



**HAL**  
open science

# Approximations unidirectionnelles de la propagation acoustique en guides d'ondes irréguliers - Application à l'acoustique urbaine

Jean-Baptiste Doc

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Doc. Approximations unidirectionnelles de la propagation acoustique en guides d'ondes irréguliers - Application à l'acoustique urbaine. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2012. Français. NNT: . tel-01006035v2

**HAL Id: tel-01006035**

**<https://theses.hal.science/tel-01006035v2>**

Submitted on 25 Nov 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Approximations unidirectionnelles de la propagation acoustique en guides d'ondes irréguliers

*Application à l'acoustique urbaine*

---

Jean-Baptiste Doc

Sous la direction de Bertrand Lihoreau, Simon Félix et Vincent Pagneux

Thèse de Doctorat en Acoustique  
Université du Maine, Le Mans, France, 2012



*Académie de Nantes*

Université Du Maine, Le Mans, France  
École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

**Thèse de Doctorat**

Spécialité : Acoustique

Présentée par

**Jean-Baptiste Doc**

---

APPROXIMATIONS UNIDIRECTIONNELLES DE LA PROPAGATION  
ACOUSTIQUE EN GUIDES D'ONDES IRRÉGULIERS

—  
**Application à l'acoustique urbaine**

---

Préparée au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine

Soutenue le 7 novembre 2012 devant le jury composé de :

<b>Ph. Blanc-Benon</b>	Directeur de recherche, LMFA, Lyon	Rapporteur
<b>F. Coulouvrat</b>	Directeur de recherche, IJLRDA, Paris	Rapporteur
<b>M. Deschamps</b>	Directeur de recherche, I2M, Bordeaux	Examinateur
<b>S. Félix</b>	Chargé de recherche, LAUM, Le Mans	Co-encadrant
<b>B. Gauvreau</b>	Chargé de recherche, IFSTTAR, Nantes	Invité
<b>B. Lihoreau</b>	Maître de conférences, LAUM, Le Mans	Co-encadrant
<b>V. Pagneux</b>	Directeur de recherche, LAUM, Le Mans	Directeur de thèse



# Remerciements

Tout d’abord, j’aimerais remercier chaleureusement Bertrand Lihoreau et Simon Félix pour m’avoir proposé ce sujet de thèse et accompagné durant ces trois années. Leur disponibilité, leur patience et leur bienveillance ont été une source supplémentaire de motivation, me permettant d’aborder sereinement le riche apprentissage que fut cette thèse. Un grand merci à eux pour m’avoir transmis, bien plus que des connaissances techniques, le goût pour la recherche scientifique.

J’aimerais également remercier Vincent Pagneux pour les nombreux et enrichissants échanges qui nous ont amenés à aborder la problématique de ces travaux sous l’éclairage des séries de Bremmer. Je lui suis très reconnaissant de s’être impliqué dans la direction de cette thèse à la suite de Laurent Simon, que je tiens également à remercier.

Mes remerciements s’adressent aussi à MM. Philippe Blanc-Benon, François Coulouvrat, Marc Deschamps et Benoît Gauvreau pour avoir accepté de rapporter et d’examiner cette thèse, participant ainsi à l’enrichissement de ces travaux.

Cette thèse a été préparée au Laboratoire d’Acoustique de l’Université du Maine. Je tiens à remercier l’ensemble du personnel du LAUM pour la formidable ambiance de travail régnant au sein du laboratoire. Un grand merci à toutes les personnes avec qui j’ai pu échanger sur les sujets les plus divers, nul doute que ces riches conversations ont su cultiver ma curiosité scientifique. Je remercie également Stéphane Lebon pour les solutions qu’il a su trouvé aux nombreux problèmes rencontrés lors des expérimentations réalisées pendant cette thèse.

Durant ces trois années de doctorat, j’ai bénéficié d’une mission complémentaire en enseignement. Merci à Olivier Richoux, Bruno Brouard, Bertrand Lihoreau, André Almeida et Jean-Pierre Dalmont aux côtés desquels j’ai eu beaucoup de plaisir à m’impliquer dans l’enseignement.

Bien plus qu’un apprentissage scientifique, cette thèse a été une belle aventure humaine. Que ce soit dans la salle de pause, sur le terrain de foot, à la cafétéria, en salle de répétition ou au pub, j’ai passé d’innombrables bons moments qui ont contribué à rendre ces trois années inoubliables. Pour cela, je tenais à saluer tout ceux qui m’ont permis de sortir momentanément la tête du guide d’onde! Merci à : Matthieu Guédra, Miguel Moleron, Aroune Duclos, Gaëlle Poignand, Tony Valier-Brasier, André Almeida, Frédéric Ablitzer, Clément Lagarrigue, Baptiste Bergeot, Damien Lecoq, Vivien Denis, Laurianne Barguet, Balbine Maillou, Hélène Pichard, Alexey Podkovskiy, Thibaut Devaux, Julien Poittevin, Mickaël Duranteau, Andrey Zhdanov, Gian Aranguren, Adrien Pelat, Christophe Ayrault, Jens Dittmer, Julien Plattier, Guillaume Dubois, Benjamin Elie, Mathieu Chekroun, Benoit Merit, Ygaël Renou, Antonin Novak, Flavio Bannwart, Marcos Pinho... Mes excuses à ceux que j’aurais oubliés de nommer, mais qui, j’en suis sûr, se reconnaîtront.

Merci également à tous les membres de l'Association de l'Orchestre de l'Université du Maine croisés pendant ces trois années, avec qui j'ai eu énormément de plaisir à partager ma passion de la musique.

Pour finir, merci à mes parents pour leurs encouragements que je reçois depuis tant d'années, sans lesquels je n'aurais jamais pu prendre la trajectoire qui est la mienne aujourd'hui. Un grand merci à Mathilde pour son soutien inconditionnel et pour les nombreuses relectures apportées à ce manuscrit.

# Table des matières

	Page
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Approximation unidirectionnelle de la propagation acoustique</b>	<b>5</b>
1.1 Généralités sur les équations paraboliques . . . . .	5
1.1.1 Formulation de l'équation parabolique petit angle . . . . .	6
1.1.2 Décomposition de l'équation de Helmholtz . . . . .	6
1.1.3 Splitting de l'équation d'onde conduisant aux équations paraboliques petit angle . . . . .	7
1.1.4 Equation parabolique grand angle . . . . .	9
1.1.5 Conclusion . . . . .	10
1.2 Formulation multimodale de la propagation acoustique unidirectionnelle . . . . .	11
1.2.1 Généralités sur la méthode multimodale en guide de section variable . . . . .	11
1.2.2 Décomposition du champ de pression . . . . .	13
1.2.3 Approximation unidirectionnelle . . . . .	14
1.2.4 Conclusion . . . . .	14
Annexe 1.A Projection de l'équation d'onde sur les modes transverses . . . . .	16
<b>I Utilisation de l'équation parabolique pour une application à l'acoustique urbaine</b>	<b>17</b>
<b>2 Higher order Padé approximation for the parabolic equation in a varying cross-section waveguide</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Modified parabolic equation method . . . . .	20
2.2.1 Formulation . . . . .	20
2.2.2 Boundary condition . . . . .	21
2.2.3 Numerical scheme . . . . .	22
2.3 Validation of the modified parabolic equation . . . . .	24
2.4 Range of validity . . . . .	26
2.5 Conclusion . . . . .	28
Appendix 2.A Finite Difference implementation of the boundary condition . . . . .	30
Appendix 2.B Rotation angles in the complex plane for complex Padé coefficients . . . . .	31
<b>3 Résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle dans des guides d'ondes ouverts</b>	<b>33</b>
3.1 Propagation unidirectionnelle dans une rue droite . . . . .	33
3.1.1 Formulation d'une équation parabolique 3D en guide d'ondes ouvert . . . . .	34

3.1.2	Résolution numérique de l'équation parabolique 3D . . . . .	37
3.1.3	Validation de la méthode par comparaison avec des résultats expérimentaux	41
3.1.4	Conclusion . . . . .	45
3.2	Variation brusque de la section du guide d'ondes . . . . .	46
3.2.1	Approximation de Kirchhoff . . . . .	46
3.2.2	Validation par comparaison avec des résultats expérimentaux . . . . .	48
3.2.3	Conclusion . . . . .	50
3.3	Variation continue de la section du guide d'ondes . . . . .	50
3.3.1	Formulation de l'équation parabolique 3D modifiée . . . . .	51
3.3.2	Modification de la méthode de résolution de l'équation parabolique 3D . .	52
3.3.3	Application de la méthode . . . . .	53
3.3.4	Conclusion . . . . .	55
Annexe 3.A	Intégration des PML dans la discrétisation par différences finies ... . . . .	57

## **II Approche multimodale de l'approximation unidirectionnelle de la propagation acoustique** **59**

<b>4</b>	<b>Coarse-grid computation of the one-way propagation of coupled modes</b>	<b>61</b>
4.1	Introduction . . . . .	61
4.2	Multimodal admittance method . . . . .	62
4.2.1	Coupled mode equations . . . . .	62
4.2.2	Numerical integration . . . . .	63
4.3	One-way approximation . . . . .	64
4.4	Accuracy of the one-way method for coarse discretization . . . . .	64
4.5	One-dimensional analytical solutions . . . . .	67
4.6	Conclusion . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Approche multimodale de la décomposition du champ de pression en série de Bremmer</b>	<b>69</b>
5.1	Multidiffusion dans un guide d'ondes discontinu . . . . .	70
5.1.1	Méthode multimodale pour les guides avec discontinuités de section . . .	70
5.1.2	Utilisation des matrices de diffusion pour la décomposition du champ de pression . . . . .	71
5.1.3	Multidiffusion dans un créneau . . . . .	72
5.1.4	Convergence de la série . . . . .	75
5.1.5	Sens de propagation des modes couplés . . . . .	76
5.1.6	Conclusion . . . . .	79
5.2	Série de Bremmer dans des guides d'ondes bidimensionnels à variation de section continue . . . . .	80
5.2.1	Décomposition en ordres : introduction . . . . .	80
5.2.2	Décomposition en ordres : résolution itérative . . . . .	80
5.2.3	Méthode de résolution numérique . . . . .	83
5.2.4	Approximation unidirectionnelle . . . . .	84
5.2.5	Reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre donné . . . . .	84
5.2.6	Modélisation du champ de pression transmis à travers un guide d'ondes irrégulier . . . . .	89
5.2.7	Analogie avec l'approximation de Born appliquée à une équation d'onde unidimensionnelle non-homogène . . . . .	93

5.2.8 Conclusion . . . . .	97
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>99</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>101</b>



# Introduction

Dans l'environnement urbain, l'essentiel des nuisances sonores est produit par les moyens de transport. La forte concentration des axes de communication à l'intérieur des villes a pour effet d'exposer en permanence les citoyens à de forts niveaux sonores. Perçu comme une nuisance dans le confort de vie, le bruit des transports présente également un risque sanitaire. Un récent rapport de l'Organisation Mondiale de la Santé [1] établit un lien direct entre l'exposition continue aux bruits environnementaux et le risque de maladies cardio-vasculaires, les troubles du sommeil et les troubles cognitifs chez les enfants. Depuis plusieurs années, la législation<sup>1</sup> impose une réduction des nuisances sonores en milieu urbain. À cet effet, une directive européenne<sup>2</sup> exige une évaluation de l'exposition aux bruits des transports pour toutes les villes de plus de 25000 habitants. Cette évaluation a pour support des cartographies de bruit, qui sont utilisées pour mettre en œuvre les plans d'actions dans le traitement de ces nuisances. La réalisation de ces cartes de bruit est donc un enjeu majeur de la lutte contre les nuisances sonores.

La taille étendue des axes de communication rendant irréalisables des campagnes de mesures à l'échelle d'une ville, les cartographies de bruit sont générées par des logiciels de prédictions. Les renseignements importés dans ces logiciels sont les données géométriques et topographiques de la ville, ainsi que la description du trafic routier (nombre et type de véhicules) en fonction du type de voiries (voiries locales, artères principales, réseaux secondaire et autoroutier). Ces données sont traitées par un modèle de bruit routier avant d'être intégrées dans un logiciel de prédictions de la propagation acoustique. Un recalage de ce modèle avec des mesures ponctuelles in situ permet de générer une cartographie des nuisances sonores. Les logiciels de prédictions communément utilisés sont basés sur une approche énergétique de la propagation des ondes acoustiques. Cette approche ne prend pas en compte la phase des ondes acoustiques, ce qui limite sa validité pour les basses fréquences.

Conformément aux réglementations en vigueur, les cartographies de bruits en milieu urbain sont exprimées selon des indicateurs pondérés et moyennés représentatifs d'une période de 24 heures ( $L_{den}$ ), ou d'une période de 8 heures durant la nuit ( $L_{night}$ ). La pondération  $A$ , appliquée à ces indicateurs, prend en compte la faible sensibilité de l'oreille humaine aux basses fréquences (comprises entre 50 Hz et 250 Hz). Cependant, une étude récente [31] a mis en avant les fortes composantes basses fréquences du bruit routier, et leur possible perception chez l'être humain depuis d'autres organes que l'oreille, comme par exemple la cage thoracique. Si la législation évolue et impose la prise en compte du bas du spectre du bruit routier, les techniques d'ingénierie actuelles seront donc incomplètes puisque limitées aux hautes fréquences. C'est pourquoi, des travaux fondamentaux doivent être menés autour de la propagation en milieu urbain d'ondes acoustiques basses fréquences.

Récemment, différents travaux de recherche ont porté sur la mise en œuvre de méthodes ondulatoires pour la propagation d'ondes acoustiques en milieu urbain. Notamment, les mé-

---

1. Loi "bruit" n°92-1444 du 31 décembre 1992.

2. Directive 2002/49/CE du parlement Européen et du Conseil du 25 juin 2002 relative à l'évaluation et à la gestion du bruit dans l'environnement.

thodes de résolution des équations d'Euler linéarisées ont été appliquées à l'étude de l'impact des paramètres géométriques des rues sur la propagation acoustique en milieu urbain [93]. Par ailleurs, une méthode basée sur les sources équivalentes a été utilisée afin de modéliser les effets d'absorption et de diffusion des façades des rues [69]. De plus, la méthode des matrices de ligne de transmission est adaptée à la modélisation temporelle de la propagation d'ondes acoustiques à l'intérieur des rues [45, 46]. Une méthode mixte associant les éléments finis à la méthode multimodale permet également de représenter les rues comme des guides d'ondes ouverts [81, 82], permettant ainsi de mieux appréhender les phénomènes de rayonnement créés par l'ouverture de la rue sur le ciel. Un développement de cette méthode permet d'étendre la modélisation de la propagation des ondes acoustiques à l'échelle des quartiers [71]. L'ensemble de ces méthodes ondulatoires permet une étude approfondie des phénomènes physiques complexes inhérents à la propagation des ondes acoustiques en milieu urbain. Cependant, l'actuel coût numérique de ces méthodes limite leurs utilisations dans un contexte d'ingénierie.

L'objectif des travaux de thèse présentés dans ce manuscrit porte sur l'approximation unidirectionnelle de la propagation des ondes, appliquée à l'acoustique urbaine. La formulation de cette approximation va permettre d'apporter des simplifications à l'équation d'onde, afin de limiter le temps de calcul lors de sa résolution. Très souvent associées à l'approximation unidirectionnelle, les équations paraboliques semblent parfaitement adaptées à une application à l'acoustique urbaine puisqu'elles sont déjà utilisées dans de nombreux champs d'application connexes, comme par exemple dans le domaine de la propagation en milieu extérieur (utilisé pour les zones périurbaines). Le milieu urbain peut être considéré comme un milieu de propagation complexe, caractérisé par l'absorption acoustique des matériaux de construction, l'atténuation atmosphérique, les phénomènes micro-météorologiques et l'ouverture de la rue sur le ciel.

La particularité de ce travail de thèse réside dans la prise en compte de la variation de la géométrie des façades d'immeubles dans la modélisation de la propagation acoustique. L'approximation unidirectionnelle proposée précédemment peut sembler inappropriée, puisque la propagation d'une onde acoustique à travers un guide d'ondes de géométrie variable va obligatoirement générer des ondes retour. Cependant, pour des variations suffisamment faibles de la section du guide d'ondes, l'erreur commise par l'approximation unidirectionnelle est faible. La problématique de ces travaux consiste également à évaluer la validité de la propagation unidirectionnelle des ondes acoustiques en fonction des variations géométriques des parois d'un guide d'ondes.

Les aspects généraux de l'approximation unidirectionnelle sont présentés sous différentes formes dans le premier chapitre. Dans un premier temps, un rappel de quelques généralités sur la formulation des équations paraboliques permet de mettre en avant les différentes simplifications apportées sur l'équation d'ondes. La distinction entre approximation unidirectionnelle et approximation paraxiale est également avancée. D'autre part, une décomposition de l'équation d'ondes, sous forme multimodale, est réalisée en fonction du sens de propagation des ondes. Deux formes d'approximation unidirectionnelle multimodale, appelées complète et incomplète, sont alors formulées.

La suite du manuscrit est divisée en deux parties, chacune constituée de deux chapitres. Une première partie porte sur l'utilisation des équations paraboliques dans le cadre de la modélisation de la propagation acoustique en guide d'ondes, ayant pour but une application à l'acoustique urbaine. Dans une seconde partie, une formulation multimodale de l'approximation unidirectionnelle est proposée afin d'étudier le sens de propagation des modes créés par couplage lors de la propagation acoustique dans des guides d'ondes de largeur continûment variable. Cette

étude a pour but de mieux comprendre les mécanismes de couplage entre modes lors de leurs propagations à l'intérieur d'un guide d'ondes irrégulier, et en particulier dans le cadre de l'approximation unidirectionnelle.

Le chapitre deux présente une étude préliminaire sur l'association entre une équation parabolique grand angle et une transformation de coordonnées. Cette transformation permet de prendre en compte la variation continue de la largeur d'un guide d'ondes bidimensionnel. Une méthode de résolution spécifique de l'équation parabolique modifiée, ainsi obtenue, est présentée. Une attention particulière est alors apportée sur le développement de l'opérateur transverse de cette équation, ainsi que sur l'implémentation de conditions aux frontières non-locales, induites par la non-orthogonalité de la transformation de coordonnées. Par comparaison avec une méthode de référence, les limites de cette méthode sont évaluées. La méthode obtenue est adaptée par la suite à la propagation acoustique tridimensionnelle en guide d'ondes ouvert.

Le chapitre trois porte sur la résolution d'équations paraboliques tridimensionnelles grand-angle, dans le but de modéliser la propagation acoustique en milieu urbain à l'échelle de la rue. Une rue est alors représentée comme un guide d'ondes ouvert. Dans un premier temps, la méthode de résolution est présentée pour le cas particulier d'une rue droite, c'est-à-dire lorsque les façades des bâtiments ne comportent aucune irrégularité. Cette méthode de résolution est basée sur l'utilisation de la technique des directions alternées, assurant un faible coût numérique à la résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle. Une validation de la méthode est réalisée par comparaison avec des résultats expérimentaux, obtenus par mesure sur une maquette de rue à échelle réduite. Par la suite, deux types d'irrégularités de façade sont traités : les changements brusques et les variations continues de la largeur de la rue. Pour le premier cas, une technique de raccordement de guide d'ondes, basée sur l'approximation de Kirchhoff, est associée à la méthode de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle. À nouveau, une comparaison avec des données expérimentales permet d'exposer les limites de la méthode. La variation continue de la largeur d'une rue est prise en compte dans l'équation parabolique tridimensionnelle grâce à la méthode de transformation de coordonnées présentée au chapitre précédent. Les modifications apportées à la méthode de résolution, liées à la transformation de coordonnées, sont présentées, tout comme quelques exemples de résultats numériques.

La seconde partie de ce manuscrit débute au chapitre quatre. Le comportement inattendu, rencontré lors de la résolution de la forme incomplète l'équation unidirectionnelle multimodale, est présenté. Cette équation différentielle a la particularité de ne pas présenter les mêmes résultats en fonction de la méthode de résolution qui lui est associée. En particulier, pour une méthode de Magnus, une meilleure précision par rapport à une solution de référence est obtenue pour une discrétisation longitudinale de deux points par longueur d'onde. Un développement analytique, pour un cas unidimensionnel, permet d'expliquer en partie ce comportement.

Le chapitre cinq est consacré à la décomposition du champ de pression en série de Bremmer, dans le cadre de propagation acoustique dans des guides d'ondes irréguliers bidimensionnels. Deux types d'irrégularités sont traités : des variations brusques, correspondant à des discontinuités de section, et les variations continues, représentant des changements progressifs de la largeur du guide d'ondes. Dans le cas des discontinuités de section, des matrices de diffusion sont utilisées afin de décomposer le champ de pression en fonction du sens de propagation des modes couplés. Ces matrices de diffusion renseignent sur la transmission ainsi que sur la réflexion des ondes acoustiques traversant une discontinuité de section. Un intérêt particulier est porté sur la transmission directe des ondes, correspondant à l'approximation unidirectionnelle de la propagation acoustique. Cette première étude, sur la décomposition du champ de pression pour un cas

discret, permet de mieux appréhender le passage à la limite continue proposé par la suite. Pour le cas d'un guide de largeur continûment variable, le système d'équations différentielles couplées, correspondant à la décomposition de l'équation d'onde en fonction du sens de propagation des ondes, est résolu par itération. Le champ de pression est alors décomposé à la manière d'une série de Bremmer, où l'ordre de développement de la série correspond au nombre de changements de sens de propagation des modes créés par couplage. Une méthode de résolution numérique est mise en place afin de résoudre les équations d'évolution correspondant à chaque composante de la série de Bremmer. L'importance des différents ordres de la série sur la reconstruction du champ de pression est étudiée, en particulier pour les ondes acoustiques transmises à travers un guide d'ondes irrégulier. Par comparaison avec la résolution de l'équation unidirectionnelle multimodale sous sa forme complète, la contribution particulière des ondes directement transmises est mise en avant, ce qui permet de mieux cerner les limites de l'approximation unidirectionnelle.

# Chapitre 1

## Approximation unidirectionnelle de la propagation acoustique

Dans le cadre de l'étude de la propagation acoustique, l'approximation unidirectionnelle consiste à considérer la propagation des ondes selon un sens de propagation privilégié. Cette approximation est basée sur la décomposition du champ de pression en fonction du sens de propagation des ondes. L'équation différentielle d'ordre deux, qui régit la propagation acoustique, peut alors être transformée en une paire d'équations différentielles couplées d'ordre un, où chacune de ces équations traduit l'évolution des composantes du champ selon un sens de propagation. L'approximation unidirectionnelle consiste alors à découpler ces deux équations différentielles en y négligeant, de part et d'autre, le terme de couplage. Cela peut revenir, par exemple, à négliger la contribution du champ contra-propagatif dans l'évolution du champ co-propagatif.

Lorsque le milieu de propagation est homogène, le champ de pression peut être en toute rigueur séparé en ondes allers et ondes retours. Par contre, si le milieu de propagation comporte des hétérogénéités, cette séparation n'est plus possible. Cependant, lorsque l'hétérogénéité du milieu est lentement variable, une approximation unidirectionnelle est envisageable afin de pouvoir conserver la forme découplée de l'équation d'onde. L'intérêt de l'approximation unidirectionnelle réside dans la plus grande facilité de résolution des équations différentielles d'ordre un par rapport à l'équation d'onde originale. En effet, avec cette approximation, l'équation d'onde, correspondant à un problème aux frontières, est approchée par une équation différentielle d'ordre un, pouvant se résoudre comme un problème aux valeurs initiales.

Ce premier chapitre introduit les notions générales ainsi que les équations résolues dans la suite de ce mémoire. Dans une première partie, l'approximation unidirectionnelle de l'équation d'onde sous forme d'équations paraboliques est présentée. Les différentes approximations et hypothèses réalisées lors de la formulation des équations paraboliques seront mises en avant grâce à la décomposition selon le sens de propagation du champ de pression. Dans une seconde partie, l'équation d'onde sous sa forme multimodale est décomposée selon le sens de propagation des ondes. Une approximation unidirectionnelle de l'équation d'onde est alors construite en fonction du sens de propagation des modes couplés.

### 1.1 Généralités sur les équations paraboliques

Très souvent associée à l'approximation unidirectionnelle, l'équation parabolique est une forme d'équation d'onde unidirectionnelle couramment utilisée dans de nombreux domaines de l'acoustique, tels que l'acoustique sous-marine [22, 44, 91], la propagation en milieu extérieur [14, 43] ou encore la propagation d'ondes sismiques [94]. Ce type d'équation d'onde est largement

utilisé pour sa facilité de résolution et son aptitude à prendre en compte les paramètres du milieu de propagation (hétérogénéité du milieu de propagation [9], milieu en mouvement [17,72], géométries des frontières [27,59]). Aussi connu sous le nom de *Beam Propagation Method* dans le domaine de l'optique [34,48,96], ce type d'équation est apparu en premier lieu dans le domaine de l'électromagnétisme pour résoudre des problèmes de propagation d'ondes le long de la surface de la Terre [57].

Les équations paraboliques, formulées dans ce chapitre, sont issues de l'équation de Helmholtz bidimensionnelle en régime harmonique et en dehors des sources, qui s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2(x) \right) p(x, y) = 0, \quad (1.1)$$

où  $p$  correspond à la pression acoustique et où le nombre d'onde  $k(x) = \omega/c(x)$  est dépendant de  $x$  par le profil de célérité  $c(x)$  traduisant l'hétérogénéité du milieu de propagation,  $\omega$  étant la pulsation. La convention temporelle  $e^{-i\omega t}$  est retenue pour l'ensemble de ce manuscrit.

### 1.1.1 Formulation de l'équation parabolique petit angle

Une première manière de formuler une équation parabolique est d'exprimer l'équation d'onde (1.1) en fonction de l'enveloppe de la pression  $\phi(x, y) = e^{-ik_0 x} p(x, y)$ , où  $k_0$  est un nombre d'onde moyen et  $x$  la direction de propagation privilégiée. Ce changement de variable permet d'écrire une équation d'onde dont le champ de solution  $\phi(x)$  ne contient plus les variations rapides du champ de pression selon  $x$ . L'équation de Helmholtz s'écrit alors

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2(x) - k_0^2 \right) \phi(x, y) = 0. \quad (1.2)$$

Pour que l'approximation unidirectionnelle reste valide, il faut que la variation du milieu soit lente. Par conséquent, la dépendance longitudinale principale du champ acoustique est de la forme  $e^{ik_0 x}$ . La variation de l'enveloppe de la pression est alors très faible sur l'échelle d'une longueur d'onde [91], ce qui revient à écrire  $\partial_x \phi \ll k_0 \phi$ . C'est la raison pour laquelle il est possible de négliger le terme  $\partial_{xx}^2 \phi$  devant  $2ik_0 \partial_x \phi$  dans l'équation (1.2) : cette simplification est appelée approximation paraxiale [53]. Cette approximation appliquée à l'équation (1.2) conduit à une équation parabolique sous la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{i}{2k_0} \left( k^2(x) - k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi. \quad (1.3)$$

Cette équation est appelée équation parabolique petit angle [91] en raison de l'approximation paraxiale faite lors de sa formulation, qui entraîne une limitation angulaire de sa validité. Grâce à la décomposition de l'équation d'onde, une autre interprétation de cette approximation sera donnée à la partie 1.1.3.

### 1.1.2 Décomposition de l'équation de Helmholtz

Plusieurs travaux [23,65,84] portent sur la formulation des équations paraboliques par le biais d'une décomposition de l'équation de Helmholtz selon le sens de propagation du champ de pression dans la direction privilégiée. Ce type de décomposition permet de mettre en avant les termes négligés lors de l'approximation unidirectionnelle.

Pour effectuer cette décomposition, il faut préalablement reformuler l'équation de Helmholtz sous la forme d'un système reliant la pression acoustique à la composante longitudinale du

gradient de la pression, noté  $q$ , sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\partial_{yy}^2 + k^2(x)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Afin de décomposer le champ de pression en fonction du sens de propagation des ondes, une matrice de splitting est utilisée [23]. Cette matrice, notée  $T(x)$ , permet de relier en un point  $x$  donné la composante co-propagative du champ de pression (notée  $p^+$ ) et la composante contra-propagative (notée  $p^-$ ) avec la pression et son gradient. Cela se traduit par la relation

$$\begin{pmatrix} p^+ \\ p^- \end{pmatrix} = T(x) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

En substituant l'équation (1.5) dans l'équation d'onde (1.4), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T(x)^{-1} \begin{pmatrix} p^+ \\ p^- \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\partial_{yy}^2 + k^2(x)) & 0 \end{pmatrix} \left( T(x)^{-1} \begin{pmatrix} p^+ \\ p^- \end{pmatrix} \right), \quad (1.6)$$

qui, après développement du terme de gauche, permet d'écrire la décomposition de l'équation d'onde sous la forme du système

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p^+ \\ p^- \end{pmatrix} = \left[ \frac{\partial T(x)}{\partial x} T(x)^{-1} + T(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\partial_{yy}^2 + k^2(x)) & 0 \end{pmatrix} T(x)^{-1} \right] \begin{pmatrix} p^+ \\ p^- \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Ainsi, pour une matrice de splitting donnée, il est possible de décomposer l'équation de Helmholtz en un système de deux équations différentielles couplées d'ordre un, qui traduisent l'évolution des composantes co-propagative et contra-propagative du champ de pression.

### 1.1.3 Splitting de l'équation d'onde conduisant aux équations paraboliques petit angle

L'équation parabolique petit angle (1.3) peut être déterminée grâce au système de décomposition de l'équation d'onde (1.7). Plusieurs matrices de splitting peuvent être définies, chacune donnant lieu à une interprétation différente des composantes  $p^+$  et  $p^-$ . Une première matrice de splitting peut être définie sous la forme [65]

$$T_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i/k_0 \\ 1 & i/k_0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Il peut être noté que cette matrice ne donne qu'une information moyenne sur le milieu de propagation à travers  $k_0$ . En introduisant cette matrice  $T_0$  dans le système (1.7), on obtient une décomposition de l'équation de Helmholtz sous la forme du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial p^+}{\partial x} = \frac{i}{2k_0} \left( k^2(x) + k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^+ + \frac{i}{2k_0} \left( k^2(x) - k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^- \end{cases} \quad (1.9a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p^-}{\partial x} = \frac{i}{2k_0} \left( -k^2(x) + k_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^+ + \frac{i}{2k_0} \left( -k^2(x) - k_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^-. \end{cases} \quad (1.9b)$$

Aucune approximation n'a été faite à ce stade du développement de l'équation d'onde.

L'approximation unidirectionnelle de l'équation de Helmholtz consiste à découpler les deux équations du système (1.9). Cela revient à négliger le terme en  $p^-$  dans l'équation différentielle (1.9a), et à négliger le terme en  $p^+$  dans l'équation différentielle (1.9b). La décomposition

obtenue grâce à la matrice de splitting  $T_0$ , suivie d'une approximation unidirectionnelle de l'équation (1.9a), permet de retrouver l'équation parabolique petit angle (1.3) qui, en fonction du champ de pression, s'exprime

$$\frac{\partial p^+}{\partial x} = \frac{i}{2k_0} \left( k^2(x) + k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^+. \quad (1.10)$$

Les termes qui ont été négligés lors de l'approximation unidirectionnelle apparaissent formellement. L'hypothèse  $\partial_{xx}^2 \phi \ll 2ik_0 \partial_x \phi$ , revient à négliger le terme  $i/(2k_0) (k^2(x) - k_0^2 + \partial_{yy}^2) p^-$  dans l'équation de Helmholtz. La limitation angulaire de cette équation parabolique apparaît à travers le terme  $\partial_{yy}^2 p^-$  qui est alors négligé. Cela correspond à une partie de l'opérateur transverse de l'équation d'onde qui n'est pas pris en compte dans cette équation parabolique. Dans ce cas, l'approximation unidirectionnelle donne obligatoirement lieu à une approximation paraxiale de l'équation parabolique.

La matrice de splitting peut prendre d'autres formes, et permet ainsi d'obtenir une nouvelle décomposition de l'équation d'onde. Ainsi, la matrice de splitting peut aussi s'exprimer [65]

$$T_1(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i/k(x) \\ 1 & i/k(x) \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

En introduisant cette matrice  $T_1$  dans le système (1.7), on obtient une autre décomposition de l'équation de Helmholtz sous la forme du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial p^+}{\partial x} = \left( ik(x) - \frac{k'(x)}{2k(x)} + \frac{i}{2k(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^+ + \left( \frac{k'(x)}{2k(x)} + \frac{i}{2k(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^- \\ \frac{\partial p^-}{\partial x} = \left( \frac{k'(x)}{2k(x)} - \frac{i}{2k(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^+ + \left( -ik(x) - \frac{k'(x)}{2k(x)} - \frac{i}{2k(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^-, \end{cases} \quad (1.12a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p^+}{\partial x} = \left( ik(x) - \frac{k'(x)}{2k(x)} + \frac{i}{2k(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^+ + \left( \frac{k'(x)}{2k(x)} + \frac{i}{2k(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^- \\ \frac{\partial p^-}{\partial x} = \left( \frac{k'(x)}{2k(x)} - \frac{i}{2k(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^+ + \left( -ik(x) - \frac{k'(x)}{2k(x)} - \frac{i}{2k(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^-, \end{cases} \quad (1.12b)$$

où l'exposant ' représente la dérivée par rapport à  $x$ .

L'approximation unidirectionnelle revient alors à négliger le terme  $(k'(x)/2k(x) + i/2k(x) \partial_{yy}^2) p^-$  dans la composante contra-propagative de l'équation (1.12a). Comme pour la précédente équation parabolique, l'approximation paraxiale est réalisée conjointement avec l'approximation unidirectionnelle. On obtient alors l'équation différentielle

$$\frac{\partial p^+}{\partial x} = \left( ik(x) - \frac{k'(x)}{2k(x)} + \frac{i}{2k(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^+. \quad (1.13)$$

L'équation parabolique issue de l'équation (1.13) est obtenue en considérant comme très faible la variation du profil de célérité selon  $x$ , cela revenant à faire l'hypothèse que  $k'(x)/2k(x) \ll ik(x)$ . L'équation parabolique petit angle correspondante s'écrit alors

$$\frac{\partial p^+}{\partial x} = ik(x) \left( 1 + \frac{1}{2k^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p^+. \quad (1.14)$$

Cette équation parabolique est une des formes les plus couramment rencontrées dans la littérature (par exemple [22, 44, 65]).

Rappelons que, si le nombre d'onde  $k$  est indépendant de  $x$ , alors la propagation selon une direction privilégiée ne constitue pas une approximation de l'équation d'onde, les composantes co-propagative et contra-propagative décomposant l'équation d'onde étant découplées. Cependant,

pour les deux décompositions réalisées précédemment, les composantes co-propagatives et contra-propagatives des systèmes (1.9) et (1.12) ne sont pas naturellement découplées pour  $k(x) = k_0$ , puisque l'opérateur transverse  $\partial_{yy}^2$  est contenu dans les termes de couplage. Par conséquent, les équations paraboliques (1.10) et (1.14) ne correspondent pas à des factorisations exactes de l'équation d'onde. Dans un cas où la propagation peut être décrite par l'évolution à sens unique des ondes acoustiques, les équations paraboliques petit angle sont toujours limitées par l'approximation paraxiale.

#### 1.1.4 Equation parabolique grand angle

Il est possible de formuler une équation parabolique sans approximation paraxiale. Cela correspond aux équations paraboliques dites grand angle, ou généralisées, que l'on retrouve couramment dans la littérature (par exemple [43, 53, 72]). Ce type d'équation parabolique peut être obtenu à partir d'une reformulation de l'équation de Helmholtz en fonction d'un opérateur transverse noté  $\mathcal{Q}$ . Dans ce cas, l'équation d'onde prend la forme suivante :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2(x) \mathcal{Q}^2 \right) p(x, y) = 0, \quad (1.15)$$

où l'opérateur transverse s'écrit

$$\mathcal{Q} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2}}. \quad (1.16)$$

Un développement direct de l'équation d'onde sous la forme (1.15) permet de séparer explicitement l'évolution des contributions co-propagative et contra-propagative du champ de pression [37] sous la forme

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - ik(x) \mathcal{Q} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + ik(x) \mathcal{Q} \right) p + ik(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{Q} - \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial x} \right) p = 0. \quad (1.17)$$

En négligeant le commutateur  $\left( \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{Q} - \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial x} \right)$  appliqué au champ de pression  $p$ , on obtient directement l'équation parabolique grand angle

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - ik(x) \mathcal{Q} \right) p^+ = 0. \quad (1.18)$$

Il est également possible de retrouver cette équation parabolique depuis la décomposition de l'équation de Helmholtz. Pour cela, nous définissons la matrice de splitting [37]

$$T_2(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i/(k(x)\mathcal{Q}) \\ 1 & i/(k(x)\mathcal{Q}) \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

En appliquant la matrice de splitting  $T_2(x)$  dans la décomposition de l'équation d'onde (1.7), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial p^+}{\partial x} = \left( ik(x)\mathcal{Q} - \frac{(k(x)\mathcal{Q})'}{2k(x)\mathcal{Q}} \right) p^+ + \left( \frac{(k(x)\mathcal{Q})'}{2k(x)\mathcal{Q}} \right) p^- \end{cases} \quad (1.20a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p^-}{\partial x} = \left( \frac{(k(x)\mathcal{Q})'}{2k(x)\mathcal{Q}} \right) p^+ + \left( -ik(x)\mathcal{Q} - \frac{(k(x)\mathcal{Q})'}{2k(x)\mathcal{Q}} \right) p^-. \end{cases} \quad (1.20b)$$

Si les variations de  $k(x)$  sont lentes et faibles, il est possible de négliger les termes  $(k(x)\mathcal{Q})' / 2k(x)\mathcal{Q}$ . On retrouve alors l'équation parabolique grand angle (1.18). Négliger le commutateur  $\left[ \frac{\partial}{\partial x}, \mathcal{Q} \right]$  revient à considérer les variations du nombre d'onde  $k(x)$  comme lentes et faibles.

Lorsque  $k$  est indépendant de  $x$ , l'équation parabolique grand angle (1.18) est issue d'un découplage naturel des équations différentielles (1.20a) et (1.20b), contrairement aux équations paraboliques petit angle. Aucune approximation paraxiale n'est faite lors de la formulation de l'équation parabolique grand angle. Cette équation parabolique correspond à une forme de factorisation exacte de l'équation de Helmholtz, lorsque  $k$  est indépendant de  $x$ .

L'équation parabolique grand angle contient cependant une difficulté de résolution au niveau de l'opérateur transverse  $\mathcal{Q}$ . La racine carrée de l'opérateur différentiel empêche de résoudre directement l'équation parabolique. Une technique fréquemment utilisée consiste à développer la racine carrée. Par exemple, un développement de Taylor d'ordre un permet d'écrire l'opérateur transverse sous la forme

$$\mathcal{Q} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2}} = 1 + \frac{1}{2k^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (1.21)$$

on retrouve alors l'équation parabolique petit angle (1.14). L'approximation paraxiale qui n'a pas été faite lors de la formulation de l'équation parabolique grand angle se retrouve ainsi dans le développement de l'opérateur transverse.

Le développement de Padé est également couramment utilisé pour sa décomposition sous forme de fractions rationnelles de la racine carrée. Pour un développement de Padé à l'ordre  $M$ , l'opérateur transverse s'écrit [60]

$$\mathcal{Q} = 1 + \sum_{l=1}^M \frac{a_l^M \left( \frac{1}{k^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}{1 + b_l^M \left( \frac{1}{k^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}, \quad (1.22)$$

où  $a_l^M$  et  $b_l^M$  sont les coefficients de Padé d'indice  $l$  et d'ordre  $M$  et ont respectivement pour expressions [60]  $a_l^M = \frac{2}{2M+1} \sin^2 \left( \frac{l\pi}{2M+1} \right)$  et  $b_l^M = \cos^2 \left( \frac{l\pi}{2M+1} \right)$ . On peut noter qu'un développement de Padé d'ordre 1 correspond au développement de Taylor d'ordre 2. Le développement de la racine carrée à un ordre fini limite l'angle de validité de l'équation parabolique [44]. Plus l'ordre de Padé est élevé et moins l'approximation paraxiale limite la validité de la solution de l'équation parabolique [53].

### 1.1.5 Conclusion

Ce premier sous-chapitre a servi à introduire les équations paraboliques sous leurs formes les plus standards, le but étant de mettre en avant les différents types d'approximations et d'hypothèses qui sont faites lors de leur formulation. A propos des équations paraboliques petit angle, il a été montré pourquoi l'approximation unidirectionnelle conduit obligatoirement à une approximation paraxiale qui limite l'angle de validité de l'équation parabolique. Cette limitation angulaire se traduit par une erreur sur la phase de la pression acoustique qui est cumulative tout au long de la propagation dans la direction privilégiée.

De plus, il est montré que la différence entre les équations paraboliques petit angle et grand angle intervient dans la façon dont est décomposée l'équation d'onde. Lors de la formulation des équations grand angle, l'approximation unidirectionnelle n'implique pas de limitation angulaire. Cependant, la résolution d'une telle équation parabolique impose un développement fini de l'opérateur transverse qui conduit à une approximation paraxiale. Néanmoins, les méthodes

de développement de l'opérateur transverse sont nombreuses [49] (développement de Padé, split-step Padé, approximation au sens des moindres carrés, interpolation de Chebyshev, ...) et permettent de s'affranchir de la limitation angulaire au prix d'une complexification de la méthode de résolution de l'équation parabolique.

Par souci de clarté, les équations paraboliques ont été présentées dans le cas de la propagation en milieu hétérogène. Dans la suite du manuscrit (chapitre 2), les équations paraboliques vont être utilisées pour la modélisation de la propagation acoustique dans des guides d'ondes irréguliers. Pour cela, l'équation parabolique grand angle est retenue. La prise en compte de la variation continue de la largeur du guide d'ondes est assurée par une transformation de coordonnées. La variation de géométrie du guide d'ondes est alors considérée comme une hétérogénéité du milieu de propagation, transformant ainsi un guide homogène irrégulier en un guide hétérogène régulier. Ce changement de coordonnées ne modifiera pas le comportement intrinsèque de l'équation parabolique grand angle présentée précédemment.

## 1.2 Formulation multimodale de la propagation acoustique unidirectionnelle

La méthode multimodale permet de modéliser la propagation acoustique dans des guides d'ondes de géométrie complexe [15, 40, 41, 74, 75]. Basée sur le développement du champ de pression sur les modes propres d'un guide d'ondes, cette méthode permet de prendre en compte tous les modes, propagatifs et évanescents, qui contribuent de façon significative au champ acoustique afin de caractériser avec précision la propagation.

Nous proposons d'utiliser cette méthode dans le cadre de l'approximation unidirectionnelle afin d'étudier les couplages entre les modes induits par des variations de section transverse du guide d'ondes. Cela permettra par la suite de mieux appréhender la limite de validité de cette approche en fonction de la fréquence, de la géométrie du guide d'ondes ou encore de la nature de la source. Après avoir présenté la méthode multimodale pour la propagation acoustique en guide de section variable, une décomposition du champ de pression en fonction du sens de propagation est réalisée. Cela permettra de formuler une approximation unidirectionnelle de cette méthode.

### 1.2.1 Généralités sur la méthode multimodale en guide de section variable

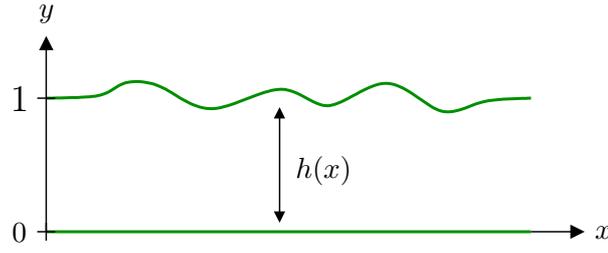
L'équation de Helmholtz (1.1) est maintenant associée à la condition de parois rigides

$$\partial_n p = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \text{ et } y = h(x), \quad (1.23)$$

où  $\partial_n$  désigne la dérivée normale par rapport à la paroi et où  $h$  représente la hauteur variable de la paroi supérieure du guide d'ondes (voir Fig. 1.1). Il est possible de définir la base de fonction propre orthonormée

$$g_n(x, y) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0n}}{h(x)}} \cos\left(\frac{n\pi}{h(x)}y\right) \quad (1.24)$$

comme étant la solution du problème aux valeurs propres  $\partial_{yy}^2 g_n = -(n\pi/h)^2 g_n$ , associé aux conditions de Neumann (1.23). Les développements de la pression  $p$  et de la composante longitudinale de son gradient  $q = \partial_x p$  sur la base des fonctions propres  $\{g_n\}$  permettent de faire



**Fig. 1.1** – Guide d’ondes bidimensionnel de largeur  $h$  variable.

apparaître la forme vectorielle de la pression et du gradient de pression sous la forme

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) g_n(x, y) = {}^t \vec{g}(x, y) \vec{P}(x) \\ q(x, y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(x) g_n(x, y) = {}^t \vec{g}(x, y) \vec{Q}(x), \end{aligned} \quad (1.25)$$

où le symbole  ${}^t$  représente la transposée du vecteur  $\vec{g}$ .

La projection du système d’équations d’ondes (1.4) sur la base  $\{g_n\}$  permet d’obtenir les équations différentielles couplées régissant la propagation acoustique dans un guide d’ondes irrégulier, qui s’écrivent

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F & I \\ -K^2 & {}^t F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

où la matrice  $K$  est une matrice diagonale donnée par la relation  $K_n(x) = \sqrt{k^2 - (n\pi/h(x))^2}$ . L’annexe 1.A détaille les étapes de cette projection et donne l’expression de la matrice de couplage  $F$ .

La matrice admittance  $Y$  est définie d’après la relation

$$\vec{Q} = Y \vec{P}. \quad (1.27)$$

En substituant, dans la dérivée de l’équation (1.27)  $\vec{Q}' = Y' \vec{P} + Y \vec{P}'$ , les vecteurs  $\vec{P}'$  et  $\vec{Q}'$  à leurs expressions définies dans le système (1.26), une équation de Riccati (équation différentielle non-linéaire d’ordre deux), décrivant l’évolution de l’admittance, est obtenue sous la forme

$$\partial_x Y = -K^2 - Y^2 + YF + {}^t FY. \quad (1.28)$$

La matrice admittance est utilisée afin de découpler les deux équations différentielles du système (1.26), rendant leur résolution possible sous forme d’un problème aux valeurs initiales. Cela implique d’avoir préalablement résolu l’équation de Riccati (1.28). De manière générale, une solution analytique de cette équation ne peut être obtenue. C’est pourquoi l’équation de Riccati est résolue numériquement d’aval en amont du guide d’ondes en partant d’une condition de rayonnement [75]. Plus de détails sur les méthodes numériques utilisées seront présentés au chapitre 4. Une fois les valeurs de la matrice admittance calculées, obtenir le champ de pression à l’intérieur du guide d’ondes revient à résoudre, pour une condition initiale donnée, l’équation

$$\partial_x \vec{P} = (Y - F) \vec{P}, \quad (1.29)$$

issue du découplage des équations du système (1.26).

### 1.2.2 Décomposition du champ de pression

Le champ de pression vectoriel  $\vec{P}$  peut être décomposé en la somme des contributions co-propagative et contra-propagative

$$\vec{P} = \vec{P}^+ + \vec{P}^-. \quad (1.30)$$

De même, le gradient de pression  $\vec{Q}$  peut s'écrire

$$\vec{Q} = \Gamma (\vec{P}^+ - \vec{P}^-), \quad (1.31)$$

où  $\Gamma_{nm} = iK_n \delta_{nm}$  est la matrice d'admittance caractéristique. En remplaçant les vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{Q}$  par leur décomposition dans le système (1.26), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{P}^+ + \vec{P}^-)' = (\Gamma - F) \vec{P}^+ + (-\Gamma - F) \vec{P}^- \\ (\Gamma \vec{P}^+ - \Gamma \vec{P}^-)' = (\Gamma^2 + {}^t F \Gamma) \vec{P}^+ + (\Gamma^2 - {}^t F \Gamma) \vec{P}^-. \end{array} \right. \quad (1.32a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{P}^+ + \vec{P}^-)' = (\Gamma - F) \vec{P}^+ + (-\Gamma - F) \vec{P}^- \\ (\Gamma \vec{P}^+ - \Gamma \vec{P}^-)' = (\Gamma^2 + {}^t F \Gamma) \vec{P}^+ + (\Gamma^2 - {}^t F \Gamma) \vec{P}^-. \end{array} \right. \quad (1.32b)$$

En dérivant les termes de gauche de cette équation, le système précédent prend la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P}^{+'} + \vec{P}^{-'} = (\Gamma - F) \vec{P}^+ + (-\Gamma - F) \vec{P}^- \\ \vec{P}^{+'} - \vec{P}^{-'} = (\Gamma - \Gamma^{-1} \Gamma' + \Gamma^{-1} {}^t F \Gamma) \vec{P}^+ + (\Gamma + \Gamma^{-1} \Gamma' - \Gamma^{-1} {}^t F \Gamma) \vec{P}^-. \end{array} \right. \quad (1.33a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P}^{+'} + \vec{P}^{-'} = (\Gamma - F) \vec{P}^+ + (-\Gamma - F) \vec{P}^- \\ \vec{P}^{+'} - \vec{P}^{-'} = (\Gamma - \Gamma^{-1} \Gamma' + \Gamma^{-1} {}^t F \Gamma) \vec{P}^+ + (\Gamma + \Gamma^{-1} \Gamma' - \Gamma^{-1} {}^t F \Gamma) \vec{P}^-. \end{array} \right. \quad (1.33b)$$

Le système d'équations différentielles couplées suivant est alors obtenu :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \vec{P}^+ \\ \vec{P}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' + \alpha & \beta \\ \beta & -\Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P}^+ \\ \vec{P}^- \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

avec

$$\alpha = -\frac{1}{2} F + \frac{1}{2} \Gamma^{-1} {}^t F \Gamma \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' - \frac{1}{2} F - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} {}^t F \Gamma. \quad (1.35)$$

On peut noter que les éléments de la diagonale de la matrice  $\alpha$  sont nuls.

Le système (1.34) correspond à la décomposition du champ de pression  $\vec{P}$  selon le sens de propagation des ondes dans la direction privilégiée. Aucune approximation n'est effectuée lors de la décomposition des équations multimodales (1.26) conduisant à ce système d'équations couplées. Le terme  $\pm \Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma'$  correspond à la propagation adiabatique des modes co-propagatifs et contra-propagatifs. Les matrices  $\alpha$  et  $\beta$  permettent de connaître le sens de propagation des modes créés par couplages, puisqu'elles représentent respectivement les couplages dans la continuité ou dans le sens opposé de la direction de propagation. Par exemple, pour une onde incidente quelconque  $\vec{P}_0$ , le vecteur  $\alpha(L) \vec{P}_0(L)$  correspond en  $x = L$  à la contribution des modes couplés qui se propagent dans le même sens que le mode incident  $\vec{P}_0$ . De même, le vecteur  $\beta(L) \vec{P}_0(L)$  correspond en  $x = L$  à la contribution des modes couplés qui se propagent dans le sens opposé au mode incident  $\vec{P}_0$ .

L'inconvénient de cette décomposition est qu'elle fait intervenir la matrice  $\Gamma^{-1}$ , inverse de la matrice d'admittance caractéristique. La variation des termes de la matrice diagonale  $\Gamma$  dépend de la variation de largeur du guide d'onde. Pour certaines valeurs de  $h(x)$ , cette matrice est singulière puisque plusieurs de ses termes peuvent être nuls. L'inversion de la matrice  $\Gamma$  est alors impossible pour ces valeurs particulières qui sont appelées coupures dans la relation de dispersion ( $K_n = 0$ ). Elles apparaissent pour certaines valeurs de  $h(x)$  correspondant à un nombre entier de demi-longueurs d'ondes. Chaque coupure donne lieu à un changement de nature d'un mode transverse. Des augmentations suffisamment importantes de  $h(x)$  ont pour conséquence de transformer certains modes évanescents en modes propagatifs. Il est entendu que, dans le cas d'une diminution de la section transverse, il s'agit du contraire : certains modes propagatifs deviennent alors évanescents. La hauteur de la paroi supérieure du guide étant continûment variable, le passage par les coupures est inévitable. Cependant, l'introduction de perte dans le milieu de propagation peut empêcher les matrices  $\Gamma$  d'être singulières.

### 1.2.3 Approximation unidirectionnelle

L'équation multimodale (1.26) a été décomposée suivant le sens de propagation des ondes dans la direction privilégiée. Une formulation multimodale de l'approximation unidirectionnelle est alors envisageable. Deux formes d'approximation sont proposées.

Une première approximation unidirectionnelle est réalisée à partir de l'équation (1.32a). En y négligeant la contribution du terme couplé  $\vec{P}^-$ , cette première forme d'approximation unidirectionnelle correspond à l'équation différentielle

$$\vec{P}^{+'} = (\Gamma - F) \vec{P}^+. \quad (1.36)$$

Il n'est alors pas nécessaire de calculer de matrice d'admittance préalablement à la résolution de cette équation. Par comparaison avec la première équation du système (1.26), on constate que cette forme d'approximation unidirectionnelle revient à faire l'hypothèse que l'admittance peut être approchée localement par l'admittance caractéristique  $\Gamma$ . L'avantage de cette forme de décomposition est qu'elle ne fait pas intervenir d'inversion de la matrice d'admittance caractéristique, les solutions de cette équation ne divergent donc pas aux passages par des coupures.

Une deuxième forme d'équation multimodale unidirectionnelle est proposée à partir de la forme finale de la décomposition des équations d'ondes (1.34). En négligeant la contribution du terme couplé  $\vec{P}^-$  dans la première équation du système, l'approximation unidirectionnelle pour le champ co-propagatif correspond à l'équation d'évolution

$$\vec{P}^{+'} = \left( \Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' + \alpha \right) \vec{P}^+. \quad (1.37)$$

L'approximation unidirectionnelle consiste alors à négliger la matrice  $\beta$ , ce qui est cohérent avec la nature des couplages que représentent cette matrice. L'équation (1.37) permet de modéliser la propagation des modes créés par couplage qui ne changeront jamais de sens de propagation. De plus, il n'est alors pas nécessaire de calculer de matrice d'admittance préalablement à la résolution de cette équation.

### 1.2.4 Conclusion

La méthode multimodale ainsi que son approximation unidirectionnelle ont été présentées. Issues de la décomposition du champ de pression selon son sens de propagation, deux formes d'équations vectorielles unidirectionnelles ont été proposées. Par rapport à la méthode multimodale sous sa forme traditionnelle, il n'est pas nécessaire de calculer de matrice d'admittance. Contrairement aux méthodes de modes couplés utilisées en acoustique sous marine (par exemple : [3,32,66]), qui sont basées sur la projection de l'équation parabolique, les équations (1.36) et (1.37) sont issues de la projection de l'équation d'onde sans approximation sur les modes transverses. Ces équations d'ondes unidirectionnelles ont donc l'avantage de ne pas comporter de limitation angulaire dans leurs formulations. A notre connaissance, cette forme d'approximation unidirectionnelle du champ de pression vectoriel est originale.

L'équation (1.36) correspond à une forme incomplète de la formulation multimodale de l'approximation unidirectionnelle. Malgré cela, elle possède l'avantage de ne pas comporter d'inversion de la matrice d'admittance caractéristique, ce qui évite d'obtenir des valeurs singulières aux passages par des coupures de la relation de dispersion. Cette forme d'approximation unidirectionnelle a la particularité de ne pas donner les mêmes résultats en fonction de la méthode de résolution qui lui est associée. La présentation ainsi que l'explication du comportement numérique surprenant de la résolution de cette équation différentielle sont présentées au chapitre 4.

Une forme plus rigoureuse de la formulation multimodale de l'approximation unidirectionnelle est proposée par l'équation (1.37). Cette formulation repose sur une décomposition de l'équation d'onde en fonction du sens de propagation des modes créés par couplage. La seule limitation de cette formulation, en dehors de l'approximation unidirectionnelle, intervient au niveau des géométries de guides d'ondes modélisables : les variations de section du guide doivent être d'amplitude suffisamment faible pour ne pas changer la nature des modes transverses. Le chapitre 5 présente la méthode de résolution ainsi que les résultats obtenus avec ce type d'équation.

D'autre part, la décomposition (1.34) de l'équation d'onde peut être résolue par itération. Cela donne lieu à un développement asymptotique de la solution de l'équation d'onde à la manière d'une série de Bremmer, mais à deux dimensions. Dans le chapitre 5, cette décomposition par ordre est utilisée afin de mieux cerner les limites de validité de l'approximation unidirectionnelle dans le cadre de la propagation en guide d'ondes de section variable.

## Annexe 1.A Projection de l'équation d'onde sur les modes transverses : détermination de la matrice $F$

Les équations différentielles du système (1.26), régissant la propagation multimodale dans un guide de section variable, sont issues de la projection sur les modes transverses du système d'équations d'ondes (1.4). La projection sur les modes transverses  $g_m$  de la relation  $\partial_x p = q$  s'écrit

$$\int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} g_m dz = \int_0^h q g_m dz, \quad (1.38)$$

où  $h$  représente la variation de la hauteur de la paroi supérieure du guide d'ondes (voir figure 1.1). La dérivée par rapport à  $x$  du membre de gauche peut être développée :

$$\int_0^h \frac{\partial (p g_m)}{\partial x} dz - \int_0^h p \frac{\partial g_m}{\partial x} dz = \int_0^h q g_m dz. \quad (1.39)$$

Le premier terme du membre de gauche peut être calculé à l'aide de l'intégrale de Leibniz. Cette règle permet d'explicitier la différenciation d'une intégrale paramétrique dont les limites sont des fonctions dépendantes de la variable différentielle. On obtient alors

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^h p g_m dz \right) - h' [p g_m]_0^h - \int_0^h p \frac{\partial g_m}{\partial x} dz = \int_0^h q g_m dz. \quad (1.40)$$

Les grandeurs scalaires  $p$  et  $q$  peuvent être développées sur la base modale  $g_n$  (voir équation (1.25)). Pour un mode d'indice  $n$  quelconque, l'équation précédente est alors formulée :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( P_n \int_0^h g_n g_m dz \right) - h' [P_n g_n g_m]_0^h - P_n \int_0^h g_n \frac{\partial g_m}{\partial x} dz = Q_n \int_0^h g_n g_m dz. \quad (1.41)$$

Les fonctions propres normées  $g$  vérifient la relation d'orthogonalité

$$\int_0^h g_n g_m dz = \delta_{nm}, \quad (1.42)$$

ce qui permet de simplifier l'équation (1.41) sous la forme

$$P'_n = -P_n \underbrace{\left( -h' [g_n g_m]_0^h - \int_0^h g_n \frac{\partial g_m}{\partial x} dz \right)}_{F_{nm}} + Q_n, \quad (1.43)$$

où la matrice  $F$  rend compte du couplage entre les modes issus de la variation de section du guide d'ondes. En généralisant cette relation à tous les modes, on retrouve bien l'équation différentielle

$$\vec{P}' = -F\vec{P} + \vec{Q}, \quad (1.44)$$

qui régit la propagation multimodale du champ de pression dans un guide de section variable.

## Première partie

# Utilisation de l'équation parabolique pour une application à l'acoustique urbaine



## Chapitre 2

# Higher order Padé approximation for the parabolic equation in a varying cross-section waveguide

Ce chapitre, rédigé en langue anglaise, reprend un article publié dans la revue *Acta Acustica united with Acustica* [27]. Ce travail correspond à une étude préliminaire sur l'utilisation des équations paraboliques pour modéliser la propagation acoustique dans des guides d'ondes bidimensionnels de géométries continûment variables. L'utilisation de l'équation parabolique est motivée par la limitation du coût de calcul pour ce genre de modélisation.

Au chapitre précédent, des généralités sur l'équation parabolique ont été présentées. Il est montré que l'équation parabolique grand angle ne comportait pas de limitation angulaire dans sa formulation. C'est la raison pour laquelle l'utilisation de ce type d'équation est retenue. En effet, la variation de section d'un guide d'ondes pouvant, par couplage, faire augmenter l'angle de propagation des ondes acoustiques, il est important pour une bonne modélisation du champ de pression de pouvoir correctement propager ces ondes couplées. Un développement à un ordre supérieur de l'opérateur transverse est alors nécessaire.

Afin de prendre en compte l'effet de la variation de la section transverse d'un guide d'ondes, une transformation de coordonnées est associée à l'équation parabolique grand angle, y ajoutant ainsi un terme additionnel. Une attention particulière est portée sur la méthode de résolution de cette équation parabolique modifiée. L'ajout d'un terme additionnel dans l'équation parabolique, ainsi que le développement à un ordre supérieur de l'opérateur transverse, nécessitent une adaptation des méthodes de résolution usuelles. Par ailleurs, la non-orthogonalité de la transformation de coordonnées impose une discrétisation non-locale des conditions aux frontières. L'équation parabolique modifiée ainsi que sa méthode de résolution sont intégrées, au chapitre suivant, dans un code de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle, afin de modéliser la propagation acoustique en milieu urbain.

### 2.1 Introduction

Because it concerns a large variety of practical situations and technologies, as well as it raises many interesting fundamental questions, the wave propagation in waveguides has been the subject of extensive research. The development of methods for computing the wave guided propagation still arouses number of papers, either in acoustics, quantum physics, optics or mechanics [6, 10, 58, 63, 74, 82]. When the longitudinal dependence of the waveguiding structure is weak, that is, when the filling medium is weakly heterogeneous or the cross-section varies slowly,

one-way approximations are interesting approaches, that reduce the original, boundary value, problem into a first-order equation solved as an initial value problem (see, *e.g.*, Ref. [58] and references therein).

In the present paper we investigate a one-way approximation of the Helmholtz problem  $(\nabla^2 + k^2)p = 0$  ( $p$  is the pressure field and  $k$  the wavenumber) in a two-dimensional, slowly varying cross-section waveguide (with rigid boundaries  $y = 0$  and  $y = h(x)$ , with  $h$  a positive  $\mathcal{C}^1$  function). The proposed approach derives from the usual formulation known as Parabolic Equation (PE) in acoustics [22, 44, 56, 59, 65, 77, 91] and Beam Propagation Method (BPM) in optics [34, 48, 96]. Following Abrahamsson and Kreiss [4], a local non-orthogonal coordinate transformation is used to flatten the boundary. A modified parabolic equation is thus derived, that takes into account as additional terms the effects of the cross-sectional change along the waveguide. The non-orthogonal change of coordinate produces a complex boundary condition at the non flat boundary, involving the axial derivative  $\partial_x p$ , that may cause numerical difficulties [4, 61]. A combination of an explicit and an implicit discretization of the equation at the boundary allows an accurate description of this condition without affecting the stability of the numerical scheme used to compute the wavefield.

The present work aims at solving with the modified PE the largest possible variations of the cross-section. For this purpose, in addition to the accurate description of the boundary condition, the square root operator is developed using a high order complex Padé expansion [9, 95]. A fractional-step method [85] is then used to split the evolution equation in  $M + 1$  first-order differential equations ( $M$  the order of the Padé expansion), each of which can be integrated using usual numerical schemes, that is, in the present case, a finite difference approximation of the transverse problem, and a Crank-Nicolson marching algorithm.

The proposed method is formulated and discussed in the first section (Sec. 2.2), and results are shown in the Sec. 2.3 for validation. These results suggest that the order of size of the maximum slope, that is, the maximum value of  $h'(x)$ , is a relevant criterion to estimate the range of validity of the method (Sec. 2.4).

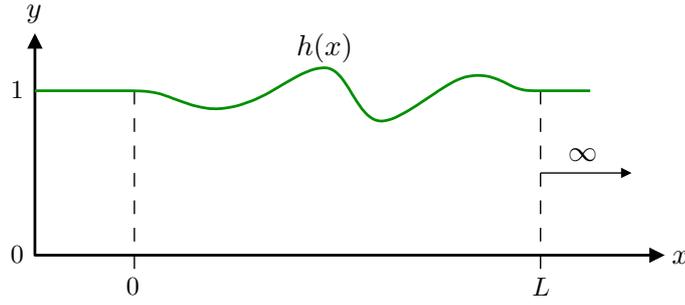
## 2.2 Modified parabolic equation method

### 2.2.1 Formulation

Consider the waveguide shown in Fig. 2.1, with Neumann boundary condition at the wall ( $\partial_n p = 0$ ; Neumann conditions are chosen as classical conditions in acoustics, although Dirichlet or mixed boundary conditions could also be imposed). An incident pressure field is propagating from the left of region of interest ( $x \in [0, L]$ ) and the waveguide is assumed to be uniform and semi-infinite downstream from this region. Moreover,  $h(x)$  represents the variation of the waveguide cross-section. In this article, the change comes only from the upper wall but the same method can be applied if the section changes comes from both walls. The input width of the waveguide is set to 1 in order to have a dimensionless geometry. The medium filling the waveguide is homogeneous and inviscid.

Under the assumption of a weak longitudinal variation of the cross-section of the waveguide, it is possible to consider forward and backward propagating waves as two decoupled fields, solutions of the first-order equations

$$\partial_x p^\pm = \pm ik \mathcal{Q}^{1/2} p^\pm, \quad (2.1)$$



**Fig. 2.1** – Geometry of the 2D waveguide.

with  $i$  the imaginary unit and where the square root operator

$$\mathcal{Q}^{1/2} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \nabla_{\perp}^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \quad (2.2)$$

is made explicit using a paraxial approximation : the resulting model is the basis of the PE method [57, 91]. Note that, in the case of a uniform waveguide ( $h'(x) = dh/dx = 0$ ), the Helmholtz equation is exactly factored into Eqs. (2.1) : forward and backward propagating fields  $p^{\pm}$  are exact solutions of the original problem.

A PE as Eq. (2.1) can be built for the propagation in a varying cross-section waveguide by incorporating the effects of the non-flat boundary into a modified differential operator in the one-way evolution equations for  $p^{\pm}$ . This is achieved by a coordinate transformation that flattens the upper boundary [4, 5, 61]. In the sequel, we use the local, non-orthogonal transformation  $\tilde{x} = x$ ,  $\tilde{y} = y/h(x)$ . For slow and weak variations of the waveguide section, Eq. (2.1) then transforms to

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} - \frac{h'(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \mp ik \tilde{\mathcal{Q}}(\tilde{x})^{1/2} \right] \tilde{p}^{\pm}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0, \quad (2.3)$$

where

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\tilde{x})^{1/2} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{1}{h^2(\tilde{x})} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}}, \quad (2.4)$$

and the Neumann boundary condition for  $\tilde{p}^{\pm}$  reads as

$$\left[ \partial_{\tilde{y}} \tilde{p}^{\pm} - \frac{hh'}{1 + (h')^2} \partial_{\tilde{x}} \tilde{p}^{\pm} \right]_{\tilde{y}=1} = 0. \quad (2.5)$$

and

$$[\partial_{\tilde{y}} \tilde{p}^{\pm}]_{\tilde{y}=0} = 0. \quad (2.6)$$

For the computation, the main range dependence of the complex pressure is removed by factoring  $\tilde{p}^{\pm}(\tilde{x}, \tilde{y})$  into  $\tilde{\phi}^{\pm}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{p}^{\pm}(\tilde{x}, \tilde{y}) \exp(-ik\tilde{x})$ , where  $\tilde{\phi}$  is a slowly varying envelope of the pressure.

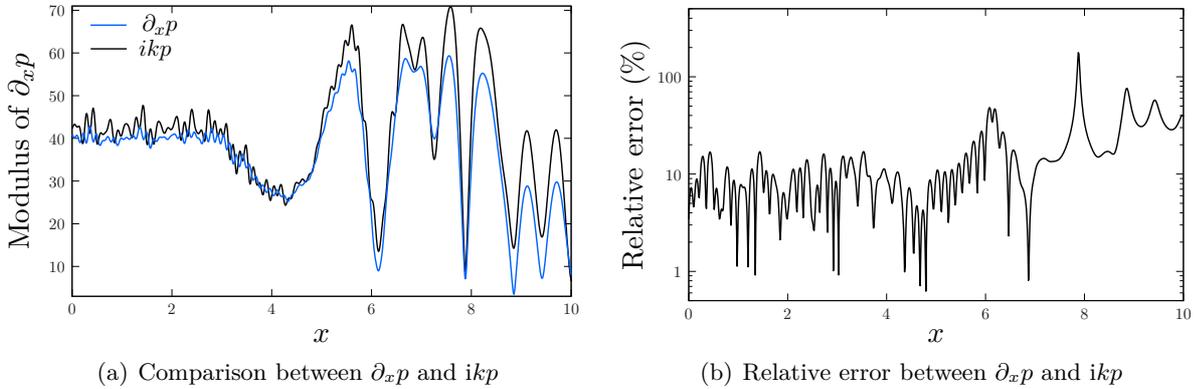
### 2.2.2 Boundary condition

In order to account for the largest possible variations of the cross-section, a particular attention must be paid to the calculation of the boundary condition (2.5) on the upper wall. In their article [4], Abrahamsson and Kreiss propose an approximation of the boundary conditions as

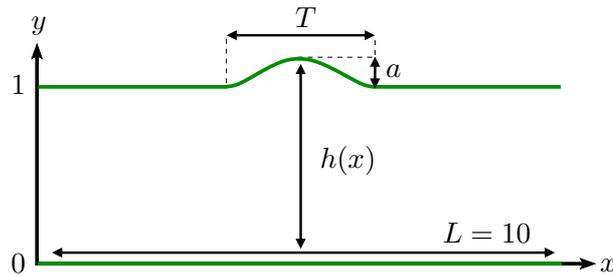
$$\left[ \partial_{\tilde{y}} \tilde{p}^{\pm} - ik \left( \frac{hh'}{1 + (h')^2} \right) \tilde{p}^{\pm} \right]_{\tilde{y}=1} = 0, \quad (2.7)$$

where the derivative  $\partial_{\tilde{x}}p$  in the original condition is approximated by  $ikp$ . In contrary to Eq. (2.5), the condition (2.7) can be discretized locally.

However, it is a rough approximation for the waveguide geometries we are interested in. Fig. 2.2 shows the comparison between the modulus of  $\partial_{\tilde{x}}p$  and  $ikp$  along the wall ( $\tilde{y} = 1$ ), with  $p$  a reference solution provided by the exact multimodal admittance method that has been extensively studied and developed in past years [15,40,41,74,75]. The multimodal admittance methods consist in projecting the Helmholtz equation on the local transverse modes of the waveguide and then solving the coupled mode equations governing the evolution of the components on the transverse modes. Fig. 2.2(b) shows that the approximation is not valid over the entire length of the waveguide : the relative error between the two fields is near 10% (see Fig. 2.2(b)). Thus a non-local discretization of the boundary condition (2.5) seems necessary [76]. A combination of an explicit and a implicit discretization of the equation (2.5) allows an accurate description of this condition without affecting the stability of the numerical scheme (Appendix 2.A).



**Fig. 2.2** – Comparison between the gradient of pressure and the  $ikp$  term along the wall ( $\tilde{y} = 1$ ) calculated with the multimodal admittance method for a "one bump" geometry (see Fig. 2.3),  $a = 0.4$   $T = 4$ ,  $k/\pi = 9.5$ .



**Fig. 2.3** – The "one bump" geometry : the bump corresponds to one period of a cosine function.

### 2.2.3 Numerical scheme

As the boundary condition, the square root operator  $\tilde{Q}^{1/2}$  (Eq. 2.4) must be accurately calculated to account for the largest possible variations of the cross-section. To do this, a high

order Padé expansion is used [9] :

$$\tilde{Q}(\tilde{x})^{1/2} = 1 + \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \left( \frac{1}{k^2} \frac{1}{h(\tilde{x})^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right)}{1 + \bar{b}_l^M \left( \frac{1}{k^2} \frac{1}{h(\tilde{x})^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right)}, \quad (2.8)$$

where  $\bar{a}_l^M$  and  $\bar{b}_l^M$  are the complex Padé coefficients. These coefficients, obtained after rotating the Padé approximant in the complex plane [70,95], are used to take into account the effect of the evanescent modes in the waveguide (see Appendix 2.B). For a varying cross-section waveguide, the optimal order of the development is estimated in the following.

Since each term of the evolution equation (2.3) depends on  $x$ , it cannot be integrated as classically done for PEs [9,13,22,96]. Thus, the evolution equation is splitted following a fractional-step method [85]. It results in  $M + 1$  equations to integrate at each step along  $\tilde{x}$ , with  $M$  the order of the Padé expansion. Each equation is discretized in the transverse plane (along  $\tilde{y}$ ) by finite differences, and a Crank-Nicolson scheme is used as marching algorithm.

The numerical scheme can be summarized by the following system :

$$\left[ L + \mathcal{A}_1^M \left( \tilde{x} + \frac{1}{M+1} \Delta \tilde{x} \right) D \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{1}{M+1} \Delta \tilde{x}, \tilde{y} \right) = \left[ L + \mathcal{B}_1^M (\tilde{x}) D \right] \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (2.9)$$

⋮

$$\left[ L + \mathcal{A}_M^M \left( \tilde{x} + \frac{M}{M+1} \Delta \tilde{x} \right) D \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{M}{M+1} \Delta \tilde{x}, \tilde{y} \right) = \left[ L + \mathcal{B}_M^M \left( \tilde{x} + \frac{M-1}{M+1} \Delta \tilde{x} \right) D \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{M-1}{M+1} \Delta \tilde{x}, \tilde{y} \right) \quad (2.10)$$

$$\left[ I - \mathcal{C} \left( \tilde{x} + \Delta \tilde{x} \right) E \right] \tilde{\phi}(\tilde{x} + \Delta \tilde{x}, \tilde{y}) = \left[ I + \mathcal{C} \left( \tilde{x} + \frac{M}{M+1} \Delta \tilde{x} \right) E \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{M}{M+1} \Delta \tilde{x}, \tilde{y} \right). \quad (2.11)$$

where

$$\mathcal{A}_l^M (\tilde{x}) = \left( \bar{b}_l^M - \frac{ik_0 \Delta x}{2} \bar{a}_l^M \right) / \left( k_0^2 h(\tilde{x})^2 \right), \quad (2.12)$$

$$\mathcal{B}_l^M (\tilde{x}) = \left( \bar{b}_l^M + \frac{ik_0 \Delta x}{2} \bar{a}_l^M \right) / \left( k_0^2 h(\tilde{x})^2 \right), \quad (2.13)$$

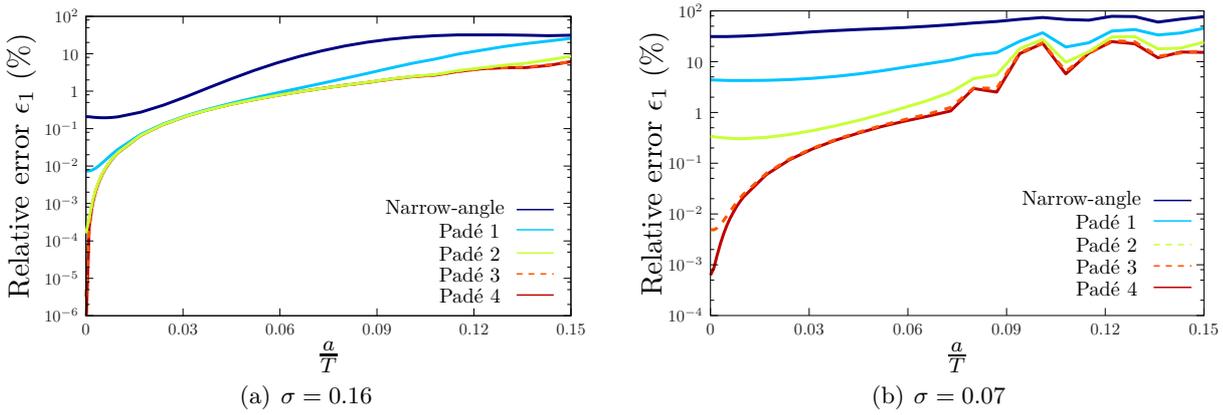
$$\mathcal{C} (\tilde{x}) = \frac{h'(\tilde{x})}{2h(\tilde{x})} \tilde{y} \Delta x. \quad (2.14)$$

The sparse matrices  $L$  and  $D$  correspond to the discretization of the transverse operator  $\partial_{\tilde{y}}^2$  with the finite difference technique as proposed by Greene [44]. Moreover, the sparse matrix  $E$  is the finite difference discretization of the transverse operator  $\partial_{\tilde{y}}$  with  $I$  the identity matrix.

In order to measure quantitatively the error induced by the proposed method, the relative deviation with respect to the reference solution  $p_{\text{ref}}$ . (multimodal admittance method) is calculated and integrated over the computational domain :

$$\epsilon_1 = \frac{\int_0^L \int_0^{h(x)} |p^+ - p_{\text{ref}}|^2 dy dx}{\int_0^L \int_0^{h(x)} |p_{\text{ref}}|^2 dy dx}. \quad (2.15)$$

Fig. 2.4 shows the relative error  $\epsilon_1$  as a function of the ratio  $a/T$ , for different developments of the square root operator  $\tilde{Q}^{1/2}$ , notably the "narrow angle" developments used in earlier works



**Fig. 2.4** – Relative error  $\epsilon_1$  (Eq. 4.20) as function of the ratio  $a/T$  for a "one bump" irregular waveguide (Fig. 2.3), for different developments of  $\tilde{Q}^{1/2}$ .  $k/\pi = 9.5$ . The initial condition is a centered gaussian function at  $\tilde{x} = 0$  of width  $\sigma$ .

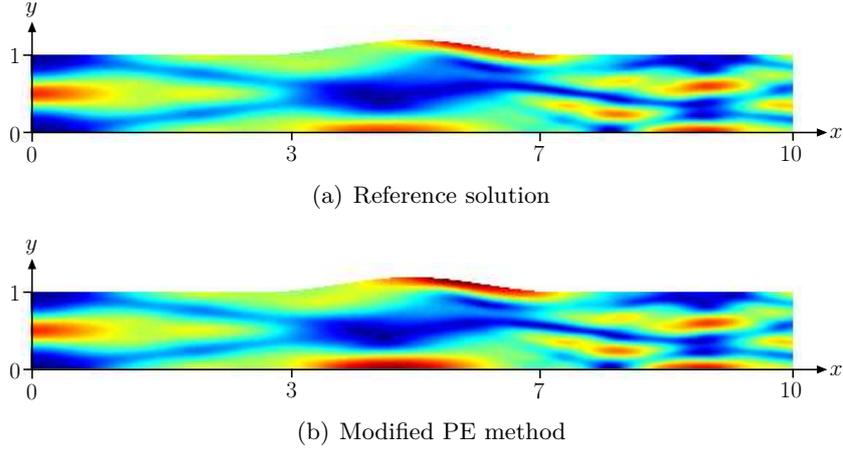
[4, 79], and also for the "wide angle" developments (noted Padé 1) used in preceding work [28]. Computations are performed in a "one bump" waveguide (see Fig. 2.3) with a centered gaussian function, with width  $\sigma$ , used as starter. The curves have an expected behaviour : the relative error increases with increasing irregularity of the wall. For weak values of  $a/T$ , there are large differences between the curves, particularly in the case of a very thin gaussian source ( $\sigma = 0.07$ ). This source generates high-order modes in the waveguide, corresponding to waves traveling with wide angles. These modes are correctly propagated when the square root operator is developed to a sufficiently high order. For large values of  $a/T$ , the difference between the curves is weaker because the main source of errors arises from the one-way approximation which is no longer valid. Fig. 2.4 shows that a high-order development of the square root operator allows a more accurate computation of the pressure field. However, one can notice that the difference between the third and fourth order developments is small. In the following, we use a third order development except when specified.

### 2.3 Validation of the modified parabolic equation

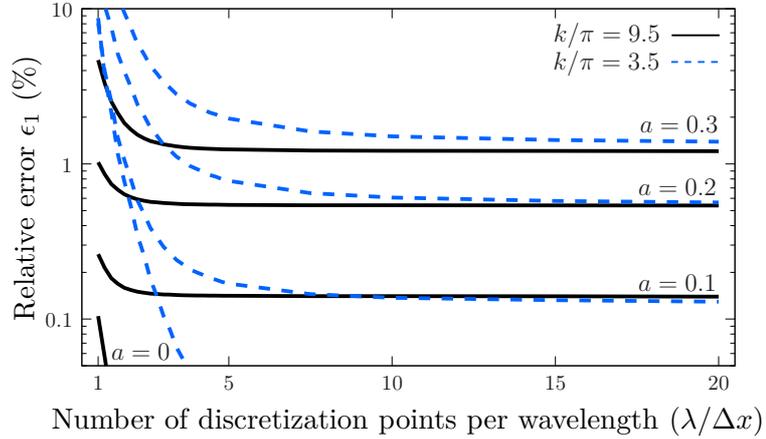
In this article, the reference solution comes from the multimodal admittance method [15, 40, 41, 74, 75]. This method provides a complete solution of the Helmholtz equation including backward waves. For the validation of the modified parabolic equation we use a third order Padé development. For the rest of the article, the incident field is a centered Gaussian ( $y_s = 0.5$ ; the position of the Gaussian has no significant effect on the qualitative results presented in the following). The width of the Gaussian is denoted  $\sigma$  and has two values ( $\sigma = 0.16$  or  $\sigma = 0.07$ ) depending on the studied case.

An example of computation with the above detailed method is given in Fig. 2.5, and compared with the reference solution (the dimensions of the waveguide are  $a = 0.4$ ,  $T = 4$ , with a unitary width in the straight regions). In this figure, the width of the Gaussian function is  $\sigma = 0.16$ . The patterns displayed on the plotted fields, upstream and downstream from the bump, shows the effect of mode coupling of the cross-sectional change : higher-order modes are generated, and propagates downstream. The resulting complex pattern of the transmitted field is accurately calculated using the modified PE, with a relative deviation  $\epsilon_1 = 2\%$  from the reference solution.

Fig. 2.6 shows the convergence, as measured by the relative error  $\epsilon_1$  as a function of the number of discretization points per wavelength. Several values of the bump height  $a$  and of the



**Fig. 2.5** – Wavefield (modulus) in a "one bump" waveguide with  $T = 4$  and  $a = 0.4$ . The frequency is such that the dimensionless wave number  $k/\pi = 9.5$ .

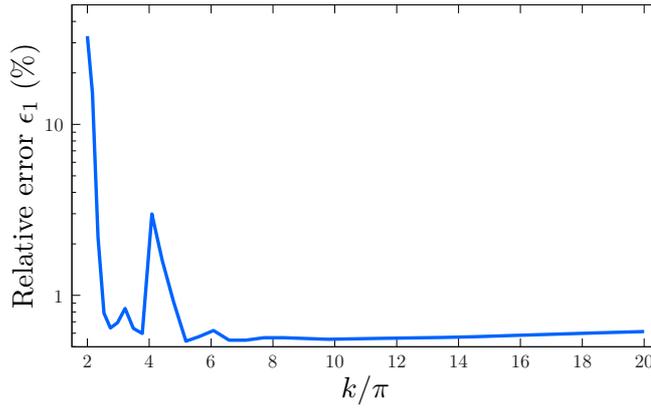


**Fig. 2.6** – Convergence of the modified PE method in a "one bump" waveguide (Fig. 2.3) with  $T = 4$  and  $\sigma = 0.16$ . The relative error  $\epsilon_1$  is defined by Eq. (4.20).

wavenumber  $k$  are considered. The convergence is relatively fast for around 10 points per wavelength, this corresponds to the usual values of  $\lambda/\Delta x$  for a Crank-Nicolson scheme. In this case, the approximate solution is obtained with a good accuracy. One can specify that the transverse discretization is set at 10 points per wavelength for the rest of the article, this corresponds to the usual convergence for finite difference methods. The error obtained for  $a = 0$  - the waveguide is then uniform and Eq. (2.1) is an exact factorization of the Helmholtz equation - gives the error due to the paraxial approximation with the third-order Padé expansion : this error is very small (below 0.1%).

On Fig. 2.7, the relative error is plotted as a function of the dimensionless wavenumber. Except for rough discretizations (Fig. 2.6) or at low wavenumber (Fig. 2.7), the relative error  $\epsilon_1$  remains small when varying the wavenumber. The peaks at low integer values of  $k/\pi$  in the variations of  $\epsilon_1$  are due to singularities of the reference solution at modes cutoff frequencies.

To better understand the evolution of the error inside the waveguide, a new error estimator



**Fig. 2.7** – Relative error  $\epsilon_1$  (Eq. 4.20) as a function of the dimensionless wavenumber for a "one bump" irregular waveguide (Fig. 2.3), with  $a = 0.2$ ,  $T = 4$  and  $\sigma = 0.16$ .  $\lambda/\Delta x = 10$  and  $\lambda/\Delta y = 10$ .

is defined :

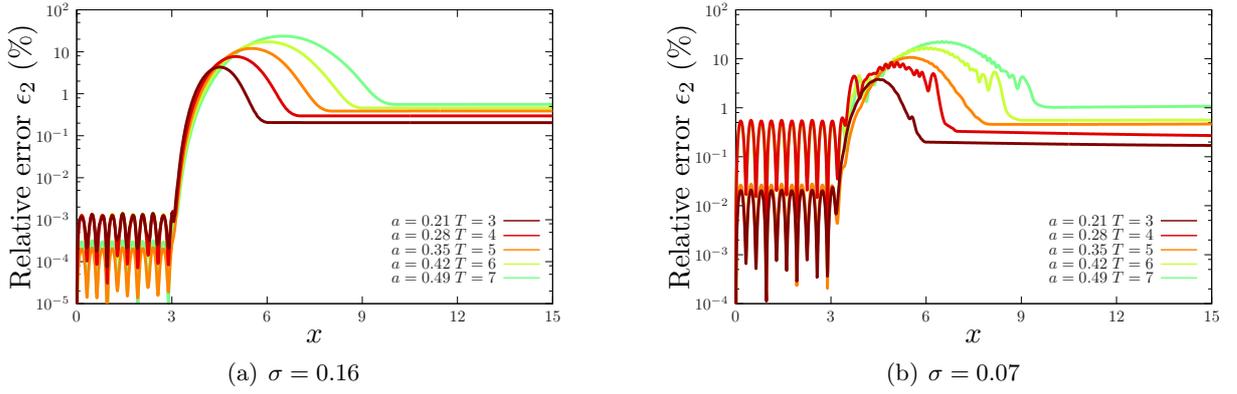
$$\epsilon_2(x) = \frac{\int_0^{h(x)} |p^+ - p_{\text{ref.}}|^2 dy}{\int_0^{h(x)} |p_{\text{ref.}}|^2 dy}. \quad (2.16)$$

It exhibits how the relative deviation between the solution of the modified PE (2.3) and the exact solution varies along the waveguide. For example, in the case shown in Fig. 2.5, the error on the pressure field transmitted at the output of the waveguide is  $\epsilon_2(L) = 1\%$ . Fig. 2.8 shows the variations of  $\epsilon_2$  for various sizes of the bump, corresponding to the ratio  $a/T = 0.07$ . The small oscillating error  $\epsilon_2$  upstream from the defect (the cosine shaped bump) gives a measurement of the backward wave generated by the defect, which is neglected in the one-way assumption. Then the error rapidly increases at the input of the varying cross-section segment, and decreases with decreasing width. Finally, the estimator  $\epsilon_2$  is almost constant downstream from the defect since no backward wave is generated in this region. The error obviously increases with the size of the bump. Moreover, comparing Fig. 2.8.a and Fig. 2.8.b, one could notice that the initial condition influences the estimator  $\epsilon_2$  upstream from the defect. A Gaussian initial condition with  $\sigma = 0.07$  generates high order modes which are more reflected by the defect. However the error  $\epsilon_2$  at the end of the waveguide is only slightly larger than for a gaussian with  $\sigma = 0.16$  : the error  $\epsilon_2(L)$  is between 0.1 and 1%.

## 2.4 Range of validity

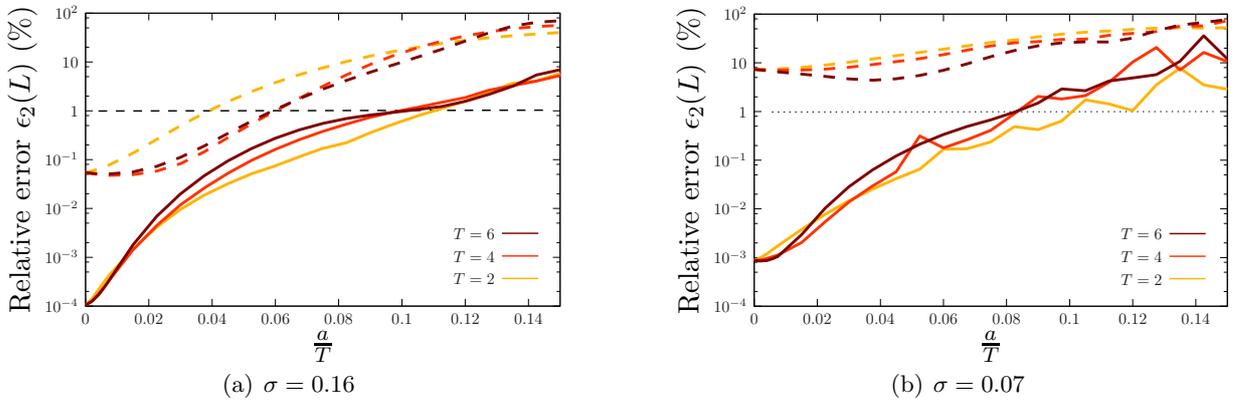
The above discussed results have shown that the modified PE method is able to accurately calculate the transmitted field. It also appears from these results that the maximum slope  $a/T$  might be a relevant parameter to estimate the limit of the range of validity of the method.

Fig. 2.9 shows the relative error  $\epsilon_2(L)$  at the output of the "one bump" waveguide, as a function of the maximum slope  $a/T$ , for three different values of the bump length  $T$  and for two different initial conditions. Solid lines are calculated with a third order Padé expansion, while dashed lines are calculated with first order Padé expansion. All curves have the same expected behaviour : the error increases with increasing slope. Consider the maximum value  $\epsilon(L) = 1\%$  as



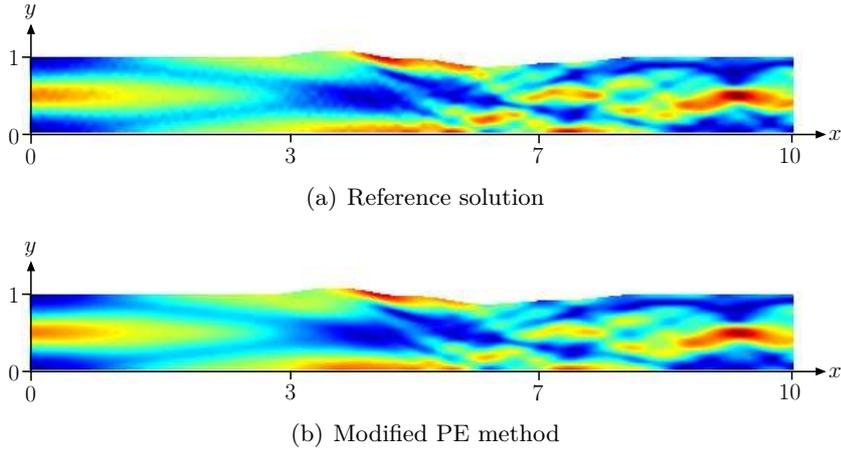
**Fig. 2.8** – Evolution of the relative error  $\epsilon_2(x)$  (Eq. 2.16) along the "one bump" waveguide (Fig. 2.3). The waveguide is uniform from  $x = 0$  to  $x = 3$  in all cases; the length of the uniform segment downstream depends on the value of  $T$ , in all the cases maximum slope is  $a/T = 0.07$ .  $k/\pi = 9.5$ .

a limit of validity of the method. With an open Gaussian starter (Fig. 2.9.a), it corresponds to a maximum slope  $a/T = 0.1$ . With the more closed Gaussian starter (Fig. 2.9.b), the maximum slope lies between 0.8 and 1. Furthermore, Fig. 2.9 shows how important is the development of the square root operator. With a first order Padé expansion, the maximum slope falls to a value between 0.04 and 0.06 for an open Gaussian starter. Unlike results of Fig. 2.4.a where the error is integrated over the whole waveguide, we see that a higher order Padé expansion greatly improves the accuracy on the transmitted field even with an open Gaussian starter.



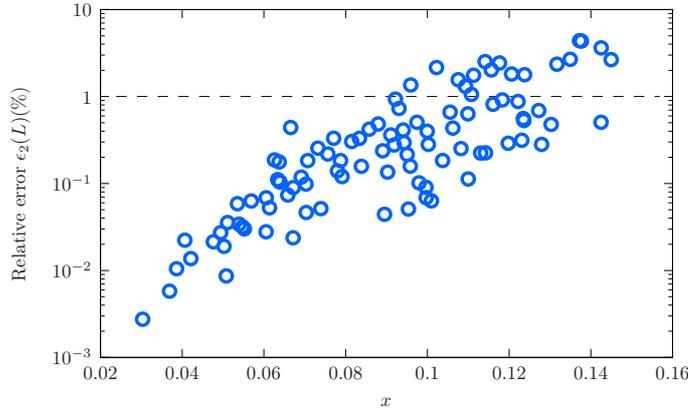
**Fig. 2.9** – Relative error  $\epsilon_2(L)$  (Eq. 2.16) at the output of the "one bump" waveguide (Fig. 2.3), as a function of the ratio  $a/T$  for two initial conditions.  $k/\pi = 9.5$ . (—) : Padé 3; (- - -) : Padé 1.

Consider now a waveguide, the cross-section of which varies arbitrarily. The waveguide is composed of a straight segment ( $0 < x < 3$ ), followed by an irregular region ( $3 < x < 8$ ) and its ends with a semi-infinite straight waveguide ( $x > 8$ ). The geometry of the irregular portion is randomly generated using polynomial functions, the maximum slope being fixed to  $a/T = 0.1$ . An example of computation in such a waveguide is given in Fig. 2.10. The width of the Gaussian starter is  $\sigma = 0.16$ . As for the "one bump" waveguide (Fig. 2.5), the PE method gives very good results. In this example, the global relative error  $\epsilon_1$  equals 0.6%, the output error  $\epsilon_2(L)$  equals 0.5%.



**Fig. 2.10** – Wavefield (modulus) in a waveguide with arbitrary geometry.  $k/\pi = 9.5$  and  $\sigma = 0.16$ .

For a most general conclusion, the error at the output of 100 different waveguides with randomly generated geometries is calculated. Results are summarized in Fig. 2.11 where  $\epsilon_2(L)$  is represented for each waveguide according to the maximum slope  $a/T$ . As for the case of the "one bump" geometry (see Fig. 2.9(a)),  $a/T = 0.1$  appears as a value below which one can expect the one-way method to accurately estimate the transmitted field.



**Fig. 2.11** – Relative error  $\epsilon_2(L)$  (Eq. 2.16) at the output for 100 waveguides with length  $L = 10$  and a randomly generated geometry (using polynomial functions), as function of the "maximum slope"  $a/T$ , with  $a$  the difference between the maximum and the minimum values of  $h(x)$  along the axis, and  $T$  the mean distance between two maxima of  $h$ .  $k/\pi = 9.5$  and  $\sigma = 0.16$ .

## 2.5 Conclusion

A modified parabolic equation has been proposed to model the one-way wave propagation in a varying cross-section waveguide with rigid boundaries. Providing that the boundary condition at the non flat wall is properly implemented and by use of a high order complex Padé expansion, the proposed equation can be integrated with usual numerical schemes and leads to accurate results in a large variety of problems. An estimation of the maximum value of the derivative of the cross-section width provide a simple and relevant criterion for the validity of the method. In order to clearly point out the influence of the cross-sectional change and the way to account for

---

it in the numerical solution, the medium filling the waveguide was assumed to be homogeneous and inviscid, but the modified PE can be straightforwardly adapted to take into account an heterogeneous or lossy medium.

Moreover, this method have been formulated in the case of a waveguide with Neumann boundary at the walls, the cases of Dirichlet or impedance conditions at the walls can be written in the same way.

Considering that the section change comes from bottom wall and placing absorbing layers on the upper wall, the method presented in this paper can be directly used for the modeling of sound propagation in outdoor environments over a non-plane ground. At last, extending the formulation to a 3D geometry, this method may be useful to study the sound propagation in a street seen as an open irregular waveguide.

## Appendix 2.A Finite Difference implementation of the boundary condition at $\tilde{y} = 1$

Because of the variations of the cross-section width along the waveguide, the boundary condition (2.5) is a non local condition, involving the axial derivative  $h' = \partial_{\tilde{x}}h$ . The corresponding boundary condition for the envelope  $\tilde{\phi}^+(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{p}^+(\tilde{x}, \tilde{y}) \exp(-ik\tilde{x})$  is

$$\left[ \partial_{\tilde{y}} \tilde{\phi}^+ - \frac{hh'}{1 + (h')^2} (\partial_{\tilde{x}} + ik) \tilde{\phi}^+ \right]_{\tilde{y}=1} = 0. \quad (2.17)$$

The finite difference implementation of Eq. (2.17) is made as follows.

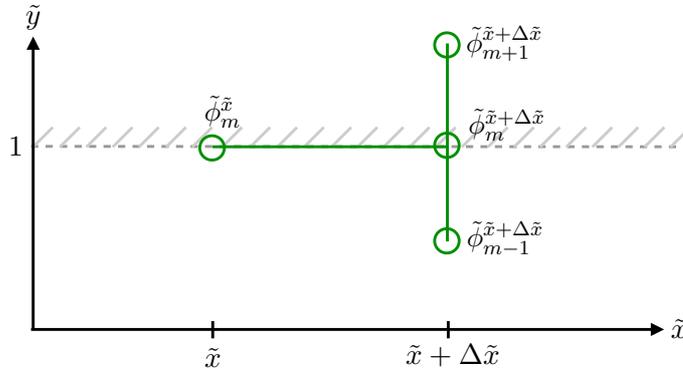
First, one derives from Eq. (2.17) both an implicit scheme :

$$\tilde{\phi}_{m+1}^{\tilde{x}+\Delta\tilde{x}} = \tilde{\phi}_{m-1}^{\tilde{x}+\Delta\tilde{x}} + \frac{2\Delta\tilde{y}}{\Delta\tilde{x}} \alpha(\tilde{x} + \Delta\tilde{x}) \left( (1 + ik\Delta\tilde{x}) \tilde{\phi}_m^{\tilde{x}+\Delta\tilde{x}} - \tilde{\phi}_m^{\tilde{x}} \right), \quad (2.18)$$

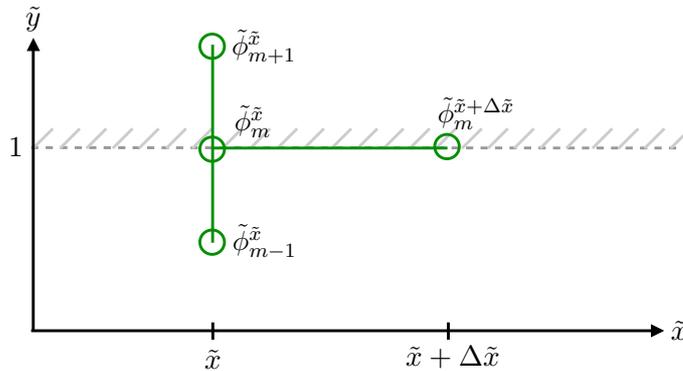
and an explicit scheme :

$$\tilde{\phi}_{m+1}^{\tilde{x}} = \tilde{\phi}_{m-1}^{\tilde{x}} + \frac{2\Delta\tilde{y}}{\Delta\tilde{x}} \alpha(\tilde{x}) \left( \tilde{\phi}_m^{\tilde{x}+\Delta\tilde{x}} - (1 - ik\Delta\tilde{x}) \tilde{\phi}_m^{\tilde{x}} \right), \quad (2.19)$$

with  $\alpha(\tilde{x}) = hh'/(1 + (h')^2)$  and  $\tilde{\phi}_{m+1}^{\tilde{x}}$  and  $\tilde{\phi}_{m+1}^{\tilde{x}+\Delta\tilde{x}}$  the values of  $\tilde{\phi}^+$  at fictive points above the boundary  $\tilde{y} = 1$  (Figs. 2.12 and 2.13. For the sake of clarity, superscripts  $\tilde{\cdot}$  and  $^+$  are not written in the discrete equations).



**Fig. 2.12** – Implicit scheme for the implementation of the boundary condition (2.17).



**Fig. 2.13** – Explicit scheme for the implementation of the boundary condition (2.17).

When using the Crank-Nicolson marching scheme, one deals with evolution equations of the form

$$A(\tilde{x} + \Delta\tilde{x})\tilde{\phi}^+(\tilde{x} + \Delta\tilde{x}) = B(\tilde{x})\tilde{\phi}^+(\tilde{x}), \quad (2.20)$$

with  $A$  and  $B$  two operators. Therefore, the second step of the implementation of the boundary condition simply consists in term substitutions in the last line of matrix  $A$  (resp.  $B$ ) according to Eq. (2.18) (resp. 2.19).

## Appendix 2.B Rotation angles in the complex plane for complex Padé coefficients

The dispersion relation of the Helmholtz equation is developed with a Padé expansion :

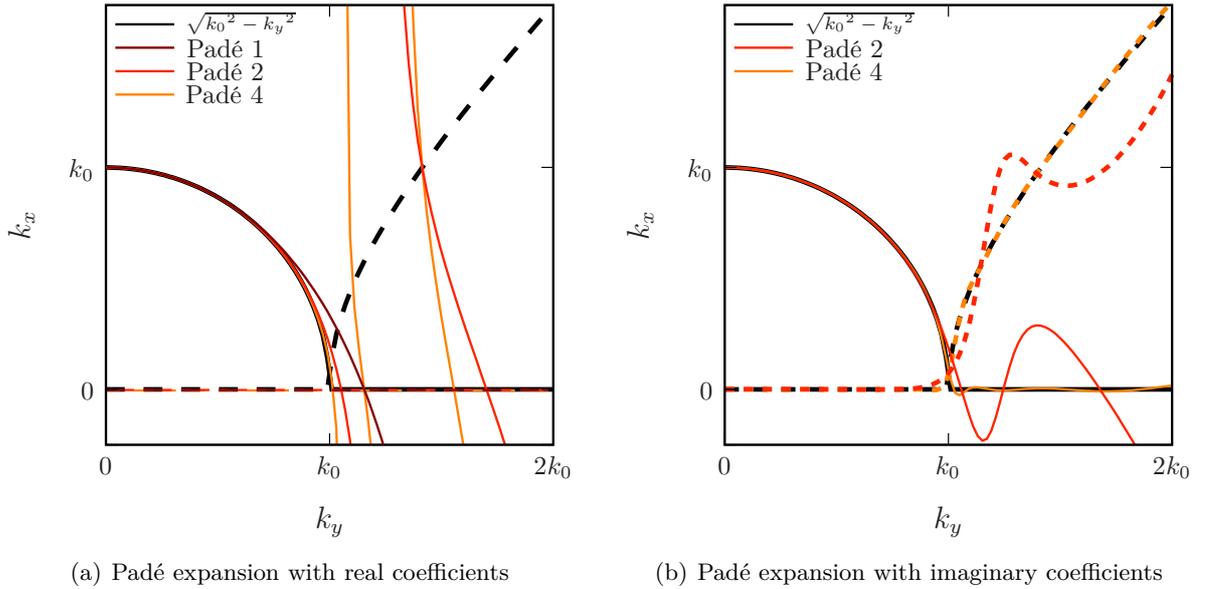
$$k_x = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} \simeq k_0 \left( 1 - \sum_{l=1}^M \frac{a_l^M k_y^2}{1 - b_l^M \frac{k_y^2}{k_0^2}} \right), \quad (2.21)$$

where the real Padé coefficients [9] are given by

$$a_l^M = \frac{2}{2M+1} \sin^2 \left( \frac{l\pi}{2M+1} \right), \quad (2.22)$$

$$b_l^M = \cos^2 \left( \frac{l\pi}{2M+1} \right). \quad (2.23)$$

Fig. 2.14(a) shows that increasing the order of development allows a better estimation of propagating modes ( $k_z < k_0$ ). However, for evanescent modes ( $k_z > k_0$ ), the Padé development gives aberrant values : Padé coefficients being real, the expansion remains real while the square root becomes imaginary.



**Fig. 2.14** – Comparison between the dispersion relation and its approximation by Padé expansion; (—) : real part of  $k_x$ , (- - -) : imaginary part of  $k_x$ ;  $\alpha$  values used for this graph are presented in Table 2.1.

That is the reason why complex coefficients are required. They are obtained by rotating in the complex plane of real Padé coefficients [95]. Equation (2.21) remains unchanged except that Padé coefficients [70] are complex and are written as :

$$\bar{a}_l^M = \frac{a_l^M e^{-j\alpha/2}}{(1 + b_l^M (e^{-j\alpha} - 1))^2}, \quad (2.24)$$

and

$$\bar{b}_l^M = \frac{b_l^M e^{-j\alpha}}{1 + b_l^M (e^{-j\alpha} - 1)}, \quad (2.25)$$

with  $\alpha$  the angle of rotation in the complex plane.

Fig. 2.14(b) shows the importance of complex coefficients for correctly approaching the evanescent part of the dispersion relation. Also, increasing the order of development provides a better estimate of the dispersion relation, even for  $k_z > k_0$ .

The angle of rotation in the complex plane has an arbitrary value. We noted that the optimum angle depends on the order of development  $M$ . Table 2.1 shows the  $\alpha$  values used in this article. These values are obtained by fit with respect to the dispersion relation.

Order of Padé expansion ( $M$ )	Angle of rotation ( $\alpha$ )
1	0.13
2	0.55
3	0.8
4	1

**Table 2.1** – *Optimum values for the angles of rotation in the complex plane.*

## Chapitre 3

# Résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle dans des guides d'ondes ouverts

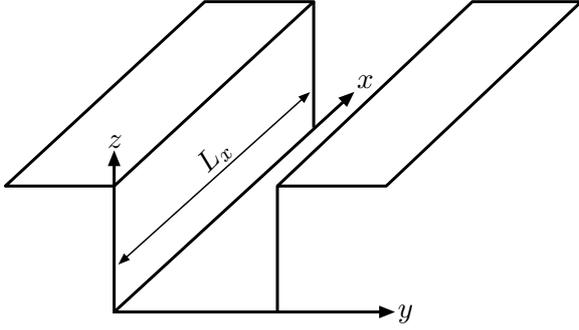
Ce chapitre porte sur la résolution de l'équation parabolique grand angle, sous sa forme tridimensionnelle, dans le but de modéliser la propagation acoustique dans des guides d'ondes ouverts. Ces guides d'ondes ont la particularité d'avoir une forme en canyon, afin de représenter la géométrie d'une rue bordée par deux immeubles aux toits plats se faisant face (voir Fig. 3.1).

L'espacement entre ces deux bâtiments n'étant pas toujours constant le long des rues, une des particularités de ce travail réside dans la prise en compte de l'effet de la variation de la largeur des rues sur la propagation acoustique. Pour des guides d'ondes bidimensionnels, le chapitre 2 a montré qu'à cet effet, il était possible de procéder à une approximation unidirectionnelle, à condition que la vitesse de variation de la largeur du guide soit inférieure à une pente maximum. Cette méthode, basée sur une transformation de coordonnées, est reprise puis adaptée à un procédé de résolution d'équations paraboliques tridimensionnelles, afin de modéliser des variations continues de la largeur des rues. Par ailleurs, la modélisation des variations brusques de la largeur des rues est rendue possible par l'utilisation de l'approximation de Kirchhoff, permettant de raccorder des guides d'ondes droits de largeurs différentes.

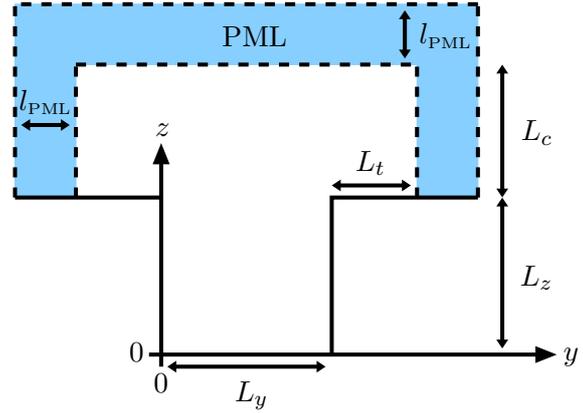
Dans un premier temps, l'approximation unidirectionnelle de l'équation de Helmholtz tridimensionnelle est formulée sous forme d'une équation parabolique grand angle. La méthode de résolution de cette équation parabolique tridimensionnelle est présentée pour le cas d'une rue droite. La validité de cette méthode de résolution est évaluée par comparaison avec des mesures réalisées sur une maquette de rues à échelle réduite. Afin de traiter des variations brusques de la largeur des rues, la méthode de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle est adaptée dans le but de pouvoir raccorder des guides d'ondes ouverts de différentes largeurs. Une comparaison avec des données expérimentales est également proposée. Dans une troisième partie, une transformation de coordonnées, permettant de prendre en compte des variations continues de la largeur du guide d'ondes, est intégrée à la méthode de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle. Les modifications à apporter à cette méthode, liées au changement de coordonnées, sont présentées, tout comme quelques exemples de résultats numériques.

### 3.1 Propagation unidirectionnelle dans une rue droite

Le fait de réaliser une approximation unidirectionnelle de la propagation acoustique en milieu urbain est motivé par la limitation du coût numérique de la résolution de l'équation de Helmholtz



**Fig. 3.1** – Guide d'ondes ouvert représentant une rue en canyon.



**Fig. 3.2** – Géométrie transverse du guide d'ondes ouvert.

à basses fréquences (pour des longueurs d'ondes de même ordre de grandeur que les dimensions de la rue). C'est pourquoi la méthode de résolution de l'équation parabolique doit être construite de manière à être la moins coûteuse possible en terme de temps de calcul. Cette première partie présente, pour le cas particulier des rues droites, la méthode de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle en guide d'ondes ouvert.

### 3.1.1 Formulation d'une équation parabolique 3D en guide d'ondes ouvert

#### Approximation unidirectionnelle de l'équation d'onde

La géométrie transverse du guide d'ondes ouvert est présentée à la figure 3.2. Le domaine transverse est alors composé de deux sous domaines : l'intérieur de la rue, correspondant à l'espace entre deux bâtiments, et le dessus de la rue, représentant un espace semi-infini. Des couches absorbantes sont placées aux bordures de ce domaine afin de tronquer le domaine numérique. Cette géométrie est retenue afin de ne pas faire d'hypothèses sur le comportement des ondes à l'interface entre les deux sous domaines (réflexion ou absorption). En effet, pour ce type d'interface, des phénomènes de réflexion des ondes à basses fréquences ont été mis en évidence [83].

Le milieu de propagation présenté précédemment est homogène, la propagation des ondes y est régie, en régime harmonique et en dehors des sources, par l'équation de Helmholtz suivante :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} + k^2 \right) p(x, y, z) = 0. \quad (3.1)$$

L'exposant \* représente l'utilisation de couches parfaitement adaptées, dites PML [19], qui sont utilisées afin de modéliser l'ouverture du guide d'ondes sous forme de zones d'absorption artificielles. L'intérêt essentiel de ces PML est que les ondes traversent l'interface entre le milieu physique et la PML sans se réfléchir : aucune onde parasite n'est alors générée. A l'intérieur de la PML, les ondes s'y propageant sont amorties artificiellement. Les couches parfaitement adaptées sont couramment utilisées avec les équations paraboliques, notamment dans le cadre de la propagation d'ondes sismiques [20].

L'utilisation de PML correspond à un changement de variable complexe effectué sur les

variables spatiales  $y$  et  $z$  sous la forme

$$y^* = \int_0^y \tau(y') dy', \quad (3.2)$$

et

$$z^* = \int_0^z \tau(z') dz', \quad (3.3)$$

où la fonction  $\tau$  est définie

$$\begin{cases} \tau(y) = 1 & \forall y \in ]-L_t, L_y + L_t[ \\ \tau(y) = 1 + i\kappa & \forall y \leq -L_t \text{ et } \forall y \geq L_y + L_t \end{cases}, \quad (3.4)$$

et

$$\begin{cases} \tau(z) = 1 & \forall z < (L_z + L_c) \\ \tau(z) = 1 + i\kappa & \forall z \geq (L_z + L_c) \end{cases}. \quad (3.5)$$

Dans les équations (3.4) et (3.5), le paramètre  $\kappa$  représente le coefficient d'amortissement de la PML. Le paramètre  $l_{\text{PML}}$  correspond quant à lui à l'épaisseur de la couche absorbante. L'ajustement de ces deux paramètres est très important afin que les ondes soient suffisamment atténuées lors de leur passage à travers la PML. En effet, leurs amplitudes doivent être nulles une fois l'épaisseur de la couche absorbante parcourue. Les changements de coordonnées (3.2) et (3.3) peuvent être interprétés également comme une substitution des opérateurs différentiels  $\partial_{yy}^2$  et  $\partial_{zz}^2$  sous la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} = \frac{1}{\tau(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\tau(y)} \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (3.6)$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} = \frac{1}{\tau(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\tau(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (3.7)$$

Au chapitre 1, l'équation parabolique bidimensionnelle grand angle est obtenue grâce à une décomposition de l'équation d'onde en fonction du sens de propagation dans la direction privilégiée  $x$ . Une démarche similaire conduit à une équation parabolique tridimensionnelle, correspondant à l'approximation unidirectionnelle de l'équation de Helmholtz (3.1), qui s'écrit

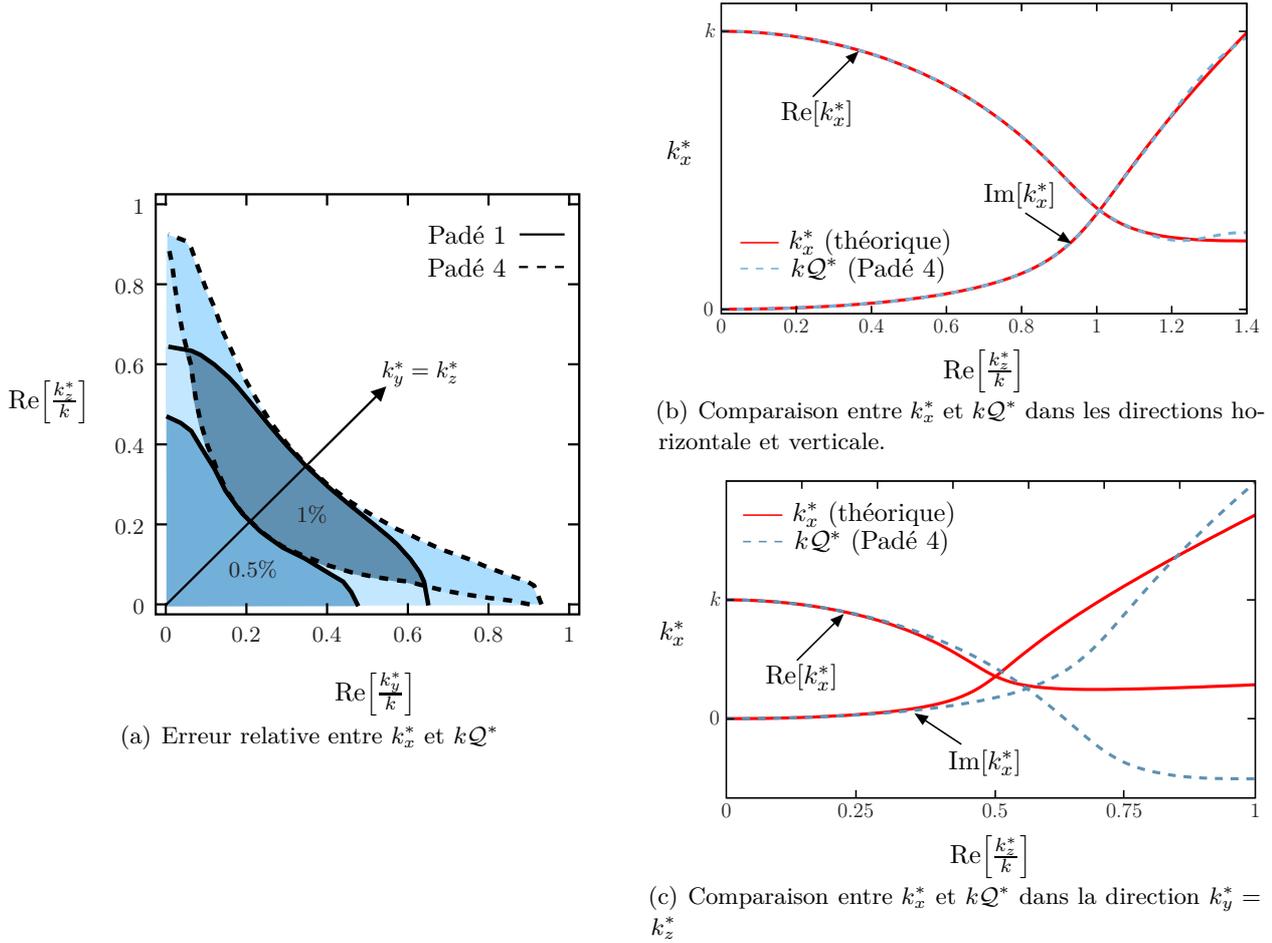
$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - ik\mathcal{Q}^* \right) p(x, y, z) = 0, \quad (3.8)$$

où

$$\mathcal{Q}^* = \sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}}}_{\mathcal{L}_y^*} + \underbrace{\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}}_{\mathcal{L}_z^*}}. \quad (3.9)$$

### Développement de l'opérateur transverse et limitation angulaire

La résolution de l'équation parabolique (3.8) nécessite de développer la racine carrée de l'opérateur transverse  $\mathcal{Q}^*$ . Un développement de Padé avec des coefficients complexes est utilisé à cet effet. Ce type de coefficients est nécessaire pour décrire correctement la partie imaginaire de l'opérateur  $\mathcal{Q}^*$  dans le domaine PML. Afin de pouvoir résoudre avec les méthodes usuelles l'équation parabolique (3.8), les termes dépendant des opérateurs  $\mathcal{L}_y^*$  et  $\mathcal{L}_z^*$  sont dissociés par le biais d'une méthode de séparation d'opérateurs [21]. Cette séparation est réalisée conjointement



**Fig. 3.3** – Impact du développement de la racine carrée et de la séparation des opérateurs ( $\kappa = 0.5$ ).

avec un développement de Padé. On obtient alors une approximation de l'opérateur transverse sous la forme :

$$\mathcal{Q}^* \simeq 1 + \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_y^*}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_y^*} + \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_z^*}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_z^*} + \mathcal{O}(\mathcal{L}_y^* \mathcal{L}_z^*), \quad (3.10)$$

où  $\bar{a}_l^m$  et  $\bar{b}_l^m$  correspondent aux coefficients complexes de Padé (voir [Appendix 2.B](#)). Contrairement au cas bidimensionnel présenté au chapitre 2, quelque soit l'ordre du développement  $M$ , la séparation des opérateurs induit forcément une limitation angulaire, représentée par le terme  $\mathcal{O}(\mathcal{L}_y^* \mathcal{L}_z^*)$ .

Pour évaluer l'impact des approximations qui viennent d'être réalisées sur l'équation parabolique (3.8), la figure 3.3 présente, dans le domaine des nombres d'ondes transverses, une comparaison entre un nombre d'onde théorique  $k_x^* = \sqrt{k^2 - k_y^{*2} - k_z^{*2}}$  et son développement sous la forme  $k_Q^*$ . Comme le montre la figure 3.3(a), l'erreur commise par le développement de la racine carrée et par la séparation des opérateurs n'est pas la même quelque soit la direction de propagation des ondes acoustiques. L'augmentation de l'ordre de Padé permet une meilleure estimation de  $k_x^*$  dans les directions horizontale  $k_y^* = 0$  et verticale  $k_z^* = 0$ . Dans ces directions, la figure 3.3(b) présente un très bon accord entre la valeur théorique  $k_x^*$  et son développement  $k_Q^*$ . Un développement à l'ordre 4, réalisé avec des coefficients complexes, permet une bonne évaluation autant pour la partie réelle que pour la partie imaginaire de  $k_x^*$ . Dans les autres

directions, l'augmentation de l'ordre de Padé limite très peu l'erreur du développement. C'est dans la direction  $k_y^* = k_z^*$  que la limitation angulaire est maximale, l'augmentation de l'ordre du développement ne permet alors pas de limiter cette erreur. Cependant, lorsque  $\text{Re}[k_x^*] > \text{Im}[k_x^*]$ , la figure 3.3(c) montre que l'écart entre  $k_x^*$  et son développement  $kQ^*$  est relativement faible. En revanche, dans le cas où  $\text{Re}[k_x^*] < \text{Im}[k_x^*]$ , l'erreur est assez importante. Cela signifie que l'opérateur  $Q^*$  est relativement bien approché lorsque les ondes sont majoritairement guidées, tandis que ce n'est plus le cas lorsque les ondes sont majoritairement fuyantes.

Pour un développement de Padé de l'opérateur  $Q^*$  associé à une séparation des opérateurs  $\mathcal{L}_y^*$  et  $\mathcal{L}_z^*$ , l'équation parabolique tridimensionnelle grand angle (3.8) s'écrit en fonction de l'enveloppe de la pression  $\phi(x, y, z) = e^{-ikx}p(x, y, z)$  sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = ik \left( \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_y^*}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_y^*} + \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_z^*}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_z^*} \right) \phi. \quad (3.11)$$

La méthode de résolution de cette équation est présentée dans la partie suivante.

### 3.1.2 Résolution numérique de l'équation parabolique 3D

#### Utilisation de la méthode des directions alternées

La séparation d'opérateurs, réalisée précédemment, permet d'utiliser la méthode des directions alternées [21] pour la résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle. Aussi bien en diffusion thermique [29, 80] qu'en mécanique des fluides [35], cette technique est couramment utilisée pour son faible coût numérique lors de la résolution de systèmes d'équations linéaires à plusieurs dimensions. Aussi appelée dans la littérature ADI (*Alternating-Direction Implicit method*), la méthode des directions alternées consiste à diviser en deux chaque pas d'avancement sur l'axe  $x$  et permet de traiter implicitement, à chaque sous-étape, l'un des deux opérateurs préalablement séparés [92]. L'avantage de cette opération est de transformer une équation aux dérivées partielles à plusieurs dimensions en une composition d'équations différentielles d'ordre 1, pouvant se résoudre comme des problèmes aux valeurs initiales. L'utilisation de cette technique consiste alors à reformuler l'équation parabolique (3.11) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_{\text{int}}}{\partial x} = ik \left( \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_z^*}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_z^*} \right) \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = ik \left( \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_y^*}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_y^*} \right) \phi_{\text{int}}, \end{array} \right. \quad (3.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_{\text{int}}}{\partial x} = ik \left( \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_z^*}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_z^*} \right) \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = ik \left( \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_y^*}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_y^*} \right) \phi_{\text{int}}, \end{array} \right. \quad (3.12b)$$

où  $\phi_{\text{int}}$  est un champ fictif intermédiaire, permettant de décomposer en deux sous-étapes la résolution de l'équation parabolique (3.11). La technique des directions alternées est à nouveau employée afin de décomposer chacune de ces deux équations différentielles en fonction de l'ordre de développement  $M$ . L'équation parabolique (3.11) est alors décomposée en  $2M$  équations différentielles. Chacune de ces équations correspond à une équation parabolique bidimensionnelle représentant l'évolution du champ de pression pour des composantes du champ en  $y$  ou en  $z$ . Ces équations paraboliques élémentaires sont alors résolues chacune comme un problème aux valeurs initiales, à l'aide d'une méthode de Crank-Nicolson [24]. Le schéma numérique suivant présente la méthode de résolution de l'équation parabolique (3.11) sur un pas d'avancement  $\Delta x$



plan  $xy$ . Ces deux étapes sont répétées sur leurs intervalles respectifs pour chaque ordre de développement de Padé. La méthode des directions alternées permet donc de résoudre un problème tridimensionnel en ne propageant que des champs de pression bidimensionnels, ce qui est très avantageux en terme de coût de calcul.

### Discrétisation du domaine transverse

Les opérateurs transverses  $\mathcal{L}_y^*$  et  $\mathcal{L}_z^*$  intègrent la variable  $\tau$  (voir eqs. (3.6) et (3.7)). La discrétisation par différences finies de ces opérateurs prend alors la forme suivante :

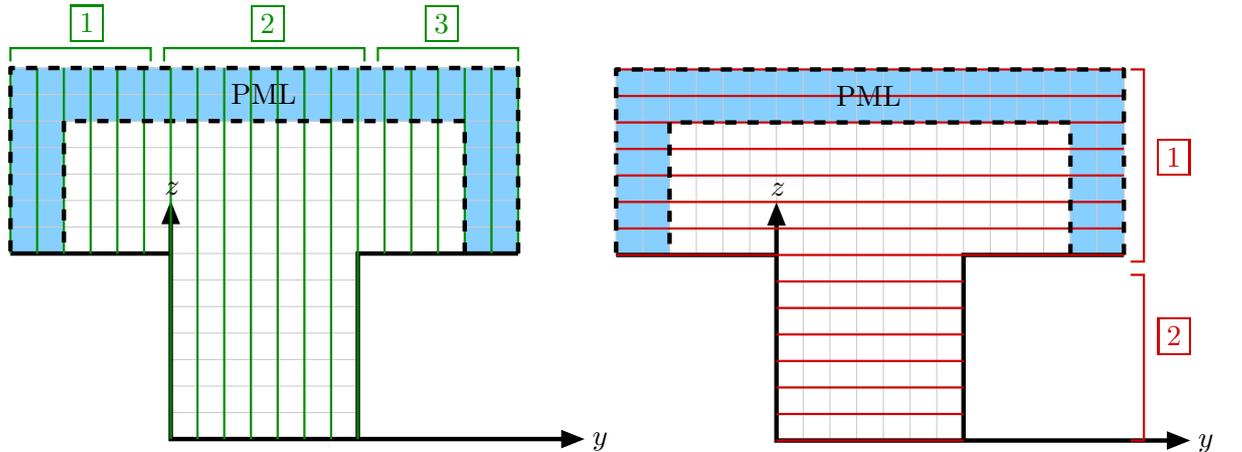
$$\mathcal{L}_y^* = \frac{1}{k^2 \tau(y)} \frac{2}{\Delta y^2} \left( \frac{\phi(y + \Delta y) - \phi(y)}{\tau(y + \Delta y) + \tau(y)} - \frac{\phi(y) - \phi(y - \Delta y)}{\tau(y) + \tau(y - \Delta y)} \right), \quad (3.19)$$

et

$$\mathcal{L}_z^* = \frac{1}{k^2 \tau(z)} \frac{2}{\Delta z^2} \left( \frac{\phi(z + \Delta z) - \phi(z)}{\tau(z + \Delta z) + \tau(z)} - \frac{\phi(z) - \phi(z - \Delta z)}{\tau(z) + \tau(z - \Delta z)} \right). \quad (3.20)$$

L'annexe 3.A présente le détail du calcul permettant d'obtenir cette forme de discrétisation. En remplaçant les opérateurs  $\mathcal{L}_y^*$  et  $\mathcal{L}_z^*$  par leurs discrétisations dans le schéma d'avancement, les termes des équations (3.13) à (3.16) sont représentés par des matrices carrées tridiagonales. Les dimensions de ces matrices sont imposées par le nombre de points discrétisant le domaine numérique transverse. Résoudre une des équations du schéma d'avancement revient alors à inverser une matrice tridiagonale. Sur un pas d'avancement  $\Delta x$ , le nombre de matrices tridiagonales à inverser correspond alors au nombre de lignes et de colonnes décomposant le champ de pression transverse, multiplié par deux fois l'ordre de développement de Padé (voir Fig. (3.4)). De nombreuses méthodes, comme la décomposition de LU ou l'algorithme de Thomas [8], permettent des inversions rapides de ces matrices tridiagonales, même si elles sont constituées d'un grand nombre de points.

Afin de donner une forme de canyon au domaine numérique transverse, les dimensions des matrices tridiagonales sont adaptées dans les directions transverses  $y$  et  $z$  (voir Fig. 3.5). Pour la résolution de l'équation (3.12a), la figure 3.5(a) présente la décomposition du domaine numérique transverse selon l'axe  $z$  en trois zones différentes. Pour la résolution de l'équation (3.12b), la figure 3.5(b) présente la décomposition en deux zones du domaine numérique transverse. Lors de



(a) Décomposition du domaine numérique selon l'axe  $z$  (b) Décomposition du domaine numérique selon l'axe  $y$

**Fig. 3.5** – Représentation de la décomposition du domaine numérique transverse imposée par la méthode des directions alternées.

la décomposition du champ de pression transverse, les pas de discrétisation dans les directions  $y$  et  $z$  doivent être adaptés afin que les lignes et les colonnes correspondent bien aux positions des frontières représentant le sol de la rue, les toits et les façades des bâtiments.

### Conditions aux frontières

En amont de la résolution des différentes équations du schéma numérique (eqs. (3.13) à (3.16)), des conditions aux limites sont imposées dans chaque matrice tridiagonale. Sur les façades comme sur les toits des bâtiments, une condition de paroi rigide est imposée. La condition de Neumann s'écrit au niveau du sol et au niveau des toits des bâtiments :

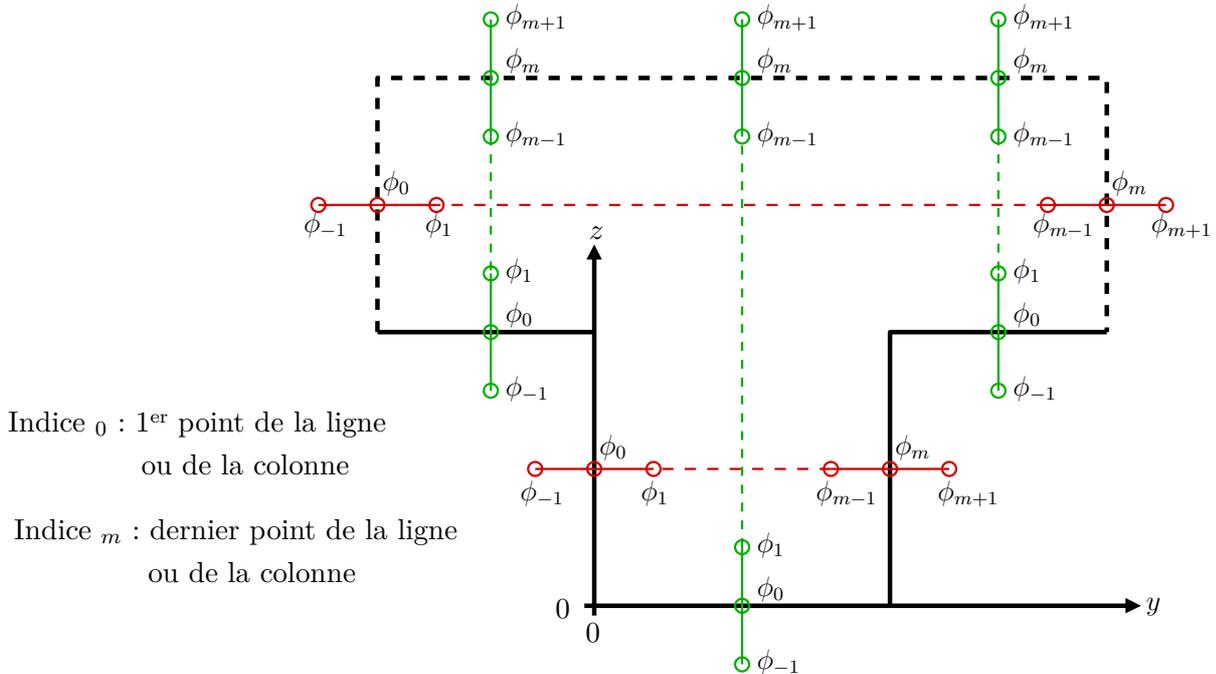
$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \forall y \in [0, L_y], \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=L_z} = 0 \quad \forall y \in [-L_t - l_{\text{PML}}, 0] \cup [L_y + L_t + l_{\text{PML}}]. \quad (3.22)$$

De même, au niveau des façades des bâtiments, cette condition s'écrit

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0, L_y} = 0 \quad \forall z \in [0, L_z]. \quad (3.23)$$

Pour assurer la stabilité du schéma numérique, le même type de conditions aux limites est également imposé sur la frontière extérieure du domaine PML. La discrétisation de ces conditions aux frontières revient à imposer respectivement les conditions  $\phi_1 = \phi_{-1}$  et  $\phi_{m+1} = \phi_{m-1}$  dans la première et dans la dernière ligne de chaque matrice tridiagonale. Les indices 1 et  $m$  correspondent au deuxième et à l'avant-dernier point d'une ligne ou d'une colonne décomposant le champ de pression. De même, les indices  $m-1$  et  $m+1$  représentent des points fictifs servant à la discrétisation



**Fig. 3.6** – Représentation de la discrétisation des conditions aux limites pour les lignes et les colonnes décomposant le domaine numérique transverse, les points sortant du domaine sont des points fictifs servant à la discrétisation des conditions aux limites.

des conditions aux limites. La figure 3.6 illustre cette discrétisation des conditions aux limites pour les différentes zones du domaine numérique. Afin de traduire la propagation des ondes au dessus d'un sol caractérisé par une impédance de surface, d'autres types de conditions aux frontières peuvent être intégrées au schéma numérique avec la même démarche [16].

### 3.1.3 Validation de la méthode par comparaison avec des résultats expérimentaux

#### Présentation du dispositif expérimental

La méthode de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle, précédemment présentée, est validée par comparaison avec des résultats expérimentaux. Ces résultats proviennent de mesures réalisées sur une maquette de rue à l'échelle 1/35ème, placée dans une salle semi-anéchoïque, caractérisée par un sol lisse ainsi que des murs et un plafond traités avec de la mousse de mélamine (efficace jusqu'à 1 kHz à pleine échelle). Cette maquette est composée par deux rangées de cubes en plexiglas afin de reproduire les bâtiments d'une rue. Les deux rangées de cubes mesurent 30 cm de haut et sont espacées de 20 cm, ce qui correspond à pleine échelle à une rue de 10.5 m de hauteur et de 7 m de largeur. Une grande plaque de plexiglas sert de support à cette maquette afin de représenter le sol (voir Fig. 3.7). La matière constituant les éléments de la maquette permet d'approcher des conditions de paroi rigide au sol et sur les façades des bâtiments. Enfin, une terminaison anéchoïque est placée en sortie de la maquette afin d'éviter les réflexions en sortie de la rue.

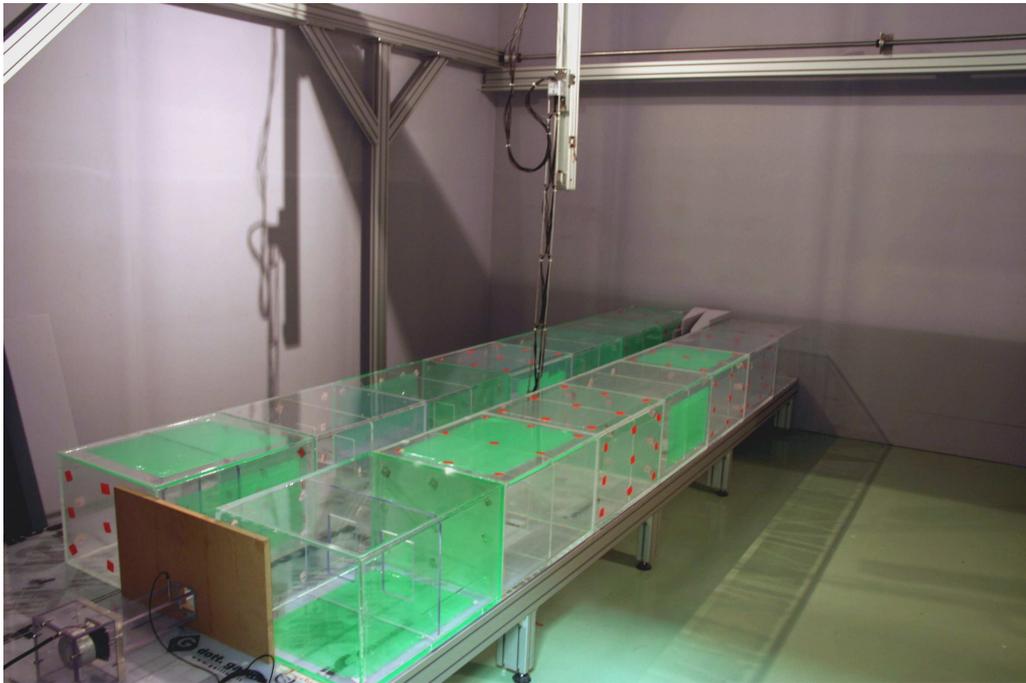
La mesure du champ de pression à l'intérieur de la rue est réalisée par une antenne de huit microphones quart de pouce B&K 4190 (voir Fig. 3.8). Ces huit microphones sont connectés à des pré-amplificateurs (B&K 2669) avant d'être reliés à un amplificateur de conditionnement (B&K Nexus 2693). Cette antenne microphonique est fixée sur le bras d'un robot comportant trois axes de déplacement, ce qui permet de cartographier le champ de pression dans plusieurs plans de la maquette. Le positionnement des cubes est renseigné dans un logiciel pilotant le robot et gérant l'acquisition des données. Les signaux acoustiques captés par les microphones sont transmis à une carte d'acquisition multi-voies.

La source de la maquette est constituée d'un haut-parleur raccordé à l'entrée de la rue par l'intermédiaire d'un tube carré (de 5 cm de côté). Un microphone de référence est placé à l'entrée du tube afin de capter l'amplitude du signal source. Un bafflage est réalisé à l'extrémité du tube par une plaque en bois (voir Fig. 3.9), ce qui permet d'orienter le rayonnement acoustique de la source dans la direction de la rue. Le haut-parleur est relié à un amplificateur de puissance alimenté par un générateur basses fréquences produisant un signal sinusoïdal à une fréquence donnée.

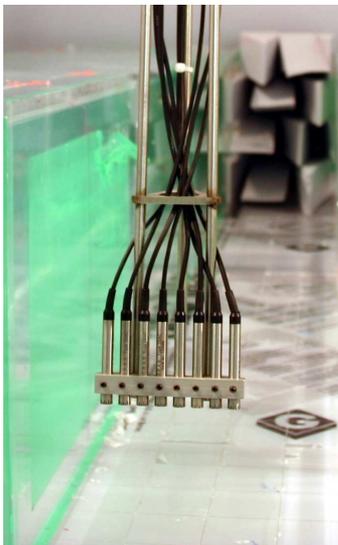
Le signal source étant monochromatique, l'interprétation des signaux mesurés est assurée par une technique de détection synchrone réalisée à partir du microphone de référence. Cette technique permet de détecter avec précision un signal de faible amplitude en milieu bruité. A chaque point de mesure, le champ de pression est alors caractérisé par une amplitude et une phase. Avant chaque cycle de mesure, les huit microphones sont calibrés par rapport au microphone de référence.

#### Mesure du champ initial

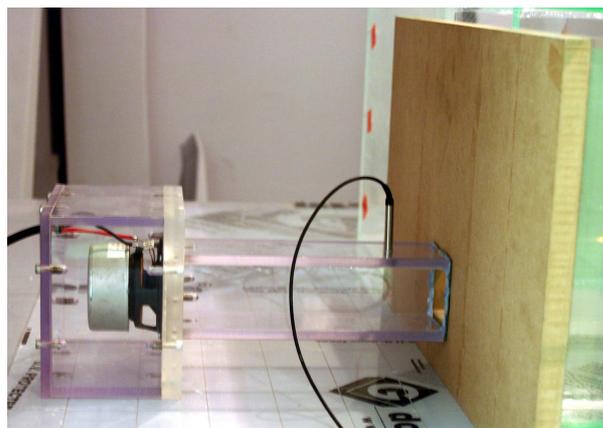
Afin que la comparaison entre la simulation et l'expérience soit rigoureuse, la condition initiale dans la résolution de l'équation parabolique doit correspondre le plus fidèlement possible à la source utilisée lors des mesures. Pour cela, une cartographie du champ de pression transverse



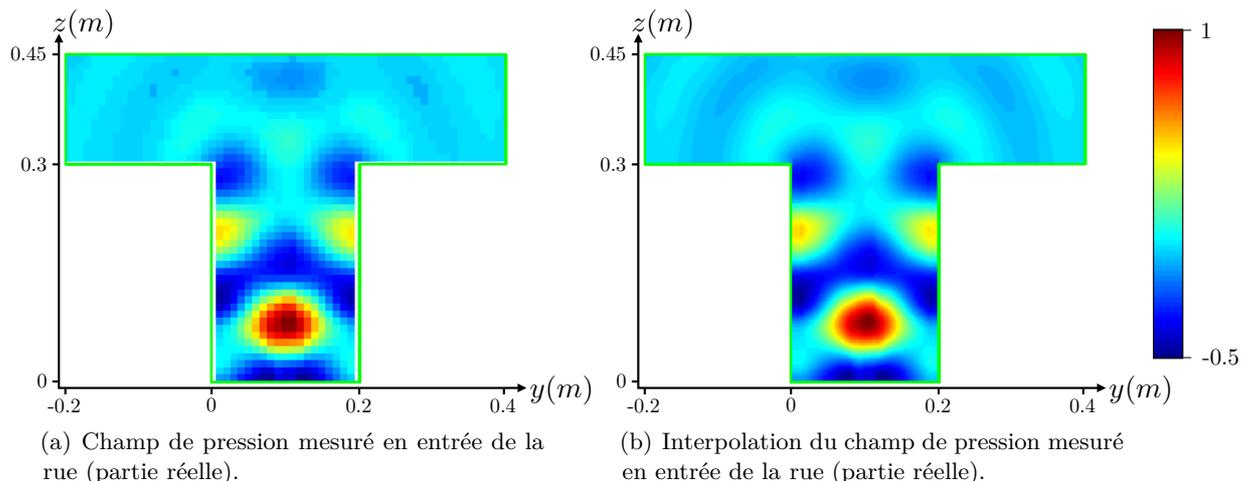
**Fig. 3.7** – Photographie de la maquette de rue à échelle réduite, les bâtiments sont représentés par des cubes de plexiglas, une terminaison anéchoïque est placée en sortie de la rue, le bras du robot tridimensionnel permet de déplacer l'antenne microphonique entre les deux rangées de cubes.



**Fig. 3.8** – Photographie de l'antenne microphonique, on aperçoit en arrière plan la terminaison anéchoïque constituée de mousse de mélamine.



**Fig. 3.9** – Photographie de la source constituée d'un haut-parleur, raccordée à la maquette par un tube carré où est placé le microphone de référence.



**Fig. 3.10** – Cartographie mesurée et interpolée du champ de pression transverse à l’entrée d’une rue de dimension  $L_y = 0.2$  m et  $L_z = 0.3$  m, la source est centrée au milieu de la rue et émet un sinus pur de 2500 Hz.

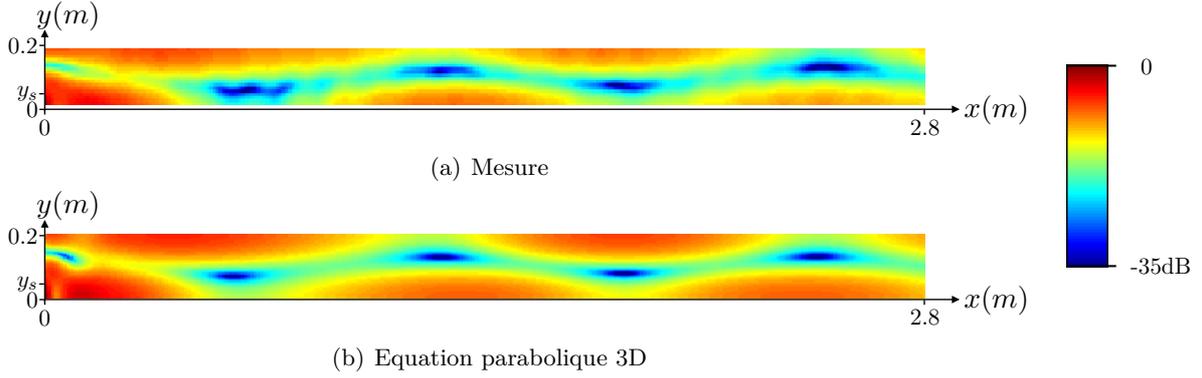
en entrée de la rue est systématiquement mesurée pour chaque configuration de la maquette. Ces données sont ensuite interpolées afin de faire coïncider les positions des points de mesure avec celles du domaine numérique. Pour une rue de dimension  $L_y = 0.2$  m et  $L_z = 0.3$  m, la figure 3.10(a) présente la cartographie du champ de pression transverse mesurée en entrée de la rue. Dans ce cas, la source est centrée au milieu de la rue et délivre un sinus pur de 2500 Hz. L’espacement entre les microphones de l’antenne est d’un centimètre, cela conditionne la résolution spatiale lors des mesures. L’interpolation de cette cartographie sur un maillage plus fin est présentée à la figure 3.10(b). Au vu du dispositif expérimental, il est impossible de mesurer la pression acoustique à une trop grande proximité des parois de la maquette. Cela explique les zones de vide sur la figure 3.10(a) au voisinage des traits verts représentant les faces des cubes. Pour combler ces vides et afin d’assurer pour le champ initial une condition de Neumann aux façades, les dernières valeurs du champ de pression mesurées avant les parois sont dupliquées là où l’antenne microphonique n’a pas accès. Pour l’exemple de la figure 3.10, cette démarche ne semble pas fausser l’interpolation du champ de pression mesuré.

### Paramètres utilisés

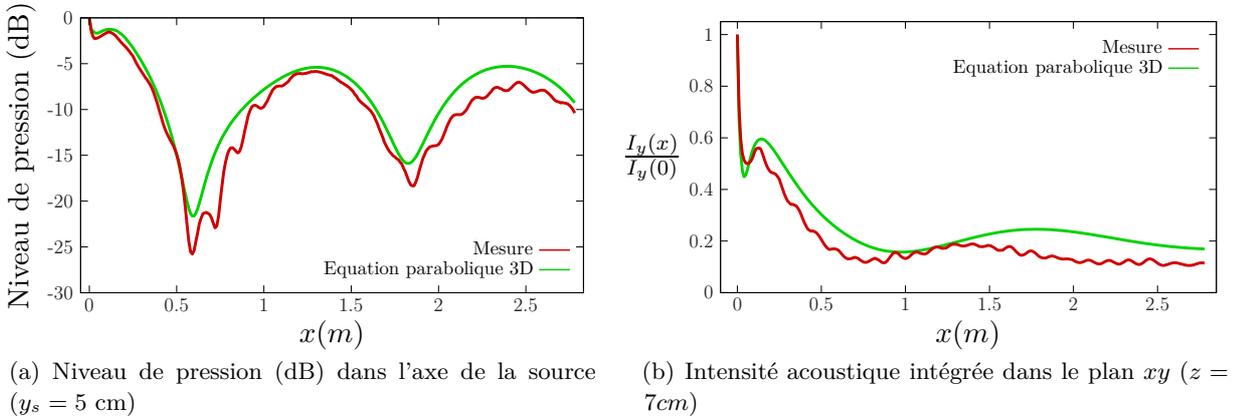
Les résultats qui suivent ont tous été réalisés pour une rue de largeur  $L_y = 0.2$  m et de hauteur  $L_z = 0.3$  m, la longueur de la rue étant  $L_x = 2.8$  m. Les paramètres utilisés lors de la résolution de l’équation parabolique tridimensionnelle sont les suivants : le coefficient d’amortissement de la PML est  $\kappa = 1$ , l’épaisseur de la couche absorbante  $l_{\text{PML}}$  correspond à deux longueurs d’ondes, l’ordre de développement de Padé est fixé à deux, et la discrétisation du domaine numérique est imposée à deux points par centimètre (ce qui correspond à une discrétisation supérieure à 10 points par longueur d’onde dans le domaine 3D pour les fréquences testées par la suite). L’ensemble des résultats numériques, présenté par la suite, a été obtenu pour un temps de calcul inférieur à une minute avec un simple ordinateur de bureau.

### Validation

La figure 3.11 présente les cartographies du niveau de pression mesuré et simulé à l’intérieur de la rue dans un plan  $xy$ . La source est placée à 5 cm du bâtiment de gauche et émet un sinus



**Fig. 3.11** – Niveau de pression mesuré et simulé à l'intérieur de la rue à la hauteur  $z = 7\text{ cm}$  ( $L_y = 0.2\text{ m}$  et  $L_z = 0.3\text{ m}$ ), la source émet un sinus pur à  $1500\text{ Hz}$  ( $y_s = 5\text{ cm}$ ).



**Fig. 3.12** – Comparaison à  $1500\text{ Hz}$  pour le niveau de pression et l'intensité acoustique  $I_y$  dans l'axe de la source ( $y_s = 5\text{ cm}$  et  $z_s = 7\text{ cm}$ ).

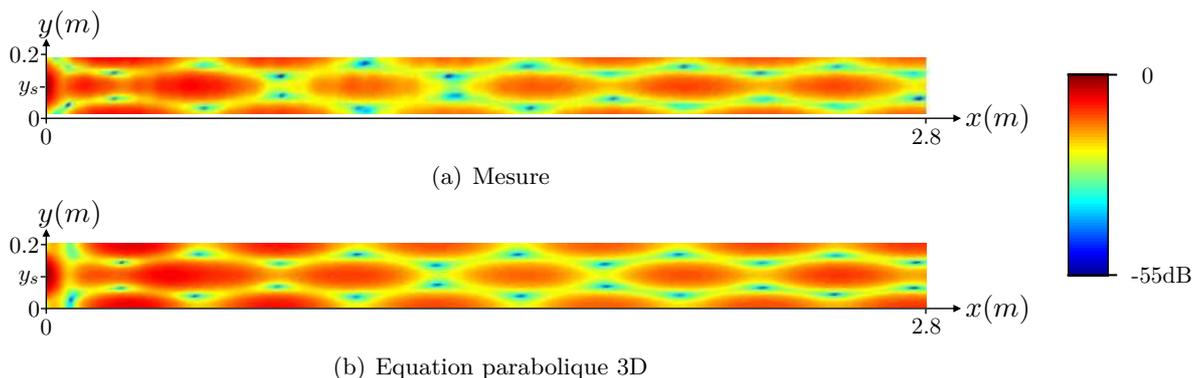
pur à  $1500\text{ Hz}$ . Les deux cartographies du niveau de pression sont en accord, la résolution de l'équation parabolique permet une bonne localisation des interférences. De plus, comme le montre la figure 3.12(a), la décroissance du niveau de pression dans l'axe de la source est correctement estimée par le modèle.

Dans le plan  $xy$ , sur lequel est cartographié le champ de pression, il est possible de calculer l'intensité acoustique intégrée sur la largeur de la rue d'après la relation

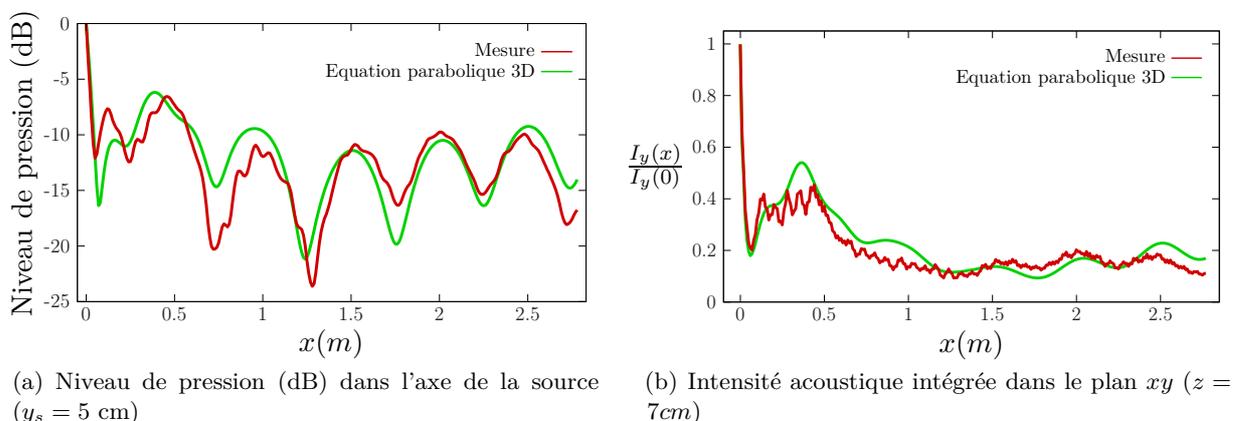
$$I_y(x) = \int_0^{L_y} \frac{1}{2} \text{Re} \left[ p(x, y) \bar{v}(x, y) \right] dy, \quad (3.24)$$

où  $\bar{v}$  représente le complexe conjugué de la composante selon  $x$  de la vitesse acoustique. L'échantillonnage spatial lors des mesures est d'un point par centimètre, ce qui correspond pour une fréquence de  $1500\text{ Hz}$  à une discrétisation de 20 points par longueur d'ondes. La vitesse acoustique peut donc être évaluée par différentiation du champ de pression sur un pas d'avancement  $\Delta x$ . La figure 3.12(b) présente la comparaison entre la mesure et la simulation au niveau de l'évolution de l'énergie acoustique dans la rue. L'équation parabolique tridimensionnelle semble légèrement sous-évaluer la diminution de l'énergie acoustique. Cela peut s'expliquer par les pertes aux parois qui ne sont pas prises en compte dans la simulation.

Une autre comparaison est réalisée cette fois-ci à la fréquence de  $2500\text{ Hz}$  avec la source placée au milieu de la rue. Sur la figure 3.13, on constate que l'augmentation de la fréquence



**Fig. 3.13** – Niveau de pression mesuré et simulé à l’intérieur de la rue à la hauteur  $z = 7\text{cm}$  ( $L_y = 0.2\text{ m}$  et  $L_z = 0.3\text{ m}$ ), la source émet un sinus pur à  $2500\text{Hz}$  ( $y_s = 10\text{cm}$ ).



**Fig. 3.14** – Comparaison à  $2500\text{Hz}$  entre mesure et simulation pour le niveau de pression et l’intensité acoustique  $I_y$  dans l’axe de la source ( $y_s = 10\text{cm}$  et  $z_s = 7\text{cm}$ ).

complexifie le motif interférentiel. Malgré cela, les deux cartographies du niveau de pression présentent également un bon accord entre la mesure et la simulation. De plus, la figure 3.14(a) montre que la décroissance du niveau de pression est bien modélisée, bien qu’en champ proche un léger écart est remarqué. La décroissance de l’intensité acoustique intégrée dans le plan  $xy$  est relativement bien modélisée par l’équation parabolique (voir Fig. 3.14(b)).

### 3.1.4 Conclusion

Une approximation unidirectionnelle de l’équation de Helmholtz tridimensionnelle est proposée sous la forme d’une équation parabolique grand angle à trois dimensions. Une méthode de résolution de cette équation parabolique est proposée afin de modéliser la propagation acoustique dans des guides d’ondes ouverts, représentant des rues en canyon constituées de deux bâtiments se faisant face. Cette méthode de résolution est basée sur l’utilisation de la technique des directions alternées. L’équation parabolique tridimensionnelle est alors décomposée en un système d’équations paraboliques bidimensionnelles, ce qui est très avantageux en terme de coût de calcul.

Les comparaisons qui viennent d’être présentées entre des données expérimentales et des simulations permettent de mettre en évidence la validité de la méthode de résolution de l’équation parabolique tridimensionnelle. Autant au niveau de la localisation des interférences qu’au niveau de la décroissance de l’intensité acoustique intégrée, les tendances prédites par la simu-

lation décrivent assez fidèlement la propagation des ondes acoustiques pour les exemples traités précédemment. La fuite d'une partie des ondes acoustiques due à l'ouverture du guide d'ondes est également correctement évaluée. Ce type de résultat a été également obtenu pour d'autres configurations géométriques de la maquette, qui ne sont pas présentées dans ce manuscrit.

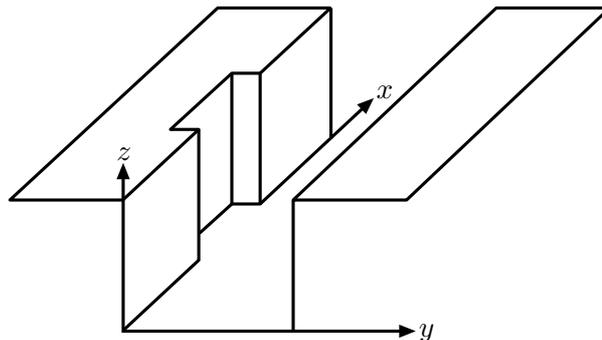
La principale limitation de la méthode intervient lors de la séparation des opérateurs transverses, qui limite l'angle de validité de l'équation parabolique tridimensionnelle. En fonction du type de source ou de la configuration géométrique de la rue, cette limitation angulaire peut nuire à la bonne modélisation du champ de pression. Un développement à l'ordre supérieur de l'opérateur transverse [12, 21] permet de s'affranchir de cette limitation au prix d'une complexification du schéma numérique et d'une augmentation du coût numérique de la méthode.

### 3.2 Variation brusque de la section du guide d'ondes

Pour modéliser la propagation d'ondes acoustiques dans des guides d'ondes droits ouverts, l'équation parabolique tridimensionnelle ainsi que sa méthode de résolution ont été validées par comparaison avec des données expérimentales. Cette méthode va être adaptée afin de pouvoir modéliser des rues dont la largeur varie brusquement. Par exemple, cette géométrie de rue peut être rencontrée lorsque les façades de deux bâtiments côte à côte ne sont pas parfaitement alignées.

Dans ce chapitre, les variations brusques de section seront indépendantes de la coordonnée transverse  $z$  (voir exemple à la Fig. 3.15). Ce type de géométrie est imposé par la séparation d'opérateur, formulée lors du développement de l'opérateur transverse  $\mathcal{Q}^*$ , à l'issue de laquelle le terme de couplage  $\mathcal{L}_y^* \mathcal{L}_z^*$  est négligé (voir Eq. (3.10)). De ce fait, il ne paraît pas envisageable de modéliser la propagation acoustique dans un guide d'ondes dont les parois peuvent varier selon la dimension transverse  $z$ .

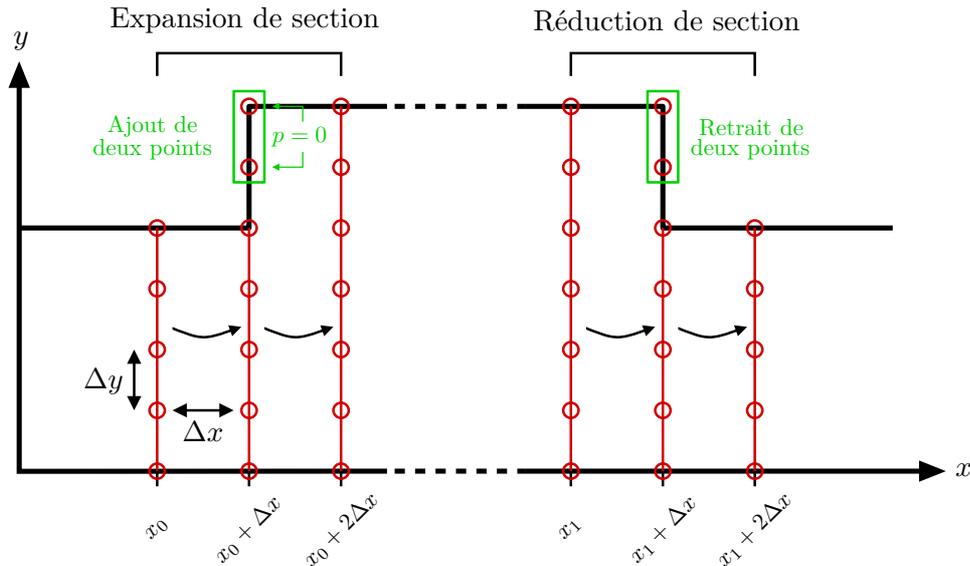
L'approximation de Kirchhoff va être utilisée afin de raccorder entre eux des guides d'ondes ouverts de largeurs différentes.



**Fig. 3.15** – Guide d'ondes ouvert discontinu représentant une rue en canyon, la variation brusque de largeur ne dépend pas de  $z$ .

#### 3.2.1 Approximation de Kirchhoff

L'approximation de Kirchhoff est utilisée afin de raccorder entre eux des guides d'ondes ouverts de largeurs différentes. Cette technique s'inscrit dans la lignée de celles utilisées en acoustique sous marine pour la prise en compte des variations de hauteur du fond marin par décomposition en marches d'escalier [52, 55]. Dans le domaine de la propagation acoustique en milieu extérieur, le même type de démarche est également suivi pour modéliser la variation de



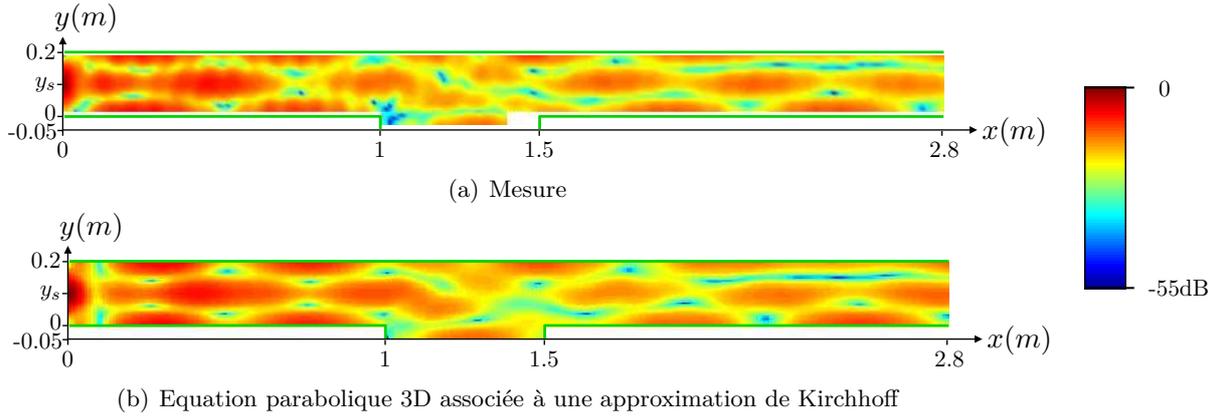
**Fig. 3.16** – Représentation de l'implémentation de l'approximation de Kirchhoff dans le schéma de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle, exemple pour une expansion et une réduction de la largeur du guide correspondant à deux points dans le maillage en  $y$  du champ de pression.

géométrie du sol ou la présence de murs anti-bruit [25, 38, 42, 88]. La dénomination d'approximation de Kirchhoff est alors employée puisqu'une approximation sur la diffraction des ondes au passage de ces obstacles est formulée [2]. Le même type d'approximation est également utilisé pour modéliser la propagation acoustique à travers des objets diffusants ayant des dimensions plus grandes qu'un mur anti-bruit [39].

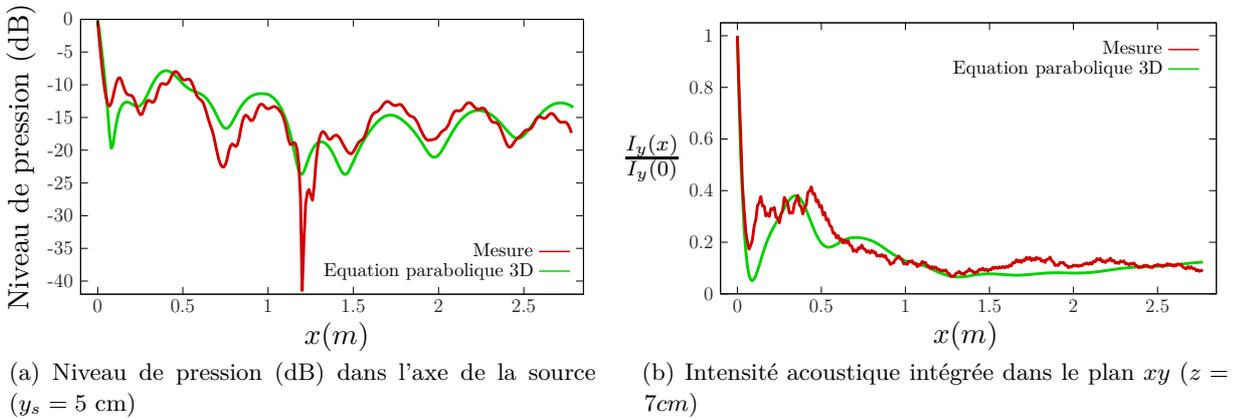
La méthode de raccordement proposée dans cette partie s'appuie sur une modélisation de la propagation acoustique bidimensionnelle au dessus d'un canyon, basée sur l'association d'une équation parabolique avec l'approximation de Kirchhoff [90]. Pour le cas tridimensionnel considéré ici, il est possible de reprendre le principe de cette association puisque l'utilisation de la méthode des directions alternées revient à résoudre l'équation parabolique tridimensionnelle comme un ensemble d'équations bidimensionnelles.

Lors de la propagation des champs de pression bidimensionnels dans le plan  $xy$ , une augmentation brusque de la section du guide se traduit par une augmentation du nombre de points discrétisant le champ de pression dans la direction  $y$  (voir Fig. 3.16). A l'endroit où est située l'expansion de section, l'approximation de Kirchhoff impose que la pression aux points ajoutés vaut zéro. Ce champ de pression est ensuite propagé. Pour cela, les dimensions des matrices tridiagonales sont augmentées d'autant qu'il y a eu de points ajoutés. Pour modéliser avec l'approximation de Kirchhoff une réduction brusque de la section, ne sont propagés du champ de pression présent à la discontinuité que les points ayant un vis-à-vis dans le domaine numérique de la partie aval du guide (voir Fig. 3.16). Dans ce cas précis, les dimensions des matrices tridiagonales sont diminuées d'autant qu'il y a eu de points retirés. Lors de la discrétisation du domaine numérique, le pas de discrétisation sur l'axe  $y$  doit être adapté afin que l'augmentation ou la diminution de la section du guide d'onde soit caractérisée par un nombre entier de points. De même, le pas de discrétisation sur l'axe  $x$  doit être adapté de façon à ce que la position du changement brusque de section corresponde à la bonne coordonnée sur cet axe.

Cette approximation de Kirchhoff peut être interprétée comme une approximation de diffusion unique des ondes acoustiques traversant une discontinuité de section d'un guide d'ondes.



**Fig. 3.17** – Niveau de pression mesuré et simulé à l'intérieur de la rue à la hauteur  $z = 7\text{cm}$ , la discontinuité de section correspond à une variation de 25% de la largeur de la rue, la source émet un sinus pur à 2500Hz ( $y_s = 5\text{cm}$ ,  $L_y = 0.2\text{ m}$  et  $L_z = 0.3\text{ m}$ ).



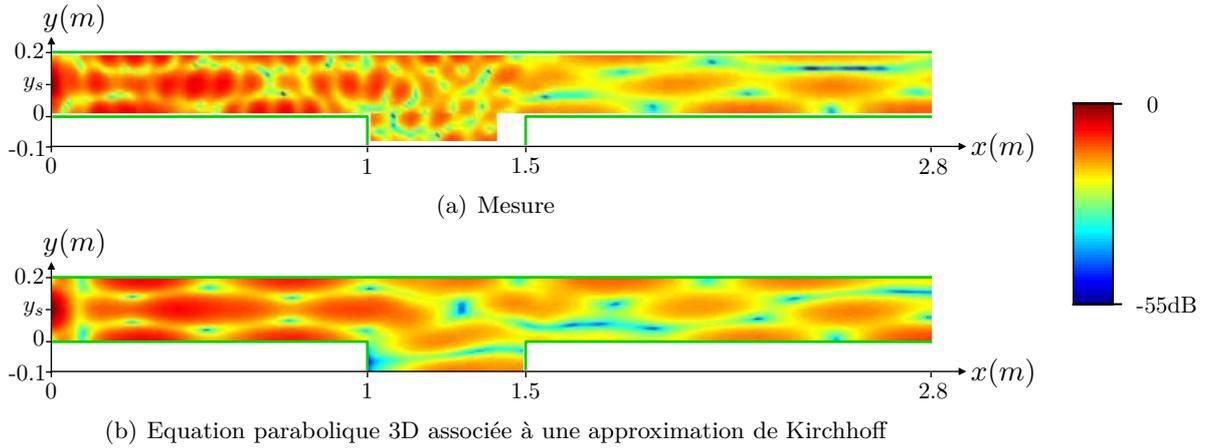
**Fig. 3.18** – Comparaison à 2500 Hz entre mesure et simulation pour le niveau de pression et pour l'intensité acoustique  $I_y$  dans l'axe de la source ( $y_s = 10\text{cm}$  et  $z_s = 7\text{cm}$ ), la discontinuité de section correspond à une variation de 25% de la largeur de la rue.

A propos du coût numérique, la prise en compte de variations brusques pour la largeur d'une rue ne vient pas sensiblement modifier le temps de calcul. La seule différence, avec la méthode de résolution de l'équation parabolique en guides d'ondes droits, se trouve dans la variation des dimensions des matrices tridiagonales lors d'un changement de la largeur de la rue. Pour les faibles changements de largeur de rue considérés ici, la différence de taille du domaine numérique n'impacte donc pas de manière significative le temps de calcul.

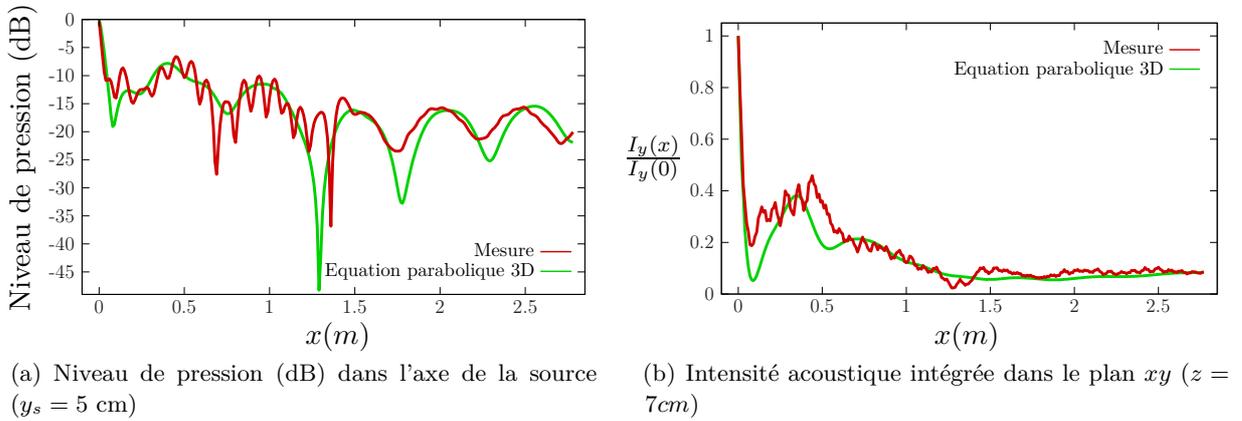
### 3.2.2 Validation par comparaison avec des résultats expérimentaux

La validité de la technique de raccordement présentée précédemment est évaluée par comparaison avec des résultats expérimentaux. L'expérience présentée à la figure 3.13 est reprise, la largeur et la hauteur de la rue étant respectivement égales à  $L_y = 20\text{ cm}$  et  $L_z = 30\text{ cm}$ . La fréquence est fixée à 2500 Hz. La géométrie de la façade gauche de la rue décrit un créneau localisé à un mètre de la source et s'étendant sur 50 cm. En pratique, cela correspond au déplacement d'un cube de plexiglas sur la maquette.

La figure 3.17 présente les cartographies du niveau de pression mesuré et simulé à l'intérieur de la rue dans un plan  $xy$ . Dans ce cas, la discontinuité de section correspond à une variation



**Fig. 3.19** – Niveau de pression mesuré et simulé à l'intérieur de la rue à la hauteur  $z = 7$  cm, la discontinuité de section correspond à une variation de 50% de la largeur de la rue, la source émet un sinus pur à 2500 Hz ( $y_s = 5$  cm,  $L_y = 0.2$  m et  $L_z = 0.3$  m).



**Fig. 3.20** – Comparaison à 2500 Hz entre mesure et simulation pour le niveau de pression et l'intensité acoustique  $I_y$  dans l'axe de la source ( $y_s = 10$  cm et  $z_s = 7$  cm), la discontinuité de section correspond à une variation de 50% de la largeur de la rue.

de 25% de la largeur de la rue. La source est centrée au milieu de la rue. Les oscillations du niveau de pression mesurées en amont de la discontinuité (voir Fig. 3.17(a)) sont dues aux ondes retours générées par les changements brusques de la largeur de la rue. La différence entre les deux cartographies 3.17(a) et 3.17(b) intervient principalement au niveau des ondes retours négligées avec l'approximation unidirectionnelle. Cela ne vient pas dégrader la bonne localisation des interférences, tout particulièrement pour le champ transmis ( $x > 1.5$  m). De plus, les figures 3.18(a) et 3.18(b) montrent que la décroissance du niveau de pression et celle de l'intensité acoustique intégrée sont également bien estimées. Dans ce cas, l'approximation de Kirchhoff est appropriée pour le raccordement du champ de pression aux discontinuités du guide d'ondes étudié.

Pour une discontinuité de section correspondant à une variation de 50% de la largeur de la rue, la contribution des ondes retours sur le champ de pression mesurée est très importante. Comme le montrent les figures 3.19(a) et 3.19(b), la validité de l'approximation unidirectionnelle est discutable en amont de la discontinuité. En aval du changement de section ( $x > 1.5$  m), la localisation des interférences est plus satisfaisante. Les mêmes tendances apparaissent sur la décroissance du niveau de pression, présentée à la figure 3.20(a). Malgré une erreur commise par

l'approximation unidirectionnelle, la décroissance de l'intensité acoustique intégrée en sortie de la rue est correctement estimée par le modèle (voir Fig. 3.20(b)).

### 3.2.3 Conclusion

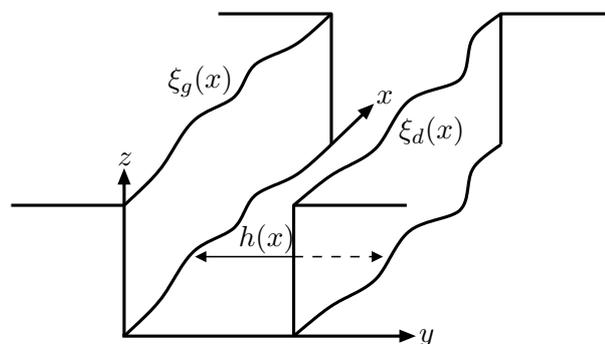
Afin de modéliser une variation brusque de la largeur d'une rue, la méthode de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle est associée à une approximation de Kirchhoff. Cette technique de raccordement n'augmente que très faiblement le temps de calcul de la méthode, le coût numérique est sensiblement le même que pour une rue droite.

Pour une configuration donnée, les résultats obtenus avec la méthode sont comparés avec des données expérimentales. À la vue de ces premiers résultats, il apparaît que l'approximation de Kirchhoff permet un bon raccordement entre des guides d'ondes ouverts de largeurs différentes tant que l'approximation unidirectionnelle est valide. Pour des variations trop fortes de la largeur de la rue, il est difficile d'affirmer laquelle de ces deux approximations limite la méthode. Des mesures plus approfondies pourraient permettre de mieux définir les limites de validité de ces différentes approximations.

## 3.3 Variation continue de la section du guide d'ondes

Dans les domaines de l'acoustique sous-marine et de la propagation en milieu ouvert, des équations paraboliques sont couramment associées à des transformations de coordonnées afin de permettre une variation de la géométrie des frontières du domaine considéré [4, 33, 87]. Sur ce principe, le chapitre 2 propose une première étude pour des guides d'ondes bidimensionnels dont une des parois est à géométrie variable. Suivant la même démarche, cette partie a pour but de formuler et de résoudre une équation parabolique tridimensionnelle modifiée par un changement de coordonnées, représentant ainsi la variation de la géométrie des deux parois d'une rue (voir Fig. 3.21). Un guide homogène, ouvert et irrégulier, est alors transformé en un guide hétérogène, ouvert et régulier. L'hétérogénéité de ce guide d'ondes traduit alors l'irrégularité des façades des bâtiments de la rue.

Après avoir formulé une équation parabolique tridimensionnelle modifiée, modélisant la propagation unidirectionnelle dans un guide ouvert et irrégulier, la méthode de résolution présentée à la partie 3.1 est adaptée à la résolution de cette équation.



**Fig. 3.21** – Représentation d'un guide d'ondes ouvert irrégulier, les fonctions  $\xi_g$  et  $\xi_d$  traduisent la variation continue de la géométrie des façades gauche et droite de la rue.

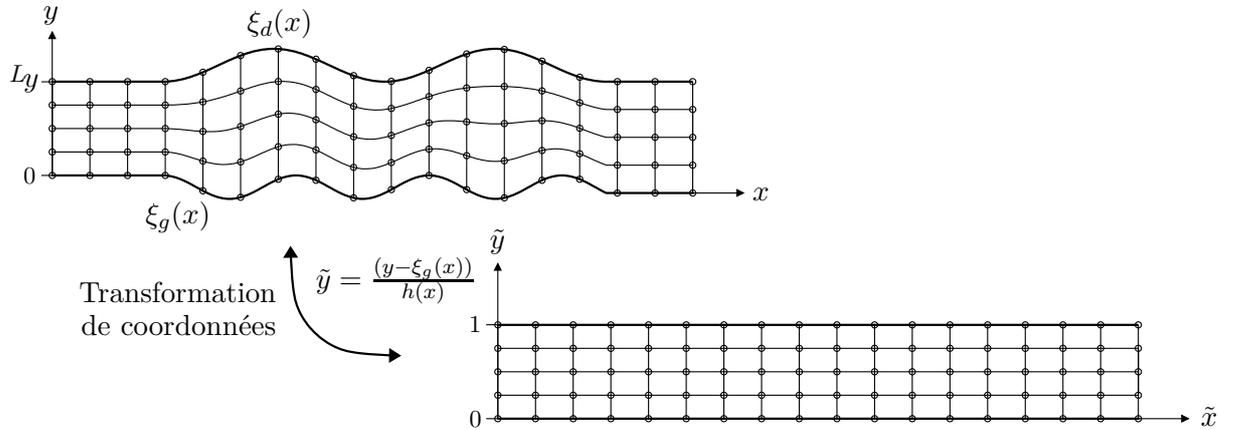
### 3.3.1 Formulation de l'équation parabolique 3D modifiée

La variation de géométrie des parois du guide d'ondes est prise en compte dans l'équation parabolique tridimensionnelle par le biais d'une transformation de coordonnées. Cette transformation permet de relier entre eux les systèmes de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  d'après les relations :

$$\begin{cases} \tilde{x} = x, & (3.25a) \\ \tilde{y} = \frac{(y - \xi_g(x))}{h(x)}, & (3.25b) \\ \tilde{z} = z, & (3.25c) \end{cases}$$

avec  $h(x) = L_y + \xi_d(x) - \xi_g(x)$  représentant l'évolution de la largeur de la rue. Les fonctions  $\xi_g$  et  $\xi_d$  traduisent la variation continue de la géométrie des façades gauche et droite d'une rue (voir Fig. 3.21). Comme le montre la figure 3.22, ce type de transformation de coordonnées n'est pas orthogonal dans le plan  $xy$ . La transformation du gradient de la pression dans le repère de coordonnées  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - \left( \frac{\xi'_d(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} \tilde{y} + \frac{\xi'_g(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} (1 - \tilde{y}) \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}, & (3.26a) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{h(\tilde{x})} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}, & (3.26b) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}}. & (3.26c) \end{cases}$$



**Fig. 3.22** – Représentation de la transformation de coordonnées dans le plan  $xy$ .

En remplaçant les opérateurs différentiels de l'équation parabolique grand angle (3.8) par ceux formulés depuis la transformation de coordonnées (Eq. (3.26)), une équation parabolique tridimensionnelle modifiée est obtenue :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} - \left( \frac{\xi'_d(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} \tilde{y} + \frac{\xi'_g(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} (1 - \tilde{y}) \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} - ik\tilde{Q}^*(\tilde{x}) \right] \tilde{p} = 0, \quad (3.27)$$

avec

$$\tilde{Q}^*(\tilde{x}) = \sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{k^2} \frac{1}{h(\tilde{x})^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^{*2}}}_{\mathcal{L}_{\tilde{y}}^*(\tilde{x})} + \underbrace{\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^{*2}}}_{\mathcal{L}_{\tilde{z}}^*}}. \quad (3.28)$$

Par rapport à sa forme originale, l'équation parabolique modifiée comporte deux nouveaux termes. Le second membre de l'équation parabolique (3.27), qui est associé à un opérateur  $\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}$ , représente l'effet de la courbure locale des deux parois du guide d'ondes. Le terme  $\frac{1}{h(\tilde{x})^2}$ , présent dans l'opérateur transverse  $\mathcal{L}_{\tilde{y}}^*(\tilde{x})$ , décrit l'effet de la variation de la largeur du guide d'ondes.

À nouveau, une approximation de Padé est utilisée afin de développer la racine carrée de l'opérateur transverse  $\tilde{\mathcal{Q}}^*(\tilde{x})$ . À l'issue de ce développement, une séparation des opérateurs différentiels est effectuée. Cela entraîne une limitation angulaire semblable à celle rencontrée précédemment pour le cas d'un guide d'ondes droit. L'équation parabolique modifiée s'écrit en fonction de l'enveloppe de la pression  $\tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = e^{-ik\tilde{x}}\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  sous la forme

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = \left[ ik \left( \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{y}}^*}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{y}}^*} + \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{z}}^*}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{z}}^*} \right) + \left( \frac{\xi'_d(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} \tilde{y} + \frac{\xi'_g(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} (1 - \tilde{y}) \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right] \tilde{\phi}. \quad (3.29)$$

Par rapport à l'équation parabolique tridimensionnelle (3.11) pour les guides droits, un terme additionnel est apparu dans l'équation (3.29) suite à la transformation de coordonnées. C'est pourquoi la méthode de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle présentée à la partie 3.1 doit être adaptée.

### 3.3.2 Modification de la méthode de résolution de l'équation parabolique 3D

L'équation parabolique modifiée (3.29) est résolue à l'aide de la technique des directions alternées [21]. La transformation de coordonnées impose une étape supplémentaire dans la résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle. L'équation (3.29) est alors reformulée sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\phi}_{\text{int1}}}{\partial \tilde{x}} = ik \left( \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{z}}^*(\tilde{x})}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{z}}^*(\tilde{x})} \right) \tilde{\phi}, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}_{\text{int2}}}{\partial \tilde{x}} = ik \left( \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{y}}^*(\tilde{x})}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{y}}^*(\tilde{x})} \right) \tilde{\phi}_{\text{int1}}, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = \left[ \left( \frac{\xi'_d(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} \tilde{y} + \frac{\xi'_g(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} (1 - \tilde{y}) \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right] \tilde{\phi}_{\text{int2}}. \end{array} \right. \quad (3.30a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\phi}_{\text{int1}}}{\partial \tilde{x}} = ik \left( \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{z}}^*(\tilde{x})}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{z}}^*(\tilde{x})} \right) \tilde{\phi}, \\ \frac{\partial \tilde{\phi}_{\text{int2}}}{\partial \tilde{x}} = ik \left( \sum_{l=1}^M \frac{\bar{a}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{y}}^*(\tilde{x})}{1 + \bar{b}_l^M \mathcal{L}_{\tilde{y}}^*(\tilde{x})} \right) \tilde{\phi}_{\text{int1}}, \end{array} \right. \quad (3.30b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = \left[ \left( \frac{\xi'_d(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} \tilde{y} + \frac{\xi'_g(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} (1 - \tilde{y}) \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right] \tilde{\phi}_{\text{int2}}. \end{array} \right. \quad (3.30c)$$

Ces équations sont résolues avec une méthode de Crank-Nicolson [24]. Leurs dépendances en  $\tilde{x}$  requièrent l'utilisation d'un pas d'avancement fractionné [85]. Ainsi, le schéma d'avancement, représentant la méthode de résolution de l'équation parabolique modifiée (3.29) sur un pas d'avancement  $\Delta x$  et pour une partie du domaine transverse notée  $(\tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$ , peut être représenté sous la forme :

$$\begin{aligned} \left[ 1 + \mathcal{A}_1^M \mathcal{L}_{\tilde{z}}^* \left( \tilde{x} + \frac{\Delta \tilde{x}}{2M+1} \right) \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{\Delta \tilde{x}}{2M+1}, \tilde{y}_0, \tilde{z} \right) &= \left[ 1 + \mathcal{B}_1^M \mathcal{L}_{\tilde{z}}^* (\tilde{x}) \right] \tilde{\phi} (\tilde{x}, \tilde{y}_0, \tilde{z}) \\ \vdots & \vdots \\ \left[ 1 + \mathcal{A}_M^M \mathcal{L}_{\tilde{z}}^* \left( \tilde{x} + \frac{M\Delta \tilde{x}}{2M+1} \right) \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{M\Delta \tilde{x}}{2M+1}, \tilde{y}_0, \tilde{z} \right) &= \left[ 1 + \mathcal{B}_M^M \mathcal{L}_{\tilde{z}}^* \left( \tilde{x} + \frac{(M-1)\Delta \tilde{x}}{2M+1} \right) \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{(M-1)\Delta \tilde{x}}{2M+1}, \tilde{y}_0, \tilde{z} \right) \\ \left[ 1 + \mathcal{A}_1^M \mathcal{L}_{\tilde{y}}^* \left( \tilde{x} + \frac{(M+1)\Delta \tilde{x}}{2M+1} \right) \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{(M+1)\Delta \tilde{x}}{2M+1}, \tilde{y}, \tilde{z}_0 \right) &= \left[ 1 + \mathcal{B}_1^M \mathcal{L}_{\tilde{y}}^* \left( \tilde{x} + \frac{M\Delta \tilde{x}}{2M+1} \right) \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{M\Delta \tilde{x}}{2M+1}, \tilde{y}, \tilde{z}_0 \right) \\ \vdots & \vdots \\ \left[ 1 + \mathcal{A}_M^M \mathcal{L}_{\tilde{y}}^* \left( \tilde{x} + \frac{(2M)\Delta \tilde{x}}{2M+1} \right) \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{(2M)\Delta \tilde{x}}{2M+1}, \tilde{y}, \tilde{z}_0 \right) &= \left[ 1 + \mathcal{B}_M^M \mathcal{L}_{\tilde{y}}^* \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{(2M-1)\Delta \tilde{x}}{2M+1}, \tilde{y}, \tilde{z}_0 \right), \\ \left[ 1 - \mathcal{C}(\tilde{x} + \Delta \tilde{x}) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^*} \right] \tilde{\phi} (\tilde{x} + \Delta \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_0) &= \left[ 1 + \mathcal{C} \left( \tilde{x} + \frac{(2M)\Delta \tilde{x}}{2M+1} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^*} \right] \tilde{\phi} \left( \tilde{x} + \frac{(2M)\Delta \tilde{x}}{2M+1}, \tilde{y}, \tilde{z}_0 \right) \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{A}_l^M = \bar{b}_1^M - \bar{a}_1^M \frac{ik\Delta\tilde{x}}{2}, \quad (3.31)$$

$$\mathcal{B}_l^M = \bar{b}_1^M + \bar{a}_1^M \frac{ik\Delta\tilde{x}}{2}, \quad (3.32)$$

$$\mathcal{C}(\tilde{x}) = \frac{\Delta\tilde{x}}{2} \left( \frac{\xi_d'(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} \tilde{y} + \frac{\xi_g'(\tilde{x})}{h(\tilde{x})} (1 - \tilde{y}) \right). \quad (3.33)$$

L'opérateur  $\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{y}}$  est alors discrétisé par différences finies centrées d'ordre un. Les modifications de la méthode de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle interviennent principalement dans l'ajout d'une étape lors de la propagation des lignes décomposant le champ transverse selon le plan  $xy$ . Cette étape supplémentaire correspond à l'ajout d'une inversion de matrice lors de la propagation de chaque ligne en  $y$ .

Comme présenté au chapitre 2, la non-orthogonalité de la transformation de coordonnées impose de reformuler la condition de Neumann sur les façades des bâtiments (voir Fig. 3.22) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{x}} \Big|_{\tilde{y}=0} = \left( \frac{1 + \xi_g'^2(\tilde{x})}{h(\tilde{x})\xi_g(\tilde{x})} \right) \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{y}} - ik\tilde{\phi} \\ \forall \tilde{z} \in [0, L_z], \end{array} \right. \quad (3.34a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{x}} \Big|_{\tilde{y}=1} = \left( \frac{1 + \xi_d'^2(\tilde{x})}{h(\tilde{x})\xi_d(\tilde{x})} \right) \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{y}} - ik\tilde{\phi} \\ \forall \tilde{z} \in [0, L_z]. \end{array} \right. \quad (3.34b)$$

Ces conditions aux frontières sont non-locales puisqu'elles sont constituées de termes dépendant de  $\tilde{x}$ . La discrétisation non-locale de ces conditions est assurée par la méthode présentée précédemment en annexe 2.A. Pour les conditions aux frontières selon l'axe en  $z$ , la transformation de coordonnées dans cette direction n'implique pas de modifications par rapport à ce qui a été présenté à la partie 3.1.

### 3.3.3 Application de la méthode

Pour illustrer les possibilités de la méthode, une étude paramétrique est proposée afin de mettre en avant l'impact de la géométrie des façades des bâtiments sur la décroissance du flux d'énergie acoustique à l'intérieur de la rue. Le flux d'énergie acoustique selon l'axe  $x$  est calculé à l'intérieur de la rue sous la forme

$$E(\tilde{x}) = \int_0^{L_z} \int_0^1 \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \bar{\tilde{v}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \right] d\tilde{y} d\tilde{z}. \quad (3.35)$$

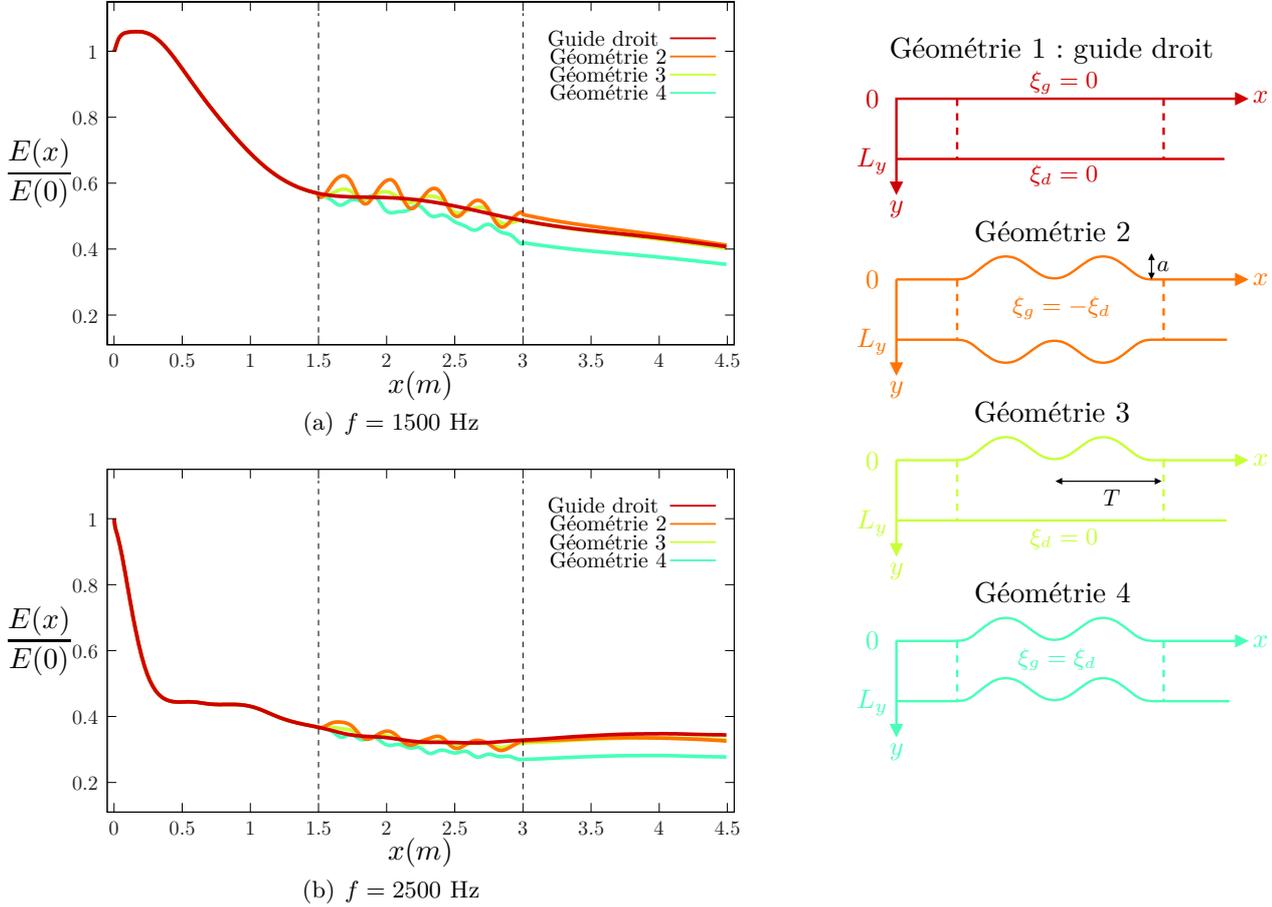
Cette grandeur, intégrant à l'intérieur de la rue l'intensité acoustique selon les directions transverses, permet de mettre en avant l'impact de l'ouverture de la rue sur le rayonnement des ondes acoustiques.

Quatre géométries de rues sont étudiées (voir figure 3.23). La géométrie n°1 est le cas particulier d'une rue droite où les façades sont lisses. Cette configuration est retenue afin de servir de référence. Pour les trois autres géométries, l'irrégularité de la façade de gauche est définie selon la fonction suivante :

$$\xi_g(x) = -\frac{a}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{T} \right) \right), \quad (3.36)$$

où  $a$  et  $T$  représentent respectivement la hauteur et la longueur d'une période de la fonction  $\xi_g(x)$  (voir Fig. 3.23). La configuration de la façade de droite est différente d'une géométrie à

une autre. La géométrie n°2 représente une variation opposée de la géométrie des façades gauche et droite ( $\xi_d = -\xi_g$ ). La géométrie n°3 correspond à une variation de largeur de la rue qui est uniquement liée à l'irrégularité de la paroi gauche ( $\xi_d = 0$ ). Pour finir, la géométrie n°4 décrit une rue de largeur constante dont les deux parois ont une même courbure ( $\xi_d = \xi_g$ ).

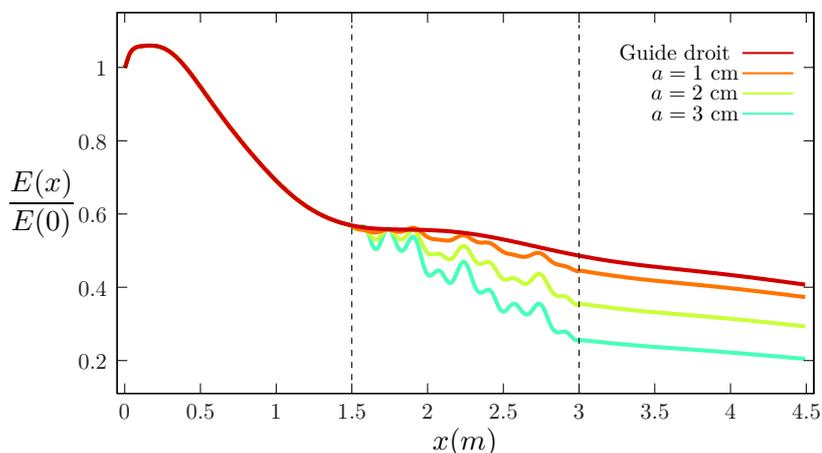
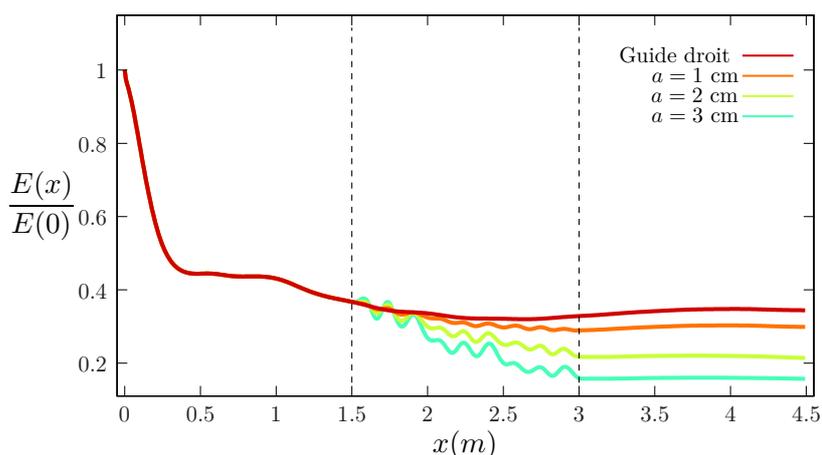


**Fig. 3.23** – Impact de la géométrie des parois sur la décroissance du flux d'énergie acoustique à l'intérieur de la rue (géométrie de la rue :  $L_y = 20$  cm et  $L_z = 30$  cm, paramètres de l'irrégularité :  $a = 1.5$  cm et  $T = 33$  cm).

Pour toutes ces géométries, la rue est divisée en trois zones. En entrée de la rue ( $x < 1.5$  m), les façades des bâtiments sont lisses, ainsi la décroissance du flux d'énergie dans cette zone est uniquement liée au rayonnement de la source. Sur l'intervalle  $x \in [1.5, 3]$ , les variations du flux d'énergie sont dues à l'irrégularité des façades. En sortie de la rue ( $x > 3$  m), les façades des bâtiments sont à nouveau lisses afin de faire apparaître clairement le niveau du flux d'énergie acoustique en sortie de la zone précédente.

Les figures 3.23(a) et 3.23(b) sont obtenues après propagation des conditions initiales mesurées préalablement sur la maquette pour les fréquences 1500 Hz et 2500 Hz (conditions initiales utilisées à la partie 3.1.3). Dans ce cas, la hauteur des bâtiments ainsi que la largeur en entrée de la rue valent respectivement  $L_z = 30$  cm et  $L_y = 20$  cm. Ces figures permettent d'observer que la décroissance du flux d'énergie acoustique à l'intérieur de la rue est relativement similaire pour les trois premières géométries proposées. Par rapport à une rue dont les parois sont lisses, l'irrégularité des façades des bâtiments ne permet pas dans ce cas d'accroître la fuite des ondes acoustiques par rayonnement au-dessus de la rue. Au contraire, avec la géométrie n°4, le flux d'énergie acoustique diminue significativement en sortie de la rue. Dans ce cas, l'irrégularité

des façades des bâtiments favorise le rayonnement des ondes acoustiques à l'extérieur du guide. Comme le montre la figure 3.24, l'augmentation de l'amplitude de l'irrégularité des façades accentue l'effet de rayonnement des ondes acoustiques au-dessus de la rue. Comparé au cas d'une rue lisse, le flux d'énergie acoustique, normalisé par rapport à sa valeur en  $x = 0$ , est divisé par deux en sortie de la rue pour une hauteur d'irrégularité  $a = 3$  cm.

(a)  $f = 1500$  Hz(b)  $f = 2500$  Hz

**Fig. 3.24** – Impact de l'amplitude de l'irrégularité des façades sur la décroissance de l'énergie acoustique, (géométrie 4,  $T = 33$  cm).

### 3.3.4 Conclusion

Une transformation de coordonnées est appliquée à l'équation parabolique tridimensionnelle, afin de représenter les irrégularités des façades des bâtiments comme une hétérogénéité du milieu de propagation. La méthode de résolution de l'équation parabolique en guide droit, présentée à la partie 3.1, est adaptée afin de traiter le terme additionnel apporté par la transformation de coordonnées dans l'équation parabolique. Cette modification a pour effet d'ajouter une opération matricielle à chaque pas d'avancement lors de la résolution de l'équation parabolique. Le coût numérique est alors légèrement augmenté.

Une première étude paramétrique a mis en avant l'effet de l'irrégularité des façades d'immeubles sur la décroissance du niveau de pression acoustique à l'intérieur de la rue. Cette étude

doit être généralisée à d'autres fréquences et pour un milieu de propagation plus représentatif du milieu urbain. Des conditions d'impédance de surface au sol et sur la façade des bâtiments peuvent être facilement implémentées dans la méthode sans modifier le coût de calcul. De même, les hétérogénéités du milieu de propagation peuvent être considérées : un profil de célérité peut être ajouté afin de modéliser l'effet des conditions micro-météorologiques à l'intérieur de la rue.

Une validation expérimentale pour ce type de géométrie de rue n'a pas pu être encore réalisée. La limite de l'approximation unidirectionnelle en fonction des paramètres géométriques des irrégularités des façades pourrait ainsi être déterminée. La pente maximale des parois d'un guide bidimensionnel proposé au chapitre 2 donne un premier ordre de grandeur des variations maximales pouvant être traitées.

## Annexe 3.A Intégration des PML dans la discrétisation par différences finies de l'équation parabolique

L'ajout de couches parfaitement adaptées revient à substituer dans l'équation d'onde les opérateurs  $\partial_{yy}^2$  et  $\partial_{zz}^2$  [19], sous la forme

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^{*2}} = \frac{1}{\tau(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\tau(y)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (3.37)$$

et

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^{*2}} = \frac{1}{\tau(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\tau(z)} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right). \quad (3.38)$$

La discrétisation par différences finies de ces deux opérateurs est semblable. Il sera donc uniquement question de la discrétisation de l'opérateur  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^{*2}}$ , qui se divise en deux parties. Dans un premier temps, l'opérateur  $\frac{1}{\tau(y)} \frac{\partial \phi}{\partial y}$  est discrétisé autour de deux points distincts,  $y + \frac{\Delta y}{2}$  et  $y - \frac{\Delta y}{2}$ , par différences finies centrées d'ordre un sur un demi-pas de discrétisation  $\Delta y/2$ . On obtient alors

$$\frac{1}{\tau(y)} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{cases} \frac{1}{\tau(y + \frac{\Delta y}{2})} \left( \frac{\phi(y + \Delta y) - \phi(y)}{\Delta y} \right) \\ \frac{1}{\tau(y - \frac{\Delta y}{2})} \left( \frac{\phi(y) - \phi(y - \Delta y)}{\Delta y} \right) \end{cases}. \quad (3.39)$$

Ces deux valeurs sont utilisées afin de discrétiser l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\tau(y)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$  autour d'un point de coordonnée  $y$  et sur un demi-pas  $\Delta y/2$ . Ainsi, la discrétisation de cet opérateur par différences finies centrées d'ordre un donne

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\tau(y)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{1}{\Delta y} \left[ \frac{1}{\tau(y + \frac{\Delta y}{2})} \left( \frac{\phi(y + \Delta y) - \phi(y)}{\Delta y} \right) - \frac{1}{\tau(y - \frac{\Delta y}{2})} \left( \frac{\phi(y) - \phi(y - \Delta y)}{\Delta y} \right) \right]. \quad (3.40)$$

Pour faciliter l'implémentation dans le schéma numérique, les fonctions  $\tau$  sont explicitées aux points de coordonnées  $y + \frac{\Delta y}{2}$  et  $y - \frac{\Delta y}{2}$  sous la forme

$$\tau \left( y + \frac{\Delta y}{2} \right) = \frac{\tau(y + \Delta y) + \tau(y)}{2} \quad (3.41)$$

et

$$\tau \left( y - \frac{\Delta y}{2} \right) = \frac{\tau(y) + \tau(y - \Delta y)}{2}. \quad (3.42)$$

En remplaçant sous cette forme les fonctions  $\tau$  dans l'équation (3.40), la discrétisation de l'opérateur  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^{*2}}$  s'écrit

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^{*2}} = \frac{1}{\tau(y)} \frac{2}{\Delta y^2} \left( \frac{\phi(y + \Delta y) - \phi(y)}{\tau(y + \Delta y) + \tau(y)} - \frac{\phi(y) - \phi(y - \Delta y)}{\tau(y) + \tau(y - \Delta y)} \right). \quad (3.43)$$

En dehors du domaine PML, la fonction  $\tau$  est égale à 1. L'équation (3.43) correspond alors à la forme standard de la discrétisation des opérateurs différentiels d'ordre deux par différences finies centrées.



## Deuxième partie

# Approche multimodale de l'approximation unidirectionnelle de la propagation acoustique



## Chapitre 4

# Coarse-grid computation of the one-way propagation of coupled modes in a varying cross-section waveguide

Ce chapitre, rédigé en langue anglaise, reprend un article publié dans la revue *Journal of the Acoustical Society of America* [26]. Au premier chapitre, une forme incomplète de l'approximation unidirectionnelle de l'équation d'onde multimodale est présentée. L'équation différentielle correspondante a la particularité de ne pas présenter les mêmes résultats en fonction de la méthode de résolution qui lui est associée. Ce chapitre a pour but de présenter et expliquer le comportement numérique surprenant rencontré lors de la résolution de cette équation d'onde unidirectionnelle.

### 4.1 Introduction

When the dependence of a medium is weak along a privileged direction, one-way approximations are interesting approaches, that reduce the original second-order equation (the wave equation) into a first-order equation solved as an initial value problem (see, *e.g.*, Ref. [58] and references therein). One-way formulations, such as the Parabolic Equation (PE) method [57] have been widely studied in underwater acoustics [22, 44, 65, 91] or to compute the long-range outdoor sound propagation. [43] Since these early works it has remained an active research field, dealing with more and more complex problems. [4, 7, 59, 68, 78, 79]

The present paper is concerned with a one-way approximation of the propagation in a varying cross-section waveguide, deriving from the extensively studied multimodal admittance method. [15, 40, 41, 74, 75] This method basically consists in reformulating the original wave equation into a set of coupled evolution equations governing the components of the wave field in the basis of the local transverse modes of the waveguide. For reasons of numerical stability, the coupled mode equations cannot be integrated directly. Therefore an admittance matrix is defined, [64, 75] that is the discrete estimate, in the modal basis, of the Dirichlet-to-Neumann operator. By first integrating along the waveguide axis the Riccati equation that govern the admittance matrix, the evolution equation governing the wave field can be reformulated into a numerically stable equation. Both this evolution equation and the Riccati equation can be computed with classical numerical schemes as, *e.g.*, the Runge-Kutta algorithm, [40, 75] or the Magnus method. [62, 74, 89]

The one-way approximation of the multimodal admittance method consists in analytically approximating the admittance matrix at each point along the waveguide, in order to integrate directly the stable evolution equation for the wave field as an initial value problem. It is shown that, although the matrix equations in the original formulation may be computed with classical numerical schemes, the choice of the numerical scheme to integrate the one-way multimodal equation is not indifferent. It notably appears that, using a Magnus scheme, the most accurate result is obtained at coarse discretization (two discretization points per wavelength).

The main steps of the multimodal admittance method are recalled in the following section (Sec. 4.2), followed by the derivation of the one-way evolution equation. Several results are given to exemplify the behaviour of the numerical solution at coarse discretization (Sec. 4.4), and a simplified 1D analytical formulation is proposed that points out the influence of the effect of the discretization stepsize on the Magnus iterative scheme.

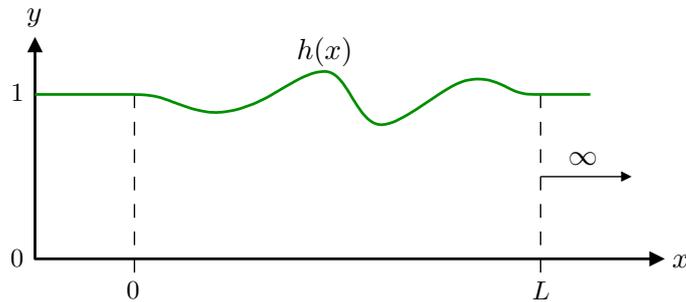
## 4.2 Multimodal admittance method

### 4.2.1 Coupled mode equations

Consider the waveguide shown in Fig. 4.1, with Neumann boundary condition at the wall ( $\partial_n p = 0$ ; Neumann conditions are chosen as classical conditions in acoustics, although Dirichlet or mixed boundary conditions could also be imposed [74]). An incident wave is propagating from the left of region of interest ( $x \in [0, L]$ ) and the waveguide is assumed to be uniform and semi-infinite downstream from this region. The medium filling the waveguide is homogeneous and inviscid, with sound velocity  $c_0$ , such that the pressure field  $p$  is solution of the Helmholtz equation

$$(\Delta + k^2)p = 0, \quad (4.1)$$

with  $k = \omega/c_0$  the wavenumber. A time dependence  $\exp(-i\omega t)$  is understood throughout this paper.



**Fig. 4.1** – Geometry of the 2D waveguide

The main steps of the multimodal admittance method are the following. First the Helmholtz equation (4.1) is written as two coupled first order evolution equation governing the pressure field and its axial gradient  $q = \partial_x p$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\partial_{yy}^2 + k^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

The solutions  $p$  and  $q$  are then written as infinite series :

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) g_n(x, y), \quad (4.3)$$

$$q(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(x) g_n(x, y), \quad (4.4)$$

where

$$g_n(x, y) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0n}}{h}} \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right) \quad (4.5)$$

is the solution of the transverse eigenproblem  $\partial_{yy}^2 g_n = -(n\pi/h)^2 g_n$ , with Neumann boundary conditions at the walls. The projection of Eq. (4.2) on the orthonormal basis  $\{g_n\}$  gives

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F & I \\ \Gamma^2 & {}^tF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

where  $\Gamma$  is a diagonal matrix given by  $\Gamma_n = i\sqrt{k^2 - (n\pi/h)^2}$  and  $F$  is given by

$$F_{mn} = \begin{cases} -(1 - \frac{\delta_{m0}}{2}) \frac{h'}{h} & \text{if } m = n, \\ 0 & \text{if } n = 0, m > 0, \\ -\sqrt{2} \frac{h'}{h} (-1)^n & \text{if } m = 0, n > 0, \\ -2 \frac{h'}{h} \frac{n^2}{n^2 - m^2} (-1)^{m+n} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.7)$$

For reasons of numerical stability, the coupled equations (4.6) cannot be solved directly as an initial value problem. [74, 75] This problem is solved by first calculating the admittance matrix  $Y$ , defined by  $\vec{Q} = Y\vec{P}$ , along the waveguide. The admittance matrix is governed by the Riccati equation

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \Gamma^2 - Y^2 + YF + {}^tFY. \quad (4.8)$$

Then, the solutions of Eq. (4.6) are computed in two steps. First the Riccati equation (4.8) is integrated from the output of the region of interest (with the initial value  $Y(L) = i\Gamma$ , denoting that no backward wave is propagating downstream) to its input ( $x = 0$ ). Then, given an initial condition, the wave field is calculated as the solution of

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial s} = (Y - F)\vec{P}, \quad (4.9)$$

$$\vec{U} = Y\vec{P}. \quad (4.10)$$

### 4.2.2 Numerical integration

The numerical integration of Eqs. (4.8) and (4.9) can be made using classical schemes as, *e.g.*, the Runge-Kutta algorithm, [40, 75] or the Magnus method. [62, 74, 89] Since, in the following, a particular attention is paid to the Magnus method for integrating the one-way equation, necessary details and notations are briefly explained.

Without loss of generality, we assume that the waveguide axis is discretized with a constant stepsize  $\Delta x > 0$ . Deduced from Eq. (4.6), the second order Magnus scheme reads as

$$\begin{pmatrix} \vec{P}(x - \Delta x) \\ \vec{Q}(x - \Delta x) \end{pmatrix} = e^{-\Delta x H(x - \frac{\Delta x}{2})} \begin{pmatrix} \vec{P}(x) \\ \vec{Q}(x) \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

with

$$H = \begin{pmatrix} -F & I \\ \Gamma^2 & {}^tF \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Then writing the exponential propagator as

$$e^{-\Delta x H(x - \frac{\Delta x}{2})} = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

an iterative scheme to compute the admittance matrix can be written as

$$Y(x - \Delta x) = [E_3 + E_4 Y(x)][E_1 + E_2 Y(x)]^{-1}, \quad (4.14)$$

and the wave field  $\vec{P}(x)$  is solved using

$$\vec{P}(x) = [E_1 + E_2 Y(x)]^{-1} \vec{P}(x - \Delta x). \quad (4.15)$$

### 4.3 One-way approximation

At each point along the waveguide axis, the modal wave field  $\vec{P}(x)$  is locally decomposed into forward ( $\vec{P}^+$ ) and backward ( $\vec{P}^-$ ) waves with respect to the  $x$  coordinate :

$$\vec{P} = \vec{P}^+ + \vec{P}^-. \quad (4.16)$$

Then, the components of the longitudinal gradient can be written in two forms :

$$\vec{Q} = \Gamma(\vec{P}^+ - \vec{P}^-) \quad (4.17)$$

and

$$\vec{Q} = Y(\vec{P}^+ + \vec{P}^-). \quad (4.18)$$

Hence, the backward component of the local field  $\vec{P}$  can be canceled by giving the admittance the value  $\Gamma$ . The prior integration of the Riccati equation is no longer necessary, and, from the source condition at the input end of the waveguide, the first order evolution equation (4.9) can be directly integrated :

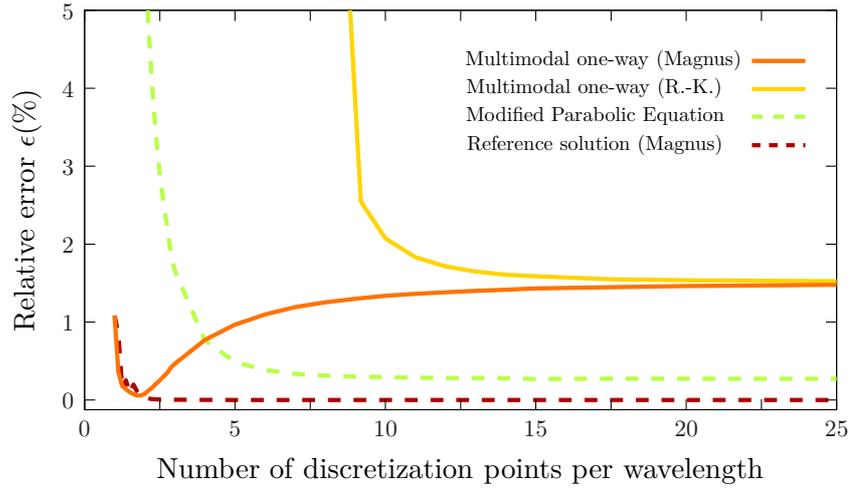
$$\partial_x \vec{P}^+ = (\Gamma - F) \vec{P}^+. \quad (4.19)$$

### 4.4 Accuracy of the one-way method for coarse discretization

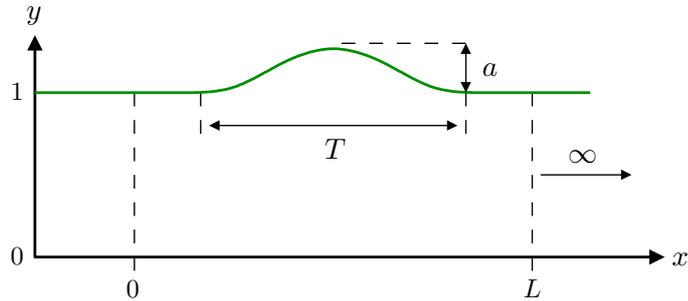
Fig. 4.2 shows the convergence of the solution of the one-way evolution equation (4.19) with the number of discretization points per wavelength, as measured by the relative deviation

$$\epsilon = \frac{\int_0^L \int_0^{h(x)} |p - p_{\text{ref.}}|^2 dy dx}{\int_0^L \int_0^{h(x)} |p_{\text{ref.}}|^2 dy dx}. \quad (4.20)$$

The reference solution  $p_{\text{ref.}}$  is the solution of the "two ways" multimodal admittance method, computed with a second order Magnus scheme and 30 discretization points per wavelength. The geometry chosen for the computation corresponds to a local, cosine shaped, enlargement of the width (Fig. 4.3).



**Fig. 4.2** – Convergence of the multimodal one-way method, as measured by the relative error  $\epsilon$  (Eq. 4.20), as a function of the number of discretization points per wavelength. Eq. (4.19) is integrated using two numerical schemes (fourth order Runge Kutta and second order Magnus) and a comparison is made with the "two-way" multimodal admittance method (Sec. 4.2) and the modified Parabolic equation method. [27] The solutions are computed in a waveguide as shown in Fig. 4.3, with  $T = 4$  and  $a = 0.1$ , the frequency is such that  $k/\pi = 6.5$ , and the initial condition at  $x = 0$  is a gaussian function (the same input condition is used throughout this paper, and it was verified that the same qualitative results are obtained with other kinds of input conditions).

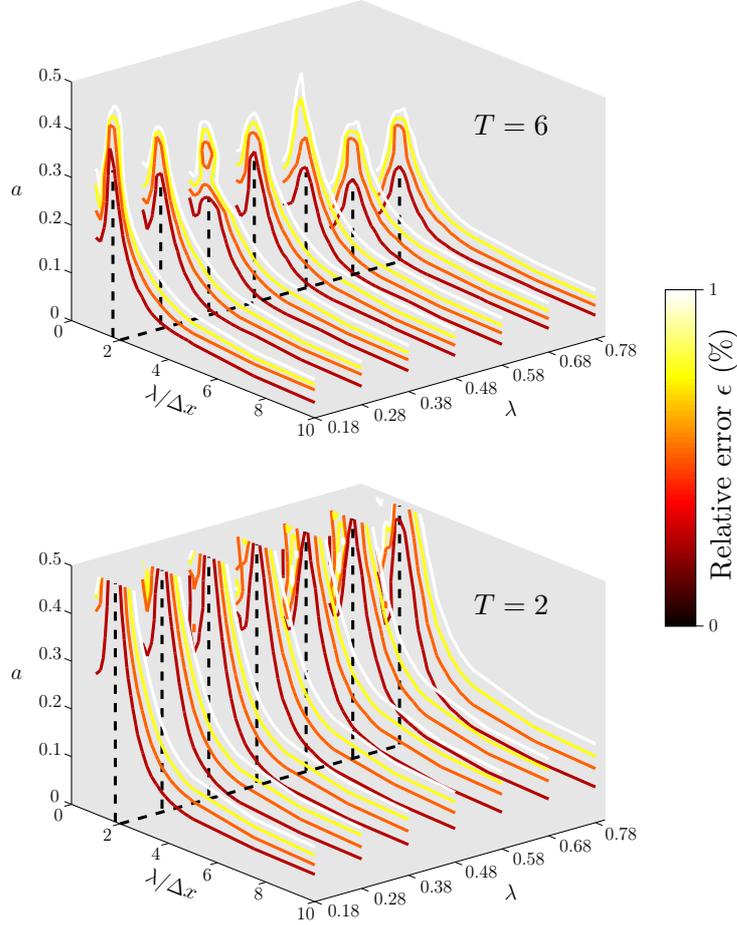


**Fig. 4.3** – Waveguide with a local, cosine shaped, enlargement of its width.

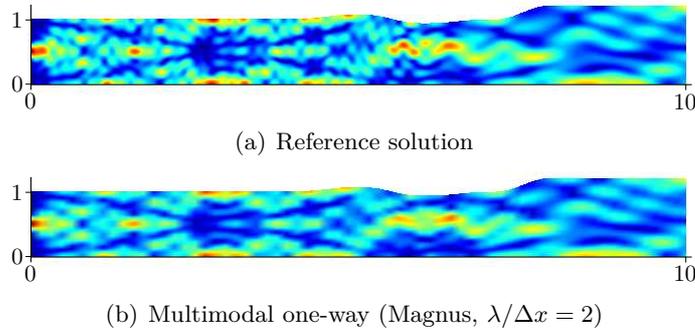
It appears that the choice of the numerical scheme is not indifferent when computing the multimodal one-way solution, although computing the reference solution with either one numerical scheme or the other gives comparable results. If both the fourth order Runge-Kutta and the second order Magnus scheme errors tends towards the same asymptotic limit when refining the discretization, the Magnus scheme, in contrary to the expected behavior, gives better results with the mesh becoming coarser. Moreover, although Eq. (4.19) appears to be a rough approximation of the original problem (the value of the asymptotic limit is relatively high, notably compared with the solution of the modified Parabolic equation [27]), the error is almost zero for a discretization at two points per wavelength, regardless of the wavelength or the size (height  $a$  and length  $T$ ) of the cosine irregularity (Fig. 4.4).

Other examples of computation with a spatial step size  $\Delta x = \lambda/2$  are shown in Figs. 4.5 and 4.6, in two different geometries. The first one corresponds to a waveguide with arbitrary and weak variations of the cross-section (using polynomial functions for obtaining a randomly generated geometry). The agreement with the reference solution is good ( $\epsilon = 1.5\%$ ). The second configuration corresponds to a large variation of the cross-section. Although the assumption of

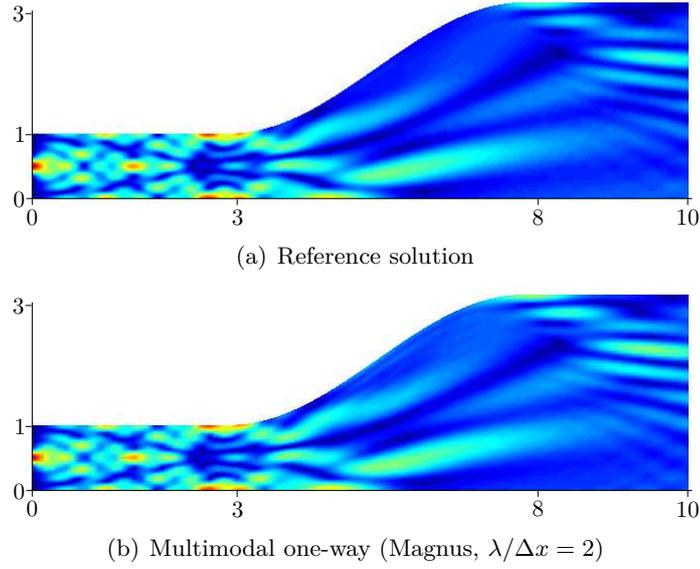
small variations is not verified, the solution of the multimodal one-way solution, computed with the Magnus scheme and a discretization stepsize  $\Delta x = \lambda/2$ , differs from the reference solution by only 1% (Eq. 4.20).



**Fig. 4.4** – The relative deviation  $\epsilon$  (color contour plot) between the multimodal one-way method computed with a Magnus scheme and the reference solution, as function of the wavelength and geometry parameters  $a$  and  $T$ , has a minimum at two discretization points per wavelength, regardless of these parameters. The chosen geometry is shown in Fig. 4.3.



**Fig. 4.5** – Wavefield (modulus) in a waveguide with arbitrary geometry.  $k/\pi = 6.5$ .



**Fig. 4.6** – Wavefield (modulus) in a waveguide with a large increase of the cross-section width.  $k/\pi = 6.5$ .

## 4.5 One-dimensional analytical solutions

A simple way to better understand the behavior of the solution for  $\lambda/\Delta x = 2$  is to consider the propagation of a low frequency wave in the waveguide, in which case approximate analytical solutions can be written. We assume that the frequency is sufficiently low to neglect the contribution of the higher order modes to the overall solution ( $k \max(h)/\pi < 1$ , but not too low, otherwise the wavelength is large compared with the characteristic sizes of the waveguide, which is out of the scope of this paper). Therefore, Eqs. (4.8), (4.9) and (4.19) becomes scalar equations. Using the second order Magnus scheme to solve these equations gives

$$p(x) = \frac{p(x - \Delta x)}{E_1 + E_2 Y(x)} \quad (4.21)$$

for the reference solution, and

$$p^+(x) = \frac{p^+(x - \Delta x)}{E_1 + E_2 i k} \quad (4.22)$$

for the one-way solution, where  $Y$  is the admittance and  $E_1$  and  $E_2$  are given by

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} = e^{-\Delta x} \begin{bmatrix} \frac{h'}{2h} & 1 \\ -k^2 & -\frac{h'}{2h} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

where  $h$  and  $h'$  are, respectively, the value of the duct width  $h$  and its first derivative with respect to  $x$  at the mid-point  $x - \Delta x/2$ . The coefficients  $E_1$  and  $E_2$  writes

$$E_1 = \cos\left(2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right) + \dots \quad (4.24)$$

$$E_2 = -\Delta x \operatorname{sinc}\left(2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right), \quad (4.25)$$

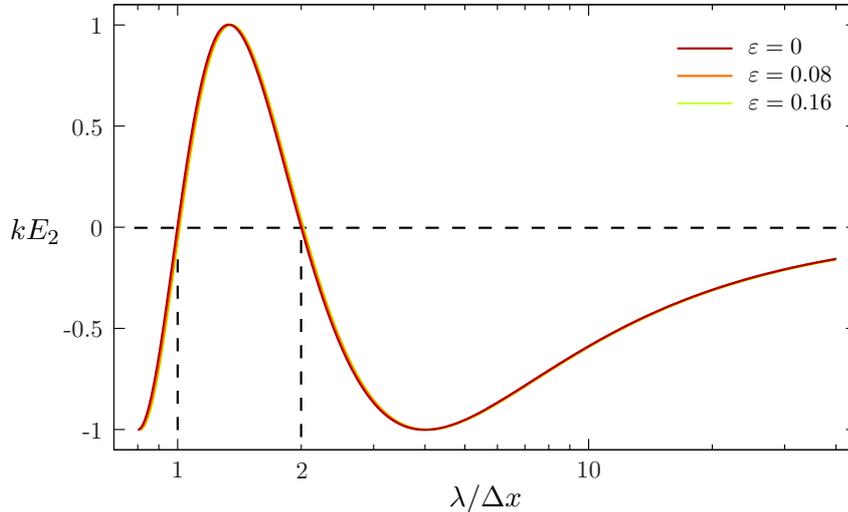
where  $\varepsilon = -h'/2hk \ll 1$ . Then, if the longitudinal axis is discretized at two points per wavelength ( $\lambda/\Delta x = 2$ ),

$$E_1 = -1 + \frac{\pi}{2}\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (4.26)$$

whereas

$$kE_2 = -\frac{\pi}{2}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (4.27)$$

It follows, since in the configurations we are interested in (non reflecting output condition and weakly varying cross-section),  $|Y|$  is of the order of magnitude of  $k$ , that the term involving the impedance in Eqs. (4.21) (resp. 4.22), that is,  $E_2Y$  (resp.  $E_2ik$ ), is small compared to  $E_1$ . This explains the accuracy of the approximate one-way solution for this particular discretization. In the multimodal case,  $E_2$  is a matrix instead of a scalar function, but it still reaches a minimum near  $\lambda/\Delta x = 2$ , in the same way as in the scalar case. Note that, from Eq. (4.25), a similar result is expected for  $\lambda/\Delta x = 2/i$ ,  $i > 1$  (see also Fig. 4.7). However, in practice, particularly in the multimodal case, neither the approximate method nor the exact multimodal admittance method gives relevant results at such coarse discretization.



**Fig. 4.7** – Function  $kE_2$  (see Eq. 4.25) as function of the number of discretization points per wavelength, for three different values of the the small parameter  $\varepsilon = -h'/2hk$ . For example, this corresponds to three different positions in the "cosine shaped" waveguide (Fig. 4.3) with  $a = 1.6$ ,  $T = 5$  and  $k/\pi = 0.625$ . The three curves are almost superimposed; the zeros are  $1 \pm 1\%$  and  $2 \pm 1\%$ .

## 4.6 Conclusion

A one-way approximation of the multimodal admittance method is most accurate for coarse discretization when it is combined with a Magnus method. Indeed, the error of the one-way model is very weak for strong discretization of about two points per wavelength. This behavior is explained with an analytical development for an one dimensional wave equation. Beside its peculiar behaviour at coarse discretization, the method proposed is also of interest as a first, although rough, one-way approximation of the multimodal propagation within a waveguide.

## Chapitre 5

# Approche multimodale de la décomposition du champ de pression en série de Bremmer

Dans la littérature, de nombreux travaux portent sur la décomposition du champ de pression en fonction du sens de propagation des ondes [23, 47, 51, 58, 67]. Le point de départ de ces différents travaux est l'article de Bremmer [18], montrant que l'approximation WKB peut être considérée comme le premier terme d'une série décomposant le parcours des ondes acoustiques à la manière de l'optique géométrique. D'abord pour des milieux stratifiés, puis pour des milieux variant continûment, Bremmer [18] propose une décomposition de l'équation d'onde en un système de deux équations différentielles couplées. Ce système permet de traduire l'évolution des composantes co-propagatives et contra-propagatives du champ de pression pour des problèmes à une dimension. Plus récemment, des travaux [36, 50] ont montré la possibilité d'étendre la notion de série de Bremmer à des problèmes à plusieurs dimensions.

Ce chapitre porte sur la décomposition du champ de pression en série de Bremmer. La décomposition en série est utilisée afin de connaître le sens de propagation des modes créés par couplages. L'objectif est de mieux comprendre la nature des couplages dûs aux variations géométriques d'un guide d'ondes. Une attention particulière sera portée sur l'interprétation de l'approximation unidirectionnelle.

Dans un premier temps, le sens de propagation des modes couplés, produits par une variation brusque de la section d'un guide d'ondes, est étudié grâce aux matrices de diffusion. Cette étude n'a pas pour but de décrire en détail le comportement des modes couplés au passage d'une discontinuité, mais sert de support à une première illustration sur la décomposition des modes guidés en fonction de leur sens de propagation. La décomposition du champ de pression pour un cas discret permet de mieux appréhender le passage à la limite continue proposé dans la seconde partie de ce chapitre. Cette seconde partie traitera de la résolution itérative de la décomposition de l'équation d'onde en fonction du sens de propagation des ondes, proposée au chapitre 1. La forme complète de l'approximation unidirectionnelle multimodale, également présentée au chapitre 1, est résolue, ce qui permet de mettre en avant son comportement par rapport au développement de l'équation d'onde.

## 5.1 Multidiffusion dans un guide d'ondes discontinu

### 5.1.1 Méthode multimodale pour les guides avec discontinuités de section

La méthode multimodale, pour l'étude des guides de section continûment variable, a été présentée au chapitre 1. Nous complétons ici la présentation de cette méthode qui nous servira de solution de référence pour la modélisation de la propagation acoustique dans des guides d'ondes avec discontinuité de section.

Dans le cas d'un guide de longueur finie (Fig. 5.1), les composantes de la pression  $P_n(x) = a_n e^{\Gamma_n x} + b_n e^{-\Gamma_n x}$  peuvent être déterminées à partir des conditions aux extrémités du guide. Par exemple, si une condition de source est placée en  $x = 0$  et qu'une condition de rayonnement est placée en  $x = L$ , l'admittance en entrée du guide peut alors se calculer :

$$Y(0) = \Gamma (\mathbf{I} + \delta) (\mathbf{I} + \delta)^{-1} \quad (5.1)$$

avec

$$\delta = e^{\Gamma L} (Y(L) + \Gamma)^{-1} (Y(L) - \Gamma) e^{\Gamma L}, \quad (5.2)$$

où  $\Gamma$  représente l'admittance caractéristique du guide et  $Y(L)$  l'admittance en sortie du guide. À partir des conditions aux deux extrémités du guide, les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  peuvent être calculés

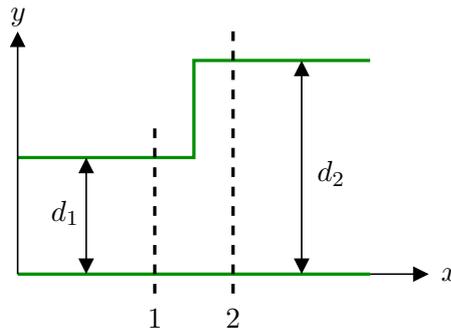
$$\begin{cases} \vec{a} = (\mathbf{I} - \delta)^{-1} \vec{P}(0) & (5.3a) \\ \vec{b} = -\delta (\mathbf{I} - \delta)^{-1} \vec{P}(0). & (5.3b) \end{cases}$$



**Fig. 5.1** – Guide d'ondes bidimensionnel de longueur finie.

Considérons maintenant le raccordement de deux guides de sections différentes (Fig. 5.2). L'écriture de la continuité de la pression et du gradient de la pression sur la plus petite section  $d_1$ , ainsi que la nullité du gradient de la pression sur le complément à  $d_1$ , c'est à dire  $d_2 - d_1$ , donne [54]

$$\vec{P}(2) = F^{-1} \vec{P}(1), \quad (5.4)$$



**Fig. 5.2** – Raccordement de deux guides de sections différentes.

et

$$\vec{Q}(2) = {}^t F \vec{Q}(1), \quad (5.5)$$

avec

$$F_{nm} = \int_{d_1} g_n(1) g_m(2) dy, \quad (5.6)$$

où les fonctions  $g_n(X)$  ( $X = 1, 2$ ) sont les modes propres du guide de section  $d_X$ . En combinant les équations (5.4) et (5.5), l'admittance est raccordée d'après la relation

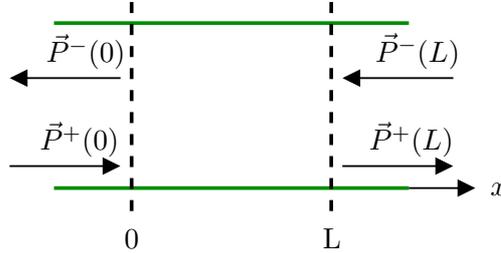
$$Y(1) = ({}^t F)^{-1} Y(2) F^{-1}. \quad (5.7)$$

### 5.1.2 Utilisation des matrices de diffusion pour la décomposition du champ de pression

Afin de réaliser une décomposition du champ de pression dans un guide discontinu, nous proposons d'utiliser les matrices de diffusion. Pour un guide d'ondes droit de longueur  $L$  (Fig. 5.3), caractérisé par sa matrice d'admittance  $\Gamma$ , la relation entre les ondes entrantes et les ondes sortantes s'écrit

$$\begin{bmatrix} \vec{P}^-(0) \\ \vec{P}^+(L) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & e^{\Gamma L} \\ e^{\Gamma L} & 0 \end{bmatrix}}_{S_{0L}} \begin{bmatrix} \vec{P}^+(0) \\ \vec{P}^-(L) \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

où  $S_{0L}$  est la matrice de diffusion sur l'intervalle  $[0, L]$ . Le guide étant uniforme, il n'y a aucune redistribution entre les modes co-propagatifs notés  $^+$  et les modes contra-propagatifs notés  $^-$ .



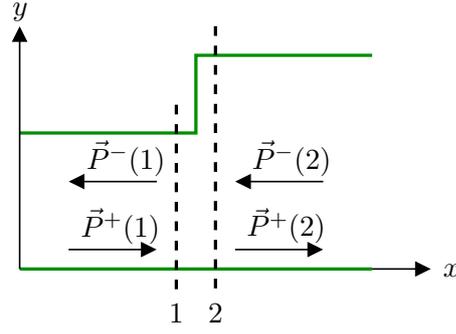
**Fig. 5.3** – Représentation des ondes entrantes et sortantes à travers un guide uniforme de longueur  $L$ .

Pour une discontinuité de section quelconque reliant deux guides d'ondes droits semi-infinis (Fig. 5.4),  $R_{12}^+$  et  $T_{12}^+$  sont les matrices des coefficients de réflexion et de transmission d'une onde incidente  $\vec{P}^+(1)$  se propageant vers les  $x$  croissants. De même,  $R_{12}^-$  et  $T_{12}^-$  sont les matrices des coefficients de réflexion et de transmission d'une onde incidente  $\vec{P}^-(2)$  se propageant vers les  $x$  décroissants. Les ondes "entrantes" ( $\vec{P}^+(1)$  et  $\vec{P}^-(2)$ ) et les ondes "sortantes" ( $\vec{P}^-(1)$  et  $\vec{P}^+(2)$ ) sont reliées entre elles grâce à la relation

$$\begin{bmatrix} \vec{P}^-(1) \\ \vec{P}^+(2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{12}^+ & T_{12}^- \\ T_{12}^+ & R_{12}^- \end{bmatrix}}_{S_{12}} \begin{bmatrix} \vec{P}^+(1) \\ \vec{P}^-(2) \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

où  $S_{12}$  est la matrice de diffusion de la discontinuité située entre  $x = 1$  et  $x = 2$  (Fig. 5.4).

Au passage d'une discontinuité, l'onde incidente  $\vec{P}_i(1)$ , se propageant dans le sens des  $x$  croissants, donne lieu à une onde réfléchie  $\vec{P}_r(1)$  et une onde transmise  $\vec{P}_t(2)$ . Dans ce cas, les



**Fig. 5.4** – Représentation des ondes entrantes et sortantes à travers une discontinuité.

équations de continuité (5.4) et (5.5) s'écrivent

$$\begin{cases} \left( \vec{P}_i(1) + \vec{P}_r(1) \right) = F_{12} \vec{P}_t(2), & (5.10a) \\ {}^t F_{12} \Gamma_1 \left( \vec{P}_i(1) - \vec{P}_r(1) \right) = \Gamma_2 \vec{P}_t(2). & (5.10b) \end{cases}$$

Par définition,  $\vec{P}_r(1) = R_{12}^+ \vec{P}_i(1)$  et  $\vec{P}_t(2) = T_{12}^+ \vec{P}_i(1)$ . Les équations de continuité (5.10a) et (5.10b) permettent alors d'exprimer les matrices de réflexion et de transmission  $R_{12}^+$  et  $T_{12}^+$  pour une onde se propageant dans le sens des  $x$  croissants :

$$\begin{cases} R_{12}^+ = \left( {}^t F_{12} \Gamma_1 + \Gamma_2 F_{12}^{-1} \right)^{-1} \left( {}^t F_{12} \Gamma_1 - \Gamma_2 F_{12}^{-1} \right), & (5.11a) \\ T_{12}^+ = F_{12}^{-1} \left( \mathbf{I} + R_{12}^+ \right), & (5.11b) \end{cases}$$

où les matrices  $\Gamma_X$  ( $X = 1, 2$ ) correspondent aux matrices d'admittance caractéristiques des guides de section  $d_X$ .

Pour une onde incidente  $\vec{P}_i(2)$  traversant une discontinuité dans le sens des  $x$  décroissants, les équations de continuité prennent alors la forme

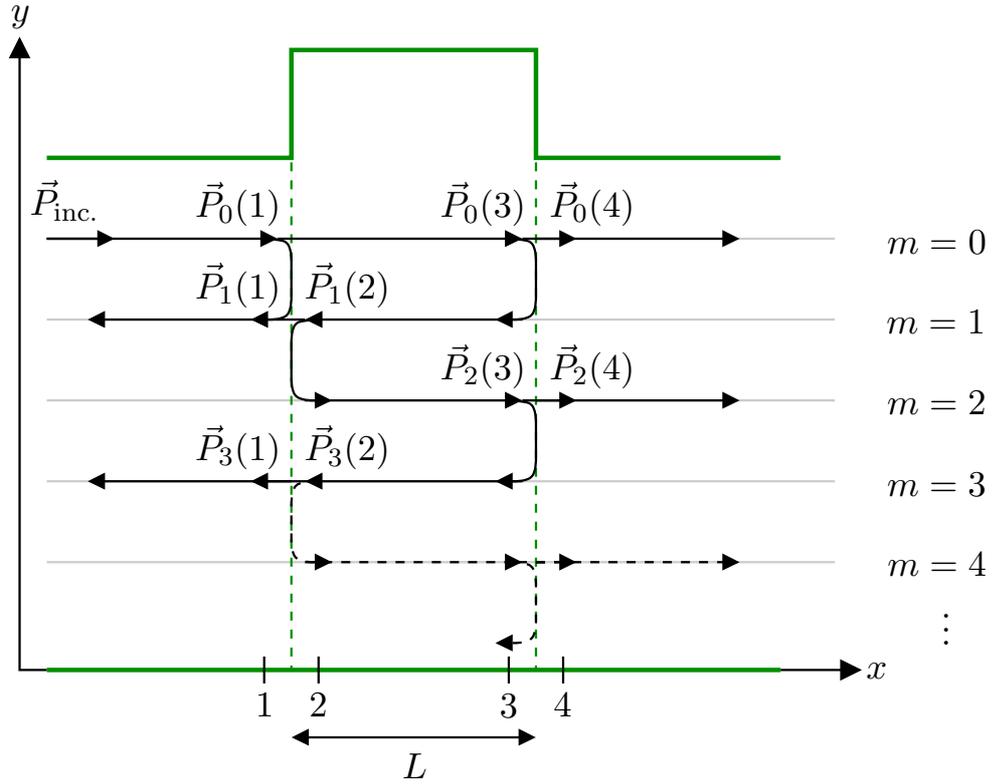
$$\begin{cases} \vec{P}_t(1) = F_{12} \left( \vec{P}_i(2) + \vec{P}_r(2) \right), & (5.12a) \\ {}^t F_{12} \Gamma_1 \vec{P}_t(1) = \Gamma_2 \left( \vec{P}_i(2) - \vec{P}_r(2) \right). & (5.12b) \end{cases}$$

De la même manière que précédemment, les matrices de réflexion et de transmission  $R_{12}^-$  et  $T_{12}^-$ , pour une onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants, s'écrivent

$$\begin{cases} R_{12}^- = \left( {}^t F_{12}^{-1} \Gamma_2 + \Gamma_1 F_{12} \right)^{-1} \left( {}^t F_{12}^{-1} \Gamma_2 - \Gamma_1 F_{12} \right), & (5.13a) \\ T_{12}^- = F_{12} \left( \mathbf{I} + R_{12}^- \right). & (5.13b) \end{cases}$$

### 5.1.3 Multidiffusion dans un créneau

En utilisant les matrices de diffusion présentées précédemment, il est possible de suivre l'évolution d'une onde incidente se propageant à travers un guide discontinu. Au passage d'une première discontinuité de section, l'onde incidente sera en partie réfléchiée et en partie transmise. Il en sera de même pour toutes les ondes transmises et réfléchiées, générées lors d'un passage par une discontinuité, qui pourront à leur tour donner naissance à un autre couple d'ondes réfléchiées et transmises. La somme de toutes ces ondes multidiffusées constitue la solution complète en régime harmonique de l'équation d'onde.



**Fig. 5.5** – Représentation de la multidiffusion, le champ de pression est décomposé en fonction de l'indice  $m$ .

Nous allons étudier ici l'exemple de deux guides semi-infinis de même section, reliés entre eux par un guide de section différente de longueur finie. Cette discontinuité de section peut être vue comme l'association de trois éléments : une expansion de section, un guide d'ondes droit de longueur  $L$  et une réduction de section. La figure 5.5 représente la série de transmissions et de réflexions que génère une onde incidente  $\vec{P}_{\text{inc.}}$  lors de son passage à travers une telle discontinuité.

La décomposition du champ de pression en un point  $x$  quelconque peut s'écrire

$$\vec{P}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \vec{P}_m(x), \quad (5.14)$$

avec l'indice  $m$  indiquant le nombre de changements de direction de propagation du mode  $\vec{P}_m$  par rapport à l'onde incidente. De manière générale, les indices  $m$  pairs correspondent aux modes propagés dans la direction des  $x$  croissants, tandis que les indices  $m$  impairs correspondent aux modes propagés dans la direction des  $x$  décroissants.

La transmission directe du mode incident ( $m = 0$ ) peut être assimilée à l'approximation unidirectionnelle (absence de changement de direction de propagation) et s'écrit

$$\vec{P}_0(4) = T_{34}^+ \underbrace{e^{\Gamma_2 L} T_{12}^+}_{\vec{P}_0(3)} \vec{P}_0(1), \quad (5.15)$$

où  $\vec{P}_0(1)$  correspond à l'onde incidente propagée jusqu'au point de coordonnée  $x = 1$ . Comme le montre la figure 5.5, la transmission suivante ( $m = 2$ ) est issue des réflexions du mode  $\vec{P}_0(3)$ ,

le mode co-propagatif  $\vec{P}_2$  a pour expression en  $x = 4$  :

$$\vec{P}_2(4) = T_{34}^+ \underbrace{e^{\Gamma_2 L} R_{12}^- e^{\Gamma_2 L} R_{34}^+}_{\vec{P}_2(3)} \vec{P}_0(3). \quad (5.16)$$

Comme on peut le constater avec cette expression, il est possible d'identifier une relation de récurrence entre les modes co-propagatifs à l'ordre  $m$  et ceux à l'ordre  $m + 2$  (pour  $m$  pair et différent de 0), sous la forme

$$\vec{P}_{m+2}(3) = \Xi \vec{P}_m(3), \quad (5.17)$$

où  $\Xi = e^{\Gamma_2 L} R_{12}^- e^{\Gamma_2 L} R_{34}^+$ .

Le champ transmis à travers la discontinuité correspond à la somme de tous les modes  $\vec{P}_m$  où  $m$  est pair. On définit le mode  $\vec{P}_t$  comme étant la transmission de l'onde incidente  $\vec{P}_{\text{inc.}}$  à travers la discontinuité. D'après l'équation (5.15) et d'après la relation de récurrence (5.17), ce mode a pour expression

$$\vec{P}_t(4) = T_{34}^+ \underbrace{\left( \sum_{m=0}^{+\infty} \Xi^{\frac{m}{2}} e^{\Gamma_2 L} T_{12}^+ \right)}_{\mathcal{T}_m} \vec{P}_0(1), \quad m \in \mathbb{N} \mid m \text{ pair}. \quad (5.18)$$

La matrice  $\mathcal{T}_m$  correspond à la matrice de transmission de l'ensemble de la discontinuité (sur l'intervalle  $[1, 4]$ ), où l'indice  $m$  qui lui est associé est pair. L'approximation unidirectionnelle correspond par construction à l'ordre 0 de ce développement ( $\Xi^0 = \mathbf{I}$ ).

De manière similaire, il est possible d'exprimer la contribution de la partie réfléchie du champ de pression. Comme le montre la figure 5.5, la première réflexion ( $m = 1$ ) se compose d'une onde réfléchie à l'entrée de la discontinuité ( $x = 1$ ) et d'une onde réfléchie à la sortie de la discontinuité ( $x = 3$ ). La somme de ces deux ondes peut s'écrire

$$\vec{P}_1(1) = \left( R_{12}^+ + T_{12}^- \underbrace{e^{\Gamma_2 L} R_{34}^+ e^{\Gamma_2 L} T_{12}^+}_{\vec{P}_1(2)} \right) \vec{P}_0(1). \quad (5.19)$$

La réflexion suivante est uniquement constituée de la réflexion du mode contra-propagatif  $\vec{P}_1(2)$  qui est ensuite réfléchi à nouveau en  $x = 3$  :

$$\vec{P}_3(1) = T_{12}^- \underbrace{e^{\Gamma_2 L} R_{34}^+ e^{\Gamma_2 L} R_{12}^-}_{\vec{P}_3(2)} \vec{P}_1(2). \quad (5.20)$$

Une fois encore, il est possible d'identifier une relation de récurrence entre les modes contra-propagatifs à l'ordre  $m$  et ceux à l'ordre  $m + 2$  (pour  $m$  impair et différent de 0) sous la forme

$$\vec{P}_{m+2}(1) = \Theta \vec{P}_m(1), \quad (5.21)$$

où  $\Theta = e^{\Gamma_2 L} R_{34}^+ e^{\Gamma_2 L} R_{12}^-$ .

Le champ réfléchi par la discontinuité correspond à la somme de tous les modes  $\vec{P}_m$  où  $m$  est impair. On définit le mode  $\vec{P}_r$  comme étant la réflexion de l'onde incidente  $\vec{P}_{\text{inc.}}$  par la discontinuité. D'après l'équation (5.19) et d'après la relation de récurrence (5.21), ce mode a pour expression

$$\vec{P}_r(1) = \underbrace{\left( R_{12}^+ + T_{12}^- \sum_{m=1}^{+\infty} \Theta^{\frac{m+1}{2}} e^{\Gamma_2 L} R_{34}^+ e^{\Gamma_2 L} T_{12}^+ \right)}_{\mathcal{R}_m} \vec{P}_0(1), \quad m \in \mathbb{N}^* \mid m \text{ impair}. \quad (5.22)$$

La matrice  $\mathcal{R}_m$  correspond à la matrice de réflexion de l'ensemble de la discontinuité (sur l'intervalle  $[1, 4]$ ), où l'indice  $m$  qui lui est associé est impair.

### 5.1.4 Convergence de la série

La convergence de la série est calculée à partir de l'erreur relative  $\epsilon_1$  (Eq. (2.15)) entre la solution complète et le champ de pression développé à un ordre  $m$  quelconque :

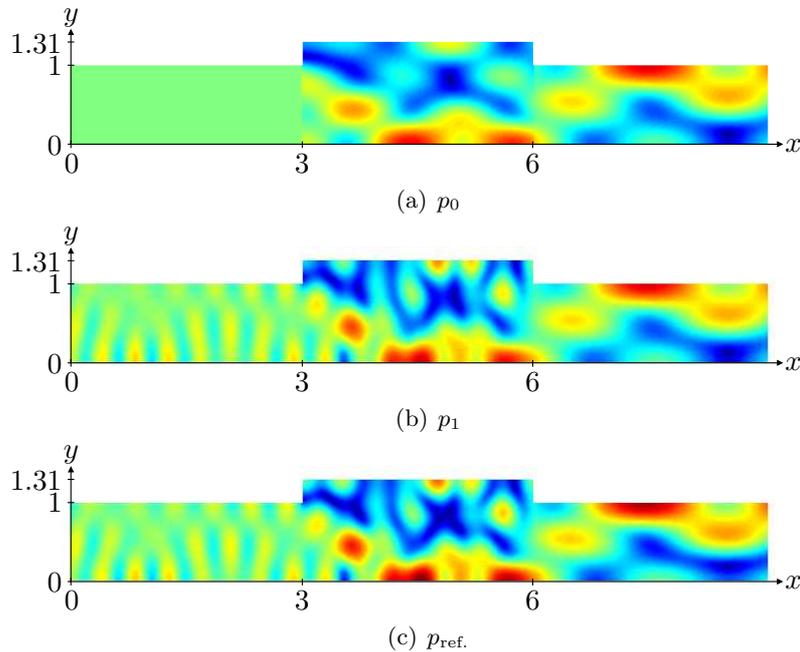
$$p_m(x, y) = {}^t \vec{g}(y) \left( \sum_m \vec{P}_m(x) \right), \quad (5.23)$$

où les modes propres du guide  $g_n$  sont exprimés sous forme d'un vecteur colonne. Les modes  $\vec{P}_m$  peuvent être facilement calculés en tout point d'un guide droit. Par exemple, sur l'intervalle  $x = [2, 3]$ , on utilise le propagateur  $e^{\Gamma_{2x}}$  pour calculer le mode  $\vec{P}_m(x) = e^{\Gamma_{2x}} \vec{P}_m(2)$ .

Les cartographies, présentées à la figure 5.6, représentent le champ de pression pour un développement de la série à l'ordre 0, à l'ordre 1 ainsi que la solution complète. Pour cet exemple, le créneau est de longueur  $T = 3$  et de hauteur  $a = 0.31$  (Fig. 5.7), la longueur d'onde est telle que  $k/\pi = 2.5$ , l'onde incidente est un mode plan se propageant dans le sens des  $x$  croissants.

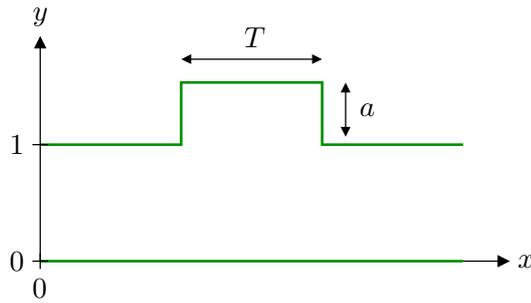
Par comparaison avec la solution complète (Fig. 5.6(c)), on constate que l'approximation unidirectionnelle du champ de pression (Fig. 5.6(a)) donne une bonne évaluation du champ transmis en sortie de la discontinuité ( $x > 6$ ). Dans la zone de la discontinuité ( $x = [3, 6]$ ), la localisation des interférences est moins satisfaisante.

En ajoutant à l'approximation unidirectionnelle la contribution de la première réflexion ( $p_1$ ), on constate que le champ de pression obtenu (Fig. 5.6(b)) est alors très proche de la solution complète. Pour cette géométrie, il apparaît qualitativement qu'un développement à l'ordre supérieur de la série n'influe pas de manière significative sur le motif interférentiel.



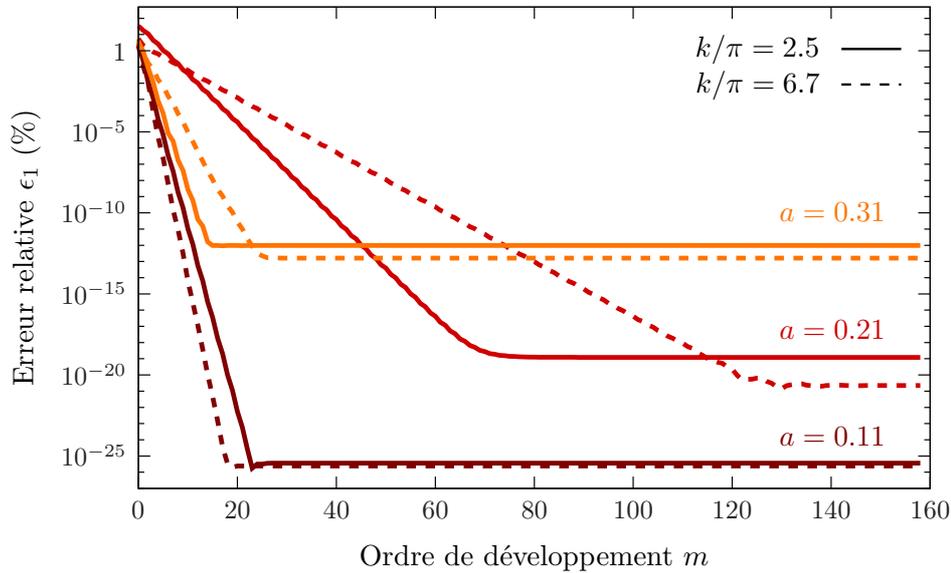
**Fig. 5.6** – Cartographie du module de la pression en fonction de l'ordre de développement,  $k/\pi = 2.5$ ,  $a = 0.31$  et  $T = 3$ , l'onde incidente est un mode plan se propageant dans le sens des  $x$  croissants.

Plus quantitativement, la figure 5.8 présente l'évolution de l'erreur relative  $\epsilon_1$  sur le champ de pression en fonction de l'ordre de développement de la série. L'erreur décroît exponentiellement avec des pentes variables en fonction de la longueur d'onde et de la géométrie de la discontinuité. Les différents niveaux d'erreurs aux limites asymptotiques sont dus à la précision



**Fig. 5.7** – Géométrie de la discontinuité étudiée.

de l'intégration lors du calcul de  $\epsilon_1$ . Pour la hauteur  $a = 0.21$ , la convergence est plus lente. Cela s'explique puisque, pour les nombres d'ondes  $k/\pi = 2.5$  et  $k/\pi = 6.7$ , une résonance a lieu dans la discontinuité. En effet, pour ces nombres d'ondes, une largeur de guide de 1.2 correspond à un nombre entier de demi-longueurs d'ondes.



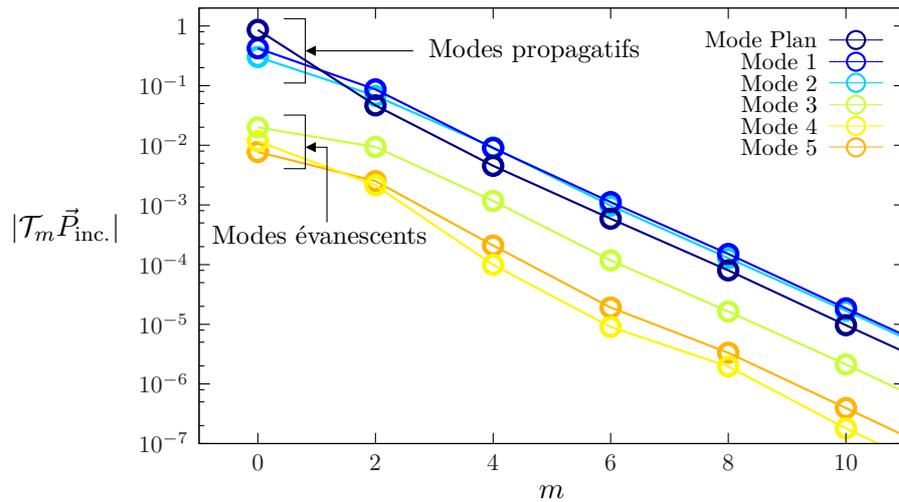
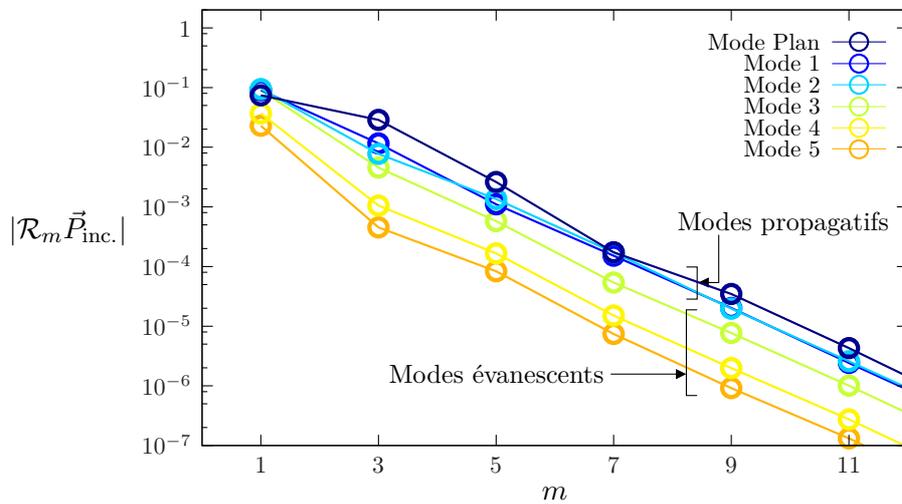
**Fig. 5.8** – Convergence de la série,  $k/\pi$  et  $a$  sont variables,  $T = 3$  et l'onde incidente est un mode plan se propageant dans le sens des  $x$  croissants.

### 5.1.5 Sens de propagation des modes couplés

Les matrices de transmission  $\mathcal{T}$  et de réflexion  $\mathcal{R}$ , définies précédemment (partie 5.1.3), nous renseignent directement sur le sens de propagation des modes générés en entrée et en sortie de la discontinuité.

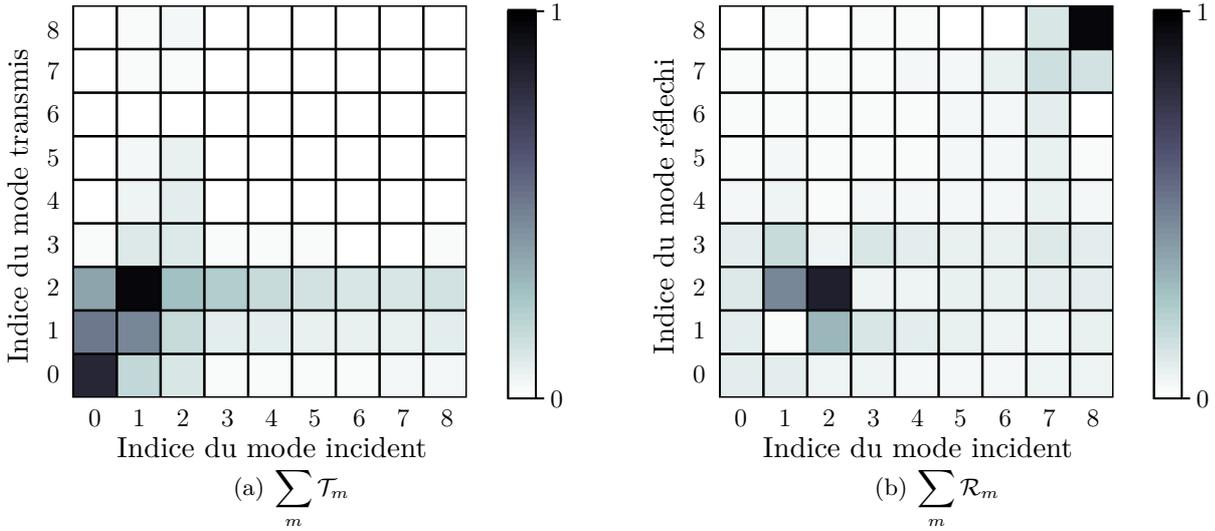
Le produit  $\mathcal{T}_m \vec{P}_{\text{inc}}$  donne, pour un ordre de développement  $m$  pair, les amplitudes des modes co-propagatifs  $\vec{P}_m$  en sortie de discontinuité. De même, le produit  $\mathcal{R}_m \vec{P}_{\text{inc}}$  donne, pour un ordre de développement  $m$  impair et différent de zéro, les amplitudes des modes contra-propagatifs  $\vec{P}_m$  en entrée de discontinuité.

La figure 5.9 présente les différentes contributions des amplitudes des modes co-propagatifs et contra-propagatifs en fonction de l'ordre de développement  $m$ . La géométrie du guide et les paramètres acoustiques choisis pour cet exemple sont les mêmes que ceux utilisés précédemment à la figure 5.6 ( $a = 0.31$ ,  $T = 3$ ,  $k/\pi = 2.5$  avec  $\vec{P}_{\text{inc}}$  le mode plan). Par comparaison entre

(a) Modes couplés vers les  $x$  croissants(b) Modes couplés vers les  $x$  décroissants

**Fig. 5.9** – Module de l'amplitude des modes co-propagatifs et contra-propagatifs en fonction de l'ordre de développement  $m$ ,  $k/\pi = 2.5$ ,  $a = 0.31$ ,  $T = 3$ ,  $\vec{P}_{inc}$  est le mode plan.

les figures 5.9(a) et 5.9(b), il apparaît que les couplages vers les modes co-propagatifs sont de plus grandes amplitudes que les couplages vers les modes contra-propagatifs. Par ailleurs, les couplages vers les modes évanescents sont de plus grandes amplitudes dans le cas des modes contra-propagatifs (plus particulièrement pour le mode 3). Indépendamment de la direction des modes couplés, la contribution des modes  $\vec{P}_m$  est d'autant plus faible que l'ordre  $m$  est important. L'évolution de l'amplitude des modes  $\vec{P}_m$  est exponentiellement décroissante, ce qui est cohérent avec le comportement convergent de la série observée précédemment (Fig. 5.8). Pour cet exemple, le mode plan est incident et dans le cadre de la transmission directe ( $m = 0$ ), c'est ce même mode plan qui est majoritairement couplé. Ce n'est plus le cas pour les transmissions suivantes ( $m \geq 2$ ), pour lesquelles l'amplitude des modes n'a plus la même hiérarchie. Cependant, à partir de l'ordre  $m = 6$ , la classification au niveau de l'amplitude des modes est inchangée malgré la diminution continue des amplitudes. On remarque le même type de comportement pour les modes contra-propagatifs.



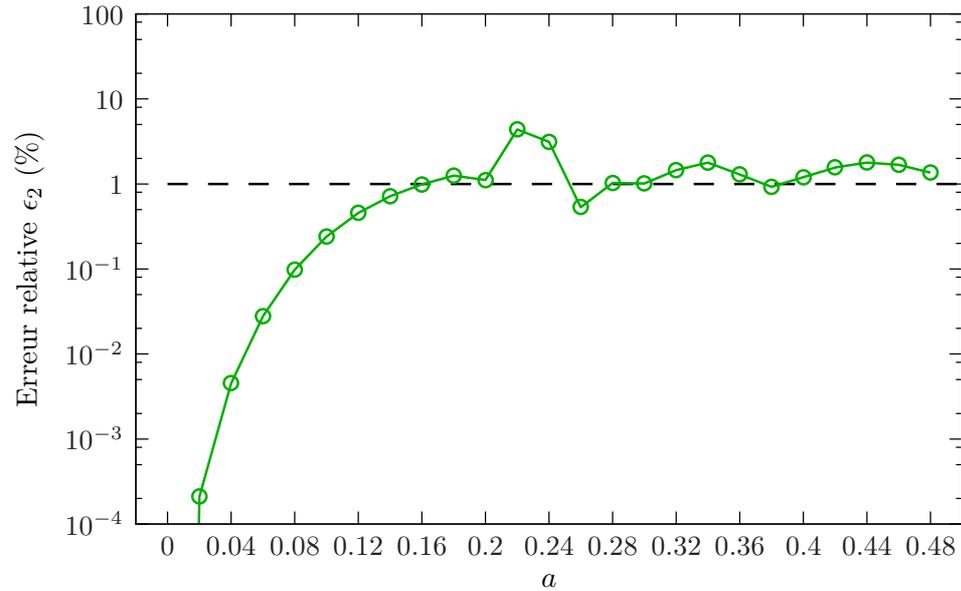
**Fig. 5.10** – Matrice de transmission et de réflexion d’une discontinuité ( $a = 0.31$ ,  $T = 3$  et  $k/\pi = 2.5$ ).

La nature du mode incident a une grande importance sur l’amplitude et sur le sens de propagation des modes couplés. La somme des coefficients de réflexion  $\sum_m \mathcal{R}_m$  et la somme des coefficients de transmission  $\sum_m \mathcal{T}_m$  donnent la composition des modes couplés en entrée et en sortie de la discontinuité, en fonction de la nature du mode incident.

Présentées sous forme de cartographie à la figure 5.10, ces deux grandeurs renseignent sur les différents types de couplages possibles pour une même géométrie de guide d’ondes (dans ce cas  $a = 0.31$ ,  $T = 3$ ,  $k/\pi = 2.5$ ). Pour une onde plane incidente, on retrouve bien le comportement vu précédemment : l’onde incidente se couple principalement vers des modes co-propagatifs et très peu vers des modes contra-propagatifs. Par ailleurs, si l’onde incidente est un mode 2, il se produira un fort couplage qui redirigera l’onde incidente vers l’arrière (sens des  $x$  décroissants). Pour le cas où l’onde incidente est un mode 1, on constate un fort couplage vers le mode 2 en transmission et en réflexion. Dans le cas d’une condition incidente complexe (composition de plusieurs modes incidents) telle qu’un faisceau gaussien, il n’est pas rare que les modes évanescents soient également sollicités. Pour le cas présenté ici, des modes évanescents incidents se coupleront en transmission de manière non négligeable vers le mode propagatif 2.

En amont du calcul du champ de pression, ce type de représentation permet d’évaluer facilement l’impact d’une discontinuité de section sur les couplages entre les modes, en fonction de la nature de l’onde incidente et des paramètres géométriques de la discontinuité. Contrairement à une matrice d’admittance, les matrices de transmission  $\mathcal{T}$  et de réflexion  $\mathcal{R}$  renseignent directement sur la direction de propagation des modes couplés.

Pour évaluer l’impact sur le champ de pression de la contribution des modes directement transmis, l’erreur relative  $\epsilon_2$  (Eq. (2.16)) entre le champ directement transmis et la solution de référence est calculée en sortie de la discontinuité (Fig. 5.11). On constate que la contribution majoritaire des modes  $\vec{P}_0$  permet d’obtenir une bonne approximation du champ de pression en aval de la discontinuité. Ceci s’explique par le fait que les hauteurs de discontinuités restent faibles devant la longueur d’onde ( $\lambda = 0.8$ ).



**Fig. 5.11** – Erreur relative  $\epsilon_2$  sur le champ de pression transmis directement ( $m = 0$ ) en sortie de la discontinuité,  $k/\pi = 2.5$ ,  $T = 3$ ,  $\vec{P}_{inc.}$  est le mode plan.

### 5.1.6 Conclusion

Cette première partie de chapitre présente une introduction à la décomposition du champ de pression en série, pour le cas des guides d'ondes de géométries discontinues. Ainsi, les matrices de diffusion ont été utilisées afin d'opérer une décomposition en série du champ de pression. Pour un exemple donné, cette décomposition a permis d'étudier le sens de propagation des modes couplés. Il est apparu que la validité de l'approximation unidirectionnelle pouvait être estimée, en amont du calcul d'un champ de pression, grâce aux matrices de diffusion. Cette approximation peut être utilisée pour la modélisation de la propagation acoustique dans des guides d'ondes de géométries discontinues, à condition que les paramètres géométrique ainsi que la condition initiale soient favorables à un couplage majoritaire des modes guidés dans le sens de propagation privilégiée.

Une grande partie des résultats sont présentés pour  $k/\pi = 2.5$ . Ce choix a été fait pour limiter le nombre de modes propagatifs et ainsi faciliter la lecture des différents résultats. L'augmentation du nombre de modes propagatifs ne vient pas modifier les tendances mises en avant dans cette étude. La méthode de décomposition en série par matrice de diffusion peut également être utilisée pour des guides comportant des discontinuités plus complexes (nombre de discontinuités, hauteur des discontinuités, ...).

## 5.2 Série de Bremmer dans des guides d'ondes bidimensionnels à variation de section continue

Cette partie traite de la décomposition du champ de pression en série de Bremmer à l'intérieur d'un guide d'ondes irrégulier. La démarche proposée par Bremmer [18] est reprise pour résoudre le système d'équations différentielles représentant la décomposition de l'équation d'onde multimodale en fonction du sens de propagation des ondes. En reprenant les notations utilisées à la partie 1.2, ce système d'équations s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \vec{P}^+ \\ \vec{P}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' + \alpha & \beta \\ \beta & -\Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P}^+ \\ \vec{P}^- \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

avec

$$\alpha = -\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}\Gamma^{-1}{}^tF\Gamma \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2}\Gamma^{-1}\Gamma' - \frac{1}{2}F - \frac{1}{2}\Gamma^{-1}{}^tF\Gamma. \quad (5.25)$$

Ce système d'équations différentielles couplées est résolu par itération.

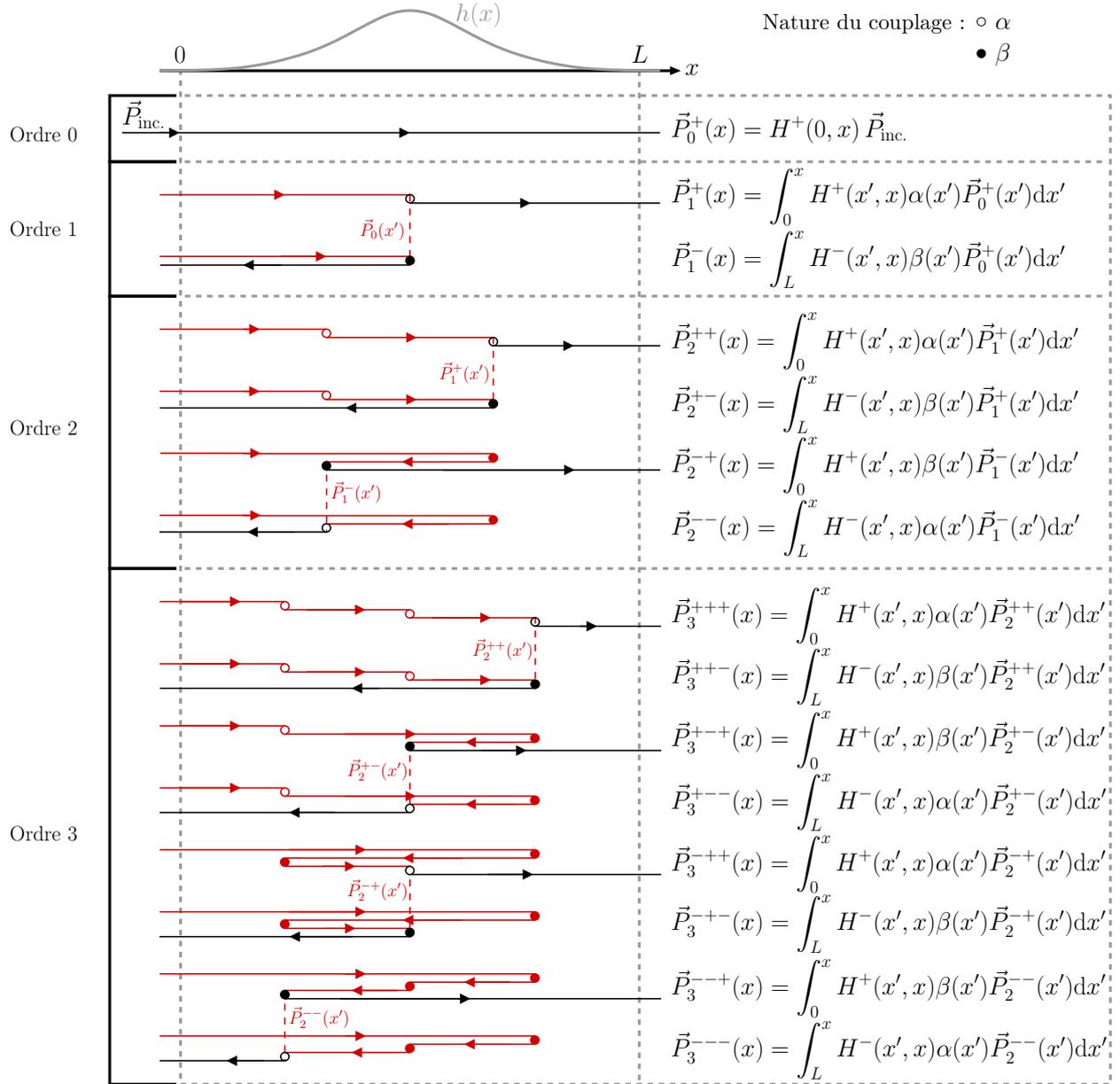
### 5.2.1 Décomposition en ordres : introduction

Une décomposition en série du système (5.24) est nécessaire afin de pouvoir le résoudre itérativement. Pour cela, le parcours des ondes acoustiques est approché par une série de rayons, classés en fonction du nombre de réflexions réalisées lors de leur propagation. Le premier terme de cette série correspond à l'approximation WKB [18]. Pour des guides d'ondes irréguliers, des réflexions sont engendrées par la variation de largeur du guide d'ondes. L'ordre de développement de la série correspond alors aux nombres de couplages co-propagatifs ou contra-propagatifs réalisés par les ondes lors de leur propagation.

La figure 5.12 représente la décomposition du champ de pression en série de Bremmer, pour une onde incidente  $\vec{P}_{inc}$  se propageant dans le sens des  $x$  croissants à l'intérieur d'un guide d'ondes de section variable. Dans la colonne de gauche de cette figure, les différentes flèches indiquent les trajets pouvant être empruntés par les ondes acoustiques. Le symbole "o" schématise un couplage sans changement du sens de propagation ; ce type de couplage est représenté dans le système (5.24) par la matrice  $\alpha$ . Le symbole "•" schématise quant à lui un couplage qui a pour effet de changer le sens de propagation des ondes ; ce type de couplage est représenté dans le système (5.24) par la matrice  $\beta$ . Les solutions itératives de la série de Bremmer sont présentées dans la colonne de droite de la figure 5.12 pour chaque trajet correspondant. Leur formulation ainsi que les différentes notations qui sont utilisées sont présentées par la suite. L'ordre de décomposition d'une onde  $\vec{P}_m$  dans la série de Bremmer est représenté par son indice  $m$ . Cet indice correspond au nombre de couplages  $\alpha$  ou  $\beta$  réalisés par cette onde lors de sa propagation. De plus, les signes  $+$  ou  $-$  mis en exposant sur les vecteurs permettent de connaître le trajet emprunté par les ondes. L'enchaînement de ces signes, se lisant de gauche à droite, indique les éventuels changements de direction issus des différents couplages. Excepté à l'ordre 0, le nombre de signes  $+$  ou  $-$  correspond forcément à l'ordre du développement indiqué par l'indice  $m$ . Par exemple, l'onde  $\vec{P}_2^{+-}$  est issue d'un couplage co-propagatif de l'onde  $\vec{P}_0^+$  générant l'onde  $\vec{P}_1^+$ , qui est en suite couplée dans le sens des  $x$  décroissants.

### 5.2.2 Décomposition en ordres : résolution itérative

Par définition, l'ordre 0 de la série de Bremmer correspond à l'approximation WKB. Pour le cas bidimensionnel, cette approximation représente la propagation adiabatique (sans couplage) des modes transverses. Obtenue par l'annulation des termes de couplages  $\alpha$  et  $\beta$  dans le système



**Fig. 5.12** – Représentation de la décomposition du champ de pression en série de Bremmer pour une onde incidente se propageant dans le sens des  $x$  croissants. L'ordre de la série correspond au nombre de couplages des ondes tout au long de leurs propagations. Les symboles " $\circ$ " et " $\bullet$ " représentent respectivement les couplages de type  $\alpha$  et  $\beta$ . Les différentes flèches représentent les trajets pouvant être empruntés par les ondes acoustiques. Les équations de droite représentent la forme itérative des solutions de la série de Bremmer pour chaque trajet.

d'équations (5.24), l'évolution des composantes du champ de pression à l'ordre 0 prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{P}_0^{+'} = \left( \Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' \right) \vec{P}_0^+, & (5.26a) \\ \vec{P}_0^{-'} = \left( -\Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' \right) \vec{P}_0^-. & (5.26b) \end{cases}$$

Pour une onde incidente  $\vec{P}_{\text{inc.}}$  se propageant dans le sens des  $x$  croissants dans un guide de longueur infinie, les solutions des équations (5.26a) et (5.26b) s'écrivent

$$\vec{P}_0^+(x) = H^+(0, x) \vec{P}_{\text{inc.}}, \quad (5.27)$$

et

$$\vec{P}_0^- = 0, \quad (5.28)$$

où la matrice  $H^+$  représente le propagateur adiabatique pour les modes co-propagatifs. Les termes de cette matrice sont définis d'après la relation

$$H_{nm}^+(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{k_n(x_1)}{k_n(x_2)}} e^{i \int_{x_1}^{x_2} k_n(s) ds} \delta_{nm}. \quad (5.29)$$

De même, une matrice  $H^-$ , représentant le propagateur adiabatique pour les modes contra-propagatifs, peut être définie. Les termes de cette matrice s'écrivent

$$H_{nm}^-(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{k_n(x_1)}{k_n(x_2)}} e^{-i \int_{x_1}^{x_2} k_n(s) ds} \delta_{nm}. \quad (5.30)$$

Pour ces deux propagateurs, le terme exponentiel traduit l'évolution de la phase des ondes acoustiques. La racine carrée qui lui est associée représente la variation de l'amplitude des ondes.

Comme présenté à la figure 5.12, l'ordre 1 de la série de Bremmer est constitué par deux contributions, correspondant aux couplages co-propagatifs et contra-propagatifs de l'onde  $\vec{P}_0^+(x)$ . L'approximation de l'équation d'onde à l'ordre 1 s'écrit

$$\begin{cases} \vec{P}_1^{+'} = \left( \Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' \right) \vec{P}_1^+ + \alpha \vec{P}_0^+, & (5.31a) \\ \vec{P}_1^{-'} = \left( -\Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' \right) \vec{P}_1^- + \beta \vec{P}_0^+. & (5.31b) \end{cases}$$

Pour les ordres de développement supérieurs à 1, les composantes co-propagative et contra-propagative du champ de pression reçoivent respectivement la contribution des ondes réfléchies et transmises qui changent de sens de propagation par couplage  $\beta$ . Ainsi, une relation de récurrence peut prendre la forme

$$\begin{cases} \vec{P}_{m+1}^{+'} = \left( \Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' \right) \vec{P}_{m+1}^+ + \alpha \vec{P}_m^+ + \beta \vec{P}_m^-, & (5.32a) \\ \vec{P}_{m+1}^{-'} = \left( -\Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' \right) \vec{P}_{m+1}^- + \alpha \vec{P}_m^- + \beta \vec{P}_m^+. & (5.32b) \end{cases}$$

Comme pour l'ordre 1 de la série, ce système d'équations différentielles est résolu par itération. Pour une série de Bremmer allant jusqu'à l'ordre 3, les solutions correspondantes sont présentées à la figure 5.12. Ces solutions sont exprimées sous forme d'équations intégrales de Volterra du premier type.

Par exemple, la solution de l'équation (5.31a) correspond à la somme de toutes les contributions venant des ondes  $\vec{P}_0^+(x')$  s'étant couplées vers la droite, puis propagées jusqu'au point  $x$ , ce qui s'écrit

$$\vec{P}_1^+(x) = \int_0^x H^+(x', x) \alpha(x') \vec{P}_0^+(x') dx'. \quad (5.33)$$

De même, l'onde  $\vec{P}_1^-(x)$  correspond à la somme de toutes les contributions des ondes  $\vec{P}_0^+(x')$  s'étant couplées vers la gauche, puis rétro-propagées jusqu'au point  $x$ , ce qui correspond à

$$\vec{P}_1^-(x) = \int_L^x H^-(x', x) \beta(x') \vec{P}_0^+(x') dx'. \quad (5.34)$$

Les solutions des deux équations différentielles constituant la relation de récurrence (5.32) sont décomposées en plusieurs solutions élémentaires. En effet, comme le montre la figure 5.12, au-delà de l'ordre 1 les contributions co-propagatives et contra-propagatives peuvent avoir différentes origines. Les contributions co-propagatives  $\vec{P}_{m+1}^{\dots+}$  proviennent des ondes transmises qui sont couplées sans changement de sens de propagation ( $\alpha \vec{P}_m^{\dots+}$ ) mais également des ondes réfléchies qui sont couplées en changeant de sens de propagation ( $\beta \vec{P}_m^{\dots-}$ ). De même, les contributions contra-propagatives  $\vec{P}_{m+1}^{\dots-}$  proviennent des ondes réfléchies couplées sans changement de sens de propagation ( $\alpha \vec{P}_m^{\dots-}$ ) mais également des ondes transmises qui sont couplées en changeant de sens propagation ( $\beta \vec{P}_m^{\dots+}$ ). Par conséquent, les ondes à l'ordre  $m$  donnent toutes naissance à deux autres ondes à l'ordre  $m+1$ . Ainsi, pour un ordre  $m$  quelconque, il y a  $2^m$  équations intégrales à calculer. Ces équations intégrales, solutions des composantes de chaque ordre de la série, sont calculées numériquement.

### 5.2.3 Méthode de résolution numérique

Une méthode de résolution numérique est mise au point afin de calculer, à un ordre donné, toutes les ondes décomposant le champ de pression en série de Bremmer. Cette méthode est basée sur l'utilisation sous Matlab de l'environnement Chebfun [11, 73], développé par le groupe d'analyse numérique de l'Université d'Oxford. L'usage de Chebfun permet une utilisation simplifiée des méthodes de calcul numérique appliquées aux fonctions continues.

Ainsi, l'évolution des composantes du vecteur  $\vec{P}_0^+$  est interpolée en polynômes de Chebyshev, et il en est de même pour les fonctions continues décrivant l'évolution des termes des matrices  $H^+$ ,  $H^-$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ . Cependant, Chebfun ne peut pas créer de polynôme de Chebyshev à deux variables, les termes des matrices  $H^+$  et  $H^-$  sont alors décomposés en deux fonctions dépendant de  $x$  et  $x'$  sous la forme

$$H_{nm}^\pm(x', x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k_n(x)}} e^{\pm i \int_0^x k_n(s) ds}}_{\text{Fonction de } x} \underbrace{\sqrt{k_n(x')} e^{\mp i \int_0^{x'} k_n(s) ds}}_{\text{Fonction de } x'} \delta_{nm}. \quad (5.35)$$

L'utilisation de polynômes de Chebyshev permet un calcul rapide et précis des équations intégrales de Volterra constituant les solutions sous forme itérative de la série de Bremmer. Par exemple, pour le calcul de l'équation intégrale (5.33), les composantes du vecteur obtenu lors du calcul du produit matriciel  $H^+(x', x) \alpha(x') \vec{P}_0^+(x')$  correspondent chacune à un polynôme de Chebyshev. La somme cumulée des coefficients de ces polynômes permet alors de calculer les intégrales à borne variable pour chacune des composantes du vecteur  $\vec{P}_1^+(x)$ . Ainsi, l'évolution des composantes de ce vecteur est également représentée par un ensemble de fonctions continues, ce qui assure une grande précision dans le calcul itératif aux ordres suivants.

Cette méthode de résolution numérique comporte une limitation au niveau de la prise en compte des modes évanescents. Lors de la décomposition des matrices  $H^+$  et  $H^-$ , un terme exponentiel sous la forme  $e^{-i \int_0^x k_n(s) ds}$  apparaît. Pour les modes évanescents, le nombre d'onde  $k_n$  est imaginaire pur, ce qui rend l'argument de la fonction exponentielle réel, pur et positif. Ce terme a une valeur qui augmente très rapidement en fonction de  $x$ . Lorsque sa variation maximum est supérieure à la limite de précision numérique, l'interpolation en polynôme de Chebyshev devient très imprécise. Des fonctions divergentes sont obtenues lors du calcul des équations intégrales pour les modes évanescents.

En utilisant les méthodes spectrales de collocation développées sous Chebfun [30], il n'est pas nécessaire de décomposer les termes des matrices  $H^+$  et  $H^-$ . En imbriquant deux fonctions continues sous Chebfun, l'évolution des termes des matrices  $H^+$  et  $H^-$  sous leurs formes originales (eqs. (5.29) et (5.29)) est modélisable par l'intermédiaire d'une seule fonction continue paramétrique. Cependant, cela a pour effet d'augmenter considérablement le temps de calcul de l'intégrale, ce qui rend la méthode de résolution inutilisable pour des séries d'ordre supérieures à 2.

À ce jour, la méthode de résolution est limitée à un certain nombre de modes évanescents. Pour les géométries lentement variables présentées par la suite, cela n'impacte que très faiblement la précision de la méthode, puisque les couplages vers les modes évanescents ne contribuent que très peu au champ de pression total.

#### 5.2.4 Approximation unidirectionnelle

Comme présenté à la partie 1.2.3, l'approximation unidirectionnelle de l'équation d'onde est obtenue en négligeant les couplages contra-propagatifs  $\beta$ . L'approximation unidirectionnelle du système d'équation différentielle (5.24) s'écrit alors

$$\begin{cases} \vec{P}^{+'} = \left( \Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' \right) \vec{P}^+ + \alpha \vec{P}^+, & (5.36a) \\ \vec{P}^{+''} = \left( -\Gamma - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \Gamma' \right) \vec{P}^- + \alpha \vec{P}^-. & (5.36b) \end{cases}$$

Ces deux équations différentielles d'ordre 1 étant découplées, leur résolution est traitée comme un problème aux valeurs initiales. Une méthode de Magnus est alors utilisée (présentée précédemment à la partie 4.2.2).

Dans la décomposition du champ de pression en série de Bremmer, l'approximation unidirectionnelle peut être vue comme la somme de toutes les ondes directement transmises sans aucun changement de sens de propagation (voir Fig. 5.13). La solution itérative à l'ordre 3 de l'équation unidirectionnelle (5.36a) correspond alors à la somme

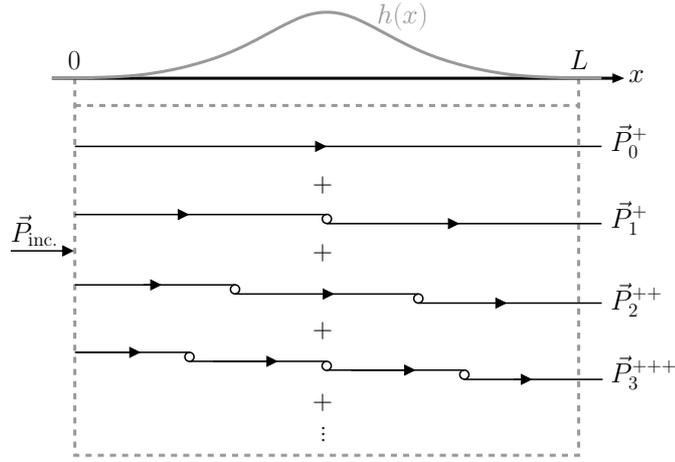
$$\vec{P}^+ = \vec{P}_0^+ + \vec{P}_1^+ + \vec{P}_2^{++} + \vec{P}_3^{+++}. \quad (5.37)$$

L'approximation unidirectionnelle est donc constituée d'une seule des composantes de chacun des ordres de la série, elle ne respecte donc pas l'ordre de la série de Bremmer.

#### 5.2.5 Reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre donné

Pour la première partie des résultats présentés, la fonction  $h(x)$ , décrivant la géométrie de la paroi supérieure du guide d'ondes, est une fonction gaussienne

$$h(x) = 1 + a e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.38)$$



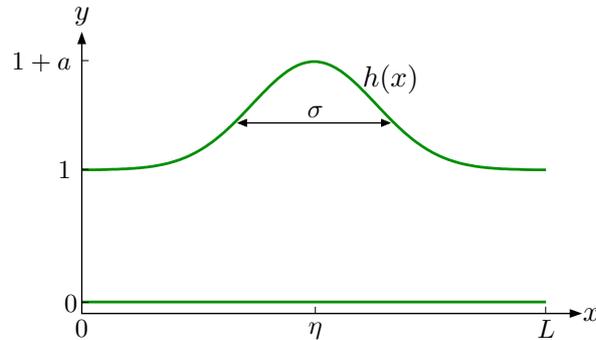
**Fig. 5.13** – Résolution itérative de l'équation unidirectionnelle (5.36a). Par rapport à la série de Bremmer complète (voir Fig. 5.12), seules les ondes directement transmises (sans couplage  $\beta$ ) sont représentées.

avec  $a$ ,  $\sigma$  et  $\eta$  représentant respectivement l'amplitude, l'écart-type et le centre de la gaussienne (voir Fig. 5.14). La variation de la largeur du guide d'ondes s'effectue autour d'une valeur moyenne, la largeur d'entrée du guide est identique à celle de sortie.

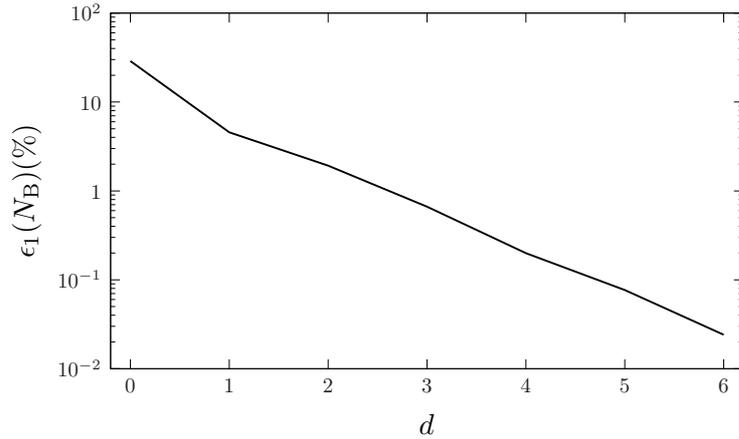
L'indicateur  $\epsilon_1$  est défini comme l'erreur relative entre la solution de référence (méthode multimodale, voir partie 1.2.1) et une reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre  $d$  et s'écrit

$$\epsilon_1(d) = \frac{\int_0^L \int_0^{h(x)} \left| \sum_{m=0}^d (p_m) - p_{\text{ref.}} \right|^2 dy dx}{\int_0^L \int_0^{h(x)} |p_{\text{ref.}}|^2 dy dx}. \quad (5.39)$$

La figure 5.15 présente l'évolution de l'indicateur  $\epsilon_1$  en fonction de l'ordre maximal de reconstruction du champ de pression. Pour cet exemple, la variation de largeur du guide d'ondes est décrite par la fonction  $h(x)$  (voir Eq. (5.38)) dont l'amplitude et l'écart-type de la fonction gaussienne valent respectivement  $a = 0.075$  et  $\sigma = 0.4$ . La longueur du guide d'ondes est fixée à  $L = 3$  (voir Fig. 5.14). Le mode transverse d'ordre 1,  $g_1(x, y)$ , est incident en  $x = 0$  pour un nombre d'onde réduit  $\frac{k}{\pi} = 2.1$ . Dans ce cas, l'augmentation de l'ordre de développement fait



**Fig. 5.14** – Guide d'ondes irrégulier bidimensionnel. La variation de géométrie de la paroi supérieure du guide d'ondes est représentée par la fonction gaussienne  $h(x)$  (voir Eq. (5.38)).



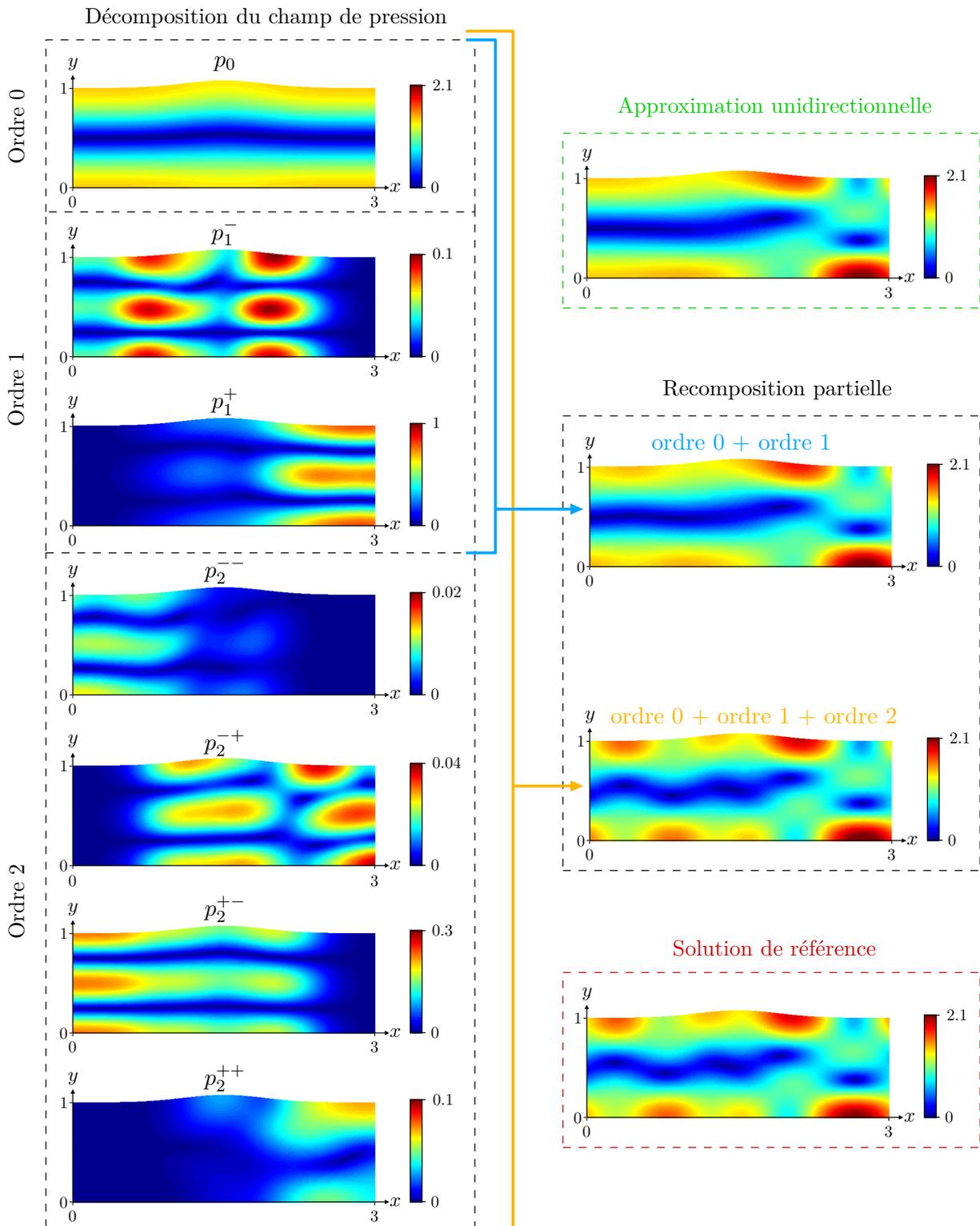
**Fig. 5.15** – Convergence de la série de Bremmer, erreur relative  $\epsilon_1$  (voir Eq. (5.39)) sur l'ensemble du champ de pression en fonction de l'ordre de développement de la série de Bremmer (mode 1 incident,  $\frac{k}{\pi} = 2.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $a = 0.075$ ,  $\eta = 1.5$  et  $L = 3$ ).

converger la reconstruction du champ de pression vers la solution de référence, l'erreur relative sur le champ de pression total  $\epsilon_1(d)$  étant monotonement décroissante.

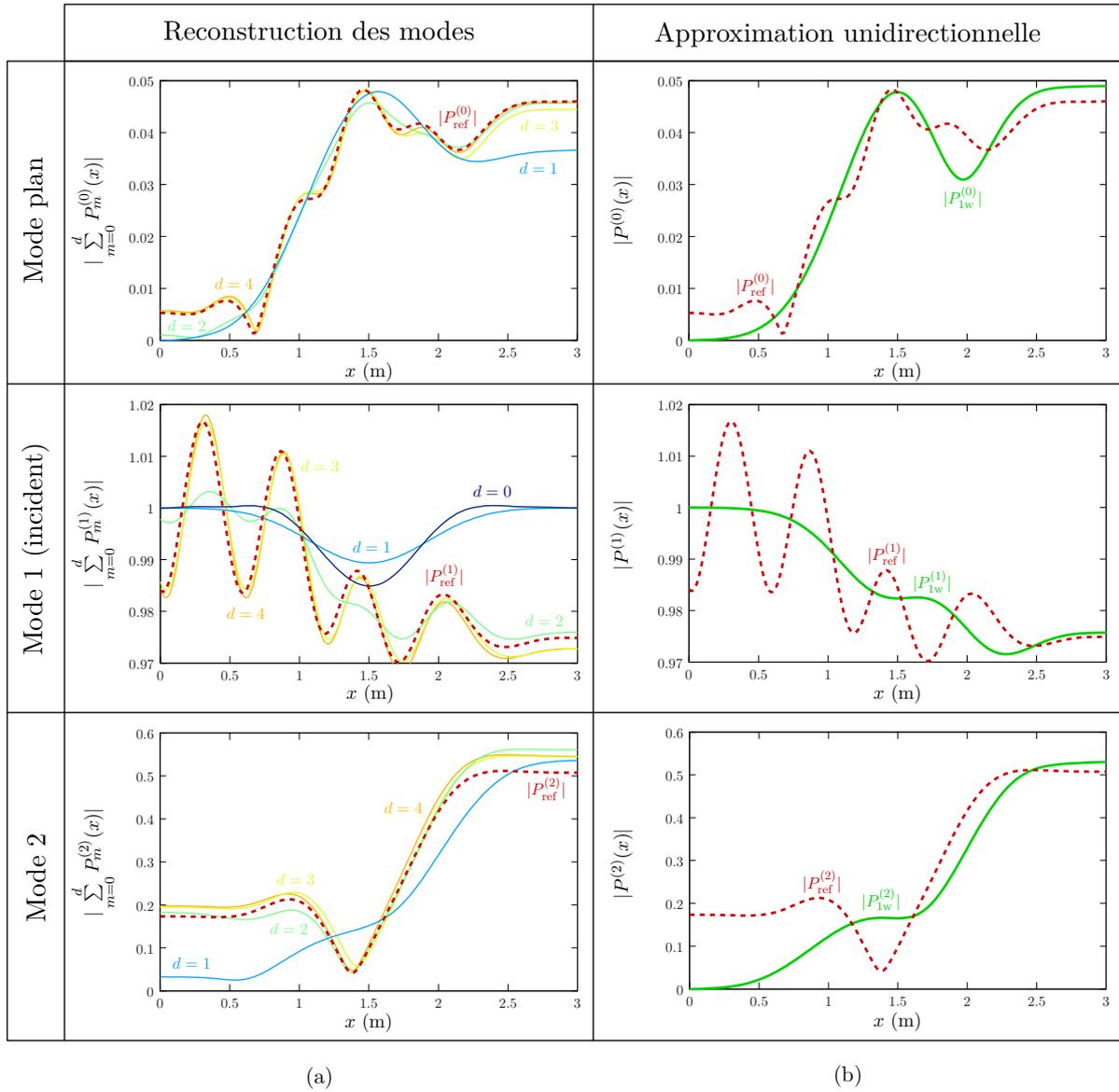
Pour ce même exemple, la figure 5.16 présente la décomposition du champ de pression en série de Bremmer pour les deux premiers ordres de la série. La colonne de gauche de la figure 5.16 représente les différentes composantes de la série sous forme de cartographie du champ de pression. La cartographie du champ de pression  $p_0$  décrit la propagation adiabatique de l'onde incidente. Les cartographies des champs  $p_1^-$  et  $p_1^+$  représentent la réflexion et la transmission de l'onde incidente. À l'ordre 1, l'onde incidente semble se coupler principalement vers un mode d'ordre 2, aussi bien en transmission qu'en réflexion. L'amplitude du champ transmis  $p_1^+$  est très nettement supérieure à celle du champ réfléchi  $p_1^-$ . Les cartographies des champs de pression  $p_2^{--}$  et  $p_2^{+-}$  représentent la réflexion et la transmission du champ  $p_1^-$ . Leurs amplitudes sont très faibles. Les cartographies des champs de pression  $p_2^{+-}$  et  $p_2^{++}$  représentent la réflexion et la transmission du champ  $p_1^+$ . Le champ  $p_2^{+-}$  est la contribution la plus importante à l'ordre 2. En comparant les amplitudes des champs de pression présentés sur ces différentes cartographies, la contribution de l'ordre 0 est très nettement supérieure à celle des autres ordres de la série. La variation de largeur du guide d'ondes agit donc comme une perturbation sur le champ incident.

La colonne de droite de la figure 5.16 permet de comparer la somme des champs de pression élémentaires avec la solution de référence et avec l'approximation unidirectionnelle notée 1w (voir Eq. (5.36a)). La modélisation du champ de pression proposée par l'approximation unidirectionnelle est en accord avec celle donnée par la reconstruction du champ de pression jusqu'à l'ordre 1. De même, la solution de référence paraît être bien approchée par la reconstruction du champ de pression jusqu'à l'ordre 2.

La figure 5.17 permet une interprétation plus quantitative sur le sens de propagation des modes couplés et sur leurs contributions respectives. Cette figure est divisée en deux colonnes. La colonne de gauche (Fig. 5.17(a)) compare les amplitudes des modes propagatifs issus de la reconstruction du champ de pression, jusqu'à un ordre de développement donné (noté  $d$ ). La courbe pointillée représente la solution de référence. La colonne de droite (Fig. 5.17(b)) présente une comparaison entre les amplitudes des composantes de l'approximation unidirectionnelle et celles de la solution de référence.



**Fig. 5.16** – Illustration de la décomposition du champ de pression en série de Bremmer à l'intérieur d'un guide de section variable, les cartographies représentent le module du champ de pression, (mode 1 incident,  $\frac{k}{\pi} = 2.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $a = 0.075$ ,  $\eta = 1.5$  et  $L = 3$ , le champ de pression transverse est décomposé en 5 modes).



**Fig. 5.17** – (a) : Amplitudes des modes issus de la reconstruction du champ de pression jusqu'à l'ordre  $d$ ; (b) : Comparaison entre les amplitudes des modes de la solution de référence et celles des modes de l'approximation unidirectionnelle (notée  $_{1w}$ ).

La reconstruction des modes jusqu'à un ordre de développement donné, représentée à la figure 5.17(a), permet d'observer qu'à partir de l'ordre 4 l'évolution des modes est correctement modélisée. L'amplitude du mode 2 est très supérieure à celle du mode plan, le mode incident se couple donc principalement vers le mode 2. Comme observé sur les cartographies de champ de pression (Fig. 5.16), le mode 2 a une contribution significative sur le champ de pression total aussi bien en entrée qu'en sortie du guide d'ondes. En s'intéressant de plus près à la reconstruction du mode 2, on constate que l'écart entre l'amplitude de la solution de référence et celle d'une reconstruction jusqu'à l'ordre 1 est faible en sortie du guide ( $x = 3$ ). En revanche, cet écart est maximal en entrée du guide ( $x = 0$ ). L'ajout de l'ordre 2 dans la reconstruction du mode 2 permet une meilleure estimation de l'amplitude du mode en entrée du guide.

La figure 5.17(b) permet de mieux appréhender le comportement de l'approximation unidirectionnelle. En sortie du guide, l'approximation unidirectionnelle évalue avec peu d'erreur l'amplitude des modes. C'est en entrée du guide d'ondes que l'écart avec la solution de référence est le plus important. Par comparaison avec la reconstruction des modes présentée à la figure 5.17(a), on constate que l'évolution des modes constituant l'approximation unidirectionnelle est relativement proche de celle obtenue pour les reconstructions du champ de pression jusqu'aux ordres 1 et 2.

### 5.2.6 Modélisation du champ de pression transmis à travers un guide d'ondes irrégulier

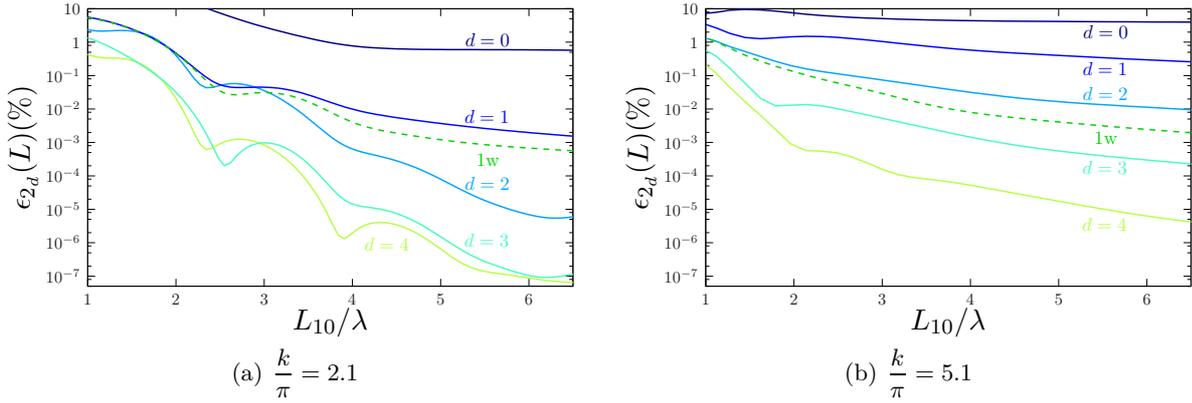
#### Variation de la section du guide d'ondes autour d'une largeur moyenne

Afin d'observer l'effet de l'augmentation de l'ordre de développement en un endroit donné du guide d'ondes, une erreur relative  $\epsilon_{2_d}(x)$  est calculée sous la forme

$$\epsilon_{2_d}(x) = \frac{\int_0^{h(x)} \left| \sum_{m=0}^d (p_m(x)) - p_{\text{ref.}}(x) \right|^2 dy}{\int_0^{h(x)} |p_{\text{ref.}}(x)|^2 dy}. \quad (5.40)$$

Cet indicateur intégré représente l'erreur relative sur le champ de pression transverse entre la solution de référence et une recombinaison du champ de pression jusqu'à un ordre  $d$ . Afin d'évaluer la pertinence de l'approximation unidirectionnelle sur la modélisation du champ de pression transmis, l'erreur relative  $\epsilon_{2_d}$  est calculée en sortie du guide ( $x = L$ ) pour différents ordres de reconstruction du champ de pression. Par définition, seules les composantes dont l'exposant se termine par un signe  $+$  contribuent sur le champ de pression en sortie du guide d'ondes (par exemple :  $p_2^{-+}$ ,  $p_3^{+-+}$ , etc). Cela correspond pour chaque ordre de la série à la moitié des composantes du champ de pression (voir Fig. 5.12). Évaluer la pertinence de l'approximation unidirectionnelle, en sortie du guide d'ondes, revient alors à comparer les contributions des composantes directement transmises (par exemple  $p_2^{++}$ ) avec celles des composantes transmises mais issues de réflexions (par exemple  $p_2^{-+}$ ).

La figure 5.18 représente l'erreur relative  $\epsilon_{2_d}(L)$  pour différents ordres de reconstruction  $d$  en fonction de la longueur de l'irrégularité  $L_{10}$ . La variable  $L_{10}$  correspond à la largeur de l'irrégularité pour le dixième de la hauteur de la gaussienne ( $L_{10} = 2\sqrt{2 \ln 10} \sigma$ ). Pour une hauteur  $a$  donnée, faire varier la largeur de la gaussienne revient à faire varier la pente de l'irrégularité. Une erreur importante est affichée entre la solution de référence et l'ordre 0 de la série. Les largeurs d'entrée et de sortie du guide étant identiques, le terme d'amplitude du

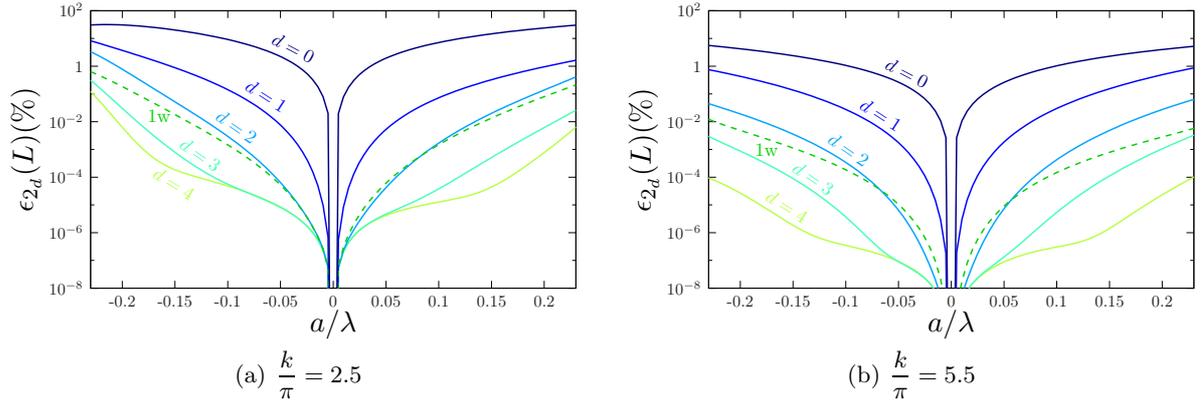


**Fig. 5.18** – Erreur relative  $\epsilon_{2_d}(L)$  en fonction de la longueur de l'irrégularité  $L_{10}$ , comparaison entre l'approximation unidirectionnelle et la reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre  $d$ , (mode 1 incident,  $a = 0.075$ ,  $\eta = 4.5$  et  $L = 9$ ).

propagateur adiabatique  $H^+(0, L)$  est égal à 1 (voir Eq. (5.29)). L'ordre 0 n'apporte alors pas d'information significative en sortie du guide d'ondes sur la perturbation causée par l'irrégularité du guide. Pour un même ordre de reconstruction, plus la longueur de l'irrégularité du guide se réduit et plus l'erreur sur la reconstruction augmente. En effet, plus la largeur de la gaussienne se rapproche de la longueur d'onde et plus l'irrégularité du guide a un impact sur le champ de pression, avec notamment des couplages contra-propagatifs de plus grande amplitude. Pour  $k/\pi = 2.1$ , les trois premiers modes propres transverses sont propagatifs. De même, pour  $k/\pi = 5.1$  les six premiers modes propres transverses sont propagatifs. Les contributions des différents ordres de reconstruction du champ de pression ne sont pas de même importance en fonction du nombre de modes propagatifs. Comme le montre la figure 5.18(a), les contributions des ordres 1 et 2 et celles des ordres 3 et 4 sont relativement proches. Avec si peu de modes propagatifs, la possibilité qu'ont les modes de se coupler est assez limitée. Il est alors possible que certains ordres du développement n'apportent pas une contribution significative sur le champ de pression en sortie du guide. Pour un nombre de modes propagatifs plus élevé, la figure 5.18(b) montre que la hiérarchie entre les ordres de développement est respectée.

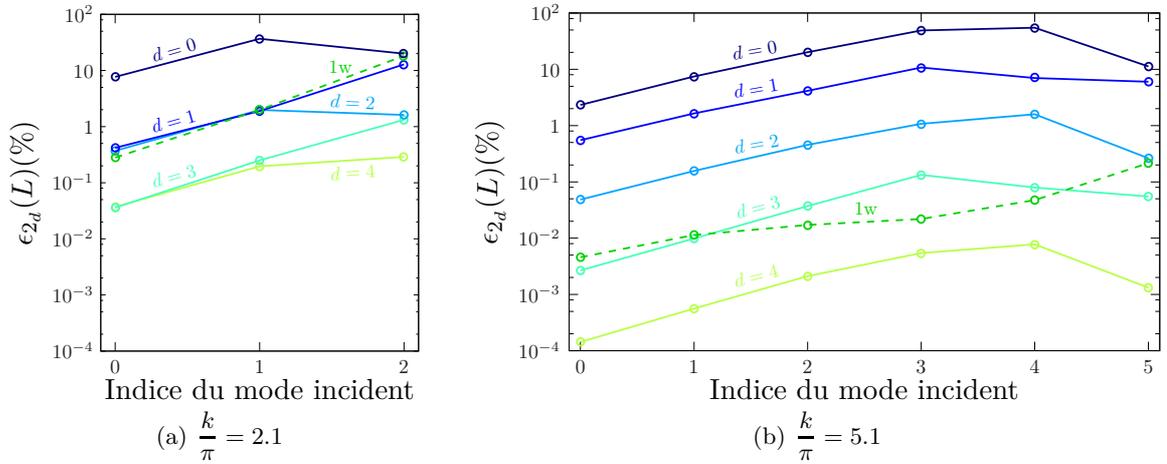
Sur la figure 5.18, l'erreur relative calculée entre l'approximation unidirectionnelle et la solution de référence est représentée par une courbe pointillée verte. Par définition, en sortie du guide l'approximation unidirectionnelle ne peut pas présenter une erreur supérieure à celle de la reconstruction du champ de pression jusqu'à l'ordre 1. En effet, en  $x = L$ , l'approximation unidirectionnelle et la reconstruction du champ de pression jusqu'à l'ordre 1 sont identiques, la composante  $p_1^-$  n'apportant aucune contribution sur le champ de pression transmis (voir Fig. 5.12). Pour  $k/\pi = 2.1$ , l'approximation unidirectionnelle correspond à un champ de pression transmis compris entre la reconstruction jusqu'à l'ordre 1 et l'ordre 2 (voir Fig. 5.18(a)). De plus, pour  $k/\pi = 5.1$ , l'approximation unidirectionnelle correspond à un champ de pression transmis compris entre la reconstruction jusqu'à l'ordre 2 et l'ordre 3 (voir Fig. 5.18(b)). Cela signifie que les premiers ordres de la série peuvent être approchés par leurs composantes directement transmises et jamais réfléchies, par exemple  $p_1^+$ ,  $p_2^{++}$  et  $p_3^{+++}$  (voir Fig. 5.12). Les amplitudes des composantes contra-propagatives du champ de pression sont alors relativement faibles.

La figure 5.19 représente l'erreur  $\epsilon_{2_d}(L)$  pour différents ordres de reconstruction  $d$ , la hauteur de la fonction gaussienne  $h(x)$  est variable, sa largeur est fixée ( $L_{10} = 1.7$ ). Dans ce cas, la variation du nombre de modes propagatifs n'influe pas sur la hiérarchie des contributions des



**Fig. 5.19** – Erreur relative  $\epsilon_{2_d}(L)$  en fonction de la hauteur de l'irrégularité. Comparaison entre l'approximation unidirectionnelle et la reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre  $d$ , (mode 1 incident,  $\sigma = 0.4$ ,  $\eta = 1.5$  et  $L = 3$ ).

différents ordres de développement. Par ailleurs, l'augmentation ( $a > 0$ ) ou la réduction ( $a < 0$ ) de la largeur du guide a le même impact sur la nature des couplages puisque les courbes présentées aux figures 5.19(a) et 5.19(a) sont quasiment symétriques. Il en est de même pour l'approximation unidirectionnelle, qui, dans ce cas, approche l'ordre 2 de la reconstruction du champ de pression en sortie du guide.



**Fig. 5.20** – Erreur relative  $\epsilon_{2_d}(L)$  en fonction de l'indice du mode incident. Comparaison entre l'approximation unidirectionnelle et la reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre  $d$ , ( $a = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $\eta = 1.5$  et  $L = 3$ ).

Pour les résultats présentés précédemment, l'indice du mode incident était fixé à 1. Comme le montre la figure 5.20, pour une géométrie de guide d'ondes donnée ( $a = 0.1$  et  $\sigma = 0.4$ ), l'augmentation de l'indice du mode incident a pour effet d'augmenter l'erreur relative  $\epsilon_{2_d}(L)$  pour toutes les reconstructions du champ de pression. Cela est dû à la complexification de la nature des couplages pour les modes d'indices élevés, ce qui favorisent les couplages contra-propagatifs. Il en est de même pour l'approximation unidirectionnelle : l'augmentation de l'indice du mode incident fait augmenter l'erreur sur la modélisation du champ de pression en sortie du guide. Par exemple, pour  $k/\pi = 5.1$  (voir Fig. 5.20(b)) et pour un mode plan incident, l'approximation unidirectionnelle approche l'ordre 3 de la reconstruction du champ de pression, alors que pour

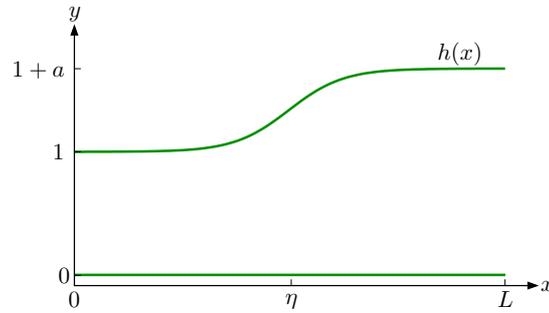
un mode incident d'indice 5 l'approximation unidirectionnelle correspond plutôt à l'ordre 2 de la reconstruction. Dans ce cas, l'augmentation de l'indice du mode incident a pour effet de faire diminuer la contribution de la composante  $p_3^{+++}$ .

### Expansion progressive de la section du guide d'ondes

Pour les résultats présentés dans cette section, la fonction  $h(x)$ , décrivant la géométrie de la paroi supérieure du guide d'ondes, est donnée par

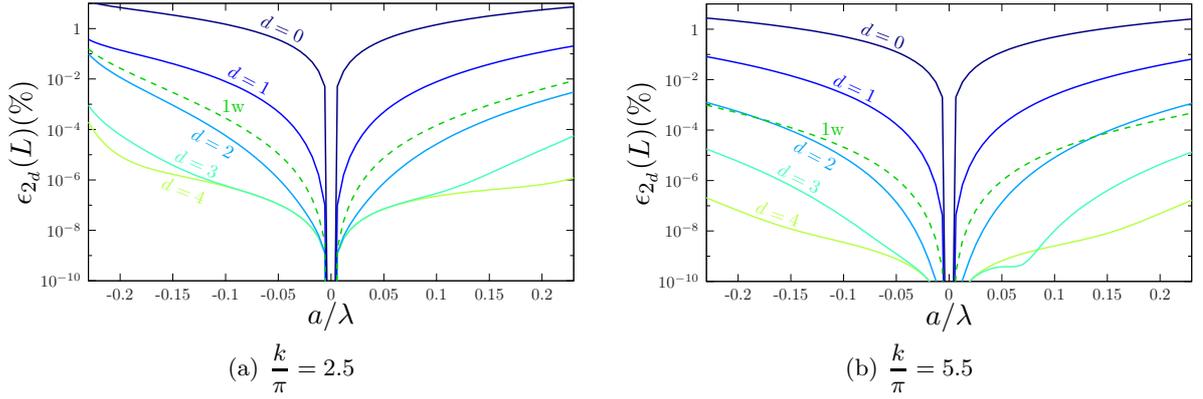
$$h(x) = 1 + \frac{a}{2} (1 + \tanh(\nu(x - \eta))), \quad (5.41)$$

avec  $a$  et  $\eta$  représentant respectivement l'amplitude et le point d'inflexion (voir Fig. 5.21). La variable  $\nu$  est un coefficient permettant de faire varier la pente de la fonction tangente hyperbolique. Cette fonction est utilisée afin de représenter la variation continue entre deux largeurs différentes d'entrée et de sortie du guide d'ondes.



**Fig. 5.21** – Guide d'ondes irrégulier bidimensionnel, la variation de géométrie de la paroi supérieure du guide d'ondes est donnée par une fonction tangente hyperbolique (voir Eq. (5.41)).

La figure 5.22 représente le niveau d'erreur relative  $\epsilon_{2_d}$  en sortie du guide d'ondes en fonction de la variation d'amplitude  $a$  de la fonction tangente hyperbolique, pour différents ordres de reconstruction du champ de pression. Pour une variation d'amplitude du même ordre de grandeur, l'approximation à l'ordre 0 du champ de pression présente une erreur nettement plus faible que pour le cas d'une irrégularité géométrique décrite par une fonction gaussienne (Fig. 5.19). Dans ce cas, les largeurs d'entrée et de sortie du guide d'ondes étant différentes, le terme d'amplitude du propagateur adiabatique  $H^+$  apporte une première information sur la perturbation engendrée par l'irrégularité du guide. De part l'aspect symétrique des courbes de la figure 5.22, l'augmentation ou la réduction de la largeur du guide d'ondes ne semble pas modifier la nature des couplages constituant le champ de pression transmis. Cependant, pour certaines fréquences et certains types de conditions initiales, le rétrécissement du guide peut favoriser la réflexions des ondes. Par ailleurs, le nombre de modes propagatifs n'influe pas sur la hiérarchie des contributions des différents ordres de reconstruction. L'approximation unidirectionnelle propose une modélisation du champ de pression transmis comprise entre les reconstructions jusqu'à l'ordre 1 et 2. Contrairement au cas présenté à la figure 5.19, pour une irrégularité géométrique du guide d'ondes décrite par une fonction hyperbolique, les mécanismes de couplage qui régissent la propagation acoustique favorisent moins les ondes directement transmises. Ainsi, les composantes  $p_2^{++}$  et  $p_3^{+++}$  n'étant pas celles qui présentent la contribution majoritaire à leurs ordres de développement respectifs, la description du champ de pression en sortie du guide proposée par l'approximation unidirectionnelle est dans ce cas limitée à l'ordre 1.



**Fig. 5.22** – Erreur relative  $\epsilon_{2_d}(L)$  en fonction de la hauteur de l'irrégularité  $a$ , comparaison entre l'approximation unidirectionnelle et la reconstruction du champ de pression jusqu'à un ordre  $d$ , (mode 1 incident,  $\nu = 2$ ,  $\eta = 1.5$  et  $L = 3$ ).

### 5.2.7 Analogie avec l'approximation de Born appliquée à une équation d'onde unidimensionnelle non-homogène

Une autre manière d'appréhender l'approximation unidirectionnelle est de comprendre comment est décomposé le champ de pression à l'ordre 1. À cet ordre, le champ de pression est constitué de deux composantes. Si la composante co-propagative a une amplitude plus grande que la composante contra-propagative, cela signifie que la propagation des modes co-propagatifs est favorisée. Pour mieux comprendre le fonctionnement de ce mécanisme de couplage, une analogie est faite entre les équations intégrales (5.33) et (5.34) et la solution de l'approximation de Born appliquée à une équation d'onde unidimensionnelle non-homogène.

#### Approximation de Born d'une équation d'onde non-homogène unidimensionnelle

Soit le problème unidimensionnel suivant

$$\left(\partial_{xx}^2 + k^2\right)p(x) = V(x)p(x), \quad (5.42)$$

où  $V(x)$  est un terme potentiel représentant l'hétérogénéité du milieu de propagation, défini sur un intervalle  $x \in [0, L]$ .

L'approximation de Born [86] consiste à considérer le champ de pression généré par le terme potentiel  $V(x)$  comme une perturbation du champ incident. Pour un champ incident s'écrivant  $e^{ikx}$ , le champ de pression total est décomposé en deux termes

$$p(x) = e^{ikx} + p_s(x), \quad (5.43)$$

où  $p_s$  correspond à la perturbation du champ incident générée par le terme potentiel. L'équation d'ondes (5.42) peut alors être reformulée :

$$\left(\partial_{xx}^2 + k^2\right)p_s(x) = V(x)\left(e^{ikx} + p_s(x)\right). \quad (5.44)$$

La solution de cette équation d'onde s'écrit

$$p_s(x) = G(x) \otimes V(x)\left(e^{ikx} + p_s(x)\right), \quad (5.45)$$

où le symbole  $\otimes$  représente un produit de convolution et  $G(x)$  correspond à la fonction de Green du problème (5.42). En considérant la perturbation  $p_s$  très petite devant le champ incident

( $e^{ikx} \gg p_s(x)$ ), la contribution de la perturbation dans la solution (5.45) peut être négligée. La solution de l'équation d'onde (5.42) prend alors la forme

$$p_s(x) = \int_0^L G(x, x') V(x') e^{ikx'} dx'. \quad (5.46)$$

Afin de calculer  $p_s^+$ , la contribution issue de la transmission directe de la perturbation (sans réflexion), la fonction de Green à une dimension s'écrit

$$G(x, x') = \frac{e^{ik(x-x')}}{2ik}, \quad (5.47)$$

où  $x > x'$ . La solution (5.46) de l'équation d'onde prend alors la forme suivante :

$$p_s(L)^+ = \frac{e^{ikL}}{2ik} \int_0^L V(x') dx'. \quad (5.48)$$

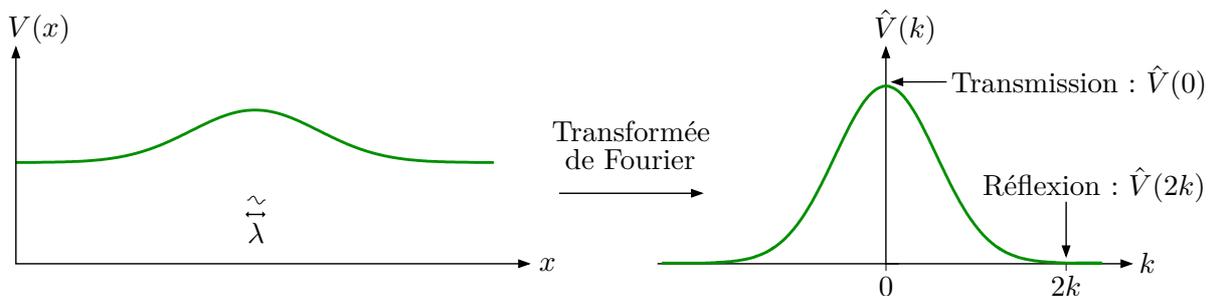
Également, il est possible de calculer  $p_s^-$ , la contribution correspondant à la réflexion directe de la perturbation (sans transmission), pour cela la fonction de Green s'écrit

$$G(x, x') = \frac{e^{ik(x'-x)}}{2ik}, \quad (5.49)$$

où  $x < x'$ . La solution (5.46) de l'équation d'onde prend alors la forme suivante :

$$p_s(0)^- = \frac{e^{-ikx}}{2ik} \int_0^L V(x') e^{2ikx'} dx'. \quad (5.50)$$

Comme le montrent les équations (5.48) et (5.50), la composante transmise de la perturbation  $p_s^+$  et celle réfléchiée  $p_s^-$  sont calculées comme des transformées de Fourier spatiale du terme potentiel  $V(x)$  respectivement à 0 et à  $2k$ . En considérant des variations lentes du terme potentiel sur l'échelle d'une longueur d'onde, le spectre  $\hat{V}(k)$ , issu de la transformée de Fourier de  $V(x)$ , ne comporte pas de composantes pour les hauts nombres d'onde (voir Fig. 5.23). C'est pour cette raison que la composante transmise  $p_s^+$  a une contribution supérieure à la composante réfléchiée  $p_s^-$ .



**Fig. 5.23** – Représentation de l'évolution du potentiel  $V(x)$  et de sa transformée de Fourier  $\hat{V}(k)$ .

**Analogie avec les équations intégrales (5.33) et (5.34)**

Il est possible de faire une analogie entre les équations intégrales (5.48) et (5.50), issues de l'approximation de Born de l'équation d'onde unidimensionnelle, et les équations (5.33) et (5.34), représentant l'évolution des composantes co-propagative et contra-propagative du champ de pression à l'ordre 1. En effet, en développant les propagateurs adiabatiques  $H^+$  et  $H^-$  et en exprimant l'onde  $\vec{P}_0$  sous la forme d'une onde incidente mono-mode, les équations intégrales (5.33) et (5.34) peuvent prendre la forme suivante :

$$P_1^{+(n)}(x) = \frac{e^{i \int_0^x k_n(s) ds}}{\sqrt{k_n(x)}} \int_0^x \underbrace{\sqrt{\frac{k_n(x')k_m(0)}{k_m(x')}}}_{V_{mn}^+(x')} \alpha_{mn}(x') e^{i \int_0^{x'} k_m(s) - k_n(s) ds} dx', \quad (5.51)$$

et

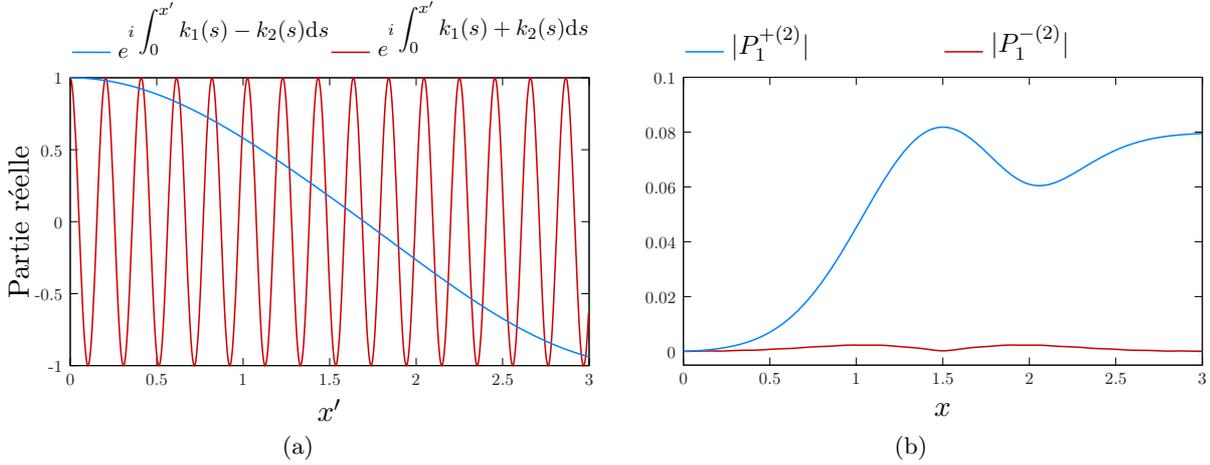
$$P_1^{-(n)}(x) = \frac{e^{-i \int_0^x k_n(s) ds}}{\sqrt{k_n(x)}} \int_L^x \underbrace{\sqrt{\frac{k_n(x')k_m(0)}{k_m(x')}}}_{V_{mn}^-(x')} \beta_{mn}(x') e^{i \int_0^{x'} k_m(s) + k_n(s) ds} dx', \quad (5.52)$$

où  $n$  représente l'indice de la composante du vecteur  $\vec{P}^{(n)}$  et  $m$  correspond à l'indice du mode incident. Les termes  $V_{mn}^+(x')$  et  $V_{mn}^-(x')$  peuvent être considérés comme des termes potentiels traduisant l'effet de la variation de la largeur du guide sur l'onde incidente. Ces deux équations intégrales ont une forme similaire à celles obtenues lors de l'approximation de Born de l'équation d'onde unidimensionnelle. La principale différence intervient dans la possibilité qu'a l'onde incidente de se coupler vers d'autres modes.

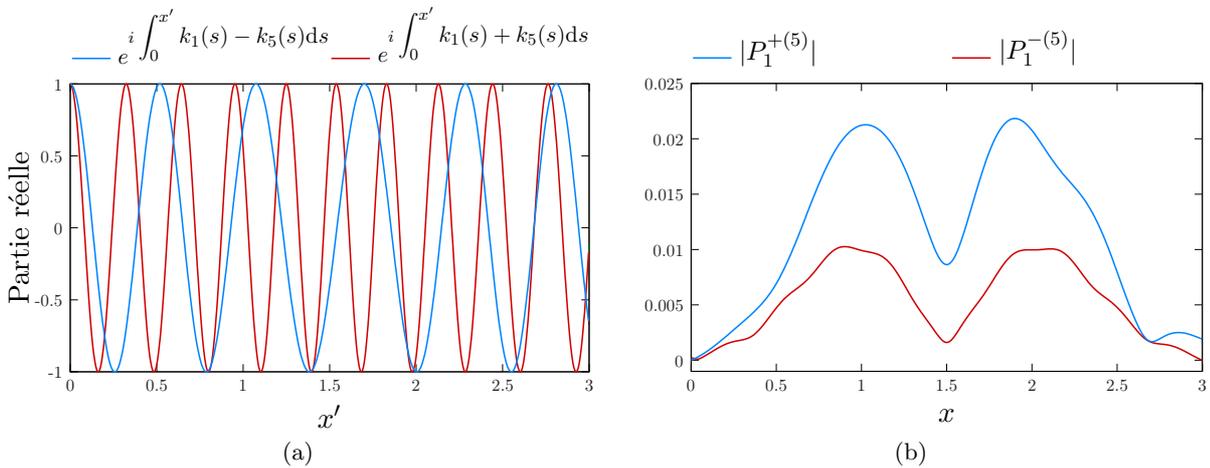
Pour un guide d'ondes dont la variation de largeur est décrite par une fonction gaussienne (voir Eq. (5.38)), les termes exponentiels contenus dans les intégrales des équations (5.51) et (5.52) sont calculés pour différentes configurations. Les paramètres géométriques de la gaussienne sont choisis de manière à ce que les variations des termes  $V_{mn}^+(x')$  et  $V_{mn}^-(x')$  soient lentes par rapport à la longueur d'onde ( $k/\pi = 5.1$ ,  $a = 0.05$ ,  $\sigma = 0.45$ ,  $\eta = 1.5$  et  $L = 3$ ). La figure 5.24(a) présente l'évolution des termes exponentiels, contenus dans les intégrales des équations (5.51) et (5.52), pour un mode incident d'indice  $m = 1$  se couplant vers le mode d'indice  $n = 2$ . Il est possible de constater que le terme exponentiel de la composante contra-propagative (courbe rouge) oscille beaucoup plus rapidement que le terme exponentiel de la composante co-propagative (courbe bleue). La période d'oscillation de la courbe rouge correspond à environ une demi-longueur d'onde ( $\lambda = 0.39$ ). Par analogie avec les observations faites précédemment grâce à l'approximation de Born, on comprend bien pourquoi, sur la figure 5.24(b), la composante co-propagative  $P_1^{+(2)}$  a une amplitude largement supérieure à la composante contra-propagative  $P_1^{-(2)}$ .

De plus, la figure 5.25(a) présente l'évolution des termes exponentiels, contenus dans les intégrales des équations (5.51) et (5.52), pour un mode incident d'indice  $m = 1$  se couplant vers le mode d'indice  $n = 5$  (dernier mode propagatif). Les deux fonctions correspondantes oscillent sur une période de même ordre de grandeur que la longueur d'onde. Cela explique pourquoi, sur la figure 5.25(b), les amplitudes des composantes co-propagative  $P_1^{+(5)}$  et contra-propagative  $P_1^{-(5)}$  sont de même ordre de grandeur. Par ailleurs, le fait que la courbe rouge de la figure 5.24(a) ait une période d'oscillation inférieure à celle de la figure 5.25(a) explique que l'amplitude du mode  $P_1^{-(2)}$  est inférieure à celle du mode  $P_1^{-(5)}$ .

En observant l'évolution des fonctions  $e^{i \int_0^{x'} k_m(s) - k_n(s) ds}$  et  $e^{i \int_0^{x'} k_m(s) + k_n(s) ds}$  en amont d'une résolution numérique des équations intégrales (5.51) et (5.52), il est possible de directement anticiper sur les contributions des différentes composantes de la série de Bremmer à l'ordre 1. Cela



**Fig. 5.24** – Couplage entre un mode incident d'indice  $m = 1$  vers le mode d'indice  $n = 2$ , (irrégularité de type gaussienne,  $k/\pi = 5.1$ ,  $a = 0.05$ ,  $\sigma = 0.45$ ,  $\eta = 1.5$  et  $L = 3$ ).  
 (a) : Comparaison entre les termes exponentiels des composantes co-propagative et contra-propagative des vecteurs  $\vec{P}_1^+$  et  $\vec{P}_1^-$ . (b) : Comparaison entre l'amplitude des modes  $P_1^{+(2)}$  et  $P_1^{-(2)}$ .



**Fig. 5.25** – Couplage entre un mode incident d'indice  $m = 1$  vers le mode d'indice  $n = 5$ , (irrégularité de type gaussienne,  $k/\pi = 5.1$ ,  $a = 0.05$ ,  $\sigma = 0.45$ ,  $\eta = 1.5$  et  $L = 3$ ).  
 (a) : Comparaison entre les termes exponentiels des composantes co-propagative et contra-propagative des vecteurs  $\vec{P}_1^+$  et  $\vec{P}_1^-$ . (b) : Comparaison entre l'amplitude des modes  $P_1^{+(5)}$  et  $P_1^{-(5)}$ .

est uniquement possible lorsque les termes  $V_{mn}^+(x')$  et  $V_{mn}^-(x')$  varient lentement par rapport à la longueur d'onde. Lorsque ce n'est plus le cas, cela signifie que l'on ne peut plus faire l'hypothèse que la perturbation est petite devant l'onde incidente. L'analogie avec l'approximation de Born est alors plus délicate.

### 5.2.8 Conclusion

Dans cette seconde partie de chapitre, l'équation de Helmholtz bidimensionnelle en guide d'ondes irrégulier a été résolue itérativement sur le principe d'une décomposition du champ de pression en série de Bremmer. Les équations intégrales correspondant à chaque composante de la série ont été résolues numériquement, elles peuvent cependant constituer une formulation analytique de la solution de l'équation d'onde. Pour des variations lentes de la géométrie du guide d'ondes, la série de Bremmer converge vers la solution de référence. Une reconstruction du champ de pression par ordre successif a mis en avant les contributions particulières des différents ordres de la série de Bremmer. Une analogie avec l'approximation de Born appliquée à l'équation d'onde unidimensionnelle a permis d'expliquer le mécanisme de couplage constituant le premier ordre de la série, celui-ci favorisant la transmission directe des ondes. Une première étude paramétrique a mis en évidence la diversité et la complexité des mécanismes de couplage régissant la propagation acoustique dans des guides d'ondes irréguliers.

La forme complète de l'équation multimodale unidirectionnelle peut être vue comme une recomposition partielle de la série de Bremmer. À partir de l'ordre 1, une partie des composantes de la série n'est alors pas prise en compte. C'est pourquoi l'approximation unidirectionnelle devrait a priori correspondre à l'ordre 1 de la série. Cependant, dans certains cas, l'approximation unidirectionnelle a permis d'obtenir une estimation du champ de pression transmis pouvant correspondre à une reconstruction de la série jusqu'à l'ordre 2.



# Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire avaient pour cadre l'approximation unidirectionnelle de la propagation acoustique en guides d'ondes irréguliers. Pour cela, deux approches de la propagation acoustique ont été abordées : l'équation parabolique et une formulation multimodale. Ces deux formalismes ont permis d'étudier différentes formes d'approximations unidirectionnelles. L'utilisation de l'équation parabolique a été motivée par une application à l'acoustique urbaine. L'approche multimodale s'orientait plus vers une démarche de compréhension des mécanismes de couplages des modes régissant la propagation acoustique dans des guides d'ondes irréguliers.

Basée sur une transformation du système de coordonnées, une méthode de modélisation de la propagation acoustique dans des guides bidimensionnels irréguliers a été mise en place avec l'équation parabolique. Par rapport aux méthodes existantes, un développement de l'opérateur transverse ainsi qu'une implémentation adéquate des conditions aux frontières ont permis de traiter des géométries plus complexes.

Toutefois, dans sa forme la plus usuelle, l'équation parabolique n'est utilisable que si les variations du milieu (ici, la section du guide) sont lentement et faiblement variables, alors que seule l'hypothèse de variations lentes est a priori nécessaire pour séparer les composantes copropagatives et contra-propagatives du champ (voir la décomposition de l'équation d'onde à l'équation (1.20)). L'adaptation des schémas numériques proposés à une forme plus complète de l'équation parabolique apparaît donc nécessaire.

Dans le cadre de la propagation acoustique en milieu urbain, une méthode de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle a été présentée. Dans le cas de rues sans irrégularité, la méthode a été validée par comparaison avec des données expérimentales issues de mesures sur une maquette de rue à échelle réduite. La méthode obtenue est robuste et permet une modélisation de la propagation acoustique en milieu urbain pour un faible coût de calcul. De plus, une approximation de Kirchhoff a été associée à la méthode de résolution afin de pouvoir modéliser des variations brusques de la largeur des rues. A nouveau, une comparaison avec des données expérimentales a permis de mettre en avant l'efficacité et la pertinence de cette approximation dans le cadre de la propagation unidirectionnelle. Une poursuite des mesures permettrait de mieux définir les limites de validité de la méthode dans le cas de variations brusques de la largeur d'une rue. La technique de transformation de coordonnées a été adaptée dans la méthode de résolution afin de pouvoir modéliser des variations continues de la largeur des rues. Une première étude paramétrique a mis en évidence l'effet de l'irrégularité des façades sur le rayonnement des ondes acoustiques.

La principale limitation de la méthode de résolution de l'équation parabolique tridimensionnelle intervient sous la forme d'une limitation angulaire imposée par la séparation des composantes de l'opérateur transverse. Un développement à l'ordre supérieur de cet opérateur [12, 21]

permettrait de s'affranchir de cette limitation au prix d'une complexification du schéma numérique. La prise en compte des effets micro-météorologiques présents à l'intérieur des rues peuvent être facilement intégrées à la méthode pour une représentation plus fidèle du milieu urbain. Un premier travail dans ce sens a été mené dans le cadre du projet de recherche EM2PAU<sup>1</sup> qu'il conviendrait de poursuivre.

L'approche multimodale de l'approximation unidirectionnelle a permis d'obtenir deux formes d'équations d'onde unidirectionnelles. Pour une première forme d'équation multimodale, il a été montré que les résultats les plus précis sont obtenus lorsqu'une méthode de Magnus est employée, et plus particulièrement pour une discrétisation de deux points par longueur d'onde. Un premier développement analytique pour le cas unidimensionnel a permis d'expliquer en partie ce comportement. Une étude multidimensionnelle plus approfondie est nécessaire afin de mieux comprendre les mécanismes mis en jeu.

Pour des guides d'ondes de section continûment variables, l'approche multimodale a été utilisée pour la décomposition du champ de pression en série de Bremmer. La décomposition de l'équation de Helmholtz, en fonction du sens de propagation des ondes, a été résolue par itération. Une reconstruction du champ de pression par ordre successif a mis en avant les contributions particulières des différents ordres de la série de Bremmer. Une analogie avec l'approximation de Born appliquée à l'équation d'onde unidimensionnelle a permis d'expliquer le mécanisme de couplage constituant le premier ordre de la série, celui-ci favorisant la transmission directe des ondes. Une étude paramétrique a mis en évidence la diversité et la complexité des mécanismes de couplage régissant la propagation acoustique dans des guides d'ondes irréguliers. Une analyse asymptotique plus détaillée permettrait d'identifier plus clairement ces différents mécanismes. Une amélioration de la méthode de résolution numérique pourrait permettre de ne plus être limitée par le nombre de modes considérés dans le calcul. Il serait alors envisageable d'évaluer la contribution des modes évanescents sur la convergence de la série de Bremmer.

La forme complète de l'équation multimodale unidirectionnelle a été présentée comme une recombinaison partielle de la série de Bremmer. À partir de l'ordre 1, une partie des composantes de la série n'est pas prise en compte. C'est pourquoi l'approximation unidirectionnelle devrait a priori correspondre à l'ordre 1 de la série. Cependant, dans certains cas, l'approximation unidirectionnelle a permis d'obtenir une estimation du champ de pression transmis pouvant correspondre à une reconstruction de la série jusqu'à l'ordre 2. L'analyse asymptotique devrait également permettre d'éclaircir ce comportement particulier.

---

1. EM2PAU, Région Pays de la Loire, 2008-2012 (IFSTTAR, LAUM, LHEEA)

# Bibliographie

- [1] Burden of disease from environmental noise - Quantification of healthy life years lost in Europe. Rapport technique, World Health Organisation, regional office for Europe, 2011.
- [2] F.-E. ABALLEA et J. DEFRANCE : Single and multiple reflections in plane obstacle using the parabolic equation method with a complementary Kirchhoff approximation. *Acta Acust. United Ac.*, 93(1):22–30, 2007.
- [3] A. T. ABAWI, W. A. KUPERMAN et M. D. COLLINS : The coupled mode parabolic equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(1):233–238, 1997.
- [4] L. ABRAHAMSSON et H.-O. KREISS : Boundary conditions for the parabolic equation in a range dependent duct. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87:2438–2441, 1990.
- [5] L. ABRAHAMSSON et H.-O. KREISS : Numerical solution of the coupled mode equations in duct acoustics. *J. Comput. Phys.*, 111:1–14, 1994.
- [6] G. B. AKGUC et T. H. SELIGMAN : Efficient method for scattering problems in open billiards : Theory and application. *Phys. Rev. B*, 74:245–317, 2006.
- [7] G. D. AKRIVIS, V. A. DOUGALIS et G. E. ZOURARIS : Finite difference schemes for the "parabolic" equation in a variable depth environment with a rigid bottom boundary condition. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(2):539–565, 2002.
- [8] W. F. AMES : *Numerical methods for partial differential equations*, chapitre 2. Academic Press, New York, 2<sup>ieme</sup> édition, 1977.
- [9] A. BAMBERGER, B. ENGQUIST, L. HALPERN et P. JOLY : Higher order paraxial wave equation approximations in heterogeneous media. *SIAM J. Appl. Math.*, 48:129–154, 1988.
- [10] V. BARONIAN, A.-S. BONNET-BEN DHIA et E. LUNÉVILLE : Transparent boundary conditions for the harmonic diffraction problem in an elastic waveguide. *J. Comput. Appl. Math.*, 234:1945–1952, 2010.
- [11] Z. BATTLES et L. N. TREFETHEN : An extension of MATLAB to continuous functions and operators. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25:1743–1770, 2004.
- [12] E. BÉCACHE, F. COLLINO et P. JOLY : Higher-order numerical schemes and operator splitting for solving 3D paraxial wave equations in heterogeneous media. Rapport de recherche RR-3497, INRIA, 1998.
- [13] A. V. BEKKER, P. SEWELL, T. M. BENSON et A. VUKOVIC : Wide-angle alternating-direction implicit finite-difference beam propagation method. *J. Lightw. Technol.*, 27:2595–2604, 2009.
- [14] M. BERENGIER, B. GAUVREAU, P.h. BLANC-BENON et D. JUVE : Outdoor sound propagation : A short review on analytical and numerical approaches. *Acta Acustica united with Acustica*, 89(6):980–991, 2003.
- [15] W. P. BI, V. PAGNEUX, D. LAFARGE et Y. AURÉGAN : An improved multimodal method for sound propagation in nonuniform lined ducts. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122:280–290, 2007.

- [16] N. BLAIRON : *Effets de la topographie sur la propagation des ondes acoustiques dans l'atmosphère : modélisation avec l'équation parabolique et validation sur un site extérieur*. Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 2002.
- [17] Ph. BLANC-BENON, L. DALLOIS et D. JUVE : Long range sound propagation in a turbulent atmosphere within the parabolic approximation. *Acta Acust. United Ac.*, 87(6):659–669, 2001.
- [18] H. BREMMER : The W.K.B. approximation as the first term of a geometric-optical series. *Commun. Pure Appl. Math.*, 4:105–115, 1951.
- [19] J.P. BÉRENGER : A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114:185 – 200, 1994.
- [20] F. COLLINO : Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations. *J. Comput. Phys.*, 131(1):164 – 180, 1997.
- [21] F. COLLINO et P. JOLY : Splitting of operators, alternate direction and paraxial approximations for the 3D wave equation. Rapport de recherche RR-2151, INRIA, 1993.
- [22] M. D COLLINS : Applications and time-domain solution of higher-order parabolic equations in underwater acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 86:1097–1102, 1989.
- [23] J. CORONES : Bremmer series that correct parabolic approximations. *J. Math. Anal. Appl.*, 50(2):361 – 372, 1975.
- [24] J. CRANK et P. NICOLSON : A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 43:50–67, 1947.
- [25] G. A. DAIGLE : Diffraction of sound by a noise barrier in the presence of atmospheric turbulence. *J. Acoust. Soc. Am.*, 71(4):847–854, 1982.
- [26] J.-B. DOC, S. FÉLIX et B. LIHOREAU : Coarse-grid computation of the one-way propagation of coupled modes in a varying cross-section waveguide. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(5):2528–2532, 2013.
- [27] J.-B. DOC, B. LIHOREAU et S. FÉLIX : Higher order Padé approximation for the parabolic equation in a varying cross-section waveguide. *Acta Acust. United Ac.*, 98(5):691–699, 2012.
- [28] V. A. DOUGALIS, F. STURM et G. E. ZOURARIS : On an initial-boundary value problem for a wide-angle parabolic equation in a waveguide with a variable bottom. *Math. Method. Appl. Sci.*, 32(12):1519–1540, 2009.
- [29] J. DOUGLAS : On the numerical integration  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$  by implicit methods. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 3(1):42–65, 1955.
- [30] T. A. DRISCOLL : Automatic spectral collocation for integral, integro-differential, and integrally reformulated differential equations. *J. Comput. Phys.*, 229(17):5980 – 5998, 2010.
- [31] G. DUTILLEUX : Bruit des transports routiers et basses fréquences. *Acoustique et techniques*, 67:38–43, 2012.
- [32] R. B. EVANS : A coupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(1):188–195, 1983.
- [33] R. B. EVANS : The flattened surface parabolic equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 104:2167–2173, 1998.
- [34] M. D. FEIT et J. A. FLECK JR. : Light propagation in graded-index optical fibers. *Appl. Opt.*, 17:3990–3998, 1978.

- [35] J. H. FERZIGER et M. PERIC : *Computational Methods for Fluid Dynamics*, chapitre 5 et 7. Springer, 3<sup>ième</sup> édition, 2002.
- [36] L. FISHMAN, A.K. GAUTESEN et Z. SUN : Uniform high-frequency approximations of the square root Helmholtz operator symbol. *Wave Motion*, 26(2):127 – 161, 1997.
- [37] L. FISHMAN et J. J. MCCOY : Derivation and application of extended parabolic wave theories. I. The factorized Helmholtz equation. *J. Math. Phys.*, 25(2):285–296, 1984.
- [38] J. FORSSEN : Calculation of sound reduction by a screen in a turbulent atmosphere using the parabolic equation method. *Acta Acust. United Ac.*, 84(4):599–606, 1998.
- [39] J. FORSSÉN et M. ÖGREN : Thick barrier noise-reduction in the presence of atmospheric turbulence : measurements and numerical modelling. *Appl. Acoust.*, 63(2):173 – 187, 2002.
- [40] S. FÉLIX et V. PAGNEUX : Sound propagation in rigid bends : A multimodal approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110:1329–1337, 2001.
- [41] S. FÉLIX et V. PAGNEUX : Sound attenuation in lined bends. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116:1921–1931, 2004.
- [42] B. GAUVREAU, M. BERENGIER, P. BLANC-BENON et C. DEPOLLIÉ : Traffic noise prediction with the parabolic equation method : Validation of a split-step Padé approach in complex environments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(6):2680–2687, 2002.
- [43] K. GILBERT et M. WHITE : Application of the parabolic equation to sound propagation in a refracting atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85:630–637, 1989.
- [44] R. GREENE : The rational approximation to the acoustic wave equation with bottom interaction. *J. Acoust. Soc. Am.*, 76:1764–1773, 1984.
- [45] G. GUILLAUME, J. PICAUT et G. DUTILLEUX : Use of the transmission line matrix method for the sound propagation modeling in urban area. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(5):3924–3924, 2008.
- [46] G. GUILLAUME, J. PICAUT, G. DUTILLEUX et B. GAUVREAU : Time-domain impedance formulation for transmission line matrix modelling of outdoor sound propagation. *J. Sound Vibration*, 330(26):6467 – 6481, 2011.
- [47] M. GUSTAFSSON : The Bremmer series for a multi-dimensional acoustic scattering problem. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 33(9):1921, 2000.
- [48] C. R. HADLEY : Wide-angle beam propagation using Padé approximant operators. *Opt. Lett.*, 17:1426–1428, 1992.
- [49] L. HALPERN et L. N. TREFETHEN : Wide-angle one-way wave equations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84(4):1397–1404, 1988.
- [50] M. V. de HOOP : Generalization of the Bremmer coupling series. *J. Math. Phys.*, 37(7):3246–3282, 1996.
- [51] M. V. de HOOP et A. K. GAUTESEN : Uniform asymptotic expansion of the generalized Bremmer series. *SIAM J. Appl. Math.*, 60(4):1302–1329, 2000.
- [52] F. B. JENSEN et W. A. KUPERMAN : Sound propagation in a wedge-shaped ocean with a penetrable bottom. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67(5):1564–1566, 1980.
- [53] F. V. JENSEN, W. A. KUPERMAN, M. B. PORTER et H. SCHIMDT : *Computational ocean acoustics*, chapitre 6. Springer, 2011.
- [54] J. KERGOMARD, A. GARCIA, G. TAGUI et J.P. DALMONT : Analysis of higher order mode effects in an expansion chamber using modal theory and equivalent electrical circuits. *J. Sound Vibration*, 129(3):457 – 475, 1989.

- 
- [55] D. LEE et S. T. MCDANIEL : A finite-difference treatment of interface conditions for the parabolic wave equation : The irregular interface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73(5):1441–1447, 1983.
- [56] D. LEE, A. D. PIERCE et E.-C. SHANG : Parabolic equation development in the twentieth century. *J. Comput. Acoust.*, 8:4, 2000.
- [57] M. LEONTOVITCH et V FOCK : Solution of the problem of propagation of electromagnetic waves along the earth’s surface by the method of parabolic equation. *J. Phys. USSR*, 10:13–24, 1946.
- [58] L. LEVIANDIER : The one-way wave equation and its invariance properties. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 42:265402, 2009.
- [59] B. LIHOREAU, B. GAUVREAU, M. BÉRENGIER, P. BLANC-BENON et I. CALMET : Outdoor sound propagation modeling in realistic environments : Application of coupled parabolic and atmospheric models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120:110–119, 2006.
- [60] Y. Y. LU : A complex coefficient rational approximation of  $\sqrt{1+x}$ . *Appl. Numer. Math.*, 27:141–154, 1998.
- [61] Y. Y. LU : Local orthogonal transformation and one-way methods for acoustic waveguides. *Wave Motion*, 34:193–207, 2001.
- [62] Y. Y. LU : A fourth-order Magnus scheme for Helmholtz equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 173:247–258, 2005.
- [63] Y. Y. LU : Some techniques for computing wave propagation in optical waveguides. *Comm. Comput. Phys.*, 1:1056–1075, 2006.
- [64] Y. Y. LU et J. R. MCLAUGHLIN : The Riccati method for the Helmholtz equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100:1432–1446, 1996.
- [65] S. T. MCDANIEL : Parabolic approximations for underwater sound propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 58:1178–1185, 1975.
- [66] S. T. MCDANIEL : Propagation of normal mode in the parabolic approximation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57(2):307–311, 1975.
- [67] H. MCMAKEN : On the convergence of the Bremmer series for the Helmholtz equation in 2-D. *Wave Motion*, 8(3):277 – 283, 1986.
- [68] A. M. METZLER, W. L. SIEGMANN et M. D. COLLINS : Single-scattering parabolic equation solutions for elastic media propagation, including Rayleigh waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131:1131–1137, 2012.
- [69] M.HORNIKX et J. FORSSEN : The 2.5-dimensional equivalent sources method for directly exposed and shielded urban canyons. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(5):2532–2541, 2007.
- [70] F. A. MILINAZZO, C. A. ZALA et G. H. BROOKE : Rational square-root approximations for parabolic equation algorithms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(2):760–766, 1997.
- [71] M. MOLERÓN, S. FÉLIX, V. PAGNEUX et O. RICHOUX : Sound propagation in periodic urban areas. *J. Appl. Phys.*, 111(11):114906, 2012.
- [72] V.E. OSTASHEV, D. JUVE et P. BLANC-BENON : Derivation of a wide-angle parabolic equation for sound waves in inhomogeneous moving media. *Acta Acust. United Ac.*, 83(3): 455–460, 1997.
- [73] R. PACHÓN et L. N. TREFETHEN : Barycentric-Remez algorithms for best polynomial approximation in the Chebfun system. *BIT.*, 49:721–741, 2009.

- [74] V. PAGNEUX : Multimodal admittance method in waveguides and singularity behavior at high frequencies. *J. Comput. Appl. Math.*, 234:1834 – 1841, 2010.
- [75] V. PAGNEUX, N. AMIR et J. KERGMARD : A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. Part I. Theory and validation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100:2034–2048, 1996.
- [76] J. S. PAPADAKIS et B. PELLONI : A method for the treatment of a sloping sea bottom in the parabolic approximation. *J. Comput. Acoust.*, 4:89–100, 1996.
- [77] J. S. PAPADAKIS, M. I. TAROUDAKIS, P. J. PAPADAKIS et B. MAYFIELD : A new method for a realistic treatment of the sea bottom in the parabolic approximation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92:2030–2038, 1992.
- [78] S. PARAKKAL, K. E. GILBERT et X. DI : Application of the Beilis-Tappert parabolic equation method to sound propagation over irregular terrain. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(2): 1039–1046, 2012.
- [79] S. PARAKKAL, K. E. GILBERT, X. DI et H. E. BASS : A generalized polar coordinate method for sound propagation over large-scale irregular terrain. *J. Acoust. Soc. Am.*, 128:2573–2580, 2010.
- [80] D. W. PEACEMAN et H. H. RACHFORD : The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 3(1):28–41, 1955.
- [81] A. PELAT, S. FELIX et V. PAGNEUX : On the use of leaky modes in open waveguides for the sound propagation modeling in street canyons. *J. Acoust. Soc. Am.*, 126(6):2864–2872, 2009.
- [82] A. PELAT, S. FÉLIX et V. PAGNEUX : A coupled modal-finite element method for the wave propagation modeling in irregular open waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 129:1240–1249, 2011.
- [83] A. PELAT et B. LIHOREAU : On the approximation of total absorption of the street open ceiling at low frequencies. *Appl. Acoust.*, 73(8):734 – 740, 2012.
- [84] A. C. RADDER : On the parabolic equation method for water-wave propagation. *J. Fluid Mech.*, 95(01):159–176, 1979.
- [85] R. D. RICHTMYER et K. W. MORTON : *Difference methods for initial value problems*, chapitre 8, pages 216 – 217. Wiley-Interscience, New York, 1967.
- [86] D. N. Ghosh ROY et G. J. ORRIS : A Born scatterer in an acoustical waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114(2):626–633, 2003.
- [87] R. A. SACK et M. WEST : A parabolic equation for sound propagation in two dimensions over any smooth terrain profile : The generalised terrain parabolic equation (GT-PE). *Appl. Acoust.*, 45:113–129, 1995.
- [88] E. M. SALOMONS : Diffraction by a screen in downwind sound propagation : A parabolic-equation approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95(6):3109–3117, 1994.
- [89] J. SCHIFF et S. SHNIDER : A natural approach to the numerical integration of Riccati differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36:1392–1413, 1999.
- [90] M. SCHIFF, M. HORNIKX et J. FORSSÉN : Excess attenuation for sound propagation over an urban canyon. *Appl. Acoust.*, 71(6):510 – 517, 2010.
- [91] F. TAPPERT : *The parabolic approximation method*, pages 224–287. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin / Heidelberg, 1977.

- 
- [92] W.H. TEUKOLSKY, S. A. VETTERLING et W.T. FLANNERY : *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*, chapitre 20. Cambridge University Press, 3<sup>ième</sup> édition, 2007.
- [93] T. VAN RENTERGHEM, E. M. SALOMONS et D. BOTTELDOOREN : Efficient FDTD-PE model for sound propagation in situations with complex obstacles and wind profiles. *Acta Acust. United Ac.*, 91(4):671–679, 2005.
- [94] B. T. WETTON et G. H. BROOKE : One-way wave equations for seismoacoustic propagation in elastic waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87(2):624–632, 1990.
- [95] D. YEVICK et D. J. THOMSON : Complex Padé approximants for wide-angle acoustic propagators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(6):2784–2790, 2000.
- [96] G.-Q. ZHANG : High order approximation of one-way wave equations. *J. Appl. Math.*, 3:90–97, 1985.



## Résumé

L'environnement urbain est le siège de fortes nuisances sonores notamment générées par les moyens de transport. Afin de lutter contre ces nuisances, la réglementation européenne impose la réalisation de cartographies de bruit. Dans ce contexte, des travaux fondamentaux sont menés autour de la propagation d'ondes acoustiques basses fréquences en milieu urbain. Différents travaux de recherche récents portent sur la mise en œuvre de méthodes ondulatoires pour la propagation d'ondes acoustiques dans de tels milieux. Le coût numérique de ces méthodes limite cependant leur utilisation dans un contexte d'ingénierie.

L'objectif de ces travaux de thèse porte sur l'approximation unidirectionnelle de la propagation des ondes, appliquée à l'acoustique urbaine. Cette approximation permet d'apporter des simplifications à l'équation d'onde afin de limiter le temps de calcul lors de sa résolution. La particularité de ce travail de thèse réside dans la prise en compte des variations, continues ou discontinues, de la largeur des rues. Deux formalismes sont utilisés : l'équation parabolique et une approche multimodale.

L'approche multimodale sert de support à une étude théorique sur les mécanismes de couplages de modes dans des guides d'ondes irréguliers bidimensionnels. Pour cela, le champ de pression est décomposé en fonction du sens de propagation des ondes à la manière d'une série de Bremmer. La contribution particulière de l'approximation unidirectionnelle est étudiée en fonction des paramètres géométriques du guide d'ondes, ce qui permet de mieux cerner les limites de validité de cette approximation.

L'utilisation de l'équation parabolique a pour but une application à l'acoustique urbaine. Une transformation de coordonnées est associée à l'équation parabolique grand angle afin de prendre en compte l'effet de la variation de la section du guide d'ondes. Une méthode de résolution est alors spécifiquement développée et permet une évaluation précise du champ de pression. D'autre part, une méthode de résolution de l'équation parabolique grand angle tridimensionnelle est adaptée à la modélisation de la propagation acoustique en milieu urbain. Cette méthode permet de tenir compte des variations brusques ou continues de la largeur de la rue. Une comparaison avec des mesures sur maquette de rue à échelle réduite permet de mettre en avant les possibilités de la méthode.

## Abstract

The urban environment is the seat of loud noise generated by means of transportation. To fight against these nuisances, European legislation requires the achievement of noise mapping. In this context, a fundamental work is carried around the propagation of low-frequency acoustic waves in urban areas. Several recent research focuses on the implementation of wave methods for acoustic wave propagation in such environments. The computational cost of these methods, however, limits their use in the context of engineering.

The objective of this thesis focuses on the one-way approximation of wave propagation, applied to urban acoustics. This approximation allows to make simplifications on the wave equation in order to limit the computation time. The particularity of this thesis lies in the consideration of variations, continuous or discontinuous, of the width of streets. Two formalisms are used : parabolic equation and a multimodal approach.

The multimodal approach provides support for a theoretical study on the mode-coupling mechanisms in two-dimensional irregular waveguides. For this, the pressure field is decomposed according to the direction of wave propagation in the manner of a Bremmer series. The specific contribution of the one-way approximation is studied as a function of the geometric parameters of the waveguide, which helps identify the limits of validity of this approximation.

Use of the parabolic equation is intended for application to urban acoustic. A coordinate transformation is associated with the wide-angle parabolic-equation in order to take into account the variation effect of the waveguide section. A resolution method is developed specifically and allows an accurate assessment of the pressure field. On the other hand, a solving method of the three-dimensional parabolic-equation is suitable for the modeling of acoustic propagation in urban areas. This method takes into account sudden or continuous variations of the street width. A comparison with measurements on scaled model of street allows to highlight the possibilities of the method.