



HAL
open science

Etude du comportement dynamique non linéaire des composants viscoélastiques : Caractérisation, modélisation et identification

Hanen Jrad

► **To cite this version:**

Hanen Jrad. Etude du comportement dynamique non linéaire des composants viscoélastiques : Caractérisation, modélisation et identification. Autre. Ecole Centrale Paris; École nationale d'ingénieurs de Sfax (Tunisie), 2014. Français. NNT : 2014ECAP0002 . tel-01017063

HAL Id: tel-01017063

<https://theses.hal.science/tel-01017063>

Submitted on 1 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
« ÉCOLE CENTRALE PARIS »



Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax

THÈSE

présentée par **Hanen JRAD**

pour l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR

Spécialité : Science pour l'ingénieur

Laboratoire d'accueil : LISMMA

SUJET

Etude du comportement dynamique non linéaire des composants viscoélastiques : Caractérisation, modélisation et identification

Soutenue le 14/01/2014 devant un jury composé de :

M. DEÛ Jean-François
M. REMOND Didier
M. SOULA Mohamed
M. TAWFIQ Imad
M. HADDAR Mohamed
M. DION Jean-Luc
M. RENAUD Franck
M. ABBES Mohamed Slim

Président de jury
Rapporteur
Rapporteur
Directeur de thèse
Directeur de thèse
Co-encadrant
Invité
Invité

2014 - N°2014ECAP0002

Remerciements

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une coopération entre l'université de Sfax (Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax) et l'Ecole Centrale Paris (Institut Supérieur de Mécanique de Paris).

Une première partie de ce travail a été réalisée au sein de l'Unité de Mécanique, Modélisation et Production (U2MP) à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax dirigée par M. HADDAR Mohamed et une deuxième partie de cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Mécaniques et des Matériaux (LISMMA) à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris dirigée par M. CHOLEY Jean-Yves que je tiens à remercier ainsi que toutes les personnes du laboratoire LISMMA pour leur accueil et leur sympathie.

Cette thèse doit son accomplissement au travail en groupe dont ont participé sans réserve mes directeurs de thèse M. HADDAR Mohamed et M. TAWFIQ Imad ainsi que M. DION Jean Luc et M. RENAUD Franck.

Je remercie chaleureusement M. HADDAR Mohamed et M. TAWFIQ Imad de m'avoir proposé ce sujet. Je tiens à exprimer ma plus sincère reconnaissance à M. HADDAR Mohamed, qui m'a accordé sa confiance pour mener à bien ce travail de recherche et soutenu tout au long de ce travail et M TAWFIQ Imad pour son accueil, sa disponibilité, les moyens donnés pour réaliser ce travail dans de bonnes conditions et tout ce qu'il a pu m'apprendre au cours de ces trois années. Je remercie vivement aussi M. DION Jean Luc pour sa participation à la mise en place des expériences de ce travail, l'aide qu'il m'a toujours apportée, sa patience et ses conseils. Je remercie aussi M. RENAUD Franck pour son aide efficace et l'intérêt qu'il a porté à ce travail

Je remercie vivement M. DEU Jean François qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie également M. SOULA Mohamed et M. REMOND Didier d'avoir accepté de participer comme rapporteurs de ma thèse.

Je remercie M. ABBES Mohamed Slim, d'avoir accepté de faire partie du membre du jury.

Mille mercis à ma famille et plus spécialement à mes parents, sans vous ce mémoire n'aurait peut être jamais vu le jour. Je voudrais aussi remercier tous mes amis, en particulier Hassen TRABELSI et Fédia CHAARI pour leur patience avec moi.

Publications Scientifiques

Ce travail de thèse a fait objet de plusieurs publications

Revues internationales

H. JRAD, J-L. DION, F. RENAUD, I. TAWFIQ and M. HADDAR, «*Experimental Characterization, Modeling and Parametric Identification of the Non-Linear Dynamic Behaviour of Viscoelastic Components* ». *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2013, Vol.42, pp.176-187. (Indexed Scopus, Impact Factor 1.592)

H. JRAD, F. RENAUD, J-L. DION and M. HADDAR, «*Experimental Characterization, Modeling and Parametric Identification of the Hysteretic Friction Behavior of Viscoelastic Joints* ». *International Journal of Applied Mechanics*, 2013. (Indexed Scopus, Impact Factor 1.483)

Communications dans des colloques nationaux et internationaux

H. JRAD, J-L. DION, F. RENAUD, I. TAWFIQ and M. HADDAR «*A New Approach for Nonlinear Generalized Maxwell Model for Depicting Dynamic Behaviour of Viscoelastic Elements – Parameters Identification and Validation*». *In Proceedings of VISHNO – 18th Vibrations Shocks and Noise Conferences, 3-5 July 2012, Paris, France.*

H. JRAD, J-L. DION, F. RENAUD, I. TAWFIQ and M. HADDAR «*Modeling hysteretic friction of viscoelastic joints and parameters identification techniques*». *In Proceedings of InterNoise, 19-22 August 2012, New-York, USA.*

H. JRAD, J-L. DION, F. RENAUD, I. TAWFIQ and M. HADDAR «*Non linear generalized Maxwell model for dynamic characterization of viscoelastic components and parametric identification techniques*». *In Proceedings of ASME/IDETC/CIE, 12-15 August 2012, Chicago, USA.*

H. JRAD, J-L. DION, F. RENAUD, I. TAWFIQ and M. HADDAR «*Identification of Non linear Dynamic Behaviour of Elastomeric Components* ». *In Proceedings of AVE–3ième colloque Analyse vibratoire Expérimentale, 20-21 Novembre 2012, Blois, France.*

H. JRAD, J-L. DION, F. RENAUD, I. TAWFIQ, M. HADDAR et C. KARRA «*Modeling and Parameters Identification Techniques of Dynamic Friction of Viscoelastic Joints* ». *5^{ème} Congrès International Conception Modélisation des Systèmes Mécaniques (CMSM' 2013), 25 – 27 Mars 2013, Djerba, Tunisie.*

H. JRAD, J-L. DION, F. RENAUD, I. TAWFIQ, M. HADDAR «*Characterization of hysteretic friction of viscoelastic joints*». *1st Euro-Mediterranean Conference on Structural Dynamics and Vibroacoustics (MEDYNA '2013), 23-25 April 2013, Marrakech, Morocco.*

RESUME

Les matériaux viscoélastiques sont utilisés dans tous les domaines de l'ingénierie et des systèmes mécaniques, de l'électroménager, spatial, l'automobile, l'aéronautique ou le génie civil (ponts...) grâce à leur capacité d'amortir les chocs ou de filtrer les vibrations. Ce travail constitue une contribution à l'étude du comportement dynamique non linéaire des composants viscoélastiques notamment les élastomères. Dans ce mémoire, on introduit, d'abord, les propriétés mécaniques des élastomères, pour les aspects viscoélasticité et friction. Un rappel des différents phénomènes physiques et une liste non-exhaustive des modèles existants dans la littérature sont présentés. Ensuite, on propose des techniques expérimentales afin de décrire le comportement dynamique sous sollicitations uniaxiales d'un élastomère. Une description des bancs d'essais, des chaînes d'analyse vibratoire, des méthodes de traitement des données des essais et d'analyse des mesures expérimentales est détaillée dans ce manuscrit. Une nouvelle approche du modèle de Maxwell généralisé a été proposée pour décrire le comportement dynamique du composant viscoélastique. Ce modèle permet une description précise et une bonne connaissance du comportement dynamique des composants viscoélastiques en fonction de l'amplitude, de la précharge et de la fréquence. La dissipation d'énergie identifiée sous forme d'amortissement peut être issue de l'amortissement intrinsèque des matériaux polymère comme de la friction aux interfaces dans le cas de composants caoutchoucs non adhésés sur les pièces, dans ce travail, un nouveau modèle visco-tribologique a été développé en couplant les propriétés rhéologiques linéaires du modèle de Maxwell généralisé et le modèle de frottement de Dahl pour la description du comportement de frottement hystérétique des liaisons viscoélastiques non adhésées.

Mots clés : Amortissement des vibrations/ Viscoélasticité non linéaire/ Élastomère/ Frottement hystérétique/ Raideur dynamique/ Modèle de Maxwell généralisé/ Modèle de Dahl/ Essais AMD.

SUMMARY

Viscoelastic materials are used in all areas of engineering and mechanical systems, appliances, aerospace, automotive, aerospace and civil engineering (bridges...) through their ability to absorb shock and vibration filtering. This work is a contribution to the study of nonlinear dynamic behavior of viscoelastic components particularly elastomers. In this dissertation, we introduced the mechanical properties of elastomers, for both viscoelasticity and friction aspects. A review of the different physical phenomena and a non-exhaustive list of existing models in the literature are presented. Then, we propose experimental techniques to describe the dynamic behavior under uniaxial stress of an elastomer. A description of test benches, vibration analysis chains, methods of processing data and analysis of experimental measurements is detailed in this manuscript.

A new approach of generalized Maxwell model was proposed to describe the dynamic behavior of viscoelastic component. This model allows an accurate description and a good knowledge of the dynamic behavior of viscoelastic components depending on amplitude, frequency and preload. Energy dissipation identified as damping can be from intrinsic damping of the polymer as friction at the interfaces in case of not bonded rubber component to mechanical part, a new viscoelastic model tribological was developed by combining the rheological properties of linear generalized Maxwell model and the Dahl friction model for describing the behavior of viscoelastic hysteretic friction of not bonded connections.

Keywords: Vibration damping/ Nonlinear viscoelasticity/ Elastomer/ Hysteretic friction/ Dynamic stiffness/ generalized Maxwell model/ Dahl Model/ DMA tests.

TABLE DES MATIERES

Introduction générale	7
Contexte de l'étude	7
Plan du mémoire	8
Chapitre 1 Etude bibliographique	11
1. Les matériaux viscoélastiques	12
1.1. Dépendance en température et en fréquence des matériaux polymères	14
1.2. Dépendance en amplitude	15
1.3. Propriétés dissipatives	16
1.3.1. Relaxation, fluage et "effet mémoire"	16
1.3.2. Approche du module complexe	17
1.3.2.1. Module dynamique	17
1.3.2.2. Mesure du module complexe	19
2. La viscoélasticité des élastomères	20
2.1. Comportements et modèles rhéologiques de base	21
2.1.1. Modèle de Newton	21
2.1.2. Solide purement élastique (solide de Hooke)	21
2.2. Modèles utilisés pour décrire le comportement viscoélastique	22
2.2.1. Modèles rhéologiques simples	22
2.2.2. Modèles rhéologiques composés	23
2.2.3. Modèles à dérivées fractionnaires	25
2.2.4. Modèles issus d'un comportement dissipatif	26
3. Modélisation du frottement	27
3.1. Modèles statiques	28
3.1.1. Frottement de Coulomb	29
3.1.2. Frottement visqueux	29
3.1.3. Frottement statique (stiction)	29
3.1.4. Modèle de Stribeck	30
3.1.5. Modèle de Karnopp	31
3.2. Modèles dynamiques	31
3.2.1. Modélisation des pré-déplacements	31
3.2.2. Modèle de Dahl	33
3.2.3. Modèle de Bristle	33
3.2.4. Modèle de Bliman et Sorine	34
3.2.5. Modèle de LuGre	34
3.2.6. Modèle élasto-plastique avec la propriété de non-dérive	35
3.2.7. Modèle de Leuven	36
Conclusion	36
Chapitre 2 Techniques expérimentales pour la caractérisation du comportement dynamique des composants viscoélastiques	37
1. Description des bancs d'essais	38
1.1. Banc hydraulique de caractérisation des élastomères	38
1.1.1. Descriptif général	38
1.1.2. Description de la chaîne d'analyse vibratoire de la MTS	41
1.2. Banc d'essais dynamiques de torsion :	43
2. Techniques de traitement des données des essais dynamiques et résultats expérimentaux	46
2.1. Essais de compression dynamique	46
2.1.1. Techniques de traitement des données des essais de compression	46
2.1.2. Résultats obtenus des essais de compression	47

2.2. Essais de cisaillement dynamique.....	50
2.2.1. Techniques de traitement des données des essais de cisaillement	50
2.2.2. Résultats obtenus des essais de cisaillement	51
2.3. Essais de torsion dynamique	53
2.3.1. Techniques de traitement des données des essais de torsion	53
2.3.1.1. Post traitement des moments et de l'effort :	53
2.3.1.2. Post traitement des accélérations :	58
2.3.1.3. Vérifications des équations utilisées pour le post traitement :	60
2.3.1.3.1. Cas de test 1 : Vérification des équations de post traitement des accélérations.....	60
2.3.1.3.2. Cas de test 2 : Vérification des expressions obtenues par le système des équations de Lagrange	62
2.3.1.3.3. Cas de test 3 : Vérification pour le cas d'un corps rigide.....	65
2.3.2. Résultats obtenus des essais de torsion	68
Conclusion.....	68
<i>Chapitre 3 Modèle de Maxwell généralisé non linéaire pour décrire le comportement dynamique des composants viscoélastiques</i>	<i>69</i>
Introduction	70
1. Description du modèle de Maxwell généralisé non linéaire.....	71
2. Techniques d'identification paramétrique	72
2.1. Identification des composantes linéaires K_i et C_i	75
2.2. Identification de K_0	76
3. Validation.....	81
Conclusion.....	84
<i>Chapitre 4 Modèle visco-tribologique pour décrire le comportement de frottement hystérique des liaisons viscoélastiques</i>	<i>85</i>
Introduction	86
1. Description du modèle	87
1.1. Modèle de Dahl	87
1.2. Modèle de Maxwell généralisé :	90
1.3. Modèle visco-tribologique	91
2. Techniques d'identification paramétriques.....	93
2.1. Identification des paramètres de frottement.....	95
2.2. Identification des paramètres viscoélastiques	96
2.2.1. Identification de K_0	96
2.2.2. Identification de K_i et C_i	97
3. Validation.....	98
3.1. Raideur dynamique	98
3.2. Boucles d'hystérésis	99
3.3. Energie dissipée.....	100
Conclusion.....	102
<i>Conclusion générale et perspectives</i>	<i>105</i>
Annexe.....	107
Références bibliographique	111

Tables des figures

Figure 1. Chargement cyclique d'un élastomère [3].....	13
Figure 2. Effets de la température sur le module de Young et l'angle de perte.....	14
Figure 3. Effets de la fréquence sur le module de Young et l'angle de perte.....	15
Figure 4. Variation du module de coulomb en fonction de l'amplitude d'excitation.....	15
Figure 5. Caractéristique de fluage (a) et de relaxation (b).....	16
Figure 6. Cycle d'hystérésis représenté dans le plan.....	17
Figure 7. Représentation schématique de la raideur dynamique dans le plan complexe.....	19
Figure 8. Représentation du liquide de Newton (Amortisseur).....	21
Figure 9. Représentation du solide de Hooke (Ressort).....	22
Figure 10. Modèles rhéologiques usuels.....	23
Figure 11. Modèle de Maxwell Généralisé.....	24
Figure 12. Modèle fractal pour le comportement viscoélastique.....	24
Figure 13. Arrangement hiérarchique en parallèle des éléments de Maxwell.....	24
Figure 14. Spring pot.....	26
Figure 15. Exemples de modèles de frottement : (a) modèle de Coulomb, (b) modèle 'Coulomb + viscosité', (c) modèle 'Coulomb + viscosité + statique', (d) modèle complet avec effet Stribeck.....	28
Figure 16. Modèle de ressort des aspérités.....	32
Figure 17. (a) Déformation des contacts entre les surfaces, (b) Rupture des contacts et mise en mouvement des surfaces.....	32
Figure 18. Pré-déplacement z en fonction de la position x	32
Figure 19. Modèle de lame à partir duquel est construit le modèle de Bristle.....	33
Figure 20. Modèle de lame à partir duquel est construit le modèle de LuGre.....	34
Figure 21. Déformation des lames lors d'un déplacement.....	35
Figure 22. Dispositif expérimental.....	38
Figure 23. Dispositif du banc d'essai- machine d'essai MTS.....	39
Figure 24. Montage de compression.....	40
Figure 25. Montage de cisaillement.....	41
Figure 26. Appareils de la chaîne d'analyse vibratoire.....	41
Figure 27. Fonctionnement de la chaîne d'analyse vibratoire.....	42
Figure 28. Dispositif expérimental des essais de torsion dynamique.....	43
Figure 29. Schéma du mécanisme vibrant.....	44
Figure 30. Schéma du dispositif expérimental.....	45
Figure 31. Fonctionnement de la chaîne d'analyse vibratoire.....	45
Figure 32. Exemple de tension délivrée par la carte National Instrument.....	47
Figure 33. Le module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence pour une précharge $P = 300N$ lors des essais de compression.....	48
Figure 34. Le module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence pour une précharge $A = 0.1mm$ lors des essais de compression.....	48
Figure 35. Le module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence et de l'amplitude pour chaque précharge lors des essais de compression.....	50
Figure 36. Le module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence et de la précharge pour chaque amplitude lors des essais de compression.....	50
Figure 37. Le module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence lors des essais de cisaillement.....	51

Figure 38. Evolution de la force en fonction du déplacement à une fréquence de 2.5Hz et pour une précharge normale de 1000N.....	52
Figure 39. Evolution des boucles d'hystérésis pour un essai de cisaillement à une fréquence de 2.5Hz et pour une précharge normale de 1000N.....	53
Figure 40. Montage Mouvement des lames.....	54
Figure 41. Schéma des positions des accéléromètres sur les deux lames.....	58
Figure 42. Schéma de la démarche de vérification du cas de test 1.....	61
Figure 43. Vérification du cas de test 1.....	62
Figure 44. Force et moments appliqués à la structure.....	63
Figure 45. Schéma de la démarche de vérification du cas de test 2.....	64
Figure 46. Vérification du cas de test 2.....	65
Figure 47. Montage Cas d'un corps rigide.....	66
Figure 48. Schéma de la démarche de vérification du cas de test 3.....	66
Figure 49. Vérification du cas de test 3.....	67
Figure 50. Evolution du moment en fonction du déplacement angulaire à une fréquence de 60 Hz et pour une précharge normale de 150N.....	68
Figure 51. Le MMGNL proposé.....	72
Figure 52. Diagramme résumant les étapes effectuées pour l'identification des paramètres de MMGNL.....	74
Figure 53. Approche de la phase constante.....	75
Figure 54. Les coefficients K_i et C_i identifiés.....	76
Figure 55. Raideur statique K_0 identifiée pour différentes précharges x_0 et différentes amplitudes d'excitation x_d	77
Figure 56. Schéma de principe d'une fonctionnelle qui conduit à des rigidités apparentes dépendantes de la précharge x_0 et de l'amplitude d'excitation x_d	77
Figure 57. K_0 en fonction des précharges statiques-Identification pour différentes amplitudes.....	79
Figure 58. Erreur entre K_0 mesuré et simulé en fonction des précharges statiques pour différentes amplitudes.....	79
Figure 59. K_0 en fonction des amplitudes d'excitation-Identification pour les différentes précharges statiques.....	80
Figure 60. Erreur entre K_0 mesuré et simulé en fonction des amplitudes d'excitation pour les différentes précharges statiques.....	80
Figure 61. Fonction d'élasticité non linéaire établie par identification du MMGNL et par mesures quasi-statiques.....	81
Figure 62. Graphe 3-D de la raideur dynamique en fonction de la fréquence et de la précharge pour $A = 25 \mu\text{m}$. (a) Module de la raideur dynamique. (b) Phase de la raideur dynamique. (c) Erreur relative du module de la raideur dynamique. (d) Erreur relative de la phase de la raideur dynamique.....	82
Figure 63. Graphe 2-D du module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence pour $A = 25 \mu\text{m}$	83
Figure 64. Modélisation du frottement dynamique.....	88
Figure 65. Prédéplacement en fonction du déplacement.....	88
Figure 66. $z(x)$ d'après le modèle de Dahl.....	89
Figure 67. Boucle d'hystérésis du modèle de Dahl pour $\alpha=1$	90
Figure 68. Le MMG proposé.....	91
Figure 69. Relation force-déplacement pour l'échantillon en caoutchouc soumis à un chargement de cisaillement cyclique.....	94
Figure 70. Relation Couple-déplacement angulaire pour l'échantillon en caoutchouc soumis à la torsion cyclique.....	94
Figure 71. Identification du coefficient de frottement en se basant sur les asymptotes horizontales pour l'essai de cisaillement.....	95
Figure 72. Identification du coefficient de frottement en se basant sur les asymptotes horizontales pour l'essai de torsion.....	95

Figure 73. Estimation de K_0 en considérant l'axe principal de l'ellipse dans le sens de Fourier pour l'essai de cisaillement.	96
Figure 74. Estimation de K_0 en considérant l'axe principal de l'ellipse dans le sens de Fourier pour l'essai de torsion.	97
Figure 75. Module et phase de la raideur dynamique mesurés et identifiés en fonction de la fréquence pour des essais de torsion (a) et de cisaillement (b).	99
Figure 76. Les courbes Force/Déplacement linéaire mesurées et simulées superposées l'une au-dessus de l'autre.	99
Figure 77. Les courbes Moment de Torsion/Déplacement angulaire mesurées et simulées superposées l'une au-dessus de l'autre.	100
Figure 78. Dissipée énergie en fonction de l'amplitude du déplacement (angulaire(a) et linéaire (b)).	101
Figure 79. Le coefficient d'amortissement en fonction de l'amplitude des déplacements.	102

Introduction générale

Contexte de l'étude

L'amortissement des vibrations mécaniques est une condition importante dans la conception des systèmes et structures mécaniques. Les vibrations engendrées par les sollicitations dynamiques des systèmes peuvent causer des problèmes allant jusqu'à la rupture des composants par fatigue.

Afin d'éviter ce type d'avaries, les vibrations peuvent être minimisées par:

- a) L'élimination ou l'isolement de la source des vibrations,
- b) La modification de masse ou de rigidité de la structure de telle sorte que les sollicitations dynamiques n'excitent pas les modes propres potentiellement dangereux pour l'intégrité de la structure.
- c) La dissipation (absorption) de l'énergie vibratoire.

Ce travail constitue une contribution à l'étude du comportement dynamique non linéaire des composants viscoélastiques notamment des élastomères qui constituent une solution technologique majeure pour les applications industrielles. Les modélisations, les techniques expérimentales et les méthodes d'identification proposées s'inscrivent dans le cadre des trois stratégies décrites précédemment dans le traitement des vibrations de structure et de systèmes.

Grâce à leurs capacités à amortir les chocs et à filtrer les vibrations, les matériaux viscoélastiques sont utilisés dans tous les domaines de l'ingénierie et des systèmes mécaniques: l'électroménager, le spatial, l'automobile, l'aéronautique et le génie civil.

Le composant viscoélastique est très souvent soumis à une double contrainte : une charge statique qui représente la partie du poids supporté par l'élément et une charge dynamique qui vient des sollicitations vibratoires relatives entre une structure porteuse et l'élément suspendu.

La modélisation du comportement mécanique des composants viscoélastiques s'avère souvent délicate, ce comportement est en effet fortement non linéaire et dépendant entre autre de la *température*, de la *précharge*, de la *fréquence* et de *l'amplitude d'excitation*.

Dans bien des cas, la viscoélasticité linéaire est insuffisante pour bien appréhender le comportement de ces pièces : elle ne prend pas en compte l'aspect grandes déformations ni les

non linéarités comportementales observables dès les petites amplitudes d'excitation. L'analyse et la représentation du comportement dynamique non linéaire du caoutchouc est souvent réalisées en étudiant l'influence de deux paramètres : la précharge statique et l'amplitude d'excitation sous sollicitations sinusoïdales.

D'autre part, les composants viscoélastiques assurent le rôle d'absorbeurs de chocs ou de liaisons entre des structures sensiblement plus rigides que le composant en élastomère. Par conséquent, la connaissance de la façon dont ces liaisons viscoélastiques influent sur les caractéristiques dynamiques des sous-systèmes d'un mécanisme est souvent déterminante dans le développement des modèles notamment en simulation des systèmes multi-corps (MBS).

Le comportement dynamique d'un mécanisme est classiquement issu d'une modélisation de chacun des solides en termes de rigidité, de masse et d'amortissement. La modélisation des liaisons viscoélastiques est souvent simplifiée en négligeant les aspects non linéaires ou les effets de la viscoélasticité. Ainsi, les modèles globaux des mécanismes doivent représenter les liaisons entre les solides, non seulement pour modéliser les degrés de liberté relatifs qui prennent en compte la cinématique du système, mais aussi la raideur et l'amortissement au sens large. La dissipation d'énergie identifiée sous forme d'amortissement peut être issue de l'amortissement intrinsèque des matériaux polymères comme de la friction aux interfaces dans le cas de composants caoutchouc non adhésés sur les pièces de leur environnement (joint d'étanchéité, butée, ...). Dans ce travail de thèse, des techniques expérimentales spécifiques sont développées, des modèles viscoélastiques non linéaires sont proposés ainsi que des méthodologies d'identification paramétriques dédiées, associées aux techniques expérimentales et aux modèles retenus. Ces travaux portent sur le comportement dynamique non linéaire des composants viscoélastiques et sur la caractérisation du frottement hystérétique qui engendre un comportement dissipatif au niveau de l'interface des liaisons viscoélastiques non adhésées.

Plan du mémoire

Ce mémoire de thèse est constitué de quatre chapitres :

Le premier chapitre bibliographique est consacré à introduire les propriétés mécaniques des élastomères, pour les aspects viscoélasticité et friction. Un rappel des différents phénomènes physiques et une liste non-exhaustive des modèles existants dans la littérature sont présentés dans ce chapitre.

Un deuxième chapitre présente les moyens expérimentaux mis en œuvre. Ce chapitre est consacré à la description du banc d'essais, à la chaîne d'analyse vibratoire ainsi qu'à l'explication du mode d'analyse et de traitement des données expérimentales. Enfin des résultats expérimentaux sont présentés et discutés.

Dans le troisième chapitre, un modèle de Maxwell généralisé non linéaire (MGNL) avec seulement 5 paramètres indépendants est proposé. Il permet une description du comportement dynamique des composants viscoélastiques en fonction de l'amplitude, de la précharge et de la fréquence. Les différents paramètres du modèle choisis peuvent être identifiés avec un seul essai de compression dynamique. Une comparaison entre les simulations et les résultats expérimentaux ont permis la validation de ce modèle.

Un modèle visco-tribologique est proposé dans le quatrième chapitre pour la description du comportement de frottement hystérétique des liaisons viscoélastiques non adhésives. Ce chapitre comporte 3 étapes, la description du modèle, les techniques d'identification des paramètres du modèle et les résultats de validation de ce modèle.

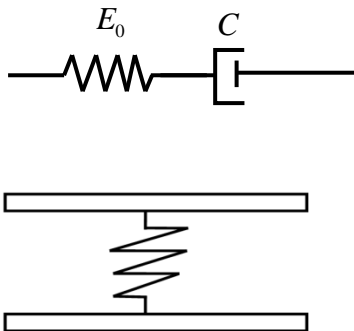
Chapitre 1 Etude bibliographique

Sommaire

1. Les matériaux viscoélastiques	12
1.1. Dépendance en température et en fréquence des matériaux polymères	14
1.2. Dépendance en amplitude	15
1.3. Propriétés dissipatives	16
1.3.1. Relaxation, fluage et "effet mémoire"	16
1.3.2. Approche du module complexe	17
2. La viscoélasticité des élastomères	20
2.1. Comportements et modèles rhéologiques de base	21
2.1.1. Modèle de Newton	21
2.1.2. Solide purement élastique (solide de Hooke)	21
2.2. Modèles utilisés pour décrire le comportement viscoélastique	22
2.2.1. Modèles rhéologiques simples	22
2.2.2. Modèles rhéologiques composés	23
2.2.3. Modèles à dérivées fractionnaires	25
2.2.4. Modèles issus d'un comportement dissipatif	26
3. Modélisation du frottement	27
3.1. Modèles statiques	28
3.1.1. Frottement de Coulomb	29
3.1.2. Frottement visqueux	29
3.1.3. Frottement statique (stiction)	29
3.1.4. Modèle de Stribeck	30
3.1.5. Modèle de Karnopp	31
3.2. Modèles dynamiques	31
3.2.1. Modélisation des pré-déplacements	31
3.2.2. Modèle de Dahl	33
3.2.3. Modèle de Bristle	33
3.2.4. Modèle de Bliman et Sorine	34
3.2.5. Modèle de LuGre	34
3.2.6. Modèle élasto-plastique	35
3.2.7. Modèle de Leuven	36
Conclusion	36

Résumé

Ce premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique des matériaux viscoélastiques et leur comportement dynamique. Il se compose de trois parties. Dans la première partie, on présente les matériaux viscoélastiques, on s'intéresse particulièrement aux élastomères, comme le caoutchouc. Une étude générale des propriétés physiques des matériaux élastomères d'un point de vue phénoménologique est présentée. Un grand nombre de recherches ont été menées sur les élastomères. Afin d'en comprendre les mécanismes, nous proposons ici d'en donner les principaux résultats. L'étude des modèles capables de restituer le comportement viscoélastique des élastomères fait l'objet d'une deuxième partie. Le comportement dissipatif des composants viscoélastiques peut également être généré par les forces de frottement aux interfaces. L'étude de la modélisation du frottement sera abordée dans la dernière partie de ce chapitre.



1. Les matériaux viscoélastiques

Les matériaux viscoélastiques trouvent des applications dans tous les domaines de l'ingénierie et des systèmes mécaniques, de l'électroménager au spatial en passant par l'automobile, l'aéronautique ou le génie civil (ponts...). Ils sont souvent destinés à assurer la tenue statique des composants tout en proposant une fonction d'isolation vibratoire grâce à une rigidité relativement faible au regard des composants assemblés. L'utilisation des matériaux élastomères est particulièrement intéressante car elle permet de dissiper l'énergie mécanique des vibrations sous forme de chaleur, bien au-delà des capacités de dissipation des composants métalliques tels que les ressorts.

Outre l'augmentation de la durée de vie des structures, ils permettent d'atténuer le bruit et les vibrations. On peut distinguer deux grandes classes de matériaux viscoélastiques : les polymères (élastomères, plastiques...) et les céramiques (verre, vernis...) ; [1].

On s'intéresse dans ce travail aux élastomères notamment le caoutchouc.

Le caoutchouc naturel et ses homologues synthétiques, les élastomères, sont fortement répandus dans le domaine de l'industrie. La multiplicité des utilisations des élastomères provient de ces caractéristiques mécaniques très intéressantes, notamment, la capacité à subir de grandes déformations et à dissiper de l'énergie, ce qui permet d'obtenir des propriétés d'isolation vibratoire et acoustique.

La terminologie "élastomère" regroupe des matériaux ayant des compositions chimiques différentes, mais une structure moléculaire et des propriétés mécaniques similaires. Le préfixe "élasto" rappelle les grandes déformations élastiques possibles, tandis que le suffixe "mère" évoque leur nature de polymères, et donc leur constitution macromoléculaire [2].

Les élastomères possèdent une remarquable élasticité due à leur structure moléculaire. A l'échelle de la structure microscopique, un élastomère vulcanisé est constitué de longues chaînes moléculaires comportant des points de jonction. Sous l'action d'une sollicitation mécanique, ces chaînes moléculaires peuvent glisser les unes sur les autres et changer ainsi la configuration microstructurale du réseau moléculaire qui passe d'un arrangement aléatoire à un arrangement orienté suivant la direction de la sollicitation. Le caoutchouc peut ainsi subir des grandes déformations éventuellement de plusieurs centaines de pour cent.

Il est également à noter la quasi incompressibilité de ces matériaux : le module de compressibilité du caoutchouc varie entre 1000 et 2000 MPa, alors que l'ordre de grandeur du module de cisaillement est d'environ 1 MPa. Cette différence signifie que le caoutchouc ne

varie guère de volume, même sous de fortes contraintes. Son comportement est ainsi quasi incompressible [2].

Parmi les caractéristiques du caoutchouc on peut également mentionner l'effet Mullins. Lorsqu'un élastomère est sollicité de façon cyclique, on n'observe que l'effort à appliquer initialement pour déformer l'élastomère jusqu'à un niveau donné est toujours supérieur à celui nécessaire pour atteindre le même niveau de déformation au cours des cycles suivants. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet *Mullins* ou *assouplissement sous contrainte* des élastomères.

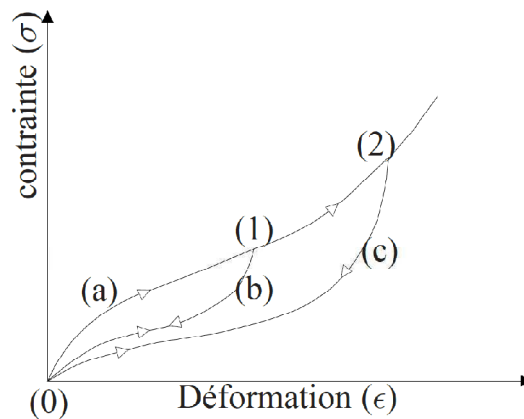


Figure 1. Chargement cyclique d'un élastomère [3].

Cet effet (**Figure 1**) peut aussi être mis en évidence par un essai de traction cyclique au cours duquel on augmente progressivement l'amplitude de déformation [4], où l'on observe que le chemin suivi par la réponse du matériau dépend du niveau maximum de déformation subi par le matériau au cours des précédents chargements. Ce phénomène a fait l'objet de plusieurs investigations [5], [6] et la plupart des auteurs s'accordent pour attribuer ce caractère spécifique des élastomères à un phénomène d'endommagement. Parmi les mécanismes micromoléculaires qui ont été proposés pour expliquer ce phénomène [7], [8], on peut citer pour les élastomères chargés: le modèle de Bueche qui attribue l'effet Mullins à une rupture de chaînes entre deux charges voisines et le modèle de Dannenberg et Boonstrat qui propose un mécanisme de glissement de chaînes au niveau de la surface de charge [3]. Ce comportement conditionne les procédures d'essai sur éprouvette et pièce en caoutchouc : il est ainsi nécessaire de réaliser au moins 3 cycles avant l'acquisition des mesures. Ce conditionnement mécanique de la pièce est communément appelé "déverminage" [2].

1.1. Dépendance en température et en fréquence des matériaux polymères

L'étude des propriétés physiques des polymères, en fonction de la température, montre l'existence de plusieurs états de la matière. La **Figure 2** représente l'évolution schématique du module dynamique et de l'angle de perte en fonction de la température.

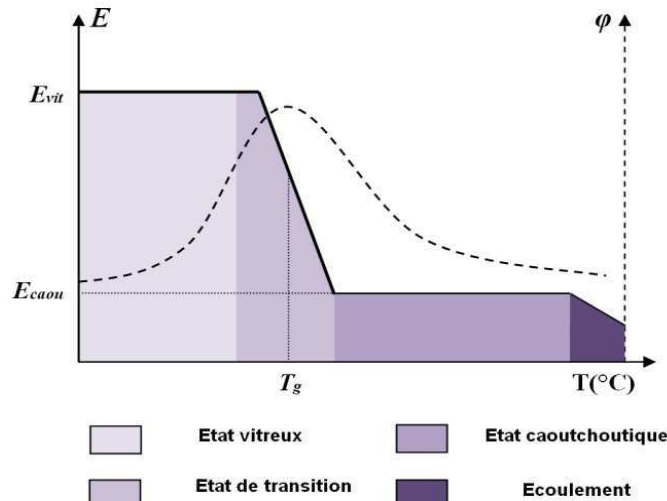


Figure 2. Effets de la température sur le module de Young et l'angle de perte.

Quatre zones sont ainsi mises en évidence :

- **État vitreux** : Aux basses températures, le caoutchouc est figé et se comporte comme un verre rigide : les macromolécules ne sont pas mobiles. Les mouvements inter macromoléculaires sont ainsi "gelés" et négligeables à l'échelle du temps d'observation. Les mouvements moléculaires étant faibles, la dissipation est faible, l'amortissement est donc négligeable. Cet état se caractérise par un module d'Young élevé et peu dépendant de la température. Cet état caractérise généralement les verres organiques qui présentent une très faible déformabilité.
- **État de transition** : à ce stade, on est en présence de polymères linéaires thermoplastiques de type cellulosiques, polyamides, polyesters, polyvinyloxy... Il s'agit comme son nom l'indique d'une phase de transition significative de l'état quasi-fragile à un état de grande déformabilité.
- **État caoutchoutique** : les élastomères sont caractéristiques de cet état. Ils possèdent une grande déformabilité et un comportement visqueux.
- **État d'écoulement** : le polymère, bien que encore solide, se comporte comme un fluide non newtonien quasi-incompressible fortement visqueux.

La zone de transition vitreuse est centrée autour de la température de transition T_g des élastomères qui varie selon leur composition chimique et leur microstructure. Ces caractéristiques mécaniques alliées à des propriétés d'imperméabilité, d'inertie chimique et

d'une certaine stabilité aux changements de température en font des matériaux devenus de plus en plus incontournables pour diverses utilisations industrielles.

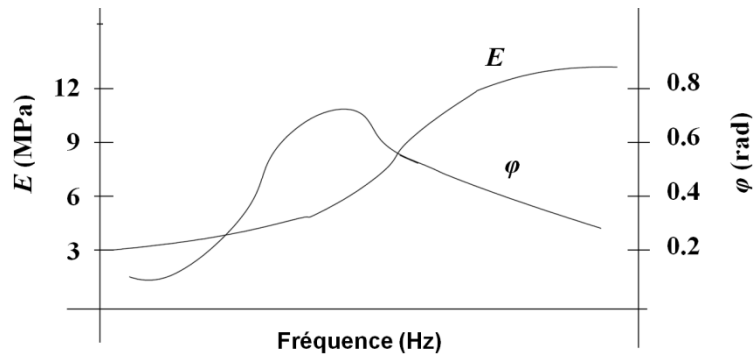
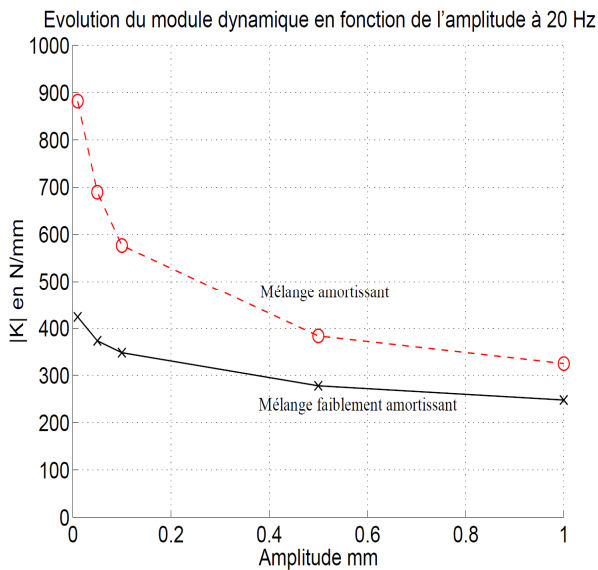


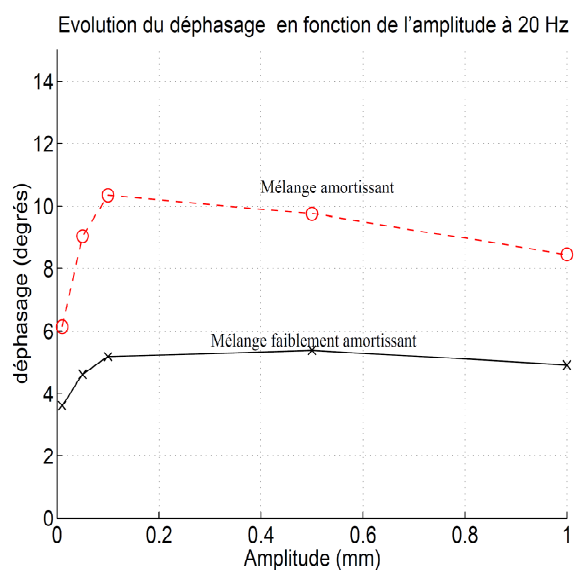
Figure 3. Effets de la fréquence sur le module de Young et l'angle de perte.

La **Figure 3** représente le comportement typique du module de rigidité et de l'angle de perte en fonction de la fréquence. Les valeurs numériques données sont approximatives et dépendent très fortement de l'amplitude des déformations et des mélanges d'élastomère. La forme générale des courbes est toutefois similaire pour tous les élastomères.

1.2. Dépendance en amplitude



(a) Influence de l'amplitude sur la raideur dynamique.



(b) Influence de l'amplitude sur le déphasage.

Figure 4. Variation du module de coulomb en fonction de l'amplitude d'excitation sinusoïdale, pour deux mélanges. Cas d'un essai de cisaillement [2].

En plus de la rigidification en fréquence, on observe aussi pour les élastomères chargés, que :

- le module dynamique diminue avec l'amplitude d'excitation imposée.

– L'amortissement augmente dans un premier temps en fonction de l'amplitude, puis diminue.

Ces phénomènes sont nettement visibles sur la **Figure 4**. La diminution de la rigidité en fonction de l'amplitude est souvent appelée "effet Payne" [9], [10].

De nombreux auteurs ont observé expérimentalement et ont commenté ce phénomène. Les premières explications ont été fournies par Payne en 1965. Parmi les travaux plus récents, citons [11]–[17]. Le degré de dépendance en amplitude varie en fonction du type et de la quantité de charges [18] [19], mais la forme qualitative des courbes reste la même.

1.3. Propriétés dissipatives

1.3.1. Relaxation, fluage et "effet mémoire"

Sous contrainte, le déploiement des chaînes macromoléculaires est freiné par le frottement visqueux au niveau des points de liaison à faible énergie et par l'enchevêtrement entre les différentes chaînes. Ce mécanisme couplé à l'élasticité de l'élastomère induit donc un caractère viscoélastique dans le comportement macroscopique de la plupart des élastomères. Ce comportement est notamment caractérisé par la dépendance de la réponse en fonction de la vitesse de déformation ainsi que par les effets de fluage et de relaxation. Ces deux phénomènes se caractérisent par les courbes expérimentales présentées sur la **Figure 5** ((a) et (b)).

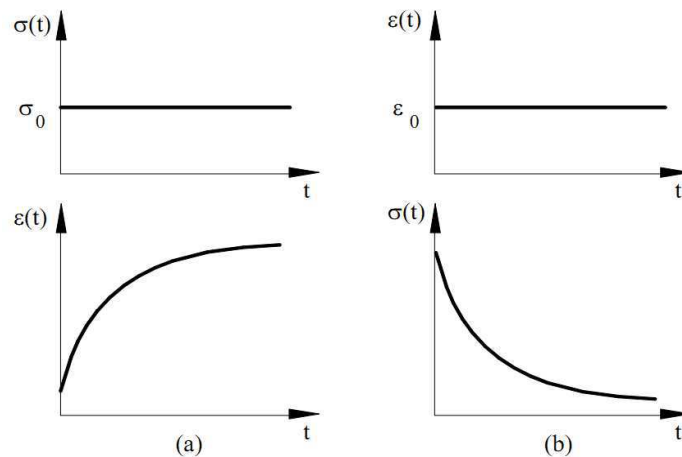


Figure 5. Caractéristique de fluage (a) et de relaxation (b).

Les fonctions de fluage et de relaxation dépendent du temps, et de ce fait résulte que pour un instant quelconque, la déformation (ou la contrainte) dépend de tous les états de contraintes (ou de déformation) précédents [20]. Pour les matériaux viscoélastiques linéaires, pour lesquels la relation de contrainte-déformation dépend uniquement de l'histoire des

sollicitations, le principe de superposition de Boltzmann est applicable (si l'on suppose deux histoires de sollicitations, la réponse est la superposition des réponses), et dans ce cas, la loi de comportement ne va donc plus relier directement et proportionnellement les contraintes et les déformations, comme dans le cas de l'élasticité linéaire, mais elle doit prendre en compte tout l'historique des contraintes et des déformations antérieures [21].

1.3.2. Approche du module complexe

Le fluage et la relaxation permettent de caractériser un matériau pour des phénomènes d'une durée suffisamment longue (minute, heure, jour,...). Mais lorsqu'ils sont beaucoup plus rapides, les tests dynamiques s'avèrent nécessaires, avec une description du comportement viscoélastique dans le domaine fréquentiel. Une description basée sur des caractéristiques matériaux complexes est donc plus apte à décrire la viscoélasticité dans ce domaine [3]. Dans cette approche non paramétrique la partie réelle de ces caractéristiques est liée à l'élasticité tandis que la partie imaginaire correspond à la dissipation.

1.3.2.1. Module dynamique

Pour caractériser l'amortissement d'un matériau viscoélastique, on définit les notions de **module de la raideur dynamique** et d'**angle de perte**.

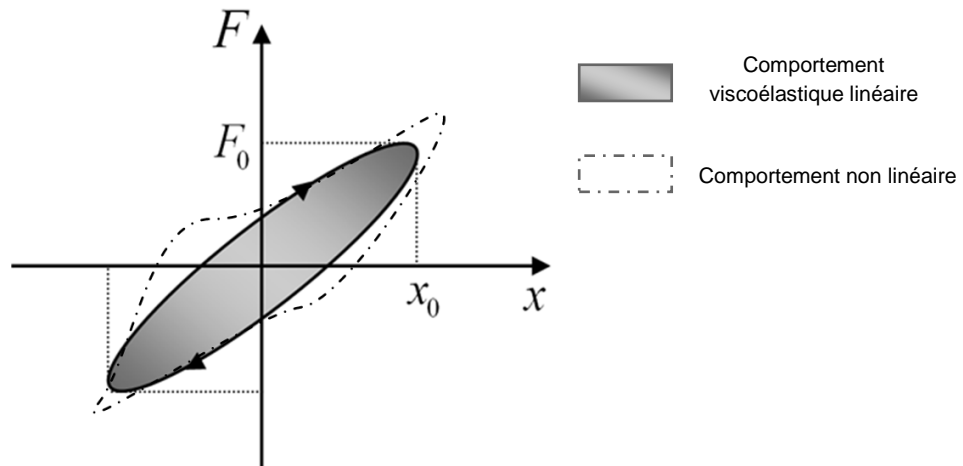


Figure 6. Cycle d'hystérésis représenté dans le plan (x, F) .

Considérons le cas où le matériau est soumis à des déplacements sinusoïdaux cycliques de pulsation ω :

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t) \quad (1.1)$$

La réponse de la force est souvent considérée comme sinusoïdale de même pulsation ω mais avec un déphasage φ :

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.2)$$

Généralement, cette hypothèse, dite de premier harmonique, n'est pas suffisante. Typiquement, la réponse en force contient des harmoniques d'ordre supérieur [22] et la réponse réelle est du type :

$$F(t) = \sum_k F_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad (1.3)$$

Dans la **Figure 6**, la surface grise correspond au comportement viscoélastique linéaire qui est caractérisé par une forme purement elliptique, la surface en traits pointillés correspond au comportement (réel) non linéaire. Dans le cas de l'hypothèse du premier harmonique, l'énergie dissipée au cours d'un cycle correspond à la zone délimitée par les courbes de chargement et de déchargement représenté dans la **Figure 6** et s'exprime comme suit :

$$E_d = \oint F(t) dx = F_0 x_0 \omega \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) dt = \pi F_0 x_0 \sin(\varphi) \quad (1.4)$$

L'énergie dissipée au cours d'un cycle d'hystérésis traduit les propriétés d'amortissement du matériau. En notant respectivement $\hat{x}(\omega)$ et $\hat{F}(\omega)$ les transformées de Fourier du déplacement imposé $x(t)$ et de la force $F(t)$ correspondante, on définit la raideur dynamique $K^*(\omega)$ en fonction de la pulsation ω par la relation :

$$\hat{F}(\omega) = K^*(\omega) \hat{x}(\omega) \quad (1.5)$$

avec la transformée de Fourier définie par :

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (1.6)$$

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (1.7)$$

A partir de la représentation complexe (par transformation de Fourier) des équations précédentes traduisant la force et le déplacement, la raideur dynamique $K^*(\omega)$ est donnée par :

$$K^*(\omega) = \frac{\hat{F}(\omega)}{\hat{x}(\omega)} = \frac{F_0}{x_0} \cdot \exp(j\varphi) = K'(\omega) + jK''(\omega) = K'(\omega)[1 + j \tan \varphi] \quad (1.8)$$

- $|K^*| = \frac{F_0}{x_0}$ est le **module de la raideur dynamique**.

- $K' = |K^*| \cos \varphi = \frac{F_0}{x_0} \cdot \cos \varphi$ est la partie réelle de la raideur dynamique. Cette grandeur caractérise la partie de la réponse en phase avec l'excitation. On l'appelle également **module de conservation** ("*storage modulus*"), c'est en effet une mesure de l'énergie emmagasinée et restituée au cours d'un cycle.
- $K'' = |K^*| \sin \varphi = \frac{F_0}{x_0} \cdot \sin \varphi$ est la partie imaginaire de la raideur dynamique. Cette grandeur caractérise la partie de la réponse en quadrature de phase avec l'excitation. On l'appelle également **module de perte** ("*loss modulus*"), elle caractérise une mesure de l'énergie dissipée sous forme de chaleur pendant un cycle et φ est appelée **angle de perte**.

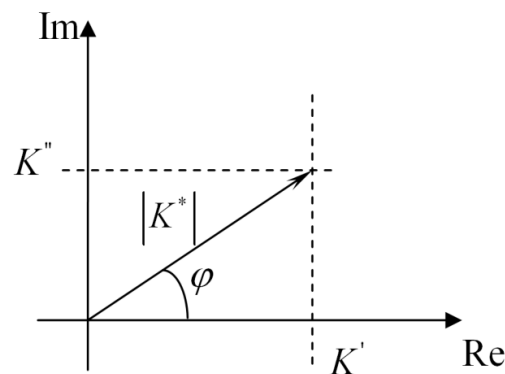


Figure 7. Représentation schématique de la raideur dynamique dans le plan complexe.

La **Figure 7** représente les différentes propriétés dynamiques qui caractérisent l'amortissement dans les composants viscoélastiques.

1.3.2.2. Mesure du module complexe

Différents travaux ont été menés pour identifier les caractéristiques du matériau en fonction de la fréquence. Les méthodes employées sont généralement uniaxiales et de trois types [20]:

- **Mesures résonantes sur des échantillons de type poutre [23] ou plaque [24]–[26]** : la sollicitation d'une éprouvette à une fréquence de résonance permet de remonter à l'information de la raideur et de l'amortissement à la fréquence considérée. Plusieurs fréquences de résonances ou plusieurs échantillons doivent donc être considérés pour couvrir une gamme de fréquences [23], [26]. Cette méthode nécessite un matériel d'analyse dynamique des structures comme celui d'analyse modale. Elle est donc plutôt adaptée à la caractérisation d'échantillons très rigides comme les métaux. D'autre part, elle est très sensible à l'environnement (modification par l'intrusion d'un capteur par exemple) et à la dispersion des résultats. Enfin, une méthode d'analyse modale

expérimentale peut-être nécessaire pour découpler les résultats de mesure, notamment dans le cas des plaques [24], [25].

- **Mesures fréquentielles** [5], [27], [28] : des mesures sont réalisées sur une large gamme de fréquences à partir d'un essai de propagation d'onde dans un échantillon de matériau. Toutefois, les mesures sont réalisées directement sur l'échantillon à la différence des essais sur barres de Hopkinson pour les métaux. Ce type d'essai est généralement réalisé en sollicitation uniaxiale de type traction-compression ou torsion et fait appel à un choc (par explosion) pour l'excitation.
- **Mesures AMD** [14] : L'Analyse Mécanique Dynamique est une technique de grande précision pour mesurer les propriétés viscoélastiques des matériaux. Elle consiste à appliquer une déformation sinusoïdale à un échantillon et mesurer la force résultante transmise par ce dernier à l'aide d'un Analyseur Mécanique Dynamique. Cet instrument très polyvalent permet la réalisation d'analyses automatisées en appliquant à un échantillon une excitation dynamique contrôlée en fréquence et en amplitude dans des conditions définies par l'opérateur. La machine AMD, qui est semblable aux machines de traction, a cependant des dimensions très réduite et ne permet de solliciter que des échantillons de faibles dimensions (quelques millimètres) ayant de faibles raideurs. Ceci est dû d'une part au fait qu'elle ne fait aucune compensation dynamique en supposant simplement un état de déformation quasi-statique, et d'autre part à la possibilité de mise en résonance de la machine. Elle est donc plutôt adaptée à la qualification de matériaux comme les caoutchoucs. Sur les machines modernes, les sollicitations peuvent être de différentes natures : traction, flexion, cisaillement, ...

Ces méthodes de mesures visent donc à identifier la raideur et l'amortissement en fonction de la fréquence et des caractéristiques des matériaux, comme par exemple le module d'Young et/ou le module de cisaillement complexe dans le cas d'un matériau isotrope.

2. La viscoélasticité des élastomères

La viscoélasticité est un phénomène largement étudié depuis des décennies. De nombreux auteurs ont tenté de modéliser le comportement linéaire et non linéaire des matériaux viscoélastiques par différentes méthodes selon les essais expérimentaux employés. A la vue de multiples applications analytiques proposées par les auteurs, différentes démarches sont présentées pour la modélisation du comportement dynamique des matériaux viscoélastiques. Citons à titre d'exemple les travaux de Ferry [29], Vinh [30], Caputo et Mainardi [31], Lakes [32], Chevalier et Vinh [33] ou encore Balmès et Leclère [34].

Avant d'aborder la notion de viscoélasticité, on rappelle les comportements dits "purs", ou comportement idéaux, ensuite, on présente quelques approches les plus couramment rencontrées dans la littérature pour la modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques.

2.1. Comportements et modèles rhéologiques de base

Les modèles rhéologiques traitent de l'écoulement et de la déformation des matériaux sous l'action de contraintes. Afin d'obtenir des expressions analytiques d'un comportement, il est nécessaire de choisir un ou des modèle(s) analogique(s). Dans ce paragraphe, on cite quelques modèles rhéologiques permettant de représenter des comportements mécaniques de base.

2.1.1. Modèle de Newton

La théorie de Newton, publiée en 1687, sur l'écoulement des liquides suppose que l'écoulement des liquides est un écoulement laminaire. Ce qui caractérise un fluide newtonien est que sa viscosité est constante. Le liquide de Newton est schématisé par un amortisseur **Figure 8**.

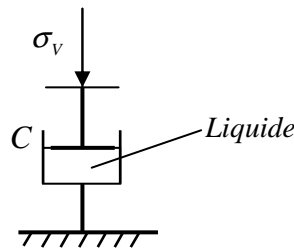


Figure 8. Représentation du liquide de Newton (Amortisseur).

Sa loi de comportement est :

$$\sigma_v = C \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (1.9)$$

où C est la viscosité dynamique [mPa.s], σ_v est la contrainte (rapport force/surface) [mPa] et ε_v est la déformation instantanée. .

2.1.2. Solide purement élastique (solide de Hooke)

Le solide de Hooke, à la différence du liquide de Newton, oppose beaucoup plus de résistance à la déformation quand il sera soumis à une contrainte du même ordre. Cette

déformation sera limitée au bout d'un temps très court. Il y aura donc une déformation brutale, quasi instantanée, puis retour à l'état immobile initial. On parle d'élasticité.

L'équation descriptive est :

$$\sigma_E = E\varepsilon_E \quad (1.10)$$

où E est le module de rigidité [Nm^{-2}] et ε_E est la déformation instantanée. Le solide de Hooke est schématisé par un ressort **Figure 9**.

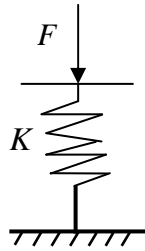


Figure 9. Représentation du solide de Hooke (Ressort).

$$F = Kx \quad (1.11)$$

où F est la force de traction/compression [N], K est la raideur du ressort [Nm^{-1}] et x est la variation de longueur [mm].

2.2. Modèles utilisés pour décrire le comportement viscoélastique

2.2.1. Modèles rhéologiques simples

La viscoélasticité est un phénomène causal pour lequel la force précède toujours le déplacement. Ce comportement peut être décrit par la fonction de relaxation ou par la fonction de fluage. Dans le domaine de Fourier, la rigidité dynamique est une fonction complexe qui dépend de la fréquence.

Le comportement viscoélastique est un comportement partiellement visqueux, et partiellement élastique. En fonction de la contrainte ou du gradient de vitesse, l'un des deux comportements peut dominer.

Les comportements viscoélastiques peuvent être modélisés par des associations d'éléments de Hooke ou de Newton en série et/ou en parallèle. Leur combinaison doit permettre d'obtenir des lois de comportement proches des celles des matériaux, suivant des règles simples. En série, la déformation totale des éléments est donnée par la somme de chacune des déformations, alors que les contraintes restent identiques dans ces éléments. En parallèle, c'est la déformation qui est égale pour chacun des éléments, pour une contrainte totale donnée par la somme des contraintes induites dans les éléments [20].

En combinant ces éléments purement élastiques et purement dissipatifs, nous obtenons des modèles viscoélastiques linéaires classiques de la littérature, **Figure 10**. Ils sont au nombre de trois : **Maxwell**, **Kelvin-Voigt** et **Zener**.

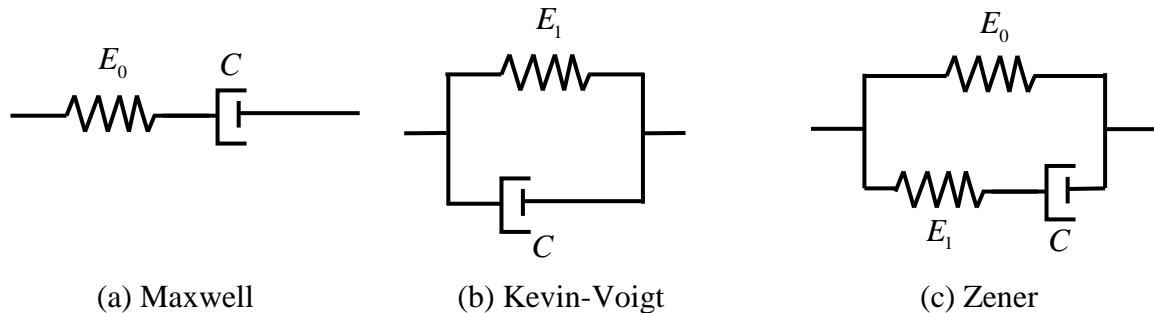


Figure 10. Modèles rhéologiques usuels.

Le modèle de Maxwell (**Figure 10.a**) permet de modéliser un comportement viscoélastique par combinaison d'un ressort et d'un amortisseur en série. Le modèle de Kelvin-Voigt ou d'amortissement visqueux [35] est obtenu par la combinaison d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle (**Figure 10.b**). Le modèle de Zener (**Figure 10.c**) [36] [37] est constitué d'un modèle de Maxwell de paramètres (E_1, C) en série avec un ressort de module d'élasticité E_0 . Ceci dit, l'ensemble de ces modèles mentionnés présentent les défauts suivants [22]:

- Les phénomènes de relaxation ou de fluage sont décrits par des lois exponentielles comportant un temps de relaxation unique. Ceci est contraire aux mesures expérimentales.
- Ces lois exponentielles conduisent à des variations rapides des grandeurs considérées que l'on n'observe pas expérimentalement.

2.2.2. Modèles rhéologiques composés

Les trois modèles cités précédemment restent trop simples pour pouvoir être représentatifs d'un comportement expérimental ou fournir une bonne modélisation du matériau. C'est ce qui motive l'établissement de modèles plus complexes que nous présentons par la suite, en généralisant ces modèles et en considérant un groupement quelconque d'éléments de type ressort ou amortisseur [16].

Le modèle de Zener étant peu apte à représenter un comportement expérimental, il est généralement nécessaire de l'étendre en y ajoutant en parallèle des modèles de Maxwell supplémentaires (N au total) pour conduire à l'assemblage proposé par la **Figure 11**. Ce modèle est dit de Maxwell généralisé ou de Weichert [38]. Comme il s'agit d'une extension

du modèle précédent avec un plus grand nombre de paramètres, il permet évidemment de mieux approximer la réalité, avec en contrepartie un plus grand nombre de coefficients à déterminer ou à identifier.

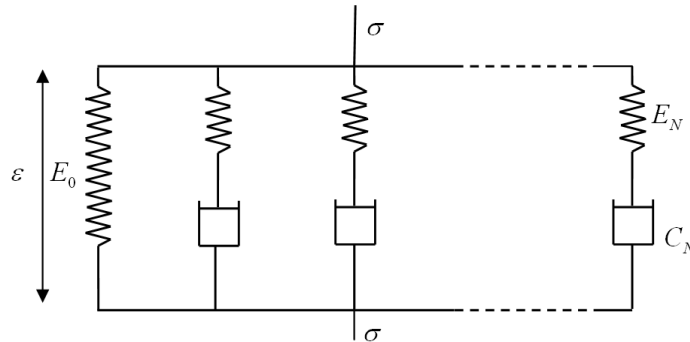


Figure 11. *Modèle de Maxwell Généralisé.*

Dans leurs travaux, Heymans et Bauwens [39], ont imaginé de décrire les propriétés viscoélastiques des polymères solides à l'aide d'un assemblage fractal d'unités rhéologiques élémentaires constituées de ressorts et d'amortisseurs. Ce modèle rhéologique complexe, composé d'éléments élastiques de module E et d'éléments de viscosité C est représenté dans la **Figure 12**.

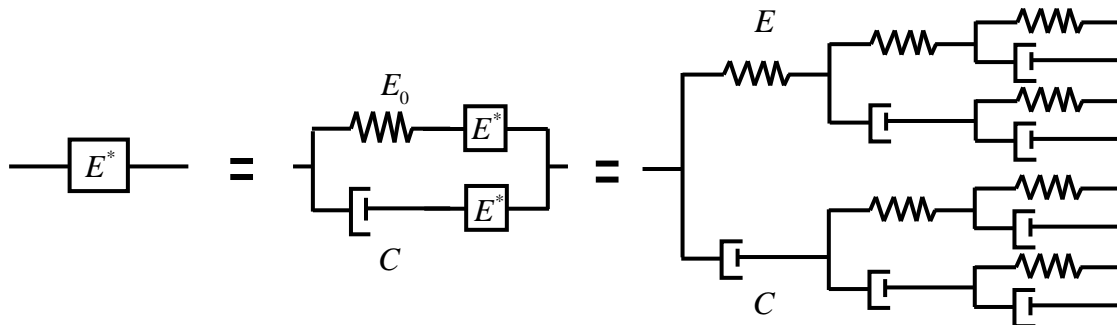


Figure 12. *Modèle fractal pour le comportement viscoélastique.*

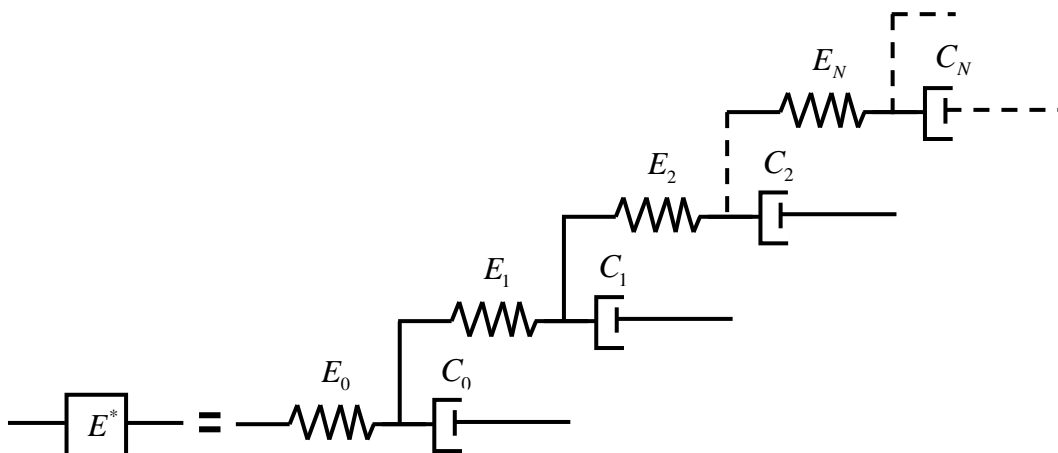


Figure 13. *Arrangement hiérarchique en parallèle des éléments de Maxwell.*

Partant d'une idée similaire, Schiessel et Blumen [40] ont proposé un modèle rhéologique constitué d'arrangements en parallèle d'éléments hiérarchiques de Maxwell, voir **Figure 13**. Le défaut des modèles rhéologiques composés est qu'ils font intervenir un grand nombre de paramètres, qu'il est difficile d'identifier.

2.2.3. Modèles à dérivées fractionnaires

Un très grand nombre de mathématiciens et automaticien comme Grundwald, Cauchy, Leibniz, Riemann-Liouville, Oldham, Rubin, Podlubny, Oustaloup... ont présenté diverses origines des dérivées et d'intégrations non entières. Les mécaniciens ont utilisé cet outil pour décrire le comportement viscoélastique des matériaux [22]. D'après les expériences, les auteurs Bagley-Torvik [41] ont montré que ce modèle peut être utilisé pour modéliser un grand nombre de matériaux viscoélastiques. Le modèle proposé par Vinh Tuong [30] en 1967, pour étudier le comportement des matériaux viscoélastiques en régime harmonique, est devenu une référence pour la modélisation et l'identification du comportement des polymères et des élastomères sur une large gamme de fréquences sauf dans les cas des matériaux comportant plusieurs zones de transitions différentes. Nous le rencontrons dans la thèse de Soula [42] et dans l'article de Vinh et al. [43]. Il s'agit d'identifier les quatre paramètres du module d'Young complexe en fonction de la fréquence à partir des essais de vibration en extension ou en torsion sur des tiges viscoélastiques. Les résultats des paramètres sont estimés à partir des courbes d'essais représentées dans un diagramme de Bode du module d'Young complexe.

Un modèle particulièrement proche de celui de Bagley et Torvik est le modèle de Zener fractionnaire (ZF). Avec ce modèle ZF, des travaux de modélisation ont été menés dans la thèse de Cosson [44]. Cosson a réalisé des essais dynamiques en traction-compression uniaxial imposée par un excitateur électrodynamique sur des plots constitués d'un cylindre en élastomère. La plage de fréquence d'étude se situe entre 10 et 3000 Hz. L'identification est réalisée en minimisant une fonction d'écart construite à partir des mesures de la fonction de transfert et de l'expression analytique du modèle de Zener fractionnaire à quatre paramètres. Il conclut que l'étude sur ce modèle ne suffit pas pour représenter le comportement en basses fréquences. Des modèles de Maxwell Fractionnaire et de Kelvin-Voigt fractionnaire peuvent être déduits du modèle de Zener fractionnaire [22].

En rhéologie, le principe pour obtenir ce dernier modèle est de remplacer l'amortisseur par le spring-pot qui est l'élément de base du comportement uniaxial s'appuyant sur le calcul

fractionnaire. Le spring-pot est un élément rhéologique supposé avoir un module complexe de la forme :

$$E^*(\omega) = E(j\omega\tau)^\alpha \quad (1.12)$$

et dont le symbole rhéologique est présenté dans la **Figure 14**.

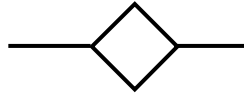


Figure 14. *Spring pot.*

2.2.4. Modèles issus d'un comportement dissipatif

Plusieurs essais expérimentaux sur les polymères en général ont montré que l'énergie dissipée au cours d'un cycle est indépendante de la fréquence et proportionnelle au carré de l'amplitude de la déformation [22]. Cette énergie est caractérisée par un type d'amortissement appelé amortissement hystérétique connu aussi sous la terminologie d'amortissement structural. C'est un phénomène associé à la contrainte cyclique. On montre que l'énergie dissipée au cours d'un cycle est égale à la boucle d'hystérésis. Makris [45] a donc recherché un modèle viscoélastique linéaire dont la dissipation d'énergie est équivalente à ce qui est proposé et il aboutit à un modèle hystérétique non causal [19]. En s'appuyant sur les relations de Kramers-Kronig, il construit un modèle connu sous le nom d'hystérétique causal. Il est aussi important de noter que les phénomènes d'hystérésis ont fait l'objet de préoccupations auprès de certains auteurs dans la recherche d'un modèle capable de modéliser les boucles d'hystérésis apparaissant lors des décharges.

Dans ce domaine, nous trouvons trois auteurs qui ont travaillé sur l'identification du comportement non linéaire en grandes déformations :

Soulimani [46] et Cantournet et al. [8] ont étudié la formulation thermodynamique par deux approches différentes. La compréhension de la structure physique des élastomères a permis à Cantournet et al. [8] d'établir un modèle thermodynamique avec variables internes. Un modèle rhéologique par frottement est présenté et prend compte d'une part de la non linéarité comportementale et de l'hystérésis d'autre part. Puis, la thèse de Soulimani aborde l'approche fonctionnelle qui généralise l'intégrale héréditaire aux grandes déformations. Cette approche intégrale traduit la relation qui lie déformation et contrainte à chaque instant et utilise le principe de Boltzmann. Enfin, le travail effectué par Saad [47] dans le cadre d'une thèse a permis de construire un modèle basé sur une loi hyperviscoélastique proposée par Simo [48] qui tente d'identifier le comportement non linéaire en grandes déformations des

cales en caoutchouc à basses fréquences (0-100 Hz) sous précharge constante. Le principe est de linéariser cette loi pour traduire le fait que le module dynamique mesuré dépend fortement de la précharge. On observe que le module dynamique diminue avec l'amplitude de l'excitation imposée « effet Payne » [10]. Les résultats expérimentaux obtenus par Saad ont aussi montré que l'amplitude du module d'Young augmente avec la précharge imposée. Les auteurs Soula et Chevalier [49] ont aussi spécifié dans leurs travaux ce phénomène et ont tenté de modéliser ce comportement dans le domaine fréquentiel par les dérivées fractionnaires.

Le comportement dissipatif des matériaux viscoélastiques peut également être généré par les forces de frottement aux interfaces dans le cas de composants caoutchouc non adhésifs sur les pièces de leur environnement. On présente dans la partie suivante le phénomène de frottement et quelques approches les plus couramment rencontrés dans la littérature pour la modélisation du frottement.

3. Modélisation du frottement

Le frottement est un phénomène macroscopique d'origine microscopique. Divers modèles mathématiques qui décrivent les phénomènes de frottement ont été proposés dans la littérature [50], [51]. Le modèle qui décrit avec précision un maximum de phénomènes observés est en général préférable. Lors du frottement, on observe plusieurs comportements qu'on résume ici :

- ***stiction (collage)*** : frottement statique, le solide reste immobile tant qu'il n'y a pas rupture des adhérences,
- ***pre-sliding displacement (pré-déplacement)*** : lorsqu'il y a collage, les adhérences ont un comportement élastique tant qu'il n'y a pas rupture,
- **stick-slip motion (collé-glissé)** un mouvement saccadé observé lors du glissement relatif des deux solides,
- ***breakaway force (la force de rupture)*** : C'est la force nécessaire pour initier le mouvement,
- ***hysteresis behavior with nonlocal memory (phénomène hystérétique avec mémoire non locale)*** : lors d'un pré-déplacement, la force de frottement dépend de la position suivant une hystérésis dont le centre varie (non-symétrique) [52],
- ***rising static friction (Augmentation du frottement statique)*** : dépendance entre le temps de collage (dwell time) et la valeur de la force de rupture (breakaway force),
- ***frictional memory (mémoire du frottement)*** : pour des vitesses faibles, retard entre les variations de vitesse et la valeur des frottements,

- **effet Stribeck** : à vitesse élevée, le solide glisse sur le fluide lubrifiant sans être en contact direct avec le support. Le frottement est alors proportionnel à la vitesse.

Pour modéliser le frottement, une distinction est faite entre les modèles statiques et dynamiques. Les premiers utilisent une fonction algébrique pour modéliser les frottements, contrairement aux seconds, qui ajoutent un ou plusieurs états pour les retranscrire.

Dans la suite, on propose une liste non exhaustive des principaux modèles utilisés dans la littérature.

3.1. Modèles statiques

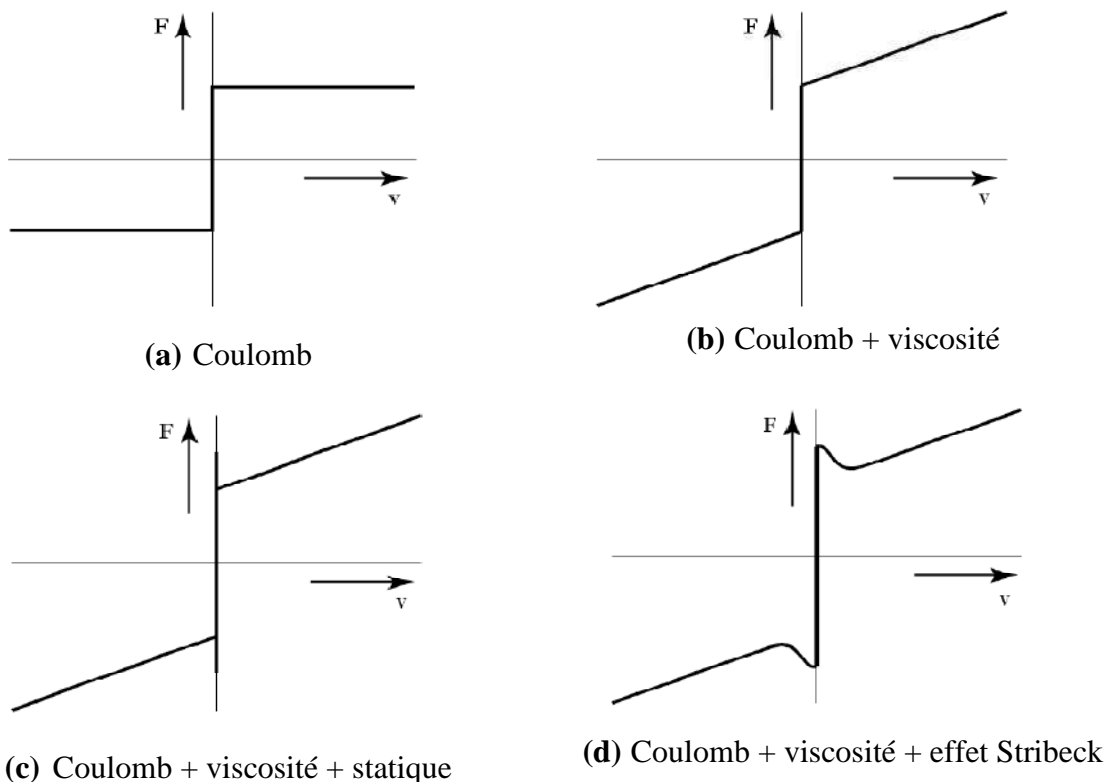


Figure 15. Exemples de modèles de frottement : (a) modèle de Coulomb, (b) modèle 'Coulomb + viscosité', (c) modèle 'Coulomb + viscosité + statique', (d) modèle complet avec effet Stribeck.

Amontons dans [53], puis Coulomb dans [54], et puis d'autres, ont conduit à des modèles de Coulomb, de viscosité, de frottement statique (*stiction*), et leur possible combinaisons, qui sont souvent appelés des modèles classiques de frottement. Le modèle de Stribeck, qui modélise l'effet Stribeck [55], peut aussi être classé aujourd'hui comme appartenant à cet ensemble de modèles. Les modèles classiques du frottement sont constitués de différents composants, chacun prend en considération certains aspects de la force de frottement. L'idée principale est que le frottement s'oppose au mouvement et que sa grandeur

est indépendante de la vitesse et la zone de contact. Quatre combinaisons possibles sont présentées dans la **Figure 15**, [50].

3.1.1. Frottement de Coulomb

Le modèle de Coulomb, [51], [54], suppose un frottement constant quelle que soit la vitesse.

$$F = F_C \operatorname{sgn}(v), \quad \operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} +1 & \forall v > 0 \\ 0 & \forall v = 0 \\ -1 & \forall v < 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Où F est la force de frottement et F_C la force du frottement de Coulomb proportionnelle à f_n la force normale appliquée au solide.

Tel que $F_C = \mu |f_n|$ ou μ est le coefficient de frottement.

Ce modèle très simple à mettre en œuvre est encore largement utilisé pour la compensation du frottement [56]. Cependant, en pratique pour des faibles variations de vitesse autour de 0, la fonction sign provoque des discontinuités [57] qui imposent un pas d'intégration numérique très petit et donc un temps de simulation très grand. Pour résoudre ce problème, on régularise la discontinuité en la lissant : on utilise la fonction atan ou tanh à la place de la fonction sign. Bien évidemment, ce changement dégrade la véracité du modèle.

3.1.2. Frottement visqueux

Au 19^{ième} siècle, la théorie de l'hydrodynamique a été développée conduisant aux expressions de la force de frottement causé par la viscosité des lubrifiants, voir [58]. Le terme de frottement visqueux est utilisé pour cette composante de la force, qui est normalement décrite comme

$$F = F_v v \quad (1.14)$$

Le frottement visqueux est souvent combiné avec le frottement de Coulomb comme le montre la **Figure 15.b**).

3.1.3. Frottement statique (stiction)

Stiction signifie frottement statique par opposition au frottement dynamique. Il décrit la force de frottement au repos. Rabinowicz [59] a introduit l'idée d'une force de frottement au

repos qui est plus élevée que le niveau de frottement de Coulomb. Le frottement statique (*stiction*) comme on a expliqué précédemment s'oppose à des forces extérieures au-dessous d'un certain niveau et permet donc de maintenir un objet. Il est par conséquent clair que le frottement au repos ne peut pas être décrit comme une fonction de la vitesse uniquement, au lieu de cela, il doit être modélisé en utilisant la force externe F_e de la façon suivante.

$$F = \begin{cases} F_e & \text{if } v = 0 \text{ et } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e) & \text{if } v = 0 \text{ et } |F_e| \geq F_s \end{cases} \quad (1.15)$$

La force de frottement pour la vitesse nulle est une fonction de la force extérieure F_e et non pas de la vitesse.

3.1.4. Modèle de Stribeck

Stribeck [50] a observé que la force de frottement ne diminue pas de manière discontinue comme représenté sur la **Figure 15.c**), mais que la dépendance en vitesse est continue. C'est ce qu'on appelle le frottement de Stribeck. Une description plus générale de frottement que les modèles classiques est, par conséquent,

$$F = \begin{cases} F(v) & \text{if } v \neq 0 \\ F_e & \text{if } v = 0 \text{ and } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.16)$$

$F(v)$ est une fonction arbitraire, qui peut paraître comme sur la **Figure 15.d**). Un nombre de paramétrisation de $F(v)$ ont été proposés [8]. Une forme commune de la non-linéarité est

$$F(v) = F_C + (F_s - F_C) e^{-|v/v_s|^{\delta_s}} + F_v v \quad (1.17)$$

Où v_s s'appelle la vitesse de Stribeck et permet de maîtriser la vitesse de décroissance de F_s vers F_C .

δ_s dépend de la géométrie de l'application et permet de contrôler la courbure de $F(v)$ au voisinage de $v = 0$ [60]. Ces modèles ont été utilisés pendant une longue période de temps. La fonction F est obtenue en mesurant la force de frottement pour des mouvements avec une vitesse constante.

Ce modèle, bien que plus complet que les précédents, ne résoud pas les problèmes pratiques de simulation autour de $v = 0$.

3.1.5. *Modèle de Karnopp*

Le modèle de Dean Karnop [61], a pour objet de résoudre les problèmes de convergence en simulation des modèles précédents (lorsque la vitesse tend vers 0).

Karnopp a développé son modèle pour surmonter les problèmes avec la détection de la vitesse nulle et pour éviter de passer entre différentes équations d'état pour le collage et glissement.

Le modèle définit un intervalle zéro de vitesse, $|v| < DV$. En effet, pour des vitesses dans cet intervalle, la vitesse interne du système peut changer et être non-nulle, alors que la sortie du bloc est maintenue à zéro.

L'inconvénient de ce modèle est qu'il est fortement couplé avec le reste du système. La force externe est une entrée pour le modèle et cette force n'est pas toujours explicite. Le modèle doit donc être adapté à chaque configuration. Le modèle de Karnopp est largement utilisé car il permet des simulations efficaces. Néanmoins, l'intervalle de vitesse nulle n'est pas conforme au vrai phénomène de frottement.

Les modèles statiques reflètent l'évolution des découvertes dans le domaine de la tribologie, chacun complétant le précédent en lui ajoutant de nouvelles composantes. Cependant ces derniers sont des modèles quasi-statiques, alors qu'en réalité des phénomènes dynamiques existent.

3.2. *Modèles dynamiques*

L'objectif commun aux modèles dynamiques est de représenter un des phénomènes physiques les plus importants dans les frottements et le comportement élastique des liaisons de contact.

3.2.1. *Modélisation des pré-déplacements*

Quand un solide est immobile sur un plan, les adhérences entre lui et son support ne sont pas rigides mais élastiques. En outre, les caractéristiques du collage ne sont pas uniformes sur l'ensemble de la surface. Ainsi, modéliser chaque adhérence impose trop de contraintes d'identification et de simulation, on préfère utiliser un modèle moyen : lorsqu'il y a collage, on suppose que le solide et son support sont reliés par un seul ressort comme il est représenté dans la **Figure 16**.

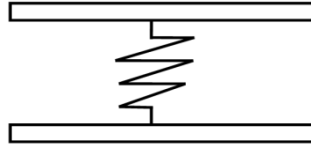


Figure 16. *Modèle de ressort des aspérités.*

Pour un micro-déplacement l'allongement z du ressort est maximal lorsque qu'il vaut z_{max} . Il y a alors rupture des adhérences et glissement du mobile. La déformation des contacts entre les surfaces est montré dans la **Figure 17.a)** et la **Figure 17.b)** montre la rupture des contacts et mise en mouvement des surfaces.

En général, on suppose la force du frottement proportionnelle à l'élongation du ressort fictif.

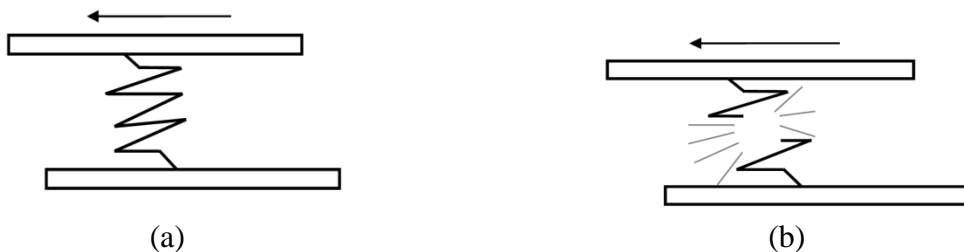


Figure 17. (a) *Déformation des contacts entre les surfaces,* (b) *Rupture des contacts et mise en mouvement des surfaces.*

Le solide peut se déplacer soit en glissant, soit, lors des phases de collage, en déformant les liaisons. Sa position est donc la somme de ces 2 déplacements relatifs. De cette relation on en déduit la **Figure 18.**

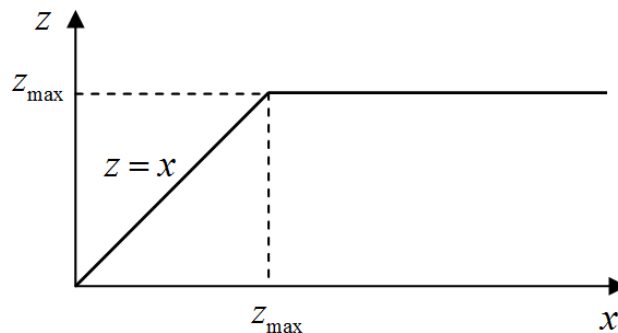


Figure 18. *Pré-déplacement z en fonction de la position x .*

Au lieu de présenter une liste exhaustive des modèles disponibles, on s'intéresse dans la suite aux plus récents et aux plus utilisés. On note aussi la filiation entre ceux-ci : du plus simple (modèle de Dahl [62]) au plus complet (Modèle de Leuven [63]).

A chaque itération, la liste des phénomènes pris en compte est complétée. L'ensemble de ces modèles sont des modèles empiriques où l'objectif est de faire correspondre une ou des

équation(s) différentielle(s) à la réalité observée, avec plus ou moins de succès. C'est aussi la démarche entreprise par Bliman et Sorine [64], et par le modèle "reset integrator" [65]. Il est à noter cependant que dans [66] un modèle générique de friction (generic friction model) est proposé en modélisant l'ensemble des adhérences entre le mobile et son support. Il se rapproche en cela du modèle "bristle" de Haessig et al. [65].

3.2.2. Modèle de Dahl

Dahl [62] présente un modèle élastoplastique qui permet de prendre en compte un maximum de phénomènes liés aux frottements. En fait, il utilise un état supplémentaire pour modéliser les pré-déplacements. Il approche le comportement élastique des adhérences en lissant la discontinuité lors de la rupture de celles-ci.

Ce modèle présente plusieurs avantages : c'est un modèle dynamique assez simple qui comporte différents aspects de frottement, il ne dépend que du déplacement. L'inconvénient de ce modèle est qu'il ne prend pas en compte l'effet de collage (*stiction*).

3.2.3. Modèle de Bristle

Ce modèle introduit par Haessig et al. [65] prend en compte les aspérités irrégulières du contact au niveau microscopique comme un ensemble de lames flexibles élastiques (*bristles/brush* de raideur σ_0) en nombre n et de localisations b_i aléatoires. La force appliquée entraîne une tension des lames qui génère une force de frottement (1.59).

$$F = \sum_{i=1}^n \sigma_0 (x_i - b_i) \quad (1.18)$$

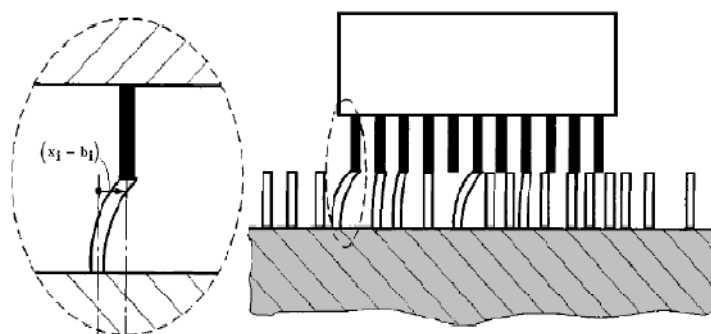


Figure 19. Modèle de lame à partir duquel est construit le modèle de Bristle.

Pour une valeur suffisante, la distance relative $(x_i - b_i)$, montrée sur la **Figure 19**, atteint une valeur limite z_0 et il y a brusque rupture du contact avec détente et mise en glissement [67], [68].

Ce modèle tient compte du caractère aléatoire de frottement qui dépend du nombre de lames choisies, plus le nombre est grand plus le modèle de lames est complexe. La difficulté des simulations, qui réside dans n non constant et croissant au cours du mouvement, rend ce modèle inefficace. Les mérites de ce modèle sont trouvés dans l'interprétation du frottement comme lames agissant l'une sur l'autre et de reproduire au mieux le comportement aléatoire réel.

3.2.4. *Modèle de Bliman et Sorine*

Bliman et Sorine [69] ont proposé un modèle généralisant le modèle de Dahl, basé sur les recherches expérimentales de Rabinowicz [59], afin d'obtenir l'effet Stribeck. Cependant l'effet Stribeck n'est pas modélisé par ce modèle durant le début du régime statique comme en réalité (**Figure 15.d**). Ce modèle possède l'avantage d'avoir beaucoup de propriétés, il capture l'effet de cisaillement, il dépend du déplacement mais par contre ne dépend pas non plus de la vitesse (l'effet Stribeck n'étant que partiellement capturé).

3.2.5. *Modèle de LuGre*

Le modèle de LuGre est issu d'une collaboration entre les laboratoires des universités de Lund (Suède) et de Grenoble (France), d'où vient sa dénomination [67]. Cette extension du modèle de Dahl permet d'intégrer l'effet Stribeck, le frottement visqueux et l'effet frictional memory. Ce modèle repose sur l'hypothèse que les surfaces en contact peuvent être modélisées par des 'lames' (ou des brosses) dans l'approche de Bowden et Tabor [70].

Le modèle de LuGre est un modèle reposant sur l'approche microscopique de la modélisation des surfaces de contact par des lames. La **Figure 20** illustre cette approche, chaque lame représentant une aspérité en contact contre une autre.

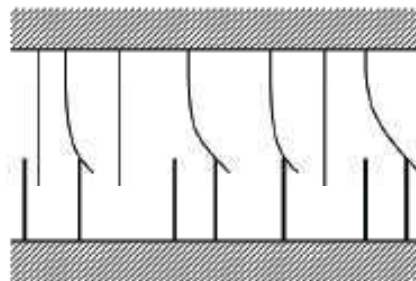


Figure 20. *Modèle de lame à partir duquel est construit le modèle de LuGre.*

Cette approche est identique à celle des ressorts expliquée au paragraphe 3.2.1. Grâce à ce modèle la déformation des lames est prise en compte mathématiquement par la variable z . La **Figure 21** montre cette déformation lorsque les surfaces se déplacent.

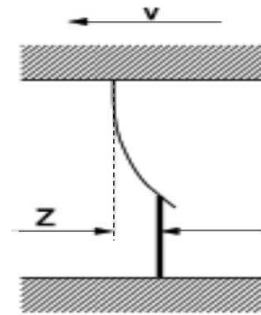


Figure 21. Déformation des lames lors d'un déplacement.

Le modèle mathématique est basé sur la vitesse de déplacement des lames pour prendre en compte l'effet Stribeck. Même s'il ne prend pas en compte la liste exhaustive des phénomènes physiques observables, avec peu de paramètres et sa relative simplicité lui ont permis d'être l'objet de nombreux travaux autant en identification qu'en contrôle-commande, [71], [72]. Les modèles qui en sont issus ne sont que de petites adaptations pour prendre en compte les derniers phénomènes non modélisés. Le modèle décrit par le système d'équations (1.19).

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \\ g(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^{\delta_s}} \\ F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v \end{cases} \quad (1.19)$$

ou v est la vitesse relative de déplacement des solides, σ_0 la rigidité des lames, F_c la force de Coulomb, F_s la force statique, et enfin v_s la vitesse de Stribeck, σ_1 est le coefficient d'amortissement, et σ_2 le coefficient de viscosité.

3.2.6. Modèle élasto-plastique avec la propriété de non-dérive

Les modèles de Dahl et de LuGre ont un des inconvénients majeurs, ils ne possèdent pas la propriété de *non-dérive* : lorsqu'on applique une force de cisaillement u inférieure à la force de rupture F_s , la position du solide doit rester bornée.

Le modèle élasto-plastique avec la propriété de *non-dérive* a été proposé dans [73] comme une extension du modèle de LuGre afin de l'améliorer. Cependant, la mise en plus de cette seule propriété a rendu le modèle plus complexe et plus difficile à identifier surtout par

l'ajout de 2 nouveaux paramètres [74]. Ce comportement est obtenu en modifiant (1.19) pour obtenir l'équation (1.20).

$$\frac{dz}{dt} = v \left(1 - \alpha(z) \frac{\sigma_0}{g(v)} \operatorname{sgn}(v) z \right) \quad (1.20)$$

La fonction $\alpha(z)$ est nulle lorsqu'il y a adhérence et est égale à 1 lorsqu'il y a glissement. Dans ce cas là, \dot{z} converge vers 0

3.2.7. Modèle de Leuven

Malgré que le modèle élasto-plastique résoud le problème de dérive lors de pré-déplacements, mais, le phénomène "hysteresis with nonlocal memory" n'est pas encore pris en compte. Le modèle de Leuven [63] délivre cette propriété en modifiant le modèle de LuGre, tout en gardant celle de non-dérive. L'ensemble du modèle de Leuven est donné par les équations (1.21) à (1.22).

$$\frac{dz}{dt} = v \left(1 - \operatorname{sgn} \left(\frac{F_h(z)}{g(v)} \right) \left| \frac{F_h(z)}{g(v)} \right|^i \right) \quad (1.21)$$

Avec

$$\begin{cases} g(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^{\delta_s}} \\ F = F_h(z) + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_v v \end{cases} \quad (1.22)$$

Le modèle de Leuven avec ses différentes versions prend en compte tous les phénomènes physiques que nous avons introduits auparavant, néanmoins, la fonction $F_h(z)$ dans la formulation mathématique de ce modèle, est en fait très complexe à modéliser et à identifier.

Conclusion

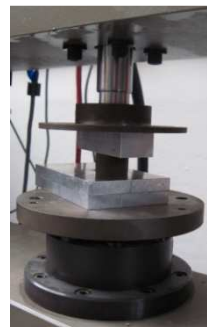
L'étude bibliographique présentée dans ce premier chapitre a permis de passer en revue les modélisations du comportement des élastomères notamment la viscoélasticité et la dissipation non linéaire.

Cette étude met en évidence une grande diversité de sujets liés aux matériaux viscoélastiques tant sur l'aspect constitution, élaboration que d'un point de vue des propriétés mécaniques. Un rappel des différents phénomènes liés aux frottements et une liste non-exhaustive des modèles existants dans la littérature sont présentés dans ce chapitre.

Chapitre 2 Techniques expérimentales pour la caractérisation du comportement dynamique des composants viscoélastiques

Sommaire

1. Description des bancs d'essais	38
1.1. Banc hydraulique de caractérisation des élastomères	38
1.1.1. Descriptif général.....	38
1.1.2. Description de la chaîne d'analyse vibratoire de la MTS.....	41
1.2. Banc d'essais dynamiques de torsion :.....	43
2. Techniques de traitement des données des essais dynamiques et résultats expérimentaux	46
2.1. Essais de compression dynamique	46
2.1.1. Techniques de traitement des données des essais de compression.....	46
2.1.2. Résultats obtenus des essais de compression.....	47
2.2. Essais de cisaillement dynamique	50
2.2.1. Techniques de traitement des données des essais de cisaillement.....	50
2.2.2. Résultats obtenus des essais de cisaillement.....	51
2.3. Essais de torsion dynamique	53
2.3.1. Techniques de traitement des données des essais de torsion.....	53
2.3.2. Résultats obtenus des essais de torsion.....	68
Conclusion	68



Résumé

Les techniques expérimentales présentées dans ce chapitre permettent de décrire le comportement dynamique sous sollicitations uniaxiales d'un élastomère.

Ce chapitre est consacré à la description des bancs d'essais, du post-traitement des données des essais et de l'analyse des mesures expérimentales.

1. Description des bancs d'essais

1.1. Banc hydraulique de caractérisation des élastomères

1.1.1. Descriptif général

Le dispositif est formé de deux parties distinctes, **Figure 22**. Une partie opératoire, appelée banc d'essais, permet la sollicitation mécanique de l'échantillon. Une seconde partie, qui constitue la chaîne d'acquisition et d'analyse vibratoire, permet de piloter la partie opératoire, de générer et de traiter les signaux. Cette partie sera détaillée dans le paragraphe suivant.

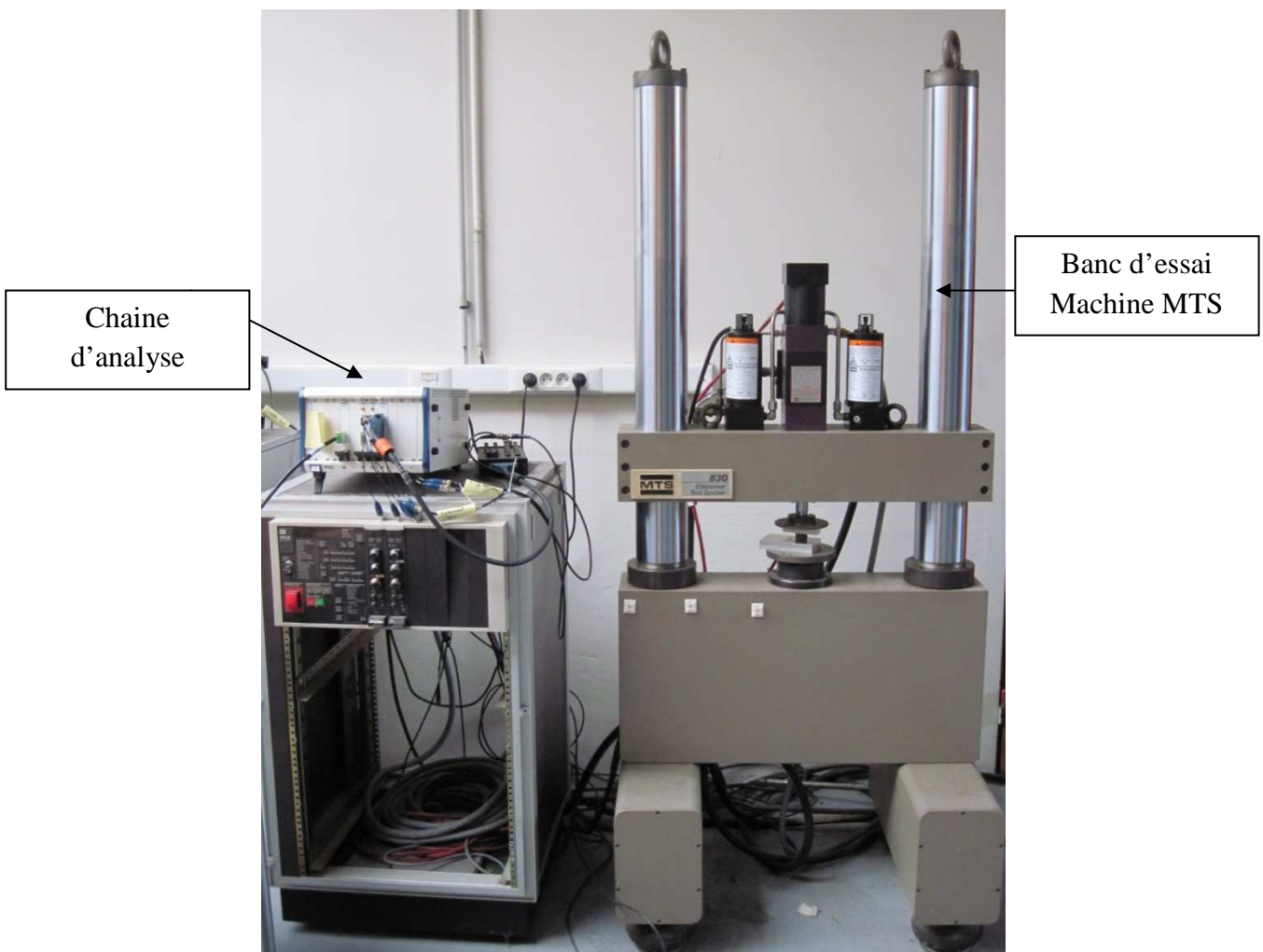


Figure 22. *Dispositif expérimental.*

Le vérin hydraulique est à l'origine des sollicitations mécaniques. L'échantillon est sollicité à la compression et dans une autre configuration au cisaillement. La force résultante ainsi que sa déflexion sont mesurées indépendamment. La raideur dynamique est obtenue par la fonction de Réponse en Fréquence de la variation Force/Déplacement.

Avant de commencer les mesures, un déverminage est effectué. Il consiste à effectuer un chargement cyclique jusqu'à stabilisation de la réponse. On s'affranchit ainsi de l'effet Mullins.

Pour les différents essais nous avons négligé tout phénomène thermique dû à un gradient de température dans le matériau. Les essais ont été réalisés pour une température ambiante de 20°C.

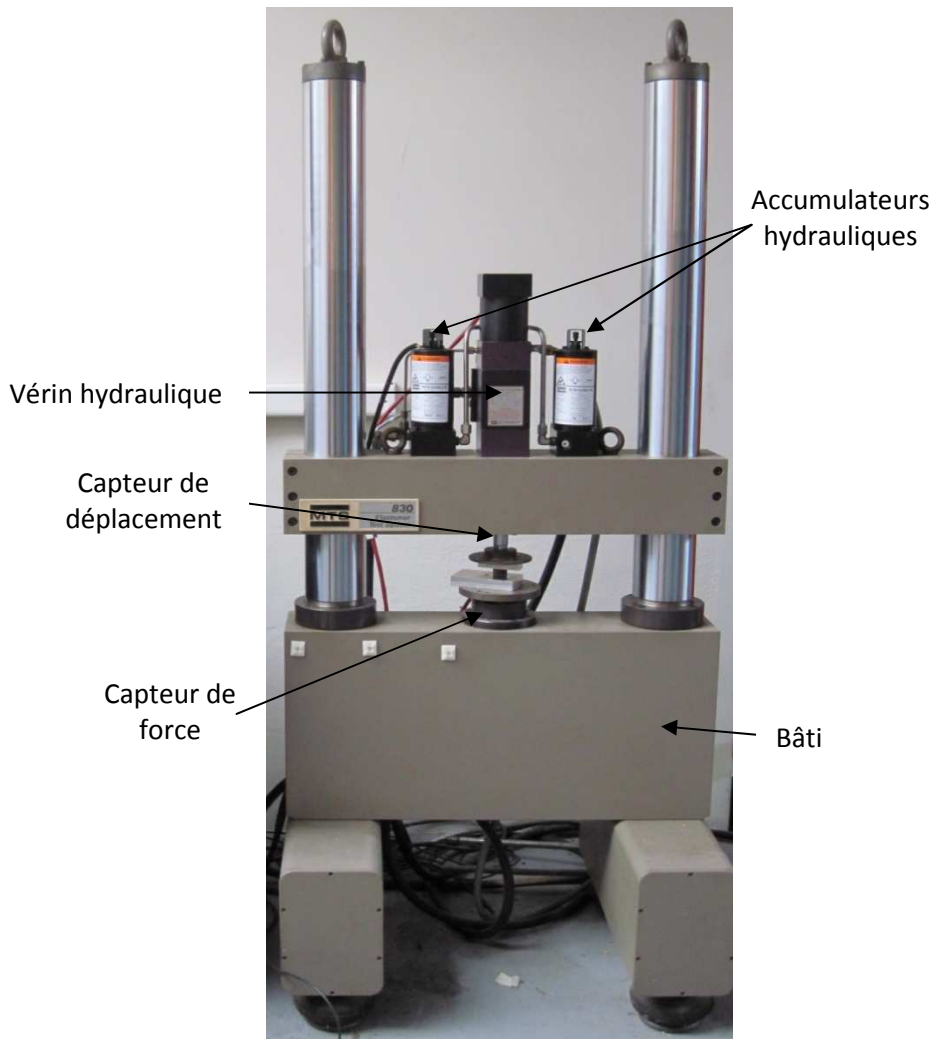


Figure 23. Dispositif du banc d'essai- machine d'essai MTS.

La machine d'essai MTS 830 se compose d'un bâti suspendu à très basse fréquence (<1 Hz) afin d'isoler le système des perturbations extérieures, **Figure 23**.

Deux colonnes verticales reliées par une traverse mobile qui supporte un vérin hydraulique sont fixées rigidement au bâti.

Au vérin hydraulique sont associés :

- deux accumulateurs
- une servovalve

- un groupe hydraulique
- un capteur de déplacement
- un capteur de force.

Ces organes assurent le fonctionnement et l'asservissement en déplacement du vérin. Le capteur de déplacement est fixé sur la base supérieure du vérin. Il s'agit d'un capteur inductif linéaire (LVDT : Linear Variable Differential Transformer). Son étendue de mesure de 0.00025 mm à 250 mm et sa bonne résolution 1 μ m sont adaptées aux mesures de vibrations.

Le capteur de force est intégré dans l'embase du montage d'essai, il s'agit d'un capteur de force traction/compression extensiométrique, muni d'une étendue de mesure allant de 0.5 N jusqu'à 50 kN. Ce type de capteur est adapté aussi bien pour des mesures en statique qu'en dynamique. La fréquence maximale supportée par la machine d'essai MTS est de 200 Hz.

Les **Figure 24** et **Figure 25** montrent les montages en compression et en cisaillement réalisés sur le banc hydraulique.

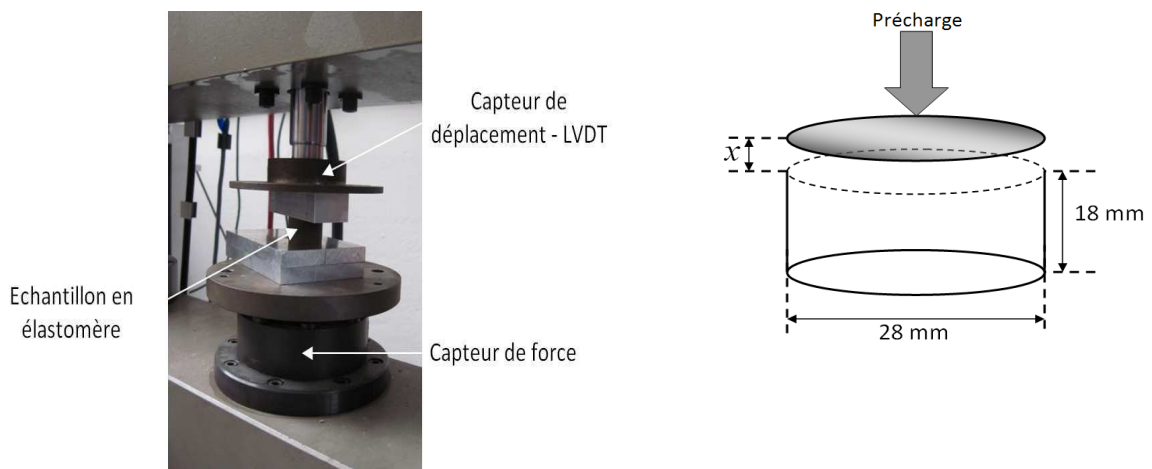


Figure 24. Montage de compression.

Pour les essais de compression, on utilise un plot constitué d'un cylindre en élastomère vulcanisé de 18 mm de hauteur et de 28mm de diamètre. L'échantillon est placé entre deux armatures métalliques. L'une des armatures est fixe et l'autre se déplace suivant l'axe du plot sous l'action du vérin. On impose donc à la surface supérieure de l'échantillon une précharge statique et un déplacement vertical x (**Figure 24**).

Pour les essais de cisaillement, on utilise un montage de cisaillement. Les échantillons sont placés en sandwich entre deux plaques rigides, parallèles et planes et un déplacement est

imposé sur l'armature centrale (**Figure 25**). On impose donc aux échantillons une précharge normale et un chargement de cisaillement x . Pour déterminer la précharge, lors des essais de cisaillement dynamique, on utilise un capteur de force annulaire. C'est un capteur de force piézo-électrique dont la plage de mesure s'étend de 1N jusqu'à 100kN.

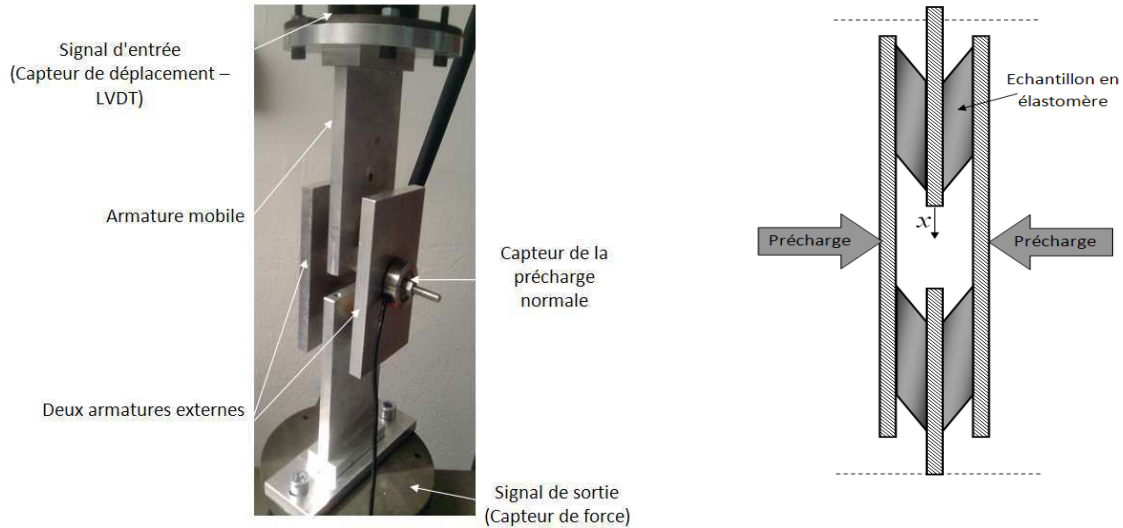


Figure 25. Montage de cisaillement.

1.1.2. Description de la chaîne d'analyse vibratoire de la MTS

On s'intéresse, dans ce paragraphe, à l'élaboration, à la mesure et au traitement des divers signaux de force et de déplacement gérés par l'intermédiaire de la chaîne d'analyse vibratoire. Quant à l'analyse du signal et au traitement des données, ils seront développés dans les paragraphes suivants.

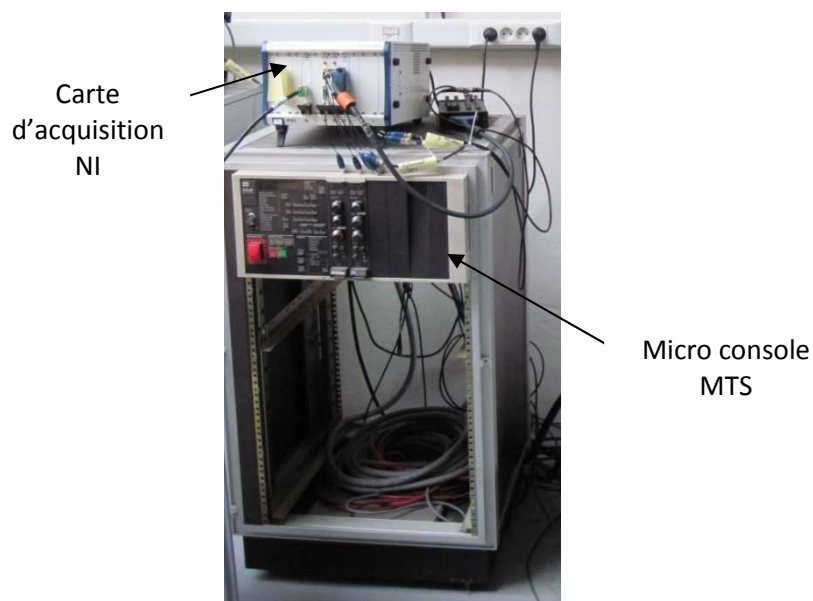


Figure 26. Appareils de la chaîne d'analyse vibratoire.

La **Figure 26** montre l'ensemble des appareils de la chaîne d'analyse vibratoire. Ces appareils électroniques sont rassemblés sur un chariot, qui permet de les isoler et de les protéger des conditions régnant autour du banc d'essai.

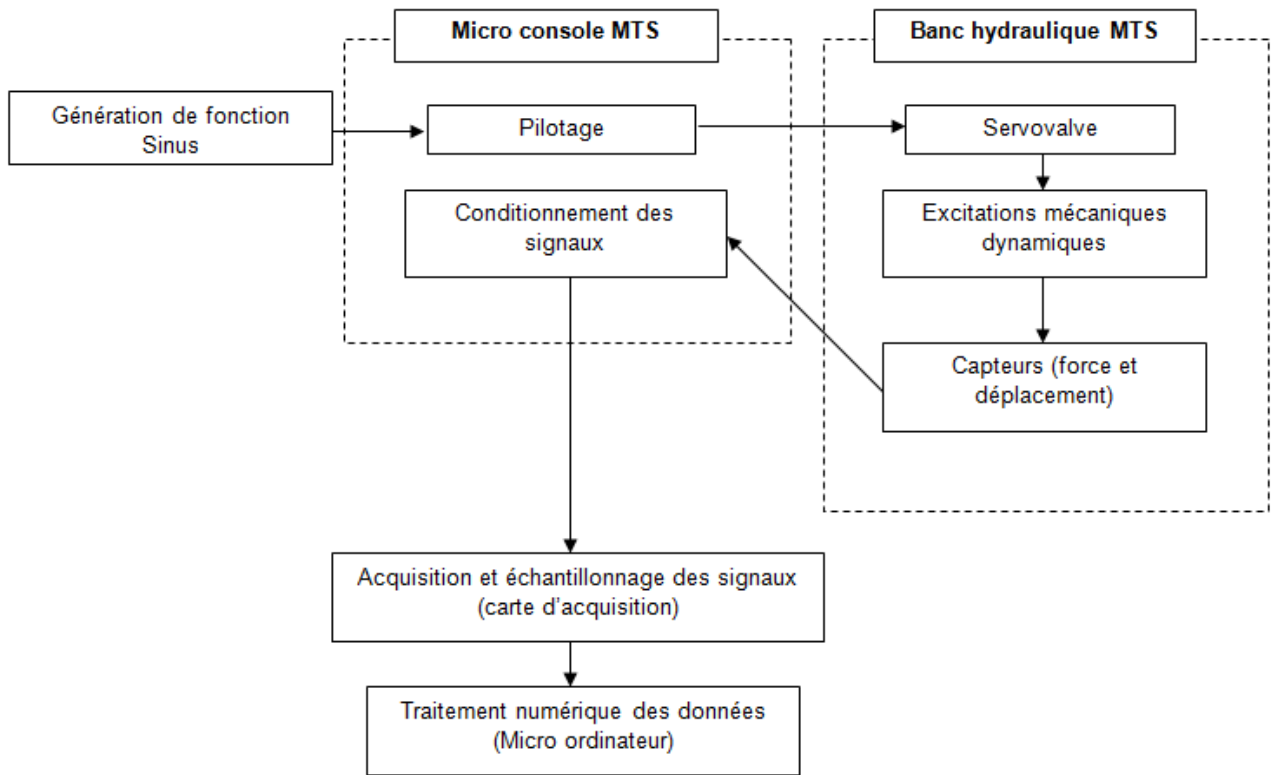


Figure 27. Fonctionnement de la chaîne d'analyse vibratoire.

Le principe général de fonctionnement de la chaîne d'analyse vibratoire est le suivant, voir **Figure 27**. Un signal électrique créé par un générateur de fonction ou par la carte d'acquisition (National Instrument) est amplifié, puis converti en déplacement par une servovalve électro-hydraulique. L'ensemble est commandé par la micro console (MTS 458-20B).

Le passage du courant fourni par le générateur à travers le moteur couple électrique de la servovalve permet de commander un distributeur hydraulique qui alimente un servo-vérin hydraulique.

L'asservissement du vérin en déplacement est piloté par la micro console MTS qui assure le contrôle en boucle fermée du système d'essai. La micro console MTS gère et contrôle le balayage en fréquence du signal sinus en incrémentant, après chaque acquisition, la fréquence d'excitation.

Elle est munie d'un « compresseur » qui permet le contrôle en puissance du signal d'entrée et assure l'asservissement du vérin qui transforme le mouvement hydraulique en un

mouvement mécanique, ce qui induit un déplacement. Ce déplacement est sinusoïdal de même fréquence que la tension délivrée par le générateur. Ce mouvement vibratoire est transmis à l'échantillon par l'intermédiaire des mors de sollicitation.

La plupart des essais sont réalisés avec un "balayage" sinus pas à pas, toutefois, pour certaines expériences l'intérêt se porte sur le comportement de la structure à une fréquence déterminée pour laquelle sont étudiés les signaux temporels et leurs spectres. Dans ce cas, on réalise des excitations à fréquence stabilisée avec le générateur.

La micro console MTS gère aussi le suivi des signaux et les dysfonctionnements de l'asservissement. Elle dispose de deux tiroirs spécifiques destinés au traitement des signaux provenant des capteurs de force et de déplacement.

Les signaux force et déplacement sont conditionnés analogiquement (filtrés et amplifiés). Après amplification et filtrage, les signaux délivrés en tension sont renvoyés pour échantillonnage sur une carte d'interface de type GPIB en vue de leur traitement numérique. L'ensemble du système est piloté par un ordinateur.

1.2. Banc d'essais dynamiques de torsion :

Le dispositif expérimental utilisé pour les essais dynamique de torsion est représenté sur la **Figure 28**.



Figure 28. *Dispositif expérimental des essais de torsion dynamique.*

Ce dispositif est constitué de deux poutres de sections rectangulaires couplées mécaniquement au moyen d'une liaison déformable formé par une vis et un échantillon cylindrique en caoutchouc. Les sollicitations mécaniques sont effectuées au moyen d'un actionneur vibrant comme le montre le schéma de la **Figure 29**.

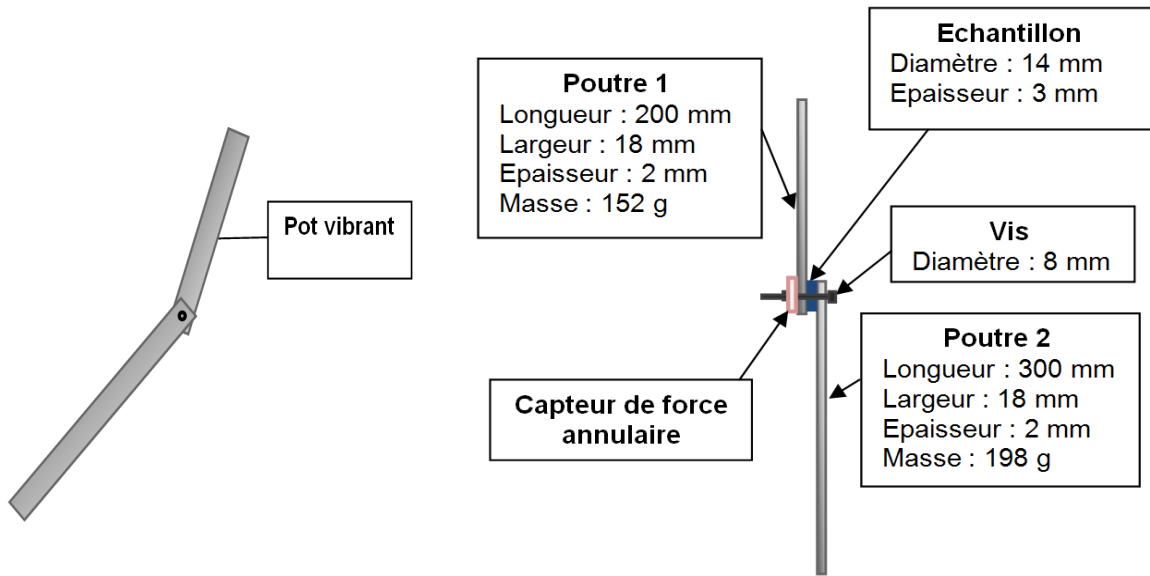


Figure 29. Schéma du mécanisme vibrant.

Le pot vibrant utilisé est un excitateur électrodynamique : GEARING & WATSON type V20C de. Le pot vibrant est à l'origine des sollicitations mécaniques. Une excitation sinusoïdale de même fréquence que la tension délivrée par le générateur est appliquée à la première lame, la structure étant libre (maintenue par le point d'excitation), un moment de torsion se crée au niveau de la jonction, ce qui induit le mouvement de la deuxième lame.

La force est mesurée directement grâce à un capteur de force monté sur l'axe de sollicitation (entre le pot vibrant et la première poutre). Le capteur de force est relié à un amplificateur opérationnel. Ce branchement permet d'asservir le pot vibrant en force. Il s'agit d'un capteur de force piézoélectrique, de sensibilité 0.1 V/N.

Les mesures de vibrations sont effectuées au moyen de trois accéléromètres, placés comme suit : deux sur la première poutre et un sur la deuxième poutre. Il s'agit de trois accéléromètres piézoélectriques unidirectionnels, avec une étendue de mesure de +/-10 g, avec $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ et de sensibilités 0.01079 V/g, 0.01024 V/g et 0.01058 V/g. Les accéléromètres sont orientés pour qu'ils mesurent dans la direction du mouvement de la structure. Un schéma du dispositif expérimental est présenté dans la **Figure 30**.

Pour déterminer la valeur de la précharge au niveau de la jonction de serrage, on utilise un capteur de force annulaire branché à un oscilloscope. C'est un capteur de force piézo-électrique dont la plage de mesure s'étend de 1N jusqu'à 100kN. La précharge est observée comme signal constant sur l'oscilloscope.

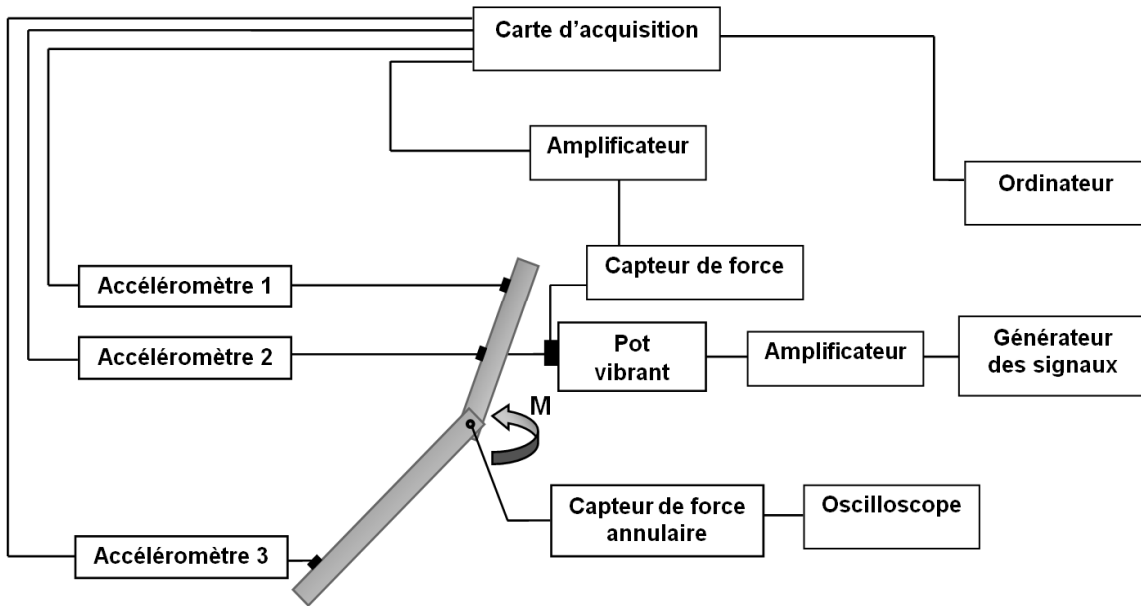


Figure 30. Schéma du dispositif expérimental.

Le principe de fonctionnement de la chaîne d'analyse vibratoire du banc d'essai est le suivant, voir **Figure 31**. Le pot vibrant est piloté par un générateur de signaux et un amplificateur.

Les signaux d'accélération délivrés en tension sont envoyés à la carte d'acquisition de type GPIB en vue de leur traitement numérique. Le signal de la force sinusoïdale engendrée par le pot vibrant est conditionné analogiquement (filtré et amplifié) puis renvoyé à la carte d'acquisition. Le signal de la force au niveau de la jonction des deux poutres (précharge) est filtré et acquis au niveau de l'oscilloscope.

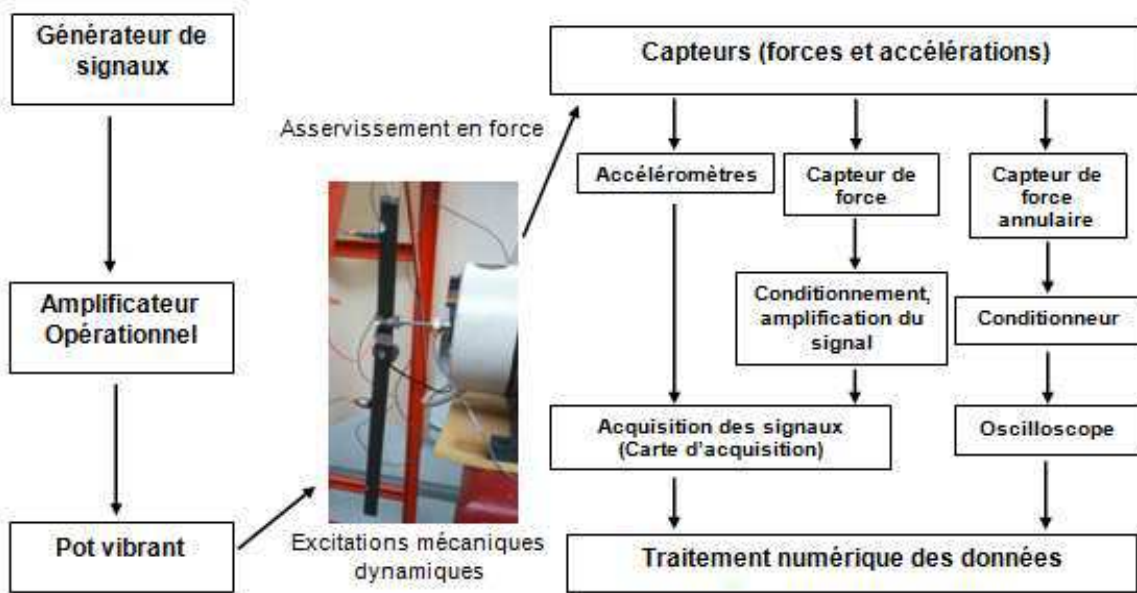


Figure 31. Fonctionnement de la chaîne d'analyse vibratoire.

L'ensemble du système est piloté par un ordinateur et l'acquisition est gérée par un logiciel développé à Supméca. Le traitement numérique des données est réalisé par le logiciel MATLAB. Dans le paragraphe suivant, on présentera la méthodologie d'acquisition et de post traitement des données des essais de torsion dynamique.

2. Techniques de traitement des données des essais dynamiques et résultats expérimentaux

Dans ce paragraphe, on présente le protocole d'acquisition et traitement des données des essais dynamiques de compression, de cisaillement et de torsion. On propose de décrire les propriétés dynamiques des échantillons élastomères par leurs raideurs dynamiques.

Ces essais ont été réalisés pour évaluer le comportement dynamique et sont effectués en y appliquant une sollicitation du type sinus. Nous savons qu'un matériau élastomère a un comportement différent selon l'amplitude maximale A des déplacements sinusoïdaux et selon la précharge P statique préalablement imposée ([2], [47], [49], [75]). Les non-linéarités sont comportementales et sont indépendantes de non linéarités de type géométrique.

Ces essais sont à balayage harmonique, ils sont utilisés pour caractériser l'amortissement du matériau et déterminer expérimentalement les valeurs de la raideur dynamique K^* pour différentes pulsations ω .

2.1. Essais de compression dynamique

2.1.1. Techniques de traitement des données des essais de compression

La raideur dynamique est obtenue en effectuant un "balayage sinus" avec une amplitude de déplacement maintenue constante durant l'essai. Pour chaque fréquence, La raideur dynamique est calculée par la fonction de Réponse en Fréquence Force/Déplacement dont il n'est retenu que l'harmonique principal (à la fréquence d'excitation).

La carte d'acquisition (National Instrument) utilisée permet non seulement d'enregistrer des signaux mais également d'en générer. Elle est donc branchée directement sur l'amplificateur qui alimente la servovalve. La génération de signaux et l'acquisition sont pilotées par la micro console MTS et gérées par un programme Labview. Le traitement numérique des données est réalisé par le logiciel MATLAB.

La **Figure 32** montre le type de signal qui est envoyé à l'amplificateur. Ces signaux présentent tous 25 périodes avec une partie croissante de 10 périodes, une partie stationnaire de 8 périodes et une partie décroissante de 7 périodes.

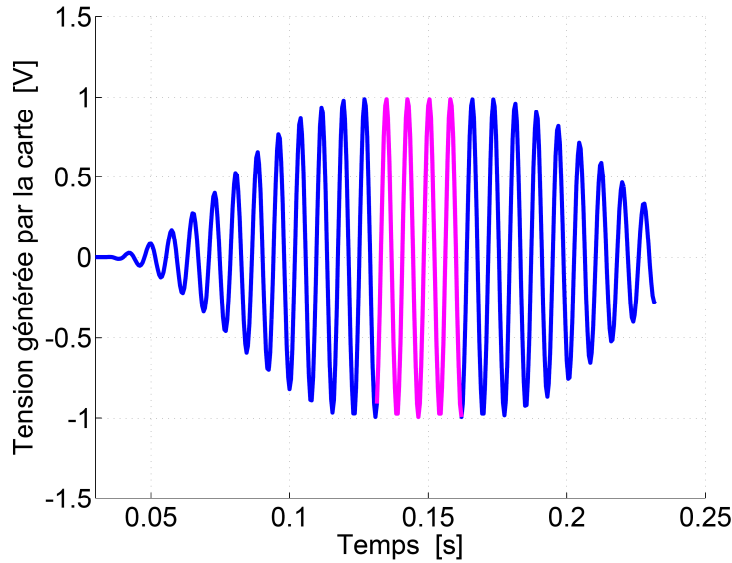


Figure 32. Exemple de tension délivrée par la carte National Instrument.

La montée et la descente en amplitude permettent de minimiser les régimes transitoires qui naissent d'un démarrage brutal de l'excitation du système. Les fréquences d'échantillonnage de génération et d'acquisition sont fixées à $f_{éch}=2$ kHz.

La plage fréquentielle d'excitation va de 4Hz à 130Hz. Elle est balayée de manière discrète en effectuant un sinus pas à pas à raison de 16 fréquences. Les fréquences d'excitation sont choisies de telle sorte que 4 périodes correspondent à un laps de temps multiple du pas temporel d'échantillonnage : $f_{excitation} = 4 \times f_{éch}/N_{éch}$ avec $N_{éch}$ le nombre d'échantillons sur 4 périodes entières. De cette manière, il n'est pas nécessaire de fenêtrer le signal lors du post-traitement, car la fréquence d'excitation correspond au pas fréquentiel de la transformée de Fourier sur 4 périodes.

Les essais sont réalisés en asservissant le déplacement que l'on impose au système via la servovalve. Ce déplacement est asservi par essai/erreur. Pour cela, à chaque fin de bloc d'acquisition à une fréquence d'excitation donnée, le programme vérifie quel niveau de déplacement était réellement imposé. Ensuite, et si nécessaire, il modifie la tension délivrée par le générateur de signaux. Pour chaque essai on impose une précharge statique. Les différentes valeurs de précharge statique imposées sont $P = [300, 500, 700, 1000, 1500, 2000, 2500]$ N. Les différents niveaux d'amplitude de déplacements imposés sont $A = [10, 25, 60, 100, 150, 250, 600]$ μm .

2.1.2. Résultats obtenus des essais de compression

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'analyse des données obtenues à partir des essais dynamiques de compression.

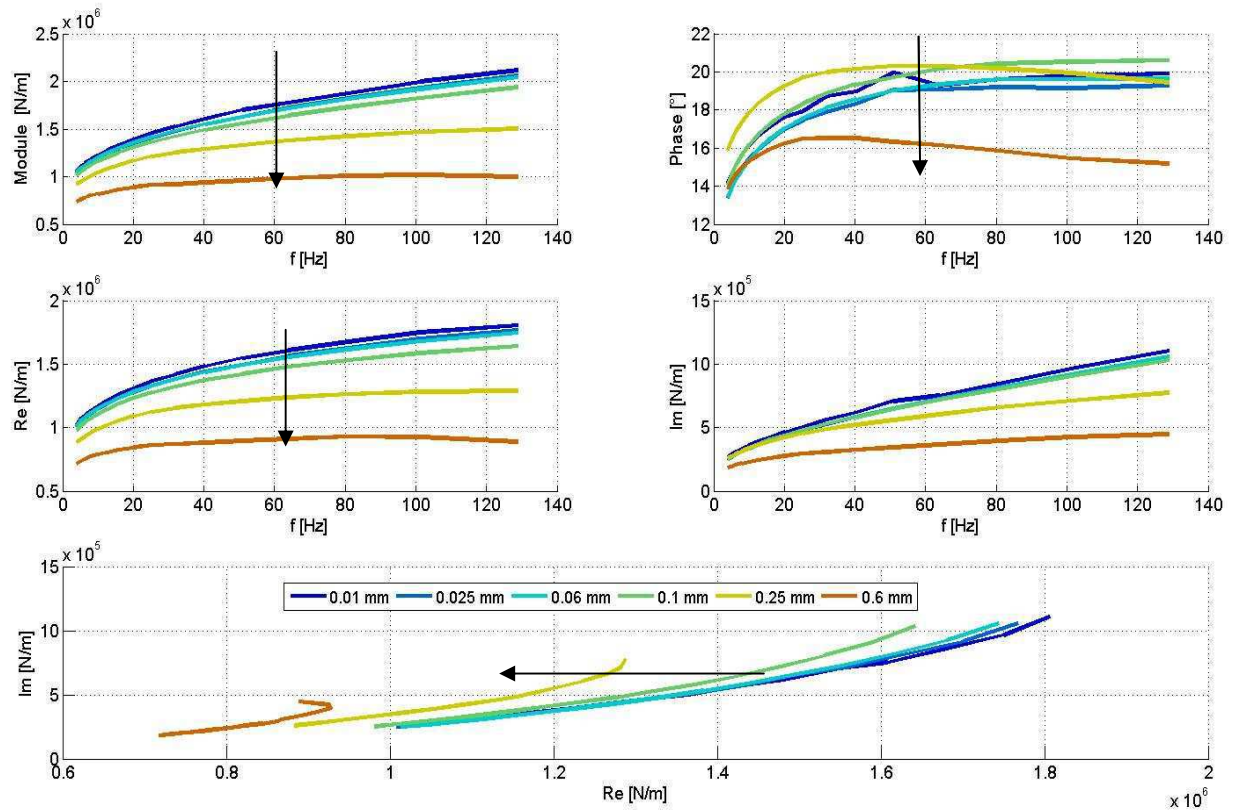


Figure 33. Le module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence pour une précharge $P = 300N$ lors des essais de compression.

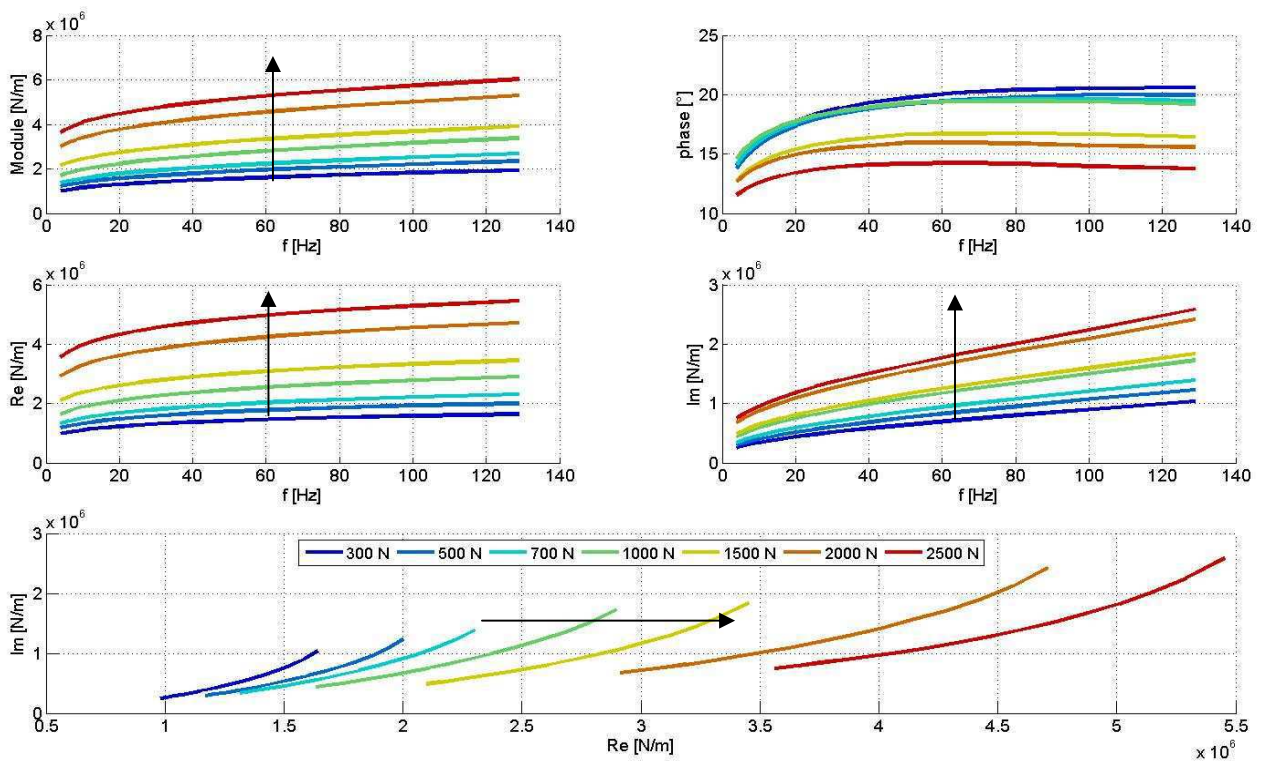


Figure 34. Le module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence pour une amplitude $A = 0.1mm$ lors des essais de compression.

Les figures présentées dans ce paragraphe montrent les allures de la dépendance en fréquence observée pour les différents essais. Le module de raideur dynamique est exprimé en N/m et la phase exprimée en degré en fonction de la fréquence. Il est présenté d'une part, pour une amplitude constante en fonction des précharges et d'autre part, pour une précharge constante en fonction des amplitudes. Nous avons aussi choisi de représenter la raideur complexe dans les plans de Bode et de Nyquist. La **Figure 33** et **Figure 34** montrent d'une part un essai de compression à précharge 300 N avec les amplitudes 10, 25, 60, 100, 150, 250 et 600 μm et d'autre part, un essai de compression d'amplitude 100 μm avec les précharges 300, 500, 700, 1000, 1500, 2000 et 2500 N. Les flèches indiquent le sens de variation des graphes pour les précharges croissantes (resp. les amplitudes croissantes). Quelle que soit la nature de la sollicitation, la précharge ou l'amplitude du déplacement imposé, on observe bien une rigidification en fréquence.

Il y a aussi une rigidification avec l'augmentation de la précharge et un adoucissement avec l'augmentation de l'amplitude. La variation de l'amplitude n'a aucun effet sur la partie imaginaire de la raideur dynamique qui, comme on l'a vu précédemment, définit la dissipativité du matériau. Quant à la précharge, elle est sans effet sur la phase.

La **Figure 35** et **Figure 36** regroupent les résultats expérimentaux des essais de compression dynamique. La **Figure 35** montre l'évolution du module et de la phase de la raideur dynamique en fonction de l'amplitude et de la fréquence pour chaque précharge. Chaque surface présente une précharge. La **Figure 36** montre l'évolution du module et de la phase de la raideur dynamique en fonction de la précharge et de la fréquence pour chaque amplitude. Chaque surface présente une amplitude. On retrouve les principales caractéristiques observées précédemment sur l'échantillon, à savoir :

- Rigidification dynamique en fonction de la fréquence.
- Diminution du module dynamique lorsque l'amplitude d'excitation augmente pour une précharge fixe. Ce phénomène est l'« effet Payne » [10] que l'on a présenté dans le chapitre précédent.
- Le déphasage augmente avec l'amplitude et atteint un maximum quand le module de raideur dynamique atteint son minimum, puis il devient constant.

Il est important de souligner aussi que la précharge et l'amplitude de déplacement ont des effets opposés. En effet, le matériau viscoélastique est plus souple avec des amplitudes d'excitations croissantes mais plus raide en augmentant la précharge statique.

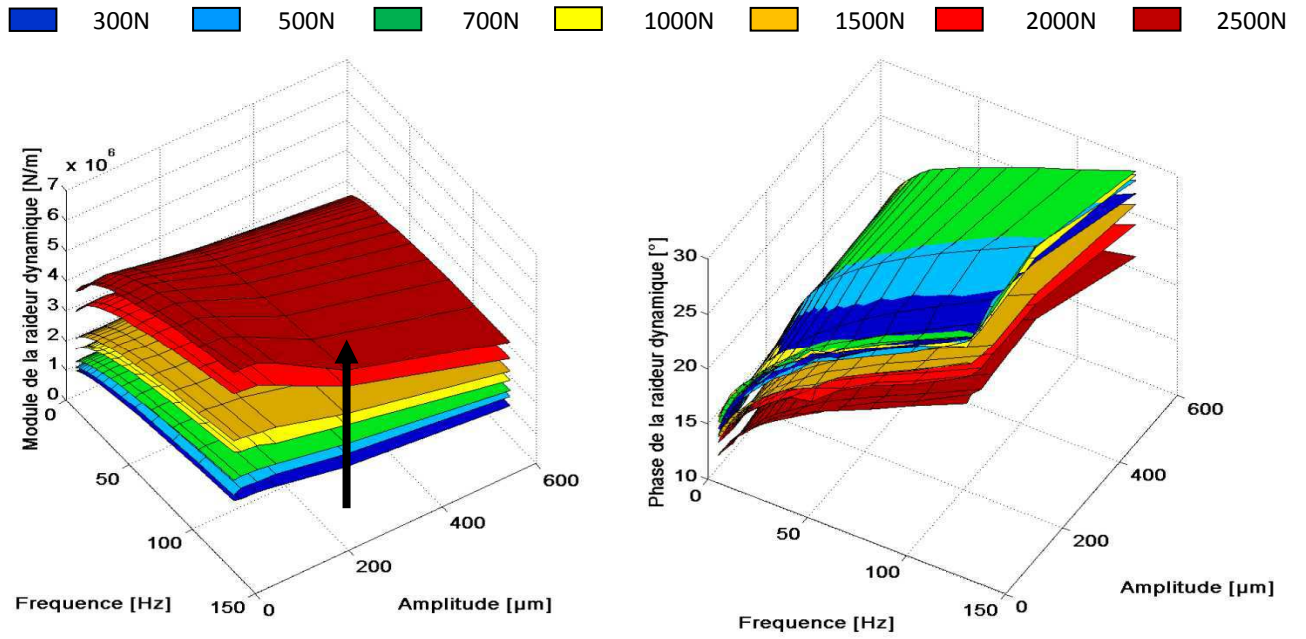


Figure 35. *Le module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence et de l'amplitude pour chaque précharge lors des essais de compression.*

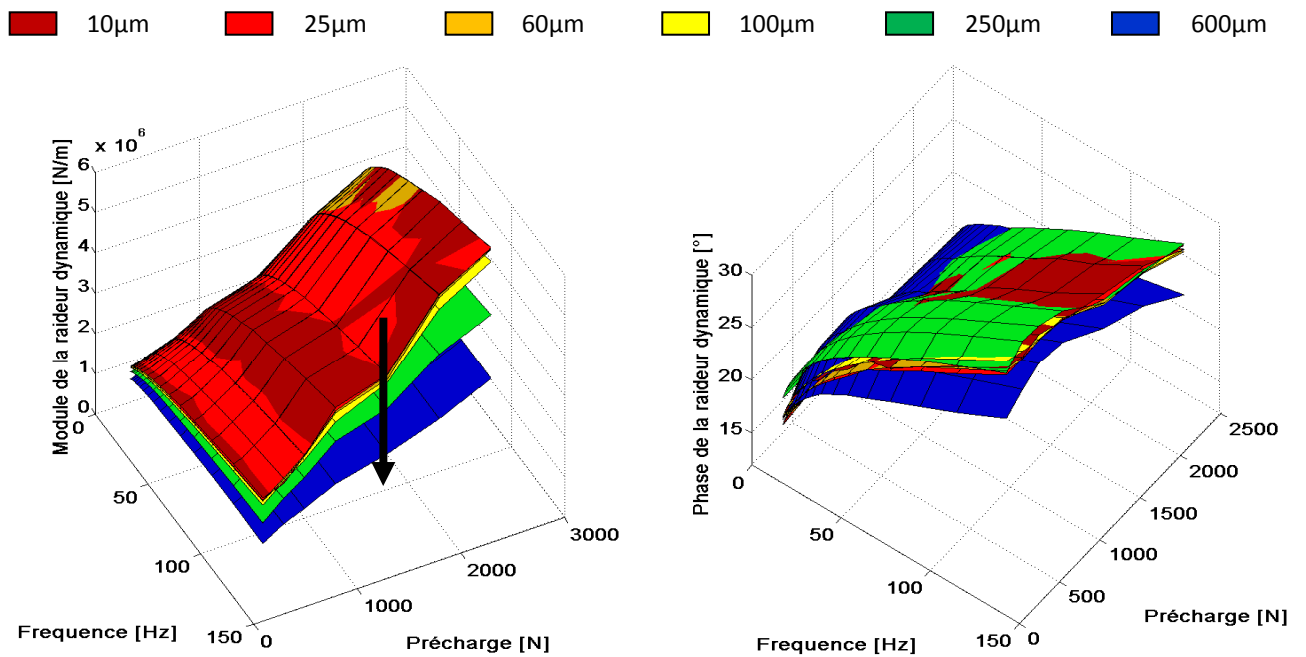


Figure 36. *Le module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence et de la précharge pour chaque amplitude lors des essais de compression.*

2.2. Essais de cisaillement dynamique

2.2.1. Techniques de traitement des données des essais de cisaillement

Pour les essais de cisaillement dynamique l'intérêt se porte sur le comportement de la structure à des fréquences d'excitations déterminées. On réalise donc des excitations de type

sinus à fréquences stabilisées avec le générateur de signaux qui est branché à l'amplificateur pour alimenter la servovalve. L'ensemble est piloté par la micro console MTS et gérées par le programme d'acquisition développé à Supméca, ensuite, le traitement numérique des données est réalisé sous MATLAB.

Avant l'acquisition des mesures, le plot est « cyclé » jusqu'à ce que ses caractéristiques dynamiques soient identiques entre deux relevés consécutifs. En général, ces essais de répétabilité ont permis de vérifier la convergence du comportement vers des caractéristiques stables.

Les fréquences d'excitation choisies sont dans la plage fréquentielle de 2.5Hz à 100Hz. Ces essais sont réalisés pour différents niveaux de précharges statiques imposés $P = [150, 500, 1000]$ N. Les signaux de force et de déplacements sont acquis à une fréquence d'échantillonnage $f_{ech}=12.8$ kHz.

La raideur dynamique est obtenue, pour chaque fréquence d'excitation par la fonction de Réponse fréquentielle Force/Déplacement.

2.2.2. Résultats obtenus des essais de cisaillement

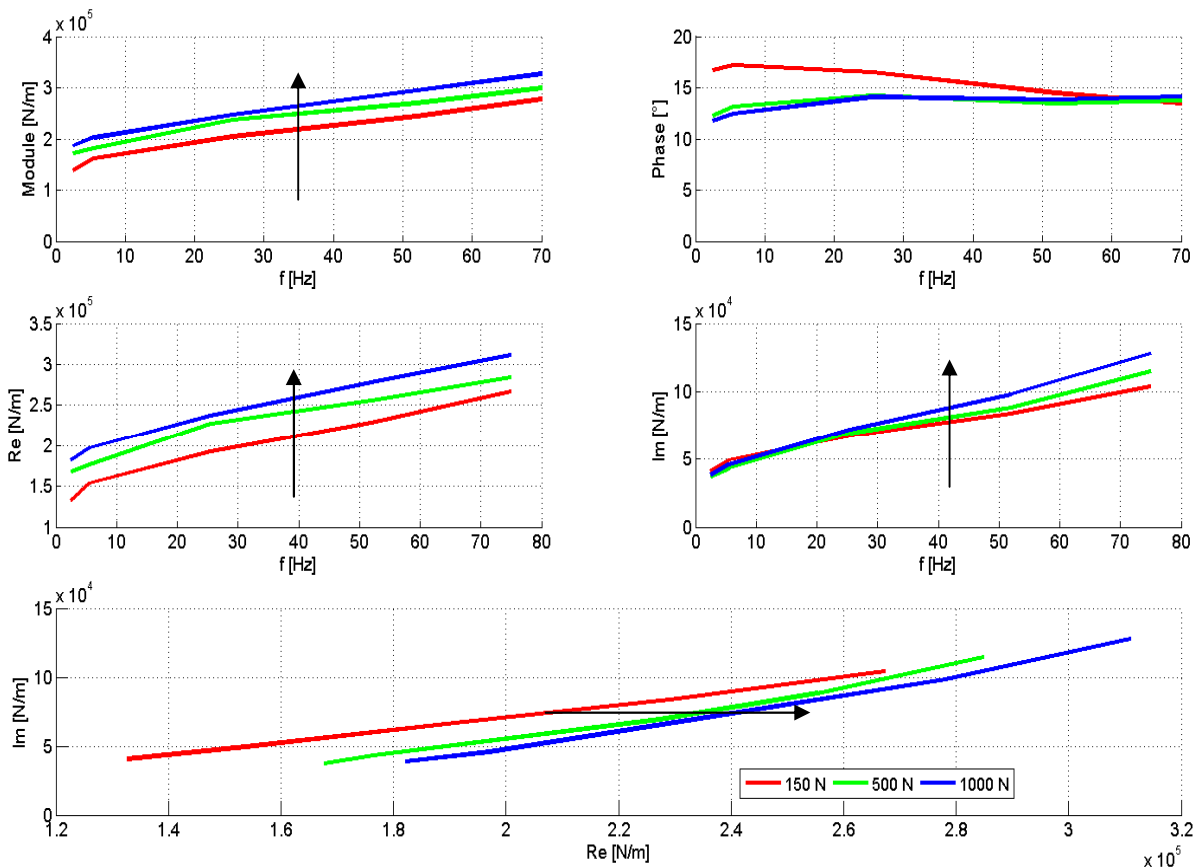


Figure 37. Le module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence lors des essais de cisaillement pour 3 cas de précharges.

On présente dans ce paragraphe les résultats obtenus à partir des essais dynamiques de cisaillement. On présente la raideur dynamique d'une part dans les plans de Bode et de Nyquist, la **Figure 37** montre un essai de cisaillement avec les précharges 150, 500 et 1000, on remarque qu'il y a aussi une rigidification avec l'augmentation de la précharge, et en cycles d'hystérésis dans le plan (Force, Déplacement). La **Figure 38** représente l'évolution de la force en fonction du déplacement à une fréquence de 2.5Hz et pour une précharge normale de 1000N.

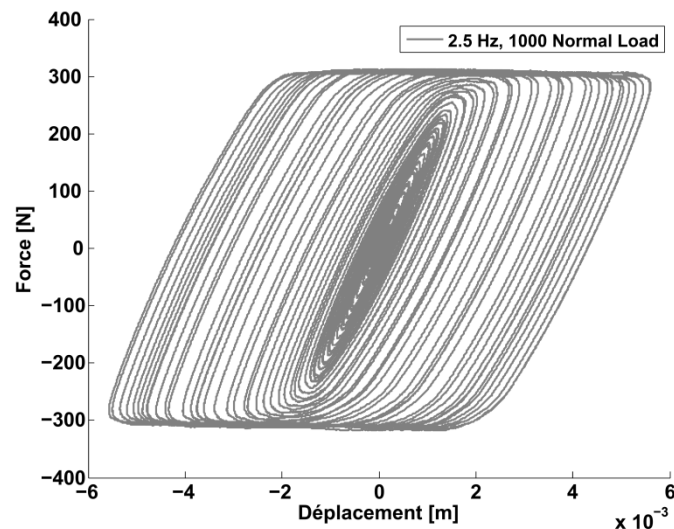


Figure 38. Evolution de la force en fonction du déplacement à une fréquence de 2.5Hz et pour une précharge normale de 1000N.

La zone délimitée par les courbes de chargement et déchargement d'une boucle d'hystérésis correspond à l'énergie dissipée sous forme de chaleur au cours d'un cycle.

Plus il y a d'hystérésis dans le diagramme force déplacement, plus grande est la dissipation de l'énergie et donc plus élevée est la capacité d'amortissement.

Les premiers cycles de l'essai (voir **Figure 39**) montrent des courbes ellipsoïdales qui correspondent au comportement viscoélastique linéaire. Le comportement non linéaire se présente comme une distorsion de la forme purement elliptique, ces non linéarités sont dues à l'amortissement par frottement.

Pour les petits déplacements, le frottement est entraîné par un micro glissement et un glissement partiel tandis que pour les grands déplacements, la forme de la courbe montre clairement le macro glissement, voir **Figure 39**.

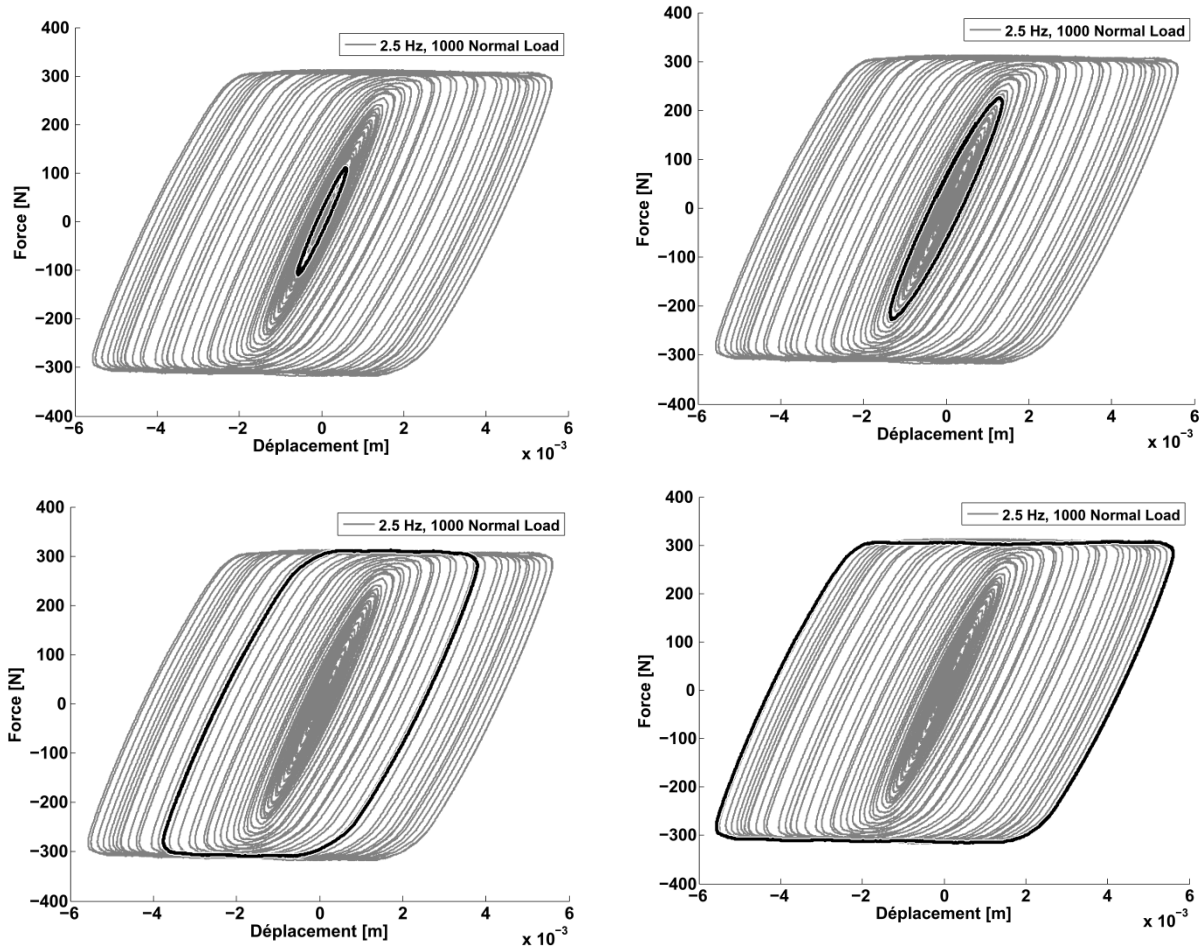


Figure 39. Evolution des boucles d'hystérésis pour un essai de cisaillement à une fréquence de 2.5Hz et pour une précharge normale de 1000N.

2.3. Essais de torsion dynamique

Pour les essais de torsion dynamique l'intérêt se porte sur le comportement de la structure à des fréquences d'excitation déterminées. On réalise donc des excitations de type sinus à fréquences stabilisées avec le générateur de signaux qui est relié à l'amplificateur pour alimenter le pot vibrant.

On propose de décrire les propriétés dynamiques de notre échantillon élastomère par la raideur dynamique c'est-à-dire la réponse fréquentielle Moment de torsion/Déplacement

$$\text{angulaire } K^* = \frac{M}{\theta}.$$

2.3.1. Techniques de traitement des données des essais de torsion

2.3.1.1. Post traitement des moments et de l'effort :

On utilise les équations de Lagrange pour trouver le moment de torsion au niveau de la jonction entre les deux lames rectangulaires M et retrouver la force d'excitation F et le

moment engendré par la force d'excitation M_F .

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir très facilement les équations du mouvement d'un système complexe sans avoir à utiliser la notion de force.

Pour un système à N degrés de liberté décrit par N coordonnées généralisées q_i , on exprime le lagrangien L à partir des coordonnées généralisées q_i et de leurs dérivées par rapport au temps \dot{q}_i comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Lorsqu'aucun effort extérieur n'est appliqué sur le système, les équations de Lagrange ont la forme suivante [76]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.1)$$

Analyse de la structure par les équations de Lagrange

Considérons notre structure mécanique constituée des deux lames rectangulaires, de longueurs l_1, l_2 , de largeurs b_1, b_2 , de hauteurs h_1, h_2 , et de masses m_1, m_2 respectivement pour la lame 1 et la lame 2. On note G_1, G_2 les centres de gravité respectifs de la lame 1 et la lame 2, θ_1, θ_2 les déplacements angulaires, et x_1, x_2 les déplacements tangentiels respectifs de G_1, G_2 de la lame 1 et la lame 2, voir **Figure 40**.

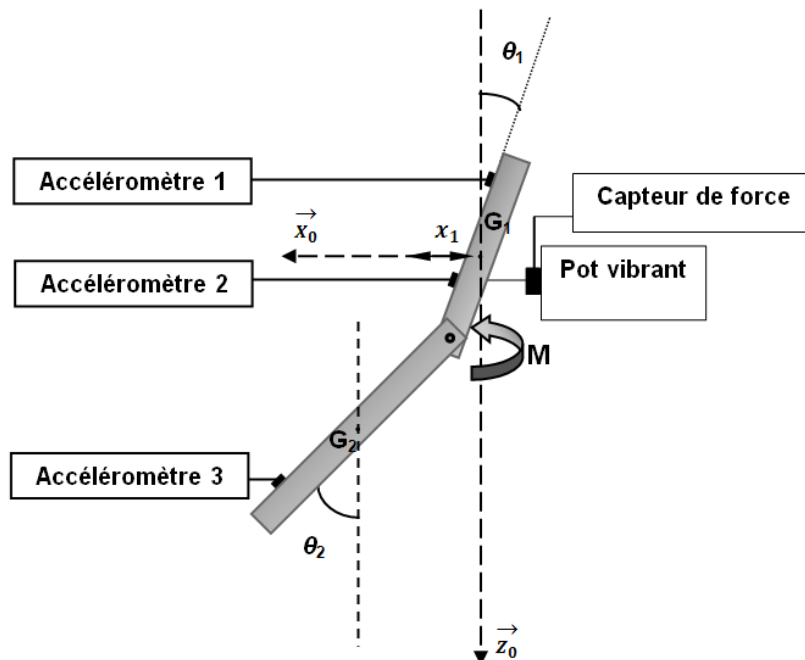


Figure 40. Montage Mouvement des lames.

Le moment d'inertie en G_1 est

$$I_1 = \frac{m_1}{12} L_1^2 \quad (2.2)$$

Le moment d'inertie en G_2 est

$$I_2 = \frac{m_2}{12} L_2^2 \quad (2.3)$$

On note V_{G_1} , V_{G_2} les vitesses respectives aux points G_1 et G_2 .

a. Energie cinétique

L'énergie cinétique de la structure s'écrit de la façon suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 V_{G_1}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{G_2}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (2.4)$$

La vitesse au centre de gravité G_1 est :

$$\overrightarrow{V_{G_1}} = \dot{x}_1 \overrightarrow{X_0} \quad (2.5)$$

$$V_{G_1}^2 = \dot{x}_1^2 \quad (2.6)$$

Le vecteur $\overrightarrow{G_1 G_2}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{G_1 G_2} = \left(x_1 + \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \sin \theta_1 + \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \sin \theta_2 \right) \overrightarrow{X_0} + \left(\left(\frac{l_1}{2} - e \right) \cos \theta_1 + \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \cos \theta_2 \right) \overrightarrow{Z_0} \quad (2.7)$$

La vitesse au centre de gravité G_2 est :

$$\overrightarrow{V_{G_2}} = \left(\dot{x}_1 + \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right) \overrightarrow{X_0} - \left(\left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \right) \overrightarrow{Z_0} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} V_{G_2}^2 = & \dot{x}_1^2 + \left(\frac{l_1}{2} - e \right)^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{l_2}{2} - e \right)^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{\theta}_1 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{x}_1 \cos \theta_1 + 2 \dot{\theta}_2 \dot{x}_1 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \cos \theta_2 \\ & + 2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'énergie cinétique s'exprime en fonction des paramètres de la structure de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_c = & \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \left[\frac{I_1}{2} + \frac{m_2}{2} \left(\frac{l_1}{2} - e \right)^2 \right] \dot{\theta}_1^2 + \left[\frac{I_2}{2} + \frac{m_2}{2} \left(\frac{l_2}{2} - e \right)^2 \right] \dot{\theta}_2^2 \\ & + m_2 \dot{x}_1 \dot{\theta}_1 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \cos \theta_1 + m_2 \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \cos \theta_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

b. Energie Potentielle

L'énergie potentielle est donnée par :

$$E_p = m_2 g \left[\left(\frac{l_2}{2} - e \right) (1 - \cos \theta_2) + \left(\frac{l_1}{2} - e \right) (1 - \cos \theta_1) \right] \quad (2.11)$$

Où g est l'accélération de la pesanteur $g = 9.80665 \text{ [m/s}^2\text{]}$

c. Les équations de Lagrange

Les équations de Lagrange sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial E_c}{\partial \theta_1} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_1} = M_F \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial E_c}{\partial \theta_2} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_2} = M \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial E_c}{\partial x_1} + \frac{\partial E_p}{\partial x_1} = F \end{cases} \quad (2.12)$$

Avec F : la force d'excitation.

M_F : le moment de la force d'excitation.

M : le moment de torsion au niveau de la liaison pivot (notre inconnue).

• Dérivation par rapport à θ_1

$$\begin{cases} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_1} = I_1 \dot{\theta}_1 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{x}_1 \cos \theta_1 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right)^2 \dot{\theta}_1 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_1} = I_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{x}_1 \cos \theta_1 - m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{x}_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right)^2 \ddot{\theta}_1 \\ \quad + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial E_c}{\partial \theta_1} = -m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{x}_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial E_p}{\partial \theta_1} = m_2 g \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \sin \theta_1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Le moment de la force d'excitation est exprimé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} M_F = & I_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{x}_1 \cos \theta_1 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right)^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

• Dérivation par rapport à θ_2

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_2} = I_2 \dot{\theta}_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \dot{x}_1 \cos \theta_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right)^2 \dot{\theta}_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_1 \cos (\theta_1 - \theta_2) \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_2} = I_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \ddot{x}_1 \cos \theta_2 - m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right)^2 \ddot{\theta}_2 \\
 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{\theta}_1 \cos (\theta_1 - \theta_2) - m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin (\theta_1 - \theta_2) \\
 \frac{\partial E_c}{\partial \theta_2} = -m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \sin (\theta_1 - \theta_2) \\
 \frac{\partial E_p}{\partial \theta_2} = m_2 g \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \sin \theta_2
 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Le moment de torsion au niveau de la jonction des deux lames est exprimé de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 M = I_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \ddot{x}_1 \cos \theta_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right)^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{\theta}_1 \cos (\theta_1 - \theta_2) \\
 - m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_1^2 \sin (\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \sin \theta_2
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

• **Dérivation par rapport à x_1**

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_1 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \\
 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1
 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

On retrouve l'expression de la force d'excitation

$$\begin{aligned}
 F = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \\
 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

On obtient alors le système des trois équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 M_F = I_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{x}_1 \cos \theta_1 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right)^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \\
 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_2^2 \sin (\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \sin \theta_1 \\
 M = I_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \ddot{x}_1 \cos \theta_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right)^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{\theta}_1 \cos (\theta_1 - \theta_2) \\
 - m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_1^2 \sin (\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \sin \theta_2 \\
 F = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_2 \left(\frac{l_2}{2} - e \right) \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - m_2 \left(\frac{l_1}{2} - e \right) \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1
 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

On pose

$$d_1 = d_c = \frac{l_1}{2} - e \text{ et } d_2 = \frac{l_2}{2} - e$$

On obtient donc ce système d'équations :

$$\begin{cases} M_F = (I_1 + m_2 d_1^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 d_1 \ddot{x}_1 \cos \theta_1 + m_2 d_1 d_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \quad + m_2 d_1 d_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g d_1 \sin \theta_1 \\ M = (I_2 + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_2 + m_2 d_2 \ddot{x}_1 \cos \theta_2 + m_2 d_1 d_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \quad - m_2 d_1 d_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g d_2 \sin \theta_2 \\ F = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 d_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + m_2 d_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - m_2 d_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (2.20)$$

2.3.1.2. Post traitement des accélérations :

Dans cette partie, on cherche à retrouver les expressions des accélérations tangentielles \ddot{x}_1 , \ddot{x}_2 et les accélérations angulaires $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ respectivement pour la lame 1 et la lame 2 à partir des signaux délivrés par les accéléromètres. On considère les hypothèses des petits angles $\sin \theta = \theta$ et $\cos \theta = 1$. La **Figure 41** présente un schéma des positions des accéléromètres sur la structure.

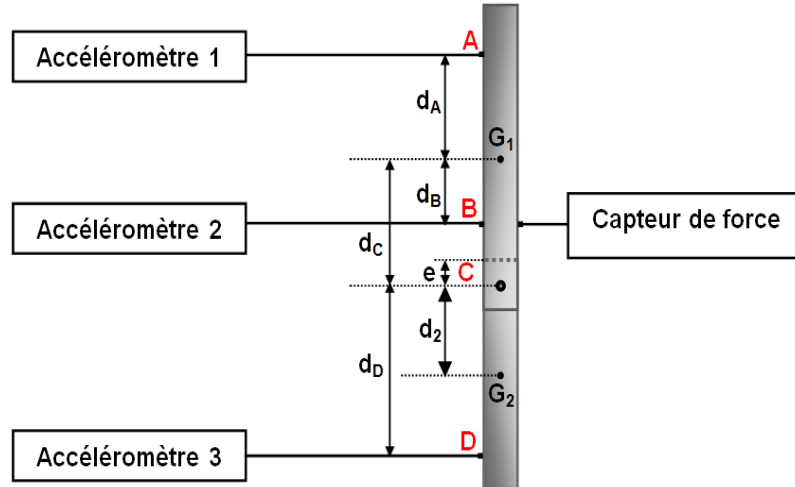


Figure 41. Schéma des positions des accéléromètres sur les deux lames.

On exprime les accélérations mesurées aux points A, B et D (γ_A , γ_B et γ_D) en fonction des paramètres de la structure.

Les accélérations γ_A et γ_B sont données par

$$\gamma_A = \ddot{x}_1 + d_A \ddot{\theta}_1 \quad (2.21)$$

$$\gamma_B = \ddot{x}_1 + d_B \ddot{\theta}_1 \quad (2.22)$$

On obtient l'accélération tangentielle et l'accélération angulaire au niveau du centre de gravité G_1 de la lame 1.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\gamma_A - \gamma_B}{d_A - d_B} \quad (2.23)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{2}(\gamma_A + \gamma_B - (d_A + d_B)\ddot{\theta}_1) \quad (2.24)$$

Le point C appartient à la jonction entre les deux lames, donc, l'accélération γ_C peut être exprimée de deux manières

$$\gamma_{c\in 1} = \ddot{x}_1 + d_C \ddot{\theta}_1 \quad (2.25)$$

$$\gamma_{c\in 2} = \ddot{x}_2 - \left(\frac{L_2}{2} - e\right) \ddot{\theta}_2 \quad (2.26)$$

L'accélération mesurée au point D est donnée par

$$\gamma_D = \ddot{x}_2 + (d_D - d_2) \ddot{\theta}_2 \quad (2.27)$$

Considéranr,

$$\gamma_{c\in 1} = \gamma_{c\in 2} \Rightarrow \ddot{x}_1 + d_C \ddot{\theta}_1 = \ddot{x}_2 - \left(\frac{L_2}{2} - e\right) \ddot{\theta}_2$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + d_C \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{L_2}{2} - e\right) \ddot{\theta}_2$$

alors,

$$\begin{cases} \gamma_D = \gamma_{c\in 1} + \left(\frac{L_2}{2} - e\right) \ddot{\theta}_2 + d_D \ddot{\theta}_2 \\ \gamma_{c\in 2} = \ddot{x}_2 - \left(\frac{L_2}{2} - e\right) \ddot{\theta}_2 \end{cases}$$

on obtient l'accélération tangentielle et l'accélération angulaire au niveau du centre de gravité G_2 de la lame 2.

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\gamma_D - \gamma_{c\in 1}}{\left(d_D + \left(\frac{L_2}{2} - e\right)\right)} \quad (2.28)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{2} \left(\gamma_{c\in 2} + \gamma_D - \left(d_D - \left(\frac{L_2}{2} - e \right) \right) \ddot{\theta}_2 \right) \quad (2.29)$$

Le tableau 1 représente un récapitulatif des accélérations tangentielles \ddot{x}_1 , \ddot{x}_2 et les accélérations angulaires $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ respectivement pour les centres de gravité de la lame 1 et la lame 2.

Accélérations angulaires	Accélérations tangentielles
$\ddot{\theta}_1 = \frac{\gamma_A - \gamma_B}{d_A - d_B}$	$\ddot{x}_1 = \frac{1}{2}(\gamma_A + \gamma_B - (d_A + d_B)\ddot{\theta}_1)$
$\ddot{\theta}_2 = \frac{\gamma_D - \gamma_{c\in 1}}{\left(d_D + \left(\frac{L_2}{2} - e\right)\right)}$	$\ddot{x}_2 = \frac{1}{2}\left(\gamma_{c\in 2} + \gamma_D - \left(d_D - \left(\frac{L_2}{2} - e\right)\right)\ddot{\theta}_2\right)$

Tableau 1. Récapitulatif des accélérations tangentielles et angulaires.

2.3.1.3. Vérifications des équations utilisées pour le post traitement :

Afin de vérifier les équations utilisées pour le post traitement, on étudie trois cas tests.

Il s'agit de vérifier :

- les équations de post traitement des accélérations,
- les expressions des moments et de l'effort obtenues par le système des équations de Lagrange,
- que le programme de post traitement utilisé est valable pour le cas particulier ou on considère que la structure est un corps rigide.

2.3.1.3.1. Cas de test 1 : Vérification des équations de post traitement des accélérations

Dans ce premier cas de test, on se propose de vérifier les relations entre les accélérations mesurées aux points A, B et D (γ_A, γ_B et γ_D) et les accélérations tangentielles \ddot{x}_1, \ddot{x}_2 et angulaires $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$.

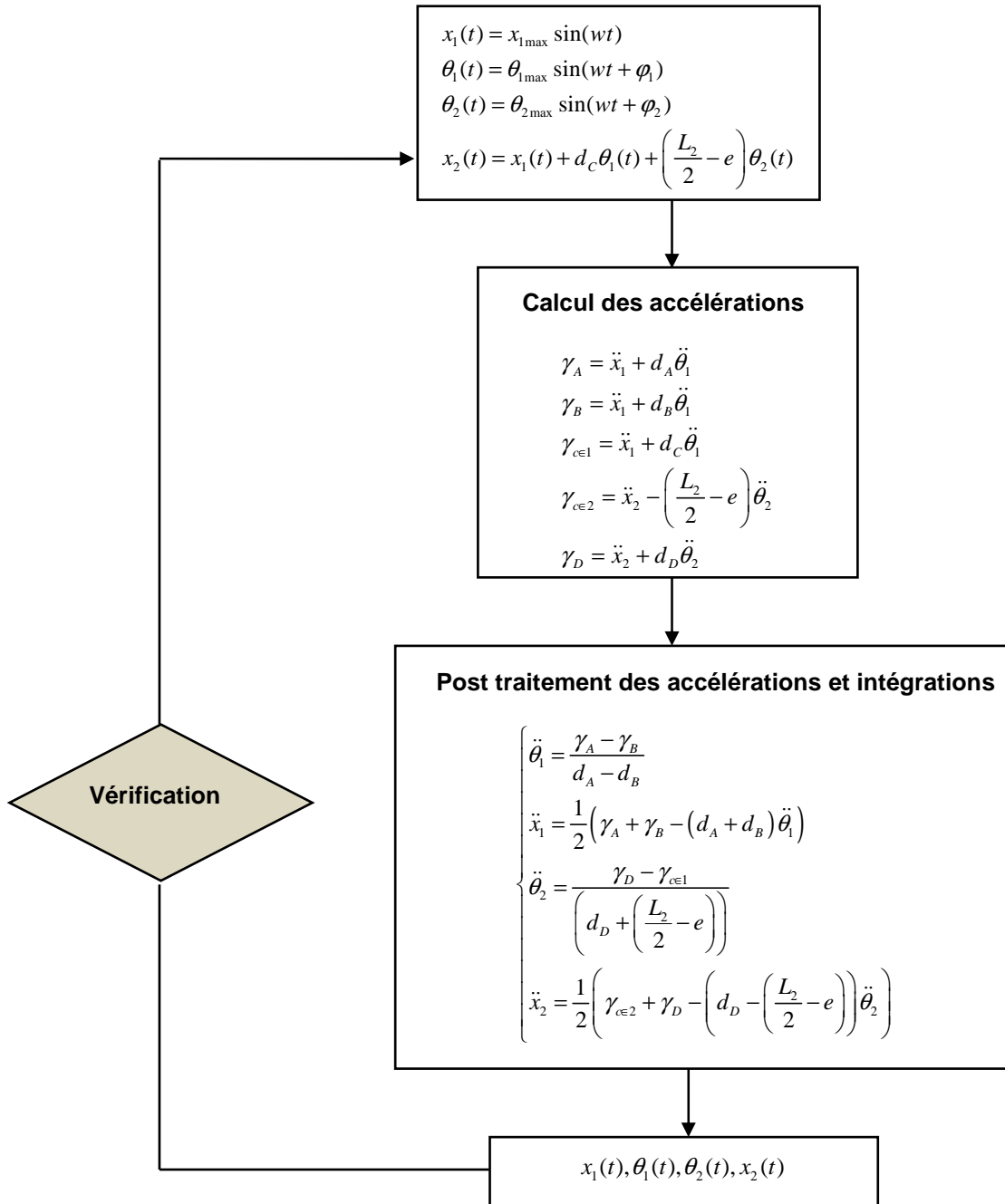


Figure 42. Schéma de la démarche de vérification du cas de test 1.

On suppose que les équations de mouvement de la structure $x_1(t), \theta_1(t), \theta_2(t), x_2(t)$ sont sinusoïdales, on calcule les accélérations aux points A, B, C et D puis on insère les valeurs des accélérations $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_{c\in 1}, \gamma_{c\in 2}$ et γ_D dans le programme de post traitement des accélérations et on vérifie ensuite si on retrouvera les mêmes équations de mouvement. Le diagramme de la **Figure 42** schématise la démarche de vérification.

En considérant :

$x_{1\max} = 2.610^{-6}m, \theta_{1\max} = 8.2610^{-5}rad, \theta_{2\max} = 5.4610^{-4}rad, x_{2\max} = 8.2510^{-5}m, \varphi_1 = 5^\circ$ et $\varphi_2 = 10^\circ$ La

Figure 43 représente une comparaison entre les équations de mouvement de la structure $x_1(t), \theta_1(t), \theta_2(t), x_2(t)$ imposées et retrouvées par le programme de post traitement. On remarque bien que les résultats retrouvés correspondent aux équations de mouvement imposées.

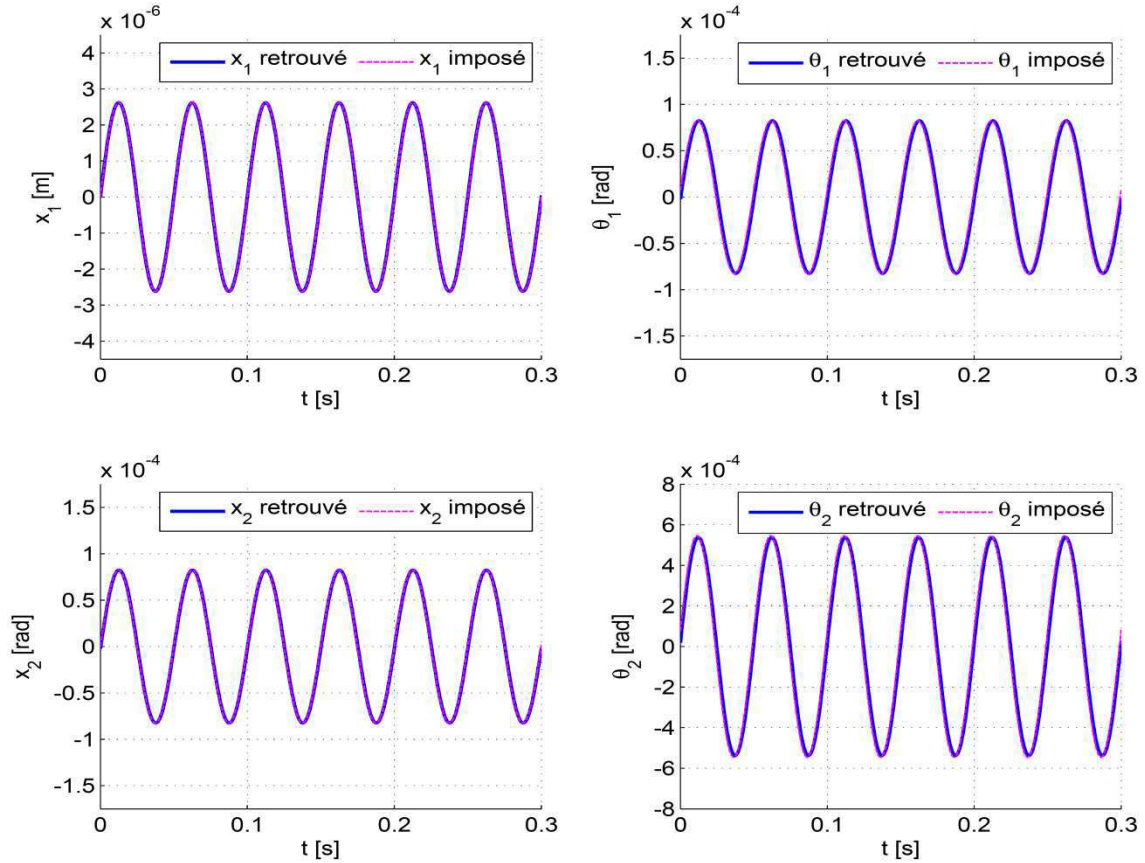


Figure 43. Vérification du cas de test 1.

2.3.1.3.2. Cas de test 2 : Vérification des expressions obtenues par le système des équations de Lagrange

On se propose de vérifier les expressions des moments et de la force M, M_F et F obtenues par le système des équations de Lagrange, voir **Figure 44**. On suppose que la force d'excitation est sinusoïdale d'amplitude F_0 et que le moment de torsion au niveau de la liaison pivot est nul.

$$\begin{cases} F(t) = F_0 \sin(\omega t) \\ M = 0 \\ M_F = d.F(t) \end{cases} \quad (2.30)$$

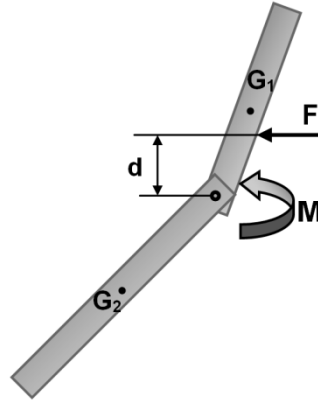


Figure 44. Force et moments appliqués à la structure.

On résoud numériquement le système des équations de Lagrange pour trouver les équations de mouvement de la structure $x_1(t), \theta_1(t), \theta_2(t)$ et $x_2(t)$, on calcule les accélérations aux points A, B, C et D puis on insère les valeurs des accélérations $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_{c\in 1}, \gamma_{c\in 2}$ et γ_D dans le programme de post traitement des moments et de l'effort et on vérifie ensuite si on retrouvera les mêmes valeurs de $F(t), M$ et M_F . Le diagramme de la **Figure 45** schématise la démarche de vérification.

On résoud numériquement le système des équations de Lagrange qui sont considérées comme équations différentielles ordinaires (ODE). Il s'agit de résoudre cette équation matricielle :

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \ddot{X} = [A]^{-1} B \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\text{Où } \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & m_2 d_1 \cos \theta_1 & m_2 d_2 \cos \theta_2 \\ m_2 d_2 \cos \theta_2 & m_2 d_1 d_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & (I_2 + m_2 d_2^2) \\ m_2 d_1 \cos \theta_1 & (I_1 + m_2 d_1^2) & m_2 d_1 d_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\text{et } B = \begin{bmatrix} m_2 d_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + m_2 d_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + F \\ m_2 d_1 d_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g d_2 \sin \theta_2 + M \\ -m_2 d_1 d_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g d_1 \sin \theta_1 + M_F \end{bmatrix}$$

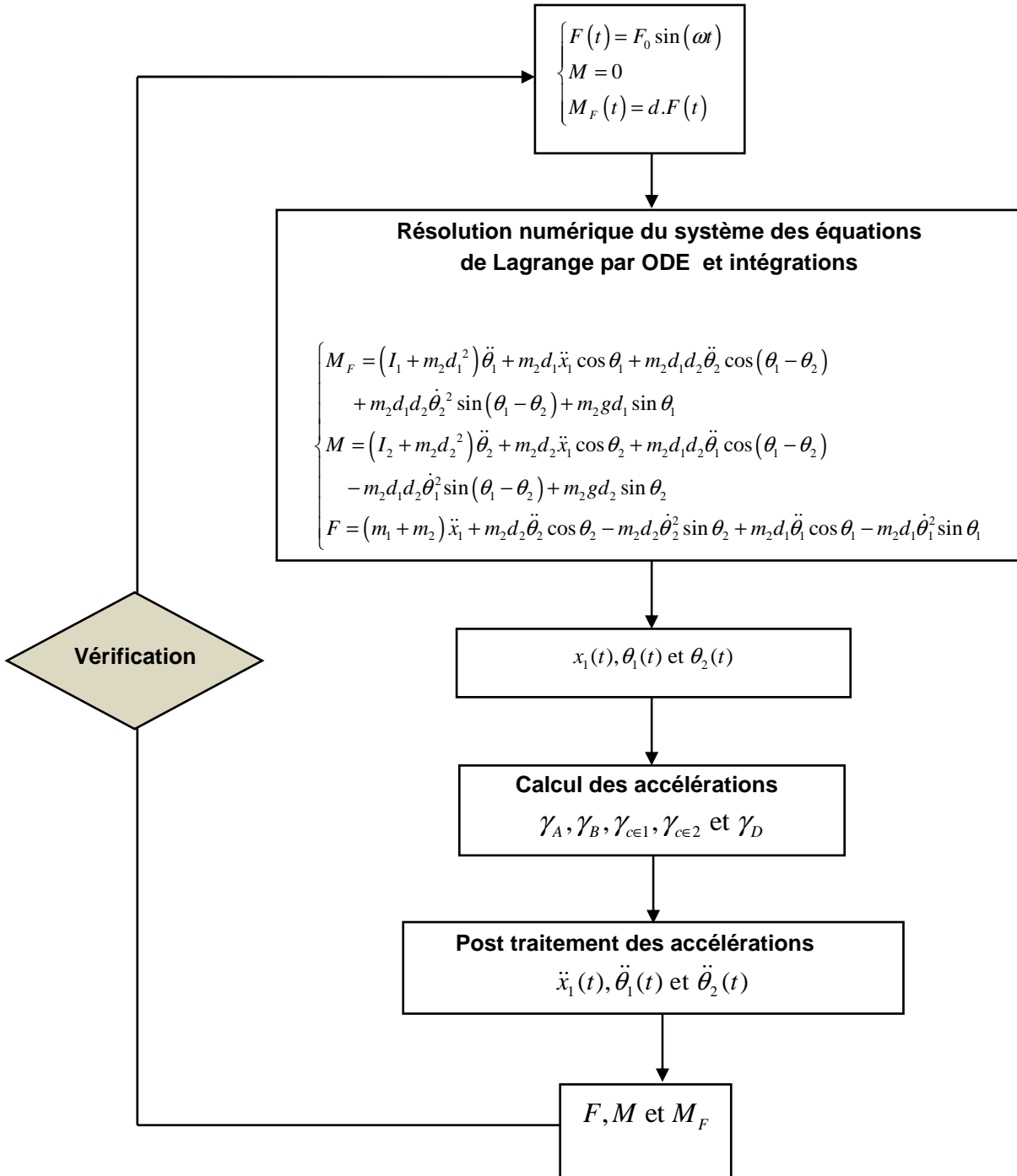


Figure 45. Schéma de la démarche de vérification du cas de test 2.

La **Figure 46** représente une comparaison entre les moments et la force F, M et M_F imposés et retrouvés par le programme de post traitement. On remarque bien que les résultats retrouvés correspondent aux moments et la force imposés.

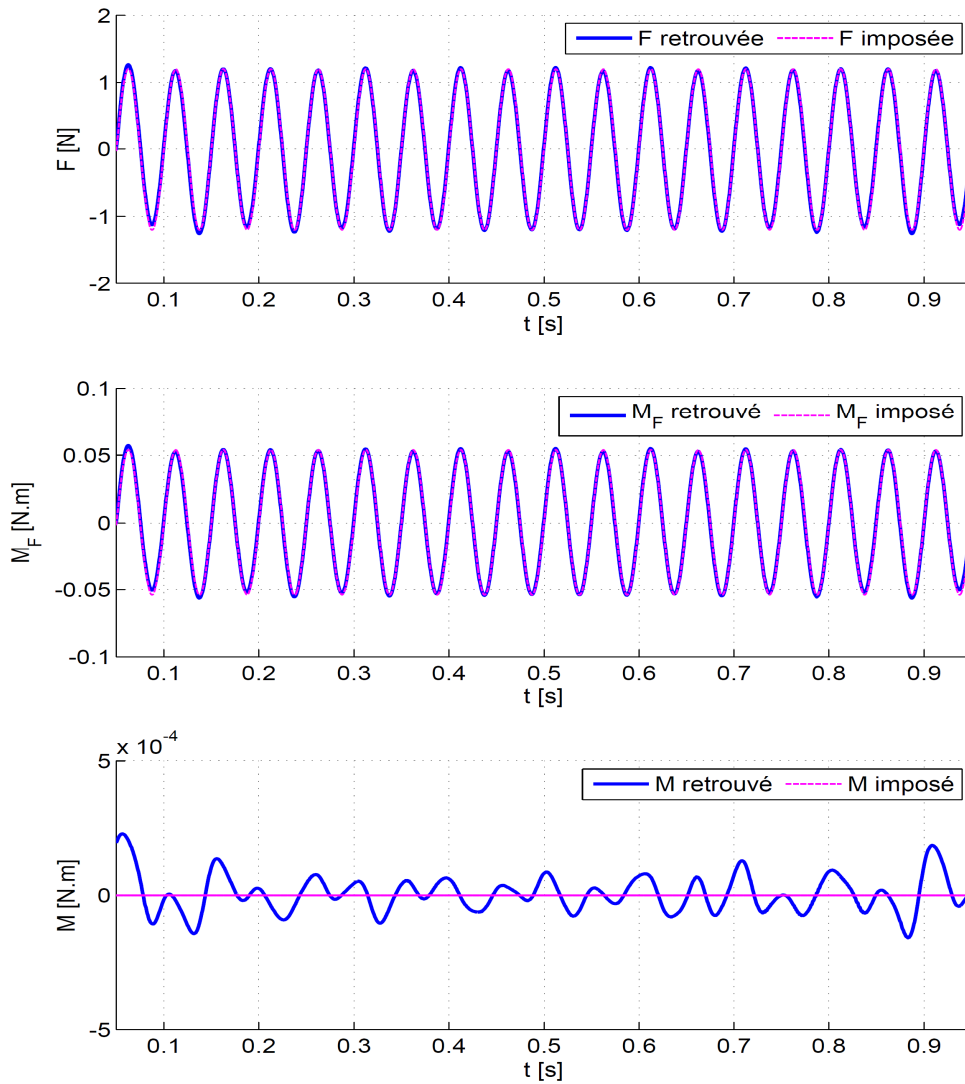


Figure 46. Vérification du cas de test 2.

2.3.1.3.3. Cas de test 3 : Vérification pour le cas d'un corps rigide

On se propose de vérifier que le programme de post traitement utilisé est valable pour le cas particulier où on considère que la structure est un corps rigide, voir **Figure 47**. Il s'agit de vérifier les relations entre les accélérations mesurées aux points A, B et D (γ_A, γ_B et γ_D) et l'accélération tangentielle \ddot{x} et angulaire $\ddot{\theta}$.

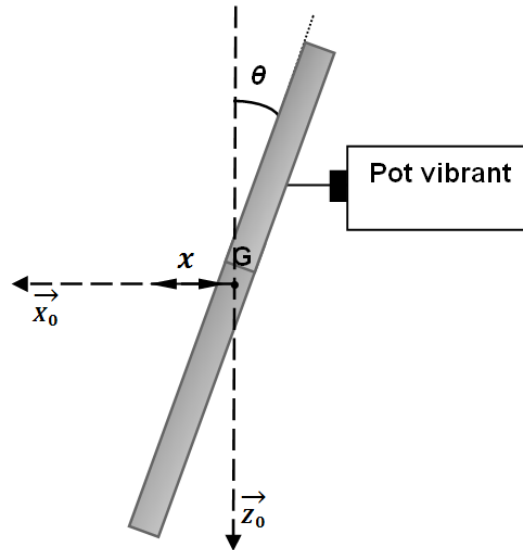


Figure 47. Montage Cas d'un corps rigide.

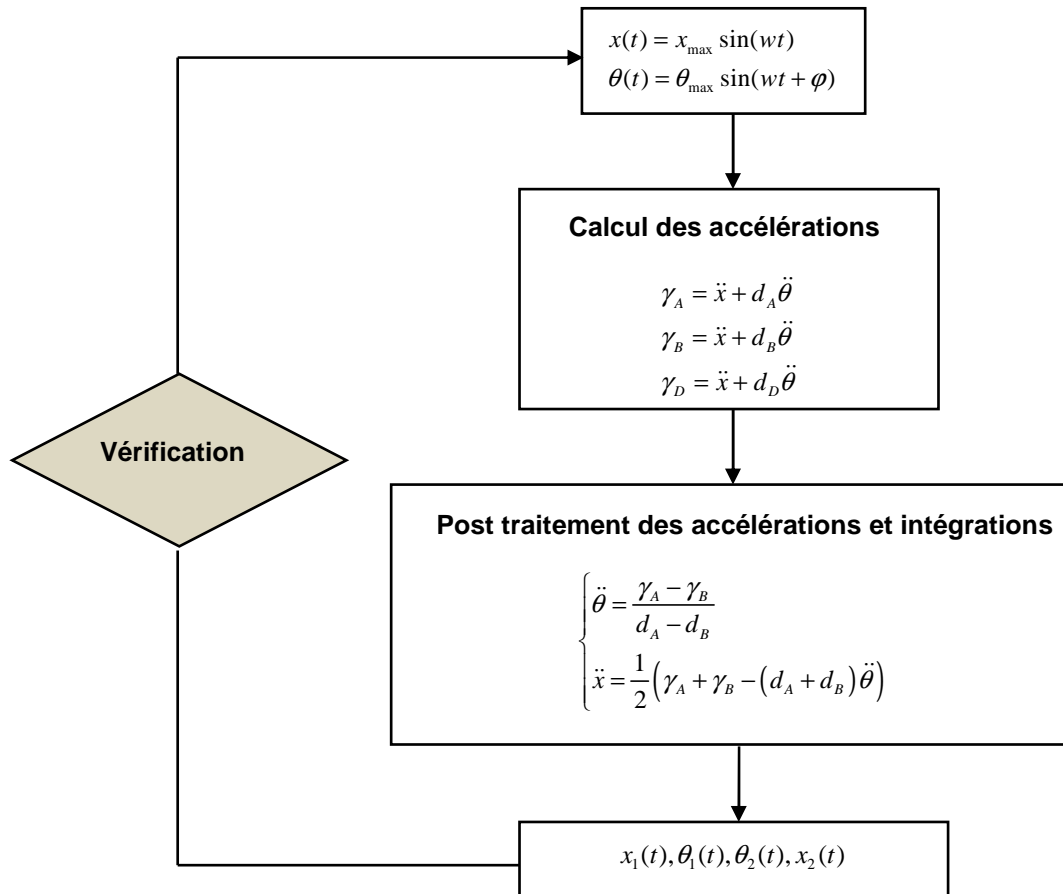


Figure 48. Schéma de la démarche de vérification du cas de test 3.

On suppose que les équations de mouvement de la structure $x(t)$ et $\theta(t)$ sont sinusoïdales, on calcule les accélérations aux points A, B et D puis on insère les valeurs des accélérations γ_A, γ_B et γ_D dans le programme de post traitement des accélérations et on vérifie ensuite si on

retrouvera les mêmes équations de mouvement. Le diagramme de la **Figure 48** schématise la démarche de vérification.

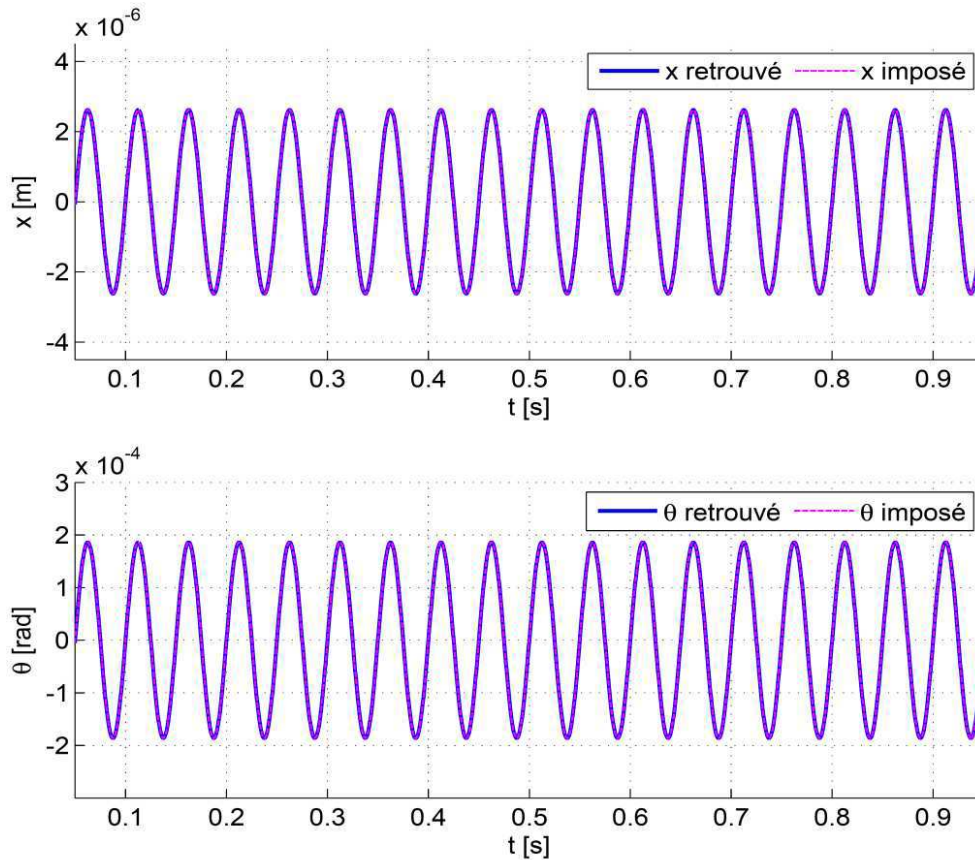


Figure 49. Vérification du cas de test 3.

En considérant $x_{\max} = 2.610^{-6}m$, $\theta_{\max} = 1.810^{-4}rad$ la **Figure 49** représente une comparaison entre les équations de mouvement de la structure $x(t)$ et $\theta(t)$ imposées et retrouvées par le programme de post traitement. On remarque bien que les résultats retrouvés correspondent aux équations de mouvement imposées.

Avant l'acquisition des mesures, le plot est « cyclé » jusqu'à ce que ses caractéristiques dynamiques soient identiques entre deux relevés consécutifs. En général, ces essais de répétabilité permettent de vérifier la convergence du comportement vers des caractéristiques stables.

Les fréquences d'excitation choisies sont $f = [30, 60, 75, 90]$ Hz. Ces essais sont réalisés pour différents niveaux de précharges statiques imposés $P = [45, 100, 150, 500]$ N. Les signaux de force et d'accélération sont transférés sur ordinateur via la carte d'acquisition GPIB avec une fréquence d'échantillonnage $f_{éch} = 2kHz$.

La raideur dynamique est obtenue, pour chaque fréquence d'excitation par la fonction de Réponse Moment de torsion/Déplacement angulaire.

2.3.2. Résultats obtenus des essais de torsion

On s'intéresse dans cette partie à caractériser le comportement dynamique de l'échantillon soumis à un chargement cyclique de torsion, en utilisant le diagramme moment-déplacement angulaire.

La **Figure 50** représente l'évolution du moment de torsion en fonction du déplacement angulaire à une fréquence de 60 Hz et pour une précharge normale de 150N.

Les courbes ellipsoïdales traduisent le comportement viscoélastique linéaire et le comportement de frottement est bien visible par les courbes de macro-glissement lors des derniers cycles pour les grands déplacements.

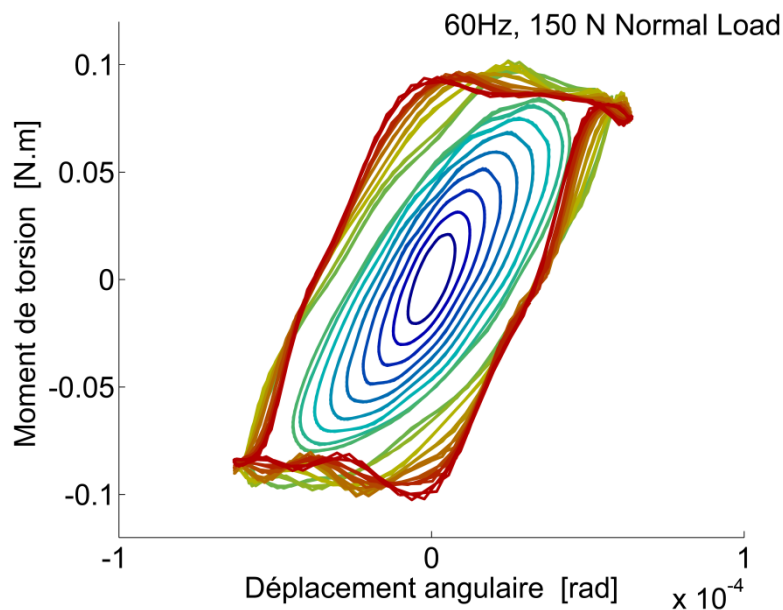


Figure 50. Evolution du moment en fonction du déplacement angulaire à une fréquence de 60 Hz et pour une précharge normale de 150N.

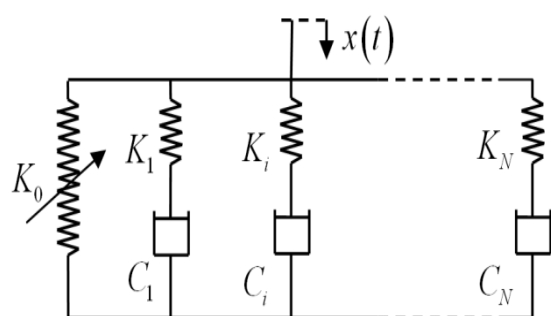
Conclusion

A travers les résultats des essais obtenus, les comportements non linéaires des matériaux viscoélastiques sont identifiés car leurs réponses dépendent de la précharge, de l'amplitude d'excitation et de la fréquence. En prenant ainsi compte de toutes ces propriétés mécaniques assez complexes, les chapitres qui suivent, présentent l'étude des modèles et concernent différentes techniques utilisées pour cette modélisation fondée sur une analyse des données expérimentales.

Chapitre 3 Modèle de Maxwell généralisé non linéaire pour décrire le comportement dynamique des composants viscoélastiques

Sommaire

Introduction	70
1. Description du modèle de Maxwell généralisé non linéaire	71
2. Techniques d'identification paramétrique	72
2.1. Identification des composantes linéaires K_i et C_i	75
2.2. Identification de K_0	76
3. Validation	81
Conclusion.....	84



Résumé

Dans ce chapitre on propose une nouvelle approche du modèle de Maxwell généralisé avec seulement 4 paramètres indépendants pour décrire le comportement dynamique du composant viscoélastique. Le modèle de Maxwell généralisé non linéaire (MMGNL) permet une description précise et une bonne connaissance du comportement dynamique des composants viscoélastiques en fonction de l'amplitude, la précharge et la fréquence. Une méthode d'identification paramétrique est proposée. Les différents paramètres linéaires et non linéaires du modèle choisi sont identifiés à partir d'essais de compression dynamique pour différentes fréquences d'excitation, amplitudes de déplacement et précharges statiques. Une comparaison entre les mesures et les simulations est effectuée et la validité du modèle proposé est discutée.

Introduction

Les composants viscoélastiques sont des éléments clé dans la conception du comportement dynamique des systèmes mécaniques, par conséquent, différents modèles décrivant le comportement viscoélastique ont été développés. Gaul et al. [77] ont présenté le modèle du module complexe constant qui est un modèle non-causal, ce modèle convient seulement dans le domaine fréquentiel et ce n'est pas un modèle pertinent puisque son module est constant. Le modèle de Maxwell représenté par Park [38] comme un ressort et un amortisseur monté en série et le modèle de Kevin Voigt qui se compose d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle, sont efficaces seulement sur une petite plage de fréquence. En fait, ils ne sont pas réalistes à basses et hautes fréquences, le module de la raideur dynamique est respectivement infiniment petit et élevé et la phase de la raideur dynamique du modèle de Kevin Voigt est linéairement dépendante de la fréquence. Le modèle de Zener, voir [78], sous-estime la raideur dynamique pour les basses fréquences et la surestime pour les hautes fréquences. Tout comme le modèle de Kevin Voigt, le modèle de Zener est incapable de capturer la dépendance de la phase en fréquence. Koeller [79] a utilisé le modèle de Maxwell généralisé qui se compose d'un ressort en parallèle avec des cellules de Maxwell pour décrire la dépendance de la raideur dynamique des composants visco-élastiques en fréquence. Toutefois, les caractéristiques dynamiques des composants viscoélastiques sont souvent très complexes, en raison que leur réponse dynamique ne dépend pas seulement de la fréquence mais aussi de plusieurs variables, telles que l'amplitude, la précharge et la température, qui influent le comportement dynamique et la non linéarité apparaît.

Par conséquent, différentes méthodes qui traitent la non linéarité du comportement dynamique des matériaux viscoélastiques ont été développés. Le modèle de Volterra, voir Schetzen [80], est utilisé dans les travaux de Saad [2] pour prédire la dépendance de l'amplitude du déplacement observée expérimentalement et de linéariser un modèle visco-hyperélastique en prenant en compte les effets de la précharge. Le comportement dynamique non linéaire des plaques multicouches préchargées incorporant un matériau visco-hyperélastique confiné entre les couches raides comme une couche d'amortissement est étudiée par Gacem [19]. Monsia [81] a proposé un modèle de Maxwell généralisé non linéaire constitué d'un ressort non linéaire monté en série avec un amortisseur non linéaire obéissant à une loi de puissance à paramètres constants, pour caractériser les propriétés dépendantes du temps d'une variété de matériaux viscoélastiques. Monsia [82] a développé un modèle mathématique non linéaire à

coefficients constants pour caractériser le comportement de déformation en fonction du temps d'une grande variété de matériaux soumis à des charges constantes.

Dans ce contexte, ce chapitre propose une nouvelle approche du modèle de Maxwell généralisé avec seulement 4 paramètres indépendants pour décrire le comportement dynamique du composant viscoélastique. Le modèle de Maxwell généralisé non linéaire (MMGNL) permet une description précise et une bonne connaissance du comportement dynamique des composants viscoélastiques en fonction de l'amplitude, de la précharge et de la fréquence. Nous proposons une méthode d'identification paramétrique où les différents paramètres linéaires et non linéaires du modèle choisi sont identifiés à partir d'essais de compression dynamique pour différentes fréquences d'excitation, d'amplitudes de déplacement et de précharges statiques. Une comparaison entre les mesures et les simulations est effectuée et la validité du modèle proposé est discutée.

1. Description du modèle de Maxwell généralisé non linéaire

Le modèle de Maxwell généralisé (MMG) est classiquement composé de cellules de Maxwell en parallèle. Une cellule de Maxwell est représentée par un ressort et à un amortisseur monté en série. Avec une telle définition ce modèle n'est pas capable de décrire le fluage réversible, voir Caputo et Mainardi [83]. Le MMG défini dans ce travail est le même modèle utilisé par Chevalier et Vinh [33] et la même que la représentation donnée par Maxwell Caputo et Mainardi [83], sans le premier amortisseur. Ce modèle permet de décrire fidèlement le comportement linéaire des composants élastomères. Toutefois, ce modèle linéaire ne permet pas de décrire certains phénomènes tels que :

- l'évolution de la raideur dynamique en fonction de la précharge,
- les non linéarités comportementales à faible amplitude d'excitation (effet Mullins et effet Payne [10], [84]),
- les non linéarités géométriques dans le cas de sollicitations en grands déplacements et grandes déformations.

Le Modèle de Maxwell Généralisé non linéaire (MMGNL) proposé dans cette partie prend en compte ces phénomènes non linéaires. C'est un Modèle de Maxwell Généralisé dont seule la première raideur K_0 (raideur statique) est supposée assumer l'ensemble des phénomènes non linéaires observés (voir **Figure 51**)

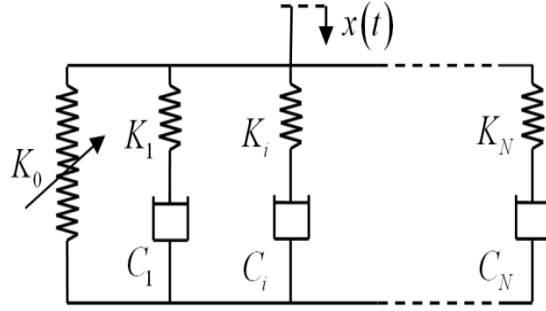


Figure 51. Le MMGNL proposé.

Pour déformer ce modèle rhéologique, il est nécessaire d'imposer un déplacement $x(t)$, la réponse $F(t)$ est la somme de la force du ressort non linéaire ajouté à la réaction de chaque cellule:

$$F(t) = F_0(t) + \sum_{i=1}^N F_i(t) \quad (3.1)$$

La formulation rhéologique de la raideur dynamique par MMG :

$$Z(\omega) = K_0 + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega K_i C_i}{K_i + j\omega C_i} \quad (3.2)$$

En réduisant l'équation (3.2) au même dénominateur et en groupant les monômes, on obtient la raideur dynamique de MMG linéaire exprimé comme le rapport de deux polynômes de même degré N .

Cette formulation de fonction de transfert est également utilisée en automatique, à savoir, Oustaloup [85] qui a introduit un modèle en utilisant la formulation pôles et des zéros (FPZ).

$$Z(\omega) = K_0 \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + (j\omega/\omega_{z,i})}{1 + (j\omega/\omega_{p,i})} \right) \quad (3.3)$$

$\omega_{z,i}$ et $\omega_{p,i}$ sont respectivement le zéro et le pôle du $i^{\text{ème}}$ couple pôle-zéro, $i \in [1..N]$. Cet opérateur appelé par Oustaloup [85] "régulateur CRONE" facilite considérablement le traitement et l'identification paramétrique du rapport de polynômes en l'exprimant sous forme de produit.

2. Techniques d'identification paramétrique

La prédiction du comportement dynamique est directement liée aux paramètres du modèle rhéologique. Dans ce paragraphe, la méthode d'identification paramétrique a été construite pour décrire avec précision le comportement et peut être exécutée automatiquement pour un grand nombre d'essais dynamiques.

La raideur statique K_0 est substituée par une fonction polynomiale de la forme (3.4) :

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^N \alpha_n x^n \quad (3.4)$$

Cette hypothèse se justifie par les propriétés particulières du MMG et les caractéristiques expérimentales souvent observées sur les élastomères. Parmi les propriétés remarquables du MMG, notons que :

- dans une formulation en pôles et zéros, les pôles du MMG sont indépendants de la raideur K_0 ,
- dans la même formulation en pôles et zéros, seuls les zéros dépendent de la raideur K_0 ,
- dans une formulation rhéologique à base de ressorts et d'amortisseurs, la partie imaginaire est indépendante de la raideur K_0 ,
- dans la même formulation rhéologique, tous les paramètres des cellules de Maxwell sont considérés indépendants de la raideur K_0 .

Ces propriétés sont à mettre en parallèle des phénomènes expérimentaux classiquement observés dans les études sur les élastomères (voir **Figure 33** - **Figure 37**, chapitre 2) :

- l'augmentation des amplitudes vibratoires se traduit par un assouplissement de la raideur dynamique, c'est l'effet Payne,
- la partie imaginaire est relativement indépendante de l'effet Payne,
- la phase de la raideur dynamique augmente avec l'amplitude d'excitation,
- la précharge a souvent des effets rigidifiants.

Les propriétés et les observations précédemment citées sont en adéquation. Le modèle proposé est construit sur l'hypothèse de l'existence d'une fonction du type polynomial (3.4) qui satisfait l'ensemble des observations expérimentales telles que le phénomène de rigidification du composant en fonction de la précharge (x_0) ou encore son assouplissement en fonction de l'amplitude d'excitation (x_d).

La fonction $F_0(x)$, qui est à identifier, est donc une solution qui minimise de façon satisfaisante l'écart entre le modèle et un ensemble d'essais dynamiques réalisés avec différentes amplitudes d'excitation x_d et différentes précharges x_0 .

Le processus d'identification se réalise en 3 étapes principales :

- identification d'un MMG linéaire de référence (K_0 moyen et fonction de la phase moyenne),

- construction de la surface de réponse de l'élasticité non linéaire $K_0 = f(x_0, x_d)$,
- identification de la fonctionnelle maîtresse $F_0(x)$ qui engendre l'ensemble des rigidités $K_0 = f(x_0, x_d)$.

Les relations (3.5) démontrés par Dion [86] et Renaud et al. [87] permettent le calcul des paramètres du MMGNL, à partir des paramètres de la FPZ (Formulation Pôles Zéros).

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i = \langle K_0 \rangle \prod_{h=1}^N \left(\frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left(\frac{\omega_{p,i} - \omega_{z,h}}{\omega_{p,i} + \omega_{p,h} (\delta_{ih} - 1)} \right) \\ C_i = \frac{K_i}{\omega_{p,i}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \quad (3.5)$$

Considérant N cellules de Maxwell, les coefficients K_i et C_i sont identifiés par les équations (3.5.a) et (3.5.b), après le calcul des pôles et des zéros. $\langle K_0 \rangle$ représente la valeur moyenne estimée de la raideur du ressort non linéaire. δ_{ih} est le symbole de Kronecker. En considérant $N = 5$ cellules de Maxwell, la **Figure 52** présente un diagramme qui résume les étapes d'identification des 13 paramètres du modèle (10 paramètres de viscoélasticité linéaire et 3 pour l'élasticité non linéaire). La méthode d'identification qui suit a pour but de réduire le nombre de paramètres à quatre paramètres indépendants et identifiables.

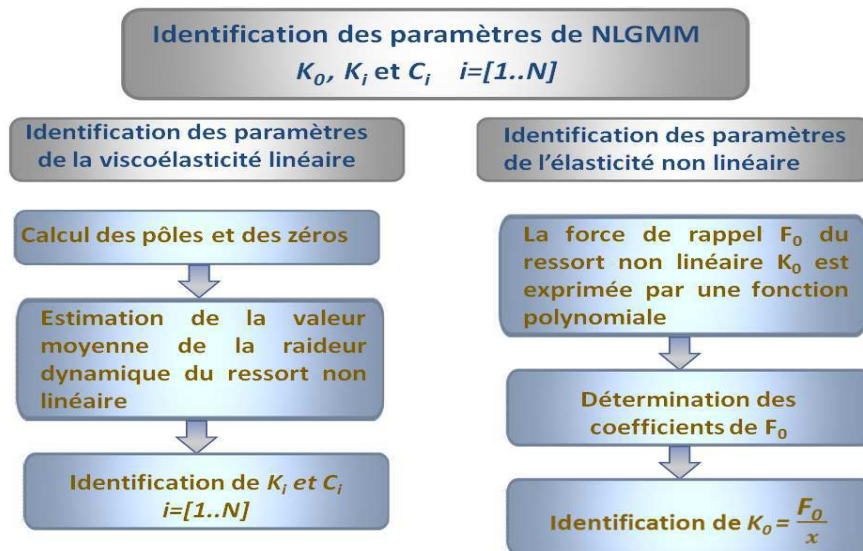


Figure 52. Diagramme résumant les étapes effectuées pour l'identification des paramètres de MMGNL.

2.1. Identification des composantes linéaires K_i et C_i

La méthode utilisée pour déterminer les pôles et les zéros est analogue à celle proposée par Oustaloup [85]. L'idée principale de cette approche conduit à considérer la phase égale à $\pi/2$ entre un zéro et un pôle du même ordre et nulle par ailleurs. La phase résultante sur le domaine de fréquence étudiée est alors estimée comme la moyenne des phases calculées entre le premier zéro et le dernier pôle. La phase constante est obtenue en considérant que le rapport de deux zéros consécutifs est constant et égal au rapport entre deux pôles consécutifs Dion [86]. Deux constantes, λ et θ sont alors définies :

$$\ln(\lambda) = \phi \frac{\ln(f_2) - \ln(f_1)}{\phi + \frac{\pi}{2}(N-1)} \quad (3.6)$$

Et

$$\ln(\theta) = \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \frac{\ln(f_2) - \ln(f_1)}{\phi + \frac{\pi}{2}(N-1)} \quad (3.7)$$

avec respectivement f_1 et f_2 les bornes inférieure et supérieure du domaine fréquentiel sur lequel la phase constante ϕ est identifiée et $\ln(y)$ le logarithme népérien de y . Le premier zéro coïncide alors avec f_1 et le dernier pôle avec f_2 . Le principe de cette démarche est illustrée par la **Figure 53**. L'identification du comportement viscoélastique à phase constante peut s'effectuer au moyen d'un rapport de deux fonctions polynomiales définies par des zéros et des pôles.

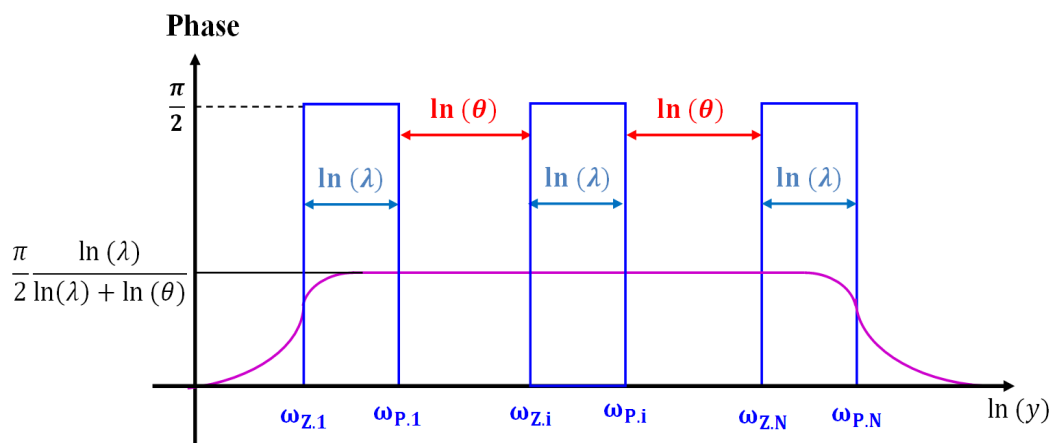


Figure 53. Approche de la phase constante.

Les zéros sont alors définis à partir du premier zéro :

$$\omega_{z,i+1} = \omega_{z,i} \lambda \theta \quad (3.8)$$

Les pôles sont calculés à partir du dernier pôle :

$$\omega_{p,i} = \frac{\omega_{p,i+1}}{\lambda \theta} \quad (3.9)$$

La relation entre les pôles et les zéros est donnée par :

$$\omega_{p,i} = \lambda \omega_{z,i} \quad (3.10)$$

La valeur moyenne de la raideur dynamique du ressort non linéaire est alors calculée par la relation suivante :

$$\langle K_0 \rangle = \int_{\omega} \left(\prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + (j\omega/\omega_{z,i})}{1 + (j\omega/\omega_{p,i})} \right) / K_m^*(\omega) \right) d\omega \quad (3.11)$$

où $K_m^*(\omega)$ sont les mesures de la raideur dynamique.

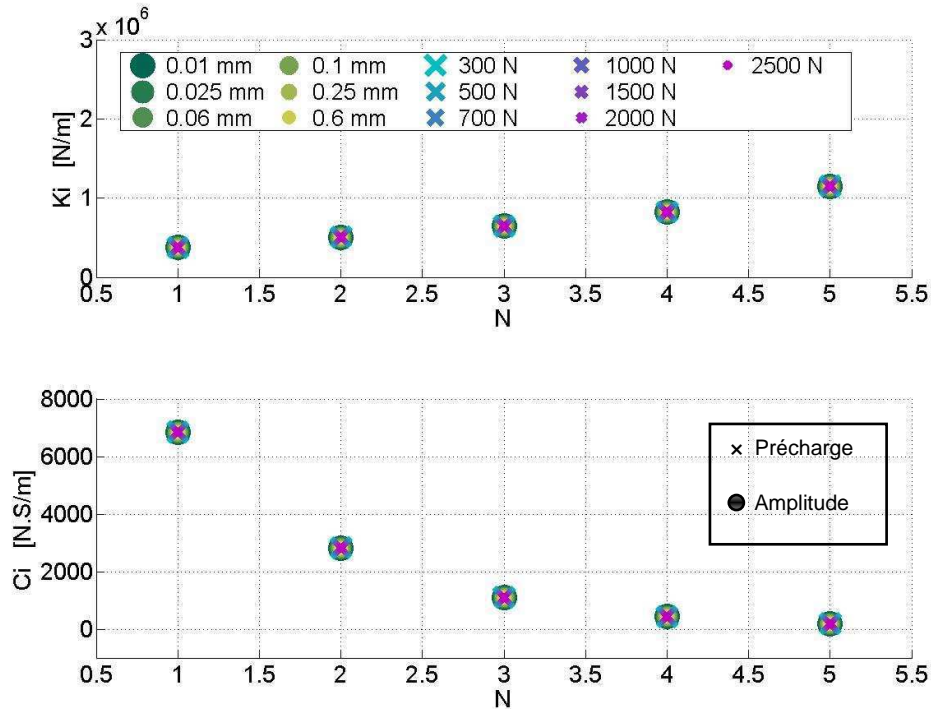


Figure 54. Les coefficients K_i et C_i identifiés.

Les coefficients linéaires de MMGNL (Amortisseurs C_i and Raideurs K_i), sont communs respectivement pour différentes amplitudes de déplacement et de précharges statiques avec $i=[1..N]$ et $N=5$ cellules, voir **Figure 54**.

2.2. Identification de K_0

La surface de réponse de l'élasticité non linéaire est obtenue par identification au sens des moindres carrés de la raideur K_0 pour chaque essai (**Figure 55**). Un essai, représenté par une

courbe en fonction de la fréquence et réalisé en balayage sinus avec une précharge x_0 et une amplitude x_d , donne un point de la surface représentée sur la **Figure 55**.

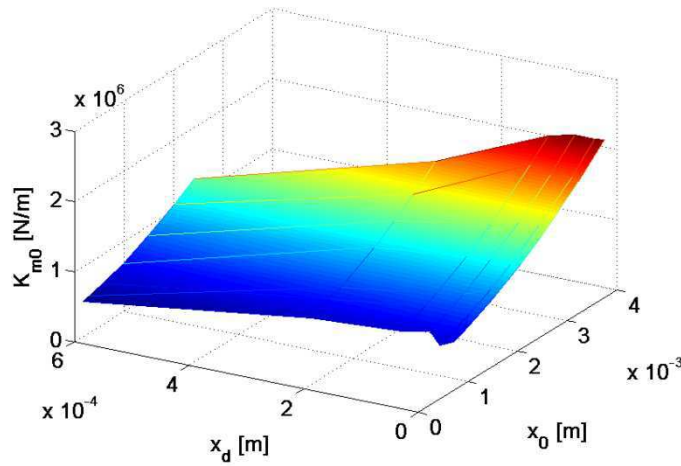


Figure 55. Raideur statique K_0 identifiée pour différentes précharges x_0 et différentes amplitudes d'excitation x_d .

L'expression générale retenue pour la fonctionnelle de raideur est un polynôme du 3ème degré sans terme constant ($F_0(0) = 0$) de la forme :

$$F_0(t) = \alpha x^3(t) + \beta x^2(t) + \gamma x(t) \quad (3.12)$$

avec α , β et γ : les invariants du modèle. Cette fonctionnelle permet de générer des raideurs qui dépendent de la précharge et de l'amplitude d'excitation. A titre d'exemple la dépendance à l'amplitude d'excitation est représentée en **Figure 56**. La raideur apparente (définie par l'équation (3.16)) met en évidence 2 valeurs différentes pour les amplitudes d'excitations x_1 et x_2 .

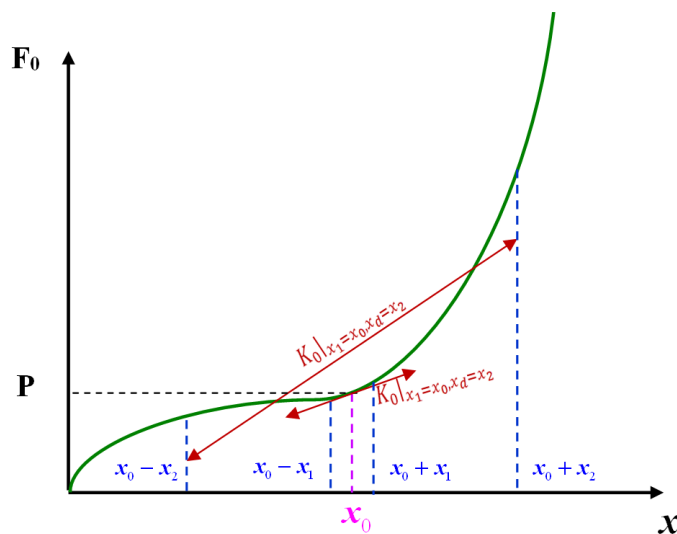


Figure 56. Schéma de principe d'une fonctionnelle qui conduit à des rigidités apparentes dépendantes de la précharge x_0 et de l'amplitude d'excitation x_d .

Lors des essais de compression dynamique d'un élastomère, l'excitation de l'échantillon est de la forme :

$$x(t) = x_0 + x_d \sin(\omega t) \quad (3.13)$$

avec

x_0 déplacement sous précharge statique
 x_d amplitude de déplacement

La force résultante s'exprime :

$$F_0(t) = x_d^3 \left(\alpha \left(\frac{3}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t) \right) \right) + x_d^2 (3\alpha x_0 + \beta) \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega t)}{2} \right) + x_d (3\alpha x_0^2 + 2\beta x_0 + \gamma) \sin(\omega t) + \alpha x_0^3 + \beta x_0^2 + \gamma x_0 \quad (3.14)$$

Dans le processus expérimental, le calcul de la raideur dynamique se limite au terme de la force qui est à la fréquence d'excitation (Equation (3.15)).

$$F_0(t) = \sin(\omega t) \left(\frac{3}{4} \alpha x_d^3 + (3\alpha x_0^2 + 2\beta x_0 + \gamma) x_d \right) \quad (3.15)$$

Cette démarche permet de proposer une forme linéarisée de la raideur (Equation 3.16).

$$K_0 = \frac{F_0(t)}{x_d \sin(\omega t)} = \frac{3}{4} \alpha x_d^2 + 3\alpha x_0^2 + 2\beta x_0 + \gamma \quad (3.16)$$

Pour un ensemble de N mesures K_{m0i} réalisées, l'identification des paramètres invariants α , β et γ peut être mise sous la forme de l'équation (3.17).

$$\begin{bmatrix} K_{m01} \\ \vdots \\ K_{m0i} \\ \vdots \\ K_{m0N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} x_{d1}^2 + 3x_{01}^2 & 2x_{01} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{3}{4} x_{di}^2 + 3x_{0i}^2 & 2x_{0i} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{3}{4} x_{dN}^2 + 3x_{0N}^2 & 2x_{0N} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

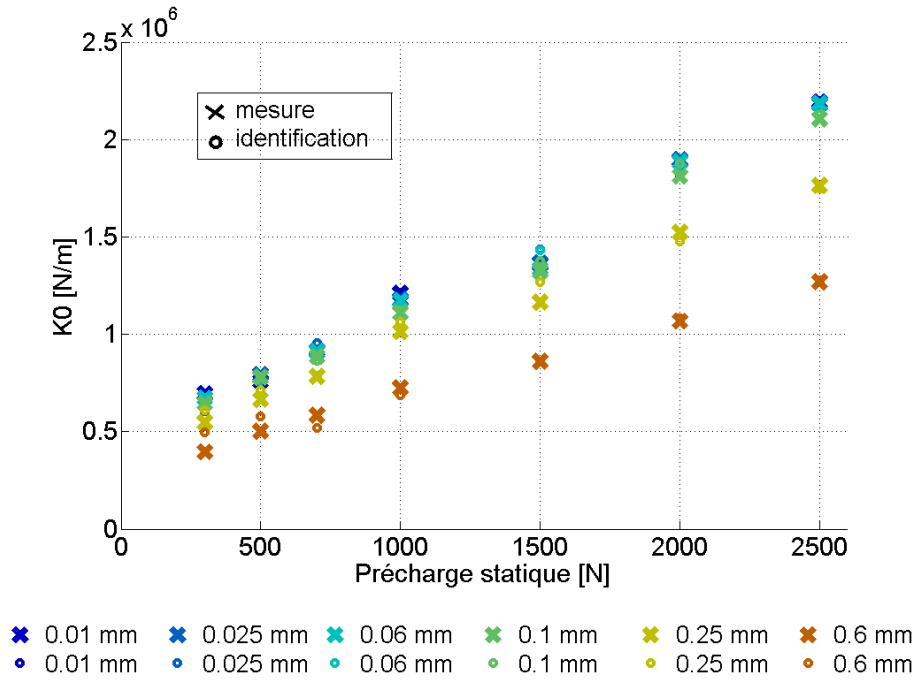


Figure 57. K_0 en fonction des précharges statiques-Identification pour différentes amplitudes.

K_0 est bien identifié pour $\alpha = 2.64 \cdot 10^{10}$, $\beta = 7.10 \cdot 10^7$ and $\gamma = 4.63 \cdot 10^5$. La **Figure 57** et la **Figure 59** montrent un bon accord entre les valeurs mesurées et simulées de K_0 pour différentes précharges statiques et diverses amplitudes.

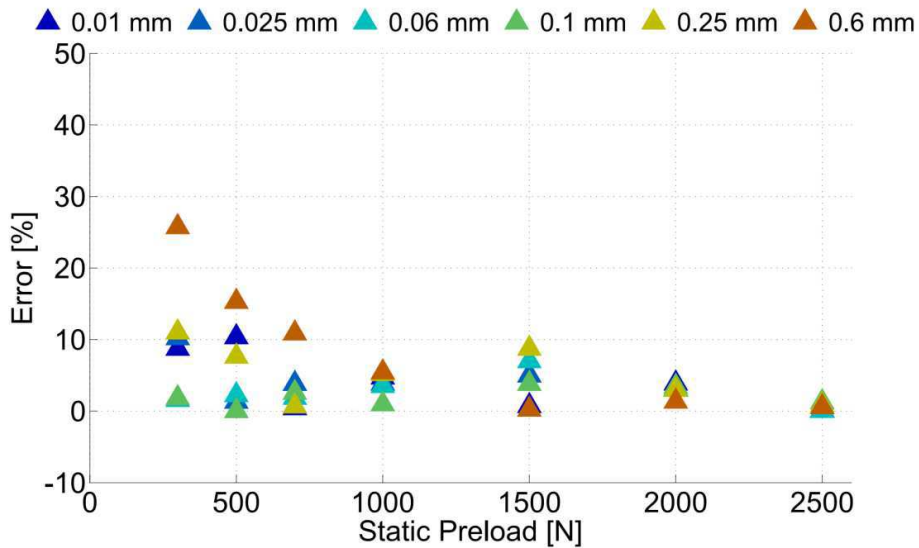


Figure 58. Erreur entre K_0 mesuré et simulé en fonction des précharges statiques pour différentes amplitudes.

Les erreurs relatives entre les valeurs mesurées et simulées de K_0 sont illustrées dans la **Figure 58** et **Figure 60**. Le coefficient de corrélation entre les mesures et les simulations est de 0,95.

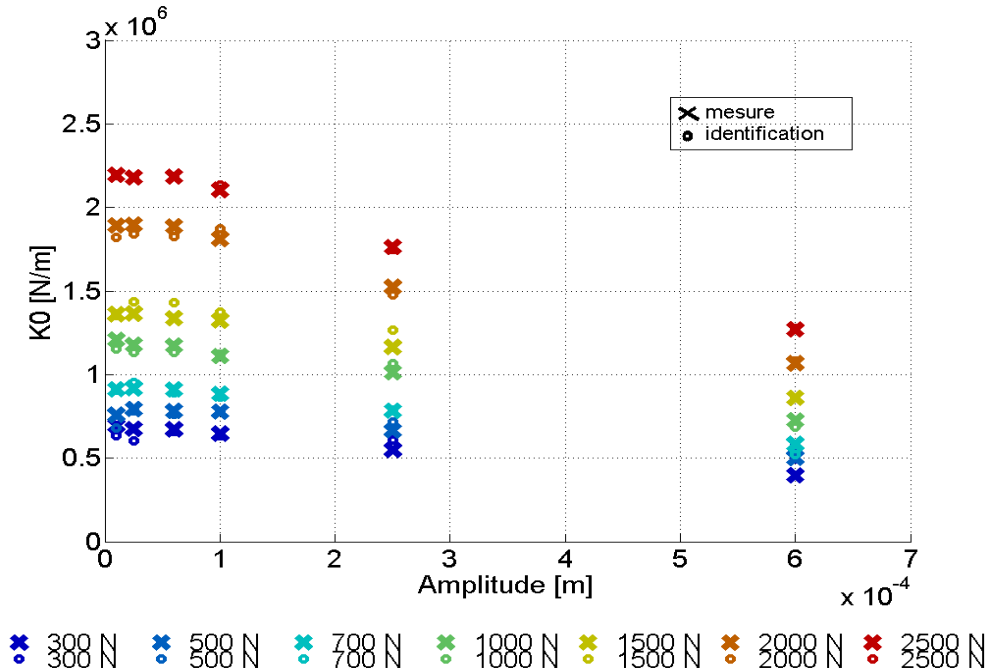


Figure 59. K_0 en fonction des amplitudes d'excitation-Identification pour les différentes précharges statiques.

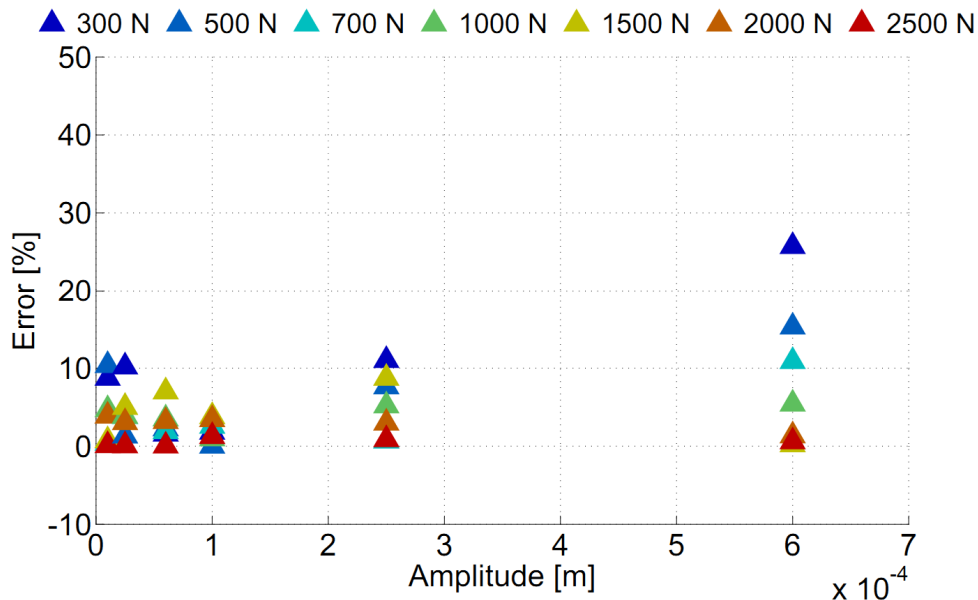


Figure 60. Erreur entre K_0 mesuré et simulé en fonction des amplitudes d'excitation pour les différentes précharges statiques.

La fonctionnelle $F_0(x)$ identifiée est représentée **Figure 61**. Elle est comparée à la raideur statique mesurée directement par un essai très lent (plusieurs minutes). Les deux courbes

montrent une même allure. La raideur identifiée reste cependant globalement supérieure à la raideur mesurée. L'identification du MMGNL est réalisée sur une bande de fréquences choisie en fonction des besoins de l'étude. Dans notre cas, les identifications ont porté sur une bande de fréquences comprises entre 4 Hz et 130 Hz ce qui a conduit à une estimation de K_0 supérieure à la raideur statique réelle de l'échantillon.

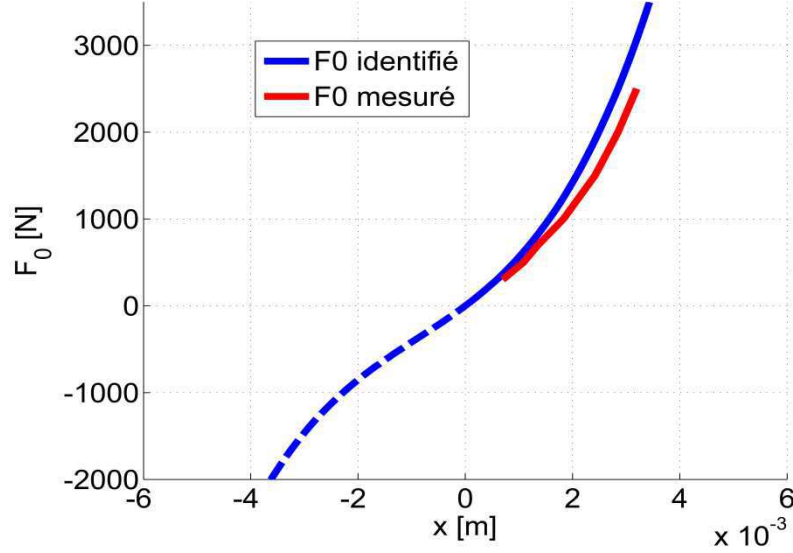


Figure 61. Fonction d'élasticité non linéaire établie par identification du MMGNL et par mesures quasi-statiques.

Le choix de cette méthode d'identification reste judicieux car il permet de réduire la taille du MMG en adaptant le nombre de cellules à la bande de fréquence étudiée. Il est souvent souhaitable de retenir au moins $D + 1$ cellules de Maxwell pour D décades, Dion [88].

3. Validation

On utilise une méthode basée sur les caractéristiques des asymptotes de la formulation pôle-zéro qui permet d'identifier les paramètres MMGNL (à la fois le module et la phase) avec plus d'efficacité que les méthodes classiques grâce à l'algorithme d'optimisation graphique basé sur les asymptotes, Dion [86] et Renaud [87], [89].

$$\begin{cases} |Z(\omega)| = K_0 \prod_{i=1}^N |Z(\omega)|_i = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{z,i})^2}}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{p,i})^2}} \\ \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\omega) = \sum_{i=1}^N \left(\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_{p,i}} \right) \right) \end{cases} \quad (3.18)$$

Une comparaison entre les raideurs expérimentales et celles obtenues par le MMGNL pour différentes précharges statiques de 300N à 2500N et différentes amplitudes d'excitation de $10\mu\text{m}$ à $600\mu\text{m}$ est effectuée.

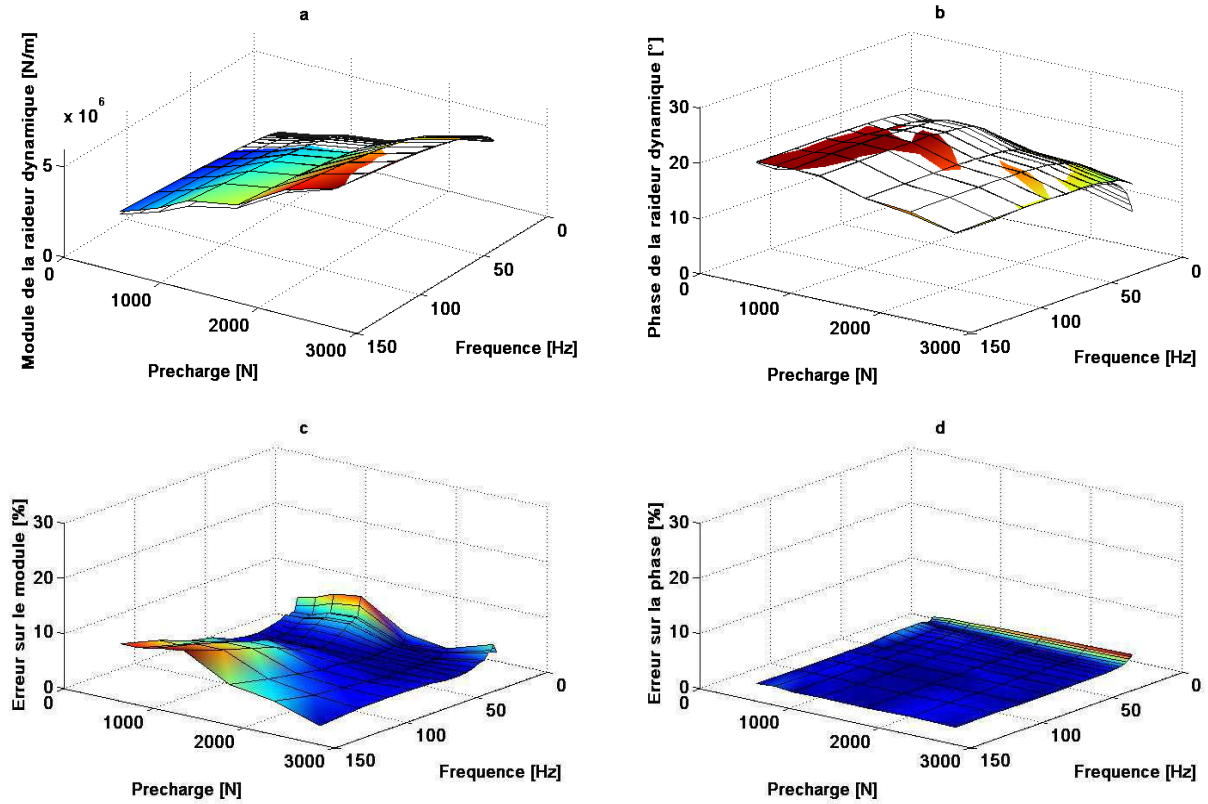


Figure 62. Graphe 3-D de la raideur dynamique en fonction de la fréquence et de la précharge pour $A = 25 \mu\text{m}$. (a) Module de la raideur dynamique. (b) Phase de la raideur dynamique. (c) Erreur relative du module de la raideur dynamique. (d) Erreur relative de la phase de la raideur dynamique.

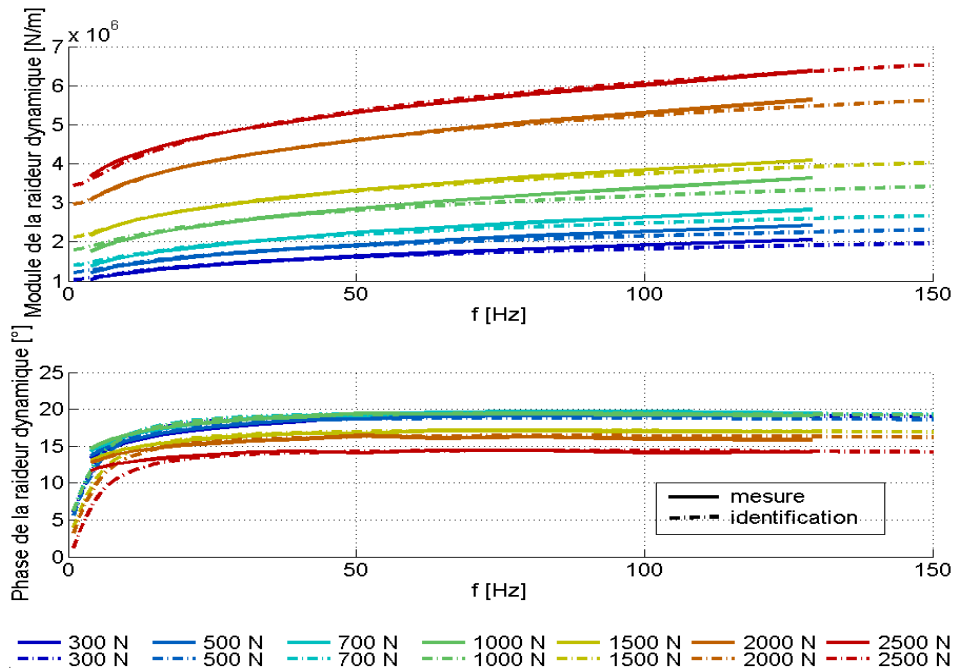


Figure 63. Graphe 2-D du module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence pour $A = 25\mu\text{m}$.

Le MMGNL est validé dans la **Figure 62** et la **Figure 63** et les figures A :1-6 de l'annexe. Les graphes 3-D dans les figures : **Figure 62**, A.1, A.3 et A.5: (a) et (b) donnent un aperçu sur le comportement mesuré représenté par la surface en couleur et le comportement identifié représenté par la surface transparente, les figures (c) et (d) montrent l'erreur relative entre les valeurs mesurées et identifiées. Les graphes 2-D montrent des informations plus détaillées sur l'évolution de la raideur (module et phase) en fonction de la fréquence.

Le comportement dynamique à faibles amplitudes est prédit avec plus de précision que le comportement à amplitudes plus élevées. L'amplitude de 0,6 mm est l'amplitude la plus difficile à modéliser à la fois pour le module et la phase de la raideur dynamique comme il est illustré dans les figures A.5 et A.6 et l'erreur relative moyenne pour le module est de 12,31% et 1,16% pour la phase pour $P = 2000\text{N}$.

Le comportement dynamique à faibles précharges est prédit avec plus de précision que celui pour des précharges plus élevées. Le module de la raideur dynamique est sous-estimé pour les basses fréquences et surestimé pour les hautes fréquences pour une précharge de 2500N comme illustré dans les figures A.2 et A.3 et l'erreur relative moyenne pour le module est de 6,66% et 0,67% pour la phase, pour $A = 250\mu\text{m}$. Le MMGNL décrit le comportement de l'échantillon en caoutchouc avec une précision satisfaisante. Les valeurs mesurées et identifiées montrent un bon accord. L'identification de la fonctionnelle de rigidité non linéaire

permet de décrire correctement l'ensemble des essais réalisés pour différentes précharges et différentes amplitudes d'excitation.

Conclusion

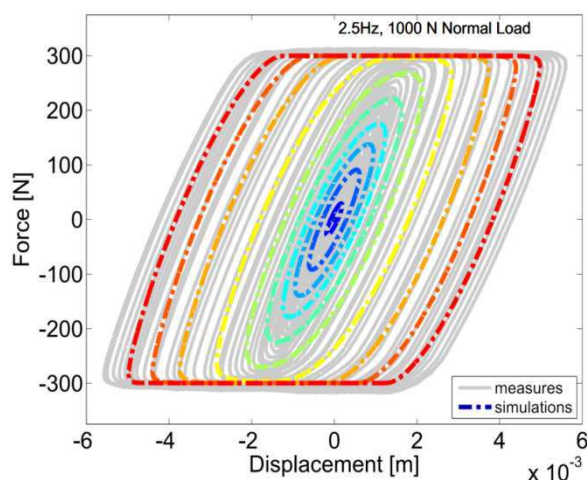
Le MMG permet de décrire fidèlement le comportement linéaire des composants élastomères. Toutefois, ce modèle linéaire ne permet pas de décrire certains phénomènes tels que l'évolution de la raideur dynamique en fonction de la précharge, les non linéarités comportementales à faible amplitude d'excitation et les non linéarités géométriques dans le cas de sollicitations en grands déplacements et grandes déformations.

Dans ce travail, on propose le MMGNL qui prend en compte ces phénomènes non linéaires. Il possède $2N + 3$ paramètres avec N le nombre de cellules de Maxwell et peut être identifié seulement avec quatre paramètres indépendants. Il est adapté aux techniques de linéarisation statique des excitations transitoires telles que les chocs et les excitations aléatoires stationnaires et non stationnaires.

Chapitre 4 Modèle visco-tribologique pour décrire le comportement de frottement hystérétique des liaisons viscoélastiques

Sommaire

Introduction	86
1. Description du modèle	87
1.1. Modèle de Dahl	87
1.2. Modèle de Maxwell généralisé :.....	90
1.3. Modèle visco-tribologique	91
2. Techniques d'identification paramétriques	93
2.1. Identification des paramètres de frottement.....	95
2.2. Identification des paramètres viscoélastiques	96
2.2.1. Identification de K_0	96
2.2.2. Identification de K_i et C_i	97
3. Validation	98
3.1. Raideur dynamique	98
3.2. Boucles d'hystérésis	99
3.3. Energie dissipée.....	100
Conclusion	102



Résumé

Dans ce chapitre, un nouveau modèle visco-tribologique a été développé en couplant les propriétés rhéologiques linéaires du modèle de Maxwell généralisé et le modèle de frottement de Dahl. Une méthode d'identification paramétrique est proposée. Les paramètres du modèle sont identifiés à partir des essais de cisaillement et torsion dynamiques pour différentes fréquences d'excitation. Une comparaison entre les mesures et les simulations est effectuée et la validité du modèle proposé est discutée.

Introduction

L'amortissement des vibrations est un phénomène pour lequel l'énergie mécanique dans les systèmes dynamiques est dissipée et convertie en énergie thermique. Il existe deux principaux mécanismes d'amortissement des vibrations:

- Amortissement interne : La dissipation d'énergie est due à la structure moléculaire de la matière;
- Amortissement d'interfaces - au niveau des articulations : la dissipation de l'énergie est au niveau des interfaces des structures qui subissent un mouvement relatif lors de la vibration.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux deux phénomènes : amortissement interne et aux interfaces des liaisons viscoélastiques.

De nombreuses publications traitent la tribologie des matériaux, notamment, Mychkine et Kovalev [90], Brostow et al. [91], Marvalova et al. [92], Smith [93], Skouvaklis et al. [94], présentent une étude sur le caoutchouc glissant sur la glace, examinant sur la vitesse, la charge, la température et les propriétés du caoutchouc. Le modèle de Dahl est utilisé dans cette étude pour caractériser le frottement des articulations viscoélastiques.

Il est également important de noter que le phénomène d'hystérésis été considéré par de nombreux auteurs dans le but de trouver un modèle capable de modéliser le déchargement et le rechargement des courbes représentant des boucles d'hystérésis caractérisant le comportement au niveau des liaisons viscoélastiques. Cantournet et Desmorat [8] ont travaillé sur l'identification du comportement non linéaire en grandes déformations et présenté un modèle thermodynamique de frottement interne et de l'hystérésis des élastomères basé sur l'étude de la structure physique des élastomères chargés qui permettent l'identification des variables d'état nécessaires à la modélisation du comportement des matériaux élastomères. Al Majid et Dufour [95] offrent une généralisation du modèle de Dahl, qui est ensuite appliquée aux composantes mécaniques possédant un comportement non-linéaire en particulier dans les assemblages mécaniques et qui lient rigidement deux pièces métalliques qui dissipent l'énergie par macro-glissement aux interfaces. Le modèle Iwan qui est un modèle à variable interne, introduit par Segalman et Starr [96], présente une formulation d'éléments idéalisés "éléments de Jenkins» qui sont capables de reproduire d'importantes propriétés qualitatives au niveau des liaisons en utilisant seulement un nombre réduit de paramètres, mais ce modèle reflète mal la viscoélasticité, Dion [97].

Dans ce chapitre, un nouveau modèle visco-tribologique a été développé en couplant les propriétés rhéologiques linéaires du modèle de Maxwell généralisé et le modèle de

frottement de Dahl. Une méthode d'identification paramétrique est proposée. Les paramètres du modèle sont identifiés à partir des essais de cisaillement et torsion dynamiques pour différentes fréquences d'excitation. Une comparaison entre les mesures et les simulations est effectuée et la validité du modèle proposé est discutée.

1. Description du modèle

1.1. Modèle de Dahl

L'objectif commun aux modèles dynamiques est de représenter les phénomènes physiques les plus importants dans les frottements notamment le comportement élastique des liaisons de contact. Une idée naturelle, pour cette représentation, est de modéliser la liaison par un ressort, de raideur σ , dont l'une des extrémités est fixée au corps mobile, et l'autre libre de se déplacer sur le corps fixe (**Figure 64**). La force de frottement créée est la force de rappel de ce ressort, dont l'allongement $z(t)$ est supposé ne pas pouvoir excéder z_{\max} .

$$F_f(t) = \sigma z(t) \quad (4.1)$$

Le déplacement relatif x est décomposé en deux composantes élastiques : z (déformation des liaisons au niveau des aspérités) et plastique w (par opposition à élastique, déplacement lors du glissement) :

$$x = z + w \quad (4.2)$$

On distingue :

- La phase de collage (« stick ») pendant laquelle B reste fixe et A peut se déplacer, mais on a toujours $|z(t)| < z_{\max}$

$$\text{Stick} \quad \begin{cases} x(t) = z(t) + w_0 \\ w = Cte = w_0 \\ \dot{w} = 0 \end{cases}$$

- La phase de glissement (« slip ») pendant laquelle A et B sont en mouvement en gardant l'étirement maximum du ressort

$$\text{Slip} \quad \begin{cases} x(t) = z_{\max} + w(t) \\ z = z_{\max} = z_{ba} \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

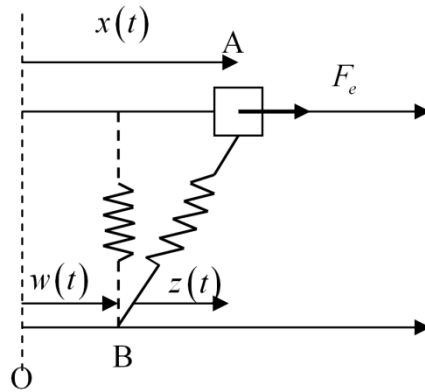


Figure 64. Modélisation du frottement dynamique.

Partant d'une position d'équilibre $x(0) = 0$, $w(0) = 0$:

- Lorsqu'une force extérieure $F_e < F_{ba} = \sigma z_{\max}$ est appliquée au corps mobile, le point A va entrer en oscillation autour de B, d'abscisse constante $w(0) = 0$;
- Lorsque la force appliquée est supérieure $F_{ba} = \sigma z_{\max}$, A se déplace, le ressort est étiré jusqu'à une élongation maximale $z_{\max} = z_{ba}$, et le point B se met en mouvement à la même vitesse que A. On peut noter que le retour à la phase collage a lieu dès que la force appliquée redevient inférieure à F_{ba} .

On peut alors représenter le déplacement z en fonction de x :

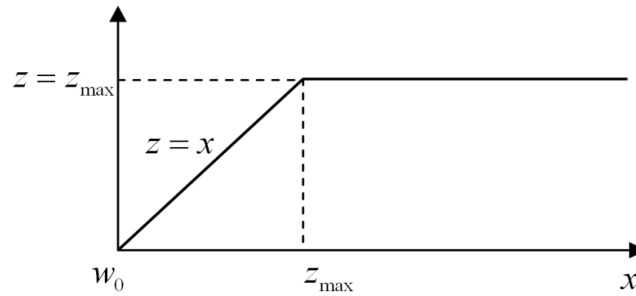


Figure 65. Prédéplacement en fonction du déplacement.

La plupart des modèles dynamiques de frottement sont construits avec des variables d'état internes du type cinématique, mais ces variables ne peuvent pas être identifiées comme des déplacements réels physiques Dahl [62], [98], Canudas de Wit et al [67], Chevallier [99] et Popov et Geike [100]. Le premier modèle de ce type a été proposé par Dahl [98]. Le modèle dynamique de Dahl s'appuie sur le principe de caractérisation du comportement élastique en cherchant à en pallier les inconvénients :

- présence d'une discontinuité lors de la transition entre phases de collage et de glissement ;

- lorsque le glissement s'arrête, la modélisation de la liaison par un ressort pur fait osciller le corps mobile d'abscisse x autour d'un point B d'abscisse $w = Cte$.

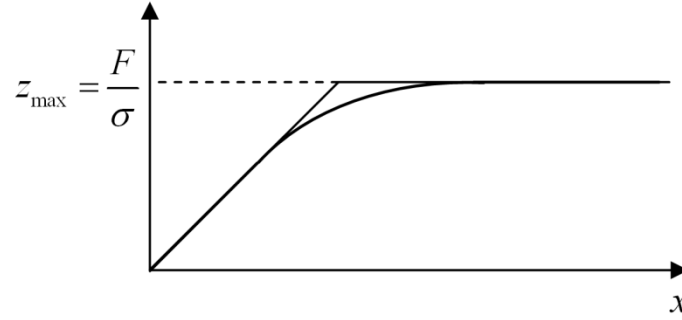


Figure 66. $z(x)$ d'après le modèle de Dahl.

Le modèle de Dahl modélise les phénomènes de frottement sec en adaptant les principes généraux présentés plus avant de sorte que la caractéristique $z(x)$ de la **Figure 65** ne présente plus de discontinuité et ait l'allure donnée **Figure 66**.

Pour ce faire, Dahl [98] propose de modéliser le frottement par la relation suivante, dans le cas d'un déplacement linéaire:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx} = \sigma \left| 1 - \frac{F}{F_{\max}} \operatorname{sign}(\dot{x}) \right|^{\alpha} \operatorname{sign} \left(1 - \frac{F}{F_{\max}} \operatorname{sign}(\dot{x}) \right) \\ F(t) = \sigma z(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

Dans le cas d'un déplacement angulaire :

$$\begin{cases} \frac{dM}{d\theta} = \sigma \left| 1 - \frac{M}{M_{\max}} \operatorname{sign}(\dot{\theta}) \right|^{\alpha} \operatorname{sign} \left(1 - \frac{M}{M_{\max}} \operatorname{sign}(\dot{\theta}) \right) \\ M(t) = \sigma z(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

Où σ est homogène à une raideur ($\sigma > 0$), F_{\max} la force de Coulomb (Force de frottement maximale atteinte), M_{\max} le moment de torsion maximale atteinte, α est un paramètre de réglage de l'allure de la boucle d'hystérésis, $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, x, θ sont respectivement les déplacements linéaire et angulaire relatifs et $\dot{x}, \dot{\theta}$ sont respectivement les vitesses linéaire et angulaire relatives entre les deux surfaces.

Il est possible de réécrire l'équation différentielle du modèle vis-à-vis de la variable temporelle, dans le cas d'un déplacement linéaire :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (4.5)$$

Dans le cas d'un déplacement angulaire :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (4.6)$$

Le système des équations devient ainsi, dans le cas d'un déplacement linéaire :

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx} = \sigma \left| 1 - \frac{F}{F_{\max}} \operatorname{sign}(\dot{x}) \right|^\alpha \operatorname{sign} \left(1 - \frac{F}{F_{\max}} \operatorname{sign}(\dot{x}) \right) \\ F(t) = \sigma z(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

Dans le cas d'un déplacement angulaire :

$$\begin{cases} \frac{dM}{d\theta} = \sigma \left| 1 - \frac{M}{M_{\max}} \operatorname{sign}(\dot{\theta}) \right|^\alpha \operatorname{sign} \left(1 - \frac{M}{M_{\max}} \operatorname{sign}(\dot{\theta}) \right) \\ M(t) = \sigma z(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

La **Figure 67** représente le comportement de F en fonction de x le déplacement linéaire pour $\alpha = 1$ au régime établi quand le système est soumis à des mouvements périodiques. F croît asymptotiquement vers F_{\max} pour $\dot{x} > 0$ et vers $-F_{\max}$ pour $\dot{x} < 0$. Les courbes montantes et descendantes ne sont pas confondues : il se crée de l'hystérésis. σ correspond à la pente de la courbe effort/déplacement à $F = 0$. Pour les faibles débattements x , ce modèle de frottement se comporte comme un ressort élastique linéaire et prend en compte le comportement élastique (pre-sliding displacement) tandis qu'il approche d'un comportement plastique de type Coulomb pour les grandes débattements, car, en régime permanent de glissement $\frac{dz}{dt} = 0$, le modèle de Dahl s'écrit $F = F_{\max} \operatorname{sign}(v)$

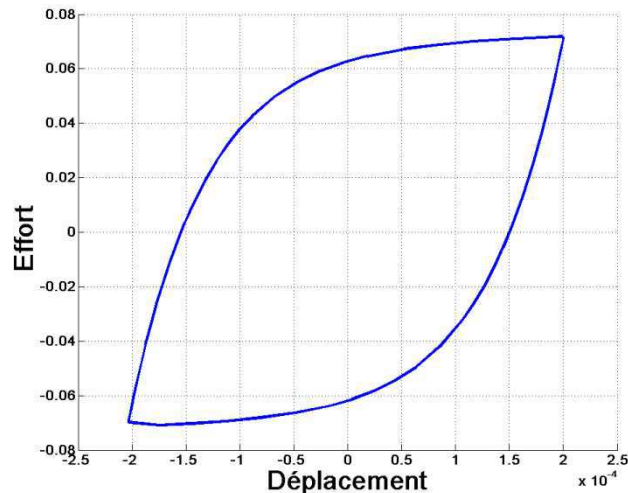


Figure 67. Boucle d'hystérésis du modèle de Dahl pour $\alpha=1$.

1.2. Modèle de Maxwell généralisé :

Le modèle de Maxwell généralisé (MMG) permet une description précise du comportement dynamique des matériaux viscoélastiques. Le MMG est composé de cellules de Maxwell en parallèle. Afin de modéliser le comportement dynamique de l'articulation viscoélastique, le

MMG choisi est composé d'un ressort et de N cellules de Maxwell linéaire, comme indiqué dans la **Figure 68**.

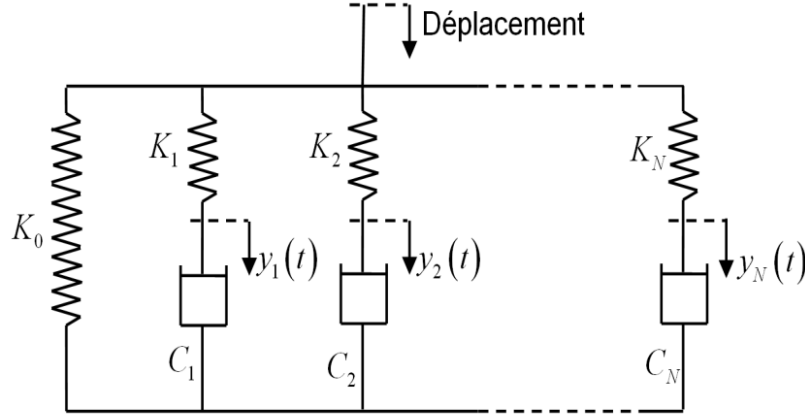


Figure 68. Le MMG proposé

Pour déformer ce modèle rhéologique, il faut lui appliquer un effort (force $F(t)$ ou moment $M(t)$) qui est la somme des efforts de réaction du ressort seul et de chaque cellule :

$$F(t) = F_0(t) + \sum_{i=1}^N F_i(t) \quad (4.9)$$

$$M(t) = M_0(t) + \sum_{i=1}^N M_i(t) \quad (4.10)$$

La raideur dynamique peut être exprimée par le modèle de Maxwell généralisé, soit par une formulation rhéologique :

$$Z(\omega) = K_0 + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega K_i C_i}{K_i + j\omega C_i} \quad K_i, C_i, i = [1..N] \quad (4.11)$$

soit par une formulation pôles-zéros utilisé en automatique, notamment par Oustaloup [3].

$$Z(\omega) = K_0 \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + (j\omega/\omega_{z,i})}{1 + (j\omega/\omega_{p,i})} \right) \quad \omega_{p,i}, \omega_{z,i}, i = [1..N] \quad (4.12)$$

K_0 est la raideur à $\omega = 0$, i.e. $t = +\infty$, K_i est la raideur du $i^{\text{ème}}$ ressort et C_i est le $i^{\text{ème}}$ amortisseur. $\omega_{z,i}$ et $\omega_{p,i}$ sont respectivement le zéro et le pôle du $i^{\text{ème}}$ couple pôle-zéro, $i \in [1..N]$.

1.3. Modèle visco-tribologique

Le modèle visco-tribologique choisi est basé sur le modèle de Dahl et le modèle de Maxwell généralisé linéaire. Ces deux modèles sont couplés en supposant que l'effort (la force $F(t)$ ou le moment $M(t)$) de frottement généré par le ressort frotteur de Dahl est viscoélastique, c'est-à-dire que σ sera modélisé par Maxwell généralisé. Lors du déplacement (linéaire $x(t)$) ou

angulaire $\theta(t)$ à imposer, le ressort frotteur s'allongera de $z(t)$ sans dépasser z_{\max} , ce qui excite le MMG.

Modèle représentant le comportement visco-tribologique de cisaillement

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \dot{x}(t) \left| 1 - \frac{F(t)}{F_{\max}} \text{sign}(\dot{x}(t)) \right|^\alpha \text{sign} \left(1 - \frac{F(t)}{F_{\max}} \text{sign}(\dot{x}(t)) \right) \\ F(t) = K_0 z(t) + \sum_{i=1}^N K_i (z(t) - y_i(t)) \\ K_i (z(t) - y_i(t)) = C_i \dot{y}_i(t) \\ F_{\max} = \mu F_N \end{cases} \quad (4.13)$$

Avec μ le coefficient de frottement et F_N la précharge normale.

Si $\alpha = 1$, l'équation d'état du modèle visco-tribologique de cisaillement est :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \dot{x} - \beta K_{\text{tot}} z(t) + \beta \sum_{i=1}^N K_i y_i(t) \\ \dot{y}_i(t) = \frac{K_i}{C_i} (z(t) - y_i(t)) \end{cases} \quad (4.14)$$

Considérant que $\beta = \frac{\dot{x}}{F_{\max}} \text{sign}(\dot{x})$ et $K_{\text{tot}} = K_0 + \sum_{i=1}^N K_i y_i(t)$

On obtient le système matriciel suivant

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_i \\ \vdots \\ \dot{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta K_{\text{tot}} & \beta K_1 & \dots & \beta K_i & \dots & \beta K_N \\ \frac{K_1}{C_1} & -\frac{K_1}{C_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \frac{K_i}{C_i} & \vdots & & -\frac{K_i}{C_i} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ \frac{K_N}{C_N} & 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{K_N}{C_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

et la force est donnée par

$$F(t) = K_0 z(t) + \sum_{i=1}^N K_i (z(t) - y_i(t)) \quad (4.16)$$

Modèle représentant le comportement visco-tribologique de torsion

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \dot{\theta}(t) \left| 1 - \frac{M(t)}{M_{\max}} \text{sign}(\dot{\theta}(t)) \right|^\alpha \text{sign} \left(1 - \frac{M(t)}{M_{\max}} \text{sign}(\dot{\theta}(t)) \right) \\ M(t) = K_0 z(t) + \sum_{i=1}^N K_i (z(t) - y_i(t)) \\ K_i (z(t) - y_i(t)) = C_i \dot{y}_i(t) \\ M_{\max} = \mu M_N \end{cases} \quad (4.17)$$

Avec μ le coefficient de frottement et M_N le moment dû à la précharge normale.

Si $\alpha = 1$, l'équation d'état du modèle visco-tribologique de torsion est :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \dot{\theta} - \beta K_{\text{tot}} z(t) + \beta \sum_{i=1}^N K_i y_i(t) \\ \dot{y}_i(t) = \frac{K_i}{C_i} (z(t) - y_i(t)) \end{cases} \quad (4.18)$$

Considérant que $\beta = \frac{\dot{\theta}}{M_{\max}} \text{sign}(\dot{\theta})$ et $K_{\text{tot}} = K_0 + \sum_{i=1}^N K_i y_i(t)$

On obtient le système matriciel suivant

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_i \\ \vdots \\ \dot{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta K_{\text{tot}} & \beta K_1 & \dots & \beta K_i & \dots & \beta K_N \\ \frac{K_1}{C_1} & -\frac{K_1}{C_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \frac{K_i}{C_i} & \vdots & & -\frac{K_i}{C_i} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ \frac{K_N}{C_N} & 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{K_N}{C_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

et le moment est donné par

$$M(t) = K_0 z(t) + \sum_{i=1}^N K_i (z(t) - y_i(t)) \quad (4.20)$$

2. Techniques d'identification paramétriques

Les diagrammes Force/Déplacement linéaire et Moment de Torsion/Déplacement angulaire sont utilisés pour caractériser le comportement dynamique des composants viscoélastiques. La **Figure 69** et **Figure 70** montrent respectivement la variation de la force en fonction du déplacement pour un essai de cisaillement dynamique à la fréquence d'excitation de 2.5 Hz et

une précharge normale de 1000 N et la variation du moment de torsion en fonction du déplacement angulaire pour un essai de torsion à la fréquence d'excitation de 60 Hz et une précharge normale de 100 N.

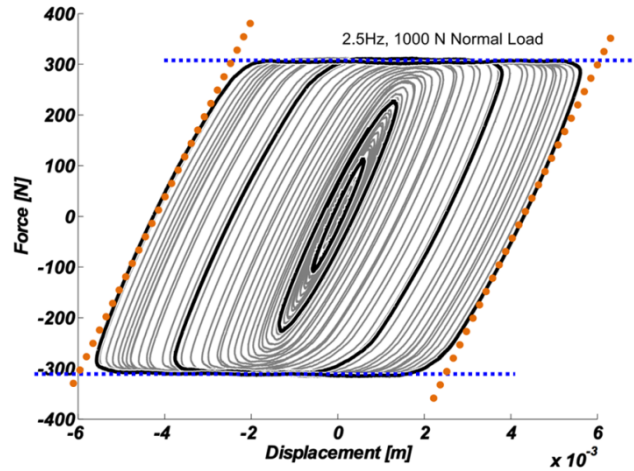


Figure 69. Relation force-déplacement pour l'échantillon en caoutchouc soumis à un chargement de cisaillement cyclique.

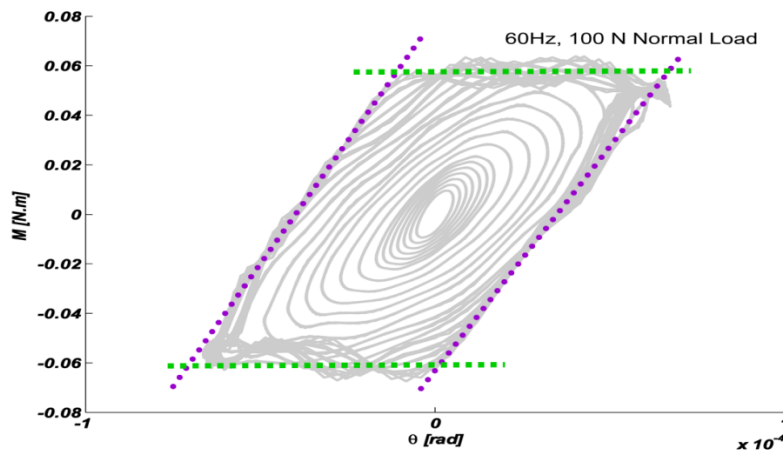


Figure 70. Relation Couple-déplacement angulaire pour l'échantillon en caoutchouc soumis à la torsion cyclique.

Les boucles d'hystérésis Force/Déplacement linéaire et Moment de Torsion/Déplacement angulaire contiennent des informations qui permettent d'identifier les paramètres du modèle proposé. La partie quasi-verticale de la courbe représente la raideur du système. La partie horizontale de la courbe correspond au comportement significatif de glissement. La plupart des modèles paramétriques Dahl [62], [98], Canudas de Wit et al [67], Al Majid [95], Awrejcewicz [101], [102], Segalman et Starr [96] et Thaijaroen et Harrison [103] peuvent être identifiés avec ce genre de courbes. Des techniques sont proposées afin d'identifier les paramètres viscoélastiques K_0 , K_i and C_i et les paramètres de frottement μ et α .

2.1. Identification des paramètres de frottement

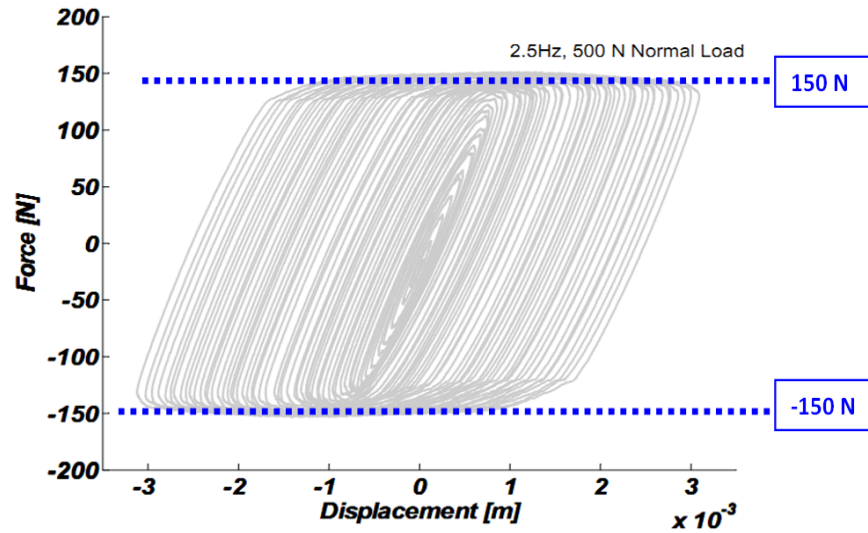


Figure 71. Identification du coefficient de frottement en se basant sur les asymptotes horizontales pour l'essai de cisaillement.

Le coefficient de frottement μ est défini par la ligne horizontale tangente à la courbe lorsque l'effort (la force $F(t)$ ou le moment $M(t)$) atteint son maximum.

La **Figure 71** montre l'identification du coefficient de frottement pour l'essai de cisaillement avec précharge statique $P = 500N$.

$$\mu = \frac{F_{\max}}{P} = \frac{150}{500} = 0.3 \quad (4.21)$$

La **Figure 72** montre l'identification du coefficient de frottement pour l'essai de torsion avec précharge statique $P = 150N$.

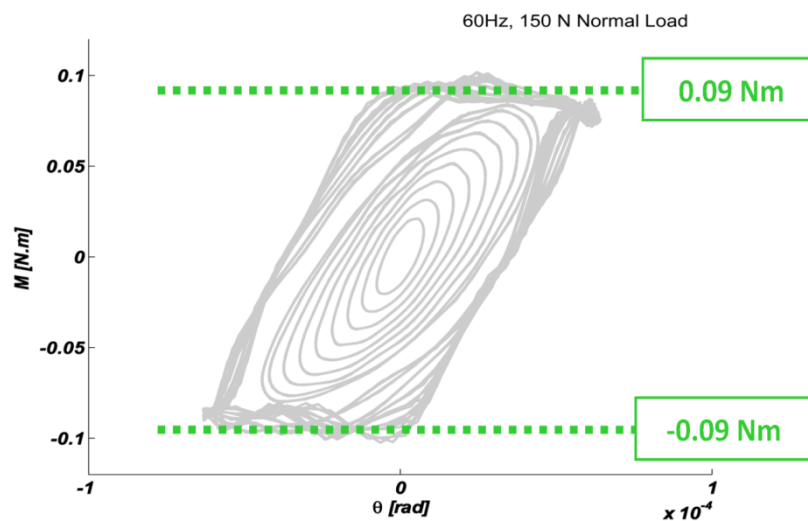


Figure 72. Identification du coefficient de frottement en se basant sur les asymptotes horizontales pour l'essai de torsion.

$$\mu = \frac{M_{\max}}{P^* e} = \frac{0.09}{150 * 0.002} = 0.3 \quad (4.22)$$

Où $e = 0.002m$ est l'épaisseur de la lame.

La valeur du coefficient de frottement identifié pour tous les tests est $\mu = 0.3$.

L'identification de α est basée sur les travaux de Peyret [104] qui a montré qu'il existe une identification précise entre la phase de chargement du contact entre deux surfaces définies par Mindlin [105], Boltachev et al. [106] et les paramètres de Modèle Dahl [62], en particulier le paramètre constant α qui représente la forme de la boucle d'hystérésis. Peyret [104] a identifié

$$\alpha = \frac{1}{3}.$$

Dans ce travail, α est considéré comme étant égal à $1/3$.

2.2. Identification des paramètres viscoélastiques

2.2.1. Identification de K_0

Les relations force/déplacement linéaire et moment de torsion/déplacement angulaire montrent un comportement hystérétique. La raideur dynamique est donnée par la pente de la boucle d'hystérésis.

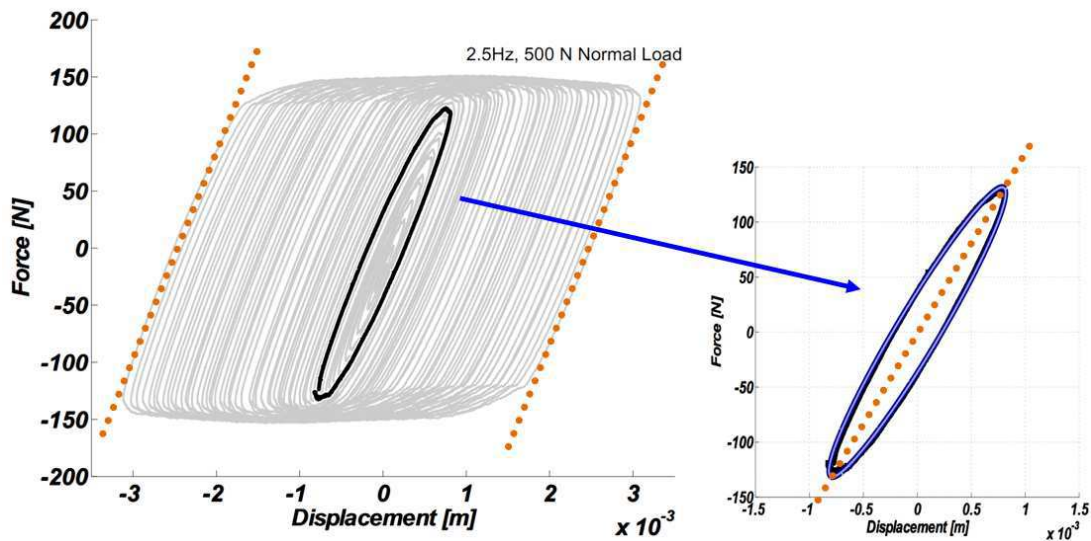


Figure 73. Estimation de K_0 en considérant l'axe principal de l'ellipse dans le sens de Fourier pour l'essai de cisaillement.

Les premiers cycles force/déplacement linéaire et moment de torsion/déplacement angulaire montrent des courbes ellipsoïdales pures, qui correspondent au comportement viscoélastique. La partie quasi verticale de la courbe représente la raideur du système.

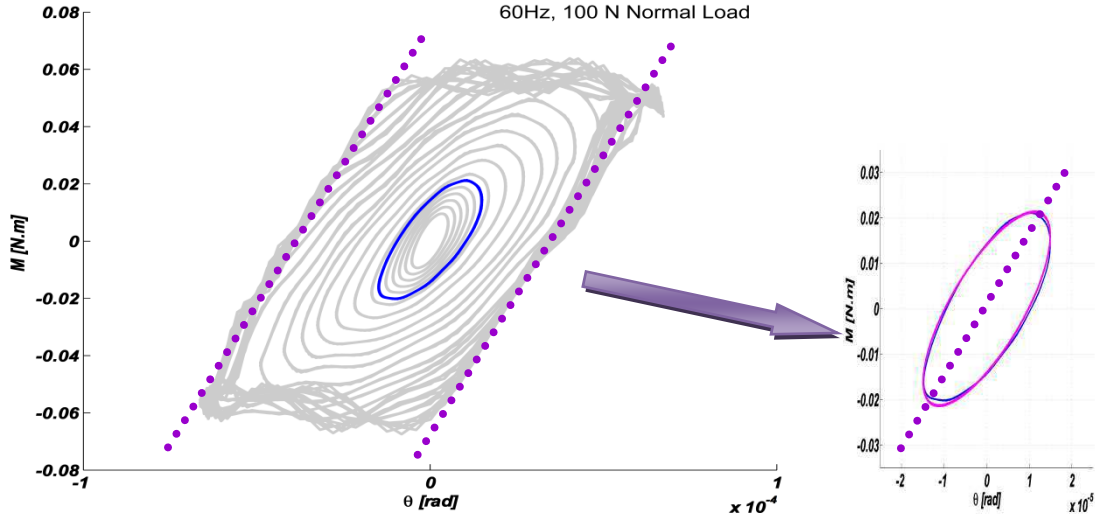


Figure 74. Estimation de K_0 en considérant l'axe principal de l'ellipse dans le sens de Fourier pour l'essai de torsion.

La valeur de la raideur dynamique est estimée à l'inclinaison du grand axe d'une ellipse qui coïncide avec un cycle sélectionné parmi les premiers cycles, comme illustré dans la **Figure 73** et la **Figure 74**.

2.2.2. Identification de K_i et C_i

Les relations (4.23) démontrés par Dion [86] et Renaud [87], [89] permettent le calcul des paramètres du MMG donnés par (4.11), à partir des paramètres de la FPZ (Formulation Pôles Zéros).

$$\begin{cases} K_i = K_0 \prod_{h=1}^N \left(\frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left(\frac{\omega_{p,i} - \omega_{z,h}}{\omega_{p,i} + \omega_{p,h} (\delta_{ih} - 1)} \right) & (a) \\ C_i = \frac{K_i}{\omega_{p,i}} & (b) \end{cases} \quad (4.23)$$

Considérant N cellules de Maxwell, les coefficients K_i et C_i sont identifiés par les équations (4.23.a) et (4.23.b), après le calcul des pôles et des zéros. La méthode utilisée pour déterminer les pôles et les zéros est détaillé dans le chapitre 3.

Les coefficients C_i et K_i du MMG sont, par la suite, identifiés numériquement grâce à la connaissance des pôles et des zéros de la fonction.

3. Validation

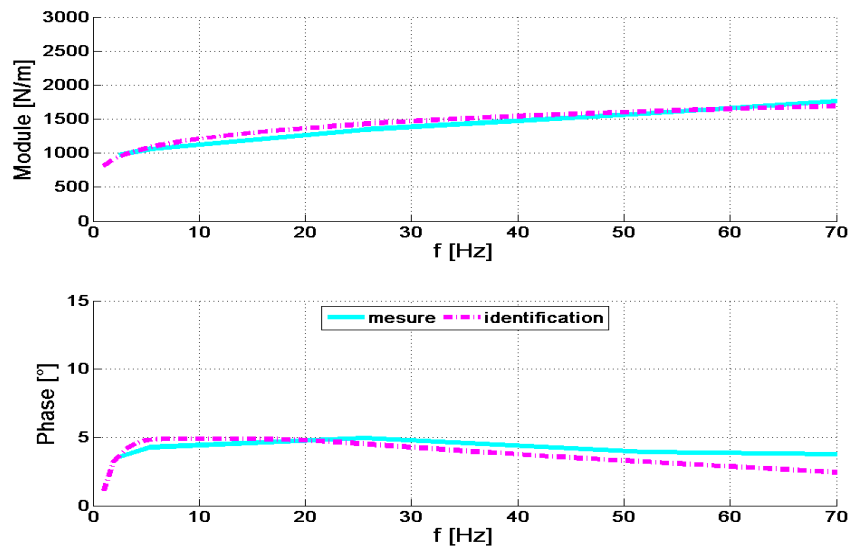
Dans cette partie, une comparaison entre les résultats expérimentaux et théoriques (raideur dynamique, énergie dissipée et coefficient d'amortissement) est effectuée afin de valider le model visco-tribologique proposé.

3.1. Raideur dynamique

La raideur dynamique des composants viscoélastiques est bien décrite par son module et sa phase $Z(\omega) = |Z(\omega)| \exp(j\varphi(\omega))$. Renaud et al. [87] ont présenté une méthode basée sur les caractéristiques des asymptotes de la formulation pôle-zéro qui permet d'identifier les paramètres MMG à la fois pour le module et phase avec plus d'efficacité que les méthodes graphiques classiques grâce à un algorithme d'optimisation basé sur les asymptotes. Le module et la phase associés à la FPZ sont définis dans équation (4.24).

$$\begin{cases} |Z(\omega)| = K_0 \prod_{i=1}^N |Z(\omega)|_i = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{z,i})^2}}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{p,i})^2}} \\ \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\omega) = \sum_{i=1}^N \left(\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_{p,i}} \right) \right) \end{cases} \quad (4.24)$$

La (**Figure 75.a**) et (**Figure 75.b**) montrent un bon accord entre les valeurs mesurées et identifiées du module et de la phase de la raideur dynamique du composant viscoélastique lors d'un essai de torsion (**Figure 75.a**) et de cisaillement (**Figure 75.b**).



(a)

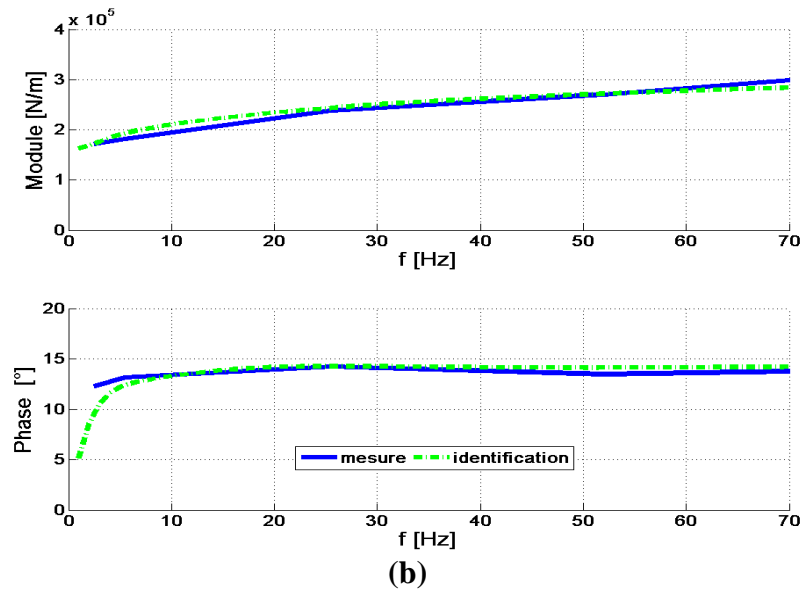


Figure 75. Module et phase de la raideur dynamique mesurés et identifiés en fonction de la fréquence pour des essais de torsion (a) et de cisaillement (b).

3.2. Boucles d'hystérésis

La **Figure 76** et la **Figure 77** montrent la comparaison entre les mesures et les simulations des courbes Force/Déplacement linéaire et Moment de Torsion/Déplacement angulaire. Le modèle visco-tribologique proposé décrit le comportement des échantillons en caoutchouc avec une précision satisfaisante.

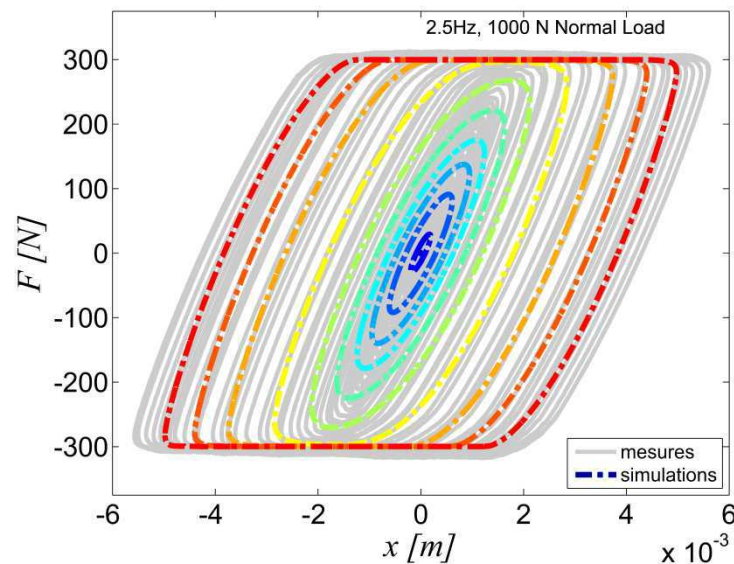


Figure 76. Les courbes Force/Déplacement linéaire mesurées et simulées superposées l'une au-dessus de l'autre.

La qualité du « fitting » entre les simulations et les mesures des **Figure 76** et **Figure 77**, est similaire pour la plupart des tests effectués.

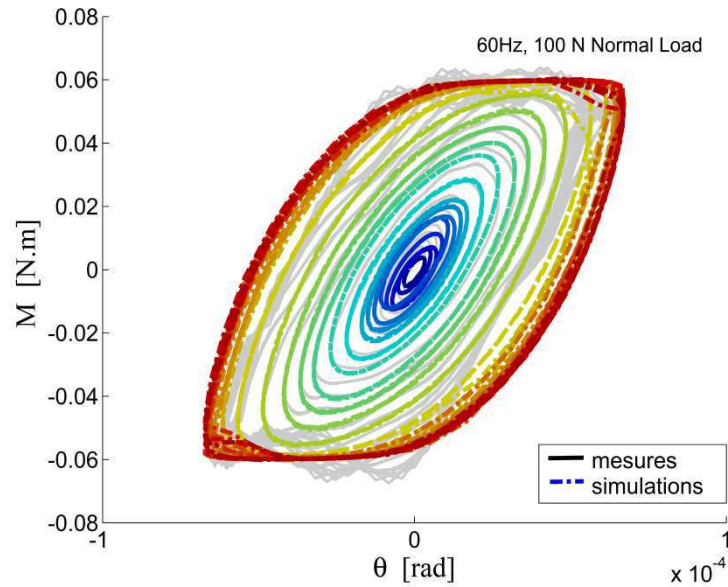
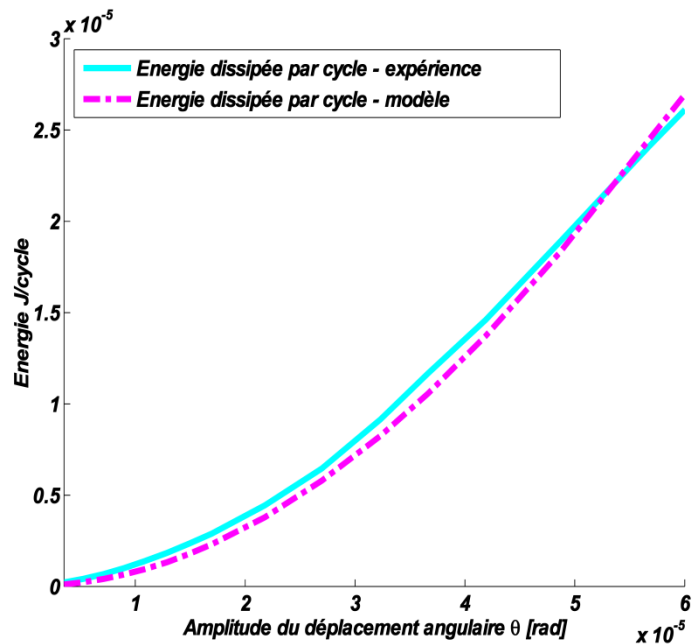


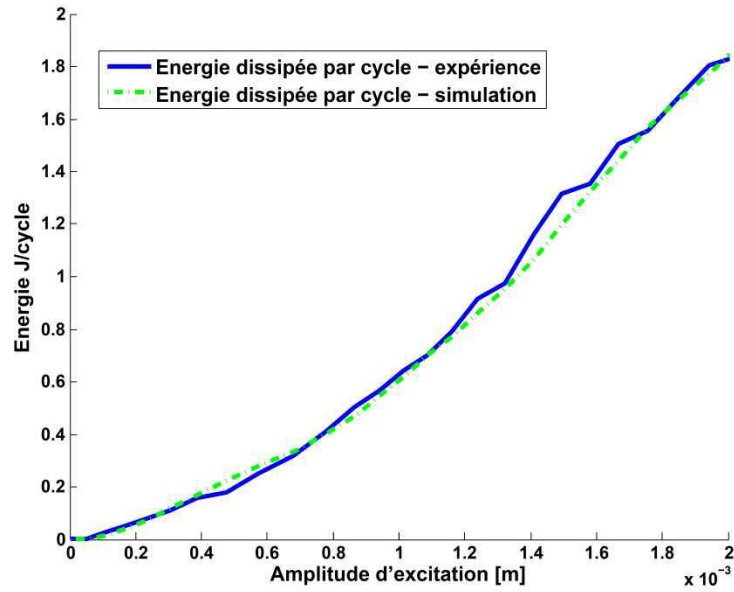
Figure 77. Les courbes *Moment de Torsion/Déplacement angulaire* mesur es et simul es superpos es l'une au-dessus de l'autre.

3.3. *Energie dissipée*

La zone délimitée par les courbes de chargement et de déchargement des cycles d'hystéresis correspondant à l'énergie dissipée sous forme de chaleur au cours des cycles. L'énergie dissipée dépend fortement de l'amplitude de déplacement linéaire ou angulaire. Cette dépendance entra ene des effets non linéaires qui expliquent la forme parabolique de la courbe comme le montrent les figures : (**Figure 78.a**) et (**Figure 78.b**).



(a)



(b)

Figure 78. Dissipée énergie en fonction de l'amplitude du déplacement (angulaire(a) et linéaire (b)).

Le taux d'amortissement ξ est défini par le rapport entre l'énergie dissipée E_d et l'énergie potentielle de référence E_r , voir Dion [97] :

$$\xi = \frac{4 E_d}{\pi E_r} \quad (4.25)$$

Où $E_r = 4x_{\max} F_{\max}$ dans le cas de sollicitation de cisaillement dynamique et $E_r = 4\theta_{\max} M_{\max}$ dans le cas de sollicitation de torsion dynamique.

x_{\max} est l'amplitude du déplacement linéaire et θ_{\max} est l'amplitude du déplacement angulaire.

Le coefficient d'amortissement augmente avec l'augmentation des amplitudes de déplacements ((**Figure 79.a**) et (**Figure 79.b**)).

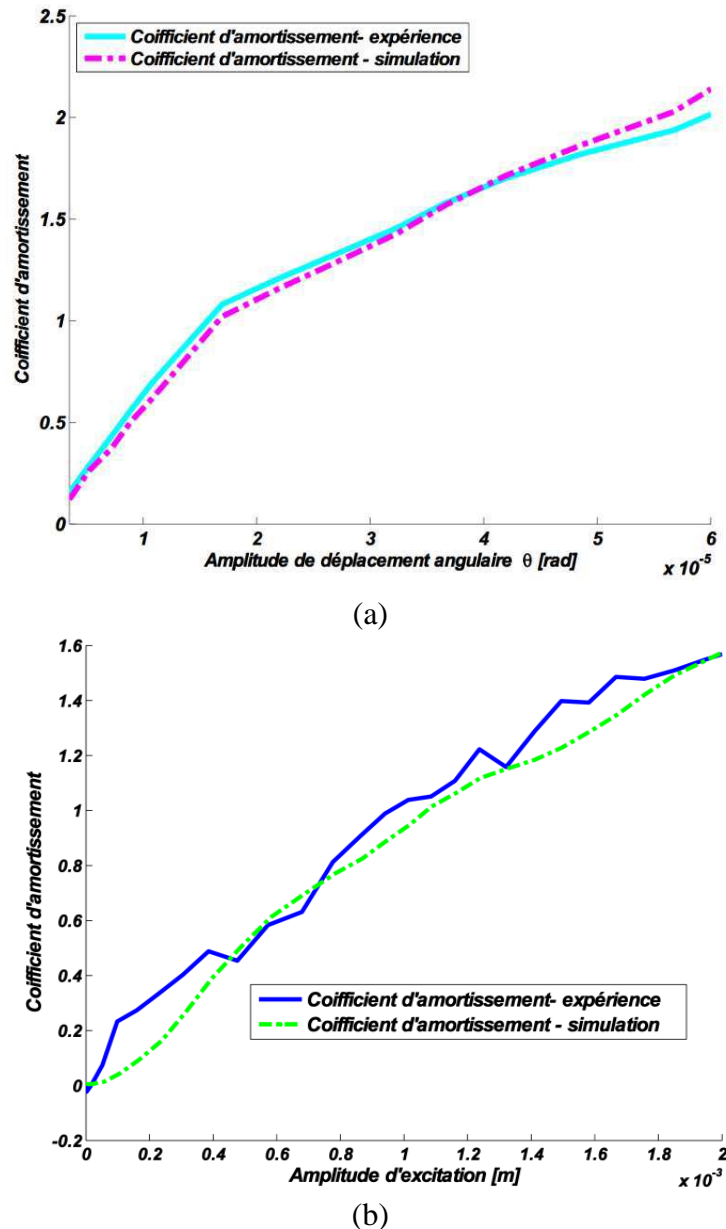


Figure 79. Le coefficient d'amortissement en fonction de l'amplitude des déplacements.

Le modèle visco-tribologique proposé est validé sur les (**Figure 75** - **Figure 79**) pour des essais de cisaillement et de torsion dynamique. La méthode d'identification proposée est robuste et a été appliquée pour un très grand nombre de tests avec plusieurs fréquences et charges normales.

Conclusion

Dans un mécanisme complexe, le niveau de vibration dépend fortement de la dissipation dans les parties articulées, qui présentent à la fois le frottement et le comportement viscoélastique. Le modèle visco-tribologique proposé est une combinaison du modèle de Dahl et du modèle de Maxwell généralisé avec N cellules élémentaires. Des méthodes pour l'identification

paramétrique ont été réalisées. Le modèle choisi est composé de $N + 1$ variables d'état internes, $2N + 3$ paramètres mais seulement 3 paramètres indépendants (K_0 , μ et ϕ) qui peuvent être identifiés avec un seul essai dynamique.

Conclusion générale et perspectives

Le but de ce travail était d'appréhender le comportement dynamique non linéaire des composants viscoélastiques. L'analyse et la représentation du comportement dynamique non linéaire du caoutchouc sont souvent réalisées en étudiant l'influence de deux paramètres : la précharge statique et l'amplitude d'excitation sous sollicitations sinusoïdales.

Dans un premier temps, des techniques expérimentales ont été mises en œuvre afin de caractériser le comportement dynamique sous sollicitations uniaxiales d'un élastomère. La description des bancs d'essais, des chaînes d'acquisition et d'analyse vibratoire ainsi que l'explication des méthodes de traitement des données des essais et d'analyse des mesures expérimentales ont été présentées.

Ensuite, une approche du modèle non-linéaire de Maxwell généralisé a été proposée pour décrire le comportement dynamique du composant viscoélastique. Ce modèle permet une description précise et une bonne connaissance du comportement dynamique des composants viscoélastiques en fonction de l'amplitude, de la précharge et de la fréquence. Une méthode d'identification paramétrique est proposée. Les différents paramètres linéaires et non linéaires du modèle choisis sont identifiés à partir d'essais de compression dynamique pour différentes fréquences d'excitation, d'amplitude de déplacement et de précharge statique. Une comparaison entre les mesures et les simulations est effectuée et la validité du modèle proposé est discutée. Ce modèle est adapté aux techniques de linéarisation statique, des excitations transitoires telles que les chocs et les excitations aléatoires stationnaires et non stationnaires.

La dissipation d'énergie identifiée sous forme d'amortissement peut être issue de l'amortissement intrinsèque des matériaux comme de la friction aux interfaces dans le cas des composants caoutchoucs non adhésés sur les pièces.

Dans ce travail, un modèle visco-tribologique a été développé en couplant les propriétés rhéologiques linéaires du modèle de Maxwell généralisé et le modèle de frottement de Dahl. Une méthode d'identification paramétrique est proposée. Les paramètres du modèle sont

identifiés à partir des essais de cisaillement et de torsion dynamiques pour différentes fréquences d'excitation. Une comparaison entre les mesures et les simulations est effectuée et la validité du modèle proposé est discutée.

Par ailleurs, il serait intéressant de trouver une loi de comportement et formulation éléments finis des modèles proposés afin de prédire et optimiser les comportements dynamiques des composants élastomères.

Il pourrait être intéressant aussi que les modèles présentés dans cette thèse, soient utilisés pour les simulations des comportements dynamiques de d'autres matériaux avec des géométries plus complexes ou encore d'effectuer des caractérisations en fonction de la température. En effet, la prise en compte des phénomènes thermiques permet de prendre en compte d'autres non linéarités qui sont non négligeables dans le cas de fortes sollicitations.

Finalement, il est judicieux de signaler que la modélisation du comportement viscoélastique des élastomères reste toujours un domaine ouvert vu qu'il est confronté à des limitations expérimentales, théoriques et numériques.

Annexe

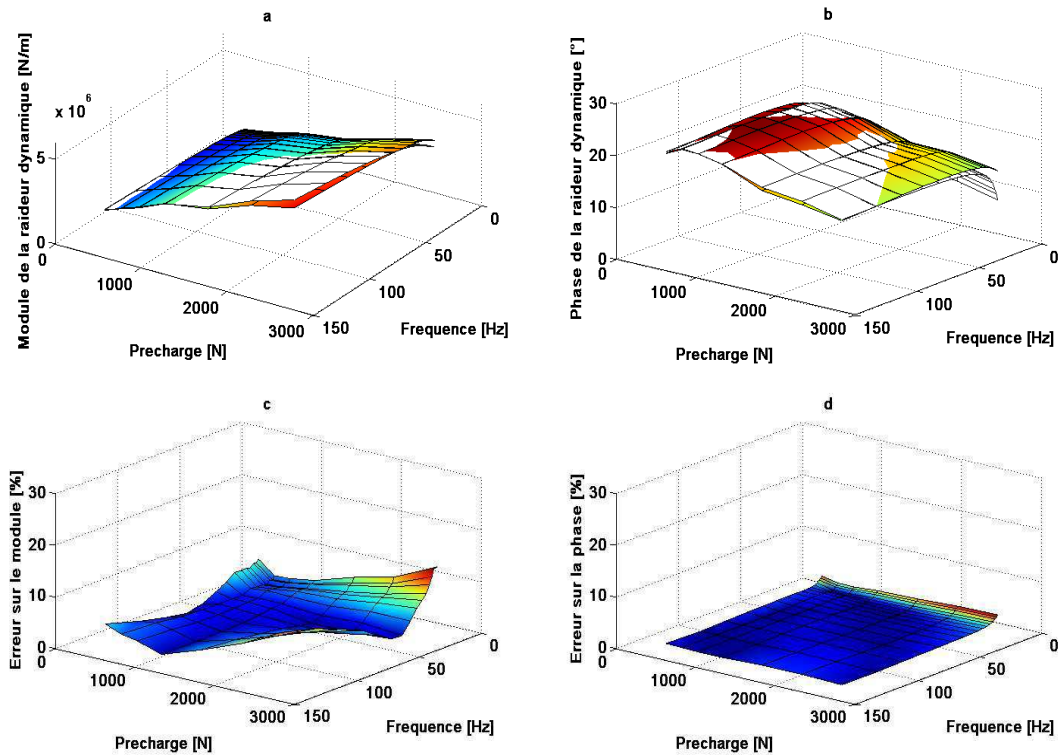


Figure. A.1. Graphe 3-D de la raideur dynamique en fonction de la fréquence et de la précharge pour $A = 250 \mu\text{m}$. (a) Module de la raideur dynamique. (b) Phase de la raideur dynamique. (c) Erreur relative du module de la raideur dynamique. (d) Erreur relative de la phase de la raideur dynamique.

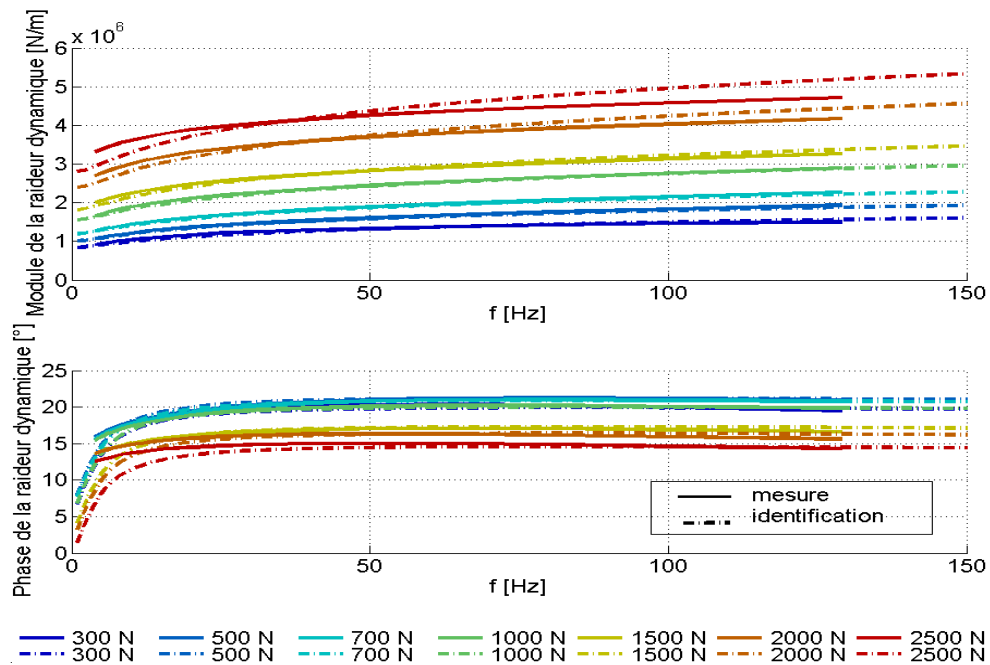


Figure. A.2. Graphe 2-D du module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence pour $A = 250 \mu\text{m}$.

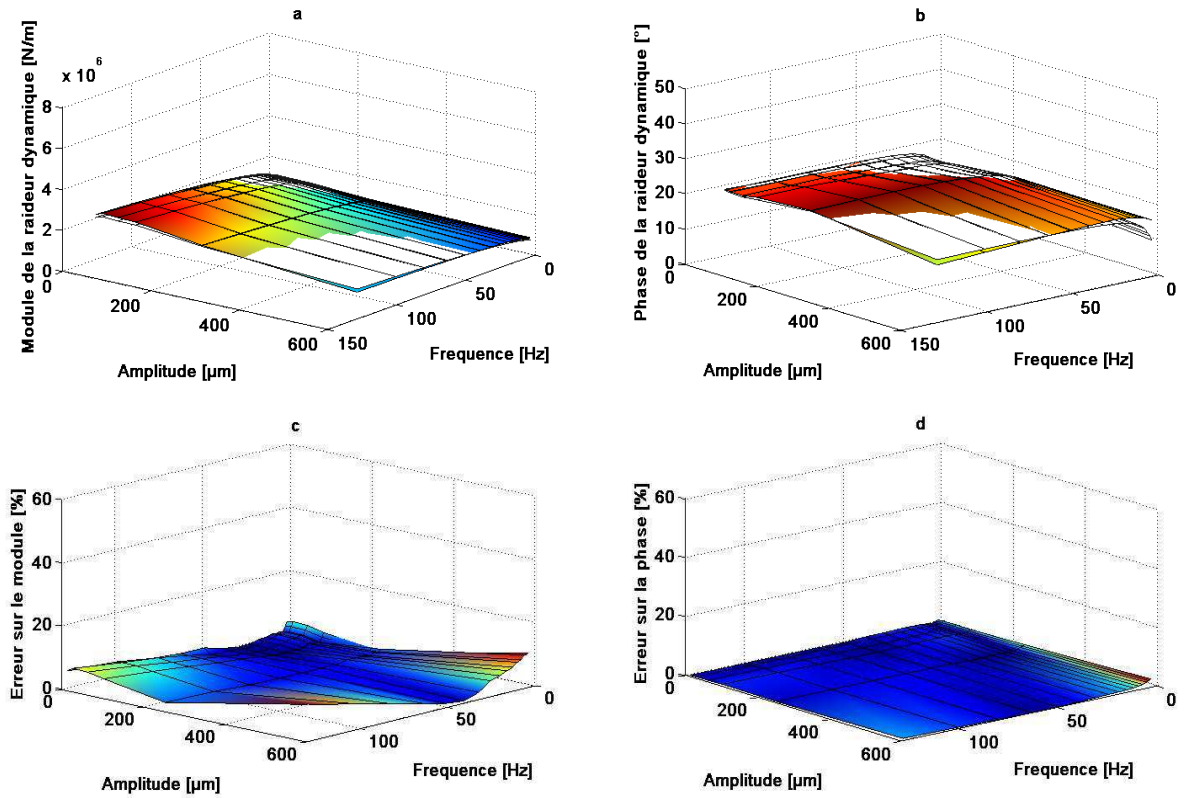


Figure. A.3. Graphe 3-D de la raideur dynamique en fonction de la fréquence et de l'amplitude pour $P = 500N$. (a) Module de la raideur dynamique. (b) Phase de la raideur dynamique. (c) Erreur relative du module de la raideur dynamique. (d) Erreur relative de la phase de la raideur dynamique.

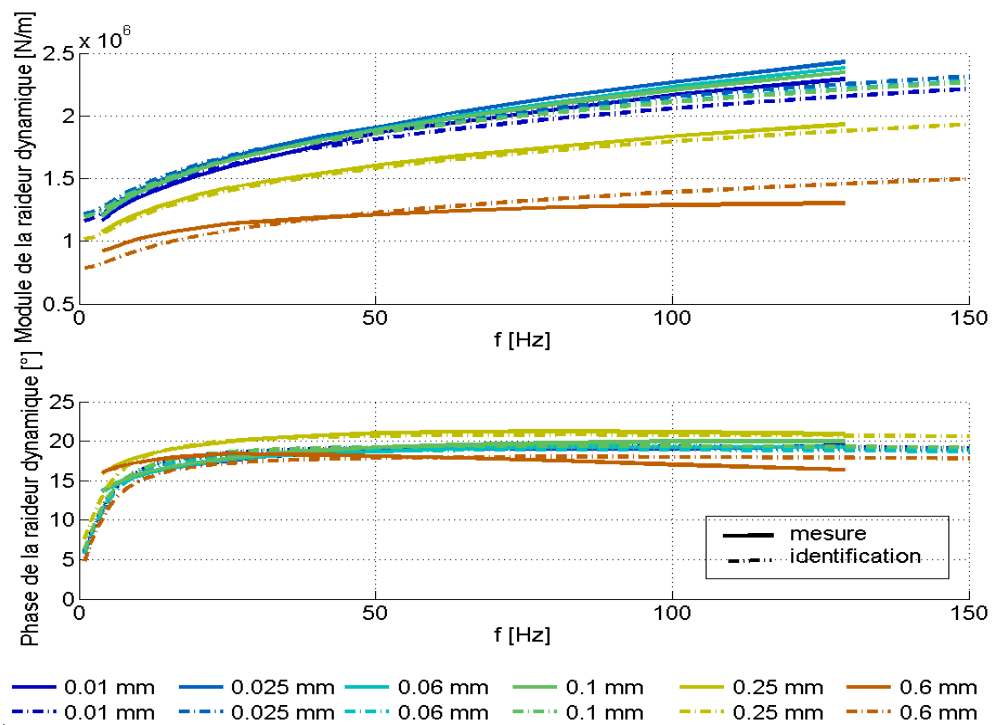


Figure. A.4. Graphe 2-D du module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence pour $P = 500N$.

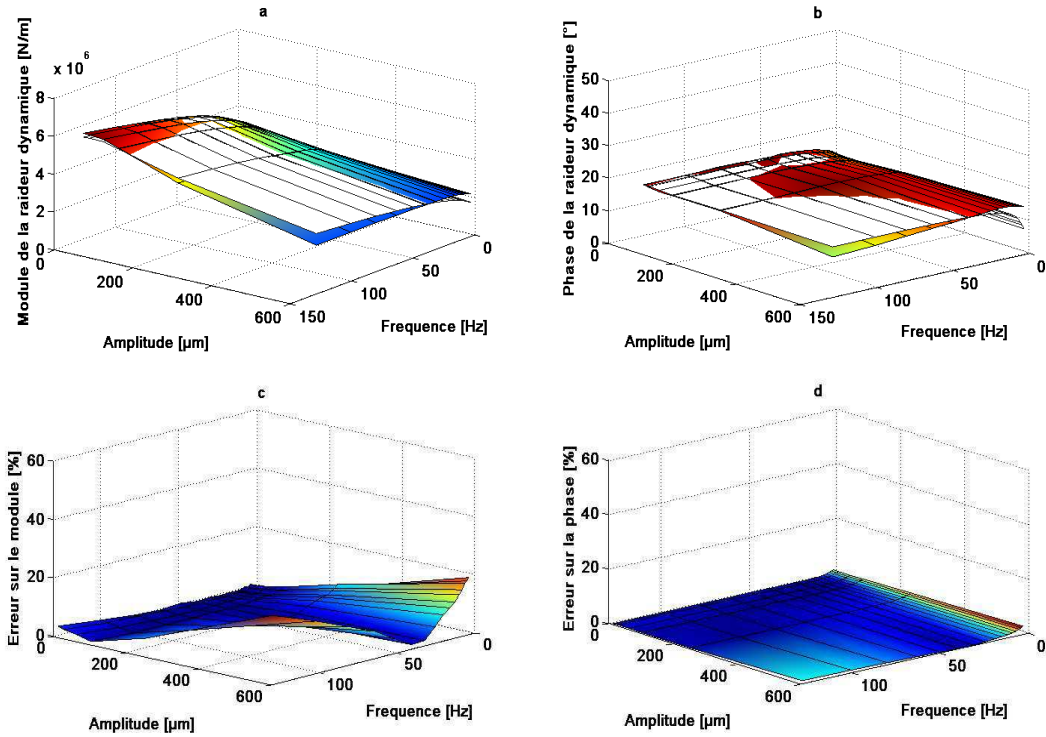


Figure. A.5. Graphe 3-D de la raideur dynamique en fonction de la fréquence et de l'amplitude pour $P = 2000N$. (a) Module de la raideur dynamique. (b) Phase de la raideur dynamique. (c) Erreur relative du module de la raideur dynamique. (d) Erreur relative de la phase de la raideur dynamique.

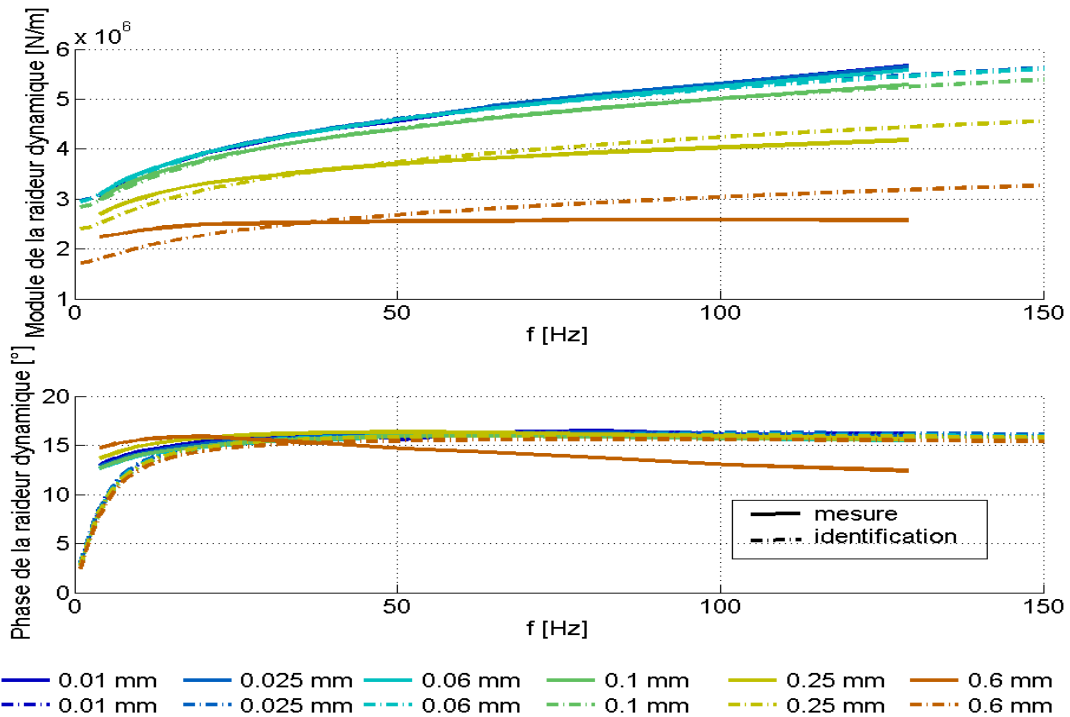


Figure. A.6. Graphe 2-D du module et la phase de la raideur dynamique en fonction de la fréquence pour $P=2000N$.

Références bibliographique

- [1] R. S. Lakes, *Viscoelastic Materials*. Cambridge University Press, 2009.
- [2] P. Saad, « Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc », Thèse de doctorat, École centrale de Lyon, France, 2003.
- [3] A. Boukamel, « Modélisation mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères », Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2006.
- [4] S. Govindjee et J. Simo, « A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating Mullins' effect », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 39, n° 1, p. 87-112, 1991.
- [5] Y. Merckel, M. Brieu, J. Diani, et J. Caillard, « A Mullins softening criterion for general loading conditions », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 60, n° 7, p. 1257-1264, juill. 2012.
- [6] L. Mullins, « Effect of Stretching on the Properties of Rubber », *Rubber Chem. Technol.*, vol. 21, n° 2, p. 281-300, juin 1948.
- [7] N. Saintier, « Fatigue multiaxiale dans un élastomère de type NR chargé: mécanismes d'endommagement et critère local d'amorçage de fissure », École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- [8] S. Cantournet et R. Desmorat, « Modélisation thermodynamique du frottement interne et de l'hystérésis d'un élastomère », *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 331, n° 4, p. 265-270, avr. 2003.
- [9] G. Petitet et M. Barquins, *Matériaux caoutchouteux: Morphologies, formulations, adhérence, glissance et usure*. PPUR presses polytechniques, 2008.
- [10] A. R. Payne, « A note on the existence of a yield point in the dynamic modulus of loaded vulcanisates », *Journal Appl. Polym. Sci.*, vol. 3, p. 127, 1965.
- [11] A. Per Erik et H. David, « Modeling of Elasticity and Damping for Filled Elastomers », *Rep. TVSM*, vol. 1009, 1997.
- [12] A. Lion et C. Kardelky, « The Payne effect in finite viscoelasticity », *Int. J. Plast.*, vol. 20, n° 7, p. 1313-1345, juill. 2004.
- [13] P. Höfer et A. Lion, « Modelling of frequency- and amplitude-dependent material properties of filler-reinforced rubber », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 57, n° 3, p. 500-520, mars 2009.
- [14] W. Luo, X. Hu, C. Wang, et Q. Li, « Frequency- and strain-amplitude-dependent dynamical mechanical properties and hysteresis loss of CB-filled vulcanized natural rubber », *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 52, n° 2, p. 168-174, févr. 2010.
- [15] M. Rendek et A. Lion, « Amplitude dependence of filler-reinforced rubber: Experiments, constitutive modelling and FEM – Implementation », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 47, n° 21, p. 2918-2936, oct. 2010.
- [16] J. M. Martinez, A. Boukamel, S. Méo, et S. Lejeunes, « Statistical approach for a hyper-visco-plastic model for filled rubber: Experimental characterization and numerical modeling », *Eur. J. Mech. - ASolids*, vol. 30, n° 6, p. 1028-1039, nov. 2011.
- [17] P. Garnier, J.-B. Le Cam, et M. Grédiac, « The influence of cyclic loading conditions on the viscoelastic properties of filled rubber », *Mech. Mater.*, vol. 56, p. 84-94, janv. 2013.
- [18] J. Harris et A. Stevenson, « On the Role of Nonlinearity in the Dynamic Behavior of Rubber Components », *Rubber Chem. Technol.*, vol. 59, n° 5, p. 740-764, nov. 1986.
- [19] H. GACEM, « Comportement Visco-Hyperélastique Des Elastomeres- Viscoélasticié Non Linéaire, Application Aux Multicouches - », L'universite Paris VI, 2007.
- [20] M. Bilasse, « Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs à âme viscoélastique », Metz, 2010.

- [21] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche, A. Benallal, et R. Desmorat, *Mécanique des matériaux solides - 3ème édition*. Dunod, 2009.
- [22] A. H. K. Long, « Analyse du comportement dynamique d'un élastomère : modélisation et identification », Ecole des Ponts ParisTech, 2005.
- [23] T. Pritz, « Dynamic Young's modulus and loss factor of floor covering materials », *Appl. Acoust.*, vol. 49, n° 2, p. 179-190, oct. 1996.
- [24] J. Cugnoni, « Identification par recalage modal et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites », EPF Lausanne, Lausanne, Suisse, 2005.
- [25] J. Cugnoni, T. Gmür, et A. Schorderet, « Identification by modal analysis of composite structures modelled with FSDT and HSDT laminated shell finite elements », *Compos. Part Appl. Sci. Manuf.*, vol. 35, n° 7-8, p. 977-987, juill. 2004.
- [26] J. D. Visscher, H. Sol, W. P. D. Wilde, et J. Vantomme, « Identification of the Damping Properties of Orthotropic Composite Materials Using a Mixed Numerical Experimental Method », *Appl. Compos. Mater.*, vol. 4, n° 1, p. 13-33, janv. 1997.
- [27] L. HILLSTRÖM, M. MOSSBERG, et B. LUNDBERG, « Identification of Complex Modulus from Measured Strains on an Axially Impacted Bar Using Least Squares », *J. Sound Vib.*, vol. 230, n° 3, p. 689-707, févr. 2000.
- [28] M. Soula, T. Vinh, Y. Chevalier, T. Beda, et C. Esteoule, « Measurements of Isothermal Complex Moduli of Viscoelastic Materials over a Large Range of Frequencies », *J. Sound Vib.*, vol. 205, n° 2, p. 167-184, août 1997.
- [29] J. D. Ferry, *Viscoelastic properties of polymers*. Wiley, 1961.
- [30] T. Vinh, « Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire viscoélastique », *Mémorial L'artillerie Française*, vol. 3ème fascicule, 1967.
- [31] M. Caputo et F. Mainardi, « Linear models of dissipation in anelastic solids », *Riv. Nuovo Cimento*, vol. 1, n° 2, p. 161-198, avr. 1971.
- [32] R. S. Lakes, *Viscoelastic Solids*. C R C Press LLC, 1999.
- [33] Y. Chevalier et J. T. Vinh, *Mechanics of viscoelastic materials and wave dispersion*. London; Hoboken, NJ: ISTE; Wiley, 2010.
- [34] E. Balmès et J.-M. Leclère, « Viscoelastic vibration toolbox », Paris, 2007.
- [35] W. F. Hosford, *Mechanical behaviour of materials*. Cambridge University Press, 2005.
- [36] J. Mandel, *Cours de mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, 1966.
- [37] Z. Sobotka, *Rheology of materials and engineering structures*. Elsevier, 1984.
- [38] S. W. Park, « Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 38, n° 44-45, p. 8065-8092, nov. 2001.
- [39] N. Heymans et J.-C. Bauwens, « Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior », *Rheol. Acta*, vol. 33, n° 3, p. 210-219, mai 1994.
- [40] H. Schiessel et A. Blumen, « Fractal aspects in polymer science », *Fractals*, vol. 03, n° 03, p. 483-490, sept. 1995.
- [41] R. L. Bagley et P. J. Torvik, « On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior », *J. Rheol.*, vol. 30, n° 1, p. 133-155, 1986.
- [42] M. Soula, « Etude du comportement mécanique des matériaux viscoélastiques par les dérivées fractionnaires = Mechanical behaviour of viscoelastic materials by fractional derivatives », Text, C.N.A.M, Paris, 1996.
- [43] T. Vinh, M. Soula, et Y. Chevalier, « Etude dynamique des polymers et élastomères par les dérivées fractionnaires », *Mécanique Ind. Matériaux*, vol. 49, n° 2, p. 101-103, 1996.

- [44] P. Cosson, « Contribution à la modélisation du comportement mécanique des solides viscoélastiques par des opérateurs différentiels d'ordre non entier », Université de Nantes, Nantes, FRANCE, 1995.
- [45] N. Makris, « Causal hysteretic element », *J. Eng. Mech.*, vol. 123, n° 11, p. 1209-1214, 1995.
- [46] A. Alaoui Soulimani, « Une méthode énergétique de modélisation de la viscoélasticité non linéaire en grandes déformations = Energetical modelling of finite non linear viscoelasticity », Text, E.N.P.C, Paris, 1993.
- [47] P. Saad, A. Al Majid, F. Thouverez, et R. Dufour, « Equivalent rheological and restoring force models for predicting the harmonic response of elastomer specimens », *J. Sound Vib.*, vol. 290, n° 3-5, p. 619-639, mars 2006.
- [48] J. C. Simo, « On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 60, n° 2, p. 153-173, févr. 1987.
- [49] M. Soula et Y. Chevalier, « La dérivée fractionnaire en rhéologie des polymères - Application aux comportements élastiques et viscoélastiques linéaires et non linéaires des élastomères », *ESAIM Proc.*, vol. 5, p. 193-204, 1998.
- [50] B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, et C. Canudas de Wit, « A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction », *Automatica*, vol. 30, n° 7, p. 1083-1138, juill. 1994.
- [51] B. Borsotto, *Modélisation, identification et commande d'un organe de friction*: application au contrôle d'un système d'embrayage et au filtrage d'acyclismes par glissement piloté. Paris 11, 2008.
- [52] F. Al-Bender, W. Symens, J. Swevers, et H. Van Brussel, « Theoretical analysis of the dynamic behavior of hysteresis elements in mechanical systems », *Int. J. Non-Linear Mech.*, vol. 39, n° 10, p. 1721-1735, déc. 2004.
- [53] G. Amontons, « De la résistance causée dans les machines », in *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1699, p. 203-222.
- [54] C. A. Coulomb, *Théorie des machines simples: en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*. Bachelier, 1821.
- [55] J. Wojewoda, A. Stefański, M. Wiercigroch, et T. Kapitaniak, « Hysteretic effects of dry friction: modelling and experimental studies », *Philos. Trans. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 366, n° 1866, p. 747-765, mars 2008.
- [56] B. Friedland et Y.-J. Park, « On adaptive friction compensation », *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 37, n° 10, p. 1609-1612, 1992.
- [57] C. T. Johnson et R. D. Lorenz, « Experimental identification of friction and its compensation in precise, position controlled mechanisms », *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 28, n° 6, p. 1392-1398, 1992.
- [58] O. Reynolds, *On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil*. London: Royal Society of London, 1886.
- [59] E. Rabinowicz, « The Nature of the Static and Kinetic Coefficients of Friction », *J. Appl. Phys.*, vol. 22, n° 11, p. 1373-1379, nov. 1951.
- [60] M. Andersson, « Automatic Control », Institute of Technology, Lund, Sweden, Technical report, 1993.
- [61] D. Karnopp, « Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems », *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, vol. 107, n° 1, p. 100-103, mars 1985.
- [62] P. R. Dahl, « Solid Friction Damping of Mechanical Vibrations », *AIAA J.*, vol. 14, n° 12, p. 1675-1682, déc. 1976.

- [63] H. Ahmadian, H. Jalali, et F. Pourahmadian, « Nonlinear model identification of a frictional contact support », *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 24, n° 8, p. 2844-2854, nov. 2010.
- [64] P.-A. Bliman et M. Sorine, « Easy-to-use realistic dry friction models for automatic control », *In Proc. of 3rd European Conference*, Rome, Italy, 1995.
- [65] D. A. Haessig et B. Friedland, « On the Modeling and Simulation of Friction », in *American Control Conference, 1990*, 1990, p. 1256-1261.
- [66] F. Al-Bender et J. Swevers, « Characterization of friction force dynamics », *IEEE Control Syst.*, vol. 28, n° 6, p. 64-81, 2008.
- [67] C. C. De Wit, H. Olsson, K. J. Astrom, et P. Lischinsky, « A new model for control of systems with friction », *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 40, n° 3, p. 419-425, 1995.
- [68] H. Olsson et K. J. Astrom, « Friction models and friction compensation », *Eur. J. Control*, vol. 4, p. 176-195, 1998.
- [69] P.-A. Bliman et M. Sorine, « Friction modelling by hysteresis operators, application to dahl, sticktion, and stribeck effects », *In Proc. Conf. Models of Hysteresis*, Trento, Italy, 1991.
- [70] F. P. Bowden et D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*. Oxford University Press, 2001.
- [71] F. Altpeter, « modeling, identification and compensation », Thèse, EPF Lausanne, 1988.
- [72] O. Henrik et F. Bernard, « Control Systems with Friction », *Dep. Autom. Control Lund Inst. Technol.*, vol. 1045, 1996.
- [73] P. Dupont, B. Armstrong, et V. Hayward, *Elasto-Plastic Friction Model: Contact Compliance and Stiction*. 2000.
- [74] R. Nouailletas, « Modélisation hybride, identification, commande et estimation d'états de système soumis à des frottements secs : application à un embrayage robotisé », Grenoble, INPG, 2009.
- [75] A. Huynh, P. ARGOUL, N. Point, et J.-L. Dion, « Modèles rhéologiques utilisant les dérivées fractionnaires pour les matériaux viscoélastiques linéaires. Application à l'identification du comportement d'élastomères », *Proc 13ème Colloq. Vib. Chocs Bruit Lyon*, 2002.
- [76] C. Gignoux et B. Silvestre-Brac, *Mécanique: de la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien*. EDP Sciences, 2002.
- [77] L. Gaul, P. Klein, et S. Kemple, « Damping description involving fractional operators », *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 5, n° 2, p. 81-88, mars 1991.
- [78] M. Sasso, G. Palmieri, et D. Amodio, « Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems », *Mech. Time-Depend. Mater.*, vol. 15, n° 4, p. 367-387, nov. 2011.
- [79] R. C. Koeller, « Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity », *J. Appl. Mech.*, vol. 51, n° 2, p. 299-307, juin 1984.
- [80] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*. Krieger Pub., 2006.
- [81] M. D. Monsia, « A Simplified Nonlinear Generalized Maxwell Model for Predicting the Time Dependent Behavior of Viscoelastic Materials », *World J. Mech.*, vol. 01, n° 03, p. 158-167, 2011.
- [82] M. D. Monsia, « A Nonlinear Mechanical Model for Predicting the Dynamics Response of Materials under a Constant Loading », *J. Mater. Sci. Res.*, vol. 1, n° 1, p. 90-100, 2012.

- [83] M. Caputo et F. Mainardi, « Linear models of dissipation in anelastic solids », *Riv. Nuovo Cimento*, vol. 1, n° 2, p. 161-198, avr. 1971.
- [84] A. W. Nolle, « Dynamic mechanical properties of rubberlike materials », *J. Polym. Sci.*, vol. 5, n° 1, p. 1-54, 1950.
- [85] A. Oustaloup, *La commande CRONE: commande robuste d'ordre non entier*. Hermes Science Publications, 1991.
- [86] J.-L. Dion, « Modélisation et identification du comportement dynamique des liaisons hydro-élastiques », Ecole centrale Paris, Chatenay-Malabry, 1995.
- [87] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, I. Tawfiq, et R. Lemaire, « A new identification method of viscoelastic behavior: Application to the generalized Maxwell model », *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 25, n° 3, p. 991-1010, avr. 2011.
- [88] J.-L. Dion et S. Vialard, « Identifications de liaisons antivibratoires en élastomères », in *Mécanique industrielle et matériaux*, vol. 50, p. 232-237, 1995.
- [89] F. Renaud, « Etude de l'incidence des comportements dissipatifs dans les instabilités vibratoires des systèmes de freinages », Ecole Centrale Paris, 2011.
- [90] N. K. Myshkin, M. I. Petrokovets, et A. V. Kovalev, « Tribology of polymers: Adhesion, friction, wear, and mass-transfer », *Tribol. Int.*, vol. 38, n° 11-12, p. 910-921, nov. 2005.
- [91] W. Brostow, V. Kovačević, D. Vrsaljko, et J. Whitworth, « Tribology of polymers and polymer-based composites », *J. Mater. Educ.*, vol. 32, n° 5-6, p. 273-290, 2010.
- [92] B. Marvalova, I. Petříková, et D. Cirkl, « Tribological And Viscoelastic Behaviour Of Carbon Black Filled Rubber », *Proc. ASMEESDA Istanbul. Turk.*, 2010.
- [93] R. H. Smith, « A Load-Independent, Adhesion-Related Rubber Friction Force? », *J. Adhes.*, vol. 87, n° 11, p. 1112-1123, 2011.
- [94] G. Skouvaklis, J. R. Blackford, et V. Koutsos, « Friction of rubber on ice: A new machine, influence of rubber properties and sliding parameters », *Tribol. Int.*, vol. 49, p. 44-52, mai 2012.
- [95] A. Al Majid et R. Dufour, « Harmonic response of a structure mounted on an isolator modelled with a hysteretic operator: experiments and prediction », *J. Sound Vib.*, vol. 277, n° 1-2, p. 391-403, oct. 2004.
- [96] D. J. SEGALMAN, « An Initial Overview of Iwan Modeling for Mechanical Joints », Technical Report SAND2001-0811, mars 2001.
- [97] J.-L. Dion, « Amortissements dans les systèmes dynamiques non linéaires », Paris - EST, 2012.
- [98] P. R. Dahl, « A solid friction model », *The Aerospace Corporation, El-Secundo, California*, 1968.
- [99] G. Chevallier, « Etude des variations de broutement provoquées par le frottement sec: application aux systèmes d'embrayage », Paris 6, 2005.
- [100] V. L. Popov et T. Geike, « A new constitutive model of rubber », *Tribol. Int.*, vol. 40, n° 6, p. 1012-1016, juin 2007.
- [101] J. Awrejcewicz et P. Olejnik, « Analysis of Dynamic Systems With Various Friction Laws », *Appl. Mech. Rev.*, vol. 58, n° 6, p. 389-411, nov. 2005.
- [102] J. Awrejcewicz et C.-H. Lamarque, « Bifurcations of a Particular van der Pol-Duffing Oscillator », *Bifurc. Chaos Nonsmooth Mech. Syst.*, vol. 45, p. 109-118, juill. 2003.
- [103] W. Thaijaroen et A. L. Harrison, « Nonlinear dynamic modelling of rubber isolators using six parameters based on parabolic spring, springpot, and smooth-slip friction element », *Polym. Test.*, vol. 29, n° 7, p. 857-865, 2010.
- [104] N. Peyret, « Dissipation de l'énergie mécanique dans les assemblages: effet du frottement en sollicitation dynamique », Université Paris-Est, 2012.

- [105] R. D. Mindlin, « Compliance of elastic bodies in contact », *J. Appl. Mech.*, vol. 16, p. 259-268, 1949.
- [106] G. S. Boltachev, N. B. Volkov, et N. M. Zubarev, « Tangential interaction of elastic spherical particles in contact », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 49, n° 15-16, p. 2107-2114, août 2012.