



HAL
open science

Identification du comportement quasi-statique et dynamique de la mousse de polyuréthane au travers de modèles de mémoire

Hamdi Jmal

► **To cite this version:**

Hamdi Jmal. Identification du comportement quasi-statique et dynamique de la mousse de polyuréthane au travers de modèles de mémoire. Autre. Université de Haute Alsace - Mulhouse, 2012. Français. NNT : 2012MULH4298 . tel-01017088

HAL Id: tel-01017088

<https://theses.hal.science/tel-01017088>

Submitted on 3 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Identification du comportement quasi-statique et dynamique de la mousse de polyuréthane au travers de modèles à mémoire

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 25 septembre 2012

pour l'obtention du

Doctorat de l'université de Haute Alsace

(spécialité mécanique)

par

Hamdi Jmal

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Nadia Bahlouli David Mitton	Université de Strasbourg, Laboratoire IMFS Université de Lyon - IFSTTAR, Laboratoire LBMC
<i>Examineurs :</i>	François Peyrault Dominique Adolphe Dupuis	Université Technologique de Belford Montbéliard Université de Haute Alsace, Laboratoire LPMT
<i>Directeur de thèse :</i>	Evelyne Aubry	Université de Haute Alsace, Laboratoire MIPS
<i>Co-encadrants :</i>	Raphaël Dupuis	Université de Haute Alsace, Laboratoire MIPS

Remerciements

Le présent travail a été mené au laboratoire de Modélisation Intelligence Processus Systèmes (MIPS) de l'Université de Haute Alsace (UHA).

J'exprime ma reconnaissance à Madame Evelyne Aubry, Professeur à l'Université de Haute Alsace et directrice de cette thèse, pour le privilège qu'elle m'a offert en m'accueillant dans son équipe.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Raphael Dupuis, Docteur, Maître de conférences à l'Université de Haute Alsace, co-directeur de cette thèse, pour son soutien actif et les conseils prodigués qui ont permis l'achèvement de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à Madame Nadia Bahlouli, Professeur à l'Université de Strasbourg, pour le privilège qu'elle m'a offert en acceptant de rapporter sur cette thèse.

Que Monsieur David Mitton, Directeur de recherche IFSTTAR, trouve ici l'expression de ma parfaite reconnaissance pour avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire.

J'exprime aussi ma reconnaissance à Monsieur François Peyraut, Professeur à l'Université Technologique de Belfort Motbéliard pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur Dominique C. Adolphe, Professeur à l'Université de Haute Alsace pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

Je n'oublie pas de remercier les personnels du laboratoire MIPS et de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Sud Alsace pour leur aide et leur soutien.

Je tiens à remercier tous mes collègues de MIPS, en particulier Mlle. Sabra Hamza et Messieurs Rachid Attia, Sacha Bernet, Oussema Derbel, Hosni Zebiri et Minglei Ju.

Un grand merci à mes parents, à mon frère et ma sœur, à ma femme, à toute ma famille et à mes amis Messieurs Rami Tounsi, Mohamed Kharrat, Ahmed Kharrat, Neji Habib, Mohamed Amine Ben Souf et Dhafer Ghribi pour leurs encouragements et leur affection.

Enfin, j'associe particulièrement à mes remerciements Monsieur Lyes Nechak, Docteur à l'Université de Haute Alsace pour les longues, fructueuses et riches réflexions que nous avons eu sur une panoplie de questions autour de la thématique de cette thèse et divers autres sujets.

Résumé

La mousse de polyuréthane est un matériau cellulaire caractérisé par un spectre de propriétés mécaniques intéressant : une faible densité, une capacité à absorber l'énergie de déformation et une faible raideur. Elle présente également des propriétés telles qu'une excellente isolation thermique et acoustique, une forte absorption des liquides et une diffusion complexe de la lumière. Ce spectre de propriétés fait de la mousse de polyuréthane un des matériaux couramment utilisés dans de nombreuses applications phoniques, thermiques et de confort.

Pour contrôler la vibration transmise aux occupants des sièges, plusieurs dispositifs automatiques de régulation et de contrôle sont actuellement en cours de développement tels que les amortisseurs actifs et semi-actifs. La performance de ces derniers dépend bien évidemment de la prédiction des comportements de tous les composants du siège et en particulier la mousse. D'une façon générale, il est indispensable de modéliser le comportement mécanique complexe de la mousse de polyuréthane et d'identifier ses propriétés quasi-statique et dynamiques afin d'optimiser la conception des systèmes incluant la mousse en particulier l'optimisation de l'aspect confort. Dans cette optique, l'objectif principal de cette thèse consiste à implémenter des modèles mécaniques de la mousse de polyuréthane fiables et capables de prévoir sa réponse sous différentes conditions d'essais.

Dans la littérature, on retrouve les divers modèles développés tels que les modèles de mémoire entier et fractionnaire. L'inconvénient majeur de ces modèles est lié à la dépendance de leurs paramètres vis-à-vis des conditions d'essais, chose qui affecte le caractère général de leur représentativité des comportements quasi-statique et dynamique de la mousse polyuréthane.

Pour pallier à cet inconvénient, nous avons développé des modèles qui, grâce à des choix judicieux de méthodes d'identification, assurent une représentativité plus générale des comportements quasi-statique et dynamique de la mousse polyuréthane. En effet, nous avons démontré qu'on peut exprimer les paramètres dimensionnels des modèles développés par le produit de deux parties indépendantes ; une regroupant les conditions d'essais et une autre définissant les paramètres adimensionnels et invariants qui caractérisent le matériau.

Ces résultats ont été obtenus à partir de plusieurs études expérimentales qui ont permis l'appréhension du comportement quasi-statique (à travers des essais de compression unidirectionnelle) et dynamique (à travers des tests en vibration entretenue). La mousse, sous des grandes déformations, présente à la fois un comportement élastique non linéaire et un comportement viscoélastique.

En outre, une discrimination entre les modèles développés particulièrement en quasi-statique a été effectuée. Les avantages et les limites de chacun y ont été discutés.

Mots clés : mousse de polyuréthane, comportement quasi-statique, comportement dynamique, modèles de mémoire, méthode d'identification, comportement viscoélastique, comportement élastique non linéaire.

Abstract

Polyurethane foam is a cellular material characterized by an interesting mechanical spectrum of properties: low density, capacity to absorb the deformation energy and low stiffness. It presents also several other properties, such as excellent thermal and acoustic insulation, high absorption of fluids and a complex scattering of light. This spectrum of properties makes polyurethane foam commonly used in many thermal, acoustic and comfort applications.

To control the vibration transmitted to the seat occupants, several automatic devices for regulation and control are currently outstanding developments like active and semi-active dampers. The performance of these devices depends, of course, on the prediction of the behaviour of all the seat components and especially foam. Generally, it is essential to model the complex mechanical behaviour of polyurethane foam and identify its quasi-static and dynamic properties in order to optimize the design of systems with foam particularly the optimization of the comfort aspect. In this mind, the main goal of this thesis is to implement mechanical models of polyurethane foam reliable and able to provide its response under different test conditions.

Several models has been developed in literature such as memory fractional and integer models. The main disadvantage of these models is the dependence of their parameters against the test conditions. It affects the general character of their representativeness to the quasi-static and dynamic behaviours of polyurethane foam.

To solve this problem, we developed models with specific identification methods to ensure broader representation of the quasi-static and dynamic behaviour of polyurethane foam. Indeed, we have demonstrated that we can express the dimensional parameters of the developed models by the product of two independent parts; the first contain only the test conditions and the second define the dimensionless and invariant parameters that characterize the foam material.

The developed models have been establish after several experimental studies allowing the apprehension of the quasi-static behaviour (through unidirectional compression tests) and the dynamic behaviour (through harmonic vibration tests). The polyurethane foam, under large deformations, exhibits a non linear elastic behaviour and viscoelastic behaviour.

In addition, discrimination between the models developed especially in quasi-static case has been conducted. The advantages and limitations of each model have been discussed.

Key words: polyurethane foam, quasi-static behaviour, dynamic behaviour, memory models, identification method, viscoelastic behaviour, non-linear elastic behaviour.

Table de matières

Liste des figures	i
Liste des tableaux	v
<u>Introduction générale</u>	1
1. Motivations	1
2. Objectifs et démarches	2
3. Défis	2
4. Conclusion	2
<u>Chapitre I. Etat de l'art</u>	4
<i>Introduction</i>	4
I.1 Polymères et mousses.....	5
I.1.1 Structure de la mousse	5
I.1.2 Processus de fabrication de la mousse de polyuréthane	6
I.1.3 Type de mousses de polyuréthane	7
I.1.4 Propriétés de mousses de polyuréthane et champs d'applications	8
I.1.5 Mécanismes de perte d'énergie dans la mousse de polyuréthane	9
I.2 Essais, études et modélisations.....	10
I.2.1 Les différents types d'essais	10
I.2.2 Les différents types d'études	11
I.2.2.1 Etudes statiques	12
I.2.2.2 Etudes quasi-statiques	13
I.2.2.3 Etudes dynamiques.....	15
I.2.3 Les différents types de modèles.....	17
I.2.3.1 Les modèles micromécaniques.....	17
I.2.3.2 Les modèles macromécaniques.....	18
I.2.4 Précision sur les modèles à mémoire développés en quasi-statique.....	22
I.2.4.1 Modélisation du comportement élastique non linéaire	22
I.2.4.2 Modélisation du comportement viscoélastique (modèle à mémoire entier)	23
I.2.4.3 Modélisation du comportement viscoélastique (modèle à mémoire fractionnaire)	25
I.2.5 Méthodes d'identification des paramètres des modèles à mémoire en quasi-statique	27
I.2.5.1 Méthode de la force moyenne	27
I.2.5.2 Méthode de la différence de force entre la charge et la décharge	29
I.3 Méthode d'optimisation	30
I.3.1 Définition d'un problème d'optimisation	31
I.3.2 Classification des méthodes d'optimisation	31
I.3.2.1 Méthodes déterministes.....	32

I.3.2.2 Méthodes non déterministes (stochastiques).....	34
Conclusion du chapitre	37

Chapitre II : Etude du comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane 39

Introduction 39

II.1 Définition des conditions d'étude du comportement quasi-statique des mousses de polyuréthane 41

II.1.1 Les mousses de polyuréthane étudiées 41

II.1.2 Description des dispositifs d'essais de compression/décompression 42

II.1.3 Détermination de la vitesse de déformation limite entre quasi-statique et dynamique 43

II.1.3.1 Expérimentation 43

II.1.3.2 Evaluation de la vitesse de déformation limite 45

II.2 Processus de modélisation du comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane- développement des modèles à mémoire..... 47

II.2.1 Expérimentations 47

II.2.2 Développement des modèles à mémoire entier et fractionnaire 49

II.2.2.1 Comportement élastique des modèles à mémoire entier et fractionnaire..... 50

II.2.2.2 Comportement viscoélastique du modèle à mémoire entier 50

II.2.2.3 Comportement viscoélastique du modèle à mémoire fractionnaire 50

II.2.2.4 Modèles à mémoire et conditions thermodynamiques 51

II.2.3 Méthode d'identification et approche d'optimisation..... 53

II.2.4 Critères de validation des résultats d'identification..... 54

II.3 Application du processus de modélisation sur la mousse de polyuréthane..... 56

II.3.1 Application du modèle à mémoire entier sur la mousse A 57

II.3.1.1 Validation des résultats d'identification..... 58

II.3.1.2 Discussion et conclusion 61

II.3.2 Application du modèle à mémoire fractionnaire sur la mousse A..... 63

II.3.2.1 Validation des résultats d'identification..... 65

II.3.2.2 Discussion et conclusion 67

II.3.3 Comparaison des modèles à mémoire entier et fractionnaire appliqués sur la mousse A 69

II.3.4 Application du modèle à mémoire entier sur les mousses B et C – Généralisation du modèle à mémoire entier 70

II.3.4.1 Evaluation de la représentativité du modèle à mémoire entier sur différents types de mousse 70

II.3.4.2 Généralisation du modèle à mémoire entier..... 71

Conclusion du chapitre 79

<u>Chapitre III : Etude du comportement dynamique de la mousse de polyuréthane</u>	80
<i>Introduction</i>	80
III.1 Etude expérimentale	81
III.1.1 Description d'essais et du dispositif	81
III.1.1.1 Détermination du niveau de compression initiale	82
III.1.1.2 Développement d'un nouveau dispositif d'essai	83
III.1.1.3 Essai de vibrations entretenues	85
III.1.2 Etude du comportement vibratoire de la mousse A dans le domaine temporel.....	86
III.1.3 Etude du comportement vibratoire de la mousse A dans le domaine fréquentiel..	87
III.1.3.1 Extraction des zones d'atténuation de vibrations de la mousse A.....	88
III.1.3.2 Diagrammes de BODE expérimentaux de la fonction 'raideur dynamique' ..	96
III.1.4 Conclusion	98
III.2 Modélisation et identification.....	100
III.2.1 Modélisation	103
III.2.1.1 Développement d'un modèle préliminaire - modèle à mémoire entier	103
III.2.1.2 Vérification d'aptitude du modèle préliminaire à reconstruire la réponse asymptotique du diagramme de gain expérimental	104
III.2.1.3 Modification de la fonction 'raideur dynamique' du modèle à mémoire entier	105
III.2.2 Identification des paramètres de la modélisation.....	108
III.2.3 Discussion des résultats d'identification.....	111
III.2.4 Conclusion	115
<i>Conclusion du chapitre</i>	115
<u>Conclusion générale et perspectives</u>	117
<u>Références bibliographiques</u>	120
<u>Annexe A: Expressions analytiques de la force viscoélastique et de la différence de force entre la charge et la décharge pendant le premier cycle d'un essai de compression/décompression quasi-statique</u>	120
<u>Annexe B: Conditions thermodynamiques</u>	120
<u>Annexe C: Analyse des expressions analytiques de la fonction 'raideur dynamique' et du spectre gain</u>	152

Liste des figures

Figure 1. Exemples de matériaux alvéolaires : (a) une structure en nid d'abeilles en 2D, (b) une mousse à cellules ouvertes en 3D, (c) une mousse à cellules fermées en 3D (Virginie G.V. 2004).....	5
Figure 2. Image 3D d'une mousse de polymère (Souhail Y. 2004).....	5
Figure 3. Moulage continu (Heymans N., Decroly P. et al. 2001).....	6
Figure 4. Moule d'une partie du siège de voiture : rehausseur pour enfant (KNAUF SAS 68600 Wolfgantzzen 2006).....	7
Figure 5. Classification des mousses de polyuréthane.....	8
Figure 6. Dispositif d'essai d'indentation IFD (www.ADMET.com).	10
Figure 7. Dispositif d'essai de test de rebondissement (www.Zwick.de).	11
Figure 8. Essai de relaxation (Lemaitre J. and Chaboche J.L. 2004).....	12
Figure 9. Représentation d'essais de fluage pour trois types de matériaux (a) matériau purement élastique, (b) matériau purement visqueux, (c1, c2) matériau viscoélastique tel que la mousse de polymère (Carrot C. and Guillet J. 2004).	13
Figure 10. Courbe contrainte déformation d'une mousse polyuréthane, obtenue suite à un essai de compression/décompression quasi-statique (Widdle R.D.Jr., Bajaj A.K. et al. 2008).	14
Figure 11. Réponse force de la mousse de polyuréthane dans le cas de faibles et grandes amplitudes de vibrations (White S.W. 1998).	16
Figure 12. Quelques modèles énergétiques.....	19
Figure 13. Modèles élémentaires de la viscoélasticité linéaire.	24
Figure 14. Eléments de base d'une modélisation mécanique (macromécanique).....	26
Figure 15. Algorithme de la méthode de la force moyenne.	28
Figure 16. Courbe moyenne entre la charge et la décharge (courbe noire) et la courbe expérimentale force déplacement (courbe bleu), vitesse de déformation $=5.33 \cdot 10^{-4} \text{sec}^{-1}$	29
Figure 17. Algorithme de la méthode de différence de force entre la charge et la décharge..	29
Figure 18. Courbe expérimentale de la différence de force entre la charge et la décharge. ..	30
Figure 19. Algorithme des méthodes d'optimisation déterministes basées sur la recherche d'une direction descendante.....	33
Figure 20. Méthodes d'optimisation stochastiques Hajji O. (2003).....	34
Figure 21. Principe d'une méthode évolutionniste Hajji O. (2003).	35
Figure 22. Démarche de l'algorithme génétique.	36
Figure 23. Dispositifs d'essai de compression/décompression unidirectionnel.....	42
Figure 24. Courbe force-déplacement de la mousse A pendant un essai de compression / décompression quasi-statique multi-cycles (4 cycles) à une vitesse de déformation constante $= 5.33 \cdot 10^{-4} \text{sec}^{-1}$	44
Figure 25. Courbes de la différence de la force entre la charge et la décharge de la mousse A obtenues suite à un essai de compression/décompression multi-cycles (4 cycles) à vitesse constante $= 5.33 \cdot 10^{-4} \text{sec}^{-1}$	44
Figure 26. Courbes force-déplacement à faibles et grandes vitesses de déformation.....	45
Figure 27. Evolution de l'énergie absorbée par la mousse A pendant le 4ème cycle en fonction de la vitesse de déformation.....	45

Figure 28. Evolution de la contrainte maximale pendant le 4ème cycle en fonction de la vitesse de déformation.....	46
Figure 29. Courbes force-déplacement expérimentales, Mousse A, Test 2.....	48
Figure 30. Courbes force-déplacement expérimentales, Mousse B, Test 2.....	48
Figure 31. Courbes force-déplacement expérimentales, Mousse C, Test 2.....	49
Figure 32. Algorithme de notre méthode de différence de force entre la charge et la décharge.	57
Figure 33. Comparaison entre les courbes de différence de force entre la charge et la décharge expérimentales et analytiques, cas du modèle à mémoire entier, (a) Mousse A - Test 1, (b) Mousse A - Test 2, (c) Mousse A - Test 3.....	60
Figure 34. Vérification de l'inclusion de la réponse force-déplacement prévue par le modèle à mémoire entier dans les enveloppes expérimentales, cas du modèle à mémoire entier, Mousse A, (a) Test 1, (b) Test 2, (c) Test 3.....	61
Figure 35. Reconstruction de la force viscoélastique, de la force élastique et de la force globale, cas du modèle à mémoire entier (a) Mousse A - Test 1, (b) Mousse A - Test 2, (c) Mousse A - Test 3.....	62
Figure 36. Prédominance de la réponse de la raideur globale d'ordre 1 (P_1) sur la réponse élastique globale.....	63
Figure 37. Comparaison entre les courbes de différence de force entre la charge et la décharge expérimentales et analytiques, cas du modèle à mémoire fractionnaire, (a) Mousse A - Test 1, (b) Mousse A - Test 2, (c) Mousse A - Test 3.....	66
Figure 38. Vérification de l'inclusion de la réponse force-déplacement prévue par le modèle à mémoire entier dans les enveloppes expérimentales, cas du modèle à mémoire fractionnaire, Mousse A, (a) Test 1, (b) Test 2, (c) Test 3.....	67
Figure 39. Reconstruction de la force viscoélastique, de la force élastique et de la force globale, cas du modèle à mémoire fractionnaire (a) Mousse A - Test 1, (b) Mousse A - Test 2, (c) Mousse A - Test 3.....	68
Figure 40. Comparaison entre les réponses force-élastique et force-viscoélastique du modèle à mémoire entier après dissociation de la contribution purement élastique d'origine viscoélastique et les réponses du modèle à mémoire fractionnaire.....	69
Figure 41. Comparaison des courbes expérimentales et analytiques de la différence de force entre la charge et la décharge, cas du modèle à mémoire entier, (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.....	70
Figure 42. Vérification si la réponse force-déplacement prévue par le modèle à mémoire entier est à l'intérieur des enveloppes expérimentales, (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.....	71
Figure 43. Comparaison entre la réponse force-déplacement expérimentale et la réponse prévue par le modèle à mémoire, (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.....	72
Figure 44. Comparaison entre les réponses force-déplacement à différentes vitesses de déformation, (a) Mousse B, (b) Mousse C.....	72
Figure 45. Comparaison entre les courbes de différence de force entre la charge et la décharge expérimentales et analytiques (modèle à mémoire entier et modèle à mémoire entier généralisé), (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.....	76

Figure 46. Comparaison entre la réponse force-déplacement expérimentale et les réponses prévues par le modèle à mémoire et le modèle à mémoire entier généralisé, (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.	76
Figure 47. Vérification si la réponse force-déplacement prévue par le modèle à mémoire entier généralisé est à l'intérieur des enveloppes expérimentales, (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.	77
Figure 48. Reconstruction de la force viscoélastique, de la force élastique et de la force globale, cas du modèle à mémoire entier généralisé (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.	78
Figure 49. Dispositif d'essais dynamiques inspiré de celui utilisé par Singh R., Davies P. et al. (2003, a-b) et Deng R. (2004) (Dispositif avec des douilles à billes).	81
Figure 50. Illustration des niveaux de compression initiale.	82
Figure 51. Schématisation du dispositif de Singh R., Davies P. et al. (2003, a-b) et Deng R. (2004) utilisé en essai d'impact.	83
Figure 52. Dispositif d'essais dynamiques utilisé dans l'étude dynamique.	84
Figure 53. Schématisation d'un essai de vibrations entretenues.	85
Figure 54. Déplacement au dessous de la mousse $x_{um}(t)$ et déplacement transmis à la masse $x_{ab}(t)$ dans le domaine temporel, en régime permanent (niveau 4, $f_e=9$ Hz, $A_{x_{um}}=1$ mm).	86
Figure 55. Force d'excitation $F(t)$ et déplacement transmis à la masse $x_{ab}(t)$ dans le domaine temporel, en régime permanent (niveau 4, $f_e=9$ Hz, $A_{x_{um}}=1$ mm).	86
Figure 56. Apport de 'zoom FFT' en précision au niveau de l'amplitude et de la fréquence, (a) spectres ($ X_{um}(f) , X_{ab}(f) $) sans zoom FFT, (b) spectres ($ X_{um}(f) , X_{ab}(f) $) avec zoom FFT.	87
Figure 57. Comparaison des spectres d'amplitudes $ X_{um}(f) $ et $ X_{ab}(f) $, amplitude d'excitation $A_{x_{um}}=1$ mm, niveau 4, fréquence d'excitation $f_e=10$ Hz.	88
Figure 58. Allure de la courbe $FEAT(f_e)$	89
Figure 59. Rapport $FEAT$ - Influence d'amplitude d'excitation.	91
Figure 60. Rapport $FEAT$ - Influence du niveau de compression initiale.	93
Figure 61. Comparaison des spectres d'amplitudes $ \hat{F}(f) $ et $ X_{ab}(f) $, amplitude d'excitation $A_{x_{um}}=1$ mm, niveau 4, fréquence d'excitation $f_e=10$ Hz.	96
Figure 62. Fonction 'raideur dynamique', diagramme de gain pour les différents niveaux de compression initiale et les différentes amplitudes d'excitation.	97
Figure 63. Fonction 'raideur dynamique', diagramme de phase pour les différents niveaux de compression initiale et les différentes amplitudes d'excitation.	99
Figure 64. Démarche globale de modélisation et d'identification, étude du comportement vibratoire de la mousse A.	102
Figure 65. Comparaison entre les diagrammes de gain expérimentaux et les spectres de gain analytiques donnés par la combinaison (5,5,2,3)	109
Figure 66. Comparaison entre les diagrammes de phase expérimentaux et les spectres de phase analytiques donnés par la combinaison (5,5,2,3)	110

Figure 67. Pouvoir conservatif de la mousse A reconstruit par la combinaison (5,5,2,3)	112
Figure 68. Pouvoir dissipatif de la mousse A reconstruit par la combinaison (5,5,2,3)	113
Figure 69. Facteur de perte de la mousse A reconstruit par la combinaison (5,5,2,3)	114

Liste des tableaux

Tableau 1. Caractéristiques chimiques et morphologiques de la mousse A et la mousse B...	41
Tableau 2. Caractéristiques chimiques et morphologiques de la mousse C.....	41
Tableau 3. Porosité des mousses A, B, et C.....	42
Tableau 4. Conditions des essais de compression/décompression multi-cycles appliqués aux mousses de polyuréthane afin de déterminer la vitesse de déformation limite.....	43
Tableau 5. Vitesses de déformation limites entre quasi-statique et dynamiques des différents types de mousse de polyuréthane étudiées.....	46
Tableau 6. Conditions des essais de compression/décompression appliqués aux mousses de polyuréthane afin de caractériser le comportement quasi-statique.....	47
Tableau 7. Nombre des échantillons utilisés pour chaque type de mousse et chaque test.....	48
Tableau 8. Transformations des paramètres dimensionnels en paramètres adimensionnels...	52
Tableau 9. Conditions thermodynamiques du modèle de mémoire entier (cas $P=2$).....	52
Tableau 10. Conditions thermodynamiques du modèle de mémoire fractionnaire.....	53
Tableau 11. Résultats de l'identification, modèle à mémoire entier (mousse A).....	58
Tableau 12. Résultats de l'identification, modèle à mémoire fractionnaire (mousse A).....	65
Tableau 13. Erreur relative entre δF_{exp} et δF_{th}	70
Tableau 14. Résultats de l'identification, modèle à mémoire entier généralisé (mousse B)...	74
Tableau 15. Résultats de l'identification, modèle à mémoire entier généralisé (mousse C)...	75
Tableau 16. Niveaux de compression initiale lors de l'étude dynamique.....	83
Tableau 17. Frottements du dispositif d'essais dynamiques.....	84
Tableau 18. Conditions d'essais de vibration entretenue.....	85
Tableau 19. Caractéristiques de quelques fenêtres de pondération.....	88
Tableau 20. Fréquences de résonance et de coupure pour les quatre niveaux de compression initiale et les quatre amplitudes d'excitation examinés (Mousse A).....	92
Tableau 21. Pentés initiales et finales de la fonction 'raideur dynamique' déterminées expérimentalement à partir des diagrammes de gain (unité dB/dec).....	98
Tableau 22. Transformations paramètres dimensionnels - paramètres adimensionnels, modèle à mémoire entier (comportement vibratoire, solution 1).....	106
Tableau 23. Transformations paramètres dimensionnels - paramètres adimensionnels, modèle à mémoire entier (comportement vibratoire, solution 2).....	107
Tableau 24. Combinaisons (m,n,s,h) considérées lors d'identification des paramètres du modèle développé afin d'étudier le comportement vibratoire de la mousse A.....	108
Tableau 25. Résultats de l'identification, combinaison(5,5,2,3), niveaux 1 et 2.....	108
Tableau 26. Résultats de l'identification, combinaison(5,5,2,3), niveaux 3 et 4.....	108

Introduction générale

1. Motivations

La mousse de polyuréthane est un matériau cellulaire caractérisé par un ensemble de propriétés intéressantes: une faible densité (inférieure généralement à 80 kg m^{-3} pour les mousses souples), une excellente isolation thermique et acoustique, une forte absorption des liquides et une diffusion complexe de la lumière. Ce spectre de propriétés la positionne parmi les matériaux couramment utilisés dans nombreuses applications acoustiques, thermiques et de bâtiment tels que le montage, le bourrage, le bouchage et l'isolation. D'un point de vue mécanique, la mousse de polyuréthane est caractérisée par son pouvoir d'absorber l'énergie de déformation. Sa faible raideur en fait des amortisseurs mécaniques fiables. Elle est également utilisée dans les applications de confort pour les assises de sièges et les matelas.

Les champs d'application de la mousse de polyuréthane sont très vastes. Ainsi, l'étude du comportement d'un tel matériau sous différentes conditions d'essais est très intéressante. Il est indispensable de modéliser son comportement mécanique et d'identifier ses propriétés statiques, quasi-statiques et dynamiques afin de fiabiliser et optimiser la conception des systèmes comportant la mousse de polyuréthane. En particulier, pour contrôler les vibrations transmises aux occupants des sièges et améliorer le confort, plusieurs dispositifs automatiques de régulation et de contrôle sont actuellement en cours de développement tels que les amortisseurs actifs et semi-actifs. La performance de ces derniers dépend évidemment de la prédiction des comportements de tous les composants du siège et en particulier de la mousse de polyuréthane.

Le confort devient actuellement un critère essentiel dans le jugement de la qualité d'un produit, mais ceci n'est pas suffisant. En effet, il faut toujours conserver les aspects technologiques d'un produit et tenir compte de l'environnement. Dans le but de développer en parallèle ces axes, certains industriels automobiles ont commencé la recherche d'un nouveau matériau pour les assises afin de remplacer la mousse de polyuréthane. En effet, cette mousse est généralement de type thermodurcissable et non recyclable. Elle brûle rapidement en dégageant un gaz toxique (cyanure). Le contrôle de son processus de fabrication est complexe et délicat. Il ne permet pas d'aboutir à des mousses répétables de mêmes caractéristiques mécaniques, chimiques et thermiques. Pour aborder une telle recherche de nouveau matériau, il faut connaître dans une première phase la mousse et identifier ses propriétés sous différentes conditions d'essais. Ceci permet de comparer le comportement d'autres matériaux par rapport à celui de la mousse de polyuréthane.

2. Objectifs et démarches

Les motivations discutées ci-dessus permettent de définir l'objectif principal de la thèse qui consiste à implanter des modèles mécaniques de la mousse de polyuréthane fiables et capables de prévoir sa réponse sous différentes conditions d'essais en particulier en quasi-statique et en dynamique.

Pour atteindre cet objectif, nous avons scindé notre travail en trois chapitres. Dans le premier, nous présenterons une analyse bibliographique portant d'une part sur la mousse de polyuréthane et ses caractéristiques et d'autre part sur les différents essais, les différentes études et les modélisations de la mousse. Une analyse des méthodes d'optimisation destinées à identifier les paramètres des modèles complètera ce chapitre.

Dans le second chapitre, nous nous intéresserons au comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane d'abord au travers d'une étude expérimentale. Nous développerons, ensuite, les différents modèles et leurs évolutions qui nous permettront de prédire le comportement des mousses testées.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous expliquerons comment nous avons développé un protocole expérimental permettant de qualifier la mousse en dynamique. Les résultats de ces expérimentations nous serviront pour valider le modèle original applicable en dynamique.

Bien que les développements mathématiques fassent partie intégrante du travail réalisé dans le cadre de cette thèse, nous avons volontairement déplacé les équations dans les annexes correspondantes.

3. Défis

Lorsqu'on considère une mousse de polyuréthane quelconque, il n'est pas possible de déduire ses paramètres mécaniques, même d'une façon approchée. Ceci se traduit par des inconnues dans les modèles. Ainsi, pour chaque modèle, il faut définir une approche d'identification appropriée permettant de déterminer les paramètres caractéristiques du matériau tels que le coefficient de frottement visqueux, la raideur dynamique et quasi-statique, etc.

Lors de l'identification, plusieurs difficultés provenant du matériau lui-même et aussi du dispositif expérimental ont été rencontrées. La complexité du matériau se traduit par son comportement élastique non linéaire et viscoélastique. Les bruits d'acquisition, la sensibilité des capteurs et les frottements sec et visqueux liés aux dispositifs d'essais, déjà constatés lors de mon travail de master, sont les différentes difficultés expérimentales.

4. Conclusion

Dans ce travail, des modèles mécaniques plus représentatifs de la mousse polyuréthane ainsi que des processus d'identification des paramètres appropriés sous différentes conditions d'essais sont proposés. Des études expérimentales ont été menées afin d'assurer l'appréhension du comportement mécanique de la mousse de polyuréthane.

Une discrimination entre les modèles développés et l'expérimentation a permis d'une part la validation des modèles et d'autre part la discussion des avantages et des limites de chacun.

Les études expérimentales et analytiques, à la fois en quasi-statique et en dynamique, permettent d'ouvrir l'horizon académique vers des travaux de recherches plus généraux concernant les matériaux viscoélastiques et de présenter aux constructeurs automobiles une modélisation plus représentative et générale de la mousse polyuréthane permettant ainsi l'optimisation du confort des sièges.

Chapitre I. Etat de l'art

Introduction

La mousse de polyuréthane fait partie des matériaux alvéolaires couramment utilisés en particulier dans les applications de confort tels que les matelas et les assises de voiture.

L'étude du comportement mécanique des matériaux alvéolaires en général et de la mousse de polyuréthane en particulier est devenue un sujet de recherche important suite à l'intérêt croissant de la part des industriels du fait de leurs caractéristiques : faible densité, bonne isolation thermique et une bonne absorption de l'énergie de déformation et de choc.

D'autre part, dans le domaine du transport, afin de réduire les temps de développement des nouveaux modèles d'assise et d'économiser les coûts de prototypes, il est de plus en plus nécessaire de recourir à des modèles numériques permettant de prédire le comportement mécanique de la mousse de polyuréthane.

Les objectifs principaux de cette thèse sont donc l'étude du comportement mécanique de la mousse de polyuréthane et le développement de modèles représentatifs du comportement mécanique de la mousse de polyuréthane tant en quasi-statique qu'en dynamique.

Ce premier chapitre 'Etat de l'art' présente une analyse de la bibliographie. Il est divisé en trois parties principales :

- une première partie intitulée '*Polymères et mousses*'. Nous allons y présenter en détail le matériau: sa structure, son processus de fabrication et ses propriétés.
- une deuxième partie intitulée '*Essais, études et modèles*'. Cette partie est une synthèse bibliographique des travaux portant sur l'étude du comportement mécanique de la mousse de polyuréthane. Un des premiers objectifs est ici de faire le point sur les différents types d'essais classiquement menés sur les mousses. Le second objectif est de dégager les modèles les plus pertinents et les plus représentatifs du comportement mécanique à la fois en quasi-statique et en dynamique.
- et une troisième partie intitulée '*Méthodes d'optimisation*'. L'identification des paramètres inconnus d'un modèle de comportement est une phase importante du processus de modélisation. Cette identification est basée généralement sur les méthodes d'optimisation. Dans cette dernière partie, on présentera les méthodes d'optimisation qui sont utiles pour l'identification des paramètres des modèles que nous allons développer pour décrire le comportement quasi-statique et dynamique de la mousse de polyuréthane.

I.1 Polymères et mousses

I.1.1 Structure de la mousse

La mousse de polymère est une phase solide d'un polymère alvéolaire dont la géométrie cellulaire peut être donnée par une structure en nids d'abeilles arrangés suivant deux dimensions (**Fig. 1-a**) ou par une structure formée par des cellules polyédriques arrangées suivant trois dimensions (**Fig. 1-b** et **Fig. 1-c**) (**Gibson L.J. and Ashby M.F. 1997; Virginie G.V. 2004**).

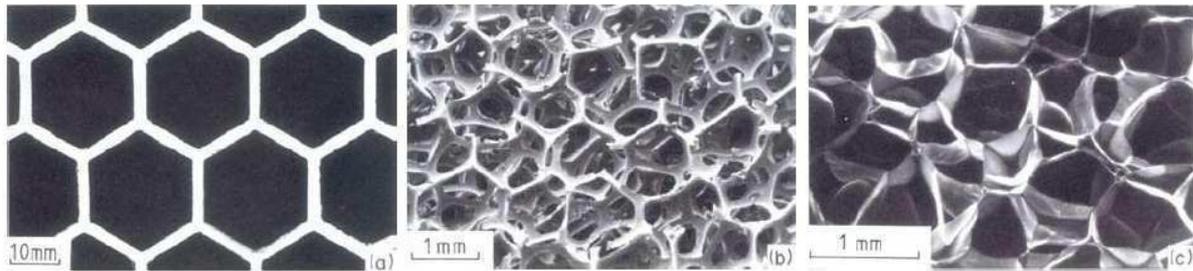


Figure 1. Exemples de matériaux alvéolaires : (a) une structure en nid d'abeilles en 2D, (b) une mousse à cellules ouvertes en 3D, (c) une mousse à cellules fermées en 3D (Virginie G.V. 2004).

Un polymère alvéolaire résulte de la volonté d'introduire d'une façon maîtrisée une certaine portion de cavités remplies par un fluide généralement newtonien tel que l'air et parfois pseudo-plastique tel que l'azote. Ceci permet d'augmenter la souplesse du polymère, de l'alléger et de le rendre amortissant. Ainsi la structure d'un polymère alvéolaire est constituée d'une matrice polymère, dit squelette, entourée par des cavités fluides dites alvéoles ou cellules. Il faut noter que la matrice polymère est constituée généralement de supports peu rigides et des parois comme le montre **la figure 2**.

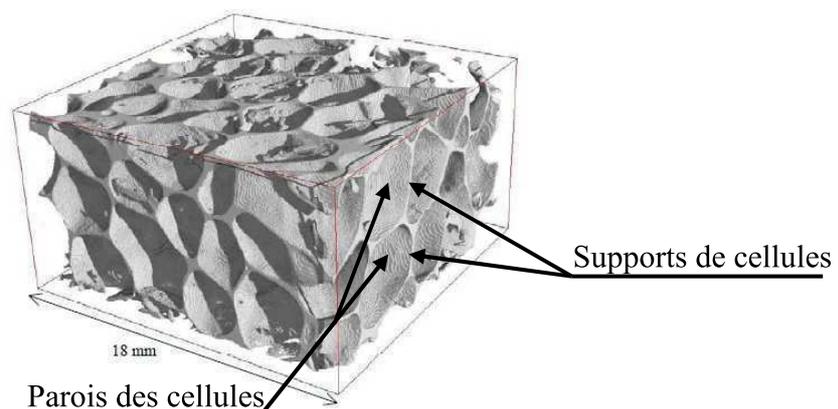


Figure 2. Image 3D d'une mousse de polymère (Souhail Y. 2004).

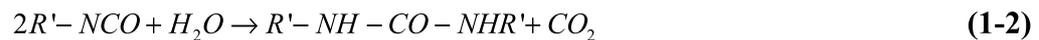
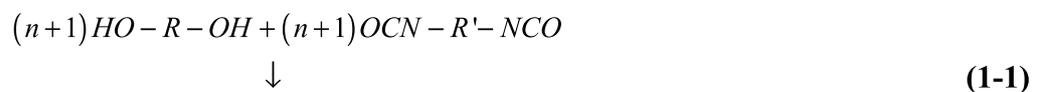
Un polymère est un ensemble de motifs moléculaires ou de monomères liés entre eux par des liaisons covalentes formant ainsi une molécule de grande taille. Il est obtenu suite à une réaction chimique de polymérisation conduisant selon un mécanisme radicalaire ou ionique à des macromolécules linéaires ou réticulées (**Biron M. 2003**). Parmi les polymères les plus

utilisés notamment dans l'industrie automobile, il y a le polyuréthane. Celui-ci est obtenu à partir de la polymérisation de la molécule organique uréthane elle-même issue d'une réaction entre un iso-cyanate et un alcool ayant un atome d'hydrogène mobile (polyol) (Marotel Y. 2003).

I.1.2 Processus de fabrication de la mousse de polyuréthane

La mousse de polyuréthane est obtenue généralement suite au mélange d'une matrice polymère constituée de polyols tels que le polyéther, de catalyseurs tels que l'octate d'étain et un surfactant tel que la silicone avec un iso-cyanate et de l'eau.

L'iso-cyanate réagit d'une part avec le polyol pour former l'uréthane (équation 1-1) et d'autre part avec l'eau pour former le dioxyde de carbone (équation 1-2). La quantité d'eau introduite permet d'ajuster la densité finale de la mousse de polyuréthane (Souhail Y. 2004).



avec R , R' deux monomères et $(n+1)$ le nombre de motifs moléculaires qui seront liés.

Si le dosage varie pendant le processus, les mousses obtenues n'auront ni les mêmes caractéristiques ni les mêmes propriétés. Ces dernières dépendent aussi de la température et de l'humidité lors des réactions.

La plupart des pièces fabriquées à partir de la mousse de polyuréthane sont obtenues par moulage. On distingue deux grandes techniques de moulage : le moulage en continu et le moulage unitaire.

Le moulage en continu (Fig. 3) consiste à faire couler le polyuréthane pâteux de façon continue sur un tapis roulant pour créer d'immenses blocs. Ensuite ces blocs sont découpés dans le sens horizontal. Les matelas font partie des produits fabriqués par moulage continu.



Figure 3. Moulage continu (Heymans N., Decroly P. et al. 2001).

Le découpage d'une pièce de forme complexe à partir d'un bloc de mousse fabriqué en continu n'est ni évident ni simple surtout si la mousse est souple. En effet, l'action de l'outil provoque une déformation aléatoire et non uniforme de la mousse. Ainsi la forme finale sera différente de celle prévue. Il faut noter que, couramment, de nouvelles techniques de découpage des mousses sont utilisées tels que le jet hydraulique à haute pression, le découpage à chaud, etc. Ces techniques sont complexes et ne sont pas bien maîtrisées. En effet, le découpage au fil chaud et le laser provoquent une fusion localisée et donc une modification locale du comportement. Le découpage au jet d'eau n'est valable que pour les faibles épaisseurs. Pour cette raison les constructeurs conçoivent des moules pour obtenir des pièces de formes complexes (**Fig. 4**).

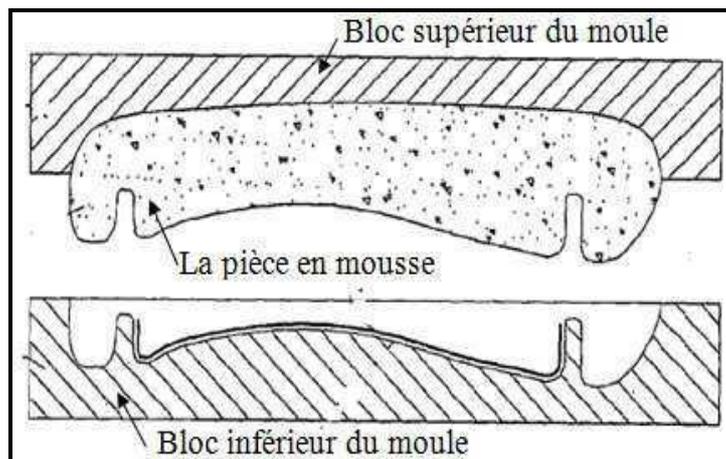


Figure 4. Moule d'une partie du siège de voiture : rehausseur pour enfant (KNAUF SAS 68600 Wolfgangtzen 2006).

Pour chaque forme on a un moule, cette technique est nommée donc moulage unitaire. La technique de moulage nécessite la conception de façon intelligente du moule et des précautions sont à prendre afin d'éviter les problèmes d'écoulement, de refroidissement à l'intérieur du moule, de dépouille et contre dépouille, et surtout de cartonnage¹.

I.1.3 Type de mousses de polyuréthane

Les mousses de polymère peuvent être classées suivant le module d'Young et la densité en des mousses souples, semi-rigides et rigides (**Gibson L.J. and Ashby M.F. 1997**) ou suivant la connectivité des alvéoles. On distingue les mousses spongieuses à cellules ouvertes si les alvéoles sont connectées, les mousses cellulaires à cellules fermées si les alvéoles sont disjointes et les mousses à cellules semi-fermées. Elles peuvent être également classées suivant le champ d'application (isolation thermique, isolation phonique, confort etc.), suivant la nature de la matrice polymère (thermodurcissable / thermoplastique) ou suivant la nature de la réaction du processus de fabrication en des mousses expansées ou compactes (**Fig. 5**). Pour les mousses expansées, la réaction chimique est exothermique. Elle est accompagnée d'un

¹ Le cartonnage est une densification locale de la mousse à l'intérieur du moule. On a donc à l'intérieur de la mousse une zone non expansée.

dégagement de gaz, généralement le CO₂, qui provoque une expansion plus ou moins marquée.

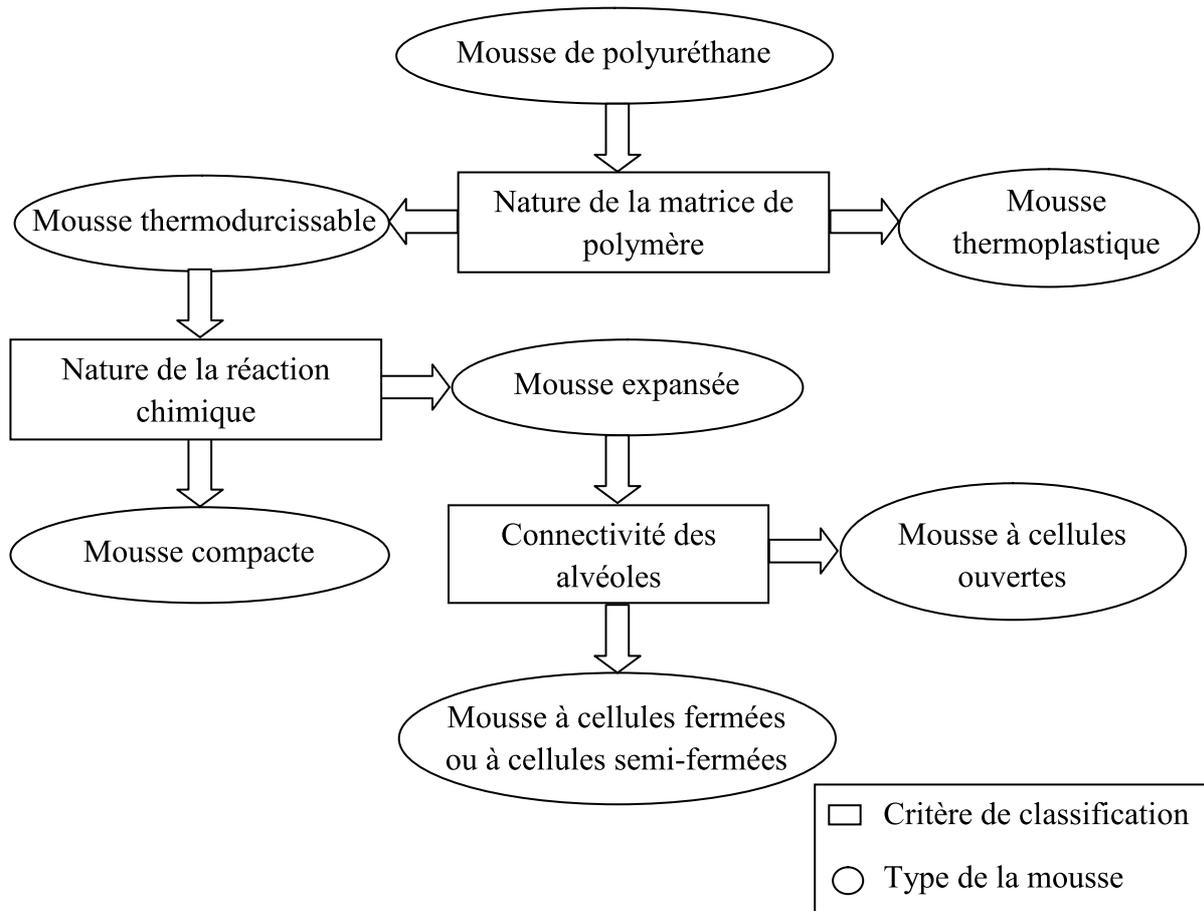


Figure 5. Classification des mousses de polyuréthane.

I.1.4 Propriétés de mousses de polyuréthane et champs d'applications

La mousse de polyuréthane est caractérisée par un spectre de propriétés complexes et intéressantes (Gibson L.J. and Ashby M.F. 1997). La propriété dominante est la faible densité qui ne dépasse généralement pas 80 kg m^{-3} pour les mousses souples. La mousse de polyuréthane est couramment utilisée pour alléger et remplir les vides des structures métalliques. Elle présente également une excellente isolation thermique et acoustique, une forte absorption des liquides et une diffusion complexe de la lumière. D'un point de vue mécanique, elle est caractérisée par un bon pouvoir d'absorption de l'énergie de déformation et des chocs. La faible raideur en fait des amortisseurs mécaniques fiables. En conséquence, grâce à ce spectre de propriétés vaste, la mousse de polyuréthane est utilisée dans de nombreuses applications thermiques et/ou acoustiques, des bâtiments et pour le confort.

Selon le processus de fabrication et des constituants chimiques, l'une ou l'autre des propriétés sera privilégiée et la mousse de polyuréthane sera ainsi destinée à une application précise.

I.1.5 Mécanismes de perte d'énergie dans la mousse de polyuréthane

Le comportement mécanique des structures soumises à des forces ou à des mouvements imposés dépend en particulier de la dissipation d'énergie dans la structure elle-même, tel que la dissipation au niveau des liaisons entre les différents éléments de la structure, et lors de l'interaction avec le milieu environnant.

Les phénomènes physiques intervenant dans cette dissipation sont divers : frottements, interaction fluide-structure, chocs, rayonnement vibratoire aux appuis, viscosité et plasticité, etc.

Pour la mousse de polyuréthane, on distingue généralement trois principaux mécanismes de perte d'énergie à savoir la dissipation thermique, la perte hystérétique et la perte visqueuse.

La dissipation thermique dans la structure de la mousse de polyuréthane se manifeste suite au transfert par convection entre le gaz des alvéoles et la matrice polymère. Cette dissipation est dominante surtout pour les mousses dédiées aux applications acoustiques et thermiques.

Quant à la perte hystérétique, elle est due au comportement viscoélastique de la mousse de polyuréthane qui se traduit par la présence d'un cycle d'hystérésis lors d'un essai de compression/décompression quasi-statique (le comportement viscoélastique sera étudié avec précision dans le deuxième chapitre). La perte hystérétique, dite aussi perte viscoélastique, est influencée par la morphologie et la composition de la matrice polymère.

En ce qui concerne la perte visqueuse, elle est due au comportement visqueux de la mousse de polyuréthane, observé surtout en dynamique. Cette perte dépend de la connectivité des alvéoles (cellules ouvertes, fermées ou semi-fermées), de la résistivité et la viscosité du fluide alvéolaire. Elle est généralement modélisée par un terme quadratique (**équation 1-3**) (**Patten W.N., Sha S. et al. 1998**).

$$F_v(t) = \eta_0 \dot{x}(t) |\dot{x}(t)| \quad (1-3)$$

avec F_v la force d'amortissement visqueux, η_0 le coefficient de perte visqueux quadratique, t le temps et \dot{x} la vitesse.

Il existe également d'autres mécanismes de perte tels que le frottement sec entre les supports de cellules.

Les contributions de chacun de ces mécanismes dans le taux de perte d'énergie total de la mousse de polyuréthane dépendent de plusieurs facteurs structurels et morphologiques tels que la porosité, la densité relative, la nature de cellules, la nature de la matrice polymère, le diamètre des cellules, la forme des cellules (symétrie, gonflée ou allongée), etc. Ces derniers sont bien souvent liés au processus de fabrication.

I.2 Essais, études et modélisations

Par définition, la modélisation d'un système mécanique est une technique qui permet de proposer une représentation théorique interprétable, reproductible et simulable des comportements observés lors des essais expérimentaux. De cette définition, on déduit quelques mots clés qui sont essais, études et modélisations. Ainsi un état de l'art doit contenir une présentation des différents essais et études considérés dans la littérature ainsi qu'une analyse des différentes modélisations.

Cette section est un aperçu bibliographique sur les différents travaux de recherche concernant le comportement mécanique de la mousse de polyuréthane. Pour élargir l'état de l'art, nous avons considéré non seulement les articles traitant de la mousse de polyuréthane mais aussi ceux considérant tous types de mousse de polymère.

I.2.1 Les différents types d'essais

Pour caractériser les mousses de polymère, plusieurs normes telles que la norme **ISO 3386-1:1986** et la norme américaine **D3574-95** de l'ASTM ('American Society for Testing Material') précisent les méthodes d'essais permettant l'évaluation des propriétés mécaniques. Parmi ces essais, on distingue l'essai d'indentation **IFD** ('Indentation Force Deflection'), l'essai de compression **CFD** ('Compression Force Deflection'), le test de rebondissement de balle, et les tests de transmissivité. Il existe encore d'autres types de tests qui sont détaillés dans la norme américaine (**ASTM juin 2010**), les travaux de **Gibson L.J. and Ashby M.F. (1997)** et les travaux de **Herrington R. and Hock K. (1997)**.

L'essai d'indentation (dispositif, **Fig. 6**) consiste à mesurer les forces nécessaires pour atteindre des empreintes de l'ordre de 25% et 65% de l'épaisseur d'échantillon afin d'évaluer la dureté de la mousse. La procédure à suivre est détaillée dans la norme **D3574-95** de l'ASTM ('American Society for Testing Material') (**ASTM juin 2010**).

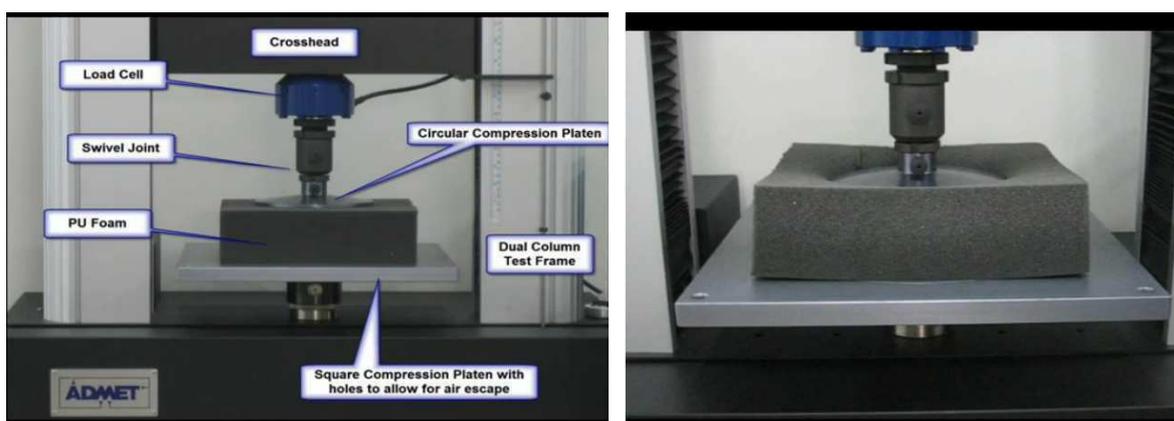


Figure 6. Dispositif d'essai d'indentation IFD (www.ADMET.com).

L'essai de compression permet d'évaluer la rigidité de la mousse par mesure de la force nécessaire pour atteindre 50% de déformation (Yuan C. T. 2008; ASTM juin 2010).

Le test de rebondissement (dispositif, Fig. 7) permet d'évaluer l'énergie absorbée par la mousse lors du contact avec une balle métallique lâchée d'une hauteur initiale bien déterminée. L'énergie absorbée par la mousse est estimée à travers la différence entre la hauteur suite à son premier rebond et la hauteur initiale (Yuan C. T. 2008; ASTM juin 2010).

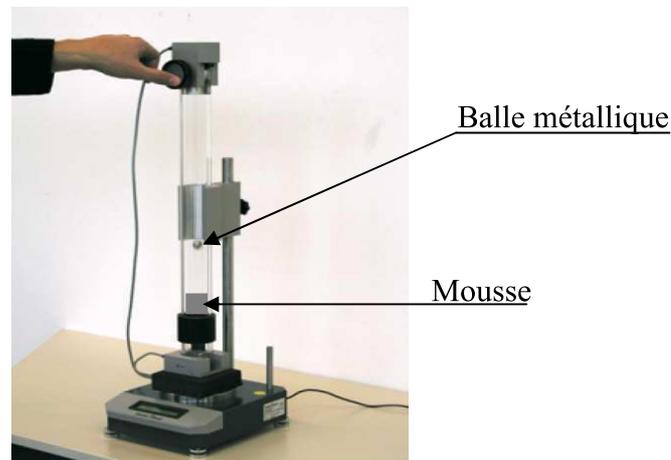


Figure 7. Dispositif d'essai de test de rebondissement (www.Zwick.de).

Les tests de transmissivité sont des tests dynamiques. Ils consistent à placer un échantillon de la mousse entre une base vibrante et un plateau de masse variable. Le rapport entre le niveau de vibration à la base et celui transmis à la masse évalue le pouvoir d'isolation vibratoire de la mousse. Ce pouvoir dépend de la nature d'excitation d'où l'intérêt d'une étude fréquentielle du comportement de la mousse (ASTM juin 2010).

I.2.2 Les différents types d'études

L'étude du comportement des systèmes mécaniques nécessite préalablement de préciser les sollicitations auxquelles ils sont soumis. Suivant le type de la sollicitation on peut distinguer plusieurs types d'études mécaniques telles que l'étude statique, l'étude quasi-statique et l'étude dynamique.

Dans le cas où les effets d'inertie et de la propagation sont non négligeables, l'étude est dite étude dynamique. Dans le cas inverse, on distingue l'étude quasi-statique et en particulier l'étude statique qui s'intéresse aux systèmes en repos.

D'un point de vue mécanique, la plupart des travaux concernant la mousse de polyuréthane portent sur l'étude statique (Tu Z. H., Shim V. P. W. et al. 2001; Goangseup Z., Byeong M. K. et al. 2008) et l'étude quasi-statique (Deng R., Davies P. et al. 2003; Deng R., Davies P. et al. 2006; Ouellet S., Cronin D. et al. 2006; Subhash G., Liu Q. et al. 2006; Dupuis R. and Aubry E. 2008; Njeugna N., Schacher L. et al. 2008). Depuis 1998, le laboratoire MSE 'Mechanical School of Engineering' de l'Université Purdue d'Indiana, USA a présenté des

travaux intéressants orientés vers l'étude de comportement dynamique de la mousse de polyuréthane (Ippili R. K., Davies P. et al. 2007) . Actuellement, des nouvelles recherches ont été orientées vers l'étude de la fatigue des mousses (Bezazi A. and Scarpa F. 2009; Rizov V. and Mladensky A. 2009).

I.2.2.1 Etudes statiques

L'étude statique est assurée par les essais de fluage et de relaxation.

Un essai de relaxation en compression consiste à suivre l'évolution temporelle de la réponse contrainte à un échelon de déformation (Fig. 8) (Lemaitre J. and Chaboche J.L. 2004).

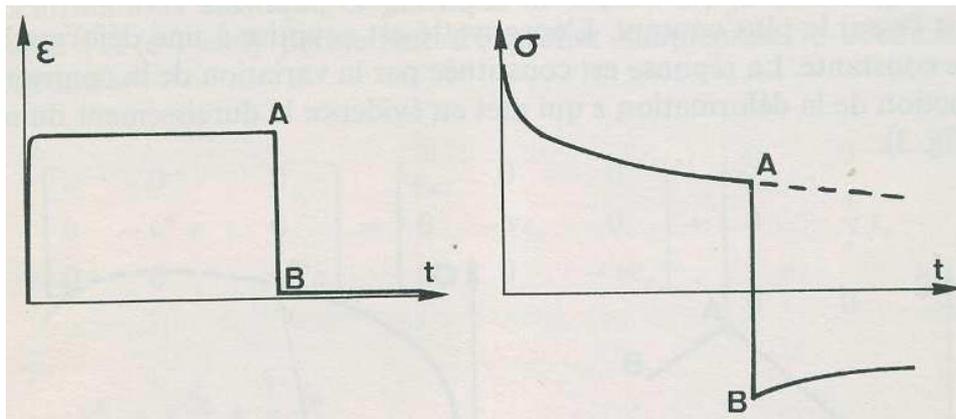


Figure 8. Essai de relaxation (Lemaitre J. and Chaboche J.L. 2004).

L'essai de fluage en compression est l'essai dual de l'essai de relaxation. Il consiste à maintenir un échantillon de mousse sous une contrainte constante σ_0 et à suivre l'évolution de la déformation en fonction du temps à travers la mesure de la complaisance de fluage définie par le rapport $J(t)$ entre la déformation instantanée $\varepsilon(t)$ et la contrainte appliquée (équation 1-4) (Lemaitre J. and Chaboche J.L. 2004).

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (1-4)$$

Un essai de fluage est généralement suivi d'un essai de recouvrance qui consiste à continuer à suivre l'évolution temporelle de la déformation après élimination de la contrainte σ_0 appliquée en fluage (Lemaitre J. and Chaboche J.L. 1998).

Les études statiques ont montré que la mousse ne peut pas être considérée comme un matériau purement élastique ou purement visqueux. En effet sa complaisance de fluage n'est ni indépendante au temps ni proportionnelle à ce dernier. La représentation logarithmique de la complaisance (Carrot C. and Guillet J. 2004) montre quatre zones à savoir la zone vitreuse à court terme, la zone de transition, la zone caoutchouteuse et la zone d'écoulement à long terme (Fig. 9 - c 2).

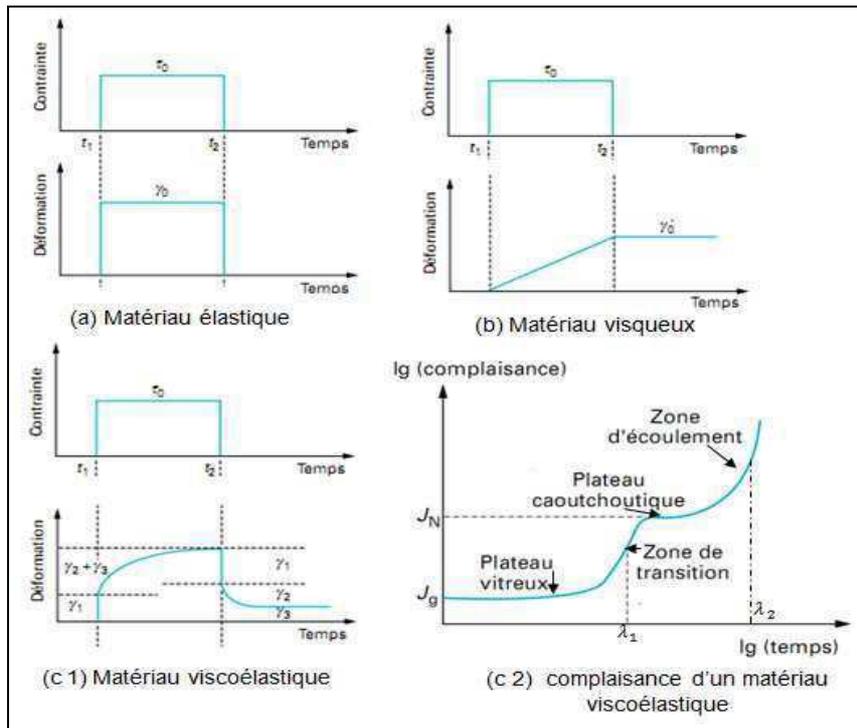


Figure 9. Représentation d'essais de fluage pour trois types de matériaux (a) matériau purement élastique, (b) matériau purement visqueux, (c1, c2) matériau viscoélastique tel que la mousse de polymère (Carrot C. and Guillet J. 2004).

Dans la zone vitreuse à court terme, définie par un plateau, le matériau n'a pas eu le temps nécessaire pour répondre, ainsi aucun mouvement n'est possible.

La zone de transition représente les mouvements locaux des chaînes moléculaires. On remarque la présence d'un point d'inflexion λ_1 qui définit le temps de relaxation en phase de transition pendant lequel la plupart des chaînes de polymères renouvellent quasiment leurs configurations.

La zone caoutchouteuse est expliquée par la présence de contraintes typologiques et physiques nommées enchevêtrements tels que les nœuds typologiques, l'attraction locale, les boucles larges et les masses engendrés par les enchevêtrements.

La zone d'écoulement montre que les enchevêtrements sont temporaires. Ils sont relâchés pour des temps plus longs. On peut définir de la même façon que la zone de transition, le temps de relaxation d'écoulement λ_2 . Il faut noter que cette zone est absente pour les mousses de polymères réticulés.

I.2.2.2 Etudes quasi-statiques

Un essai de compression/décompression est dit quasi-statique ou dynamique selon la vitesse de déformation. **Deng R. (2004)** affirme que la vitesse limite pour le type de mousse de polyuréthane qu'il a étudié est de l'ordre de 10^{-2} s^{-1} . Il considère que tous les essais à vitesse de déformation inférieure à cette vitesse limite rentrent dans le cadre d'étude quasi-statique.

En revanche, tous les essais de compression à grande vitesse de déformation (supérieure à 10^{-2} s^{-1}) sont situés dans le cadre d'études dynamiques.

Les études quasi-statiques réalisées par **Song B., Chen W.W. et al. (2005)**, **Dupuis R. and Aubry E. (2008)** montrent l'influence de la vitesse de déformation et du niveau de compression final atteint sur le comportement de la mousse suite à un essai de compression. La contrainte maximale de compression et l'énergie absorbée par la mousse augmentent avec la vitesse de déformation dont l'effet est plus important lorsque le niveau de compression final et la densité sont élevés (**Saha. M. C., Mahfuz H. et al. 2005; Subhash. G., Liu Q. et al. 2006**).

Des études expérimentales en quasi-statique (**White S.W. 1998; Puri T. 2004; Widdle R.D.Jr., Bajaj A.K. et al. 2008**) sur des mousses de polyuréthane de même type que les mousses que nous étudions, confirment que le comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane sous grande déformation comporte trois zones à savoir la zone linéaire (*zone 1*), la zone plateau (*zone 2*) et la zone de densification (*zone 3*). Ces trois zones sont visibles sur la **figure 10**.

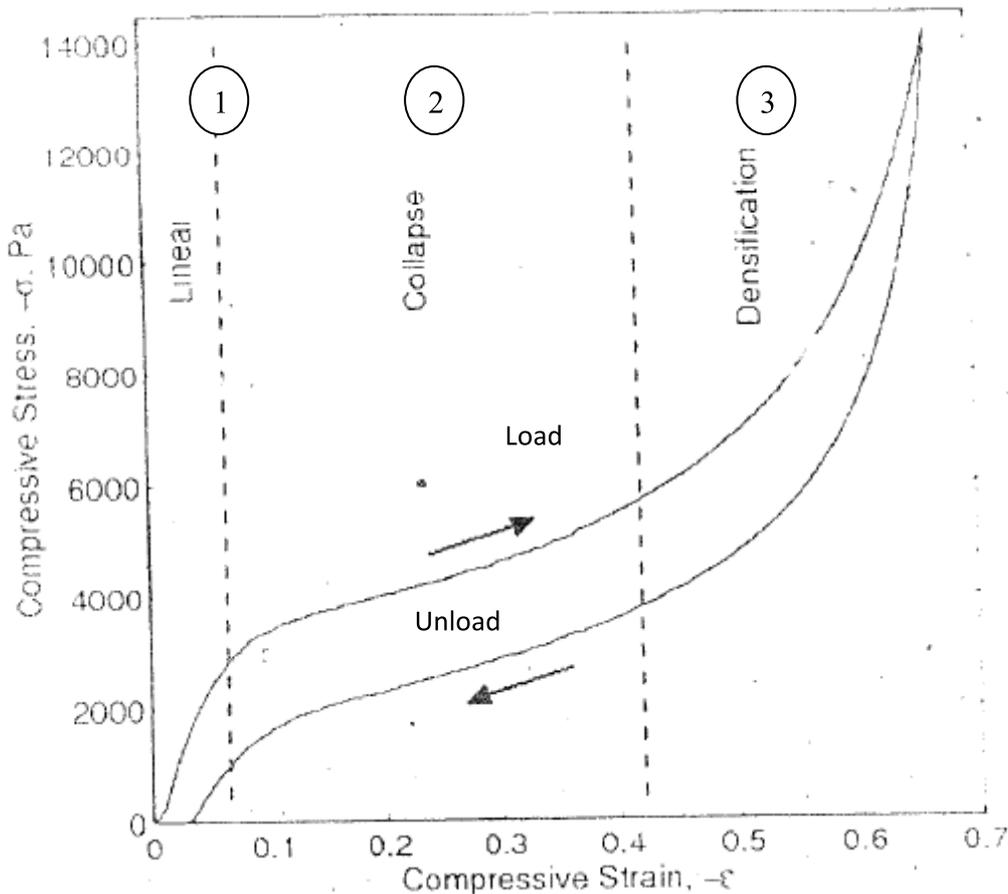


Figure 10. Courbe contrainte déformation d'une mousse polyuréthane, obtenue suite à un essai de compression/décompression quasi-statique (Widdle R.D.Jr., Bajaj A.K. et al. 2008).

A un faible niveau de compression (*zone 1*), la force n'est pas très importante. Quasiment tous les supports des cellules de la mousse ne sont soumis dans ce stade qu'à de la compression. Quelques supports flambent. Pour cette raison, la première zone n'est pas parfaitement linéaire.

En passant à la zone plateau (*zone 2*), le comportement devient caoutchouteux. La mousse commence à s'effondrer. Les supports des cellules ont flambés et ensuite pliés ce qui explique le plateau de déformation.

Suite à l'effondrement, les supports de la face supérieure des cellules contribuent ainsi à la compression des supports de la face inférieure engendrant une augmentation de la contrainte. On parle donc de la densification de la mousse (*zone 3*).

Le chemin de décharge et le chemin de charge sont différents. L'aire du cycle d'hystérésis observé dans la **figure 10** est égale à l'énergie de déformation absorbée par la mousse. Ce cycle montre de nouveau l'aspect viscoélastique de la mousse de polymère constaté en statique.

I.2.2.3 Etudes dynamiques

La réponse de la mousse suite à un essai de compression/décompression dynamique (**Gervillers S., Alaoui A. et al. 2001**) est tellement différente de la réponse en quasi-statique qu'on ne peut pas distinguer les trois zones précédemment décrites. Cette différence est expliquée par la contribution de l'amortissement purement visqueux de la mousse qui devient non négligeable du fait de la grande vitesse de déformation.

Les essais de compression/décompression dynamiques réalisés par **White S.W. (1998); Gervillers S., Alaoui A. et al. (2001); Deng R. (2004)** ont montré la grande sensibilité de la mousse de polymère à la vitesse de sollicitation. La présence d'un cycle d'hystérésis en dynamique confirme ainsi la nature viscoélastique du comportement du matériau.

D'autres travaux ont porté sur l'étude de l'influence des conditions d'essais et de certaines propriétés de la mousse de polymère telles que la température, l'humidité et la densité sur le comportement dynamique. Encore une fois en dynamique, il est montré que plus le niveau de compression final et la densité sont élevés, plus l'effet de la vitesse est important (**Song B., Chen W. W. et al. 2005**).

Les études dynamiques de la mousse consistent aussi à suivre le comportement de la mousse suite à des excitations de différents types telles que l'impulsion (essai d'impact) et l'excitation harmonique. Les sources d'excitations dynamiques sur une assise de voitures, telles que les secousses de la route et les effets des éléments internes du véhicule (problème d'équilibrage du moteur ou des roues) engendrent des vibrations de faibles ou de grandes amplitudes.

L'étude réalisée par **Singh R., Davies P. et al. (2001, 2003 a-b)** a montré que la réponse dynamique de la mousse de polyuréthane suite à des excitations harmoniques est influencée par les conditions environnementales telles que la température et l'humidité, par la nature de l'excitation (faible ou forte amplitude de vibration et la fréquence d'excitation), par la nature

du fluide alvéolaire (compressible ou incompressible), par les dimensions de la structure et par la nature des cellules (ouvertes ou fermées).

Pour de faibles amplitudes de vibration, la réponse est presque elliptique autour du niveau de compression ([Hilyard N.C., Lee W.L. et al. 1991](#); [Cunningham A., Huygens E. et al. 1994](#); [White S.W. 1998](#)).

En revanche, pour de grandes amplitudes de vibration, la courbe est similaire à une courbe d'essai quasi-statique avec une forme hautement dénaturée ([White S.W. 1998](#)). Le pseudo grand axe a été utilisé pour déterminer la raideur dynamique. Le cycle d'hystérésis reste encore présent dans les deux cas : faibles et grandes amplitudes de vibrations (**Fig. 11**).

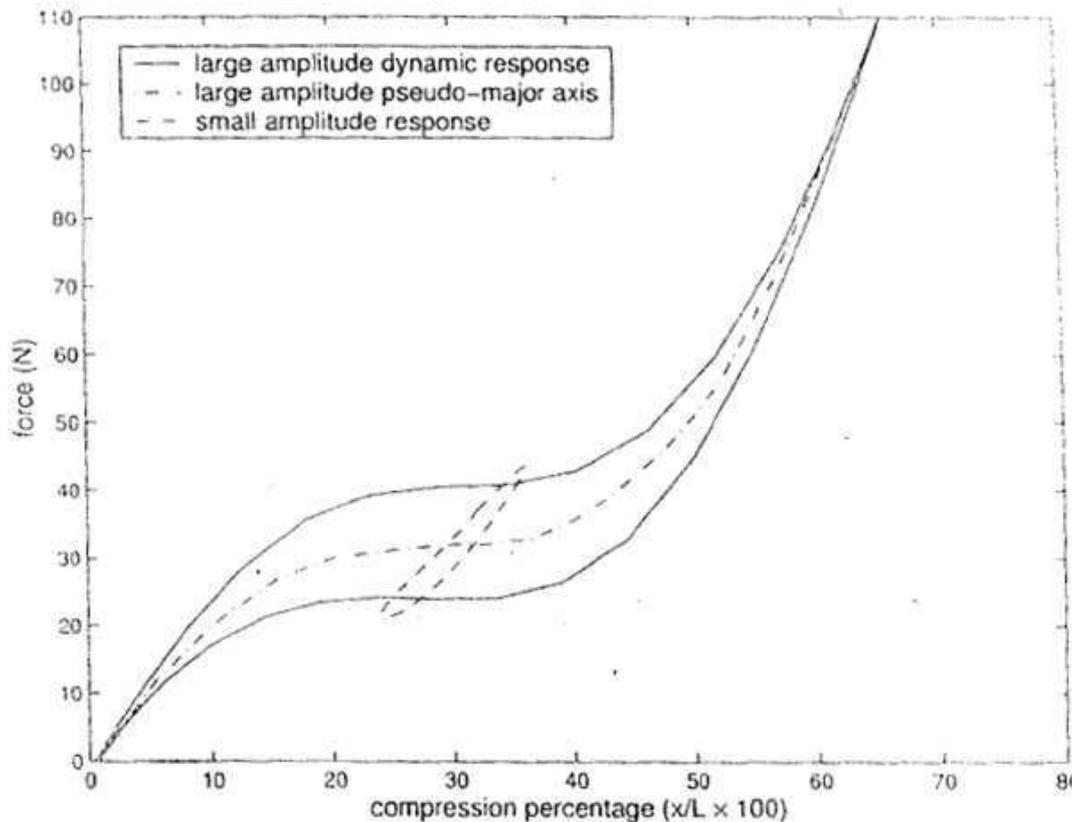


Figure 11. Réponse force de la mousse de polyuréthane dans le cas de faibles et grandes amplitudes de vibrations ([White S.W. 1998](#)).

Dans le cas d'une excitation harmonique purement sinusoïdale, le déphasage entre la déformation et la contrainte vaut $\pi/2$ pour un matériau purement visqueux ou zéro pour un matériau purement élastique. Pour la mousse de polymère, il est différent de zéro et de $\pi/2$ ([White S.W. 1998](#); [Deng R. 2004](#)). En fait, il dépend de la température ambiante et de la fréquence d'excitation. Ceci est une autre manifestation du caractère viscoélastique de la mousse de polymère ([François D. 2008](#)).

I.2.3 Les différents types de modèles

La modélisation du comportement des mousses polymériques en général, et des mousses de polyuréthane à cellules ouvertes en particulier se fonde sur deux approches : la modélisation micromécanique basée sur des études numériques et la modélisation macromécanique qui utilise les outils de la mécanique des milieux continus.

Cette section est dédiée à la présentation des différents modèles de ces deux approches.

Par la suite, une attention particulière sera accordée aux modèles à mémoire quasi-statiques qui appartiennent à l'approche macromécanique.

I.2.3.1 Les modèles micromécaniques

L'analyse micromécanique consiste à considérer les composants fondamentaux de la structure de la mousse tels que la forme des cellules, les parois et les supports des cellules. L'étude de la déformation d'une cellule en fonction de ses caractéristiques géométriques permet d'extraire ses propriétés mécaniques. La réponse de la mousse est ensuite prédite par la méthode des éléments finis ou par la méthode des volumes finis. Le modèle est finalement validé par comparaison entre la réponse simulée et la réponse expérimentale.

Gibson L.J. and Ashby M.F. (1997) ont considéré dans un premier temps une forme cubique des cellules pour développer un modèle microscopique capable de déterminer le module d'Young de la mousse. Ils ont montré que ce dernier dépend de la densité relative de la mousse, du module d'Young de la matrice polymère et du niveau de compression.

Warren W.E. and Kraynik A.M (1988,1991) et **Zhu H. X., Knott J.F. et al. (1997 a, b)** ont supposé une forme tétraédrique régulière des cellules pour étudier le comportement de la mousse en faible déformation et pour développer des relations entre les propriétés élastiques de la mousse et les constantes géométriques du tétraèdre. Ils en ont déduit une élasticité non linéaire due à la non linéarité géométrique des supports surtout autour des niveaux de compression dans lesquels le comportement de la mousse est caoutchouteux.

Les résultats obtenus par réduction du modèle micromécanique de **Warren W.E. and Kraynik A.M (1988)** pour une forme de cellules cubiques sont similaires aux résultats obtenus par **Gibson L.J. and Ashby M.F. (1997)**. Ces deux modèles micromécaniques ont mis en évidence la forte relation entre la microstructure et les propriétés élastiques de la mousse.

Zhu H. X., Knott J.F. et al. (1997 a, b) ont développé un modèle micromécanique tenant compte d'une viscoélasticité non linéaire dans le cas de grandes déformations. La viscoélasticité non linéaire est estimée à partir de la courbe du module de relaxation. La partie élastique dans ce modèle était considérée comme étant gouvernée par des lois polynomiales.

Zhu H. X. and Mills A.M. (1999) ont introduit une non linéarité matérielle à leur modèle micromécanique pour prévoir la réponse en fluage de la mousse de polymère. Dans ce travail,

la viscoélasticité était estimée à partir du module de relaxation par un polynôme d'ordre quatre.

D'autres modèles micromécaniques (Zhu H. X., Thorpe S. M. et al. 2006; Song Y., Wang Z. et al. 2010) sont basés sur la technique «Voronoi». Elle consiste à considérer plusieurs formes de cellules (cubique, tétraédrique, polygonale) distribuées aléatoirement dans l'espace tout en intégrant les non linéarités géométriques et matérielles. Les résultats obtenus dans le cas d'une linéarité géométrique et matérielle par cette technique coïncident avec les résultats précédents de Gibson L.J. and Ashby M.F. (1997).

Zhu H. X., Hobdell J. R. et al. (2000) et Zhu H. X., Thorpe S. M. et al. (2006) ont essayé de déterminer l'influence des propriétés géométriques sur le comportement de la mousse et ses propriétés élastiques en utilisant la technique «Voronoi». Cette étude a montré que le coefficient de poisson ne dépend pas de l'irrégularité géométrique alors que le module d'Young effectif et le module de cisaillement augmentent avec l'irrégularité géométrique.

En conclusion, les modèles micromécaniques permettent l'estimation du comportement non linéaire quasi-statique et développent des relations qui relient les propriétés géométriques des cellules aux propriétés élastiques de la mousse. Cependant, ce type de modèle n'est pas capable de prévoir les propriétés dynamiques de la mousse.

I.2.3.2 Les modèles macromécaniques

Contrairement à l'approche micromécanique qui part de la cellule pour caractériser un échantillon de mousse de polymère, l'approche macromécanique considère la réponse globale d'un échantillon afin d'estimer les propriétés macromécaniques du matériau telles que le module d'Young global, la raideur quasi-statique, la raideur dynamique et le coefficient d'amortissement. Dans le cadre de cette approche, on distingue deux types de modèles à savoir les modèles énergétiques et les modèles à mémoire.

Pour les modèles énergétiques, la relation contrainte-déformation est obtenue par dérivation de la fonction densité d'énergie de déformation obtenue à partir du tenseur de Cauchy Green Gauche (Abaqus manual. 2007; Vallée C., Fortuné D. et al. 2008). La plupart des modèles énergétiques sont établis à partir du développement en série de Taylor de la densité de l'énergie de déformation W donnée par l'équation 1-5.

$$W = \sum_{p,q,r} C_{p,q,r} W_{p,q,r} = \sum_{p,q,r} C_{p,q,r} (I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q (I_3 - 3)^r \quad (1-5)$$

On peut constater que ce développement est en réalité une superposition pondérée de plusieurs densités élémentaires données par $W_{p,q,r}$ dépendantes des invariants (I_1, I_2, I_3) du tenseur de Cauchy Green Gauche. Ces invariants sont fonction des élongations principales $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (équation 1-6).

$$\begin{cases} I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_2^2 \\ I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{cases} \quad (1-6)$$

Le terme $C_{p,q,r}$ définit le poids de pondération de la densité élémentaire et (p,q,r) définissent respectivement l'ordre d'influence des invariants (I_1, I_2, I_3) sur la densité élémentaire. En fait, si par exemple $p=0$, alors on ne constate aucune contribution du premier invariant I_1 sur la densité d'énergie élémentaire. Ceci nous a permis de classifier les modèles énergétiques analytiques en des modèles dépendants de trois invariants, des modèles dépendant de deux invariants (modèles de Mooney-Rivlin (équation 1-7) et de Haine Wilson) et des modèles dépendant d'un seul invariant (modèles de Varga et de Néo-Hookien (Treloar L. R. G. 1975) équation 1-8) (voir schématisation Fig. 12).

$$W = \frac{\mu_1}{2}(I_1 - 3) + \frac{\mu_2}{2}(I_2 - 3) \quad (1-7)$$

$$W = \frac{\mu_1}{2}(I_1 - 3) ; \mu_2 = 0 \quad (1-8)$$

avec (μ_1, μ_2) des paramètres caractéristiques du matériau.

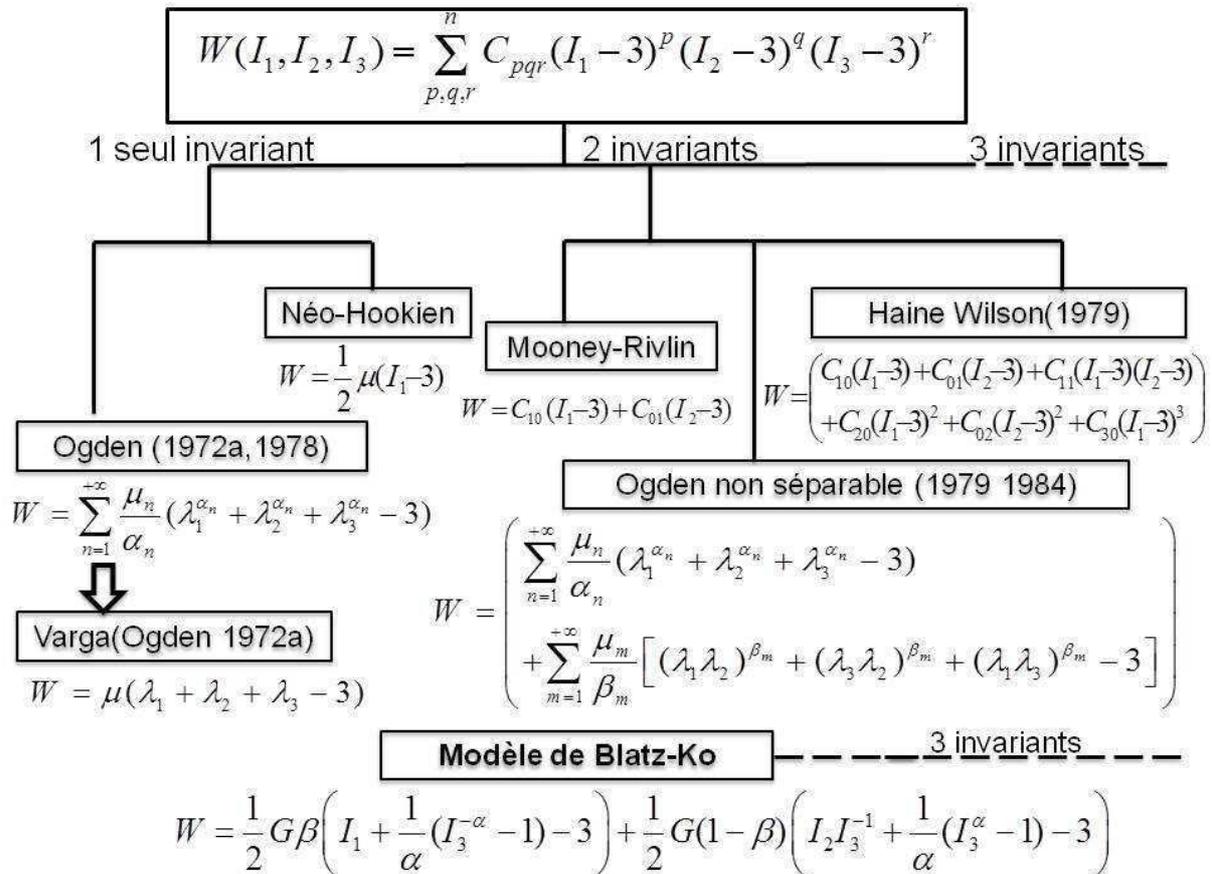


Figure 12. Quelques modèles énergétiques.

Le modèle d'Ogden, donné par l'équation 1-9, (Ogden R. W. 1972; Storåkers B. 1986) est un modèle encore plus général dérivé du développement en série de Taylor de la densité d'énergie de déformation. Il suppose une superposition de n modèles de Green Lagrange généralisés.

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{2\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (1-9)$$

avec $(\mu_i, \alpha_i)_{i=1..n}$ des paramètres caractéristiques du matériau.

Les paramètres du matériau sont déterminés à partir des études expérimentales basées sur des essais de compression uni-axiale et des essais de cisaillement.

Dans le même cadre que les modèles énergétiques, un modèle hyper-élastique ou dit «**HYPERFOAM**» est couramment utilisé pour les matériaux caoutchouteux et les matériaux à comportement quasi-caoutchouteux comme la mousse de polymère. Le modèle **HYPERFOAM**, donné par l'équation 1-10, est basé sur une description modifiée de la fonction densité d'énergie de déformation d'Ogden (équation 1-9) afin de la généraliser pour des matériaux compressibles (Shen Y., Golnaraghi F. et al. 2001; Zhang X. F., Andrieux F. et al. 2010).

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{2\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) + \frac{1}{\beta_i} (J^{\alpha_i \beta_i} - 1); J = \prod_{i=1}^3 \lambda_i \quad (1-10)$$

avec J un paramètre qui détermine la variation relative de volume, $(\mu_i, \alpha_i, \beta_i)_{i=1..n}$ sont des paramètres caractéristiques du matériau et n est l'ordre du modèle d'Ogden.

L'identification des paramètres $(\mu_i)_{i=1..n}$ permet de déterminer le module de cisaillement initial μ à partir de la relation $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$. L'identification du degré de compressibilité β_i permet de définir le module initial de compressibilité K_0 et le coefficient de Poisson ν_0 en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{cases} K_0 = \sum_{i=1}^n 2\mu_i \left(\frac{1}{3} + \beta_i\right) \\ \nu = \sum_{i=1}^n \nu_i = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{1 + 2\beta_i} \end{cases} \quad (1-11)$$

avec ν_i : le coefficient de Poisson du $i^{\text{ème}}$ modèle de Green Lagrange généralisé.

En utilisant le modèle HYPERFOAM, Gervillers S., Alaoui A. et al. (2001) ont montré à travers des essais de compression CFD ('Compression Force Deflection') et d'indentation IFD ('Indentation Force Deflection') que le coefficient de Poisson pour leur mousse de polymère peut être considéré nul. Cependant, Widdle R.D.Jr., Bajaj A.K. et al. (2008) ont précisé que l'hypothèse d'un coefficient de Poisson nul diminue l'exactitude des prédictions obtenues par un modèle viscoélastique non linéaire décrivant le comportement de la mousse suite à un essai de compression unidirectionnelle.

En analysant les résultats trouvés par **Widdle R.D.Jr., Bajaj A.K. et al. (2008)**, on remarque que l'apport en précision de l'hypothèse du coefficient de Poisson non nul n'est pas vraiment important vis à vis des résultats obtenus avec un coefficient de Poisson nul. Pour cette raison et des raisons de simplification, l'hypothèse d'un coefficient de Poisson nul est très souvent adoptée.

La comparaison des résultats expérimentaux de compression quasi-statique pendant la phase de charge avec des simulations des modèles énergétiques obtenues par «**ABAQUS**» (**Dupuis R. and Aubry E. 2008**) a montré que le modèle énergétique d'Ogden d'ordre 3 est le plus intéressant puisqu'il suit de façon satisfaisante l'allure de la courbe contrainte-déformation expérimentale.

Mills N.J. and Gilchrist A. (2000) ont utilisé le modèle d'Ogden pour prédire la réponse de la mousse de polymère suite à un essai d'indentation. Il leur a permis de fournir une description qualitative de la forme de l'empreinte et de déterminer l'effet des dimensions du bloc de mousse sur la dureté du matériau.

Jemiolo S. and Turteltaub S. (2000) ont développé une extension du modèle d'Ogden par intégration de la densité de la mousse dans le modèle comme une variable, ceci dans le but de déterminer la densité relative optimale pour maximiser l'énergie absorbée.

En ce qui concerne les modèles macromécaniques à mémoire, spécifiques aux mousses de polyuréthane, on en distingue deux types à savoir le modèle à mémoire entier (**White S.W. 1998; Singh R., Davies P. et al. 2001; Singh R., Davies P. et al. 2003 (a-b); Ippili R. K., Davies P. et al. 2008**) et le modèle à mémoire fractionnaire (**Deng R. 2004; Deng R., Davies P. et al. 2006**). Les équations de ces modèles seront développées ultérieurement.

Les modèles à mémoire illustrent l'effet de l'historique de la mousse de polyuréthane sur son comportement. La réponse de la mousse pendant un essai de compression/décompression dynamique ou quasi-statique à l'instant $t=t_a$ est influencée par les valeurs de la réponse de l'instant $t=0$ jusqu'à l'instant actuel de calcul t_a . Les modèles à mémoire décrivent la viscoélasticité par une fonction de convolution et la non linéarité du comportement élastique par une fonction polynomiale. Le produit de convolution peut être dérivé d'une équation différentielle ordinaire, ainsi le modèle est dit un **modèle à mémoire entier**, ou dérivé d'une équation différentielle contenant une dérivation fractionnelle, dans ce cas le modèle est un **modèle à mémoire fractionnaire**. Les équations différentielles entière et non entière seront développées dans la section suivante.

Pour identifier les paramètres des modèles à mémoire, des études expérimentales en dynamique et en quasi-statique ont été réalisées. **Singh R., Davies P. et al. (2001)** ont développé, dans un premier travail, un processus d'identification dans le domaine temporel basé sur l'estimation de la solution analytique de son modèle à mémoire entier et linéaire (comportement élastique linéaire avec fonction de convolution pour comportement viscoélastique). Cette solution analytique est établie pour caractériser le comportement de la mousse de polyuréthane suite à un essai d'impact à faible amplitude. Dans le travail de **Singh**

R., Davies P. et al. (2003-a) la *méthode de Prony* était la méthode de base pour l'estimation de la solution analytique.

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale à grandes amplitudes, **Singh R., Davies P. et al. (2003-b)** ont considéré la forme non linéaire de son modèle à mémoire entier. Les propriétés dynamiques de la mousse de polyuréthane ont été ensuite estimées à travers la *méthode de la balance harmonique*.

D'autres méthodes ont été considérées par **Deng R. (2004)** et **Ippili R.K., Davies P. et al. (2008)** pour étudier le comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane. Ces méthodes seront détaillées ultérieurement.

Les paramètres des modèles à mémoire relatés par les différents travaux, mettent en évidence qu'ils sont dépendants des conditions essais. Ceci affecte le caractère général de leur représentativité tant en quasi-statique qu'en dynamique.

I.2.4 Précision sur les modèles à mémoire développés en quasi-statique

A partir de l'aperçu bibliographique ci-dessus sur les modèles micromécaniques et macromécaniques, nous avons constaté que les modèles à mémoire sont capables d'une part de tenir compte de l'effet de mémoire et d'autre part de décrire le comportement élastique et le comportement viscoélastique à la fois en quasi-statique et en dynamique. Ceci nous a permis de choisir les modèles à mémoire comme des modèles de base à développer dans cette thèse en particulier en quasi-statique.

L'objectif de cette section est de présenter en détail les modèles à mémoire développés dans la littérature en quasi-statique. Cet aperçu va permettre de comprendre la démarche de modélisation et ensuite les modifications que nous apporterons à ces modèles dans le chapitre suivant.

On rappelle que lors d'un essai de compression/décompression quasi-statique, la mousse de polyuréthane sous grande déformation présente à la fois un comportement élastique non linéaire et un comportement viscoélastique. Nous allons d'abord présenter comment a été modélisé le comportement élastique non linéaire, puis le comportement viscoélastique à l'aide des deux modèles à mémoire entier et fractionnaire.

I.2.4.1 Modélisation du comportement élastique non linéaire

Les modèles à mémoire modélisent généralement le comportement élastique par un ressort non linéaire décrit par une fonction de puissance (**équation 1-12**, **Rusch K. C. 1970; Patten W.N., Sha S. et al. 1998**) ou par une fonction polynomiale.

$$\sigma_e(t) = E(a\varepsilon^{-p} + b\varepsilon^{-q}) \quad (1-12)$$

avec σ_e la contrainte élastique, ε le vecteur de déformation, E le module de Young et (a, p, b, q) des constantes à déterminer à partir de la courbe contrainte élastique-déformation.

La représentation polynomiale développée par **White S.W. (1998)** et **Ippili R.K., Davies P. et al. (2008)** est donnée par l'équation 1-13. On y distingue clairement le paramètre k_i^w présentant la raideur du ressort non linéaire d'ordre i .

$$F_e(t) = \sum_{i=1}^{M^w} k_i^w x^i \quad (1-13)$$

avec F_e la réponse force élastique, x le déplacement et M^w l'ordre de polynôme de **White S.W. (1998)**.

Deng R. (2004) a décrit la réponse élastique de sa mousse par une somme de polynômes orthogonaux (équation 1-14). Les coefficients pondérant ces polynômes ne sont pas directement les raideurs du ressort non linéaire. Ces dernières sont déduites par développement de l'équation 1-14 jusqu'à avoir une expression similaire à celle de l'équation 1-13.

$$F_e(t) = \sum_{i=1}^{M^d} k_i^d P_i(x) \quad (1-14)$$

avec M^d l'ordre de polynôme de **Deng R. (2004)** et $(k_i^d)_{i=1..M^d}$ les coefficients pondérant des polynômes orthogonaux $P_i(x)$ donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x) = x \\ P_2(x) = x^2 - \frac{3}{4} l_0 x \\ P_3(x) = x^3 - \frac{4}{3} l_0 x^2 + \frac{2}{5} l_0^2 x \\ P_4(x) = x^4 - \frac{15}{8} l_0 x^3 + \frac{15}{14} l_0^2 x^2 - \frac{5}{28} l_0^3 x \\ P_5(x) = x^5 - \frac{12}{5} l_0 x^4 + 2 l_0^2 x^3 - \frac{2}{3} l_0^3 x^2 + \frac{1}{14} l_0^4 x \\ P_6(x) = x^6 - \frac{35}{12} l_0 x^5 + \frac{35}{11} l_0^2 x^4 - \frac{35}{22} l_0^3 x^3 + \frac{35}{99} l_0^4 x^2 - \frac{7}{264} l_0^5 x \\ P_7(x) = x^7 - \frac{24}{7} l_0 x^6 + \frac{60}{13} l_0^2 x^5 - \frac{40}{13} l_0^3 x^4 + \frac{150}{143} l_0^4 x^3 - \frac{24}{143} l_0^5 x^2 + \frac{4}{429} l_0^6 x \\ \dots \end{array} \right. \quad (1-15)$$

I.2.4.2 Modélisation du comportement viscoélastique (modèle à mémoire entier)

Lorsqu'un matériau dissipe une partie de l'énergie reçue et emmagasine l'autre partie, il est dit viscoélastique. Cette définition a permis de construire à partir des éléments rhéologiques de base : les ressorts (éléments conservatifs de l'énergie) et les amortisseurs (éléments visqueux dissipatifs d'énergie), les premiers modèles décrivant le comportement viscoélastique tels que le modèle de Maxwell (équation 1-16), le modèle de Kelvin-Voigt (équation 1-17) et le modèle de Zener (équation 1-18). Ces modèles constituent les modèles élémentaires de la viscoélasticité linéaire (**Fig. 13**). Il existe encore d'autres modèles

élémentaires de la viscoélasticité linéaire tels que le modèle de Dupaix-Boyce et le modèle de Kelvin (Elfarhani M. 2010).

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{E} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t) \quad (1-16)$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (1-17)$$

$$\frac{E_1 + E_2}{E_1} \dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_2}{\eta} \varepsilon = \frac{1}{E_1} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t) \quad (1-18)$$

où σ désigne ici la contrainte viscoélastique, ε la déformation, (E, E_1, E_2) les raideurs des différents ressorts et η le coefficient d'amortissement visqueux des amortisseurs.

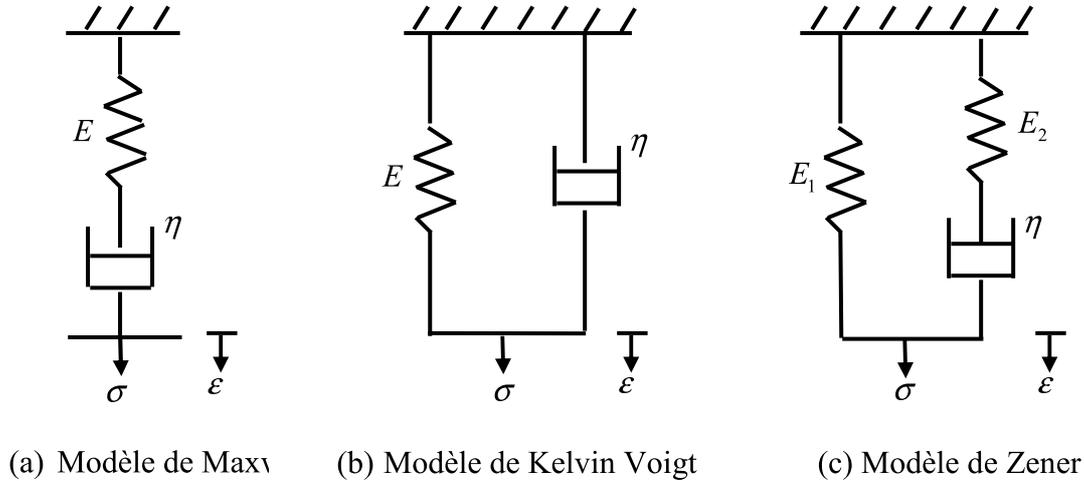


Figure 13. Modèles élémentaires de la viscoélasticité linéaire.

La description du comportement viscoélastique décrite par White S.W. (1998) et Ippili R.K., Davies P. et al. (2008) est une présentation plus générale composée par une combinaison quelconque de modèles élémentaires en série et en parallèle. Dans ce cas, la relation entre la contrainte et la déformation est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$p_0 \sigma(t) + p_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} + \dots + p_m \frac{d^m \sigma(t)}{dt^m} = q_0 \varepsilon(t) + q_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \dots + q_n \frac{d^n \varepsilon(t)}{dt^n} \quad (1-19)$$

avec (n, m) deux entiers quelconques et $((q_i)_{i=1..n}, (p_i)_{i=0..m})$ des coefficients caractéristiques du matériau.

Le passage par une transformation de Laplace en supposant des conditions initiales nulles permet d'établir la relation suivante :

$$\sigma^*(s) = H_{ve}^*(s) \varepsilon^*(s) = \frac{\sum_{l=0}^m q_l s^l}{\sum_{l=0}^n p_l s^l} \varepsilon^*(s) \quad (1-20)$$

avec s l'opérateur de Laplace et $(\sigma^*, \varepsilon^*, H_{ve}^*)$ respectivement les représentations dans le

domaine de Laplace de la contrainte viscoélastique σ , la déformation ε et la fonction transfert H_{ve} .

L'écriture de la contrainte viscoélastique en fonction de la déformation est ainsi donnée par :

$$\sigma(t) = \int_0^t H_{ve}(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (1-21)$$

Cette modélisation permet de tenir compte de l'effet mémoire à travers le produit de convolution : la réponse viscoélastique à l'instant t dépend de l'historique du matériau. Elle est généralement nommée dans la littérature '*modélisation héréditaire*'. En réalité, l'appellation 'modèle à mémoire entier' est une désignation que nous avons choisi afin de différencier cette description de celle du modèle à mémoire fractionnaire.

1.2.4.3 Modélisation du comportement viscoélastique (modèle à mémoire fractionnaire)

Nous avons vu que les éléments rhéologiques de base dans une modélisation mécanique sont généralement le ressort, l'amortisseur et la masse.

L'élément masse modélise l'énergie cinétique. Son comportement est proportionnel à la dérivée seconde par rapport au temps du déplacement (**équation 1-22**).

$$F(t) = m\ddot{x}(t) = mD^2(x(t)) \quad (1-22)$$

avec F la réponse force, \ddot{x} l'accélération, m la masse et D^i l'opérateur de dérivation d'ordre i .

L'amortisseur est un composant mécanique modélisant les pertes purement visqueuses. Son comportement est proportionnel à la dérivée du déplacement (**équation 1-23**).

$$F(t) = c\dot{x}(t) = cD^1(x(t)) \quad (1-23)$$

avec c le coefficient d'amortissement visqueux et \dot{x} la vitesse.

Le ressort est un élément purement élastique modélisant l'énergie emmagasinée. Son comportement est proportionnel au déplacement (**équation 1-24**).

$$F(t) = kx(t) = kD^0(x(t)) \quad (1-24)$$

avec k la raideur du ressort et x le déplacement.

Un élément viscoélastique a un comportement situé entre celui du ressort et le comportement de l'amortisseur. Pour décrire la viscoélasticité, un nouvel élément rhéologique modélisé par l'**équation 1-25** a été ajouté (**Gement A. 1935; Bagley R.L. and Torvik P.J. 1984**). Ce composant est dit ressort fractionnaire, en anglais 'spring pot' (**Fig. 14**).

$$F(t) = \eta x^{(\beta)}(t) = \eta D^\beta(x(t)) \quad (1-25)$$

avec η désigne ici la raideur du ressort fractionnaire et β un fractionnaire entre 0 et 1. S'il tend vers zéro, l'élément viscoélastique revient à un comportement quasi-linéaire. En revanche, s'il tend vers un, l'élément est à dominance visqueuse.

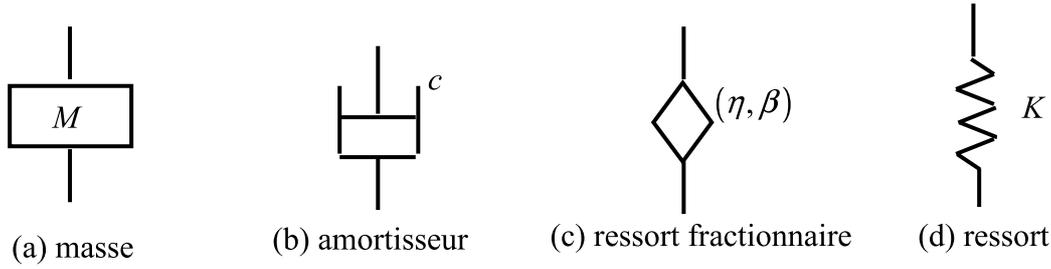


Figure 14. Éléments de base d'une modélisation mécanique (macromécanique).

De la même façon que pour les modèles élémentaires détaillés dans la description du modèle à mémoire entier, on peut imaginer des modèles élémentaires fractionnaires (**Lewandowski R. and Chorzyczewski B. 2010**). Une combinaison en série et en parallèle des modèles élémentaires fractionnaires permet de construire un modèle fractionnaire linéaire plus général donné par l'expression suivante :

$$p_0 \sigma^{\beta_0}(t) + p_1 \frac{d\sigma^{\beta_1}(t)}{dt^{\beta_1}} + \dots + p_m \frac{d^{\beta_m} \sigma(t)}{dt^{\beta_m}} = q_0 \varepsilon^{\gamma_0}(t) + q_1 \frac{d\varepsilon^{\gamma_1}(t)}{dt^{\gamma_1}} + \dots + q_n \frac{d^{\gamma_n} \varepsilon(t)}{dt^{\gamma_n}} \quad (1-26)$$

avec $((\beta_i)_{i=0..m}, (\gamma_i)_{i=0..n})$ des fractionnaires quelconques.

La dérivation fractionnelle a été prouvée théoriquement et expérimentalement aux différentes échelles macroscopique et microscopique. La dérivation fractionnelle constitue la base théorique des travaux dans différentes disciplines physiques à savoir le domaine médical (**Craiem D.O., Rojo F. J. et al. 2008**), le domaine biologique, le domaine mécanique des matériaux et l'automatique (**Pommier V., Sabatier J. et al. 2002; Sabatier J., Oustaloup A. et al. 2002**). Cependant, cette dérivation nécessite des développements mathématiques très complexes.

Des méthodes analytiques et numériques sont développées pour résoudre un problème de dérivation fractionnelle non linéaire telles que la méthode de décomposition d'Adomian (**Daftardar-Gejji V. and Jafari H. 2005; Ray S. S. and Bera R.K. 2005; Wang Z.H. and Wang X. 2010**) et la décomposition de Taylor (**Cenesiz Y., Keskin Y. et al. 2010**). Ces méthodes sont utilisées pour résoudre la version non linéaire de l'équation de **Bagley R.L. and Torvik P.J. (1984)**.

Aucune technique simple n'est capable jusqu'à aujourd'hui de trouver la solution analytique du modèle fractionnaire général donné par l'équation 1-26. Pour cette raison, **Deng R. (2004)** a modélisé la viscoélasticité de la mousse qu'il a étudié par des éléments linéaires vérifiant l'équation 1-27.

$$\begin{cases} F_{ve}(t) = \sum_{i=1}^{N^d} V_i(t) & (a) \\ \frac{dV_i(t)}{dt} + b_i V_i(t) = c_{1,i} x(t) + c_{2,i} D^{\beta_i} x(t) & (b) \end{cases} \quad (1-27)$$

avec F_{ve} la force viscoélastique globale et $(V_i)_{i=1..N^d}$ les forces viscoélastiques élémentaires.

Les paramètres b_i donnent une information générale sur tous les taux de relaxation relatifs aux différents niveaux de compression (que ce soit en charge ou en décharge). Le paramètre c_1 est le module instantané (vitreux), il présente la contribution de la partie élastique dans la réponse. Le paramètre c_2 est le module de perte (caoutchouteux), il présente la contribution de la partie viscoélastique dans la réponse.

Le passage par une transformation de Laplace à partir de l'équation **1-26** permet d'établir une fonction de transfert ainsi qu'un produit de convolution modélisant l'effet de mémoire. Le modèle est donc dit modèle à mémoire fractionnaire.

I.2.5 Méthodes d'identification des paramètres des modèles à mémoire en quasi-statique

Dans la précédente section, nous avons présenté un aperçu bibliographique détaillé sur les structures mathématiques des modèles à mémoire développés dans la littérature pour caractériser le comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane.

Dans cette section, nous présenterons les méthodes d'identification des paramètres inconnus des modèles développés dans la littérature et qui sont appropriée aux modèles à mémoire entier et fractionnaire.

Pour le modèle à mémoire fractionnaire développé en quasi-statique par **(Deng R., Davies P. et al. 2003, Deng R. 2004; Deng R., Davies P. et al. 2006)** les paramètres à identifier sont l'ordre du polynôme élastique M^d , le vecteur $(k_i^d)_{i=1..M^d}$ à partir duquel on détermine le vecteur de raideurs élastiques, le nombre N^d de forces viscoélastiques élémentaires $(V_i)_{i=1..N^d}$ et le vecteur de paramètres viscoélastiques $(b_i, c_{1,i}, c_{2,i}, \beta_i)_{i=1..N^d}$.

Pour le modèle à mémoire entier développé en quasi-statique par **White S.W. (1998) et Ippili R. K., Davies P. et al. (2008)** les paramètres à identifier sont l'ordre du polynôme élastique M^w , le vecteur de raideurs élastiques $(k_i^w)_{i=1..M^w}$ et les paramètres de la force viscoélastique.

On distingue dans la littérature deux méthodes appropriées aux modèles à mémoire entier et fractionnaire : la 'méthode de la force-moyenne' développée par **Ippili R. K., Davies P. et al. (2008)** afin d'identifier les paramètres de son modèle à mémoire entier et la 'méthode de la différence de force entre la charge et la décharge' établie par **Deng R. (2004) et Deng R., Davies P. et al. (2006)** pour le modèle à mémoire fractionnaire.

I.2.5.1 Méthode de la force moyenne

Lors d'un essai de compression/décompression quasi-statique, la mousse de polyuréthane sous grande déformation présente à la fois un comportement viscoélastique et un comportement élastique non linéaire. Ainsi, si la réponse élastique est déterminée alors il devient possible d'évaluer la force viscoélastique par le calcul de la différence entre la force

totale et le polynôme élastique. C'est sur cette idée qu'est basée la méthode d'identification de force moyenne.

La méthode de la force moyenne est une méthode itérative en trois étapes (**Fig. 15**). Elle consiste à prévoir, dans la première étape, un polynôme élastique initial qui sera ajusté en fur et à mesure afin d'obtenir la meilleure correspondance entre la courbe force-déplacement expérimentale et celle obtenue par le modèle à mémoire entier. Le vecteur de raideurs est identifié à chaque itération en utilisant les commandes 'Polyfit' et 'Polyval' du logiciel de programmation et de calcul matriciel « **MATLAB** ».

Dans la deuxième étape, les paramètres viscoélastiques de la mousse sont identifiés en utilisant une méthode d'estimation telle que la méthode de régression linéaire ARMA (**Ippili R. K., Davies P. et al. 2008**).

Suite à l'évaluation de la force viscoélastique, il devient donc possible de déterminer, dans la troisième étape, un nouveau polynôme élastique. La méthode converge lorsque les deux polynômes de la première et la dernière étape sont presque confondus.

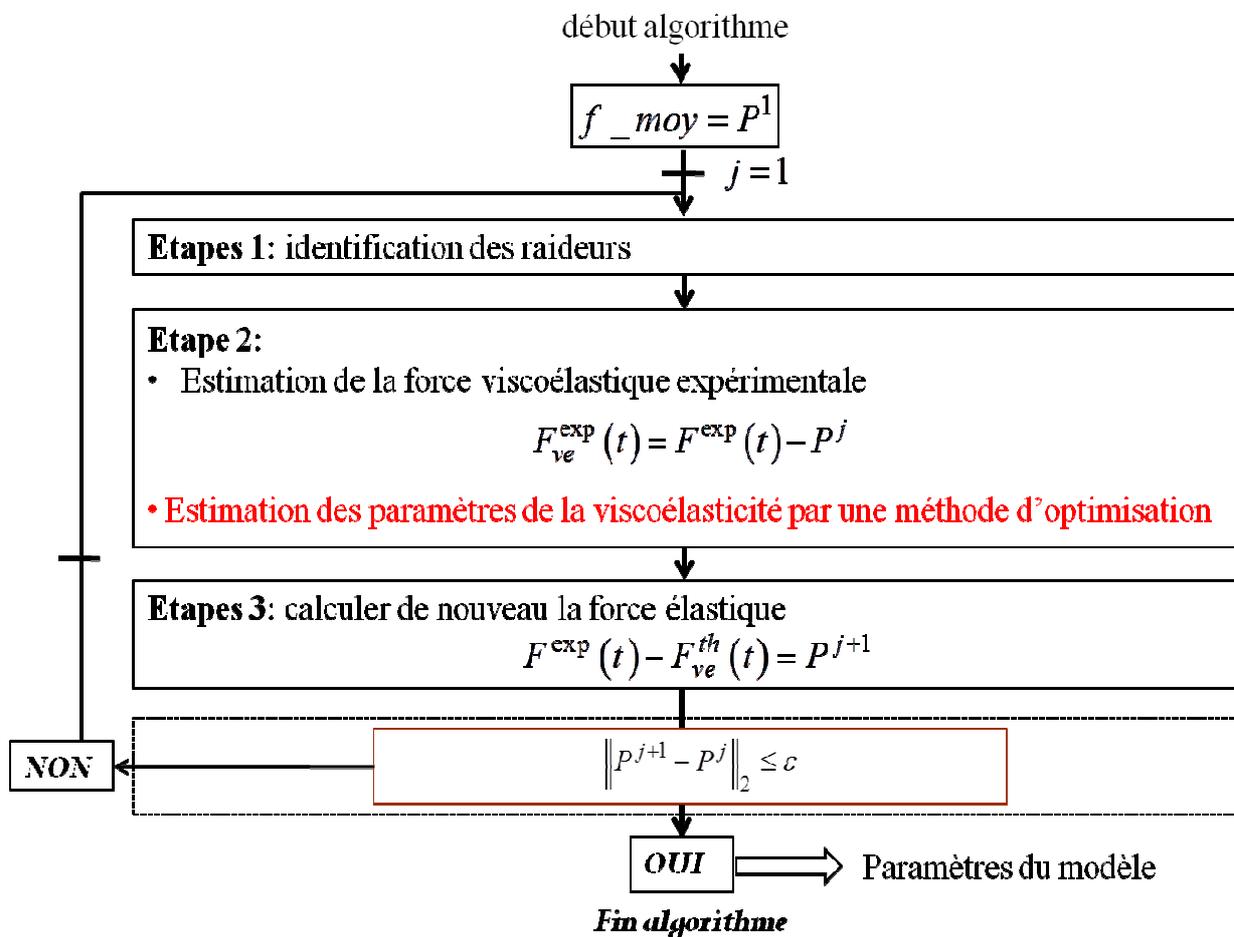


Figure 15. Algorithme de la méthode de la force moyenne.

Cette méthode est appelée '*méthode de la force-moyenne*' du fait que la courbe moyenne entre la charge et la décharge (**Fig. 16**) constitue le polynôme élastique initial de la première itération. Nous pensons que cette hypothèse limite l'ensemble des solutions possibles pour le

problème d'identification des paramètres de la mousse. En effet, la force élastique finale obtenue sera proche de la courbe moyenne.

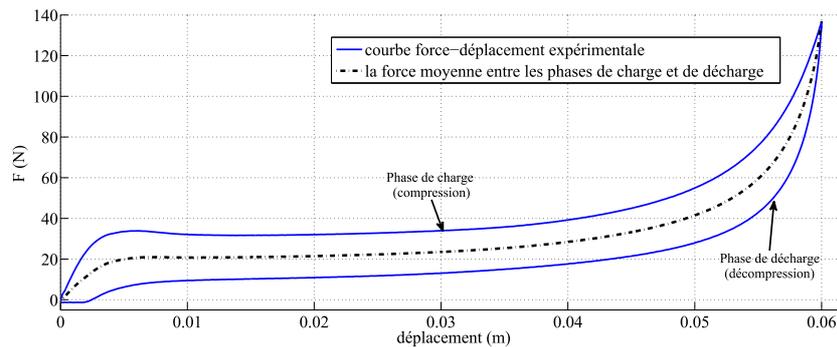


Figure 16. Courbe moyenne entre la charge et la décharge (courbe noire) et la courbe expérimentale force déplacement (courbe bleu), vitesse de déformation $=5.33 \cdot 10^{-4} \text{sec}^{-1}$.

I.2.5.2 Méthode de la différence de force entre la charge et la décharge

Le cycle d'hystérésis constaté lors d'un essai de compression/décompression quasi-statique n'est dû qu'au comportement viscoélastique de la mousse. La méthode, mise au point par (Deng R. 2004; Deng R., Davies P. et al. 2006) pour le modèle à mémoire fractionnaire, est basée sur la symétrie de la force élastique entre les phases de charge et de décharge. Ainsi, seuls les paramètres viscoélastiques seront présents dans l'expression analytique de la différence entre la force de charge et celle de décharge. Cette méthode comporte trois étapes principales (Fig. 17).

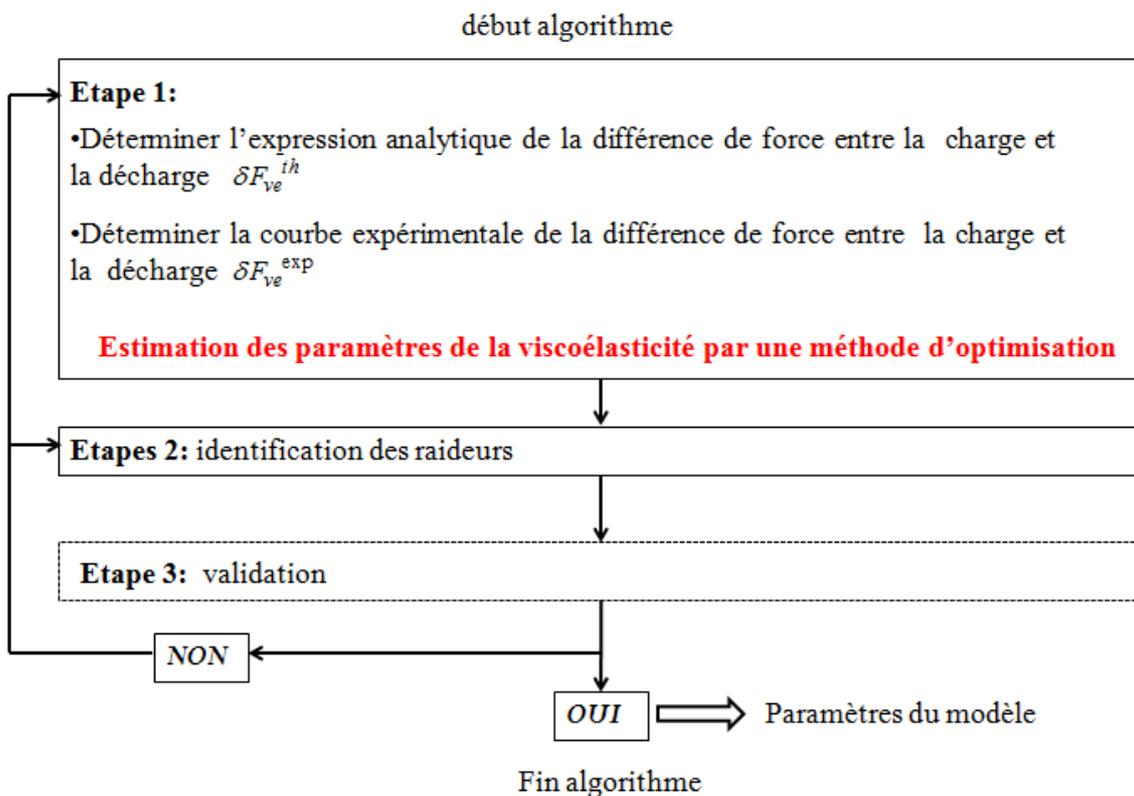


Figure 17. Algorithme de la méthode de différence de force entre la charge et la décharge.

La première étape consiste à établir, au moyen d'une méthode d'optimisation, le jeu de paramètres viscoélastiques qui permet d'obtenir une représentation analytique de la différence de force entre la charge et la décharge en bonne concordance avec la courbe expérimentale (**Fig. 18**).

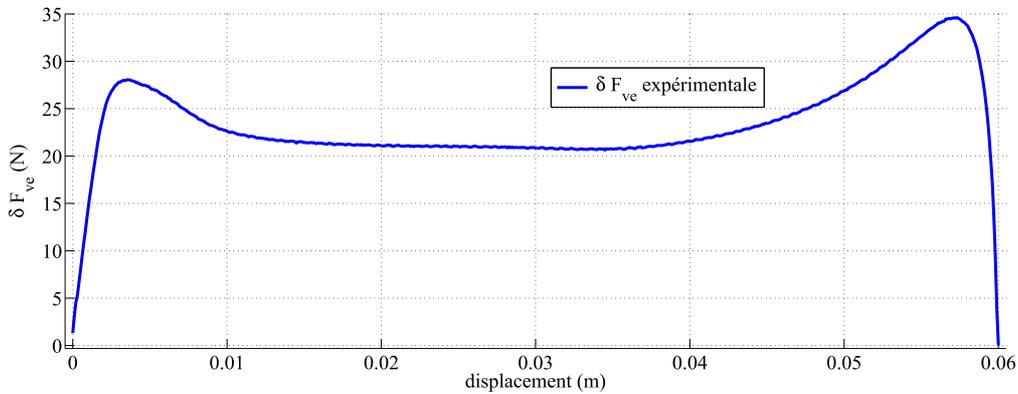


Figure 18. Courbe expérimentale de la différence de force entre la charge et la décharge.

Dans une deuxième étape, la reconstruction de la réponse viscoélastique dans les phases de charge et de décharge permet la détermination de la réponse élastique et de vérifier la condition de symétrie.

Finalement, dans une troisième étape, les coefficients des polynômes sont identifiés à l'aide de « **MATLAB** ».

La démarche de cette méthode, que nous avons nommé '*méthode de la différence de force entre la charge et la décharge*', est basée sur une hypothèse logique et physique. Cependant, lors d'identification des paramètres viscoélastiques au moyen d'une méthode de minimisation, il est possible de tomber sur un optimum local si la fonction à optimiser n'est pas convexe. Par conséquent, les paramètres viscoélastiques obtenus dépendent de l'initialisation de la méthode d'optimisation et de la méthode elle-même.

I.3 Méthode d'optimisation

A partir de l'aperçu bibliographique ci-dessus sur les méthodes d'identification des paramètres des modèles à mémoire développés dans la littérature, on constate que l'estimation des paramètres viscoélastiques nécessite le choix et le développement d'une méthode d'optimisation (**Fig. 15** et **Fig. 17**).

Cette dernière partie de ce chapitre bibliographique est consacrée à la définition d'un problème d'optimisation et à la présentation, d'une façon globale, des principales méthodes d'optimisation qui peuvent être classées en des méthodes déterministes et stochastiques.

I.3.1 Définition d'un problème d'optimisation

« Le désir humain de perfection trouve son expression dans la théorie de l'optimisation. Elle étudie comment décrire et atteindre ce qui est meilleur, une fois que l'on connaît comment mesurer et modifier ce qui est bon et ce qui est mauvais ... La théorie de l'optimisation comprend l'étude quantitative des optimums et les méthodes pour les trouver » (Beightler W. 1979).

On comprend à partir de la citation ci-dessus que la motivation d'un processus d'optimisation consiste à améliorer une performance en se rapprochant d'un point optimum.

Lorsqu'il s'agit d'un problème d'identification des paramètres inconnus d'un modèle mécanique, un processus d'optimisation consiste à chercher la meilleure combinaison de ces paramètres (optimum). Ce jeu de paramètres améliore la fidélité du modèle à l'expérimentation (performance) en minimisant des fonctions objectif telles que la fonction erreur au sens des moindres carrés entre la réponse expérimentale et celle du modèle.

Le problème d'optimisation est en particulier appelé problème des moindres carrés lorsque la fonction objectif est une fonction d'erreur au sens des moindres carrés.

Si la fonction objectif est mathématiquement convexe, il n'y a qu'un seul optimum. En revanche, si elle est non convexe, il est possible d'avoir mathématiquement plusieurs optima dont certains peuvent être physiquement admissibles et d'autres incohérents avec la physique. Il devient donc nécessaire de s'assurer que l'optimum déterminé par la méthode d'optimisation choisie est le meilleur optimum des optima admissibles.

Afin d'obliger la convergence vers un optimum admissible physiquement, on introduit généralement des fonctions contraintes à la méthode d'optimisation.

Selon la nature de la fonction objectif et des fonctions contraintes, le choix d'une méthodologie adaptée s'impose pour la résolution du problème d'optimisation (Bouallagui S. 2010).

I.3.2 Classification des méthodes d'optimisation

Les méthodes d'optimisation peuvent être classées selon l'ordre de la dérivation des fonctions contraintes et objectif nécessaires pour déterminer l'optimum.

Une méthode d'optimisation est dite d'ordre zéro si elle utilise uniquement la connaissance de la fonction objectif et des fonctions contraintes sans recours à la dérivation. Elle est d'ordre 1 s'il faut dériver une fois la fonction objectif ou les fonctions contraintes. Une méthode d'optimisation peut être également d'ordre 2 si elle requiert la dérivée seconde.

Les méthodes d'ordre zéro telles que l'algorithme de Nelder-Mead et l'algorithme génétique offrent l'avantage d'éviter le calcul du gradient. Ceci est très intéressant lorsque la fonction objectif n'est pas différentiable ou lorsque le calcul de son gradient présente un coût important. En revanche, elles sont en général peu précises et convergent très lentement.

Les méthodes d'ordre **1** et d'ordre **2** cherchent généralement le minimum d'une fonction en se basant sur la connaissance d'une direction descendante de recherche souvent donnée par le gradient de cette fonction et/ou sa dérivée. Ceci permet d'accélérer la localisation de l'optimum. En revanche, ces méthodes sont applicables seulement pour les fonctions continument différentiables.

Les méthodes d'optimisation sont souvent classées selon le mode de recherche d'optimum en deux grandes catégories : les méthodes déterministes et les méthodes non déterministes (stochastiques).

I.3.2.1 Méthodes déterministes

La plupart des méthodes déterministes sont des méthodes d'ordre **1** telles que la méthode de région de confiance, la méthode de Cauchy (Culioli J.C. 1994) et la méthode de gradient conjugué (Fletcher R. 1987) ou des méthodes d'ordre **2** telles que la méthode quasi-Newton et la méthode de Powell (Press W.H. 1992). Ces méthodes sont basées sur la détermination d'une direction de recherche descendante qui permet d'accélérer la localisation de l'optimum.

Dans cette section, on présente d'une façon globale la démarche des méthodes déterministes ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients. Ceux-ci ont été très largement développés par Hajji O. (2003).

Soient F la fonction objectif à minimiser et λ le vecteur de ses variables. Une direction de recherche d est descendante au voisinage de λ si et seulement si elle vérifie la condition suivante :

$$d^T \nabla_F(\lambda) < 0 \quad (1-28)$$

avec d^T le transposé de d et ∇_F la fonction gradient de F .

L'inconvénient principal des méthodes à base de gradient est que la fonction gradient de la fonction objectif est souvent estimée par différences finies surtout lorsque la fonction F est non linéaire et complexe (équation 1-29).

$$\nabla_F(\lambda) = \frac{F(\lambda + \alpha) - F(\lambda)}{\alpha} \quad (1-29)$$

avec α le pas du gradient.

Les méthodes d'optimisation déterministes basées sur la recherche de direction sont tous des méthodes itératives qui commencent par le choix d'une initialisation λ^1 . Une direction descendante et un pas de gradient au voisinage de cette initialisation sont ensuite déterminés. Ceci permet de déterminer une estimation de λ^2 . Ce processus est répété jusqu'à obtenir l'optimum λ^{opt} qui vérifie un critère d'arrêt tel qu'assurer une valeur du module de la fonction objectif $\|F(\lambda)\|$ inférieure à une valeur ε que l'on précise dès le départ.

La **figure 19** illustre la démarche des méthodes déterministes basées sur la recherche d'une direction descendante.

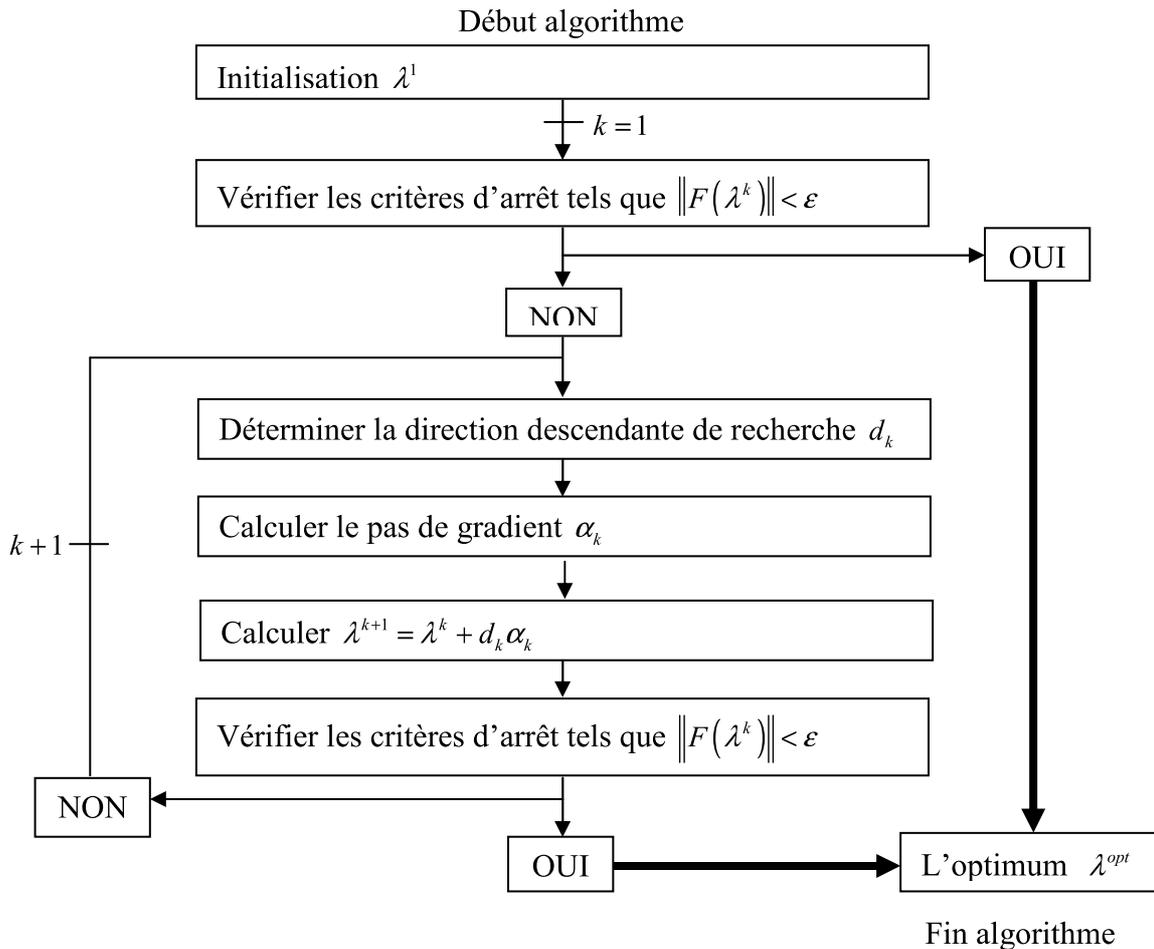


Figure 19. Algorithme des méthodes d'optimisation déterministes basées sur la recherche d'une direction descendante.

Les méthodes déterministes présentent des avantages intéressants : elles convergent rapidement et précisément vers l'optimum si celui-ci est proche du point d'initialisation grâce à la recherche d'une direction descendante.

En revanche, elles présentent également plusieurs inconvénients. En fait, elles ne sont applicables que pour les fonctions objectif continument différentiables et elles nécessitent la résolution de systèmes matriciels pouvant être mal conditionnés (Minoux M. 1983). De plus, on peut déduire à partir de la **figure 19** que la sensibilité de l'optimum par rapport à l'initialisation est importante. La convergence est donc exclusivement locale.

Le logiciel de programmation **MATLAB 7.01** fournit des interfaces graphiques pour résoudre les problèmes d'optimisation tels que l'interface d'outils d'optimisation déterministes (commande MATLAB : 'optimtool').

Les solveurs 'lsqnonlin' et 'fmincon' sont parmi les outils disponibles dans 'optimtool'. Ils permettent le traitement des problèmes de minimisation non linéaires en utilisant des

méthodes d'ordre **1** telles que la méthode de région de confiance et la méthode de Cauchy (Culioli J.C. 1994).

Pour utiliser ces outils, il est nécessaire de préciser un vecteur de paramètres de départ qui constitue une initialisation pour la méthode d'optimisation et des critères d'arrêt tels que la valeur de la fonction objectif (équation 1-30), le nombre d'itérations, le taux de variation des paramètres entre deux itérations successives ' λ_{tol} ' (équation 1-31) et le taux de variation de la valeur de la fonction objectif entre deux itérations successives ' F_{tol} ' (équation 1-32).

$$F(\lambda^k) = \|\delta F_{exp} - \delta F_{th}(\lambda^k)\|_2 \quad (1-30)$$

avec $F(\lambda^k)$ la fonction objectif donnée par l'erreur au sens des moindres carrés entre la structure mathématique du modèle δF_{th} et la réponse expérimentale correspondant δF_{exp} .

$$\lambda_{tol} = \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|_2 \quad (1-31)$$

avec λ^{k+1} le vecteur de paramètres à identifier pendant la $(k+1)^{ème}$ itération.

$$F_{tol} = |F(\lambda^k) - F_{obj}(\lambda^{k+1})| \quad (1-32)$$

avec $F(\lambda^{k+1})$ la fonction objectif pendant la $(k+1)^{ème}$ itération.

I.3.2.2 Méthodes non déterministes (stochastiques)

Dans le cas d'optima multiples, les méthodes d'optimisation déterministes s'arrêtent sur le premier optimum rencontré. Les méthodes stochastiques sont une alternative pour palier cet inconvénient. Elles sont capables de trouver le minimum global d'une fonction objectif même dans des cas difficiles. En fait, elles ne nécessitent ni un point d'initialisation, ni l'évaluation du gradient de la fonction objectif pour déterminer la solution optimale. Elles sont des méthodes d'ordre zéro.

La **figure 20** présente les méthodes stochastiques les plus utilisées dans la littérature.

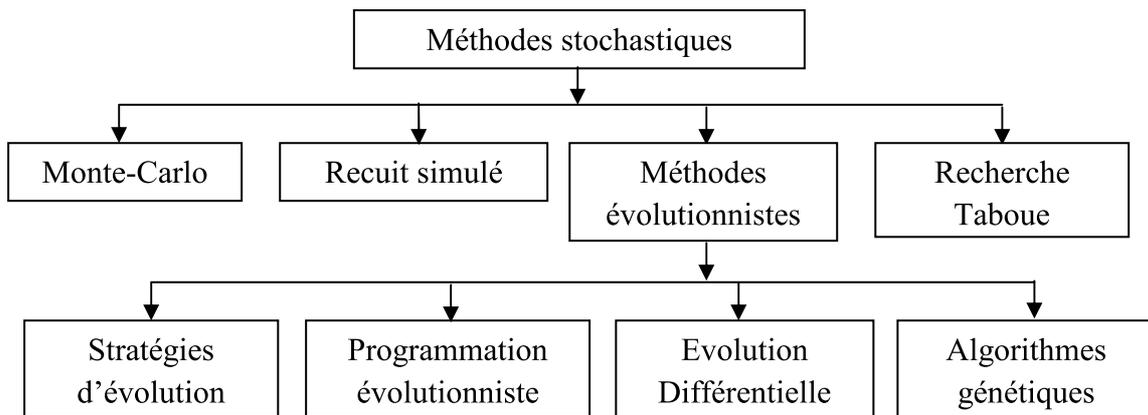


Figure 20. Méthodes d'optimisation stochastiques Hajji O. (2003).

La méthode de Monte-Carlo (**Elperin T. 1988; Fishman G.S. 1997**) constitue un processus d'exploration puisqu'elle consiste à évaluer la fonction en une solution tirée au hasard à chaque itération. Si elle est meilleure que l'optimum courant, cette valeur est enregistrée ainsi que la solution correspondante. Le processus continue jusqu'à ce que les conditions d'arrêt soient vérifiées.

Contrairement à la méthode de Monte-Carlo qui explore l'espace de recherche à partir d'un point unique (une solution tirée au hasard), les méthodes évolutionnistes (**Bouallagui S. 2010**) en général et l'algorithme génétique en particulier (**Holland J.H. 1975 ; Hajji O. 2003**) présente un processus qui part d'un ensemble de configurations c'est-à-dire d'une population d'individus. Cette population évoluera à partir d'opérateurs à transition aléatoire, la sélection et l'évolution, selon le principe de la **figure 21**.

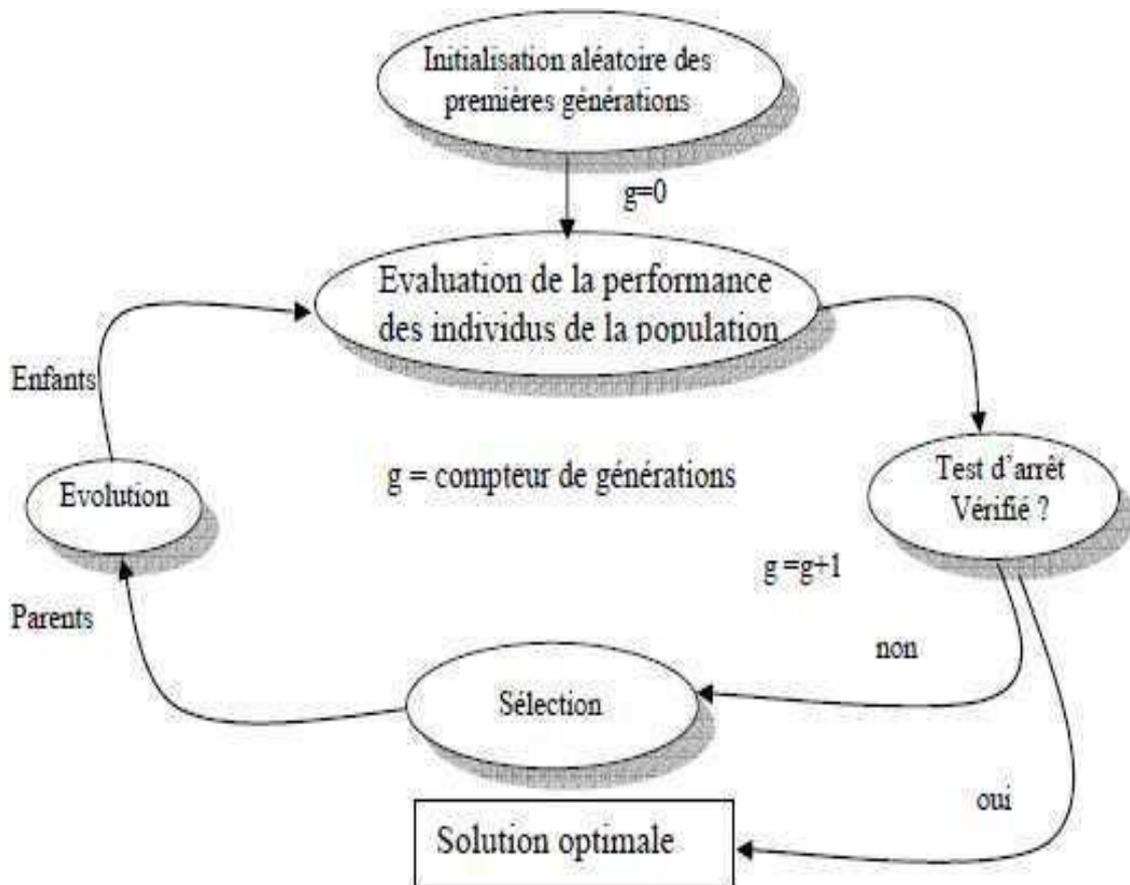


Figure 21. Principe d'une méthode évolutionniste **Hajji O. (2003)**.

On présente sur la **figure 22** plus de détails sur les étapes de l'algorithme génétique.

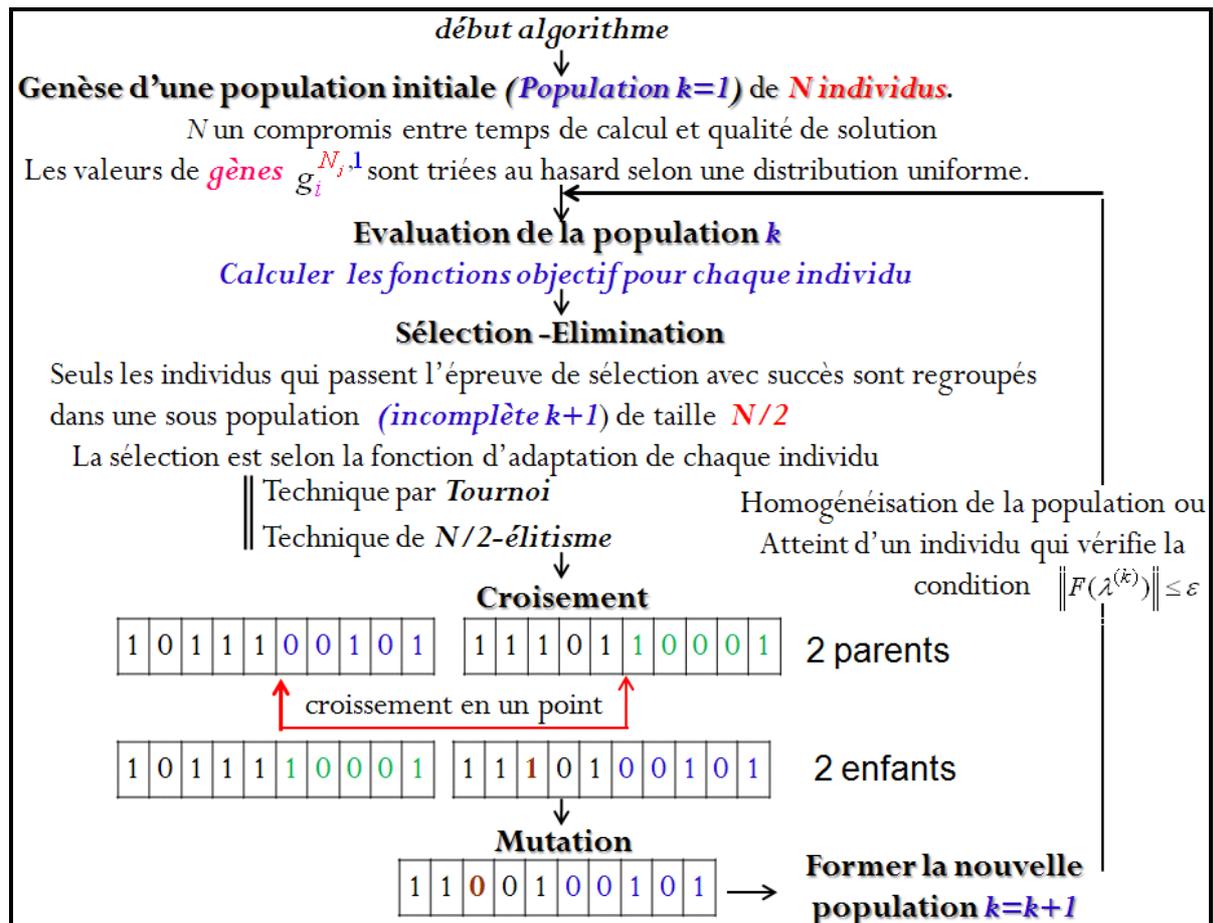


Figure 22. Démarche de l'algorithme génétique.

Pour les méthodes de recuit simulé et de recherche taboue, on se rapportera aux travaux de **Kirkpatrick S., Gelatt C.D. et al. (1983)**, **Glover F. (1986)** et **Glover F. and Laguna M. (1993)**.

On a montré dès le début de cette section que les méthodes d'optimisation stochastiques offrent la possibilité de déterminer l'optimum global même pour des fonctions objectif non-linéaires et complexes. En revanche, on constate à partir des **figures 21** et **22** que les méthodes stochastiques demandent un nombre important d'évaluations de la fonction objectif. Ceci se traduit par un temps de calcul très élevé comparé aux méthodes déterministes surtout lorsque le calcul de la performance de chaque nouvelle solution proposée par le processus d'optimisation nécessite la résolution d'un modèle éléments finis (**Bouallagui S. 2010**).

Le logiciel de programmation **MATLAB 7.01** fournit une interface graphique pour la méthode d'algorithme génétique. Pour démarrer l'algorithme, il faut générer aléatoirement une famille de paramètres ('**Initial population**') et préciser les critères d'arrêt tels que le nombre initial d'itérations, le taux de variation des paramètres entre deux itérations successives ' λ_{tol} ' (**équation 1-31**) et le taux de variation de la valeur de la fonction objectif entre deux itérations successives ' F_{tol} ' (**équation 1-32**). Il faut préciser aussi le taux de croisement '**cross over**' et le taux de mutation.

Conclusion du chapitre

Au cours de ce chapitre, nous avons pu établir une synthèse bibliographique portant sur l'étude du comportement mécanique de la mousse de polyuréthane

Nous avons pu voir tout d'abord les aspects liés au matériau et en particulier mettre en évidence les paramètres du matériau qui auront une influence sur le comportement mécanique, à savoir la morphologie des cellules, la porosité et la densité, ainsi que le processus de fabrication.

Une analyse des essais expérimentaux classiquement réalisés et des différentes études a permis de déterminer les deux essais les plus pertinents pour une modélisation, à savoir l'essai de CFD pour les conditions quasi-statiques et l'essai de transmissivité pour les conditions dynamiques. Ces deux essais présentent l'avantage d'avoir des conditions aux limites que l'on peut facilement intégrer dans un modèle et de ne faire intervenir qu'un seul type de sollicitation mécanique (la compression).

Il a été montré dans ce chapitre que l'étude quasi-statique donne de nombreuses informations sur le comportement mécanique de la mousse de polyuréthane. En fait, la mousse sous grande déformation quasi-statique présente à la fois un comportement élastique non-linéaire et un comportement viscoélastique. Le comportement viscoélastique a été constaté lors d'études statique, quasi-statique et dynamique. Cependant d'autres informations relatives au comportement fréquentiel de la mousse ne peuvent être explicitées que si on effectue une étude dynamique. De plus, la complexité du comportement de la mousse se traduit par une différence entre celui en quasi-statique et en dynamique.

La complexité du comportement de la mousse se traduit également par sa dépendance aux conditions d'essais telles que la vitesse de déformation, aux caractéristiques chimiques et morphologiques de la mousse telles que la densité, les dimensions de la mousse et le type de ses cellules ainsi qu'aux conditions environnementales des essais telles que l'humidité et la température

La modélisation du comportement mécanique de la mousse de polyuréthane a été réalisée jusqu'à présent en se fondant sur deux approches : l'approche micromécanique et l'approche macromécanique.

L'approche micromécanique permet de relier les propriétés géométriques des cellules et les propriétés élastiques de la mousse. Elle montre que la mousse de polyuréthane sous grande déformation présente un comportement élastique non linéaire. Cependant, elle n'est pas capable de prédire les propriétés dynamiques telles que la viscosité et la raideur dynamique.

L'analyse macromécanique du comportement peut se conduire soit en utilisant des modèles énergétiques, soit des modèles à mémoire. Ces derniers permettent de déterminer le comportement élastique et le comportement viscoélastique de la mousse de polyuréthane à la fois en quasi-statique et en dynamique.

Il faut néanmoins signaler que les paramètres des modèles à mémoire considérés par les différents travaux à la fois en quasi-statique et en dynamique sont dépendants des conditions essais. Ce qui affecte le caractère général de leur représentativité tant en quasi-statique qu'en dynamique. Au cours de ce travail de recherche, nous allons développer des solutions permettant de pallier cet inconvénient majeur.

En ce qui concerne l'identification, la synthèse bibliographique présentée dans ce chapitre nous a permis de distinguer deux méthodes d'identification qui ont été utilisées pour déterminer les paramètres des modèles à mémoire développés en quasi-statique dans la littérature. Ces deux méthodes sont la méthode de la force moyenne et la méthode de la différence de force entre la charge et la décharge.

La méthode de la différence de force entre la charge et la décharge, bien qu'elle ne garantisse pas l'unicité de la solution, nous paraît très pertinente car elle est basée sur une constatation physique contrairement à la méthode de la force moyenne.

L'identification des paramètres viscoélastiques par la méthode de la force moyenne ou par la méthode de la différence de force entre la charge et la décharge est assurée par des méthodes d'identification.

L'étude bibliographique qui a été menée dans ce chapitre sur les méthodes d'optimisation a montré que l'on peut distinguer deux types de méthodes : les méthodes déterministes qui sont rapides mais convergent vers des solutions locales et les méthodes stochastiques qui sont lentes mais convergent vers la meilleure solution qui est l'optimum global.

Une combinaison judicieuse de ces deux méthodes pourrait améliorer les temps d'optimisation tout en assurant la globalité de l'optimum trouvé.

Chapitre II : Etude du comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane :

Expérimentation, modélisation et validation

Introduction

L'analyse bibliographique des différents modèles développés dans la littérature nous a permis de constater que les modèles à mémoire entier et fractionnaire semblent être les modèles les plus pertinents et les plus représentatifs. Cependant, leurs paramètres sont dépendants des conditions d'essai. Ce qui affecte le caractère général de leur représentativité.

Ainsi dans ce chapitre, nous étudierons le comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane et nous implanterons de nouveaux modèles à mémoire entier et fractionnaire de représentativité plus générale.

L'étude expérimentale du comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane sera basée sur des essais de compression/décompression unidirectionnels. Cependant, ces essais peuvent être quasi-statiques ou dynamiques selon la vitesse de déformation (**Deng R. 2004**). Ainsi il devient primordial de définir les conditions d'étude quasi-statique.

Ce chapitre comporte donc trois parties :

- une première partie dédiée à la ***définition des conditions d'étude du comportement quasi-statique de la mousse*** dont le but est de déterminer la vitesse de déformation limite entre quasi-statique et dynamique.
- une deuxième partie intitulée '***Processus de modélisation du comportement quasi-statique de la mousse***' dont l'objectif est de développer des nouveaux modèles à mémoire qui permettront de pallier l'inconvénient majeur des modèles développés dans la littérature lié à la dépendance de leurs paramètres vis-à-vis des conditions d'essais.
- une troisième partie dédiée à l'***application des modèles à mémoire entier et fractionnaire*** sur les types de mousses que nous étudierons. Cette partie nous permettra d'une part de valider les modèles et d'autre part de présenter une discrimination entre les deux modèles à mémoire entier et fractionnaire.

Nomenclature du chapitre

Symboles	Unités	Définitions
t	(sec)	Temps
T	(sec)	Période d'un cycle de compression/décompression
T_{ec}	(sec)	Période d'échantillonnage
x	(m)	Déplacement
$\dot{\varepsilon}$	(sec ⁻¹)	Vitesse de déformation
ε	(m m ⁻¹)	Déformation
ε_{\max}	(m m ⁻¹)	Déformation maximale
ε_0	(m m ⁻¹)	Déformation initiale
F	(N)	Force globale de la mousse
F_{ve}	(N)	Force viscoélastique
F_e	(N)	Force élastique (force du ressort non linéaire)
F_e^g	(N)	Force élastique globale
k_i	(N m ⁻¹)	Raideur élastique d'ordre i
K_i	(N m ⁻¹)	Raideur du ressort non linéaire d'ordre i
K_{ve}	(N m ⁻¹)	Raideur d'origine viscoélastique
α_l	(sec ⁻¹)	Nombre complexe représentant le l^{th} mode viscoélastique ⁽¹⁾
α^L	(sec ⁻¹)	Nombre complexe représentant le mode viscoélastique pendant la phase de charge ⁽³⁾
α^{UL}	(sec ⁻¹)	Nombre complexe représentant le mode viscoélastique pendant la phase de décharge ⁽³⁾
a_l	(N m ⁻¹ sec ⁻¹)	Nombre complexe indiquant le l^{th} résidu viscoélastique ⁽¹⁾
a^L	(N m ⁻¹ sec ⁻¹)	Nombre complexe indiquant le résidu viscoélastique pendant la phase de charge ⁽³⁾
a^{UL}	(N m ⁻¹ sec ⁻¹)	Nombre complexe indiquant le résidu viscoélastique pendant la phase de décharge ⁽³⁾
b	(sec ⁻¹)	Inverse du temps de relaxation ⁽²⁾
c_1	(N m ⁻¹ sec ⁻¹)	Nombre réel représentant la contribution du terme proportionnel au déplacement dans la force viscoélastique. ⁽²⁾
c_2	(N m ⁻¹ sec ^{$\beta-1$})	Nombre réel représentant la contribution du terme fractionnaire dans la force viscoélastique. ⁽²⁾
β		Ordre de la dérivation fractionnaire ⁽²⁾
$\text{Re}(f)$		Partie réelle de la fonction f
$\text{Im}(f)$		Partie imaginaire de la fonction f
P		Nombre de modes viscoélastiques ⁽¹⁾
M		Ordre du polynôme élastique
N_{\min}		Nombre de spécimens par test
N_{cyc}		Nombre de cycle de compression/décompression
n		$n = E(\beta) + 1$ avec E : la partie entière
$\Gamma(g, f)$		Fonction Gamma incomplète définie par: $\Gamma(g, f) = \int_0^f \tau^{g-1} e^{-\tau} d\tau$; $g > 0$ and $f \in \Re$
$\Gamma(g)$		Fonction Gamma définie par $\Gamma(g) = \int_0^{+\infty} \tau^{g-1} e^{-\tau} d\tau$; $g > 0$

⁽¹⁾ : modèle à mémoire entier.

⁽²⁾ : modèle à mémoire fractionnaire.

⁽³⁾ : modèle à mémoire entier généralisé

II.1 Définition des conditions d'étude du comportement quasi-statique des mousses de polyuréthane

Dans cette partie préparatrice à l'étude proprement dite du comportement quasi-statique des mousses de polyuréthane, nous présenterons tout d'abord le type des mousses que nous allons étudier, puis nous décrirons les dispositifs d'expérimentation. Enfin, afin de nous assurer d'être dans des conditions d'essai quasi-statique, nous présenterons la démarche qui nous a permis de déterminer la vitesse limite entre quasi-statique et dynamique.

II.1.1 Les mousses de polyuréthane étudiées

La mousse de polyuréthane, considérée par défaut dans ce travail, est désignée par 'mousse A'. Cependant, dans certaines parties, d'autres types de mousses de polyuréthane ont été aussi étudiées. Leurs désignations et leurs caractéristiques chimiques et morphologiques sont résumés dans les **tableaux 1 et 2**. Ces mousses sont des mousses industrielles utilisées dans trois sièges de voiture différents. La porosité de chaque mousse est déterminée à travers le dispositif de test « **Matrox-intellicam** » et la méthode de « **Visiocell** ». La procédure de calcul de porosité est détaillée dans le travail de **Drean E. (2006)**. Le nombre d'échantillons testés ainsi que la porosité de chaque mousse sont précisés dans le **tableau 3**.

Tableau 1. Caractéristiques chimiques et morphologiques de la mousse A et la mousse B.

Désignation	mousse A	mousse B
Type de la mousse	Mousse de polyuréthane souple	Mousse de polyuréthane souple
Iso-cyanate	Toluène di-iso-cyanate TDI	Toluène di-iso-cyanate TDI
Polyol	Polyéther désigné par PA	Désigné par PB
Agent d'expansion	CO ₂	CO ₂
processus de fabrication	Moulage ouvert	Moulage ouvert
Densité en kg m ⁻³	28	40
Porosité moyenne en μm	828	941
Forme d'échantillon	Cubique	Cubique
Dimensions ($L_0 \times l_0 \times h_0$)	(0.075 × 0.075 × 0.075) m ³	(0.075 × 0.075 × 0.075) m ³
Type de cellules	Ouvertes	Ouvertes

Tableau 2. Caractéristiques chimiques et morphologiques de la mousse C.

	mousse C
Désignation	mousse C
Type de la mousse	Mousse de polyuréthane souple
Iso-cyanate	Toluène di-iso-cyanate TDI
Polyol	Désigné par PC
Agent d'expansion	CO ₂
Processus de fabrication	Moulage ouvert
Densité en kg m ⁻³	50
Porosité moyenne en μm	633
Forme d'échantillon	Cubique
Dimensions ($L_0 \times l_0 \times h_0$)	(0.075 × 0.075 × 0.075) m ³
Type de cellules	Ouvertes

Tableau 3. Porosité des mousses A, B, et C.

Mousse	Nombre d'échantillons	Valeur moyenne de la porosité (μm)	Ecart type (μm)
mousse A	18	828	68
mousse B	15	941	29
mousse C	16	633	50

II.1.2 Description des dispositifs d'essais de compression/décompression

Un cycle de compression/décompression unidirectionnelle comporte deux phases : la phase de charge suivant une direction bien déterminée jusqu'à un niveau de compression final préalablement défini et la phase de décharge suivant la même direction. Lorsque le nombre de cycle est supérieur à un, l'essai de compression/décompression est dit multi-cycles.

L'essai de compression/décompression à faible vitesse de déformation est assuré par la machine de traction-compression électromécanique «**Instron 33R4240**» (Fig. 23-a). Si on dépasse la vitesse limite de cette machine (600 mm/mm), l'essai de compression /décompression sera assuré par la machine servo-hydraulique «**Instron 8801**» (Fig. 23-b).

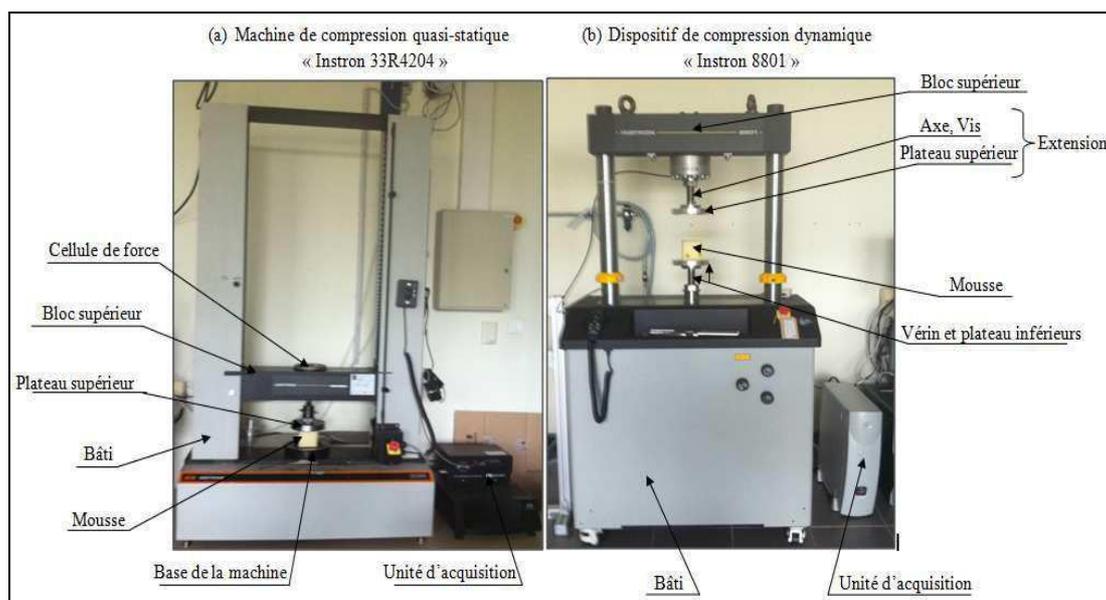


Figure 23. Dispositifs d'essai de compression/décompression unidirectionnel.

Le dispositif d'essai «**Instron 33R4240**» comporte un plateau inférieur encastré à la base de la machine et un plateau supérieur fixé à une traverse supérieure (bloc supérieur) qui suit un mouvement vertical.

La force maximale mesurée lors du cycle doit être le plus proche possible de la capacité maximale de la cellule de force afin de maximiser le rapport signal / bruit au niveau de l'acquisition. Les capteurs de déplacement et de force sont déjà intégrés dans la machine.

Le nombre de cycles, les conditions d'essai (vitesse de déformation, niveau de compression final, etc.), la période d'échantillonnage et les grandeurs physiques à extraire sont définis à travers la fenêtre de configuration «**BlueHill**».

Pour le dispositif d'essai «**Instron 8801**», le vérin inférieur est en mouvement alors que le bloc supérieur est solidaire au bâti. Afin d'assurer le principe de compression, une extension comportant un axe et un plateau a été fabriquée puis encastrée au bloc supérieur.

Afin d'assurer la continuité de contact, un film adhésif double face a été placé entre le bloc supérieur et l'échantillon de mousse. Ainsi la phase de charge est accomplie à travers le vérin inférieur qui se déplace verticalement vers le haut jusqu'au niveau de compression final préalablement défini. La phase de décharge est assurée par son déplacement vers le bas.

II.1.3 Détermination de la vitesse de déformation limite entre quasi-statique et dynamique

Un essai de compression/décompression est dit quasi-statique ou dynamique en fonction de la vitesse de déformation. **Deng R. (2004)** a précisé que pour le type de mousse de polyuréthane qu'il a étudié tous les essais de compression/décompression à vitesses de déformation inférieures à 10^{-2} s^{-1} sont des essais quasi-statique. En revanche, tous les essais de compression à grande vitesse de déformation (supérieure à la vitesse limite 10^{-2} s^{-1}) sont situés dans le cadre d'étude dynamique.

Cependant, les critères et les essais nécessaires pour l'évaluation de la vitesse de déformation limite entre quasi-statique et dynamique n'étaient pas précisés par **Deng R. (2004)**.

Dans cette partie, nous présentons l'ensemble des essais et des critères permettant l'établissement des vitesses limites propres aux mousses de polyuréthane que nous étudions.

II.1.3.1 Expérimentation

Pour déterminer la vitesse limite entre quasi-statique et dynamique, des tests de compression/décompression multi-cycles ont été réalisés sur les différents types de mousse (mousses A, B et C) en variant uniquement la vitesse de compression (**Tab .4**).

Tableau 4. Conditions des essais de compression/décompression multi-cycles appliqués aux mousses de polyuréthane afin de déterminer la vitesse de déformation limite.

	Nombre de cycle	Vitesse de déformation (sec^{-1})	Niveaux de compression initial /final en %	Nombre des échantillons examinés par test
Test n°1	4	$5.33 \cdot 10^{-3}$	0/80	3
Test n°2	4	$8.00 \cdot 10^{-3}$	0/80	3
Test n°3	4	$1.06 \cdot 10^{-2}$	0/80	3
Test n°4	4	$1.34 \cdot 10^{-2}$	0/80	3
Test n°5	4	$3.34 \cdot 10^{-2}$	0/80	3
Test n°6	4	$6.67 \cdot 10^{-2}$	0/80	3
Test n°7	4	$3.34 \cdot 10^{-1}$	0/80	3
Test n°8	4	0.60	0/80	3
Test n°9	4	0.87	0/80	3
Test n°10	4	1.29	0/80	3
Test n°11	4	2.34	0/80	3
Test n°12	4	2.44	0/80	3

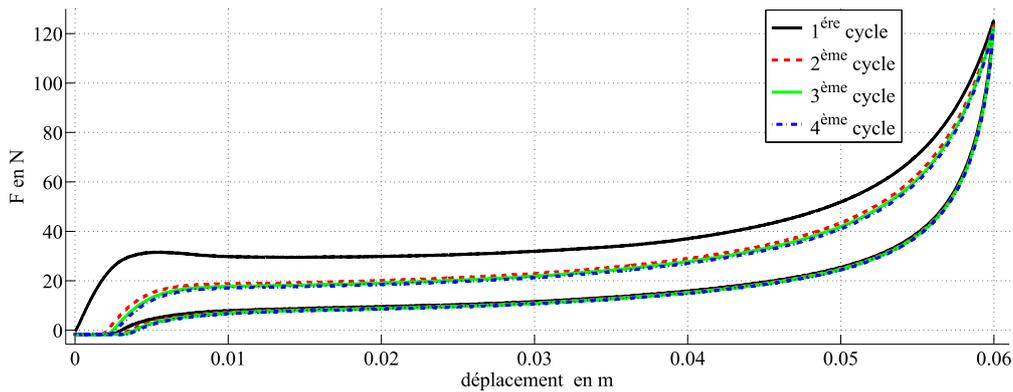


Figure 24. Courbe force-déplacement de la mousse A pendant un essai de compression/décompression quasi-statique multi-cycles (4 cycles) à une vitesse de déformation constante = $5.33 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

La **figure 24** montre que la mousse de polyuréthane présente une réponse force-déplacement (force en fonction du déplacement) différente pour chaque cycle. La différence entre le premier et le deuxième cycle est plus importante que celle entre le deuxième et le troisième cycle. Cependant, les réponses forces correspondant au quatrième et au troisième cycle sont presque similaires. La mousse établit donc une sorte de comportement permanent à partir du quatrième cycle. La norme américaine **D3574-95** de l'ASTM ('American Society for Testing Material') insiste sur ce quatrième cycle lors de comparaison entre des mousses de différents types. On remarque aussi que la différence entre les réponses est située surtout en phase de charge. En effet, la mousse de polyuréthane suit presque le même chemin de décharge.

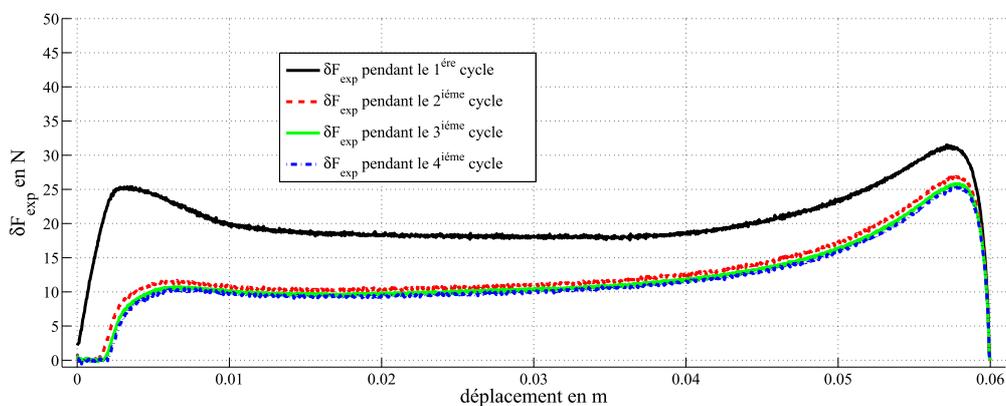


Figure 25. Courbes de la différence de la force entre la charge et la décharge de la mousse A obtenues suite à un essai de compression/décompression multi-cycles (4 cycles) à vitesse constante = $5.33 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

Les aires comprises entre l'axe des abscisses et les courbes de la différence de la force entre la charge et la décharge à chaque cycle (**Fig. 25**) traduisent l'énergie absorbée par la mousse de polyuréthane à chaque cycle de compression/décompression. Ces aires sont également égales aux aires des cycles hystérésis observés dans la **figure 24**. La **figure 25** confirme que la mousse de polyuréthane établit à partir du 4ème cycle un comportement permanent. L'évolution de l'énergie absorbée à chaque cycle est appelée en littérature 'effet de Mullins' (Mullins L. 1969).

II.1.3.2 Evaluation de la vitesse de déformation limite

La norme «ASTM» précise qu'il faut considérer le régime permanent et plus précisément le 4^{ème} cycle. Les évolutions de la forme de la courbe contrainte-déformation, de l'énergie absorbée par la mousse et de la contrainte maximale en fonction de la vitesse de déformation pendant le 4^{ème} cycle sont examinées afin de déterminer la vitesse de déformation limite entre quasi-statique et dynamique.

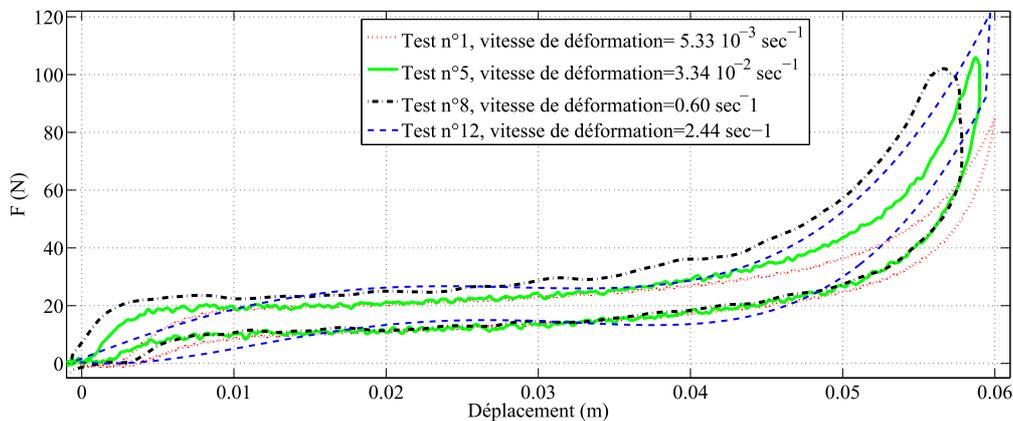


Figure 26. Courbes force-déplacement à faibles et grandes vitesses de déformation.

La **figure 26** montre que la mousse A présente un comportement similaire à faibles et à grandes vitesses de déformation. En effet, les trois zones observées dans un essai de compression quasi-statique sont présentes même à grandes vitesses contrairement à la mousse utilisée par **Gervillers S., Alaoui A. et al. (2001)**. L'évolution de la forme de la courbe de réponse force-déplacement (ou contrainte-déformation) en fonction de la vitesse de déformation ne donne aucune information sur la vitesse de déformation limite.

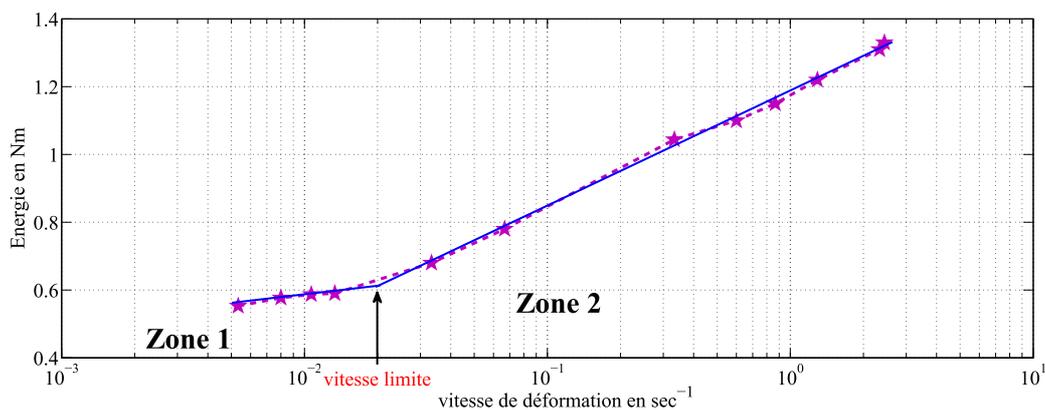


Figure 27. Evolution de l'énergie absorbée par la mousse A pendant le 4^{ème} cycle en fonction de la vitesse de déformation.

La **figure 27** présente, dans une échelle d'abscisse logarithmique, l'évolution de l'énergie absorbée par la mousse A pendant le 4^{ème} cycle en fonction de la vitesse de déformation. Deux zones peuvent être distinguées relativement à l'évolution de la pente de la courbe. En fait, on remarque qu'à partir d'une vitesse seuil $\dot{\epsilon} = 0.02 \text{ sec}^{-1}$, une augmentation brusque de la pente apparaît, ce qui indique la manifestation d'autres mécanismes de perte d'énergie dans la

mousse. La perte purement visqueuse peut être l'un des facteurs de la variation. Son effet est négligeable dans la première zone vue la faible vitesse, cependant il devient important pour des vitesses de déformation plus grandes (*zone 2*).

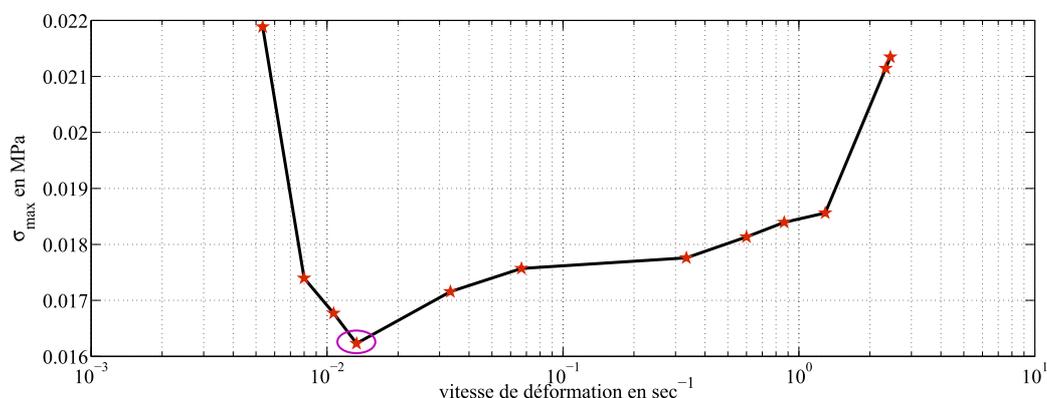


Figure 28. Evolution de la contrainte maximale pendant le 4ème cycle en fonction de la vitesse de déformation.

La **figure 28** montre que la courbe d'évolution de la contrainte maximale en fonction de la vitesse de déformation présente un minimum au voisinage de la vitesse seuil $\dot{\epsilon} = 0.02 \text{ sec}^{-1}$, ce qui confirme le passage d'un régime à un autre. En conclusion, la vitesse limite entre régime quasi-statique et régime dynamique pour la mousse A est de l'ordre de 0.02 sec^{-1} .

La même démarche a été appliquée aux mousses B et C. Des observations similaires ont été obtenues. Les vitesses limites de chaque type de mousse de polyuréthane ainsi déterminées sont résumées dans le **tableau 5**.

Tableau 5. Vitesses de déformation limites entre quasi-statique et dynamiques des différents types de mousse de polyuréthane étudiées.

	Mousse A	Mousse B	Mousse C
Vitesse limite $\dot{\epsilon}$ en sec^{-1}	0.020	0.016	0.023

Au cours de cette première partie, nous avons pu mettre en place une démarche qui nous a permis de déterminer de manière fiable la vitesse de déformation limite entre quasi-statique et dynamique. Cette démarche a été appliquée avec succès pour les trois types de mousse que nous étudions.

Nous pouvons à présent procéder à la modélisation du comportement de la mousse en nous assurant d'être dans des conditions de test quasi-statique.

II.2 Processus de modélisation du comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane- développement des modèles à mémoire

La caractérisation du comportement de la mousse de polyuréthane lors d'un essai de compression/décompression quasi-statique pendant le 4^{ème} cycle à travers des modèles à mémoire doit passer nécessairement par la modélisation du premier cycle et la modélisation de l'effet Mullins. Au cours de ce travail, nous nous intéressons à la modélisation du premier cycle. La modélisation de l'effet de Mullins ne sera pas traitée dans ces travaux.

La modélisation est, par définition, un processus qui commence par la réalisation des expérimentations. Ces expérimentations permettent, par la suite, de définir une structure mathématique modélisant les différents phénomènes physiques constatés. Les paramètres de la structure mathématique (modèle) sont généralement inconnus. Il faut donc passer par l'identification de ces paramètres. Ceci permet de valider le modèle à travers des critères que nous allons préciser.

Dans cette partie, nous présentons, en quatre sections, les quatre étapes de la modélisation du comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane.

Dans la première section, nous présentons les essais de compression/décompression quasi-statique et les résultats expérimentaux obtenus ainsi qu'une analyse des phénomènes physiques observés.

Dans la deuxième section, on développe de nouveaux modèles à mémoire afin de pallier l'inconvénient majeur des modèles développés dans la littérature qui est lié à la dépendance de leurs paramètres vis-à-vis des conditions d'essai.

La méthode d'identification et la démarche d'optimisation sont présentées dans la troisième section.

Enfin, les critères de validation des modèles sont détaillés dans la quatrième section.

II.2.1 Expérimentations

Pour caractériser le comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane, des essais de compression/décompression unidirectionnels correspondant à trois vitesses de déformation différentes sont menés sur la machine «Instron 33R4240» (**Tab. 6**).

Tableau 6. Conditions des essais de compression/décompression appliqués aux mousses de polyuréthane afin de caractériser le comportement quasi-statique.

Tests	N_{cyc}	$\dot{\epsilon}$ (sec ⁻¹)	ϵ_0 (%)	ϵ_{max} (%)	T (sec)	T_{ech} (sec)
Test 1	1	$1.06 \cdot 10^{-2}$	0	80	150	0.0625
Test 2	1	$5.33 \cdot 10^{-3}$	0	80	300	0.1250
Test 3	1	$6.66 \cdot 10^{-4}$	0	80	2400	2.0000

Afin d'assurer une bonne précision statistique des résultats (un niveau de confiance de 95% avec une limite statistique d'erreur de 10%), N échantillons ont été utilisés pour chaque type de mousse et chaque test (**Tab. 7**). Le choix de ce nombre d'échantillon est explicité en **section II.2.4**.

Tableau 7. Nombre des échantillons utilisés pour chaque type de mousse et chaque test.

	Test 1	Test 2	Test 3
Mousse A	45	17	19
Mousse B	22	20	17
Mousse C	24	21	18

Tous les spécimens ont le même historique mécanique et environnemental : ils sont vierges et obtenus par découpage de matelas de dimensions de 2 m×1.2 m×0.075 m. Chaque échantillon n'est testé qu'une seule fois.

Les **figures 29, 30 et 31** présentent les courbes force-déplacement des mousses A, B et C dans le cas du test n°2. Les courbes force-déplacement des mousses A, B et C dans le cas du test n°1 et le cas du test n°3 ne sont pas présentées, car elles sont très similaires à celles du test n°2.

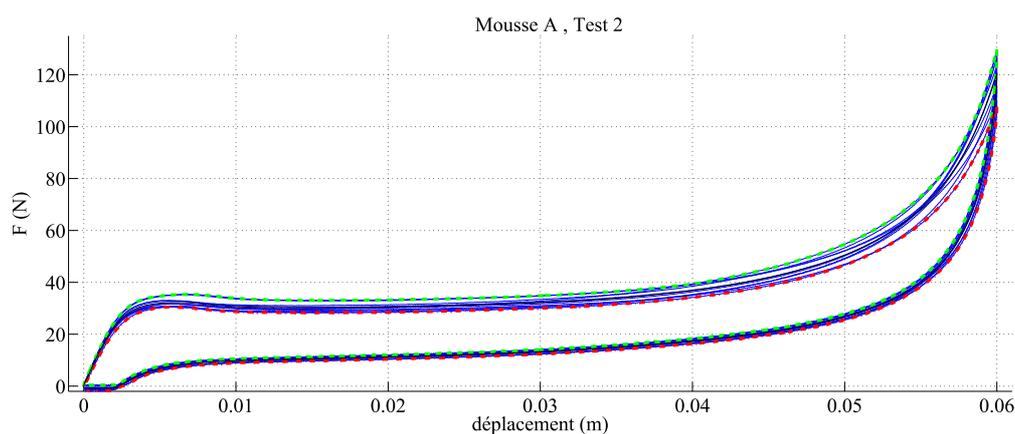


Figure 29. Courbes force-déplacement expérimentales, Mousse A, Test 2.

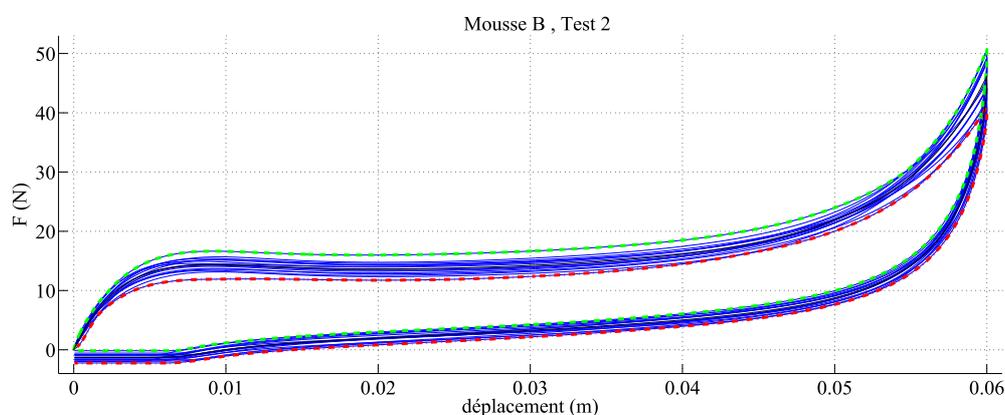


Figure 30. Courbes force-déplacement expérimentales, Mousse B, Test 2.

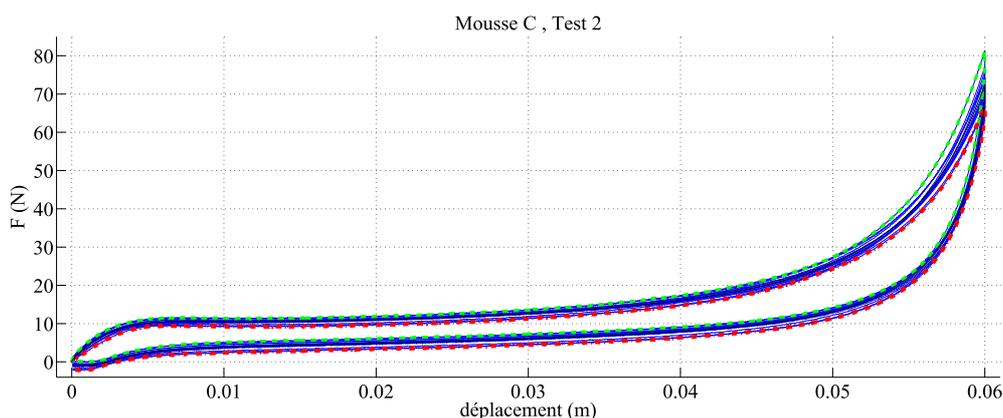


Figure 31. Courbes force-déplacement expérimentales, Mousse C, Test 2.

Les courbes expérimentales force-déplacement pendant le premier cycle des mousses A, B, et C permettent l'extraction des enveloppes expérimentales minimale et maximale.

On constate la présence d'un cycle d'hystérésis dans la réponse de la mousse et un retour à une position différente de l'état initial. Cette déformation ne peut pas être considérée irréversible (plastique) car la mousse de polyuréthane retrouve sa configuration initiale après deux jours de repos. Le cycle d'hystérésis met en évidence son comportement viscoélastique.

La phase de charge peut être divisée en trois régions : la région quasi-linéaire, la région du plateau et la région de densification. Ceci permet d'argumenter la modélisation non linéaire du comportement élastique.

On remarque aussi que la dispersion pendant la phase de charge semble plus importante que la dispersion pendant la phase de décharge.

II.2.2 Développement des modèles à mémoire entier et fractionnaire

La mousse de polyuréthane est supposée homogène, isotrope de section transversale constante, et de coefficient de Poisson nul (Gervillers S., Alaoui A. et al. 2001). Ces hypothèses ont été adoptées par tous les chercheurs qui travaillent sur les modèles à mémoire. Ainsi, la déformation et la contrainte dans le cas d'un essai unidirectionnel sont proportionnelles respectivement au déplacement et à la force. De ce fait, il est possible de tenir compte de la réponse force-déplacement pour décrire le comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane. Nous choisissons cette description pour une comparaison avec les résultats de White S.W. (1998), Singh, R., Davies P. et al. (2003), Deng R. (2004) et Ippili R. K., Davies P. et al. (2008), lorsque celle-ci sera rendue possible.

L'étude expérimentale en quasi-statique menée précédemment, a montré que la mousse sous grandes déformations présente à la fois un comportement élastique non linéaire et un comportement viscoélastique.

II.2.2.1 Comportement élastique des modèles à mémoire entier et fractionnaire

Les modèles à mémoire décrivent le comportement élastique de la mousse par une fonction polynomiale modélisant la réponse non linéaire d'un ressort. Le polynôme que nous avons choisi pour les modèles à mémoire est donné par l'équation 2-1. Contrairement aux modèles développés dans la littérature, les raideurs d'ordre pair sont supprimées dans le but de rendre les modèles que nous développons théoriquement valables dans le cas des essais de traction.

$$F_e(t) = \sum_{i=0}^M K_{2i+1} x^{2i+1} \quad (2-1)$$

II.2.2.2 Comportement viscoélastique du modèle à mémoire entier

L'effet de mémoire peut être décrit par une fonction de convolution qui provient d'une équation différentielle ordinaire (équation 2-2).

$$d_0 F_{ve}(t) + d_1 \frac{d^1 F_{ve}(t)}{dt} + \dots + d_r \frac{d^r F_{ve}(t)}{dt^r} = e_0 x(t) + e_1 \frac{d^1 x(t)}{dt} + \dots + e_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (2-2)$$

avec (r, m) deux entiers quelconques et $((d_i)_{i=1..r}, (e_i)_{i=0..m})$ sont des coefficients caractéristiques du matériau.

Si $r > m$, $r > 2$ et les pôles de la fonction de transfert déduite à partir de l'équation 2-2 sont simples et distinctes, la force viscoélastique est donnée par l'équation suivante :

$$F_{ve}(t) = \int_0^t \sum_{l=1}^P a_l e^{-\alpha_l(t-\tau)} x(\tau) d\tau \quad (2-3)$$

Lorsque $r = m$, $r > 2$ et $e_0 = 0$, la force viscoélastique est généralement composée d'un terme purement élastique et un terme de mémoire (équation 2-4).

$$F_{ve}(t) = K_{ve} x(t) + \int_0^t \sum_{l=1}^P a_l e^{-\alpha_l(t-\tau)} x(\tau) d\tau \quad (2-4)$$

II.2.2.3 Comportement viscoélastique du modèle à mémoire fractionnaire

Si la fonction de convolution caractérisant le comportement viscoélastique de la mousse de polyuréthane dérive d'une équation comportant une dérivation non entière (équation 2-5), alors le modèle est à mémoire fractionnaire. Dans ce cas, l'expression de la force viscoélastique pendant le premier cycle d'un essai de compression/décompression est donnée par l'équation 2-6 (solution développée dans l'Annexe A).

$$\frac{dF_{ve}(t)}{dt} + b F_{ve}(t) = c_1 x(t) + c_2 \frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} \quad \text{tel que } \beta \text{ non entier} \quad (2-5)$$

$$F_{ve}(t) = \int_0^t e^{-b(t-\tau)} h(\tau) d\tau \quad (2-6)$$

avec $h(t)$ est donné par :

$$h(t) = \begin{cases} l_0 \dot{\epsilon} \left(c_1 t + c_2 \frac{\prod_{l=0}^{n-1} (n-\beta+1-l)}{(n-\beta)(n-\beta+1)\Gamma(n-\beta)} t^{1-\beta} \right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ l_0 \dot{\epsilon} \left(c_1 \left(\frac{T}{2} - t \right) + c_2 \frac{\left(t^{1-\beta} - 2 \left(t - \frac{T}{2} \right)^{1-\beta} \right) \prod_{l=0}^{n-1} (n-\beta+1-l)}{(n-\beta)(n-\beta+1)\Gamma(n-\beta)} \right) & \text{si } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (2-7)$$

Dans le cas où β est compris entre 0 et 2, on peut montrer que la force viscoélastique est exprimée par l'équation 2-8. Les détails de cette équation sont donnés en **Annexe A**.

$$F_{ve}(t) = \begin{cases} l_0 \dot{\epsilon} \left(\frac{c_1}{b^2} (bt-1) + A(t) \right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ l_0 \dot{\epsilon} \left(\frac{c_1}{b^2} (b(t+T)-1) + A(t) - 2A\left(t - \frac{T}{2}\right) \right) & \text{si } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (2-8)$$

$$\text{avec } A(t) = \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\Gamma(2-\beta, -bt)}{(-b)^{2-\beta}} \right) e^{-bt}.$$

II.2.2.4 Modèles à mémoire et conditions thermodynamiques

Pour le modèle à mémoire entier, il est possible de dissocier une contribution purement élastique de la réponse viscoélastique (**équation 2-4**). La réponse élastique globale des modèles à mémoire est ainsi donnée par :

$$F_e^g(t) = \sum_{i=0}^M k_{2i+1} x^{2i+1} \quad (2-9)$$

avec $(k_{2i+1} = K_{2i+1})_{i=0..M}$ pour le modèle à mémoire fractionnaire alors que pour le modèle à mémoire entier $k_1 = K_1 + K_{ve}$ et $(k_{2i+1} = K_{2i+1})_{i=1..M}$.

L'expression de la force viscoélastique, considérée dans ce qui suit, est donnée par l'**équation 2-3** avec $P=2$ pour le modèle à mémoire entier et par l'**équation 2-8** pour le modèle fractionnaire.

En conclusion, les modèles à mémoire de la mousse polyuréthane décrivent la réponse force $F(t)$ lors d'un essai de compression/décompression quasi-statique à grandes déformations par:

$$F(t) = F_e^g(t) + F_{ve}(t) \quad (2-10)$$

Les paramètres viscoélastiques trouvés par **White S.W. (1998)**, **Singh, R., Davies P. et al. (2003)**, **Deng R. (2004)**, et **Ippili R. K., Davies P. et al. (2008)** dans le cadre d'étude quasi-statique dépendent des conditions de test (taux de déformation, niveau de compression final, période d'essai). Dans nos travaux et pour rendre les résultats indépendants des conditions d'essais, les paramètres viscoélastiques sont remplacés par des paramètres adimensionnels (**Tab. 8**).

Tableau 8. Transformations des paramètres dimensionnels en paramètres adimensionnels.

Paramètres du modèle entier		Paramètres du modèle fractionnaire	
Dimensionnels	Adimensionnels	Dimensionnels	Adimensionnels
$X(1) = \text{Re}(\alpha_1)$ (sec ⁻¹)	$Y(1) = X(1)T$	$X(1) = b$ (sec ⁻¹)	$Y(1) = X(1)T$
$X(2) = \text{Im}(\alpha_1)$ (sec ⁻¹)	$Y(2) = X(2)T$	$X(2) = \beta$	$Y(2) = X(2)$
$X(3) = \text{Re}(a_1)$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(3) = \frac{X(3)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T$	$X(3) = c_1$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(3) = \frac{X(3)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T$
$X(4) = \text{Im}(a_1)$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(4) = \frac{X(4)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T$	$X(4) = c_2$ (Nm ⁻¹ sec ^{β-1})	$Y(4) = \frac{X(4)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T^{1-\beta}$
k_i (Nm ⁻ⁱ)	$L_i = \frac{k_i}{F_{\max}} l_0^i$	k_i (Nm ⁻ⁱ)	$L_i = \frac{k_i}{F_{\max}} l_0^i$

$F_{\max} = \max(F)$ est déterminée à partir des tests expérimentaux.

Ainsi, les paramètres à identifier sont les paramètres élastiques $(k_{2i+1})_{i=0..M}$ et les paramètres viscoélastiques (vecteur Y dont on en déduit X). Pour être physiquement valables, ces paramètres doivent vérifier des conditions thermodynamiques qui sont des conditions de causalité et de stabilité découlant de l'inégalité de Clausius (**Lion A. 1997**).

Dans le cas quasi-statique, les conditions thermodynamiques sont déterminées en vérifiant que les parties réelle et imaginaire de la transformation de Fourier de la réponse du modèle à une impulsion de Dirac, en négligeant les termes non linéaires, sont positives, quelle que soit la fréquence.

Le **tableau 9** donne les conditions thermodynamiques à respecter pour le modèle à mémoire entier et le **tableau 10** pour le modèle fractionnaire. Les détails des différentes inéquations sont donnés en **Annexe B**.

Tableau 9. Conditions thermodynamiques du modèle de mémoire entier (cas $P=2$).

Le vecteur des paramètres viscoélastiques à identifier : $X = [\text{Re}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_1), \text{Re}(a_1), \text{Im}(a_1)]_{P=2}$
$k_1 \geq 0 \quad X(3) \leq 0 \quad X(2)X(4) + X(1)X(3) \leq 0 \quad X(1) \geq 0$ (stabilité du comportement viscoélastique)
$k_1 \left((X(1)^2 + X(2)^2) \right) + (X(2)X(4) + X(1)X(3)) \geq 0$
$X(3) \left(X(1)^2 + X(2)^2 \right) - 2X(1)(X(2)X(4) + X(1)X(3)) \geq 0$

Tableau 10. Conditions thermodynamiques du modèle de mémoire fractionnaire.

Le vecteur des paramètres viscoélastiques à identifier $X = [b, \beta, c_1, c_2]$				
$k_1 \geq \frac{-X(3)}{X(1)}$	$1 < X(2) \leq 2$	$X(3) \leq 0$	$X(4) \geq 0$	$X(1) \geq 0$
$X(1)X(4)\omega^{X(2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}X(2)\right) - X(3)\omega \geq 0$				

II.2.3 Méthode d'identification et approche d'optimisation

Dans le premier chapitre nous avons présenté les deux méthodes d'identification considérées dans la littérature afin de déterminer les paramètres de modèles à mémoire (**chapitre I, section I.2.5**): la méthode de la force-moyenne et la méthode de la différence de force entre la charge et la décharge. Cette dernière, que nous utilisons dans le cadre de nos travaux, est basée sur la symétrie de la force élastique entre charge et décharge. Ainsi, seuls les paramètres viscoélastiques sont présents dans l'expression analytique de la différence entre la force de charge et celle de décharge pendant le premier cycle (**équation 2-11** pour le modèle à mémoire entier et **équation 2-12** pour le modèle fractionnaire).

$$\delta F_{th}(t) = \sum_{i=1}^p \frac{l_0 \dot{\epsilon}}{\alpha_i^2} a_i \left(e^{-\alpha_i t} + 2e^{\alpha_i \left(\frac{t-T}{2}\right)} - e^{-\alpha_i(T-t)} - 2 \right) ; t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \quad (2-11)$$

$$\delta F_{th}(t) = l_0 \dot{\epsilon} \begin{pmatrix} -2\frac{c_1}{b^2} + A(t) \\ +2A\left(\frac{T}{2} - t\right) - A(T-t) \end{pmatrix} ; t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \quad (2-12)$$

avec $A(t) = \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\Gamma(2-\beta, -bt)}{(-b)^{2-\beta}} \right) e^{-bt}$

Les paramètres viscoélastiques sont identifiés à l'aide d'une démarche de minimisation (optimisation) d'erreur au sens des moindres carrés entre la courbe expérimentale de la différence de forces entre la charge et la décharge et la même courbe obtenue à partir du modèle.

L'aperçu bibliographique sur les méthodes d'optimisation, présenté dans le premier chapitre, nous a permis de distinguer deux types de méthodes d'optimisation (ou de minimisation) à savoir les méthodes déterministes et les méthodes non déterministes.

Les méthodes déterministes sont efficaces pour des fonctions à optimiser qui évoluent rapidement et qui ont une forme a priori connue de façon à ce qu'on soit capable de déterminer une initialisation au voisinage du minimum global. Cependant, ces méthodes ne garantissent pas généralement l'obtention du minimum global. La méthode de Gauss-Seidel, la méthode de région de confiance et la méthode du Gauss font partie des méthodes déterministes.

Les méthodes non déterministes, telles que la méthode de Monte Carlo, la méthode de recuit simulé, et l'algorithme génétique, traitent les problèmes d'optimisation les plus complexes. En effet, elles sont fiables dans le cas des fonctions non dérivables et dans le cas des fonctions fractales et bruitées. De plus, ces méthodes offrent une grande chance de retrouver le minimum global lorsque la fonction à optimiser présente plusieurs minimums locaux. Leur inconvénient est le temps de calcul qui est très important par rapport aux méthodes déterministes.

Afin d'exploiter les avantages des méthodes déterministes tout en assurant une grande probabilité de trouver le minimum global satisfaisant les conditions thermodynamiques, nous avons développé une approche de minimisation hybride en trois étapes (utilisation à la fois les méthodes déterministes et les méthodes non déterministes) qui consiste à utiliser l'algorithme génétique (commande '**gatool**' de **MATLAB 7.01**) et la méthode de région de confiance (commandes '**lsqnonlin**' ou '**fmincon**').

La première étape permet d'attribuer une grande probabilité de trouver une initialisation à la méthode de région de confiance dans le bassin d'attraction de l'optimum global de la fonction objectif à l'aide de l'algorithme génétique appliqué avec des critères d'arrêts grossiers et sans contraintes.

La deuxième étape permet de finaliser la recherche de la meilleure combinaison de paramètres viscoélastiques, qui minimise la fonction objectif en utilisant la méthode de région de confiance avec des critères d'arrêt serrés.

Finalement, la solution retrouvée dans la deuxième étape est injectée dans une population initiale de l'algorithme génétique pour vérifier s'il s'agit effectivement du minimum global. Le critère d'arrêt dans cette troisième étape est le nombre de génération que nous avons fixé à 100.

On note que les conditions thermodynamiques sont considérées comme des contraintes dans la deuxième et la troisième étape.

II.2.4 Critères de validation des résultats d'identification

La modélisation est généralement une aide à la conception par prédiction du comportement des systèmes. Pour cette raison, l'un des critères de validation des résultats d'identification consiste à vérifier si la réponse force-déplacement prévue par le modèle est située entre les enveloppes expérimentales maximale et minimale.

Pour le deuxième critère, nous considérons que l'erreur relative maximale entre les courbes de la différence de force entre la charge et la décharge expérimentale et analytique pour les deux modèles à mémoire fractionnaire et entier est acceptable si elle ne dépasse pas 7 %.

Les résultats d'identification doivent aussi vérifier les conditions thermodynamiques détaillées dans l'**annexe B** et la **section II.2.2.4**, ceci constitue le troisième critère de validation.

Afin de garantir une qualité statistique de tous les paramètres à identifier dans ce chapitre, évaluée à travers un niveau de confiance fixé à 95% et une limite statistique d'erreur 'SLE' inférieur à 10%, un nombre minimal d'essais N_{\min} est déterminé pour chaque test. La démarche consiste à estimer la loi de probabilité de chaque paramètre à partir d'une batterie d'essais préliminaires (15 essais pour chaque vitesse de déformation). Le niveau de confiance que nous avons fixé permet la détermination d'un quantile u_i à partir du tableau de probabilité approprié à la loi considérée pour le i^{me} paramètre. La valeur moyenne et l'écart type préliminaires $(\hat{m}_i, \hat{\sigma}_i)$ sont calculés à partir des résultats de la batterie d'essais préliminaires. Le nombre minimal d'essais est déterminé à partir de la formule suivante:

$$N_{\min} = \max_i \left(1 + \text{ceil} \left(\left(\frac{100}{SLE} \frac{u_i \hat{\sigma}_i}{\hat{m}_i} \right)^2 \right) \right) \quad (2-16)$$

Rigoureusement, la batterie d'essais préliminaires (15 essais pour chaque vitesse de déformation) ne permet pas de trouver une bonne estimation de la loi de probabilité de chaque paramètre à identifier.

Afin de simplifier le calcul du nombre minimal et rattraper l'imprécision de l'estimation des lois de probabilité, nous avons considéré un quantile constant défini par $u = \max_i(u_i)$ lors du calcul du nombre minimal d'essais pour chaque vitesse de déformation (**Tab. 7, section II.2.1**).

Tableau 7. Nombre des échantillons utilisés pour chaque type de mousse et chaque test.

	Test 1	Test 2	Test 3
Mousse A	45	17	19
Mousse B	22	20	17
Mousse C	24	21	18

Les valeurs moyennes de tous les paramètres identifiés dans ce chapitre, calculées à partir de N_{\min} essais, sont donc représentatives de ces derniers. La qualité statistique des résultats d'identification constitue le quatrième critère de validation.

II.3 Application du processus de modélisation sur la mousse de polyuréthane

Cette partie présente l'application du processus de modélisation présenté précédemment sur les mousses de polyuréthanes que nous étudions (mousses A, B et C).

On rappelle qu'afin d'assurer une représentativité plus générale des modèles à mémoire entier et fractionnaire développés dans notre processus de modélisation, leurs paramètres dimensionnels dépendants des conditions d'essai ont été remplacés par des paramètres adimensionnels (**Tab. 8**). Ainsi, il conviendra de nous assurer que ces paramètres adimensionnels sont quasiment constants, particulièrement ceux du comportement viscoélastique.

Tableau 8. Transformations des paramètres dimensionnels en paramètres adimensionnels.

Paramètres du modèle entier		Paramètres du modèle fractionnaire	
Dimensionnels	Adimensionnels	Dimensionnels	Adimensionnels
$X(1) = \text{Re}(\alpha_1)$ (sec ⁻¹)	$Y(1) = X(1)T$	$X(1) = b$ (sec ⁻¹)	$Y(1) = X(1)T$
$X(2) = \text{Im}(\alpha_1)$ (sec ⁻¹)	$Y(2) = X(2)T$	$X(2) = \beta$	$Y(2) = X(2)$
$X(3) = \text{Re}(a_1)$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(3) = \frac{X(3)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T$	$X(3) = c_1$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(3) = \frac{X(3)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T$
$X(4) = \text{Im}(a_1)$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(4) = \frac{X(4)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T$	$X(4) = c_2$ (Nm ⁻¹ sec ^{β-1})	$Y(4) = \frac{X(4)}{F_{\max}} l_0 \varepsilon_{\max} T^{1-\beta}$
k_i (Nm ⁻ⁱ)	$L_i = \frac{k_i}{F_{\max}} l_0^i$	k_i (Nm ⁻ⁱ)	$L_i = \frac{k_i}{F_{\max}} l_0^i$

$F_{\max} = \max(F)$ est déterminée à partir des tests expérimentaux

La mousse A était la mousse de polyuréthane considérée par défaut dans cette thèse, les deux premières sections sont consacrées à l'application des modèle à mémoire entier et fractionnaire sur la mousse A.

Dans une troisième section, une comparaison entre les deux modèles entier et fractionnaire appliqués sur la mousse A nous a permis de discuter les avantages et les limites de chaque modèle.

Finalement, dans une quatrième section nous avons appliqué le modèle à mémoire entier sur les mousses de polyuréthane B et C. Ceci nous a permis de vérifier que la modélisation entière est représentative de différents types de mousse. L'application des modèles à mémoire fractionnaire sur les mousses B et C sera rapportée à des travaux en perspective.

Il faut noter que pour chaque section, nous présentons dans une introduction brève nos apports par rapport la bibliographie.

II.3.1 Application du modèle à mémoire entier sur la mousse A

Dans la littérature la méthode de la force moyenne est la méthode utilisée pour identifier les paramètres du modèle à mémoire entier développé par **Ippili R. K., Davies P. et al. (2008)** (section I.2.5.1). Contrairement à ceci, nous avons choisi d'appliquer la méthode de la différence de force entre la charge et la décharge développée dans la littérature pour le modèle à mémoire fractionnaire considéré par **(Deng R. 2004)**.

La **figure 32** illustre notre démarche d'identification.

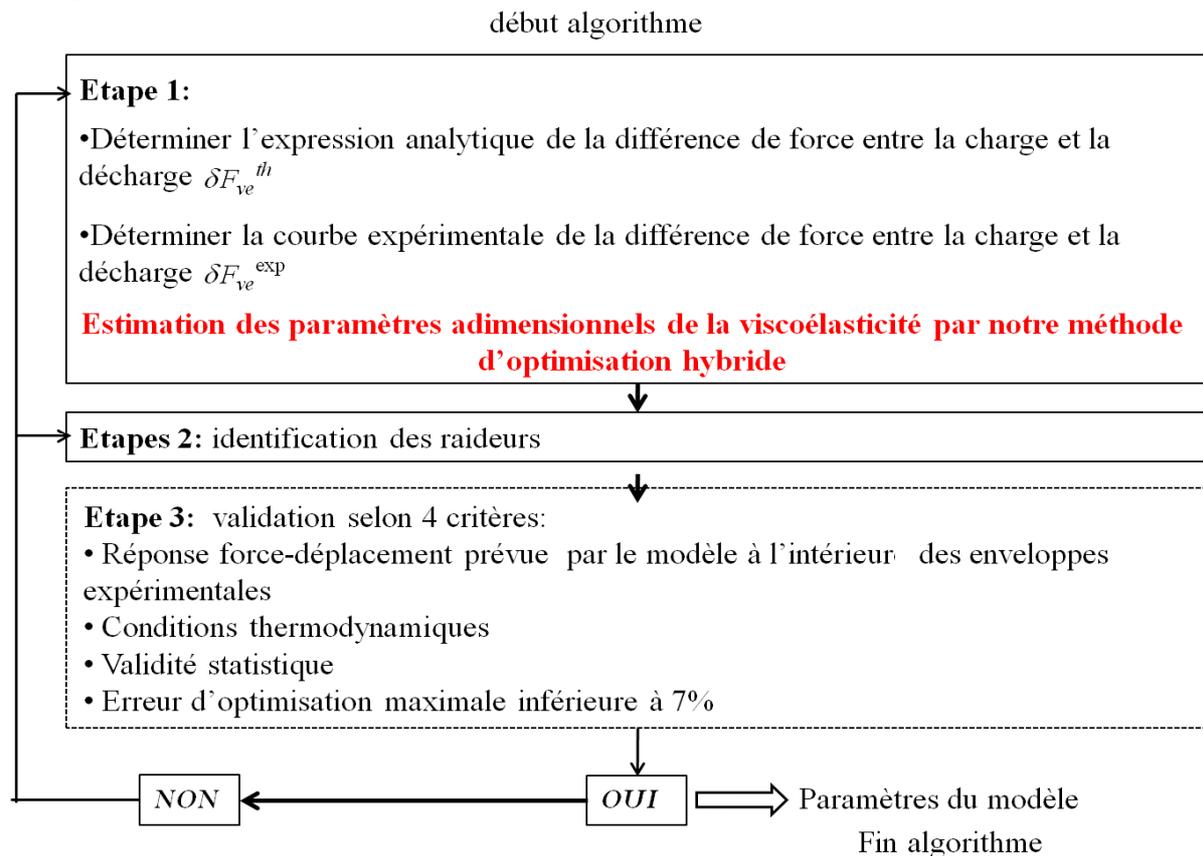


Figure 32. Algorithme de notre méthode de différence de force entre la charge et la décharge.

De plus nous avons considéré pour notre modèle à mémoire entier des paramètres adimensionnels au lieu des paramètres dimensionnels afin de leur conférer un niveau de représentativité plus général.

Lors du processus d'identification, nous avons pu constater que l'identification des paramètres viscoélastiques de notre modèle à mémoire entier en utilisant l'équation 2-11, ne garantit pas la précision et l'optimisation de temps de calcul. En fait, les erreurs numériques de calcul des nombres complexes conjugués se traduisent souvent par des résidus complexes infiniment petits mais comme le modèle est à mémoire (le calcul à l'instant $t=t_a$ dépend des calculs pour les instants précédents), un cumul de résidus rend la valeur de la fonction δF_{th} imprécise avec la présence d'une partie complexe non négligeable. En outre, le calcul de nombres complexes est plus lourd (en terme de compilation numérique) qu'un calcul de fonctions réelles, d'où un temps de calcul plus important.

En conséquence, pour faciliter l'identification des paramètres viscoélastiques de notre modèle à mémoire entier et pour assurer la précision en minimisant le temps de calcul, il faut programmer le développement réel de l'équation 2-11 donné par :

$$\delta F_{th}(t) = 2l_0 \dot{\epsilon} \left(\begin{array}{c} -2A3 \\ + (A3 \cos(X(2)t) + A4 \sin(X(2)t)) e^{-X(1)t} \\ + 2 \left(A3 \cos \left(X(2) \left(\frac{T}{2} - t \right) \right) + A4 \sin \left(X(2) \left(\frac{T}{2} - t \right) \right) \right) e^{-X(1) \left(\frac{T}{2} - t \right)} \\ - (A3 \cos(X(2)(T-t)) + A4 \sin(X(2)(T-t))) e^{-X(1)(T-t)} \end{array} \right); \quad t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \quad (2-17)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A3 = \frac{X(3)(X(1)^2 - X(2)^2) + 2X(1)X(2)X(4)}{(X(1)^2 + X(2)^2)^2} ; \quad A4 = \frac{X(4)(X(1)^2 - X(2)^2) - 2X(1)X(2)X(3)}{(X(1)^2 + X(2)^2)^2} \\ X = [\text{Re}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_1), \text{Re}(a_1), \text{Im}(a_1)]_{p=2} \end{array} \right.$$

II.3.1.1 Validation des résultats d'identification

Les résultats d'identification des paramètres du modèle mémoire entier considéré pour la mousse A sont regroupés dans le **tableau 11**.

Tableau 11. Résultats de l'identification, modèle à mémoire entier (mousse A).

Paramètres	Test 1	Test 2	Test 3
$Y(1)$	45.40	46.56	46.22
$Y(2)$	0.2235	0.2275	0.2235
$Y(3)$	-256.19	-257.10	-262.69
$Y(4)$	2.202 10^4	2.187 10^4	2.204 10^4
Erreur entre δF_{th} et δF_{exp} (%)	5.293	4.689	3.843
M	8	8	8
L_1	9.838	10.078	10.439
L_3	-39.411	-49.820	-63.049
L_5	550.580	710.111	877.409
L_7	-4204.487	-5473.795	-6673.007
L_9	18663.935	24425.201	29494.219
L_{11}	-49362.895	-64852.905	-77708.575
L_{13}	76639.092	101032.117	120218.484
L_{15}	-64435.789	-85210.856	-100703.913
L_{17}	22650.411	30037.906	35240.489
Erreur de symétrie (%)	0.230	0.212	0.339
Erreur d'identification du polynôme élastique (%)	0.160	0.300	0.353
Erreur de modélisation globale (%)	3.992	4.060	4.957

Afin de valider ces résultats, il est nécessaire d'examiner les critères de validation détaillés dans la partie précédente.

Les paramètres identifiés vérifient les conditions thermodynamiques, présentées dans le **tableau 9**. Ils sont des moyennes des jeux de paramètres issus de N_{\min} essais qui permettent d'assurer une qualité statistique définie par un niveau de confiance de 95% et une limite statistique d'erreur de 10%.

On constate à partir de la **figure 33** que la courbe de différence de force entre la charge et la décharge analytique présente uniquement un décalage initial par rapport à la courbe expérimentale. Globalement, l'estimation est acceptable : l'erreur relative maximale entre les courbes expérimentale δF_{exp} et analytique δF_{th} ne dépasse pas 5.3 %.

Le décalage initial peut être expliqué en analysant la **figure 34**. Elle montre que la réponse force-déplacement prévue par le modèle est en bonne concordance avec la réponse expérimentale, sauf à la fin du test où la différence entre les deux réponses est importante. En fait, une contrainte résiduelle impose à la mousse de retourner à une position finale différente de sa position initiale avant la réalisation de test, ceci est du au comportement viscoélastique. Ainsi, le contact entre la cellule de force et la mousse est perdu. Les valeurs de force mesurées à la fin de test sont inexactes. On note que la contrainte résiduelle est non permanente car la mousse retrouve ses dimensions initiales seulement après un minimum de deux jours de repos.

La **figure 34** montre que la réponse force-déplacement prévue par le modèle est globalement à l'intérieur des enveloppes expérimentales.

On en conclut que les résultats d'identification, résumés dans le **tableau 11**, vérifient les quatre critères de validation à savoir la précision d'estimation de la différence de force entre la charge et la décharge, les conditions thermodynamiques, la qualité statistique et la prévision du comportement à l'intérieur des enveloppes expérimentales.

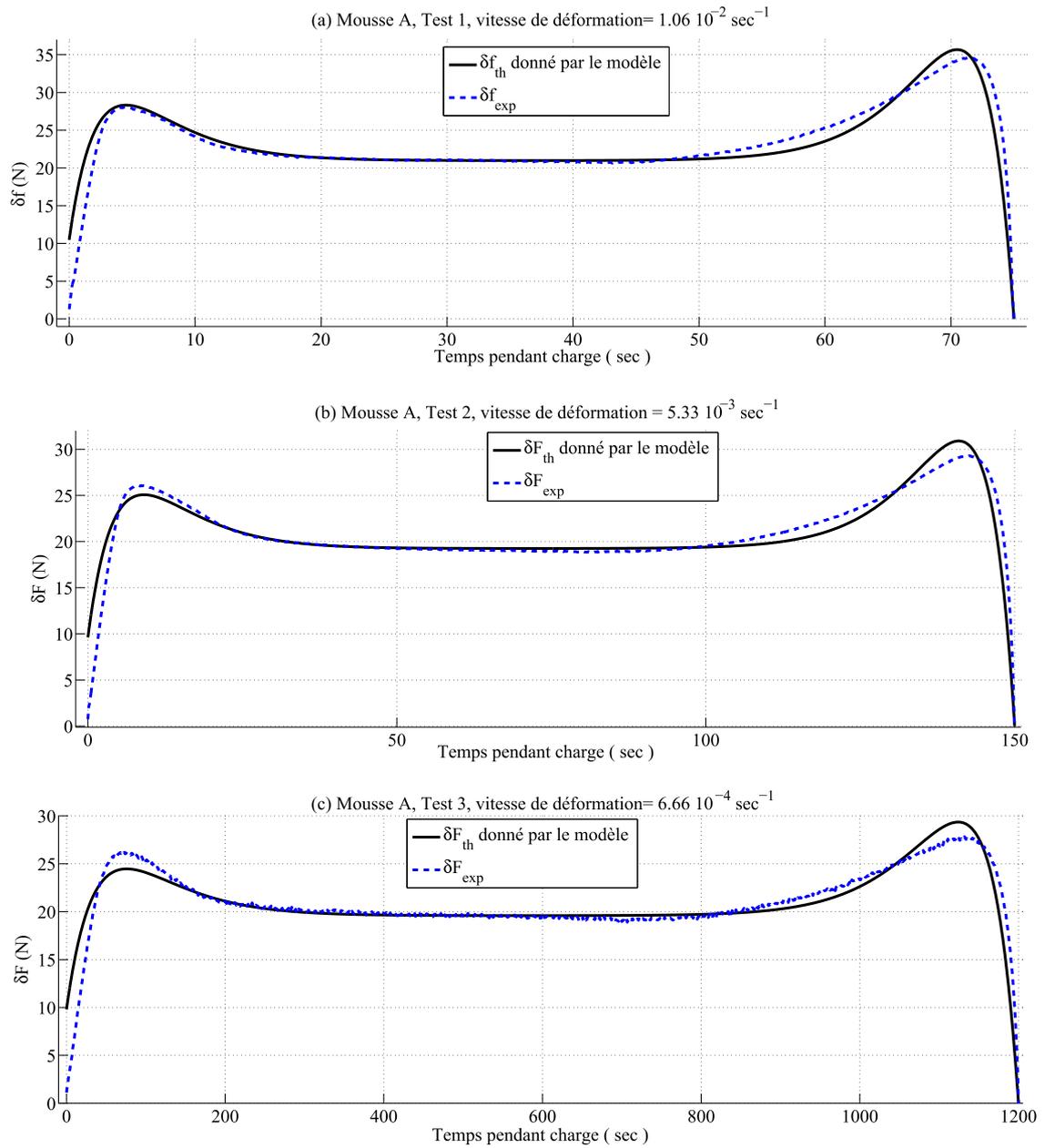


Figure 33. Comparaison entre les courbes de différence de force entre la charge et la décharge expérimentales et analytiques, cas du modèle à mémoire entier, (a) Mousse A - Test 1, (b) Mousse A - Test 2, (c) Mousse A - Test 3.

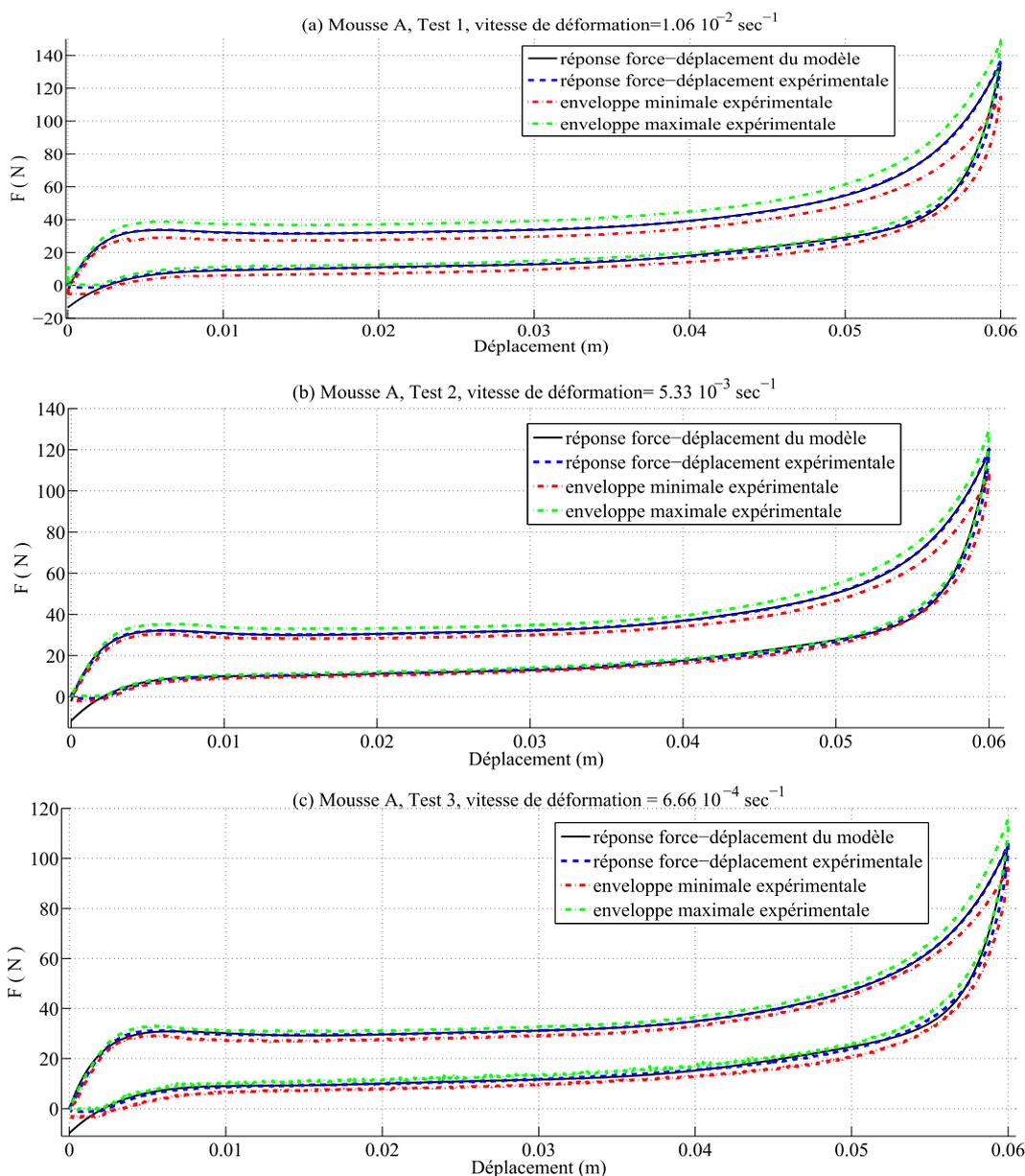


Figure 34. Vérification de l'inclusion de la réponse force-déplacement prévue par le modèle à mémoire entier dans les enveloppes expérimentales, cas du modèle à mémoire entier, Mousse A, (a) Test 1, (b) Test 2, (c) Test 3.

II.3.1.2 Discussion et conclusion

On constate à partir des résultats d'identification regroupés dans le **tableau 11** que les paramètres viscoélastiques adimensionnels sont quasiment invariants par rapport aux vitesses de déformation.

Il est donc possible de caractériser le comportement viscoélastique de la mousse A par ces paramètres indépendamment des conditions d'essai.

La **figure 35** montre que la force viscoélastique est de signe négatif. On déduit donc que le comportement viscoélastique modélise l'effet de relaxation, ce qui explique la contrainte résiduelle non permanente à la fin du test.

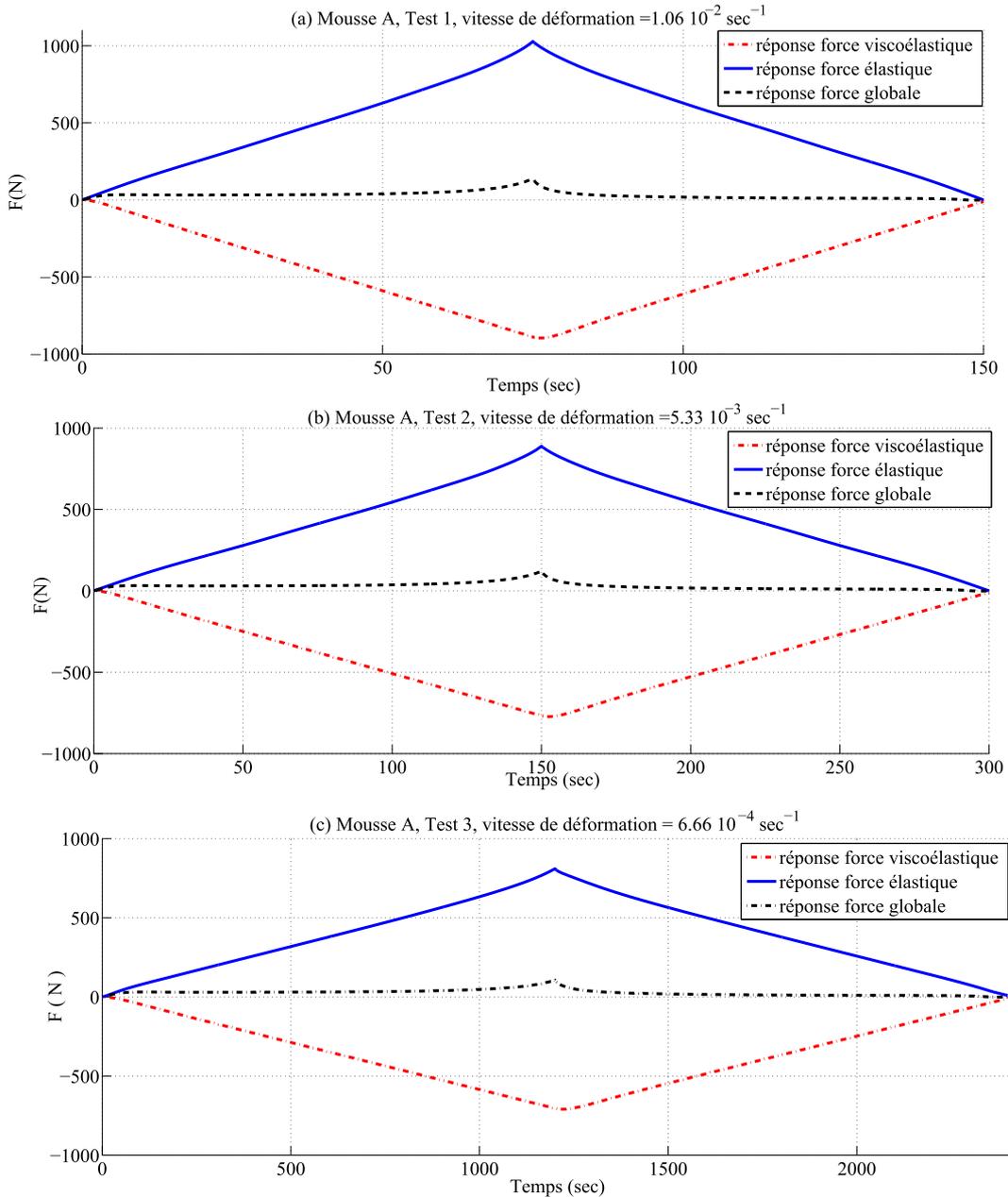


Figure 35. Reconstruction de la force viscoélastique, de la force élastique et de la force globale, cas du modèle à mémoire entier (a) Mousse A - Test 1, (b) Mousse A - Test 2, (c) Mousse A - Test 3.

Toutefois, la **figure 35** montre que les ordres de grandeurs de la réponse viscoélastique et la réponse élastique sont très importants. Le polynôme élastique est presque linéaire. Cette linéarité est expliquée par la prédominance de la réponse de la raideur globale d'ordre **1** sur la réponse élastique globale ($P_1 = k_1 x \gg P_2 = \sum_{i=1}^M k_{2i+1} x^{2i+1}$, **Fig. 36**).

Lors de la modélisation (**section II.2.2**), nous avons montré que la raideur élastique globale d'ordre **1** (k_1) du modèle à mémoire entier est composée de deux termes : la raideur élastique du ressort non linéaire K_1 et la raideur provenant du comportement viscoélastique K_{ve} . La soustraction de la raideur viscoélastique du comportement élastique global, si possible,

permet de retrouver le comportement non linéaire du ressort et de réduire les ordres des grandeurs de la réponse élastique et la réponse viscoélastique.

On déduit que le modèle à mémoire entier ne peut pas décrire correctement le comportement élastique non linéaire.

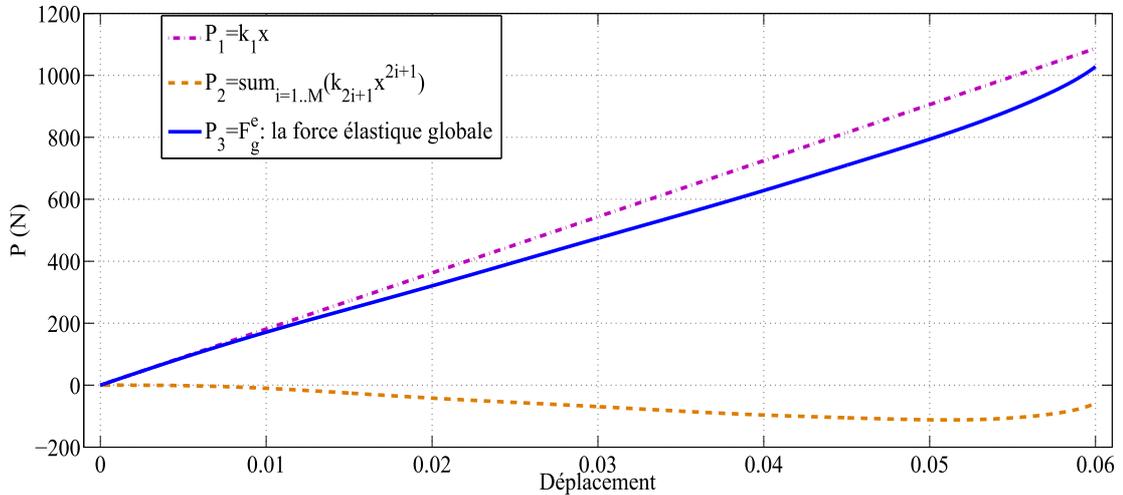


Figure 36. Prédominance de la réponse de la raideur globale d'ordre 1 (P_1) sur la réponse élastique globale.

II.3.2 Application du modèle à mémoire fractionnaire sur la mousse A

Les paramètres à identifier dans le cas d'un modèle à mémoire fractionnaire sont les paramètres élastiques $(k_{2i+1})_{i=0..M}$ et les paramètres viscoélastiques (vecteur Y dont on en déduit $X = [b, \beta, c_1, c_2]$).

L'identification des paramètres viscoélastiques du modèle à mémoire fractionnaire en utilisant l'expression 2-12 aboutit généralement à des résultats ne vérifiant pas les conditions thermodynamiques (Deng R. 2004). En fait, le fractionnel β converge vers une valeur entre 1 et 2 tandis que le paramètre c_1 est légèrement positif. Ce problème a été aussi rencontré par Elfarhani M. (2010).

En analysant les expressions 2-8 et 2-12 rappelées ci-dessous, nous avons remarqué que la fonction gamma incomplète, définie pour tout réel $d > 0$ par $\Gamma(d, y) = \int_0^y t^{d-1} e^{-t} dt$, peut expliquer l'occurrence du problème rencontré.

Le manuel d'aide de MATLAB précise que sa valeur n'est pas exacte lorsque $y < 0$ et $abs(y) \leq d$. Ces conditions sont vérifiées au début de chaque essai de compression/décompression ($(y = -bt) < 0$ et $bt < (d = 2 - \beta)$ lorsque t est très faible).

$$F_{ve}(t) = \begin{cases} l_0 \dot{\varepsilon} \left(\frac{c_1}{b^2} (bt-1) + A(t) \right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ l_0 \dot{\varepsilon} \begin{cases} \left(\frac{c_1}{b^2} (b(t+T)-1) \right) \\ \left(A(t) - 2A(t-\frac{T}{2}) \right) \end{cases} & \text{si } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (2-8)$$

$$\delta F_{in}(t) = l_0 \dot{\varepsilon} \begin{pmatrix} -2 \frac{c_1}{b^2} + A(t) \\ +2A\left(\frac{T}{2}-t\right) - A(T-t) \end{pmatrix} ; t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \quad (2-12)$$

$$\text{avec } A(t) = \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\Gamma(2-\beta, -bt)}{(-b)^{2-\beta}} \right) e^{-bt}$$

Le terme $(-b)^{2-\beta}$ et la fonction gamma incomplète $\Gamma(2-\beta, -bt)$ sont des fonctions à valeurs complexes puisque b doit être positif ($X(1) \geq 0$, **Tab.10, section II.2.2.4**). Ainsi pour avoir les valeurs réelles des fonctions $F_{ve}(t)$ et $\delta F_{ve}(t)$, il faut garantir que la fonction $\tilde{F}(t) = \frac{\Gamma(2-\beta, -bt)}{(-b)^{2-\beta}}$ est réelle quel que soit $t > 0$. Cependant, les erreurs numériques de calcul des nombres complexes se traduisent souvent par des résidus complexes. Le passage par une réduction en utilisant les fonctions $Re(\tilde{F})$ ou $abs(\tilde{F})$ provoque l'imprécision des résultats lors de l'identification des paramètres et lors de la reconstruction de la force viscoélastique.

Nous avons développé une solution purement mathématique qui consiste à considérer une intégration à borne positive d'une fonction réelle à la place de la fonction $\tilde{F}(t)$ (**équation 2-18**).

$$\tilde{F}(t) = \frac{\int_0^{-bt} \tau^{d-1} e^{-\tau} d\tau}{(-b)^d} = \int_0^t \left(\frac{\tau}{-b} \right)^{d-1} e^{-\tau} \frac{d\tau}{-b} = \int_0^t \tau^{d-1} e^{b\tau} d\tau \quad \text{tel que } d = 2 - \beta \quad (2-18)$$

Il est clair que la valeur de l'intégrale $\int_0^t \tau^{d-1} e^{b\tau} d\tau$ est purement réelle. On procède ensuite par un calcul numérique de cette intégrale en utilisant la méthode des trapèzes (**équation 2-19**). La précision de calcul nécessite l'étude de la convergence de la méthode utilisée qui consiste à comparer la précision des résultats et le temps de calcul pour un nombre variable de points ($n_p = [100, 500, 1000, 5000]$).

$$\int_0^t \tau^{d-1} e^{b\tau} d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^n \frac{t}{n_p} \left(\frac{f\left(\frac{t}{n_p}(i+1)\right) + f\left(\frac{t}{n_p}i\right)}{2} \right) \quad (2-19)$$

II.3.2.1 Validation des résultats d'identification

Les résultats d'identification des paramètres du modèle mémoire fractionnaire, considéré pour la mousse A sont regroupés dans le **tableau 12**.

Tableau 12. Résultats de l'identification, modèle à mémoire fractionnaire (mousse A).

Paramètres	Test 1	Test 2	Test 3
$Y(1)$	48	48	48.95
$Y(2)$	1.355	1.343	1.298
$Y(3)$	-10.947	-14.820	-11.252
$Y(4)$	1.090	1.101	-1.435
Erreur entre δF_{th} et δF_{exp} (%)	3.82	4.90	5.51
M	8	8	8
L_1	1.983	2.376	2.784
L_3	-40.94	-49.331	-51.289
L_5	593.883	737.713	703.646
L_7	-4629.787	-5775.825	-5311.369
L_9	20800.587	26011.710	23360.881
L_{11}	-55438.944	-69475.605	-61318.533
L_{13}	86525.435	108669.890	94577.866
L_{15}	-73015.583	-91911.841	-79030.468
L_{17}	25733.894	32463.923	27601.557
Erreur de symétrie (%)	1.98	1.81	3.52
Erreur d'identification du polynôme élastique (%)	1.32	2.43	0.32
Erreur de modélisation globale (%)	3.44	3.89	5.52

Les paramètres sont les moyennes de N_{min} jeux de valeurs permettant d'assurer une qualité statistique définie par un niveau de confiance de 95% et une limite statistique d'erreur de 10%.

Les paramètres identifiés vérifient les conditions thermodynamiques du **tableau 10**. Le problème de convergence de c_1 vers une valeur légèrement positive, rencontré dans la littérature, est bien résolu. En fait, β tend vers une valeur entre 1 et 2 et c_1 est largement négatif.

La **figure 37** montre que l'estimation de la courbe de différence de force entre la charge et la décharge est en concordance avec l'expérimentation. L'erreur d'estimation maximale ne dépasse pas 7%. Un décalage initial est observé. Il est du à la présence d'une contrainte résiduelle non permanente qui oblige la mousse à retourner à une position finale différente de la position initiale.

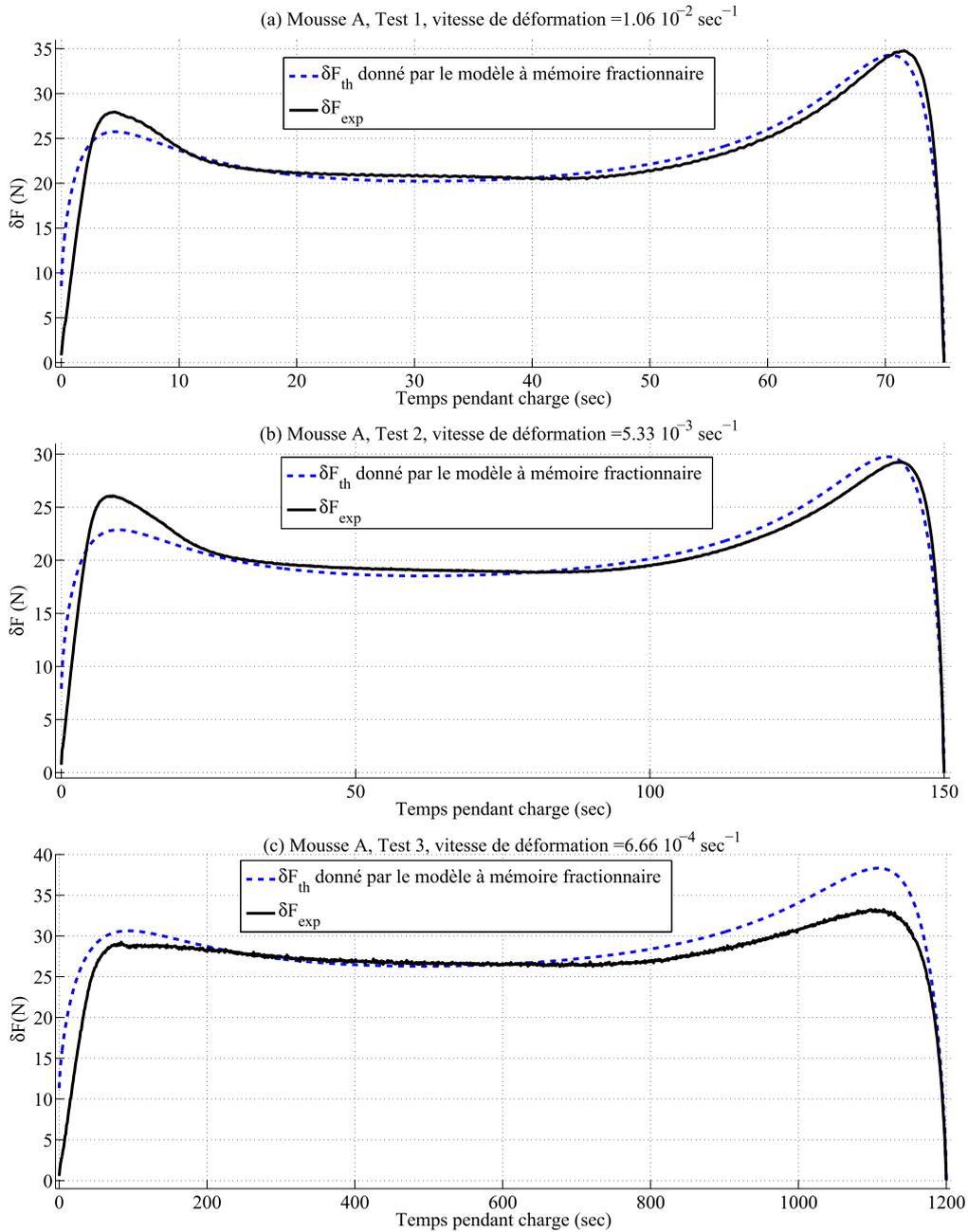


Figure 37. Comparaison entre les courbes de différence de force entre la charge et la décharge expérimentales et analytiques, cas du modèle à mémoire fractionnaire, (a) Mousse A - Test 1 , (b) Mousse A - Test 2, (c) Mousse A - Test 3.

La **figure 38** montre que le modèle à mémoire fractionnel reconstruit la réponse force-déplacement à l'intérieur des enveloppes expérimentales sauf en fin de test. La perte de contact entre la cellule de force et la mousse due à la contrainte résiduelle non permanente explique cette différence en fin de test.

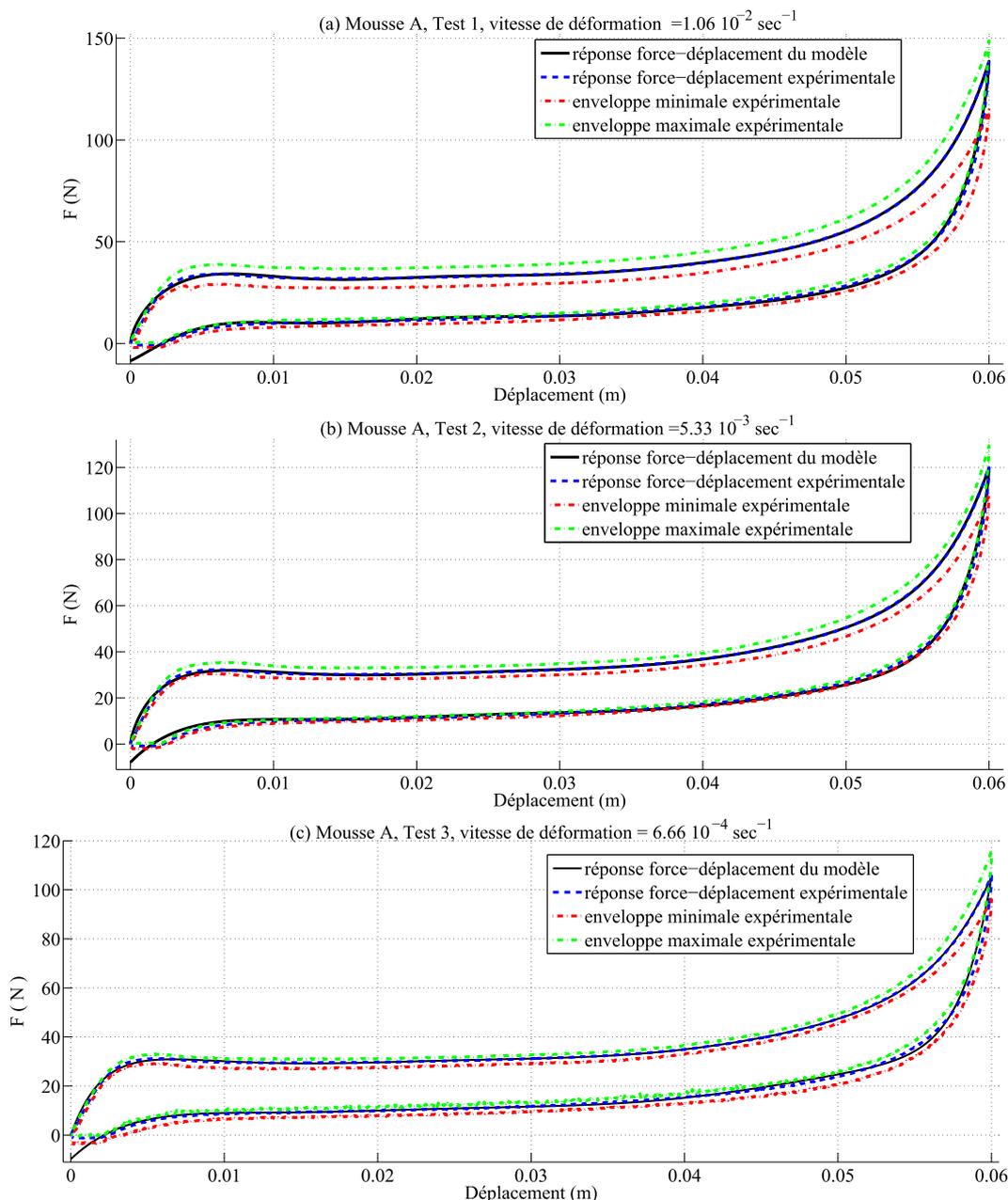


Figure 38. Vérification de l'inclusion de la réponse force-déplacement prévue par le modèle à mémoire entier dans les enveloppes expérimentales, cas du modèle à mémoire fractionnaire, Mousse A, (a) Test 1, (b) Test 2, (c) Test 3.

II.3.2.2 Discussion et conclusion

Les paramètres viscoélastiques adimensionnels sont faiblement liés aux vitesses de déformations. Ils sont quasiment constants. Ils caractérisent ainsi le comportement viscoélastique de la mousse indépendamment des conditions d'essais.

La **figure 39** montre que la réponse élastique reconstruite par le modèle à mémoire fractionnaire est non linéaire. Ainsi on déduit que contrairement au modèle à mémoire entier, le modèle à mémoire fractionnel peut décrire le comportement non linéaire du ressort modélisant le comportement élastique.

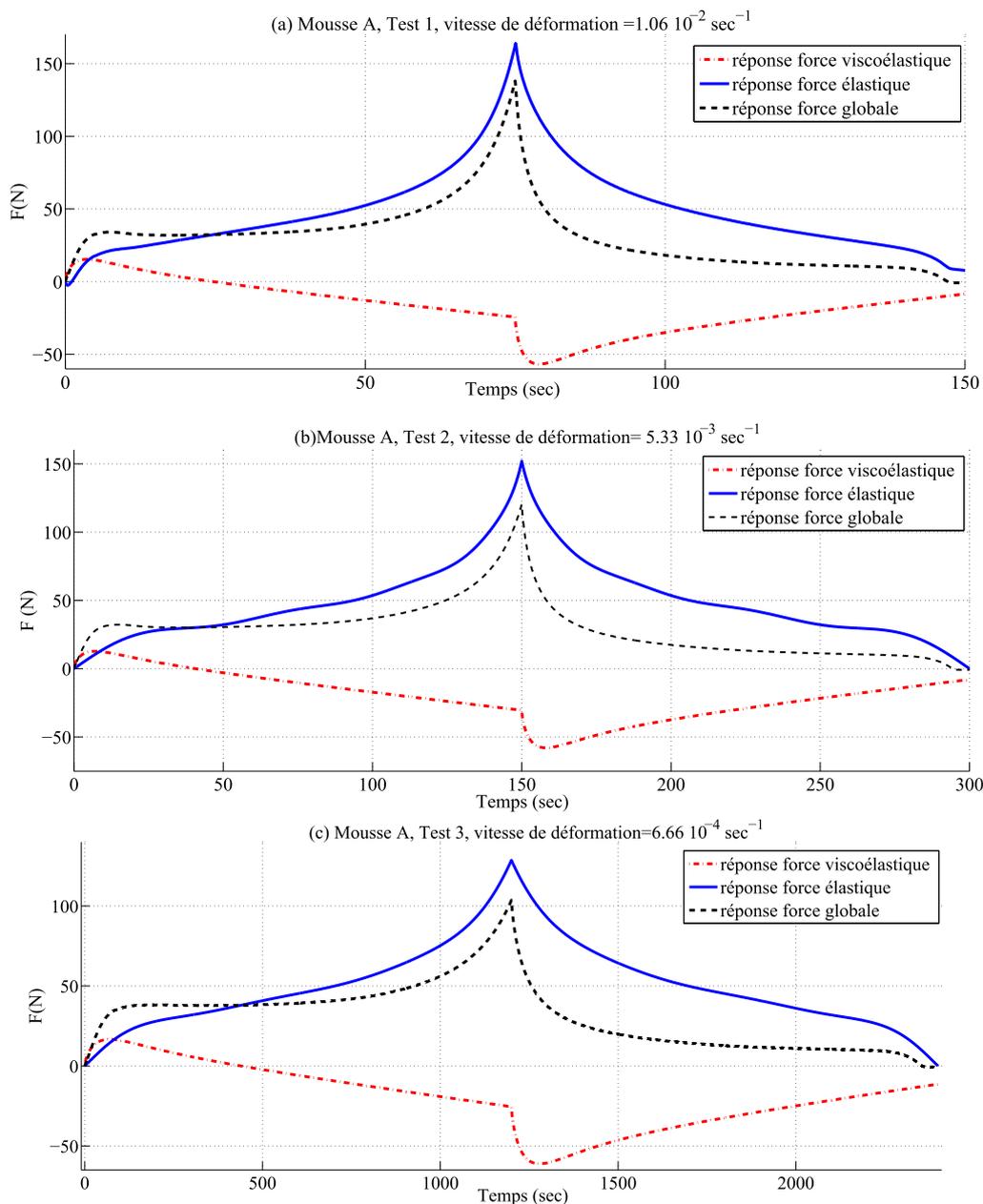


Figure 39. Reconstruction de la force viscoélastique, de la force élastique et de la force globale, cas du modèle à mémoire fractionnaire (a) Mousse A - Test 1, (b) Mousse A - Test 2, (c) Mousse A - Test 3.

La courbe de la réponse ‘force viscoélastique’ présente une pente initiale positive. On déduit donc que la pente initiale de la courbe de la réponse ‘force globale’ est composée de deux parties : une qui provient du comportement élastique et une autre du comportement viscoélastique. La réponse négative observée pour le comportement viscoélastique exceptée en début d’essai, modélise l’effet de relaxation. Ceci explique la présence d’une contrainte résiduelle non permanente à la fin de chaque essai.

II.3.3 Comparaison des modèles à mémoire entier et fractionnaire appliqués sur la mousse A

Au cours de cette partie une discrimination entre les deux modèles à mémoire entier et fractionnaire est menée afin de distinguer les points communs, les avantages et les limites de chacun.

Il a été montré que le modèle à mémoire fractionnaire peut décrire le comportement élastique non linéaire. Cependant, le modèle à mémoire entier n'en est pas capable du fait qu'il ne peut pas dissocier la contribution purement élastique, associé au comportement viscoélastique, du comportement non linéaire du ressort. Si on considère que la raideur élastique d'ordre **1** obtenue par le modèle à mémoire fractionnaire est équivalente à la raideur d'ordre **1** du ressort non linéaire pour le modèle à mémoire entier, alors on peut forcer la dissociation de la contribution élastique du comportement viscoélastique et donc reconstruire la réponse viscoélastique du modèle à mémoire entier en utilisant l'équation 2-4 ainsi que sa réponse élastique en utilisant l'équation 2-9 avec $(k_i = K_i)_{i=0..M}$. La comparaison entre les réponses ainsi reconstruites par le modèle à mémoire entier et celles du modèle à mémoire fractionnaire montre une coïncidence bien claire en termes d'allure et d'ordre de grandeurs (Fig. 40).

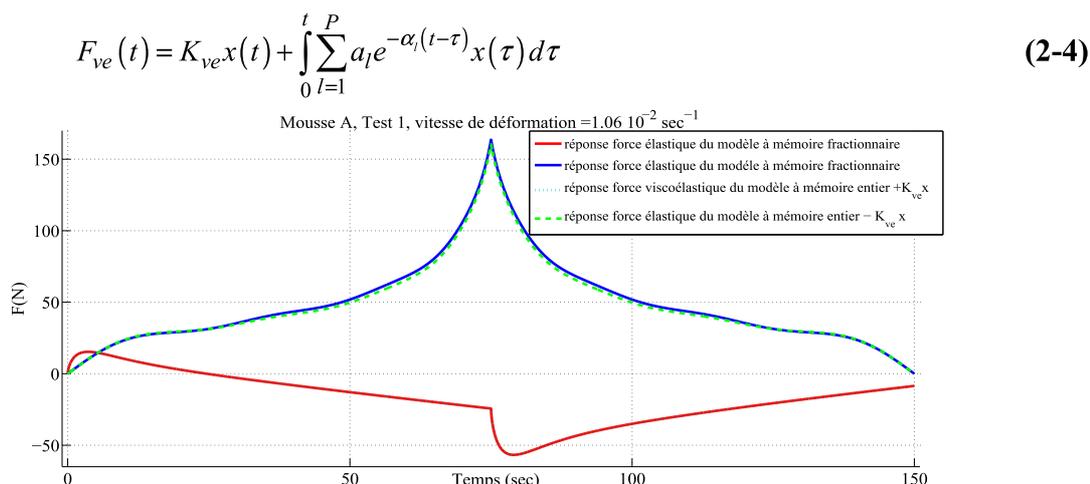


Figure 40. Comparaison entre les réponses force-élastique et force-viscoélastique du modèle à mémoire entier après dissociation de la contribution purement élastique d'origine viscoélastique et les réponses du modèle à mémoire fractionnaire.

D'autres similarités entre les deux modèles à mémoire peuvent être dégagées : ils présentent des forces viscoélastiques négatives presque systématiquement et des ordres de valeur pour le temps de relaxation très proches. En fait, l'inverse du temps de relaxation $Y(1)$ est entre 48 et 48.95 pour le modèle à mémoire fractionnaire alors qu'il est entre 45 et 47 pour le modèle à mémoire entier.

On ne peut pas comparer le temps de calcul global de chaque modèle car il dépend nécessairement de l'initialisation, sachant que chaque modèle a ses propres paramètres. Cependant, il est possible de comparer le temps de calcul par itération. On constate que la différence entre les deux modèles est très importante : le temps d'une itération pour le modèle

à mémoire fractionnaire est d'environ 300 sec alors qu'il est de l'ordre de 0.5 sec pour le modèle à mémoire entier pour des calculs réalisés sur un PC 64 bits.

II.3.4 Application du modèle à mémoire entier sur les mousses B et C – Généralisation du modèle à mémoire entier

Deux objectifs principaux sont assignés à cette section. Le premier est d'évaluer la représentativité du modèle à mémoire entier (précédemment vérifiée pour la mousse A) sur d'autres types de mousse de polyuréthane (Mousses B et C). Quant au deuxième, il consiste à apporter les améliorations nécessaires pour rendre le modèle plus général.

II.3.4.1 Evaluation de la représentativité du modèle à mémoire entier sur différents types de mousse

L'application du modèle à mémoire entier, tel qu'il était décrit pour la mousse A, a abouti à des résultats d'identification qui ne vérifie pas certains critères de validation. En effet, l'erreur relative entre la courbe expérimentale δF_{exp} et la courbe analytique δF_{th} atteint jusqu'à 22% pour la mousse C (Tab. 13).

Tableau 13. Erreur relative entre δF_{exp} et δF_{th} .

	Test 1	Test 2	Test 3
Mousse B	8.52	7.88	6.92
Mousse C	19.03	19.37	22.06

La **figure 41** confirme que l'estimation de la différence de force entre la charge et la décharge est imprécise surtout pour la mousse C.

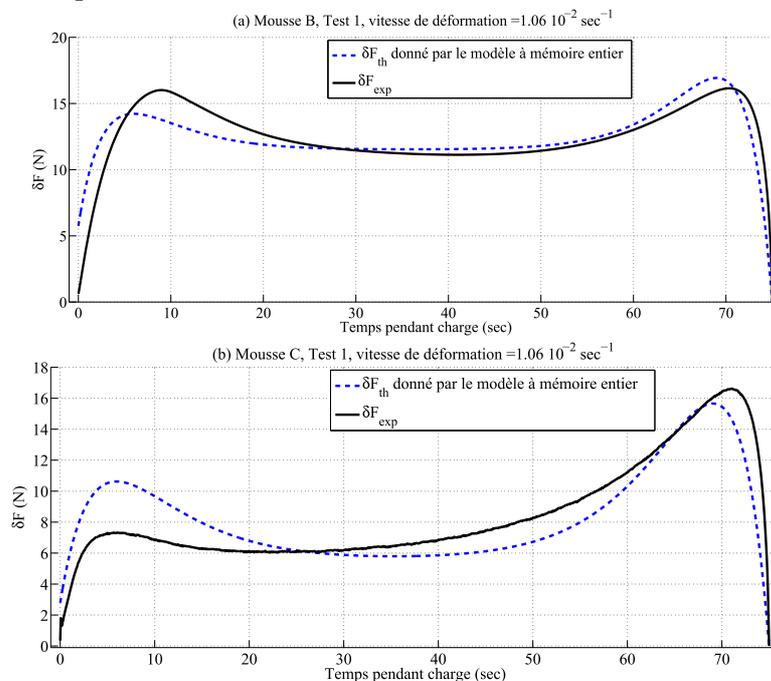


Figure 41. Comparaison des courbes expérimentales et analytiques de la différence de force entre la charge et la décharge, cas du modèle à mémoire entier, (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C – Test 1.

De plus, la réponse force-déplacement prévue par le modèle dépasse dans plusieurs régions de décharge les enveloppes expérimentales (**Fig. 42**)

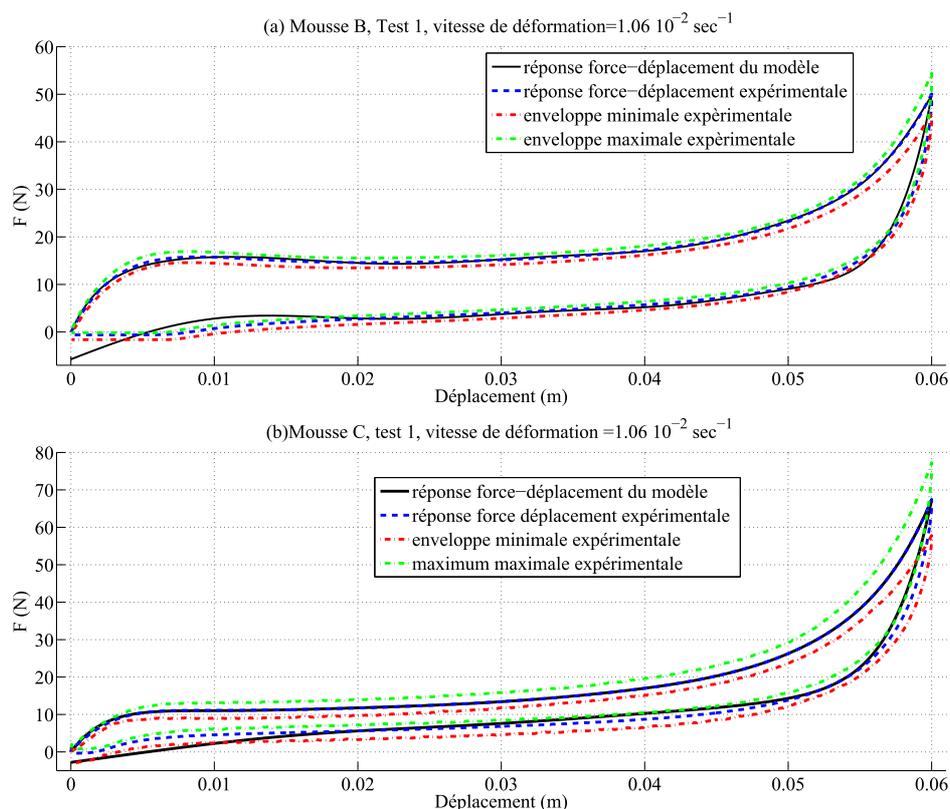


Figure 42. Vérification si la réponse force-déplacement prévue par le modèle à mémoire entier est à l'intérieur des enveloppes expérimentales, (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.

II.3.4.2 Généralisation du modèle à mémoire entier

Les paramètres viscoélastiques pendant la charge et la décharge sont considérés similaires pour la mousse A. L'évaluation de cette description pour d'autres types de mousses a montré que le modèle à mémoire entier avec des paramètres viscoélastiques similaires en charge et en décharge n'est pas généralisable.

La comparaison de la réponse du modèle à mémoire entier avec des paramètres en charge et en décharge similaires (**Fig. 43**) montre que l'imprécision est localisée au niveau de la phase de décharge. Le modèle décrit correctement le comportement pendant la phase de charge par rapport à l'expérimentation.

De ce fait, nous proposons de considérer des paramètres viscoélastiques en charge et en décharge différents afin d'améliorer la représentativité du modèle à mémoire entier. La dispersion importante pendant la phase de décharge (**Fig. 30 et 31, section II.2.1**), l'effet de Mullins (**Fig. 24, section II.1.3.1**) et la comparaison entre les réponses force-déplacement à différentes vitesses de déformation (**Fig. 44**) argumentent notre choix. En fait, la phase de décharge est presque invariante que ce soit lors d'un essai de compression/décompression multi-cycles (**Fig. 24**) ou lors d'essais à différentes vitesses de déformation.

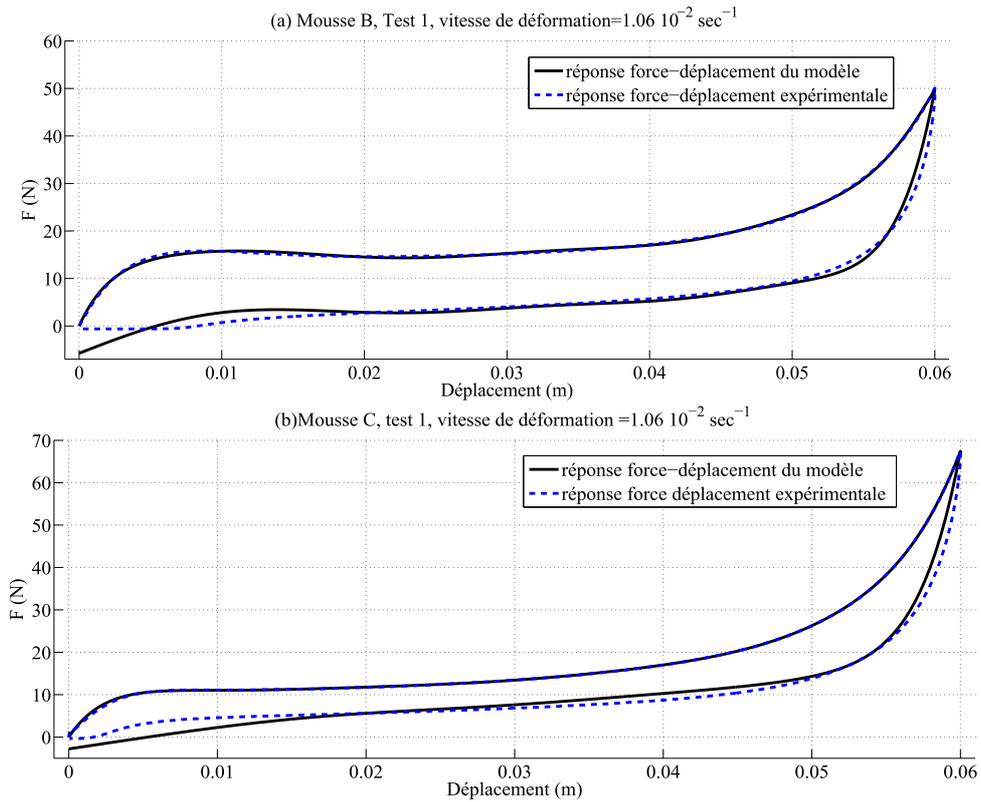


Figure 43. Comparaison entre la réponse force-déplacement expérimentale et la réponse prévue par le modèle à mémoire, (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.

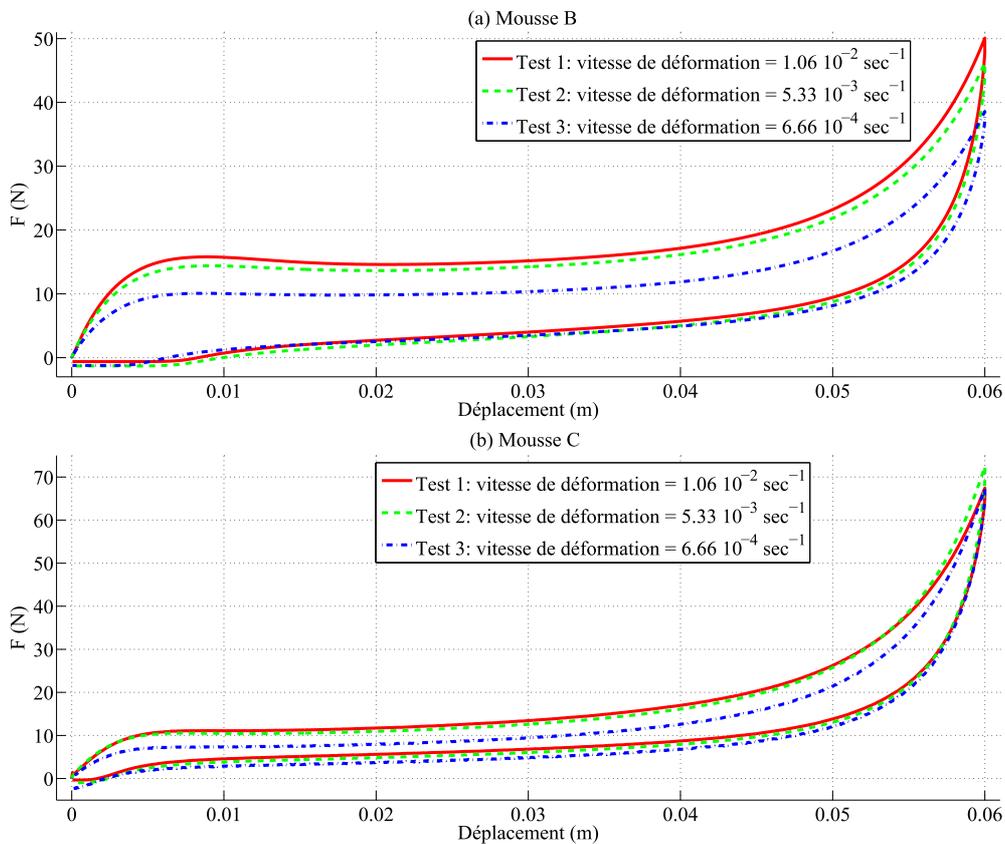


Figure 44. Comparaison entre les réponses force-déplacement à différentes vitesses de déformation, (a) Mousse B, (b) Mousse C.

Afin de simplifier la lecture, on désigne dans ce qui suit le modèle à mémoire entier avec des paramètres viscoélastiques en charge et en décharge différents par le modèle à mémoire entier généralisé alors qu'on garde l'appellation modèle à mémoire entier pour le cas de paramètres viscoélastiques en charge et en décharge similaires.

Dans le cas du modèle à mémoire entier généralisé, la force viscoélastique et la différence de force entre la charge et la décharge sont données par les **équations 2-20 et 2-21** respectivement. Les détails de ces équations sont donnés en **Annexe A**.

$$F_{ve}(t) = \begin{cases} \int_0^t \sum_{i=1}^2 a_i^L e^{-\alpha_i^L(t-\tau)} x(\tau) d\tau & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ \int_0^{\frac{T}{2}} \sum_{i=1}^2 a_i^L e^{-\alpha_i^L(t-\tau)} x(\tau) d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^t \sum_{i=1}^2 a_i^{UL} e^{-\alpha_i^{UL}(t-\tau)} x(\tau) d\tau & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases} \quad (2-20)$$

avec $X = [X^L \ X^{UL}]$ est le vecteur des paramètres viscoélastiques dimensionnels du modèle à mémoire entier généralisé.

Le vecteur $X^L = [\text{Re}(\alpha^L), \text{Im}(\alpha^L), \text{Re}(a^L), \text{Im}(a^L)]$ regroupe les paramètres viscoélastiques pendant la phase de charge alors que $X^{UL} = [\text{Re}(\alpha^{UL}), \text{Im}(\alpha^{UL}), \text{Re}(a^{UL}), \text{Im}(a^{UL})]$ regroupe les paramètres viscoélastiques de décharge.

Le vecteur Y^L de paramètres viscoélastiques adimensionnels pendant la phase de charge est déduit à partir du **tableau 8 (section II.2.2.4)** en remplaçant X par X^L . De la même manière, on détermine le vecteur Y^{UL} des paramètres viscoélastiques adimensionnels pendant la phase de décharge en remplaçant X par X^{UL} .

$$\delta F_{th}(t) = 2l_0 \dot{\epsilon} \begin{pmatrix} -F_3^{UL}(t) - F_1^L(t) \\ +F_5^L(t, A_3^L, A_4^L) - F_5^L(T-t, A_3^L, A_4^L) \\ +F_5^L\left(\frac{T}{2}-t, F_1^L\left(\frac{T}{2}\right), F_2^L\left(\frac{T}{2}\right)\right) \\ +F_5^{UL}\left(\frac{T}{2}-t, F_3^{UL}\left(\frac{T}{2}\right), F_4^{UL}\left(\frac{T}{2}\right)\right) \end{pmatrix}; \quad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \quad (2-21)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A1^i = \frac{(X^i(1)X^i(3) + X^i(2)X^i(4))}{X^i(1)^2 + X^i(2)^2}; \quad A3^i = \frac{X^i(3)(X^i(1)^2 - X^i(2)^2) + 2X^i(1)X^i(2)X^i(4)}{(X^i(1)^2 + X^i(2)^2)^2} \\ A2^i = \frac{(X^i(1)X^i(4) - X^i(2)X^i(3))}{X^i(1)^2 + X^i(2)^2}; \quad A4^i = \frac{X^i(4)(X^i(1)^2 - X^i(2)^2) - 2X^i(1)X^i(2)X^i(3)}{(X^i(1)^2 + X^i(2)^2)^2} \end{array} \right\}_{i=L \text{ ou } UL}$$

$$\text{et } \left. \begin{cases} F_1^i(t) = A_3^i - tA_1^i & ; & F_2^i(t) = A_4^i - tA_2^i \\ F_3^i(t) = A_3^i + tA_1^i & ; & F_4^i(t) = A_4^i + tA_2^i \\ F_5^i(t, S_1, S_2) = e^{-X^i(1)t} \left(S_1 \cos(X^i(2)t) + S_2 \sin(X^i(2)t) \right) \end{cases} \right\}_{i=L \text{ ou } UL}$$

➤ **Validation des résultats d'identification**

Les résultats de l'identification en utilisant les **équations 2-20** et **2-21** sont regroupés dans le **tableau 14** pour la mousse B et le **tableau 15** pour la mousse C.

Tableau 14. Résultats de l'identification, modèle à mémoire entier généralisé (mousse B).

Paramètres	Test 1	Test 2	Test 3
$Y^L(1)$	29.283	29.565	30.791
$Y^L(2)$	0.082	0.080	0.086
$Y^L(3)$	-148.178	-146.386	-144.104
$Y^L(4)$	22238.660	22238.659	22238.659
$Y^{UL}(1)$	30.603	30.845	32.008
$Y^{UL}(2)$	0.084	0.082	0.087
$Y^{UL}(3)$	-150.640	-148.676	-145.920
$Y^{UL}(4)$	22238.660	22238.661	22238.660
Erreur entre δF_{th} et δF_{exp} (%)	6.05	5.34	4.89
M	8	8	8
L_1	8.937	8.806	7.987
L_3	-31.658	-28.690	-23.071
L_5	406.929	365.973	284.835
L_7	-2944.184	-2638.184	-2030.681
L_9	12597.109	11270.748	8637.456
L_{11}	-32457.049	-29017.937	-22169.832
L_{13}	49450.630	44193.385	33665.216
L_{15}	-40993.682	-36625.054	-27812.911
L_{17}	14253.041	12730.714	9639.687
Erreur de symétrie (%)	0.45	0.41	0.28
Erreur d'identification du polynôme élastique (%)	0.02	0.09	0.08
Erreur de modélisation globale (%)	5.21	4.923	3.17

Tableau 15. Résultats de l'identification, modèle à mémoire entier généralisé (mousse C).

Paramètres	Test 1	Test 2	Test 3
$Y^L(1)$	39.705	41.650	40.897
$Y^L(2)$	0.115	0.136	0.119
$Y^L(3)$	-138.325	-155.697	-129.294
$Y^L(4)$	22024.801	22024.799	22024.801
$Y^{UL}(1)$	40.238	42.198	41.319
$Y^{UL}(2)$	0.121	0.144	0.127
$Y^{UL}(3)$	-143.632	-161.679	-135.211
$Y^{UL}(4)$	22027.342	22027.344	22027.342
Erreur entre δF_{th} et δF_{exp} (%)	6.619	6.597	6.828
M	8	8	8
L_1	5.91	6.03	5.73
L_3	-21.577	-17.121	-17.619
L_5	271.468	209.694	194.812
L_7	-1930.700	-1462.017	-1375.706
L_9	8177.792	6111.298	4482.10
L_{11}	-20938.913	-15505.436	-11329.230
L_{13}	31784.660	23401.400	17036.741
L_{15}	-26293.540	-19302.970	-14008.257
L_{17}	9137.946	6712.378	4865.331
Erreur de symétrie (%)	0.27	0.27	0.28
Erreur d'identification du polynôme élastique (%)	$6.31 \cdot 10^{-4}$	0.03	0.05
Erreur de modélisation globale (%)	2.53	2.81	2.50

Les paramètres $\left(\left[Y^L, (L_i)_{i=0..M} \right] \Leftrightarrow \left[X^L, (k_i)_{i=0..M} \right] \right)$ et $\left(\left[Y^{UL}, (L_i)_{i=0..M} \right] \Leftrightarrow \left[X^{UL}, (k_i)_{i=0..M} \right] \right)$, que ce soit pour la mousse B ou la mousse C, vérifient les conditions thermodynamiques présentées dans le **tableau 9**. Ils sont les moyennes de N_{\min} tests réalisés pour assurer une qualité statistique définie par un niveau de confiance de 95% et une limite statistique d'erreur de 10%.

L'erreur relative maximale d'estimation de la courbe de différence de force entre la charge et la décharge par le modèle à mémoire entier généralisé ne dépasse pas 6.051% pour la mousse B et 6.828% pour la mousse C contre 8.52% pour la mousse B et 22.06% pour la mousse C dans le cas du modèle à mémoire entier (modèle avec des paramètres viscoélastiques en charge et en décharge similaires).

La **figure 45** montre l'apport du modèle à mémoire généralisé en précision au niveau de l'estimation de la différence de force entre la charge et la décharge surtout pour la mousse C. L'apport en précision est aussi observé lors de comparaison de la réponse force-déplacement obtenu par le modèle à mémoire généralisé et l'expérimentation (**Fig. 46**). L'erreur globale de modélisation maximale est réduite à 5.205% pour la mousse B et 2.811% pour la mousse C.

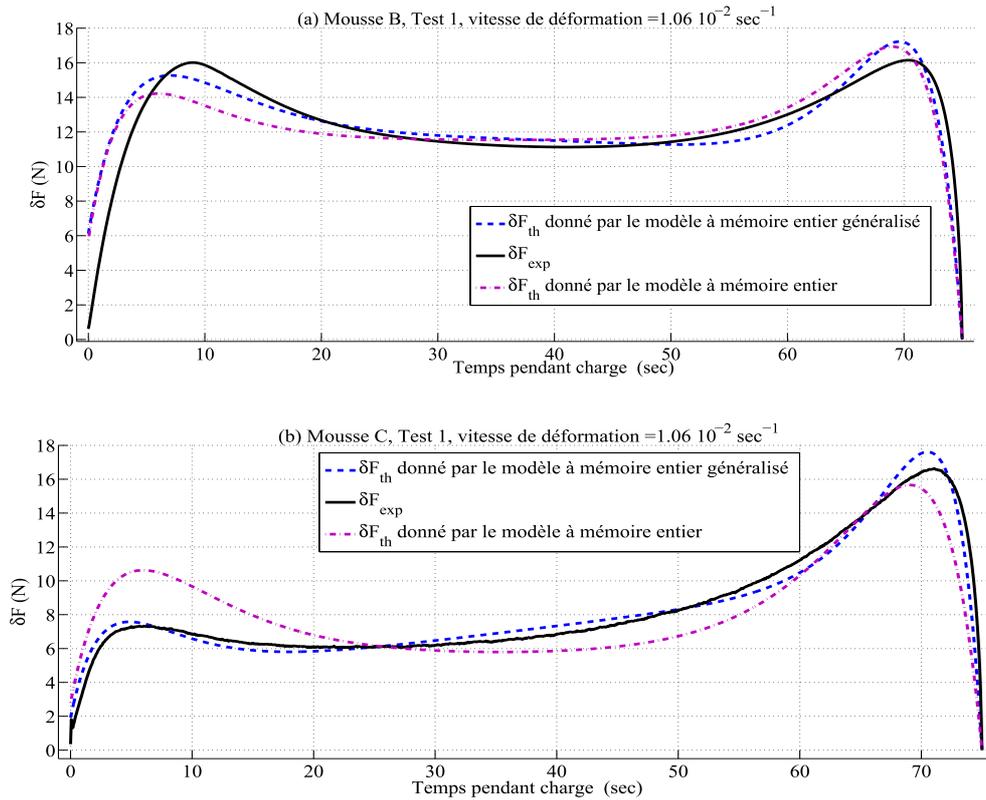


Figure 45. Comparaison entre les courbes de différence de force entre la charge et la décharge expérimentales et analytiques (modèle à mémoire entier et modèle à mémoire entier généralisé), (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.

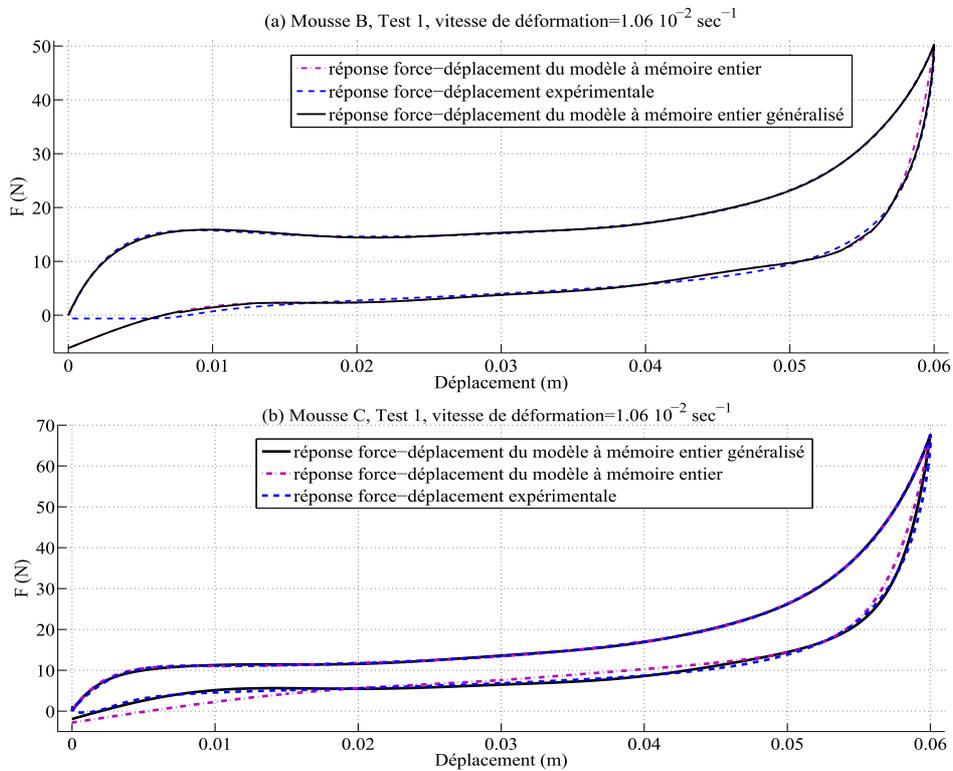


Figure 46. Comparaison entre la réponse force-déplacement expérimentale et les réponses prévues par le modèle à mémoire et le modèle à mémoire entier généralisé, (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.

Le modèle à mémoire entier généralisé anticipe les réponses force-déplacement des mousses B et C à l'intérieur des enveloppes uniquement à la fin d'essai (**Fig. 47**). Ceci est dû à la perte de contact entre la cellule de force et la mousse.

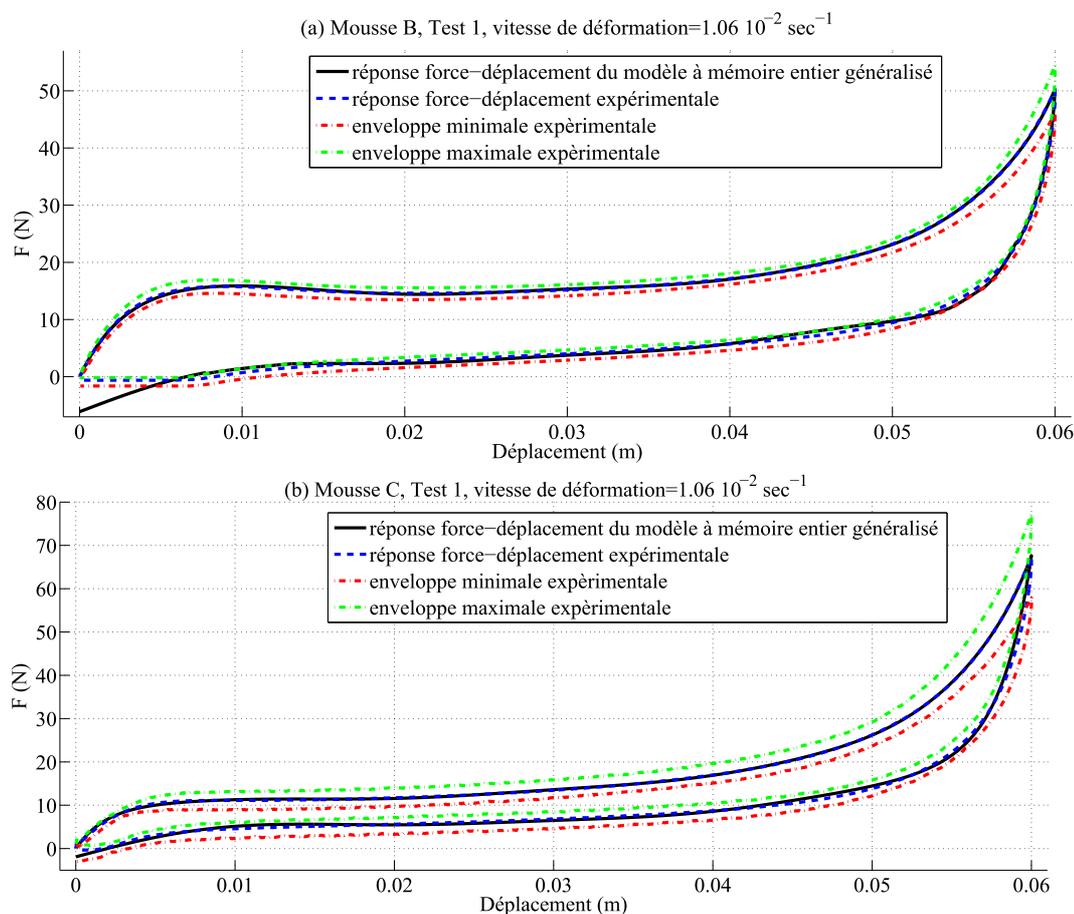


Figure 47. Vérification si la réponse force-déplacement prévue par le modèle à mémoire entier généralisé est à l'intérieur des enveloppes expérimentales, (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.

On déduit que les paramètres ainsi identifiés vérifient les quatre critères de validation.

➤ Discussion

La reconstruction des réponses viscoélastique et élastique (**Fig. 48**) montre que le comportement viscoélastique est de signe négatif. Il modélise l'effet de relaxation. La réponse élastique globale est presque linéaire.

De plus l'ordre de grandeur des réponses est très important que ce soit pour la mousse B ou la mousse C, ceci est expliqué par la prédominance de la réponse de la raideur globale d'ordre 1 sur la réponse élastique globale ($P_1 = k_1 x \gg P_2 = \sum_{i=1}^M k_{2i+1} x^{2i+1}$).

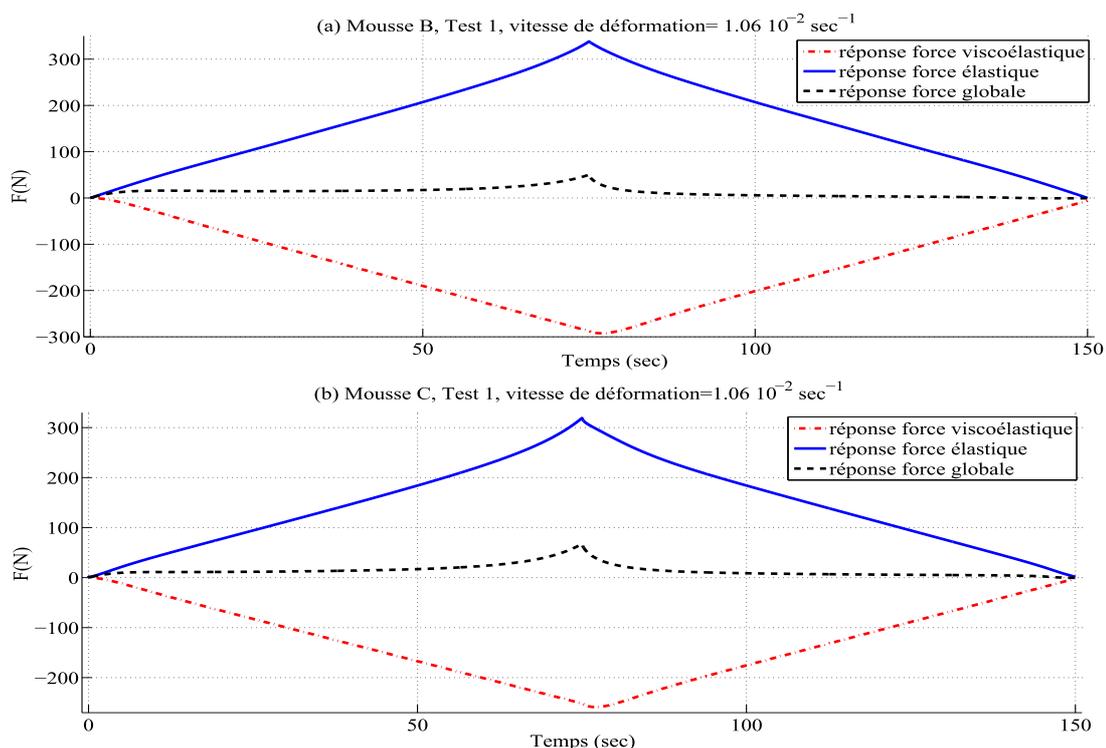


Figure 48. Reconstruction de la force viscoélastique, de la force élastique et de la force globale, cas du modèle à mémoire entier généralisé (a) Mousse B - Test 1, (b) Mousse C - Test 1.

➤ Conclusion

Le modèle à mémoire entier généralisé (modèle avec des paramètres viscoélastiques en charge et en décharge différents) est une description plus représentative du comportement quasi-statique des mousses de polyuréthane que le modèle à mémoire entier (modèle avec des paramètres viscoélastiques en charge et en décharge similaires).

Les paramètres viscoélastiques adimensionnels du modèle à mémoire entier généralisé sont presque invariants par rapport aux vitesses de déformation. Il devient donc possible de caractériser le comportement viscoélastique du matériau par ces paramètres.

Conclusion du chapitre

Ce chapitre est une étude expérimentale et théorique du comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane.

L'étude expérimentale est basée sur des essais de compression/décompression quasi-statique unidirectionnels. Cette étude a montré que la mousse de polyuréthane sous grandes déformations présente à la fois un comportement viscoélastique et un comportement élastique non linéaire.

Au cours de ce chapitre, nous avons atteint notre but qui était de développer des modèles à mémoire entier et fractionnaire représentatifs du comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane. Les paramètres de ces modèles se devaient d'être indépendants des conditions d'essai afin d'assurer le caractère général de la représentativité.

Les paramètres adimensionnels des modèles à mémoire que nous avons développés dans ce chapitre sont quasiment invariants par rapport aux vitesses de déformation. Ces paramètres peuvent être considérés comme des paramètres caractéristiques du matériau. Ils nous ont permis donc de pallier à l'inconvénient majeur des modèles présentés dans la littérature : la dépendance des paramètres par rapport aux conditions d'essais.

Les modèles à mémoire que nous avons développés reconstruisent le comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane (comportements viscoélastique et élastique) en concordance avec l'expérimentation.

La réponse de la 'force viscoélastique' donnée par les deux modèles à mémoire entier et fractionnaire est généralement de signe négatif. Elle modélise l'effet de relaxation et explique la présence d'une contrainte résiduelle non permanente à la fin des essais.

Enfin, il a été montré dans ce chapitre que le modèle à mémoire fractionnaire peut décrire le comportement élastique non linéaire, alors que, le modèle à mémoire entier n'en est pas capable.

L'application du modèle à mémoire entier sur différents types de mousse de polyuréthane a montré que ce modèle n'est pas généralisable. Cependant, il a été montré que le modèle à mémoire entier généralisé, dont les paramètres viscoélastiques pendant les phases de charge et de décharge sont différents, est une description plus représentative du comportement quasi-statique des mousses de polyuréthane que le modèle à mémoire entier.

Chapitre III : Etude du comportement dynamique de la mousse de polyuréthane :

Expérimentation, modélisation et validation.

Introduction

L'analyse bibliographique menée dans le premier chapitre de ce travail nous a permis de constater que la complexité du comportement mécanique de la mousse de polyuréthane se traduit par une différence entre celui en quasi-statique et en dynamique.

De plus, lors de la détermination de la vitesse de déformation limite entre quasi-statique et dynamique dans le deuxième chapitre, il a été montré qu'en dynamique la perte visqueuse est non négligeable contrairement au comportement en quasi-statique.

D'autre part, dans le champ des transports, le contrôle de vibrations transmises à l'occupant de sièges est devenu un sujet de recherche important suite à l'intérêt croissant de la part des industriels. L'étude du comportement vibratoire de la mousse de polyuréthane ainsi que le développement d'un modèle représentatif est primordiale pour contrôler les vibrations transmises aux occupants. En fait, la mousse est l'élément essentiel d'un siège dans tous les modes de transport.

Il devient donc important d'étudier dans ce chapitre le comportement dynamique de la mousse de polyuréthane et de développer un modèle représentatif du comportement dont les paramètres sont indépendants des conditions de sollicitation.

Ce chapitre comporte essentiellement deux parties :

- une première partie intitulée '*Etude expérimentale*'. L'étude du comportement vibratoire sera basée sur des essais de vibrations entretenues de type sinus fixe dont on contrôle l'amplitude et la fréquence. A partir de ces essais nous déterminerons expérimentalement la signature fréquentielle de la mousse de polyuréthane, en particulier les diagrammes de BODE de la fonction 'raideur dynamique'. Nous déterminerons également dans cette partie la nature du comportement vibratoire de la mousse et les zones dans lesquelles elle présente un pouvoir d'atténuation de vibrations.
- une deuxième partie intitulée '*Modélisation et identification*'. Dans cette partie nous développerons un modèle représentatif du comportement vibratoire de la mousse qui permet de reconstruire les diagrammes de BODE expérimentaux. Une grande importance sera accordée à la représentativité générale du modèle.

III.1 Etude expérimentale

Les objectifs principaux de cette partie consistent à extraire d'une part la signature fréquentielle de la mousse de polyuréthane, en particulier les diagrammes de BODE de la fonction de transfert 'raideur dynamique', et d'autre part les zones dans lesquelles la mousse présente un pouvoir d'atténuation des vibrations.

III.1.1 Description d'essais et du dispositif

Le principe des essais réalisés dans le cadre de l'étude dynamique consiste tout d'abord à placer un échantillon de la mousse A (**Tab. 1, chapitre II, section II.1.1**) entre deux plateaux ayant un mouvement de translation l'un par rapport à l'autre (**Fig. 49**) : un en-dessous de sa face inférieure (plateau inférieur) et un second au-dessus de la face supérieure (plateau supérieur). Des masses supplémentaires peuvent être ajoutées au plateau supérieur afin de placer la mousse à différents niveaux de compression initiale. Le plateau inférieur est excité par des vibrations d'amplitudes et fréquences contrôlées. Le niveau de vibration transmis au plateau supérieur ainsi que celui de l'excitation sont alors enregistrés afin de les comparer et de vérifier si la mousse A présente un pouvoir d'atténuation des vibrations.

La **figure 49** présente notre dispositif d'essai inspiré de celui qui a été utilisé par **Singh R., Davies P. et al. (2003, a-b)** et **Deng R. (2004)** pour leurs études dynamiques.

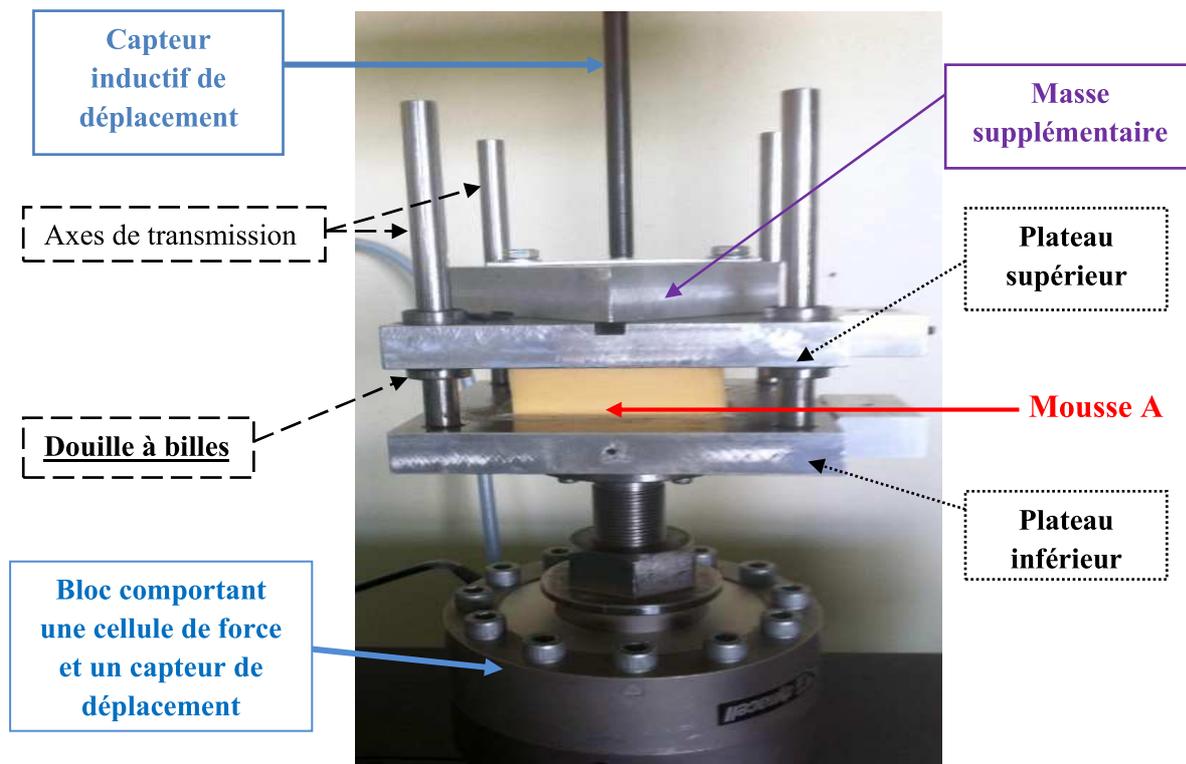


Figure 49. Dispositif d'essais dynamiques inspiré de celui utilisé par **Singh R., Davies P. et al. (2003, a-b)** et **Deng R. (2004)** (Dispositif avec des douilles à billes).

III.1.1.1 Détermination du niveau de compression initiale

Habituellement, le niveau de compression initiale de la mousse de siège de voiture est fonction du poids de l'occupant. Pour tenir compte de ceci, des masses supplémentaires sont ajoutées au plateau supérieur.

On rappelle que lors de l'étude quasi-statique du comportement de la mousse A, nous avons montré que la courbe 'contrainte-déformation' (ou celle de 'force-déplacement'), établie lors des essais de compression quasi-statique jusqu'à un niveau de compression de 80% de la hauteur initiale de l'échantillon mousse A, comporte 3 zones différentes (**Fig. 50**) :

- une zone quasi-linéaire (*zone 1*)
- une zone plateau (*zone 2*)
- une zone de densification (*zone 3*)

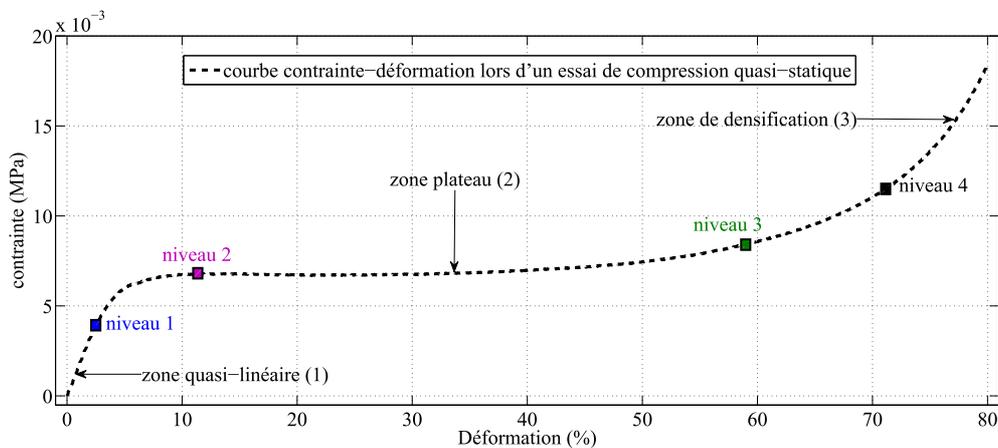


Figure 50. Illustration des niveaux de compression initiale.

Selon la masse de l'occupant, le niveau de compression initiale de la mousse se situe dans l'une de ces trois zones. Il devient donc intéressant d'étudier le comportement vibratoire de la mousse A au voisinage de ces trois zones.

La *zone 2* est une zone **plateau** qui est difficilement accessible. En fait, lorsqu'on veut appliquer une contrainte dans la zone plateau, on bascule généralement au voisinage de la zone limite entre la zone quasi-linéaire et la zone plateau ou bien au voisinage de la zone limite entre la zone de densification et la zone plateau.

Afin d'étudier le comportement vibratoire de la mousse A au voisinage des différentes zones de la courbe 'contrainte-déformation' quasi-statique, nous considérons quatre masses supplémentaires permettant d'atteindre quatre niveaux de compression initiale situés dans quatre zones critiques de la courbe 'contrainte-déformation' quasi-statique (**Fig. 50**) :

- le *niveau 1*, situé dans zone quasi-linéaire (*zone 1*)
- le *niveau 2*, situé à limite entre la zone quasi-linéaire et la zone plateau (*zone 2*)
- le *niveau 3*, situé à la limite entre la zone plateau et la zone de densification (*zone 3*)

- le *niveau 4*, situé dans la zone de densification (*zone 3*)

Dans le tableau 16 on présente les masses supplémentaires ainsi que les niveaux de compression initiale correspondants.

Tableau 16. Niveaux de compression initiale lors de l'étude dynamique.

Désignation	Masses (kg)	Niveau de compression initiale (%)	Zone correspondante de la courbe contrainte-déformation en quasi-statique (Fig. 38)
Niveau 1	1.881	2.75	Zone quasi-linéaire (<i>zone 1</i>)
Niveau 2	2.434	11.50	Limite entre la <i>zone 1</i> et la zone plateau (<i>zone 2</i>)
Niveau 3	2.987	59.00	Limite entre la <i>zone 2</i> et la <i>zone 3</i>
Niveau 4	3.540	71.00	Zone de densification (<i>zone 3</i>)

III.1.1.2 Développement d'un nouveau dispositif d'essai

Lors d'une première étude, le dispositif de la **figure 49** a été utilisé pour des essais d'impact sur la mousse A.

L'essai d'impact a consisté à placer l'échantillon de la mousse A entre les deux plateaux du dispositif d'essai. Le plateau inférieur a été encastré. Des masses supplémentaires ont été placées sur le plateau supérieur qui a été ensuite excité par une impulsion grâce à un marteau d'impact (**Fig. 51**).

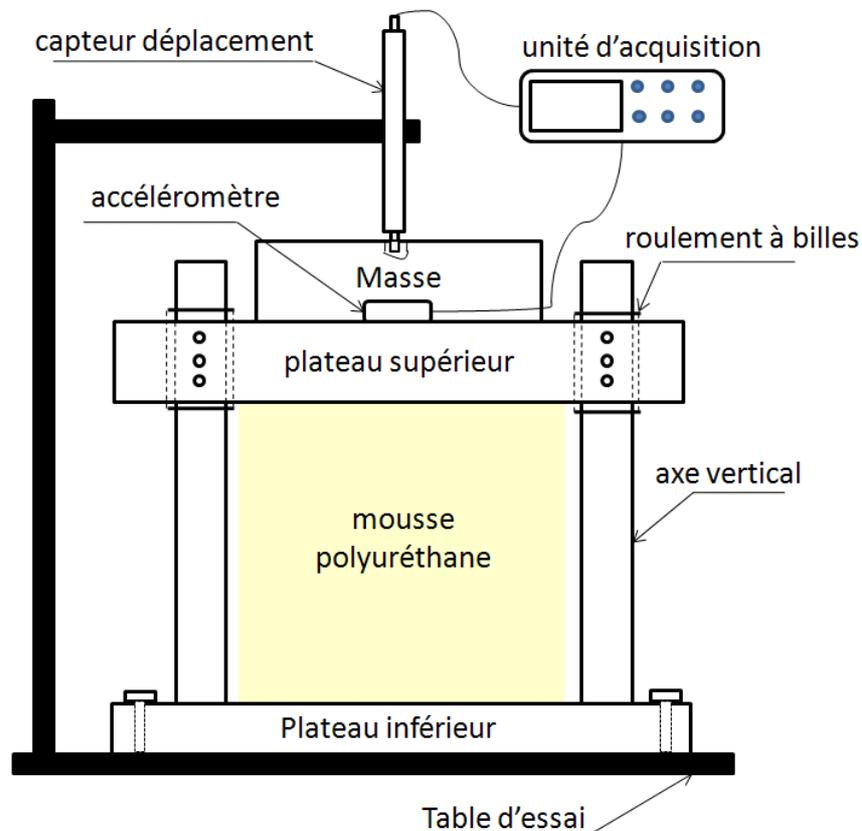


Figure 51. Schématisation du dispositif de Singh R., Davies P. et al. (2003, a-b) et Deng R. (2004) utilisé en essai d'impact

Il a été alors montré, que le comportement dynamique de la mousse A suite à un essai d'impact est gêné par des frottements à la fois visqueux et sec liés au dispositif. En effet, le mouvement du plateau supérieur est guidé par quatre axes verticaux et quatre douilles à billes qui sont sources de frottements intrinsèques au dispositif d'essai.

Ces frottements ont été identifiés en remplaçant la mousse de polyuréthane par un ressort de raideur connue et en réalisant des essais d'impact. Il avait été montré que la valeur absolue de la force du frottement sec est quasiment constant quelle que soit la masse supplémentaire ajoutée au plateau supérieur alors que le coefficient du frottement visqueux augmente lorsque la masse augmente (**Tab. 17**).

Tableau 17. Frottements du dispositif d'essais dynamiques.

Masses (kg)	2.046	2.644	3.241	3.839	4.437
Valeur absolue de la force de frottement sec (N)	6.811	7.343	7.659	6.837	6.896
Coefficient de frottement visqueux (N m ⁻¹ sec)	72.838	93.831	109.716	120.494	146.57

Suite à ces résultats, nous avons choisi de remplacer complètement le dispositif afin d'éviter ses frottements intrinsèques et de simplifier la tâche de modélisation.

Nous avons réalisé l'étude, la conception et la fabrication d'un nouveau dispositif. Les paliers de ce nouveau dispositif sont des paliers sans contact, ce qui permet de négliger leurs frottements intrinsèques. Le nouveau dispositif est présenté dans la **figure 52**.

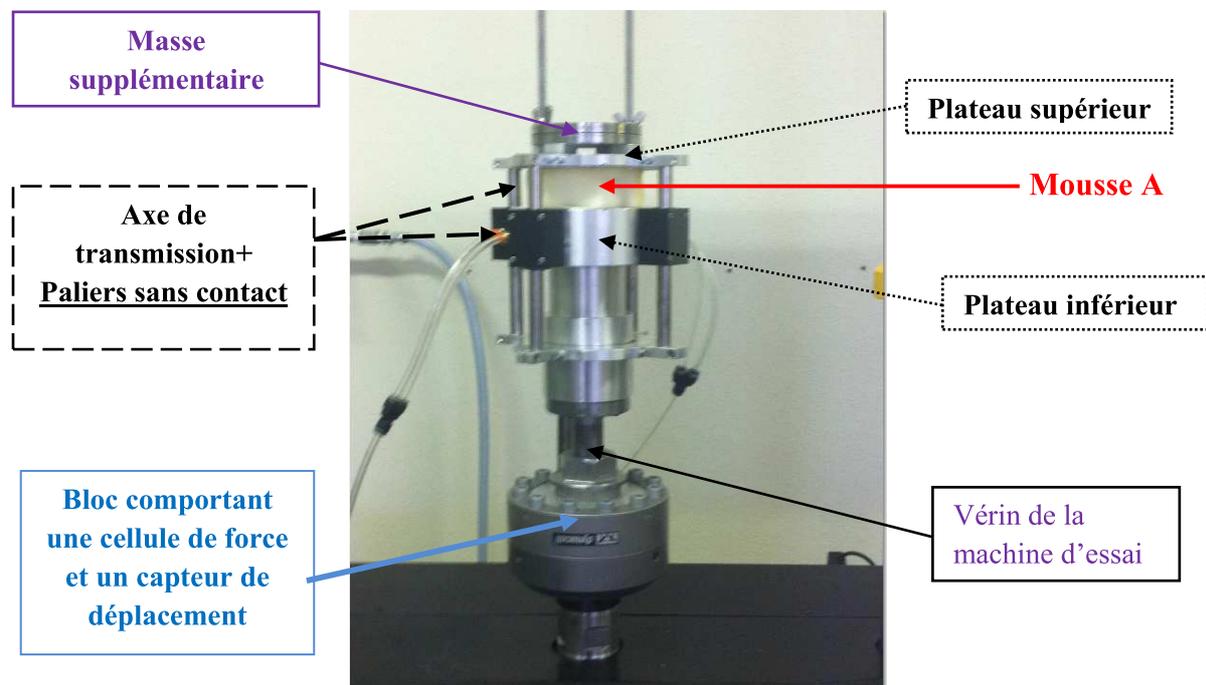


Figure 52. Dispositif d'essais dynamiques utilisé dans l'étude dynamique.

III.1.1.3 Essai de vibrations entretenues

Le plateau inférieur du dispositif d'essais dynamiques est placé sur le vérin de la machine dynamique «**Instron 8801**» qui le met en vibrations entretenues de type sinus fixe dont on contrôle l'amplitude et la fréquence grâce au capteur de déplacement de la machine situé au niveau du vérin.

Une cellule de force est placée au niveau du vérin permettant l'acquisition temporelle de la force d'excitation. Un capteur de déplacement, de type inductif, est placé sur le plateau supérieur permettant de mesurer les vibrations transmises par la mousse A à la masse supplémentaire M ajoutée initialement. On s'intéresse dans cette étude expérimentale au régime permanent.

La **figure 53** présente une schématisation de l'essai de vibration précédemment décrit.

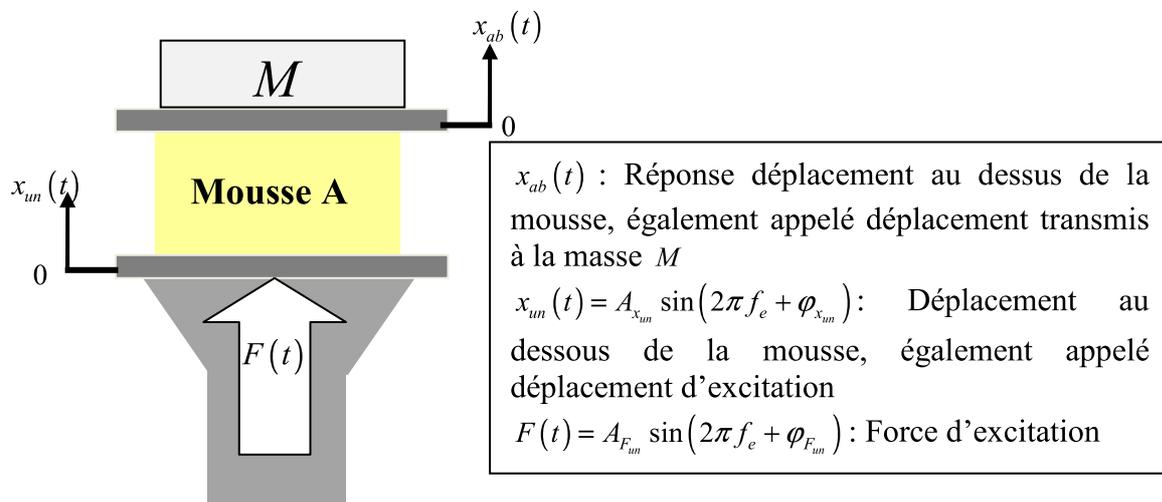


Figure 53. Schématisation d'un essai de vibrations entretenues.

Les conditions d'essais (amplitudes, fréquences, nombre total de cycles considérés N_t , les cycles du régime permanent $[N_0, N_f]_{per}$) pour chaque niveau sont résumées dans le **tableau 18**. Il faut noter que la bande de fréquences $[f_{inf}, f_{max}]$ considérée pour chaque amplitude A_{un} est définie par la capacité de la machine «**Instron 8801**».

Tableau 18. Conditions d'essais de vibration entretenue.

Déplacement au dessous de la mousse $x_{un}(t) = A_{un} \sin(2\pi f_e + \varphi_{x_{un}})$					
A_{un} (mm)	$[f_{inf}, f_{max}]$ (Hz)	Pas d'incrémentation (Hz)	$\varphi_{x_{un}}$ ($^\circ$)	N_t	$[N_0, N_f]_{per}$
1	[1,25]	1	0	250	[200,240]
2	[1,19]	1	0	250	[200,240]
3	[1,14]	1	0	250	[200,240]
4	[1,10]	1	0	250	[200,240]

III.1.2 Etude du comportement vibratoire de la mousse A dans le domaine temporel

La comparaison entre le déplacement en-dessous de la mousse, noté $x_{un}(t)$, et le déplacement transmis à la masse $x_{ab}(t)$ dans le domaine temporel (**Fig. 54**) montre la même fréquence principale en régime permanent.

Cependant, on observe pour le déplacement transmis à la masse un décalage permanent et constant par rapport à la position initiale. Ce décalage dépend de la fréquence. Il montre que le comportement dynamique de la mousse de polyuréthane est non linéaire.

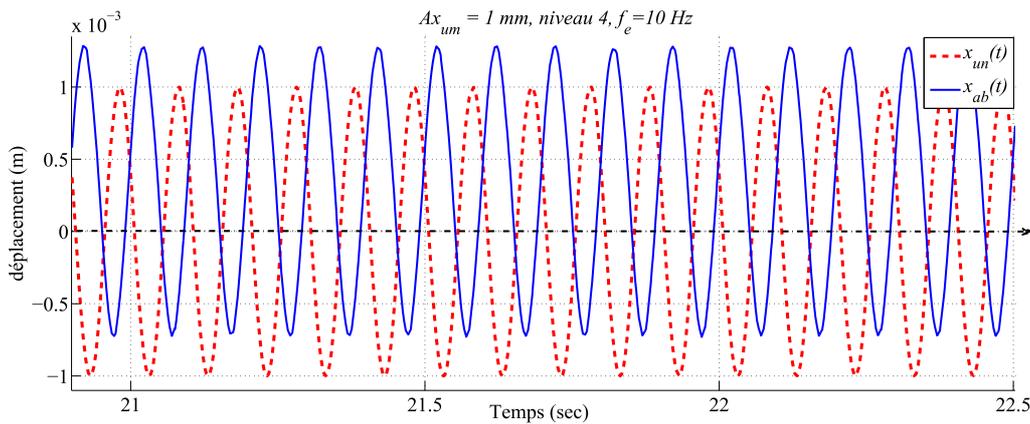


Figure 54. Déplacement au dessous de la mousse $x_{un}(t)$ et déplacement transmis à la masse $x_{ab}(t)$ dans le domaine temporel, en régime permanent (niveau 4, $f_e = 9$ Hz, $A_{x_{un}} = 1$ mm).

L'évaluation du déphasage entre la courbe de la force d'excitation $F(t)$ et celle de la réponse déplacement au-dessus de la mousse $x_{ab}(t)$ (**Fig. 55**) montre qu'il est différent de 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour certaines fréquences, ceci peut être dû au comportement viscoélastique de la mousse de polyuréthane.

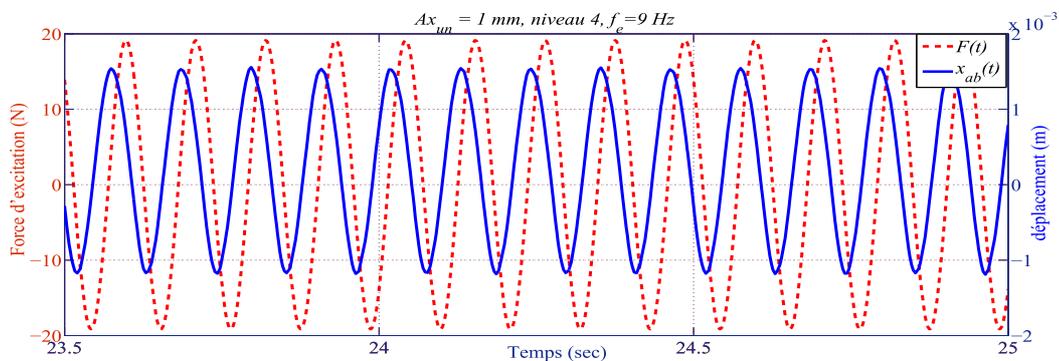


Figure 55. Force d'excitation $F(t)$ et déplacement transmis à la masse $x_{ab}(t)$ dans le domaine temporel, en régime permanent (niveau 4, $f_e = 9$ Hz, $A_{x_{un}} = 1$ mm).

III.1.3 Etude du comportement vibratoire de la mousse A dans le domaine fréquentiel

Pour atteindre les objectifs principaux de cette étude expérimentale (extraction de la signature fréquentielle de la mousse A et les zones dans lesquelles elle absorbe les vibrations), un traitement du signal est effectué sur les acquisitions temporelles de la force d'excitation et des déplacements au-dessus et en-dessous de l'échantillon de mousse.

Un choix judicieux de fenêtres de pondération est effectué afin d'éviter au maximum l'effet de 'Palissade' et les problèmes de fuite de signaux. Ceci a pour but d'assurer un compromis entre la résolution en fréquence et celle en amplitude.

Les acquisitions étant de type harmonique, nous avons choisi la fenêtre de 'Hanning' tout en réalisant des corrections en amplitudes et un 'zoom FFT' afin d'extraire avec le maximum de précision le contenu fréquentiel des signaux : les fréquences, les amplitudes et les phases principales du signal.

La comparaison entre les spectres d'amplitude du déplacement en-dessous de la mousse $|X_{un}(f)|$ sans et avec un 'zoom FFT' (**Fig. 56**) montre l'apport de ce dernier en précision au niveau de l'amplitude et de la fréquence.

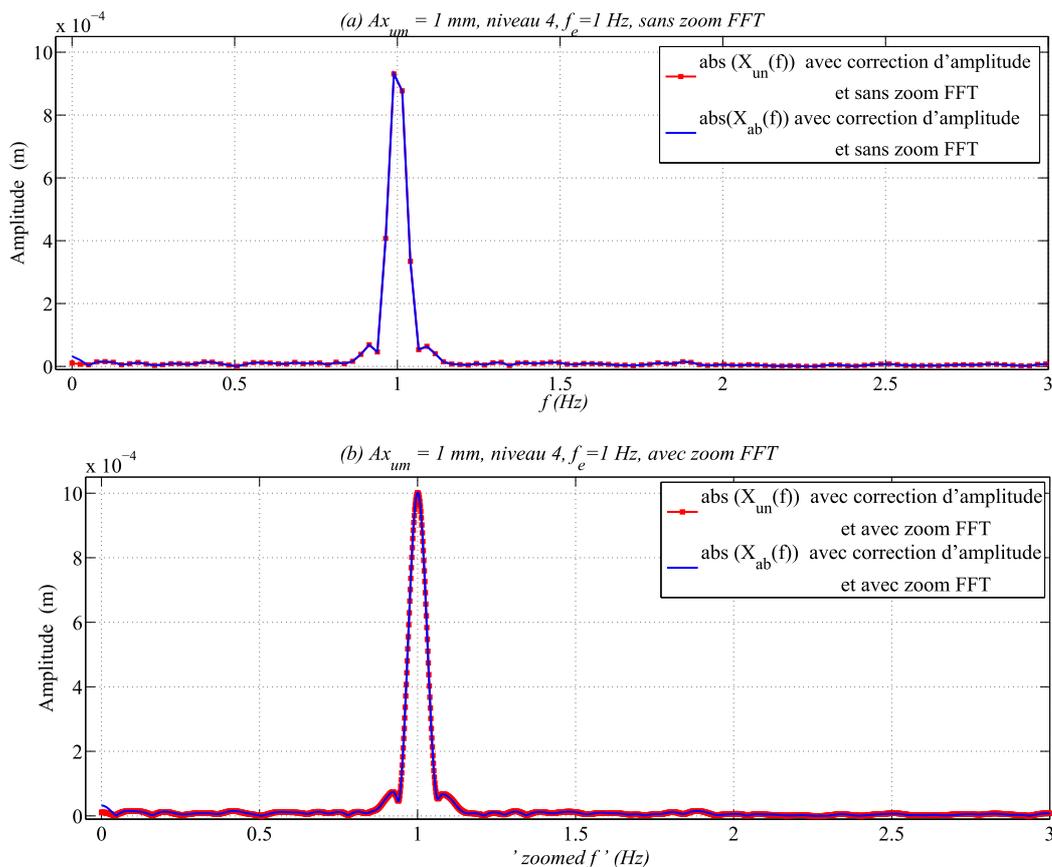


Figure 56. Apport de 'zoom FFT' en précision au niveau de l'amplitude et de la fréquence, (a) spectres ($|X_{un}(f)|, |X_{ab}(f)|$) sans zoom FFT, (b) spectres ($|X_{un}(f)|, |X_{ab}(f)|$) avec zoom FFT.

Le **tableau 19** présente les caractéristiques de quelques fenêtres de pondération utiles pour les signaux sinusoïdaux. La comparaison entre les différentes caractéristiques étaye le choix de la fenêtre de ‘Hanning’.

Tableau 19. Caractéristiques de quelques fenêtres de pondération.

Fenêtre	Bruit bande passante	Erreur maximale (dB)	Application et remarques
Rectangulaire	1.00	3.90	Tout le signal est à l’intérieur de la fenêtre.
Hanning	1.50	1.40	Signal pseudo-stationnaire
Hamming	1.36	1.80	Meilleure résolution fréquentielle
Kaiser-Bessel	1.80	1.00	Meilleure résolution en amplitude
Flat-Top	3.77	0.01	Etalonnage

III.1.3.1 Extraction des zones d’atténuation de vibrations de la mousse A

La comparaison des spectres d’amplitudes ($|X_{um}(f)|, |X_{ab}(f)|$) correspondant respectivement au déplacement d’excitation $x_{um}(t)$ et au déplacement $x_{ab}(t)$ transmis à la masse supplémentaire M (**Fig.57**), confirme les constatations de l’étude dans le domaine temporel. En fait, on distingue la même fréquence principale dans les deux spectres et une amplitude non négligeable à la fréquence nulle pour le spectre d’amplitude $|X_{ab}(f)|$ qui explique le décalage permanent et constant.

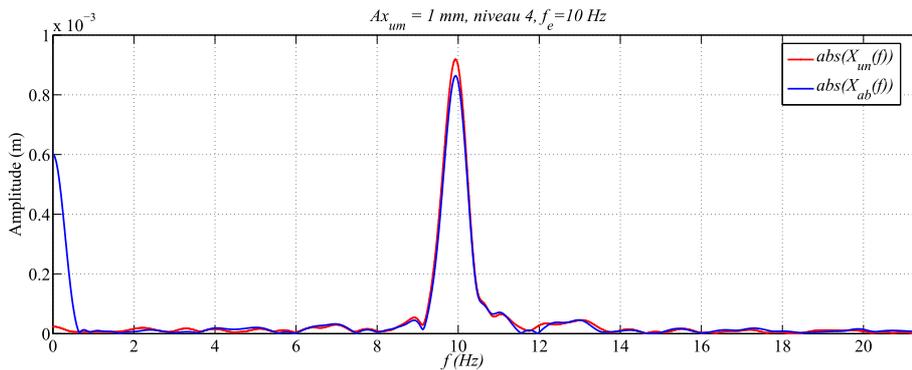


Figure 57. Comparaison des spectres d’amplitudes $|X_{um}(f)|$ et $|X_{ab}(f)|$, amplitude d’excitation $A_{x_{um}} = 1$ mm, niveau 4, fréquence d’excitation $f_e = 10$ Hz.

Les spectres d’amplitudes ($|X_{um}(f)|, |X_{ab}(f)|$) permettent le calcul des niveaux vibratoires en dessous et au-dessus de la mousse A en utilisant par exemple la valeur efficace ‘**Root Mean Square (R.M.S)**’ (équation 3-1) ou la formule de ‘**Vibration Dose Value (VDV)**’ (Miloscaljevic S., Bergman F. et al 2010).

$$RMS_x = \sqrt{\sum_n \left| \frac{X(f)}{n} \right|^2} \quad (3-1)$$

avec $X(f)$ la transformée de Fourier du signal temporel $x(t)$ échantillonné et n le nombre d’échantillons.

Pour évaluer le confort d'un siège, les constructeurs automobiles calculent le rapport entre le niveau vibratoire au-dessus du siège et celui d'excitation (**Gunaselvam J. and Van Niekerk J.L 2005**) suite à un essai de conduite réelle. Ce rapport est nommé '**Seat Effective Amplitude Transmissibility (SEAT)**'. La démarche à suivre pour évaluer le confort du siège est détaillée dans la norme **ISO 2631-1 (1997)**.

Nous utilisons une démarche similaire afin de déterminer l'efficacité de la mousse en termes d'isolation des vibrations. Cependant, contrairement à la littérature, nous proposons d'utiliser le rapport '**Foam Effective Amplitude Transmissibility (FEAT)**' qui est calculé suite à une sollicitation sinusoïdale à amplitude et fréquence constantes pour chacun des niveaux de compression examinés. Le rapport *FEAT* est défini par :

$$FEAT(A_{x_{un}}, f_e) = \frac{RMS_{x_{ab}}}{RMS_{x_{un}}} = \sqrt{2} \frac{RMS_{x_{ab}}}{A_{x_{un}}} \quad (3-2)$$

avec $RMS_{x_{ab}}$ la valeur efficace de la réponse déplacement au dessus de la mousse $x_{ab}(t)$ suite à une excitation de type sinus fixe $x_{un}(t)$ d'amplitude A_{un} et de fréquence f_e .

Si $FEAT(A_{un}, f_e)$ est strictement supérieur à 1 alors la mousse amplifie la vibration, en revanche s'il est strictement inférieur à 1 alors la mousse présente un pouvoir d'isolation de vibration. Dans le cas où $FEAT(A_{un}, f_e)$ est égale à un, la mousse n'a aucun effet.

Dans cette section, nous présentons les courbes d'évolution du rapport *FEAT* en fonction de la fréquence d'excitation ($FEAT(f_e)$) pour un niveau de compression initiale et une amplitude d'excitation donnés.

Ceci nous permet de discuter d'une part l'influence du niveau de compression initiale et d'autre part l'influence de l'amplitude d'excitation sur le comportement dynamique global de la mousse, sur la résonance et sur la répartition des zones dans lesquelles la mousse présente un pouvoir d'absorption de vibrations.

On constatera plus tard que toutes les courbes de $FEAT(f_e)$ présentent des allures similaires qui peuvent être séparées en trois régions : zone de comportement rigide (*zone 1*), zone d'amplification de vibration (*zone 2*) et la zone d'atténuation de vibration (*zone 3*) (**Fig. 58**).

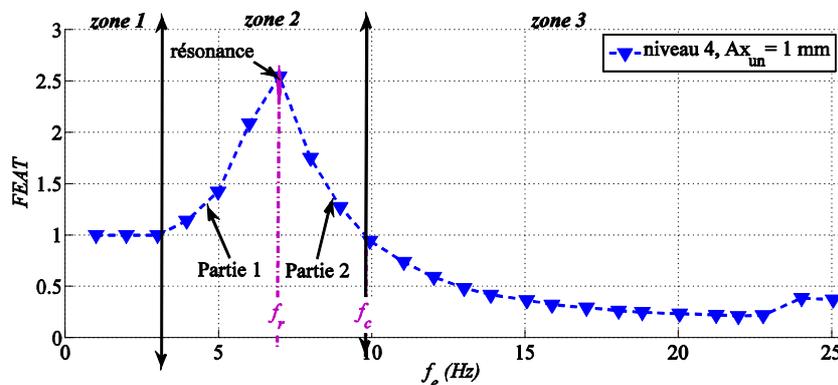


Figure 58. Allure de la courbe $FEAT(f_e)$

Pour la **zone 1**, la pente de la courbe $FEAT(f_e)$ est très faible, le rapport $FEAT$ est égal à **1**. Les vibrations d'excitation en-dessous de la mousse A sont transmises intégralement à la masse. Le comportement de la mousse à très faibles fréquences d'excitation est donc un comportement élastique.

Dans la **zone 2**, le rapport $FEAT$ est supérieur à **1**. Le niveau vibratoire transmis par la mousse A est ainsi supérieur à celui d'excitation. La mousse amplifie donc la vibration. Pour les applications de confort, il est déconseillé d'utiliser la mousse A dans cette zone.

La zone d'amplification (**zone 2**) peut être décomposée en deux parties selon la croissance de la courbe $FEAT(f_e)$.

Pour la première partie, le rapport $FEAT$ augmente progressivement jusqu'à atteindre la résonance (valeur maximale $FEAT_{\max}$). La fréquence qui correspond à la résonance est dite fréquence de résonance f_r .

Dans la deuxième partie, la courbe est décroissante, le rapport passe de la résonance jusqu'à atteindre de nouveau la valeur **1**. La fréquence qui correspond à cette valeur est dite fréquence de coupure f_c .

Pour les applications de confort, la **zone 3** est la zone la plus intéressante. Le rapport $FEAT$ est inférieur à **1**, le niveau vibratoire transmis par la mousse A est ainsi inférieur à celui de l'excitation. La mousse présente donc un pouvoir d'atténuation des vibrations. Il est donc intéressant de déterminer cette zone pour différentes amplitudes d'excitation et différents niveaux de compression initiale.

A partir de cette analyse de l'allure de la courbe $FEAT(f_e)$, on déduit que les zones dans lesquelles la mousse A présente un pouvoir d'atténuation des vibrations correspondent aux zones de fréquences supérieures à la fréquence coupure f_c . Ainsi, afin de déduire ces zones, il suffit de déterminer la fréquence de coupure pour différentes amplitudes d'excitation et différents niveaux de compression initiale.

➤ Influence de l'amplitude d'excitation

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude de l'influence de l'amplitude d'excitation sur le comportement vibratoire de la mousse A, en particulier sur l'évolution fréquentielle du rapport $FEAT$.

La démarche consiste à regrouper dans une même figure et pour un niveau de compression initiale donné, les courbes $FEAT(f_e)$ correspondantes aux différentes amplitudes d'excitation $A_{x_{in}}$ (**Fig. 59**).

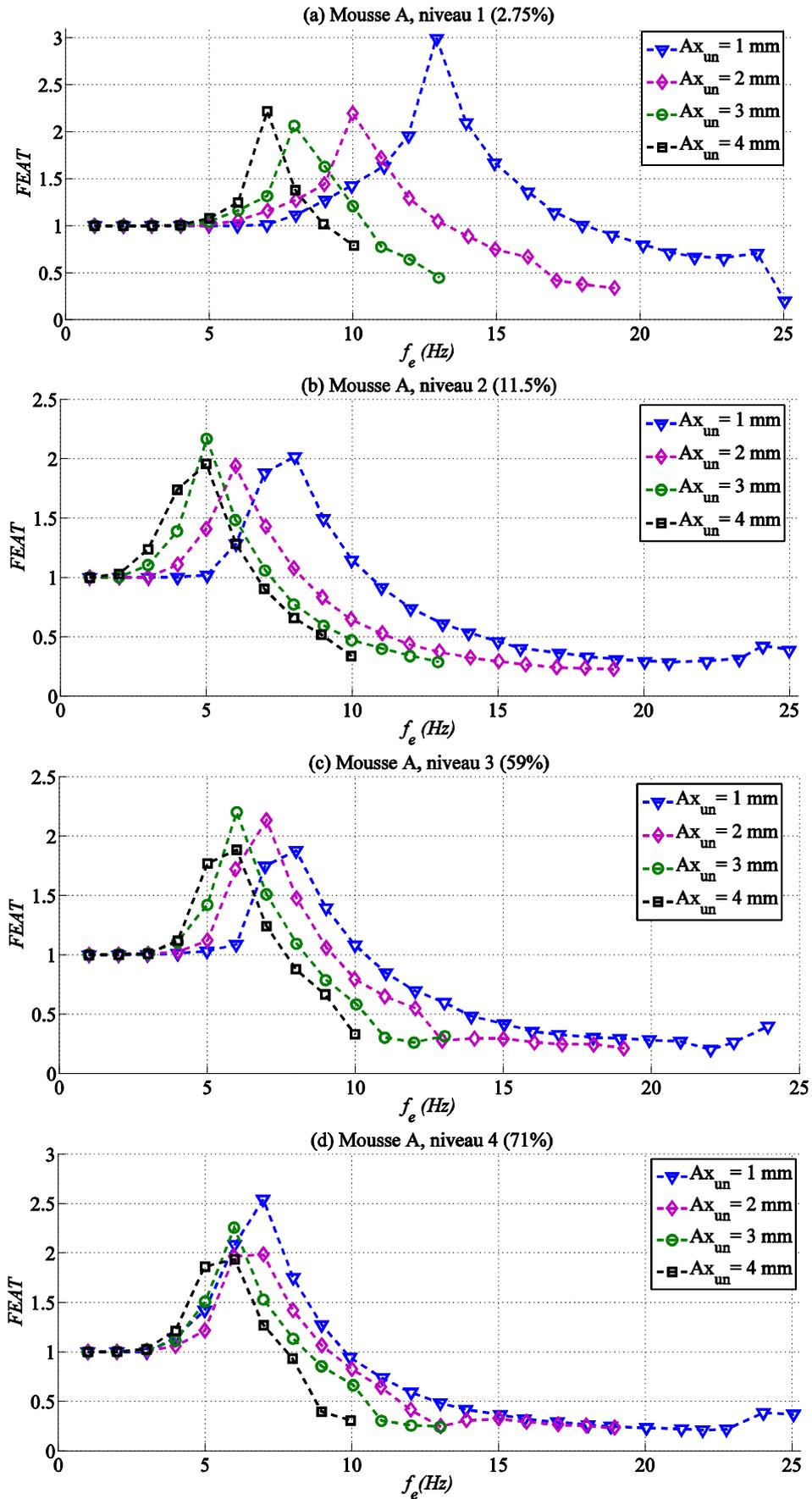


Figure 59. Rapport $FEAT$ - Influence d'amplitude d'excitation.

La **figure 59** montre que quel que soit le niveau de compression initiale (c'est-à-dire la masse supplémentaire appliquée), les fréquences de résonance et de coupure diminuent lorsque l'amplitude d'excitation augmente (**Tab. 20**).

Tableau 20. Fréquences de résonance et de coupure pour les quatre niveaux de compression initiale et les quatre amplitudes d'excitation examinés (Mousse A).

Fréquence de résonance f_r (Hz) / Fréquence de coupure f_c (Hz)					
A_{um} (mm)	$[f_{inf}, f_{max}]$ (Hz)	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
1	[1,25]	12.91 / 18.05	7.81 / 10.62	7.70 / 10.34	6.99 / 9.78
2	[1,19]	9.98 / 13.28	6.05 / 8.28	6.98 / 9.21	6.54 / 9.24
3	[1,14]	7.95 / 10.46	5.08 / 7.21	6.02 / 8.29	6.01 / 8.48
4	[1,10]	7.01 / 9.06	4.89 / 6.72	5.69 / 7.63	5.56 / 7.79

On remarque que la différence entre les courbes $FEAT(f_e)$ correspondant aux différentes amplitudes d'excitation $A_{x_{um}}$ est plus faible en passant d'un niveau de compression à un autre plus élevé. On déduit que lorsqu'on augmente le niveau de compression initiale, l'influence de l'amplitude d'excitation sur la réponse fréquentielle devient moins importante.

Pour le niveau de compression initiale le plus faible (**niveau 1, Fig. 59-a**), l'amplitude à la résonance $FEAT_{max}$ la plus importante correspond au niveau d'excitation le plus faible ($A_{x_{um}} = 1$ mm). Cette constatation est vérifiée pour le **niveau 4 (Fig. 59-d)** alors qu'elle n'est pas assurée pour le **niveau 2 (Fig. 59-b)** et le **niveau 3 (Fig. 59-c)**. On ne peut pas extraire une relation claire entre l'amplitude d'excitation et l'amplitude de résonance.

➤ Influence du niveau de compression initiale

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude de l'influence du niveau de compression initiale sur le comportement vibratoire de la mousse A, en particulier sur l'évolution fréquentielle du rapport $FEAT$.

La démarche consiste à regrouper sur une même figure et pour une amplitude d'excitation donnée, les courbes $FEAT(f_e)$ correspondantes aux différents niveaux de compression initiale (c'est-à-dire les différentes masses supplémentaires appliquées).

La **figure 60** représente l'influence du niveau de compression initiale sur le rapport $FEAT$.

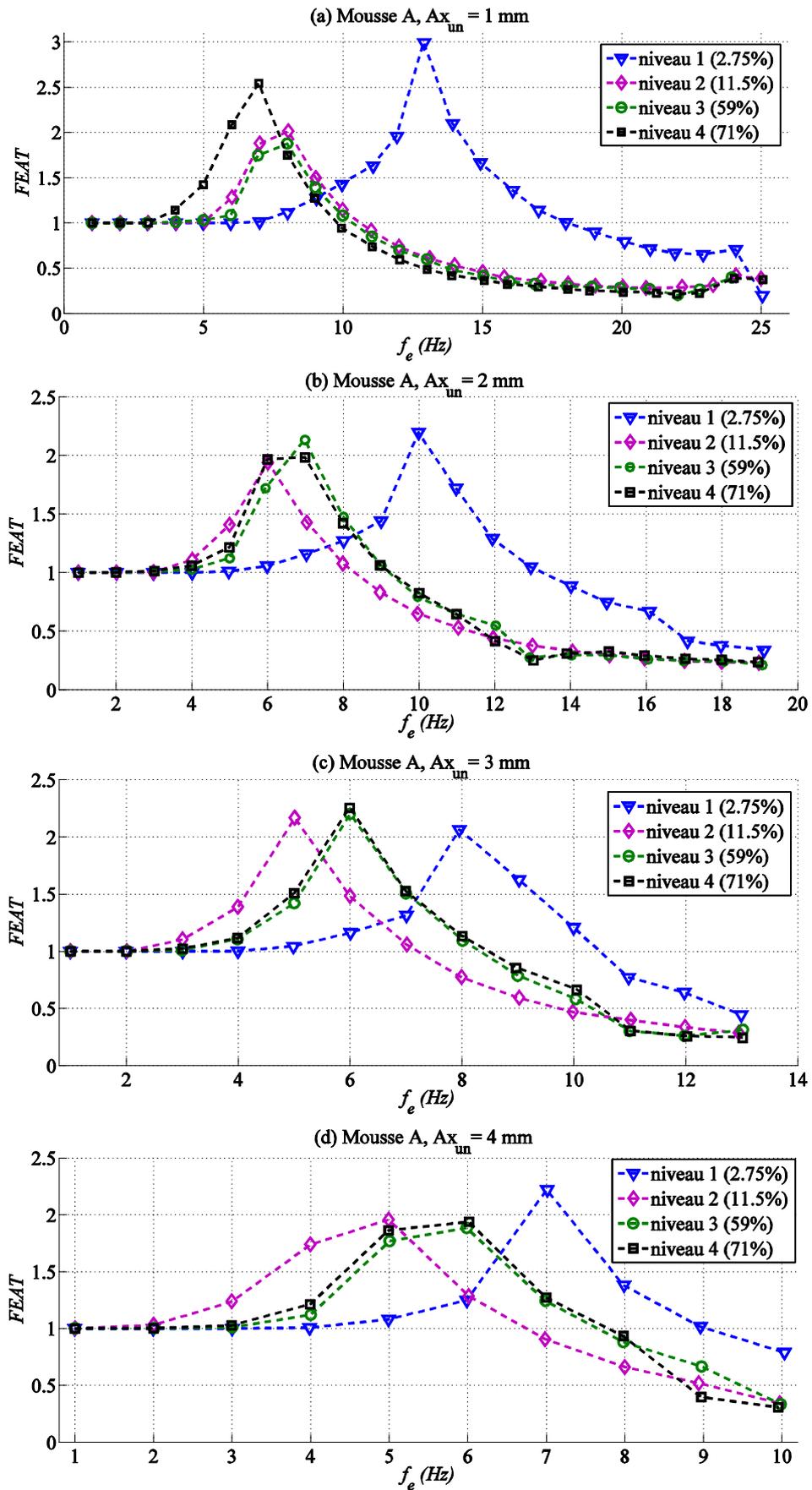


Figure 60. Rapport $FEAT$ - Influence du niveau de compression initiale.

A partir de la **figure 60**, on constate que quelle que soit l'amplitude de l'excitation, le comportement vibratoire de la mousse A au **niveau 1** est clairement différent du comportement vibratoire aux **niveaux 2, 3 et 4**. En effet, les fréquences de résonance et de coupure pour le **niveau 1** sont décalées vers les hautes fréquences (toujours décalées vers la partie droite de la **figure 60**) comparativement aux mêmes fréquences pour les autres niveaux.

On remarque que lorsque l'amplitude d'excitation augmente, le comportement vibratoire de la mousse A au **niveau 3** devient de plus en plus similaire à celui du **niveau 4**. En fait, le **niveau 4** est situé dans la zone de densification (**zone 3**) de la courbe de 'contrainte-déformation' établie lors d'un essai de compression quasi-statique, alors que le **niveau 3** est localisé à la limite entre la zone plateau (**zone 2**) et la zone de densification (**zone 3**) (**Fig. 50**). Ainsi, la réponse vibratoire au **niveau 3** est influencée par l'état du matériau à la fois dans la **zone 2** et dans la **zone 3**. A grande amplitude d'excitation, l'influence de l'état dans la **zone 3** devient dominante, ce qui explique la similarité entre le comportement vibratoire au **niveau 3** et celui au **niveau 4**.

On observe également à partir de la **figure 60** un comportement vibratoire au **niveau 2** particulier. Globalement, il est très proche du comportement vibratoire au **niveau 3** surtout à la plus faible amplitude d'excitation ($A_{x_{min}} = 1 \text{ mm}$).

A grande amplitude d'excitation, les fréquences de coupure et de résonance du **niveau 2** sont décalées vers les faibles fréquences (vers la partie gauche des **figures 60-b, 60-c et 60-d**) contrairement à la réponse à faible amplitude d'excitation où les fréquences de coupure et de résonance sont situées entre celles du **niveau 1** et du **niveau 3**.

On rappelle que le **niveau 2** est localisé à la limite entre la zone quasi-linéaire (**zone 1**) et la zone plateau (**zone 2**) de la courbe de 'contrainte-déformation' (**Fig. 50**). La réponse est donc influencée par l'état du matériau à la fois dans la **zone 1** et la **zone 2**.

A faible amplitude d'excitation, l'état du matériau dans la **zone 2** est dominant avec une faible contribution de la **zone 1**. Ceci explique le léger décalage du comportement vibratoire au **niveau 2** par rapport à celui du comportement au **niveau 3** vers le côté de la réponse au **niveau 1**.

A grande amplitude, la contribution de la **zone 1** devient non négligeable. La mousse comprimée au **niveau 2** présente un comportement vibratoire à grande amplitude d'excitation différent de celui à faible amplitude d'excitation ; Ceci est dû à la contribution de l'état de compression initiale du matériau à la limite de la **zone 1** et de la **zone 2** de la courbe de 'contrainte-déformation' quasi-statique.

➤ Conclusion

La réponse vibratoire de la mousse A suite à un essai de vibrations entretenues de type sinus fixe dépend de l'amplitude d'excitation et de l'état de compression quasi-statique initiale du matériau. Cette dépendance montre que le comportement vibratoire de la mousse A est un comportement non linéaire.

Les mousses de polyuréthane d'une façon générale et la mousse A en particulier ne présentent pas toujours un pouvoir d'isolation de vibration quelles que soient les conditions d'essai (la fréquence d'excitation, l'amplitude d'excitation, la masse appliquée à la mousse, etc.). Ainsi, le choix de la mousse de polyuréthane pour une application donnée doit être précédé d'une étude statistique des conditions de sollicitations (la bande de fréquence dominante d'excitation, les niveaux d'excitation fortement probables, etc.).

Il faut aussi tenir compte des caractéristiques morphologiques de l'occupant du siège, vu que le comportement de la mousse dépend de l'état de compression quasi-statique initiale donné par la masse de l'occupant.

Il a été montré dans cette étude fréquentielle que les zones dans lesquelles la mousse A présente un pouvoir d'atténuation des vibrations correspondent aux zones de fréquences supérieures à celles de coupure pour différentes amplitudes d'excitation et différents niveaux de compression initiale. Ces fréquences de coupure ont été résumées dans le **tableau 20**.

Tableau 20. Fréquences de résonance et de coupure pour les quatre niveaux de compression initiale et les quatre amplitudes d'excitation examinés (Mousse A).

Fréquence de résonance f_r (Hz) / Fréquence de coupure f_c (Hz)					
A_{tm} (mm)	$[f_{inf}, f_{max}]$ (Hz)	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
1	[1,25]	12.91 / 18.05	7.81 / 10.62	7.70 / 10.34	6.99 / 9.78
2	[1,19]	9.98 / 13.28	6.05 / 8.28	6.98 / 9.21	6.54 / 9.24
3	[1,14]	7.95 / 10.46	5.08 / 7.21	6.02 / 8.29	6.01 / 8.48
4	[1,10]	7.01 / 9.06	4.89 / 6.72	5.69 / 7.63	5.56 / 7.79

III.1.3.2 Diagrammes de BODE expérimentaux de la fonction ‘raideur dynamique’

La comparaison des spectres d’amplitude ($|\hat{F}(f)|, |X_{ab}(f)|$) correspondant respectivement à la force d’excitation $F(t)$ et au déplacement $x_{ab}(t)$ transmis à la masse supplémentaire (**Fig. 61**) montre la même fréquence principale avec la présence d’une amplitude non négligeable à la fréquence nulle pour le spectre d’amplitude $|X_{ab}(f)|$ ce qui explique le décalage permanent et constant.

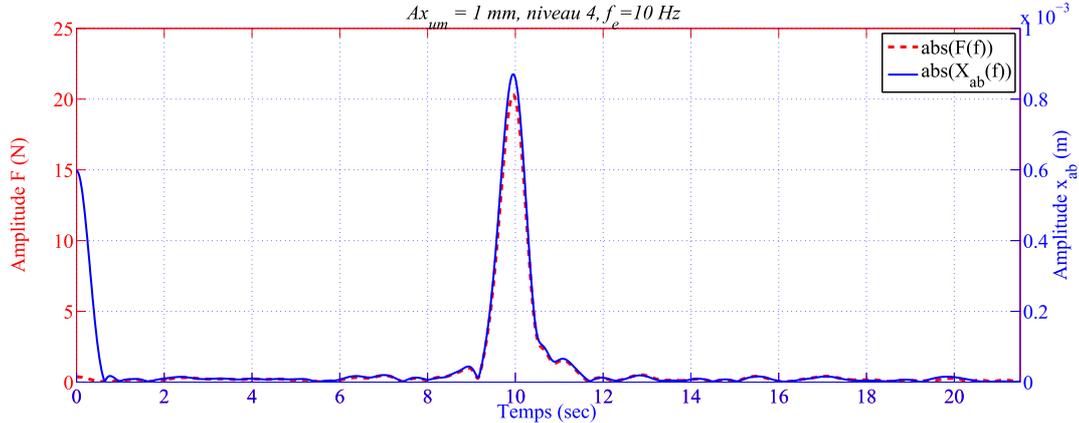


Figure 61. Comparaison des spectres d’amplitudes $|\hat{F}(f)|$ et $|X_{ab}(f)|$, amplitude d’excitation $A_{x_{um}} = 1$ mm, niveau 4, fréquence d’excitation $f_e = 10$ Hz.

L’objectif de cette section est de déterminer expérimentalement les diagrammes de BODE de la fonction ‘raideur dynamique’ tout en négligeant le décalage permanent et constant.

Le diagramme d’amplitude $|H(f)|$ consiste à représenter le rapport d’amplitude des spectres ($|\hat{F}(f)|, |X_{ab}(f)|$) en fonction de la fréquence d’excitation (**équation 3-3**).

$$|H(f_e)| = \frac{|\hat{F}(f_e)|}{|X_{ab}(f_e)|} \quad (3-3)$$

Le diagramme de phase est établi à partir des spectres de phase ($\angle \hat{F}(f), \angle X_{ab}(f)$) (**équation 3-4**)

$$\delta\phi = \angle H(f_e) = \angle \hat{F}(f_e) - \angle X_{ab}(f_e) \quad (3-4)$$

Le balayage de la fréquence d’excitation permet de tracer les diagrammes de BODE pour toutes les amplitudes d’excitation et tous les niveaux de compression initiale examinés lors de notre étude expérimentale à savoir le diagramme de gain et le diagramme de phase.

La figure 62 montre que la résonance présente un extremum dans le diagramme de gain.

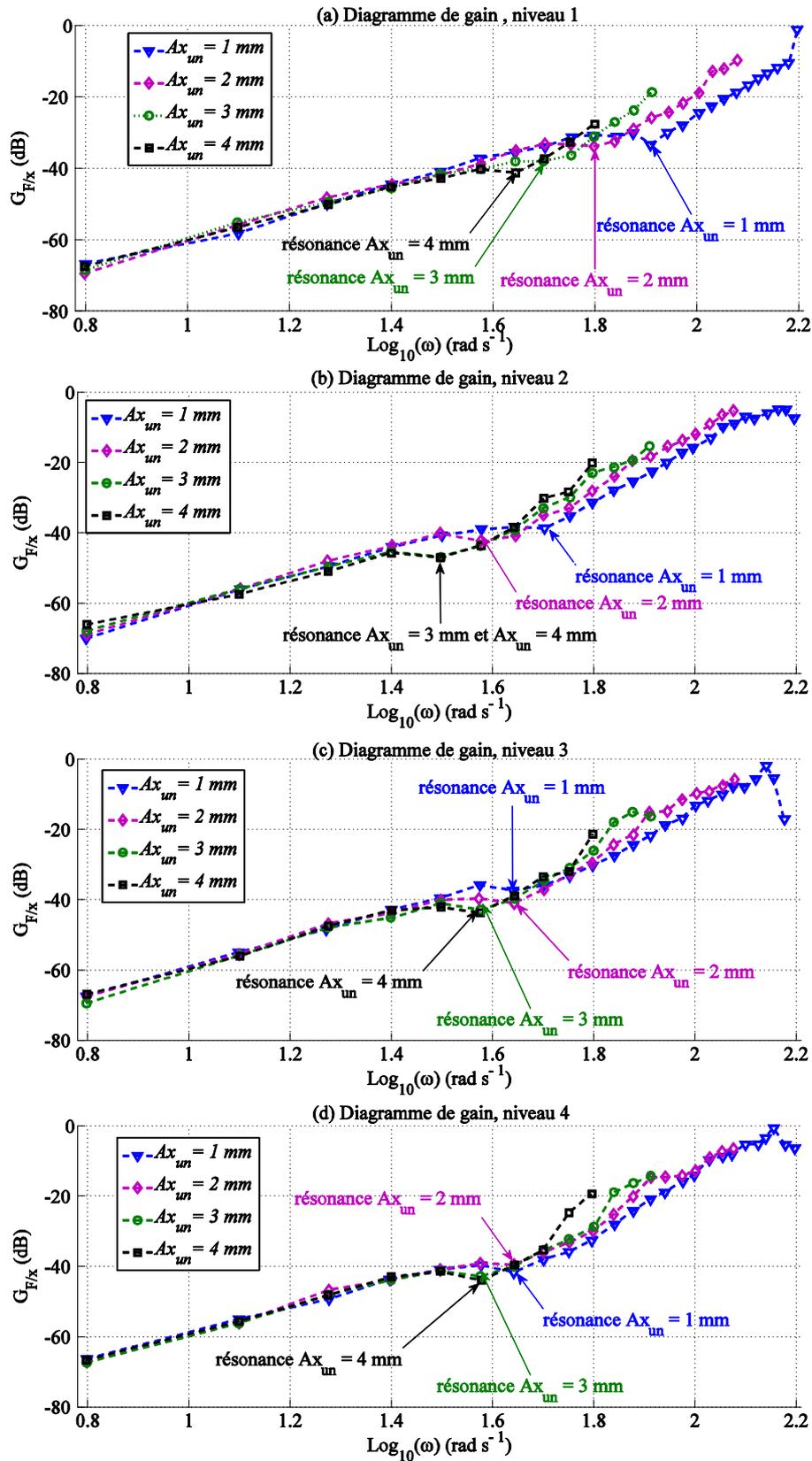


Figure 62. Fonction 'raideur dynamique', diagramme de gain pour les différents niveaux de compression initiale et les différentes amplitudes d'excitation.

Contrairement aux systèmes ordinaires, la pente initiale du diagramme de gain pour la mousse est non nulle.

On constate également que l'allure de la représentation asymptotique des diagrammes de BODE est la même pour les différentes amplitudes d'excitation et les différents niveaux de compression initiale considérés lors de cette étude expérimentale.

Les pentes initiales et finales de la fonction 'raideur dynamique' sont déterminées expérimentalement à partir des diagrammes de gain. Elles sont regroupées dans le **tableau 21**.

Tableau 21. Pentés initiales et finales de la fonction 'raideur dynamique' déterminées expérimentalement à partir des diagrammes de gain (unité dB/dec).

	$A_{x_{im}} = 1 \text{ mm}$		$A_{x_{im}} = 2 \text{ mm}$		$A_{x_{im}} = 3 \text{ mm}$		$A_{x_{im}} = 4 \text{ mm}$	
	initiale	finale	initiale	finale	Initiale	finale	initiale	finale
Niveau 1	40.00	76.70	40.66	91.28	38.61	86.38	37.05	88.68
Niveau 2	35.40	80.05	41.90	77.91	37.38	84.70	35.70	88.00
Niveau 3	38.00	80.10	39.12	85.60	39.14	80.10	39.79	85.61
Niveau 4	36.43	82.00	38.93	81.56	39.37	76.31	39.78	80.62

On constate que l'ordre de grandeur global en particulier pour la pente initiale est indépendant des conditions de sollicitations. La pente initiale est de l'ordre de **40 dB/dec** alors que la pente finale est plus proche de **80 dB/dec**.

La **figure 63** (présentée dans la page suivante) montre que la fréquence de résonance est située au voisinage de point d'inflexion du diagramme de phase.

III.1.4 Conclusion

Ce qu'il faut retenir à partir de cette première partie, c'est que le comportement vibratoire de la mousse de polyuréthane est un comportement non linéaire puisqu'il dépend des conditions de sollicitations en particulier de l'amplitude d'excitation.

L'étude expérimentale nous a permis de constater que la mousse A ne présente un pouvoir d'atténuation de vibrations quelles que soient les conditions de sollicitations (amplitudes d'excitations, fréquences d'excitations, poids de l'occupant). Ainsi le choix d'une mousse pour une application de confort donnée doit être fait après une étude statistique des sollicitations les plus probables. De plus ce choix doit être personnalisé puisque le comportement vibratoire dépend du poids de l'occupant (niveau de compression initiale).

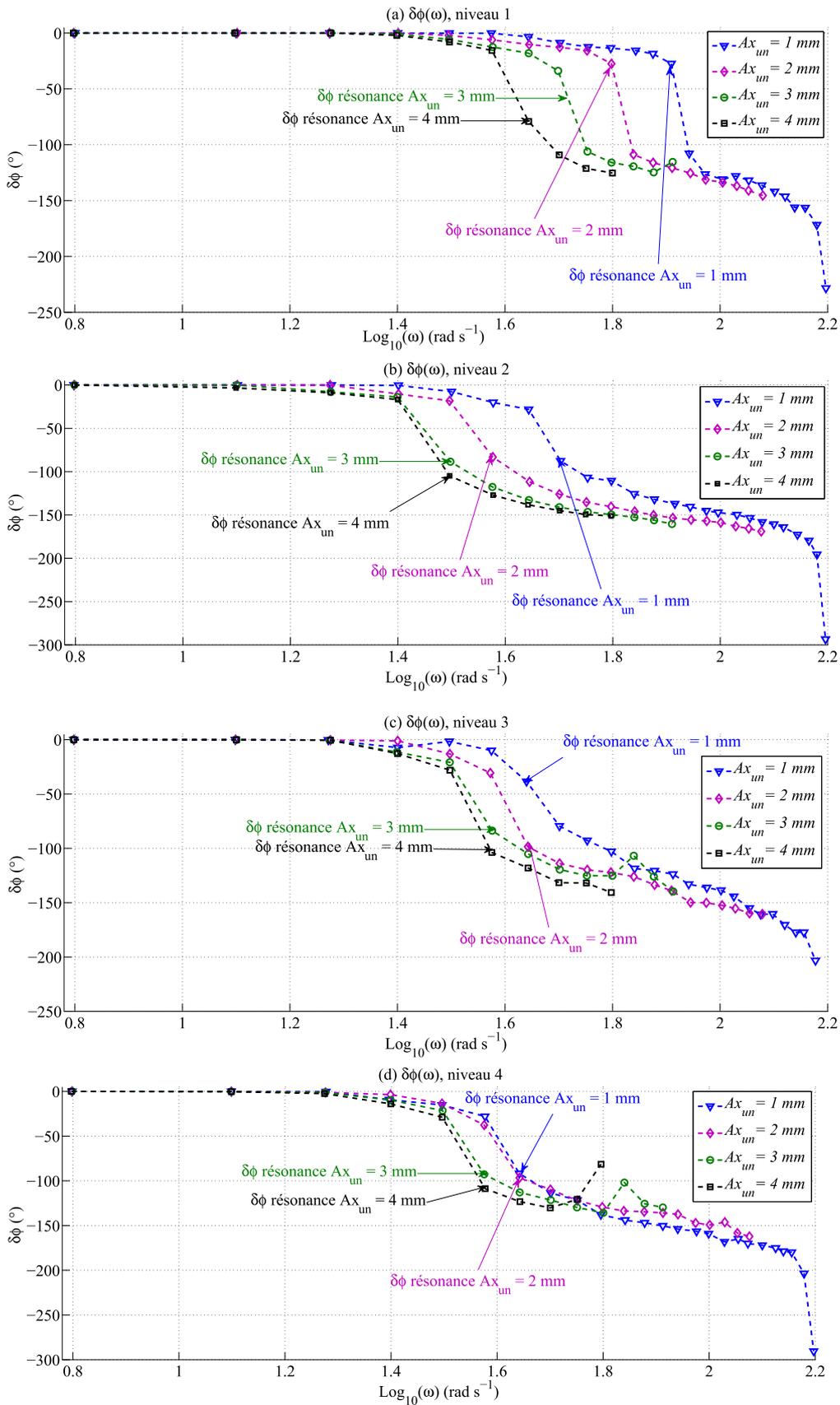


Figure 63. Fonction ‘raideur dynamique’, diagramme de phase pour les différents niveaux de compression initiale et les différentes amplitudes d’excitation.

III.2 Modélisation et identification

En dynamique, la mousse de polyuréthane est modélisée généralement par des modèles très simples tels que par exemple le modèle de Maxwell, le modèle de Kelvin-Voigt et le modèle de Zener. Ces modèles ne reflètent pas la complexité du comportement vibratoire du matériau montré lors de l'étude expérimentale.

L'objectif principal de cette partie consiste à développer un modèle représentatif du comportement vibratoire de la mousse A. Ce modèle doit reconstruire les diagrammes de BODE de la fonction 'raideur dynamique' qui ont été déterminés dans la partie expérimentale.

Les paramètres des modèles, développés dans la littérature ([White S.W. 1998](#); [Singh R., Davies P. et al. 2003](#) ; [Deng R. 2004](#)) afin de caractériser le comportement dynamique de la mousse de polyuréthane, sont dépendants des conditions de sollicitations, ceci affecte une fois de plus le caractère général de leur représentativité.

Dans ce travail, nous avons choisi d'accorder une grande importance à la représentativité du modèle que nous allons développer afin d'établir une fonction de transfert (fonction 'raideur dynamique') valable quels que soient l'amplitude d'excitation et le niveau de compression initiale. Cette fonction sera utile lors de la conception de ce qu'on appelle aujourd'hui 'les sièges intelligents' qui comportent des systèmes automatiques afin de réguler et contrôler les vibrations transmises aux occupants.

La démarche globale de modélisation et d'identification comporte trois étapes:

- une première étape de '*Modélisation*',
- une deuxième étape intitulée '*Identification des paramètres de la modélisation*',
- et une troisième étape pour la '*Discussion des résultats d'identification*'.

La première étape consiste à développer un modèle préliminaire à partir duquel nous déterminons l'expression analytique de la fonction 'raideur dynamique' ainsi que les spectres analytiques de gain et de phase.

Une analyse théorique de ces spectres permet de vérifier l'aptitude du modèle à reconstruire l'allure asymptotique expérimentale du diagramme de gain.

Si le modèle n'en est pas capable, il faut apporter à la fonction 'raideur dynamique' les modifications nécessaires puis vérifier de nouveau l'aptitude à reconstruire l'allure asymptotique.

Dans la deuxième étape, on procède à l'identification des paramètres du modèle ainsi développé en utilisant une approche d'identification dans le domaine fréquentiel, ce qui diffère radicalement des approches temporelles établies dans la littérature ([White S.W. 1998](#); [Singh R., Davies P. et al. 2003](#) ; [Deng R. 2004](#)).

L'identification consiste à déterminer la meilleure combinaison de paramètres vérifiant les conditions thermodynamiques capable de reconstruire au mieux les diagrammes de BODE : diagramme de gain et diagramme de phase.

Il s'agit donc d'un problème d'optimisation dont l'objectif est de trouver la combinaison de paramètres qui minimise l'erreur au sens des moindres carrées entre les spectres analytiques de la fonction 'raideur dynamique' et les deux diagrammes de BODE.

On se retrouve devant deux choix : d'une part l'utilisation d'une optimisation multi-objectifs sur les deux diagrammes de BODE et d'autre part l'optimisation sur un diagramme puis la validation des résultats à travers le deuxième diagramme.

Du fait la complexité de l'identification multi-objectifs et dans le but d'avoir un critère de validation des résultats d'identification, notre approche consiste à optimiser sur le diagramme de gain puis valider à travers le diagramme de phase.

Finalement, les résultats d'identification permettent de déterminer le pouvoir conservatif et le pouvoir dissipatif du système masse-mousse ainsi que le facteur de perte (étape 3).

Le pouvoir conservatif est défini par la partie réelle de la fonction 'raideur dynamique' (**équation 3-5**) alors que le pouvoir dissipatif est défini par la partie imaginaire (**équation 3-6**).

$$E_c(f) = \text{Re}(H(f)) \quad (3-5)$$

$$E_d(f) = \text{Im}(H(f)) \quad (3-6)$$

Le facteur de perte est donné par le rapport entre le pouvoir dissipatif par le pouvoir conservatif, **équation 3-7**).

$$\eta(f) = \frac{E_d(f)}{E_c(f)} \quad (3-7)$$

La démarche globale de modélisation et d'identification est résumée dans la **figure 64**.

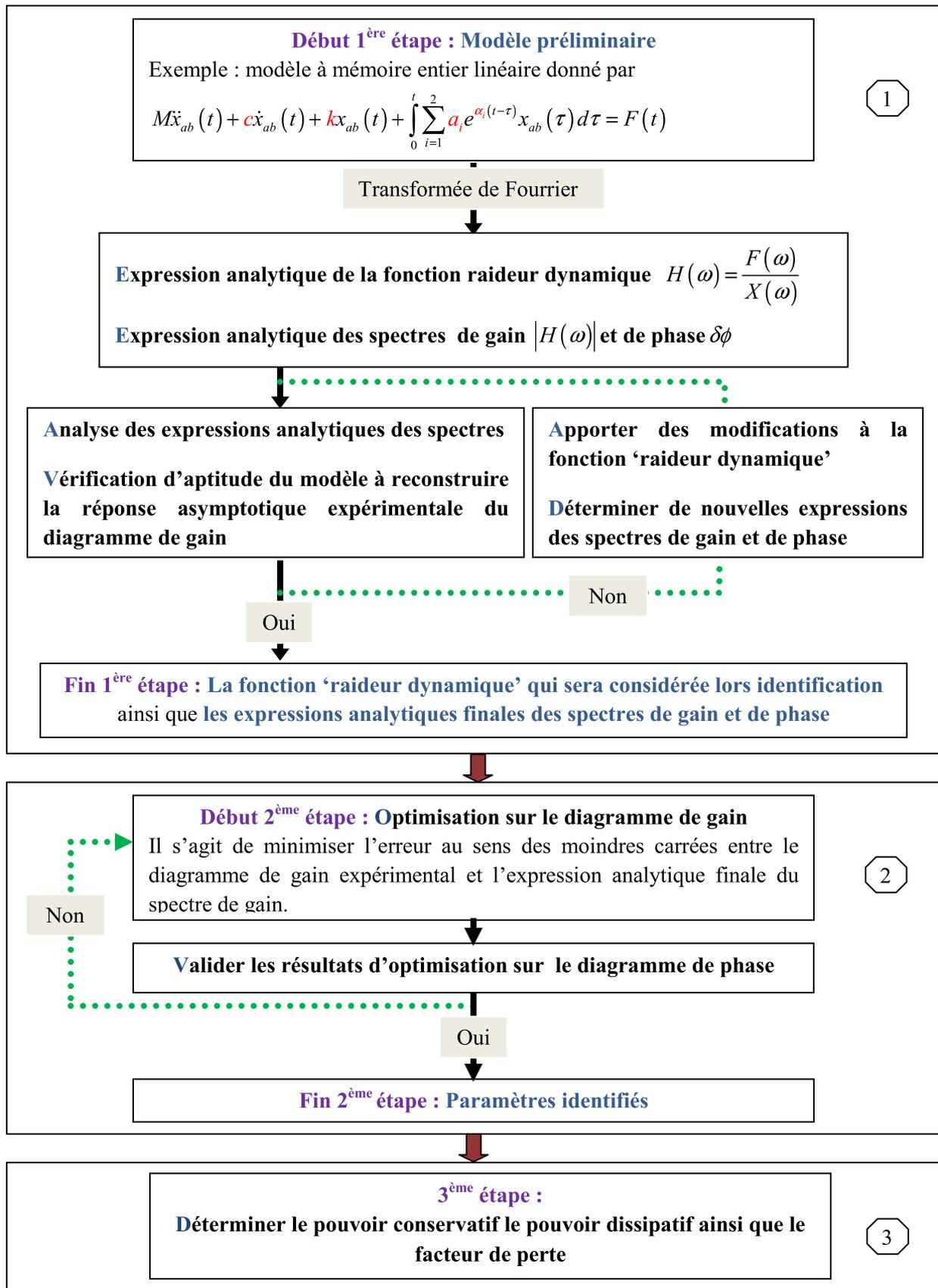


Figure 64. Démarche globale de modélisation et d'identification, étude du comportement vibratoire de la mousse A.

III.2.1 Modélisation

L'objectif de cette section est de déterminer une fonction de 'raideur dynamique' analytique qui a la capacité de reconstruire la réponse asymptotique expérimentale du diagramme de gain.

Dans cette section, nous présentons la première étape de la démarche globale de modélisation et d'identification présentée ci-dessus alors que dans les deux sections suivantes nous présentons la deuxième et la troisième étape.

III.2.1.1 Développement d'un modèle préliminaire - modèle à mémoire entier

L'étude expérimentale a montré que le comportement vibratoire de la mousse A dépend du niveau de compression initiale et de l'amplitude d'excitation. Dans le but de contourner cette complexité, l'idée préliminaire est d'examiner au voisinage de chaque niveau de compression initiale et au voisinage de chaque amplitude d'excitation un modèle à mémoire entier linéaire.

Au cours de la détermination de la vitesse de déformation limite entre quasi-statique et dynamique dans le deuxième chapitre (**chapitre II, section II.1.3.2**), nous avons expliqué l'augmentation brusque de la pente de la courbe 'évolution de l'énergie absorbée par la mousse A pendant le 4^{ème} cycle en fonction de la vitesse de déformation' par la manifestation, en dynamique, à la fois du mécanisme de perte visqueux et du mécanisme de perte viscoélastique. De plus, la contribution de l'inertie de la masse appliquée initialement à la mousse ne peut pas être négligée en dynamique.

De ce fait, pour caractériser le comportement dynamique de la mousse A, le modèle à mémoire entier linéaire que nous développerons doit comprendre :

- une contribution viscoélastique $F_{ve}(t)$ qui peut être donnée par la même expression du modèle à mémoire entier développé en quasi-statique (**équation 2-3**),
- une contribution élastique linéaire modélisant le comportement d'un ressort linéaire ($F_e(t) = k x_{ab}(t)$),
- une contribution visqueuse ($F_v(t) = c \dot{x}_{ab}(t)$)
- et une contribution d'inertie ($F_I(t) = M \ddot{x}_{ab}(t)$).

Ainsi, le modèle à mémoire entier que nous développons est donné par l'équation suivante :

$$M \ddot{x}_{ab}(t) + c \dot{x}_{ab}(t) + k x_{ab}(t) + \int_0^t \sum_{i=1}^2 a_i e^{\alpha_i(t-\tau)} x_{ab}(\tau) d\tau = F(t) \quad (3-8)$$

Les paramètres à identifier sont le coefficient d'amortissement visqueux c , la raideur du ressort k et le vecteur de paramètres viscoélastiques ($X = [\text{Re}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_1), \text{Re}(a_1), \text{Im}(a_1)]_{p=2}$).

III.2.1.2 Vérification d'aptitude du modèle préliminaire à reconstruire la réponse asymptotique du diagramme de gain expérimental

Pour un niveau de compression initiale et une amplitude d'excitation donnés, les paramètres du modèle à mémoire entier développé ci-dessus sont considérés constants. Le passage par la transformée de Fourier permet d'établir l'expression analytique de la fonction 'raideur dynamique' ainsi que l'expression analytique du spectre de gain (**équation 3-9**). Les détails de cette équation sont donnés en **Annexe C**.

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{A_{12}\omega^{12} + A_{10}\omega^{10} + A_8\omega^8 + A_6\omega^6 + A_4\omega^4 + A_2\omega^2 + A_0}{C_8\omega^8 + C_6\omega^6 + C_4\omega^4 + C_2\omega^2 + C_0}} \quad (3-9)$$

avec ω est la pulsation définie par $\omega = 2\pi f$ alors que $(A_{2i})_{i=0..6}$ et $(C_{2i})_{i=0..4}$ sont des fonctions des paramètres à identifier donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{12} = M^2 \\ A_{10} = 4M^2 B_2 + B_7 \\ A_8 = 2M^2 (B_1^2 + 2B_2^2) + 4B_2 B_7 - 4MB_4 + (k^2 - 4cB_5) \\ A_6 = \left(\begin{array}{l} 2B_7 (B_1^2 + 2B_2^2) + 4M^2 B_1^2 B_2 - 4M (2B_4 B_2 + B_1 B_3) \\ + 4kB_4 + (4k^2 - 12cB_5) B_2 - 8cB_6 + 4B_5^2 \end{array} \right) \\ A_4 = \left(\begin{array}{l} 4B_7 B_1^2 B_2 - 4cB_5 (B_1^2 + 2B_2^2) + 8B_5^2 B_2 + 16B_6 (B_5 - cB_2) + M^2 B_1^4 \\ + 4k^2 B_2^2 + 4B_4^2 + 4kB_4 (B_1 + 2B_2) + 2k^2 B_1^2 - 4MB_1 (B_1 B_4 + 2B_3 B_2) \end{array} \right) \\ A_2 = \left(\begin{array}{l} B_7 B_1^4 + 4kB_1 (B_1 B_4 + 2B_3 B_2) + 16B_6 (B_5 B_2 + B_6) + 4k^2 B_1^2 B_2 \\ + 4B_5 B_2 (B_5 B_2 - cB_1^2) + 8B_1 (B_4 B_3 - cB_6 B_1) - 4MB_1^3 B_3 \end{array} \right) \\ A_0 = (kB_1^2 + 2B_3 B_1)^2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} C_8 = 1 \\ C_6 = 4B_2 \\ C_4 = 2(B_1^2 + 2B_2^2) \\ C_2 = 4B_2 B_1^2 \\ C_0 = B_1^4 \end{array} \right\} \quad (3-10)$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} B_1 = X(1)^2 + X(2)^2 \\ B_3 = X(1)X(3) + X(2)X(4) \\ B_5 = X(3) \\ B_7 = c^2 - 2kM \\ B_2 = X(1)^2 - X(2)^2 \\ B_4 = X(1)X(3) - X(2)X(4) \\ B_6 = X(1)X(2)X(4) \\ X = [\text{Re}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_1), \text{Re}(a_1), \text{Im}(a_1)] \end{array} \right\}.$$

Une analyse rapide de la réponse asymptotique, autrement dit de la pente initiale et de la pente finale, du spectre de gain donné par l'**équation 3-9** a été menée en **Annexe C**. Elle montre que la réponse asymptotique du modèle à mémoire entier est différente de la réponse asymptotique expérimentale. En fait, la pente initiale analytique ne peut être positive que si $B_3 = -0.5kB_1$ et $B_1 \neq 0$. Dans ce cas, cette dernière est égale à **20 dB/dec** contrairement à la pente initiale expérimentale qui est de l'ordre de **40 dB/dec (Tab. 20)**.

En ce qui concerne la pente finale issue de l'expression analytique, elle est égale à **40 dB/dec** vu que $C_8 = 1$ et $A_{12} = M^2 \neq 0$. Elle est donc très différente de la pente finale expérimentale présentée dans le **tableau 21**.

On déduit donc que le modèle en l'état ne peut pas reconstruire la fonction 'raideur dynamique' obtenue expérimentalement.

III.2.1.3 Modification de la fonction 'raideur dynamique' du modèle à mémoire entier

On rappelle que les paramètres des modèles développés dans la littérature (**White S.W. 1998; Singh R., Davies P. et al. 2003 ; Deng R. 2004**) ont été montrés dépendants des conditions de sollicitation.

Parmi les conditions de sollicitations, on distingue l'amplitude d'excitation, la fréquence d'excitation et le niveau de compression initiale donné par la masse supplémentaire M appliquée à la mousse.

La comparaison entre la réponse asymptotique du spectre de gain donné par **l'équation 3-9** et la réponse asymptotique expérimentale nous a permis de déduire que l'idée de considérer des paramètres dépendants uniquement du niveau de compression initiale et de l'amplitude d'excitation ne permet pas de contourner la complexité du comportement vibratoire de la mousse A.

Ainsi, on montre que les paramètres de notre modèle sont aussi dépendants de la fréquence d'excitation. Ceci constitue la base des modifications que nous allons apporter à la fonction 'raideur dynamique' afin d'assurer l'aptitude du modèle à reconstruire l'allure asymptotique.

Cependant, l'investissement à la recherche des paramètres dépendants des conditions d'essai affecte le caractère général de la représentativité du modèle.

Pour pallier à l'inconvénient lié à la représentativité du modèle, une solution inspirée de l'étude quasi-statique menée en deuxième chapitre a été développée. Elle consiste à exprimer les paramètres dimensionnels du modèle développé par le produit de deux parties indépendantes : une regroupant les conditions de sollicitation et une autre définissant les paramètres adimensionnels.

Dans ce qui suit, nous essayerons de retrouver les relations adéquates entre ces deux parties afin de garantir des paramètres adimensionnels quasiment constants.

➤ **Première solution**

Comme première solution, nous considérons pour les paramètres viscoélastiques les relations établies lors de l'étude quasi-statique. Les différentes relations entre les paramètres dimensionnels et adimensionnels pour la première solution sont résumées dans le **tableau 22**.

Tableau 22. Transformations paramètres dimensionnels - paramètres adimensionnels, modèle à mémoire entier (comportement vibratoire, solution 1).

Paramètres dimensionnels	Paramètres adimensionnels
$X(1) = Re(\alpha_1) \quad (\text{sec}^{-1})$	$Y(1) = \frac{X(1)}{\omega}$
$X(2) = Im(\alpha_1) \quad (\text{sec}^{-1})$	$Y(2) = \frac{X(2)}{\omega}$
$X(3) = Re(a_1) \quad (\text{Nm}^{-1}\text{sec}^{-1})$	$Y(3) = \frac{X(3)}{Mg\omega} A_{x_{un}}$
$X(4) = Im(a_1) \quad (\text{Nm}^{-1}\text{sec}^{-1})$	$Y(4) = \frac{X(4)}{Mg\omega} A_{x_{un}}$
$k \quad (\text{Nm}^{-1})$	$Y_k = \frac{k}{Mg} A_{x_{un}}$
$c \quad (\text{Nm}^{-1}\text{sec})$	$Y_c = \frac{c}{Mg} A_{x_{un}} \omega$

Avec cette solution, on montre dans l'**annexe C** que l'expression analytique du spectre de gain reste donnée par l'**équation 3-9**. Par contre, $(A_{2i})_{i=0..6}$ et $(C_{2i})_{i=0..4}$ deviennent fonction de paramètres à identifier et des conditions de sollicitation.

L'analyse de la réponse asymptotique du spectre analytique de gain donné par la première solution est présenté dans l'**Annexe C**. Elle montre que la pente finale analytique est de **40 dB/dec**. Ce qui fait que la pente finale analytique de la première solution est différente de la pente finale expérimentale qui est de l'ordre de **80 dB/dec**.

Ainsi, les modifications de la première solution qui ont été apportées à la fonction 'raideur dynamique' analytique du modèle à mémoire entier ne permettent pas la reconstruction de la réponse asymptotique du spectre de gain expérimental.

➤ **Deuxième solution**

Les relations présentées dans le **tableau 22** ne permettent pas de suivre l'allure asymptotique de digrammes de BODE expérimentaux.

Comme alternative, on montre que le terme $\varpi = \sqrt{gA_{x_{un}}^{-1}}$ est équivalent à une pulsation, ce qui nous a permis de développer des nouvelles relations (**Tab. 23**).

En fait, le terme $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ est la pulsation propre d'un système masse-ressort-amortisseur ordinaire, le terme $MgA_{x_m}^{-1}$ est équivalent à la raideur k (voir expression de Y_k du **tableau 21**) ainsi ϖ est équivalent à ω_0 .

Tableau 23. Transformations paramètres dimensionnels - paramètres adimensionnels, modèle à mémoire entier (comportement vibratoire, solution 2).

Paramètres dimensionnels	Paramètres adimensionnels
$X(1) = Re(\alpha_1)$ (sec ⁻¹)	$Y(1) = \frac{X(1)}{\omega}$
$X(2) = Im(\alpha_1)$ (sec ⁻¹)	$Y(2) = \frac{X(2)}{\omega}$
$X(3) = Re(a_1)$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(3) = \frac{X(3)}{Mg\omega^m} A_{x_m} \varpi^{m-1}$
$X(4) = Im(a_1)$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(4) = \frac{X(4)}{Mg\omega^n} A_{x_m} \varpi^{n-1}$
k (Nm ⁻¹)	$Y_k = \frac{k}{Mg\omega^s} A_{x_m} \varpi^s$
c (Nm ⁻¹ sec)	$Y_c = \frac{c}{Mg\omega^h} A_{x_m} \varpi^{h+1}$

Comme le montre le **tableau 23**, l'idée de cette deuxième solution consiste à considérer des relations en puissance entre les paramètres dimensionnels et les paramètres adimensionnels. Ces relations sont d'ordres entiers (m,n,s,h) respectivement associés aux paires $(X(3),Y(3)), (X(4),Y(4)), (k,Y_k)$ et (c,Y_c) . Ensuite, à travers une étude analytique, menée en **Annexe C**, du spectre de gain donné par la deuxième solution, on détermine les combinaisons (m,n,s,h) possibles permettant de suivre l'allure asymptotique expérimentale. On montre que les combinaisons admissibles doivent vérifier les contraintes données par l'**équation 3-11**.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \leq m \leq 5 \\ 3 \leq n \leq 5 \\ 2 \leq s \leq 6 \\ 1 \leq h \leq 3 \end{array} \right. \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} 4 \leq m + h \leq 8 \\ 4 \leq n + h \leq 8 \\ 5 \leq m + s \leq 9 \\ 5 \leq n + s \leq 9 \\ 6 \leq m + n \leq 10 \end{array} \right. \quad (3-11)$$

Le nombre de combinaisons (m,n,s,h) qui vérifient les contraintes de l'**équation 3-11** est égal à **72**. Il n'est pas possible de tester toutes ces combinaisons lors de l'identification. Il faut donc réduire ce nombre à partir de critères logiques.

Les deux entiers (m,n) sont associés aux parties réelle et imaginaire du résidu viscoélastique a_1 . Alors on peut supposer la même évolution des relations entre $(X(3),Y(3))$ et $(X(4),Y(4))$

en fonction de la fréquence, ce qui permet de considérer $m = n$ et donc réduire le nombre de combinaisons admissibles à **22**.

Si on considère que les paramètres à identifier doivent vérifier les conditions thermodynamiques développées en quasi-statique (**section II.2.2.4**), alors le nombre de combinaisons que nous allons considérer lors d'identification devient égal à **11** (**Tab. 24**).

Tableau 24. Combinaisons (m, n, s, h) considérées lors d'identification des paramètres du modèle développé afin d'étudier le comportement vibratoire de la mousse A.

(5,5,2,1)	(5,5,2,2)	(5,5,2,3)	(4,4,2,3)	(3,3,2,3)	(3,3,3,3)	(3,3,4,3)	(3,3,5,3)
(3,3,6,3)	(3,3,6,2)	(3,3,6,1)					

III.2.2 Identification des paramètres de la modélisation

En testant les différentes combinaisons du **tableau 24**, nous avons distingué la combinaison (5,5,2,3) dont les paramètres identifiés sont quasiment constants quels que soient l'amplitude d'excitation et le niveau de compression initiale (**Tab. 25** et **26**).

Tableau 25. Résultats de l'identification, combinaison (5,5,2,3), niveaux 1 et 2.

$A_{x_{in}}$	Niveau 1				Niveau 2			
	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm
$Y(1)$	2.066	2.244	2.280	2.265	1.776	1.999	2.110	2.240
$Y(2)$	-0.475	-0.528	-0.534	-0.530	-0.330	-0.403	-0.495	-0.519
$Y(3)$	-35.078	-34.161	-34.790	-35.542	-35.138	-34.243	-35.608	-35.128
$Y(4)$	-160.267	-160.317	-160.285	-160.304	-160.267	-160.259	-160.233	-160.265
Y_k	8.332	7.888	7.473	7.464	6.361	6.575	5.837	5.567
Y_c	11.901	12.184	11.782	11.866	11.865	11.692	11.984	11.911

Tableau 26. Résultats de l'identification, combinaison (5,5,2,3), niveaux 3 et 4.

$A_{x_{in}}$	Niveau 3				Niveau 4			
	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm	1 mm	2 mm	3 mm	4 mm
$Y(1)$	1.905	2.013	2.183	2.121	1.980	2.221	2.228	2.205
$Y(2)$	-0.351	-0.441	-0.493	-0.497	-0.390	-0.503	-0.540	-0.583
$Y(3)$	-35.155	-35.130	-35.138	-35.051	-35.405	-35.127	-35.387	-35.011
$Y(4)$	-160.267	-160.268	-160.267	-160.272	-160.261	-160.267	-160.259	-160.276
Y_k	6.094	6.103	5.713	6.581	4.720	5.020	5.122	5.583
Y_c	11.872	11.886	11.768	11.874	10.736	11.903	12.024	11.874

Afin de valider les résultats des **tableaux 25** et **26**, il est nécessaire de comparer les diagrammes de BODE expérimentaux et ceux donnés par la combinaison (5,5,2,3).

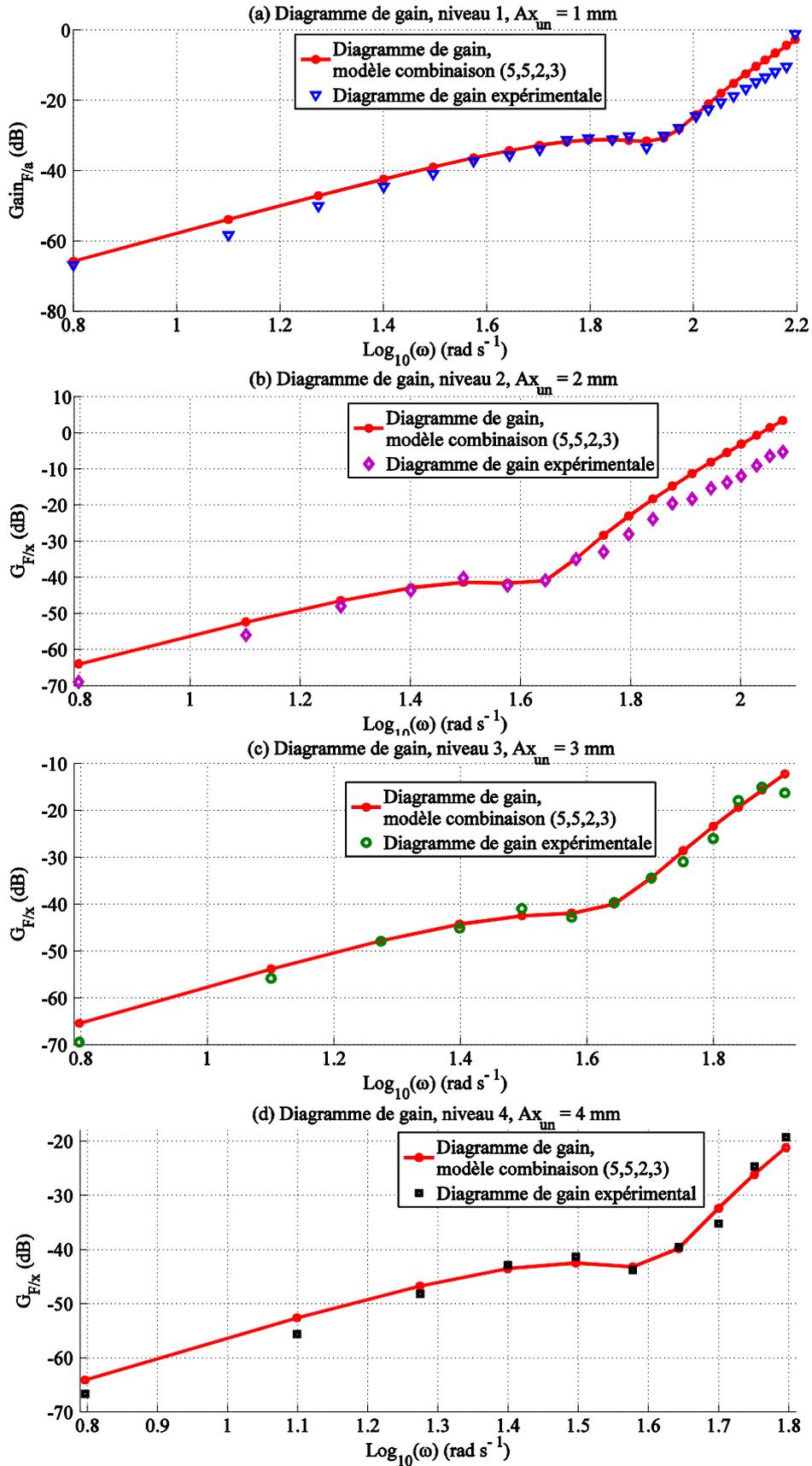


Figure 65. Comparaison entre les diagrammes de gain expérimentaux et les spectres de gain analytiques donnés par la combinaison (5,5,2,3).

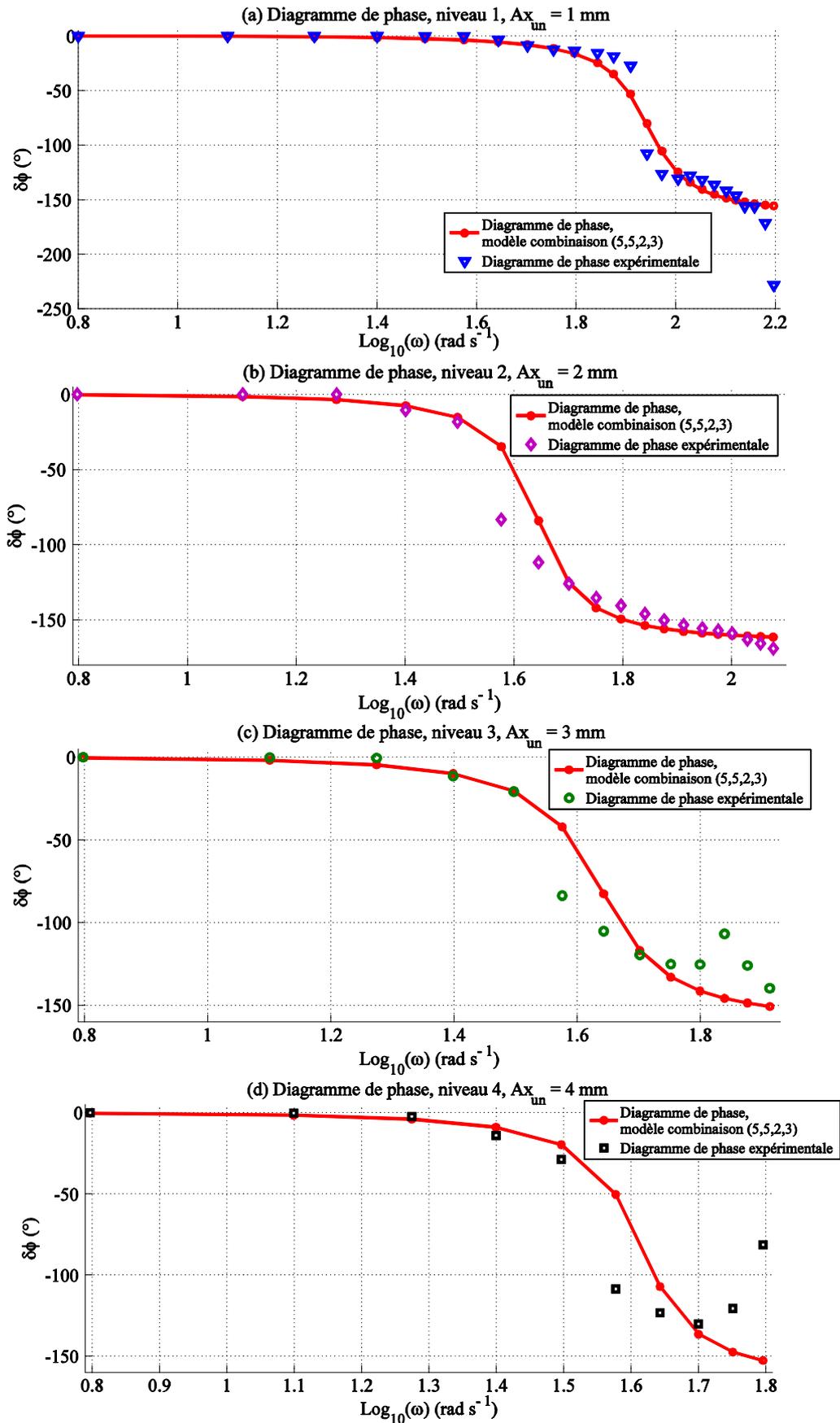


Figure 66. Comparaison entre les diagrammes de phase expérimentaux et les spectres de phase analytiques donnés par la combinaison (5,5,2,3).

Les **figures 65** et **66** montrent que la combinaison (5,5,2,3) reconstruit globalement l'allure asymptotique ainsi que les diagrammes de BODE de la fonction 'raideur dynamique' (diagrammes de gain et diagrammes de phase) avec une bonne concordance avec l'expérimentation quels que soient l'amplitude de l'excitation et le niveau de compression initiale.

L'erreur est marquée surtout au niveau de la réponse asymptotique. En fait, les pentes initiales et finales expérimentales des diagrammes de gains ne sont pas exactement égales respectivement à **40 dB/dec** et **80 dB/dec** (**Tab. 21**) quels que soient l'amplitude de l'excitation et le niveau de compression initiale contrairement à celles de la combinaison (5,5,2,3).

Si on cherche plus de précision, on peut remarquer qu'expérimentalement les valeurs des pentes initiales et finales (**Tab. 21**) ne sont pas multiples de **10 dB/dec**, ceci nous fait penser à considérer en perspective des combinaisons (m,n,s,h) non entier ou un modèle à mémoire fractionnaire.

III.2.3 Discussion des résultats d'identification

Les paramètres de la combinaison (5,5,2,3) (**Tab. 25** et **26**) permettent de reconstruire le pouvoir conservatif (**Fig. 67**), le pouvoir dissipatif (**Fig. 68**) ainsi que le facteur de perte (**Fig. 69**) pour les différentes amplitudes d'excitation et les différents niveaux de compression initiale considérés.

La **figure 67** montre que la partie réelle de la fonction 'raideur dynamique' présente une valeur positive à faibles fréquences alors qu'à fréquences élevées elle devient négative. Cette allure ne présente aucune contradiction avec celle d'un système masse-ressort-amortisseur ordinaire. On rappelle que la partie réelle de la fonction 'raideur dynamique' d'un système masse-ressort-amortisseur est donnée par $k - M\omega^2$.

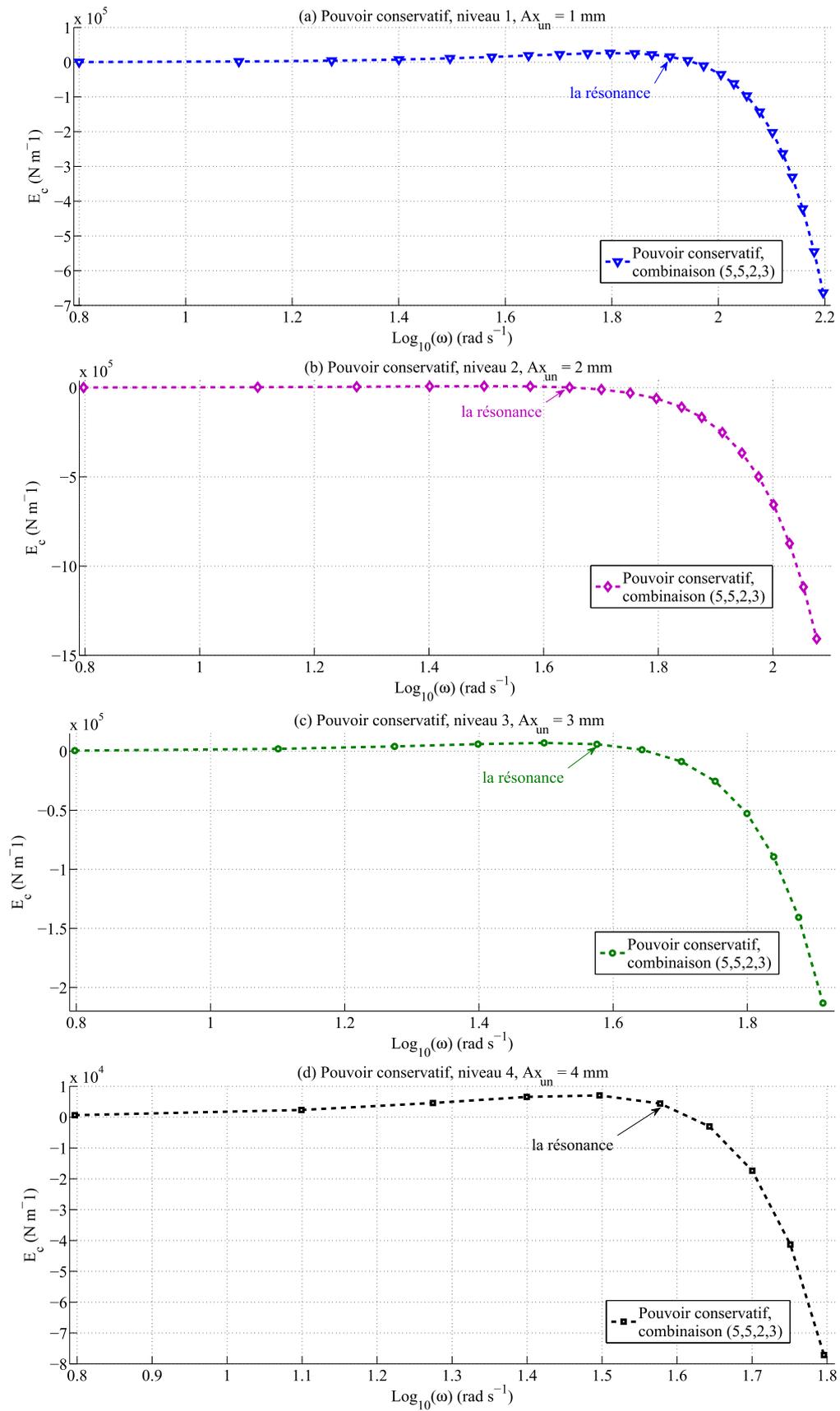


Figure 67. Pouvoir conservatif de la mousse A reconstruit par la combinaison (5,5,2,3).

La **figure 68** montre que le pouvoir dissipatif présente une allure hyperbolique contrairement au système masse-ressort-amortisseur ordinaire dont l'allure est linéaire et gouvernée par $E_d(\omega) = c\omega$. On remarque également que l'allure de la courbe présente une seule variation de pente au voisinage de la fréquence de résonance.

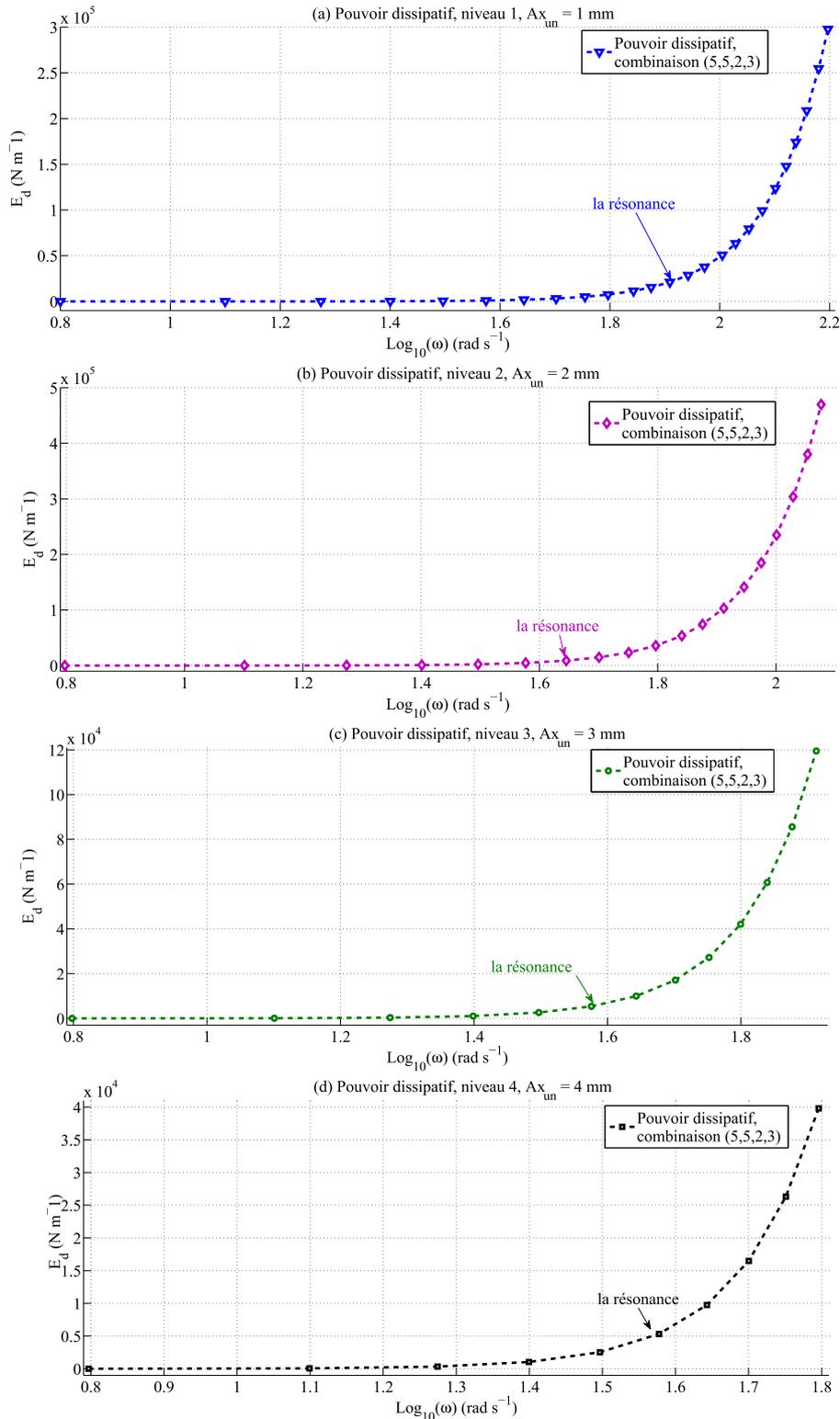


Figure 68. Pouvoir dissipatif de la mousse A reconstruit par la combinaison (5,5,2,3).

La **figure 69** montre qu'au voisinage de la résonance on a un changement de phase. En fait, pour des fréquences inférieures à la résonance le facteur de perte est positif, ce qui montre que les pouvoirs dissipatif et conservatif ont les mêmes signes, alors qu'à fréquences élevées il est négatif : les deux pouvoirs présentent des signes opposés. On remarque également que le facteur de perte présente deux asymptotes initiale et finale horizontales mais de signes opposés ainsi qu'un extremum au voisinage de la résonance.

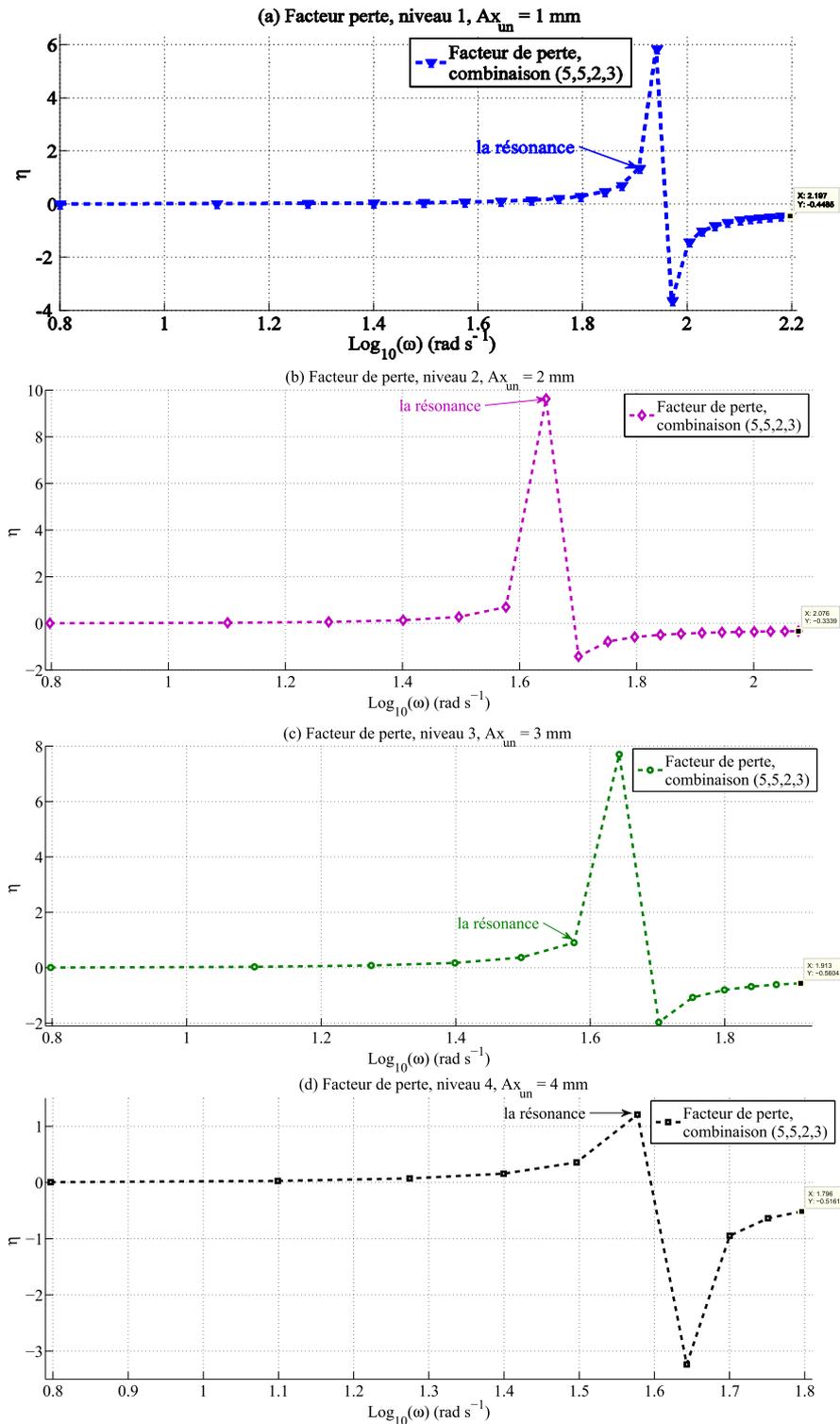


Figure 69. Facteur de perte de la mousse A reconstruit par la combinaison (5,5,2,3).

III.2.4 Conclusion

Les paramètres de la fonction de 'raideur dynamique' analytique développée dans cette partie sont quasiment constants quelles que soient les conditions d'essais. Il est donc possible de caractériser le comportement vibratoire de la mousse A par ces paramètres.

La fonction de raideur dynamique analytique que nous avons développée a permis de reconstruire les spectres de gains et de phases des diagrammes de BODE en bonne concordance avec l'expérimentation.

Conclusion du chapitre

L'étude expérimentale a permis de montrer que le comportement vibratoire de la mousse A suite à un essai de vibrations entretenues de type sinus fixe est un comportement non linéaire qui dépend de l'amplitude d'excitation et du niveau de compression initiale.

Une étude de l'influence des conditions de sollicitations en particulier de l'amplitude d'excitation et du niveau de compression initiale sur le rapport *FEAT* (niveau de vibrations transmises par la mousse / niveau de vibrations d'excitation) a été menée dans ce chapitre.

Cette étude a permis de déduire que plus le niveau de compression initiale augmente, moins l'influence de l'amplitude d'excitation sur la réponse fréquentielle devient importante. D'autre part, les fréquences de résonance et de coupure du rapport *FEAT* diminuent lorsque l'amplitude d'excitation augmente.

Dans ce chapitre, il a été montré que le pouvoir d'atténuation des vibrations de la mousse dépend de la fréquence d'excitation, de l'amplitude d'excitation ainsi que de l'état de compression quasi-statique initiale donné par la masse de l'occupant. Ainsi, le choix de la mousse de polyuréthane pour une application donnée doit être précédé d'une étude statistique des conditions de sollicitations (la bande de fréquence dominante d'excitation, les niveaux d'excitation fortement probables, etc.).

L'étude expérimentale nous a permis de déterminer expérimentalement les diagrammes de BODE de la fonction 'raideur dynamique'. Il a été montré dans ce chapitre que la mousse de polyuréthane présente une pente initiale du spectre de gain de la fonction 'raideur dynamique' non nulle (positive), contrairement à la plupart des systèmes ordinaires.

Il a été montré que le modèle à mémoire entier linéaire développé dans ce chapitre ne permet pas de reconstruire l'allure asymptotique du spectre de gain.

Des modifications ont été apportées à la fonction 'raideur dynamique' donnée par le modèle à mémoire entier linéaire. Ces modifications nous ont permis de déterminer une fonction de transfert (fonction analytique de 'raideur dynamique') dont les paramètres sont quasiment invariants en fonction des conditions de sollicitation.

La fonction analytique de 'raideur dynamique' développée dans ce chapitre sera utile par exemple lors du contrôle des vibrations transmises aux occupants des sièges de voitures et lors de la conception de ce qu'on appelle aujourd'hui ' les sièges intelligents'.

Conclusion générale et perspectives

➤ Conclusion générale

En raison de l'utilisation quotidienne de moyen de transport (voiture, train, avion,...), nous sommes amené à utiliser divers moyens d'assises. Les systèmes d'assises modernes sont systématiquement constitués, au moins partiellement, d'une partie réalisée en mousse de polyuréthane qui nous apporte soutien et confort.

Selon les modes de transport, les sollicitations appliquées à la mousse seront variées : statique à l'arrêt, quasi-statique lors de l'assise, dynamique lors de déplacement de la voiture.

L'objectif de ce travail est de comprendre le comportement de la mousse de polyuréthane en fonction des sollicitations auxquelles elle peut être soumise.

Pour cela, nous avons séparé notre travail en plusieurs parties. Dans un premier temps nous avons réalisé une analyse bibliographique afin de faire le point sur les travaux existants. Puis nous avons analysé le comportement quasi-statique de la mousse lors d'un essai de compression/décompression, ce qui nous a permis de mettre en place une modélisation originale et pertinente. Enfin, nous avons étendu nos travaux de la quasi-statique vers la dynamique, là aussi en proposant une modélisation originale.

Dans la partie bibliographie, nous avons d'abord mis en évidence les caractéristiques physico-chimiques de la mousse de polyuréthane ainsi que certains paramètres qui ont une influence sur le comportement mécanique.

Une synthèse des différents types d'essais couramment conduits nous a permis de choisir ceux qui reproduisent les sollicitations principales observées dans le siège.

Une analyse de différents types de modèles, plutôt centrée sur l'approche macro-mécanique, nous a permis, après avoir comparé leurs qualités et leurs défauts, de choisir les modèles à mémoire pour la modélisation du comportement des mousses de polyuréthane.

Enfin, nous avons comparé les méthodes d'identification des paramètres des modèles à mémoire et nous avons présenté une synthèse sur les méthodes d'optimisation comme outil nécessaire à l'identification.

Dans la partie quasi-statique de ce travail, nous nous sommes basé tout d'abord sur une étude expérimentale assurée par des essais de compression/décompression unidirectionnels. Ces essais nous ont permis de mettre en évidence le comportement à la fois viscoélastique et élastique non linéaire de différentes mousses de polyuréthane.

Nous avons également pu mettre en évidence la limite entre quasi-statique et dynamique pour les différentes mousses étudiées en faisant varier les vitesses de déformation.

Nous avons alors réussi à mettre en place deux modèles à mémoire permettant de simuler le comportement de nos mousses. Ces modèles présentent l'originalité de caractériser le comportement grâce à des paramètres adimensionnels quasiment constants et indépendant des vitesses de déformation.

Nous avons montré que le modèle à mémoire fractionnaire permet de reconstruire fidèlement le comportement élastique non linéaire, contrairement au modèle à mémoire entier. En revanche, ce dernier permet une identification plus rapide de ces paramètres, et a pu être généralisé à nos différents types de mousses.

Pour l'étude dynamique de nos mousses, nous avons d'abord été amené à concevoir, réaliser et utiliser un dispositif d'essai innovant permettant de réaliser des essais unidirectionnels de type 'masse libre'. Ces essais nous ont permis de mettre en place le rapport entre le niveau vibratoire transmis et celui d'excitation, rapport que nous avons appelé rapport *FEAT*.

L'étude du rapport *FEAT*, nous a permis de dégager l'influence du taux de compression initiale et de l'amplitude d'excitation sur la réponse fréquentielle de la mousse, réponse dont nous avons montré qu'elle est non linéaire.

Nous avons pu également extraire les fréquences de résonance de la mousse étudiée et surtout ses fréquences de coupures à partir desquelles elle présente un pouvoir d'atténuation de vibrations, ce qui est important pour le confort.

Nous avons enfin mis en place un modèle à mémoire entier dont les paramètres ont été identifiés à partir de la fonction 'raideur dynamique' représentée sous la forme de diagrammes de BODE. Cette raideur dynamique a été expérimentalement déterminée grâce aux essais réalisés.

Les paramètres du modèle présentent l'originalité d'être quasiment invariants en fonction des conditions de sollicitations (amplitude d'excitation, niveau de compression initiale).

Ce modèle permettra d'offrir aux concepteurs un outil de prévision des niveaux vibratoires transmis à l'occupant quelles que soient les conditions de sollicitations.

➤ Perspectives

La généralisation des modèles à d'autres types de mousses semble être une perspective intéressante, que ce soit pour le modèle à mémoire fractionnaire en quasi-statique ou pour le modèle à mémoire entier en dynamique.

Pour affirmer que les paramètres adimensionnels (en quasi-statique ou en dynamique) sont des paramètres propres aux matériaux, il faudra considérer d'autres formes de mousses et des dimensions variables. Il sera également intéressant de réaliser une étude de sensibilité des ces paramètres.

La modélisation de l'effet de Mullins constitue une perspective de travail intéressante, ceci permettra la modélisation du comportement de mousses en 4^{ème} cycle et ensuite la

comparaison des paramètres des différentes mousses ainsi que leurs pouvoirs d'absorption de l'énergie de déformation, élément essentiel dans la caractérisation du confort quasi-statique.

Pour poursuivre l'étude dynamique, il faudra évaluer la fonction 'raideur dynamique' sur d'autres types de sollicitations telles que le sinus balayé et les vibrations aléatoires.

Enfin, l'application d'un modèle à mémoire fractionnaire en dynamique nous semble une méthode qui permettra d'améliorer la reconstruction de la fonction 'raideur dynamique'.

Références bibliographiques

A

Abaqus manual (2007). "Theory manual" Version 6.7, D. Systèmes.

ASTM (juin 2010). Plastics (II). Standard Test Methods for Flexible Cellular Materials—Slab, and Molded Urethane Foams, American Society for Testing Materials. **ASTM D3574-05**.

B

Bagley R.L. and Torvik P.J. (1984). "Fundations of optimization" (second edition). Englewood Cliffs.

Beightler W. (1979). "On the apperance of the fractional derivative in the behavior of real materials". ASME Journal Application Mechanical, **51: 294-298**.

Bezazi A. and Scarpa F. (2009). "Tensile fatigue of conventional and negative Poisson's ratio open cell PU foams". International Journal of Fatigue, **31(3): 488-494**.

Bouallagui S. (2010). "Technique d'optimization déterministe et stochastique pour la résolution des problèmes difficiles en cryptologie". Institut National des Sciences Appliquées de Rouen, France, **Phd thesis**.

C

Carrot C. and Guillet J. (2004). "Viscoélasticité linéaire des polymères fondus". Techniques de l'Ingénieur, traité Plastiques et Composites, Référence AM3620.

Cenesiz Y., Keskin Y. et al. (2010). "The solution of the Bagley-Torvik equation with the generalized Taylor collocation method". Journal of the Franklin Institute, **347: 452-466**.

Craiem D.O., Rojo F. J. et al. (2008). "Fractional calculus applied to arterial viscoelasticity". Latin American Applied Research, **38:141-145**.

Culioli J.C. (1994). "Introduction à l'optimisation". Ellipses, ISBN 26729-89428-4.

Cunningham A., Huygens E. et al. (1994). "MDI comfort cushioning for automotive applications". In Proceeding of the Utech 1994 Conference, Hague, Netherland, **461-472**.

D

Daftardar-Gejji V. and Jafari H. (2005). "Adomian decomposition: a tool for solving a system of fractional differential equations". Journal of Mathematical analysis and applications, **301: 508-518**.

Deng R. (2004). "Modeling and characterization of flexible polyurethane foam". Purdue University, West Lafayette, USA, Phd thesis, IN 46907.

Deng R., Davies P., et al. (2003). "Flexible polyurethane foam modelling and identification of viscoelastic parameters for automotive seating applications". Journal of Sound and Vibration **262(3): 391-417**.

Deng R., Davies P., et al. (2006). "A nonlinear fractional derivative model for large uni-axial deformation behavior of polyurethane foam". Signal Processing, **86(10): 2728-2743**.

Dupuis R. and Aubry E. (2008). "Development and comparison of foam comprehensive law in great deformation". SEM XI International Congress Orlando, Florida, USA.

Drean E. (2006). "Contribution au developpement de capteurs piézoélectriques pour la caractérisation mécanique des étoffes". Université de Haute Alsace, France, Phd thesis.

E

Elfarhani M. (2010). "Contribution à la modélisation et à l'identification du comportement statique, quasi-statique et dynamique des mousses de polyurethane". Université de Sfax, Ecole Nationale D'Ingénieurs de Sfax, Tunisie, Master's thesis.

Elperin T. (1988). "Monte-Carlo structural optimisation in discrete variables with annealing algorithm". International Journal of numerical methods in engineering, **26: 815-821**.

F

Fishman G.S. (1997). " Monte-carlo, Concepts, Algorithms and Applications". Springer - Verlag, New York, ISBN 0-387-94527-9.

Fletcher R. (1987). "Practical methods of optimization". John Wiley and Sons, ISBN 0-471-49463-1.

François D. (2008). "Lois de comportement des métaux : Élasticité, Viscoélasticité". Techniques de l'Ingénieur, Reference M 4151.

G

Gement A. (1935). "A Method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies". Engineering Laboratory, Oxford University, United kingdom, Phd thesis.

Gervillers S., Alaoui A. et al. (2001). "Comportement d'une mousse de polymère". 15^{ème} Congrès Français de Mécanique, Nancy, France, 3-7.

Gibson L.J. and Ashby M.F. (1997). "Cellular Solids: Structure and Properties" (second ed.). Cambridge University Press, ISBN 0-521-4911-8.

Glover F. (1986). "Future paths for integer programming and links to artificial intelligence". Computer & Operations Search, **13 :533-549**.

Glover F. and Laguna M. (1993). "Tabu Search". Blackweel Scientific Publications, Oxford, 70-150.

Goangseup Z., Byeong M K., et al. (2008). "An experimental study on static behavior of a GFRP bridge deck filled with a polyurethane foam." Composite Structures, **82(2): 257-268**.

Gunaselvam J. and Van Niekerk J.L. (2005). "Seat selection guidelines to reduce whole-body vibration exposure levels in the SA mining industry". Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy, **105(10): 675-686**.

H

Hajji O. (2003). "Contribution au développement de méthodes d'optimisation stochastiques: Application à la conception des dispositifs électrotechniques". Ecole Centrale de Lille, France, Phd thesis.

Herrington R. and Hock K. (1997). "Matériaux polymères: propriétés mécaniques et physiques". Presses Polytechniques et Universitaire Romandes.

Heymans N., Decroly P. et al. (2001). "Flexible Polyurethane Foams" (seconde ed.). The Dow Chemical Company.

Hilyard N.C., Lee W.L. et al. (1991). "Energy dissipation in polyurethane cushion foam and its role in dynamic comfort". In Cellular Polymers, Forum Hotel, London, RAPPA Technology Ltd, 187-191.

Holland J.H (1975). "Adaptation in natural and artificial systems". University of Michigan Press, Ann Arbor.

I

Ippili R. K., Davies P. et al. (2007). "Nonlinear multi-body dynamic modeling of seat-occupant system with polyurethane seat and H-point prediction". International Journal of Industrial Ergonomics, 38(5-6): 368-383.

ISO 2631-1 (1997). "Vibrations et chocs mécaniques - Evaluation de l'exposition des individus à des vibrations globales du corps - Partie 1: Spécifications générales". ISO-International Organization for Standardization.

J

Jemiolo S. and Turteltaub S. (2000). "A parametric model for a class of foam-like isotropic hyperelastic materials". Journal of Applied Mechanics, 67: 248-254.

K

Kirkpatrick S., Gelatt C.D. et al. (1983). "Optimisation by simulated Annealing". Science, 20(4598): 671-680.

KNAUF SAS 68600 Wolfgantzen. (2006). "Demande de brevet européen". Office Européen des Brevets, N 06301212.4.

L

Lemaitre J. and Chaboche J. L. (2004). "Mécanique des matériaux solides "(second edition). Dunod, ISBN 2-100-48632-2.

Lewandowski R. and Chorazyczewski B. (2010). "Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers". Computers and Structures, 88: 1-17.

Lion A. (1997). "On the thermodynamics of fractional damping elements". Continuum Mechanics and Thermodynamics, 9(2): 83-96.

M

Marotel Y. (2003). "Polyuréthane". Techniques de l'Ingénieur, traité Plastiques et Composites, Reference AM 3 425.

Mills N.J. and Gilchrist A. (2000). "Modeling the indentation of low density polymer foams". Cellular Polymers, **19(6): 389-413**.

Milosavljevic S., Bergman F. et al. (2010). "All-terrain vehicle use in agriculture: Exposure to whole body vibration and mechanical shock ". Applied Ergonomics, **41(4): 530-535**.

Minoux M. (1983). "Programmation mathématique: Tome 1 Théorie et algorithme". Dunod, ISBN 2-040-15487-6.

Mullins L. (1969). "Softening of rubber by deformation". Rubber Chemistry and Technology, **42: 339-362**.

N

Njeugna N., Schacher L. et al. (2008). "Comparison of compression behaviour of PU foam and 3D nonwoven". Fall Annual Meeting and Technical Conference, Boucherville, Canada.

O

Ogden R. W. (1972). "Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubber like solids". Proceeding of the Royal Society A, **328: 567-583**.

Ouellet S., Cronin D., et al. (2006). "Compressive response of polymeric foams under quasi-static, medium and high strain rate conditions". Polymer Testing, **25(6): 731-743**.

P

Patten W.N., Sha S. et al. (1998). "A vibration model of open celled polyurethane foam automotive seat cushions". Journal of Sound and Vibration, **217(1): 145-161**.

Pommier V., Sabatier J. et al. (2002). "Crone control of a nonlinear hydraulic actuator". Control Engineering Practice, **10: 391-402**.

Press W.H. (1992). "Numerical Recips in C: The art of computing". Gambridge University Press, ISBN 0-521-43108-5.

R

Ray S. S. and Bera R.K. (2005). "Analytical solution of the Bagley Torvik equation by Adomian decomposition method". Applied Mathematics and Computation, **168: 398-410**.

Rizov V. and Mladensky A. (2009). "Model fatigue fracture behavior of Divinucell H-30 structural foam - A non-linear approach". Computational Materials Science, **46(1): 255-260**.

Rusch K. C. (1970). "Energy absorbing characteristics of foamed polymers". Journal of Applied Polymers Science, **14:1433**.

S

- Saha M. C., Mahfuz H. et al. (2005). "Effect of density, microstructure, and strain rate on compression behavior of polymeric foams". Materials Science and Engineering: A, **406(1-2): 328-336**.
- Sabatier J., Oustaloup A. et al. (2003). "CRONE control of continuous linear time periodic systems: Application to a testing bench". ISA Transactions, **42: 421-436**.
- Shen Y., Golnaraghi F. et al. (2001). "Modelling compressive cyclic stress-strain behaviour of structural foam". International Journal of Fatigue, **23(6): 491-497**.
- Singh R., Davies P. et al. (2001). "Initial condition response of a viscoelastic dynamical system in the presence of dry friction and identification of system parameters". Journal of Sound and Vibration, **239(5):1086-1095**.
- Singh R., Davies P. et al. (2003-a). "Estimation of the dynamical properties of polyurethane foam through use of Prony series". Journal of Sound and Vibration, **264(5): 1005-1043**.
- Singh R., Davies P. et al. (2003-b). "Identification of Nonlinear and Viscoelastic Properties of Flexible Polyurethane Foam". Nonlinear Dynamics, **34(3): 319-346**.
- Song Bo, Chen W. W. et al. (2005). "Strain-rate effects on elastic and early cell-collapse responses of a polystyrene foam". International Journal of Impact Engineering, **31(5): 509-521**.
- Song Y., Wang Z. et al. (2010). "Dynamic crushing behavior of 3D closed-cell foams based on Voronoi random model". Materials & Design, **31(9): 4281-4289**.
- Souhail Y. (2004). Etude par tomographie X et modélisation par éléments finis du comportement mécanique des mousses solides. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Ecole doctorale matériaux de Lyon, France, Phd thesis, IN 04-ISAL-0079.
- Storåkers B. (1986). "On material representation and constitutive branching in finite compressible elasticity". Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **34(2): 125-145**.
- Subhash G., Liu Q. et al. (2006). "Quasistatic and high strain rate uniaxial compressive response of polymeric structural foams". International Journal of Impact Engineering, **32(7): 1113-1126**.

T

- Treloar L.R.G. (1975). "The Physics of Rubber Elasticity" (third Edition). Clarendon Press, Oxford, ISBN 0-198-57027-9.
- Tu Z. H., Shim V. P. W. et al. (2001). "Plastic deformation modes in rigid polyurethane foam under static loading". International Journal of Solids and Structures **38 (50-51): 9267-9279**.

V

- Vallée C., Fortuné D. et al. (2008). "On the dual variable of the Cauchy stress tensor in isotropic finite hyperelasticity". Comptes Rendus Mécanique, **336 (11-12): 851-855**

Virgine G.V. (2004). Caractérisations microstructurale et mécanique de mousses de Nickel à cellules ouvertes pour batteries de véhicules hybrides. Centre des matériaux P.M. Fourt. Ecole des Mines de Paris, France, Phd thesis.

W

Wang Z.H. and Wang X. (2010). "General solution of the Bagley-Torvik equation with fractional-order derivative". Commun Nonlinear Science and Numerical Simulation, **15**: 1279–1285.

Warren W.E., and Kraynik A.M. (1988). "The linear elastic properties of open-cell foams". Journal of Applied Mechanics, **55**: 341–346.

Warren W.E., and Kraynik A.M. (1991). "The nonlinear elastic behavior of open-cell foams". Journal of Applied Mechanics, **58**: 376–381.

White S.W. (1998). "Dynamic modeling and measurement of occupied car seats and seating foam". School of Mechanical Engineering, Purdue University, West Lafayette Indiana USA, Master's thesis, IN 47907.

Widdle R. D. Jr., Bajaj A.K. et al. (2008), "Measurement of the Poisson's ratio of flexible polyurethane foam and its influence on a uniaxial compression model", International Journal of Engineering Science, **46 (1)**: 31-49.

Y

Yeoh O. H. (1993). "Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber." Rubber Chemistry and Technology, **66**: 754-771.

Yuan C.T. (2008). "Polyurethane foams from novel Soy-bases Polyols. Energy Function for Rubber." Faculty of Graduate School at the University of Missouri, USA. Phd thesis.

Z

Zhang X. F., Andrieux F. et al. (2010). "Pseudo-elastic description of polymeric foams at finite deformation with stress softening and residual strain effects". Materials & Design.

Zhu H. X., Hobdell J. R. et al. (2000). "Effects of cell irregularity on the elastic properties of open-cell foams". Acta Materialia, **48(20)**: 4893-4900.

Zhu H. X., Knott J.F. et al. (1997-a). "Analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells". Journal of Mechanics and Physics of Solids, **45(3)**: 319-343.

Zhu H. X., Knott J.F. et al. (1997-b). "Analysis of the high strain compression of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells". Journal of Mechanics and Physics of Solids, **45(11/12)**: 1875-1904.

Zhu H. X., Mills A.M. et al. (1999). "Modelling of the creep of open-cell polymer foams". Journal of Mechanics and Physics of Solids, **47**: 1437-1457.

Zhu H. X., Hobdell J. R. et al. (2000). "Effects of cell irregularity on the elastic properties of open-cell foams". Acta Materialia, **48(20)**: 4893-4900.

Zhu H. X., Thorpe S. M., et al. (2006). "The effect of cell irregularity on the high strain compression of 2D Voronoi honeycombs". International Journal of Solids and Structures, **43(5): 1061-1078**.

Annexe A : Expressions analytiques de la force viscoélastique et de la différence de force entre la charge et la décharge pendant le premier cycle d'un essai de compression/décompression quasi-statique

Introduction

Nous présenterons dans cet annexe un développement détaillé des expressions analytiques de la force viscoélastique et de la différence de force entre la charge et la décharge pendant le premier cycle d'un essai de compression/décompression quasi-statique. Ces expressions sont établies afin de décrire le comportement quasi-statique de la mousse de polyuréthane à travers des modèles à mémoire.

Les modèles à mémoire qui ont été considérés lors de l'étude quasi-statique du comportement de la mousse de polyuréthane (**chapitre II**) sont le modèle à mémoire entier généralisé, le modèle à mémoire entier et le modèle à mémoire fractionnaire. De ce fait, l'**annexe A** comporte trois parties:

- une première partie pour le développement et l'analyse des '*Expressions analytiques de la force viscoélastique et de la différence de force entre la charge et la décharge pour le modèle à mémoire entier généralisé*',
- une deuxième partie dans laquelle on déduira les '*Expressions analytiques de la force viscoélastique et de la différence de force entre charge et décharge pour le modèle à mémoire entier*',
- une troisième partie intitulée '*Expressions analytiques de la force viscoélastique et de la différence de force entre charge et décharge pour le modèle à mémoire fractionnaire*'.

Nomenclature d'annexe A

Symboles	Unités	Définitions
t	(sec)	Temps
T	(sec)	Période d'un cycle de compression/décompression
x	(m)	Déplacement
ϵ_{\max}	(m m ⁻¹)	Déformation maximale
F	(N)	Force globale de la mousse
F_{ve}	(N)	Force viscoélastique
F_{ve}^L	(N)	Force élastique (force du ressort non linéaire)
F_{ve}^{UL}	(N)	Force élastique globale
k_i	(N m ⁻ⁱ)	Raideur élastique d'ordre i
α_l	(sec ⁻¹)	Nombre complexe représentant le l^{th} mode viscoélastique ⁽¹⁾
α^L	(sec ⁻¹)	Nombre complexe représentant le mode viscoélastique pendant la phase de charge ⁽³⁾
α^{UL}	(sec ⁻¹)	Nombre complexe représentant le mode viscoélastique pendant la phase de décharge ⁽³⁾
a_l	(N m ⁻¹ sec ⁻¹)	Nombre complexe indiquant le l^{th} résidu viscoélastique ⁽¹⁾
a^L	(N m ⁻¹ sec ⁻¹)	Nombre complexe indiquant le résidu viscoélastique pendant la phase de charge ⁽³⁾
a^{UL}	(N m ⁻¹ sec ⁻¹)	Nombre complexe indiquant le résidu viscoélastique pendant la phase de décharge ⁽³⁾
b	(sec ⁻¹)	Inverse du temps de relaxation ⁽²⁾
c_1	(N m ⁻¹ sec ⁻¹)	Nombre réel représentant la contribution du terme proportionnel au déplacement dans la force viscoélastique. ⁽²⁾
c_2	(N m ⁻¹ sec ^{$\beta-1$})	Nombre réel représentant la contribution du terme fractionnaire dans la force viscoélastique. ⁽²⁾
β		Ordre de la dérivation fractionnaire ⁽²⁾
$\text{Re}(f)$		Partie réelle de la fonction f
$\text{Im}(f)$		Partie imaginaire de la fonction f
P		Nombre de modes viscoélastiques ⁽¹⁾
n		$n = E(\beta) + 1$ avec E : la partie entière
$\Gamma(g, f)$		Fonction Gamma incomplète définie par: $\Gamma(g, f) = \int_0^f \tau^{g-1} e^{-\tau} d\tau$; $g > 0$ and $f \in \Re$
$\Gamma(g)$		Fonction Gamma définie par $\Gamma(g) = \int_0^{+\infty} \tau^{g-1} e^{-\tau} d\tau$; $g > 0$

⁽¹⁾ : modèle à mémoire entier.

⁽²⁾ : modèle à mémoire fractionnaire.

⁽³⁾ : modèle à mémoire entier généralisé.

A.1 Expressions analytiques de la force viscoélastique et de la différence de force entre la charge et la décharge pour le modèle à mémoire entier généralisé

A.1.1 Expression analytique de la force viscoélastique (modèle à mémoire entier généralisé)

Dans le cas du modèle à mémoire entier généralisé, la force viscoélastique est donnée par l'équation A-1.

$$F_{ve}(t) = \begin{cases} \int_0^t \sum_{i=1}^2 a_i^L e^{-\alpha_i^L(t-\tau)} x(\tau) d\tau & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ \int_0^{\frac{T}{2}} \sum_{i=1}^2 a_i^L e^{-\alpha_i^L(t-\tau)} x(\tau) d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^t \sum_{i=1}^2 a_i^{UL} e^{-\alpha_i^{UL}(t-\tau)} x(\tau) d\tau & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

On note dans cette section $X = [X^L \ X^{UL}]$ le vecteur des paramètres viscoélastiques dimensionnels du modèle à mémoire entier généralisé.

Le vecteur $X^L = [\text{Re}(\alpha^L), \text{Im}(\alpha^L), \text{Re}(a^L), \text{Im}(a^L)]$ est le vecteur de paramètres viscoélastiques pendant la phase de charge.

Le vecteur $X^{UL} = [\text{Re}(\alpha^{UL}), \text{Im}(\alpha^{UL}), \text{Re}(a^{UL}), \text{Im}(a^{UL})]$ regroupe les paramètres viscoélastiques pendant la phase de décharge.

Lors d'un essai de compression/décompression unidirectionnel à vitesse constante, le déplacement pendant le premier cycle est gouverné par $x(t) = zt + d$ tel que :

$$\begin{cases} (z, d) = \left(2 \frac{\varepsilon_{\max} l_0}{T}, 0\right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ (z, d) = \left(-2 \frac{\varepsilon_{\max} l_0}{T}, 2\varepsilon_{\max} l_0\right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

Dans le but d'établir un développement plus général de l'équation A-1 qui permet de simplifier par la suite la programmation, nous considérons une fonction Fun_g définie par :

$$Fun_g(t_0, t_1, t_2, z, d, X^j) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^2 a_i^j e^{-\alpha_i^j(t_2-\tau)} (z\tau + d) d\tau \quad (\text{A-3})$$

avec $X^j = [\text{Re}(\alpha_1^j), \text{Im}(\alpha_1^j), \text{Re}(a_1^j), \text{Im}(a_1^j)]$ et (a_2, α_2) respectivement les conjugués de (a_1, α_1) .

En utilisant la fonction Fun_g , l'expression analytique de la force viscoélastique dans le cas d'un modèle à mémoire entier généralisé devient donnée par l'équation A-4.

$$F_{ve}(t) = \begin{cases} Fun_g\left(0, t, t, 2\frac{\varepsilon_{\max}l_0}{T}, 0, X^L\right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ \left(\begin{array}{l} Fun_g\left(0, \frac{T}{2}, t, 2\frac{\varepsilon_{\max}l_0}{T}, 0, X^L\right) \\ + Fun_g\left(\frac{T}{2}, t, t, -2\frac{\varepsilon_{\max}l_0}{T}, 2\varepsilon_{\max}l_0, X^{UL}\right) \end{array} \right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases} \quad (\text{A-4})$$

Comme elle montre l'équation A-4, il suffit de programmer sur MATLAB la fonction Fun_g donnée par l'équation A-3 puis l'appeler tout en remplaçant à chaque fois ses variables d'entrée.

Pour assurer la précision lors de calcul de la force viscoélastique en minimisant le temps de calcul, il faut implémenter le développement réel de l'équation A-1 et par conséquent le développement réel de la fonction Fun_g .

Le développement de la fonction Fun_g (équation A-5) donne lieu à trois fonctions ($Fun_1(t_x, t_y, X^j)$, $Fun_2(t_x, t_y, X^j)$, $Fun_3(t_x, t_y, X^j)$) définies par l'équation A-6.

$$\begin{aligned} Fun_g(t_0, t_1, t_2, z, d, X^j) &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^2 a_i^j e^{-\alpha_i^j(t_2-\tau)} (z\tau + d) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^2 a_i^j \int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha_i^j(t_2-\tau)} (z\tau + d) d\tau \\ &= z \left(\sum_{i=1}^2 a_i^j e^{-\alpha_i^j t_2} \int_{t_0}^{t_1} e^{\alpha_i^j \tau} \tau d\tau \right) + d \left(\sum_{i=1}^2 a_i^j e^{-\alpha_i^j t_2} \int_{t_0}^{t_1} e^{\alpha_i^j \tau} d\tau \right) \\ &= z \left(\sum_{i=1}^2 a_i^j e^{-\alpha_i^j t_2} \left(\left[\frac{\tau}{\alpha_i^j} e^{\alpha_i^j \tau} \right]_{t_0}^{t_1} - \frac{1}{\alpha_i^j} \int_{t_0}^{t_1} e^{\alpha_i^j \tau} d\tau \right) \right) + d \sum_{i=1}^2 a_i^j e^{-\alpha_i^j t_2} \left[\frac{e^{\alpha_i^j \tau}}{\alpha_i^j} \right]_{t_0}^{t_1} \\ &= z \left(\sum_{i=1}^2 \frac{a_i^j}{\alpha_i^j} t_1 e^{\alpha_i^j(t_1-t_2)} - \sum_{i=1}^2 \frac{a_i^j}{\alpha_i^j} t_0 e^{\alpha_i^j(t_0-t_2)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^2 a_i^j \left(\frac{1}{\alpha_i^j} \right)^2 e^{\alpha_i^j(t_0-t_2)} - \sum_{i=1}^2 a_i^j \left(\frac{1}{\alpha_i^j} \right)^2 e^{\alpha_i^j(t_1-t_2)} \right) + d \left(\sum_{i=1}^2 \frac{a_i^j}{\alpha_i^j} e^{\alpha_i^j(t_1-t_2)} - \sum_{i=1}^2 \frac{a_i^j}{\alpha_i^j} e^{\alpha_i^j(t_0-t_2)} \right) \\ &= z \left(Fun_1(t_1, t_2, X^j) - Fun_1(t_0, t_2, X^j) \right. \\ &\quad \left. + Fun_2(t_0, t_2, X^j) - Fun_2(t_1, t_2, X^j) \right) + d \left(Fun_3(t_1, t_2, X^j) - Fun_3(t_0, t_2, X^j) \right) \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Fun_1(t_x, t_y, X^L) = \sum_{i=1}^2 \frac{a_i^j}{\alpha_i^j} t_x e^{\alpha_i^j(t_x - t_y)} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{a_i^j}{\alpha_i^j} t_x e^{\alpha_i^j(t_x - t_y)} \right) \\ Fun_2(t_x, t_y, X^L) = \sum_{i=1}^2 a_i^j \left(\frac{1}{\alpha_i^j} \right)^2 e^{\alpha_i^j(t_x - t_y)} = 2 \operatorname{Re} \left(a_i^j \left(\frac{1}{\alpha_i^j} \right)^2 e^{\alpha_i^j(t_x - t_y)} \right) \\ Fun_3(t_x, t_y, X^L) = \sum_{i=1}^2 \frac{a_i^j}{\alpha_i^j} e^{\alpha_i^j(t_x - t_y)} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{a_i^j}{\alpha_i^j} e^{\alpha_i^j(t_x - t_y)} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A-6})$$

A partir des **équations A-5** et **A-6**, on déduit que pour déterminer le développement réel de la fonction Fun_g il faut calculer les fonctions $Fun_1(t_x, t_y, X^L)$, $Fun_2(t_x, t_y, X^L)$ et $Fun_3(t_x, t_y, X^L)$.

Le développement réel de la fonction $Fun_1(t_x, t_y, X^j)$ est donné par l'**équation A-7**.

$$\begin{aligned} Fun_1(t_x, t_y, X^L) &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{a_i^j}{\alpha_i^j} t_x e^{\alpha_i^j(t_x - t_y)} \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{X^j(3) + iX^j(4)}{X^j(1) + iX^j(2)} t_x e^{(X^j(1) + iX^j(2))(t_x - t_y)} \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{X^j(3) + iX^j(4)}{X^j(1) + iX^j(2)} t_x e^{X^j(1)(t_x - t_y)} \begin{pmatrix} \cos(X^j(2)(t_x - t_y)) \\ +i \sin(X^j(2)(t_x - t_y)) \end{pmatrix} \right) \\ &= 2 t_x e^{X^j(1)(t_x - t_y)} \begin{pmatrix} A1^j \cos(X^j(2)(t_x - t_y)) \\ -A2^j \sin(X^j(2)(t_x - t_y)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

$$\text{avec } A1^j = \frac{X^j(1)X^j(3) + X^j(2)X^j(4)}{(X^j(1))^2 + (X^j(2))^2} \text{ et } A2^j = \frac{X^j(1)X^j(4) - X^j(2)X^j(3)}{(X^j(1))^2 + (X^j(2))^2}.$$

En comparant l'expression de la fonction Fun_3 et celle de la fonction Fun_1 , on peut déduire le développement réel de la fonction $Fun_3(t_x, t_y, X^j)$ (**équation A-8**).

$$Fun_3(t_x, t_y, X^L) = 2 e^{X^j(1)(t_x - t_y)} \begin{pmatrix} A1^j \cos(X^j(2)(t_x - t_y)) \\ -A2^j \sin(X^j(2)(t_x - t_y)) \end{pmatrix} \quad (\text{A-8})$$

L'**équation A-9** présente le développement réel de la fonction $Fun_3(t_x, t_y, X^j)$.

$$\begin{aligned}
 Fun_2 &= 2 \operatorname{Re} \left(a_i^j \left(\frac{1}{\alpha_i^j} \right)^2 e^{\alpha_i^j (t_x - t_y)} \right) \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{X^j(3) + iX^j(4)}{\left(X^j(1) \right)^2 - \left(X^j(2) \right)^2 + 2iX^j(1)X^j(2)} e^{(X^j(1) + iX^j(2))(t_x - t_y)} \right) \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\left(X^j(3) + iX^j(4) \right) e^{X^j(1)(t_x - t_y)}}{\left(X^j(1) \right)^2 - \left(X^j(2) \right)^2 + 2iX^j(1)X^j(2)} \begin{pmatrix} \cos(X^j(2)(t_x - t_y)) \\ +i \sin(X^j(2)(t_x - t_y)) \end{pmatrix} \right) \\
 &= 2e^{X^j(1)(t_x - t_y)} \begin{pmatrix} A3^j \cos(X^j(2)(t_x - t_y)) \\ -A4^j \sin(X^j(2)(t_x - t_y)) \end{pmatrix} \\
 \text{avec } \begin{cases} A3^j = \frac{\left(\left(X^j(1) \right)^2 - \left(X^j(2) \right)^2 \right) X^j(3) + 2X^j(1)X^j(2)X^j(4)}{\left(X^j(1) \right)^2 + X^j(2)^2} \\ A4^j = \frac{\left(\left(X^j(1) \right)^2 - \left(X^j(2) \right)^2 \right) X^j(4) - 2X^j(1)X^j(2)X^j(3)}{\left(X^j(1) \right)^2 + X^j(2)^2} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{A-9}$$

Pour déterminer le développement réel de la fonction Fun_g (équation A-10), il suffit de remplacer les expressions des fonctions Fun_1 , Fun_2 et Fun_3 , données respectivement par les équations A-7, A-9 et A-8, dans l'équation A-5.

$$\begin{aligned}
 Fun_g(t_0, t_1, t_2, z, d, X^j) &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^2 a_i^j e^{-\alpha_i^j (t_2 - \tau)} (z\tau + d) d\tau \\
 &= \left(\begin{array}{l} z \left(\begin{array}{l} 2t_1 e^{X^j(1)(t_1 - t_2)} \begin{pmatrix} A1^j \cos(X^j(2)(t_1 - t_2)) \\ -A2^j \sin(X^j(2)(t_1 - t_2)) \end{pmatrix} - 2t_0 e^{X^j(1)(t_0 - t_2)} \begin{pmatrix} A1^j \cos(X^j(2)(t_0 - t_2)) \\ -A2^j \sin(X^j(2)(t_0 - t_2)) \end{pmatrix} \\ +2e^{X^j(1)(t_0 - t_2)} \begin{pmatrix} A3^j \cos(X^j(2)(t_0 - t_2)) \\ -A4^j \sin(X^j(2)(t_0 - t_2)) \end{pmatrix} - 2e^{X^j(1)(t_1 - t_2)} \begin{pmatrix} A3^j \cos(X^j(2)(t_1 - t_2)) \\ -A4^j \sin(X^j(2)(t_1 - t_2)) \end{pmatrix} \end{array} \right) \\ +d \left(\begin{array}{l} 2e^{X^j(1)(t_1 - t_2)} \begin{pmatrix} A1^j \cos(X^j(2)(t_1 - t_2)) \\ -A2^j \sin(X^j(2)(t_1 - t_2)) \end{pmatrix} - 2e^{X^j(1)(t_0 - t_2)} \begin{pmatrix} A1^j \cos(X^j(2)(t_0 - t_2)) \\ -A2^j \sin(X^j(2)(t_0 - t_2)) \end{pmatrix} \end{array} \right) \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{l} 2e^{X^j(1)(t_0 - t_2)} \begin{pmatrix} \left(z(A3^j - t_0 A1^j) - dA1^j \right) \cos(X^j(2)(t_0 - t_2)) \\ -\left(z(A4^j - t_0 A2^j) - dA2^j \right) \sin(X^j(2)(t_0 - t_2)) \end{pmatrix} \\ -2e^{X^j(1)(t_1 - t_2)} \begin{pmatrix} \left(z(A3^j - t_1 A1^j) - dA1^j \right) \cos(X^j(2)(t_1 - t_2)) \\ -\left(z(A4^j - t_1 A2^j) - dA2^j \right) \sin(X^j(2)(t_1 - t_2)) \end{pmatrix} \end{array} \right)
 \end{aligned} \tag{A-10}$$

Les **équations A-10** et **A-4** permettent de déduire la forme réelle de l'expression analytique de la force viscoélastique donnée par le modèle à mémoire entier généralisé pendant le premier cycle d'un essai de compression/décompression quasi-statique (**équation A-11**).

$$F_{ve}(t) = \begin{cases} \frac{4\varepsilon_{\max}l_0}{T} \left(F_5^L(t, A_3^L, A_4^L) - F_1^L(t) \right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\ \frac{4\varepsilon_{\max}l_0}{T} \left(F_5^L(t, A_3^L, A_4^L) - F_5^L\left(\left(t - \frac{T}{2}\right), F_1^L\left(\frac{T}{2}\right), F_2^L\left(\frac{T}{2}\right)\right) \right. \\ \left. - F_5^{UL}\left(\left(t - \frac{T}{2}\right), F_3^{UL}\left(\frac{T}{2}\right), F_4^{UL}\left(\frac{T}{2}\right)\right) + F_3^{UL}\left((T-t)\right) \right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right] \end{cases} \quad (\text{A-11})$$

avec $\left. \begin{cases} F_1^j(t) = A_3^j - tA_1^j & ; & F_2^j(t) = A_4^j - tA_2^j \\ F_1^j(t) = A_3^j + tA_1^j & ; & F_2^j(t) = A_4^j + tA_2^j \\ F_5^j(t, S_1, S_2) = e^{-X^j(1)t} \left(S_1 \cos(X^j(2)t) + S_2 \sin(X^j(2)t) \right) \end{cases} \right\}_{j=L \text{ ou } UL} .$

A.1.2 Expression analytique de la différence de force entre la charge et la décharge (modèle à mémoire entier généralisé)

Lors d'un essai de compression/décompression multi-cycles à vitesses de charge et de décharge constantes et égales, la réponse déplacement est présentée par un triangle isocèle pendant chaque cycle (**Fig. A-1**).

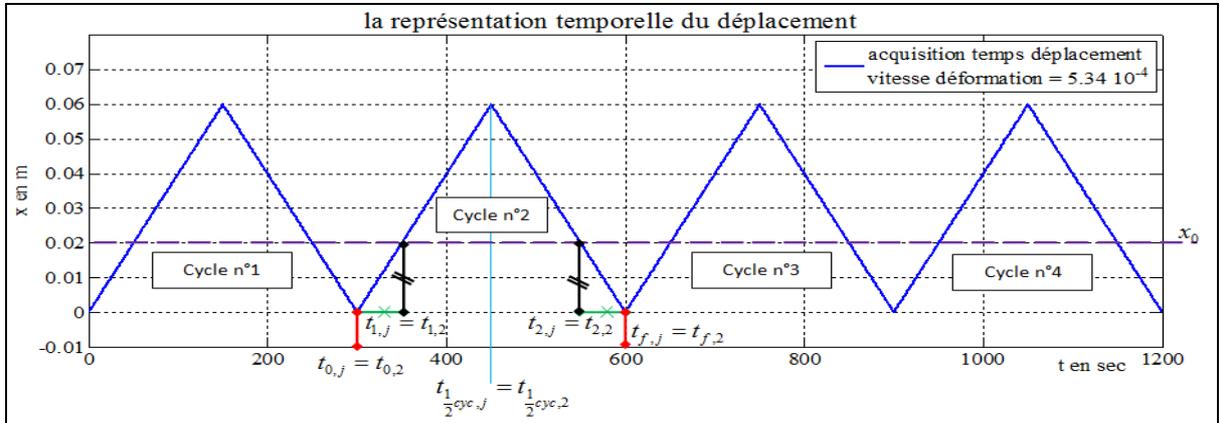


Figure A-1. Représentation temporelle du déplacement de la mousse pendant un essai de compression/décompression multi-cycles.

Dans ce cas, les instants $(t_{1,j}, t_{2,j})$ correspondants à la même valeur de déplacement x_0 pendant respectivement la phase de charge et la phase de décharge du $j^{\text{ème}}$ cycle sont reliés par l'**équation A-12**.

$$t_{2,j} = t_{f,j} + t_{0,j} - t_{1,j} \quad (\text{A-12})$$

avec $(t_{0,j}, t_{f,j})$ les instants respectivement de début et de fin du $j^{\text{ème}}$ cycle.

Pendant le premier cycle l'instant $t_{0,1}$ est égal à zéro alors que l'instant $t_{f,1}$ est égal à la période du cycle T . Ainsi, l'équation A-12 devient donnée par l'équation A-13 pendant le premier cycle.

$$t_{2,1} = T - t_{1,1} \quad (\text{A-13})$$

A partir de l'équation A-11, on peut déduire les expressions analytiques de la force viscoélastique pendant la phase de charge à l'instant $t_{1,1}$ ($F_{ve}^c(t_{1,1})$, équation A-14) et pendant la phase de décharge à l'instant $t_{2,1}$ ($F_{ve}^d(t_{2,1})$, équation A-15).

$$F_{ve}^c(t_{1,1}) = \frac{4\varepsilon_{\max}l_0}{T} \left(F_5^L(t_{1,1}, A3^L, A4^L) - F_1^L(t_{1,1}) \right) \quad (\text{A-14})$$

$$F_{ve}^d(t_{2,1}) = \frac{4\varepsilon_{\max}l_0}{T} \left(\begin{array}{l} F_5^L(t_{2,1}, A3^L, A4^L) - F_5^L\left(\left(t_{2,1} - \frac{T}{2}\right), F_1^L\left(\frac{T}{2}\right), F_2^L\left(\frac{T}{2}\right)\right) \\ - F_5^{UL}\left(\left(t_{2,1} - \frac{T}{2}\right), F_2^{UL}\left(\frac{T}{2}\right), F_3^{UL}\left(\frac{T}{2}\right)\right) + F_3^{UL}\left(T - t_{2,1}\right) \end{array} \right) \quad (\text{A-15})$$

A partir des équations A-13, A-14 et A-15, on peut établir l'expression analytique de la différence de force entre la charge et la décharge donnée par le modèle à mémoire entier pendant le premier cycle (équation A-16).

$$\begin{aligned} \delta F_{th}(t_{1,1}) &= F_{ve}^c(t_{1,1}) - F_{ve}^d(t_{2,1}) = F_{ve}^c(t_{1,1}) - F_{ve}^d(T - t_{1,1}) \\ &= \frac{4\varepsilon_{\max}l_0}{T} \left(\begin{array}{l} \left(F_5^L(t_{1,1}, A3^L, A4^L) - F_1^L(t_{1,1}) \right) \\ - \left(F_5^L(T - t_{1,1}, A3^L, A4^L) - F_5^L\left(\left(\frac{T}{2} - t_{1,1}\right), F_1^L\left(\frac{T}{2}\right), F_2^L\left(\frac{T}{2}\right)\right) \right) \\ - \left(-F_5^{UL}\left(\left(\frac{T}{2} - t_{1,1}\right), F_3^{UL}\left(\frac{T}{2}\right), F_4^{UL}\left(\frac{T}{2}\right)\right) + F_3^{UL}\left(t_{1,1}\right) \right) \end{array} \right) \\ &= \frac{4\varepsilon_{\max}l_0}{T} \left(\begin{array}{l} -F_3^{UL}(t_{1,1}) - F_1^L(t_{1,1}) \\ + F_5^L(t_{1,1}, A3^L, A4^L) - F_5^L(T - t_{1,1}, A3^L, A4^L) \\ + F_5^L\left(\left(\frac{T}{2} - t_{1,1}\right), F_1^L\left(\frac{T}{2}\right), F_2^L\left(\frac{T}{2}\right)\right) \\ + F_5^{UL}\left(\left(\frac{T}{2} - t_{1,1}\right), F_3^{UL}\left(\frac{T}{2}\right), F_4^{UL}\left(\frac{T}{2}\right)\right) \end{array} \right); \quad t_{1,1} \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

A.2 Expressions analytiques de la force viscoélastique et de la différence de force entre charge et décharge pour le modèle à mémoire entier

Le modèle à mémoire entier est un cas particulier du modèle à mémoire entier généralisé. En fait, les paramètres viscoélastiques pendant les phases de charge et décharge sont similaires pour le modèle à mémoire entier alors qu'ils sont différents pour le mémoire entier généralisé. Ainsi, on déduit les relations données par l'équation A-17 pour le modèle à mémoire entier.

$$\left\{ \begin{array}{l} X^L = X^{UL} = X \\ A1^L = A1^{UL} = A1 \quad ; \quad A2^L = A2^{UL} = A2 \\ A3^L = A3^{UL} = A3 \quad ; \quad A4^L = A4^{UL} = A4 \\ F_1^L(t) = F_1^{UL}(t) = F_1(t) \quad ; \quad F_2^L(t) = F_2^{UL}(t) = F_2(t) \\ F_3^L(t) = F_3^{UL}(t) = F_3(t) \quad ; \quad F_4^L(t) = F_4^{UL}(t) = F_4(t) \\ F_5^L(t, S_1, S_2) = F_5^{UL}(t, S_1, S_2) = F_5(t, S_1, S_2) \end{array} \right. \quad (\text{A-17})$$

A.2.1 Expression analytique de la force viscoélastique (modèle à mémoire entier)

A partir des équations A-11 et A-17, on établit l'expression analytique de la force viscoélastique donnée par le modèle à mémoire entier pendant le premier cycle d'un essai de compression/décompression quasi-statique (équation A-18).

$$F_{ve}(t) = \begin{cases} \frac{4\epsilon_{\max} l_0}{T} (F_5(t, A3, A4) - F_1(t)) & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ \frac{4\epsilon_{\max} l_0}{T} \left(\begin{array}{l} F_5(t, A3, A4) - F_5\left(\left(t - \frac{T}{2}\right), F_1\left(\frac{T}{2}\right), F_2\left(\frac{T}{2}\right)\right) \\ -F_5\left(\left(t - \frac{T}{2}\right), F_3\left(\frac{T}{2}\right), F_4\left(\frac{T}{2}\right)\right) + F_3((T-t)) \end{array} \right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{4\epsilon_{\max} l_0}{T} \left(e^{-X(1)t} (A3 \cos(X(2)t) + A4 \sin(X(2)t)) - (A3 - tA1) \right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ \frac{4\epsilon_{\max} l_0}{T} \left(\begin{array}{l} e^{-X(1)t} (A3 \cos(X(2)t) + A4 \sin(X(2)t)) + (A3 + (T-t)A1) \\ -e^{-X(1)\left(t - \frac{T}{2}\right)} \left(\left(A3 - \frac{T}{2} A1 \right) \cos\left(X(2)\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) + \left(A4 - \frac{T}{2} A2 \right) \sin\left(X(2)\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \right) \\ -e^{-X(1)\left(t - \frac{T}{2}\right)} \left(\left(A3 + \frac{T}{2} A1 \right) \cos\left(X(2)\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) + \left(A4 + \frac{T}{2} A2 \right) \sin\left(X(2)\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \right) \end{array} \right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases} \quad (\text{A-18})$$

A.2.2 Expression analytique de la différence de force entre la charge et la décharge (modèle à mémoire entier)

Les équations A-16 et A-17 permettent de déterminer l'expression analytique de la différence de force entre la charge et la décharge du modèle à mémoire entier pendant le premier cycle d'un essai de compression/ décompression quasi-statique. Cette expression est donnée par l'équation (équation A-19).

$$\begin{aligned}
\delta F_{ih}(t_{1,1}) &= \frac{4\varepsilon_{\max}l_0}{T} \left(\begin{aligned} &-F_3^{UL}(t_{1,1}) - F_1^L(t_{1,1}) \\ &+ F_5^L(t_{1,1}, A3^L, A4^L) - F_5^L(T - t_{1,1}, A3^L, A4^L) \\ &+ F_5^L\left(\left(\frac{T}{2} - t_{1,1}\right), F_1^L\left(\frac{T}{2}\right), F_2^L\left(\frac{T}{2}\right)\right) \\ &+ F_5^{UL}\left(\left(\frac{T}{2} - t_{1,1}\right), F_3^{UL}\left(\frac{T}{2}\right), F_4^{UL}\left(\frac{T}{2}\right)\right) \end{aligned} \right) \\
&= \frac{4\varepsilon_{\max}l_0}{T} \left(\begin{aligned} &-(A_3 + t_{1,1}A_1) - (A_3 - t_{1,1}A_1) \\ &+ e^{-X(1)t_{1,1}} (A3 \cos(X(2)t_{1,1}) + A4 \sin(X(2)t_{1,1})) \\ &- e^{-X(1)(T-t_{1,1})} (A3 \cos(X(2)(T-t_{1,1})) + A4 \sin(X(2)(T-t_{1,1}))) \\ &+ e^{-X(1)\left(\frac{T}{2}-t_{1,1}\right)} \left(\left(A3 - \frac{T}{2}A1 \right) \cos\left(X(2)\left(\frac{T}{2}-t_{1,1}\right) \right) + \left(A4 - \frac{T}{2}A2 \right) \sin\left(X(2)\left(\frac{T}{2}-t_{1,1}\right) \right) \right) \\ &+ e^{-X(1)\left(\frac{T}{2}-t_{1,1}\right)} \left(\left(A3 + \frac{T}{2}A1 \right) \cos\left(X(2)\left(\frac{T}{2}-t_{1,1}\right) \right) + \left(A4 + \frac{T}{2}A2 \right) \sin\left(X(2)\left(\frac{T}{2}-t_{1,1}\right) \right) \right) \end{aligned} \right) \\
&= \frac{4\varepsilon_{\max}l_0}{T} \left(\begin{aligned} &-2A_3 \\ &+ e^{-X(1)t_{1,1}} (A3 \cos(X(2)t_{1,1}) + A4 \sin(X(2)t_{1,1})) \\ &- e^{-X(1)(T-t_{1,1})} (A3 \cos(X(2)(T-t_{1,1})) + A4 \sin(X(2)(T-t_{1,1}))) \\ &+ 2e^{-X(1)\left(\frac{T}{2}-t_{1,1}\right)} \left(A3 \cos\left(X(2)\left(\frac{T}{2}-t_{1,1}\right) \right) + A4 \sin\left(X(2)\left(\frac{T}{2}-t_{1,1}\right) \right) \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}
\tag{A-19}$$

A.3 Expressions analytiques de la force viscoélastique et de la différence de force entre la charge et la décharge pour le modèle à mémoire fractionnaire

A.3.1 Expression analytique de la force viscoélastique (modèle à mémoire fractionnaire)

Pour le modèle à mémoire fractionnaire, la force viscoélastique dérive d'une équation comportant une dérivation non entière (**équation A-20**),

$$\frac{dF_{ve}(t)}{dt} + bF_{ve}(t) = c_1x(t) + c_2 \frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} \text{ tel que } \beta \text{ non entier} \quad (\text{A-20})$$

On note $f(t)$ la fonction seconde membre de l'**équation A-20**, donnée par $f(t) = c_1x(t) + c_2 \frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta}$. On déduit que l'**équation A-20** n'est qu'une modélisation mathématique d'un système de premier ordre (**équation A-21**) dont l'entrée est la fonction second membre $f(t)$ alors que la sortie est la force viscoélastique $F_{ve}(t)$.

$$\frac{dF_{ve}(t)}{dt} + bF_{ve}(t) = f(t) \quad (\text{A-21})$$

Dans le cas d'un essai de compression décompression quasi-statique la force viscoélastique $F_{ve}(t)$ et sa dérivé $\frac{dF_{ve}(t)}{dt}$ première sont nulles à $t=0$ d'où la solution de l'**équation A-21** est donnée par un produit de convolution (**équation A-22**).

$$F_{ve}(t) = \int_0^t e^{-b(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (\text{A-22})$$

A partir de l'**équation A-22**, on déduit que l'établissement de l'expression analytique développée de la force viscoélastique pendant le premier cycle nécessite le calcul de la fonction second membre $f(t)$. La grande difficulté est située au niveau de calcul de la dérivation non entier c'est-à-dire au niveau du terme $\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta}$.

Pour calculer le terme $\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta}$ on utilise la définition de Riemann Liouville (**équation A-23**) utilisée dans la littérature pour calculer la dérivation fractionnaire ([réf](#)).

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{d^n}{dt^n} \left(\int_0^t x(\tau)(t-\tau)^{n-\beta-1} d\tau \right) \right) \quad (\text{A-23})$$

avec $n = E(\beta) + 1$ tel que $E(\beta)$ est la partie entier de β .

Soit une généralisation de l'intégrale $\int_0^t x(\tau)(t-\tau)^{n-\beta-1} d\tau$ donnée par :

$$I(t_0, t_1, t_2, z, w) = \int_{t_0}^{t_1} (z\tau + w)(t_2 - \tau)^{n-\beta-1} d\tau \quad (\text{A-24})$$

Sachant que $\int_{t_0}^{t_1} \tau(t_2 - \tau)^\gamma d\tau = \frac{1}{(\gamma+1)(\gamma+2)} \left(\begin{array}{l} (t_2 - t_0)^{\gamma+1} ((\gamma+1)t_0 + t_2) \\ -(t_2 - t_1)^{\gamma+1} ((\gamma+1)t_1 + t_2) \end{array} \right)$ tel que γ est non entier et $(n - \beta - 1) = \gamma$, on peut déterminer le développement de la fonction $I(t_0, t_1, t_2, z, w)$ (équation A-25).

$$\begin{aligned} I(t_0, t_1, t_2, z, w) &= \int_{t_0}^{t_1} (z\tau + w)(t_2 - \tau)^{n-\beta-1} d\tau = z \int_{t_0}^{t_1} \tau(t_2 - \tau)^\gamma d\tau + w \int_{t_0}^{t_1} (t_2 - \tau)^\gamma d\tau \\ &= \frac{z}{(\gamma+1)(\gamma+2)} \left(\begin{array}{l} (t_2 - t_0)^{\gamma+1} ((\gamma+1)t_0 + t_2) \\ -(t_2 - t_1)^{\gamma+1} ((\gamma+1)t_1 + t_2) \end{array} \right) + \frac{w}{\gamma+1} \left[\tau^{\gamma+1} \right]_{t_2-t_1}^{t_2-t_0} \\ &= \frac{z}{(n-\beta)(n-\beta+1)} \left(\begin{array}{l} (t_2 - t_0)^{n-\beta} ((n-\beta)t_0 + t_2) \\ -(t_2 - t_1)^{n-\beta} ((n-\beta)t_1 + t_2) \end{array} \right) + \frac{w}{n-\beta} \left(\begin{array}{l} (t_2 - t_0)^{n-\beta} \\ -(t_2 - t_1)^{n-\beta} \end{array} \right) \\ &= \frac{z}{(n-\beta)(n-\beta+1)} \left(\begin{array}{l} D2(t_2, t_0, n-\beta) \\ -D2(t_2, t_1, n-\beta) \end{array} \right) + \frac{w}{n-\beta} \left(\begin{array}{l} D1(t_2, t_0, n-\beta) \\ -D1(t_2, t_1, n-\beta) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-25})$$

avec $D2(t, t_x, \lambda) = (t - t_x)^\lambda (\lambda t_x + t)$ et $D1(t, t_x, \lambda) = (t - t_x)^\lambda$.

Dans le cas où $t_2 = t_0$, la fonction I est donnée par l'équation A-26. Cependant dans le cas particulier où $t_2 = t_1$ la fonction I est donnée par l'équation A-27.

$$I(t_2, t_1, t_2, z, w) = \frac{-z}{(n-\beta)(n-\beta+1)} D2(t_2, t_1, n-\beta) + \frac{-w}{n-\beta} D1(t_2, t_1, n-\beta) \quad (\text{A-26})$$

$$I(t_0, t_2, t_2, z, w) = \frac{z}{(n-\beta)(n-\beta+1)} D2(t_2, t_0, n-\beta) + \frac{w}{n-\beta} D1(t_2, t_0, n-\beta) \quad (\text{A-27})$$

Soit $S = t - t_x$, on montre que les dérivations $n^{\text{ème}}$ des fonctions $D1(t, t_x, \lambda)$ et $D2(t, t_x, \lambda)$ par rapport à t sont donnés respectivement par les équations A-28 et A-29.

$$\frac{d^n (D1(t, t_x, \lambda))}{dt^n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} (\lambda - i) \right) (t - t_x)^{\lambda-n} \quad (\text{A-28})$$

$$\frac{d^n (D2(t, t_x, \lambda))}{dt^n} = \left(\begin{array}{l} (\lambda + 1)t_x \left(\prod_{i=0}^{n-1} (\lambda - i) \right) (t - t_x)^{\lambda-n} \\ + \left(\prod_{i=0}^{n-1} (\lambda + 1 - i) \right) (t - t_x)^{\lambda+1-n} \end{array} \right) \quad (\text{A-29})$$

La démonstration de l'équation A-28 est détaillée dans la démarche suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(D1(t, t_x, \lambda))}{dt} = \frac{d(t - t_x)^\lambda}{dt} = \frac{dS^\lambda}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{dS^\lambda}{dS} = \lambda S^{\lambda-1} \\ \frac{d^{n-1}(D1(t, t_x, \lambda))}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1}S^\lambda}{dS^{n-1}} = \left(\prod_{i=0}^{n-2} (\lambda - i) \right) S^{\lambda-n+1} \\ \frac{d^n(D1(t, t_x, \lambda))}{dt^n} = \frac{d\left(\frac{d^{n-1}S^\lambda}{dS^{n-1}}\right)}{dS} = \frac{d\left(\left(\prod_{i=0}^{n-2} (\lambda - i)\right) S^{\lambda-n+1}\right)}{dS} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} (\lambda - i)\right) S^{\lambda-n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} (\lambda - i)\right) (t - t_x)^{\lambda-n} \end{array} \right. \quad (\text{A-30})$$

La démonstration de l'équation A-29 est détaillée dans la démarche suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^n (D2(t, t_x, \lambda))}{dt^n} &= \frac{d^n \left((t - t_x)^\lambda (\lambda t_x + t) \right)}{dt^n} = \frac{d^n \left((t - t_x)^\lambda ((\lambda + 1)t_x + (t - t_x)) \right)}{dt^n} \\ &= \left(\begin{array}{l} (\lambda + 1)t_x \frac{d^n \left((t - t_x)^\lambda \right)}{dt^n} \\ + \frac{d^n \left((t - t_x)^{\lambda+1} \right)}{dt^n} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} (\lambda + 1)t_x \frac{d^n (D1(t, t_x, \lambda))}{dt^n} \\ + \frac{d^n (D1(t, t_x, \lambda + 1))}{dt^n} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} (\lambda + 1)t_x \left(\prod_{i=0}^{n-1} (\lambda - i) \right) (t - t_x)^{\lambda-n} \\ + \left(\prod_{i=0}^{n-1} (\lambda + 1 - i) \right) (t - t_x)^{\lambda+1-n} \end{array} \right) \quad (\text{A-31}) \end{aligned}$$

A partir des équations A-28 et A-29, il devient possible de calculer la dérivation $n^{\text{ème}}$ de la fonction $I(t_0, t_1, t_2, z, w)$ par rapport à t_2 équation A-32.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n(I(t_0, t_1, t_2, z, w))}{dt_2^n} &= \frac{z}{(n-\beta)(n-\beta+1)} \left(\frac{d^n(D2(t_2, t_0, n-\beta))}{dt_2^n} \right) + \frac{w}{n-\beta} \left(\frac{d^n(D1(t_2, t_0, n-\beta))}{dt_2^n} \right) \\
 &= \frac{z}{(n-\beta)(n-\beta+1)} \left(\begin{aligned} &\left((n-\beta+1)t_0 \prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta-i) (t_2-t_0)^{-\beta} \right) \\ &+ \left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta+1-i) (t_2-t_0)^{-\beta+1} \right) \end{aligned} \right) + \frac{w}{n-\beta} \left(\begin{aligned} &\left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta-i) (t_2-t_0)^{-\beta} \right) \\ &- \left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta-i) (t_2-t_1)^{-\beta} \right) \end{aligned} \right) \\
 &\quad - \left(\begin{aligned} &\left((n-\beta+1)t_1 \prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta-i) (t_2-t_1)^{-\beta} \right) \\ &+ \left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta+1-i) (t_2-t_1)^{-\beta+1} \right) \end{aligned} \right)
 \end{aligned} \tag{A-32}$$

Les dérivations $n^{\text{ème}}$ de la fonction I dans les cas particuliers $t_1 = t_2$ et $t_2 = t_0$ doivent être calculées à partir des équations A-26 et A-27.

La dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $I(t_2, t_1, t_2, z, w)$ est donnée par :

$$\frac{d^n(I(t_2, t_1, t_2, z, w))}{dt_2^n} = \left(\begin{aligned} &\frac{-z}{(n-\beta)(n-\beta+1)} \left(\begin{aligned} &\left((n-\beta+1)t_1 \prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta-i) (t_2-t_1)^{-\beta} \right) \\ &+ \left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta+1-i) (t_2-t_1)^{-\beta+1} \right) \end{aligned} \right) \\ &+ \frac{-w}{n-\beta} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta-i) (t_2-t_1)^{-\beta} \right) \end{aligned} \right) \tag{A-33}$$

Lorsque $t_2 = t_0$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction I devient donnée par :

$$\frac{d^n(I(t_0, t_2, t_2, z, w))}{dt_2^n} = \left(\begin{aligned} &\frac{z}{(n-\beta)(n-\beta+1)} \left(\begin{aligned} &\left((n-\beta+1)t_0 \prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta-i) (t_2-t_0)^{-\beta} \right) \\ &+ \left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta+1-i) (t_2-t_0)^{-\beta+1} \right) \end{aligned} \right) \\ &+ \frac{w}{n-\beta} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta-i) (t_2-t_0)^{-\beta} \right) \end{aligned} \right) \tag{A-34}$$

On rappelle que lors d'un essai de compression/décompression à vitesse constante, le déplacement est gouverné par $x(t) = zt + w$. Pour le premier cycle, le couple (z, w) prend deux

valeurs différentes (**équation A-2**). De ce fait, la fonction $\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta}$ présente deux expressions différentes lors du premier cycle (**équation A-35**).

$$\begin{aligned}
 \frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{d^n}{dt^n} \left(\int_0^t \left(\frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \tau \right) (t-\tau)^{n-\beta-1} d\tau \right) \right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\ \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{d^n}{dt^n} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \tau \right) (t-\tau)^{n-\beta-1} d\tau \right) \right. \\ \left. + \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_{\frac{T}{2}}^t \left(-\frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \tau + 2\varepsilon_{\max} l_0 \right) (t-\tau)^{n-\beta-1} d\tau \right) \right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right] \end{cases} \\
 \frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{d^n}{dt^n} I \left(0, t, t, \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0, 0 \right) \right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\ \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{d^n}{dt^n} I \left(0, \frac{T}{2}, t, \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0, 0 \right) \right) \\ + \frac{d^n}{dt^n} I \left(\frac{T}{2}, t, t, -\frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0, 2\varepsilon_{\max} l_0 \right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right] \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{\frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0}{(n-\beta)(n-\beta+1)} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta+1-i) \right) t^{-\beta+1} \right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\ \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{\frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0}{(n-\beta)(n-\beta+1)} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta+1-i) \right) t^{-\beta+1} \right. \\ \left. - \frac{\frac{4\varepsilon_{\max}}{T} l_0}{(n-\beta)(n-\beta+1)} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-\beta+1-i) \right) \left(t - \frac{T}{2} \right)^{-\beta+1} \right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right] \end{cases} \quad \text{(A-35)}
 \end{aligned}$$

Si $1 \leq \beta < 2$ alors $n = 2$. Dans ce cas, l'équation A-35 devient donnée par l'équation A-36.

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} = \begin{cases} \frac{\frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0}{\Gamma(2-\beta)} t^{-\beta+1} & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\ \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \left(\frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 t^{-\beta+1} - \frac{4\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(t - \frac{T}{2} \right)^{-\beta+1} \right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right] \end{cases} \quad \text{(A-36)}$$

A partir de l'équation A-36, On déduit par la suite l'expression analytique développée de la fonction seconde membre $f(t)$ pendant le premier cycle d'un essai de compression/décompression quasi-statique (**équation A-37**)

$$f(t) = \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \begin{cases} \left(c_1 t + c_2 \frac{t^{-\beta+1}}{\Gamma(2-\beta)} \right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\ \left(c_1 (T-t) + \frac{c_2}{\Gamma(2-\beta)} \left(t^{-\beta+1} - 2 \left(t - \frac{T}{2} \right)^{-\beta+1} \right) \right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right] \end{cases} \quad (\text{A-37})$$

En remplaçant l'expression de $f(t)$, donnée par l'équation A-37, dans l'équation A-22, on déduit que l'expression analytique de la force viscoélastique pour le modèle à mémoire fractionnaire devient donnée par :

$$F_{ve}(t) = \begin{cases} l_0 \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} \left(\frac{c_1}{b^2} (bt-1) + A(t) \right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ l_0 \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} \left(-\frac{c_1}{b^2} (b(t-T)-1) + A(t) - 2A\left(t - \frac{T}{2}\right) \right) & \text{si } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (\text{A-38})$$

$$\text{avec } A(t) = \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\Gamma(2-\beta, -bt)}{(-b)^{2-\beta}} \right) e^{-bt}.$$

La démonstration de l'équation A-38 est détaillée dans la démarche suivante :

$$F_{ve}(t) = \int_0^t e^{-b(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

$$= \begin{cases} F_{ve}^c(t) = \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \int_0^t e^{-b(t-\tau)} \left(c_1 \tau + c_2 \frac{\tau^{-\beta+1}}{\Gamma(2-\beta)} \right) d\tau & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\ F_{ve}^d(t) = \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-b(t-\tau)} \left(c_1 \tau + c_2 \frac{\tau^{-\beta+1}}{\Gamma(2-\beta)} \right) d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^t e^{-b(t-\tau)} \left(\frac{c_1 (T-\tau)}{\Gamma(2-\beta)} \left(\tau^{-\beta+1} - 2 \left(\tau - \frac{T}{2} \right)^{-\beta+1} \right) \right) d\tau \right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_{ve}^c(t) = \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(c_1 e^{-bt} \int_0^t \tau e^{b\tau} d\tau + \frac{c_2 e^{-bt}}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \tau^{-\beta+1} e^{b\tau} d\tau \right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\ F_{ve}^d(t) = \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\left(c_1 e^{-bt} \int_0^{\frac{T}{2}} \tau e^{b\tau} d\tau + \frac{c_2 e^{-bt}}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^{\frac{T}{2}} \tau^{-\beta+1} e^{b\tau} d\tau \right) + \left(c_1 e^{-bt} \int_{\frac{T}{2}}^t e^{b\tau} (T-\tau) d\tau + \frac{c_2 e^{-bt}}{\Gamma(2-\beta)} \int_{\frac{T}{2}}^t e^{b\tau} \left(\tau^{-\beta+1} - 2 \left(\tau - \frac{T}{2} \right)^{-\beta+1} \right) d\tau \right) \right) & \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 F_{ve}^c(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(c_1 e^{-bt} \left(\left[\frac{\tau}{b} e^{b\tau} \right]_0^t - \left[\frac{1}{b^2} e^{b\tau} \right]_0^t \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{c_2 e^{-bt}}{(-b)^{-\beta+2}} \int_0^t (-b\tau)^{-\beta+1} e^{b\tau} d(-b\tau) \right) \quad \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\
 \\
 F_{ve}^d(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\left(c_1 e^{-bt} \left(\left[\frac{\tau}{b} e^{b\tau} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[\frac{1}{b^2} e^{b\tau} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{c_2 e^{-bt}}{(-b)^{-\beta+2}} \int_0^{\frac{T}{2}} (-b\tau)^{-\beta+1} e^{b\tau} d(-b\tau) \right) \right. \\
 & \quad \left(-c_1 e^{-b(t-T)} \int_{\frac{T}{2}}^t e^{b(\tau-T)} (\tau-T) d(\tau-T) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{c_2 e^{-bt}}{(-b)^{-\beta+2}} \int_{\frac{T}{2}}^t (-b\tau)^{-\beta+1} e^{b\tau} d(-b\tau) \right. \\
 & \quad \left. - 2 \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{c_2 e^{-b\left(\frac{T}{2}\right)}}{(-b)^{-\beta+2}} \int_{\frac{T}{2}}^t \left(-b\left(\tau - \frac{T}{2}\right) \right)^{-\beta+1} e^{b\left(\tau - \frac{T}{2}\right)} d\left(-b\left(\tau - \frac{T}{2}\right) \right) \right) \quad \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right]
 \end{aligned}
 \right\} \\
 \\
 & \left. \begin{aligned}
 F_{ve}^c(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\frac{c_1}{b^2} \left((tb-1) + e^{-bt} \right) + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2}} e^{-bt} \int_0^{-bt} (\tau)^{-\beta+1} e^{-\tau} d\tau \right) \quad \text{si } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\
 \\
 F_{ve}^d(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\left(\frac{c_1}{b^2} \left(\left(\frac{T}{2}b - 1 \right) e^{-b\left(\frac{T}{2}\right)} + e^{-bt} \right) + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2}} e^{-bt} \int_0^{-b\frac{T}{2}} (\tau)^{-\beta+1} e^{-\tau} d\tau \right) \right. \\
 & \quad \left(-c_1 e^{-b(t-T)} \int_{\frac{T}{2}}^{t-T} \tau e^{b\tau} d\tau + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2}} e^{-bt} \left(\int_0^{-bt} (\tau)^{-\beta+1} e^{-\tau} d\tau \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \int_0^{-b\frac{T}{2}} (\tau)^{-\beta+1} e^{-\tau} d\tau \right) \right. \\
 & \quad \left. - 2 \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{c_2 e^{-b\left(\frac{T}{2}\right)}}{(-b)^{-\beta+2}} \left(\int_0^{-b\left(\frac{T}{2}\right)} (\tau)^{-\beta+1} e^{-\tau} d\tau \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \int_0^{-b\left(\frac{T}{2}\right)} (\tau)^{-\beta+1} e^{-\tau} d\tau \right) \right) \quad \text{si } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right]
 \end{aligned}
 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 F_{ve}^c(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\frac{c_1}{b^2}(tb-1) + \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2} \Gamma(2-\beta)} \Gamma(-\beta+1, -bt) \right) e^{-bt} \right) \quad si \ t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\
 F_{ve}^d(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\begin{aligned}
 & \left(\frac{c_1}{b^2} \left(\frac{T}{2} b - 1 \right) e^{-b\left(t-\frac{T}{2}\right)} \right. \\
 & \left. - c_1 e^{-b(t-T)} \left(\left[\frac{\tau}{b} e^{b\tau} \right]_{-\frac{T}{2}}^{t-T} - \left[\frac{1}{b^2} e^{b\tau} \right]_{-\frac{T}{2}}^{t-T} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2} \Gamma(2-\beta)} \Gamma(-\beta+1, -bt) \right) e^{-bt} \right. \\
 & \left. - 2 \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2} \Gamma(2-\beta)} \Gamma\left(-\beta+1, -b\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) e^{-b\left(t-\frac{T}{2}\right)} \right) \quad si \ t \in \left[\frac{T}{2}, T \right]
 \end{aligned} \right. \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 F_{ve}^c(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\frac{c_1}{b^2}(tb-1) + \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2} \Gamma(2-\beta)} \Gamma(-\beta+1, -bt) \right) e^{-bt} \right) \quad si \ t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\
 F_{ve}^d(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\begin{aligned}
 & \left(\frac{c_1}{b^2} \left(\frac{T}{2} b - 1 \right) e^{-b\left(t-\frac{T}{2}\right)} \right. \\
 & \left. - \frac{c_1}{b^2} e^{-b(t-T)} \left(b(t-T) - 1 + \left(\frac{T}{2} b + 1 \right) e^{-b\left(t-\frac{T}{2}\right)} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2} \Gamma(2-\beta)} \Gamma(-\beta+1, -bt) \right) e^{-bt} \right. \\
 & \left. - 2 \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2} \Gamma(2-\beta)} \Gamma\left(-\beta+1, -b\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) e^{-b\left(t-\frac{T}{2}\right)} \right) \quad si \ t \in \left[\frac{T}{2}, T \right]
 \end{aligned} \right. \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 F_{ve}^c(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\frac{c_1}{b^2}(tb-1) + \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2} \Gamma(2-\beta)} \Gamma(-\beta+1, -bt) \right) e^{-bt} \right) \quad si \ t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\
 F_{ve}^d(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\begin{aligned}
 & \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2} \Gamma(2-\beta)} \Gamma(-\beta+1, -bt) \right) e^{-bt} \\
 & - 2 \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{(-b)^{-\beta+2} \Gamma(2-\beta)} \Gamma\left(-\beta+1, -b\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) \right) e^{-b\left(t-\frac{T}{2}\right)} \\
 & - \frac{c_1}{b^2} (b(t-T) - 1)
 \end{aligned} \right) \quad si \ t \in \left[\frac{T}{2}, T \right]
 \end{aligned} \right. \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 F_{ve}^c(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\frac{c_1}{b^2}(tb-1) + A(t) \right) \quad si \ t \in \left[0, \frac{T}{2} \right] \\
 F_{ve}^d(t) &= \frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(A(t) - 2A\left(\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) - \frac{c_1}{b^2} (b(t-T) - 1) \right) \quad si \ t \in \left[\frac{T}{2}, T \right]
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{A-39}$$

avec $A(t) = \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\Gamma(2-\beta, -bt)}{(-b)^{2-\beta}} \right) e^{-bt}$.

A.3.1 Expression analytique de la différence de force entre la charge et la décharge (modèle à mémoire fractionnaire)

Lors d'un essai de compression/décompression multi-cycles à vitesses de charge et de décharge constantes et égales, la réponse déplacement est présentée par un triangle isocèle pendant chaque cycle (**Fig. A-1**). Pendant le premier cycle d'un essai de compression/décompression quasi-statique à vitesse constante, les instants $(t_{1,1}, t_{2,1})$ correspondants à la même valeur de déplacement x_0 pendant respectivement la phase de charge et la phase de décharge du $j^{ème}$ cycle ont été montré reliés au début de ces annexes par l'équation A-13.

$$t_{2,1} = T - t_{1,1} \quad (\text{A-13})$$

Pour le modèle à mémoire fractionnaire l'expression analytique de la différence de force entre la charge et la décharge est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta F_{th}(t_{1,1}) &= F_{ve}^c(t_{1,1}) - F_{ve}^d(t_{2,1}) \\ &= F_{ve}^c(t_{1,1}) - F_{ve}^d(T - t_{1,1}) \\ &= \left[\frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(\left(\frac{c_1}{b^2}(t_{1,1}b - 1) + A(t_{1,1}) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(A(T - t_{1,1}) - 2A\left(\frac{T}{2} - t_{1,1}\right) - \frac{c_1}{b^2}(-t_{1,1}b - 1) \right) \right) \right] \\ &= \left[\frac{2\varepsilon_{\max}}{T} l_0 \left(-2\frac{c_1}{b^2} + A(t_{1,1}) - A(T - t_{1,1}) + 2A\left(\frac{T}{2} - t_{1,1}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-40})$$

$$\text{avec } A(t) = \left(\frac{c_1}{b^2} + \frac{c_2}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\Gamma(2-\beta, -bt)}{(-b)^{2-\beta}} \right) e^{-bt}$$

Conclusion

Dans l'annexe A, les expressions analytiques de la force viscoélastique et de la différence de force entre la charge et la décharge pour les modèles à mémoire entier généralisé, entier et fractionnaire ont été développées et analysées.

Pour assurer la précision lors de calcul de la force viscoélastique et de la différence de force entre la charge et la décharge en minimisant le temps de calcul, il a été présenté dans cette annexe le développement réel des différentes expressions.

Nous avons déduit que seuls les paramètres viscoélastiques figurent dans les différentes expressions analytiques de la différence de force entre la charge et la décharge.

Annexe B : Conditions thermodynamiques

Introduction

Les conditions thermodynamiques qui sont des conditions de causalité et de stabilité. Elles découlent de l'inégalité de Clausius (**Lion A. 1997**).

Dans le cas quasi-statique, les conditions thermodynamiques sont déterminées en vérifiant que les parties réelle et imaginaire de la transformation de Fourier de la réponse du modèle à une impulsion de Dirac, en négligeant les termes non linéaires, sont positives, quelle que soit la fréquence.

Dans cette annexe, nous développerons les conditions thermodynamiques du modèle à mémoire entier et celles du modèle à mémoire fractionnaire.

B.3 Conditions thermodynamiques du modèle à mémoire entier

Nous rappelons que le modèle à mémoire entier qui est donné par l'expression suivante:

$$F(t) = F_e^g(t) + F_{ve}(t) = \sum_{i=0}^M k_{2i+1} X^{2i+1} + \int_0^t \sum_{l=1}^2 a_l e^{-\alpha_l(t-\tau)} x(\tau) d\tau \quad (\text{B-1})$$

Pour le modèle à mémoire entier, les paramètres à identifier sont les paramètres élastiques $(k_{2i+1})_{i=0..M}$ et les paramètres viscoélastiques (vecteur $X = [\text{Re}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_1), \text{Re}(a_1), \text{Im}(a_1)]$). Ces paramètres doivent vérifier les conditions de causalité et de stabilité dites conditions thermodynamiques (**Lion A. 1997**).

Les conditions thermodynamiques sont déterminées à partir de la fonction de transfert $G(\omega) = \frac{\widehat{F}(\omega)}{X(\omega)}$ en négligeant les termes non linéaires.

Si nous négligeons la partie non linéaire, l'équation **B-1** devient donnée par l'équation suivante :

$$F(t) = k_{1X} + \int_0^t \sum_{l=1}^2 a_l e^{-\alpha_l(t-\tau)} x(\tau) d\tau \quad (\text{B-2})$$

La transformée de Fourier de l'équation **B-2** permet d'établir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\omega) &= \left(k_1 + \frac{a_1}{j\omega + \alpha_1} + \frac{a_2}{j\omega + \alpha_2} \right) X(\omega) = \left(\frac{k_1(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2) + a_1(j\omega + \alpha_2) + a_2(j\omega + \alpha_1)}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)} \right) X(\omega) \\ &= \frac{\left(-k_1\omega^2 + \left(k(X(1)^2 + X(2)^2) + 2(X(1)X(3) + X(2)X(4)) \right) + j(2X(1)k_1 + 2X(3))\omega \right)}{-\omega^2 + \left(X(1)^2 + X(2)^2 \right) + j2X(1)\omega} X(\omega) \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

avec $F(\omega)$ la transformée de Fourier de la force $F(t)$.

L'expression analytique de la fonction de transfert $G(\omega) = \frac{\widehat{F}(\omega)}{X(\omega)}$ en négligeant les termes non linéaires est donnée par l'équation **B-4**.

$$\begin{aligned}
G(\omega) &= \frac{\widehat{F}(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\left(\begin{array}{l} -k_1\omega^2 + \left(k_1(X(1)^2 + X(2)^2) + 2(X(1)X(3) + X(2)X(4)) \right) \\ + j(2X(1)k_1 + 2X(3))\omega \end{array} \right)}{-\omega^2 + \left(X(1)^2 + X(2)^2 \right) + j2X(1)\omega} \\
&= \frac{\left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} -k_1\omega^2 + k_1(X(1)^2 + X(2)^2) \\ + 2(X(1)X(3) + X(2)X(4)) \end{array} \right) \\ + j(2X(1)k_1 + 2X(3))\omega \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} -\omega^2 + \left(X(1)^2 + X(2)^2 \right) \\ -j2X(1)\omega \end{array} \right)}{\left(-\omega^2 + \left(X(1)^2 + X(2)^2 \right) \right)^2 + 4X(1)^2\omega^2} \\
&= \frac{\left(\left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} k_1\omega^4 - k_1\omega^2(X(1)^2 + X(2)^2) \\ -2\omega^2(X(1)X(3) + X(2)X(4)) \\ -j(2X(1)k_1 + 2X(3))\omega^3 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} -k_1(X(1)^2 + X(2)^2)\omega^2 + k_1(X(1)^2 + X(2)^2)^2 \\ + 2(X(1)^2 + X(2)^2)(X(1)X(3) + X(2)X(4)) \\ + j(X(1)^2 + X(2)^2)(2X(1)k_1 + 2X(3))\omega \end{array} \right) \end{array} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} j2X(1)k_1\omega^3 - j2X(1)k_1(X(1)^2 + X(2)^2)\omega \\ -j4X(1)(X(1)X(3) + X(2)X(4))\omega \end{array} \right) + 2X(1)(2X(1)k_1 + 2X(3))\omega^2 \end{array} \right) \right) \\
&= \frac{\left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} k_1\omega^4 + \left(\begin{array}{l} -2k_1(X(1)^2 + X(2)^2) \\ -2(X(1)X(3) + X(2)X(4)) \\ + 2X(1)(2X(1)k_1 + 2X(3)) \end{array} \right) \omega^2 + \left(X(1)^2 + X(2)^2 \right) \left(\begin{array}{l} k_1(X(1)^2 + X(2)^2) \\ + 2(X(1)X(3) + X(2)X(4)) \end{array} \right) \end{array} \right) \\ + j(-2X(3)\omega^3 + 2(X(3)(X(1)^2 + X(2)^2) - 2X(1)(X(1)X(3) + X(2)X(4)))\omega \end{array} \right) \end{array} \right)}{\left(-\omega^2 + \left(X(1)^2 + X(2)^2 \right) \right)^2 + 4X(1)^2\omega^2}
\end{aligned}
\tag{B-4}$$

A partir de l'équation **B-4**, on peut déduire les expressions analytiques des parties réelle $G_1(\omega)$ (équation **B-5**) et imaginaire $G_2(\omega)$ (équation **B-6**) de la fonction $G(\omega)$.

$$G_1(\omega) = \frac{\left(\left(\left(k_1 \omega^4 + \begin{pmatrix} -2k_1(X(1)^2 + X(2)^2) \\ -2(X(1)X(3) + X(2)X(4)) \\ +2X(1)(2X(1)k_1 + 2X(3)) \end{pmatrix} \omega^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \begin{pmatrix} k_1(X(1)^2 + X(2)^2)^2 \\ +2(X(1)^2 + X(2)^2)(X(1)X(3) + X(2)X(4)) \end{pmatrix} \right) \right) \right)}{\left(-\omega^2 + (X(1)^2 + X(2)^2) \right)^2 + 4X(1)^2 \omega^2} \quad (\text{B-5})$$

$$G_2(\omega) = \frac{-2X(3)\omega^3 + \left((X(1)^2 + X(2)^2)2X(3) - 4X(1)(X(1)X(3) + X(2)X(4)) \right) \omega}{\left(-\omega^2 + (X(1)^2 + X(2)^2) \right)^2 + 4X(1)^2 \omega^2} \quad (\text{B-6})$$

Les conditions thermodynamiques sont déterminées en vérifiant que les parties réelle et imaginaire de $G(\omega)$ sont positives pour toutes pulsations $\omega \geq 0$. De ce fait, il faut assurer les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+ \text{ et } +\infty} G_1(\omega) \geq 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+ \text{ et } +\infty} G_2(\omega) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{B-7})$$

Au voisinage de 0^+ , les fonctions $G_1(\omega)$ et $G_2(\omega)$ sont équivalentes respectivement aux expressions donnée par les **équations B-8** et **B-9**.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G_1(\omega) = \frac{k_1(X(1)^2 + X(2)^2) + 2(X(1)X(3) + X(2)X(4))}{(X(1)^2 + X(2)^2)^2} \quad (\text{B-8})$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G_2(\omega) = \frac{2\left((X(1)^2 + X(2)^2)X(3) - 2X(1)(X(1)X(3) + X(2)X(4)) \right)}{(X(1)^2 + X(2)^2)^2} \quad (\text{B-9})$$

Au voisinage de $+\infty$, les fonctions $G_1(\omega)$ et $G_2(\omega)$ sont équivalentes respectivement aux expressions donnée par les **équations B-10** et **B-11**.

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G_1(\omega) = \frac{k_1 \omega^4}{\omega^4} = k_1 \quad (\text{B-10})$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G_2(\omega) = \frac{-2X(3)}{\omega^4} \quad (\text{B-11})$$

Il faut noter que la stabilité de la réponse viscoélastique exige un exponentiel décroissant et donc la condition $X(1) \geq 0$.

A partir des **équations B-7 à B-11**, on déduit les conditions thermodynamiques du modèle à mémoire entier qui ont été résumées dans le tableau 9 du deuxième chapitre.

Tableau 27. Conditions thermodynamiques du modèle de mémoire entier (cas $P=2$).

Le vecteur des paramètres viscoélastiques à identifier : $X = [\text{Re}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_1), \text{Re}(a_1), \text{Im}(a_1)]_{P=2}$
$k_1 \geq 0 \quad X(3) \leq 0 \quad X(2)X(4) + X(1)X(3) \leq 0 \quad X(1) \geq 0$ (stabilité du comportement viscoélastique) $k_1 \left((X(1)^2 + X(2)^2) \right) + (X(2)X(4) + X(1)X(3)) \geq 0$ $X(3) \left(X(1)^2 + X(2)^2 \right) - 2X(1)(X(2)X(4) + X(1)X(3)) \geq 0$

B.2 Conditions thermodynamiques du modèle à mémoire fractionnaire

Le modèle à mémoire fractionnaire est donné par l'expression suivante:

$$F(t) = F_e^g(t) + F_{ve}(t) = \sum_{i=0}^M k_{2i+1} x^{2i+1} + F_{ve}(t) \quad (\text{B-12})$$

avec $F_{ve}(t)$ la force viscoélastique déterminée à partir de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dF_{ve}(t)}{dt} + bF_{ve}(t) = c_1 x(t) + c_2 \frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} \quad \text{tel que } \beta \text{ non entier} \quad (\text{B-13})$$

Les paramètres à identifier pour le modèle à mémoire fractionnaire sont les paramètres élastiques $(k_{2i+1})_{i=0..M}$ et les paramètres viscoélastiques (vecteur $X = [b, \beta, c_1, c_2]$).

Si nous négligeons la partie non linéaire, la fonction de transfert $G(\omega) = \frac{\hat{F}(\omega)}{X(\omega)}$ pour le modèle à mémoire fractionnaire est donnée par l'**équation B-14**.

$$\begin{aligned}
 G(\omega) &= k_1 + \frac{c_1 + c_2 (j\omega)^\beta}{b + j\omega} = k_1 + \frac{c_1 + c_2 \omega^\beta \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) \right)}{b + j\omega} \\
 &= \frac{\left(k_1 (b^2 + \omega^2) + \left(c_1 + c_2 \omega^\beta \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) \right) \right) (b - j\omega) \right)}{b^2 + \omega^2} \\
 &= \frac{\left(\left(k_1 b^2 + c_1 b + k_1 \omega^2 + c_2 b \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) \omega^\beta + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) \omega^{\beta+1} \right) \right. \\
 &\quad \left. + j \left(-c_1 \omega + c_2 b \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) \omega^\beta - c_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) \omega^{\beta+1} \right) \right)}{b^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

$$G(\omega) = \frac{\left(\begin{array}{l} \left(k_1 X(1)^2 + X(3)X(1) + k_1 \omega^2 + X(4)X(1) \cos\left(\frac{\pi}{2} X(2)\right) \omega^{X(2)} + X(4) \sin\left(\frac{\pi}{2} X(2)\right) \omega^{X(2)+1} \right) \\ + j \left(-X(3)\omega + X(4)X(1) \sin\left(\frac{\pi}{2} X(2)\right) \omega^{X(2)} - X(4) \cos\left(\frac{\pi}{2} X(2)\right) \omega^{X(2)+1} \right) \end{array} \right)}{X(1)^2 + \omega^2}$$

$$= G_1(\omega) + jG_2(\omega)$$

(B-14)

avec $G_1(\omega)$ la partie réelle de la fonction $G(\omega)$ donnée par l'équation B-15 et $G_2(\omega)$ la partie imaginaire donnée par l'équation B-16.

$$G_1(\omega) = \frac{\left(\begin{array}{l} (k_1 X(1) + X(3)) X(1) \\ + k_1 \omega^2 + X(4) X(1) \cos\left(\frac{\pi}{2} X(2)\right) \omega^{X(2)} \\ + X(4) \sin\left(\frac{\pi}{2} X(2)\right) \omega^{X(2)+1} \end{array} \right)}{X(1)^2 + \omega^2}$$

(B-15)

$$G_2(\omega) = \frac{\left(\begin{array}{l} -X(3)\omega + X(4)X(1) \sin\left(\frac{\pi}{2} X(2)\right) \omega^{X(2)} \\ -X(4) \cos\left(\frac{\pi}{2} X(2)\right) \omega^{X(2)+1} \end{array} \right)}{X(1)^2 + \omega^2}$$

(B-16)

Si $X(2) > 1$, les fonctions $G_1(\omega)$ et $G_2(\omega)$ sont respectivement équivalentes aux expressions données par les équations B-17 et B-18 au voisinage de 0^+ .

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G_1(\omega) = \frac{(k_1 X(1) + X(3))}{X(1)}$$

(B-17)

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G_2(\omega) = \frac{-X(3)\omega}{X(1)^2}$$

(B-18)

De plus, si $X(2) > 1$, les fonctions $G_1(\omega)$ et $G_2(\omega)$ sont respectivement équivalentes aux expressions données par les équations B-19 et B-20 au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G_1(\omega) = X(4) \sin\left(\frac{\pi}{2} X(2)\right) \omega^{X(2)-1}$$

(B-19)

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G_2(\omega) = -X(4) \cos\left(\frac{\pi}{2} X(2)\right) \omega^{X(2)-1}$$

(B-20)

La stabilité de la réponse viscoélastique nécessite la condition $X(1) \geq 0$.

Si $1 < X(2) \leq 2$, on peut déduire à partir des équations **B-17** à **B-20** les conditions thermodynamiques qui permet de vérifier les conditions de l'équation **B-7**.

Ces conditions ont été résumées dans le **tableau 10** du **deuxième chapitre**.

Tableau 28. Conditions thermodynamiques du modèle de mémoire fractionnaire.

Le vecteur des paramètres viscoélastiques à identifier $X = [b, \beta, c_1, c_2]$				
$k_1 \geq \frac{-X(3)}{X(1)}$	$1 < X(2) \leq 2$	$X(3) \leq 0$	$X(4) \geq 0$	$X(1) \geq 0$
$X(1)X(4)\omega^{X(2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}X(2)\right) - X(3)\omega \geq 0$				

Il faut noter que la condition $X(1)X(4)\omega^{X(2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}X(2)\right) - X(3)\omega \geq 0$ est une condition plus sévère qui a été considérée par **Deng R. (2004)**. Elle est obtenue lorsqu'on suppose que la

fonction $G_2(\omega)$ est équivalente à $\frac{\left(-X(3)\omega + X(4)X(1)\sin\left(\frac{\pi}{2}X(2)\right)\omega^{X(2)}\right)}{X(1)^2}$ au voisinage de 0^+ .

Conclusion

Dans l'annexe B, les conditions thermodynamiques des modèles à mémoire entier et fractionnaire ont été développées.

Pour le modèle à mémoire entier généralisé, les paramètres viscoélastiques pendant la charge et la décharge sont différents. Pour assurer la stabilité et la causalité, il suffit de vérifier à la fois que les paramètres pendant la charge et ceux pendant la décharge assurent les conditions thermodynamiques du modèle à mémoire entier.

Annexe C : Analyse des expressions analytiques de la fonction 'raideur dynamique' et du spectre gain

Introduction

L'étude du comportement dynamique de la mousse de polyuréthane étudiée dans cette thèse, menée dans le troisième chapitre, a comporté deux parties : une première pour l'étude expérimentale du comportement vibratoire et une deuxième pour le développement d'un modèle représentatif.

Dans la première partie du troisième chapitre, une étude expérimentale basée sur des essais de vibrations entretenues de type sinus fixe nous a permis de déterminer la signature fréquentielle de la mousse de polyuréthane étudiée, en particulier les diagrammes de BODE de la fonction 'raideur dynamique'.

Dans la deuxième partie, nous avons testé trois expressions analytiques de la fonction 'raideur dynamique' afin de développer un modèle qui nous permette d'établir une fonction de transfert (fonction 'raideur dynamique') valable quelles que soient les conditions de sollicitations (niveaux de compression initiale, amplitudes d'excitation et fréquences d'excitation).

L'objectif de l'annexe C est de détailler et analyser les expressions analytiques développées dans la deuxième partie du troisième chapitre. Cette annexe comporte trois parties :

- une première partie pour le développement et l'analyse de l'*'Expression analytique de la fonction 'raideur dynamique du modèle à mémoire entier linéaire'*,
- une deuxième partie intitulée *'Modifications de la fonction 'raideur dynamique' du modèle à mémoire entier – première solution'*,
- une troisième partie intitulée *'Modifications de la fonction 'raideur dynamique' du modèle à mémoire entier – deuxième solution'*.

C.1 Expression analytique de la fonction raideur dynamique du modèle à mémoire entier linéaire

L'étude expérimentale menée dans le troisième chapitre a montré que le comportement vibratoire de la mousse de polyuréthane étudiée dépend du niveau de compression initiale et de l'amplitude d'excitation.

Afin de contourner cette complexité du comportement vibratoire, nous examinerons dans cette partie l'idée de considérer au voisinage de chaque niveau de compression initiale et au voisinage de chaque amplitude d'excitation un modèle à mémoire entier linéaire. Ce modèle est donné par l'équation suivante :

$$M\ddot{x}_{ab}(t) + c\dot{x}_{ab}(t) + kx_{ab}(t) + \int_0^t \sum_{i=1}^2 a_i e^{\alpha_i(t-\tau)} x_{ab}(\tau) d\tau = F(t) \quad (\text{C-1})$$

avec M la masse supplémentaire placée au-dessus de la mousse, $F(t)$ la force d'excitation et x_{ab} le déplacement transmis à la masse par la mousse.

Les paramètres à identifier sont le coefficient d'amortissement visqueux c , la raideur du ressort k et les paramètres viscoélastiques ($X = [\text{Re}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_1), \text{Re}(a_1), \text{Im}(a_1)]_{p=2}$).

Pour un niveau de compression initiale et une amplitude d'excitation donnés, les paramètres à identifiés sont considérés constants.

La transformée de Laplace de l'équation C-1 permet d'établir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{F}(P) &= \left(MP^2 + cP + k + \frac{a_1}{P + \alpha_1} + \frac{a_2}{P + \alpha_2} \right) X_{ab}(P) \\ &= \left(\frac{(MP^2 + cP + k)(P + \alpha_1)(P + \alpha_2) + a_1(P + \alpha_2) + a_2(P + \alpha_1)}{(P + \alpha_1)(P + \alpha_2)} \right) X_{ab}(P) \\ &= \frac{\left(\begin{aligned} &MP^4 + (M(X(1)^2 + X(2)^2) + 2cX(1) + k)P^2 \\ &+ (k(X(1)^2 + X(2)^2) + 2(X(1)X(3) + X(2)X(4))) \\ &+ (2X(1)M + c)P^3 + (c(X(1)^2 + X(2)^2) + 2X(1)k + 2X(3))P \end{aligned} \right)}{P^2 + 2X(1)P + (X(1)^2 + X(2)^2)} X_{ab}(P) \\ &= \frac{\left(\begin{aligned} &MP^4 + (MB_1 + 2cX(1) + k)P^2 + (kB_1 + 2B_3) \\ &+ (2X(1)M + c)P^3 + (cB_1 + 2X(1)k + 2B_5)P \end{aligned} \right)}{P^2 + 2X(1)P + B_1} X_{ab}(P) \end{aligned} \quad (\text{C-2})$$

avec P l'opérateur de Laplace, $(\widehat{F}(P), X_{ab}(P))$ respectivement les transformées de Laplace de $(F(t), x_{ab}(t))$, $B_1 = (X(1)^2 + X(2)^2)$, $B_3 = X(1)X(3) + X(2)X(4)$ et $B_5 = X(3)$

Pour déterminer la transformée de Fourier de l'équation C-1, il suffit de remplacer dans l'équation C-2 l'opérateur de Laplace P par $j\omega$.

La transformée de Fourier de l'équation C-1 est détaillée dans l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(j\omega) &= \frac{\begin{pmatrix} M\omega^4 - (MB_1 + 2cX(1) + k)\omega^2 + (kB_1 + 2B_3) \\ -j(2X(1)M + c)\omega^3 + j(cB_1 + 2X(1)k + 2B_3)\omega \end{pmatrix}}{-\omega^2 + 2X(1)j\omega + B_1} \mathbf{X}_{ab}(j\omega) \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} (M\omega^4 - (MB_1 + 2cX(1) + k)\omega^2 + (kB_1 + 2B_3)) \\ j(-2X(1)M + c)\omega^3 + (cB_1 + 2X(1)k + 2B_3)\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (B_1 - \omega^2) - j2X(1)\omega \\ (B_1 - \omega^2) + j2X(1)\omega \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} (B_1 - \omega^2) + j2X(1)\omega \\ (B_1 - \omega^2) - j2X(1)\omega \end{pmatrix}} \mathbf{X}_{ab}(j\omega) \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} MB_1 & -(MB_1^2 + 2cX(1)B_1 + kB_1) & (kB_1^2 + 2B_3B_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} -M & +(MB_1 + 2cX(1) + k) & -(kB_1 + 2B_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} -(4X(1)^2 M + 2cX(1)) & (2X(1)cB_1 + 4X(1)^2 k + 4X(1)B_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^4 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \\ + j \begin{pmatrix} -2X(1)M & (2X(1)MB_1 + 4cX(1)^2 + 2X(1)k) & -(2X(1)kB_1 + 4X(1)B_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^5 \\ \omega^3 \\ \omega \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} -(2X(1)MB_1 + cB_1) & (cB_1^2 + 2X(1)kB_1 + 2B_3B_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^3 \\ \omega \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} (2X(1)M + c) & -(cB_1 + 2X(1)k + 2B_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^5 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{(B_1 - \omega^2)^2 + (2X(1)\omega)^2} \mathbf{X}_{ab}(j\omega) \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -M & \begin{pmatrix} MB_1 + (MB_1 + 2cX(1) + k) \\ +(-4X(1)^2 M - 2cX(1)) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-MB_1^2 - 2cX(1)B_1 - kB_1) + (-kB_1 - 2B_3) \\ +(2X(1)cB_1 + 4X(1)^2 k + 4X(1)B_3) \end{pmatrix} (kB_1^2 + 2B_3B_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ + j \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -2X(1)M \\ +(2X(1)M + c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2X(1)MB_1 + 4cX(1)^2 + 2X(1)k) \\ +(-2X(1)MB_1 - cB_1) \\ +(-cB_1 - 2X(1)k - 2B_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2X(1)k - 4X(1)B_3) \\ +(cB_1^2 + 2X(1)kB_1 + 2B_3B_1) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^5 \\ \omega^3 \\ \omega \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{B_1^2 - 2B_1\omega^2 + \omega^4 + 4X(1)^2\omega^2} \mathbf{X}_{ab}(j\omega) \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -M & (-2M(X(1)^2 - X(2)^2) + k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-MB_1^2 + 2k(X(1)^2 - X(2)^2)) \\ +(2(X(1)X(3) - X(2)X(4))) \end{pmatrix} (kB_1^2 + 2B_3B_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ + j \begin{pmatrix} c & (2c(X(1)^2 - X(2)^2) - 2B_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cB_1^2 - 2B_3(X(1)^2 - X(2)^2) - 4X(1)X(2)X(4) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^5 \\ \omega^3 \\ \omega \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{\omega^4 + 2(X(1)^2 - X(2)^2)\omega^2 + B_1^2} \mathbf{X}_{ab}(j\omega)
 \end{aligned}$$

$$\widehat{F}(j\omega) = \frac{\begin{pmatrix} (-M \quad -2MB_2 + k \quad -MB_1^2 + 2kB_2 + 2B_4 \quad kB_1^2 + 2B_3B_1) \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ +j \begin{pmatrix} c \quad (2cB_2 - 2B_5) \quad (cB_1^2 - 2B_5B_2 - 4B_6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^5 \\ \omega^3 \\ \omega \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{(1 \quad 2B_2 \quad B_1^2) \begin{pmatrix} \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}} X_{ab}(j\omega) \quad (\text{C-3})$$

avec $B_2 = X(1)^2 - X(2)^2$, $B_4 = X(1)X(3) - X(2)X(4)$ et $B_6 = X(1)X(2)X(4)$.

La fonction de transfert ‘raideur dynamique’ $H(\omega)$ du modèle à mémoire entier linéaire est le rapport entre la transformée de Fourier de la force d’excitation et celle du déplacement transmis à la masse supplémentaire placée au-dessus de la mousse (équation C-4).

$$H(\omega) = \frac{\widehat{F}(j\omega)}{X_{ab}(j\omega)} = \frac{\begin{pmatrix} (-M \quad -2MB_2 + k \quad -MB_1^2 + 2kB_2 + 2B_4 \quad kB_1^2 + 2B_3B_1) \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ +j \begin{pmatrix} c \quad (2cB_2 - 2B_5) \quad (cB_1^2 - 2B_5B_2 - 4B_6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^5 \\ \omega^3 \\ \omega \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{(1 \quad 2B_2 \quad B_1^2) \begin{pmatrix} \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (\text{C-4})$$

$$= E_c(\omega) + jE_d(\omega)$$

avec $E_c(\omega)$ et $E_d(\omega)$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $H(\omega)$.

Le terme $E_c(\omega)$ définit le pouvoir conservatif de la mousse. Il est donné par l’équation suivante :

$$E_c(\omega) = \frac{\begin{pmatrix} (-M \quad -2MB_2 + k \quad -MB_1^2 + 2kB_2 + 2B_4 \quad kB_1^2 + 2B_3B_1) \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{(1 \quad 2B_2 \quad B_1^2) \begin{pmatrix} \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (\text{C-5})$$

En revanche, le terme $E_d(\omega)$ défini le pouvoir dissipatif de la mousse. Il est donné par l'équation suivante :

$$E_d(\omega) = \frac{\begin{pmatrix} c & (2cB_2 - 2B_5) & (cB_1^2 - 2B_5B_2 - 4B_6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^5 \\ \omega^3 \\ \omega \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 2B_2 & B_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (\text{C-6})$$

A partir des équations C-5 et C-6, on déduit le facteur de perte défini par :

$$\eta(\omega) = \frac{E_d(\omega)}{E_c(\omega)} = \frac{\begin{pmatrix} c & (2cB_2 - 2B_5) & (cB_1^2 - 2B_5B_2 - 4B_6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^5 \\ \omega^3 \\ \omega \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -M & (-2MB_2 + k) & (-MB_1^2 + 2kB_2 + 2B_4) & (kB_1^2 + 2B_3B_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (\text{C-7})$$

L'expression analytique du spectre de phase de la fonction 'raideur dynamique' est donnée par la relation suivante :

$$\partial\phi(\omega) = \text{arctg}(\eta(\omega)) = \text{angle}(H(\omega)) \quad (\text{C-8})$$

L'expression analytique du spectre de gain nécessite le calcul du module de la fonction 'raideur dynamique'. Le détail de calcul est présenté dans la démarche mathématique suivante :

$$|H(\omega)| = \sqrt{E_c(\omega)^2 + E_d(\omega)^2} = \frac{\left(\left(\begin{pmatrix} -M & (-2MB_2 + k) & (-MB_1^2 + 2kB_2 + 2B_4) & (kB_1^2 + 2B_3B_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 + \left(\begin{pmatrix} c & (2cB_2 - 2B_5) & (cB_1^2 - 2B_5B_2 - 4B_6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^5 \\ \omega^3 \\ \omega \end{pmatrix} \right)^2 \right)^{0.5}}{\sqrt{\left(\begin{pmatrix} 1 & 2B_2 & B_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2}}$$

$$|H(\omega)| = \left(\begin{array}{l} M^2 \begin{pmatrix} 2M^2 B_2 \\ -kM \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^2 B_1^2 \\ -2kMB_2 \\ -2MB_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -kMB_1^2 \\ -2MB_1 B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{12} \\ \omega^{10} \\ \omega^8 \\ \omega^6 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 2M^2 B_2 \\ -kM \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4M^2 B_2^2 \\ -4kMB_2 \\ +k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2M^2 B_1^2 B_2 \\ -kMB_1^2 \\ -4kMB_2^2 \\ +2k^2 B_2 \\ -4MB_2 B_4 \\ +2kB_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2kMB_1^2 B_2 \\ +k^2 B_1^2 \\ -4MB_1 B_2 B_3 \\ +2kB_1 B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{10} \\ \omega^8 \\ \omega^6 \\ \omega^4 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} M^2 B_1^2 \\ -2kMB_2 \\ -2MB_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2M^2 B_1^2 B_2 \\ -4kMB_2^2 \\ -4MB_2 B_4 \\ -kMB_1^2 \\ +2k^2 B_2 \\ +2kB_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^2 B_1^4 \\ -4kMB_1^2 B_2 \\ +4k^2 B_2^2 \\ +8kB_2 B_4 \\ +4B_4^2 \\ -4MB_1^2 B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -kMB_1^4 \\ +2k^2 B_1^2 B_2 \\ +2kB_1^2 B_4 \\ -2MB_1^3 B_3 \\ +4kB_1 B_2 B_3 \\ +4B_1 B_3 B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^8 \\ \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} -kMB_1^2 \\ -2MB_3 B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2kMB_1^2 B_2 \\ -4MB_1 B_2 B_3 \\ +k^2 B_1^2 \\ +2kB_3 B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -kMB_1^4 \\ -2MB_1^3 B_3 \\ +2k^2 B_1^2 B_2 \\ +4kB_1 B_2 B_3 \\ +2kB_1^2 B_4 \\ +4B_1 B_3 B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^2 B_1^4 \\ +4kB_1^3 B_3 \\ +4B_3^2 B_1^2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ c^2 \begin{pmatrix} 2c^2 B_2 \\ -2cB_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^2 B_1^2 \\ -2cB_2 B_5 \\ -4cB_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{10} \\ \omega^8 \\ \omega^6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c^2 B_2 \\ -2cB_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4c^2 B_2^2 \\ -8cB_2 B_5 \\ +4B_5^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2c^2 B_1^2 B_2 \\ -2cB_1^2 B_5 \\ -4cB_2^2 B_5 \\ +4B_2 B_5^2 \\ -8cB_2 B_6 \\ +8B_5 B_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^8 \\ \omega^6 \\ \omega^4 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} c^2 B_1^2 \\ -2cB_2 B_5 \\ -4cB_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2c^2 B_1^2 B_2 \\ -4cB_2^2 B_5 \\ -8cB_2 B_6 \\ -2cB_1^2 B_5 \\ +4B_2 B_5^2 + 8B_5 B_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^2 B_1^4 \\ -4cB_1^2 B_2 B_5 \\ +4B_5^2 B_2^2 \\ +16B_2 B_5 B_6 \\ +16B_6^2 - 8cB_1^2 B_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \end{array} \right)^{0.5} \\
 \left(\begin{array}{l} (1 \quad 2B_2 \quad B_1^2) \begin{pmatrix} \omega^8 \\ \omega^6 \\ \omega^4 \end{pmatrix} + (2B_2 \quad 4B_2^2 \quad 2B_1^2 B_2) \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \end{pmatrix} + (B_1^2 \quad 2B_1^2 B_2 \quad B_1^4) \begin{pmatrix} \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)^{0.5}$$

$$|H(\omega)| = \frac{\left(M^2 \begin{pmatrix} 2(2M^2B_2) \\ -kM \end{pmatrix} + c^2 \right) \left(2 \begin{pmatrix} M^2B_1^2 \\ -2kMB_2 - 2MB_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4M^2B_2^2 \\ -4kMB_2 + k^2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2c^2B_2 \\ -2cB_5 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \omega^{12} \\ \omega^{10} \\ \omega^8 \end{pmatrix} \right)^{0.5} \\
 + \left(2 \begin{pmatrix} -kMB_1^2 \\ -2MB_1B_3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2M^2B_1^2B_2 \\ -kMB_1^2 \\ -4MB_2B_4 \\ +2kB_4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2kMB_1^2B_2 \\ +k^2B_1^2 \\ -4MB_1B_2B_3 \\ +2kB_1B_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M^2B_1^4 - 4kMB_1^2B_2 \\ +4k^2B_2^2 + 8kB_2B_4 \\ +4B_4^2 - 4MB_1^2B_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c^2B_1^2B_2 - 2cB_1^2B_5 \\ +2 \begin{pmatrix} -4cB_2^2B_5 + 4B_2B_5^2 \\ -8cB_2B_6 + 8B_5B_6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \end{pmatrix} \\
 + \left(2 \begin{pmatrix} -kMB_1^4 \\ +2k^2B_1^2B_2 \\ +2kB_1^2B_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2MB_1^3B_3 \\ +4kB_1B_2B_3 \\ +4B_1B_3B_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^2B_1^4 - 4cB_1^2B_2B_5 \\ +4B_5^2B_2^2 + 16B_2B_5B_6 \\ +16B_6^2 - 8cB_1^2B_6 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} k^2B_1^4 \\ +4kB_1^3B_3 \\ +4B_3^2B_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 \left((1 \quad 4B_2 \quad 2B_1^2 + 4B_2^2) \begin{pmatrix} \omega^8 \\ \omega^6 \\ \omega^4 \end{pmatrix} + (4B_1^2B_2 \quad B_1^4) \begin{pmatrix} \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{0.5} \\
 |H(\omega)| = \frac{\left(M^2 \begin{pmatrix} 4M^2B_2 \\ +(c^2 - 2kM) \end{pmatrix} \left(2M^2(B_1^2 + 2B_2^2) + (4B_2(c^2 - 2kM)) \right) \begin{pmatrix} \omega^{12} \\ \omega^{10} \\ \omega^8 \end{pmatrix} \right) \right)^{0.5} \\
 + \left(\begin{pmatrix} 2(c^2 - 2kM)(B_1^2 + 2B_2^2) \\ +4M^2B_1^2B_2 - 4M(2B_2B_4 + B_1B_3) \\ +4kB_4 + (4k^2 - 12cB_5)B_2 \\ +4B_5^2 - 8cB_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4(c^2 - 2kM)B_1^2B_2 - 4cB_5(B_1^2 + 2B_2^2) \\ +8B_2B_5^2 + 16B_6(B_5 - cB_2) \\ +M^2B_1^4 + 4k^2B_2^2 \\ +4B_4^2 + 4k(B_1B_3 + 2B_2B_4) + 2k^2B_1^2 \\ -4MB_1(B_1B_4 + 2B_2B_3) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \end{pmatrix} \\
 + \left(\begin{pmatrix} (c^2 - 2kM)B_1^4 + 4kB_1(B_1B_4 + 2B_2B_3) + 16B_6(B_6 + B_2B_5) \\ +4k^2B_1^2B_2 + 4B_2B_5(B_2B_5 - cB_1^2) \\ +8B_1(B_3B_4 - cB_1B_6) - 4MB_1^3B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kB_1^2 \\ +2B_3B_1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 \left((1 \quad 4B_2 \quad 2(B_1^2 + 2B_2^2)) \begin{pmatrix} \omega^8 \\ \omega^6 \\ \omega^4 \end{pmatrix} + (4B_1^2B_2 \quad B_1^4) \begin{pmatrix} \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{0.5}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{A_{12}\omega^{12} + A_{10}\omega^{10} + A_8\omega^8 + A_6\omega^6 + A_4\omega^4 + A_2\omega^2 + A_0}{C_8\omega^8 + C_6\omega^6 + C_4\omega^4 + C_2\omega^2 + C_0}} = \sqrt{\frac{N(\omega)}{D(\omega)}} \quad (\text{C-9})$$

avec $N(\omega)$ le polynôme numérateur de $|H(\omega)|^2$, $D(\omega)$ le polynôme dénominateur de $|H(\omega)|^2$ et $(A_{2i})_{i=0..6}$, $(C_{2i})_{i=0..4}$ des fonctions des paramètres à identifier données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{12} = M^2 \\ A_{10} = 4M^2 B_2 + B_7 \\ A_8 = 2M^2 (B_1^2 + 2B_2^2) + 4B_2 B_7 - 4MB_4 + (k^2 - 4cB_5) \\ A_6 = \left(\begin{array}{l} 2B_7 (B_1^2 + 2B_2^2) + 4M^2 B_1^2 B_2 - 4M (2B_4 B_2 + B_1 B_3) \\ + 4kB_4 + (4k^2 - 12cB_5) B_2 - 8cB_6 + 4B_5^2 \end{array} \right) \\ A_4 = \left(\begin{array}{l} 4B_7 B_1^2 B_2 - 4cB_5 (B_1^2 + 2B_2^2) + 8B_5^2 B_2 + 16B_6 (B_5 - cB_2) + M^2 B_1^4 \\ + 4k^2 B_2^2 + 4B_4^2 + 4k (B_1 B_3 + 2B_4 B_2) + 2k^2 B_1^2 - 4MB_1 (B_1 B_4 + 2B_3 B_2) \end{array} \right) \\ A_2 = \left(\begin{array}{l} B_7 B_1^4 + 4kB_1 (B_1 B_4 + 2B_3 B_2) + 16B_6 (B_5 B_2 + B_6) + 4k^2 B_1^2 B_2 \\ + 4B_5 B_2 (B_5 B_2 - cB_1^2) + 8B_1 (B_4 B_3 - cB_6 B_1) - 4MB_1^3 B_3 \end{array} \right) \\ A_0 = (kB_1^2 + 2B_3 B_1)^2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} C_8 = 1 \\ C_6 = 4B_2 \\ C_4 = 2(B_1^2 + 2B_2^2) \\ C_2 = 4B_2 B_1^2 \\ C_0 = B_1^4 \end{array} \right\} \quad (\text{C-10})$$

$$\text{tels que } \left\{ \begin{array}{ll} B_1 = X(1)^2 + X(2)^2 & B_2 = X(1)^2 - X(2)^2 \\ B_3 = X(1)X(3) + X(2)X(4) & B_4 = X(1)X(3) - X(2)X(4) \\ B_5 = X(3) & B_6 = X(1)X(2)X(4) \\ B_7 = c^2 - 2kM & X = [\text{Re}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_1), \text{Re}(a_1), \text{Im}(a_1)] \end{array} \right\}.$$

Le spectre de gain en dB est donné par :

$$\begin{aligned} |H(\omega)|_{dB} &= 20 \log_{10} (|H(\omega)|) \\ &= 10 \log_{10} \left(\frac{A_{12}\omega^{12} + A_{10}\omega^{10} + A_8\omega^8 + A_6\omega^6 + A_4\omega^4 + A_2\omega^2 + A_0}{C_8\omega^8 + C_6\omega^6 + C_4\omega^4 + C_2\omega^2 + C_0} \right) \quad (\text{C-11}) \\ &= 10 \log_{10} \left(\frac{N(\omega)}{D(\omega)} \right) \end{aligned}$$

L'analyse de la réponse asymptotique du spectre de gain consiste à déterminer la pente initiale S_0 et la pente finale S_f du spectre en utilisant respectivement les **équations C-12** et **C-13**.

$$S_0 = \text{pente de la fonction } \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(\omega)|_{dB} \right) \quad (\text{C-12})$$

$$S_f = \text{pente de la fonction } \left(\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(\omega)|_{dB} \right) \quad (\text{C-13})$$

Théorème 1

Pour avoir une pente initiale S_0 (*respectivement une pente finale S_f*) strictement positive, il faut assurer que le degré minimal (*respectivement maximal*) du polynôme $N(\omega)$ est strictement supérieur au degré minimal (*respectivement maximal*) du polynôme $D(\omega)$.

Pour avoir une pente initiale S_0 (*respectivement une pente finale S_f*) strictement négative, il faut avoir un degré minimal (*respectivement un degré maximal*) du polynôme $N(\omega)$ strictement inférieur à celui du polynôme $D(\omega)$.

Lorsque les degrés minimaux (*respectivement maximaux*) des polynômes $N(\omega)$ et $D(\omega)$ sont égaux alors la pente initiale S_0 (*respectivement la pente finale S_f*) est horizontale (pente initiale nulle).

Preuve :

Soient n_0 et n_f respectivement le degré minimal et le degré maximal du polynôme $N(\omega)$. On note d_0 et d_f respectivement le degré minimal et le degré maximal du polynôme $D(\omega)$. L'expression du spectre de gain en dB est donné dans ce cas par :

$$|H(\omega)|_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{N(\omega)}{D(\omega)} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{i=n_0}^{n_f} A_i \omega^i}{\sum_{j=d_0}^{d_f} C_j \omega^j} \right) \quad (\text{C-14})$$

A partir de la définition de la pente initiale S_0 (**équation C-12**), on montre que la pente initiale est donnée :

$$\begin{aligned} S_0 &= \text{pente de la fonction} \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(\omega)|_{dB} \right) = \text{pente de la fonction} \left(10 \log_{10} \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=n_0}^{n_f} A_i \omega^i}{\sum_{j=d_0}^{d_f} C_j \omega^j} \right) \right) \\ &= \text{pente de la fonction} \left(10 \log_{10} \left(\frac{A_{n_0}}{C_{d_0}} \omega^{n_0-d_0} \right) \right) \\ &= \text{pente de la fonction} \left(10(n_0 - d_0) \log_{10}(\omega) + \left(\log_{10}(A_{n_0}) - \log_{10}(C_{d_0}) \right) \right) \\ &= 10(n_0 - d_0) \end{aligned} \quad (\text{C-15})$$

On déduit que si $n_0 > d_0$ la pente initiale S_0 est strictement positive et si $n_0 < d_0$ elle est strictement négative. En revanche, si $n_0 = d_0$ la pente initiale S_0 est nulle (horizontale).

En utilisant la définition de la pente finale S_f (**équation C-13**), on montre que cette dernière est donnée par :

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \text{pente de la fonction} \left(\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(\omega)|_{dB} \right) = \text{pente de la fonction} \left(10 \log_{10} \left(\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=n_0}^{n_f} A_i \omega^i}{\sum_{j=d_0}^{d_f} C_j \omega^j} \right) \right) \\
 &= \text{pente de la fonction} \left(10 \log_{10} \left(\frac{A_{n_f}}{C_{d_f}} \omega^{n_f-d_f} \right) \right) \tag{C-17} \\
 &= \text{pente de la fonction} \left(10(n_f - d_f) \log_{10}(\omega) + \left(\log_{10}(A_{n_f}) - \log_{10}(C_{d_f}) \right) \right) \\
 &= 10(n_f - d_f)
 \end{aligned}$$

On déduit que si $n_f > d_f$ la pente initiale S_f est strictement positive et si $n_f < d_f$ elle est strictement négative. En revanche, si $n_f = d_f$ la pente initiale S_f est nulle (horizontale).

Fin preuve

Pour le modèle à mémoire entier linéaire, dont le spectre de gain est donné par l'**équation C-11**, si les deux fonctions A_0 et C_0 sont non nulles alors la pente initiale est horizontale. Dans ce cas elle est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \text{pente de la fonction} \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(\omega)|_{dB} \right) \\
 &= 10 \log_{10} \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{A_{12} \omega^{12} + A_{10} \omega^{10} + A_8 \omega^8 + A_6 \omega^6 + A_4 \omega^4 + A_2 \omega^2 + A_0}{C_8 \omega^8 + C_6 \omega^6 + C_4 \omega^4 + C_2 \omega^2 + C_0} \right) \tag{C-18} \\
 &= 10 \log_{10} \left(\frac{A_0}{C_0} \right) = 10 \log_{10}(A_0) - 10 \log_{10}(C_0)
 \end{aligned}$$

En analysant les **équations C-10** et **C-11**, on démontre qu'il faut au moins avoir $A_0 = 0$ et $C_0 \neq 0$ pour avoir une pente initiale positive.

Preuve :

Supposant que la fonction $C_0 = B_1^4$ est nulle. Le terme $B_1 = X(1)^2 + X(2)^2 = 0$ ne peut être nul que si seulement si $X(1)$ et $X(2)$ sont nulles. Par conséquence, les termes B_2, B_3, B_4 et B_6 ainsi que les fonctions C_2, C_4, C_6, A_0, A_2 , et A_4 sont tous nuls. Ceci permet de déduire que la première fonction non nulle au niveau de dénominateur $D(\omega)$ est la fonction C_8 ($C_8=1$), d'où le degré du polynôme dénominateur minimale est égal à 8. En revanche, la première fonction qui peut être non nulle au niveau du numérateur est la fonction A_6 qui devient donnée par $A_6 = 4B_5^2$.

Si le terme B_5 est non nul alors le degré numérateur $N(\omega)$ minimale est inférieur au degré du dénominateur. Dans ce cas, la pente initiale S_0 est négative.

Si le terme B_5 est nul, la fonction A_6 est nulle. Le degré du polynôme numérateur minimale devient égal à 8 puisque la fonction A_8 ne peut pas être non nulle. En fait, elle devient donnée par $A_8 = k^2$. Elle est dans ce cas nulle que si seulement si la raideur est nulle, une hypothèse que nous rejetons physiquement. Par conséquent, le degré minimal du numérateur est égal à celui du dénominateur et la pente initiale horizontale.

On déduit donc que pour avoir une pente initiale positive alors la fonction C_0 doit être différente de zéro.

Il a été montré à partir de l'équation C-18 que si les fonctions C_0 et A_0 sont non nulles alors la pente initiale est horizontale. En conclusion, pour avoir une pente initiale positive du spectre de gain du modèle à mémoire entier linéaire il faut au moins $A_0 = 0$ et $C_0 \neq 0$.

Fin preuve

La recherche de la meilleure combinaison de paramètres qui essaye d'annuler la fonction A_2 aboutit à une valeur de la raideur négative. Cette valeur est physiquement inadmissible d'où la fonction A_2 ne peut pas être nulle. Dans le cas où $A_2 \neq 0$, $A_0 = 0$ et $C_0 \neq 0$, la pente initiale est égale à 20 dB/dec (équation C-19).

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \text{pente de la fonction} \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(\omega)|_{dB} \right) \\
 &= 10 \log_{10} \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{A_{12} \omega^{12} + A_{10} \omega^{10} + A_8 \omega^8 + A_6 \omega^6 + A_4 \omega^4 + A_2 \omega^2}{C_8 \omega^8 + C_6 \omega^6 + C_4 \omega^4 + C_2 \omega^2 + C_0} \right) \\
 &= 10 \log_{10} \left(\frac{A_2 \omega^2}{C_0} \right) \\
 &= 20 \log_{10}(\omega) + (10 \log_{10}(A_2) - 10 \log_{10}(C_0))
 \end{aligned} \tag{C-19}$$

Pour le modèle à mémoire entier linéaire, les deux fonctions A_{12} et C_8 sont non nulles puisque $A_{12} = M^2 \neq 0$ et $C_8 = 1$. Ainsi, la pente finale est égale à 40 dB/dec (équation C-20).

$$\begin{aligned}
 S_f &= \text{pente de la fonction} \left(\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(\omega)|_{dB} \right) \\
 &= 10 \log_{10} \left(\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{A_{12} \omega^{12} + A_{10} \omega^{10} + A_8 \omega^8 + A_6 \omega^6 + A_4 \omega^4 + A_2 \omega^2 + A_0}{C_8 \omega^8 + C_6 \omega^6 + C_4 \omega^4 + C_2 \omega^2 + C_0} \right) \\
 &= 10 \log_{10} \left(\frac{A_{12} \omega^{12}}{C_8 \omega^8} \right) \\
 &= 40 \log_{10}(\omega) + (10 \log_{10}(A_{12}) - 10 \log_{10}(C_8))
 \end{aligned} \tag{C-20}$$

C.2 Modifications de la fonction ‘raideur dynamique’ du modèle à mémoire entier – première solution

L’étude expérimentale du comportement vibratoire de la mousse de polyuréthane suite à des essais de vibrations entretenues, qui a été menée en troisième chapitre, nous a permis de montrer que les pentes initiales et finales de la fonction ‘raideur dynamique’ sont quasiment indépendantes des conditions de sollicitations (fréquence d’excitation, amplitude d’excitation et niveau de compression initiale). La pente initiale est expérimentalement de l’ordre de 40dB/dec alors que la pente finale est expérimentalement plus proche de 80 dB/dec.

Le modèle à mémoire entier linéaire, qui a été développé dans la partie précédente, a consisté à considérer des paramètres constants au voisinage de chaque niveau de compression et chaque amplitude d’excitation. Ceci n’a pas permis de reconstruire la réponse asymptotique expérimentale de la fonction ‘raideur dynamique’. En fait, la pente initiale du modèle à mémoire entier linéaire a été montrée égale à 20 dB/dec, différente de sa valeur expérimentale 40 dB/dec. De plus, la pente finale du modèle à mémoire entier linéaire a été montrée égale à 40 dB/dec contrairement à la pente finale expérimentale qui est de l’ordre de 80 dB/dec.

Il faut donc apporter à la fonction ‘raideur dynamique’ du modèle à mémoire entier (**équation C-9**) des modifications puis vérifier de nouveau l’aptitude à reconstruire l’allure asymptotique.

L’analyse de la réponse du modèle à mémoire entier linéaire nous a permis de déduire que l’idée de considérer des paramètres dépendants uniquement du niveau de compression initiale et de l’amplitude d’excitation ne permet pas de contourner la complexité du comportement vibratoire de la mousse A. Ainsi, on montre que les paramètres sont aussi dépendants de la fréquence d’excitation. Ceci constitue la base des modifications que nous allons apporter à la fonction ‘raideur dynamique’ afin d’assurer l’aptitude du modèle à reconstruire l’allure asymptotique.

L’identification des paramètres dépendants des conditions de sollicitation affecte le caractère général de la représentativité du modèle. Afin de pallier à ceci, nous avons développé dans le troisième chapitre des solutions qui a consisté à exprimer les paramètres dimensionnels du modèle développé par le produit de deux parties indépendantes : une regroupant les conditions de sollicitation et une autre définissant les paramètres adimensionnels.

La première solution a consisté à considérer des relations entre les paramètres dimensionnels et adimensionnels inspirées de l’étude quasi-statique qui a été menée dans le deuxième chapitre. Ces relations ont été résumées dans le **tableau 22** du **chapitre III, section III.1.2.3**.

Tableau 22. Transformations paramètres dimensionnels - paramètres adimensionnels, modèle à mémoire entier (comportement vibratoire, solution 1).

Paramètres dimensionnels	Paramètres adimensionnels
$X(1) = Re(\alpha_1)$ (sec ⁻¹)	$Y(1) = \frac{X(1)}{\omega}$
$X(2) = Im(\alpha_1)$ (sec ⁻¹)	$Y(2) = \frac{X(2)}{\omega}$
$X(3) = Re(a_1)$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(3) = \frac{X(3)}{Mg\omega} A_{x_{un}}$
$X(4) = Im(a_1)$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(4) = \frac{X(4)}{Mg\omega} A_{x_{un}}$
k (Nm ⁻¹)	$Y_k = \frac{k}{Mg} A_{x_{un}}$
c (Nm ⁻¹ sec)	$Y_c = \frac{c}{Mg} A_{x_{un}} \omega$

En considérant les relations résumées dans le tableau 22, on montre que les fonctions $(B_i)_{i=1..7}$, $(A_{2i})_{i=0..6}$ et $(C_{2i})_{i=0..4}$ sont dépendants non seulement de l'amplitude d'excitation et le niveau de compression initiale mais aussi de la fréquence d'excitation.

Les fonctions $(B_i)_{i=1..7}$ deviennent données par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 B_1 = X(1)^2 + X(2)^2 = (Y(1)^2 + Y(2)^2) \omega^2 = b_1 \omega^2 \\
 B_2 = X(1)^2 - X(2)^2 = (Y(1)^2 - Y(2)^2) \omega^2 = b_2 \omega^2 \\
 B_3 = X(1)X(3) + X(2)X(4) = \left(Y(1) \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(3) + Y(2) \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(4) \right) \omega^2 = b_3 \omega \\
 B_4 = X(1)X(3) - X(2)X(4) = \left(Y(1) \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(3) - Y(2) \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(4) \right) \omega^2 = b_4 \omega^2 \\
 B_5 = X(3) = \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(3) \omega = b_5 \omega \quad B_6 = X(1)X(2)X(4) = Y(1)Y(2) \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(4) \omega^3 = b_6 \omega^3 \\
 B_7 = c^2 - 2kM = \left(Y_c \frac{Mg}{A_{x_{un}}} \right)^2 \omega^{-2} - 2Y_k \frac{Mg}{A_{x_{un}}} M = b_7^2 \omega^{-2} - 2KM
 \end{array} \right. \quad (C-21)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
 K = k = Y_k \frac{Mg}{A_{x_{un}}} \quad b_1 = Y(1)^2 + Y(2)^2 \quad b_2 = Y(1)^2 - Y(2)^2 \quad b_3 = Y(1) \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(3) + Y(2) \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(4) \\
 b_4 = Y(1) \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(3) - Y(2) \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(4) \quad b_5 = \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(3) \quad b_6 = Y(1)Y(2) \frac{Mg}{A_{x_{un}}} Y(4) \quad b_7 = Y_c \frac{Mg}{A_{x_{un}}}
 \end{array} \right.$$

A partir de l'équation C-21, on déduit les expressions des fonctions $(A_{2i})_{i=0..6}$ et $(C_{2i})_{i=0..4}$ suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A_{12} = M^2 \\
 A_{10} = 4M^2 b_2 \omega^2 + (b_7^2 \omega^{-2} - 2KM) \\
 A_8 = (2M^2 (b_1^2 \omega^4 + 2b_2^2 \omega^4) + 4b_2 \omega^2 (b_7^2 \omega^{-2} - 2KM) - 4Mb_4 \omega^2 + (K^2 - 4b_7 \omega^{-1} b_5 \omega)) \\
 A_6 = \left(\begin{array}{l}
 2(b_7^2 \omega^{-2} - 2KM)(b_1^2 \omega^4 + 2b_2^2 \omega^4) + 4M^2 b_1^2 \omega^4 b_2 \omega^2 - 4M(2b_4 \omega^2 b_2 \omega^2 + b_1 \omega^2 b_3 \omega^2) \\
 + 4Kb_4 \omega^2 + (4K^2 - 12b_7 \omega^{-1} b_5 \omega) b_2 \omega^2 - 8b_7 \omega^{-1} b_6 \omega^3 + 4b_5^2 \omega^2
 \end{array} \right) \\
 A_4 = \left(\begin{array}{l}
 4(b_7^2 \omega^{-2} - 2KM) b_1^2 \omega^4 b_2 \omega^2 - 4b_7 \omega^{-1} b_5 \omega (b_1^2 \omega^4 + 2b_2^2 \omega^4) + 8b_5^2 \omega^2 b_2 \omega^2 + 16b_6 \omega^3 (b_5 \omega - b_7 \omega^{-1} b_2 \omega^2) \\
 + M^2 b_1^4 \omega^8 \\
 + 4K^2 b_2^2 \omega^4 + 4b_4^2 \omega^4 + 4K(b_1 \omega^2 b_3 \omega^2 + 2b_4 \omega^2 b_2 \omega^2) + 2K^2 b_1^2 \omega^4 - 4Mb_1 \omega^2 (b_1 \omega^2 b_4 \omega^2 + 2b_3 \omega^2 b_2 \omega^2)
 \end{array} \right) \\
 A_2 = \left(\begin{array}{l}
 (b_7^2 \omega^{-2} - 2KM) b_1^4 \omega^8 + 4Kb_1 \omega^2 (b_1 \omega^2 b_4 \omega^2 + 2b_3 \omega^2 b_2 \omega^2) + 16b_6 \omega^3 (b_5 \omega b_2 \omega^2 + b_6 \omega^3) \\
 + 4K^2 b_1^2 \omega^4 b_2 \omega^2 \\
 + 4b_5 \omega b_2 \omega^2 (b_5 \omega b_2 \omega^2 - b_7 \omega^{-1} b_1^2 \omega^4) + 8b_1 \omega^2 (b_4 \omega^2 b_3 \omega^2 - b_7 \omega^{-1} b_6 \omega^3 b_1 \omega^2) - 4Mb_1^3 \omega^6 b_3 \omega^2
 \end{array} \right) \\
 A_0 = (Kb_1^2 \omega^4 + 2b_3 \omega^2 b_1 \omega^2)^2 \\
 C_8 = 1 \quad C_6 = 4b_2 \omega^2 \quad C_4 = 2(b_1^2 \omega^4 + 2b_2^2 \omega^4) \quad C_2 = 4b_2 \omega^2 b_1^2 \omega^4 \quad C_0 = b_1^4 \omega^8
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A_{12} = M^2 \\
 A_{10} = (4M^2 b_2 \omega^2 - 2KM + b_7^2 \omega^{-2}) \\
 A_8 = (2M^2 (b_1^2 + 2b_2^2) \omega^4 + (-4Mb_4 - 8KMb_2) \omega^2 + (4b_2 b_7^2 - 4b_5 b_7 + K^2)) \\
 A_6 = \left(\begin{array}{l}
 4M^2 b_1^2 b_2 \omega^6 \\
 + (-4KM(b_1^2 + 2b_2^2) - 4M(2b_2 b_4 + b_1 b_3)) \omega^4 \\
 + (2(b_1^2 + 2b_2^2) b_7^2 + 4Kb_4 + 4K^2 b_2 - 12b_2 b_3 b_7 - 8b_6 b_7 + 4b_5^2) \omega^2
 \end{array} \right) \\
 A_4 = \left(\begin{array}{l}
 M^2 b_1^4 \omega^8 \\
 + (-4Mb_1(b_1 b_4 + 2b_2 b_3) - 8KMb_1^2 b_2) \omega^6 \\
 + \left(\begin{array}{l}
 4b_1^2 b_2 b_7^2 + (-4b_5 b_7 + 2K^2)(b_1^2 + 2b_2^2) \\
 + 16b_6(b_5 - b_2 b_7) + 8b_2 b_5^2 + 4b_4^2 + 4K(b_1 b_3 + 2b_2 b_4)
 \end{array} \right) \omega^4
 \end{array} \right) \\
 A_2 = \left(\begin{array}{l}
 (-4Mb_1^3 b_3 - 2KMb_1^4) \omega^8 \\
 + \left(\begin{array}{l}
 b_1^4 b_7^2 + 4Kb_1(b_1 b_4 + 2b_2 b_3) + 16b_6(b_2 b_5 + b_6) + 4K^2 b_1^2 b_2 \\
 + 4b_2 b_5(b_2 b_5 - b_7 b_1^2) + 8b_1(b_3 b_4 - b_1 b_6 b_7)
 \end{array} \right) \omega^6
 \end{array} \right) \\
 A_0 = (K^2 b_1^4 + 4Kb_1^3 b_3 + 4b_1^2 b_3^2) \omega^8 \\
 C_8 = 1 \quad C_6 = 4b_2 \omega^2 \quad C_4 = 2(b_1^2 + 2b_2^2) \omega^4 \quad C_2 = 4b_2 b_1^2 \omega^6 \quad C_0 = b_1^4 \omega^8
 \end{array} \right. \tag{C-22}$$

En remplaçant les expressions des fonctions $(A_{2i})_{i=0,6}$ et $(C_{2i})_{i=0,4}$ de la première solution (équation C-22) dans l'équation C-9, on détermine l'expression analytique du module de la fonction ‘raideur dynamique’ pour la première solution $|H^{(1)}(\omega)|$ (équation C-23).

$$\begin{aligned}
|H^{(1)}(\omega)| &= \sqrt{\frac{A_{12}\omega^{12} + A_{10}\omega^{10} + A_8\omega^8 + A_6\omega^6 + A_4\omega^4 + A_2\omega^2 + A_0}{C_8\omega^8 + C_6\omega^6 + C_4\omega^4 + C_2\omega^2 + C_0}} \\
&= \left(\begin{aligned} &M^2\omega^{12} + \begin{pmatrix} 4M^2b_2 & -2KM & b_7^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{12} \\ \omega^{10} \\ \omega^8 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 2M^2(b_1^2 + 2b_2^2) & (-4Mb_4 - 8KMb_2) & (4b_2b_7^2 - 4b_5b_7 + K^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{12} \\ \omega^{10} \\ \omega^8 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 4M^2b_1^2b_2 & \begin{pmatrix} -4KM(b_1^2 + 2b_2^2) \\ -4M(2b_2b_4 + b_1b_3) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2(b_1^2 + 2b_2^2)b_7^2 + 4Kb_4 + 4K^2b_2 \\ -12b_2b_5b_7 - 8b_6b_7 + 4b_5^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{12} \\ \omega^{10} \\ \omega^8 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} M^2b_1^4 & \begin{pmatrix} -4Mb_1(b_1b_4 + 2b_2b_3) \\ -8KMb_1^2b_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4b_1^2b_2b_7^2 + (-4b_5b_7 + 2K^2)(b_1^2 + 2b_2^2) \\ +16b_6(b_5 - b_2b_7) + 8b_2b_5^2 \\ +4b_4^2 + 4K(b_1b_3 + 2b_2b_4) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{12} \\ \omega^{10} \\ \omega^8 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} (-4Mb_1^3b_3 - 2KMb_1^4) & \begin{pmatrix} b_1^4b_7^2 + 4Kb_1(b_1b_4 + 2b_2b_3) + 16b_6(b_2b_5 + b_6) + 4K^2b_1^2b_2 \\ +4b_2b_5(b_2b_5 - b_7b_1^2) + 8b_1(b_3b_4 - b_1b_6b_7) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{10} \\ \omega^8 \end{pmatrix} \\ &+ (K^2b_1^4 + 4Kb_1^3b_3 + 4b_1^2b_3^2)\omega^8 \end{aligned} \right)^{0.5} \\
&= \frac{\sqrt{(1 + 4b_2 + 2(b_1^2 + 2b_2^2) + 4b_2b_1^2 + b_1^4)\omega^8}}{\sqrt{(1 + 4b_2 + 2(b_1^2 + 2b_2^2) + 4b_2b_1^2 + b_1^4)\omega^8}} \\
&= \left(\begin{aligned} &\begin{pmatrix} M^2 \begin{pmatrix} 1 + b_1^4 + 4b_2 \\ +2b_1^2 + 4b_2^2 + 4b_1^2b_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2KM(1 + b_1^4 + 2(b_1^2 + 2b_2^2) + 4b_2(1 + b_1^2)) \\ -4M(b_1(b_1b_4 + 2b_2b_3) + b_4 + 2b_2b_4 + b_1b_3 + b_1^3b_3) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{12} \\ \omega^{10} \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} b_7^2 + (4b_2b_7^2 - 4b_5b_7 + K^2) + \begin{pmatrix} 2(b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_1^2b_2)b_7^2 + 4Kb_4 \\ +4K^2b_2 - 12b_2b_5b_7 - 8b_6b_7 + 4b_5^2 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} (-4b_5b_7 + 2K^2)(b_1^2 + 2b_2^2) + 16b_6(b_5 - b_2b_7) + 8b_2b_5^2 + 4b_4^2 + 4K(b_1b_3 + 2b_2b_4) \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} b_1^4b_7^2 + 4Kb_1(b_1b_4 + 2b_2b_3) + 16b_6(b_2b_5 + b_6) \\ +4K^2b_1^2b_2 + 4b_2b_5(b_2b_5 - b_7b_1^2) + 8b_1(b_3b_4 - b_1b_6b_7) \end{pmatrix} \\ + (K^2b_1^4 + 2Kb_1^3b_3 + 4b_1^2b_3^2) \end{pmatrix} \omega^8 \end{aligned} \right)^{0.5} \\
&= \frac{\sqrt{(1 + 4b_2 + 2(b_1^2 + 2b_2^2) + 4b_2b_1^2 + b_1^4)\omega^8}}{\sqrt{(1 + 4b_2 + 2(b_1^2 + 2b_2^2) + 4b_2b_1^2 + b_1^4)\omega^8}} \quad \text{(C-23)} \\
&= \sqrt{\frac{A_{12}^{(1)}\omega^{12} + A_{10}^{(1)}\omega^{10} + A_8^{(1)}\omega^8}{C_8^{(1)}\omega^8}} = \sqrt{\frac{N^{(1)}(\omega)}{D^{(1)}(\omega)}}
\end{aligned}$$

L'exposant (1) désigne la première solution. Les fonctions $A_{12}^{(1)}$, $A_{10}^{(1)}$, $A_8^{(1)}$ et $C_8^{(1)}$ sont données par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A_{12}^{(1)} = M^2 \left(\begin{array}{l} 1+b_1^4+4b_2 \\ +2b_1^2+4b_2^2+4b_1^2b_2 \end{array} \right) = M^2 \left(\begin{array}{l} (1+2b_1^2+b_1^4) \\ +4b_2(1+b_1^2)+4b_2^2 \end{array} \right) = M^2 \left((1+b_1^2)+2b_2 \right)^2 \\
 A_{10}^{(1)} = -2KM \left(1+b_1^4+2(b_1^2+2b_2^2)+4b_2(1+b_1^2) \right) - 4M \left(b_1(b_1b_4+2b_2b_3)+b_4+2b_2b_4+b_1b_3+b_1^3b_3 \right) \\
 A_8^{(1)} = \left(\begin{array}{l} b_7^2+(4b_2b_7-4b_3b_7+K^2)+\left(\begin{array}{l} 2(b_1^2+2b_2^2+2b_1^2b_2)b_7^2+4Kb_4 \\ +4K^2b_2-12b_2b_5b_7-8b_6b_7+4b_5^2 \end{array} \right) \end{array} \right) \\
 + \left(\begin{array}{l} (-4b_3b_7+2K^2)(b_1^2+2b_2^2)+16b_6(b_5-b_2b_7) \\ +8b_2b_5^2+4b_4^2+4K(b_1b_3+2b_2b_4) \end{array} \right) \\
 + \left(\begin{array}{l} b_1^4b_7^2+4Kb_1(b_1b_4+2b_2b_3)+16b_6(b_2b_5+b_6)+4K^2b_1^2b_2 \\ +4b_2b_5(b_2b_5-b_7b_1^2)+8b_1(b_3b_4-b_1b_6b_7) \end{array} \right) \\
 + \left(K^2b_1^4+2Kb_1^3b_3+4b_1^2b_3^2 \right) \\
 C_8^{(1)} = (1+4b_2+2(b_1^2+2b_2^2)+4b_2b_1^2+b_1^4) = ((1+b_1^2)+2b_2)^2
 \end{array} \right. \quad (\text{C-24})$$

L'expression analytique du module de la fonction 'raideur dynamique' pour la première solution $|H^{(1)}(\omega)|$ est indéfinie si la fonction $C_8^{(1)}$ est nulle. Ainsi, le degré minimal et le degré maximal du polynôme dénominateur $D^{(1)}(\omega)$ de la fonction $|H^{(1)}(\omega)|^2$ sont similaires et égaux à 8.

La fonction $A_{12}^{(1)}$ peut être exprimé en fonction de la fonction $C_8^{(1)}$ par $A_{12}^{(1)} = M^2 C_8^{(1)}$. Puisque la fonction $C_8^{(1)}$ ne peut pas être nulle, on déduit alors que le degré maximal du polynôme numérateur $N^{(1)}(\omega)$ de la fonction $|H^{(1)}(\omega)|^2$ est égal à 12.

Il en résulte que pour la première solution, la pente finale S_f du spectre de gain en décibel $|H^{(1)}(\omega)|_{dB}$ est égale à 40 dB/dec (**équation C-24**).

$$\begin{aligned}
 S_f &= \text{pente de la fonction} \left(\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H^{(1)}(\omega)|_{dB} \right) \\
 &= 10 \log_{10} \left(\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{A_{12}^{(1)} \omega^{12} + A_{10}^{(1)} \omega^{10} + A_8^{(1)} \omega^8}{C_8^{(1)} \omega^8} \right) \\
 &= 10 \log_{10} \left(\frac{A_{12}^{(1)} \omega^{12}}{C_8^{(1)} \omega^8} \right) \\
 &= 40 \log_{10}(\omega) + \left(10 \log_{10}(A_{12}^{(1)}) - 10 \log_{10}(C_8^{(1)}) \right)
 \end{aligned} \quad (\text{C-24})$$

Pour la première solution, la pente initiale S_0 du spectre de gain en décibel $|H^{(1)}(\omega)|_{dB}$ peut être horizontale si la fonction $A_8^{(1)}$ est non nulle. Si non, la pente initiale S_0 peut être égale à 20 dB/dec si la fonction $A_{10}^{(1)}$ est non nulle comme elle peut être égale à 40 dB/dec si cette dernière fonction $A_{12}^{(1)}$ est nulle (équation C-25).

$$\begin{aligned}
S_0 &= \text{pente de la fonction} \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} |H^{(1)}(\omega)|_{dB} \right) \\
&= 10 \log_{10} \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{A_{12}^{(1)} \omega^{12} + A_{10}^{(1)} \omega^{10} + A_8^{(1)} \omega^8}{C_8^{(1)} \omega^8} \right) \\
&= \begin{cases} 10 \log_{10} \left(\frac{A_8^{(1)} \omega^8}{C_8^{(1)} \omega^8} \right) = \left(10 \log_{10} (A_8^{(1)}) - 10 \log_{10} (C_8^{(1)}) \right) & \text{si } A_8^{(1)} \neq 0 \\ 10 \log_{10} \left(\frac{A_{10}^{(1)} \omega^{10}}{C_8^{(1)} \omega^8} \right) = 20 \log_{10} (\omega) + \begin{pmatrix} 10 \log_{10} (A_{10}^{(1)}) \\ -10 \log_{10} (C_8^{(1)}) \end{pmatrix} & \text{si } A_8^{(1)} = 0 \text{ et } A_{10}^{(1)} \neq 0 \\ 10 \log_{10} \left(\frac{A_{12}^{(1)} \omega^{12}}{C_8^{(1)} \omega^8} \right) = 40 \log_{10} (\omega) + \begin{pmatrix} 10 \log_{10} (A_{12}^{(1)}) \\ -10 \log_{10} (C_8^{(1)}) \end{pmatrix} & \text{si } A_8^{(1)} = 0 \text{ et } A_{10}^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \text{(C-25)}
\end{aligned}$$

C.3 Modifications de la fonction ‘raideur dynamique’ du modèle à mémoire entier – deuxième solution

L’analyse théorique de la réponse asymptotique de la première solution a été menée dans la partie précédente de cette annexe. Il a été montré que pour la première solution, la pente finale S_f est égale à 40 dB/dec. En revanche, la pente finale S_f expérimentale a été montrée égale à 80dB/dec. On déduit donc que la première solution ne permet pas de reconstruire la réponse asymptotique expérimentale du spectre de gain de la fonction ‘raideur dynamique’.

La deuxième solution consiste à remplacer les relations entre dimensionnels et les paramètres adimensionnels de la première solution par des relations en puissance (**tableau 23**). Ces relations sont d’ordres entiers (m, n, s, h) respectivement associés aux paires $(X(3), Y(3)), (X(4), Y(4)), (k, Y_k)$ et (c, Y_c) .

Tableau 23. Transformations paramètres dimensionnels - paramètres adimensionnels, modèle à mémoire entier (comportement vibratoire, solution 2).

Paramètres dimensionnels	Paramètres adimensionnels
$X(1) = \text{Re}(\alpha_1)$ (sec ⁻¹)	$Y(1) = \frac{X(1)}{\omega}$
$X(2) = \text{Im}(\alpha_1)$ (sec ⁻¹)	$Y(2) = \frac{X(2)}{\omega}$
$X(3) = \text{Re}(a_1)$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(3) = \frac{X(3)}{Mg\omega^m} A_{x_{un}} \overline{\omega}^{m-1}$
$X(4) = \text{Im}(a_1)$ (Nm ⁻¹ sec ⁻¹)	$Y(4) = \frac{X(4)}{Mg\omega^n} A_{x_{un}} \overline{\omega}^{n-1}$
k (Nm ⁻¹)	$Y_k = \frac{k}{Mg\omega^s} A_{x_{un}} \overline{\omega}^s$
c (Nm ⁻¹ sec)	$Y_c = \frac{c}{Mg\omega^h} A_{x_{un}} \overline{\omega}^{h+1}$

En considérant les relations résumées dans le **tableau 23**, les fonctions $(B_i)_{i=1..7}$ du modèle à mémoire deviennent données par les expressions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 B_1 = X(1)^2 + X(2)^2 = (Y(1)^2 + Y(2)^2) \omega^2 = b_1 \omega^2 \\
 B_2 = X(1)^2 - X(2)^2 = (Y(1)^2 - Y(2)^2) \omega^2 = b_2 \omega^2 \\
 B_3 = X(1)X(3) + X(2)X(4) = \left(Y(1) \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{m-1}} Y(3) \omega^{m+1} + Y(2) \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{n-1}} Y(4) \omega^{n+1} \right) = b_{3m} \omega^{m+1} + b_{3n} \omega^{n+1} \\
 B_4 = X(1)X(3) - X(2)X(4) = \left(Y(1) \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{m-1}} Y(3) \omega^{m+1} - Y(2) \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{n-1}} Y(4) \omega^{n+1} \right) = b_{4m} \omega^{m+1} - b_{4n} \omega^{n+1} \\
 B_5 = X(3) = \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{m-1}} Y(3) \omega^m = b_{5m} \omega^m ; B_6 = X(1)X(2)X(4) = Y(1)Y(2) \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{n-1}} Y(4) \omega^{2+n} = b_{6n} \omega^{2+n} \\
 B_7 = c^2 - 2kM = \left(Y_c \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{-h-1}} \right)^2 \omega^{2h} - 2 \left(Y_k \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{-s}} \right) \omega^s M = b_{7h}^2 \omega^{2h} - 2b_{7s} M \omega^s
 \end{array} \right. \quad (\text{C-26})$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l}
 b_s = \left(Y_k \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{-s}} \right) \quad b_1 = Y(1)^2 + Y(2)^2 \quad b_2 = Y(1)^2 - Y(2)^2 \\
 b_{3m} = Y(1) \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{m-1}} Y(3) \quad b_{4m} = b_{3m} \quad b_{3n} = Y(2) \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{n-1}} Y(4) \quad b_{4n} = b_{3n} \\
 b_{5m} = \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{m-1}} Y(3) \quad b_{6n} = Y(1)Y(2) \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{n-1}} Y(4) \quad b_{7h} = Y_c \frac{Mg}{A_{x_{un}} \overline{\omega}^{-h-1}}
 \end{array} \right.$$

Pour la deuxième solution, les fonctions $(A_{2i})_{i=0..6}$ et $(C_{2i})_{i=0..4}$ du modèle à mémoire deviennent données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases}
 A_{12} = M^2 \\
 A_{10} = 4M^2 b_2 \omega^2 + (b_{7h}^2 \omega^{2h} - 2b_s M \omega^s) \\
 A_8 = 2M^2 \begin{pmatrix} b_1^2 \omega^4 \\ +2b_2^2 \omega^4 \end{pmatrix} + 4b_2 \omega^2 \begin{pmatrix} b_{7h}^2 \omega^{2h} \\ -2Mb_s \omega^s \end{pmatrix} - 4M \begin{pmatrix} b_{4m} \omega^{m+1} \\ -b_{4n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_s^2 \omega^{2s} \\ -4b_{7h} \omega^h b_{5m} \omega^m \end{pmatrix} \\
 A_6 = \begin{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} b_{7h}^2 \omega^{2h} \\ -2b_s M \omega^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^2 \omega^4 \\ +2b_2^2 \omega^4 \end{pmatrix} + 4M^2 b_1^2 \omega^4 b_2 \omega^2 - 4M \begin{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} b_{4m} \omega^{m+1} \\ -b_{4n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} b_2 \omega^2 \\ + b_1 \omega^2 \begin{pmatrix} b_{3m} \omega^{m+1} \\ +b_{3n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
 + 4b_s \omega^s \begin{pmatrix} b_{4m} \omega^{m+1} \\ -b_{4n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b_s^2 \omega^{2s} \\ -12b_{7h} \omega^h b_{5m} \omega^m \end{pmatrix} b_2 \omega^2 - 8b_{7h} \omega^h b_{6n} \omega^{2+n} + 4b_{5m}^2 \omega^{2m} \\
 A_4 = \begin{pmatrix} 4(b_{7h}^2 \omega^{2h} - 2Mb_s \omega^s) b_1^2 \omega^4 b_2 \omega^2 - 4b_{7h} \omega^h b_{5m} \omega^m (b_1^2 \omega^4 + 2b_2^2 \omega^4) + 8b_{5m}^2 \omega^{2m} b_2 \omega^2 \\
 + 16b_{6n} \omega^{2+n} (b_{5m} \omega^m - b_{7h} \omega^h b_2 \omega^2) + M^2 b_1^4 \omega^8 \\
 + 4b_s^2 \omega^{2s} b_2^2 \omega^4 + 4 \begin{pmatrix} b_{4m}^2 \omega^{2m+2} + b_{4n}^2 \omega^{2n+2} \\ -2b_{4m} b_{4n} \omega^{m+n+2} \end{pmatrix} + 4b_s \omega^s \begin{pmatrix} b_1 \omega^2 (b_{3m} \omega^{m+1} + b_{3n} \omega^{n+1}) \\ + 2(b_{4m} \omega^{m+1} - b_{4n} \omega^{n+1}) b_2 \omega^2 \end{pmatrix} \\
 + 2b_s^2 \omega^{2s} b_1^2 \omega^4 - 4Mb_1 \omega^2 \begin{pmatrix} b_1 \omega^2 \begin{pmatrix} b_{4m} \omega^{m+1} \\ -b_{4n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b_{3m} \omega^{m+1} \\ +b_{3n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} b_2 \omega^2 \end{pmatrix} \\
 A_2 = \begin{pmatrix} (b_{7h}^2 \omega^{2h} - 2Mb_s \omega^s) b_1^4 \omega^8 + 4b_s \omega^s b_1 \omega^2 \begin{pmatrix} b_1 \omega^2 \begin{pmatrix} b_{4m} \omega^{m+1} \\ -b_{4n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} \\
 + 2 \begin{pmatrix} b_{3m} \omega^{m+1} \\ +b_{3n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} b_2 \omega^2 \end{pmatrix} \\
 + 16b_{6n} \omega^{2+n} \begin{pmatrix} b_{5m} \omega^m b_2 \omega^2 \\ + b_{6n} \omega^{2+n} \end{pmatrix} + 4b_s^2 \omega^{2s} b_1^2 \omega^4 b_2 \omega^2 + 4b_{5m} \omega^m b_2 \omega^2 \begin{pmatrix} b_{5m} \omega^m b_2 \omega^2 \\ -b_{7h} \omega^h b_1^2 \omega^4 \end{pmatrix} \\
 + 8b_1 \omega^2 \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{4m} \omega^{m+1} \\ -b_{4n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{3m} \omega^{m+1} \\ +b_{3n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} \\
 - b_{7h} \omega^h b_{6n} \omega^{2+n} b_1 \omega^2 \end{pmatrix} - 4Mb_1^3 \omega^6 \begin{pmatrix} b_{3m} \omega^{m+1} \\ +b_{3n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} \\
 A_0 = \left(b_s \omega^s b_1^2 \omega^4 + 2 \begin{pmatrix} b_{3m} \omega^{m+1} \\ +b_{3n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} b_1 \omega^2 \right)^2 \\
 C_8 = 1 \quad C_6 = 4b_2 \omega^2 \quad C_4 = 2(b_1^2 + 2b_2^2) \omega^4 \quad C_2 = 4b_2 b_1^2 \omega^6 \quad C_0 = b_1^4 \omega^8
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 A_{12} &= M^2 \\
 A_{10} &= 4M^2 b_2 \omega^2 + b_{7h}^2 \omega^{2h} - 2b_s M \omega^s \\
 A_8 &= 2M^2 \begin{pmatrix} b_1^2 \\ +2b_2^2 \end{pmatrix} \omega^4 + \begin{pmatrix} 4b_2 b_{7h}^2 \omega^{2h+2} \\ -8Mb_2 b_s \omega^{s+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4Mb_{4m} \omega^{m+1} \\ +4Mb_{4n} \omega^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_s^2 \omega^{2s} \\ -4b_{7h} b_{5m} \omega^{m+h} \end{pmatrix} \\
 A_6 &= \left(\begin{pmatrix} 2b_{7h}^2 \begin{pmatrix} b_1^2 \\ +2b_2^2 \end{pmatrix} \omega^{2h+4} - 4b_s \begin{pmatrix} b_1^2 \\ +2b_2^2 \end{pmatrix} M \omega^{s+4} \end{pmatrix} + 4M^2 b_1^2 b_2 \omega^6 + \begin{pmatrix} -4M \begin{pmatrix} b_1 b_{3m} \\ +2b_2 b_{4m} \end{pmatrix} \omega^{m+3} \\ -4M \begin{pmatrix} b_1 b_{3n} \\ -2b_2 b_{4n} \end{pmatrix} \omega^{n+3} \end{pmatrix} \right) \\
 & \quad + \begin{pmatrix} 4b_s b_{4m} \omega^{m+1+s} \\ -4b_s b_{4n} \omega^{n+1+s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b_2 b_s^2 \omega^{2s+2} \\ -12b_2 b_{7h} b_{5m} \omega^{m+h+2} \end{pmatrix} - 8b_{7h} b_{6n} \omega^{2+n+h} + 4b_{5m}^2 \omega^{2m} \\
 A_4 &= \left(\begin{pmatrix} 4b_1^2 b_2 b_{7h}^2 \omega^{2h+6} - 8Mb_1^2 b_2 b_s \omega^{s+6} \end{pmatrix} - 4b_{7h} b_{5m} (b_1^2 + 2b_2^2) \omega^{m+h+4} + 8b_2 b_{5m}^2 \omega^{2m+2} \right. \\
 & \quad + (16b_{5m} b_{6n} \omega^{2+n+m} - 16b_2 b_{6n} b_{7h} \omega^{n+h+4}) + M^2 b_1^4 \omega^8 \\
 & \quad + 4b_2^2 b_s^2 \omega^{2s+4} + \begin{pmatrix} 4b_{4m}^2 \omega^{2m+2} + 4b_{4n}^2 \omega^{2n+2} \\ -8b_{4m} b_{4n} \omega^{m+n+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (4b_1 b_s b_{3m} + 8b_2 b_s b_{4m}) \omega^{m+s+3} \\ (4b_1 b_s b_{3n} - 8b_2 b_s b_{4n}) \omega^{n+s+3} \end{pmatrix} \\
 & \quad \left. + 2b_1^2 b_s^2 \omega^{2s+4} + \begin{pmatrix} (-4Mb_1^2 b_{4m} - 8Mb_1 b_2 b_{3m}) \omega^{m+5} \\ (4Mb_1^2 b_{4n} - 8Mb_1 b_2 b_{3n}) \omega^{n+5} \end{pmatrix} \right) \\
 A_2 &= \left(\begin{pmatrix} b_1^4 b_{7h}^2 \omega^{2h+8} - 2Mb_1^4 b_s \omega^{s+8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (4b_1^2 b_s b_{4m} + 8b_1 b_2 b_s b_{3m}) \omega^{m+s+5} \\ (8b_1 b_2 b_s b_{3n} - 4b_1^2 b_s b_{4n}) \omega^{n+s+5} \end{pmatrix} \right) \\
 & \quad + \begin{pmatrix} 16b_2 b_{5m} b_{6n} \omega^{m+n+4} \\ +16b_{6n}^2 \omega^{4+2n} \end{pmatrix} + 4b_1^2 b_2 b_s^2 \omega^{2s+6} + \begin{pmatrix} 4b_{5m}^2 b_2^2 \omega^{2m+4} \\ -4b_1^2 b_2 b_{5m} b_{7h} \omega^{m+h+6} \end{pmatrix} \\
 & \quad + \begin{pmatrix} (8b_1 b_{3m} b_{4m} \omega^{2m+4} \\ -8b_1 b_{3n} b_{4n} \omega^{2n+4}) \end{pmatrix} - 8b_1^2 b_{7h} b_{6n} \omega^{6+n+h} + \begin{pmatrix} -4Mb_1^3 b_{3m} \omega^{m+7} \\ -4Mb_1^3 b_{3n} \omega^{n+7} \end{pmatrix} \\
 A_0 &= \left(b_1^2 b_s \omega^{s+4} + \begin{pmatrix} 2b_1 b_{3m} \omega^{m+3} \\ +2b_1 b_{3n} \omega^{n+3} \end{pmatrix} \right)^2 = b_1^4 b_s^2 \omega^{2s+8} + \begin{pmatrix} 4b_1^3 b_s b_{3m} \omega^{m+s+7} \\ +4b_1^3 b_s b_{3n} \omega^{n+s+7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b_1^2 b_{3m}^2 \omega^{2m+6} \\ +4b_1^2 b_{3n}^2 \omega^{2n+6} \\ +8b_1^2 b_{3m} b_{3n} \omega^{m+n+6} \end{pmatrix} \\
 C_8 &= 1 \quad C_6 = 4b_2 \omega^2 \quad C_4 = 2(b_1^2 + 2b_2^2) \omega^4 \quad C_2 = 4b_2 b_1^2 \omega^6 \quad C_0 = b_1^4 \omega^8
 \end{aligned} \right. \quad (\text{C-27})
 \end{aligned}$$

Pour déterminer l’expression analytique du module de la fonction ‘raideur dynamique’ pour la deuxième solution $|H^{(2)}(\omega)|$ (équation C-28), il suffit de remplacer les expressions des fonctions $(A_{2i})_{i=0..6}$ et $(C_{2i})_{i=0..4}$ données par l’équation C-27 dans l’équation C-9.

$$\begin{aligned}
 |H^{(2)}(\omega)| &= \sqrt{\frac{A_{12}\omega^{12} + A_{10}\omega^{10} + A_8\omega^8 + A_6\omega^6 + A_4\omega^4 + A_2\omega^2 + A_0}{C_8\omega^8 + C_6\omega^6 + C_4\omega^4 + C_2\omega^2 + C_0}} \\
 &= \left(M^2\omega^{12} + \begin{pmatrix} 4M^2b_2\omega^{12} \\ +b_{7h}^2\omega^{2h+10} \\ -2b_sM\omega^{s+10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2M^2 \begin{pmatrix} b_1^2 \\ +2b_2^2 \end{pmatrix} \omega^{12} + \begin{pmatrix} 4b_2b_{7h}^2\omega^{2h+10} \\ -8Mb_2b_s\omega^{s+10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4Mb_{4m}\omega^{m+9} \\ +4Mb_{4n}\omega^{n+9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_s^2\omega^{2s+8} \\ -4b_{7h}b_{5m}\omega^{m+h+8} \end{pmatrix} \right) \\
 &+ \left(\begin{pmatrix} 2b_{7h}^2(b_1^2 + 2b_2^2)\omega^{2h+10} \\ -4b_s(b_1^2 + 2b_2^2)M\omega^{s+10} \\ +4M^2b_1^2b_2\omega^{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4M \begin{pmatrix} b_1b_{3m} \\ +2b_2b_{4m} \end{pmatrix} \omega^{m+9} \\ -4M \begin{pmatrix} b_1b_{3n} \\ -2b_2b_{4n} \end{pmatrix} \omega^{n+9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b_s b_{4m}\omega^{m+s+7} \\ -4b_s b_{4n}\omega^{n+s+7} \\ +4b_2b_s^2\omega^{2s+8} \\ -12b_2b_{7h}b_{5m}\omega^{m+h+8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8b_{7h}b_{6n}\omega^{n+h+8} \\ +4b_{5m}^2\omega^{2m+6} \end{pmatrix} \right) \\
 &+ \left(\begin{pmatrix} 4b_1^2b_2b_{7h}^2\omega^{2h+10} - 8Mb_1^2b_2b_s\omega^{s+10} - 4b_{7h}b_{5m}(b_1^2 + 2b_2^2)\omega^{m+h+8} + 8b_2b_{5m}^2\omega^{2m+6} + 2(b_1^2 + 2b_2^2)b_s^2\omega^{2s+8} \\ + \begin{pmatrix} 16b_{5m}b_{6n}\omega^{n+m+6} \\ -16b_2b_{6n}b_{7h}\omega^{n+h+8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b_{4m}^2\omega^{2m+6} \\ +4b_{4n}^2\omega^{2n+6} \\ -8b_{4m}b_{4n}\omega^{m+n+6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b_1b_s b_{3m} \\ +8b_2b_s b_{4m} \end{pmatrix} \omega^{m+s+7} \\ + \begin{pmatrix} 4b_1b_s b_{3n} \\ -8b_2b_s b_{4n} \end{pmatrix} \omega^{n+s+7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4Mb_1^2b_{4m} \\ -8Mb_1b_2b_{3m} \end{pmatrix} \omega^{m+9} \\ + \begin{pmatrix} 4Mb_1^2b_{4n} \\ -8Mb_1b_2b_{3n} \end{pmatrix} \omega^{n+9} \end{pmatrix} + M^2b_1^4\omega^{12} \right) \\
 &+ \left(\begin{pmatrix} b_1^4b_{7h}^2\omega^{2h+10} - 2Mb_1^4b_s\omega^{s+10} + \begin{pmatrix} 4b_1^2b_s b_{4m} + 8b_1b_2b_s b_{3m} \\ + (8b_1b_2b_s b_{3n} - 4b_1^2b_s b_{4n}) \omega^{n+s+7} \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^4b_s^2\omega^{2s+8} + \begin{pmatrix} 4b_1^3b_s b_{3m} \\ +4b_1^3b_s b_{3n} \end{pmatrix} \omega^{m+s+7} \end{pmatrix} \right) \\
 &+ \begin{pmatrix} 16b_2b_{5m}b_{6n}\omega^{m+n+6} \\ +16b_{6n}^2\omega^{2n+6} \end{pmatrix} + 4b_1^2b_2b_s^2\omega^{2s+8} + \begin{pmatrix} 4b_{5m}^2b_2^2\omega^{2m+6} \\ -4b_1^2b_2b_{5m}b_{7h}\omega^{m+h+8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b_1^2b_{3m}^2\omega^{2m+6} \\ +4b_1^2b_{3n}^2\omega^{2n+6} \\ +8b_1^2b_{3m}b_{3n}\omega^{m+n+6} \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} 8b_1b_{3m}b_{4m}\omega^{2m+6} \\ -8b_1b_{3n}b_{4n}\omega^{2n+6} \end{pmatrix} - 8b_1^2b_{7h}b_{6n}\omega^{n+h+8} + \begin{pmatrix} -4Mb_1^3b_{3m}\omega^{m+9} \\ -4Mb_1^3b_{3n}\omega^{n+9} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\left(\begin{pmatrix} -4b_{7h}b_{5m} - 12b_2b_{7h}b_{5m} - 4b_{7h}b_{5m}(b_1^2 + 2b_2^2) - 4b_1^2b_2b_{5m}b_{7h} \end{pmatrix} \omega^{m+h+8} \right.}{\sqrt{(1 + 4b_2 + 2(b_1^2 + 2b_2^2) + 4b_2b_1^2 + b_1^4)\omega^8}} \\
 &\left. + \begin{pmatrix} -8b_{7h}b_{6n} - 16b_2b_{6n}b_{7h} - 8b_1^2b_{7h}b_{6n} \end{pmatrix} \omega^{n+h+8} \right) \\
 &+ \left(\begin{pmatrix} -2b_sM - 8Mb_2b_s - 4b_s(b_1^2 + 2b_2^2) - 8Mb_1^2b_2b_s - 2Mb_1^4b_s \end{pmatrix} \omega^{s+10} \right. \\
 &\left. + \begin{pmatrix} 2b_1^2b_s^2 + b_s^2 + 8b_2b_s^2 + b_1^4b_s^2 + 4b_1^2b_2b_s^2 \end{pmatrix} \omega^{2s+8} \right) + \left(M^2 \begin{pmatrix} 1 + 4b_2 + 4b_1^2b_2 + b_1^4 \\ +2(b_1^2 + 2b_2^2) \end{pmatrix} \right) \omega^{12} \\
 &+ \left(\begin{pmatrix} -4M \begin{pmatrix} b_1b_{3m} + 2b_2b_{4m} + b_{4m} \\ +b_1^2b_{4m} + 2b_1b_2b_{3m} + b_1^3b_{3m} \end{pmatrix} \omega^{m+9} \\ -4M \begin{pmatrix} b_1b_{3n} - 2b_2b_{4n} - b_{4n} \\ -b_1^2b_{4n} + 2b_1b_2b_{3n} - b_1^3b_{3n} \end{pmatrix} \omega^{n+9} \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} 4b_s b_{4m} + 4b_1b_s b_{3m} + 8b_2b_s b_{4m} \\ +4b_1^2b_s b_{4m} + 8b_1b_2b_s b_{3m} + 4b_1^3b_s b_{3m} \end{pmatrix} \omega^{m+s+7} \right. \\
 &\left. + \begin{pmatrix} 4b_1b_s b_{3n} - 8b_2b_s b_{4n} - 4b_s b_{4n} \\ +8b_1b_2b_s b_{3n} - 4b_1^2b_s b_{4n} + 4b_1^3b_s b_{3n} \end{pmatrix} \omega^{n+s+7} \right) \\
 &+ \begin{pmatrix} 16b_{5m}b_{6n} - 8b_{4m}b_{4n} + 16b_2b_{5m}b_{6n} + 8b_1^2b_{3m}b_{3n} \end{pmatrix} \omega^{n+m+6} \\
 &+ \begin{pmatrix} 4b_{5m}^2 + 8b_2b_{5m}^2 + 4b_{4m}^2 + 4b_1^2b_{3m}^2 + 4b_{5m}^2b_2^2 + 8b_1b_{3m}b_{4m} \end{pmatrix} \omega^{2m+6} \\
 &+ \begin{pmatrix} 4b_2b_{7h}^2 + b_1^4b_{7h}^2 \\ +2b_{7h}^2(b_1^2 + 2b_2^2) \\ +b_{7h}^2 + 4b_1^2b_2b_{7h}^2 \end{pmatrix} \omega^{2h+10} \\
 &= \frac{\left(\begin{pmatrix} 16b_{5m}b_{6n} - 8b_{4m}b_{4n} + 16b_2b_{5m}b_{6n} + 8b_1^2b_{3m}b_{3n} \end{pmatrix} \omega^{n+m+6} \right.}{\sqrt{(1 + 4b_2 + 2(b_1^2 + 2b_2^2) + 4b_2b_1^2 + b_1^4)\omega^8}} \\
 &\left. + \begin{pmatrix} 4b_{5m}^2 + 8b_2b_{5m}^2 + 4b_{4m}^2 + 4b_1^2b_{3m}^2 + 4b_{5m}^2b_2^2 + 8b_1b_{3m}b_{4m} \end{pmatrix} \omega^{2m+6} \right. \\
 &\left. + \begin{pmatrix} 4b_2b_{7h}^2 + b_1^4b_{7h}^2 \\ +2b_{7h}^2(b_1^2 + 2b_2^2) \\ +b_{7h}^2 + 4b_1^2b_2b_{7h}^2 \end{pmatrix} \omega^{2h+10} \right)
 \end{aligned}$$

$$|H^{(2)}(\omega)| = \frac{\left(\begin{aligned} & \left(A_{m+h+8}^{(2)} \omega^{m+h+8} + A_{n+h+8}^{(2)} \omega^{n+h+8} \right) + \left(A_{s+10}^{(2)} \omega^{s+10} + A_{2s+10}^{(2)} \omega^{2s+8} \right) + A_{12}^{(2)} \omega^{12} \\ & + \left(A_{m+9}^{(2)} \omega^{m+9} + A_{n+9}^{(2)} \omega^{n+9} \right) + \left(A_{m+s+7}^{(2)} \omega^{m+s+7} + A_{n+s+7}^{(2)} \omega^{n+s+7} \right) \\ & + \left(A_{m+n+6}^{(2)} \omega^{n+m+6} + A_{2m+6}^{(2)} \omega^{2m+6} + A_{2n+6}^{(2)} \omega^{2n+6} \right) + A_{2h+10}^{(2)} \omega^{2h+10} \end{aligned} \right)^{0.5}}{\sqrt{C_8^{(2)} \omega^8}} = \sqrt{\frac{N^{(2)}(\omega)}{D^{(2)}(\omega)}} \quad (\text{C-28})$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{aligned} A_{m+h+8}^{(2)} &= \left(-4b_7 b_5 - 12b_2 b_7 b_5 - 4b_7 b_5 (b_1^2 + 2b_2^2) - 4b_1^2 b_2 b_5 b_7 \right) \\ A_{n+h+8}^{(2)} &= \left(-8b_7 b_6 - 16b_2 b_6 b_7 - 8b_1^2 b_7 b_6 \right) \\ A_{s+10}^{(2)} &= \left(-2b_s M - 8Mb_2 b_s - 4b_s (b_1^2 + 2b_2^2) - 8Mb_1^2 b_2 b_s - 2Mb_1^4 b_s \right) \\ A_{2s+8}^{(2)} &= \left(2b_1^2 b_s^2 + b_s^2 + 8b_2 b_s^2 + b_1^4 b_s^2 + 4b_1^2 b_2 b_s^2 \right) \\ A_{12}^{(2)} &= M^2 \left(1 + 4b_2 + 4b_1^2 b_2 + b_1^4 + 2(b_1^2 + 2b_2^2) \right) \\ A_{m+9}^{(2)} &= -4M \left(b_1 b_3 + 2b_2 b_4 + b_4 + b_1^2 b_4 + 2b_1 b_2 b_3 + b_1^3 b_3 \right) \\ A_{n+9}^{(2)} &= -4M \left(b_1 b_3 - 2b_2 b_4 - b_4 - b_1^2 b_4 + 2b_1 b_2 b_3 - b_1^3 b_3 \right) \\ A_{m+s+7}^{(2)} &= \left(4b_s b_4 + 4b_1 b_s b_3 + 8b_2 b_s b_4 + 4b_1^2 b_s b_4 + 8b_1 b_2 b_s b_3 + 4b_1^3 b_s b_3 \right) \\ A_{n+s+7}^{(2)} &= \left(4b_1 b_s b_3 - 8b_2 b_s b_4 - 4b_s b_4 + 8b_1 b_2 b_s b_3 - 4b_1^2 b_s b_4 + 4b_1^3 b_s b_3 \right) \\ A_{m+n+6}^{(2)} &= \left(16b_5 b_6 - 8b_4 b_4 + 16b_2 b_5 b_6 + 8b_1^2 b_3 b_3 \right) \\ A_{2m+6}^{(2)} &= \left(4b_5^2 + 8b_2 b_5^2 + 4b_4^2 + 4b_1^2 b_3^2 + 4b_5^2 b_2^2 + 8b_1 b_3 b_4 \right) \\ A_{2n+6}^{(2)} &= \left(4b_4^2 + 4b_1^2 b_3^2 + 16b_6^2 - 8b_1 b_3 b_4 \right) \\ A_{2h+10}^{(2)} &= \left(4b_2 b_7^2 + b_1^4 b_7^2 + 2b_7^2 (b_1^2 + 2b_2^2) + b_7^2 + 4b_1^2 b_2 b_7^2 \right) \\ C_8^{(2)} &= \left(1 + 4b_2 + 2(b_1^2 + 2b_2^2) + 4b_2 b_1^2 + b_1^4 \right) \end{aligned} \right.$$

Il faut noter que l'exposant (2) désigne la deuxième solution.

Afin d'avoir une pente initiale S_0 du spectre de gain en décibel $|H^{(2)}(\omega)|_{dB}$ égale à 40 dB/dec, il faut assurer que la différence entre le degré minimal $n_0^{(2)}$ du polynôme numérateur $N^{(2)}(\omega)$ de la fonction $|H^{(2)}(\omega)|^2$ et celui ($d_0^{(2)}$) du polynôme dénominateur $D^{(2)}(\omega)$ soit égale à 4.

Pour obtenir une pente finale S_f du spectre de gain en décibel $|H^{(2)}(\omega)|_{dB}$ égale à 80 dB/dec, il faut avoir une différence entre le degré maximal $n_f^{(2)}$ du polynôme numérateur $N^{(2)}(\omega)$ et celui ($d_f^{(2)}$) du polynôme $D^{(2)}(\omega)$ égale à 8.

Le degré maximal et le degré minimal du polynôme $D^{(2)}(\omega)$ sont similaires et égales à 8. La reconstruction de la réponse asymptotique expérimentale du spectre de gain de la fonction 'raideur dynamique' par la deuxième solution nécessite un degré minimal et un degré maximal du polynôme $N^{(2)}(\omega)$ respectivement égaux à 12 et à 16. Ces conditions sont

assurées en vérifiant à la fois les encadrements données par **l'équation C-29** et la présence d'au moins un des termes encadrés à sa borne supérieure.

$$\begin{cases} 12 \leq n_0^{(2)} \leq 16 \\ 12 \leq n_f^{(2)} \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 \leq m+h+8 \leq 16 \\ 12 \leq s+10 \leq 16 \\ 12 \leq 2s+8 \leq 16 \\ 12 \leq m+9 \leq 16 \\ 12 \leq n+9 \leq 16 \\ 12 \leq m+s+7 \leq 16 \\ 12 \leq n+s+7 \leq 16 \\ 12 \leq 2m+6 \leq 16 \\ 12 \leq 2n+6 \leq 16 \\ 12 \leq m+n+6 \leq 16 \\ 12 \leq 2h+10 \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \leq m+h \leq 8 \\ 2 \leq s \leq 6 \\ 2 \leq s \leq 4 \\ 3 \leq m \leq 7 \\ 3 \leq n \leq 7 \\ 5 \leq m+s \leq 9 \\ 5 \leq n+s \leq 9 \\ 3 \leq m \leq 5 \\ 3 \leq n \leq 5 \\ 6 \leq m+n \leq 10 \\ 1 \leq h \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq m \leq 5 \\ 3 \leq n \leq 5 \\ 2 \leq s \leq 6 \\ 1 \leq h \leq 3 \end{cases} \text{ tels que } \begin{cases} 4 \leq m+h \leq 8 \\ 4 \leq n+h \leq 8 \\ 5 \leq m+s \leq 9 \\ 5 \leq n+s \leq 9 \\ 6 \leq m+n \leq 10 \end{cases} \quad \text{(C-29)}$$

Dans les tableaux ci-dessous (**Tableaux C-1 à C-5**), nous présentons les différentes

combinaisons de (m, n, s, h) tels que $\begin{cases} 3 \leq m \leq 5 \\ 3 \leq n \leq 5 \\ 2 \leq s \leq 6 \\ 1 \leq h \leq 3 \end{cases}$ et nous calculons pour chaque combinaison les

termes $m+h, n+h, m+s, n+s$ et $m+n$.

Les combinaisons satisfaisant les conditions $\begin{cases} 4 \leq m+h \leq 8 \\ 4 \leq n+h \leq 8 \\ 5 \leq m+s \leq 9 \\ 5 \leq n+s \leq 9 \\ 6 \leq m+n \leq 10 \end{cases}$ sont présentées dans les **tableaux**

C-1 à C-5 en gras et en italique.

Table C-1. Combinaisons (m, n, s, h) , $s = 2$.

m			n			h			s						$m+h$	$n+h$	$m+s$	$n+s$	$m+n$	(m, n, s, h)
3	4	5	3	4	5	1	2	3	2	3	4	5	6							
×			×			×			×					4	4	5	5	6	(3,3,2,1)	
	×		×			×			×					5	4	6	5	7	(4,3,2,1)	
		×	×			×			×					6	4	7	5	8	(5,3,2,1)	
×				×		×			×					4	5	5	6	7	(3,4,2,1)	
	×			×		×			×					5	5	6	6	8	(4,4,2,1)	
		×		×		×			×					6	5	7	6	9	(5,4,2,1)	
×					×	×			×					4	6	5	7	8	(3,5,2,1)	
	×				×	×			×					5	6	6	7	9	(4,5,2,1)	
		×			×	×			×					6	6	7	7	10	(5,5,2,1)	
×			×				×		×					5	5	5	5	6	(3,3,2,2)	
	×		×				×		×					6	5	6	5	7	(4,3,2,2)	
		×	×				×		×					7	5	7	5	8	(5,3,2,2)	
×				×			×		×					5	6	5	6	7	(3,4,2,2)	
	×			×			×		×					6	6	6	6	8	(4,4,2,2)	
		×		×			×		×					7	6	7	6	9	(5,4,2,2)	
×					×		×		×					5	7	5	7	8	(3,5,2,2)	
	×				×		×		×					6	7	6	7	9	(4,5,2,2)	
		×			×		×		×					7	7	7	7	10	(5,5,2,2)	
×			×					×	×					6	6	5	5	6	(3,3,2,3)	
	×		×					×	×					7	6	6	5	7	(4,3,2,3)	
		×	×					×	×					8	6	7	5	8	(5,3,2,3)	
×				×				×	×					6	7	5	6	7	(3,4,2,3)	
	×			×				×	×					7	7	6	6	8	(4,4,2,3)	
		×		×				×	×					8	7	7	6	9	(5,4,2,3)	
×					×			×	×					6	8	5	7	8	(3,5,2,3)	
	×				×			×	×					7	8	6	7	9	(4,5,2,3)	
		×			×			×	×					8	8	7	7	10	(5,5,2,3)	

Table C-2. Combinaisons (m, n, s, h) , $s = 3$.

m			n			h			s						$m+h$	$n+h$	$m+s$	$n+s$	$m+n$	(m, n, s, h)
3	4	5	3	4	5	1	2	3	2	3	4	5	6							
×			×			×				×				4	4	6	6	6	(3,3,3,1)	
	×		×			×				×				5	4	7	6	7	(4,3,3,1)	
		×	×			×				×				6	4	8	6	8	(5,3,3,1)	
×				×		×				×				4	5	6	7	7	(3,4,3,1)	
	×			×		×				×				5	5	7	7	8	(4,4,3,1)	
		×		×		×				×				6	5	8	7	9	(5,4,3,1)	
×					×	×				×				4	6	6	8	8	(3,5,3,1)	
	×				×	×				×				5	6	7	8	9	(4,5,3,1)	
		×			×	×				×				6	6	8	8	10	(5,5,3,1)	
×			×				×			×				5	5	6	6	6	(3,3,3,2)	
	×		×				×			×				6	5	7	6	7	(4,3,3,2)	
		×	×				×			×				7	5	8	6	8	(5,3,3,2)	
×				×			×			×				5	6	6	7	7	(3,4,3,2)	
	×			×			×			×				6	6	7	7	8	(4,4,3,2)	
		×		×			×			×				7	6	8	7	9	(5,4,3,2)	
×					×		×			×				5	7	6	8	8	(3,5,3,2)	
	×				×		×			×				6	7	7	8	9	(4,5,3,2)	
		×			×		×			×				7	7	8	8	10	(5,5,3,2)	
×			×					×		×				6	6	6	6	6	(3,3,3,3)	
	×		×					×		×				7	6	7	6	7	(4,3,3,3)	
		×	×					×		×				8	6	8	6	8	(5,3,3,3)	
×				×				×		×				6	7	6	7	7	(3,4,3,3)	
	×			×				×		×				7	7	7	7	8	(4,4,3,3)	
		×		×				×		×				8	7	8	7	9	(5,4,2,3)	
×					×			×		×				6	8	6	8	8	(3,5,3,3)	
	×				×			×		×				7	8	7	8	9	(4,5,3,3)	
		×			×			×		×				8	8	8	8	10	(5,5,3,3)	

Table C-3. Combinaisons (m,n,s,h) , $s = 4$.

m			n			h			s						$m+h$	$n+h$	$m+s$	$n+s$	$m+n$	(m,n,s,h)
3	4	5	3	4	5	1	2	3	2	3	4	5	6							
×			×			×					×			4	4	7	7	6	(3,3,4,1)	
	×		×			×					×			5	4	8	7	7	(4,3,4,1)	
		×	×			×					×			6	4	9	7	8	(5,3,4,1)	
×				×		×					×			4	5	7	8	7	(3,4,4,1)	
	×			×		×					×			5	5	8	8	8	(4,4,4,1)	
		×		×		×					×			6	5	9	8	9	(5,4,4,1)	
×					×	×					×			4	6	7	9	8	(3,5,4,1)	
	×				×	×					×			5	6	8	9	9	(4,5,4,1)	
		×			×	×					×			6	6	9	9	10	(5,5,4,1)	
×			×				×				×			5	5	7	7	6	(3,3,4,2)	
	×		×				×				×			6	5	8	7	7	(4,3,4,2)	
		×	×				×				×			7	5	9	7	8	(5,3,4,2)	
×				×			×				×			5	6	7	8	7	(3,4,4,2)	
	×			×			×				×			6	6	8	8	8	(4,4,4,2)	
		×		×			×				×			7	6	9	8	9	(5,4,4,2)	
×					×		×				×			5	7	7	9	8	(3,5,4,2)	
	×				×		×				×			6	7	8	9	9	(4,5,4,2)	
		×			×		×				×			7	7	9	9	10	(5,5,4,2)	
×			×					×			×			6	6	7	7	6	(3,3,4,3)	
	×		×					×			×			7	6	8	7	7	(4,3,4,3)	
		×	×					×			×			8	6	9	7	8	(5,3,4,3)	
×				×				×			×			6	7	7	8	7	(3,4,4,3)	
	×			×				×			×			7	7	8	8	8	(4,4,4,3)	
		×		×				×			×			8	7	9	8	9	(5,4,4,3)	
×					×			×			×			6	8	7	9	8	(3,5,4,3)	
	×				×			×			×			7	8	8	9	9	(4,5,4,3)	
		×			×			×			×			8	8	9	9	10	(5,5,4,3)	

Table C-4. Combinaisons (m, n, s, h) , $s = 5$.

m			n			h			s						$m+h$	$n+h$	$m+s$	$n+s$	$m+n$	(m, n, s, h)
3	4	5	3	4	5	1	2	3	2	3	4	5	6							
×			×			×						×		4	4	8	8	6	(3,3,5,1)	
	×		×			×						×		5	4	9	8	7	(4,3,5,1)	
		×	×			×						×		6	4	10	8	8	(5,3,5,1)	
×				×		×						×		4	5	8	9	7	(3,4,5,1)	
	×			×		×						×		5	5	9	9	8	(4,4,5,1)	
		×		×		×						×		6	5	10	9	9	(5,4,5,1)	
×					×	×						×		4	6	8	10	8	(3,5,5,1)	
	×				×	×						×		5	6	9	10	9	(4,5,5,1)	
		×			×	×						×		6	6	10	10	10	(5,5,5,1)	
×			×				×					×		5	5	8	8	6	(3,3,5,2)	
	×		×				×					×		6	5	9	8	7	(4,3,5,2)	
		×	×				×					×		7	5	10	8	8	(5,3,5,2)	
×				×			×					×		5	6	8	9	7	(3,4,5,2)	
	×			×			×					×		6	6	9	9	8	(4,4,5,2)	
		×		×			×					×		7	6	10	9	9	(5,4,5,2)	
×					×		×					×		5	7	8	10	8	(3,5,5,2)	
	×				×		×					×		6	7	9	10	9	(4,5,5,2)	
		×			×		×					×		7	7	10	10	10	(5,5,5,2)	
×			×					×				×		6	6	8	8	6	(3,3,5,3)	
	×		×					×				×		7	6	9	8	7	(4,3,5,3)	
		×	×					×				×		8	6	10	8	8	(5,3,5,3)	
×				×				×				×		6	7	8	9	7	(3,4,5,3)	
	×			×				×				×		7	7	9	9	8	(4,4,5,3)	
		×		×				×				×		8	7	10	9	9	(5,4,5,3)	
×					×			×				×		6	8	8	10	8	(3,5,5,3)	
	×				×			×				×		7	8	9	10	9	(4,5,5,3)	
		×			×			×				×		8	8	10	10	10	(5,5,5,3)	

Table C-2. Combinaisons (m,n,s,h) , $s=6$.

m			n			h			s						$m+h$	$n+h$	$m+s$	$n+s$	$m+n$	(m,n,s,h)
3	4	5	3	4	5	1	2	3	2	3	4	5	6							
×			×			×							×	4	4	9	9	6	(3,3,6,1)	
	×		×			×							×	5	4	10	9	7	(4,3,6,1)	
		×	×			×							×	6	4	11	9	8	(5,3,6,1)	
×				×		×							×	4	5	9	10	7	(3,4,6,1)	
	×			×		×							×	5	5	10	10	8	(4,4,6,1)	
		×		×		×							×	6	5	11	10	9	(5,4,6,1)	
×					×	×							×	4	6	9	11	8	(3,5,6,1)	
	×				×	×							×	5	6	10	11	9	(4,5,6,1)	
		×			×	×							×	6	6	11	11	10	(5,5,6,1)	
×			×				×						×	5	5	9	9	6	(3,3,6,2)	
	×		×				×						×	6	5	10	9	7	(4,3,6,2)	
		×	×				×						×	7	5	11	9	8	(5,3,6,2)	
×				×			×						×	5	6	9	10	7	(3,4,6,2)	
	×			×			×						×	6	6	10	10	8	(4,4,6,2)	
		×		×			×						×	7	6	11	10	9	(5,4,6,2)	
×					×		×						×	5	7	9	11	8	(3,5,6,2)	
	×				×		×						×	6	7	10	11	9	(4,5,6,2)	
		×			×		×						×	7	7	11	11	10	(5,5,6,2)	
×			×					×					×	6	6	9	9	6	(3,3,6,3)	
	×		×					×					×	7	6	10	9	7	(4,3,6,3)	
		×	×					×					×	8	6	11	9	8	(5,3,6,3)	
×				×				×					×	6	7	9	10	7	(3,4,6,3)	
	×			×				×					×	7	7	10	10	8	(4,4,6,3)	
		×		×				×					×	8	7	11	10	9	(5,4,6,3)	
×					×			×					×	6	8	9	11	8	(3,5,6,3)	
	×				×			×					×	7	8	10	11	9	(4,5,6,3)	
		×			×			×					×	8	8	11	11	10	(5,5,6,3)	

On constate à partir des **tableaux C-1 à C-5** que le nombre des combinaisons, qui permettent d'avoir un degré minimal et un degré maximal du polynôme $N^{(2)}(\omega)$ respectivement égaux à 12 et 16, est égal à **72**.

Les deux entiers (m, n) sont associés respectivement à la partie réelle et à la partie imaginaire du résidu viscoélastique a_1 . On peut supposer que $m = n$ pour réduire le nombre de combinaisons admissibles à **22**.

Les **équations C-5** et **C-26**, rappelées ci-dessous, nous permettent de déterminer l'expression analytique du pouvoir conservatif de la mousse pour la deuxième solution.

$$E_c(\omega) = \frac{\begin{pmatrix} -M & (-2MB_2 + k) & (-MB_1^2 + 2kB_2 + 2B_4) & (kB_1^2 + 2B_3B_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 2B_2 & B_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (\text{C-5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = X(1)^2 + X(2)^2 = (Y(1)^2 + Y(2)^2)\omega^2 = b_1\omega^2 \\ B_2 = X(1)^2 - X(2)^2 = (Y(1)^2 - Y(2)^2)\omega^2 = b_2\omega^2 \\ B_3 = X(1)X(3) + X(2)X(4) = \left(Y(1)\frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{m-1}}Y(3)\omega^{m+1} + Y(2)\frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{n-1}}Y(4)\omega^{n+1} \right) = b_{3m}\omega^{m+1} + b_{3n}\omega^{n+1} \\ B_4 = X(1)X(3) - X(2)X(4) = \left(Y(1)\frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{m-1}}Y(3)\omega^{m+1} - Y(2)\frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{n-1}}Y(4)\omega^{n+1} \right) = b_{4m}\omega^{m+1} - b_{4n}\omega^{n+1} \\ B_5 = X(3) = \frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{m-1}}Y(3)\omega^m = b_{5m}\omega^m ; B_6 = X(1)X(2)X(4) = Y(1)Y(2)\frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{n-1}}Y(4)\omega^{2+n} = b_{6n}\omega^{2+n} \\ B_7 = c^2 - 2kM = \left(Y_c \frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{-h-1}} \right)^2 \omega^{2h} - 2 \left(Y_k \frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{-s}} \right) \omega^s M = b_{7h}^2 \omega^{2h} - 2b_{7s} M \omega^s \end{array} \right. \quad (\text{C-26})$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} b_s = \left(Y_k \frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{-s}} \right) \quad b_1 = Y(1)^2 + Y(2)^2 \quad b_2 = Y(1)^2 - Y(2)^2 \\ b_{3m} = Y(1)\frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{m-1}}Y(3) \quad b_{4m} = b_{3m} \quad b_{3n} = Y(2)\frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{n-1}}Y(4) \quad b_{4n} = b_{3n} \\ b_{5m} = \frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{m-1}}Y(3) \quad b_{6n} = Y(1)Y(2)\frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{n-1}}Y(4) \quad b_{7h} = Y_c \frac{Mg}{A_{x_{un}}\overline{\omega}^{-h-1}} \end{array} \right.$$

L'expression analytique du pouvoir conservatif pour la deuxième solution est donnée par l'équation C-30.

$$\begin{aligned}
 E_c^{(2)}(\omega) &= \frac{\begin{pmatrix} -Mb_1^2\omega^4 + 2b_s\omega^s b_2\omega^2 & b_s\omega^s b_1^2\omega^4 \\ -M(-2Mb_2\omega^2 + b_s\omega^s) & +2\begin{pmatrix} b_{4m}\omega^{m+1} \\ -b_{4n}\omega^{n+1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_s\omega^s b_1^2\omega^4 \\ +2\begin{pmatrix} b_{3m}\omega^{m+1} \\ -b_{3n}\omega^{n+1} \end{pmatrix} b_1\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \omega^4 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} -M\omega^6 + \begin{pmatrix} -2Mb_2\omega^6 \\ +b_s\omega^{s+4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Mb_1^2\omega^6 + 2b_s b_2\omega^{s+4} \\ +\begin{pmatrix} 2b_{4m}\omega^{m+3} \\ -2b_{4n}\omega^{n+3} \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_s b_1^2\omega^{s+4} \\ +\begin{pmatrix} 2b_1 b_{3m}\omega^{m+3} \\ -2b_1 b_{3n}\omega^{n+3} \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{(1+2b_2+b_1^2)\omega^4} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} -M(1+2b_2+b_1^2) & b_s(1+2b_2+b_1^2) & (2b_1 b_{3m}+2b_{4m}) & (-2b_1 b_{3n}-2b_{4n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^{s+4} \\ \omega^{m+3} \\ \omega^{n+3} \end{pmatrix}}{(1+2b_2+b_1^2)\omega^4} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} -M(1+2b_2+b_1^2) & b_s(1+2b_2+b_1^2) & \begin{pmatrix} 2b_1 b_{3m}-2b_1 b_{3n} \\ +2b_{4m}-2b_{4n} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^6 \\ \omega^{s+4} \\ \omega^{m+3} \end{pmatrix}}{(1+2b_2+b_1^2)\omega^4} \quad \text{si } m=n \quad \text{(C-30)}
 \end{aligned}$$

La fonction $(1+2b_2+b_1^2)$ est toujours positive. Si $m > 3$ alors pour avoir $E_c^{(2)}(\omega)$ au voisinage de $\omega=0$ il faut avoir $s=2$. Ceci nous a permis de réduire le nombre de combinaisons à 11. Ces 11 combinaisons ont été résumées dans le **tableau 24** du troisième chapitre.

Tableau 24. Combinaisons (m,n,s,h) considérées lors d'identification des paramètres du modèle développé afin d'étudier le comportement vibratoire de la mousse A.

(5,5,2,1)	(5,5,2,2)	(5,5,2,3)	(4,4,2,3)	(3,3,2,3)	(3,3,3,3)	(3,3,4,3)	(3,3,5,3)
(3,3,6,3)	(3,3,6,2)	(3,3,6,1)					

Conclusion

Dans l'annexe C, l'expression analytique de la fonction 'raideur dynamique' du modèle à mémoire entier linéaire a été développée pour décrire le comportement de la mousse de polyuréthane soumise à des vibrations entretenues.

Egalement, les expressions analytiques du spectre de gain, du pouvoir conservatif et du pouvoir dissipatif de la mousse de polyuréthane ainsi que l'expression analytique du facteur de perte ont été déduites à partir de l'expression analytique de la fonction raideur dynamique du modèle à mémoire entier.

La discussion de la réponse asymptotique du spectre de gain analytique a montré que le modèle à mémoire entier n'est pas capable de reconstruire la réponse asymptotique expérimentale.

Deux solutions, qui ont consisté à apporter des modifications à la fonction 'raideur dynamique', ont été développées afin d'assurer l'aptitude à reconstruire l'allure asymptotique.

Le principe des modifications a été de remplacer les paramètres dimensionnels du modèle à mémoire entier par des paramètres adimensionnels qui devaient être indépendants des conditions de sollicitations.

Pour la deuxième solution, les relations linéaires entre les paramètres dimensionnels et les paramètres adimensionnels de la première solution ont été remplacé par des relations en puissance.

L'analyse des expressions analytiques de la fonction 'raideur dynamique' et du spectre de gain ainsi que du pouvoir conservatif nous a permis de dégager la meilleure solution qui permet de reconstruire l'allure asymptotique des diagrammes de BODE expérimentaux.