



HAL
open science

Méthodes géométriques pour la commande de systèmes mécaniques en dimension infinie

Thomas Chambrion

► **To cite this version:**

Thomas Chambrion. Méthodes géométriques pour la commande de systèmes mécaniques en dimension infinie. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université de Lorraine, 2014. tel-01011390

HAL Id: tel-01011390

<https://theses.hal.science/tel-01011390>

Submitted on 23 Jun 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire présenté pour l'obtention de l'
Habilitation à Diriger des Recherches
par
Thomas Chambrion

**Méthodes géométriques pour la commande de systèmes
mécaniques de dimension infinie**

Soutenu publiquement le 21 mai 2014 à Vandœuvre-lès-Nancy.

Membres du Jury :

Jean-Michel Coron	Professeur, UPMC (Rapporteur)
Pierre Rouchon	Professeur, Mines Paris-Tech (Rapporteur)
Emmanuel Trélat	Professeur, UMPC (Rapporteur)
François Alouges	Professeur, Ecole Polytechnique
Ugo Boscain	DR CNRS, Ecole Polytechnique
Marius Tucsnak	Professeur, Université de Lorraine

À la mémoire de François, notre collègue et ami, trop tôt disparu.

Ein Zwerg kommt selten ganz allein.
Otto Gerhard Waalkes

Remerciements

Le soutenance de ce mémoire n'aurait pas été possible sans le soutien actif de nombreuses personnes.

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement les rapporteurs de ce mémoire, Jean-Michel Coron, Pierre Rouchon et Emmanuel Trélat. Dire que je les respecte profondément, aussi bien scientifiquement qu'humainement, est un euphémisme.

Jean-Michel Coron projette son ombre bienfaisante sur toute une communauté. Ses conseils de lecture incroyablement pertinents, ses suggestions d'extension de fin d'exposé ou ses questions m'ont permis, comme tant d'autres, de progresser un peu sur le difficile chemin de la connaissance tout au long de ces dernières années. Qu'il ait accepté de faire partie de ce jury est un honneur.

Depuis 2010, Pierre Rouchon se prête de bon gré à un jeu de rôle où, en pause lors de conférences, il me transmet sous forme de pseudo-questions les réponses à mes difficultés du moment (« As-tu pensé à regarder la transformée de Fourier de ta loi de commande ? ») que je traduirai en articles ou exposerai à la même conférence l'année suivante. Son incorrigible modestie le pousse à rejeter le mérite sur les physiciens, qui ont tout compris avant les mathématiciens. C'est aussi pour ce rôle de passeur de savoir que je le remercie.

Bien que nos routes scientifiques aient légèrement divergé il y a quelques années, Emmanuel Trélat a toujours été disponible aux moments critiques, en particulier quand j'ai eu besoin d'un rapporteur. Sa compétence et sa gentillesse en font un exemple que je n'arriverai certainement pas à suivre, mais qui prouve que réussite et joie de vivre communicative ne sont pas incompatibles.

Mes remerciements vont ensuite à François Alouges, qui a bien voulu faire partie du jury et que j'ai toujours plaisir à rencontrer.

C'est Ugo Boscain qui, il y a plus d'une décennie, m'a accompagné dans mes premiers pas de commande des systèmes quantiques. Il m'a inspiré, financé, motivé (« Il faudrait que quelqu'un aille exposer au prochain CDC »), nourri admirablement et a finalement accepté de faire partie de ce jury.

Marius Tucsnak a fait un pari assez insensé en accueillant en 2005 dans l'équipe EDP d'Elie Cartan et dans l'équipe projet Inria CORIDA un jeune docteur sans aucune contri-

bution en dimension infinie. J'espère qu'il ne le regrette pas. Venir à Nancy a en tout cas été la meilleure décision que j'ai prise sur le plan professionnel et je tiens à le remercier d'avoir, en plus, accepté d'être mon parrain scientifique.

Plus tard au sein de l'équipe EDP, j'ai pu apprécier le très grand professionnalisme, les conseils avisés et le soutien constant de nos chefs d'équipe successifs, Xavier Antoine et David Dos Santos Ferreira.

En presque 10 ans, j'ai eu le temps d'user un certain nombre de collaborateurs. Mario, Paolo, Ugo, Dominique, Alexandre, Marco, Nabile, Mirko, Gilles et Tatiana, mais aussi Gérard Déchenaud et tous les membres de l' « Eco Motion Team » : j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec vous et j'espère sincèrement que nous aurons encore longtemps l'occasion de collaborer.

L'enseignement tient une place importante dans la vie professionnelle d'un maître de conférence. J'ai la chance incroyable d'exercer à l'ESSTIN, une école d'ingénieurs beaucoup raillée faute d'être connue. Je voudrais remercier mes collègues de maths, Koléhé, Renaud, Jean, Lionel et Agnès pour l'ambiance de travail sérieuse mais détendue. Julie, notre très dévouée et efficace responsable du pôle de maths, y est sans doute pour beaucoup. Elle sait l'affection que je lui porte. Qu'elle sache que c'est un plaisir de partager son bureau.

Quand plus rien n'allait, quand il me fallait urgemment un formulaire ou un article russe de 1953, une mise en forme de budget ou un ordre de mission, quand il manquait un câble pour le vidéo-projecteur ou quand il fallait ouvrir une porte pour fermer une fenêtre avant l'orage, des anges gardiens silencieux et trop souvent invisibles, assistante d'équipe ou d'équipe projet, assistante de direction, bibliothécaire ou concierge m'ont donné le coup de pouce qui change tout. Merci à vous tous, et tout particulièrement à Laurence, Estelle, Hélène, Céline, et Roger.

Je n'oublie pas mes maîtres, Andrei Agrachev et Jean-Paul Gauthier, qui m'ont amené à la théorie de la commande, et que je ne pourrai jamais assez remercier de m'avoir conduit jusqu'à la thèse.

Enfin, j'ai toujours pu compter sur le soutien sans faille de Simone, épouse admirable et mère merveilleuse, qui m'a fait le plus beau cadeau qu'un homme puisse imaginer.

Table des matières

Remerciements	1
Introduction	5
Contribution	5
Contenu de ce mémoire	6
I. Commande de systèmes quantiques	7
1. Systèmes quantiques	9
1.1. Contexte physique	9
1.2. État de l'art	11
1.3. Cadre de ce travail	13
2. Aspects énergétiques	17
2.1. Motivations	17
2.2. Systèmes faiblement couplés	18
2.3. Quelques applications	20
3. Méthodes de moyennisation	23
3.1. Moyennisation en dimension finie	23
3.2. De la dimension finie à la dimension infinie	25
II. Locomotion en fluide potentiel	31
4. Nage en fluide potentiel	33
4.1. Contexte physique	33
4.2. État de l'art	33
4.3. Un modèle jouet : le sous-marin rigide	34
5. Nageurs déformables en fluide potentiel	39
5.1. Introduction	39
5.2. Modèle 2D	42
5.3. Modèle 3D	44

III. Autres activités	47
6. Optimisation de la consommation d'un véhicule hybride	49
6.1. Contexte institutionnel et pédagogique	49
6.2. Résultats scientifiques	50
IV. Conclusion : travaux en cours et programme de recherche	53
7. Programme de recherche (systèmes quantiques)	57
7.1. Travaux en cours	57
7.2. Perspectives à plus long terme	60
8. Programme de recherche (locomotion)	63
8.1. Travaux en cours	63
8.2. Perspectives à plus long terme	64
9. Programme de recherche (méthodes hybrides)	67
9.1. Commande en temps réel de systèmes hybrides	67
9.2. Méthodes hybrides pour la commande de systèmes quantiques	68
V. Annexes	71
Curriculum Vitæ	73
Activités d'encadrement	75
Enseignements	77
Administration	79
Rayonnement scientifique	81
Liste des publications	83

Introduction

Ce mémoire est une synthèse de mes travaux de recherche depuis mon recrutement comme Maître de conférence à l'Institut Élie Cartan en septembre 2005. Je me suis efforcé de présenter mes résultats essentiels et de les situer dans leur contexte de la manière la plus synthétique possible. Mes activités se répartissant, de façon très inégale, dans trois domaines à la fois vastes et assez nettement distincts, j'ai renoncé pour des questions de volume à présenter un état des lieux complets de chaque domaine, pour me concentrer sur les aspects en rapport direct avec mon travail. Par exemple, et malgré l'intensité de la recherche sur ces sujets, je n'aborderai quasiment pas le problème de la commande effective des systèmes quantiques (ouverts ou fermés) de dimension finie ou de la locomotion en fluide non parfait, tout simplement parce que je n'y ai pas de contribution. De la même façon, on pourra s'étonner de la taille volontairement réduite de la bibliographie. Il aurait été plus simple pour moi de concaténer les fichiers .bib dont je disposais, mais il m'a semblé qu'une sélection plus resserrée permettrait de mieux situer ma contribution.

Contribution

L'idée essentielle de mon travail est d'obtenir des résultats de contrôlabilité approchée en remplaçant des dynamiques complexes en dimension infinie (complexes au sens de non-linéaires, dans la commande ou dans l'état) par des dynamiques de même structure (avec le même type de non-linéarité) en dimension finie, sur lesquelles on pourra appliquer les techniques géométriques classiques, souvent à base de crochets de Lie. Cette idée a été appliquée à la commande des systèmes quantiques bilinéaires de dimension infinie et à la locomotion d'un nageur déformable isolé dans un fluide en écoulement potentiel (non-linéarité dans l'état).

Pour la commande des systèmes quantiques, nous avons, en collaboration avec mes co-auteurs U. Boscain, P. Mason, M. Sigalotti, N. Boussaïd et M. Caponigro, étendu les méthodes de moyennisation bien connues en dimension finie à des systèmes de dimension finie. (Précisément, j'ai justifié rigoureusement l'approximation faite au Chapitre 13 de [CTDL77]). Ces méthodes ont depuis été appliquées avec succès pour montrer la contrôlabilité approchée de nombreux systèmes rencontrés usuellement dans la littérature physique.

Pour la locomotion dans un fluide parfait en écoulement potentiel, en collaboration avec A. Munnier, nous avons obtenu ce qui semble être le premier résultat de pistage pour un nageur déformable.

Contenu de ce mémoire

Ce mémoire est divisé en quatre parties dont les longueurs inégales reflètent la ventilation de mes activités de recherche depuis mon arrivée à l'Institut Élie Cartan.

La première partie traite de la commande des systèmes quantiques bilinéaires. Après le chapitre 1 exposant le contexte physique, le chapitre 2 décrit les conséquences de quelques résultats d'estimations d'énergie a priori et le chapitre 3 présente les méthodes de moyennisation.

La deuxième partie traite de la locomotion en fluide parfait. Le chapitre 4 présente le contexte physique et un exemple simple de sous-marin rigide. Le chapitre 5 expose des résultats de pistage pour des nageurs déformables en dimension 2 et 3.

La troisième partie, un peu à part, traite de l'optimisation des stratégies de conduite pour un véhicule hybride. Cette partie est constituée d'un unique chapitre et présente des résultats obtenus avec G. Millerioux et l'étudiante que nous co-dirigeons T. Manrique.

La quatrième partie présente des perspectives, à court et moyen termes, pour chacun des thèmes des parties 1 à 3.

À la fin de mémoire, des annexes regroupent les divers documents demandés par l'école doctorale.

Un mot sur la terminologie

Selon l'expression d'un collègue dont j'ai malheureusement oublié le nom, « le contrôle est une activité souvent onéreuse que l'on pratique dans les trains et les autobus avec des agents en képi ». Le mot « commande » est conseillé pour traduire l'anglais *control*. Certaines expressions risquant de prêter à confusion (comment traduire « controlability » sans risque de confusion avec « commandability » pour le lecteur ?), j'ai décidé de conserver certains anglicismes en m'efforçant de définir chaque notion à sa première apparition dans le texte.

Première partie .

Commande de systèmes quantiques

1. Commande des systèmes quantiques : contexte, état de l'art et notations

1.1. Contexte physique

1.1.1. Description d'un système quantique

Un système quantique évoluant sur une variété Riemannienne Ω , munie de la mesure induite μ , est complètement déterminé par sa *fonction d'onde*, un point de la sphère unité de $L^2(\Omega, \mathbf{C})$. Une fonction d'onde ψ étant donnée, les fonctions ψ et $e^{i\theta}\psi$ représentent le même état physique du système, pour tout θ réel.

Remarque 1.1.1. En général, si $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ n'est pas constante, les deux fonctions d'ondes $e^{i\Theta}\psi$ et ψ ne représentent pas le même état physique du système.

À toute caractéristique physique \mathcal{O} du système (par exemple : l'énergie, la vitesse ou la position), est associé un opérateur linéaire auto-adjoint (pas forcément borné) $O : D(O) \subset L^2(\Omega, \mathbf{C}) \rightarrow L^2(\Omega, \mathbf{C})$ appelé *observable*. Le résultat d'une mesure de \mathcal{O} sera un élément du spectre de O . On ne peut pas, en général, prédire avec certitude le résultat de la mesure de la quantité \mathcal{O} connaissant la fonction d'onde du système. Pour le cas particulier où la fonction d'onde du système est un vecteur propre de O associé à la valeur propre a , alors le résultat d'une mesure de \mathcal{O} sera a avec la probabilité 1.

Pour un système en position générale (associé à une fonction d'onde ψ qui n'est pas forcément un vecteur propre de O), l'espérance du résultat d'une mesure de la grandeur \mathcal{O} est $\int_{\Omega} \bar{\psi}(O\psi)d\mu$. Par exemple, pour tout sous-ensemble ω de Ω , la propriété « présence du système dans ω » est associée à l'opérateur de troncature : $\psi \mapsto \mathbf{1}_{\omega}\psi$, et la probabilité de trouver le système dans ω est $\int_{\omega} |\psi|^2 d\mu$.

Remarque 1.1.2. En général, l'opérateur O n'est pas borné, donc son domaine n'est pas égal à $L^2(\Omega, \mathbf{C})$. Il y aura donc des fonctions d'onde ψ pour lesquelles on ne pourra pas définir l'espérance d'une mesure de \mathcal{O} (en particulier, il existe des fonctions d'onde auxquelles on ne pourra pas associer d'énergie). Ces problèmes de régularité joueront un rôle majeur dans la suite de ce mémoire.

1.1.2. Dynamique des systèmes quantiques

Immédiatement après une mesure de la grandeur \mathcal{O} , qui a retourné comme résultat une valeur propre a de O , le système quantique se retrouve instantanément associé à une fonction d'onde qui est un vecteur propre de O associé à la valeur propre a .

1. Systèmes quantiques

Entre deux mesures, l'évolution d'un système quantique isolé de fonction d'onde ψ est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_0\psi,$$

où H_0 est l'observable associée à l'énergie du système. Pour nous, H_0 sera souvent de la forme $H_0 = -\Delta + V$ où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami de Ω et $V : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ est un potentiel.

Pour le cas où le système n'est plus isolé mais soumis à un champ extérieur (par exemple, au champ électrique dû à un laser d'intensité u que l'expérimentateur pourra choisir dans une certaine mesure), et sous des hypothèses simplificatrices convenables, l'équation de Schrödinger prend la forme

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (H_0 + u(t)H_1)\psi, \quad (1.1.1)$$

où $H_1 : D(H_1) \subset L^2(\Omega, \mathbf{C}) \rightarrow L^2(\Omega, \mathbf{C})$ est un opérateur auto-adjoint indépendant du temps de la forme $\psi \mapsto W\psi$, avec $W : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction à préciser, qui représente l'interaction du laser avec le système.

Le caractère bien posé du système (1.1.1) est loin d'être évident en général. Pour les commandes u pour lesquelles cela aura un sens, nous noterons $t \in \mathbf{R} \mapsto \Upsilon_{t,t_0}^u \psi$ la solution au temps t de (1.1.1) valant ψ à t_0 .

L'ensemble *atteignable* en temps T depuis un point ψ_0 avec les *commandes admissibles* \mathcal{U} (un sous ensemble des fonctions de $[0, +\infty[$ dans \mathbf{R}) est $\{\Upsilon_{t,0}^u \psi_0 \mid 0 \leq t \leq T, u \in \mathcal{U}\}$. L'ensemble atteignable est l'union des ensembles atteignables en temps t pour t positif. Le système est *contrôlable exactement* (resp. *de façon approchée en norme N_1*) avec les commandes \mathcal{U} dans un sous-ensemble K_1 de H si l'ensemble atteignable (resp. l'adhérence de l'ensemble atteignable pour la norme N_1) depuis n'importe quel point de K_1 avec les commandes \mathcal{U} contient K_1 .

1.1.3. Commande effective des systèmes quantiques

Étant donné un système quantique, une question naturelle est de savoir si il est possible de le transférer de son état initial vers un état cible donné en utilisant un champ d'intensité $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ convenablement choisie. L'importance des applications a conduit les expérimentateurs à très vite proposer des stratégies de construction de telles commandes. En l'absence de preuve analytique formelle de leur efficacité dans des contextes généraux, c'est l'expérience qui a montré leur validité. Nous évoquons ci-dessous deux méthodes couramment employées en pratique depuis des décennies, et qui n'ont reçu que récemment un traitement théorique systématique.

Approximation en ondes rotationnelles

Il a été observé que pour transférer un système quantique d'un niveau d'énergie λ à un niveau λ' , il suffit en général de l'exciter avec un photon d'énergie $|\lambda - \lambda'|$ (voir [CTDL77]).

Cette propriété est d'un usage constant, par exemple dans les horloges atomiques où on utilise justement la très grande stabilité des niveaux d'énergie d'un noyau atomique pour garantir la stabilité de la fréquence du champ extérieur.

Ce phénomène est encore valable pour les systèmes bilinéaires excités par un signal périodique de fréquence $|\lambda - \lambda'|$. Nous reviendrons en détail sur ce point dans le chapitre 3.

Méthodes adiabatiques

Il a été démontré théoriquement et observé en pratique que si $H(u)$ variait lentement, $\Upsilon_{t,0}^u$ envoyait les états propres de $H(u(0))$ à proximité des états propres de $H(u(t))$. Cette propriété peut être utilisée quand on dispose de suffisamment de temps pour réaliser le transfert.

1.2. État de l'art

Les difficultés essentielles des problèmes de commande des systèmes quantiques décrits ci-dessus proviennent de la dimension infinie de l'espace des états et du caractère non-linéaire de la dynamique (une littérature considérable est disponible pour les systèmes quantiques linéaires, voir par exemple [Zua03]). L'étude systématique des propriétés de contrôlabilité des systèmes quantiques est assez récente (la majorité des résultats ont moins de dix ans).

Dans le but de pouvoir utiliser le très pratique langage de la théorie des opérateurs, nous considérerons

1.2.1. Contrôlabilité exacte des systèmes quantiques fermés

Le premier résultat concernant les systèmes bilinéaires est un résultat négatif [BMS82] de 1982 dû à Ball, Marsden et Slemrod et adapté aux systèmes conservatifs [Tur00] par Turinici en 2000. Un énoncé commode (mais pas le plus général) en est

Proposition 1.2.1. *Soient Ω une variété compacte, $V, W : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions de classe C^2 (au moins) Alors l'ensemble atteignable depuis n'importe quel ψ dans l'intersection de la sphère hilbertienne de $L^2(\Omega, \mathbf{C})$ et de $H^2(\Omega, \mathbf{C})$ par le système $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-\Delta + V)\psi + u(t)W\psi$ avec des commandes admissibles u dans $L^r(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $r > 1$, est d'intérieur vide dans l'intersection de la sphère hilbertienne de $L^2(\Omega, \mathbf{C})$ et de $H^2(\Omega, \mathbf{C})$.*

Cette obstruction à la contrôlabilité exacte dans des domaines que l'on aurait pu croire naturels est de nature topologique. La preuve donnée dans [BMS82] ne s'adapte pas, à ma connaissance, au cas de contrôles L^1 .

Devant le résultat négatif de la Proposition 1.2.1, on a cherché des résultats de contrôlabilité dans des espaces plus petits. Le premier (et pour l'instant pratiquement le seul) résultat positif a été obtenu par Beauchard puis raffiné dans une série d'articles (voir notamment [Bea05], [BL10]).

1. Systèmes quantiques

Proposition 1.2.2 (Puits de potentiel carré infini). *L'ensemble atteignable depuis le premier état propre normalisé du laplacien (restreint à $(0, \pi)$) avec des contrôles L^2 de*

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = -\Delta \psi(x, t) + u(t)x\psi(x, t), \quad x \in (0, \pi)$$

est $H^3_{(0)}((0, \pi), \mathbf{C}) = \{\psi \in H^3((0, \pi), \mathbf{C}) \mid \psi(0) = \psi(\pi) = \psi'(0) = \psi'(\pi) = 0\}$.

L'apparence inoffensive de la Proposition 1.2.2 cache un résultat difficile. La méthode de la preuve repose sur le test linéaire :

1. Dans une première étape, on montre que l'application « point final » $u \mapsto \Upsilon_{t,0}^u \psi_0$, t et ψ_0 étant donnés, est différentiable dans un sens à préciser.
2. Une deuxième étape consiste à montrer que la différentielle de l'application « point final » est surjective (ou bijective), d'un espace de commande bien choisi vers un ensemble d'arrivée à préciser.
3. La conclusion suit l'application d'un théorème de point fixe permettant de faire passer la surjectivité de sa différentielle à l'application « point final ».

Pour la preuve de la Proposition 1.2.2, toutes les étapes sont difficiles. L'étape deux, et notamment le choix des espaces à considérer, est particulièrement ardu. À ce jour, la Proposition 1.2.2 reste pratiquement la seule description satisfaisante de l'ensemble atteignable d'une équation de type (1.3.1).

1.2.2. Contrôlabilité approchée des systèmes quantiques

Devant la difficulté de décrire exactement les ensembles atteignables d'équations de type (1.3.1), on a parfois cherché à montrer que ces ensembles étaient suffisamment gros (denses dans l'espace ambiant H ou dans un de ses sous-espaces pour une norme à préciser). En termes de la théorie de la commande, on parle de contrôlabilité approchée.

En dehors des méthodes de moyennisation, la principale technique utilisée pour établir la contrôlabilité approchée est dite « technique de Lyapunov ». Pour en donner le principe, supposons que l'on veuille amener le système (1.3.1) vers un sous ensemble \mathcal{C} de H (\mathcal{C} n'est pas obligatoirement réduit à un point).

1. On définit une fonction assez régulière $N : H \rightarrow \mathbf{R}^+$ qui s'annule sur \mathcal{C} (N peut être vue comme l'équivalent d'une distance à la cible).
2. Pour tout ψ dans H , on définit une fonction $\hat{u} : H \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\frac{dN}{d\psi} ([A + \hat{u}(\psi)B] \cdot \psi) < 0.$$

3. On montre que le système $\frac{d\psi}{dt} = (A + \hat{u}(\psi)B)\psi$, complété par les conditions initiales qui nous intéressent, est bien posé.
4. On utilise une extension du principe d'invariance de Lasalle en dimension infinie pour conclure.

Les quatre étapes (schématiques) indiquées ci-dessus sont difficiles en général. En particulier, il est souvent difficile de définir N sur H tout entier, et on se contente alors de définir N sur un ensemble « assez gros ». Comme pour le test linéaire, les problèmes de régularité sont à la fois cruciaux et ardu. Citons les travaux de Nersesyan [Ner09], qui a montré la contrôlabilité approchée dans $H_{(0)}^3$ du puits de potentiel carré infini. Ce résultat permet d'obtenir la Proposition 1.2.2 à partir de l'étude locale de [BL10].

1.2.3. Méthodes d'optimisation

La contrôlabilité approchée peut aussi être obtenue en cherchant à minimiser la distance au but pour toutes les commandes possibles. Ce point de vue a été adopté dans [BKP05] et [BD06].

1.3. Cadre de ce travail

1.3.1. Notations et hypothèses

Dans la suite, nous considérerons souvent une forme abstraite de (1.1.1), équation d'évolution linéaire en ψ posée dans un espace Hilbert séparable donné H :

$$\frac{d\psi}{dt} = (A + u(t)B)\psi \quad (1.3.1)$$

Les systèmes que nous considérerons satisferont, suivant les cas, l'une des deux hypothèses de régularité suivantes :

Hypothèse 1. Le triplet (A, B, U, Φ, Λ) vérifie :

1. $A : D(A) \rightarrow H$ est anti-adjoint (c'est-à-dire que iA est auto-adjoint) sur son domaine $D(A)$;
2. $\Lambda = (\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une famille de réels et $\Phi = (\phi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $(-i\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$: pour tout k de \mathbf{N} , $A\phi_k = -i\lambda_k\phi_k$;
3. B est un opérateur anti-symétrique de domaine $D(B)$ et à valeurs dans H ;
4. pour tout k de \mathbf{N} , ϕ_k est dans le domaine de B ;
5. U est un sous ensemble de \mathbf{R} contenant 0 et les points $\{1/n, n \in \mathbf{N}\}$;
6. pour tout u de U , $A+uB$ est essentiellement anti-adjoint (de domaine pas forcément égal à $D(A)$)

On notera que dans le cadre de l'Hypothèse 1 :

- on ne suppose pas que les valeurs propres de A sont de multiplicité finie ;
- on ne suppose pas que A admet un spectre discret (par exemple, on peut supposer $\{\lambda_k, k \in \mathbf{N}\} = \mathbf{Q}$, donc le spectre de A est égal à $i\mathbf{R}$ tout entier). En particulier, on ne suppose pas que A est à résolvante compacte ;

1. Systèmes quantiques

- on ne suppose pas que B est borné relativement à A . En particulier, le théorème de Kato-Rellich ne s'applique pas et le domaine de $A + uB$ n'est pas en général le domaine de A .

Hypothèse 2. Le couple (A, B) vérifie :

1. $A : D(A) \rightarrow H$ est anti-adjoint ;
2. B est un opérateur anti-adjoint borné de H dans H .

Dans le cadre de l'Hypothèse 2, on ne fait plus d'hypothèse sur le spectre de A , mais B est cette fois-ci borné. Dans ce cas, le théorème de Kato-Rellich implique immédiatement que $A + uB$ est anti-adjoint de domaine $D(A)$ pour tout u réel.

1.3.2. Caractère bien posé des problèmes d'évolution

Des opérateurs A et B et une commande u étant donnés, le caractère bien posé de l'équation (1.3.1) est loin d'être évident en général.

Cadre de l'Hypothèse 1

Si (A, B, U, Φ, Λ) vérifie l'Hypothèse 1, alors pour tout u (constant) dans U , $A + uB$ est essentiellement anti-adjoint. Ceci permet de définir pour tout t réel l'opérateur unitaire $e^{t(A+uB)} : H \rightarrow H$. Pour tout ψ dans $D(A + uB)$, $t \mapsto e^{t(A+uB)}\psi$ est la solution forte de (1.3.1) de valeur ψ à $t = 0$. Si ψ n'appartient pas à $D(A + uB)$, $t \mapsto e^{t(A+uB)}\psi$ n'est solution de (1.3.1) qu'au sens faible. On définit le propagateur de (1.3.1) pour u constant par morceaux par concaténation : si il existe $(p + 1)$ constantes positives $0 = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{p+1}$ et p constantes u_1, u_2, \dots, u_p dans U telles que u s'écrive (en notant χ la fonction caractéristique) :

$$u = \sum_{j=1}^p u_j \chi_{[t_j, t_{j+1}[},$$

on définit le propagateur $\Upsilon_{t,0}^u : H \rightarrow H$ de la façon suivante

- si t appartient $[t_l, t_{l+1}[$ pour l dans $\{1, \dots, p\}$

$$\Upsilon_{t,0}^u = e^{(t-t_l)(A+u_l B)} \circ e^{(t_l-t_{l+1})(A+u_{l-1} B)} \circ \dots \circ e^{(t_2-t_1)(A+u_1 B)};$$

- si $t > t_{l+1}$

$$\Upsilon_{t,0}^u = e^{(t-t_{l+1})A} \Upsilon_{t_{l+1},0}^u;$$

- si $t \leq 0$

$$\Upsilon_{t,0}^u = e^{-tA}.$$

Cette définition des propagateurs, introduite dans [CMSB09b], est assez peu standard dans la discipline. Des hypothèses de régularité supplémentaires sur A et B peuvent permettre de définir le propagateur de (1.3.1) pour des commandes u pas nécessairement constants par morceaux. À ma connaissance, toutes les constructions rencontrées dans la littérature sont des extensions de la construction ci-dessus. C'est le cas par exemple pour le cas où B est borné et u est localement intégrable (voir ci-dessous) ou pour le cas où B est borné relativement à A et u est à variation bornée (voir [BCC13a]).

Cadre de l'hypothèse 2

Si (A, B) vérifie l'Hypothèse 2, alors l'application entrée-sortie $u \mapsto ((t_0, t) \mapsto \Upsilon_{t, t_0}^u)$ définie comme ci-dessus pour les commandes constantes par morceaux admet un unique prolongement continu aux fonctions localement intégrables (pour une preuve de ce résultat classique, voir par exemple [Bea05]).

2. Aspects énergétiques

2.1. Motivations

En mathématiques, s'intéresser aux propriétés énergétiques des solutions d'une équation d'évolution est souvent un préalable indispensable pour établir le caractère bien posé du système. Pour nous, le caractère bien posé est acquis par définition et nos motivations seront plutôt liées à des questions d'ingénierie (constructions effectives de commandes) ou de physique.

2.1.1. Une regrettable polysémie

Comme tous les champs multi-disciplinaires, la commande des systèmes quantiques est confrontée à des problèmes de compréhensions entre personnes issues de communautés différentes.

En physique, l'énergie d'un système (A, B, Φ, Λ, U) vérifiant l'Hypothèse 1 se trouvant dans l'état ψ est

$$\mathbf{E}(\psi) := \langle \psi, iA\psi \rangle = \sum_{k \in \mathbf{N}} \lambda_k |\langle \phi_k, \psi \rangle|^2,$$

souvent réécrit $\langle \psi, |A|\psi \rangle = \| |A|^{\frac{1}{2}} \psi \|^2$ dans la situation fréquente où tous les λ_k sont positifs. L'évolution dans le temps de l'énergie de la solution ψ de (1.3.1) est donnée (au moins formellement) par

$$\frac{d}{dt} \mathbf{E}(\psi) = 2u(t) \Re \langle A\psi, B\psi \rangle.$$

Mathématiquement, l'énergie de la commande $u : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ est n'importe quelle norme sur l'espace (ou sur un sous-espace de) $L^1([0, T], \mathbf{R})$, et l'énergie de ψ dans H est n'importe quelle norme sur H (ou un sous-ensemble de H).

Un problème naturel est d'arriver à relier de façon simple l'énergie de la commande à l'énergie (si possible physique, à défaut mathématique) de l'état.

2.1.2. Un problème physique

Une autre raison de s'intéresser aux questions énergétiques est fournie par la comparaison des résultats disponibles de contrôlabilité exacte (Propositions 1.2.1 et 1.2.2) ou approchée avec l'assertion suivante, tirée de [CTDL77, page 94] (voir aussi [CTDL77, Figure 7 page 36])

« D'un point de vue physique, il est clair que l'ensemble $L^2(\Omega, \mathbf{C})$ est trop vaste : étant donnée la signification attribuée à $|\psi(x, t)|^2$, les fonctions d'onde

2. Aspects énergétiques

effectivement utilisées possèdent certaines propriétés de régularité. On ne peut garder que les fonctions partout définies, continues, indéfiniment dérivables.(...) »

Le contraste est frappant entre la très grande sensibilité des énoncés mathématiques à la régularité (le résultat de la Proposition 1.2.2 dépend de façon cruciale de la non bornitude de $\psi \mapsto x\psi$ dans $H_{(0)}^3$) et l'exigence de régularité, aussi bien pour les fonctions d'onde que pour les potentiels, revendiquée au moins dans certains cas¹ par les physiciens.

2.2. Systèmes faiblement couplés

L'introduction de la notion de couplage faible avait pour but de répondre, au moins partiellement, aux deux problèmes évoqués plus haut : d'une part fournir un lien entre l'énergie de la commande et l'énergie physique du système et d'autre part exploiter au mieux la très grande régularité de la plupart des systèmes couramment rencontrés dans la littérature physique.

2.2.1. Définition et propriétés

Définition 2.2.1 (Définition 1 de [BCC13c]). Soit k un réel positif. Un système (A, B, Φ, Λ, U) est dit *k-faiblement couplé* si

1. (A, B, Φ, Λ, U) satisfait l'Hypothèse 1 et $U = \mathbf{R}$;
2. pour tout u de \mathbf{R} , $i(A + uB)$ est auto-adjoint sur le domaine $D(A)$ de A ;
3. la suite Λ est croissante, strictement positive, et tend vers l'infini ;
4. pour tout u réel, le domaine de $|A + uB|^{\frac{k}{2}}$ et de $|A|^{\frac{k}{2}}$ coïncident ;
5. la quantité suivante, dite *constante de k-couplage de A et B* est finie

$$c_k(A, B) := \sup_{\psi \in D(|A|^k) \setminus \{0\}} \frac{|\Re \langle |A|^k \psi, B\psi \rangle|}{|\langle |A|^k \psi, \psi \rangle|} < +\infty.$$

Le caractère un peu technique de la Définition 2.2.1 a pour seul but de permettre l'énoncé suivant :

Proposition 2.2.1 (Proposition 2 de [BCC13c]). Soit $k > 0$ et (A, B, Φ, Λ, U) un système *k-faiblement couplé*. Alors, pour tout ψ_0 dans $D(|A|^{\frac{k}{2}})$, pour tout $K, T \geq 0$, pour tout $u : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ constant par morceaux tel que $\|u\|_{L^1} \leq K$, on a, pour tout $t \geq 0$,

$$\| |A|^{\frac{k}{2}} \Upsilon_{t,0}^u \psi_0 \| \leq e^{c_k(A,B)K} \| |A|^{\frac{k}{2}} \psi_0 \|. \quad (2.2.1)$$

La Proposition 2.2.1 appelle un certain nombre de commentaires.

1. Le point de vue de Cohen-Tannoudji rapporté ici ne fait pas l'unanimité dans la communauté physique.

- Dans le cas où $k = 1$, l'inégalité (2.2.1) est une estimation de la variation d'énergie physique du système en fonction de l'énergie de la commande. Le fait que ce soit bien la norme L^1 de la commande et non la norme L^2 provoque parfois la perplexité chez les chimistes et physiciens.
- La preuve est extrêmement facile (conséquence directe du lemme de Gronwal) sous des hypothèses à peine plus fortes de régularité des opérateurs, voir par exemple [BCC12e]. Le résultat présenté ici est un peu moins évident dans la mesure où il requiert un argument de régularisation pour pouvoir utiliser le lemme de Gronwal.
- L'inégalité (2.2.1) est nettement plus grossière que les estimations de [Bou99]. Son intérêt réside dans son caractère uniforme, dans le sens où le membre de droite de l'inégalité (2.2.1) ne fait intervenir u que par sa norme L^1 et ne fait pas apparaître explicitement le temps.

2.2.2. Bonnes approximations de Galerkin

De nombreuses méthodes ont été développées pour la simulation numérique de dynamique du type (1.3.1). Citons parmi bien d'autres, en plus de [BD06] déjà évoquée, les résultats de [BST11].

Une approche naïve, qui se révélera féconde sur le plan théorique, pour simuler numériquement une dynamique du type (1.3.1) pour un système (A, B, U, Λ, Φ) satisfaisant l'Hypothèse 1 est de considérer, pour un entier N donné, la projection orthogonale $\pi_N : H \rightarrow \mathcal{L}_N = \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_N)$, les compressions $A^{(N)} = \pi_N \circ A \circ \pi_N$ et $B^{(N)} = \pi_N \circ B \circ \pi_N$ de A et B et la dynamique tronquée

$$\dot{x} = A^{(N)}x + u(t)B^{(N)}x, \quad (2.2.2)$$

dont nous noterons $X^{(N),u}$ le propagateur. Le système (2.2.2) peut être considéré comme un système de dimension finie dans \mathcal{L}_N , ce qui simplifie beaucoup les problèmes de définition de solutions. La difficulté est toujours de vérifier que la dynamique approchée (2.2.2) reste proche de la dynamique originelle (1.3.1).

Définition 2.2.2 (Bonnes approximations de Galerkin). On dit que le système (A, B, U, Λ, Φ) satisfaisant l'Hypothèse 1 admet une suite de bonnes approximations de Galerkin en norme $|A|^p$ pour $p \geq 0$, si pour toute famille finie $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n}$ de $D(|A|^p)$, pour tous K, ε strictement positifs, il existe N dans \mathbf{N} tel que, pour tout $u : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ constant par morceaux, $\|u\|_{L^1} \leq K$ implique que, pour tout $t \geq 0$ et tout $j \leq n$

$$\| |A|^p (\Upsilon_{t,0}^u \psi_j - X_{t,0}^{(N),u} \psi_j) \| \leq \varepsilon.$$

En d'autres termes, un systèmes admettant une suite de bonnes approximations de Galerkin peut être remplacé, avec une précision arbitraire, par une de ses approximation de Galerkin. Comme pour la Proposition 2.2.1, on remarquera que la majoration d'erreur de la Définition 2.2.2 ne fait apparaître que la norme L^1 de u et ne fait pas intervenir le temps.

Le résultat essentiel sur les systèmes faiblement couplés est l'existence de bonnes approximations de Galerkin :

2. Aspects énergétiques

Proposition 2.2.2 (Théorème 4 de [BCC13c]). *Soient $k > 0$ et (A, B, U, Φ, Λ) un système k -faiblement couplé tel qu'il existe $r < k$ et $d \geq 0$ vérifiant $\|B\psi\| \leq d\| |A|^{\frac{r}{2}}\psi\|$ pour tout ψ de $D(|A|^{\frac{r}{2}})$. Alors, pour tous $s < k$, (A, B, U, Φ, Λ) admet une suite de bonnes approximations de Galerkin en norme $|A|^s$ pour tout $s < k/2$.*

La Proposition 2.2.2 admet des variantes explicites qui donnent une relation entre la condition initiale ψ_0 , l'ordre de l'approximation N , la norme L^1 des commandes K et l'erreur commise en remplaçant la dynamique originelle par l'approximation de Galerkin d'ordre N , voir par exemple l'inégalité (8) ou la Proposition 12 de [BCC13c].

2.2.3. Le couplage faible en physique

Les Propositions 2.2.1 et 2.2.2 ne sont pas surprenantes au vu des conditions imposées dans la Définition 2.2.1. Le vrai résultat de ce chapitre est que l'immense majorité des systèmes quantiques bilinéaires à spectre discret rencontrés en physique sont k -faiblement couplés pour tout k entier.

Nous nous contenterons de citer deux exemples importants.

Proposition 2.2.3 (Proposition 8 de [BCC13c]). *Soit k un entier positif, Ω une variété riemannienne compacte de classe (au moins) C^{2k} , $V, W : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions C^{2k} (au moins) sur Ω . On définit $A = -i(\Delta + V) : D(A) \rightarrow L^2(\Omega, \mathbf{C})$ et $B : \psi \in L^2(\Omega, \mathbf{C}) \mapsto -iW\psi \in L^2(\Omega, \mathbf{C})$. On note Φ une base hilbertienne de $L^2(\Omega, \mathbf{C})$ formée de vecteurs propres normalisés de A et $i\Lambda$ la famille des valeurs propres associées. Alors $(A, B, \mathbf{R}, \Phi, \Lambda)$ est k -faiblement couplé.*

L'intérêt de la Proposition 2.2.3 réside dans le fait, déjà évoqué en introduction de ce chapitre, que la plupart des exemples rencontrés dans la littérature physique ne font intervenir que des potentiels très réguliers (analytiques en général).

Définition 2.2.3. Un système (A, B, U, Φ, Λ) satisfaisant l'Hypothèse 1 est dit *tridiagonal* si pour tous k, j de \mathbf{N} , $\langle \phi_j, B\phi_k \rangle \neq 0$ implique $|j - k| \leq 1$.

Proposition 2.2.4 (Proposition 10 de [BCC13c]). *Soit (A, B, U, Φ, Λ) un système tridiagonal et k un nombre positif. Si les suites $\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ et $\left(|\langle \phi_n, B\phi_{n+1} \rangle| \left(\frac{\lambda_{n+1}^k}{\lambda_n^k} - 1\right)\right)_{n \in \mathbf{N}}$ sont bornées et si les suites $\left(\frac{\langle \phi_n, B\phi_{n-1} \rangle}{\lambda_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$, $\left(\frac{\langle \phi_n, B\phi_n \rangle}{\lambda_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ tendent vers zéro, alors (A, B, U, Φ, Λ) est k -faiblement couplé et $c_k(A, B) \leq \sup_n |\langle \phi_n, B\phi_{n+1} \rangle| \left(\frac{\lambda_{n+1}^k}{\lambda_n^k} - 1\right)$.*

La Proposition 2.2.4 s'applique notamment au cas de l'oscillateur harmonique quantique (Section IV.E de [BCC13c]).

2.3. Quelques applications

La notion de couplage faible (et particulièrement l'existence de bonnes approximations de Galerkin) peut être utilisée de plusieurs façons.

2.3.1. Aspects numériques

Une suite de bonnes approximations de Galerkin permet de borner a priori l'erreur faite en remplaçant le système original de dimension infinie par une de ses approximations. Ce point a été utilisé pour les simulations numériques de la Section III de [BCC12b] (permutation des trois premiers niveaux de l'oscillateur harmonique).

Quoique très efficace pour les systèmes tridiagonaux (c'est le cas de l'oscillateur harmonique), les estimations d'erreur données par la Proposition 2.2.2 ne sont pas toujours suffisantes pour les systèmes peu réguliers, voir par exemple la Section IV de [BCC12b] (permutation des trois premiers niveaux du puits de potentiel carré infini).

2.3.2. Méthodes de Lyapunov

Les méthodes de Lyapunov sont couramment utilisées pour déterminer des commandes en boucle ouverte de systèmes quantiques de la manière suivante :

- On construit une loi de commande $\psi \mapsto \hat{u}(\psi)$ conformément à la procédure indiquée en Section 1.2.2.
- On implémente cette loi \hat{u} et on trouve une fonction $\hat{\psi} : \mathbf{R}^+ \rightarrow H$ vérifiant la condition initiale souhaitée, $\hat{\psi}' = (A + \hat{u}(\hat{\psi})B)\hat{\psi}$ et telle que $\hat{\psi}(t)$ tend vers la cible quand t tend vers l'infini.
- On récupère le contrôle en boucle ouverte $t \mapsto \hat{u}(\hat{\psi}(t))$.

Dès que l'on connaît \hat{u} , cette procédure ne pose pas de difficulté particulière en dimension finie. Les choses sont évidemment plus compliquées en dimension infinie. Une suite de bonnes approximations de Galerkin permet de s'affranchir des problèmes de définition :

- On choisit une approximation de Galerkin d'ordre N du système à étudier. L'entier N est choisi de façon à être l'ordre le plus grand pour lequel l'approximation de Galerkin reste manipulable (suivant les ressources informatiques dont on dispose, N varie de quelques dizaines à quelques milliers).
- On utilise la procédure décrite ci-dessus sur le système d'ordre N .
- On utilise la loi de commande en boucle ouverte ainsi trouvée sur le système original. La norme L^1 de la loi de commande permettra de borner a priori l'erreur sur le système de dimension infinie.

Cette procédure a été utilisée dans la Section IV-D de [BCC13c].

2.3.3. Analyse théorique

Les calculs explicites sont en général plus faciles en dimension finie qu'en dimension infinie. L'utilisation de bonnes approximations de Galerkin a permis de montrer un certain nombre de résultats théoriques. Nous insisterons sur les deux exemples suivants.

Convergence des méthodes de moyennisation

Les méthodes de moyennisation sur lesquelles nous reviendrons dans le chapitre suivant sont bien connues pour les systèmes de dimension finie. Les résultats de convergence se généralisent en dimension infinie dès que l'on peut garantir que les approximations de

2. Aspects énergétiques

Galerkin ont une dynamique proche de la dynamique originelle. Ce résultat a été publié dans [BCC12e]. Depuis, nous l'avons généralisé à des systèmes pas forcément faiblement couplés (voir chapitre suivant).

Temps minimal de contrôlabilité approchée

L'utilisation de bonnes approximations de Galerkin a permis de montrer l'existence de systèmes quantiques faiblement couplés tels que que l'ensemble atteignable en temps inférieur ou égale à T depuis le premier état propre est dense dans l'espace ambiant, pour tout $T > 0$. Précisément :

Proposition 2.3.1 ([BCC12c]). *Pour tout $T > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute fonctions impaire ϕ^* de $L^2(\mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z}), \mathbf{C})$ de norme 1, il existe $T' < T$ et $u : [0, T'] \rightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux telle que la solution $\hat{\phi}$ de*

$$\begin{cases} i \frac{\partial \psi}{\partial t}(\theta, t) &= -\partial_{\theta\theta\theta\theta\theta\theta}\psi(\theta, t) + u(t) \cos \theta \psi(\theta, t), & \theta \in \mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z}) \\ \psi(\theta, 0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\theta) \end{cases}$$

satisfasse $\|\phi^*(\cdot) - \hat{\phi}(\cdot, T')\|_{L^2(\mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z}), \mathbf{C})} < \varepsilon$.

Le résultat de la Proposition 2.3.1 est en opposition à la fois avec la situation de dimension finie (voir par exemple [Sac00] et [AC06]) et avec les résultats de contrôlabilité locale exacte en temps petits avec des commandes petites (voir par exemple [Cor06] ou [BM14]). La compréhension de la structure des ensembles atteignables en temps petits des systèmes conservatifs bilinéaires reste assez parcellaire à ce jour.

3. Méthodes de moyennisation

3.1. Moyennisation en dimension finie

3.1.1. Principe

Les méthodes de moyennisation datent des débuts de l'étude des systèmes dynamiques. Il a été observé que, sous des conditions suffisantes de régularité, la dynamique des systèmes non-autonomes tendait, pour des champs petits, vers la dynamique des champs moyennés. Précisément, soit $f : (x, t) \in M \times \mathbf{R} \mapsto f(x, t) \in T_x M$ un champ de vecteurs non autonome sur une variété M . On définit le champ autonome moyen

$$\bar{f} : x \in M \mapsto \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t) dt.$$

Pour x_0 dans M et $\varepsilon > 0$, on note $t \in \mathbf{R} \mapsto X_{t,0}^\varepsilon(x_0) \in M$ et $t \in \mathbf{R} \mapsto \bar{X}_{t,0}(x_0) \in M$ les solutions des systèmes

$$\begin{cases} x' &= \varepsilon f(x, t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' &= \bar{f}(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

respectivement.

Proposition 3.1.1 ([SV85]). *Si f est de classe au moins C^2 , alors $X_{1/\varepsilon,0}^\varepsilon(x_0)$ tend vers $\bar{X}_{1,0}(x_0)$ quand ε tends vers 0.*

Une littérature très vaste est aujourd'hui disponible sur les méthodes de moyennisation. En particulier, il existe de très nombreuses extensions de la Proposition 3.1.1 à des champs moins réguliers. L'extension de ce type de résultats à des systèmes fortement irréguliers ou de dimension infinie fait aujourd'hui l'objet de recherches actives, voir par exemple [Art10]. À ma connaissance, aucun résultat de moyennisation faisant intervenir des opérateurs non bornés (donc non continus) n'est disponible dans la littérature.

3.1.2. Utilisation en mécanique quantique

Les méthodes de moyennisation sont utilisées couramment pour déterminer des lois de contrôles pour les systèmes quantiques bilinéaires depuis les années 50. Le but de cette Section 3.1.2 est d'exposer formellement comment les méthodes de moyennisation s'appliquent aux systèmes bilinéaires conservatifs en dimension finie.

Soit N un entier, et $A^{(N)}, B^{(N)}$ deux matrices de $\mathfrak{u}(N) = \{M \in \mathcal{M}_N(\mathbf{C}) \mid \bar{M} = -M\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer $A^{(N)}$ diagonale, de valeurs propres

3. Méthodes de moyennisation

$i\lambda_1, i\lambda_2, \dots, i\lambda_N$. On note $\Phi = (\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$ la base canonique de \mathbf{C}^N muni de sa structure hermitienne canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les composantes de B seront notées $b_{jk} := \langle \phi_j, B\phi_k \rangle$, $1 \leq j, k \leq N$.

Une condition initiale x_0 de norme un et une fonction u de $L^1_{loc}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ étant données, on considère dans \mathbf{C}^N le système

$$x' = (A^{(N)} + u(t)B^{(N)})x$$

dont la solution valant x_0 en t_0 est notée $t \mapsto X_{t,t_0}^u x_0$.

Pour u et x_0 donnés, définissons $Y_t^u x_0 : t \mapsto e^{-tA} X_{t,0}^u x_0$. On notera que les modules des coordonnées de $Y_t^u x_0$ et $X_{t,0}^u x_0$ coïncident pour tout t . La fonction $t \mapsto Y_t^u x_0$ est solution du système

$$\begin{cases} y' &= u(t)e^{-tA^{(N)}} B^{(N)} e^{tA^{(N)}} y \\ y(0) &= x_0 \end{cases}$$

Les composantes de la matrice $M(t) := u(t)e^{-tA^{(N)}} B^{(N)} e^{tA^{(N)}}$ sont $[b_{jk}u(t)e^{i(\lambda_j - \lambda_k)t}]_{1 \leq j, k \leq N}$.

Quand T tend vers l'infini, la moyenne $\frac{1}{T} \int_0^T M(t) dt$ tend vers la matrice constante $M^\dagger(u)$, qui est un élément de $\mathfrak{u}(N)$. En choisissant convenablement u , on peut en général sélectionner dans $M^\dagger(u)$ certaines composantes et annuler toutes les autres. Par le principe de moyennisation, la fonction $x \mapsto Y_{nt}^u x$ tendra vers la rotation $e^{M^\dagger(u)}$ de \mathbf{C}^N .

La méthode proposée ci-dessus n'a d'intérêt que si on peut choisir facilement la forme de M^\dagger , ce qui a conduit à introduire la notion de transition (non)-dégénérée.

Définition 3.1.1. Une *transition* de $(A^{(N)}, B^{(N)})$ est un élément de $\{1, \dots, N\}^2$. Une transition (j, k) est dite *non-dégénérée* (ou *non-résonante*) si (1) $\lambda_j \neq \lambda_k$, (2) $b_{jk} \neq 0$ et (3) $|\lambda_l - \lambda_m| = |\lambda_j - \lambda_k|$ implique (i) $\{j, k\} = \{l, m\}$ ou (ii) $\{j, k\} \cap \{l, m\} = \emptyset$ ou (iii) $b_{lm} = 0$.

Signalons des problèmes récurrents liés la Définition 3.1.1. Nous ignorions les usages physiques lors de l'écriture de [CMSB09b] et n'avons pas trouvé de trace de ce concept dans la littérature mathématique. Pour cette raison, nous avons proposé le terme « non-résonnant » et l'avons repris dans [BCCS12]. Ce n'est qu'au moment de l'écriture de [Cha12] que j'ai appris que les physiciens et les chimistes parlent de transitions « non dégénérées ».

Au delà de cette divergence de terminologie (sans importance mathématique mais génératrice d'une certaine confusion), la notion de dégénérescence d'une transition que nous utilisons a nettement évolué entre [CMSB09b] (où nous demandions la \mathbf{Q} -linéaire indépendance des valeurs propres de $A^{(N)}$), [BCCS12] (qui contient la définition de non-dégénérescence la plus proche de celle utilisée par la majorité des physiciens et chimistes) et [Cha12] (avec une notion encore un peu plus faible, mais qui sera nécessaire pour englober le cas du spectre continu).

La Proposition suivante, publiée dans [Cha12], permet de quantifier la convergence du propagateur du système non autonome vers la rotation $t \mapsto e^{tM^\dagger u}$. Sa preuve est pratiquement immédiate et ce n'est certainement pas un résultat original. Toutefois, je n'en ai pas trouvé de trace dans la littérature.

Proposition 3.1.2 (Proposition 2 et inégalité (12) de [Cha12]). Soit $u^* : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ localement intégrable, périodique de période $T = \frac{2\pi}{|\lambda_2 - \lambda_1|}$, telle que

$$\int_0^T u^*(t) e^{i(\lambda_l - \lambda_m)t} dt = 0$$

pour tout $\{l, m\}$ vérifiant $\{l, m\} \cap \{1, 2\} \neq \emptyset$ et $\frac{\lambda_l - \lambda_m}{\lambda_2 - \lambda_1} \in \mathbf{Z} \setminus \{1, -1\}$ et $b_{lm} \neq 0$.

Si $\int_0^T u^*(\tau) e^{i(\lambda_2 - \lambda_1)\tau} d\tau \neq 0$, alors, pour tout n dans \mathbf{N} , pour tout $t \leq nT^* - T$, pour tout x_0 de norme un,

$$\frac{\|X_{(N)}^{u_n}(t, 0)x_0 - e^{tA^{(N)}} e^{\left(\int_0^t \frac{u^*(\tau)}{n} d\tau\right)M^\dagger} x_0\|}{I(C+1)\|M^\dagger\|} \leq \frac{1 + K(\|M^\dagger\| + \sup_{s \leq t} \|B^{(N)} X_{(N)}^{u_n}(s, 0)x_0\|)}{n}, \quad (3.1.1)$$

où on a noté

$$T^* = \frac{\pi T}{2|b_{12}|\left|\int_0^T u^*(\tau) e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)\tau} d\tau\right|}, I = \int_0^T |u^*(\tau)| d\tau,$$

$$K = \frac{IT^*}{T}, C = \sup_{(j,k) \in \mathcal{E}} \left| \frac{\int_0^T u^*(\tau) e^{i(\lambda_j - \lambda_k)\tau} d\tau}{\sin\left(\pi \frac{|\lambda_j - \lambda_k|}{|\lambda_2 - \lambda_1|}\right)} \right|,$$

\mathcal{E} désignant l'ensemble des transitions (j, k) telles que $b_{jk} \neq 0$, $\{j, k\} \cap \{1, 2\} \neq \emptyset$ et $|\lambda_j - \lambda_k| \notin \mathbf{Z}|\lambda_2 - \lambda_1|$.

L'existence d'une fonction u^* vérifiant les hypothèses de la Proposition 3.1.2 est garantie dès que la transition choisie est non-dégénérée : c'est le résultat de la Section 4.2 de [BCCS12], reformulé sous une forme bien plus claire dans la Section III.C de [BCC12e].

Sans surprise, toutes les lois de commandes vérifiant les hypothèses de la Proposition 3.1.2 ne conduisent pas à des transferts identiques. On peut vouloir maximiser le module des composantes non nulles de $M^\dagger(u^*)$ en choisissant correctement u^* . Ceci a conduit à introduire la notion d'*efficacité* (Section III.B de [BCC12e]) qui mesure la norme L^1 de la commande nécessaire pour effectuer un transfert donné. L'efficacité maximale n'est, en générale, pas atteinte dans l'ensemble des fonctions L^1 . Dans le cas générique de valeurs propres de $A^{(N)}$ \mathbf{Q} -linéairement indépendantes, une mesure maximisant l'efficacité est un peigne de Dirac (Section III.B de [BCC12e]). On notera que dans ce cas, un peigne de Dirac minimise la variation totale de la mesure de Radon¹ de la commande pour une permutation entre états propres donnée (Proposition 12 de [BCC12d]).

3.2. De la dimension finie à la dimension infinie

La généralisation des résultats de la Section 3.1.2 à la dimension infinie et avec des opérateurs non bornés pose un certain nombre de difficultés. Par exemple, l'application $t \mapsto e^{tA}$ n'est en général pas continue si A n'est pas borné, tandis qu'il n'est plus évident de donner un sens à la majoration (3.1.1).

1. Si la mesure de Radon est définie par une fonction, la variation totale de la mesure est égale à la norme L^1 de la fonction.

3. Méthodes de moyennisation

3.2.1. Une condition suffisante de contrôlabilité

Existence d'une base de vecteurs propres

Définition 3.2.1. Soit (A, B, U, Φ, Λ) un système satisfaisant l'Hypothèse 1. Une transition $(j, k) \in \mathbf{N}^2$ est *non-dégénérée* (ou *non-résonante*) pour (A, B, U, Φ, Λ) si (i) $\lambda_j \neq \lambda_k$, (ii) $\langle \phi, B\phi_k \rangle \neq 0$ et (iii) pour tout $(l, m) \in \mathbf{N}^2$, $|\lambda_j - \lambda_k| = |\lambda_l - \lambda_m|$ implique $\{\lambda_j, \lambda_k\} \cap \{\lambda_l, \lambda_m\} = \emptyset$ ou $\{\lambda_j, \lambda_k\} = \{\lambda_l, \lambda_m\}$ ou $\langle \phi_l, B\phi_m \rangle = 0$.

La Définition 3.2.1 pose les mêmes problèmes que la Définition 3.1.1. La notion de non-dégénérescence retenue ici est celle de [Cha12]. Ce choix a été fait en vue de l'extension des résultats de moyennisation aux systèmes à spectre continu. Il n'est pas le plus pratique en vue du contrôle du propagateur, voir par exemple [BCC12b] où on a préféré la variante plus forte introduite dans [BCCS12] :

Définition 3.2.2. Soit (A, B, U, Φ, Λ) un système satisfaisant l'Hypothèse 1. Une transition $(j, k) \in \mathbf{N}^2$ est *non-dégénérée* (ou *non-résonante*) au sens de [BCCS12] pour (A, B, U, Φ, Λ) si (i) $\lambda_j \neq \lambda_k$, (ii) $\langle \phi, B\phi_k \rangle \neq 0$ et (iii) pour tout $(l, m) \in \mathbf{N}^2$, $|\lambda_j - \lambda_k| = |\lambda_l - \lambda_m|$ implique $\{\lambda_j, \lambda_k\} = \{\lambda_l, \lambda_m\}$ ou $\langle \phi_l, B\phi_m \rangle = 0$.

Supposons que $(1, 2)$ soit une transition non résonante (au sens de la Définition 3.2.1) d'un système (A, B, U, Φ, Λ) satisfaisant l'Hypothèse 1. Étant donné $\varepsilon > 0$ et $\delta \in U \setminus \{0\}$, on souhaite trouver $T > 0$ et une commande $u : [0, T] \rightarrow \{0, \delta\}$ tels que $\|\Upsilon_t^u \phi_1 - \phi_2\| < \varepsilon$ et $\|\Upsilon_t^u \phi_2 - \phi_1\| < \varepsilon$.

Schéma de preuve avec des solutions fortes Supposons dans un premier temps que $t \mapsto \Upsilon_{t,0}^u \phi_j$ est une solution forte de (1.3.1) pour $j = 1, 2$, pour toute fonction u constante par morceaux à valeur dans U . Pour tout N de \mathbf{N} , on trouve par projection

$$\begin{aligned} \pi_N \frac{d\Upsilon_{t,0}^u \phi_j}{dt} &= \pi_N (A + u(t)B) \Upsilon_{t,0}^u \phi_j \\ \frac{d\pi_N \psi}{dt} &= \pi_N A \pi_N \Upsilon_{t,0}^u \phi_j + u(t) \pi_N B \Upsilon_{t,0}^u \phi_j \\ &= \pi_N A \pi_N \Upsilon_{t,0}^u \phi_j + u(t) \pi_N B \pi_N \Upsilon_{t,0}^u \phi_j + u(t) \pi_N B (1 - \pi_N) \Upsilon_{t,0}^u \phi_j \end{aligned}$$

La formule de Duhamel fournit

$$\pi_N \Upsilon_{t,0}^u \phi_j(t) = X_{t,0}^{(N),u} \Upsilon_{t,0}^u \phi_j + \int_0^t u(s) X_{s,t}^{(N),u} \pi_N B (1 - \pi_N) \Upsilon_{t,0}^u \phi_j(s) ds \quad (3.2.1)$$

Projetant de nouveau sur $\text{vect}(\phi_1, \phi_2)$:

$$\begin{aligned}
 \pi_2 \Upsilon_{t,0}^u \phi_j(t) &= \pi_2 X_{t,0}^{(N),u} \phi_j + \int_0^t \pi_2 u(s) X_{s,t}^{(N),u} \pi_N B (1 - \pi_N) \Upsilon_{t,0}^u \phi_j(s) ds \\
 \pi_2 \Upsilon_{t,0}^u \phi_j(t) &= \pi_2 X_{t,0}^{(N),u} \phi_j + \int_0^t u(s) X_{s,t}^{(N),u} \pi_2 B (1 - \pi_N) \Upsilon_{t,0}^u \phi_j(s) ds \\
 &\quad + \int_0^t \pi_2 u(s) (X_{s,t}^{(N),u} \pi_2 - \pi_2 X_{s,t}^{(N),u}) \pi_N B (1 - \pi_N) \Upsilon_{t,0}^u \phi_j(s) ds \\
 \pi_2 \Upsilon_{t,0}^u \phi_j(t) &= \pi_2 X_{t,0}^{(N),u} \phi_j + \underbrace{\int_0^t u(s) X_{s,t}^{(N),u} \pi_2 B (1 - \pi_N) \Upsilon_{t,0}^u \phi_j(s) ds}_{\alpha} \\
 &\quad + \underbrace{\int_0^t \pi_2 u(s) [X_{s,t}^{(N),u}, \pi_2] \pi_N B (1 - \pi_N) \Upsilon_{t,0}^u \phi_j(s) ds}_{\beta} \tag{3.2.2}
 \end{aligned}$$

L'idée est de choisir u périodique de période $\frac{2\pi}{|\lambda_1 - \lambda_2|}$ et d'appliquer, dans un espace \mathbf{C}^N bien choisi, les résultats de la Proposition 3.1.2. On sait déjà que, quelque soit le choix de N , la norme L^1 de u sera majorée par K (on reprend les notations de la Proposition 3.1.2). La quantité α dans (3.2.2) vérifie $\|\alpha\| \leq K \|\pi_2 B (1 - \pi_N)\|$. Choisissons N tel que

$$\|\pi_2 B (1 - \pi_N)\| = \|(1 - \pi_N) B \pi_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2K}.$$

L'entier N étant fixé, on applique la Proposition 3.1.2 dans \mathbf{C}^N pour trouver u tel que $\|[X_{s,t}^{(N),u}, \pi_2]\| \leq \frac{\varepsilon}{2K \|\pi_N B (1 - \pi_N)\|}$ (ce qui garantit $\|\beta\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$) et $\|\pi_n X_{t,0}^{(N),u} \phi_j\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour $k \in \{1, 2\} \setminus \{j\}$. Au final, on a trouvé $u : [0, T] \rightarrow \{0, \delta\}$ qui assure $\|\pi_2 \Upsilon_T^u \phi_1 - \phi_2\| < \varepsilon$ et $\|\pi_2 \Upsilon_T^u \phi_2 - \phi_1\| < \varepsilon$, ou, de manière équivalente formulée en termes d'opérateurs,

$$\|\pi_2 (\Upsilon_{T,0}^u - \hat{\Upsilon}) \pi_2\| < \varepsilon$$

où Υ est l'identité sur $\text{Vect}(\phi_1, \phi_2)^\perp$ et échange ϕ_1 et ϕ_2 .

Puisque $\Upsilon_{T,0}^u$ est unitaire, $\|(1 - \pi_2) \Upsilon_{T,0}^u \phi_1\| \leq \sqrt{1 - \|\pi_2 \Upsilon_{T,0}^u \phi_1\|^2}$

$$\begin{aligned}
 \|\Upsilon_{T,0}^u \phi_1 - \phi_2\| &\leq \sqrt{\|\pi_2 \Upsilon_{T,0}^u \phi_1 - \phi_2\|^2 + \|(1 - \pi_2) (\Upsilon_{T,0}^u \phi_1 - \phi_2)\|^2} \\
 &\leq \sqrt{\|\pi_2 \Upsilon_{T,0}^u \phi_1 - \phi_2\|^2 + \|(1 - \pi_2) \Upsilon_{T,0}^u \phi_1\|^2} \\
 &\leq \sqrt{\varepsilon^2 + 1 - \|\pi_2 \Upsilon_{T,0}^u \phi_1\|^2} \\
 &\leq \sqrt{\varepsilon^2 + 1 - (\|\pi_2 \Upsilon_{T,0}^u \phi_1 - \phi_2\| + \|\phi_2\|)^2} \\
 &\leq \sqrt{\varepsilon^2 - \|\pi_2 \Upsilon_{T,0}^u \phi_1 - \phi_2\|^2 + 2\|\pi_2 \Upsilon_{T,0}^u \phi_1 - \phi_2\|} \\
 &\leq \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon},
 \end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat de contrôlabilité approchée cherché.

3. Méthodes de moyennisation

Preuve générale Dans le cadre générale de l'Hypothèse 1, il n'est pas clair qu'il existe des solutions fortes au système (1.3.1) pour une commande u non constante. Toutefois, puisque ϕ_j est dans le domaine de $A + uB$ pour tout u de U , $t \mapsto \Upsilon_{t,t_0}^u \phi_j$ est solution forte de (1.3.1) pour t dans $[t_0, t_1]$ si u est constante sur $[t_0, t_1]$. On peut donc reprendre intégralement le calcul précédent sur chaque intervalle où u est constant. En concaténant, on obtient les mêmes estimations sur le propagateur en restriction à l'espace engendré par ϕ_1 et ϕ_2 , et on déduit la même conclusion que précédemment.

Remarque 3.2.1. Une sincère volonté de concision alliée à une relecture trop rapide ont conduit à présenter dans [Cha12] une version de la preuve ci-dessus si lapidaire qu'elle pourrait laisser croire que toutes les trajectoires $t \mapsto \Upsilon_{t,t_0}^u \phi_j$ sont des solutions fortes. La maladresse a été détectée lors de la rédaction de ce mémoire. Une communication de clarification est en cours de rédaction.

Cas du spectre mixte

Dans le cas où le système (A, B) vérifie l'Hypothèse 2, on peut étendre partiellement le résultat de contrôlabilité approché énoncé ci-dessus pour les systèmes vérifiant l'Hypothèse 1. L'énoncé que l'on donne ici est prouvé dans la partie IV de [Cha12].

Proposition 3.2.1. *Soient (A, B) vérifiant l'Hypothèse 2. On note Λ la famille (finie ou infinie) des valeurs propres de iA comptées avec leur multiplicité et Φ une famille de vecteurs propres normalisés associés. On suppose que Λ contient au moins λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et que le spectre de iA ne s'accumule dans aucun des quatre points $2\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_2 - \lambda_1$. Si $\langle \phi_1, B\phi_2 \rangle \neq 0$ et, pour tout couple λ_j, λ_k de valeurs propres de iA , $|\lambda_j - \lambda_k| = |\lambda_1 - \lambda_2|$ implique $\{\lambda_j, \lambda_k\} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ ou $\langle \phi_1, B\phi_2 \rangle = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon : [0, T_\varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $u_\varepsilon(t) = \frac{1}{n_\varepsilon} \sin(|\lambda_2 - \lambda_1|t + \theta_\varepsilon)$ pour tout t de $[0, T_\varepsilon]$ avec θ_ε dans $[0, 2\pi[$ et n_ε un entier tels que $\|\Upsilon_{T_\varepsilon, 0}^u \phi_1 - \phi_2\| < \varepsilon$.*

La méthode de la preuve de la Proposition 3.2.1 consiste à approcher A par un opérateur A_η tel qu'il existe une base hilbertienne de H formés de vecteurs propres de A_η , que $\|A - A_\eta\| < \eta$ et que $(A_\eta, B, \Lambda_\eta, \Phi_\eta, \mathbf{R})$ satisfasse l'Hypothèse 1 avec des familles Λ_η et Φ_η bien choisies. L'existence d'un tel A_η est garantie, pour tout $\eta > 0$ par le Théorème 2.1 p 595 de [Kat95]. L'écart en norme de H entre les trajectoires du système (A_η, B) et (A, B) en temps T est plus petit que $T\eta$. Pour montrer la Proposition 3.2.1, il suffit donc de savoir majorer a priori, indépendamment de η , le temps nécessaire pour envoyer ϕ_1 dans un ε voisinage de ϕ_2 avec le système (A_η, B) . C'est une conséquence facile de la Proposition 3.1.2 appliquée à (A_η, B) . L'hypothèse de non-accumulation du spectre de iA en quatre valeurs est destinée à empêcher l'explosion du terme C de la Proposition 3.1.2.

3.2.2. Intérêts de la méthode

La méthode de preuve de contrôlabilité approchée présentée dans ce chapitre présente un certain nombre d'avantages.

3.2. De la dimension finie à la dimension infinie

D'abord, c'est une méthode orientée « opérateurs » plus que « théorie des équations aux dérivées partielles ». Les travaux herculéens d'étude systématique des opérateurs auto-adjoints entrepris depuis le milieu du XX^e siècle (voir par exemple [RS75] et [Kat95]) peuvent être utilisés tels quels pour montrer qu'un système donné entre dans le cadre des Hypothèses 1 ou 2. En particulier, la méthode présentée est à ma connaissance la seule qui permette d'obtenir des résultats positifs de contrôlabilité approchée quand l'opérateur de couplage B est non borné, ou quand une équation de Schrödinger bilinéaire est posée sur une variété à topologie non triviale, ou quand A est un opérateur de Dirac.

Ensuite, c'est une méthode constructive (grâce à la Proposition 3.1.2) et complètement explicite. Le caractère borné (aussi bien en norme L^1 qu'au sens de la variation totale) des suites de commandes générées impliquent, pour la plupart des systèmes physiques comme par exemple les systèmes faiblement couplés, la bornitude des propagateurs en norme $|A|^k$ avec $k > 0$. Un argument d'interpolation permet de déduire la contrôlabilité approchée en norme $|A|^r$ pour tout $r < k$, et non seulement en norme de H . Soulignons que l'aspect constructif donne lieu à des formes très simples pour les commandes : des implémentations numériques ont été réalisées ([BCC12b]), et des conséquences théoriques parfois inattendues (citons [BCC12a] et [BCC12c]) en ont été tirées. Nous reviendrons sur les perspectives encore ouvertes et en cours d'exploitation au chapitre 7.

Surtout, ce résultat a permis de retrouver de manière assez spectaculaire l'un des postulats de la mécanique quantique qui veut que les échanges d'énergies soient quantifiés, et que l'excitation d'un système d'un niveau λ_1 à un niveau λ_2 se fasse par l'absorption d'un photon de fréquence $\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{2\pi}$. Il est important de remarquer que le modèle utilisé (dit *semi-classique*) ne tient pas compte du caractère quantique du champ incident.

Deuxième partie .

Locomotion en fluide potentiel

4. Nage en fluide potentiel

4.1. Contexte physique

Déplacer un véhicule de manière efficace dans un fluide dense est un problème difficile d'ingénierie, motivé par d'innombrables applications aussi bien militaires (construire des sous-marins rapides, manœuvrables, furtifs..) que civiles (conception de robots d'inspection et d'entretien pour les installations industrielles sous-marines, mini-robots utilisés en médecine dans le corps humain, compréhension de la nage de micro-organisme et applications notamment à la contraception ou à l'aide à la procréation...).

La technologie actuelle permet essentiellement deux modes de propulsion pour les robots construits par l'homme.

Le premier mode de propulsion consiste à construire un robot rigide, qui aspire et éjecte du fluide (en général sur une petite zone et à assez grande vitesse, par exemple autour d'une hélice ou d'une turbine). La conservation du moment cinétique du système { sous-marin + fluide aspiré/éjecté } permet de modifier le moment du sous-marin et de le propulser dans la direction voulue ou de lui imprimer un mouvement de rotation. Ce système permet de construire d'un côté des sous-marins très rapides (d'après Wikipedia, un sous-marin nucléaire lanceur d'engins militaire navigue couramment à 40 km/h en plongée, et la torpille Mu-90 utilisée par l'armée française atteindrait 123 km/h pour une portée de 14 km) mais peu manœuvrables ou, d'un autre côté, des engins très manœuvrables mais peu rapides (robots d'inspections des forages pétroliers).

Le deuxième mode de propulsion consiste à modifier fortement la forme du nageur pendant le déplacement. En se déformant, le nageur exerce une force sur le fluide qui par réaction le fait avancer. C'est le mode de déplacement des poissons, des micro-organismes et des nageurs humains lors de compétitions de natation.

Il a été très tôt remarqué que le deuxième mode de locomotion était nettement plus efficace (aussi bien pour le compromis vitesse/manœuvrabilité, la consommation énergétique ou la furtivité) que le premier.

Les travaux présentés ici visent à une meilleure compréhension de la nage dans un fluide dit *potentiel* (voir définition ci-dessous).

4.2. État de l'art

Des contributions importantes à la compréhension des phénomènes bio-mécaniques de nage sont dues à Lighthill [Lig75], Taylor [Tay51, Tay52] et Childress [Chi81]. Un panorama assez complet de la nage des poissons a été donné par Sparenberg [Spa02].

De nombreuses expériences [MB99, ZWYT02, TTY00] ont montré le rôle important

4. Nage en fluide potentiel

des vortex dans la locomotion. Certains modèles intègrent d'ailleurs des vortex artificiels dans un écoulement sans vorticité dans le but de concilier réalisme et simplicité.

Si on ne néglige pas la viscosité, le modèle convenable est un couplage entre d'une part l'équation non-stationnaire de Navier-Stokes pour l'écoulement du fluide et d'autre part les lois de Newton pour le mouvement du nageur. C'est le point de vue adopté par Carling, Williams et Bowtell dans [CWB98], Liu et Kawachi dans [LK99], Galdi dans [Gal99] ou San Martin, Scheid, Takahashi et TucsnaK dans [SMSTT08].

Contrairement à une idée assez répandue, les forces qui agissent sur le nageur par l'intermédiaire des vortex ne sont pas les seules responsables de la locomotion. Parmi les nombreux travaux théoriques sur la locomotion, la plupart considèrent des écoulements sans vortex. C'est le cas par exemple des articles de Kelly et Murray [KM00], Kozlov et Onishchenko [KO03a], Kanso, Marsden, Rowley et Melli-Huber [KMRMH05], et Munnier [Mun08].

Malgré leur importance cruciale pour les applications, les résultats de commande effectifs ou de planification de trajectoire sont très rares pour ce genre de problème. La plupart de ces résultats concernent des solides articulés comme dans les travaux d'Alouges, De-Simone et Lefebvre [ADL08] qui considèrent un ensemble de trois sphères dans un fluide visqueux, ou dans les travaux de Mason [MB99] ou ceux de Melli, Rowley et Rufat [MRR06].

Parmi les autres travaux portant sur la commande de solides (rigides) immergés, citons les articles de San Martin, Takahashi et TucsnaK [SMTT07] (la commande est sur la vitesse du fluide à la frontière du solide) et de Kozlov et Onishchenko [KO03b] où la commande est la répartition de masse interne dans une enveloppe rigide immergée en fluide parfait.

4.3. Un modèle jouet : le sous-marin rigide

On présente ici un modèle très simple de sous-marin ellipsoïdal rigide (la forme de la coque et la répartition des masses internes sont constantes dans le temps) immergé dans un fluide potentiel (c'est-à-dire dont la vitesse en chaque point dérive d'un potentiel scalaire) d'extension tridimensionnelle infinie. Les commandes sont une force (de direction le grand axe du sous-marin) et deux couples (rotations autour des petits axes) arbitraires. On pourra reprocher à ce modèle son caractère assez peu réaliste. Pourtant, malgré sa simplicité, ce modèle présente déjà une certaine richesse et a servi d'inspiration pour les nageurs déformables du chapitre suivant.

4.3.1. Modélisation

Obtenir les équations du mouvement pour le sous-marin présente quelques difficultés. Le fluide occupe l'espace \mathbf{R}^3 entier, à l'exception du volume occupé par le sous-marin. Comme le sous-marin bouge, le volume occupé par le fluide et l'interface fluide-structure changent avec le temps. Or le mouvement du sous-marin résulte de la force et des couples extérieurs imposés par la commande et des forces de pression et couples associés d s au

4.3. Un modèle jouet : le sous-marin rigide

fluide qui s'exercent sur cette interface fluide-structure mobile, ce qui rend en général délicat le calcul de ces forces.

Une solution élégante a été proposée par Thomson, Tait et Kirchhoff. La description qui suit est due à Lamb, [Lam95], chap. VI, page 160 :

The cardinal feature of the methods followed by these writers consists in this, that the solids and the fluid are treated as forming together one dynamical system, and thus the troublesome calculation of the effect of the fluid pressures on the surfaces of the solids is avoided.

En pratique, on applique le principe de moindre action au système complet {fluide + sous-marin }, et on exprime les variations de l'impulsion (Π, P) dans un repère mobile dont les axes sont les axes du sous-marin ellipsoïdal. Le système prend la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{d\Pi}{dt} = \Pi \times \omega + P \times v + \mathcal{T} \\ \frac{dP}{dt} = P \times \omega + \mathcal{F} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

où les termes de force \mathcal{F} et de couple \mathcal{T} sont données par

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } u_1, u_2, u_3 \in \mathbf{R}.$$

On impose donc une force sur le grand axe du sous-marin (avancer « avant-arrière ») et deux couples sur les autres axes (tourner « gauche-droite » et « haut-bas »).

L'impulsion (Π, P) est reliée aux vitesses linéaire v et de rotation ω dans le repère local par la formule

$$\begin{pmatrix} \Pi \\ P \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix},$$

où \mathcal{M} est la matrice 6×6 symétrique

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} J_e + J_f & 0 \\ 0 & M_e + M_f \end{pmatrix}.$$

Les différents termes de \mathcal{M} s'interprètent de la façon suivante :

- J_e est la matrice d'inertie 3×3 au sens usuel de l'ellipsoïde (qu'on ne suppose pas forcément homogène) ;
- M_e est la matrice identité I_3 multipliée par la masse du sous-marin ;
- les matrices J_f et M_f sont des matrices diagonales correspondant à l'action du fluide sous le sous-marin. Ces matrices ne dépendent que de la forme du sous-marin, et pas de la répartition de masse à l'intérieur. Comme nous supposons que la forme du sous-marin est fixée, la matrice \mathcal{M} ne dépendra pas du temps.

Remarque 4.3.1. En l'absence de fluide ou -ce qui revient au même- avec un fluide de densité nulle, on aurait $J_f = M_f = 0$. Dans ce cas, (4.3.1) se réduit aux lois de Newton exprimées dans le repère local. Pour ce modèle, l'action du fluide se traduit donc uniquement par un changement des matrices d'inertie du solide immergé.

5.3. Modèle 3D

5.3.1. Modélisation

Le point clé dans la modélisation et la preuve des résultats de [CM11] était la possibilité de calculer explicitement les potentiels élémentaires. Ceci était possible car le domaine extérieur au nageur était ramené, via une transformation conforme, sur l'extérieur de la boule unité. Les difféomorphismes considérés pour décrire la forme du nageur étaient des applications conformes, ce qui permettait quand même un large choix de forme (il y a beaucoup d'applications conformes de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}^2).

Cette modélisation n'est plus vraiment possible en dimension trois : dans la mesure où les seules applications conformes sont les composées de similitudes et d'inversions, les formes disponibles pour décrire le nageur seraient trop limitées pour permettre une modélisation satisfaisante.

Dans [CM12], on considère comme formes possibles pour le poisson les difféomorphismes égaux à l'identité en dehors d'une boule de rayon fixé. Il n'est bien sûr plus question de calculer effectivement les potentiels élémentaires pour des déformations élémentaires, pour deux raisons : d'abord, nous ne disposons plus en général d'application conforme qui envoie l'extérieur du nageur sur l'extérieur d'une boule euclidienne. Ensuite, il y a beaucoup de difféomorphismes autorisés et paramétrer cet ensemble sera difficile.

On va contourner cette difficulté en renonçant à calculer les potentiels élémentaires. Comme en dimension deux, mais de manière un peu plus technique, on va approcher le système de dimension infinie par un système de dimension finie (décrit par des champs faisant intervenir les expressions- inconnues- des potentiels élémentaires). Comme on a juste besoin de calculer la dimension des espaces engendrés par les crochets d'ordre un de ces champs, il suffira de connaître les variations de ces champs (donc des potentiels élémentaires) lors d'un changement de forme. En d'autres termes, il s'agit de savoir comment varie la solution d'un problème extérieur harmonique quand on modifie la frontière.

5.3.2. Résultats

Les résultats de [CM12] étant assez techniques, on en donne ici une version légèrement imprécise mais que l'on espère compréhensible.

Proposition 5.3.1 (Natation synchronisée, Théorème 1.2 de [CM12]). *Au prix d'une modification arbitrairement petite (en norme L^∞) de sa densité, tout nageur tri-dimensionnel isolé dans un fluide parfait en écoulement potentiel peut suivre, avec une précision (en norme L^∞) arbitraire, n'importe quelle trajectoire de référence en gardant une forme arbitrairement proche (en norme L^∞) de n'importe quel changement de forme admissible donné.*

En d'autres termes, la Proposition 5.3.1 énonce qu'observer les changements de forme (avec une erreur, même petite, dans L^∞) ne permet pas d'en déduire la trajectoire.

Proposition 5.3.2 (Nage libre, Théorème 1.3 de [CM12]). *Génériquement, tout nageur tri-dimensionnel isolé dans un fluide parfait en écoulement potentiel peut suivre n'importe*

5.3. Modèle 3D

quelle trajectoire avec une précision (en norme L^∞) arbitraire, avec une forme qui reste arbitrairement proche de sa forme initiale, dès qu'il dispose de cinq degrés de liberté élémentaires.

Troisième partie .
Autres activités

6. Optimisation de la consommation d'un véhicule hybride

6.1. Contexte institutionnel et pédagogique

6.1.1. Le Shell Eco Marathon

Le European Shell Eco Marathon (ESEM) est une compétition automobile ouverte aux étudiants d'une trentaine de pays européens et d'Afrique du Nord, organisée chaque année par la société Shell. L'épreuve consiste à parcourir un circuit d'environ 16 km (pour les éditions 2012 et 2013, il s'agissait d'un circuit urbain situé à Rotterdam) en moins de 39 minutes. Le vainqueur est celui qui a consommé le moins d'énergie pour boucler la distance. La durée de la course est libre, sans dépasser la durée éliminatoire de 39 minutes. Les classements sont différents suivant les catégories de véhicules (des prototypes inconfortables et ultra-profilés aux « urban concept », proches d'un véhicule utilisable au quotidien) et les sources d'énergie utilisées (par exemple : moteurs diesel, batteries électriques, piles à combustible, ...).

Chaque année depuis 1997, l'Eco Motion Team (équipe de l'ESSTIN) présente un véhicule à l'ESEM (en 2012, il s'agissait de « Virevolt 2.0 »). En général, l'équipe atteint des classements honorables (sixième place sur trente-quatre concurrents pour « Virevolt 2.0 », dans la catégorie prototype batterie/solaire en 2012 avec une consommation équivalente à 638 km par kWh consommé). L'Eco Motion Team regroupe une trentaine d'étudiants de la deuxième à la cinquième année (majoritairement en troisième et quatrième année) et six enseignants de différentes disciplines (mécanique, conception, électronique,... et, depuis 2008, moi-même en mathématiques).

6.1.2. Aspects pédagogiques

Le but premier de l'Eco Motion Team est de fournir aux étudiants concernés, volontaires et sélectionnés, une initiation grandeur nature aux problèmes d'ingénierie rencontrés dans l'industrie automobile. Les prototypes de l'ESSTIN sont, autant que faire se peut, conçus et fabriqués par les élèves sur les machines-outils de l'école. Ceci permet aux étudiants d'être confrontés à tous les types de difficultés possible, de la conception à la fabrication, des essais à la mise en production, aussi bien pour les aspects techniques que d'encadrement d'équipe.

Pour ces raisons, le budget de l'Eco Motion Team est relativement modeste (le prototype est assuré pour 30 000 euros, une fraction du prix des véhicules concurrents terminant à des rangs comparables), avec des effectifs pléthoriques par rapport aux concurrents (de manière à toucher le maximum d'étudiants) et avec un renouvellement quasiment

6. Optimisation de la consommation d'un véhicule hybride

complet chaque année, aussi bien des étudiants que du matériel, de manière à obliger le plus d'étudiants possible à traiter le maximum de problèmes possibles. Il est évident que ce n'est pas la stratégie optimale pour obtenir de bonnes performances (les meilleures équipes capitalisent d'une année sur l'autre), mais la victoire n'est clairement pas l'objectif principal de l'équipe.

Parmi les différents projets proposés à des binômes étudiants (environ 8 crédits ECTS), je suis en charge en co-responsabilité avec des collègues d'autres disciplines, des thèmes « Essais et stratégies » (les intitulés varient selon les années). Essentiellement, il s'agit d'utiliser les innombrables problèmes concrets rencontrés pendant la conception, la fabrication et l'utilisation du véhicule pour persuader les étudiants de la pertinence des outils de théorie du signal ou d'optimisation vus en cours.

6.1.3. Aspects recherche

Le caractère assez exceptionnel de la plate-forme d'enseignement que constitue l'Eco Motion Team a assez vite attiré l'attention, et le prototype est utilisé, en plus de ses buts d'enseignement, comme plate-forme de démonstration pour l'opération « Systèmes Commutés » du thème « Analyse Optimisation Contrôle » du CPER MISN.

D'autre part, Virevolt sert aussi de plate-forme expérimentale pour la thèse de Tatiana Manrique Espindola, que je co-dirige avec Gilles Millerieux (PR 61 au CRAN, le laboratoire d'automatique de Nancy).

Enfin, la présence de chercheurs travaillant sur le prototype permet une première (et souvent la seule) initiation aux méthodes de la recherche pour les élèves-ingénieurs de l'Eco Motion Team.

6.2. Résultats scientifiques

Mon activité recherche au sein de l'EMT a porté sur l'optimisation de trajectoire dans le but de minimiser la consommation de carburants. Par « trajectoire », il faut comprendre « allure de marche » (vitesse, freinage, accélération), les problèmes de pilotage (choix de l'endroit où rouler sur la piste) étant assez efficacement résolus avec un peu de pratique par les pilotes.

6.2.1. Modélisation

Comme on néglige les problèmes de pilotage, la piste peut être considéré comme un segment de droite de 16 km. L'état du véhicule est donné à chaque instant par sa position sur la piste (un réel qui mesure la distance au point de départ) et sa vitesse (la dérivée de la position). La commande est le courant délivré par la batterie. En première approximation, le courant en sortie de batterie est le même qu'en entrée de moteur et le couple du moteur est proportionnel au courant. La version d'essais de Virevolt qui a servi pour les travaux [MEMF⁺12] et [MFCM13] n'était pas équipée de panneaux solaires. L'équation

du mouvement s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= Cu - F_{aero}(x_2) - F_{frot} + F_{pente}(x_1), \end{cases} \quad (6.2.1)$$

où C est une constante réelle positive, u est la commande à valeurs dans $[0, I_{max}]$, $F_{aero} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ est une fonction de la vitesse qui représente les pertes aérodynamiques (on approche souvent F_{aero} par un polynôme de degré un ou deux), F_{frot} est une constante positive qui modélise les frottements mécaniques internes au véhicule, les pertes électriques et les pertes par frottement au niveau des pneus, et F_{pente} représente la gravitation :

$$F_{pente}(x_1) = g \sin(\theta(x_1)),$$

où $g = 9.81 \text{m.s}^{-2}$ est l'accélération gravitationnelle au niveau du sol et θ est l'inclinaison de la piste (qui dépend bien sûr du point du circuit considéré). Le coût à minimiser peut prendre plusieurs formes selon le modèle considéré. On peut considérer $\int_0^T x_2(t)u(t)dt$ ou, puisque la vitesse varie peu autour de la vitesse moyenne minimale de 25 km/h, $\int_0^T u(t)dt$.

Les problèmes de commande optimale de systèmes du type (6.2.1) ont été très étudiés. Citons par exemple [SG07] ou le livre [San07].

Si on suppose que F_{aero} est un polynôme de degré un ou deux, et que F_{pente} est constant, il n'est pas difficile d'obtenir une solution optimale (ou quasi-optimale) hors ligne pour un coût $\int_0^T u(t)dt$. Nous avons utilisé pour cela le logiciel libre GPOPS et des méthodes pseudo-spectrales, voir l'article [GPH⁺10] et le très récent [RPH13]). La difficulté est par contre de suivre cette trajectoire malgré les inévitables incidents de course : le trafic peut obliger le pilote à freiner ce qui le fera dévier de la trajectoire optimale pré-calculée.

Notre objectif était donc de pister au mieux, en temps réel et avec les faibles moyens de calcul embarqués dans le prototype, une trajectoire déterminée à l'avance malgré les incidents de course.

6.2.2. Résultats

La solution que nous avons retenue est la commande par modèle prédictif (MPC en anglais), appliquée à une version du problème linéarisée autour de la vitesse constante de 25 km/h et discrétisée en temps (avec échantillon de temps de 1 à 2 secondes). La linéarisation se justifie par le fait que la vitesse varie très peu avec le temps pour les trajectoires « optimales » calculées hors-ligne. La discrétisation en temps se justifie par les durées assez courtes considérées.

L'idée consiste à travailler sur un horizon temporel fini (dans notre cas : de 10 à 20 échantillons de temps), et à résoudre un problème d'optimisation quadratique sous contraintes linéaires (ce qui est faisable par les routines standards en moins d'une seconde avec les moyens de calcul embarqué). Les contraintes linéaires sont celles de la dynamique. Le coût à minimiser est la somme d'une part du carré de la distance moyenne sur la durée de l'horizon entre les vitesses et les positions calculées hors-ligne et les vitesses et positions réelles et d'autre part du carré de la distance moyenne entre la commande retenue et la commande calculé hors-ligne.

Encadrement d'ingénieurs experts

Dans le cadre du CPER MISN, l'INRIA a embauché deux ingénieurs experts (A. Spoletini puis H. Malaise) entre 2010 et 2012 pour travailler sur la modélisation du véhicule basse consommation développé à l'ESSTIN. J'ai été chargé de l'encadrement scientifique de ces ingénieurs.

Enseignements

Bilan enseignement

Depuis mon recrutement comme maître de conférence à l'ESSTIN en septembre 2005, j'effectue chaque année un service de 192 heures équivalent TD. Les enseignements de mathématiques de l'ESSTIN sont concentrés essentiellement en première et deuxième année. À l'exception du premier semestre de la deuxième année où Algèbre et Analyse sont parfois dissociés, c'est traditionnellement un seul enseignant qui est en charge de l'intégralité du cours de mathématiques, pour l'intégralité de la promotion (entre 100 et 120 élèves) pour un semestre donné.

J'ai été responsable, concepteur et chargé des cours magistraux pour les semestres suivants :

- cours S2 (première année, deuxième semestre, promotion entière) en 2007-2008 et 2008-2009, portant sur le calcul différentiel élémentaire et une initiation à l'algèbre linéaire ;

- cours de S2 bis (première année, deuxième semestre de rattrapage organisé entre septembre et janvier pour les étudiants n'ayant pas validé S2 en juin) en 2008-2009 et 2009-2010. Cet enseignement s'adressait à 20-25 étudiants, le programme était le même que celui de S2 ;

- cours d'algèbre de S3 (deuxième année, premier semestre, promotion entière) en 2011-2012 : approfondissement d'algèbre linéaire, réduction de Jordan, systèmes dynamiques linéaires en dimension finie.

Innovations pédagogiques

L'ESSTIN est une école d'ingénieurs généraliste en cinq ans qui s'adresse à des étudiants sélectionnés sur concours, loin d'être stupides mais très peu intéressés par l'abstraction mathématique, qui ont besoin très vite (au plus tard à Bac +2) d'outils relativement sophistiqués (par exemple : transformation de Fourier de signaux discrétisés, stabilité de systèmes dynamiques, outils d'analyse vectorielle). Ces outils ne sont en général pas abordés avant la troisième année dans un cursus de mathématiques français standard. Le volume horaire réduit impose un enseignement radicalement différent de ce que l'on trouvera en classes préparatoires ou en facultés : il s'agit plus de transmettre des idées utilisables immédiatement sur des cas pratiques que la connaissance de démonstrations rigoureuses.

Dans cette optique, j'ai multiplié avec les étudiants du semestre S2 bis des TP sur machine (avec les logiciels scilab et Maxima). Devant l'apparent succès de cette expérimentation,

je participe maintenant à un module optionnel d'initiation à Matlab/Simulink. Ce cours de 2 modules de 20 heures (un module par an), entièrement sur machine, est assuré en collaboration avec des enseignants de Mathématiques (Julie Valein et Renaud Marty, MCF 26) et d'Automatique (Floriane Collin MCF 61, et des doctorants du CRAN). Des cas pratiques, directement issus de problèmes d'ingénierie réels, sont traités sous différents points de vue. En 2012-2013, le succès de ce module complètement optionnel a justifié l'ouverture de cinq groupes (contre trois en 2011-2012). L'option est de nouveau ouverte en 2013-2014.

Administration

Projet CUPIDSE

J'ai été le porteur du projet CUPIDSE (Control via Unbounded Potentials of Infinite Dimensional Schrödinger Equations). CUPIDSE est un projet de collaboration locale et régionale financé par Inria à hauteur de 7500 euros, de juillet 2010 à décembre 2011, qui a rassemblé trois membres actifs (N. Boussaïd, MCF section 26 à Besançon, M. Caponigro et moi-même à Nancy). Ce projet a initié une collaboration qui se poursuit aujourd'hui.

CPER MISN

Au sein du thème AOC (Analyse, Optimisation, Contrôle) du contrat de plan Etat-Région MISN, je suis co-responsable avec G. Millerioux du projet “Contrôle en temps réel de systèmes hybrides”, financé à hauteur d'environ 50 000 euros (achat de matériel pour les bancs de test et la commande du prototype à basse consommation) et 12 mois d'ingénieur d'étude Inria sur la période de référence.

ANR GCM « Geometric Control Methods »

Au sein du programme ANR Blanc « GCM » porté par J-P. Gauthier (PR U. Toulon, section 61), j'ai été responsable de la tâche “Contrôle quantique” pour la durée du programme (mi 2009 à mi 2013).

Autres responsabilités

Membre du technical chair T.C. 2.6 “Distributed parameters systems” de l'IFAC.

Rédacteur des rapports d'activité de l'équipe projet Inria “CORIDA” (14 permanents) de 2011 à 2013.

Co-organisateur avec G. Millerioux de la journée “Contrôle et Énergie” à Nancy en 2011.

Membre de comités de sélection MCF en 2010 Besançon (section 26) et en 2011 à Nancy (section 61).

Rayonnement scientifique

Invitations

Invitations (conférences)

Geometric methods for the control of the Schrödinger equation, Workshop on Control and Inverse Problems, juin 2010, Besançon, France.

Quantum Control via geometric Methods, Workshop on Nonlinear Control and Singularities, 24-28 octobre 2010, Porquerolles, France.

Some estimates for the bilinear Schrödinger equation with discrete spectrum, Workshop on Quantum Control, Institut Henri Poincaré (dans le cadre du trimestre « Contrôle EDP »), 8-10 décembre 2010, Paris, France.

Finite dimensional techniques for control of bilinear Schrödinger equations, Workshop on Quantum Control, 11w5030, 3-8 avril 2011, Banff, Canada.

Weakly-coupled bilinear quantum systems, PICOE 2012, 2-4 avril 2012, École Polytechnique, Palaiseau, France.

Geometric methods for the control of bilinear Schrödinger equations, Indam meeting on Geometric Control and sub-Riemannian Geometry, Cortone, Italie, 21-25 mai 2012

Invitations (séjours)

Cours à l'école d'été de contrôle quantique (une semaine) à Würzburg (Allemagne) en juillet 2011.

Invitations dans l'équipe de G. Leugering à Erlangen (Allemagne) en décembre 2009 (une semaine) et décembre 2010 (une semaine).

Invitations d'une semaine au PIMS (Pacific Institute of Mathematical Sciences), à Vancouver (Canada) en avril 2009.

Invitation d'une semaine au PIMS à Victoria (Canada) en décembre 2012.

Distinctions

- Bénéficiaire de la PES depuis 2009.
- L'article *An estimation of the controllability time for single-input systems on compact Lie groups* a été classé¹ *Hight paper* par l'ESAIM en octobre 2008.

1. <http://journals.cambridge.org/action/displayCustomArticles?jid=COV&articleListId=681>

- L'article *Controllability of the discrete-spectrum Schrödinger equation driven by an external field* fait partie² des *Most cited papers* des Annales de l'IHP (C).
- La contribution [MEMF⁺12] a obtenu le « Best presentation award » de l'EFEA 2012.

2. <http://www.journals.elsevier.com/annales-de-linstitut-henri-poincare-c-analyse-non-lineaire/most-cited-articles/>

Liste complète de publications

Articles en revues

1. (en collaboration avec U. Boscain et J-P. Gauthier) *On the $K + P$ problem for a three-level quantum system : optimality implies resonance*. J. Dynam. Control Systems 8 (2002), no. 4, 547–572.
2. (en collaboration avec U. Boscain et G. Charlot) *Nonisotropic 3-level quantum systems : complete solutions for minimum time and minimum energy*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 5 (2005), no. 4, 957–990 (electronic).
3. (en collaboration avec A. Agrachev) *An estimation of the controllability time for single-input systems on compact Lie groups*. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 12 (2006), no. 3, 409–441 (electronic). Article mis en avant par ESAIM :COCV
4. (en collaboration avec M. Sigalotti) *Tracking control for an ellipsoidal submarine driven by Kirchhoff's laws*. IEEE Trans. Automat. Control 53 (2008), no. 1, 339–349.
5. (avec P. Mason, M. Sigalotti, et U. Boscain) *Controllability of the discrete-spectrum Schrödinger equation driven by an external field*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (2009), no. 1, 329–349.
6. (avec A. Munnier) *Locomotion and control of a self-propelled shape-changing body in a fluid*. J. Nonlinear Sci. 21 (2011), no. 3, 325–385.
7. *Periodic excitations of bilinear quantum systems*. Automatica J. IFAC 48 (2012), no. 9, 2040–2046.
8. (avec A. Munnier) *Generic Controllability of 3D Swimmers in a Perfect Fluid*. SIAM Journal on Control and Optimization (2012), Vol. 50, No. 5, 2814–2835
9. (avec U. Boscain, M. Caponigro, et M. Sigalotti), *A weak spectral condition for the controllability of the bilinear Schrödinger equation with application to the control of a rotating planar molecule*. Comm. Math. Phys. 311 (2012), no. 2, 423–455.
10. (avec N. Boussaïd et M. Caponigro) *Weakly-coupled systems in quantum control*, à paraitre dans IEEE Transactions on Automatic Control, disponible en version électronique, early access DOI : 10.1109/TAC.2013.2255948 .

Actes de conférence internationales à comités de lecture

1. (en collaboration avec U. Boscain), *On the $K+P$ Problem for a Three Level Quantum System*, Proceedings of the 41nd IEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, USA, pp. 34-39 2002.

2. (en collaboration avec A. Agrachev), *Controllability and diameter of single input quantum systems*, International Conference "Physics and Control", Saint Petersburg, Fradkov and Churilov eds, IEEE, August 2003.
3. (en collaboration avec U. Boscain et J-P. Gauthier) *Optimal control on a N-level quantum system*. Lagrangian and Hamiltonian methods for nonlinear control 2003, 129–134, IFAC, Laxenburg, 2003.
4. (en collaboration avec M. Sigalotti), *Controllability and output tracking for an ellipsoidal submarine driven by Kirchhoff's laws*, IEEE Industrial Electronics, IECON 2006 - 32nd Annual Conference, Paris, 2006, pp 567–572.
5. (en collaboration avec P. Mason, M. Sigalotti et U. Boscain), *Controllability properties of discrete-spectrum Schrödinger equations*, Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008.
6. (avec M. Sigalotti, P. Mason et U. Boscain) *Generic controllability properties for the bilinear Schroedinger equation*, Conference on Physics and Control (Physcon) 2009 ; actes publiés dans "From Physics to Control through an emergent view?", World Scientific Series, Volume 15 serie B, 233-238.
7. (avec P. Mason, M. Sigalotti et U. Boscain) *What can we hope about output tracking of bilinear quantum systems ?* Conference on Physics and Control (Physcon) 2009 actes publiés dans "From Physics to Control through an emergent view?", World Scientific Series, Volume 15 serie B, 251-256
8. (avec M. Sigalotti, P. Mason, et U. Boscain), *Generic controllability properties for the bilinear Schrödinger equation*, Conference on Decision and Control (CDC) 2009, pp.3799-3804, 15-18 déc. 2009
9. (avec U. Boscain, P. Mason, M. Sigalotti, et D. Sugny) , *Controllability of the rotation of a quantum planar molecule*, Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. pp.369-374, 15-18 déc. 2009
10. (avec M. Sigalotti) *Simultaneous approximate tracking of density matrices for a system of Schrödinger equations*, Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. pp.357-362, 15-18 déc. 2009
11. (avec A. Munnier), *When fish Moonwalk*, American Control Conference (ACC), 2010, pp.2965-2970, 30 juin 2010-2 juillet 2010
12. (avec U. Boscain, M. Caponigro et M. Sigalotti), *Control of the bilinear Schrödinger equation for fully coupling potentials*, IFAC World Congress, 2011, pp 8022-8027,
13. (avec A. Munnier), *Generic 3D swimmers in a perfect fluid are controllable*, American Control Conference (ACC), 2012 , vol., no., pp.4351-4356, 27-29 juin 2012
14. (avec N. Boussaid et M. Caponigro), *Implementation of logical gates on infinite dimensional quantum oscillators*, American Control Conference (ACC), 2012, pp.5825-5830, 27-29 juin 2012

15. (avec N. Boussaid et M. Caponigro) *Periodic control laws for bilinear quantum systems with discrete spectrum*, American Control Conference (ACC), 2012 pp.5819-5824, 27-29 juin 2012
16. (avec T. Manrique, H. Malaise, M. Fiacchini, et G. Millerieux). *Model predictive real-time controller for a low-consumption electric vehicle*, 2nd International Symposium on Environment Friendly Energies and Applications (EFEA), 2012, pp.88-93, 25-27 juin 2012
17. (avec N. Boussaid et M. Caponigro) ; *Which Notion of Energy for Bilinear Quantum Systems ?*, 4th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control, pp 226-230, 29-31 août 2012
18. (avec N. Boussaid et M. Caponigro) *Small time reachable set of bilinear quantum systems*, pp 1083-1087, Proceedings on the 51st Conference on Decision and Control, 10-13 déc 2012
19. (avec N. Boussaid et M. Caponigro) *Approximate controllability of the Schrödinger equation with a polarizability term*, pp 3024-3029 , Proceedings on the 51st Conference on Decision and Control, 10-13 déc 2012
20. (avec T. Manrique, M. Fiacchini et G. Millerieux) *MPC for a low consumption electric vehicle with time-varying constraints*, accepté pour Joint 2013 SSSC, TDS, FDA, février 2013.
21. (avec U. Boscain et M. Sigalotti) *On some open questions in bilinear quantum control*, accepté à ECC 2013.
22. (en collaboration avec Nabile Boussaid et Marco Caponigro), *Energy Estimates for Low Regularity Bilinear Schrödinger Equations*, accepté à CPDE 2013.

Bibliographie

- [AC06] Andrei Agrachev and Thomas Chambrion. An estimation of the controllability time for single-input systems on compact Lie groups. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12(3) :409–441, 2006.
- [ACO02] A Astolfi, D Chhabra, and R Ortega. Asymptotic stabilization of some equilibria of an underactuated underwater vehicle. *Systems and Control Letters*, 45, 2002.
- [ADL08] François Alouges, Antonio DeSimone, and Aline Lefebvre. Optimal strokes for low Reynolds number swimmers : an example. *J. Nonlinear Sci.*, 18(3) :277–302, 2008.
- [Agr96] A. A. Agrachev. Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures. *J. Dynam. Control Systems*, 2(3) :321–358, 1996.
- [Art10] Zvi Artstein. Averaging of ordinary differential equations with slowly varying averages. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14(2) :353–365, 2010.
- [AS04] Andrei A. Agrachev and Yuri L. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint*, volume 87 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Control Theory and Optimization, II.
- [BCC12a] N. Boussaid, M. Caponigro, and T. Chambrion. Approximate controllability of the Schrödinger equation with a polarizability term. In *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3024–3029, december 2012.
- [BCC12b] N. Boussaid, M. Caponigro, and T. Chambrion. Implementation of logical gates on infinite dimensional quantum oscillators. In *American Control Conference (ACC), 2012*, pages 5825–5830, 2012.
- [BCC12c] N. Boussaid, M. Caponigro, and T. Chambrion. Small time reachable set of bilinear quantum systems. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, pages 1083–1087, 2012.
- [BCC12d] Nabil Boussaïd, Marco Caponigro, and Thomas Chambrion. Which notion of energy for bilinear quantum systems? In *Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control*, volume 4, pages 226–230, aug. 2012.
- [BCC12e] Nabile Boussaïd, M. Caponigro, and T. Chambrion. Periodic control laws for bilinear quantum systems with discrete spectrum. In *Proceedings of the American Control Conference*, 2012.
- [BCC13a] N. Boussaid, M. Caponigro, and T. Chambrion. Energy Estimates for Low Regularity Bilinear Schrödinger Equations. In *Conference on control of PDE 2013*, page to appear, 2013.

Bibliographie

- [BCC13b] Nabile Boussaïd, Marco Caponigro, and Thomas Chambrion. Total Variation of the Control and Energy of Bilinear Quantum Systems. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00800548/PDF/BVefficiency09.pdf>, March 2013.
- [BCC13c] Nabile Boussaïd, Marco Caponigro, and Thomas Chambrion. Weakly-coupled systems in quantum control. *to appear in IEEE TAC*, 2013. arXiv :1109.1900v1.
- [BCCS11] U. Boscain, M. Caponigro, T. Chambrion, and M. Sigalotti. Control of the bilinear schrödinger equation for fully coupling potentials. In *Proceedings of the IFAC World Congress*, 2011.
- [BCCS12] U. Boscain, M. Caponigro, T. Chambrion, and M. Sigalotti. A weak spectral condition for the controllability of the bilinear Schrödinger equation with application to the control of a rotating planar molecule. *Comm. Math. Phys.*, 311(2) :423–455, 2012.
- [BCM⁺09] Ugo Boscain, Thomas Chambrion, Paolo Mason, Mario Sigalotti, and Dominique Sugny. Controllability of the rotation of a quantum planar molecule. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 369–374, 2009.
- [BCS13] Ugo Boscain, Thomas Chambrion, and Mario Sigalotti. On some open questions in bilinear quantum control. 6 pages, April 2013.
- [BD06] A. Borzi and E. Decker. Analysis of a leap-frog pseudospectral scheme for the Schrödinger equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 193(1) :65–88, 2006.
- [Bea05] Karine Beauchard. Local controllability of a 1-D Schrödinger equation. *J. Math. Pures Appl.*, 84(7) :851–956, 2005.
- [BKMSdA92] A.M Bloch, P.S Krishnaprasad, J Marsden, and G Sanchez de Alvarez. Stabilization of rigid body dynamics by internal and external torques. *Automatica*, 28, 1992.
- [BKP05] Lucie Baudouin, Otared Kavian, and Jean-Pierre Puel. Regularity for a Schrödinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control. *J. Differential Equations*, 216(1) :188–222, 2005.
- [BL97] F Bullo and N Leonard. Motion control for underactuated mechanical systems on lie groups. In *Proceedings of the European Control Conference*, 1997.
- [BL10] Karine Beauchard and Camille Laurent. Local controllability of 1D linear and nonlinear Schrödinger equations with bilinear control. *J. Math. Pures Appl.*, 94(5) :520–554, 2010.
- [BLM97] A Bloch, N Leonard, and J Marsden. Stabilization of mechanical systems using controlled lagrangians. In *Proceedings of IEEE Conf. Decision and Control*, 1997.
- [BM14] Karine Beauchard and Morgan Morancey. Local controllability of 1D Schrödinger equations with bilinear control and minimal time. *Math. Control Relat. Fields*, 4(2) :125–160, 2014.

- [BMS82] J. M. Ball, J. E. Marsden, and M. Slemrod. Controllability for distributed bilinear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 20(4) :575–597, 1982.
- [Bou99] J. Bourgain. On growth of Sobolev norms in linear Schrödinger equations with smooth time dependent potential. *J. Anal. Math.*, 77 :315–348, 1999.
- [BST11] Lucie Baudouin, Julien Salomon, and Gabriel Turinici. Analysis of the “toolkit” method for the time-dependent Schrödinger equation. *J. Sci. Comput.*, 49(2) :111–136, 2011.
- [Cha12] Thomas Chambrion. Periodic excitations of bilinear quantum systems. *Automatica J. IFAC*, 48(9) :2040–2046, 2012.
- [Cha13] Thomas Chambrion. A Sufficient Condition for Partial Ensemble Controllability of Bilinear Schrödinger Equations with Bounded Coupling Terms. 6 pages, submitted., March 2013.
- [Chi81] S. Childress. *Mechanics of swimming and flying*. Cambridge University Press, 1981. volume 2 of Cambridge Studies in Mathematical Biology.
- [CLS03] M Chyba, N Leonard, and E Sontag. Singular trajectories in multi-input optimal problems. application to controlled mechanical systems. *J. Dynam. Control Systems*, 9, 2003.
- [CM09] T. Chambrion and A. Munnier. On the locomotion and control of a self-propelled shape-changing body in a fluid. *arXiv :0909.3860*, September 2009.
- [CM11] Thomas Chambrion and Alexandre Munnier. Locomotion and control of a self-propelled shape-changing body in a fluid. *J. Nonlinear Sci.*, 21(3) :325–385, 2011.
- [CM12] Thomas Chambrion and Alexandre Munnier. Generic controllability of 3D swimmers in a perfect fluid. *SIAM J. Control Optim.*, 50(5) :2814–2835, 2012.
- [CMSB08] T. Chambrion, P. Mason, M. Sigalotti, and U. Boscain. Controllability properties of discrete-spectrum schrödinger equations. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008.
- [CMSB09a] T. Chambrion, P. Mason, M. Sigalotti, and U. Boscain. What can we hope about output tracking of bilinear quantum systems? In *Conference on Physics and Control (Physcon)*, 2009.
- [CMSB09b] Thomas Chambrion, Paolo Mason, Mario Sigalotti, and Ugo Boscain. Controllability of the discrete-spectrum Schrödinger equation driven by an external field. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(1) :329–349, 2009.
- [CMSV04] M Chyba, H Maurer, H Sussmann, and G Vossen. Underwater vehicles : The minimum time problem. In *Proceedings of IEEE Conf. Decision and Control*, 2004.

Bibliographie

- [Cor06] Jean-Michel Coron. On the small-time local controllability of a quantum particle in a moving one-dimensional infinite square potential well. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(2) :103–108, 2006.
- [Cro84] P.E Crouch. Spacecraft attitude control and stabilization : Applications of geometric control theory to rigid body models. *IEEE Trans. Automat. Control*, 29, 1984.
- [CS08] Thomas Chambrion and Mario Sigalotti. Tracking control for an ellipsoidal submarine driven by Kirchhoff's laws. *IEEE Trans. Automat. Control*, 53(1) :339–349, 2008.
- [CTDL73] C Cohen-Tannoudji, B Diu, and F Laloë. *Mécanique quantique*. Hermann, Paris, 1973.
- [CTDL77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum mechanics*. Quantum Mechanics. Wiley, 1977.
- [CWB98] J Carling, T Williams, and G Bowtell. Self-propelled anguilliform swimming : simultaneous solution of the two-dimensional Navier-Stokes equations and Newton's laws of motion. *J. of Experimental Biology*, 201 :3143–3166, 1998.
- [Gal99] J-P Galdi. On the steady self-propelled motion of a body in a viscous incompressible fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 148(1) :53–88, 1999.
- [GPH⁺10] D Garg, M Patterson, W Hager, A Rao, D Benson, and G Huntington. A Unified Framework for the Numerical Solution of Optimal Control Problems Using Pseudospectral Methods. *Automatica*, 46(11), 2010.
- [Kat53] Tosio Kato. Integration of the equation of evolution in a Banach space. *J. Math. Soc. Japan*, 5 :208–234, 1953.
- [Kat95] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [KM00] S-D. Kelly and R Murray. Modelling efficient pisciform swimming for control. *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, 10(4) :217–241, 2000.
- [KMRMH05] E Kanso, J Marsden, C Rowley, and J-B Melli-Huber. Locomotion of articulated bodies in a perfect fluid. *J. Nonlinear Sci.*, 15(4) :255–289, 2005.
- [KO03a] V Kozlov and D Onishchenko. Motion of a body with undeformable shell and variable mass geometry in an unbounded perfect fluid. *J. Dynam. Differential Equations*, 15(2-3), 2003.
- [KO03b] Valery V. Kozlov and Dmitry A. Onishchenko. Motion of a body with undeformable shell and variable mass geometry in an unbounded perfect fluid. *J. Dynam. Differential Equations*, 15(2-3) :553–570, 2003. Special issue dedicated to Victor A. Pliss on the occasion of his 70th birthday.
- [Kos72] Andrzej Kossakowski. On quantum statistical mechanics of non-hamiltonian systems. *Rep. Math. Phys.*, 3, 1972.

- [Lam95] H. Lamb. *Hydrodynamics*. At the University Press, 1895.
- [Lig75] J. Lighthill. *Mathematical bio fluiddynamics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1975.
- [Lin76] Göran Linblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Commun. Math. Phys.*, 48, 1976.
- [LK99] H Liu and K Kawachi. A numerical study of undulatory swimming. *J. comput. phys.*, 155(2) :223–247, 1999.
- [MB99] R Mason and J Burdick. Propulsion and control of deformable bodies in an ideal fluid. In *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1999.
- [MEMF⁺12] T Manrique-Espindola, H Malaise, M Fiacchini, T Chambrion, and G Millérioux. Model predictive real-time controller for a low-consumption electric vehicle. In *2nd International Symposium on Environment-Friendly Energies and Applications*, 2012.
- [MFCM13] T Manrique, M Fiacchini, T Chambrion, and G Millerioux. MPC for a low consumption electric vehicle with time-varying constraints. In *IFAC 5th Symposium on System Structure and Control*, 2013.
- [MRR06] Juan B. Melli, Clarence W. Rowley, and Dzhelil S. Rufat. Motion planning for an articulated body in a perfect planar fluid. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 5(4) :650–669, 2006.
- [Mun08] A Munnier. On the self-displacement of deformable bodies in a potential fluid flow. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(11) :1945–1981, 2008.
- [Ner09] Vahagn Nersesyan. Growth of Sobolev norms and controllability of the Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 290(1) :371–387, 2009.
- [RPH13] A Rao, M Patterson, and W Hager. A ph-Collocation Scheme for Optimal Control. <http://vdol.mae.ufl.edu/SubmittedJournalPublications/PattersonHagerRaoPH.pdf>, 2013.
- [RS75] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.
- [Sac00] Yu. L. Sachkov. Controllability of invariant systems on Lie groups and homogeneous spaces. *J. Math. Sci. (New York)*, 100(4) :2355–2427, 2000. Dynamical systems, 8.
- [San07] J Santin. *The world's most efficient vehicle : design and development*. vdf Hochschule AG an der ETH Zürich, 2007.
- [SG07] A Sciarreta and L Guzzella. Control of hybrid electric vehicles. *IEEE Control Systems Magazine*, 27(2), 2007.
- [SMBC09a] M. Sigalotti, P. Mason, U. Boscain, and T. Chambrion. Generic controllability properties for the bilinear schrödinger equation. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control (CDC)*, 2009.

