UNIVERSITÉ PARIS-SUD
École Doctorale de Mathématiques de la région Paris-Sud
Laboratoire de Mathématiques de la Faculté des Sciences d'Orsay

THÈSE DE DOCTORAT

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Discipline : Mathématiques

par Li CHEN

Quasi transformées de Riesz, espaces de Hardy et estimations sous-gaussiennes du noyau de la chaleur

SYNTHÈSE EN FRANÇAIS

Rapporteurs :	M.	Frédéric	BERNICOT
	M.	Peer	KUNSTMANN

Soutenue le 24 Avril 2014 devant le jury composé de :

M.	Pascal	AUSCHER	: Directeur de thèse
M.	Thierry	COULHON	: Directeur de thèse
M.	Andrew	HASSELL	: Président du jury
M.	Alan	MCINTOSH	: Examinateur
M.	Pierre	PORTAL	: Examinateur
M.	Adam	SIKORA	: Examinateur

li.chen@math.u-psud.fr
li.chen@anu.edu.au

Thèse préparée au

Département de Mathématiques d'Orsay

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay (UMR 8628), Bât. 425

Université Paris-Sud 11

91405 Orsay Cedex

France

Résumé

Dans cette thèse nous étudions les transformées de Riesz et les espaces de Hardy associés à un opérateur sur un espace métrique mesuré. Ces deux sujets sont en lien avec des estimations du noyau de la chaleur associé à cet opérateur.

Dans les Chapitres 1, 2 et 4, on étudie les transformées quasi de Riesz sur les variétés riemannienne et sur les graphes. Dans le Chapitre 1, on prouve que les quasi transformées de Riesz sont bornées dans L^p pour $1 < p \leq 2$. Dans le Chapitre 2, on montre que les quasi transformées de Riesz est aussi de type faible $(1,1)$ si la variété satisfait la propriété de doublement du volume et l'estimation sous-gaussienne du noyau de la chaleur. On obtient des résultats analogues sur les graphes dans le Chapitre 4.

Dans le Chapitre 3, on développe la théorie des espaces de Hardy sur les espaces métriques mesurés avec des estimations différentes localement et globalement du noyau de la chaleur. On définit les espaces de Hardy par les molécules et par les fonctions quadratiques. On montre tout d'abord que ces deux espaces H^1 sont les mêmes. Puis, on compare l'espace H^p défini par par les fonctions quadratiques et L^p. On montre qu'ils sont équivalents. Mais on trouve des exemples tels que l'équivalence entre L^p et H^p défini par les fonctions quadratiques avec l'homogénéité t^2 n'est pas vraie. Finalement, comme application, on montre que les quasi transformées de Riesz sont bornées de H^1 dans L^1 sur les variétés fractales.

Dans le Chapitre 5, on prouve des inégalités généralisées de Poincaré et de Sobolev sur les graphes de Vicsek. On aussi montre qu'elles sont optimales.

Mot-clés: Transformées de Riesz, espaces de Hardy, espaces métriques mesurés, graphes, l'estimations du noyau de la chaleur.

Dans cette thèse nous étudions les transformées de Riesz et les espaces de Hardy associés à un opérateur sur un espace métrique mesuré. Ces deux sujets sont en lien avec des estimations du noyau de la chaleur associé à cet opérateur. Nos buts majeurs sont: le comportement des transformées de Riesz sur $L^p(M)$ où M est une variété satisfaisant la propriété de doublement du volume et l'estimation sous-gaussienne du noyau de la chaleur; la théorie des espaces de Hardy sur les espaces métriques mesurés avec des estimations différentes localement et globalement du noyau de la chaleur.

Nous commencerons par introduire nos différents cadres de travail: variétés riemanniennes, graphes, espaces métriques mesurés de Dirichlet. Puis nous décrirons des estimations du noyau de la chaleur dans tous les cadres que nous considérons. Et après, nous introduirons les problèmes de transformée de Riesz et la théorie des espaces de Hardy. Finalement, nous présenterons nos résultats principaux.

0.1 Cadre

Soit (M,d,μ) un espace métrique mesuré. Pour tout $x \in M$ et tout $r > 0$, on désigne par $B(x,r)$ la boule de centre x et de rayon r, et par $V(x,r)$ sa mesure.

Notation 0.1. On note $x \simeq y$ pour signifier qu'il existe deux constantes $c,C > 0$ avec $c < C$ telles que $cx \leq y \leq Cx$ (uniformément en x et y).

Soit B la boule $B(x,r)$. Nous notons λB la boule de centre x et de rayon λr. Nous notons $C_1(B) = 4B$ et $C_j(B) = 2^{j+1}B/2^jB$ pour $j = 2,3,\cdots$.

Définition 0.2. On dit que (M,d,μ) satisfait la propriété de doublement du volume s'il existe $C > 0$ tel que

$$V(x,2r) \leq CV(x,r),\ \forall x \in M, \forall r > 0. \tag{D}$$

Variétés riemanniennes Soit M une variété riemannienne complète non-compacte. On note d la distance géodésique, μ la mesure riemannienne, ∇ le gradient riemannien et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami positif. Par définition et par le théorème spectral, on a

$$\int_M \nabla f \cdot \nabla g d\mu = (\Delta f, g) = \int_M (\Delta^{1/2} f)(\Delta^{1/2} g) d\mu,\ \forall f,g \in \mathscr{C}_0^\infty(M).$$

Soit $e^{-t\Delta}$ le semi-groupe de la chaleur, et soit $p_t(x,y)$ le noyau de la chaleur associé. Alors $(e^{-t\Delta})_{t>0}$ est une famille de contractions linéaires sur $L^2(M)$. En fait, on a le théorème suivant

Théorème 0.3 ([Gri09, Str83])**.** Le semi-groupe de la chaleur $(e^{-t\Delta})_{t>0}$ sur $L^2(M)$ admet un noyau unique $p_t(x,y)$ satisfaisant

1. $p_t(x,y) > 0$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^+ \times M \times M$.

2. $p_t(x,y) = p_t(y,x)$ pour tous $x, y \in M$ et $t > 0$.

3. Pour toute $f \in L^2(M)$, $e^{-t\Delta}$ s'écrit sous la forme de l'intégrale suivante:

$$e^{-t\Delta} f(x) = \int_M p_t(x,y) f(y) d\mu(y).$$

4. Le semi-groupe est sous-markovien. Si $f \in L^2(M)$, alors $0 \leq f \leq 1 \Rightarrow 0 \leq e^{-t\Delta} f \leq 1$.

5. $\|e^{-t\Delta} f\|_p \leq \|f\|_p$ pour tout $t > 0$ et $f \in L^2 \bigcap L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, avec

$$\|e^{-t\Delta} f - f\|_p \to 0$$

pour $1 \leq p < \infty$.

6. Pour tout $f \in L^2(M)$, on a $\frac{d}{dt} e^{-t\Delta} f = -\Delta e^{-t\Delta} f$. Cette égalité a lieu aussi pour $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, si on définit $e^{-t\Delta} f$ comme dans 3.

Graphes Soit Γ un graphe infini connexe localement uniformément fini. On suppose Γ muni de sa distance naturelle d et muni d'un poids symétrique μ sur $\Gamma \times \Gamma$. Deux points x et y de Γ sont voisins si et seulement si $\mu_{xy} > 0$. On note $x \sim y$. On désigne $\mu(x) = \sum_{y \sim x} \mu_{xy}$. Alors pour $\Omega \subset \Gamma$, on a une mesure définie par

$$\mu(\Omega) = \sum_{x \in \Gamma} \mu(x).$$

Soit p un noyau de Markov réversible par rapport à μ. C'est-à-dire,

$$p(x,y)\mu(x) = \mu_{xy} = p(y,x)\mu(y), \ \ \forall x, y \in \Gamma;$$

$$\sum_{y \in \Gamma} p(x,y) = 1, \ \ \forall x \in \Gamma.$$

On suppose que Γ satisfait la condition $\Delta(\alpha)$. C'est-à-dire, il existe $c > 0$ tel que pour tous $x, y \in \Gamma$

$$x \sim y \text{ implique } p(x,y) \geq c, \text{ et } x \sim x.$$

On définit les noyaux itérés de p par

$$p_0(x,y) := \delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y; \end{cases}$$
$$p_k(x,y) = \sum_{z \in \Gamma} p_{k-1}(x,z)p(z,y),\ k \geq 1.$$

L'opérateur associé à p est défini par

$$Pf(x) = \sum_{y \in \Gamma} p(x,y)f(y).$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$P^k f(x) = \sum_{y \in \Gamma} p_k(x,y)f(y).$$
On dit que $I - P$ est le laplacien sur Γ.

On définit la longueur du gradient de f en $x \in \Gamma$ par

$$|\nabla f(x)| = \left[\frac{1}{2}\sum_y p(x,y)|f(x) - f(y)|^2\right]^{1/2}.$$

et on considère $p_{k+1}(y,x) - p_k(x,y)$ comme la dérivée discrète en temps de $p_k(y,x)$.

Par un simple calcul, on obtient

$$\|\nabla f\|_2^2 =< (I-P)f, f >= \|(I-P)^{\frac{1}{2}} f\|_2^2,$$

où $(I-P)^{\frac{1}{2}}$ est défini par la théorie spectrale. L'hypothèse $\triangle(\alpha)$ implique $-1 \notin \operatorname{Spec}(P)$ (voir [Rus00]). Par conséquent,
$$P = \int_a^1 \lambda dE_\lambda, \text{ où } a > -1.$$
On a aussi l'analyticité P sur L^2 (voir [CSC90, Proposition 3]). C'est-à-dire, il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left\|P^n - P^{n+1}\right\|_{2\to 2} \leq Cn^{-1}.$$

Pour tout $y \in \Gamma$, $p_\cdot(\cdot, y)$ satisfait l'équation de la chaleur

$$\mu(x)(u(n+1,x) - u(n,x)) = \sum_y \mu_{xy}(u(n,y) - u(n,x)),$$

ou

$$\mu(x)u(n+1,x) = \sum_y \mu_{xy} u(n,y).$$

Espaces métriques mesurés Soit (M,μ) un espace localement compact avec μ une mesure de Radon positive. Soit $\mathscr{E}$ une forme de Dirichlet régulière et fortement locale sur $\mathscr{D} \subset L^2(M,d\mu)$. C'est-à-dire,

- Soit $\mathscr{C}_0(M)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur M. Alors $\mathscr{D} \cap \mathscr{C}_0(M)$ est dense dans $\mathscr{C}_0(M)$ sous la norme uniforme et est dense dans $\mathscr{D}$ sous la norme $(\|f\|_2^2 + \mathscr{E}(f,f))^{1/2}$.
- Soit f_1, f_2 deux fonctions à support compact. Si f_2 est constante sur un ensemble U_1 contenant supp f, alors $\mathscr{E}(f_1,f_2) = 0$.

On désigne par L l'opérateur positif auto-adjoint associé à $\mathscr{E}$. Alors

$$\mathscr{E}(f,g) = < Lf,g > = < f,Lg > = \int_M d\Gamma(f,g).$$

Le semi-groupe engendré e^{-tL} est une contraction sur $L^2(M)$. De plus, e^{-tL} est sous-markovien et on peut le considérer comme un opérateur contractant sur $L^p(M)$, $1 \le p \le \infty$.

$\mathscr{E}$ admet une "mesure d'énergie" Γ:

$$\mathscr{E}(f,g) = \int_M d\Gamma(f,g),\ \forall f,g \in \mathscr{D}.$$

Pour $x,y \in M$, la distance est définie par

$$d(x,y) = \sup\{f(x) - f(y) : d\Gamma(f,f) \le d\mu, f \in \mathscr{C}\},$$

où $d\Gamma(f,f) \le d\mu$ signifie que $\Gamma(f,f)$ est absolument continue par rapport à μ avec la dérivée de Radon-Nikodym bornée par 1. On doit supposer que d est une distance qui redonne la topologie initiale et pour laquelle M est complet.

Nous dirons que $(M,d,\mu,\mathscr{E})$ est un espace métrique mesuré de Dirichlet.

Si $d\Gamma$ est absolument continue par rapport à μ, nous dirons que $\mathscr{E}$ admet un carré du champ. C'est-à-dire, il existe une unique forme bilinéaire symétrique positive continue de $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ dans L^1 (qu'on désigne encore par Γ) telle que

$$\mathscr{E}(fh,g) + \mathscr{E}(gh,f) - \mathscr{E}(h,fg) = \int_M h\Gamma(f,g)d\mu,\ \forall f,g,h \in \mathscr{D} \cap L^\infty.$$

Voici quelques exemples d'espaces métriques mesurés munis d'une forme de Dirichlet:

Exemple 0.4. Variétés riemanniennes.

Soit (M,d,μ) une variété riemannienne et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami. Alors

$$\mathscr{E}(f,f) := \int_M (\Delta f) f d\mu,\ \forall f \in \mathscr{C}_0^\infty(M).$$

Exemple 0.5. Espaces euclidiens avec un opérateur elliptique sous forme divergence.

Soit $a = (a_{ij}(x))_{n\times n}$ une matrice bornée et mesurée. On definit

$$\mathscr{E}(f,f) := \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \cdot a\nabla f, \ \forall f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 0.6. Fractals.

Par exemple, les tapis de Sierpiński, les triangles de Sierpiński, les fractals de Vicsek etc (voir [BB92, BB99, BCG01, Bar13]).

Sur un tapis de Sierpiński F, soit F_n une série d'approximations de F et $\mathscr{E}_n$ la forme convenable de Dirichlet sur F_n. Alors on peut construire une forme de Dirichlet $\mathscr{E}$ sur F. Voir [Bar13] pour les détails.

Exemple 0.7. Systèmes de câbles (voir [Var85, BB04]).

Soit (G,d,ν) un graphe. On definit le système de câbles G_C en remplaçant chaque arête de G par une copie de $(0,1)$. La mesure μ sur G_C est définie par $d\mu(t) = \nu_{xy}dt$, où t parcourt le câble reliant deux sommets x et y. Notons $\mathscr{C}$ les fonctions à support compact sur $C(G_C)$ et qui sont C^1 sur chaque câble. On définit

$$\mathscr{E}(f,f) := \int_{G_C} \left|f'(t)\right|^2 d\mu(t), \ \forall f \in \mathscr{C}.$$

0.2 Estimations du noyau de la chaleur

Soit (M,d,μ) un espace métrique mesuré complet. Soit L un opérateur positif auto-adjoint sur $L^2(M,\mu)$ qui engendre un semi-groupe analytique $(e^{-tL})_{t>0}$. Notons que $(e^{-tL})_{t>0}$ n'est pas nécessairement uniformément borné sur $L^1(M,\mu)$. On connaît des exemples de semi-groupes qui ne sont pas bornés sur L^1, mais seulement sur L^p où $p \in [p_0, p_0']$ pour un $p_0 > 1$ (voir par exemple, [Aus07]).

Soit $1 < \beta_1 \le \beta_2$. Dans cette thèse, nous considérons les estimations du noyau de la chaleur suivantes.

L'hypothèse (A1): L'estimation L^2-L^2 non-classique de Davies-Gaffney: $\forall j \geq 1$, il existe $C, c > 0$ tels que pour tous $x, y \subset M$,

$$\left\|\mathbb{1}_{B(x,t)} e^{-\rho(t)L} \mathbb{1}_{B(y,t)}\right\|_{2\to 2} \le \begin{cases} C\exp\left(-c\left(\dfrac{d(x,y)}{t}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1-1}}\right) & 0<t<1, \\ C\exp\left(-c\left(\dfrac{d(x,y)}{t}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_2-1}}\right), & t\ge 1. \end{cases} \tag{DG_{β_1,β_2}}$$

où

$$\rho(t)=\begin{cases} t^{\beta_1}, & 0<t<1,\\ t^{\beta_2}, & t\geq 1;\end{cases}$$

L'hypothèse (A2): Soit $1\leq p_0<2$ et ρ comme dans (**A1**). L'estimation $L^{p_0}-L^{p_0'}$ non-classique hors-diagonale: pour tout $x,y\in M$ and $t>0$, et $\forall j\geq 1$,

$$\left\|\mathbb{1}_{B(x,t)}e^{-\rho(t)L}\mathbb{1}_{B(y,t)}\right\|_{p_0\to p_0'}\leq\begin{cases} \dfrac{C}{V^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_0'}}(x,t)}\exp\left(-c\left(\dfrac{d(x,y)}{t}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1-1}}\right) & 0<t<1,\\ \dfrac{C}{V^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_0'}}(x,t)}\exp\left(-c\left(\dfrac{d(x,y)}{t}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_2-1}}\right), & t\geq 1.\end{cases}\qquad (DG^{p_0,p_0'}_{\beta_1,\beta_2})$$

Remark 0.8. Une estimation équivalente à (**A2**) est l'estimation $L^{p_0}-L^2$ hors-diagonale

$$\left\|\mathbb{1}_{B(x,t)}e^{-\rho(t)L}\mathbb{1}_{B(y,t)}\right\|_{p_0\to 2}\leq\begin{cases} \dfrac{C}{V^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{2}}(x,t)}\exp\left(-c\left(\dfrac{d(x,y)}{t}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1-1}}\right) & 0<t<1,\\ \dfrac{C}{V^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{2}}(x,t)}\exp\left(-c\left(\dfrac{d(x,y)}{t}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_2-1}}\right), & t\geq 1.\end{cases}$$

On renvoie à [BK05, Blu07, CS08] pour les démonstrations.

L'hypothèse (A3): Soit ρ comme dans (**A1**). L'estimation ponctuelle généralisée du noyau de la chaleur: pour tout $x,y\in M$ and $t>0$,

$$p_t(x,y)\leq\frac{C_2}{V(y,\rho^{-1}(t))}\exp\left(-c_2G(t,d(x,y))\right),\qquad (UE_{\beta_1,\beta_2})$$

où

$$G(r,t)\simeq\begin{cases} \left(\dfrac{r^{\beta_1}}{t}\right)^{1/(\beta_1-1)}, & t\leq r,\\ \left(\dfrac{r^{\beta_2}}{t}\right)^{1/(\beta_2-1)}, & t\geq r.\end{cases}$$

Remarque 0.9. Notons que $\beta_1\leq\beta_2$. Alors pour $d(x,y)\leq t$, on a

$$\left(\frac{d^{\beta_1}(x,y)}{t}\right)^{1/(\beta_1-1)}\leq\left(\frac{d^{\beta_2}(x,y)}{t}\right)^{1/(\beta_2-1)}.$$

Et pour $t\leq d(x,y)$, on a $\left(\frac{d^{\beta_1}(x,y)}{t}\right)^{1/(\beta_1-1)}\geq\left(\frac{d^{\beta_2}(x,y)}{t}\right)^{1/(\beta_2-1)}$. Donc (UE_{β_1,β_2}) implique l'estimation suivante:

$$p_t(x,y) \leq \begin{cases} \dfrac{C}{V(x,t^{1/\beta_1})} \exp\left(-c\left(\dfrac{d^{\beta_1}(x,y)}{t}\right)^{1/(\beta_1-1)}\right), & 0<t<1, \\ \dfrac{C}{V(x,t^{1/\beta_2})} \exp\left(-c\left(\dfrac{d^{\beta_2}(x,y)}{t}\right)^{1/(\beta_2-1)}\right), & t \geq 1. \end{cases}$$

Remarque 0.10. On a (**A3**) $\Rightarrow$ (**A2**) $\Rightarrow$ (**A1**). En fait,

Lemme 0.11. Soit M vérifiant (D) et (UE_{β_1,β_2}), $\beta_1 \leq \beta_2$. Alors, pour tous $x \in M$ et $j \geq 1$, on a $\forall K \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq 2$

$$\frac{\left\|(\rho(t)L)^K e^{-\rho(t)L} f\right\|_{L^2(C_j(B(x,t)))}}{V^{1/2}(2^{j+1}B(x,t))} \leq \begin{cases} \dfrac{C\exp\left(-c2^{\frac{j\beta_1}{\beta_1-1}}\right)}{V^{1/p}(x,t)}\|f\|_{L^p(B)}, & 0<t<1, \\ \dfrac{C\exp\left(-c2^{\frac{j\beta_2}{\beta_2-1}}\right)}{V^{1/p}(x,t)}\|f\|_{L^p(B)}, & t \geq 1. \end{cases}$$

Comme dans [BK05], on obtient

Lemme 0.12. Soit M vérifiant (D) et (DG_{β_1,β_2}) avec $\beta_1 \leq \beta_2$. Soit B une boule de centre $x \in M$ et de rayon $r > 0$. Alors pour tous $k,l \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq l \leq k-2$ et pour tout $t \in (0, 2^{k+1}r)$, on a

$$\left\|\mathbb{1}_{C_k(B)}(\rho(t)L)^K e^{-\rho(t)L}\mathbb{1}_{C_l(B)}\right\|_{2\to 2} \leq \begin{cases} C\exp\left(-c2^{\frac{k\beta_1}{\beta_1-1}}\right), & 0<t<1, \\ C\exp\left(-c2^{\frac{k\beta_2}{\beta_2-1}}\right), & t \geq 1. \end{cases}$$

Exemple 0.13. Toutes les variétés riemanniennes vérifient ($DG_{2,2}$), voir [Dav92].

Les variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive vérifient ($UE_{2,2}$), voir [LY86].

Exemple 0.14. Certaines variétés fractales vérifient ($UE_{2,m}$), $m > 2$.

Soit (G,F,ν) un graphe infini connexe satisfaisant la croissance polynomiale du volume: $V(x,r) \simeq r^D$ et l'estimation sous-gaussienne du noyau de la chaleur:

$$p_k(x,y) \leq \frac{C\mu(y)}{k^{D/m}} \exp\left(-c\left(\frac{d^m(x,y)}{k}\right)^{1/(m-1)}\right), \tag{1}$$

où $D \geq 1$ et $2 \leq m \leq D+1$. En fait, pour tout $D \geq 1$ et tous m satisfaisant $2 \leq m \leq D+1$, il existe un graphe qui satisfait (1). On construit une variété riemannienne M à partir de G en remplaçant toutes les arêtes par les tubes de longueur 1 et puis en les collant de façon lisse aux sommets (voir

[BCG01] pour la variété de Vicsek). On note Δ l'opérateur Laplace-Beltrami sur M et $e^{-t\Delta}$ le noyau de la chaleur associé. Alors le noyau de la chaleur $p_t(x,y)$ satisfait (UE_{β_1,β_2}) avec $\beta_1 = 2$ and $\beta_2 = m > 2$.

Exemple 0.15. Espace euclidien avec des opérateurs elliptiques sous forme divergence.

Soit L un opérateur homogène elliptique sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ d'order $2m$ ($m \geq 1$) sous forme divergence:

$$L := (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \partial^\alpha \left(a_{\alpha,\beta} \partial^\beta \right),$$

où $a_{\alpha,\beta}$ est borné pour tous α, β. Alors $(UE_{2m,2m})$ a lieu si $n \leq 2m$. Si $n > 2m$, Alors $(DG^{p_0,p_0'}_{\beta_1,\beta_2})$ a lieu pour $p_0 = \frac{2n}{n+2m}$. Voir par exemple, [Aus07, Dav95, Dav97] etc.

Exemple 0.16. Systèmes de câbles. Par exemple, pour la système de câbles associé au triangle de Sierpinski (sur $\mathbb{Z}^2$), $p_t(x,y)$ satisfait (UE_{β_1,β_2}) avec $\beta_1 = 2$ and $\beta_2 = \log 5/\log 2$ (voir [Jon96, BB04]).

Plus généralement, Hebisch and Saloff-Coste [HSC01] considèrent un espace métrique mesuré complet non-compact de Dirichlet, sur lequel le noyau de la chaleur vérifie l'estimation supérieure $\rho-$Gaussienne

$$p_t(x,y) \simeq \frac{C_2}{V(y, \rho^{-1}(t))} \exp\left(-c_2 G(t, d(x,y))\right),$$

où ρ^{-1} est la fonction inverse de ρ. Notons que ρ et G vérifient certaines relations qu'on ignore ici (voir [HSC01, Section 5] pour les détails). En fait, cette estimation non-classique est équivalente à une inégalité de Harnack parabolique, voir aussi [GT12].

0.3 Transformée de Riesz sur les variétés non-compactes

Strichartz a posé en 1983 la question de savoir pour quelle variétés riemanniennes non-compactes M et pour quels $p \in (1, +\infty)$ les semi-normes $\||\nabla f|\|_p$ et $\left\|\Delta^{1/2} f\right\|_p$ sont équivalentes, lorsque f parcourt les fonctions lisses à support compact sur M. C'est à dire, quand il existe des constantes $c, C > 0$ telles que

$$c\|\Delta^{1/2} f\|_p \leq \||\nabla f|\|_p \leq C\|\Delta^{1/2} f\|_p,\ \forall f \in \mathscr{C}_0^\infty(M)? \tag{E_p}$$

Plus précisément, on dit que M satisfait (R_p) si

$$\||\nabla f|\|_p \leq C\left\|\Delta^{1/2} f\right\|_p \tag{R_p}$$

et que M satisfait (RR_p) si

$$\left\|\left|\Delta^{1/2} f\right|\right\|_p \leq C\|\nabla f\|_p. \tag{RR_p}$$

La propriété (R_p) revient à dire que la transformée de Riesz est continue sur $L^p(M)$; elle se dualise en $(RR_{p'})$ (voir [CD03]). Si (R_p) et (RR_p) ont lieu, cela signifie que les deux définitions concurrentes des espaces de Sobolev homogène d'ordre un dans L^p coïncident sur M. Clairement, (R_2) et (RR_2) sont vraies, mais pour $p \neq 2$, il s'agit d'un problème d'intégrales singulières, où les méthodes classiques de Calderón-Zygmund amenaient à des hypothèses trop coûteuses. Beaucoup de travaux ont été faits pour résoudre ce problème, voir par exemple [Bak87, CD99, CD03, ACDH04, AC05, CCH06, Car07, CS10, Devar] et leurs références.

Des estimations du noyau de la chaleur jouent un rôle très important dans ces problèmes. Voici des estimations du noyau de la chaleur qu'on connaît bien.

L'estimation supérieure diagonale:

$$p_t(x,x) \leq \frac{c}{V(x,\sqrt{t})}, \forall x \in M, t > 0. \tag{DUE}$$

L'estimation supérieure gaussienne:

$$p_t(x,y) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{Ct}\right), \forall x,y \in M, t > 0. \tag{UE}$$

En fait, sous l'hypothèse (D), les estimations (DUE) et (UE) sont équivalentes (voir [CS08], [Gri09]).

L'estimation de Li-Yau: pour tous $x,y \in M$ et pour tout $t > 0$,

$$\frac{c}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{ct}\right) \leq p_t(x,y) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{Ct}\right). \tag{LY}$$

L'estimation du gradient du noyau de la chaleur:

$$|\nabla p_t(x,y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}V(y,\sqrt{t})}, \forall x,y \in M, t > 0. \tag{G}$$

En 1999, Coulhon et Duong ont prouvé le résultat suivant:

Theorem 0.17. *Soit M une variété riemannienne complète satisfaisant la propriété de doublement (D). Supposons une estimation gaussienne supérieure du noyau de la chaleur (DUE). Alors la transformée de Riesz $\nabla\Delta^{-1/2}$ est bornée sur L^p pour $1 < p \leq 2$.*

Si M satisfait (D) et (DUE), on sait que (R_p) peut être en défaut si $p > 2$, mais on ne sait pas si (RR_p) peut être en défaut pour $1 < p < 2$. Si M satisfait seulement (D), alors (RR_p) peut être en défaut pour $1 < p < 2$. On a les deux exemples suivants:

Variété somme connexe de deux espaces euclidiens On note M_n une variété obtenue comme somme connexe de deux espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$.

Soit $n \geq 2$. Coulhon et Duong ([CD99, Section 5]) ont démontré que la transformée de Riesz sur M_n n'est pas bornée dans L^p pour $p > n$. Notons que M_n satisfait (D) et (DUE), mais (LY) est fausse.

Soit $n \geq 3$. Le résultat est amélioré dans [CCH06]. En fait, (R_p) est vraie pour $1 < p < n$ et est fausse pour $p \geq n$, voir [CCH06, Car07].

Variété de Vicsek (voir [BCG01, Section 6]) Soit M une variété de Vicsek à croissance polynômiale du volume: $V(x,r) \simeq r^D$, $r \geq 1$. Alors M vérifie l'estimation du noyau de la chaleur

$$\sup_{x \in M} p_t(x,x) \simeq t^{-\frac{D}{D+1}},\ t \geq 1.$$

Proposition 0.18 ([CD03])**.** Soit M une variété de Vicsek comme ci-dessus. Alors (RR_p) est fausse pour $1 < p < \frac{2D}{D+1}$. Par conséquence, (R_p) est fausse pour $p > \frac{2D}{D-1}$.

Si en outre M satisfait l'estimation gaussienne inférieure du noyau de la chaleur, c'est-à-dire, l'estimation de Li-Yau, ou bien également, des inégalités de Poincaré à l'échelle, Auscher et Coulhon [AC05] ont montré que

Théorème 0.19 ([AC05])**.** Soit M une variété riemannienne complète non-compacte satisfaisant la propriété de doublement du volume et les inégalités de Poincaré à l'échelle, c'est-à-dire, il existe $C > 0$ tel que $\forall B$, $\forall f \in C_0^\infty(B)$

$$\int_B |f - f_B|^2 d\mu \leq C r_B^2 \int_B |\nabla f|^2 d\mu,$$

où r_B est le rayon de B. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que (R_p) est vrai pour $2 < p < 2 + \varepsilon$.

Enfin,

Théorème 0.20 ([ACDH04])**.** Soit M une variété riemanniene complète non-compacte vérifiant (LY). Soit $p_0 \in (2,\infty]$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. Pour tout $p \in [2, p_0)$, on a
$$\left\| \left| \nabla e^{-t\Delta} \right| \right\|_{p \to p} \leq \frac{C}{\sqrt{t}},\ \forall t > 0.$$
2. Pour tout $p \in [2, p_0)$, la transformée de Riesz est bornée sur L^p.

Théorème 0.21 ([ACDH04, CS10])**.** Soit M une variété riemannienne complète non-compacte vérifiant (D) et (G). Alors la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour tout $1 < p < \infty$.

0.4 Espaces de Hardy

L'étude des espaces de Hardy trouve son origine dans la théorie des séries de Fourier et de l'analyse complexe en une variable. Depuis les années 1960, elle a été transférée à l'analyse réelle en plusieurs variables, ou plus généralement sur des espaces de type homogène. Il y a beaucoup de caractérisations équivalentes pour les espaces de Hardy. Par exemple, par les fonctions maximales, par les décompositions atomiques ou moléculaires, par les intégrales singulières, etc.

Nous rappelons une description de H^1 en utilisant des atomes sur un espace de type homogène M (voir [CW77]). On dit qu'une fonction $a \in L^2(M)$ est un atome de H^1 s'il existe une boule $B \in M$ telle que

1. $\operatorname{supp} a \subset B$;
2. $\|a\|_2 \leq \mu^{-1/2}(B)$;
3. $\int_M a(x)dx = 0$.

Une fonction f sur M appartient à $H^1(M)$ si et seulement s'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ et une suite de H^1-atomes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j,$$

et la convergence a lieu dans $L^1(M)$.

On peut aussi définir des espaces H^1 moléculaires. Contrairement à un atome, la molécule n'est pas à support compact, mais elle décroît très vite.

Dans $\mathbb{R}^n$, Coifman, Meyer and Stein ont développé la théorie des espaces de tentes ([CMS85], et voir [Rus07] sur des espaces de type homogène) qui connecte les espaces de Hardy à des fonctions quadratiques. On dit qu'une fonction mesurable F sur $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ appartient à l'espace de tentes $T_2^p(\mathbb{R}^n)$ si

$$\|F\|_{T_2^p} := \left\| \left(\iint_{|y-x|<t} |F(y,t)|^2 \frac{dy\,dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2} \right\|_{L^p} < \infty.$$

En fait, pour toute fonction convenable f sur $\mathbb{R}^n$, la fonction quadratique conique est définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$Sf(x) = \left(\iint_{|y-x|<t} \left| t\sqrt{\Delta} e^{-t\sqrt{\Delta}} f(y) \right|^2 \frac{dy\,dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2},$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ et $e^{-t\sqrt{\Delta}}$ est le semi-groupe de Poisson.

On dit que $f \in H_S^p$, $p \geq 1$ si $Sf \in L^p$, ou également, $t\sqrt{\Delta}e^{-t\sqrt{\Delta}}f \in T_2^p$. En effet, H_S^1 et H^1 moléculaire sont équivalents. D'un côté, pour $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, on a $\|Sf\|_{L^1} \leq C\|f\|_{H^1}$ (voir [FS72]).

De l'autre côté, par la formule reproduisante de Calderón, on a

$$f = \int_0^\infty t\sqrt{\Delta}e^{-t\sqrt{\Delta}} F_t \frac{dt}{t}, \tag{2}$$

où $F_t := t\sqrt{\Delta}e^{-t\sqrt{\Delta}} f$ est dans l'espace de tentes T_2^1. Il est été prouvé dans [CMS85] que F_t admet une décomposition atomique de T_2^1. On la substitue dans (2) et on obtient une décomposition moléculaire pour f. Pour $p \in (1,\infty)$, $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ a lieu.

Les espaces de tentes sont intensivement utilisés dans la théorie des espaces de Hardy associés aux opérateurs, voir [AMR08], [HLM$^+$11], [Uhl11, KU12] etc.

Dans [AMR08], Auscher, McIntosh et Russ ont introduit des espaces de Hardy sur les variétés. Soit M une variété vérifiant le doublement du volume. Ils ont défini des espaces de Hardy sur les formes différentielles de tous les degrés (voir [AMM13] pour les espaces de Hardy de fibrés vectoriels sur les espaces métriques mesurés satisfaisant (D)). Notons $D = d + d^*$ l'opérateur de Hodge-Dirac et $\Delta = D^2$ l'opérateur de Hodge-Laplace. Par définition, la transformée de Riesz $D\Delta^{-1/2}$ est bornée sur $L^2(\Lambda T^*M)$. Les espaces de Hardy H_D^p sont définis par les fonctions convenables quadratiques tels que la transformée de Riesz est bornée sur $H_D^p(\Lambda T^*M)$, pour tout $1 \leq p \leq 2$. Il y a aussi une caractérisation par molécules. On a les comparaisons suivantes entre espaces H^p et L^p:

Théorème 0.22 ([AMR08])**.** Soit M une variété riemannienne complète satisfaisant le doublement du volume (D). Alors,

- Pour tout $1 \leq p \leq 2$, $H^p(\Lambda T^*M) \subset \overline{\mathscr{R}(D) \cap L^p(\Lambda T^*M)}^{L^p(\Lambda T^*M)}$.
- Pour tout $2 \leq p < \infty$, $\overline{\mathscr{R}(D) \cap L^p(\Lambda T^*M)}^{L^p(\Lambda T^*M)} \subset H^p(\Lambda T^*M)$.

De plus, si le noyau de la chaleur associé à l'opérateur laplacien de Hodge vérifie l'estimation gaussienne supérieure, c'est-à-dire, pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$|p_t^k(x,y)| \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{Ct}\right), \forall x,y \in M, t > 0, \tag{G_k}$$

où p_t^k est le noyau de $e^{-t\Delta_k}$ et Δ_k est l'opérateur laplacien de Hodge sur les $k-$formes, alors $H^p(\Lambda T^*M) = \overline{\mathscr{R}(D) \cap L^p(\Lambda T^*M)}^{L^p(\Lambda T^*M)}$ pour tout $1 < p < \infty$.

En conséquence du calcul fonctionnel sur $H^p(\Lambda T^*M)$, on a

Théorème 0.23 ([AMR08])**.** Soit M une variété riemannienne complète satisfaisant le doublement du volume. Alors, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, la transformée de Riesz $D\Delta^{-1/2}$ est bornée sur $H^p(\Lambda T^*M)$. Donc, elle est bornée de $H^1(\Lambda T^*M)$ dans $L^1(\Lambda T^*M)$.

Plus précisément, si on considère les fonctions (0-formes), on a les affirmations suivantes:

- Soit (D) et (G_0). Alors pour tout $1 < p < \infty$,

$$H^p(\Lambda^0 T^*M) = \overline{\mathscr{R}(D) \cap L^p(\Lambda^0 T^*M)}^{L^p(\Lambda^0 T^*M)}.$$

- Soit (D), (G_0) et (G_1). Alors la transformée de Riesz $d\Delta^{-1/2}$ sur les fonctions est bornée de $L^p(\Lambda^0 T^*M)$ dans $L^p(\Lambda^1 T^*M)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Dans [HLM$^+$11], Hofmann, Lu, Mitrea, Mitrea and Yan ont considéré des espaces de Hardy définis par les fonctions quadratiques sur les espaces métriques mesurés de type homogène. Soit X un espace métrique mesuré avec le doublement du volume et soit L un opérateur positif auto-adjoint qui engendre un semi-groupe analytique $(e^{-tL})_{t>0}$ sur $L^2(X)$ vérifiant l'estimation de Davies-Gaffney. C'est-à-dire, il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tous ensembles ouverts $U_1, U_2 \subset X$,

$$| < e^{-tL} f_1, f_2 > | \leq C \exp\left(-\frac{\operatorname{dist}^2(U_1, U_2)}{ct}\right) \|f_1\|_2 \|f_2\|_2, \ \forall t > 0,$$

pour toutes $f_i \in L^2(X)$ à support compact et $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$, $i = 1, 2$, où

$$\operatorname{dist}(U_1, U_2) := \inf_{x \in U_1, y \in U_2} d(x, y).$$

Ils ont étendu les résultats dans [AMR08] par obtenir une decomposition atomique de H^1_L et par développer la théorie des espaces H^1 et BMO adaptés à L.

Plus généralement, Kunstmann and Uhl [Uhl11, KU12] ont étudié des opérateurs positifs auto-adjoints sur L^2 vérifiant l'estimation d'ordre m ($m \geq 2$) de Davies-Gaffney (DG_m):

$$| < e^{-tL} f_1, f_2 > | \leq C \exp\left(-c\left(\frac{d(x,y)}{t}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right) \|f_1\|_2 \|f_2\|_2, \ \forall t > 0,$$

pour tous $x, y \in M$ et $f_1, f_2 \in L^2(X)$ avec $\operatorname{supp} f_1 \subset B(y, t^{1/m})$ et $\operatorname{supp} f_2 \subset B(x, t^{1/m})$. Ils ont défini des espaces de Hardy par les fonctions quadratiques et par les molécules adaptés à (DG_m). Par ailleurs, si l'estimation gaussienne (p_0, p_0') généralisée d'ordre m a lieu: $\forall t > 0, \forall x, y \in M$,

$$\left\| \mathbb{1}_{B(x,t^{1/m})} e^{-tL} \mathbb{1}_{B(y,t^{1/m})} \right\|_{p_0 \to p_0'} \leq C V^{-\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0'}\right)}(x, t^{1/m}) \exp\left(-c\left(\frac{d(x,y)}{t}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right),$$

alors pour tout $p \in (p_0, 2)$, ils ont montré que l'espace de Hardy H^p défini par les fonctions quadratiques coïncide avec L^p.

0.5 Résultats de la thèse

0.5.1 Les quasi transformées de Riesz

Sur les variétés riemanniennes complètes Notons que nous ne faisons aucune hypothèse sur la croissance du volume ni sur le noyau de la chaleur.

Proposition 0.24. Soit M une variété riemannienne complète. Alors, pour tout $1 < p \leq 2$, on a

$$\left\| \left| \nabla e^{-t\Delta} \right| \right\|_{p\to p} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}, \tag{G_p}$$

et également

$$\| |\nabla f| \|_p^2 \leq C \|f\|_p \|\Delta f\|_p. \tag{MI_p}$$

Comme application, on obtient une version faible de (R_p) pour $1 < p \leq 2$.

Théorème 0.25. Soit M une variété riemannienne complète. Alors, pour $0 < \alpha < 1/2$, la quasi transformée de Riesz $\nabla e^{-\Delta}\Delta^{-\alpha}$ est borné sur L^p pour $1 < p \leq 2$.

Proposition 0.26. Soit M une variété riemannienne complète satisfaisant (D_{loc}) et (DUE_{loc}). Alors $\nabla(I+\Delta)^{-1/2} + \nabla e^{-\Delta}\Delta^{-\alpha}$ avec $\alpha \in (0,1/2)$ est bornée sur L^p pour $1 < p \leq 2$.

Sur les variétés riemanniennes vérifiant (D) et $(UE_{2,m})$ On ne sait pas si (DUE) est nécessaire pour la bornitude de la transformée de Riesz sur L^p pour $1 < p < 2$. Une question naturelle est la suivante:

Question 0.27. Soit M une variété riemannienne vérifiant (D) et $(UE_{2,m})$, est-ce que la transformée de Riesz est bornée sur $L^p(M)$ pour $1 < p < 2$?

Si oui, on améliore le résultat dans Théorème 0.17. Sinon, on trouve des contre-exemples intéressants. Pour le moment, on ne sait pas résoudre ce problème. Cependant, sous l'hypothèse $(UE_{2,m})$ ou plus faible, on considère le cas $p = 1$ dans Théorème 0.25.

Théorème 0.28. Soit M une variété complète non-compacte vérifiant (D) et $(UE_{2,m})$. Alors pour tout $0 < \alpha < 1/2$, l'opérateur $\nabla e^{-\Delta}\Delta^{-\alpha}$ est de type $(1,1)$.

En plus, sous des hypothèses plus fortes, on peut obtenir

Théorème 0.29. Soit M une variété complète non-compacte vérifiant (D) et $(HK_{2,m})$, $m \geq 2$, c'est à dire, $(UE_{2,m})$ et l'estimation inférieure correspondante. Supposons (G_{p_0}), $p_0 \in (2,\infty]$, et l'estimation L^2 Davies-Gaffney $(DG_{\frac{1}{2}})$:

$$\left\| \left| \nabla e^{-t\Delta} f \right| \right\|_{L^2(B)} \leq \begin{cases} \dfrac{C}{t^{1/2}} e^{-c\frac{d^2(B,C_i(B))}{t}} \|f\|_{L^2(C_i(B))}, & 0 < t < 1, \\ \dfrac{C}{t^{1/2}} e^{-c\left(\frac{d^m(B,C_i(B))}{t}\right)^{1/(m-1)}} \|f\|_{L^2(C_i(B))}, & 1 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Alors la transformée de Riesz à l'infini $\nabla e^{-\Delta}\Delta^{-1/2}$ est bornée sur L^p pour $p \in (2, p_0)$.

Contre-exemples pour $p > 2$ On améliore le résultat de la Proposition 0.18. En fait, il existe des variétés telles que la transformée de Riesz inverse n'est pas bornée sur L^p pour $1 < p < 2$ et donc (R_p) est faux pour $2 < p < \infty$.

Théorème 0.30. Soit M une variété de Vicsek à croissance polynomiale du volume: $V(x,r) \simeq r^D$ pour $r \geq 1$. Alors l'inégalité

$$\|\Delta^\beta f\|_p \leq C_p \||\nabla f|\|_p$$

est fausse pour tout $\beta < \beta(p) := \frac{1}{D+1}\left(\frac{D}{p} + \frac{1}{p'}\right)$, où $1 < p < \infty$.

En particulier, (RR_p) est faux pour tout $1 < p < 2$. Par conséquent, (R_p) est fausse pour tout $p > 2$.

Sur les graphes Considérons maintenant le cas discret (les graphes). On a les résultats suivants qui sont similaires à la Proposition 0.26 et au Théorème 0.28.

Proposition 0.31. Soit Γ un graphe infini connexe vérifiant le doublement du volume local, c'est-à-dire, il existe une constante $c > 1$ telle que

$$\mu(B(x,1) \leq c\mu(x),\ \forall x \in \Gamma,$$

Soit $\alpha \in (0, 1/2)$ fixé. Alors, pour $1 < p \leq 2$, il existe $C > 0$ tel que

$$\||\nabla (I-P)^{-\alpha} f|\|_p \leq C\|f\|_p.$$

Théorème 0.32. Soit Γ un graphe infini connexe vérifiant le doublement du volume et la condition $\triangle(\alpha)$. Supposons aussi l'estimation sous-gaussienne supérieure du noyau de la chaleur: $\forall x, y \in M$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$p_k(x,y) \leq \frac{C\mu(y)}{V(x,k^{1/m})} \exp\left(-c\left(\frac{d^m(x,y)}{k}\right)^{1/(m-1)}\right).$$

Alors pour tout $\beta \in (0, 1/2)$, l'opérateur $\nabla (I-P)^{-\beta}$ est de type faible $(1,1)$.

0.5.2 Espaces de Hardy

Soit (M, d, μ) un espace métrique mesuré de type homogène satisfaisant une estimation différente en petit temps et en grand temps du noyau de la chaleur. Comme dans [AMR08, HLM+11], on définit deux classes d'espace de Hardy sur M. La première classe est l'espace H^1 défini par les molécules. On le désigne $H^1_{L,\rho,\mathrm{mol}}(M)$. La deuxième classe est $H^p_{L,S_h^\rho}(M)$, $1 \leq p \leq \infty$, défini par les fonctions quadratiques. On montre tout d'abord

Théorème 0.33. Soit M un espace métrique mesuré vérifiant (D) et (DG_{β_1,β_2}), $\beta_1 \leq \beta_2$. Alors $H^1_{L,\rho,\mathrm{mol}}(M) = H^1_{L,S_h^\rho}(M)$. De plus, on a $\|f\|_{H^1_{L,\rho,\mathrm{mol}}(M)} \simeq \|f\|_{H^1_{L,S_h^\rho}(M)}$.

En comparant $H^p_{L,S_h^\rho}(M)$ et L^p for $1 < p < \infty$, on obtient

Théorème 0.34. Soit M un espace métrique mesuré non-compact vérifiant la propriété de doublement du volume (D) et l'estimation supérieure du noyau de la chaleur $(DG^{p_0,p_0'}_{\beta_1,\beta_2})$. Alors $H^p_{L,S_h^\rho}(M) = \overline{R(L) \cap L^p(M)}^{L^p(M)}$ a lieu pour tout $p_0 < p < p_0'$.

Comme une corollaire, l'estimation ponctuelle du noyau de la chaleur nous donne

Corollaire 0.35. Soit M un espace métrique mesuré non-compact vérifiant la propriété de doublement du volume (D) et l'estimation supérieure du noyau de la chaleur (UE_{β_1,β_2}). Alors $H^1_{L,\rho,mol}(M) = H^1_{L,S_h^\rho}(M)$, et $H^p_{L,S_h^\rho}(M) = L^p(M)$ pour tout $1 < p < \infty$.

Cependant, pour $1 < p < 2$, l'équivalence entre L^p et H^p défini par les fonctions quadratiques avec le scaling t^2 n'est pas nécessairement vraie. En effet, on a le résultat suivant.

Théorème 0.36. Soit M une variété riemannienne complète non-compacte. Supposons la croissance polynômiale du volume:

$$V(x,r) \simeq r^d,\ r \geq 1,$$

et l'estimation sous-gaussienne du noyau de la chaleur $(HK_{2,m})$, où $2 < m < d/2$. Alors l'inclusion $L^p(M) \subset H^p_{\Delta,S_h}(M)$ est fausse pour $p \in \left(\frac{d}{d-m}, 2\right)$.

Comme application des développements précédents sur les espaces de Hardy, on montre

Théorème 0.37. Soit M une variété satisfaisant (D) et $(UE_{2,m})$, $m > 2$. Alors, pour $\alpha \in (0,1/2)$ fixé, l'opérator $\nabla e^{-\Delta}\Delta^{-\alpha}$ est borné de $H^1_{\Delta,m}$ dans L^1.

0.5.3 Les autres résultats

Sur les graphes de Vicsek, on obtient une inégalité généralisée de Poincaré.

Théorème 0.38. Soit Γ un graphe de Vicsek à croissance polynomiale du volume: $V(x,n) \simeq n^D$. Alors, pour $p \geq 1$,

$$\|f - f_n(x)\|_{L^p(B(x,n))} \leq CV(x,n)^{\frac{1}{D(p)}} \||\nabla f|\|_{L^p(B(x,2n))},$$

où $f_n(x) = \frac{1}{V(x,n)} \sum_{z \in B(x,n)} f(z)\mu(z)$ et $\frac{1}{D(p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'D}$.

On a aussi une inégalité généralisée de Sobolev.

Théorème 0.39. Soit Γ un graphe de Vicsek à croissance polynomiale du volume: $V(x,n) \simeq n^D$. Alors, pour $p \geq 1$,

$$\|f\|_p \lesssim \mu(\Omega)^{\frac{1}{D(p)}} \||\nabla f|\|_p, \forall \Omega \subset \Gamma, \forall f \in c_0(\Omega), \tag{$S^p_{D(p)}$}$$

où $D(p)$ est le même comme dans le Théorème 0.38.

Notons que ces deux inégalités sont optimales.

Bibliography

[AC05] P. Auscher and T. Coulhon. Riesz transform on manifolds and Poincaré inequalities. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 4(3):531–555, 2005.

[ACDH04] P. Auscher, T. Coulhon, X. T. Duong, and S. Hofmann. Riesz transform on manifolds and heat kernel regularity. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 37(6):911–957, 2004.

[AMM13] P. Auscher, A. McIntosh, and A. Morris. Calderon reproducing formulas and applications to Hardy spaces. ArXiv e-prints, 04 April 2013. arXiv:1304.0168.

[AMR08] P. Auscher, A. McIntosh, and E. Russ. Hardy spaces of differential forms on Riemannian manifolds. J. Geom. Anal., 18(1):192–248, 2008.

[Aus07] P. Auscher. On necessary and sufficient conditions for L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^n$ and related estimates. Mem. Amer. Math. Soc., 186(871):xviii+75, 2007.

[Bak87] D. Bakry. Étude des transformations de Riesz dans les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée. In Séminaire de Probabilités, XXI, volume 1247 of Lecture Notes in Math., pages 137–172. Springer, Berlin, 1987.

[Bar13] M. T. Barlow. Analysis on the Sierpinski carpet. In Analysis and geometry of metric measure spaces, volume 56 of CRM Proc. Lecture Notes, pages 27–53. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[BB92] M. T. Barlow and R. F. Bass. Transition densities for Brownian motion on the Sierpiński carpet. Probab. Theory Related Fields, 91(3-4):307–330, 1992.

[BB99] M. T. Barlow and R. F. Bass. Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets. Canad. J. Math., 51(4):673–744, 1999.

[BB04] M. T. Barlow and R. F. Bass. Stability of parabolic Harnack inequalities. Trans. Amer. Math. Soc., 356(4):1501–1533 (electronic), 2004.

[BCG01] M. T. Barlow, T. Coulhon, and A. Grigor'yan. Manifolds and graphs with slow heat kernel decay. Invent. Math., 144(3):609–649, 2001.

[BK05] S. Blunck and P. C. Kunstmann. Generalized Gaussian estimates and the Legendre transform. J. Operator Theory, 53(2):351–365, 2005.

[Blu07] S. Blunck. Generalized Gaussian estimates and Riesz means of Schrödinger groups. J. Aust. Math. Soc., 82(2):149–162, 2007.

[Car07] G. Carron. Riesz transforms on connected sums. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 57(7):2329–2343, 2007. Festival Yves Colin de Verdière.

[CCH06] G. Carron, T. Coulhon, and A. Hassell. Riesz transform and L^p-cohomology for manifolds with Euclidean ends. Duke Math. J., 133(1):59–93, 2006.

[CD99] T. Coulhon and X. T. Duong. Riesz transforms for $1 \leq p \leq 2$. Trans. Amer. Math. Soc., 351(3):1151–1169, 1999.

[CD03] T. Coulhon and X. T. Duong. Riesz transform and related inequalities on noncompact Riemannian manifolds. Comm. Pure Appl. Math., 56(12):1728–1751, 2003.

[CMS85] R. R. Coifman, Y. Meyer, and E. M. Stein. Some new function spaces and their applications to harmonic analysis. J. Funct. Anal., 62(2):304–335, 1985.

[CS08] T. Coulhon and A. Sikora. Gaussian heat kernel upper bounds via the Phragmén-Lindelöf theorem. Proc. Lond. Math. Soc. (3), 96(2):507–544, 2008.

[CS10] T. Coulhon and A. Sikora. Riesz meets Sobolev. Colloq. Math., 118(2):685–704, 2010.

[CSC90] T. Coulhon and L. Saloff-Coste. Puissances d'un opérateur régularisant. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 26(3):419–436, 1990.

[CW77] R. R. Coifman and G. Weiss. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. Bull. Amer. Math. Soc., 83(4):569–645, 1977.

[Dav92] E. B. Davies. Heat kernel bounds, conservation of probability and the Feller property. J. Anal. Math., 58:99–119, 1992. Festschrift on the occasion of the 70th birthday of Shmuel Agmon.

[Dav95] E. B. Davies. Uniformly elliptic operators with measurable coefficients. J. Funct. Anal., 132(1):141–169, 1995.

[Dav97] E. B. Davies. L^p spectral theory of higher-order elliptic differential operators. Bull. London Math. Soc., 29(5):513–546, 1997.

[Devar] B. Devyver. A perturbation result for the riesz transform. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., to appear.

[FS72] C. Fefferman and E. M. Stein. H^p spaces of several variables. Acta Math., 129(3-4):137–193, 1972.

[Gri09] A. Grigor'yan. Heat kernel and analysis on manifolds, volume 47 of AMS/IP Studies in Advanced Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[GT12] A. Grigor'yan and A. Telcs. Two-sided estimates of heat kernels on metric measure spaces. Ann. Probab., 40(3):1212–1284, 2012.

[HLM+11] S. Hofmann, G. Lu, D. Mitrea, M. Mitrea, and L. Yan. Hardy spaces associated to non-negative self-adjoint operators satisfying Davies-Gaffney estimates. Mem. Amer. Math. Soc., 214(1007):vi+78, 2011.

[HSC01] W. Hebisch and L. Saloff-Coste. On the relation between elliptic and parabolic Harnack inequalities. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 51(5):1437–1481, 2001.

[Jon96] O. D. Jones. Transition probabilities for the simple random walk on the Sierpiński graph. Stochastic Process. Appl., 61(1):45–69, 1996.

[KU12] P. C. Kunstmann and M. Uhl. Spectral multiplier theorems of hörmander type on hardy and lebesgue spaces. 09 2012.

[LY86] P. Li and S.-T. Yau. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. Acta Math., 156(3-4):153–201, 1986.

[Rus00] E. Russ. Riesz transforms on graphs for $1 \leq p \leq 2$. Math. Scand., 87(1):133–160, 2000.

[Rus07] E. Russ. The atomic decomposition for tent spaces on spaces of homogeneous type. In CMA/AMSI Research Symposium "Asymptotic Geometric Analysis, Harmonic Analysis, and Related Topics", volume 42 of Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ., pages 125–135. Austral. Nat. Univ., Canberra, 2007.

[Str83] R. S. Strichartz. Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold. J. Funct. Anal., 52(1):48–79, 1983.

[Uhl11] M. Uhl. Spectral multiplier theorems of hörmander type via generalized gaussian estimates. Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2011.

[Var85] N. Th. Varopoulos. Long range estimates for Markov chains. Bull. Sci. Math. (2), 109(3):225–252, 1985.