



**HAL**  
open science

# Dynamique des structures déformables et des solides rigides - Quantification des incertitudes et réduction de modèle

Anas Batou

► **To cite this version:**

Anas Batou. Dynamique des structures déformables et des solides rigides - Quantification des incertitudes et réduction de modèle. Vibrations [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2014. tel-01010584

**HAL Id: tel-01010584**

**<https://theses.hal.science/tel-01010584>**

Submitted on 20 Jun 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS-EST

Année 2014

**THÈSE D'HABILITATION À DIRIGER DES  
RECHERCHES**

**Discipline : Mécanique**

présentée et soutenue publiquement  
par

**Anas Batou**

le 03 Juin 2014

Titre :

**Dynamique des structures déformables et des  
solides rigides - Quantification des incertitudes et  
réduction de modèle**

**JURY**

M. Geert DEGRANDE, M. Denis DUHAMEL, Mme Hélène DUMONTET,	Professeur KU Leuven, Professeur École des Ponts ParisTech, Professeur Université Pierre et Marie Curie,	<i>rapporteur</i> <i>examineur</i> <i>examineur</i>
M. Olivier LE MAÎTRE, M. Marc MIGNOLET, M. Roger OHAYON,	Directeur de Recherche CNRS , LIMSI, Professeur Arizona State University, Professeur Conservatoire National des Arts et Métiers,	<i>rapporteur</i> <i>rapporteur</i> <i>président</i>
M. Fabrice THOUVEREZ, M. Christian SOIZE,	Professeur École Centrale de Lyon, Professeur Université Paris-Est Marne- la-Vallée,	<i>examineur</i> <i>directeur d'HDR</i>



# Remerciements

Je tiens d'abord à remercier M. Geert Degrande, M. Olivier Le Maître et M. Marc Mignolet de m'avoir fait l'honneur d'accepter de rapporter ce mémoire et d'avoir ainsi consacré une partie de leur précieux temps à l'évaluation de mon travail. Je souhaite aussi exprimer ma gratitude à Mme Hélène Dumontet, M. Denis Duhamel et M. Fabrice Thouverez pour avoir accepté d'examiner mon travail et M. Roger Ohayon pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Je voudrais exprimer ma grande gratitude à Christian Soize dont les enseignements et les précieux conseils ont grandement influencé mes travaux recherches, et ce, bien au delà de mes travaux de thèse. Sa rigueur scientifique et ses méthodes de travail sont et resteront un modèle pour les années à venir.

Je remercie également les chercheurs avec qui j'ai eu l'occasion de collaborer ou juste d'échanger, qu'ils soient du monde académique ou industriel. Un grand merci aux professeurs Rubens Sampaio (PUC, Rio), Thiago Ritto (UFRJ, Rio) et Hong Hee Yoo (Hanyang University, Séoul) pour m'avoir invité dans leur unité de recherche. Je voudrais aussi remercier Sylvie Audebert (EDF R&D), Nicolas Brie (EDF R&D), Mathieu Corus (EDF R&D) et Laurent Gagliardini (PSA, peugeot citroën) qui, de part leur collaboration, ont permis une validation et une valorisation industrielle d'une partie de mes travaux de recherche.

Je voudrais aussi remercier l'ensemble des membres du laboratoire MSME qui ont contribué à créer un cadre de travail agréable, chaleureux, stimulant et riche scientifiquement. Je remercie spécialement Christophe Desceliers qui m'a encouragé et conseillé durant la préparation de l'HDR. Un grand merci aussi aux étudiants que j'ai encadrés et qui ont donc, directement ou indirectement, contribué aux travaux présentés dans ce mémoire : Adrien Arnoux (docteur), Olivier Ezvan (doctorant), Benjamin Morin, Hai quan Do, Viet Duc Hoang, ...

Enfin, mes derniers mais non des moindres remerciements reviennent à ma famille et en particulier à mon épouse Nassima pour son soutien continu depuis ma thèse et pour sa patience durant les périodes intenses en activités professionnelles.



---

# Résumé

Ce mémoire synthétise mes travaux de recherches post-doctorales au sein du laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle (MSME) sur la période Novembre 2008 - Décembre 2013. Durant cette période, je me suis intéressé de manière générale à la quantification des incertitudes et à la réduction de modèle pour la modélisation numérique des systèmes dynamiques.

Dans une première partie, on s'intéresse à la modélisation des incertitudes dans les systèmes multicorps (mécanismes). Pour ce type de système, les incertitudes concernent les paramètres du modèle. Ces incertitudes sont liées soit à une variabilité naturelle, soit à un manque de connaissance sur ces paramètres. On s'intéresse en particulier à la modélisation des incertitudes relatives à la distribution de masse des solides rigides. Afin d'être compatible avec le formalisme de la dynamique des systèmes multicorps, cette modélisation est construite directement au niveau des propriétés globales d'inertie (masse totale, centre de gravité et tenseur d'inertie) des solides rigides.

Dans la partie suivante, on s'intéresse à la modélisation et à l'identification en inverse des incertitudes dans les structures déformables. Pour ces structures, en plus des incertitudes sur les paramètres, il existe des incertitudes de modèle induites par les erreurs de modélisation (discrétisation, choix de la loi de comportement, ...). Pour prendre en compte ces deux types d'incertitudes, une approche probabiliste mixte paramétrique/non paramétrique est utilisée. L'accent sera mis sur l'identification des hyper-paramètres du modèle stochastique en utilisant des mesures expérimentales. Plusieurs types d'observations expérimentales seront analysés.

Le troisième partie de ce mémoire présente une nouvelle méthodologie d'analyse dynamique des structures à forte densité modale. Celle-ci est basée sur une séparation global/local de l'espace des déplacements admissibles, permettant ainsi de construire un modèle réduit des déplacements globaux de petite dimension puis, si cela est nécessaire, de prendre en compte les contributions locales par une approche probabiliste. Deux applications industrielles seront présentées : la première concerne l'analyse vibratoire BF d'un véhicule automobile et la seconde concerne la réponse non-linéaire transitoire d'une rangée d'assemblages combustibles.

Enfin, la quatrième partie de ces travaux concerne cette fois-ci l'aléa du chargement appliqué. On s'intéresse en particulier à la génération d'accélérogrammes pour la construction de chargements sismiques. On présente une nouvelle méthodologie de construction et de génération d'accélérogrammes prenant en compte des propriétés physiques et des spécifications issues de l'ingénierie sismique. Cette méthodologie tient compte de la grande dimension stochastique du processus stochastique modélisant l'accélérogramme.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Synthèse des activités professionnelles.</b>	<b>9</b>
1.1	État civil. . . . .	9
1.2	Parcours professionnel. . . . .	9
1.2.1	Formation . . . . .	9
1.2.2	Expérience professionnelle . . . . .	10
1.3	Responsabilités collectives. . . . .	10
1.3.1	Responsabilités administratives . . . . .	10
1.3.2	Responsabilités pédagogiques . . . . .	10
1.4	Enseignements. . . . .	10
1.5	Activités de recherche. . . . .	11
1.5.1	Thématiques de recherche post-doctorales . . . . .	11
1.5.2	Bilan de la production scientifique . . . . .	11
1.5.3	Séjours de recherche dans des institutions étrangères. . . . .	11
1.5.4	Projets et contrats de recherche . . . . .	11
1.5.5	Prix et distinctions . . . . .	12
1.5.6	Organisation de rencontres scientifiques . . . . .	13
1.5.7	Séminaires et keynote lectures . . . . .	13
1.5.8	Encadrement d'étudiants . . . . .	13
1.5.9	Participation à des jurys de thèse . . . . .	15
1.5.10	Activité de relecture pour des journaux scientifiques . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Introduction - Synthèse des activités de recherche.</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction générale. . . . .	18
2.2	Quantification des incertitudes en dynamique des solides rigides. . . . .	20
2.3	Quantification des incertitudes en dynamique des structures déformables. . . . .	23
2.4	Réduction de modèle pour les structures dynamiques à forte densité modale. . . . .	27
2.5	Génération d'accélérogrammes sismiques par la théorie de l'information. . . . .	33
<b>3</b>	<b>Quantification des incertitudes en dynamique des solides rigides</b>	<b>37</b>
3.1	Rappel sur la modélisation déterministe des systèmes multicorps. . . . .	38
3.1.1	Mise en équation. . . . .	38
3.1.2	Exemple d'application. . . . .	39
3.2	Modélisation probabiliste des solides rigides incertains. . . . .	41
3.2.1	Principe du Maximum d'Entropie (MaxEnt). . . . .	41



3.2.2	Application aux solides rigides. . . . .	43
3.3	Modèle stochastique d'un système multicorps avec solides rigides incertains. . . . .	49
3.4	Conclusions. . . . .	52
3.5	Travaux en cours et perspectives. . . . .	52
3.5.1	Prise en compte d'autres sources d'incertitudes et validation industrielle. . . . .	52
3.5.2	Conception robuste des systèmes multicorps. . . . .	53
3.5.3	Extension aux systèmes multicorps flexibles. . . . .	53
<b>4</b>	<b>Quantification des incertitudes en dynamique des structures déformables. . . . .</b>	<b>55</b>
4.1	Construction du modèle réduit nominal. . . . .	56
4.2	Construction du modèle réduit probabiliste. . . . .	57
4.2.1	Construction du modèle probabiliste des incertitudes de paramètres. . . . .	58
4.2.2	Construction du modèle probabiliste des incertitudes de modélisation. . . . .	59
4.2.3	Réponse aléatoire du modèle réduit probabiliste. . . . .	60
4.3	Identification du modèle probabiliste en utilisant des données expérimentales. . . . .	60
4.3.1	Méthodologie générale d'identification. . . . .	60
4.3.2	Observations sur les fréquences propres. . . . .	62
4.3.3	Observations sur les fréquences propres et les vecteurs propres. . . . .	65
4.3.4	Observations sur les réponses fréquentielles. . . . .	75
4.4	Conclusions et perspectives. . . . .	81
<b>5</b>	<b>Réduction de modèle pour les structures dynamiques à forte densité modale. . . . .</b>	<b>83</b>
5.1	Construction des bases de réduction pour les déplacements globaux et les déplacements locaux. . . . .	84
5.1.1	Réduction cinématique de l'énergie cinétique. . . . .	84
5.1.2	Problème aux valeurs propres global et problème aux valeurs propres local. . . . .	92
5.2	Modèle réduit des contributions globales uniquement. . . . .	95
5.2.1	Réponse linéaire fréquentielle - Application à l'analyse vibratoire d'un véhicule automobile . . . . .	95
5.2.2	Réponse transitoire non linéaire - Application à l'analyse sismique d'une rangée d'assemblages combustibles. . . . .	97
5.3	Modèle réduit stochastique pour les contributions globales et les contributions locales. . . . .	102
5.3.1	Modèle réduit déterministe des déplacements globaux et locaux. . . . .	102
5.3.2	Modèle réduit stochastique des déplacements globaux et locaux. . . . .	103
5.4	Extension à trois échelles pour l'analyse BF-MF-HF. . . . .	105
5.5	Conclusions. . . . .	108
5.6	Perspectives. . . . .	110

---

<b>6</b>	<b>Génération d'accélérogrammes sismiques par la théorie de l'information.</b>	<b>111</b>
6.1	Construction des lois de probabilités de l'accélérogramme et générateur de réalisations indépendantes. . . . .	112
6.1.1	Échantillonnage et construction de la loi de probabilité. . . . .	112
6.1.2	Calcul des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	112
6.2	Exemple d'informations relatives à un accélérogramme sismique. . . . .	119
6.2.1	Valeur moyenne . . . . .	119
6.2.2	Variance des composantes . . . . .	120
6.2.3	Variance de la vitesse finale et du déplacement final . . . . .	120
6.2.4	Valeur moyenne du SRV . . . . .	122
6.2.5	Variabilité du SRV aléatoire . . . . .	123
6.2.6	Valeur moyenne pour le PGA aléatoire et valeur moyenne pour le PGV aléatoire. . . . .	124
6.2.7	Valeur moyenne du CAV aléatoire . . . . .	125
6.2.8	Valeur moyenne de l'AI aléatoire . . . . .	125
6.3	Applications . . . . .	126
6.3.1	Cas 1. Contraintes : valeur moyenne, variance des composantes, vitesse finale et déplacement final . . . . .	126
6.3.2	Cas 2. Contraintes : Cas 1 et SRV moyen . . . . .	128
6.3.3	Cas 3. Contraintes : Cas 2 et variabilité du SRV . . . . .	128
6.3.4	Cas 4. Contraintes : Cas 3 et PGA moyen, PGV moyen et CAV moyen . . . . .	129
6.4	Conclusions. . . . .	133
6.5	Perspectives. . . . .	133
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives.</b>	<b>135</b>
7.1	Bilan des recherches. . . . .	135
7.2	Perspectives. . . . .	137
	<b>Bibliographie</b>	<b>138</b>



# Chapitre 1

## Synthèse des activités professionnelles.

### 1.1 État civil.

Anas Batou

Né le 10 septembre 1981 à Amiens

Marié, 2 enfants

Maître de conférence

Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, UMR 8208

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

5, Bd Descartes

77 454 Marne-la-Vallée Cedex 2

Tel. : 01 60 95 77 92

Fax : 01 60 95 77 99

E-mail : [anas.batou@univ-paris-est.fr](mailto:anas.batou@univ-paris-est.fr)

### 1.2 Parcours professionnel.

#### 1.2.1 Formation

**1999–2001** : CPGE PTSI/PT\*, Lycée Marie Curie, Nogent-sur-Oise.

**2001–2005** : ENS Cachan - Département de génie mécanique.

**2004–2005** : Master Dynamique des Structures et Systèmes couplés de l'Ecole Centrale de Paris.

**2005–2008** : Doctorat de l'université Paris-Est Marne-la-Vallée, dirigé par C. Soize et intitulé 'Identification des forces stochastiques appliqués à un système dynamique non-linéaire en utilisant un modèle numérique incertain et des réponses expérimentales'. Thèse Cifre EDF R&D. Jury : D. Aubry, C. H. Lamarque, C. Blanzé, L. Billet, C. Soize.

## 1.2.2 Expérience professionnelle

**2008–2010** : ATER à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée.

**2010–** : Maître de conférence à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée.

## 1.3 Responsabilités collectives.

### 1.3.1 Responsabilités administratives

**2013–** : Membre de la commission permanente de recrutement de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée pour les sections 60 et 62.

**2013** : Membre extérieur du comité de sélection de l'INSA de Rouen pour la section 60.

**2014** : Membre extérieur du comité de sélection du Conservatoire National des Arts et Métiers pour la section 60.

**2014** : Membre extérieur du comité de sélection de l'INSA de Rouen pour la section 60.

### 1.3.2 Responsabilités pédagogiques

**2011–** : Responsable de la dernière année pour la filière Génie Civil de l'école d'ingénieur ESIPE.

**2010–** : Tutorat académique de 10 apprentis de l'ESIPE (accompagnement pédagogique et suivi entreprise sur 3 années pour chaque étudiant).

## 1.4 Enseignements.

J'ai dispensé des cours à l'université Paris-Est Marne-la-Vallée durant ma thèse (vacations), puis durant mes deux années d'ATER et depuis ma prise de fonction de maître de conférence. Durant cette période, j'ai enseigné dans deux UFR : l'Institut Francilien des Sciences Appliquées IFSA (licence de 'Sciences Physiques' et Master de 'Mécanique et Génie Civil') et l'ESIPE. J'ai aussi préparé et dispensé des Travaux Pratiques en CPGE PSI\* du Lycée Janson de Sailly (Paris) de 2005 à 2009.

Liste des cours enseignés :

- **Statistiques et Probabilités** : ESIPE GC-1A, GM-1A, MFPI-1A. *CM + TD.*
- **Dynamique des solides** : ESIPE GM-2A. *CM + TD + Projet.*
- **Dynamique des structures** : ESIPE GC-2A, GM-2A, MFPI-3A. *CM + TD + Projet.*
- **Fiabilité des structures** : ESIPE GC-3A. *CM + TD.*
- **Introduction à la mécanique** : L1 SP. *TD.*
- **Ondes** : M1 MGC. *CM + TD.*

- **Élasticité** : ESIPE MFPI-2A. *CM + TD*.
- **Analyse** : L3 SP. *CM + TD*.
- **Algèbre linéaire** : L3 SP. *CM + TD*.
- **Algèbre linéaire** : ESIPE GC-1A. *CM + TD*.
- **CAO** : CPGE PSI\*. *TP*.

## 1.5 Activités de recherche.

### 1.5.1 Thématiques de recherche post-doctorales

- Quantification des incertitudes en dynamique des solides rigides.
- Quantification des incertitudes en dynamique des structures déformables.
- Réduction de modèle pour les structures dynamiques à forte densité modale.
- Génération d'accélérogrammes sismiques par la théorie de l'information.

### 1.5.2 Bilan de la production scientifique

- 1 chapitre de livre.
- 16 publications parues dans des revues avec comité de lecture.
- 27 actes de congrès avec comité de lecture (pour 31 présentations dans des conférences internationales et nationales).
- 2 keynote lectures.

### 1.5.3 Séjours de recherche dans des institutions étrangères.

- **Du 16/02/13 au 31/03/13** : Invitation par le professeur R. Sampaio, Pontefica Universidade Catholica (PUC), Rio de Janeiro, Brésil.
- **Du 01/12/13 au 08/12/13** : Invitation par le professeur H.H. Yoo, Hanyang University, Séoul, Corée. Cette visite a eu lieu dans le cadre du programme Hubert Curien STAR [P6].

### 1.5.4 Projets et contrats de recherche

#### Projets financés sur des contrats industriels

[P1] 2009–2012, Participation au projet "Réduction modale basée sur une séparation des modes structuraux globaux et locaux imbriqués en vibroacoustique numérique pour la réponse statistique basse et moyenne fréquence de systèmes complexes incertains. Application à l'Avance de Phase en synthèse automobile", financé par PSA Peugeot-Citroën et correspondant à la thèse Cifre d'Adrien Arnoux.

[P2] 2010, Coordinateur du projet "Construction d'un modèle réduit d'assemblage combustible par filtrage des modes locaux", financé par EDF R&D.

### Projets sur financements publics

[P3] 2011–2013, Participation au projet TYCHE - Advanced methods using stochastic modeling in high dimension for uncertainty modeling, quantification and propagation in computational mechanics of solids and fluids, financé par l'ANR (programme blanc). Piloté par C. Soize (Université Paris-Est Marne-la-Vallée) et avec la participation de l'Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (École Centrale Nantes), le Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (CNRS) et le Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériau.

[P4] 2012–2014, Responsable scientifique MSME du projet SICODYN - pour des Simulations crédibles via la COrrélation calcul-essai et l'estimation d'incertitudes en DYnamique des structures financé par FUI12/FEDER6. Piloté par S. Audebert (EDF R&D) et avec la participation de CETIM, LMT, FEMTO-ST, LAMCOS, NECS, Phimeca Engineering, SAMTECH France, SULZER Pompes France, VIBRATEC.

[P5] 2013–2016, Coordinateur du projet "HiMoDe - Réduction de modèle pour les structures dynamiques à forte densité modale en basses fréquences", financé par l'ANR (programme Jeunes Chercheurs).

[P6] 2013–2014, Participation au projet franco-coréen STAR (Programme Hubert Curien) intitulé "Quantification des incertitudes en dynamique des systèmes multi-corps" financé par le ministère des affaires étrangères / NRF. Avec la participation de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée (A. Batou et Prof. C. Soize) et de l'Université d'Hanyang, Séoul (C.K. Choi et Prof. H.H. Yoo).

[P7] 2013–2016, Participation au projet TURBODYNA - Modélisation robuste du désaccordage dynamique non linéaire des roues aubagées aéronautiques, financé par l'ANR et la DGA (projet ASTRID). Piloté par E. Capiez-Lernout (MSME).

### Projets collaboratifs sur financements propres

[P8] 2009–2010, Coordinateur du projet "Construction d'un modèle probabiliste représentant une famille de moteur EAS", en partenariat avec EDF R&D.

[P9] 2013–2014, Coordinateur du projet "Construction d'un modèle multicorps stochastique d'un groupe motopropulseur (GMP)", en partenariat avec PSA Peugeot-Citroën.

### 1.5.5 Prix et distinctions

- Prix '50 ans Méc'Appli' pour la meilleure communication au CFM 2011 (thématique dynamique).

### 1.5.6 Organisation de rencontres scientifiques

- Organisation du workshop Franco-Coréen entre le laboratoire MSME et le laboratoire HYDYN (Université Hanyang, Séoul) ayant eu lieu à MSME les 08/07 et 09/07/2013.

### 1.5.7 Séminaires et keynote lectures

- **12/12/2008** : Séminaire intitulé "Identification of stochastic forces applied to a non-linear dynamical system using an uncertain computational model and experimental responses" et donné à MSME lors du workshop Franco-Autrichien "Uncertainties in Structural Dynamics".
- **29/01/2008** : Séminaire invité donné au LaMSID et intitulé "Identification des forces stochastiques appliquées à un système dynamique non linéaire en utilisant un modèle numérique incertain et des réponses expérimentales".
- **16/05/2010** : Keynote lecture intitulée "Stochastic reduced-order model for dynamical structures having numerous local elastic modes in the low-frequency range" donnée lors du congrès ECCM 2010, Paris.
- **26/05/2011** : Keynote lecture intitulée "Random dynamical response of a multibody system with uncertain rigid bodies" donnée lors du congrès COMPDYN 2011, Corfu.
- **07/06/2013** : Séminaire intitulé "Uncertainty quantification in multibody and structural dynamics" et donné à l'université d'Hanyang, Séoul à l'occasion d'une visite au laboratoire HYDYN.
- **09/07/2013** : Séminaire intitulé "Uncertainty quantification in structural dynamics in presence of model uncertainties" et donné à MSME lors du séminaire HYDYN/MSME.
- **03/12/2013** : Séminaire intitulé "Stochastic reduced-order model for dynamical structures having a high modal density" et donné à l'université d'Hanyang, Séoul à l'occasion d'une visite au laboratoire HYDYN.
- **30/01/2014** : Séminaire invité donné au Femto-ST, Besançon et intitulé "Réduction de modèle et quantification des incertitudes pour les structures dynamiques à forte densité modale".
- **10/06/2014** : Séminaire invité, intitulé "Réduction de modèle et quantification des incertitudes pour les structures dynamiques à forte densité modale" et donné lors des Rencontres Franciliennes de la Mécanique 2014.

### 1.5.8 Encadrement d'étudiants

- 2 doctorants.
- 8 étudiants en Master.
- 3 étudiants en L3.



**Doctorants :**

- **2010–2013** : Adrien Arnoux (co-encadrement à 50 %), *Réduction des modèles numériques en dynamique linéaire basse fréquence des automobiles*. Thèse dirigée par C. Soize et financée dans le cadre d'un contrat CIFRE avec PSA [P1].

Résumé : L'objectif de cette thèse était de construire un modèle réduit de petite dimension pour prévoir les réponses dynamiques dans une bande BF sur les parties rigides d'un véhicule automobile complet. Un tel modèle réduit "léger" est une aide à la phase de conception en "Avant Projet" de ces véhicules qui ont la particularité de présenter de nombreux modes élastiques locaux en BF dus à la présence de nombreuses parties flexibles et d'équipements. Pour la construction du modèle réduit, une base non usuelle de l'espace admissible des déplacements globaux a été introduite. La construction de cette base requiert la décomposition en sous-domaines du domaine de la structure qui a été réalisée par la Fast Marching Method. Afin de prendre en compte les incertitudes sur les paramètres du modèle, les incertitudes de modèle induites par les erreurs de modélisation et enfin les incertitudes liées à la non prise en compte des contributions locales dans le modèle réduit des déplacements globaux, un unique modèle probabiliste non paramétrique de ces trois sources d'incertitude a été implémenté. Les paramètres de dispersion de ce modèle probabiliste ont été identifiés en utilisant le principe du maximum de vraisemblance et des réponses obtenues à l'aide d'un modèle stochastique de référence qui inclut des informations expérimentales résultant de travaux précédents. Le modèle réduit stochastique, pour la prévision des déplacements globaux sur les parties rigides dans la bande BF qui a été développé, a été validé sur un modèle de structure automobile "nue" puis a été appliqué avec succès sur un modèle complet de véhicule automobile.

- **2013–2016** : Olivier Ezvan (co-encadrement à 70 %), *Réduction multi-échelle de modèle en dynamique des structures adaptée à une très large bande fréquentielle et quantification des incertitudes*. Thèse dirigée par C. Soize et financée dans le cadre de l'ANR Jeunes Chercheurs HiMoDe [P5].

Résumé : Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le cadre de l'analyse vibratoire des structures complexes dans une très large bande de fréquence (BF, MF et HF). L'objectif est la construction d'un modèle réduit multi-échelle robuste adapté à chacune des bandes BF, MF et HF constituant la large bande. Le caractère multi-échelle est associé aux différentes longueurs d'onde des déformations spatiales qui apparaissent dans les réponses vibratoires pour les différentes bandes BF, MF et HF. L'objectif est de séparer l'espace des déplacements admissibles en trois sous-espaces réduits issus du même modèle numérique afin de construire un modèle réduit adapté à chaque bande de fréquence BF, MF et HF.

**Étudiants en Master :**

- **2010** : Viet Dung Hoang, *Réduction de modèle pour les structures filaires à forte densité modale*.
- **2010** : Van Hai Nguyen, *Utilisation d'algorithmes génétiques pour l'identification d'un modèle probabiliste d'incertitude en dynamique des structures*.

- **2011** : Hai Quan DO, *Analyse et comparaison des méthodes de sous-structuration dynamique.*
- **2011** : Khanh Ngoc Nguyen, *Identification des paramètres d'un modèle probabiliste de solide rigide en utilisant des réponses expérimentales.*
- **2012** : Olivier Ezvan, *Analyse et comparaison des méthodes de condensation dynamique.*
- **2012** : Benjamin Morin, *Interpolation de modèles réduits en dynamique des structures.*
- **2013** : Oliver Ezvan, *Extraction de bases modales pour les petites/moyennes/grandes longueurs d'ondes spatiales.*
- **2014** : Déborah Lavazec (co-encadrement à 30%), *Etude de nouveaux métamatériaux microstructurés pour l'atténuation acoustique et vibratoire en génie civil et transport.*

#### Étudiants en L3 :

- **2012** : Mehdi Belarbi, *Implémentation sous Matlab d'une interface utilisateur pour la visualisation de mouvements de solides rigides.*
- **2013** : Eshan Coowar, *Implémentation d'une procédure de validation pour un logiciel Éléments Finis.*
- **2013** : Antonin Dubois, *Construction d'un modèle dynamique multicorps d'un groupe motopropulseur.*

### 1.5.9 Participation à des jurys de thèse

- **03/10/2012** : Examineur dans le jury de la thèse d'Adrien Arnoux intitulée "Réduction des modèles numériques en dynamique linéaire basse fréquence des automobiles".

### 1.5.10 Activité de relecture pour des journaux scientifiques

- American Institute of Aeronautics and Astronautics (1)
- Applied Mathematical Modelling (1)
- Bulletin of Earthquake Engineering (1)
- Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering (2)
- International Journal for Numerical Methods in Engineering (1)
- Journal of the Acoustical Society of America (1)
- Journal of Sound and Vibration (1)
- Journal of Mathematical Research and Applications (1)
- Mechanical Systems and Signal Processing (2)
- Shock and Vibration (1)



## Chapitre 2

# Introduction - Synthèse des activités de recherche.

Ce chapitre fait la synthèse de mes activités de recherches post-doctorales au sein du laboratoire MSME sur la période Novembre 2008 - Décembre 2013. Durant ces cinq années, mes recherches ont principalement porté sur la quantification des incertitudes et la réduction de modèle en dynamique des solides déformables et des solides rigides. Ce chapitre commence par une brève introduction générale puis synthétise chacune des thématiques qui seront détaillées dans les chapitres suivants. Pour chaque thématique, la problématique est développée en faisant à chaque fois une analyse bibliographique de l'existant, puis les contributions sur la problématique sont présentées en mettant l'accent sur les originalités des travaux décrits dans ce mémoire. Enfin, ces problématiques sont présentées du point de vue des projets et des encadrements liés à ces problématiques.

## 2.1 Introduction générale.

Les travaux de ce mémoire se placent dans le cadre des méthodes de prévision de la réponse transitoire ou fréquentielle d'un système dynamique complexe en utilisant un modèle numérique. L'élaboration de ce modèle est guidée par la physique sous-jacente du système étudié, par la nature des quantités d'intérêt et par les moyens de calculs disponibles. Les progrès réalisés ces dernières années en modélisation mécanique, en méthodes numériques, en CAO et en performance des machines de calcul permettent de construire des modèles de calcul très détaillés et très avancés repoussant à chaque fois les limites de la simulation numérique. Ainsi, le calcul numérique prend une place de plus en plus importante dans le dimensionnement des systèmes dynamiques au détriment des essais expérimentaux qui sont beaucoup plus coûteux. Cependant, bien que cette complexification des modèles numériques s'accompagne d'une amélioration de la richesse des quantités calculées, celle-ci s'accompagne inéluctablement d'une augmentation des sources potentiels d'incertitudes. Si on prend l'exemple de l'analyse vibratoire d'un véhicule automobile, les modèles numériques actuels les plus avancés parviennent à synthétiser uniquement les premières résonances et les écarts calculs/essais augmentent rapidement avec la fréquence. La figure 2.1 montre les modules de FRF mesurées sur 20 véhicules automobiles quasi-identiques [111] (certaines options peuvent varier d'une voiture à l'autre). Cette figure montre une forte variabilité des FRF mesurées. Dans [160], les auteurs ont fait le même constat sur un protocole expérimental similaire. Donc, aussi précis et avancé soit un modèle numérique, il ne pourra jamais restituer la réponse réelle du système qu'il représente à cause des fluctuations naturelles des spécimens d'un système qui entraînent des fluctuations sur les réponses dynamiques de ces spécimens. Par conséquent, une stratégie de quantification des incertitudes doit être incorporée aux

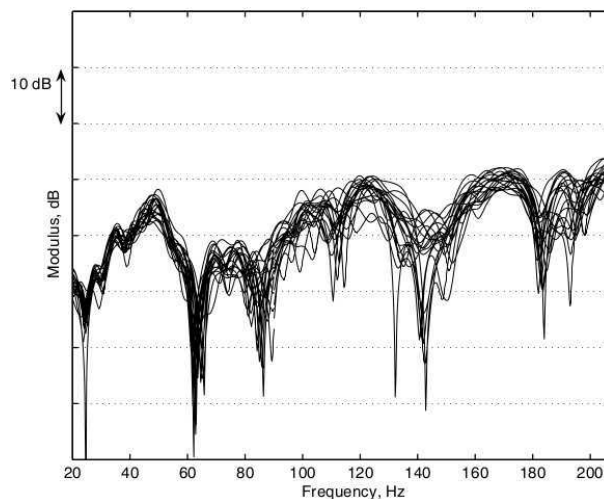


FIGURE 2.1 – Modules de FRF pour 20 voitures nominalemt identiques (illustration tirée de [111]).

modèles numériques complexes afin les rendre plus robustes aux incertitudes.

Plusieurs sources d'incertitudes peuvent affecter un modèle numérique (voir figure 2.2).

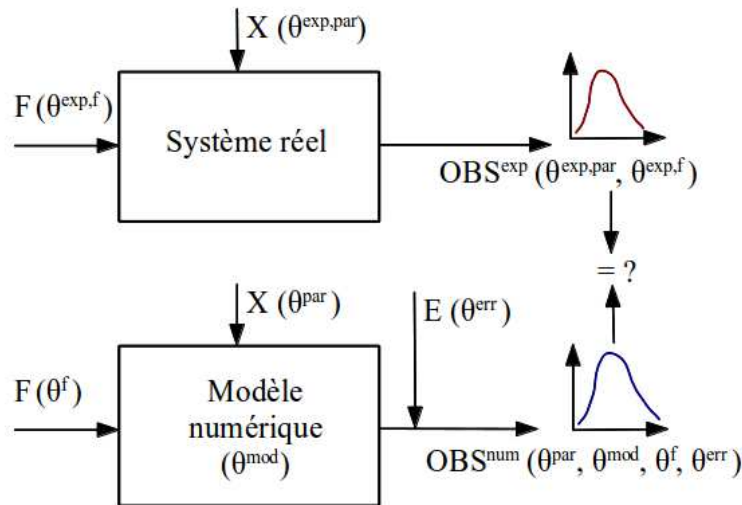


FIGURE 2.2 – Sources d'incertitudes dans les systèmes dynamiques.

(1) Tout d'abord, les incertitudes liées aux paramètres du système sont dues à un manque de connaissance ou à une variabilité naturelle de ces paramètres induite par les tolérances de fabrication ou pouvant apparaître durant le cycle de vie du système. Ces variabilités des paramètres du système peuvent aussi être liées au fait qu'une famille de systèmes quasi-identiques est souvent modélisée par un modèle générique construit à partir d'une configuration nominale représentant toutes les configurations possibles du système étudié. Dans la littérature, les incertitudes dues à un manque de connaissance et les incertitudes liées à une variabilité naturelle sont parfois respectivement appelées *incertitudes épistémiques* et *incertitudes aléatoires*.

(2) Une deuxième source d'incertitude est liée au chargement appliqué sur le système. Ces incertitudes peuvent elle aussi être liées à un manque de connaissance ou à une fluctuation statistique naturelle (comme un chargement sismique ou des forces turbulentes induites par le vent).

Ces deux premiers types d'incertitude seront appelés *incertitude de paramètres* dans ce mémoire.

(3) Une troisième source d'incertitude est liée aux erreurs de modélisation induites par exemple par l'utilisation d'une cinématique réduite, par le choix d'une loi de comportement élastique simplifiée, par un maillage grossier, etc. Ce type d'incertitude sera appelé *incertitude de modélisation* dans ce mémoire.

(4) Enfin, une quatrième source d'incertitude concerne la variabilité expérimentale. Celle-ci est à prendre en considération en corrélation calcul/essai pour la validation ou le recalage d'un modèle à partir de mesures expérimentales.

Dans ce mémoire, deux types de systèmes dynamiques sont considérés : les systèmes multicorps et les structures déformables. Pour les systèmes multicorps (rigides), on s'intéresse au positionnement de solides supposés rigides et reliés entre-eux par des liaisons plus ou

moins complexes. Pour les solides déformables (en petits déplacements et petites rotations), on s'intéresse au déplacement dynamique local des points du solide par rapport à une configuration d'origine. Pour l'analyse dynamique des structures déformables, les modèles numériques peuvent atteindre plusieurs dizaines de millions de Degrés de Libertés (DDL) et dans ce cas, une stratégie de réduction de modèle doit absolument être mise en place afin de réduire les coûts de calcul.

Ce mémoire commence par aborder la quantification des incertitudes pour les systèmes multicorps. Pour ce type de système, les incertitudes de modélisation sont négligeables et donc seules les incertitudes de paramètres seront à prendre en compte. On s'intéressera en particulier aux incertitudes relatives à la distribution spatiale de la masse de chaque solide rigide composant un système multicorps.

Dans le chapitre suivant, on s'intéresse à la quantification des incertitudes pour les structures déformables. Pour ces structures, les incertitudes de modélisation ne sont plus négligeables et augmentent avec la fréquence d'analyse, jusqu'à devenir incontournables en analyse dans la bande des moyennes fréquences. L'accent sera mis sur la construction de modèles probabilistes d'incertitude puis l'identification de ces modèles en utilisant des données expérimentales.

Le troisième volet de ce mémoire est consacré à l'analyse dynamique des structures déformables à forte densité modale. Pour ce type de structure, une nouvelle méthode de séparation d'échelle global/local a été mise en place. Cette méthode permet de construire un modèle réduit des déplacements globaux de petite dimension et de prendre en compte les contributions locales par une approche probabiliste.

Enfin, le dernier chapitre, relatif à l'aléa du chargement appliqué, traite de la modélisation et de la génération d'accélérogrammes pour la spécification de chargements sismiques. La méthode proposée permet de prendre en compte une large gamme de spécifications dans la construction de la loi de probabilité de l'accélération aléatoire du sol.

Les recherches présentées dans ce mémoire sont appliquées dans le sens où elles ont été guidées par la volonté de répondre à des problématiques industrielles existantes. Ainsi les méthodes proposées ont été influencées par les contraintes industrielles liées (1) aux codes de calcul commerciaux utilisés (les méthodes proposées ne doivent pas être intrusives) et (2) à la faible quantité de mesures expérimentales généralement disponibles pour un système réel.

## 2.2 Quantification des incertitudes en dynamique des solides rigides.

### Problématique :

La dynamique des solides rigides plus communément appelée dynamique des systèmes multicorps rigides (ou juste dynamique des systèmes multicorps) a fait l'objet de nombreuses recherches durant les trois dernières décennies. Ces recherches ont été poussées par l'augmentation de la puissance de calcul à disposition des ingénieurs. Des méthodes avancées ont été développées et implémentées dans des logiciels commerciaux et sont

maintenant utilisées couramment dans plusieurs champs d'application tels que la robotique, l'automobile, l'aéronautique, le chemin de fer, etc, afin de concevoir des systèmes multicorps performants. Ces méthodes avancées sont décrites dans les ouvrages de référence [145, 222, 231].

Les incertitudes dans les systèmes multicorps peuvent être présentes au niveau (1) des solides rigides eux-mêmes, (2) des liaisons entre les solides, et (3) des forces externes. Ces incertitudes peuvent être liées à un phénomène aléatoire relatif au fonctionnement du système (un contenu variable dans un véhicule par exemple), à un manque de connaissance sur des paramètres du système ou à la variabilité du système multi-corps (tolérances de fabrication, endommagement durant le cycle de vie, différences pouvant exister entre les spécimens et le modèle nominal). Les incertitudes dans les systèmes multicorps rigides sont donc présentes au niveau des paramètres du système. Les incertitudes de modèle induites par les erreurs de modélisation sont très faibles pour les systèmes multicorps rigides et ne seront pas abordées dans cette thématique. Mais il est à noter que pour les systèmes multicorps flexibles, l'ajout de coordonnées élastiques pour la description de la déformation des solides introduit des incertitudes de modèle qui peuvent être importantes.

Dans ces travaux, nous nous intéressons en particulier aux incertitudes liées à la distribution spatiale de la masse de chaque solide rigide. Ces incertitudes induisent des incertitudes sur les propriétés d'inertie de chaque solide, c'est-à-dire sur la masse, le centre de gravité et le tenseur d'inertie de chaque solide. Un solide rigide présentant de telles incertitudes sera appelé *solide rigide incertain*. L'objectif des travaux lié à cette thématique est de modéliser les incertitudes relatives à la distribution spatiale de la masse d'un solide rigide par une approche probabiliste.

La quantification des incertitudes en dynamique et vibrations des structures par une approche probabiliste a fait l'objet de nombreux travaux durant ces deux dernières décennies. Une synthèse de ces travaux sera présentée dans la Section 2.3 relative aux solides déformables. Curieusement, très peu de travaux concernant la quantification des incertitudes dans les systèmes multicorps ont été publiés. Les quelques travaux publiés concernent (1) les paramètres liés aux liaisons et aux forces internes (induites par des ressorts, amortisseurs et actionneurs) tels que la raideur d'une suspension [171], les coefficients de frottement [224], les coefficients aérodynamiques [82] et (2) les forces et déplacements imposés, comme le déplacement induit par un profil rugueux de route par exemple (voir [197] et [220, 221, 82]). Ces travaux ne concernent donc pas les incertitudes liées aux solides rigides eux-mêmes, c'est-à-dire les incertitudes liées aux propriétés d'inertie des solides rigides. Or ces incertitudes peuvent être élevées en cas de fortes variabilités de la répartition spatiale de la masse des configurations du système et induire de fortes variabilités sur la réponse dynamique du système multicorps. Un autre pan de recherche relatif à la quantification des incertitudes dans les systèmes multicorps concerne les méthodes de conception robuste où l'accent est mis sur la sensibilité de la réponse du système aux variables de conception (voir par exemple [261, 141, 214, 143, 70, 211, 92, 198]). Là encore, ces travaux ne concernent pas les incertitudes relatives aux solides rigides eux-même. Il est à noter que dans [192, 193], les auteurs construisent un modèle d'incertitude sur la matrice de masse et la matrice gyroscopique pour un solide flexible



par l'approche probabiliste non paramétrique [242]. Cependant, cette approche n'est pas adaptée au formalisme de la dynamique des systèmes multicorps. Plus récemment, les mêmes auteurs [194] ont proposé une approche élégante permettant de générer directement toutes les propriétés d'inertie d'un solide rigide via la construction d'une matrice aléatoire contenant toute l'information relative à la masse d'un solide rigide. Cette approche constitue une alternative intéressante à l'approche que nous avons proposée.

### **Méthodologie proposée, originalité des recherches et résultats :**

Dans ces travaux, nous introduisons une modélisation probabiliste originale d'un solide rigide incertain. Celle-ci consiste à construire un modèle d'incertitudes sur les propriétés d'inertie globales du solide rigide directement. En effet une modélisation des incertitudes au niveau de la distribution spatiale de masse serait très difficile à construire car cela nécessiterait de construire le système de lois marginales du processus stochastique modélisant le champs de masse dans le solide. Or ce champs de masse sera de toute façon intégré pour construire les propriétés globales d'inertie. De plus, une telle modélisation ne serait pas compatible avec les logiciels commerciaux pour lesquels les données d'entrée sont soit des géométries, soit des propriétés d'inertie directement.

Ainsi, la masse, le centre de gravité et le tenseur d'inertie représentant le solide rigide incertain sont remplacés par une masse aléatoire, un centre de gravité aléatoire et un tenseur d'inertie aléatoire pour lesquelles les lois de probabilités *a priori* doivent être construites. La construction doit se faire sous certaines contraintes liées à des propriétés physiques que doivent vérifier ces propriétés d'inertie. Par exemple la masse doit être positive, le tenseur d'inertie doit être symétrique défini positif. Ces propriétés définissent une information disponible sur les propriétés d'inertie aléatoires. Le problème de la construction de la loi de probabilité *a priori* d'une variable aléatoire sous la contrainte définie par l'information disponible est un problème mal posé car une infinité de solutions existe. L'entropie de Shannon [232] mesure l'incertitude relative associée à une loi de probabilité. Le principe du Maximum d'Entropie (MaxEnt) [232, 151, 155, 154] dans le contexte de la théorie de l'information [232] est une méthode très efficace permettant de construire une loi de probabilité sous la contrainte définie par l'information disponible. Cette méthode permet de construire de manière unique la loi de probabilité maximisant l'incertitude et prenant en compte l'information disponible. Dans nos travaux, le principe du Max-Ent a été utilisé pour construire les lois de probabilité *a priori* de la masse aléatoire, du centre de gravité aléatoire et du tenseur d'inertie aléatoire. Un soin particulier a été apporté à la définition des propriétés physiques et donc de l'information disponible pour le tenseur d'inertie aléatoire. Le modèle probabiliste de solide rigide incertain ainsi obtenu est paramétré par un faible nombre d'hyperparamètres, ce qui présente un avantage pour une identification en inverse si des données expérimentales sont disponibles ou pour effectuer une analyse de sensibilité vis-à-vis des propriétés d'inertie dans le cas contraire.

Une fois le modèle probabiliste des incertitudes pour les solides rigides incertains construit, ces solides rigides incertains peuvent être assemblés afin de former un système multicorps stochastique qui peut être utilisé pour calculer la réponse aléatoire du système

par la méthode de simulation de Monte-Carlo [217].

### **Cadre de la recherche, encadrements et production scientifique :**

Collaborations nationales : Christian Soize (MSME), Laurent Gagliardini (PSA).

Collaborations internationales : Hong Hee Yoo (Hanyang University, Seoul), Chan Kyu Choi (Hanyang University, Séoul).

Cette thématique de recherche a été initiée sur fonds propres. Elle a donné lieu à une première publication dans le journal *Multibody System Dynamics* [8]. Aussi, ces premiers travaux ont été présentés lors d'une *keynote lecture* durant la conférence internationale COMPDYN 2011 à Corfu, Grèce. Cette recherche a ensuite été poursuivie dans le cadre du stage M2 de Khanh Ngoc Nguyen dans le but d'étudier l'identification des paramètres du modèle probabiliste en utilisant des algorithmes génétiques. Dans le cadre d'un stage L3, Mehdi Belarbi a participé à la programmation sous MATLAB d'un code de calcul général de réponse dynamique d'un système multicorps.

Actuellement ces travaux se poursuivent (1) dans le cadre d'une collaboration avec PSA Peugeot-Citroën (voir projet [P9]) pour laquelle l'objectif est de construire puis d'identifier à l'aide de mesures expérimentales un modèle probabiliste de groupe motopropulseur (GMP) (dans le cadre d'un stage L3, Antonin Dubois a participé à la construction d'un modèle numérique multicorps de GMP) et (2) dans le cadre d'une collaboration avec le laboratoire HYDYN (Université d'Hanyang, Séoul) via un projet Hubert Curien STAR (projet [P6]) afin de mettre en place des stratégies de conception robuste de systèmes multicorps rigides et flexibles en présence de diverses sources d'incertitudes.

## **2.3 Quantification des incertitudes en dynamique des structures déformables.**

### **Problématique :**

Dans ces travaux, nous nous intéressons à la quantification des incertitudes en dynamique et vibrations des structures déformables. Comme pour les systèmes multicorps, on suppose que le modèle numérique utilisé est tel que le calcul de la réponse dynamique est entaché d'incertitudes qu'il faut prendre en compte afin d'améliorer la robustesse de ce modèle. Là encore, les incertitudes peuvent affecter les paramètres du système. Ces incertitudes sur les paramètres peuvent concerner les propriétés des matériaux, la géométrie, les conditions limites ou le chargement. Dans cette recherche, nous nous intéressons surtout aux incertitudes sur les propriétés des matériaux et sur la géométrie. La sensibilité de la réponse dynamique vis-à-vis de ces incertitudes dépend du type de paramètre et de la bande de fréquence d'analyse. En très basse fréquence (TBF), la sensibilité de la réponse vis-à-vis des incertitudes liées aux propriétés des matériaux et à la géométrie est en générale assez faible (mais celle-ci peut être sensible aux incertitudes liées aux conditions limites [188]). Cependant, cette sensibilité augmente rapidement avec la fréquence

et devient très élevée en moyenne fréquence (MF) lorsque les longueurs d'onde spatiales des déplacements deviennent petites et se rapprochent de la longueur de corrélation des hétérogénéités. Ces incertitudes de paramètres qui peuvent donc avoir des effets non négligeables sur la variabilité de la réponse n'expliquent pas à eux seules les différences généralement constatées entre les réponses dynamiques prédites par le modèle numérique et les réponses expérimentales. Les erreurs de modèle sont inhérentes à tout processus de modélisation physique/mathématique d'un système. Ces erreurs dépendent du degré de précision que peut apporter la modélisation choisie. Par exemple, une modélisation en poutre convient pour la prévision du comportement vibratoire d'une structure, uniquement si celle-ci est fortement élancée et que l'on ne s'intéresse pas à la réponse locale près des bords de la structure. Autrement, l'utilisation d'un modèle poutre induit des erreurs de modélisation. Un autre exemple concerne la loi de comportement choisie pour les matériaux (linéarité, classe de symétrie,...). L'hypothèse de matériau isotrope est souvent faite même en présence d'un peu d'anisotropie. Lorsqu'elles ne sont pas négligeables, ces erreurs de modélisation induisent des incertitudes de modèle qu'il est nécessaire de prendre en compte afin de garantir la robustesse des prévisions du modèle numérique.

Concernant la prise en compte des incertitudes sur les paramètres, la méthode la plus courante est l'approche probabiliste paramétrique qui consiste à introduire un modèle probabiliste *a priori* des incertitudes sur les paramètres incertains (voir par exemple [225, 123, 226, 179, 227, 125, 228, 229, 251, 254]). Cette approche consiste à (1) soit directement construire la fonction de densité de probabilité *a priori* des quantités aléatoires en utilisant de l'information disponible et le principe du MaxEnt [232, 151, 155, 154] (2) ou soit à construire une représentation adaptée des quantités aléatoires basée sur une décomposition en chaos polynomiaux (voir par exemple [123, 169]). La décomposition en chaos polynomiaux, ses variantes, ses extensions et ses applications ont fait l'objet de nombreux travaux ces quinze dernières années (voir par exemple [271, 167, 168, 245, 104, 118, 124, 267, 102, 103, 96, 183, 196, 226, 272]). Dans ce mémoire, la fonction de densité de probabilité des quantités aléatoires est directement construite par le principe du MaxEnt. Cette méthode permet d'obtenir une loi de probabilité *a priori* assez proche de la réalité, ce qui facilite la construction d'une loi de probabilité *a posteriori* par actualisation Bayésienne si beaucoup de mesures expérimentales sont disponibles [213, 119, 253]. Concernant les incertitudes de modélisation induites par les erreurs de modélisation, il est aujourd'hui clairement établi que celles-ci ne peuvent être prises en compte par les approches probabilistes paramétriques (voir [64] et [242]). Dans la littérature, il existe deux principales méthodes pour prendre en compte les incertitudes de modèle :

(1) Si une quantité importante de données expérimentales est disponible, la première méthode consiste à introduire un modèle probabiliste de l'erreur de prédiction en sortie de modèle (voir [64]). Un modèle probabiliste *a posteriori* peut ensuite être construit par actualisation Bayésienne.

(2) S'il n'y a pas de données expérimentales disponibles, ou s'il y en a peu, la deuxième méthode est l'approche probabiliste non paramétrique introduite dans [242, 243]. Dans cette approche, le modèle probabiliste d'incertitude est directement construit au niveau des opérateurs du modèle numérique et non sur la sortie du modèle numérique comme dans la première approche. Cette approche a depuis fait l'objet de nombreuses extensions,

validations expérimentales et applications industrielles (voir par exemple [85, 79, 246, 57, 86, 109, 186, 187, 111, 249, 115, 5, 6]).

Plus récemment, une méthode probabiliste mixte paramétrique/non-paramétrique dite *approche probabiliste généralisée des incertitudes* a été introduite dans [251]. Cette méthode permet de prendre en compte les incertitudes de paramètres et les incertitudes de modélisation de manière séparée, permettant ainsi de contrôler séparément le niveau de fluctuation pour chacune des deux sources d'incertitude (paramètres et modélisation).

Dans le cadre des travaux présentés dans ce mémoire, plusieurs investigations ont été menées sur cette thématique. (1) La première concerne la construction d'un modèle probabiliste représentant une famille de structures dynamiques en présence d'incertitude de modèle. (2) La deuxième concerne l'identification d'un modèle probabiliste d'incertitude à partir de données modales (fréquences propres et modes propres). La difficulté liée à l'utilisation de données modales concerne l'appariement des modes propres expérimentaux avec les modes propres numériques. En présence de fortes variabilités des paramètres du modèle, les modes propres peuvent s'intervertir ou se recombinaison pour former de nouveaux modes propres. L'objectif est donc de mettre en place une méthode robuste de suivi de modes afin garantir le bon appariement entre les observations expérimentales et les observations numériques aléatoires. (3) Le troisième champs de recherche concerne la modélisation probabiliste de champs de propriétés incertains en présence d'incertitudes de modélisation. L'objectif est de construire un modèle probabiliste d'incertitude à grande dimension stochastique qui soit facilement identifiable à l'aide de mesures expérimentales. (4) Enfin nous nous sommes intéressés à l'analyse de sensibilité de la réponse dynamique d'une structure vis-à-vis de l'incertitude sur les données d'entrée en utilisant l'entropie comme mesure (relative) de l'incertitude.

### **Méthodologie proposée, originalité des recherches et résultats :**

- Pour la première recherche, qui concerne la construction d'un modèle probabiliste représentant une famille de structures dynamiques en présence d'incertitude de modèle, l'approche probabiliste généralisée des incertitudes a été utilisée pour prendre en compte les incertitudes liées à la variabilité de configurations (et donc de paramètres) et les incertitudes de modélisation liées à l'utilisation d'un modèle nominale générique grossier pour effectuer les calculs des réponses dynamiques. Cette approche a été appliquée à la modélisation probabiliste d'un moteur EAS de Réacteur à Eaux Pressurisées (REP) afin de prédire les premières fréquences propres dans un cadre robuste (celles-ci ne doivent pas être au voisinage de la fréquence de rotation du moteur afin d'éviter qu'il entre en résonance). Cette étude constitue une première application industrielle de l'approche probabiliste généralisée des incertitudes. Le modèle probabiliste a été identifié à partir de mesures des premières fréquences propres de moteurs localisés sur différents sites. Le modèle identifié peut ensuite être utilisé pour calculer les statistiques sur les fréquences propres aléatoires.

- Pour la deuxième recherche relative à l'identification d'un modèle probabiliste des incertitudes à partir de données modales, une méthode originale a été développée afin de faire correspondre les données expérimentales aux prévisions fournies par le modèle

numérique stochastique. Celle-ci consiste, pour chaque observation expérimentale, à introduire une transformation aléatoire de la base modale numérique aléatoire afin que chaque réalisation de celle-ci soit la plus proche possible de la base modale expérimentale. La transformation optimale est solution d'un problème de Procrustes dans la variété de Stiefel. L'algorithme classique de la résolution de ce type de problème a dû être adapté afin de tenir compte des cas où la base modale expérimentale n'est pas normalisée par rapport à la masse. Une fois la transformation optimale aléatoire calculée, la base modale numérique aléatoire et la matrice de raideur numérique aléatoire sont transformées afin de correspondre à la base modale expérimentale et à la matrice de raideur expérimentale. Cette mise en vis-à-vis des observations expérimentales et des observations numériques aléatoires permet ensuite d'identifier un modèle probabiliste d'incertitude en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. L'approche probabiliste généralisée des incertitudes a été utilisée pour construire le modèle d'incertitude. La méthodologie proposée a été appliquée à la construction d'un modèle probabiliste d'incertitude d'une pompe de centrale thermique. Il est à noter que dans [59], les auteurs ont proposé une solution alternative basée sur une transformation des bases modales expérimentales cette fois-ci, afin qu'elles soient le plus proche possible de la base modale du modèle numérique ; les fréquences propres ont quant à elles été laissées inchangées.

- Pour la troisième recherche relative à la modélisation probabiliste des champs de propriétés incertains en présence d'incertitudes de modélisation, l'approche probabiliste généralisée des incertitudes a été étendue au cas où les paramètres incertains sont des champs de propriétés de matériau modélisés par des champs aléatoires à dimension stochastique élevée. Le modèle probabiliste *a priori* des champs de propriétés est construit à l'aide du MaxEnt permettant d'obtenir un modèle à faible paramétrage pouvant ainsi être identifiable facilement à l'aide de mesures expérimentales malgré la dimension stochastique élevée. Cette démarche a été appliquée sur l'exemple numérique d'une poutre expérimentale 3D (simulée numériquement) modélisée par une poutre de Timoshenko. Les champs de propriétés incertains sont le champs de module de compressibilité et le champs de module de cisaillement. Cet exemple numérique a en plus permis de mettre en évidence les incertitudes de modèle importante pour la masse en théorie des poutres lorsque l'on monte en fréquence.

- Enfin, pour le quatrième volet concernant l'analyse de sensibilité, nous avons mis en place une stratégie d'étude de la sensibilité de la réponse d'une structure aux incertitudes (et aux modèles d'incertitudes) des paramètres d'entrée via l'entropie au lieu de la variance comme cela est fait habituellement. Cette démarche permet d'ajouter ou de retirer facilement de l'incertitude aux variables d'entrée en ajoutant ou en retirant de l'information disponible. La démarche a été appliquée à l'analyse vibratoire d'une poutre dont la section est aléatoire. La conclusion de cette étude est que l'omission d'information relative à la corrélation du champs stochastique de propriété entraîne une sous-évaluation de la variabilité de la réponse en BF et une surévaluation en MF. Cette recherche ne sera pas détaillée dans ce mémoire.

**Cadre de la recherche, encadrements et production scientifique :**

Collaborations nationales : Christian Soize (MSME), Mathieu Corus (EDF R&D), Sylvie Audebert (EDF R&D).

Collaborations internationales : Rubens Sampaio (PUC, Rio de Janeiro), Thiago Ritto (UFRJ, Rio de Janeiro), Victor Sacramento (PUC, Rio de Janeiro).

- La recherche relative à la construction d'un modèle probabiliste représentant une famille de structures dynamiques en présence d'incertitude de modèle a été réalisée dans le cadre d'une collaboration avec EDF R&D pour la construction d'un modèle générique de moteur EAS (Projet [P8]). Cette recherche a donné lieu à une publication dans le journal *Mechanical Systems and Signal Processing* [6]. Dans le cadre d'un stage M2, Van Hai Nguyen a étudié l'identification de ce type de modèle probabiliste par l'utilisation d'algorithmes génétiques.

- Concernant l'identification d'un modèle probabiliste d'incertitudes à partir de données modales, les recherches ont été effectuées dans le cadre du projet FUI SICODYN (Projet [P4]) dont l'objectif est d'améliorer les méthodes de corrélation calculs/essais en prenant en compte les incertitudes. Les résultats de ces recherches (avec application sur la pompe) ont été soumis à publication [18].

- Les recherches concernant la modélisation probabiliste des champs de propriétés incertains en présence d'incertitudes de modélisation ont été effectuées dans le cadre du projet ANR TYCHE (Projet [P3]) dédié à la modélisation probabiliste des incertitudes en grande dimension stochastique. Ces recherches ont donné lieu à une publication dans la revue *Archives of Applied Mechanics* [12].

- Enfin les recherches concernant l'analyse de sensibilité de la réponse dynamique ont été menées sur fonds propres en collaboration avec R. Sampaio (PUC, Rio de Janeiro) et T. Ritto (UFRJ, Rio de Janeiro) et ont donné lieu à une publication [16].

## 2.4 Réduction de modèle pour les structures dynamiques à forte densité modale.

**Problématique :**

Ces travaux s'inscrivent dans le cadre de l'analyse vibratoire basses et moyennes fréquences des structures dynamiques complexes parmi lesquelles nous trouvons les structures automobiles, les structures aéronautiques (lanceurs, avions,...), certaines structures du génie civil (réacteurs nucléaires et autres ouvrages complexes). Pour ces structures, les progrès réalisés ces dernières années en modélisation mécanique, en calcul numérique, en CAO et en performance des machines de calcul permettent de construire des modèles Éléments Finis (EF) très détaillés et très avancés. Cependant, ces modèles comportent un très grand nombre de DDL entraînant des coûts de calcul et des besoins en mémoire assez importants. De plus, aussi précis soit le modèle, la réponse dynamique d'une structure reste, à partir d'une certaine fréquence, très sensible aux incertitudes de paramètres et

aux incertitudes de modélisations. Ainsi, bien que le calcul d'une réponse dynamique d'un système à plusieurs dizaines de millions de DDL ne pose actuellement plus de problèmes, il est nécessaire de mettre à la disposition des ingénieurs des techniques de réduction de modèles aboutissant à des modèles de faible dimension et robustes vis-à-vis des incertitudes. Ces modèles réduits permettent de diminuer la taille des espaces mémoires alloués et les temps de calcul, permettant ainsi de réduire les coûts durant le processus de conception et d'optimisation d'une structure.

Classiquement, le comportement vibratoire des structures dynamiques se caractérise par la présence de trois bandes de fréquences distinctes [201] (voir figure 2.3) : Basses Fréquences (BF), Moyennes Fréquences (MF) et Hautes Fréquences (HF). (1) La bande

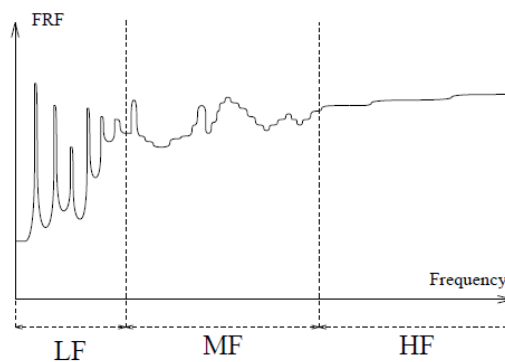


FIGURE 2.3 – Bandes BF, MF et HF (illustration tirée de [201]).

BF est classiquement caractérisée par la présence de quelques modes propres élastiques bien séparés et peu d'effets visco-élastiques dans les matériaux. En général ces modes propres sont globaux dans le sens où ils induisent un déplacement de toute la structure. Ainsi, pour cette bande BF, la méthode d'analyse modale (voir par exemple [56, 185, 95, 189, 201] pour les méthodes générales et [147, 62, 181, 216, 114, 189, 200, 99, 107, 266] pour les méthodes de sous-structuration dynamique) est bien adaptée pour la prévision de la réponse dynamique de la structure. (2) La bande HF est caractérisée par un régime de diffusion très sensible aux incertitudes sur les paramètres et aux incertitudes de modélisation [201]. Pour cette bande, la densité modale est quasi-continue et il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes énergétiques/statistiques. Ainsi la méthode SEA [176, 177] est bien adaptée pour la prévision du comportement vibratoire moyen dans la bande HF. (3) Enfin, la bande MF, est un régime intermédiaire caractérisé par une très forte densité modale, des effets visco-élastiques non-négligeables dans les matériaux et une forte sensibilité aux incertitudes de paramètres et aux incertitudes de modélisation. Les modes propres dans cette bande sont localisés et sont caractérisés par de faibles longueurs d'onde spatiales. Les méthodes utilisées pour prédire la réponse dans cette bande s'inspirent des méthodes BF et/ou des méthodes HF (voir par exemple [239, 258, 238, 262, 260, 269, 162, 81, 241, 105, 178, 180, 264, 244, 72, 234, 110, 91, 126, 165, 94, 166, 148]). La complexité des structures citées en exemple s'est fortement accrue ces dernières décennies. Cette complexité est liée à la multiplication des équipements embarqués, l'utilisation de

nouveaux matériaux composites, la mise en place de liaisons complexes entre les éléments de la structure et la présence de plusieurs échelles de rigidité (par exemple, une structure maîtresse rigide couplée à des sous-structures plus souples). Cette complexité accrue se traduit par une augmentation de la densité modale même en BF et une plus forte sensibilité de la réponse BF/MF aux incertitudes. De plus, du fait que ces structures aient plusieurs échelles de rigidité, le spectre est caractérisé par la présence de quelques modes globaux bien séparés entre eux mais couplés à un très grand nombre de modes locaux présents dès la BF. L'extraction de ces modes globaux est impossible car le mélange de modes globaux et locaux fait que beaucoup de modes globaux ont des contributions locales et vice-versa. Il est donc impossible de définir un critère d'extraction de modes globaux car ceux-ci ne sont justement pas complètement globaux (voir figure 2.4). De

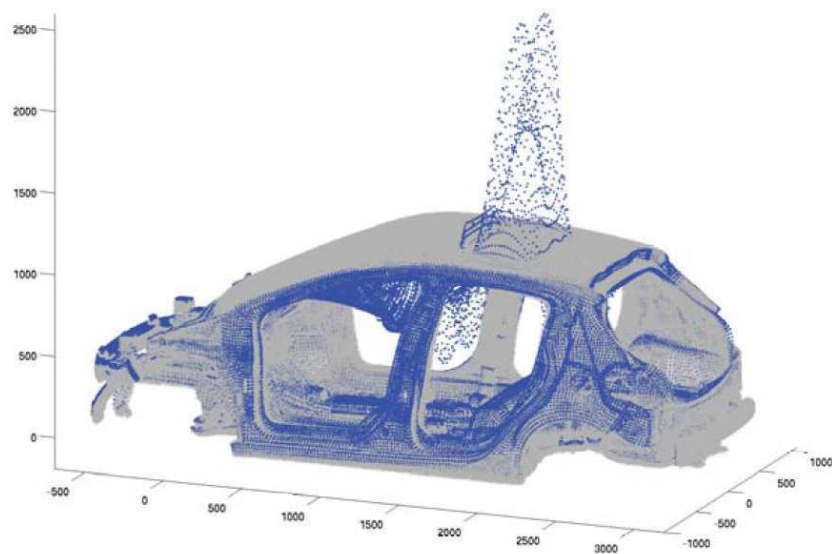


FIGURE 2.4 – Mode propre global de véhicule automobile présentant un fort déplacement local du pavillon.

plus, même en étant parvenu à extraire une base robuste des déplacements globaux, il est souvent nécessaire de prendre en compte les contributions locales car une partie de l'énergie mécanique est transférée depuis les déplacements globaux vers les déplacements locaux entraînant un amortissement apparent sur les déplacements globaux. Ainsi, le comportement vibratoire BF pour ces structures diffère du comportement classique en BF mais diffère aussi du comportement vibratoire classique en MF et en HF.

L'objectif général est donc de construire un modèle réduit pour la prévision du comportement BF/MF des structures dynamiques à forte densité modale. La méthode que nous proposons est basée sur une séparation de l'espace des déplacements admissibles en un espace des déplacements globaux et un espace des déplacements locaux.

Le premier objectif est de construire un modèle réduit construit à l'aide d'une base des déplacements globaux afin de prédire la réponse BF avec une bonne robustesse et des temps de calculs raisonnables.



Le second objectif est de prendre en compte les contributions locales dont le poids augmente avec la fréquence, notamment en MF. Les déplacements locaux étant très sensibles aux incertitudes, les contributions locales doivent être prises en compte par une approche probabiliste.

L'extraction d'une base des déplacements globaux pour les structures complexes a fait l'objet de peu de recherches. La plupart d'entre elles sont basées sur un filtrage spatial des petites longueurs d'onde. Dans le domaine expérimental, ce filtrage est réalisé par des techniques de régularisation [75], par des techniques d'éléments finis basés sur images [140], par extraction du vecteur-propre de la matrice de mobilité fréquentielle [139]. En ce qui concerne l'extraction à partir d'un modèle numérique, les méthodes sont basées sur la technique des masses concentrées. Dans la méthode de Guyan [137], les masses sont concentrées en certains nœuds et l'inertie des nœuds voisins est négligée. Le choix des points de concentration est délicat pour les structures complexes [73, 202, 170]. La technique des masses concentrées a fait l'objet d'autres recherches, notamment en ce qui concerne la convergence de cette méthode [83], [152], [65]. Dans [164], les auteurs proposent de construire une base des déplacements globaux à partir d'un modèle EF grossier. Pour les structures élancées, une autre méthode consiste en la construction de modèles simplifiés équivalents de type poutre ou plaque [199], [208]. Toutes ces méthodes permettent d'extraire des bases des déplacements globaux plus ou moins précises mais ne permettent pas de compléter cette base afin de prendre en compte les contributions locales qui ne sont pas négligeables. Dans [138], l'auteur contourne le problème de la forte densité modale en extrapolant la réponse dynamique à partir d'un faible nombre de modes. Ce travail est intéressant lorsqu'il existe une expression analytique des déformées modales, ce qui n'est pas notre cas. Enfin, la méthode POD (voir [156, 174], [146]) permet aussi dans certains cas d'extraire une base de faible taille pour un système linéaire ou non-linéaire (voir [60, 161, 219]), mais celle-ci doit être construite *a posteriori*. De plus, la base POD est optimale pour un chargement donné. Dans [241], une méthode similaire à la POD a été utilisée pour construire une base de faible dimension pour le domaine MF, indépendante du chargement appliqué.

### **Méthodologie proposée, originalité des recherches et résultats :**

La méthode originale que nous avons proposée pour la construction d'une base des déplacements globaux est dans le même esprit que les méthodes des masses concentrées. L'énergie cinétique est modifiée tout en préservant l'énergie élastique exacte. Ce procédé permet de conserver les conditions aux limites ainsi que les déformées statiques exactes. Seule la distribution de masse est changée. La modification de l'énergie cinétique consiste en une réduction cinématique du déplacement pour l'opérateur de masse. Cette réduction cinématique doit être construite de manière à filtrer les déplacements de longueurs d'onde spatiales inférieures à un seuil  $\epsilon$  pré-défini. La réduction cinématique est construite via un projecteur sur un sous-espace de faible dimension. On peut de même définir le projecteur complémentaire sur le sous-espace complémentaire. On peut alors construire une forme bilinéaire de masse (ou matrice de masse pour le cas discret) projetée qui est de faible rang et une forme bilinéaire de masse complémentaire.

Les deux formes bilinéaires permettent de construire deux problèmes aux valeurs propres (PVP) : (1) un PVP global dont les solutions forment une base de l'espace des déplacements globaux et (2) un PVP local dont les solutions forment une base de l'espace des déplacements locaux. Les modes globaux et les modes locaux ainsi obtenus ne sont pas des modes propres élastiques. Les deux PVP sont résolus séparément mais on peut démontrer que la réunion de la base globale et de la base locale ainsi formées constitue une base de l'espace des déplacements admissibles. Ces deux bases peuvent donc être utilisées pour construire une approximation du déplacement en tronquant chacune de ces deux bases.

On peut ainsi n'utiliser que les modes globaux pour une analyse BF si les contributions locales sont jugées négligeables. Ce type de construction d'un modèle réduit pour la prévision des contributions globales uniquement a été utilisé pour deux applications industrielles : (1) la première concerne la construction d'un modèle réduit pour la prévision de la réponse vibratoire "avant-projet" d'un véhicule automobile (dont certains détails ne sont pas encore complètement définis) et (2) pour le calcul de la réponse non linéaire d'une rangée d'assemblages combustibles soumis à un chargement sismique. Pour cette dernière application, un modèle réduit suffisamment précis a pu être construit en utilisant uniquement 245 modes globaux au lieu de 51 548 modes élastiques avec une analyse modale classique.

Si les contributions locales ne sont pas négligeables (en analyse MF notamment), celles-ci peuvent être prises en compte en ajoutant des coordonnées locales au modèle réduit. De plus, la séparation global/local permet d'implémenter des modèles d'incertitude sur les coordonnées globales et sur les coordonnées locales de manière séparée permettant ainsi de contrôler les niveaux des fluctuations associées à chaque type de coordonnée de manière séparée.

La construction du projecteur permettant de réduire la cinématique de l'énergie cinétique est basée sur une décomposition du domaine en sous-domaines disjoints et de taille homogène. Cette notion de taille est simple à définir pour des domaines volumiques. Par contre, pour des domaines correspondant à des variétés courbes 2D (plaques, coques) et 1D (poutre) plongées dans  $\mathbb{R}^3$ , cette notion de taille est relative aux distances géodésiques entre les points de ces variétés. Donc, sur une structure complexe telle qu'un véhicule automobile constitué d'éléments volumiques, de coques, de poutres, etc, la construction de sous-domaines de taille homogène n'est pas triviale et nécessite une méthode adaptée. La méthode que nous avons proposée est basée sur la Fast Marching Method (FMM) [159, 230]. Cette méthode permet de propager un front sur un maillage à partir d'un point de départ (voir figure 2.5).

Enfin ces travaux ont été étendus à la séparation multi-échelle afin de permettre d'étudier les structures possédant plusieurs échelles de rigidité et fournir ainsi un cadre intéressant pour l'analyse dynamique BF/MF/HF des structures à forte densité modale.

#### **Cadre de la recherche, encadrements et production scientifique :**

Collaborations nationales : Christian Soize (MSME), Laurent Gagliardini (PSA), Nicolas Brie (EDF R&D).

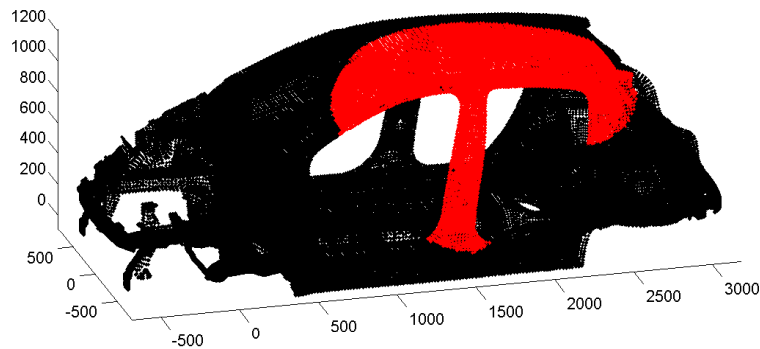


FIGURE 2.5 – Propagation d’un front par la FMM.

Ces travaux de recherche ont été initiés sur fonds propres en collaboration avec Christian Soize et ont donné lieu à deux premières publications [28, 7]. Ces travaux se sont poursuivis dans le cadre de la thèse CIFRE d’Adrien Arnoux en collaboration avec PSA (projet [P1]) pour la construction d’un modèle réduit de véhicule automobile. Cette thèse a produit une première publication dans *Journal of Sound & Vibration* [11] et une deuxième dans *Advances in Mechanical Engineering* [13]. Aussi, ces premiers travaux ont été présentés lors d’une *keynote lecture* durant la conférence ECCM 2010 à Paris. D’autre part, la communication présentée sur ce sujet lors du Congrès Français de Mécanique en 2011 s’est vue décerner le prix ”50 ans Méc’Appli”.

Dans le cadre d’un contrat avec EDF R&D (projet [P2]), la méthode a été appliquée pour la construction d’un modèle réduit non linéaire d’une rangée d’assemblages combustibles en vue de son évaluation sismique. Les non-linéarités sont localisées et dues à la présence de butées de choc. Cette extension au cas non linéaire appliquée à un rangée d’assemblages a été publiée dans *Nuclear Engineering & Design* [9]. Ces travaux ont été précédés du stage M2 de Viet Dung Hoang sur la réduction de modèle des structures filaires à forte densité modale. Ces travaux sur les structures filaires ont été publiés dans *International Journal for Uncertainty Quantification* [10].

Le projet ANR Jeunes Chercheurs intitulé ”HiMoDe - Réduction de modèle pour les structures dynamiques à forte densité modale en basse fréquence” (voir projet [P5]) a débuté en Janvier 2013 et a pour objectifs (1) d’améliorer les projecteurs constants par sous-domaines utilisés jusqu’alors, (2) d’étendre le domaine d’application de la méthode au delà de la BF, (3) de valider expérimentalement la méthode, (4) de modéliser les contributions locales par une approche énergétique/statistique et (5) d’étendre ces travaux à la réduction de modèle en présence de non-linéarités géométriques. Dans le cadre de ce projet, le stage puis la thèse (qui vient de débiter) d’Olivier Ezvan est relative aux quatre premiers objectifs venant d’être cités. Deux publications relatives à ces objectifs sont en cours de rédaction [20, 21].

## 2.5 Génération d'accélérogrammes sismiques par la théorie de l'information.

### Problématique :

Dans le contexte de l'évaluation des risques sismiques, le calcul de la réponse transitoire d'une structure dynamique requiert la spécification du chargement sismique correspondant à des caractéristiques de site spécifiques et à des scénarios spécifiques. Ces chargements sismiques peuvent être construits en utilisant directement des accélérogrammes mesurés ([157, 191, 195]). Cette méthode a l'avantage de conserver les spécificités d'un accélérogramme naturel et doit être utilisée à chaque fois qu'un nombre suffisant d'accélérogrammes mesurés est disponible pour le site où la structure est localisée et pour le scénario considéré par les ingénieurs. Plusieurs méthodes de sélection et de modification d'accélérogrammes ont été proposées afin d'étendre le domaine d'applicabilité des accélérogrammes naturels stockés dans les bases de données mondiales ([142, 191, 195, 135]). Dans [274], les auteurs utilisent une représentation de Karhunen-Loève [156, 174] pour étendre une base de donnée. Cette méthode permet de générer de nouveaux accélérogrammes ayant les mêmes spécificités naturelles que les accélérogrammes à partir desquels la représentation de Karhunen-Loève a été construite.

Si aucun accélérogramme correspondant au cas étudié n'est disponible, alors des accélérogrammes synthétiques doivent être générés afin d'analyser la réponse transitoire d'une structure. Du fait du caractère aléatoire des signaux sismiques, ces accélérogrammes synthétiques sont simulés comme des réalisations de processus stochastiques. Une quantité importante de méthodes de simulation ont été proposées dans la littérature. La plupart de ces méthodes concernent la simulation de trajectoires de processus stochastiques Gaussiens stationnaires (voir par exemple [54, 150, 209, 235]) ou non stationnaires (en amplitude [256, 128] et en fréquence [210, 218, 212, 77, 78]) qui sont compatibles avec un spectre de réponse. En effet, la plupart des codes de régulation comme l'Eurocode 8 ([90]) imposent seulement la compatibilité de la valeur moyenne du spectre de réponse en pseudo-vitesse (SRV) avec le spectre cible qui dépend de l'accélération maximale (PGA), du type de sol, etc. Dans [172], les auteurs introduisent un réseau de neurones stochastique (dont l'apprentissage est réalisé à l'aide d'accélérogrammes mesurés) pour générer des accélérogrammes compatibles avec un spectre cible. Dans [127], les auteurs proposent une méthode basée sur la représentation en ondelettes afin d'améliorer la compatibilité avec le spectre cible.

L'existence d'un nombre aussi important de méthodes de simulation d'accélérogrammes est principalement liée au fait que le problème consistant à construire un processus stochastique centré dont le SRV moyen est égal à un spectre cible n'a pas de solution unique. Notamment, l'hypothèse Gaussienne est souvent utilisée pour contrôler le contenu fréquentiel mais n'est pas imposée par les codes de calcul.

Toutes les méthodes référencées ci-dessus se focalisent principalement sur la compatibilité de la valeur moyenne du SRV (qui correspond à la principale contrainte pour la plupart des codes de régulation). L'objectif du travail présenté ici consiste à prendre en compte des contraintes additionnelles relatives à (1) des propriétés des accélérogrammes

sismiques naturels et (2) d'autres spécifications communément utilisées en ingénierie sismique telles que l'accélération maximale du sol (PGA), la vitesse maximale du sol (PGV), la vitesse absolue cumulée (CAV), l'intensité d'Arias (AI), etc. Ces deux dernières sont importantes pour évaluer le potentiel destructeur des accélérogrammes et sont souvent utilisées pour certaines applications sensibles comme l'évaluation sismique des réacteurs nucléaires.

### **Méthodologie proposée, originalité des recherches et résultats :**

Pour réaliser cet objectif, deux problèmes se posent. Le premier est lié à la construction d'une loi de probabilité pour le processus stochastique d'accélération prenant en compte les contraintes additionnelles venant d'être citées. Le deuxième est lié à la construction d'un générateur de réalisations indépendantes de ce processus stochastique représenté par un vecteur aléatoire à grande dimension stochastique.

Une méthode permettant potentiellement de réaliser ces deux objectifs a récemment été introduite dans [248, 252] pour la génération de trajectoires d'un processus stochastique d'accélération dont le SRV moyen est compatible avec un SRV cible. Cette méthode est basée sur deux ingrédients répondant aux deux problèmes précédemment évoqués : (1) La loi de probabilité du vecteur aléatoire représentant le processus stochastique d'accélération sous la contrainte du SRV moyen est construite par le principe du Max-Ent levant ainsi le problème de la non-unicité de la construction et (2) la construction de la distribution de probabilité de ce vecteur aléatoire comme la mesure invariante d'une Équation Différentielle Stochastique d'Itô (EDSI) permettant ainsi de construire des réalisations indépendantes de ce vecteur aléatoire. Ce travail a été développé dans le contexte général de la génération d'accélérogrammes compatibles avec un SRV donné et appliqué à un équipement ou un sous-système secondaire et n'était pas spécifique aux accélérogrammes sismiques. Les travaux présentés dans ce mémoire se basent sur cette méthode.

Deux contributions par rapport aux articles [248, 252] ont été apportées dans ces travaux :

- la première contribution concerne la construction d'un nouvel algorithme adapté à la grande dimension stochastique pour le calcul des multiplicateurs de Lagrange relatifs à la loi de probabilité construite par le MaxEnt. Ce nouvel algorithme est basé sur (1) la minimisation d'une fonctionnelle convexe appropriée et (2) la construction de la distribution de probabilité comme la mesure invariante d'une EDSI avec un choix judicieux des conditions initiales aléatoires et de l'amortissement afin de permettre d'atteindre rapidement la mesure invariante.

- la deuxième contribution concerne la prise en compte de contraintes additionnelles (en plus du SRV moyen) relatives à la vitesse finale (obtenue par intégration de l'accélération), au déplacement final, à la variabilité du SRV autour de sa valeur moyenne, aux statistiques sur le PGA aléatoire, le PGV aléatoire, le CAV aléatoire et l'AI aléatoire. Cette liste peut bien sûr être complétée si nécessaire.

La méthode a été appliquée avec succès pour la génération d'accélérogramme compatible avec un SRV Eurocode 8 (voir figure 2.6) et prenant en compte les contraintes additionnelles précédemment listées.

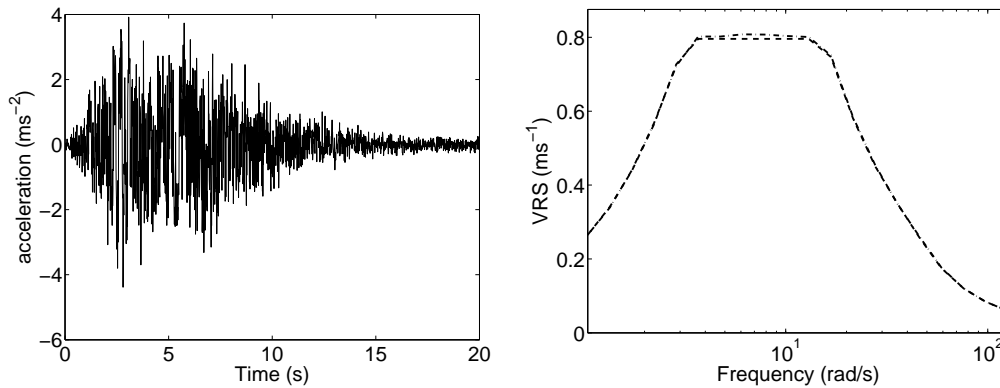


FIGURE 2.6 – Gauche : Exemple d'accélérogramme simulé. Droite : SRV moyen estimé (trait mixte) et SRV cible de type Eurocode 8 (trait pointillé).

### Cadre de la recherche, encadrements et production scientifique :

Collaborations nationales : Christian Soize (MSME).

Ces recherches ont été effectuées dans le cadre du projet ANR TYCHE (Projet [P3]) dédié à la modélisation probabiliste des incertitudes en grande dimension stochastique et ont donné lieu à deux publications : La première [12] dans la revue *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* présente le nouvel algorithme d'identification des multiplicateurs de Lagrange pour les lois de probabilité issues du MaxEnt en grande dimension stochastique et la seconde [12] dans la revue *Bulletin of Earthquake Engineering* est dédiée à la génération d'accélérogrammes compatibles avec les spécifications citées ci-dessus.



# Chapitre 3

## Quantification des incertitudes en dynamique des solides rigides

Ce chapitre, qui est dédié à la quantification des incertitudes en dynamique des solides rigides, a été introduit dans la Section 2.2. On s'intéresse en particuliers aux systèmes multicorps composés de solides rigides incertains (pour lesquels la distribution spatiale de masse est incertaine). On introduit dans ce chapitre un modèle probabiliste original de solide rigide incertain. Ainsi la masse, le centre de gravité et le tenseur d'inertie décrivant classiquement un solide rigide sont remplacés par une masse aléatoire, un centre de gravité aléatoire et un tenseur d'inertie aléatoire. Les lois de probabilités de ces trois quantités aléatoires sont construites par le principe du MaxEnt en utilisant à chaque fois de l'information disponible relative à des propriétés physiques et mathématiques. Une attention particulière a été portée à la construction du tenseur d'inertie aléatoire. Une fois les lois de probabilité et les générateurs de réalisations indépendantes associés construits, plusieurs solides rigides incertains peuvent être reliés entre eux par des liaisons pour obtenir un système dynamique multicorps stochastique dont le modèle permet de calculer la réponse aléatoire.



### 3.1 Rappel sur la modélisation déterministe des systèmes multicorps.

Un système multicorps est constitué de plusieurs solides rigides ou flexibles qui interagissent entre eux par l'intermédiaire de liaisons ou de forces induites par des ressorts, des amortisseurs ou des actionneurs. D'autre part des forces externes sont appliquées sur les solides. Il existe de nombreuses méthodes avancées pour le calcul de la réponse dynamique de tels systèmes et celles-ci sont aujourd'hui implémentées dans de nombreux logiciels commerciaux et utilisées de manière courante par les ingénieurs de nombreuses industries telles que la robotique, l'automobile, l'industrie spatiale, l'industrie ferroviaire, etc. En plus de permettre le calcul de la réponse de systèmes multicorps, ces logiciels permettent aussi de dimensionner ces systèmes à l'aide de méthodes adaptées.

#### 3.1.1 Mise en équation.

L'équation dynamique matricielle pour le calcul de la réponse d'un système multicorps s'obtient classiquement en appliquant les équations d'Euler-Lagrange à chaque solide rigide puis en prenant en compte les contraintes induites par les liaisons en introduisant des multiplicateurs de Lagrange. Cette démarche est détaillée dans les ouvrages classiques [222, 231], nous la résumons ici très brièvement.

Soit  $n_b$  le nombre de solides rigides du système multicorps. Chaque solide  $RB_i, i = 1, \dots, n_b$  de domaine  $\Omega_i$  est caractérisé par ses propriétés d'inertie induites par la distribution spatiale de la masse. Ainsi un solide rigide  $RB_i$  a trois attributs : une masse  $m_i$ , un centre de gravité  $\mathcal{G}_i$  de position  $\mathbf{r}_i$  et un tenseur d'inertie représenté par la matrice d'inertie  $[J_i]$ . Ces trois quantités sont respectivement définies par

$$m_i = \int_{\Omega_i} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_i = \frac{1}{m_i} \int_{\Omega_i} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

$$[J_i] \mathbf{u} = - \int_{\Omega_i} \mathbf{x}' \times \mathbf{x}' \times \mathbf{u} \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad , \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur position défini dans un référentiel fixe et où  $\rho(\mathbf{x})$  est la masse volumique. On remarquera que la matrice d'inertie  $[J_i]$  est définie à partir des coordonnées locales  $\mathbf{x}'$  relatives au référentiel local d'origine  $\mathcal{G}_i$  et dont l'orientation des axes du repère est définie par le vecteur rotation  $\boldsymbol{\gamma}$  dont la nature dépend du paramétrage choisi pour définir les rotations.

La réponse du système multicorps est définie par le vecteur  $\mathbf{u} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_b}, \boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_{n_b})$  qui contient le vecteur déplacement du centre gravité ainsi que le vecteur rotation de

chaque solide rigide. On cherche à calculer la réponse  $\mathbf{u}(t)$  pour tout  $t$  dans l'intervalle  $[0, T]$ . On suppose que les liaisons entre les solides rigides se réduisent à  $n_c$  contraintes holonomiques s'écrivant

$$\varphi(\mathbf{u}, t) = 0. \quad (3.4)$$

Cette équation est dérivée deux fois par rapport au temps (pouvant entraîner une légère violation des contraintes). La réponse  $\mathbf{u}(t)$  est alors solution de l'équation différentielle matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} [M] & [\varphi_{\mathbf{u}}]^T \\ [\varphi_{\mathbf{u}}] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{k} \\ -\frac{d}{dt}\varphi_t - [\frac{d}{dt}\varphi_{\mathbf{u}}] \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.5)$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad (3.6)$$

où  $[M]$  est la matrice masse définie par

$$[M] = \begin{bmatrix} [M^r] & 0 \\ 0 & [M^s] \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

où les matrices  $[M^r]$  et  $[M^s]$  sont définies par

$$[M^r] = \begin{bmatrix} m_1[I_3] & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{n_b}[I_3] \end{bmatrix}, \quad [M^s] = \begin{bmatrix} [J_1] & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & [J_{n_b}] \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Dans l'équation (3.5),  $\mathbf{k}(\dot{\mathbf{u}})$  est le vecteur des forces de Coriolis qui dépend non linéairement du déplacement  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{q}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)$  est le vecteur des forces externes et internes (induites par des ressorts, amortisseurs et actionneurs),  $\boldsymbol{\lambda}$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange,  $[\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), t)]$  est la matrice jacobienne de  $\varphi(\mathbf{u}(t), t)$  par rapport à  $\mathbf{u}(t)$  et  $\varphi_t = \partial\varphi/\partial t$ .

### 3.1.2 Exemple d'application.

La figure 3.1 montre un exemple de système multicorps simple qui servira d'exemple d'application dans ce chapitre. Il est constitué de cinq solides rigides et est représentatif d'un véhicule roulant sur un sol irrégulier. On s'intéresse au déplacement du solide *Rb5*. Dans la configuration initiale, ce solide est supposé symétrique par rapport aux plans  $(\mathcal{G}5, x_{0,1}, x_{0,2})$  et  $(\mathcal{G}5, x_{0,1}, x_{0,3})$  où  $\mathcal{G}5$  est le centre de gravité de *Rb5* initialement positionné en  $\mathbf{r}_{0,5} = (0.6, 0.0, 0.5)$ . La masse du solide *Rb5* est  $\underline{m}_5 = 3000 \text{ kg}$ . La matrice d'inertie  $\underline{J}_5$  du solide *Rb5* est diagonale.

En ce qui concerne les liaisons :

– La liaison sol-*Rb1* est une glissière suivant  $x_{0,3}$ . Le déplacement suivant  $x_{0,3}$  est imposé. La liaison sol-*Rb2* est une glissière suivant  $x_{0,3}$  et  $x_{0,1}$ . Le déplacement suivant  $x_{0,3}$  est lui aussi imposé tandis que le déplacement suivant  $x_{0,1}$  reste libre. Les déplacements

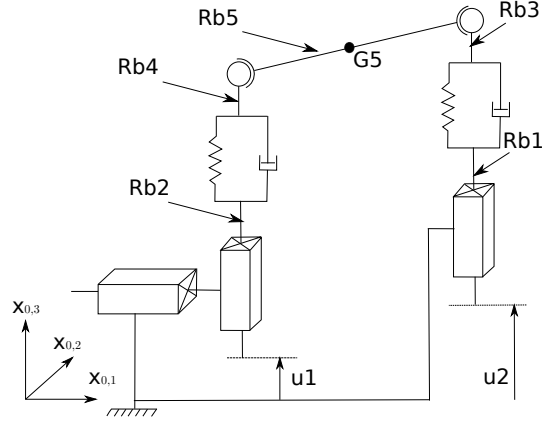
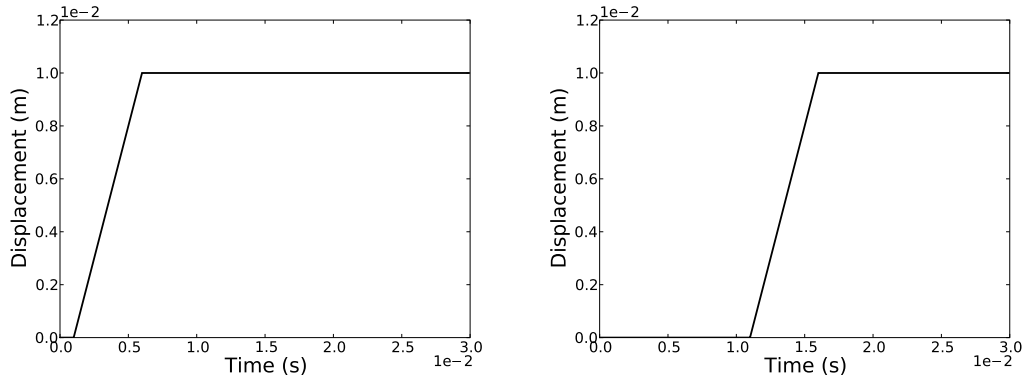


FIGURE 3.1 – Système multicorps.

imposés  $u1(t)$  et  $u2(t)$  sont tracés sur la figure 3.2 pour  $t$  dans l'intervalle  $[0, 0.03]$  s.

- Les liaisons  $Rb1-Rb3$  et  $Rb2-Rb4$  sont des suspensions 6D.
- Les liaisons  $Rb3-Rb5$  et  $Rb4-Rb5$  sont des liaisons pivots. On s'intéresse à la réponse

FIGURE 3.2 – Déplacement imposé  $u1(t)$  (gauche) et  $u2(t)$  (droite).

d'un point  $P_{obs}$  du solide  $Rb5$  initialement localisé en  $(-2.0, -1.0, 0.5)$ . À cause des symétries du système étudié le mouvement reste dans le plan  $(P_{obs}, x_{0,1}, x_{0,3})$ . Ces symétries seront brisées lorsque nous introduirons de l'aléa sur le tenseur d'inertie et le centre de gravité de  $Rb5$ . Les déplacements et rotations (angles d'Euler en séquence (1, 2, 3)) du point  $P_{obs}$  dans le plan  $(P_{obs}, x_{0,1}, x_{0,3})$  sont tracés sur la figure 3.3.

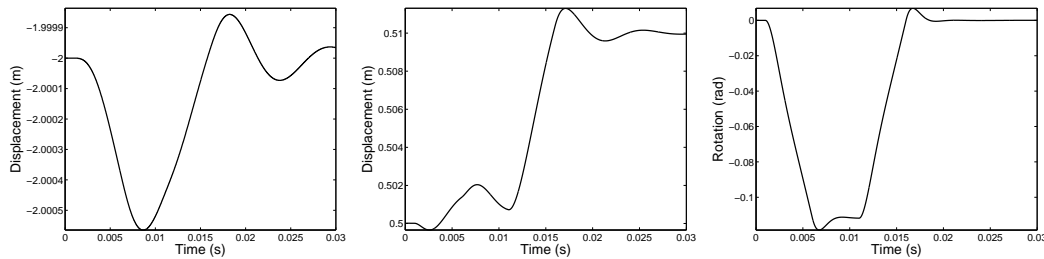


FIGURE 3.3 – Réponse du point  $P_{obs}$  : De gauche à droite, déplacement  $x_{0,1}$ , déplacement  $x_{0,3}$ , et rotation  $x_{0,2}$ .

## 3.2 Modélisation probabiliste des solides rigides incertains.

On suppose maintenant que pour certains solides du système multicorps, la distribution spatiale de masse  $\rho(\mathbf{x})$  est incertaine entraînant des incertitudes sur les propriétés d'inertie de ces solides rigides. Une solution pour prendre en compte ces incertitudes pourrait consister à remplacer directement le champs  $\rho(\mathbf{x})$  par un champs stochastique (approche paramétrique). En dehors de la grande difficulté relative à la construction de ce champs stochastique, cette approche ne serait pas dans l'esprit des méthodes d'analyse des systèmes multicorps pour lesquelles les propriétés d'inertie sont définies de manière globale sur chaque solide. Cette approche ne serait donc pas compatible avec la plupart des logiciels commerciaux existants. Le modèle probabiliste est donc construit au niveau des représentants globaux, à savoir la masse, le centre de gravité et le tenseur d'inertie (approche non paramétrique). Ainsi pour chaque solide rigide incertain, ces trois quantités sont remplacées par des quantités aléatoires dont il reste à déterminer les lois de probabilité. Celles-ci sont construites en utilisant le principe du Maximum d'Entropie [151, 155] (MaxEnt).

### 3.2.1 Principe du Maximum d'Entropie (MaxEnt).

L'objectif est de construire la fonction de densité de probabilité d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et pour lequel de l'information est disponible. Cette information est relative à des propriétés physiques et/ou à d'autres données disponibles sur  $\mathbf{X}$ . Ce problème de construction est mal posé car il possède en général une infinité de solutions. Par exemple, si l'unique information est un support borné (de mesure non nulle) pour  $\mathbf{X}$ , alors il existe bien une infinité de fonctions de densité probabilité définies sur ce borné. Le principe du MaxEnt (voir [232, 151, 263, 233, 184, 155]) est un outils très puissant permettant de construire une fonction de densité de probabilité d'un vecteur aléatoire sous les contraintes définies par l'information disponible. Un autre avantage du MaxEnt est qu'il permet de construire des fonctions de densité de probabilité à très faible paramétrage, ce qui permet de faciliter l'identification en inverse des paramètres de la loi obtenue si des mesures expérimentales sont disponibles. Le principe du MaxEnt consiste à

maximiser l'incertitude (mesurée par l'entropie) relative à  $\mathbf{X}$  sous des contraintes définies par l'information disponible sur  $\mathbf{X}$ . En plus de fournir des lois de probabilité physiquement admissibles et prenant en compte toutes les données disponibles, ce principe permet d'obtenir une solution unique (si elle existe). En effet, parmi toute les solutions vérifiant l'information disponible, la solution retenue est celle qui maximise l'incertitude et donc celle qui est la plus conservative.

La méthode du MaxEnt a été appliquée avec succès à une large gamme de champs disciplinaires, par exemple en analyse et reconstruction d'images [236], en analyse du signal [204], en économétrie [129, 270], en théorie du langage [67], en sciences physiques appliquées [173, 175, 265, 101, 237] et pour les incertitudes en mécanique [242].

On cherche à déterminer la fonction de densité de probabilité  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  dont le support est  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ . On suppose que l'information disponible s'écrit

$$E\{\mathbf{g}(\mathbf{X})\} = \mathbf{f}, \quad (3.9)$$

où  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{x})$  est une fonction, appelée *fonction d'information* dans ce mémoire, à valeurs dans  $\mathbb{R}^\mu$  et où  $\mathbf{f}$  est un vecteur cible donné. L'équation (3.9) peut se réécrire

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (3.10)$$

Une contrainte additionnelle de normalisation est introduite par

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \quad (3.11)$$

L'entropie de la fonction de densité de probabilité  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  est définie par

$$S(p_{\mathbf{X}}) = - \int_{\mathbb{R}^n} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \log(p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble de toutes les fonctions définies sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et vérifiant les contraintes définies par les équations (3.10) et (3.11). Alors le principe du MaxEnt consiste à construire  $\mathbf{x} \mapsto p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  comme l'unique solution maximisant l'entropie  $S(p_{\mathbf{X}})$  sous les contraintes définies par les équations (3.10) et (3.11). Pour résoudre ce problème de maximisation sous contraintes, on introduit donc un multiplicateur de Lagrange  $\lambda_0$  associé à l'Eq. (3.11) et un multiplicateur de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^\mu$  associé à l'Eq. (3.10) dont l'espace admissible est  $\mathcal{L}_\mu$ . On peut alors démontrer (voir [151, 155]) que la solution MaxEnt, si elle existe, est définie par

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) c(\boldsymbol{\lambda}^{\text{sol}}) \exp(-\langle \boldsymbol{\lambda}^{\text{sol}}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle), \quad (3.13)$$

où  $c(\boldsymbol{\lambda})$  est défini par

$$c(\boldsymbol{\lambda}) = \left\{ \int_{\mathcal{K}} \exp(-\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle) d\mathbf{x} \right\}^{-1}. \quad (3.14)$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  peut alors être calculé en utilisant l'équation l'Eq. (3.10). Un nouvel algorithme permettant de calculer efficacement  $\boldsymbol{\lambda}$  en grande dimension stochastique sera présenté dans le chapitre 6 relatif à la génération d'accélérogrammes sismiques.

### 3.2.2 Application aux solides rigides.

Soit  $RB_i$  un solide rigide incertain. Sa masse  $m_i$ , le vecteur position initiale  $\mathbf{r}_{0,i}$  de son centre de gravité et sa matrice d'inertie  $[J_i]$  sont remplacés respectivement par la masse aléatoire  $M_i$ , le vecteur position aléatoire  $\mathbf{R}_{0,i}$  et la matrice aléatoire  $[\mathbf{J}_i]$ . Étant donnée que ces trois quantités aléatoires sont construites à partir du même champs  $\rho(\mathbf{x})$ , il est évident qu'elle sont statistiquement corrélées entre elles et sont donc dépendantes. Cette corrélation dépend de la loi de probabilité du champ stochastique local de distribution de masse. Cette loi de probabilité n'étant pas accessible (et nous ne voulons pas la construire), aucune information sur la corrélation entre  $M_i$ ,  $\mathbf{R}_{0,i}$  et  $[\mathbf{J}_i]$  n'est disponible. Cependant, la corrélation entre la masse aléatoire  $M_i$  et le vecteur position aléatoire  $\mathbf{R}_{0,i}$  est, de part leur définition respective, très faible. On peut donc les supposer indépendantes. Par contre, la masse aléatoire  $M_i$  et la matrice aléatoire  $[\mathbf{J}_i]$  sont dépendantes. Nous verrons dans la Section 3.2.2.3, consacrée à la construction de  $[\mathbf{J}_i]$ , comment supprimer cette dépendance par un changement de variable adapté.

#### 3.2.2.1 Construction de la masse aléatoire $M_i$ .

Pour la masse aléatoire  $M_i$ , l'information disponible est définie par

$$\begin{aligned} M_i &> 0 \quad , & (a) \\ E\{M_i\} &= \underline{m}_i \quad , & (b) \\ E\{\log M_i\} &= C_{M_i} \quad , \quad |C_{M_i}| < +\infty \quad . & (c) \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'équation (3.15-a) traduit la positivité de la masse. L'équation (3.15-b) est relative à la valeur moyenne qui doit être égale à la valeur nominale  $\underline{m}_i$ . En effet, s'il n'y avait pas d'incertitudes, c'est bien cette valeur nominale qui serait utilisée comme valeur moyenne. La dernière contrainte (3.15-c) est utile afin de s'assurer que la réponse aléatoire du système multicorps stochastique soit bien un processus du second-ordre. La solution MaxEnt est alors

$$p_{M_i}(\mu; \delta_{M_i}) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(\mu) \frac{1}{\underline{m}_i} \left( \frac{1}{\delta_{M_i}^2} \right)^{\delta_{M_i}^{-2}} \frac{1}{\Gamma(\delta_{M_i}^{-2})} \left( \frac{\mu}{\underline{m}_i} \right)^{\delta_{M_i}^{-2}-1} \exp\left(-\frac{\mu}{\delta_{M_i}^2 \underline{m}_i}\right), \quad (3.16)$$

où  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  est la fonction Gamma et où  $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(\mu)$  est la fonction indicatrice. Le coefficient de variation  $\delta_{M_i}$  doit vérifier  $0 \leq \delta_{M_i} < 1/\sqrt{2}$ . On voit ainsi que la loi de probabilité de la masse aléatoire  $M_i$  est la loi Gamma complètement définie par la valeur moyenne  $\underline{m}_i$  et le coefficient de variation  $\delta_{M_i}$ .

Pour reprendre l'exemple du système multicorps introduit dans la Section 3.1.2, la masse du solide  $Rb5$  est remplacée par une masse aléatoire  $M_5$  de moyenne  $\underline{m}_5 = 3000 \text{ kg}$  et de

coefficient de variation  $\delta_{M_5} = 0.5$ . La fonction de densité de probabilité de  $M_5$  est tracée sur la figure 3.4.

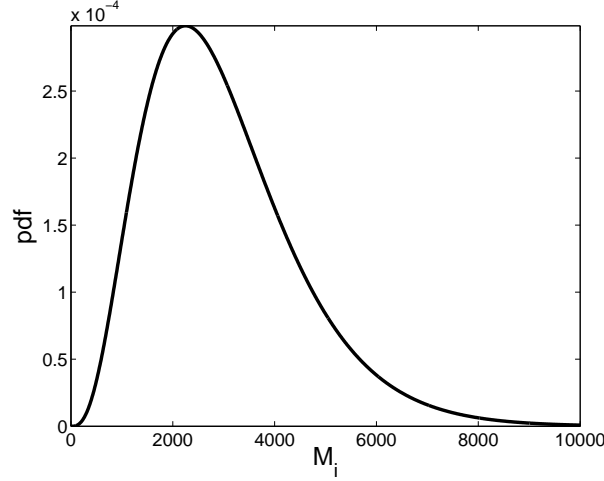


FIGURE 3.4 – Fonction de densité de probabilité pour la masse aléatoire  $M_5$ .

### 3.2.2.2 Construction de la position initiale aléatoire $\mathbf{R}_{0,i}$ du centre de gravité.

Le domaine admissible pour le vecteur aléatoire  $\mathbf{R}_{0,i}$  est  $\mathcal{D}_i(\mathbf{h})$  paramétré par un vecteur  $\mathbf{h}$ . L'information disponible pour  $\mathbf{R}_{0,i}$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,i} &\text{ à valeurs dans } \mathcal{D}_i(\mathbf{h}) \quad , & (a) \\ E\{\mathbf{R}_{0,i}\} &= \underline{\mathbf{r}}_{0,i} \in \mathcal{D}_i(\mathbf{h}) \quad , & (b) \end{aligned} \quad (3.17)$$

où  $\underline{\mathbf{r}}_{0,i}$  est la valeur nominale de la position initiale du centre de gravité. Alors la solution MaxEnt est

$$p_{\mathbf{R}_{0,i}}(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = \mathbb{1}_{\mathcal{D}_i(\mathbf{h})}(\mathbf{a}) C_0 e^{-\langle \boldsymbol{\lambda}_r, \mathbf{a} \rangle} \quad , \quad (3.18)$$

pour laquelle le paramètre  $C_0$  et le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}_r$  sont solutions des équations

$$\begin{aligned} C_0 \int_{\mathcal{D}_i(\mathbf{h})} e^{-\langle \boldsymbol{\lambda}_r, \mathbf{a} \rangle} d\mathbf{a} &= 1 \quad , & (a) \\ C_0 \int_{\mathcal{D}_i(\mathbf{h})} \mathbf{a} e^{-\langle \boldsymbol{\lambda}_r, \mathbf{a} \rangle} d\mathbf{a} &= \underline{\mathbf{r}}_{0,i} \quad . & (b) \end{aligned} \quad (3.19)$$

On obtient donc une loi exponentielle. Pour le cas particulier où la valeur nominale  $\underline{\mathbf{r}}_{0,i}$  est confondue avec le barycentre du domaine  $\mathcal{D}_i(\mathbf{h})$ , on peut démontrer [8] qu'on obtient une loi uniforme

$$p_{\mathbf{R}_{0,i}}(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = \frac{1}{|\mathcal{D}_i(\mathbf{h})|} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_i(\mathbf{h})}(\mathbf{a}) \quad . \quad (3.20)$$

Des réalisations indépendantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{R}_{0,i}$  peuvent être construites facile-

ment en utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings [144] avec une loi candidate uniforme sur un parallélépipède englobant le domaine  $\mathcal{D}_i(\mathbf{h})$ .

En revenant à l'exemple précédent, on suppose que le domaine du centre de gravité est un parallélépipède centré en  $(0, 0, 0)$  et de dimensions suivant  $x_{0,1}$ ,  $x_{0,2}$  et  $x_{0,3}$  valant respectivement 0.5 m, 0.2 m et 0.02 m. Deux cas sont considérés. Pour le premier cas, la valeur moyenne du vecteur  $\mathbf{R}_{0,5}$  coïncide avec le barycentre (voir figure 3.5 où  $x_{0,1} = x$ ,  $x_{0,2} = y$  et  $x_{0,3} = z$ ). La loi de probabilité obtenue est donc uniforme pour ce cas. La figure 3.6 montre 1000 réalisations du centre de gravité. Pour le second cas, la valeur moyenne du vecteur  $\mathbf{R}_{0,5}$  ne coïncide pas avec le barycentre (voir figure 3.7). La loi de probabilité obtenue n'est donc pas uniforme pour ce cas. La figure 3.8 montre 1000 réalisations du centre de gravité. Ce cas pourrait servir à modéliser par exemple le

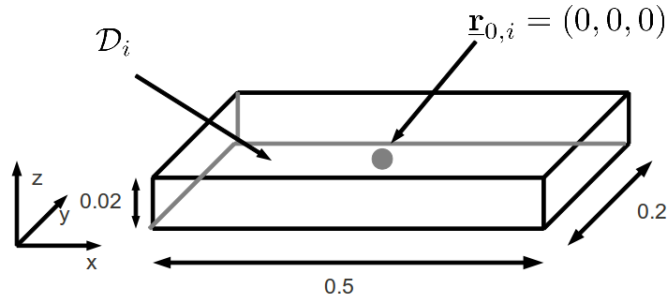


FIGURE 3.5 – Domaine du centre de gravité pour le cas 1.

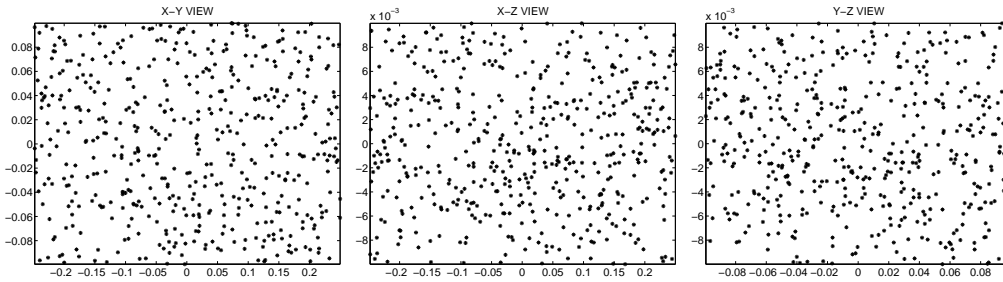


FIGURE 3.6 – 1000 réalisations du centre de gravité pour le cas 1 : vues  $x_{0,1}$ - $x_{0,2}$ ,  $x_{0,1}$ - $x_{0,3}$  et  $x_{0,2}$ - $x_{0,3}$ .

comportement aléatoire de passagers qui auraient plus tendance à s'asseoir à l'arrière d'un véhicule.

### 3.2.2.3 Construction de la matrice d'inertie aléatoire $[\mathbf{J}_i]$ .

La construction de la matrice d'inertie aléatoire  $[\mathbf{J}_i]$  est plus délicate que les précédentes constructions. La première difficulté est d'ordre technique car cette construction nécessite de travailler dans des ensembles de matrices aléatoires qui sont délicats à manipuler.



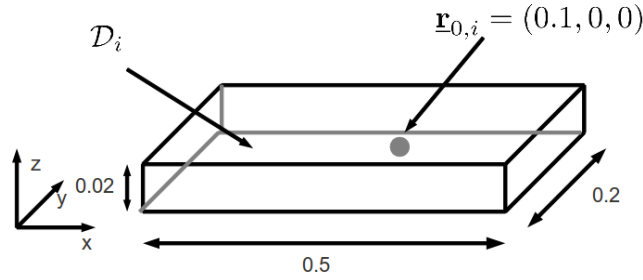
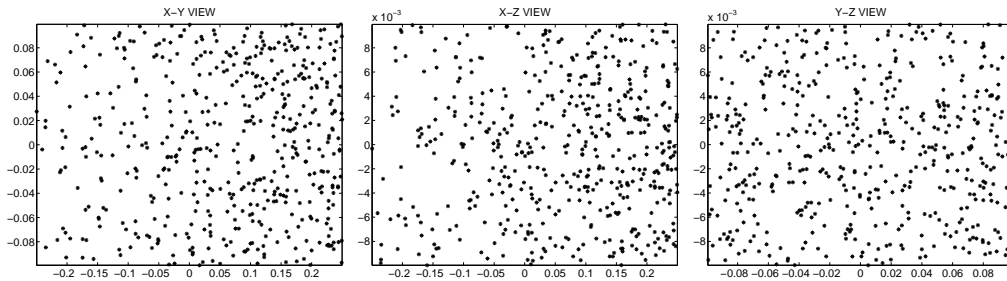


FIGURE 3.7 – Domaine du centre de gravité pour le cas 2.

FIGURE 3.8 – 1000 réalisations du centre de gravité pour le cas 2 : vues  $x_{0,1}$ - $x_{0,2}$ ,  $x_{0,1}$ - $x_{0,3}$  et  $x_{0,2}$ - $x_{0,3}$ .

La seconde difficulté est relative aux propriétés physiques que doit vérifier la matrice aléatoire  $[\mathbf{J}_i]$ . En effet, il est bien connu qu'une matrice d'inertie quelconque  $[J_i]$  doit être définie positive. Cependant, pour qu'elle puisse être interprétée comme une matrice représentant le tenseur d'inertie d'un système physique, cette dernière doit vérifier une propriété plus forte [8] qui s'écrit

$$\left( \frac{\text{tr}([J_i])}{2} [I_3] - [J_i] \right) \in \mathbb{M}_3^+(\mathbb{R}), \quad (3.21)$$

où  $\mathbb{M}_3^+(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices  $3 \times 3$  réelles symétriques définies-positives. La propriété (3.21) implique que  $[J_i]$  est définie-positive mais l'inverse est fausse. Une autre difficulté relative à la matrice aléatoire  $[\mathbf{J}_i]$  est qu'elle est dépendante de la masse aléatoire  $M_i$ . Il faut donc normaliser  $[\mathbf{J}_i]$  par rapport à  $M_i$  pour supprimer cette dépendance implicite et pouvoir émettre l'hypothèse d'indépendance statistique entre ces deux quantités aléatoires. Toutes ces difficultés nous amènent à introduire le moment d'inertie du second-ordre défini par le tenseur

$$[Z_i](\mathbf{u}) = \frac{1}{m_i} \int_{\Omega_i} \langle \mathbf{x}', \mathbf{u} \rangle \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad , \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad (3.22)$$

qui est représenté par la matrice  $[Z_i]$  définie par

$$[Z_i] = \frac{1}{m_i} \int_{\Omega_i} \mathbf{x}'(\mathbf{x}')^T \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \frac{1}{m_i} \left\{ \frac{\text{tr}([J_i])}{2} [I_3] - [J_i] \right\} \in \mathbb{M}_3^+(\mathbb{R}). \quad (3.23)$$

La tenseur  $m_i [Z_i]$  est parfois appelé tenseur d'Euler dans la littérature. Nous sommes donc amenés à introduire le tenseur aléatoire du moment d'inertie du second-ordre représenté par la matrice aléatoire  $[\mathbf{Z}_i]$  définie par

$$[\mathbf{Z}_i] = \frac{1}{M_i} \left\{ \frac{\text{tr}([\mathbf{J}_i])}{2} [I_3] - [\mathbf{J}_i] \right\}. \quad (3.24)$$

L'avantage de la matrice aléatoire  $[\mathbf{Z}_i]$  est (1) qu'elle est très peu dépendante statistiquement de la masse aléatoire  $M_i$  et surtout (2) toute matrice définie-positive peut être interprétée comme la matrice représentant le moment d'inertie du second-ordre d'un système physique [8]. Nous n'allons donc pas construire directement  $[\mathbf{J}_i]$  mais nous allons plutôt construire  $[\mathbf{Z}_i]$  et en déduire  $[\mathbf{J}_i]$  par la relation

$$[\mathbf{J}_i] = M_i \{ \text{tr}([\mathbf{Z}_i]) [I_3] - [\mathbf{Z}_i] \} \quad . \quad (3.25)$$

L'information disponible pour la matrice aléatoire  $[\mathbf{Z}_i]$  est définie par

$$\begin{aligned} [\mathbf{Z}_i] &\in \mathbb{M}_3^+(\mathbb{R}) \quad , & (a) \\ \{ [Z_i^{\max}] - [\mathbf{Z}_i] \} &\in \mathbb{M}_3^+(\mathbb{R}) \quad , & (b) \\ E\{[\mathbf{Z}_i]\} &= [\underline{Z}_i] \quad , & (c) \\ E\{\log(\det[\mathbf{Z}_i])\} &= C_i^l \quad , \quad |C_i^l| < +\infty \quad . & (d) \\ E\{\log(\det([Z_i^{\max}] - [\mathbf{Z}_i]))\} &= C_i^u \quad , \quad |C_i^u| < +\infty \quad , & (e) \end{aligned} \quad (3.26)$$

où  $[Z_i^{\max}]$  est une borne supérieure [8]. L'équation (3.28-d) est utile pour que la réponse aléatoire soit un processus du second-ordre tandis que l'équation (3.28-e) permet d'atteindre la borne supérieure  $[Z_i^{\max}]$  avec une probabilité nulle. La matrice  $[\underline{Z}_i]$  étant définie-positive, celle-ci peut être factorisée par la méthode de Cholesky

$$[\underline{Z}_i] = [\underline{L}_{Z_i}]^T [\underline{L}_{Z_i}] \quad . \quad (3.27)$$

Alors la matrice  $[\mathbf{Z}_i]$  peut être normalisée et s'écrire

$$[\mathbf{Z}_i] = [\underline{L}_{Z_i}]^T [\mathbf{G}_i] [\underline{L}_{Z_i}] \quad , \quad (3.28)$$

où  $[\mathbf{G}_i]$  est une matrice aléatoire pour laquelle l'information disponible est

$$[\mathbf{G}_i] \in \mathbb{M}_3^+(\mathbb{R}) \quad , \quad (a)$$

$$\{[G_i^{max}] - [\mathbf{G}_i]\} \in \mathbb{M}_3^+(\mathbb{R}) \quad , \quad (b)$$

$$E\{[\mathbf{G}_i]\} = [I_3] \quad , \quad (c) \quad (3.29)$$

$$E\{\log(\det[\mathbf{G}_i])\} = C_i^{l'} \quad , \quad |C_i^{l'}| < +\infty \quad , \quad (d)$$

$$E\{\log(\det([G_i^{max}] - [\mathbf{G}_i]))\} = C_i^{u'} \quad , \quad |C_i^{u'}| < +\infty \quad , \quad (e)$$

où  $C_i^{l'} = C_i^l - \log(\det[\underline{\mathbf{Z}}_i])$ ,  $C_i^{u'} = C_i^u - \log(\det[\underline{\mathbf{Z}}_i])$  et où la matrice  $[G_i^{max}]$  est une borne supérieure pour  $[\mathbf{G}_i]$  et est définie par

$$[G_i^{max}] = ([\underline{L}_{Z_i}]^T)^{-1} [Z_i^{max}] [\underline{L}_{Z_i}]^{-1} \quad . \quad (3.30)$$

La solution du MaxEnt est alors

$$\begin{aligned} p_{[\mathbf{G}_i]}([G]) &= \mathbb{1}_{\mathbb{M}_3^+(\mathbb{R})}([G]) \times \mathbb{1}_{\mathbb{M}_3^+(\mathbb{R})}([G_i^{max}] - [G]) \times C_{G_i} \\ &\times (\det [G])^{-\lambda_l} \times (\det ([G_i^{max}] - [G]))^{-\lambda_u} \times e^{-\text{tr}([\mu][G])} \quad , \end{aligned} \quad (3.31)$$

où les paramètres  $C_{G_i}$ ,  $\lambda_l$ ,  $\lambda_u$  et la matrice  $[\mu]$  sont solutions des équations

$$\begin{aligned} E\{\mathbb{1}_{\mathbb{M}_3^+(\mathbb{R})}([\mathbf{G}_i])\} &= 1 \quad , \\ E\{[\mathbf{G}_i]\} &= [I_3] \quad , \\ E\{\log(\det[\mathbf{G}_i])\} &= C_i^{l'} \quad , \\ E\{\log(\det([G_i^{max}] - [\mathbf{G}_i]))\} &= C_i^{u'} \quad . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Un générateur de réalisations indépendantes permettant de résoudre ces équations a été proposé dans [8]. Celui-ci est basé sur une méthode de rejet où la loi candidate est celle des matrices aléatoires définies-positives introduite dans [243] et pour laquelle un générateur de réalisations indépendantes explicite est disponible. Des réalisations indépendantes de la matrice aléatoire  $[\mathbf{Z}_i]$  s'obtiennent alors en utilisant l'équation (3.28) et on en déduit un générateur de la matrice  $[\mathbf{J}_i]$  en utilisant l'équation (3.25) et des réalisations indépendantes de la masse aléatoire  $M_i$ .

On peut alors en déduire les propriétés de la matrice aléatoire  $[\mathbf{J}_i]$  (voir [8]). Parmi ces propriétés, on peut mettre en évidence l'existence d'une borne supérieure aléatoire pour le tenseur aléatoire  $[\mathbf{J}_i]$ .

Finalement la loi de probabilité de la matrice aléatoire  $[\mathbf{Z}_i]$  est paramétrée par la moyenne  $[\underline{L}_i]$  et les deux paramètres  $\lambda_l$  et  $\lambda_u$  qui contrôlent le comportement de la loi de probabilité au voisinage des bornes. Plus exactement les paramètres  $\lambda_l$  et  $\lambda_u$  contrôlent l'écrasement de la fonction de densité de probabilité à l'approche des bornes et permettent ainsi de contrôler la variabilité associée à la matrice aléatoire  $[\mathbf{Z}_i]$  et donc d'étudier la sensibilité de la réponse dynamique à la fluctuation de masse autour du centre de gravité représentée par le tenseur d'inertie.

### 3.3 Modèle stochastique d'un système multicorps avec solides rigides incertains.

La présence de solides rigides incertains (chacun représenté par une masse aléatoire, un centre de gravité aléatoire et un tenseur d'inertie aléatoire) se traduit au niveau du système multicorps par une matrice de masse aléatoire, des forces de Coriolis (qui dépendent du tenseur d'inertie) aléatoires et des conditions initiales (qui dépendent des positions initiales des centres de gravité) aléatoires. Par exemple, si on considère un seul solide rigide  $RB_i$  incertain, on introduit les processus stochastiques  $\mathbf{U} = (\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{n_b}, \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_{n_b})$  et  $\mathbf{\Lambda}$  indexés sur  $[0, T]$ . On a alors à résoudre l'équation stochastique

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & [\varphi_u]^T \\ [\varphi_u] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{K} \\ -\frac{d}{dt}\varphi_t - [\frac{d}{dt}\varphi_u] \dot{\mathbf{U}} \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.33)$$

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad (3.34)$$

où le vecteur  $\mathbf{U}_0$  est le vecteur aléatoire des coordonnées initiales, le vecteur  $\mathbf{K}(\dot{\mathbf{u}})$  est le vecteur aléatoire des forces de Coriolis. La matrice de masse aléatoire  $[\mathbf{M}]$  est définie par

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}^r] & 0 \\ 0 & [\mathbf{M}^s] \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

où les matrices  $[\mathbf{M}^r]$  et  $[\mathbf{M}^s]$  sont définies par

$$[\mathbf{M}^r] = \begin{bmatrix} m_1[I_3] & \cdots & 0 \\ \vdots & M_i[I_3] & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{n_b}[I_3] \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}^s] = \begin{bmatrix} [J_1] & \cdots & 0 \\ \vdots & [\mathbf{J}_i] & \vdots \\ 0 & \cdots & [J_{n_b}] \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Les équations aléatoires (3.33) et (3.34) sont résolues par simulations de Monte Carlo [217]. Le niveau de dispersion de la réponse aléatoire est contrôlé par le paramètre de dispersion  $\delta_{M_i}$  de la masse aléatoire, par le paramètre géométrique  $\mathbf{h}$  de la position aléatoire du centre de gravité et par les paramètres  $\lambda_l$  et  $\lambda_u$  du tenseur d'inertie aléatoire. Ces paramètres peuvent être identifiés expérimentalement en inverse si des mesures expérimentales sont disponibles. Sinon, ces paramètres peuvent être fixés arbitrairement dans le but d'effectuer une analyse de sensibilité de la réponse vis-à-vis des propriétés d'inertie du solide rigide incertain et donc de vérifier la robustesse aux incertitudes de la réponse dynamique calculée par le modèle multicorps.

L'exemple numérique développé précédemment dans ce chapitre est repris pour effectuer une analyse de sensibilité. Plusieurs cas sont analysés :

(i) - *Cas 1* :  $M_5$  aléatoire,  $\mathbf{r}_{0,5}$  déterministe et  $[Z_i]$  déterministe.

Pour ce premier cas, seule la masse du solide  $Rb5$  est aléatoire. L'accélération aléatoire du point  $P_{obs}$  est tracée sur les figures 3.9 et 3.10. Ces figures montrent que le déplacement

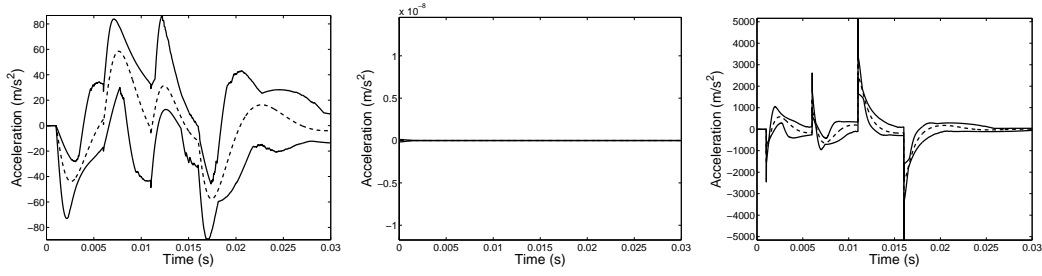


FIGURE 3.9 – Cas 1 : Accélération aléatoire suivant  $x_{0,1}$  (gauche),  $x_{0,2}$  (milieu) et  $x_{0,3}$  (droite). Traits pleins : domaine de confiance à 95%. Trait pointillé : moyenne.

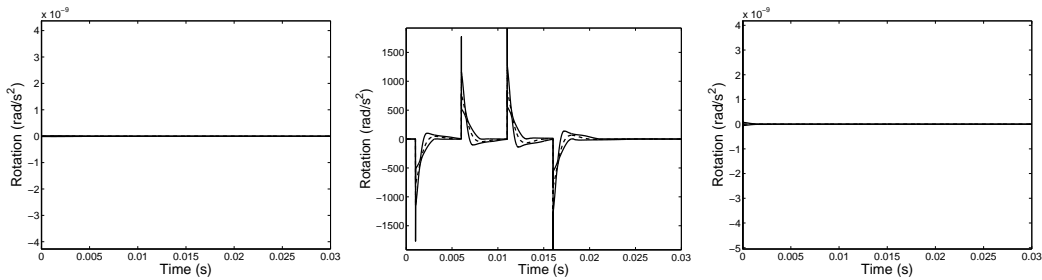


FIGURE 3.10 – Cas 1 : Accélération angulaire aléatoire suivant  $x_{0,1}$  (gauche),  $x_{0,2}$  (milieu) et  $x_{0,3}$  (droite). Traits pleins : domaine de confiance à 95%. Trait pointillé : moyenne.

aléatoire du point  $P_{obs}$  reste plan. En effet, l'incertitude sur la masse  $M_5$  ne se propage que sur les degrés de liberté de translation. Donc seule l'amplitude du mouvement plan va varier lorsque la masse varie.

(ii) - Cas 2 :  $m_5$  déterministe,  $\mathbf{R}_{0,5}$  aléatoire et  $[Z_i]$  déterministe.

Pour ce deuxième cas, seule la position initiale du centre de gravité du solide  $Rb5$  est aléatoire. L'accélération aléatoire du point  $P_{obs}$  est tracée sur les figures 3.11 et 3.12.

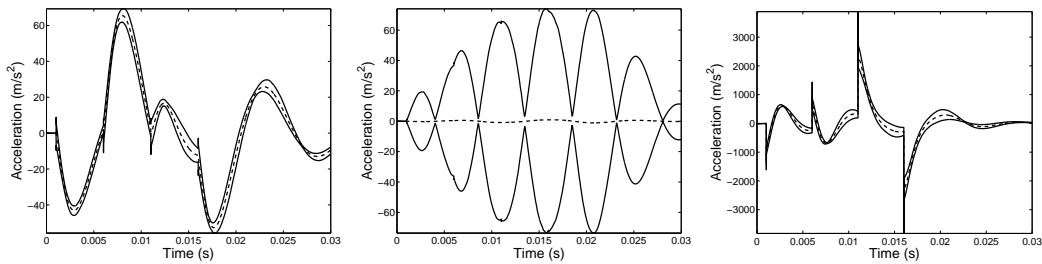


FIGURE 3.11 – Cas 2 : Accélération aléatoire suivant  $x_{0,1}$  (gauche),  $x_{0,2}$  (milieu) et  $x_{0,3}$  (droite). Traits pleins : domaine de confiance à 95%. Trait pointillé : moyenne.

Cette fois-ci, le centre d'inertie du solide  $Rb5$  sort aléatoirement du plan, ce qui entraîne une forte fluctuation du mouvement en dehors du plan.

(iii) - Cas 3 :  $m_5$  déterministe,  $\mathbf{r}_{0,5}$  déterministe et  $[Z_i]$  aléatoire.

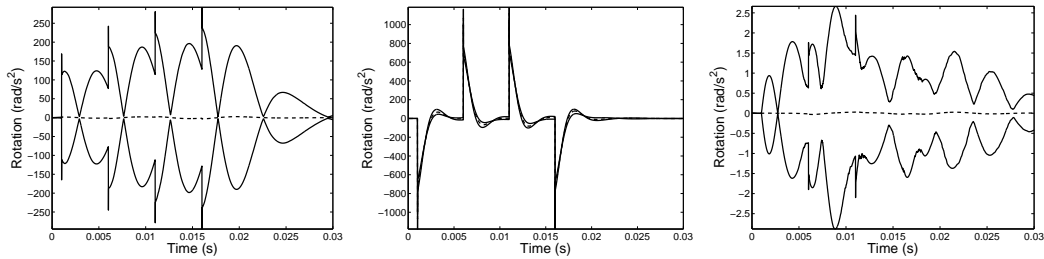


FIGURE 3.12 – Cas 2 : Accélération angulaire aléatoire suivant  $x_{0,1}$  (gauche),  $x_{0,2}$  (milieu) et  $x_{0,3}$  (droite). Traits pleins : domaine de confiance à 95%. Trait pointillé : moyenne.

Pour ce troisième cas, seul le tenseur d'inertie du solide  $Rb5$  est aléatoire. L'accélération aléatoire du point  $P_{obs}$  est tracée sur les figures 3.13 et 3.14. L'introduction de termes

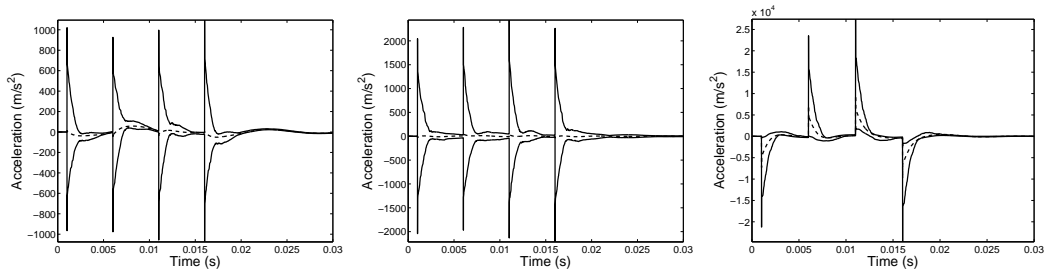


FIGURE 3.13 – Cas 3 : Accélération aléatoire suivant  $x_{0,1}$  (gauche),  $x_{0,2}$  (milieu) et  $x_{0,3}$  (droite). Traits pleins : domaine de confiance à 95%. Trait pointillé : moyenne.

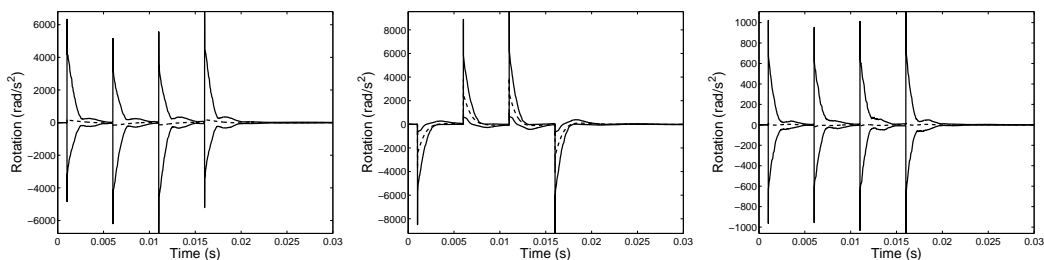


FIGURE 3.14 – Cas 3 : Accélération angulaire aléatoire suivant  $x_{0,1}$  (gauche),  $x_{0,2}$  (milieu) et  $x_{0,3}$  (droite). Traits pleins : domaine de confiance à 95%. Trait pointillé : moyenne.

extra-diagonaux dans le tenseur d'inertie casse les symétries du système. D'autre part, des fluctuations des forces de Coriolis sont introduites. Ainsi, on peut observer une forte fluctuation du mouvement dans le plan et en dehors du plan.

### 3.4 Conclusions.

Ces premiers travaux sur la quantification des incertitudes pour la dynamique des systèmes multicorps ont permis de mettre en place une méthode de modélisation des incertitudes relatives à la distribution spatiale de la masse d'un ou plusieurs solides rigides. Les fonctions de densité de probabilité de la masse, de la position du centre de gravité et du tenseur d'inertie ont été construites de manière rigoureuse par le principe du MaxEnt aboutissant à des lois à faible paramétrage permettant ainsi d'être facilement identifiables si des données expérimentales sont disponibles. Sinon, ce faible paramétrage permet d'effectuer facilement une étude de sensibilité de la réponse du système multicorps vis-à-vis des incertitudes sur les propriétés d'inertie. La modélisation probabiliste construite permet d'introduire des brisures aléatoires des symétries du système étudié permettant ainsi d'étudier la robustesse d'une modélisation pour laquelle plusieurs hypothèses simplificatrices de symétrie auraient été introduites sur les solides rigides.

### 3.5 Travaux en cours et perspectives.

#### 3.5.1 Prise en compte d'autres sources d'incertitudes et validation industrielle.

La première extension de ces travaux concerne la prise en compte des incertitudes autres que celles relatives à la distribution spatiale de la masse, en particuliers au niveau de l'interaction entre les solides rigides. Pour le cas des liaisons cinématiques, il existe des incertitudes relatives aux paramètres d'une liaison, comme par exemple le centre d'une liaison rotule ou l'axe d'une liaison glissière. Les incertitudes sur ces paramètres sont liées aux tolérances de fabrication et aux dégradations que peut subir le système multicorps durant son cycle de vie. Pour le cas des ressorts et amortisseurs, il peut là encore exister des incertitudes concernant la loi de comportement de ces éléments. En effet, ces lois de comportement sont identifiées dans des conditions d'essais qui peuvent être différentes des conditions réelles d'utilisation de ces éléments. D'autre part, ces lois de comportement sont amenées à évoluer durant leur phase de rodage puis durant tout le cycle de vie du système multicorps.

La prise en compte de ces incertitudes paramétriques fait actuellement l'objet d'un projet de collaboration avec PSA Peugeot-Citroën (voir projet [P9]). L'objectif de ce projet concerne la construction d'un modèle multicorps stochastique d'un groupe motopropulseur (GMP). En effet, pour ce type de système il existe des incertitudes relatives aux propriétés d'inertie du moteur (il existe de nombreuses variantes pour chaque type de moteur) et des incertitudes relatives au système de maintien du moteur réalisé par deux cales et une bielle. Des mesures expérimentales ont été réalisées par PSA Peugeot-Citroën sur plusieurs véhicules. Ces mesures permettront d'identifier les paramètres du modèle d'incertitude qui est en cours de construction.

### 3.5.2 Conception robuste des systèmes multicorps.

D'autres travaux concernant la conception robuste des systèmes multicorps sont actuellement en cours. Ces travaux sont en collaboration avec le laboratoire HYDYN (université d'Hanyang, Séoul) dans la cadre du projet Hubert Curien STAR (voir projet [P6]). Les méthodes déterministes de conception robuste des systèmes multicorps (voir par exemple [69], [98] pour une application aux véhicules automobiles, [259] pour les méthodes d'optimisation multi-objectives), qui consistent à identifier un paramètre  $\mathbf{d}$  en minimisant la distance entre une fonction d'intérêt  $\mathbf{g}(\mathbf{u}(\mathbf{d}))$  déterministe et une valeur cible  $\mathbf{g}^*$ , ne peuvent plus être utilisées dans un cadre incertain. L'objectif est de mettre en place des stratégies de conception robuste en présence des sources d'incertitudes évoquées dans ce chapitre.

### 3.5.3 Extension aux systèmes multicorps flexibles.

Pour les systèmes multicorps flexibles, les déformations d'un ou plusieurs solides sont prises en compte en ajoutant des coordonnées élastiques (définies dans le repère local, voir [231]) aux coordonnées de référence de chaque solide. Cette formulation dite du "repère flottant" se traduit par l'introduction d'une matrice de raideur, d'une matrice d'amortissement et d'une matrice de masse relatives aux coordonnées élastiques. Cette formulation introduit des nouvelles incertitudes de paramètres et de modélisation qu'il serait intéressant de prendre en compte par une approche probabiliste non-paramétrique [242] par exemple.





# Chapitre 4

## Quantification des incertitudes en dynamique des structures déformables.

Ce chapitre, qui est consacré à la prise en compte des incertitudes en dynamique des structures déformables, a été introduit dans la Section 2.3. Nous nous intéressons en particulier à la dynamique BF pour laquelle la méthode d'analyse modale permet de construire un modèle réduit de faible taille et suffisamment prédictif pour servir de base à la construction d'une modélisation probabiliste des incertitudes. Cette modélisation se fait en deux étapes. La première consiste à construire un modèle probabiliste *a priori* des incertitudes dont la loi de probabilité est contrôlée par des paramètres à identifier. La méthode de construction privilégiée ici est l'*approche probabiliste généralisée des incertitudes* introduite par C. Soize dans [251]. Cette méthode permet de prendre en compte de manière séparée les incertitudes liées aux paramètres du système et les incertitudes de modélisation. La seconde étape consiste à identifier les paramètres contrôlant le modèle probabiliste *a priori*. Cette identification est réalisée en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance et des données expérimentales. Plusieurs types de données expérimentales seront analysées : (1) fréquences propres, (2) fréquences propres et vecteurs propres et (3) réponses fréquentielles. D'autre part, deux applications industrielles seront présentées. La première concerne un moteur EAS appartenant au circuit de refroidissement de secours d'un réacteur nucléaire. La seconde est relative à une pompe de centrale thermique. Enfin, nous présenterons une extension de cette méthode à la construction de modèles probabilistes de champs de propriétés incertains en présence d'incertitudes de modélisation.

## 4.1 Construction du modèle réduit nominal.

On s'intéresse au comportement vibratoire d'une structure tri-dimensionnelle à comportement linéaire et amorti et définie sur un domaine  $\Omega$ . Ce domaine est fixé sur la partie  $\Gamma_0$  de sa frontière  $\partial\Omega$  et est libre sur l'autre partie  $\Gamma$ . La normale unitaire extérieure à la frontière est  $\mathbf{n}$ . Le déplacement du point de coordonnées  $\mathbf{x}$  appartenant à  $\Omega$  sera noté  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t))$ . Soit  $B = [\omega_{min}, \omega_{max}]$  la bande de fréquence sur laquelle est calculée la fonction de réponse en fréquence. La transformée de Fourier du champs de déplacement est notée  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ . Le champ des forces volumiques extérieures appliquées dans  $\Omega$  et le champ des forces surfaciques appliquées sur  $\Gamma$  sont respectivement notés  $\mathbf{f}_{vol}(\mathbf{x}, \omega)$  et  $\mathbf{f}_{surf}(\mathbf{x}, \omega)$ .

On prend les hypothèses d'un matériau viscoélastique à mémoire instantanée, anisotrope et non homogène. Le tenseur des contraintes  $\sigma_{jk}$  est alors relié au tenseur des déformations  $\epsilon_{lh}$  par la relation  $\sigma_{jk}(\mathbf{x}) = a_{jklh}(\mathbf{x}) \epsilon_{lh}(\mathbf{u}) + i\omega b_{jklh}(\mathbf{x}) \epsilon_{lh}(\mathbf{u})$  avec  $a_{jklh}$  et  $b_{jklh}$  les tenseurs réels du quatrième ordre ayant les propriétés usuelles de symétrie, de positivité et de bornitude en  $\mathbf{x}$ .

Le problème aux limites pour les équations linéarisées de la structure est

$$-\omega^2 \rho u_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_{vol, i} \text{ dans } \Omega \quad , \quad (4.1)$$

$$\sigma_{ij} n_j = f_{surf, i} \text{ sur } \Gamma \quad , \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0 \quad , \quad (4.3)$$

où, comme au chapitre précédent,  $\rho(\mathbf{x})$  est la masse volumique.

Soit  $\mathcal{H}^{comp}$ , l'espace complexe de toutes les fonctions de carré intégrable de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}^3$  muni du produit scalaire  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\mathbf{v}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$ . Soit  $\mathcal{V}^{comp}$  l'espace des champs de déplacements admissibles. La formulation variationnelle du problème aux limites défini par les équations (4.1), (4.2) et (4.3) consiste à trouver pour tout  $\omega$  dans  $B$  la fonction  $\mathbf{u}(\omega)$  à valeurs dans  $\mathcal{V}^{comp}$  tel que  $\forall \mathbf{v}$  dans  $\mathcal{V}^{comp}$ ,

$$-\omega^2 m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + i\omega d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}; \omega) \quad . \quad (4.4)$$

Dans l'équation (4.4), la forme sesquilinéaire de masse  $m$  est définie sur  $\mathcal{H}^{comp} \times \mathcal{H}^{comp}$  par  $m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}} d\mathbf{x}$ . La forme sesquilinéaire d'amortissement  $d$  est définie sur  $\mathcal{V}^{comp} \times \mathcal{V}^{comp}$  par  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} b_{ijkl}(\mathbf{x}) \epsilon_{kh}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\overline{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}$ . La forme sesquilinéaire de raideur  $k$  est définie sur  $\mathcal{V}^{comp} \times \mathcal{V}^{comp}$  par  $k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkl}(\mathbf{x}) \epsilon_{kh}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\overline{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}$ . La forme antilinéaire  $g$  des forces extérieures est définie sur  $\mathcal{V}^{comp}$  par  $g(\mathbf{v}; \omega) = \int_{\Gamma} f_{surf, i}(\mathbf{x}, \omega) \overline{v_i}(\mathbf{x}) ds + \int_{\Omega} f_{vol, i}(\mathbf{x}, \omega) \overline{v_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .

La réponse de la structure est analysée par la méthode des éléments finis (EF). On suppose que  $n_p$  paramètres de la structure sont incertains. Ces paramètres sont regroupés dans le vecteur  $\mathbf{h}$  dont le domaine admissible est  $\mathcal{C}_h$ . Ainsi, pour tout  $\omega$  dans le bande d'analyse  $B$ , on cherche le vecteur  $\mathbb{U}(\omega) \in \mathbb{C}^m$  des  $m$  degrés de libertés (DDL) solution de l'équation

$$(-\omega^2 [\mathbb{M}(\mathbf{h})] + i\omega [\mathbb{D}(\mathbf{h})] + [\mathbb{K}(\mathbf{h})]) \mathbb{U}(\omega) = \mathbb{F}(\omega) \quad , \quad (4.5)$$

où  $[\mathbb{M}(\mathbf{h})]$ ,  $[\mathbb{D}(\mathbf{h})]$  et  $[\mathbb{K}(\mathbf{h})]$  sont les matrices de masse, d'amortissement et de raideur et où  $\mathbb{F}(\omega)$  est le vecteur des forces extérieures. On suppose donc ici qu'il n'y a pas d'incertitudes sur le chargement.

Le modèle réduit est construit par la technique d'analyse modale. Afin d'alléger les développements, on suppose que la structure ne possède pas de modes de corps rigide. Alors pour tout  $\mathbf{h}$  appartenant à  $\mathcal{C}_h$ , les  $n$  premières valeurs propres  $0 < \lambda_1(\mathbf{h}) \leq \lambda_2(\mathbf{h}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{h})$  associés aux modes élastiques  $\{\phi_1(\mathbf{h}), \phi_2(\mathbf{h}), \dots, \phi_n(\mathbf{h})\}$  sont les solutions du problème généralisé aux valeurs propres

$$[\mathbb{K}(\mathbf{h})] \phi(\mathbf{h}) = \lambda(\mathbf{h})[\mathbb{M}(\mathbf{h})] \phi(\mathbf{h}). \quad (4.6)$$

Le modèle réduit est construit en projetant la réponse du système sur le sous-espace engendré par les  $n$  premiers modes élastiques. Soit  $[\Phi(\mathbf{h})]$  la base modale (matrice dont les colonnes sont les  $n$  premiers modes élastiques). On introduit alors l'approximation  $\mathbb{U}^{(n)}(\omega)$  de  $\mathbb{U}(\omega)$  qui s'écrit

$$\mathbb{U}^{(n)}(\omega) = [\Phi(\mathbf{h})] \mathbf{q}(\omega), \quad (4.7)$$

où  $\mathbf{q}(\omega)$  est le vecteur des  $n$  coordonnées généralisées solution de l'équation matricielle réduite suivante

$$(-\omega^2[M(\mathbf{h})] + i\omega[D(\mathbf{h})] + [K(\mathbf{h})]) \mathbf{q}(\omega) = \mathbf{f}(\omega; \mathbf{h}), \quad (4.8)$$

où  $[M(\mathbf{h})] = [\Phi(\mathbf{h})]^T [\mathbb{M}(\mathbf{h})] [\Phi(\mathbf{h})]$ ,  $[D(\mathbf{h})] = [\Phi(\mathbf{h})]^T [\mathbb{D}(\mathbf{h})] [\Phi(\mathbf{h})]$  et  $[K(\mathbf{h})] = [\Phi(\mathbf{h})]^T [\mathbb{K}(\mathbf{h})] [\Phi(\mathbf{h})]$  sont les matrices de masse, d'amortissement et de raideur généralisées et où  $\mathbf{f}(\omega; \mathbf{h}) = [\Phi(\mathbf{h})]^T \mathbb{F}(\omega) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des forces généralisées. On suppose que les modes propres élastiques sont normalisés par rapport à la masse. On a donc

$$[M(\mathbf{h})] = [I_n], \quad (4.9)$$

où  $[I_n]$  est la matrice identité et

$$[K(\mathbf{h})] = \text{diag}(\lambda_1(\mathbf{h}), \lambda_2(\mathbf{h}), \dots, \lambda_n(\mathbf{h})). \quad (4.10)$$

La dimension  $n$  du modèle réduit est déterminée par analyse de la convergence de la réponse sur toute la bande de fréquence  $B$  et pour tout  $\mathbf{h}$  dans  $\mathcal{C}_h$ .

## 4.2 Construction du modèle réduit probabiliste.

L'objectif est de construire un modèle probabiliste pour la prise en compte (1) des incertitudes sur les paramètres et (2) des incertitudes de modélisation. Il est important de prendre en compte les incertitudes de modélisation car elles sont inéluctablement introduites lors du processus de modélisation physique/mathématique d'une structure. Construire uniquement une modélisation des incertitudes sur les paramètres, limite le domaine de prédictibilité de la réponse stochastique. Pire encore, à cause des effets de compensation, le modèle probabiliste des paramètres qui serait identifié expérimentalement sans pren-

dre en compte les incertitudes de modélisation serait faux. Les deux types d'incertitudes sont pris en compte de manière séparée par une approche mixte paramétrique/non-paramétrique dite *approche probabiliste généralisée des incertitudes* et introduite dans [251].

#### 4.2.1 Construction du modèle probabiliste des incertitudes de paramètres.

Comme au chapitre précédent, les incertitudes de paramètres sont prises en compte en remplaçant les quantités incertaines par des quantités aléatoires. Donc le vecteur  $\mathbf{h}$  des paramètres incertains est remplacé par un vecteur aléatoire  $\mathbf{H}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_p}$ , défini sur un espace probabilisé  $(\Theta^{\text{par}}, \mathcal{T}^{\text{par}}, \mathcal{P}^{\text{par}})$  et dont la fonction de probabilité jointe  $p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h})$  est construite par la méthode du MaxEnt (voir Section 3.2.1). Alors, les  $n$  premières valeurs propres aléatoires  $0 < \Lambda_1^{\text{par}} \leq \Lambda_2^{\text{par}} \leq \dots \leq \Lambda_n^{\text{par}}$  associées aux modes propres élastiques aléatoires  $\{\phi_1^{\text{par}}, \phi_2^{\text{par}}, \dots, \phi_n^{\text{par}}\}$  sont solutions du problème généralisé stochastique aux valeurs propres stochastique suivant

$$[\mathbb{K}(\mathbf{H})] \phi^{\text{par}} = \Lambda^{\text{par}} [\mathbb{M}(\mathbf{H})] \phi^{\text{par}}. \quad (4.11)$$

Soit  $[\Phi^{\text{par}}]$  la base modale aléatoire associée aux incertitudes de paramètres et soit  $[\mathbf{M}^{\text{par}}] = [\Phi^{\text{par}}]^T [\mathbb{M}(\mathbf{H})] [\Phi^{\text{par}}]$ ,  $[\mathbf{D}^{\text{par}}] = [\Phi^{\text{par}}]^T [\mathbb{D}(\mathbf{H})] [\Phi^{\text{par}}]$  et  $[\mathbf{K}^{\text{par}}] = [\Phi^{\text{par}}]^T [\mathbb{K}(\mathbf{H})] [\Phi^{\text{par}}]$  les matrices généralisées aléatoires de masse, d'amortissement et de raideur associées aux incertitudes de paramètres. Les modes propres aléatoires  $\{\phi_1^{\text{par}}, \phi_2^{\text{par}}, \dots, \phi_n^{\text{par}}\}$  sont eux aussi normalisés par rapport à la masse, i.e.,

$$[\mathbf{M}^{\text{par}}] = [I_n] \quad , \quad \text{p.s.} \quad (4.12)$$

et

$$[\mathbf{K}^{\text{par}}] = \text{diag}(\Lambda_1^{\text{par}}, \Lambda_2^{\text{par}}, \dots, \Lambda_n^{\text{par}}). \quad (4.13)$$

Par construction, les matrices  $[\mathbf{M}^{\text{par}}]$ ,  $[\mathbf{D}^{\text{par}}]$  et  $[\mathbf{K}^{\text{par}}]$  sont définies positives presque sûrement et peuvent donc être factorisées par la décomposition de Cholesky,

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}^{\text{par}}] &= [\mathbf{L}_M]^T [\mathbf{L}_M], \\ [\mathbf{D}^{\text{par}}] &= [\mathbf{L}_D]^T [\mathbf{L}_D], \\ [\mathbf{K}^{\text{par}}] &= [\mathbf{L}_K]^T [\mathbf{L}_K]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

La fonction de densité de probabilité jointe  $p_{\mathbf{H}}(\mathbf{h})$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{H}$  dépend de paramètres tels que des moyennes, des paramètres de dispersion, des multiplicateurs de Lagrange (issus d'une construction par le MaxEnt). Ces paramètres sont regroupés dans le vecteur  $\alpha_{\text{par}}$ .

### 4.2.2 Construction du modèle probabiliste des incertitudes de modélisation.

Soit  $(\Theta^{\text{mod}}, \mathcal{T}^{\text{mod}}, \mathcal{P}^{\text{mod}})$  un autre espace probabilisé. Pour prendre en compte les incertitudes de modélisation, les matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^{\text{par}}]$ ,  $[\mathbf{D}^{\text{par}}]$  et  $[\mathbf{K}^{\text{par}}]$  sont remplacées par les matrices aléatoire  $[\mathbf{M}^{\text{tot}}]$ ,  $[\mathbf{D}^{\text{tot}}]$  et  $[\mathbf{K}^{\text{tot}}]$ , définies sur l'espace probabilisé  $(\Theta^{\text{tot}} = \Theta^{\text{par}} \times \Theta^{\text{mod}}, \mathcal{T}^{\text{tot}} = \mathcal{T}^{\text{par}} \otimes \mathcal{T}^{\text{mod}}, \mathcal{P}^{\text{tot}} = \mathcal{P}^{\text{par}} \otimes \mathcal{P}^{\text{mod}})$  et telles que, pour tout  $\theta^{\text{tot}}$  dans  $\Theta^{\text{tot}}$ ,

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}^{\text{tot}}(\theta^{\text{tot}})] &= [\mathbf{L}_M(\theta^{\text{par}})]^T [\mathbf{G}_M(\theta^{\text{mod}})] [\mathbf{L}_M(\theta^{\text{par}})], \\ [\mathbf{D}^{\text{tot}}(\theta^{\text{tot}})] &= [\mathbf{L}_D(\theta^{\text{par}})]^T [\mathbf{G}_D(\theta^{\text{mod}})] [\mathbf{L}_D(\theta^{\text{par}})], \\ [\mathbf{K}^{\text{tot}}(\theta^{\text{tot}})] &= [\mathbf{L}_K(\theta^{\text{par}})]^T [\mathbf{G}_K(\theta^{\text{mod}})] [\mathbf{L}_K(\theta^{\text{par}})], \end{aligned} \quad (4.15)$$

où  $[\mathbf{G}_M]$ ,  $[\mathbf{G}_D]$  et  $[\mathbf{G}_K]$  sont des matrices aléatoires définies sur  $(\Theta^{\text{mod}}, \mathcal{T}^{\text{mod}}, \mathcal{P}^{\text{mod}})$  et dont les fonctions de densités de probabilités sont données dans [242, 243] dans le cadre de l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes. Ces fonctions de densité de probabilité ont été construites en utilisant le principe du MaxEnt et dépendent au final des paramètres de dispersion  $\delta_M$ ,  $\delta_D$  et  $\delta_K$  qui contrôlent le niveau de dispersion associé aux matrices  $[\mathbf{G}_M]$ ,  $[\mathbf{G}_D]$  et  $[\mathbf{G}_K]$  respectivement. Soit  $\boldsymbol{\alpha}_{\text{mod}} = (\delta_M, \delta_D, \delta_K)$ , le vecteur contenant ces trois paramètres de dispersion.

Les matrices aléatoires  $[\mathbf{M}^{\text{tot}}]$  et  $[\mathbf{K}^{\text{tot}}]$  sont pleines. Pour calculer les modes propres aléatoires associés aux incertitudes de paramètres et de modélisation, on introduit un problème aux valeurs propres stochastique de dimension réduite. Les  $n$  valeurs propres aléatoires  $0 < \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_n$  associées aux vecteurs propres aléatoires  $\{\boldsymbol{\phi}_1^{\text{tot}}, \boldsymbol{\phi}_2^{\text{tot}}, \dots, \boldsymbol{\phi}_n^{\text{tot}}\}$  sont solutions du problème généralisé stochastique aux valeurs propres

$$[\mathbf{K}^{\text{tot}}] \boldsymbol{\phi}^{\text{tot}} = \Lambda [\mathbf{M}^{\text{tot}}] \boldsymbol{\phi}^{\text{tot}}. \quad (4.16)$$

Soit  $[\boldsymbol{\Phi}^{\text{tot}}] = [\boldsymbol{\phi}_1^{\text{tot}}, \dots, \boldsymbol{\phi}_n^{\text{tot}}]$ . Ces modes propres aléatoires sont normalisés par rapport à la matrice de masse  $[\mathbf{M}^{\text{tot}}]$ ,

$$[\mathbf{M}] = [\boldsymbol{\Phi}^{\text{tot}}]^T [\mathbf{M}^{\text{tot}}] [\boldsymbol{\Phi}^{\text{tot}}] = [I_n], \quad (4.17)$$

et on a

$$[\mathbf{K}] = [\boldsymbol{\Phi}^{\text{tot}}]^T [\mathbf{K}^{\text{tot}}] [\boldsymbol{\Phi}^{\text{tot}}] = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n). \quad (4.18)$$

Alors les  $n$  premières valeurs propres du modèle probabiliste des incertitudes de paramètres et de modélisation sont  $0 < \Lambda_1 \leq \dots \leq \Lambda_n$  auxquelles sont associés les vecteurs propres aléatoires  $\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_n$  tels que la matrice aléatoire  $[\boldsymbol{\Phi}] = [\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_n]$  s'écrit

$$[\boldsymbol{\Phi}] = [\boldsymbol{\Phi}^{\text{par}}] [\boldsymbol{\Phi}^{\text{tot}}]. \quad (4.19)$$

Au final, le modèle probabiliste des incertitudes de paramètres et de modélisation est paramétré par le vecteur  $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_{\text{par}}, \boldsymbol{\alpha}_{\text{mod}})$  qui doit être identifié en utilisant des réponses expérimentales si celles-ci sont disponibles. Autrement, le vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  est fixé arbitrairement à différentes valeurs afin d'effectuer une analyse de sensibilité des quantités d'intérêt

vis-à-vis des incertitudes de paramètres et de modélisation. L'espace admissible pour le vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  est noté  $\mathcal{C}$ .

### 4.2.3 Réponse aléatoire du modèle réduit probabiliste.

Pour tout  $\omega$  dans  $B$  le processus stochastique  $\mathbf{U}(\omega)$  de la réponse aléatoire du modèle probabiliste réduit s'écrit

$$\mathbf{U}(\omega) = [\Phi] \mathbf{Q}(\omega), \quad (4.20)$$

où le processus stochastique  $\mathbf{Q}(\omega)$  des coordonnées généralisées aléatoires est solution de l'équation stochastique

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + i\omega[\mathbf{D}] + [\mathbf{K}]) \mathbf{Q}(\omega) = \tilde{\mathbf{F}}(\omega), \quad (4.21)$$

où  $\tilde{\mathbf{F}}(\omega) = [\Phi]^T \mathbf{F}(\omega)$  est le processus stochastique des forces généralisées.

## 4.3 Identification du modèle probabiliste en utilisant des données expérimentales.

L'objectif de cette section est l'identification du vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  qui contrôle complètement le modèle réduit probabiliste construit ci-dessus. Ce vecteur est identifié en inverse en utilisant des données expérimentales et des données numériques aléatoires construites en utilisant le modèle réduit probabiliste. Le processus d'identification du vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  requiert deux étapes : (1) La première est la construction d'une observation commune pour les systèmes réels et pour le modèle numérique stochastique. Le choix l'observation dépend du type et de la richesse des données expérimentales à disposition mais aussi des quantités d'intérêt que le modèle stochastique est censé prédire (voir par exemple [182, 190, 117, 131, 132] pour les incertitudes de paramètres, et [250, 249, 80, 88, 6, 59] pour les incertitudes de paramètres et de modèle). (2) La deuxième étape consiste à construire une mesure de l'écart entre les observations expérimentales et les observations numériques. Dans ce rapport, la méthode du maximum de vraisemblance est privilégiée en raison du faible nombre de mesures expérimentales généralement disponibles pour un système industriel réel.

Dans un premier temps, nous développons la deuxième étape à savoir l'identification du vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  par la méthode du maximum de vraisemblance pour une observation quelconque. Puis plusieurs types d'observation seront analysés et illustrés sur des applications industrielles ou numériques.

### 4.3.1 Méthodologie générale d'identification.

On suppose que  $n_{\text{exp}}$  configurations expérimentales ont été instrumentées. Pour chaque configuration  $j$ , un vecteur observation  $\mathbf{w}^{\text{exp},j} = (w_1^{\text{exp},j}, \dots, w_{n_j}^{\text{exp},j})$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n_{\text{obs},j}}$  est identifié. Ainsi, le nombre et la nature des observations d'une configuration à l'autre peut varier. Pour chaque configuration  $j$ , ce vecteur observation est comparé au vecteur

aléatoire correspondant calculé avec le modèle stochastique et est noté  $\mathbf{W}^j$  qui est à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n_{\text{obs},j}}$ . Soit  $\mathbf{w}^j \mapsto p_{\mathbf{w}^j}(\mathbf{w}^j; \boldsymbol{\alpha})$  la fonction de densité de probabilité jointe du vecteur aléatoire  $\mathbf{W}^j$  de l'observation numérique. La valeur optimale  $\boldsymbol{\alpha}^{\text{opt}}$  du vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  est identifiée par la méthode du maximum de vraisemblance, i.e.,

$$\boldsymbol{\alpha}^{\text{opt}} = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{C}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) \quad , \quad (4.22)$$

où  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha})$  est la fonction de log-vraisemblance définie par

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^{n_{\text{exp}}} \log(p_{\mathbf{w}^j}(\mathbf{w}^{\text{exp},j}; \boldsymbol{\alpha})) \quad . \quad (4.23)$$

Pour chaque valeur du vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$ , les fonctions de densité de probabilité  $p_{\mathbf{w}^j}(\mathbf{w}^j; \boldsymbol{\alpha})$  sont estimées par une méthode d'estimation à noyaux multi-dimensionnels [268]. Si la taille du vecteur aléatoire  $\mathbf{W}^j$  est grande une réduction statistique peut être effectuée afin de faciliter l'estimation de la vraisemblance. Dans [249], cette réduction est effectuée par une décomposition en composantes principales. Puis la vraisemblance est construite directement sur ces coordonnées principales qui sont décorréées (mais dépendantes). On remplace alors la densité de probabilité conjointe des coordonnées principales par le produit des marginales d'ordre un (modification de la fonction de coût, comme si les coordonnées principales étaient indépendantes).

**Remarque 4.1 :** Ce problème d'optimisation (4.22) est non-convexe. Au vue de la grande dimension du vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$ , sa résolution requiert un algorithme de recherche aléatoire. Ainsi, la précision du résultat obtenu est fonction du coût calcul de la recherche, c'est-à-dire du nombre de CPU et du temps à disposition pour effectuer la recherche. Il n'y a donc aucune garantie que la valeur optimale  $\boldsymbol{\alpha}$  obtenue soit bien le maximum de la fonction coût construite.

**Remarque 4.2 :** Étant donné le faible nombre de mesures expérimentales généralement disponibles sur une structure réelle et étant donné l'hétérogénéité des données mesurées entre les configurations expérimentales, l'estimateur de la log-vraisemblance n'est en général pas convergé vis-à-vis de  $n_{\text{exp}}$ . Si le coût calcul le permet une validation croisée permet de vérifier que la solution obtenue avec le peu de données expérimentales à disposition reste robuste vis-à-vis des configurations non mesurées.

**Remarque 4.3 :** L'identification du vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  peut être effectuée en deux étapes. La première consiste à identifier uniquement  $\boldsymbol{\alpha}_{\text{par}}$  en utilisant une observation peu sensible aux incertitudes de modélisation (la fréquence fondamentale par exemple). Puis à  $\boldsymbol{\alpha}_{\text{par}}$  fixé, la deuxième étape consiste à identifier  $\boldsymbol{\alpha}_{\text{mod}}$  en utilisant l'ensemble des données expérimentales.

**Remarque 4.4 :** Un bon prédicteur pour  $\boldsymbol{\alpha}^{\text{opt}}$  peut facilement être obtenu en supposant que le vecteur aléatoire  $\mathbf{W}^j$  suit une loi Normale de moyenne  $\underline{\mathbf{w}}^j(\boldsymbol{\alpha})$  et de matrice de covariance  $[C_{\mathbf{W}^j}(\boldsymbol{\alpha})]$ . Dans ce cas, la fonction de log-vraisemblance (4.23) est approchée



par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) = & \sum_{j=1}^{n_{exp}} \left\{ -n_{obs,j} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\det([C_{W^j}(\boldsymbol{\alpha})])) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (\mathbf{w}^{exp,j} - \underline{\mathbf{w}}^j(\boldsymbol{\alpha}))^T [C_{W^j}(\boldsymbol{\alpha})]^{-1} (\mathbf{w}^{exp,j} - \underline{\mathbf{w}}^j(\boldsymbol{\alpha})) \right\}, \quad (4.24) \end{aligned}$$

qui peut être estimée par Monte Carlo et des réalisations indépendantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{W}^j$ . Le déterminant de la matrice de covariance peut devenir très petit si la dimension du vecteur aléatoire  $\mathbf{W}^j$  est élevée entraînant des problèmes numériques. Dans ce cas, il vaut mieux passer par les valeurs propres de la matrice de covariance et l'équation (4.24) se réécrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) = & \sum_{j=1}^{n_{exp}} \left\{ -n_{obs,j} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_{obs}} \log(\sigma_k^j(\boldsymbol{\alpha})) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (\mathbf{w}^{exp,j} - \underline{\mathbf{w}}^j(\boldsymbol{\alpha}))^T [C_{W^j}(\boldsymbol{\alpha})]^{-1} (\mathbf{w}^{exp,j} - \underline{\mathbf{w}}^j(\boldsymbol{\alpha})) \right\} \quad (4.25) \end{aligned}$$

où  $\sigma_k^j(\boldsymbol{\alpha})$ ,  $k = 1, \dots, n_{obs,j}$  sont les valeurs propres de la matrice de covariance  $[C_{W^j}(\boldsymbol{\alpha})]$ .

### 4.3.2 Observations sur les fréquences propres.

Lorsque la densité modale est faible (en BF généralement), les mesures de fréquences propres sont des données expérimentales qui peuvent s'obtenir facilement en utilisant une seule mesure de FRF en un point où tous les modes de la bande d'analyse s'expriment. De plus, l'identification des fréquences propres ne nécessite pas la connaissance de l'excitation et peuvent donc s'obtenir de manière assez précise avec une excitation au marteau [113].

#### 4.3.2.1 Construction de l'observation.

Pour chaque configuration  $j$ ,  $n_j$  fréquences propres  $f_1^{exp,j}, \dots, f_{n_j}^{exp,j}$  sont identifiées. Par ailleurs, on suppose qu'il y a correspondance entre les modes identifiés d'une configuration à l'autre. Autrement, les modes devraient être appariés et donc des données sur les vecteurs propres sont nécessaires (voir Section 4.3.3).

L'observation expérimentale est  $\mathbf{w}^{exp,j} = (f_1^{exp,j}, \dots, f_{n_j}^{exp,j})$ . L'observation numérique  $\mathbf{W}^j = (F_1^j, \dots, F_{n_j}^j)$  est constituée des  $n_j$  premières fréquences propres aléatoires  $F_1^j = \sqrt{\Lambda_1}/(2\pi), \dots, F_{n_j}^j = \sqrt{\Lambda_{n_j}}/(2\pi)$  du modèle réduit stochastique. Là encore, on suppose qu'il y a correspondance entre les modes expérimentaux et les modes aléatoires calculés avec le modèle réduit stochastique. Ceci suppose que les variations de paramètres n'engendrent ni de croisements de modes ni de recombinaisons de modes. L'observation des fréquences propres peut être remplacée par l'observation des logarithmes des fréquences propres normalisées par rapport aux fréquences propres expérimentales (qui sont strictement positives ici). Dans ce cas,  $\mathbf{W}^j = (\log(F_1^j/f_1^{exp,j}), \dots, \log(F_{n_j}^j/f_{n_j}^{exp,j}))$  et le vecteur

$\mathbf{w}^{\text{exp},j}$  est nul. Cette variante permet, pour chaque configuration  $j$ , de ramener le support des observations à  $\mathbb{R}^{n_{\text{obs},j}}$ . Ceci présente deux avantages : (1) Aucune précaution n'est à prendre pour la construction de la densité de probabilité jointe des fréquences propres aléatoires par une méthode d'estimation à noyaux multi-dimensionnels et (2) l'approximation Gaussienne (4.24) pour l'observation numérique devient physiquement plus admissible.

#### 4.3.2.2 Illustration sur un système réel : Moteur EAS

##### Problématique et mesures expérimentales :

Afin d'assurer la sécurité de ses installations, EDF (Électricité De France) réalise régulièrement une large variété d'essais expérimentaux sur les composants de ses centrales nucléaires. Parmi ces composants, les moteurs EAS sont des structures composées d'un moteur, d'un système de maintien, d'un carter et d'autres éléments structuraux (voir figure 4.1). Ce

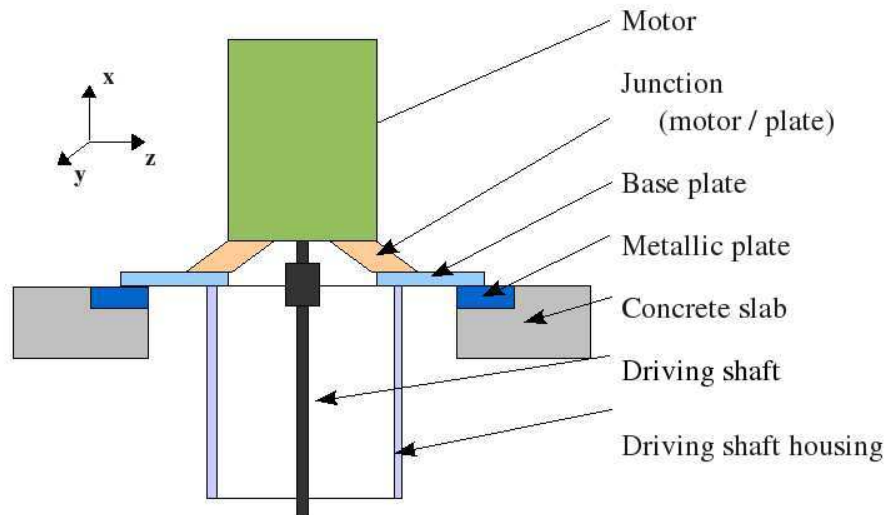


FIGURE 4.1 – Moteur EAS.

moteur est utilisé en cas d'urgence afin de diffuser des réfrigérants dans le circuit primaire. Il arrive parfois que les niveaux de vibration d'un moteur EAS atteignent une limite critique. Ces niveaux élevés sont dus à un phénomène de résonance car les trois premières fréquences propres de la structure moteur sont dans le voisinage de la fréquence de rotation du moteur.

Les premières fréquences propres ont été mesurées sur 11 configurations situées sur différents sites. Les FRF ayant permis d'identifier les fréquences propres ne sont pas exploitables. Pour des raisons de confidentialité, les fréquences propres sont normalisées (et donc adimensionnées) par rapport à la fréquence de rotation du moteur. Les mesures expérimentales sont regroupées dans le tableau 4.1. Il est à noter que la troisième fréquence propres n'a été identifiée que sur 5 configurations. Le tableau 4.1 montre une forte dispersion des fréquences propres mesurées, à tel point qu'elles se chevauchent.

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f_1^{exp,j}$	0.77	0.78	0.77	0.81	0.85	0.97	0.85	0.91	0.96	0.85	0.95
$f_2^{exp,j}$	0.84	0.86	0.79	0.85	0.90	0.98	0.92	0.92	1.04	0.88	0.98
$f_3^{exp,j}$	1.01	1.13	0.85	1.02	1.0	—	—	—	—	—	—

TABLE 4.1 – Fréquences propres mesurées.

Ces fortes dispersions font qu'aucune solution générique n'a pu être trouvée afin d'éliminer les niveaux de vibration élevés des moteurs EAS sur l'ensemble du parc nucléaire d'EDF. Ainsi, la construction d'un modèle générique prenant en compte ces variabilités aide à trouver une telle solution générique.

#### Construction du modèle probabiliste :

Le maillage du modèle nominal est représenté sur la figure Fig. 4.2. La dalle en béton, la plaque de base et la plaque métallique sont modélisées par des éléments volumiques. Le carter est modélisé par une poutre et le moteur est modélisé par un solide rigide. Enfin la jonction moteur/plaque de base est modélisée par un ressort de rotation. Les trois

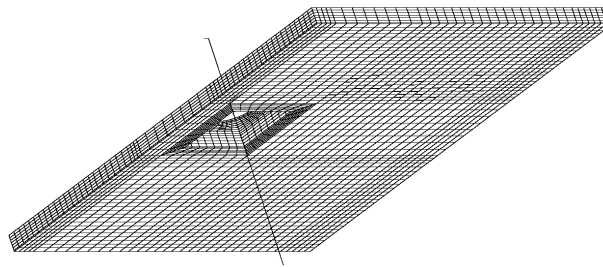


FIGURE 4.2 – Maillage du modèle nominal

premières fréquences propres du modèle nominal sont ( $f_1 = 0.82$ ,  $f_2 = 0.87$ ,  $f_3 = 1.11$ ). Le premier mode propre du modèle nominal est représenté sur la figure 4.3.

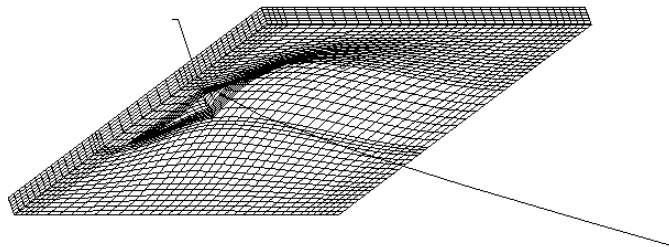


FIGURE 4.3 – Premier mode propre du modèle nominal

Les incertitudes sur les paramètres sont liées à la variabilité de 8 paramètres qui sont : (1) la masse volumique et les deux coefficients de Lamé de la dalle en béton, (2) la masse

volumique et les deux coefficients de Lamé de la plaque métallique, (3) l'inertie de flexion du carter et la raideur de rotation de la jonction moteur/plaque de base. En utilisant le principe du MaxEnt, ces 8 paramètres sont modélisés par 8 variables aléatoires Gamma indépendantes paramétrées chacune par une moyenne et un coefficient de variation. La dimension de  $\alpha_{\text{par}}$  est donc 16.

D'autre part, le modèle EF étant assez grossier, celui-ci comporte des incertitudes de modélisation qui sont prises en compte au niveau des matrices de masse et de raideur généralisées (les quantités d'intérêt étant les fréquences propres, la matrice d'amortissement n'intervient pas dans le modèle). Ainsi  $\alpha_{\text{mod}} = (\delta_M, \delta_K)$ .

Le vecteur  $\alpha_{\text{par}}$  est identifié séparément en résolvant le problème d'optimisation (4.22) par un algorithme génétique et en utilisant les données sur les deux premières fréquences propres uniquement. Puis le vecteur  $\alpha_{\text{mod}}$  est identifié en utilisant les données sur les trois premières fréquences propres. La fonction de vraisemblance à  $\alpha_{\text{par}}^{\text{opt}}$  fixé est tracée sur la figure 4.4.

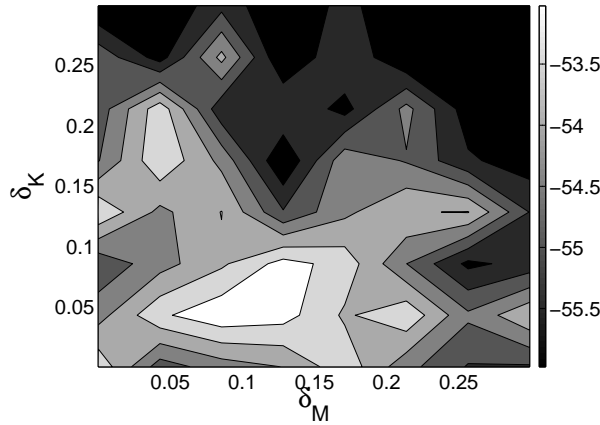


FIGURE 4.4 – Fonction de vraisemblance à  $\alpha_{\text{par}}^{\text{opt}}$  fixé.

#### Statistiques sur les premières fréquences propres :

Une fois le modèle probabiliste construit, celui-ci peut être utilisé pour calculer des statistiques sur les premières fréquences propres.

Les fonctions de densité de probabilité jointes  $(f_1, f_2) \mapsto p_{F_1, F_2}(f_1, f_2)$ ,  $(f_1, f_3) \mapsto p_{F_1, F_3}(f_1, f_3)$  et  $(f_2, f_3) \mapsto p_{F_2, F_3}(f_2, f_3)$  sont tracées sur la figure 4.5. Les probabilités d'appartenance à l'intervalle critique  $[0.92, 1.08]$  sont estimées par Monte Carlo et résumées dans la tableau 4.2.

### 4.3.3 Observations sur les fréquences propres et les vecteurs propres.

L'identification expérimentale des vecteurs propres associés aux valeurs propres nécessite un nombre important de capteurs répartis sur l'ensemble de la structure instrumentée.

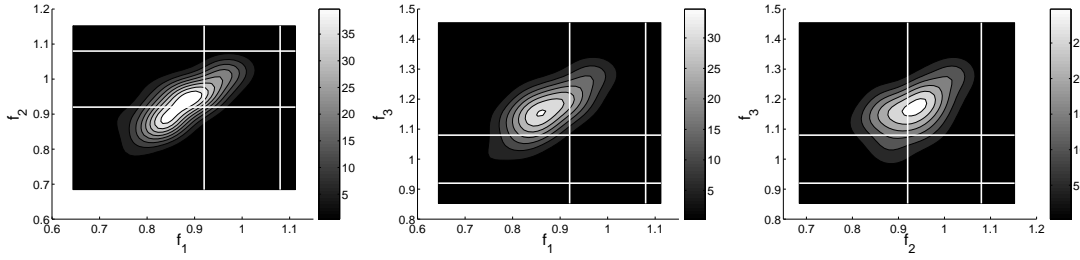


FIGURE 4.5 – Fonctions de densité de probabilité jointes  $(f_1, f_2) \mapsto p_{F_1, F_2}(f_1, f_2)$ ,  $(f_1, f_3) \mapsto p_{F_1, F_3}(f_1, f_3)$  et  $(f_2, f_3) \mapsto p_{F_2, F_3}(f_2, f_3)$ . Les lignes droite délimitent la zone critique  $[0.92, 1.08]$ .

Événement	Probabilité
$\{F_1 \in [0.92, 1.08] \cup F_2 \in [0.92, 1.08] \cup F_3 \in [0.92, 1.08]\}$	0.70
$\{F_1 \notin [0.92, 1.08] \cap F_2 \notin [0.92, 1.08] \cap F_3 \notin [0.92, 1.08]\}$	0.30
$\{F_1 \in [0.92, 1.08] \cap F_2 \in [0.92, 1.08] \cap F_3 \in [0.92, 1.08]\}$	0.0

TABLE 4.2 – Statistiques sur les trois premières fréquences propres.

La plupart des méthodes d'identification expérimentale des vecteurs propres permettent d'obtenir des vecteurs propres normalisés par rapport à la masse [113]. Cependant, comme nous le verrons ci-après, la normalisation des modes propres expérimentaux n'est pas nécessaire à l'identification du modèle probabiliste.

#### 4.3.3.1 Construction de l'observation.

##### Observations expérimentales

Pour chaque configuration  $j$ ,  $n_j$  pulsations propres  $\omega_1^{\text{exp},j}, \omega_2^{\text{exp},j}, \dots, \omega_{n_j}^{\text{exp},j}$  associées à  $n_j$  vecteurs propres  $\hat{\varphi}_1^{\text{exp},j}, \hat{\varphi}_2^{\text{exp},j}, \dots, \hat{\varphi}_{n_j}^{\text{exp},j}$  ont été identifiées expérimentalement. Dans un premier temps, on suppose que ces vecteurs propres sont normalisés par rapport aux masses modales (qui sont donc supposées elle aussi avoir été identifiées). Entre deux configurations, le nombre et la localisation des capteurs sont différents et donc les maillages expérimentaux sont différents. Pour chaque configuration  $j$ ,  $m_j$  degrés de liberté sont mesurés. Soit  $[\hat{\Phi}^{\text{exp},j}]$  la matrice modale expérimentale de taille  $m_j \times n_j$  dont les colonnes correspondent aux  $n_j$  vecteurs propres expérimentaux de la configuration  $j$ . On suppose que  $n_j < n < m_j < m$  pour  $j$  dans  $\{1, \dots, n_{\text{exp}}\}$ , où  $n$  est le nombre de modes propres calculés par le modèle probabiliste.

##### Transformation des données modales

Pour tout  $j$ , on introduit la matrice  $[P^j]$  de dimension  $m_j \times m$  qui réalise une projection depuis les DDL du modèle probabiliste vers les DDL expérimentaux. Alors la base modale projetée aléatoire du modèle probabiliste est définie par

$$[\tilde{\Phi}^j] = [P^j] [\Phi]. \quad (4.26)$$

La base modale expérimentale  $[\widehat{\Phi}^{\text{exp},j}]$  ne peut pas être directement comparée à la base modale projetée aléatoire  $[\tilde{\Phi}^j]$  parce qu'il n'existe en général pas de correspondance directe entre les modes expérimentaux et les modes numériques. Les méthodes classiques de suivi de modes (voir [158, 74]) basées sur les indices de MAC [113] sont efficaces pour détecter les croisements de modes mais ne sont pas capables de détecter des recombinaisons de modes (voir [205], [206], [55], [189]). Dans [55], les auteurs ont introduit une classe d'équivalence sur les modèles réduits basée sur une transformation de la base de réduction  $[\tilde{\Phi}]$  du modèle réduit et des matrices généralisées via une matrice orthogonale  $[Q]$  qui est calculée en minimisant la distance  $\| [\tilde{\Phi}][Q] - [\widehat{\Phi}^{\text{ref}}] \|_F$ , où  $\| \cdot \|_F$  est la norme de Frobenius et  $[\widehat{\Phi}^{\text{ref}}]$  est une base de réduction de référence. Nous allons nous baser sur cette méthode pour construire une observation numérique correspondant à l'observation expérimentale. Ainsi, dans notre cas, la base de référence est la base modale expérimentale et nous cherchons à construire une base aléatoire numérique correspondante (et donc de même taille)  $[\widehat{\Phi}^j]$  définie par

$$[\widehat{\Phi}^j] = [\tilde{\Phi}^j][Q^{\text{opt},j}], \quad (4.27)$$

où  $[Q^{\text{opt},j}]$  est une matrice aléatoire orthogonale de dimension  $n \times n_j$  à valeurs dans la variété de Stiefel compacte  $\mathcal{OSt}(n, n_j)$  définie par

$$\mathcal{OSt}(n, n_j) = \{[Q] \in \mathbb{R}^{n \times n_j}, [Q]^T[Q] = [I_{n_j}]\}. \quad (4.28)$$

Alors les matrices aléatoires de masse et de raideur généralisées sont transformées par les relations

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathbf{M}}^j] &= [Q^{\text{opt},j}]^T[\mathbf{M}][Q^{\text{opt},j}] = [I_{n_j}], \\ [\widehat{\mathbf{K}}^j] &= [Q^{\text{opt},j}]^T[\mathbf{K}][Q^{\text{opt},j}] \in \mathbb{M}_{n_j}^+(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Il est à noter que, comme  $n_j < n$ , la dimension du modèle réduit aléatoire transformé est inférieure à la dimension du modèle réduit aléatoire initial et donc cette transformation ne définit pas une classe d'équivalence de modèle réduit comme dans [55]. Pour tout  $\theta$  dans  $\Theta$ , la matrice orthogonale  $[Q^{\text{opt},j}(\theta)]$  est calculée pour minimiser la distance entre la base modale transformée  $[\widehat{\Phi}^j(\theta)]$  et la base expérimentale  $[\widehat{\Phi}^{\text{exp},j}]$ , i.e.,

$$[Q^{\text{opt},j}(\theta)] = \arg \min_{[Q] \in \mathcal{OSt}(n, n_j)} \| [\tilde{\Phi}^j(\theta)][Q] - [\widehat{\Phi}^{\text{exp},j}] \|_F. \quad (4.30)$$

Ce problème de minimisation est un problème de Procruste dans la variété de Stiefel. Contrairement au problème de Procruste classique (pour lequel la solution est recherchée dans l'ensemble des matrices orthogonales carrées [133]), ce problème de Procruste dans la variété de Stiefel n'a pas de solution analytique. Cependant, une solution peut tout de même être obtenue de manière itérative (voir [66]) en utilisant l'algorithme 1. Le nombre d'itérations  $n_{\text{iter}1}$  est déterminé par l'analyse de la convergence de l'erreur  $\| [\tilde{\Phi}^j(\theta)][Q^{\text{opt},j}(\theta)] - [\widehat{\Phi}^{\text{exp},j}] \|_F$ . En général, cette erreur ne converge pas vers zéro. Cette analyse de convergence peut être réalisée pour toute les réalisations  $[\tilde{\Phi}^j(\theta)]$  ou peut être

---

**Algorithm 1:** Algorithme de résolution du problème de Procruste.

---

**Initialisation :**

$$[C] = [\tilde{\Phi}^j(\theta)]^T [\tilde{\Phi}^j(\theta)] ;$$

 $[W]$  : matrices des  $(n - n_j)$  premiers vecteurs propres de  $[C]$  ;

$$[A] = [\hat{\Phi}^{\text{exp},j}, [\tilde{\Phi}^j(\theta)][W]] ;$$

**Boucle :**
**for**  $\ell = 1, \dots, n_{\text{iter1}}$  **do**

$$\left[ \begin{array}{l} [P] = [\tilde{\Phi}^j(\theta)]^T [A] ; \\ [P] = [U][S][V]^T \text{ (SVD)} ; \\ [\tilde{Q}] = [U][V] \in \mathcal{OSt}(n, n) ; \\ [\tilde{Q}] = [Q_1, Q_2], \text{ avec } [Q_1] \in \mathcal{OSt}(n, n_j) \text{ et } [Q_2] \in \mathcal{OSt}(n, n - n_j) ; \\ [Q^{\text{opt},j}(\theta)] = [Q_1] \\ [A] = [\hat{\Phi}^{\text{exp},j}, [\tilde{\Phi}^j(\theta)][Q_2]] ; \end{array} \right.$$


---

effectuée une seule fois en utilisant les modes propres du modèle nominal. Dans ce cas, le nombre d'itérations  $n_{\text{iter1}}$  est le même pour les réalisations  $[\tilde{\Phi}^j(\theta)]$ .

Si les vecteurs propres expérimentaux  $\hat{\varphi}_1^{\text{exp},j}, \hat{\varphi}_2^{\text{exp},j}, \dots, \hat{\varphi}_{n_{\text{exp}}}^{\text{exp},j}$  ne sont pas normalisés par rapport à la masse, alors la transformation (4.27) n'est pas suffisante pour rapprocher suffisamment la base mode modale aléatoire numérique de la base modale expérimentale. Il est alors nécessaire d'inclure à l'algorithme 1 une boucle externe de mise à l'échelle afin que les colonnes des matrices  $[\hat{\Phi}^{\text{exp},j}]$  et  $[\hat{\Phi}^j(\theta)] = [\tilde{\Phi}^j(\theta)][Q^{\text{opt},j}(\theta)]$  aient la même norme. Cette boucle externe est détaillée dans l'algorithme 2.

---

**Algorithm 2:** Boucle de mise à l'échelle pour le problème de Procruste.

---

**Initialisation :**

Mettre à l'échelle les colonnes de  $[\hat{\Phi}^{\text{exp},j}]$  par rapport aux  $n_j$  premières colonnes de  $[\tilde{\Phi}^j(\theta)]$  ;

**Boucle :**
**for**  $\ell = 1, \dots, n_{\text{iter2}}$  **do**

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Résoudre } [Q^{\text{opt},j}(\theta)] = \arg \min \| [\tilde{\Phi}^j(\theta)] [Q] - [\hat{\Phi}^{\text{exp},j}] \|_F ; \\ [\hat{\Phi}^j(\theta)] = [\tilde{\Phi}^j(\theta)][Q^{\text{opt},j}(\theta)] ; \\ \text{Mettre à l'échelle les colonnes de } [\hat{\Phi}^{\text{exp},j}] \text{ par rapport aux colonnes de } [\hat{\Phi}^j(\theta)] ; \end{array} \right.$$


---

### Construction d'une observation

Pour  $j = 1, \dots, n_{\text{exp}}$ , les données modales expérimentales sont constituées de (1) la base modale expérimentale  $[\hat{\Phi}^{\text{exp},j}]$ , (2) la matrice de raideur modale  $[\hat{K}^{\text{exp},j}] = \text{diag}(\lambda_1^{\text{exp},j}, \lambda_2^{\text{exp},j}, \dots, \lambda_{n_j}^{\text{exp},j})$  avec  $\lambda_i^{\text{exp},j} = (\omega_i^{\text{exp},j})^2$  et (3) la matrice de masse modale  $[\hat{M}^{\text{exp},j}] = [I_{n_j}]$ . Pour identifier le paramètre  $\alpha$  du modèle probabiliste, ces trois quantités doivent être comparées aux données modales aléatoires calculées par le modèle probabiliste :

(1) la base modale aléatoire  $[\widehat{\Phi}^j]$ , la matrice aléatoire de raideur généralisée  $[\widehat{\mathbf{K}}^j]$  et (3) la matrice aléatoire de masse généralisée  $[\widehat{\mathbf{M}}^j]$ . Étant donné que par construction  $[\widehat{\mathbf{M}}^j] = [\widehat{\mathbf{M}}^{\text{exp},j}] = [I_{n_j}]$  presque sûrement, seules les bases modales et les matrices de raideur seront utilisées pour la comparaison. Avant de procéder à l'identification, il faut construire une représentation des données expérimentales et numériques. Afin d'éviter des difficultés qui seraient liées à l'estimation de la fonction de densité de probabilité jointe du vecteur aléatoire d'observation sur un support complexe, il est préférable de rechercher une représentation des observations sur un espace Euclidien  $\mathbb{R}^{n_{\text{obs},j}}$ . Ces représentations sont construites par les transformations logarithmiques [55] suivantes

$$[\widehat{\Phi}^{\text{obs},j}] = [\widehat{\Phi}^j] - [\widehat{\Phi}^{\text{exp},j}], \quad [\widehat{\Phi}^{\text{exp},\text{obs},j}] = [0]. \quad (4.31)$$

pour les bases modales, et

$$[\widehat{\mathbf{K}}^{\text{obs},j}] = \text{logm}([\widehat{K}^{\text{exp},j}]^{-\frac{1}{2}} [\widehat{\mathbf{K}}^j] [\widehat{K}^{\text{exp},j}]^{-\frac{1}{2}}), \quad [\widehat{K}^{\text{exp},\text{obs},j}] = [0], \quad (4.32)$$

pour les matrices de raideur, où  $\text{logm}$  est le logarithme matriciel. Le vecteur aléatoire des observations  $\mathbf{W}^j$  est alors constitué des  $m_j \times n_j$  éléments de la matrice aléatoire  $[\widehat{\Phi}^{\text{obs},j}]$  et des  $n_j \times (n_j + 1)/2$  éléments de la partie triangulaire supérieure de la matrice aléatoire  $[\widehat{\mathbf{K}}^{\text{obs},j}]$ . Le vecteur des observations expérimentales  $\mathbf{w}^{\text{exp},j}$  est quant à lui nul. On a donc  $n_{\text{obs},j} = (m_j \times n_j + n_j \times (n_j + 1)/2)$ .

#### 4.3.3.2 Illustration sur un système réel : Pompe Sulzer

##### Système réel et mesures expérimentales :

On s'intéresse au comportement dynamique d'une pompe utilisée par EDF dans ses centrales thermiques. Cette pompe, représentée sur la figure 4.6, est composée d'un diffuseur et d'une volute et est montée sur un cadre métallique.



FIGURE 4.6 – Pompe étudiée.



Une analyse modale expérimentale a été réalisée sur deux spécimens de cette pompe localisés sur deux sites différents. Donc  $n_{exp} = 2$  configurations expérimentales (nommées pompe 1 et pompe 2) sont mesurées. Les maillages expérimentaux de ces deux pompes sont différents (voir Fig. 4.7).

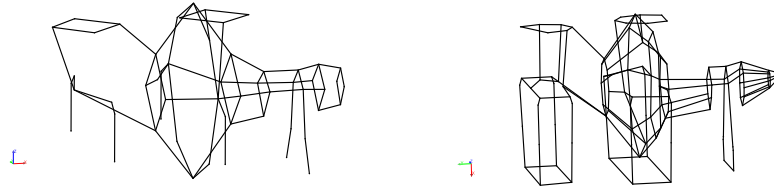


FIGURE 4.7 – Maillages expérimentaux : Pompe 1 (gauche) et pompe 2 (droite).

Sur la pompe 1,  $n_1 = 6$  modes propres ont été identifiés. Les fréquences propres sont 76.8 Hz, 134.4 Hz, 162.0 Hz, 211.9 Hz, 233.4 Hz et 251.2 Hz. Sur la pompe 2,  $n_2 = 11$  modes propres ont été identifiés. Les fréquences propres sont 69.9 Hz, 84.6 Hz, 151.8 Hz, 160.6 Hz, 166.3 Hz, 167.8 Hz, 202.5 Hz, 224.6 Hz, 244.3 Hz, 252.1 Hz et 288.3 Hz. Les six premiers modes propres pour la pompe 1 et la pompe 2 sont représentés sur les figures 4.8 et 4.9 respectivement.

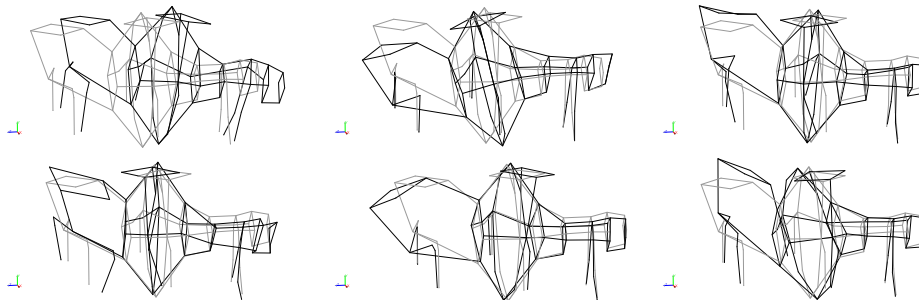


FIGURE 4.8 – Pompe 1. Six premiers modes propres (Traits noirs épais).

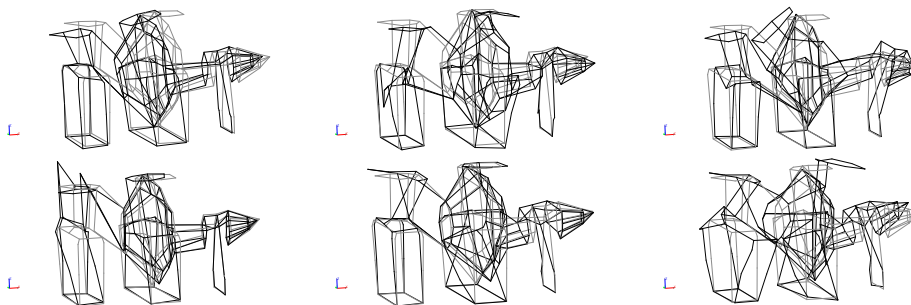


FIGURE 4.9 – Pompe 2. Six premiers modes propres (Traits noirs épais).

On peut voir sur ces figures qu'à part pour le premier mode, il est difficile d'apparier les modes de la pompe 1 à ceux de la pompe 2. Ceci est dû à la variabilité entre les deux configurations mesurées.

**Modèle nominal :**

Le maillage du modèle nominal est représenté sur la figure 4.10.

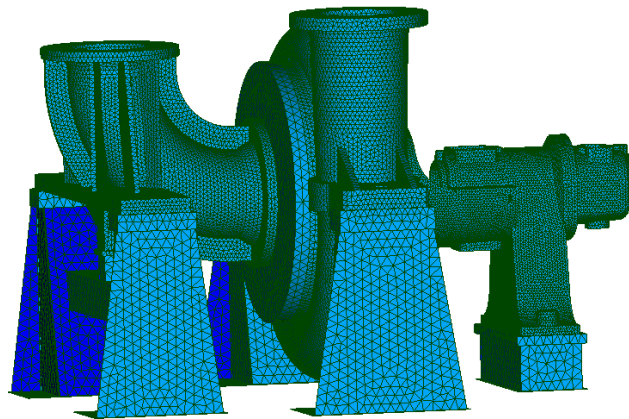


FIGURE 4.10 – Maillage du modèle nominal.

Le modèle EF est constitué d'éléments volumiques, d'éléments plaque et de ressorts discrets. Le modèle assemblé a 488 220 DDL. Il y a neuf paramètres incertains qui sont le module d'Young de l'acier, le module d'Young de la fonte, trois épaisseurs des plaques formant le cadre métallique et quatre raideurs de ressorts relatifs aux conditions aux limites. Les modèles nominaux pour les pompes 1 et 2 ont été recalés sur les premières fréquences propres expérimentales. Les 6 premières fréquences propres pour le modèle nominal de la pompe 1 sont 76.4 Hz, 81.2 Hz, 143.1 Hz, 163.5 Hz, 185.5 Hz et 200.1 Hz. Les deux premiers modes propres sont tracés sur la figure 4.11.

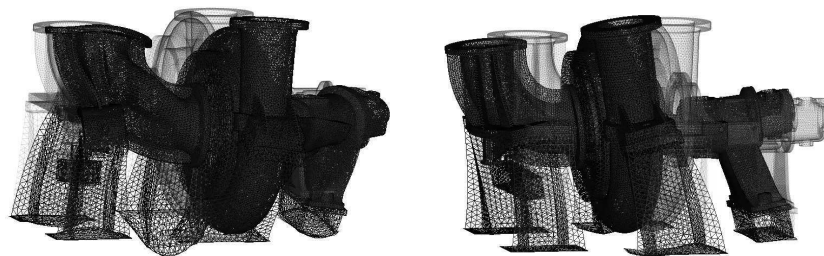


FIGURE 4.11 – Modes propres du modèle nominal de la pompe 1.

Les 6 premiers modes du modèle nominal de la pompe 1 projetés sur le maillage expérimental sont représentés sur la figure 4.12.

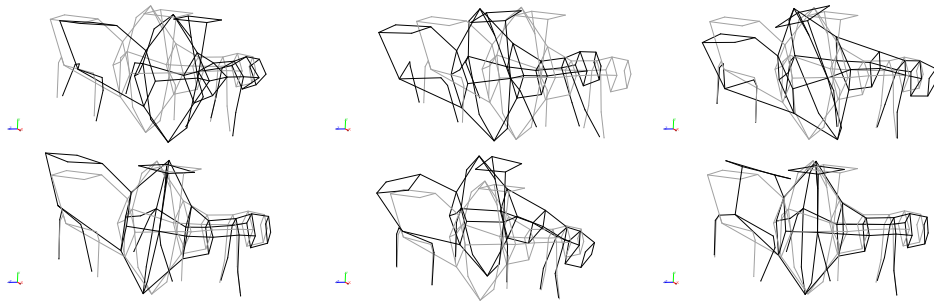


FIGURE 4.12 – 6 premiers modes propres projetés pour la pompe 1.

La matrice de MAC pour la pompe 1 est illustrée sur la figure 4.11.

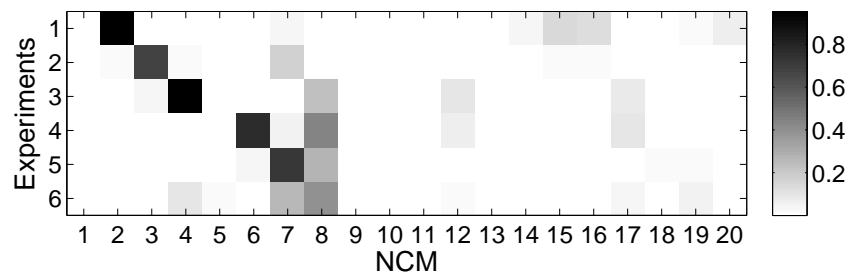


FIGURE 4.13 – Matrice de MAC pour la pompe 1.

Les 6 première fréquences propres pour le modèle nominal de la pompe 2 sont 78.6 Hz, 82.4 Hz, 140.7 Hz, 157.4 Hz, 181.6 Hz et 192.9 Hz. Les 6 premiers modes du modèle nominal de la pompe 2 projetés sur le maillage expérimental sont représentés sur la figure 4.14.

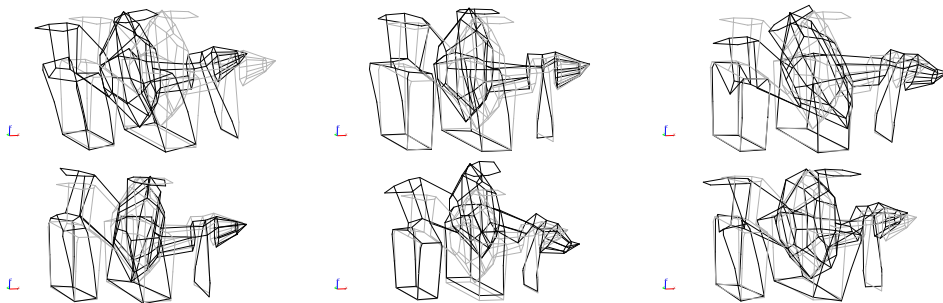


FIGURE 4.14 – 6 premiers modes propres projetés pour la pompe 2.

La matrice de MAC pour la pompe 2 est illustrée sur la figure 4.15.

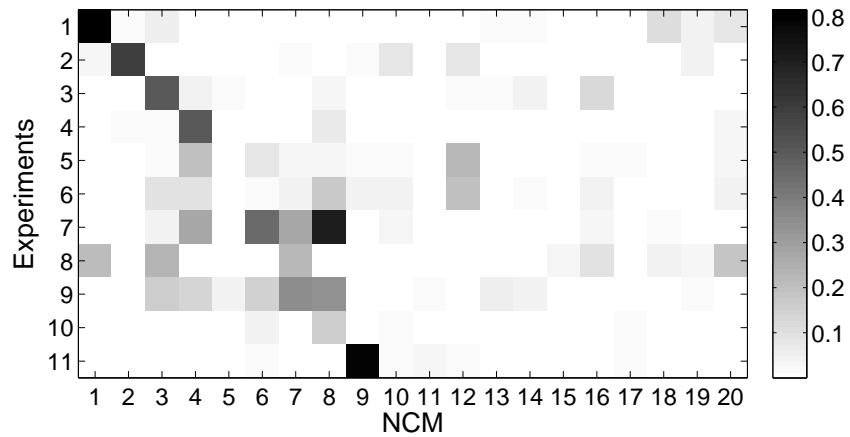


FIGURE 4.15 – Matrice de MAC pour la pompe 2.

On peut voir sur les figures 4.13 et 4.15 que les indices de MAC pour la pompe 1 et la pompe 2 sont faibles. Il est donc difficile d'établir une correspondance entre les modes expérimentaux et les modes calculés avec les modèles nominaux. La transformation introduite dans la Section 4.3.3.1 est testée sur les bases modales des modèles nominaux afin qu'elles soient mises en correspondance avec les modes expérimentaux (cette transformation sera ensuite déterminée et appliquée pour chaque réalisation du modèle probabiliste). Les nouvelles matrices de MAC pour les pompes 1 et 2 après transformation sont représentées sur les figures 4.16 et 4.17 respectivement.

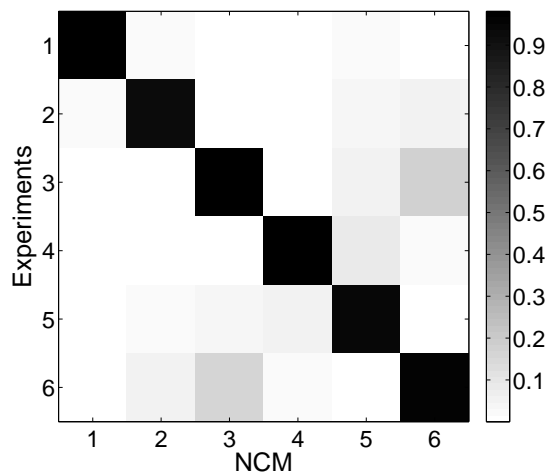


FIGURE 4.16 – Matrice de MAC pour la pompe 1 après transformation.

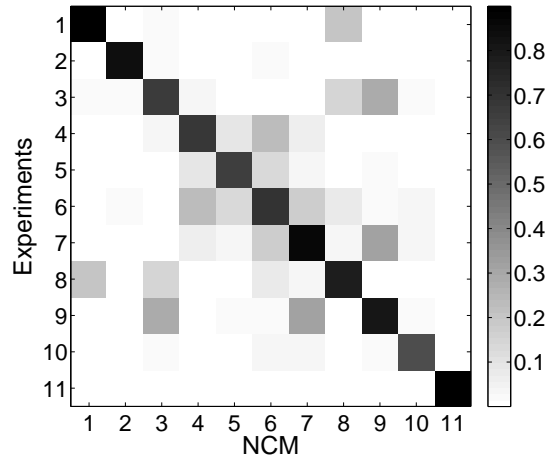


FIGURE 4.17 – Matrice de MAC pour la pompe 2 après transformation.

On peut constater une nette amélioration des MAC après transformation.

#### Construction du modèle probabiliste :

Les modules d'Young incertains et les raideurs incertaines sont, après application du MaxEnt, modélisés par des variables aléatoires indépendantes Gamma. Les épaisseurs incertaines sont, après application du MaxEnt, modélisées par des variables aléatoires indépendantes uniformes. Les neuf variables aléatoires sont paramétrées par leur valeur moyenne et leur paramètre de dispersion. La dimension de  $\alpha_{\text{par}}$  est donc 18.

Les incertitudes de modélisation sont prises en compte au niveau des matrices de masse et de raideur généralisées et donc  $\alpha_{\text{mod}} = (\delta_M, \delta_K)$ . Le vecteur  $\alpha^{\text{opt}}$  est identifié en résolvant le problème d'optimisation (4.22) par un algorithme génétique.

Pour  $\alpha = \alpha^{\text{opt}}$ , les fonctions de densité de probabilité des six premières valeurs propres des matrices  $[\hat{\mathbf{K}}^1]$  et  $[\hat{\mathbf{K}}^2]$  sont tracées sur les figures 4.18 et 4.19 respectivement. On peut voir sur ces figures que les 5 premières fréquences propres expérimentales pour la pompe 1 et la pompe 2 sont prédites par le modèle stochastique avec un bon niveau de probabilité. La valeur moyenne de la matrice de MAC entre les modes aléatoires  $[\tilde{\Phi}^j]$  (avant transformation) du modèle stochastique et les modes expérimentaux  $[\hat{\Phi}^{\text{exp},j}]$  est tracée sur la figure 4.20 pour la pompe 1 et sur la figure 4.21 pour la pompe 2. La comparaison des figures 4.20 et 4.21 avec les figures 4.13 et 4.15 montre que l'aléa dans le modèle stochastique introduit des croisements et recombinaisons de modes qui modifient l'appariement. La valeur moyenne de la matrice de MAC entre les modes aléatoires  $[\hat{\Phi}^j]$  (après transformation) du modèle stochastique et les modes expérimentaux  $[\hat{\Phi}^{\text{exp},j}]$  est tracée sur la figure 4.24 pour la pompe 1 et sur la figure 4.23 pour la pompe 2. On peut voir sur ces figures que la transformation aléatoires des modes propres aléatoires permet d'obtenir un bon appariement entre les modes aléatoires du modèle stochastique et les modes expérimentaux.

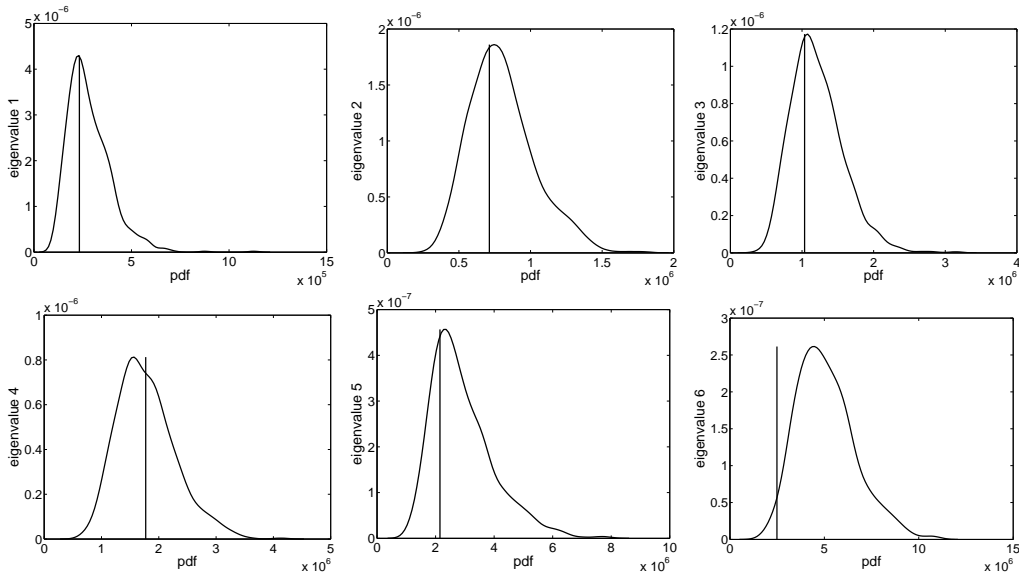


FIGURE 4.18 – Fonction de densité de probabilité des valeurs propres aléatoires de  $[\hat{\mathbf{K}}^1]$ . Lignes verticales : valeurs expérimentales correspondantes (valeurs propres de  $[\hat{K}^{\text{exp},1}]$ ).

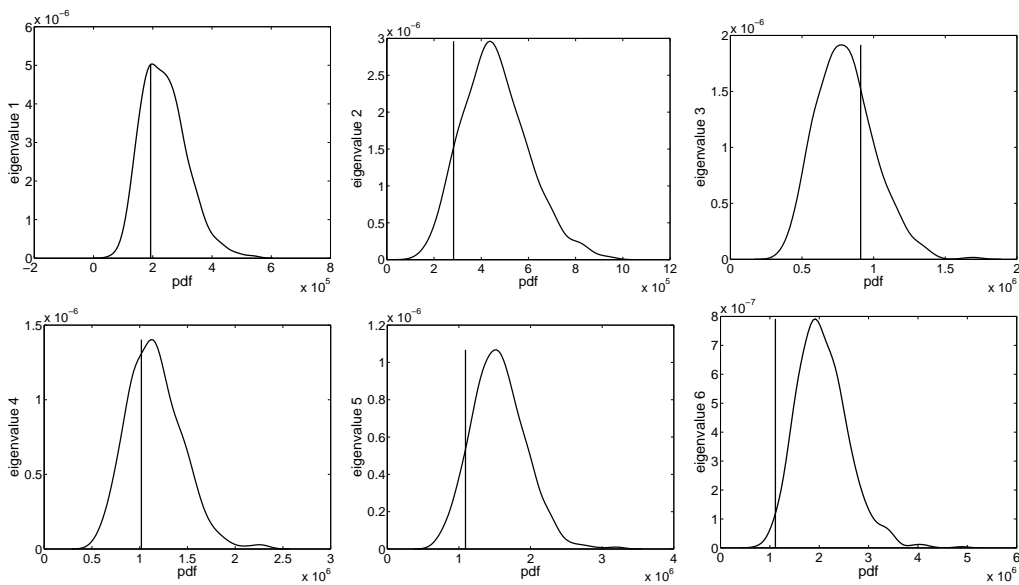


FIGURE 4.19 – Fonction de densité de probabilité des valeurs propres aléatoires de  $[\hat{\mathbf{K}}^2]$ . Lignes verticales : valeurs expérimentales correspondantes (valeurs propres de  $[\hat{K}^{\text{exp},2}]$ ).

### 4.3.4 Observations sur les réponses fréquentielles.

Les mesures de réponses fréquentielles (ou les FRF) sont des données expérimentales très riches lorsque les sources d'excitation sont bien maîtrisés (utilisation de pots vibrants par exemple). Elles contiennent plus d'informations expérimentales que les données modales

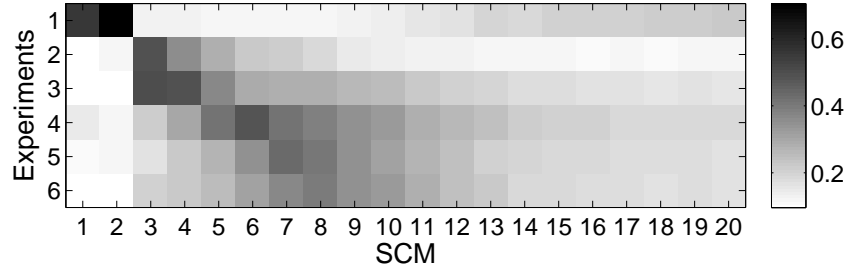


FIGURE 4.20 – Pour la pompe 1, valeur moyenne de la matrice de MAC entre les modes aléatoires avant transformation du modèle stochastique et les modes expérimentaux.

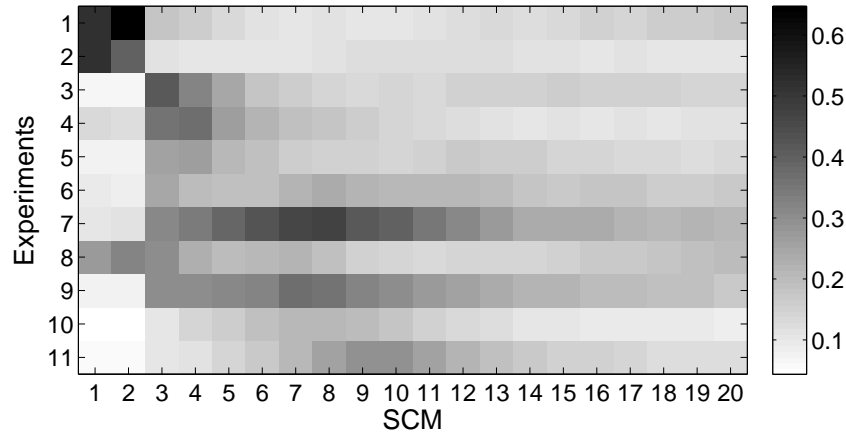


FIGURE 4.21 – Pour la pompe 2, valeur moyenne de la matrice de MAC entre les modes aléatoires avant transformation du modèle stochastique et les modes expérimentaux.

mais sont moins robustes vis-à-vis des incertitudes de paramètres et de modélisation. Elles doivent être utilisées pour identifier les paramètres du modèle probabiliste lorsque les quantités d'intérêt sont très sensibles aux incertitudes (par exemple, un déplacement ou une contrainte locale). De plus, plus on monte en fréquence et plus la sensibilité des réponses fréquentielles aux incertitudes augmente.

#### 4.3.4.1 Construction de l'observation.

Pour chaque configuration  $j$ , la réponse fréquentielle est mesurée pour  $n_{\text{dof},j}$  DDL et  $n_{\text{freq},j}$  pulsations  $\omega_{j,1}, \dots, \omega_{j,n_{\text{freq},j}}$  (le nombre de DDL observés et l'échantillonnage peut varier d'une configuration à l'autre). On introduit alors le vecteur aléatoire de réponse  $\mathbf{U}^{\text{obs},j}(\omega_{j,i}) = (\log_{10}(|U_1(\omega_{j,i})|), \dots, \log_{10}(|U_{n_{\text{dof},j}}(\omega_{j,i})|))$ . Le vecteur aléatoire d'observation est donc  $\mathbf{W}^j = (\mathbf{U}^{\text{obs},j}(\omega_{j,1}), \dots, \mathbf{U}^{\text{obs},j}(\omega_{j,n_{\text{freq},j}}))$ . On a donc  $n_{\text{obs},j} = n_{\text{dof},j} \times n_{\text{freq},j}$ . La dimension du vecteur aléatoire  $\mathbf{W}^j$  est très grande. Il est donc fort utile de réduire la dimension stochastique par une analyse en composantes principales lors de l'identification du paramètre  $\boldsymbol{\alpha}$  du modèle stochastique.

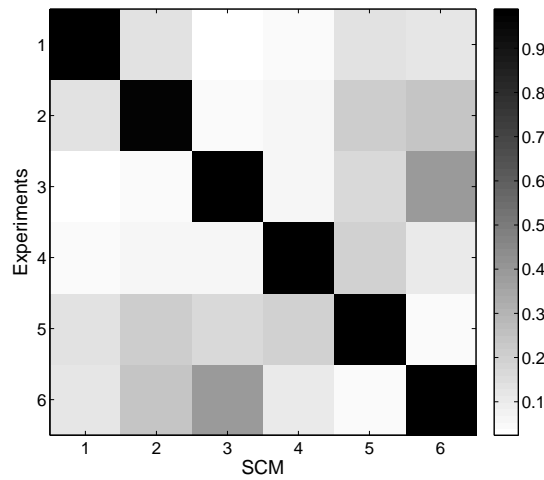


FIGURE 4.22 – Pour la pompe 1, valeur moyenne de la matrice de MAC entre les modes aléatoires après transformation du modèle stochastique et les modes expérimentaux.

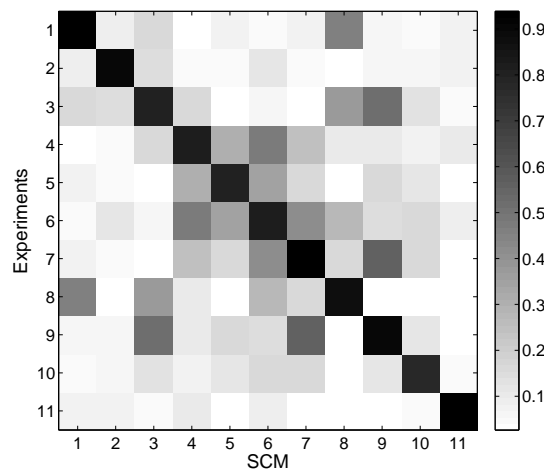


FIGURE 4.23 – Pour la pompe 2, valeur moyenne de la matrice de MAC entre les modes aléatoires après transformation du modèle stochastique et les modes expérimentaux.

**4.3.4.2 Exemple numérique : Champs incertains de propriétés de matériau et incertitudes de modélisation - Grande dimension stochastique**

**Système réel et génération des réponses fréquentielles aléatoires expérimentales :**

Le système réel (modélisé numériquement) est une poutre rectangulaire 3D encadrée à ses extrémités (voir figure 4.24) et composée de deux sous-domaines  $\Omega_1^{\text{exp}}$  défini sur  $\{0 \leq x_1 \leq 3.75\}$  et  $\Omega_2^{\text{exp}}$  défini sur  $\{3.75 \leq x_1 \leq 10\}$ . Le module de compression et le module de cisaillement varient suivant la direction  $x_1$  et sont modélisés par des champs aléatoires. Dans  $\Omega_1^{\text{exp}}$ , le module de cisaillement  $\{x_1 \mapsto K_1^{\text{exp}}(x_1)\}$  est un champs



aléatoire Gamma de moyenne  $5.56 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, de coefficient de variation 0.2 et de longueur de corrélation 0.375 m et le module de cisaillement  $\{x_1 \mapsto G_1^{\text{exp}}(x_1)\}$  est un champs aléatoire Gamma de moyenne  $4.17 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, de coefficient variation 0.09 et de longueur de corrélation 0.375 m. Dans  $\Omega_2^{\text{exp}}$ , le module de cisaillement  $\{x_1 \mapsto K_2^{\text{exp}}(x_1)\}$  est un champs aléatoire Gamma de moyenne  $6.67 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, de coefficient de variation 0.2 et de longueur de corrélation 0.625 m et le module de cisaillement  $\{x_1 \mapsto G_2^{\text{exp}}(x_1)\}$  est un champs aléatoire Gamma de moyenne  $5.0 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, de coefficient de variation 0.09 et de longueur de corrélation 0.625 m. Les champs aléatoires  $K_1^{\text{exp}}$ ,  $G_1^{\text{exp}}$ ,  $K_2^{\text{exp}}$  et  $G_2^{\text{exp}}$  sont pris statistiquement indépendants (voir justification dans [136]).

Une charge ponctuelle unitaire sur la bande de fréquence d'analyse est appliquée en  $(x_1 = 4.250, x_2 = 1.100, x_3 = 0.800)$ . Au total,  $n_{\text{exp}} = 200$  configurations expérimentales

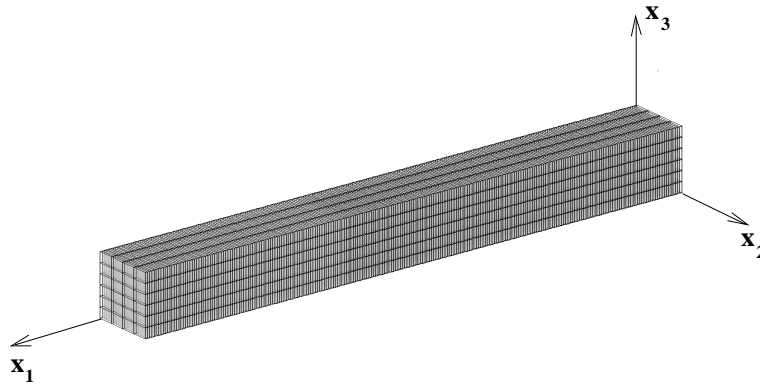


FIGURE 4.24 – Système réel.

sont simulées (voir [247] pour la méthode de simulation des champs stochastiques de propriétés mécaniques). La bande d'analyse est  $B = [0, 1200]$  Hz.

#### Modèle nominal :

Le modèle nominal est une poutre de Timoshenko de mêmes dimensions que le système réel. Les champs de module de compression et de module de cisaillement ont pour valeurs les valeurs moyennes des champs stochastiques introduits pour le système réel. La même force ponctuelle est appliquée en  $x_1 = 4.250$ . Le modèle de Timoshenko introduit ne prend volontairement pas en compte les inerties de rotation des sections afin d'introduire des erreurs (et donc des incertitudes) de modélisation sur la masse.

La figures 4.25 compare la FRF aléatoire expérimentale à la FRF calculée avec le modèle nominal au point  $P_2$  situé sur la fibre neutre en  $x_1 = 3.125$ . On voit sur cette figure qu'à très basse fréquence (3 premières résonances), la réponse est très robuste aux incertitudes mais cette robustesse diminue ensuite rapidement avec la fréquence.

#### Modèle probabiliste des incertitudes de paramètres uniquement :

Comme pour le système réel, le module de compression et le module de cisaillement sont modélisés par des champs stochastiques qui sont identiques à ceux utilisés pour générer le système réel à la différence que le champs stochastique du module de compression du deuxième domaine est multiplié par un paramètre de recalage  $\beta > 0$ . On a donc  $\alpha_{\text{par}} = (\beta)$ .

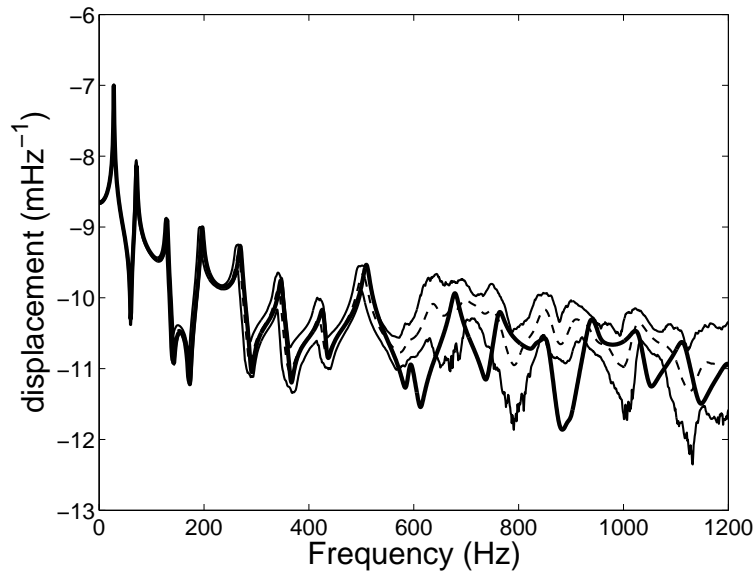


FIGURE 4.25 – FRF calculée avec le modèle nominal (trait plein épais). FRF expérimentale : Région de confiance (traits fins) et réponse moyenne (trait pointillé).

Pour  $\beta = 1$ , la FRF aléatoire du modèle probabiliste est tracée sur la figure 4.26. On voit sur cette figure que la prise en compte des incertitudes de paramètres améliore les prévisions sur la bande BF  $[0, 550]$  Hz mais pas sur la bande MF  $[550, 1200]$  Hz. En effet, l'approximation poutre Timoshenko est robuste en BF mais introduit des incertitudes de modélisation en MF qu'il faut prendre en compte.

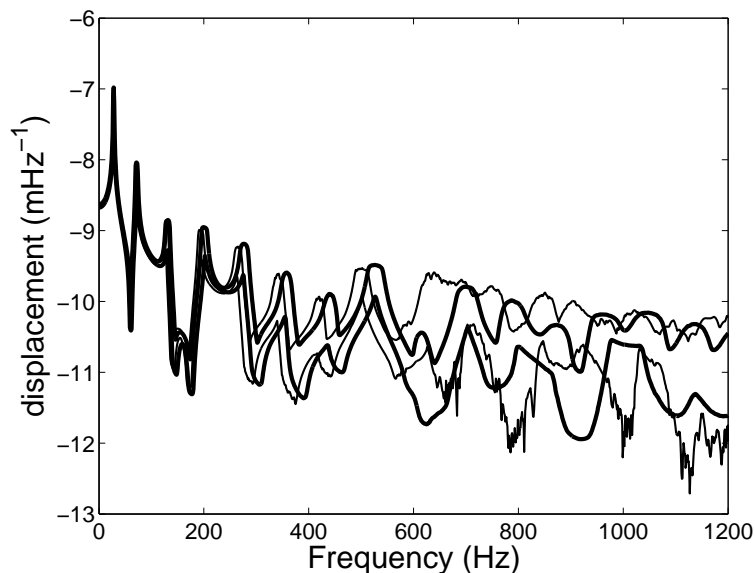


FIGURE 4.26 – FRF aléatoire calculée avec le modèle probabiliste des incertitudes de paramètres uniquement : Région de confiance (traits épais). FRF expérimental : Région de confiance (traits fins).

### Modèle probabiliste des incertitudes de paramètres et de modélisation :

Les incertitudes de modélisation sont prises en compte sur la masse et la raideur uniquement. Il y a donc trois paramètres à identifier et  $\alpha = (\beta, \delta_M, \delta_K)$ . On peut donc se permettre de discrétiser le domaine de  $\alpha$  pour en rechercher la valeur optimale. Finalement, on trouve  $\alpha^{\text{opt}} = (0.7, 0.5, 0.2)$ . La valeur optimale pour  $\delta_M$  est très élevée car les inerties de rotation de section n'ont volontairement pas été modélisées. La fonction de vraisemblance pour  $\delta_M = \delta_M^{\text{opt}}$  et  $\delta_K = \delta_K^{\text{opt}}$  et la fonction de vraisemblance pour  $\beta = \beta^{\text{opt}}$  sont tracées sur la figure 4.27. Pour  $\alpha = \alpha^{\text{opt}}$ , la réponse aléatoire du modèle

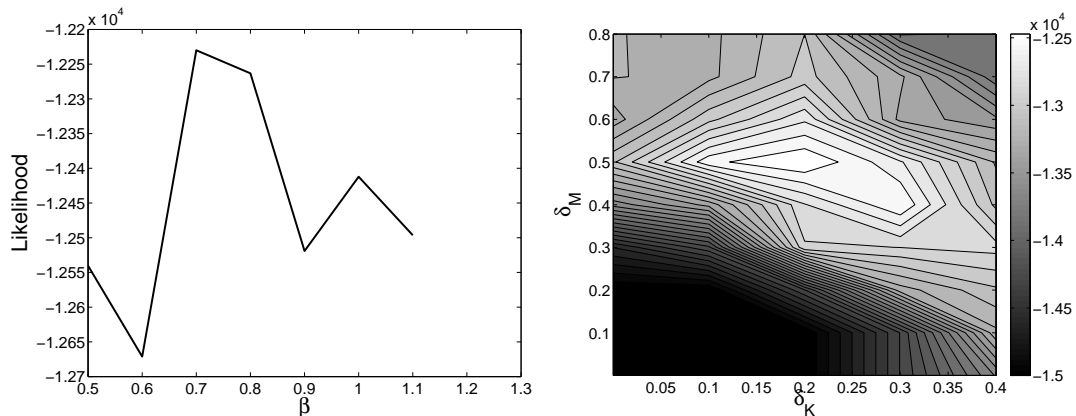


FIGURE 4.27 – Fonction de vraisemblance pour  $\delta_M = \delta_M^{\text{opt}}$  et  $\delta_K = \delta_K^{\text{opt}}$  (gauche) et fonction de vraisemblance pour  $\beta = \beta^{\text{opt}}$  (droite).

probabiliste est tracée sur la figure 4.28. On peut voir sur cette figure que la prise en

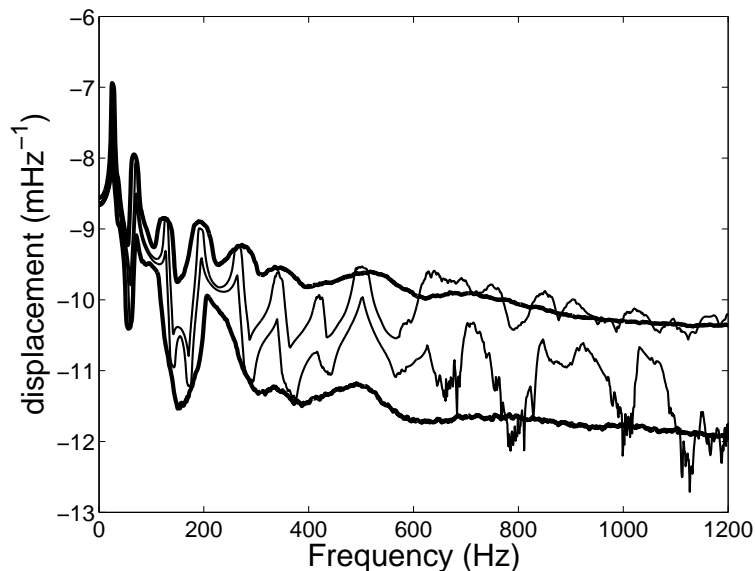


FIGURE 4.28 – FRF aléatoire calculée avec le modèle probabiliste : Région de confiance (traits épais). FRF expérimental : Région de confiance (traits fins).

compte des incertitudes de modélisation permet d'englober les réponses expérimentales

sur une bande de fréquence plus large améliorant ainsi la robustesse de la prévision.

## 4.4 Conclusions et perspectives.

Nous avons présenté une méthodologie permettant de construire un modèle probabiliste des incertitudes sur les paramètres et des incertitudes de modélisation. La méthode proposée aboutit à un modèle à faible paramétrage, ce qui facilite l'identification du modèle à partir de données expérimentales. Concernant la méthode d'identification, la méthode du maximum de vraisemblance permet d'identifier les paramètres du modèle avec des données hétérogènes (variant d'une configuration à l'autre) mesurées sur un faible nombre de configurations. Plusieurs types d'observation pour l'identification ont été analysées : fréquences propres, modes propres et réponses fréquentielles. La robustesse de ces observations vis-à-vis des incertitudes n'étant pas la même, il est important de bien choisir l'observation à considérer en fonction des quantités d'intérêt sur lesquelles les incertitudes doivent être quantifiées. En effet, les coûts expérimentaux pour l'obtention des premières fréquences propres sont inférieurs aux coûts expérimentaux pour l'obtention des réponses en fréquence sur une large bande et en plusieurs points du système.

En ce qui concerne les perspectives de ces travaux, hormis les nombreuses sources possibles d'incertitudes sur les paramètres qui n'ont pas encore été abordées, celle qui nous semble la plus importante est la prise en compte des incertitudes liées aux protocoles expérimentaux. En effet dans les travaux présentés dans ce chapitre, ces incertitudes qui sont inhérentes à toute manipulation expérimentale peuvent être importantes et doivent donc être prises en compte dans l'étape d'identification du modèle probabiliste. Ces incertitudes expérimentales concernent (1) l'instrumentation des configurations expérimentales (emplacements et orientations des capteurs, emplacements, orientations et intensités des sources d'excitation) (2) la chaîne d'acquisition des données des capteurs et (3) le traitement des données afin de construire les FRF et les données modales. La quantification de ce type d'incertitude est l'un des objectifs du projet SICO-DYN actuellement en cours (voir projet [P4]).



# Chapitre 5

## Réduction de modèle pour les structures dynamiques à forte densité modale.

Ce chapitre, qui a été introduit dans la Section 2.4, présente une nouvelle méthode d'analyse dynamique des structures complexes caractérisées par une forte densité modale. Une nouvelle méthodologie de réduction de modèle adaptée à ce type de structure est présentée ici. Cette construction se fait en deux étapes : (1) La première étape consiste en la construction d'une base de réduction adaptée. Il s'agit en fait de construire non pas une mais plusieurs bases de réduction. Chacune de ces bases est adaptée à une échelle spatiale d'observation bien précise correspondant à une gamme de longueurs d'onde pour le déplacement. L'espace des déplacements admissibles pourra alors être approché par la réunion de ces bases de réduction. (2) La deuxième étape consiste à quantifier les incertitudes pour ce type de structures. Il s'agit en fait de construire des modèles d'incertitudes adaptés à chaque échelle d'observation. Ces deux étapes sont successivement présentées dans ce chapitre. La méthodologie est présentée en ne considérant que deux échelles spatiales d'observation : (1) les déplacements globaux qui sont caractérisés par des déplacements dans toute la structure et auxquels on associe de grandes longueurs d'onde et (2) les déplacements locaux qui sont localisés sur des composants de la structure, ces composants étant généralement souples et attachés à une structure maîtresse rigide. Une généralisation à trois échelles (voire plus) est présentée en fin de chapitre.

## 5.1 Construction des bases de réduction pour les déplacements globaux et les déplacements locaux.

L'objectif est de construire une base de réduction pour les déplacements globaux appelée par la suite *base globale* et une base de réduction pour les déplacements locaux appelée par la suite *base locale*. Ces deux bases sont construites en utilisant un filtrage basé sur les longueurs d'onde des déplacements. Ainsi la base globale est construite en empêchant les longueurs inférieures à une valeur  $\epsilon$  donnée de s'exprimer. La méthode proposée ici pour réaliser ce filtrage est dans le même esprit que les méthodes dites des masses concentrées qui consistent à concentrer la masse (et donc l'énergie cinétique) en quelques points de la structure puis à condenser l'énergie élastique en ces points par la méthode de condensation de Guyan [137]. Cela revient à approximer l'énergie cinétique tout en maintenant l'énergie élastique exacte. La méthode que nous proposons introduit elle aussi une approximation de l'énergie cinétique uniquement afin de ne pas dégrader les déformées statiques et les conditions limites. Cette approximation est basée sur une réduction de la cinématique du déplacement dans l'énergie cinétique.

Dans cette Section, nous commençons par introduire une nouvelle méthode de réduction cinématique de l'énergie cinétique. Puis les bases globales et locales sont obtenus en construisant puis en résolvant séparément deux problèmes aux valeurs propres pour lesquels l'énergie cinétique a une cinématique réduite tandis que l'énergie élastique est laissée intacte.

### 5.1.1 Réduction cinématique de l'énergie cinétique.

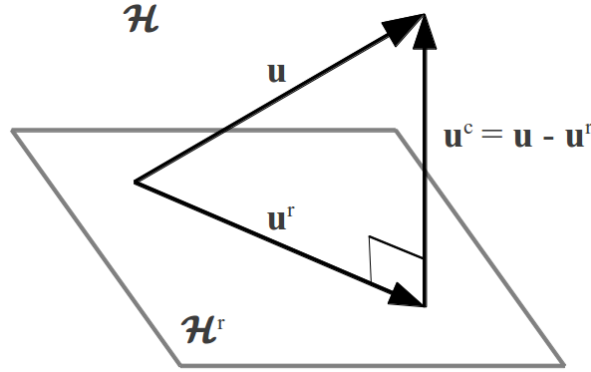
#### 5.1.1.1 Modèle continu.

##### Méthodologie générale.

On part de la formulation variationnelle établit au chapitre précédent (Section 4.1). Soit  $\mathcal{H}$  le sous-espace de  $\mathcal{H}^{comp}$  composé de fonctions réelles et  $\mathcal{V}$  le sous-espace de  $\mathcal{V}^{comp}$  composé de fonctions réelles. La réduction cinématique est construite à l'aide d'un projecteur  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{h}^r(\mathbf{u})$  défini sur  $\mathcal{H}$  et à valeurs dans un sous-espace  $\mathcal{H}^r$  de  $\mathcal{H}$  de dimension fini  $n_r$ . On peut alors construire le projecteur complémentaire  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{h}^c(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{h}^r(\mathbf{u})$  défini sur  $\mathcal{H}$  et à valeurs dans un sous-espace  $\mathcal{H}^c$  de  $\mathcal{H}$ . On note  $\mathbf{u}^r = \mathbf{h}^r(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{u}^c = \mathbf{h}^c(\mathbf{u})$ . Par construction, on a donc  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^r \oplus \mathcal{H}^c$  (voir figure 5.1).

Il reste à construire le projecteur  $\mathbf{h}^r$ . Soit  $m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  la forme bilinéaire symétrique définie positive de masse définie sur  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ . On munit alors l'espace  $\mathcal{H}$  du produit scalaire  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = m(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et de norme associée  $\| \mathbf{u} \|_m = m(\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$ . Alors la projection  $\mathbf{u}^r(\mathbf{x})$  de la fonction  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  est construite comme la fonction minimisant la norme  $\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^r \|_m^2$  avec  $\mathbf{u}^r$  appartenant à  $\mathcal{H}^r$ . Physiquement, cela revient à minimiser l'énergie cinétique de l'erreur associée à la projection. Soit  $\{\mathbf{g}_1^r(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_{n_r}^r(\mathbf{x})\}$  une base de  $\mathcal{H}^r$  et soit  $[G] = [\mathbf{g}_1^r \dots \mathbf{g}_{n_r}^r]$ . Alors toute fonction  $\mathbf{u}^r$  dans  $\mathcal{H}^r$  peut s'écrire

$$\mathbf{u}^r(\mathbf{x}) = [G(\mathbf{x})] \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}), \quad (5.1)$$


 FIGURE 5.1 – Projection de  $\mathbf{u}$  sur  $\mathcal{H}^r$ .

où  $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u})$  est le vecteur des coordonnées de  $\mathbf{u}^r$  dans la base  $\{\mathbf{g}_1^r(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_{n_r}^r(\mathbf{x})\}$  qui correspondent donc à des degrés de libertés dynamiques relatifs à la cinématique réduite. Il suffit donc finalement de calculer le vecteur  $\boldsymbol{\delta}^{\text{opt}}(\mathbf{u})$  qui est solution du problème de minimisation

$$\boldsymbol{\delta}^{\text{opt}}(\mathbf{u}) = \arg \min_{\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{n_r}} \|\mathbf{u} - [G] \boldsymbol{\delta}\|_m^2. \quad (5.2)$$

Il s'agit d'un problème des moindres carrés. On peut démontrer aisément que la solution de ce problème est

$$\boldsymbol{\delta}^{\text{opt}}(\mathbf{u}) = [\mathcal{M}]^{-1} \mathbf{c}(\mathbf{u}), \quad (5.3)$$

où la matrice de masse réduite  $[\mathcal{M}]$  et le vecteur  $\mathbf{c}(\mathbf{u})$  sont définis par

$$[\mathcal{M}] = \left[ \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) [G(\mathbf{x})]^T [G(\mathbf{x})] d\mathbf{x} \right] \quad \text{et} \quad \mathbf{c}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) [G(\mathbf{x})]^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5.4)$$

La projection  $\mathbf{u}^r$  s'écrit

$$\mathbf{u}^r = \mathbf{h}^r(\mathbf{u}) = [G][\mathcal{M}]^{-1} \mathbf{c}(\mathbf{u}), \quad (5.5)$$

et la projection complémentaire  $\mathbf{u}^c$  s'écrit

$$\mathbf{u}^c = \mathbf{h}^c(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - [G][\mathcal{M}]^{-1} \mathbf{c}(\mathbf{u}). \quad (5.6)$$

Le théorème de projection orthogonale [58] garantit l'existence et l'unicité des projections  $\mathbf{u}^r$  et  $\mathbf{u}^c$  et permet de démontrer la propriété suivante

$$m(\mathbf{u}^c, \mathbf{v}^r) = 0, \quad \forall \mathbf{v}^r \in \mathcal{H}^r, \quad (5.7)$$

et en particulier,

$$m(\mathbf{u}^c, \mathbf{u}^r) = 0, \quad (5.8)$$

Cette propriété fondamentale est très importante et sert à démontrer que la réunion de la base globale et de la base locale, qui seront construites dans la Section 5.1.2, forme une base de l'espace des déplacements admissibles. La forme bilinéaire réduite  $m^r(\mathbf{u}, \mathbf{v})$



est définie par

$$m^r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = m(\mathbf{u}^r, \mathbf{v}^r) = m(\mathbf{u}, \mathbf{v}^r) = m(\mathbf{u}^r, \mathbf{v}), \quad (5.9)$$

et a pour expression

$$m^r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\delta}^{\text{opt}}(\mathbf{u})^T [\mathcal{M}] \boldsymbol{\delta}^{\text{opt}}(\mathbf{v}) = \mathbf{c}(\mathbf{u})^T [\mathcal{M}]^{-1} \mathbf{c}(\mathbf{v}). \quad (5.10)$$

De même, la forme bilinéaire complémentaire  $m^c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est définie par

$$m^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = m(\mathbf{u}^c, \mathbf{v}^c) = m(\mathbf{u}, \mathbf{v}^c) = m(\mathbf{u}^c, \mathbf{v}), \quad (5.11)$$

et, en utilisant l'équation (5.8), a pour expression

$$m^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - m^r(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (5.12)$$

La matrice  $[\mathcal{M}]$  et le vecteur  $\mathbf{c}(\mathbf{u})$  dépendent du choix du sous-espace  $\mathcal{H}^r$ . Nous allons maintenant expliciter quelques cas particuliers. Tous ces cas particuliers correspondent à des approximations par morceau construites à partir de la décomposition du domaine  $\Omega$  en  $n_J$  sous-domaines  $\Omega_j$  disjoints. La taille de ces sous-domaines est de l'ordre de grandeur de la plus grande longueur l'onde à filtrer.

### Cas particulier 1 : Déplacement constant par sous-domaine.

Pour ce premier cas, le déplacement  $\mathbf{u}$  est approché par un déplacement  $\mathbf{u}^r$  constant sur chaque sous-domaine  $\Omega_j$  :

$$\mathbf{u}^r(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_J} \mathbb{1}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{0,j}(\mathbf{u}). \quad (5.13)$$

Dans ce cas  $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}_{0,1}(\mathbf{u})^T, \dots, \mathbf{u}_{0,n_J}(\mathbf{u})^T)^T$  et  $n_r = 3n_J$ . On a donc  $[G(\mathbf{x})] = [\mathbb{1}_{\Omega_1}(\mathbf{x}) [I_3], \dots, \mathbb{1}_{\Omega_{n_J}}(\mathbf{x}) [I_3]]$  et on démontre que

$$[\mathcal{M}] = \begin{bmatrix} m_1 [I_3] & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{n_J} [I_3] \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

où  $m_j = \int_{\Omega_j} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  est la masse du sous-domaine  $\Omega_j$ . On retrouve la matrice de masse correspondant à  $n_J$  masses discrètes découplées  $m_1, \dots, m_{n_J}$ . Finalement la projection  $\mathbf{u}^r$  du déplacement  $\mathbf{u}$  a pour expression

$$\mathbf{u}^r(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_J} \mathbb{1}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) \frac{1}{m_j} \int_{\Omega_j} \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (5.15)$$

L'expression (5.15) correspond à l'expression originale de la projection  $\mathbf{u}^r$  telle qu'elle avait été définie dans les premiers articles sur la problématique de ce chapitre et correspond à un moyennage, sur chaque sous-domaine, du déplacement  $\mathbf{u}$  par rapport à la densité de masse  $\rho$ .

**Cas particulier 2 : Déplacement de solide rigide par sous-domaine.**

Le cas particulier précédent permet de construire une approximation de l'énergie cinétique sur chaque sous-domaine qui permettra d'extraire une base des déplacements globaux. Cependant, cette approximation ne prend pas en compte les inerties de rotation des sous-domaines qui peuvent devenir importantes lorsqu'on monte en fréquence. Pour ce deuxième cas particulier, ces rotations sont prises en compte en approximant le déplacement  $\mathbf{u}$  par un (petit) déplacement de solide rigide sur chaque sous-domaine  $\Omega_j$  :

$$\mathbf{u}^r(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_J} \mathbb{1}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) \{ \mathbf{u}_{0,j}(\mathbf{u}) + \mathbf{u}_{1,j}(\mathbf{u}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{r}_j) \}, \quad (5.16)$$

où  $\mathbf{r}_i = (1/m_j) \int_{\Omega_j} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  est le centre d'inertie du sous-domaine  $\Omega_j$ . Dans ce cas,  $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}_{0,1}(\mathbf{u})^T, \mathbf{u}_{1,1}(\mathbf{u})^T, \dots, \mathbf{u}_{0,n_J}(\mathbf{u})^T, \mathbf{u}_{1,n_J}(\mathbf{u})^T)^T$  et  $n_r = 6 n_J$ . La matrice de masse réduite a pour expression

$$[\mathcal{M}] = \begin{bmatrix} m_1[I_3] & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & [J_1] & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n_J}[I_3] & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [J_{n_J}] \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

où  $[J_j]$  est la matrice d'inertie du sous-domaine  $\Omega_j$  (voir Eq. (3.3)). Cette matrice  $[\mathcal{M}]$  correspond à la matrice de masse de  $n_J$  solides rigides découplés (voir Eqs. (3.7) et (3.8)). Finalement la projection  $\mathbf{u}^r$  du déplacement  $\mathbf{u}$  a pour expression

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^r(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_J} \mathbb{1}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) \left\{ \frac{1}{m_j} \int_{\Omega_j} \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right. \\ \left. + [J_j]^{-1} \left( \int_{\Omega_j} \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x}' - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right) \times (\mathbf{x} - \mathbf{r}_j) \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Cette projection  $\mathbf{u}^r$  correspond à une régression linéaire par sous-domaine où la matrice relative à la pente appartient à l'espace des matrices réelles antisymétriques.

**Remarque 5.1 :** Il serait possible d'approximer le champs de déplacement  $\mathbf{u}$  par un champs de grand déplacement de solide rigide par sous-domaines défini par

$$\mathbf{u}^r(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_J} \mathbb{1}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) \{ \mathbf{u}_{0,j}(\mathbf{u}) + [\text{Rot}_j(\mathbf{u})](\mathbf{x} - \mathbf{r}_j) \}, \quad (5.19)$$

où  $[\text{Rot}_j(\mathbf{u})]$  serait une matrice de rotation. Cependant, l'espace  $\mathcal{H}^r$  ainsi construit ne serait pas un sous-espace de  $\mathcal{H}$  (il n'est pas stable par combinaison linéaire). Cette approximation correspond d'ailleurs à la recherche des axes de Tisserand en dynamique des systèmes multicorps flexibles [116, 134].

### Cas particulier 3 : Déplacement linéaire par sous-domaine.

Ce cas particulier correspond à une généralisation du cas particulier précédent. Plus exactement, il correspond à l'approximation du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  par un champ de déplacement  $\mathbf{u}^r$  linéaire par sous-domaine :

$$\mathbf{u}^r(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_J} \mathbb{1}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) \{ \mathbf{u}_{0,j}(\mathbf{u}) + [T(\mathbf{u})](\mathbf{x} - \mathbf{r}_j) \}, \quad (5.20)$$

où  $[T(\mathbf{u})]$  est une matrice réelle  $3 \times 3$ . Dans ce cas, on démontre que la projection  $\mathbf{u}^r$  s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^r(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_J} \mathbb{1}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) \left\{ \frac{1}{m_j} \int_{\Omega_j} \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right. \\ \left. + m_j \left( \int_{\Omega_j} \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') (\mathbf{x}' - \mathbf{r}_j)^T d\mathbf{x}' \right) [Z_j]^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{r}_j) \right\}, \quad (5.21) \end{aligned}$$

où  $[Z_j]$  est le moment d'inertie du second-ordre (voir Eq. (3.22)) du sous-domaine  $\Omega_j$ . La projection définie par l'équation (5.21) correspond à une régression (interpolation) linéaire par sous-domaine du champ de déplacement  $\mathbf{u}$ .

**Remarque 5.2 :** Sur chaque sous-domaine, cette interpolation linéaire peut être généralisée à une interpolation d'ordre supérieure en tronquant une base hilbertienne polynomiale quelconque.

#### 5.1.1.2 Modèle éléments finis.

La réduction cinématique pour un modèle EF pourrait être construite sans difficulté en discrétisant les équations développées ci-dessus. Nous allons cependant procéder autrement en construisant directement la réduction cinématique sur le modèle discrétisé. Cette approche permet de ne pas être intrusif vis-à-vis des codes de calcul et permet de préserver les relations d'orthogonalité entre les déplacements projetés et les déplacements complémentaires.

Comme dans le chapitre précédent, on note  $\mathbb{U}$  le vecteur des  $m$  DDL et  $[\mathbb{M}]$  la matrice masse (voir Section 4.1 pour la discrétisation EF dans le domaine fréquentiel) relative à la discrétisation de la forme bilinéaire (ou sesquilinéaire)  $m$ . On suppose pour simplifier les développements qu'il n'y a pas de DDL de rotation.

#### Méthodologie générale.

On cherche à construire une approximation  $\mathbb{U}^r$  du vecteur  $\mathbb{U}$  en introduisant le projecteur  $\mathbb{U} \mapsto \mathbf{h}^r(\mathbb{U})$  à valeurs dans un sous-espace  $\mathcal{Y}^r$  de  $\mathbb{R}^m$  de dimension  $n_r$  et le projecteur complémentaire  $\mathbb{U} \mapsto \mathbf{h}^c(\mathbb{U}) = \mathbb{U} - \mathbf{h}^r(\mathbb{U})$  à valeurs dans un sous-espace  $\mathcal{Y}^c$  de  $\mathbb{R}^m$  de dimension  $n_c = m - n_r$ . On a là encore  $\mathbb{R}^m = \mathcal{Y}^r \oplus \mathcal{Y}^c$ .

On munit  $\mathbb{R}^m$  du produit scalaire  $\langle \mathbb{U}, \mathbb{V} \rangle_{\mathbb{M}} = \mathbb{U}^T [\mathbb{M}] \mathbb{V}$  et de norme associée  $\| \mathbb{U} \|_{\mathbb{M}} = \langle \mathbb{U}, \mathbb{U} \rangle_{\mathbb{M}}^{1/2}$ . Alors la projection  $\mathbb{U}^r$  du vecteur  $\mathbb{U}$  est construite comme le vecteur minimisant la norme  $\| \mathbb{U} - \mathbb{U}^r \|_{\mathbb{M}}^2$  avec  $\mathbb{U}^r$  appartenant à  $\mathcal{Y}^r$ . Soit  $\{\mathbf{g}_1^r, \dots, \mathbf{g}_{n_r}^r\}$  une base de

$\mathcal{Y}^r$  et soit  $[G] = [\mathbf{g}_1^r, \dots, \mathbf{g}_{n_r}^r]$ . Alors toute fonction  $\mathbb{U}^r$  de  $\mathcal{Y}^r$  peut s'écrire

$$\mathbb{U}^r = [G] \boldsymbol{\delta}(\mathbb{U}), \quad (5.22)$$

où  $\boldsymbol{\delta}(\mathbb{U})$  est le vecteur des coordonnées de  $\mathbb{U}^r$  dans la base  $\{\mathbf{g}_1^r, \dots, \mathbf{g}_{n_r}^r\}$ . Il suffit donc finalement de calculer le vecteur  $\boldsymbol{\delta}^{\text{opt}}(\mathbb{U})$  qui est solution du problème de minimisation

$$\boldsymbol{\delta}^{\text{opt}}(\mathbb{U}) = \arg \min_{\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{n_r}} \|\mathbb{U} - [G] \boldsymbol{\delta}\|_{\mathbb{M}}^2. \quad (5.23)$$

On peut démontrer aisément que la solution de ce problème est

$$\boldsymbol{\delta}^{\text{opt}}(\mathbb{U}) = [\mathcal{M}]^{-1} \mathbf{c}(\mathbb{U}), \quad (5.24)$$

où la matrice de masse réduite  $[\mathcal{M}]$  et le vecteur  $\mathbf{c}(\mathbb{U})$  sont définis par

$$[\mathcal{M}] = [G]^T [\mathbb{M}] [G] \quad \text{et} \quad \mathbf{c}(\mathbb{U}) = [G]^T [\mathbb{M}] \mathbb{U}. \quad (5.25)$$

La projection  $\mathbb{U}^r$  s'écrit alors

$$\mathbb{U}^r = \mathbf{h}^r(\mathbb{U}) = [G] [\mathcal{M}]^{-1} \mathbf{c}(\mathbb{U}) = [H^r] \mathbb{U}, \quad (5.26)$$

avec

$$[H^r] = [G] ([G]^T [\mathbb{M}] [G])^{-1} [G]^T [\mathbb{M}]. \quad (5.27)$$

Cette matrice est pleine et de rang  $n_r$  et son noyau est  $\mathcal{Y}^c$ . La projection  $\mathbb{U}^c$  s'écrit

$$\mathbb{U}^c = \mathbf{h}^c(\mathbb{U}) = \mathbb{U} - [G] [\mathcal{M}]^{-1} \mathbf{c}(\mathbb{U}) = [H^c] \mathbb{U}, \quad (5.28)$$

avec

$$[H^c] = [I_m] - [H^r]. \quad (5.29)$$

Cette matrice est pleine et de rang  $n_c = m - n_r$  et son noyau est  $\mathcal{Y}^r$ . Par ailleurs, on a la propriété d'orthogonalité

$$(\mathbb{U}^c)^T [\mathbb{M}] \mathbb{V}^r = 0, \quad \forall \mathbb{V}^r \in \mathcal{Y}^r, \quad (5.30)$$

et en particulier

$$(\mathbb{U}^c)^T [\mathbb{M}] \mathbb{U}^r = 0, \quad (5.31)$$

La matrice de masse projetée  $[\mathbb{M}^r]$  est telle que

$$\mathbb{U}^T [\mathbb{M}^r] \mathbb{U} = (\mathbb{U}^r)^T [\mathbb{M}] \mathbb{V}^r = (\mathbb{U})^T [\mathbb{M}] \mathbb{V}^r = (\mathbb{U}^r)^T [\mathbb{M}] \mathbb{V}, \quad (5.32)$$

et a donc pour expression

$$[\mathbb{M}^r] = [H^r]^T [\mathbb{M}] [H^r] = [\mathbb{M}] [H^r] = [H^r]^T [\mathbb{M}]. \quad (5.33)$$

Cette matrice est semi-définie positive ( $n_r$  valeurs propres non nulles). De même, la

matrice de masse complémentaire  $[\mathbb{M}^c]$  est telle que

$$\mathbb{U}^T [\mathbb{M}^c] \mathbb{U} = (\mathbb{U}^c)^T [\mathbb{M}] \mathbb{V}^c = (\mathbb{U})^T [\mathbb{M}] \mathbb{V}^c = (\mathbb{U}^c)^T [\mathbb{M}] \mathbb{V}, \quad (5.34)$$

et a donc pour expression

$$[\mathbb{M}^c] = [H^c]^T [\mathbb{M}] [H^c] = [\mathbb{M}] [H^c] = [H^c]^T [\mathbb{M}] = [M] - [M^r]. \quad (5.35)$$

Cette matrice est semi-définie positive ( $n_c$  valeurs propres non nulles). Les matrices  $[H^r]$ ,  $[\mathbb{M}^r]$ ,  $[H^c]$  et  $[\mathbb{M}^c]$  sont pleines par blocs relatifs aux sous-domaines. Leur stockage nécessiterait donc des ressources mémoire importantes. Mais comme nous le verrons, ces matrices n'ont pas besoin d'être assemblées pour calculer la base globale et la base locale. Les matrices  $[H^r]$  et  $[H^c]$  ont été explicitées dans [20] pour certains cas particuliers. Nous n'en présentons qu'un seul ci-dessous.

### Cas particuliers : Matrice de masse diagonale - Déplacement constant par sous-domaine.

Pour ce cas simple, on considère qu'il n'y a pas de couplage par la masse et donc la matrice de masse est diagonale et s'écrit  $[\mathbb{M}]_{i,j} = [\mathbb{M}]_{i,i} \delta_{i,j}$ . Le vecteur  $\mathbb{U}$  est approché par le vecteur  $\mathbb{U}^r$  constant sur chaque sous-domaine  $\Omega_j$  :

$$\mathbb{U}_i^r = u_{\text{dir}(i), \text{sd}(i)}(\mathbb{U}), \quad (5.36)$$

où la fonction  $i \mapsto \text{sd}(i)$  retourne le numéro de sous-domaine auquel appartient le DDL  $i$  et la fonction  $i \mapsto \text{dir}(i)$  retourne la direction (1,2 ou 3) du DDL  $i$ . Ainsi  $\boldsymbol{\delta}(\mathbb{U}) = (u_{1,1}(\mathbb{U}), u_{2,1}(\mathbb{U}), u_{3,1}(\mathbb{U}), \dots, u_{1,n_J}(\mathbb{U}), u_{2,n_J}(\mathbb{U}), u_{3,n_J}(\mathbb{U}))$ . Dans ce cas, on démontre que  $[\mathcal{M}]_{i,j} = m_i \delta_{i,j}$  où  $m_i = (1/3) \sum_{k=1}^m [\mathbb{M}]_{k,k} \delta_{\text{sd}(i) \text{sd}(k)} \delta_{\text{dir}(i) \text{dir}(k)}$  est la masse totale du sous-domaine  $\Omega_j$  et donc

$$[H^r]_{i,j} = \frac{1}{m_{\text{sd}(i)}} [\mathbb{M}]_{j,j} \delta_{\text{sd}(i) \text{sd}(j)} \delta_{\text{dir}(i) \text{dir}(j)}. \quad (5.37)$$

Finalement la projection  $\mathbb{U}^r$  est telle que

$$\mathbb{U}_i^r = \frac{1}{m_{\text{sd}(i)}} \sum_{k=1}^m [\mathbb{M}]_{k,k} \delta_{\text{sd}(i) \text{sd}(k)} \delta_{\text{dir}(i) \text{dir}(k)} \mathbb{U}_k. \quad (5.38)$$

La projection définie par l'équation (5.40) correspond, comme pour le cas continu, à un moyennage du déplacement (pondéré par la masse) sur chaque sous-domaine et suivant chaque direction. L'hypothèse d'une matrice de masse diagonale facilite les calculs. Pour le cas d'une matrice de masse consistante non diagonale, les calculs sont plus lourds car le calcul de l'inverse de la matrice  $[\mathcal{M}]$  n'est plus immédiat.

### Construction des sous-domaines.

Afin de réaliser un bon filtrage des déplacements locaux, il est préférable de construire le projecteur par sous-domaine en utilisant une décomposition du domaine  $\Omega$  en  $n_J$  sous-domaines  $\Omega_j$ . Pour un modèle discrétisé par éléments finis, il s'agit de ranger les nœuds du

maillage par sous-domaine. Étant donné que le filtrage est contrôlé par la taille  $\epsilon$  des sous-domaines, il est nécessaire d'avoir des sous-domaines de taille homogène. Cette notion de taille est simple à définir pour des domaines volumiques. Par contre, pour des domaines correspondant à des variétés courbes 2D (plaques, coques) et 1D (poutre) plongées dans  $\mathbb{R}^3$ , cette notion de taille est relative aux distances géodésiques entre les points de ces variétés. Donc, sur une structure complexe telle qu'un véhicule automobile constitué d'éléments volumiques, de coques, de poutres, ..., la construction de sous-domaines de taille homogène n'est pas triviale et nécessite une méthode adaptée.

La méthode que nous avons proposée est basée sur la Fast Marching Method (FMM) [159, 230]. Cette méthode permet de propager un front sur un maillage à partir d'un point de départ. Cette propagation est basée sur la résolution de l'équation Eikonale non linéaire

$$\|\nabla g(\mathbf{x})\| = s(\mathbf{x}), \quad (5.39)$$

où  $g(\mathbf{x})$  est la distance géodésique entre le point  $\mathbf{x}$  et un point de départ  $\mathbf{x}_0$  et où  $s(\mathbf{x})$  est une fonction positive arbitraire. Dans le cadre de la thèse d'Adrien Arnoux, nous avons adapté cette méthode afin de prendre en compte les spécificités liées à un maillage complexe de véhicule automobile [11, 13] (voir figure 5.2).

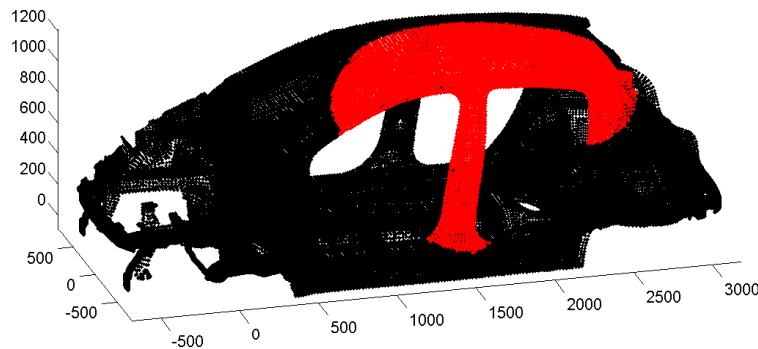


FIGURE 5.2 – Propagation d'un front par la FMM.

La construction des sous-domaines se fait alors en deux étapes. (1) La première étape consiste à choisir  $n_J$  points de départ de fronts. Ceux-ci doivent être régulièrement répartis sur la structure soit manuellement, soit de manière itérative par propagation de fronts successifs de rayon  $\epsilon$  jusqu'à la couverture totale du domaine  $\Omega$ . Un exemple de choix de points de départ pour un véhicule automobile (caisse nue) est représenté sur la figure 5.3. Sur cet exemple, les points de départ ont en plus été contraints d'être placés sur la partie rigide du véhicule. (2) La seconde étape consiste à faire partir  $n_J$  fronts simultanément depuis les  $n_J$  centres. Les variétés de rencontre des fronts constituent alors les frontières des  $n_J$  sous-domaines. Un exemple de construction de sous-domaines est représenté sur la figure 5.4.

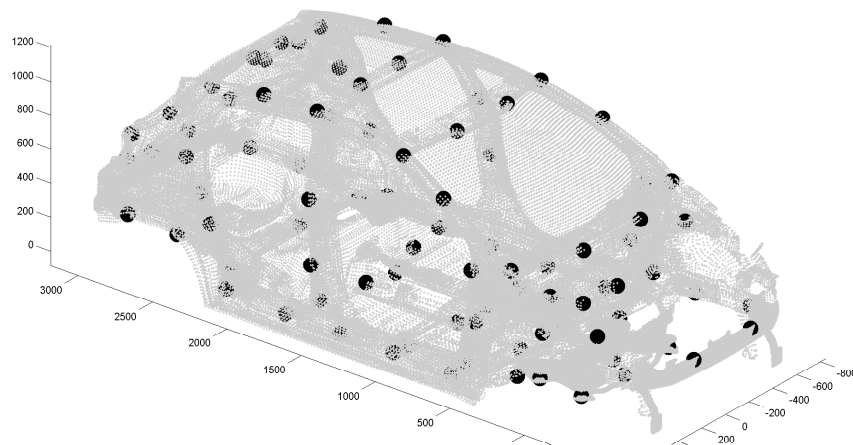


FIGURE 5.3 – Exemple de choix pour les centres des sous-domaines pour un véhicule automobile.

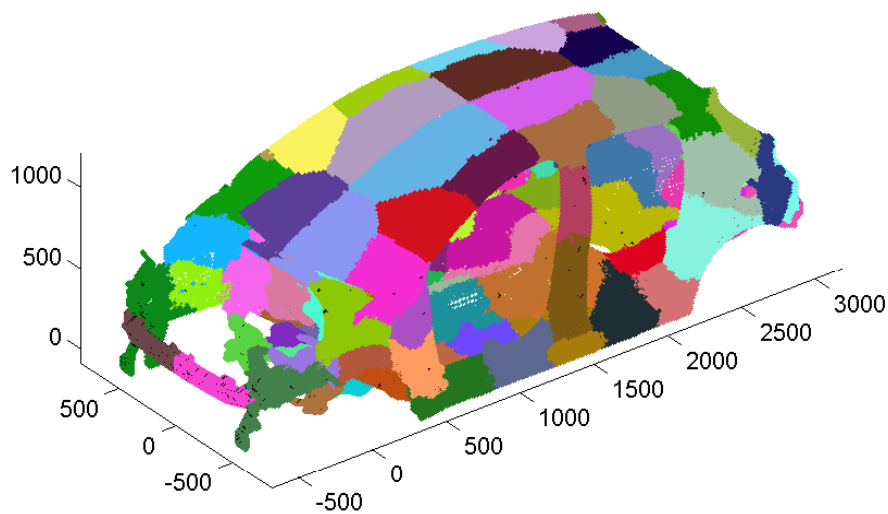


FIGURE 5.4 – Exemple de construction des sous-domaines pour un véhicule automobile.

### 5.1.2 Problème aux valeurs propres global et problème aux valeurs propres local.

Seuls les problèmes aux valeurs propres (PVP) pour les modèles discrétisés sont détaillés ici. Les développements relatifs aux modèles continus sont détaillés dans [7]. Le PVP

global qui permet de calculer la base globale est construit en conservant la matrice de raideur  $[\mathbb{K}]$  (et donc l'énergie élastique) exacte mais en remplaçant la matrice de masse  $[\mathbb{M}]$  (et donc l'énergie cinétique) par la matrice de masse projetée  $[\mathbb{M}^r]$ . Les vecteurs propres des déplacements globaux  $\boldsymbol{\phi}^g \in \mathbb{R}^m$  qui constituent la base globale sont ainsi solutions du PVP généralisé suivant

$$[\mathbb{K}]\boldsymbol{\phi}^g = \lambda^g[\mathbb{M}^r]\boldsymbol{\phi}^g \quad . \quad (5.40)$$

Ce problème admet une famille de  $n_r$  valeurs propres positives finies  $0 < \lambda_1^g \leq \dots \leq \lambda_{n_r}^g$ , associées à la famille finie des vecteurs propres algébriquement indépendants  $\{\boldsymbol{\phi}_1^g, \dots, \boldsymbol{\phi}_{n_r}^g\}$ . Pour le problème aux valeurs propre local, la matrice de masse  $[\mathbb{M}]$  est remplacée par la matrice de masse complémentaire  $[\mathbb{M}^c]$ . Ainsi, les vecteurs propres des déplacements locaux  $\boldsymbol{\phi}^\ell \in \mathbb{R}^m$  qui constituent la base locale sont solutions du PVP généralisé

$$[\mathbb{K}]\boldsymbol{\phi}^\ell = \lambda^\ell[\mathbb{M}^c]\boldsymbol{\phi}^\ell \quad . \quad (5.41)$$

Ce problème admet une famille de valeurs propres positives  $0 < \lambda_1^\ell \leq \dots \leq \lambda_{n_c}^\ell$ , associées à la famille finie de vecteurs  $\{\boldsymbol{\phi}_1^\ell, \dots, \boldsymbol{\phi}_{n_c}^\ell\}$ .

Dans [9], un algorithme d'itération dans les sous-espaces adapté, ne nécessitant pas l'assemblage des matrices pleines  $[\mathbb{M}^r]$  et  $[\mathbb{M}^c]$ , a été proposé afin de résoudre directement le PVP global et le PVP local. Autrement ces deux PVP peuvent aussi être résolus par une méthode de double projection dans laquelle la matrice  $[\mathbb{K}]$  est projetée sur les modes propres élastiques classiques tandis que la matrice  $[\mathbb{M}]$  est projetée sur les modes propres élastiques filtrés par l'opérateur  $[H^r]$ . Cette méthode de double projection est moins intrusive vis-à-vis des codes de calcul car elle ne nécessite pas l'extraction de la matrice de raideur  $[\mathbb{K}]$  mais peut nécessiter le calcul d'un nombre important de modes propres classiques pour obtenir une bonne convergence des bases globales et locales. Une propriété importante concernant la base globale et la base locale est que la réunion de ces deux bases forme une base de l'espace admissible [7]. Par conséquent, ces deux bases peuvent être utilisées pour construire une approximation du déplacement  $\mathbb{U}$  (ou  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  pour le cas continu) par troncature de ces deux bases. Alors, l'approximation  $\mathbb{U}^{(n_g, n_\ell)}$  de  $\mathbb{U}$  à l'ordre  $(n_g, n_\ell)$  s'écrit

$$\mathbb{U}^{(n_g, n_\ell)} = \sum_{\alpha=1}^{n_g} q_\alpha^g \boldsymbol{\phi}_\alpha^g + \sum_{\beta=1}^{n_\ell} q_\beta^\ell \boldsymbol{\phi}_\beta^\ell \quad , \quad (5.42)$$

où  $q_1^g, \dots, q_{n_g}^g$  sont les coordonnées globales et  $q_1^\ell, \dots, q_{n_\ell}^\ell$  sont les coordonnées locales. Cette équation se réécrit

$$\mathbb{U}^{(n_g, n_\ell)} = [\Phi^g] \mathbf{q}^g + [\Phi^\ell] \mathbf{q}^\ell \quad , \quad (5.43)$$

où  $[\Phi^g] = [\boldsymbol{\phi}_1^g, \dots, \boldsymbol{\phi}_{n_g}^g]$ ,  $[\Phi^\ell] = [\boldsymbol{\phi}_1^\ell, \dots, \boldsymbol{\phi}_{n_\ell}^\ell]$ ,  $\mathbf{q}^g = (q_1^g, \dots, q_{n_g}^g)$  et  $\mathbf{q}^\ell = (q_1^\ell, \dots, q_{n_\ell}^\ell)$ .

Pour l'exemple de la voiture représentée sur la figure 5.3, le onzième mode élastique est représenté sur la figure 5.5. Ce mode correspond à un mode global de flexion avec une fort déplacement local du pavillon. Les bases globales et locales ont été calculées pour ce véhicule en utilisant le projecteur constant par sous-domaine pour 90 sous-domaines.



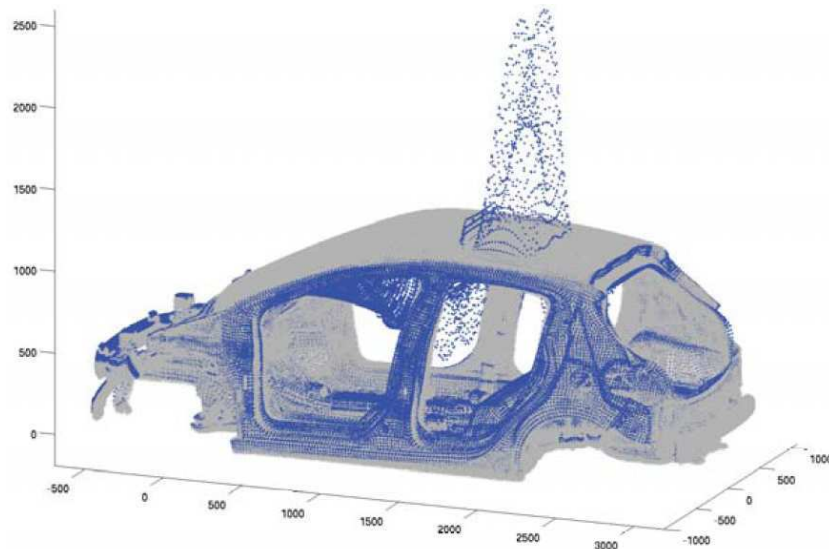


FIGURE 5.5 – Onzième mode élastique.

La figure 5.6 montre l’histogramme des fréquences propres solutions du PVP global et l’histogramme des fréquences propres solutions du PVP local. On remarque une forte densité modale pour les vecteurs de la base locale et une faible densité modale les vecteurs de la base globale. Le quatrième vecteur de la base globale  $\phi_4^g$  calculé avec la méthode ci-dessus et représenté sur la figure 5.7 correspond à la partie globale du onzième mode élastique représenté sur la figure 5.5. On voit donc que les déplacements locaux ont bien été filtrés sur ce mode.

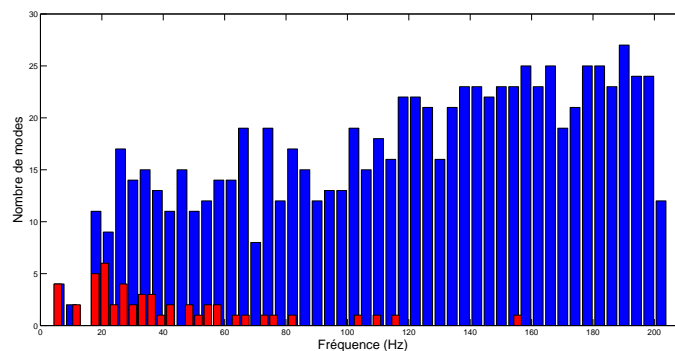


FIGURE 5.6 – Densité modale. Solutions du PVP global (rouge) et solutions du PVP local (bleu).

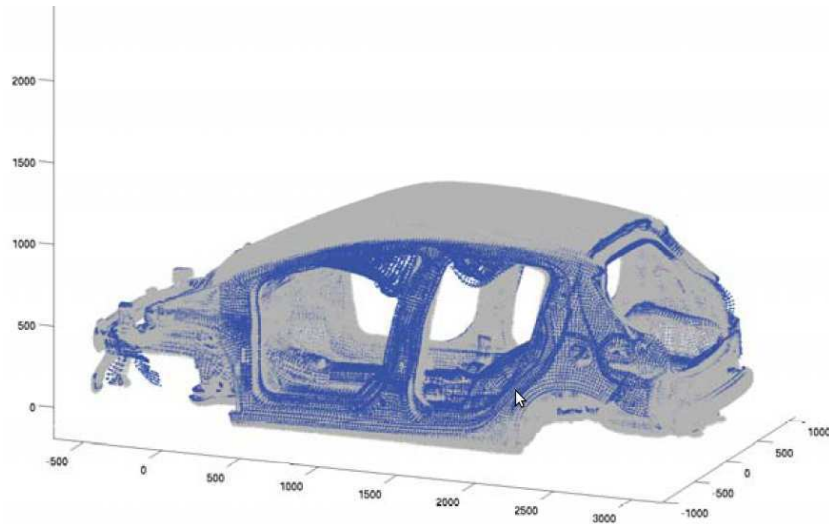


FIGURE 5.7 – Quatrième vecteur de la base globale.

## 5.2 Modèle réduit des contributions globales uniquement.

Dans cette section, seule la base globale est utilisée pour la construction du modèle réduit, i.e.,

$$\mathbb{U}^{n_g} = [\Phi^g] \mathbf{q}^g. \quad (5.44)$$

Les contributions locales sont donc négligées dans un premier temps. La base locale sera utilisée dans la section suivante dans un cadre probabiliste. Deux analyses correspondant à deux applications industrielles sont présentées. La première correspond à la réponse linéaire dans le domaine fréquentiel d'un véhicule automobile. La seconde correspond à la réponse transitoire non linéaire d'une rangée d'assemblages combustibles de réacteur nucléaire.

### 5.2.1 Réponse linéaire fréquentielle - Application à l'analyse vibratoire d'un véhicule automobile

#### Modèle réduit déterministe des déplacements globaux.

Comme au chapitre précédent, on cherche le vecteur  $\mathbb{U}(\omega)$  solution, pour tout  $\omega$  dans la bande d'analyse  $B$ , de l'équation

$$(-\omega^2[\mathbb{M}] + i\omega[\mathbb{D}] + [\mathbb{K}]) \mathbb{U}(\omega) = \mathbb{F}(\omega), \quad (5.45)$$

où  $[\mathbb{M}]$ ,  $[\mathbb{D}]$  et  $[\mathbb{K}]$  sont les matrices de masse, d'amortissement et de raideur respectivement et  $\mathbb{F}$  est le vecteur force (voir section 4.1 pour la construction de ce système matriciel à partir du problème aux limites). En projetant cette équation dans la base

globale, le vecteur  $\mathbf{q}^g(\omega)$  est solution de l'équation matricielle réduite suivante

$$(-\omega^2[M^{gg}] + i\omega[D^{gg}] + [K^{gg}]) \mathbf{q}^g(\omega) = \mathbf{f}^g(\omega), \quad (5.46)$$

où  $[M^{gg}] = [\Phi^g]^T [\mathbb{M}] [\Phi^g]$ ,  $[D^{gg}] = [\Phi^g]^T [\mathbb{D}] [\Phi^g]$  et  $[K^{gg}] = [\Phi^g]^T [\mathbb{K}] [\Phi^g]$  sont les matrices de masse, d'amortissement et de raideur généralisées globales et où  $\mathbf{f}^g(\omega) = [\Phi^g]^T \mathbb{F}(\omega)$  est le vecteur des forces généralisées globales.

Le modèle EF de la caisse nue représentée sur la figure 5.3 possède 1 462 698 DDL. La FRF  $\mathbb{U}^{ng}(\omega)$  a été calculée sur la bande d'analyse  $[0, 120]$  Hz en un point du plancher pour une excitation en deux points du moteur (voir [11]) avec 36 modes globaux (en utilisant le projecteur constant par sous-domaine avec 90 sous-domaines). La figure 5.8 compare  $\mathbb{U}^{ng}(\omega)$  à la réponse fréquentielle exacte calculée par analyse modale classique (avec 160 modes propres élastiques). On peut voir que la réponse construite avec le modèle réduit des déplacements globaux est proche de la réponse exacte.

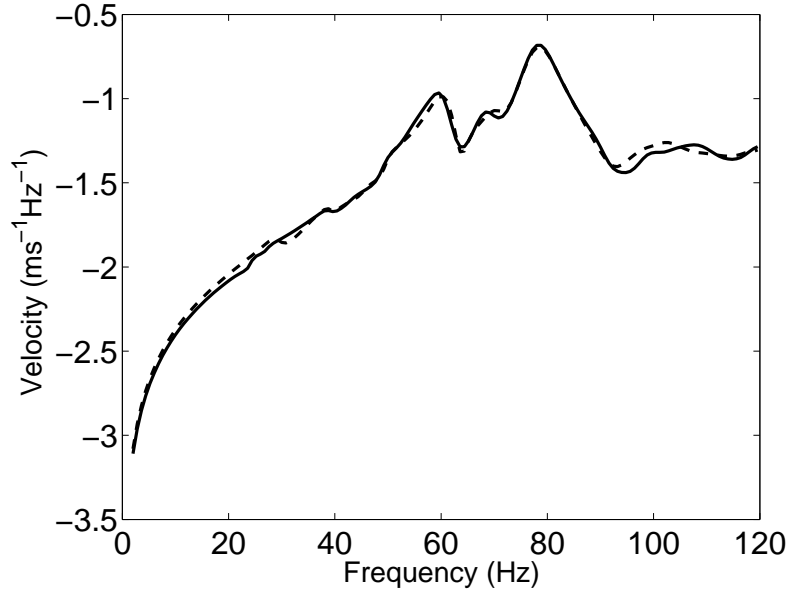


FIGURE 5.8 – FRF en vitesse pour la caisse nue. Réponse exacte (trait pointillé) et réponse calculée avec 36 vecteurs de la base globale.

### Modèle réduit stochastique des déplacements globaux.

Afin de prendre en compte les incertitudes des paramètres du système et les incertitudes de modélisation pouvant exister même en BF, une modélisation probabiliste généralisée des incertitudes (voir Section 4.4) peut être implémentée sur le modèle réduit des déplacements globaux. Alors, pour tout  $\omega$  dans  $B$ , le processus stochastique  $\mathbf{U}^{(ng)}(\omega)$  de la réponse aléatoire du modèle probabiliste réduit s'écrit

$$\mathbf{U}^{ng}(\omega) = [\Phi^g] \mathbf{Q}^g(\omega), \quad (5.47)$$

où le processus stochastique  $\{\mathbf{Q}^g(\omega), \omega \in B\}$  des coordonnées globales aléatoires est

solution de l'équation stochastique

$$(-\omega^2[\mathbf{M}^{gg}] + i\omega[\mathbf{D}^{gg}] + [\mathbf{K}^{gg}]) \mathbf{Q}^g(\omega) = \tilde{\mathbf{f}}^g(\omega), \quad (5.48)$$

où  $\tilde{\mathbf{f}}^g(\omega) = [\Phi^g]^T \mathbb{F}(\omega)$ .

Cette modélisation des incertitudes a été adoptée dans [11, 13] pour prendre en compte les incertitudes présentes dans le modèle EF d'un véhicule de caisse nue. Les paramètres de dispersion ont été identifiés en utilisant une observation construite sur les FRF (voir Section 4.2.3). La figure 5.9 compare le domaine de confiance de la réponse stochastique  $\mathbf{U}^{ng}(\omega)$  (correspondant à la FRF déterministe de la figure 5.8) au domaine de confiance expérimental (obtenu en fait par un modèle stochastique de référence recalé à partir de mesures expérimentales). On peut voir que le domaine de confiance de la réponse stochastique  $\mathbf{U}^{ng}(\omega)$  inclut bien le domaine de confiance expérimental.

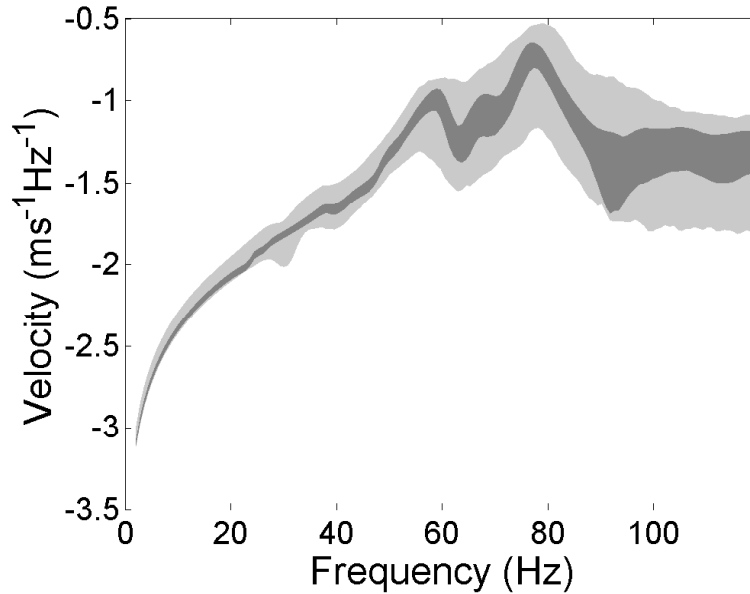


FIGURE 5.9 – FRF aléatoire en vitesse pour la caisse nue. Domaine de confiance expérimental (zone en gris foncé) et et domaine de confiance du modèle réduit stochastique des déplacements globaux (zone en gris clair).

### 5.2.2 Réponse transitoire non linéaire - Application à l'analyse sismique d'une rangée d'assemblages combustibles.

On s'intéresse maintenant à la réponse non linéaire transitoire  $\mathbb{U}(t)$  dans un intervalle  $[0, T]$  du modèle EF en présence de non-linéarités localisées de choc (butées élastiques). Pour capturer la physique de ces chocs, il est en général nécessaire de prendre un très petit pas de temps entraînant des coûts de calcul très élevés si le modèle EF est gros. Il est donc nécessaire de réduire le modèle EF. Un modèle réduit construit par analyse modale

nécessite le calcul de beaucoup de modes propres pour obtenir une bonne convergence de la réponse non linéaire. Donc, en présence de structures à forte densité modale, le nombre de modes propres à calculer serait très grand et le modèle réduit obtenu ne serait pas de taille suffisamment petite pour calculer la réponse transitoire non linéaire efficacement. Nous proposons ici d'utiliser une base globale afin de construire un modèle réduit prédictif et de faible dimension permettant de restituer correctement les effets des non-linéarités de choc.

### Construction du modèle réduit des déplacements globaux.

La réponse non-linéaire  $\mathbb{U}(t)$  est solution de l'équation

$$[\mathbb{M}] \ddot{\mathbb{U}}(t) + [\mathbb{D}] \dot{\mathbb{U}}(t) + [\mathbb{K}] \mathbb{U}(t) + \mathbb{F}^{\text{NL}}(\mathbb{U}(t), \dot{\mathbb{U}}(t)) = \mathbb{F}(t), t \in ]0, T], \quad (5.49)$$

avec les conditions initiales

$$\mathbb{U}(0) = \dot{\mathbb{U}}(0) = \mathbf{0}, \quad (5.50)$$

où  $\mathbb{F}^{\text{NL}}(\mathbb{U}(t), \dot{\mathbb{U}}(t))$  est le vecteur des forces non linéaires. La réponse non linéaire  $\mathbb{U}(t)$  est projetée sur la base globale. Alors, l'approximation  $\mathbb{U}^{n_g}(t)$  de  $\mathbb{U}(t)$  s'écrit

$$\mathbb{U}^{n_g}(t) = [\Phi^g] \mathbf{q}^g(t), \quad (5.51)$$

où le vecteur  $\mathbf{q}^g(t)$  des coordonnées globales est solution de l'équation non linéaire réduite

$$[M] \ddot{\mathbf{q}}^g(t) + [D] \dot{\mathbf{q}}^g(t) + [K] \mathbf{q}^g(t) + \tilde{\mathbf{f}}^{\text{NL}}(\mathbf{q}^g(t), \dot{\mathbf{q}}^g(t)) = \tilde{\mathbf{f}}(t), t \in ]0, T], \quad (5.52)$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{q}^g(0) = \dot{\mathbf{q}}^g(0) = \mathbf{0}, \quad (5.53)$$

où  $\tilde{\mathbf{f}}^{\text{NL}}(\mathbf{q}^g(t), \dot{\mathbf{q}}^g(t)) = [\Phi^g]^T \mathbb{F}^{\text{NL}}([\Phi] \mathbf{q}^g(t), [\Phi]^g \dot{\mathbf{q}}^g(t))$  est le vecteur des forces non linéaires généralisées.

### Illustration sur une application industrielle : Rangée de sept assemblages combustibles.

Cette méthodologie a été utilisée dans [9] afin de construire un modèle réduit d'une rangée de sept assemblages combustibles pouvant s'entrechoquer. Chaque assemblage combustible constituant la rangée est constitué (1) d'une ossature rigide composée de 25 tubes guide rigides soudés à 10 grilles et encastés à leurs extrémités et de 264 crayons combustibles flexibles. Le maillage du modèle EF de cette structure est représenté sur la figure 5.10. Le modèle EF a 3 147 060 DDL. Sur le bande  $[0, 400]$  Hz, il y a 51 548 modes élastiques. Afin de modéliser les chocs grille/grille des assemblages combustibles et les chocs grille/paroi, 80 butées élastiques ont été ajoutées au modèle EF.

Le modèle réduit des déplacements globaux a été validé par rapport à la réponse fréquentielle d'un seul des sept assemblages identiques composant la rangée car dans ce cas, une réponse de référence exacte peut être calculée. La validation de la réponse non linéaire transitoire est alors effectuée par une analyse de convergence de la réponse transitoire non linéaire vis-à-vis du nombre de vecteurs de la base globale. La densité modale cumulée pour un assemblage est représentée sur la figure 5.11. La base globale et la base locale



FIGURE 5.10 – Rangée de sept assemblages combustibles.

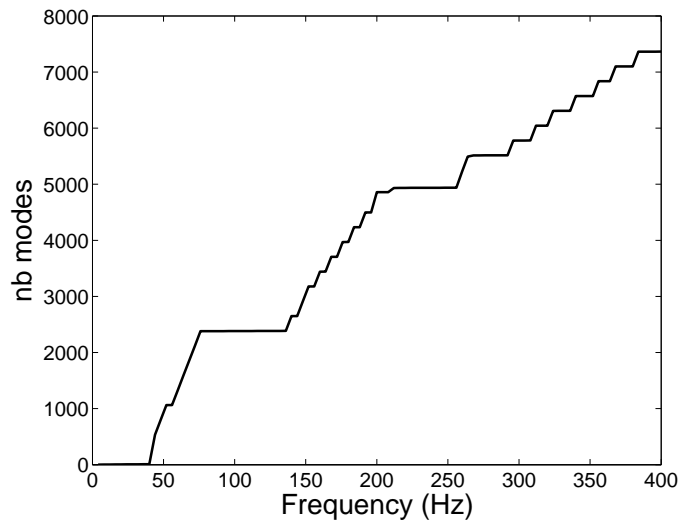


FIGURE 5.11 – Densité modale cumulée pour un assemblage combustible.

ont été calculées en utilisant un projecteur constant par sous-domaine pour des sous-domaines correspondant à 100 tranches d'égale épaisseur afin de filtrer les déplacements locaux transverses. La figure 5.12 représente un vecteur de base globale et un vecteur de base locale pour un assemblage. Le modèle réduit d'un assemblage combustible a été construit avec 35 vecteurs de base globale. La figure 5.13 compare la FRF d'un point situé au milieu de la quatrième grille pour une excitation au milieu de la neuvième grille construite avec le modèle réduit à la réponse exacte. On peut voir que, sur la bande  $[0, 100]$  Hz, le modèle réduit donne une très bonne approximation. Par contre, sur la bande  $[100, 300]$  Hz, les écarts sont plus importants. Ces écarts sont dus aux erreurs

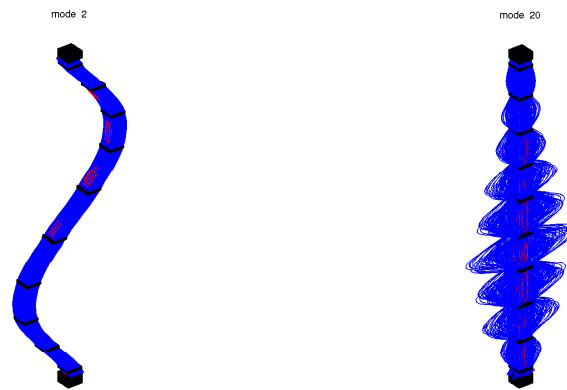


FIGURE 5.12 – Troisième vecteur de la base globale et huitième vecteur de la base locale pour un assemblage combustible.

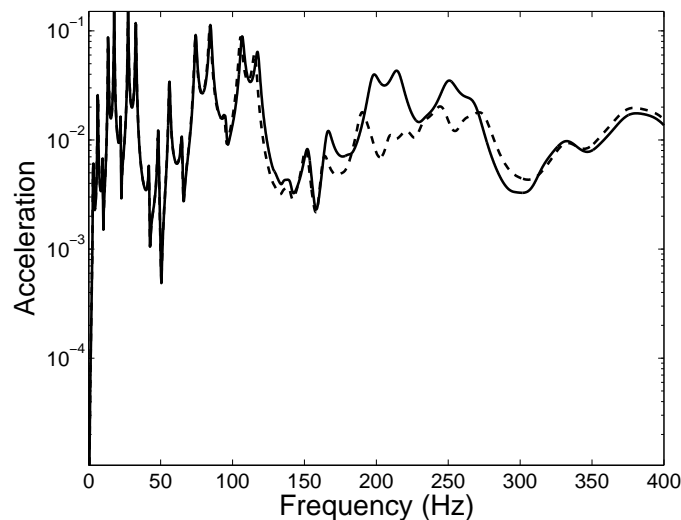


FIGURE 5.13 – FRF pour un assemblage combustible : réponse construite avec le modèle réduit des déplacements globaux (trait plein) et réponse exacte (trait pointillé).

irréductibles induites par la non prise en compte des contributions locales.

Une fois le modèle réduit validé, la réponse non linéaire transitoire de la rangée de sept assemblages combustibles a été calculée pour une accélération du support représentée sur la figure 5.14. La figure 5.15 montre cette réponse construite avec 245 vecteurs de base globale pour un point situé au milieu de la sixième grille du cinquième assemblage combustible. On peut voir sur cette figure que les effets des chocs ont bien été restitués (une étude de convergence des forces de chocs vis-à-vis de la dimension de la base globale a été menée). Il est à noter que cette réponse est impossible à obtenir sans réduction (avec des moyens de calcul usuel) et serait très difficile à obtenir avec une analyse modale

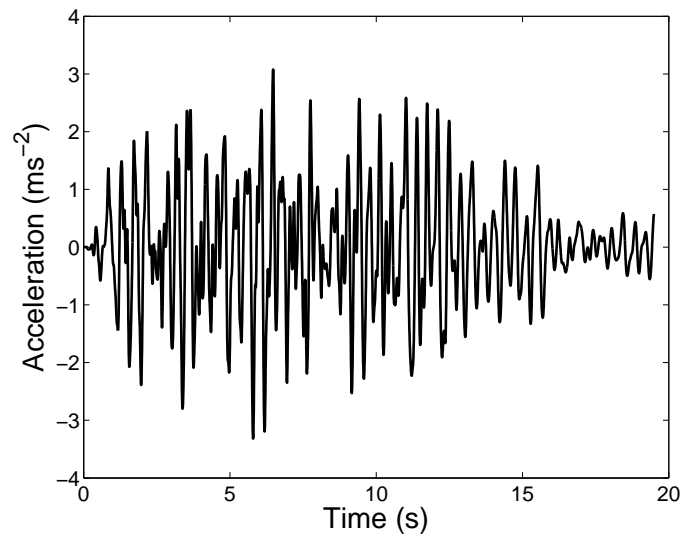


FIGURE 5.14 – Accélération du support.

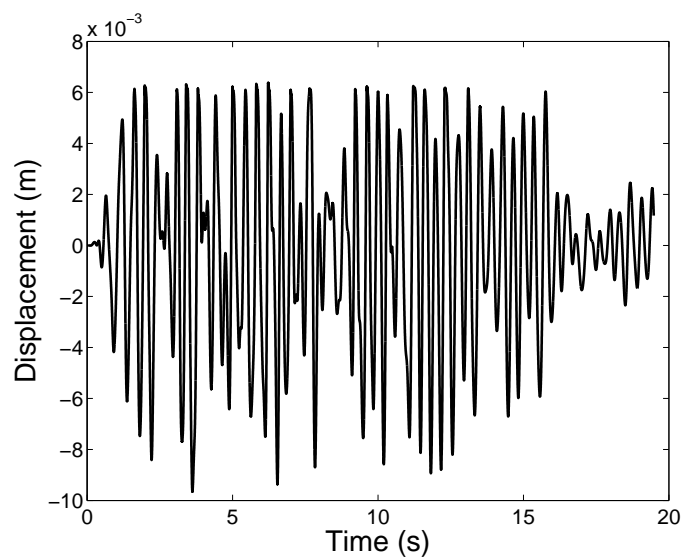


FIGURE 5.15 – Réponse non linéaire transitoire obtenue avec le modèle réduit des déplacements globaux.

classique à cause de la très forte densité modale.



### 5.3 Modèle réduit stochastique pour les contributions globales et les contributions locales.

Dans cette section les contributions locales sont prises en compte pour la prévision de la réponse fréquentielle d'une structure dynamique à forte densité modale. Dans un premier temps, le modèle réduit est construit de manière déterministe puis une modélisation probabiliste ad-hoc est implémentée sur ce modèle réduit.

#### 5.3.1 Modèle réduit déterministe des déplacements globaux et locaux.

##### Construction du modèle réduit.

Le modèle réduit dans le domaine fréquentiel est construit [7, 10] en projetant l'équation matricielle (5.45) dans la base globale et la base locale. On introduit alors l'approximation  $\mathbb{U}^{(n_g, n_\ell)}(\omega)$  de  $\mathbb{U}$  à l'ordre  $(n_g, n_\ell)$  (voir Eq. (5.44)). Soit  $n_t = n_g + n_\ell$  et  $\mathbf{q}(\omega) = (\mathbf{q}^g(\omega), \mathbf{q}^\ell(\omega))$  le vecteur des  $n_t$  coordonnées généralisées. Alors, le vecteur  $\mathbf{q}(\omega)$  est solution de l'équation matricielle réduite suivante

$$(-\omega^2[M] + i\omega[D] + [K]) \mathbf{q}(\omega) = \tilde{\mathbf{f}}(\omega), \quad (5.54)$$

où  $[M]$ ,  $[D]$  et  $[K]$  sont les matrices  $(n_t \times n_t)$  généralisées de masse, d'amortissement et de raideur qui sont définies par blocs de la manière suivante

$$[M] = \begin{bmatrix} M^{gg} & M^{g\ell} \\ (M^{g\ell})^T & M^{\ell\ell} \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D^{gg} & D^{g\ell} \\ (D^{g\ell})^T & D^{\ell\ell} \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} K^{gg} & K^{g\ell} \\ (K^{g\ell})^T & K^{\ell\ell} \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Soit  $A$  (ou  $\mathbb{A}$ ) désignant  $M$ ,  $D$  ou  $K$  (ou  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{D}$  ou  $\mathbb{K}$ ). Alors, les différents blocs sont définis par

$$[A^{gg}]_{\alpha\beta} = (\phi_\alpha^g)^T [\mathbb{A}] \phi_\beta^g, [A^{g\ell}]_{\alpha\beta} = (\phi_\alpha^g)^T [\mathbb{A}] \phi_\beta^\ell, [A^{\ell\ell}]_{\alpha\beta} = (\phi_\alpha^\ell)^T [\mathbb{A}] \phi_\beta^\ell. \quad (5.56)$$

Les matrices  $[K^{gg}]$  et  $[K^{\ell\ell}]$  sont diagonales par construction. Le vecteur des forces généralisées s'écrit  $\tilde{\mathbf{f}}(\omega) = (\tilde{\mathbf{f}}^g(\omega), \tilde{\mathbf{f}}^\ell(\omega))$  où  $\tilde{\mathbf{f}}_\alpha^g(\omega) = (\phi_\alpha^g)^T \mathbb{F}(\omega)$  et  $\tilde{\mathbf{f}}_\alpha^\ell(\omega) = (\phi_\alpha^\ell)^T \mathbb{F}(\omega)$ .

##### Validation sur un exemple numérique.

La construction du modèle réduit est illustrée [10] sur un exemple numérique constitué d'un mini-assemblage combustible constitué de 4 grilles, 5 tubes guide et 44 crayons combustibles (Voir figure 5.16). La bande d'analyse est  $B = 2\pi \times ]0, 120] \text{ rad/s}$ . Le modèle EF a  $m = 12\,750$  DDL. Les bases locales et globales sont calculées par le projecteur constant par sous-domaine avec 49 sous-domaines correspondant à des tranches d'égale épaisseur. Pour la bande d'analyse,  $n_g = 23$  et  $n_\ell = 477$ . Le module de la réponse en fréquence est calculé en deux points d'observation. Le point Pobs<sub>1</sub> est situé sur la plus haute grille (et donc sur une partie rigide) et le point Pobs<sub>2</sub> est situé entre les deux plus hautes grilles sur le crayon 3-3 (et donc sur une partie flexible). La figure 5.17 compare le module de la réponse en fréquence pour différentes bases de projection. On peut voir sur

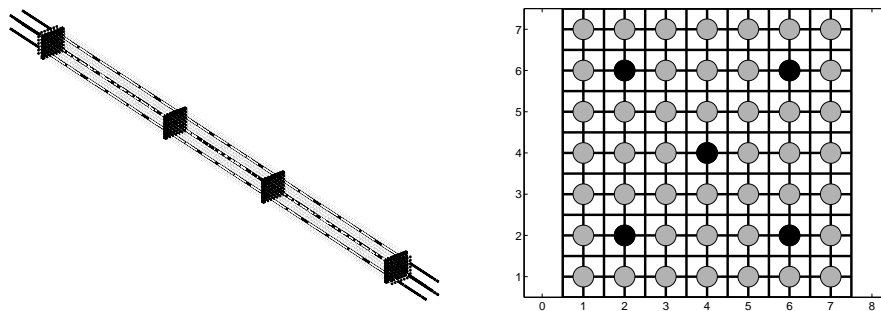


FIGURE 5.16 – Géométrie du mini-assemblage combustible. Maillage (gauche) et vue d’une grille (droite).

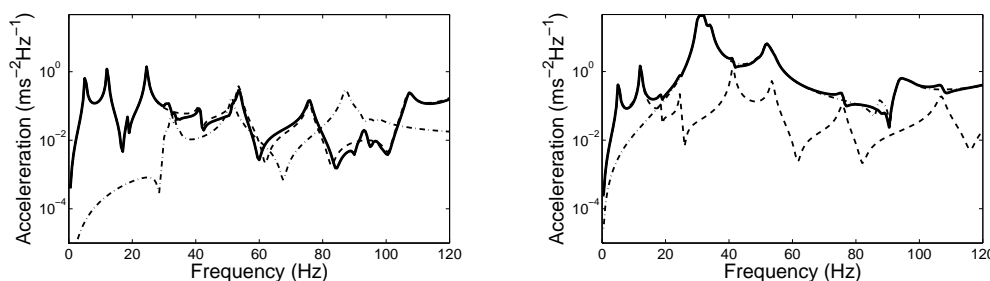


FIGURE 5.17 – Fonction de réponses en fréquence pour les points  $Pobs_1$  (gauche) et  $Pobs_2$  (droite). Comparaison pour différentes bases de projection : réponse exacte (trait plein épais), base globale uniquement (trait pointillé), base locale uniquement (trait mixte), base globale + base locale (trait plein fin superposé au trait plein épais) .

cette figure que la réponse construite avec un modèle réduit construit avec la base globale et la base locale est parfaitement superposée à la réponse exacte. Pour le point  $Pobs_1$  situé sur la partie rigide les contributions globales sont prépondérantes. Pour le point  $Pobs_2$  situé sur la partie flexible, les contributions locales sont importantes excepté pour les deux premières résonances qui correspondent à deux modes élastiques d’ensemble (et donc globaux) de l’assemblage.

### 5.3.2 Modèle réduit stochastique des déplacements globaux et locaux.

Dans cette section, les incertitudes sur les paramètres et les incertitudes de modélisation sont prises en compte au niveau du modèle réduit directement par une approche non paramétrique adaptée à la séparation global/local. En effet, la sensibilité des contributions globales aux incertitudes est en général faible (sauf pour les incertitudes liées aux conditions limites [188]) tandis que la sensibilité des contributions locales aux incertitudes est plus élevée. Il paraît donc important de construire séparément les deux modèles d’incertitudes associés aux deux types de contribution. Dans [10], une modélisation prob-

abiliste uniquement sur les contributions locales a été proposée, celle-ci exploite une réduction par double projection. Nous proposons ci-dessous une autre modélisation permettant de construire un modèle d'incertitude sur les deux types de contribution et ne reposant pas sur une double projection.

### Construction du modèle réduit stochastique.

Pour réaliser cette construction, nous repartons de la décomposition par blocs de la matrice réduite  $[A]$ ,

$$[A] = \begin{bmatrix} A^{gg} & A^{g\ell} \\ (A^{g\ell})^T & A^{\ell\ell} \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Les blocs de cette matrice peuvent se réécrire

$$[A^{gg}] = [P^g]^T [A] [P^g], \quad [A^{g\ell}] = [P^g]^T [A] [P^\ell], \quad [A^{\ell\ell}] = [P^\ell]^T [A] [P^\ell], \quad (5.58)$$

où  $[P^g]$  et  $[P^\ell]$  sont des matrices d'extraction des DDL généralisés globaux et locaux respectivement, c'est-à-dire,  $[P^g] = [I_{n_g} \ 0_{n_\ell}]$  et  $[P^\ell] = [0_{n_g} \ I_{n_\ell}]$ . Le modèle probabiliste des incertitudes est construit par une approche non paramétrique (voir section 4.2.2) en remplaçant la matrice  $[A]$  par une matrice aléatoire  $[\mathbf{A}^g]$  pour les contributions globales et une matrice aléatoire  $[\mathbf{A}^\ell]$  pour les contributions locales dans la constructions par blocs (5.58). Ces matrices aléatoires se factorisent par leur décomposition de Cholesky

$$[\mathbf{A}^g] = [\mathbf{L}_A^g]^T [\mathbf{L}_A^g], \quad [\mathbf{A}^\ell] = [\mathbf{L}_A^\ell]^T [\mathbf{L}_A^\ell]. \quad (5.59)$$

Les blocs déterministes de l'équation (5.58) sont alors remplacés par les blocs aléatoires suivant

$$[\mathbf{A}^{gg}] = [P^g]^T [\mathbf{A}^g] [P^g], \quad [\mathbf{A}^{g\ell}] = [P^g]^T [\mathbf{L}_A^g]^T [\mathbf{L}_A^\ell] [P^\ell], \quad [\mathbf{A}^{\ell\ell}] = [P^\ell]^T [\mathbf{A}^\ell] [P^\ell], \quad (5.60)$$

Ainsi le bloc aléatoire de couplage  $[\mathbf{A}^{g\ell}]$  couple bien les deux modèles d'incertitude. Avec une telle construction, la matrice aléatoire  $[\mathbf{A}]$  s'écrit alors

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{gg} & \mathbf{A}^{g\ell} \\ (\mathbf{A}^{g\ell})^T & \mathbf{A}^{\ell\ell} \end{bmatrix} = [\mathbf{L}_A^g P^g \ \mathbf{L}_A^\ell P^\ell]^T [\mathbf{L}_A^g P^g \ \mathbf{L}_A^\ell P^\ell]. \quad (5.61)$$

La matrice aléatoire  $[\mathbf{A}]$  est donc clairement définie positive presque sûrement. Ce modèle d'incertitude est contrôlé par deux paramètres de dispersion  $\delta_{A,g}$  et  $\delta_{A,\ell}$  associés respectivement aux matrices aléatoires  $[\mathbf{A}^g]$  et  $[\mathbf{A}^\ell]$ , ce qui permet de contrôler pour chaque matrice aléatoire généralisée le niveau de fluctuation des contributions globales indépendamment du niveau de fluctuation des contributions locales.

### Validation sur un exemple numérique.

L'exemple précédent est repris en intégrant le modèle d'incertitude présenté ci-dessus avec  $\delta_{M,g} = \delta_{D,g} = \delta_{K,g} = 0$ ,  $\delta_{D,\ell} = 0$  et  $\delta_{M,\ell} = \delta_{K,\ell} = 0.1$  Ce qui signifie que le niveau de fluctuation attribué aux contributions globales est nul pour cet exemple. La réponse en fréquence aléatoire est représentée sur la figure 5.18. Comme attendu, on peut observer que la variabilité de la réponse est faible pour les résonances correspondant aux déplacements globaux. Cette variabilité est plus élevée aux fréquences où les

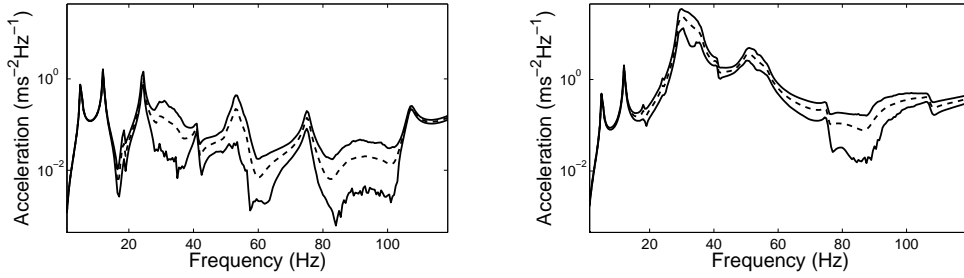


FIGURE 5.18 – Réponse en fréquence aléatoire pour les points Pobs<sub>1</sub> (gauche) et Pobs<sub>2</sub> (droite). Region de confiance (traits pleins) et réponse moyenne (trait pointillé).

contributions locales ne sont plus négligeables.

## 5.4 Extension à trois échelles pour l'analyse BF-MF-HF.

Jusqu'à présent, seules deux échelles étaient considérées : l'échelle globale et l'échelle locale. En dynamique des structures, trois bandes d'analyse fréquentielles distinctes sont à considérer : les BF, les MF et les HF. Chacune de ces trois bandes est caractérisée par une gamme de longueurs d'onde des déformations qui définit une échelle d'observation. Étant donné que nous nous intéressons aux structures à forte densité modale dans le domaine BF, les bandes de fréquence BF, MF et HF se chevauchent. Il n'y aurait donc plus à parler en termes de bande de fréquence mais plutôt en terme de taille de longueur d'onde et donc d'échelle. Cependant, afin d'améliorer la lisibilité de cette section, les qualificatifs BF, MF et HF sont conservés. On parlera donc d'échelle BF associé aux grandes longueurs l'onde, d'échelle MF associée aux moyennes longueurs l'onde et d'échelle HF associée aux petites longueurs l'onde. L'extension présentée ici concerne ces trois échelles. La méthode peut facilement être généralisée à plus de trois échelles par récurrence.

### Construction des projecteurs.

On considère maintenant deux projecteurs :  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{h}^{\epsilon_1}(\mathbf{u})$  à valeurs dans un sous-espace  $\mathcal{H}^{\epsilon_1}$  de  $\mathcal{H}$  de dimension fini  $n_{\epsilon_1}$  et  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{u})$  à valeurs dans un sous-espace  $\mathcal{H}^{\epsilon_2}$  de  $\mathcal{H}$  de dimension fini  $n_{\epsilon_2}$ . Ces deux projecteurs sont construits suivant la méthode décrite dans la section 5.1.1.1 et correspondent à deux échelles de filtrage différentes. On peut alors construire les projecteurs complémentaires  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{h}^{\epsilon_1 \perp}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{h}^{\epsilon_1}(\mathbf{u})$  à valeurs dans un sous-espace  $\mathcal{H}^{\epsilon_1 \perp}$  de  $\mathcal{H}$  et  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{h}^{\epsilon_2 \perp}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{u})$  à valeurs dans un sous-espace  $\mathcal{H}^{\epsilon_2 \perp}$  de  $\mathcal{H}$ . On peut alors construire les projecteurs  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{h}^{\text{BF}}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{h}^{\text{MF}}(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{h}^{\text{HF}}(\mathbf{u})$  tels que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}^{\text{BF}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{h}^{\epsilon_1}(\mathbf{u}) && \in \mathcal{H}^{\epsilon_1}, \\
 \mathbf{h}^{\text{MF}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{h}^{\epsilon_1 \perp}(\mathbf{u})) && \in \mathcal{H}^{\epsilon_1 \perp} \cap \mathcal{H}^{\epsilon_2}, \\
 \mathbf{h}^{\text{HF}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{h}^{\epsilon_1 \perp}(\mathbf{u}) - \mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{h}^{\epsilon_1 \perp}(\mathbf{u})) && \in \mathcal{H}^{\epsilon_1 \perp} \cap \mathcal{H}^{\epsilon_2 \perp},
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

On note  $\mathbf{u}^{\text{BF}} = \mathbf{h}^{\text{BF}}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u}^{\text{MF}} = \mathbf{h}^{\text{MF}}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u}^{\text{HF}} = \mathbf{h}^{\text{HF}}(\mathbf{u})$ ,  $\mathcal{H}^{\text{BF}} = \mathcal{H}^{\epsilon_1}$ ,  $\mathcal{H}^{\text{MF}} = \mathcal{H}^{\epsilon_1 \perp} \cap \mathcal{H}^{\epsilon_2}$  et  $\mathcal{H}^{\text{HF}} = \mathcal{H}^{\epsilon_1 \perp} \cap \mathcal{H}^{\epsilon_2 \perp}$ . Par construction, on a donc  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{BF}} + \mathbf{u}^{\text{MF}} + \mathbf{u}^{\text{HF}}$  et  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\text{BF}} \oplus \mathcal{H}^{\text{MF}} \oplus \mathcal{H}^{\text{HF}}$ . De plus cette construction permet d'avoir les relations d'orthogonalité suivantes

$$\begin{aligned} m(\mathbf{u}^{\text{BF}}, \mathbf{u}^{\text{MF}}) &= 0, \\ m(\mathbf{u}^{\text{BF}}, \mathbf{u}^{\text{HF}}) &= 0, \\ m(\mathbf{u}^{\text{MF}}, \mathbf{u}^{\text{HF}}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Les deux dernières équations de (5.62) peuvent se réécrire  $\mathbf{h}^{\text{MF}}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{u}) - \mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{h}^{\epsilon_1}(\mathbf{u}))$  et  $\mathbf{h}^{\text{HF}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{h}^{\epsilon_1}(\mathbf{u}) - \mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{u}) + \mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{h}^{\epsilon_1}(\mathbf{u}))$ . En construisant les projecteurs  $\mathbf{h}^{\epsilon_1}$  et  $\mathbf{h}^{\epsilon_2}$  de sorte que  $\mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{h}^{\epsilon_1}) = \mathbf{h}^{\epsilon_1}$  et donc  $\mathcal{H}^{\epsilon_1} \subset \mathcal{H}^{\epsilon_2}$  (voir figure 5.19), les équations (5.62) se réécrivent

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{\text{BF}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{h}^{\epsilon_1}(\mathbf{u}) && \in \mathcal{H}^{\text{BF}}, \\ \mathbf{h}^{\text{MF}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{u}) - \mathbf{h}^{\epsilon_1}(\mathbf{u}) && \in \mathcal{H}^{\text{MF}}, \\ \mathbf{h}^{\text{HF}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - \mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{u}) && \in \mathcal{H}^{\text{HF}}, \end{aligned} \quad (5.64)$$

On voit que ce choix particuliers pour les projecteurs  $\mathbf{h}^{\epsilon_1}$  et  $\mathbf{h}^{\epsilon_2}$  permet d'obtenir des

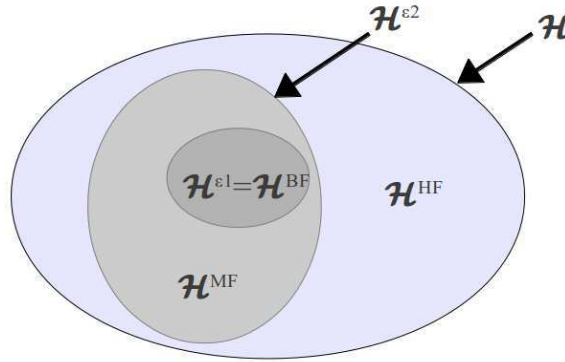
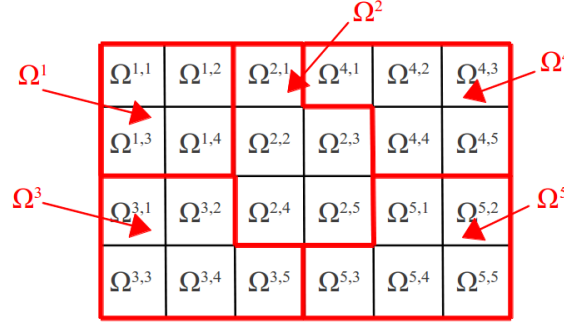


FIGURE 5.19 – Sous-espaces  $\mathcal{H}^{\text{BF}}$ ,  $\mathcal{H}^{\text{MF}}$  et  $\mathcal{H}^{\text{HF}}$  pour le cas  $\mathcal{H}^{\epsilon_1} \subset \mathcal{H}^{\epsilon_2}$ .

projecteurs  $\mathbf{h}^{\text{BF}}$ ,  $\mathbf{h}^{\text{MF}}$  et  $\mathbf{h}^{\text{HF}}$  plus simples à construire. La dimension du sous-espace  $\mathcal{H}^{\text{BF}}$  est alors  $n_{\epsilon_1}$  et la dimension du sous-espace  $\mathcal{H}^{\text{MF}}$  est  $(n_{\epsilon_2} - n_{\epsilon_1})$ . La condition  $\mathbf{h}^{\epsilon_2}(\mathbf{h}^{\epsilon_1}) = \mathbf{h}^{\epsilon_1}$  est satisfaite pour les deux types particuliers de construction suivants : (1) Si les deux projecteurs  $\mathbf{h}^{\epsilon_1}$  et  $\mathbf{h}^{\epsilon_2}$  appartiennent à une classe (la même pour  $\mathbf{h}^{\epsilon_1}$  et  $\mathbf{h}^{\epsilon_2}$ ) de projecteurs définis par sous-domaine, alors il suffit que les sous-domaines relatifs à  $\mathbf{h}^{\epsilon_2}$  soit imbriqués dans ceux relatifs à  $\mathbf{h}^{\epsilon_1}$  (voir figure 5.20), c'est-à-dire  $\Omega = \cup_{i=1}^{n_{\epsilon_1}} \Omega^i = \cup_{i=1}^{n_{\epsilon_1}} \cup_{j=1}^{n_{\epsilon_2,i}} \Omega^{i,j}$ , où  $n_{\epsilon_1}$  est le nombre de sous-domaines relatifs à  $\mathbf{h}^{\epsilon_1}$  et  $n_{\epsilon_2,i}$  est le nombre de sous-domaines relatifs à  $\mathbf{h}^{\epsilon_2}$  contenus dans le sous-domaine  $\Omega^i$ . (2) Si les deux projecteurs  $\mathbf{h}^{\epsilon_1}$  et  $\mathbf{h}^{\epsilon_2}$  sont construits par troncature d'une base hilbertienne de  $\mathcal{H}$  alors l'ordre de troncature de  $\mathbf{h}^{\epsilon_2}$  doit être plus élevé que celui de  $\mathbf{h}^{\epsilon_1}$ .

#### Construction du modèle réduit.

En suivant le même démarche que celle adoptée pour la séparation global/local, les projecteurs sont redéfinis à partir du modèle discrétisé aboutissant aux matrices projetées

FIGURE 5.20 – Imbrication des sous-domaines pour les projecteurs  $\mathbf{h}^{\epsilon 1}$  et  $\mathbf{h}^{\epsilon 2}$ .

$[\mathbb{M}^{\text{BF}}]$ ,  $[\mathbb{M}^{\text{MF}}]$  et  $[\mathbb{M}^{\text{HF}}]$  qui permettent de construire trois PVP : (1) le PVP BF qui permet de construire une base BF  $[\Phi^{\text{BF}}]$ , (2) le PVP MF qui permet de construire une base MF  $[\Phi^{\text{MF}}]$  et (3) le PVP HF qui permet de construire une base HF  $[\Phi^{\text{HF}}]$ . Alors, l'approximation  $\mathbb{U}^{(n_{\text{BF}}, n_{\text{MF}}, n_{\text{HF}})}$  de  $\mathbb{U}$  à l'ordre  $(n_{\text{BF}}, n_{\text{MF}}, n_{\text{HF}})$  est obtenue par troncature, i.e.,

$$\mathbb{U}^{(n_{\text{BF}}, n_{\text{MF}}, n_{\text{HF}})} = [\Phi^{\text{BF}}] \mathbf{q}^{\text{BF}} + [\Phi^{\text{MF}}] \mathbf{q}^{\text{MF}} + [\Phi^{\text{HF}}] \mathbf{q}^{\text{HF}}, \quad (5.65)$$

où  $\mathbf{q}^{\text{BF}}$  est le vecteur des coordonnées généralisées BF,  $\mathbf{q}^{\text{MF}}$  est le vecteur des coordonnées généralisées MF et  $\mathbf{q}^{\text{HF}}$  est le vecteur des coordonnées généralisées HF.

Si on s'intéresse au calcul de la réponse fréquentielle du système, on cherche alors le vecteur  $\mathbf{q}(\omega) = (\mathbf{q}^{\text{BF}}, \mathbf{q}^{\text{MF}}, \mathbf{q}^{\text{HF}})$  solution de l'équation matricielle réduite suivante

$$(-\omega^2[M] + i\omega[D] + [K]) \mathbf{q}(\omega) = \tilde{\mathbf{f}}(\omega), \quad (5.66)$$

où pour  $A$  désignant  $M$ ,  $D$  ou  $K$ ,

$$[A] = \begin{bmatrix} A^{\text{BF}, \text{BF}} & A^{\text{BF}, \text{MF}} & A^{\text{BF}, \text{HF}} \\ (A^{\text{BF}, \text{MF}})^T & A^{\text{MF}, \text{MF}} & A^{\text{MF}, \text{HF}} \\ (A^{\text{BF}, \text{HF}})^T & (A^{\text{MF}, \text{HF}})^T & A^{\text{HF}, \text{HF}} \end{bmatrix}. \quad (5.67)$$

Comme pour la séparation global/local, un modèle d'incertitude défini par bloc peut être implémenté afin de construire un modèle réduit stochastique où les fluctuations des contributions BF, les fluctuations des contributions MF et les fluctuations des contributions HF sont contrôlées de manière séparée.

La méthode de séparation a été validée dans [21] sur un exemple numérique simple d'une structure plaque présentant trois niveaux de rigidité. Le maillage de cette structure est représenté sur la figure 5.21. Cette structure est composée d'un cadre très rigide (rouge) à laquelle des sous-structures plus souples sont connectées (bleu ciel). Des panneaux (bleu foncé) encore plus souples sont connectés à ces sous-structures. Les bases BF, MF et HF sont calculées en utilisant des projecteurs constants par sous-domaine sur les sous-domaines imbriqués représentés sur la figure 5.22. Des vecteurs des bases BF, MF et HF sont représentés sur la figure 5.23. La figure 5.24 montre la FRF de cette structure

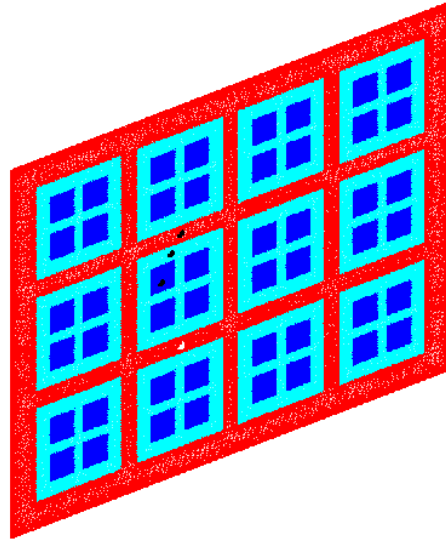
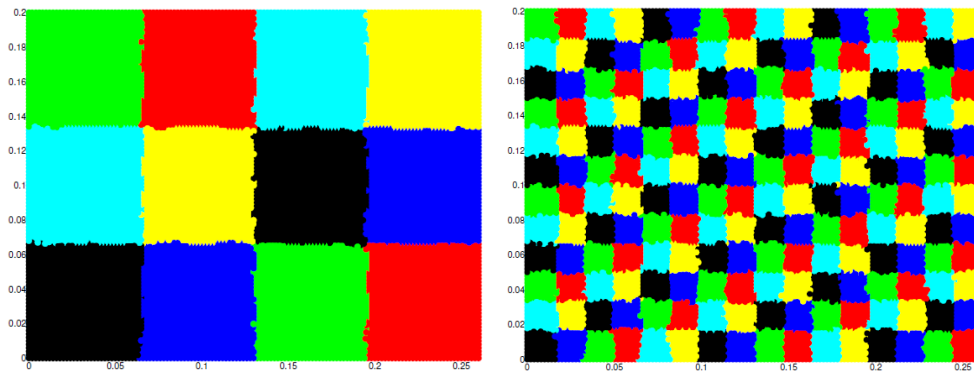


FIGURE 5.21 – Maillage de la structure plaque.

FIGURE 5.22 – Sous-domaines imbriqués pour les projecteurs  $\mathbf{h}^{\epsilon^1}$  (gauche) et  $\mathbf{h}^{\epsilon^2}$  (droite).

pour plusieurs bases de projection. On voit sur cette figure qu'à très basse fréquence, les contributions MF et HF sont négligeables mais ces contributions augmentent rapidement avec la fréquence.

## 5.5 Conclusions.

Nous avons présenté une nouvelle méthodologie permettant de construire un modèle réduit et de quantifier les incertitudes pour des structures dynamiques à forte densité modale. Cette méthode est basée sur la construction de différentes bases de réduction, chacune adaptée à une échelle donnée. Chaque base de réduction est construite en résolvant un PVP pour lequel l'énergie cinétique est projeté sur un sous-espace correspondant à une cinématique réduite. Cette méthodologie a été appliquée avec succès

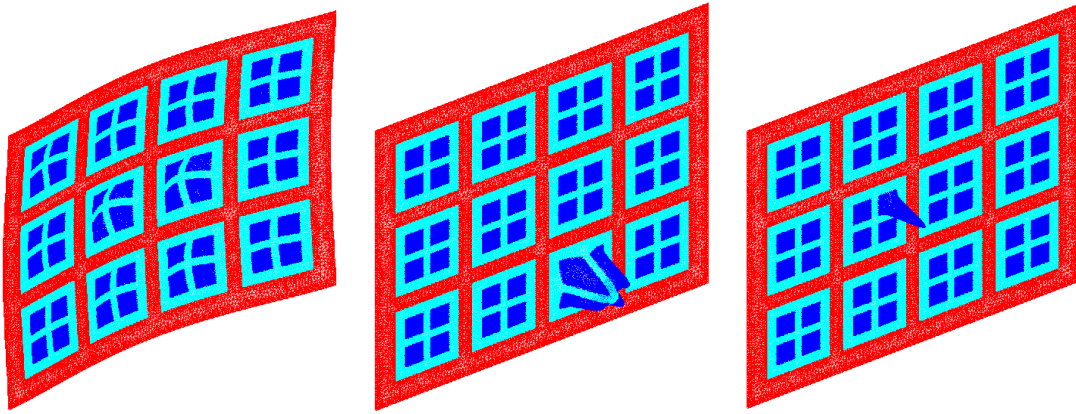


FIGURE 5.23 – Premier vecteur de base BF (gauche), quatrième vecteur de base MF (milieu) et premier vecteur de base HF (droite).

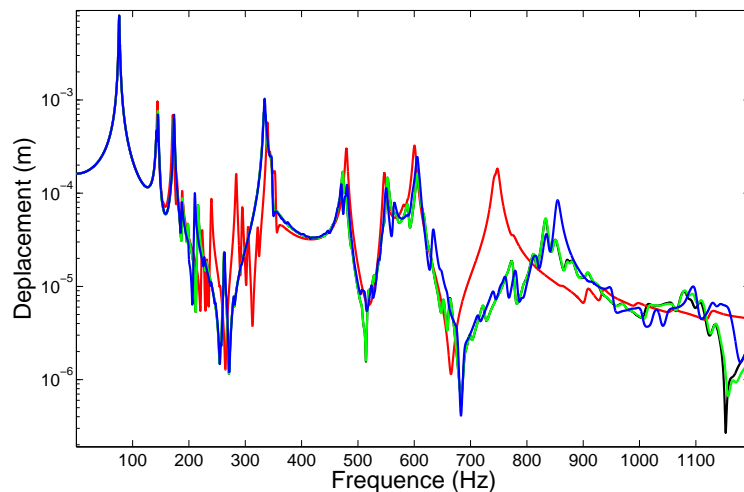


FIGURE 5.24 – FRF : Réponse exacte (trait noir caché sous la courbe verte), base BF (trait rouge), base BF-MF (trait bleu), base BF-MF-HF (trait vert).

sur des structures industrielles à plusieurs millions de DDL pour le calcul d'une réponse fréquentielle ou transitoire en présence d'une forte densité modale. La méthode présentée peut facilement être implémentée sur les logiciels commerciaux car les projecteurs sont directement construits au niveau du modèle discrétisé.

La souplesse offerte par la séparation des contributions globales et locales (ou BF, MF et HF) permet d'implémenter un modèle d'incertitude adapté à chaque échelle par une approche non paramétrique. Pour chaque échelle, le niveau de variabilité est contrôlé par trois paramètres de dispersion (masse, amortissement et raideur).



## 5.6 Perspectives.

Les perspectives à ces travaux sont nombreuses. La première est la validation expérimentale de la construction du modèle réduit stochastique des contributions globales et locales. En effet, jusqu'à présent, la seule validation expérimentale a été réalisée pour un modèle réduit stochastique des contributions globales uniquement. La deuxième perspective à ces travaux concernent la modélisation stochastique des contributions locales (ou HF pour 3 échelles). Dans l'approche proposée dans ce chapitre, cette modélisation est construite par une approche non paramétrique sur les coordonnées locales qui peuvent être très nombreuses si la densité modale est forte. Donc le modèle réduit stochastique obtenu n'est pas de petite taille si la densité modale est très forte. D'autre part, ce n'est pas tant ces coordonnées locales qui nous intéressent mais plutôt l'amortissement apparent qu'elles induisent sur les coordonnées globales à cause du couplage existant entre ces deux types de coordonnée. Il serait donc intéressant de modéliser les contributions stochastiques locales par une approche énergétique modale qui aboutirait à un modèle réduit à faible nombre de variables énergétiques. Cette modélisation est prévue dans le cadre de l'ANR JCJC HiMoDe (voir projet [P5]). Une troisième perspective concerne les structures non linéaires. Jusqu'à présent seules les non-linéarités localisées ont été abordées. Il serait intéressant de construire un modèle réduit (éventuellement stochastique) pour les structures dynamiques à forte densité modale en présence de non-linéarités géométriques. Cette étude est elle aussi prévue dans le cadre de l'ANR JCJC HiMoDe.

# Chapitre 6

## Génération d'accélérogrammes sismiques par la théorie de l'information.

Ce dernier chapitre, qui a été introduit dans la Section 2.5, est relatif à l'aléa sur les chargements appliqués à un système dynamique. On s'intéresse en particuliers aux chargements induits par une accélération sismique du sol. L'aléa introduit ici n'est pas lié à une source d'incertitude mais à une variabilité naturelle de l'accélération du sol au cours d'un séisme. L'objectif ici est de générer des accélérogrammes sismiques compatibles avec un spectre de réponse et d'autres spécifications utilisées de manière courante en ingénierie sismique. La série temporelle relative à l'échantillonnage du processus stochastique de l'accélérogramme est représentée par un vecteur aléatoire de grande dimension stochastique. La fonction de densité de probabilité de ce vecteur aléatoire est construite par le principe du MaxEnt sous les contraintes définies par l'information disponible. Cette information disponible est définie par des propriétés physiques de l'accélérogramme et par des spécifications. Dans cette recherche, nous avons introduit un nouvel algorithme pour le calcul des multiplicateurs de Lagrange relatifs aux contraintes introduites dans la construction de la loi de probabilité par le principe du MaxEnt. Ce nouvel algorithme est basé sur (1) la minimisation d'une fonctionnelle convexe appropriée et (2) la construction de la distribution de probabilité comme la mesure invariante d'une Équation Différentielle Stochastique d'Itô (EDSI). Dans ce chapitre, les contraintes suivantes relatives à un accélérogramme sont étudiées : variance des composantes du vecteur aléatoire (pour définir l'enveloppe de l'accélérogramme), statistiques sur le spectre de réponse, accélération maximale du sol (PGA), vitesse maximale du sol (PGV), vitesse absolue cumulée (CAV), intensité d'Arias (AI), vitesse finale et déplacement final.

## 6.1 Construction des lois de probabilités de l'accélérogramme et générateur de réalisations indépendantes.

### 6.1.1 Échantillonnage et construction de la loi de probabilité.

L'accélération aléatoire du sol est modélisée par un processus stochastique du second ordre centré non Gaussien  $\{A(t), t \in [0, T]\}$ . On introduit l'échantillonnage  $t_j = j \Delta t$ ,  $j = 1, \dots, N$  et  $T = N \times \Delta t$  de ce processus stochastique. On obtient ainsi la série temporelle  $\{A_1, \dots, A_N\}$  avec  $A_j = A(t_j)$  à laquelle on associe le vecteur aléatoire  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_N)$ . On cherche donc à construire la distribution de probabilité du vecteur aléatoire  $\mathbf{A}$  et à en générer des réalisations indépendantes qui constitueront des accélérogrammes. La fonction de densité de probabilité  $\mathbf{a} \mapsto p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$  est construite par le principe du MaxEnt (voir Section 3.2.1). On a donc

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) = c_0(\boldsymbol{\lambda}^{\text{sol}}) \exp(-\langle \boldsymbol{\lambda}^{\text{sol}}, \mathbf{g}(\mathbf{a}) \rangle), \quad (6.1)$$

où  $c_0(\boldsymbol{\lambda})$  est défini par

$$c_0(\boldsymbol{\lambda}) = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{a}) \rangle) d\mathbf{a} \right\}^{-1}. \quad (6.2)$$

Cette solution dépend donc du vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}^{\text{sol}}$  qui doit être calculé en utilisant l'information disponible. C'est l'objectif de la section suivante.

### 6.1.2 Calcul des multiplicateurs de Lagrange

Dans cette section, on présente une nouvelle méthodologie pour le calcul de  $\boldsymbol{\lambda}^{\text{sol}}$ .

#### 6.1.2.1 Fonction objective et méthodologie.

En utilisant les équations (3.10) et (6.1), le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}^{\text{sol}}$  est solution de l'équation non linéaire

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{g}(\mathbf{a}) c_0(\boldsymbol{\lambda}) \exp(-\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{a}) \rangle) = \mathbf{f}. \quad (6.3)$$

Au lieu de résoudre directement cette équation, une méthode plus efficace pour le calcul du vecteur  $\boldsymbol{\lambda}^{\text{sol}}$  consiste à résoudre le problème d'optimisation suivant (voir [53, 129, 203, 87]),

$$\boldsymbol{\lambda}^{\text{sol}} = \arg \min_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}_{\mu} \subset \mathbb{R}^{\mu}} \Gamma(\boldsymbol{\lambda}), \quad (6.4)$$

où la fonction objective  $\Gamma$  s'écrit

$$\Gamma(\boldsymbol{\lambda}) = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{f} \rangle - \log(c_0(\boldsymbol{\lambda})). \quad (6.5)$$

Soit  $\{\mathbf{A}_\lambda, \lambda \in \mathcal{L}_\mu\}$  une famille de vecteurs aléatoires dont la fonction de probabilité est définie, pour tout  $\lambda$  dans  $\mathcal{L}_\mu$ , par

$$p_{\mathbf{A}_\lambda}(\mathbf{a}) = c_0(\lambda) \exp(-\langle \lambda, \mathbf{g}(\mathbf{a}) \rangle). \quad (6.6)$$

On a alors  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\lambda^{\text{sol}}}$ . Le gradient  $\nabla\Gamma(\lambda)$  et le hessien  $[H(\lambda)]$  de la fonction  $\Gamma(\lambda)$  s'écrivent

$$\nabla\Gamma(\lambda) = \mathbf{f} - E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)\}, \quad (6.7)$$

$$[H(\lambda)] = E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)^T\} - E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)\}E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)\}^T, \quad (6.8)$$

Le hessien  $[H(\lambda)]$  correspond donc à la matrice de covariance du vecteur  $\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)$ , qui est définie positive (si on suppose que les contraintes définissant l'information disponible sont algébriquement indépendantes) et donc la fonction  $\Gamma$  est strictement convexe et atteint son minimum en  $\lambda^{\text{sol}}$ . Le problème d'optimisation (6.4) peut être résolu par la méthode itérative de Newton pour la fonction croissante  $\nabla\Gamma$ . Cette méthode n'est pas inconditionnellement convergente. Par conséquent, on introduit une sous-relaxation et l'algorithme itératif s'écrit

$$\lambda^{i+1} = \lambda^i - \alpha [H(\lambda^i)]^{-1} \nabla\Gamma(\lambda^i), \quad (6.9)$$

où  $\alpha$  est choisi dans l'intervalle  $]0, 1]$  afin d'assurer une convergence vers la solution  $\lambda^{\text{sol}}$ .

### 6.1.2.2 Cas Gaussien

Dans cette section, on étudie le cas où l'information disponible aboutit à un vecteur aléatoire  $\mathbf{A}$  centré Gaussien. Ce cas est intéressant pour calculer la matrice de covariance du vecteur centré Gaussien  $\mathbf{A}$  lorsque  $\mu$  contraintes sont définies par  $\mu$  fonctions indépendantes linéaires (ou affines) de moments du second-ordre. Pour un accélérogramme sismique, ce type d'information est utile pour définir l'enveloppe temporelle et pour contrôler la vitesse finale et le déplacement final. On suppose que  $1 < \mu \leq N(N+1)/2$ . L'information disponible est alors définie par,

$$E\{\mathbf{A}\} = \mathbf{0}, \quad (6.10)$$

$$E\left\{\frac{1}{2}\langle \mathbf{A}, [K_j]\mathbf{A} \rangle\right\} = h_j \quad , \quad j = 1, \dots, \mu, \quad (6.11)$$

où  $[K_1], \dots, [K_\mu]$  sont  $\mu$  matrices réelles symétriques de dimension  $(N \times N)$  que l'on suppose algébriquement indépendantes. Dans ce cas, on peut démontrer que le vecteur

des multiplicateurs de Lagrange associé à la contrainte (6.10) est nul et donc la solution MaxEnt s'écrit

$$p_{\mathbf{A}_\lambda}(\mathbf{a}; \boldsymbol{\lambda}) = c_0(\boldsymbol{\lambda}) \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \mathbf{a}, [\mathcal{K}_\lambda] \mathbf{a} \rangle\right), \quad (6.12)$$

où  $[\mathcal{K}_\lambda] = \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j [K_j]$  est supposée être définie positive pour tout  $\boldsymbol{\lambda}$  dans  $\mathcal{L}_\mu$  et où  $c_0(\boldsymbol{\lambda})$  est la constante de normalisation telle que

$$c_0(\boldsymbol{\lambda}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sqrt{\det[\mathcal{K}_\lambda]}. \quad (6.13)$$

On voit clairement que  $\mathbf{A}_\lambda$  est un vecteur aléatoire Gaussien centré de matrice de covariance  $[\mathcal{K}(\boldsymbol{\lambda})]^{-1}$ . Pour ce cas Gaussien,  $\Gamma(\boldsymbol{\lambda})$ ,  $\nabla\Gamma(\boldsymbol{\lambda})$  et  $[H(\boldsymbol{\lambda})]$  peuvent être calculés analytiquement. On obtient ainsi

$$\Gamma(\boldsymbol{\lambda}) = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h} \rangle + \frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\det([\mathcal{K}_\lambda])). \quad (6.14)$$

où  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_\mu)$ . Le gradient s'écrit

$$(\nabla\Gamma(\boldsymbol{\lambda}))_i = h_i - \frac{1}{2} \text{tr}([\mathcal{K}_\lambda]^{-1} [K_i]) \quad (6.15)$$

et le Hessien s'écrit

$$[H(\boldsymbol{\lambda})]_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr}([\mathcal{K}_\lambda]^{-1} [K_i] [\mathcal{K}_\lambda]^{-1} [K_j]). \quad (6.16)$$

Finalement,  $\boldsymbol{\lambda}^{\text{sol}}$  peut être calculé itérativement en utilisant l'équation (6.9).

### 6.1.2.3 Cas général non Gaussien

En général, pour le cas non Gaussien, les intégrales sur  $\mathbb{R}^N$  dans les équations (6.7) et (6.8) ne peuvent pas, comme pour le cas Gaussien, être calculées analytiquement pour les grandes valeurs de  $N$ . De plus, toujours à cause de la grande dimension, ces intégrales ne peuvent pas être discrétisées dans  $\mathbb{R}^N$  comme proposé dans [273] dans le contexte du MaxEnt. Dans [87, 89], les auteurs calculent ces intégrales par intégration par partie et dans [61], elles sont approximées par l'utilisation d'une base fonctionnelle pour la distribution MaxEnt. Ces deux dernières méthodes ne sont pas non plus adaptées à la dimension élevée.

Ces intégrales sont donc estimées par la méthode de Monte Carlo pour laquelle il faut construire un générateur de réalisations indépendantes du vecteur  $\mathbf{A}_\lambda$  adapté à la grande dimension stochastique. Dans ce chapitre, nous utilisons une version légèrement modifiée de la méthode introduite dans [248, 252] et appartenant à la classe des méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC).

**Générateur de réalisations indépendantes.**

Le générateur introduit dans [248, 252] consiste à construire la fonction de densité de probabilité du vecteur aléatoire  $\mathbf{A}_\lambda$  comme la fonction de densité de probabilité  $p_{\mathbf{A}_\lambda}$  associée à la solution stationnaire d'une EDSI non linéaire du second-ordre. Les avantages de cet algorithme par rapport aux générateurs MCMC classiques comme l'algorithme de Metropolis-Hastings (voir [144]) sont : (1) Les résultats mathématiques concernant l'existence et l'unicité d'une mesure invariante peuvent être utilisés, (2) on peut introduire une matrice d'amortissement pour rapidement atteindre la mesure invariante et (3) il n'y a pas besoin d'introduire une loi candidate qui n'est pas évidente à déterminer en grande dimension. La version du générateur présentée ici diffère de celle présentée dans [248, 252] par (1) le choix de conditions initiales aléatoires qui permettront de rapidement atteindre la mesure invariante et (2) l'introduction d'une matrice d'amortissement au lieu d'un amortissement homogène afin de contrôler la dissipation (et donc la vitesse de convergence de la réponse vers la mesure invariante) de chaque composante.

Soit  $\mathbf{u} \mapsto \psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  une fonction définie par

$$\psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{u}) \rangle . \tag{6.17}$$

On introduit alors le processus stochastique  $\{(\mathbf{U}(r), \mathbf{V}(r)), r \geq 0\}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  vérifiant, pour tout  $r \geq 0$ , l'EDSI [149] suivante (voir [240])

$$\begin{aligned} d\mathbf{U}(r) &= \mathbf{V}(r) dr \\ d\mathbf{V}(r) &= -\nabla_{\mathbf{u}}\psi(\mathbf{U}(r), \boldsymbol{\lambda}) dr - \frac{1}{2}[D_\lambda]\mathbf{V}(r) dr + [S_\lambda] d\mathbf{W}(r) , \end{aligned} \tag{6.18}$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 \quad , \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0 \quad p.s. \tag{6.19}$$

Dans cette EDSI,  $\nabla_{\mathbf{u}}\psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  est le gradient de la fonction  $\psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  par rapport à  $\mathbf{u}$ , tel que

$$\nabla_{\mathbf{u}}\psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = [\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{u})]\boldsymbol{\lambda} , \tag{6.20}$$

où la matrice  $[\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{u})]$  est le gradient de la fonction  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$  par rapport à  $\mathbf{u}$ . La matrice  $[D_\lambda]$  est la matrice définie positive d'amortissement, la matrice triangulaire inférieure  $[S_\lambda]$  est telle que  $[D_\lambda] = [S_\lambda][S_\lambda]^T$  et  $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_N)$  est le processus stochastique normalisé de Wiener indexé sur  $\mathbb{R}^+$ . La condition initiale aléatoire  $(\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0)$  est indépendante du processus stochastique  $\{\mathbf{W}(r), r \geq 0\}$ . La loi de probabilité des conditions initiales sera discutée plus tard. On peut alors démontrer (voir [240, 248]) que, sous certaines conditions de continuité et de bornitude pour la fonction  $\mathbf{u} \mapsto \psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  et son gradient  $\mathbf{u} \mapsto \|\nabla_{\mathbf{u}}\psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\|$ , l'EDSI définie ci-dessus admet une mesure invariante définie par la fonction de densité de probabilité  $\rho_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  par rapport à  $d\mathbf{u} d\mathbf{v}$  (qui est

l'unique solution de l'équation de Fokker-Planck) définie par

$$\rho_{\lambda}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c_0(\lambda) \exp(-\psi(\mathbf{u}, \lambda)) \times (2\pi)^{-N/2} \exp(-\frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2), \quad (6.21)$$

qui montre que

$$p_{\mathbf{A}_{\lambda}}(\mathbf{a}) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{\lambda}(\mathbf{a}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (6.22)$$

On peut en déduire que, pour  $r \rightarrow +\infty$ , le processus stochastique  $\{(\mathbf{U}(r), \mathbf{V}(r)), r \geq 0\}$  converge, en loi de probabilité, vers un processus stationnaire pour lequel la loi marginale d'ordre un est  $\rho_{\lambda}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v}$ . On peut donc en conclure que, pour  $r \rightarrow +\infty$ , le processus stochastique  $\{\mathbf{U}(r), r \geq 0\}$  converge, en loi de probabilité, vers un processus stationnaire pour lequel la loi marginale d'ordre un est  $p_{\mathbf{A}_{\lambda}}(\mathbf{a}) d\mathbf{a}$ , c'est à dire

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{U}(r) = \mathbf{A}_{\lambda} \quad \text{en loi de probabilité.} \quad (6.23)$$

De plus, pour  $r \rightarrow +\infty$ , (1)  $\mathbf{U}(r)$  et  $\mathbf{V}(r)$  convergent vers des variables aléatoires indépendantes, (2)  $\mathbf{U}(r)$  et  $\mathbf{V}(r)$  tendent à être indépendants des conditions initiales aléatoires et (3)  $\mathbf{V}(r)$  converge vers un vecteur aléatoire centré Gaussien dont la matrice de covariance est la matrice identité. Ainsi, en utilisant une réalisation indépendante du processus de Wiener  $\mathbf{W}$  et une réalisation indépendante des conditions initiales  $(\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0)$ , une réalisation indépendante du vecteur aléatoire  $\mathbf{A}_{\lambda}$  peut être construite comme la solution de l'EDSI pour  $r$  suffisamment grand. La valeur  $r_0$  de  $r$  pour laquelle la mesure invariante est approximativement atteinte dépend du choix de la matrice d'amortissement  $[D_{\lambda}]$  et de la loi de probabilité des conditions initiales aléatoires. L'amortissement induit par la matrice  $[D_{\lambda}]$  doit être suffisamment grand pour tuer rapidement la réponse transitoire mais un amortissement trop élevé introduirait des erreurs importantes et croissantes lors de l'intégration numérique de l'EDSI. Concernant les conditions initiales, plus la distribution de probabilité des conditions initiales est proche de la mesure invariante, plus courte sera la réponse transitoire. En particulier, si la distribution de probabilité  $p_{\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v}$  est égale à la mesure invariante  $\rho_{\lambda}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v}$ , alors pour tout  $r > 0$ , la distribution de probabilité du vecteur aléatoire  $(\mathbf{U}(r), \mathbf{V}(r))$  est la mesure invariante. Le choix de la fonction de densité de probabilité  $p_{\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0}$  qui permet d'atteindre rapidement la mesure invariante sera rediscuté lors de la construction de l'algorithme de calcul des multiplicateurs de Lagrange. Ce choix est crucial pour les performances de cet algorithme.

### Discrétisation de l'EDSI.

Plusieurs schémas d'intégration des EDSI ont été proposés dans la littérature. Ils sont classiquement divisés en trois types : les schémas explicites, les schémas implicites et les schémas semi-implicites. Une synthèse de ces schémas peut être trouvée dans [76]. Comme proposé dans [248], l'EDSI est discrétisée ici par un schéma d'intégration semi-

implicite qui évite la résolution d'une équation algébrique non-linéaire à chaque pas tout en permettant de réduire significativement le pas de temps par rapport à un schéma purement explicite [76]. Les détails concernant cette construction peuvent être trouvés dans [248, 252, 14].

On suppose que la fonction d'information  $\mathbf{g}$ , définissant l'information disponible s'écrit  $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = (\mathbf{g}_L(\mathbf{a}), \mathbf{g}_{NL}(\mathbf{a}))$  où  $\mathbf{g}_{NL} = (\{\mathbf{g}_{NL}\}_1, \dots, \{\mathbf{g}_{NL}\}_{\mu_{NL}})$  est une fonction non linéaire et  $\mathbf{g}_L = (\{\mathbf{g}_L\}_1, \dots, \{\mathbf{g}_L\}_{\mu_L})$  est une fonction quadratique dont les composantes sont telles que

$$\{\mathbf{g}_L(\mathbf{a})\}_i = \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}, [K_i] \mathbf{a} \rangle, \quad (6.24)$$

où  $[K_1], \dots, [K_{\mu_L}]$  sont  $\mu_L$  matrices réelles symétriques de dimension  $(N \times N)$  supposées indépendantes. On introduit ensuite la décomposition  $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_L, \boldsymbol{\lambda}_{NL}) \in \mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_{\mu_L} \times \mathcal{L}_{\mu_{NL}}$  des multiplicateurs de Lagrange. Alors pour tout  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}_\mu$ , la fonction  $\psi(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})$  s'écrit

$$\psi(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}, [\mathcal{K}_{\boldsymbol{\lambda}_L}] \mathbf{a} \rangle + \psi_{NL}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}_{NL}), \quad (6.25)$$

où la matrice symétrique  $[\mathcal{K}_{\boldsymbol{\lambda}_L}] = \sum_{j=1}^{\mu_L} \{\boldsymbol{\lambda}_L\}_j [K_j]$  est supposée définie positive pour tout  $\boldsymbol{\lambda}_L$  dans  $\mathcal{L}_{\mu_L}$  et où  $\psi_{NL}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}_{NL}) = \sum_{j=1}^{\mu_{NL}} \{\boldsymbol{\lambda}_{NL}\}_j \{\mathbf{g}_{NL}(\mathbf{a})\}_j$ . Ainsi, le gradient de la fonction  $\psi(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})$  par rapport à  $\mathbf{a}$  s'écrit

$$\nabla_{\mathbf{a}} \psi(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}) = [\mathcal{K}_{\boldsymbol{\lambda}_L}] \mathbf{a} + \nabla_{\mathbf{a}} \psi_{NL}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}_{NL}), \quad (6.26)$$

où  $\nabla_{\mathbf{a}} \psi_{NL}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}_{NL}) = \sum_{j=1}^{\mu_{NL}} \{\boldsymbol{\lambda}_{NL}\}_j \nabla_{\mathbf{a}} \{\mathbf{g}_{NL}(\mathbf{a})\}_j$ . Donc le gradient  $\nabla_{\mathbf{a}} \psi(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})$  est décomposé en une partie linéaire en  $\mathbf{a}$  et une partie non linéaire.

Soit  $\Delta r_\lambda$  le pas d'intégration de la discrétisation de l'EDSI. Soit  $\Delta \mathbf{W}^1, \dots, \Delta \mathbf{W}^M$ ,  $M$  vecteurs aléatoires Gaussiens centrés mutuellement indépendants et de matrice covariance égale à  $\Delta r_\lambda [I_N]$ . On introduit alors la série temporelle  $\{(\mathbf{U}^k, \mathbf{V}^k), k = 1, \dots, M\}$  avec  $\mathbf{U}^k = (U_1^k, \dots, U_N^k)$  et  $\mathbf{V}^k = (V_1^k, \dots, V_N^k)$ . Les conditions initiales correspondantes  $(\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0)$  sont supposés être des vecteurs aléatoires du second-ordre indépendants de la série temporelle  $\{(\mathbf{U}^k, \mathbf{V}^k), k = 1, \dots, M\}$ .

Pour  $\ell = 1, \dots, n_s$ , en utilisant  $n_s$  réalisations indépendantes  $\{\Delta \mathbf{W}^{k+1, \ell}, k = 1, \dots, M-1\}$  de la famille de vecteurs aléatoires  $\{\Delta \mathbf{W}^{k+1}, k = 1, \dots, M-1\}$  et  $n_s$  réalisations indépendantes  $(\mathbf{U}_0^\ell, \mathbf{V}_0^\ell)$  des conditions initiales aléatoires  $(\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0)$  (qui sont aussi indépendantes de  $\{\Delta \mathbf{W}^{k+1}, k = 1, \dots, M-1\}$ ), les  $n_s$  réalisations indépendantes  $\mathbf{U}^{M, \ell}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{U}^M$  sont générées en résolvant  $n_s$  fois, pour  $k = 1, \dots, M-1$ , les équations suivantes (qui correspondent à la discrétisation de l'EDSI)

$$\begin{aligned} [\mathcal{E}_\lambda] \mathbf{V}^{k+1, \ell} &= [\mathcal{B}_\lambda] \mathbf{V}^{k, \ell} - \Delta r_\lambda [\mathcal{K}_{\boldsymbol{\lambda}_L}] \mathbf{U}^{k, \ell} + \Delta r_\lambda \mathbf{L}_{NL}^{k, \ell} + [S_\lambda] \Delta \mathbf{W}^{k+1, \ell}, \\ \mathbf{U}^{k+1, \ell} &= \mathbf{U}^{k, \ell} + \frac{1}{2} \Delta r_\lambda (\mathbf{V}^{k+1, \ell} + \mathbf{V}^{k, \ell}), \\ \mathbf{U}^{1, \ell} &= \mathbf{U}_0^\ell, \quad \mathbf{V}^{1, \ell} = \mathbf{V}_0^\ell. \end{aligned} \quad (6.27)$$



où  $[\mathcal{E}_\lambda] = [I_N] + \frac{1}{4} \Delta r_\lambda [D_\lambda] + \frac{1}{4} \Delta r_\lambda^2 [\mathcal{K}_{\lambda_L}]$  et  $[\mathcal{B}_\lambda] = [I_N] - \frac{1}{4} \Delta r_\lambda [D_\lambda] - \frac{1}{4} \Delta r_\lambda^2 [\mathcal{K}_{\lambda_L}]$ . Le vecteur  $\mathbf{L}_{\text{NL}}^k$  est défini par  $\mathbf{L}_{\text{NL}}^k = -\{\nabla_{\mathbf{a}} \psi_{\text{NL}}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}_{\text{NL}})\}_{\mathbf{a}=\mathbf{U}^k}$ . Si le gradient  $\nabla_{\mathbf{a}} \psi_{\text{NL}}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}_{\text{NL}})$  ne peut pas être calculé analytiquement, alors  $\mathbf{L}_{\text{NL}}^k$  peut être approché par différences finies.

Alors, si  $M$  est suffisamment grand, les  $n_s$  réalisations indépendantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{A}_\lambda$  sont construites telles que  $\mathbf{A}_\lambda^\ell \simeq \mathbf{U}^{M,\ell}$  pour  $\ell = 1, \dots, n_s$ .

### Estimations des espérances mathématiques

La moyenne  $E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)\}$  et le moment d'ordre deux  $E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)^T\}$  sont estimés classiquement par

$$E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)\} \simeq \frac{1}{n_s} \sum_{\ell=1}^{n_s} \mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda^\ell), \quad (6.28)$$

$$E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda)^T\} \simeq \frac{1}{n_s} \sum_{\ell=1}^{n_s} \mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda^\ell)\mathbf{g}(\mathbf{A}_\lambda^\ell)^T. \quad (6.29)$$

### Algorithme de calcul des multiplicateurs de Lagrange

Concernant les conditions initiales de l'algorithme, une valeur initiale  $\boldsymbol{\lambda}_{\text{init}}$  de  $\boldsymbol{\lambda}$  doit être donnée. Une fonction de densité de probabilité  $(\mathbf{U}_{0,\text{init}}, \mathbf{V}_{0,\text{init}})$  correspondant au vecteur aléatoire des conditions initiales  $(\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0)$  for  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_{\text{init}}$  doit également être précisée. Concernant  $\mathbf{V}_{0,\text{init}}$ , étant donné que pour  $M$  suffisamment grand,  $\mathbf{V}^M \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, [I_n])$ , la fonction de densité probabilité de  $\mathbf{V}_{0,\text{init}}$  est choisie comme étant la loi Gaussienne réduite,  $\mathbf{V}_{0,\text{init}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, [I_n])$ . Concernant  $\mathbf{U}_{0,\text{init}}$ , si on impose  $\boldsymbol{\lambda}_{\text{NL,init}} = \mathbf{0}$ , alors  $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}_{\text{init}}}$  est un vecteur centré Gaussien pour lequel la matrice de covariance est  $[\mathcal{K}_{\lambda_{L,\text{init}}}]^{-1}$ . Alors la fonction de densité de probabilité  $\mathbf{U}_{0,\text{init}}$  est choisie telle que  $\mathbf{U}_{0,\text{init}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, [\mathcal{K}_{\lambda_{L,\text{init}}}]^{-1})$ , et la valeur initiale  $\boldsymbol{\lambda}_{L,\text{init}}$  peut être identifiée par la méthode introduite dans la section Section 6.1.2.3 concernant le cas Gaussien. Alors  $\boldsymbol{\lambda}_{\text{NL,init}}$  est choisi tel que  $(\boldsymbol{\lambda}_{L,\text{init}}, \boldsymbol{\lambda}_{\text{NL,init}})$  est dans  $\mathcal{L}_\mu$ .

A chaque itération de l'algorithme, le calcul de  $\boldsymbol{\lambda}^{i+1}$  étant donné  $\boldsymbol{\lambda}^i$  requière le calcul du gradient et du Hessien pour  $\boldsymbol{\lambda}^i$ . Ces quantités sont estimées en résolvant l'EDSI dont la fonction de densité de probabilité des conditions initiales aléatoires est choisie comme étant la mesure invariante construite pour  $\boldsymbol{\lambda}^{i-1}$  pour lequel des réalisations indépendantes sont connues. Ainsi, lorsque l'algorithme se rapproche de la solution optimale, les réponses transitoire des EDSI deviennent de plus en plus courtes. L'algorithme d'identification des multiplicateurs de Lagrange est résumé dans l'Algorithme 3.

Il est à noter que la mise à jour du vecteur  $\boldsymbol{\lambda}$  est séquentielle mais pour chaque valeur de  $\boldsymbol{\lambda}$ , les  $n_s$  boucles de Monte Carlo peuvent être calculées sur des processeurs parallèles.

---

**Algorithm 3:** Algorithme de calcul des multiplicateurs de Lagrange.

---

**INITIALISATION :**
 $i = 1;$ 
 $\boldsymbol{\lambda}^i = \boldsymbol{\lambda}_{\text{init}};$ 
 $\text{error}(i) = +\infty;$ 
**for**  $\ell = 1, \dots, n_s$  **do**
 $\left[ \begin{array}{l} \mathbf{U}_0^\ell = \mathbf{U}_{0,\text{init}}^\ell; \\ \text{Générer } \mathbf{V}_0^\ell \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, [I_n]); \end{array} \right.$ 
**BOUCLE :**
**while**  $\text{error}(i) > \epsilon$  **do**
**for**  $\ell = 1, \dots, n_s$  **do**
 $\left[ \begin{array}{l} \mathbf{U}^{1,\ell} \leftarrow \mathbf{U}_0^\ell; \\ \mathbf{V}^{1,\ell} \leftarrow \mathbf{V}_0^\ell; \\ \text{Résoudre l'EDSI} \rightarrow (\mathbf{U}^{M,\ell}, \mathbf{V}^{M,\ell}); \\ \mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i}^\ell \leftarrow \mathbf{U}^{M,\ell}; \\ \mathbf{U}_0^\ell \leftarrow \mathbf{U}^{M,\ell}; \\ \mathbf{V}_0^\ell \leftarrow \mathbf{V}^{M,\ell}; \end{array} \right.$ 

 Estimer  $E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i})\} \simeq (1/n_s) \sum_{\ell=1}^{n_s} \mathbf{g}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i}^\ell);$ 

 Estimer  $E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i})\mathbf{g}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i})^T\} \simeq (1/n_s) \sum_{\ell=1}^{n_s} \mathbf{g}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i}^\ell)\mathbf{g}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i}^\ell)^T;$ 

 Estimer  $\nabla\Gamma(\boldsymbol{\lambda}^i) = \mathbf{f} - E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i})\};$ 

 Estimer  $[H(\boldsymbol{\lambda}^i)] = E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i})\mathbf{g}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i})^T\} - E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i})\}E\{\mathbf{g}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}^i})\}^T;$ 

 Estimer  $\text{error}(i+1) = \|\nabla\Gamma(\boldsymbol{\lambda}^i)\| / \|\mathbf{f}\|;$ 
 $\boldsymbol{\lambda}^{i+1} = \boldsymbol{\lambda}^i - [H(\boldsymbol{\lambda}^i)]^{-1} \nabla\Gamma(\boldsymbol{\lambda}^i);$ 
 $i \leftarrow i + 1;$ 


---

## 6.2 Exemple d'informations relatives à un accélérogramme sismique.

Dans cette section, des exemples d'informations relatives à un accélérogramme sismique sont présentés. Bien sûr, la liste n'est pas exhaustive et peut être complétée si nécessaire. Pour chaque type d'information la fonction d'information  $\mathbf{g}(\mathbf{a})$  est spécifiée. De plus, les matrices  $[K_1], \dots, [K_{\mu_L}]$  (pour les fonctions d'information quadratiques) et les gradients  $\nabla_{\mathbf{a}}\{\mathbf{g}_{\text{NL}}(\mathbf{a})\}_j$  pour  $j = 1, \dots, \mu_{\text{NL}}$  sont aussi calculés.

### 6.2.1 Valeur moyenne

L'accélérogramme sismique est modélisé par un processus stochastique centré. Donc, le vecteur  $\mathbf{A}$  doit être centré. Nous avons donc la contrainte suivante

$$E\{\mathbf{A}\} = \mathbf{0}. \quad (6.30)$$

La fonction d'information correspondant à la moyenne est définie par

$$\{\mathbf{g}_{\text{NL}}^{\text{mean}}(\mathbf{a})\}_j = a_j, \quad (6.31)$$

dont le gradient est défini par

$$\{\nabla_{\mathbf{a}}\{\mathbf{g}_{\text{NL}}^{\text{mean}}(\mathbf{a})\}_j\}_i = \delta_{ij}, \quad (6.32)$$

### 6.2.2 Variance des composantes

Cette contrainte permet de spécifier l'enveloppe de l'accélérogramme et donc de fixer la durée de la phase forte. Comme le vecteur aléatoire  $\mathbf{A}$  doit être centré, il est équivalent d'imposer la variance des composantes. Ainsi, pour  $j = \{1, \dots, N\}$ , ces contraintes sont définies par

$$E\{A_j^2\} = \sigma_j^2 < +\infty. \quad (6.33)$$

La fonction d'information s'écrit alors

$$\{\mathbf{g}_{\text{L}}^{\text{var}}(\mathbf{a})\}_j = a_j^2. \quad (6.34)$$

Par conséquent, pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, N\}$ , on a

$$\{\nabla_{\mathbf{a}}\{\mathbf{g}_{\text{L}}^{\text{var}}(\mathbf{a})\}_j\}_i = 2a_j\delta_{ij} \quad , \quad [K_j^{\text{var}}]_{ik} = 2\delta_{kj}\delta_{ij}. \quad (6.35)$$

### 6.2.3 Variance de la vitesse finale et du déplacement final

L'objectif de cette contrainte est de contrôler la vitesse finale et le déplacement final qui sont supposés ici être nuls. Classiquement, un tel contrôle est réalisé par un filtrage *a posteriori* des accélérogrammes (voir par exemple [256, 71]). La méthode que nous proposons permet de prendre en compte cette correction directement dans la construction de la loi de probabilité. Soit  $V(t)$  et  $D(t)$  les processus stochastiques de la vitesse et du déplacement respectivement. En supposant que  $V(0) = D(0) = 0$  presque sûrement, on peut aisément démontrer que

$$V(t) = \int_0^t A(\tau) d\tau, \quad (6.36)$$

$$D(t) = \int_0^t V(\tau) d\tau, \quad (6.37)$$

où  $\{A(t), t \in [0, T]\}$  est le processus stochastique d'accélération. On démontre alors par intégration par parties que

$$D(t) = \int_0^t (t - \tau)A(\tau) d\tau. \quad (6.38)$$

En discrétisant  $V(t)$  et  $D(t)$ , on introduit les variables aléatoires  $I_n^{(1)}(\mathbf{A})$  et  $I_n^{(2)}(\mathbf{A})$  définies par

$$I_n^{(1)}(\mathbf{A}) = V(t_n) \simeq \Delta t \sum_{j=1}^n A_j, \quad (6.39)$$

$$I_n^{(2)}(\mathbf{A}) = D(t_n) \simeq (\Delta t)^2 \sum_{j=1}^n (n-j+1) A_j, \quad (6.40)$$

où  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_N)$ . La nullité de la vitesse finale,  $I_N^{(1)}(\mathbf{A}) = V(t_N)$  et la nullité du déplacement final,  $I_N^{(2)}(\mathbf{A}) = D(t_N)$  sont spécifiés en écrivant  $I_N^{(1)}(\mathbf{A}) = 0$  et  $I_N^{(2)}(\mathbf{A}) = 0$ . Ces propriétés devraient être satisfaites presque sûrement, ce qui signifie que toutes les trajectoires simulées du processus stochastique d'accélération devraient satisfaire cette propriété. Le principe du MaxEnt ne permet pas d'imposer des contraintes presque sûrement. On va donc procéder autrement. Étant donné que  $\mathbf{A}$  est centré, les variables aléatoires  $I_N^{(1)}(\mathbf{A})$  et  $I_N^{(2)}(\mathbf{A})$  sont aussi centrées. On introduit alors les contraintes suivantes

$$E\{(I_N^{(1)}(\mathbf{A}))^2\} = 0 \quad , \quad E\{(I_N^{(2)}(\mathbf{A}))^2\} = 0, \quad (6.41)$$

qui montrent, en utilisant l'inégalité de Tchebychev ([100]), que  $I_N^{(1)}(\mathbf{A})$  et  $I_N^{(2)}(\mathbf{A})$  convergent vers 0 en probabilité.

Les fonctions d'information associées s'écrivent

$$\{\mathbf{g}_L^{\text{int}}(\mathbf{a})\}_1 = (I_N^{(1)}(\mathbf{a}))^2 \quad , \quad \{\mathbf{g}_L^{\text{int}}(\mathbf{a})\}_2 = (I_N^{(2)}(\mathbf{a}))^2, \quad (6.42)$$

qui sont des fonctions quadratiques. Par conséquent, pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, N\}$ , on a

$$\{\nabla_{\mathbf{a}}\{\mathbf{g}_L^{\text{int}}(\mathbf{a})\}_1\}_j = 2(\Delta t)^2 \sum_{k=1}^N a_k. \quad (6.43)$$

$$\{\nabla_{\mathbf{a}}\{\mathbf{g}_L^{\text{int}}(\mathbf{a})\}_2\}_j = 2(\Delta t)^4 (N-j+1) \sum_{k=1}^N (N-k+1) a_k, \quad (6.44)$$

$$[K_1^{\text{int}}]_{ji} = 2(\Delta t)^2 \quad , \quad [K_2^{\text{int}}]_{ji} = 2(\Delta t)^4 (N-j+1)(N-i+1). \quad (6.45)$$

### 6.2.4 Valeur moyenne du SRV

Pour  $0 < \omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$  et  $0 < \xi_{\min} < \xi < \xi_{\max} < 1$ , le SRV aléatoire  $s(\omega, \xi; A)$  du processus stochastique  $\{A(t), t \in [0, T]\}$  est défini par [93]

$$s(\omega, \xi; A) = \omega \max_{t \in [0, T]} |y(t; \omega, \xi, A)|, \quad (6.46)$$

où le processus stochastique  $\{y(t; \omega, \xi, A), t \in [0, T]\}$  est défini par

$$y(t; \omega, \xi, A) = \int_0^t h(t - \tau; \omega, \xi) A(\tau) d\tau, \quad (6.47)$$

où

$$h(t; \omega, \xi) = -\mathbb{1}_{[0, +\infty[}(t) \frac{1}{\omega \sqrt{1 - \xi^2}} \exp\{-\xi \omega t\} \sin\{\omega \sqrt{1 - \xi^2} t\}, \quad (6.48)$$

où  $h(t; \omega, \xi)$  est la réponse impulsionnelle d'un oscillateur à un DDL de fréquence propre  $\omega$  et de taux d'amortissement  $\xi$ . Soit  $\kappa_\omega$  des points d'échantillonnage  $\{\omega_1, \dots, \omega_{\kappa_\omega}\}$  de l'intervalle de fréquence  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ , tels que  $\omega_{\kappa_\omega} < \pi/\Delta t$ . Similairement, soit  $\kappa_\xi$  des points d'échantillonnage  $\{\xi_1, \dots, \xi_{\kappa_\xi}\}$  de l'intervalle du taux d'amortissement  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ . Soit  $\kappa = \kappa_\omega \times \kappa_\xi$ . La discrétisation du SRV introduit le vecteur du SRV aléatoire  $\mathbf{S} = \mathbf{s}(\mathbf{A})$  où  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_\kappa)$  qui est une fonction non-linéaire définie par

$$s_j(\mathbf{a}) = s(\omega, \xi, \mathbf{a}) \quad \text{pour } (\omega, \xi)_j \text{ dans } \{\omega_1, \dots, \omega_{\kappa_\omega}\} \times \{\xi_1, \dots, \xi_{\kappa_\xi}\}, \quad (6.49)$$

où

$$s(\omega, \xi, \mathbf{a}) = \omega \max\{|y_1(\omega, \xi, \mathbf{a})|, \dots, |y_N(\omega, \xi, \mathbf{a})|\} \quad , \quad (6.50)$$

avec

$$y_i(\omega, \xi, \mathbf{a}) = \{[B(\omega, \xi)]\mathbf{a}\}_i, \quad (6.51)$$

et où  $[B(\omega, \xi)]$  est une matrice réelle définie par

$$[B(\omega, \xi)]_{ij} = -\frac{\Delta t}{\omega \sqrt{1 - \xi^2}} \exp\{-(i-j)\xi \omega \Delta t\} \sin\{(i-j)\omega \sqrt{1 - \xi^2} \Delta t\}. \quad (6.52)$$

L'information relative à la valeur moyenne du SRV aléatoire est définie, pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, \kappa\}$ , par

$$E\{s_j(\mathbf{A})\} = \underline{s}_j, \quad (6.53)$$

où  $\underline{\mathbf{s}} = (\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_\kappa)$  est la valeur cible du SRV moyen.

La fonction d'information est définie, pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, \kappa\}$ , par

$$\{\mathbf{g}_{\text{NL}}^{\text{VRS}}(\mathbf{a})\}_j = s_j(\mathbf{a}). \quad (6.54)$$

Pour tout  $j$  et pour  $(\omega \times \xi) = (\omega \times \xi)_j$ , le gradient s'écrit

$$\begin{aligned} \{\nabla_{\mathbf{a}}\{\mathbf{g}_{\text{NL}}^{\text{VRS}}(\mathbf{a})\}_j\}_i &= \{\nabla_{\mathbf{a}}s_j(\mathbf{a})\}_i \\ &= \omega [B(\omega, \xi)]_{qi} \operatorname{sgn}\{y_q(\omega, \xi, \mathbf{a})\}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

où  $\operatorname{sgn}\{y_q(\omega, \xi, \mathbf{a})\}$  est le signe de  $y_q(\omega, \xi, \mathbf{a})$  défini dans l'équation (6.51), et où

$$q = \operatorname{imax}\{|y_1(\omega, \xi, \mathbf{a})|, \dots, |y_N(\omega, \xi, \mathbf{a})|\}, \quad (6.56)$$

où  $\operatorname{imax}$  est une fonction à valeurs dans  $\{1, \dots, N\}$  définie par

$$\operatorname{imax}(x_1, \dots, x_N) = \operatorname{imax}(\mathbf{x}) = \arg \max_{i \in \{1, \dots, N\}} x_i, \quad (6.57)$$

dont la solution est presque sûrement unique [14].

### 6.2.5 Variabilité du SRV aléatoire

La contrainte précédente qui concerne la valeur moyenne du SRV aléatoire ne permet pas de contrôler les fluctuations statistiques du SRV aléatoire autour de sa moyenne. Or ces fluctuations peuvent être imposées par les codes de régulation. Dans cette section, cette variabilité est contrôlée en introduisant une contrainte relative à la probabilité que le SRV aléatoire appartienne à une région délimitée par deux enveloppes données. L'enveloppe supérieure du SRV est définie par le vecteur  $\mathbf{s}^{\text{up}} = (s_1^{\text{up}}, \dots, s_{\kappa}^{\text{up}})$  et l'enveloppe inférieure du SRV est définie par le vecteur  $\mathbf{s}^{\text{low}} = (s_1^{\text{low}}, \dots, s_{\kappa}^{\text{low}})$ . On introduit alors la contrainte suivante

$$P(\{s_1^{\text{low}} < s_1(\mathbf{A}) < s_1^{\text{up}}, \dots, s_{\kappa}^{\text{low}} < s_{\kappa}(\mathbf{A}) < s_{\kappa}^{\text{up}}\}) = p_0, \quad (6.58)$$

qui peut se réécrire

$$E\left\{\prod_{j=1}^{\kappa} \mathbb{1}_{[s_j^{\text{low}}, s_j^{\text{up}}]}(s_j(\mathbf{A}))\right\} = p_0. \quad (6.59)$$

Les fonctions indicatrice  $x \mapsto \mathbb{1}_{[s_j^{\text{low}}, s_j^{\text{up}}]}(x)$  qui ne sont pas différentiables sont régularisées en introduisant l'approximation  $x \mapsto \mathbb{1}_{[s_j^{\text{low}}, s_j^{\text{up}}]}^{\text{reg}}(x)$  définie par

$$\mathbb{1}_{[s_j^{\text{low}}, s_j^{\text{up}}]}^{\text{reg}}(x) = \frac{1}{2} \left( \tanh\left(\frac{x - s_j^{\text{low}}}{\epsilon}\right) - \tanh\left(\frac{x - s_j^{\text{up}}}{\epsilon}\right) \right), \quad (6.60)$$

avec  $0 < \epsilon \ll 1$ , pour laquelle la dérivée par rapport à  $x$ , notée  $\delta^{\text{reg}}(x)$ , est telle que

$$\delta^{\text{reg}}(x) = \frac{d}{dx} \mathbb{1}_{[s_j^{\text{low}}, s_j^{\text{up}}]}^{\text{reg}}(x) = \frac{1}{2\epsilon} \left( \tanh^2\left(\frac{x - s_j^{\text{up}}}{\epsilon}\right) - \tanh^2\left(\frac{x - s_j^{\text{low}}}{\epsilon}\right) \right). \quad (6.61)$$

Ainsi, la contrainte définie par l'équation (6.59) est approchée par

$$E\left\{\prod_{j=1}^{\kappa} \mathbb{1}_{[s_j^{\text{low}}, s_j^{\text{up}}]}^{\text{reg}}(s_j(\mathbf{A}))\right\} = p_0. \quad (6.62)$$

La fonction d'information est définie par

$$g_{\text{NL}}^{\text{VRS-ENV}}(\mathbf{a}) = \prod_{j=1}^{\kappa} \mathbb{1}_{[s_j^{\text{low}}, s_j^{\text{up}}]}^{\text{reg}}(s_j(\mathbf{a})), \quad (6.63)$$

et son gradient s'écrit

$$\{\nabla_{\mathbf{a}} g_{\text{NL}}^{\text{VRS-ENV}}(\mathbf{a})\}_i = g_{\text{NL}}^{\text{VRS-ENV}}(\mathbf{a}) \sum_{j=1}^{\kappa} \{\nabla_{\mathbf{a}} s_j(\mathbf{a})\}_i \frac{\delta^{\text{reg}}(s_j(\mathbf{a}))}{\mathbb{1}_{[s_j^{\text{low}}, s_j^{\text{up}}]}^{\text{reg}}(s_j(\mathbf{a}))}, \quad (6.64)$$

où  $\{\nabla_{\mathbf{a}} s_j(\mathbf{a})\}_i$  est défini par l'équation (6.55).

### 6.2.6 Valeur moyenne pour le PGA aléatoire et valeur moyenne pour le PGV aléatoire.

Le PGA caractérise l'amplitude maximale de l'accélération. Le PGA aléatoire associé au processus stochastique  $\{A(t), t \in [0, T]\}$ , est défini par

$$\text{PGA}(A) = \max_{t \in [0, T]} |A(t)|. \quad (6.65)$$

Dans les codes de régulation, une valeur nominale du PGA est utilisée pour construire le SRV. Cependant, même si le SRV moyen des accélérogrammes simulés approche parfaitement le SRV cible, la valeur moyenne du PGA des accélérogrammes simulés ne correspond pas forcément à la valeur nominale du PGA. Dans cette section, cette correspondance est forcée en introduisant la contrainte

$$E\{\max\{|A_1|, \dots, |A_N|\}\} = \underline{\text{PGA}}, \quad (6.66)$$

où  $\underline{\text{PGA}}$  est la valeur cible du PGA moyen.

Concernant le PGV aléatoire, qui est défini par  $\text{PGV}(A) = \max\{|V(t)|, t \in [0, T]\}$ , sa valeur moyenne est contrôlée en imposant la contrainte suivante

$$E\{\max\{|I_1^{(1)}(\mathbf{A})|, \dots, |I_N^{(1)}(\mathbf{A})|\}\} = \underline{\text{PGV}}, \quad (6.67)$$

où  $\underline{\text{PGV}}$  est la valeur cible du PGV moyen et où  $I_j^{(1)}(\mathbf{A})$  est définie dans l'équation (6.39).

La fonction d'information pour le PGA est donc

$$g_{\text{NL}}^{\text{PGA}}(\mathbf{a}) = \max\{|a_1|, \dots, |a_N|\}, \quad (6.68)$$

et son gradient s'écrit

$$\{\nabla_{\mathbf{a}} g_{\text{NL}}^{\text{PGA}}(\mathbf{a})\}_i = \delta_{iq} \operatorname{sgn}\{a_q\}, \quad (6.69)$$

où  $q = \operatorname{imax}\{\mathbf{a}\}$ , où la fonction  $\mathbf{x} \mapsto \operatorname{imax}(\mathbf{x})$  est définie dans l'équation (6.57).  
Pour le PGV, la fonction d'information est définie par

$$g_{\text{NL}}^{\text{PGV}}(\mathbf{a}) = \max\{|I_1^{(1)}(\mathbf{a})|, \dots, |I_N^{(1)}(\mathbf{a})|\}, \quad (6.70)$$

dont le gradient d'écrit

$$\{\nabla_{\mathbf{a}} g_{\text{NL}}^{\text{PGV}}(\mathbf{a})\}_i = \operatorname{sgn}\{I_q^{(1)}(\mathbf{a})\} \mathbb{1}_{[1,q]}(i), \quad (6.71)$$

où  $q = \operatorname{imax}\{|I_1^{(1)}(\mathbf{a})|, \dots, |I_N^{(1)}(\mathbf{a})|\}$ .

### 6.2.7 Valeur moyenne du CAV aléatoire

Le CAV aléatoire ([112]) est défini comme l'intégrale de la valeur absolue de l'accélération aléatoire sur l'intervalle  $[0, T]$ ,

$$\operatorname{CAV}(A) = \int_0^T |A(\tau)| d\tau. \quad (6.72)$$

Le CAV est utilisé pour l'évaluation des risques sismiques des réacteurs nucléaires. La discrétisation de l'équation (6.72), conduit à la contrainte suivante

$$E\left\{\Delta t \sum_{j=1}^N |A_j|\right\} = \underline{\operatorname{CAV}}, \quad (6.73)$$

où  $\underline{\operatorname{CAV}}$  est la valeur cible de la valeur moyenne du CAV aléatoire.  
La fonction d'information correspondante est

$$g_{\text{NL}}^{\text{CAV}}(\mathbf{a}) = \Delta t \sum_{j=1}^N |a_j|, \quad (6.74)$$

dont le gradient s'écrit

$$\{\nabla_{\mathbf{a}} g_{\text{NL}}^{\text{CAV}}(\mathbf{a})\}_i = \Delta t \operatorname{sgn}\{a_i\}. \quad (6.75)$$

### 6.2.8 Valeur moyenne de l'AI aléatoire

L'AI aléatoire est définie (à une constante multiplicative près) comme l'intégrale du carré de l'accélération aléatoire sur l'intervalle  $[0, T]$ ,

$$\operatorname{AI}(A) = \frac{\pi}{2g} \int_0^T A^2(\tau) d\tau. \quad (6.76)$$



où  $g$  est l'accélération de la pesanteur. La discrétisation de l'équation (6.76), conduit à la contrainte suivante,

$$E\left\{\frac{\pi \Delta t}{2g} \sum_{j=1}^N A_j^2\right\} = \underline{\text{AI}}, \quad (6.77)$$

où  $\underline{\text{AI}}$  est la valeur cible de la valeur moyenne de l'AI aléatoire.

La fonction d'information s'écrit

$$g_L^{\text{AI}}(\mathbf{a}) = \frac{\pi \Delta t}{2g} \sum_{j=1}^N a_j^2, \quad (6.78)$$

qui est une fonction quadratique. Pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, N\}$ , on a

$$\{\nabla_{\mathbf{a}} g_L^{\text{AI}}(\mathbf{a})\}_i = \frac{\pi \Delta t}{g} a_i, \quad [K^{\text{AI}}]_{ij} = \frac{\pi \Delta t}{g} \delta_{ij}. \quad (6.79)$$

**Remarque 6.1 :** La contrainte définie par l'équation (6.77) relative à l'AI est une combinaison linéaire des contraintes définies par l'équation (6.33) relative à la variance des composantes. Par conséquent, si la contrainte relative à la variance a déjà été prise en compte, la contrainte relative à l'AI est redondante et ne pas être prise en compte afin de garantir l'unicité de la solution construite le principe du MaxEnt. D'ailleurs, habituellement, l'AI est utilisée pour calibrer l'enveloppe de l'accélérogramme.

## 6.3 Applications

Dans cette section, différents jeux d'information disponible sont étudiés. Le premier cas correspond à des contraintes imposées sur la valeur moyenne, la variance des composantes, la vitesse finale et le déplacement final. Les autres cas correspondent à des ajouts successifs de contraintes par rapport au premier cas. La durée de l'accélérogramme est  $T = 20$  s. Le processus stochastique d'accélération est échantillonné en  $N = 1600$  pas de temps. La dimension stochastique de ce problème est donc très élevée.

### 6.3.1 Cas 1. Contraintes : valeur moyenne, variance des composantes, vitesse finale et déplacement final

Ce cas conduit à un loi Gaussienne pour l'accélérogramme. Pour ce cas, le SRV moyen n'est pas contrôlé et n'est donc pas utilisable pour une évaluation sismique. Il est cependant utile pour initialiser les valeurs des multiplicateurs de Lagrange pour des cas plus compliqués conduisant à une loi de probabilité non Gaussienne. L'écart-type cible des composantes est tracé sur la figure 6.1. L'algorithme de la Section 6.2.2 est appliqué avec 30 itérations. La figure 6.2 montre deux réalisations indépendantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{A}_{\lambda_{\text{sol}}}$ . Les trajectoires correspondantes pour la vitesse et le déplacement sont tracées sur

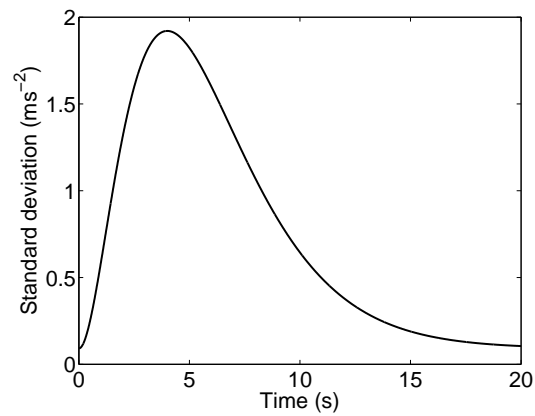


FIGURE 6.1 – Cas 1 : Écart-type cible des composantes.

les figures 6.3 et 6.4. Comme prévu, les vitesses finales et déplacements finaux sont nuls.

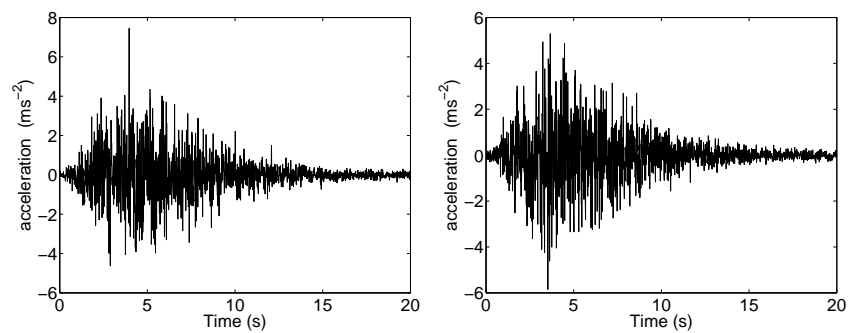


FIGURE 6.2 – Cas 1 : Deux réalisations pour l'accélération stochastique.

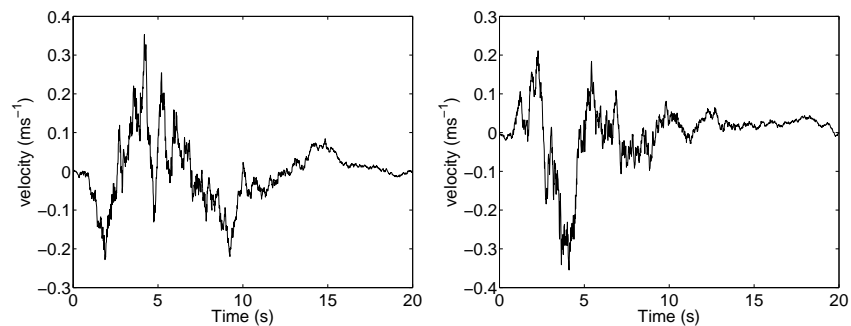


FIGURE 6.3 – Cas 1 : Deux réalisations pour la vitesse stochastique.

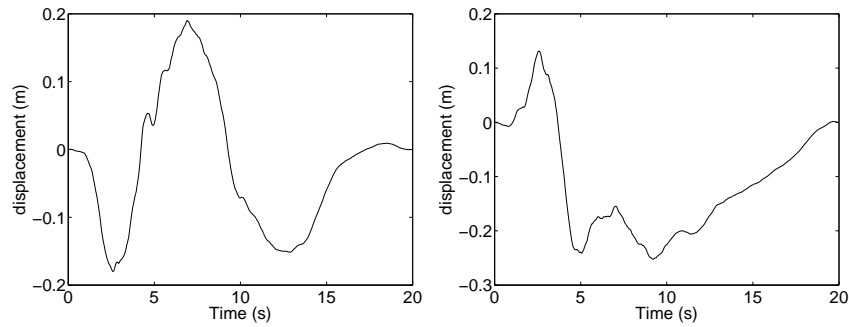


FIGURE 6.4 – Cas 1 : Deux réalisations pour le déplacement stochastique.

### 6.3.2 Cas 2. Contraintes : Cas 1 et SRV moyen

Le SRV cible est tracé sur le figure 6.5. Il a été construit suivant l'Eurocode 8 pour un sol de type A et un PGA valant  $5 \text{ ms}^{-2}$ . La figure 6.6 compare le SRV cible de ce Cas 2 au SRV moyen correspondant au Cas 1 (pour lequel la contrainte sur SRV n'avait pas été prise en compte). On peut voir que pour le Cas 1, le SRV moyen est loin de la cible.

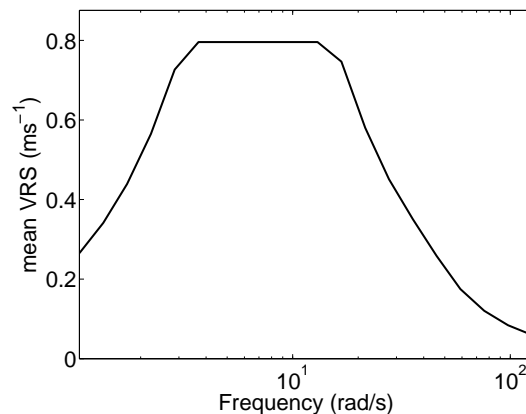


FIGURE 6.5 – SRV cible.

Pour l'EDSI correspondant à ce Cas 2 pour lequel le SRV moyen est imposé,  $M = 600$  pas de calcul sont utilisés. A chaque itération,  $n_s = 900$  simulations de Monte-Carlo sont effectuées. La figure 6.7 compare l'écart type estimé des composantes à la valeur cible. La figure 6.8 compare le SRV moyen estimé au SRV cible. Les figures 6.7 et 6.8 montrent une bonne correspondance entre valeurs estimées et valeurs pour la variance et le SRV moyen.

### 6.3.3 Cas 3. Contraintes : Cas 2 et variabilité du SRV

L'enveloppe inférieure est définie par  $\mathbf{s}^{\text{low}} = 0.5 \times \underline{\mathbf{s}}$  et  $\mathbf{s}^{\text{up}}$  et l'enveloppe supérieure est définie par  $\mathbf{s}^{\text{up}} = 1.5 \times \underline{\mathbf{s}}$ . La figure 6.9 montre ces deux enveloppes et 100 trajectoires du SRV aléatoires correspondant au Cas 2. On peut voir sur cette figure une forte fluctuation

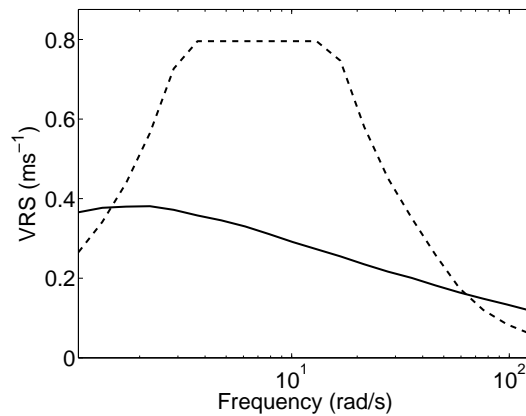


FIGURE 6.6 – SRV moyen : Cible (trait pointillé) et estimation pour le Cas 1 (trait plein).

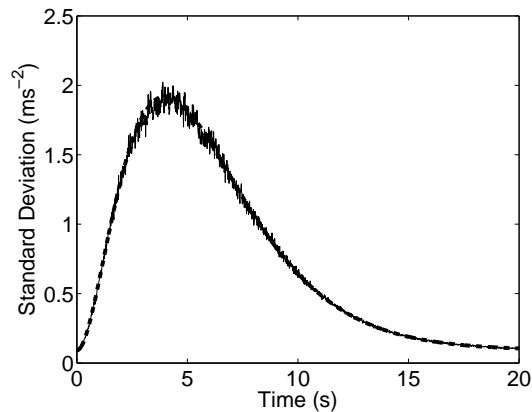


FIGURE 6.7 – Écart-type pour le Cas 2 : Cible (trait pointillé) et estimation (trait plein).

du SRV aléatoire autour de sa moyenne et beaucoup de trajectoires sortent de la région délimitée par les deux enveloppes. Pour ce Cas 2 toujours, la probabilité pour le SRV aléatoire d'appartenir à cette région est estimée par Monte Carlo . La valeur estimée est  $p_0 = 4.09 \times 10^{-2}$ . Pour le Cas 3 présent, cette probabilité est imposée avec  $p_0 = 9.0 \times 10^{-2}$  et  $\epsilon = 0.07$ . La figure 6.10 montre 100 trajectoires du VRS aléatoire. En comparaison à la figure 6.9, on peut voir que les fluctuations statistiques autour du SRV moyen ont beaucoup baissé et que les trajectoires sont désormais entre les deux enveloppes. On estime  $E\{g_{NL}^{\text{VRS-ENV}}(\mathbf{A})\} = 8.99 \times 10^{-2}$ , ce qui est très proche de la valeur cible  $9.0 \times 10^{-2}$ .

### 6.3.4 Cas 4. Contraintes : Cas 3 et PGA moyen, PGV moyen et CAV moyen

Pour ce dernier cas, les valeurs moyennes pour le PGA, le PGV et le CAV sont aussi contrôlées. Le tableau 6.1 résume les résultats. On peut voir une bonne correspondance

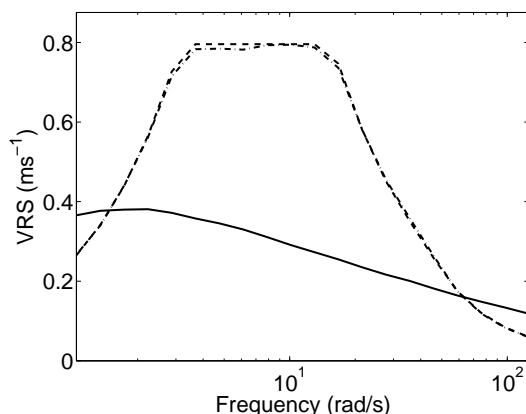


FIGURE 6.8 – VRS moyen : Cible (trait pointillé for Case 2, estimation pour le Cas 1 (trait plein), estimation pour le Cas 2 (trait mixte).

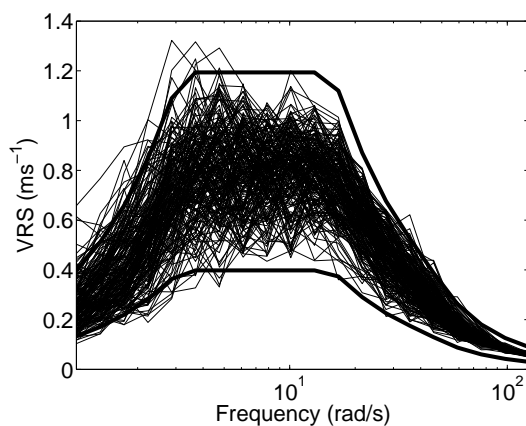


FIGURE 6.9 – SRV aléatoire sans contraintes sur la variabilité du SRV (Cas 2) : 100 trajectoires (traits fins), enveloppes inférieures et supérieures (traits épais).

entre les valeurs estimées et les valeurs cible. La figure 6.11 montre deux réalisations du vecteur aléatoire  $\mathbf{A}_{\lambda_{\text{sol}}}$ . Les vitesses et déplacements correspondant sont tracés sur les figures 6.12 et 6.13. On peut voir que les vitesses finales et les déplacements finaux sont toujours nuls. La figure 6.14 compare les écarts-types estimés aux écarts-type cible. La figure 6.15 compare le SRV moyen estimé au SRV cible et montre 100 trajectoires du SRV aléatoire. La probabilité d'être entre les deux enveloppes est estimée à  $E\{g_{\text{NL}}^{\text{VRS-ENV}}(\mathbf{A})\} = 8.97 \times 10^{-2}$  (la valeur cible est  $9.0 \times 10^{-2}$ ). On peut voir sur ces figures que les correspondances entre valeurs estimées et valeurs cible sont toujours aussi bonnes.

**Remarque 6.2 :** Les résultats pour ce dernier cas montre de bonnes correspondances entre valeurs estimées et valeurs cible. Cependant les trajectoires générées pour l'accélération présentent des écarts avec les accélérogrammes sismiques naturels. En effet, en général, la phase de croissance de l'accélérogramme doit avoir des contributions hautes fréquences

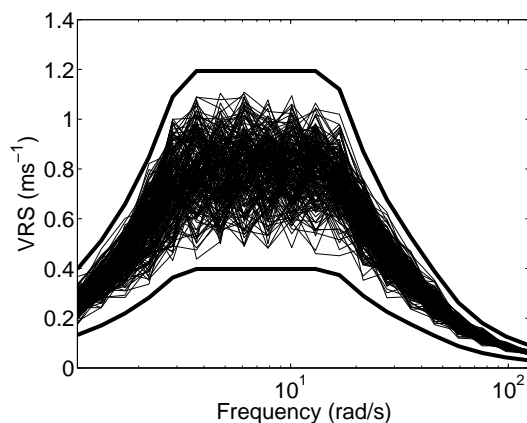


FIGURE 6.10 – SRV aléatoire pour le Cas 3 : 100 trajectoires (traits fins), enveloppes inférieures et supérieures (traits épais).

TABLE 6.1 – Résumé des Cas 1-4 : PGA moyen, PGV moyen et CAV moyen, valeur estimée et valeur cible.

Contrainte	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cible
$p_0$	$1.25 \times 10^{-7}$	0.041	0.0899	0.0897	0.09
PGA moyen ( $\text{ms}^{-2}$ )	5.68	6.12	6.30	4.98	5.00
PGV moyen ( $\text{ms}^{-1}$ )	0.34	0.55	0.56	0.45	0.45
CAV moyen ( $\text{ms}^{-1}$ )	12.06	11.87	11.97	13.04	13.0

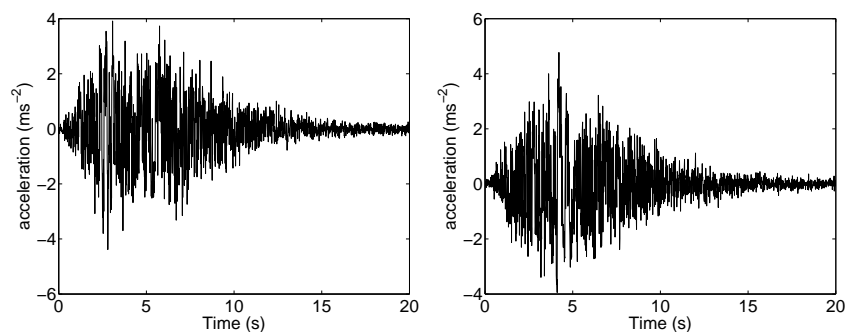


FIGURE 6.11 – Cas 4 : Deux réalisations pour l'accélération stochastique.

élevées et ces contributions doivent ensuite baisser [257]. Dans notre cas, le contenu fréquentiel de l'accélération est imposé par un SRV de type Eurocode qui ne dépend pas du temps. Pour avoir un contenu fréquentiel qui dépend du temps, une contrainte adaptée doit remplacer l'actuelle contrainte relative à la moyenne du SRV.

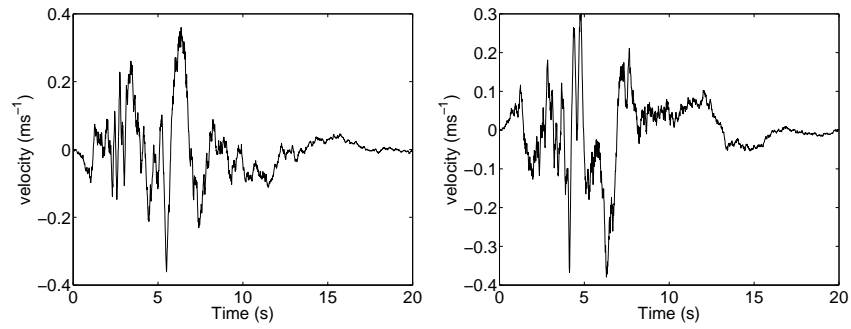


FIGURE 6.12 – Cas 4 : Deux réalisations pour la vitesse stochastique.

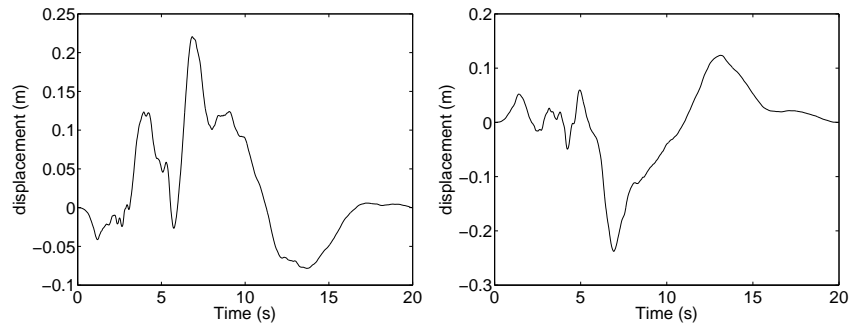


FIGURE 6.13 – Cas 4 : Deux réalisations pour le déplacement stochastique.

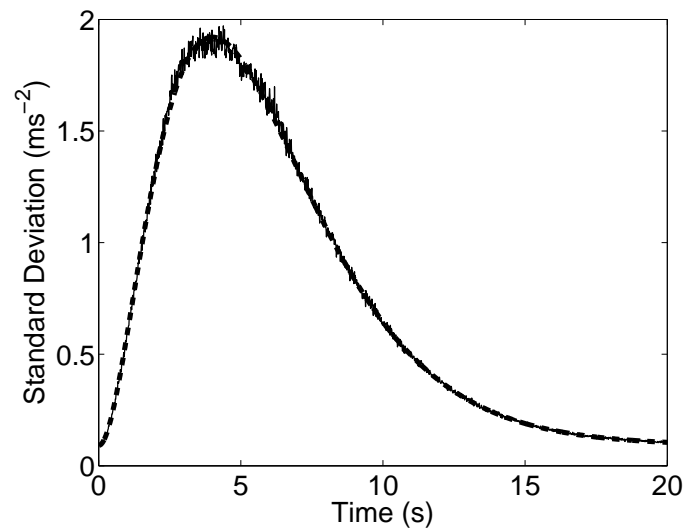


FIGURE 6.14 – Variance : Cible (trait pointillé) et estimation (trait plein).

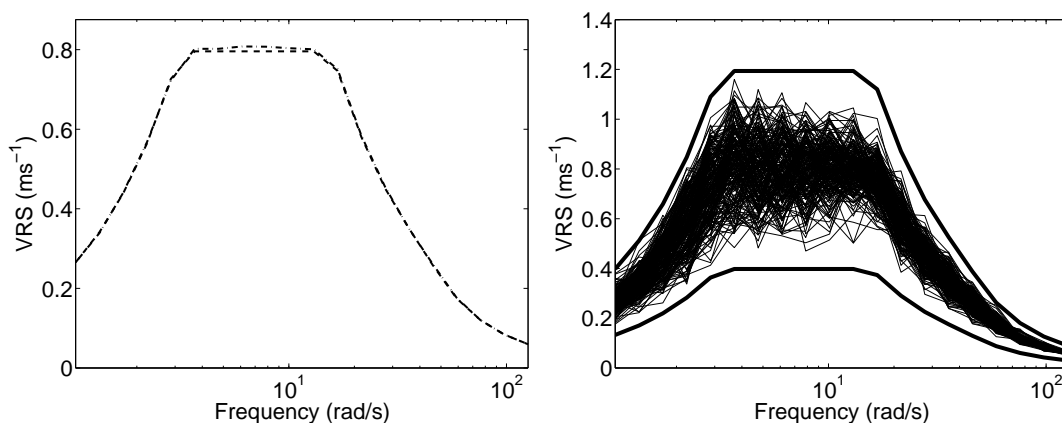


FIGURE 6.15 – SRV aléatoire pour le Cas 4. Gauche : Moyenne ciblée (trait pointillé) et moyenne estimée (trait mixte). Droite : 100 trajectoires (traits fins), enveloppes inférieurs et supérieurs (traits épais).

## 6.4 Conclusions.

Dans ce chapitre une nouvelle méthode pour la génération d'accélérogrammes compatibles avec une large gamme de spécifications a été présentée. Dans cette méthode, les spécifications sont directement imposées dans la construction de la loi de probabilité de l'accélérogramme aléatoire et donc les trajectoires générées ne nécessitent pas de corrections *a posteriori* afin qu'elles vérifient les spécifications. Pour générer ces trajectoires, un nouvel algorithme de calcul des multiplicateurs de Lagrange adapté à la grande dimension stochastique du problème a été mis en place. La méthode proposée est souple et permet si nécessaire d'inclure d'autres contraintes en plus de celles développées ici. Les exemples développés montrent une bonne précision de la méthode malgré la présence de contraintes fortement non linéaires (comme le SRV).

D'un point de vue ingénierie pour lequel le respect des spécifications est de première importance, la méthode proposée peut directement être utilisée pour simuler des trajectoires d'accélérogrammes et effectuer l'analyse sismique dynamique d'une structure non linéaire.

Cependant, d'un point de vue purement physique, les trajectoires générées pourraient être améliorées en introduisant des contraintes additionnelles relatives à la dépendance temporelle du contenu fréquentiel des accélérogrammes.

## 6.5 Perspectives.

Les perspectives à ces travaux sont multiples :

(1) La première déjà évoquée ci-dessus concerne l'ajout de contraintes relatives à la dépendance temporelle du spectre imposé en sortant donc du cadre Eurocode 8. Une manière de procéder serait d'imposer un SRV instantané  $s(t, \omega, \xi, \mathbf{A})$ . L'équation reliant l'accélération aléatoire au SRV instantané pourrait être construite en utilisant



une représentation adaptée du processus stochastique  $\{A(t), t \in [0, T]\}$ , telle qu'une représentation en ondelettes (voir par exemple [127]).

(2) Une deuxième perspective concerne la prise en compte d'une variabilité spatiale de l'accélérogramme aléatoire afin de construire un chargement pour les structures multi-supportées.

(3) Une troisième perspective serait de prendre en compte des statistiques plus avancées sur les PGA, PGV, CAV et AI comme les variances ou les corrélations entre ces grandeurs aléatoires.

(4) Enfin une quatrième perspective concerne l'application des accélérogrammes générés à une structure réelle non linéaire. Il serait notamment intéressant de comparer les réponses ainsi obtenues aux réponses obtenues avec des accélérogrammes aléatoires Gaussiens classiques.

# Chapitre 7

## Conclusions et perspectives.

### 7.1 Bilan des recherches.

#### Modélisation des incertitudes :

Pour les deux types de systèmes étudiés (systèmes multicorps et solides déformables), les incertitudes ont été modélisées par une approche probabiliste. A chaque fois, le principe du MaxEnt a été privilégié pour la construction des modèles probabilistes. En effet cet outil offre un cadre qui permet de construire les lois de probabilité *a priori* des paramètres incertains de manière unique en prenant en compte l'information disponible et donc les propriétés physiques de ces paramètres. Au travers des exemples industriels et numériques présentés dans ce mémoire, cette approche de modélisation a permis de construire des modèles d'incertitude à faible paramétrage et donc facilement identifiables avec le peu de mesures expérimentales généralement disponibles pour un système réel. Cette démarche permet d'obtenir des lois de probabilité *a priori* assez proche de la réalité et peuvent éventuellement ensuite servir à construire des lois de probabilité *a posteriori* par actualisation Bayésienne si beaucoup de mesures expérimentales sont disponibles. Pour les systèmes déformables, cette approche permet aussi de construire une modélisation probabiliste des incertitudes de modélisation au niveau des opérateurs du modèle.

#### Propagation des incertitudes :

En ce qui concerne les méthodes de résolution des équations stochastiques, la méthode de simulation de Monte Carlo a été privilégiée dans ces travaux car elle présente deux avantages majeures : (1) elle est non intrusive vis-à-vis des logiciels commerciaux et (2) sa vitesse de convergence vis-à-vis du nombre de simulations est indépendante de la dimension stochastique. Cette méthode reste à ce jour, la plus efficace en grande dimension stochastique. Concernant les générateurs de réalisations indépendantes nécessaires à l'utilisation de la méthode de Monte Carlo, le dernier chapitre de ce mémoire a proposé une méthode permettant de générer des réalisations indépendantes de vecteurs aléatoires construits par le MaxEnt. Les exemples présentés ont mis en évidence l'efficacité de cette

méthode en grande dimension stochastique et en présence de contraintes fortement non linéaires.

### **Réduction de modèle :**

Les coûts de calculs de la méthode de Monte Carlo étant assez élevés pour les gros modèles, il est nécessaire de précéder la construction du modèle stochastique d'une réduction de modèle efficace. Pour les structures déformables à faible densité modale, la méthode d'analyse modale permet de construire un modèle réduit de faible dimension et prédictif en BF. Pour les structures déformables à forte densité modale, nous avons proposé une nouvelle méthodologie de réduction basée sur une séparation global/local de l'espace des déplacements admissibles. En plus d'une réduction de la dimension, cette méthode permet de construire une modélisation séparée des incertitudes pour les contributions globales et les contributions locales.

### **Identification des modèles probabilistes :**

Les modèles probabilistes *a priori* d'incertitudes construits par le principe du MaxEnt sont à chaque fois identifiés par la méthode du maximum de vraisemblance en utilisant des mesures expérimentales. Cette approche a deux avantages : (1) elle permet de trouver une solution au problème d'identification même lorsque le nombre de spécimens mesurés est faible, ce qui est souvent le cas dans l'industrie et (2) elle permet de prendre en compte des données qui sont différentes d'un spécimen à l'autre. Cette méthode a été appliquée avec succès à l'identification de modèles d'incertitude de voiture, de moteur EAS de réacteur nucléaire, de pompe de centrale thermique avec à chaque fois peu de données expérimentales. Les défauts de cette méthode sont : (1) la fonction de vraisemblance n'étant pas convexe, la recherche de l'optimum doit utiliser un algorithme de recherche aléatoire (et donc sans garantie sur la solution obtenue) et (2) certaines configurations non mesurées peuvent ne pas être prédites par le modèle probabiliste identifié ; il est donc conseillé de procéder à une validation croisée du modèle identifié pour vérifier la robustesse de la solution obtenue par le maximum de vraisemblance.

### **Transfert des méthodes vers l'industrie :**

Certaines des méthodes développées dans ce mémoire ont été adoptées par nos partenaires industriels qui ont implémenté ces méthodes dans leurs logiciels internes. La non-intrusion des méthodes proposées a largement facilité ce transfert. L'utilisation des méthodes de quantification des incertitudes dans l'industrie devrait connaître un bon dans les prochaines années grâce (1) à l'amélioration des performances des machines à disposition des ingénieurs qui rend la méthode de simulation de Monte Carlo plus accessible et (2) à la volonté des industriels de réduire le plus possible le nombre d'essais expérimentaux. De plus, il est maintenant clairement établi que les incertitudes sur les données d'entrée peuvent induire des fluctuations importantes sur les quantités d'intérêts (notamment en analyse MF pour les structures déformables). Dans ce contexte, le dimensionnement des structures avec des méthodes déterministes n'est plus adapté et les méthodes de conception robuste sont de plus en plus plébiscitées par l'industrie.

## 7.2 Perspectives.

### **Systèmes multicorps flexibles :**

Concernant la quantification des incertitudes dans les systèmes dynamiques multicorps, plusieurs chantiers sont en cours. Le premier concerne la prise en compte des incertitudes sur les liaisons cinématiques entre les solides. Ces incertitudes sont induites par les tolérances de fabrication. Le deuxième concerne les méthodes de conception robuste en utilisant les modèles probabilistes d'incertitudes développés dans ce mémoire.

Concernant les systèmes dynamiques multicorps flexibles, l'ajout de coordonnées élastiques aux coordonnées globales introduit des incertitudes de modélisation en plus des incertitudes de paramètres. Ces systèmes dynamiques constituent un point de rencontre entre les systèmes multicorps rigides et les structures déformables. Ainsi, les méthodes de quantification des incertitudes pour les systèmes multicorps flexibles s'inspireront des méthodes de quantification des incertitudes élaborées pour chacun de ces deux types de système dynamique.

### **Incertitudes expérimentales :**

Concernant l'identification des modèles probabilistes des incertitudes, les incertitudes liées aux erreurs de mesure n'ont pas été prises en compte dans les méthodes proposées dans ce mémoire. Une méthode classique pour la prise en compte de ces erreurs de mesure consiste à ajouter un bruit de mesure en sortie du modèle probabiliste (voir par exemple [5, 254, 59]). Ce bruit est en général modélisé par un vecteur aléatoire centré Gaussien de matrice de covariance donnée. Il serait intéressant de raffiner cette modélisation des erreurs de mesure en construisant des modèles probabilistes pour les incertitudes relatives (1) à l'instrumentation des configurations expérimentales (emplacements et orientations des capteurs, emplacements, orientations et intensités des sources d'excitation) (2), à la chaîne d'acquisition des données des capteurs et (3) au traitement des données mesurées. Ces perspectives seront analysées dans le cadre du projet FUI SICODYN.

### **Dynamique MF des structures déformables :**

Pour les structures déformables, le problème relatif à la prévision robuste du comportement MF des structures complexes n'est pas encore complètement résolu. Les moyens informatiques permettent aujourd'hui de modéliser finement une structure afin de capturer les petites longueurs d'onde spatiales avec une bonne précision. Le problème actuellement n'est pas lié à la capture des petites longueurs d'onde mais à (1) la prise en compte de la forte sensibilité des contributions locales aux incertitudes de paramètres et de modélisation et (2) à l'apparition d'effets viscoélastiques importants lorsque l'on monte en fréquence. La méthode de séparation global/local que nous avons proposée offre un cadre intéressant pour contrôler les incertitudes liées aux contributions locales. Cette méthode pourrait être améliorée en utilisant des modèles d'amortissement viscoélastique avancés et adaptés à l'analyse MF (voir par exemple [130, 201, 108, 223, 163, 106, 255]).



# Bibliographie

## Production scientifique

### Chapitres d'ouvrages

- [1] A. Batou, C. Soize, Random dynamical response of a multibody system with uncertain rigid bodies, in Computational Methods in Stochastic Dynamics - Vol. 2, Springer, Chapter 1, Pages : 1-14, 2012.

### Publications acceptées dans des revues avec comité de lecture

- [2] C. Soize, A. Batou, Identification of stochastic loads applied to a non-linear dynamical system using an uncertain computational model, *Mathematical Problems in Engineering*, (Article number 181548), 1-16, 2008.
- [3] A. Batou, C. Soize, Experimental identification of stochastic processes using an uncertain computational non-linear dynamical model, *Journal of Physics : Conference Series* 135, (1) 012014.
- [4] A. Batou, C. Soize, Identification of stochastic loads applied to a non-linear dynamical system using an uncertain computational model and experimental responses, *Computational Mechanics*, 43, 559-571, 2009.
- [5] A. Batou, C. Soize, Experimental identification of turbulent fluid forces applied to fuel assemblies using an uncertain model and fretting-wear estimation, *Mechanical systems and Signal Processing*, 23, 2141-2153, 2009.
- [6] A. Batou, C. Soize, M. Corus, Experimental identification of an uncertain computational dynamical model representing a family of structures, *Computer and Structures*, 89(13-14), 1440-1448, 2011.
- [7] C. Soize, A. Batou, Stochastic reduced-order model in low-frequency dynamics in presence of numerous local elastic modes, *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 78(6), 061003, 2011.
- [8] A. Batou, C. Soize, Rigid multibody system dynamics with uncertain rigid bodies, *Multibody System Dynamics*, 27(3), 285-319, 2012.

- [9] A. Batou, C. Soize, N. Brie, Reduced-order computational model in nonlinear structural dynamics for structures having numerous local elastic modes in the low-frequency range. Application to fuel assemblies, *Nuclear Engineering and Design*, 262, 276-284, 2013.
- [10] A. Batou, C. Soize, Uncertainty quantification in low-frequency dynamics of complex beam-like structures having a high-modal density, *International Journal for Uncertainty Quantification*, 1(1), 431-451, 2013.
- [11] A. Arnoux, A. Batou, C. Soize, L. Gagliardini, Stochastic reduced order computational model of structures having numerous local elastic modes in low frequency dynamics, *Journal of Sound and Vibration*, 332, 3667-3680, 2013.
- [12] A. Batou, C. Soize, Stochastic modeling and identification of an uncertain computational dynamical model with random fields properties and model uncertainties, *Archive of Applied Mechanics*, 83(6), 831-848, 2013.
- [13] A. Arnoux, C. Soize, A. Batou, L. Gagliardini, Reduced-order computational model for low-frequency dynamics of automobiles, *Advances in Mechanical Engineering*, (Article ID 310362), 1-12, 2013.
- [14] A. Batou, C. Soize, Calculation of Lagrange multipliers in the construction of maximum entropy distributions in high stochastic dimension, *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 1(1), 431-451, 2013.
- [15] A. Batou, C. Soize, Generation of accelerograms compatible with design specifications using information theory, *Bulletin of Earthquake Engineering*, online, 1-31, 2013.
- [16] A. Batou, T.G. Ritto, R. Sampaio, Entropy propagation analysis in stochastic structural dynamics : Application to a beam with uncertain cross sectional area, *Computational Mechanics*, *accepted for publication*, 2014.

**Publications acceptées dans des revues non-référencées  
avec comité de lecture**

- [17] V.E.D. Sacramento, R. Sampaio, T.G. Ritto, A. Batou, Integrity of an offshore structure subjected to waves : A stochastic analysis, *Mecànica Computacional*, 12, 747-761, 2013.

**Publications en review ou en préparation**

- [18] A. Batou, C. Soize, S. Audebert, Identification of a stochastic computational model using experimental modal data, *Mechanical systems and Signal Processing*, *under review*, 2014.
- [19] A. Batou, C.K. Choi, C. Soize, H.H. Yoo, Robust design in flexible multibody dynamics, *in preparation*, 2014.

- [20] O. Ezvan, A. Batou, C. Soize, A global/local approach for the stochastic dynamical analysis of complexe structures in the Low- and Medium-Frequency range, *in preparation*, 2014.
- [21] O. Ezvan, A. Batou, C. Soize, A multiscale approach for the dynamical analysis of complexe structures in a large frequency band, *in preparation*, 2014.

#### Actes de congrès avec comité de lecture

- [22] A.Batou, C.Soize, S.Cambier, Dynamique stochastique non linéaire de deux systèmes dynamiques incertains couplés, 8-ème colloque National en Calcul des Structures, Giens, 21 au 25 mai 2007.
- [23] A.Batou, C.Soize, Nonlinear stochastic dynamics of two coupled uncertain dynamical systems, COMPDYN 2007, Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Rethymno, Greece, June 13-15, 2007.
- [24] A.Batou, C.Soize, Experimental identification of stochastic processes using an uncertain computational non-linear dynamical model, ICIP2008, 6th Int. Conf. on Inverse Problems in Engineering.Dourdan, France - June 15-19, 2008.
- [25] A. Batou, C. Soize, I. Zentner, E. de Rocquigny, Uncertain Non-Linear Dynamical System Submitted to Uncertain Stochastic Loads, EUROODYN2008, European Conference on Structural Dynamics, Southampton, July 6-9, 2008.
- [26] A. Batou, C. Soize, Experimental identification of stochastic loads using a nonlinear dynamical system coupled with an uncertain linear system, Coupled problems 2009, International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering, Ischia Island, Italy, 8-10 June 2009.
- [27] A. Batou, C. Soize, Experimental identification of turbulent fluid forces applied to fuel assemblies using an uncertain model and estimation of the fretting-wear, COMPDYN 2009, Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Island of Rhodes, Greece, June 22-24, 2009.
- [28] A. Batou, C. Soize, Stochastic reduced-order model in low-frequency dynamics in presence of numerous local elastic modes, RASD 2010, Recent Advances in Structural Dynamics, Southampton, England, July 12-14, 2010.
- [29] A. Batou, C. Soize, Random dynamical response of a multibody system with uncertain rigid bodies, COMPDYN 2011, Computational methods in structural dynamics and earthquake engineering, Corfu, Greece, May 26-28, 2011, Proceedings edited by M. Papadrakakis et al., 2011 (**Keynote Lecture**).
- [30] A. Arnoux, A. Batou, C. Soize, L. Gagliardini, Reduced-order model for dynamical structures having numerous local modes in the low frequency range, Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EUROODYN 2011, Leuven,



- Belgium, 4-6 July 2011, G. De Roeck, G. Degrande, G. Lombaert, G. Müller (eds.), pp. 2609-2614, ISBN 978-90-760-1931-4, July 4-6, 2011.
- [31] A. Batou, C. Soize, Multibody system dynamics with uncertain rigid bodies, Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EUROODYN 2011, Leuven, Belgium, 4-6 July 2011, G. De Roeck, G. Degrande, G. Lombaert, G. Müller (eds.), pp. 2620-2625, ISBN 978-90-760-1931-4, July 4-6, 2011.
- [32] A. Batou, C. Soize, A probabilistic approach for multibody dynamical system with uncertain rigid body, in the proceedings of the Conference : Multibody Dynamics 2011, ECCOMAS Thematic Conference, University Catholic of Louvain, Brussels, Belgium, July 4-7, 2011.
- [33] A. Batou, C. Soize, Stochastic reduced-order model for quasi-periodic beam structures having numerous local elastic modes in the low-frequency range, in the proceedings of the 18th International Congress on Sound and Vibration (ICSV 18), Rio de Janeiro, Brazil, July 10-14, 2011.
- [34] A. Arnoux, A. Batou, C. Soize, L. Gagliardini, Modele reduit en dynamique stochastique d'une structure ayant de nombreux modes locaux en basse frequence, CSMA 2011, dans les Actes du 10eme Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 9-13 Mai 2011.
- [35] A. Arnoux, A. Batou, C. Soize, L. Gagliardini, Modele réduit en dynamique vibratoire basse et moyenne frequence pour des structures mecaniques complexes, dans les Actes du 20eme Congres français de mécanique 2011, Besançon, France, 28 Aout - 2 Septembre 2011.
- [36] A. Batou, C. Soize, Stochastic reduced-order model for dynamical structures with high modal density in the low-frequency range, 1st International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling (Uncertainties 2012), Feb 2012, Maresias, SP, Brazil.
- [37] A. Arnoux, A. Batou, C. Soize, L. Gagliardini, Stochastic reduced-order model for dynamical structures having a high modal density in the low frequency range, International Symposium on Computational Modelling and Analysis of Vehicle Body Noise and Vibration, Mar 2012, University of Sussex Brighton, United Kingdom.
- [38] A. Batou, C. Soize, Construction and identification of a prior stochastic model for an uncertain rigid body, First ECCOMAS Young Investigators Conference (YIC 2012), Apr 2012, Aveiro, Portugal.
- [39] A. Batou, C. Soize, A prior probabilistic model for multibody dynamical systems with uncertain rigid bodies, 6th Asian Conference on Multibody Dynamics (ACMD 2012), Aug 2012, Jao-Tong University Shanghai, China.

- 
- [40] A. Arnoux, A. Batou, C. Soize, L. Gagliardini, Stochastic reduced-order model for dynamical structures having a high modal density in the low-frequency range, Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), Sep 2012, Vienna, Austria.
- [41] A. Batou, C. Soize, Stochastic reduced-order model for complex beam-like dynamical structures, Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), Sep 2012, Vienna, Austria.
- [42] A. Batou, C. Soize, N. Brie, Reduced-order model for nonlinear dynamical structures having numerous local elastic modes in the low-frequency range, International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA 2012), Sep 2012, Leuven, Belgium.
- [43] A. Arnoux, A. Batou, C. Soize, L. Gagliardini, Stochastic reduced-order model for an automotive vehicle in presence of numerous local elastic modes in the low-frequency range, International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics (USD 2012), Sep 2012, Leuven, Belgium.
- [44] A. Batou, C. Soize, A. Arnoux, L. Gagliardini, N. Brie. Reduced-order model in structural dynamics for high-modal density in the LF range. Applications to automotive vehicle and fuel assemblies. M.A. Savi (Editor). DINAME 2013, XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics., Feb 2013, Rio de Janeiro, Brazil. ABCM, Proceedings of the XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, DINAME 2013, Pages : 1-10.
- [45] A. Batou, C. Soize, N. Brie. Reduced-order model for nonlinear dynamical structures having a high modal density in the low-frequency range. MEDYNA 2013, 1st Euro-Mediterranean Conference on Structural Dynamics and Vibroacoustics, Apr 2013, Marrakech, Morocco. Proceedings of MEDYNA 2013, Pages : 1-4.
- [46] A. Batou, C. Soize. Generation of accelerograms compatible with response spectrum using the information theory. APVC 2013, 15th Asia Pacific Vibration Conference, Jun 2013, Jeju Island, Republic of Korea. Proceedings of APVC 2013, Pages : 1-5.
- [47] A. Batou, C. Soize. Generation of response spectrum compatible accelerograms using the maximum entropy principle. M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, V. Plevris (eds.). COMPDYN 2013, 4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Jun 2013, Kos Island, Greece. Proceedings of COMPDYN 2013, Pages : 1-10.
- [48] A. Batou, C. Soize. Generation of spectrum-compatible accelerograms using information theory. C. Adam, R. Heuer, W. Lenhardt and C. Schranz (eds). Vienna Congress on Recent Advances in Earthquake Engineering and Structural Dynamics 2013 (VEESD 2013), Aug 2013, Vienna, Austria, Austria. Proceedings of VEESD 2013, Pages : 1-8.

### Communications dans des congrès nationaux et internationaux

- [49] A. Batou, C. Soize, Experimental identification of turbulent fluid forces applied to fuel assemblies using an uncertain model, USNCCM X 2009, Tenth U. S. National Congress on Computational Mechanics, Columbus, Ohio, USA, July 16 - 19, 2009.
- [50] A. Batou, C. Soize, Stochastic reduced-order model for dynamical structures having numerous local elastic modes in the low-frequency range, ECCM2010, European Conference on Computational Mechanics, Paris, May 16 - 21, 2010 (**Keynote Lecture**).
- [51] A. Batou, C. Soize, Stochastic model for an uncertain rigid body of a multibody dynamical system, 6th MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Advances in Solids and Structures, Massachusetts Institute of Technology, USA, June 15-17, 2011.
- [52] A. Batou, C. Soize, Multibody system dynamics with uncertain rigid bodies, USNCCM XI 2011, Eleventh U. S. National Congress on Computational Mechanics, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, USA, July 25 - 29, 2011.

### Autres références du mémoire

- [53] N. Agmon, Y. Alhassid, R.D. Levine, An algorithm for finding the distribution of maximal entropy, *Journal of Computational Physics*, 30, 250-258, 1979.
- [54] G. Ahmadi, Generation of artificial time-histories compatible with given response spectra - a review, *Solid Mechanics Archives*, 4(3), 207-239, 1979.
- [55] D. Amsallem, C. Farhat, An online method for interpolating linear parametric reduced-order models, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(5), 2169-2198, 2011.
- [56] J. Argyris, H.P. Mlejnek, *Dynamics of Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [57] M. Arnst, D. Clouteau, H. Chebli, R. Othman, G. Degrande, A non-parametric probabilistic model for ground-borne vibrations in buildings, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(1), 18-34, 2006.
- [58] J.P. Aubin, *Applied Functional Analysis*, 2nd Edition, Wiley, 2000.
- [59] J. Avalos, E.D. Swenson, M.P. Mignolet, N.J. Lindsley, Stochastic Modeling of Structural Uncertainty/Variability from Ground Vibration Modal Test Data, *Journal of Aircraft*, 49(3), 870-884, 2012.
- [60] M.F.A. Azeez, A.F. Vakakis, Proper orthogonal decomposition (POD) of a class of vibroimpact oscillations, *Journal of Sound and Vibration*, 240(5), 859-889, 2001.

- 
- [61] A. Balestrino, A. Caiti, E. Crisostomi, Efficient numerical approximations of maximum entropy estimates, *International Journal of Control*, 79(9), 1145-1155, 2006.
- [62] M.C.C. Bampton, R.R. Craig Jr, Coupling of substructures for dynamic analyses, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 6(7), 1313-1319, 1968.
- [63] K.J. Bathe, E.L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, New Jersey, 1976.
- [64] J. L. Beck, L.S. Katafygiotis, Updating models and their uncertainties. I : Bayesian statistical framework, *Journal of Engineering Mechanics*, 124(4), 455-461, 1998.
- [65] T. Belytschko, W.L. Mindle, Flexural Wave-propagation Behavior of Lumped Mass Approximations, *Computer and Structures*, 12(6), 805-812, 1980.
- [66] J.M.F.T. Berge, D.L. Knol, Orthogonal rotations to maximal agreement for two or more matrices of different column orders, *Psychometrika*, 49(1), 49-55, 1984.
- [67] A.L.Berger, S.A. DellaPietra, V.J. DellaPietra, A maximum entropy approach to natural language processing, *Computational Linguistics*, 22(1), 39-71, 1996.
- [68] D. Bestle, J. Seybold, Sensitivity analysis of constrained multibody systems, *Archive of Applied Mechanics*, 62(3), 181-190, 1992.
- [69] D. Bestle, P. Eberhard, Multicriteria multimodel design optimization, *IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems*, 33-40, 1996.
- [70] H. Beyer, B. Sendhoff, Robust optimization – A comprehensive survey, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 3190-3218, 2007
- [71] D.M. Boore, J.J. Boomer, Processing of strong motion accelerograms : needs, options and consequences, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 25, 93-115, 2005.
- [72] G. Borello L. Gagliardini, L. Houillon, L. Petrinelli, Virtual sea-fea-based modeling of mid-frequency structure-borne noise, *Sound and Vibration*, 39(1), 22-28, 2005
- [73] N. Bouhaddi, R. Fillod, A method for selecting master DOF in dynamic substructuring using the Guyan condensation method, *Computers and Structures*, 45(5-6), 941-946, 1992.
- [74] O. Brüls, P. Duysinx, J.C. Golinval, The global modal parameterization for non-linear model-order reduction in flexible multibody dynamics, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 958-977, 69, 2007.
- [75] I. Bucher, S.G. Braun, Left Eigenvectors : Extraction From Measurements and Physical Interpretation, *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 64(1), 97-105, 1997.

- [76] K. Burrage, Numerical methods for second-order stochastic differential equation, *SIAM Journal of Scientific Computing*, 29(1), 245-264, 2010.
- [77] P. Cacciola P, A stochastic approach for generating spectrum compatible fully non-stationary earthquakes, *Computers & Structures*, 88(15-16), 889-901, 2010.
- [78] P. Cacciola, I. Zentner, Generation of response-spectrum-compatible artificial earthquake accelerograms with random joint time-frequency distributions, *Probabilistic Engineering Mechanics* 28, 52-58, 2012.
- [79] E. Capiez-Lernout, C. Soize, Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 126(3), 600-618, 2004.
- [80] E. Capiez-Lernout, C. Soize, Robust updating of uncertain damping models in structural dynamics for low- and medium-frequency ranges, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(8), 1774-1792, 2008.
- [81] A. Carcaterra, A. Sestieri, Complex envelope displacement analysis : a quasi-static approach to vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, 201(2), 27, 205-233, 1997.
- [82] A. Carrarini, Reliability based analysis of the crosswind stability of railway vehicles. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 95, 493-509, 2007.
- [83] H.C. Chan, C.W. Cai, Y.K. Cheung, Convergence Studies of Dynamic Analysis by Using the Finite Element Method with Lumped Mass Matrix, *Journal of Sound and Vibration*, 165(2), 193-207, 1993.
- [84] K. D. Chan, G. Subbarayan, L. Nguyen, Maximum-entropy principle for modeling damage and fracture in solder joints, *Journal of Electronic Materials*, 41(2), 398-411, 2012.
- [85] H. Chebli, C. Soize, Experimental validation of a nonparametric probabilistic model of non homogeneous uncertainties for dynamical systems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(2), 697-705, 2004
- [86] C. Chen, D. Duhamel, C. Soize, Probabilistic approach for model and data uncertainties and its experimental identification in structural dynamics : Case of composite sandwich panels. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1-2), 64-81, 2006
- [87] B. Chen, J. Hu, Y. Zhu, Computing maximum entropy densities : A hybrid approach, *Signal Processing : An International Journal*, 4(2), 114-122, 2010.
- [88] S. H. Cheung, J. L. Beck, Bayesian model updating using hybrid Monte Carlo simulation with application to structural dynamic models with many uncertain parameters, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 135(4), 243-255, 2009

- 
- [89] D. Erdogmus, K.E. Hild II, Y.N. Rao , J.C. Principe, Minimax mutual information approach for independent components analysis, *Neural Computation*, 16(6), 1235-1252, 2004.
- [90] CEN, *Eurocode 8 : Design of Structures for Earthquake Resistance-Part1 : General Rules, Seismic Actions and Rules for Buildings. EN 1998-1 : 2003 European Committee for Standardization*, Brussels, 2003.
- [91] M. Chevreuril, P. Ladevèze, P. Rouch, Transient analysis including the low- and the medium-frequency ranges of engineering structures, *Computers and Structures*, 85(17-18), 1431-1444, 2007.
- [92] C.K. Choi, H.H. Yoo, Uncertainty analysis of nonlinear systems employing the first-order reliability method, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26, 39-44, 2012.
- [93] R.W. Clough, J. Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1975.
- [94] V. Cotoni, P.J. Shorter, R.S. Langley. Numerical and experimental validation of the hybrid finite element-statistical energy analysis method, *Journal of the Acoustical Society of America*, 259-270, 2007.
- [95] R. R. Craig, A. J. Kurdila, *Fundamentals of Structural Dynamics*, Wiley, 2nd Edition, John Wiley and Sons, New Jersey, 2006.
- [96] S. Das, R. Ghanem and J. C. Spall, Asymptotic sampling distribution for polynomial chaos representation from data : a maximum entropy and fisher information approach, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(5), 2207-2234, 2008.
- [97] S. Das, R. Ghanem, A bounded random matrix approach for stochastic upscaling, *Multiscale Model. Simul.*, 8(1), 296-325, 2009.
- [98] S. Datoussaïd, R. Hadjit, O. Verlinden, C. Conti, Optimization design of multibody systems by using genetic algorithms, *Vehicle System Dynamics*, 29(1), 704-710, 1998.
- [99] G. Degrande, E. Praet, B. Van Zegbroeck, P. Van Marcke, Dynamic interaction between the soil and an anchored sheet pile during seismic excitation, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26(6), 605-631, 2002.
- [100] M.H. DeGroot, M.J. Schervish, *Probability and Statistics*, 4th edn, Pearson, 2011.
- [101] R. Dewar, Information theory explanation of the fluctuation theorem, maximum entropy production and self-organized criticality in non-equilibrium stationary states, *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 36(3), 631-641, 2003.
- [102] C. Desceliers, R. Ghanem, C. Soize, Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(6), 978-1001, 2006.

- [103] C. Desceliers, C. Soize, R. Ghanem, Identification of chaos representations of elastic properties of random media using experimental vibration tests, *Computational Mechanics*, 39(6), 831-838, 2007.
- [104] B.J. Debuschere, H.N. Najm, P.P. Pebay, O.M. Knio, R. Ghanem, O.P. Le Maître, Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2), 698-719, 2004.
- [105] W. Desmet, P. Sas, D. Vandepitte, A comparison between an indirect trefftz method and the finite-element method for solving coupled vibro-acoustic problems, *Journal of Acoustic Society of America*, 106(4), 2118, 1999.
- [106] J.-F. Deü, D. Matignon, Simulation of fractionally damped mechanical systems by means of a Newmark-diffusive scheme, *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 1745-1753, 2010.
- [107] S. Donders, R. Hadjit, M. Brughmans, L. Hermans, W. Desmet, A wave-based sub-structuring approach for fast vehicle body optimisation, *International Journal of Vehicle Design*, 43(1-4), 100-115, 2007.
- [108] A.D. Drozdov, *Viscoelastic Structures*, Academic Press, San Diego, 1998.
- [109] J. Duchereau J, C. Soize, Transient dynamics in structures with nonhomogeneous uncertainties induced by complex joints, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(4), 854-867, 2006.
- [110] D. Duhamel, B.R. Mace, M.J. Brennan, Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures, *Journal of Sound and Vibration*, 294(1-2), 205-220, 2006.
- [111] J.F. Durand, C. Soize, L. Gagliardini, Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation, *J. Acoust. Soc. Am.*, 124(3), 1513-1525, 2008.
- [112] EPRI, *Standardization of the Cumulative Absolute Velocity*, Report No. EPRI TR-100082-T2, Palo Alto, California, 1991.
- [113] D.J. Ewins, *Modal Testing : theory and practice*, Research Study Press LTD, John Wiley and Sons, 1984.
- [114] C. Farhat, M. Geradin, On a Component Mode Synthesis Method and Its Application to Incompatible Substructures, *Computers and Structures*, 51(5), 459-473, 1994.
- [115] C. Fernandez, C. Soize, L. Gagliardini, Fuzzy structure theory modeling of sound-insulation layers in complex vibroacoustic uncertain systems - Theory and experimental validation, *J. Acoust. Soc. Am.*, 125(1), 138-153, 2009.

- 
- [116] B. Fraeijs De Veubeke, The dynamics of flexible bodies , *International Journal of Engineering Science*, 14(10), 895-913, 1976.
- [117] B. Faverjon, P. Ladevèze, F. Louf, An updating method for structural dynamics models with uncertainties, *Shock and Vibration*, 15(3-4), 245-256, 2008.
- [118] B. Ganapathysubramanian, N. Zabararas, Sparse grid collocation schemes for stochastic natural convection problems, *Journal of Computational Physics*, 225(1), 652-685, 2007.
- [119] P. Geyskens, A. Der Kiureghian, P. Monteiro, *BUMP : Bayesian updating of models parameters*. Technical Report Report UCB/SEMM-93/06, University of California at Berkeley, 1993.
- [120] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, *Stochastic finite element : A spectral approach*, Springer Verlag, New York, 1991.
- [121] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, Polynomial chaos in stochastic finite element, *Journal of Applied Mechanics*, 129, 289-303 ,1996.
- [122] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, Hybrid stochastic finite elements : coupling of spectral expansions with monte carlo simulations, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 65, 1998.
- [123] R. Ghanem, A. Sarkar, Reduced models for the medium-frequency dynamics of stochastic systems, *Journal of the Acoustical Society of America*, 113(2), 834-846, 2003.
- [124] R. Ghanem, R. Doostan, Characterization of stochastic system parameters from experimental data : A bayesian inference approach, *Journal of Computational Physics*, 217(1), 63-81, 2006.
- [125] R. Ghanem, R. Doostan, J. Red-Horse, A probability construction of model validation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(29-32), 2585-2595, 2008.
- [126] O. Giannini, A. Carcaterra, A. Sestieri, High frequency vibration analysis by the complex envelope vectorization, *Acoustical Society of America*, 121(6), 3472-83, 2007.
- [127] A. Giaralis, P.D. Spanos PD, Wavelet-based response spectrum compatible synthesis of accelerograms-eurocode application (ec8), *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 29(1), 219-235, 2009.
- [128] A. Giaralis, S.D. Spanos, Derivation of response spectrum compatible non-stationary stochastic processes relying on monte carlo-based peak factor estimation, *Earthquake and Structures*, 3(3-4), 581-609, 2012.
- [129] A. Golan, G. Judge, D. Miller, *Maximum entropy econometrics : robust estimation with limited data*, Wiley, New York, 1996.



- [130] D.F. Golla, P.C. Hughes, Dynamics of viscoelastic structures - a time domain, finite element formulation, *J. Appl. Mech.*, 52, 897-906, 1985.
- [131] B. Goller, H. J. Pradlwarter, G. I. Schueller, Robust model updating with insufficient data, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(37-40), 3096-3104, 2009.
- [132] B. Goller, J. L. Beck, G. I. Schueller, Evidence-based identification of weighting factors in Bayesian model updating using modal data, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 138(5), 430-440, 2012.
- [133] G.H. Golub, C.F. Loan, *Matrix Computations*, 2<sup>nd</sup> ed., The John Hopkins University Press, Baltimor, 1989.
- [134] C. Grandmont, Y. Maday, P. Métier, Modeling and Analysis of an Elastic Problem with Large Displacements and Small Strains, *Journal of Elasticity*, 87(1), 29-72, 2007.
- [135] P. Gu, Y.K. Wen, A record-based method for the generation of tridirectional uniform hazard-response spectra and ground motions using the hilbert-huang transform, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 97(5), 1539-1556, 2007.
- [136] J. Guillemot, C. Soize, On the Statistical Dependence for the Components of Random Elasticity Tensors Exhibiting Material Symmetry Properties, *Journal of Elasticity*, 111(2), 2013.
- [137] R.J. Guyan, Reduction of Stiffness and Mass Matrices, *AIAA Journal*, 3, 380-388, 1965.
- [138] J.L. Guyader, Modal sampling method for the vibration study of systems of high modal density, *J. Acoust. Soc. Am.*, 88(5), 2269-2270, 1990.
- [139] J.L. Guyader, Characterization and reduction of dynamical models of vibrating systems with high modal density, *Journal of Sound and Vibration*, 328(4-5), 488-506, 2009.
- [140] Y. Hahn, N. Kikuchi, Identification of global modeshape from a few nodal eigenvectors using simple free-form deformation, *Engineering with Computers*, 21(2), 115-128, 2005.
- [141] H. Han, T. Park, Robust Optimal Design of Multi-Body Systems, *Multibody System Dynamics*, 11(2), 167-183, 2004.
- [142] J. Hancock, J. Watson-Lamprey, N.A. Abrahamson, J.J. Bommer, E.M. Markartis, et al, An improve method of matching response spectra of recorded earthquake ground motion using wavelets, *Journal of Earthquake Engineering*, 10, 67-89, 2006.
- [143] G.P. Hanzaki, T. Lee, K. Lee, K. Hwang, Robust Design : An Overview, *AIAA Journal*, 44, 181-191, 2006.

- [144] W.K. Hastings, Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications, *Biometrika*, 109, 57-97, 1970.
- [145] E.J. Haug, *Computer Aided Kinematics and Dynamics. Vol I : Basic Methods*, Allyn and Bacon, Boston, 1989.
- [146] P. Holmes, J.L. Lumley, G. Berkooz, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [147] W. C. Hurty, Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes, *American Institue of Aeronautics and Astronautics Journal*, 3(4), 678-685, 1965.
- [148] M. N. Ichchou, F. Bouchoucha, M. A. Ben Souf, O. Dessombz, M. Haddar, Stochastic wave finite element for random periodic media through first-order perturbation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(41-44), 2805-2813, 2011.
- [149] K. Itô, On stochastic differential equations, *Memoirs American Mathematical Society*, 4, 1951.
- [150] R.N. Iyengar, P.N. Rao, Generation of spectrum compatible accelerograms, *Journal of Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 7(3), 253-263, 1979.
- [151] E.T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics, *Phys. Rev.*, 106(4), 620-630, and 108(3), 171-190, 1957.
- [152] M.S. Jensen, High Convergence Order Finite Elements With Lumped Mass Matrix, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(11), 1879-1888, 1996.
- [153] L. Ji, B.R. Mace, Pinnington R., A mode-based approach for the mid-frequency vibration analysis of coupled long- and short-wavelength structures, *Journal of Sound and Vibration*, 289(1), 148-1700 2006.
- [154] J. Kaipio, E. Somersalo, *Statistical and Computational Inverse Problems*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [155] J.N. Kapur, H.K. Kesavan, *Entropy Optimization Principles with Applications*, Academic Press, San Diego, 1992.
- [156] K. Karhunen, Zur Spektraltheorie Stochastischer Prozesse, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, 220, 1945.
- [157] E.I. Katsanos, A.G. Sextos, G.D. Manolis GD, Selection of earthquake ground motion records : A state-of-the-art review from a structural engineering perspective, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 10, 157-169, 2010
- [158] T.S. Kim, Y.Y. Kim, Mac-based mode tracking in structural topology optimization, *Computers & Structures*, 74(3), 375-383, 2000.

- [159] R. Kimmel, J.A. Sethian, Computing geodesic paths on manifolds, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 8431-8435, 1998.
- [160] M. Kompella, R.J. Berhard, Measurement of the statistical variation of structural-acoustic characteristics of automotive vehicles, *SAE Noise and Vibration Conference*, 1993.
- [161] E. Kunisch, S. Volkwein, Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems, *Numerische Mathematik*, 90(1), 117-148, 2001.
- [162] P. Ladevèze, A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range, *Comptes Rendus Académie des Sciences Paris*, 332(2b), 849-856, 1996.
- [163] N. Lahellec, P. Suquet, Effective behavior of linear viscoelastic composites : A time-integration approach, *International Journal of Solids and Structures*, 44(2), 507-529, 2007.
- [164] R.S. Langley, P. Bremmer, A Hybrid Method for the Vibration Analysis of Complex Structural-Acoustic Systems, *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(3), 1657-1672, 1999.
- [165] R.S. Langley, V. Cotoni, Response variance prediction for uncertain vibro-acoustic system using a hybrid deterministic-statistical method, *Journal of the Acoustical Society of America*, 3445-3463, 2007.
- [166] R.S. Langley, J.A. Cordioli, Hybrid deterministic-statistical analysis of vibroacoustic system domain couplings on statistical components, *Journal of Sound and Vibration*, 893-912, 2009.
- [167] O.P. Le Maître, H.N. Najm, R. Ghanem, O. Knio, Multi-resolution analysis of Wiener-type uncertainty propagation schemes, *Journal of Computational Physics*, 197(2), 502-531, 2004.
- [168] O.P. Le Maître, O.M. Knio, H. N. Najm, R. Ghanem, Uncertainty propagation using Wiener-Haar expansions, *Journal of Computational Physics*, 197(1), 28-57, 2004.
- [169] O.P. Le Maître, O.M. Knio, *Spectral Methods for Uncertainty Quantification with Applications to Computational Fluid Dynamics*, Springer, Heidelberg, 2010.
- [170] W. Li, A degree selection method of matrix condensations for eigenvalue problems, *Journal of Sound and Vibration*, 259(2), 409-425, 2003.
- [171] L. Li, C. Corina Sandu, On the impact of cargo weight, vehicle parameters, and terrain characteristics on the prediction of traction for off-road vehicles *Journal of Terramechanics*, 44, 221-238, 2007.
- [172] C.C.J. Lin, J. Ghaboussi J, Generating multiple spectrum compatible accelerograms using stochastic neural networks, *Journal of Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 30(7), 1021-1042, 2001.

- 
- [173] A.K. Livesey, J. Skilling, Maximum-entropy theory, *Acta Crystallographica Section A*, 41, 113-122, 1985.
- [174] M. Loève, *Probability Theory*, 3rd ed., Van Nostrand, New York, 1963.
- [175] A. Lygre, H.E. Krogstad, Maximum-entropy of the directional distribution of ocean wave *Journal of Physical Oceanography*, 16(12), 2052-2060, 1986.
- [176] R. Lyon, G. Maidanik, Statistical methods in vibration analysis. *AIAA Journal*, 2(6), 1015-1024, 1964.
- [177] R. H. Lyon, R.G. DeJong, *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*, Butterworths-Heimann, Boston, MA, 1995.
- [178] B.R. Mace, P.J.Shorter, Energy flow models from finite element analysis, *Journal of Sound and Vibration*, 233, 369-389, 2000.
- [179] R. Mace, W. Worden, G. Manson, Uncertainty in Structural Dynamics, *Special issue of the Journal of Sound and Vibration*, 288(3), 431-790, 2005.
- [180] B.R. Mace, P.J. Shorter, A local modal/perturbational method for estimating frequency response statistics of built-up structures with uncertain parameters, *Journal of Sound and Vibration*, 242, 793-811, 2001.
- [181] R. Mac Neal, A Hybrid Method of Component Mode Synthesis, *Computers and Structures*, 1(4), 581-601, 1971.
- [182] C. Mares, J. Mottershead, M. Friswell, Stochastic model updating, Part 1 : Theory and simulated example, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(7), 1674-1695, 2006.
- [183] H. G. Matthies, Stochastic finite elements : Computational approaches to stochastic partial differential equations, *Zamm-Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 88(11), 849-873, 2008.
- [184] R. Mead, N. Papanicolaou, Maximum entropy in the problem of moments, *Journal of Mathematical Physics*, 24 :2404-2417., 1984.
- [185] L. Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, New York, 1990.
- [186] M.P. Mignolet, C. Soize, Nonparametric stochastic modeling of linear systems with prescribed variance of several natural frequencies, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 23(2-3), 267-278, 2008.
- [187] M.P. Mignolet, C. Soize, Stochastic reduced order models for uncertain nonlinear dynamical systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, (45-48), 3951-3963, 2008.

- [188] M.P. Mignolet, C. Soize, J. Avalos. Nonparametric stochastic modeling of structures with uncertain boundary conditions/coupling between substructures, *AIAA Journal*, 51(6), 1296-1308, 2013.
- [189] H.J.-P. Morand, R. Ohayon, *Fluid-Structure Interaction*, Wiley, New York, 1995.
- [190] J. Mottershead, C. Mares, S. James, M. Friswell, Stochastic model updating, Part 2 : Application to a set of physical structures, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(8), 2171-2185, 2006.
- [191] S. Mukherjee, V.K. Gupta, Wavelet-based generation of spectrum-compatible time-histories, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 22, 799-804, 2002.
- [192] R. Murthy, M.P. Mignolet, A. El-Shafei, Nonparametric stochastic modeling of uncertainty in rotordynamics–Part I : Formulation, *J. Eng. Gas Turbines Power*, 132(9), 092501, 2010.
- [193] R. Murthy, M.P. Mignolet, A. El-Shafei, Nonparametric stochastic modeling of uncertainty in rotordynamics–Part II : Applications, *J. Eng. Gas Turbines Power*, 132(9), 092502, 2010.
- [194] R. Murthy, J.C. Tomei, X.Q. Wang, X.Q., M.P. Mignolet, A. and El-Shafei, Non-parametric stochastic modeling of structural uncertainty in rotordynamics : Unbalance and balancing aspects, *J. Eng. Gas Turbines Power*, 136(6), 062506, 2014.
- [195] F. Naeim, A. Alimoradi, S. Pezeshk, Selection and scaling of ground motion time histories for structural design using genetic algorithms, *Earthquake Spectra*, 20, 413-426, 2004.
- [196] H.N. Najm, Uncertainty quantification and polynomial chaos techniques in computational fluid dynamics, *Journal Review of Fluid Mechanics*, 41, 35-52, 2009.
- [197] D. Negrut, M. Datar, D. Gorsich, D. Lamb, A framework for uncertainty quantification in nonlinear multi-body system dynamics, *Proceedings of the 26th Army Science Conference*, Orlando, FL, 2008.
- [198] M. Nejlaoui, A. Houidi, Z. Affi, L. Romdhane, Multiobjective robust design optimization of rail vehicle moving in short radius curved tracks based on the safety and comfort criteria, *Simulation Modelling Practice and Theory*, 30, 21-34, 2013.
- [199] A.K. Noor, M.S. Anderson, W.H. Greene, Continuum Models for Beam- and Platelike-Lattice Structures, *AIAA Journal*, 16(12), 1219-1228, 1978.
- [200] R. Ohayon, R. Sampaio, C. Soize, Dynamic Substructuring of Damped Structures Using Singular Value Decomposition, *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 64(2), 292-298, 1997.
- [201] R. Ohayon, C. Soize, *Structural Acoustics and Vibration*, Academic Press, San Diego, 1998.

- 
- [202] J.H. Ong, Improved automatic masters for eigenvalue economization, *Finite Element in Analysis and Design*, 3, 149-160, 1987.
- [203] D. Ormoneit, H. White, An efficient algorithm to compute maximum entropy densities, *Econometrics reviews*, 18(2), 127-140, 1999.
- [204] A. Papoulis, Maximum-entropy and spectral estimation - A Review, *IEEE Transaction on Acoustics Speech and Signal Processing*, 29(6), 1176-1186, 1981.
- [205] N. C. Perkins, C. D. Mote Jr, Comments on a curve veering in eigenvalue problems, *Journal of Sound and Vibration*, 106(3), 451-463, 1986.
- [206] C. Pierre, Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures, *Journal of Sound and Vibration*, 126(3), 485-502, 1988.
- [207] S.J. Phillips, R.P. Anderson, R.E. Schapire, Maximum entropy modeling of species geographic distributions, *Ecological Modelling*, 190(3-4), 231-259, 2006.
- [208] J. Planchard, Vibration of nuclear fuel assemblies : a simplified model, *Nuclear Engineering and Design*, 86(3), 383-391, 1995.
- [209] A. Preumont, A method for the generation of artificial earthquake accelerograms, *Nuclear Engineering and Design*, 59, 357-368, 1980.
- [210] A. Preumont, The generation of non-separable artificial earthquake accelerograms for the design of nuclear power plants, *Nuclear Engineering and Design*, 88, 59-67, 1985.
- [211] A.R. Hanzaki, P. Rao, S. Saha, Kinematic and sensitivity analysis and optimization of planar rack-and-pinion steering linkages, *Mechanism and Machine Theory*, 44, 42-56, 2009
- [212] S. Razaeeian, A. Der Kiureghian, A stochastic ground motion model with separable temporal and spectral nonstationarities, *Journal of Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 37(13), 1565-1584, 2008.
- [213] C. Robert, *l'Analyse Statistique Bayésienne*, Ed Economica, 1992.
- [214] T.J. Robinson, C.M. Borrer, R.H. Myers, Robust Parameter Design : A Review, *Quality and Reliability Engineering International*, 20 , 81-101, 2004
- [215] S. Rubin, *Dynamic Stiffness and Substructures*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [216] S. Rubin, Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 13(8), 995-1006, 1975.
- [217] R.Y. Rubinstein, D.P. Kroese, *Simulation and the Monte Carlo Method*, 2nd edn, John Wiley and Sons, New York, 2008

- [218] F. Sabetta, A. Pugliese, Estimation of response spectra and simulation of nonstationary earthquake ground motions, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 86, 337-352, 1996.
- [219] R. Sampaio, C. Soize, Remarks on the efficiency of POD for model reduction in nonlinear dynamics of continuous elastic systems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(1), 22-45, 2007.
- [220] A. Sandu, C. Sandu, M. Ahmadian, Modeling multibody dynamic systems with uncertainties. Part I : theoretical and computational aspects, *Multibody System Dynamics*, 23, 375-395, 2006.
- [221] A. Sandu, C. Sandu, M. Ahmadian, Modeling multibody dynamic systems with uncertainties. Part II : numerical applications, *Multibody System Dynamics*, 22, 241-262, 2006.
- [222] W. Schiehlen, *Multibody Systems Handbook*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [223] A. Schmidt, L. Gaul, Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives, *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4), 37-55, 2002.
- [224] K.P. Schmitt, M. Anitescu, D. Negrut, Efficient sampling for spatial uncertainty quantification in multibody system dynamics applications, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 80, 537-564, 2009.
- [225] G.I. Schueller, A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12(4), 197-313, 1997.
- [226] G.I. Schueller, Computational Methods in Stochastic Mechanics and Reliability Analysis, *Special issue of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16), 1251-1795, 2005
- [227] G.I. Schueller, On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis, *Computer and Structures*, 85, 235-243, 2007.
- [228] G.I. Schueller, H.A. Jensen, Computational methods in optimization considering uncertainties - An overview, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, 2-13, 2008.
- [229] G.I. Schueller, H. Pradlwarter, Uncertain linear systems in dynamics : Retrospective and recent developments by stochastic approaches, *Engineering Structures*, 31, 2507-2517, 2009.
- [230] J.A. Sethian, A. Vladimirov, Fast methods for the Eikonal and related Hamilton-Jacobi equations on unstructured meshes, *The Journal of Computational Physics*, 148, 2-22, 1999.
- [231] A.A. Shabana, *Dynamics of Multibody Systems*, Cambridge University Press, 2003

- [232] C.E. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell System Technology Journal*, 27, 379-423 et 623-659, 1948.
- [233] J.E. Shore, R.W. Johnson, Axiomatic derivation of the principle of maximum-entropy and the principle of minimum cross-entropy, *IEEE Transactions on Information Theory*, 26(1), 26-37, 1980.
- [234] P.J. Shorter, R.S. Langley, Vibro-acoustic analysis of complex systems, *Journal of Sound and Vibration*, 669-700, 2005.
- [235] M. Shrinkhande, V.K. Gupta, On generating ensemble of design spectrum-compatible accelerograms, *European Earthquake Engineering*, X(3), 49-56, 1996
- [236] J. Skilling, R.K. Bryan, Maximum-entropy image-reconstruction - general algorithm. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 211(1), 111-124, 1984.
- [237] K. Sobczyk, J. Trubicki, Maximum-entropy principle and nonlinear stochastic oscillators, *Physica A*, 193(3-4), 448-468, 1993.
- [238] Soize, C., Probabilistic Structural Modeling in Linear Dynamic Analysis of Complex Mechanical Systems, I - Theoretical Elements, *La Recherche Aéronautique (English edition)*, 5, 23-48, 1986.
- [239] Soize, C., A Model and Numerical Method in the Medium Frequency Range for Vibroacoustic Predictions Using Theory of Structural fuzzy, *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2), 849-866, 1993.
- [240] C. Soize, *The Fokker-Planck Equation for Stochastic Dynamical Systems and its Explicit Steady State Solution*, World Scientific : Singapore, 1994.
- [241] C. Soize, Reduced models in the medium frequency range for general dissipative structural-dynamics systems, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 17(4), 657-685, 1998.
- [242] C. Soize, A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3), 277-294, 2000.
- [243] C. Soize, Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics, *Journal of Acoustical Society of America*, 109(5), 1979-1996, 2001.
- [244] C. Soize, Uncertain dynamical systems in the medium-frequency range, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 129(9), 1017-1027, 2003.
- [245] C. Soize, R. Ghanem, Physical systems with random uncertainties : Chaos representation with arbitrary probability measure, *SIAM Journal On Scientific Computing*, 26(2), 395-410, 2004.



- [246] C. Soize, Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16), 1333-1366, 2005.
- [247] C. Soize, Non Gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(1-3), 26-64, 2006.
- [248] C. Soize, Construction of probability distributions in high dimension using the maximum entropy principle. applications to stochastic processes, random fields and random matrices, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(10), 1583-1611, 2008.
- [249] C. Soize, E. Capiez-Lernout, J.-F. Durand, C. Fernandez, L. Gagliardini, Probabilistic model identification of uncertainties in computational models for dynamical systems and experimental validation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98(1), 150-163, 2008.
- [250] C. Soize, E. Capiez-Lernout, R. Ohayon, Robust updating of uncertain computational models using experimental modal analysis, *AIAA Journal*, 46(11), 2955-2965, 2008.
- [251] C. Soize, Generalized probabilistic approach of uncertainties in computational dynamics using random matrices and polynomial chaos decomposition, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(8), 939-970, 2010.
- [252] C. Soize, Information theory for generation of accelerograms associated with shock response spectra, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 25, 334-347, 2010.
- [253] C. Soize, A computational inverse method for identification of non-Gaussian random fields using the Bayesian approach in very high dimension, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(45-46), 3083-3099, 2011.
- [254] C. Soize, *Stochastic Models of Uncertainties in Computational Mechanics*, American Society of Civil Engineers (ASCE), Reston, 2012.
- [255] C. Soize, I.E. Poloskov, Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation, *Computers and Mathematics with Applications*, 64(11), 3594-3612, 2012.
- [256] P.D. Spanos, L.M.V. Loli, A statistical approach to generation of design spectrum compatible earthquake time histories, *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 4(1), 2-8, 1985.
- [257] P.D. Spanos, A. Giaralis, N.P. Politis, Time-frequency representation of earthquake accelerograms and inelastic structural response records using the adaptive chirplet decomposition and empirical mode decomposition, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27, 675-689, 2007.

- 
- [258] V.W. Sparrow, D.A. Russel, J.L. Rochat, Implementation of Discrete Fuzzy Structure Models in Mathematica, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37, 3005-3014, 1994.
- [259] W. Stadler, *Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences*, Critical Issues in Neuropsychology, Springer, 1988.
- [260] M. Strasberg, D. Feit, Vibration Damping of Large Structures Induced by Attached Small Resonant Structures, *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(1), 335-344, 1996.
- [261] S. Sundaresan, K. Ishii, D.R. Houser, A robust optimization procedure with variations on design variables and constraints, *Engineering Optimization*, 24, 101-117, 1995.
- [262] F. Thouverez, M. Viktorovitch, L. Jézéquel, A random boundary element formulation for assembled rods and beams in the mid frequency range, *International Conference on New Advances in Modal Synthesis of Large Structures, MV2 COMETT'95*, Lyon, 1995.
- [263] T.J. Ulrych, T.N. Bishop, Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition, *Review of Geophysics*, 13(1), 1975.
- [264] M. Viktorovitch, F. Thouverez, L. Jézéquel, An integral formulation with random parameters adapted to the study of vibrational behavior of structures in the mid and high frequency field, *Journal of Sound and Vibration*, 247(3), 431-452, 2001.
- [265] W. Vonderlinden, Maximum-entropy data-analysis, *Applied Physics A-Materials Science & Processing*, 60(2), 155-165, 1995.
- [266] M. Wamsler, On the selection of the mode cut-off number in component mode reduction, *Engineering with Computers*, 25(2), 139-146, 2009.
- [267] X.L. Wan, G.E. Karniadakis, Multi-element generalized polynomial chaos for arbitrary probability measures, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(3), 901-928, 2006.
- [268] M.P. Wand, M.C. Jones, *Kernel Smoothing*, Chapman & Hall, London, U.K., 1995.
- [269] Weaver, R.L., The Effect of an Undamped Finite Degree of Freedom Fuzzy Substructure : Numerical Solutions and Theoretical Discussion, *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(5), 3159-3164, 1996.
- [270] X. Wu, Calculation of maximum entropy densities with application to income distribution, *Journal of Econometrics*, 115, 347-354, 2003.
- [271] D.B. Xiu, G.E. Karniadakis, Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2), 619-644, 2002.

- [272] X.F. Xu, A multiscale stochastic finite element method on elliptic problems involving uncertainties, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 25-28, 2723-2736, 2007.
- [273] A. Zellner, R.A. Highfield, Calculation of maximum entropy distributions and approximation of marginal posterior distributions, *Journal of Econometrics*, 37, 195-209, 1988.
- [274] I. Zentner, F. Poirion, Enrichment of seismic ground motion databases using karhunen-loève expansion, *Journal of Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 41(14), 1945-1957, 2012.

