

Etude mathématique et numérique de modèles en chimiotaxie-fluide et applications à la biologie

CHAMOUN GEORGES

Sous la direction de

MAZEN SAAD,

Ecole Centrale de Nantes, ED STIM, LMJL - **FRANCE.**

RAAFAT TALHOUK,

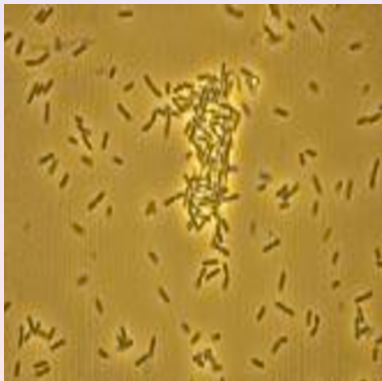
Université Libanaise, EDST, Laboratoire de mathématiques - **LIBAN.**

23 Juin 2014

Introduction

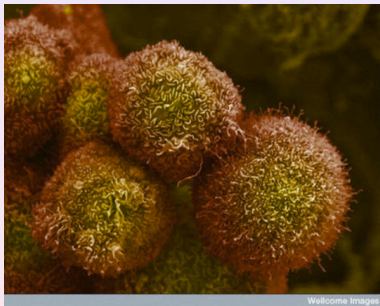
- **Chimiotaxie** : Mouvement dirigé des cellules en réponse des signaux chimiques.
- Capacité des organismes vivants, tels que les cellules, à détecter des signaux dans l'environnement et d'adapter en conséquence leur mouvement.
- Ce comportement leur permet de localiser les nutriments, éviter les prédateurs ... Il peut s'agir d'attraction ou de répulsion.
- Rôle important dans de nombreux domaines de la biologie tel que l'immunologie, la croissance du cancer et la cicatrisation des plaies.

Exemple 1 : Les bactéries



- Les bactéries "*Bacillus subtilis*" se trouvent dans le sol.
- Le chimio-attractant est l'oxygène consommé par les organismes vivants.
- C'est un transport des bactéries vers les nutriments.

Exemple 2 : Les cellules Cancéreuses



- Les cellules cancéreuses envahissent le milieu environnant.
- La chimiothérapie tente à inhiber la croissance de la maladie.
- Le but est de tuer les cellules cancéreuses.

Exemple 3 : Les cellules “Dictyostelium discoideum”



- Elles se trouvent sur les feuilles des arbres.
- Recherche des conditions nutritionnelles plus favorables.
- Elles émettent cAMP, substance chimique qui attire les autres amibes pour former un organisme multicellulaire.

Modélisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - \operatorname{div}(S(x)a(N)\nabla N) + \operatorname{div}(S(x)\chi(N)\nabla C) + \mathbf{u} \cdot \nabla N = f(N), \\ \partial_t C - \operatorname{div}(M(x)\nabla C) + \mathbf{u} \cdot \nabla C = h(N, C), \\ \partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla P = -N\nabla\phi, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \end{array} \right.$$

- N : densité cellulaire, $a(N)$: coefficient de diffusion.
- C : concentration du chimio-attractant.
- \mathbf{u} , P : vitesse et pression dans le fluide incompressible.
- $S(x)$ et $M(x)$: Tenseurs anisotropes et hétérogènes.
- $\chi(N)$: sensibilité des cellules envers le chimio-attractant.
- $h(N, C)$: taux de production et d'absorption du chimio-attractant = $\alpha N - \beta C$; $\alpha, \beta \geq 0$.
- f : la force de réaction (ex : force hydrodynamique).
- $\nabla\phi$: Force gravitationnelle exercée par les cellules.

Hypothèses principales

- $\chi(0) = 0$ et il existe une densité maximale N_m de cellules ;
 $\chi(N) = 0$ pour $N \geq N_m$.

Interprétation biologique : “Volume-filling effect”.

- $a : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^+$ est continue ; $a(0) = a(1) = 0$ et
 $a(N) > 0$ pour $0 < N < 1$. Ainsi, $A(N) := \int_0^N a(r) dr$.
- $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^+$ est une fonction continue avec $f(0) = 0$.
- $\nabla\phi \in (L^\infty(\Omega))^d$ et ϕ est une fonction indépendante du temps.

Plan de la présentation

① **Modèle de Keller-Segel dans un fluide au repos**

- Etat de l'art

Cas isotrope général sur des maillages admissibles

- Schéma VF généralisé
- Simulations numériques

Cas anisotrope sur des maillages généraux

- Problème bien posé
- Schéma numérique efficace et robuste
- Simulations numériques

② **Modèle Chimiotactisme-fluide**

- Existence globale et unicité de solutions faibles
- Etude numérique et analyse de convergence
- Simulations numériques

③ **Conclusions et Perspectives**

Etat de l'art

Le modèle de Keller-Segel est le plus populaire pour le contrôle chimique des mouvements cellulaires.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - \overbrace{\operatorname{div}(a(N)\nabla N)}^{\text{Terme diffusif}} + \overbrace{\operatorname{div}(\chi(N)\nabla C)}^{\text{Terme convectif}} = 0 \\ \partial_t C - \operatorname{div}(\nabla C) = h(N, C). \end{array} \right.$$

- E.F. Keller et L.A. Segel [1970] “*The Keller-Segel model of chemotaxis*” ($a(N) = 1$, $\chi(N) = N \rightsquigarrow$ Modèle minimal).
- D. Horstmann [1975] \rightsquigarrow Analyse mathématique détaillée.

Existence globale : M. Bendahmane, K.H. Karlsen et J.M. Urbano [2006]

Etude numérique : B. Andreianov, M. Bendahmane et M. Saad [2011]

Cas isotrope général : Etude numérique

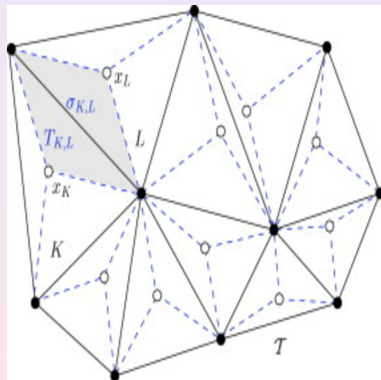
La diffusion dans un milieu hétérogène peut munir à des discontinuités dès que les conductivités des composantes du milieu sont différentes.

Fonctions scalaires $s(x)$ homogènes ou hétérogènes, continues ou discontinues sur les interfaces.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - \overbrace{\operatorname{div}(s(x)a(N)\nabla N)}^{\text{Terme diffusif}} + \overbrace{\operatorname{div}(s(x)\chi(N)\nabla C)}^{\text{Terme convectif}} = 0 \\ \partial_t C - \operatorname{div}(m(x)\nabla C) = h(N, C). \end{array} \right.$$

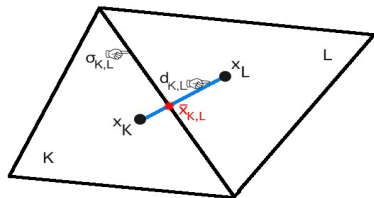
- $s \in L^\infty(\Omega)$ et il existe $\bar{s}, \underline{s} \in \mathbb{R}_+^*$ telles que $\underline{s} \leq s \leq \bar{s}$ p.p.

Maillage admissible



- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) :
ouvert borné polygonal et
connexe de bord $\partial\Omega$;
$$\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K} .$$
- **Taille du maillage :**
$$h = \sup_{K \in \mathcal{T}_h} \{ \text{diam}(K) \}$$
- $\sigma_{K,L}$, $d_{K,L}$, $\eta_{K,L}$ et $T_{K,L}$
- $N(K)$: ensemble de
triangles voisins de K .
- **Critère d'admissibilité :**
$$\overline{x_K x_L} \perp \sigma_{K,L}$$

Approximation des flux diffusifs



$$\mathbf{F} = \int_{\sigma_{K,L}} \mathbf{s}(\mathbf{x}) \nabla A(N) \cdot \eta_{K,L} d\gamma(\mathbf{x})$$

$$\approx \tau_{K,L} (A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1}))$$

(Flux diffusif constant
d'un schéma VF à 2 points)

$$\tau_{K,L} = \begin{cases} s(\bar{x}_{K,L}) \frac{|\sigma_{K,L}|}{d_{K,L}} & \text{si } \mathbf{s} \text{ est continu,} \\ \frac{s_{K,\sigma} s_{L,\sigma}}{(s_{L,\sigma} d_{K,\sigma} + s_{K,\sigma} d_{L,\sigma})} |\sigma_{K,L}| & \text{si } \mathbf{s} \text{ est discontinu sur les interfaces.} \end{cases}$$

Avec, $\bar{x}_{K,L} = [x_K, x_L] \cap \sigma_{K,L}$, $s_{K,\sigma} = |s_K \eta_{K,\sigma}|$ et $s_K = \frac{1}{|K|} \int_K s(x) dx$.

$\mathbf{s}(\mathbf{x})=1$: B. Andreianov, M. Bendahmane et M. Saad [2011]

Schéma Numérique

$$\forall K \in \mathcal{T}, N_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K N_0(x) dx, C_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K C_0(x) dx$$

Et $\forall K \in \mathcal{T}$ et $n \in [0, \dots, \tilde{N}]$,

$$|K| \frac{N_K^{n+1} - N_K^n}{\Delta t} - \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \overbrace{\tau_{K,L}(A(N_L^{n+1}) - A(N_K^{n+1}))}^{\int_{\sigma_{K,L}} s(x) \nabla A(N) \cdot \eta_{K,L} d\gamma(x)}$$

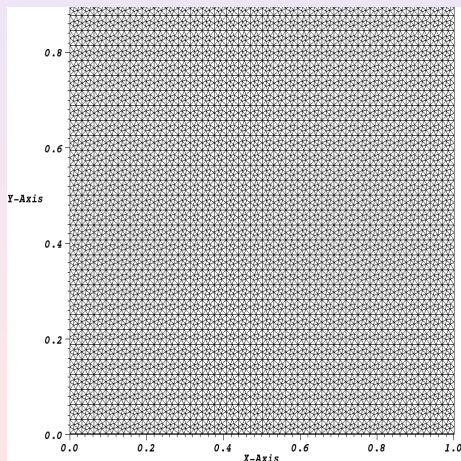
$$+ \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \overbrace{G(N_K^{n+1}, N_L^{n+1}; \delta C_{K,L}^{n+1})}^{\int_{\sigma_{K,L}} s(x) \chi(N) \nabla C \cdot \eta_{K,L} d\gamma(x)} = 0,$$

$$|K| \frac{C_K^{n+1} - C_K^n}{\Delta t} - \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mu_{K,L}(C_L^{n+1} - C_K^{n+1}) = |K| h(N_K^n, C_K^{n+1}),$$

Résultat expérimental

Test numérique : Cas hétérogène discontinu

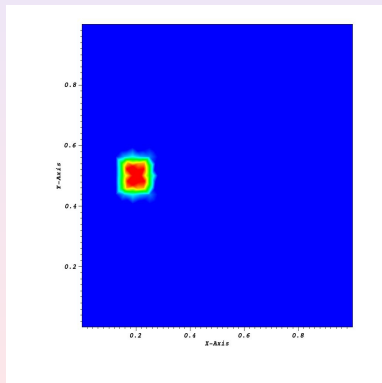
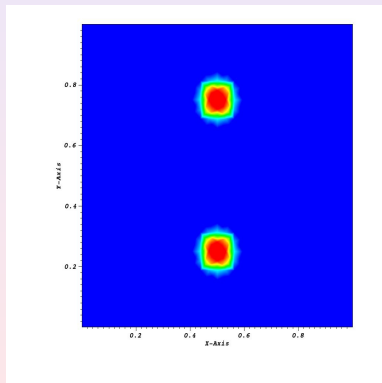
FIGURE : maillage de 14336 triangles.



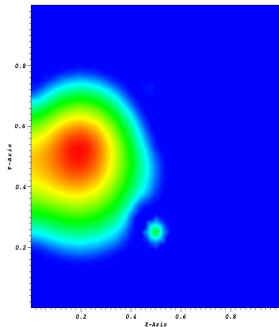
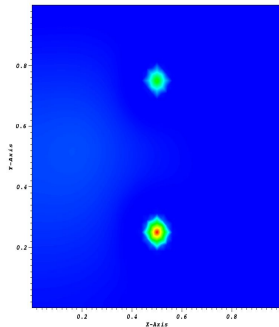
$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0.5 \\ 6 & \text{si } y \leq 0.5 \end{cases} .$$

- $\chi(N) = cN(1 - N)^2$
- $c = 0.1$
- $a(N) = DN(1 - N)$
- $D = 0.03$
- $\alpha = 0.01$
- $\beta = 0.05$
- $dt = 0.005$

Résultat numérique

FIGURE : $N(t=0)$ FIGURE : $C(t=0)$ 

Résultat numérique

FIGURE : $N(t=5)$ FIGURE : $N(t=40)$ 

Modèle anisotrope de Keller-Segel

Tenseurs $S(x)$ et $M(x)$ anisotropes hétérogènes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - \overbrace{\operatorname{div}(S(x)a(N)\nabla N)}^{\text{Terme diffusif}} + \overbrace{\operatorname{div}(S(x)\chi(N)\nabla C)}^{\text{Terme convectif}} = 0 \\ \partial_t C - \operatorname{div}(M(x)\nabla C) = h(N, C). \end{array} \right.$$

- S et M des matrices symétriques définies positives.

↓(Régularisation)

1 Existence globale de solutions faibles.

- $(\chi(N_1) - \chi(N_2))^2 \leq C_0(N_1 - N_2)(A(N_1) - A(N_2)).$

(Technique de dualité classique) ↓ (Lemme de Gronwall)

2 Unicité de solutions faibles.

Solution faible

Une **solution faible** est le couple (N, C) des fonctions sur Q_T ;
 $0 \leq N(x, t) \leq 1$, $C(x, t) \geq 0$ p.p $(x, t) \in Q_T$, $N \in C_w(0, T; L^2(\Omega))$,

$$\partial_t N \in L^2(0, T; H^1(\Omega)'), \quad A(N) := \int_0^N a(r) dr \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

$$C \in L^\infty(Q_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \partial_t C \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))').$$

Et pour tout φ et $\psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, (N, C) satisfait :

$$\int_0^T \langle \partial_t N, \varphi \rangle dt + \iint_{Q_T} S(x) \nabla A(N) \cdot \nabla \varphi dxdt =$$

$$\iint_{Q_T} S(x) \chi(N) \nabla C \cdot \nabla \varphi dxdt$$

$$\iint_{Q_T} \partial_t C \psi dxdt + \iint_{Q_T} M(x) \nabla C \cdot \nabla \psi dxdt = \iint_{Q_T} h(N, C) \psi dxdt$$

Problématique

Tenseurs anisotropes sur des maillages généraux!!!!

(Pas de condition d'orthogonalité, pas de condition d'angle maximal, raffinement local possible)

-
- ❶ Comment récompenser la perte de consistance des flux diffusifs due à la perte d'admissibilité des maillages??

$$A = \int_{\sigma_{K,L}} S(x) \nabla A(N) \cdot \eta_{K,L} d\gamma(x) = ?$$

- ❷ Comment construire un schéma numérique qui respecte le principe de maximum discret??

Les schémas **VFHYB** (même **MFE**) ne respectent pas le principe de maximum discret. (**Benchmark FVCA5** de R. Herbin et F. Hubert)

Etape 1 : Choix du schéma

Volumes finis :

- \otimes Perte d'admissibilité du maillage \implies Perte de convergence.
- \checkmark Techniques de type "upwind", pas d'oscillations dans le cas d'une convection dominée.

Éléments Finis :

- \otimes Oscillations et instabilités numériques.
- \checkmark Pas de restrictions sur le maillage, tenseurs pleins.

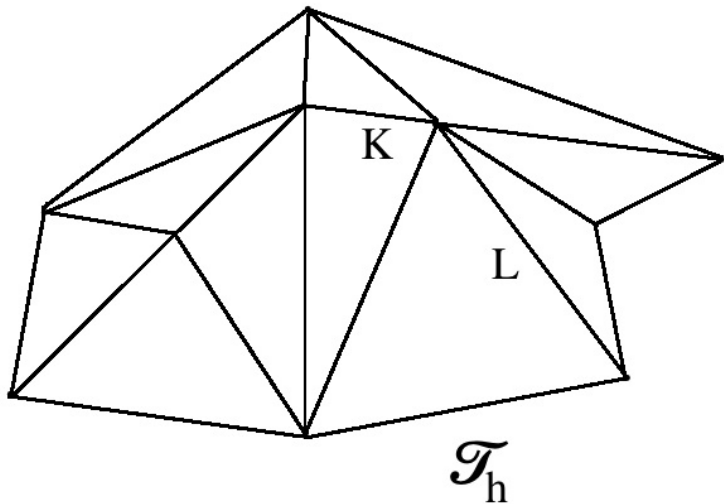
Idée intuitive : Schéma Combiné

$$\partial_t u - \overbrace{\operatorname{div}(S(x)a(N)\nabla N)}^{EF} + \underbrace{\operatorname{div}(S(x)\chi(N)\nabla C)}_{VF} = 0$$

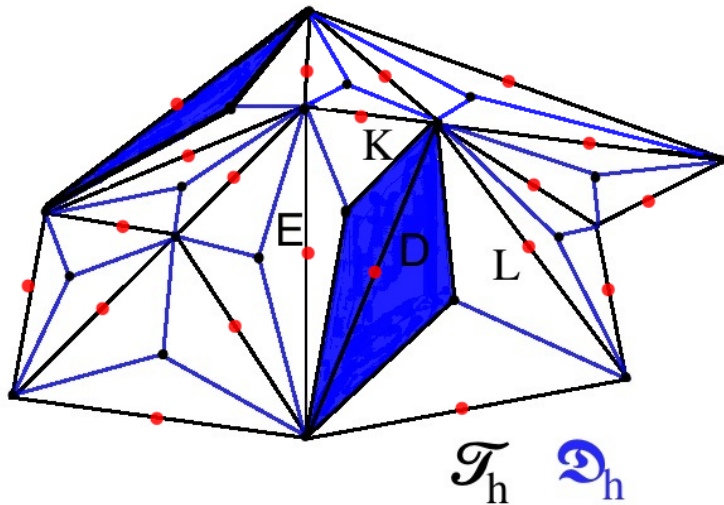
Bibliographie

- P. Angot, V. Dolejsi, M. Feistauer et J. Felcman, *Analysis of a combined barycentric finite volume -nonconforming finite element method for nonlinear convection-diffusion problems*. Appl. Math., 43(4), p. 263-310, 1998.
 - M. Bejcek, M. Feistauer, T. Gallouët, J. hajek et R. Herbin, *Combined triangular FV- triangular FE method for nonlinear convection-diffusion problems*. Math. Mech., 87(7), p. 499-517, 2007.
 - R. Eymard, D. Hilhorst et M. Vohralik, *A combined finite volume -nonconforming/mixed hybrid finite element scheme for degenerate parabolic problems*. Numer. Math., 105 : p. 73-131, 2006.
-

Etape 2 : Maillage initial du domaine



Etape 2 : Maillage dual du domaine



Etape 3 : Construction du schéma combiné

$$\begin{aligned}
& |D| \frac{N_D^{n+1} - N_D^n}{\Delta t} - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \underbrace{\overbrace{-\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (S(x) \nabla \varphi_E, \nabla \varphi_D)_{0,K}}^{\mathcal{S}_{D,E}}}_{\approx \int_{\sigma_{D,E}} S(x) \nabla A(N) \cdot \eta_{D,E}} (A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})) \\
& \approx \int_{\sigma_{D,E}} S(x) \nabla C \cdot \eta_{D,E} \approx \mathcal{S}_{D,E} (C_E^{n+1} - C_D^{n+1}) \\
& + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \underbrace{G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \overbrace{\delta C_{D,E}^{n+1}})}_{\approx \int_{\sigma_{D,E}} S(x) \chi(N) \nabla C \cdot \eta_{D,E}} = 0,
\end{aligned}$$

- Espace d'approximation :

$X_h := \{\varphi_h \in L^2(\Omega); \varphi_h|_K \text{ linéaire, } \varphi_h \text{ continue aux points } Q_D\}.$

$$X_h \not\subset H^1(\Omega), \|N_h\|_{X_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla N_h|^2 dx, A_h(N_h) = \sum_{E \in \mathcal{D}_h} A(N_E^{n+1}) \varphi_E$$

Etape 3 : Schéma combiné

$$\forall D \in \mathcal{D}_h, N_D^0 = \frac{1}{|D|} \int_D N_0(x) dx, C_D^0 = \frac{1}{|D|} \int_D C_0(x) dx.$$

Et, $\forall D \in \mathcal{D}_h, n \in [0, \dots, \tilde{N}]$,

$$|D| \frac{N_D^{n+1} - N_D^n}{\Delta t} - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} S_{D,E} (A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})) \\ + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) = 0,$$

$$|D| \frac{C_D^{n+1} - C_D^n}{\Delta t} - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (C_E^{n+1} - C_D^{n+1}) = |D| h(N_D^n, C_D^{n+1}).$$

Les inconnues sont $N^{n+1} = (N_D^{n+1})_{D \in \mathcal{D}_h}$ et $C^{n+1} = (C_D^{n+1})_{D \in \mathcal{D}_h}$

Etape 3 : Solution approchée

On définit 2 solutions approchées au sens du schéma combiné :

i) Une solution VF constante par morceaux en espace et en temps :

$$\left(\tilde{N}_{h,\Delta t}(x, t), \tilde{C}_{h,\Delta t}(x, t) \right) = \left(N_D^{n+1}, C_D^{n+1} \right) \text{ pour } x \in D, D \in \mathcal{D}_h$$

ii) Une solution EF linéaire par morceaux en espace et constante par morceaux en temps :

$$\left(N_{h,\Delta t}(x, t), C_{h,\Delta t}(x, t) \right) = \left(N_h^{n+1}(x), C_h^{n+1}(x) \right) \text{ pour } x \in \Omega$$

où $N_h^{n+1} = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} N_D^{n+1} \varphi_D$ et $C_h^{n+1} = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} C_D^{n+1} \varphi_D$.

Etape 4 : Propriétés discrètes

Théorème (Principe de maximum discret)

Si $\mathcal{S}_{D,E}, \mathcal{M}_{D,E} \geq 0 \forall D \in \mathcal{D}_h, E \in \mathcal{N}(D)$, alors :

$$0 \leq N_D^{n+1} \leq 1 \text{ et } C_D^{n+1} \geq 0, \forall D \in \mathcal{D}_h, n \in \{1, 2, \dots, \tilde{N}\}.$$

Pour tout $A_h(N_h) = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D) \varphi_D \in X_h$,

1) Coercivité :

$$- \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D) \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E) \geq c_S \|A_h(N_h)\|_{X_h}^2$$

2) Continuité :

$$| - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} A(N_D) \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E) | \leq c_S \|A_h(N_h)\|_{X_h}^2$$

Etape 4 : Existence et Convergence

- Estimation à priori : $\sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \Delta t \|A_h(N_h)\|_{X_h}^2 \leq C$.
- Le schéma combiné VF-EF admet au moins une solution.
- Estimées des translatés en temps et en espace :

$$\iint_{\Omega \times [0, T-\tau]} (A_h(N_h(t+\tau, x)) - A_h(N_h(t, x)))^2 dx dt \leq C(\tau + \Delta t).$$

$$\iint_{\Omega \times [0, T]} (A_h(N_h(t, x+\xi)) - A_h(N_h(t, x)))^2 dx dt \leq c' |\xi| (|\xi| + h).$$

Théorème (Convergence)

$(A(\tilde{N}_{h, \Delta t}))_{h, \Delta t}$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$ vers une fonction $\Gamma = A(N) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Etape 4 : Preuve

- Théorème de compacité relative de Kolmogorov \Rightarrow
 $A_h(N_{h,\Delta t})$ converge fortement vers Γ dans $L^2(Q_T)$.
- $(A_h(N_{h,\Delta t}) - A(\tilde{N}_{h,\Delta t}))_{h,\Delta t} \xrightarrow{h,\Delta t \rightarrow 0} 0$ dans $L^2(Q_T)$.
- $A(\tilde{N}_{h,\Delta t}) \xrightarrow{h,\Delta t \rightarrow 0} \Gamma$ dans $L^2(Q_T)$.
- Monotonicité de $A \Rightarrow$

$$\Gamma = A(N).$$
- Estimation sur les translations en espace \Rightarrow

$$A(N) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$
- A inversible $\Rightarrow \tilde{N}_{h,\Delta t} \xrightarrow{h,\Delta t \rightarrow 0} N$ dans $L^2(Q_T)$.

Théorème (Convergence vers une solution faible)

La limite (N, C) est une *solution faible* du problème continu.

Cas des transmissibilités négatives ???

- Technique non-linéaire permettant de corriger le flux diffusif afin de maintenir le principe de maximum discret .
- ① **C. Le Poitier**, "Correction non-linéaire et principe de maximum pour la discrétisation d'opérateurs de diffusion", 2010.
- ② **C. Cancès, M. Cathala et C. Le Poitier**, "Monotone centered FV schemes for anisotropic diffusion equations", 2011.

Flux diffusif initial :

$$S_D(A(\tilde{N}_h)) = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} S_{D,E}(A(N_D) - A(N_E)), \quad \forall D \in \mathcal{D}_h$$

Flux diffusif corrigé :

$$B_D(A(\tilde{N}_h)) = S_D(A(\tilde{N}_h)) + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \underbrace{\beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h))}_{??} (A(N_D) - A(N_E))$$

Construction d'une correction

Soit $\gamma_{D,E} : \mathcal{H}_{\mathcal{D}_h} \rightarrow \mathbb{R}_+$; Si $\sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |A(N_D) - A(N_E)| \neq 0$,

$$\text{alors } \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \gamma_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) |A(N_D) - A(N_E)| = 1.$$

Donc, le flux diffusif corrigé s'écrit :

$$\mathcal{B}_D(A(\tilde{N}_h)) = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \tau_{D,E}(A(\tilde{N}_h))(A(N_D) - A(N_E)), \forall D \in \mathcal{D}_h.$$

-
- $\beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) > \gamma_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) |S_D(A(\tilde{N}_h))| \Rightarrow$ schéma corrigé **monotone** ($\tau_{D,E} > 0$).
 - $\beta_{D,E} = \beta_{E,D} \Rightarrow$ schéma corrigé **conservative**.
 - $\beta_{D,E} > 0 \Rightarrow$ schéma corrigé **coercive**.
-

Convergence du schéma corrigé

La monotonie du schéma corrigé \Rightarrow la convergence.

La limite N est-elle une **solution faible** du problème continu ???

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \mathcal{B}_D(A(\tilde{N}_h))\psi_D = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_D(A(\tilde{N}_h))\psi_D + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \mathcal{Q}_D(A(\tilde{N}_h))\psi_D.$$

La consistance du flux diffusif initial implique :

$$- \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{S}_{D,E} A(N_E) \psi(P_D) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} S(x) \nabla A(N) \cdot \nabla \psi \, dx.$$

$$\text{Et } \left| \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \mathcal{Q}_D(A(\tilde{N}_h))\psi_D \right|$$

$$\leq \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \text{diam}(D) \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) \left| A(N_D) - A(N_E) \right|.$$

Exemple d'une correction

$$\beta_{D,E}(A(\tilde{N}_h)) = \frac{|S_D(A(\tilde{N}_h))|}{\sum_{Y \in \mathcal{N}(D)} |A(N_Y) - A(N_D)|} + \frac{|S_E(A(\tilde{N}_h))|}{\sum_{Y \in \mathcal{N}(E)} |A(N_Y) - A(N_E)|} + \eta |\sigma_{D,E}|$$

- positive, symétrique, continue.
- La condition suffisante sera,

$$\sup_{D \in \mathcal{D}_h} \left\{ \frac{\text{diam}(D)}{|D|} |S_D(A(\tilde{N}_h))| \right\} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Il s'agit de regarder le comportement du flux diffusif initial.

Test numérique : Problème elliptique.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (S(x, y)\nabla N) & = f \\ N_{\text{exacte}} & = x(1-x)y(1-y) \end{cases} ,$$

- Ω est le carré unité,
- Anisotropie rotationnelle hétérogène.

$$S(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} y^2 + \delta x^2 & -(1 - \delta)xy \\ -(1 - \delta)xy & x^2 + \delta y^2 \end{bmatrix}, \delta = 10^{-2}.$$

Impact de la correction sur un maillage de 352 diamants

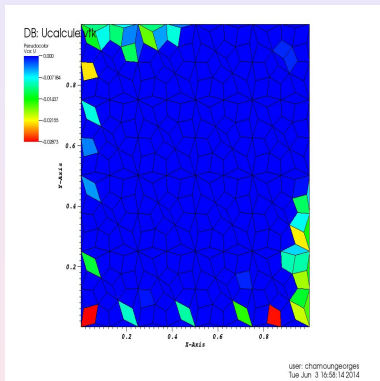


Schéma initial : Concentration des densités négatives avec une erreur- $L^2 = 2.33 \times 10^{-2}$.

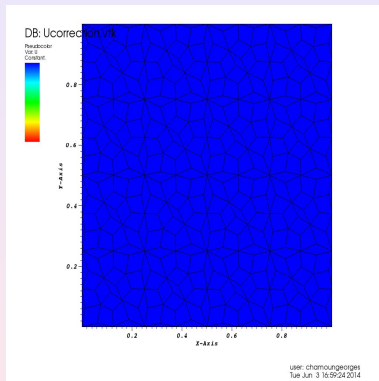


Schéma corrigé : Disparition des densités négatives avec une erreur- $L^2 = 1.77 \times 10^{-3}$.

Test numérique : Modèle anisotrope de Keller-Segel.

Anisotropie homogène

$$S_1(x, y) = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 20 \end{bmatrix}, M = Id$$

- Pas de temps : $dt = 0.0005$
- $A(N) = D\left(\frac{N^2}{2} - \frac{N^3}{3}\right)$ avec $D = 0.004$
- $\chi(N) = cN(1 - N)^2$ avec $c = 0.01$
- $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$ et $d = 10^{-4}$

Avant correction : $-6 \times 10^{-3} \leq N(t = 0.02) \leq 0.9$

Après correction : $0 \leq N(t = 0.02) \leq 0.88$

Modèle Chimiotactisme-Fluide

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - \operatorname{div}(S(x)a(N)\nabla N) + \operatorname{div}(S(x)\chi(N)\nabla C) \\ \partial_t C - \operatorname{div}(M(x)\nabla C) + u \cdot \nabla C \\ \partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P \\ \operatorname{div}(u) \end{array} \right. \begin{array}{l} + u \cdot \nabla N = f(N), \\ = h(N, C), \\ = -N\nabla\phi, \\ = 0. \end{array}$$

Etat de l'art

Hillesdon, Pedley et Kessler [1995], Dombrowski et al. [2004] et Tuval et al. [2005] : Modèle reliés décrivant le comportement collectif des bactéries nageantes dans un fluide incompressible.

Cas des tenseurs isotropes, $(a(N) = mN^{m-1})$ non-linéaire dégénérée en $N = 0$, sensibilité $(\chi(N, C) = N\beta(C))$ alors :
Existence globale pour le modèle Chimiotactisme-Stokes.

- 1 Pour $\frac{4}{3} < m \leq 2$ où Ω est borné dans \mathbb{R}^2 :
M.D. Francesco, A. Lorz et P. Markowich, [2010]
"Chemotaxis-fluid coupled model for swimming bacteria with nonlinear diffusion : global existence".
- 2 Pour $m = \frac{4}{3}$ dans tout l'espace $\Omega = \mathbb{R}^3$:
A. Lorz. [2012]
"Coupled Keller-Segel-Stokes model : global existence for small initial data and blow-up delay"

Problème bien posé

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - \operatorname{div}(S(x)a(N)\nabla N) + \operatorname{div}(S(x)\chi(N)\nabla C) + \mathbf{u} \cdot \nabla N = f(N), \\ \partial_t C - \operatorname{div}(M(x)\nabla C) + \mathbf{u} \cdot \nabla C = h(N, C), \\ \partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla P = -N\nabla \phi, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \end{array} \right.$$

Théorème : Il existe au moins une solution faible globale.

- G. Chamoun, M. Saad. et R. Talhouk

“A coupled anisotropic chemotaxis-fluid model : The case of two-sidedly degenerate diffusion”, CAMWA, 2014.

Notations :

$$\gamma = \{ \mathbf{u} \in C_c^\infty; \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \}, \quad V = \bar{\gamma} H_0^1(\Omega), \quad H = \bar{\gamma} L^2(\Omega).$$

Solution faible

Supposons que $0 \leq N_0 \leq 1$, $C_0 \geq 0$, $C_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \in H$ et $\nabla \cdot u_0 = 0$. Le triplet (N, C, u) est dit une **solution faible** si

$$0 \leq N(x, t) \leq 1, C(x, t) \geq 0 \text{ p.p. dans } Q_T = \Omega \times [0, T],$$

$$N \in C_w(0, T; L^2(\Omega)), \partial_t N \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'),$$

$$A(N) := \int_0^N a(r) dr \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

$$C \in L^\infty(Q_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)); \partial_t C \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'),$$

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \cap C_w(0, T; H); \frac{du}{dt} \in L^1(0, T; V'),$$

Solution faible

(N, C, u) satisfait $\forall \psi_1, \psi_2 \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et $\psi \in C_c^0(0, T; V)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t N, \psi_1 \rangle_{(H^1)', H^1} dt + \iint_{Q_T} S(x) \nabla A(N) \cdot \nabla \psi_1 dxdt \\ & - \iint_{Q_T} [S(x) \chi(N) \nabla C + Nu] \cdot \nabla \psi_1 dxdt = - \iint_{Q_T} f(N) \psi_1 dxdt, \\ & \int_0^T \langle \partial_t C, \psi_2 \rangle_{(H^1)', H^1} dt + \iint_{Q_T} [M(x) \nabla C - Cu] \cdot \nabla \psi_2 dxdt \\ & \qquad \qquad \qquad = \iint_{Q_T} h(N, C) \psi_2 dxdt, \\ & \int_0^T \langle \partial_t u, \psi \rangle_{V', V} dt + \iint_{Q_T} \nabla u \cdot \nabla \psi dxdt + \iint_{Q_T} (u \cdot \nabla) u \psi dxdt \\ & \qquad \qquad \qquad = \iint_{Q_T} -N \nabla \phi \psi dxdt = \iint_{Q_T} g \psi dxdt, \end{aligned}$$

Preuve de l'existence

Difficulté : La dégénérescence du terme de diffusion.

Solution : Remplacement de $a(N)$ par $a_\varepsilon(N) = a(N) + \varepsilon$.

La démonstration de l'existence se divise en **deux étapes** :

- 1 L'existence d'une solution du problème non dégénéré à l'aide de la méthode de semi-discrétisation en temps.
- 2 La convergence vers une solution faible du système dégénéré, quand on fait tendre le paramètre de régularisation ε vers 0.
 - **F. Marpeau et M. Saad** "Mathematical analysis of radionuclides displacement in porous media with non linear adsorption", 2006.
 - **M. Bendahmane, K. Karlson. et J.M. Urbano** "On a two sidedly degenerate chemotaxis model with volume filling effect", 2007.
 - **R. Temam** "Navier-Stokes equation", 2000.

Unicité pour le système Chimiotactisme-Stokes

$$\begin{cases} i) d \leq 3, u_0 \in W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega), C_0 \in W^{2-\frac{2}{p},p}(\Omega) \text{ avec } p > d, \\ ii) \nabla \phi \in W^{1,\infty}(\Omega), f \text{ est affine, } \chi \text{ de classe } C^1 \text{ et } S_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

Théorème

Supposons qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que :

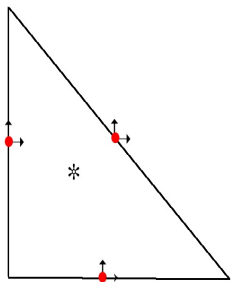
$$(\chi(N_1) - \chi(N_2))^2 \leq C_0(N_1 - N_2)(A(N_1) - A(N_2)), \forall N_1, N_2 \in [0, 1]$$

La solution faible du système chimiotactisme-Stokes est unique.

- P. Laurençot et D. Wrzosek "A chemotaxis model with threshold density and degenerate diffusion", 2007.

Extension de la méthode combinée

Approximation des équations de Navier-Stokes



- 1 Choix EF non conformes (Difficulté : $\nabla \cdot u = 0$)
- 2 $X_h^0 \approx H_0^1(\Omega)$
- 3 $V_h = \{u_h \in X_h, \text{div}_h(u_h) = 0\} \approx V$

$$\text{avec } \text{div}_h(u_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K 1_K$$

$$\text{et } \eta_K = \frac{1}{|K|} \int_K \nabla \cdot u_h \, dx.$$

On cherche $u_h^{n+1} \in V_h, \forall n \in \{0, \dots, \tilde{N}\}$ telle que : $\forall v_h \in V_h,$

$$\frac{1}{\Delta t} (u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + \nu((u_h^{n+1}, v_h))_h + b_h(u_h^n, u_h^{n+1}, v_h) = (g^n, v_h).$$

- Calcul de $u_h^{n+1} \in V_h$ n'est pas toujours facile \rightarrow Interprétation du problème dans X_h avec des contraintes linéaires.

Etape 1 : Algorithme d'Uzawa

- Etant donné u_h^n , p_h^n , $\tilde{N}_h^n = \{N_D^n\}_{D \in \mathcal{D}_h}$, $g^n = -\tilde{N}_h^n \nabla \phi$
- **Calcul de $u_h^{n+1} \in X_h$ et $p_h^{n+1} \in Y_h$** comme limite des suites :

$u_h^{n+1,r} \in X_h$ et $p_h^{n+1,r} \in Y_h$, $r = 0, 1, \dots, +\infty$ tel que :

$$\frac{1}{\Delta t} (u_h^{n+1,r+1} - u_h^n, v_h) + \nu ((u_h^{n+1,r+1}, v_h))_h + b_h(u_h^n, u_h^{n+1,r+1}, v_h) - (p_h^{n,r+1}, \operatorname{div}_h v_h) = (g^n, v_h), \quad \forall v_h \in X_h.$$

$$(p_h^{n+1,r+1} - p_h^{n,r}, q_h) + \rho (\operatorname{div}_h(u_h^{n+1,r+1}), q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Y_h.$$

Cet algorithme converge pour $0 < \rho < \frac{2\nu}{d}$ (R. Temam)

Etape 2 : Construction du schéma combiné

$$\begin{aligned}
 & |D| \frac{N_D^{n+1} - N_D^n}{\Delta t} - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} S_{D,E} (A(N_E^{n+1}) - A(N_D^{n+1})) \\
 & + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \delta C_{D,E}^{n+1}) \\
 & + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \underbrace{G_1(N_D^{n+1}, N_E^{n+1}; \underbrace{u_{D,E}^{n+1}}_{\approx \int_{\sigma_{D,E}} Nu \cdot \eta_{D,E}}})_{\approx \int_{\sigma_{D,E}} u_h^{n+1} \cdot \eta_{D,E}} = f(N_D^{n+1}).
 \end{aligned}$$

Convergence

Théorème : Convergence du schéma combiné.

Supposons $0 \leq N_0 \leq 1$, $C_0 \in L^\infty(\Omega)$, $C_0 \geq 0$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$,
 $\nabla \cdot u_0 = 0$ et $g \in L^2(0, T; H)$, alors :

- 1) Existence d'une solutions discrète $(\tilde{N}_{h,\Delta t}, \tilde{C}_{h,\Delta t})$.
 - 2) Pour toute suite $(h_m)_m$ décroissante vers zéro, il existe une sous-suite telle que $(N_{h_m}, C_{h_m}, u_{h_m})$ converge p.p. sur Q_T vers une solution faible (N, C, u) du système chimiotactisme-fluide.
-

Simulations numériques

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N - D \operatorname{div}(S(x)a(N)\nabla N) + c \operatorname{div}(S(x)\chi(N)\nabla C) + c_1(u \cdot \nabla N) = 0, \\ \partial_t C - d \operatorname{div}(M(x)\nabla C) + c_2(u \cdot \nabla C) = \alpha N - \beta C, \\ \partial_t u - \nu \Delta u + \nabla P = -N \nabla \phi, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \end{array} \right.$$

$$A(N) = \int_0^N N(1-N) dx = \left(\frac{N^2}{2} - \frac{N^3}{3}\right) \text{ et } \chi(N) = N(1-N)^2.$$

Influence de la pesanteur : On prend $dt = 0.0005$

- $\nu = 10^{-2}$ et $\nabla \phi = (0, 100)$
- $S = M = Id$, $D = 0.05$, $c = 0.5$, $c_1 = 20$
- $d = 10^{-4}$, $c_2 = 0$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$

Simulations numériques

Fluide tournant :

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 20 \end{bmatrix}, M = Id.$$

- Vitesse constante $u = (1, 0)$ sur la paroi supérieure du domaine
- $dt = 0.0005$, $D = 0.001$, $c = 0.1$, $c_1 = 1$
- $c_2 = 0$, $d = 2 \times 10^{-4}$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$
- $\nu = 5 \times 10^{-3}$ et $\nabla\phi = (0, 1)$

Simulations numériques

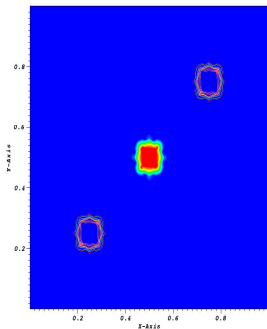
Flux oblique : ($c_2 \neq 0$)

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, M = Id.$$

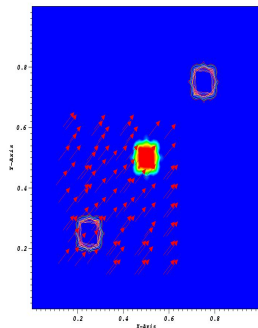
On choisit $dt = 0.0005$ et

- $D = 0.001, 1 = c < c_1 = 4$
- $c_2 = 10^{-4}, d = 10^{-3}, \alpha = 0.01, \beta = 0.05$
- $\nu = 5 \times 10^{-3}, \nabla\phi = (0, 10)$

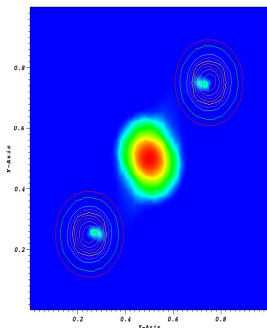
Conditions initiales



$N_0(x, y) = 0.1$ pour $(x, y) \in$
 $\{0.45, 0.45\} \times \{0.45, 0.45\}$ et
 $C_0(x, y) = 10$ pour
 $(x, y) \in \{0.2, 0.3\} \times \{0.2, 0.3\} \cup$
 $\{0.7, 0.8\} \times \{0.7, 0.8\}$.

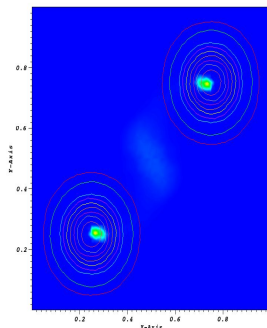


On ajoute le fluide avec
 $u_0(x, y) = (5, 5)$ pour
 $(x, y) \in \{0.1, 0.6\} \times \{0.1, 0.6\}$.

Évolution en temps de N et C (sans fluide)

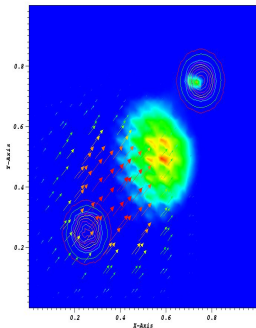
$$0 \leq N(t = 1.75) \leq 0.025,$$

$$0.26 \leq C(t = 1.75) \leq 2.60.$$



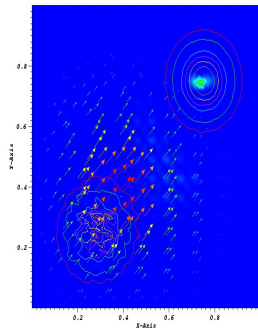
$$0 \leq N(t = 4) \leq 0.20,$$

$$0.12 \leq C(t = 4) \leq 1.15.$$

Évolution en temps de N et C (avec fluide)

$$0 \leq N(t = 0.75) \leq 0.021,$$

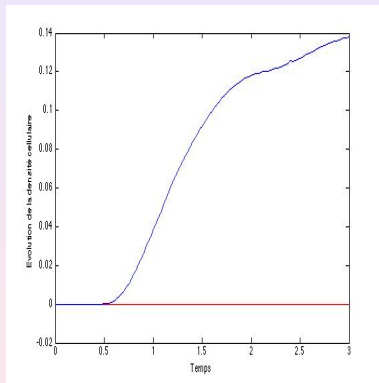
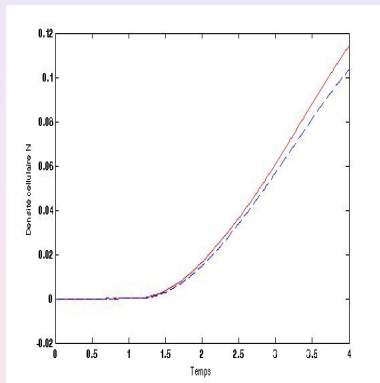
$$0.411 \leq C(t = 0.75) \leq 5.67.$$



$$0 \leq N(t = 3) \leq 0.44,$$

$$0.12 \leq C(t = 3) \leq 2.33.$$

Comparaison des courbes d'évolution



Courbes d'évolution en temps de la densité cellulaire au point $(0.26, 0.29)$ (courbe rouge) et au point $(0.71, 0.82)$ (courbe bleue).

Conclusions et Perspectives

Conclusions

- Compréhension profonde de la dynamique des cellules via les substances chimiques dans un fluide
- Étude mathématique détaillée de modèles en chimiotaxie-fluide
- Méthode numérique efficace et robuste
- Code numérique très développé

Perspectives

- Développement du code numérique (régimes turbulents avec Navier-Stokes, Tests 3D, maillages adaptatifs)
- Analyse du problème sur un domaine non polygonal
- Etude d'autres phénomènes de bioconvection

Remerciement

$$Life = \int_{\text{birth}}^{\text{death}} \frac{\text{happiness}}{\text{time}} \Delta \text{time}$$

PROVERBE :

Préparez au pire

Espérez le meilleur

Prenez ce qu'il vient

Meeeeerrrrccccciiiiiiiiii
Pour votre attention