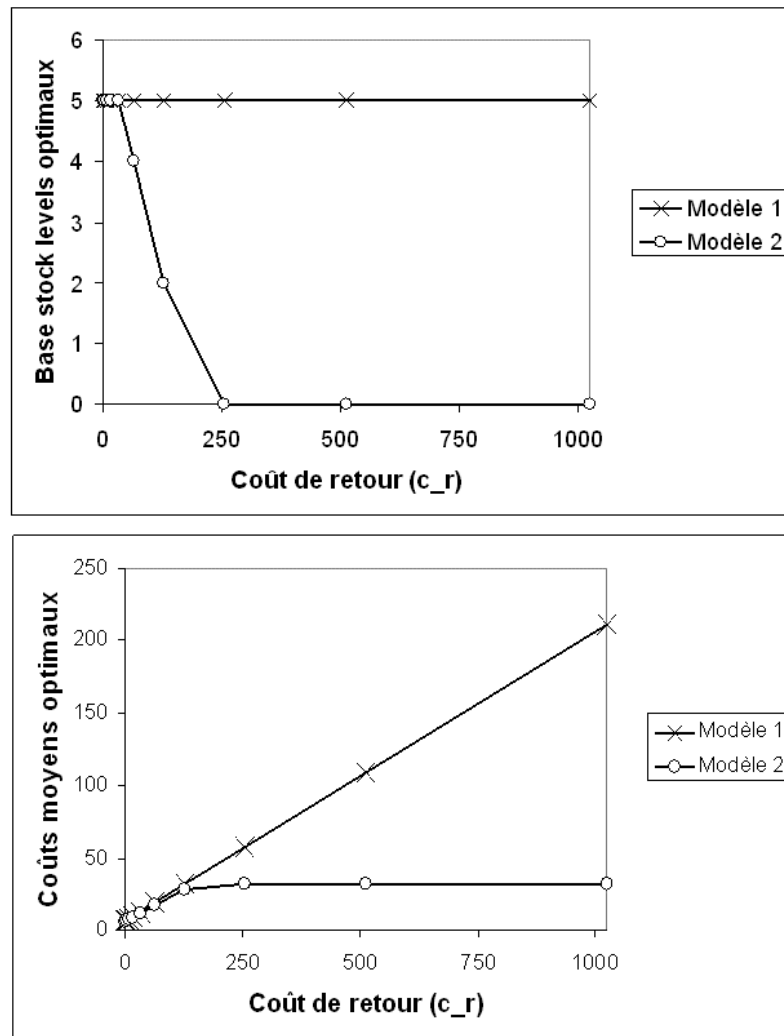


Figure 4.5 – Influence du coût unitaire de retour c_r sur les politiques optimales $p = 0.2, \lambda = \mu = 1, c_h = 1, c_l = 32$)

Théorème 6 *Les coûts moyens optimaux, C^* et $\tilde{C}^*$, sont croissants avec le coût unitaire de retour c_r . De plus, lorsque c_r tend vers l'infini, nous obtenons les limites suivantes :*

$$\lim_{c_r \rightarrow \infty} \tilde{S}^* = 0$$

Lorsque $c_r \rightarrow \infty$, le système représenté par le Modèle 2 n'a plus aucun intérêt à produire car la moindre unité produite risque d'engendrer un retour, avec une probabilité p , et donc un coût infini.

Les coûts moyens des modèles 1 et 2 sont obtenus par un passage à la limite $c_r \rightarrow \infty$ partant de leurs expressions analytiques :

$$\begin{aligned} \lim_{c_r \rightarrow \infty} C^* &= +\infty \\ \lim_{c_r \rightarrow \infty} \tilde{C}^* &= \lambda c_l \end{aligned}$$

Le preuve de cet théorème est donnée en annexe B.4.

En conclusion, nous pouvons dire que les systèmes (modèles) 1 et 2 peuvent avoir des comportements très différents, par exemple pour de grandes valeurs de p ou de c_r . Cependant, il faut préciser que les résultats obtenus peuvent être biaisés par le fait que les taux réels des retours de produits sont différents pour les deux modèles comparés : le taux de retour du Modèle 1 est de λp , alors que celui du Modèle 2 est moindre car égal à $\lambda p (1 - \pi_0)$ où $(1 - \pi_0)$ est la probabilité de non rupture du stock.

4.4.1.2 Modèle 2 : influence de la non prise en compte de la corrélation entre la demande et les retours

Nous allons à présent quantifier, sur le Modèle 2 avec retours dépendants immédiats, l'éventuel surcoût généré si l'on ignore la dépendance demande/retours.

Ayant présenté les modèles 1 et 2, la question qui peut naturellement se poser est la suivante : pouvons-nous utiliser le Modèle 1 (retours indépendants) comme une bonne approximation en vue d'obtenir une politique efficace (base stock level) pour le Modèle 2 ? Afin de répondre à cette question, nous considérons les deux politiques suivantes appliquées au Modèle 2 :

- La politique optimale du Modèle 2, avec son base-stock level $\tilde{S}^*$ son coût moyen $\tilde{C}^*$;
- Une heuristique relative au Modèle 2, considérant un base-stock level S_{ind}^* (le base-stock level optimal du Modèle 1). Le coût moyen associé à cette heuristique est alors $\tilde{C}(S_{ind}^*)$ (coût moyen du Modèle 2 pour le base stock level du Modèle 1).

En vue de comparer ces deux politiques, nous considérons l'augmentation relative du coût (du Modèle 2) due à l'utilisation de l'heuristique, définie par :

$$\Delta C = \frac{\tilde{C}(S_{ind}^*) - \tilde{C}^*}{\tilde{C}^*}$$

ΔC compare donc une heuristique qui néglige la corrélation à une politique optimale qui en tient compte. Il permet de mesurer l'importance du phénomène de corrélation. Plus ΔC est faible, plus le Modèle 1 est une bonne approximation du Modèle 2, et donc plus la corrélation demande/retours peut être négligée.

Dans ce qui suit, nous posons sans perte de généralité $\mu = 1$ et $c_h = 1$, ce qui est équivalent à définir des unités temporelles et monétaires. Nous avons évalué les performances de l'heuristique en faisant varier les autres paramètres pour 22990 instances qui correspondent aux combinaisons des valeurs appartenant aux ensembles suivants :

- $\lambda \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2\}$
- $p \in \{0.05, 0.1, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95\}$
- $c_l \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$
- $c_r \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$

Nous restreignons notre analyse aux 12951 instances pour lesquelles il est intéressant de produire dans les deux modèles ($S_{ind}^*, \tilde{S}^* > 0$).

Dans le tableau 4.1 est donnée la répartition de ΔC . Dans 62% des instances, l'heuristique obtient de très bons résultats ($\Delta C \leq 1\%$). Néanmoins, dans 10.7% des instances, l'heuristique obtient d'assez mauvais résultats avec $\Delta C \geq 10\%$.

ΔC	0-1 %	1-5%	5-10%	10-20%	20-50%	> 50%
Nombre d'instances	8041	2707	823	699	552	129
% d'instances	62.1%	20.9%	6.4%	5.4%	4.3%	1.0%

Tableau 4.1 – Répartition de ΔC pour les instances avec $S_{ind}^*, \tilde{S}^* > 0$.

Cette vue globale ne nous dit malheureusement pas quand est ce qu'il est intéressant, ou pas, d'utiliser l'heuristique. Ceci est une question difficile car ΔC est non monotone en fonction des paramètres du système. La figure 4.6 illustre la non monotonie en fonction de p et de λ . Les irrégularités de cette figure sont dues au caractère discret des base stock levels.

Cependant, et sur l'ensemble des instances testées, nous pouvons mettre en évidence quelques observations simples :

- L'erreur maximale est de 97%.
- Même avec une faible probabilité de retour $p = 5\%$ (925 instances), l'accroissement relatif du coût ΔC peut aller jusqu'à 10 %.
- Pour une probabilité de retour $p \leq 0.35$ (5555 instances), l'accroissement relatif du coût ΔC est au plus de 11%.

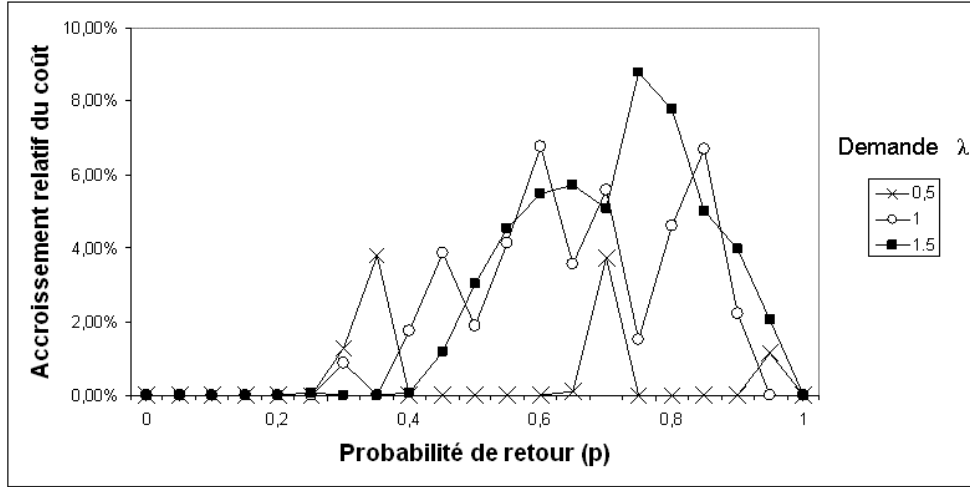


Figure 4.6 – Influence de la probabilité de retour sur l'accroissement relatif du coût ΔC ($\lambda = 0.5, \mu = 1, c_h = 1, c_l = 100, c_r = 10$)

- Si $c_r = c_l$ (1708 instances), l'accroissement relatif du coût ΔC est inférieur à 5%. Ce cas correspond au cas où le client est complètement remboursé lorsqu'il retourne un produit et où les coûts logistiques de retours sont négligeables.

4.4.2 Retours non instantanés de produits : impact de la dépendance, retours observables vs non observables, influence du délai de retour

L'objectif de cette section est :

- D'évaluer l'impact de la dépendance demande retours ;
- De comparer les cas observable et non observable. Cette comparaison permettra d'évaluer l'importance de la connaissance du nombre $Y(t)$ de produits en train d'être retournés et l'éventuel gain induit par cette information ;
- Enfin, de mettre en avant l'influence du délai moyen de retour sur les performances (coût total) du système.

4.4.2.1 Modèle 3 : influence de la non prise en compte de la corrélation

L'étude de l'influence de la corrélation se fera en adoptant la même démarche que celle de la section 4.4.1.2. Ainsi nous évaluerons l'impact de la non prise en compte de la corrélation en comparant sur le Modèle 3 :

- $\tilde{C}$: le Coût moyen de la meilleure heuristique (meilleur $\tilde{S}$), du Modèle 3 avec retours différés, dans le cas non observable.
- Une heuristique relative au Modèle 3, dans le cas non observable, considérant un base-stock level S_{ind}^* (le base-stock level optimal du Modèle 1 avec retours indépendants). Le coût moyen associé à cette heuristique est alors $\tilde{C}(S_{ind}^*)$ (coût moyen du Modèle 3 non observable du base stock level du Modèle 1).

Nous voyons que l'étude de la corrélation sur le Modèle 3 avec retours différés ne peut se faire aisément que sur le cas des retours non observables. La raison est que si l'on applique au Modèle 3 les base-stock levels du Modèle 1, cela reviendra à imposer des seuils de production au Modèle 3, il n'y aura donc plus de distinction entre les cas observable et non observable, sachant que la principale différence est, justement, qu'il n'y a que le cas non observable ou l'on peut imposer un base-stock level donné. Dans le cas des retours observables, la production doit pouvoir s'ajuster en fonction des retours. Néanmoins, le fait de ne considérer que le cas non observable du Modèle 3 avec retours non instantanés ne remet pas en cause la légitimité de cette étude. En effet, l'objectif est d'évaluer l'importance de la dépendance demande/retours sur un modèle avec retours différé, et non pas de comparer l'observabilité à la non observabilité des retours. Ce dernier point est traité par la suite.

De manière similaire à celle faite pour le modèle avec retours instantanés (section 4.4.1.2), nous allons évaluer le surcoût généré si l'on ignore cette corrélation. A cet effet, nous considérons l'accroissement relatif du coût (du Modèle 3) définie par :

$$\Delta C = \frac{\tilde{C}(S_{ind}^*) - \tilde{C}}{\tilde{C}}$$

ΔC compare une heuristique du Modèle 3 qui néglige la corrélation à une heuristique qui en tient compte. Plus ΔC est faible, plus le Modèle 1 est une bonne approximation du Modèle 3 en termes de base-stock level, et donc plus la corrélation demande/retours peut être négligée. A ce niveau, il faut noter qu'un faible ΔC est d'autant plus intéressant que le temps de calcul numérique du S_{ind}^* indépendant est beaucoup plus faible que celui $\tilde{S}$ du cas non observable.

Pour ce faire, nous calculons $\tilde{C}(S_{ind}^*)$ et $\tilde{C}$ en utilisant les formules présentées aux sections 3.5 et 4.3.2⁵. Nous avons réalisé nos calculs pour les instances qui correspondent aux combinaisons suivantes des paramètres⁶ : $\lambda = 1$, $c_r \in \{50, 100\}$, $c_p, c_l \in \{0, 50, 100\}$, $p \in \{0, 0.3, 0.6, 0.9\}$, $\gamma \in \{0.01, 0.1, 1, 10\}$. Nous posons $\mu = 1$ et $c_h = 1$.

ΔC	0-1 %	1-5%	5-10%	10-20%	20-50%	> 50%
% d'instances	68.75%	6.25%	1.56%	4.69%	6.25%	12.50%

Tableau 4.2 – Répartition de ΔC .

Dans le tableau 4.2 est donnée la répartition de ΔC . Dans plus de 68% des instances, l'heuristique obtient de très bons résultats ($\Delta C \leq 1\%$). Néanmoins, dans 12.50% des instances, l'heuristique obtient de mauvais résultats avec $\Delta C \geq 50\%$. Par

5. Le coût moyen du Modèle 3 étant la limite du coût actualisé lorsque α tend vers zéro.

6. Ces instances sont assez réduites comparé aux autres études numériques. Ceci est dû aux délai important d'exécution du programme (cas non observable) qui nous a poussé à limiter le nombre d'instances testées.

conséquent, il n'est pas toujours possible de négliger la dépendance demande/retour sur le Modèle 3 avec retours différés.

Malheureusement, on ne peut pas savoir, de manière générale, quand est ce qu'il est souhaitable de prendre en compte (ou pas) la dépendance entre la demande et les retours, ΔC étant non monotone en fonction des paramètres du système. Cependant, nous pouvons observer que :

- Même avec une faible probabilité de retour $p = 3\%$, l'accroissement relatif du coût ΔC peut aller jusqu'à 32 %.
- Que le délai moyen de retour soit faible ($1/\gamma = 0.1$) ou important ($1/\gamma = 100$), l'accroissement relatif du coût ΔC peut dépasser les 50%.

4.4.2.2 Modèle 3 : comparaison des cas observable / non observable et influence du délai de retour

Nous voulons à présent comparer les cas observable et non observable afin de connaître le gain induit par la connaissance du nombre $Y(t)$ de produits retournés. Par ailleurs, nous étudions l'influence du délai moyen de retour sur les performances du système (Modèle 3).

Ainsi, nous comparons la performance (coût) de la politique (heuristique) base-stock présentée dans la section 4.3.2 pour le cas non observable, avec le coût optimal calculé en section 4.3.1 pour le cas observable. Nous avons calculé les politiques optimales ainsi que l'heuristique pour plus de 2000 instances correspondant aux combinaisons suivantes des paramètres : $c_p, c_r, c_l \in \{0, 10, \dots, 100\}$, $\lambda \in \{0.8, 1, 1.2\}$, $\gamma \in \{0.0001, 0.001, 0.1, \dots, 1000\}$, $p \in \{0, 0.3, 0.6, 0.9\}$. Lors de cette étude numérique, nous définissons $\mu = 1$ et $c_h = 1$ sans perte de généralité car cela revient à définir des unités monétaires et temporelles.

Dans la figure 4.7, nous présentons les coûts actualisés⁷ suivants en fonction du délai moyen de retour, $1/\gamma$, pour un système initialement neutre (état initial $(0, 0)$) :

- $v^*(0, 0)$: Coût optimal actualisé dans le cas observable (voir section 4.3.1)
- $\tilde{v}(0, 0)$: Coût actualisé de la meilleure heuristique (meilleur $\tilde{S}$) dans le cas non observable (voir section 4.3.2)
- $v_{p=0}^*(0, 0)$: Coût optimal actualisé lorsqu'il n'y a pas de retours de produits. Ce coût peut être calculé en posant une probabilité de retour égale à 0 dans la section 4.3.1
- $v_{\gamma=\infty}^*(0, 0)$: Coût actualisé de la politique optimale avec délai de retour nul. Le calcul de ce coût correspondant au Modèle 2 est présenté en section 4.2.1. Aussi, ce coût peut être vu comme la limite de $v^*(0, 0)$ lorsque γ tend vers l'infini.

7. Cette partie de l'étude numérique considère des coûts actualisés, contrairement aux tests effectués jusqu'à présent. Ce choix est dû au fait que le coût actualisé permet de constater que les coûts des différents modèles deviennent plus proches pour des valeurs très faibles ou très élevées du délai de retour. Ceci est lié, entre autres, au facteur d'actualisation comme nous le verrons à la fin de cette étude numérique.

Nous présentons également dans la figure 4.7 les base-stock levels optimaux correspondant aux coûts actualisés décrits ci-dessus.

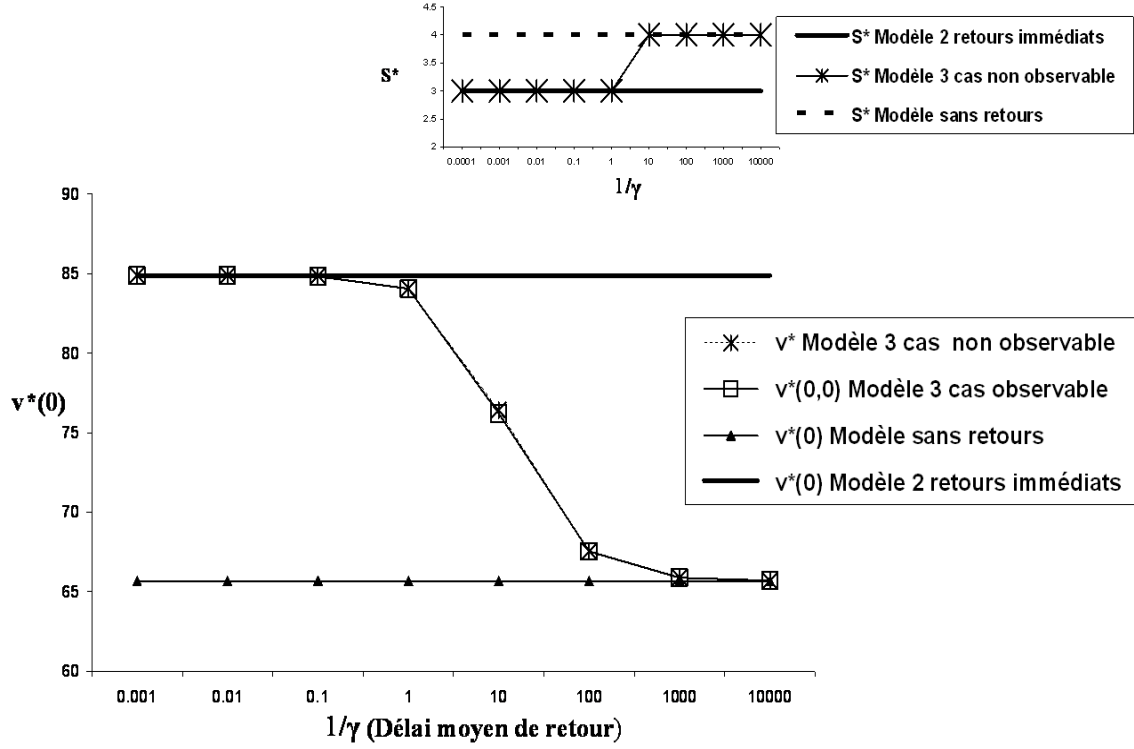


Figure 4.7 – Comparaison de l'heuristique et des politiques optimales ($\lambda = 0.9, \mu = 1, p = 0.25, \alpha = 0.1, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 20, c_r = 16$)

Nous résumons à présent les principales observations liées à la figure 4.7 ainsi qu'à d'autres résultats numériques :

- Les base-stock levels optimaux ($S(y)$ observable et $\tilde{S}$ non observable) sont non-décroissants en fonction du délai moyen de retour. Il est clair que de faibles délais de retour impliquent de réduire la production par anticipation et donc les seuils de production (base-stock levels).
- La politique optimale (cas observable) réalise toujours de meilleures performances que l'heuristique (cas non observable) même si la figure 4.7 ne le montre pas clairement. Ce résultat est assez naturel vu que la politique optimale exploite plus d'informations relatives au système.
- Les performances de la politique optimale et de l'heuristique sont très proches lorsque le délai moyen de retour, $1/\gamma$, est soit très faible soit très important. De plus, lorsque le délai de retour est faible, l'information sur y , le nombre de produits retournés, ne peut être exploitée de manière efficace. Aussi, les coûts observable et non observable tendent vers le coût du Modèle 2 avec retours immédiats.

Lorsque le délai de retour est important, le taux d'actualisation α décroît

l'effet des retours futurs. Nous avons également mené une analyse numérique en prenant en compte le coût moyen du système. Nous observons alors toujours que les coûts des deux politiques se rapprochent lorsque $1/\gamma$ tend vers l'infini. Lorsque le délai de retour est important, l'écart type du délai de retour $1/\gamma$ est également important. Cela rend l'observabilité de y moins utile étant donné que la valeur moyenne du délai de retour augmente avec sa variance.

- Nous observons également, lorsque le délai moyen de retour ($1/\gamma$) tend vers l'infini, que les deux coûts tendent vers le coût optimal d'un système sans retours de produits. Ceci est encore une fois dû à l'effet du taux d'actualisation, α , et n'est pas observé en considérant les coûts moyens.
- Pour certaines valeurs moyennes du délai de retour, le bénéfice relatif lié à l'observation de y est maximum. Cependant, le bénéfice maximum que nous ayons observé sur l'ensemble de nos instances ne dépasse pas les 2%. Par conséquent, une simple politique base-stock (sans observabilité) est une bonne heuristique dans de nombreux cas.

4.5 Conclusion

Lors de ce chapitre, nous avons commencé par présenter notre second modèle (Modèle 2) qui est un modèle de stock avec flux inverses et retours dépendants de produits. Sur ce modèle, nous avons considéré des retours de produits qui se font de façon immédiate et avec une certaine probabilité p . Cette configuration correspond aux retours commerciaux par exemple. Nous avons montré l'optimalité de la politique base-stock et avons prouvé certaines propriétés de monotonie du base-stock level en fonction des paramètres du système. Ces résultats sont également valables si l'on considère le coût moyen du système pour lequel nous avons pu obtenir quelques résultats analytiques additionnels facilitant le calcul du base stock level.

Par la suite, l'étude d'un modèle de stock avec retours de produits, dépendants et aléatoires non instantanés, a été présentée. Nous avons, sur ce Modèle 3, distingué deux cas : (i) le cas où le nombre de produits retournés est observable et connu (ii) et le cas où ce nombre n'est pas observable. Nous avons partiellement caractérisé la politique optimale dans le cas observable comme étant une politique base-stock dépendante. Par ailleurs, nous avons choisi d'appliquer une heuristique pour le cas non observable.

Enfin, nous avons mené une étude numérique dans laquelle notre principal objectif était l'évaluation de l'importance du phénomène de dépendance entre la demande et les retours. Nous avons, là aussi, structuré notre étude numérique en deux parties. Dans la première partie, nous avons comparé, pour le Modèle 2 avec retours instantanés, sa politique optimale à une heuristique utilisant le base-stock level du Modèle 1. Cette heuristique obtient souvent de bons résultats, mettant ainsi en évidence le fait qu'il n'est pas toujours essentiel de tenir compte de la corrélation entre la demande et les retours de produits sur ce modèle. Néanmoins, il arrive que l'heu-

ristique obtienne de très mauvais résultats. De plus, étant donné la non-monotonie des performances de l'heuristique suivant les paramètres du système, il est difficile d'identifier de manière synthétique les valeurs de paramètres (les situations) pour lesquelles l'heuristique obtient de bons/mauvais résultats. Il est donc difficile de savoir précisément, sur ce Modèle 2, quand il est possible de négliger la corrélation demande/retours.

Dans la seconde partie de notre étude numérique, nous avons considéré le Modèle 3 avec retours dépendants non instantanés. Nous avons commencé par comparer ce modèle au Modèle 1 indépendant, cette comparaison nous a permis de constater qu'il n'est pas toujours possible de négliger la dépendance demande/retours sur le Modèle 3 même si, là aussi, il est difficile d'identifier les valeurs de paramètres pour lesquelles la dépendance demande/retours peut être ignorée.

Par la suite, nous avons comparé la politique optimale du cas observable avec l'heuristique du cas non observable. Il apparaît que les performances de l'heuristique sont très bonnes lorsque le délai moyen de retour des produits est soit très faible soit très important. Même pour des valeurs moyennes de ce délai moyen, la différence relative des coûts n'excède pas les 2% sur les instances testées. Il est alors possible de conclure que l'observabilité des retours n'induit pas de réductions significatives des coûts sur le modèle que nous avons étudié. De plus, nous avons identifié quelques rapprochements entre les coûts des différents modèles testés numériquement. Ces rapprochements sont dus à l'effet du délai moyen de retours des produits et à celui du taux d'actualisation.

Chapitre 5

Modèle avec option de rejet

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à un système où le producteur doit faire face à des retours indépendants de produits. L'une des spécificités de notre modèle est que les retours de produits ne sont pas systématiquement acceptés et placés en stock. Les retours peuvent être soit acceptés soit rejetés par le producteur. La possibilité de rejeter les retours de produit est généralement appelée *option de rejet* (rejection/disposal option). De plus, nous supposons toujours la stochasticité des différents processus, ce qui est assez réaliste (particulièrement en ce qui concerne la demande et les retours de produits).

Nous voulons savoir, sur notre modèle, si l'intégration d'une option de rejet peut être économiquement bénéfique au producteur. Nous avons vu au Chapitre 2 que cette question a déjà été traitée au préalable par quelques auteurs et sur différents modèles. Par exemple, van der Laan *et al.* (1996b) considèrent un modèle avec retours indépendants de produits sur lequel ils développent une politique (s, Q) et donnent deux approximations du coût total. L'option de rejet est également incluse et montrée comme étant une « option nécessaire » à la réduction des coûts de stockage même si elle complique l'optimisation du problème.

Teunter & Vlachos (2002) traitent de la nécessité d'une option de rejet des produits retournés qui peuvent être remanufacturés. Ils considèrent un modèle de stock à temps discret avec demande et retours stochastiques, délai d'approvisionnement et de remanufacturing déterministes. En utilisant la simulation, ils trouvent, qu'en général, il n'est pas nécessaire d'avoir une option de rejet.

Plus récemment, Pinçe *et al.* (2008) appliquent une politique d'approvisionnement/rejet à temps continu sur un système avec approvisionnement autonome et coût fixe de rejet. Ils étudient également la stratégie de rejet qui semble engendrer des gains considérables dans de nombreux cas, même :

- Lorsque les coûts de rejets sont fixes et non-nuls ;
- Lorsque les taux réels des demandes sont élevés avec d'importants ratios de retours (demande nette faible),
- Pour des pourcentages de retours modérés avec une grande variabilité de la demande (Pinçe *et al.*, 2008).

Ouyang & Zhu (2008) étudient, dans un travail récent, un modèle de stock avec option de rejet pour un système hybride de production/remanufacturing. Ils ap-

pliquent une politique (s_p, Q, s_d) , trouvent l'expression du coût total et comparent les possibilités d'avoir, ou pas, une option de rejet. Ils trouvent que l'option de rejet engendre des résultats plutôt satisfaisants pour des taux élevés de produits retournés. Autrement, le fait d'inclure ou pas une option de rejet induit des performances similaires. Les auteurs concluent que l'option de rejet peut être utilisée dans tous les cas. Une revue de littérature plus générale sur les modèles de stocks avec flux inverses et option de rejet est présentée au Chapitre 2 (sections 2.1.3 et 2.2.5).

Rappelons que Gayon (2007) considère une $M/M/1$ make-to-stock queue avec retours de produits où tous les processus sont supposés stochastiques. Sur ce modèle avec retours indépendants de produits et back-order, il prouve l'optimalité de la politique base stock et calcule analytiquement l'expression du base-stock level optimal. Nous avons étudié, lors du Chapitre 3 (Modèle 1), la version lost-sales du modèle de Gayon (2007) et y avons également prouvé l'optimalité de la politique base-stock ainsi que quelques propriétés de monotonie en fonction des paramètres du système. Cependant, le Modèle 1 ne permet pas le rejet des produits retournés mais il constitue la base du modèle que nous étudions dans ce chapitre.

Ainsi, nous généralisons le Modèle 1 en considérant une option de rejet. Nous supposons toujours des processus stochastiques de demande et de retours et cherchons à trouver, cette fois encore, la politique optimale au lieu d'appliquer une politique connue d'approvisionnement/rejet, ce qui est généralement fait pour ce type de modèle. Par ailleurs, l'étude de ce modèle se différencie des précédentes par le fait que l'objectif est, à présent, de trouver la politique optimale qui *maximise le profit* total, et non plus celle qui minimise le coût. Rappelons que nous pouvons considérer sur chacun de nos modèles un objectif de minimisation de coût ou de maximisation de profit, nous avons choisi dans ce chapitre de maximiser le profit. Par conséquent, sur ce modèle avec option de rejet, nous caractérisons la politique optimale qui maximise le profit actualisé du système (section 5.2). Par la suite, nous étendons nos résultats lorsque le profit moyen est considéré.

Nous terminons nos démonstrations analytiques par une extension de nos travaux au cas d'un modèle avec option de rejet et back-orders (demandes mises en attente).

Enfin, et à travers une étude numérique, nous nous posons la question suivante : quand est-ce qu'il devient économiquement intéressant de rejeter les produits retournés ?

5.1 Description du modèle et hypothèses

Nous considérons une $M/M/1$ make-to-stock queue produisant un seul type de pièces et où la production peut être interrompue et reprise à n'importe quel moment. Le service (production) est exponentiellement distribué de moyenne $1/\mu$ et les pièces produites sont placées dans un stock de produits finis. La demande pour ces unités en stock, poissonnienne de taux λ , est perdue lorsqu'elle ne peut être immédiatement satisfaite (stock nul) engendrant ainsi un manque à gagner pour le système. Nous supposons également des retours indépendants de produits qui arrivent selon un processus de Poisson de taux λp ($0 \leq p \leq 1$). Lorsqu'un produit est retourné par un

client, il peut être soit accepté soit rejeté. Lorsqu'il est accepté, il peut être utilisé comme un produit neuf après un délai (de traitement) supposé négligeable. Le stock est commun aux produits neufs et retournés et les produits retournés peuvent servir à satisfaire de nouvelles demandes. Les produits seront ainsi directement placés dans le stock (commun aux produits neufs et retournés). Nous désignerons ce modèle par Modèle 4 dans la suite de ce document.

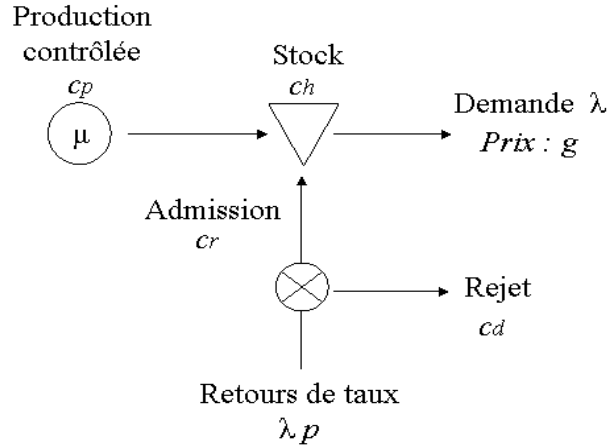


Figure 5.1 – Modèle 4 avec retours indépendants et option de rejet

L'état du système peut être résumé ici par la variable $X(t)$ qui est le niveau de stock à l'instant t incluant les produits neufs et retournés.

La structure du coût est détaillée dans le tableau suivant qui résume également les principales notations que nous allons utiliser.

$X(t)$	niveau de stock (incluant produits neufs et retournés)
μ	taux de production
λ	taux de demande
$p\lambda$	taux de retour (avec $0 \leq p < 1$)
ρ	$:= \lambda/\mu$
ρ_r	$:= \lambda/(\mu + p\lambda)$
c_h	coût de possession d'une unité de stock par unité de temps
c_p	coût de production unitaire
c_r	coût unitaire de remanufacturing d'un produit
c_d	coût unitaire de rejet d'un produit retourné
c'_r	coût relatif unitaire de remanufacturing ($c_r - c_d$)
g	prix de vente unitaire
α	taux d'actualisation

Nous remarquons que, si le coût de production est strictement supérieur au prix unitaire ($c_p > g$), alors il n'y a pas d'incitation à produire. Quant au coût de remanufacturing c_r , il inclut tous les coûts nécessaires à la remise à neuf des produits retournés afin qu'ils soient identiques aux produits neufs et prêts à être vendus.

comme tels ; ces coûts comprennent : les coûts d'emballage (ré-emballage), les coûts logistiques, les coûts de remanufacturing, etc. Le coût de rejet c_d (disposal cost) est engagé à chaque fois qu'un produit retourné est rejeté. Nous définissons également le coût relatif unitaire de remanufacturing $c'_r := c_r - c_d$. Plus c'_r est grand et plus il est coûteux de remanufacturer un produit par rapport à son rejet. Si $c'_r > g$, il n'y a pas d'incitation à remanufacturer un produit.

Une politique π spécifie, pour chaque état du système, quand est ce qu'il faut produire et quand est ce qu'il faut remanufacturer/rejeter un produit retourné. L'objectif du responsable de production est de trouver la politique qui maximise le profit actualisé sur un horizon infini.

Soit $\alpha > 0$ le taux d'actualisation, Nous définissons $v^\pi(x)$ comme le profit total actualisé sur un horizon infini, associé à la politique π et à l'état initial du stock x . Nous cherchons à trouver la politique optimale π^* maximisant $v^\pi(x)$ et notons $v^*(x) := v^{\pi^*}(x)$ la valeur optimale du profit.

Nous restreignons notre analyse à l'ensemble des politiques stationnaires markoviennes étant donné l'existence d'une politique optimale stationnaire markovienne (Puterman, 1994).

5.2 Caractérisation de la politique optimale

Ce problème peut être modélisé comme un processus de décision markovien (MDP) à temps continu qui peut être uniformisé (Lippman, 1975; Puterman, 1994) avec un taux $\mathcal{C} = \mu + \lambda + \lambda p$. En adoptant la même démarche que pour les modèles 1, 2 et 3, il peut être montré que la fonction optimale du profit v^* satisfait les équations d'optimalité suivantes :

$$v^*(x) = Tv^*(x), \forall x \in \mathbb{N}$$

Où l'opérateur T est défini par

$$Tv(x) := \frac{1}{C + \alpha} [-c_h x + \mu T_0 v(x) + \lambda T_1 v(x) + \lambda p T_2 v(x)] \quad (5.1)$$

et

$$\begin{aligned} T_0 v(x) &= \max[v(x), v(x+1) - c_p] \\ T_1 v(x) &= \begin{cases} v(x-1) + g & x > 0 \\ v(x) & x = 0 \end{cases} \\ T_2 v(x) &= \max(v(x+1) - c_r, v(x) - c_d) \end{aligned}$$

L'opérateur T_0 est associé à la décision optimale de production, l'opérateur T_1 est associé à la demande et l'opérateur T_2 est associé à l'admission (contrôle de l'admission/rejet) des produits retournés.

Partant de ces équations, nous pouvons montrer que la politique optimale est une politique de type (R, S) , définie comme suit :

Définition 7 Une politique (R, S) préconise :

- d'accepter un produit retourné si et seulement si le niveau de stock est $< R$;
- de produire si et seulement si le niveau de stock est $< S$.

Afin de montrer qu'il existe une politique (R, S) qui est optimale, nous introduisons l'ensemble suivant de fonctions :

Définition 8 Si $v \in \mathcal{U}$, alors pour tout $x \in \mathbb{N}$:

C.1 $\Delta v(x+1) \leq \Delta v(x)$, où $\Delta v(x) := v(x+1) - v(x)$

C.2 $\Delta v(x) \leq g$

La condition C.1 assure la concavité de v alors que C.2 préconise de satisfaire une demande qui arrive. Nous pouvons maintenant énoncer un théorème caractérisant la fonction optimale du profit.

Afin de montrer que la politique optimale est de type (R, S) , il est suffisant de montrer que v^* appartient à l'ensemble $\mathcal{U}$. L'opérateur T est défini tel que $v^* = Tv^*$. Par conséquent, la séquence $v^{n+1} = Tv^n$ converge vers v^* pour n'importe quel v^0 (théorème du point fixe, Puterman (1994)) et en particulier si v^0 est la fonction nulle qui appartient à $\mathcal{U}$. Nous montrons en Annexe C.1 que T préserve $\mathcal{U}$ (i.e. si $v \in \mathcal{U}$ alors $Tv \in \mathcal{U}$) et obtenons par induction le théorème suivant.

Théorème 7 La fonction à valeur optimale $v^* \in \mathcal{U}$.

La concavité de v^* implique le corollaire suivant.

Corollaire 1 Soient R^* et S^* les seuils suivants :

$$S^* := \min[x \in \mathbb{N} | \Delta v^*(x) \leq c_p]$$

$$R^* := \min[x \in \mathbb{N} | \Delta v^*(x) \leq c'_r]$$

La politique (R^*, S^*) est optimale.

Preuve 1 Comme v^* est concave ($v^* \in \mathcal{U}$ selon le théorème 7), nous avons $\Delta v^*(x) \leq c_p$ (resp. $\Delta v^*(x) \leq c'_r$) si et seulement si $x < S^*$ (resp. $x < R^*$).

Expliquons brièvement en quoi la concavité du profit optimal actualisé implique une structure de type (R, S) de la politique optimale. La concavité de v^* assure l'existence des seuils $S^* := \min[x \in \mathbb{N} | \Delta v^*(x) \leq c_p]$ et $R^* := \min[x \in \mathbb{N} | \Delta v^*(x) \leq c'_r]$, potentiellement infinis, tels que $\Delta v^*(x) \leq c_p$ (resp. $\Delta v^*(x) \leq c'_r$) si et seulement si $x < S^*$ (resp. $x < R^*$). Alors que les équations d'optimalité préconisent de produire lorsque $\Delta v^*(x) \leq c_p$ et d'accepter les retours lorsque $\Delta v^*(x) \leq c'_r$, d'où l'adéquation.

Le théorème 7 implique également les propriétés suivantes des seuils R^* et S^* .

Corollaire 2 Propriétés :

1. Si $c_p \geq g$ alors $S^* = 0$ (ne jamais produire).
2. Si $c'_r \geq g$ alors $R^* = 0$ (ne jamais accepter un produit retourné).
3. Si $c_p > c'_r$ alors $S^* \leq R^*$.
4. Si $c_p < c'_r$ alors $S^* \geq R^*$.
5. Si $c_p = c'_r$ alors $S^* = R^*$.

Preuve 2 *Preuve de chacune des propriétés respectivement :*

1. $\Delta v^*(0) \leq g$ d'après le théorème 7 et donc $\Delta v^*(0) \leq c_p$ si $c_p \geq g$. La définition de S^* implique que $S^* = 0$.
2. $\Delta v^*(0) \leq g \leq c'_r$ si $c'_r \geq g$. La définition de R^* implique que $R^* = 0$.
3. La concavité de v^* (Théorème 7) et les définitions de R^* , S^* impliquent le résultat.
4. *Idem.*
5. *Idem*

Il est important de remarquer que R et S sont deux seuils relatifs au même stock de produits. C'est pourquoi il est possible d'avoir aussi bien $R \leq S$ que $R \geq S$.

Enfin, le calcul des paramètres optimaux R^* et S^* se fait numériquement par un programme dynamique que nous avons implémenté, compilé et exécuté sous JAVA selon la même démarche que celle adoptée pour les modèles 1 et 2 (voir sections 3.4.2 et 4.2.3).

5.3 Extension au profit moyen

La politique optimale maximisant le profit moyen peut être obtenue comme la limite de la politique du profit actualisé lorsque α tend vers zéro (Puterman, 1994). Par conséquent, la politique optimale du profit moyen est également de type (R, S) . Dans ce qui suit, nous évaluons la performance d'une politique (R, S) donnée et proposons ensuite des algorithmes de calcul des paramètres optimaux relatifs au profit moyen.

5.3.1 Évaluation de performance d'une politique (R, S)

Nous avons besoin, pour le calcul de la distribution stationnaire du niveau de stock, de distinguer deux cas :

Cas 1 : $S \geq R$

Le processus stochastique $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible à temps continu (voir figure 5.2) dont il est possible de calculer la distribution stationnaire $P(X = n)$:

$$P(X = 0) = \rho_r^R \left(\frac{\rho_r - \rho_r^{R+1}}{1 - \rho_r} + \frac{\rho - \rho^{R-S}}{\rho - 1} \right)^{-1}$$

$$P(n) = \begin{cases} \frac{1}{\rho_r^n} P(0) & \text{if } 0 < n < R \\ \frac{1}{\rho^{n-R}} \frac{1}{\rho_r^R} P(0) & \text{if } R \leq n < S \end{cases}$$

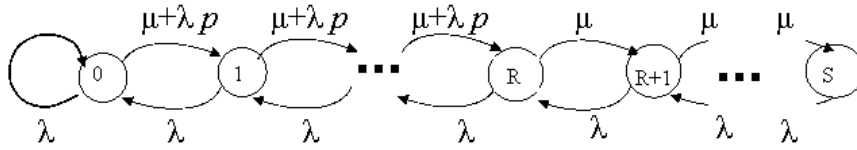


Figure 5.2 – Représentation de la chaîne de Markov $X(t)$ lorsque $R \leq S$.

Nous dénotons par $\pi(R, S)$ le profit moyen lorsque la politique (R, S) est appliquée. Nous obtenons alors :

$$\pi(R, S) = G(R, S) - C_h(R, S) - C_p(R, S) - C_r(R, S) - C_d(R, S)$$

Avec $G(R, S)$ qui est le revenu moyen et $C_h(R, S)$ (resp. $C_p(R, S)$, $C_r(R, S)$, $C_d(R, S)$) le coût moyen de stockage (resp. de production, de remanufacturing, de rejet). Nous avons :

$$\begin{aligned} \pi(R, S) &= \lambda g(1 - P(0)) - c_h \sum_0^\infty i \times P(i) - \mu c_p P(X < S) - \lambda p c_r P(X < R) \\ &\quad - \lambda p c_d P(X \geq R) \\ &= \lambda g(1 - P(0)) - c_h \sum_0^\infty i \times P(i) - \mu c_p P(X < S) - \lambda p c'_r P(X < R) \\ &\quad - \lambda p c_d \end{aligned} \tag{5.2}$$

Le calcul de $\pi(R, S)$ requiert les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty i \times P(i) &= P(0) \rho_r^{-R} \left(\frac{\rho_r^{R+1} - [(\rho_r - 1)R + \rho_r]}{(\rho_r - 1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\rho - 1)R + \rho - \rho^{R-S}[(\rho - 1)S + \rho]}{(\rho - 1)^2} \right) \\ P(X < S) &= 1 - P(0) \frac{1}{\rho^{S-R}} \frac{1}{\rho_r^R} \\ P(X < R) &= P(0) \frac{\rho_r^{1-R} - \rho_r}{1 - \rho_r} \end{aligned}$$

Cas 2 : $S \leq R$

Dans ce cas, les probabilités stationnaires sont données par :

$$P(0) = \rho_r^S \left[\frac{\rho_r - \rho_r^{S+1}}{1 - \rho_r} + \frac{p^{-1} - p^{R-S}}{p^{-1} - 1} \right]^{-1}$$

$$P(n) = \begin{cases} \frac{1}{\rho_r^n} P(0) & \text{si } 0 \leq n < S \\ p^{n-S} \frac{1}{\rho_r^S} P(0) & \text{si } S \leq n < R \end{cases}$$

L'expression de $\pi(R, S)$ (5.2) est toujours valable mais les quantités nécessaires au calcul de $\pi(R, S)$ changent et deviennent :

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty i \times P(i) &= P(0) \rho_r^{-S} \left(\frac{\rho_r^{S+1} - [(\rho_r - 1)S + \rho_r]}{(\rho_r - 1)^2} + \frac{p^{-1} - p^{R-S}[(1 - p^{-1})R]}{(1 - p^{-1})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p^{-1} + (p^{-1} - 1)S}{(1 - p^{-1})^2} \right) \\ P(X < S) &= P(0) \frac{\rho_r^{1-S} - \rho_r}{1 - \rho_r} \\ P(X < R) &= 1 - P(0) p^{R-S} \frac{1}{\rho_r^S} \end{aligned}$$

5.3.2 Calcul des paramètres optimaux (R^*, S^*)

Nous distinguons trois cas pour le calcul des paramètres optimaux.

Cas 1 : $c'_r = c_p$

Partant du Corollaire 2, nous savons que $S^* = R^*$ et pouvons alors restreindre notre analyse aux politiques (S, S) . Nous remarquons que, lorsque $R = S$, le système se comporte comme une $M/M/1$ make-to-stock queue sans retours de produits, avec un taux d'arrivée λ et un taux de service $\mu + \lambda p$. D'après Ha (1997), nous savons que le profit moyen $\pi(S, S)$ est concave en S . Comme nous avons une formule explicite pour $\pi(S, S)$, il est facile de trouver le S maximisant $\pi(S, S)$.

Cas 2 : $c'_r > c_p$

Partant du Corollaire 2, nous avons $S^* \geq R^*$ et pouvons restreindre l'optimisation aux politiques (R, S) avec $S \geq R$. Soit $S^*(R)$ le base-stock level optimal pour seuil R donné. si nous admettons que $S^*(R)$ est non-croissant en R , nous avons :

$$0 \leq S^*(R) \leq S^*(0)$$

Le base-stock level $S^*(0)$ est encore une fois facile à calculer étant le base-stock level d'une $M/M/1$ make to stock queue sans retours de produits, avec un taux

d'arrivée λ et un taux de service μ . Afin de trouver les paramètres optimaux, il est alors suffisant d'évaluer $\pi(R, S)$ pour tout (R, S) tel que $0 \leq R \leq S \leq S^*(0)$.

Cas 3 : $c'_r < c_p$

Ce cas est très similaire au Cas 2. Nous savons que $S^* \leq R^*$ d'après le Corollaire 2 et pouvons restreindre l'optimisation aux politiques (R, S) avec $S \leq R$. Soit $R^*(S)$ le base-stock level optimal pour seuil S donné. Si nous admettons que $R^*(S)$ est non décroissant en S nous obtenons :

$$0 \leq R^*(S) \leq R^*(0)$$

Où $R^*(0)$ est le base-stock level optimal d'une $M/M/1$ make to stock queue sans retours de produits, avec un taux d'arrivée λ et un taux de service λp . Afin de trouver les paramètres optimaux il est alors suffisant d'évaluer $\pi(R, S)$ pour tout (R, S) tel que $0 \leq S \leq R \leq R^*(0)$.

5.4 Extension au cas back-order

Nous considérons à présent une extension de notre modèle où une demande non satisfaite est mise en attente (back-ordered) au lieu d'être perdue. Une demande mise en attente induit un coût de mise en attente (back-order cost) c_b par demande mise en attente et par unité de temps. Nous noterons $X(t)$ l'état du système à l'instant t . $X(t)$ peut prendre des valeurs positives ou négatives, nous appellerons alors $X(t)^+ = \max[0, X]$ le niveau de stock, et $X(t)^- = -\min[0, X(t)]$ le nombre de demandes en attente. Afin de garantir la stabilité du nombre de back-orders (demandes en attente), nous supposons que $\rho_r = \lambda/(\mu + p\lambda) < 1$.

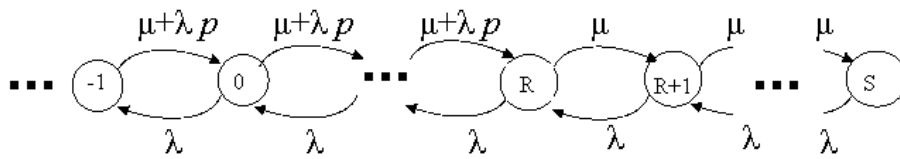


Figure 5.3 – Représentation de la chaîne de Markov $X(t)$ lorsque $R \leq S$ (cas des demandes mises en attente).

Cette fois encore, il peut être montré que la fonction optimale du profit est concave et qu'il existe une politique (R, S) optimale. Dans le cas back-order, les seuils R et S peuvent prendre des valeurs négatives. Par exemple, $R = -3$ implique de remanufacturer un produit retourné seulement si le nombre de back-orders est supérieur à trois. Afin de limiter les coûts de possession des stocks nous pourrions nous attendre à ce que les seuils optimaux R^* et S^* soient négatifs lorsque le taux de retour ainsi que le coût de rejet d'un retour sont très élevés.

Dans ce qui suit, nous adopterons une approche différente de celle du cas lost-sales pour le calcul des paramètres optimaux. Nous considérons ici le profit moyen du système. Ce travail a été publié dans Zerhouni *et al.* (2009).

Cas 1 : $c_p < c'_r$

Nous restreignons, là encore, notre recherche aux politiques (R, S) telles que $S \geq R$. Nous fixons $W := S - R$ ($W \geq 0$) et recherchons $S^*(W)$ le base-stock level optimal pour un W donné. Nous remarquons que le processus stochastique $N(t) = S - X(t)$ est indépendant de S si W est fixé. Nous pouvons calculer la distribution stationnaire de N :

$$P(N=0) = \frac{(1-\rho_r)(1-\rho)}{1-\rho_r-\rho^W(\rho-\rho_r)}$$

$$P(N=n) = \begin{cases} \rho^n P(N=0) & \text{si } 0 \leq n \leq W \\ \rho_r^{n-W} \rho^W P(N=0) & \text{si } n \geq W \end{cases}$$

La distribution stationnaire de $N(t)$ ne dépend pas de S si W est fixé. Le profit moyen $\pi(W, S)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \pi(W, S) &= \lambda g - c_h E[(S - N)^+] - c_b E[(S - N)^-] - c'_r P(X < R) - c_p P(X < S) \\ &\quad - \lambda p c_d \\ &= \lambda g - c_h E[(S - N)^+] - c_b E[(S - N)^-] - c'_r P(N > W) - c_p P(N > 0) \\ &\quad - \lambda p c_d \end{aligned}$$

Lorsque W est fixé, $P(N > W)$ et $P(N > 0)$ sont indépendants de S . Par conséquent, trouver le S maximisant $\pi(W, S)$ pour un W fixé est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\min_S c_h E[(S - N)^+] + c_b E[(S - N)^-] \quad (5.3)$$

Le problème de minimisation est équivalent à un problème de voyageur de commerce (newsboy problem) où la quantité à commander est S , la demande stochastique est N , le coût de rupture est c_b . Nous avons, pour ce problème, le résultat connu suivant :

$$\begin{aligned} S^*(W) &= \operatorname{argmax}_S c_h E[(S - N)^+] + c_b E[(S - N)^-] \\ &= \min[S | F(S) \geq \frac{c_b}{c_b + c_h}] \end{aligned}$$

Où F est la distribution cumulée de N . La distribution cumulée de N est facile à calculer :

$$\begin{aligned} F(S) &= \sum_{n=-\infty}^S P(N=n) \\ &= \frac{1-\rho^W}{1-\rho} P(0) + \frac{1-\rho_r^{S-W+1}}{1-\rho_r} \rho^W P(0) \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer $S^*(W)$ pour tout W . De plus, si l'on admet que $S^*(W)$ est non-décroissant en W , nous devrions avoir :

$$S^*(W = 0) \leq S^* \leq S^*(W = \infty)$$

Avec $S^*(W = 0)$ (resp. $S^*(W = \infty)$) qui est le base-stock level optimal d'une $M/M/1$ make to-stock queue avec back-orders, pas de retour et un taux d'utilisation ρ_r (resp. ρ). D'après Veatch & Wein (1996) nous avons :

$$S^*(W = 0) = \left\lfloor \frac{\ln \frac{c_h}{c_h + c_b}}{\ln \rho_r} \right\rfloor \quad S^*(W = \infty) = \left\lfloor \frac{\ln \frac{c_h}{c_h + c_b}}{\ln \rho} \right\rfloor$$

Reste alors à calculer $[S^*(W = 0), S^*(W = \infty)]$. Par la suite, il faudra faire varier W dans un intervalle $[0, W_{max}]$ ¹ et, pour chaque valeur de W , il faudra faire varier S dans l'intervalle $[S^*(W = 0), S^*(W = \infty)]$, puis calculer le $R = S - W$ correspondant et évaluer le profit moyen pour chaque couple (R, S) . Ce travail doit être fait, numériquement, pour toutes les valeurs de W dans $[0, W_{max}]$. À la fin, nous choisirons le couple (R^*, S^*) optimal qui maximise le profit moyen. La difficulté, de cette évaluation numérique, réside principalement dans l'obtention d'une borne supérieure W_{max} efficace. Nous essayons alors de choisir un W_{max} suffisamment grand pour que cette différence entre S et R soit très peu envisageable sur le système considéré (nous rappelons que $W = S - R$).

Cas 2 : $c_p > c'_r$

La même approche peut être adoptée en posant $W := R - S$, $N(t) = R - X(t)$. Dans ce cas :

$$P(N = 0) = \frac{(1 - \rho_r)(1 - 1/p)}{1 - \rho_r - p^{-W}(1/p - \rho_r)}$$

$$P(N = n) = \begin{cases} p^{-n} P(N = 0) & \text{if } 0 \leq n \leq W \\ \rho_r^{n-W} p^{-W} P(N = 0) & \text{if } n \geq W \end{cases}$$

Nous déduisons F la distribution cumulée de N :

$$F(R) = \frac{1 - p^{-W}}{1 - 1/p} P(N = 0) + \frac{1 - \rho_r^{R-W+1}}{1 - \rho_r} \rho^W P(N = 0)$$

$$\text{et } R^*(W) = \min[R | F(R) \geq \frac{c_b}{c_b + c_h}]$$

Cas 3 : $c_p = c'_r$

Si l'on restreint l'optimisation aux politiques (S, S) (i.e. $W = 0$), nous avons immédiatement $P(N = 0) = 1 - \rho_r$ et $F(S) = 1 - \rho_r^{S+1}$. nous obtenons alors :

$$F(x) = \frac{c_b}{c_h + c_b} \Leftrightarrow x = \frac{\ln \frac{c_h}{c_h + c_b}}{\ln \rho_r} - 1$$

1. Ne pouvant aller jusqu'à l'infini pour W sur les tests numériques, nous choisissons de prendre une valeur maximale suffisamment grande.

et

$$R^* = S^* = \left\lfloor \frac{\ln \frac{c_h}{c_h + c_b}}{\ln \rho_r} \right\rfloor$$

ce qui est en adéquation avec Veatch & Wein (1996).

5.5 Étude numérique : évaluation de l'option de rejet

L'idée de cette étude numérique est de chercher à savoir si l'intégration d'une option de rejet est économiquement profitable au système de production considéré. Si tel est le cas, nous tenterons alors d'identifier les conditions sous lesquelles l'intégration de l'option de rejet devient intéressante. Nous étudieront particulièrement l'influence des retours de produits et du coût de remanufacturing c_r sur les profits générés.

Afin d'atteindre ces objectifs nous comparons :

- D'une part, le profit moyen du Modèle 4 étudié dans ce chapitre avec retours indépendants et option de rejet, calculé selon les formules établies en section 5.3 (ventes perdues) ;
- D'autre part, un modèle similaire au précédent sans option de rejet. La formule du coût optimal actualisé de ce modèle est équivalente à celle du Modèle 4 (avec rejet) à l'exception de l'opérateur T_2 qui devient :

$$\check{T}_2 v(x) = v(x + 1) - c_r$$

Ce modèle sans option de rejet correspond en fait au Modèle 1 présenté au Chapitre 3 sur lequel nous maximisons le profit au lieu de minimiser le coût. Nous montrons que la politique base-stock y est optimale². Le profit optimal moyen est alors donné par la limite du profit actualisé lorsque α tend vers zero. Il peut également être donné par des formules analytiques qui peuvent être établies telles que cela a été fait pour le Modèle 4 (section 5.3).

Nous distinguons les modèles avec et sans option de rejet comme suit : $\pi^*(R^*, S^*)$ (resp. R^* et S^*) est le profit optimal moyen (resp. paramètres optimaux) du Modèle 4 avec option de rejet, alors que $\check{\pi}^*(\check{S}^*)$ (resp. $\check{S}^*$) le profit optimal moyen (resp. base-stock level optimal) du Modèle 1 sans option de rejet. Il est à noter que la politique base stock est équivalente à une politique (R, S) avec $R \rightarrow \infty$.

Nous avons calculé les profits optimaux, ainsi que les paramètres correspondants, pour plus de 32200 instances correspondant aux combinaisons suivantes des paramètres : $g = 80$, $c_p, c_l \in \{0, 50, 100\}$, $c_r, c_d \in \{0, 20, \dots, 100\}$, $\lambda \in \{0, 0.2, 0.4, \dots, 2\}$,

2. Nous parlons ici d'optimalité au sens de maximisation du profit. Les équations d'optimalité de ce modèle vérifient la concavité du coût actualisé $\check{v}^* : \check{v}^* \in \mathcal{U}$ (Théorème 7), il existe donc $\check{S}^* := \min[x \in \mathbb{N} | \Delta \check{v}^*(x) \leq c_p]$ ce qui implique que la politique base-stock est optimale. Le raisonnement suivi ici est le même que celui présenté en section 3.4 par exemple.

$p \in \{0, 0.1, 0.2, \dots, 1\}$. Lors de cette étude numérique, nous définissons $\mu = 1$ et $c_h = 1$ sans perte de généralité car cela revient à définir des unités monétaires et temporelles. Nous présentons dans ce qui suit les principaux résultats de cette étude.

5.5.1 Bénéfice lié à l'intégration d'une option de rejet

Nous obtenons, en comparant l'ensemble des instances testées, le tableau suivant qui résume le gain (absolu) en profit induit par l'introduction de l'option de rejet. Ce gain absolu est tout simplement défini par :

$$\text{Gain absolu} = \pi^*(R^*, S^*) - \check{\pi}^*(\check{S}^*)$$

Instances	Pourcentage des instances	Gain
19614	50.03 %	< 0.1%
3011	7.68%	0.1% - 1%
4144	10.57%	1% - 5%
2356	6.01%	5% - 10%
2460	6.27%	10% - 20%
2866	7.31%	20% - 50%
4753	12.12%	$\geq 50\%$

Tableau 5.1 – Profit additionnel lié à l'intégration d'une option de rejet

Ainsi, nous remarquons que dans 42% des cas, le profit moyen du système considéré (Modèle 4) est significativement augmenté par l'intégration d'une option de rejet (Gain > 1%). Autrement, il est équivalent d'inclure, ou pas, la possibilité de rejeter les produits retournés.

De plus, nous avons constaté que les propriétés énoncées au corollaire 2 étaient numériquement vérifiées.

5.5.2 Influence du taux de retours

Il a été établi que l'option de rejet peut donner lieu à une augmentation du profit moyen du système. Regardons à présent l'influence du taux de produits retournés sur ce gain³.

Pour l'exemple montré sur la figure 5.4, nous calculons l'augmentation relative du profit due à l'intégration de l'option de rejet comme suit :

$$\text{Gain relatif} = \frac{\pi^*(R^*, S^*) - \check{\pi}^*(\check{S}^*)}{\check{\pi}^*(\check{S}^*)}$$

3. Pour un λ fixé, l'évolution en fonction du taux de retour δ est équivalente à l'évolution en fonction de $p = \delta/\lambda$.

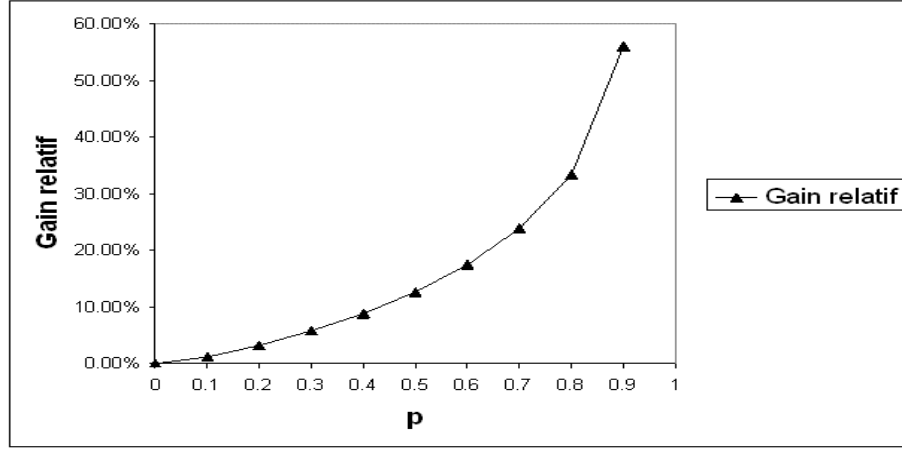


Figure 5.4 – Évolution du $\text{Gain relatif} = \frac{\pi^*(R^*, S^*) - \check{\pi}^*(\check{S}^*)}{\check{\pi}^*(\check{S}^*)}$ en fonction de $p = \delta/\lambda$ ($\lambda = 1.2, \mu = 1, g = 80, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 50, c_r = 40, c_d = 20$)

Nous constatons que plus le flux de produits retournés est important, plus le fait de disposer d'une option de rejet est profitable au système. Ce résultat reste évidemment valable pour les autres instances testées.

Nous voyons bien que, sur cet exemple, l'intégration de l'option de rejet peut induire des hausses de profit qui peuvent aller jusqu'à 55.98% par rapport au profit du modèle sans option de rejet. Ces hausses peuvent être considérées comme étant très significatives.

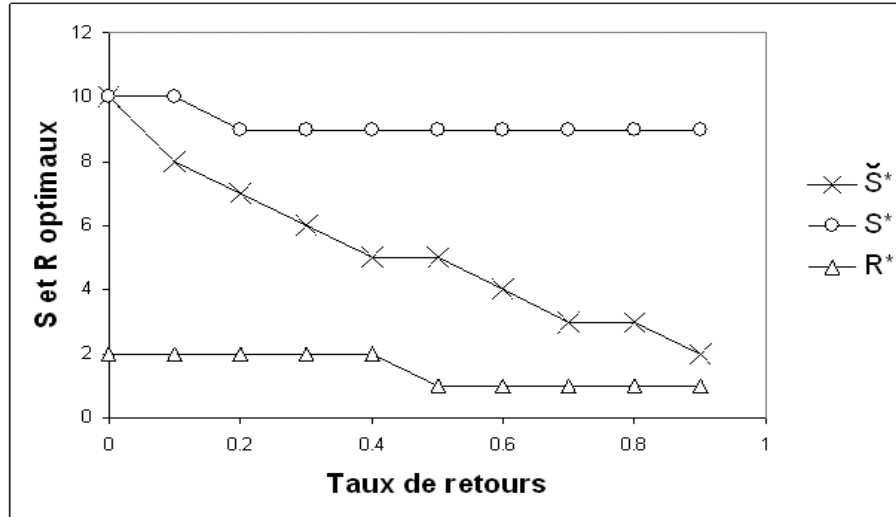


Figure 5.5 – Évolution de R^*, S^* et $\check{S}^*$ en fonction du taux de retours δ ($\lambda = 1.2, \mu = 1, g = 80, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 50, c_r = 40, c_d = 20$)

Par ailleurs, nous remarquons sur la figure 5.5 que les seuils R^*, S^* et $\check{S}^*$ sont non-croissants avec le taux de retours des produits. Nous remarquons également que S^* est en général supérieur à $\check{S}^*$ ce qui est dû au fait que le modèle avec rejet

empêche certains retours de produits et doit compenser ces non-retours par une sur-production.

5.5.3 Influence du coût de remanufacturing

La figure 5.6 montre, sur une instance particulière, une tendance générale que nous avons constaté lors de cette étude et qui est que l'importance de l'option de rejet (profit additionnel généré) augmente avec le coût de remanufacturing c_r . Ce résultat est assez cohérent car, pour un coût de rejet c_d donné, plus c_r est grand, plus le remanufacturing du produit retourné coûte cher par rapport à son rejet, moins le système à intérêt à remanufacturer (accepter) le retour de produit, et plus l'option de rejet semble intéressante.

C'est pourquoi nous voyons sur la figure 5.6 l'augmentation du gain relatif avec c_r qui témoigne de l'intérêt du modèle avec rejet alors qu'en même temps le seuil d'acceptation des retours, R^* , est inversement proportionnel à c_r .

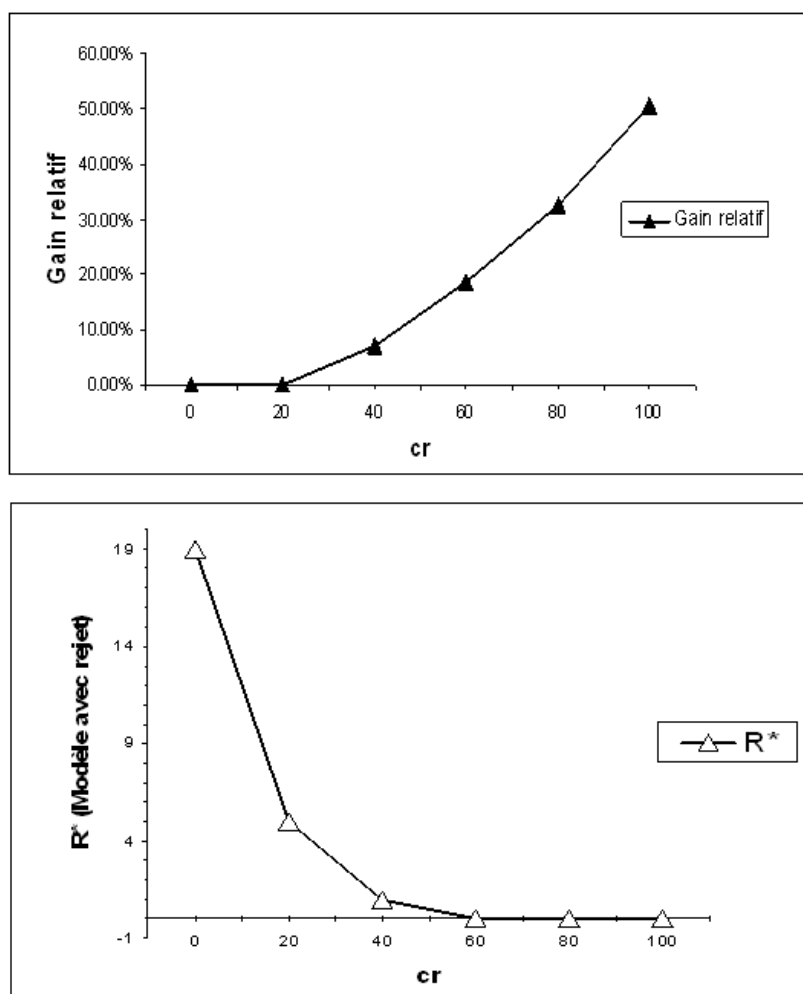


Figure 5.6 – Évolution du *Gain relatif* et de R^* en fonction de c_r ($\lambda = 1, \mu = 1, p = 0.3, g = 80, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 50, c_d = 20$)

Suite à cette étude numérique, nous avons pu constater que l'intégration de l'option de rejet est intéressante, particulièrement pour des retours importants de produits ainsi que pour des valeurs élevées de c_r . Cependant, il est difficile d'établir d'autres règles précises qui décrivent l'utilité de l'option de rejet en fonction des autres paramètres du système (λ , c_p , etc.) étant donné la non monotonie des gains (relatif et absolu) en fonction de ces paramètres.

5.6 Conclusion

Nous avons, dans ce chapitre, présenté un modèle de stock simple où les produits retournés peuvent être rejetés. Nous avons caractérisé la politique optimale maximisant le profit de ce modèle. Cette politique optimale est une politique (R, S) qui préconise de produire si et seulement si le niveau de stock est inférieur à S et de n'accepter les retours de produits que si, et seulement si, le niveau de ce même stock est inférieur à R . Il est alors possible d'avoir, pour le même niveau de stock, $R \leq S$ ou $R \geq S$ en fonction des paramètres du système. Aussi, pour le problème de maximisation du profit moyen, nous avons fourni des algorithmes de calcul des paramètres optimaux aussi bien dans les cas lost-sales que back-orders.

Enfin, sur une étude numérique, nous avons montré qu'il peut être intéressant de disposer d'une option de rejet, principalement lorsque les taux de retours de produits sont élevés et lorsque le coût de remanufacturing c_r est important. Ces résultats numériques fournissent des éléments quantitatifs qui peuvent aider à la décision de mise en place d'une option rejet. En effet, la mise en place d'une option de rejet implique certains coûts fixes qui doivent se justifier par les gains liés à l'introduction de cette option.

Chapitre 6

Modèle avec information avancée sur les retours

Pour le dernier modèle étudié dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi de traiter un modèle inspiré d'un cas réel rencontré au Pays-bas. Ce travail a d'ailleurs été fait en collaboration avec S.D.P. Flapper, professeur associé à la faculté de Génie Industriel et des sciences de l'innovation de la Technische Universiteit Eindhoven (TUE).

Nous nous intéressons à présent à un système avec des retours de produits qui sont annoncés à l'avance par les clients qui les renvoient. C'est ce qu'on appelle une information avancée sur les retours ou *ARI* (*Advance return Information*). Le nombre de retours annoncés, celui des retours effectifs ainsi que les délais de retours et de production (approvisionnement) sont des variables aléatoires. En utilisant la formulation MDP, la politique optimale minimisant le coût total actualisé à horizon infini est déterminée, et ce avec et sans information avancée sur les retours, permettant ainsi, à travers une étude numérique, d'obtenir des intuitions sur la valeur potentielle de cette information.

6.1 Description du modèle et hypothèses

La modélisation globale des systèmes que nous considérons est toujours la même à savoir une $M/M/1$ make-to-stock queue pour un seul type de produits. La production, contrôlée, est exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu$. Les unités produites sont ensuite placées en stock (stock de produits finis). La demande pour ces pièces est exponentielle de taux λ et chaque demande non satisfaite est perdue. Les clients ont la possibilité de retourner leur produit mais, avant de le faire, il ont pour obligation d'annoncer le retour de leur produit. Les annonces de retours se font selon un processus de Poisson de taux δ , indépendamment du processus de demande. Cependant, les retours annoncés ne se concrétisent pas forcément en retours effectifs de produits. Les raisons de cette différence entre retours annoncés et retours effectifs dans la pratique incluent : l'oubli de retourner le produit de la part des clients, l'indisponibilité du client au moment de la récupération planifiée du produit à retourner, changement d'avis du client, etc. Nous supposons qu'il y a

une probabilité p qu'un retour annoncé se matérialise réellement par un retour de produit et une probabilité $q = 1 - p$ que le retour annoncé soit annulé par le client (produit non retourné). Un retour de produit ne peut être rejeté. Par conséquent, et afin de garantir la stabilité du stock de produits finis, nous supposons que $p\delta < \lambda$.

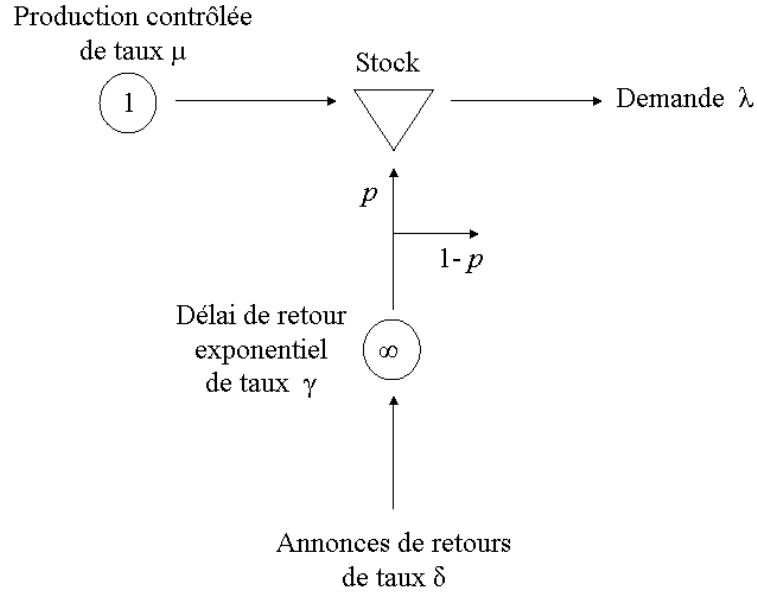


Figure 6.1 – Modèle 5 avec information avancée sur les retours (ARI)

De plus, nous supposons que le temps qui s'écoule entre l'annonce du retour et sa réception effective (ou bien son annulation) est exponentiellement distribué de taux γ . Ce temps ne dépend pas du nombre de retours annoncés. Aussi, les produits retournés ne peuvent être distingués des produits neufs. Une fois reçu, un produit retourné est placé dans le stock (unique) de produits finis et peut être vendu. L'état du système peut être décrit par deux variables $(X(t), Y(t))$ où $X(t)$ est le niveau de stock des produits neufs et retournés à l'instant t , et $Y(t)$ est le nombre de retours qui ont été annoncés mais n'ont pas encore été reçus ou annulés à l'instant t .

Nous considérons des coûts unitaires de production c_p , de vente perdue c_l , de retour c_r et un coût unitaire de possession de stock c_h par unité de temps. Nous supposons que $c_p \leq c_l$ afin qu'il y ait une incitation à produire. L'objectif du responsable ou du preneur de décision est de trouver une politique de production/approvisionnement π minimisant le coût total actualisé sur un horizon infini. La politique de production spécifie, pour chaque état du système s'il faut (quand) produire ou pas. Nous définissons $v^\pi(x, y)$ comme étant le coût total actualisé associé à la politique π , pour un état initial $(X(0), Y(0)) = (x, y)$. Si α est un facteur d'actualisation ($\alpha > 0$) alors :

$$v^\pi(x, y) = E \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} (c_p dW^\pi(t) + c_h dX^\pi(t) + c_l dY^\pi(t) + c_r dZ^\pi(t)) | X(0) = x, Y(0) = y \right]$$

Où $W^\pi(t)$ (resp. $X^\pi(t)$, $Y^\pi(t)$, $Z^\pi(t)$) est le nombre de pièces ayant été fabriquées jusqu'à l'instant t (resp. niveau de stock à l'instant t , ventes perdues jusqu'à l'instant t , retours effectifs de produits jusqu'à l'instant t).

Nous recherchons alors la politique optimale π^* minimisant $v^\pi(x, y)$, et posons $v^*(x, y) = v^{\pi^*}(x, y)$ la fonction optimale du coût. Nous restreignons là aussi notre analyse à l'ensemble des politiques stationnaires markoviennes car nous connaissons l'existence d'une politique optimale appartenant à cet ensemble (Puterman, 1994). Dans ce qui suit, nous caractérisons la politique optimale dans le cas où l'information avancée sur les retours (ARI) est utilisée et dans le cas où l'ARI est ignorée.

6.2 Politique optimale lorsque l'information avancée sur les retours (ARI) est utilisée

Lorsque l'ARI est prise en compte, les décisions prises se basent aussi bien sur le niveau de stock de produits finis que sur le nombre de retours annoncés. En adoptant la même démarche que pour les précédents modèles, ce problème peut être modélisé par un processus de décision markovien (MDP pour Markov decision process). Afin de pouvoir uniformiser cet MDP (Lippman, 1975; Puterman, 1994), nous supposons que le nombre de retours est borné par M . Cette hypothèse n'est pas cruciale étant donné que nos résultats sont valables pour n'importe quel M . Nous pouvons à présent uniformiser le MDP avec un taux $\mathcal{C} = \lambda + \mu + \delta + \gamma M$ et montrer que la fonction optimale du coût satisfait les équations d'optimalité suivantes :

$$v^*(x, y) = Tv^*(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Où l'opérateur T est défini par

$$\begin{aligned} Tv(x, y) &:= \frac{1}{\mathcal{C} + \alpha} [c_h x + \mu T_0 v(x, y) + \lambda T_1 v(x, y) + \delta T_2 v(x, y) \\ &\quad + \gamma p T_3 v(x, y) + \gamma(1 - p) T_4 v(x, y)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_0 v(x, y) &:= \min [v(x, y); c_p + v(x + 1, y)] \\ T_1 v(x, y) &:= \begin{cases} v(x - 1, y) & \text{si } x > 0 \\ v(x, y) + c_l & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ T_2 v(x, y) &:= \begin{cases} v(x, y + 1) & \text{si } y < M \\ v(x, y) + c_l & \text{si } y = M \end{cases} \\ T_3 v(x, y) &:= \begin{cases} y (v(x + 1, y - 1) + c_r) + (M - y) v(x, y) & \text{si } y > 0 \\ M v(x, y) & \text{si } y = 0 \end{cases} \\ T_4 v(x, y) &:= \begin{cases} y v(x, y - 1) + (M - y) v(x, y) & \text{si } y > 0 \\ M v(x, y) & \text{si } y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'opérateur T_0 est relatif à la décision optimale de production. L'opérateur T_1 est associé à la demande, l'opérateur T_2 correspond aux annonces de retours. Finalement, l'opérateur T_3 (resp. T_4) est associé à une annonce qui va (resp. ne va pas) donner lieu à un retour de produit.

En considérant l'opérateur T_0 , nous remarquons que le pilotage optimal de la production est entièrement déterminé par le signe de $(\Delta v^*(x, y) + c_p)$ où $\Delta v(x, y) = v(x + 1, y) - v(x, y)$. Afin de caractériser la politique optimale, nous montrons que v^* appartient à l'ensemble suivant $\mathcal{U}$ de fonctions à valeurs réelles. Le raisonnement est le même que celui décrit pour le Modèle 1 par exemple.

Définition 9 *Si $v \in \mathcal{U}$, alors pour tout (x, y) :*

$$C.1 \quad \Delta v(x, y) \leq \Delta v(x + 1, y)$$

$$C.2 \quad \Delta v(x, y) \leq \Delta v(x, y + 1), \quad \forall y < M$$

$$C.3 \quad \Delta v(x, y + 1) \leq \Delta v(x + 1, y), \quad \forall y < M$$

$$C.4 \quad \Delta v(x, y) \geq -c_l$$

Lemme 4 *Si $v \in \mathcal{U}$, alors $Tv \in \mathcal{U}$*

La démonstration de ce lemme est présentée en Annexe D.1, l'idée principale de cette démonstration étant toujours de prouver séparément que les opérateurs $T_i, 1 \leq i \leq 4$, préservent les conditions 1 à 4 (voir par exemple le Modèle 1, section 3.4).

Une conséquence directe du Lemme 4 est que la fonction du coût optimal v^* appartient à $\mathcal{U}$ (théorème du point fixe, Puterman (1994)). La Condition C.1 assure l'existence d'un seuil $S(y) = \min[x | \Delta v^*(x, y) + c_p > 0]$ tel que $\Delta v^*(x, y) + c_p \leq 0$ si et seulement si x est inférieur à ce seuil. Les conditions C.2 et C.3 impliquent une pente de $S(y)$ comprise entre 0 et 1, i.e. une annonce additionnelle de retour mène, au plus, à une diminution du seuil d'une unité. La condition C.4 suggère qu'il est préférable de satisfaire une demande qui arrive.

Théorème 8 *Il existe une courbe de commutation $S(y)$ telle qu'il est optimal de produire si et seulement si $x < S(y)$. De plus, cette courbe de commutation possède la propriété suivante :*

$$S(y) - 1 \leq S(y + 1) \leq S(y)$$

Cette politique optimale est similaire à celle du Modèle 3 avec retours de produits dépendants et non instantanés (Conjecture 1). En effet, le terme « de commutation » dans le Théorème 8 se réfère à la frontière entre la production et la non production. Cette politique optimale peut alors être vue comme une politique base-stock dépendante :

- Base-stock car il s'agit de toujours produire jusqu'à un seuil $S(y)$ donné ;
- Et dépendante car ce seuil $S(y)$ dépend du nombre de retours y annoncés.

La figure 6.2 présente la politique optimale pour un exemple numérique.

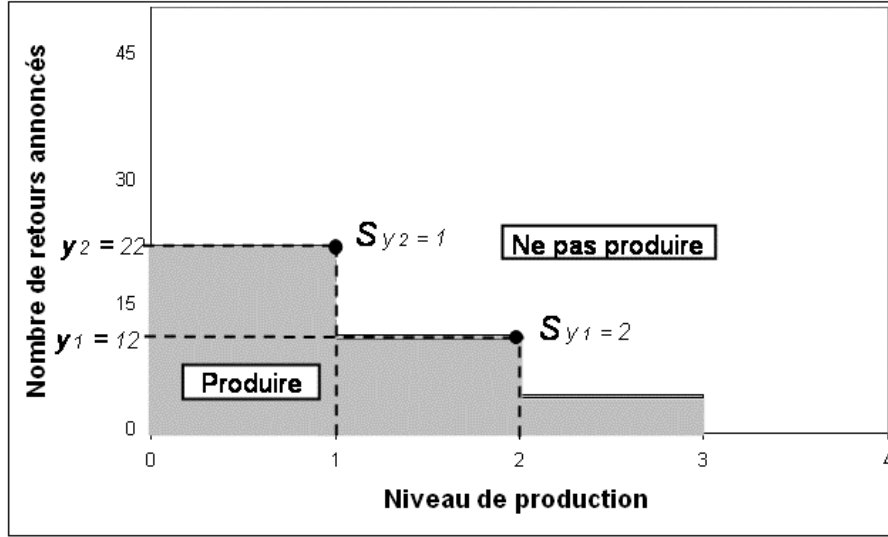


Figure 6.2 – Exemple de courbe de commutation relative au Modèle 5.
 $(\lambda = 1, \mu = 1, p = 0.25, \gamma = 0.75, \delta = 0.25, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 10, c_r = 0,)$

6.3 Politique optimale lorsque l'ARI est ignorée

Lorsque l'information avancée sur les retours (ARI) est ignorée, le responsable de production ne prend pas en considération les retours annoncés lors des décisions de production. Comme le processus de sortie d'une file $M/G/\infty$ est un processus de Poisson de taux égal au taux d'arrivée (Gross & Harris, 1998), le processus de retours effectif est un processus de Poisson de taux $p\delta$.

Dans ce cas, le système ignorant l'ARI se comporte comme une $M/M/1$ make-to-stock queue avec demande et retours poissonniens et indépendants. Ce système correspond au Modèle 1 présenté au Chapitre 3. Il a donc été montré que la fonction de coût optimale est convexe selon le niveau de stock de produits finis (Condition C.1 de la définition 9). La politique optimale est par conséquent une politique base-stock avec un base stock level S .

6.4 Comparaison numérique des politiques optimales : importance de l'ARI

Nous voulons à présent évaluer l'importance de l'information avancée sur les retours (ARI). Autrement dit, nous voulons savoir quel impact a l'utilisation de l'ARI sur le coût global du système. Est ce que l'utilisation de l'ARI permet des réductions de coûts ? Si oui, dans quels cas ? Nous étudierons particulièrement l'influence de p et de γ .

A cet effet, nous comparons le coût moyen du système lorsque l'ARI est utilisée au coût moyen du même système lorsqu'elle est ignorée. Nous appellerons C_{ARI} (resp. S_{ARI}) le coût optimal moyen du système (resp. base-stock level optimal) lorsque l'ARI est utilisée et C (resp. S) le coût optimal moyen du système (resp. base-stock level optimal) lorsque l'ARI est ignorée. Les coût moyens C_{ARI} et C sont donnés par les limites des coûts actualisés (sections 6.2 et 6.3) correspondants lorsque α tend vers zero.

En vue de comparer C_{ARI} et C , nous considérons l'augmentation relative du coût due à la non utilisation de l'ARI définie par :

$$\Delta C = \frac{C - C_{ARI}}{C_{ARI}}$$

ΔC compare donc le système qui néglige l'ARI au système qui utilise cette information. Il permet de mesurer l'importance de la prise en compte de l'ARI. Plus ΔC est élevé, plus le le coût du système utilisant ARI est faible comparé au même système ignorant l'ARI, et plus cette information avancée sur les retours est importante dans la réduction du coût global.

Dans ce qui suit, nous posons sans perte de généralité $\lambda = 1$ et $c_h = 1$, ce qui est équivalent à définir des unités temporelles et monétaires. Nous avons mené cette étude numérique en faisant varier les paramètres pour environ 4800 instances qui correspondent aux combinaisons des valeurs appartenant aux ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mu &\in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 10\} \\ \delta &\in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95\} \\ \gamma &\in \{0.1, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2\} \\ p &\in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\} \\ c_l &\in \{1, 10, 100\} \\ c_r &= 0 \\ c_p &= 0 \end{aligned}$$

Dans la figure 6.3, nous présentons l'évolution de ΔC en fonction de la probabilité p de concrétiser une annonce. Quant à la figure 6.4, elle montre l'évolution de ΔC en

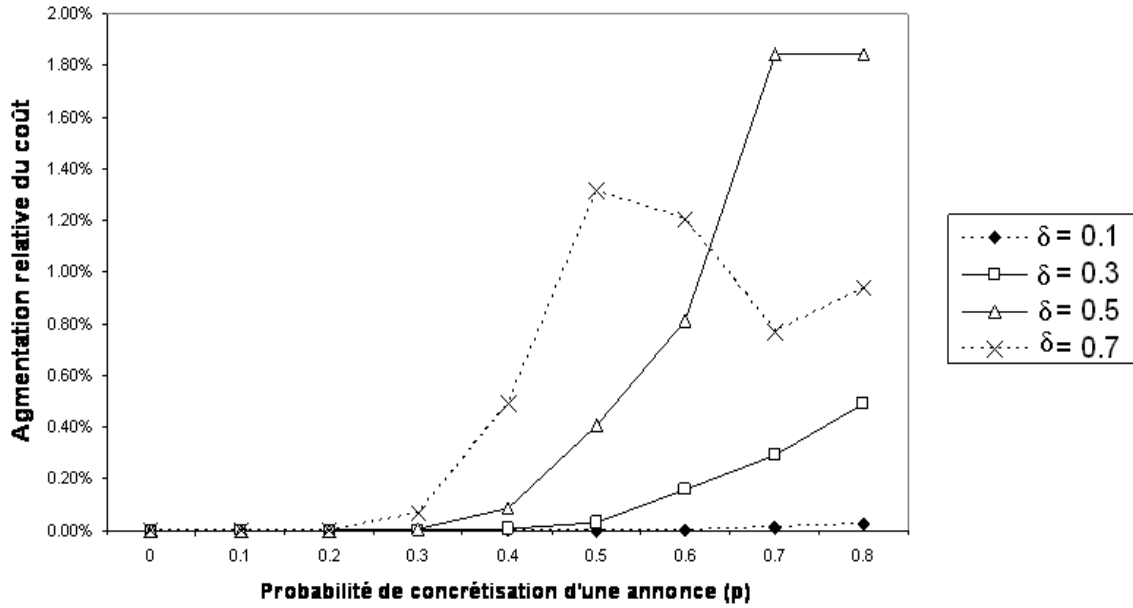


Figure 6.3 – Évolution de ΔC en fonction de p ($\mu = 1, \gamma = 0.75, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 10, c_r = 0$)

fonction du délai moyen, $1/\gamma$, entre une annonce et un retour effectif (ou annulation) de produit.

Nous résumons à présent les principales observations liées aux figures 6.3 et 6.4 ainsi qu'à d'autres résultats numériques :

- L'allure générale de la figure 6.3 montre que l'utilité de l'ARI augmente (en même temps que ΔC) avec la probabilité p , même si la courbe n'est pas toujours monotone¹. Plus il est probable que les retours annoncés se concrétisent, plus la fiabilité des annonces augmente et plus l'utilisation de ces informations avancées sur les retours permet de réduire le coût total. Cela étant dit, et sur l'ensemble des 3000 instances traitées, le ΔC obtenu ne dépassait jamais les 4.50%. ce qui limite un peu l'utilité de l'ARI.
- Nous voyons sur la figure 6.3 que le ΔC augmente avec le taux δ de retours annoncés². Il est clair que plus les retours annoncés sont importants, plus la prise en compte de ces annonces peut s'avérer profitable au gestionnaire de production. Ce résultats reste cependant limité par un ΔC d'au plus 4.50%.
- Concernant l'influence de $1/\gamma$, dans un premier temps, plus les retours de produits sont annoncés à l'avance (plus $1/\gamma$ est grand), plus l'information avancée sur les retours est intéressante (ΔC croissant, figure 6.4) car le système avec ARI a le temps d'ajuster sa production aux annonces effectuées. Cela étant, et

1. Ce phénomène est lié au caractère discret du bas-stock level correspondant aux points de la courbe.

2. Ce résultat représente encore une fois une allure générale qui peut ponctuellement s'avérer non monotone à cause du caractère discret du niveau de stock correspondant.

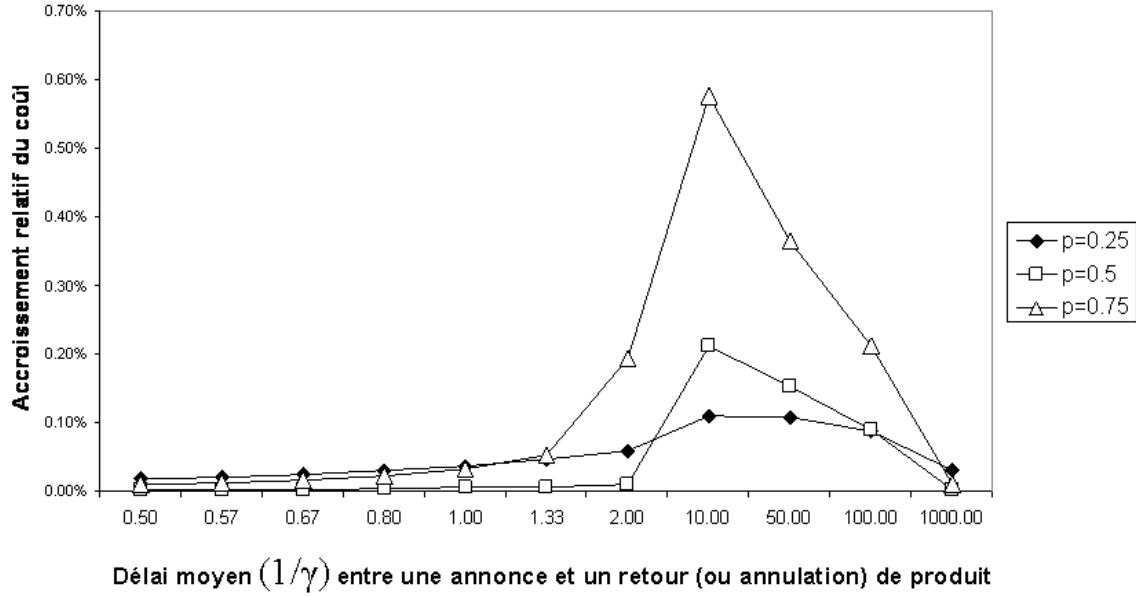


Figure 6.4 – Évolution de ΔC en fonction de $1/\gamma$ ($\mu = 1, \delta = 0.25, c_h = 1, c_p = 0, c_l = 100, c_r = 0$)

dans un deuxième temps, lorsque le délai moyen $1/\gamma$ devient très grand, ΔC décroît et tend vers zéro car les systèmes avec et sans ARI se comportent de façon similaire.

Comparé au système sans ARI, la production ainsi que le coût moyen du système avec ARI ne sont que très peu impactés par des retours qui sont annoncés sur un horizon très éloigné. En effet, le fait de savoir, un temps extrêmement long à l'avance, que des retours de produits vont avoir lieu n'est pas une information pertinente d'aide à la décision de production : non seulement parce que tout système (avec ou sans ARI) s'attend à des retours de produits sur le long terme, mais également parce qu'il serait aberrant de faire de la planification de production sur le très long terme étant donné l'incertitude liée aux marchés.

- Enfin, un résultat assez intéressant relatif aux base-stock levels optimaux S_{ARI} ³ et S où nous remarquons que, sur l'ensemble de nos instances, $\max |S_{ARI} - S| = 1$. Ce résultat montre que, finalement, le fait d'ignorer l'ARI n'a pas d'impact significatif sur les seuils de production optimaux.

6.5 Conclusion

Le dernier modèle étudié dans le cadre de cette thèse propose une information avancée sur les retours (ARI), où les clients doivent annoncer le retour futur de

3. Le S_{ARI} dont il s'agit ici est en fait le base stock level associé au nombre moyen de retours annoncés y_{moyen} , ce dernier étant donné d'après les formules des $M/M/\infty$ comme étant : $y_{moyen} = \delta/\gamma$.

leur produit. Nous avons, sur ce modèle, déterminé la politique optimale en cas d'utilisation et de non utilisation de l'ARI.

Sur une étude numérique, nous avons constaté comment l'ARI permet des réductions de coût qui augmentent (ΔC croissant) avec la fiabilité, p , des annonces faites ainsi qu'avec la délai moyen, $1/\gamma$, entre l'annonce et le retour effectif (ou annulation) du produit, tant que ce dernier délai n'est pas trop long, auquel cas ΔC commence à décroître. Cela étant, le fait d'utiliser l'ARI permet des réductions de coût relativement petites (jusqu'à 4.50%) et ne modifie pas fondamentalement le rythme de production du système considéré : $\max |S_{ARI} - S| = 1$.

Conclusion générale

La gestion de la chaîne logistique a fortement évolué au cours du siècle dernier avec l'évolution de l'industrie, de la technologie, du marché et des modes de consommation. C'est ainsi qu'est apparue la notion de *logistique inverse* pour les raisons évoquées au Chapitre 2.

La logistique inverse prend en charge des retours de produits, provenant des clients et à destination du producteur d'origine. Ces retours peuvent poser de nombreux problèmes parmi lesquels les problèmes liés à la récupération de ces produits, les problèmes liés au traitement de ces produits une fois récupérés, et enfin le sujet auquel nous nous sommes intéressés lors de ce travail de thèse : les problèmes liés à la gestion des stocks et à la planification de la production.

De nombreux travaux (modèles) ont été développés dans la littérature afin de tenter d'optimiser la gestion de la production, et des stocks, dans un contexte de flux inverses. Notre travail étant inscrit dans ce domaine de recherche, nous pensons avoir apporter une certaine contribution à la littérature existante, et ce sur plusieurs points : d'abord nous recherchons sur nos modèles des politiques optimales de production/gestion des stocks, alors que de nombreux auteurs avant nous ont préféré appliquer, et tester, des politiques connues et reconnues de la gestion de production traditionnelle. Ensuite, nous nous sommes appliqués à étudier différentes questions liées aux modèles avec flux inverses, en espérant comprendre comment gérer un système avec retours de produits, en fonction des différents paramètres qui pourraient l'influencer.

La recherche de ces politiques optimales ainsi que l'étude de ces différentes questions, relatives aux flux inverses, se sont faites sur plusieurs modèles que nous avons développé. Le premier des ces modèles est une extension des travaux de Gayon (2007) au cas lost-sales sur lequel nous avons montré l'optimalité de la politique base-stock en vue de minimiser le coût (Chapitre 3). Le second modèle étudié, au Chapitre 4, considère une corrélation directe entre la demande et les produits retournés. Cette hypothèse est peu prise en compte dans la littérature. Nous avons, sur ce modèle corrélé, déterminé la politique optimale (totalement ou partiellement) et, via une étude numérique, avons tenté de savoir quand il est intéressant de tenir compte de cette corrélation demande/retours. Par ailleurs, nous avons évalué l'impact du délai de retour des produits sur les performances du système corrélé considéré.

Comme nos modèles gagnaient à être enrichis, nous avons proposé, au Chapitre 5, d'inclure une option de rejet des produits retournés, au lieu d'accepter systéma-

tiquement les retours de produits. Sur ce modèle, nous avons déterminé la politique optimale et avons évalué l'intérêt de l'option de rejet en fonction des paramètres du système. Enfin, au Chapitre 6, nous avons proposé un modèle avec information avancée sur les retours (ARI pour Advance Return Information), dans lequel les clients doivent annoncer, à l'avance, le retour de leur produit. Une fois la politique optimale de ce modèle déterminée, nous avons évalué l'influence de l'ARI sur la réduction du coût global du système.

Par ailleurs, les résultats obtenus par l'étude de ces différents modèles ont été publiés dans 4 conférences internationales et 2 conférences nationales.

La problématique abordée par nos travaux de thèse est bien ancrée dans la réalité industrielle, mais il est bien sûr encore difficile de faire un transfert direct entre nos modèles, et les modèles industriels réels. Nous pensons en effet que nos modèles gagneraient à être enrichis et étoffés. C'est ainsi que, parmi les perspectives de recherche que nous jugeons intéressantes, nous proposons de :

- Considérer des lots de produits : au lieu des lots de quantité unitaire que nous supposons jusqu'à présent. Il est en effet préférable de relaxer l'hypothèse simplificatrice des lots unitaires, et de considérer le cas plus général où le système fabrique des lots de produits dont la taille sera à déterminer en vue de satisfaire la demande à moindre coût. Il s'agira également d'introduire d'éventuels coûts de set up.
- Introduire une étape de remanufacturing : alors que nos modèles supposent un remanufacturing instantané des produits retournés. Si l'on considère des produits retournés pour réparation par exemple, il est clair que l'hypothèse de remanufacturing instantané devient aberrante. Non seulement le remanufacturing devient une étape importante, mais en plus, la durée de cette étape dépendra fortement de la quantité et de la qualité des produits retournés. Comment alors coordonner entre la production de pièces neuves et le remanufacturing aléatoire des produits retournés ?
- Distinguer les produits : ou séparer les produits neufs et remanufacturés. Nous pensons que les produits retournés, même remanufacturés, peuvent parfois être considérés comme étant de qualité moindre que les produits neufs. Il s'agira ainsi de distinguer les produits neufs de qualité (A), des produits « deuxième main » de qualité (B). Cette distinction peut se faire en terme de placement des produits en stock (stocks séparés?), mais elle peut surtout se faire en appliquant des politiques de prix différentes pour chaque type de produit. Comment alors établir ces politiques de prix ?
- Considérer des modèles de chaîne logistique : au lieu d'une entreprise unique que nous supposons dans nos modèles. En effet, les flux inverses peuvent impacter plusieurs étages de la chaîne logistique (retours de produits à différents niveaux). Par exemple, un produit retourné à une entreprise E peut être désassemblé et ses composants à leur tour retournés aux fournisseurs de E . Ces

retours de produits à différents niveaux de la chaîne logistique impliquent un travail supplémentaire de coordination.

- Valider les modèles développés : afin de valoriser les travaux réalisés. Les modèles que nous avons développés, ainsi que ceux que nous proposons en perspectives, ne peuvent être réellement évalués que dans un contexte industriel. Une collaboration industrielle serait donc un aboutissement logique de nos travaux qui sont, avant tout, liés à une problématique industrielle réelle.

Les perspectives de recherche, qui viennent d'être énoncées, soulignent le fait que les modèles que nous avons étudiés comportent un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Néanmoins, nous pensons que les résultats de nos études fournissent un certain nombre d'intuitions managériales qui peuvent s'avérer utiles. Nous montrons ainsi que sur des systèmes avec flux inverses, et malgré le caractère aléatoire des différents processus, des politiques simples de production sur seuil permettent d'atteindre de bonnes performances en termes de coûts. Aussi, nous déduisons de nos études numériques que le fait de faire un suivi des retours (observabilité des retours), et de considérer la dépendance entre demande et retours, sont absolument nécessaires dans de nombreux cas. Comme de plus il est très difficile d'identifier à priori les situations où ces phénomènes pourraient ne pas être pris en compte, ceci souligne l'intérêt de la réflexion apportée par notre étude par rapport à la plupart des travaux rencontrés dans la littérature qui négligent systématiquement ces phénomènes. Enfin, nous montrons que le fait de pouvoir rejeter les retours de produits, et le fait d'être informé des retours de produits s'avèrent surtout intéressants pour des taux importants de retours de produits.

C'est ainsi que nous espérons avoir contribué à une meilleure compréhension des systèmes avec flux inverses afin d'apprendre à appréhender ces flux et à les gérer.

Bibliographie

- Aksoy, H. K., & Gupta, S. M. 2001. Effect of Reusable Rate Variation on the Performance of Remanufacturing Systems. *In Environmentally Conscious Manufacturing*, **4193**, 13–20.
- Aras, N., Boyaci, T., & Verter, V. 2004. The effect of categorizing returned products in remanufacturing. *IIE Transactions*, **36**, 319–331.
- Archibald, T. W., T.s, L. C., & Possani, E. 2007. Keep or return ? Managing ordering and return policies in start-up companies. *European Journal of Operational Research*, **179**, 97–113.
- Axäter, Sven. 2006. *Inventory control*. Springer.
- Baynat, B. 2000. *Théorie des files d'attente, des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit*. HERMES science publications.
- Beamon, B. M. 1998. Supply chain desing and analysis : Models and methods. *international journal of production economics*, **55**, 281–294.
- Buchanan, D.J., & Abad, P.L. 1998. Optimal policy for a periodic review returnable inventory system. *IIE Transactions*, **30**, 1049–1055.
- Buzacott, J.A., & Shanthikumar, J.G. 1993. *Stochastic models of manufacturing systems*. Prentice-Hall.
- Chen, J., & Bell, P. C. 2009. The impact of customer returns on pricing and order decisions. *European Journal of Operational Research*, **195**, 280–295.
- Cheung, K. L., & Yuan, X. M. 2003. An infinite horizon inventory model with periodic order commitment. *European Journal of Operational Research*, **146**, 52–66.
- Chikán, A. 2007. The new role of inventories in business : Real world changes and research consequences. *International Journal of Production Economics*, **108**, 54–62.
- Chouinard, M., D'Amours, S., & Aït-Kadi, D. 2005. Integration of reverse logistics activities within a supply chain information system. *Computers in Industry*, **56**, 105–124.
- Cil, E.B., Ormeci, E.L., & Karaesmen, F. 2007. Effects of System Parameters on the Optimal Policy Structure in a Class of Queueing Control Problems. *Working paper* (<http://portal.ku.edu.tr/fkaraesmen/>).

- Cohen, M., Nahmias, S., & Pierskalla, W. 1980. A dynamic inventory system with recycling. *Naval Research Logistics Quarterly*, **27**, 289–296.
- Dantzig, G.B., & Ramser, J.H. 1959. The Truck Dispatching Problem. *Management Science*, **6** (1), 80–91.
- de Brito, M. P., & Dekker, R. 2001. Modelling product returns in inventory control exploring the validity of general assumptions. *Economic Institute Report*, **27**.
- de Brito, M. P., Flapper, S.D. P., & Dekker, R. 2002. Reverse Logistics : a review of case studies. *Econometric Institute Report*, **21**.
- de Brito, Marisa P., & van der Laan, Erwin A. 2009. Inventory control with product returns : The impact of imperfect information. *European Journal of Operational Research*, **194**, 85–101.
- DeCroix, G., & Zipkin, P. H. 2005. Inventory Management for an Assembly System with Product or Component Returns. *Management Science*, **51**, 1250–1265.
- DeCroix, G., Song, J-S., & Zipkin, P. 2005. A Series System with Returns : Stationary Analysis. *Operations Research*, **52** (2), 350–362.
- Dekker, R., Fleischmann, M., Inderfurth, K., & Wassenhove, L. N. Van. 2004. *Reverse Logistics Quantitative Models for Closed-Loop Supply Chains*. Springer.
- Dobos, I. 2003. Optimal production-inventory strategies for a HMMS-type reverse logistics system. *International Journal of Production Economics*, **81-82**, 351–360.
- Dobos, I., & Richter, K. 2004. An extended production/recycling model with stationary demand and return rates. *International Journal of Production Economics*, **90**, 311–323.
- Dobos, I., & Richter, K. 2006. A production/recycling model with quality consideration. *International Journal of Production Economics*, **104**, 571–579.
- Flapper, S. D. P., Fransoo, J. C., Broekmeulen, R. A.C.M., & Inderfurth, K. 2002. Planning and control of rework in the process industries : a review. *Production Planning & Control*, **13** (1), 26–34.
- Fleischmann, M., & Kuik, R. 2003. On optimal inventory control with independent stochastic item returns. *European Journal of Operational Research*, **151**, 25–37.
- Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J. M., Dekker, R., van der Laan, E. A., Nunen, J. A. E. E. Van, & Wassenhove, L. N. Van. 1997. Quantitative models for reverse logistics : A review. *European Journal of Operational Research*, **103**, 1–17.
- Fleischmann, M., Krikke, H.R., Dekker, R., & Flapper, S.D.P. 2000. A Characterisation of Logistics Networks for Product Recovery. *Omega the International Journal of Management Science*, **28**, 653–666.
- Fleischmann, M., Kuik, R., & Dekker, R. 2002. Controlling inventories with stochastic item returns : A basic model. *European Journal of Operational Research*, **138**, 63–75.

- Francas, D., & Minner, S. 2009. Manufacturing network configuration in supplychains with product recovery. *Omega the International Journal of Management Science*, **37**, 757–769.
- Gayon, J-P. 2007. A make-to-stock queue with product return. *Working paper* (<http://www.g-scop.inpg.fr/~gayonj/>).
- Giard, V. 2003. *Gestion de la production et des flux*. economica.
- Gonzalez-Torre, P. L., Adenso-Diaz, B., & Artiba, H. 2004. Environmental and reverse logistics policies in European bottling and packaging firms. *International Journal of Production Economics*, **88**, 95–104.
- Gross, D., & Harris, C. M. 1998. *Fundamentals of queueing theory*. Wiley-Interscience.
- Guide, V. Daniel R., Jayaraman, V., & Srivastava, R. 1999. Production planning and control for remanufacturing : a state-of-the-art survey. *Robotics and Computer-integrated Manufacturing*, **15**, 221–230.
- Guide, V. Daniel R. Jr. 2000. Production planning and control for remanufacturing : industry practice and research needs. *Journal of Operations Management*, **18**, 467–483.
- Gupta, S. M., & Isaacs, J. A. 1997. Value Analysis of Disposal Strategies for Automobiles. *Computers & Industrial Engineering*, **33** (1-2), 325–328.
- Ha, A. Y. 1997. Inventory rationing in make-to-stock production system with several demand classes and lost sales. *Management Science*, **43**(8), 1093–1103.
- Hale, R., Kirby, JR., Mann, T., & Pitts, D. MAY 07-09, 2001. An overview of IBM product takeback programs : "Considerations for commercial and consumer computer returns". In : *IEEE International Symposium on Electronics and the Environment Denver, CO*.
- Heyman, D. 1977. Optimal disposal policies for a single-item inventory system with returns. *Naval Research Logistics Quarterly*, **24**(3), 385–405.
- Inderfurth, K. 2004. Optimal policies in hybrid manufacturing/remanufacturing systems with product substitution. *International Journal of Production Economics*, **90**, 325–343.
- Inderfurth, K., & van der Laan, E. 2001. Leadtime effects and policy improvement for stochastic inventory control with remanufacturing. *International Journal of Production Economics*, **71**, 381–390.
- Inderfuth, K. 1997. Simple optimal replenishment and disposal policies for a product recovery system with leadtimes. *OR Spektrum*, **19**, 111–122.
- Jemai, Zied. 2003. *Modèles stochastiques pour l'aide au pilotage des chaînes logistiques : l'impact de la décentralisation*. Ph.D. thesis, Ecole Centrale Paris.
- Kelle, P., & Silver, E.A. 1989. Purchasing Policy of New Containers Considering the Random Returns of Previously Issued Containers. *IIE Transactions*, **21**(4), 349–354.

- Kerr, W., & Ryan, C. 2001. Eco-efficiency gains from remanufacturing : A case study of photocopier remanufacturing at Fuji Xerox Australia. *Journal of Cleaner Production*, **9**, 75–81.
- Kiesmüller, G. P., & van der Laan, E. A. 2001. An inventory model with dependent product demands and returns. *International Journal of Production Economics*, **72**, 73–87.
- Kiesmüller, G.P. 2003. A new approach for controlling a hybrid stochastic manufacturing/remanufacturing system with inventories and different leadtimes. *European Journal of Operational Research*, **147**, 62–71.
- Kleber, R., Minner, S., & Kiesmüller, G. 2002. A continuous time inventory model for a product recovery system with multiple options. *International Journal of Production Economics*, **79**, 121–141.
- Kopicky, R.J., Berg, M.J., Legg, L., Dasappa, V., & Magionni, C. 1993. Reuse and recycling : reverse logistics opportunities. *Council of Logistic Management*, Oak Brook, IL.
- Krumwiede, D. W., & Sheu, C. 2002. A model for reverse logistics entry by third-party providers. *Omega the International Journal of Management Science*, **30**, 325–333.
- Lambert, S., & Riopel, D. 2003. Logistique inverse : revue de littérature. *Les Cahiers du GERAD*, **61**.
- Lippman, S.A. 1975. Applying a new device in optimization of exponential queuing systems. *Operations Research*, **23**(4), 687–710.
- Álvarez Gil, M. J., Berrone, P., Husillos, F. J., & Lado, N. 2007. Reverse logistics, stakeholders' influence, organizational slack, and managers' posture. *Journal of Business Research*, **60**, 463–473.
- Mabini, M.C., Pintelon, L.M., & Gelders, L.F. 1992. EOQ type formulations for controlling repairable inventories. *International Journal of Production Economics*, **28**, 21–33.
- Mahadevan, B., Pyke, D. F., & Fleischmann, M. 2003. Periodic review, push inventory policies for remanufacturing. *European Journal of Operational Research*, **151**, 536–551.
- Mathieux, F. 2002. *Contribution à l'intégration de la valorisation en fin de vie dès la conception d'un produit*. Ph.D. thesis, ENSAM, Chambéry.
- Minner, S., & Kleber, Rainer. 2001. Optimal control of production and remanufacturing in a simple recovery model with linear cost functions. *OR Spektrum*, **23**, 3–24.
- Mitra, Subrata. 2009. Analysis of a two-echelon inventory system with returns. *OMEGA the International Journal of Management Science*, **37**, 106–115.
- Mostard, J., de K., R., & Teunter, R. 2005. The distribution-free newsboy problem with resalable returns. *International Journal of Production Economics*, **97**, 329–342.
- Muckstadt, J.A., & Isaac, M.H. 1981. An analysis of single item inventory system with returns. *Naval Research Logistics Quarterly*, **28**, 237–254.

- Mukhopadhyay, S. K., & Setoputro, R. 2004. Reverse logistics in e-business Optimal price and return policy. *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, **34** (1), 70–88.
- Mukhopadhyay, S.K., & Setoputro, R. 2005. Optimal return policy and modular design for build-to-order products. *Journal of Operations Management*, **23**, 496–506.
- Ouyang, H., & Zhu, X.Y. 2008. An inventory control model with disposal for manufacturing/remanufacturing hybrid system. *Computers & Industrial Engineering*.
- Pimor, Y. 1998, 2005. *Logistique Production . Distribution . Soutien*. L’Usine Nouvelle.
- Pınar, Ç., Gürler, Ü., & Berk, E. 2008. A continuous review replenishment-disposal policy for an inventory system with autonomous supply and fixed disposal costs. *European Journal of Operational Research*, **190**, 421–442.
- Pohlen, T.L., & Farris, M.T. 1992. Reverse logistics in plastic recycling. *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, **22**(7), 35–47.
- Porteus, E.L. 2002. *Foundations of stochastic inventory theory*. Stanford University Press.
- Prahinski, C., & Kocabasoglu, C. 2006. Empirical research opportunities in reverse supply chains. *Omega the International Journal of Management Science*, **34**, 519–532.
- Puterman, M.L. 1994. *Markov Decision Processes, discrete stochastic dynamic programming*. Wiley-Interscience.
- Ravi, V., Shankar, R., & Tiwari, M. K. 2008. Selection of a reverse logistics project for end-of-life computers : ANP and goal programming approach. *International Journal of Production Research*, **46-17**, 4849–4870.
- Rogers, Dale S., & Tibben-Lembke, Ronald S. 1998. *Going Backwards : Reverse Logistics Trends and Practices*. Reverse Logistics Executive Council.
- R.Teunter, & van der Laan, E. 2002. On the non-optimality of the average cost approach for inventory models with remanufacturing. *International Journal of Production Economics*, **79**, 67–73.
- Rubio, S., Chamorro, A., & Miranda, F. J. february 2008. Characteristics of the research on reverse logistics (1995-2005). *International Journal of Production Research*, **46** (4), 1099–1120.
- Sciarrotta, T. 2003. How Philips reduced returns. *Supply Chain Management Review*, **7**(6), 32–38.
- Stadtler, H. 2002. *Supply Chain Management and Advanced Planning*. Springer.
- Takahashi, K., Morikawa, K., Myreshka, Takeda, D., & Mizuno, A. 2007. Inventory control for a MARKOVIAN remanufacturing system with stochastic decomposition process. *International Journal of Production Economics*, **108**, 416–425.

- Tang, O., & Grubbström, R. W. 2005. Considering stochastic lead times in a manufacturing/ remanufacturing system with deterministic demands and returns. *International Journal of Production Economics*, **93-94**, 285–300.
- Tedeschi, B. 2001. E-Commerce Report ; Online retailers grapple with the age-old problem of handling returned merchandise. *The New York Times*, May 28.
- Teunter, R., Kaparis, K., & Tang, O. 2008. Multi-product economic lot scheduling problem with separate production lines for manufacturing and remanufacturing. *European Journal of Operational Research*, **191**, 1241–1253.
- Teunter, R. H., van der Laan, E., & Inderfurth, K. 2000. How to set the holding cost rates in average cost inventory models with reverse logistics? *OMEGA the international journal of management science*, **28**, 409–415.
- Teunter, Ruud H., & Vlachos, D. 2002. On the necessity of a disposal option for returned items that can be remanufactured. *International Journal of Production Economics*, **75**, 257–266.
- Thierry, M., Salomon, M., Nunen, J. Van, & Wassenhove, L. Van. 1995. Strategic Issues in Product Recovery Management. *California Management Review*, **37 (2)**, 114–135.
- van der Laan, E. 2003. An NPV and AC analysis of a stochastic inventory system with joint manufacturing and remanufacturing. *International Journal of Production Economics*, **81-82**, 317–331.
- van der Laan, E., & Salomon, M. 1997. Production planning and inventory control with remanufacturing and disposal. *European Journal of Operational Research*, **102**, 264–678.
- van der Laan, E., Dekker, R., & Salomon, M. 1996a. Product remanufacturing and disposal : A numerical comparison of alternative control strategies. *International Journal of Production Economics*, **45**, 489–498.
- van der Laan, E., Dekker, R., Salomon, M., & Ridder, A. 1996b. An (s,Q) inventory model with remanufacturing and disposal. *International Journal of Production Economics*, **46-47**, 339–350.
- van der Laan, E., Salomon, M., & Dekker, R. 1999. An investigation of lead-time effects in manufacturing/ remanufacturing systems under simple PUSH and PULL control strategies. *European Journal of Operational Research*, **115**, 195–214.
- Veatch, M.H., & Wein, L.M. 1996. Scheduling a make-to-stock queue : index policies and hedging points. *Operations Research*, **44(4)**, 634–647.
- Weber, R., & Stidham, S. 1987. Optimal Control of Service Rates in Networks of Queues. *Advanced Applied Probabilities*, **19**.
- Wikipedia. <http://fr.wikipedia.org>.
- Yuan, X. M., & Cheung, K. L. 1998. Modeling returns of merchandise in an inventory system. *OR Spektrum*, **20**, 147–154.

- Zerhouni, H., Gayon, J.P., & Frein, Y. *Control of a production-inventory system with product returns dependent on demand*. Working paper (<http://www.gscop.inpg.fr/~gayonj/Documents/PublicationsJP/WorkingPapers/ProductReturns.pdf>).
- Zerhouni, H., Gayon, J.P., & Frein, Y. 2008, Aussois. Intégration des flux inverses dans la gestion des stocks et de la production. *In : 9ième Atelier en Evaluation de Performances (AEP)*.
- Zerhouni, H., Gayon, J.P., & Frein, Y. 2008, Wisconsin. Control of a production-inventory system with product returns dependent on customer demand. *In : International Conference on Information Systems, Logistics and Supply Chain (ILS)*.
- Zerhouni, H., Gayon, J.P., & Frein, Y. 2009, Angers. Flux inverses : modèles de gestion des stocks. *In : 3èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS*.
- Zerhouni, H., Flapper, S.D.P., & Gayon, J.P. 2009, Boston. Control of a production-inventory system with imperfect advance return information. *In : Manufacturing & Service Operations Management (MSOM) Conference*.
- Zerhouni, H., Gayon, J.P., & Frein, Y. 2009, Grenoble. Admission control of product returns in a reverse logistic context. *In : CIRP Conference on Manufacturing Systems*.
- Zerhouni, H., Gayon, J.P., & Frein, Y. 2009, Montreal. Control of an M/M/1 make-to-stock queue with exponential return lead-time. *In : International Conference on Industrial Engineering and Systems Management (IESM)*.
- Zipkin, P. H. 2000. *Foundations of inventory management*. Jeffrey J. Shelstad.
- Zuluaga, Juan Pablo Soto. 2001. *Reverse Logistics : Models and applications*. Ph.D. thesis, Departement of Economics and Business, graduate program in economics, management and finance, Universitat Pompeu Fabra.

Glossaire

Advance return information (ARI) : l'information avancée sur les retours signifie que les clients ont la possibilité de retourner leur produit mais que, avant de le faire, il ont pour obligation d'annoncer le retour de leur produit. Cependant, les retours annoncés ne se concrétisent pas forcément en retours effectifs de produits. Les raisons de cette différence entre retours annoncés et retours effectifs dans la pratique incluent : l'oubli de retourner le produit de la part des clients, l'indisponibilité du client au moment de la récupération planifiée du produit à retourner, changement d'avis du client, etc.

Anticipation : on parle de production par anticipation par opposition à la production sur commande. L'anticipation consiste ici à ne pas attendre les demandes/commandes clients pour produire, (voir également Make-to-stock Queue $M/M/1$ dans ce glossaire).

Back-orders : lors de l'étude d'un modèle de système de production, on parle de back-orders si une demande client qui ne peut être satisfaite (stock nul) est mise en attente (en attendant l'arrivée d'un produit en stock).

Base-stock level : généralement noté S , il est associé à une politique dite base-stock et représente le seuil de production ou le niveau de stock jusqu'auquel le système doit produire. Dès que le niveau de stock dépasse S , la production est stoppée, et si le niveau redescend sous la valeur S la production est relancée.

Chaîne logistique : est définie par le *Supply Chain Council* comme « la suite des étapes de production et distribution d'un produit depuis les fournisseurs des fournisseurs du producteur jusqu'aux clients de ses clients ».

Corrélation : ce terme désigne, relativement à nos modèles, la dépendance qui peut exister entre la demande et les retours de produits. Par abus de langage, nous utilisons indifféremment les termes corrélation et dépendance.

Cycle ordering policy : est une politique cyclique qui consiste à alimenter le stock alternativement de la fabrication puis du remanufacturing. Voir Tang & Grubbström (2005) par exemple.

Dépendance : voir « Corrélation ».

Dual sourcing : est un terme souvent utilisé pour des modèles de systèmes de production disposant de deux sources d'approvisionnement.

EOQ Economic Order Quantity : désigne, en gestion des stocks, le problème célèbre de détermination de la quantité économique de commande appelée également quantité économique de Wilson (voir par exemple Axäter (2006)).

Indépendant : non dépendant ou non corrélé. Sur nos modèles de stocks, cette notion désigne l'indépendance entre les flux de produits retournés, et ceux des produits demandés par les clients.

Inventory position : voir la définition de « stock » dans ce glossaire.

Logistique en boucle fermée (*Closed loop supply chain*) : désigne les modèles ou systèmes dans lesquels les flux inverses sont retournés au producteur d'origine afin d'être traités (d'où la notion de boucle). Elle vient en opposition à la logistique en boucle ouverte où les produits retournés sont traités par une entreprise spécialisée indépendante du producteur d'origine.

Logistique Inverse : désigne la gestion des flux inverses, voir section 1.4.

Lost Sales : cette notion vient en opposition à celle de Back-orders. Lors de l'étude d'un modèle de système de production, on parle de lost-sales si une demande client qui ne peut être satisfaite (stock nul) est alors perdue (le client quitte le système et va satisfaire sa demande ailleurs).

Make-to-stock Queue ($M/M/1$) : représente un modèle de système de production, à capacité finie, dans lequel la production ou l'approvisionnement du stock se fait par anticipation. Les modèles développés lors de ce travail de thèse sont des modèles $M/M/1$ Make-to-stock Queue avec flux inverses (voir section 2.4).

Modèles déterministes (resp. stochastiques) : que nous avons défini en introduction du chapitre 2 comme étant des modèles où tous les paramètres sont connus de façon déterministe (resp. où la demande et/ou les retours de produits sont stochastiques), (Fleischmann *et al.*, 1997).

Netting : lors de l'étude d'un modèle avec flux inverses, le netting (compensation) consiste à considérer un second modèle, similaire au premier, déduisant le flux entrant des produits retournés de la demande. Ce second modèle considère alors que les retours vont satisfaire une partie de cette demande. Autrement dit, le modèle de netting ou de compensation comportera uniquement une source d'approvisionnement sans

retours de produits pour faire face à une *Demande nette* décrite globalement comme étant égale à la demande initiale moins les retours.

News-boy problem : est un problème connu en recherche opérationnelle sous le nom de « problème du marchand de journaux » dans lequel le but est de déterminer la quantité (de journaux) à commander en vue de maximiser le profit, sachant que la demande n'est pas connue de façon déterministe, que le réapprovisionnement en cours de saison (de tournée) est impossible et que les invendus sont perdus (voir par exemple Porteus (2002)).

Non observables : nous introduisons cette notion lors du Chapitre 4 où l'on parle de retours non observables lorsque le gestionnaire du système de production n'a aucune visibilité/information sur le nombre de produits en train d'être retournés.

Observables : par opposition à la notion de non observable, voir point précédent du glossaire (Non observables).

Option de rejet : dans des modèles avec flux inverses, le producteur peut se réserver le droit de rejeter (ou pas) les produits retournés. Cette possibilité est considérée par certains modèles et est appelée *option de rejet*. Cependant, le rejet ne signifie pas forcément la mise au rebut des produits retournés. Cela signifie simplement que les produits retournés ne réintégreront pas le système de production, ils peuvent alors être vendus sur un marché de l'occasion, recyclés par des entreprises spécialisées, mis au rebut, etc.

Politique optimale de gestion des stock : est une politique ou stratégie d'approvisionnement des stocks qui, selon les cas, minimise le coût du modèle (système) considéré ou en maximise le profit. Des exemples de politiques sont donnés au Chapitre 2.

Processus de Decision Markovien : ou *MDP* pour *Markov Decision Process*. Un processus de décision markovien (MDP), appelé aussi problème de décision markovien, est un modèle stochastique issu de la théorie de la décision et de la théorie des probabilités. Le modèle MDP peut être vu comme une chaîne de Markov à laquelle on ajoute une composante décisionnelle. Un MDP permet de prendre des décisions dans un environnement **(i)** lorsque l'on a une certitude sur l'état dans lequel on se trouve **(i)** et en présence d'incertitude sur l'effet des actions (Wikipedia, n.d.; Puterman, 1994).

PUSH et PULL : sont les noms donnés à deux politiques de gestion des stocks que l'on retrouve dans la littérature. Celle-ci sont présentées en section 2.2.1.

Remanufacturing : il arrive que les produits retournés doivent passer par une étape de remanufacturing afin de les remettre à neuf, et ce avant de les remettre en vente.

Stock / Niveau de stock : nous utilisons, dans ce document de thèse, le terme stock (ou niveau de stock) pour désigner le nombre de produits réellement disponibles en stock à un instant donné (sans les encours de production), cette définition correspond à ce que l'on retrouve dans la littérature sous le nom d'*on hand stock*.

D'autres notions existent dans la littérature. Par exemple, Axäter (2006) définit l'*inventory level* ou *stock level* comme étant le « stock on hand - demandes en attente ». Ou bien la notion d'*inventory position*, que l'on a appelé dans ce document stock généralisé, qu'il définit comme étant égale au « stock on hand + les ordres en cours de réalisation - les demandes en attentes (s'il y en a) ».

Cela étant, et sauf précision contraire, nous utilisons toujours le terme stock pour désigner l'*on hand stock*.

Supply chain management : est la traduction de « gestion de la chaîne logistique » (voir *chaîne logistique* dans ce glossaire). La gestion de la chaîne logistique est définie en section 1.2.

Vehicle routing : ou *problème de tournées de véhicules* est une classe de problèmes de recherche opérationnelle et d'optimisation combinatoire. Il s'agit de déterminer les tournées d'une flotte de véhicules afin de livrer une liste de clients (Dantzig & Ramser, 1959). Le but est de minimiser le coût de livraison des biens. Ce problème est une extension classique du problème du voyageur de commerce, et fait partie de la classe des problèmes NP-complet (Wikipedia, n.d.).

Vente en ligne : est la vente de biens sur internet.

Annexe A

Annexes du Chapitre 3

A.1 Problèmes équivalents minimisation / maximisation (Modèle 1)

A ce niveau, nous souhaitons montrer que la minimisation du coût du Modèle 1 peut se ramener à un problème équivalent de maximisation du profit. Nous raisonnerons en termes de coûts et profits moyens.

Partant donc de notre modèle représenté en figure 3.1 (page 64), et en tenant compte de tous les paramètres du système, nous pouvons définir :

- P_v : le prix de vente unitaire
- c_p : le coût de production unitaire
- c'_l : le coût de vente perdue unitaire qui comprend les coûts de dégradation de l'image de l'entreprise lorsque celle-ci n'arrive pas à satisfaire une demande
- c_r : le coût de retour unitaire
- $m = P_v - c_p$: la marge unitaire
- I^π : le niveau de stock moyen si la politique π est appliquée ;
- λ : le nombre de demandes par unité de temps (taux du processus de Poisson)
- λ_s^π : le nombre de demandes SATISFAITES par unité de temps si la politique π est appliquée
- λ_i^π : le nombre de demandes INSATISFAITES par unité de temps si la politique π est appliquée

Notons au passage la relation suivante

$$\lambda = \lambda_s^\pi + \lambda_i^\pi$$

Nous allons à présent montrer que sur notre Modèle 3, avec ses différents paramètres, nous pouvons montrer une équivalence entre les trois problèmes suivants :

Problème 1 (maximisation du profit)

$$\max_{\pi} \{m\lambda_s^\pi - c_h I^\pi - c'_l \lambda_i^\pi - c_r \lambda p\}$$

La maximisation du profit revient à considérer toutes les marges engendrées par les ventes de produits ($m\lambda_s^\pi$), moins les différents coûts de stockage, de ventes perdues et de retours des produits.

Problème 2 (minimisation du coût)

$$\min_{\pi} \{(m + c'_l)\lambda_i^\pi + c_h I^\pi + c_r \lambda p\}$$

Problème 3 (minimisation du coût)

$$\min_{\pi} \{c_l \lambda_i^\pi + c_p \lambda_s^\pi + c_h I^\pi + c_r \lambda p\}$$

Avec : $c_l = P_v + c'_l$

Ce problème 3 de minimisation du coût est rigoureusement celui que l'on considère sur notre Modèle 1 au Chapitre 3. Il s'agit de minimiser l'ensemble des coûts de ventes perdues, de stockage, de production et de retours des produits.

Montrer l'équivalence entre ces trois problèmes permet d'affirmer que ces problèmes ont la même politique optimale.

Démonstration

Equivalence des problèmes 1 et 2

$$\begin{aligned} \max_{\pi} \{m\lambda_s^\pi - c_h I^\pi - c'_l \lambda_i^\pi - c_r \lambda p\} &\Leftrightarrow \max_{\pi} \{m(\lambda - \lambda_i^\pi) - c_h I^\pi - c'_l \lambda_i^\pi - c_r \lambda p\} \\ &\Leftrightarrow \max_{\pi} \{-m\lambda_i^\pi - c_h I^\pi - c'_l \lambda_i^\pi - c_r \lambda p\} \\ &\Leftrightarrow \min_{\pi} \{(m + c'_l)\lambda_i^\pi + c_h I^\pi + c_r \lambda p\} \end{aligned}$$

Equivalence des problèmes 2 et 3

$$\begin{aligned} \min_{\pi} \{m\lambda_i^\pi + c_h I^\pi + c'_l \lambda_i^\pi + c_r \lambda p\} &\Leftrightarrow \min_{\pi} \{(P_v - c_p)\lambda_i^\pi + c_h I^\pi + c'_l \lambda_i^\pi + c_r \lambda p\} \\ &\Leftrightarrow \min_{\pi} \{P_v \lambda_i^\pi - c_p \lambda_i^\pi + c_h I^\pi + c'_l \lambda_i^\pi + c_r \lambda p\} \\ &\Leftrightarrow \min_{\pi} \{P_v \lambda_i^\pi - c_p(\lambda - \lambda_s^\pi) + c_h I^\pi + c'_l \lambda_i^\pi + c_r \lambda p\} \\ &\Leftrightarrow \min_{\pi} \{(P_v + c'_l)\lambda_i^\pi + c_p \lambda_s^\pi + c_h I^\pi + c_r \lambda p\} \end{aligned}$$

Enfin, si l'on note $c_l = P_v + c'_l$, alors le problème 3 de minimisation du coût s'écrit sous la forme suivante :

$$\min_{\pi} \{c_l \lambda_i^\pi + c_p \lambda_s^\pi + c_h I^\pi + c_r \lambda p\}$$

Cette formulation du problème 3 est exactement celle du problème de minimisation que nous considérons sur le Modèle 1. Ainsi, et pour $c_l = P_v + c'_l$, nous avons montré

que le problème de maximisation du profit du Modèle 1 du Chapitre 3 est équivalent au problème de minimisation du coût.

Par conséquent, nous venons de montrer que sur le Modèle 1 du Chapitre 3, maximiser le profit aboutit à une politique optimale identique à celle obtenue par une minimisation de coût.

A.2 Description générale du processus d'uniformisation

Soit un modèle de système de production $M/M/1$ make-to-stock Queue où la production peut être interrompue et reprise à tout moment. La production (à capacité finie) est exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu$ et alimente un stock unique de produits finis. La demande pour ces produits suit une loi de Poisson de taux λ . Une demande qui ne peut être immédiatement satisfaite, lorsque le stock est nul, est perdue. Nous supposons également des retours aléatoires de produits qui pourront être utilisés pour satisfaire la demande. Le stock est commun aux produits neufs et retournés.

Sur ce modèle avec retours indépendants, nous allons expliquer et décrire, en détail, chacune des trois phases du processus d'uniformisation qui vont y être appliquées. Ces éléments constituent un complément d'information à la section 3.2.2.

Le processus d'uniformisation consiste à ramener un problème à temps continu (CTMDP¹) à un problème à temps discret afin d'y appliquer les méthodes et algorithmes connus pour ce dernier.

Ce processus comprend trois phases comme montré dans la figure A.3.

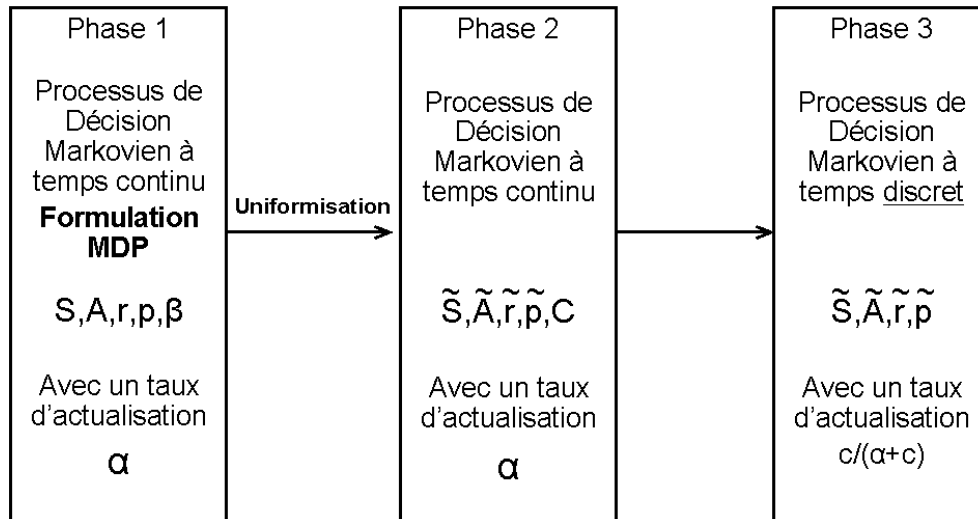


Figure A.1 – Processus d'uniformisation (Puterman, 1994)

Le processus d'uniformisation expliqué ici est directement adapté des travaux de Puterman (1994).

1. Continuous Time Markov Decision Process

Phase 1 : Processus de Décision Markovien à temps continu & formulation MDP

Partant du modèle initial, il s'agira tout d'abord de définir l'ensemble des états S , l'ensemble des actions A ainsi que les taux $\beta(s, a) \forall a \in A \forall s \in S$.

Par la suite, la formulation MDP nécessite d'établir les valeurs des différentes probabilités de transition $p(j | s, a) \forall a \in A \forall s \in S$ avec :

$p(j | s, a)$ = probabilité d'aller en j sachant que le système est initialement en s et que l'action a est prise.

Enfin, il faudra établir la valeur de $r(s, a)$ représentant l'espérance du coût sur une période T étant dans l'état s et sachant que l'action $a \in A$ est prise. La formule générale de $r(s, a)$ est donnée par :

$$r(s, a) = \underbrace{K(s, a)}_{(1)} + \underbrace{E \left[\int_0^T C(s, a) s \exp(-\alpha t) dt \right]}_{(2)} + \underbrace{E[K'(s, a) \exp(-\alpha T)]}_{(3)} \quad (\text{A.1})$$

Afin de décrire le coût $r(s, a)$, nous devons d'abord introduire la notion suivante :

Définition 10 Une période, appelée T , désigne le temps qui sépare deux occurrences d'événements.

Dans le Cas présent, T est exponentiellement distribué de taux $\beta(s, a)$ (figure A.2).

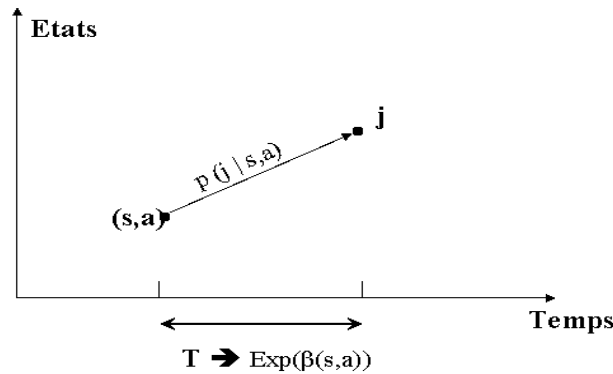


Figure A.2 – Période T : temps séparant deux événements

Ainsi, sachant que lorsque le système est dans l'état s et que l'action a est prise, alors le système restera dans l'état s un certain temps T avant la prochaine occurrence d'événement (avant de passer à un autre état j).

Il est alors possible de définir dans l'équation A.1 :

- $K(s, a)$ qui est le coût en début de période T . Nous supposons que $K(s, a) = 0$ car nous considérons qu'aucun coût (de réglage ou autre) n'est engendré lorsque la décision a est prise.

- $C(s, a)$ qui est le coût généré pendant la période T sur un laps de temps dt ($dt \in [0, T]$) lorsqu'à l'instant 0 le système est dans l'état s et que l'action a est prise. Dans notre cas, $C(s, a) = c_h s$ qui est le coût de possession d'un stock s par unité de temps. Aussi, l'expression (2) $= E \left[\int_0^T C(s, a) s \exp(-\alpha T) \right]$ représente l'espérance de $C(s, a)$ actualisé sur la période T , où α est le taux d'actualisation.
- $K'(s, a)$ qui est le coût instantané intervenant en fin de période T (à l'occurrence du prochain événement). Ce coût sera à définir selon les cas comme nous le verrons dans ce qui suit. Par ailleurs, l'expression (3) $= E[K'(s, a) \exp(-\alpha t) dt]$ représente l'espérance de $K'(s, a)$ actualisé sur la période T .

Sachant que la densité de T est donnée par $\beta(s, a) e^{-\beta(s, a) T}$, nous obtenons alors au final :

$$r(s, a) = \frac{C(s, a)}{\alpha + \beta(s, a)} + \frac{\beta(s, a)}{\alpha + \beta(s, a)} K'(s, a) + k(s, a)$$

Le détail du calcul des coûts intermédiaires et final et donné en Annexe A.3.

Suite à la formulation MDP du problème, il est possible de schématiser notre système par les deux représentations équivalentes suivantes (Figure3) :

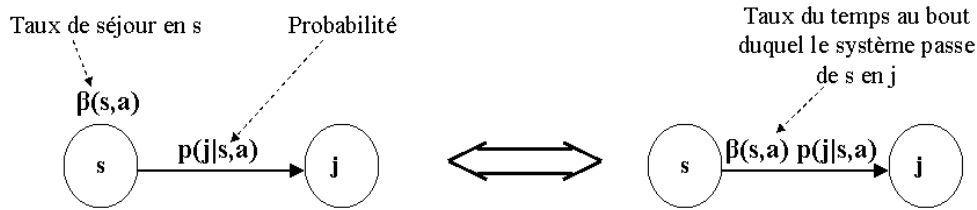


Figure A.3 – Représentations équivalentes (après formulation MDP)

Nous opterons, dans la suite des schémas explicatifs de cette section, pour la représentation de gauche de la figure A.3 qui consiste à indiquer le taux du temps (exponentiel) de séjour dans un état donné ainsi que les probabilités de passage aux autres états.

Une fois la formulation MDP établie, et partant de ce modèle à temps continu, il s'agira d'abord de passer à un autre modèle équivalent à temps continu via l'étape d'uniformisation.

Phase 2 : Uniformisation → Processus équivalent de Décision Markovien à temps continu

A ce niveau sera établi un nouveau système qu'il faudra caractériser (ensemble d'états, actions, etc.). Il est également montré, dans Puterman (1994), que ce système est équivalent au précédent (Phase 1) en termes de politique et de coût optimal.

Soit :

$$C \geq \beta(s, a), \forall s \in S \forall a \in A$$

Par exemple : $\mathcal{C} = \sum_{s,a} \beta(s, a)$ ou bien $\mathcal{C} = \text{Max } \beta(s, a)$.

Nous considérerons dans la suite de nos développements que :

$$\mathcal{C} = \sum_{s,a} \beta(s, a)$$

Le nouveau modèle que nous considérons est alors le suivant (figure A.4) :

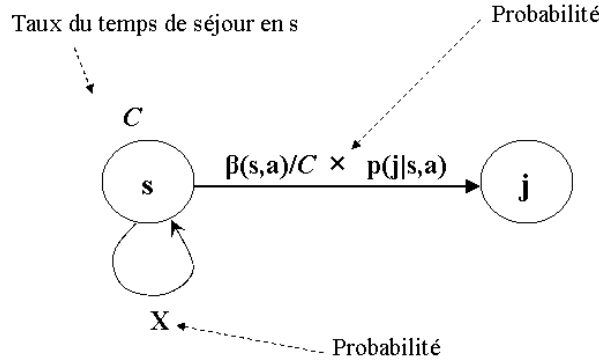


Figure A.4 – Représentation uniformisée

Avec ² : $X = 1 - \frac{1-p(s|s,a)}{\mathcal{C}} \beta(s, a)$ qui vérifie que $\sum_{j \neq s} \frac{\beta(s,a)}{\mathcal{C}} p(j|s, a) + X = 1$.

L'uniformisation se résume donc à considérer un système où l'on reste un temps exponentiel de taux $\mathcal{C}$ constant dans un état donné. la caractérisation uniformisée de ce nouveau système (représentée par des $\sim$) est la suivante :

L'ensemble des états : $\tilde{S} = S$

L'ensemble des décisions ou actions : $\tilde{A} = A$

Le système étant dans l'état s :

$$\tilde{p}(j|s, a) \begin{cases} \frac{p(j|s,a)}{\mathcal{C}} \beta(s, a) & \text{si } j = s \\ 1 - \frac{1-p(j|s,a)}{\mathcal{C}} \beta(s, a) & \text{si } j \neq s \end{cases}$$

La distribution du temps passé dans un état s , sachant que l'action a est prise :

$$\tilde{\beta}(s, a) = \mathcal{C} \quad \forall s \in \tilde{S} \quad \forall a \in \tilde{A}$$

Le coût est donné par :

$$\tilde{r}(s, a) = r(s, a) \frac{\alpha + \beta(s, a)}{\alpha + \mathcal{C}}$$

Finalement, le système ainsi caractérisé est équivalent à celui présenté lors de la phase 1 du fait de l'égalité suivante :

$$\tilde{v}^*(s) = v^*(s)$$

2. $X = 1 - \sum_{j \neq s} \frac{\beta(s,a)}{\mathcal{C}} p(j|s, a)$, et $\sum_{j \neq s} p(j|s, a) = 1 - p(s|s, a)$.

La preuve de cette égalité est donnée dans Puterman (1994).

Il est possible de résumer de manière générale la transition **Phase 1** $\rightarrow$ **Phase 2** par la figure A.5 suivante :

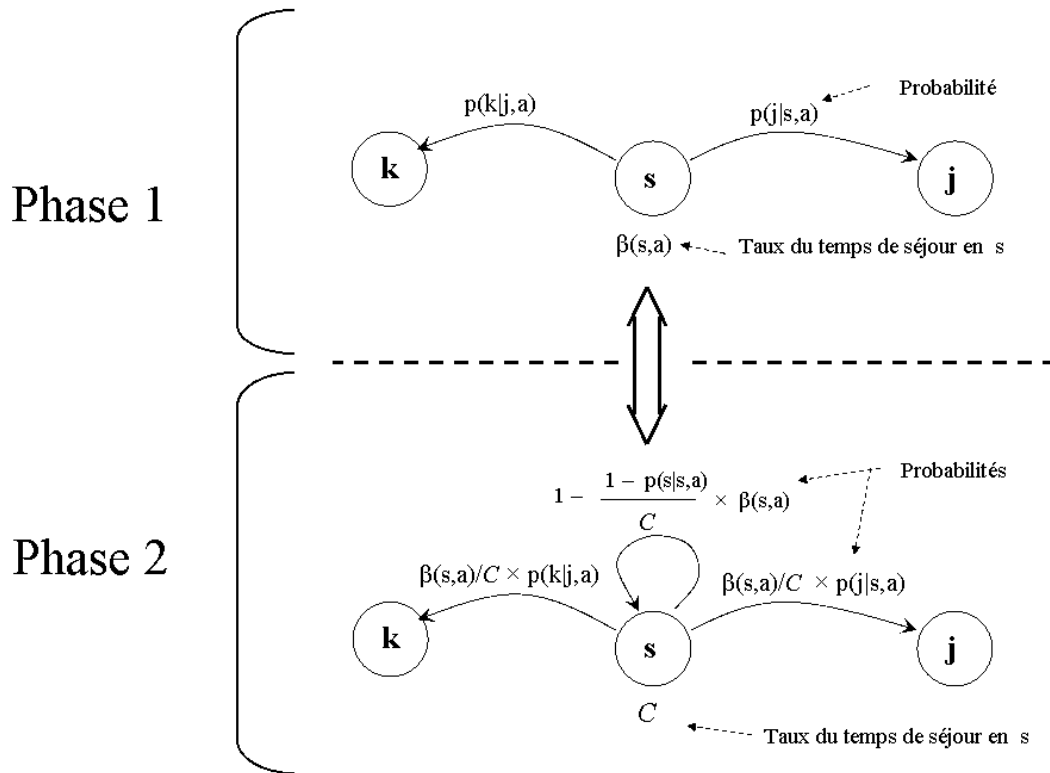


Figure A.5 – Uniformisation : transition Phase 1 $\rightarrow$ Phase 2

Phase 3 : Processus de Décision Markovien à temps discret

Puterman (1994) montre que le système décrit en phase 2 est équivalent à un système à temps discret où l'ensemble des états $\tilde{S}$, des actions $\tilde{A}$, des coûts $\tilde{r}(s, a)$ ainsi que les probabilités $\tilde{p}(j|s, a)$ restent les mêmes. Alors que le taux d'actualisation devient :

$$\tilde{\lambda} = \frac{\mathcal{C}}{\alpha + \mathcal{C}}$$

Il est alors possible d'utiliser les théories des MDP appliquées aux processus de décision Markoviens à temps discret afin de trouver le coût total optimal, ce qui reviendra à retrouver le coût total optimal du problème initialement posé (phase 1) de part l'équivalence entre les phases 1, 2 et 3.

En effet, pour un Processus de Décision Markovien à temps discret, la formule du coût total à horizon infini est donnée par :

$$\tilde{v}^*(s) = \min_a \left[\tilde{r}(s, a) + \sum_j \tilde{\lambda} \tilde{p}(j | s, a) \tilde{v}^*(j) \right]$$

Puterman (1994) a montré que cette équation se transforme en une formule itérative qui permet d'obtenir une solution optimale (coût optimal correspondant à une politique π^* optimale) qui sera également la solution optimale du système initial décrit en phase 1. La formule itérative qui découle de cette équation constitue les équations d'optimalité.

A.3 Calcul de $r(s, a)$: processus d'uniformisation phase 1

Calcul des expressions (2) et (3) du coût $r(s, a)$ (Annexe A.2, phase 1) :

Calcul du coût moyen de stockage (2)

Sachant que :

$$(2) = E \left[\int_0^T c_h s \exp(-\alpha t) dt \right]$$

Alors

$$\begin{aligned}
 (2) &= E \left[c_h s \int_0^T \exp(-\alpha T) \right] \\
 &= c_h s E \left[\int_0^T \exp(-\alpha T) \right] \\
 &= c_h s E \left[\frac{\exp(-\alpha T)}{-\alpha} \right]_0^T \\
 &= c_h s E \left[\frac{-\exp(-\alpha T)}{\alpha} + \frac{-\exp(-0)}{\alpha} \right] \\
 &= c_h s E \left[\frac{1 - \exp(-\alpha T)}{\alpha} \right]
 \end{aligned}$$

Si $g(X)$ est une fonction d'une variable aléatoire $X \in]0, \infty[$, alors :

$$E[g(X)] = \int_0^\infty g(x) f(x) dx$$

Par conséquent, en prenant $X = T$ et $g(T) = 1 - \exp(-\alpha T)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 (2) &= c_h s \frac{\beta(s, a)}{\alpha} \int_0^{+\infty} \exp(-\beta(s, a)T) - \exp(-(\alpha + \beta(s, a))T) dT \\
 &= c_h s \frac{\beta(s, a)}{\alpha} \left[\frac{-\exp(-\beta(s, a)T)}{\beta(s, a)} \right]_0^{+\infty} + \frac{-\exp(-(\alpha + \beta(s, a))T)}{\alpha + \beta(s, a)} \Big|_0^{+\infty} \\
 &= c_h s \frac{\beta(s, a)}{\alpha} \left[\frac{-\exp(-\infty) + \exp(0)}{\beta(s, a)} + \frac{-\exp(-\infty) - \exp(0)}{\alpha + \beta(s, a)} \right] \\
 &= c_h s \frac{\beta(s, a)}{\alpha} \left[\frac{1}{\beta(s, a)} - \frac{1}{\alpha + \beta(s, a)} \right] \\
 &= c_h s \frac{\alpha}{\alpha + \beta(s, a)}
 \end{aligned}$$

Finalement

$$E \left[\int_0^T c_h s \exp(-\alpha t) dt \right] = c_h s \frac{\alpha}{\alpha + \beta(s, a)}$$

Calcul du coût en fin de période (3)

Sachant que :

$$(3) = E[K'(s, a) \exp(-\alpha T)]$$

Alors

$$\begin{aligned}
(3) &= K'(s, a) \beta(s, a) \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha T) \exp(-\beta(s, a)T) dT \\
&= K'(s, a) \beta(s, a) \int_0^{+\infty} \exp(-(\alpha + \beta(s, a))T) dT \\
&= K'(s, a) \beta(s, a) \left[\frac{-\exp(-(\alpha + \beta(s, a))T)}{\alpha + \beta(s, a)} \right]_0^{+\infty} \\
&= K'(s, a) \beta(s, a) \left[\frac{-\exp(-(\alpha + \beta(s, a))T)}{\alpha + \beta(s, a)} \right]_0^{+\infty} \\
&= K'(s, a) \beta(s, a) \left[\frac{-0 + 1}{\alpha + \beta(s, a)} \right]_0^{+\infty} \\
&= K'(s, a) \frac{\beta(s, a)}{\alpha + \beta(s, a)} = K'(s, a) \frac{\beta(s, a)}{\alpha + \beta(s, a)}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$E[K'(s, a) \exp(-\alpha T)] = K'(s, a) \frac{\beta(s, a)}{\alpha + \beta(s, a)}$$

A.4 Preuve du lemme 1

Supposons que $v \in \mathcal{U}$. Nous allons d'abord montrer que Tv satisfait la Condition 1 de $\mathcal{U}$ (convexité). A cet effet, nous montrons séparément que T_1v et T_2v sont convexes.

Soit $S = \min[x : \Delta v(x) + c_p > 0]$ (potentiellement infini). Nous pouvons réécrire l'opérateur T_1 comme

$$T_1v(x) = \begin{cases} v(x+1) + c_p & \text{si } x < S \\ v(x) & \text{si } x \geq S \end{cases}$$

et déduire que :

$$\Delta T_1v(x) = \begin{cases} \Delta v(x+1) \geq -c_l & \text{si } x < S-1 \\ -c_p \geq -c_l & \text{si } x = S-1 \\ \Delta v(x) \geq -c_l & \text{si } x \geq S. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Les inégalités de l'équation A.2 proviennent directement de la Condition 2 de $\mathcal{U}$ satisfaite par v . Nous obtenons par conséquent :

$$\Delta^2 T_1v(x) = \begin{cases} \Delta^2 v(x+1) \geq 0 & \text{si } x < S-2 \\ -c_p - \Delta v(x+1) \geq 0 & \text{si } x = S-2 \\ \Delta v(x+1) + c_p \geq 0 & \text{si } x = S-1 \\ \Delta^2 v(x) \geq 0 & \text{si } x \geq S. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Les inégalités de l'équation A.3 proviennent directement de la convexité de v et de la définition de S . Pour tout $x \in \mathbb{N}$, nous obtenons alors $\Delta^2 T_1v(x) \geq 0$ et concluons que T_1v est convexe. De plus :

$$\Delta T_2v(x) = \begin{cases} \Delta v(x-1) \geq -c_l & \text{if } x \geq 1 \\ -c_l & \text{if } x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

et

$$\Delta^2 T_2 v(x) = \begin{cases} \Delta^2 v(x-1) \geq 0 & \text{if } x \geq 1 \\ \Delta v(x) + c_l \geq 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

La quantité $\Delta^2 T_2 v(x)$ est non-négative selon la Condition C.1 lorsque $x \geq 1$ et selon la Condition C.2 quand $x = 0$, alors $T_2 v$ satisfait C.1. Par ailleurs, $T_3 v$ et $c_h x$ sont trivialement convexes. Finalement, Tv étant une combinaison linéaire non-négative de fonctions convexes, est également convexe.

Montrons maintenant que Tv satisfait la Condition C.2. $T_1 v$ et $T_2 v$ satisfont C.2 d'après les équations (A.2) et (A.4). D'autre part, il est clair que $T_3 v$ satisfait la Condition 2 et que $\Delta c_h x = c_h \geq 0$ étant donné que $c_h x$ est non-décroissant en x . Par conséquent :

$$\begin{aligned} \Delta T v(x) &= \frac{1}{\gamma} [\Delta c_h x + \mu \Delta T_1 v(x) + \lambda \Delta T_2 v(x) + \delta T_3 v(x)] \\ &\geq -\frac{\gamma - \alpha}{\gamma} c_l = -c_l \end{aligned}$$

et Tv satisfait la Condition C.2.

A.5 Preuve du lemme 2

Soit $v_\beta \in \mathcal{U}$. Alors $T_\beta v_\beta \in \mathcal{U}$ d'après le Lemme 1. Nous avons besoin de montrer que T_β propage les propriétés de submodularité et de supermodularité. Pour ce faire, nous prouvons d'abord que les opérateurs $c_h x$, T_1 , T_2 , T_3 préservent les propriétés de modularité résumées dans le tableau A.1. Notons que ces opérateurs peuvent dépendre du paramètre β en considération.

	$SuperM(\beta, x)$	$SubM(\beta, x)$
$c_h x$	$\forall \beta$	$\forall \beta \neq c_h$
$T_1 v_\beta(x)$	$\forall \beta$	$\forall \beta$
$T_2 v_\beta(x)$	$\forall \beta \neq c_l$	$\forall \beta$
$T_3 v_\beta(x)$	$\forall \beta$	$\forall \beta$

Tableau A.1 – Préservation de la submodularité et de la supermodularité par les opérateurs

$\Delta c_h x = c_h$ est non-décroissant en c_h et indépendant des autres paramètres du système. Ainsi, $c_h x$ est $SuperM(\beta, x)$ pour tout β et $SubM(\beta, x)$ pour tout $\beta \neq c_h$.

D'après Cil *et al.* (2007) (nous adaptons leur problème de maximisation en problème de minimisation), nous savons que T_1 préserve $SubM(\beta, x)$ et $SuperM(\beta, x)$ pour tout β . d'après l'équation (A.4), nous avons :

$$\Delta T_2 v_\beta(x) = \begin{cases} \Delta v_\beta(x-1) & \text{si } x \geq 1 \\ -c_l & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Lorsque $\beta \neq c_l$, il est clair que T_2 propage $SubM(\beta, x)$ et $SuperM(\beta, x)$. T_2 est également $SubM(c_l, x)$ vu que :

$$\Delta T_2 v_{c_l+\epsilon}(x) - \Delta T_2 v_{c_l}(x) = \begin{cases} \Delta v_{c_l+\epsilon}(x-1) - \Delta v_{c_l}(x-1) \leq 0 & \text{si } x \geq 1 \\ -\epsilon \leq 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Enfin T_3 préserve $SubM(\beta, x)$ et $SuperM(\beta, x)$ pour tout β car $\Delta T_3 v_\beta(x) = \Delta v_\beta(x+1)$ pour tout β .

Lorsque β appartient à $\{c_h, c_r, c_l\}$, $T_\beta v_\beta$ est une combinaison linéaire des opérateurs $c_h x$, T_1 , T_2 , T_3 où les coefficients de la combinaison ne dépendent pas de c_h, c_r, c_l . Nous pouvons conclure que $T_\beta v_\beta$ est $SuperM(\beta, x)$ pour $\beta \in \{c_h, c_r\}$ et $SubM(\beta, x)$ pour $\beta \in \{c_l, c_r\}$.

Lorsque β appartient à $\{\lambda, \mu, \delta\}$, cela devient plus compliqué car $T_\beta v_\beta$ est une combinaison linéaire des opérateurs $c_h x$, T_1 , T_2 , T_3 , où certains des coefficients de la combinaison dépendent de λ, μ, δ . Considérons la propagation de $SuperM(\mu, x)$:

$$T_\mu v_\mu(x) = \frac{1}{\mathcal{C}} [c_h x + \mu T_1 v_\mu(x) + \lambda T_2 v_\mu(x) + \delta T_3 v_\mu(x) + \epsilon v_\mu(x) + (\mathcal{C} - \alpha - \lambda - \mu - \delta) v_\mu(x)]$$

et

$$\begin{aligned} T_{\mu+\epsilon} v_{\mu+\epsilon}(x) &= \frac{1}{\mathcal{C}} [c_h x + (\mu + \epsilon) T_1 v_{\mu+\epsilon}(x) + \lambda T_2 v_{\mu+\epsilon}(x) + \delta T_3 v_{\mu+\epsilon}(x) \\ &\quad + (\mathcal{C} - \alpha - \lambda - \mu - \epsilon - \delta) v_{\mu+\epsilon}(x)] \\ &= \frac{1}{\mathcal{C}} [c_h x + \mu T_1 v_{\mu+\epsilon}(x) + \lambda T_2 v_{\mu+\epsilon}(x) + \delta T_3 v_{\mu+\epsilon}(x) \\ &\quad + (\mathcal{C} - \alpha - \lambda - \mu - \delta) v_{\mu+\epsilon}(x) + \epsilon(T_1 v_{\mu+\epsilon}(x) - v_{\mu+\epsilon}(x))] \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Delta T_{\mu+\epsilon} v_{\mu+\epsilon}(x) &\geq \Delta T_\mu v_\mu(x) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \Delta T_1 v_{\mu+\epsilon}(x) \\ + \lambda \Delta T_2 v_{\mu+\epsilon}(x) \\ + \delta \Delta T_3 v_{\mu+\epsilon}(x) \\ + (\mathcal{C} - \alpha - \lambda - \mu - \delta) \Delta v_{\mu+\epsilon}(x) \\ + \epsilon \Delta [T_1 v_{\mu+\epsilon}(x) - v_{\mu+\epsilon}(x)] \end{pmatrix} &\geq \begin{pmatrix} \mu \Delta T_1 v_\mu(x) \\ + \lambda \Delta T_2 v_\mu(x) \\ + \delta \Delta T_3 v_\mu(x) \\ + (\mathcal{C} - \alpha - \lambda - \mu - \delta) \Delta v_\mu(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Les quatre premières lignes de (A.5) satisfont l'inégalité car T_1, T_2, T_3 propagent $SuperM(\mu, x)$ ³. Il est donc suffisant de prouver que $\Delta [T_1 v_{\mu+\epsilon}(x) - v_{\mu+\epsilon}(x)] \geq 0$.

Les arguments sont les mêmes en vue de propager $SubM(\lambda, x)$ et $SuperM(\delta, x)$. Pour résumer, nous devons prouver les 3 propriétés additionnelles suivantes :

3. $\mathcal{C}$ a été choisi lors de nos précédentes démonstrations comme étant $\mathcal{C} = \alpha - \lambda - \mu - \delta$. Cela étant, et d'après Puterman (1994), $\mathcal{C}$ doit, de manière générale, être supérieur ou égal à la somme ($\mathcal{C} \geq \alpha - \lambda - \mu - \delta$). C'est ainsi que nous réalisons la présente démonstration dans le cas général où $\mathcal{C} \geq \alpha - \lambda - \mu - \delta$ et qui implique l'apparition des termes $(\mathcal{C} - \beta - \lambda - \mu - \delta) v_\mu(x)$ et $\mathcal{C} - \alpha - \lambda - \mu - \delta) v_{\mu+\epsilon}(x)$. Néanmoins, que nous ayons $\mathcal{C} = \beta - \lambda - \mu - \delta$ ou bien $\mathcal{C} \geq \alpha - \lambda - \mu - \delta$ ne remet en cause ni les démonstrations faites jusqu'à maintenant, ni la présente démonstration.

1. $\Delta[T_1v(x) - v(x)] \geq 0$ pour $SuperM(\mu, x)$
2. $\Delta[T_2v(x) - v(x)] \leq 0$ pour $SubM(\lambda, x)$
3. $\Delta[T_3v(x) - v(x)] \geq 0$ pour $SuperM(\delta, x)$

Nous avons omis l'indice β car les propriétés en question ne dépendent pas de β . D'après Cil *et al.* (2007), nous savons que la convexité de $v(x)$ en x (vraie car $v \in \mathcal{U}$) implique que $T_1v(x) - v(x)$ est non-décroissant en x . Montrons à présent que $T_2v(x) - v(x)$ est non-croissant en x . D'après l'équation (A.4) :

$$\Delta(T_2v(x) - v(x)) = \begin{cases} \Delta v(x-1) - \Delta v(x) \leq 0 & \text{if } x \geq 1 \\ -c_l - \Delta v(x) \leq 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Les inégalités (A.6) viennent du fait que $v \in \mathcal{U}$. Finalement, $T_3v(x) - v(x) = \Delta v(x) + c_r$ est non-décroissant en x car v est convexe.

A.6 Preuve de la propriété 1

Afin de prouver que C est convexe, il faudra prouver séparément que C_h , C_r et $C_l + C_p$ sont convexes lorsque $c_l \geq c_p$.

Case 1 : $\rho_1 < 1$

Dans ce cas :

$$\frac{\partial^2 Ch(S)}{\partial S^2} = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$$

Avec

$$\begin{aligned} A_1 &= c_h \rho_1 \ln \rho_1 \rho_1^S \\ A_2 &= 1 / ((q \rho_1^{S+1} + p(\rho_1 - 1) - q)^3) \\ A_3 &= q \rho_1^{S+1} [(p(\rho_1 - 1) - q) q \ln \rho_1 S - p(q(\ln \rho_1 + 2(\rho_1 - 1)) \\ &\quad - (\rho_1 - 1) \ln \rho_1) - q^2(\ln \rho_1 - 2)] \\ A_4 &= 1 - (p(\rho_1 - 1) - q) \end{aligned}$$

Montrons que C_h est convexe. il est alors suffisant de prouver que $A_1, A_2 < 0$ et $A_3, A_4 > 0$. il est clair que $A_1, A_2 < 0$ et $A_4 > 0$ car $\rho_1 < 1$. De plus, $A_3 > 0$ partant de la formule $A_3 = A_3^1 + A_3^2 + A_3^3$ où :

$$\begin{aligned} A_3^1 &= \underbrace{(p(\rho_1 - 1) - q)}_{<0} \underbrace{q \ln \rho_1 S}_{<0} > 0 \\ A_3^2 &= -p \underbrace{(q(\ln \rho_1 + 2(\rho_1 - 1)))}_{<0} \underbrace{-(\rho_1 - 1) \ln \rho_1}_{<0} > 0 \\ A_3^3 &= -q^2 \underbrace{(\ln \rho_1 - 2)}_{<0} > 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que C_h est convexe.

C_r est clairement convexe étant donné que c'est une fonction constante de S et C_l est convexe car :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_l(S) + \partial^2 C_p(S)}{\partial S^2} &= \frac{\overbrace{[-(p(\rho_1 - 1) - q)\lambda c_l - qc_p\mu\rho_1]}^{>0} \overbrace{q(\rho_1 - 1)}^{<0}}{\underbrace{(q\rho_1^{S+1} - q + p(\rho_1 - 1))}_{<0}^3} \\ &\times \frac{\overbrace{(\ln \rho_1)^2}^{>0} \overbrace{\rho_1^S}^{>0} \overbrace{[q\rho_1^{S+1} - p(\rho_1 - 1) + q]}^{>0}}{\underbrace{(q\rho_1^{S+1} - q + p(\rho_1 - 1))}_{<0}^3} > 0 \end{aligned}$$

Finalement, C est convexe pour $\rho_1 < 1$.

Case 2 : $\rho_1 = 1$

Dans ce cas, les dérivées secondes sont simplifiées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_h(S)}{\partial S^2} &= c_h \frac{-q(q-1)}{(qS+1)^3} \geq 0 \\ \frac{\partial^2 C_l(S) + \partial^2 C_p(S)}{\partial S^2} &= \lambda c_l \frac{2q^3 \lambda c_l - 2q^3 \mu c_p}{(1+qS)^3} \geq 0 \end{aligned}$$

C est donc également convexe pour $\rho_1 = 1$.

A.7 Calcul du S^* optimal

Ci-joint le programme qui calcule numériquement le S^* pour le Modèle 1 avec retours de produits indépendants de la demande :

```
import java.lang.Math;
// Classe qui réalise la simulation //
class Calcul voptimal /

double[] v; double[] vnew; int[] a; // Définir les vecteurs v, vnew et a
String fichier resultats;

//Entrer les valeurs des paramètres
double lambda1 =0.9; double mu=1; double alpha = 0.01; double p=0.3; int Smax=100;
double h=1; double cp=50; double cl=60; double cr=20; double delta= lambda1 * p;

//Définir d'autres variables du système
int Soptimal;
double maxit=10000000;
double tauxunif=-1;
double norme=0;
```

```

double normeinf=0;
int iterations=-1, iterations0=-1;

    /***** Evaluation numérique de la politique optimale *****/

void voptimal()

{

v = new double[Smax + 1]; //Créer le tableau v
vnew = new double[Smax + 1]; //Créer le tableau vnew
a = new int[Smax + 1]; //Créer le tableau a
tauxunif = lambda1+mu+ alpha+delta; //Définir le taux d'uniformisation

    //initialisation des différents tableaux
for (int j=0; j<=Smax; j++)
{
v[j]=0;
vnew[j]=0;
a[j]=0;
}

    //Calcul de v*
for (iterations=1; iterations<=maxit; iterations++)
{
for ( int j=0; j<=Smax; j++)
{
v[j] = vnew[j];
}

for (int j=0; j<=Smax; j++)
{
vnew[j] = (1/tauxunif)*(c(h,j) + mu*T0(v,j) +lambda1*T1(v,j)+delta*T2(v,j));
}

if(span(v,vnew)<=0.0000001){ iterations0=iterations; break; }
}

    //Calculer le stock optimal = somme des a[j] (car politique base stock)
Soptimal=0; for (int j=0; j<=Smax; j++)
{

Soptimal=Soptimal+a[j];
}
}

```

//Fonction qui calcule la norme de la différence de 2 matrices

```
double norme(double[] tableau1, double[] tableau2)
{
    double result = 0;

    for (int j=0; j<=Smax; j++)
    {
        if (Math.abs(tableau1[j]-tableau2[j]) > result)
            result = Math.abs(tableau1[j]-tableau2[j]);
    }
    return result;
}
```

//Fonction qui calcule la norme inférieure de la différence de 2 matrices

```
double normeinf(double[] tableau1, double[] tableau2)
{
    double result = Math.abs(tableau1[0]-tableau2[0]);
    for (int j=0; j<=Smax; j++)
    {
        if (Math.abs(tableau1[j]-tableau2[j]) < result)
            result = Math.abs(tableau1[j]-tableau2[j]);
    }

    return result;
}
```

//Fonction qui retourne the span seminorm

```
double span(double[] tableau1, double[] tableau2)
{
    double result=0;
    result=norme(tableau1,tableau2)-normeinf(tableau1,tableau2);
    return result;
}
```

//Fonction qui retourne T0[j]

```
double T0(double[] tableau, int j)
{
    double result=0;
    if (j<Smax) { result=Math.min(v[j],v[j+1]+cp); if(v[j] < v[j+1]+cp) {a[j]=0;} else{a[j]=1;} }
    if(j==Smax) { result=v[j]; }
    return result;
}
```

//Fonction qui retourne T1[j]

```
double T1(double[] tableau, int j)
{
    double result=0;
    if(j>0) {result=v[j-1];}
    else{result=v[j]+cl;}
}
```

```
return result ;  
}
```

```
    //Fonction qui retourne T2[j]  
double T2(double[] tableau, int j)  
{  
    double result=0 ;  
    if( j<S_max) { result=v[j+1]+cr ; }  
    if(j==S_max) { result=v[j] ; }  
    return result ;  
}
```

```
    //Fonction qui retourne le coût de possession des stocks  
double c(double h, int j)  
{  
    double result=0 ;  
    result = h*j ;  
    return result ;  
}  
  
}
```


Annexe B

Annexes du Chapitre 4

B.1 Preuve du lemme 3

Afin de prouver l'optimalité du lemme 3, nous devons réécrire les équations d'optimalité sous la forme équivalente suivante :

$$v^*(x) = Tv^*(x), \forall x \in \mathbb{N}$$

Où l'opérateur T est défini comme

$$Tv(x) := \frac{1}{\lambda + \mu + \lambda p + \alpha} [c_H x + \mu T_0 v(x) + \lambda T_1 v(x)]$$

et

$$\begin{aligned} T_1 v(x) &:= \min[v(x); c_p + v(x+1)] \\ T_2' v(x) &:= \begin{cases} q v(x-1) + p v(x) + p c_r & \text{if } x > 0 \\ v(x) + c_l & \text{if } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Avec $T_2' = T_2 + T_3$ (T_2 et T_3 étant définis en section 4.2.1).

Afin de prouver que $v^* \in \mathcal{U}$, montrons que T préserve les conditions C.1 et C.2. Pour montrer que $Tv \in \mathcal{U}$, nous devons montrer que $T_1 v$ et $T_2' v \in \mathcal{U}$ car $Tv = (T_1 + T_2') v$. La démonstration est faite pour $c_l \geq p c_r$.

Opérateur T_1

Nous définissons $S = \min[x : \Delta v(x) + c_p > 0]$ (S potentiellement infini). Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Delta_x T_1 v(x) &= \begin{cases} \Delta_x v(x+1) & \text{if } x < S \\ 0 & \text{if } x = S-1 \\ \Delta_x v(x) & \text{if } x \geq S \end{cases} \\
\Delta_x^2 T_1 v(x) &= \begin{cases} \Delta_x v(x+1)^2 \geq 0 & \text{if } x < S \\ -\Delta_x v(x+1) \geq 0 & \text{if } x = S-1 \\ \Delta_x v(x+1) \geq 0 & \text{if } x = S-1 \\ \Delta_x v(x)^2 \geq 0 & \text{if } x \geq S \end{cases} \\
q \Delta_x T_1 v(x, y) + c_l - p c_r &= \begin{cases} \Delta_x v(x+1) + c_l - p c_r \geq 0 & \text{if } x < S \\ c_l - p c_r \geq 0 & \text{if } x = S-1 \\ q \Delta_x v(x) + c_l - p c_r \geq 0 & \text{if } x \geq S \end{cases}
\end{aligned}$$

Opérateur T'_2

$$\begin{aligned}
\Delta_x T'_2 v(x) &= \begin{cases} q \Delta_x v(x-1) + p \Delta_x v(x) & \text{if } x > 0 \\ p \Delta_x v(x) + p c_r - c_l & \text{if } x = 0 \end{cases} \\
\Delta_x^2 T'_2 v(x) &= \begin{cases} q \Delta_x v(x-1)^2 + p \Delta_x^2 v(x) \geq 0 & \text{if } x > 0 \\ q \Delta_x v(x) + c_l - p c_r + p \Delta_x^2 v(x) \geq 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} \\
q \Delta_x T'_2 v(x) + c_l - p c_r &= \begin{cases} q [q \Delta_x v(x-1) + p \Delta_x v(x)] + c_l - p c_r & \text{if } x > 0 \\ \geq q \Delta_x v(x-1) + c_l - p c_r \geq 0 & \text{if } x > 0 \\ q [-c_l + p \Delta_x v(x) + c_r] + c_l - p c_r = 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Nous trouvons que si $v \in \mathcal{U}$, alors Tv satisfait les conditions C.1 et C.2. Par conséquent, $Tv \in \mathcal{U}$.

B.2 Preuve du théorème 4

Dans le cas $c_l = c_r$, cette preuve est très similaire à celle du théorème 2 et nous allons uniquement y mentionner les principales différences. Le tableau A.1 est toujours valable, sauf pour T_3 qui est à présent celui du Modèle 2 avec retours dépendants et immédiats de produits. Nous obtenons alors le tableau suivant.

	$SuperM(\beta, x)$	$SubM(\beta, x)$
$c_h x$	$\forall \beta$	$\forall \beta \neq c_h$
$T_1 v_\beta(x)$	$\forall \beta$	$\forall \beta$
$T_2 v_\beta(x)$	$\forall \beta \neq c_l$	$\forall \beta$
$T_3 v_\beta(x)$	$\forall \beta$	$\forall \beta$

Tableau B.1 – Préservation de la submodularité et de la supermodularité par les opérateurs

Par ailleurs, les 3 propriétés additionnelles sont à présent remplacées par 4 propriétés additionnelles :

1. $\Delta[T_1 v(x) - v(x)] \geq 0$ pour $SuperM(\mu, x)$
2. $\Delta[T_2 v(x) - v(x)] \leq 0$ pour $SuperM(p, x)$ et $SubM(\lambda, x)$

3. $\Delta[T_3v(x) - v(x)] \geq 0$ pour $SuperM(p, x)$
4. $\Delta[T_3v(x) - v(x)] \leq 0$ pour $SubM(\lambda, x)$

Nous avons préalablement prouvé les deux premières propriétés. Les deux dernières propriétés sont également vraies vu que $T_3v_\beta(x) - v_\beta(x) = c_r$ lorsque $c_r = c_l$.

B.3 Preuve du théorème 5

Lorsque p tend vers 1, $C_h(S)$ tend vers l'infini d'après son expression analytique (section 3.5) pour n'importe quel $S \in \mathbb{N}$. En conséquence, C^* tend vers l'infini lorsque p tend vers 1. Lorsque $p = 1$, le coût moyen $\tilde{C}(S)$ peut être exprimé de façon très simple :

$$\tilde{C}(S) = \begin{cases} \lambda c_l & \text{si } S = 0 \\ c_h S + \lambda c_r & \text{si } S > 0 \end{cases}$$

Ainsi nous obtenons :

$$\tilde{C}^* = \min_{S \in \{0,1\}} [\tilde{C}(S)] = \min[\lambda c_l, c_h + \lambda c_r]$$

et

$$\tilde{S}^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda c_l < c_h + \lambda c_r \\ 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

B.4 Preuve du théorème 6

Nous savons, d'après les sections 3.5 et 4.2.5, que :

$$\begin{aligned} C_{c_r+\epsilon}^* &= C_{c_r+\epsilon}^*(S_{c_r+\epsilon}^*) = C_{c_r}^*(S_{c_r+\epsilon}^*) + \delta\epsilon > C_{c_r}^* \\ \tilde{C}_{c_r+\epsilon}^* &= \tilde{C}_{c_r+\epsilon}^*(\tilde{S}_{c_r+\epsilon}^*) = \tilde{C}_{c_r}^*(\tilde{S}_{c_r+\epsilon}^*) + \underbrace{\lambda p \epsilon (1 - \tilde{\pi}_0(\tilde{S}_{c_r+\epsilon}^*))}_{>0} > \tilde{C}_{c_r}^* \end{aligned}$$

Le coût moyen optimal C^* tend vers l'infini lorsque c_r tend vers l'infini car le coût moyen de retour est δc_r .

Lorsque c_r tend vers l'infini, le coût moyen $\tilde{C}(S)$ tend vers λc_l si $S = 0$ et tend vers l'infini autrement. Par conséquent, $\tilde{S}^*$ tend vers 0 et $\tilde{C}^*$ tend vers λc_l lorsque c_r tend vers l'infini.

B.5 Calcul du S^* optimal

Le programme utilisé lors du calcul du coût optimal est similaire à celui présenté, pour le Modèle 1, dans l'Annexe du Chapitre 3 (section A.7) dans lequel l'expression itérative qui calcule $vnew[j]$ devient :

$$\begin{aligned} vnew[j] &= (1/tauxunif) * (c(h,j) + mu * T0(v,j) + lambda1 * (1-p) \\ &\quad * T1(v,j) + delta * T2(v,j)) \end{aligned}$$

Avec $tauxunif = lambda1 + mu + alpha$ et $T2$ est calculé par :

```
double T2(double[] tableau, int j)
{
    double result=0;
    if( j>0) { result=v[j]+cr; }
    if(j==0) { result=v[j]+cl; }
    return result;
}
```

Annexe C

Annexes du Chapitre 5

C.1 Preuve du Théorème 7

Soit $v \in \mathcal{U}$, $x \geq 0$, $S := \min[x \in \mathbb{N} | \Delta v(x) \leq c_p]$ et $R := \min[x \in \mathbb{N} | \Delta v(x) \leq c'_r]$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta T_0 v(x) &= \begin{cases} \Delta v(x+1) \leq g & \text{si } x < S-1 \\ c_p \leq g & \text{si } x = S-1 \\ \Delta v(x) \leq g & \text{si } x \geq S \end{cases} \\ \Delta T_1 v(x) &= \begin{cases} \Delta v(x-1) \leq g & \text{si } x > 0 \\ g & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ \Delta T_2 v(x) &= \begin{cases} \Delta v(x+1) \leq g & \text{si } x < R-1 \\ c'_r \leq g & \text{si } x = R-1 \\ \Delta v(x) \leq g & \text{si } x \geq R \end{cases}\end{aligned}$$

Les inégalités proviennent de $v \in \mathcal{U}$ et des définitions de R et de S . D'après la définition de l'opérateur T , nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\Delta T v(x) &= \frac{1}{C + \alpha} [-c_h + \mu \Delta T_0 v(x) \\ &\quad + \lambda \Delta T_1 v(x) + \lambda p \Delta T_2 v(x)] \\ &\leq \frac{\mu + \lambda + \lambda p}{C + \alpha} \Delta v(x) \leq g\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est impliquée par $\Delta v(x) \leq g$ (C.2 de $\mathcal{U}$) et $\mathcal{C} = \mu + \lambda + \lambda p$ (taux d'uniformisation). Nous concluons que $\Delta T v(x) \leq g$ et que Tv satisfait la condition C.2 de $\mathcal{U}$.

Nous allons prouver à présent que Tv satisfait la condition C.1 de $\mathcal{U}$. A cet effet, nous introduisons la notation $\Delta^2 v(x) = \Delta v(x+1) - \Delta v(x)$. La condition C.1 de $\mathcal{U}$ peut être énoncée différemment de la façon suivante $\Delta^2 v(x) \leq 0, \forall x$. Montrons alors que $T_0 v$, $T_1 v$ et $T_2 v$ satisfont C.1 :

$$\begin{aligned}
\Delta^2 T_0 v(x) &= \begin{cases} \Delta^2 v(x+1) \leq 0 & x < S-2 \\ c_p - \Delta v(x+1) \leq 0 & x = S-2 \\ \Delta v(x+1) - c_p \leq 0 & x = S-1 \\ \Delta^2 v(x) \leq 0 & x \geq S \end{cases} \\
\Delta^2 T_1 v(x) &= \begin{cases} \Delta^2 v(x-1) \leq 0 & x > 0 \\ \Delta v(x) - g - c_l \leq 0 & x = 0 \end{cases} \\
\Delta^2 T_2 v(x) &= \begin{cases} \Delta^2 v(x+1) \leq 0 & x < R-2 \\ c'_r - \Delta v(x+1) \leq 0 & x = R-2 \\ \Delta v(x+1) - c'_r \leq 0 & x = R-1 \\ \Delta^2 v(x) \leq 0 & x \geq R \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta^2 T v \leq 0$ et donc $T v$ satisfait C.1. Nous concluons que T préserve $\mathcal{U}$.

Annexe D

Annexes du Chapitre 6

D.1 Preuve du Lemme 4

En vue de prouver que $v^* \in \mathcal{U}$, montrons que T préserve les conditions C.1, C.2, C.3 et C.4. Nous supposons que $v^0 \equiv 0$.

Pour montrer que $Tv \in \mathcal{U}$, nous devons montrer que T_0v, T_1v, T_2v et $T_3v \in \mathcal{U}$ étant donné que $Tv = (T_0 + T_1 + T_2 + T_3) v$.

Opérateur T_0

Nous définissons $S_y = \min[x : \Delta v(x, y) > 0]$ (S potentiellement infini). Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta_x^2 T_0 v(x, y) &= \begin{cases} \Delta^2 v(x+1, y) \geq 0 & \text{si } x < S_y - 2 \\ -\Delta v(x+1, y) - c_p \geq 0 & \text{si } x = S_y - 2 \\ \Delta v(x+1, y) + c_p \geq 0 & \text{si } x = S_y - 1 \\ \Delta^2 v(x, y) \geq 0 & \text{si } x \geq S_y \end{cases} \\ \Delta_x T_0 v(x, y+1) - \Delta_x T_0 v(x, y) &= \begin{cases} \Delta v(x+1, y+1) - \Delta v(x+1, y) \geq 0 & \text{si } x < S_y - 1 \\ \Delta_x v(x, y+1) + c_p \geq 0 & \text{si } x = S_y - 1 \\ 0 \geq 0 & \text{\& } x = S_{y+1} \\ \Delta v(x, y+1) - \Delta v(x, y) \geq 0 & \text{si } x \geq S_y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_x T_0 v(x+1, y) - \Delta_x T_0 v(x, y+1) &= \begin{cases} \Delta v(x+2, y) - \Delta v(x+1, y+1) & \\ \geq 0 & \text{si } x < S_y - 2 \\ -c_p - \Delta_x v(x+1, y+1) \geq 0 & \text{si } x = S_y - 2 \\ & \& x = S_{y+1} - 2 \\ 0 \geq 0 & \text{si } x = S_y - 2 \\ & \& x = S_{y+1} - 1 \\ \Delta_x v(x+1, y) - \Delta_x v(x+1, y) & \\ \geq 0 & \text{si } x = S_y - 1 \\ & \& x = S_{y+1} \\ \Delta_x v(x+1, y) + c_p \geq 0 & \text{si } x = S_y - 1 \\ & \& x = S_{y+1} - 1 \\ \Delta_x v(x+1, y) - \Delta_x v(x, y+1) & \\ \geq 0 & \text{si } x \geq S_y \end{cases} \\
\Delta_x T_0 v(x, y) &= \begin{cases} \Delta v(x+1, y) \geq -c_l & \text{si } x < S_y - 1 \\ -c_p \geq -c_l & \text{si } x = S_y - 1 \\ \Delta v(x, y) \geq -c_l & \text{si } x \geq S_y \end{cases}
\end{aligned}$$

Opérateur T_1

$$\begin{aligned}
\Delta_x^2 T_1 v(x, y) &= \begin{cases} \Delta^2 v(x-1, y) \geq 0 & \text{si } x > 0 \\ 0 \geq 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
\Delta_x T_1 v(x, y+1) - \Delta_x T_1 v(x, y) &= \begin{cases} \Delta v(x-1, y+1) - \Delta v(x-1, y) \geq 0 & \text{si } x > 0 \\ 0 \geq 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
\Delta_x T_1 v(x+1, y) - \Delta_x T_1 v(x, y+1) &= \begin{cases} \Delta v(x, y) - \Delta v(x-1, y+1) \geq 0 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
\Delta_x T_1 v(x, y) &= \begin{cases} \Delta v(x-1, y) \geq -c_l & \text{si } x > 0 \\ -c_l \geq -c_l & \text{si } x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Opérateur T_2

$$\begin{aligned}
\Delta_x^2 T_2 v(x, y) &= \begin{cases} \Delta^2 v(x, y+1) \geq 0 & \text{si } y < M \\ \Delta^2 v(x, y) \geq 0 & \text{si } y = M \end{cases} \\
\Delta_x T_2 v(x, y+1) - \Delta_x T_2 v(x, y) &= \begin{cases} \Delta v(x, y+2) - \Delta v(x, y+1) \geq 0 & \text{si } y < M-1 \\ 0 \geq 0 & \text{si } y = M-1 \end{cases} \\
\Delta_x T_2 v(x+1, y) - \Delta_x T_2 v(x, y+1) &= \begin{cases} \Delta v(x+1, y+1) - \Delta v(x, y+2) \geq 0 & \text{si } y < M-1 \\ \Delta v(x+1, y+1) - \Delta v(x, y+1) \geq 0 & \text{si } y = M-1 \end{cases} \\
\Delta_x T_2 v(x, y) &= \begin{cases} \Delta v(x, y+1) \geq -c_l & \text{si } y < M \\ \Delta v(x, y) \geq -c_l & \text{si } y = M \end{cases}
\end{aligned}$$

Opérateur T_3

$$\Delta_x^2 T_3 v(x, y) = \begin{cases} y (\Delta_x^2 v(x+1, y-1) + c_r) & \\ +(M-y) \Delta_x^2 v(x, y) \geq 0 & \text{si } y > 0 \\ M \Delta_x^2 v(x, y) \geq 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_x T_3 v(x, y+1) - \Delta_x T_3 v(x, y) &= \begin{cases} y (\Delta_x v(x+1, y) - \Delta_x v(x+1, y-1)) \\ (M-y) (\Delta_x v(x, y+1) - \Delta_x v(x, y)) \\ + \Delta_x v(x+1, y) - \Delta_x v(x, y+1) \geq 0 & \text{si } y > 0 \\ (y+1) (\Delta_x v(x+1, y) - \Delta_x v(x, y+1)) \\ + M (\Delta_x v(x, y+1) - \Delta_x v(x, y)) \geq 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \\
\Delta_x T_3 v(x+1, y) - \Delta_x T_3 v(x, y+1) &= \begin{cases} y (\Delta_x v(x+2, y-1) - \Delta_x v(x+1, y)) \\ + (M-y-1) (\Delta_x v(x+1, y) \\ - \Delta_x v(x, y+1)) \geq 0 & \text{si } y > 0 \\ (M-y-1) (\Delta_x v(x+1, y) \\ - \Delta_x v(x, y+1)) \geq 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \\
\Delta_x T_3 v(x, y) &= \begin{cases} y \Delta_x v(x+1, y-1) \\ + (M-y) \Delta_x v(x, y) \geq -Mc_l & \text{si } y > 0 \\ M \Delta_x v(x, y) \geq -Mc_l & \text{si } y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Opérateur T_4

$$\begin{aligned}
\Delta_x^2 T_4 v(x, y) &= \begin{cases} y \Delta_x^2 v(x, y-1) \\ + (M-y) \Delta_x^2 v(x, y) \geq 0 & \text{si } y > 0 \\ M \Delta_x^2 v(x, y) \geq 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \\
\Delta_x T_4 v(x, y+1) - \Delta_x T_3 v(x, y) &= \begin{cases} y (\Delta_x v(x, y) - \Delta_x v(x, y-1)) \\ + (M-y-1) (\Delta_x v(x, y+1) \\ - \Delta_x v(x, y)) \geq 0 & \text{si } y > 0 \\ (M-y-1) (\Delta_x v(x, y+1) \\ - \Delta_x v(x, y)) \geq 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \\
\Delta_x T_4 v(x+1, y) - \Delta_x T_4 v(x, y+1) &= \begin{cases} y (\Delta_x v(x+1, y-1) - \Delta_x v(x, y)) \\ + (M-y) (\Delta_x v(x+1, y) \\ - \Delta_x v(x, y+1)) + \Delta_x v(x, y+1) \\ - \Delta_x v(x, y) \geq 0 & \text{si } y > 0 \\ M (\Delta_x v(x+1, y) - \Delta_x v(x, y+1)) \\ + (y+1) (\Delta_x v(x, y+1) \\ - \Delta_x v(x, y)) \geq 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \\
\Delta_x T_4 v(x, y) &= \begin{cases} y \Delta_x v(x, y-1) \\ + (M-y) \Delta_x v(x, y) \geq -Mc_l & \text{si } y > 0 \\ M \Delta_x v(x, y) \geq -Mc_l & \text{si } y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Nous avons trouvé que $v \in \mathcal{U}$ alors Tv satisfait les conditions C.1, C.2, C.3 et C.4. Par conséquent, $Tv \in \mathcal{U}$.