



HAL
open science

Prise en compte de la complexité géométrique des modèles structuraux dans des méthodes de maillage fondées sur le diagramme de Voronoï

Jeanne Pellerin

► **To cite this version:**

Jeanne Pellerin. Prise en compte de la complexité géométrique des modèles structuraux dans des méthodes de maillage fondées sur le diagramme de Voronoï. Géologie appliquée. Université de Lorraine, 2014. Français. NNT : 2014LORR0075 . tel-01005722v2

HAL Id: tel-01005722

<https://theses.hal.science/tel-01005722v2>

Submitted on 13 Jun 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PRISE EN COMPTE DE LA COMPLEXITÉ GÉOMÉTRIQUE DES MODÈLES STRUCTURAUX DANS DES MÉTHODES DE MAILLAGE FONDÉES SUR LE DIAGRAMME DE VORONOÏ

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

École doctorale RP2E

Spécialité Géosciences

par

Jeanne PELLERIN

Thèse soutenue le 20 mars 2014 devant le jury :

M. Pascal Frey	Professeur, Université Paris 06	Rapporteur
M. Hamdi Tchelepi	Professeur, Stanford University	Rapporteur
M. Stephan Matthäi	Professeur, University of Leoben	Examineur
M. Jean-François Remacle	Professeur, Université de Louvain	Examineur
M. Jean Virieux	Professeur, Université Grenoble 01	Examineur
M. Bruno Lévy	Directeur de recherche, INRIA	Directeur de thèse
M. Guillaume Caumon	Professeur, Université de Lorraine	Directeur de thèse
M. David Ledez	Total	Invité

UMR 7359 - GeoRessources

ENSG - Université de Lorraine

TSA 70605, 54518 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex - FRANCE

À mes parents,

Remerciements

Je suis en premier lieu très reconnaissante à mon directeur de thèse Guillaume Caumon de m'avoir permis de découvrir que, contrairement à ce que j'avais pu croire, la recherche me plaisait, et de m'avoir convaincue de faire une thèse. Je remercie vivement mon second directeur de thèse Bruno Lévy pour ses consultations de soutien à thésarde en détresse et son enthousiasme communicatif. Je tiens également à remercier Pascal Frey, David Ledez, Stephan Matthäi, Jean-François Remacle, Hamdi Tchelepi et Jean Virieux d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Merci à tous les collègues de l'équipe de recherche Alice du Loria dont les remarques et questions ont influencé ce travail. Merci à tous les membres de l'équipe de recherche Gocad (ceux qui l'ont été et ceux qui le sont toujours) pour tous les bons moments passés au labo et en dehors du labo, pour leur aide et leur soutien : Pauline CD, Nicolas C., Florent L., Gautier L., Romain M., François B., Théophile G., Pablo M., Charline J., Jérémy R., Arnaud B., Guillaume R., Paul C. Merci à Pierre, Christophe, et Fatima pour le nécessaire soutien technique et administratif. Un grand merci à Guillaume, Bruno, Arnaud, Jérémy, Pauline, Charline, Pablo, Jonathan E., Jonathan M., ainsi qu'à mon papa d'avoir relu tout ou partie de ce travail.

Je tiens à remercier plus particulièrement Arnaud et Jérémy, collègues de bureau de cette dernière année et demi, de m'avoir aidée à passer le cap de la fin de thèse, Gautier et Romain pour leur aide en début de thèse, François pour son organisation qui envoie du steak et sa générosité, et enfin Pauline, collègue de recherche, de couture, de littérature anglaise, de step, de papote, de ciné, tout cela me manquera.

Je finirai en remerciant tous ceux qui m'ont aidé dans les moments difficiles avant et pendant la thèse, tout particulièrement mes parents.

Résumé

Selon la méthode utilisée pour construire un modèle structural en trois dimensions et selon l'application à laquelle il est destiné, son maillage, en d'autres termes sa représentation informatique, doit être adapté afin de respecter des critères de type, de nombre et de qualité de ses éléments. Les méthodes de maillage développées dans d'autres domaines que la géomodélisation ne permettent pas de modifier le modèle d'entrée. Ceci est souhaitable en géomodélisation afin de mieux contrôler le nombre d'éléments du maillage et leur qualité.

L'objectif de cette thèse est de développer des méthodes de maillage permettant de remplir ces objectifs afin de gérer la complexité géométrique des modèles structuraux définis par frontières. Premièrement, une analyse des sources de complexité géométrique dans ces modèles est proposée. Les mesures développées constituent une première étape dans la définition d'outils permettant la comparaison objective de différents modèles et aident à caractériser précisément les zones plus compliquées à mailler dans un modèle. Ensuite, des méthodes originales de remaillage surfacique et de maillage volumique fondées sur l'utilisation des diagrammes de Voronoï sont proposées. Les fondements de ces deux méthodes sont identiques : (1) une optimisation de type Voronoï barycentrique est utilisée pour globalement obtenir un nombre contrôlé d'éléments de bonne qualité et (2) des considérations combinatoires pour localement construire le maillage final, éventuellement en modifiant le modèle initial. La méthode de remaillage surfacique est automatique et permet de simplifier un modèle à une résolution donnée. L'originalité de la méthode de maillage volumique est que les éléments générés sont de types différents. Des prismes et pyramides sont utilisés pour remplir les zones très fines du modèle, tandis que le reste du modèle est rempli avec des tétraèdres.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Introduction	1
1 Objets géométriques fondamentaux	9
1.1 Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay	9
1.1.1 Diagramme de Voronoï	9
1.1.2 Triangulation de Delaunay	10
1.1.3 Calcul du diagramme de Voronoï	12
1.2 Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay restreints	12
1.2.1 Diagramme de Voronoï restreint	12
Définitions	12
Cas dégénérés	13
1.2.2 Calcul du diagramme de Voronoï restreint	13
1.2.3 Triangulation de Delaunay restreinte	15
1.2.4 Topologie de la triangulation de Delaunay restreinte	15
Définitions préliminaires	16
Propriété de la boule topologique	16
Epsilon échantillonnage	17
1.3 Optimisation des diagrammes de Voronoï	17
1.3.1 Diagramme de Voronoï barycentrique	18
1.3.2 Diagramme de Voronoï barycentrique restreint	18
1.3.3 Calculs du diagramme de Voronoï barycentrique et du dia- gramme de Voronoï barycentrique restreint	19
2 État de l’art : objectifs et génération des maillages	21
2.1 Maillages et géomodélisation	21
2.1.1 Qu’est ce qu’un maillage ?	21
Définition	21
Types de maillages	22
2.1.2 Objectifs des maillages en géomodélisation	23
Des maillages pour représenter les modèles	23
Des maillages pour réaliser des simulations numériques	24
2.1.3 Maillages volumiques utilisés en géomodélisation	25
Maillages pour la simulation d’écoulement	25

	Maillages pour d'autres applications	26
2.2	Qualité d'un maillage et défis de génération	27
2.2.1	Qualité d'un maillage	27
	Qualité d'approximation du modèle	27
	Qualité du maillage pour les simulations numériques	29
2.2.2	Effet négatifs de la géométrie du modèle	30
2.2.3	Gestion des caractéristiques problématiques du modèle	30
	Pré-identification	30
	Simplification du modèle	31
	Prise en compte dans la génération du maillage	32
	Post-traitement	32
2.3	Maillage volumique à base de tétraèdres	32
2.3.1	Maillages tétraédriques	33
	Subdivision de l'espace	33
	Avancée de front	34
	Delaunay	35
	Optimisation Voronoï-Delaunay	36
2.3.2	Maillage de modèles multi-matériaux	37
2.3.3	Maillage hybride tétraèdres-prismes	38
2.4	Maillage surfacique à base de triangles	40
2.4.1	Subdivision de l'espace	40
	Méthodes octree	40
	Diagramme de Voronoï restreint barycentrique	40
2.4.2	Maillage de surfaces avec garanties	41
2.5	Discussion	41
3	Contribution : Éléments d'évaluation de la complexité géométrique des modèles structuraux	43
3.1	Motivations	43
3.2	Sources de complexité	44
3.2.1	Nombre d'objets géologiques	44
3.2.2	Interactions entre les objets	46
	Couches stratigraphiques conformes	46
	Non-conformités stratigraphiques	46
	Failles	46
3.3	Mesures généralistes	47
3.3.1	Mesures globales de complexité	47
3.3.2	Mesures dans un voisinage	48
3.4	Modèles	49
3.5	Résultats	49
3.5.1	Mesures globales	51
3.5.2	Mesures locales	52
	Méthode	52
	Mesures locales de connectivité	52
	Résultats	53
3.6	Discussion	53
3.6.1	Contributions	53

3.6.2	Perspectives	56
4	Contribution : Remaillage des surfaces de modèles structuraux à une résolution donnée	57
4.1	Motivations	57
4.2	Objectifs	58
4.3	Optimisation de l'échantillonnage du modèle	59
4.3.1	Optimisation CVT	59
4.3.2	Optimisation de la position des sites le long des bords	60
4.3.3	Implémentation	60
4.4	Construction du maillage	61
4.4.1	Remaillage des composantes connexes surfaciques	61
4.4.2	Remaillage des lignes de bord	62
4.4.3	Remaillage des coins	63
4.4.4	Implémentation	64
4.4.5	Améliorations du maillage	64
4.5	Résultats pour 12 modèles structuraux	66
4.6	Discussion	76
4.6.1	Contributions	76
4.6.2	Perspectives	76
5	Contribution : Vers un mailleur volumique hybride à partir d'un diagramme de Voronoï	77
5.1	Motivations	77
5.2	Principe	78
5.3	Construction des cellules hybrides	79
5.3.1	Détermination des cellules à construire	81
5.3.2	Cellules duales des segments	81
5.3.3	Cellules duales des points	81
	Ajout des sommets	82
	Ajout des arêtes	83
	Ajout des facettes	83
5.4	Traitement des cellules invalides	83
5.5	Résultats	85
5.6	Discussion	85
5.6.1	Contributions	85
5.6.2	Perspectives	89
	Conclusion	91

Introduction

Modèles géologiques : des cartes aux modèles numériques en 3D

Comprendre l'organisation en trois dimensions des roches dans le sous-sol est indispensable dans des domaines comme la prospection, l'exploitation, la protection des ressources naturelles minérales ou énergétiques. Excepté sur les affleurements, le sous-sol est invisible et nous disposons de peu d'information pour comprendre son organisation. C'est dans cet objectif qu'est déterminée une carte géologique, elle indique, en tout point d'une région, quelle est la nature des roches à la surface de la Terre (figure 1a). Cette carte est établie par les géologues en interpolant les observations de terrain. L'organisation des roches en profondeur est caractérisée par des coupes verticales dans le sous-sol. Nous voyons que, dans la zone représentée sur la figure 1b, le sous-sol est stratifié. Les différentes couches sont séparées par des lignes appelées horizons et sont découpées par deux failles. Les couches 2, 3 et 4 ont été en partie érodées. Cet état actuel est le résultat d'une évolution que les géologues essaient de reconstituer lors de la détermination de ces cartes et coupes (figure 2).

Les cartes et les coupes géologiques sont des modèles de la réalité ; elles en sont des représentations schématiques en deux dimensions. Cependant cette réalité est tridimensionnelle et ce sont les modèles structuraux qui donnent en chaque point du sous-sol le type de roche présent (figure 3). Leur construction et leur représentation sont informatiques. Il est possible, comme pour une photo numérique, dans laquelle chaque pixel est associé à une couleur, de découper un modèle structural en voxels (cubes élémentaires) auxquels est associé un type de roche (figure 3a). Une alternative est de représenter seulement les surfaces (horizons, failles, érosions, *etc*) délimitant les différents volumes rocheux. Cette représentation, dite par frontières¹, permet de modéliser une très grande partie des configurations complexes rencontrées dans la nature.

Des maillages pour visualiser et étudier le comportement des modèles

Quelle que soit la représentation choisie du modèle structural, un maillage est utilisé pour l'enregistrer et le visualiser en trois dimensions sur un ordinateur. Un maillage d'un objet est défini comme un ensemble d'éléments géométriques simples (carrés, triangles, cubes, tétraèdres, *etc*) qui ne s'intersectent pas et dont l'union est une approximation de l'objet. Il est défini par les sommets de ces éléments et par les règles permettant de relier ces sommets. Par exemple, le découpage en pavés

1. *Boundary Representation* ou B-Rep.

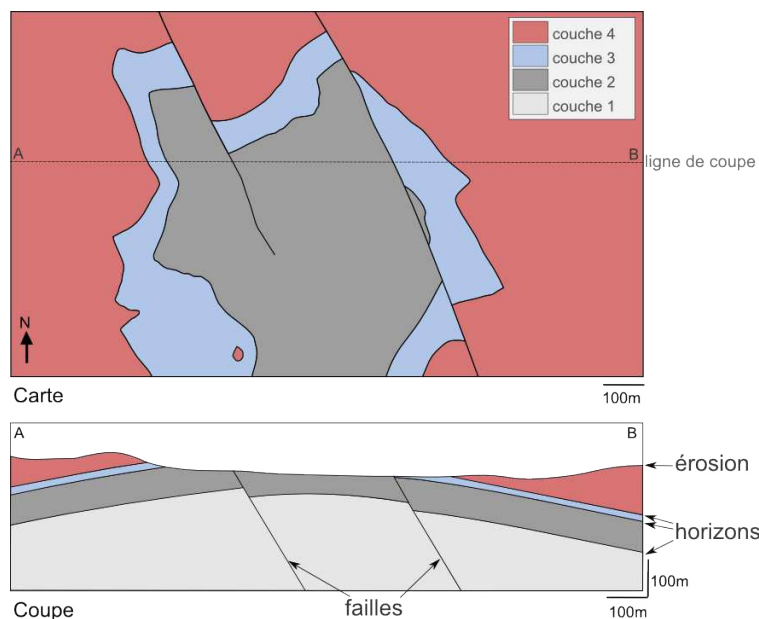


FIGURE 1 – MODÈLES GÉOLOGIQUES EN DEUX DIMENSIONS : UNE CARTE ET UNE COUPE. La carte donne, en vue de dessus, le type des roches qui affleurent à la surface terrestre, la coupe en donne une vue en profondeur. Les lignes (surfaces en 3D figure 3) séparant deux couches différentes sont appelées les horizons. Ces horizons sont plissés et découpés par deux failles. La ligne d'érosion dessine la topographie de la zone.

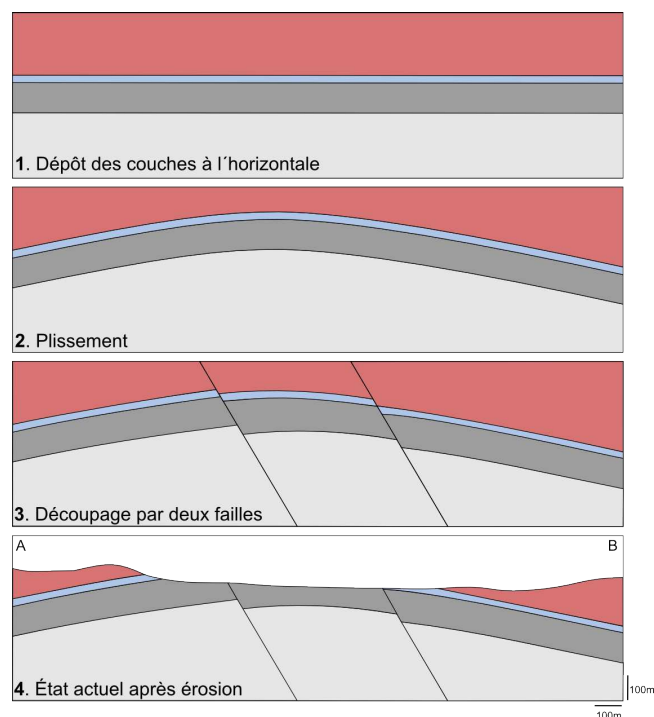


FIGURE 2 – VUE EN COUPE DE L'ÉVOLUTION DES COUCHES DE LA COUPE DE LA FIGURE 1 DEPUIS LEUR DÉPÔT.

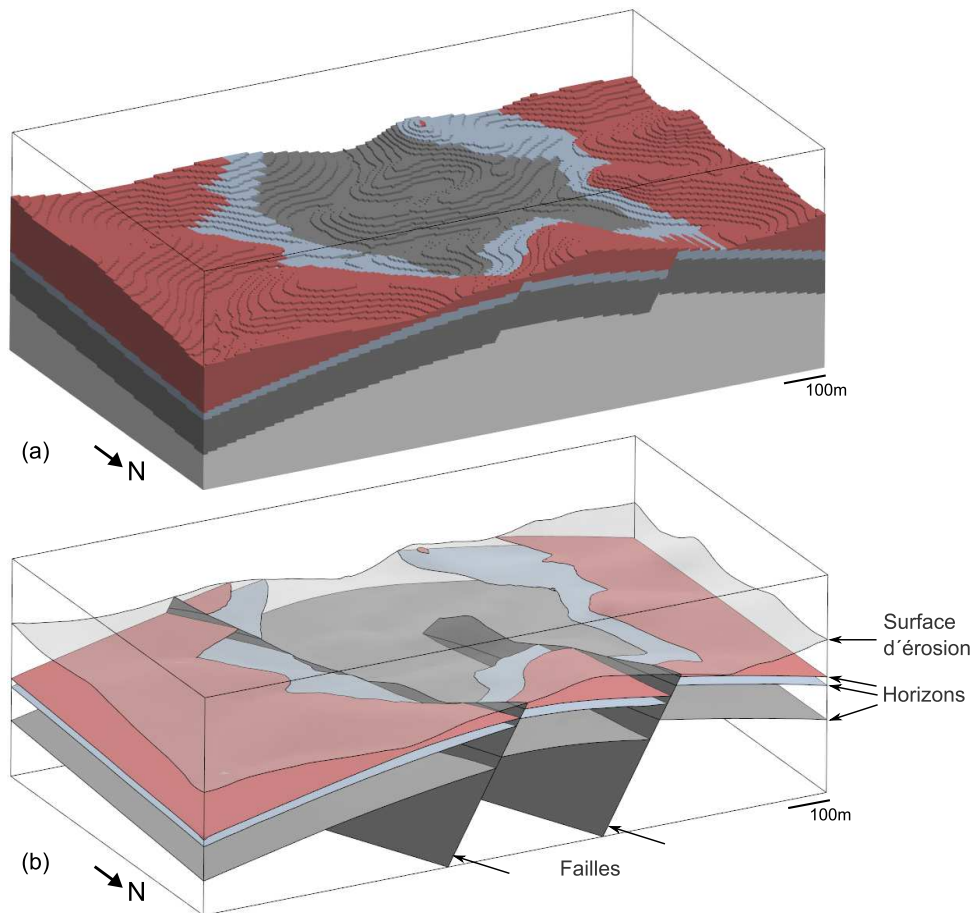


FIGURE 3 – DEUX REPRÉSENTATIONS D'UN MODÈLE STRUCTURAL EN TROIS DIMENSIONS. Ce modèle synthétique correspond à la carte et à la coupe de la figure 1. (a) Représentation volumique : le modèle est découpé en pavés, chacun a la couleur de la couche associée. (b) Représentation par limites : seules les surfaces délimitant les volumes rocheux sont représentées. Les surfaces qui délimitent la zone d'intérêt (dite aussi boîte) ne sont pas affichées.

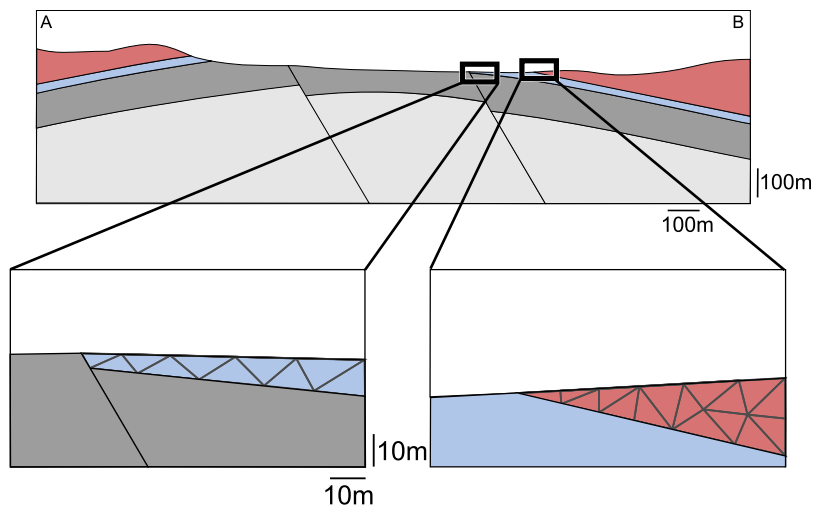


FIGURE 4 – DEUX DÉFIS POUR LA GÉNÉRATION DE MAILLAGE DES MODÈLES STRUCTURAUX. (a) La couche bleue est localement très fine et ne peut pas dans cette zone être maillée avec des triangles de plus de 5m de côté. (b) La couche rouge fait un angle de 16 degrés, pour respecter ses limites au moins un triangle du maillage doit avoir un angle de 16 degrés.

du modèle structural vu figure 3a est un maillage. Si la taille de ces pavés est trop importante, l'image des structures géologiques est, de la même manière qu'une photo numérique à basse résolution, imprécise.

En plus de représenter les modèles, les maillages sont nécessaires pour répondre à des problèmes d'ingénierie, par exemple l'estimation de l'impact du creusement d'un tunnel sur la stabilité des roches l'entourant. En utilisant les théories physiques adéquates, ce problème peut être transformé en problème mathématique. Ce dernier ne peut généralement pas être résolu de manière exact et un maillage est utilisé pour en déterminer une version approchée qui sera résolue numériquement. Ceci est le second objectif des maillages : permettre de réaliser les simulations numériques pour calculer l'approximation d'un comportement naturel.

Défis de la génération de maillage - Problématique

Lorsque les hypothèses sur lesquelles reposent les étapes permettant de passer du problème d'ingénierie au résultat ne sont pas vérifiées, l'écart entre le résultat de la simulation numérique et le comportement réel peut être important. Afin d'obtenir des résultats fiables dans le temps imparti, le maillage doit représenter le modèle assez précisément et respecter un ensemble de critères de qualité sur le nombre, l'aspect et la taille de ses éléments. Ces deux conditions sont contradictoires et il n'est pas toujours possible de mailler les composantes du modèle qui ont un impact sur la solution tout en respectant ces critères de qualité. Par exemple, un modèle dans lequel une couche a localement une épaisseur de 5m et pour lequel il faut générer un maillage ayant des éléments dont la taille minimale requise des arêtes est 10m est impossible (figure 4a). De même, il ne sera pas possible de générer des éléments ayant tous des angles supérieurs à 30 degrés si le modèle contient un angle de 16 degrés (figure 4b).

Dans ces cas, un choix est nécessaire pour obtenir le meilleur compromis entre

d'une part la précision, la fiabilité, la robustesse des résultats obtenus, et d'autre part les besoins en mémoire et le temps nécessaires au calcul. A priori, la relaxation des contraintes sur le maillage (plus grand nombre d'éléments, éléments plus petits) accroît les temps de calcul et les besoins en mémoire, mais augmente la précision du résultat. La modification de la géométrie du modèle (diminution de son niveau de détail) permet de le mailler avec moins d'éléments, tout en simplifiant des composantes qui peuvent être néfastes pour la résolution numérique, mais risque de diminuer la précision des résultats. Idéalement, pour faire le meilleur choix, il faudrait comparer les résultats obtenus pour différents maillages à différents niveaux de détail du modèle. Ceci implique de disposer d'outils automatiques pour (1) modifier et mailler un modèle à une résolution donnée avec des éléments de la qualité souhaitée et (2) évaluer les écarts entre le résultat et le comportement réel. Dans cette thèse, nous nous intéressons au premier point et apportons des éléments de réponses aux questions suivantes :

- Comment caractériser le niveau de détail d'un modèle géologique en trois dimensions et comment identifier ses petites caractéristiques géométriques ?
- Comment modifier automatiquement le niveau de détail d'un modèle et simplifier ses petites caractéristiques ?
- Comment mailler un modèle (surfaces et volumes) lorsque la taille requise pour les éléments est supérieure à la résolution du modèle ?

Démarche

Nous utilisons une subdivision du modèle structural par un diagramme de Voronoï pour analyser la géométrie et la connectivité du modèle et générer un maillage de ses surfaces et de ses régions volumiques (figure 5). Un diagramme de Voronoï est défini pour un ensemble de points, il associe à chaque point la partie du modèle plus proche de ce point que des autres points (la cellule de Voronoï). À partir du diagramme de Voronoï et de ses intersections avec les frontières du modèle, un maillage des surfaces et des régions volumiques du modèle peut être déterminé (figure 5).

Nous proposons des stratégies pour construire un maillage quelles que soient les configurations des intersections entre le modèle et le diagramme de Voronoï. En effet, selon la taille des cellules de Voronoï, les intersections avec les surfaces définissant le modèle sont plus ou moins compliquées (figure 5). Cette approche nous permet de privilégier le contrôle du nombre d'éléments dans le maillage final et d'autoriser des modifications du modèle (figure 5). L'écart entre la résolution du modèle et celle du maillage est ainsi réduit.

Après avoir défini les objets géométriques dérivés du diagramme de Voronoï, fondements de ces travaux (chapitre 1), nous précisons les objectifs des maillages et passons en revue les méthodes de génération de maillage triangulaire et tétraédrique (chapitre 2). Nous proposons dans le chapitre 3 des mesures de la complexité géométrique des modèles structuraux dont le but est de caractériser précisément les zones compliquées à mailler dans un modèle. Puis, nous proposons une méthode de remaillage des surfaces d'un modèle structural (chapitre 4) qui permet de contrôler le nombre d'éléments dans le maillage, de simplifier le modèle et de générer des triangles aussi équilatéraux que possible. Cette méthode est étendue dans le chapitre 5 pour

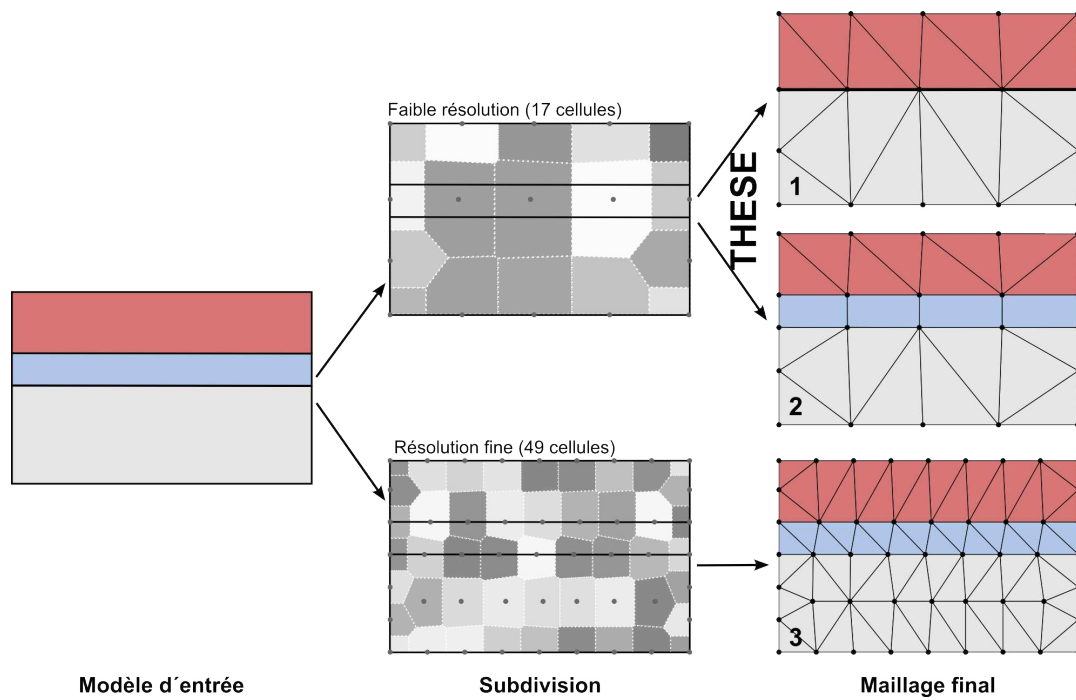


FIGURE 5 – UTILISATION D'UNE SUBDIVISION PAR UN DIAGRAMME DE VORONOÏ POUR ANALYSER, MODIFIER ET MAILLER UN MODÈLE PAR FRONTIÈRE. Cette thèse se concentre sur la construction d'un maillage dans le cas où la subdivision du modèle par le diagramme de Voronoï est grossière et où les intersections avec les bords sont potentiellement complexes. Notre travail vise à générer soit un maillage du modèle simplifié (1) soit un maillage du modèle complet (2) en limitant le nombre d'éléments.

générer un maillage volumique constitué d'éléments de différents types du modèle structural. Des prismes et pyramides sont utilisés pour remplir les zones très fines du modèle, tandis que le reste du modèle est rempli avec des tétraèdres.

Résumé des contributions

Dans cette thèse nous présentons les contributions suivantes :

- des mesures aidant à identifier les petites caractéristiques géométriques des modèles géologiques. Elles sont décrites dans le chapitre 3. Ces travaux ne sont, pour l'instant, pas publiés ;
- une méthode de construction d'un remaillage des surfaces d'un modèle défini par frontières à partir de l'intersection d'un diagramme de Voronoï avec ces frontières. Ces travaux sont présentés dans le chapitre 4, et publiés dans Pellerin *et al.* [2014], une version préliminaire ayant été présentée dans Pellerin *et al.* [2011] ;
- une stratégie de construction d'un maillage hybride (prismes, pyramides et tétraèdres) des régions d'un modèle défini par frontière à partir d'un diagramme de Voronoï et de son intersection avec les frontières du modèle qui est décrite dans le chapitre 5. Une version courte de ces travaux a été présentée dans Pellerin *et al.* [2012].

Publications associées à cette thèse

J. Pellerin, B. Lévy et G. Caumon : Topological control for isotropic remeshing of nonmanifold surfaces with varying resolution : application to 3D structural models. *In Proc. IAMG*. coge@oeaw-giscience, sept. 2011.

J. Pellerin, B. Lévy et G. Caumon : A Voronoi-based hybrid meshing method. *In International Meshing Roundtable, Research Notes*, oct. 2012.

J. Pellerin, B. Lévy, G. Caumon et A. Botella : Automatic surface remeshing of 3D structural models at specified resolution : A method based on Voronoi diagrams. *Computers & Geosciences*, 62(0):103 – 116, 2014.

Chapitre 1

Objets géométriques fondamentaux

Dans ce chapitre nous définissons les objets géométriques utilisés par de nombreuses méthodes de génération de maillage et sur lesquels ces travaux de thèse sont fondés. Ils sont liés au diagramme de Voronoï, une structure fondamentale en géométrie, voir notamment [Aurenhammer \[1991\]](#) et [Okabe *et al.* \[2009\]](#).

1.1 Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay

1.1.1 Diagramme de Voronoï

Un diagramme de Voronoï [[Voronoi, 1908](#)] est un découpage de l'espace en plusieurs régions à partir d'un ensemble de points, appelés sites et notés S . Chaque site, $p \in S$, correspond à une région, appelée cellule de Voronoï, qui contient les points de l'espace plus proches de ce site p que de n'importe quel autre site (figure 1.1). Formellement, dans le cas où l'espace considéré est \mathbb{R}^2 et où la proximité entre un point x et un site p est mesurée par la distance euclidienne entre ces deux points $\|x - p\|$, la cellule de Voronoï de p est définie par :

$$V_p = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x - p\| \leq \|x - q\|, q \in S\} \quad (1.1)$$

L'ensemble des cellules de Voronoï forme le diagramme de Voronoï de S (figure 1.1a). Ces cellules sont des polygones fermés convexes bornés ou non qui recouvrent l'espace sans se chevaucher. Leurs arêtes, appelées arêtes de Voronoï, sont les points à égale distance entre deux sites voisins. Les sommets des cellules, ou sommets de Voronoï, sont les points à égale distance de trois sites voisins (figure 1.2). Ces définitions s'étendent en dimension supérieure. Nous nous arrêtons dans cette thèse à la dimension trois où les régions associées aux sites sont des polyèdres (figure 1.3). Leurs faces, les facettes de Voronoï, sont les points à égale distance de deux sites voisins; elles sont contenues par le plan médiateur de ces deux sites. Les arêtes sont partagées par trois cellules de Voronoï et les sommets par quatre cellules (figure 1.4a).

Il est important de noter que ce que nous venons de décrire est correct dans le

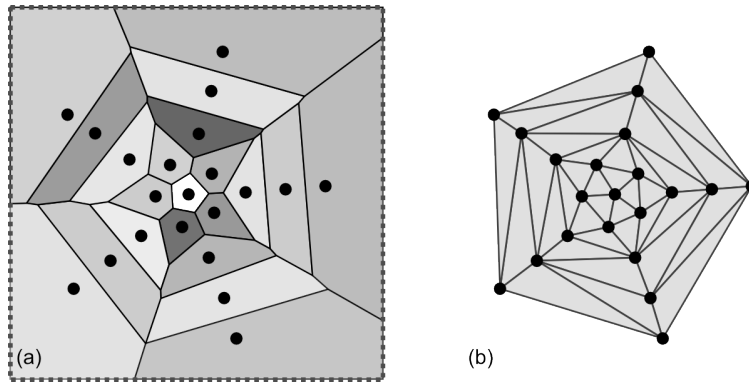


FIGURE 1.1 – DIAGRAMME DE VORONOÏ ET TRIANGULATION DE DELAUNAY CORRESPONDANTE DANS LE PLAN. (a) Le diagramme de Voronoï des 21 sites (points noirs) est un ensemble de 21 polygones convexes qui recouvrent le plan. Les cinq cellules intersectant le bord du carré sont infinies. (b) La triangulation de Delaunay correspondante triangule l'enveloppe convexe des sites.

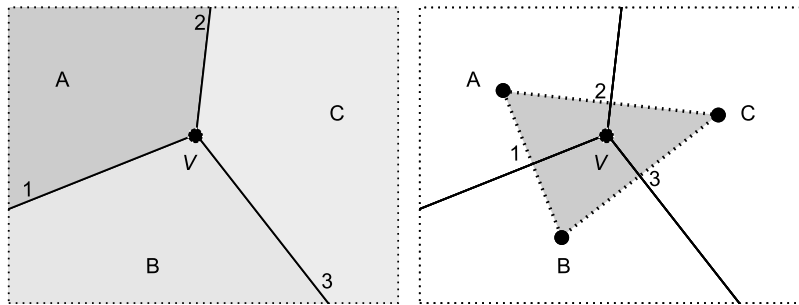


FIGURE 1.2 – RELATION DUALE VORONOÏ-DELAUNAY EN 2D. Le sommet de Voronoï V est partagé par trois cellules de Voronoï : A, B, et C. Il correspond à un triangle de Delaunay ABC, dont les sommets sont les sites et dont chacun des trois côtés correspond à une arête de Voronoï (numéros 1 à 3).

cas où les sites S sont en position générale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas quatre sites ou plus cocycliques dans le même plan, et cinq points ou plus cosphériques dans l'espace. Ces cas dégénérés disparaissent avec une perturbation infime de la position des sites, qui est éventuellement réalisée de manière symbolique [Edelsbrunner et Mücke, 1990]. Dans ce qui suit, nous supposons que les sites sont en position générale.

Remarque : Il existe de très nombreuses généralisations du diagramme de Voronoï obtenues en changeant la fonction de distance entre un site et un point de l'espace, la nature des sites *etc*, voir les revues de [Okabe *et al.*, 2009] et Aurenhammer [1991]. Il est également possible de travailler dans des espaces non-euclidiens, par exemple celui défini par une surface plongée dans un espace 3D.

1.1.2 Triangulation de Delaunay

Un second objet, particulièrement intéressant dans un contexte de génération de maillage, peut être construit depuis un diagramme de Voronoï : la triangulation de Delaunay. Nous avons vu que dans le plan, en position générale, chaque sommet de Voronoï est à égale distance de trois sites. Le triangle qui relie ces sites est dit de Delaunay et la triangulation de Delaunay est l'ensemble des triangles correspondants

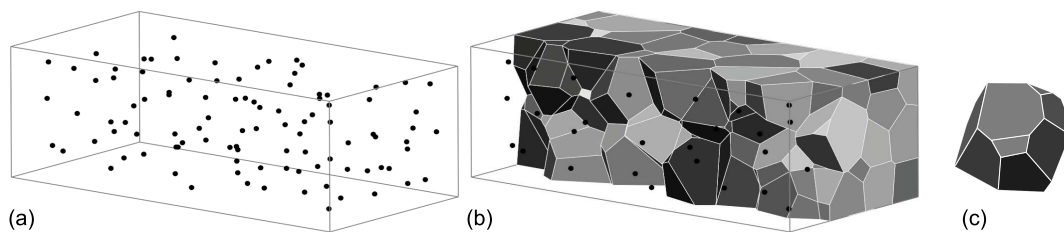


FIGURE 1.3 – DIAGRAMME DE VORONOÏ EN 3D. (a) 200 sites sont distribués dans un pavé. (b) Coupe solide dans le diagramme de Voronoï des sites recoupé par les bords du pavé. (c) Une cellule de Voronoï.

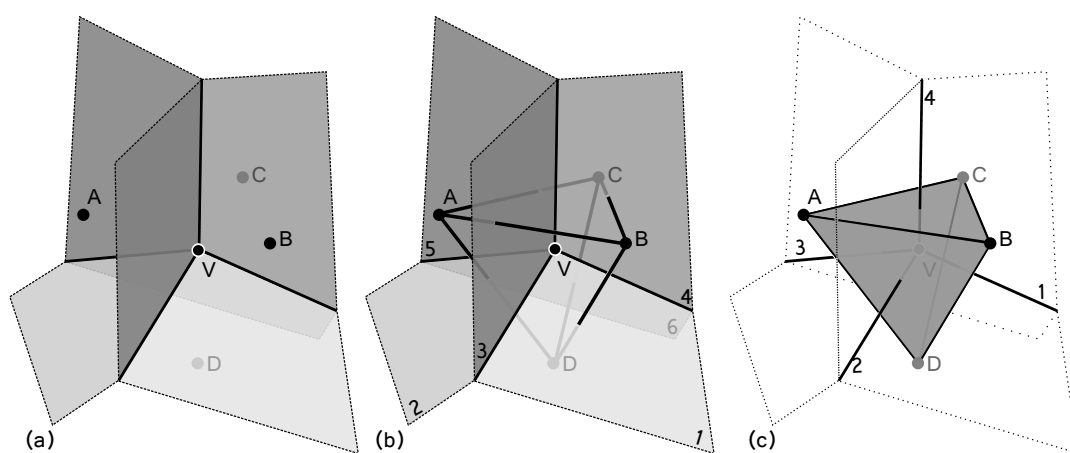


FIGURE 1.4 – RELATION DUALE VORONOÏ-DELAUNAY EN 3D. (a) Le sommet de Voronoï V est à égale distance des sites des cellules A , B , C et D . (b) A chaque facette de Voronoï contenant V (numéros 1 à 6) correspond un segment reliant les sites des 2 cellules partageant la facette. (c) A chaque arête de Voronoï contenant V (numéros 1 à 4) correspond un triangle reliant les sites des 3 cellules partageant cette arête.

aux sommets de Voronoï (figure 1.1b). La triangulation de Delaunay des sites S est dite duale du diagramme de Voronoï de S car, à chaque cellule de Voronoï correspond un sommet de la triangulation, à chaque arête de Voronoï correspond une arête de la triangulation et à chaque sommet de Voronoï correspond un triangle de Delaunay (figure 1.2). Comme le diagramme de Voronoï, le concept de triangulation de Delaunay se généralise en dimension supérieure. En trois dimensions, la tétraédrisation de Delaunay contient une arête pour chaque facette de Voronoï, un triangle pour chaque arête de Voronoï et un tétraèdre pour chaque sommet de Voronoï (figure 1.4).

La triangulation de Delaunay d'un ensemble de points S peut être définie indépendamment du diagramme de Voronoï à partir du critère de la boule vide ou critère de Delaunay [Delaunay, 1934] qui stipule que, dans \mathbb{R}^2 , un triangle est de Delaunay si son cercle circonscrit ne contient aucun autre point de S que ses sommets. Les propriétés mathématiques de la triangulation de Delaunay en ont fait un objet de choix en génération de maillage (partie 2.3).

1. Les boules ouvertes circonscrites aux simplexes¹ de la triangulation de Delaunay ne contiennent aucun sommet de S . Ce critère de la boule vide ou de Delaunay est associé à un lemme qui donne que, pour une triangulation quelconque des points S , si le critère de la boule vide est vrai pour toute paire d'éléments adjacents, alors il l'est pour tous les éléments [Delaunay, 1934].
2. Pour tout ensemble de points S en position générale, la triangulation de Delaunay existe et est unique.
3. La triangulation de Delaunay maximise l'angle minimal de la triangulation de S .

1.1.3 Calcul du diagramme de Voronoï

Le calcul du diagramme de Voronoï d'un ensemble de points peut se faire soit directement, soit en calculant la triangulation de Delaunay duale. De nombreuses méthodes ont été développées, voir les synthèses de Fortune [1992], Okabe *et al.* [2009], Boissonnat et Yvinec [1995] et les implémentations de TetGen² ou CGAL³.

1.2 Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay restreints

1.2.1 Diagramme de Voronoï restreint

Définitions

Un diagramme de Voronoï découpe en régions convexes l'espace sur lequel il est défini. Nous nous intéressons ici au découpage d'un objet inclus dans cet espace par ce diagramme de Voronoï : le diagramme de Voronoï restreint⁴. Pour un ensemble

1. Les triangles dans \mathbb{R}^2 et les tétraèdres dans \mathbb{R}^3 .

2. <http://wias-berlin.de/software/tetgen/>

3. <http://www.cgal.org/>

4. RVD pour *Restricted Voronoi Diagram* en anglais

de sites S et un objet Ω le diagramme de Voronoï restreint est défini comme l'intersection du diagramme de Voronoï de S avec Ω ⁵. Deux exemples sont donnés sur les figures 1.5b et 1.5e. L'intersection d'une cellule de Voronoï, V_p , avec l'objet Ω est appelée cellule de Voronoï restreinte de p à Ω et est définie par $V_{p \cap \Omega} = V_p \cap \Omega$. La dimension de la cellule restreinte dépend de la dimension de l'objet. Les cellules restreintes à l'étoile sont surfaciques (figure 1.5b), tandis que celles restreintes à son contour sont linéaires (figure 1.5e).

L'intersection d'une arête de Voronoï avec l'objet est une arête de Voronoï restreinte, l'intersection d'une facette de Voronoï avec l'objet est une facette de Voronoï restreinte et l'intersection entre un sommet de Voronoï et l'objet est un sommet de Voronoï restreint. Contrairement aux éléments d'un diagramme de Voronoï, ceux d'un diagramme de Voronoï restreint peuvent avoir plus d'une composante connexe, c'est-à-dire qu'il existe au moins deux points dans un élément qui ne peuvent pas être reliés par un chemin contenu dans cet élément. Par exemple, dans le cas du diagramme de Voronoï restreint au contour de l'étoile, figure 1.5e, les cellules restreintes au milieu des branches ont deux composantes connexes - deux segments.

Cas dégénérés

Nous avons vu sur l'exemple de l'étoile, figure 1.5, que la dimension des cellules de Voronoï restreintes est la même que celle de l'étoile, à savoir deux. Ceci est vrai seulement si les intersections dégénérées entre la cellule de Voronoï et l'objet (égales à un sommet ou à une arête de Voronoï) sont exclues (figure 1.6). Cette remarque se généralise pour les intersections de chaque élément du diagramme de Voronoï (cellule, facette, arête et sommet) avec l'objet. Dans un espace de dimension d , un élément du diagramme de Voronoï (dimension l) intersecte génériquement un objet de dimension m si l'intersection a la dimension attendue : $m + l - d$ [Edelsbrunner et Shah, 1997]. Dans \mathbb{R}^3 , les intersections des cellules, facettes, arêtes et sommets de Voronoï avec une surface doivent respectivement être de dimension deux (des morceaux de surface), un (des morceaux de lignes), zéro (des points) et vide. Les intersections entre un sommet de Voronoï et une quelconque ligne ou surface sont donc exclues. D'après Edelsbrunner et Shah [1997], ces hypothèses sont raisonnables et nous supposons qu'elles sont vérifiées dans ce qui suit. Toutefois, nous verrons à la fin du chapitre 4 que la plupart des problèmes rencontrés lors du calcul d'un maillage à partir d'un diagramme de Voronoï restreint sont liés à des configurations proches de ces configurations dégénérées.

1.2.2 Calcul du diagramme de Voronoï restreint

La notion de diagramme de Voronoï restreint telle que nous l'avons présentée recouvre un grand nombre de cas en termes de dimension de l'objet. Lorsque qu'un objet est défini par ces frontières et que sa dimension est celle de l'espace de travail, le calcul de l'intersection entre l'objet et le diagramme de Voronoï d'un ensemble de points est assez délicat. Lévy et Liu [2010] proposent une méthode en trois dimensions,

5. Dans d'autres travaux, dans le cas où l'objet considéré et l'espace le contenant sont de même dimension (figure 1.5c) le diagramme de Voronoï restreint est aussi appelé diagramme de Voronoï coupé (*clipped Voronoi diagram* en anglais).

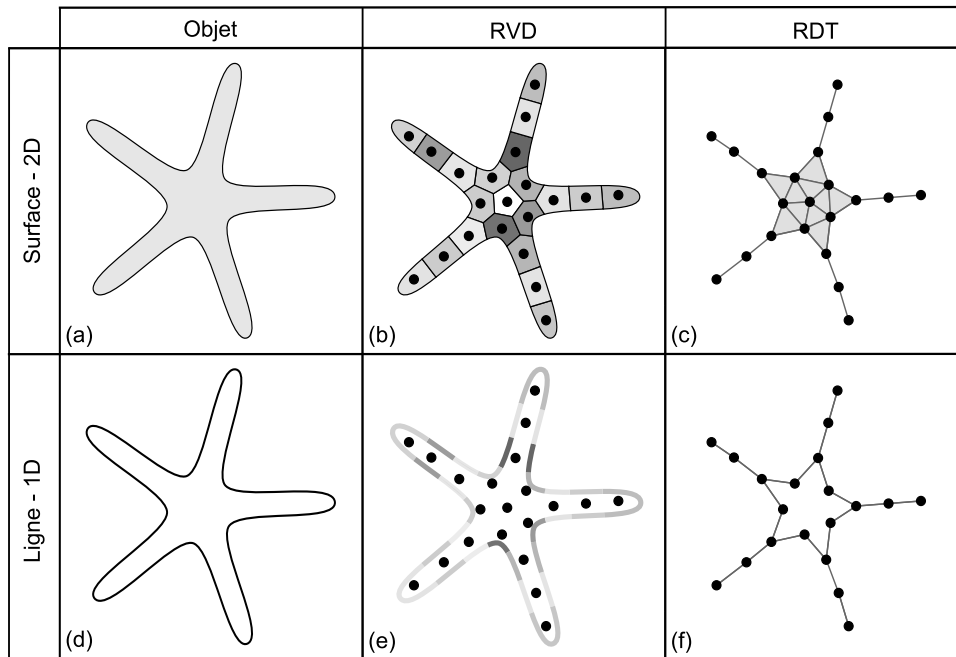


FIGURE 1.5 – DIAGRAMME DE VORONOÏ RESTREINT ET TRIANGULATION DE DELAUNAY RESTREINTE. (b) Diagramme de Voronoï restreint à une étoile (a). (c) La triangulation de Delaunay restreinte correspondante maille l'étoile. (e) Diagramme de Voronoï restreint au contour de l'étoile (d). (f) La triangulation de Delaunay restreinte correspondante est un sous-ensemble de celle à l'étoile (c). Elle ne contient pas le site au centre de l'étoile, car la cellule de Voronoï de ce site ne recoupe pas le contour.

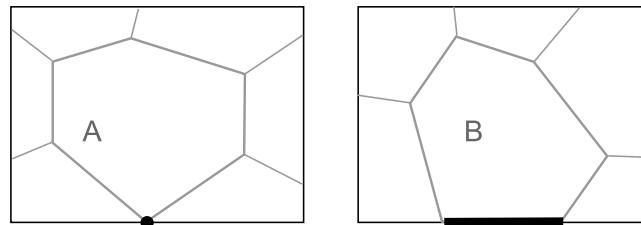


FIGURE 1.6 – CAS DÉGÉNÉRÉS D'INTERSECTION ENTRE UNE CELLULE DE VORONOÏ ET UN RECTANGLE. La cellule A intersecte le rectangle en un unique point. La cellule B intersecte le rectangle le long d'une de ses arêtes.

mais elle est cependant peu robuste aux configurations dégénérées [Merland, 2013]. Quand l'objet a une dimension inférieure à celle du diagramme de Voronoï, le calcul est plus aisé.

Dans cette thèse, nous nous intéressons au diagramme de Voronoï restreint à une surface triangulée en trois dimensions. Pour le calculer, nous utilisons la méthode initialement développée par Yan *et al.* [2009] et améliorée par Nivoliers [2012]. L'opération de base est le calcul de l'intersection entre un triangle de la surface et une cellule de Voronoï. Comme une cellule de Voronoï peut être définie par l'intersection des demi-plans médiateurs entre son site et ses voisins les plus proches, il suffit de découper successivement le triangle par ces plans. Pour calculer l'intersection entre un triangle et une cellule de Voronoï une seule fois, et accélérer le calcul, plusieurs stratégies de propagation sont possibles, elles sont décrites en détail par Nivoliers [2012].

1.2.3 Triangulation de Delaunay restreinte

De la même manière que la triangulation de Delaunay est duale du diagramme de Voronoï, la triangulation de Delaunay restreinte est définie comme le dual du diagramme de Voronoï restreint Edelsbrunner et Shah [1997]. Dans \mathbb{R}^2 , elle contient un sommet pour chaque cellule restreinte, un segment pour chaque arête restreinte et un triangle pour chaque sommet de Voronoï restreint (figures 1.5c et f).

La triangulation de Delaunay restreinte est donc constituée des éléments de la triangulation de Delaunay qui sont duaux d'éléments du diagramme de Voronoï intersectant l'objet considéré. Ses triangles, arêtes et sommets (figure 1.5c) sont un sous-ensemble de la triangulation de Delaunay (figure 1.1). En effet, par construction, le diagramme de Voronoï restreint est un sous-ensemble du diagramme de Voronoï.

Considérons à présent les diagrammes de Voronoï restreints à deux objets A et B tels que A inclus dans B . Le diagramme de Voronoï restreint à A est un sous-ensemble du diagramme de Voronoï restreint à B et il en est de même pour les triangulations de Delaunay restreintes. Les mêmes sites peuvent donc être utilisés pour trianguler de manière conforme, c'est-à-dire de telle sorte que les intérieurs des deux triangulations ne s'intersectent pas, deux objets de dimensions potentiellement différentes. Par exemple, les segments de la triangulation de Delaunay restreinte au contour de l'étoile (figure 1.5f) sont inclus dans la triangulation de Delaunay restreinte à l'étoile (figure 1.5c).

Lorsque certains éléments de la triangulation de Delaunay restreinte ne sont pas contenus dans le bord d'un élément de dimension supérieure, par exemple les segments dans les branches de l'étoile figure 1.5c, la triangulation de Delaunay restreinte est un objet multi-dimensionnel. Elle peut alors être vue comme une version simplifiée de l'objet initial.

1.2.4 Topologie de la triangulation de Delaunay restreinte

La propriété de la boule topologique, introduite par Edelsbrunner et Shah [1997], décrit un critère qui garantit que la triangulation de Delaunay restreinte a la même topologie que l'objet initial (est homéomorphe) et n'en est pas une version simplifiée.

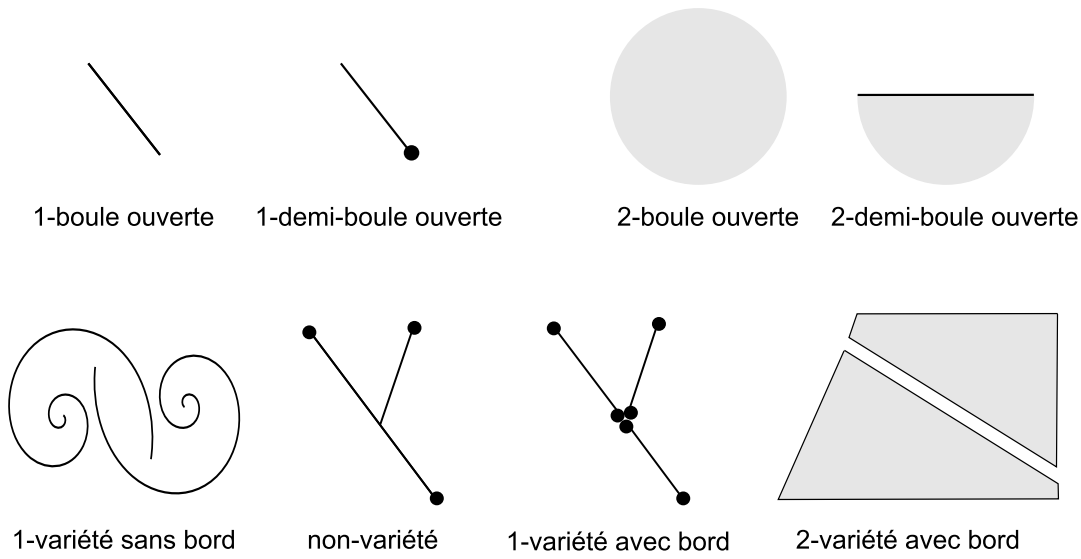


FIGURE 1.7 – BOULES TOPOLOGIQUES ET ESPACES VARIÉTÉS DANS LE PLAN.

Définitions préliminaires

Les espaces topologiques X et Y sont homéomorphes, s'il existe une application bijective de X dans Y continue et dont l'inverse est continue. Une k -boule ouverte est un espace homéomorphe à \mathbb{R}^k (figure 1.7). Une k -demi boule ouverte est un espace homéomorphe au demi-espace $\mathbb{H}^k = \{x = (\xi_i) \in \mathbb{R}^k \mid \xi_i \geq 0\}$. Une k -boule fermée est un espace homéomorphe à $\mathbb{B}^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - O\| \leq 1\}$. Le voisinage d'un sous ensemble Y inclus dans X est un sous-ensemble de X qui contient Y . L'espace X inclus dans \mathbb{R}^d est un k -variété sans bord si tous ses points ont un voisinage de k -boule ouverte, c'est un k -variété avec bord si tous ses points ont un voisinage de k -boule ouverte ou de k -demi boule ouverte (figure 1.7). L'ensemble des points qui n'ont pas une k -boule ouverte comme voisinage forme le bord de X , et l'ensemble des points qui ont un voisinage de k -boule ouverte forme l'intérieur.

Propriété de la boule topologique

Un ensemble de points de \mathbb{R}^d fini non dégénéré, S , a la propriété de la boule topologique [Edelsbrunner et Shah, 1997] pour $X \subseteq \mathbb{R}^d$, un m -variété fermé et borné, si pour chaque $l \leq m$ et chaque sous-ensemble de $m + 1 - l$ points $T \subseteq S$:

- l'intersection entre X et l'ensemble des points communs aux cellules de Voronoï des sites T est soit vide soit une l -boule fermée ;
- l'intersection entre le bord de X et l'ensemble des points communs aux cellules de Voronoï des sites est soit vide soit une $(l - 1)$ -boule fermée.

Ceci signifie qu'un ensemble S non-dégénéré de points a la propriété de la boule topologique pour une surface variété Ω plongée dans \mathbb{R}^3 si : toutes cellules de Voronoï restreintes (respectivement les facettes et arêtes) de S à Ω sont des 2-boules fermées, (respectivement des 1-boules et points) et si toutes les cellules de Voronoï restreintes (respectivement les facettes et arêtes) de S aux bords de Ω sont des 1-boules fermées (respectivement des points et l'ensemble vide) (figure 1.8).

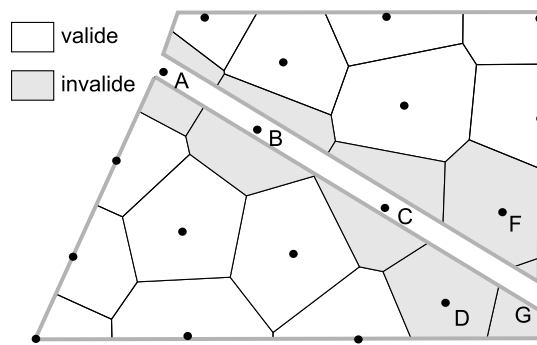


FIGURE 1.8 – CELLULES DE VORONOÏ VÉRIFIANT ET NE VÉRIFIANT PAS LA PROPRIÉTÉ DE LA BOULE TOPOLOGIQUE. Les cellules A, B, C, G ont deux composantes connexes. Les cellules D et F sont bien des disques, mais leurs intersections avec le bord du modèle (ligne grise) ont deux composantes connexes.

Le théorème prouvé par [Edelsbrunner et Shah \[1997\]](#) donne que : pour $X \subseteq \mathbb{R}^d$ un compact variété, avec ou sans bord, et pour $S \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble fini de points non dégénérés dont le diagramme de Voronoï intersecte génériquement X , si S a la propriété de la boule topologique pour X alors la triangulation de Delaunay restreinte de S à X est homéomorphe à X . Une extension aux espaces non variété est également proposée, elle est cependant beaucoup moins utilisée et nous ne la détaillerons pas ici.

Epsilon échantillonnage

Introduite par [Amenta et Bern \[1999\]](#), la théorie de l' ϵ -échantillonnage donne un moyen géométrique de garantir qu'une surface vérifie la propriété de la boule topologique. Sa définition est fondée sur la notion d'axe médian. L'axe médian d'un objet est l'ensemble des points de l'espace qui ont plus d'un point le plus proche sur le bord de l'objet. La notion de *lfs*, pour *local feature size*, qui peut être traduit par taille des particularités locales, est définie par [Amenta et Bern \[1999\]](#) comme la distance (euclidienne) minimale à l'axe (ou surface) médian de l'objet⁶. Un ensemble de points S est un ϵ -échantillonnage d'une surface variété Ω si pour chaque point x de Ω , il existe un point de S à une distance inférieure à $\epsilon \times lfs(x)$. Quand $\epsilon < 0.1$, [Amenta et Bern \[1999\]](#) montrent que, dans ce cas, les points S ont la propriété de la boule topologique pour la surface Ω .

Le calcul exact de l'axe médian, et par conséquent celui du *lfs*, est un problème particulièrement compliqué (voir par exemple [Attali et al. \[2009\]](#)) et reste un sujet de recherche. Cependant, il est possible de le déterminer de façon approchée en utilisant les sommets du diagramme de Voronoï d'un ensemble de points échantillonnant l'objet considéré.

1.3 Optimisation des diagrammes de Voronoï

Le découpage de l'espace en cellule de Voronoï obtenu à partir d'un ensemble de sites distribués de manière aléatoire est également aléatoire et la question de son

6. Une première version de *lfs* a été proposée par [Ruppert \[1995\]](#).

optimisation apparaît dans de nombreux problèmes de statistiques, de traitement d'image ou de génération de maillage. Il s'agit alors d'optimiser le placement des sites afin de remplir un objectif particulier, par exemple, minimiser les distances entre chacun des sites et les points de sa cellule de Voronoï. Cette optimisation tend vers un diagramme de Voronoï particulier : le diagramme de Voronoï barycentrique.

1.3.1 Diagramme de Voronoï barycentrique

Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de sites est barycentrique si chaque site se trouve au barycentre p^* de sa cellule de Voronoï V_p :

$$p^* = \frac{\int_{V_p} y dy}{\int_{V_p} dy} \quad (1.2)$$

Si une fonction de densité ρ est définie, le barycentre devient :

$$p^* = \frac{\int_{V_p} y \rho(y) dy}{\int_{V_p} \rho(y) dy} \quad (1.3)$$

Considérons à présent le problème de la recherche d'une partition d'un domaine Ω en k régions Ω_i et des positions de k points s_i qui minimisent la fonction :

$$F((s_i, \Omega_i)_{i=1\dots k}) = \sum_{i=1}^k \int_{y \in \Omega_i} \rho(y) \|y - s_i\|^2 dy \quad (1.4)$$

Cette fonction évalue la somme des carrés des distances entre l'un des points s_i et les points de la région Ω_i qui a le même indice. [Du et al. \[1999\]](#) démontrent que, pour minimiser cette fonction, il est nécessaire que les régions Ω_i soient les cellules de Voronoï des points s_i et que chaque point soit au barycentre de sa cellule de Voronoï. Ils démontrent également que cette fonction a les mêmes minimums que la fonction :

$$F_{CVT}((s_i)_{i=1\dots k}) = \sum_{i=1}^k \int_{y \in V_i} \rho(y) \|y - s_i\|^2 dy \quad (1.5)$$

où V_i est la cellule de Voronoï associée au point s_i . Les paramètres de la fonction F_{CVT} sont uniquement les positions des points, l'intégration étant faite sur les cellules de Voronoï V_i . Pour obtenir un diagramme de Voronoï barycentrique il suffit donc de minimiser cette fonction des positions des points. En pratique, l'obtention d'un minimum global est très difficile, et l'obtention d'un minimum local est souvent considérée satisfaisante.

Remarque : Dans un même espace et pour un nombre de sites donné, il y a plusieurs diagrammes de Voronoï barycentriques et tous ne minimisent pas la fonction F_{CVT} .

1.3.2 Diagramme de Voronoï barycentrique restreint

Le diagramme de Voronoï restreint d'un ensemble de points S à un domaine Ω est barycentrique si chaque site p est au barycentre de sa cellule de Voronoï restreinte.

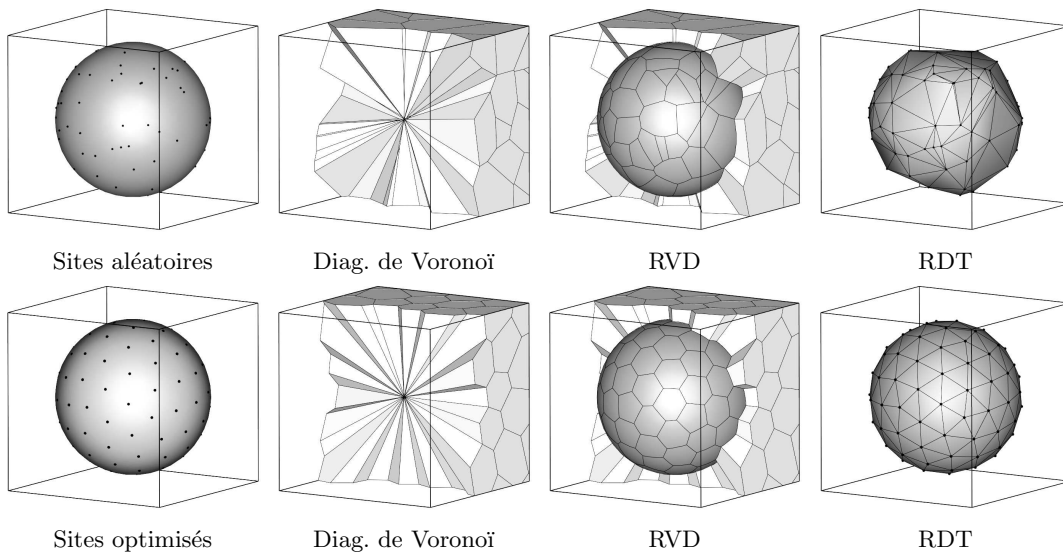


FIGURE 1.9 – OPTIMISATION DE 100 SITES SUR UNE SPHÈRE. Après optimisation le diagramme de Voronoï restreint est constitué de cellules dont la forme est proche de celle d’un hexagone régulier et la triangulation de Delaunay restreinte contient des triangles qui sont quasiment équilatéraux.

Une propriété similaire à celle du diagramme de Voronoï barycentrique classique est établie en intégrant uniquement sur les cellules de Voronoï restreintes et la fonction F_{CVT} devient :

$$F_{\Omega} = \sum_{i=1}^k \int_{y \in V_i \cap \Omega} \rho(y) \|y - s_i\|^2 dy \quad (1.6)$$

Lorsque les points s_i appartiennent au domaine Ω , le diagramme de Voronoï barycentrique restreint est contraint [Du *et al.*, 2003]. Parce que nous utilisons les sites pour partitionner les régions volumiques et les surfaces d’un modèle, nous utilisons un diagramme de Voronoï barycentrique restreint non-contraint. Un exemple d’optimisation de sites par rapport à une sphère est donné figure 1.9. Après optimisation les triangles de la triangulation de Delaunay restreinte sont quasiment équilatéraux.

1.3.3 Calculs du diagramme de Voronoï barycentrique et du diagramme de Voronoï barycentrique restreint

Pour optimiser les positions des sites et obtenir un diagramme de Voronoï barycentrique ou un diagramme de Voronoï barycentrique restreint le principe est celui de nombreuses optimisations :

1. distribuer de manière aléatoire un ensemble de sites S ;
2. construire le diagramme de Voronoï (restreint) de S à l’objet ;
3. déterminer des nouvelles positions pour les sites S' ;
4. si un critère de convergence est atteint, terminer l’optimisation, sinon remplacer S par les nouveaux sites S' et retourner à l’étape 2.

La question est alors de calculer les nouvelles positions des sites S' . L’objectif est en effet d’atteindre un minimum pour la fonction F_{CVT} (ou F_{Ω} dans le cas restreint). Une première stratégie est de prendre pour les nouveaux points les barycentres des

cellules de Voronoï. L'algorithme résultant, appelé algorithme de Lloyd [Lloyd, 1982], converge relativement lentement, c'est-à-dire qu'il faut beaucoup d'itérations avant d'atteindre les minimums, le déplacement des sites vers leurs positions optimales n'étant pas assez rapide.

Liu *et al.* [2009] proposent de calculer un diagramme de Voronoï barycentrique en utilisant un algorithme de type Newton pour minimiser F_{CVT} et sa version restreinte, son gradient étant donné par Iri *et al.* [1984] égal à :

$$\frac{dF_{CVT}}{ds_i} = 2m_i (s_i - p_{i*}) \quad (1.7)$$

où m_i est le volume de la i ème cellule de Voronoï. Toutefois ce type d'optimisation requiert que la fonction F_{CVT} soit de classe C^2 ce qui est presque toujours le cas, à l'exception des configurations où deux points entrent en collision [Zhang *et al.*, 2012] ou bien quand un plan médiateur coïncide avec une facette du bord [Liu *et al.*, 2009]. Les résultats pratiques montrent qu'une méthode de type Newton peut être utilisée pour calculer un diagramme de Voronoï barycentrique ou un diagramme de Voronoï barycentrique restreint [Liu *et al.*, 2009, Yan *et al.*, 2009, Lévy et Liu, 2010, Merland, 2013].

Chapitre 2

État de l'art : objectifs et génération des maillages

2.1 Maillages et géomodélisation

Comprendre l'organisation en trois dimensions des roches dans le sous-sol est indispensable dans des domaines comme la prospection, l'exploitation, et la protection des ressources naturelles minérales ou énergétiques. La modélisation géologique, ou géomodélisation, participe à cet objectif en fournissant des outils pour construire et analyser des modèles du sous-sol. Les maillages sont le fondement de la plupart de ces outils.

2.1.1 Qu'est ce qu'un maillage ?

Définition

Un maillage est une manière de représenter un objet de manière informatique en l'approchant par un ensemble d'éléments simples. Prenons l'exemple d'une étoile dessinée dans le plan définie par une infinité de points (figure 2.1a). En plaçant dix points sur son bord et en reliant ces points de manière adéquate, nous obtenons un maillage du contour de l'étoile (figure 2.1b) ou de son intérieur (figure 2.1c).

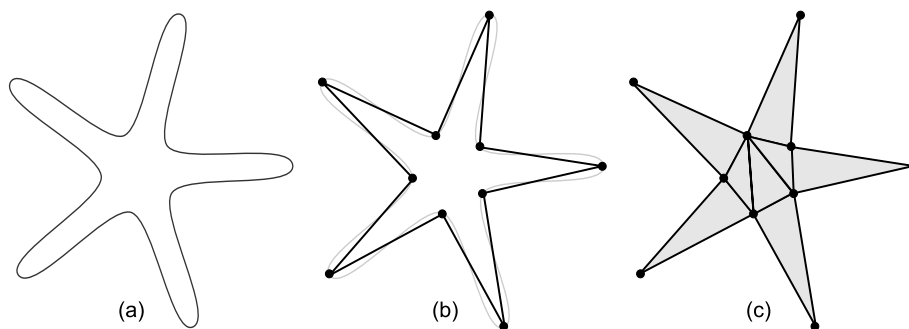


FIGURE 2.1 – MAILLAGE D'UNE ÉTOILE. (a) Étoile définie par une infinité de points. (b) Maillage du bord de l'étoile avec 10 sommets et 10 segments. (c) Maillage de l'intérieur de l'étoile avec 8 triangles.

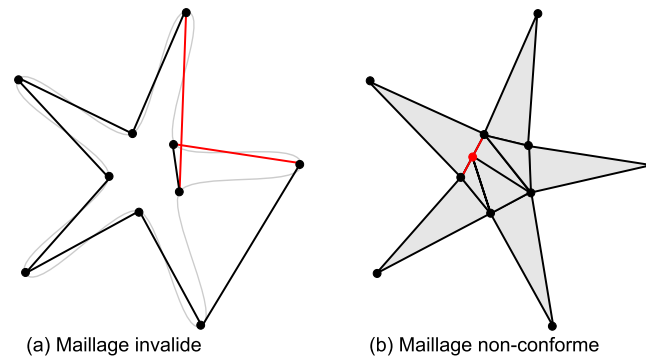


FIGURE 2.2 – MAILLAGES INVALIDE ET NON-CONFORME. (a) Maillage invalide car deux segments s'intersectent. (b) Maillage triangulé valide mais non-conforme.

Dans un cas plus général, le maillage d'un objet est défini par un ensemble de sommets associé à un ensemble d'éléments reliant ces sommets. Pour que le maillage soit valide ces éléments doivent respecter trois conditions : leur union est une approximation de l'objet, leurs intérieurs sont non vides et l'intersection des intérieurs de deux éléments est vide [Frey et George, 1999]. Les maillages des figures 2.1b, 2.1c et 2.2b sont valides alors que le maillage figure 2.2a est invalide. Les segments reliant deux sommets sont les éléments de dimension 1. Les éléments de dimension 2, les facettes, sont des polygones, les plus simples étant les triangles et les quadrilatères. Les éléments de dimension 3 sont des polyèdres, par exemple les hexaèdres ou tétraèdres, ils sont appelés cellules du maillage.

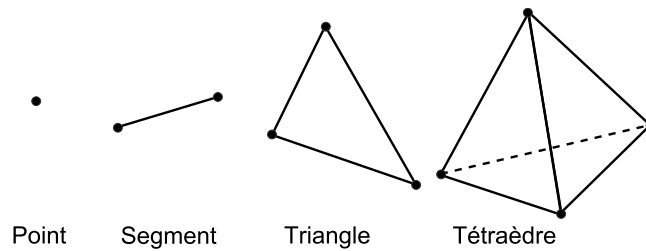
Le maillage est conforme si l'intersection de deux éléments est, soit vide, soit un élément commun aux bords de ces deux éléments (figure 2.2c). Le maillage est contraint si des éléments sont imposés au moment de sa construction, très souvent ce sont des éléments maillant la frontière du domaine. Nous dirons que deux maillages sont conformes si le maillage résultant de l'union de leurs éléments est conforme. Par exemple, le maillage de l'intérieur de l'étoile (figure 2.1c) est conforme au maillage de son contour (figure 2.1b).

Types de maillages

Le type d'un maillage est défini par le type de ses éléments et par leur connectivité¹. Cette dernière détermine deux classes de maillages, les maillages structurés, qui ont une connectivité régulière, c'est-à-dire que tous leurs sommets ont le même nombre de voisins, et les maillages non-structurés, qui n'ont pas une connectivité régulière. Les maillages non-structurés sont très divers, ce sont principalement leurs éléments constitutifs qui les différencient ; soit ces éléments sont des polyèdres quelconques, soit ils sont de types connus. Lorsque les éléments sont tous du même type, le type du maillage est dérivé du nom des éléments : maillage quadrangulaire, maillage triangulé, maillage hexaédrique, maillage tétraédrique, maillage prismatique, *etc.* Lorsque le maillage contient des éléments de différents types, il est dit hybride².

Un maillage est simplicial s'il est uniquement constitué de simplexes. Nous rap-

1. La connectivité d'un élément est définie par les connexions de ses sommets.
2. Certains auteurs disent mixte.


 FIGURE 2.3 – SIMPLEXES DANS \mathbb{R}^3 .

pelons qu'un d -simplexe est un élément correspondant à l'enveloppe convexe d'un ensemble de $d + 1$ sommets de \mathbb{R}^n ($d \leq n$) indépendants de manière affine³. L'enveloppe convexe est définie comme le plus petit ensemble convexe qui contient ces sommets, c'est-à-dire un ensemble qui contient les segments reliant chacune des paires de points de l'ensemble. Dans \mathbb{R}^3 , les 0-simplexes sont les points, les 1-simplexes sont des segments, les 2-simplexes sont des triangles et les 3-simplexes sont des tétraèdres (figure 2.3). L'avantage d'un maillage simplicial est que tous ses éléments sont convexes et que toutes ses facettes sont planes.

2.1.2 Objectifs des maillages en géomodélisation

Des maillages pour représenter les modèles

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les maillages sont tout d'abord un moyen de représenter un objet par une union finie d'éléments géométriques simples et bornés. Les objets auxquels nous nous intéressons dans ces travaux sont les modèles structuraux du sous-sol. Il y a deux grands types de représentations pour ces modèles qui délimitent les différents volumes rocheux.

Maillage volumique

Dans une représentation volumique, les régions du modèle structural sont maillées, et chaque cellule du maillage est associée à un type de roche. Le maillage le plus simple est sans doute un découpage régulier du modèle en pavés, similaire à une image numérique en trois dimensions (figure 3a). Comme nous le verrons dans la partie 2.1.3, les maillages constitués d'hexaèdres ou de tétraèdres sont les plus utilisés.

Représentation par frontières

Dans une représentation d'un modèle par frontières⁴, le modèle est décrit par les surfaces délimitant ses régions volumiques (figures 2.4 et 3b). Cette représentation est plus légère en mémoire, plus flexible, et permet de représenter une grande partie des configurations naturelles. Elle est également particulièrement adaptée au cas des modèles structuraux qui sont construits à partir des surfaces géologiques délimitant les couches de roches (horizons, failles, discordances, *etc*). La question est alors de mailler ces surfaces, elles sont généralement triangulées⁵ [Caumon *et al.*, 2009]. Dans

3. Ceci exclut les cas où trois sommets sont alignés et ceux où quatre sommets sont coplanaires.

4. Aussi appelé B-Rep, pour *Boundary Representation*.

5. Les surfaces, ensemble de points de coordonnées (x, y, z) , peuvent également être représentées de manière implicite $f(x, y, z) = 0$, paramétrique $(x, y, z) = \sigma(u, v)$ ou explicite $z = f(x, y)$.

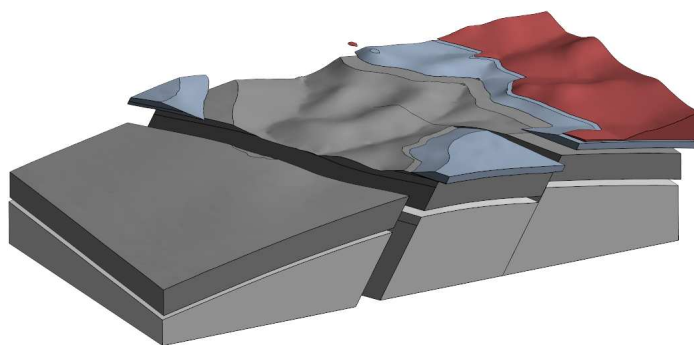


FIGURE 2.4 – RÉGIONS VOLUMIQUES DANS UN MODÈLE DÉFINI PAR FRONTIÈRES. Chaque région est définie par ses surfaces limites. Certaines régions de ce modèle ne sont pas affichées (voir aussi figure 3).

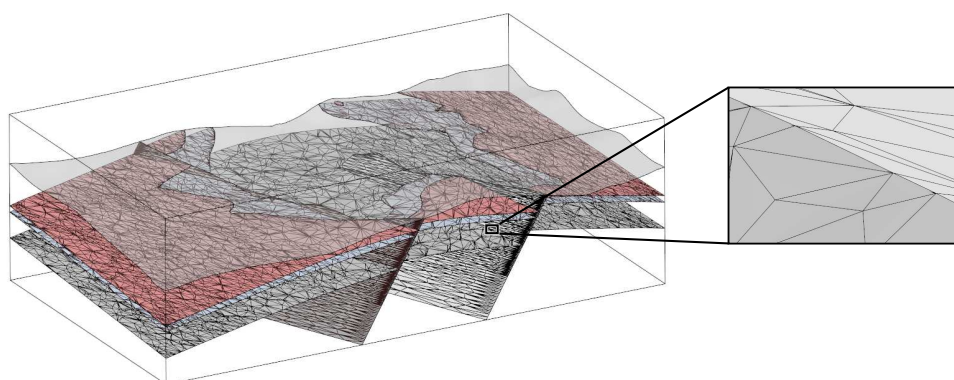


FIGURE 2.5 – SURFACES TRIANGULÉES D'UN MODÈLE STRUCTURAL DÉFINI PAR FRONTIÈRES. Les surfaces définissant la zone d'intérêt ne sont pas affichées. Les maillages des surfaces en contact, sont conformes.

ces travaux, nous considérons uniquement des modèles dans lesquels les maillages des surfaces sont conformes (figure 2.5). Les connexions entre surfaces peuvent alors être déterminées à partir de leur géométrie.

Des maillages pour réaliser des simulations numériques

En géomodélisation comme en conception, un modèle est construit pour répondre à un ensemble de questions dépendantes du domaine d'application, par exemple : Comment les couches de roches ont-elle été déformées depuis leur formation ? Quelle est la quantité de pétrole récupérable ? Quel est l'impact du creusement d'un tunnel sur la stabilité d'un massif ? Les processus modélisant la déformation mécanique des roches, les écoulements de fluides, la propagation de chaleur et la propagation d'ondes sont modélisés par des équations aux dérivées partielles, qui ne peuvent pas, dans le cas général, être résolues de façon exacte (analytiquement), et sont résolues de manière approchée (numériquement). Depuis les débuts des méthodes de résolutions numériques, les maillages leurs sont associés comme moyen de discrétiser l'espace [Baker, 2005]. Ils sont un pré-requis à toute simulation numérique. Comme en géomodélisation les propriétés (composition, porosité, perméabilité, *etc*) des roches varient au sein d'une région du modèle, les maillages sont également le support de stockage de ces propriétés.

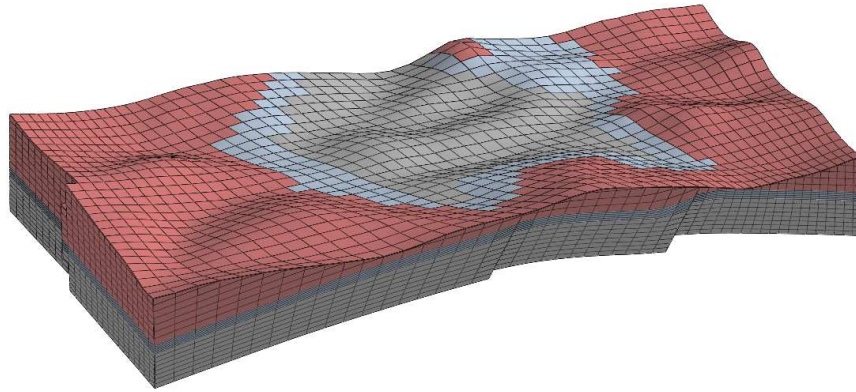


FIGURE 2.6 – GRILLE CURVILINÉAIRE. Les hexaèdres du maillage sont déformés pour être alignés sur les horizons et les failles. Les cellules adjacentes à la surface d'érosion (voir figure 3) sont dégénérées et des cellules inactives sont créées pour que la grille soit régulière.

Nous ne détaillons pas ici les équations intervenant en géosciences. Les équations d'écoulement en milieux poreux sont décrites dans Farmer [2005], les équations en géomécanique et transfert de chaleur dans Turcotte [2002], les équations de propagation des ondes dans Aki et Richards [2009] et les équations modélisant les processus de bassin dans Mello *et al.* [2009]. Nous ne donnons pas non plus de détails sur les différents schémas de résolution numérique des équations aux dérivées partielles, le lecteur est référé à Allaire [2005] et Saad [2003] pour une description des principaux schémas numériques : différences finies, éléments finis et volumes finis.

2.1.3 Maillages volumiques utilisés en géomodélisation

Si les surfaces des modèles géologiques structuraux sont souvent maillées par des triangles, la diversité des maillages volumiques est plus grande.

Maillages pour la simulation d'écoulement

La plupart des maillages développés en géomodélisation le sont pour la simulation des écoulements dans les réservoirs pétroliers dont l'objectif principal est d'estimer l'évolution de la production d'hydrocarbures. Les maillages volumiques les plus simples sont probablement les grilles cartésiennes qui divisent régulièrement les modèles en pavés (figure 3). Sur ces maillages structurés, des schémas numériques de type différences finies, qui sont plus simples à programmer et très efficaces en temps d'exécution peuvent être utilisés. En revanche, comme tous leurs éléments ont la même géométrie et la même connectivité, l'approximation des objets modélisés est souvent inacceptable du point de vue de la fiabilité de la simulation obtenue.

Grilles curvilinéaires

Les grilles curvilinéaires ou stratigraphiques⁶ sont des maillages réguliers, constitués d'hexaèdres qui sont déformés afin d'être alignés sur les limites de couches géologiques et les failles (figure 2.6). Cependant, dans les zones où ces limites s'intersectent,

6. Elles sont également appelées *corner-point grids* en anglais.

les cellules ne peuvent pas, en général, être alignées avec toutes ces couches. Des cellules dégénérées ou inactives sont alors créées et certaines limites géologiques sont supprimées ou approximées en marches d'escalier, notamment les failles. Ces grilles sont généralement générées par extrusion du maillage quadrangulaire d'un des horizons, créant ainsi le nombre souhaité de couches d'hexaèdres. Elles sont massivement utilisées dans un contexte d'exploration-production pétrolière pour le remplissage géostatistique des propriétés des roches et la simulation d'écoulements (voir par exemple [Farmer, 2005]).

Maillages non-structurés

Les maillages non-structurés, dans lesquels les connectivité, taille, aspect et orientation des éléments sont variables, permettent de mieux capturer la géométrie des modèles. Ils sont relativement peu utilisés pour la simulation d'écoulement, puisque les matrices résultant de la discrétisation n'ont généralement pas un motif régulier et sont plus coûteuses à stocker et à inverser. Toutefois, les simulateurs récemment développés, comme GPRS [Cao, 2002] et IX [DeBaun *et al.*, 2005], et les travaux sur de nouveaux schémas de discrétisation (voir par exemple Eymard *et al.* [2012]) vont peut être changer la donne.

La diversité des maillages non-structurés est très grande, nous en donnons ici quelques uns utilisés pour la simulation réservoir. Les grilles tronquées sont obtenues en découpant des grilles structurées, et ce, généralement par les failles sur lesquelles la grille n'est pas alignée [Lasseter et Jackson, 2004]. Ces grilles peuvent être raffinées autour des zones d'intérêt [Sword *et al.*, 2013] ce qui leur donne une grande flexibilité. Les maillages semi-structurés, c'est-à-dire structurés dans au moins une direction de l'espace, sont similaires aux grilles stratigraphiques. La différence est que les cellules sont construites, en extrudant, non pas des quadrangles, mais des cellules de Voronoï, des triangles, ou bien un mélange de différents éléments (voir par exemple Lepage [2003]). Les maillages modulaires, directement liés à la décomposition du modèle en différents blocs, les modules, sont constitués des maillages de ces différentes parties. Ceci permet d'utiliser des grilles régulières dans les zones de faibles intérêt et d'adapter les éléments dans les zones plus importantes du point de vue de la simulation, voir par exemple Flandrin *et al.* [2006] et Lepage [2003]. La difficulté est alors de générer le maillage reliant les différents modules. Le dernier grand type de maillage non-structuré est les grilles de polyèdres convexes quelconques, voir par exemple Merland [2013].

Maillages pour d'autres applications

La diversité des maillages pour les applications autres que la simulation réservoir est beaucoup plus réduite. Une grande partie des problèmes mécaniques, thermiques ou de propagation d'ondes sont résolus avec des méthodes numériques de type élément fini. Les maillages utilisés sont souvent des maillages simpliciaux car ils peuvent être adaptés à toutes les géométries. Les maillages tétraédriques sont utilisés en restauration géomécanique, pour vérifier la cohérence des modèles ou comprendre l'évolution temporelle de certaines structures (voir par exemple Durand-Riard *et al.* [2011] et Vidal-Royo *et al.* [2012]), pour calculer la propagation des ondes sismiques [Lelievre

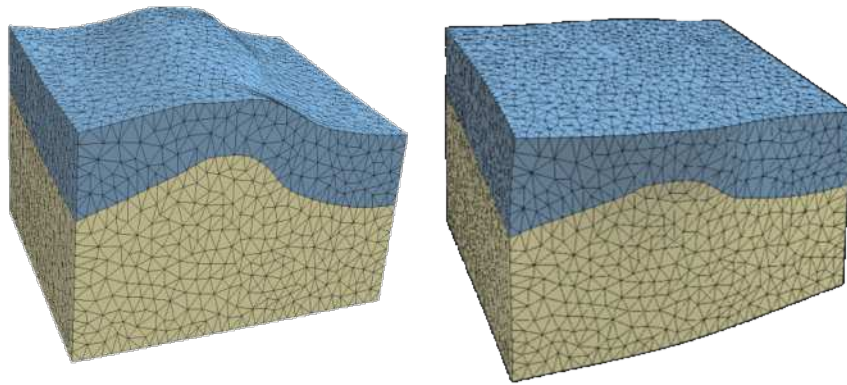


FIGURE 2.7 – UTILISATION D'UN MAILLAGE TÉTRAÉDRIQUE POUR LA RESTAURATION D'UN PLI (TIRÉ DE DURAND-RIARD [2010]). L'horizon supérieur plissé est restauré dans son état de dépôt, c'est-à-dire à l'horizontale.

et al., 2012], la diffusion de la chaleur [Liu *et al.*, 2012], ou les écoulements en milieux fracturés [Mustapha et Mustapha, 2007]. Ils sont aussi utilisés pour modéliser de manière implicite les horizons stratigraphiques dans un espace dépôt [Mallet, 2004]. Moretti [2008] et [Moretti *et al.*, 2006] utilisent une grille curvilinéaire alignée sur les horizons et les failles (sans cellule dégénérée ou désactivée) pour des calculs de restauration. L'utilisation de maillages hexaédriques non-structurés reste limitée puisque l'automatisation de leur génération est difficile [Owen et Shelton, 2014].

2.2 Qualité d'un maillage et défis de génération

Nous avons vu dans la partie précédente que les maillages ont deux objectifs principaux en géomodélisation : représenter un modèle du sous-sol de manière approchée et réaliser des simulations numériques dans ce modèle. Pour avoir des résultats fiables, rapides et robustes, le maillage doit respecter des critères sur le nombre, la taille et la forme de ses éléments. Nous voyons dans cette partie comment ces critères de qualité sont parfois contradictoires, comment identifier les zones où ils le sont, et comment prendre en compte de manière adéquate ces zones lors de la génération du maillage.

2.2.1 Qualité d'un maillage

La qualité d'un maillage est un ensemble de critères qui évalue son influence sur la précision et l'efficacité des applications dans lesquels il est utilisé. Par exemple le maillage figure 2.8b donne une estimation moins précise du périmètre de l'étoile que les maillages des figures 2.8a et c. Le maillage optimal est celui, qui pour une application donnée, permet d'atteindre la précision souhaitée tout en comptant le moins d'éléments possible.

Qualité d'approximation du modèle

La qualité d'approximation des modèles par frontières se réduit à la qualité d'approximation de ces frontières. Les premiers critères de mesure de la fidélité de la représentation d'un objet (modèle) par un maillage sont géométriques. Il s'agit d'évaluer

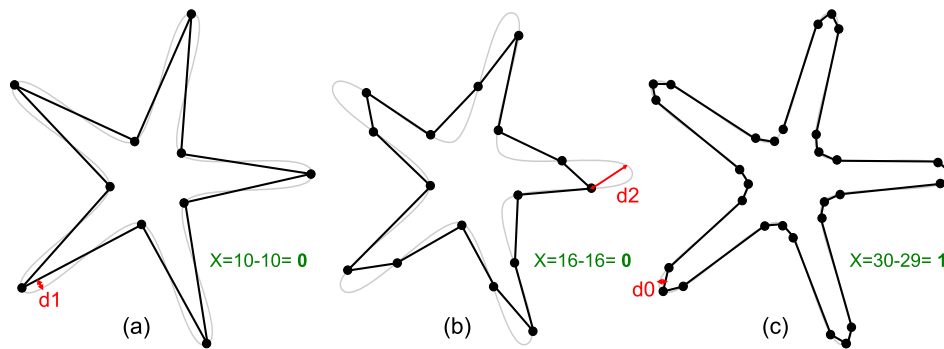


FIGURE 2.8 – QUALITÉ DE L'APPROXIMATION PAR MAILLAGES D'UNE ÉTOILE. Les trois maillages de la même étoile sont trois approximations différentes. Les distances de Hausdorff entre le modèle initial et le maillage ($d_0 < d_1 < d_2$) indiquent que la meilleure approximation géométrique est le maillage (c) dont la caractéristique d'Euler est incorrecte car un segment manque. La topologie des maillages (a) et (b) est correcte mais l'approximation de l'étoile est vraiment mauvaise pour le maillage en (b).

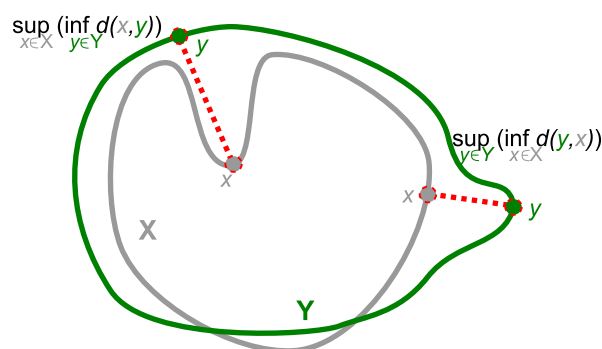


FIGURE 2.9 – DISTANCE DE HAUSDORFF ENTRE DEUX LIGNES X ET Y. $\sup(F)$ désigne la borne supérieure de F et $\inf(F)$ sa borne inférieure.

les différences de propriétés des surfaces du modèle et du maillage, calcul de distance, calcul de différences de normale, de courbure, *etc.* [Frey et George, 1999]. Ces différences peuvent être évaluées localement pour chaque sommet, arête ou triangle, ou bien globalement. Parmi les mesures possibles, la distance de Hausdorff évalue la proximité entre deux modèles. Pour deux objets X and Y elle est définie comme (figure 2.9) :

$$d_H(X, Y) = \max \{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y) \mid \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(y, x) \}.$$

Les critères topologiques évaluent la fidélité du maillage au modèle initial indépendamment de sa géométrie. Dans un modèle par frontières, il s'agit notamment de vérifier que les connexions entre les surfaces restent les mêmes et que la topologie de chacune des surfaces reste la même. Dire que deux domaines ont la même topologie signifie, en général, en informatique graphique, que l'objet initial et son maillage sont homéomorphes (partie 1.2.4). S'il est possible de prouver que le résultat d'un algorithme de maillage est homéomorphe à la surface d'entrée (partie 1.2.4) il n'est pas, à notre connaissance, possible de calculer en pratique s'il l'est. Dans le cas où le modèle initial est maillé, des propriétés plus faibles, comme la caractéristique d'Euler-Poincaré : $\chi = S - A + F$, avec S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, et F le nombre de facettes, ou l'homologie [Boltcheva *et al.*, 2011] peuvent être comparées. Par exemple, l'étoile remaillée sur la figure 2.8c n'est pas correcte, car sa caractéristique d'Euler vaut 1, alors que celle du contour de l'étoile, une ligne fermée, vaut 0.

Qualité du maillage pour les simulations numériques

L'influence d'un maillage sur la précision et l'efficacité des simulations numériques qui visent à résoudre des équations aux dérivées partielles peut être grande. Cette influence dépend de nombreux facteurs parmi lesquels le processus physique simulé, la méthode de discrétisation, les propriétés géométriques du maillage (distances, courbure, angles, *etc.*), voir Knupp [2007], Berzins [1999] et les références citées. La qualité d'un maillage est définie par Knupp [2007] comme l'ensemble des caractéristiques du maillage qui permettent que les calculs liés à une simulation numérique particulière soient efficaces, fidèles à la physique, et obtenus avec la précision demandée. Un maillage est de meilleure qualité si les erreurs qui lui sont imputables plus faibles que pour un autre. Ces erreurs peuvent être évaluées a priori, en contrôlant certaines propriétés du maillage, ou a posteriori, en contrôlant le résultat de la simulation.

En pratique des critères visant à éliminer les éléments créant (a priori) des difficultés pour la simulation numérique d'un processus (supposé isotrope) sont utilisés en génération de maillage, voir par exemple la synthèse de Field [2000]. Ces éléments sont notamment ceux ayant des petits ou grands angles (figure 2.10) ou bien ceux dont la taille des arêtes n'est pas dans l'intervalle souhaité (longueurs minimale et maximale des arêtes).

Pour résumer, définir la qualité d'un maillage indépendamment d'une application n'a pas de sens. Cette application implique le plus souvent une équation aux dérivées partielles et un schéma numérique, et suivant ceux-ci, certaines caractéristiques d'un maillage deviennent désirables ou néfastes. Par exemple, certains codes de calcul

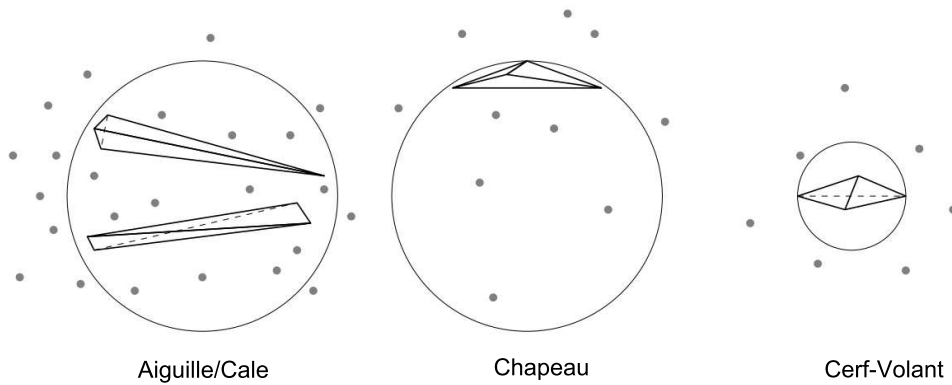


FIGURE 2.10 – TÉTRAÈDRES A PRIORI DE MAUVAISE QUALITÉ, TIRÉ DE [SHEWCHUK \[2012\]](#).

requièrent des éléments quasiment équilatéraux, tandis que d'autres se comporteront mieux avec des éléments anisotropes, déformés selon les directions préférentielles de telle ou telle propriété physique.

2.2.2 Effet négatifs de la géométrie du modèle

Les régions fines, celles fortement courbées, ou bien celles présentant des surfaces s'intersectant à angle faible sont généralement incompatibles avec ces critères de qualité. Un modèle où un angle entre deux surfaces vaut 16 degrés implique qu'au moins un des éléments du maillage aura un angle à 16 degrés (figure 4b).

[Dey et al. \[1997\]](#) définissent les petites caractéristiques du modèle comme les composantes, ou morceaux des composantes, du modèle dont la taille est inférieure à celle qui permettrait de construire un maillage dont les éléments satisfont des critères donnés. Comme ces critères dépendent de l'application et ne sont pas toujours clairement définis, l'identification de ces petites caractéristiques peut être compliquée et est souvent faite par les modeleurs et/ou ingénieurs en charge de la construction du modèle et des simulations [[Quadros et Owen, 2012](#)]. Cependant leur identification automatique et leur prise en compte, avant, pendant, ou après la génération du maillage facilitent l'obtention d'un maillage de qualité.

2.2.3 Gestion des caractéristiques problématiques du modèle

Dans cette partie, nous nous intéressons aux méthodes permettant d'identifier et de gérer les zones complexes pour la génération du maillage d'un modèle défini par frontières, indépendamment de la représentation des surfaces du modèle, de l'objectif dans lequel il est construit, ou de la méthode de maillage utilisée. Les éléments problématiques dans les modèles structuraux seront décrits dans le chapitre 3.

Pré-identification

L'identification des petites caractéristiques dans un modèle par frontières peut être faite à l'aide d'un ensemble de mesures évaluant la proximité entre deux surfaces (distance à la surface médiane), la proximité entre les bords des surfaces (distance à

l'axe médian), la courbure des surfaces, la longueur des bords des surfaces, leur courbure [Quadros et Owen, 2012]. Les arêtes et points anguleux⁷ d'un modèle peuvent également être un défi, ils sont généralement pré-identifiés. Si ce n'est pas le cas, ils peuvent être recalculés, voir Botsch *et al.* [2010].

La complexité du modèle peut également être évaluée localement dans une subdivision du modèle. Andrie [1996] utilise des cercles de rayons variables pour calculer une mesure d'angle à une résolution et évaluer la complexité de lignes géomorphiques. Lindsay *et al.* [2013] proposent de compter pour chaque cellule d'une grille structurée le nombre de matériaux échantillonnés par cette cellule et ses voisins. C'est également sur ce principe de subdivision que fonctionnent les méthodes de calcul de dimension fractale par comptage par boîte⁸, voir par exemple Kruhl [2013].

Simplification du modèle

La solution de gestion la plus radicale des zones complexes est sans doute de les supprimer ou, tout du moins, de les modifier pour les rendre moins complexes avant d'en générer un maillage. En modélisation géologique, la simplification de la géométrie des modèles est souvent nécessaire, mais la littérature se concentre sur le problème de la mise à l'échelle des propriétés des roches, voir la revue de Durllofsky [2005], et est rare à ce sujet, à l'exception de travaux sur les réseaux de fractures [Bourbiaux *et al.*, 2002, Mustapha *et al.*, 2011]. En conception assistée par ordinateur les méthodes sont nombreuses pour simplifier les modèles et supprimer les caractéristiques qui affectent la robustesse d'une simulation. Thakur *et al.* [2009] en font une très bonne synthèse. Les trois stratégies qui nous paraissent pertinentes pour la simplification de modèles structuraux sont les méthodes qui opèrent sur les composantes surfaciques du modèle, les méthodes qui opèrent dans le volume, et les méthodes de réduction de dimension.

Les premières simplifient le modèle ou son maillage par modifications locales [Shephard *et al.*, 1998, Sheffer, 2001, Quadros et Owen, 2012]. La généralisation de l'opération de contraction d'arêtes proposée par Garland et Heckbert [1997] permet de regrouper des sommets proches pour modifier la topologie des modèles. Cette stratégie a notamment été utilisée par Mustapha *et al.* [2011] pour modifier le maillage de réseaux de fractures discrets.

La méthode volumique proposée par Andujar *et al.* [2002] opère sur une subdivision récursive du modèle à l'aide d'un *octree*. Les cellules à l'extérieur et à l'intérieur du modèle sont identifiées et le modèle est reconstruit à partir des cellules restantes. Différents niveaux de simplification sont obtenus pour différentes profondeurs d'arbres. Le fait de considérer le modèle dans sa globalité permet d'analyser localement les relations entre ses différentes composantes.

La réduction de dimension d'un modèle est une technique de simplification utilisée en conception assistée par ordinateur. Par exemple, une barre cylindrique (3D) peut être remplacée par une ligne (1D) sans impact significatif sur la précision de certaines simulations [Thakur *et al.*, 2009]. Les modèles résultants peuvent contenir des composantes dont la dimension intrinsèque varie. Les maillages à générer sont

7. *sharp features*

8. *box-counting*

mixtes, ils contiennent des éléments de dimensions différentes (figure 1.5c), *e.g.* [Robinson *et al.*, 2011]. Il faut également transférer correctement les propriétés associées aux composantes du modèle. En géomodélisation, les failles, qui sont en réalité des volumes d'endommagement des roches, sont modélisées par des surfaces auxquelles sont associées des propriétés spécifiques comme les multiplicateurs de transmissibilité [Manzocchi *et al.*, 1999].

Prise en compte dans la génération du maillage

Pour tenir compte des zones compliquées à mailler, la plupart des méthodes de maillage dépendent d'une fonction de taille des éléments pour obtenir des éléments d'aspect satisfaisant. Cette fonction dépend généralement des mesures faites lors d'une pré-identification des zones potentiellement problématiques sur le modèle d'entrée, mesures de courbure, de déviation des normales, de distance à l'axe médian, voir par exemple Frey et George [1999] et Quadros *et al.* [2004]. Outre l'augmentation du nombre d'éléments du maillage, il est également possible de modifier leur forme et leur type pour mieux capturer la géométrie d'un modèle et/ou diminuer les erreurs de simulations numériques. A nombre d'éléments constant, l'utilisation d'éléments anisotropes peut permettre de mieux respecter la géométrie d'un domaine et de minimiser l'erreur d'approximation d'une fonction donnée. Une seconde possibilité est d'utiliser des éléments de types différents selon la zone du modèle, la troisième est d'utiliser des éléments de degré supérieur (courbes). Leur génération est cependant plus délicate, voir par exemple Luo *et al.* [2004].

Post-traitement

Quand les zones compliquées ne sont ni pré-traitées, ni prises en compte lors de la génération du maillage, elles peuvent être identifiées après sa génération en évaluant l'adéquation entre les éléments générés et les critères requis [Dey *et al.*, 1997]. L'avantage est que tous les types de complications possibles sont identifiés, l'inconvénient est qu'il faut générer un premier maillage volumique. Ce maillage est ensuite modifié localement et itérativement jusqu'à ce qu'il se conforme à ces critères. Ce raisonnement très général est celui des méthodes d'optimisation et d'adaptation de maillage qui modifient itérativement le maillage jusqu'à diminuer l'erreur de calcul sous un seuil admissible [Frey et George, 1999, Loseille, 2008].

2.3 Maillage volumique à base de tétraèdres

Dans les deux dernières parties de ce chapitre, nous passons en revue les méthodes de génération de maillages simpliciaux volumiques et surfaciques. Nous commençons par décrire les grandes méthodes de génération de maillage à base de tétraèdres, qui sont plus simples à appréhender, car la dimension de l'objet à mailler est la même que celle de l'espace dans lequel il est plongé, à savoir trois.

Après les grandes méthodes de maillage tétraédrique, nous détaillons des méthodes de maillage plus particulièrement reliées aux travaux menés durant cette thèse : le maillage de modèles multi-matériaux et la génération de maillages hybrides majoritairement composés de tétraèdres. Pour la génération d'autres types de

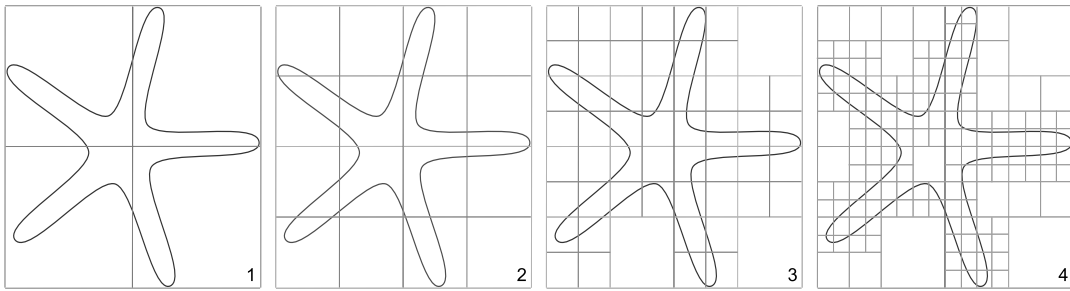


FIGURE 2.11 – SUBDIVISIONS RÉCURSIVES DE LA BOÎTE CONTENANT L'ÉTOILE.

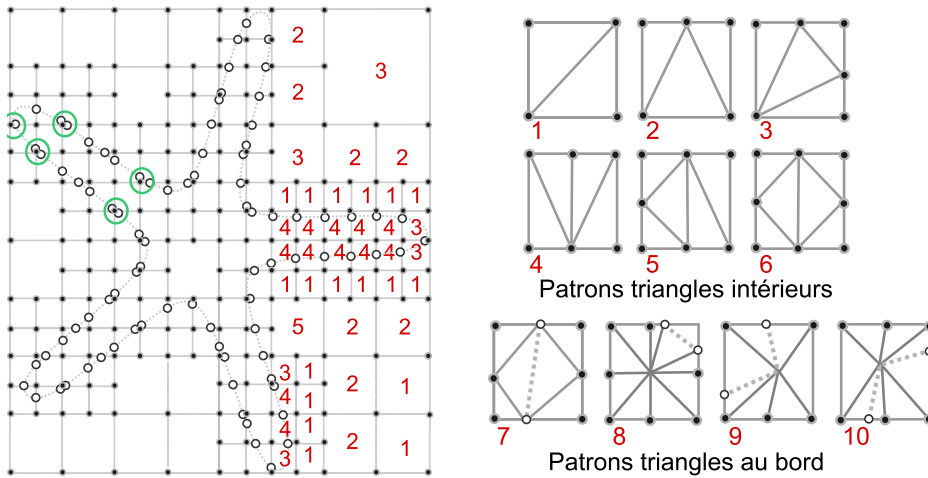


FIGURE 2.12 – PATRONS POUR LA CONSTRUCTION D'UN MAILLAGE DEPUIS UNE SUBDIVISION. Le maillage final est construit à partir des sommets des cellules (points noirs) et des points d'intersection entre l'étoile et les cellules (points blancs). A chaque cellule est associé un des dix patrons de découpage en triangles. Pour éviter de créer des triangles de mauvaise qualité les sommets proches sont regroupés (cercles verts).

maillages, le lecteur est invité à se référer aux synthèses de [Thompson *et al.* \[1999\]](#), [Frey et George \[1999\]](#), [Baker \[2005\]](#) et [Farmer \[2005\]](#).

2.3.1 Maillages tétraédriques

Les méthodes de génération de maillages tétraédriques sont très nombreuses. Elles peuvent être reliées à l'une des trois grandes approches suivantes : les méthodes fondées sur une subdivision de l'espace (*octree*), celles par avancement de front et celles dites Delaunay.

Subdivision de l'espace

Le principe des méthodes fondées sur une subdivision de l'espace est de découper une boîte englobante du modèle en cellules de tailles variables, puis de construire les tétraèdres du maillage en subdivisant ces cellules (voir par exemple [\[Shephard et Georges, 1991\]](#)). Ce découpage utilise une structure hiérarchique d'arbres, d'où le nom de ces méthodes en anglais, *octree* (3D) et *quadtrees* (2D). Une boîte englobante

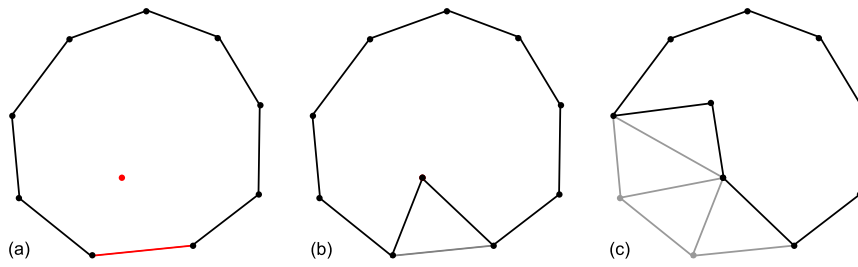


FIGURE 2.13 – PRINCIPE DE MAILLAGE PAR AVANCÉE DE FRONT. (a) Le front initial est un maillage de la frontière du domaine. Un segment est choisi et le point optimal pour former un triangle avec ce segment est déterminé. (b) Une fois le triangle construit le front est mis à jour. (c) Front après construction de trois autres triangles.

du modèle est découpée en huit (quatre en 2D) cellules, puis chaque cellule est récursivement découpée en huit (quatre) jusqu'à un critère d'arrêt donné (figure 2.11). Ce critère d'arrêt prend en compte la taille d'élément souhaitée et un nombre maximal d'intersections entre les bords du modèle et les cellules. Souvent, l'intersection de chaque feuille avec le bord du modèle est tenue d'avoir une seule composante connexe. Pour contrôler les variations des tailles des cellules, les différences de niveaux entre cellules adjacentes sont limitées à un facteur deux, voir les subdivisions en ligne pointillée ajoutées sur la figure 2.12. Les sommets des tétraèdres du maillage final sont donnés par l'ensemble des sommets des cellules de l'arbre auxquels sont ajoutés les intersections entre les cellules et la frontière du domaine et, éventuellement, les sommets de la discrétisation initiale de la frontière (figure 2.12). Les tétraèdres (ou triangles) du maillage final sont construits en subdivisant les cellules de l'arbre selon des patrons prédéfinis. En deux dimensions, il y a dix patrons (figure 2.12) ; en trois dimensions, le nombre de configurations est très grand, et des stratégies plus générales de découpe des octants sont mises en place.

Ces méthodes sont relativement robustes et fiables [Frey et George, 1999]. Elles nécessitent de mettre en place des stratégies pour améliorer la qualité des éléments proche des frontières, par exemple regrouper les sommets trop proches l'un de l'autre. Elles ne requièrent pas que les frontières du domaine soient discrétisées, leur maillage étant un sous-produit du maillage du modèle. Si elles le sont, le maillage généré n'est pas conforme à leur discrétisation. Notons que, récemment, des méthodes de type octree proposant des garanties sur les angles dièdres des tétraèdres construits ont été proposées [Labelle et Shewchuk, 2007, Wang et Yu, 2012].

Avancée de front

La stratégie des méthodes par avancée de front (ou frontales) est de construire le maillage élément par élément en avançant progressivement dans le domaine à mailler depuis sa frontière (figure 2.13) [Löhner et Parikh, 1988]. Tant que le front de maillage n'est pas vide, un élément est construit à partir d'un de ses segments (2D) ou triangles (3D). Ces méthodes déterminent de manière heuristique les points à créer et les éléments à construire, ce qui permet d'obtenir des éléments qui ont la taille et la forme souhaitée. Par construction, le maillage respecte la frontière du domaine, et la qualité des éléments le long de cette frontière est très bonne, au contraire des méthodes par subdivision ou de type Delaunay. La construction d'un élément implique

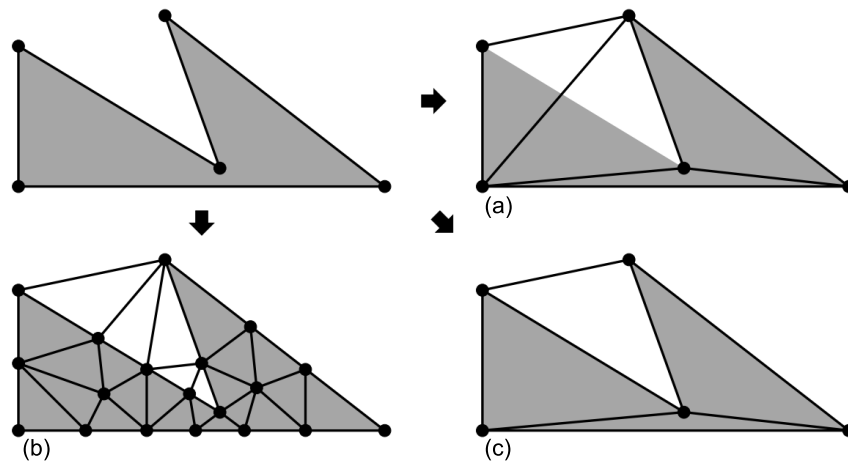


FIGURE 2.14 – MAILLAGES DE TYPE DELAUNAY, CONTRAINT ET PAR RAFFINEMENT, TIRÉ DE SHEWCHUK [2012]. (a) La triangulation de Delaunay des sommets du bord de l'objet ne contient pas un des segments de ce bord. (b) La triangulation de Delaunay obtenue en insérant des points de Steiner. (c) La triangulation de Delaunay contrainte contient ce segment.

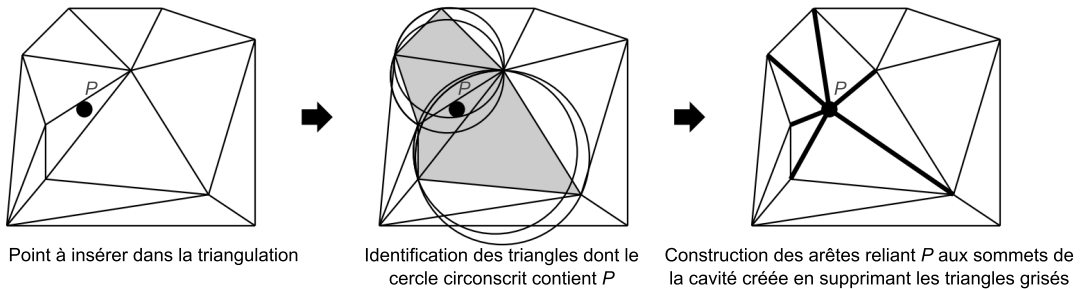


FIGURE 2.15 – INSERTION D'UN POINT DANS UNE TRIANGULATION DE DELAUNAY, ALGORITHME DE BOWYER-WATSON, MODIFIÉ D'APRÈS SHEWCHUK [2012].

de (1) sélectionner un élément du front selon un critère spécifique, (2) déterminer un point optimal pour construire un élément du maillage final basé sur celui du front, (3) chercher si un point existant du maillage peut remplacer ce point optimal, (4) former l'élément, (5) tester si cet élément est valide et changer le point optimal si ce n'est pas le cas, et enfin, (6) mettre à jour le front. La convergence des méthodes par avancée de front n'est pas garantie en trois dimensions, mais des stratégies efficaces peuvent être mises en place pour l'obtenir. Par exemple, le logiciel NetGen⁹ implémente une méthode de ce type [Schöberl, 1997].

Delaunay

Le troisième grand type de méthodes de génération de maillages tétraédriques est celui des méthodes fondées sur la triangulation de Delaunay (partie 1.1.2). Leur principe est de construire la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points et de modifier cet ensemble de points et/ou cette triangulation pour atteindre les critères de qualité souhaités, voir également George et Borouchaki [1997], Cheng [2013] et le cours de Shewchuk [2012]. Elles sont fondées sur la procédure qui permet d'insérer un

9. <http://www.hpfem.jku.at/netgen/>

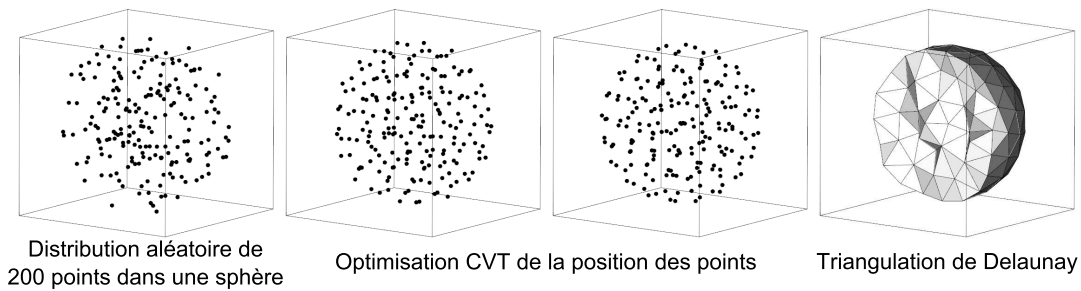


FIGURE 2.16 – PRINCIPE DU MAILLAGE PAR OPTIMISATION VORONOÏ-DELAUNAY.

point dans une triangulation de Delaunay en gardant une triangulation de Delaunay (figure 2.15).

Les méthodes de type Delaunay contraint visent avant tout à reconstituer la discrétisation des frontières du domaine d'entrée dans le maillage généré (figure 2.14a). Les sommets de la frontière du modèle sont insérés dans le maillage d'une boîte englobante du modèle. Il faut ensuite recouvrir, point très délicat en trois dimensions, les éléments de la frontière qui ne sont pas dans la triangulation de Delaunay¹⁰. Des sommets supplémentaires sont ensuite insérés dans le modèle jusqu'à ce que des critères de taille et d'aspect des éléments soient remplis [George *et al.*, 1991, Borouchaki *et al.*, 1997, Shewchuk, 2002a, Si et Gärtner, 2011, Si, 2010]. Des logiciels comme Tetgen¹¹ et MG-Tetra¹² permettent d'obtenir des tétraédrisations contraintes de modèles définis par des surfaces triangulées conformes.

Le principe des méthodes de type raffinement de Delaunay, est d'insérer itérativement des sommets au centre des sphères circonscrites aux tétraèdres qui ne satisfont pas un critère donné [Chew, 1997, Shewchuk, 1998, Cheng *et al.*, 2005, Shewchuk, 2002b, Cohen-Steiner *et al.*, 2004, Rineau et Yvinec, 2007, Si, 2008]. Souvent ce critère est fonction du ratio entre le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre et la longueur de sa plus courte arête, car il est alors prouvé que, sous certaines conditions, l'algorithme se termine. Ces méthodes fournissent des garanties sur les angles dièdres minimaux dans le maillage final. Les différences entre algorithmes sont sur la gestion du bord de l'objet dont la discrétisation est en général modifiée. Gmsh¹³, TetGen, NetGen et la librairie CGAL¹⁴ implémentent ce type de méthode. La qualité des maillages obtenus est a priori relativement bonne, en revanche le contrôle du nombre de sommets ajouté est difficile et les frontières du domaine sont remaillées.

Optimisation Voronoï-Delaunay

Une seconde stratégie pour générer des maillages de type Delaunay consiste à déterminer les positions de tous les sommets du maillage final avant d'en construire la triangulation de Delaunay [Du et Wang, 2003, Alliez *et al.*, 2005a, Tournois *et al.*,

10. Ce maillage n'est plus alors dans la plupart des cas strictement Delaunay.

11. <http://wias-berlin.de/software/tetgen/>

12. <http://www.meshgems.com/volume-meshing-meshgems-tetra.html>

13. <http://geuz.org/gmsh/>

14. <http://www.cgal.org/>

2009, Tournois, 2009, Dardenne *et al.*, 2009, Lévy et Liu, 2010]. Dans un premier temps un nombre donné de points est distribué pour échantillonner la surface ou le volume à mailler, puis les coordonnées de ces points sont optimisées afin de minimiser une fonction objectif, enfin la triangulation de Delaunay des points est construite et donne le nouveau maillage (figure 2.16). Cette fonction objectif est dérivée de celle du diagramme de Voronoï barycentrique (section 1.3.1) et/ou de la notion de triangulation de Delaunay optimale [Chen et Xu, 2004].

Les deux caractéristiques qui distinguent cette approche des méthodes plus classiques de maillage sont que (1) le nombre de sommets est fixé et que (2) la qualité et la forme des tétraèdres sont globalement contrôlées par la fonction objectif. Cependant leur coût de calcul est grand devant celui des méthodes décrites précédemment. Remarquez que le fait de considérer le diagramme de Voronoï rapproche ces méthodes de Delaunay des méthodes de type *octree*. En effet, le diagramme de Voronoï est une subdivision de l'espace, et le patron pour construire le maillage tétraédrique est donné par la relation duale Voronoï-Delaunay (partie 1.1.2). De plus, comme pour les méthodes *octree*, le maillage des surfaces frontières du domaine peut être obtenu en même temps que le maillage volumique avec la triangulation de Delaunay restreinte (partie 1.2.3).

2.3.2 Maillage de modèles multi-matériaux

Il y a, dans un modèle géologique, plusieurs unités de roches et donc plusieurs régions. L'objectif est de mailler, de manière conforme, ces régions, les surfaces qui les délimitent et les lignes d'intersection entre ces surfaces, c'est-à-dire que les tétraèdres de part et d'autre d'une surface doivent partager la même facette triangulaire et les triangles de part et d'autre d'une ligne de contact doivent partager le même segment.

Avec une méthode de génération de maillage contraint, c'est-à-dire qui génère un maillage strictement conforme à une discrétisation des frontières donnée, les régions du modèle peuvent être maillées indépendamment (figure 2.17). Les méthodes ne générant pas un maillage contraint sont beaucoup moins robustes. Lepage [2003], Prévost *et al.* [2005] proposent d'utiliser une version modifiée d'une méthode de raffinement de Delaunay pour mailler les surfaces des modèles structuraux. Les maillages obtenus sont caractéristiques de ce type de méthode, ils sont très raffinés dans les coins des modèles.

Les méthodes développées en informatique graphique ne s'intéressent généralement pas au problème de surfaces non-variétés ou aux modèles multi-matériaux. Celles qui le font explicitement sont développées pour des applications médicales. L'objectif est de générer des maillages volumiques à partir d'images numériques 3D (scanner, IRM) afin de réaliser des simulations de propagation d'ondes, de chaleur, *etc.* La donnée d'entrée n'est alors pas un modèle par frontière. La méthode proposée par Sullivan *et al.* [1997] est basée sur une subdivision par une grille, il en est de même pour les travaux plus récents de Zhang *et al.* [2010], Mohamed et Davatzikos [2004]. Des méthodes de type raffinement de Delaunay [Boltcheva *et al.*, 2009, Dey et Levine, 2009], ou d'optimisation Voronoï [Dardenne *et al.*, 2009, Dardenne, 2009] ont également été proposées.

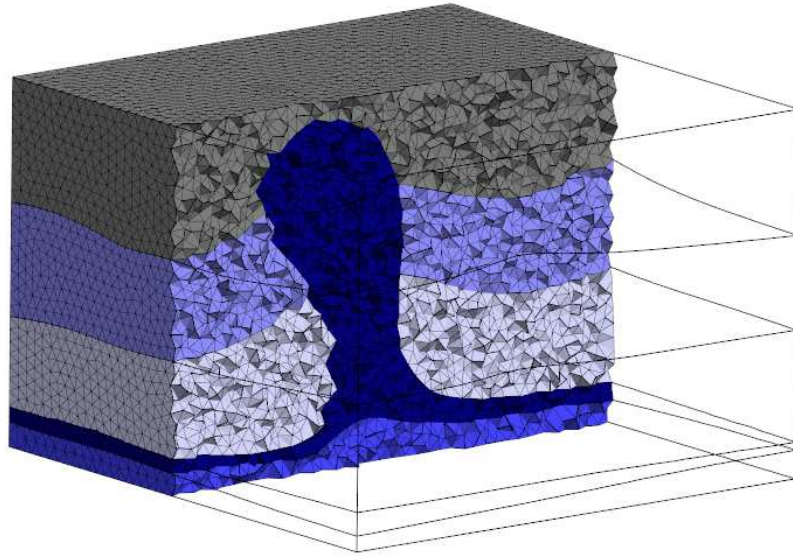


FIGURE 2.17 – TRANCHE SOLIDE DANS UN MAILLAGE TÉTRAÉDRIQUE D'UN MODÈLE DE DIAPIR. Le maillage de chaque région est contraint au maillage des surfaces triangulées définissant le modèle. Les cinq régions ont été maillées indépendamment les unes des autres avec TetGen¹⁵.

2.3.3 Maillage hybride tétraèdres-prismes

En simulation d'écoulements fluides, les zones d'intérêts, comme celle entourant la surface d'un avion, sont maillées avec des couches de prismes ou de tétraèdres. La plupart des méthodes qui construisent ces maillages en couche limite¹⁶ utilisent une stratégie de surface (ou de facette) qui avance dans le domaine à mailler et proposent des solutions pour obtenir un maillage valide quand la surface d'entrée est localement concave ou anguleuse (voir *e.g.* [Garimella et Shephard, 2000, Sahni *et al.*, 2008, Dyedov *et al.*, 2009, Ito *et al.*, 2011]). La zone à remplir avec des prismes est déterminée depuis la surface et une hauteur de prisme est généralement prédéterminée. Une exception notable est le travail présenté par Dyedov *et al.* [2009], où une méthode de *face offsetting* [Jiao, 2007] est adaptée aux géométries rencontrées en biologie. Cette méthode produit des maillages hybrides de très bonne qualité dans lesquels l'épaisseur des prismes est adaptée à une mesure locale de la taille des objets. Marchandise *et al.* [2013] tirent parti de la géométrie tubulaire des vaisseaux sanguins. Loseille et Löhner [2013] proposent d'utiliser des stratégies de modifications locales du maillage pour générer des couches de prismes.

Pour mailler l'intérieur de modèles, des approches complémentaires ont été développées. Garimella et Shephard [1999] raffinent un maillage isotrope tétraédrique quand le nombre de tétraèdres séparant les facettes triangulaires sur deux côtés opposés du modèle est inférieur à une valeur donnée. Luo *et al.* [2010] estiment l'axe médian de la surface bordant le modèle pour identifier les sections fines. Pour construire les prismes, ils dupliquent les triangles d'un des côtés du modèle.

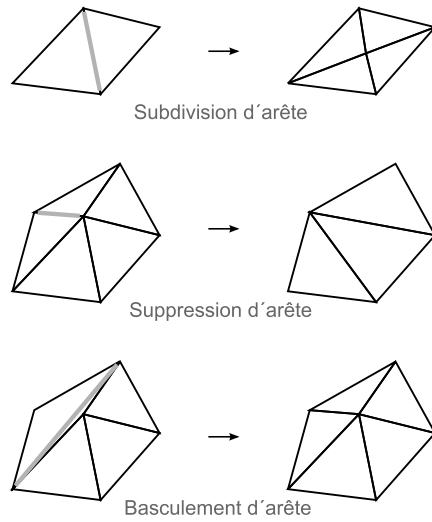


FIGURE 2.18 – OPÉRATIONS LOCALES DE REMAILLAGE DE SURFACE.

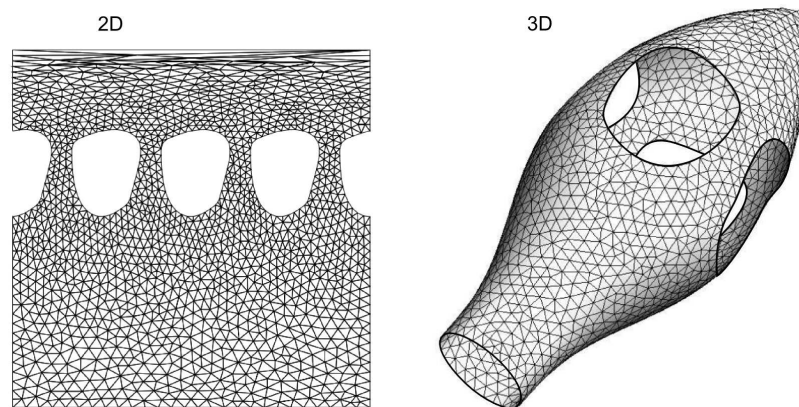


FIGURE 2.19 – MAILLAGE DE SURFACE DANS UN ESPACE PARAMÉTRIQUE, MODIFIÉ D'APRÈS [GEUZAIN ET REMACLE \[2009\]](#). Le maillage est généré dans le plan sur une projection de la surface.

2.4 Maillage surfacique à base de triangles

Les différentes représentations possibles des surfaces (implicite, paramétrique, discrétisée) et la diversité des applications les utilisant pour représenter des objets expliquent le grand nombre de méthodes pour les mailler. Mailler une surface signifie en générer un maillage valide ; remailler une surface sous-entend que cette surface est déjà maillée et décrite sous forme discrète. Dans ce cas, le maillage initial peut être modifié afin d'obtenir un second maillage ayant les propriétés souhaitées. Ces modifications itératives, déplacement des sommets ou opérations sur les arêtes du maillage (figure 2.18), sont réalisées tant que des critères de qualité donnés ne sont pas atteints (écart entre les éléments du maillage et la surface d'entrée, métrique à respecter, *etc.*, voir par exemple [Frey, 2000, Geuzaine et Remacle, 2009, Botsch *et al.*, 2010]).

Le maillage des surfaces dans un espace tridimensionnel a la particularité de considérer des objets de dimension inférieure à celle de l'espace. Les méthodes paramétriques opèrent sur une projection de la surface dans le plan alors que les méthodes directes opèrent directement dans l'espace 3D. Lorsqu'une paramétrisation adéquate de la surface est disponible, la robustesse des méthodes paramétriques est sans doute la meilleure car, en deux dimensions, les méthodes de maillage Delaunay et par avancement de front sont garanties de terminer. La détermination d'une projection peut elle-même être un problème compliqué si la surface initiale est discrétisée ou si elle n'est pas un ouvert. Il est alors possible d'adapter aux surfaces des méthodes 2D comme l'avancement de front [Löhner, 1996, Sifri *et al.*, 2003, Peyré et Cohen, 2006, Aubry *et al.*, 2011] et raffinement de Delaunay (2.4.2), ou bien d'utiliser des méthodes dédiées.

2.4.1 Subdivision de l'espace

Méthodes octree

Nous avons vu dans la partie 2.3.1 que les méthodes de maillage tétraédrique fondées sur une subdivision de l'espace 3D de type *octree* ou diagramme de Voronoï génèrent une discrétisation des frontières du modèle, qui est, en quelque sorte, un produit du maillage volumique. Le bord de l'étoile (figure 2.12) et celui de la sphère (figure 2.16) sont maillés lors du maillage leur intérieur. Que ce soit pour mailler des surfaces ou un volume, la subdivision *octree* est la même. Les points d'intersections entre les coins, arêtes, faces des cellules avec la surface (plus des points particuliers) sont ensuite reliés pour créer des arêtes et des boucles (contour de l'intersection d'une cellule avec la surface) et construire le maillage final [Shephard et Georges, 1991].

Diagramme de Voronoï restreint barycentrique

Pour les méthodes de maillage surfacique utilisant une subdivision de type diagramme de Voronoï barycentrique, c'est l'intersection entre les cellules et le diagramme de Voronoï qui doit être barycentrique (partie 1.3.2). L'optimisation de la subdivision du volume du modèle n'est pas nécessaire. Les sommets du maillage final sont les sites optimisés pour obtenir un diagramme de Voronoï barycentrique restreint (équation 1.6).

Ces méthodes permettent de générer des maillages d'a priori bonne qualité. [Du et al. \[2003\]](#) définissent la notion de diagramme de Voronoï barycentrique contraint où les sites sont contraints à être sur la surface, et donnent des résultats de maillage isotrope adaptatif pour des surfaces définies par une fonction $f(x, y, z)$. [Alliez et al. \[2005b\]](#) remaillent des surfaces triangulées en paramétrisant globalement les surfaces, [Surazhsky et al. \[2003\]](#) en les paramétrisant localement. [Yan et al. \[2009\]](#), [Liu et al. \[2009\]](#) calculent l'intersection du diagramme de Voronoï avec les surfaces en 3D et optimisent la fonction objectif donnée par l'équation 1.6. Cette approche est étendue dans [Lévy et Liu \[2010\]](#), pour gérer les caractéristiques anguleuses des modèles sans identification préalable et contrôler l'écartement entre les sites et les surfaces d'entrée, et dans [Lévy et Bonneel \[2013\]](#) pour générer des maillages anisotropes. [Valette et Chassery \[2004\]](#), [Valette et al. \[2008\]](#) utilisent une version discrète des diagrammes de Voronoï pour diminuer la résolution d'un maillage.

La difficulté principale pour les méthodes de maillage par subdivision de l'espace, est, qu'a priori, toutes les configurations sont possibles pour les intersections entre une cellule et le modèle. C'est pour éviter des configurations trop compliquées que les cellules sont raffinées jusqu'à avoir des intersections en une composante connexe et, pour les méthodes de type Voronoï, vérifier par la même occasion la propriété de la boule topologique (partie 1.2.4).

2.4.2 Maillage de surfaces avec garanties

Les méthodes de raffinement de Delaunay ont été dès leurs débuts utilisées pour mailler directement des surfaces en trois dimensions [[Chew, 1993](#)]. Comme pour le maillage tétraédrique, des travaux théoriques fournissent des garanties sur la topologie du maillage et/ou sur la qualité des éléments. Une partie de ces méthodes considèrent séparément l'échantillonnage de la surface et la construction des triangles, ceci relie la génération de maillage de surfaces en 3D à un problème de reconstruction de surface [[Hoppe et al., 1992](#), [Boissonnat et Cazals, 2000](#)]. C'est dans ce cadre qu'a été introduite la notion d' ϵ -échantillonnage (partie 1.2.4) par [Amenta et Bern \[1999\]](#) qui donne que, lorsque l'échantillonnage par les sommets est assez dense vis à vis de la distance à l'axe médian, ces sommets ont la propriété de la boule topologique (partie 1.2.4) pour la surface initiale. De la propriété de la boule topologique sont dérivés des travaux visant à relâcher les contraintes pour obtenir un bon échantillonnage et à considérer des surfaces plus générales. À partir de ces travaux sont développés des algorithmes de remaillage Delaunay à garanties, voir par exemple [[Boissonnat et Oudot, 2005](#), [Cheng et al., 2007](#)]. Des travaux plus récents s'intéressent tout particulièrement au maillage de surfaces implicites [[Cheng et al., 2009](#), [Dey et Levine, 2009](#), [Gelas et al., 2009](#), [Dey et al., 2010](#)]

2.5 Discussion

Nous venons de voir que les maillages ont principalement deux objectifs en géomodélisation : représenter les objets géologiques et réaliser des simulations numériques ; le tout dans le but de comprendre l'organisation et le comportement du sous-sol. Les maillages ne sont pas l'apanage de la géomodélisation. Si leurs domaines d'utilisation sont extrêmement variés, la question de leur génération intéresse des communautés

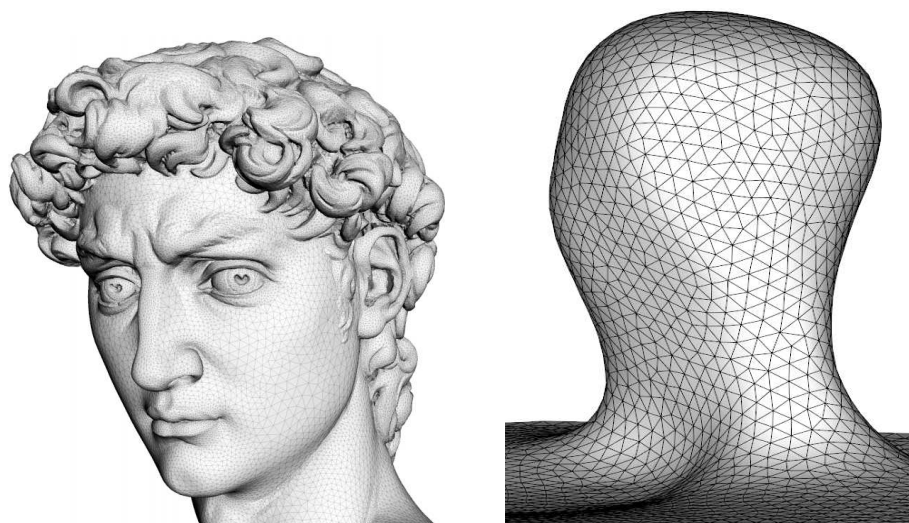


FIGURE 2.20 – MODÈLE DAVID MAILLÉ PAR VALETTE *et al.* [2008] ET MODÈLE SYNTHÉTIQUE D'UN DIAPIR DE SEL.

plus restreintes, ce sujet faisant intervenir des compétences en informatique, géométrie, géométrie algorithmique, et simulation numérique.

Les méthodes développées par la communauté d'informatique graphique ou de géométrie informatique le sont généralement dans un objectif de modélisation de surfaces. Les objectifs des méthodes de maillage développées pour des les simulations physiques sont d'obtenir des résultats de simulation fiables, assez précis, et ce, rapidement. Les objectifs des maillages en géomodélisation sont partagés entre ces deux aspects, d'une part modéliser les interfaces entre les volumes rocheux, d'autre part simuler le comportement du sous-sol. Les surfaces étudiées en informatique graphique sont plus simples d'un point de vue topologique que les modèles structuraux géologiques, généralement elles sont variétés et n'ont pas de bord, et plus compliquées d'un point de vue géométrique, elles peuvent être très courbées et, en comparaison des cheveux bouclés du modèle David (figure 2.20), les surfaces géologiques sont plates et lisses. Les similarités sont plus grandes avec les modèles étudiés en conception assistée par ordinateur¹⁷.

17. L'acronyme anglais CAD, pour Computer Aided Design, est dans le nom du logiciel de géomodélisation GOCAD.

Chapitre 3

Contribution : Éléments d'évaluation de la complexité géométrique des modèles structuraux

Un article correspondant aux travaux présentés dans ce chapitre est en préparation pour le journal *Mathematical Geosciences*. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Guillaume Caumon, Charline Julio, Pablo Mejia et Arnaud Botella.

Résumé

Dans ce chapitre, nous proposons d'analyser les sources de complexité géométrique dans les modèles structuraux à une résolution donnée. Nous ne fournissons pas de critère définitif de complexité, mais décrivons de manière systématique les éléments qui contribuent à la complexité d'un modèle structural à l'aide de mesures des connexions entre les éléments du modèle (régions, surfaces, lignes et coins) et de la géométrie de ces composantes. Les métriques proposées sont calculées sur un ensemble de 9 modèles synthétiques.

3.1 Motivations

Le terme complexe est souvent invoqué pour qualifier les modèles construits ou analysés avec telle ou telle méthode. Cependant, la notion de complexité, dans le sens de quelque chose qui est difficile à comprendre, difficile à réaliser, ou bien inhabituel, est extrêmement subjective. Elle dépend de la personne qui porte ce jugement, de sa formation et de son expérience, des moyens mis à sa disposition, et avant tout, du problème qu'elle a à résoudre. Un géologue structuraliste pourra considérer complexe la réactivation de failles normales en failles inverses [Sassi *et al.*, 1993], alors que cela aura moins d'importance pour l'ingénieur réservoir qui considérera complexes les réservoirs où les réseaux de failles et de fractures ont un contrôle prépondérant sur le piégeage et la production d'hydrocarbures [Jolley *et al.*, 2007].

Cette subjectivité de la complexité rend difficile la comparaison des modèles structuraux, ce qui, plus ou moins directement, rend difficile la comparaison des méthodes développées en géomodélisation, comparaisons qui sont pourtant essentielles pour la recherche. Nous nous restreignons ici à la complexité des modèles structuraux du point de vue de la génération de maillage, étape commune à une grande partie des applications en géomodélisation et tentons d'apporter des éléments pour évaluer la complexité relative de deux modèles, estimer la résolution minimale d'un maillage d'un modèle et identifier les zones problématiques d'un modèle à une résolution donnée. La complexité est alors liée à la géométrie et au niveau de détail du modèle, dont dépend la faisabilité d'un maillage à une résolution donnée localement ou globalement.

Nous avons vu dans la partie 2.2.3, différentes mesures utilisées pour caractériser les zones complexes des modèles pour diverses applications, certains auteurs proposant même des calculs de complexité géométrique [Quadros *et al.*, 2004] ou de la complexité de la génération d'un maillage hexaédrique [White *et al.*, 2005]. Après avoir analysé les sources de complexité géométrique dans les modèles géologiques (partie 3.2), nous proposons des mesures globales et locales de cette complexité (partie 3.3) et les évaluons sur des modèles synthétiques (parties 3.4 et 3.5)

3.2 Sources de complexité

Avant de donner les sources de complexité dans un modèle, nous précisons le vocabulaire employé dans ces travaux. Que ce soit pour les régions, les surfaces ou les lignes du modèle par frontière, nous considérons indépendamment les composantes connexes des entités géologiques constitutives du modèle. Chaque région volumique est complètement définie par l'ensemble des surfaces qui constituent son bord (figure 3.1). Ces surfaces sont elles-mêmes définies par leurs bords, des lignes, qui sont, soit à l'intersection de plusieurs surfaces, soit sur le bord d'une seule de ces surfaces. Les lignes ouvertes sont délimitées par deux points que nous appellerons coins. Chaque région, surface, ligne ou coin, correspond à une seule entité géologique, une entité géologique pouvant être divisée en plusieurs régions, surfaces, lignes, et coins (figure 3.1). Pour qu'un modèle soit valide, ses éléments¹ doivent s'intersecter uniquement au niveau de leurs frontières et les éléments de même dimension doivent partager la même géométrie le long de ces frontières, leurs maillages doivent être conformes.

3.2.1 Nombre d'objets géologiques

La complexité d'un modèle dépend principalement du nombre de couches qu'il contient ainsi que du nombre de discontinuités les affectant. Lors de la construction d'un modèle, la cohérence de chacun de ces objets doit être vérifiée, ce qui influence directement le temps nécessaire à la construction d'un modèle. Le nombre de régions volumiques détermine également le nombre de régions stationnaires à utiliser pour les modèles pétrophysiques, et donc le travail nécessaire lors de la modélisation géostatistique. De plus, chaque surface du modèle est susceptible de définir des compartiments

1. Nous employons aussi le terme de composante.

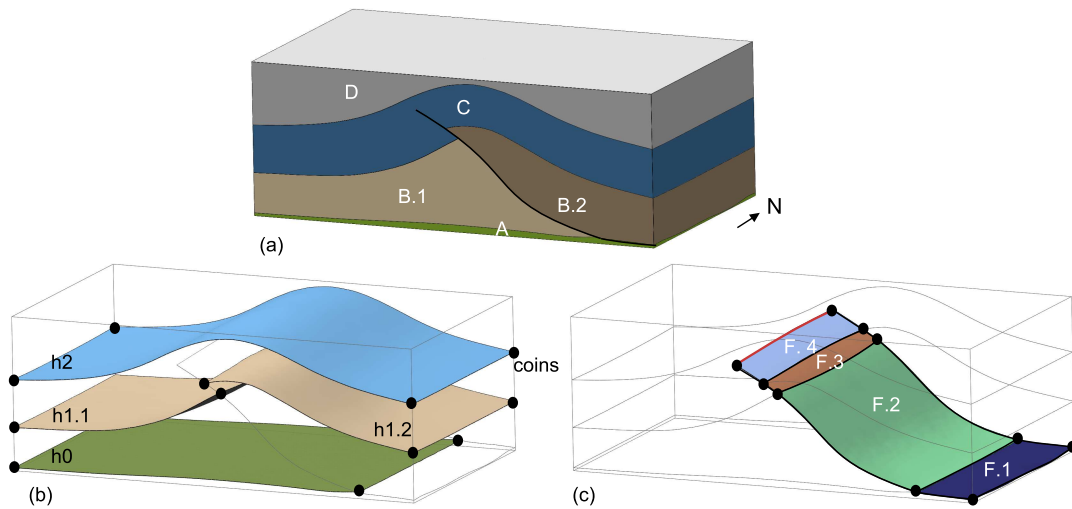


FIGURE 3.1 – ÉLÉMENTS D'UN MODÈLE STRUCTURAL. Le modèle est constitué de quatre couches (A, B, C, D) séparées par trois horizons (h0, h1, h2) et découpées par une faille F. (a) La couche B est découpée en deux régions B.1 et B.2. (b) L'horizon h1 a deux composantes connexes surfaciques, que nous appelons surfaces. (c) La faille a quatre surfaces numérotées de 1 à 4. Chacune de ces surfaces est délimitée par quatre lignes, elles-mêmes délimitées par des coins. La ligne rouge est sur le bord d'une seule surface F4.

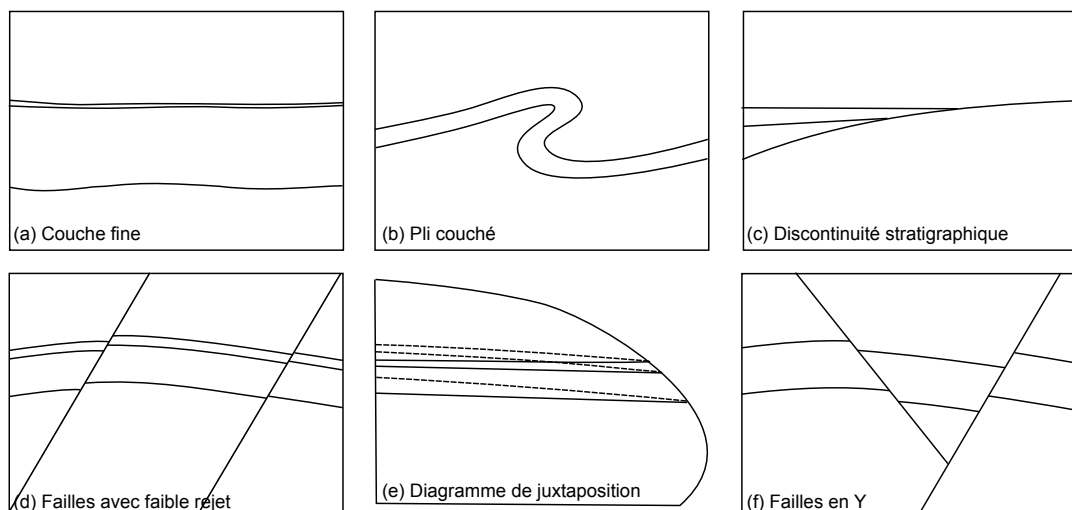


FIGURE 3.2 – QUELQUES SOURCES DE COMPLEXITÉ DANS LES MODÈLES STRUCTURAUX. Le diagramme de juxtaposition (f) est une vue sur la surface de faille des traces des horizons recoupés par cette faille.

dans le domaine, ayant ainsi souvent un impact de premier ordre sur les écoulements fluides et les processus géophysiques.

3.2.2 Interactions entre les objets

La distribution dans le modèle des objets géologiques, c'est à dire leur densité, a des conséquences directes sur les étapes de modélisation, de maillage et de simulation. Cette densité est liée à la géométrie des objets géologiques, mais également aux intersections entre les couches du modèle avec les failles et les autres non-conformités. Les éléments simples interagissent faiblement avec les autres et sont plus faciles à modifier ou à supprimer du modèle, au contraire de ceux, qui, tels les discontinuités sont plus difficiles à supprimer.

Couches stratigraphiques conformes

Des couches conformes², mais localement très fines peuvent être problématiques. En effet, la validité de la couche (pas d'intersection entre les horizons supérieur et inférieur) est plus difficile à vérifier dans le cas général (figure 3.2a). De plus, les déformations affectant les couches peuvent modifier les épaisseurs et courbures des horizons. Certaines structures comme les plis couchés (figure 3.2b) sont plus complexes que les plis simples à modéliser, puisqu'ils ne peuvent pas être représentés avec une seule fonction de la position horizontale, ce qui pose problème pour certaines applications.

Non-conformités stratigraphiques

Les relations verticales entre les couches sont contrôlées par les non-conformités (érosions, onlaps) qui sont très courantes dans les réservoirs stratigraphiques. Leur géométrie implique souvent des objets très fins et des faibles angles de contact entre les horizons qui sont difficiles à caractériser avec les données et requièrent des opérations de modélisation plus compliquées que dans le cas des séquences continues (figure 3.2c). Comme nous l'avons vu au chapitre 2, ces angles faibles sont particulièrement problématiques lors de la génération d'un maillage. De plus, leur position dans le modèle peut être mal connue [Caumon, 2003, Lallier, 2012].

Failles

Les failles sont des discontinuités qui correspondent à un déplacement localisé des couches le long d'une surface (figure 3.2d). Elles sont souvent difficiles à caractériser à partir des données du sous-sol et introduisent une complexité significative à cause de leur connectivité, leur forme et leurs propriétés spécifiques [Jolley *et al.*, 2007]. Le contrôle qualité est crucial pour valider les déplacements sur les failles car les données sismiques sont bruitées autour d'elles. Ce contrôle peut être par exemple fait en analysant les lignes de contact faille-horizon avec un diagramme de juxtaposition (figure 3.2e) [Groshong, 2008, Caumon *et al.*, 2009]. La juxtaposition de volumes rocheux ayant des propriétés différentes est aussi très importante pour les écoulements

2. Couches résultant du dépôt continu de sédiments

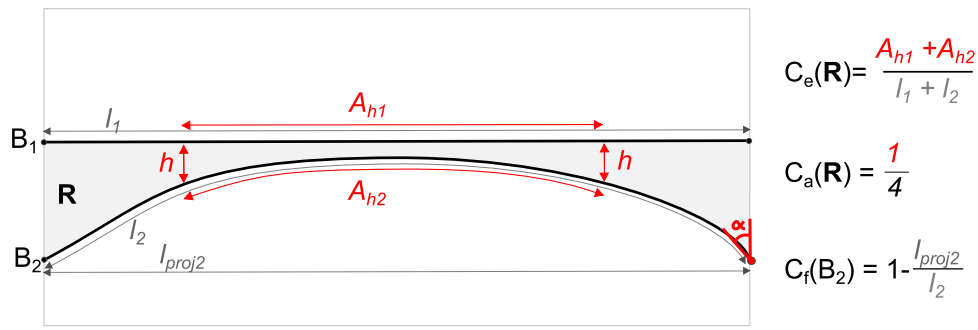


FIGURE 3.3 – CALCUL DE MESURES GÉOMÉTRIQUES EN 2D. Mesures d'épaisseur C_e et d'angle C_a pour une région \mathbf{R} et mesure de forme C_f pour un de ses bords B_2 .

fluides, car elle entraîne de fortes non-linéarités de la réponse en écoulement lorsque la géométrie est légèrement perturbée [Jolley *et al.*, 2007, Tavassoli *et al.*, 2005]. Les intersections à angles faibles entre failles et horizons peuvent rendre plus difficile la cartographie de la juxtaposition des couches et peuvent influencer la transmissibilité de la faille. Les failles qui se terminent dans un modèle posent des problèmes similaires, car à leurs extrémités, le déplacement des horizons atteint zéro (figure 3.2e) et elles ne délimitent pas deux régions volumiques distinctes, ce qui rend nombre d'algorithmes inutilisables tels quels.

La complexité d'un réseau de failles n'est pas seulement une combinaison des complexités de chacune des failles, les différences d'orientation et de pendage des failles, ainsi que leurs connexions doivent être considérées. Le nombre d'intersections entre failles détermine la compartimentation du modèle et les angles au niveau de ces intersections ont des conséquences majeures sur les approximations nécessaires lors de la génération d'une grille volumique. Les intersections de failles en Y (figure 3.2f) ou les variations d'orientation et de pendage des failles peuvent empêcher une représentation du modèle par extrusion d'une coupe et la construction d'une grille stratigraphique (partie 2.1.3) [Farmer, 2005].

3.3 Mesures généralistes

Deux types de mesures peuvent être utilisés pour évaluer la complexité des composantes d'un modèle structural en trois dimensions : les mesures de connectivité³ et les mesures géométriques. Les premières caractérisent les relations entre les composantes du modèle et sont indépendantes de la géométrie, les secondes caractérisent les tailles et formes de chaque élément.

3.3.1 Mesures globales de complexité

Nous proposons trois mesures pour calculer globalement la complexité d'un modèle. La première dénombre les éléments du modèle (régions, surfaces, lignes et coins) en excluant ceux qui définissent le volume d'intérêt. Cette mesure donne à chaque élément la même importance.

3. Ensemble des connexions entre les composantes du modèle, aussi appelée topologie.

Pour pondérer l'importance des éléments en fonction des problèmes potentiels qu'ils impliquent, la seconde mesure prend en compte la géométrie des éléments. Deux éléments, qu'ils soient dans le même modèle ou non peuvent ainsi être comparés. Les coins ne sont pas directement pris en compte dans ce calcul, ils ont cependant une influence directe sur les mesures faites pour les surfaces et les lignes. Nous calculons la complexité de chaque élément comme la somme de quatre mesures élémentaires qui caractérisent (1) sa taille C_t ; (2) sa forme C_f ; (3) son épaisseur C_e ; et (4) ses angles C_a . Ces mesures sont choisies de manière à prendre des valeurs entre 0 et 1. Les mesures de taille et d'épaisseur d'une composante e de dimension d sont définies par rapport à une taille caractéristique donnée h :

$$C_t(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{taille}(e) > h^d \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$C_e(e) = \begin{cases} 0 & \text{pour les lignes} \\ \frac{A_h}{\text{taille}(B_e)} & \text{pour les régions et les surfaces} \end{cases}$$

où B_e est l'ensemble des éléments du bord de la composante et A_h la taille de la zone où l'épaisseur de la composante est inférieure à la taille caractéristique (figure 3.3). La mesure de forme C_f évalue globalement la déformation pour les surfaces et lignes. Elle est prise égale à 1 moins la taille de la composante projetée sur son plan ou segment moyen divisé par la taille de la composante (figure 3.3). Elle vaut zéro pour les régions volumiques. La mesure angulaire C_a est définie par rapport à un angle donné α pour les régions (respectivement les surfaces) et évalue le pourcentage de la longueur des lignes (respectivement le nombre de coins) où l'angle entre deux surfaces (respectivement deux lignes) du bord de la composante s'intersectent à un angle inférieur à α (figure 3.3).

Avec la troisième mesure globale, nous proposons d'évaluer la complexité des éléments d'un type donné comme une statistique de la taille des éléments de ce type. Nous avons choisi le coefficient de variation⁴ qui caractérise les distributions relatives des tailles des éléments et évalue les changements d'échelle pour un type d'élément.

3.3.2 Mesures dans un voisinage

Le calcul des mesures géométriques ou de connectivité dans le voisinage d'un point permet de capturer localement les relations entre les éléments d'un modèle et d'identifier plus précisément les zones plus complexes. Nous avons vu dans la partie 2.2.3 des stratégies permettant d'analyser la complexité d'un modèle en prenant des mesures dans le voisinage de points échantillonnant le modèle. La mise en place d'une telle méthode requiert de calculer l'intersection des voisinages avec le modèle rapidement et de manière robuste.

Pour capturer les relations spatiales entre les éléments définissant un modèle, nous proposons de calculer localement le nombre de coins, composantes connexes de lignes, composantes connexes de surface et régions dans le voisinage de points échantillonnant le modèle. Des statistiques basiques : moyenne, coefficient de variation,

4. La moyenne divisé par l'écart-type.

maximum et le 90^{ème} centile de ces valeurs évaluent la complexité. Les mesures obtenues dépendront de la résolution de l'échantillonnage mais aussi du placement de de la forme des voisinages utilisés.

3.4 Modèles

Nous proposons un ensemble de modèles synthétiques construits depuis le modèle d'un pli anticlinal cylindrique constitué de trois horizons et nommé A1 (figure 3.4).

Dans le **modèle A2**, deux failles normales régionales affectent les horizons (figure 3.4). Ces failles planes sont parallèles, recourent la totalité de la zone d'intérêt et ont un pendage de 60 degrés vers l'Est. Leur rejet⁵ est constant, d'où des lignes de contact faille-horizon parallèles.

Dans le **modèle A3**, les deux failles sont locales et ne compartimentent pas le modèle (figure 3.4). Les rejets des failles sont maximaux à proximité de leur centre et deviennent nuls sur leur contour.

Dans le **modèle A4**, une faille est régionale tandis que la faille la plus à l'Ouest se termine vers le Sud (figure 3.4). Les déplacements induits par les failles augmentent vers le Nord ; une conséquence est que les lignes de contact horizon-faille s'intersectent à angles faibles.

Les failles du **modèle A5** s'intersectent le long d'une ligne de branchement, elles ont une configuration en "Y" (figure 3.4). Les rejets des failles sont constants et le modèle peut être restauré en A1 par mouvement de blocs rigides. Cependant, comme la hauteur du rejet sur une des failles est proche de l'épaisseur de la couche supérieure, des sections fines apparaissent dans son diagramme de juxtaposition.

Le **modèle A6** est obtenu en coupant le modèle A4 par une surface topographique (érosion). Plusieurs petites parties de surfaces isolées dont la taille est très petite comparée à celle du modèle apparaissent. De plus, de très faibles angles apparaissent entre la surface d'érosion et les couches érodées (figure 3.4).

Les trois autres modèles que nous proposons illustrent des défis différents. Le **modèle B** est un modèle de pli lié à la propagation d'une faille en compression (figure 3.5). Dans la partie inférieure, la faille a un pendage faible et se branche sur un niveau de décollement horizontal. Le pendage de la faille varie vers un angle moyen avant l'arrêt de la faille dans la couche supérieure où la déformation est accommodée par une déformation interne des couches. Dans le **modèle C**, des couches horizontales sont déposées en discordance sur un horizon plissé (figure 3.5). Le diapir du **modèle D** est intrusif et recoupe trois couches stratigraphiques. Les horizons sont peu déformés excepté dans la zone d'influence du diapir (figure 3.5).

3.5 Résultats

Nous avons calculé les mesures proposées dans la partie 3.3 pour les neuf modèles présentés ci-dessus. Les composantes définissant le volume d'intérêt des modèles

5. Déplacement induit par la faille.

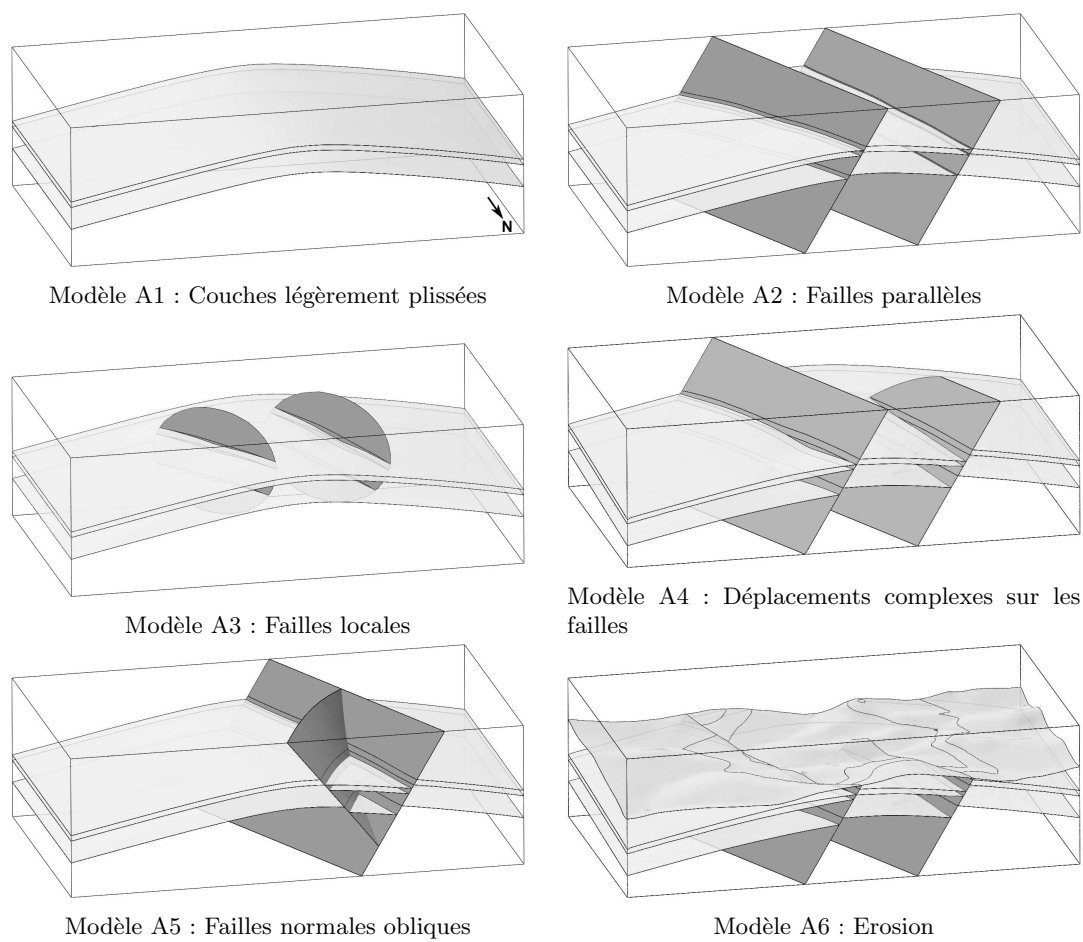


FIGURE 3.4 – SUITE DE MODÈLES CRÉÉS À PARTIR DU MODÈLE A1. Dimensions : $1600m \times 930m \times 500m$.

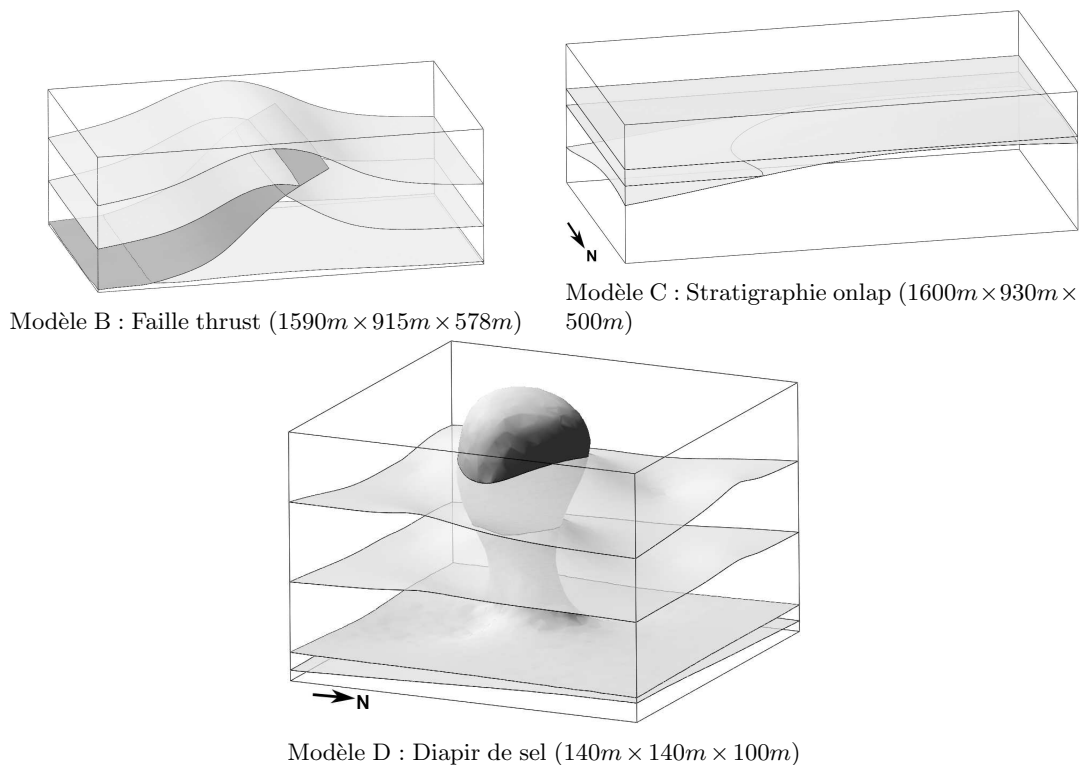


FIGURE 3.5 – MODÈLES CONDUISANT À DES CONFIGURATIONS POTENTIELLEMENT PROBLÉMATIQUES.

(boîte) ne sont pas prises en compte dans ces calculs, ce qui permet de caractériser la complexité intrinsèque des modèles.

3.5.1 Mesures globales

La première mesure qui compte le nombre total d'éléments dans le modèle donne une première classification des modèles, en ordre croissant : A1, C, D, B, A2, A3, A4, A5, A6 (table 3.1). La complexité obtenue dépend du nombre de discontinuités affectant le modèle et des intersections entre ces discontinuités. Trois groupes de modèles apparaissent : ceux qui ont au plus une discontinuité (A1, B, C, et D), ceux qui en ont deux (A2, A3, et A4) et ceux qui en ont deux connectées (A6 et A5). Comme les éléments définissant le domaine d'intérêt ne sont pas pris en compte, cette mesure très simple différencie les failles régionales des failles ne recoupant pas la totalité du modèle.

Pour évaluer la seconde mesure nous avons choisi une résolution de 10m et un angle α de 20 degrés (table 3.2). La classification résultante : A1, C, B, A2, D, A4, A3, A5, A6 est légèrement différente de la première. A1 reste le modèle le plus simple tandis que A6 et A5 restent ceux qui sont les plus complexes. La complexité accrue de D est due au fait que l'échelle de ce modèle est significativement plus petite que celle des autres modèles et que la couche inférieure a une épaisseur en moyenne inférieure à 10m. Le modèle A3 est classé troisième à cause de la forte complexité géométrique induite par les failles qui se terminent à l'intérieur de la zone d'intérêt. En effet, les lignes de contact faille-horizon s'y intersectent à des angles inférieurs à 10 degrés.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B	C	D
Régions	4	12	4	8	12	14	5	4	5
Surfaces	3	23	16	23	31	42	8	4	6
Lignes	0	13	24	22	30	44	4	1	2
Coins	0	0	12	6	10	15	0	0	0
Total	7	48	56	59	83	115	17	9	13

TABLE 3.1 – NOMBRE D'ÉLÉMENTS DANS LES MODÈLES.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B	C	D
Régions	0.13	0.59	0.22	0.34	1.19	6.58	0.35	0.55	2.97
Surfaces	0.03	3.21	12.01	7.41	9.30	12.58	0.25	0.00	1.20
Lignes	0.00	0.01	0.56	0.10	4.01	2.92	0.00	0.00	1.62
Total	0.16	3.81	12.79	7.85	14.50	22.07	0.60	0.55	5.79

TABLE 3.2 – SOMME DES COMPLEXITÉS GÉOMÉTRIQUES ($C_t + C_f + C_e + C_\alpha$) POUR LES ÉLÉMENTS.

Les coefficients de variation (table 3.3) donnent une classification (A1, D, B, C, A2, A4, A3, A5, A6) similaire aux précédentes. Sa signification est cependant différente car elle identifie la complexité due aux changements d'échelle des éléments dans les modèles.

3.5.2 Mesures locales

Méthode

Pour calculer les voisinages dans lesquels les mesures vont être calculées nous utilisons les cellules d'un diagramme de Voronoï barycentrique d'un nombre de points donné (parties 1.1.1 et 1.3.1). Les cellules de Voronoï barycentriques donnent une subdivision du modèle relativement isotrope moins sensible à une orientation donnée que le serait une grille cartésienne.

Mesures locales de connectivité

Nous avons fait ces mesures pour trois nombres de cellules 100 ; 1 000 ; 10 000 cellules et donc à trois résolutions, la résolution étant estimée à partir de la racine cubique du volume du modèle divisée par le nombre de cellules. Pour les modèles A, B et C ces résolutions sont respectivement de 198m, 92m, et 43m ; le modèle D est plus petit et les résolutions sont 26m, 12m, et 5.7m.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B	C	D
Régions	0.74	0.76	0.74	0.84	1.08	1.67	0.57	0.94	0.54
Surfaces	0.00	0.93	1.97	1.41	1.74	1.62	0.79	0.71	0.56
Lignes		0.01	0.63	0.67	0.82	1.06	0.00		0.13
Total	0.74	1.71	3.35	2.92	3.64	4.35	1.37	1.65	1.23

TABLE 3.3 – COEFFICIENTS DE VARIATION DES TAILLES DES ÉLÉMENTS DANS CHAQUE MODÈLE TYPE PAR TYPE.

Résultats

Les statistiques sur le nombre d'éléments comptabilisés dans une cellule sont données dans la table 3.4. Les moyennes, maximums, coefficients de variation et les 90^{ème} centiles sont tracés dans un graphe radar (figure 3.6). Selon la statistique choisie, la classification relative des éléments varie légèrement, particulièrement pour les modèles les plus simples. Cependant la séparation des modèles en deux groupes distincts est claire pour quasiment toutes les mesures et à toutes les résolutions : les modèles les plus simples (A1, B, C et D) qui ont au plus une discontinuité et ceux qui ont au moins deux discontinuités (A2, A3, A4, A5, et A6).

Une observation attendue est que, lorsque la résolution augmente, la complexité locale et les différences entre les modèles diminuent⁶. La moyenne est fortement influencée par cette diminution. Par exemple, dans le modèle A5, elle diminue de 5.51 (100 cellules) à 1.84 (10 000 cellules) soit une perte de 66.6%, le maximum diminuant simplement de 30 à 19 (36.6%). Le maximum caractérise la zone la plus complexe du modèle, c'est à dire l'élément contenu dans le plus grand nombre d'éléments. Selon ce critère, la classification obtenue est : B, D, A1, C, A3, A2, A4, A6, A5. A la plus grande résolution, le 90^{ème} centile est le même pour tous les modèles (la valeur 3 correspond à une cellule qui contient un morceau de surface et deux régions), mais il pourrait permettre de classer les modèles à de plus faibles résolutions. Le coefficient de variation évalue la dispersion des mesures et peut aussi être pris comme une mesure de complexité.

Le principal avantage des mesures locales est la possibilité de comprendre l'organisation spatiale de la complexité et d'estimer l'extension des zones où une méthode donnée pourrait échouer à partir des cellules dans lesquelles le nombre total d'éléments est supérieur à un chiffre donné. Comme nous pouvons le voir sur la figure 3.7, ces cellules sont celles qui recoupent les sections fines du modèle, couches fines (modèle A6), faible rejet sur une faille (modèle A2), angle faible entre des lignes de contact sur une faille (modèle A5) (figure 3.7).

3.6 Discussion

3.6.1 Contributions

Dans ce chapitre, nous avons proposé d'utiliser des mesures générales pour évaluer la complexité d'un modèle structural afin de pouvoir comparer de manière plus objective plusieurs modèles. Les métriques dérivées de ces mesures et les modèles de référence qui sont proposés sont des outils importants pour quantifier notre perception de la complexité d'un modèle, c'est-à-dire les configurations que nous avons du mal à comprendre et qui posent problème aux logiciels que nous utilisons, développons, *etc.* Ces mesures sont simples, certaines sont faites à une résolution donnée. Elles aident à comprendre la complexité induite par chaque élément indépendamment de son type et à comparer les modèles d'une même zone à des résolutions différentes.

6. Cet effet est similaire à celui de support en géostatistique [Journal, 2003].

		A1	A2	A3	A4	A5	A6	B	C	D
100	Q10	1	1	1	1	1	2	3	1	3
	Q50	5	5	5	5	5	7	5	5	5
	Q90	7	11	10	11	11	12	7	8	6
	Max	7	15	15	16	30	22	8	8	9
	Moy.	4.300	5.950	5.210	5.630	5.510	6.710	4.290	4.040	4.060
	Coeff.Var.	0.547	0.630	0.658	0.665	0.775	0.696	0.390	0.593	0.390
1000	Q10	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Q50	1	3	1	3	3	3	3	1	3
	Q90	5	7	5	7	6	7	5	5	5
	Max	7	15	13	14	22	19	6	8	6
	Moy.	2.500	3.137	2.710	2.960	2.950	3.170	2.630	2.360	2.569
	Coeff.Var.	0.751	0.814	0.808	0.804	0.858	0.871	0.523	0.813	0.581
10000	Q10	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Q50	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Q90	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Max	5	11	11	12	19	15	6	6	6
	Moy.	1.688	1.910	1.746	1.850	1.840	1.920	1.770	1.570	1.760
	Coeff.Var.	0.728	0.788	0.755	0.778	0.795	0.827	0.609	0.721	0.676

TABLE 3.4 – STATISTIQUES SUR LE NOMBRE D'ÉLÉMENTS PAR CELLULE.

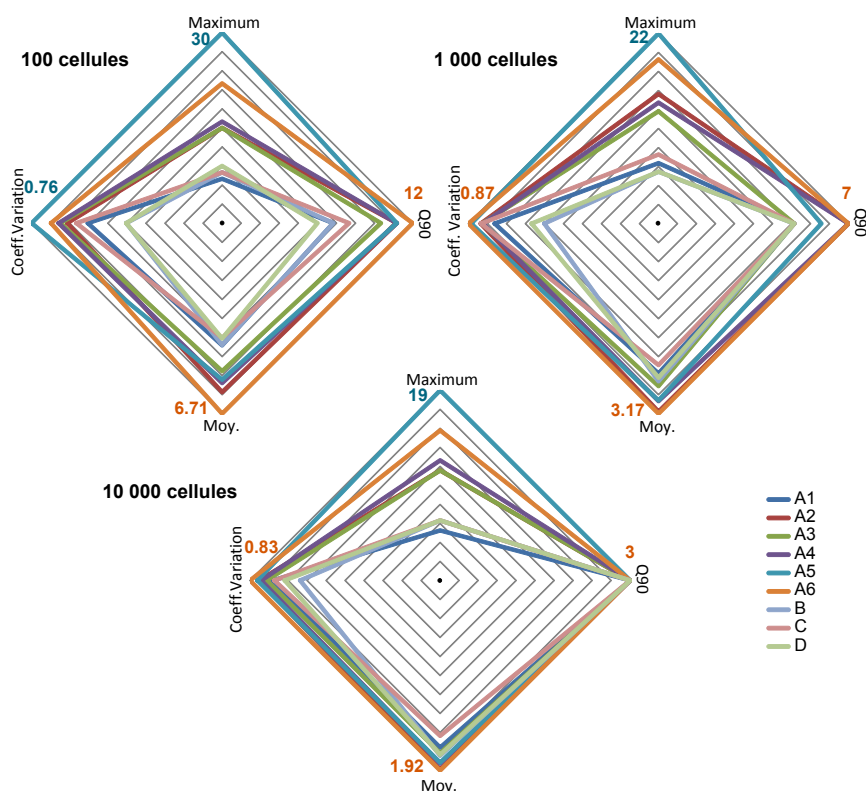


FIGURE 3.6 – STATISTIQUES NORMALISÉES SUR LES NOMBRES D'ÉLÉMENTS COMPTÉS DANS 100, 1 000, OU 10 000 CELLULES DE VORONOÏ.

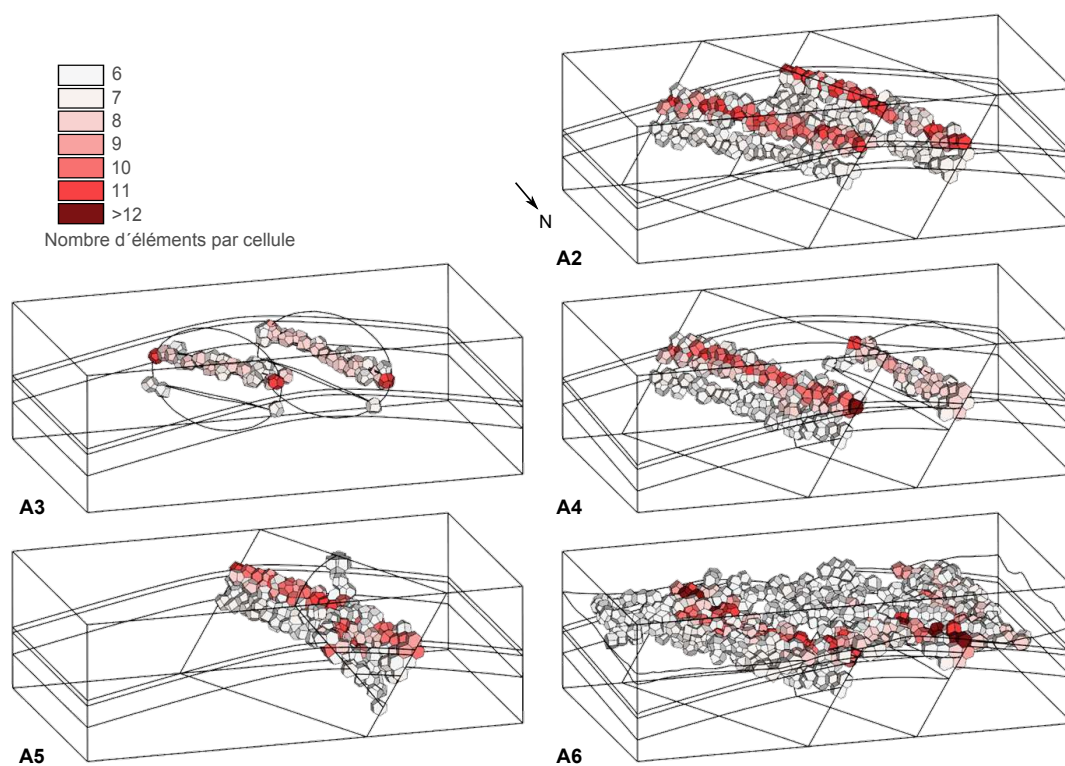


FIGURE 3.7 – ZONES COMPLEXES DES MODÈLES. Les cellules, parmi 10 000, contenant plus de 6 composantes sont situées autour des discontinuités. Il n'y en a aucune dans le modèle A1, 188 dans A2, 54 dans A3, 158 dans A4, 161 dans A5 et 535 dans A6.

3.6.2 Perspectives

Les perspectives de ce travail sont très nombreuses. Les mesures pourraient être utilisées pour déterminer la résolution nécessaire pour mailler une zone donnée d'un modèle [Quadros *et al.*, 2004] ou pourraient être combinées pour évaluer la complexité d'une tâche de modélisation donnée. Ceci requiert de connaître parfaitement les méthodes et algorithmes utilisés, de considérer la complexité de la représentation du modèle (taille du maillage) et de réaliser de nombreuses analyses de sensibilité. Ces trois points rendent difficile d'envisager à court terme la détermination de telles mesures évaluant par exemple, pour un modèle, si une méthode de maillage donnée permettra d'atteindre la qualité, la résolution et le nombre d'éléments souhaités.

L'examen de résultats obtenus pour des modèles réels et pour des modèles synthétiques de référence créés dans le but d'évaluer les impacts d'un changement d'échelle ou bien l'ajout d'une entité géologique, permettrait d'affiner les mesures que nous avons proposées et de confirmer l'effet de telle ou telle configuration sur l'une d'elle. Des calculs spécifiques de la complexité des entités géologiques par type apporteraient des informations complémentaires. Par exemple, pour les surfaces de failles, le nombre de couches affectées, la distribution des rejets, les angles faits avec les horizons, les contacts induits entre des couches différentes sont des informations cruciales en modélisation. Pour le réseau de failles, ce sont les contacts entre failles, les angles à ces intersections et leurs variations d'orientation qui importent, tandis que pour les formations sédimentaires les nombres de blocs, l'intensité des déformations, les variations d'épaisseur pourraient être considérées.

Enfin un calcul des mesures géométriques dans les cellules de Voronoï permettrait de caractériser localement la géométrie du modèle indépendamment de la qualité de son maillage, au contraire des mesures de géométrie que nous faisons. Nous pourrions aussi envisager d'utiliser d'autres types de cellules, voxels, sphères, *etc.*

Chapitre 4

Contribution : Remaillage des surfaces de modèles structuraux à une résolution donnée

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [Pellerin et al. \[2014\]](#), une version préliminaire ayant été présentée à la conférence annuelle de l'IAMG [[Pellerin et al., 2011](#)].

Résumé

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de remaillage des surfaces des modèles structuraux définis par frontière avec des triangles les plus équilatéraux possibles. Nous utilisons une méthode de type optimisation de diagramme de Voronoï barycentrique pour placer les sommets des surfaces remaillées. Nous introduisons une énergie pour améliorer le placement des sites le long des bords des surfaces. Le maillage est construit en analysant les intersections entre le modèle et les cellules de Voronoï. Quand les cellules de Voronoï restreintes aux surfaces, lignes et coins ont une unique composante connexe, nous construisons la triangulation de Delaunay restreinte des sites au modèle. Dans le cas contraire, nous construisons un maillage dual de ces composantes connexes. Lorsque la résolution finale est suffisante, les lignes et les coins initiaux sont également des lignes et des coins du modèle final. Cependant, pour des modèles où les contacts sont complexes, la résolution peut être localement insuffisante, et au lieu d'ajouter des points pour raffiner le maillage, nous proposons de simplifier des éléments du modèle. La méthode est appliquée à 12 modèles structuraux.

4.1 Motivations

Les différentes stratégies pour générer les modèles structuraux conduisent à des surfaces qui sont, la plupart du temps, définies par des triangles [[Caumon et al., 2009](#)]. La qualité et la résolution du maillage peuvent être très différentes selon les choix du modéleur et les algorithmes utilisés pour construire le modèle. Les triangles peuvent

être de très mauvaise qualité¹, notamment quand les horizons sont obtenus par une méthode de type *marching tetrahedra* depuis une surface implicite. Le maillage doit donc être adapté pour visualiser efficacement le modèle, modifier sa géométrie, faire des calculs de restauration d'horizons [e.g., Dunbar et Cook, 2003] et surtout générer un maillage volumique adéquat.

Comme nous l'avons vu dans la partie 3.2, il y a de nombreuses configurations dans lesquelles il est difficile de respecter la géométrie du modèle géologique tout en conservant un nombre et une qualité d'éléments acceptables. Dans ce chapitre, nous choisissons d'autoriser les simplifications du modèle pour adapter sa résolution, et de privilégier le nombre et la qualité des triangles remaillant les surfaces. L'objectif est double : remailler les surfaces définissant le modèle et adapter la résolution du modèle.

La plupart des très nombreuses méthodes de (re)maillage de surface ne permettent pas de modifier le modèle d'entrée (partie 2.4). Les méthodes de type Delaunay contraint ou frontale remaillent les surfaces une par une sans considérer le modèle dans son ensemble. Les méthodes qui fournissent des garanties théoriques sur la topologie et la qualité du résultat ne donnent pas du tout de contrôle sur la résolution et le nombre d'éléments dans le maillage final (partie 2.4.2). Lorsque la qualité des triangles des surfaces initiales est très mauvaise, le calcul d'une paramétrisation pour les projeter dans un espace 2D peut poser problème. Les méthodes de maillage de surface de type *octree* exploitent une subdivision du modèle en voxels. Cette subdivision est également utilisée par les méthodes de simplification qui opèrent sur les composantes volumiques d'un modèle, elles analysent localement les relations entre les composantes du modèle et les cellules pour reconstruire un maillage à la résolution de la subdivision considérée (partie 2.2.3). Nous proposons une approche similaire combinée à une méthode de remaillage de type optimisation de diagramme de Voronoï et nous exploitons le fait que, lorsque les sites ne vérifient pas la propriété de la boule topologique, la triangulation de Delaunay restreinte est une version simplifiée de l'objet initial (partie 1.2.3 et figure 1.5).

4.2 Objectifs

Données d'entrée

La méthode de remaillage que nous proposons prend en entrée un ensemble de surfaces triangulées qui définissent un modèle structural par frontière valide. Leurs maillages doivent être conformes.

Résultat

Un remaillage global des surfaces du modèle pour lequel les triangles sont les plus équilatéraux possible. Les lignes de contact entre les surfaces sont également remaillées, et les surfaces restent conformes le long de ces lignes. Des modifications sont réalisées lorsque des lignes de contacts ou des coins sont trop proches (figure 4.1).

1. Notre objectif est d'obtenir des triangles équilatéraux.

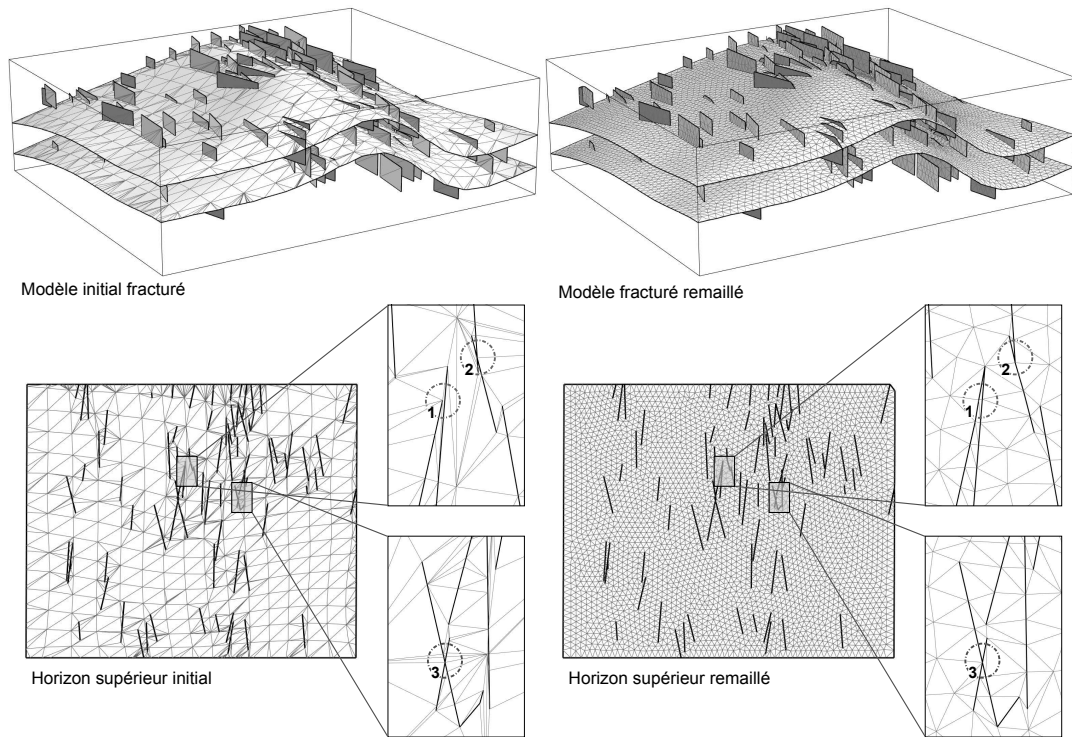


FIGURE 4.1 – REMAILLAGE D'UN MODÈLE AFFECTÉ PAR 200 FRACTURES. La qualité du maillage des surfaces est améliorée. Trois types de configuration sont potentiellement problématiques : (1) les fractures s'intersectant à peine (2) celles qui s'intersectent presque (3) celles qui s'intersectent à angle faible, sont remaillées et modifiées en fonction de la résolution souhaitée.

Cette capacité à simplifier le modèle d'entrée permet d'adapter la résolution du modèle automatiquement. La méthode a été appliquée à 12 modèles structuraux (partie 4.5).

Principe

Nous utilisons un diagramme de Voronoï restreint barycentrique pour placer les sommets du maillage final de manière adéquate près des surfaces et des lignes de contact du modèle initial (partie 4.3). Ensuite, un contrôle topologique permet de déterminer les sommets des triangles du maillage final à partir des intersections entre le diagramme de Voronoï des sites et les éléments du modèle (partie 4.4).

4.3 Optimisation de l'échantillonnage du modèle

4.3.1 Optimisation CVT

Dans un premier temps, un nombre prédéterminé de sites est placé dans l'espace de telle sorte qu'ils soient un bon échantillonnage du modèle structural. Chaque site échantillonne le modèle car il représente la partie du modèle plus proche de ce site que des autres sites : sa cellule de Voronoï restreinte (partie 1.2.1). Le nombre initial de sites détermine la résolution à laquelle le modèle va être remaillé, il peut être,

par exemple, estimé en prenant la racine carrée de l'aire des surfaces du modèle divisée par la longueur d'arête cible. Nous avons vu dans la partie 1.3.2 que, quand le diagramme de Voronoï restreint est barycentrique, les cellules de Voronoï restreintes sont compactes et que la triangulation de Delaunay restreinte remaille les surfaces du modèle avec des triangles quasiment équilatéraux.

4.3.2 Optimisation de la position des sites le long des bords

Lors du calcul du diagramme de Voronoï restreint à une surface avec bord, les sites, après optimisation, ne sont pas sur ce bord car le barycentre d'une cellule intersectant une ligne du bord n'est pas sur cette ligne. Pour modifier cette position de stabilité, un terme d'énergie spécifique aux bords peut être ajouté à la fonction objectif pour les sites dont la cellule de Voronoï (V_p) intersecte la ligne du bord (B) :

$$F_B(S) = \sum_{p \in S} \left[\int_{V_p \cap B} \|y - p\| dy \right]^2 \quad (4.1)$$

Pour évaluer cette fonction et son gradient, la restriction de chaque cellule de Voronoï au bord ($V_p \cap B$) est décomposée en plusieurs segments (figure 4.2). Pour chaque segment, $E = C_1 C_2$, la fonction vaut $F_B^E = 1/2 \|\overrightarrow{C_2 p} \cdot \overrightarrow{C_2 C_1}\|^2$, c'est à dire l'aire du triangle $p C_1 C_2$ au carré (figure 4.2). Le gradient est :

$$\frac{dF_B}{dS}(p, C_1, C_2) = \frac{dF_B^E}{dp} + \frac{dF_B}{dC_1} \frac{dC_1}{dS} + \frac{dF_B}{dC_2} \frac{dC_2}{dS} \quad (4.2)$$

où $dF_B/dp = \vec{N} \times \overrightarrow{C_1 C_2}$, les termes dF_B/dC_1 et dF_B/dC_2 sont évalués de manière similaire. Le terme dC/dS dépend de la configuration du point C . Soit C est un sommet du maillage des surfaces initiales et sa dérivée par rapport aux sites est nulle, soit C est à l'intersection du bisecteur séparant les sites p_0 et p_1 et est calculé comme :

$$\frac{dC}{dS} = \begin{pmatrix} [p_1 - p_0]^t \\ [N_1]^t \\ [N_2]^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [C - p_0]^t & [p_1 - C]^t \\ [C - p_0]^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

où N_1 et N_2 sont les normales à deux plans construits de sorte que leur ligne d'intersection contienne le segment $C_1 C_2$. La preuve est donnée par Lévy et Liu [2010]. Pour améliorer le placement des sites près des bords et des lignes de contacts nous minimisons donc la fonction objectif $F = (1 - \alpha)F_{CVT} + \alpha F_B$ avec α le ratio entre les normes des gradients de l'énergie de bord et de l'énergie CVT.

4.3.3 Implémentation

L'algorithme 4.1 résume les différentes étapes de l'optimisation d'un nombre donné de sites sur un modèle Ω . (1) Le placement initial des sites est fait en utilisant la méthode développée par Lévy et Bonneel [2013]. (2) Le diagramme de Voronoï restreint est calculé avec une méthode également décrite par Lévy et Bonneel [2013]. (3) Les contributions de chaque cellule du diagramme de Voronoï restreint à la fonction objectif et à son gradient sont calculés suivant la méthode de Yan *et al.*

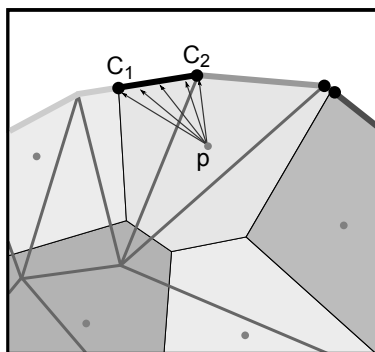


FIGURE 4.2 – SEGMENTS D'INTÉGRATION POUR LE CALCUL DE L'ÉNERGIE DE BORD.

[2009]. La minimisation de la fonction objectif F est faite par un algorithme L-BFGS [Nocedal, 1980]. En pratique, l'optimisation est arrêtée après un nombre d'itérations prédéterminé, typiquement une centaine.

4.4 Construction du maillage

Une fois que les sites sont distribués de manière optimale, leur diagramme de Voronoï restreint au modèle structural est calculé afin de déterminer les sommets et les triangles du maillage résultant.

4.4.1 Remaillage des composantes connexes surfaciques

Prenons par exemple un modèle, non géologique, dans lequel les surfaces n'ont pas d'intersection et n'ont pas de bord : deux sphères imbriquées l'une dans l'autre (figure 4.3). Les deux surfaces sont échantillonnées avec 100 sites qui, après optimisation, sont positionnés entre les deux sphères (figure 4.4a). Pour avoir deux sphères dans le maillage final, deux sommets sont associés à chaque site : un pour chaque composante connexe de la cellule de Voronoï restreinte du site (figure 4.4b). Il y a ensuite un triangle à construire pour chaque point partagé par trois cellules de Voronoï restreintes (figures 4.3c et 4.4c). Le maillage obtenu est dual des composantes connexes du diagramme de Voronoï barycentrique restreint. Il est plus fidèle au modèle initial que la triangulation de Delaunay restreinte (une seule sphère dans ce cas où la propriété de la boule topologique n'est pas vérifiée - partie 1.2.4). Si toutes les

ALGORITHME 4.1 - OPTIMISATION DES SITES.

Données : le modèle Ω , le nombre de sites n

Résultat : un échantillonnage isotrope \mathbf{S} de Ω

(1) $\mathbf{S} \leftarrow$ échantillonnage aléatoire de Ω [Lévy et Bonneel, 2013] ;

tant que le minimum n'est pas atteint **faire**

 (2) Calculer le diagramme de Voronoï restreint de \mathbf{S} à Ω [Lévy et Bonneel, 2013] ;

 (3) Calculer $F(\mathbf{S})$ et $dF/d\mathbf{S}$ [Liu et al., 2009] ;

 (4) Déterminer la direction de recherche $\Delta\mathbf{S}$ [Liu et al., 2009] ;

 (5) $\mathbf{S} \leftarrow \mathbf{S} + \Delta\mathbf{S}$;

fin

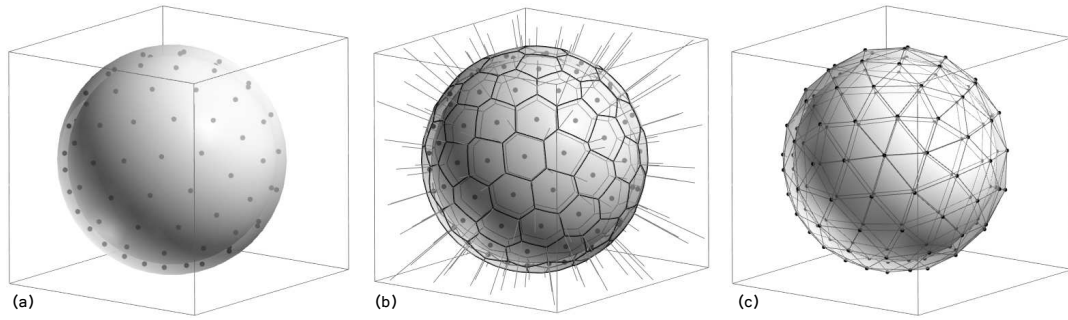


FIGURE 4.3 – REMAILLAGE DE DEUX SPHÈRES IMBRIQUÉES. (a) 100 sites optimisés sont entre les deux sphères. (b) Chaque cellule de Voronoï restreinte a 2 composantes connexes. (c) Dual des composantes connexes du diagramme de Voronoï restreint (voir aussi la figure 4.4).

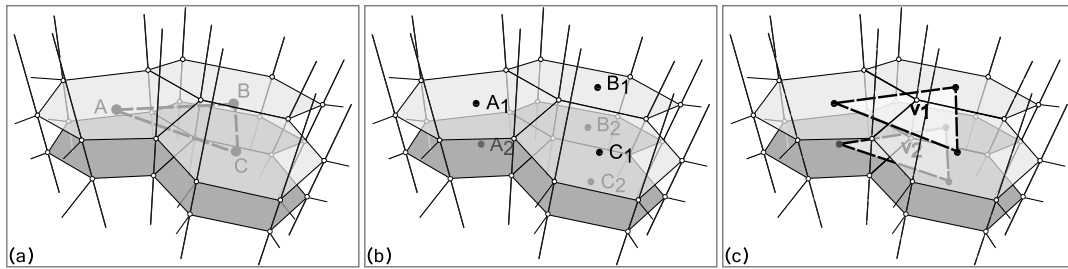


FIGURE 4.4 – REMAILLAGE DE DEUX SURFACES PROCHES. (a) 3 sites (A, B et C) sont positionnés entre deux surfaces, leurs cellules de Voronoï restreintes ont deux composantes connexes. La triangulation de Delaunay restreinte a un seul triangle ABC. (b) Deux sommets sont ajoutés pour chaque cellule. (c) Deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont construits comme duals des points v_1 et v_2 qui sont partagés par trois cellules de Voronoï.

composantes connexes des cellules de Voronoï restreintes sont contractiles, le théorème du multi-nerf [Colin de Verdière *et al.*, 2012] donne que le modèle construit de cette façon est équivalent par homotopie au maillage d'entrée.

4.4.2 Remaillage des lignes de bord

Considérons à présent une surface qui a un bord. De la même manière que pour les surfaces, ce bord peut ne pas être correctement remaillé quand le nombre de sites est trop petit, c'est-à-dire quand la propriété de la boule topologique n'est pas respectée. Pour le remailler de manière adéquate, autant de points que la restriction de sa cellule de Voronoï restreinte au bord a de composantes connexes sont associés à chaque site (figure 4.5). Ces points additionnels doivent être pris en compte pour construire les triangles. Puisqu'une cellule de Voronoï restreinte peut correspondre à plusieurs points (figure 4.5b), le dual des points de Voronoï n'est plus toujours un triangle. Des polygones, duals des arêtes de Voronoï qui intersectent deux fois le bord, sont à construire (figures 4.5c & d).

Plus il y a d'intersections entre une cellule de Voronoï restreinte et les lignes de bord du modèle, plus il y a de sommets dans le maillage final qui correspondent à cette cellule. Cela peut conduire à des configurations où les polygones à construire

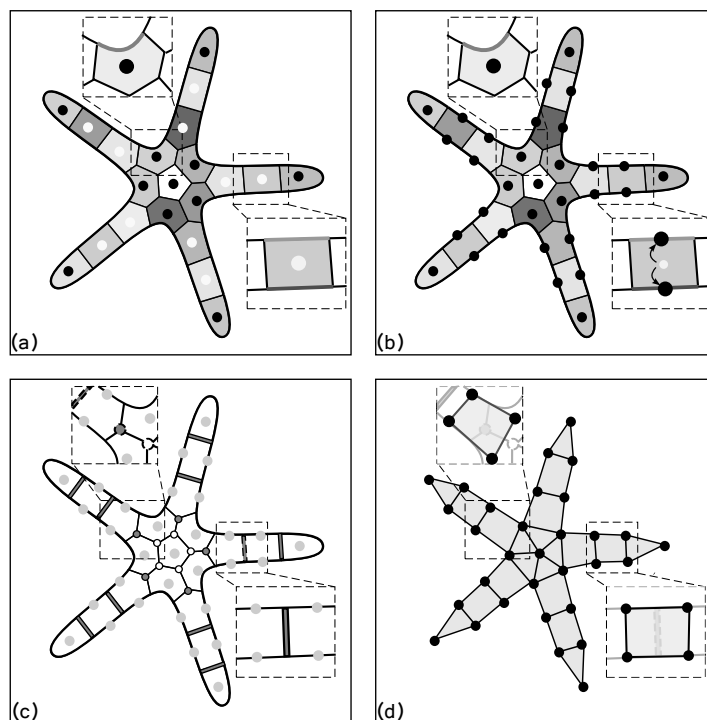


FIGURE 4.5 – REMAILLAGE D'UNE SURFACE AVEC BORD. (a) 21 sites échantillonnent l'étoile ; les cellules de Voronoï des sites blancs intersectent deux fois le bord, celles des sites noirs l'intersectent au plus une fois. (b) Chacun des sites blancs correspond à deux points. (c) Les polygones du maillage final sont duals des points de Voronoï restreints voisins d'au moins une cellule de Voronoï restreinte associée à deux points (gris), et des segments de Voronoï restreints qui intersectent deux fois le bord (d).

s'intersectent. Nous proposons donc de réunir les points associés à une composante connexe d'une cellule s'ils sont plus de deux. Cette augmentation de la robustesse de la méthode se fait au prix de modifications des connexions entre les surfaces du modèle, modifications qui ne sont pas toujours valides d'un point de vue géologique. De plus, ces modifications dépendent du positionnement des sites dans le modèle et une petite modification de ces positions peut entraîner la suppression ou l'apparition d'une ou plusieurs modifications. Ce sont cependant ces modifications qui permettent de contrôler la résolution du modèle.

4.4.3 Remaillage des coins

Les derniers éléments du modèle à prendre en compte dans le remaillage sont les coins : les points qui délimitent les composantes connexes des lignes de bord. Pour tous les représenter dans le maillage final, il n'y a pas d'autre solution que d'associer chacun d'eux à un sommet du maillage final. Pour reconstruire le modèle d'entrée, il y a, dans chaque cellule de Voronoï restreinte, un point par coin, un point par composante connexe de ligne, et un point par composante connexe de surface (algorithme 4.2).

La présence de plusieurs coins dans une composante connexe d'une cellule de Voronoï restreinte au bord signifie que la résolution n'est pas suffisante, et nous choisissons de ne pas remettre tous ces coins dans le maillage final mais de les regrouper

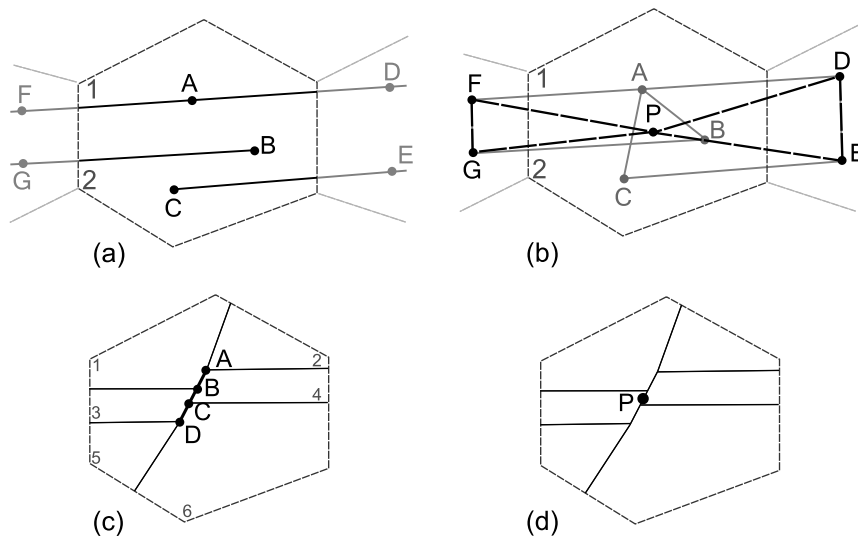


FIGURE 4.6 – CONFIGURATIONS DANS LESQUELLES LE MODÈLE EST MODIFIÉ. (a) La cellule de Voronoï restreinte au centre correspond à 3 points (A, B, C) (b) Les polygones à construire à partir de ces points ABGF et ADEC se recoupent. Les trois points sont regroupés en P. (c) Des lignes de contacts (noires) coupent cette cellule en 6 composantes connexes. (d) Les 4 coins (A, B, C, et D) sont regroupés en P car ils sont reliés par des segments du bord.

(figure 4.6). Une fois ce regroupement effectué, le regroupement précédemment décrit est également réalisé. Ainsi, chaque composante connexe de chaque cellule de Voronoï restreinte est associée à un ou deux points et les quadrangles ou triangles à construire à partir de ces points ne s'intersectent pas.

La dernière modification que nous proposons est de regrouper les sommets associés à une même cellule de Voronoï qui correspond à des composantes séparés par une distance inférieure à une résolution (distance) donnée en entrée. Ceci permet de simplifier les composantes du modèle dont la résolution est inférieure à cette distance (figure 4.7). Par exemple sur la figure 4.6c, les petits rejets le long des failles ont été annulés.

4.4.4 Implémentation

L'algorithme 4.3 résume les étapes de la construction du maillage final à partir d'une surface polygonale représentant le diagramme de Voronoï restreint dans lequel chaque facette est associée au triangle et au site dont elle est issue. Premièrement les cellules de Voronoï restreintes et leurs composantes connexes sont construites, puis les sommets à associer à chacune d'elle sont calculés (algorithme 4.2). Enfin les polygones reliant ces sommets sont construits (figure 4.5).

4.4.5 Améliorations du maillage

La qualité des triangles du maillage produit dépend complètement de la forme des composantes connexes des cellules de Voronoï restreintes. Quand cette forme est proche d'un hexagone régulier, les triangles duals sont proches de l'équilatéralité. En revanche, les petites cellules triangulaires peuvent poser problème. Elles apparaissent quand une arête ou un point de Voronoï est situé à proximité d'une surface ou ligne

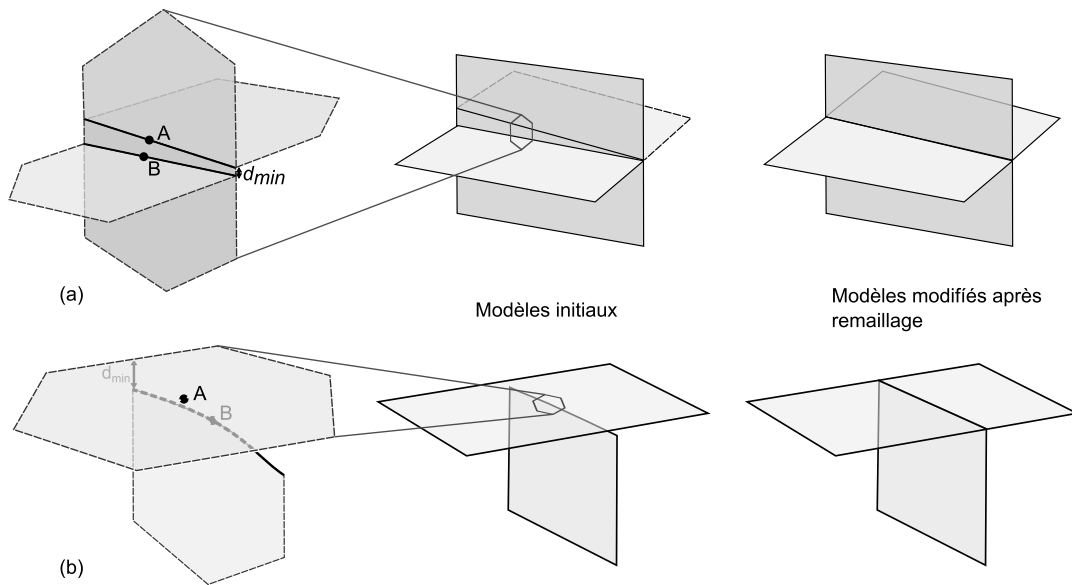


FIGURE 4.7 – CONTRÔLE DE LA RÉOLUTION DU MODÈLE. Si les surfaces échantillonnées par une cellule sont séparées par une distance inférieure à une valeur donnée $d_{résolution}$, les points correspondants sont regroupés. (a) Le rejet minimal sur la faille d_{min} est inférieur à $d_{résolution}$ et les points A et B sont regroupés. Le rejet est annulé dans le modèle final. (b) La distance minimale entre les deux surfaces est inférieure à $d_{résolution}$ et dans le modèle remaillé elle sont jointes.

ALGORITHME 4.2 - CALCUL DES SOMMETS DU MAILLAGE FINAL.

Données : cellule de Voronoï restreinte du site i , distance $d_{résolution}$

Résultat : points remaillant la cellule

- ```

(1) pour chaque composante connexe CC faire
 | si CC intersecte les lignes de bord alors
 | | pour chaque composante connexe du bord BC faire
 | | | si BC contient des coins alors
 | | | | Associer un point à chaque coin ;
 | | | sinon
 | | | | Associer un point à BC ;
 | | | fin
 | | fin
 | sinon
 | | Associer un point au barycentre de CC ;
 | fin
fin
(2) Regrouper les points correspondant à des coins et reliés par des segments du bord
(figure 4.6b) ;
(3) pour chaque composante connexe CC faire
 | si nombre de points > 2 (figure 4.6a) alors
 | | Regrouper les points ;
 | fin
fin
(4) Regrouper les points correspondant à des objets proches du modèle
($d_{min} < d_{résolution}$)(figure 4.6c & d)

```
-

## ALGORITHME 4.3 - ÉTAPES DE CONSTRUCTION DU MAILLAGE FINAL.

---

**Données** : diagramme de Voronoï restreint des sites  $\mathbf{S}$  au modèle  $\Omega$   
**Résultat** : un remaillage triangulé des surfaces de  $\Omega$   
**pour**  $i \in \mathbf{S}$  **faire**  
    (1) Calculer les composantes connexes de la cellule de Voronoï restreinte ;  
    (2) Calculer les points remaillant la cellule (algorithme 4.2) ;  
**fin**  
(3) Construire les triangles ;

---

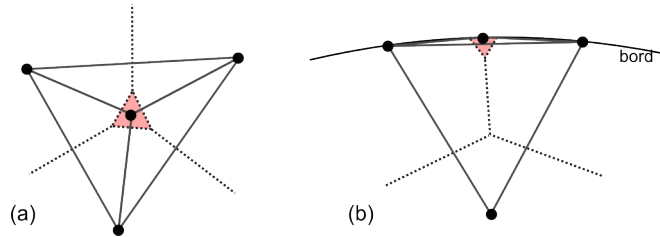


FIGURE 4.8 – PETITES CELLULES DE VORONOÏ CORRESPONDANT À DES TRIANGLES DÉGÉNÉRÉS. (a) Une composante connexe triangulaire de cellule de Voronoï restreinte dans l'intérieur d'une surface correspond à un sommet de valence 3. (b) Si elle est sur un bord libre d'une surface, le triangle correspondant est dégénéré.

du modèle. Quand une telle cellule est à l'intérieur d'une composante connexe surfacique, elle correspond à un sommet de valence trois qui peut facilement être supprimé (figure 4.8a). Quand elle se trouve le long une ligne appartenant à une unique surface, le triangle correspondant est dégénéré et peut aussi être supprimé (figure 4.8b). Mais, si elle se trouve le long d'une ligne de contact (figure 4.9a), une procédure spécifique est nécessaire pour supprimer le triangle dual tout en conservant la conformité des maillages le long de cette ligne. Cette procédure est décrite dans l'algorithme 4.4 et sur la figure 4.9.

La suppression de ces différents sommets et triangles du maillage final correspond à ignorer les petites composantes connexes du diagramme de Voronoï restreint. Elle peut être interprétée comme le résultat du remaillage d'un modèle où les lignes de contacts et les surfaces ont été légèrement déplacées de telle sorte que ces petites facettes triangulaires n'apparaissent pas dans le diagramme de Voronoï restreint.

Comme nous utilisons la distance euclidienne pour mesurer la distance entre deux points sur une surface, nous approximations la vraie distance sur la surface entre ces points (distance géodésique) lors des étapes d'échantillonnage des surfaces et de simplification. Cela implique que quelques triangles du maillage construit s'intersectent. Ils sont identifiés et les intersections sont résolues à la main en supprimant certains sommets ou en basculant des arêtes.

## 4.5 Résultats pour 12 modèles structuraux

Nous avons appliqué notre méthode de remaillage de surfaces à douze modèles structuraux décrits dans le tableau 4.1 et illustrés sur les figures 4.10 à 4.18. Les modèles sont donnés dans un ordre croissant de difficulté à mailler. Ce classement est subjectif, les travaux sur la complexité présentés dans le chapitre 3 ayant été

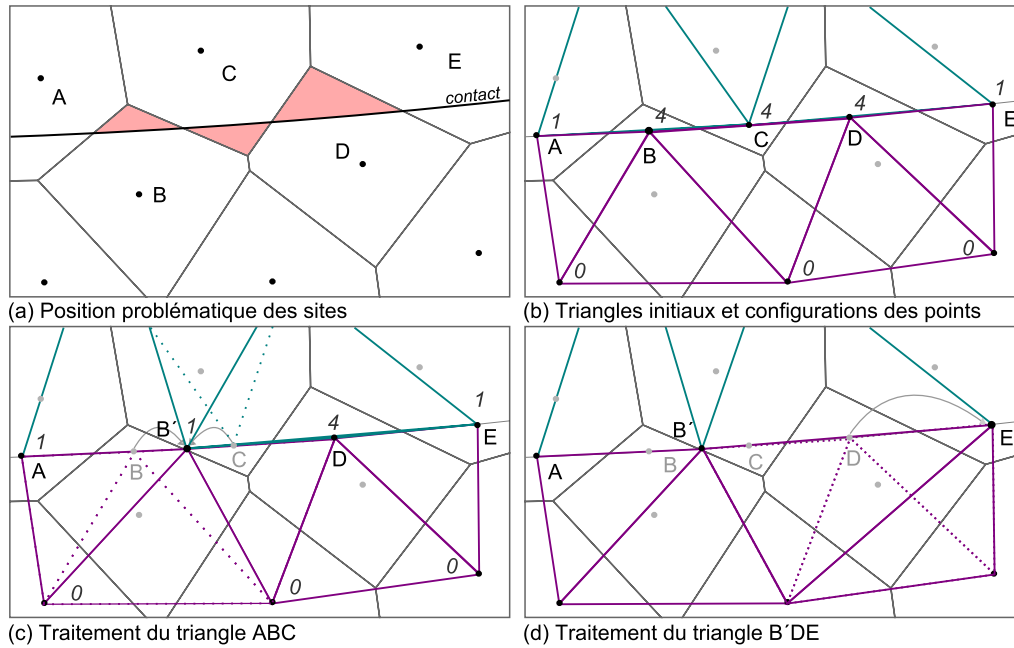


FIGURE 4.9 – IDENTIFICATION ET TRAITEMENT DES TRIANGLES DÉGÉNÉRÉS. (a) Les composantes connexes triangulaires de cellule de Voronoï restreinte adjacentes à un contact (rouge) correspondent à des triangles dégénérés ABC, BCD et CDE (b) La valeur associée à chacun des points identifie sa configuration : 4 pour les points associés à cellule rouge, 1 pour les points sur le contact, 0 pour les autres. (c) Le triangle ABC, configuration  $9 = 4 + 4 + 1$ , est supprimé en regroupant les points B et C, le point résultant est placé en leur barycentre B'. (d) Le triangle B'DE, configuration  $6 = 4 + 1 + 1$ , est supprimé en supprimant l'arête DE.

---

ALGORITHME 4.4 - POST-TRAITEMENT DES TRIANGLES DÉGÉNÉRÉS LE LONG DES CONTACTS.

---

**Données** : Ensemble de triangles  $T$  le long des contacts  
**Résultat** :  $T$  sans triangle dégénéré  
**pour** chaque triangle **faire**  
    | Calculer la somme des configurations de ses sommets (figure 4.9b) ;  
**fin**  
**tant que**  $T$  modifié **faire**  
    **pour** chaque triangle **faire**  
        **si** configuration totale == 6 **alors**  
            | Supprimer une arête du triangle dégénéré qui est au bord (figure 4.9d) ;  
        **fin**  
        **si** configuration totale == 9 **alors**  
            | Supprimer l'arête du triangle reliant les deux points en configuration 4  
            | (figure 4.9c) ;  
        **fin**  
        Mettre à jour les configurations des triangles ;  
    **fin**  
**fin**

---



| Modèle                                           | Horizons | Failles | Défis                                  | Remerciements                            | Figures       |
|--------------------------------------------------|----------|---------|----------------------------------------|------------------------------------------|---------------|
| <b>Veins</b><br><i>10.2km × 1.3km × 280m</i>     | 29       | 0       | Couches fines                          | Gocad consortium                         | 4.10          |
| <b>Forward</b><br><i>110m × 65m × 40m</i>        | 7        | 0       | Couches fines,<br>onlaps               | Laurent [2013]                           | 4.11          |
| <b>Detachment</b><br><i>22km × 14km × 7.7km</i>  | 8        | 1       | Couches fines                          | Chevron<br>Guzofski <i>et al.</i> [2009] | 4.12          |
| <b>Leipzig</b><br><i>1.2km × 1.2km × 0.4km</i>   | 2        | 9       | Réseau de failles                      | Total                                    | 4.12          |
| <b>Lambda</b><br><i>6km × 4.5km × 1.9km</i>      | 2        | 13      | Angles faibles,<br>petits rejets       | Gocad consortium                         | 4.12          |
| <b>DFN</b><br><i>13km × 11km × 4km</i>           | 2        | 200     | Intersection des<br>fractures          | Gocad consortium                         | 4.13,<br>4.1  |
| <b>HC</b><br><i>18km × 10km × 10.2km</i>         | 7        | 2       | Couches fines,<br>Faille inverse       | Harvard-Chevron                          | 4.13          |
| <b>Cloudspin</b><br><i>14.7km × 12km × 2km</i>   | 3        | 10      | Angles faibles,<br>petits rejets       | PDGM et<br>Schlumberger                  | 4.14          |
| <b>Clyde</b><br><i>12km × 10.3km × 1.7km</i>     | 4        | 22      | Intersections et<br>rejets des failles | Confidentiel                             | 4.15,<br>4.17 |
| <b>Nancy</b><br><i>11km × 3km × 1.4km</i>        | 7        | 26      | Failles complexes,<br>rejets           | Total                                    | 4.16          |
| <b>Annot</b><br><i>11km × 5.5km × 2.8km</i>      | 9        | 3       | Couches fines,<br>onlaps, rejets       | Salles <i>et al.</i> [2011]              | 4.18          |
| <b>Bac-à-sable</b><br><i>3.5km × 3km × 0.5km</i> | 8        | 33      | Rejets                                 | IFPEN<br>Colletta <i>et al.</i> [1991]   | 4.18          |

TABLE 4.1 – PRINCIPALES CARACTÉRISTIQUES ET DÉFIS POUR LES 12 MODÈLES REMAILLÉS.

menés après ceux-ci. La difficulté à remailler des modèles faillés ou fracturés dépend de 4 facteurs : le nombre de failles ou fractures, le nombre d'interconnexions entre les failles ou fractures, le nombre de failles se terminant à l'intérieur du modèle et la hauteur des rejets sur les failles.

Les maillages d'entrée ont entre quelques milliers et un million de triangles. Les temps de calculs pour optimiser les sites (100 itérations) et construire le maillage final sont compris entre 13s et 150s sur un ordinateur portable avec 8 coeurs (fréquence 1.73GHz). Le temps de calcul dépend principalement de la taille du maillage initial, du nombre de sites (complexité de l'algorithme) et du nombre de cas dégénérés à traiter (complexité géométrique du modèle). La qualité des maillages en entrée et en sortie sont comparés à l'aide de trois critères : le plus petit angle dans un triangle, le pourcentage d'angles inférieurs à 30 degrés et la qualité moyenne des triangles. Le critère de qualité d'un triangle est choisi comme  $Q = 6S/(\sqrt{3}h_{max}p)$  avec  $S$  l'aire du triangle,  $h_{max}$  la longueur sa plus grande arête, et  $p$  son demi-périmètre [Frey et Borouchaki, 1999]. Notons que la qualité finale n'est ni prédéterminée, ni ne dépend de la qualité du maillage initial. La distance de Hausdorff entre les modèles en entrée et en sortie est calculée à l'aide du code de Aspert *et al.* [2002] et est donnée en pourcentage de la longueur de la diagonale de la boîte englobante du modèle.

Dans les modèles remaillés, les éléments les plus importants des modèles initiaux (les plus grands) sont conservés, mais les nombres de composantes connexes de surfaces, de lignes et de coins changent à cause des modifications que nous réalisons. Les statistiques détaillées des résultats du remaillage sont fournies dans le tableau 4.2.

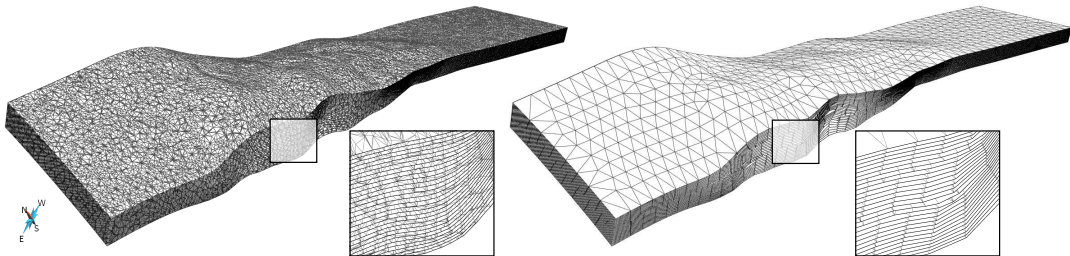


FIGURE 4.10 – REMAILLAGE DU MODÈLE VEINS. 29 surfaces sub-verticales délimitent de fines veines de charbon ( $10.2\text{km}\times 1.3\text{km}\times 280\text{m}$ ). 1000 sites suffisent à remailler le modèle, le nombre de triangles diminuant de près de un million à 35 mille.

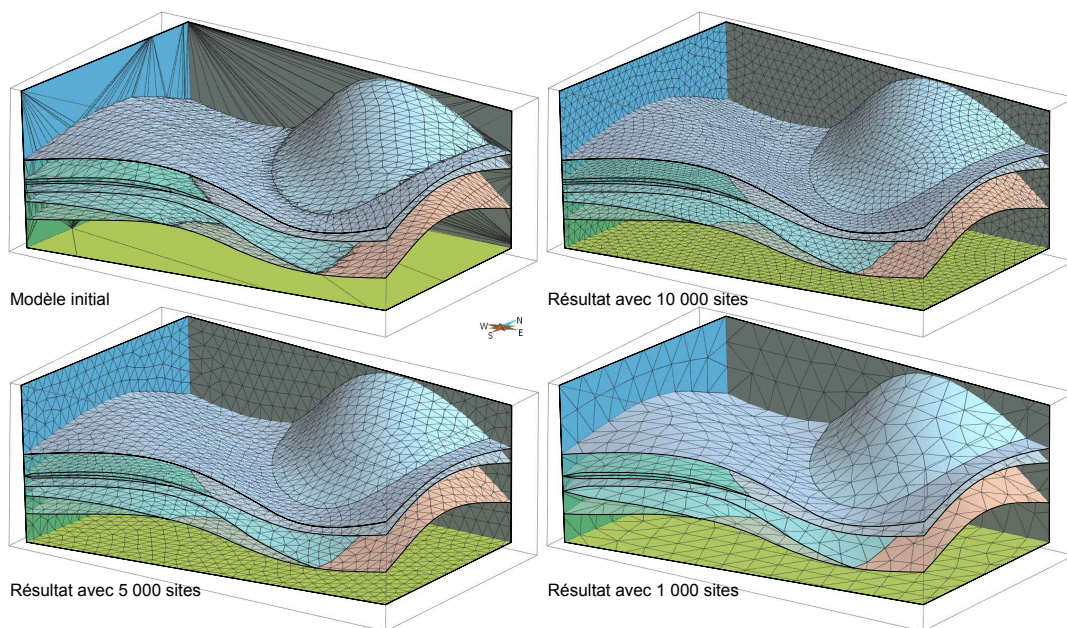
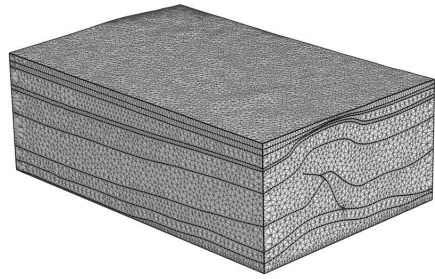
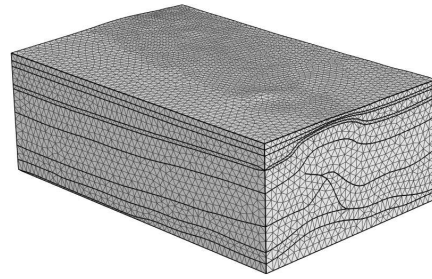


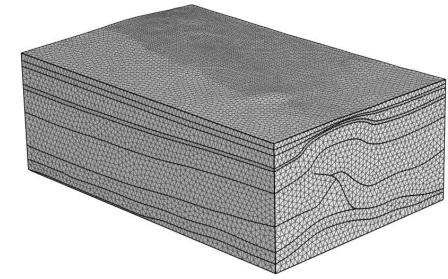
FIGURE 4.11 – REMAILLAGE DU MODÈLE FORWARD À DIFFÉRENTES RÉOLUTIONS. Ce modèle synthétique présente trois défis pour le remaillage, des couches très fines, des grosses variations d'épaisseur et des contacts à angle faible entre les horizons.



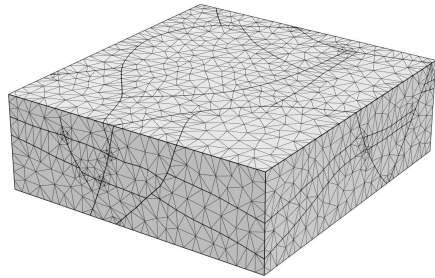
Detachment (22km×14km×7.7 km)



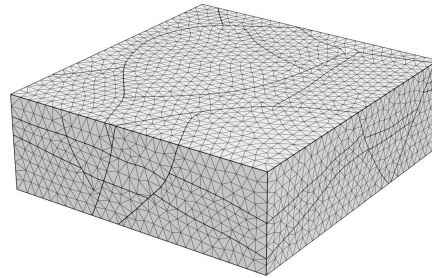
Remaillage de Detachment (15 000 sites)



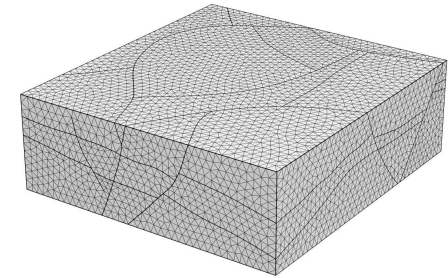
Remaillage de Detachment (30 000 sites)



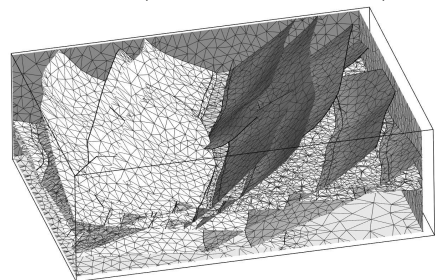
Leipzig (1.2km×1.2km×0.4km)



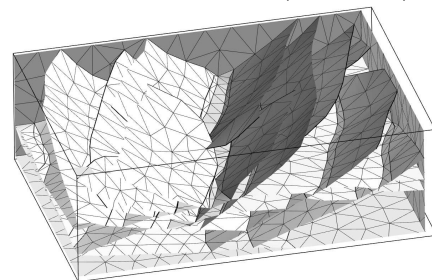
Remaillage de Leipzig (5 000 sites)



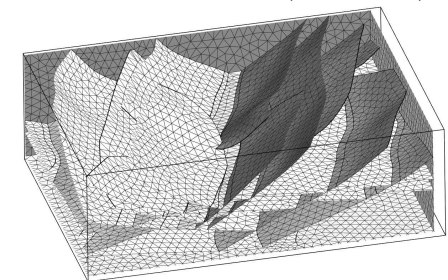
Remaillage de Leipzig (10 000 sites)



Lambda (6km×4.5km×1.9km)



Remaillage de Lambda (1 000 sites)



Remaillage de Lambda (10 000 sites)

FIGURE 4.12 – REMAILLAGE DES MODÈLES DETACHMENT, LEIPZIG, ET LAMBDA. (voir les tableaux 4.1 et 4.2 pour des détails).

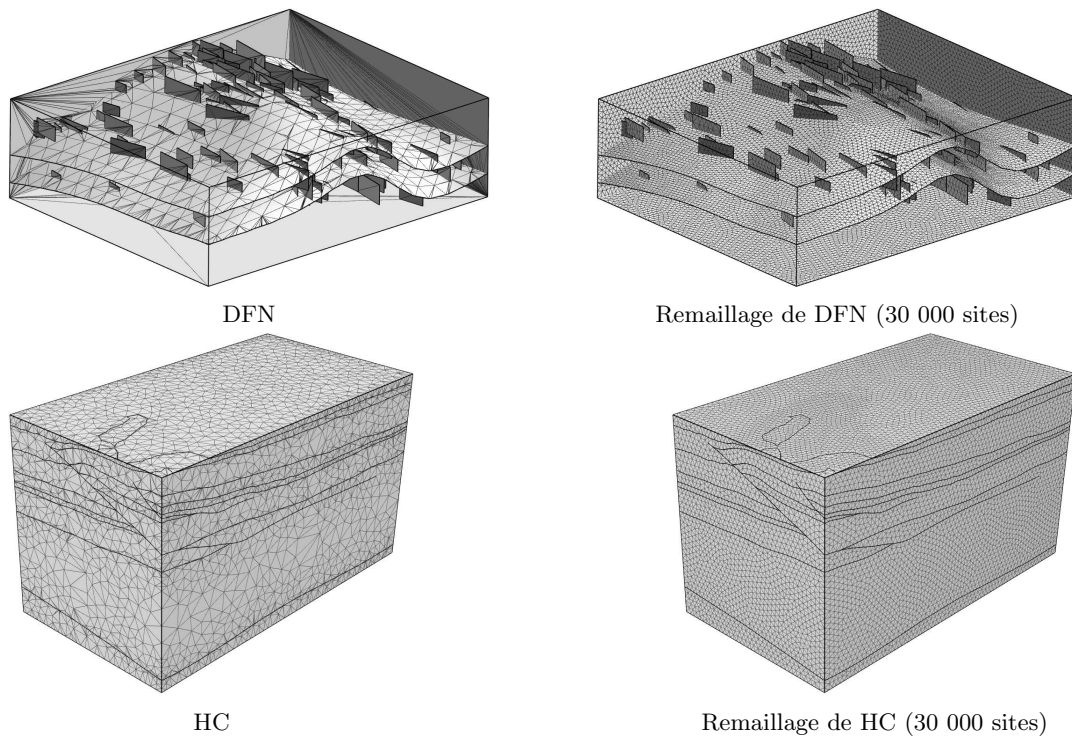


FIGURE 4.13 – REMAILLAGE DES MODÈLES DFN ET HC. (voir les tableaux 4.1 et 4.2 pour des détails).

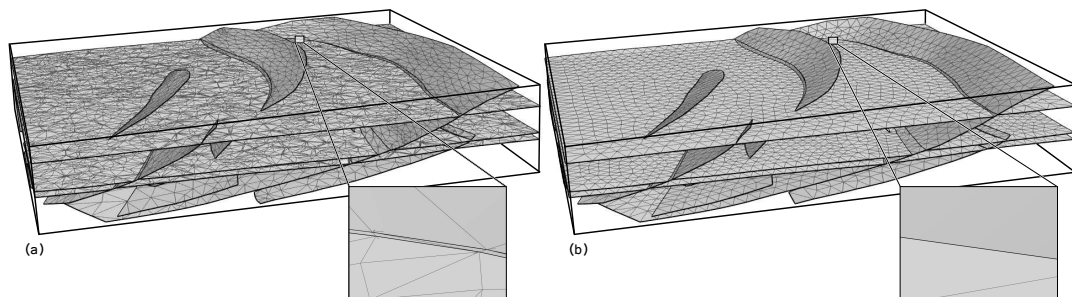


FIGURE 4.14 – REMAILLAGE DE CLOUDSPIN. (a) Modèle initial avec des très petits rejets. (b) Les surfaces remaillées en utilisant 5 000 sites, les lignes de contact sont localement regroupées (voir les tableaux 4.1 et 4.2 pour des détails).

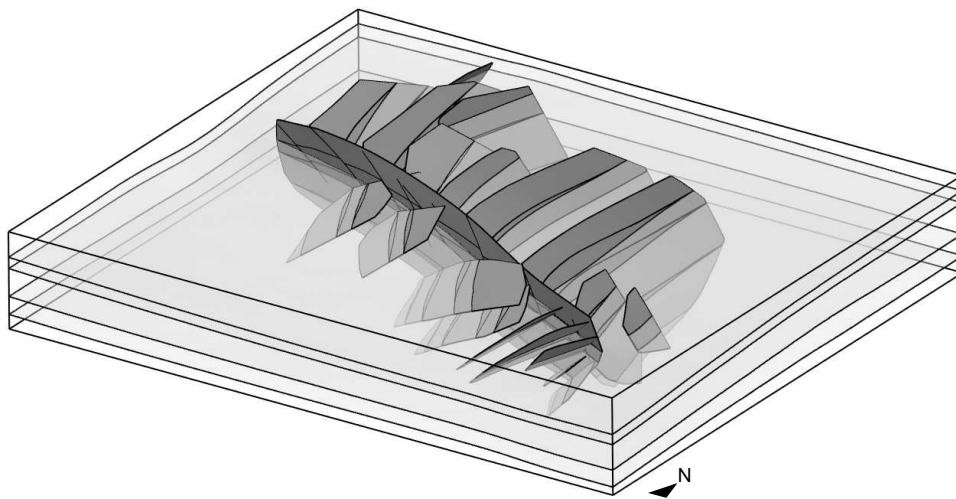


FIGURE 4.15 – MODÈLE CLYDE. Il présente des contacts compliqués entre failles.

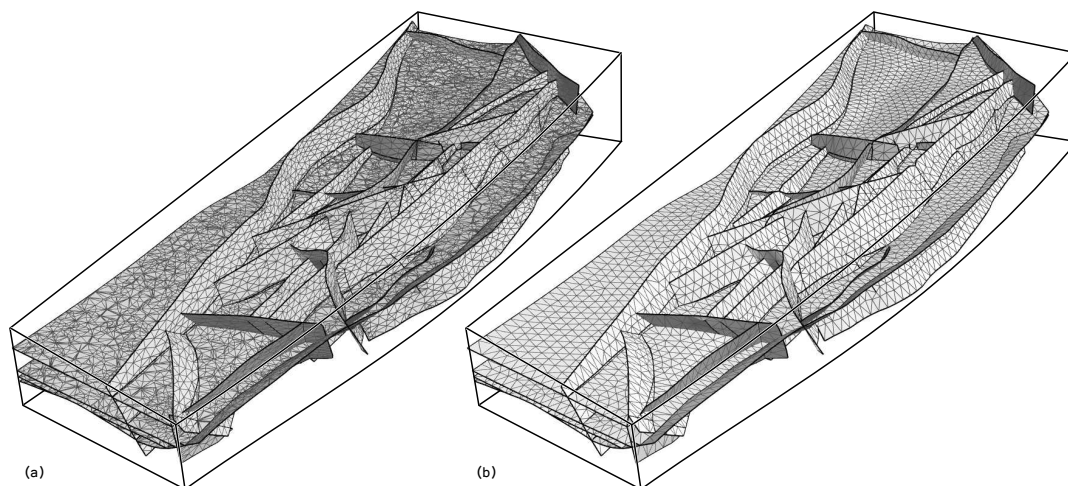


FIGURE 4.16 – REMAILLAGE DE NANCY. (a) Modèle initial (b) Modèle remaillé avec 10 000 sites (voir les tableaux 4.1 et 4.2 pour des détails).

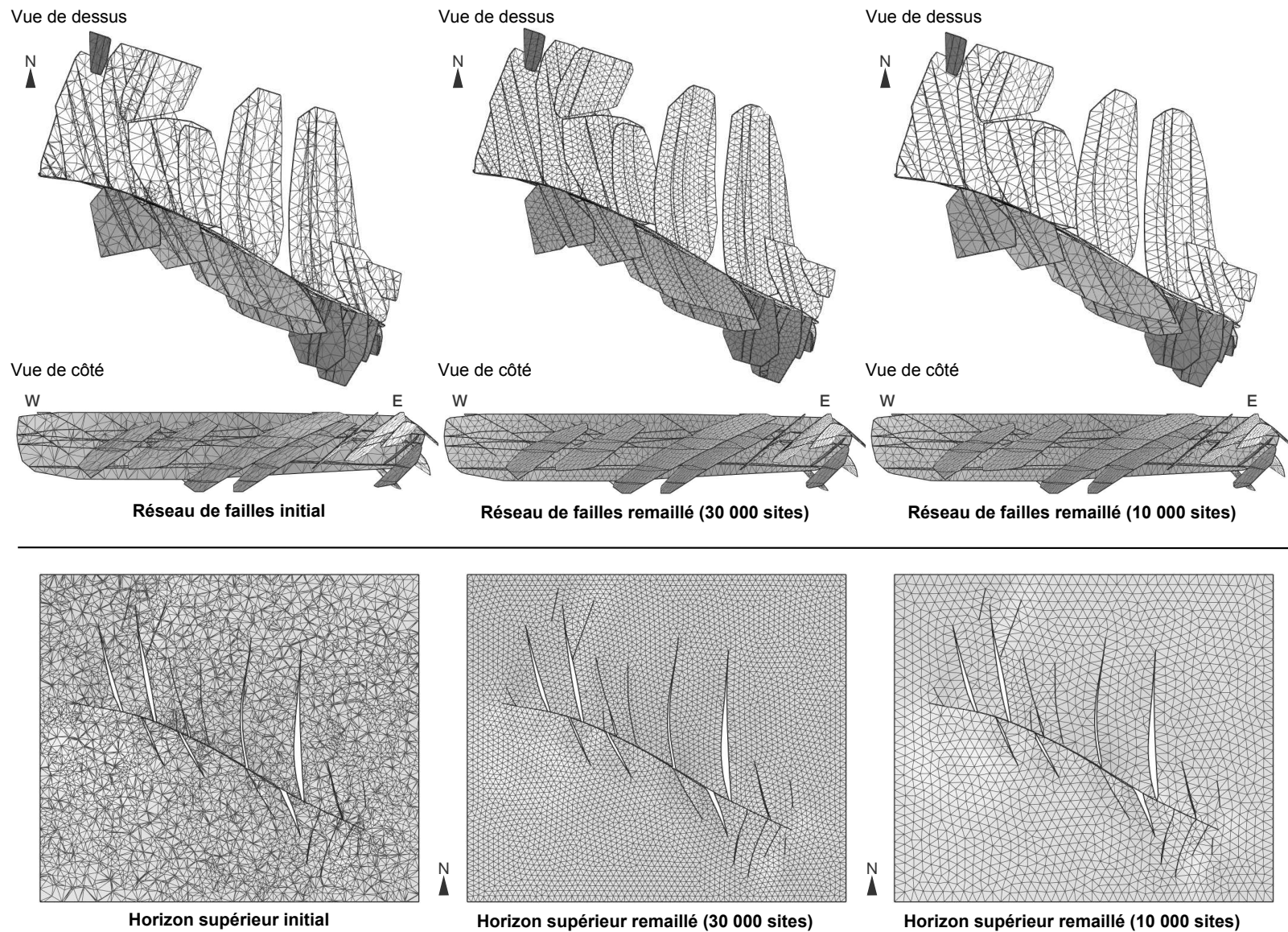


FIGURE 4.17 – REMAILLAGE DE CLYDE AVEC 30 000 ET 10 000 SITES. (voir aussi figure 4.15) Voir les tableaux 4.1 et 4.2 pour des détails.

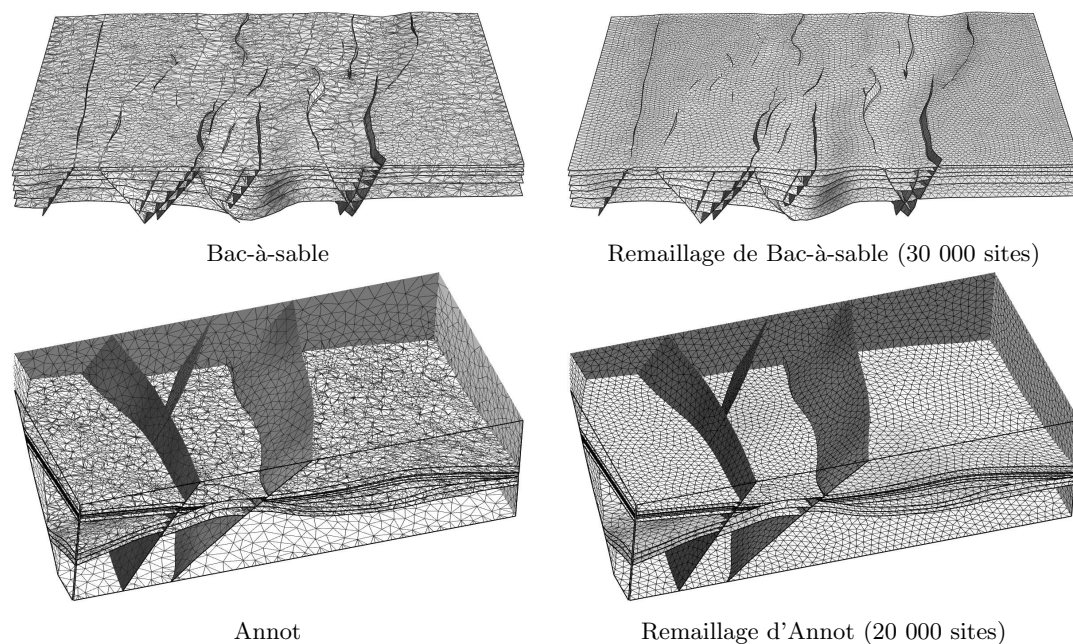


FIGURE 4.18 – REMAILLAGE DE MODÈLES PARTICULIÈREMENT COMPLIQUÉS : BAC-À-SABLE ET ANNOT. (voir les tableaux 4.1 et 4.2 pour des détails)

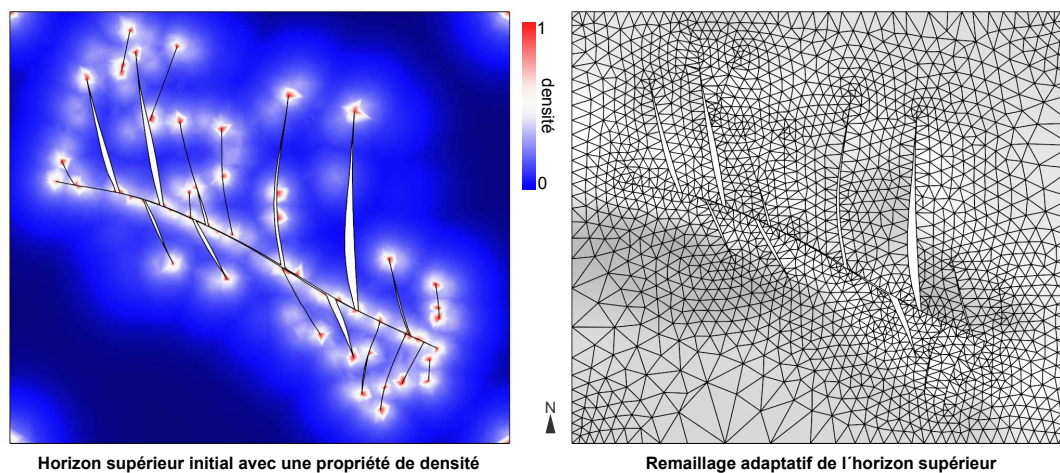


FIGURE 4.19 – REMAILLAGE ADAPTATIF DE L'HORIZON SUPÉRIEUR DE CLYDE. Une propriété de densité calculée à partir de la distance aux coins du modèle  $\rho(y) = (1 - d(y)/d_{max})^4$  a été utilisée pour générer un remaillage adaptatif du modèle Clyde avec 10 000 sites. A la différence du remaillage uniforme, le résultat dépend de la qualité du maillage initial puisque la propriété de densité y est interpolée.

| Données            | #Sites       | #S            | #T            | #Surf.     | #Lignes     | #Coins     | Angles (deg) |              | Qual. Moy.  | Aire (m <sup>2</sup> ) | Temps (s) |        | Dist.Haus.<br>(% diag.bbox) | Bbox diag.<br>(m) |
|--------------------|--------------|---------------|---------------|------------|-------------|------------|--------------|--------------|-------------|------------------------|-----------|--------|-----------------------------|-------------------|
|                    |              |               |               |            |             |            | Min          | < 30 (%)     |             |                        | Opt.      | Maill. |                             |                   |
| <b>Veins</b>       | <b>Input</b> | <b>471337</b> | <b>923286</b> | <b>29</b>  | <b>0</b>    | <b>0</b>   | <b>0.01</b>  | <b>22.07</b> | <b>0.55</b> | <b>5.20E+08</b>        |           |        |                             | 11069             |
|                    | 1000         | 19928         | 35484         | 29         | 0           | 0          | 1.04         | 3.46         | 0.81        | 5.16E+08               | 153       | 33     | 0.44                        | 11069             |
| <b>Forward</b>     | <b>Input</b> | <b>10151</b>  | <b>13588</b>  | <b>46</b>  | <b>76</b>   | <b>40</b>  | <b>0.01</b>  | <b>20.21</b> | <b>0.53</b> | <b>6.63E+04</b>        |           |        |                             | 152.847           |
|                    | 1000         | 2457          | 3400          | 47         | 71          | 35         | 0.56         | 3.25         | 0.82        | 6.61E+04               | 12        | 1      | 1.45                        | 152.847           |
|                    | 5000         | 7961          | 12849         | 46         | 74          | 36         | 1.85         | 1.00         | 0.88        | 6.62E+04               | 28        | 1      | 0.25                        | 152.847           |
|                    | 10000        | 14096         | 23845         | 46         | 77          | 41         | 1.30         | 0.58         | 0.89        | 6.62E+04               | 46        | 2      | 0.18                        | 152.847           |
| <b>Detachment</b>  | <b>Input</b> | <b>61480</b>  | <b>109098</b> | <b>50</b>  | <b>84</b>   | <b>46</b>  | <b>7.86</b>  | <b>2.19</b>  | <b>0.79</b> | <b>3.98E+09</b>        |           |        |                             | 36816.7           |
|                    | 15000        | 25165         | 44599         | 50         | 79          | 41         | 2.60         | 0.50         | 0.90        | 3.98E+09               | 61        | 3      | 0.31                        | 36814.9           |
|                    | 30000        | 42219         | 76514         | 50         | 82          | 44         | 3.85         | 0.24         | 0.91        | 3.98E+09               | 85        | 3      | 0.12                        | 36814.8           |
| <b>Leipzig</b>     | <b>Input</b> | <b>9286</b>   | <b>11344</b>  | <b>188</b> | <b>320</b>  | <b>166</b> | <b>0.98</b>  | <b>7.54</b>  | <b>0.73</b> | <b>1.00E+07</b>        |           |        |                             | 1724.07           |
|                    | 5000         | 8578          | 11694         | 186        | 287         | 135        | 4.05         | 1.61         | 0.84        | 1.00E+07               | 13        | 1      | 0.51                        | 1724.07           |
|                    | 10000        | 14911         | 22281         | 186        | 295         | 143        | 6.08         | 0.96         | 0.86        | 1.00E+07               | 23        | 2      | 0.79                        | 1724.07           |
| <b>Lambda</b>      | <b>Input</b> | <b>24528</b>  | <b>37553</b>  | <b>132</b> | <b>256</b>  | <b>177</b> | <b>0.09</b>  | <b>15.52</b> | <b>0.62</b> | <b>2.57E+08</b>        |           |        |                             | 7814.07           |
|                    | 1000         | 3416          | 3711          | 144        | 236         | 147        | 0.98         | 8.35         | 0.73        | 2.57E+08               | 20        | 2      | 1.17                        | 7814.07           |
|                    | 10000        | 16113         | 24223         | 134        | 242         | 155        | 0.57         | 1.46         | 0.86        | 2.57E+08               | 33        | 3      | 0.374                       | 7814.07           |
| <b>DFN</b>         | <b>Input</b> | <b>7876</b>   | <b>7723</b>   | <b>435</b> | <b>307</b>  | <b>481</b> | <b>0.00</b>  | <b>40.70</b> | <b>0.33</b> | <b>1.03E+09</b>        |           |        |                             | 18282.6           |
|                    | 30000        | 38081         | 62070         | 435        | 300         | 480        | 1.00         | 0.88         | 0.88        | 1.03E+09               | 48        | 3      | 1.2                         | 18279.6           |
| <b>HC</b>          | <b>Input</b> | <b>39919</b>  | <b>70684</b>  | <b>80</b>  | <b>140</b>  | <b>80</b>  | <b>0.12</b>  | <b>19.54</b> | <b>0.60</b> | <b>2.39E+09</b>        |           |        |                             | 23083.6           |
|                    | 30000        | 37255         | 65198         | 80         | 141         | 81         | 0.78         | 0.25         | 0.91        | 2.39E+09               | 72        | 5      | 0.327                       | 23083.6           |
| <b>Cloudspin</b>   | <b>Input</b> | <b>18313</b>  | <b>30049</b>  | <b>97</b>  | <b>124</b>  | <b>112</b> | <b>0.00</b>  | <b>25.59</b> | <b>0.52</b> | <b>8.93E+08</b>        |           |        |                             | 19339.8           |
|                    | 5000         | 10778         | 16494         | 91         | 117         | 103        | 0.45         | 3.52         | 0.82        | 8.92E+08               | 21        | 3      | 0.77                        | 19339.7           |
|                    | 10000        | 17725         | 28725         | 94         | 134         | 124        | 0.30         | 2.25         | 0.85        | 8.92E+08               | 29        | 3      | 0.6                         | 19339.5           |
| <b>Clyde</b>       | <b>Input</b> | <b>41355</b>  | <b>69343</b>  | <b>227</b> | <b>387</b>  | <b>303</b> | <b>0.01</b>  | <b>20.39</b> | <b>0.56</b> | <b>9.05E+08</b>        |           |        |                             | 15883.8           |
|                    | 10000        | 15551         | 23367         | 206        | 318         | 244        | 0.72         | 2.51         | 0.85        | 9.04E+08               | 38        | 4      | 0.79                        | 15883.8           |
|                    | 30000        | 38884         | 64850         | 220        | 354         | 282        | 0.15         | 1.30         | 0.88        | 9.05E+08               | 66        | 9      | 0.74                        | 15883.8           |
| <b>Nancy</b>       | <b>Input</b> | <b>59115</b>  | <b>85775</b>  | <b>753</b> | <b>1307</b> | <b>774</b> | <b>0.00</b>  | <b>25.98</b> | <b>0.50</b> | <b>1.83E+08</b>        |           |        |                             | 13502.4           |
|                    | 10000        | 24840         | 30445         | 719        | 1096        | 626        | 0.13         | 6.88         | 0.75        | 1.83E+08               | 43        | 21     | 0.83                        | 13500.9           |
|                    | 50000        | 79087         | 119309        | 741        | 1259        | 774        | 0.05         | 2.53         | 0.84        | 1.83E+08               | 106       | 49     | 0.27                        | 13502.3           |
| <b>Annot</b>       | <b>Input</b> | <b>76204</b>  | <b>130403</b> | <b>332</b> | <b>590</b>  | <b>300</b> | <b>0.00</b>  | <b>20.61</b> | <b>0.56</b> | <b>7.42E+08</b>        |           |        |                             | 12650.5           |
|                    | 3000         | 12737         | 18253         | 301        | 455         | 212        | 0.51         | 5.69         | 0.77        | 7.42E+08               | 40        | 7      | 1.02                        | 12650.5           |
|                    | 20000        | 41761         | 68240         | 311        | 522         | 264        | 0.55         | 2.31         | 0.85        | 7.42E+08               | 80        | 10     | 0.26                        | 12650.5           |
| <b>Bac-à-sable</b> | <b>Input</b> | <b>72927</b>  | <b>109267</b> | <b>500</b> | <b>688</b>  | <b>713</b> | <b>0.00</b>  | <b>21.98</b> | <b>0.53</b> | <b>7.60E+07</b>        |           |        |                             | 4641.93           |
|                    | 30000        | 52498         | 77688         | 503        | 890         | 897        | 0.00         | 1.11         | 0.85        | 7.59E+07               | 93        | 28     | 0.64                        | 4641.93           |

TABLE 4.2 – STATISTIQUES DE REMAILLAGE DES MODÈLES. Les modèles initiaux et les résultats obtenus sont comparés en termes de taille de maillage (nombre de sommets et nombre de triangles), nombre de composantes (surfaces, lignes et coins), de qualité (angle minimum dans un triangle, pourcentage d'angles inférieur à 30 degrés, qualité moyenne). La distance entre les modèles initiaux et remaillés est mesurée avec la distance de Hausdorff exprimée en pourcentage de la longueur de la diagonale de la boîte englobante du modèle.



## 4.6 Discussion

### 4.6.1 Contributions

Dans ce chapitre nous avons proposé une méthode automatique de remaillage des surfaces d'un modèle structural. Les surfaces sont remaillées simultanément avec des triangles les plus équilatéraux possible. La méthode opère à la fois globalement et localement sur le modèle d'entrée dont les surfaces, lignes et coins sont remaillés simultanément conformément à une résolution donnée. La contrepartie de cette automatisation est qu'il n'est pas possible de contrôler précisément les modifications qui sont réalisées. La méthode ne donne aucune garantie formelle ni sur la qualité des triangles du maillage, ni sur la topologie du modèle final. Elle donne un résultat en moins de quelques minutes sur des modèles structuraux typiques. Une étude précise des éléments qui apparaissent ou disparaissent est primordiale pour mieux évaluer les résultats.

L'optimisation globale et l'analyse locale ont toutes deux des limites évidentes. En effet, puisque la densité de sites n'est pas adaptée au nombre de coins ou de lignes de contact locaux des modifications très importantes peuvent être faites dans certaines cellules de Voronoï. Ces modifications sont discutables, car elles dépendent des positions de quelques sites et peuvent impliquer la disparition d'éléments importants d'un point de vue géologique.

### 4.6.2 Perspectives

La première amélioration à apporter serait d'éviter certaines de ces modifications comme le regroupement de coins alignés sur une ligne de contact (figure 4.6b). La deuxième serait de modifier la fonction énergie optimisée, soit en adaptant la densité de sites à la distance aux coins, ou bien à d'autres éléments du modèle, soit en ajoutant un terme à l'énergie pour limiter les configurations problématiques. Il est déjà possible de faire varier la densité des sites puisque la fonction objectif CVT (équation 1.6) inclut une fonction de densité et la méthode peut générer des maillages adaptatifs comme celui de la figure 4.19. Par contre, il est difficile d'y ajouter des termes, celui que nous proposons pour attirer les points sur les bords n'est d'ailleurs pas totalement satisfaisant. Nous avons également essayé d'ajouter un terme pour écarter les sommets de Voronoï des surfaces, des contacts et des coins, sans succès.

La subdivision volumique induite par le placement des sites de Voronoï est sans aucun doute la clé pour obtenir de meilleurs résultats, tant du point de vue de la qualité du maillage final, que du point de vue du contrôle de la résolution du modèle et de sa simplification. De nombreux problèmes sont communs aux méthodes de type *octree* et peut être serait-il possible d'adapter les stratégies permettant, par exemple, de traiter les cas où les intersections des cellules avec le bord du modèle sont pas favorables. Au lieu d'une densité globalement définie dans la totalité du modèle, une analyse locale de la complexité des intersections entre le modèle et la cellule pourrait être utilisée pour ajouter ou supprimer des sites et ré-optimiser localement leurs positions.

## Chapitre 5

# Contribution : Vers un maillage volumique hybride à partir d'un diagramme de Voronoï

Ces travaux ont été présentés sous forme d'une note de recherche à l'IMR [Pellerin *et al.*, 2012].

### Résumé

Dans ce chapitre nous proposons une méthode pour générer un maillage hybride, de type élément fini, constitué de tétraèdres, prismes triangulaires et pyramides à base carrée, pour un modèle structural. Cette méthode est l'extension en trois dimensions de la méthode de maillage de surface que nous avons présentée dans le chapitre 4. Les sommets, arêtes, facettes, et cellules du maillage final sont construits à partir des intersections entre les cellules du diagramme de Voronoï et les surfaces définissant le modèle. A l'intérieur des régions volumiques, les tétraèdres de Delaunay duals du diagramme de Voronoï de sites qui échantillonnent le modèle sont construits. Dans les zones où l'intersection des cellules de Voronoï avec les surfaces du modèle a une unique composante connexe, les éléments construits sont également des tétraèdres. Dans les zones où les intersections sont plus complexes, nous introduisons une correspondance entre les éléments du diagramme de Voronoï et les éléments du maillage hybride et construisons un maillage volumique. Les maillages obtenus ne sont en général pas valides et un ensemble de post-traitements est nécessaire.

### 5.1 Motivations

Le maillage volumique de type élément fini est un pré-requis pour faire des calculs de restauration [Durand-Riard *et al.*, 2011, Vidal-Royo *et al.*, 2012], de propagation d'ondes [Lelievre *et al.*, 2012], de diffusion de chaleur [Liu *et al.*, 2012], ou encore de stratigraphie dans un espace dépôt [Mallet, 2004]. Le maillage doit alors capturer les composantes du modèle qui ont un impact sur le processus modélisé. Nous avons vu dans le chapitre 3 que la résolution de ces composantes peut être inférieure à la résolution voulue pour le maillage, ce qui complique énormément sa génération.

Généralement les maillages élément fini utilisés en géomodélisation sont tétraédriques et sont générés à l'aide d'une des méthodes que nous avons présentées dans la partie 2.3. Les méthodes les plus robustes sont probablement celles qui permettent de générer un maillage contraint à une triangulation des frontières du modèle. Elles requièrent donc un maillage des frontières de bonne qualité. Les méthodes développées pour des applications médicales (partie 2.3.2) génèrent un maillage des frontières du modèle en même temps que le maillage volumique. Ce qui est également possible avec les méthodes de maillage de type *octree* (partie 2.3).

Nous proposons une méthode de type optimisation Voronoï (partie 2.3.1) qui maille à la fois les coins, les lignes, les surfaces et les régions d'un modèle structural par frontière défini par un ensemble de surfaces triangulées conformes. Les surfaces sont remaillées avec des triangles aussi équilatéraux que possible. Les régions sont maillées avec des éléments conformes à ce remaillage des surfaces. Les zones fines du modèle, identifiées en fonction de la résolution du maillage à générer, sont remplies avec des prismes, pyramides et tétraèdres, les autres sont maillées avec des tétraèdres. Utiliser des éléments de différents types permet de générer moins d'éléments qui sont, a priori, de meilleure qualité.

## 5.2 Principe

Nous décrivons rapidement dans cette partie les grandes étapes de la méthode, et les quelques différences avec le remaillage de surface.

### *Optimisation de l'échantillonnage*

Nous utilisons un diagramme de Voronoï barycentrique pour placer des sites qui échantillonnent le modèle et ses surfaces de manière adéquate. Les positions des sites sont tout d'abord optimisées pour obtenir un diagramme de Voronoï barycentrique volumique (partie 1.3.1) puis, les points qui échantillonnent les surfaces du modèle sont optimisés de telle sorte que le diagramme de Voronoï restreint aux surfaces du modèle soit barycentrique (partie 1.3.2). Du nombre de sites dépendent la résolution du maillage final et la détermination des zones peu épaisses du modèle.

### *Remaillage des surfaces*

Les surfaces du modèle sont remaillées avec la méthode décrite dans la partie 4.4. La différence est qu'ici, nous associons chaque composante connexe de chaque cellule de Voronoï restreinte à un seul point, ce qui correspond à une procédure de regroupement des points supplémentaire par rapport à celles utilisées pour le seul remaillage de surfaces. De plus, les facettes du diagramme de Voronoï restreint triangulaires ou en forme de boutonnière (avec seulement deux voisins) sont filtrées et ignorées lors de la construction des triangles. Lors du remaillage des surfaces, ces triangles étaient supprimés pendant la phase de post-traitement (section 4.4.5), ce qui empêcherait le maintien la conformité entre le maillage volumique et le remaillage des surfaces. Une fois les surfaces remaillées, les sommets du maillage hybride sont connus et ne sont plus modifiés.

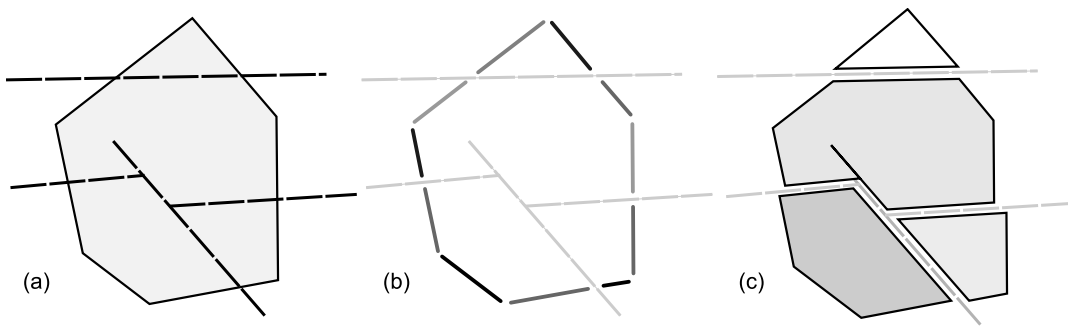


FIGURE 5.1 – DÉCOUPAGE D'UNE CELLULE DE VORONOÏ PAR LES LIMITES D'UN MODÈLE. (a) Frontières du modèle dans une cellule de Voronoï. (b) Arêtes découpées. (c) Morceaux de cellules résultant du découpage.

| Élément diag. Voronoï | Intersections<br>composantes connexes | Maillage 3D hybride                          |
|-----------------------|---------------------------------------|----------------------------------------------|
| Morceau de cellule    | 0                                     | 1 sommet à l'intérieur                       |
|                       | 1                                     | 1 sommet au bord                             |
|                       | 2                                     | 2 sommets au bord &<br>1 arête à l'intérieur |
| Morceau de facette    | 0                                     | 1 arête à l'intérieur                        |
|                       | 1                                     | 1 arête au bord                              |
|                       | 2                                     | 2 arête au bord &<br>1 facette à l'intérieur |
| Morceau d'arête       | 0                                     | 1 facette à l'intérieur                      |
|                       | 1                                     | 1 facette au bord                            |
|                       | 2                                     | 2 facettes au bord &<br>1 cellule            |
| Sommet                | 0                                     | 1 cellule                                    |

TABLE 5.1 – RELATIONS ÉLÉMENTS DU MAILLAGE HYBRIDE - ÉLÉMENTS DU DIAGRAMME DE VORONOÏ RESTREINT AU MODÈLE.

### *Correspondance diagramme de Voronoï - maillage hybride*

Nous proposons de mettre en correspondance les cellules, facettes, arêtes et points du diagramme de Voronoï découpés en morceaux par les surfaces du modèle (figure 5.1) avec les cellules, faces, arêtes et sommets du maillage hybride à construire (table 5.1). Nous considérons que le nombre maximum d'intersections entre un morceau de cellule de Voronoï et les surfaces du modèle est de deux, ce qui n'est pas toujours vrai. Il est en revanche possible de détecter ces cellules, et d'appliquer des stratégies de regroupement similaires à celles mises en place pour la détermination des sommets du maillage des surfaces (partie 4.4), afin de limiter à deux le nombre de points pour un morceau de cellule de Voronoï.

## 5.3 Construction des cellules hybrides

La construction du maillage hybride se fait en deux grandes étapes. Après avoir compté les cellules à construire (partie 5.3.1), elles sont construites l'une après l'autre en ajoutant leurs sommets, arêtes et facettes (parties 5.3.2 et 5.3.3).

---

**ALGORITHME 5.1 - DÉTERMINATION DES SOMMETS ET SEGMENTS DE VORONOÏ À L'INTÉRIEUR DU MODÈLE AVEC UN ALGORITHME DE COLORIAGE.**


---

**Entrées :** sommets du diagramme de Voronoï  $S$

**Sorties :** marquage des sommets et segments d'arêtes de Voronoï à l'extérieur/intérieur du modèle  $\Omega$

- (1) Poser que tous les sommets sont à l'intérieur ;
- (2) Repérer les sommets de Voronoï  $S_E$  à l'extrémité d'une arête de Voronoï infinie qui n'intersecte pas  $\Omega$ , les marquer à l'extérieur (figure 5.2a) ;
- (3) Construire la pile  $P \leftarrow S_E$  ;
- (4) **tant que**  $P$  non vide **faire**
  - $v \leftarrow$  dépiler  $P$  ;
  - pour** chaque voisin  $n$  de  $v$  **faire**
    - si**  $n$  n'est pas marqué à l'extérieur **alors**
      - $nb \leftarrow$  nombre d'intersections entre l'arête  $vn$  et  $\Omega$  ;
      - si**  $nb == 0$  **alors**
        - Marquer  $n$  à l'extérieur ;
        - Empiler  $n$  ;
      - sinon si**  $nb$  pair **alors**
        - Marquer  $n$  à l'extérieur ;
        - Empiler  $n$  ;
        - Marquer alternativement à l'intérieur et à l'extérieur les segments entre deux intersections ;
      - sinon**
        - Marquer alternativement à l'intérieur et à l'extérieur les segments entre deux intersections ;
    - fin**
  - fin**
- fin**

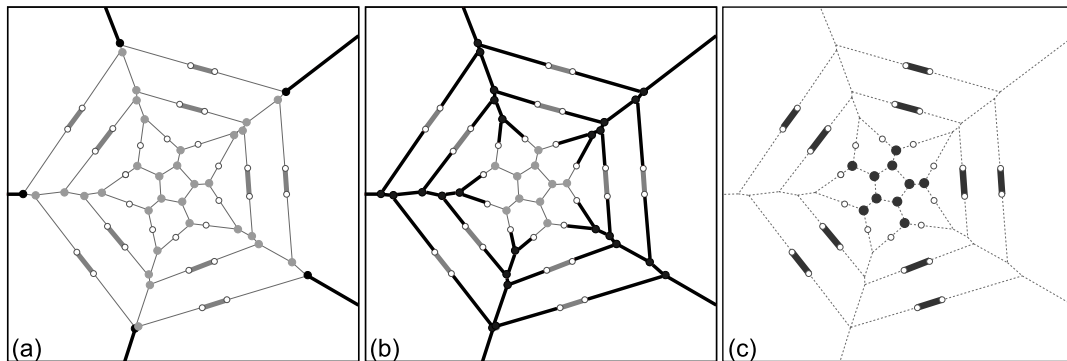


FIGURE 5.2 – CALCUL DES POINTS ET ARÊTES DE VORONOÏ À L'INTÉRIEUR D'UNE ÉTOILE. (a) Les 5 points de Voronoï à l'extrémité d'une arête infinie qui n'intersecte pas le bord sont en dehors. (b) La propagation sur les autres arêtes donne les segments et points qui sont en dehors. (c) Les points et segments qui sont à l'intérieur du modèle sont conservés.

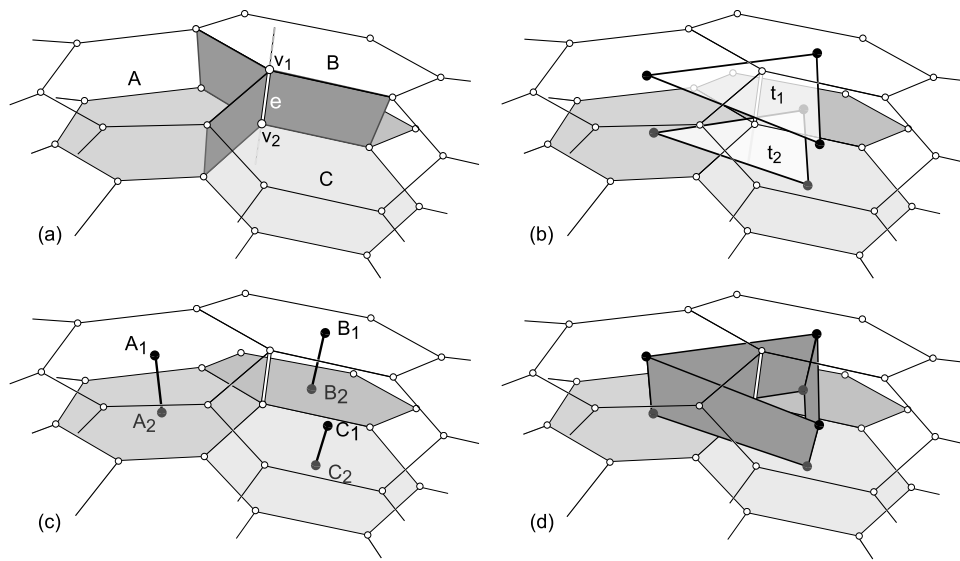


FIGURE 5.3 – ÉLÉMENTS DU PRISME DUAL D'UN SEGMENT DE VORONOÏ. (a) Trois cellules de Voronoï restreintes, A, B et C à une couche partagent le segment  $e$  délimité par deux intersections avec les surfaces  $v_1$  et  $v_2$ . (b) Les triangles  $t_1$  et  $t_2$  duals de  $v_1$  et  $v_2$  déterminent les six points de la cellule hybride. (c) Il y a une arête reliant chaque paire de points associée à la même cellule de Voronoï. (d) Il y a une facette quadrangle pour chaque morceau de facette de Voronoï contenant le segment  $e$ .

### 5.3.1 Détermination des cellules à construire

Selon les relations établies dans le table 5.1, il y a deux types de cellules à construire : celles duales des points de Voronoï et celles duales des segments d'arêtes de Voronoï entre deux intersections avec le bord. Tout d'abord, un algorithme fondé sur un coloriage est utilisé pour déterminer les éléments du squelette de Voronoï à l'extérieur du modèle et en déduire ceux à l'intérieur (algorithme 5.1 et figure 5.2).

### 5.3.2 Cellules duales des segments

Les premières cellules à construire sont celles duales d'un segment de Voronoï  $e$ , c'est-à-dire un morceau d'arête de Voronoï délimité par deux points de Voronoï restreints,  $v_1$  et  $v_2$  (figure 5.3a). Ces deux points correspondent à deux triangles,  $t_1$  et  $t_2$ , remaillant les surfaces du modèle, qui sont deux des facettes de la cellule hybride à construire (figure 5.3b). A ces triangles, sont ajoutés les segments reliant les sommets correspondant à la même cellule de Voronoï (figure 5.3c) et les facettes reliant ces segments et les triangles (figure 5.3d). Selon le nombre de sommets, la cellule à construire est soit un tétraèdre, soit une pyramide à base carrée, soit un prisme à base triangulaire. Les cellules dégénérées avec seulement trois sommets sont ignorées. Les autres cellules duales d'un segment sont valides.

### 5.3.3 Cellules duales des points

Les cellules restantes sont duales des points de Voronoï. Comme nous l'avons vu dans la partie 1.1.1, chaque sommet de Voronoï est partagé par quatre cellules de Voronoï, six facettes de Voronoï et quatre arêtes de Voronoï (figure 1.4a). Leur dual,

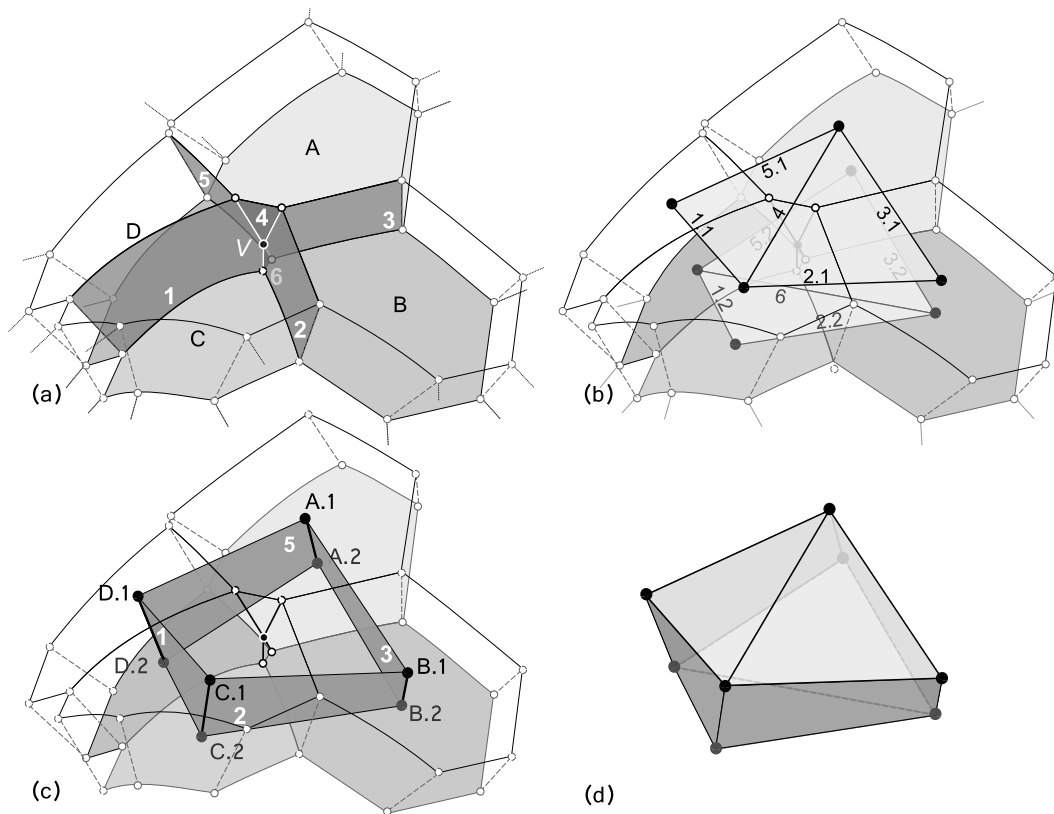


FIGURE 5.4 – CONSTRUCTION D’UNE CELLULE À 8 SOMMETS CORRESPONDANT À UN SOMMET DE VORONOÏ. (a) Le sommet  $v$  est partagé par 4 morceaux de cellules de Voronoï (A, B, C, D), 4 morceaux d’arêtes et 6 morceaux de facettes. (b) A chaque morceau d’arête de Voronoï correspond un triangle. (c) Il y a une facette pour chaque morceau de facette de Voronoï qui intersecte deux fois les surfaces (numéros 1, 2, 3, 5). (d) La cellule hybride finale hybride a 8 sommets, 4 facettes triangulaires et 4 facettes quadrangulaires.

dans la relation de Voronoï-Delaunay classique, est un tétraèdre reliant les sites de ces quatre cellules (figure 1.4c). Lorsque les cellules de Voronoï intersectent les surfaces du modèle, nous analysons des polyèdres résultant du découpage des cellules de Voronoï par ces surfaces (figure 5.1) pour construire les éléments hybrides<sup>1</sup> (table 5.1).

### Ajout des sommets

Pour chacun des quatre morceaux de cellule de Voronoï contenant le sommet de Voronoï, il y a un ou deux points à ajouter. Par exemple, chacun des morceaux de cellule sur la figure 5.4a qui contient le sommet de Voronoï  $v$  recoupe deux fois les surfaces et correspond à deux points (figure 5.4c). Pour choisir les points à ajouter parmi ceux associés à la cellule de Voronoï - ils ont été calculés lors du remaillage des surfaces - nous déterminons ceux qui peuvent être atteints en se propageant depuis le sommet  $v$  le long des arêtes de Voronoï (cellule A, figure 5.5). Dans les cas où un seul

1. Parce que le calcul explicite de ces polyèdres est difficile et peu robuste, les cellules doivent être construites en utilisant les informations fournies par le diagramme de Voronoï et le diagramme de Voronoï restreint aux surfaces du modèle.

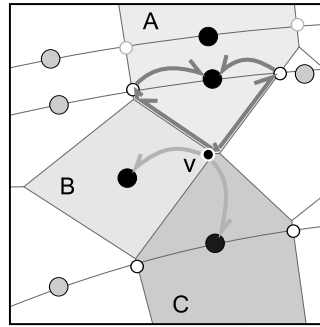


FIGURE 5.5 – DÉTERMINATION DES SOMMETS D'UNE CELLULE DUALE D'UN SOMMET DU DIAGRAMME DE VORONOÏ.

point est associé à la cellule de Voronoï, cette détermination n'est pas nécessaire, soit parce que l'intersection entre cette cellule et les surfaces du modèle est vide (cellule B, figure 5.5), soit parce que cette intersection a une seule composante connexe (cellule C, figure 5.5).

### Ajout des arêtes

Il y a deux types d'arêtes à ajouter, celles qui relient les points associés à une même cellule de Voronoï, en gras sur la figure 5.4c, et celles correspondant aux facettes de Voronoï contenant le point  $v$ . Les facettes numérotées 1, 2, 3 et 5 sur la figure 5.4a correspondent à deux arêtes numérotées 1.1, 1.2 *etc* sur la figure 5.4b; les facettes numérotées 4 et 6 ne recoupent qu'une seule fois les surfaces et correspondent à une seule arête. Les arêtes ne sont pas toujours bien déterminées : lorsque la facette ne recoupe pas les surfaces du modèle et qu'une des cellules de Voronoï contenant cette facette est associée à plusieurs points, il n'est pas possible de déterminer à partir de quels points construire l'arête (figure 5.6). Cette arête est marquée comme mal-définie et ajoutée à la cellule.

### Ajout des facettes

Les premières facettes à ajouter sont celles qui correspondent aux arêtes contenant le sommet de Voronoï  $v$ . Soit ce sont des triangles qui remaillent les surfaces du modèle (figure 5.4b), soit ce sont des polygones construits à partir des arêtes correspondant aux facettes contenant à chaque arête. Les autres facettes à ajouter sont celles correspondant aux facettes de Voronoï contenant  $v$  et intersectant deux fois les surfaces du modèle, par exemple les facettes numérotées 1, 2, 3 et 5 sur la figure 5.4c qui correspondent aux facettes de Voronoï ayant le même numéro sur la figure 5.4a. Elles sont déterminées à partir des arêtes qui correspondent à ces facettes, figure 5.4b. Une facette peut avoir jusqu'à six sommets et six arêtes. Si une des arêtes est mal-définie, la facette est également mal-définie.

## 5.4 Traitement des cellules invalides

Une fois qu'une cellule est construite, son type est calculé à partir du nombre de ses sommets, arêtes et facettes. Théoriquement, une cellule hybride peut avoir de 4



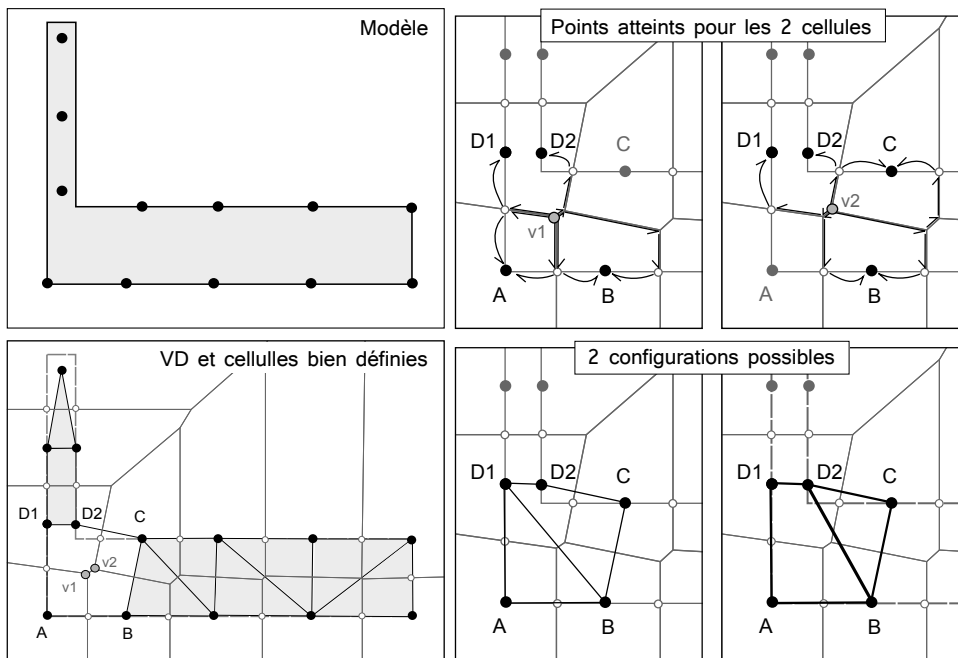


FIGURE 5.6 – CONFIGURATION DONNANT UNE ARÊTE MAL-DÉFINIE EN 2D. Les sommets possibles pour la cellule hybride duale de  $v_1$  sont : A, B, D1 et D2, et pour la cellule duale de  $v_2$  : B, C, D1, et D2. Parce que l'arête de Voronoï (facette) séparant les cellules B et D n'intersecte pas le bord du modèle, l'arête reliant D et B est mal-définie.

à 8 sommets, 6 à 16 arêtes, 4 à 10 facettes, chaque facette ayant jusqu'à 6 sommets. En pratique, la plupart des cellules sont des tétraèdres, prismes ou pyramides. Les procédures pour traiter les autres cellules sont décrites dans la partie suivante.

Les cellules qui ne sont ni des tétraèdres, ni des prismes, ni des pyramides, sont classées en quatre catégories : (1) les cellules à subdiviser (cellules à 7 ou 8 sommets définissant un volume valide, comme celle obtenue figure 5.4d), (2) les cellules mal-définies (qui contiennent au moins une arête mal-définie), (3) les cellules invalides (cellules dont une arête est une diagonale d'une facette, ou dont deux faces quadrangulaires partagent plus de deux points, comme les cellules à 5 points, figure 5.7a, qui apparaissent en assez grand nombre) et (4) celles qui n'appartiennent à aucune des catégories précédentes.

Les cellules à subdiviser sont découpées en pyramides et tétraèdres en ajoutant un point à leur barycentre. Les cellules mal-définies sont déterminées en choisissant l'arête candidate qui dégrade le moins possible la qualité du maillage (en termes d'angles). Ce choix est fait pour chaque arête et il est propagé aux facettes qui la contiennent. Cette procédure efficace peut poser problème quand une facette ou une cellule contient plusieurs arêtes mal-définies.

Deux opérations sont appliquées pour récupérer des tétraèdres, pyramides et prismes à partir des cellules invalides. Premièrement, toutes les facettes d'une cellule pour lesquelles il existe une arête de la même cellule correspondant à une de ses diagonales, sont coupées en deux selon cette diagonale. Ce découpage est propagé aux facettes voisines. Ensuite, il est nécessaire de s'assurer de la validité des facettes des cellules. Les facettes qui ont plus de quatre points sont triangulées et les facettes qua-

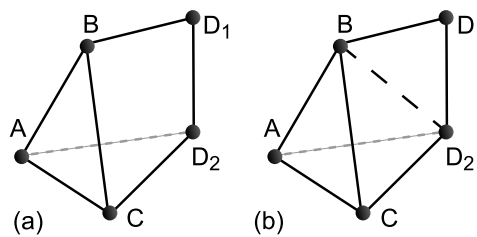


FIGURE 5.7 – CELLULE INVALIDE À 5 SOMMETS. (a) Les points D sont issus de la même cellule de Voronoï. Les facettes  $ABD_1D_2$  et  $BCD_1D_2$  ont trois points en communs. (b) Le découpage de ces facettes par l'arête  $BD_2$  donne un tétraèdre et une facette triangulaire.

drangulaires qui partagent trois points avec une autre facette sont coupées en deux (figure 5.7b). Ces procédures permettent de diminuer le nombre de cellules invalides, mais elles ne sont pas suffisantes pour obtenir un maillage final valide dans tous les cas.

## 5.5 Résultats

Nous avons appliqué cette méthode maillage hybride à des modèles géologiques et non géologiques. Le temps de calcul (entre quelques secondes et quelques minutes) dépend du nombre de sites, du nombre de triangles sur les surfaces d'entrée et du nombre de cellules invalides à traiter. Les maillages obtenus pour des modèles dans lesquels les épaisseurs des régions varient peu et dont les bords sont lisses reproduisent un maillage en couche limite (figures 5.8 et 5.9). Les résultats pour les modèles géologiques sont prometteurs (figure 5.10), les couches fines du modèle sont maillées avec des prismes. Les zones considérées fines et maillées avec des prismes dépendent de la résolution de la subdivision utilisée, et donc, du nombre de sites échantillonnant le modèle (figure 5.9).

## 5.6 Discussion

### 5.6.1 Contributions

Dans ce chapitre nous proposons une méthode pour générer un maillage hybride, de type élément fini (tétraèdres, prismes, pyramides) pour un modèle structural à partir d'un diagramme de Voronoï et de ses intersections avec les surfaces délimitant ce modèle. Cette méthode est automatique et relativement rapide. Elle permet de construire un maillage dans lequel le type d'élément construit dépend de l'épaisseur locale de la région considérée. Il n'est pas nécessaire de pré-identifier les zones fines du modèle, elles sont déterminées depuis la subdivision du modèle par les cellules de Voronoï.

La construction des cellules dans les zones fines fonctionne très bien et la construction des tétraèdres de Delaunay loin des surfaces du modèle ne pose pas non plus de problème. En revanche, dans les zones de transition où de nombreuses cellules invalides apparaissent, les procédures mises en place ne sont pas encore suffisantes pour retrouver un maillage valide. D'autre part, puisque les tétraèdres construits à proximité des surfaces ne relient pas les sites, mais les sommets des triangles remaillant les

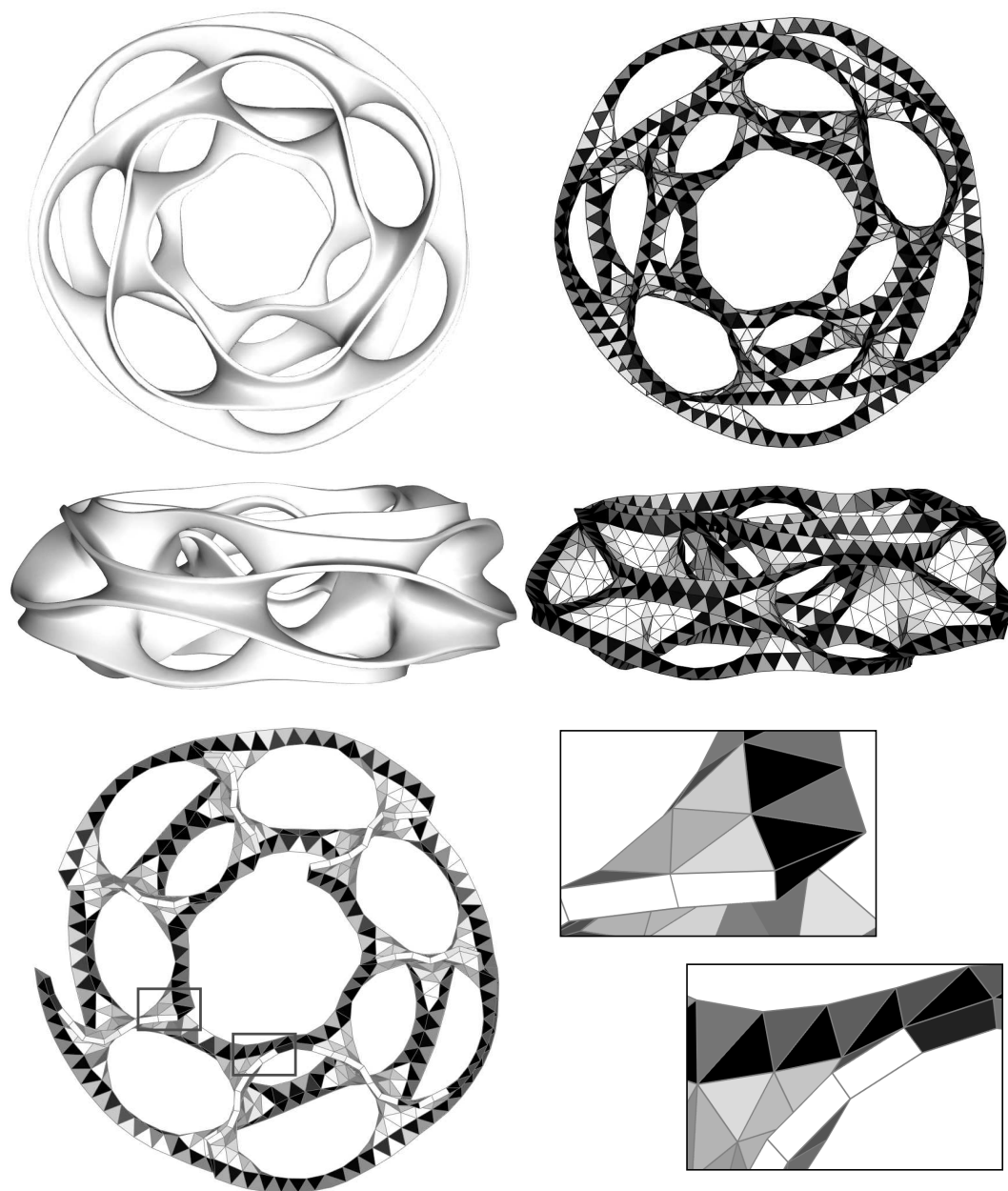


FIGURE 5.8 – MAILLAGE HYBRIDE D'UNE SURFACE LISSE. 1 010 sites ont été optimisés pour échantillonner la surface (8 secondes). Le maillage final construit en 3 secondes a 516 tétraèdres (gris), 665 prismes (blanc) et 507 pyramides (noir).

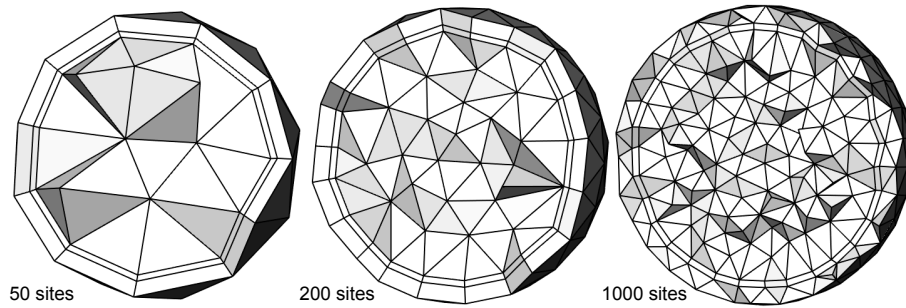


FIGURE 5.9 – MAILLAGE HYBRIDE DE TROIS SPHÈRES IMBRIQUÉES À TROIS RÉOLUTIONS. Le nombre de sites échantillonnant le modèle détermine les couches maillées avec des prismes.

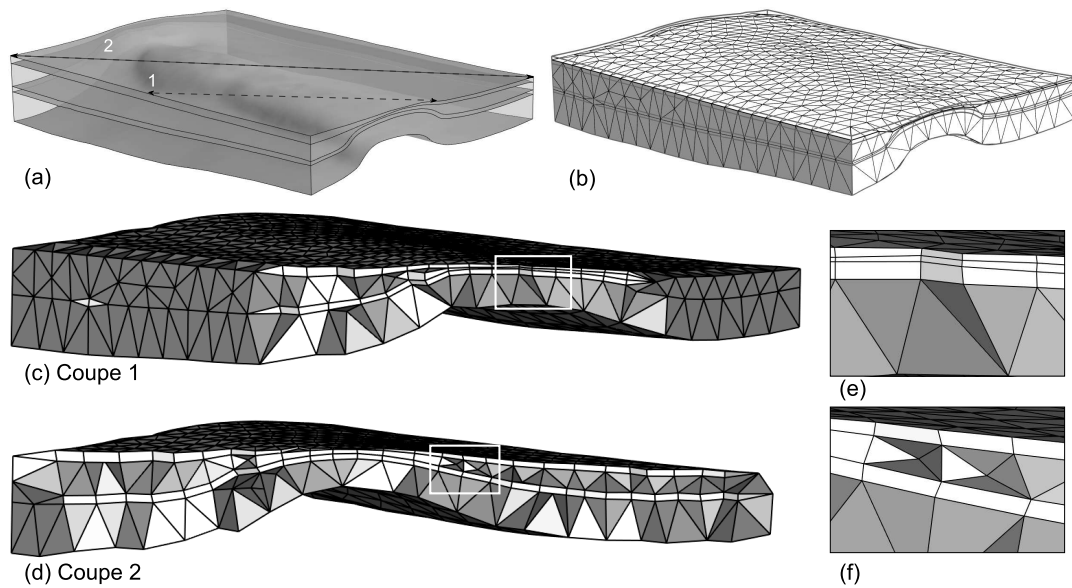


FIGURE 5.10 – MAILLAGE DE COUCHES D'ÉPAISSEURS VARIABLES. (a) Modèle initial (b) Maillage hybride volumique généré depuis 1 000 sites (4 674 tétraèdres, 1 754 prismes et 335 pyramides). (c&d) Coupes dans les maillages hybrides les tétraèdres sont en gris, les prismes et pyramides en blanc. (e) Couches de prismes maillant les sections fines. (f) Éléments obtenus par découpage de cellules à 8 sommets.

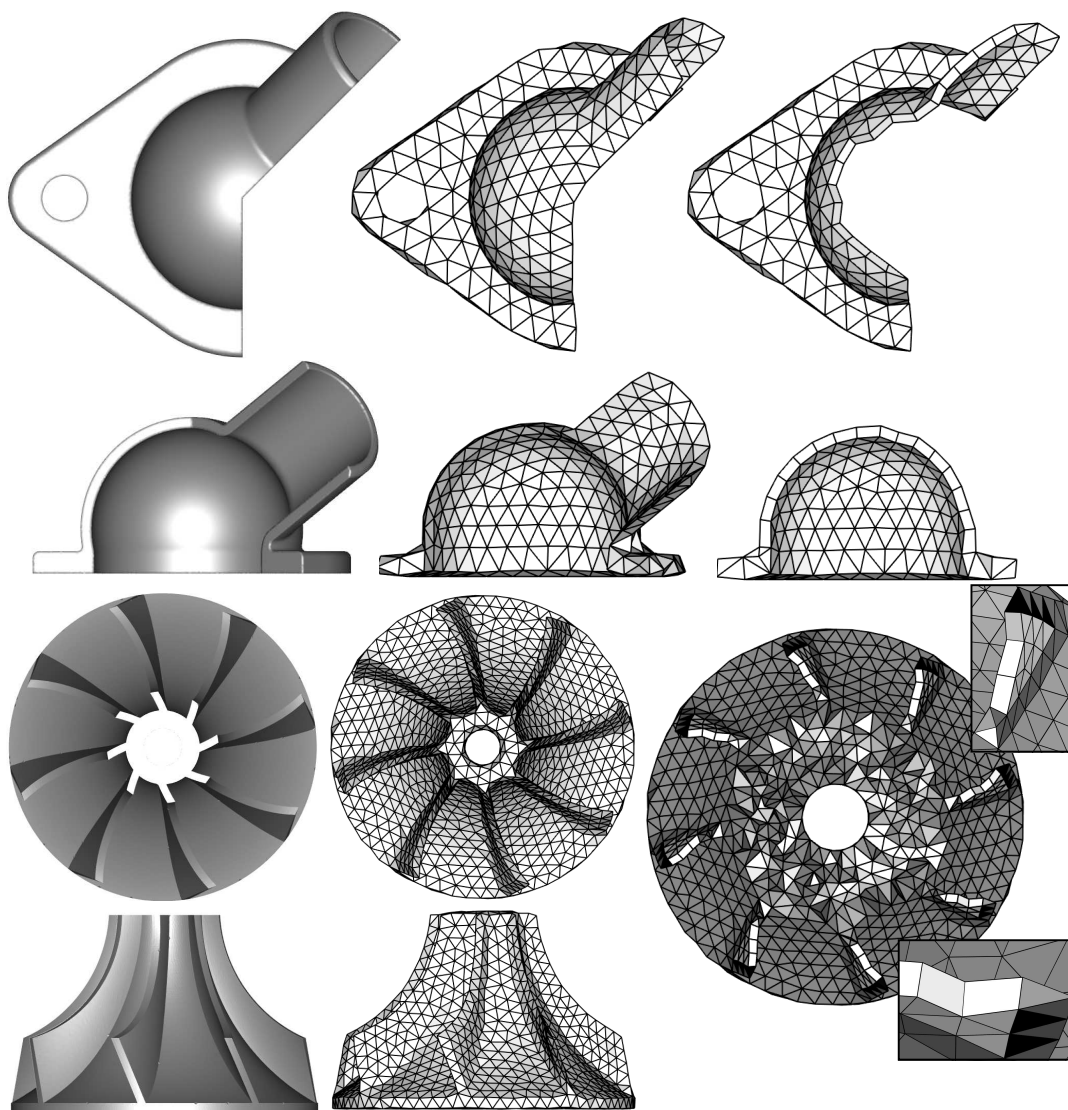


FIGURE 5.11 – MAILLAGES HYBRIDES DE DEUX MODÈLES ANGULEUX. Les sections fines sont principalement remplies avec des prismes. Le modèle du haut (*bracket*) a 593 tétraèdres, 215 prismes, 47 pyramides; celui du bas (*impeller*) a 13 845 tétraèdres, 195 prismes, 237 pyramides. Les maillages obtenus ne sont pas complètement valides.

surfaces, certains tétraèdres sont inversés et intersectent leurs voisins. Un autre point faible est que le maillage volumique dépend du remaillage des surfaces du modèle, qui, même s'il fonctionne de manière satisfaisante, reste perfectible, et les éventuelles corrections manuelles ne peuvent pas être intégrées au maillage volumique. Enfin, le post-traitement mis en place le long des lignes de contact pour palier aux problèmes d'échantillonnage serait sans doute difficilement transposable en 3D.

### 5.6.2 Perspectives

L'implémentation actuelle ne prend pas en compte les surfaces (failles) qui s'arrêtent dans le modèle. S'il est possible d'assurer, par exemple avec une stratégie de regroupement des points, qu'il n'y a pas plus de deux points pour un morceau de cellule de Voronoï, elles pourraient être prises en compte ou simplifiées. Il faudrait également prendre en compte les lignes et les coins lors du remaillage des surfaces, car ces composantes sont pour le moment ignorées (partie 5.2).

L'utilisation d'une subdivision d'un modèle en cellules de Voronoï est à la fois avantageuse, car les éléments construits sont d'assez bonne qualité, et problématique, car totalement quelconque. La construction du maillage dans les zones où les intersections ne sont pas celles attendues est vraiment compliquée. Pour que cette méthode soit applicable il faudrait pouvoir évaluer la qualité d'un échantillonnage (subdivision) donné d'un modèle par frontière et déterminer des stratégies pour effectivement l'améliorer.

De nombreuses pistes sont possibles pour améliorer la méthode et créer un maillage valide. La première idée est d'analyser les éléments du modèle intersectés dans chaque cellule de Voronoï afin de déterminer correctement les sommets du maillage final et de mettre en place des stratégies de regroupement de points similaires à celles proposées pour le remaillage de surfaces. Une seconde piste est de construire les éléments du maillage hybride qui peuvent l'être facilement, puis d'extraire les surfaces entourant les zones restantes (zones de transition, zones autour des lignes de contact où un post-traitement a été nécessaire) et de les mailler avec un mailleur tétraédrique contraint. Une troisième piste est de changer totalement la stratégie de construction des cellules et de modifier progressivement la triangulation de Delaunay des sites par une suite d'opérations qui permettrait d'obtenir le maillage hybride souhaité. Il faudrait pouvoir identifier les problèmes de non-conformité à résoudre et disposer d'opérations permettant de les régler. Dans tous les cas, comme pour le remaillage de surface, une des clés de l'amélioration des résultats est une amélioration de la distribution optimale des sites et un ajustement approprié de leur résolution.



# Conclusion

## Bilan des contributions

Dans cette thèse nous avons proposé des stratégies pour remailler et simplifier automatiquement les modèles structuraux géologiques en trois dimensions. Notre stratégie est fondée sur une subdivision de l'espace déterminée par le diagramme de Voronoï d'un ensemble de points échantillonnant le modèle. Ces points sont placés de sorte que leur diagramme de Voronoï et que leur diagramme de Voronoï restreint aux surfaces du modèle soient barycentriques. Les principales contributions de cette thèse sont résumées ci-dessous.

*Des mesures aidant à identifier les petites caractéristiques géométriques des modèles géologiques.*

Les mesures de la géométrie et de la connectivité des modèles structuraux que nous avons proposées constituent une première étape vers la définition d'outils permettant une comparaison plus objective des modèles géologiques à une résolution donnée. Le comptage des composantes d'un modèle dans les cellules d'un diagramme de Voronoï barycentrique permet notamment d'identifier précisément les zones les plus complexes. Les métriques proposées sont calculées sur un ensemble de 9 modèles synthétiques. Ces travaux sont présentés dans le chapitre 3 et un article est en préparation pour soumission.

*Une méthode de construction d'un remaillage surfacique à partir d'un diagramme de Voronoï restreint.*

Elle permet remailler simultanément de manière conforme les surfaces triangulées définissant un modèle défini par frontières. Nous proposons des stratégies pour remailler le modèle quelles que soient la topologie et la géométrie des cellules de Voronoï restreintes qui autorise des modifications du modèle d'entrée. Nous utilisons une optimisation de type diagramme de Voronoï barycentrique pour obtenir des triangles les plus équilatéraux possible quelque soit la qualité du maillage initial. Ces travaux sont décrits dans le chapitre 4 et ont été publiés dans Pellerin *et al.* [2014], une version préliminaire avait été proposée dans Pellerin *et al.* [2011].

*Une méthode de construction de prismes, pyramides et tétraèdres à partir du squelette d'un diagramme de Voronoï et d'un diagramme de Voronoï restreint.*

Cette méthode est l'extension en trois dimensions de la méthode de remaillage des surfaces définissant un modèle structural. Les régions volumiques du modèles sont



maillées simultanément par des éléments conformes à ce remaillage des surfaces. Les zones fines du modèle, identifiées en analysant les intersections entre les cellules de Voronoï avec les surfaces du modèle, sont remplies avec des prismes, pyramides et tétraèdres, les autres sont maillées avec des tétraèdres. Nous proposons un ensemble de post-traitements pour améliorer les maillages finaux qui ne sont généralement pas valides. Une version courte de ces travaux a été présentée sous la forme d'une note de recherche à l'IMR [Pellerin *et al.*, 2012].

Ces mesures et méthodes ont été implémentées en C++ dans deux plugins du modeleur Graphite (<http://alice.loria.fr/index.php/software.html>). Le code est librement disponible pour les membres du consortium Gocad qui a financé cette thèse (<http://www.gocad.org/w4/index.php/consortium/consortium>).

### Publications associées à cette thèse

J. Pellerin, B. Lévy et G. Caumon : Topological control for isotropic remeshing of nonmanifold surfaces with varying resolution : application to 3D structural models. *In Proc. IAMG. cogeo@oeaw-giscience*, sept. 2011.

J. Pellerin, B. Lévy et G. Caumon : A Voronoi-based hybrid meshing method. *In International Meshing Roundtable, Research Notes*, oct. 2012.

J. Pellerin, B. Lévy, G. Caumon et A. Botella : Automatic surface remeshing of 3D structural models at specified resolution : A method based on Voronoi diagrams. *Computers & Geosciences*, 62(0):103 – 116, 2014.

### Perspectives

Au delà des perspectives d'améliorations techniques des méthodes décrites dans les conclusions de chacun des chapitres, nous voyons trois grandes perspectives à ces travaux.

La première perspective est de valider, et d'éventuellement adapter, les simplifications automatiques des modèles avec des modèles de référence. Ceci implique d'évaluer les résultats d'une simulation numérique donnée, obtenus pour un modèle représenté et maillé à différentes résolutions. Cette validation est une étape nécessaire vers la définition d'une méthode de simplification automatique des modèles géologiques pour chacune des applications possibles (restauration mécanique, écoulements dans les milieux fracturés, propagation d'ondes, *etc*).

Comme nous l'avons déjà souligné, la clé pour l'amélioration des méthodes de maillage surfacique et volumique que nous proposons est l'amélioration de l'échantillonnage du modèle donné par les sites. Dans un premier temps, ceci nécessite de déterminer ce qu'est un bon échantillonnage, l'identification des zones où la complexité géométrique du modèle est grande en est sans doute un élément. Puis, des stratégies devront être mises au point pour effectivement améliorer cet échantillonnage. Une optimisation de type diagramme de Voronoï barycentrique prend en compte une densité des sites, mais il est difficile d'y ajouter d'autres types de terme. Au lieu d'une subdivision en cellules de Voronoï, une subdivision de type *octree* pourrait être utilisée pour construire les maillages surfacique et volumique, les simplifications du

modèle pouvant être envisagées de manière similaire. L'étude des méthodes de ce type apporterait sans doute d'autres vues sur certains des problèmes que nous avons rencontrés, notamment lorsque les intersections entre les cellules de Voronoï et le modèle donnent des éléments de mauvaise qualité, voire invalides.

Enfin, les stratégies d'analyse des objets mises en place par les méthodes de maillage surfacique et volumique pourraient être adaptées à des problématiques différentes de celles de la modélisation géologique afin de générer des maillages mixtes, utilisables dans des analyses où la dimension de certaines composantes est réduite [Robinson *et al.*, 2011].



# Bibliographie

- K. AKI et P. G. RICHARDS : *Quantitative seismology*. University Science Books, Sausalito, CA, 2009. (Cité page 25)
- G. ALLAIRE : *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Mathématiques appliquées. Ecole polytechnique, Palaiseau, 2005. (Cité page 25)
- P. ALLIEZ, D. COHEN-STEINER, M. YVINEC et M. DESBRUN : Variational tetrahedral meshing. *ACM Transactions on Graphics*, 24(3):617–625, juil. 2005a. (Cité page 36)
- P. ALLIEZ, E. COLIN DE VERDIÈRE, O. DEVILLERS et M. ISENBURG : Centroidal voronoi diagrams for isotropic surface remeshing. *Graphical Models*, 67(3):204–231, 2005b. (Cité page 41)
- N. AMENTA et M. BERN : Surface reconstruction by voronoi filtering. *Discrete and Computational Geometry*, 22(4):481–504, 1999. (Cité pages 17 et 41)
- R. ANDRLE : Complexity and scale in geomorphology : Statistical self-similarity vs. characteristic scales. *Mathematical Geology*, 28(3):275–293, avr. 1996. (Cité page 31)
- C. ANDUJAR, P. BRUNET et D. AYALA : Topology-reducing surface simplification using a discrete solid representation. *ACM Transactions on Graphics*, 21(2):88–105, 2002. (Cité page 31)
- N. ASPERT, D. SANTA-CRUZ et T. EBRAHIMI : Mesh : Measuring errors between surfaces using the hausdorff distance. In *Proceedings IEEE International Conference on Multimedia and Expo*, vol. 1, p. 705–708. IEEE, 2002. (Cité page 68)
- D. ATTALI, J.-D. BOISSONNAT et H. EDELSBRUNNER : Stability and computation of medial axes - a state-of-the-art report. In T. MÖLLER, B. HAMANN et R. RUSSELL, édés : *Mathematical Foundations of Scientific Visualization, Computer Graphics, and Massive Data Exploration*, Mathematics and Visualization, p. 109–125. Springer Berlin Heidelberg, 2009. (Cité page 17)
- R. AUBRY, G. HOUZEAUX et M. VAZQUEZ : A surface remeshing approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(12):1475–1498, 2011. (Cité page 40)
- F. AURENHAMMER : Voronoi diagrams—a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 23(3):345–405, 1991. (Cité pages 9 et 10)

- T. J. BAKER : Mesh generation : Art or science? *Progress in Aerospace Sciences*, 41 (1):29–63, jan. 2005. (Cité pages 24 et 33)
- M. BERZINS : Mesh quality : A function of geometry, error estimates or both? *Engineering with Computers*, 15(3):236–247, sept. 1999. (Cité page 29)
- J.-D. BOISSONNAT et M. YVINEC : *Geometrie algorithmique*. Ediscience international, Paris, 1995. (Cité page 12)
- J.-D. BOISSONNAT et F. CAZALS : Smooth surface reconstruction via natural neighbour interpolation of distance functions. *In Proceedings of the sixteenth annual symposium on Computational geometry*, p. 223–232. ACM Press, 2000. (Cité page 41)
- J.-D. BOISSONNAT et S. OUDOT : Provably good sampling and meshing of surfaces. *Graphical Models*, 67(5):405 – 451, 2005. (Cité page 41)
- D. BOLTCHÉVA, D. CANINO, S. M. ACEITUNO, J.-C. LÉON, L. D. FLORIANI et F. HÉ-TROY : An iterative algorithm for homology computation on simplicial shapes. *Computer-Aided Design*, 43(11):1457 – 1467, 2011. (Cité page 29)
- D. BOLTCHÉVA, M. YVINEC et J.-D. BOISSONNAT : Feature preserving delaunay mesh generation from 3D multi-material images. *Computer Graphics Forum*, 28 (5):1455–1464, juil. 2009. (Cité page 37)
- H. BOROUCHEKI, P. L. GEORGE, F. HECHT, P. LAUG et E. SALTEL : Delaunay mesh generation governed by metric specifications. part I. Algorithms. *Finite elements in analysis and design*, 25(1):61–83, 1997. (Cité page 36)
- M. BOTSCH, L. KOBBELT, M. PAULY, P. ALLIEZ et B. LÉVY : *Polygon Mesh Processing*. AK Peters, 2010. (Cité pages 31 et 40)
- B. BOURBIAUX, R. BASQUET, M.-C. CACAS, J.-M. DANIEL et S. SARDA : An integrated workflow to account for multi-scale fractures in reservoir simulation models : Implementation and benefits. Society of Petroleum Engineers, oct. 2002. (Cité page 31)
- H. CAO : *Development of techniques for general purpose simulators*. Thèse de doctorat, Stanford University, 2002. (Cité page 26)
- G. CAUMON : *Représentation, visualisation et modification de modèles volumiques pour les géosciences*. Thèse, INPL, Nancy, France, mars 2003. (Cité page 46)
- G. CAUMON, P. COLLON-DROUILLET, C. Le Carlier de VESLUD, J. SAUSSE et S. VI-SEUR : Surface-based 3D modeling of geological structures. *Mathematical Geosciences*, 41(9):927–945, 2009. (Cité pages 23, 46, et 57)
- L. CHEN et J. XU : Optimal delaunay triangulations. *Journal of Computational Mathematics*, 22(2):299–308, mars 2004. (Cité page 37)
- S. CHENG, T. DEY, E. RAMOS et T. RAY : Sampling and meshing a surface with guaranteed topology and geometry. *SIAM Journal on Computing*, 37(4):1199–1227, 2007. (Cité page 41)

- S.-W. CHENG : *Delaunay mesh generation*. Chapman & Hall/CRC computer and information science series. CRC Press, Boca Raton, 2013. (Cité page 35)
- S.-W. CHENG, T. K. DEY et E. A. RAMOS : Delaunay refinement for piecewise smooth complexes. *Discrete and Computational Geometry*, 43(1):121–166, jan. 2009. (Cité page 41)
- S.-W. CHENG, T. K. DEY, E. A. RAMOS et T. RAY : Quality meshing of polyhedra with small angles. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 15(04):421–461, août 2005. (Cité page 36)
- L. P. CHEW : Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces. *In Proceedings of the ninth annual symposium on Computational geometry*, p. 274–280. ACM Press, 1993. (Cité page 41)
- L. P. CHEW : Guaranteed-quality delaunay meshing in 3D (short version). *In Proceedings of the thirteenth annual symposium on Computational geometry*, p. 391–393. ACM Press, 1997. (Cité page 36)
- D. COHEN-STEINER, E. COLIN de VERDIÈRE et M. YVINEC : Conforming delaunay triangulations in 3D. *Computational Geometry*, 28(2–3):217 – 233, 2004. (Cité page 36)
- E. COLIN de VERDIÈRE, G. GINOT et X. GOAOC : Multinerves and helly numbers of acyclic families. *In Proceedings of the 2012 symposium on Computational Geometry*, p. 209–218. ACM, 2012. (Cité page 62)
- B. COLLETTA, J. LETOUZEY, R. PINEDO, J. F. BALLARD et P. BALÉ : Computerized x-ray tomography analysis of sandbox models : Examples of thin-skinned thrust systems. *Geology*, 19(11):1063–1067, 1991. (Cité page 68)
- J. DARDENNE, S. VALETTE, N. SIAUVE, N. BURAIIS et R. PROST : Variational tetrahedral mesh generation from discrete volume data. *The Visual Computer*, 25(5–7):401–410, mars 2009. (Cité page 37)
- J. DARDENNE : *Maillage 3D de structures anatomiques pour la simulation électromagnétique et thermique*. Thèse, INSA de Lyon, nov. 2009. (Cité page 37)
- D. DEBAUN, T. BYER, P. CHILDS, J. CHEN, F. SAAF, M. WELLS, J. LIU, H. CAO, L. PIANELO, V. TILAKRAJ, P. CRUMPTON, D. WALSH, H. YARDUMIAN, R. ZORZYNSKI, K.-T. LIM, M. SCHRADER, V. ZAPATA, J. NOLEN et H. TCHELEPI : An extensible architecture for next generation scalable parallel reservoir simulation. *In SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, jan. 2005. (Cité page 26)
- B. DELAUNAY : Sur la sphere vide. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, 7(793-800):1–2, 1934. (Cité page 12)
- S. DEY, M. S. SHEPHARD et M. K. GEORGES : Elimination of the adverse effects of small model features by the local modification of automatically generated meshes. *Engineering with Computers*, 13(3):134–152, sept. 1997. (Cité pages 30 et 32)

- T. K. DEY, J. A. LEVINE et A. SLATTON : Localized delaunay refinement for sampling and meshing. *Computer Graphics Forum*, 29(5):1723–1732, sept. 2010. (Cité page 41)
- T. K. DEY et J. A. LEVINE : Delaunay meshing of piecewise smooth complexes without expensive predicates. *Algorithms*, 2(4):1327–1349, 2009. (Cité pages 37 et 41)
- Q. DU, V. FABER et M. GUNZBURGER : Centroidal voronoi tessellations : Applications and algorithms. *SIAM Review*, 41(4):637–676, 1999. (Cité page 18)
- Q. DU, M. GUNZBURGER et L. JU : Constrained centroidal voronoi tessellations for surfaces. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(5):1488–1506, 2003. (Cité pages 19 et 41)
- Q. DU et D. WANG : Tetrahedral mesh generation and optimization based on centroidal voronoi tessellations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(9):1355–1373, mars 2003. (Cité page 36)
- J. A. DUNBAR et R. W. COOK : Palimpsestic reconstruction of structure maps : an automated finite element approach with heterogeneous strain. *Journal of Structural Geology*, 25(7):1021–1036, juil. 2003. (Cité page 58)
- P. DURAND-RIARD : *Gestion de la complexité géologique en restauration géomécanique 3D*. Thèse de doctorat, INPL, 2010. (Cité pages 27 et 107)
- P. DURAND-RIARD, L. SALLES, M. FORD, G. CAUMON et J. PELLERIN : Understanding the evolution of syn-depositional folds : Coupling decompaction and 3D sequential restoration. *Marine and Petroleum Geology*, 28(8):1530–1539, août 2011. (Cité pages 26 et 77)
- L. J. DURLOFSKY : Upscaling and gridding of fine scale geological models for flow simulation. In *8th International Forum on Reservoir Simulation Iles Borromees, Stresa, Italy*, p. 20–24, 2005. (Cité page 31)
- V. DYEDOV, D. R. EINSTEIN, X. JIAO, A. P. KUPRAT, J. P. CARSON et F. del PIN : Variational generation of prismatic boundary-layer meshes for biomedical computing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(8): 907–945, août 2009. (Cité page 38)
- H. EDELSBRUNNER et N. SHAH : Triangulating topological spaces. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 7(4):365–378, 1997. (Cité pages 13, 15, 16, et 17)
- H. EDELSBRUNNER et E. P. MÜCKE : Simulation of simplicity : a technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms. *ACM Transactions on Graphics*, 9 (1):66–104, jan. 1990. (Cité page 10)
- R. EYMARD, C. GUICHARD, R. HERBIN et R. MASSON : Vertex-centred discretization of multiphase compositional darcy flows on general meshes. *Computational Geosciences*, 16(4):987–1005, juin 2012. (Cité page 26)

- C. L. FARMER : Geological modelling and reservoir simulation. In A. ISKE et T. RANDEN, édés : *Mathematical Methods and Modelling in Hydrocarbon Exploration and Production*, vol. 7, p. 119–212. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2005. (Cité pages 25, 26, 33, et 47)
- D. A. FIELD : Qualitative measures for initial meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(4):887–906, fév. 2000. (Cité page 29)
- N. FLANDRIN, H. BOROUCAKI et C. BENNIS : 3D hybrid mesh generation for reservoir simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(10):1639–1672, mars 2006. (Cité page 26)
- S. FORTUNE : Voronoi diagrams and delaunay triangulations. *Computing in Euclidean geometry*, 1:193–233, 1992. (Cité page 12)
- P. J. FREY : About surface remeshing. In *Proceedings of 9th International Meshing Roundtable*, p. 123–136, 2000. (Cité page 40)
- P. J. FREY et H. BOROUCAKI : Surface mesh quality evaluation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(1):101–118, mai 1999. (Cité page 68)
- P. J. FREY et P.-L. GEORGE : *Maillages : applications aux éléments finis*. Hermès Science, Paris, 1999. (Cité pages 22, 29, 32, 33, et 34)
- R. V. GARIMELLA et M. S. SHEPHARD : Generation of tetrahedral meshes with multiple elements through thin sections. *Engineering with Computers*, 15(2):181–197, avr. 1999. (Cité page 38)
- R. V. GARIMELLA et M. S. SHEPHARD : Boundary layer mesh generation for viscous flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(1-2):193–218, sept. 2000. (Cité page 38)
- M. GARLAND et P. S. HECKBERT : Surface simplification using quadric error metrics. In *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, p. 209–216. ACM Press, 1997. (Cité page 31)
- A. GELAS, S. VALETTE, R. PROST et W. L. NOWINSKI : Variational implicit surface meshing. *Computers & Graphics*, 33(3):312 – 320, 2009. (Cité page 41)
- P. L. GEORGE et H. BOROUCAKI : *Triangulation de Delaunay et maillage : applications aux éléments finis*. Hermes, Paris, 1997. (Cité page 35)
- P. L. GEORGE, F. HECHT et E. SALTEL : Automatic mesh generator with specified boundary. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 92(3):269–288, 1991. (Cité page 36)
- C. GEUZAIN et J.-F. REMACLE : Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009. (Cité pages 39, 40, et 108)
- R. H. J. GROSHONG : *3-D structural geology : a practical guide to quantitative surface and subsurface map interpretation*. Springer, New York, 2<sup>e</sup> éd., 2008. (Cité page 46)



- C. A. GUZOFSKI, J. P. MUELLER, J. H. SHAW, P. MURON, D. A. MEDWEDEFF, F. BILOTTI et C. RIVERO : Insights into the mechanisms of fault-related folding provided by volumetric structural restorations using spatially varying mechanical constraints. *AAPG Bulletin*, 93(4):479–502, avr. 2009. (Cité page 68)
- H. HOPPE, T. DEROSE, T. DUCHAMP, J. McDONALD et W. STUETZLE : Surface reconstruction from unorganized points. In *Proceedings of the 19th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, p. 71–78. ACM Press, 1992. (Cité page 41)
- M. IRI, K. MUROTA et T. OHYA : A fast voronoi-diagram algorithm with applications to geographical optimization problems. In P. THOFT-CHRISTENSEN, éd. : *System Modelling and Optimization*, vol. 59 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, p. 273–288. Springer Berlin Heidelberg, 1984. (Cité page 20)
- Y. ITO, A. M. SHIH et B. K. SONI : Hybrid mesh generation with embedded surfaces using a multiple marching direction approach. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(1):1–7, sept. 2011. (Cité page 38)
- X. JIAO : Face offsetting : A unified approach for explicit moving interfaces. *Journal of Computational Physics*, 220(2):612–625, jan. 2007. (Cité page 38)
- S. J. JOLLEY, D. BARR, J. J. WALSH et R. J. KNIPE : Structurally complex reservoirs : an introduction. *Geological Society, London, Special Publications*, 292(1):1–24, jan. 2007. (Cité pages 43, 46, et 47)
- A. G. JOURNAL : *Mining geostatistics*. Blackburn Press, Caldwell, N.J., 2003. (Cité page 53)
- P. M. KNUPP : Remarks on mesh quality. In *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, p. 7–10, 2007. (Cité page 29)
- J. H. KRUHL : Fractal-geometry techniques in the quantification of complex rock structures : A special view on scaling regimes, inhomogeneity and anisotropy. *Journal of Structural Geology*, 46(0):2–21, jan. 2013. (Cité page 31)
- F. LABELLE et J. R. SHEWCHUK : Isosurface stuffing. *ACM Transactions on Graphics*, 26(3):57, juil. 2007. (Cité page 34)
- F. LALLIER : *Corrélation stratigraphique stochastique de puits*. Thèse, Université de Lorraine, mars 2012. (Cité page 46)
- T. J. LASSETER et S. A. JACKSON : Improving integrated interpretation accuracy and efficiency using a single consistent reservoir model from seismic to simulation. *The Leading Edge*, 23(11):1118–1121, nov. 2004. (Cité page 26)
- G. LAURENT : *Prise en compte de l'histoire géologique des structures dans la création de modèles numériques 3D compatibles*. Thèse, Université de Lorraine, 2013. (Cité page 68)
- P. G. LELIEVRE, C. G. FARQUHARSON et C. A. HURICH : Joint inversion of seismic traveltimes and gravity data on unstructured grids with application to mineral exploration. *Geophysics*, 77(1):K1–K15, fév. 2012. (Cité pages 26 et 77)

- F. LEPAGE : *Génération de maillages tridimensionnels pour la simulation des phénomènes physiques en géosciences*. Thèse, INPL, Nancy, France, 2003. (Cité pages 26 et 37)
- R. LÖHNER : Regridding surface triangulations. *Journal of Computational Physics*, 126(1):1 – 10, 1996. (Cité page 40)
- R. LÖHNER et P. PARIKH : Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing-front method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 8(10):1135–1149, oct. 1988. (Cité page 34)
- M. D. LINDSAY, M. W. JESSELL, L. AILLERES, S. PERROUTY, E. d. KEMP et P. G. BETTS : Geodiversity : Exploration of 3D geological model space. *Tectonophysics*, 594(0):27–37, 2013. (Cité page 31)
- L. LIU, Y. ZHAO et T. SUN : 3D computational shape- and cooling process-modeling of magmatic intrusion and its implication for genesis and exploration of intrusion-related ore deposits : An example from the yueshan intrusion in anqing, china. *Tectonophysics*, 526–529(0):110–123, mars 2012. (Cité pages 27 et 77)
- Y. LIU, W. WANG, B. LÉVY, F. SUN et D.-M. YAN : On centroidal voronoi tessellation - energy smoothness and fast computation. In *ACM Transactions Graphics*, p. 1–17, 2009. (Cité pages 20, 41, et 61)
- S. LLOYD : Least squares quantization in PCM. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 28(2):129–137, mars 1982. (Cité page 20)
- A. LOSEILLE : *Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique*. Thèse, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2008. (Cité page 32)
- A. LOSEILLE et R. LÖHNER : Robust boundary layer mesh generation. In *Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable*, p. 493–511. Springer, 2013. (Cité page 38)
- X.-J. LUO, M. S. SHEPHARD, R. M. O’BARA, R. NASTASIA et M. W. BEALL : Automatic p-version mesh generation for curved domains. *Engineering with Computers*, 20(3):273–285, juil. 2004. (Cité page 32)
- X.-J. LUO, M. S. SHEPHARD, L.-Z. YIN, R. M. O’BARA, R. NASTASI et M. W. BEALL : Construction of near optimal meshes for 3D curved domains with thin sections and singularities for p-version method. *Engineering with Computers*, 26(3):215–229, jan. 2010. (Cité page 38)
- B. LÉVY et N. BONNEEL : Variational anisotropic surface meshing with voronoi parallel linear enumeration. In X. JIAO et J.-C. WEILL, édés : *Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable*, p. 349–366. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013. (Cité pages 41, 60, et 61)
- B. LÉVY et Y. LIU :  $L_p$  centroidal voronoi tessellation and its applications. *ACM Transactions on Graphics*, 29(4):1, juil. 2010. (Cité pages 13, 20, 37, 41, et 60)

- J.-L. MALLET : Space–Time mathematical framework for sedimentary geology. *Mathematical Geology*, 36(1):1–32, jan. 2004. (Cité pages 27 et 77)
- T. MANZOCCHI, J. J. WALSH, P. NELL et G. YIELDING : Fault transmissibility multipliers for flow simulation models. *Petroleum Geoscience*, 5(1):53–63, fév. 1999. (Cité page 32)
- E. MARCHANDISE, C. GEUZAINÉ et J. REMACLE : Cardiovascular and lung mesh generation based on centerlines. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 29(6):665–682, juin 2013. (Cité page 38)
- U. T. MELLO, J. R. P. RODRIGUES et A. L. ROSSA : A control-volume finite-element method for three-dimensional multiphase basin modeling. *Marine and Petroleum Geology*, 26(4):504–518, 2009. (Cité page 25)
- R. MERLAND : *Génération de grilles de type volumes finis : adaptation à un modèle structural, pétrophysique et dynamique*. Thèse, Université de Lorraine, avr. 2013. (Cité pages 15, 20, et 26)
- A. MOHAMED et C. DAVATZIKOS : Finite element mesh generation and remeshing from segmented medical images. In *Proc. IEEE International Symposium on Biomedical Imaging : Nano to Macro*, vol. 2, p. 420–423. IEEE, 2004. (Cité page 37)
- I. MORETTI, F. LEPAGE et M. GUITON : Une nouvelle méthode de restauration 3D basée sur une approche couplée géométrie–mécanique. *Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP*, 61(2):277–289, 2006. (Cité page 27)
- I. MORETTI : Working in complex areas : New restoration workflow based on quality control, 2D and 3D restorations. *Marine and Petroleum Geology*, 25(3):205–218, mars 2008. (Cité page 27)
- H. MUSTAPHA, R. DIMITRAKOPOULOS, T. GRAF et A. FIROOZABADI : An efficient method for discretizing 3D fractured media for subsurface flow and transport simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(5):651–670, 2011. (Cité page 31)
- H. MUSTAPHA et K. MUSTAPHA : A new approach to simulating flow in discrete fracture networks with an optimized mesh. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(4):1439–1459, jan. 2007. (Cité page 27)
- V. NIVOLIER : *Échantillonnage pour l’approximation de fonctions sur des maillages*. Thèse, Université de Lorraine, 2012. (Cité page 15)
- J. NOCEDAL : Updating quasi-newton matrices with limited storage. *Mathematics of computation*, 35(151):773–782, 1980. (Cité page 61)
- A. OKABE, B. BOOTS, K. SUGIHARA et S. N. CHIU : *Spatial tessellations : concepts and applications of Voronoi diagrams*, vol. 501. Wiley, 2009. (Cité pages 9, 10, et 12)
- S. J. OWEN et T. R. SHELTON : Validation of grid-based hex meshes with computational solid mechanics. In *Proceedings of the 22nd International Meshing Roundtable*, p. 39–56. Springer, 2014. (Cité page 27)

- J. PELLERIN, B. LÉVY et G. CAUMON : Topological control for isotropic remeshing of nonmanifold surfaces with varying resolution : application to 3D structural models. *In Proc. IAMG. cogeo@oeaw-giscience*, sept. 2011. (Cité pages 7, 57, et 91)
- J. PELLERIN, B. LÉVY et G. CAUMON : A voronoi-based hybrid meshing method. *In International Meshing Roundtable, Research Notes*, oct. 2012. (Cité pages 7, 77, et 92)
- J. PELLERIN, B. LÉVY, G. CAUMON et A. BOTELLA : Automatic surface remeshing of 3D structural models at specified resolution : A method based on voronoi diagrams. *Computers & Geosciences*, 62(0):103 – 116, 2014. (Cité pages 7, 57, et 91)
- G. PEYRÉ et L. D. COHEN : Geodesic remeshing using front propagation. *International Journal of Computer Vision*, 69(1):145–156, mai 2006. (Cité page 40)
- M. PRÉVOST, F. LEPAGE, L. J. DURLOFSKY et J.-L. MALLET : Unstructured 3D gridding and upscaling for coarse modelling of geometrically complex reservoirs. *Petroleum Geoscience*, 11(4):339–345, oct. 2005. (Cité page 37)
- W. R. QUADROS et S. J. OWEN : Defeaturing CAD models using a geometry-based size field and facet-based reduction operators. *Engineering with Computers*, 28(3):211–224, fév. 2012. (Cité pages 30 et 31)
- W. R. QUADROS, S. J. OWEN, M. L. BREWER et K. SHIMADA : Finite element mesh sizing for surfaces using skeleton. *In Proc. 13th International Meshing Roundtable*, p. 389–400, 2004. (Cité pages 32, 44, et 56)
- L. RINEAU et M. YVINEC : A generic software design for delaunay refinement meshing. *Computational Geometry*, 38(1–2):100–110, 2007. (Cité page 36)
- T. ROBINSON, C. ARMSTRONG et R. FAIREY : Automated mixed dimensional modelling from 2D and 3D CAD models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(2):151–165, fév. 2011. (Cité pages 32 et 93)
- J. RUPPERT : A delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. *Journal of Algorithms*, 18(3):548–585, 1995. (Cité page 17)
- Y. SAAD : *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM, Philadelphia, 2 éd., 2003. (Cité page 25)
- O. SAHNI, K. E. JANSEN, M. S. SHEPHARD, C. A. TAYLOR et M. W. BEALL : Adaptive boundary layer meshing for viscous flow simulations. *Engineering with Computers*, 24(3):267–285, avr. 2008. (Cité page 38)
- L. SALLES, M. FORD, P. JOSEPH, C. DE VESLUD et A. LE SOLLEUZ : Migration of a synclinal depocentre from turbidite growth strata : the annot syncline, SE france. *Bulletin de la Société Géologique de France*, 182(3):199–220, 2011. (Cité page 68)
- W. SASSI, B. COLLETTA, P. BALÉ et T. PAQUEREAU : Modelling of structural complexity in sedimentary basins : The role of pre-existing faults in thrust tectonics. *Tectonophysics*, 226(1-4):97–112, nov. 1993. (Cité page 43)

- J. SCHÖBERL : NETGEN an advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules. *Computing and Visualization in Science*, 1(1):41–52, juil. 1997. (Cité page 35)
- A. SHEFFER : Model simplification for meshing using face clustering. *Computer-Aided Design*, 33(13):925–934, 2001. (Cité page 31)
- M. S. SHEPHARD, M. W. BEALL et R. M. O’BARA : Revisiting the elimination of the adverse effects of small model features in automatically generated meshes. *In Proc. 7th International Meshing Roundtable*, p. 119–132, 1998. (Cité page 31)
- M. S. SHEPHARD et M. K. GEORGES : Automatic three-dimensional mesh generation by the finite octree technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(4):709–749, sept. 1991. (Cité pages 33 et 40)
- J. R. SHEWCHUK : Tetrahedral mesh generation by delaunay refinement. *In Proceedings of the fourteenth annual symposium on Computational geometry*, p. 86–95. ACM, 1998. (Cité page 36)
- J. R. SHEWCHUK : Constrained delaunay tetrahedralizations and provably good boundary recovery. *In Proc. 11th International Meshing Roundtable*, p. 193–204, 2002a. (Cité page 36)
- J. R. SHEWCHUK : Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*, 22(1):21 – 74, 2002b. (Cité page 36)
- J. R. SHEWCHUK : *Lecture notes on Delaunay mesh generation*. Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California at Berkeley, 2012. (Cité pages 30, 35, 107, et 108)
- H. SI : Adaptive tetrahedral mesh generation by constrained delaunay refinement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(7):856–880, août 2008. (Cité page 36)
- H. SI et K. GÄRTNER : 3D boundary recovery by constrained delaunay tetrahedralization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(11):1341–1364, mars 2011. (Cité page 36)
- H. SI : Constrained delaunay tetrahedral mesh generation and refinement. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(1–2):33 – 46, 2010. (Cité page 36)
- O. SIFRI, A. SHEFFER et C. GOTSMAN : Geodesic-based surface remeshing. *In Proc. 12th International Meshing Roundtable*, p. 189–199, 2003. (Cité page 40)
- J. M. SULLIVAN, G. CHARRON et K. D. PAULSEN : A three-dimensional mesh generator for arbitrary multiple material domains. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25(3–4):219–241, 1997. (Cité page 37)
- V. SURAZHISKY, P. ALLIEZ et C. GOTSMAN : Isotropic remeshing of surfaces : a local parameterization approach. *In Proc. 12th International Meshing Roundtable*, p. 215–224, 2003. (Cité page 41)

- C. SWORD, B. MALLISON, W. MILLIKEN, T. VIARD et A. CHENG : Unstructured cut-cell grids for modeling complex reservoirs. *In SPE Reservoir Simulation Symposium*, The Woodlands, TX, USA, fév. 2013. Society of Petroleum Engineers. (Cité page 26)
- Z. TAVASSOLI, J. N. CARTER et P. R. KING : An analysis of history matching errors. *Computational Geosciences*, 9(2-3):99–123, nov. 2005. (Cité page 47)
- A. THAKUR, A. G. BANERJEE et S. K. GUPTA : A survey of CAD model simplification techniques for physics-based simulation applications. *Computer-Aided Design*, 41(2):65–80, fév. 2009. (Cité page 31)
- J. F. THOMPSON, B. K. SONI et N. P. WEATHERILL : *Handbook of grid generation*. CRC Press, Boca Raton, Fla., 1999. (Cité page 33)
- J. TOURNOIS : *Optimisation de maillages*. Thèse, Université Nice Sophia Antipolis, nov. 2009. (Cité page 37)
- J. TOURNOIS, C. WORMSER, P. ALLIEZ et M. DESBRUN : Interleaving delaunay refinement and optimization for practical isotropic tetrahedron mesh generation. *ACM Transactions on Graphics*, 28(3):1, juil. 2009. (Cité page 36)
- D. L. TURCOTTE : *Geodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2 éd., 2002. (Cité page 25)
- S. VALETTE et J.-M. CHASSERY : Approximated centroidal voronoi diagrams for uniform polygonal mesh coarsening. *Computer Graphics Forum*, 23(3):381–389, sept. 2004. (Cité page 41)
- S. VALETTE, J.-M. CHASSERY et R. PROST : Generic remeshing of 3D triangular meshes with metric-dependent discrete voronoi diagrams. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 14(2):369–381, 2008. (Cité pages 41, 42, et 108)
- O. VIDAL-ROYO, N. CARDOZO, J. A. MUNOZ, S. HARDY et L. MAERTEN : Multiple mechanisms driving detachment folding as deduced from 3D reconstruction and geomechanical restoration : the Pico del Águila anticline (External Sierras, Southern Pyrenees). *Basin Research*, 24(3):295–313, juin 2012. (Cité pages 26 et 77)
- G. VORONÓÏ : Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 134:198–287, 1908. (Cité page 9)
- J. WANG et Z. YU : Feature-sensitive tetrahedral mesh generation with guaranteed quality. *Computer-Aided Design*, 44(5):400–412, mai 2012. (Cité page 34)
- D. R. WHITE, S. SAIGAL et S. J. OWEN : Meshing complexity : predicting meshing difficulty for single part CAD models. *Engineering with Computers*, 21(1):76–90, nov. 2005. (Cité page 44)

- D.-M. YAN, B. LÉVY, Y. LIU, F. SUN et W. WANG : Isotropic remeshing with fast and exact computation of restricted voronoi diagram. *ACM/EG Symposium on Geometry Processing / Computer Graphics Forum*, 28(5):1145–1454, 2009. (Cité pages [15](#), [20](#), [41](#), et [60](#))
- J. ZHANG, M. EMELIANENKO et Q. DU : Periodic centroidal voronoi tessellations. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 9(4):950–969, 2012. (Cité page [20](#))
- Y. ZHANG, T. J. HUGHES et C. L. BAJAJ : An automatic 3D mesh generation method for domains with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(5-8):405–415, jan. 2010. (Cité page [37](#))

# Table des figures

|      |                                                                                                                                |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1    | Modèles géologiques en deux dimensions : une carte et une coupe                                                                | 2  |
| 2    | Vue en coupe de l'évolution des couches de la coupe de la figure 1 depuis leur dépôt . . . . .                                 | 2  |
| 3    | Deux représentations d'un modèle structural en trois dimensions                                                                | 3  |
| 4    | Deux défis pour la génération de maillage des modèles structuraux                                                              | 4  |
| 5    | Utilisation d'une subdivision par un diagramme de Voronoï pour analyser, modifier et mailler un modèle par frontière . . . . . | 6  |
| 1.1  | Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay correspondante dans le plan . . . . .                                        | 10 |
| 1.2  | Relation duale Voronoï-Delaunay en 2D . . . . .                                                                                | 10 |
| 1.3  | Diagramme de Voronoï en 3D . . . . .                                                                                           | 11 |
| 1.4  | Relation duale Voronoï-Delaunay en 3D . . . . .                                                                                | 11 |
| 1.5  | Diagramme de Voronoï restreint et triangulation de Delaunay restreinte . . . . .                                               | 14 |
| 1.6  | Cas dégénérés d'intersection entre une cellule de Voronoï et un rectangle . . . . .                                            | 14 |
| 1.7  | Boules topologiques et espaces variétés dans le plan . . . . .                                                                 | 16 |
| 1.8  | Cellules de Voronoï vérifiant et ne vérifiant pas la propriété de la boule topologique . . . . .                               | 17 |
| 1.9  | Optimisation de 100 sites sur une sphère . . . . .                                                                             | 19 |
| 2.1  | Maillage d'une étoile . . . . .                                                                                                | 21 |
| 2.2  | Maillages invalide et non-conforme . . . . .                                                                                   | 22 |
| 2.3  | Simplexes dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .                                                                                        | 23 |
| 2.4  | Régions volumiques dans un modèle défini par frontières . . . . .                                                              | 24 |
| 2.5  | Surfaces triangulées d'un modèle structural défini par frontières                                                              | 24 |
| 2.6  | Grille curvilinéaire . . . . .                                                                                                 | 25 |
| 2.7  | Utilisation d'un maillage tétraédrique pour la restauration d'un pli (tiré de Durand-Riard [2010]) . . . . .                   | 27 |
| 2.8  | Qualité de l'approximation par maillages d'une étoile . . . . .                                                                | 28 |
| 2.9  | Distance de Hausdorff entre deux lignes $X$ et $Y$ . . . . .                                                                   | 28 |
| 2.10 | Tétraèdres a priori de mauvaise qualité, tiré de Shewchuk [2012]                                                               | 30 |
| 2.11 | Subdivisions récursives de la boîte contenant l'étoile . . . . .                                                               | 33 |
| 2.12 | Patrons pour la construction d'un maillage depuis une subdivision                                                              | 33 |
| 2.13 | Principe de maillage par avancée de front . . . . .                                                                            | 34 |



|      |                                                                                                                                 |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.14 | Maillages de type Delaunay, contraint et par raffinement, tiré de Shewchuk [2012] . . . . .                                     | 35 |
| 2.15 | Insertion d'un point dans une triangulation de Delaunay, algorithme de Bowyer-Watson, modifié d'après Shewchuk [2012] . . . . . | 35 |
| 2.16 | Principe du maillage par optimisation Voronoï-Delaunay . . . . .                                                                | 36 |
| 2.17 | Tranche solide dans un maillage tétraédrique d'un modèle de diapir . . . . .                                                    | 38 |
| 2.18 | Opérations locales de remaillage de surface . . . . .                                                                           | 39 |
| 2.19 | Maillage de surface dans un espace paramétrique, modifié d'après Geuzaine et Remacle [2009] . . . . .                           | 39 |
| 2.20 | Modèle David maillé par Valette <i>et al.</i> [2008] et modèle synthétique d'un diapir de sel . . . . .                         | 42 |
| 3.1  | Éléments d'un modèle structural . . . . .                                                                                       | 45 |
| 3.2  | Quelques sources de complexité dans les modèles structuraux . . . . .                                                           | 45 |
| 3.3  | Calcul de mesures géométriques en 2D . . . . .                                                                                  | 47 |
| 3.4  | Suite de modèles créés à partir du modèle A1 . . . . .                                                                          | 50 |
| 3.5  | Modèles conduisant à des configurations potentiellement problématiques . . . . .                                                | 51 |
| 3.6  | Statistiques normalisées sur les nombres d'éléments comptés dans 100, 1 000, ou 10 000 cellules de Voronoï . . . . .            | 54 |
| 3.7  | Zones complexes des modèles . . . . .                                                                                           | 55 |
| 4.1  | Remaillage d'un modèle affecté par 200 fractures . . . . .                                                                      | 59 |
| 4.2  | Segments d'intégration pour le calcul de l'énergie de bord . . . . .                                                            | 61 |
| 4.3  | Remaillage de deux sphères imbriquées . . . . .                                                                                 | 62 |
| 4.4  | Remaillage de deux surfaces proches . . . . .                                                                                   | 62 |
| 4.5  | Remaillage d'une surface avec bord . . . . .                                                                                    | 63 |
| 4.6  | Configurations dans lesquelles le modèle est modifié . . . . .                                                                  | 64 |
| 4.7  | Contrôle de la résolution du modèle . . . . .                                                                                   | 65 |
| 4.8  | Petites cellules de Voronoï correspondant à des triangles dégénérés . . . . .                                                   | 66 |
| 4.9  | Identification et traitement des triangles dégénérés . . . . .                                                                  | 67 |
| 4.10 | Remaillage du modèle Veins . . . . .                                                                                            | 69 |
| 4.11 | Remaillage du modèle Forward à différentes résolutions . . . . .                                                                | 69 |
| 4.12 | Remaillage des modèles Detachment, Leipzig, et Lambda . . . . .                                                                 | 70 |
| 4.13 | Remaillage des modèles DFN et HC . . . . .                                                                                      | 71 |
| 4.14 | Remaillage de Cloudspin . . . . .                                                                                               | 71 |
| 4.15 | Modèle Clyde . . . . .                                                                                                          | 72 |
| 4.16 | Remaillage de Nancy . . . . .                                                                                                   | 72 |
| 4.17 | Remaillage de Clyde avec 30 000 et 10 000 sites . . . . .                                                                       | 73 |
| 4.18 | Remaillage de modèles particulièrement compliqués : Bac-à-sable et Annot . . . . .                                              | 74 |
| 4.19 | Remaillage adaptatif de l'horizon supérieur de Clyde . . . . .                                                                  | 74 |
| 5.1  | Découpage d'une cellule de Voronoï par les limites d'un modèle . . . . .                                                        | 79 |
| 5.2  | Calcul des points et arêtes de Voronoï à l'intérieur d'une étoile . . . . .                                                     | 80 |
| 5.3  | Éléments du prisme dual d'un segment de Voronoï . . . . .                                                                       | 81 |
| 5.4  | Construction d'une cellule à 8 sommets correspondant à un sommet de Voronoï . . . . .                                           | 82 |

|      |                                                                                             |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.5  | Détermination des sommets d'une cellule duale d'un sommet du diagramme de Voronoï . . . . . | 83 |
| 5.6  | Configuration donnant une arête mal-définie en 2D . . . . .                                 | 84 |
| 5.7  | Cellule invalide à 5 sommets . . . . .                                                      | 85 |
| 5.8  | Maillage hybride d'une surface lisse . . . . .                                              | 86 |
| 5.9  | Maillage hybride de trois sphères imbriquées à trois résolutions . . . . .                  | 87 |
| 5.10 | Maillage de couches d'épaisseurs variables . . . . .                                        | 87 |
| 5.11 | Maillages hybrides de deux modèles anguleux . . . . .                                       | 88 |

## Liste des tableaux

|     |                                                                                                         |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 | Nombre d'éléments dans les modèles . . . . .                                                            | 52 |
| 3.2 | Somme des complexités géométriques ( $C_t + C_f + C_e + C_\alpha$ ) pour les éléments . . . . .         | 52 |
| 3.3 | Coefficients de variation des tailles des éléments dans chaque modèle type par type . . . . .           | 52 |
| 3.4 | Statistiques sur le nombre d'éléments par cellule . . . . .                                             | 54 |
| 4.1 | Principales caractéristiques et défis pour les 12 modèles remaillés . . . . .                           | 68 |
| 4.2 | Statistiques de remaillage des modèles . . . . .                                                        | 75 |
| 5.1 | Relations éléments du maillage hybride - éléments du diagramme de Voronoï restreint au modèle . . . . . | 79 |

## Liste des Algorithmes

|     |                                                                                                                    |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 | Optimisation des sites . . . . .                                                                                   | 61 |
| 4.2 | Calcul des sommets du maillage final . . . . .                                                                     | 65 |
| 4.3 | Etapes de construction du maillage final . . . . .                                                                 | 66 |
| 4.4 | Post-traitement des triangles dégénérés le long des contacts . . . . .                                             | 67 |
| 5.1 | Détermination des sommets et segments de Voronoï à l'intérieur du modèle avec un algorithme de coloriage . . . . . | 80 |





## **Prise en compte de la complexité géométrique des modèles structuraux dans des méthodes de maillage fondées sur le diagramme de Voronoï**

**Résumé :** Selon la méthode utilisée pour construire un modèle structural en trois dimensions et selon l'application à laquelle il est destiné, son maillage, en d'autres termes sa représentation informatique, doit être adapté afin de respecter des critères de type, de nombre et de qualité de ses éléments. Les méthodes de maillage développées dans d'autres domaines que la géomodélisation ne permettent pas de modifier le modèle d'entrée. Ceci est souhaitable en géomodélisation afin de mieux contrôler le nombre d'éléments du maillage et leur qualité.

L'objectif de cette thèse est de développer des méthodes de maillage permettant de remplir ces objectifs afin de gérer la complexité géométrique des modèles structuraux définis par frontières. Premièrement, une analyse des sources de complexité géométrique dans ces modèles est proposée. Les mesures développées constituent une première étape dans la définition d'outils permettant la comparaison objective de différents modèles et aident à caractériser précisément les zones plus compliquées à mailler dans un modèle. Ensuite, des méthodes originales de remaillage surfacique et de maillage volumique fondées sur l'utilisation des diagrammes de Voronoï sont proposées. Les fondements de ces deux méthodes sont identiques : (1) une optimisation de type Voronoï barycentrique est utilisée pour globalement obtenir un nombre contrôlé d'éléments de bonne qualité et (2) des considérations combinatoires permettant de construire localement le maillage final, éventuellement en modifiant le modèle initial. La méthode de remaillage surfacique est automatique et permet de simplifier un modèle à une résolution donnée. L'originalité de la méthode de maillage volumique est que les éléments générés sont de types différents. Des prismes et pyramides sont utilisés pour remplir les zones très fines du modèle, tandis que le reste du modèle est rempli avec des tétraèdres.

**Mots-clés :** modèle géologique défini par frontières, diagramme de Voronoï barycentrique, diagramme de Voronoï restreint, triangulation de Delaunay restreinte

---

## **Accounting for the geometrical complexity of geological structural models in Voronoi-based meshing methods**

**Abstract :** Depending on the specific method used to build a 3D structural model, and on the exact purpose of this model, its mesh must be adapted so that it enforces criteria on element types, maximum number of elements, and mesh quality. Meshing methods developed for applications others than geomodeling forbid any modification of the input model, that may be desirable in geomodeling to better control the number of elements in the final mesh and their quality.

The objective of this thesis is to develop meshing methods that fulfill this requirement to better manage the geometrical complexity of B-Rep geological structural models. An analysis of the sources of geometrical complexity in those models is first proposed. The introduced measures are a first step toward the definition of tools allowing objective comparisons of structural models and permit to characterize the model zones that are more complicated to mesh. We then introduce two original meshing methods based on Voronoi diagrams : the first for surface remeshing, the second for hybrid gridding. The key ideas of these methods are identical : (1) the use of a centroidal Voronoi optimization to have a globally controlled number of elements of good quality, and (2) combinatorial considerations to locally build the final mesh while sometimes modifying the initial model. The surface remeshing method is automatic and permits to simplify a model at a given resolution. The gridding method generates a hybrid volumetric mesh. Prisms and pyramids fill the very thin layers of the model while the remaining regions are filled with tetrahedra.

**Keywords :** B-Rep geological model, centroidal Voronoi diagram, restricted Voronoi diagram, restricted Delaunay triangulation