Aspects modulaires et elliptiques des relations entre multizêtas

Samuel Baumard

▶ **To cite this version:**

Samuel Baumard. Aspects modulaires et elliptiques des relations entre multizêtas. Théorie des nombres [math.NT]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014. Français. NNT : . tel-01017022v1

HAL Id: tel-01017022

https://theses.hal.science/tel-01017022v1

Submitted on 1 Jul 2014 (v1), last revised 19 Sep 2014 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

présentée par

Samuel Baumard

pour obtenir le grade de
docteur en mathématiques

Aspects modulaires et elliptiques des relations entre multizêtas

---

dirigée par Leila Schneps et soutenue le 23 juin 2014 devant le jury composé de

P.	Cartier	(IHÉS)
J.	Cresson	(Université de Pau)
B.	Enriquez	(Université de Strasbourg)
D.	Manchon	(Université de Clermont-Ferrand)
J.	Œsterlé	(Université Paris 6)
L.	Schneps	(Université Paris 6)
M.	Waldschmidt	(Université Paris 6)

sur les rapports de Benjamin Enriquez et Dominique Manchon

Institut de mathématiques de Jussieu
4 place Jussieu — Paris 5^{e}

Résumés

Résumé en français

Cette thèse porte sur la famille des nombres dits *multizêtas*, et sur les relations qu'ils vérifient.

Le premier chapitre est une introduction générale au domaine et se donne pour objectif de présenter brièvement les différents cadres dans lesquels s'inscrivent les résultats des trois autres chapitres, et d'énoncer ces résultats.

Dans le chapitre 2, on étudie les relations linéaires entre zêtas simples et zêtas doubles, en établissant un lien rigoureux entre ces relations, les relations linéaires entre crochets de Poisson d'éléments de profondeur 1 de l'algèbre de Lie libre à deux générateurs, et l'espace des formes modulaires (théorème 2.9). Il s'agit en grande partie d'algèbre linéaire élémentaire sur des matrices définies explicitement.

Le résultat principal du chapitre 3 a trait à une algèbre de Lie de dérivations déduite de l'étude de la catégorie des motifs elliptiques mixtes introduite par Hain et Matsumoto. Il démontre l'existence de relations linéaires observées par Pollack dans cette algèbre et provenant elles aussi des formes modulaires (théorème 3.16). Les démonstrations consistent majoritairement à adapter des techniques introduites par Écalle à l'étude des propriétés de certains polynômes non commutatifs.

Le quatrième et dernier chapitre propose une construction d'une algèbre de multizêtas elliptiques formels, en analogie avec les travaux de Hain et Matsumoto sur les motifs elliptiques mixtes et d'Enriquez sur les associateurs elliptiques. Celle-ci se place dans le formalisme écallien des moules ; on prouve deux résultats partiels (théorèmes 4.35 et 4.45) qui corroborent la validité de cette dernière construction.

Mots-clefs

Multizêtas, relations de double mélange, formes modulaires, algèbres de Lie, conjecture de Broadhurst-Kreimer, motifs elliptiques mixtes, associateurs, moules.

Modular and elliptic aspects of relations between multiple zeta values

Abstract in English

This thesis deals with the family of numbers called *multiple zeta values*, and with the relations they satisfy.

The first chapter is a general introduction to the field and has the goal of briefly presenting the different settings into which the results of the three other chapters fit, and stating these results.

In chapter 2, we study the linear relations between simple and double zeta values, establishing a rigorous connection between these relations, the linear relations between Poisson bracket of depth 1 elements of the free Lie algebra on two generators, and the space of modular forms (theorem 2.9). The proofs consist mainly in performing elementary linear algebra on explicitly defined matrices.

The main result of chapter 3 involves a Lie algebra of derivations derived from the study of the category of mixed elliptic motives introduced by Hain and Matsumoto. We prove the existence of linear relations observed by Pollack in this algebra and which also come from modular forms (theorem 3.16). The bulk of the proofs rely on applying techniques introduced by Écalle to the study of the properties of certain non-commutative polynomials.

The fourth and last chapter proposes a construction of an elliptic formal multizeta algebra, in analogy with work by Hain and Matsumoto on mixed elliptic motives and Enriquez on elliptic associators. The latter falls within the écallian formalism of moulds; we prove two partial results (theorems 4.35 and 4.45) which support the validity of said construction.

Keywords

Multizetas, double shuffle relations, modular forms, Lie algebras, Broadhurst-Kreimer conjecture, mixed elliptic motives, associators, moulds.

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 Dimensions d'espaces de multizêtas 2
1.1.1 Relations de mélange entre multizêtas 2
1.1.2 Conjectures sur les dimensions 6
1.1.3 Formes modulaires 8
1.1.4 Polynômes de périodes 11
1.1.5 Relations entre zêtas doubles et zêtas simples 13
1.2 Algèbres de Lie formelles 15
1.2.1 Multizêtas formels et double mélange (chapitre 2) 15
1.2.2 Associateurs et algèbre de Grothendieck-Teichmüller 19
1.2.3 Actions galoisiennes et algèbre de dérivations stable 21
1.2.4 L'algèbre de Kashiwara-Vergne 25
1.3 Périodes et motifs 27
1.3.1 Multizêtas et périodes 27
1.3.2 Périodes de motifs de Tate mixtes 28
1.3.3 Motifs elliptiques mixtes (chapitre 3) 29
1.3.4 Algèbre de Grothendieck-Teichmüller elliptique et constructions écalliennes (chapitre 4) 31

2 Relations modulaires entre zêtas doubles **35**

2.1 Introduction et préliminaires 35
2.1.1 Polynôme de périodes tronqués associés aux formes paraboliques 35
2.1.2 Éléments de double mélange et éléments modulaires 36
2.1.3 Relations modulaires entre zêtas doubles 39
2.2 Algèbre enveloppante et dualité 40
2.3 Le résultat principal 45

3 Sur des relations dans Lie π^1(MEM) **53**

3.1 Introduction 53
3.1.1 Motivation et contenu 53
3.1.2 Notations générales 54
3.2 L'algèbre $\mathscr{E}$ 54
3.2.1 Description comme algèbre de dérivations 54
3.2.2 Changement de groupe fondamental 56

3.3 Bialternalité et crochets de Poisson 57
3.3.1 Algèbres de Lie et variables commutatives 57
3.3.2 Alternalité et dérivations 58
3.3.3 Crochets de Poisson et bialternalité en profondeur 3 59
3.4 Relations en profondeur 3 61
3.4.1 Éléments push-invariants 61
3.4.2 Énoncé et preuve du résultat principal 63
3.5 Schéma de preuve de la proposition 3.7 64
3.5.1 Étapes du calcul 65
3.5.2 Vérification de la prébialternalité 65

4 Vers une algèbre de double mélange elliptique 67
4.1 L'algèbre de Grothendieck-Teichmüller elliptique 68
4.1.1 Algèbres de tresses et de tresses elliptiques 68
4.1.2 Une extension elliptique de $\mathfrak{grt}$ 69
4.2 Moules et symétries écalliennes 71
4.2.1 Des séries aux moules 71
4.2.2 Structures algébriques sur les moules 73
4.2.3 Quelques conditions de symétrie 75
4.2.4 Des alternals aux alternils et inversement 80
4.3 Comparaison des deux constructions 81
4.3.1 D'une section à l'autre 82
4.3.2 Une observation expérimentale 83
4.3.3 Polarité de l'image de la section 84
4.3.4 Preuve du lemme 4.40 91
4.3.5 Stabilité par le crochet de Lie 94

Bibliographie 95

Index des notations 103

Chapitre 1

Introduction

Associer à un objet arithmétique une fonction zêta qui en reflète les propriétés est considéré comme l'un des piliers de la théorie des nombres. Un exemple fondateur, associé à l'ensemble des nombres entiers, est donné par la fonction définie en tout nombre complexe s de partie réelle strictement supérieure à 1 par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

qui se prolonge de façon méromorphe à tout le plan complexe ; la position des zéros de cette fonction par rapport à la droite des nombres de partie réelle ½ porte des informations précises sur la répartition des nombres premiers parmi les entiers.

Les valeurs aux entiers de la fonction ζ s'inscrivent dans un cadre algébrique plus riche : celui de la famille des réels définis par

$$\zeta(s_1, \ldots, s_r) = \sum_{n_1 > \cdots > n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}} \tag{1.1}$$

où r est un entier naturel, $s_1, \ldots, s_r$ des entiers supérieurs à 1 avec $s_1 \geqslant 2$, et où la somme porte sur tous les r-uplets strictement décroissants d'entiers supérieurs à 1. Ces nombres, dits multizêtas [1], ont une histoire qui remonte au moins à Euler [2], mais leur étude pour r quelconque n'a connu de réel regain d'intérêt que dans les années 90, sous l'impulsion d'Écalle, Hoffman et Zagier [3] ; ils vérifient des relations linéaires dont le nombre est prédit par l'une des conjectures majeures du domaine : la conjecture de Broadhurst-Kreimer. L'objectif de cette thèse est de préciser les connexions entre ces relations linéaires et la théorie des formes modulaires.

Le présent chapitre est consacré à la mise en place des différents contextes spécifiques aux résultats démontrés lors des chapitres suivants. Après une première section présentant les propriétés élémentaires des multizêtas ainsi que le lien

1. Mais aussi, selon les auteurs, valeurs zêta multiples, nombres d'Euler-Zagier, sommes harmoniques multiples ou encore polyzêtas.

2. Dans le cas $r \leqslant 2$; voir la correpondance entre Euler et Goldbach [Fus43] ainsi que les travaux ultérieurs d'Euler [Eul75, Eul48].

3. Voir notamment [Éca81, p. 429], puis [Hof92] et [Zag94].

conjectural entre la dimension des espaces de multizêtas et celle des espaces de formes modulaires, on décrit deux cadres conceptuels permettant d'étudier ces nombres : celui des différentes algèbres de Lie connectées aux espaces de multizêtas (section 1.2), et celui des périodes (section 1.3).

1.1 Dimensions d'espaces de multizêtas

1.1.1 Relations de mélange entre multizêtas

La définition, par l'équation (1.1), des multizêtas comme séries à nombre d'indices fixé permet une première expression du produit de deux multizêtas comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de multizêtas. L'exemple suivant était déjà connu d'Euler : considérons le produit de deux zêtas simples $\zeta(s_1)$ et $\zeta(s_2)$ avec s_1 et s_2 entiers, qui est aussi une série double. Découpons-en le domaine de sommation en trois selon la position respective des indices ; on trouve

$$\begin{aligned}\zeta(s_1)\,\zeta(s_2) &= \sum_{n_1>n_2} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} + \sum_{n_2>n_1} \frac{1}{n_2^{s_2} n_1^{s_1}} + \sum_{n_1=n_2} \frac{1}{n_1^{s_1+s_2}} \\ &= \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2).\end{aligned}$$

Cette relation sera ultérieurement généralisée à un produit de deux multizêtas quelconques.

On attribue généralement à Kontsevich [Zag94, § 9] une réécriture des multizêtas sous forme intégrale. Dans le cas des zêtas simples par exemple, on vérifie que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{\mathrm{d}t_2}{t_2} \cdots \int_0^{t_{s-2}} \frac{\mathrm{d}t_{s-1}}{t_{s-1}} \int_0^{t_{s-1}} \frac{\mathrm{d}t_s}{1-t_s} = \zeta(s)\,;$$

pour le voir, développer en série le dernier intégrande, intervertir la sommation et les intégrations — ce qui est licite puisque les intégrandes sont positifs —, puis intégrer le tout explicitement. Ce processus se généralise aisément à tous les multizêtas : en posant $\omega_0(t) = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\omega_1(t) = \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ et en notant s l'entier $s_1 + \cdots + s_r$, on peut écrire

$$\zeta(s_1, \ldots, s_r) = \int_{0<t_s<\cdots<t_1<1} \omega_{\varepsilon_1}(t_1) \cdots \omega_{\varepsilon_s}(t_s) \tag{1.2}$$

où ε_i vaut 1 si i est de la forme $s_1 + \cdots + s_k$ et 0 sinon, et où l'intégrale est prise sur le simplexe des s-uplets strictement décroissants d'éléments de $(0, 1)$.

Cette expression intégrale donne lieu à une seconde manière d'exprimer le produit de deux multizêtas comme une combinaison linéaire de multizêtas. En effet, le produit de deux intégrales du type de (1.2) est aussi une intégrale sur le produit de deux simplexes, et ce dernier produit peut lui-même être partitionné en simplexes. En d'autres termes, le produit des deux intégrales est une somme portant sur l'ensemble des façons d'intercaler les deux suites de variables en conservant

leur ordre individuel ; on parle de battage, de mélange ou de shuffle, par analogie avec l'ensemble des façons de mélanger deux moitiés d'un paquet de cartes.

Pour donner une formulation plus algébrique de ces deux types de relations entre multizêtas, il est commode d'introduire les objets suivants. Notons $\mathfrak{h}$ l'espace vectoriel des polynômes à deux variables non commutatives x et y et à coefficients rationnels. Il contient le sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}^1$ des polynômes dont les monômes non vides se terminent par y, qui contient lui-même le sous-espace $\mathfrak{h}^0$ des polynômes dont les monômes non vides commencent par x et se terminent par y. Chaque monôme non vide d'un élément de $\mathfrak{h}^1$ s'écrit donc $x^{s_1-1}y\cdots x^{s_r-1}y$ où les s_i sont des entiers supérieurs à 1, et les éléments de $\mathfrak{h}^0$ sont caractérisés par le fait que s_1 est supérieur à 2. On peut alors considérer les multizêtas comme des valeurs de l'application $\mathbb{Q}$-linéaire

$$\hat{\zeta} : \mathfrak{h}^0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie sur les monômes par $\hat{\zeta}(1) = 1$ et $\hat{\zeta}(x^{s_1-1}y\cdots x^{s_r-1}y) = \zeta(s_1,\dots,s_r)$, ce qui, d'après l'expression intégrale (1.2), revient à substituer ω_0 à x et ω_1 à y puis à intégrer sur le simplexe défini plus haut.

Le produit de mélange des intégrales itérées se traduit alors en termes d'un produit sur $\mathfrak{h}$, dit de shuffle, noté ш, et défini sur les monômes par

$$x_1\cdots x_r \text{ ш } x_{r+1}\cdots x_{r+s} = \sum x_{\sigma^{-1}(1)}\cdots x_{\sigma^{-1}(r+s)}$$

où la somme porte sur toutes les permutations σ de l'ensemble $[\![1, r+s]\!]$ qui soient croissantes sur les deux segments $[\![1, r]\!]$ et $[\![r+1, r+s]\!]$. De manière équivalente, on peut définir le shuffle de deux monômes par récurrence sur la longueur en imposant les conditions $1 \text{ ш } w = w \text{ ш } 1 = w$ et

$$(w_1\,x_1) \text{ ш } (w_2\,x_2) = (w_1 \text{ ш } (w_2\,x_2))\,x_1 + ((w_1\,x_1) \text{ ш } w_2)\,x_2$$

où x_1 et x_2 sont deux lettres et w_1 et w_2 deux mots, éventuellement vides.

Il n'est pas difficile de voir que ce produit munit $\mathfrak{h}$ d'une structure d'algèbre commutative, et que $\mathfrak{h}^1$ et $\mathfrak{h}^0$ en sont deux sous-algèbres ; pour spécifier la loi de composition, on notera au besoin $\mathfrak{h}_{\text{ш}}$, $\mathfrak{h}^1_{\text{ш}}$ et $\mathfrak{h}^0_{\text{ш}}$ ces trois algèbres. L'expression (1.2) a alors pour conséquence directe que

$$\hat{\zeta}(f)\,\hat{\zeta}(g) = \hat{\zeta}(f \text{ ш } g) \tag{1.3}$$

pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathfrak{h}^0$. Autrement dit, l'application linéaire $\hat{\zeta} : \mathfrak{h}^0_{\text{ш}} \to \mathbb{R}$ est un morphisme d'algèbres, dont l'image est en particulier une sous-$\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathbb{R}$, que l'on appellera *algèbre des multizêtas* et que l'on notera $\mathcal{Z}$.

À titre d'exemple, donnons de cette manière une linéarisation du produit de deux zêtas simples. Si s_1 et s_2 sont deux entiers supérieurs à 2, écrivons

$$\begin{aligned}\zeta(s_1)\,\zeta(s_2) &= \hat{\zeta}(x^{s_1-1}y)\,\hat{\zeta}(x^{s_2-1}y)\\ &= \hat{\zeta}(x^{s_1-1}y \text{ ш } x^{s_2-1}\,y)\,;\end{aligned}$$

en appliquant la définition,

$$\begin{aligned} x^{s_1-1}y \sqcup\!\sqcup x^{s_2-1}y &= (x^{s_1-1} \sqcup\!\sqcup x^{s_2-1}y)\,y + (x^{s_1-1}y \sqcup\!\sqcup x^{s_2-1})y \\ &= \sum_{i+j=s_1-1} \tbinom{s_2-1+i}{i}\, x^{s_2-1+i}y\,x^j y + \sum_{i+j=s_2-1} \tbinom{s_1-1+i}{i}\, x^{s_1-1+i}y\,x^j y, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \zeta(s_1)\,\zeta(s_2) &= \sum_{i+j=s_1-1} \tbinom{s_2-1+i}{s_2-1}\,\zeta(s_2+i,j+1) + \sum_{i+j=s_2-1} \tbinom{s_1-1+i}{s_1-1}\,\zeta(s_1+i,j+1) \\ &= \sum_{k\geqslant 1} \left(\tbinom{s_1+s_2-1-k}{s_1-1} + \tbinom{s_1+s_2-1-k}{s_2-1} \right) \zeta(s_1+s_2-k,k). \end{aligned}$$

Le produit des séries admet une interprétation similaire ; remarquons que l'espace $\mathfrak{h}^1$ est aussi l'espace des polynômes en les variables non commutatives y_i définies pour i entier par $y_i = x^{i-1}y$ si $i \geqslant 1$ et $y_0 = 1$, et que l'on a alors par définition $\zeta(s_1,\dots,s_r) = \hat{\zeta}(y_{s_1}\cdots y_{s_r})$. Munissons ensuite $\mathfrak{h}^1$ d'un nouveau produit, dit de stuffle, noté $*$, et défini sur les monômes par récurrence sur la longueur, en imposant les conditions $1 * w = w * 1 = w$ et

$$(w_1\,y_{s_1}) * (w_2\,y_{s_2}) = (w_1 * (w_2\,y_{s_2}))\,y_{s_1} + ((w_1\,y_{s_1}) * w_2)\,y_{s_2} + (w_1 * w_2)\,y_{s_1+s_2}$$

où s_1 et s_2 sont deux entiers quelconques supérieurs à 1 et w_1 et w_2 deux mots en les y_i. Il s'agit donc d'une loi de composition similaire au shuffle, à ceci près que des termes supplémentaires « contractés » apparaissent à chaque application de la formule de récurrence. On vérifie alors que ce produit donne à $\mathfrak{h}^1$ une structure d'algèbre commutative que l'on notera $\mathfrak{h}^1_*$, que $\mathfrak{h}^0$ en est une sous-algèbre que l'on notera $\mathfrak{h}^0_*$, et que

$$\hat{\zeta}(f)\,\hat{\zeta}(g) = \hat{\zeta}(f * g) \tag{1.4}$$

pour tout couple (f,g) d'éléments de $\mathfrak{h}^0$. L'application $\hat{\zeta} : \mathfrak{h}^0_* \to \mathbb{R}$ est donc aussi un morphisme d'algèbres pour la structure de stuffle.

Un corollaire de tout ceci est l'existence de relations linéaires entre multizêtas, les *relations de double mélange*, obtenues en prenant la différence des équations (1.3) et (1.4) : pour tous mots w et w' commençant par x et se terminant par y, la relation

$$\hat{\zeta}(w \sqcup\!\sqcup w' - w * w') = 0 \tag{1.5}$$

est vérifiée. L'exemple le plus simple vient du produit $\zeta(2)^2$; on utilise la définition des deux produits pour écrire

$$\begin{aligned} xy \sqcup\!\sqcup xy - xy * xy &= (2\,xyxy + 4\,x^2y^2) - (2\,xyxy + x^3y) \\ &= 4\,x^2y^2 - x^3y \end{aligned}$$

ce qui, après application de $\hat{\zeta}$, donne finalement

$$4\,\zeta(3,1) = \zeta(4).$$

Il est ici utile d'introduire deux entiers associés à un multizêta individuel : son *poids* et sa *profondeur*. Par définition, le poids de $\zeta(s_1, \dots, s_r)$ est la somme $s_1 + \cdots + s_r$ de ses arguments, et sa profondeur est leur nombre r. Du point de vue de l'espace $\mathfrak{h}$, le poids d'un monôme est donc son degré total, et sa profondeur son degré en y. Par définition, les deux lois internes ш et $*$ sont homogènes pour le poids, mais seule la loi ш est homogène pour la profondeur, et les relations de double mélange provenant de (1.5) interviennent donc en poids fixé mais en profondeur variable, ce qui signifie que si le poids peut éventuellement donner une graduation sur l'algèbre des multizêtas, la profondeur ne pourra donner qu'une filtration croissante.

Les relations de double mélange décrites ci-dessus ne permettent en fait pas d'obtenir toutes les relations linéaires possibles entre multizêtas, ce qui a conduit Ihara, Kaneko et Zagier [IKZ06] à considérer une version étendue du double mélange, obtenue en prolongeant l'application $\hat{\zeta}$ à $\mathfrak{h}^1$ de deux façons différentes. Pour commencer, on vérifie [4] que si le symbole $\diamond$ est remplacé par ш ou $*$, l'algèbre $\mathfrak{h}^1_\diamond$ est isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathfrak{h}^0_\diamond[y]$, ce qui revient à dire qu'il existe un unique isomorphisme d'algèbres $\mathrm{reg}^T_\diamond : \mathfrak{h}^1_\diamond \to \mathfrak{h}^0_\diamond[T]$, dit de régularisation, qui envoie y sur T. On peut donc prolonger d'une unique façon $\hat{\zeta}$ en un morphisme d'algèbres $\hat{\zeta}^T_\diamond : \mathfrak{h}^1_\diamond \to \mathbb{R}[T]$ en imposant que $\hat{\zeta}^T_\diamond(y) = T$; en d'autres termes, on attribue la valeur fictive T à $\zeta(1)$. Les trois auteurs cités exploitent par ailleurs le comportement asymptotique des polylogarithmes au voisinage de 1 pour montrer que les deux morphismes obtenus sont reliés par l'identité

$$\hat{\zeta}^T_{\text{ш}} = \rho \circ \hat{\zeta}^T_*, \tag{1.6}$$

où $\rho : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$ est l'unique application $\mathbb{R}$-linéaire vérifiant dans $\mathbb{R}[T][\![u]\!]$ l'identité de séries formelles

$$\rho(e^{Tu}) = \Gamma(1+u)\, e^{(T+\gamma)\,u}$$

dans laquelle γ désigne la constante d'Euler. En outre, la spécialisation à $T = 0$ fournit des morphismes d'algèbres $\hat{\zeta}_\diamond : \mathfrak{h}^1_\diamond \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{reg}_\diamond : \mathfrak{h}^1_\diamond \to \mathfrak{h}^0_\diamond$, reliés par l'identité $\hat{\zeta}_\diamond = \hat{\zeta} \circ \mathrm{reg}_\diamond$.

Ihara, Kaneko et Zagier montrent alors que ces considérations impliquent l'existence d'une nouvelle famille de relations satisfaites par les multizêtas, les *relations de double mélange étendu*, dont une formulation possible est

$$\hat{\zeta} \circ \mathrm{reg}_{\text{ш}}(f \text{ ш } g - f * g) = 0 \tag{1.7}$$

pour tout couple de polynômes $(f, g) \in \mathfrak{h}^0 \times \mathfrak{h}^1$. Pour avoir une version effective de ces dernières relations, il ne reste plus qu'à expliciter l'application de régularisation ;

4. Soit à la main, en prouvant par récurrence sur le poids et le nombre de lettres la surjectivité de l'application naturelle $\mathfrak{h}^0_\diamond[y] \to \mathfrak{h}^1_\diamond$ puis en vérifiant l'égalité des dimensions des parties graduées de chacun des deux espaces, soit en explicitant un développement de Taylor en la variable y, voir par exemple [Car01, p. 154-157].

d'une part, la définition de $\mathrm{reg}_{\text{ш}}$ impose que $\mathrm{reg}_{\text{ш}}(y^n) = 0$, et d'autre part [IKZ06, éq. (5.2)]

$$\mathrm{reg}_{\text{ш}}(y^n x\, w) = (-1)^n x\, (y^n \text{ ш } w)$$

pour tout monôme w se terminant par y, ce qui couvre tous les cas de régularisation. Regardons par exemple ce que donne l'équation (1.7) pour $(f, g) = (xy, y)$. On trouve

$$\begin{aligned} f \text{ ш } g - f * g &= (2\,xy^2 + yxy) - (xy^2 + yxy + x^2y) \\ &= xy^2 - x^2y\,; \end{aligned}$$

il n'y a ici pas besoin de régulariser, et la relation de double mélange étendu correspondante est donc

$$\zeta(2,1) = \zeta(3),$$

qui ne peut pas être obtenue en faisant seulement appel à la relation (1.5).

En se fondant sur des expérimentations numériques, on conjecture que les relations de double mélange étendu suffisent cette fois-ci à décrire entièrement les relations linéaires que vérifient les multizêtas, ce qui constitue donc une première question ouverte sur la structure d'algèbre des multizêtas réels. D'autres conjectures portent plus spécifiquement sur la dimension de différents sous-espaces de multizêtas, et font l'objet de la prochaine section.

1.1.2 Conjectures sur les dimensions

Notons $\mathcal{Z}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$, qui est donc comme on l'a vu une sous-$\mathbb{Q}$-algèbre [5] de $\mathbb{R}$. Une première série de conjectures, dues à Zagier et à Hoffman, porte sur le poids des multizêtas ; en notant $\mathcal{Z}_n$ le sous-espace vectoriel engendré par les multizêtas de poids n, on a clairement, du fait des expressions (1.3) ou (1.4), l'inclusion $\mathcal{Z}_m\,\mathcal{Z}_n \subset \mathcal{Z}_{m+n}$. Zagier conjecture qu'il s'agit d'une *graduation* de l'algèbre $\mathcal{Z}$, au sens où

$$\mathcal{Z} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{Z}_n.$$

En particulier, tous les $\zeta(n)$ seraient transcendants pour $n \geqslant 2$, et linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$; au vu des difficultés à prouver l'irrationalité de $\zeta(3)$ ou l'indépendance linéaire de familles de zêtas simples [6], cette conjecture est considérée à ce jour comme largement hors de portée.

Il est ensuite possible de calculer à haute précision des valeurs approchées des multizêta réels, et de rechercher, par exemple à l'aide de l'algorithme LLL de réduction de réseaux, des relations linéaires entre ces valeurs. C'est ce qu'a

5. Le multizêta sans argument vaut par convention 1.

6. Voir [Fis04] pour un compte-rendu des résultats d'Apéry (1978), Ball-Rivoal (2000) et Zudilin (2001) sur ces questions.

fait Zagier pour donner une valeur conjecturale à la dimension des parties graduées de $\mathcal{Z}$: en termes de séries génératrices, il semble que l'on ait

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n)\, s^n = \frac{1}{1-s^2-s^3}.$$

Ces deux dernières conjectures seraient elles-mêmes impliquées par une troisième, énoncée par Hoffman : la famille des $\zeta(s_1,\dots,s_r)$ avec $s_i \in \{2,3\}$ constituerait une base de $\mathcal{Z}$. Des résultats récents de Brown, sur lesquels nous reviendrons brièvement dans la section 1.3, démontrent la conjecture de Hoffman dans le cadre motivique, prouvant en particulier que la famille des multizêtas de Hoffman engendre l'espace des multizêtas réels.

La conjecture la plus précise sur la dimension des espaces de multizêtas est celle dite de Broadhurst-Kreimer. Raffinons le découpage de $\mathcal{Z}$ en notant $\mathcal{Z}_n^d$ le sous-espace engendré par les multizêtas de poids n et de profondeur inférieure à d. Il s'agit bien sûr d'une suite croissante de sous-espaces, et on peut noter $\mathrm{gr}^d\,\mathcal{Z}_n$ le quotient $\mathcal{Z}_n^d/\mathcal{Z}_n^{d-1}$. La conjecture de Broadhurst-Kreimer, qui s'appuie [BK97] sur des calculs de même nature que ceux de Zagier, suggère une forme close explicite à la série double génératrice des dimensions des $\mathrm{gr}^d\,\mathcal{Z}_n$: on devrait avoir

$$\sum_{n,d\geqslant 0} \dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{gr}^d\,\mathcal{Z}_n)\, s^n\, t^d = \frac{1+\mathbb{E}(s)\,t}{1-\mathbb{O}(s)\,t+\mathbb{S}(s)\,t^2-\mathbb{S}(s)\,t^4} \tag{1.8}$$

avec

$$\mathbb{E}(s) = \frac{s^2}{1-s^2}, \qquad \mathbb{O}(s) = \frac{s^3}{1-s^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{S}(s) = \frac{s^{12}}{(1-s^4)(1-s^6)}.$$

La fraction $\mathbb{E}(s)$ est la série génératrice de la suite des entiers pairs non nuls, $\mathbb{O}(s)$ celle associée à la suite des entiers impairs supérieurs à 3, et $\mathbb{S}(s)$ provient d'un espace que nous décrivons dans la section suivante. On retrouve effectivement pour $t=1$ la conjecture des dimensions de Zagier, qui ne concerne que le poids.

Le développement en petit degré du membre de droite de (1.8) prévoit en particulier que les espaces $\mathrm{gr}^1\,\mathcal{Z}_n$ soient de dimension 1, qu'il n'y ait essentiellement qu'un multizêta de poids 5 et de profondeur 2, mais qu'il existe deux multizêtas indépendants de poids 7 et de profondeur 2 qui engendrent $\mathrm{gr}^2\,\mathcal{Z}_7$. De même, le premier multizêta dont la « vraie » profondeur soit 3 doit être de poids 8, et il ne doit en exister qu'un à une constante rationnelle près.

Signalons que la conjecture de Broadhurst-Kreimer a été vérifiée numériquement pour de nombreuses valeurs du poids et de la profondeur, et a fait l'objet de développements algorithmiques poussés, voir par exemple [BBV10].

1.1.3 Formes modulaires

La fraction rationnelle de l'équation (1.8) peut être interprétée de la façon suivante : en négligeant dans un premier temps les termes en t^2 et t^4 du dénominateur, les termes en $\mathbb{E}(s)$ et $\mathbb{O}(s)$ s'interprètent comme provenant respectivement des zêtas pairs, qui sont des puissances de π^2, et des zêtas impairs, dont on conjecture qu'ils sont algébriquement indépendants. Autrement dit, sans les termes supplémentaires au dénominateur, les parties bigraduées de l'espace des multizêtas auraient les mêmes dimensions que celles du produit tensoriel $\mathbb{Q}[s_2] \otimes \mathbb{Q}\langle s_3, s_5, \ldots\rangle$ muni de sa bigraduation naturelle. Cependant, les termes restants au dénominateur signifient quant à eux que ces dimensions sont altérées par des relations additionnelles apparaissant entre des parties de profondeurs différentes : ainsi, certaines combinaisons linéaires de multizêtas de profondeur 2 doivent en fait tomber en profondeur 1, des multizêtas supplémentaires doivent apparaître en profondeur 4, et le nombre de ces relations doit être relié à la série $\mathbb{S}(s)$.

La remarque, due à Zagier, selon laquelle $\mathbb{S}(s)$ compte les formes paraboliques pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ a plus tard été suivie par la preuve par Gangl, Kaneko et Zagier du fait que les relations « exotiques » entre profondeur 2 et profondeur 1 existent effectivement [GKZ06]. La suite de cette section vise à rappeler des résultats de la théorie classique des formes modulaires elliptiques et de leurs périodes[7], ainsi que ses conséquences sur les multizêtas.

Notons $\mathscr{H}$ le demi-plan de Poincaré des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive. Si k est un entier relatif, une *forme modulaire* de poids k, sous-entendu pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, est une fonction $f : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ remplissant les trois conditions suivantes :

i) elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$f\left(\tfrac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k\, f(z)$$

pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$;

ii) elle est holomorphe sur $\mathscr{H}$;

iii) elle admet une limite finie dans la direction de $i\infty$.

Les formes modulaires de poids k forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel que l'on notera M_k. Une forme modulaire de limite nulle en $i\infty$ sera dite *parabolique*, et on notera S_k le sous-espace des telles formes.

Les conditions (i)-(iii) impliquent en particulier qu'il n'existe pas de forme modulaire non nulle de poids impair ou négatif, et que toute forme modulaire possède un développement en série de Fourier du type

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, q^n \quad \text{avec} \quad q = e^{2i\pi z}\,;$$

7. On pourra également consulter les textes introductifs plus complets [Ser77, ch. VII] et [Zag92] ; le cours [MR05] contitue un bon complément pour le point de vue des fonctions L et des périodes, tandis que l'ouvrage [Zag08] est plus orienté vers les applications.

dans la suite, on notera toujours $a_n(f)$ le n-ième coefficient de Fourier d'une forme modulaire f. Remarquons par ailleurs qu'une telle forme est parabolique si et seulement si $a_0(f)$ est nul.

Un exemple de forme modulaire non parabolique de poids k pair supérieur à 4 est fourni par la somme double

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

dans laquelle (m,n) est un couple non nul d'entiers relatifs. Ces séries, dites *d'Eisenstein*, possèdent un développement en série de Fourier explicite, qui à une constante multiplicative près est donné par

$$G_k(z) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n \tag{1.9}$$

où B_k est le k-ième nombre de Bernoulli, donné par la série génératrice exponentielle $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{k\geqslant 0} B_k\, t^k/k\,!$, et où $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.

On démontre que les séries d'Eisenstein G_4 et G_6 engendrent librement l'espace des formes modulaires en tant qu'anneau de polynômes, et que le sous-espace des formes paraboliques en est l'idéal engendré par la fonction de poids 12 notée Δ, dite de Ramanujan, que l'on peut définir par l'égalité

$$(240\, G_4)^3 - (504\, G_6)^2 = 12^3 \Delta. \tag{1.10}$$

Par des considérations de poids, ceci implique que la série génératrice des dimensions des espaces de formes paraboliques vaut

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{C}}(S_k)\, s^k = \frac{s^{12}}{(1-s^4)(1-s^6)}\,; \tag{1.11}$$

on retrouve donc la série $\mathbb{S}(s)$ de la section précédente, ce qui conduit à chercher une interprétation modulaire aux relations entre multizêtas.

Ouvrons une parenthèse sur la notion de forme modulaire de Hecke ; celle-ci provient de l'action sur les espaces M_k d'une famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'opérateurs dits de Hecke. L'action de l'opérateur T_n se traduit de manière explicite sur les développements en série de Fourier : pour une forme f de poids k et de coefficients de Fourier $a_m(f)$, la forme $T_n(f)$, modulaire de même poids, vérifiera

$$a_m(T_n f) = \sum_{d|m\wedge n} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f). \tag{1.12}$$

En particulier, les sous-espaces de formes paraboliques de poids donné sont stables par tous les opérateurs de Hecke. Ces derniers sous-espaces sont par ailleurs munis d'une structure hermitienne par le produit scalaire de Petersson ; ce dernier envoie une paire (f,g) d'éléments de S_k sur le nombre complexe

$$\langle f, g\rangle = \int \overline{f(z)}\, g(z)\, y^{k-2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{1.13}$$

où l'intégrale porte sur un domaine fondamental quelconque [8] pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan $\mathscr{H}$, la convergence étant assurée par les propriétés asymptotiques des formes paraboliques. Il se trouve que les restrictions à S_k des opérateurs de Hecke sont autoadjointes pour le produit scalaire de Petersson. Comme on peut également vérifier que ces opérateurs commutent entre eux, l'espace S_k possède donc une base qui diagonalise simultanément tous les T_n, que la série d'Eisenstein G_k, elle aussi propre pour tous les opérateurs de Hecke, permet de compléter en une base de M_k. Le coefficient de Fourier d'indice 1 des éléments d'une telle base étant non nul, on dira finalement qu'une forme modulaire f de poids k est *de Hecke* si c'est un vecteur propre de chacun des opérateurs de Hecke et si elle vérifie $a_1(f) = 1$. C'est en particulier le cas pour toutes les séries d'Eisenstein G_k et pour la fonction Δ de Ramanujan définie par la relation (1.10).

Une des propriétés remarquables des formes modulaires de Hecke a trait à leur *fonction L*. La fonction L d'une forme modulaire f est définie pour $\operatorname{Re} s$ suffisamment grande [9] par

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n^s}, \tag{1.14}$$

définition qu'il s'avère parfois utile de compléter par un facteur dit archimédien, en notant

$$\Lambda_f(s) = (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,L_f(s). \tag{1.15}$$

L'énoncé que voici [10] résume alors trois propriétés principales de ces fonctions L.

Théorème 1.1. *Soit f une forme modulaire de poids k. Alors*

i) la fonction L_f admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, avec un unique pôle simple en $s = k$ si f n'est pas parabolique ;

ii) en notant encore L_f ce prolongement et Λ_f la fonction définie par l'équation (1.15)*, cette dernière vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\Lambda_f(k - s) = (-1)^{\frac{k}{2}}\,\Lambda_f(s)\,; \tag{1.16}$$

iii) lorsque f est une forme de Hecke, la fonction L_f admet le produit eulérien

$$L_f(s) = \prod_p (1 - a_p(f)\,p^{-s} + p^{k-1}\,p^{-2s})^{-1} \tag{1.17}$$

où le produit porte sur l'ensemble des nombres premiers.

8. Par exemple l'ensemble des éléments z de $\mathscr{H}$ vérifiant $|\operatorname{Re} z| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|z| \geqslant 1$.

9. Soit k le poids de f. Si f est parabolique, il suffit d'avoir $\operatorname{Re} s > \frac{k}{2} + 1$; sinon, il faut supposer que $\operatorname{Re} s > k$.

10. Se reporter par exemple à [Zag92] pour plus de détails.

1.1.4 Polynômes de périodes

L'étude du polynôme de périodes d'une forme modulaire, développée par Eichler, Shimura et Manin, est en quelque sorte une étude des valeurs critiques de la fonction L associée et des relations qui les lient.

Fixons un poids k supérieur à 2, et notons par commodité $w = k - 2$. On notera $V_k(K)$ l'espace des polynômes de degré inférieur à w et à coefficients dans un corps K donné. Si f est une forme parabolique de poids k, on appellera *polynôme des périodes* de f l'élément de $V_k(\mathbb{C})$ défini par

$$r(f) = \int_0^{i\infty} f(z)\,(X - z)^w \,\mathrm{d}z \tag{1.18}$$

où l'intégrale est prise sur le chemin vertical reliant 0 et $i\infty$ dans $\mathscr{H}$. En développant $(X-z)^w$ par la formule du binôme, le polynôme $r(f)$ s'exprime immédiatement en termes des $w+1$ intégrales $r_j(f) = \int_0^{i\infty} f(z)\, z^j \,\mathrm{d}z$ pour $j \in [\![0, w]\!]$, que l'on appellera *périodes* de f. À un facteur multiplicatif près, ces périodes sont les valeurs de la fonction Λ associée à f sur le segment $[\![1, w+1]\!]$, puisqu'on vérifie que

$$r_j(f) = i^{j+1}\,\Lambda_f(j+1) \tag{1.19}$$

au moins lorsque $j \geqslant \frac{k}{2}$, et même en général du fait de l'équation fonctionnelle vérifiée par Λ_f et des relations des périodes énoncées ci-après.

Notons Γ le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. L'espace $V_k(K)$ pouvant être vu comme la puissance symétrique $\mathrm{Sym}^{k-2} K^2$, il est muni d'une action à droite de Γ, la classe d'une matrice $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ agissant sur un polynôme p par $p \,|\, \gamma = (cX + d)^w\, p\big(\frac{aX+b}{cX+d}\big)$. On considérera en particulier l'action des générateurs de Γ que voici :

$$S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \qquad T' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \qquad U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

L'ordre de S est 2, celui de U est 3, et on a les relations $T = US$ et $T' = U^2 S$.

Le fait que f soit une forme modulaire impose alors des relations, dites des périodes, entre les coefficients de $r(f)$, qui se traduisent comme suit en termes de l'action de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[\Gamma]$ sur $V_k(\mathbb{C})$: le polynôme $r(f)$ vérifie les deux systèmes équivalents [11]

$$r(f) \,|\, (1 + S) = r(f) \,|\, (1 + U + U^2) = 0 \tag{1.20}$$

$$\text{et} \quad r(f) \,|\, (1 - T - T') = 0. \tag{1.21}$$

Un polynôme satisfaisant l'une ou l'autre de ces conditions sera appelé *polynôme de périodes*, et on notera $W_k(K) = \mathrm{Ker}(1 - T - T') \subset V_k(K)$ l'espace des tels polynômes à coefficients dans un corps K.

Résumons la situation. On dispose d'une application linéaire $r : S_k \to W_k(\mathbb{C})$, ou encore, en notant W_k^+ (resp. W_k^-) le sous-espace de W_k des polynômes pairs (resp. impairs), deux applications $r^{\pm} : S_k \to W_k^{\pm}(\mathbb{C})$. Un des résultats-clé de la théorie d'Eichler-Shimura-Manin est le suivant.

11. Voir [GKZ06, p. 14] ; l'opérateur $1 - T - T'$ est parfois appelé opérateur de Lewis en raison des travaux de ce dernier sur les formes de Maass [Lew97, Zag93, LZ01].

Théorème 1.2. *L'application r^- est un isomorphisme ; l'application r^+ est un isomorphisme sur un hyperplan ne contenant pas $X^w - 1$.*

On trouvera dans [KZ84], [Hab83] ou [MR05] des preuves de cet énoncé ; le deuxième texte cité reformule le problème en termes du groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, V_k)$ et de son sous-groupe de cohomologie parabolique [12]. Remarquons également qu'il est possible [Zag91] d'étendre la définition du polynôme de périodes aux séries d'Eisenstein.

L'isomorphisme d'Eichler-Shimura permet donc de condenser en un nombre fini de coefficients l'information définissant une forme modulaire donnée. Un deuxième résultat, dû à Manin [Man73] et dont un énoncé précis est reproduit ci-dessous, montre qu'à une constante multiplicative près, les coefficients des parties paire et impaire du polynôme des périodes d'une forme de Hecke se situent dans le même corps de nombres [13] que ses coefficients de Fourier. Commençons par introduire quelques notations.

Définition 1.3. Soit k un entier pair. Si f est une forme de Hecke de poids k, on notera $\mathbb{Q}(f)$ le corps de nombres engendré par ses coefficients de Fourier. On notera par ailleurs $\mathbb{Q}(S_k)$ le corps de nombres engendré par les coefficients de Fourier de toutes les formes de Hecke de poids k, et $\mathscr{O}(S_k)$ son anneau d'entiers.

Théorème 1.4. *Soit f une forme de Hecke de poids k. Il existe deux nombres complexes non nuls ω_f^+ et ω_f^- tels que le polynôme $r^\pm(f)$ appartienne à $\omega_f^\pm\, W_k^\pm(\mathbb{Q}(f))$. De plus, ces deux nombres peuvent être choisis de telle sorte que leur produit $\omega_f^+\omega_f^-$ appartienne à $i\,\langle f, f\rangle\,\mathbb{Q}(f)$.*

À titre d'exemple, dans le cas de la fonction Δ, pour laquelle $\mathbb{Q}(\Delta) = \mathbb{Q}$, on peut démontrer [MR05, § 14] les égalités

$$\begin{aligned} r^+(\Delta) &= \omega_\Delta^+ \left((X^{10} - 1) - \tfrac{691}{36} X^2\,(X^2 - 1)^3\right) \\ \text{et}\quad r^-(\Delta) &= \omega_\Delta^-\, X\,(X^2 - 1)^2\,(X^2 - 4)\,(4\,X^2 - 1) \end{aligned}$$

avec $\omega_\Delta^+ = i\,\Lambda_\Delta(11) \simeq 0,005\,958\,964\,989\,i$ et $\omega_\Delta^- = \frac{5}{2}\Lambda_\Delta(10) \simeq 0,009\,269\,276\,162$.

Terminons cette section par une remarque sur les périodes d'indice pair des formes de Hecke : ces dernières peuvent aussi s'exprimer en termes du produit scalaire de Petersson et de deux structures sur l'espace des formes modulaires, la première étant la structure d'algèbre associative donnée par le produit des

12. Voir par exemple [NSW08] pour les définitions et les résultats de base de la cohomologie des groupes.

13. Ici, deux remarques s'imposent. D'une part, chaque coefficient de Fourier d'une forme de Hecke est un *entier algébrique* : en effet, ces coefficients sont exactement les valeurs propres des opérateurs de Hecke ; par ailleurs, l'équation (1.12) et les résultats de [Lan95, p. 158] assurent que l'espace M_k possède une base dans laquelle la matrice de chaque opérateur de Hecke est à coefficients entiers ; les coefficients de Fourier étant des racines du polynôme caractéristique de ces matrices, ce sont donc des entiers algébriques. D'autre part, en fixant une forme de Hecke f, le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par tous les coefficients de Fourier de f est un corps de nombres,

fonctions, et la seconde une structure d'algèbre de Lie donnée par un crochet dit de Rankin-Cohen [14].

Pour une forme modulaire quelconque f, posons $f' = q\,\partial_q f$ et notons

$$[f,g] = k\,f\,g' - \ell\,f'\,g \qquad \text{pour } (f,g) \in M_k \times M_\ell\,;$$

ce crochet confère à l'espace $\bigoplus_{k\geqslant 4} M_k$ une structure d'algèbre de Lie graduée, mais dont la graduation est décalée par rapport à la graduation usuelle par le poids, le crochet envoyant $M_k \times M_\ell$ dans $M_{k+\ell+2}$. Il se trouve que les crochets de séries d'Eisenstein donnent aussi, à une constante multiplicative près, les périodes des formes paraboliques : en effet, si f est une forme parabolique de Hecke de poids k et si j est un entier pair appartenant à $[\![4, w-4]\!]$, alors

$$r_j(f) = \tfrac{(2i)^{k-1}}{(k-2)\,r_1(f)}\,\langle f, [G_j, G_{k-2-j}]\rangle \tag{1.22}$$

où $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire de Petersson. Pour les éléments impairs j de $[\![3, w-3]\!]$, le produit usuel donne quant à lui l'identité plus simple

$$r_j(f) = \tfrac{(2i)^{k-1}}{r_0(f)}\,\langle f, G_{j+1}\,G_{k-1-j}\rangle. \tag{1.23}$$

Cette dernière relation, due à Rankin [Ran52], joue un rôle important dans les résultats énoncés dans la prochaine section.

1.1.5 Relations entre zêtas doubles et zêtas simples

Les résultats qui suivent ont d'abord été annoncés par Zagier ([Zag94, § 8] puis [Zag93, § 3]), pour ensuite être développés en collaboration avec Gangl et Kaneko dans [GKZ06]. Ils connectent de plusieurs façons les multizêtas avec les formes modulaires et leurs polynômes de périodes, impliquant en particulier que les multizêtas de profondeur 1 et 2 vérifient au moins autant de relations que prévu par la conjecture de Broadhurst-Kreimer. Décrivons ces résultats brièvement, ainsi que les outils mis en œuvre dans leurs preuves ; un point commun à la majeure partie de ces preuves est l'utilisation d'une action du groupe Γ et des cocycles associés, ainsi que le lien entre la preuve de la relation de stuffle en profondeur 2, l'identité formelle

$$\textstyle\sum_{n_1,n_2} = \sum_{n_1>n_2} + \sum_{n_2>n_1} + \sum_{n_1=n_2} \tag{1.24}$$

et l'opérateur de Lewis [15].

---

c'est à dire un sous-corps de $\mathbb{C}$ de dimension finie sur $\mathbb{Q}$; en effet, il s'agit de l'image du morphisme d'anneaux $t \mapsto a_1(tf)$ au départ de la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_k)$ des opérateurs de Hecke, qui est de dimension finie car duale, par le crochet de dualité $(t,g) \mapsto a_1(tg)$, à l'espace des formes paraboliques à coefficients rationnels.

14. Il existe en fait une famille indexée par $\mathbb{N}$ d'applications bilinéaires sur un espace obtenu en adjoignant aux formes modulaires la forme quasimodulaire G_2, et le résultat reste vrai dans ce cadre plus général ; voir [KZ84] ou [MR05, § 13] pour un exposé plus complet.

15. On trouvera dans [Zag00] d'autres occurrences de ce cercle d'idées.

Les auteurs se placent dans une version formelle de l'espace des multizêtas de profondeur inférieure à 2, notant $\mathcal{D}_k$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les éléments Z_{rs}, P_{rs} et Z_k pour r et s entiers naturels vérifiant $r+s=k$, avec les relations

$$\left.\begin{aligned} & P_{rs} = Z_{rs} + Z_{sr} + Z_k \\ \text{et} \qquad & P_{rs} = \sum_{i+j=k} \left(\tbinom{i-1}{r-1} + \tbinom{j-1}{s-1}\right) Z_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

qui sont strictement analogues aux relations de stuffle et de shuffle énoncées dans la première section, Z_{rs} P_{rs} et Z_k correspondant respectivement à $\zeta(r,s)$, $\zeta(r)\zeta(s)$ et $\zeta(k)$. Le sous-espace $\sum_{d\leqslant 2} \mathcal{Z}_k^d$ de $\mathcal{Z}_k$ est donc, par construction, un quotient de $\mathcal{D}_k$.

Dans [GKZ06], un des premiers résultats concernant $\mathcal{D}_k$ est le *théorème 2*, selon lequel l'ensemble des $Z_{r,k-r}$ pour r impair en constitue une base ; la preuve fait intervenir de manière cruciale une réécriture des relations de double mélange en termes d'une action de Γ sur l'espace, isomorphe à V_k, des polynômes à deux variables homogènes de degré $k-2$. Dans toute la suite, on abrégera $V_k(\mathbb{Q})$ et $W_k(\mathbb{Q})$ en V_k et W_k, et de même pour tous les autres espaces qui en sont déduits.

Les trois auteurs étudient ensuite les relations entre les générateurs de $\mathcal{D}_k$. Leur *théorème 3* porte sur un isomorphisme explicite entre l'espace W_k^+ et le sous-espace $\mathcal{P}_k^{\mathrm{ev}}$ de $\mathcal{D}_k$ engendré par les P_{rs} pour r et s pairs, ou, de manière équivalente, sur la correspondance entre les polynômes de périodes pairs et les relations modulo $\mathcal{P}_k^{\mathrm{ev}}$ vérifiées par les Z_{rs} pour r et s impairs. La preuve de ce résultat exploite la comparaison entre les espaces $\mathcal{D}_k$, V_k et $\mathbb{Q}[X^{-1},Y^{-1}]_{-k}$ ainsi que l'action de Γ sur ceux-ci, et le résultat en lui-même est un des objets d'étude de notre chapitre 2. Le *théorème 4* énonce quant à lui une correspondance bijective entre les relations linéaires vérifiées par les produits P_{rs} et celles vérifiées par les coefficients des éléments de W_k^-. Les outils employés sont similaires à ceux déjà évoqués.

Les théorèmes 3 et 4 donnent donc deux interprétations des relations entre éléments de $\mathcal{D}_k$ et formes modulaires de poids k ; un autre point de vue repose sur l'équation (1.9) selon laquelle les zêtas pairs sont les termes constants des séries d'Eisenstein : ainsi, le *théorème 5* est un analogue du théorème 4 pour ces dernières séries, affirmant que les produits G_rG_s pour r et s pairs vérifient les mêmes relations que les éléments P_{rs}, et même qu'il existe un isomorphisme entre $\mathscr{P}_k^{\mathrm{ev}}$ et l'espace des formes modulaires à coefficients de Fourier rationnels envoyant P_{rs} sur G_rG_s pour r et s supérieurs à 4. Ce théorème est prouvé de deux façons différentes : d'abord en utilisant l'identité de Rankin (1.23), puis en appliquant l'identité (1.24) aux séries d'Eisenstein, qui sont des sommes sur un réseau.

C'est ce dernier point de vue qui conduit les trois auteurs à étudier une famille de fonctions sur $\mathscr{H}$ dites séries d'Eisenstein doubles, initialement définies par Kaneko [Kan04] et généralisant simultanément les zêtas doubles et les séries d'Eisenstein. D'après le *théorème 6*, le développement en série de Fourier de ces fonctions fait apparaître un terme constant proportionnel au zêta double associé, une partie transcendante dont les coefficients dépendent des zêtas impairs, et une

partie combinatoire dont tous les coefficients sont rationnels. Enfin, le *théorème 7* exprime le fait que la famille des parties combinatoires des séries d'Eisenstein doubles de poids k est une réalisation de $\mathcal{D}_k$, au sens où ses éléments vérifient des relations de double mélange de la forme (1.25).

L'approche utilisant les séries d'Eisenstein doubles a fait l'objet de plusieurs généralisations. Par exemple, Kaneko et Tasaka ont étudié le cas des formes modulaires de niveau 2 [KT13], tandis que Bachmann a défini des séries d'Eisenstein à un nombre quelconque de variables [Bac12]. Le développement en série de Fourier de ces dernières fait apparaître des nombres dont la série génératrice est un q-analogue des multizêtas [BK13] que l'on retrouve dans une définition des séries d'Eisenstein doubles de tout niveau [YZ14]. La thématique des q-analogues est d'ailleurs tout à fait d'actualité : initiée par Kaneko, Kurokawa et Wakayama [KKW03] et par Bradley [Bra05], elle a suscité de nombreux travaux récents, voir notamment [Zud03, Zha07, OT07, OOZ12, Tak13, CEM13, Oko14].

1.2 Algèbres de Lie formelles

Cette section présente différentes algèbres de Lie reliées au dual de l'algèbre des multizêtas. C'est dans ce contexte que s'inscriront les résultats de notre chapitre 2.

1.2.1 Multizêtas formels et double mélange (chapitre 2)

Rappelons que les relations de double mélange étendues de la première section nécessitaient la construction d'un morphisme d'algèbres $\mathrm{reg}_{\text{ш}} : \mathfrak{h}^1_{\text{ш}} \to \mathfrak{h}^0_{\text{ш}}$. Ce morphisme peut se prolonger à un morphisme $\mathrm{reg}^+_{\text{ш}} : \mathfrak{h}_{\text{ш}} \to \mathfrak{h}^0_{\text{ш}}$ qui a été explicité par Furusho [Fur03] suite notamment à des travaux de Lê, Murakami et Zagier : il est donné par l'expression

$$\mathrm{reg}^+_{\text{ш}}(y^r\, w\, x^s) = \sum_{a=0}^{r}\sum_{b=0}^{s}(-1)^{a+b}\pi(y^a \,\text{ш}\, y^{r-a}\, w\, x^{s-b} \,\text{ш}\, x^b)$$

pour tout élément w de $\mathfrak{h}^0$, où $\pi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^0$ est la projection linéaire qui efface tous les monômes non vides ne commençant pas par x ou ne se terminant pas par y.

Ceci permet de définir un nouvel analogue formel de l'algèbre $\mathcal{Z}$ des multizêtas. Soit $\mathcal{FZ}$ le quotient de l'algèbre de polynômes $\mathbb{Q}[Z(w) \mid w \in \{x,y\}^*]$ par les relations suivantes, dans lesquelles le symbole Z est prolongé par linéarité :

régularisation shuffle :	$Z(w) = Z(\mathrm{reg}^+_{\text{ш}}(w))$	$(w \in \mathfrak{h})$
multiplication shuffle :	$Z(w)\,Z(w') = Z(w \,\text{ш}\, w')$	$((w,w') \in \mathfrak{h}\times\mathfrak{h})$
nullité des zêtas pairs :	$Z(xy) = 0$	$(w \in \mathfrak{h})$
multiplication stuffle :	$Z^*(w)\,Z^*(w') = Z^*(w * w')$	$((w,w') \in \mathfrak{h}^1\times\mathfrak{h}^1)$

où la définition des $Z^*(w)$ provient de la relation (1.6) reliant les régularisations shuffle et stuffle et consiste à imposer les identités formelles

$$\sum_{r\geqslant 0} Z^*(y^r)\,t^r = \exp\sum_{r\geqslant 1}\tfrac{(-1)^{r-1}}{r}\,Z(x^{r-1}y)\,t^r$$

$$\text{et}\qquad Z^*(y^m v) = \sum_{r=0}^{m} Z^*(y^r)\,Z(y^{m-r}v)\qquad \text{pour } v\in\mathfrak{h}^0.$$

L'algèbre $\mathcal{FZ}$ modélise donc le quotient de l'algèbre $\mathcal{Z}$ par l'idéal engendré par $\zeta(2)$. Les relations qui la définissent assurent qu'elle admet une graduation par le poids, correspondant au degré total des monômes, et une filtration croissante par la profondeur, correspondant au degré partiel en y, tout ceci étant compatible avec la multiplication des multizêtas formels. Comme dans la section 1.1.2, on notera $\mathcal{FZ}_n$ la partie homogène de poids n de $\mathcal{FZ}$, puis $\mathcal{FZ}_n^d$ la partie de poids n et de profondeur inférieure à d, et $\operatorname{gr}^d\mathcal{FZ}_n = \mathcal{FZ}_n^d/\mathcal{FZ}_n^{d-1}$ le gradué de profondeur d. On notera par ailleurs $\mathcal{FZ}_{\geqslant 1}$ le sous-espace engendré par les $Z(w)$ pour w non vide.

Pour se concentrer sur un ensemble de générateurs de $\mathcal{FZ}$, il est usuel d'en considérer l'ensemble des éléments irréductibles, c'est à dire des éléments qui n'appartiennent pas à l'idéal des produits, ce qui conduit à la définition que voici.

Définition 1.5. On appelle *espace des nouveaux multizêtas formels*, et on note $\mathfrak{nfz}$, le quotient de $\mathcal{FZ}_{\geqslant 1}$ par le sous-espace $\mathcal{FZ}_{\geqslant 1}^{\times 2}$ des produits non triviaux.

La compatibilité avec la multiplication de la graduation et de la filtration de $\mathcal{FZ}$ montre que l'espace $\mathfrak{nfz}$ est lui aussi gradué et filtré. Comme pour $\mathcal{FZ}$, on emploiera les notations $\mathfrak{nfz}_n$, $\mathfrak{nfz}_n^d$ et $\operatorname{gr}^d\mathfrak{nfz}_n$ pour désigner les espaces correspondants associés à $\mathfrak{nfz}$.

On peut alors introduire le dual gradué de l'espace $\mathfrak{nfz}$, c'est à dire la somme directe des duaux des $\mathfrak{nfz}_n$. En reprenant la définition de $\mathcal{FZ}$ en termes de polynômes, cela amène à considérer les notions que voici. Dans toute la suite, on notera $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ le produit scalaire sur $\mathfrak{h}$ défini sur les monômes par $\langle w, w'\rangle = \mathbb{1}_{w=w'}$.

Définition 1.6. Un élément f de $\mathfrak{h}$ est dit *de shuffle* s'il vérifie $\langle f, w \shuffle w'\rangle = 0$ pour toute paire (w, w') de mots non vides en x et y.

De manière équivalente, les éléments de shuffle sont les éléments de l'algèbre de Lie libre à deux générateurs $\mathfrak{f}_2$, vue comme la plus petite sous-algèbre de Lie de l'algèbre de concaténation $\mathfrak{h}$ qui en contienne les générateurs x et y ; ce sont aussi les éléments primitifs pour le coproduit $\Delta_{\shuffle} : \mathfrak{h}\to\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$, dual du produit $\shuffle$, envoyant x sur $x\otimes 1 + 1\otimes x$ et y sur $y\otimes 1 + 1\otimes y$; se reporter à [Bou72, § 3] et à [Reu03, § 1] pour l'équivalence de ces propriétés.

Le produit de stuffle donne lieu à une définition similaire :

Définition 1.7. Un élément f de $\mathfrak{h}^1$ est dit *de stuffle* s'il vérifie $\langle f, w * w'\rangle = 0$ pour toute paire (w, w') de mots non vides en les y_i.

De manière équivalente, en remarquant que l'algèbre de concaténation $\mathfrak{h}^1$ est librement engendrée par les éléments y_i définis page 4, les éléments de stuffle en sont les éléments primitifs pour le coproduit $\Delta_* : \mathfrak{h}^1 \to \mathfrak{h}^1 \otimes \mathfrak{h}^1$, dual du produit $*$, envoyant y_i sur $\sum_{j=0}^{i} y_j \otimes y_{i-j}$.

La construction des éléments $Z^*(w) \in \mathcal{FZ}$ conduit quant à elle à la définition que voici.

Définition 1.8. Soit f un élément de $\mathfrak{h}$. On lui associe un élément f^* en considérant le projeté orthogonal $\pi_y(f)$ de f dans $\mathfrak{h}^1$ et en posant

$$f^* = \pi_y(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \langle f, x^{n-1}y \rangle \, y^n.$$

Tout ceci permet à présent de donner la définition de l'objet central de cette section :

Définition 1.9. On appelle *algèbre de double mélange*, et on note $\mathfrak{ds}$, l'ensemble des polynômes $f \in \mathfrak{h}$ qui n'aient pas de monômes de degré inférieur à 2, tels que f soit de shuffle et que f^* soit de stuffle.

L'espace $\mathfrak{ds}$ ainsi construit est isomorphe au dual gradué de $\mathfrak{nfz}$: la condition sur les degrés correspond à la nullité de l'image de $Z(2)$ dans $\mathfrak{nfz}$, et les conditions de shuffle et de stuffle correspondent aux multiplications du même nom. Cet espace apparaît notamment chez Écalle [Éca03, Éca11] — voir la section 1.3.4 et le chapitre 4 pour plus de précisions —, et l'espace obtenu en linéarisant les relations [16] chez Écalle encore, Ihara-Kaneko-Zagier [IKZ06, § 8], Goncharov [Gon01a] puis Brown [Bro13]. Comme pour $\mathcal{FZ}$ et $\mathfrak{nfz}$, on emploiera les notations $\mathfrak{ds}_n$ et $\mathfrak{ds}_n^d$ pour désigner la partie de poids n de $\mathfrak{ds}$ et celle de poids n et de profondeur supérieure [17] à d, et enfin $\operatorname{gr}^d \mathfrak{ds}_n$ pour désigner le quotient $\mathfrak{ds}_n^d/\mathfrak{ds}_n^{d+1}$.

Comme son nom le laisse supposer, $\mathfrak{ds}$ n'a pas seulement une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué et filtré. Commençons par le munir d'un crochet de Lie [18] :

Définition 1.10. Soit f un élément de l'algèbre de concaténation $\mathfrak{h}$. On note D_f l'unique dérivation sur $\mathfrak{h}$ vérifiant

$$D_f(x) = 0 \quad \text{et} \quad D_f(y) = [y, f] = y\,f - f\,y$$

et on définit le *crochet de Poisson* $\{\cdot\,,\cdot\}$ sur $\mathfrak{h}$ par

$$\{f, g\} = [f, g] + D_f(g) - D_g(f).$$

Remarquons que cette application satisfait l'identité équivalente $[D_f, D_g] = D_{\{f,g\}}$, et il n'est pas difficile d'en déduire que le crochet ainsi défini vérifie l'identité de Jacobi, donnant donc une nouvelle structure d'algèbre de Lie à l'algèbre $\mathfrak{h}$; le résultat que voici [19] est moins immédiat.

16. Conjecturalement isomorphe au gradué par la profondeur de l'algèbre de double mélange.
17. Attention, par dualité, la filtration par la profondeur est ici décroissante.
18. Celui-ci provient du groupe de Magnus tordu et des associateurs, voir la section suivante.
19. Voir [Rac00, ch. IV], dans lequel la définition de $\mathfrak{dmr}_0$ coïncide avec celle de $\mathfrak{ds}$; ce résultat est généralisé dans l'article [Rac02] à un espace $\mathfrak{dmrd}_0$ correspondant aux multizêtas colorés. Le théorème 1.11 est aussi une conséquence de travaux d'Écalle.

Théorème 1.11 (Racinet)**.** *Le crochet de Poisson respecte les éléments de double mélange. En d'autres termes, l'espace* $\mathfrak{ds}$ *est une algèbre de Lie sous* $\{\cdot,\cdot\}$.

La preuve de Racinet exploite habilement le fait qu'une certaine dérivation de l'algèbre de concaténation $\mathfrak{h}^1$ est aussi une codérivation pour le coproduit Δ_*.

Poursuivons en donnant d'autres résultats connus sur la structure de l'espace $\mathfrak{ds}$. Le premier a été obtenu indépendamment par Écalle et Ihara-Kaneko-Zagier [IKZ06].

Théorème 1.12. *Si* $n \not\equiv d$ [2]*, alors* $\mathrm{gr}^d \mathfrak{ds}_n = 0$.

En revenant aux multizêtas formels puis aux multizêtas réels, cela a une conséquence importante, démontrée précédemment par Tsumura [Tsu04] :

Corollaire 1.13. *Tout multizêta de poids* n *et de profondeur* d *avec* $n \not\equiv d$ [2] *coïncide modulo les produits avec une combinaison linéaire de multizêtas de poids* n *et de profondeur strictement inférieure à* d.

Un autre résultat important quant à une présentation conjecturale de l'algèbre $\mathfrak{ds}$ est le suivant, dont la preuve fait intervenir l'existence d'associateurs de Drinfel'd.

Théorème 1.14 (Drinfel'd, Racinet)**.** *Pour tout entier impair* $n \geqslant 3$*, la partie graduée* $\mathrm{gr}^1 \mathfrak{ds}_n$ *est de dimension* 1.

En particulier, il existe des éléments f_n de $\mathfrak{ds}_n$, non uniquement déterminés, tels que les coefficients $\langle f_n, x^{n-1}y\rangle$ soient non nuls. On conjecture qu'il existe une détermination de ces éléments fournissant un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées entre $\mathfrak{ds}$ et l'algèbre libre $\mathrm{Lie}[s_3, s_5, \ldots]$ ayant un générateur en chaque poids impair supérieur à 3.

De ce point de vue, il est alors naturel de chercher à identifier les relations que vérifient les f_n dans l'algèbre $\mathfrak{ds}$ modulo la profondeur supérieure, et en particulier de déterminer quelles combinaisons linéaires de crochets de Lie de la forme $\{f_i, f_j\}$ sont de profondeur supérieure à 3. Une réponse à cette question est donnée par le théorème que voici, prouvé dans [Sch06] en s'appuyant sur un résultat d'Ihara et Takao [Iha02], et dont d'autres démonstrations ont ensuite été trouvées par Luque, Novelli et Thibon [LNT07] puis par Brown [Bro13] par des techniques écalliennes.

Théorème 1.15. *Fixons en tout poids* n *un élément* $f_n \in \mathfrak{ds}_n$ *de profondeur* 1*, et soit* k *un entier. La combinaison linéaire* $\sum_{i+j=k} c_{ij} \{f_{2i+1}, f_{2j+1}\}$ *est de profondeur supérieure à* 3 *si et seulement si le polynôme* $\sum_{i+j=k} c_{ij} (X^{2i} - X^{2j})$ *est un polynôme de périodes.*

Du fait de l'isomorphisme d'Eichler-Shimura, ce théorème donne donc en particulier une bijection entre les formes paraboliques de poids k et les relations dans $\mathrm{gr}^2 \mathfrak{ds}_k$, ce qui est en quelque sorte un cas particulier « dual » de la conjecture de Broadhurst-Kreimer pour les multizêtas formels.

Les liens apparents, suggérés par Gangl, Kaneko et Zagier, entre le théorème 3 de [GKZ06] et le théorème 1.15 ci-dessus font l'objet de l'article [BS13], reproduit dans le chapitre 2 de cette thèse, qui explore de manière détaillée la dualité entre zêtas doubles et crochets de Poisson d'éléments de $\mathfrak{ds}$ de profondeur 1. Le résultat principal en est le suivant.

Théorème 2.9. *Il existe une bijection explicite entre les relations modulaires entre zêtas doubles de [GKZ06, th. 3] et les relations modulaires entre crochets de Poisson de [Sch06, cor. 4.2].*

L'idée principale de la démonstration consiste à considérer les relations en question comme des vecteurs des noyaux à gauche et à droite d'une certaine matrice explicite, qui à un changement de variables explicite près s'avère être symétrique. Cette idée a notamment été approfondie dans une prépublication récente visant à déterminer les relations entre les multizêtas dont tous les arguments sont impairs [Tas14].

1.2.2 Associateurs et algèbre de Grothendieck-Teichmüller

Ce qui suit vise à donner très succinctement le contexte théorique ayant conduit à la définition d'une autre algèbre de Lie fortement reliée à l'algèbre $\mathfrak{ds}$.

L'associateur de Drinfel'd a été introduit lors de l'étude des déformations des algèbres enveloppantes de quasi-algèbres de Hopf quasi-triangulaires [Dri91]. Considérons l'équation dite de Knizhnik-Zamolodchikov

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G(z) = \left(\tfrac{a}{z} + \tfrac{b}{z-1}\right) G(z)$$

dont l'inconnue G est une fonction de $\mathbb{C}$ dans l'algèbre des séries formelles non commutatives $\mathbb{C}\langle\langle a, b\rangle\rangle$. L'associateur de Drinfel'd est par définition le quotient Φ_{KZ} de deux solutions particulières G_0 et G_1 de cette équation ; en tant que tel, il est indépendant de la variable z. L'équation différentielle ci-dessus permet de montrer que la série Φ_{KZ} vérifie quatre relations :

0) la relation de diagonalité, qui signifie que

$$\Delta_{\text{ш}}\Phi_{\mathrm{KZ}} = \Phi_{\mathrm{KZ}} \mathbin{\hat{\otimes}} \Phi_{\mathrm{KZ}}$$

où $\Delta_{\text{ш}} : \mathbb{C}\langle\langle a, b\rangle\rangle \to \mathbb{C}\langle\langle a, b\rangle\rangle^{\hat{\otimes} 2}$ est le coproduit continu envoyant a sur $a\otimes 1 + 1\otimes a$ et b sur $b \otimes 1 + 1 \otimes b$;

1) la relation de 2-cycle, qui s'écrit

$$\Phi_{\mathrm{KZ}}(a, b)\, \Phi_{\mathrm{KZ}}(b, a) = 1\,;$$

2) la relation de 3-cycle, selon laquelle

$$e^{i\pi a}\, \Phi_{\mathrm{KZ}}(c, a)\, e^{i\pi c}\, \Phi_{\mathrm{KZ}}(b, c)\, e^{i\pi b}\, \Phi_{\mathrm{KZ}}(a, b) = 1$$

pour $c = -a - b$, et

3) la relation de 5-cycle, qui peut s'interpréter en écrivant que pour tout choix de variables non commutatives $(\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}$ vérifiant $[\omega_i,\omega_j]=0$ pour $i-j\not\equiv 1$ [5] et $\sum_{i\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}[\omega_i,\omega_{i+1}]=0$, on a

$$\prod_{i\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}\Phi_{\mathrm{KZ}}(\omega_i,\omega_{i+1})=1$$

où le produit est effectué dans l'ordre cyclique naturel de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Le travail de Drinfel'd sur les associateurs l'a amené à définir des schémas en groupes GT et GRT et des schémas en groupes pro-unipotents GT_1 et GRT_1 ; sans rentrer dans les détails de la nature et de la construction de ces schémas [20], voici toutefois une définition explicite de l'algèbre de Lie associée au groupe GRT_1, que l'on notera $\mathfrak{grt}$. Par commodité, commençons par rappeler la définition de l'algèbre de Lie associée au groupe des tresses sphériques pures à n brins.

Définition 1.16. Soit n un entier naturel. L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_n$ est le quotient de la $\mathbb{Z}$-algèbre de Lie libre graduée $\mathrm{Lie}[x_{ij}\mid 1\leqslant i,j\leqslant n]$ par l'idéal de Lie (gradué) engendré par les relations $x_{ii}=0$, $x_{ij}=x_{ji}$, $\sum_{k=1}^{n}x_{ik}=0$, $[x_{ij},x_{k\ell}]=0$ pour $\{i,j\}\cap\{k,\ell\}=\varnothing$, et $\sum_{i<j}x_{ij}=0$.

L'algèbre $\mathfrak{p}_n$ est en particulier aussi graduée, le poids de chaque générateur x_{ij} étant égal à 1 pour $i\neq j$. L'algèbre de Lie de Grothendieck-Teichmüller est alors définie en termes de relations déduites de celles vérifiées par les associateurs [21] :

Définition 1.17. En tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, $\mathfrak{grt}$ est l'ensemble des éléments f de l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{f}_2$ définie page 16, n'ayant pas de monôme de degré inférieur à 2 et vérifiant les relations

1) $f(x,y)+f(y,x)=0$;
2) $f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=0$ pour $z=-x-y$;
3) $\sum_{i\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}f(x_{i,i+1},x_{i+1,i+2})=0$ dans $\mathfrak{p}_5\otimes\mathbb{Q}$,

et Ihara prouve que le crochet de Poisson de la définition 1.10 munit $\mathfrak{grt}$ d'une structure d'algèbre de Lie.

D'après un théorème de Furusho [Fur10], les deux premières relations, dites hexagonales, sont en fait redondantes, puisqu'impliquées par la troisième, dite pentagonale :

Théorème 1.18. *Tout élément f de $\mathfrak{f}_2$ qui vérifie la relation (3) ci-dessus vérifie aussi les relations (1) et (2).*

En remontant dans le groupe pro-unipotent, ceci entraîne que la relation de 5-cycle implique l'existence d'un scalaire λ tel que les deux autres soient vérifiées, en remplaçant l'exposant $i\pi$ de la relation de 3-cycle par λ.

20. Voir cependant [BN98] pour plus d'explications.

21. L'algèbre de Lie du groupe GRT_1 est en fait le complété par le poids de l'algèbre $\mathfrak{grt}$ définie ici, ce qui ne change pas la validité des résultats énoncés par ailleurs.

L'associateur de Drinfel'd est par ailleurs intimement lié aux multizêtas, Lê et Murakami ayant montré que

$$\Phi_{\mathrm{KZ}}(a,b) = 1 - \zeta(2)\, ab + \zeta(2)\, ba - \zeta(3)\, a^2 b + \cdots$$

et plus généralement que le coefficient devant un monôme de Φ_{KZ} est exactement le multizêta régularisé shuffle dudit monôme [LM96]. Et Furusho a prouvé que les relations satisfaites par l'associateur de Drinfel'd impliquent les relations de double mélange des multizêtas [Fur11], ce qui, du point de vue des algèbres de Lie, a pour conséquence que les relations définissant $\mathfrak{grt}$ impliquent celles définissant $\mathfrak{ds}$ à un changement de variable près [CS12] :

Théorème 1.19 (Furusho)**.** *L'application de $\mathfrak{f}_2$ dans elle-même envoyant $f(x,y)$ sur $f(x,-y)$ fournit un morphisme injectif d'algèbres de Lie graduées de $\mathfrak{grt}$ vers l'algèbre de double mélange $\mathfrak{ds}$.*

Comme dans plusieurs autres cas, on conjecture que cette dernière injection est en fait un isomorphisme, ce qui se vérifie numériquement en petit poids. Drinfel'd conjecture par ailleurs que $\mathfrak{grt}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie libre graduée ayant un générateur en chaque poids impair supérieur à 3.

1.2.3 Actions galoisiennes et algèbre de dérivations stable

Le point de départ de cette section est un théorème de Belyĭ [Bel79] selon lequel l'action du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur la variété $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ donne un morphisme injectif

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Out}(\widehat{\pi}_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0,1,\infty\})) \tag{1.26}$$

où $\widehat{\pi}_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0,1,\infty\})$ est le complété profini du groupe fondamental topologique de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0,1,\infty\}$, et où Out désigne le quotient du groupe des automorphismes par le sous-groupe des automorphismes intérieurs. C'est notamment sous l'impulsion de Grothendieck [Gro97] que la considération de l'image de telles représentations géométriques est devenue un angle d'attaque privilégié pour l'étude du groupe topologique $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Une première algèbre de Lie reliée à l'action galoisienne sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0,1,\infty\}$ a été définie par Ihara [22]. Notons $F_2 = \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0,1,\infty\})$, qui est un groupe libre à deux générateurs ; pour p premier, on peut considérer son pro-p-complété $F_2^{\text{pro-}p}$, c'est à dire la limite projective de ses quotients qui soient des p-groupes, ainsi que la suite centrale descendante $(F_2^{\text{pro-}p}(i))_{i\geqslant 0}$ de celui-ci. Ihara construit une tour d'extensions $\mathbb{Q}^{(p)}(i)$ de $\mathbb{Q}$, définies comme les corps fixés par le noyau des morphismes

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Out}(F_2^{\text{pro-}p}/F_2^{\text{pro-}p}(i+1))\,;$$

il montre que le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{(p)}(i+1)/\mathbb{Q}^{(p)}(i))$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini. La somme directe de ces modules fournit alors une $\mathbb{Z}_p$-algèbre de Lie graduée

22. Voir [Iha91] pour un compte-rendu plus général.

notée $\mathfrak{g}^{(p)}$. Quelle peut être la structure de cette algèbre ? Deligne a émis la conjecture que $\mathfrak{g}^{(p)} \otimes \mathbb{Q}_p$ est librement engendrée par un élément en chaque poids impair supérieur à 3, de même que dans le cas de $\mathfrak{grt}$ et $\mathfrak{ds}$. Ihara [Iha89] s'est servi d'objets dits caractères de Soulé pour construire des candidats à la libre génération de $\mathfrak{g}^{(p)}$. Hain et Matsumoto [HM03] ont par la suite prouvé que ces éléments engendrent bien $\mathfrak{g}^{(p)} \otimes \mathbb{Q}_p$. Les récents travaux de Brown sur le versant motivique, que l'on évoquera dans la partie 1.3, impliquent quant à eux l'injectivité du morphisme de $\mathrm{Lie}[s_3, s_5, \ldots]$ vers $\mathfrak{g}^{(p)} \otimes \mathbb{Q}_p$.

Une deuxième question naturelle est celle de l'existence éventuelle d'une $\mathbb{Z}$-structure commune à toutes les algèbres $\mathfrak{g}^{(p)}$, ce qui signifierait que ces algèbres sont motiviques. L'étude de l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les groupes de tresses profinis identifiés a des groupes fondamentaux d'espaces de modules définis sur $\mathbb{Q}$ ainsi que de son analogue au niveau des algèbres de Lie a donné lieu à la construction par Ihara [Iha90, Iha92] d'une algèbre de Lie sur $\mathbb{Z}$ appelée *algèbre de dérivations stable*, qui constitue une $\mathbb{Z}$-structure potentielle ; cette construction repose sur les définitions suivantes.

Définition 1.20. Soit n un entier naturel, et considérons la $\mathbb{Z}$-algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{p}_n$ (déf. 1.16). Elle contient la sous-algèbre de Lie graduée des *dérivations spéciales*, qui sont les dérivations D telles qu'il existe pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$ un élément t_{ij} de $\mathfrak{p}_n$ tel que $D(x_{ij}) = [t_{ij}, x_{ij}]$. Cette sous-algèbre de Lie contient elle-même l'idéal gradué formé par les *dérivations intérieures*, de la forme ad_t pour un élément t de $\mathfrak{p}_n$ fixé. On définit alors l'algèbre de Lie des *dérivations spéciales extérieures de* $\mathfrak{p}_n$ comme étant le quotient $\widetilde{\mathscr{D}}_n$ de l'algèbre de Lie des dérivations spéciales sur $\mathfrak{p}_n$ par l'idéal des dérivations intérieures.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_n$ est munie d'une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, obtenue en posant $\sigma \cdot x_{ij} = x_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Cela induit une action par conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sur $\widetilde{\mathscr{D}}_n$. On peut alors considérer le sous-espace $\mathscr{D}_n$ des dérivations invariantes, que l'on appelle *algèbre de Lie des dérivations spéciales extérieures symétriques de* $\mathfrak{p}_n$.

L'algèbre $\mathscr{D}_n$ est une algèbre de Lie graduée, dont les parties homogènes sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini [Iha02]. Ihara a prouvé [Iha92] le résultat suivant :

Théorème. *Les algèbres de Lie $\mathscr{D}_n$ sont canoniquement isomorphes pour $n \geqslant 5$, et s'injectent dans $\mathscr{D}_4$.*

On peut alors définir l'algèbre de dérivations stable :

Définition 1.21. On appellera *algèbre de dérivations stable*, et on notera $\mathscr{D}$, l'image de $\mathscr{D}_5$ dans $\mathscr{D}_4$.

Il se trouve [Iha94] que les conditions sur les éléments de $\mathscr{D}$ correspondent aux relations définissant $\mathfrak{grt}$, ce qui entraîne l'existence d'un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie graduées

$$\mathfrak{grt} \simeq \mathscr{D} \otimes \mathbb{Q}.$$

Par ailleurs, l'algèbre $\mathscr{D} \otimes \mathbb{Z}_p$ contient $\mathfrak{g}^{(p)}$ comme sous-algèbre graduée. Ihara conjecture l'existence d'isomorphismes

$$\mathfrak{g}^{(p)} \otimes \mathbb{Q}_p \overset{?}{\simeq} \mathscr{D} \otimes \mathbb{Q}_p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{gr}^m\, \mathfrak{g}^{(p)} \overset{?}{\simeq} \mathrm{gr}^m\, \mathscr{D} \otimes \mathbb{Z}_p \text{ pour } m < p.$$

Les algèbres $\mathfrak{grt}$ et $\mathfrak{g}^{(p)}$ ont donc, conjecturalement, la même structure que $\mathscr{D}$ sur des anneaux différents. La vérification expérimentale de l'analogue de la conjecture de Deligne pour $\mathscr{D} \otimes \mathbb{Q}_p$ a été entreprise par Tsunogai [Tsu97], qui a aussi proposé une généralisation de l'algèbre $\mathscr{D}$, associée aux groupes de tresses sur une courbe de genre quelconque [Tsu03].

Une troisième question importante est celle des relations de divisibilité dans l'algèbre $\mathscr{D}$, qui peuvent s'opposer à la libre génération de cette algèbre en tant que $\mathbb{Z}$-module. Pour commencer, la construction d'Ihara assure que $\mathscr{D}$ est isomorphe à un sous-$\mathbb{Z}$-module gradué de $\mathbb{Z}\langle x, y\rangle$, et on peut considérer les applications $\mathbb{Z}$-linéaires $c_n : \mathscr{D} \to \mathbb{Z}$ correspondant aux applications « coefficient » $\langle \cdot\,, x^{n-1}y\rangle$. Ihara choisit alors pour tout $n \geqslant 3$ impair un élément (en général non unique) $D_n \in \mathrm{gr}^n \mathscr{D}$ tel que $c_n(D_n)$ soit le générateur positif du groupe $c_n(\mathrm{gr}^n \mathscr{D})$; il correspond conjecturalement à un multiple scalaire de l'image de $\sigma_n^{(p)}$ par l'injection $\mathfrak{g}^{(p)} \hookrightarrow \mathscr{D} \otimes \mathbb{Z}_p$. Pour $n \in \{3, 5, 7, 9\}$, la partie homogène $\mathrm{gr}^n \mathscr{D}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 1, l'élément D_n est alors uniquement déterminé, et on a en particulier $\mathrm{gr}^n \mathscr{D} = \mathbb{Z}\, D_n$. Contrairement à ce que l'on pourrait supposer au premier abord, les dérivations D_n n'engendrent pas $\mathscr{D}$, puisqu'Ihara a observé en poids 12 la relation de divisibilité

$$2\,[D_3, D_9] - 27\,[D_5, D_7] \in 691\,\mathscr{D},$$

ce qui signifie en particulier que l'élément $\frac{1}{691}(2\,[D_3, D_9] - 27\,[D_5, D_7])$ appartient bien à $\mathscr{D}$ sans être une combinaison linéaire à coefficients entiers de crochets de Lie des D_n. Ihara a conjecturé que de telles relations se produisent aussi entre les éléments $\sigma^{(p)}$, par exemple en poids 12 sous la forme

$$[\sigma_3, \sigma_9] - 50\,[\sigma_5, \sigma_7] \in 691\,\mathfrak{g}^{(691)} \tag{1.27}$$

et plus généralement dans les cas où p est un nombre premier irrégulier [23], ce qui est le premier indice d'une connexion avec les formes modulaires, ces nombres premiers apparaissant dans le terme constant des séries d'Eisenstein.

Des travaux de Sharifi et McCallum [MS03, Sha04] donnent une preuve de la relation (1.27) en la reliant à un cup-produit de la cohomologie galoisienne d'une extension profinie du corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\mu_{691})$. Ce cup-produit peut par ailleurs s'exprimer en termes de valeurs de la fonction L associée à une forme parabolique de Hecke [Sha09], et donc à son polynôme de périodes ; au vu de l'isomorphisme conjectural entre $\mathfrak{ds} \otimes \mathbb{Q}_p$ et $\mathfrak{g}^{(p)}$, on devrait donc avoir des relations du même type [24] entre crochets de Poisson des éléments f_n déduits du théorème 1.14 ; autrement dit, dans certains cas, les relations prévues par le théorème 1.15 devraient aussi

23. C'est à dire un nombre premier impair divisant le numérateur d'un nombre de Bernoulli B_k sans diviser k. Les nombres premiers irréguliers sont présents dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment dans la théorie des corps cyclotomiques du fait de leur apparition dans le terme constant des fonctions L associées, voir par exemple [Was97]. On trouvera d'autres définitions élémentaires équivalentes des nombres premiers irréguliers dans la note [Van32].

24. L'élément $\sigma_n^{(p)}$ de $\mathfrak{g}^{(p)}$ correspond à l'élément $-f_n/(n-1)\,!$ de $\mathfrak{ds}$.

être des relations modulo certains nombres premiers irréguliers. C'est par exemple le cas en poids 12 et 16, où l'on observe les relations

$$\left.\begin{aligned} \{f_3, f_9\} - 3\{f_5, f_7\} &\equiv 0 \ [691] \\ \text{et} \qquad 2\{f_3, f_{13}\} - 7\{f_5, f_{11}\} + 11\{f_7, f_9\} &\equiv 0 \ [3617]. \end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

De manière générale, on peut formuler dans l'algèbre de double mélange $\mathfrak{ds}$ une conjecture traduisant celle faite par Sharifi au sujet de $\mathfrak{g}^{(p)}$, à savoir que les relations de la forme (1.28) proviennent des formes de Hecke dont les coefficients de Fourier sont congrus modulo un nombre premier irrégulier donné à ceux de la série d'Eisenstein de même poids [25].

Pour écrire un énoncé précis, commençons par remarquer que l'isomorphisme d'Eichler-Shimura permet de transporter l'action des opérateurs de Hecke sur l'espace des polynômes de périodes pairs W_k^+, et qu'à une forme parabolique de Hecke correspond donc un polynôme de périodes pair propre pour tous les opérateurs de Hecke, dont les coefficients peuvent être pris dans $\mathscr{O}(S_k)$ d'après le théorème 1.4. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathscr{O}(S_k)$, on dira qu'un tel polynôme de périodes a un *spectre d'Eisenstein* modulo $\mathfrak{p}$ si toutes les valeurs propres qui lui sont associées sont congrues modulo $\mathfrak{p}$ à celles de G_k (qui sont des entiers rationnels).

Conjecture 1.22. *Il existe un choix (f_n) de générateurs de $\mathfrak{ds}$ tel que pour tout entier pair $k \geqslant 12$, tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{O}(S_k)$ et tout élément $\sum a_{2i} X^{2i}$ de $W_k^+(\mathscr{O}(S_k))$ propre pour tous les opérateurs de Hecke et de spectre d'Eisenstein modulo $\mathfrak{p}$, on ait*

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \ impairs}} a_{i-1}\{f_i, f_j\} \in \mathfrak{p}\langle x, y\rangle.$$

Cette conjecture décrit donc une situation de plus dans laquelle une congruence entre formes modulaires implique une congruence entre des éléments qui leur sont reliés de manière « transcendante », ce phénomène se produisant aussi pour les fonctions L desdites formes modulaires [Kob87].

La conjecture 1.22 est étayée par un ensemble conséquent de vérifications expérimentales qui ont fait l'objet du travail de Master 2 antérieur à la présente thèse. Voici un bref résumé les moyens algorithmiques employés.

Fixons temporairement un poids k. Dans un premier temps, il faut calculer une base de l'espace W_k^+ diagonalisant simultanément tous les opérateurs de Hecke ; pour ce faire, on peut se servir de résultats de Fukuhara explicitant l'action de ces opérateurs dans une base particulière [Fuk07], puis diagonaliser explicitement les premières matrices obtenues jusqu'à obtenir des valeurs propres distinctes ;

25. Les coefficients de Fourier sont a priori des entiers algébriques, et la congruence a donc lieu dans l'anneau des entiers du corps de nombres associé. Par ailleurs, de telles formes paraboliques existent toujours en poids supérieur à 12, voir par exemple [DG96].

dans la pratique, il suffit souvent de diagonaliser l'opérateur T_2. On conserve ensuite uniquement les [26] polynômes congrus à G_k, et il faut ensuite calculer la combinaison linéaire de crochets de Poisson associée.

Pour ce faire, il faut d'abord expliciter les déterminations possibles des éléments f_i, et pour cela résoudre les équations de stuffle dans l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{f}_2$, munie d'une base de Hall. Le calcul devient vite impraticable, la dimension de $\mathfrak{f}_{2,k}$ croissant asymptotiquement comme $2^k/k$, et il faut donc se résoudre à travailler uniquement en petite profondeur, par exemple en ne considérant que la partie de profondeur 4 des combinaisons linéaires recherchées, et donc les parties homogènes de profondeur 1 à 3 des f_i. On résout donc des équations de stuffle prises au hasard jusqu'à obtenir un espace ayant bien la dimension attendue pour $\mathfrak{ds}_i^1/\mathfrak{ds}_i^4$, et on calcule finalement la combinaison linéaire tronquée.

L'implémentation de cette méthode en Maple permet d'obtenir des éléments f_i produisant en profondeur 4 les congruences prédites par la conjecture 1.22, et ce jusqu'en poids 44.

1.2.4 L'algèbre de Kashiwara-Vergne

La dernière algèbre de Lie de cette partie provient du théorème de Duflo [Duf75] selon lequel il existe pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie un isomorphisme d'algèbres associatives

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \simeq \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$$

entre le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ d'une part, et le sous-espace de l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ invariant sous l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ d'autre part. Kashiwara et Vergne [KV78] ont fait un lien conjectural entre l'isomorphisme de Duflo et certaines décompositions de la série de Campbell-Hausdorff, élément de $\hat{\mathfrak{f}}_2$ défini par

$$\mathrm{ch}(x,y) = \log(e^x e^y)\,;$$

la conjecture de Kashiwara-Vergne implique l'existence, pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ fixée, de deux éléments f et g de l'algèbre libre $\mathfrak{f}_2$ tels que

$$\begin{aligned}(e^{\mathrm{ad}_x}-1)\,f + (1-e^{-\mathrm{ad}_y})\,g &= x+y-z\\ 2\ \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_x\, f_x + \mathrm{ad}_y\, g_y + 1) &= \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}\Big(\tfrac{\mathrm{ad}_x}{e^{\mathrm{ad}_x}-1} + \tfrac{\mathrm{ad}_y}{e^{\mathrm{ad}_y}-1} - \tfrac{\mathrm{ad}_z}{e^{\mathrm{ad}_z}-1}\Big)\end{aligned}$$

où $z = \mathrm{ch}(x,y)$ et où la deuxième condition est une identité valide pour (x,y) dans un voisinage de l'origine dans $\mathfrak{g}^2$, l'application linéaire $f_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ étant définie par $f_x(a) = \partial_t f(x+ta,y)|_{t=0}$ et de même pour f_y.

Des travaux de Torossian puis d'Alekseev et Meinrenken [Tor02, AM06] ont conduit à une preuve de la conjecture de Kashiwara-Vergne pour les algèbres de Lie sur $\mathbb{R}$, puis une autre approche, liée aux associateurs [AT12, AET10], a donné lieu à une classification des telles paires (f,g) comme ci-dessus et à une nouvelle preuve valable cette fois-ci sur tout corps de caractéristique nulle. Cette preuve

26. Il n'y en a en fait souvent qu'un seul, sauf en de rares cas, comme en poids 32 où les deux polynômes propres sont congrus entre eux modulo 37.

repose notamment sur la linéarisation du problème et la définition d'une algèbre de Lie traduisant les conditions imposées par la conjecture de Kashiwara-Vergne. Nous aurons besoin de la notation que voici.

Définition 1.23. On notera Tr la projection canonique de $\mathfrak{h}$ vers son quotient par le sous-espace engendré par les polynômes de la forme $ab - ba$ avec $(a, b) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$.

Une définition possible de l'algèbre en question [27] est alors la suivante.

Définition 1.24. On notera $\mathfrak{krv}$ l'ensemble des couples $(f, g) \in \mathfrak{f}_2^2$ tels que

$$[x, f] + [y, g] = 0$$
$$\text{et} \qquad \exists\, c \in \mathbb{Q}[x], \quad \mathrm{Tr}(\pi_x\, f + \pi_y\, g) = \mathrm{Tr}(c(x) + c(y) - c(x + y)),$$

avec la structure d'algèbre de Lie graduée donnée par l'identification entre le couple (f, g) et la dérivation de $\mathfrak{f}_2$ envoyant x sur $[x, f]$ et y sur $[y, g]$.

Les auteurs cités établissent par ailleurs un lien entre l'algèbre ci-dessus et l'algèbre de Grothendieck-Teichmüller, avec un résultat [AT12, th. 4.1] pouvant être exprimé comme suit.

Théorème 1.25. *L'application* $\psi \longmapsto (\psi(-x - y, x), \psi(-x - y, y))$ *fournit un morphisme injectif d'algèbres de Lie graduées de* $\mathfrak{grt}$ *vers* $\mathfrak{krv}$.

Au vu du théorème 1.19 de Furusho, l'algèbre $\mathfrak{grt}$ est donc à la fois une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{ds}$ et de $\mathfrak{krv}$. Et il se trouve que le morphisme du théorème 1.25 ci-dessus se factorise par le morphisme du théorème 1.19, donnant deux morphismes injectifs

$$\mathfrak{grt} \hookrightarrow \mathfrak{ds} \hookrightarrow \mathfrak{krv}\,;$$

l'algèbre de double mélange est donc en quelque sorte un intermédiaire entre les algèbres de Grothendieck-Teichmüller et de Kashiwara-Vergne. La preuve de ce dernier résultat [Sch12, th. 1.1] fait intervenir des techniques inspirées de travaux d'Écalle ; voir à nouveau la section 1.3.4 ou le chapitre 4 pour un aperçu desdites techniques.

27. L'algèbre notée ici $\mathfrak{krv}$ correspond au gradué par le poids de l'algèbre complète $\widehat{\mathfrak{krv}}_2$ de [AT12].

1.3 Périodes et motifs

Cette partie vise à situer les résultats des chapitres 3 et 4 dans la théorie des motifs — de Tate ou elliptiques — mixtes et des périodes associées, en rappelant au passage les conséquences que cette théorie a eues sur l'étude des multizêtas. La présentation des deux premières sections est très largement inspirée de survols préexistants du sujet, et en particulier des derniers chapitres de [And04] et d'exposés de Francis Brown.

1.3.1 Multizêtas et périodes

L'équation (1.2) de Kontsevich a marqué le début d'une nouvelle approche des multizêtas reposant sur l'interprétation de ces nombres comme des éléments de l'anneau des périodes de Kontsevich et Zagier [KZ01]. Rappelons que l'on peut donner une première définition, élémentaire, desdites périodes comme étant « *les nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont valeurs d'intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles à coefficients rationnels, sur des domaines de* $\mathbb{R}^n$ *définis par des inégalités polynomiales à coefficients rationnels* » ; autrement dit, ce sont les nombres complexes dont les coordonnées sont des intégrales absolument convergentes de la forme

$$\int_{\forall\, i,\ p_i(x_1,\dots,x_n)\leqslant 0} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

où (p_i) est une famille finie d'éléments de $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$ et f une fraction rationnelle dans $\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_n)$.

Les périodes forment un anneau dénombrable $\mathscr{P}$ qui contient l'ensemble $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. La notion de période se retrouve dans de nombreux contextes mathématiques, et l'équation (1.2) montre que les multizêtas sont des éléments de $\mathscr{P}$, en tant qu'intégrales de fractions rationnelles particulièrement élémentaires sur des simplexes dont la dimension correspond au poids de ces mêmes multizêtas.

Une autre façon de définir les périodes consiste à les voir comme des intégrales abstraites, c'est à dire comme la donnée d'un domaine d'intégration et d'une forme différentielle ; plus précisément, une période abstraite au sens de Kontsevich est la classe d'équivalence d'un quadruplet (X, D, ω, γ), où

- X est une variété algébrique lisse de dimension n définie sur $\mathbb{Q}$,
- D est un diviseur à croisements normaux sur X,
- ω est une n-forme différentielle algébrique sur X, et
- γ est la classe d'homologie d'une n-chaîne singulière sur la variété $X(\mathbb{C})$ à bord inclus dans $D(\mathbb{C})$,

modulo les relations usuelles exprimant la linéarité de l'intégration et les formules de Stokes et de changement de variables. L'anneau $\mathscr{P}$ des périodes numériques est donc l'image de l'anneau $\tilde{\mathscr{P}}$ des périodes abstraites par l'application d'évaluation envoyant une classe $[X, D, \omega, \gamma]$ sur le nombre complexe $\int_\gamma \omega$.

Ce dernier point de vue donne lieu à une interprétation cohomologique des périodes, puisque chaque quadruplet (X, D, ω, γ) comme ci-dessus définit en particulier deux éléments des espaces de cohomologie de de Rham $H^n_{\mathrm{dR}}(X, D)$ et

d'homologie de Betti $H_n(X(\mathbb{C}), D(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$, dont l'appariement via l'isomorphisme de de Rham n'est autre que la période numérique $\int_\gamma \omega$. C'est cette notion de comparaison entre foncteurs cohomologiques qui nous amène à celle de motif. La philosophie des motifs a initialement été introduite et développée par Grothendieck et Deligne en vue de la preuve des conjectures de Weil. Grosso modo, un foncteur « cohomologie motivique » $H^*_{\mathfrak{m}}$ vers une catégorie dite de motifs mixtes devrait associer à toute variété X un objet $H^*_{\mathfrak{m}}(X)$ dont les cohomologies classiques — notamment de Betti, de de Rham et ℓ-adique — de X puissent être déduites.

1.3.2 Périodes de motifs de Tate mixtes

Il n'existe pas à ce jour de construction d'une catégorie abélienne de motifs mixtes. On peut cependant construire la catégorie MTM des motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{Z}$, qui en serait une sous-catégorie, et dont les objets sont obtenus par extensions successives d'objets simples notés $\mathbb{Q}(r)$ pour $r \in \mathbb{Z}$. Il s'agit d'une catégorie tannakienne, et le formalisme général des telles catégories permet d'affirmer qu'elle est équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie d'un groupe pro-algébrique, que l'on appelle son groupe fondamental. De plus, des résultats profonds de Borel sur la K-théorie algébrique de $\mathbb{Q}$ impliquent [DG05] que l'algèbre de Lie graduée associée au radical pro-unipotent de ce dernier groupe est l'algèbre libre $\mathrm{Lie}[s_{2n+1} \mid n \geqslant 1]$.

Décrivons brièvement deux façons de réaliser les multizêtas comme des périodes de MTM, c'est à dire comme des coefficients matriciels d'isomorphismes de comparaison entre cohomologie de Betti et cohomologie de de Rham. Elles permettent de définir une algèbre $\mathcal{Z}^{\mathfrak{m}}$ de multizêtas motiviques $\zeta^{\mathfrak{m}}(s_1, \ldots, s_r)$, la conjecture des périodes de Grothendieck s'exprimant dans ce cadre par l'injectivité du morphisme des périodes $\mathrm{per} : \mathcal{Z}^{\mathfrak{m}} \to \mathcal{Z}$ envoyant le multizêta motivique $\zeta^{\mathfrak{m}}(s_1, \ldots, s_r)$ sur le multizêta réel $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$. De plus, le groupe fondamental de la catégorie tannakienne MTM agit sur le spectre de $\mathcal{Z}^{\mathfrak{m}}$, ce qui est crucial dans les résultats récents de Brown mentionnés plus bas.

Considérant les intégrales de Kontsevich comme des intégrales itérées sur l'espace $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, Goncharov et Deligne [Del89, Gon01b, DG05] interprètent l'algèbre des fonctions sur le complété pro-unipotent $\pi_1^{\mathrm{uni}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$ comme la réalisation de Betti d'un ind-objet de MTM dont la réalisation de de Rham est l'algèbre de shuffle $\mathfrak{h}$, et montrent que tout multizêta est une période de cette algèbre de fonctions. En particulier, comme c'est aussi le cas du nombre $\frac{1}{2i\pi}$, les éléments de $\mathcal{Z}[\frac{1}{2i\pi}]$ sont tous des périodes de MTM.

Une deuxième approche, celle de Goncharov et Manin [GM04], s'appuie sur la réalisation des puissances $(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^n$ privées de leurs diagonales comme des espaces de modules de courbes de genre zéro. Plus précisément, l'isomorphisme

$$(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^n \setminus \{\text{diagonales}\} \simeq \mathfrak{M}_{0,n+3}$$

permet de voir les multizêtas de poids n comme des périodes du motif de Tate mixte $H^n(\overline{\mathfrak{M}}_{0,n+3} \setminus A, B)$, où $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n+3}$ est le compactifié de Deligne-Mumford de

l'espace de modules $\mathfrak{M}_{0,n+3}$ des courbes de genre zéro à $n+3$ points marqués, dont A et B sont certains ensembles de diviseurs.

S'il n'est pas difficile de montrer que les relations de shuffle — qui proviennent des intégrales — sont « motiviques », au sens où elles sont vraies dans l'algèbre $\mathcal{Z}^{\mathfrak{m}}$, prouver que les relations de stuffle — qui proviennent des séries — sont elles aussi motiviques nécessite plus d'efforts. Ce résultat a été obtenu indépendamment par Goncharov [Gon01b, Gon02] dans le formalisme du groupe fondamental pro-unipotent et par Soudères [Sou09, Sou10] dans le formalisme des espaces de modules.

Mentionnons finalement que c'est en se servant de la structure donnée par l'action mentionnée plus haut, et de sa traduction duale en termes de coaction de Hopf sur les multizêtas motiviques, que Brown [Bro12a] a démontré d'une part l'inclusion réciproque de l'ensemble des périodes de MTM dans $\mathcal{Z}[\frac{1}{2i\pi}]$, et d'autre part la conjecture de Hoffman « motivique » selon laquelle tout élément de $\mathcal{Z}^{\mathfrak{m}}$ peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire de termes de la forme $\zeta^{\mathfrak{m}}(s_1,\dots,s_r)$ avec $s_i \in \{2,3\}$. En particulier, comme l'algèbre $\mathcal{Z}$ des multizêtas réels est un quotient de l'algèbre $\mathcal{Z}^{\mathfrak{m}}$ des multizêtas motiviques, cela entraîne que tout multizêta réel est combinaison linéaire de multizêtas de Hoffman. Par ailleurs, la coaction de Hopf sur les multizêtas motiviques rend partiellement effective la décomposition de multizêtas dans une base donnée [Bro12b], à des constantes multiplicatives près. Enfin, les résultats de Brown combinés à la liberté de l'algèbre de Lie du radical pro-unipotent de MTM impliquent l'assertion que voici :

Corollaire 1.26. *Il existe un morphisme injectif de* $\mathrm{Lie}[s_{2n+1} \mid n \geqslant 1]$ *dans* $\mathfrak{grt}$.

Ce corollaire peut être considéré comme un pas de plus vers la preuve des conjectures de Zagier et Drinfel'd sur la structure de $\mathfrak{ds}$ et $\mathfrak{grt}$.

1.3.3 Motifs elliptiques mixtes (chapitre 3)

La catégorie MTM de la section précédente est engendrée par le motif associé à l'objet fondamental $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$, au sens où tout motif de Tate mixte peut être obtenu à partir d'extensions itérées de cet objet. Différents auteurs ont cherché une construction analogue partant cette fois-ci d'une courbe elliptique, dans l'espoir que le passage du genre zéro au genre un aide à expliquer les relations modulaires entre multizêtas de l'article [GKZ06], en s'appuyant sur le lien entre courbes elliptiques et formes modulaires.

Cela a en particulier donné lieu à la construction d'une catégorie MEM de motifs elliptiques mixtes, de polylogarithmes elliptiques multiples, de multizêtas elliptiques et d'associateurs elliptiques. Citons notamment les approches de Brown, Levin et Beilinson [BL13, BL94], de Levin et Racinet [LR07], de Goncharov [Gon98], d'Enriquez [Enr12] et de Hain et Matsumoto [HM12]. Dans ce dernier article, outre la construction d'une catégorie tannakienne MEM comme ci-dessus, les auteurs montrent qu'il existe un morphisme de l'algèbre de Lie du groupe fondamental de MEM vers celle de MTM et que ce morphisme, surjectif, admet une section ;

en d'autres termes, cette dernière algèbre de Lie se décompose en un produit semi-direct

$$\operatorname{Lie}\pi_1(\mathsf{MEM}) = \mathfrak{u} \rtimes \operatorname{Lie}\pi_1(\mathsf{MTM}) = \mathfrak{u} \rtimes \operatorname{Lie}[s_{2n+1} \mid n \geqslant 1] \tag{1.29}$$

de l'algèbre de Lie du groupe fondamental pro-unipotent des motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{Z}$ par une certaine algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ engendrée par des éléments e_{2i} pour i entier naturel. Celle-ci admet une représentation par dérivations sur l'algèbre libre $\operatorname{Lie}[a,b]$, le générateur e_{2i} agissant comme la dérivation ε_{2i} définie par

$$\varepsilon_{2i}(a) = a^{2i} \cdot b \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2i}(b) = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \, [a^j \cdot b, a^{2i-1-j} \cdot b]. \tag{1.30}$$

Nous noterons $\mathscr{E}$ l'image de cette représentation, engendrée comme algèbre de Lie par les $\varepsilon_0^j \cdot \varepsilon_i$. Le morphisme surjectif envoyant e_{2i} sur ε_{2i} constitue un isomorphisme conjectural de $\mathfrak{u}$ vers $\mathscr{E}$.

Dans l'optique de déterminer une présentation de l'algèbre $\operatorname{Lie}\pi_1(\mathsf{MEM})$, Pollack [Pol09] a étudié l'algèbre $\mathscr{E}$ et ses quotients par les termes d'une filtration particulière, notée Θ, induite par la filtration centrale descendante de la sous-algèbre de $\operatorname{Lie}[a,b]$ engendrée par les $w \cdot [a,b]$ avec $w \in \mathbb{Q}\langle a,b\rangle$. Il a en particulier déterminé l'ensemble des relations dans $\mathscr{E}/\Theta^3\mathscr{E}$ et montré que ces relations proviennent elles-mêmes des périodes des formes modulaires ; pour un énoncé précis de ce résultat, se reporter au théorème 3.1 page 55.

C'est sur un raffinement du théorème 3.1 sur la structure de l'algèbre $\mathscr{E}$, suggéré par des calculs explicites menés par Pollack dans l'article cité, que porte notre chapitre 3, dont le résultat principal peut être exprimé ainsi :

Théorème 3.16. *Dans le cas des éléments de profondeur* 3 *de* $\mathscr{E}$*, les relations de Pollack modulo* $\Theta^3\mathscr{E}$ *se relèvent en de « vraies » relations dans* $\mathscr{E}$*. En d'autres termes :*

Une combinaison linéaire de termes de la forme $[\varepsilon_i, [\varepsilon_0, \varepsilon_j]]$ *avec* i *et* j *pairs supérieurs à* 4 *appartient à* $\Theta^3\mathscr{E}$ *si et seulement si elle est combinaison linéaire de termes de la forme* $[\varepsilon_i, [\varepsilon_j, \varepsilon_k]]$ *pour* i*,* j *et* k *pairs et supérieurs à* 4*.*

Il s'agit d'un cas particulier d'une question plus générale posée par Pollack, dont nous donnons une formulation précise ; voir la conjecture 3.2 page 56. La preuve du théorème 3.16 repose sur des techniques développées par Écalle qui seront centrales dans le chapitre 4.

Avant de passer à la section suivante, faisons une brève remarque sur un calcul terminant l'article [Pol09]. Celui-ci porte sur l'action de l'algèbre libre $\operatorname{Lie}[s_{2n+1} \mid n \geqslant 1]$ sur $\mathfrak{u}$ provenant de l'équation (1.29), qui implique l'existence d'une action de la première algèbre sur $\mathscr{E}$. Pollack calcule explicitement l'action du premier générateur s_3 sur les éléments ε_n de $\mathscr{E}$ et observe que, modulo l'idéal $\mathscr{E}^{(3)}$ engendré par les crochets de trois ε_n avec n pair et supérieur à 4, l'élément $s_3 \cdot \varepsilon_n$ est

proportionnel à un élément de $\Theta^3\mathscr{E}$ très spécial, noté E_n^4, provenant via le théorème de Pollack de la série d'Eisenstein de poids n. De façon plus précise, il remarque qu'il existe une constante rationnelle α_3, subordonnée au choix de l'image de s_3 dans $\mathrm{Lie}[a,b]$, telle que

$$s_3 \cdot \varepsilon_n \equiv \tfrac{\alpha_3}{\binom{n+2}{2}} \tfrac{B_{n+2}}{B_n}\, E_n^4\ [\mathscr{E}^{(3)}], \tag{1.31}$$

où B_n est le n-ième nombre de Bernoulli, et ce pour tous les indices n inférieurs à 12.

En nous appuyant sur une construction d'Enriquez détaillée dans la section suivante et donnant conjecturalement une action sur $\mathscr{E}$ reliée à celle de Hain et Matsumoto, il nous a été permis d'étendre l'observation expérimentale de Pollack au cas du générateur s_5, pour lequel un phénomène similaire se produit : ainsi, l'équation (1.31) devient

$$s_5 \cdot \varepsilon_n \equiv \tfrac{\alpha_5}{\binom{n+4}{4}} \tfrac{B_{n+4}}{B_n}\, E_n^6\ [\mathscr{E}^{(3)}],$$

pour une certaine constante rationnelle α_5 subordonnée aux choix préalables au calcul et pour tout n inférieur à 12. Au vu de ces résultats expérimentaux, il paraît légitime de poser la question suivante.

Question 1.27. Existe-t-il pour tout entier pair $d \geqslant 2$ un rationnel α_{d+1} tel que pour tout entier n pair et supérieur à 4, on ait

$$s_{d+1} \cdot \varepsilon_n \equiv \tfrac{\alpha_{d+1}}{\binom{n+d}{d}} \tfrac{B_{n+d}}{B_n}\, E_n^{d+2}\ [\mathscr{E}^{(3)}]\,?$$

1.3.4 Algèbre de Grothendieck-Teichmüller elliptique et constructions écalliennes (chapitre 4)

Nous proposons ici la définition d'une algèbre de double mélange elliptique, que nous mettons en parallèle avec les constructions de Hain-Matsumoto [HM12] et d'Enriquez [Enr12].

Ce dernier auteur a défini un analogue en genre un du concept d'associateur détaillé dans la section 1.2.2, dont la construction, qui s'appuie sur le passage des groupes de tresses du genre zéro au genre un, l'a conduit à décrire un avatar elliptique de l'algèbre de Lie de Grothendieck-Teichmüller $\mathfrak{grt}$, que nous noterons $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ et dont la définition exacte est reproduite dans la section 4.1. Nous expliquons ici brièvement le lien conjectural connectant trois morphismes : le premier, défini par Hain et Matsumoto, de $\mathrm{Lie}\,\pi_1(\mathsf{MTM})$ vers $\mathrm{Lie}\,\pi_1(\mathsf{MEM})$, le deuxième, défini par Enriquez, de $\mathfrak{grt}$ vers le complété $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$ et le troisième entre deux espaces définis par Écalle. Ce lien fait l'objet du chapitre 4.

L'algèbre $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ et son complété par le poids $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$ sont définies explicitement en termes de relations dans des algèbres de tresses en genre un, et $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ est par

construction une extension de l'algèbre $\mathfrak{grt}$, voir la définition 4.4. On dispose par conséquent d'une suite exacte courte

$$0 \to \mathfrak{r}^{\mathrm{ell}} \longrightarrow \mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}} \longrightarrow \mathfrak{grt} \to 0. \tag{1.32}$$

Dans l'article d'Enriquez, deux résultats principaux sont démontrés concernant cette suite exacte. D'une part, quitte à passer aux complétés, celle-ci est *scindée* ; plus précisément, il existe un morphisme $(\mathrm{id}, s_{\pm})$ de $\mathfrak{grt}$ vers $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$, ce qui assure que tout élément de $\mathfrak{grt}$ peut être prolongé en un élément du complété $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$. D'autre part, Enriquez identifie une sous-algèbre $\mathfrak{b}_3$ du noyau $\mathfrak{r}^{\mathrm{ell}}$ en en exhibant certains éléments δ_{2n} de $\mathfrak{r}^{\mathrm{ell}}$.

Il est intéressant de constater que ces éléments, au départ définis dans l'article [CEE09], coïncident en fait avec les dérivations ε_{2n+2} de la section 1.3.3. Autrement dit, l'algèbre $\mathfrak{b}_3$ provenant de la théorie des associateurs elliptiques est isomorphe à l'algèbre $\mathscr{E}$ issue de la théorie des motifs elliptiques mixtes. On peut donc mettre en parallèle deux suites exactes scindées : celle, portant sur $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$, définie ci-dessus et la suite

$$0 \to \mathfrak{u} \longrightarrow \operatorname{Lie}\pi_1(\mathsf{MEM}) \longrightarrow \operatorname{Lie}\pi_1(\mathsf{MTM}) \to 0 \tag{1.33}$$

déduite de la décomposition en produit semi-direct (1.29) page 29. Le corollaire 1.26 assure d'ailleurs l'existence d'un morphisme de $\operatorname{Lie}\pi_1(\mathsf{MTM})$ vers $\mathfrak{grt}$, tandis que l'algèbre $\mathfrak{u}$ s'envoie quant à elle dans $\mathfrak{r}^{\mathrm{ell}}$ via $\mathscr{E}$ et $\mathfrak{b}_3$.

Cette analogie amène assez naturellement à la question suivante, détaillée au début du chapitre 4 : *peut-on construire une extension elliptique* $\mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}}$ *de l'algèbre de double mélange* $\mathfrak{ds}$ *?* Il s'avère qu'un élément de réponse est fourni par certains espaces définis par Jean Écalle.

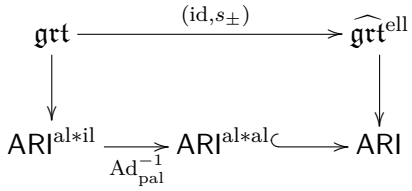
Les espaces écalliens mentionnés plus haut sont deux sous-algèbres de Lie de l'ensemble ARI des *moules*, ces derniers pouvant être vus comme des séries formelles en une infinité dénombrable de variables commutatives à coefficients dans un anneau donné, donnant un cadre combinatoire commode dans lequel les calculs impliqués par les relations de double mélange deviennent plus concis. Sans rentrer dans les détails [28], on dispose d'un premier espace noté $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}$, qui généralise l'algèbre de double mélange $\mathfrak{ds}$ de la section 1.2.1, et d'un second espace noté $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}$, qui est quant à lui une généralisation de l'analogue de $\mathfrak{ds}$ défini par les relations de double mélange linéarisées avec terme correctif [29].

De même qu'il existe des morphismes de $\operatorname{Lie}\pi_1(\mathsf{MTM})$ vers $\operatorname{Lie}\pi_1(\mathsf{MEM})$ et de $\mathfrak{grt}$ vers $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$, on peut construire un morphisme $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}$ de $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}$ vers $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}$, provenant de l'action adjointe sur l'algèbre de Lie des moules d'un élément, noté 'pal', du groupe associé à cette algèbre de Lie. Il existe par ailleurs deux flèches $\mathfrak{grt} \to \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}$ et $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}} \to \mathsf{ARI}$ définies de façon élémentaire. On dispose

28. Qui sont repris dans le chapitre 4 et que l'on trouvera en partie dans l'article [Éca11].

29. Une variante de cet espace, sans terme correctif, est étudiée par Ihara, Kaneko et Zagier [IKZ06, § 8], qui la notent DSh, et par Brown [Bro13], qui la note $\mathfrak{ls}$.

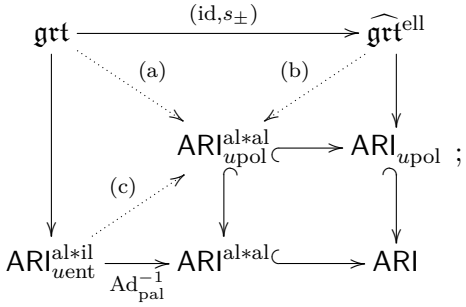
donc d'un diagramme



(1.34)

permettant de faire la comparaison des morphismes $\mathfrak{grt} \to \widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$ d'Enriquez et $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}} \to \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}$ d'Écalle.

Après calcul explicite des différentes flèches en présence dans des sous-espaces de taille raisonnable, il se trouve que le diagramme (1.34) semble être commutatif. Sans aller jusqu'à fournir une preuve de cette observation, le chapitre 4 a pour objet la démonstration de deux de ses corollaires, provenant d'un examen plus précis du diagramme (1.34). Le détail de la construction de ce dernier diagramme entraîne en effet que les flèches verticales sont à valeurs dans certains sous-espaces définis par des conditions portant sur les dénominateurs des moules qui entrent en jeu ; on peut donc raffiner ainsi le diagramme page précédente :



(1.35)

ici, les notations '$u$pol' et '$u$ent' désignent respectivement les éléments dont les dénominateurs divisent un certain polynôme explicite[30], et ceux qui n'ont pas de dénominateurs. Par ailleurs, l'existence de chaque flèche en pointillés traduit une assertion impliquée par la conjecture de commutativité du diagramme (1.34) : l'existence de la flèche (a) exprime l'équivalence des deux chemins possibles de $\mathfrak{grt}$ vers ARI, celle de la flèche (b) le fait que l'image du morphisme de $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$ vers $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}}$ soit incluse dans $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}$, et celle de la flèche (c) le fait que l'image du morphisme restreint $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1} : \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}_{u\mathrm{ent}} \to \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}$ soit incluse dans $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}}$.

Le chapitre 4 consiste alors dans un premier temps à prouver l'existence de la flèche (c), ce qui est fait dans la section 4.3.3 :

Théorème 4.35. *L'application* $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}$ *envoie* $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}_{u\mathrm{ent}}$ *dans* $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}_{u\mathrm{pol}}$.

30. Un analogue de l'espace $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}_{u\mathrm{pol}}$ est introduit indépendamment par Brown, qui le note $\mathfrak{pls}$ pour *polar linearized (double) shuffle*.

La démonstration de ce résultat s'appuie sur une étude de l'élément 'pal' et sur une identité due à Écalle, permettant de factoriser une certaine restriction du morphisme $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}$ en deux applications plus simples à étudier.

Pour en revenir aux suites exactes (1.32) et (1.33), le candidat $\mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}}$ à l'extension elliptique de $\mathfrak{ds}$ est alors l'espace $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}$, le morphisme vers $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{ent}}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}} \simeq \mathfrak{ds}$ devant coïncider avec $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}$ sur le sous-espace $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}(\mathsf{ARI}_{u\mathrm{ent}}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}})$ d'$\mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}$. Pour que cela ait un sens, il faut en particulier que ce dernier espace soit une algèbre de Lie, ce qui est prouvé dans la section 4.3.5, et découle assez directement des autres résultats du chapitre 4 :

Théorème 4.45. *Le sous-espace* $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}$ *d'*ARI *en est une sous-algèbre de Lie.*

Ce résultat donne donc une construction conjecturale de multizêtas elliptiques formels en posant

$$\mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}} = \mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{FZ}^{\mathrm{ell}} = \mathscr{U}(\mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}})^{\vee},$$

et une conjecture portant sur l'extension $\mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}}$ consisterait en l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{u} & \longrightarrow & \mathrm{Lie}\,\pi_1(\mathsf{MEM}) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}\,\pi_1(\mathsf{MTM}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{r}^{\mathrm{ell}} & \longrightarrow & \mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}} & \longrightarrow & \mathfrak{grt} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{t}^{\mathrm{ell}} & \longrightarrow & \mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}} & \longrightarrow & \mathfrak{ds} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dont les lignes sont des suites exactes scindées et dans lequel il est vraisemblable que toutes les flèches verticales soient en fait des isomorphismes.

Chapitre 2

Relations modulaires entre zêtas doubles

L'article dont ce chapitre est la traduction est paru au Ramanujan Journal [BS13].

2.1 Introduction et préliminaires

Nous rappelons la définition des polynômes de périodes pairs associés aux formes paraboliques pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, et introduisons l'espace associé des polynômes de périodes tronqués. Nous rappelons également les isomorphismes entre cet espace, un ensemble d'éléments spéciaux de l'algèbre de double mélange $\mathfrak{ds}$, et un ensemble de relations particulières entre zêtas doubles dans l'espace des zêtas doubles formels. En s'appuyant sur ces résultats, l'objectif de cet article est de montrer comment déduire ces isomorphismes l'un de l'autre par dualité, de façon explicite et directe.

2.1.1 Polynôme de périodes tronqués associés aux formes paraboliques

Définition 2.1. Les polynômes de périodes sont donnés en poids k par

$$r(X) = \int_0^{i\infty} f(z)\,(X-z)^{k-2}\,\mathrm{d}z$$

où f est une forme parabolique de poids k pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Les polynômes de périodes pairs $r^+(X)$ sont obtenus à partir de ces derniers en posant

$$r^+(X) = \frac{r(X) + r(-X)}{2}.$$

Enfin, les *polynômes de périodes tronqués* $p(X)$ sont obtenus à partir des polynômes $r^+(X)$ en leur soustrayant leur terme de degré $k-2$ et le terme constant. Ces polynômes, homogénéisés en degré $k-2$ par l'introduction d'une variable Y, forment un espace vectoriel que nous notons $W_k^\natural$.

La correspondance d'Eichler-Shimura exprime le fait que l'application

$$S_k \longrightarrow W_k^\natural$$

induite par la définition ci-dessus est un isomorphisme. Il découle des travaux de Zagier [Zag91, Zag00] sur les polynômes de périodes qu'un polynôme $P(X)$ appartient à $W_k^\natural$ si et seulement s'il est pair, de degré inférieur à $k-4$, sans terme constant, et vérifie les relations $P(X) + X^{k-2}P(\frac{1}{X}) = 0$ et

$$P(X) + X^{k-2}P(1-\tfrac{1}{X}) + (X-1)^{k-2}P(\tfrac{1}{1-X}) = 0.$$

Les premiers polynômes de périodes tronqués, en poids 12 et 16, sont

$$\left.\begin{array}{rl} & (X^8 - X^2) - 3\,(X^6 - X^4) \\ \text{et} & 2\,(X^{12} - X^2) - 7\,(X^{10} - X^4) + 11\,(X^8 - X^6). \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

2.1.2 Éléments de double mélange et éléments modulaires

Notons $\mathfrak{f}_2$ l'algèbre de Lie libre à deux générateurs x et y, et $\mathfrak{f}_{2,n}$ le sous-espace vectoriel des polynômes de Lie homogènes de degré n. Notons $\mathfrak{f}_{2,\geqslant n} = \bigoplus_{m\geqslant n} \mathfrak{f}_{2,m}$ l'algèbre de Lie des polynômes dont tous les monômes sont de degré au moins égal à n.

Pour tout polynôme f et tout mot w en x et y, notons $\langle f, w\rangle$ le coefficient du mot w dans f, notation que nous étendons en $\langle f, g\rangle$ pour tout polynôme associatif $g \in \mathfrak{h}$ par linéarité à droite.

Notons $\mathfrak{ds}$ l'algèbre de double mélange, qui est définie comme étant

$$\mathfrak{ds} = \{f \in \mathfrak{f}_{2,\geqslant 3} \mid \langle f, u * v\rangle = 0\}$$

où $u * v$ décrit l'ensemble des produits de stuffle [1] de tous les mots non-triviaux u et v en x et y, se terminant tous deux par y, et qui ne soient pas tous deux des puissances de y. À titre d'exemple, deux éléments simples de $\mathfrak{ds}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} & f_3 = [x,[x,y]] - [y,[x,y]] \\ \text{et} \quad & f_5 = [x,[x,[x,[x,y]]]] - 2\,[y,[x,[x,[x,y]]]] - \tfrac{1}{2}\,[[x,y],[x,[x,y]]] + \\ & \qquad + 2\,[y,[y,[x,[x,y]]]] + \tfrac{3}{2}\,[[x,y],[y,[x,y]]] - [y,[y,[y,[x,y]]]]. \end{aligned}$$

En effet, ces deux éléments sont des polynômes de Lie et l'on vérifie aisément qu'ils satisfont les relations de stuffle pour tout couple (u,v) comme ci-dessus ; dans le cas de f_3 par exemple, si $u = y = y_1$ et $v = xy = y_2$, alors $u*v = y_1y_2 + y_2y_1 + y_3 = yxy + xy^2 + x^2y$, et on a effectivement

$$\langle f_3, u*v\rangle = \langle f_3, yxy\rangle + \langle f_3, xy^2\rangle + \langle f_3, x^2y\rangle = -2 + 1 + 1 = 0.$$

1. Soit $y_i = x^{i-1}y$, de sorte que tout mot finissant par y peut s'écrire sous la forme $y_{i_1}\cdots y_{i_r}$. Le produit de stuffle de deux tels mots est défini récursivement par $1*w = w*1 = w$ et $y_iw*y_jw' = y_i\,(w*y_jw') + y_j\,(y_iw*w') + y_{i+j}\,(w*w')$.

Associons à tout élément f de $\mathfrak{h}$ une dérivation D_f définie sur $\mathfrak{h}$ par $D_f(x) = 0$ et $D_g(y) = [y, f]$. Le crochet de Poisson, défini par

$$\{f, g\} = [f, g] + D_f(g) - D_g(f),$$

apparaît naturellement en prenant le crochet de Lie des dérivations, puisqu'on vérifie facilement que

$$[D_f, D_g] = D_f \circ D_g - D_g \circ D_f = D_{\{f,g\}}.$$

Le résultat suivant a été prouvé indépendamment et en utilisant des moyens assez différents par Racinet [Rac00], qui en a donné une preuve directe, et Écalle [Éca03], qui a inclus l'ensemble de la situation dans une théorie bien plus vaste.

Proposition 2.2. *Le crochet de Poisson munit l'espace vectoriel $\mathfrak{ds}$ d'une structure d'algèbre de Lie.*

Par exemple, le polynôme de Lie $\{f_3, f_5\}$ obtenu en prenant le crochet de Poisson des éléments f_3 et f_5 définis ci-dessus est lui aussi un élément de $\mathfrak{ds}$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{ds}$ est graduée par le *poids*, c'est à dire le degré total d'un polynôme de Lie. Notons $\mathfrak{ds}_n$ la partie graduée de poids n. Tant l'algèbre $\mathfrak{ds}$ que chacune de ses parties graduées sont filtrées par la *profondeur*, c'est à dire le degré partiel en la variable y. La profondeur donne une filtration décroissante sur $\mathfrak{ds}$ et sur chaque sous-espace $\mathfrak{ds}_n$, au sens où l'on a pour tout n une suite décroissante de sous-espaces $\mathfrak{ds}_n = \mathfrak{ds}_n^1 \supset \mathfrak{ds}_n^2 \supset \mathfrak{ds}_n^3 \supset \cdots$.

Considérons l'exemple des trois éléments f_3, f_5 et $\{f_3, f_5\}$ mentionnés ci-dessus. En examinant leur degré total en tant que polynômes en x et y, on voit que f_3 et f_5 sont de poids respectifs 3 et 5, et que $\{f_3, f_5\}$ est de poids 8, puisque le crochet de Poisson est compatible avec la graduation. De plus, en considérant le nombre minimal de y dans leurs monômes, on voit que f_3 et f_5 sont de profondeur 1, tandis que $\{f_3, f_5\}$ est de profondeur exactement 2.

La filtration par la profondeur n'est pas une graduation, du fait de l'existence de combinaisons linéaires d'éléments de profondeur exactement d dont la profondeur est strictement supérieure à d. Les plus étudiées des relations de ce type, qui engendrent conjecturalement l'idéal de Lie de toutes les relations entre profondeurs différentes, sont les *relations modulaires* que nous allons à présent définir.

Le résultat qui suit admet plusieurs preuves très proches, s'appuyant essentiellement sur l'étude de l'associateur de Drinfel'd [Zag93, Éca03, Gon05, Rac00].

Proposition 2.3. *Pour tout entier $n \geqslant 3$ impair, il existe un élément non nul f_n de $\mathfrak{ds}_n$ de profondeur 1.*

Grâce à cette proposition, on suppose dorénavant qu'un choix d'élément $f_n \in \mathfrak{ds}_n$ de profondeur 1 a été fait une bonne fois pour toute en chaque poids impair $n \geqslant 3$. La partie de profondeur 1 de f_n est proportionnelle au mot de Lie $\mathrm{ad}_x^{n-1}(y)$; dans cet article, nous normalisons les f_n de façon à ce que le coefficient devant $\mathrm{ad}_x^{n-1}(y)$ vaille 1, comme dans les exemples donnés ci-dessus.

Définition 2.4. Pour tout poids pair n, les *éléments modulaires* dans $\mathfrak{ds}_n^2$ sont les combinaisons linéaires P de crochets de Poisson d'éléments f_k et f_{n-k} tels que

$$P = \sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ impair}}}^{n-3} a_k \{f_k, f_{n-k}\} \equiv 0 \quad [\mathfrak{ds}_n^3]. \tag{2.2}$$

La partie de profondeur 2 de P provient uniquement des crochets de Poisson des parties de profondeur 1 des f_k, et le choix de la partie de profondeur supérieure à 2 des éléments normalisés f_k n'a donc pas d'influence sur les coefficients a_k apparaissant dans les éléments modulaires. En d'autres termes, l'existence de telles relations et les coefficients qui y apparaissent dépendent uniquement des termes $\mathrm{ad}_x^{n-1}(y)$, et non des parties de profondeur supérieure.

Se plaçant dans un contexte légèrement différent — celui de l'algèbre de dérivations stable $\mathscr{D}$, constituée de polynômes à coefficients entiers —, Ihara [Iha02] a le premier découvert l'existence d'éléments de la forme (2.2). Il a donné le plus petit tel élément, qui apparaît en poids 12, sous la forme

$$2\{D_3, D_9\} - 27\{D_5, D_7\} \equiv 0 \ [\mathscr{D}_{12}^3].$$

Ici, la normalisation de D_n est choisie de façon à ce que les coefficients de cet élément soient des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Ihara a aussi découvert une relation similaire en poids 16 et, en collaboration avec Takao [Iha02], prouvé que la dimension de l'espace des relations de cette forme en poids pair quelconque k est donnée par

$$\left[\tfrac{k-4}{4}\right] - \left[\tfrac{k-2}{6}\right],$$

ce qui se trouve être exactement la dimension de l'espace S_k des formes paraboliques de poids k pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (ce résultat a aussi été démontré par Goncharov [Gon01a]). Comme indiqué plus haut, ces éléments spéciaux dépendent uniquement des termes $\mathrm{ad}_x^{n-1}(y)$ de profondeur 1 et sont donc complètement indépendants de la définition de l'algèbre de dérivation stable $\mathscr{D}$. En fait, les mêmes combinaisons linéaires auront pour propriété d'être nulles modulo profondeur 3 dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_2$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est le même que celui de $\mathfrak{f}_2$ mais munie cette fois-ci du crochet de Poisson, et dans toute sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{l}_2$ possédant un élément de profondeur 1 pour tout $n \geqslant 3$ impair, ce qui est en particulier le cas de $\mathscr{D}$ et $\mathfrak{ds}$.

Quand les f_n choisis sont, comme ici, normalisés en imposant que le coefficient du mot de Lie $\mathrm{ad}_x^{n-1}(y)$ soit égal à 1, les relations d'Ihara en poids 12 et 16 s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} \{f_3, f_9\} - 3\{f_5, f_7\} &\equiv 0 \ [\mathfrak{ds}_{12}^3] \\ \text{et} \quad 2\{f_3, f_{13}\} - 7\{f_5, f_{11}\} + 11\{f_7, f_9\} &\equiv 0 \ [\mathfrak{ds}_{16}^3]. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Le théorème principal de [Sch06] établit le résultat suggéré par la comparaison des équations (2.1) et (2.3), à savoir :

Théorème 2.5. *Soit L une sous-algèbre de Lie quelconque de $\mathfrak{l}_2$ contenant un élément f_n en tout poids impair $n \geqslant 3$ qui satisfasse $\langle f_n, x^{n-1}y\rangle = 1$. Alors pour tout entier pair k, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{[\frac{k-4}{4}]} a_i \{f_{2i+1}, f_{k-2i-1}\}$ *appartient à* L_k^3 *;*

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{[\frac{k-4}{4}]} a_i \left(X^{2i}Y^{k-2-2i} - X^{k-2-2i}Y^{2i}\right)$ *appartient à* $W_k^\natural$.

2.1.3 Relations modulaires entre zêtas doubles

Les nombres réels dits *multizêtas* sont définis comme étant les sommes

$$\zeta(s_1, \ldots, s_r) = \sum_{n_1 > \cdots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}} \tag{2.4}$$

où la somme porte sur les r-uplets strictement décroissants d'entiers strictement positifs et les r_i sont des entiers strictement positifs, avec $r_1 > 1$ pour assurer la convergence. Les *zêtas doubles* sont les sommes convergentes

$$\zeta(r, s) = \sum_{m > n > 0} \frac{1}{m^r n^s}$$

pour tout couple (r, s) d'entiers positifs avec $r > 1$. Gangl, Kaneko et Zagier [GKZ06] exhibent pour tout entier pair $k \geqslant 12$ certaines combinaisons linéaires particulières de zêtas doubles $\zeta(r, s)$, d'arguments impairs r et s vérifiant $r + s = k$, ayant la propriété d'être proportionnelles $\zeta(k) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^k}$, et qui émanent aussi des polynômes de périodes.

Plus précisément, le résultat de [GKZ06] sur les polynômes de périodes et les zêtas doubles à arguments impairs qui nous concerne ici peut s'exprimer ainsi.

Théorème 2.6. *Soient $k \geqslant 12$ un entier pair et $P(X, Y)$ un élément de $W_k^\natural$. Posons*

$$P(X + Y, Y) = \sum_{r=1}^{k-3} \tbinom{k-2}{r-1} q_{r,k-r}\, X^{r-1}Y^{k-r-1}. \tag{2.5}$$

Alors

$$\sum_{\substack{r=3 \\ r \text{ impair}}}^{k-3} q_{r,k-r}\, \zeta(r, k-r) \equiv 0 \ [\mathbb{Q}\, \zeta(k)]. \tag{2.6}$$

Réciproquement, les polynômes pairs Q de poids k donnant lieu à une relation du type de (2.6) *sont ceux pour lesquels le polynôme P défini par* (2.5) *est un polynôme de périodes.*

Remarquons que cette assertion n'apparaît pas exactement sous cette forme dans [GKZ06] ; une première ébauche est donnée dans le théorème 3 de leur introduction (« *Les valeurs* $\zeta(\mathrm{od},\mathrm{od})$ *de poids* k *satisfont au moins* $\dim S_k$ *relations linéaires indépendantes* »), et une version plus fine dans le corps de l'article, dans laquelle les zêtas doubles sont étudiés dans un « espace de zêtas doubles formels » sans restriction de parité sur les arguments. Le résultat du théorème 2.6 est indiqué pour les multizêtas réels dans la remarque 2 faisant suite au théorème 3 de [GKZ06]. Cette remarque s'applique exactement de la même manière dans l'espace $\mathcal{FZ}$ des multizêtas formels que nous définissons dans la section suivante (et qui ne coïncide pas avec l'espace des zêtas doubles formels, même en profondeur 2).

La première « relation GKZ » se produit en poids $k = 12$ et est donnée par

$$28\,\zeta(9,3) + 150\,\zeta(7,5) + 168\,\zeta(5,7) = \tfrac{5197}{691}\,\zeta(12). \tag{2.7}$$

Dans les remarques qui concluent l'introduction de [GKZ06], plusieurs questions sont soulevées au sujet des relations entre lesdits résultats, les résultats sur les éléments modulaires de [Sch06], et les relations observées par Ihara dans l'algèbre de dérivations stable. Le présent article fournit certaines de ces connexions ; le résultat principal en particulier (proposition 2.10 et le corollaire final) montre comment déduire explicitement l'existence et les coefficients des relations GKZ du théorème 2.6 (pour les multizêtas tant réels que formels) de l'existence d'éléments modulaires dans $\mathfrak{ds}$, et vice versa.

2.2 Algèbre enveloppante et dualité

Afin de travailler simultanément sur le plan des multizêtas et du double mélange, nous nous plaçons dans le très utile diagramme de la figure 1 page ci-contre, qui montre simultanément tous les niveaux et dualités entre les algèbres de Hopf et algèbres et cogèbres de Lie dans lesquelles les relations de double mélange et entre zêtas doubles sont généralement étudiées.

L'espace en haut à droite est l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre des polynômes en deux variables non commutatives x et y ; librement engendré par l'ensemble des mots en x et y, il est gradué par le *poids*, c'est à dire le degré total des monômes. L'espace en haut à gauche est son dual gradué, c'est à dire la somme directe des duaux des parties graduées de $\mathfrak{h}$. En tant qu'espace vectoriel, nous munissons le dual gradué de $\mathfrak{h}$ de la base duale à la base des mots w en x et y, et écrivons $\overline{Z}(w)$ pour le vecteur de la base duale associé à un mot w, de sorte que

$$\langle \overline{Z}(w_1), w_2 \rangle = \delta^{w_2}_{w_1}.$$

Tous les espaces vectoriels du diagramme à l'exception des deux du bas sont en fait munis de structures d'algèbres de Hopf. Il ne nous est ici pas utile de spécifier le produit et le coproduit de chacun de ces espaces, mais nous signalons toutefois que $\mathfrak{h}$, l'algèbre libre à deux générateurs x et y, est munie du coproduit standard donné par $\Delta_{\text{ш}}(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$ et $\Delta_{\text{ш}}(y) = y\otimes 1 + 1\otimes y$, et que son dual $\mathbb{Q}[\overline{Z}(w)]$

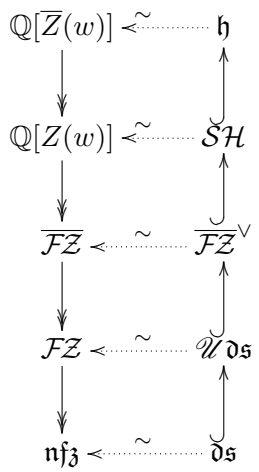


Figure 1 – Cinq paires d'espaces duaux.

est muni du produit dual à ce coproduit, qui n'est autre que le produit de shuffle des mots[2] : $\overline{Z}(u)\,\overline{Z}(v) = \overline{Z}(u \sqcup\!\sqcup v)$. Le produit $\odot$ sur $\mathfrak{h}$ n'est *pas* le produit de concaténation, mais une loi de composition que nous ne savons pas expliciter en toute généralité[3]. La flèche horizontale supérieure est l'isomorphisme envoyant w sur $\overline{Z}(w)$.

Définissons les autres espaces et morphismes de ce diagramme.

On dira qu'un mot w en x et y est *convergent* s'il est de la forme xvy pour un mot quelconque v, ou s'il est constant. Le deuxième espace à gauche dans le diagramme, $\mathbb{Q}[Z(w)]$, est le quotient de l'espace du haut par les *relations de régularisation shuffle*, qui sont les relations linéaires de la forme

$$\overline{Z}(w) = \sum_{a=0}^{r}\sum_{b=0}^{s}(-1)^{a+b}\overline{Z}(\pi(y^a \sqcup\!\sqcup y^{r-a}\,u\,x^{s-b} \sqcup\!\sqcup x^b)), \tag{2.8}$$

où π désigne la projection sur le sous-espace de $\mathfrak{h}$ engendré par les mots convergents, et où l'application $\overline{Z}$ est prolongée linéairement à l'ensemble de tous les polynômes. Nous noterons $Z(w)$ l'image de $\overline{Z}(w)$ dans ce quotient ; par définition, l'espace $\mathbb{Q}[Z(w)]$ est donc engendré par les symboles $Z(w)$ pour w mot convergent. On sait depuis longtemps que la formule (2.8) (connue comme la « régularisation shuffle », et explicitée par Furusho [Fur03] qui s'est appuyé sur des travaux de Lê, Murakami, Zagier et autres) assure que

$$Z(w)\,Z(w') = Z(w \sqcup\!\sqcup w')$$

pour tout couple (w, w') de mots, de sorte que la structure d'algèbre sur $\mathbb{Q}[\overline{Z}(w)]$ donnée par le produit de shuffle se transmet à $\mathbb{Q}[Z(w)]$. La formule (2.8) montre

2. Le produit de shuffle des mots est défini récursivement par $w \sqcup\!\sqcup 1 = 1 \sqcup\!\sqcup w = w$ et $s\,u \sqcup\!\sqcup t\,v = s\,(u \sqcup\!\sqcup t\,v) + t\,(s\,u \sqcup\!\sqcup v)$ pour $t, s \in \{x, y\}$.

3. Voir toutefois le début de la section 2.3 pour un cas particulier.

en particulier que $Z(x) = Z(y) = 0$ dans $\mathbb{Q}[Z(w)]$. L'espace dual de ce dernier s'identifie à un sous-espace de $\mathfrak{h}$ noté $\mathcal{SH}$.

Exemple 2.7. Considérons pour $n \geqslant 2$ le cas de l'élément $Z(y_1\, y_n) = Z(y\, x^{n-1} y)$ de $\mathbb{Q}[Z(w)]$, qui est le pendant formel de la somme divergente $\zeta(1, n)$ de profondeur 2. Par l'équation (2.8), on a

$$\begin{aligned} Z(y\, x^{n-1}\, y) &= \sum_{a=0}^{1} (-1)^a\, Z(\pi(y^a \sqcup\!\sqcup y^{1-a}\, x^{n-1}\, y)) \\ &= Z(\pi(y\, x^{n-1}\, y)) - Z(\pi(y \sqcup\!\sqcup x^{n-1}\, y)) \\ &= -\sum_{i=1}^{n-2} Z(x^i\, y\, x^{n-1-i}\, y) - 2\, Z(x^{n-1}\, y^2) \\ &= -\sum_{i=1}^{n-2} Z(y_{i+1}\, y_{n-i}) - 2\, Z(y_n\, y_1) \end{aligned}$$

ce qui correspond au nombre réel $-\sum_{i=1}^{n-2} \zeta(i+1, n-i) - 2\,\zeta(n, 1)$.

Bien que l'application horizontale soit clairement un isomorphisme, nous avons pris le parti de l'écrire comme une application de $\mathcal{SH}$ vers $\mathbb{Q}[Z(w)]$, et de même pour tous les autres niveaux du diagramme, pour la simple et bonne raison que décrire l'application dans ce sens est plus simple : si f appartient à l'un quelconque des espaces de la colonne de droite, on peut écrire $f = \sum a_w w \in \mathfrak{h}$, et il suffit alors de prendre l'image de l'élément $\check{f} = \sum a_w \overline{Z}(w)$ dans le quotient correspondant de la colonne de gauche.

L'espace situé un cran plus bas, $\overline{\mathcal{FZ}}$, est obtenu en prenant le quotient de $\mathbb{Q}[Z(w)]$ par les *relations de stuffle régularisées*

$$Z^*(u)\, Z^*(v) = Z^*(u * v) \tag{2.9}$$

pour tout couple (u, v) de mots se terminant en y, où l'application linéaire Z^* est définie au cas par cas en imposant que

$$\begin{cases} Z^*(v) = Z(v) & \text{lorsque } v \text{ est un mot convergent} \\ Z^*(y^n) & \text{provient de (2.10) ci-dessous} \\ Z^*(y^m v) = \displaystyle\sum_{r=0}^{m} Z^*(y^r) Z(y^{m-r} v) & \text{lorsque } v \text{ est un mot convergent,} \end{cases}$$

et les éléments $Z^*(y^n)$ sont donnés par la série formelle

$$\sum_{r \geqslant 0} Z^*(y^r)\, t^r = \exp \sum_{r \geqslant 2} \tfrac{(-1)^{r-1}}{r}\, Z(x^{r-1} y)\, t^r \in \mathbb{Q}[Z(w)][\![t]\!]. \tag{2.10}$$

Cette dernière série commence par

$$\exp(-\tfrac{1}{2} Z(xy)\, t^2 + \tfrac{1}{3} Z(x^2 y)\, t^3 + \cdots) = 1 - \tfrac{1}{2} Z(xy)\, t^2 + \tfrac{1}{3} Z(x^2 y)\, t^3 + \cdots$$

et l'on obtient par exemple les premières valeurs $Z^*(1) = 1$, $Z^*(y) = 0$, $Z^*(y^2) = -\frac{1}{2}Z(xy)$ et $Z^*(y^3) = \frac{1}{3}Z(x^2y)$, l'expression générale faisant intervenir des produits de shuffle.

En utilisant cette définition pour convertir les Z^* en des expressions algébriques en les symboles $Z(w)$ pour des mots w convergents, puis la règle de multiplication shuffle pour transformer chaque produit en une combinaison linéaire de $Z(w)$, l'équation (2.9) se traduit donc par un ensemble de relations linéaires entre les symboles convergents $Z(w) \in \mathbb{Q}[Z(w)]$, et l'espace $\overline{\mathcal{FZ}}$ est obtenu en prenant le quotient de $\mathbb{Q}[Z(w)]$ par ces relations linéaires. Nous noterons encore par abus $Z(w)$ l'image du même élément dans $\overline{\mathcal{FZ}}$.

Pour tout mot convergent $w = x^{r_1-1}y\cdots x^{r_k-1}y$ avec $r_1 > 1$, écrivons

$$Z(w) = Z(r_1, \ldots, r_k) \tag{2.11}$$

de manière à souligner l'équivalence entre la notation en x et y pour les multizêtas formels et la notation habituelle pour les multizêtas réels. Puisqu'il est bien connu que les multizêtas réels satisfont les relations de double mélange étendu, l'espace des multizêtas formels $\overline{\mathcal{FZ}}$ se surjette sur l'espace des multizêtas réels défini par (2.4), en envoyant simplement $Z(r_1, \ldots, r_k)$ sur $\zeta(r_1, \ldots, r_k)$.

L'espace $\mathcal{FZ}$ est le quotient de $\overline{\mathcal{FZ}}$ par l'idéal engendré par $Z(xy) = Z(2)$, et l'espace des *nouveaux multizêtas formels* $\mathfrak{nfz}$ est l'espace vectoriel obtenu en prenant le quotient de $\mathcal{FZ}$ par le sous-espace engendré par $\mathcal{FZ}_0 = \mathbb{Q}$ et par l'idéal $\mathcal{FZ}^2_{\geqslant 1}$ de tous les produits non triviaux (remarquer que chaque espace du diagramme est gradué par le poids).

L'espace $\mathfrak{nfz}$ est une cogèbre de Lie, comme l'a prouvé Goncharov [Gon05] qui l'a muni d'un cocrochet de Lie explicite, dual du crochet de Poisson. Son dual est l'algèbre de Lie $\mathfrak{ds}$ (une preuve complète de ce résultat élémentaire n'est pas facile à trouver dans la littérature, mais est par exemple donnée par [Car08, prop. 1.27]). Ainsi, les éléments de $\mathfrak{ds}$ coïncident avec les éléments primitifs du coproduit de $\mathcal{FZ}^\vee$, qui est lui-même la restriction du coproduit $\Delta_{ш}$ sur $\mathfrak{h}$. Du fait du théorème de Milnor-Moore (ou plutôt de l'un de ses corollaires, voir [CM08, th. 1.22]), puisque $\mathcal{FZ}$ est une algèbre de Hopf commutative connexe positivement graduée sur $\mathbb{Q}$ dont chaque partie graduée est de dimension finie, son dual $\mathcal{FZ}^\vee$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'ensemble de ses éléments primitifs ; ainsi $\mathcal{FZ}^\vee \simeq \mathscr{U}\mathfrak{ds}$.

Ceci achève la définition de tous les espaces de la colonne de gauche du diagramme, et, dualement, de ceux de la colonne de droite. Comme ces derniers sont tous des sous-espaces vectoriels de l'anneau $\mathfrak{h}$, ils peuvent être calculés explicitement en petit poids comme étant les orthogonaux des noyaux de chaque application quotient de la colonne de gauche. Par exemple, puisque $\langle Z(w), f\rangle = \langle f, w\rangle$, l'espace $\mathcal{SH}$ est constitué des polynômes $f(x, y)$ tels que, pour tout mot non convergent $w = y^r v x^s$, on ait

$$\langle f, w\rangle - \sum_{a=0}^{r}\sum_{b=0}^{s}(-1)^{a+b}\langle f, \pi(y^a ш y^{r-a}vx^{s-b} ш x^b\rangle = 0$$

et la dimension du sous-espace de poids n de $\mathcal{SH}$ vaut 2^{n-2}.

Comme on l'a vu pour $\mathfrak{ds}$ dans la section 2.1, les espaces de la colonne de droite sont tous munis d'une filtration par la profondeur obtenue en définissant la profondeur d'un polynôme f en x et y comme étant le nombre minimal de lettres y qui apparaissent avec un coefficient non nul dans les monômes de f.

Les espaces vectoriels du côté gauche du diagramme peuvent donc tous être munis des filtrations duales. Plus précisément, pour tout espace V à gauche, on note V^d le sous-espace de V orthogonal à $\check{V}^{d+1}$, avec $V^0 = 0$. On a alors

$$\check{V}_n^d/\check{V}_n^{d+1} \simeq V_n^d/V_n^{d-1}. \tag{2.12}$$

Par l'appariement $\langle Z(w), f\rangle = \langle f, w\rangle$, il est clair que si w est un mot convergent contenant $d-1$ lettres y et si f est un polynôme de profondeur supérieure à d, alors $\langle Z(w), f\rangle = 0$, et les filtrations par la profondeur sur les espaces de la colonne de gauche correspondent donc à la notion usuelle de filtration par la profondeur sur les multizêtas, pour laquelle la profondeur de $Z(w)$ est le nombre de y dans le mot convergent w.

Exemple 2.8. Détaillons ces définitions dans le cas du polynôme f_3 construit dans la sous-section 2.1.2, qui est un élément de $\mathfrak{ds}$ et en tant que tel se situe en bas à droite du diagramme précédent. En tant que polynôme de Lie, il s'écrit $f_3 = [x,[x,y]] - [y,[x,y]]$; dans l'algèbre associative $\mathfrak{h}$ en haut à droite du diagramme, il prend donc la forme

$$f_3 = x^2y - 2\,xyx + xy^2 + yx^2 - 2\,yxy + y^2x.$$

Passons maintenant au coin supérieur gauche : par l'isomorphisme de dualité, l'élément correspondant est simplement

$$\overline{Z}(f_3) = \overline{Z}(x^2y) - 2\,\overline{Z}(xyx) + \overline{Z}(xy^2) + \overline{Z}(yx^2) - 2\,\overline{Z}(yxy) + \overline{Z}(y^2x).$$

On applique maintenant l'équation de régularisation (2.8) pour choisir un représentant dans $\mathbb{Q}[Z(w)]$ de ce dernier élément ; on aboutit aux régularisations

$$\begin{aligned} Z(xyx) &= -2\,Z(x^2y), \quad Z(yx^2) = Z(x^2y),\\ Z(yxy) &= -2\,Z(xy^2), \quad Z(y^2\,x) = Z(xy^2) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$Z(f_3) = 6\,Z(x^2y) + 6\,Z(xy^2) \quad \text{dans } \mathbb{Q}[Z(w)].$$

Descendons à présent à $\overline{\mathcal{FZ}}$. Prenant $u = x\,y$ et $v = y$, on voit que l'équation (2.9) se traduit par la relation $Z(xy^2) - Z(x^2y) = 0$ dans $\overline{\mathcal{FZ}}$, et par conséquent

$$Z(f_3) = 12\,Z(x^2y) \quad \text{dans } \overline{\mathcal{FZ}}.$$

Cet élément ne peut être plus réduit, puisque la valeur réelle qui lui est associée est $12\,\zeta(3)$, qui est non nulle car strictement positive. Nous pouvons donc finalement affirmer que

$$f_3 \text{ correspond à l'image de } 12\,Z(3) \text{ dans } \mathfrak{nfz}.$$

2.3 Le résultat principal

Le résultat principal de cet article montre que les relations du type (2.6), qui sont valides dans l'espace $\overline{\mathcal{FZ}}$ des multizêtas formels, peut être directement déduit en poids pair $k \geqslant 12$ des relations modulaires du type (2.2) dans $\mathfrak{ds}$, et vice versa :

Théorème 2.9. *Il existe une bijection naturelle entre les relations du théorème 2.6 entre zêtas doubles et les relations du théorème 2.5 entre crochets de Poisson de polynômes de Lie.*

Le reste de cette section est consacré à la preuve de ce résultat. La stratégie consiste à montrer que les relations en question peuvent s'interpréter comme des éléments du noyau d'une certaine matrice ou de sa transposée.

Afin de prouver le théorème 2.9, nous commençons par reformuler le résultat principal de [Sch06] comme suit, montrant qu'il se généralise en fait à l'algèbre enveloppante $\mathscr{U}\mathfrak{ds}$, dans laquelle la multiplication sera notée $\odot$. La formule explicite exprimant le produit de deux éléments f et g de $\mathscr{U}\mathfrak{ds}$ n'est pas simple, mais dans le cas où f appartient à $\mathfrak{ds}$, elle se réduit à

$$f \odot g = fg + D_f(g) \tag{2.13}$$

où D_f est la dérivation définie dans le paragraphe 2.1.2.

Proposition 2.10. *Soit $k \geqslant 12$ un entier pair, et fixons un choix d'éléments f_n de profondeur 1 dans $\mathfrak{ds}_n$ pour tout entier impair $n \geqslant 3$. Pour $i \in [\![1, \frac{k-4}{2}]\!]$, posons*

$$\begin{cases} w_i = x^{2i} y\, x^{k-2-2i} y, \\ Z_i = Z(2i+1, k-2i-1) = Z(w_i) \in \overline{\mathcal{FZ}}, \\ g_i = f_{2i+1} \odot f_{k-2i-1} \in \mathfrak{h}. \end{cases}$$

Soit A la matrice carrée de taille $(k-4)/2$ définie par

$$A_{ij} = \langle Z_i, g_j \rangle \qquad \textit{pour} \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant \tfrac{k-4}{2}.$$

Il existe un isomorphisme $W_k^{\natural} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} A$ donné par

$$\sum_{i=1}^{[\frac{k-4}{4}]} a_i \left(X^{2i} Y^{k-2-2i} - X^{k-2-2i} Y^{2i}\right) \longmapsto (a_1, \ldots, a_{\frac{k-4}{2}}). \tag{2.14}$$

Démonstration. Le noyau de A est l'ensemble des vecteurs colonne tels que la combinaison linéaire des g_i correspondante soit orthogonale aux Z_i. Les résultats de l'article [GKZ06] assurent qu'en poids pair k, les zêtas doubles $Z(r,s)$ avec r et s impairs engendrent linéairement le sous-espace $\overline{\mathcal{FZ}}_k^2$ de $\overline{\mathcal{FZ}}_k$ (théorème 2, en utilisant le fait que $\overline{\mathcal{FZ}}_k^2$ est un quotient de $\mathcal{D}_k$). Par conséquent, comme les Z_i et $Z(k)$ engendrent le sous-espace $\overline{\mathcal{FZ}}_k^2$ et que $Z(k)$ est automatiquement

orthogonal à tous les g_i puisque ces derniers sont de profondeur 2, cela signifie que le noyau de A n'est autre que l'ensemble des combinaisons linéaires

$$\sum_{i=1}^{\frac{k-4}{2}} a_i\, g_i \tag{2.15}$$

qui sont nulles modulo profondeur 3. Il suit de [Sch06] que l'application linéaire définie par l'équation (2.14) fournit une injection $W_k^\natural \hookrightarrow \operatorname{Ker} A$; du fait de l'identité $P(X) = -X^{k-2}P(\frac{1}{X})$ vérifiée par les éléments de $W_k^\natural$, on a

$$a_i = -a_{\frac{k-2-2i}{2}}$$

pour $i \in [\![1, (k-4)/2]\!]$, et toutes les combinaisons linéaires des g_i provenant d'éléments de $W_k^\natural$ sont en fait des relations linéaires entre les différences $g_i - g_{(k-2i-2)/2} = f_{2i+1} \odot f_{k-2i-1} - f_{k-2i-1} \odot f_{2i+1} = \{f_{2i+1}, f_{k-2i-1}\}$. Puisqu'il est prouvé dans [Sch06] qu'il n'existe pas d'autres relations linéaires entre ces derniers crochets, il ne reste plus pour démontrer la proposition que de vérifier qu'il ne peut exister de combinaison linéaire de la forme (2.15) qui soit nulle modulo profondeur 3 et qui ne vérifie pas $a_i = -a_{(k-2i-2)/2}$ pour tout i.

Pour ce faire, il est commode de calculer les coefficients de la matrice A explicitement, ce qui n'est pas difficile vue l'expression (2.13) de la multiplication $\odot$. Comme les Z_i sont de profondeur 2, le produit scalaire recherché vaut

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \langle Z(x^{2i}yx^{k-2-2i}y), f_{2j+1} \odot f_{k-2j-1}\rangle \\ &= \langle Z(x^{2i}yx^{k-2-2i}y), \operatorname{ad}_x^{2j}(y)\, \operatorname{ad}_x^{k-2-2j}(y) + D_{\operatorname{ad}_x^{2j}(y)}(\operatorname{ad}_x^{k-2-2j}(y))\rangle \\ &= \langle Z(x^{2i}yx^{k-2-2i}y), \operatorname{ad}_x^{2j}(y) \operatorname{ad}_x^{k-2-2j}(y) + \operatorname{ad}_x^{k-2-2j}([y, \operatorname{ad}_x^{2j}(y)])\rangle \end{aligned}$$

d'après les définitions de D et $\odot$. De ce fait, en calculant explicitement les coefficients des monômes des crochets de Lie, on trouve

$$A_{ij} = \binom{2j}{2i} - \binom{2j}{k-2-2i} + \delta_{i+j}^{\frac{k-2}{2}}$$

où δ est le symbole de Kronecker.

Soit S la matrice carrée de taille $(k-4)/2$ ayant des -1 le long de l'antidiagonale, de sorte que $S^2 = I$. Effectuons un changement de base vers la base de vecteurs propres de S que voici :

$$\begin{aligned} v_j &= {}^t(\underbrace{0,\dots,0}_{j-1}, 1, 0, \dots, 0, 1, \underbrace{0,\dots,0}_{j-1}) && \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant \left[\tfrac{k-4}{4}\right] \\ w_0 &= {}^t(\underbrace{0,\dots,0}_{(k-6)/4}, 1, \underbrace{0,\dots,0}_{(k-6)/4}) && \text{si } k \equiv 2\ [4] \\ w_j &= {}^t(\underbrace{0,\dots,0}_{j-1}, -1, 0, \dots, 0, 1, \underbrace{0,\dots,0}_{j-1}) && \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant \left[\tfrac{k-4}{4}\right] \end{aligned}$$

la valeur propre associée à v_j et w_0 (resp. w_j pour $j \geqslant 1$) étant -1 (resp. 1).

Soit T la matrice dont les colonnes sont $v_1, \dots, v_{[(k-4)/4]}, w_0, w_1, \dots, w_{[(k-4)/4]}$ dans cet ordre (en omettant w_0 si $k \equiv 0$ [4]). Pour montrer que tout vecteur du noyau de A est de la forme ${}^t(a_1, a_2, \dots, -a_2, -a_1)$, utilisons T pour effectuer le changement de base annoncé depuis la base standard vers celle des v_i et w_j, puis prouvons le résultat équivalent selon lequel le noyau de la matrice $B = T^{-1}AT$ est inclus dans le sous-espace engendré par les $[(k-4)/4]$ derniers vecteurs de la base standard.

Ce résultat est une conséquence immédiate de l'assertion suivante, qu'il nous suffira donc de démontrer.

Fait. *La matrice $B = T^{-1}AT$ est une matrice par blocs de la forme*

$$B = T^{-1}AT = \left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ U & V \end{smallmatrix}\right), \tag{2.16}$$

où les quatre blocs sont de taille $\frac{k-4}{4} \times \frac{k-4}{4}$ si $k \equiv 0$ [4], tandis que si $k \equiv 2$ [4], le bloc identité est de dimension $\frac{k-2}{4} \times \frac{k-2}{4}$ et le bloc nul de dimension $\frac{k-2}{4} \times \frac{k-6}{4}$.

Preuve. Le calcul des coefficients de la matrice B s'avère particulièrement facile, puisque tous les coefficients binomiaux apparaissant dans les A_{ij} se compensent, de sorte qu'il s'agit simplement de vérifier la contribution des symboles de Kronecker ; nous omettrons l'indice supérieur de ces derniers puisqu'il est toujours égal à $\frac{k-2}{2}$.

Commençons par supposer que $k \equiv 0$ [4]. Pour le bloc supérieur gauche avec $1 \leqslant i, j \leqslant \frac{k-4}{4}$, on a

$$\begin{aligned} & B_{ij} = \tfrac{1}{2}(A_{ij} + A_{i,\frac{k-2}{2}-j} + A_{\frac{k-2}{2}-i,j} + A_{\frac{k-2}{2}-i,\frac{k-2}{2}-j}), \\ \text{donc} \quad & B_{ii} = \tfrac{1}{2}(\delta_{2i} + 2\delta_{\frac{k-2}{2}} + \delta_{k-2-2i}) = 1 \\ \text{et} \quad & B_{ij} = \tfrac{1}{2}(\delta_{i+j} + \delta_{\frac{k-2}{2}+i-j} + \delta_{\frac{k-2}{2}-i+j} + \delta_{k-2-i-j}) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j, \end{aligned}$$

donc ce bloc est effectivement l'identité.

Pour le bloc supérieur droit, pour lequel $1 \leqslant i \leqslant \frac{k-4}{4}$ et $\frac{k-2}{4} \leqslant j \leqslant \frac{k-4}{2}$, on a

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \tfrac{1}{2}(-A_{ij} + A_{i,\frac{k-2}{2}-j} - A_{\frac{k-2}{2}-i,j} + A_{\frac{k-2}{2}-i,\frac{k-2}{2}-j}) \\ &= \tfrac{1}{2}(-\delta_{i+j} + \delta_{\frac{k-2}{2}+i-j} - \delta_{\frac{k-2}{2}-i+j} + \delta_{k-2-i-j}) = 0, \end{aligned}$$

puisque quand $i + j = \frac{k-2}{2}$ les premier et dernier symboles de Kronecker se compensent, tandis que si $i = j$ ce sont ceux du milieu qui se compensent. donc le bloc supérieur droit est nul, ce qui termine la preuve dans le cas $k \equiv 0$ [4].

Le calcul précédent reste valide dans le cas où $k \equiv 2$ [4], mais il n'est pas complet ; il montre seulement que le bloc supérieur gauche de taille $\frac{k-6}{4} \times \frac{k-6}{4}$ est l'identité et que le bloc supérieur droit de taille $\frac{k-6}{4} \times \frac{k-2}{4}$ est nul, mais il reste encore à déterminer la ligne d'indice $\frac{k-2}{4}$. On a

$$B_{\frac{k-2}{4},j} = \begin{cases} A_{\frac{k-2}{4},j} + A_{\frac{k-2}{4},\frac{k-2}{2}-j} & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant \frac{k-6}{4} \\ A_{\frac{k-2}{4},\frac{k-2}{4}} & \text{si } j = \frac{k-2}{4} \\ -A_{\frac{k-2}{4},j} + A_{\frac{k-2}{4},\frac{k-2}{2}-j} & \text{si } \frac{k+2}{4} \leqslant j \leqslant \frac{k-4}{2}. \end{cases}$$

Les coefficients binomiaux se compensent à nouveau, donc cette dernière expression devient

$$B_{\frac{k-2}{4},j} = \begin{cases} \delta_{\frac{k-2}{4}+j} + \delta_{\frac{3k-6}{4}-j} & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant \frac{k-6}{4} \\ \delta_{\frac{k-2}{2}} & \text{si } j = \frac{k-2}{4} \\ -\delta_{\frac{k-2}{4}+j} + \delta_{\frac{3k-6}{4}-j} & \text{si } \frac{k+2}{4} \leqslant j \leqslant \frac{k-4}{2}, \end{cases}$$

tous ces termes étant nuls sauf quand $j = \frac{k-2}{4}$, auquel cas le terme en question vaut 1, ce qui achève la preuve des résultats annoncés. □

Cette proposition montre qu'il n'y a d'autre relation linéaire modulo profondeur 3 entre les éléments $f_{2i+1} \odot f_{k-2i-1}$ que les relations modulaires déjà connues entre crochets de Poisson $\{f_{2i+1}, f_{k-2i-1}\}$, et donc que le noyau de A est constitué exactement de vecteurs dont les coefficients sont ceux de polynômes de périodes $P \in W_k^\natural$.

Exemple 2.11. En poids $k = 12$, les matrices A et $T^{-1}AT$ sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 & 28 \\ 0 & 1 & 15 & 42 \\ 0 & 0 & -14 & -42 \\ 0 & -6 & -15 & -27 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -28 & -21 & -27 & -9 \\ -42 & -15 & -42 & -14 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de A est engendré par le vecteur ${}^t(1, -3, 3, -1)$ correspondant à l'unique relation linéaire modulo profondeur 3 entre $f_3 \odot f_9$, $f_5 \odot f_7$, $f_7 \odot f_5$ et $f_9 \odot f_3$, à savoir

$$f_3 \odot f_9 - 3\, f_5 \odot f_7 + 3\, f_7 \odot f_5 - f_9 \odot f_3 = \{f_3, f_9\} - 3\,\{f_5, f_7\} \equiv 0 \text{ [prof. 3]}.$$

On voit déjà dans cet exemple la façon dont les « relations GKZ » entre zêtas doubles impairs apparaissent dans cette situation. En effet, comme on l'a vu, le noyau de A est l'ensemble des relations linéaires entre les générateurs de $(\overline{\mathcal{FZ}}^\vee)^2_{12}/(\overline{\mathcal{FZ}}^\vee)^3_{12}$. Dualement, le noyau de la transposée ${}^tA$ est donc l'ensemble des relations linéaires entre les zêtas doubles impairs $Z(3,9)$, $Z(5,7)$, $Z(7,5)$, $Z(9,3)$ dans le dual $\overline{\mathcal{FZ}}^2_{12}/\overline{\mathcal{FZ}}^1_{12}$, qui correspondent aux combinaisons linéaires des zêtas doubles impairs proportionnelles à $Z(12)$. Le noyau de ${}^tA$ est engendré par le vecteur ${}^t(0, 168, 150, 28)$; on peut donc directement affirmer que

$$168\, Z(5,7) + 150\, Z(7,5) + 28\, Z(9,3) \equiv 0 \ [Z(12)],$$

retrouvant donc la relation (2.7) à l'exception du coefficient devant $Z(12)$ (le coefficient devant le terme $Z(k)$ en poids pair général k est calculé dans [GKZ06]).

Cet argument se généralise en l'assertion suivante, qui est au cœur de l'équivalence des relations entre zêtas doubles et des relations modulaires dans l'algèbre de double mélange.

Corollaire 2.12. *Pour tout $k \geqslant 12$ pair, l'espace $W_k^\natural$ des polynômes de périodes tronqués de poids k est en bijection avec le noyau de la matrice A, lui-même*

en bijection avec l'ensemble des relations linéaires entre les crochets de Poisson $\{f_{2i+1}, f_{k-2i-1}\}$. *Ainsi le noyau de la transposée* ${}^tA$ *est de même dimension que* $W_k^\natural$, *et est en bijection avec l'ensemble des relations linéaires entre les zêtas doubles impairs* $Z(r,s)$ *et* $Z(k)$.

Démonstration. Puisque les éléments de $\operatorname{Ker} A$ correspondent aux relations linéaires entre les g_i vus comme générateurs de $(\overline{\mathcal{FZ}}^\vee)^2_k/(\overline{\mathcal{FZ}}^\vee)^3_k$, les éléments de $\operatorname{Ker}{}^tA$ correspondent aux relations linéaires entre les Z_i vus comme générateurs du dual, qui est $\overline{\mathcal{FZ}}^2_k/\overline{\mathcal{FZ}}^1_k$ par (2.12). □

Le résultat de [GKZ06] cité dans le théorème 2.6 donne cependant plus que la simple existence d'un espace de relations linéaires entre zêtas doubles et simples de dimension égale à celle de $W_k^\natural$; il affirme également que les coefficients dans ces relations sont essentiellement les coefficients des polynômes de périodes après le changement de variables $X \leftarrow X + Y$. Nous prouvons à présent que ce résultat peut lui aussi être déduit de l'étude de la matrice A, qui possède une propriété de symétrie particulière prouvée dans la proposition ci-après.

Proposition 2.13. *Soit* $k \geqslant 12$ *un entier pair, et définissons des matrices carrées* D *et* B *de taille* $\frac{k-4}{2}$ *par*

$$D_{ij} = \binom{k-2}{2i}^{-1} \delta_i^j, \qquad B_{ij} = \binom{2j}{2i}.$$

Alors ${}^tADB$ *est symétrique.*

Démonstration. Le coefficient d'indice (i,j) de ${}^tADB$ est donné par

$$\sum_{r=1}^{\frac{k-4}{2}} \left(\binom{2i}{2r} - \binom{2i}{k-2-2r} + \delta_{i+r}^{\frac{k-2}{2}} \right) \cdot \binom{k-2}{2r}^{-1} \cdot \binom{2j}{2r}$$
$$= \sum_{r=1}^{\frac{k-4}{2}} \frac{\binom{2i}{2r}\binom{2j}{2r}}{\binom{k-2}{2r}} - \sum_{r=1}^{\frac{k-4}{2}} \frac{\binom{2i}{k-2-2r}\binom{2j}{2r}}{\binom{k-2}{2r}} + \frac{\binom{2j}{k-2-2i}}{\binom{k-2}{k-2-2i}}.$$

Le terme de gauche est clairement symétrique et i et j, et de même pour le terme du milieu, en utilisant le changement d'indice $r \leftarrow \frac{k-2}{2} - r$. Pour ce qui est du dernier terme, il est égal à

$$\frac{(2i)\,!\,(2j)\,!}{(k-2)\,!\,(2i+2j-k+2)\,!}$$

et est donc aussi symétrique en i et j, ce qui conclut la preuve. □

Exemple 2.14. Soit A la matrice en poids 12 donnée plus haut. Alors

$${}^tADB = {}^tBDA = \frac{1}{630}\begin{pmatrix} 14 & 84 & 210 & 392 \\ 84 & 507 & 1305 & 2478 \\ 210 & 1305 & 3783 & 7644 \\ 392 & 2478 & 7644 & 15890 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de cette matrice (et de sa transposée) est bien sûr encore engendré par le même vecteur ${}^t(1,-3,3,-1)$ que le noyau de A.

Proposition 2.15. *Soient $k \geqslant 12$ un entier pair et ${}^t(a_1, a_2, \ldots, -a_2, -a_1)$ un élément de* $\operatorname{Ker} A$. *Posons*

$$P(X,Y) = \sum_{i=1}^{[\frac{k-4}{4}]} a_i \left(X^{2i}Y^{k-2-2i} - X^{k-2-2i}Y^{2i}\right)$$

et définissons les coefficients $q_{r,k-r}$ pour $r \in [\![1, k-3]\!]$ par

$$P(X+Y,Y) = \sum_{r=1}^{k-3} \binom{k-2}{r-1} q_{r,k-r}\, X^{r-1}Y^{k-r-1}.$$

Alors le vecteur ${}^t(q_{3,k-3}, \ldots, q_{k-3,3})$ (d'indices impairs) appartient au noyau de ${}^tA$, et ce dernier noyau est en fait exactement l'ensemble de ces vecteurs.

Démonstration. Commençons par calculer $q_{r,k-r}$ en termes des a_i. On trouve

$$\begin{aligned}
P(X+Y,Y) &= \sum_{i=1}^{[\frac{k-4}{4}]} a_i \left((X+Y)^{2i}Y^{k-2-2i} - (X+Y)^{k-2-2i}Y^{2i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{[\frac{k-4}{4}]} a_i \left(\sum_{r=1}^{2i} \binom{2i}{r} X^r Y^{k-2-r} - \sum_{r=1}^{k-2-2i} \binom{k-2-2i}{r} X^r Y^{k-2-r}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{[\frac{k-4}{4}]} a_i \left(\sum_{r=1}^{k-2} \binom{2i}{r} X^r Y^{k-r-2} - \sum_{r=1}^{k-2} \binom{k-2-2i}{r} X^r Y^{k-2-r}\right)
\end{aligned}$$

puisqu'on peut librement remplacer les bornes supérieures des sommes sur r par des bornes plus élevées, les coefficients binomiaux correspondant devenant simplement nuls. On peut alors intervertir l'ordre de sommation et écrire

$$P(X+Y,Y) = \sum_{r=1}^{k-2} \sum_{i=1}^{[\frac{k-4}{4}]} a_i \left(\binom{2i}{r} - \binom{k-2-2i}{r}\right) X^r Y^{k-r-2}.$$

On cherche à déterminer le coefficient $\binom{k-2}{r-1} q_{r,k-r}$ du monôme $X^{r-1}Y^{k-r-1}$ quand l'entier $r-1$ est pair ; on écrit $r-1 = 2j$, et le coefficient de $X^{2j}Y^{k-2-2j}$ est alors donné par

$$\binom{k-2}{2j} q_{2j+1,k-2-2j} = \sum_{i=1}^{[\frac{k-4}{4}]} a_i \left(\binom{2i}{2j} - \binom{k-2-2i}{2j}\right), \quad 1 \leqslant j \leqslant \tfrac{k-4}{2}.$$

À présent, remarquons que puisque ${}^tADB$ est symétrique d'après la proposition 2.13, on a les égalités $\operatorname{Ker}{}^tADB = \operatorname{Ker}{}^tBDA = \operatorname{Ker} A$. Donc, puisque D et B sont toutes deux inversibles, on a $\operatorname{Ker}{}^tA = DB \operatorname{Ker} A$. Mais par les définitions de D et B, le j-ième coefficient du vecteur $DB\,{}^t(a_1, \ldots, -a_1)$ est égal à $q_{2j+1,k-1-2j}$, tout l'intérêt de la matrice DB étant justement d'effectuer le changement de variable depuis les a_i vers les $q_{r,k-r}$. Ceci conclut la preuve. □

Puisqu'on a vu plus haut que les éléments du noyau de ${}^tA$ fournissent les coefficients des combinaisons linéaires de zêtas doubles impairs nulles modulo $Z(k)$, on retrouve l'énoncé du théorème 2.6 (le résultat de [GKZ06]) dans l'algèbre des multizêtas formels $\overline{\mathcal{FZ}}$, et donc aussi pour les multizêtas par passage au quotient, comme corollaire de ces propositions :

Corollaire 2.16 (théorème GKZ)**.** *Soient $k \geqslant 12$ un entier pair et $P \in W_k^\natural$ un polynôme de périodes homogène de poids k, et écrivons*

$$P(X+Y,Y) = \sum_{r=1}^{k-3} \binom{k-2}{r-1} q_{r,k-r}\, X^{r-1}Y^{k-r-1}.$$

Alors la combinaison linéaire

$$\sum_{\substack{r=3 \\ r\ impair}}^{k-3} q_{r,k-r}\, Z(r,k-r)$$

est proportionnel à $Z(k)$ dans $\overline{\mathcal{FZ}}$, et réciproquement.

Remarque. Des variantes de la matrice A ont été introduites indépendamment dans [Kan04] et [Bro13], et une généralisation des résultats de ce chapitre, s'appuyant sur des techniques similaires, est développée dans [Tas14].

Chapitre 3

Sur des relations dans l'algèbre de Lie fondamentale des motifs elliptiques mixtes

3.1 Introduction

3.1.1 Motivation et contenu

Dans un texte inédit [HM12], Hain et Matsumoto définissent une catégorie tannakienne MEM de motifs elliptiques mixtes, avec entre autres comme objectif de mieux comprendre les relations apparaissant entre valeurs zêta doubles, ainsi que certaines congruences observées par Ihara dans une algèbre de Lie construite à partir du groupe fondamental unipotent de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Les éléments du groupe fondamental de la catégorie MEM satisfont des relations provenant des formes modulaires, voir par exemple [Hai09] pour une explication cohomologique de ce phénomène.

L'algèbre de Lie du groupe fondamental en question est un produit semi-direct $\mathfrak{u} \rtimes \operatorname{Lie} \pi_1(\mathsf{MTM})$, où le facteur de droite désigne l'algèbre de Lie du radical pro-unipotent du groupe fondamental de la catégorie des motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{u}$ est une algèbre de Lie graduée par le poids, filtrée par la profondeur, reliée à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Hain et Matsumoto ont construit une représentation $\mathfrak{u} \to \operatorname{Der} \operatorname{Lie}[a, b]$ dont l'image notée $\mathscr{E}$ — elle aussi graduée et filtrée — a été étudiée par Aaron Pollack [Pol09], qui a démontré un résultat sur les relations dans un certain quotient de $\mathscr{E}$, et donné plusieurs exemples de relations en petit poids dans $\mathscr{E}$ elle-même menant naturellement à une conjecture sur l'existence de telles relations en tout poids.

Nous donnons ici un énoncé précis de cette conjecture et prouvons que celle-ci est vraie dans le sous-espace de profondeur 3 de $\mathscr{E}$. Les moyens employés relèvent de la combinatoire des algèbres de Lie libres, et un rôle non négligeable est joué par des techniques développées par Écalle pour étudier les symétries de certains polynômes non commutatifs. Par ailleurs, si les résultats du présent chapitre

aident à mieux comprendre les relations dans $\mathscr{E}$, la question de savoir si celles-ci se relèvent ou non à des relations motiviques dans $\mathfrak{u}$ est encore hors de portée.

3.1.2 Notations générales

Dans toute la suite, on manipule diverses algèbres de Lie définies sur $\mathbb{Q}$, et notamment des algèbres de Lie libres à deux et trois générateurs, notées $\mathrm{Lie}[a,b]$, $\mathrm{Lie}[a,c]$ et $\mathrm{Lie}[a,b,c]$, vues comme des sous-espaces vectoriels des algèbres associatives $\mathbb{Q}\langle a,b\rangle$ et $\mathbb{Q}\langle a,b,c\rangle$. On se sert aussi d'algèbres de Lie libres à une infinité dénombrable de générateurs x_i^j et $\widetilde{x}_i^j$ pour i et j entiers.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, on emploie la notation $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ pour désigner l'espace des dérivations de $\mathfrak{g}$ dans elle-même, muni du crochet de Lie défini par $[D_1,D_2] = D_1\circ D_2 - D_2\circ D_1$. De plus, si x est un élément de $\mathfrak{g}$, on désigne par $y\mapsto x\cdot y$ l'action adjointe de x sur $\mathfrak{g}$, qui s'étend à une action notée $\cdot : \mathscr{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$ elle-même. On note ainsi $\alpha_i = a^{i-1}\cdot b = \mathrm{ad}_a^{i-1}(b)\in\mathrm{Lie}[a,b]$, et $\widetilde{\alpha}_i = a^{i-2}\cdot c = \mathrm{ad}_a^{i-2}(c)\in\mathrm{Lie}[a,c]$.

L'algèbre $\mathrm{Lie}[a,b]$ est graduée par le *poids*, les générateurs a et b étant par définition de poids 1. Cette graduation se transmet à l'algèbre $\mathrm{Der}\,\mathrm{Lie}[a,b]$; on dit ainsi qu'une dérivation est de poids k si l'image de chacun des générateurs est de poids $k+1$. Cette dernière algèbre est aussi filtrée : par définition, un polynôme en a et b est de *profondeur* d si chacun de ses monômes possède au moins d lettres b, et on dit qu'une dérivation D est de profondeur d si $D(a)$ est de profondeur d et $D(b)$ de profondeur $d+1$.

3.2 L'algèbre $\mathscr{E}$

3.2.1 Description comme algèbre de dérivations

L'algèbre $\mathfrak{u}$, étudiée notamment par Hain–Matsumoto [HM12], Pollack [Pol09] et Enriquez [Enr12], agit par dérivations sur l'algèbre libre $\mathrm{Lie}[a,b]$, et la description explicite de l'image $\mathscr{E}$ de cette représentation repose sur les dérivations ε_{2i} définies pour i entier naturel par

$$\varepsilon_{2i}(a) = a^{2i}\cdot b \quad\text{et}\quad \varepsilon_{2i}(b) = \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\,[a^j\cdot b, a^{2i-1-j}\cdot b] \tag{3.1}$$

qui vérifient automatiquement $\varepsilon_{2i}([a,b]) = 0$. On peut alors définir $\mathscr{E}$ comme l'image du morphisme de $\mathrm{Lie}[x_i^j \mid (i,j)\in 2\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}]$ dans $\mathrm{Der}\,\mathrm{Lie}[a,b]$ envoyant x_i^j sur $\varepsilon_0^j\cdot\varepsilon_i$, ou en d'autres termes comme la sous-algèbre de dérivations de $\mathrm{Lie}[a,b]$ engendrée comme algèbre de Lie par les $\varepsilon_0^j\cdot\varepsilon_i$:

$$\mathscr{E} = \langle \varepsilon_0^j\cdot\varepsilon_i \mid (i,j)\in 2\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}\rangle \subset \mathrm{Der}\,\mathrm{Lie}[a,b]. \tag{3.2}$$

Les relations que vérifient ces dérivations sont plus complexes qu'il n'y paraît, et font l'objet de l'article [Pol09]. Nous nous intéressons ici aux relations entre les éléments de la forme $[\varepsilon_{2i},[\varepsilon_0,\varepsilon_{2j}]]$ et $[\varepsilon_{2i},[\varepsilon_{2j},\varepsilon_{2k}]]$ dans $\mathscr{E}$, avec i, j et k strictement

positifs. Remarquons au passage que la dérivation ε_2 commute à toutes les autres et ne sera donc pas considérée.

L'algèbre $\mathscr{E}$ est munie d'une action de $\mathfrak{sl}_2$ ainsi que d'une filtration notée Θ [Pol09, p. 5-7], que l'on peut entre autres définir comme la filtration induite par la filtration centrale descendante de la sous-algèbre de $\mathrm{Lie}[a,b]$ engendrée par les $w \cdot [a,b]$ avec $w \in \mathbb{Q}\langle a,b\rangle$. Elle possède une filtration supplémentaire : par définition, un élément $P(\varepsilon_0, \varepsilon_2, \ldots)$ de $\mathscr{E}$ est de *ε-profondeur* supérieure à d si chacun des monômes de P a au moins d indices non nuls.

Une façon de formuler le théorème principal de [Pol09] est alors la suivante. Pour tout triplet (p,q,d) d'entiers supérieurs à 2 avec p et q pairs, posons

$$h^d_{p,q} = \sum_{i+j=d-2} (-1)^i \tfrac{(d-2)!}{\binom{p}{i}\binom{q}{j}} [\varepsilon_0^i \cdot \varepsilon_{p+2}, \varepsilon_0^j \cdot \varepsilon_{q+2}] \tag{3.3}$$

qui apparaît comme vecteur de plus haut poids (au sens de [Ser66, ch. IV]) dans le $\mathfrak{sl}_2$-module $\mathscr{E}$. Le théorème principal de Pollack consiste à identifier les relations de ε-profondeur 2 dans le quotient $\mathscr{E}/\Theta^3\mathscr{E}$:

Théorème 3.1 ([Pol09], th. 2)**.** *Une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{E}$ de la forme $[\varepsilon_0^i \cdot \varepsilon_{p+2}, \varepsilon_0^j \cdot \varepsilon_{q+2}]$ qui soit de plus haut poids pour $\mathfrak{sl}_2$, de poids n et de profondeur d appartient à $\Theta^3\mathscr{E}$ si et seulement si elle est de la forme $\mathrm{R}_{f,d} = \sum_{p+q=n-4} \langle P, X^{p-d+2}\rangle\, h^d_{p,q}$, où P est le polynôme de périodes de même parité que d d'une forme modulaire f de poids $n-2d+2$.*

On observe par exemple les relations

$$\begin{aligned} & \mathrm{R}_{\Delta,2} = h^2_{2,8} - 3\,h^2_{4,6} \equiv 0 \ [\Theta^3\mathscr{E}] \\ \text{et} \quad & \mathrm{R}_{\Delta,3} = 4\,h^3_{2,10} - 25\,h^3_{4,8} + 21\,h^3_{6,6} \equiv 0 \ [\Theta^3\mathscr{E}] \end{aligned}$$

qui correspondent respectivement aux périodes paires et impaires de la forme modulaire Δ de Ramanujan.

Grâce au théorème 3.1, les périodes des formes modulaires donnent donc lieu, comme dans plusieurs cadres similaires [Iha02, Sch06, HM12, Bro13], à des relations dans $\mathscr{E}/\Theta^3\mathscr{E}$. Une question naturelle soulevée par Pollack est la suivante : ces relations se relèvent-elles à de « vraies » relations dans $\mathscr{E}$? Le calcul montre que ce n'est en général pas le cas pour les relations provenant des séries d'Eisenstein pour d pair : par exemple, la relation $h^{d+2}_{d,n+d-2} \equiv 0\ [\Theta^3\mathscr{E}]$ provenant de la série E_{n+4} ne se relève pas à une identité dans $\mathscr{E}$. Cependant, Pollack remarque que les relations provenant de formes *paraboliques* semblent se relever à des relations dans $\mathscr{E}$; par exemple, la relation $\mathrm{R}_{\Delta,3} \equiv 0\ [\Theta^3\mathscr{E}]$ admet le relèvement

$$4\,h^3_{2,10} - 25\,h^3_{4,8} + 21\,h^3_{6,6} = -\tfrac{345}{8}[\varepsilon_6,[\varepsilon_6,\varepsilon_4]] + \tfrac{231}{20}[\varepsilon_4,[\varepsilon_8,\varepsilon_2]]. \tag{3.4}$$

On peut donc énoncer la question de Pollack sous la forme suivante.

Conjecture 3.2. *Soient d et k deux entiers et f une forme modulaire de poids k pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Alors il existe une relation dans $\mathscr{E}$ exprimant $R_{f,d}$ comme une combinaison linéaire d'éléments de ε-profondeur strictement supérieure à 2 si et seulement si f est une forme parabolique.*

L'objectif du présent chapitre est de prouver cette conjecture lorsque $d = 3$.

3.2.2 Changement de groupe fondamental

Un ingrédient principal de la preuve consiste à donner un rôle privilégié à l'élément $[a, b]$ en travaillant dans l'algèbre $\mathrm{Lie}[a, b, c]$, qui se projette sur $\mathrm{Lie}[a, b]$ par $c \mapsto [a, b]$. L'idée est issue de la topologie ; l'injection $\mathrm{Lie}[a, c] \simeq \mathrm{Lie}[a, [a, b]] \hookrightarrow \mathrm{Lie}[a, b]$ provient, via les groupes fondamentaux et leurs algèbres de Lie, de l'inclusion du tore $\mathbb{T}$ privé d'un point dans $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ après contraction d'un cercle sur $\mathbb{T}$ — ce processus est représenté sur la figure 1, le lacet $[a, b] = a\, b\, a^{-1}\, b^{-1}$ au départ correspondant au lacet c à l'arrivée. Distinguer le crochet $[a, b]$ est d'ailleurs un des outils employés dans l'article [Pol09].

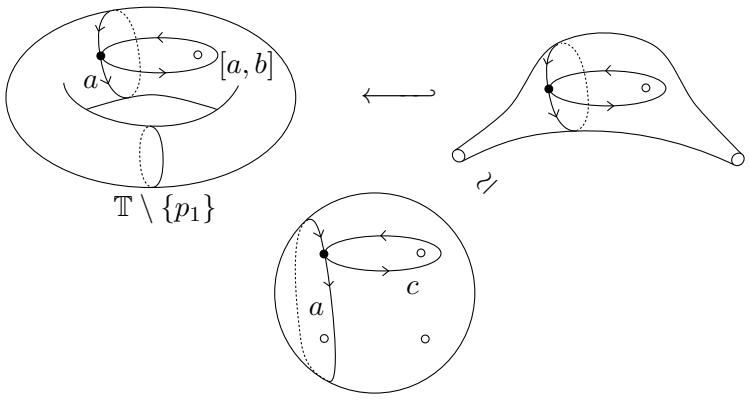


FIGURE 1 – Découpage du tore privé d'un point.

On définit donc des dérivations $\widetilde{\varepsilon}_{2i}$ sur $\mathrm{Lie}[a, b, c]$ pour $i \geqslant 1$ entier par

$$\widetilde{\varepsilon}_{2i}(a) = a^{2i-1} \cdot c, \quad \widetilde{\varepsilon}_{2i}(b) = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \, [a^j \cdot b, a^{2i-2-j} \cdot c] \quad \text{et} \quad \widetilde{\varepsilon}_{2i}(c) = 0.$$

On note par ailleurs $\widetilde{\varepsilon}_0$ la dérivation de $\mathrm{Lie}[a, b, c]$ correspondant à ε_0. Les dérivations $\widetilde{\varepsilon}_0^j \cdot \widetilde{\varepsilon}_{2j}$ engendrent comme ci-dessus une algèbre de dérivations, qui sera notée $\widetilde{\mathscr{E}}$, et qui est un quotient de l'algèbre libre $\mathrm{Lie}[\widetilde{x}_i^j]$.

Par construction, les dérivations ε_i étudiées sont nulles en c, et elles sont de ce fait déterminées par leur valeur en a. Il sera donc utile de projeter l'espace vectoriel $\mathrm{Der}\,\mathrm{Lie}[a,b]$ (resp. $\mathrm{Der}\,\mathrm{Lie}[a,b,c]$) sur $\mathrm{Lie}[a,b]$ (resp. $\mathrm{Lie}[a,b,c]$) en envoyant chaque dérivation sur sa valeur en a. On notera $\mathscr{E}_a$ (resp. $\widetilde{\mathscr{E}}_a$) l'image de cette projection.

De plus, on dispose d'un morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : \mathrm{Lie}[a,b,c] \longrightarrow \mathrm{Lie}[a,b]$ défini par $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ et $\varphi(c) = [a,b]$. Par définition même des $\widetilde{\varepsilon}_{2i}$, on a sur $\mathrm{Lie}[a,b,c]$ l'identité

$$\varphi \circ \widetilde{\varepsilon}_{2i} = \varepsilon_{2i} \circ \varphi \tag{3.5}$$

qui montre que le morphisme φ se prolonge à un morphisme de $\widetilde{\mathscr{E}}_a$ vers $\mathscr{E}_a$.

Pour résumer, la situation peut être décrite par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Lie}[\widetilde{x}_i^j] & \twoheadrightarrow & \widetilde{\mathscr{E}} & \twoheadrightarrow & \widetilde{\mathscr{E}}_a & \hookrightarrow & \mathrm{Lie}[a,b,c] \\
\downarrow \wr & & & & \vdots & & \downarrow \varphi \\
\mathrm{Lie}[x_i^j] & \twoheadrightarrow & \mathscr{E} & \twoheadrightarrow & \mathscr{E}_a & \hookrightarrow & \mathrm{Lie}[a,b]
\end{array} \tag{3.6}$$

3.3 Bialternalité et crochets de Poisson

On prouve ici que certaines propriétés des éléments de $\mathscr{E}$ se traduisent simplement en termes de notions dues à Écalle. Le résultat principal du paragraphe 3.3.3 est un corollaire de travaux de Goncharov et de Brown.

3.3.1 Algèbres de Lie et variables commutatives

Comme dans plusieurs travaux récents [Éca11, IKZ06, Bro13], on tire parti d'un point de vue ayant fait ses preuves pour l'étude d'algèbres décrites en termes de variables non commutatives : le *passage aux variables commutatives*. Si f est un polynôme en a et b, on définit une famille de polynômes $\mathrm{mi}_r(f) \in \mathbb{Q}[v_1, \ldots, v_r]$ dépendant linéairement de f comme suit. On commence par calculer le projeté, noté $\pi_b(f)$, de f sur le sous-espace de $\mathbb{Q}\langle a, b\rangle$ des polynômes dont tous les monômes se terminent par b, puis on envoie chaque monôme $a^{i_1}b \cdots a^{i_r}b$ sur $v_1^{i_1} \cdots v_r^{i_r}$:

$$\mathrm{mi}_r(a^{i_1}\, b \cdots a^{i_d}\, b\, a^{i_{d+1}}) = \delta_{d,r}\, \delta_{i_{d+1},0}\; v_1^{i_1} \cdots v_r^{i_r}.$$

On procède à une construction identique pour $f \in \mathrm{Lie}[a,c]$ en remplaçant chaque occurrence de b par un c. Remarquons que si f est un polynôme doublement homogène de profondeur d, les polynômes $\mathrm{mi}_r(f)$ seront tous nuls à l'exception de $\mathrm{mi}_d(f)$, et on se permettra parfois d'omettre l'indice ; notons cependant que voir $\mathbb{Q}[v_1, \ldots, v_r]$ comme inclus dans $\mathbb{Q}[v_1, \ldots, v_{r+1}]$ est ici une mauvaise idée, le polynôme $\mathrm{mi}_r(f)$ gardant la trace de son espace ambiant $\mathbb{Q}[v_1, \ldots, v_r]$.

Remarquons également que, sauf si f comporte comme monôme la lettre a, la famille des $\mathrm{mi}_r(f)$ contient toute l'information sur f du fait de l'existence d'une section de la projection π_b restreinte à $\mathrm{Lie}[a,b]$, voir par exemple [Rac02, prop. 4.4].

De même, si D est un élément de $\mathscr{E}$ de poids supérieur à 2, la donnée de D est équivalente à la donnée de $D(a)$, puisque la condition $D([a,b])=0$ fait que $D(b)$ est uniquement déterminé à partir de $D(a)$. On traduira donc souvent des propriétés de D sur $D(a)$, puis sur les $\mathrm{mi}_r(D(a))$.

3.3.2 Alternalité et dérivations

La définition suivante, qui encode certaines relations de mélange, est ancienne, et les termes utilisés sont empruntés à Écalle :

Définition 3.3. On dit qu'une fraction rationnelle $F \in \mathbb{Q}(v_1,\dots,v_r)$ est *alternale* si pour tous mots non vides $w_1\cdots w_s$ et $w_{s+1}\cdots w_r$ en les v_i, elle vérifie

$$\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_r\\ \sigma(1)<\cdots<\sigma(s)\\ \sigma(s+1)<\cdots<\sigma(r)}} F(w_{\sigma^{-1}(1)},\dots,w_{\sigma^{-1}(r)}) = 0\,,$$

et on dit qu'un polynôme $f\in\mathrm{Lie}[a,b]$ est *bialternal* si $\mathrm{mi}_r(f)$ est alternal pour tout r, et de même pour $\widetilde{g}\in\mathrm{Lie}[a,c]$.

Nous aurons besoin de traduire les liens entre certains éléments du diagramme (3.6) sur les polynômes commutatifs associés. Plus précisément, on peut faire la remarque suivante.

Proposition 3.4. *Si $\widetilde{g}$ est un élément de $\mathbb{Q}\langle a,c\rangle$ et si $f=[a,\varphi(\widetilde{g})]$, alors* $\mathrm{mi}_r(f) = (v_1\,(v_1-v_2)\cdots(v_{r-1}-v_r)\,v_r)\ \mathrm{mi}_r(\widetilde{g})$ *pour tout entier r.*

Démonstration. Il suffit de le vérifier lorsque $\widetilde{g}$ est un monôme de profondeur r. Supposons donc que $\widetilde{g}=a^{i_1}c\cdots a^{i_d}c\,a^{i_{d+1}}$. Alors

$$\begin{aligned} f &= [a, a^{i_1}[a,b]\cdots a^{i_d}[a,b]\,a^{i_{d+1}}]\\ \text{donc }\ \mathrm{mi}_r(f) &= \delta_{i_{d+1},0}\ \mathrm{mi}_r(a\,a^{i_1}(ab-ba)\cdots a^{i_{d-1}}(ab-ba)\,a^{i_d}(ab)) \end{aligned}$$

et l'on en déduit directement l'égalité annoncée. □

Ceci motive la définition que voilà.

Définition 3.5. Une fraction rationnelle $F\in\mathbb{Q}(v_1,\dots,v_r)$ est dite *préalternale* si $F/(v_1\,(v_1-v_2)\cdots(v_{r-1}-v_r)\,v_r)$ est alternale. On dit qu'un élément f de $\mathrm{Lie}[a,b]$ homogène de degré r en b est *prébialternal* si le polynôme $P=\mathrm{mi}_r(f)\in\mathbb{Q}[v_1,\dots,v_r]$ est préalternal.

La proposition 3.4 se traduit donc tautologiquement comme suit.

Corollaire 3.6. *Soit $f \in \mathrm{Lie}[a,b]$ un polynôme doublement homogène, de degré 3 en b, et supposons qu'il existe un polynôme $\widetilde{g} \in \mathrm{Lie}[a,c]$ tel que $f = [a, \varphi(\widetilde{g})]$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) le polynôme f est prébialternal, et

ii) le polynôme $\widetilde{g}$ est bialternal. □

Enfin, on remarque qu'en ε-profondeur 3, l'image de a par un élément de $\mathscr{E}$ est prébialternale [1] :

Proposition 3.7. *Le polynôme $[\varepsilon_i, [\varepsilon_j, \varepsilon_k]](a)$ est prébialternal pour tout triplet d'entiers pairs (i,j,k).*

On trouvera dans la section 3.5 une preuve de cette affirmation. □

3.3.3 Crochets de Poisson et bialternalité en profondeur 3

Commençons par définir de nouveaux crochets de Lie sur $\mathrm{Lie}[a,b]$ et $\mathrm{Lie}[a,c]$. Le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Der}\,\mathrm{Lie}[a,b]$ des dérivations D telles que $D(b) = 0$ et qu'il existe un polynôme $f \in \mathrm{Lie}[a,b]$ avec $D(a) = [a,f]$ est stable par le crochet de Lie des dérivations. Autrement dit, en notant D_f l'unique dérivation définie par les conditions précédentes, il existe pour tout couple $(f,g) \in \mathrm{Lie}[a,b]^2$ un polynôme noté $\{f,g\}$ tel que $[D_f, D_g] = D_{\{f,g\}}$. Cela conduit à construire explicitement un crochet de Lie sur $\mathrm{Lie}[a,b]$, dit *crochet de Poisson*, en posant

$$\begin{aligned} \{f,g\} &= [f,g] + D_f(g) - D_g(f) \\ \text{avec} \quad D_\diamond(a) &= [a,\diamond] \quad \text{et} \quad D_\diamond(b) = 0. \end{aligned}$$

Le crochet de Poisson sur $\mathrm{Lie}[a,c]$, encore noté $\{\cdot,\cdot\}$, est défini similairement en remplaçant chaque dérivation D_f par la dérivation $\widetilde{D}_f$ nulle en c et envoyant a sur $[a,f]$, et vérifie de même l'identité

$$[\widetilde{D}_f, \widetilde{D}_g] = \widetilde{D}_{\{f,g\}}. \tag{3.7}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le fait suivant, dont la preuve semble nécessiter de combiner des résultats difficiles de Brown et de Goncharov. Rappelons que $\alpha_i = a^{i-1} \cdot b$.

Théorème 3.8. *Soit $g \in \mathrm{Lie}[a,b]$ un polynôme de degré exactement 3 en b. Alors g est bialternal si et seulement si c'est une combinaison linéaire de termes de la forme $\{\alpha_{2i+1}, \{\alpha_{2j+1}, \alpha_{2k+1}\}\}$ avec i, j et k strictement positifs.*

1. Ce résultat n'est en fait pas spécifique à la profondeur 3, mais la preuve dans le cas général nécessite des outils sortant du cadre du présent chapitre, qui ne nécessite pas un tel niveau de généralité ; voir le théorème 4.45 du chapitre suivant.

Démonstration. Nous aurons besoin de passer par une algèbre de Lie auxiliaire, à savoir l'algèbre de Lie de double mélange motivique $\mathfrak{g}^{\mathfrak{m}}$, qui a été introduite et étudiée par Francis Brown. En suivant la présentation de ce dernier [Bro13, § 5.2], on dispose d'une injection entre espaces vectoriels

$$\mathrm{gr}^3\,\mathfrak{g}_n^{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \mathrm{gr}^3\,\mathfrak{ls}_n \tag{3.8}$$

où gr^3 désigne la partie graduée de profondeur 3, et $\mathfrak{ls}$ est l'espace des polynômes bialternals, qui contient les éléments de double mélange tronqués en profondeur maximale.

Les travaux de Goncharov [Gon01a], dans lesquels $\mathrm{gr}^3\,\mathfrak{ls}$ est noté D_3, montrent que les espaces $\mathrm{gr}^3\,\mathfrak{g}_n^{\mathfrak{m}}$ et $\mathrm{gr}^3\,\mathfrak{ls}_n$ ont la même dimension [2] ; en particulier, la flèche ci-dessus est surjective. De plus, $\mathfrak{g}^{\mathfrak{m}}$ est librement engendrée par des éléments σ_i pour $i \geqslant 3$ impair, et donc $\mathrm{gr}^3\,\mathfrak{g}_n^{\mathfrak{m}}$ est engendré linéairement par l'image des crochets de trois σ_i. L'isomorphisme du diagramme (3.8) envoyant σ_i sur α_i et crochet de Lie sur crochet de Poisson, tout polynôme bialternal de profondeur 3 correspond donc à une combinaison linéaire de crochets de Poisson de trois α_i, ce qui est le résultat annoncé. □

Remarquons que le théorème 3.8 est aussi vrai en profondeur 2, mais devient faux en profondeur supérieure à 4, précisément à cause de la présence de relations modulaires. Le fait qu'il soit vrai en profondeur 3 est néanmoins crucial dans la suite de la preuve, en vertu de la proposition suivante :

Proposition 3.9. *Soient i, j et k trois entiers pairs supérieurs à 2. Alors*

$$[\widetilde{\varepsilon}_i, [\widetilde{\varepsilon}_j, \widetilde{\varepsilon}_k]](a) = [a, \{\widetilde{\alpha}_i, \{\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_k\}\}].$$

Démonstration. Il suffit de s'apercevoir que chaque dérivation $\widetilde{\varepsilon}_\ell$ laisse la sous-algèbre $\mathrm{Lie}[a, c]$ stable, et que sa restriction à cette sous-algèbre coïncide avec $\widetilde{D}_{\widetilde{\alpha}_\ell}$. L'identité annoncée découle alors de la définition du crochet de Poisson sur $\mathrm{Lie}[a, c]$ et de l'identité (3.7). □

2. Celle-ci coïncide avec la dimension du quotient du sous-espace de profondeur 3 et de poids total n de l'algèbre de Lie libre $\mathrm{Lie}[s_3, s_5, \ldots]$ par le sous-espace vectoriel des crochets $[s_i, r]$, où r est une relation modulaire de profondeur 2 de la forme $[s_3, s_9] - 3\,[s_5, s_7]$. La série génératrice de ces dimensions vaut donc

$$\tfrac{t^2}{(1-t^2)^2} \cdot \tfrac{t^9}{1-t^6} - \tfrac{t^3}{1-t^2} \cdot \tfrac{t^{12}}{(1-t^4)(1-t^6)} = \tfrac{t^{11}(1+t^2-t^4)}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)}$$

et la dimension en poids $n \geqslant 3$ impair admet la forme close $[((n-3)^2-1)/48]$.

3.4 Relations en profondeur 3

3.4.1 Éléments push-invariants

La définition suivante, employée notamment par Jean Écalle, s'avère importante dans la preuve finale.

Définition 3.10. L'endomorphisme push de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}\langle a, b\rangle$ est défini par sa valeur sur les monômes, en posant

$$\mathrm{push}(a^{i_0} b\, a^{i_1} \cdots a^{i_{r-1}} b\, a^{i_r}) = a^{i_r} b\, a^{i_0} \cdots a^{i_1} b\, a^{i_{r-1}}.$$

Un polynôme f sera dit push-*invariant* s'il vérifie $\mathrm{push}(f) = f$.

Les éléments push-invariants sont en fait exactement les valeurs en a des dérivations nulles sur $[a, b]$, comme le montre la proposition que voici, qui caractérise aussi en termes de mots les polynômes de la forme $[a, *]$.

Proposition 3.11 ([Sch12, th. 2.1])**.** *Soit* $p \in \mathrm{Lie}[a, b]$.

i) Le polynôme p *est* push-*invariant si et seulement s'il existe un élément* p' *de* $\mathrm{Lie}[a, b]$ *tel que* $[p, b] + [a, p'] = 0$.

ii) Il existe un polynôme $r \in \mathrm{Lie}[a, b]$ *tel que* $p = [a, r]$ *si et seulement si tout monôme de* p *commence ou se termine par la lettre* a.

La notion de push-invariance permet d'énoncer le résultat qui suit, qui sera utile dans l'étude du morphisme φ.

Lemme 3.12. *Soit* $\widetilde{t}$ *un élément de* $\mathrm{Lie}[a, c]$ *tel que* $\varphi(\widetilde{t})$ *soit* push-*invariant. Alors il existe un polynôme* $\widetilde{q} \in \mathrm{Lie}[a, c]$ *tel que* $\widetilde{t} = [a, \widetilde{q}]$.

Démonstration. Notons $p = \varphi(\widetilde{t})$. Par hypothèse, ce polynôme est push-invariant, et la première partie de la proposition 3.11 assure donc de l'existence d'un polynôme $p' \in \mathrm{Lie}[a, b]$ tel que $[p, b] + [a, p'] = 0$. De plus, la seconde partie de cette dernière proposition entraîne que le polynôme $[p, b]$ ne contient aucun monôme de la forme $b\, w\, b$.

Écrivons $\widetilde{t} = c\,\widetilde{t}_1\, c + a\,\widetilde{t}_2\, c + c\,\widetilde{t}_3\, a + a\,\widetilde{t}_4\, a$ avec $t_i \in \mathbb{Q}\langle a, c\rangle$ pour tout i, notons $p_i = \varphi(\widetilde{t}_i)$, et notons comme précédemment π_b (resp. ${}_b\pi$, ${}_b\pi_b$) la projection sur $\mathbb{Q}\langle a, b\rangle\, b$ (resp. $b\,\mathbb{Q}\langle a, b\rangle$, $b\,\mathbb{Q}\langle a, b\rangle\, b$). Alors

$$\begin{aligned} 0 &= {}_b\pi_b\,[b, p] \\ &= b\,\pi_b(p) - {}_b\pi(p)\, b \\ &= b\,([a, b]\, p_1 + a\, p_2)\, ab + ba\,(p_1\,[a, b] + p_3\, a)\, b. \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, tous les mots se terminant en b^2 proviennent du terme $ba\, p_1\,[a, b]\, b$, et donc $p_1 = 0$. De ce fait, $\widetilde{t}_1$ est lui aussi nul, puisque le morphisme envoyant a sur a et c sur $[a, b]$ est un isomorphisme entre $\mathrm{Lie}[a, c]$ et l'algèbre libre $\mathrm{Lie}[a, [a, b]]$. Cela signifie que $\widetilde{t}$ n'a pas de mot de la forme $c\, w\, c$, et donc, d'après la seconde partie de la proposition 3.11, qu'il existe un polynôme $\widetilde{q} \in \mathrm{Lie}[a, c]$ tel que $\widetilde{t} = [a, \widetilde{q}]$, ce que l'on voulait prouver. □

La push-invariance intervient aussi dans la proposition 3.14 ci-dessous, qui permet de traduire le fait qu'un élément de $\mathscr{E}$ soit de Θ-profondeur 3 en termes d'éléments de Lie$[a,b]$ et de Lie$[a,b,c]$. Il nous faut auparavant prouver le résultat suivant.

Proposition 3.13. *Soit $\widetilde{d}$ un élément de* Lie$[a,b,c]$ *triplement homogène, de degré* 1 *en b et* 2 *en c, dont aucun monôme ne soit de la forme $a^i c\, a^j c\, b$. Alors il existe un polynôme $\widetilde{t} \in$ Lie$[a,c]$ tel que $\varphi(\widetilde{t}) = \varphi(\widetilde{d})$.*

Démonstration. Pour un mot quelconque w en a, b et c, notons $\langle\, \cdot\, , w\rangle$ la forme linéaire « coefficient en w » sur l'algèbre de polynômes $\mathbb{Q}\langle a,b,c\rangle$, qui s'étend à une forme bilinéaire encore notée $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ sur cette même algèbre. Le théorème d'élimination de Lazard [Bou72, § 2, n° 9] assure de l'existence d'une écriture de $\widetilde{d}$ sous la forme $\widetilde{d} = \sum_w \lambda_w\, w\cdot b$, où la somme porte sur les mots w de degré 2 en c et où les coefficients λ_w sont rationnels. L'hypothèse selon laquelle $\langle \widetilde{d}, a^i c\, a^j c\, b\rangle = 0$ pour tout couple (i,j) se réécrit donc à (i,j) fixé comme

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_w \lambda_w \,\langle w\cdot b, a^i c\, a^j c\, b\rangle \\ &= \sum_w \lambda_w \,\langle w\, b, a^i c\, a^j c\, b\rangle \\ &= \lambda_{a^i c\, a^j c} \end{aligned}$$

et en particulier aucun des mots w apparaissant dans la somme ne se termine par un c. De ce fait, le polynôme $\widetilde{d}$ peut se réécrire

$$\widetilde{d} = \sum_{w'} \lambda_{w'a} w'a\cdot b = \sum_{w'} \lambda_{w'a} w'\cdot [a,b]$$

où la somme porte là encore sur les mots de degré 2 en c, et le polynôme $\widetilde{t}$ défini par $\widetilde{t} = \sum_{w'} \lambda_{w'a} w'\cdot c$ satisfait la contrainte de l'énoncé. □

Passons maintenant au résultat annoncé sur la Θ-profondeur :

Proposition 3.14. *Soit f une combinaison linéaire de termes de la forme $[x_i^0, x_j^1]$ avec i et j strictement positifs, à laquelle on associe comme dans le diagramme* (3.6) *une dérivation D dans $\mathscr{E}$ de profondeur* 3 *et de ε-profondeur* 2*. On fait correspondre à f un élément $\widetilde{f}$ de* Lie$[\widetilde{x}_i^j]$ *qui se projette lui-même sur une dérivation $\widetilde{D}$ dans $\widetilde{\mathscr{E}}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

i) le polynôme $\widetilde{D}(a)$ n'a pas de monôme de la forme $a^i c\, a^j c\, b$;

ii) le polynôme $D(a)$ n'a pas de monôme commençant et finissant par b ;

iii) la dérivation D appartient à $\Theta^3\mathscr{E}$.

Démonstration. Commençons par prouver que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes. Supposons vérifiée (i) ; en examinant les deux dernières lettres des monômes de $\widetilde{D}(a)$, qui est de degré 1 en b et 2 en c, cette hypothèse entraîne que $D(a) = \varphi(\widetilde{D}(a))$ ne contient pas de mot se terminant en b^2. De plus, la dérivation D est nulle en $[a,b]$, donc sa valeur en a vérifie $[D(a),b] + [a,D(b)] = 0$

et la première partie de la proposition 3.11 montre que $D(a)$ est push-invariant. Par permutation circulaire des puissances de a, aucun monôme de $D(a)$ n'est donc de la forme $b\,w\,b$, et $D(a)$ vérifie donc (ii).

Réciproquement, supposons (ii). Comme précédemment, $D(a)$ n'a donc pas de monôme de la forme $w\,b^2$. Le polynôme $\widetilde{D}(a)$ n'a donc pas de mots se terminant par $c\,b$ puisque ce sont les seuls dont l'image par φ contienne des monômes en $w\,b^2$. Il vérifie donc (i).

Passons à présent à l'équivalence avec (iii). Par définition de la filtration Θ, la dérivation D est dans $\Theta^3\mathscr{E}$ si et seulement si $D(a)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de termes de la forme $[a^i{\cdot}b, [a^j{\cdot}b, a^k{\cdot}b]]$ avec i, j et k strictement positifs. Autrement dit, cela équivaut à l'existence d'un polynôme $\widetilde{t} \in \mathrm{Lie}[a,c]$ tel que $D(a) = \varphi(\widetilde{t})$.

Si (i) et (ii) sont vérifiées, la proposition 3.13 montre qu'il existe un polynôme $\widetilde{t} \in \mathrm{Lie}[a,c]$ tel que $\varphi(\widetilde{t}) = \varphi(\widetilde{D}(a)) = D(a)$, et donc $D \in \Theta^3\mathscr{E}$.

Réciproquement, si (iii) est vérifiée, la remarque précédente assure l'existence de $\widetilde{t} \in \mathrm{Lie}[a,c]$ tel que $D(a) = \varphi(\widetilde{t})$. En écrivant $\widetilde{t}$ comme combinaison linéaire de monômes en a et c, cela implique (ii). Les trois assertions sont donc équivalentes. □

Remarque 3.15. Le raisonnement qui précède montre que les dérivations considérées sont automatiquement de plus haut poids pour $\mathfrak{sl}_2$, puisque leur valeur en a appartient à $\mathrm{Lie}[a,[a,b]]$.

3.4.2 Énoncé et preuve du résultat principal

Nous sommes à présent en mesure de prouver le résultat principal du présent article.

Théorème 3.16. *Soit f une combinaison linéaire de termes de la forme $[x_i^0, x_j^1]$ avec i et j pairs et supérieurs à 4, à laquelle correspond comme dans le diagramme* (3.6) *une dérivation $D \in \mathscr{E}$ de profondeur 3 et de ε-profondeur 2. Si D est dans $\Theta^3\mathscr{E}$, alors elle est de ε-profondeur 3, c'est-à-dire égale à une combinaison linéaire de termes de la forme $[\varepsilon_i, [\varepsilon_j, \varepsilon_k]]$ pour i, j et k pairs et supérieurs à 4.*

Démonstration. Relevons f en $\widetilde{f} \in \mathrm{Lie}[\widetilde{x}_i^j]$, qui se projette lui-même sur $\widetilde{D} \in \widetilde{E}$. On dispose en particulier de $D(a) \in \mathrm{Lie}[a,b]$ et de $\widetilde{D}(a) \in \mathrm{Lie}[a,b,c]$, reliés par la relation $\varphi(\widetilde{D}(a)) = D(a)$ du fait de l'identité (3.5).

L'hypothèse selon laquelle D appartient à $\Theta^3\mathscr{E}$ implique via les propositions 3.13 et 3.14 l'existence d'un élément $\widetilde{t}$ de $\mathrm{Lie}[a,c]$ tel que $\varphi(\widetilde{D}(a)) = \varphi(\widetilde{t})$. De plus, le fait que $D([a,b]) = 0$ assure que l'élément $\varphi(\widetilde{t}) = D(a)$ est push-invariant, et donc par le lemme 3.12 qu'il existe un polynôme $\widetilde{q} \in \mathrm{Lie}[a,c]$ tel que $\widetilde{t} = [a, \widetilde{q}]$. En particulier, $D(a) = [a, \varphi(\widetilde{q})]$.

Le corollaire 3.6 et la proposition 3.7 assurent que $\widetilde{q}$ est bialternal, et le théorème 3.8 transposé à $\mathrm{Lie}[a,c]$ montre que c'est une combinaison linéaire de crochets de Poisson de la forme $\{\widetilde{\alpha}_{2i}, \{\widetilde{\alpha}_{2j}, \widetilde{\alpha}_{2k}\}\}$ avec $i,j,k \geqslant 2$. Par ailleurs

$$D(a) = \varphi(\widetilde{t}) = \varphi([a, \widetilde{q}])$$

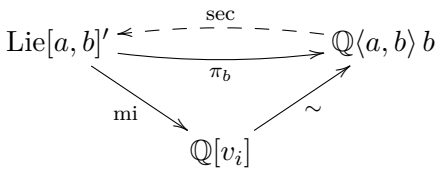
et $D(a)$ peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire de termes de la forme $\varphi\,[a, \{\widetilde{\alpha}_{2i}, \{\widetilde{\alpha}_{2j}, \widetilde{\alpha}_{2k}\}\}]$. C'est là qu'intervient la proposition 3.9, qui combinée à l'identité (3.5) permet de réécrire $D(a)$ comme une combinaison linéaire de termes de la forme $[\varepsilon_{2i}, [\varepsilon_{2j}, \varepsilon_{2k}]](a)$ avec $i, j, k \geqslant 2$.

Finalement, les dérivations nulles sur $[a, b]$ étant caractérisées par leur valeur en a, on en déduit que D est elle-même combinaison linéaire de termes de la forme $[\varepsilon_{2i}, [\varepsilon_{2j}, \varepsilon_{2k}]]$ avec $i, j, k \geqslant 2$, ce que l'on voulait démontrer. □

3.5 Schéma de preuve de la proposition 3.7

On prouve ici à la main le fait suivant : si i, j et k sont trois entiers pairs, alors le polynôme $[\varepsilon_i, [\varepsilon_j, \varepsilon_k]](a)$ est prébialternal. Les calculs transitent par trois espaces : le sous-espace de Lie$[a, b]$ des polynômes de profondeur supérieure à 1, l'espace vectoriel $\mathbb{Q}\langle a, b\rangle\, b$ des polynômes dont tous les monômes se terminent par b, et l'algèbre commutative $\mathbb{Q}[v_i \mid i \geqslant 1]$. L'application mi : Lie$[a, b] \to \mathbb{Q}[v_i]$ a été définie à la section 3.3.1 par ses valeurs sur les polynômes de profondeur fixée, et on dispose de la projection π_b : Lie$[a, b] \to \mathbb{Q}\langle a, b\rangle\, b$. Par ailleurs, les espaces $\mathbb{Q}[v_i]$ et $\mathbb{Q}\langle a, b\rangle\, b$ sont isomorphes [3] en faisant se correspondre $v_1^{i_1} \cdots v_d^{i_d}$ et $a^{i_1} b \cdots a^{i_d} b$.

L'application π_b admet un inverse à gauche sur le sous-espace de Lie$[a, b]$ de profondeur supérieure à 1, et en fait même sur le noyau de la dérivation ∂_a, voir par exemple [Rac02]. Cet inverse, noté sec, fournit donc une réciproque à l'application mi. Résumons la situation par un diagramme commutatif :



Ces remarques permettent de traduire sur $\mathbb{Q}[v_i]$ l'action des ε_i. Plus précisément, la profondeur étant sous-entendue, définissons $\hat{\varepsilon}_i$ sur $\mathbb{Q}[v_i]$ par l'identité $\hat{\varepsilon}_i(\mathrm{mi}(P)) = \mathrm{mi}(\varepsilon_i(P))$. Pour obtenir $\mathrm{mi}([\varepsilon_i, [\varepsilon_j, \varepsilon_k]](a))$, on commence par se ramener à $\mathrm{mi}(\varepsilon_i \circ \varepsilon_j \circ \varepsilon_k(a))$. Ensuite, on calcule $P_k(v_1) = \mathrm{mi} \circ \varepsilon_k(a)$, puis les images $Q_{jk}(v_1, v_2) = \hat{\varepsilon}_j P_k(v_1)$ et $R_{ijk}(v_1, v_2, v_3) = \hat{\varepsilon}_i Q_{jk}(v_1, v_2)$. Il suffira enfin de vérifier que le polynôme

$$S = R_{ijk} - R_{ikj} - R_{jki} + R_{kji}$$

satisfait l'identité

$$\begin{aligned} v_2\,(v_1 - v_3)\,S(v_1, v_2, v_3) - \\ - v_1\,(v_2 - v_3)\,S(v_2, v_1, v_3) - \\ - v_3\,(v_1 - v_2)\,S(v_2, v_3, v_1) = 0 \end{aligned}$$

qui est exactement la condition de prébialternalité.

3. Il faudrait à proprement parler se placer dans le gradué pour la profondeur de chacun des sous-espaces en présence, mais ce détail importe peu puisque chaque étape du calcul aura de fait lieu dans l'une des parties graduées.

La preuve proprement dite se divise en deux parties : on calcule à la main le polynôme $R_{ijk}(v_1, v_2, v_3)$, et la vérification de la prébialternalité est confiée au logiciel de calcul formel Maple.

3.5.1 Étapes du calcul

Les calculs reposent sur deux ingrédients essentiels : la formule du binôme de Newton, et l'identité $\operatorname{sec}(a^{i_r} b \cdots a^{i_r} b) = \operatorname{ad}_a^{i_1} L_b \cdots \operatorname{ad}_a^{i_r} L_b(1)$, où $L_\diamond$ est l'opérateur de multiplication à gauche par $\diamond$, qui permet d'exprimer simplement l'action des $\hat{\varepsilon}$. En explicitant la composée $\mathrm{mi} \circ \varepsilon_i \circ \operatorname{ad}_a^j L_b$, on obtient successivement les expressions

$$\begin{aligned}
P_k(v_1) &= v_1^k, \\
Q_{jk}(v_1, v_2) &= v_2\,(v_1+v_2)^{j-1}(v_1^{k-1} - v_2^{k-1}) + \\
&\quad + (v_1+v_2)\,v_2^{j-1}((v_1+v_2)^{k-1} - v_1^{k-1}) \\
\text{et } R_{ijk}(v_1, v_2, v_3) &= \left(\tfrac{v_2+v_3}{v_1+v_3}\,(v_1+v_2)^{i-1} - \tfrac{v_1+v_2}{v_1+v_3}\,(v_2+v_3)^{i-1}\right) Q_{jk}(v_1, v_3) - \\
&\quad - (v_1+v_2)^{i-1}\,Q_{jk}(v_2, v_3) + \\
&\quad + v_3^{i-1}\,Q_{jk}(v_1+v_3, v_2+v_3) + \\
&\quad + \left(\tfrac{v_3}{v_2}\,(v_2+v_3)^{i-1} - \tfrac{v_2+v_3}{v_2}\,v_3^{i-1}\right) Q_{jk}(v_1, v_2).
\end{aligned}$$

3.5.2 Vérification de la prébialternalité

On commence par entrer en machine les expressions pour Q_{jk} et R_{ijk}. Il est commode d'introduire des variables de la forme `v12` qui joueront le rôle formel de `v1 + v2`.

```
epsilon := P ->
  P(v1, v3, v13) * ((v23/v13) * v12^(i-1) - (v12/v13) * v23^(i-1)) -
  P(v2, v3, v23) * v12^(i-1) + P(v13, v23, v13-v23) * v3^(i-1) +
  P(v1, v2, v12) * ((v3/v2) * v23^(i-1) - (v23/v2) * v3^(i-1)) ;

Qjk := (v1, v2, v12) ->
  v2 * v12^(j-1) * (v1^(k-1) - v2^(k-1)) +
  v12 * v2^(j-1) * (v12^(k-1) - v1^(k-1)) ;

R := unapply(epsilon(Qjk), (i, j, k)) ;
```

On exprime ensuite le crochet $\mathrm{mi}\,[\varepsilon_i, [\varepsilon_j, \varepsilon_k]](a)$ et la fonction `test` permettant de vérifier sa prébialternalité, on remplace les variables du type `v12` par leur valeur, et il ne reste plus qu'à évaluer l'expression obtenue :

```
crochet := unapply(R(i, j, k) - R(i, k, j) - R(j, k, i) + R(k, j, i),
  (i, j, k, v1, v2, v3, v12, v13, v23)) ;
```

```
test := (i, j, k) ->
  v2 * (v1 - v3) * crochet(i, j, k, v1, v2, v3, v12, v13, v23) -
  v1 * (v2 - v3) * crochet(i, j, k, v2, v1, v3, -v12, v23, v13) -
  v3 * (v1 - v2) * crochet(i, j, k, v2, v3, v1, v23, -v12, -v13) ;

f := simplify(subs(v12 - v13 = -v23, v13 - v23 = v12,
    v13 - v12 = v23, v23 - v13 = -v12, test(i,j,k))) ;

v := [v1, v2, v3, v12, v13, v23] ;

e := [2*i, 2*j, 2*k] ;

assume(i, integer) ; assume(j, integer) ; assume(k, integer) ;

f := simplify(subs(map(t ->
  op(map(p -> (t^p = t||p), e)), v), expand(f))) ;

expand(subs(v12 = v1 - v2, v13 = v1 - v3, v23 = v2 - v3, f)) ;
```

La dernière expression est identiquement nulle, ce qui assure finalement que le polynôme mi $[\varepsilon_i, [\varepsilon_j, \varepsilon_k]](a)$ est toujours prébialternal. □

Chapitre 4

Vers une algèbre de double mélange elliptique

Ce chapitre s'appuie sur deux extensions dites elliptique d'algèbres de Lie reliées aux multizêtas : l'extension Lie $\pi_1(\mathsf{MEM})$ de Lie $\pi_1(\mathsf{MTM})$, définie par Hain et Matsumoto comme conséquence de la construction d'une catégorie de motifs elliptiques mixtes, et l'extension $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ de $\mathfrak{grt}$, définie par Enriquez en s'appuyant sur la notion d'associateur elliptique. On aborde ici la question de construire une extension elliptique $\mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}}$ de l'algèbre de double mélange $\mathfrak{ds}$. En d'autres termes, on cherche à compléter la troisième ligne du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{u} & \longrightarrow & \mathrm{Lie}\,\pi_1(\mathsf{MEM}) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}\,\pi_1(\mathsf{MTM}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{r}^{\mathrm{ell}} & \longrightarrow & \mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}} & \longrightarrow & \mathfrak{grt} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{k}^{\mathrm{ell}} & \dashrightarrow & \mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}} & \dashrightarrow & \mathfrak{ds} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Le travail effectué dans le chapitre 3, et notamment la mise en évidence de la notion de prébialternalité, qui peut être vue comme un « double mélange linéarisé après division par un facteur explicite », nous ont conduit à nous intéresser plus précisément aux constructions par Écalle d'espaces généralisant l'algèbre de double mélange et sa variante linéarisée. C'est dans ce cadre qu'est apparu un candidat à une extension elliptique $\mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}}$. La validité de cette construction, corroborée dans un premier temps par l'expérimentation informatique en petit poids, est étayée par deux résultats pertinents énoncés et démontrés dans la section 4.3.3.

Après deux premières sections consacrées à un rappel de la construction d'Enriquez de l'extension $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ de $\mathfrak{grt}$ et à une introduction générale aux moules et aux algèbres associées, nous détaillons dans la section 4.3 la définition du candidat à l'extension $\mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}}$, puis les observations expérimentales effectuées sur cet objet, pour enfin exposer la preuve des résultats évoqués ci-dessus.

4.1 L'algèbre de Grothendieck-Teichmüller elliptique

Dans une prépublication récente [Enr12], Enriquez propose « *un analogue en genre un de la théorie des associateurs et du groupe de Grothendieck-Teichmüller, l'analogue de l'action galoisienne sur les groupes de tresses profinis étant une action du groupe fondamental arithmétique de l'espace de modules $\mathfrak{M}_{1,\vec{1}}$ des courbes elliptiques sur les groupes de tresses profinis en genre un* ». Il construit en particulier une algèbre de Lie, dite algèbre de Grothendieck-Teichmüller elliptique, dont on résume ici la définition et les liens avec l'algèbre $\mathfrak{grt}$ de la section 1.2.2.

4.1.1 Algèbres de tresses et de tresses elliptiques

Définition 4.1. L'algèbre $\mathfrak{t}_n$ des tresses planes à n brins est l'algèbre de Lie engendrée par les éléments t_{ij} pour $i \neq j \in [\![1,n]\!]$, soumis aux relations

$$\begin{aligned} t_{ij} &= t_{ji} && \text{pour } i \neq j, \\ [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] &= 0 && \text{pour } \#\{i,j,k\} = 3 \text{ et} \\ [t_{ij}, t_{kl}] &= 0 && \text{pour } \#\{i,j,k,l\} = 4. \end{aligned}$$

Remarquons que l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{f}_2$ peut être vue comme une sous-algèbre d'une algèbre de tresses planes, puisqu'on a par exemple une inclusion $\mathfrak{f}_2 \hookrightarrow \mathfrak{t}_3$ envoyant x sur t_{12} et y sur t_{23}. De manière générale, si f est un élément de $\mathfrak{f}_2$, on notera $f^{a,b,c}$ l'élément $f(t_{ab}, t_{bc})$ de $\mathfrak{t}_3$.

Définition 4.2. L'algèbre $\mathfrak{t}_{1,n}$ des tresses elliptiques à n brins est l'algèbre de Lie engendrée par les éléments $x_i^{\pm}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$, soumis aux relations [1]

$$\begin{aligned} \textstyle\sum x_i^{\pm} &= 0, \\ [x_i^{\pm}, x_j^{\pm}] &= 0 && \text{pour } i \neq j, \\ [x_i^{+}, x_j^{-}] &= [x_j^{+}, x_i^{-}] && \text{pour } i \neq j \text{ et} \\ [x_k^{\pm}, [x_i^{+}, x_j^{-}]] &= 0 && \text{pour } \#\{i,j,k\} = 3. \end{aligned}$$

Il sera parfois commode de noter $x_i = x_i^+$ et $y_i = x_i^-$.

Le premier exemple non trivial d'une telle algèbre est $\mathfrak{t}_{1,2}$, qui se trouve aussi être libre sur les deux générateurs x_1 et y_1. Par ailleurs, les deux algèbres de tresses ci-dessus sont reliées par le morphisme d'algèbres de Lie envoyant t_{ij} sur $[x_i^+, x_j^-]$; de plus, la définition de $\mathfrak{t}_{1,n}$ est en quelque sorte fonctorielle en n, ce qui amène à la définition suivante.

Définition 4.3. Soit $\varphi : [\![1,m]\!] \to [\![1,n]\!]$ une application partiellement définie. Elle induit un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{t}_{1,n}$ dans $\mathfrak{t}_{1,m}$ noté $\alpha \mapsto \alpha^{\varphi}$ et défini sur les générateurs par

$$(x_j^{\pm})^{\varphi} = \sum_{\varphi(i)=j} x_i^{\pm}.$$

1. Dans toute la suite, l'apparition d'un signe $\pm$ dans une égalité signifiera que cette dernière est valide pour les deux choix possibles du signe associé.

Il sera commode de coder φ par la suite ordonnée des préimages des éléments de $[\![1,n]\!]$. À titre d'exemple, si α est un élément de $\mathfrak{t}_{1,2}$ et a, b et c trois éléments de $[\![1,3]\!]$, l'élément $\alpha^{a,bc}$ de $\mathfrak{t}_{1,3}$ sera l'image de α par le morphisme d'algèbres de Lie envoyant $x_1^\pm$ sur $x_a^\pm$ et $x_2^\pm$ sur $x_b^\pm + x_c^\pm$.

4.1.2 Une extension elliptique de $\mathfrak{grt}$

La théorie des associateurs elliptiques développée par Enriquez a conduit à construire un analogue en genre 1 de l'algèbre $\mathfrak{grt}$ qui est aussi une extension de cette dernière [2]. En voici une définition.

Définition 4.4. L'algèbre de Grothendieck-Teichmüller $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ est l'ensemble des triplets (f,α_+,α_-) de $\mathfrak{grt}\times\mathfrak{t}_{1,2}\times\mathfrak{t}_{1,2}$ vérifiant dans $\mathfrak{t}_{1,3}$ les cinq relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\alpha_\pm^{1,23}+\alpha_\pm^{1,23}+\alpha_\pm^{1,23}+[x_1^\pm,f^{1,2,3}]+[x_2^\pm,f^{2,1,3}]=0\,;\\
&[x_1^\pm,\alpha_\pm^{3,12}]+[\alpha_\pm^{1,23},x_3^\pm]=[x_1^\pm,[x_3^\pm,f^{1,2,3}]]\,;\\
&[x_1^+,\alpha_-^{2,13}]-[x_2^-,\alpha_+^{1,23}]=[x_2^-,[x_1^+,f^{1,2,3}]]-[x_1^+,[x_2^-,f^{2,1,3}]],
\end{aligned}$$

muni du crochet de Lie étendant le crochet de Poisson sur $\mathfrak{grt}$ et tel que

$$[\alpha_\pm,\beta_\pm]=D_{\beta_\pm}(\alpha_\pm)-D_{\alpha_\pm}(\beta_\pm)$$

où la dérivation $D_{\alpha_\pm}$ de $\mathfrak{t}_{1,2}$ est définie par $D_{\alpha_\pm}(x_1^\pm)=\alpha_\pm$.

Remarquons qu'il est aussi possible d'identifier le facteur $\mathfrak{t}_{1,2}\times\mathfrak{t}_{1,2}$ aux dérivations sur $\mathfrak{t}_{1,2}$, et que la restriction du crochet de Lie sur ce facteur est l'opposé du crochet de Lie des dérivations. L'algèbre $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ est par ailleurs graduée, sur le terme de gauche par le poids des polynômes, et sur le terme de droite par le poids des dérivations, le poids de $x_i^\pm$ valant par définition 1. En d'autres termes, la partie de poids n de $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ est formée des éléments $(f,\alpha_\pm)$ avec $2\deg f=\deg D_{\alpha_\pm}=\deg\alpha_\pm-1=n$. On peut aussi graduer la partie $\mathfrak{t}_{1,2}\times\mathfrak{t}_{1,2}$ par la profondeur des dérivations, la profondeur de x_1^+ valant 0 et celle de x_1^- valant 1.

Munis de ces graduations par le poids, il est possible de parler du complété par le poids des algèbres $\mathfrak{t}_{1,2}$ et $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$, que l'on notera respectivement $\hat{\mathfrak{t}}_{1,2}$ et $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$. Enriquez définit alors des éléments particuliers de $\hat{\mathfrak{t}}_{1,n}$ en posant à n fixé

$$t_{0i}=-\frac{\mathrm{ad}_{x_i}}{e^{\mathrm{ad}_{x_i}}-1}(y_i)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k\,!}\,\mathrm{ad}_{x_i}^k(y_i)\in\hat{\mathfrak{t}}_{1,n}. \tag{4.1}$$

La définition même de $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ implique que la projection sur la première composante se restreint à un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ vers $\mathfrak{grt}$. La surjectivité de ce morphisme n'est pas évidente, mais est assurée par la proposition suivante [Enr12, prop. 4.15] :

2. Par souci de simplicité, les notations diffèrent ici légèrement de celles de [Enr12] : on note $\mathfrak{grt}$ (resp. $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$) l'algèbre notée $\mathfrak{grt}_1$ (resp. $\mathfrak{grt}_1^{\mathrm{ell}}$) par Enriquez.

Proposition 4.5. *Il existe un unique morphisme de* $\mathfrak{grt}$ *vers* $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$ *envoyant* f *sur un triplet* $(f, s_\pm(f))$ *tel que la dérivation* $D_f \in \operatorname{Der} \hat{\mathfrak{t}}_{1,2}$ *définie par* $D_f(x_1^\pm) = s_\pm(f)$ *vérifie les deux identités*

$$D_f(e^{x_1}) = f^{0,2,1} e^{x_1} - e^{x_1} f^{0,1,2} \quad \textit{et} \quad D_f(t_{01}) = [f^{0,1,2}, t_{01}]. \tag{4.2}$$

Remarquons que les conditions sur D_f définissent bien une et une seule dérivation de $\hat{\mathfrak{t}}_{1,2}$: en effet, connaissant $D_f(x_1) = s_+(f)$, la deuxième condition permet de retrouver $D_f(y_1) = s_-(f)$ par la formule de Leibniz, et la première condition définit de manière unique $D_f(x_1)$; on peut en effet passer par les identités que voici, valables dans $\mathbb{Q}[\![x]\!]$ pour une dérivation continue quelconque D :

$$\begin{aligned} D(e^x) &= \int_0^1 e^{tx}\, D(x)\, e^{(1-t)\,x}\, \mathrm{d}t \\ &= \left(\int_0^1 e^{t \operatorname{ad}_x}\, D(x)\, \mathrm{d}t \right) e^x \\ &= \left(\frac{e^{\operatorname{ad}_x} - 1}{\operatorname{ad}_x}\, D(x) \right) e^x, \end{aligned} \tag{4.3}$$

cette dernière égalité impliquant finalement l'identité $D(x) = \frac{\operatorname{ad}_x}{e^{\operatorname{ad}_x}-1}(D(e^x)\, e^{-x})$; la relation (4.3) découle de l'identité eulérienne

$$\int_0^1 \tfrac{t^i}{i\,!} \tfrac{(1-t)^j}{j\,!} \mathrm{d}t = \tfrac{1}{(i+j+1)\,!}$$

que l'on peut retrouver par intégration par parties répétées ou en introduisant une série formelle convenable.

La section définie par la proposition 4.5 envoie un élément f homogène de poids n sur un triplet $(f, s_\pm(f))$ pour lequel la dérivation $D_f \in \operatorname{Der} \hat{\mathfrak{t}}_{1,2}$ est homogène de profondeur n ; autrement dit, $\deg_{y_1} s_+(f) = n$ et $\deg_{y_1} s_-(f) = n+1$, mais les éléments $s_\pm(f) \in \hat{\mathfrak{t}}_{1,2}$ possèdent a priori des termes en tout poids.

Signalons ici un lien entre l'algèbre $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ et l'algèbre de dérivations $\mathscr{E}$ définie dans le chapitre 3. D'après la proposition 4.5, la projection de $\mathfrak{grt}^{\mathrm{ell}}$ vers $\mathfrak{grt}$ est un morphisme surjectif d'algèbres de Lie graduées. Une question importante est celle de l'identification de son noyau, que l'on notera ici $\mathfrak{r}^{\mathrm{ell}}$ et qui est obtenu en particularisant en $f = 0$ les équations de la définition 4.4. Enriquez [Enr12, § 4.7] identifie une sous-algèbre $\mathfrak{b}_3$ de $\mathfrak{r}^{\mathrm{ell}}$, qui lui est conjecturalement égale : c'est celle engendrée par une famille de dérivations δ_{2n} dont la définition, provenant de l'article [CEE09], coïncide avec celle des éléments ε_{2n+2} du chapitre 3 ; elles sont définies pour $n \geqslant 0$ par

$$\begin{aligned} &\delta_{2n}(x_1) = \operatorname{ad}_{x_1}^{2n+2}(y_1) \quad \text{et} \\ &\delta_{2n}(y_1) = \tfrac{1}{2} \sum_{2n+1=p+q} (-1)^p\, [\operatorname{ad}_{x_1}^p\, y_1, \operatorname{ad}_{x_1}^q\, y_1]. \end{aligned}$$

L'objectif de ce qui suit est d'expliquer une relation conjecturale entre la section

$$(\mathrm{id}, s_\pm) : \mathfrak{grt} \to \widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$$

et une construction apparaissant dans un contexte indépendant : celui du calcul moulien. On obtiendra comme corollaire un candidat à l'extension $\mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}}$ de l'introduction.

4.2 Moules et symétries écalliennes

On résume ici quelques éléments du formalisme des moules [3]. Celui-ci, développé par Jean Écalle pour l'analyse des singularités des systèmes différentiels et la théorie de la résurgence, semble particulièrement bien adapté à l'étude des multizêtas, comme le montrent les propres travaux d'Écalle ainsi que des développements récents faisant appel à des idées similaires [Bro13, Tas14].

4.2.1 Des séries aux moules

L'objet central de cette partie est le *moule*. Par définition, un moule [4] est une famille dénombrable $(M_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de fonctions, le terme d'indice r étant une fonction à $2\,r$ variables, définie sur l'espace $(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}u_i \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}v_i)^r$, et à valeurs dans un anneau fixé au préalable. Cela revient à se donner une famille dénombrable $(M_r\binom{u_1,\dots,u_r}{v_1,\dots,v_r})_{r\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, sur les « variables » desquels on peut effectuer des opérations linéaires. Les moules que l'on considérera seront sauf mention du contraire à valeurs dans l'algèbre des fractions rationnelles $A = \mathbb{Q}(u_i, v_i \mid i \in \mathbb{N}^*)$, et ne seront donc rien d'autre que des suites de fractions rationnelles, le r-ième terme d'une telle suite ayant $2\,r$ indéterminées. L'indice r étant fixé par le nombre des variables, on omettra généralement de le préciser, et on notera M la suite des M_r, cette dernière fonction étant souvent appelée « partie de profondeur r » du moule M.

L'intérêt du formalisme des moules est qu'il généralise la notion de série formelle non commutative en permettant d'exprimer de manière plus concise les propriétés de symétrie des séries de départ. Commençons par associer linéairement à tout élément f de $\mathfrak{h}$ deux moules particuliers sur lesquels se traduiront simplement les relations de shuffle et de stuffle :

Définition 4.6. Soit f un élément de $\mathfrak{h}$. On notera mi_f et ma_f les moules tels que

$$\mathrm{mi}_f\tbinom{u_1,\dots,u_r}{v_1,\dots,v_r} = \sum_{i_1,\dots,i_r\geqslant 1} \langle f, x^{i_1-1}y\cdots x^{i_r-1}y\rangle\, v_1^{i_1-1}\cdots v_r^{i_r-1}$$

$$\text{et}\qquad \mathrm{ma}_f\tbinom{u_1,\dots,u_r}{v_1,\dots,v_r} = \mathrm{mi}_f\tbinom{v_r,\ \dots,\ v_2-v_3,\ v_1-v_2}{u_1+\cdots+u_r,\ \dots,\ u_1+u_2,\ u_1}.$$

Pour traduire les propriétés liées au shuffle des mots, il sera commode d'introduire la notation suivante.

Définition 4.7. Pour $i \geqslant 1$ entier, on notera $c_i = \mathrm{ad}_x^{i-1}\, y$.

3. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux articles [Éca11] et [Cre09] pour un point de vue plus complet sur la question.

4. Ou, plus exactement, un bimoule.

Les valeurs de l'application ma admettent une expression assez simple sur les polynômes en les c_i :

Proposition 4.8. *Pour tout r-uplet $(i_1, \dots, i_r)$ d'entiers supérieurs à 1, on a*

$$\mathrm{ma}_{c_{i_1}\cdots c_{i_r}}\left(\begin{smallmatrix}u_1,\dots,u_r\\ v_1,\dots,v_r\end{smallmatrix}\right) = u_1^{i_r-1}\cdots u_r^{i_1-1}.$$

Démonstration. Commençons par calculer $\mathrm{mi}_{c_{i_1}\cdots c_{i_r}}\left(\begin{smallmatrix}u_1,\dots,u_r\\ v_1,\dots,v_r\end{smallmatrix}\right)$. En développant l'expression des c_i par la formule de Leibniz, on trouve

$$c_{i_1}\cdots c_{i_r} = \sum_{j_1,\dots,j_r}\prod_{s=1}^{r}((-1)^{j_s}\tbinom{i_s-1}{j_s})\, x^{i_1-1-j_1} y\, x^{j_1+i_2-1-j_2} y\cdots x^{j_{r-1}+i_r-1-j_r} y\, x^{j_r}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{mi}_{c_{i_1}\cdots c_{i_r}}\left(\begin{smallmatrix}u_1,\dots,u_r\\ v_1,\dots,v_r\end{smallmatrix}\right) &= \sum_{j_1,\dots,j_{r-1}}\prod_{s=1}^{r-1}((-1)^{j_s}\tbinom{i_s-1}{j_s})\, v_1^{i_1-1-j_1}\, v_2^{j_1+i_2-1-j_2}\cdots v_r^{j_{r-1}+i_r-1}\\ &= v_r^{i_r-1}\prod_{s=1}^{r-1}\sum_{j_s}(-1)^{j_s}\tbinom{i_s-1}{j_s}\, v_s^{i_s-1-j_s}\, v_{s+1}^{j_s}\\ &= v_r^{i_r-1}\prod_{s=1}^{r-1}(v_s-v_{s+1})^{i_s-1}\\ &= (v_1-v_2)^{i_1-1}\cdots(v_{r-1}-v_r)^{i_{r-1}-1}\, v_r^{i_r-1}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathrm{ma}_{c_{i_1}\cdots c_{i_r}}\left(\begin{smallmatrix}u_1,\dots,u_r\\ v_1,\dots,v_r\end{smallmatrix}\right) &= \mathrm{mi}_{c_{i_1}\cdots c_{i_r}}\left(\begin{smallmatrix}v_r, & \dots, & v_2-v_3, & v_1-v_2\\ u_1+\cdots+u_r, & \dots, & u_1+u_2, & u_1\end{smallmatrix}\right)\\ &= u_r^{i_1-1}\cdots u_1^{i_r-1}\end{aligned}$$

comme annoncé. □

Remarque. On aurait aussi pu vérifier l'identité pour $r = 1$ et utiliser un argument de multiplicativité.

La définition 4.6 et la proposition 4.8 expriment donc le principe que voici : les applications 'mi' et 'ma' traduisent les variables non commutatives $y_i = x^{i-1}y$ et $c_i = \mathrm{ad}_x^{i-1} y$ en des variables commutatives v_i et u_i. L'avantage des expressions en ces deux jeux de variables commutatives est qu'elles sont en général bien plus compactes que leurs homologues non commutatifs. Cela fait d'ailleurs partie des outils employés de manière indépendante par Ihara, Kaneko, Zagier [IKZ06] et Brown [Bro13] dans l'étude des relations dites de « double mélange linéarisé ».

4.2.2 Structures algébriques sur les moules

On décrit ici quelques lois de composition importantes définies sur l'ensemble des moules, pour ensuite souligner la correspondance entre certaines de ces notions et leurs homologues du côté polynomial.

Voici une première loi de composition, qui traduit la multiplication des séries formelles à un nombre dénombrable de variables non commutatives. Si M et N sont deux moules, on notera $M \times N$ le moule défini par

$$(M \times N)\binom{u_1,\dots,u_r}{v_1,\dots,v_r} = \sum_{i=0}^{r} M\binom{u_1,\dots,u_i}{v_1,\dots,v_i}\, N\binom{u_{i+1},\dots,u_r}{v_{i+1},\dots,v_r}\,; \tag{4.4}$$

de même que dans le cas des séries formelles, les moules inversibles relativement à ce produit sont exactement ceux dont le « terme constant » M_0 est un élément inversible de l'anneau A ambiant.

Nous allons maintenant définir quatre lois de composition binaires sur l'ensemble des moules : un crochet pré-Lie, le crochet de Lie qui lui est associé, et deux « lois de groupe ». Avant cela, introduisons quelques conventions concernant la manipulation des variables des moules en présence.

D'abord, il est commode de considérer les arguments des moules comme des mots dont les lettres sont les paires $\binom{u_i}{v_i}$; on notera occasionnellement w_i cette dernière « variable double ».

Écalle définit par ailleurs certaines flexions, relatives à un découpage en sous-mots d'un mot en les w_i. Supposons que le mot $w = \binom{u_1,\dots,u_n}{v_1,\dots,v_n}$ soit le concaténé abc de trois mots de longueur respective i, j et k. Les quatre flexions du sous-mot b par rapport à ce découpage sont alors définies lorsque cela a un sens par

$$\lceil b = \binom{u_i+u_{i+1},\ u_{i+2},\ \dots,\ u_{i+j}}{v_{i+1},\ v_{i+2},\ \dots,\ v_{i+j}} \qquad b\rfloor = \binom{u_{i+1},\ \dots,\ u_{i+j}}{v_{i+1}-v_{i+j+1},\ \dots,\ v_{i+j}-v_{i+j+1}}$$

$$b\rceil = \binom{u_{i+1},\ \dots,\ u_{i+j-1},\ u_{i+j}+u_{i+j+1}}{v_{i+1},\ \dots,\ v_{i+j-1},\ v_{i+j}} \qquad \lfloor b = \binom{u_{i+1},\ \dots,\ u_{i+j}}{v_{i+1}-v_i,\ \dots,\ v_{i+j}-v_i}$$

La définition suivante introduit trois actions de l'ensemble des moules sur lui-même qui permettront de définir les quatre lois de composition mentionnées ci-dessus.

Définition 4.9. Soient M et N deux moules. On définit trois moules $\mathrm{arit}_M N$, $\mathrm{ganit}_M N$ et $\mathrm{garit}_M N$ par les équations [5]

$$\mathrm{arit}_M N\,(w) = \sum_{\substack{w=abc\\ b,c\neq\varnothing}} M(b\rfloor)\, N(a\lceil c) - \sum_{\substack{w=abc\\ a,b\neq\varnothing}} M(\lfloor b)\, N(a\rceil c),$$

$$\mathrm{ganit}_M N\,(w) = \sum_{\substack{w=a_1b_1\cdots a_sb_s\\ a_1,b_1,\dots,b_{s-1},a_s\neq\varnothing}} M(\lfloor b_1)\cdots M(\lfloor b_s)\, N(a_1\rceil\cdots a_s\rceil)$$

$$\text{et}\ \ \mathrm{garit}_M N\,(w) = \sum_{\substack{w=a_1b_1c_1\cdots a_sb_sc_s\\ b_i,c_ia_{i+1}\neq\varnothing}} \prod_{i=1}^{s} (M(a_i\rfloor)\, M^{-1}(\lfloor c_i)) \cdot N(\lceil b_1\rceil\cdots\lceil b_s\rceil),$$

5. Les équations (2.33) et (2.34) de [Éca11] contiennent chacune une coquille, les flexions indiquées n'étant pas compatibles avec la plupart des résultats énoncés.

ce dernier moule n'étant défini que lorsque M est inversible relativement à $\times$, d'inverse M^{-1}.

Nous sommes à présent en mesure de définir le crochet pré-Lie $\odot$, le crochet de Lie $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ et les lois de groupes $\star$ et $\cdot$:

Définition 4.10. Soient M et N deux moules. On définit les quatre moules $M \odot N$, $[M, N]$, $M \star N$ et $M \cdot N$ par les équations

$$\begin{aligned} M \odot N &= M \times N + \operatorname{arit}_N M, \\ [M, N] &= M \odot N - N \odot M, \\ M \star N &= N \times \operatorname{ganit}_N M \text{ et} \\ M \cdot N &= \operatorname{garit}_N M \times N, \end{aligned}$$

ce dernier moule n'ayant de sens que lorsque N est inversible relativement à $\times$.

Définition 4.11. On notera ARI l'ensemble des moules dont le terme constant vaut 0, muni de la structure d'algèbre de Lie donnée par le crochet $[\,\cdot\,,\cdot\,]$. On notera GARI l'ensemble des moules dont le terme constant vaut 1, muni de la structure de groupe donnée par le produit $\cdot$.

Nous ne démontrerons pas ici que ARI et GARI sont bien munis des structures annoncées. Il sera toutefois commode de disposer d'une notation pour l'élément neutre du groupe GARI.

Définition 4.12. On notera 1 le moule de terme constant égal à 1 et dont les parties de profondeur strictement positive sont nulles. Il s'agit à la fois du neutre pour la multiplication $\times$ et pour la loi de groupe $\cdot$.

L'algèbre ARI et le groupe GARI sont reliés par une exponentielle et un logarithme, définis comme suit.

Définition 4.13. On notera exp l'application d'ARI dans GARI définie par

$$\exp M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} M^{\odot n}$$

où $M^{\odot 0} = 1$ et $M^{\odot(n+1)} = M^{\odot n} \odot M$. Il s'agit d'une bijection d'ARI vers GARI, dont la réciproque sera notée log.

Ces deux bijections permettent en particulier de définir une action adjointe du groupe sur l'algèbre de Lie :

Définition 4.14. Si M est un élément de GARI, on notera $\operatorname{Ad}_M : \mathsf{ARI} \to \mathsf{ARI}$ l'application linéaire définie par $\operatorname{Ad}_M N = \partial_t|_{t=0} \log(M \cdot \exp(tN) \cdot M^{-1})$, où M^{-1} désigne l'inverse de M dans GARI.

ARI	$\mathfrak{h}$	
(M, N)	(f, g)	
$M \times N$	fg	
$\mathrm{arit}_M N$	$D_f(g)$	} voir déf. 1.10
$[M, N]$	$\{f, g\}$	
GARI	MT	voir [Rac00, § II-2]
$\mathrm{ganit}_M N$	$g(x, y\, f)$	
$\mathrm{garit}_M N$	$g(x, f^{-1} y\, f)$	
$M \cdot N$	$f(x, g^{-1} y\, g)\, g(x, y)$	

Table 4.1 – Notions écalliennes et notions classiques

Via les applications 'ma' et 'mi', l'espace ARI généralise donc l'espace $\mathfrak{h}$ des polynômes à deux variables non commutatives sans terme constant. Les lois de composition ainsi construites [6] généralisent celles liées au groupe de Magnus tordu, voir par exemple [Rac00, § II-2] ; plus précisément, on peut établir un dictionnaire entre ces deux formalismes, décrit ici dans la table 4.1. En particulier, le crochet de Lie $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ peut être vu comme une généralisation moulienne du crochet de Poisson :

Proposition 4.15. *La restriction à* $\mathrm{Ker}\,\partial_x$ *de l'application linéaire* $\mathrm{ma} : \mathfrak{h} \to \mathsf{ARI}$ *est un morphisme injectif d'algèbres de Lie pour les structures données par le crochet de Poisson et par l'opposé du crochet* $[\,\cdot\,,\cdot\,]$.

On pourra trouver une preuve de ce résultat dans [Rac00, § A-5], qui utilise entre autres le fait qu'à M fixé, l'application arit_M est une dérivation pour le produit $\times$ des séries.

4.2.3 Quelques conditions de symétrie

Nous avons défini les principales lois de composition sur ARI et GARI qui nous seront utiles par la suite. Les définitions de la présente section constituent donc quant à elles des généralisations des relations de mélange qui définissent l'algèbre $\mathfrak{ds}$.

Rappelons que les produits de shuffle et de stuffle ont été définis dans la section 1.1.1 sur les polynômes à deux variables. Ces produits s'étendent naturellement aux mots en les w_i comme suit.

Définition 4.16. Les multiensembles $\mathrm{sha}(w, w')$ et $\mathrm{shi}(w, w')$ sont définis récursivement pour toute paire (w, w') de mots en les w_i par les relations suivantes, où a

6. Écalle emploie les notations préfixes $M \times N = \mathrm{mu}(M, N)$, $M \odot N = \mathrm{preari}(M, N)$, $[M, N] = \mathrm{ari}(M, N)$, $M \star N = \mathrm{gani}(M, N)$ et $M \cdot N = \mathrm{gari}(M, N)$, mais nous prenons ici la liberté d'utiliser des notations à la fois plus habituelles et plus légères.

et a' sont deux lettres et où $\binom{u_i}{v_i} + \binom{u_j}{v_j}$ désigne la lettre $\binom{u_i+u_j}{v_i+v_j}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sha}(w, \varnothing) &= \mathrm{sha}(\varnothing, w) = \{w\}, \\
\mathrm{sha}(a\,w, a'\,w') &= \{a\,w'' \mid w'' \in \mathrm{sha}(w, a'\,w')\} \sqcup \{a'\,w'' \mid w'' \in \mathrm{sha}(a\,w, w')\}, \\
\mathrm{shi}(w, \varnothing) &= \mathrm{shi}(\varnothing, w) = \{w\}, \text{ et} \\
\mathrm{shi}(a\,w, a'\,w') &= \{a\,w'' \mid w'' \in \mathrm{shi}(w, a'\,w')\} \sqcup \{a'\,w'' \mid w'' \in \mathrm{shi}(a\,w, w')\} \sqcup \\
&\qquad \sqcup \{(a+a')\,w'' \mid w'' \in \mathrm{shi}(w, w')\}.
\end{aligned}$$

Ces notions permettent d'introduire deux types de symétries, l'alternalité et l'alternilité :

Définition 4.17. Un moule M sera dit alternal si

$$\sum_{w \in \mathrm{sha}(w', w'')} M(w) = 0$$

pour toute paire (w', w'') de mots non vides en les w_i. Il sera dit alternil si

$$\sum_{w \in \mathrm{shi}(w', w'')} \tilde{M}(w) = 0$$

pour toute paire (w', w'') de mots non vides en les w_i, où la notation $\tilde{M}(w)$ signifie que les contractions $M\binom{\cdots, u_i+u_j, \cdots}{\cdots, v_i+v_j, \cdots}$ ont été remplacées itérativement par les termes

$$\tfrac{1}{v_i - v_j}\left(M\tbinom{\cdots, u_i+u_j, \cdots}{\cdots, v_i, \cdots} - M\tbinom{\cdots, u_i+u_j, \cdots}{\cdots, v_j, \cdots}\right)$$

qui leur correspondent.

Les moules alternals sont analogues aux éléments de shuffle, c'est à dire aux polynômes de Lie, et les moules alternils aux éléments de stuffle. Cette remarque sera précisée par la proposition 4.22.

D'autres symétries mouliennes s'expriment en termes de certaines actions de permutations sur les variables des moules en question :

Définition 4.18. On définit deux involutions linéaires sur l'ensemble des moules en posant

$$\begin{aligned}
\mathrm{swap}\, M \tbinom{u_1, \ldots, u_r}{v_1, \ldots, v_r} &= M \tbinom{v_r, \quad \ldots, v_2 - v_3, v_1 - v_2}{u_1 + \cdots + u_r, \ldots, u_1 + u_2, \quad u_1} \\
\text{et} \quad \mathrm{mantar}\, M\,(w_1, \ldots, w_r) &= (-1)^{r-1} M(w_r, \ldots, w_1).
\end{aligned}$$

On note par ailleurs

$$\mathrm{push}\, M \tbinom{u_1, \ldots, u_r}{v_1, \ldots, v_r} = M \tbinom{-u_1 - \cdots - u_r, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_{r-1}}{-v_r, \quad v_1 - v_r, \ldots, v_{r-1} - v_r}$$

ce qui se restreint à une permutation cyclique sur toutes les parties de profondeur fixée.

Remarquons que tout polynôme f vérifie alors par définition $\mathrm{mi}_f = \mathrm{swap}\,\mathrm{ma}_f$.

Le résultat ci-dessous, qui peut être prouvé de manière similaire au lemme 2 de [IKZ06, § 8], jouera un rôle dans l'une des preuves de la section 4.3.3 :

Proposition 4.19. *Si M est un moule alternal, alors* $\mathrm{mantar}\,M = M$.

Définissons à présent quelques sous-ensembles d'ARI qui joueront un rôle central dans la suite.

Définition 4.20. On emploiera les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}} &= \{M \in \mathsf{ARI} \mid M \text{ est alternal}\}\\
\mathsf{ARI}^{\mathrm{il}} &= \{M \in \mathsf{ARI} \mid M \text{ est alternil}\}\\
\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{+} &= \{M \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}} \mid M_1 \text{ est paire}\}\\
\mathsf{ARI}^{\mathrm{push}} &= \{M \in \mathsf{ARI} \mid \mathrm{push}\,M = M\}\\
\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/al}} &= \{M \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{+} \mid \mathrm{swap}\,M \text{ est alternal}\}\\
\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/il}} &= \{M \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{+} \mid \mathrm{swap}\,M \text{ est alternil}\}\\
\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}} &= \{M \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{+} \mid \text{il existe un moule } C \text{ constant en toute profondeur tel}\\
&\qquad\qquad \text{que } C + \mathrm{swap}\,M \text{ est alternal}\}\\
\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}} &= \{M \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{+} \mid \text{il existe un moule } C \text{ constant en toute profondeur tel}\\
&\qquad\qquad \text{que } C + \mathrm{swap}\,M \text{ est alternil}\}
\end{aligned}$$

Il se trouve que le sous-espace $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}$ d'ARI est stable sous le crochet de Lie $[\,\cdot\,,\cdot\,]$. De plus, la condition de push-invariance est automatiquement vérifiée pour les éléments de $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}$:

Proposition 4.21. *On a l'inclusion* $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}} \subset \mathsf{ARI}^{\mathrm{push}}$.

On trouvera une preuve de ces deux énoncés dans l'article [SS14].

Pour expliciter l'analogie entre $\mathfrak{h}$ et ARI, démontrons rigoureusement que via les applications 'ma' et 'mi', les notions d'alternalité et d'alternilité traduisent effectivement les relations de shuffle et de stuffle :

Proposition 4.22. *Soit f un élément de $\mathfrak{h}$.*

i) Le polynôme f est de stuffle si et seulement si le moule mi_f *est alternil.*

ii) Si le polynôme f est de shuffle, alors le moule ma_f *est alternal, et la réciproque est vraie lorsque $\partial_x f = 0$.*

La preuve, dont le cœur est détaillé page 80, repose sur quelques résultats intermédiaires. Il sera notamment utile de disposer de l'application suivante, permettant dans certains cas de retrouver un polynôme à partir de son projeté sur $\mathfrak{h}^1$ et déjà employée par Racinet.

Définition 4.23. On notera $\mathrm{sec} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ l'application linéaire définie par

$$\mathrm{sec}\,f = \sum_{r \geqslant 0} \tfrac{(-1)^r}{r\,!}\partial_x^r(f)\,x^r. \tag{4.5}$$

Une propriété importante de cette dernière application est résumée par la proposition suivante.

Proposition 4.24. *L'application linéaire* sec *est un projecteur sur le noyau de* ∂_x*, et elle est nulle sur le sous-espace* $\mathfrak{h}x$*.*

Démonstration. Vérifions d'abord que sec est bien à valeurs dans $\operatorname{Ker}\partial_x$. On utilise le fait que ∂_x est une dérivation pour écrire

$$\begin{aligned}\partial_x \circ \operatorname{sec}(f) &= \sum_{r\geqslant 0} \tfrac{(-1)^r}{r\,!}\big(\partial_x^{r+1}(f)\,x^r + \partial_x^r(f)\,\partial_x(x^r)\big)\\ &= \sum_{r\geqslant 0} \tfrac{(-1)^r}{r\,!}\big(\partial_x^{r+1}(f)\,x^r + \partial_x^r(f)\,r\,x^{r-1}\big)\\ &= \sum_{r\geqslant 0} \tfrac{(-1)^r}{r\,!}\partial_x^{r+1}(f)\,x^r - \sum_{r\geqslant 1} \tfrac{(-1)^{r-1}}{(r-1)\,!}\partial_x^r(f)\,x^{r-1}\end{aligned}$$

ce qui est effectivement nul. Il faut ensuite prouver que $\operatorname{sec} f = f$ lorsque $\partial_x f = 0$; mais c'est immédiat puisque le seul terme restant dans la somme (4.5) est celui correspondant à $r = 0$, qui vaut f.

Calculons maintenant $\operatorname{sec}(fx)$ pour $f \in \mathfrak{h}$. En appliquant la formule de Leibniz, on trouve

$$\begin{aligned}\operatorname{sec}(fx) &= \sum_{r\geqslant 0} \tfrac{(-1)^r}{r\,!}\partial_x^r(fx)\,x^r\\ &= \sum_{r\geqslant 0} \tfrac{(-1)^r}{r\,!}\big(\partial_x^r(f)\,x + \tbinom{r}{1}\,\partial_x^{r-1}(f)\,\partial_x(x)\big)\,x^r\\ &= \sum_{r\geqslant 0} \tfrac{(-1)^r}{r\,!}\partial_x^r(f)\,x^{r+1} + \sum_{r\geqslant 1} \tfrac{(-1)^r}{(r-1)\,!}\partial_x^{r-1}(f)\,x^r\\ &= 0\end{aligned}$$

comme voulu. □

Corollaire 4.25. *Si* f *est un élément de* $\operatorname{Ker}\partial_x$*, alors* $f = \operatorname{sec}\pi_y f$*.*

Démonstration. Rappelons que π_y est le projecteur sur le sous-espace $\mathfrak{h}^1$ parallèlement à $\mathfrak{h}x$. Autrement dit, pour f comme dans l'énoncé, on peut écrire $f \equiv \pi_y f\ [\mathfrak{h}x]$. En appliquant sec, qui est nul sur $\mathfrak{h}x$, cela donne $\operatorname{sec} f = \operatorname{sec}\pi_y f$. Mais par hypothèse $\partial_x f = 0$ et donc $\operatorname{sec} f = f$, ce qui conclut. □

On peut reformuler le corollaire 4.25 en écrivant que la restriction à $\operatorname{Ker}\partial_x$ de π_y est une bijection dont la réciproque est sec. La proposition suivante montre que l'on peut expliciter cette réciproque en termes d'action de $\mathfrak{h}$ sur elle-même par adjonction et multiplication à gauche.

Proposition 4.26. *Pour* $f \in \mathfrak{h}$*, on a l'identité* $\operatorname{sec} f = \Phi(f)(1)$*, où* $\Phi : \mathfrak{h} \to \operatorname{End}(\mathfrak{h})$ *est le morphisme d'algèbres associatives envoyant* x *sur* ad_x *et* y *sur* L_y*, la multiplication à gauche par* y*.*

Démonstration. Par linéarité, il suffit de prouver que pour tout r-uplet $(i_1, \dots, i_r)$ d'entiers supérieurs à 1, on a

$$\operatorname{sec}(x^{i_1-1}y \cdots x^{i_r-1}y) = \operatorname{ad}_x^{i_1-1} L_y \cdots \operatorname{ad}_x^{i_r-1} L_y(1).$$

Nous allons calculer explicitement le membre de gauche pour ensuite y reconnaître celui de droite. Par la formule de Leibniz, il vient

$$\begin{aligned}
\operatorname{sec}(x^{i_1-1}y \cdots x^{i_r-1}y) &= \sum_{r\geqslant 0} \tfrac{(-1)^r}{r\,!} \sum_{r=j_1+\cdots+j_r} \tbinom{r}{j_1,\dots,j_r} \partial_x^{j_1}(x^{i_1-1})\, y \cdots \partial_x^{j_r}(x^{i_r-1})\, y\, x^r \\
&= \sum_{r\geqslant 0} (-1)^r \sum_{r=j_1+\cdots+j_r} \tbinom{i_1-1}{j_1} x^{i_1-1-j_1}\, y \cdots \tbinom{i_r-1}{j_r} x^{i_r-1-j_r}\, y\, x^r \\
&= \sum_{j_1\geqslant 0} (-1)^{j_1} \tbinom{i_1-1}{j_1} x^{i_1-1-j_1}\, y \Big(\textstyle\sum_{j_2,\dots,j_r\geqslant 0} \cdots \Big) x^{j_1}
\end{aligned}$$

ce qui est égal à $\operatorname{ad}_x^{i_1-1} L_y \cdots \operatorname{ad}_x^{i_r-1} L_y(1)$ comme annoncé. □

La discussion qui précède, et notamment la partie ayant pour objet l'application 'ma', permet d'exprimer le noyau de ∂_x comme une algèbre de polynômes sans utiliser le théorème d'élimination de Lazard :

Corollaire 4.27. *Les éléments $c_i = \operatorname{ad}_x^{i-1} y$ sont algébriquement indépendants, et engendrent* $\operatorname{Ker} \partial_x$ *en tant que sous-algèbre de l'algèbre de concaténation* $\mathfrak{h}$.

Démonstration. Il y a trois choses distinctes à prouver : que les c_i sont indépendants, que tout élément de $\operatorname{Ker} \partial_x$ est un polynôme en les c_i, et que tous les polynômes en les c_i annulent ∂_x. Procédons dans cet ordre.

Supposons par l'absurde une relation de dépendance linéaire entre monômes de la forme $c_{i_1} \cdots c_{i_r}$. Puisque la profondeur donne une graduation sur $\mathfrak{h}$ et que chaque c_i est de profondeur 1, on peut supposer que tous les monômes possèdent le même nombre de variables c_i. Le passage par l'application 'ma' et la proposition 4.8 implique alors une relation de liaison entre monômes commutatifs de la forme $u_1^{i_r-1} \cdots u_r^{i_1-1}$, où r est fixé. C'est absurde, et les c_i sont donc indépendants.

Montrons que tout polynôme annulé par ∂_x peut s'écrire comme un polynôme en les c_i. Du fait de la proposition 4.26, le polynôme considéré est dans l'orbite de $1 \in \mathfrak{h}$ sous l'action de la sous-algèbre de $\operatorname{End}(\mathfrak{h})$ engendrée par ad_x et L_y. Or cette orbite est incluse dans $\mathbb{Q}\langle c_i \rangle$, puisque cet espace contient 1 et est stable par la dérivation ∂_x, qui applique c_i sur c_{i+1}, et par la multiplication à gauche par $y = c_1$. Donc $\operatorname{Ker} \partial_x \subset \mathbb{Q}\langle c_i \rangle$.

L'inclusion en sens inverse est plus simple : il suffit de remarquer que tous les c_i annulent ∂_x, et d'utiliser encore une fois le fait que cette dernière application est une dérivation. La proposition est démontrée. □

Revenons au lien entre polynômes et moules. Tout est en place pour montrer que les relations d'alternalité (resp. d'alternilité) sont essentiellement équivalentes aux relations de shuffle (resp. de stuffle).

Démonstration (de la proposition 4.22). Prouvons (i). Par la définition 1.7, dire que le polynôme f est de stuffle revient à dire que f est dans $\mathfrak{h}^1$ et que $\langle f, w*w'\rangle = 0$ pour toute paire (w, w') de mots non vides en les y_i. Or le stuffle des monômes en les v_i se traduit par le produit 'shi' des mots en les u_i et v_i, et f est donc de stuffle si et seulement si mi_f vérifie les relations d'alternilité.

Prouvons (ii). Commençons par supposer que f est de shuffle, ou en d'autres termes que f appartient à $\mathfrak{f}_2$. Le théorème d'élimination de Lazard [Bou72, § 2, n° 9] assure l'existence d'une décomposition en somme directe $\mathfrak{f}_2 = \mathbb{Q}\,x \oplus \mathrm{Lie}[c_i]$; comme $\mathrm{ma}_x = 0$, on peut supposer que f est un élément de la sous-algèbre de Lie engendrée par les c_i. De même que dans le cas à deux variables et puisque les c_i sont algébriquement indépendants (cor. 4.27), f est alors nul évalué contre les shuffles de mots non vides en les c_i. Vue la proposition 4.8, cela signifie précisément que le moule mantar(ma_f) est alternal. D'après la proposition 4.19, le moule ma_f est donc lui aussi alternal.

Réciproquement, supposons que $\partial_x f = 0$ et que ma_f soit alternal. Toujours d'après le corollaire 4.27, on peut écrire f comme un polynôme en les variables indépendantes c_i. Comme précédemment, l'alternalité de ma_f implique que l'image $\mathrm{ret}\, f$ de f par l'antiautomorphisme involutif de $\mathfrak{h}$ valant l'identité sur x et y est un élément de shuffle en les c_i. De manière équivalente, $\mathrm{ret}\, f$ appartient à $\mathrm{Lie}[c_i]$, et donc en particulier à $\mathfrak{f}_2$. Mais on montre aisément, par récurrence sur les crochets de Lie, que si g est un élément de $\mathfrak{f}_2$, alors $\mathrm{ret}\, g$ coïncide au signe près avec g. On conclut finalement que f appartient à $\mathfrak{f}_2$. □

Remarque 4.28. La réciproque de l'implication (ii) n'est pas vraie en toute généralité, par exemple parce que pour tout $r \geqslant 2$, le monôme $f = x^r$ vérifie $\mathrm{ma}_f = 0$ mais n'est pas un élément de Lie. Une condition du type $\partial_x f = 0$ est donc nécessaire.

Corollaire 4.29. *Soit f un élément de $\mathfrak{ds}$. Alors ma_f appartient à $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}$.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier que ma_f est alternal et que mi_f est alternil à un moule constant près. La première condition découle directement de la deuxième implication de la proposition 4.22 et de la condition de shuffle sur f. Pour ce qui est de l'alternilité, observons que f^* est de la forme $\pi_y f + g$ avec $g \in \mathbb{Q}[y]$, et que le moule mi_g est constant en toute profondeur. De ce fait, mi_f est la différence de mi_{f^*} et d'un moule constant ; comme f^* est supposé de stuffle, c'est donc que mi_f est alternil à un moule constant près, ce que l'on voulait prouver. □

4.2.4 Des alternals aux alternils et inversement

L'action adjointe de GARI sur ARI permet à Écalle de donner un isomorphisme linéaire entre les deux sous-espaces $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/al}}$ et $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/il}}$ d'ARI. Pour ce faire, il faut commencer par définir un élément privilégié de GARI.

Définition 4.30. On définit par récurrence une suite de moules $(\mathfrak{re}_r)_{r\geqslant 1}$ en imposant les conditions

$$\mathfrak{re}_1\tbinom{u_1}{v_1} = \tfrac{1}{v_1},\ \mathfrak{re}_2\tbinom{u_1,u_2}{v_1,v_2} = \tfrac{v_1+v_2}{v_1\,(v_1-v_2)\,v_2} \text{ et } \mathfrak{re}_{r+1} = \tfrac{1}{r-1}[\mathfrak{re}_r, \mathfrak{re}_1] \text{ pour } r \geqslant 2. \quad (4.6)$$

Soit $(c_r)_{r\in\mathbb{N}}$ la suite de rationnels définie par l'identité de séries formelles

$$\exp\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r\, x^{r+1}\,\partial_x\right)(x) = 1 - e^{-x}. \tag{4.7}$$

On pose

$$\mathrm{pil} = \exp\sum_{r=1}^{\infty} c_r\,\mathfrak{te}_r \qquad \text{et} \qquad \mathrm{pal} = \mathrm{swap}\,\mathrm{pil}. \tag{4.8}$$

En utilisant notamment certaines propriétés de symétries du moule 'pal', qui est l'une des pierres angulaires du formalisme moulien [7], Écalle énonce le résultat suivant [Éca11, SS14].

Théorème 4.31. *L'application* $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}} : \mathsf{ARI} \longrightarrow \mathsf{ARI}$ *se restreint à des isomorphismes d'*$\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/al}}$ *vers* $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/il}}$ *et d'*$\mathsf{ARI}^{\mathrm{al*al}}$ *vers* $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al*il}}$.

Remarquons toutefois que ce théorème permet de montrer qu'$\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/il}}$ et $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al*il}}$ sont stables par le crochet $[\,\cdot\,,\cdot\,]$, en se servant du fait que c'est le cas pour $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/al}}$ et $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al*al}}$, ce qui constitue une nouvelle preuve du théorème 1.11 de Racinet.

4.3 Comparaison des deux constructions

Le but de cette dernière partie est de connecter les morphismes $(\mathrm{id}, s_\pm)$: $\mathfrak{grt} \to \widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$ de la section 4.1 et $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1} : \mathsf{ARI}^{\mathrm{al*il}} \to \mathsf{ARI}^{\mathrm{al*al}}$ de la section 4.2 en un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{grt} & & \xrightarrow{\quad(\mathrm{id},s_\pm)\quad} & & \widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}} \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\mathsf{ARI}^{\mathrm{al*il}}_{u\mathrm{ent}} & \xrightarrow[\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}]{} & \mathsf{ARI}^{\mathrm{al*al}}_{u\mathrm{pol}} & \hookrightarrow & \mathsf{ARI}
\end{array} \tag{4.9}$$

dont on verra qu'il commute au moins dans les premiers poids , ce qui établira un parallèle fort entre la construction d'Enriquez et celle d'Écalle ; les espaces reliés par la flèche $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}$ sont définis page suivante. Le premier, $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al*il}}_{u\mathrm{ent}}$, est une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{ds}$ du fait de la proposition 4.33 page suivante, tandis que le second, $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al*al}}_{u\mathrm{pol}}$, sera notre candidat à l'extension $\mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}}$.

Le fait que l'image de la flèche $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}$ est bien contenue dans l'espace $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/al}}_{u\mathrm{pol}}$ fait l'objet du théorème 4.35 page 84, et nous démontrons par ailleurs le théorème 4.45 page 94 selon lequel ce dernier espace est bien une algèbre de Lie ; ces deux théorèmes sont les résultats principaux du présent chapitre.

7. Remarquons par ailleurs qu'une autre définition de ce moule, plus effective, est décrite dans l'article récent [Éca14].

4.3.1 D'une section à l'autre

Nous disposons de presque tous les outils nécessaires pour définir les flèches verticales du diagramme (4.9). Le morphisme de $\mathfrak{grt}$ vers $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}$ est simplement le composé de l'application $f \mapsto f(x,-y)$, qui envoie $\mathfrak{grt}$ dans $\mathfrak{ds}$ du fait du théorème 1.19 de Furusho, et du morphisme 'ma', qui envoie $\mathfrak{ds}$ dans $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}$ du fait du corollaire 4.29.

Pour ce qui est du morphisme de $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$ vers ARI, il est composé de trois morphismes intermédiaires. Commençons par introduire une notation qui sera réemployée dans la section suivante : si r un entier naturel, on notera

$$\text{Д}_r(u) = u_1 \cdots u_r \, (u_1 + \cdots + u_r) \tag{4.10}$$

$$\text{et} \quad \text{Д}_r(v) = v_1 \, (v_1 - v_2) \cdots (v_{r-1} - v_r) \, v_r. \tag{4.11}$$

L'application $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}} \to \mathsf{ARI}$ est alors définie comme le composé

$$\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}} \longrightarrow \hat{\mathfrak{f}}_2 \xrightarrow{\mathrm{ma}} \mathsf{ARI} \xrightarrow{\text{Д}^{-1}} \mathsf{ARI},$$

où la première flèche est l'application $(f, \alpha_\pm) \mapsto -\alpha_-(y,x)$ et où l'application Д^{-1} envoie un moule M dont les valeurs ne dépendent que des u_i — ce qui est bien le cas pour les éléments de l'image de 'ma' — sur le moule M' défini par $M'\binom{u_1,\ldots,u_r}{v_1,\ldots,v_r} = \text{Д}_r(u)^{-1} \, M\binom{u_1,\ldots,u_r}{v_1,\ldots,v_r}$. En particulier, cette dernière application est une bijection entre l'espace des moules dont les valeurs sont des polynômes en les u_i et celui des moules dont le terme de profondeur r est une fraction rationnelle en les u_i dont le dénominateur divise $\text{Д}_r(u)$. Introduisons quelques espaces supplémentaires.

Définition 4.32. On emploiera les notations suivantes [8] :

$$\begin{aligned}
\mathsf{ARI}_{u\mathrm{ent}} &= \{M \in \mathsf{ARI} \mid \forall\, r \in \mathbb{N},\ M_r \in \mathbb{Q}[u_i]\} \\
\mathsf{ARI}_{v\mathrm{ent}} &= \{M \in \mathsf{ARI} \mid \forall\, r \in \mathbb{N},\ M_r \in \mathbb{Q}[v_i]\} \\
\mathsf{ARI}_{\mathrm{ent}} &= \mathsf{ARI}_{u\mathrm{ent}} \cup \mathsf{ARI}_{v\mathrm{ent}} \\
\mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}} &= \{M \in \mathsf{ARI} \mid \forall\, r \in \mathbb{N},\ \text{Д}_r(u) M_r \in \mathbb{Q}[u_i]\} \\
\mathsf{ARI}_{v\mathrm{pol}} &= \{M \in \mathsf{ARI} \mid \forall\, r \in \mathbb{N},\ \text{Д}_r(v) M_r \in \mathbb{Q}[v_i]\} \\
\mathsf{ARI}_{\mathrm{pol}} &= \mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}} \cup \mathsf{ARI}_{v\mathrm{pol}}
\end{aligned}$$

On se permettra par ailleurs de composer ces notations avec celles de la définition 4.20, en notant par exemple $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}_{\mathrm{ent}}$ l'intersection $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}} \cap \mathsf{ARI}_{\mathrm{ent}}$.

Remarquons que l'application ma au départ de $\mathfrak{ds}$ est clairement à valeurs dans $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{ent}}$, observation qui, combinée avec les propositions 4.15 et 4.22, se traduit par le résultat que voici.

Proposition 4.33. *L'application* ma *fournit un isomorphisme d'algèbres de Lie de* $\mathfrak{ds}$ *vers* $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}_{u\mathrm{ent}}$.

8. Qui sont un peu malencontreuses ; en effet, 'ent' est une abréviation de 'entier', autrement dit polynomial, et 'pol' une abréviation de 'polaire', autrement dit fractionnaire et dont le dénominateur est bien contrôlé.

Par ailleurs, l'application $Д^{-1} \circ \mathrm{ma}$ au départ de $\hat{\mathfrak{f}}_2$ est quant à elle à valeurs dans $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}}$. En résumé, on dispose du diagramme suivant, qui est une version affaiblie du diagramme (4.9) :

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{grt} & & \xrightarrow{(\mathrm{id},s_\pm)} & & \widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ & & & & \mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}} \\ & & & & \downarrow \\ \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}_{u\mathrm{ent}} & \xrightarrow[\mathrm{Ad}^{-1}_{\mathrm{pal}}]{} & \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}} & \hookrightarrow & \mathsf{ARI} \end{array} \tag{4.12}$$

La section suivante décrit brièvement le résultat de tests informatiques entrepris sur ce dernier diagramme.

4.3.2 Une observation expérimentale

Tous les espaces et toutes les flèches des diagrammes (4.9) et (4.12) sont définis de manière effective, et on peut calculer les images d'éléments de $\mathfrak{grt}$ dans ARI, tronquées en profondeur limitée, par les deux chemins possibles. Précisons les différentes étapes du processus.

Dans les premiers poids, l'injection de Furusho constitue un isomorphisme entre les algèbres $\mathfrak{grt}$ et $\mathfrak{ds}$, et il est donc équivalent de considérer un élément de $\mathfrak{grt}$ et l'élément de $\mathfrak{ds}$ correspondant. En d'autres termes, il suffit de résoudre les équations du double mélange pour obtenir une collection d'éléments f de $\mathfrak{ds}$ auxquels on appliquera les flèches définies dans les sections précédentes. Une façon efficace de mener à bien ce calcul est de commencer à calculer récursivement des bases de Hall [Bou72] de l'algèbre libre $\mathfrak{f}_2$, puis de résoudre les équations de stuffle, soit en utilisant le stuffle des mots en les variables y_i, soit en utilisant le coproduit Δ_*.

Pour diminuer encore le temps de calcul, on peut tirer profit de la conjecture de liberté de $\mathfrak{ds}$ ou de $\mathfrak{grt}$, qui prescrit les dimensions des parties graduées de ces algèbres : il suffit alors de résoudre un petit nombre de relations de stuffle tirées au sort, jusqu'à aboutir à la dimension conjecturée.

Il s'agit ensuite d'envoyer les éléments f de $\mathfrak{ds}$ ou $\mathfrak{grt}$ obtenus par cette méthode dans $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}_{\mathrm{ent}}$ par la première flèche verticale d'une part, et dans $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$ par la première flèche horizontale d'autre part. Dans le premier cas, il suffit de développer le polynôme f dans la base des monômes de $\mathfrak{h}$, de conserver les monômes se terminant par y et de calculer le moule mi_f associé, pour finalement appliquer l'involution swap qui fournit le moule ma_f. Dans le second cas, il faut calculer les composantes $s_\pm(f)$ définies par la proposition 4.5 ; rappelons que ces composantes sont des éléments de l'algèbre libre complétée $\hat{\mathfrak{t}}_{1,2}$, et de ce fait possèdent des monômes de tout poids ; la contrainte de finitude inhérente à tout calcul effectif impose donc de se restreindre aux premiers poids pertinents. Le calcul en lui-même ne présente pas de difficulté particulière et s'appuie sur la remarque qui suit la proposition 4.5.

Le passage d'un élément tronqué de $\widehat{\mathfrak{grt}}^{\mathrm{ell}}$ à son image dans $\mathsf{ARI}_{\mathrm{pol}}$ est du même ordre de difficulté que le passage de $\mathfrak{ds}$ à $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}_{\mathrm{ent}}$. Il est cependant un peu moins facile de calculer l'image d'un élément de ce dernier espace par l'action adjointe $\mathrm{Ad}^{-1}_{\mathrm{pal}}$. Pour ce faire, il est nécessaire de calculer le moule 'pal' et son inverse pour le produit $\cdot$ jusqu'à une profondeur adéquate. On se sert de la définition 4.30 pour construire explicitement 'pal' en petite profondeur ; remarquons que l'équation (4.7) définissant les rationnels c_r permet de calculer ces derniers itérativement en très peu de temps en écrivant les identités

$$\begin{aligned} c_r &= \tfrac{(-1)^r}{(r+1)\,!} - \textstyle\sum_{k=1}^{r-1} \tfrac{1}{(k+1)\,!}\, p_{k,r} \\ \text{avec} \qquad p_{k,r} &= \textstyle\sum_{s=k}^{r-1} (s+1)\, c_{r-s}\, p_{k-1,s} \qquad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant r-1 \\ \text{et} \qquad p_{0,r} &= c_r, \end{aligned}$$

qui fournissent les premières valeurs $\frac{-1}{2}$, $\frac{-1}{12}$, $\frac{-1}{48}$, $\frac{-1}{180}$, $\frac{-11}{8\,640}$, $\frac{-1}{6\,720}$, $\frac{11}{241\,920}$.

Il reste enfin à calculer l'action par conjugaison du moule 'pal'. Pour ce faire, on peut utiliser l'identité (4.18) de la section suivante qui permet de se ramener à l'action de 'pil', ce dernier moule et son inverse étant bien plus simples à calculer. Une autre façon de procéder consiste à construire itérativement l'inverse de 'pal' en résolvant de proche en proche les équations exprimant le fait que son produit $\cdot$ avec le moule 'pal' vaut 1.

Tout ceci permet de calculer en quelques heures les deux flèches de $\mathfrak{grt}$ vers ARI déduites du diagramme (4.9) pour les éléments de $\mathfrak{grt}$ de poids inférieur à 8 et en tronquant les moules obtenus en profondeur inférieure à 6 ; l'ensemble de ces tests semble indiquer que les constructions d'Enriquez et d'Écalle sont équivalentes. Autrement dit :

Conjecture 4.34. *Le diagramme* (4.12) *est commutatif.*

Un objectif de la fin de ce chapitre est de démontrer rigoureusement certains résultats partiels allant dans le sens de cette conjecture.

4.3.3 Polarité de l'image de la section

Un premier pas vers la preuve de la conjecture 4.34 serait de démontrer que les deux flèches de $\mathfrak{grt}$ vers ARI sont à valeurs dans l'intersection $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}_{u\mathrm{pol}}$. Ce cas particulier implique lui-même un résultat auxiliaire, que nous allons démontrer dans cette section :

Théorème 4.35. *L'application* $\mathrm{Ad}^{-1}_{\mathrm{pal}}$ *envoie* $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/il}}_{u\mathrm{ent}}$ *dans* $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/al}}_{u\mathrm{pol}}$, *et* $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}_{u\mathrm{ent}}$ *dans* $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}_{u\mathrm{pol}}$.

Par ailleurs, il semble que cette dernière application est un morphisme d'algèbres de Lie, au même titre que l'application ma : $\mathfrak{ds} \to \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}$ ou que les deux sections. On verra dans la section 4.3.5 que les espaces $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al/al}}_{u\mathrm{pol}}$ et $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}_{u\mathrm{pol}}$ sont effectivement des sous-algèbres de Lie d'ARI.

Pour démontrer le théorème 4.35, remarquons qu'il suffit de prouver que l'image par $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}$ d'un élément de $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{ent}}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}$ appartient à $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}}$, puisque la symétrie à l'arrivée est assurée par le théorème 4.31. En d'autres termes, il s'agit de prouver que tout moule à valeurs polynomiales en les u_i et à symétrie 'al $*$ il' est envoyé par $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}$ sur un moule dont les valeurs sont des fractions rationnelles en les u_i dont les dénominateurs divisent $Д_r(u)$.

La preuve du théorème 4.35 se découpe alors en trois étapes principales motivées par un résultat d'Écalle dont nous ne reproduirons pas la preuve, qui est une conséquence d'un résultat plus général [Éca11, éq. (5.17)] :

Lemme 4.36. *Tout élément M de $\mathsf{ARI}^{\mathrm{push}}$ vérifie l'identité*

$$\mathrm{swap}\,\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}\,M = \mathrm{ganit}_{\mathrm{pic}}\,\mathrm{Ad}_{\mathrm{pil}}\,\mathrm{swap}\,M,$$

où le moule 'pic' *est défini par*

$$\mathrm{pic}\tbinom{u_1,\dots,u_r}{v_1,\dots,v_r} = \tfrac{1}{v_1\cdots v_r}. \tag{4.13}$$

En remplaçant dans cet énoncé le moule M par $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}M$ pour $M \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}$, la proposition 4.21 et le théorème 4.31 ont alors pour conséquence que

$$\forall\, M \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}},\quad \mathrm{swap}\,M = \mathrm{ganit}_{\mathrm{pic}}\,\mathrm{Ad}_{\mathrm{pil}}\,\mathrm{swap}\,\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}\,M \tag{4.14}$$

puis après inversion des opérateurs en présence que

$$\forall\, M \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}},\quad \mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}^{-1}\,M = \mathrm{swap}\,\mathrm{Ad}_{\mathrm{pil}}^{-1}\,\mathrm{ganit}_{\mathrm{poc}}\,\mathrm{swap}\,M \tag{4.15}$$

où 'poc' désigne faute d'une meilleure notation le moule vérifiant $\mathrm{poc} \star \mathrm{pic} = 1$; on utilise ici le fait que $\mathrm{ganit}_{M\star N} = \mathrm{ganit}_N \circ \mathrm{ganit}_M$ pour tous moules M et N.

Partant de l'identité 4.15, la démonstration du théorème 4.35 va se décomposer comme suit :

1°) si M est dans $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{ent}}^{\mathrm{al/il}}$, le moule $\mathrm{swap}\,M$ est dans $\mathsf{ARI}_{v\mathrm{ent}}^{\mathrm{il}}$; on montre alors (prop. 4.38) que $\mathrm{ganit}_{\mathrm{poc}}\,\mathrm{swap}\,M$ appartient à $\mathsf{ARI}_{v\mathrm{pol}}^{\mathrm{al}}$. Cela passe par le calcul d'une expression explicite du moule 'poc' (lemme 4.37) ;

2°) on montre ensuite qu'$\mathsf{ARI}_{v\mathrm{pol}}^{\mathrm{al}}$ est stable par l'application $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pil}}^{-1}$ (lemme 4.40 et cor. 4.41), et contient en particulier le moule $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pil}}^{-1}\,\mathrm{ganit}_{\mathrm{poc}}\,\mathrm{swap}\,M$, ce qui après application de l'involution 'swap' prouvera le théorème 4.35 pour M dans $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{ent}}^{\mathrm{al/il}}$; on évolue donc de gauche à droite dans le diagramme ci-dessous :

$$\mathsf{ARI}_{u\mathrm{ent}}^{\mathrm{al/il}} \xrightarrow{\mathrm{swap}} \mathsf{ARI}_{v\mathrm{ent}}^{\mathrm{il}} \xrightarrow[1^{\mathrm{o}},\ \mathrm{prop.}\ 4.38]{\mathrm{ganit}_{\mathrm{poc}}} \mathsf{ARI}_{v\mathrm{pol}}^{\mathrm{al}} \xrightarrow[2^{\mathrm{o}},\ \mathrm{cor.}\ 4.41]{\mathrm{Ad}_{\mathrm{pil}}^{-1}} \mathsf{ARI}_{v\mathrm{pol}}^{\mathrm{al}} \xrightarrow{\mathrm{swap}} \mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}}\,;$$

3°) on généralise enfin au cas où M n'est plus seulement dans $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{ent}}^{\mathrm{al/il}}$ mais dans $\mathsf{ARI}_{u\mathrm{ent}}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}$, ce qui nécessite l'étude des propriétés des moules constants vis-à-vis de l'application $\mathrm{Ad}_{\mathrm{pal}}$ (lemme 4.43, cor. 4.44).

Passons maintenant aux résultats intermédiaires annoncés.

Lemme 4.37. *En notant* $\mathrm{poc}\binom{u_1,\dots,u_r}{v_1,\dots,v_r} = \frac{v_r}{\text{Д}_r(v)}$, *on a* $\mathrm{poc} \star \mathrm{pic} = 1$.

Démonstration. Revenons à la définition 4.10 : il s'agit de prouver que

$$\mathrm{poc} \star \mathrm{pic} = \mathrm{pic} \times \mathrm{ganit}_{\mathrm{pic}} \mathrm{poc} = 1,$$

ou encore que $\mathrm{ganit}_{\mathrm{pic}} \mathrm{poc}$ est l'inverse de 'pic' pour le produit $\times$. Par définition même, cet inverse est égal à $1 - \mathfrak{E}$, où $\mathfrak{E}$ est le moule dont le seul terme non nul est en profondeur 1 et vaut $\frac{1}{v_1}$. Le fait que $\mathrm{ganit}_{\mathrm{pic}} \mathrm{poc}$ coïncide avec $1 - \mathfrak{E}$ en profondeur 0 et 1 est immédiat à vérifier en appliquant la définition 4.9, et il reste donc à prouver que le moule $\mathrm{ganit}_{\mathrm{pic}} \mathrm{poc}$ est nul en profondeur supérieure à 2.

Par définition, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{ganit}_{\mathrm{pic}} \mathrm{poc}\,(w_1, \dots, w_r) = \\ = \sum_{w_1 \cdots w_r = b^1 c^1 \cdots b^s c^s} \mathrm{poc}(b^1 \cdots b^s)\, \mathrm{pic}(\lfloor c^1) \cdots \mathrm{pic}(\lfloor c^s) \quad (4.16)\end{aligned}$$

où la somme porte sur l'ensemble de toutes les partitions de $w_1 \cdots w_r$ en $2\,s$ mots dont seul le dernier peut être vide.

Construisons une involution σ sur ce dernier ensemble qui fasse changer le signe du terme correspondant dans la somme, ce qui entraînera immédiatement que ladite somme est nulle. Commençons par en donner une explication visuelle. Graphiquement, une partition de $w_1 \cdots w_r$ peut être représentée par un nombre impair de séparateurs placés entre r points : par exemple, la partition $(w_1 w_2)(w_3)(w_4)()$ peut être notée $\circ\circ \mid \circ \mid \circ \mid$. L'involution σ va mettre en correspondance les partitions dont le dernier terme est vide avec les autres, en distinguant selon la taille de l'avant dernier terme : graphiquement, elle se définit par

$$\begin{aligned}\cdots \circ \circ \mid &\overset{\sigma}{\longleftrightarrow} \cdots \circ \mid \circ \\ \cdots \circ \mid \circ \mid &\overset{\sigma}{\longleftrightarrow} \cdots \circ \circ\end{aligned}$$

Définissons maintenant σ de manière plus formelle sur l'ensemble des partitions dont le dernier terme est vide ; il sera clair qu'elle les envoie bijectivement sur les partitions dont le dernier terme est non vide, et on vérifiera ensuite que le terme correspondant dans la somme (4.16) change effectivement de signe. Il y a deux cas à distinguer.

1) Le terme b^s de la partition $b^1 c^1 \cdots b^s$ est de longueur 1. On construit alors la nouvelle partition $b'^1 c'^1 \cdots b'^{s-1} c'^{s-1} = \sigma(b^1 c^1 \cdots b^s)$ de longueur $2\,s - 2$ en gardant $b'^i = b^i$ et $c'^i = c^i$ pour $i \leqslant s - 2$, puis $b'^{s-1} = b^{s-1}$. On définit enfin c'^{s-1} comme étant égal à $c^{s-1} b^s$.
2) Le terme b^s de la partition $b^1 c^1 \cdots b^s$ est de longueur supérieure à 2 ; il s'écrit donc $b^s = m\,w$ pour un certain mot m et une certaine lettre w. On conserve alors $b'^i = b^i$ et $c'^i = c^i$ pour $i \leqslant s - 1$, et on pose $b'^s = m$ et $c'^s = w$. La nouvelle partition est donc bien définie et de longueur $2\,s$.

Il ne reste plus qu'à nous assurer que le changement de signe annoncé a bien lieu. Traitons les deux cas successivement.

1) Par hypothèse, b^s est la lettre w_r ; notons $b^{s-1} = m\, w_{r-1}$ où m est un mot éventuellement vide. Avant application de l'involution, le terme de la somme est

$$\begin{aligned}\operatorname{poc}(b^1 \cdots b^{s-1} b^s) \operatorname{pic}(\lfloor c^1) \cdots \operatorname{pic}(\lfloor c^{s-1}) = \\ = \operatorname{poc}(b^1 \cdots b^{s-2} m\, w_{r-1}) \tfrac{1}{v_{r-1}-v_r} \operatorname{pic}(\lfloor c^1) \cdots \operatorname{pic}(\lfloor c^{s-1})\end{aligned}$$

et l'involution σ l'envoie sur

$$\operatorname{poc}(b^1 \cdots b^{s-1}) \operatorname{pic}(\lfloor c^1) \cdots \operatorname{pic}(\lfloor c^{s-2}) \operatorname{pic}(\lfloor (c^{s-1} v_r))$$

où le dernier terme du produit vaut aussi $\operatorname{pic}(\lfloor c^{s-1}) \tfrac{1}{v_r - v_{r-1}}$. Les deux termes associés se compensent donc dans la somme (4.16).

2) Par hypothèse, $b^s = m\, w_{r-1} w_r$ où m est un mot éventuellement vide. Le terme de la somme correspondant vaut

$$\begin{aligned}\operatorname{poc}(b^1 \cdots b^{s-1} b^s) \operatorname{pic}(\lfloor c^1) \cdots \operatorname{pic}(\lfloor c^{s-1}) = \\ = \operatorname{poc}(b^1 \cdots b^{s-1} m\, w_{r-1}) \tfrac{1}{v_{r-1}-v_r} \operatorname{pic}(\lfloor c^1) \cdots \operatorname{pic}(\lfloor c^{s-1})\end{aligned}$$

et l'involution σ l'envoie sur

$$\operatorname{poc}(b^1 \cdots b^{s-1} m\, w_{r-1}) \operatorname{pic}(\lfloor c^1) \cdots \operatorname{pic}(\lfloor (c^{s-1} w_r))$$

où le dernier terme du produit vaut aussi $\operatorname{pic}(\lfloor c^{s-1}) \tfrac{1}{v_r - v_{r-1}}$. Les deux termes associés se compensent donc aussi dans la somme (4.16), ce qui conclut la preuve. □

Démontrons à présent le point 1° de la preuve du théorème 4.35.

Proposition 4.38. *Soit M dans $\mathsf{ARI}^{\mathrm{il}}_{v\mathrm{ent}}$. Alors* $\operatorname{ganit}_{\mathrm{poc}} M \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$.

Démonstration. Le fait que l'image de M est alternale est un résultat d'Écalle que nous admettrons ici, voir [Éca11, § 4.6]. Il reste donc à contrôler ses dénominateurs. On utilise la définition 4.9 qui donne

$$\operatorname{ganit}_{\mathrm{poc}} M\,(w_1, \ldots, w_r) = \sum_{\substack{w_1 \cdots w_r = a_1 b_1 \cdots a_s b_s \\ a_1, b_1, \ldots, b_{s-1}, a_s \neq \varnothing}} \operatorname{poc}(\lfloor b_1) \cdots \operatorname{poc}(\lfloor b_s)\, M(a_1 \rceil \cdots a_s \rceil)\,;$$

le terme $M(a_1 \rceil \cdots a_s \rceil)$ est par hypothèse polynomial, et il suffit par conséquent contrôler le dénominateur de $\operatorname{poc}(\lfloor b_1) \cdots \operatorname{poc}(\lfloor b_s)$. Or, pour tout sous-mot b_i de la forme $w_{j+1} \cdots w_{j+r}$, le lemme 4.37 entraîne que

$$\begin{aligned}\operatorname{poc}(\lfloor b_1) &= \operatorname{poc}\left(\begin{smallmatrix} u_{j+1}, & \ldots, & u_{j+r} \\ v_{j+1}-v_j, & \ldots, & v_{j+r}-v_j \end{smallmatrix}\right) \\ &= \tfrac{1}{(v_{j+1}-v_j)(v_{j+1}-v_{j+2}) \cdots (v_{j+r-1}-v_{j+r})}.\end{aligned}$$

Il est dès lors clair que le dénominateur de $\operatorname{ganit}_{\mathrm{poc}} M\,(w_1, \ldots, w_r)$ divise $\tfrac{Д_r(v)}{v_1 v_r}$, et en particulier $Д_r(v)$. □

Passons au point 2°. Dans la suite, pour un moule M donné à valeurs rationnelles en les v_i, on notera $\check{M}$ le moule défini par

$$\check{M}\left(\begin{smallmatrix}u_1,\dots,u_r\\ v_1,\dots,v_r\end{smallmatrix}\right) = Д_r(v)\, M\left(\begin{smallmatrix}u_1,\dots,u_r\\ v_1,\dots,v_r\end{smallmatrix}\right); \tag{4.17}$$

en particulier, dire qu'un moule M appartient à $\mathsf{ARI}_{v\mathrm{pol}}$ revient à dire que $\check{M}$ appartient à $\mathsf{ARI}_{v\mathrm{ent}}$.

Lemme 4.39. *Soit M un élément d'$\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$. Alors le moule $\check{M}$ vérifie la relation*

$$\check{M}(0, w_2, \dots, w_r) = \check{M}(w_2, \dots, w_r, 0).$$

Démonstration. Écrivons la plus simple des relations d'alternalité. Elle donne

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{w\in \mathrm{sha}(w_1, w_2\cdots w_r)} M(w) \\
&= \sum_{i=0}^{r} M(w_2, \dots, w_i, w_1, w_{i+1}, \dots, w_r) \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\check{M}(w_2, \dots, w_i, w_1, w_{i+1}, \dots, w_r)}{v_2\,(v_2 - \cdots)\cdots(\cdots - v_r)\,v_r} + \\
&\quad + \frac{\check{M}(w_1, \dots, w_r)}{v_1\,(v_1 - v_2)\cdots(v_{r-1} - v_r)\,v_r} + \\
&\quad + \frac{\check{M}(w_2, \dots, w_r, w_1)}{v_2\,(v_2 - v_3)\cdots(v_{r-1} - v_r)(v_r - v_1)\,v_1}
\end{aligned}$$

d'où, en multipliant par v_1 et en évaluant en $v_1 = 0$,

$$0 = \frac{\check{M}(0, w_2, \dots, w_r)}{(-v_2)(v_2 - v_3)\cdots(v_{r-1} - v_r)\,v_r} + \frac{\check{M}(w_2, \dots, w_r, 0)}{v_2\,(v_2 - v_3)\cdots(v_{r-1} - v_r)v_r}$$

ce qui a bien un sens puisque les deux numérateurs qui entrent en jeu sont des polynômes par hypothèse sur M. Le résultat annoncé suit immédiatement. □

Lemme 4.40. *Le sous-espace $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$ d'ARI en est une sous-algèbre de Lie.*

La preuve de cette assertion, assez longue, est détaillée dans la section 4.3.4. □

Corollaire 4.41. *Le sous-espace $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$ d'ARI est stable sous l'opérateur $\mathrm{Ad}^{-1}_{\mathrm{pil}}$.*

Démonstration. Un premier ingrédient est l'identité « $\mathrm{Ad}_{\exp x} = \exp \mathrm{ad}_x$ » valable pour toute algèbre de Lie. Ici, elle prend la forme

$$\mathrm{Ad}_{\mathrm{pil}} = \exp \mathrm{ad}_{\log \mathrm{pil}}\,,$$

où ad désigne l'action adjointe d'ARI sur elle-même. En inversant chacun des deux membres, cela signifie en particulier que si M est un élément d'$\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$, alors

$$\mathrm{Ad}^{-1}_{\mathrm{pil}}\, M = \exp(-\mathrm{ad}_{\log \mathrm{pil}}) M = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{n\,!}\, \mathrm{ad}^n_{\log \mathrm{pil}}\, M. \tag{4.18}$$

Utilisons la définition 4.30. On vérifie aisément que les moules $\mathfrak{re}_1$ et $\mathfrak{re}_2$ sont tous les deux des éléments d'$\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$; en appliquant le lemme précédent, on en déduit par récurrence que

$$\forall\, r \geqslant 1, \quad \mathfrak{re}_r \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}. \tag{4.19}$$

Le moule $\log \mathrm{pil}$ étant défini comme une combinaison linéaire infinie de $\mathfrak{re}_r$ est donc lui aussi un élément d'$\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$. En appliquant une seconde fois le lemme 4.40, cela signifie en particulier que

$$\forall\, M \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}},\ \forall\, n \geqslant 0, \quad \mathrm{ad}^n_{\log \mathrm{pil}}\, M \in \mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}.$$

Le résultat annoncé découle alors de l'équation (4.18). □

Remarque 4.42. La partie de l'équation (4.19) ci-dessus portant sur les dénominateurs des moules $\mathfrak{re}_r$ définis par l'équation (4.6) peut aussi être vue comme la conséquence d'un calcul explicite. En effet, on peut prouver par le biais d'une récurrence fastidieuse que

$$\forall\, r \geqslant 1, \quad \mathfrak{re}_r\tbinom{u_1,\dots,u_r}{v_1,\dots,v_r} = \tfrac{v_1+\cdots+v_r}{\Pi_r(v)},$$

ce qui implique immédiatement l'assertion concernant les dénominateurs.

Passons maintenant aux résultats de l'étape 3°.

Lemme 4.43. *Soient C un moule constant en toute profondeur et M un élément d'*ARI *dont les valeurs dépendent uniquement des variables u_i. Alors*

i) $\mathrm{arit}_C\, M = 0$, *ii)* $\mathrm{arit}_M\, C = C \times M - M \times C$ *et iii)* $[M, C] = 0$.

Démonstration. Par linéarité, il suffit de s'occuper du cas où C est nul en dehors d'une profondeur fixée $r \geqslant 1$, et où C_r est la fonction constante égale à 1. Fixons un mot quelconque $w = w_1 \cdots w_{r+s}$. Tous les moules en présence ne dépendant que des variables u_i, on se permettra d'employer une notation simplifiée ne tenant compte que de ces dernières.

Prouvons (i). On applique la définition 4.9 en écrivant

$$\begin{aligned}
\mathrm{arit}_C\, M\,(w) &= \sum_{\substack{w=abc\\ b,c\neq\varnothing}} C(b\rfloor)\, M(a\lceil c) - \sum_{\substack{w=abc\\ a,b\neq\varnothing}} C(\lfloor b)\, M(a\rceil c) \\
&= \sum_{\substack{w=abc\\ |b|=r,c\neq\varnothing}} M(a\lceil c) - \sum_{\substack{w=abc\\ |b|=r,a\neq\varnothing}} M(a\rceil c) \\
&= \sum_{i=0}^{s-1} M(u_1,\dots,u_i,u_{i+1}+\cdots+u_{i+r+1},u_{i+r+2},\dots,u_{r+s}) - \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{s} M(u_1,\dots,u_{i-1},u_i+\cdots+u_{i+r},u_{i+r+1},\dots,u_{r+s})
\end{aligned}$$

ce qui est nul, comme annoncé.

Prouvons (ii). On écrit

$$\begin{aligned}\operatorname{arit}_M C(w) &= \sum_{\substack{w=abc\\ b,c\neq\varnothing}} M(b\rfloor)\, C(a\lceil c) - \sum_{\substack{w=abc\\ a,b\neq\varnothing}} M(\lfloor b)\, C(a\rceil c)\\ &= \sum_{\substack{w=abc\\ |b|=s,c\neq\varnothing}} M(b\rfloor) - \sum_{\substack{w=abc\\ |b|=s,a\neq\varnothing}} M(\lfloor b)\\ &= M(u_1,\dots,u_s) - M(u_{r+1},\cdots,u_{r+s})\\ &= (M\times C - C\times M)(w)\end{aligned}$$

ce qui est l'identité voulue.

L'assertion (iii) résulte alors immédiatement des deux précédentes et de la définition 4.10. □

Corollaire 4.44. *Tout moule C constant en toute profondeur vérifie* $\operatorname{Ad}_{\mathrm{pal}} C = C$.

Démonstration. On utilise l'identité $\operatorname{Ad}_{\mathrm{pal}} = \exp(\operatorname{ad}_{\log \mathrm{pal}})$ qui assure que la différence $\operatorname{Ad}_{\mathrm{pal}} C - C$ est une combinaison linéaire infinie de crochets itérés sur le terme $[\log \mathrm{pal}, C]$. Puisque les valeurs de 'pal' ne dépendent que des u_i, l'assertion (iii) du lemme 4.43 montre alors que tous ces crochets sont nuls, d'où le résultat. □

Nous pouvons maintenant dérouler la preuve du résultat principal de cette partie :

Démonstration (du théorème 4.35). Soit donc M un élément d'$\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{il}}_{u\mathrm{ent}}$. Par définition, il existe un moule C constant en toute profondeur tel que $\operatorname{swap}(M+C)$ appartienne à $\mathsf{ARI}^{\mathrm{il}}_{v\mathrm{ent}}$. Puisque C est clairement push-invariant, le lemme 4.36 et le corollaire 4.44 impliquent l'identité

$$C = \operatorname{Ad}^{-1}_{\mathrm{pal}} C = \operatorname{swap} \operatorname{Ad}^{-1}_{\mathrm{pil}} \operatorname{ganit}_{\mathrm{poc}} \operatorname{swap} C\,;$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\operatorname{Ad}^{-1}_{\mathrm{pal}} M &= \operatorname{Ad}^{-1}_{\mathrm{pal}}(M+C) - C\\ &= \operatorname{swap} \operatorname{Ad}^{-1}_{\mathrm{pil}} \operatorname{ganit}_{\mathrm{poc}} \operatorname{swap}(M+C) - C.\end{aligned}$$

On applique ensuite la proposition 4.38, selon laquelle $\operatorname{ganit}_{\mathrm{poc}} \operatorname{swap}(M+C)$ est un élément de $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$, puis le corollaire 4.41 qui montre que c'est aussi le cas pour $\operatorname{Ad}^{-1}_{\mathrm{pil}} \operatorname{ganit}_{\mathrm{poc}} \operatorname{swap}(M+C)$. Par conséquent,

$$\operatorname{swap} \operatorname{Ad}^{-1}_{\mathrm{pil}} \operatorname{ganit}_{\mathrm{poc}} \operatorname{swap}(M+C) \in \mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}}$$

et puisque c'est aussi le cas pour C, le théorème est démontré. □

4.3.4 Preuve du lemme 4.40

Rappelons qu'il s'agit de vérifier que l'espace $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$ est une algèbre de Lie sous $[\,\cdot\,,\cdot\,]$.

Démonstration. Fixons deux moules M et N dans $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$. Par linéarité, on peut supposer que ces moules sont concentrés respectivement en profondeur $r \geqslant 1$ et $s \geqslant 1$. L'alternalité étant préservée par le crochet $[\,\cdot\,,\cdot\,]$, on cherche à prouver que $[M,N]$ appartient lui aussi à $\mathsf{ARI}_{v\mathrm{pol}}$.

La preuve, assez longue et calculatoire, consiste à réduire les valeurs des moules $\mathrm{arit}_M N$, $M \odot N$ et $[M,N]$ modulo le sous-espace des polynômes en les v_i. Tous les moules en présence ne dépendant que des variables v_i, on se permettra d'employer une notation simplifiée ne tenant compte que de ces dernières. On applique les définitions 4.9 et 4.10 selon lesquelles

$$[M,N] = M \odot N - N \odot M \tag{4.20}$$

$$\text{avec} \qquad M \odot N = \mathrm{arit}_N M + M \times N \tag{4.21}$$

$$\text{et} \qquad \mathrm{arit}_N M\,(w) = \sum_{\substack{w=abc\\ b,c\neq\varnothing}} N(b\rfloor)\,M(a\lceil c) - \sum_{\substack{w=abc\\ a,b\neq\varnothing}} N(\lfloor b)\,M(a\rceil c). \tag{4.22}$$

On en tire

$$\begin{aligned}
\mathrm{arit}_M N(v_1 \dots v_{r+s}) &= \sum_{0\leqslant i<s} N(v_1 \cdots v_i\, v_{i+r+1} \cdots v_{r+s})\, M(v_{i+1} \cdots v_{i+r}\rfloor) - \\
&\quad - \sum_{0<i\leqslant s} N(v_1 \cdots v_i\, v_{i+r+1} \dots v_{r+s})\, M(\lfloor v_{i+1} \cdots v_{i+r}) \\
&= N(v_{r+1} \cdots v_{r+s})\, M(v_1 - v_{r+1}, \dots, v_r - v_{r+1}) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{s-1} N(v_1 \cdots v_i\, v_{i+r+1} \cdots v_{r+s}) \cdot \\
&\quad \cdot \Big(M(v_{i+1} - v_{i+r+1}, \dots, v_{i+r} - v_{i+r+1}) - \\
&\quad - M(v_{i+1} - v_i, \dots, v_{i+r} - v_i) \Big) - \\
&\quad - N(v_1 \cdots v_s)\, M(v_{s+1} - v_s, \dots v_{r+s} - v_s).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\text{Д}_{r+s}(v)\,\mathrm{arit}_M N(v_1, \dots, v_{r+s}) = \\
&= \tfrac{v_1}{v_{r+1}\,(v_1 - v_{r+1})}\, \check{N}(v_{r+1} \cdots v_{r+s})\, \check{M}(v_1 - v_{r+1}, \dots, v_r - v_{r+1}) + \\
&+ \sum_{i=1}^{s-1} \text{Д}_{r+s}(v)\, S_i + \tfrac{v_{r+s}}{v_s\,(v_{r+s} - v_s)}\, \check{N}(v_1 \cdots v_s)\, \check{M}(v_{s+1} - v_s, \dots, v_{r+s} - v_s)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

avec

$$\text{Д}_{r+s}(v)\, S_i = \frac{(v_i - v_{i+1}) \cdots (v_{i+r} - v_{i+r+1})}{v_i - v_{i+r+1}}\, \check{N}(v_1 \cdots v_i\, v_{i+r+1} \cdots v_{r+s}) \cdot$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \Big(M(v_{i+1} - v_{i+r+1}, \dots, v_{i+r} - v_{i+r+1}) - \\
&- M(v_{i+1} - v_i, \dots, v_{i+r} - v_i) \Big) \\
&= \frac{(v_i - v_{i+1}) \cdots (v_{i+r} - v_{i+r+1})}{v_i - v_{i+r+1}} \check{N}(v_1 \cdots v_i \, v_{i+r+1} \cdots v_{r+s}) \cdot \\
&\cdot \left(\frac{\check{M}(v_{i+1} - v_{i+r+1}, \dots, v_{i+r} - v_{i+r+1})}{(v_{i+1} - v_{i+r+1})(v_{i+1} - v_{i+2}) \cdots (v_{i+r-1} - v_{i+r})(v_{i+r} - v_{i+r+1})} - \right. \\
&\left. - \frac{\check{M}(v_{i+1} - v_i, \dots, v_{i+r} - v_i)}{(v_{i+1} - v_i)(v_{i+1} - v_{i+2}) \cdots (v_{i+r-1} - v_{i+r})(v_{i+r} - v_i)} \right)
\end{aligned}
$$

soit

$$
\begin{aligned}
\text{Д}_{r+s}(v) \, S_i = \tfrac{1}{v_i - v_{i+r+1}} \, &\check{N}(v_1 \cdots v_i \, v_{i+r+1} \cdots v_{r+s}) \cdot \\
&\cdot \Big(\tfrac{v_i - v_{i+1}}{v_{i+1} - v_{i+r+1}} \, \check{M}(v_{i+1} - v_{i+r+1}, \dots, v_{i+r} - v_{i+r+1}) + \\
&+ \tfrac{v_{i+r} - v_{i+r+1}}{v_{i+r} - v_i} \, \check{M}(v_{i+1} - v_i, \dots, v_{i+r} - v_i) \Big). \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Au vu des égalités (4.23) et (4.24), il y a donc trois types de pôles possibles dans la fraction rationnelle $\text{Д}_{r+s}(v) \operatorname{arit}_M N(v_1 \dots v_{r+s})$:

1) les pôles $\frac{1}{v_{r+1}}$ et $\frac{1}{v_s}$, qui n'apparaissent que dans un terme et ne se compensent a priori pas ;
2) les pôles de la forme $\frac{1}{v_i - v_{i+r+1}}$;
3) les pôles de la forme $\frac{1}{v_i - v_{i+r}}$.

Traitons en premier le cas 2. Le pôle $\frac{1}{v_i - v_{i+r+1}}$ ne peut apparaître que dans le terme $\text{Д}_{r+s}(v) \, S_i$; on veut donc montrer que ce pôle est compensé par la différence des $\check{M}$ correspondante. Évaluons cette différence pour $v_i = v_{i+r+1} = u_i = u_{i+r+1} = a$; elle donne

$$
\tfrac{a - v_{i+1}}{v_{i+1} - a} \, \check{M}(v_{i+1} - a, \dots, v_{i+r} - a) + \tfrac{v_{i+r} - a}{v_{i+r} - a} \, \check{M}(v_{i+1} - a, \dots, v_{i+r} - a)
$$

ce qui est effectivement nul comme voulu.

Pour le cas 3, il faut distinguer trois sous-cas, selon que $i = 1$, que $i = s$, ou que i appartienne à $[\![2, s-1]\!]$.

a) $i = 1$: le pôle est multiplié par

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{v_1}{v_{r+1}} \, \check{N}(v_{r+1} v_{r+2} \cdots v_{r+s}) \, \check{M}(v_1 - v_{r+1}, \dots, v_r - v_{r+1}) - \\
&\quad - \tfrac{1}{v_1 - v_{r+2}} \, \check{N}(v_1 \, v_{r+2} \cdots v_{r+s}) \cdot (v_{r+1} - v_{r+2}) \, \check{M}(v_2 - v_1, \dots, v_{r+1} - v_1)
\end{aligned}
$$

ce qui lorsque $v_1 = v_{r+1} = a$ vaut

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{a}{a} \, \check{N}(a, v_{r+2}, \dots, v_{r+s}) \, \check{M}(a - a, v_2 - a, \dots, v_r - a) - \\
&\quad - \tfrac{1}{a - v_{r+2}} \, \check{N}(a, v_{r+2}, \cdots, v_{r+s}) \cdot (a - v_{r+2}) \, \check{M}(v_2 - a, \dots, v_r - a, a - a)
\end{aligned}
$$

$$= \check{N}(a, v_{r+2}, \dots, v_{r+s})\, \check{M}(0, v_2 - a, \dots, v_r - a) -$$
$$- \check{N}(a, v_{r+2}, \cdots, v_{r+s})\, \check{M}(v_2 - a, \dots, v_r - a, 0)$$

qui est bien nul du fait du lemme 4.39.

b) $i = s$: le pôle est multiplié par

$$- \tfrac{v_{r+s}}{v_s}\, \check{N}(v_1 \cdots v_s)\, \check{M}(v_{s+1} - v_s, \dots, v_{r+s} - v_s) +$$
$$+ \tfrac{1}{v_{s-1} - v_{r+s}}\, \check{N}(v_1, \dots, v_{s-1}, v_{r+s}) \cdot (v_{s-1} - v_s)\, \check{M}(v_s - v_{r+s}, \dots, v_{r+s-1} - v_{r+s})$$

ce qui lorsque $v_s = v_{r+s} = a$ vaut

$$- \tfrac{a}{a}\, \check{N}(v_1, \dots, v_{s-1}, a)\, \check{M}(v_{s+1} - a, \dots, v_{r+s-1} - a, a - a) +$$
$$+ \tfrac{1}{v_{s-1} - a}\, \check{N}(v_1, \dots, v_{s-1}, a) \cdot (v_{s-1} - a)\, \check{M}(a - a, v_{s+1} - a, \dots, v_{r+s-1} - a)$$
$$= -\check{N}(v_1, \dots, v_{s-1}, a)\, \check{M}(v_{s+1} - a, \dots, v_{r+s-1} - a, 0) +$$
$$+ \check{N}(v_1, \dots, v_{s-1}, a) \check{M}(0, v_{s+1} - a, \dots, v_{r+s-1} - a)$$

qui est aussi nul.

c) $i \in [\![2, s-1]\!]$: le pôle $\frac{1}{v_i - v_{i+r}}$ vient de $Д_{r+s}(v)(S_{i-1} - S_i)$, et est multiplié par

$$\tfrac{v_{i-1} - v_i}{v_{i-1} - v_{i+r}}\, \check{N}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+r}, \cdots, v_{r+s}) \cdot \check{M}(v_i - v_{i+r}, \dots, v_{i-1+r} - v_{i+r}) -$$
$$- \tfrac{v_{i+r} - v_{i+r+1}}{v_i - v_{i+r+1}}\, \check{N}(v_1, \dots, v_i, v_{i+r+1}, \dots, v_{r+s}) \cdot \check{M}(v_{i+1} - v_i, \dots, v_{i+r} - v_i)$$

ce qui lorsque $v_i = v_{i+r} = a$ vaut

$$\check{N}(v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+r+1}, \cdots, v_{r+s}) \cdot \check{M}(a - a, v_{i+1} - a, \dots, v_{i-1+r} - a) -$$
$$- \check{N}(v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+r+1}, \dots, v_{r+s}) \cdot \check{M}(v_{i+1} - a, \dots, v_{i+r-1} - a, a - a)$$
$$= \check{N}(v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+r+1}, \cdots, v_{r+s}) \cdot \check{M}(0, v_{i+1} - a, \dots, v_{i-1+r} - a) -$$
$$- \check{N}(v_1, \dots, v_{i-1}, a, v_{i+r+1}, \dots, v_{r+s}) \cdot \check{M}(v_{i+1} - a, \dots, v_{i+r-1} - a, 0)$$

qui est toujours nul.

En conséquence, les seuls pôles restants dans $Д_{r+s}(v)\, \mathrm{arit}_M\, N(v_1 \dots v_{r+s})$ sont ceux en $\frac{1}{v_{r+1}}$ et $\frac{1}{v_s}$, et plus précisément

$$Д_{r+s}(v)\, \mathrm{arit}_M\, N(v_1, \dots, v_{r+s}) \equiv$$
$$\equiv \tfrac{v_1}{v_{r+1}\,(v_1 - v_{r+1})}\, \check{N}(v_{r+1}, \dots, v_{r+s})\, \check{M}(v_1 - v_{r+1}, \dots, v_r - v_{r+1}) +$$
$$+ \tfrac{v_{r+s}}{v_s\,(v_{r+s} - v_s)}\, \check{N}(v_1, \dots, v_s)\, \check{M}(v_{s+1} - v_s, \dots v_{r+s} - v_s)\ [\mathbb{Q}[\underline{v}]]. \quad (4.25)$$

Il s'agit à présent de montrer que les parties polaires ci-dessus se compensent dans l'expression de $[M, N]$. En combinant, les pôles possibles de la fraction rationnelle $Д_{r+s}(v)[M, N](v_1, \dots, v_{r+s})$ viennent de la somme

$$\tfrac{v_1}{v_{s+1}\,(v_1 - v_{s+1})}\, \check{M}(v_{s+1}, \dots, v_{s+r})\, \check{N}(v_1 - v_{s+1}, \dots, v_s - v_{s+1}) +$$
$$+ \tfrac{v_{s+r}}{v_r\,(v_{s+r} - v_r)}\, \check{M}(v_1, \dots, v_r)\, \check{N}(v_{r+1} - v_r, \dots, v_{s+r} - v_r) -$$

$$
\begin{aligned}
&- \tfrac{v_1}{v_{r+1}\,(v_1-v_{r+1})}\,\check{N}(v_{r+1},\dots,v_{r+s})\,\check{M}(v_1-v_{r+1},\dots,v_r-v_{r+1}) + \\
&+ \tfrac{v_{r+s}}{v_s\,(v_{r+s}-v_s)}\,\check{N}(v_1,\dots,v_s)\,\check{M}(v_{s+1}-v_s,\dots v_{r+s}-v_s) + \\
&+ \tfrac{v_r-v_{r+1}}{v_r\,v_{r+1}}\,\check{M}(v_1,\dots,v_r)\,\check{N}(v_{r+1},\dots,v_{r+s}) - \\
&- \tfrac{v_s-v_{s+1}}{v_s\,v_{s+1}}\,\check{N}(v_1,\dots,v_s)\,\check{M}(v_{s+1},\dots,v_{r+s})
\end{aligned}
$$

en prenant garde à l'échange de r et s lorsqu'on échange M et N. La discussion qui précède montre qu'il suffit de vérifier que les pôles $\frac{1}{v_r}$ et $\frac{1}{v_s}$, $\frac{1}{v_{r+1}}$ et $\frac{1}{v_{s+1}}$ n'apparaissent en fait pas. Remarquons que l'alternalité de $[M,N]$ combinée à la proposition 4.19 implique qu'il suffit de traiter le cas de $\frac{1}{v_r}$ et $\frac{1}{v_s}$, les deux autres s'en déduisant par symétrie autour de $\frac{r+s+1}{2}$. Et le pôle $\frac{1}{v_s}$ se déduit de $\frac{1}{v_r}$ puisque l'expression totale pour $[M,N]$ est antisymétrique en M et N, et donc en r et s.

Reste finalement à régler le cas du pôle $\frac{1}{v_r}$. Le facteur correspondant est

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{v_{s+r}}{v_{s+r}-v_r}\,\check{M}(v_1,\dots,v_r)\,\check{N}(v_{r+1}-v_r,\dots,v_{s+r}-v_r) + \\
&\qquad + \tfrac{v_r-v_{r+1}}{v_{r+1}}\,\check{M}(v_1,\dots,v_r)\,\check{N}(v_{r+1},\dots,v_{r+s})
\end{aligned}
$$

qui est visiblement nul lorsque $v_r = 0$. Ceci conclut la preuve du lemme 4.40. □

4.3.5 Stabilité par le crochet de Lie

Nous en venons à présent au dernier résultat de cette thèse, qui constitue clairement une condition nécessaire au fait que l'espace $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}_{u\mathrm{pol}}$ soit l'extension $\mathfrak{ds}^{\mathrm{ell}}$ recherchée :

Théorème 4.45. *Le sous-espace* $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}_{u\mathrm{pol}}$ *d'*ARI *en est une sous-algèbre de Lie.*

Démonstration. Soient M et N deux éléments d'$\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}_{u\mathrm{pol}}$. L'appartenance à $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}*\mathrm{al}}$ du crochet $[M,N]$ provient du fait, énoncé par Écalle et déjà mentionné [SS14], que ce dernier espace est une algèbre de Lie. Il reste donc à contrôler les dénominateurs de $[M,N]$. Pour ce faire, nous allons conjuguer par l'involution 'swap' et utiliser le lemme 4.40 selon lequel l'espace $\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$ est stable par le crochet de Lie ; en effet, d'après la proposition 4.21, les moules M et N appartiennent à $\mathsf{ARI}^{\mathrm{push}}$, et on peut prouver [Sch14] que dans ce cas

$$[M,N] = \mathrm{swap}\,[\mathrm{swap}\,M, \mathrm{swap}\,N]. \tag{4.26}$$

Or l'hypothèse sur M et N implique l'existence de deux moules C et D constants en toute profondeur tels que $\mathrm{swap}(M+C)$ et $\mathrm{swap}(N+D)$ soient des éléments d'$\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$. En appliquant le lemme 4.43 exprimant la centralité des moules constants, l'équation (4.26) devient

$$[M,N] = \mathrm{swap}\,[\mathrm{swap}(M+C), \mathrm{swap}(N+D)] \tag{4.27}$$

et le lemme 4.40 montre que le membre de droite appartient à $\mathrm{swap}\,\mathsf{ARI}^{\mathrm{al}}_{v\mathrm{pol}}$, qui est lui-même un sous-espace d'$\mathsf{ARI}_{u\mathrm{pol}}$, ce qui prouve le théorème. □

Bibliographie

[AET10] A. Alekseev, B. Enriquez & C. Torossian – « Drinfel'd associators, braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2010), n° 112, p. 143–189.

[AM06] A. Alekseev & E. Meinrenken – « On the Kashiwara-Vergne conjecture », *Invent. Math.* 164 (2006), n° 3, p. 615–634.

[And04] Y. André – *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses, vol. 17, SMF, Paris, 2004.

[AT12] A. Alekseev & C. Torossian – « The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfel'd associators », *Ann. of Math. (2)* 175 (2012), n° 2, p. 415–463.

[Bac12] H. Bachmann – *Multiple Zeta-Werte & die Verbindung zu Modulformen durch Multiple Eisensteinreihen*, mémoire, Universität Hamburg, 2012, disponible en ligne sur `www.math.uni-hamburg.de/home/bachmann/msc_henrik_bachmann.pdf`.

[BBV10] J. Blümlein, D. J. Broadhurst & J. A. M. Vermaseren – « The multiple zeta value data mine », *Comput. Phys. Comm.* 181 (2010), n° 3, p. 582–625.

[Bel79] G. V. Belyĭ – « Galois extensions of a maximal cyclotomic field », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 43 (1979), n° 2, p. 267–276, 479.

[BK97] D. J. Broadhurst & D. Kreimer – « Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops », *Physics Letters B* 393 (1997), n° 3, p. 403–412.

[BK13] H. Bachmann & U. Kühn – « The algebra of multiple divisor functions and applications to multiple zeta values », prépublication sur `http://arxiv.org/abs/1309.3920`, 2013.

[BL94] A. Beĭlinson & A. Levin – « The elliptic polylogarithm », in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 123–190.

[BL13] F. Brown & A. Levin – « Multiple elliptic polylogarithms », prépublication sur `http://arxiv.org/abs/1110.6917`, 2013.

[BN98] D. Bar-Natan – « On associators and the Grothendieck-Teichmüller group. I », *Selecta Math. (N.S.)* 4 (1998), n° 2, p. 183–212.

[Bou72] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre 2 : Algèbres de Lie libres*, Hermann, Paris, 1972.

[Bra05] D. M. BRADLEY – « A q-analog of Euler's decomposition formula for the double zeta function », *Int. J. Math. Math. Sci.* (2005), n° 21, p. 3453–3458.

[Bro12a] F. BROWN – « Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$ », *Ann. of Math. (2)* 175 (2012), n° 2, p. 949–976.

[Bro12b] ——— , « On the decomposition of motivic multiple zeta values », in *Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 63, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012, p. 31–58.

[Bro13] ——— , « Depth-graded motivic multiple zeta values », prépublication sur `http://arxiv.org/abs/1301.3053`, 2013.

[BS13] S. BAUMARD & L. SCHNEPS – « Period polynomial relations between double zeta values », *Ramanujan J.* 32 (2013), n° 1, p. 83–100.

[Car01] P. CARTIER – « Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents », *Astérisque* 282 (2001), p. 137–173, séminaire Bourbaki.

[Car08] S. CARR – « Valeurs multizêta : algèbres de Lie et périodes sur $\mathfrak{M}_{0,n}$ », thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2008.

[CEE09] D. CALAQUE, B. ENRIQUEZ & P. ETINGOF – « Universal KZB equations : the elliptic case », in *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, Progr. Math., vol. 269, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009, p. 165–266.

[CEM13] J. CASTILLO MEDINA, K. EBRAHIMI-FARD & D. MANCHON – « Unfolding the double shuffle structure of q-multiple zeta values », prépublication sur `http://arxiv.org/abs/1310.1330`, 2013.

[CM08] A. CONNES & M. MARCOLLI – *Noncommutative geometry, quantum fields and motives*, A.M.S. Colloquium Publications, vol. 55, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Cre09] J. CRESSON – « Calcul moulien », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* 18 (2009), n° 2, p. 307–395.

[CS12] S. CARR & L. SCHNEPS – « Combinatorics of the double shuffle Lie algebra », in *Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 63, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012, p. 59–89.

[Del89] P. DELIGNE – « Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points », in *Galois groups over $\mathbb{Q}$ (Berkeley, CA, 1987)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer, New York, 1989, p. 79–297.

[DG96] B. DATSKOVSKY & P. GUERZHOY – « On Ramanujan congruences for modular forms of integral and half-integral weights », *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996), n° 8, p. 2283–2291.

[DG05] P. DELIGNE & A. B. GONCHAROV – « Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 38 (2005), n° 1, p. 1–56.

[Dri91] V. G. DRINFEL'D – « On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ », *Leningrad Math. J.* 2 (1991), n° 4, p. 829–860.

[Duf75] M. DUFLO – « Construction of primitive ideals in an enveloping algebra », in *Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971)*, Halsted, New York, 1975, p. 77–93.

[Éca81] J. ÉCALLE – *Les fonctions résurgentes. Tome II*, Publications mathématiques d'Orsay, vol. 6, 1981.

[Éca03] ——— , « ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas : un premier bilan », *J. Th. Nombres Bordeaux* 15 (2003), n° 2, p. 411–478.

[Éca11] ——— , « The flexion structure and dimorphy », in *Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs ; generalized Borel summation. Vol. 2*, CRM Series, vol. 12, Ed. Norm., Pisa, 2011, p. 27–211.

[Éca14] ——— , « Eupolars and their bialternality grid », prépublication sur `www.math.u-psud.fr/~ecalle/publi.html`, 2014.

[Enr12] B. ENRIQUEZ – « Elliptic associators », prépublication sur `http://arxiv.org/abs/1003.1012`, 2012.

[Eul48] L. EULER – « Introductio in analysin infinitorum », in *Opera Omnia*, Birkhäuser, 1748.

[Eul75] ——— , « Commentationes analyticæ ad theoriam serierum infinitarum pertinentes », in *Opera Omnia*, Birkhäuser, 1734–1775.

[Fis04] S. FISCHLER – « Irrationalité de valeurs de zêta », *Astérisque* 294 (2004), p. 27–62.

[Fuk07] S. FUKUHARA – « Explicit formulas for Hecke operators on cusp forms, Dedekind symbols and period polynomials », *J. Reine Angew. Math.* 607 (2007), p. 163–216.

[Fur03] H. FURUSHO – « The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 39 (2003), n° 4, p. 695–720.

[Fur10] ——— , « Pentagon and hexagon equations », *Ann. of Math. (2)* 171 (2010), n° 1, p. 545–556.

[Fur11] ——— , « Double shuffle relation for associators », *Ann. of Math. (2)* 174 (2011), n° 1, p. 341–360.

[Fus43] P.-H. FUSS (éd.) – *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du* XVIII^{e} *siècle*, vol. 1, Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg, 1843.

[GKZ06] H. GANGL, M. KANEKO & D. ZAGIER – « Double zeta values and modular forms », in *Automorphic forms and zeta functions*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006, p. 71–106.

[GM04] A. B. GONCHAROV & Y. MANIN – « Multiple ζ-motives and moduli spaces $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ », *Compos. Math* 140 (2004), n° 1, p. 1–14.

[Gon98] A. B. GONCHAROV – « Mixed elliptic motives », in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, p. 147–221.

[Gon01a] ——— , « The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of $\pi_1^{(\ell)}(\mathbb{P}^1 - (\{0,\infty\} \cup \mu_N))$ », *Duke Math. J.* 110 (2001), n° 3, p. 397–487.

[Gon01b] ——— , « Multiple polylogarithms and mixed Tate motives », prépublication sur `http://arxiv.org/abs/math/0103059`, 2001.

[Gon02] ——— , « Periods and mixed motives », prépublication sur `http://arxiv.org/abs/math/0202154`, 2002.

[Gon05] ——— , « Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry », *Duke Math. J.* 128 (2005), n° 2, p. 209–284.

[Gro97] A. GROTHENDIECK – « Esquisse d'un programme », in *Geometric Galois actions, 1*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 5–48.

[Hab83] K. HABERLAND – « Perioden von Modulformen einer Variabler und Gruppencohomologie, I », *Math. Nachr.* 112 (1983), p. 245–282.

[Hai09] R. HAIN – lettre à P. Deligne, hiver 2009, Durham, NC.

[HM03] R. HAIN & M. MATSUMOTO – « Weighted completion of Galois groups and Galois actions on the fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ », *Compositio Math.* 139 (2003), n° 2, p. 119–167.

[HM12] ——— , « Universal mixed elliptic motives », manuscrit non publié, 2012.

[Hof92] M. E. HOFFMAN – « Multiple harmonic series », *Pacific J. Math.* 152 (1992), n° 2, p. 275–290.

[Iha89] Y. IHARA – « The Galois representation arising from $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ and Tate twists of even degree », in *Galois groups over $\mathbb{Q}$ (Berkeley, CA, 1987)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer, New York, 1989, p. 299–313.

[Iha90] ——— , « Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations », in *The Grothendieck Festschrift* (P. Cartier, N. M. Katz, Y. I. Manin, L. Illusie, G. Laumon & K. A. Ribet, éds.), Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, 1990, p. 353–373.

[Iha91] ——— , « Braids, Galois groups, and some arithmetic functions », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto, 1990)*, Math. Soc. Japan, 1991, p. 99–120.

[Iha92] ——— , « On the stable derivation algebra associated with some braid groups », *Israel J. Math.* 80 (1992), p. 135–153.

[Iha94] ——— , « On the embedding of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ into $\widehat{\mathsf{GT}}$ », in *The Grothendieck theory of dessins d'enfants (Luminy, 1993)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 200, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, p. 289–321.

[Iha02] ——— , « Some arithmetic aspects of Galois actions in the pro-p fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ », in *Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 70, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, p. 247–273.

[IKZ06] K. IHARA, M. KANEKO & D. ZAGIER – « Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values », *Compos. Math.* 142 (2006), n° 2, p. 307–338.

[Kan04] M. KANEKO – « Double zeta values and modular forms », in *Proceedings of the Japan-Korea joint seminar on Number Theory* (Kuju, Japan) (H. K. Kim & Y. Taguchi, éds.), 2004.

[KKW03] M. KANEKO, N. KUROKAWA & M. WAKAYAMA – « A variation of Euler's approach to values of the Riemann zeta function », *Kyushu J. Math.* 57 (2003), n° 1, p. 175–192.

[Kob87] N. KOBLITZ – « Congruences for periods of modular forms », *Duke Math. J.* 54 (1987), n° 2, p. 361–373.

[KT13] M. KANEKO & K. TASAKA – « Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2 », *Mathematische Annalen* 357 (2013), n° 3, p. 1091–1118.

[KV78] M. KASHIWARA & M. VERGNE – « The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions », *Invent. Math.* 47 (1978), n° 3, p. 249–272.

[KZ84] W. KOHNEN & D. ZAGIER – « Modular forms with rational periods », in *Modular forms (Durham, 1983)* (R. A. Rankin, éd.), Ellis Horwood Ser. Math. Appl. : Statist. Oper. Res., Horwood, Chichester, 1984, p. 197–249.

[KZ01] M. KONTSEVICH & D. ZAGIER – « Periods », in *Mathematics unlimited – 2001 and beyond*, Springer, Berlin, 2001.

[Lan95] S. LANG – *Introduction to modular forms*, Grundlehren der Mathematischen Wißenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. 222, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Lew97] J. LEWIS – « Spaces of holomorphic functions equivalent to the even Maass cusp forms », *Invent. Math.* 127 (1997), n° 2, p. 271–306.

[LM96] T. T. Q. LÊ & J. MURAKAMI – « Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial », *Nagoya Math. J.* 142 (1996), p. 39–65.

[LNT07] J.-G. LUQUE, J.-C. NOVELLI & J.-Y. THIBON – « Period polynomials and Ihara brackets », *J. Lie Theory* 17 (2007), n° 2, p. 229–239.

[LR07] A. LEVIN & G. RACINET – « Towards multiple elliptic polylogarithms », prépublication sur `http://arxiv.org/abs/math/0703237`, 2007.

[LZ01] J. LEWIS & D. ZAGIER – « Period functions for Maass wave forms. I », *Ann. of Math. (2)* 153 (2001), n° 1, p. 191–258.

[Man73] Y. I. MANIN – « Periods of parabolic forms and p-adic Hecke series », *Math. Sbornik* 92 (1973), p. 371–393.

[MR05] F. MARTIN & E. ROYER – « Formes modulaires et périodes », in *Formes modulaires et transcendance*, Séminaires et Congrès, vol. 12, SMF, Paris, 2005.

[MS03] W. G. MCCALLUM & R. T. SHARIFI – « A cup product in the Galois cohomology of number fields », *Duke Math. J.* 120 (2003), n° 2, p. 269–310.

[NSW08] J. NEUKIRCH, A. SCHMIDT & K. WINGBERG – *Cohomology of number fields*, deuxième éd., Grundlehren der Mathematischen Wißenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Oko14] A. OKOUNKOV – « Hilbert schemes and multiple q-zeta values », disponible en ligne sur http://arxiv.org/abs/1404.3873, 2014.

[OOZ12] Y. OHNO, J.-I. OKUDA & W. ZUDILIN – « Cyclic q-MZSV sum », *J. Number Theory* 132 (2012), n° 1, p. 144–155.

[OT07] J.-I. OKUDA & Y. TAKEYAMA – « On relations for the multiple q-zeta values », *Ramanujan J.* 14 (2007), n° 3, p. 379–387.

[Pol09] A. POLLACK – *Relations between derivations arising from modular forms*, mémoire, Duke University, 2009, disponible en ligne sur la page http://dukespace.lib.duke.edu/dspace/handle/10161/1281.

[Rac00] G. RACINET – « Séries génératrices non commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfel'd », thèse de doctorat, Université de Picardie – Jules Verne, 2000.

[Rac02] ——— , « Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2002), n° 95, p. 185–231.

[Ran52] R. A. RANKIN – « The scalar product of modular forms », *Proc. London Math. Soc. (3)* 2 (1952), p. 198–217.

[Reu03] C. REUTENAUER – « Free Lie algebras », in *Handbook of algebra*, vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 2003.

[Sch06] L. SCHNEPS – « On the Poisson bracket on the free Lie algebra in two generators », *J. Lie Theory* 16 (2006), n° 1, p. 19–37.

[Sch12] ——— , « Double shuffle and Kashiwara-Vergne Lie algebras », *J. Algebra* 367 (2012), p. 54–74.

[Sch14] ——— , « ARI, GARI, Zig and Zag », en préparation, 2014.

[Ser66] J.-P. SERRE – *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W. A. Benjamin, inc., New York-Amsterdam, 1966.

[Ser77] ——— , *Cours d'arithmétique*, PUF, Paris, 1977.

[Sha04] R. T. SHARIFI – « A cup product in Galois cohomology », in *Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen : Seminars 2003–2004*, Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 2004, p. 1–8.

[Sha09] ——— , « Cup products and L-values of cusp forms », *Pure Appl. Math. Quart.* 5 (2009), n° 1, p. 339–348.

[Sou09] I. SOUDÈRES – « Motifs de Tate mixtes et éclatements à la MacPherson-Procesi ; une application aux valeurs zêta multiples motiviques », thèse de doctorat, Université Paris 7, 2009.

[Sou10] ——— , « Motivic double shuffle », *Int. J. Number Theory* 6 (2010), n° 2, p. 339–370.

[SS14] A. SALERNO & L. SCHNEPS – « On the double shuffle Lie algebra structure : Écalle's approach », en préparation, 2014.

[Tak13] Y. TAKEYAMA – « The algebra of a q-analogue of multiple harmonic series », prépublication sur `http://arxiv.org/abs/1306.6164`, 2013.

[Tas14] K. TASAKA – « On linear relations among totally odd multiple zeta values related to period polynomials », prépublication sur `http://arxiv.org/abs/1402.3391`, 2014.

[Tor02] C. TOROSSIAN – « Sur la conjecture combinatoire de Kashiwara-Vergne », *J. Lie Theory* 12 (2002), n° 2, p. 597–616.

[Tsu97] H. TSUNOGAI – « On ranks of the stable derivation algebra and Deligne's problem », *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 73 (1997), n° 2, p. 29–31.

[Tsu03] ——— , « The stable derivation algebras for higher genera », *Israel J. Math.* 136 (2003), p. 221–250.

[Tsu04] H. TSUMURA – « Combinatorial relations for Euler-Zagier sums », *Acta Arith.* 111 (2004), n° 1, p. 27–42.

[Van32] H. S. VANDIVER – « Note on the divisors of the numerators of Bernoulli's numbers », *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 18 (1932), n° 9, p. 594–597.

[Was97] L. C. WASHINGTON – *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 83, Springer-Verlag, New York, 1997.

[YZ14] H. YUAN & J. ZHAO – « Double shuffle relations of double zeta values and double Eisenstein series of level N », prépublication sur `http://arxiv.org/abs/1401.6699`, 2014.

[Zag91] D. ZAGIER – « Periods of modular forms and Jacobi theta functions », *Invent. Math.* 104 (1991), n° 3, p. 449–465.

[Zag92] ——— , « Introduction to modular forms », in *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, 1992, p. 238–291.

[Zag93] ——— , « Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values », *Surikaisekikenkyusho Kokyuroku* 843 (1993), p. 162–170, Kyoto, 1992.

[Zag94] ——— , « Values of zeta functions and their applications », in *First European Congress of Mathematics, Vol. 2 (Paris, 1992)*, Progr. Math., vol. 120, Birkhäuser, Basel, 1994, p. 497–512.

[Zag00] ——— , « Quelques conséquences surprenantes de la cohomologie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ », in *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, vol. 1, Cassini, 2000, p. 99–123.

[Zag08] ——— , « Elliptic modular forms and their applications », in *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, Springer, Berlin, 2008.

[Zha07] J. ZHAO – « Multiple q-zeta functions and multiple q-polylogarithms », *Ramanujan J.* 14 (2007), n° 2, p. 189–221.

[Zud03] W. ZUDILIN – « Algebraic relations for multiple zeta values », *Uspekhi Mat. Nauk* 58 (2003), n° 1 (349), p. 3–32.

Index des notations

ш	Produit de shuffle sur $\mathfrak{h}$	3
$*$	Produit de stuffle sur $\mathfrak{h}^1$	4
$\odot$	Produit dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{ds}$	45
ARI	algèbre de Lie des moules dont le terme constant vaut 0	74
$\{\cdot\,,\cdot\}$	Crochet de Poisson sur $\mathfrak{h}$	17
B_k	Nombre de Bernoulli d'indice k	9
$\mathscr{D}$	Algèbre de dérivations stable	22
$\mathcal{D}_k$	Version formelle de l'espace des multizêtas de poids k et de profondeur inférieure à 2, introduit dans [GKZ06]	14
Δ	Forme modulaire de Ramanujan	9
$\mathfrak{ds}$	Algèbre de double mélange	17
$\mathscr{E}$	Sous-algèbre de $\operatorname{Der}\mathfrak{f}_2$ engendrée par les dérivations $\operatorname{ad}^j_{\varepsilon_0}(\varepsilon_{2i})$	54
ε_{2i}	Une dérivation de $\mathfrak{f}_2$	54
$\mathfrak{f}_2$	Algèbre de Lie libre à deux générateurs x et y	16
$\mathcal{FZ}$	Version formelle de l'algèbre des multizêtas en toute profondeur	15
G_k	Série d'Eisenstein de poids k	9
$\mathfrak{g}^{(p)}$	Algèbre d'Ihara	22
$\mathfrak{grt}$	Algèbre de Grothendieck-Teichmüller	20
$\mathscr{H}$	Demi-plan de Poincaré	8
$\mathfrak{h}$	Espace vectoriel des polynômes à coefficients rationnels en deux variables non commutatives x et y	3
$h^d_{p,q}$	Un élément de $\mathscr{E}$ de profondeur d	55
$\mathfrak{kv}$	Algèbre de Kashiwara-Vergne	26
$\mathfrak{l}_2$	Structure d'algèbre de Lie sur l'espace sous-jacent à $\mathfrak{f}_2$ donnée par le crochet de Poisson	38

$\mathrm{Lie}[E]$	Algèbre de Lie libre sur un ensemble E	18
M_k	Espace vectoriel des formes modulaires de poids k	8
$\mathfrak{nfz}$	Espace des multizêtas formels irréductibles	16
$\mathscr{O}(S_k)$	Anneau d'entiers du corps de nombres engendré par les coefficients de Fourier de toutes les formes de Hecke de poids k	12
$\mathscr{P}$	Anneau des périodes numériques à la Kontsevich-Zagier	27
Φ_{KZ}	Associateur de Drinfel'd	19
$\mathcal{P}_k^{\mathrm{ev}}$	Sous-espace de $\mathcal{D}_k$ engendré par les P_{rs} pour r et s pairs	14
$\mathfrak{p}_n$	Algèbre de Lie des tresses sphériques pures à n brins	20
$\mathbb{Q}(f)$	Corps de nombres engendré par les coefficients de Fourier d'une forme de Hecke f	12
$\mathrm{reg}_\diamond$	Morphisme de $\mathfrak{h}^1_\diamond$ vers $\mathfrak{h}^0_\diamond$, spécialisation à $T=0$ de l'isomorphisme de régularisation de $\mathfrak{h}^1_\diamond$ vers $\mathfrak{h}^0_\diamond[T]$	5
$\mathrm{reg}^+_{ш}$	Prolongement à $\mathfrak{h}_{ш}$ du morphisme $\mathrm{reg}_{ш}$	15
$r(f)$	Polynôme des périodes d'une forme parabolique f	11
S_k	Espace vectoriel des formes paraboliques de poids k	8
Θ	Une filtration sur $\mathscr{E}$	55
$\mathfrak{t}_{(1,)n}$	Algèbre des tresses planes ou elliptiques à n brins	68
T_n	Opérateur de Hecke d'indice n	9
$W_k^{(\pm)}$	Espace des polynômes de périodes (pairs, impairs) de poids k	11
$W_k^\natural$	Espace des éléments de W_k^+ sans terme constant	35
$\hat{\zeta}$	Application $\mathbb{Q}$-linéaire sur $\mathfrak{h}^0$ dont les valeurs sont les multizêtas	3
$\mathcal{Z}$	Sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les multizêtas réels	6