



**HAL**  
open science

# Méthodes de réduction en dynamique explicite multi-échelles pour l'analyse des structures complexes sous impact

Vincent Faucher

► **To cite this version:**

Vincent Faucher. Méthodes de réduction en dynamique explicite multi-échelles pour l'analyse des structures complexes sous impact. Mécanique [physics]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2003. Français. NNT: . tel-01018792

**HAL Id: tel-01018792**

**<https://theses.hal.science/tel-01018792>**

Submitted on 7 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE DE DOCTORAT  
DE  
L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Spécialité :  
**Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil**

Présentée par :  
Vincent FAUCHER

Pour obtenir le grade de :  
**DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Sujet de la thèse :  
**Méthodes de réduction en dynamique explicite multi-échelles pour  
l'analyse des structures complexes sous impact**

Soutenue le 24 juin 2003

Composition du jury :

---

M. GERADIN Michel	Président
M. BEN DHIA Hachmi	Rapporteur
M. LEHOUEDEC Donatien	Rapporteur
M. BONINI Jérôme	Examineur
M. BUNG Hariddh	Examineur
M. COMBESURE Alain	Examineur
M. IBRAHIMBEGOVIC Adnan	Examineur
M. POTAPOV Sergueï	Examineur

---

**Laboratoire de Mécanique et Technologie**  
ENS de Cachan - CNRS - Université Paris 6  
61, avenue du Président Wilson  
94235 CACHAN CEDEX (FRANCE)

# Table des matières

<i>Introduction</i> .....	7
---------------------------	---

<i>Une méthode multi-domaines pour la dynamique explicite des structures</i> .....	11
--	----

<b>1.1. Résolution explicite d'un problème de dynamique non-linéaire</b> .....	<b>12</b>
1.1.1. Une formulation lagrangienne en grandes transformations .....	13
1.1.2. Discrétisation en espace - Méthode des éléments finis.....	16
1.1.3. Discrétisation en temps - Schéma explicite des différences centrées .....	18
1.1.4. Algorithme d'intégration en temps.....	22
<b>1.2. Méthode multi-échelles pour la dynamique explicite</b> .....	<b>25</b>
1.2.1. Un bref état de l'art des méthodes multi-domaines en mécanique des structures ....	25
1.2.2. La méthode FETI.....	29
1.2.3. Plusieurs échelles de temps .....	30
1.2.4. Une première approche multi-échelles en espace : gestion des maillages non-conformes.....	34
<b>1.3. Implantation dans EUROPLEXUS</b> .....	<b>39</b>
1.3.1. Calcul des coefficients des relations de collage incompatible en 2D et 3D .....	39
1.3.2. Traitement du problème d'interface.....	43
1.3.3. Exemples de validation.....	44

<i>Réduction modale sur les sous-domaines linéaires en petits déplacements</i> .....	49
--	----

<b>2.1. Réduction modale</b> .....	<b>50</b>
2.1.1. Modes de réduction .....	51
2.1.2. Identification des directions prépondérantes dans un sous-espace .....	55
2.1.3. Propagation d'ondes et projection modale .....	56
2.1.4. Dissipation des hautes fréquences dans la structure .....	59
2.1.5. Stabilité de l'intégration explicite .....	60
<b>2.2. Introduction d'un sous-domaine réduit dans le formalisme à plusieurs échelles de temps et d'espace</b> .....	<b>62</b>
2.2.1. Ecriture du système couplé.....	62
2.2.2. Matrice de masse diagonale pour les sous-domaines projetés.....	63
2.2.3. Singularités potentielles de l'opérateur d'interface .....	65
2.2.4. Coût de résolution du problème condensé sur les interfaces .....	67
2.2.5. Jeu de modes dédié au couplage dual sur les interfaces : modes étendus.....	68
<b>2.3. Exemples</b> .....	<b>71</b>
2.3.1. Chaînage entre un code de calcul vibratoire et EUROPLEXUS .....	71
2.3.2. Impact de la projection modale locale sur le problème d'interface.....	73
2.3.3. Structure 3D massive.....	75
2.3.4. Structure 3D coque .....	78
<b>2.4. Conclusion intermédiaire</b> .....	<b>83</b>

<i>Réduction modale en présence de rotations rigides non-linéaires</i> .....	85
--	----

<b>3.1. Rotations finies en mécanique</b> .....	<b>86</b>
3.1.1. Algèbre des rotations .....	86
3.1.2. Paramétrages classiques des rotations .....	88
3.1.3. Systèmes flexibles en rotation finie.....	91

3.1.4.	Orientation des développements.....	94
<b>3.2.</b>	<b>Méthode modale multi-échelles explicite .....</b>	<b>96</b>
3.2.1.	Paramétrage des mouvements d'ensemble .....	96
3.2.2.	Système dynamique local réduit.....	98
3.2.3.	Linéarisation des liaisons rigides et problème matriciel à résoudre .....	101
3.2.4.	Etude de la stabilité.....	103
3.2.5.	Perspectives pour le traitement des forces gyroscopiques.....	106
<b>3.3.</b>	<b>Système multi-domaines couplé.....</b>	<b>107</b>
3.3.1.	Eléments massifs à degrés de liberté de translations .....	107
3.3.2.	Eléments comprenant des degrés de liberté de rotation.....	108
<b>3.4.</b>	<b>Traitement spécifique du problème condensé sur les interfaces .....</b>	<b>111</b>
3.4.1.	Décompte des opérations élémentaires.....	111
3.4.2.	Recherche d'une méthode améliorée pour les cas modaux .....	113
3.4.3.	Choix d'une méthode.....	118
3.4.4.	Jeu de modes particuliers dans le cas de la réduction multi-échelles .....	120
<b>3.5.</b>	<b>Développement des nouvelles fonctionnalités dans EUROPLEXUS .....</b>	<b>123</b>
3.5.1.	Résolution du problème <i>free</i> multi-échelles .....	123
3.5.2.	Traitement du problème d'interface .....	125
3.5.3.	Structure du fichier d'échange avec le code vibratoire.....	127
<b>3.6.</b>	<b>Exemples.....</b>	<b>128</b>
3.6.1.	Massif en rotation en 3D .....	128
3.6.2.	Massif en rotation en 2D déformations planes .....	130
3.6.3.	Impact sur un moteur d'avion.....	132
<b>3.7.</b>	<b>Vers un traitement avec réduction des structures flexibles en rotation d'ensemble à grande vitesse.....</b>	<b>138</b>
3.7.1.	Exemple académique : précession d'une toupie symétrique.....	138
3.7.2.	Rotation propre forcée à grande vitesse.....	140
3.7.3.	Précontrainte.....	143
3.7.4.	Exemple .....	143
3.7.5.	Difficultés spécifiques issues des rotations à grande vitesse.....	146

---

<i>Conclusion.....</i>	<i>151</i>
------------------------	------------

<i>Bibliographie.....</i>	<i>153</i>
---------------------------	------------

## Table des illustrations

FIGURE [1.1.1] : Configuration mécanique de référence .....	12
FIGURE [1.1.1.1] : Description lagrangienne du mouvement.....	14
FIGURE [1.1.1.2] : Variations de longueur et variations angulaires .....	15
FIGURE [1.1.1.3] : Transformation d'un volume élémentaire .....	16
FIGURE [1.1.2.1] : Découpage en éléments.....	16
FIGURE [1.1.2.2] : Support des fonctions d'interpolation .....	17
FIGURE [1.1.4.1] : Algorithme d'intégration explicite .....	24
FIGURE [1.2.1.1] : Couplage primal aux interfaces .....	26
FIGURE [1.2.1.2] : Couplage dual aux interfaces.....	27
FIGURE [1.2.3.1] : Deux échelles de temps - Pas constants et multiples l'un de l'autre.....	31
FIGURE [1.2.3.2] : Deux échelles de temps – Pas variables et indépendants.....	33
FIGURE [1.2.4.1] : Maillages non-conformes - Découplage de la taille des éléments .....	35
FIGURE [1.2.4.2] : Méthode optimale - Support des multiplicateurs.....	36
FIGURE [1.2.4.3] : Méthode optimale 2D - Déformation possible de l'interface.....	37
FIGURE [1.2.4.4] : Méthode mortar - Support des multiplicateurs.....	37
FIGURE [1.3.1.1] : Intégrales de collage - Cas 2D, interface linéique .....	39
FIGURE [1.3.1.2] : Support de triangulation initial .....	40
FIGURE [1.3.1.3] : Triangulation initiale.....	40
FIGURE [1.3.1.4] : Intersections restantes .....	40
FIGURE [1.3.1.5] : Triangulation finale.....	41
FIGURE [1.3.1.6] : Projection sur un triangle .....	42
FIGURE [1.3.1.7] : Projection sur un quadrangle.....	42
FIGURE [1.3.2.1] : Interfaces et plusieurs échelles de temps.....	44
FIGURE [1.3.3.1] : Massif 2D – Géométrie, maillages et sous-domaines.....	45
FIGURE [1.3.3.2] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps $6.10^{-2}$ s .....	45
FIGURE [1.3.3.3] : Déplacement au point $\mathbf{S}$ .....	45
FIGURE [1.3.3.4] : Cylindre 3D coque - Géométrie, maillages et sous-domaines .....	46
FIGURE [1.3.3.5] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps $4,6.10^{-2}$ s .....	46
FIGURE [1.3.3.6] : Déplacement dans la direction verticale au point $\mathbf{S}$ .....	46
FIGURE [1.3.3.7] : Massif 3D - Géométrie, maillages et sous-domaines .....	47
FIGURE [1.3.3.8] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps $3,6.10^{-2}$ s .....	47
FIGURE [1.3.3.9] : Déplacement dans la direction longitudinale au point $\mathbf{S}$ .....	47
FIGURE [2.1.1] : Exemple introductif - Géométrie et modèles utilisés.....	50
FIGURE [2.1.2] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps $2.10^{-2}$ s .....	50
FIGURE [2.1.3] : Déplacement au point $\mathbf{S}$ .....	51
FIGURE [2.1.1.1] : Participation d'un mode à la réponse totale en fonction de la fréquence .....	54
FIGURE [2.1.3.1] : Poutre encastree-libre en traction-compression .....	56
FIGURE [2.1.3.2] : 1 <sup>er</sup> cas de chargement - Répartition temporelle et spectre .....	57
FIGURE [2.1.3.3] : 2 <sup>ème</sup> cas de chargement - Répartition temporelle et spectre .....	57
FIGURE [2.1.3.4] : Sollicitation lente - Calcul éléments finis classique .....	57
FIGURE [2.1.3.5] : Sollicitation lente - Calcul modal.....	57
FIGURE [2.1.3.6] : Sollicitation rapide - Calcul éléments finis classique .....	58
FIGURE [2.1.3.7] : Sollicitation rapide - Calcul modal .....	58
FIGURE [2.1.3.8] : Sollicitation rapide - Calcul modal avec bande de fréquence étendue .....	58
FIGURE [2.1.3.9] : Sollicitation rapide – Calcul classique avec masse concentrée .....	59
FIGURE [2.1.4.1] : Poutre en traction-compression - Matériau élasto-plastique.....	59
FIGURE [2.1.4.2] : Déformations plastiques dans la barre .....	60
FIGURE [2.1.4.3] : Spectre au point $\mathbf{S}_2$ .....	60
FIGURE [2.1.4.4] : Spectre au point $\mathbf{S}_3$ .....	60
FIGURE [2.2.3.1] : Redondance potentielle en cas de projection modale .....	65
FIGURE [2.2.4.1] : Allègement du problème d'interface - Structure modèle .....	69
FIGURE [2.2.4.2] : Allègement du problème d'interface - Solution modale alternative .....	69

FIGURE [2.3.1.1] : Chaînage code vibratoire / EUROPLEXUS – Géométrie et maillage .....	71
FIGURE [2.3.1.2] : Déplacement au point <b>S</b> dans les deux directions d'espace .....	72
FIGURE [2.3.2.1] : Coût du problème d'interface – Géométrie et maillage.....	73
TABLEAU [2.3.2.1] : Nombre total de degrés de liberté.....	73
TABLEAU [2.3.2.2] : Nombre de termes non-nuls dans l'opérateur de condensation .....	73
TABLEAU [2.3.2.3] : Pas de temps sur les sous-domaines .....	74
FIGURE [2.3.2.2] : Déplacement au point <b>S</b> dans les deux directions d'espace .....	74
FIGURE [2.3.3.1] : Structure 3D massive - Maillage .....	75
FIGURE [2.3.3.2] : Chargement et conditions aux limites .....	75
FIGURE [2.3.3.3] : Décomposition en sous-domaines .....	76
FIGURE [2.3.3.4] : Modes propres libres sur le sous-domaine 3.....	77
TABLEAU [2.3.3.1] : Pas de temps sur les sous-domaines .....	77
FIGURE [2.3.3.5] : Déplacement au point <b>S</b> <sub>1</sub> .....	77
FIGURE [2.3.3.6] : Déplacement au point <b>S</b> <sub>2</sub> .....	77
TABLEAU [2.3.3.2] : Temps de calcul pour 2.10 <sup>-2</sup> s de simulation en séquentiel sur SGI Origin 2000	78
FIGURE [2.3.4.1] : Structure 3D coque – Ilot nucléaire .....	78
FIGURE [2.3.4.2] : Ilot nucléaire - Maillage et conditions aux limites.....	79
FIGURE [2.3.4.3] : Fonction d'application temporelle du chargement.....	79
FIGURE [2.3.4.4] : Décomposition en sous-domaines .....	80
FIGURE [2.3.4.5] : Modes de vibration encastés (internes et externes) .....	80
TABLEAU [2.3.4.1] : Pas de temps sur les sous-domaines .....	81
FIGURE [2.3.4.6] : Déplacements aux points <b>S</b> <sub>1</sub> , <b>S</b> <sub>2</sub> et <b>S</b> <sub>3</sub> .....	81
TABLEAU [2.3.4.2] : Temps de calcul pour 1,6.10 <sup>-1</sup> s de simulation en séquentiel sur SGI Origin 2000	82
.....	
FIGURE [3.1.1] : Balancier - Géométrie et maillage .....	86
FIGURE [3.1.2] : Déformée à l'instant 0,58 s.....	86
FIGURE [3.1.1.1] : Élément de so(3) et élément de SO(3) pour une même rotation de vecteur <b>w</b> .....	87
FIGURE [3.1.2.1] : Vecteur rotation.....	89
FIGURE [3.1.2.2] : Angles d'Euler RTL.....	90
FIGURE [3.1.3.1] : Structure arborescente .....	92
FIGURE [3.1.3.2] : Floating frame of reference.....	92
TABLEAU [3.4.1.1] : Configurations pour l'étude du coût du problème d'interface .....	111
TABLEAU [3.4.1.2] : Nombres d'opérations pour une inversion directe par la méthode de Cholesky	112
FIGURE [3.4.1.1] : Comparaison des nombres d'opérations pour différentes valeurs de N <sub>M</sub> .....	113
TABLEAU [3.4.2.1] : Nombres d'opération pour l'inversion itérative par la méthode de Jacobi.....	116
TABLEAU [3.4.2.2] : Nombres d'opérations pour une itération de l'algorithme du gradient conjugué	118
.....	
TABLEAU [3.4.2.3] : Nombres d'opérations pour l'inversion par la méthode du gradient conjugué.	118
FIGURE [3.4.3.1] : Abaques pour la réduction modale linéaire .....	119
FIGURE [3.4.3.2] : Abaques pour la réduction modale multi-échelles .....	120
FIGURE [3.4.4.1] : Chargement d'interface sur le sous-domaine 2B avec réduction multi-échelles...	121
FIGURE [3.6.1.1] : Massif en rotation 3D - Maillage et chargement .....	128
FIGURE [3.6.1.2] : Décomposition en sous-domaines .....	129
TABLEAU [3.6.1.1] : Pas de temps sur les sous-domaines .....	129
FIGURE [3.6.1.3] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps 6,0.10 <sup>-2</sup> s .....	129
FIGURE [3.6.1.4] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps 1,5.10 <sup>-1</sup> s .....	130
FIGURE [3.6.1.5] : Pression et contrainte de Von Mises dans l'élément <b>E</b> .....	130
FIGURE [3.6.2.1] : Massif en rotation 2D - Maillage, chargement et sous-domaines.....	131
FIGURE [3.6.3.1] : Impact sur un moteur d'avion - Maillage et conditions aux limites.....	132
FIGURE [3.6.3.2] : Chargement, sous-domaines et modèles réduits.....	133
TABLEAU [3.6.3.1] : Matériaux.....	133
FIGURE [3.6.3.3] : Fonction d'application temporelle du chargement .....	134
TABLEAU [3.6.3.2] : Pas de temps sur les sous-domaines .....	134
FIGURE [3.6.3.4] : Comparaison des déformées et des contraintes de Von Mises au temps final .....	134

FIGURE [3.6.3.5] : Coupe horizontale du moteur .....	135
FIGURE [3.6.3.6] : Déplacement au point $\mathbf{P}_1$ .....	135
FIGURE [3.6.3.7] : Déplacement relatif selon $\mathbf{X}$ entre les points $\mathbf{P}_2$ et $\mathbf{P}_3$ .....	135
FIGURE [3.6.3.8] : Pression et contraintes de Von Mises pour l'élément $\mathbf{E}_1$ .....	136
FIGURE [3.6.3.9] : Pression et contraintes de Von Mises pour l'élément $\mathbf{E}_2$ .....	136
TABLEAU [3.6.3.3] : Temps de calcul pour $1.10^{-1}$ s de simulation en séquentiel sur SGI Origin 2000 .....	136
FIGURE [3.6.3.10] : Simulation prolongée et premier mode d'ébranlement de l'aile .....	137
FIGURE [3.7.1.1] : Toupie dans un champ de pesanteur .....	138
FIGURE [3.7.1.2] : Résolution graphique.....	139
FIGURE [3.7.1.3] : Trajectoire de la toupie obtenue par le calcul .....	140
FIGURE [3.7.4.1] : Alternateur.....	143
FIGURE [3.7.4.2] : Décomposition en sous-domaines .....	144
FIGURE [3.7.4.3] : Réponse dynamique de la structure pour un tour du rotor .....	145
FIGURE [3.7.5.1] : Rotor impacté sur une aube.....	147
FIGURE [3.7.5.2] : Première décomposition en sous-domaines .....	147
FIGURE [3.7.5.3] : Deuxième décomposition en sous-domaines .....	148
FIGURE [3.7.5.4] : Troisième décomposition en sous-domaines .....	148





## Introduction

Les avancées spectaculaires réalisées au cours des trente dernières années conduisent le calcul numérique en mécanique à prendre une place importante dans les considérations industrielles actuelles. On y voit l'opportunité de réduire les coûts en terme de matériel expérimental ou d'accélérer les étapes de conception. On espère également pouvoir accéder à la prédiction de phénomènes physiques dont les échelles spatiale ou temporelle rendent impossible la reproduction en laboratoire. Cependant, pour parvenir à réellement s'installer en tant qu'outil fiable et indiscuté, la simulation numérique doit faire la preuve de la validité des résultats qu'elle donne. L'exigence à l'égard des modèles numériques croît en même temps que l'intérêt et la confiance que les ingénieurs souhaitent leur accorder.

La majorité des analyses numériques menées aujourd'hui en mécanique des solides ou en couplage fluide-solide reposent sur la méthode des éléments finis [Zienkiewicz 1973][Bathe 1982]. A partir d'équations locales déterminées par la mécanique des matériaux, des calculs prédictifs sur des structures simplifiées au comportement complexe sont à la portée de nombreux codes pour des études de dimensionnement par exemple. Les industriels ont cependant toujours majoritairement recours à des campagnes expérimentales pour valider les options prises au niveau de la conception. En effet, face aux multiples possibilités offertes par les méthodes de simulation, deux questions fondamentales restent posées au niveau des utilisateurs :

1. Pour envisager la prédiction par le calcul du comportement d'un système mécanique, un certain nombre d'hypothèses sont indispensables pour passer du système réel à un système simplifié, régit par un nombre réduit d'équations, elles-mêmes souvent simplifiées. Par exemple, on procédera fréquemment à une approximation des détails géométriques ou à la mise à l'écart de certains phénomènes, comme les phénomènes thermiques ou chimiques pour la mécanique classique, jugés non prépondérants pour l'étude en cours. C'est l'étape de modélisation, qui conduit inévitablement à l'interrogation suivante : **quel est le degré d'adéquation entre le modèle d'analyse utilisé pour les calculs et le système physique initial qu'il est censé représenter dans la gamme de comportements envisagée pour l'étude ?**
2. Le système d'équations correspondant à un modèle analytique continu requiert systématiquement pour des problèmes réalistes le recours à une méthode discrète approchée pour être résolu. Ceci implique une étape indispensable de discrétisation des équations, ce que fournit la méthode des éléments finis pour les variables d'espace dans la majorité des cas. Ceci soulève la seconde question : **la solution donnée par le système issu de la discrétisation rend-elle compte de manière satisfaisante de la solution du système continu original ?**

La première question conduit aux problèmes communément appelés de validation. L'expérience est le moyen privilégié pour quantifier la validité d'un modèle. On compare les réponses obtenues par le calcul à un certain nombre de résultats d'essais spécifiques et caractéristiques d'un comportement physique. Il faut remarquer sur ce point que ce sont les solutions approchées numériquement du modèle analytique qui sont comparées aux valeurs expérimentales. La validation suppose donc une discrétisation et une résolution satisfaisantes car le système continu issu des hypothèses de

modélisation disparaît dans le processus de validation. De même, les expériences peuvent être entachées d'erreur.

Si les comparaisons entre essais et calculs s'avèrent insatisfaisantes, une nouvelle modélisation peut être nécessaire si tout ou partie de la physique que l'on cherche à reproduire semble absente du modèle. Sinon, on entre dans une phase de recalage, à savoir la correction de la valeur de certains paramètres du modèle pour ajuster les réponses calculées aux mesures expérimentales [Motterhead et Friswell 1993]. Dans le cas d'un modèle bien maîtrisé et d'expériences bien choisies et bien instrumentées, ceci conduit à une estimation quantitative de la validité d'un modèle, puis à son amélioration, selon des processus souvent itératifs.

Une autre approche pour obtenir des modèles valides consiste à réduire le nombre des hypothèses faites au niveau de la modélisation. Cela signifie la description de géométries détaillées ou le couplage de phénomènes de natures différentes, ce dernier point correspondant à l'émergence des problèmes dits multiphysiques. Il en résulte des problèmes à résoudre de complexité croissante. Nous revenons sur ce point par la suite.

La seconde question correspond aux problèmes dits de vérification, ou d'estimation d'erreur. On cherche à quantifier la qualité de la solution approchée numériquement par rapport à la solution exacte du modèle continu. Dans ce but, on peut recenser trois directions principales dans la littérature : une première fondée sur les résidus sur l'équilibre [Babuska et Rheinboldt 1979], une deuxième reposant sur un lissage des contraintes issues de la solution numérique [Kelly et al. 1983] et la dernière utilisant le concept d'erreur en relation de comportement [Ladevèze et Leguillon 1983]. Ces méthodes d'estimation d'erreur sont fréquemment couplées à des procédures d'amélioration de la discrétisation afin d'apporter la finesse de représentation nécessaire dans les zones à forts gradients sans surcharger inutilement le reste du modèle numérique.

Nous nous intéressons dans le cadre de ce travail à des structures industrielles soumises à des impacts localisés. Il s'agit par exemple d'un îlot nucléaire percuté au niveau du bâtiment réacteur par un avion léger ou d'un moteur d'avion de ligne soumis à une perte d'aube consécutive à l'ingestion d'un volatile. Ces structures sont caractérisées par une grande complexité géométrique et par l'interaction de plusieurs phénomènes intervenant à des échelles spatiale et temporelle différentes. On distingue ainsi d'une part les grandes déformations et les non-linéarités dues au comportement des matériaux sous impact au voisinage du point de contact du projectile. D'autre part, on cherche à modéliser le phénomène d'ébranlement de la structure, c'est-à-dire sa réponse vibratoire globale aux ondes élastiques la parcourant après l'impact. On ne cherchera pas à mener de campagne de recalage sur nos modèles structuraux et nous n'utiliserons pas non plus d'estimation d'erreur pour qualifier nos modèles discrets. Cependant, c'est bien une réponse partielle aux deux interrogations fondamentales précitées qui introduit la problématique principale de notre étude. En effet, pour parvenir à une modélisation réaliste du comportement dynamique des structures, les ingénieurs privilégient une représentation fidèle de la géométrie. Des critères de qualité de discrétisation en terme d'éléments finis spatiaux conduisent également à une taille d'élément souvent réduite, notamment dans les zones impactées. Il en résulte des modèles numériques volumineux, d'autant plus qu'ils sont l'objet d'analyses en dynamique non-linéaire demandant un grand nombre de pas en temps pour parvenir à la prise en compte de l'ébranlement. Le temps nécessaire pour obtenir la solution sur les machines actuelles dépasse alors couramment les limites imposées par le bon fonctionnement du processus de conception pour un bureau d'étude. On introduit ainsi la question propre à ce travail doctoral. Des modèles moins contraignants n'ont pas la confiance des ingénieurs et ils ne peuvent pas se permettre d'utiliser les modèles plus réalistes. Dans ce contexte, le problème est donc : **comment faire évoluer les méthodes numériques pour réduire le temps de calcul de la solution dynamique sur des modèles détaillés sans en altérer la qualité ?**

La dynamique non-linéaire des structures dispose d'outils généraux et performants pour les cas courants. Ils sont fondés sur la méthode des éléments finis en espace. Pour la discrétisation du temps, on peut recenser de nombreux travaux en fonction de la nature exacte des sollicitations, de l'échelle de temps caractéristique de la réponse de la structure [Belytschko et Hughes 1986] ou d'un comportement global du système que l'on souhaite reproduire en particulier ([Simo et al. 1992] par exemple pour les

structures en grande rotation). Si on se concentre sur les méthodes incrémentales, on peut distinguer deux grandes familles. D'une part, les schémas implicites autorisent l'emploi d'un pas de temps souvent arbitraire, ce qui réduit le nombre de pas à effectuer pour obtenir la solution sur l'intervalle de temps souhaité. Cela se fait au prix d'une résolution complexe de l'équilibre à chaque pas et peut conduire à une perte de robustesse de l'algorithme avec un pas trop grand. De même, ces schémas s'accompagnent fréquemment d'une dissipation numérique qui peut devenir dominante avec l'accroissement du pas pour des raisons de coût de calcul, jusqu'à pénaliser fortement la précision de la simulation. D'autre part, les méthodes explicites sont robustes et fiables vis-à-vis de la résolution de l'équilibre à chaque pas. Elles sont toutefois conditionnellement stables, c'est-à-dire que le pas de temps à utiliser est limité par un pas critique sous peine de conduire à une divergence numérique due à l'accumulation d'erreurs de troncature. Ce pas critique est relié à la taille des éléments et à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans les matériaux de la structure (condition de Courant-Friedrich-Lévy [Belytschko et Hughes 1986]). Il s'ensuit souvent un grand nombre de pas de temps. Dans le cas des structures sous impact, les conditions aux limites décrivant le chargement requièrent une grande finesse de discrétisation en temps pour être correctement représentées. Le pas de temps devient de l'ordre du pas critique des méthodes explicites. On inscrira donc notre travail dans le cadre de la **dynamique explicite des structures**.

Les études en dynamique explicite font déjà l'objet de nombreuses optimisations pour réduire le coût de résolution de l'équilibre dynamique à chaque pas. On peut citer la diagonalisation de la matrice de masse (*mass lumping* [Argyris et Mlejnek 1991]), l'adaptation du pas de temps en cours de calcul pour suivre le pas critique lors de la déformation des éléments ou l'utilisation d'éléments finis sous-intégrés [Zienkiewicz et al. 1971][Pawsey et Clough 1971] (stabilisation des modes parasites d'*hourglass* [Flanagan et Belytschko 1981][Simo et Hughes 1986]). Pour obtenir de nouveaux gains significatifs en matière de temps de calcul, il nous faut laisser de côté la généralité des méthodes pour nous intéresser au caractère spécifique des études industrielles à réaliser, à savoir **la cohabitation dans les modèles de plusieurs échelles d'espace et de temps**. En effet, la finesse d'analyse requise pour l'étude de l'ébranlement, aussi bien en espace qu'en temps, est bien moindre que celle nécessaire à la représentation des phénomènes locaux non-linéaires dus à un impact. Les méthodes classiques vont pourtant pénaliser la résolution sur une très grande partie de la structure au comportement linéaire par l'emploi d'un pas de temps très réduit fixé par les petits éléments de la zone chargée. Nous nous appuyons donc sur un formalisme de décomposition de domaine, où le schéma d'intégration adéquat peut être choisi sur chaque sous-domaine dans la famille des schémas implicites ou explicites de Newmark [Newmark 1959]. Pour des raisons de simplicité de programmation dans le code destiné à tester les méthodes, nous nous limitons au couplage de schémas explicites, avec l'utilisation d'un pas de temps propre sur chaque sous-domaine. Ce formalisme est fondé sur une écriture duale de la continuité aux interfaces entre les sous-domaines [Gravouil et Combescure 2001]. Nous le couplons à une méthode de gestion des incompatibilités de maillages aux interfaces [Herry et al. 2002], ce qui correspond à doter chaque sous-domaine de sa propre finesse de discrétisation. Ceci conditionne également la taille du pas de temps utilisable sur un sous-domaine. On parvient alors à un premier découplage complet des échelles en fonction des zones de la structure.

Même en utilisant une finesse de maillage adaptée, le nombre d'éléments nécessaire à la bonne représentation de la géométrie dans les zones ébranlées reste souvent grand. Il en résulte un grand nombre d'inconnues nodales et un coût de résolution du problème dynamique encore prohibitif malgré la décomposition en sous-domaines. Il apparaît alors judicieux de faire évoluer la méthode de résolution sur les sous-domaines au comportement vibratoire linéaire. Il s'agit ainsi de projeter localement l'équilibre sur un sous-espace représentatif de la gamme de déplacements que peut subir le sous-domaine, de dimension très inférieure à celle de l'espace initial fourni par les éléments finis. L'identification de tels sous-espaces fait l'objet d'une grande richesse théorique dans la littérature [Géradin et Rixen 1993]. Ils sont fréquemment engendrés par des associations de modes propres de vibration, sur des configurations libre ou encastree sur les surfaces de chargement, et de solutions statiques en réponse à différents types de sollicitations au niveau de ces mêmes surfaces. Notre travail ne porte pas sur la définition de nouvelles méthodes de projection. Les combinaisons modales disponibles sont nombreuses et il appartient à l'analyste de choisir la plus pertinente en fonction de la

structure et du chargement. A partir de la donnée d'un jeu de vecteurs de réduction modale quelconque, notre objectif est de parvenir à l'écriture d'un **système multi-domaines multi-échelles, avec sous-domaines directs et modaux**, qui puisse être **intégré dans le temps par un schéma explicite de manière économique et stable**.

Classiquement, les méthodes de projection modale sont destinées à l'analyse vibratoire de structures en petits déplacements. Les composantes rigides du déplacement pour les structures sans blocage sont alors obtenues comme les vecteurs de base du noyau de la matrice de raideur, c'est-à-dire les modes propres de fréquence nulle pour une configuration libre au niveau des surfaces de chargement. On y trouve de manière exacte les translations d'ensemble de la structure et de manière linéarisée ses rotations. Dans le cas de la dynamique des structures sous impact, une partie du système peut se trouver animée d'un mouvement rigide de grande amplitude sans pour autant être le lieu de phénomènes non-linéaires au niveau du comportement. La représentation des rotations d'ensemble devient alors fortement non-linéaire [Argyris 1982], empêchant l'emploi des méthodes modales courantes, en grande partie fondées sur l'analyse des éléments propres d'un système linéaire. Cependant, le nombre des inconnues vibratoires peut toujours être réduit localement, à condition d'isoler dans l'expression du déplacement la partie décrivant le mouvement rigide, auquel se superpose une deuxième partie représentant les petites déformations locales. On étend ainsi notre approche multi-échelles dans l'esprit de la méthode FETI [Fahrat et Roux 1994]. Nous pouvons alors définir un paramétrage particulier des mouvements rigides qui permet d'aboutir à une résolution entièrement explicite du problème à deux échelles. Cette écriture s'accompagne obligatoirement d'une étude précise de la stabilité de l'intégration temporelle, élément fondamental pour l'optimisation du pas de temps en dynamique explicite. Ceci nous conduit finalement à l'expression d'un problème multi-domaines multi-échelles complet avec la gestion de sous-domaines de trois natures : des **sous-domaines directs non-linéaires** au voisinage des impacts ou dans les zones à grandes déformations, des **sous-domaines réduits linéaires** en vibration et petits déplacements et enfin des **sous-domaines à deux échelles d'espace, en vibration locale autour d'un mouvement d'ensemble non-linéaire**.

Pour bénéficier des gains en temps de résolution offerts par la diminution du nombre des degrés de liberté, il apparaît également qu'une optimisation du problème de continuité aux interfaces devient indispensable. Si une inversion directe du problème d'interface sur les grandeurs duales est judicieuse en l'absence de sous-domaines à deux échelles, un **traitement itératif** à nouveau inspiré de la méthode FETI, associé à un **préconditionneur dédié à la réduction modale**, s'avère bien plus efficace en leur présence.

Pour terminer cette introduction, soulignons que nous avons le souci constant dans ce travail de proposer des développements théoriques robustes et d'illustrer précisément leur mise en œuvre informatique. Ainsi, toutes les méthodes sont introduites dans le code de dynamique rapide EUROPLEXUS, copropriété du *Commissariat à l'Energie Atomique* et du *Joint Research Center* de la Commission Européenne.

## **Chapitre 1**

### *Une méthode multi-domaines pour la dynamique explicite des structures*

---

La dynamique explicite est une discipline particulière en calcul de structures. Sa mise en œuvre informatique montre des spécificités qui la rendent attrayante pour des problèmes de dynamique rapide, mais qui requièrent également une attention particulière au moment de définir une stratégie multi-domaines. Il s'agit notamment de prendre en compte la nature vectorielle du problème à résoudre, au lieu de la nature matricielle des problèmes de dynamique implicite. De même, il est indispensable d'autoriser la variation du pas de temps pour suivre le pas critique imposé par les éléments. Nous nous attachons en premier lieu dans ce chapitre à poser les fondements de la formulation explicite qui sert de base au code EUROPLEXUS. Nous poursuivons par un bref état de l'art des méthodes de décomposition de domaine, pour parvenir à la formulation duale supportant nos développements. La gestion de différentes échelles de temps et le cas particulier des pas variables sont ensuite introduits, puis le traitement des incompatibilités de maillage. Le formalisme multi-domaines multi-échelles initial est alors posé. Nous terminons cette partie par des considérations sur l'implantation des méthodes dans EUROPLEXUS.

Il convient enfin de signaler que nous ne intéressons dans ce travail qu'à la partie structurale lagrangienne d'EUROPLEXUS. Ce programme dispose également d'une partie fluide eulérienne, en éléments finis ou volumes finis, et ainsi qu'une partie ALE, pour *Arbitrary Lagrange Euler*, aussi bien pour les fluides que pour les structures.

---

## 1.1. Résolution explicite d'un problème de dynamique non-linéaire

On considère un problème structural classique posé sur un système solide occupant un volume  $\Omega$  dans l'espace, soumis à une densité volumique d'effort  $\mathbf{f}_d^v$ , à une densité surfacique d'effort  $\mathbf{f}_d^s$  sur une partie  $\Gamma_f$  de sa frontière  $\Gamma$  et à un déplacement imposé  $\mathbf{u}_d$  sur la partie restante  $\Gamma_u$  de  $\Gamma$ .

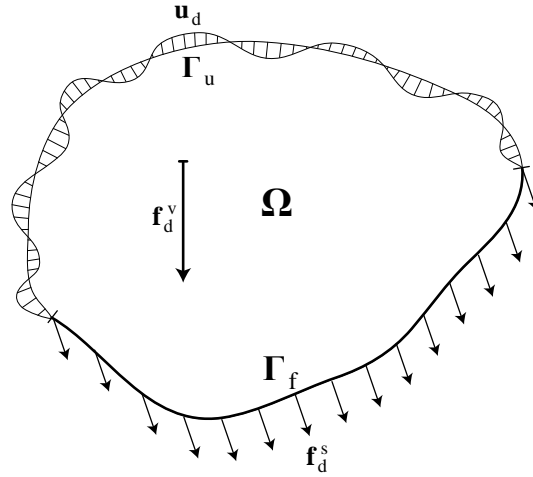


FIGURE [1.1.1] : Configuration mécanique de référence

On cherche le couple déplacement-contrainte  $\{\mathbf{u}(\mathbf{M}, t), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}, t)\}$  défini sur  $\Omega \times [0, T]$  qui vérifie le système d'équations :

- ✓ Admissibilité cinématique :

$$\forall (\mathbf{M}, t) \in \Gamma_u \times [0, T] \quad \mathbf{u}(\mathbf{M}, t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{M}, t) \quad [1.1.1]$$

- ✓ Equilibre dynamique :

$$\begin{cases} \forall (\mathbf{M}, t) \in \Gamma_f \times [0, T] & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{M}, t) = \mathbf{f}_d^s(\mathbf{M}, t) \\ \forall (\mathbf{M}, t) \in \Omega \times [0, T] & \rho(\mathbf{M}, t) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{M}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{f}_d^v + \text{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}, t)] \end{cases} \quad [1.1.2]$$

- ✓ Conditions initiales :

$$\forall \mathbf{M} \in \Omega \quad \mathbf{u}|_{t=0}(\mathbf{M}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{M}) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}|_{t=0}(\mathbf{M}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{M}) \quad [1.1.3]$$

- ✓ Relation de comportement :

$$\forall (\mathbf{M}, t) \in \Omega \times [0, T] \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}, t) = \mathbf{C}[\mathbf{u}(\mathbf{M}, t)] \quad [1.1.4]$$

où  $\mathbf{C}$  est un opérateur dépendant du matériau.

Dans la suite, les champs de grandeurs scalaires, vectorielles et de tensorielles sont supposés être dépendant de l'espace et du temps. Nous omettons donc de préciser cette dépendance pour ne pas alourdir inutilement les écritures. De plus, les dérivées temporelles sont simplifiées grâce aux notations classiques (pour la grandeur  $\mathbf{A}$ ) :

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad ; \quad \ddot{\mathbf{A}} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad [1.1.5]$$

Le principe des travaux virtuels [Germain 1973] permet d'écrire une formulation faible de l'équilibre :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d^v \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}] \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \quad [1.1.6]$$

pour tout champ de déplacement virtuel  $\delta \mathbf{u}$  cinématiquement admissible

Une intégration par partie donne (en utilisant la symétrie du tenseur des contraintes) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}] \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \text{grad}[\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}] \, d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2} (\text{grad}[\delta \mathbf{u}] + \text{grad}[\delta \mathbf{u}]^T) \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] \cdot \delta \mathbf{u} \, dS - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2} (\text{grad}[\delta \mathbf{u}] + \text{grad}[\delta \mathbf{u}]^T) \, d\Omega \end{aligned} \quad [1.1.7]$$

On définit un tenseur des déformations virtuel par :

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad}[\delta \mathbf{u}] + \text{grad}[\delta \mathbf{u}]^T) \quad [1.1.8]$$

On obtient finalement l'expression classique de l'équilibre faible :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d^v \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_d^s \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_{\Gamma_u} \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \quad [1.1.9]$$

où  $\mathbf{r}$  désigne les réactions au niveau des déplacements imposés.

### 1.1.1. Une formulation lagrangienne en grandes transformations

En grandes transformations, la configuration  $\Omega$  de la structure subit des variations non-négligeables au cours du temps. Le système d'équations [1.1.1] à [1.1.4] doit être exprimé sur la configuration courante à l'instant  $t$ . Dans le cas de la dynamique explicite, cette configuration est connue au moment de la résolution de l'équilibre (cf. paragraphe 1.1.3). Elle peut donc être prise comme configuration de référence.

Au contraire, l'emploi d'une méthode implicite fait de la configuration courante une inconnue du calcul. On choisit donc fréquemment comme configuration de référence la configuration initiale, sur laquelle il faut exprimer l'équilibre [1.1.2] avec des opérateurs adaptés.

Nous adaptons une représentation lagrangienne du mouvement, c'est-à-dire que nous nous attachons à décrire le mouvement des points matériels de la structure au cours du temps. Au contraire, une représentation eulérienne correspond à l'observation d'un point fixe dans l'espace et à la détermination de paramètres décrivant les points matériels qui se succèdent en ce point géométrique. Pour la suite de ce paragraphe, la configuration initiale est désignée  $\Omega_0$ . Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  permet le passage à la configuration courante  $\Omega$ . On note  $\mathbf{x}$  le champ des coordonnées des points de  $\Omega$  dans un repère fixe de l'espace, et par extension  $\mathbf{x}_0$  le champ des coordonnées initiales.

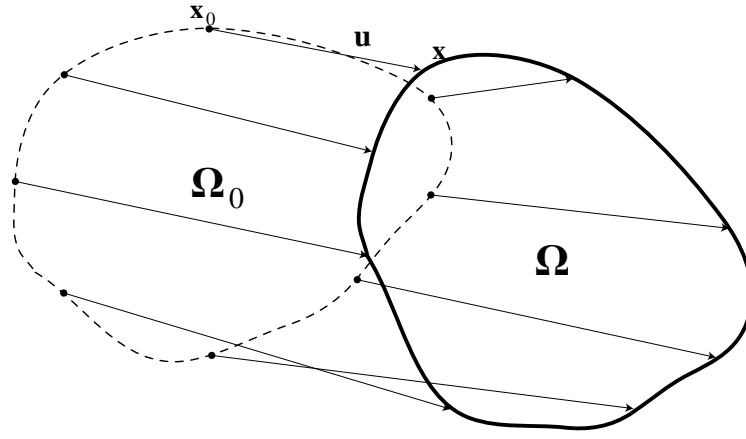


FIGURE [1.1.1.1] : Description lagrangienne du mouvement

On a naturellement :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u} \quad [1.1.1.1]$$

On définit le gradient  $\mathbf{F}$  de la transformation qui permet le passage de la configuration actuelle de référence à la configuration initiale. Il est donné par :

$$\mathbf{F} = \text{grad}_{\mathbf{x}} [\mathbf{x}_0] = \mathbf{I} - \text{grad}_{\mathbf{x}} [\mathbf{u}] \quad [1.1.1.2]$$

où l'indice  $\mathbf{x}$  signifie que les dérivées sont prises par rapport aux coordonnées actuelles.

Considérons une courbe  $\mathcal{C}$  définie sur la configuration courante par la donnée de deux points,  $\mathbf{S}^1$  et  $\mathbf{S}^2$ , et d'une abscisse curviligne  $\mathbf{s}$ . Cette courbe a une correspondante  $\mathcal{C}_0$  sur la configuration initiale, définie par les points  $\mathbf{S}_0^1$  et  $\mathbf{S}_0^2$ , et l'abscisse curviligne  $\mathbf{s}$ . On a, le long de la courbe  $\mathcal{C}_0$  :

$$\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{s}} = \text{grad}_{\mathbf{x}} [\mathbf{x}_0] \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} \quad [1.1.1.3]$$

Ceci nous permet de déterminer la longueur de la courbe  $\mathcal{C}_0$  à partir des grandeurs définies sur la configuration de référence.

$$\mathbf{L}_0 = \int_{\mathbf{s}_0^1}^{\mathbf{s}_0^2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{s}}, \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{s}} \right)^{1/2} ds = \int_{\mathbf{s}^1}^{\mathbf{s}^2} \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}}, \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} \right)^{1/2} ds = \int_{\mathbf{s}^1}^{\mathbf{s}^2} \left( \mathbf{F}^T \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} \right)^{1/2} ds \quad [1.1.1.4]$$

où  $(\dots)$  désigne le produit scalaire euclidien.

On introduit ainsi la matrice des dilatations  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ , dont les termes diagonaux quantifient les variations de longueur des courbes dans la transformation de  $\Omega$  à  $\Omega_0$ .

On peut également remarquer que l'angle  $\gamma$  formé par deux courbes,  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C}^2$ , sur la configuration de référence est donné par :

$$\gamma = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}^2} \right) \quad [1.1.1.5]$$

On peut lui faire correspondre l'angle  $\gamma_0$  formé par les courbes  $\mathcal{C}_0^1$  et  $\mathcal{C}_0^2$  sur la configuration initiale :



$$\gamma_0 = \left( \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial s^1}, \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial s^2} \right) = \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s^1}, \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s^2} \right) = \left( \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s^2} \right) \quad [1.1.1.6]$$

Cette dernière équation indique que les termes extra-diagonaux de la matrice  $\mathbf{C}$  mesurent les variations angulaires lors de la transformation de  $\Omega$  à  $\Omega_0$ .

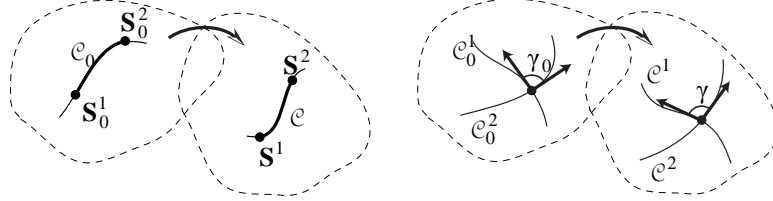


FIGURE [1.1.1.2] : Variations de longueur et variations angulaires

On peut construire une mesure des déformations à partir de cette matrice, en s'assurant que la mesure donnera un résultat nul en cas de déplacement de corps rigide.

Pour les translations, on a :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \text{ donc } \mathbf{C} = \mathbf{I} \quad [1.1.1.7]$$

Pour une rotation rigide de matrice  $\mathbf{R}$  et de centre  $\mathbf{O}$ , on a :

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \quad [1.1.1.8]$$

On en déduit :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \text{ d'où à nouveau } \mathbf{C} = \mathbf{I} \quad [1.1.1.9]$$

On forme finalement le tenseur des déformations d'Almansi-Euler, qui est l'opposé du tenseur des déformations de Green-Lagrange utilisé lorsque la configuration de référence est la configuration initiale :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \left( \text{grad}_{\mathbf{x}} [\mathbf{u}] + \text{grad}_{\mathbf{x}} [\mathbf{u}]^T - \text{grad}_{\mathbf{x}} [\mathbf{u}]^T \text{grad}_{\mathbf{x}} [\mathbf{u}] \right) \quad [1.1.1.10]$$

---

**Remarque :** L'utilisation de la configuration finale comme configuration de référence et du tenseur d'Almansi-Euler pour mesurer les déformations est spécifique aux approches explicites, pour lesquelles la configuration courante est une donnée. C'est au contraire une inconnue du calcul pour les méthodes implicites (cf. paragraphe 1.1.3).

---

C'est cet opérateur, non-linéaire en fonction de  $\mathbf{u}$  à cause des termes quadratiques, qu'on fait intervenir dans la relation de comportement [1.1.4].

Dans la suite, nous avons également besoin d'exprimer sur la configuration de référence des contraintes définies sur la configuration initiale. On écrit pour cela sur cette dernière configuration :

$$\int_{\mathbf{V}_0} \text{div}_{\mathbf{x}_0} [\boldsymbol{\sigma}] d\Omega_0 = \int_{\partial \mathbf{V}_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 \quad [1.1.1.11]$$

où  $\mathbf{V}_0$  est un volume élémentaire,  $\partial \mathbf{V}_0$  son bord et  $\mathbf{n}_0$  la normale sortante sur  $\partial \mathbf{V}_0$ , l'indice  $\mathbf{x}_0$  indique la dérivation spatiale par rapport aux coordonnées initiales.

Dans la transformation de  $\Omega$  à  $\Omega_0$ , le volume  $V_0$  a pour antécédent le volume  $V$ , son bord  $\partial V_0$  a pour antécédent  $\partial V$  et la normale  $\mathbf{n}_0$  a pour antécédent  $\mathbf{n}$ . On peut exprimer la variation de la normale à l'aide de la transformation d'une surface élémentaire  $dS$ . On obtient :

$$\mathbf{n}_0 dS_0 = \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n} dS \quad [1.1.1.12]$$

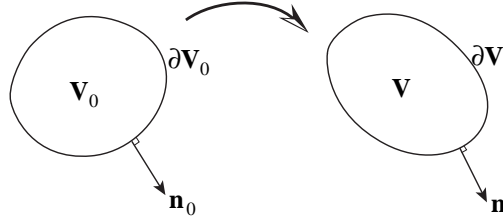


FIGURE [1.1.1.3] : Transformation d'un volume élémentaire

On en déduit :

$$\int_{\partial V_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_0 dS_0 = \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\partial V} (\det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \mathbf{n} dS \quad [1.1.1.13]$$

On introduit ainsi le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\boldsymbol{\pi} = \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad [1.1.1.14]$$

Ce tenseur permet d'exprimer les contraintes initiales sur la configuration de référence grâce à l'égalité :

$$\int_{V_0} \text{div}_{\mathbf{x}_0} [\boldsymbol{\sigma}] d\Omega_0 = \int_V \text{div}_{\mathbf{x}} [\boldsymbol{\pi}] d\Omega \quad [1.1.1.15]$$

### 1.1.2. Discrétisation en espace - Méthode des éléments finis

On procède à un découpage de la structure continue en éléments géométriquement simples sur lesquels les champs inconnus sont approchés par des fonctions polynomiales.

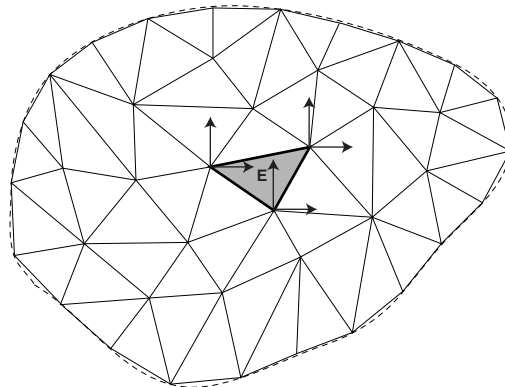


FIGURE [1.1.2.1] : Découpage en éléments

On définit aux intersections des éléments ou sur leurs arêtes des nœuds, c'est-à-dire des points auxquels sont évaluées les inconnues. Entre ces nœuds, les champs sont interpolés à l'aide des fonctions "chapeaux"  $\{\mathbf{N}_i\}$ , ou fonctions de forme. On se limite au cas des éléments finis

isoparamétriques, où les mêmes fonctions sont utilisées pour l'interpolation des coordonnées et du champ du déplacement.

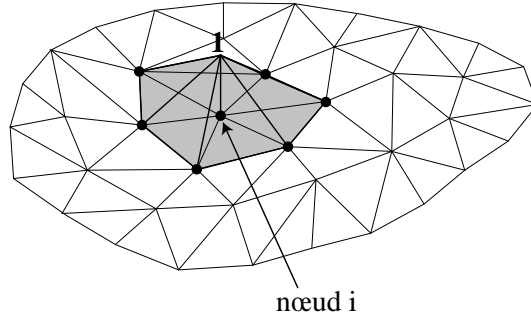


FIGURE [1.1.2.2] : Support des fonctions d'interpolation

On discrétise à l'aide de ces fonctions le champ de déplacement inconnu (et ses dérivées temporelles) :

$$\mathbf{u} = \sum_{\{\text{noeuds } I\}} \sum_{\substack{\{\text{directions} \\ \{\text{d'espace } i\}}} \mathbf{N}_I \mathbf{U}_{Ii} \mathbf{e}_i \quad [1.1.2.1]$$

où  $\{\mathbf{U}_{Ii}\}$  est la famille des inconnues nodales ,  
 $\{\mathbf{e}_i\}$  est une base orthonormée de l'espace.

On discrétise également le champ de déplacement virtuel :

$$\delta \mathbf{u} = \sum_I \sum_i \mathbf{N}_I \delta \mathbf{U}_{Ii} \mathbf{e}_i \quad [1.1.2.2]$$

Ceci nous conduit au champ de déformations virtuel :

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \sum_I \sum_i \frac{1}{2} (\text{grad}[\mathbf{N}_I \mathbf{e}_i] + \text{grad}[\mathbf{N}_I \mathbf{e}_i]^T) \delta \mathbf{U}_{Ii} \\ &= \sum_I \sum_i \mathbf{B}_{Ii} \delta \mathbf{U}_{Ii} \end{aligned} \quad [1.1.2.3]$$

où  $\{\mathbf{B}_{Ii}\}$  est une famille de tenseurs du deuxième ordre appelés gradients discrétisés.

Pour calculer le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , il nous faut également discrétiser le tenseur des déformations d'Almansi-Euler :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_I \sum_i \frac{1}{2} (\text{grad}[\mathbf{N}_I \mathbf{e}_i] + \text{grad}[\mathbf{N}_I \mathbf{e}_i]^T) \mathbf{U}_{Ii} - \text{grad} \left[ \sum_I \sum_i \mathbf{N}_I \mathbf{U}_{Ii} \mathbf{e}_i \right]^T \text{grad} \left[ \sum_I \sum_i \mathbf{N}_I \mathbf{U}_{Ii} \mathbf{e}_i \right] \\ &= \sum_i \sum_j \mathbf{B}_{Ii} \mathbf{U}_{Ii} + \mathbf{Q}(\{\mathbf{U}_{Ii}\}) \end{aligned} \quad [1.1.2.4]$$

où  $\mathbf{Q}$  est une fonction quadratique de la famille des inconnues nodales.

On obtient finalement  $\boldsymbol{\sigma}$  grâce à la relation de comportement écrite à partir du tenseur des déformations discrétisé. On ne fait pas de discrétisation spécifique de  $\boldsymbol{\sigma}$ , ce qui caractérise une formulation en déplacement seul. On trouve fréquemment dans la littérature des formulations à deux champs,  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ , avec les formulations fondées sur le principe d'Hellinger-Reissner notamment, ou encore à trois champs,  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , comme dans le cas du principe de Hu-Washizu [Oden et Reddy 1982].

On introduit les formules de discrétisation [1.1.2.1] à [1.1.2.4] dans le principe des travaux virtuels [1.1.9] pour obtenir un système discret en espace. Pour simplifier les écritures, on utilise la convention de sommation des indices répétés :

$$\delta U_{\text{li}} \left( \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_I \mathbf{N}_J d\Omega \right) \ddot{\mathbf{U}}_{Jj} + \delta U_{\text{li}} \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{li}} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{N}_J \mathbf{U}_{Jj} \mathbf{e}_j) d\Omega = \delta U_{\text{li}} \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}_I \mathbf{f}_{d_i}^v d\Omega + \int_{\Gamma_r} \mathbf{N}_I \mathbf{f}_{d_i}^s d\Omega + \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_I \mathbf{r}_i d\Omega \right) \quad [1.1.2.5]$$

où les indices majuscules parcourent les nœuds de la structure et les indices minuscules parcourent les directions de l'espace.

L'équation [1.1.2.5] peut être réécrite avec des opérateurs matriciels et vectoriels :

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}) = \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{F}_{\text{ext}}^v + \mathbf{F}_{\text{ext}}^s + \mathbf{F}_{\text{liais}}) \quad [1.1.2.6]$$

où sont rangées dans les vecteurs  $\mathbf{U}$  et  $\delta \mathbf{U}$  toutes les inconnues nodales, réelles ou virtuelles,  $\mathbf{F}_{\text{liais}}$  est le vecteur associé aux inconnues de réaction.

L'équation [1.1.2.6] doit être vérifiée quel que soit le champ de déplacement virtuel choisi, ce qui conduit à la forme finale de l'équilibre dynamique discret :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_{\text{ext}}^v + \mathbf{F}_{\text{ext}}^s + \mathbf{F}_{\text{liais}} \quad [1.1.2.7]$$

Les opérateurs matriciels et vectoriels sont calculés par intégration des contributions sur chacun des éléments finis. Une procédure d'assemblage permet l'écriture du système global en sommant les contributions élémentaires au niveau des nœuds.

### 1.1.3. Discrétisation en temps - Schéma explicite des différences centrées

Le champ de déplacement inconnu et ses dérivées temporelles sont estimés en un certain nombre d'instants de l'intervalle d'étude  $[0, T]$ , appelés pas de temps. Par extension, on appellera également pas de temps la durée qui sépare deux instants d'évaluation successifs. Les quantités cinématiques cherchées sont estimées, d'une part par la résolution de l'équilibre dynamique discret précédemment introduit, d'autre part par la propagation de l'information sur ces quantités disponibles au pas de temps précédents. La forme que prend cette propagation distingue entre eux les schémas d'intégration dans le temps.

On restreint les considérations de ce paragraphe aux schémas de la famille de Newmark [Newmark 1959], dont fait partie le schéma explicite qui nous intéresse particulièrement. Ils s'écrivent de manière générale entre deux pas  $t^n$  et  $t^{n+1}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{n+1} &= {}^p \mathbf{U}^n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}^{n+1} \\ \dot{\mathbf{U}}^{n+1} &= {}^p \dot{\mathbf{U}}^n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^{n+1} \end{aligned} \quad [1.1.3.1]$$

où  ${}^p \mathbf{U}^n$  et  ${}^p \dot{\mathbf{U}}^n$  sont les prédicteurs du schéma, donnés par :

$$\begin{aligned} {}^p \mathbf{U}^n &= \mathbf{U}^n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^n + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}^n \\ {}^p \dot{\mathbf{U}}^n &= \dot{\mathbf{U}}^n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}^n \end{aligned}$$

---

**Remarque 1 :** Une formulation discrète en temps laisse le choix de la grandeur cinématique à calculer, entre le déplacement, la vitesse ou l'accélération de la structure. L'écriture la plus compacte des schémas de Newmark, écrite sur un unique pas de temps entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , suppose

que la grandeur calculée à chaque instant est l'accélération, dont sont déduites les autres grandeurs grâce aux conditions initiales et au schéma.

On introduit le schéma [1.1.3.1] dans l'équilibre dynamique [1.1.2.7] exprimé à l'instant  $t^{n+1}$ , en supposant connues les quantités cherchées à l'instant  $t^n$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{n+1} + \mathbf{F}_{\text{int}} \left( {}^p \mathbf{U}^n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}^{n+1} \right) = \mathbf{F}_{\text{ext}}^v{}^{n+1} + \mathbf{F}_{\text{ext}}^s{}^{n+1} + \mathbf{F}_{\text{liais}}^{n+1} \quad [1.1.3.2]$$

Le vecteur des forces internes  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  dépend du déplacement  $\mathbf{U}$ , et donc du vecteur inconnu  $\ddot{\mathbf{U}}^{n+1}$ , de façon généralement non-linéaire. L'équilibre discret [1.1.3.2] constitue donc *a priori* un système non-linéaire qui peut être résolu à l'aide d'une méthode itérative de type Newton-Raphson par exemple. On dit alors que le schéma est implicite. Au contraire, dans le cas particulier où  $\beta = 0$ , les forces internes sont entièrement calculées à partir de quantités issues du pas précédent. Le calcul de  $\ddot{\mathbf{U}}^{n+1}$  est donc immédiat, par inversion de la matrice de masse  $\mathbf{M}$  du système. On qualifie dans ce cas le schéma d'explicite.

**Remarque 2 :** La résolution explicite du système [1.1.3.2] suppose une détermination préalable des éventuelles forces de réaction  $\mathbf{F}_{\text{liais}}$ . C'est une question essentielle dans le traitement des liaisons en dynamique explicite [Robbe et al. 1994]. On mène les études de précision et de stabilité à suivre en l'absence de ces forces.

Les formules [1.1.3.1] proviennent de l'écriture du développement en série de Taylor du déplacement fonction du temps au voisinage de l'instant  $t^n$ , en fonction du paramètre  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ . Elles introduisent une erreur due à la troncature du développement limité. Il est donc nécessaire de contrôler l'amplification de ces erreurs au cours des pas de temps successifs, sous peine de voir l'algorithme de résolution diverger. Le contrôle porte sur la taille maximale du pas de temps que l'on peut utiliser en conservant une intégration en temps stable, à savoir que les grandeurs cinématiques calculées restent bornées.

Sans entrer dans le détail, les schémas implicites sont d'une manière générale plus stables que les schémas explicites, c'est-à-dire que les contraintes sur le pas de temps sont moins lourdes. En particulier, on montre que certains jeux de paramètres de Newmark conduisent à une stabilité inconditionnelle en dynamique transitoire linéaire [Hughes 1983]. A l'opposé, les schémas explicites sont caractérisés par de fortes restrictions sur le pas de temps. On peut donc résumer les avantages et les inconvénients des deux types de schémas :

- ✓ Un schéma implicite conduit à une résolution difficile de l'équilibre dynamique. On peut notamment rencontrer de grandes difficultés de convergence de l'algorithme de Newton en cas de fortes non-linéarités, en particulier en présence de contacts unilatéraux. Un tel schéma est également fréquemment source de dissipation numérique, pour  $\gamma \neq 1/2$ , c'est-à-dire un amortissement non-physique de la solution [Hughes 1983]. En contrepartie, il est souvent inconditionnellement stable (en extrapolant cependant les propriétés du cas linéaire au cas non-linéaire) et autorise donc un nombre réduit d'instantanés de calcul dans l'intervalle d'étude. La dissipation numérique citée précédemment peut être un moyen de forcer la stabilité en non-linéaire.
- ✓ Un schéma explicite entraîne un traitement aisé de l'équilibre, en rejetant au second membre les principales sources de non-linéarités. Il ne souffre généralement d'aucune dissipation numérique, mais est pénalisé par une forte contrainte sur la taille du pas de temps à ne pas dépasser au risque de diverger. Le nombre de pas à effectuer sur l'intervalle d'étude est donc souvent grand, ce qui peut devenir rédhibitoire en terme de temps de calcul.

Il en résulte que l'emploi de schémas explicites est particulièrement adapté lorsque la représentation temporelle des conditions aux limites (chocs, explosions, impacts à haute vitesse...) imposent une grande finesse dans la discrétisation du temps. Le pas souhaitable pour la bonne prise en compte des phénomènes peut devenir de l'ordre du pas limite nécessaire à la stabilité, ce qui lève le principal inconvénient cité auparavant. De plus, pour accélérer la résolution de l'équilibre dynamique à chaque instant de calcul et améliorer la compétitivité d'une méthode explicite, la matrice de masse à inverser est fréquemment diagonalisée de manière approchée. Les techniques permettant de réaliser cette opération sont nombreuses et dépendent de la formulation des éléments finis utilisés. Il convient en particulier de s'assurer de l'absence de termes négatifs sur la diagonale de la matrice résultante [Key 1980].

Dans toute la suite de ce travail, nous utilisons le schéma explicite des différences centrées, obtenu pour les paramètres de Newmark  $\beta = 0$  et  $\gamma = \frac{1}{2}$ . On étudie sa précision et sa stabilité en non-linéaire par linéarisation autour d'un état donné que l'on prend comme état initial. En effet, l'étude est incrémentale et la convergence du schéma doit toujours être vérifiée entre deux pas successifs. La linéarisation suppose qu'on peut ne retenir que les termes linéaires dans notre expression du tenseur des déformations. On suppose également la relation de comportement linéaire entre  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{E}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \mathbf{E} \quad [1.1.3.3]$$

où  $\mathbf{D}$  est un tenseur du quatrième ordre.

On peut alors réécrire le principe des travaux virtuels [1.1.2.5] :

$$\delta U_{li} \left( \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_I \mathbf{N}_J d\Omega \right) \ddot{\mathbf{U}}_{Jj} + \delta U_{li} \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}_{li} : \mathbf{D} : \mathbf{B}_{Jj} d\Omega \right) \mathbf{U}_{Jj} = \delta U_{li} \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}_I \mathbf{f}_{d_i}^v d\Omega + \int_{\Gamma_r} \mathbf{N}_I \mathbf{f}_{d_i}^s d\Omega + \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_I \mathbf{r}_i d\Omega \right) \quad [1.1.3.4]$$

Ceci nous conduit finalement à un système linéaire, dit système tangent :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}_{ext}^v + \mathbf{F}_{ext}^s \quad [1.1.3.5]$$

où l'intervention de la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  témoigne de la linéarité des forces internes.

On découple les équations en les projetant sur les modes propres de la matrice positive  $\mathbf{K}$  par rapport au produit scalaire défini positif  $\mathbf{M}$ . On aboutit à jeux d'équations indépendantes de la forme :

$$\ddot{y} + \omega^2 y = f \quad [1.1.3.6]$$

où  $\omega$  représente la pulsation associée à chacun des modes propres.

Conformément à la **remarque 1** de ce paragraphe, l'écriture du schéma de Newmark en vue d'une résolution en déplacement de l'équilibre à chaque instant de calcul n'est pas optimale. Elle nécessite en effet l'intervention de deux pas de temps, là où la résolution en accélération n'en demande qu'un, l'équilibre prenant alors l'expression, pour un calcul au temps  $t^{n+1}$  :

$$\frac{y^{n+2} - 2y^{n+1} + y^n}{\Delta t^2} + \omega^2 y^{n+1} = f^{n+1} \quad [1.1.3.7]$$

Cette présentation offre cependant l'avantage de mettre en évidence de manière simple les propriétés de consistance et de stabilité, et donc de convergence [Hughes 1983], du schéma des différences centrées.

On fait apparaître l'erreur de troncature  $T^{n+1}$  au temps  $t^{n+1}$  en injectant la solution exacte continue en temps  $y(t)$  dans l'équation approchée [1.1.3.7] :

$$\frac{y(t^{n+2}) - 2y(t^{n+1}) + y(t^n)}{\Delta t^2} + \omega^2 y(t^{n+1}) = f^{n+1} + T^{n+1} \quad [1.1.3.8]$$

On peut écrire le développement limité au voisinage de  $t^{n+1}$  pour  $y(t^{n+2})$  et  $y(t^n)$  :

$$\begin{aligned} y(t^{n+2}) &= y(t^{n+1}) + \Delta t \dot{y}(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{y}(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{y}(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^4}{12} y^{IV}(t^{n+1}) + \dots \\ y(t^n) &= y(t^{n+1}) - \Delta t \dot{y}(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{y}(t^{n+1}) - \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{y}(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^4}{12} y^{IV}(t^{n+1}) + \dots \end{aligned} \quad [1.1.3.9]$$

En remplaçant dans l'équation [1.1.3.8], on obtient finalement :

$$T^{n+1} = \left[ \frac{y^{IV}(t^{n+1})}{12} \right] \Delta t^2 \quad [1.1.3.10]$$

La décroissance de l'erreur de troncature avec la taille du pas de temps prouve la consistance de l'intégration par le schéma des différences centrées. L'exposant associé à  $\Delta t$  montre que ce schéma a une précision du second ordre.

Il reste à caractériser sa stabilité. On définit pour cela l'erreur sur la solution par :

$$e^n = y^n - y(t^n) \quad [1.1.3.11]$$

On s'intéresse à l'évolution de l'erreur, qui doit rester bornée. En soustrayant membre à membre les équations [1.1.3.7] et [1.1.3.8], on obtient :

$$\frac{e^{n+2} - 2e^{n+1} + e^n}{\Delta t^2} + \omega^2 e^{n+1} = T^{n+1} \quad [1.1.3.12]$$

L'erreur répond comme le système initial à des sollicitations représentées par les erreurs de troncature. L'équation [1.1.3.12] correspond à une suite récurrente d'ordre 2. La solution particulière est pilotée par le second membre, c'est-à-dire les erreurs de troncature. On s'intéresse à la solution du problème homogène.

L'équation caractéristique correspondante est :

$$\frac{r^2 - 2r + 1}{\Delta t^2} + \omega^2 r = 0 \quad \text{soit} \quad r^2 + (\omega^2 \Delta t^2 - 2)r + 1 = 0 \quad [1.1.3.13]$$

Le produit des racines valant 1, l'existence de racines réelles assure que le module de l'une d'entre elles soit supérieur à 1. Il s'ensuit une croissance exponentielle de l'erreur et une divergence de l'algorithme d'intégration en temps. Il faut donc imposer des solutions complexes, soit :

$$(\omega^2 \Delta t^2 - 2)^2 - 4 < 0 \quad \text{d'où} \quad \omega \Delta t < 2 \quad [1.1.3.14]$$

On obtient ainsi le pas de temps critique pour chacune des équations modales. Le pas le plus petit est fixé par la plus haute fréquence propre du spectre :

$$\Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}} \quad [1.1.3.15]$$

Classiquement, on ne cherche pas à calculer exactement la pulsation  $\omega_{\text{max}}$ , notamment parce qu'on ne souhaite pas assembler en cours de calcul une matrice de raideur tangente inutile à la résolution. On montre aisément [Hughes 1983] que cette pulsation est majorée par la pulsation maximale obtenue sur chacun des éléments pris individuellement. Ceci conduit à la condition de Courant-Friedrich-Levy [Belytschko et Hughes 1986], utilisée en pratique :

$$\Delta t < \min_{\text{éléments } E} \frac{L_E}{C_E} \quad [1.1.3.16]$$

où  $L_E$  est la plus petite longueur de l'élément et  $C_E$  est la célérité du son dans le matériau constitutif de l'élément.

Pour minimiser le coût des simulations dynamiques, il est souhaitable de réduire le nombre de pas de calcul. De plus, on montre que la précision de l'intégration explicite est d'autant meilleure que le pas de temps est proche du pas de temps critique [Géradin et Rixen 1993]. On introduit ainsi la nécessité de disposer d'un pas de temps variable, pour suivre les évolutions du pas critique avec les variations de longueur des éléments dues aux grandes déformations éventuelles.

#### 1.1.4. Algorithme d'intégration en temps

Pour réduire l'encombrement en mémoire, EUROPLEXUS utilise une formulation lagrangienne dite réactualisée. Une fois l'équilibre assuré à l'instant  $t^n$ , la configuration à ce pas de temps sert de configuration initiale pour le pas suivant. Ceci s'oppose à une formulation en lagrangien total, où la configuration initiale est fixe et correspond au premier pas de calcul.

Pour résoudre l'équilibre dynamique à l'instant  $t^{n+1}$ , on commence par calculer la configuration correspondante grâce à la prédiction explicite des déplacements  $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$  par le schéma d'intégration :

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + \Delta \mathbf{U}^{n+1} \quad [1.1.4.1]$$

où  $\mathbf{X}^{n+1}$  représente le vecteur des coordonnées nodales au temps  $t^{n+1}$ .

Elle devient la nouvelle configuration de référence.

Il nous faut ensuite calculer les nouvelles forces internes. On commence par évaluer l'incrément de déformation  $\Delta \mathbf{E}$  entre la configuration initiale de l'instant  $t^n$  et la configuration de référence, grâce à la formule [1.1.2.4] appliquée à l'incrément de déplacement :

$$\Delta \mathbf{E}^{n+1} = \sum_i \sum_j \mathbf{B}_{li} \Delta \mathbf{U}_{li}^{n+1} + \mathbf{Q} \left( \left\{ \Delta \mathbf{U}_{li}^{n+1} \right\} \right) \quad [1.1.4.2]$$

On en déduit l'incrément de contrainte  $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{n+1}$  par la relation de comportement. Pour obtenir les contraintes totales, il faut ajouter cet incrément aux contraintes résultant des pas précédents. Ces contraintes sont exprimées sur la configuration de l'instant  $t^n$  et sont donc notées  $\boldsymbol{\sigma}^n$  [Robbe et al. 1994]. Il nous faut ces contraintes exprimées sur la configuration actuelle de référence, soit  $\boldsymbol{\pi}_{n+1}^n$ . Dans cette notation, l'indice du haut donne l'instant de calcul des contraintes et celui du bas l'instant correspondant à la configuration de référence. On a, d'après le paragraphe [1.1.1] :

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1}^n = \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma}^n \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad [1.1.4.3]$$



où  $\mathbf{F}$  est le gradient de la transformation passant de la configuration de référence à la configuration initiale (soit celle de l'instant précédent) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} - \text{grad}[\Delta \mathbf{u}^{n+1}]$$

Les contraintes totales sont finalement données par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\pi}_{n+1}^n + \Delta \boldsymbol{\sigma}^{n+1} \quad [1.1.4.4]$$

On est alors en mesure de déterminer le vecteur des forces internes  $\mathbf{F}_{\text{int}}^{n+1}$  grâce à l'expression [1.1.2.5].

On assemble ensuite le vecteur des forces externes, volumiques et surfaciques,  $\mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1}$  à partir des données et le vecteur des forces de réaction  $\mathbf{F}_{\text{liais}}^{n+1}$ , dépendant du traitement des liaisons cinématiques.

On termine par la résolution du système diagonal donnant les accélérations à l'instant  $t^{n+1}$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{n+1} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} + \mathbf{F}_{\text{liais}}^{n+1} - \mathbf{F}_{\text{int}}^{n+1} \quad [1.1.4.5]$$

#### *Calcul du pas de temps*

Conformément à l'équation [1.1.3.16], le pas de temps de stabilité est proportionnel à la taille du plus petit élément fini de la structure. En présence de non-linéarités géométriques, cette taille est susceptible de changer et il est souhaitable d'adapter le pas de calcul en conséquence. Il s'agit de préserver la stabilité de l'intégration si la taille du plus petit élément diminue, ou d'assurer une performance optimale de l'algorithme en terme de temps de calcul si elle augmente.

On procède donc après chaque mise à jour de la configuration au début d'un pas de temps au calcul du pas de stabilité qui servira pour le pas suivant. Pratiquement, ce calcul est fait sur chaque élément conjointement avec le calcul des forces internes. Le minimum des pas élémentaires est retenu.



FIGURE [1.1.4.1] : Algorithme d'intégration explicite

## 1.2. Méthode multi-échelles pour la dynamique explicite

Lors de calculs sur des structures complexes sollicitées par des impacts localisés, le comportement local peut varier fortement entre le voisinage des zones chargées et les parties plus éloignées. En particulier, l'amplitude des déformations et leur gradient peuvent être très différents. La finesse d'analyse requise, en terme de taille d'éléments ou de complexité de comportement des matériaux, va donc également changer suivant les zones de la structure. Les méthodes standard permettent naturellement d'adapter la taille des éléments ou d'affecter des modèles de matériaux différents en fonction des parties du système. Cependant, cela se fait souvent au prix de difficultés de maillage, avec des gradients de taille d'éléments, qui peuvent également nuire à la précision de la simulation. Le calcul reste de plus fortement pénalisé par l'emploi général du pas de temps imposé par les petits éléments à utiliser à proximité des impacts. Si la complexité structurale conduit à un grand nombre d'inconnues, même avec des éléments relativement grands, on aboutit rapidement à des temps de résolution prohibitifs. C'est pourquoi on s'oriente vers les méthodes multi-domaines. On souhaite ainsi pouvoir séparer les processus de résolution et les adapter aux caractéristiques propres d'un certain nombre de sous-parties, ou sous-domaines, de la structure.

### 1.2.1. Un bref état de l'art des méthodes multi-domaines en mécanique des structures

Il s'agit dans ce paragraphe de présenter rapidement les principales directions en matière de décomposition de domaine, pour expliquer le choix de notre approche. Pour une étude plus exhaustive, on peut se reporter à [Gravouil 2000].

---

**Remarque 1 :** *On se limite aux approches multi-domaines sans recouvrement. Parmi les méthodes autorisant des recouvrements entre les sous-domaines, on peut citer la méthode de Schwarz [Roux 1990] ou la méthode Arlequin [Ben Dhia 1998].*

---

Nous distinguons classiquement les méthodes en fonction de la technique utilisée pour assurer la continuité des grandeurs cinématiques et l'équilibre des efforts surfaciques au niveau des interfaces entre les sous-domaines. On décrit les méthodes à partir d'une discrétisation en espace par éléments finis et d'une discrétisation en temps à l'aide du schéma explicite précédemment cité. Pour conserver des expressions simples, nous limitons dans la suite l'écriture des systèmes couplés au cas de deux sous-domaines. L'extension à un nombre quelconque de sous-domaines est à chaque fois évidente.

*Méthode de Schur primale* [Dodds et Lopez 1980]

Une méthode de Schur primale impose implicitement la continuité des grandeurs cinématiques sur les interfaces, c'est-à-dire que les degrés de liberté des sous-domaines sont les mêmes au niveau des connexions. La formulation du problème couplé se rapproche alors des techniques d'élimination de variables par condensation sur les inconnues d'interface [Guyan 1965].

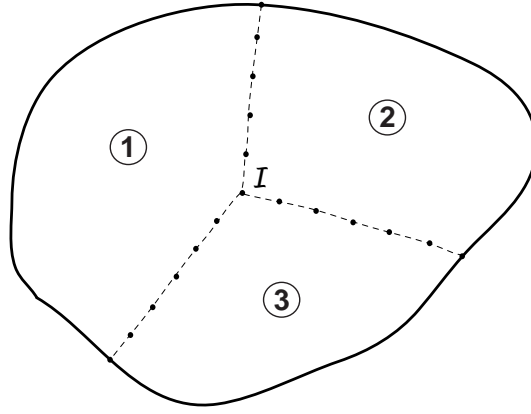


FIGURE [1.2.1.1] : Couplage primal aux interfaces

Pour deux sous-domaines et un calcul à l'instant  $t^{n+1}$ , le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & \mathbf{M}_{1I}^T \\ 0 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_{2I}^T \\ \mathbf{M}_{1I} & \mathbf{M}_{2I} & \mathbf{M}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_1^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_I^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{n+1} \\ \mathbf{F}_2^{n+1} \\ \mathbf{F}_I^{n+1} \end{bmatrix} \quad [1.2.1.1]$$

où on distingue par l'indice  $I$  les degrés de liberté de l'interface entre les deux sous-domaines.

On condense le problème sur les inconnues  $\ddot{\mathbf{U}}_I^{n+1}$  en éliminant les inconnues internes grâce aux deux premières lignes du système [1.2.1.1] :

$$\ddot{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \mathbf{M}_i^{-1} (\mathbf{F}_i^{n+1} - \mathbf{M}_{iI}^T \ddot{\mathbf{U}}_I^{n+1}) \quad [1.2.1.2]$$

où l'indice  $i$  parcourt l'ensemble des numéros des sous-domaines.

On obtient finalement le problème condensé :

$$\mathbf{H} \ddot{\mathbf{U}}_I^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1} \quad [1.2.1.3]$$

où l'opérateur  $\mathbf{H}$  est obtenu par complémentation de Schur :

$$\mathbf{H} = \mathbf{M}_I - \sum_i \mathbf{M}_{iI} \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_{iI}^T$$

le second membre  $\mathbf{B}$  est donné par :

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{F}_I^{n+1} - \sum_i \mathbf{M}_{iI} \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{F}_i^{n+1}$$

Cette équation traduit l'équilibre des nœuds d'interface sous les forces externes qui leur sont appliquées  $\mathbf{F}_I^{n+1}$ , sous les forces surfaciques issues de l'équilibre intérieur des sous-domaines  $-\mathbf{M}_{iI} \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{F}_i^{n+1}$  et sous les forces de réaction de chaque sous-domaine en réponse à un déplacement d'interface  $\mathbf{M}_{iI} \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{M}_{iI}^T \ddot{\mathbf{U}}_I^{n+1}$ .

---

**Remarque 2 :** Une méthode primale suppose que les degrés de liberté d'interface d'un sous-domaine restent "visibles" pour pouvoir intégrer la continuité cinématique dans la formulation. Cela représente une contrainte forte au moment d'utiliser des méthodes de projection modale. Les degrés de liberté nodaux sont remplacés par des inconnues généralisées et seules quelques méthodes de projection laissent accessibles les degrés de liberté de liaison. Ceci nuit à la généralité cherchée dans notre méthode multi-domaines multi-échelles avec réduction modale éventuelle.

---

### Méthode de Schur duale

A présent, c'est l'équilibre des interfaces qui est supposé vérifié *a priori*. Il reste à vérifier la continuité cinématique au moment de la résolution. On écrit alors le problème décomposé comme une succession d'équilibres individuels des sous-domaines auxquels s'ajoutent des relations cinématiques. Ces relations sont dualisées, faisant apparaître les inter-efforts sous la forme de multiplicateurs de Lagrange au niveau des équations d'équilibre.

Au niveau discret en temps, il subsiste un choix en matière de continuité cinématique à imposer. Il se pose entre les déplacements, les vitesses ou les accélérations. Dans l'objectif du couplage de schémas de Newmark aux propriétés différentes en fonction des sous-domaines, les vitesses s'avèrent la grandeur la plus adaptée [Gravouil et Combescure 2001].

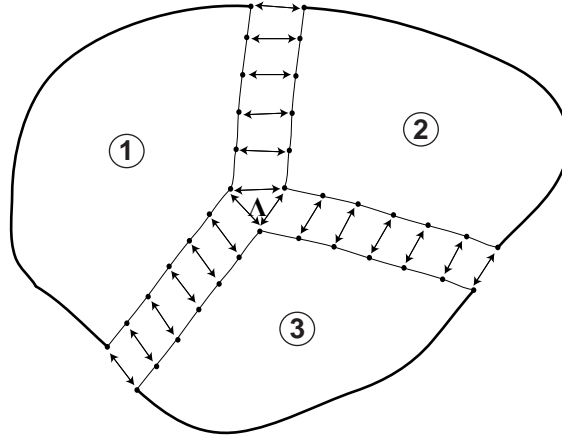


FIGURE [1.2.1.2] : Couplage dual aux interfaces

Le problème à résoudre prend alors l'expression suivante pour deux sous-domaines :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1^T \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_2 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_1^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{n+1} \\ \mathbf{F}_2^{n+1} \\ \mathbf{C}_1^p \dot{\mathbf{U}}_1^n + \mathbf{C}_2^p \dot{\mathbf{U}}_2^n \end{bmatrix} \quad [1.2.1.4]$$

où les matrices  $\mathbf{C}_i$  sont des matrices booléennes signées servant à extraire des sous-domaines les degrés de liberté concernés par les liaisons d'interface, de telle sorte que la continuité cinématique entre les sous-domaines s'écrive :

$$\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{U}}_1^{n+1} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{U}}_2^{n+1} = 0$$

On effectue à nouveau une condensation sur les inconnues d'interface, à savoir les multiplicateurs de Lagrange, en éliminant les accélérations sur chaque sous-domaine grâce aux deux premières lignes du système précédent :

$$\ddot{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \mathbf{M}_i^{-1} (\mathbf{F}_i^{n+1} + \mathbf{C}_i^T \boldsymbol{\Lambda}) \quad [1.2.1.5]$$

où l'indice  $i$  parcourt comme auparavant l'ensemble des numéros des sous-domaines.

Le problème condensé à inverser est ensuite :

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{B}^{n+1} \quad [1.2.1.6]$$

où l'opérateur d'interface  $\mathbf{H}$  a pour expression :

$$\mathbf{H} = \frac{\Delta t}{2} \sum_i \mathbf{C}_i \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{C}_i^T$$

le second membre  $\mathbf{B}$  est donné par :

$$\mathbf{B}^{n+1} = - \sum_i \mathbf{C}_i^p \dot{\mathbf{U}}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \sum_i \mathbf{C}_i \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{F}_i^{n+1}$$

Utiliser une méthode duale impose de prendre en compte le cas particulier des points communs à plusieurs sous-domaines, ou *cross-points*. En effet, l'écriture systématique des relations de couplage en ces points génère des redondances et conduit à un opérateur d'interface singulier. Un solveur capable de lever cette singularité est donc indispensable.

### Méthodes mixtes

Il s'agit de méthodes faisant intervenir au niveau du couplage sur les interfaces à la fois des variables cinématiques primales et des variables duales, efforts d'interface ou multiplicateurs de Lagrange. Elles peuvent par exemple découler de l'utilisation d'une méthode de Lagrangien augmenté pour la prise en compte des liaisons d'interface [Glowinski et Le Tallec 1989]. On peut ainsi associer une méthode de Schur duale à une méthode de pénalisation pour éviter les singularités du problème décomposé en sous-domaines.

Les interfaces peuvent également être considérées comme des sous-structures à part entière, avec leurs propres variables primales et duales et leur propre loi de comportement [Ladevèze 1985], par exemple dans le cas du contact avec frottements [Champaney et al. 1999]. Cette formulation est associée pour la résolution à la méthode LATIN, pour *LA*rg*E* *T*ime *I*ncr*E*ments [Ladevèze 1996], dédiée au calcul de structures sur machines parallèles [Champaney et Dureisseix 2000].

Pour la suite de notre travail, nous utilisons une méthode de décomposition de domaine duale, choisie dans [Gravouil et Combescure 2001] pour supporter le formalisme de couplage de schéma d'intégration en temps de Newmark. Pour la résolution, on procède à une séparation du problème couplé en deux sous-problèmes, en posant  $\ddot{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \ddot{\mathbf{U}}_{i_{\text{free}}}^{n+1} + \ddot{\mathbf{U}}_{i_{\text{link}}}^{n+1}$  :

1. Un premier problème sans liaison (*free*) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_{i_{\text{free}}}^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_{2_{\text{free}}}^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{n+1} \\ \mathbf{F}_2^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad [1.2.1.7]$$

Ce système consiste à équilibrer les forces internes et les forces externes sur chaque sous-domaine comme s'il était seul. On en déduit notamment les accélérations à l'instant  $t^{n+1}$  pour tous les degrés de liberté non concernés par des liaisons d'interface.

2. Un second problème avec liaisons (*link*) :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1^T \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_2 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_{i_{\text{link}}}^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_{2_{\text{link}}}^{n+1} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_1 \left( {}^p \dot{\mathbf{U}}_1^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{i_{\text{free}}}^{n+1} \right) + \mathbf{C}_2 \left( {}^p \dot{\mathbf{U}}_2^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{2_{\text{free}}}^{n+1} \right) \end{bmatrix} \quad [1.2.1.8]$$

On calcule ainsi les efforts d'interface par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange déterminés par condensation. On en déduit les corrections à faire sur les accélérations des degrés de liberté sur les interfaces.

**Remarque 3 :** Le problème sans liaison correspond à un problème standard pour un code de dynamique explicite comme EUROPLEXUS. Il est donc résolu en faisant appel aux opérateurs classiques programmés pour les études mono-domaine.

**Remarque 4 :** Grâce à la matrice de masse diagonale, les accélérations des degrés de liberté sur les interfaces sont découplées des accélérations des autres degrés de libertés des sous-domaines. Le problème avec liaisons est donc localisé uniquement sur les interfaces. Ceci rend l'étape de calcul des accélérations avec liaisons, à partir des multiplicateurs, puis de correction des accélérations sans liaison très peu coûteuse.

---

### 1.2.2. La méthode FETI

La méthode FETI, pour *Finite Element Tearing and Interconnecting*, fait figure de précurseur en matière de décomposition de domaine duale [Fahrat et Roux 1994]. Nous en faisons ici une brève présentation car elle présente des particularités dont nous nous inspirons par la suite (cf. chapitre 3). Nous nous restreignons volontairement au cadre original de la statique des structures, sachant que la méthode a été enrichie et étendue à de nombreux autres cadres pour prendre une place majeure en matière de calculs mécaniques industriels multi-domaines.

Le problème décomposé, toujours pour deux sous-domaines, s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 & -\mathbf{C}_1^T \\ 0 & \mathbf{K}_2 & -\mathbf{C}_2^T \\ -\mathbf{C}_1 & -\mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [1.2.2.1]$$

où  $\mathbf{K}_i$  est la matrice de raideur assemblée sur le sous-domaine  $i$ .

Dans le cas où les blocages sur un des sous-domaines ne suffisent pas à interdire les modes de corps rigide, il est nécessaire de séparer dans le champ de déplacement cherché les composantes rigides des composantes flexibles :

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{K}_i^{-1} (\mathbf{F}_i + \mathbf{C}_i^T \boldsymbol{\Lambda}) + \mathbf{R}_i \boldsymbol{\alpha}_i \quad [1.2.2.2]$$

En présence de modes rigides, la notation  $\mathbf{K}_i^{-1}$  désigne la pseudo-inverse de la matrice de raideur [Balmès 1997]. Les colonnes de  $\mathbf{R}_i$  sont alors les vecteurs du noyau de  $\mathbf{K}_i$  et  $\boldsymbol{\alpha}_i$  les amplitudes associées à ces modes qui donnent la contribution rigide du déplacement total  $\mathbf{U}_i$ .

On détermine ces contributions rigides en imposant aux sous-domaines *flottants* d'être auto-équilibrés, c'est-à-dire que le chargement total est orthogonal aux vecteurs du noyau de la matrice de raideur :

$$\mathbf{R}_i^T (\mathbf{F}_i + \mathbf{C}_i^T \boldsymbol{\Lambda}) = 0 \quad [1.2.2.3]$$

En injectant l'expression du déplacement [1.2.2.2] dans la troisième ligne du système [1.2.2.1] et en ajoutant la condition d'auto-équilibre [1.2.2.3], on parvient au problème d'interface :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad [1.2.2.4]$$

où  $\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{C}_i \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{C}_i^T$ ,

$$\mathbf{B} = - \sum_i \mathbf{C}_i \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{F}_i,$$

$$\mathbf{G} = [\dots \mathbf{C}_j \mathbf{R}_j \dots],$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{R}_j^T \mathbf{F}_j \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_j \\ \vdots \end{bmatrix},$$

l'indice  $j$  parcourt l'ensemble des sous-domaines *flottants*.

On obtient un problème à deux échelles d'espace. Il est résolu par une méthode de gradient conjugué préconditionné projeté [Fahrat et al. 2000]. Le choix du préconditionneur est un point clé pour l'efficacité de la méthode, en particulier en matière de parallélisation de l'algorithme de résolution, qui est un des objectifs prioritaires de la méthode FETI.

Nos attentes et notre traitement du problème à deux échelles diffèrent par la suite du cadre FETI, en particulier en ce qui concerne le parallélisme. Cependant, la séparation du déplacement en contribution rigide et contribution flexible, ainsi que l'emploi judicieux d'une méthode de gradient conjugué préconditionné pour l'inversion du problème d'interface, sont pour nous des questions importantes traitées au chapitre 3.

### 1.2.3. Plusieurs échelles de temps

L'emploi d'un schéma de Newmark implicite en dynamique des structures conduit à un problème de nature matricielle. En effet, le système à résoudre pour obtenir l'accélération à l'instant  $t^{n+1}$  s'écrit, en dynamique linéaire :

$$(\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) \ddot{\mathbf{U}}^{n+1} = -\mathbf{K}^p \mathbf{U}^n + \mathbf{F}_{\text{ext}}^v{}^{n+1} + \mathbf{F}_{\text{ext}}^s{}^{n+1} \quad [1.2.3.1]$$

On retrouve des systèmes analogues en non-linéaire au cours des itérations de la méthode de Newton. La matrice  $\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}$  n'est en général pas diagonale. Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode d'inversion, dont le coût en nombre d'opérations augmente souvent rapidement avec la dimension du système (cf. chapitre 3). Dans ce contexte, une méthode multi-domaines montre immédiatement sa valeur, dans la mesure où elle remplace l'inversion d'une matrice de grande taille par plusieurs inversions de systèmes plus petits.

Comme évoqué au paragraphe [1.1.3], le système à inverser en dynamique explicite est rendu diagonal par concentration de la masse aux nœuds. La nature du problème est alors vectorielle et la résolution bénéficie de manière moins immédiate de la décomposition en sous-domaines. Nous n'entrons pas dans ce travail dans des considérations sur la parallélisation des méthodes multi-domaines, comparées à la parallélisation des boucles internes sur les éléments du problème mono-domaine.

La contrainte majeure de la dynamique explicite ne porte donc pas sur le calcul de l'équilibre mais sur la taille du pas de temps, liée à la taille des éléments. Pour être efficace, notre approche multi-domaines ne doit donc pas seulement diviser le problème initial mais aussi alléger la contrainte sur la stabilité de l'intégration là où c'est possible, alors qu'une approche mono-domaine pénalise identiquement toute la structure. Apparaît ainsi la nécessité de gérer plusieurs échelles de temps en dynamique explicite avec décomposition de domaine.

On trouve dans [Gravouil et Combescure 2001] une méthode de couplage pour des schémas de Newmark de toute nature. Elle est inspirée des méthodes de sous-cyclage en temps [Belytschko et al. 1979] et des méthodes mixtes "implicite-explicite" [Liu et Belytschko 1982]. Nous l'utilisons dans le



cas particulier où chaque sous-domaine est intégré avec le schéma des différences centrées et où seul le pas de temps est différent d'un sous-domaine à l'autre.

On considère tout d'abord deux sous-domaines sur lesquels le pas de temps reste constant et on impose aux pas de temps d'être multiples l'un de l'autre.

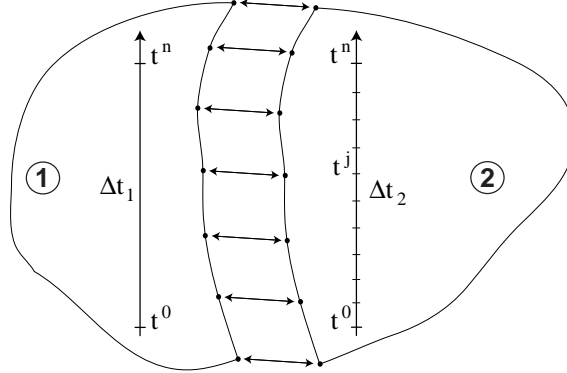


FIGURE [1.2.3.1] : Deux échelles de temps - Pas constants et multiples l'un de l'autre

On écrit la continuité cinématique entre les deux sous-domaines sur l'échelle de temps la plus fine, par exemple pour l'instant  $t^j$  :

$$\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{U}}_1^j + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{U}}_2^j = 0 \quad [1.2.3.2]$$

On peut écrire les problèmes sans liaison sur les deux sous-domaines :

✓ A l'instant  $t^n$  pour le sous-domaine 1 :

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{U}}_{1_{\text{free}}}^n = \mathbf{F}_1^n \quad [1.2.3.3]$$

✓ A l'instant  $t^j$  pour le sous-domaine 2 :

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{U}}_{2_{\text{free}}}^j = \mathbf{F}_2^j \quad [1.2.3.4]$$

On exprime les vitesses à partir du schéma d'intégration et du découpage avec liaisons et sans liaison :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_1^n &= \dot{\mathbf{U}}_1^0 + \frac{\Delta t_1}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{1_{\text{free}}}^n + \frac{\Delta t_1}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{1_{\text{link}}}^n = \dot{\mathbf{U}}_{1_{\text{free}}}^n + \frac{\Delta t_1}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{1_{\text{link}}}^n \\ \dot{\mathbf{U}}_2^j &= \dot{\mathbf{U}}_2^0 + \frac{\Delta t_2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{2_{\text{free}}}^j + \frac{\Delta t_2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{2_{\text{link}}}^j = \dot{\mathbf{U}}_{2_{\text{free}}}^j + \frac{\Delta t_2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{2_{\text{link}}}^j \end{aligned} \quad [1.2.3.5]$$

On affecte le prédicteur en vitesse du schéma de Newmark au problème sans liaison, pour isoler les quantités connues au moment de résoudre le problème d'interface.

On ne dispose pas des quantités à l'instant  $t^j$  pour le sous-domaine 1 pour écrire la continuité cinématique [1.2.3.2]. Il faut recourir à une projection de l'échelle grossière du sous-domaine 1 sur l'échelle fine du sous-domaine 2. Cette projection prend la forme d'une interpolation linéaire entre les instants  $t^0$  et  $t^n$  [Gravouil et Combescure 2001] :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}_{\text{free}}^j &= \left( \frac{t^n - t^j}{t^n - t^0} \right) \dot{\mathbf{U}}_{\text{free}}^0 + \left( \frac{t^j - t^0}{t^n - t^0} \right) \dot{\mathbf{U}}_{\text{free}}^n \\ \ddot{\mathbf{U}}_{\text{link}}^j &= \left( \frac{t^n - t^j}{t^n - t^0} \right) \ddot{\mathbf{U}}_{\text{link}}^0 + \left( \frac{t^j - t^0}{t^n - t^0} \right) \ddot{\mathbf{U}}_{\text{link}}^n\end{aligned}\quad [1.2.3.6]$$

L'expression de  $\ddot{\mathbf{U}}_{\text{link}}^j$  montre qu'on remplace cette inconnue à l'instant  $t^j$  par une extrapolation linéaire à l'instant  $t^n$ , soit  $\ddot{\mathbf{U}}_{\text{link}}^n$ . Cette accélération est en équilibre avec un effort d'interface fictif, donné par  $\mathbf{C}_1^T \tilde{\Lambda}^n$ . Pour parvenir à une écriture découplée sur l'échelle fine en temps, une approximation est alors nécessaire, qui consiste à écrire :

$$\Lambda^n = \tilde{\Lambda}^n \quad [1.2.3.7]$$

Cette dernière égalité n'est vraie que lorsque l'évolution des efforts d'interface est linéaire entre les instants  $t^0$  et  $t^n$ . Des détails sur les conséquences pratiques de cette approximation sont donnés dans [Gravouil 2000].

On peut désormais écrire :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{U}}_{\text{link}}^j &= \left( \frac{t^n - t^j}{t^n - t^0} \right) \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \Lambda^0 + \left( \frac{t^j - t^0}{t^n - t^0} \right) \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \Lambda^n \\ &= \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \left[ \left( \frac{t^n - t^j}{t^n - t^0} \right) \Lambda^0 + \left( \frac{t^j - t^0}{t^n - t^0} \right) \Lambda^n \right] \\ &= \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \Lambda^j = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \Lambda\end{aligned}\quad [1.2.3.8]$$

où on suppose de nouveau que  $\Lambda$  varie linéairement entre  $t^0$  et  $t^n$ .

On parvient finalement au problème d'interface à résoudre à l'instant  $t^j$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}\Lambda &= \mathbf{B} \\ \text{où } \mathbf{H} &= \frac{\Delta t_1}{2} \mathbf{C}_1 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T + \frac{\Delta t_2}{2} \mathbf{C}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{C}_2^T, \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{U}}_{\text{free}}^j - \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{U}}_{\text{free}}^j.\end{aligned}\quad [1.2.3.9]$$

---

**Remarque 1 :** L'influence du traitement multi-échelles en temps des liaisons d'interface sur la stabilité globale de l'algorithme d'intégration en temps est un point fondamental de notre approche. Elle est étudiée en profondeur dans [Gravouil 2000] et conduit à la justification du choix des vitesses discrètes en temps pour exprimer la continuité cinématique. Dans ces conditions, il est prouvé que le couplage d'échelles de temps différentes conduit à une dissipation numérique d'énergie à l'interface entre les sous-domaines et n'affecte donc pas la stabilité de l'intégration. Elle est toujours donnée par le respect de la condition de Courant sur chacun des sous-domaines. Les exemples présents dans [Gravouil 2000] laissent à penser que la dissipation artificielle reste faible et qu'elle n'altère que très peu la solution du problème multi-domaines.

---

Pour disposer tout au long du calcul du pas de temps le plus économique sur chacun des sous-domaines, c'est-à-dire que le pas de temps suit le pas critique fixé par la condition CFL, nous sommes amenés à doter chaque sous-domaine d'un pas variable. Les échelles de temps sur les différents sous-domaines sont donc désormais indépendantes.

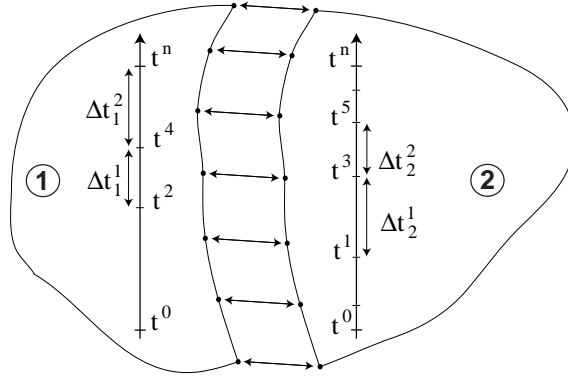


FIGURE [1.2.3.2] : Deux échelles de temps – Pas variables et indépendants

On écrit la continuité cinématique à tous les instants de l'échelle formée par l'union des échelles de chacun des sous-domaines [Bousquet et al. 2000][Herry et al. 2002], par exemple à l'instant  $t^5$  :

$$\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{U}}_1^5 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{U}}_2^5 = 0 \quad [1.2.3.10]$$

A nouveau, les vitesses relatives au sous-domaine 1 doivent être remplacées par des quantités interpolées entre les instants  $t^4$  et  $t^n$  :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_1^5 &= \left( \frac{t^n - t^5}{t^n - t^4} \right) \dot{\mathbf{U}}_{1\text{free}}^4 + \left( \frac{t^5 - t^4}{t^n - t^4} \right) \dot{\mathbf{U}}_{1\text{free}}^n + \left( \frac{t^n - t^5}{t^n - t^4} \right) \frac{\Delta t_1^1}{2} \ddot{\mathbf{U}}_1^4 + \left( \frac{t^5 - t^4}{t^n - t^4} \right) \frac{\Delta t_1^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_1^n \\ &= \left( \frac{t^n - t^5}{t^n - t^4} \right) \dot{\mathbf{U}}_{1\text{free}}^4 + \left( \frac{t^5 - t^4}{t^n - t^4} \right) \dot{\mathbf{U}}_{1\text{free}}^n \\ &\quad + \left( \frac{t^n - t^5}{t^n - t^4} \right) \frac{\Delta t_1^1}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{\Lambda}^4 + \left( \frac{t^5 - t^4}{t^n - t^4} \right) \frac{\Delta t_1^2}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{\Lambda}^n \\ &= \dot{\mathbf{U}}_{1\text{free}}^5 + \left( \frac{t^n - t^5}{t^n - t^4} \right) \frac{\Delta t_1^1}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{\Lambda}^4 + \left( \frac{t^5 - t^4}{t^n - t^4} \right) \frac{\Delta t_1^2}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{\Lambda}^n \end{aligned} \quad [1.2.3.11]$$

On a réalisé pour écrire l'expression [1.2.3.11] la même hypothèse que précédemment sur l'égalité des efforts d'interface réels et ceux en équilibre avec les accélérations extrapolées à l'instant  $t^n$ .

On introduit alors pour le sous-domaine interpolé deux paramètres supplémentaires :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{t^5 - t^4}{t^n - t^4} \\ b_1 &= \frac{\Delta t_1^1}{\Delta t_1^2} \end{aligned} \quad [1.2.3.12]$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{U}}_1^5 &= \dot{\mathbf{U}}_{1\text{free}}^5 + (1-a_1)b_1 \frac{\Delta t_1^2}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \Lambda^4 + a_1 \frac{\Delta t_1^2}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \Lambda^n \\
 &= \dot{\mathbf{U}}_{1\text{free}}^5 + \frac{\Delta t_1^2}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \left[ (1-a_1)b_1 \Lambda^4 + a_1 \Lambda^n \right] \\
 &= \dot{\mathbf{U}}_{1\text{free}}^5 + \frac{\Delta t_1^2}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \left[ (1-a_1)(b_1-1) \Lambda^4 + (1-a_1) \Lambda^4 + a_1 \Lambda^n \right] \quad [1.2.3.13] \\
 &= \dot{\mathbf{U}}_{1\text{free}}^5 + \frac{\Delta t_1^2}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \Lambda^5 + (1-a_1)(b_1-1) \frac{\Delta t_1^2}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \Lambda^4 \\
 &= \dot{\mathbf{U}}_{1\text{free}}^5 + \frac{\Delta t_1^2}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T \Lambda^5 + (1-a_1)(b_1-1) \frac{\Delta t_1^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{1\text{link}}^4
 \end{aligned}$$

En injectant cette dernière expression dans l'équation de continuité [1.2.3.10], on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}\Lambda &= \mathbf{B} \quad [1.2.3.14] \\
 \text{où } \Lambda &= \Lambda^5, \\
 \mathbf{H} &= \frac{\Delta t_1^2}{2} \mathbf{C}_1 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1^T + \frac{\Delta t_2^2}{2} \mathbf{C}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{C}_2^T, \\
 \mathbf{B} &= -\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{U}}_{1\text{free}}^j - \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{U}}_{2\text{free}}^j - \mathbf{C}_1 (1-a_1)(b_1-1) \frac{\Delta t_1^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_{1\text{link}}^4.
 \end{aligned}$$

Comme auparavant, cette écriture se généralise aisément au cas d'un nombre quelconque de sous-domaines.

La variabilité du pas de temps entraîne donc des corrections au second membre du problème condensé relatives aux sous-domaines interpolés. En effet, si la continuité cinématique est écrite sur un pas de calcul pour le sous-domaine  $i$ , le paramètre  $a_i$  vaut 1 et les corrections correspondantes disparaissent. Il en va de même si le pas de temps reste constant sur le sous-domaine  $i$ , le paramètre  $b_i$  valant alors 1.

---

**Remarque 2 :** Dans le cas des pas constants et multiples les uns des autres, l'échelle la plus grossière définit une succession d'instantanés où la continuité cinématique est calculée exactement, sans interpolation. Avec les pas variables, ces instantanés peuvent ne pas exister. Il semble intéressant d'imposer régulièrement des points de "rendez-vous" à tous les sous-domaines, pour éviter l'accumulation d'erreurs dues aux interpolations [Bousquet et al. 2000].

---

#### 1.2.4. Une première approche multi-échelles en espace : gestion des maillages non-conformes

Le paragraphe précédent permet de découpler les échelles de temps entre les sous-domaines. Cependant, si la discrétisation de l'interface entre deux sous-domaines est identique pour chacun d'entre eux, ce découplage n'est pas complet. En effet, les tailles d'éléments pour les deux sous-domaines au voisinage de l'interface sont liées par l'intermédiaire de la taille des éléments surfaciques composant l'interface.

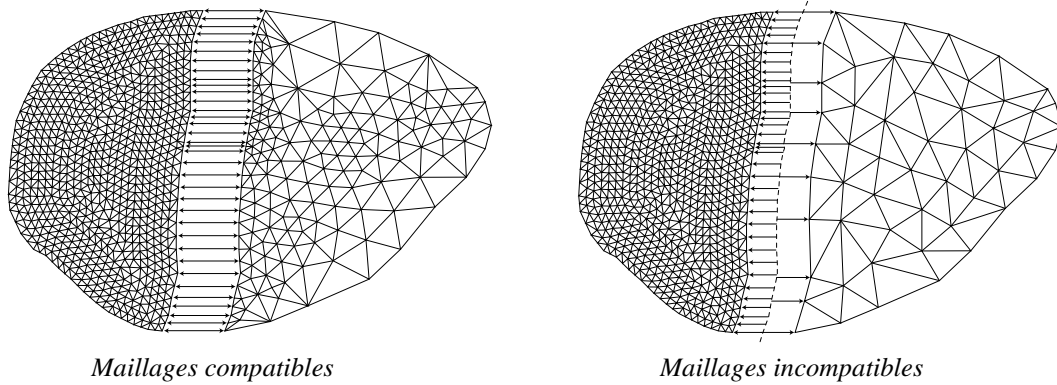


FIGURE [1.2.4.1] : *Maillages non-conformes - Découplage de la taille des éléments*

La taille des éléments du sous-domaine au maillage le plus fin va donc limiter le pas de temps utilisable sur l'autre sous-domaine partageant l'interface compatible. Au contraire, une gestion des maillages non-coïncidents sur l'interface permet de lever cette liaison, comme le montre la FIGURE [1.2.4.1]. On aboutit ainsi à un découplage total des échelles de temps et d'espace entre les sous-domaines.

D'une manière générale, toute méthode de connexion de maillages non-conformes repose sur l'écriture de nouvelles relations cinématiques entre les degrés de liberté de part et d'autre de l'interface [Quiroz 1993]. Les moyens utilisés pour traiter ces liaisons dans le processus de résolution du problème mécanique différencient les approches : méthode de pénalisation, méthode de Lagrangien augmenté [Sassi 1993]... On trouve un récapitulatif de ces méthodes dans [Champaney 1996]. Dans le cas de notre formalisme de décomposition de domaine dual, nous utilisons naturellement une méthode par multiplicateurs de Lagrange.

Pour parvenir à une écriture systématique des relations de continuité cinématique, on considère trois surfaces au niveau d'une interface entre deux sous-domaines (cf. FIGURE [1.2.4.1]) :

- ✓ Deux surfaces réelles discrètes correspondant au bord de chacun des sous-domaines en présence,
- ✓ Une surface virtuelle sur laquelle on écrit les relations.

Au sens continu en espace, la continuité cinématique entre deux sous-domaines 1 et 2 s'écrit sur leur interface  $I$  :

$$\dot{\mathbf{u}}_1|_I = \dot{\mathbf{u}}_2|_I \quad [1.2.4.1]$$

On introduit la grandeur duale de la vitesse pour exprimer le travail à l'interface issu d'un défaut de continuité :

$$\mathbf{W} = \int_I (\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2) \cdot \lambda \, dS \quad [1.2.4.2]$$

On procède alors à une discrétisation du travail  $\mathbf{W}$ . Pour les grandeurs cinématiques, on s'appuie logiquement sur la discrétisation du bord des sous-domaines respectifs auxquels elles se rattachent :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_1|_I &= \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_{1i}|_I \dot{\mathbf{U}}_{1i} \\ \dot{\mathbf{u}}_2|_I &= \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_{2j}|_I \dot{\mathbf{U}}_{2j}\end{aligned}\tag{1.2.4.3}$$

où  $n$  et  $m$  sont les nombres respectifs de degrés de liberté des sous-domaines 1 et 2 sur l'interface,

$\{\mathbf{N}_{1i}|_I\}$  et  $\{\mathbf{N}_{2j}|_I\}$  représentent les traces respectives sur l'interface  $I$  des fonctions de forme des éléments des sous-domaines 1 et 2.

Il reste à discrétiser la variable duale, pour faire apparaître le jeu de multiplicateurs de Lagrange. On trouve de nombreuses approches dans la littérature pour définir un espace de discrétisation satisfaisant. Parmi elles, on peut citer la méthode LLM, pour *Localised Lagrange Multipliers*, [Park et Felippa 2000], qui propose une règle originale de placement spatial des multiplicateurs. Dans tous les cas, pour conduire à une unique solution du problème couplé, cet espace doit vérifier la condition de *Ladyzenskaia-Babuska-Brezzi* [Brezzi et Fortin 1991]. Elle précise qu'il ne faut pas prendre un espace de multiplicateurs trop riche, si bien qu'on se limite à un nombre de relations inférieur au nombre total de degrés de liberté impliqués sur l'interface pour les deux sous-domaines. Les fonctions d'interpolation sont également prises de degré inférieur à celles utilisées pour les grandeurs cinématiques. Dans nos études, des fonctions linéaires sont prises pour interpoler toutes les variables.

Nous reprenons dans ce travail la méthode établie dans [Herry et al. 2002]. Elle propose comme support des multiplicateurs l'ensemble des nœuds disponibles sur l'interface, en fusionnant les nœuds communs aux deux sous-domaines. Il est prouvé que pour des interfaces planes entre des éléments finis linéaires, ce choix conduit à un collage parfait, c'est-à-dire que le travail  $\mathbf{W}$  calculé au sens continu est nul une fois recombinaison des champs de vitesses à l'aide des fonctions d'interpolation (cf. **remarque 2** à venir). On qualifie le nombre de multiplicateurs introduits d'optimal, car un nombre inférieur ne permet plus de parvenir au collage parfait dans la configuration citée et un nombre supérieur conduit à un problème d'interface singulier.

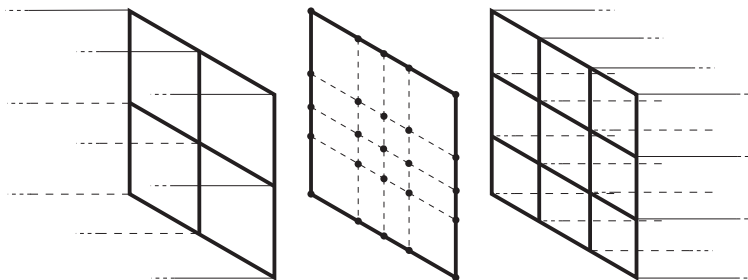


FIGURE [1.2.4.2] : Méthode optimale - Support des multiplicateurs

Cependant, le collage parfait signifie implicitement que le champ des vitesses sur l'interface s'écrit dans l'espace éléments finis associés aux nœuds communs aux deux sous-domaines. Suivant la configuration à l'interface, cet espace peut être pauvre et l'interface se trouve d'autant artificiellement rigidifiée.

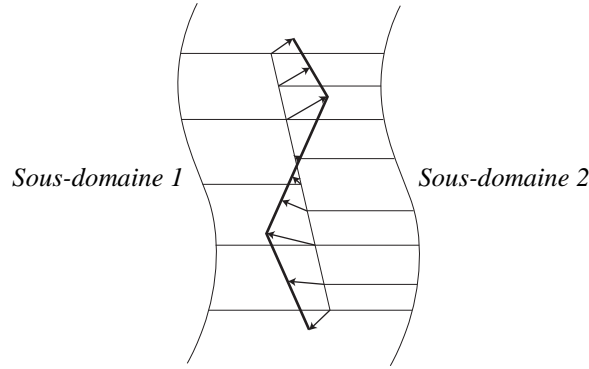


FIGURE [1.2.4.3] : Méthode optimale 2D - Déformation possible de l'interface

Nous recourons donc alternativement dans le cas où le nombre de nœuds communs aux deux maillages est faible, à la méthode *mortar* [Bernardi et al. 1990] [Ben Belgacem et al. 1999]. On choisit alors comme support des multiplicateurs la discrétisation d'un des sous-domaines en présence. Le choix de la discrétisation la plus fine donne naturellement les meilleurs résultats. Le nombre de multiplicateurs est alors inférieur au nombre optimal et on peut observer une dissipation d'énergie à l'interface. L'interface n'est toutefois plus sujette à une rigidité excessive. La méthode *mortar* a déjà été utilisée dans PLEXIS 3C/EUROPLEXUS pour le couplage d'éléments finis et d'éléments spectraux dans le cadre de l'analyse de propagations d'ondes [Casadei et Gabellini 1997] [Casadei et Gabellini 1998] [Casadei et al. 1998].

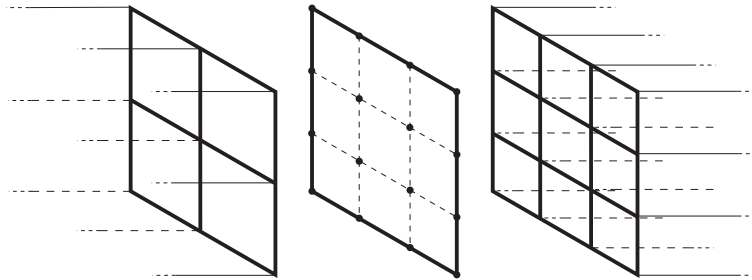


FIGURE [1.2.4.4] : Méthode mortar - Support des multiplicateurs

A partir de la donnée d'un support géométrique et de fonctions de forme associées, nous sommes à présent en mesure de discrétiser la variable duale  $\lambda$  sur l'interface :

$$\lambda = \sum_{k=1}^p \mathbf{P}_k \Lambda_k \quad [1.2.4.4]$$

où  $p$  représente le nombre totale de multiplicateurs introduits, soit le nombre de nœuds du support multiplié par le nombre de degrés de liberté par nœuds, qui dépend des éléments utilisés,

$\{\mathbf{P}_k\}$  est la famille des fonctions de forme prises sur le support.

On parvient finalement à l'expression approchée  $\tilde{\mathbf{W}}$  du travail  $\mathbf{W}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}} &= \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^p \mathbf{P}_k \Lambda_k \cdot \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_{1i} |_{\Gamma} \dot{\mathbf{U}}_{1i} - \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_{2j} |_{\Gamma} \dot{\mathbf{U}}_{2j} \right) d\mathbf{S} \\ &= \mathbf{\Lambda}^T \cdot (\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{U}}_2) \end{aligned} \quad [1.2.4.5]$$

où les matrices de liaisons  $\mathbf{C}_i$  sont données par :

$$\mathbf{C}_{i,jk} = (-1)^{i+1} \int_I \mathbf{P}_j \mathbf{N}_{i,k} \Big|_I d\mathbf{S}$$

On exhibe finalement les relations de continuité cinématique en différentiant  $\tilde{\mathbf{W}}$  par rapport aux multiplicateurs :

$$\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{U}}_2 = 0 \quad [1.2.4.6]$$

On obtient une représentation équivalente à celle du système [1.2.1.4]. Les matrices de couplage ne sont cependant plus booléennes, ce qui ne nuit en aucun cas au processus de résolution.

---

**Remarque 1 :** Par l'intermédiaire des produits de fonctions de forme, les matrices  $\mathbf{C}_i$  dépendent de la géométrie locale de l'interface. De grandes déformations en modifient donc les coefficients, qui doivent être actualisés en cours de calcul pour conserver un collage satisfaisant. Ceci peut-être coûteux. En remarquant qu'un mouvement rigide de grande amplitude de l'interface ne modifie pas les coefficients des liaisons [Herry 2000], il semble alors souhaitable de placer les interfaces entre maillages incompatibles loin des zones à fort gradient de déformation.

**Remarque 2 :** La bonne résolution du problème multi-domaines assure la nullité du travail  $\tilde{\mathbf{W}}$ . La qualité de la continuité cinématique est donnée alors par la valeur correspondante du travail  $\mathbf{W}$ , calculée à partir des densités d'efforts et des vitesses continues reconstruites à l'aide des fonctions de formes.

**Remarque 3 :** Dans le cas de maillages hiérarchiques sur l'interface, c'est-à-dire que l'un des maillages est obtenu par subdivision des éléments de l'autre, les méthodes optimale et mortar, appuyée sur le maillage le plus fin, coïncident.

---



### 1.3. Implantation dans EUROPLEXUS

La structure multi-domaines et la programmation de l'algorithme à plusieurs échelles de temps sont antérieures à ce travail. Le collage entre les sous-domaines était initialement restreint au cas des maillages compatibles : les relations de continuité étaient indépendantes entre elles et traitées séparément (avec un traitement spécifique des *cross-points*) (cf. paragraphe 1.3.2).

Le passage de l'écriture théorique du collage de maillages non-conformes à sa programmation dans un code industriel tel qu'EUROPLEXUS s'accompagne alors de nombreux aménagements pratiques. Il nous faut tout d'abord être en mesure de calculer précisément les coefficients des relations cinématiques. Avant notre travail, une méthode systématique était disponible en 2D avec des interfaces linéiques [Herry 1999]. Elle doit être étendue pour le traitement des interfaces surfaciques entre éléments volumiques 3D. Ensuite, pour une résolution efficace en terme de temps de calcul, l'inversion du problème d'interface requiert un soin particulier, pour prendre en compte à la fois la largeur de bande de l'opérateur  $\mathbf{H}$  et les spécificités de l'algorithme à plusieurs échelles de temps.

Par ailleurs, aucune structure d'interface n'était disponible dans l'architecture multi-domaines originale. Introduire la gestion des maillages non-coïncidents nécessite donc la mise en place de structures de données spécifiques, aussi bien pour l'écriture des relations de collage cinématique que pour la résolution du problème d'interface qui n'est plus diagonal dans le cas général.

#### 1.3.1. Calcul des coefficients des relations de collage incompatible en 2D et 3D

##### Identification des éléments d'intégration sur l'interface

Les coefficients des matrices de couplage utilisées pour connecter des maillages non-conformes sont obtenus d'une manière générale par l'intégration sur l'interface de produits de fonctions de forme prises sur deux discrétisations différentes (cf. équation [1.2.4.5]).

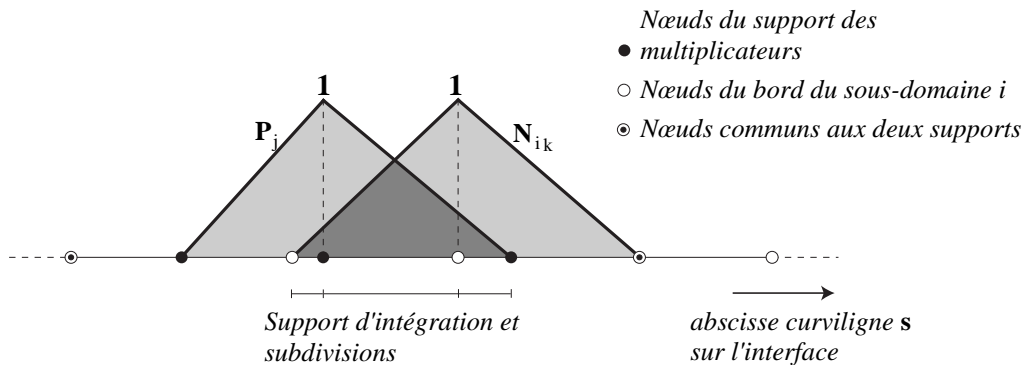


FIGURE [1.3.1.1] : Intégrales de collage - Cas 2D, interface linéique

Numériquement, ces intégrales sont calculées par une méthode classique de Gauss, adaptée principalement à l'intégration de fonctions polynomiales. Apparaît ainsi la nécessité de subdiviser le support d'intégration en zones où les fonctions à intégrer sont polynomiales, ce que montre la FIGURE [1.3.1.1] dans le cas d'interfaces linéiques.

Ce sous-découpage est relativement aisé à réaliser de manière systématique en 2D [Herry 1999]. Il en va différemment en 3D, où les interfaces sont surfaciques. Il faut alors construire un ensemble de subdivisions (triangles) sur lesquelles les fonctions de forme à intégrer sont régulières. Ces triangles doivent s'appuyer sur tous les nœuds du support des multiplicateurs de Lagrange et ne doivent chevaucher aucune arête provenant de l'une ou l'autre des deux discrétisations projetées sur la surface géométrique représentant l'interface. Le support de ces triangles est donc au moins le support des

multiplicateurs augmenté de toutes les intersections d'arêtes entre les deux discrétisations projetées. Pour construire le jeu d'éléments d'intégration, on peut suivre par exemple la procédure suivante :

1. On identifie un support formé des nœuds et des intersections des arêtes des éléments des deux maillages.

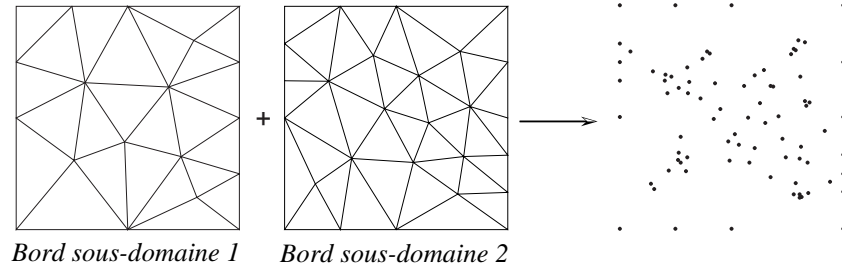


FIGURE [1.3.1.2] : *Support de triangulation initiale*

2. On construit un ensemble d'éléments triangulaires s'appuyant sur ce support par la méthode de Delaunay [Fortune 1992].

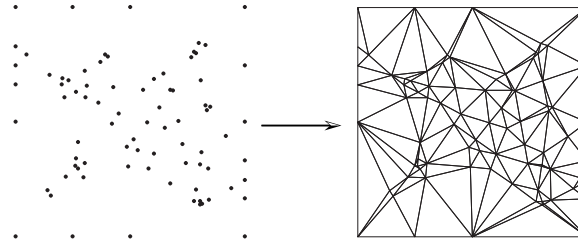


FIGURE [1.3.1.3] : *Triangulation initiale*

On remarque alors que notre première proposition pour le support des triangles d'intégration n'est pas suffisante. La subdivision obtenue peut encore comporter des triangles chevauchant plusieurs éléments d'un des deux maillages initiaux, comme le montre par exemple la superposition de la subdivision et du maillage du bord du sous-domaine 1 sur la FIGURE [1.3.1.4].

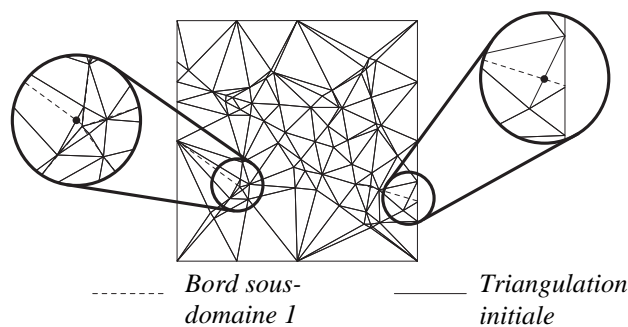
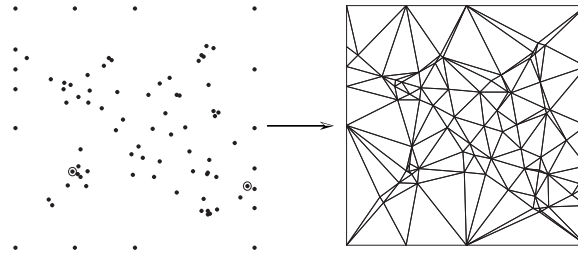


FIGURE [1.3.1.4] : *Intersections restantes*

3. On recherche à nouveau les intersections des arêtes des triangles créés avec les éléments initiaux. On ajoute ces points au support et on réalise une nouvelle triangulation. On itère jusqu'à ce que les fonctions de forme utilisées soient régulières sur tous les triangles.



⊙ Points rajoutés à la deuxième itération

FIGURE [1.3.1.5] : *Triangulation finale*

Une procédure de triangulation sous contrainte [Ruppert 1995] devrait permettre de parvenir au jeu de triangles satisfaisant en une seule itération, en conservant la donnée des arêtes initiales au moment de définir les triangles. Cela éviterait également les éléments aplatis sources d'imprécision en imposant par exemple un angle d'ouverture minimum aux sommets de chaque triangle.

La mise en œuvre d'une procédure permettant le calcul précis des intégrales dans toute configuration de collage surfacique reste une étape délicate. Une fois la discrétisation spatiale effectuée, la géométrie exacte de l'interface n'est en général plus disponible, ce qui rend difficile le passage en coordonnées surfaciques et l'identification des intersections d'arêtes. En effet, certaines arêtes vont se croiser en projection alors qu'elles n'ont aucun point commun dans l'espace 3D. Il est alors indispensable de caler des paramètres de distance empiriques pour détecter tout de même les intersections.

Pour cette raison, et même si l'algorithmique générale est disponible, nous restreignons volontairement la gestion des interfaces surfaciques dans EUROPLEXUS au cas des maillages hiérarchiques. La discrétisation la plus fine fournit alors immédiatement un ensemble d'éléments satisfaisant pour l'intégration.

#### *Calcul des intégrales*

Une fois les éléments d'intégration déterminés, on place le nombre nécessaire de points de Gauss sur chacun d'eux et il reste enfin à évaluer les fonctions à intégrer en ces points. Les fonctions de forme sont déterminées à partir des coordonnées locales sur chacun des éléments de la discrétisation du bord des sous-domaines en présence et de celle de la variable duale. On va donc projeter chacun des points de Gauss sur les surfaces discrétisées correspondantes, trouver à quel élément appartient la projection et identifier ses coordonnées locales.

---

**Remarque :** *Dans le cas des maillages hiérarchiques qui nous intéresse, le bord le plus fin, le support des multiplicateurs et le support d'intégration coïncident. La projection est donc immédiate pour les intégrales impliquant le bord fin et les multiplicateurs.*

---

Si la surface discrète de projection est composée de triangles, éléments plans, les coordonnées locales s'obtiennent aisément. On réalise tout d'abord la projection  $\mathbf{P}_G^\perp$  du point de Gauss courant  $\mathbf{P}_G$  dans le plan d'un des éléments.

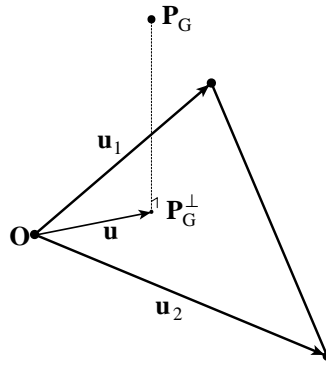


FIGURE [1.3.1.6] : *Projection sur un triangle*

Les coordonnées locales  $(\xi, \eta)$  sont alors données par l'égalité :

$$\mathbf{u} = \xi \mathbf{u}_1 + \eta \mathbf{u}_2 \quad [1.3.1.1]$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)}{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2) - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)} \\ \eta &= \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)}{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2) - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)} \end{aligned} \quad [1.3.1.2]$$

L'appartenance de la projection  $\mathbf{P}_G^\perp$  à un élément est donnée par l'appartenance du couple  $(\xi, \eta)$  à l'ensemble  $[0,1] \times [0,1]$ .

Dans le cas de la projection sur une surface discrétisée à l'aide de quadrangles, éléments non-plans, la recherche des coordonnées locales devient itérative. Pour un quadrangle donné, on exprime la distance  $d$  entre le point  $\mathbf{M}$  de coordonnées locales  $(\xi, \eta)$  et le point de Gauss à projeter  $\mathbf{P}_G$ .

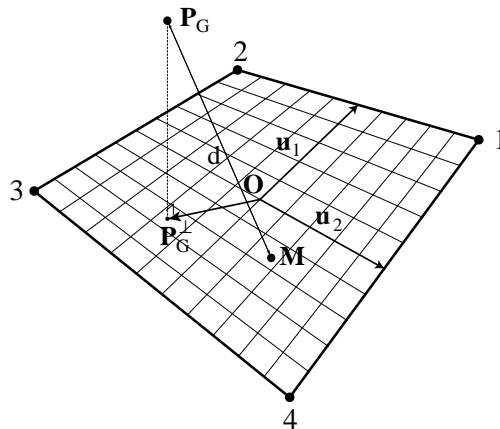


FIGURE [1.3.1.7] : *Projection sur un quadrangle*

Soit  $\{\mathbf{x}_i\}$  les coordonnées des quatre sommets du quadrangle. Les coordonnées du point  $\mathbf{M}$  sont alors obtenues à l'aide des fonctions d'interpolation linéaires exprimées à l'aide du couple  $(\xi, \eta)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_M = & \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\mathbf{x}_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\mathbf{x}_2 \\ & + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\mathbf{x}_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\mathbf{x}_4 \end{aligned} \quad [1.3.1.3]$$

On peut alors exprimer la distance  $d$  (ou plutôt son carré) :

$$d^2 = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\mathbf{x}_{1i} + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\mathbf{x}_{2i} + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\mathbf{x}_{3i} + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\mathbf{x}_{4i} - \mathbf{x}_{G_i} \right]^2 \quad [1.3.1.4]$$

où  $\mathbf{x}_G$  représente les coordonnées du point de Gauss à projeter.

La projection cherchée  $\mathbf{P}_G^\perp$  correspond au point  $\mathbf{M}$  qui minimise la quantité  $d^2$ . On cherche donc à résoudre :

$$\text{grad} \left[ d^2(\xi, \eta) \right] = 0 \quad [1.3.1.5]$$

Ceci conduit à un système non-linéaire en  $(\xi, \eta)$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left[ (\eta-1)\mathbf{x}_{1i} + (1-\eta)\mathbf{x}_{2i} + (1+\eta)(\mathbf{x}_{3i} - \mathbf{x}_{4i}) \right] \\ \left[ (1-\xi)(1-\eta)\mathbf{x}_{1i} + (1+\xi)(1-\eta)\mathbf{x}_{2i} + (1+\xi)(1+\eta)\mathbf{x}_{3i} + (1-\xi)(1+\eta)\mathbf{x}_{4i} - 4\mathbf{x}_{G_i} \right] = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \left[ (\xi-1)\mathbf{x}_{1i} + (1+\eta)(\mathbf{x}_{3i} - \mathbf{x}_{2i}) + (1-\xi)\mathbf{x}_{4i} \right] \\ \left[ (1-\xi)(1-\eta)\mathbf{x}_{1i} + (1+\xi)(1-\eta)\mathbf{x}_{2i} + (1+\xi)(1+\eta)\mathbf{x}_{3i} + (1-\xi)(1+\eta)\mathbf{x}_{4i} - 4\mathbf{x}_{G_i} \right] = 0 \end{aligned} \quad [1.3.1.6]$$

On calcule le couple des coordonnées locales par une classique méthode de Newton. L'appartenance à un quadrangle est alors donnée par l'appartenance du couple  $(\xi, \eta)$  à l'ensemble  $[-1,1] \times [-1,1]$ .

### 1.3.2. Traitement du problème d'interface

#### Inversion du problème condensé

EUROPLEXUS dispose déjà d'une méthode duale de traitement des liaisons cinématiques. On utilise donc les opérateurs existants au moment de l'inversion de notre problème d'interface.

#### Largeur de bande de l'opérateur d'interface

La largeur de bande de l'opérateur de condensation sur les interfaces  $\mathbf{H}$  dépend du nombre de degrés de liberté impliqués dans les liaisons. Dans le cas de maillages compatibles et en l'absence de *cross-points* les relations sont écrites nœuds à nœuds pour chacun des degrés de liberté disponible. L'opérateur est donc diagonal.

Dans le cas d'un *cross-point*, autant de degrés de liberté que de sous-domaines connectés par le point sont impliqués dans la relation de liaison correspondante. On a donc un bloc non-diagonal à inverser, mais il reste de taille réduite. Il est également singulier (cf. paragraphe 1.2.1). Nous y revenons dans la suite.

Lorsque des liaisons assurent la connexion de maillages non-conformes, elles concernent un nombre de degrés de liberté supérieur à deux et introduit également des blocs pleins dans l'opérateur d'interface.

Il est nécessaire pour une résolution efficace d'identifier les parties diagonales de l'opérateur et de réduire au maximum la largeur de bande des parties pleines en condensant les termes non-nuls au voisinage de la diagonale. Ceci est réalisé à l'aide d'un outil de renumérotation des liaisons disponible dans EUROPLEXUS [Lepareux et al. 1994].

#### *Singularités dues aux cross-points*

La redondance potentielle des relations de liaisons est un point déjà pris en compte dans EUROPLEXUS. Le calcul des multiplicateurs de Lagrange associés est réalisé à l'aide d'une méthode d'inversion directe fondé sur une factorisation de Cholesky [Joly 1993][Nowakowski 1984]. Elle permet d'identifier et de gérer naturellement les éléments du noyau de l'opérateur condensé.

#### **Prise en compte de l'algorithme à plusieurs échelles de temps**

Lors de la résolution d'un problème d'interface entre des sous-domaines aux échelles de temps différentes, les quantités cinématiques calculables pour les sous-domaines interpolés (dont le temps local ne correspond pas à l'instant de calcul sur l'échelle globale) sont sans intérêt. Les seules quantités *link* à retenir sont celles évaluées à l'aide des multiplicateurs lorsque le sous-domaine est calculé exactement. On peut recenser sur la structure en cours de calcul des interfaces ne faisant intervenir à un instant global donné que des sous-domaines interpolés. Dès lors, calculer les multiplicateurs pour ces interfaces est inutile, puisqu'aucun usage n'en est fait.

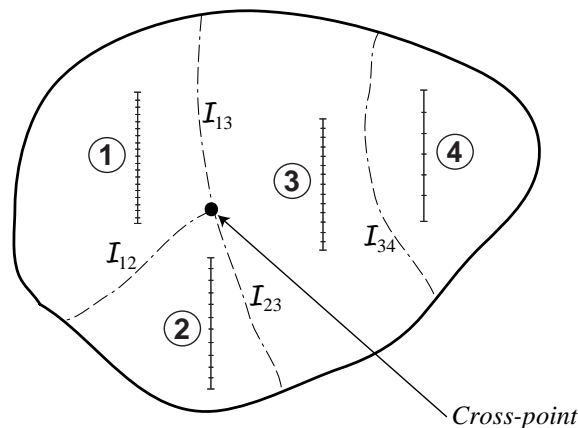


FIGURE [1.3.2.1] : Interfaces et plusieurs échelles de temps

Pour éviter des opérations d'inversion inutiles, il apparaît judicieux de traiter séparément les interfaces entre sous-domaines deux à deux. Cependant, l'échange d'un *cross-point* entre plusieurs interfaces oblige leur traitement simultané. Dès lors, on sépare l'interface globale en sous-groupes d'interfaces élémentaires connectées entre elles par des *cross-points*. Cela correspond à définir une connectivité des interfaces. On définit dans le chapitre 2 un argument supplémentaire de connexion de deux interfaces, à savoir le fait de s'appuyer sur un même sous-domaine sur lequel une méthode de projection modale est utilisée.

Par exemple, pour la configuration de la FIGURE [1.3.2.1], on obtient deux groupes d'interfaces, à savoir  $I_{12} \cup I_{13} \cup I_{23}$  d'un côté et  $I_{34}$  de l'autre. On gère individuellement ces deux groupes et on ne procède au calcul des multiplicateurs de Lagrange que si le temps local d'un des sous-domaines concernés correspond au temps de calcul global.

#### **1.3.3. Exemples de validation**

On présente pour conclure ce premier chapitre trois exemples destinés à illustrer simplement et à valider notre méthode multi-domaines dans EUROPLEXUS, en particulier la gestion des incompatibilités de maillage, pour trois cas de modélisation : une modélisation 2D, une modélisation 3D avec éléments de coques surfaciques et enfin une modélisation 3D volumique.

Eléments 2D déformations planes - Massif en flexion

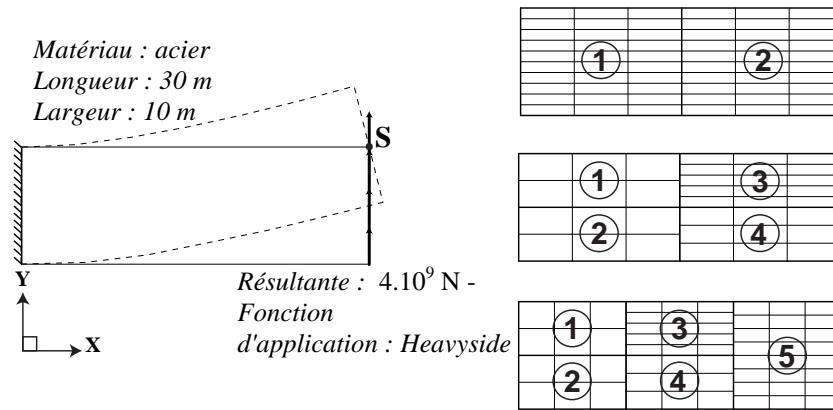


FIGURE [1.3.3.1] : Massif 2D – Géométrie, maillages et sous-domaines

On utilise la méthode *optimale* pour l'écriture du collage cinématique au niveau des interfaces incompatibles. On donne les déformées et la contraintes équivalentes de Von Mises pour les trois décompositions en sous-domaines à l'instant  $6.10^{-2}$  s, ainsi que le déplacement du point S dans les deux directions d'espace.

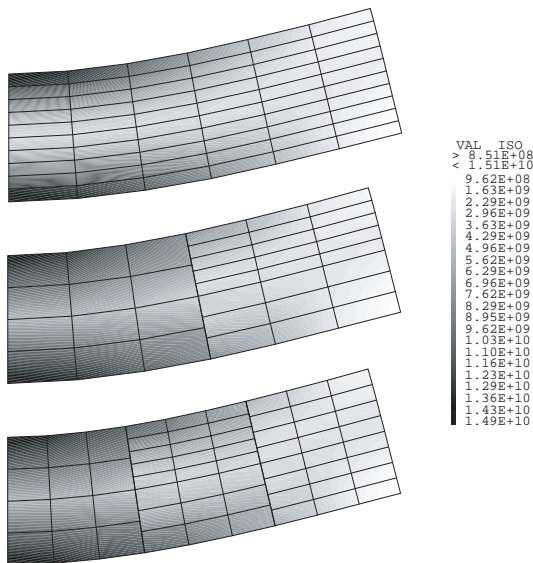


FIGURE [1.3.3.2] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps  $6.10^{-2}$  s

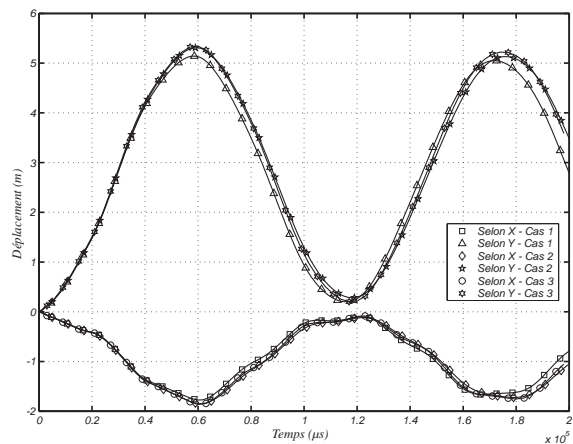


FIGURE [1.3.3.3] : Déplacement au point S

On n'observe aucun défaut dans la continuité du déplacement au travers des interfaces incompatibles. Les légères différences que l'on peut remarquer entre les déplacements au point S dans les trois cas de décomposition en sous-domaines sont à attribuer au comportement en flexion de l'élément quadrangle à 4 nœuds, qui varie en fonction du nombre d'éléments dans l'épaisseur du massif.

Eléments 3D coques - Cylindre en compression

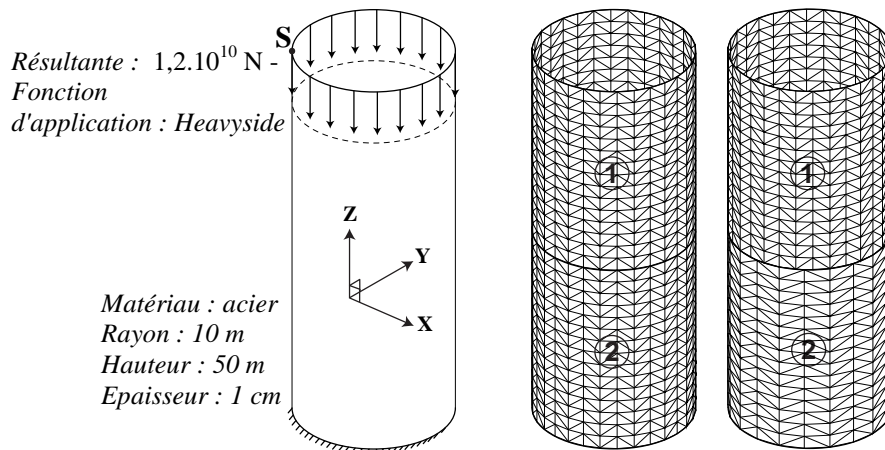


FIGURE [1.3.3.4] : Cylindre 3D coque - Géométrie, maillages et sous-domaines

L'espace comporte désormais trois dimensions, mais les interfaces sont toujours linéiques. On utilise à présent la méthode *mortar*, appuyée sur le sous-domaine 1, dans le second cas de décomposition en sous-domaines. On donne les déformées et les contraintes de Von Mises à l'instant  $4,6 \cdot 10^{-2}$  s, ainsi que le déplacement au point **S** dans la direction verticale, les autres composantes restant d'amplitude négligeable.

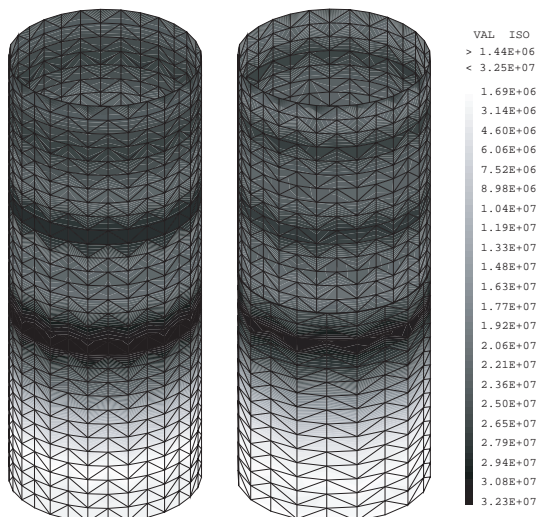


FIGURE [1.3.3.5] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps  $4,6 \cdot 10^{-2}$  s

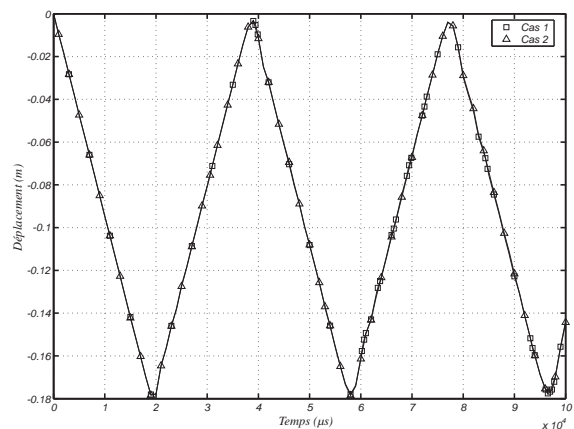


FIGURE [1.3.3.6] : Déplacement dans la direction verticale au point **S**

La propagation des ondes de compression n'est absolument pas altérée par la présence de maillages de finesse différente, à l'origine de pas de temps différents et du traitement d'une interface incompatible.

#### Éléments 3D volumique - Massif en traction



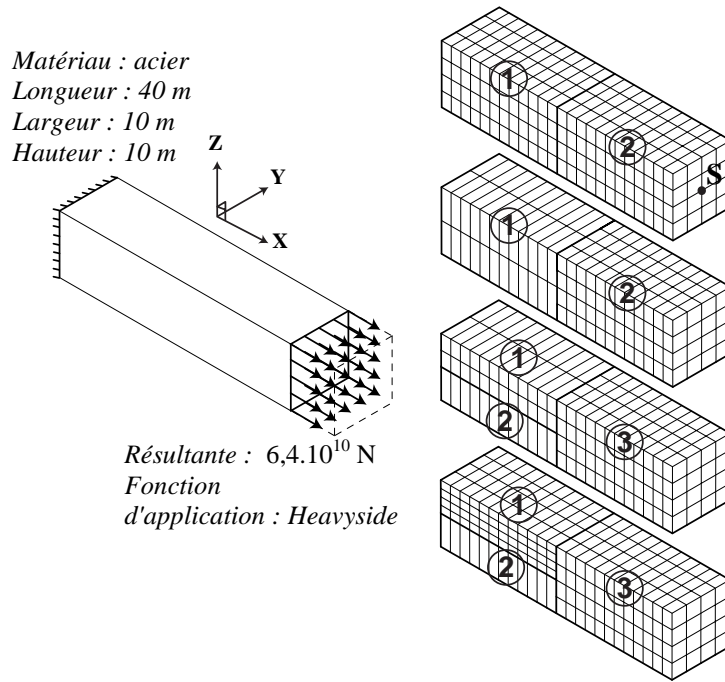


FIGURE [1.3.3.7] : Massif 3D - Géométrie, maillages et sous-domaines

On présente les déformées et les contraintes de Von Mises à l'instant  $3,6 \cdot 10^{-2}$  s pour les quatre cas de décomposition en sous-domaines. On trace également le déplacement au point S dans la direction longitudinale, selon l'axe x, les composantes dans les autres directions étant à nouveau négligeables.

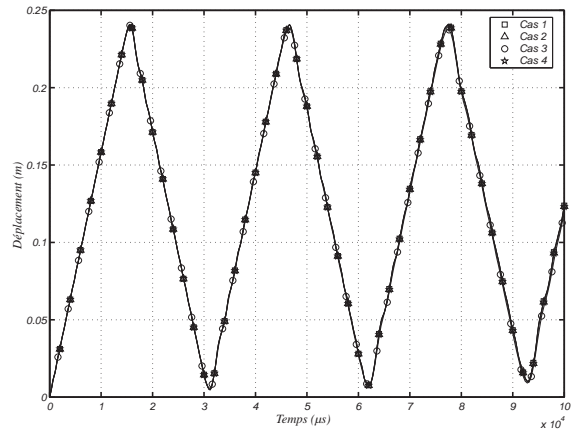
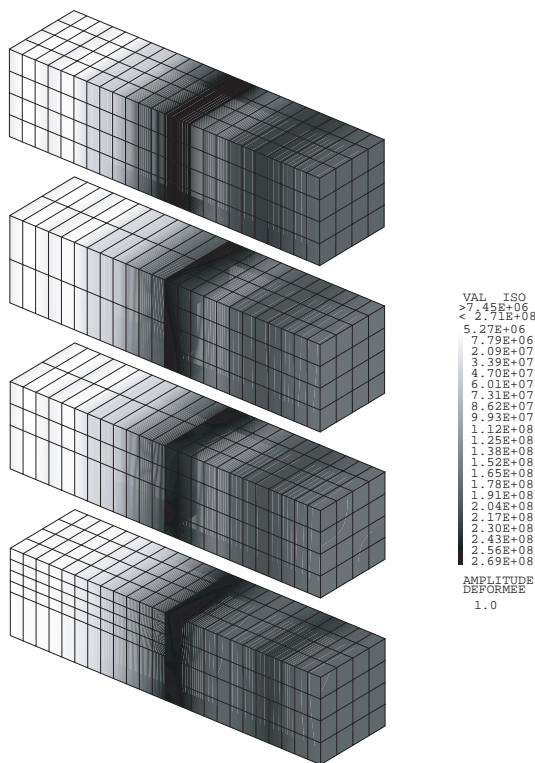


FIGURE [1.3.3.9] : Déplacement dans la direction longitudinale au point S

FIGURE [1.3.3.8] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps  $3,6 \cdot 10^{-2}$  s

Comme précédemment, les réponses obtenues dans tous les cas de décomposition sont identiques.



## Chapitre 2

---

### *Réduction modale sur les sous-domaines linéaires en petits déplacements*

---

La reproduction fidèle de la géométrie des structures complexes fait souvent intervenir un grand nombre d'éléments. Il en résulte *a priori* un grand nombre d'inconnues qui alourdit les problèmes de dynamique posés sur ces structures. De plus, les hautes fréquences dans le spectre de réponse dues aux petits éléments pénalisent encore une résolution explicite à cause de la condition CFL. La dynamique vibratoire s'intéresse au comportement des structures dans les basses fréquences. Les degrés de liberté nodaux, qu'on peut qualifier de *géométriques*, sont en nombre bien trop important par rapport aux nombre d'inconnues réellement nécessaires pour qualifier le comportement dynamique. Il est donc classique de remplacer les inconnues issues des éléments finis par d'autres, moins nombreuses et spécifiques à la bande de fréquence d'étude. Ceci est fréquemment effectué au moyen des méthodes de projection modale, dont la présentation fait l'objet de la première partie de ce chapitre. Pour une structure de longueur caractéristique très supérieure à la dimension d'une zone fortement non-linéaire au voisinage d'un point d'impact, on peut identifier un large domaine au comportement vibratoire en basse fréquence. C'est le phénomène d'ébranlement. Nous nous attachons donc dans la suite du chapitre à coupler des sous-domaines linéaires aux inconnues modales aux sous-domaines directs non-linéaires introduits au chapitre précédent. Nous conservons naturellement le formalisme dual global, la gestion des différentes échelles de temps et celle des maillages incompatibles. Ce chapitre s'achève sur les spécificités d'un problème d'interface écrit en présence de modes sur certains des sous-domaines concernés.

---

## 2.1. Réduction modale

Pour illustrer notre intérêt pour les méthodes modales en transitoire, considérons l'exemple simple d'un arc d'acier encasté à l'une de ses extrémités et sollicité par une force répartie horizontale à l'autre extrémité (cf. FIGURE [2.1.1]). On propose trois modélisations différentes pour calculer la réponse dynamique de la structure : deux modèles éléments finis classiques s'appuyant sur des maillages de finesse différente et un modèle projeté sur la base des dix premiers modes propres de l'arc encasté. Les modes sont approchés par la méthode des éléments finis à l'aide du maillage le plus fin. Le calcul classique effectué avec ce maillage nous donne la réponse de référence.

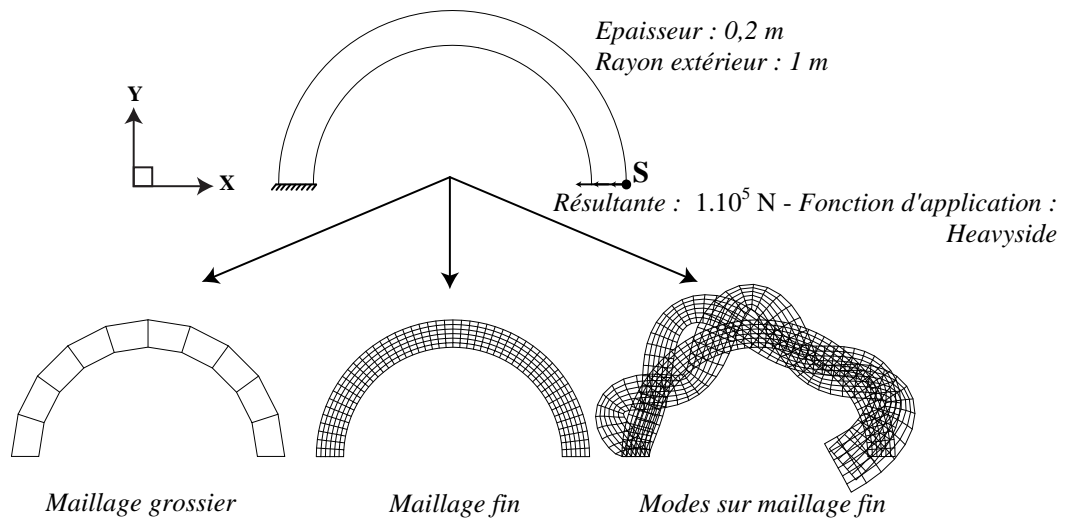


FIGURE [2.1.1] : Exemple introductif - Géométrie et modèles utilisés

Le calcul avec le maillage fin est naturellement le plus coûteux. Pour réduire le temps de calcul de la réponse dynamique, on cherche à diminuer le nombre d'inconnues. L'utilisation du maillage grossier permet de passer de 714 degrés de liberté à 44. Le modèle obtenu demande toujours plus de temps pour la résolution que celui avec projection modale, qui ne compte que 10 inconnues.

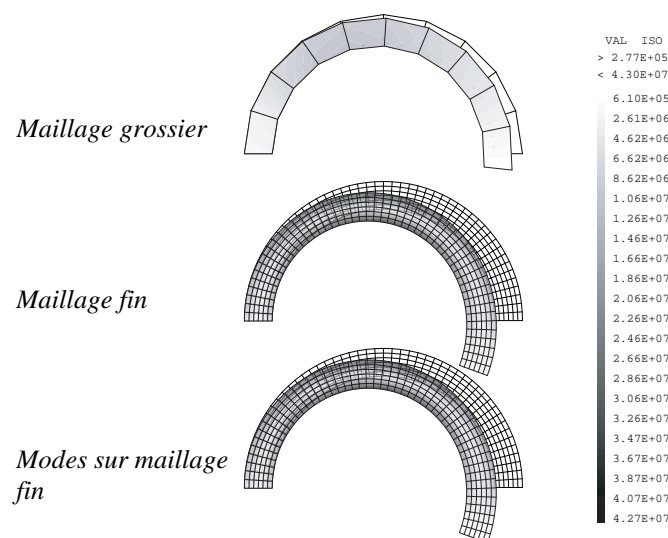


FIGURE [2.1.2] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps  $2.10^{-2}$  s

L'observation de la déformée et du champ des contraintes équivalentes de Von Mises calculés à l'instant  $2.10^{-2}$  s pour les trois modèles montre que celui s'appuyant sur le maillage grossier ne parvient pas à reproduire la flexion de l'arc. En particulier, le gradient de contraintes dans l'épaisseur est mal représenté.

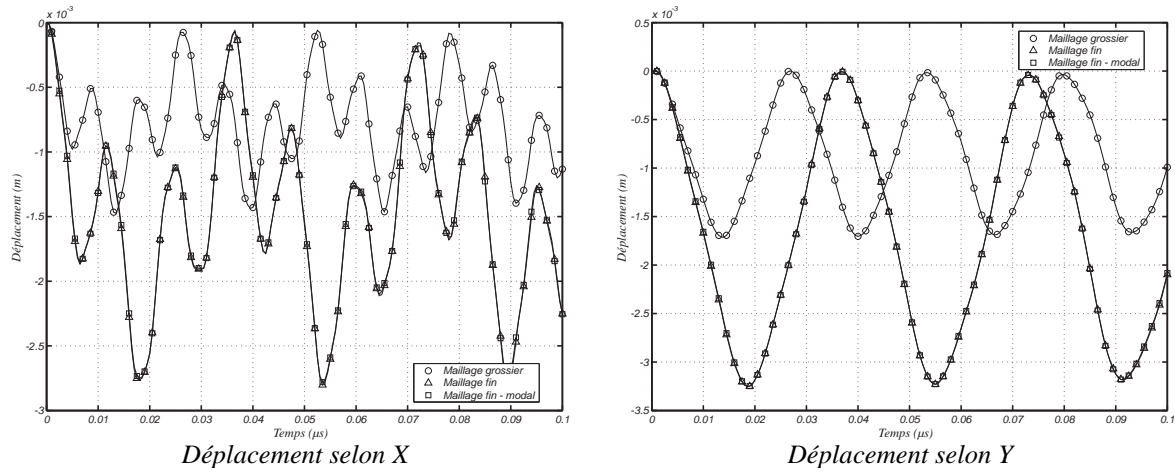


FIGURE [2.1.3] : Déplacement au point S

Le déplacement dans les deux directions d'espace calculé au niveau de l'extrémité sollicitée de la structure confirme les conclusions précédentes. L'utilisation d'un maillage grossier conduit à un modèle nettement plus raide que le modèle de référence. Le modèle couplant le maillage fin et la projection modale restitue exactement la même réponse que ce dernier.

On démontre ainsi sommairement l'intérêt d'une méthode de réduction modale qui, à partir d'un jeu de vecteurs de réduction approprié, permet de réduire grandement le nombre de degrés de liberté du système tout en conservant une solution de qualité, exercice où un simple déraffinement du maillage est aisément pris en défaut.

### 2.1.1. Modes de réduction

Historiquement, on peut considérer les méthodes modales comme des méthodes particulières de discrétisation d'un problème de dynamique exprimé sous forme faible (méthodes de Ritz [Ohayon et Soize 1998]). Elles consistent comme la méthode des éléments finis en une projection du champ de déplacement inconnu sur un espace de vecteurs particuliers. Cependant, elles n'ont pas comme objectif de conduire à un système linéaire à résoudre informatiquement, mais plutôt de remplacer le problème de départ par une série de problèmes découplés solubles analytiquement. Ces vecteurs de projection doivent contenir une information mécanique importante, pour que la combinaison des solutions individuelles puisse donner une représentation satisfaisante de la solution du problème complet.

La qualité d'un jeu de vecteurs de réduction est donc donnée par la représentation qu'ils donnent de la réponse dynamique exacte de la structure, qu'elle soit dans le domaine temporel ou fréquentiel, suivant la nature des analyses.

Soit  $\Phi = [\Phi_1 \ \dots \ \Phi_N]$  la matrice de projection dont les colonnes sont les  $N$  modes choisis,  $N$  étant très inférieur à la dimension du modèle de la structure discret en espace. Si  $U(t)$  ou  $U(\omega)$  est la solution exacte du problème posé, on peut écrire :

$$U \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \Phi_i \alpha_i \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} \quad [2.1.1.1]$$

où  $\mathbf{R}$  représente la contribution du sous-espace supplémentaire au sous-espace engendré par les modes.

On mesure la qualité de la projection en définissant une norme pour le résidu  $\mathbf{R}$ .

#### Modes propres de vibration

Afin de parvenir à une écriture découplée qui permette d'approcher analytiquement la solution du problème structural de départ, les combinaisons modales s'appuient majoritairement dans la littérature sur un résultat mathématique simple, à savoir le *théorème spectral*.

Pour cela, exprimons le principe des travaux virtuels [1.1.9] en l'absence de forces extérieures et dans le domaine fréquentiel, après une transformée de Fourier en temps :

$$-\omega^2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega = 0 \quad [2.1.1.2]$$

On se place sous l'hypothèse des petites perturbations et dans le cas d'une loi de comportement linéaire. On peut alors introduire deux opérateurs bilinéaires  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{k}$  tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{v} \, d\Omega \\ \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \end{aligned} \quad [2.1.1.3]$$

L'opérateur  $\mathbf{m}$  est symétrique défini positif, alors que l'opérateur  $\mathbf{k}$  semi-défini positif. L'équilibre faible fréquentiel [2.1.1.2] devient alors un problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \mu \mathbf{m}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u} \text{ cinématiquement admissible} \quad [2.1.1.4]$$

Le théorème spectral assure que les modes propres  $\{\Phi_i\}$  du problème [2.1.1.4] forment une base de l'espace des champs admissibles, si bien que :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \Phi_i \quad [2.1.1.5]$$

où  $\{\alpha_i\}$  représente la famille des participations modales de vibrations associées aux modes  $\{\Phi_i\}$ .

On peut définir une version discrète du théorème spectral à partir des représentations discrétisées par éléments finis des opérateurs  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{k}$ , les matrices de masse  $\mathbf{M}$  et de raideur  $\mathbf{K}$ . On obtient une décomposition en dimension finie du champ de déplacement discret :

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i \quad [2.1.1.6]$$

où  $n$  est le nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis,  $\{\Phi_i\}$  sont des représentants approchés et exprimés sur les nœuds du maillage des modes propres de vibration.

Les propriétés d'orthogonalité des modes propres au sens de la masse permettent comme attendu la décomposition du problème global avec forces extérieures en une série de problèmes comportant un unique degré de liberté :

$$\omega_i^2 \mathbf{m}(\Phi_i, \Phi_i) \alpha(\omega) - \mathbf{k}(\Phi_i, \Phi_i) \alpha(\omega) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d^v(\omega) \cdot \Phi_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_d^s(\omega) \cdot \Phi_i \, dS \quad [2.1.1.7]$$

où  $\omega_i$  est la fréquence propre associée au mode  $\Phi_i$  telle que  $\mu_i = \omega_i^2$ .

Au niveau discret en espace, les problèmes [2.1.1.7] prennent la forme :

$$\omega_i^2 \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i \alpha(\omega) - \Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_i \alpha(\omega) = \Phi_i^T \mathbf{F}_{\text{ext}}^v(\omega) + \Phi_i^T \mathbf{F}_{\text{ext}}^s(\omega) \quad [2.1.1.8]$$

La solution globale du problème du dynamique dans le domaine fréquentiel s'exprime finalement comme une combinaison de fonctions oscillantes à des fréquences correspondant aux fréquences propres de vibrations. On peut donc isoler le comportement du système correspondant à une bande de fréquence en tronquant la base des modes propres pour ne conserver que ceux dont la fréquence associée se trouve dans la bande. On observe également que le contenu fréquentiel de la réponse est donné par les composantes du vecteur des forces extérieures, volumiques et surfaciques, dans la base des modes propres.

Dans le cadre des méthodes numériques, ce sont ces dernières propriétés des modes propres qui en font les composants de base d'un modèle réduit. Les nombreux éléments nécessaires à une représentation correcte de la géométrie impliquent la prise en compte inutile par le modèle initial de modes à haute fréquence qui ne sont fréquemment pas sollicités par les forces extérieures. On élimine donc les inconnues *géométriques* excédentaires en identifiant le contenu fréquentiel du chargement et en projetant le champ des déplacements nodaux sur la base des modes propres correspondants.

Cependant, dans le cadre d'une méthode multi-domaines, les sous-domaines sont chargés par le biais des interfaces. Le contenu fréquentiel des efforts d'interface est inconnu en cours de calcul. De plus, dans le cas des impacts localisés qui nous intéresse, s'intéresser uniquement au spectre du chargement extérieur est fortement pénalisant. En effet, une sollicitation brutale comporte des composantes hautes fréquences qui nous feraient conserver beaucoup trop de modes car ces composantes à petites longueur d'ondes de la réponse sont fréquemment locales, dissipées par exemple par la plasticité au voisinage de l'impact. Ceci nous conduit donc à postuler une bande de fréquence pour le comportement vibratoire des sous-domaines sujets à l'ébranlement. Dès lors, on souhaite compenser au maximum les effets indésirables de la troncature de la base modale, en particulier au niveau des interfaces.

#### *Corrections des erreurs de troncature*

Le caractère découplé du problème projeté sur une base de réduction n'est pas un objectif dans notre travail, comme il pouvait l'être en l'absence de moyen de calcul performant. La rapidité de la convergence de la solution du système réduit vers la solution du système initial en fonction du nombre de degrés de liberté restant après projection est au contraire notre principale préoccupation. On trouve dans la littérature de nombreuses méthodes d'enrichissement d'une base modale tronquée par des vecteurs particuliers permettant d'accélérer la convergence souhaitée. L'ajout de ces modes correctifs, qui ne possèdent les propriétés d'orthogonalité des modes propres, rend naturellement impossible le découplage présenté au paragraphe précédent.

Pour illustrer le principe de correction des erreurs de troncature, considérons le problème d'une structure composée d'un matériau dissipatif discrétisée en espace par la méthode des éléments finis. L'équilibre s'écrit classiquement dans le domaine fréquentiel :

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U} + i\omega \mathbf{C} \mathbf{U} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad [2.1.1.9]$$

où la matrice  $\mathbf{C}$  rend compte de la dissipation.

On projette le système sur la base  $\Phi$  dont les colonnes correspondent à la famille complète des modes propres  $\{\Phi_i\}$  de la matrice  $\mathbf{K}$  par rapport à la matrice  $\mathbf{M}$ . On obtient:

$$-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{a} + i\omega \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \quad [2.1.1.10]$$

$$\begin{aligned} \text{où } \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi}, \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi}, \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi}, \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}} &= \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Les matrices  $\tilde{\mathbf{M}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  sont diagonales. On suppose que la matrice  $\tilde{\mathbf{C}}$  l'est également (amortissement de Rayleigh ou dissipation visco-élastique par exemple). On écrit alors :

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ij} = \xi_i \omega_i \delta_{ij} \quad [2.1.1.11]$$

où  $\xi_i$  représente l'amortissement associé au mode  $i$ ,  
 $\omega_i$  est la fréquence propre du mode  $i$ ,  
 $\delta_{ij}$  est le symbole de kronecker.

On peut finalement exprimer analytiquement la solution du problème [2.1.1.9] :

$$\mathbf{U}(\omega) = \sum_{j=1}^n \mathbf{\Phi}_j \mathbf{a}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{\Phi}_j \frac{\tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext } j}}{-m_j \omega^2 + i \xi_j \omega_j \omega + m_j \omega_j^2} \quad [2.1.1.12]$$

$$\text{où } m_j = \mathbf{\Phi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_j,$$

$n$  est la dimension du système discret en espace initial.

---

**Remarque :** L'utilisation d'un matériau dissipatif permet d'éviter les singularités dans la réponse, qui surviennent sinon lorsque la fréquence de calcul correspond à l'une des fréquences propres du système.

---

On peut représenter graphiquement le module de la participation  $\mathbf{a}_k$  du mode  $\mathbf{\Phi}_k$  :

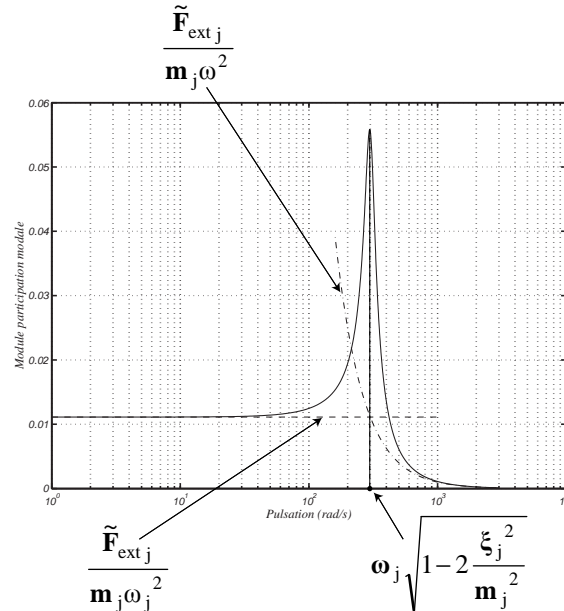


FIGURE [2.1.1.1] : Participation d'un mode à la réponse totale en fonction de la fréquence

On remarque en particulier que pour des fréquences très inférieures à sa fréquence propre, la participation  $\mathbf{a}_k$  correspond à une réponse quasistatique. Lors de l'utilisation d'une base modale dont on a tronqué les modes à hautes fréquences, on commet donc principalement une erreur sur la raideur



de la structure, par rapport à la structure initialement modélisée. Ce résultat est à l'origine de la méthode des *accélération modales* [Rayleigh 1945][Géradin et Rixen 1993][Ohayon et Soize 1998]. Elle consiste à rajouter au développement de la réponse dynamique de la structure sur la base tronquée des modes propres de vibration la partie manquante de la réponse quasistatique.

On va ainsi chercher à compléter la base de réduction avec un ensemble de solutions de différents problèmes statiques couvrant des cas de chargement significatifs vis-à-vis du problème dynamique global à traiter. Ces modes permettent de retrouver le complément de la réponse quasi-statique cherché et enrichissent également le comportement dynamique au voisinage des interfaces.

Les méthodes courantes de synthèse modale diffèrent essentiellement par les associations de modes utilisées [Tran 1992]. Ce choix peut dépendre de la nature des sollicitations. Par exemple, pour un problème à déplacement imposé, les modes dynamiques sont calculés sur une configuration encastree au niveau de la zone de chargement. Il est nécessaire d'introduire dans le système réduit des modes représentant la réponse statique au chargement pour assurer la consistance avec le problème initial (méthode du *relèvement statique* [Ohayon et Soize 1998]). Cette réponse est alors décomposée en une combinaison de réponses à un déplacement imposé unitaire sur chacun des degrés de liberté de l'interface chargée, les autres étant simultanément bloqués. On construit ainsi les *modes de liaison*. On retrouve ces modes dans le cas de l'utilisation de réduction modale avec une méthode de décomposition de domaine primale, ou *sous-structuration* [Hurty 1965][Guyan 1965][Irons 1965]. La condensation sur les inconnues d'interface conduit à des problèmes à déplacement imposé sur chaque sous-structure. On aboutit à la création de *superéléments*, assemblés comme des éléments classiques à partir de leurs degrés de liberté d'interface. La méthode de Craig & Bampton [Craig et Bampton 1961] est la plus répandue dans l'industrie pour la construction de ces *superéléments*.

Pour des problèmes à forces imposées, les modes dynamiques calculés sur une configuration libre au niveau de la zone de chargement forment une base de l'espace des champs de déplacement admissibles. Une décomposition de domaine duale conduit à des problèmes de cette nature sur chaque sous-domaine. La latitude pour le choix des modes statiques à introduire pour pallier aux effets de la troncature de la base modale est alors totale. En particulier, pour reproduire la réponse quasistatique de la structure, on peut considérer l'utilisation de réponses à des forces unitaires sur chacun des degrés de liberté de la surface chargée, les autres étant alors laissés libres. Ces réponses sont connues dans la littérature sous le nom de modes *modes d'attache* [Hintz 1975][Rubin 1975].

---

**Remarque :** Pour des structures non-statiquement stables, il est nécessaire de recourir à la pseudo-inversion de l'opérateur de raideur (cf. paragraphe 1.2.2) pour le calcul des modes d'attache.

---

On recense également dans la littérature des méthodes de réduction dites *mixtes*. Certains degrés de liberté des interfaces sont bloqués alors que d'autres sont laissés libres au moment de calculer les modes propres. Il s'ensuit une association dans la base de projection de modes de vibration, de modes de liaison et de modes d'attache [Mac Neal 1971][Farvaque et al. 1984][Gibert 1988][Fahrat et Géradin 1992][Tran 1992].

### 2.1.2. Identification des directions prépondérantes dans un sous-espace

La sélection des modes propres en fonction d'une bande de fréquence d'analyse est un premier critère de sélection. Cependant, parmi ces modes, certains peuvent traduire la vibration locale d'une sous-structure sans intérêt pour l'étude globale. De plus, la correction des erreurs de troncature sous la forme de modes statiques d'interface peut également conduire à une augmentation considérable du nombre de modes, si bien qu'un second niveau de réduction peut être souhaitable. Un outil est proposé dans ce but, en particulier dans [Balmès 1997]. Il s'agit de la décomposition en valeurs singulières.

Considérons une base de projection  $\Phi$  composée de  $N$  vecteurs dans un espace initial de dimension  $n$  :

$$\Phi_{n \times N} = \mathbf{V}_{1n \times n} \mathbf{S}_{n \times N} \mathbf{V}_{2N \times N}^T \quad [2.1.2.1]$$

où sont indiquées en indice les dimensions respectives des matrices,  
 $\mathbf{S}$  est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont appelés valeurs singulières,  
 $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  sont les matrices de vecteurs singuliers à gauche et à droite respectivement.

Les familles de vecteurs singuliers forment deux bases orthonormales pour deux normes respectives à définir et qui conditionnent le sens de la décomposition. Les deux normes suivantes sont couramment proposées en mécanique.

Pour un champ de déplacement  $\mathbf{U}$ , réponse quasi-statique à un chargement  $\mathbf{F}$ , la norme en énergie de déformation est définie par :

$$\|\mathbf{U}\| = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad [2.1.2.2]$$

où  $\mathbf{K}^{-1}$  est la pseudo-inverse de la matrice de raideur en présence de modes rigides.

La norme en énergie cinétique est, elle, donnée par :

$$\|\mathbf{U}\| = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad [2.1.2.3]$$

On utilisant la norme en énergie cinétique pour la base  $\mathbf{V}_2$  et la norme en énergie de déformation pour la base  $\mathbf{V}_1$ , la décomposition en valeurs singulières donne, sur le sous-espace engendré par les colonnes de  $\Phi$ , les vecteurs avec la plus grande énergie de déformation, à énergie cinétique constante. Les vecteurs dont la contribution est la plus importante sont les vecteurs singuliers à gauche associés aux valeurs singulières les plus petites, car les modes à faible énergie de déformation sont les plus susceptibles d'avoir de grandes amplitudes.

Il peut également paraître intéressant de ne chercher les modes influents que dans l'espace des modes statiques.

### 2.1.3. Propagation d'ondes et projection modale

La reproduction de la propagation dans la structure des ondes élastiques nées de l'impact est un objectif fondamental de notre méthode multi-domaines. On illustre dans ce paragraphe sur un cas simple les effets de la réduction modale sur la précision du traitement d'un problème propagatif monodimensionnel.

Considérons pour cela une barre en traction-compression. Le matériau est fictif, de masse volumique  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$ , et de module d'Young  $1.E9 \text{ Pa}$ . La longueur  $L$  de la barre est  $100 \text{ m}$  et sa section  $1 \text{ cm}^2$ . On discrétise le système à l'aide de 400 éléments finis de longueur respective  $0,25 \text{ m}$ .

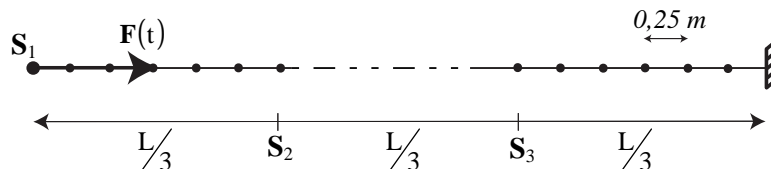


FIGURE [2.1.3.1] : Poutre encastée-libre en traction-compression

La fréquence maximale représentée par le modèle éléments finis est de l'ordre de 2 kHz. On soumet la barre à deux chargements distincts de nature impulsionnelle. Le contenu fréquentiel de la sollicitation est différent dans les deux cas. La fréquence maximale du spectre est de l'ordre de 50 Hz dans le premier cas et de 500 Hz dans le second.

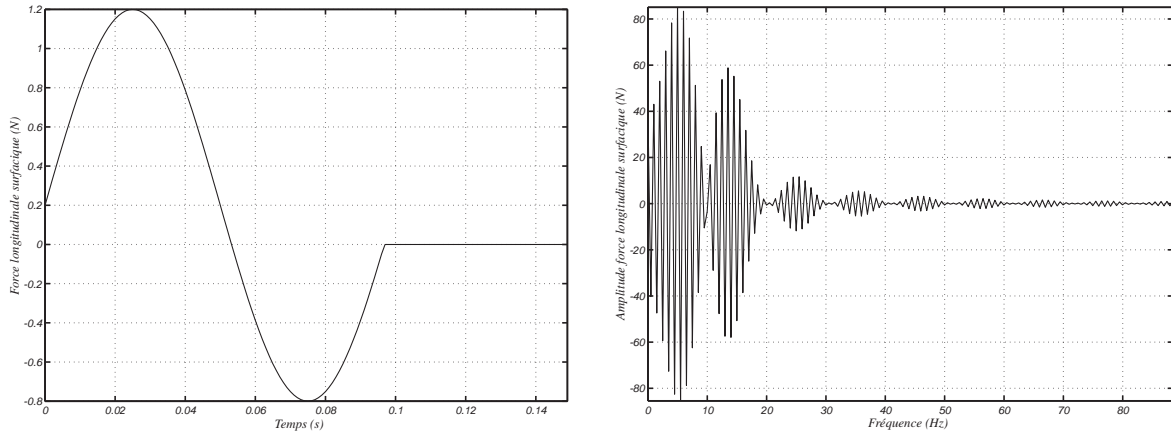


FIGURE [2.1.3.2] : 1<sup>er</sup> cas de chargement - Répartition temporelle et spectre

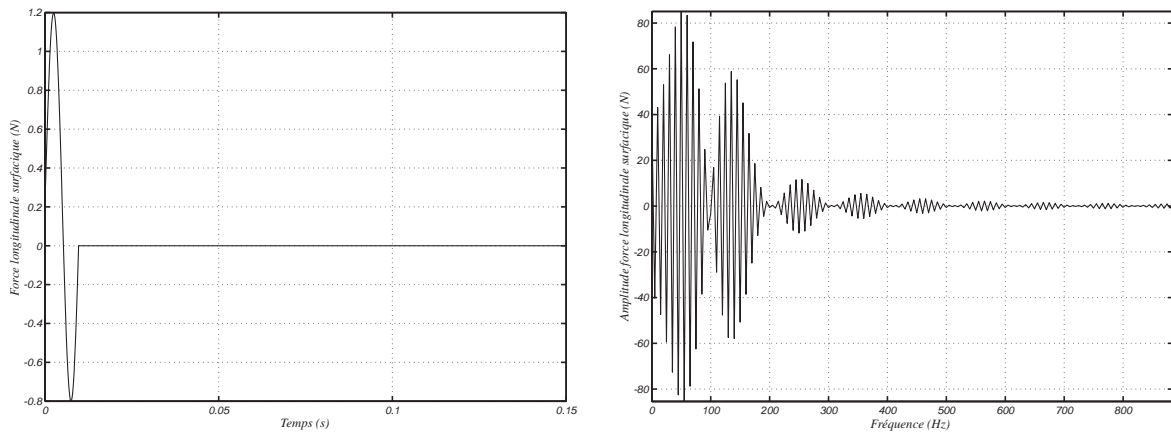


FIGURE [2.1.3.3] : 2<sup>ème</sup> cas de chargement - Répartition temporelle et spectre

On donne la réponse du système en terme de déplacement longitudinal aux points  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ . On compare deux calculs menés avec le schéma explicite des différences centrées. Le premier utilise le modèle éléments finis classique, le second est réalisé après projection sur la base des premiers modes propres du système. La fréquence de coupure est placée à 60 Hz, ce qui correspond à 12 modes. La bande de fréquence conservée couvre correctement le spectre de la première sollicitation, mais imparfaitement celui de la deuxième sollicitation.

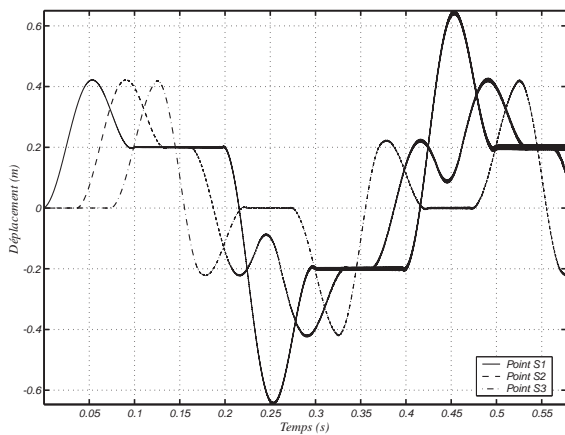


FIGURE [2.1.3.4] : Sollicitation lente - Calcul éléments finis classique

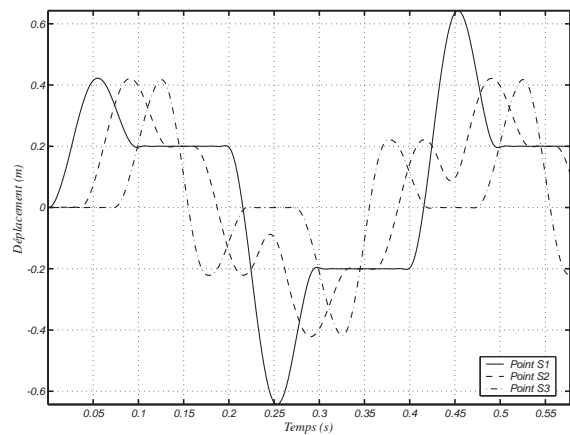


FIGURE [2.1.3.5] : Sollicitation lente - Calcul modal

Le modèle modal reproduit parfaitement la solution transitoire propagative en réponse à la sollicitation lente, avec même un filtrage des hautes fréquences qui améliore la solution.

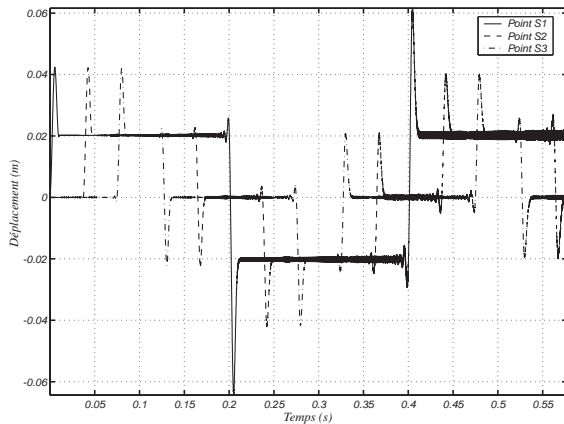


FIGURE [2.1.3.6] : Sollicitation rapide - Calcul éléments finis classique

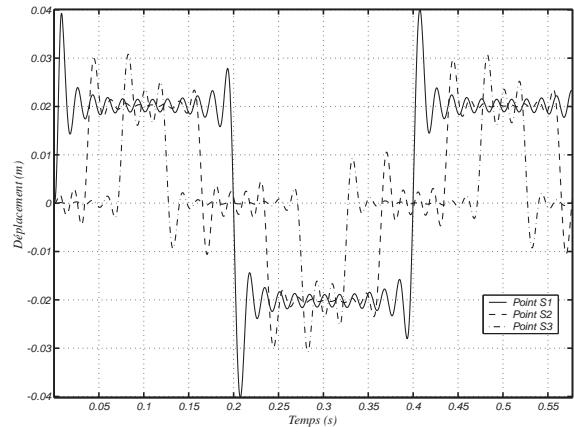


FIGURE [2.1.3.7] : Sollicitation rapide - Calcul modal

Dans le cas de la sollicitation rapide, comme on pouvait le prévoir, on ne parvient à capter après projection que la partie lente de la réponse, correspondant à la partie du spectre présente dans la bande de fréquence. La partie rapide est très mal restituée, aussi bien en amplitude qu'en fréquence. On peut vérifier aisément qu'on retrouve une solution excellente en augmentant la fréquence de coupure, en passant à 600 Hz par exemple, pour désormais 113 modes dans la base de projection.

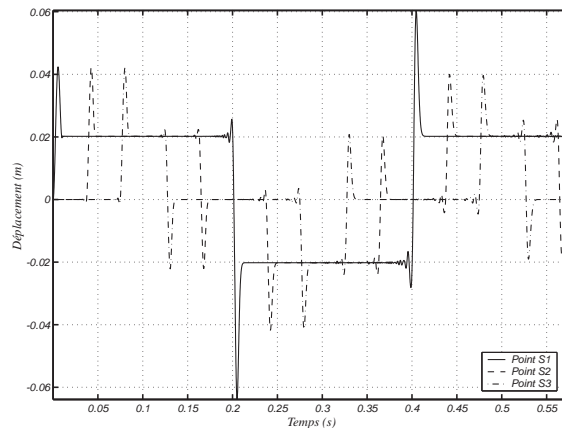


FIGURE [2.1.3.8] : Sollicitation rapide - Calcul modal avec bande de fréquence étendue

**Remarque :** On se place pour tous les calculs sur le pas de temps critique du schéma des différences centrées. Ceci n'empêche pas les hautes fréquences artificielles du modèle éléments finis de polluer progressivement la solution, ce que permet d'éviter la projection sur base modale, lorsque la bande de fréquence est bien ajustée. L'utilisation d'une masse concentrée, alors que les exemples éléments finis classiques ont été menés avec une masse consistante, permet également le filtrage des hautes fréquences parasites et la restitution de la solution exacte [Géradin et Rixen 1993].

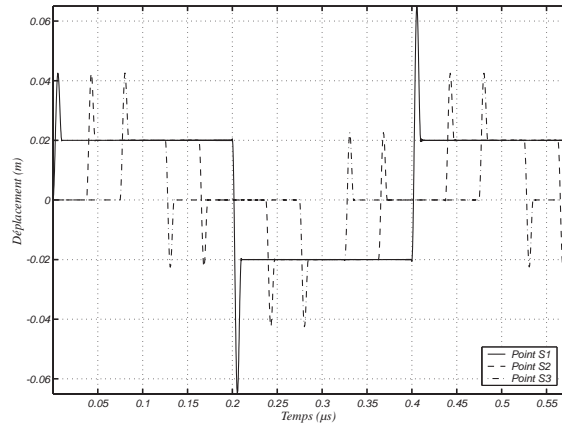


FIGURE [2.1.3.9] : Sollicitation rapide - Calcul classique avec masse concentrée

### 2.1.4. Dissipation des hautes fréquences dans la structure

Le chargement correspondant à un impact contient fréquemment des composantes hautes fréquences, difficiles à représenter sur base modale, conformément au paragraphe précédent. Cependant, les ondes mécaniques associées à ces hautes fréquences sont d'amplitude plus faible que celles associées au phénomène d'ébranlement basse fréquence. Compte tenu de l'atténuation des ondes sphériques avec l'augmentation de la distance au point d'impact, le déplacement en des points éloignés de l'excitation est majoritairement affecté par les ondes d'ébranlement. Les ondes à hautes fréquences jouent alors un rôle important surtout au voisinage du point de chargement, notamment avec un matériau sensible à la vitesse de déformation.

En dehors de la décroissance naturelle des ondes sphériques, les phénomènes non-linéaires au voisinage du point d'impact tendent également à dissiper l'énergie induite par la sollicitation et à filtrer ainsi les phénomènes rapides. C'est entre autres le cas pour la plasticité, ce que nous pouvons mettre en évidence en reprenant notre exemple de la barre en traction-compression. Nous remplaçons le matériau élastique initial par un matériau élasto-plastique parfait, associé à un critère de Von Mises. La limite élastique est fixée à  $1.10^7$  Pa et on utilise la sollicitation rapide proposée au paragraphe précédent.

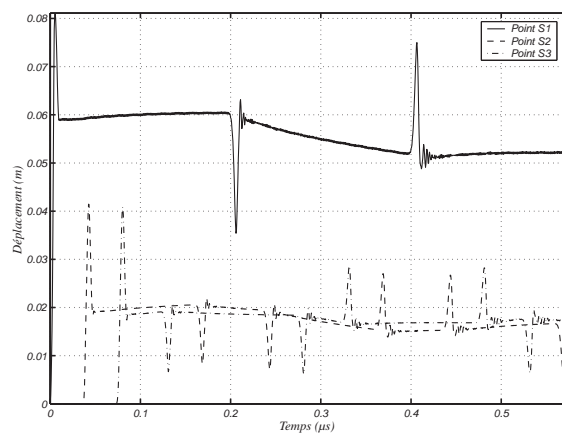


FIGURE [2.1.4.1] : Poutre en traction-compression - Matériau élasto-plastique

Les déformations plastiques interviennent surtout au niveau des extrémités, chargée ou encastree, de la barre.

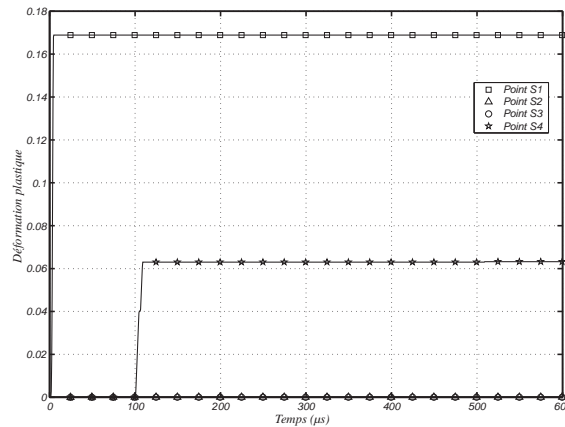


FIGURE [2.1.4.2] : Déformations plastiques dans la barre

On s'intéresse au contenu fréquentiel de la réponse dans la partie centrale de la barre, susceptible d'être représentée sur base modale. On se place dans la bande de fréquence [20 Hz, 200 Hz], pour améliorer la lisibilité des graphes, dans la mesure où la réponse quasistatique à une amplitude très supérieure à celle des oscillations vibratoires.

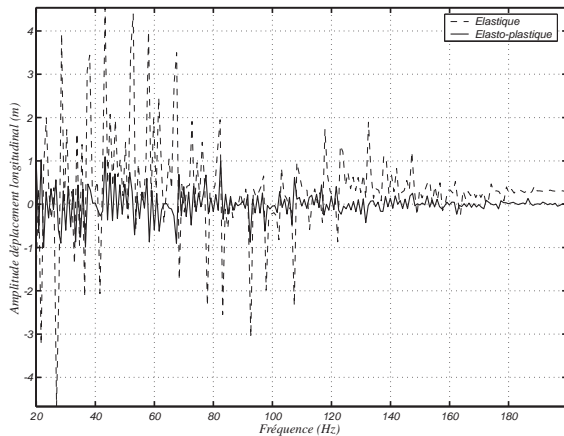


FIGURE [2.1.4.3] : Spectre au point  $S_2$

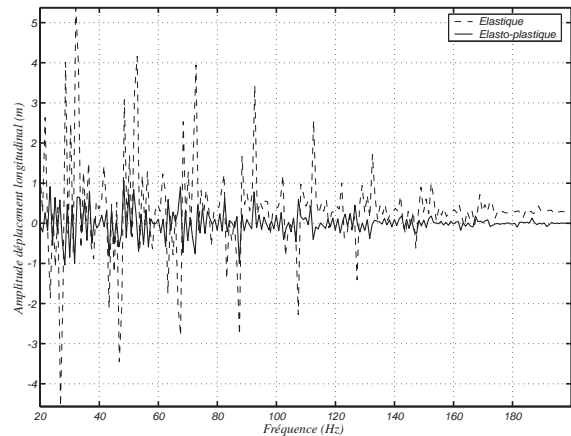


FIGURE [2.1.4.4] : Spectre au point  $S_3$

On observe clairement une réduction de la contribution des fréquences de la bande [20 Hz, 200 Hz] à la réponse globale en présence de plasticité. La dissipation mécanique contribue à rendre prépondérants les phénomènes basse fréquence dans les zones de la structure éloignées des points d'impact.

### 2.1.5. Stabilité de l'intégration explicite

La stabilité de l'intégration temporelle explicite d'un système mécanique est donnée par un pas de temps critique calculé à partir de la plus haute fréquence propre du système, conformément à l'équation [1.1.3.15]. On utilise fréquemment une estimation par défaut de ce pas critique par l'intermédiaire de la condition CFL. Cette borne du pas de temps est toujours valable après projection. Cependant, nous disposons désormais des opérateurs de masse et de raideur réduits et assemblés sur le sous-domaine. On peut donc s'affranchir de la condition CFL et estimer directement la fréquence maximale à partir des matrices projetées. Ceci conduit fréquemment à un pas critique sur un sous-domaine réduit bien supérieur à celui fixé initialement par la taille des éléments.

Cet accroissement du pas critique est également favorisé par la troncature des modes hautes fréquences lors de la projection modale. En particulier, en l'absence de modes statiques, la plus haute

fréquence propre du système est obtenue immédiatement comme étant la fréquence de coupure dans la base des modes propres libres. On ne retient fréquemment que les basses fréquences, si bien que le pas critique peut se trouver multiplié par un facteur supérieur à 100. En présence de modes statiques, la fréquence doit être calculée à partir des matrices de masse et de raideur réduites, qui ne sont plus simultanément diagonales. L'augmentation de la taille du pas est souvent moins importante, car les modes statiques ont des composantes sur les modes vibratoires libres à haute fréquence.

Pratiquement, en présence de modes statiques, on calcule directement la fréquence maximale  $f_{\max}$  de la matrice de raideur réduite  $\hat{\mathbf{K}}$  par rapport à la matrice de masse réduite  $\hat{\mathbf{M}}$ . Le pas de temps critique à respecter sur le sous-domaine est alors donné par :

$$\Delta t_{\text{crit}} = \frac{1}{\pi f_{\max}} \quad [2.1.5.1]$$

## 2.2. Introduction d'un sous-domaine réduit dans le formalisme à plusieurs échelles de temps et d'espace

Dans la suite de notre travail, nous considérons à présent que nous disposons d'une base de vecteurs de projection satisfaisante. Précisons que le choix de cette base est totalement libre parmi les approches présentées au paragraphe 2.1. Il est hors des objectifs de ce travail de fournir de nouveaux critères de choix. Il sous-entend une calibration préalable du comportement vibratoire des sous-domaines destinés à la projection. Une localisation des phénomènes non-linéaires et une identification approchée du contenu fréquentiel du champ de déplacement au niveau des interfaces sont notamment souhaitables. Un calcul sur une géométrie grossière ou des mesures expérimentales peuvent aider dans cette tâche.

### 2.2.1. Ecriture du système couplé

Comme précédemment, on se place dans le cas de deux sous-domaines, dont le premier fait l'objet d'une projection sur base modale. La généralisation à un nombre quelconques de sous-domaines, aussi bien classiques que projetés, est immédiate. On considère une unique échelle de temps dans un premier temps.

On dispose sur le sous-domaine 1 d'une base de réduction  $\Phi_1$ . On exprime alors les quantités cinématiques sur ce sous-domaine à l'aide des inconnues généralisées  $\alpha_1$  :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_1 = \Phi_1 \alpha_1 \\ \dot{\mathbf{U}}_1 = \Phi_1 \dot{\alpha}_1 \\ \ddot{\mathbf{U}}_1 = \Phi_1 \ddot{\alpha}_1 \end{cases} \quad [2.2.1.1]$$

Le comportement et les déformations sont supposés linéaires sur le sous-domaine réduit, on exprime donc les forces internes à l'aide d'une matrice de raideur  $\mathbf{K}_1$  :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{K}_1 \mathbf{U}_1 = \mathbf{K}_1 \Phi_1 \alpha_1 \quad [2.2.1.2]$$

On injecte alors les expressions [2.2.1.1] et [2.2.1.2] dans le système dual à deux sous-domaines [1.2.1.4] :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_1 \Phi_1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1^T \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_2 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1 \Phi_1 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \Phi_1 \alpha_1^{n+1} \\ \mathbf{F}_2^{n+1} \\ \mathbf{C}_1^p \dot{\alpha}_1^n + \mathbf{C}_2^p \dot{\mathbf{U}}_2^n \end{bmatrix} \quad [2.2.1.3]$$

On achève l'écriture du système couplé par la projection sur les vecteurs de réduction de l'équation d'équilibre du sous-domaine 1, pour permettre le calcul des accélérations généralisées  $\ddot{\alpha}_1^{n+1}$  :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \Phi_1^T \mathbf{M}_1 \Phi_1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} (\mathbf{C}_1 \Phi_1)^T \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_2 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1 \Phi_1 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1^T \mathbf{K}_1 \Phi_1 \alpha_1^{n+1} \\ \mathbf{F}_2^{n+1} \\ \mathbf{C}_1 \Phi_1^p \dot{\alpha}_1^n + \mathbf{C}_2^p \dot{\mathbf{U}}_2^n \end{bmatrix} \quad [2.2.1.4]$$



On introduit ainsi les opérateurs projetés :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{M}}_1 = \Phi_1^T \mathbf{M}_1 \Phi_1 \\ \hat{\mathbf{K}}_1 = \Phi_1^T \mathbf{K}_1 \Phi_1 \\ \hat{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{C}_1 \Phi_1 \end{cases} \quad [2.2.1.5]$$

On aboutit finalement au système multi-domaines dual avec projection modale locale :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{M}}_1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{C}}_1^T \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_2 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{C}}_1 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{n+1} \\ \mathbf{F}_2^{n+1} \\ \hat{\mathbf{C}}_1^P \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^n + \mathbf{C}_2^P \dot{\mathbf{U}}_2^n \end{bmatrix} \quad [2.2.1.6]$$

Ce système à une structure rigoureusement identique à celle du système [1.2.1.4]. Les incompatibilités de maillage sont en particulier toujours prises en compte par l'intermédiaire des matrices de couplages  $\hat{\mathbf{C}}_1$  et  $\mathbf{C}_2$ . On peut également reprendre point par point la mise en place de l'algorithme à plusieurs échelles de temps.

---

**Remarque :** *Le couplage proposé par le système [2.2.1.6] est totalement indépendant de la nature de la base de réduction utilisée. C'était une condition nécessaire pour permettre le chaînage d'EUROPLEXUS avec n'importe quel code d'analyse vibratoire permettant la détermination des éléments de réduction. On exploite ainsi la grande flexibilité du formalisme dual sur les interfaces. En effet, contrairement à une approche primale, les degrés de liberté physiques sur les interfaces n'ont aucun besoin de rester "visibles" après réduction. C'est en partie ce dernier point qui a rendu la méthode de Craig & Bampton si populaire dans l'industrie. Dans notre cas, la latitude de l'analyste pour le choix des vecteurs de projection est totale.*

---

## 2.2.2. Matrice de masse diagonale pour les sous-domaines projetés

Pour l'efficacité de la résolution de l'équilibre dynamique à chaque pas de temps d'un schéma explicite, le caractère diagonal de la matrice de masse est essentiel. Or, classiquement en mécanique des vibrations, les modes statiques ne sont pas orthogonaux entre eux, ni aux modes dynamiques, libres ou encastés, au sens de la masse. En séparant les  $n$  modes de réduction  $\{\Phi_{1i}\}$  en  $p$  modes statiques  $\{\Phi_{1i}^S\}$  et  $q$  modes dynamiques  $\{\Phi_{1i}^D\}$ , les matrices réduites ont la structure suivante, pour le sous-domaine 1 du paragraphe précédent :

$$\hat{\mathbf{M}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_1^S & \hat{\mathbf{M}}_1^{SD} \\ \hat{\mathbf{M}}_1^{SDT} & \hat{\mathbf{M}}_1^D \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{K}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_1^S & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_1^D \end{bmatrix} \quad [2.2.2.1]$$

$$\begin{aligned} \text{où } \hat{\mathbf{M}}_{1ij}^S &= \Phi_{1j}^{S,T} \mathbf{M}_1 \Phi_{1i}^S \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{K}}_{1ij}^S = \Phi_{1j}^{S,T} \mathbf{K}_1 \Phi_{1i}^S \quad \text{pour } (i,j) \in [1 \dots p]^2 \\ \hat{\mathbf{M}}_{1ij}^{SD} &= \Phi_{1j}^{S,T} \mathbf{M}_1 \Phi_{1i}^D \quad \text{pour } (i,j) \in [1 \dots q] \times [1 \dots p] \\ \hat{\mathbf{m}}_{1i}^D &= \Phi_{1i}^{D,T} \mathbf{M}_1 \Phi_{1i}^D \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{k}}_{1i}^D = \Phi_{1i}^{D,T} \mathbf{K}_1 \Phi_{1i}^D \quad \text{pour } i \in [1 \dots q] \end{aligned}$$

Les termes de couplage entre les modes statiques et dynamiques sont nuls dans la matrice de raideur en vertu du principe de calcul des solutions statiques.

Pour optimiser la résolution explicite du problème sur le sous-domaine 1, il est alors judicieux d'orthogonaliser complètement la famille de vecteurs de réduction par rapport à la masse.

La première étape consiste à retirer aux modes statiques leur contribution sur le sous-espace engendré par les modes dynamiques. Ceci permet d'annuler la matrice  $\hat{\mathbf{M}}_1^{\text{SD}}$  sans altérer les propriétés remarquables des modes dynamiques :

$$\Phi_{1j}^S \leftarrow \Phi_{1j}^S - \sum_{i=1}^q \frac{\Phi_{1j}^{S\text{T}} \mathbf{M}_1 \Phi_{1i}^D}{\Phi_{1i}^{D\text{T}} \mathbf{M}_1 \Phi_{1i}^D} \Phi_{1i}^D \text{ pour } j \in [1 \dots p] \quad [2.2.2.2]$$

Ceci conduit à l'allure suivante pour les matrices projetées :

$$\hat{\mathbf{M}}_1 = \left[ \begin{array}{c|ccc} \hat{\mathbf{M}}_1^S & & & 0 \\ \hline 0 & \hat{m}_{11}^D & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \hat{m}_{1q}^D \end{array} \right] \text{ et } \hat{\mathbf{K}}_1 = \left[ \begin{array}{c|ccc} \hat{\mathbf{K}}_1^S & & & \hat{\mathbf{K}}_1^{\text{SD}} \\ \hline \hat{\mathbf{K}}_1^{\text{SDT}} & \hat{k}_{11}^D & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \hat{k}_{1q}^D \end{array} \right] \quad [2.2.2.3]$$

Il reste alors à orthogonaliser la famille des modes statiques modifiés, pour diagonaliser  $\hat{\mathbf{M}}_1^S$ , ce que permet par exemple le procédé de Schmidt :

$$\begin{cases} \Phi_{11}^S \leftarrow \frac{\Phi_{11}^S}{\sqrt{\Phi_{11}^{S\text{T}} \mathbf{M}_1 \Phi_{11}^S}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{12}^S \leftarrow \Phi_{12}^S - (\Phi_{11}^{S\text{T}} \mathbf{M}_1 \Phi_{12}^S) \Phi_{11}^S \\ \Phi_{12}^S \leftarrow \frac{\Phi_{12}^S}{\sqrt{\Phi_{12}^{S\text{T}} \mathbf{M}_1 \Phi_{12}^S}} \end{array} \right. \\ \vdots \\ \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{1p}^S \leftarrow \Phi_{1p}^S - \sum_{i=1}^{p-1} (\Phi_{1i}^{S\text{T}} \mathbf{M}_1 \Phi_{1p}^S) \Phi_{1i}^S \\ \Phi_{1p}^S \leftarrow \frac{\Phi_{1p}^S}{\sqrt{\Phi_{1p}^{S\text{T}} \mathbf{M}_1 \Phi_{1p}^S}} \end{array} \right. \end{cases} \quad [2.2.2.4]$$

En sortie du procédé de Schmidt, les modes statiques sont normés par rapport à la masse. On effectue donc également une normalisation des modes dynamiques :

$$\Phi_{1i}^D \leftarrow \frac{\Phi_{1i}^D}{\sqrt{\Phi_{1i}^{D\text{T}} \mathbf{M}_1 \Phi_{1i}^D}} \quad [2.2.2.5]$$

On obtient alors la forme définitive pour les matrices réduites après projection sur la nouvelle base modale :

$$\hat{\mathbf{M}}_1 = [\text{Id}] \text{ et } \hat{\mathbf{K}}_1 = \left[ \begin{array}{c|ccc} \hat{\mathbf{K}}_1^S & & & \hat{\mathbf{K}}_1^{\text{SD}} \\ \hline \hat{\mathbf{K}}_1^{\text{SDT}} & \hat{k}_{11}^D & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \hat{k}_{1q}^D \end{array} \right] \quad [2.2.2.6]$$

Les termes de couplage entre modes statiques et dynamiques ne sont plus nuls pour la matrice de raideur réduite. La forme particulière de la matrice doit cependant être exploitée pour son stockage et pour une efficacité optimale dans le calcul des forces internes sur un sous-domaine modal.

---

**Remarque :** Cette méthode d'obtention d'une matrice de masse diagonale ne repose que sur des combinaisons linéaires entre les vecteurs de réduction. Elle ne modifie donc pas de sous-espace engendré par ces vecteurs et les qualités propres au modèle réduit initial.

---

### 2.2.3. Singularités potentielles de l'opérateur d'interface

L'opérateur de condensation sur les interfaces obtenu à partir d'un formalisme dual est positif semi-défini. On s'attache dans la mesure du possible lors de l'écriture de la continuité cinématique à assurer son inversibilité, dans le cas de maillages compatibles ou incompatibles [Herry et al. 2002]. Conformément au paragraphe [1.2.1], la présence de *cross-points* est une cause de redondance dans les liaisons d'interface et l'opérateur  $\mathbf{H}$  devient singulier.

La projection modale réduit le nombre des degrés de liberté sur un sous-domaine. Or, les relations de continuité cinématique sont écrites dans l'espace physique, si bien que leur nombre n'est pas affecté par la projection. On peut donc arriver dans des cas critiques à un nombre excessif de relations de liaisons par rapport aux inconnues disponibles sur un sous-domaine modal. On illustre cette situation par l'exemple élémentaire suivant.

Considérons une structure élémentaire décomposée en deux sous-domaines reliés par une interface incompatible.

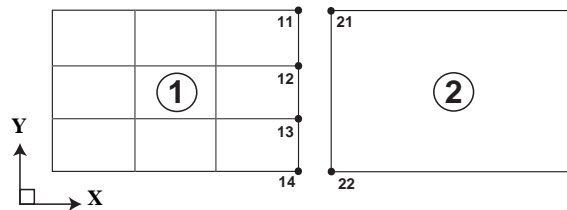


FIGURE [2.2.3.1] : Redondance potentielle en cas de projection modale

Dans cette configuration, on écrit une relation au niveau de chacun des nœuds du sous-domaine 1 :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{U}}_{11} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}_{12} - \frac{4}{3}\dot{\mathbf{U}}_{21} - \frac{1}{6}\dot{\mathbf{U}}_{22} &= 0 \\
 \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}_{11} + 2\dot{\mathbf{U}}_{12} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}_{13} - 2\dot{\mathbf{U}}_{21} - \dot{\mathbf{U}}_{22} &= 0 \\
 \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}_{12} + 2\dot{\mathbf{U}}_{13} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}_{14} - \dot{\mathbf{U}}_{21} - 2\dot{\mathbf{U}}_{22} &= 0 \\
 \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}_{13} + \dot{\mathbf{U}}_{14} - \frac{1}{6}\dot{\mathbf{U}}_{21} - \frac{4}{3}\dot{\mathbf{U}}_{22} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.2.3.1}$$

On projette ensuite le sous-domaine 1 sur une base constituée d'un unique mode, par exemple le mode de translation rigide selon la direction  $x$ . Le jeu d'équations [2.2.3.1] devient, en projection sur les axes  $x$  et  $y$  :

$$\begin{aligned}
 \{1\} \quad & -\frac{4}{3}\dot{\mathbf{U}}_{21}^Y - \frac{1}{6}\dot{\mathbf{U}}_{22}^Y = 0 \\
 \{2\} \quad & -2\dot{\mathbf{U}}_{21}^Y - \dot{\mathbf{U}}_{22}^Y = 0 \\
 \{3\} \quad & -\dot{\mathbf{U}}_{21}^Y - 2\dot{\mathbf{U}}_{22}^Y = 0 \\
 \{4\} \quad & -\frac{1}{6}\dot{\mathbf{U}}_{21}^Y - \frac{4}{3}\dot{\mathbf{U}}_{22}^Y = 0 \\
 \{5\} \quad & \dot{\alpha} + \frac{1}{2}\ddot{\alpha} - \frac{4}{3}\dot{\mathbf{U}}_{21}^X - \frac{1}{6}\dot{\mathbf{U}}_{22}^X = 0 \\
 \{6\} \quad & \frac{1}{2}\dot{\alpha} + 2\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}\ddot{\alpha} - 2\dot{\mathbf{U}}_{21}^X - \dot{\mathbf{U}}_{22}^X = 0 \\
 \{7\} \quad & \frac{1}{2}\dot{\alpha} + 2\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}\ddot{\alpha} - \dot{\mathbf{U}}_{21}^X - 2\dot{\mathbf{U}}_{22}^X = 0 \\
 \{8\} \quad & \frac{1}{2}\dot{\alpha} + \ddot{\alpha} - \frac{1}{6}\dot{\mathbf{U}}_{21}^X - \frac{4}{3}\dot{\mathbf{U}}_{22}^X = 0
 \end{aligned} \tag{2.2.3.2}$$

où  $\alpha$  représente la participation modale du mode de translation sur le sous-domaine 1.

Ces relations deviennent redondantes. Par exemple, on peut écrire les combinaisons suivantes entre les 8 équations précédentes :

$$\begin{aligned}
 \{1\} &= \frac{1}{2}\{2\} + \frac{1}{2}\{3\} - \{4\} \\
 \{5\} &= \frac{1}{2}\{6\} + \frac{1}{2}\{7\} - \{8\}
 \end{aligned} \tag{2.2.3.3}$$

L'inversion directe de l'opérateur d'interface à l'aide d'une factorisation de Cholesky permet comme dans le cas des *cross-points* de lever la difficulté.

On peut envisager un cas extrêmement défavorable où les deux sous-domaines seraient réduits sur des bases modales trop pauvres. On peut alors parvenir à un blocage complet de l'interface, c'est-à-dire que la seule solution du système surcontraint serait la nullité de tous les multiplicateurs de Lagrange. On obtiendrait un tel résultat avec le modèle élémentaire de ce paragraphe en projetant le sous-domaine 2 sur un unique mode de translation dans la direction  $\mathbf{Y}$  par exemple. Cependant, on peut considérer qu'un tel système multi-domaines avec réduction s'apparente à une erreur de modélisation. Il en va de même pour le cas général de deux sous-domaines modaux liés par une interface, qui devrait ne former qu'un seul sous-domaine avec une base modale globale.

Le cas significatif à considérer est donc *a priori* celui du collage entre un sous-domaine modal et un sous-domaine classique. Pour éviter toute redondance dans les relations de liaison introduite par la projection modale, il faut identifier le nombre de relations écrites au niveau des degrés de liberté initiaux du sous-domaine projeté qui sont sans vis-à-vis du côté du sous-domaine classique. En effet, les liaisons écrites au niveau des degrés de liberté du sous-domaine classique sont indépendantes et la projection ne modifie pas cette situation. Pour l'exemple de ce paragraphe, il faut donc considérer les liaisons au niveau des nœuds 12 et 13 dans les deux directions d'espace. Le nombre de modes ne doit alors pas être inférieur à ce nombre de relations potentiellement redondantes. Ce dernier peut donc être considéré comme le nombre critique de modes de réduction :

$$\text{Aucune nouvelle singularité pour } \mathbf{H} \Rightarrow N_{\text{modes}} \geq \sum_{i \in \mathbf{E}} n_{\text{ddl}}^i \tag{2.2.3.4}$$

où  $\mathbf{E}$  représente l'ensemble des nœuds appartenant uniquement au sous-domaine réduit,  $n_{\text{ddl}}^i$  est le nombre de degrés de liberté attachés au nœud  $i$ .

Ce nombre critique de modes n'est pas une contrainte majeure pour l'utilisation de la réduction modale dans notre méthode multi-domaines. En effet, comme évoqué auparavant, le solveur gère les singularités du problème d'interface. De plus, une trop grande pauvreté de la base modale est naturellement à éviter, en particulier pour les modes impliquant l'interface. C'est pourquoi on introduit très fréquemment un mode statique, à déplacement imposé ou à force imposée, au niveau de chacun des degrés de liberté d'interface du modèle réduit. Le problème du nombre de modes de la base est alors automatiquement réglé.

Enfin, une situation courante dans nos calculs à venir est le collage entre un sous-domaine classique discrétisé finement en espace et un sous-domaine modal de grande taille discrétisé plus grossièrement. Le nombre des liaisons est alors majoritairement fixé par le nombre des nœuds sur l'interface fine et le nombre critique de modes est faible. Dans le cas de maillages hiérarchiques, avec une méthode de collage *optimale* ou *mortar* appuyée sur le maillage le plus fin, ce nombre critique est même nul. Une interface compatible est un cas particulier de maillages hiérarchiques.

#### 2.2.4. Coût de résolution du problème condensé sur les interfaces

Notre approche multi-domaines à plusieurs échelles de temps avec projection modale locale permet d'alléger la résolution en réduisant le nombre des inconnues et ne traitant pas trop souvent les zones de la structure qui ne le nécessitent pas. Ceci se fait au prix du traitement supplémentaire d'un problème d'interface (cf. paragraphe 1.3.2). En l'absence de sous-domaines projetés, ce problème reste d'un coût très limité. Il est diagonal dans le cas d'interfaces entre maillages coïncidents, où l'on peut découpler les relations en relations nodales, grâce à la masse diagonale. Le problème reste très creux dans le cas du collage de maillages incompatibles et un stockage en *lignes de ciel* avec condensation des termes non-nuls au voisinage de la diagonale de l'opérateur conduit à un coût de résolution très réduit.

Dans le cas d'un sous-domaine modal, les degrés de liberté physiques de l'interface intervenant dans l'écriture des relations de continuité ne sont plus indépendants les uns des autres. Ils sont couplés par les modes. On aboutit dans le cas général à un système de liaisons entièrement couplées. Ceci se produit par exemple lorsqu'un mode a des composantes non-nulles sur tous les degrés de liberté de l'interface. Pour certains jeux de modes classiques de la littérature, celui de Craig-Bampton par exemple, les degrés de liberté de l'interface restent découplés. Cependant, les modes ne sont pas orthogonaux au sens de la masse et l'opérateur de condensation reste fortement rempli. Dans notre cas, on force l'orthogonalité des modes au sens de la masse, ce qui transporte les couplages au niveau des matrices de liaisons. On traite donc dans tous les cas avec réduction avec des matrices de couplages presque pleines.

La méthode de résolution des systèmes linéaires disponibles dans EUROPLEXUS est fondée sur une méthode directe, consistant en une factorisation de Cholesky, suivie de la résolution de deux systèmes triangulaires. Le coût de résolution du problème d'interface a alors plusieurs origines :

1. L'assemblage de l'opérateur  $\mathbf{H}$  requiert des multiplications matricielles dont le coût est très dépendant du nombre de termes non-nuls.

Pour  $n$  sous-domaines, l'opérateur à inverser à chaque pas de temps est donné par :

$$\mathbf{H} = \sum_1^n \frac{\Delta t_k}{2} \mathbf{C}_k \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T \quad [2.2.4.1]$$

où  $\Delta t_k$  est le pas de temps courant sur le sous-domaine  $k$ .

En dynamique explicite, le pas de temps est amené à varier avec la taille des éléments à cause de la condition de Courant. L'opérateur  $\mathbf{H}$  doit alors être calculé à nouveau. Comme les matrices  $\mathbf{C}_k$  et  $\mathbf{M}_k$  sont constantes, on peut calculer une contribution constante  $\mathbf{C}_k \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T$

pour chaque sous-domaine à l'opérateur global. L'obtention de l'opérateur à inverser est alors grandement simplifiée.

2. Le calcul du second membre du problème condensé sur les interfaces implique des multiplications matrices-vecteurs concernant les matrices de couplages  $C_k$  sur chacun des sous-domaines :

$$S = \sum_1^n -C_k \dot{U}_{k \text{ free}} \quad [2.2.4.2]$$

Les vitesses concernées peuvent être des vitesses classiques ou des vitesses modales. Contrairement à l'assemblage de l'opérateur de condensation, ces calculs doivent être effectués à chaque fois que le problème d'interface est résolu, même si les pas de temps restent constants.

3. Le coût numérique de la factorisation de Cholesky augmente fortement avec le remplissage de la matrice  $H$ . Cette factorisation doit être réalisée à chaque que l'opérateur est modifié.
4. Le nombre d'opérations nécessaires à la résolution des deux systèmes triangulaires est également très dépendant du nombre de termes non-nuls sur les lignes. Comme le calcul du second membre, cette tâche doit être menée à chaque résolution du problème condensé, même si  $H$  est une matrice constante.
5. Enfin, une fois résolu le problème d'interface proprement dit, il reste à calculer les accélérations *link* à partir des multiplicateurs de Lagrange. Cela conduit à nouveau à des multiplications matrices-vecteurs sur les sous-domaines où ce calcul à un sens (c'est-à-dire ceux dont le temps local coïncide avec le temps global).

$$\ddot{U}_{k \text{ link}} = M_k^{-1} C_k^T \Lambda \quad [2.2.4.3]$$

Dans le cas d'un sous-domaine modal, toutes ces tâches sont fortement alourdies par le remplissage des matrices  $C_k$ .

Calculer initialement les contributions constantes de chaque sous-domaine à l'opérateur global permet de lever le problème de l'assemblage. La factorisation et la résolution des systèmes triangulaires peuvent rester très pénalisantes, voire compenser les gains effectués sur le problème sans liaison avec réduction. Il est donc souhaitable d'éviter les factorisations trop fréquentes et de limiter le nombre des résolutions d'un problème d'interface avec sous-domaine modal. Cela signifie en particulier qu'il est déconseillé de coller directement un sous-domaine projeté avec un sous-domaine caractérisé par de fortes non-linéarités, avec dès lors un pas de temps réduit et très variable. L'exemple du paragraphe 2.3.2 illustre cette situation.

### 2.2.5. Jeu de modes dédié au couplage dual sur les interfaces : modes étendus

L'utilisation d'un jeu de modes de réduction particulier permet de s'affranchir totalement de l'augmentation du coût du problème d'interface. Précisons tout d'abord qu'il ne s'agit pas de proposer un nouveau type d'association entre modes propres et modes statiques et que cela ne nuit en aucun cas à la généralité de notre approche face aux méthodes modales disponibles dans la littérature. La nature creuse, voire diagonale, de l'opérateur de condensation sans projection vient de l'indépendance des degrés de liberté impliqués sur les interface et de la nature diagonale de la matrice de masse. Après projection, la matrice de masse reste diagonale, mais on perd l'indépendance des inconnues physiques d'interface.

Considérons la structure modèle suivante, discrétisée par éléments finis :

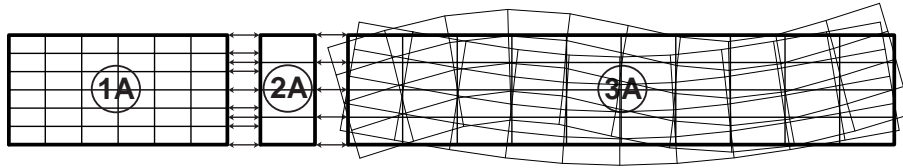


FIGURE [2.2.5.1] : Allègement du problème d'interface - Structure modèle

Le jeu de modes utilisés sur le sous-domaine 3 est quelconque initialement. Il respecte les règles d'orthogonalité des modes présentées au paragraphe 2.2.2. L'interface entre les sous-domaines 1 et 2 conduit à un opérateur de condensation creux alors que celle entre les sous-domaines 2 et 3 conduit à un opérateur plein à cause des modes.

On propose une modélisation alternative :

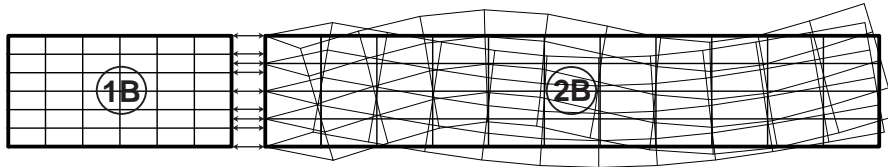


FIGURE [2.2.5.2] : Allègement du problème d'interface - Solution modale alternative

On rassemble les sous-domaines 2A et 3A dans un unique sous-domaine 2B. On affecte la lettre A à la première décomposition en sous-domaines et la lettre B à la seconde. On considère sur le sous-domaine 2B une base modale modifiée :

1. On reprend les modes utilisés auparavant sur le sous-domaine 3A de la décomposition A. On les complète avec des 0 au niveau des degrés de liberté du sous-domaine 2B de la décomposition B qui ne figuraient pas dans ce sous-domaine (à savoir ceux des nœuds de frontière entre les sous-domaines 1A et 2A), comme le montre la FIGURE [2.2.4.2].
2. On ajoute à cette base des modes correspondant aux fonctions de forme éléments finis associées aux degrés de liberté déjà cités (les degrés de liberté appartenant au sous-domaine 2B, mais pas au sous-domaine 3A).

Si les déformations sont initialement linéaires sur le sous-domaine 2A et avec l'emploi d'un pas de temps identique sur les sous-domaines 2A et 3A, les deux modélisations sont strictement équivalentes. Les degrés de liberté du sous-domaine 2A auparavant connectés au sous-domaine 3A ont disparu, de même que les relations de liaisons entre les deux sous-domaines. La continuité est maintenant écrite *a priori* dans la base modale, ce qui correspond à un collage *primal* entre les deux sous-domaines 2A et 3A au sein du sous-domaine 2B.

A présent, avec l'emploi d'une masse diagonale sur le nouveau sous-domaine 2B avant projection, les nouveaux modes, à savoir modes étendus et fonctions de formes éléments finis, sont naturellement orthogonaux au sens de la masse. En effet, les fonctions de formes sont orthogonales entre elles et ont des composantes nulles sur le support des modes étendus. On satisfait alors tous nos objectifs. Le nombre de degrés de liberté sur le nouveau sous-domaine 2B est réduit par la projection modale de la même manière que dans la décomposition initiale en sous-domaines. La matrice de masse réduite est diagonale et les participations modales associées aux modes impliqués sur l'interface ne sont autres que les degrés de liberté éléments finis classiques. Ces inconnues sont indépendantes et l'opérateur de condensation n'est donc pas affecté par la projection.

La seule limite vient du fait de ne pas exploiter pleinement la troncature des hautes fréquences proposée par la réduction. En effet, la réduction modale sur le sous-domaine 3A aurait permis l'utilisation d'un grand pas de temps pour la résolution, puisque les modes à haute fréquence sont exclus de la base de projection (encore que cela soit tempéré par l'emploi de modes statiques, qui ont des composantes sur les modes propres libres à haute fréquence). Avec notre nouvelle modélisation, le pas de temps sur le sous-domaine 2B correspond dans la majorité des cas à celui du sous-domaine 2A initial. Ceci est peu pénalisant, puisque la résolution des problèmes avec et sans liaisons impliquant le nouveau sous-domaine 2B est devenue très légère.

Au niveau pratique, l'extension des modes de réduction avec des 0 est immédiate. Il en va de même pour l'introduction des modes correspondants aux fonctions de formes éléments finis, car ce sont simplement des vecteurs identiquement nuls, sauf au niveau du degré de liberté auquel ils sont rattachés, où on trouve la valeur 1. Une telle mise en œuvre peut toutefois être délicate au niveau d'un code de calcul vibratoire standard. Le souci de généralité et de cohérence de l'algorithme d'EUROPLEXUS suggère que de telles fonctionnalités spécifiques ne soient pas intégrées dans le programme. De plus, nos exemples montrent que les gains apportés par la projection sont déjà satisfaisants avec des modélisations classiques. Les considérations de ce paragraphe témoignent toutefois de la grande flexibilité de la méthode et des moyens à disposition des analystes futurs pour répondre à leurs attentes, sans intervention supplémentaire au niveau du processus de résolution multi-domaines couplé.



## 2.3. Exemples

Comme dans le chapitre précédent, on utilise pour toutes les simulations à venir une loi de comportement élastique linéaire. On prend en compte les éventuelles déformations non-linéaires sur les sous-domaines sans projection.

### 2.3.1. Chaînage entre un code de calcul vibratoire et EUROPLEXUS

EUROPLEXUS est un code de mécanique dédié à la dynamique rapide. Ses structures de données et ses solveurs sont spécifiques et optimisés pour cette gamme d'analyses. Y incorporer des opérateurs issus de la dynamique vibratoire, en particulier un extracteur de valeurs propres, nuit à l'homogénéité du code, sans compter les nombreuses compétences à acquérir pour le rendre compétitif dans ces domaines face aux autres programmes du marché. Il est donc préféré à cette solution le calcul des éléments de réduction, aussi bien modes de projection que matrices réduites, à l'aide d'un code externe. EUROPLEXUS ayant un objectif industriel, nous ne souhaitons pas pénaliser cette dimension en le liant trop fermement à un logiciel particulier. On définit donc un format d'entrée unique des données dans EUROPLEXUS. Chaque industriel habitué à son code vibratoire local, CAST3M, *Code\_Aster* ou SAMCEF par exemple, doit alors convertir les sorties disponibles à notre format d'entrée. Dans le cadre de ce travail, un interfaçage avec les deux premiers programmes cités est réalisé, alors que celui avec SAMCEF est l'œuvre des ingénieurs de Samtech S.A.

On propose dans ce paragraphe le traitement détaillé d'un exemple élémentaire en chaînages successifs avec les codes CAST3M et *Code\_Aster*. Ces deux programmes sont disponibles en version libre, ce qui simplifie largement leur manipulation.

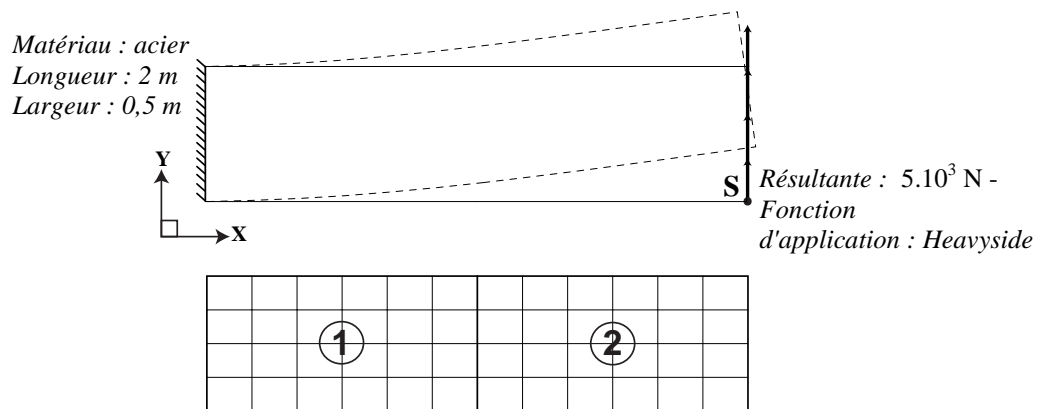


FIGURE [2.3.1.1] : Chaînage code vibratoire / EUROPLEXUS – Géométrie et maillage

On projette les champs cinématiques du sous-domaine 2 sur une base de Craig & Bampton comprenant 10 modes statiques et 20 modes dynamiques encastrés sur l'interface entre les deux sous-domaines. Les modes statiques sont des réponses statiques à un déplacement imposé unitaire au niveau de chacun des degrés de liberté entre les sous-domaines 1 et 2 successivement (10 au total), les autres étant bloqués. Les modes dynamiques sont des modes propres du vibration du système encastré sur l'interface (60 au maximum).

Pour mener le calcul dans EUROPLEXUS, les quantités suivantes sont nécessaires :

1. Les champs de déplacements correspondant aux modes de projection. Ils servent à l'écriture des nouvelles relations d'interface et à la projection des forces externes si nécessaire.

2. Les matrices de masse et de raideur réduites.
3. La correspondance des nœuds entre le support des modes et le maillage global. Les modes ne sont calculés que sur une partie du maillage. La numérotation des nœuds du support sur lequel ils s'appuient peut être différente de la numérotation initiale sur le maillage complet.
4. La fréquence maximale du système réduit. Elle permet du calcul du pas critique pour l'intégration temporelle explicite sur le sous-domaine projeté.

Le *Code\_Aster* est à présent doté des fonctionnalités permettant la diagonalisation de la matrice de masse pour une base de réduction formée d'une association de modes de vibrations et de modes statiques. Il permet également la sortie des éléments demandés au format *universel*, qui est le format privilégié d'IDEAS. En ce qui concerne CAST3M, les opérations de calcul des modes propres, des modes statiques et d'orthogonalisation sont menées à l'aide d'une procédure en GIBIANE. Le format de sortie utilisé est le format issu de la directive SAUVER.

Une interface réalisée dans le cadre de ce travail permet ensuite la conversion des données formatées par chacun des deux codes vibratoires au format d'entrée unique. Dans ce fichier, seule la diagonale de la matrice de masse réduite est naturellement transmise. La matrice de raideur réduite est symétrique donc on ne considère dans le fichier d'échange que sa partie triangulaire supérieure. Elle est séparée en deux contributions : une partie pleine correspondant à la projection sur les modes statiques et au couplage entre les modes statiques et vibratoires (cf. paragraphe 2.2.2) et une partie diagonale correspondant à la projection sur les modes vibratoires. La partie pleine est écrite au format *lignes de ciel* et seuls les termes non-nuls de la partie diagonale sont retenus. La fréquence maximale du système projeté est calculée dans l'interface à partir des opérateurs fournis.

On vérifie sur notre exemple que les fichiers d'échange obtenus à partir du *Code\_Aster* ou de CAST3M contiennent des valeurs très voisines, aussi bien pour les composantes des modes (moins de 0,1% d'écart) que pour les matrices réduites (moins de 0,1% d'écart également).

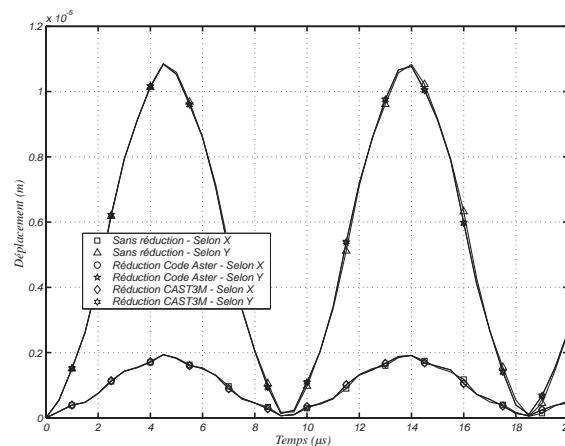


FIGURE [2.3.1.2] : Déplacement au point S dans les deux directions d'espace

Les réponses transitoires obtenues dans EUROPLEXUS avec un calcul multi-domaines classique ou avec l'utilisation d'une projection modale sur le sous-domaine 2, en chaînage avec le *Code\_Aster* ou CAST3M, sont équivalentes.

### 2.3.2. Impact de la projection modale locale sur le problème d'interface

Il s'agit à présent d'illustrer les considérations du paragraphe 2.2.4 sur les conséquences de la projection modale sur le coût d'inversion du problème d'interface et les moyens d'y remédier si nécessaire.

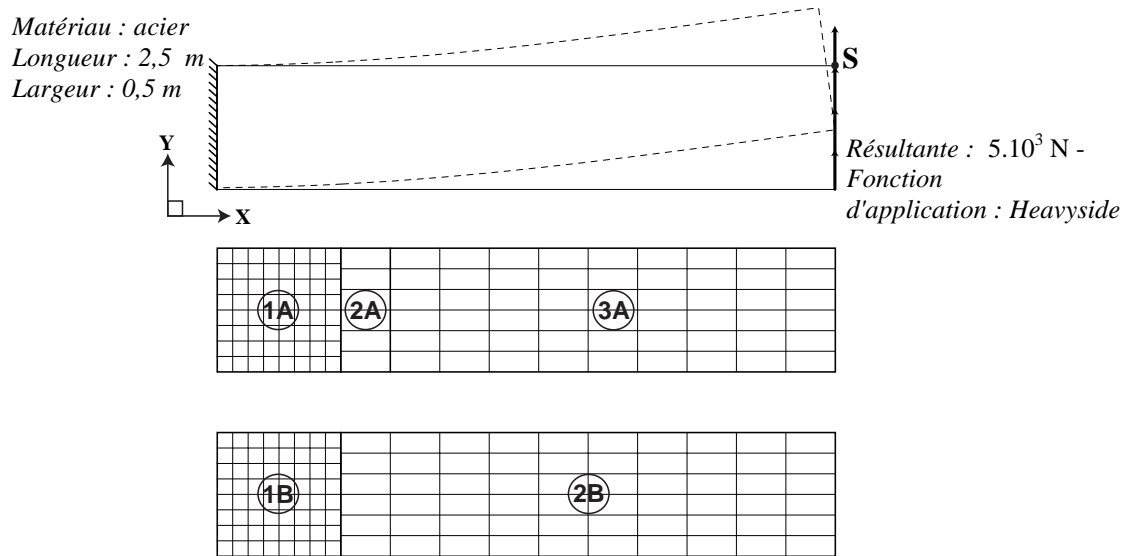


FIGURE [2.3.2.1] : Coût du problème d'interface – Géométrie et maillage

On considère deux décompositions en sous-domaines A et B. Dans les deux cas, l'interface entre les sous-domaines 1 et 2 est incompatible, traitée à l'aide de la méthode *mortar*. La solution de référence est obtenue à l'aide de la première décomposition en sous-domaines sans réduction modale.

La première configuration avec projection est effectuée sur la décomposition A en prenant un modèle de Craig & Bampton sur le sous-domaine 3A. Deux autres configurations avec projection sont prises sur la décomposition B. La première consiste en une réduction de Craig & Bampton sur le sous-domaine 2B, alors que la seconde correspond à l'approche présentée au paragraphe 2.2.4.

Multi-domaines classique	Décomposition A - Projection modale	Décomposition B - Première configuration modale	Décomposition B - Configuration modale améliorée
288	188	166	166

TABEAU [2.3.2.1] : Nombre total de degrés de liberté

	Multi-domaines classique	Configuration avec projection 1	Configuration avec projection 2	Configuration avec projection 3
Interface SD1 - SD2	62	62	171	62
Interface SD2 - SD3	14	105		

TABEAU [2.3.2.2] : Nombre de termes non-nuls dans l'opérateur de condensation

	Multi-domaines classique	Configuration avec projection 1	Configuration avec projection 2	Configuration avec projection 3
Sous-domaine 1	$8,43171 \cdot 10^{-6}$ s	$8,43171 \cdot 10^{-6}$ s	$8,43171 \cdot 10^{-6}$ s	$8,43171 \cdot 10^{-6}$ s
Sous-domaine 2	$1,12423 \cdot 10^{-5}$ s	$1,12423 \cdot 10^{-5}$ s	$1,35307 \cdot 10^{-6}$ s	$1,12423 \cdot 10^{-5}$ s
Sous-domaine 3	$1,12423 \cdot 10^{-5}$ s	$1,35697 \cdot 10^{-5}$ s		

TABLEAU [2.3.2.3] : Pas de temps sur les sous-domaines

La configuration avec réduction la plus évidente est la première avec la décomposition B. Les TABLEAU [2.3.2.2] et TABLEAU [2.3.2.3] montrent qu'elle est également la plus pénalisante en ce qui concerne le problème d'interface. En effet, l'interface entre les sous-domaines 1B et 2B s'appuie sur un sous-domaine réduit. Les relations sont donc entièrement couplées, ce que traduit le grand nombre de termes non-nuls dans l'opérateur à inverser. L'interface s'appuie aussi sur un sous-domaine avec une grande finesse de maillage et donc un pas de temps associé de petite taille. Cette configuration avec projection conduit donc à l'inversion fréquente d'un problème d'interface coûteux.

La configuration modale sur la décomposition A est plus favorable. L'interface concernée par la projection est indépendante de l'interface incompatible. Elle correspond initialement à une interface compatible entre deux maillages relativement grossiers. Le nombre des relations est donc réduit et la projection a des conséquences moindres, ce que traduit le nombre de termes non-nuls dans l'opérateur de condensation impliqué par la projection, plus faible que pour la configuration 2. De plus, cette interface coûteuse se trouve désormais entre deux sous-domaines avec des pas de temps plus grands que pour la précédente configuration. Elle est donc traitée moins souvent, ce qui atténue d'autant son influence sur le temps de résolution global.

La seconde configuration avec réduction sur la décomposition B est comme prévu la plus économique en ce qui concerne l'interface, puisqu'elle n'engendre aucun surcoût. On constate toutefois l'absence de gain sur la taille du pas de stabilité grâce à la réduction.

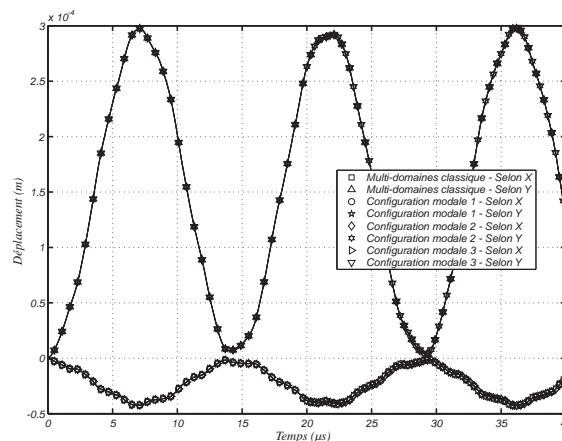


FIGURE [2.3.2.2] : Déplacement au point S dans les deux directions d'espace

On vérifie que les quatre cas de calcul présentés dans ce paragraphe conduisent à la même réponse dynamique de la structure.

On peut conclure ce paragraphe avec les indications suivantes :

- ✓ L'association *primale-duale* introduite au paragraphe 2.2.4 est assurément la plus économique en ce qui concerne le problème d'interface. Elle peut être compliquée à mettre en œuvre dans un code vibratoire ne disposant pas d'un *macro-langage* de commande tel que le GIBIANE de CAST3M.

- ✓ L'introduction d'un sous-domaine intermédiaire entre une interface incompatible appuyée sur un maillage fin et un sous-domaine modal semble être une possibilité facilement accessible de réduire l'impact de la projection sur le coût d'inversion des problèmes condensés.

### 2.3.3. Structure 3D massive

Après les deux premiers exemples académiques, on considère désormais un modèle plus complexe, dont la taille permet d'apprécier les gains substantiels en matière de temps de calcul offerts par notre approche.

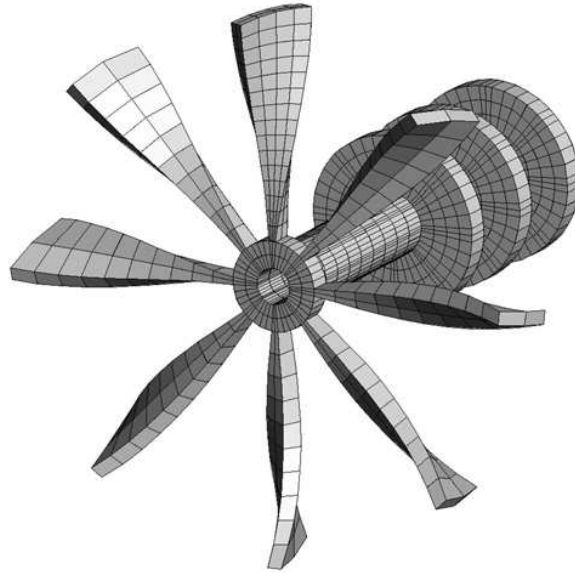


FIGURE [2.3.3.1] : Structure 3D massive - Maillage

La structure est librement inspirée d'un rotor de propulseur d'avion de ligne, tout en étant très largement simplifiée.

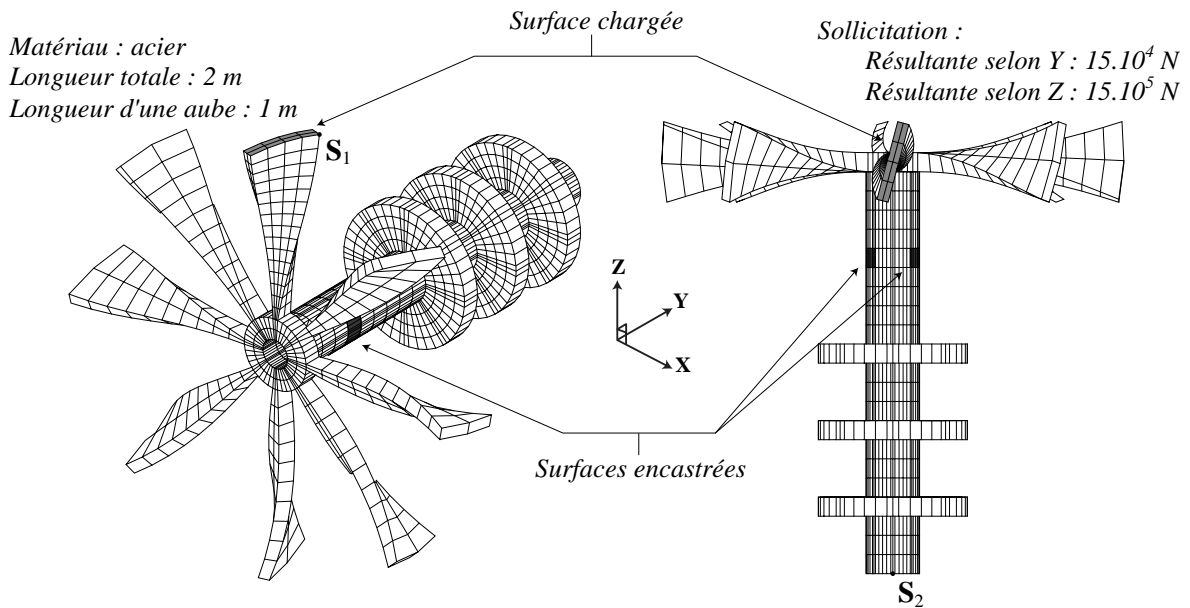


FIGURE [2.3.3.2] : Chargement et conditions aux limites

Le maillage comporte 2364 éléments hexaédriques à 8 nœuds comportant chacun 8 points d'intégration. Cela correspond à un total de 4212 nœuds à 3 degrés de liberté, soit 12636 inconnues. Le chargement est appliqué à l'aide d'une fonction temporelle correspondant à un échelon.

**Remarque :** Pour pouvoir effectuer des comparaisons significatives entre les simulations réalisées avec et sans réduction modale locale, nous n'utilisons pas d'éléments sous-intégrés. Ces derniers sont populaires en dynamique explicite pour leur faible coût mais nous n'en disposons pas dans les codes vibratoires que nous utilisons. Ils sont notoirement plus souples en flexion que les éléments massifs classiques, une fois stabilisés par rapport aux modes parasites d'hourglass [Flanagan et Belytschko 1981].

La structure est décomposée en 3 sous-domaines : l'aube chargée, le disque et les aubes restantes, la partie arrière du propulseur.

L'aube sollicitée est dotée d'un maillage deux fois plus fin que celui des autres aubes pour améliorer son comportement en flexion. Ceci conduit à une interface incompatible surfacique à la base de cette aube.

Domaine 1 : 120 éléments, 240 nœuds  
Domaine 2 : 264 éléments, 708 nœuds  
Domaine 3 : 1980 éléments, 3264 nœuds

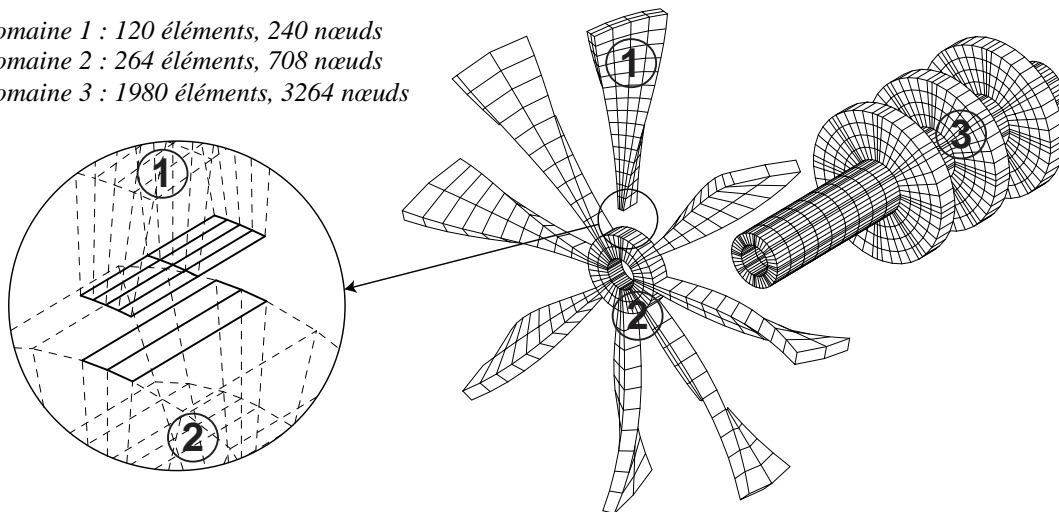


FIGURE [2.3.3.3] : Décomposition en sous-domaines

Nous proposons deux modélisations pour le sous-domaine 3 : une modélisation de référence avec des éléments finis classiques et une modélisation avec projection sur une base de 50 modes propres libres à basse fréquence. Cette méthode de réduction ne sera satisfaisante que si l'interface ne subit pas de grandes déformations, ce qui est prévisible en vertu du caractère massif du disque.

Le sous-domaine 3 compte initialement 9792 degrés de liberté. L'économie sur le problème libre sur ce sous-domaine est donc considérable avec la réduction modale. De plus, en l'absence de mode statique, le gain est également important en matière de taille du pas de temps critique, puisqu'il se trouve multiplié par 100 après projection.

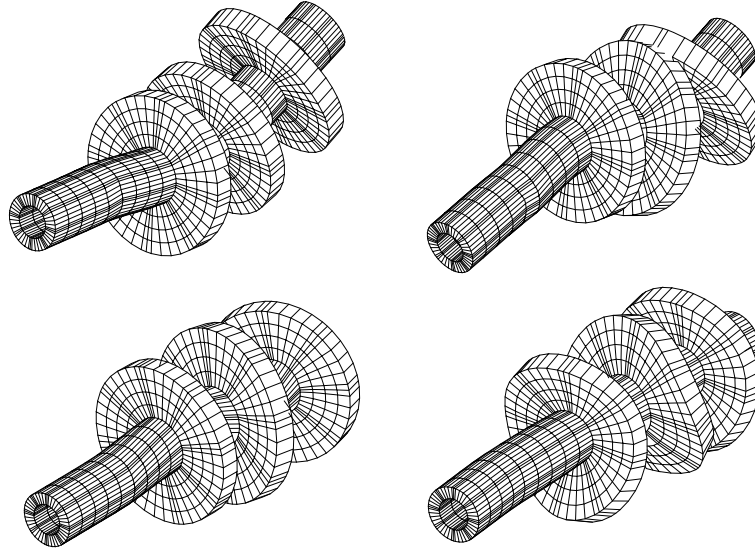


FIGURE [2.3.3.4] : Modes propres libres sur le sous-domaine 3

	Sans réduction locale	Avec réduction locale sur le sous-domaine 3
Sous-domaine 1	$1,21 \cdot 10^{-6}$ s	$1,21 \cdot 10^{-6}$ s
Sous-domaine 2	$9,68 \cdot 10^{-7}$ s	$9,68 \cdot 10^{-7}$ s
Sous-domaine 3	$9,68 \cdot 10^{-7}$ s	$8,03 \cdot 10^{-5}$ s

TABLEAU [2.3.3.1] : Pas de temps sur les sous-domaines

On s'intéresse au déplacement dans les trois directions d'espace au niveau des points  $S_1$  et  $S_2$  repérés sur la FIGURE [2.3.3.2].

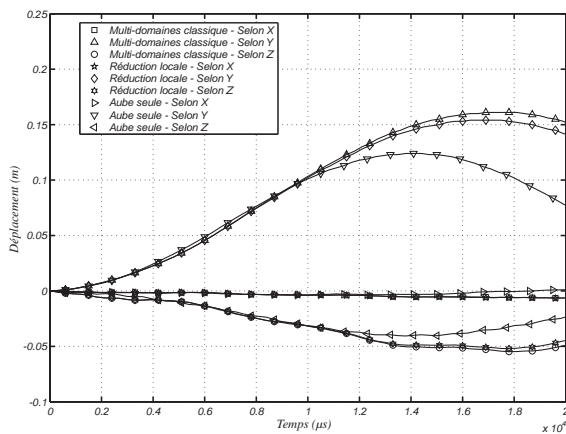


FIGURE [2.3.3.5] : Déplacement au point  $S_1$

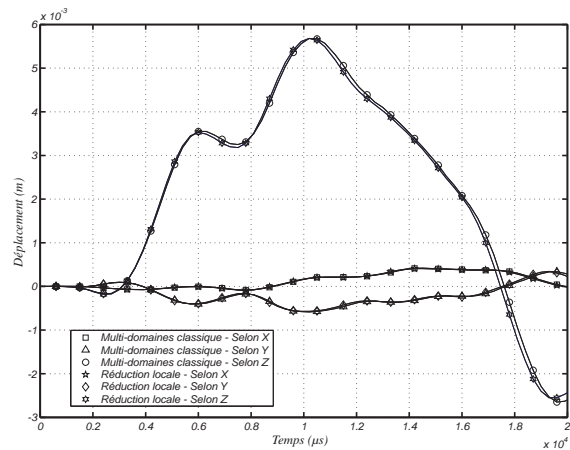


FIGURE [2.3.3.6] : Déplacement au point  $S_2$

On représente également sur la FIGURE [2.3.3.5] la réponse au même chargement de l'aube seule, encastree à son pied.

On constate que les réponses avec et sans réduction modale locale sont très voisines, en particulier au niveau du point  $S_2$ . Ceci tend à valider notre choix pour la base de projection dans cette configuration. On remarque également que l'encastrement au pied de l'aube conduit à une réponse trop raide de celle-



ci. L'amplitude et la phase de la réponse à son extrémité sont bien inférieures à celles obtenues lorsque le reste de la structure est modélisé. Ceci illustre en partie les considérations données dans l'introduction selon lesquelles l'utilisation d'un modèle complexe de grande taille est nécessaire, même pour avoir des informations valides au voisinage des zones chargées.

Mono-domaine	3 sous-domaines Sans réduction locale	3 sous-domaines Avec réduction locale
4630 s	3383 s	693 s
100 %	73 %	14%

TABLEAU [2.3.3.2] : Temps de calcul pour  $2.10^{-2}$  s de simulation en séquentiel sur SGI Origin 2000

En ce qui concerne les performances pour la résolution, la méthode multi-domaines initiale permet une réduction du 30 % du temps de calcul, et l'utilisation de la réduction modale permet presque d'atteindre un facteur 10. Il faut noter que le temps du calcul mono-domaine, c'est-à-dire effectué avec l'algorithme explicite classique est indicatif. En effet, pour s'affranchir de l'interface incompatible, il a fallu renoncer au maillage raffiné de l'aube sollicitée. Le modèle mono-domaine comporte donc légèrement moins d'inconnues que le modèle multi-domaines. De même, on ne donne pas la réponse du modèle mono-domaine car toute comparaison est vaine en raison des différences de raideur en flexion des aubes maillées avec des finesses différentes.

#### 2.3.4. Structure 3D coque

La structure est à présent dérivée d'un îlot nucléaire. Le chargement correspond à l'impact d'un avion militaire léger sur le bâtiment abritant le circuit primaire de la centrale.

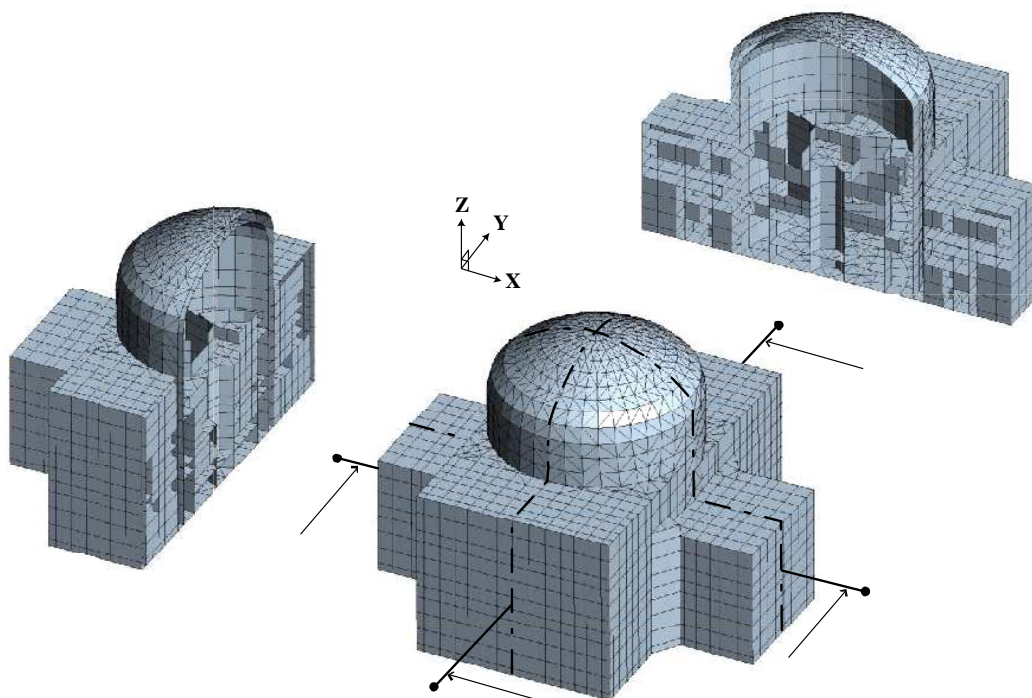


FIGURE [2.3.4.1] : Structure 3D coque – Îlot nucléaire

La structure est entièrement composée d'un béton élastique linéaire et l'épaisseur des coques est fixée à 1,30 m sur toute la structure. L'îlot repose sur un ensemble de ressorts linéaires travaillant dans la direction verticale. Cette représentation d'un sol flexible permet le couplage des structures internes de



la centrale à l'enveloppe externe par l'intermédiaire du radier. Le maillage est raffiné au voisinage du point d'impact.

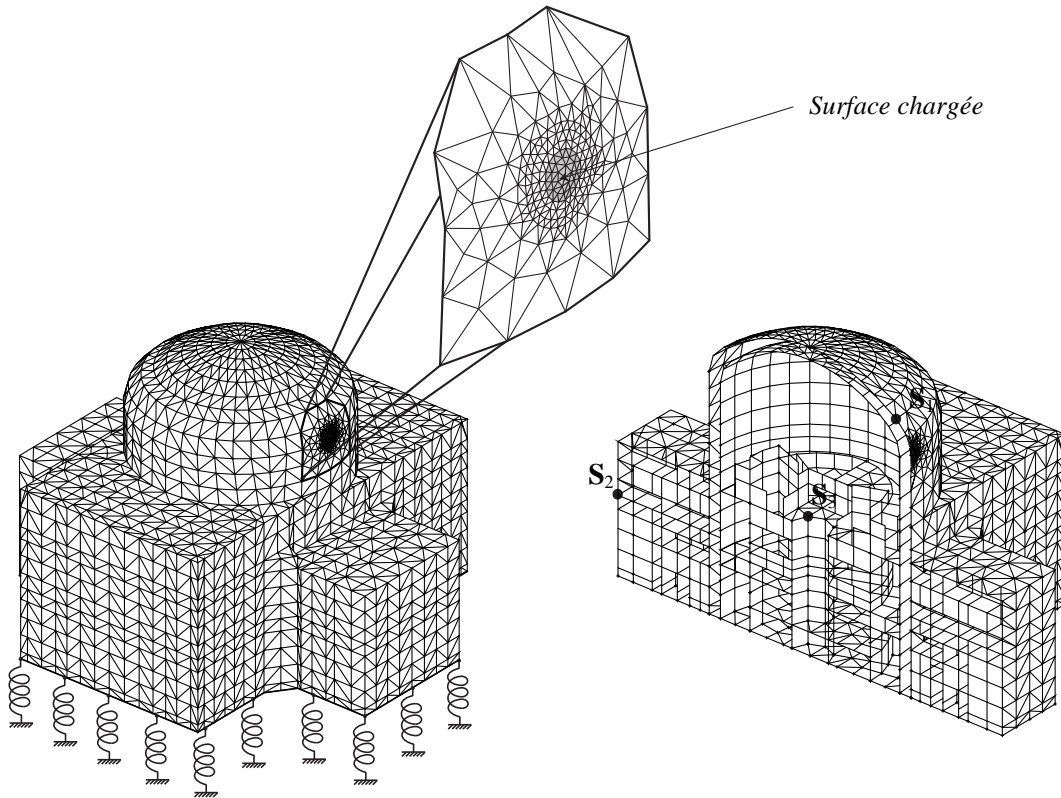


FIGURE [2.3.4.2] : *Ilot nucléaire - Maillage et conditions aux limites*

Le chargement prend la forme d'une pression surfacique, donnée par la formule :

$$P(t) = P \times S(t) \quad [2.3.4.1]$$

où  $P = 1,15 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ,

la fonction d'application  $S$  suit la courbe de la FIGURE [2.3.4.3].

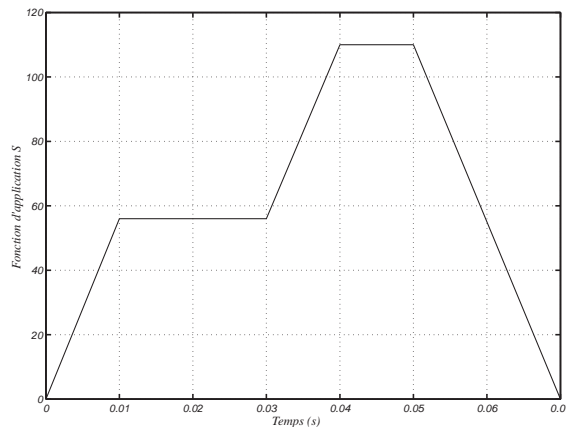


FIGURE [2.3.4.3] : *Fonction d'application temporelle du chargement*

La structure est décomposée en 3 sous-domaines. Des calculs préliminaires sur le dôme impacté seul avec un matériau élasto-plastique ont montré une zone plastique de petite envergure, ce qui conduit à la décomposition de la FIGURE [2.3.4.4].

Domaine 1 : 6609 éléments à 3 nœuds  
et 5806 éléments à 4 nœuds  
Domaine 2 : 158 éléments à 3 nœuds  
Domaine 3 : 204 éléments à 3 nœuds

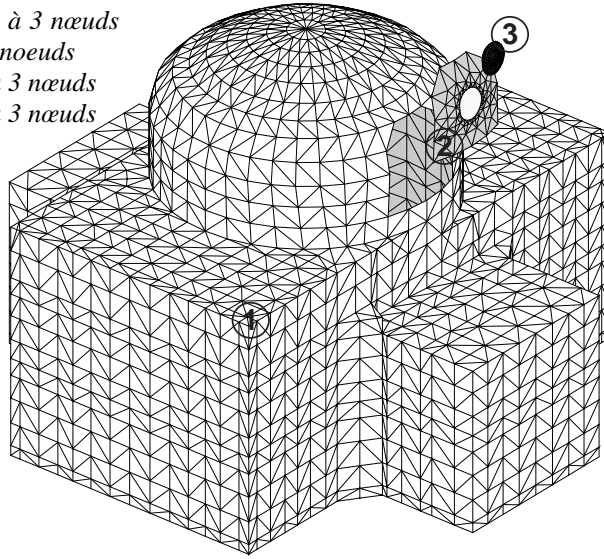


FIGURE [2.3.4.4] : Décomposition en sous-domaines

Nous proposons à nouveau deux modélisations sur le sous-domaine 1 : une modélisation de référence aux éléments finis classiques et une modélisation avec projection sur une base de réduction de Craig & Bampton, comptant 84 modes statiques et 150 modes de vibration encastrés sur l'interface entre les sous-domaines 2 et 3. Le nombre d'inconnues sur le sous-domaine 1 passe de 40338 à 234. Le pas critique de stabilité est également multiplié par 5 sur ce sous-domaine après réduction.

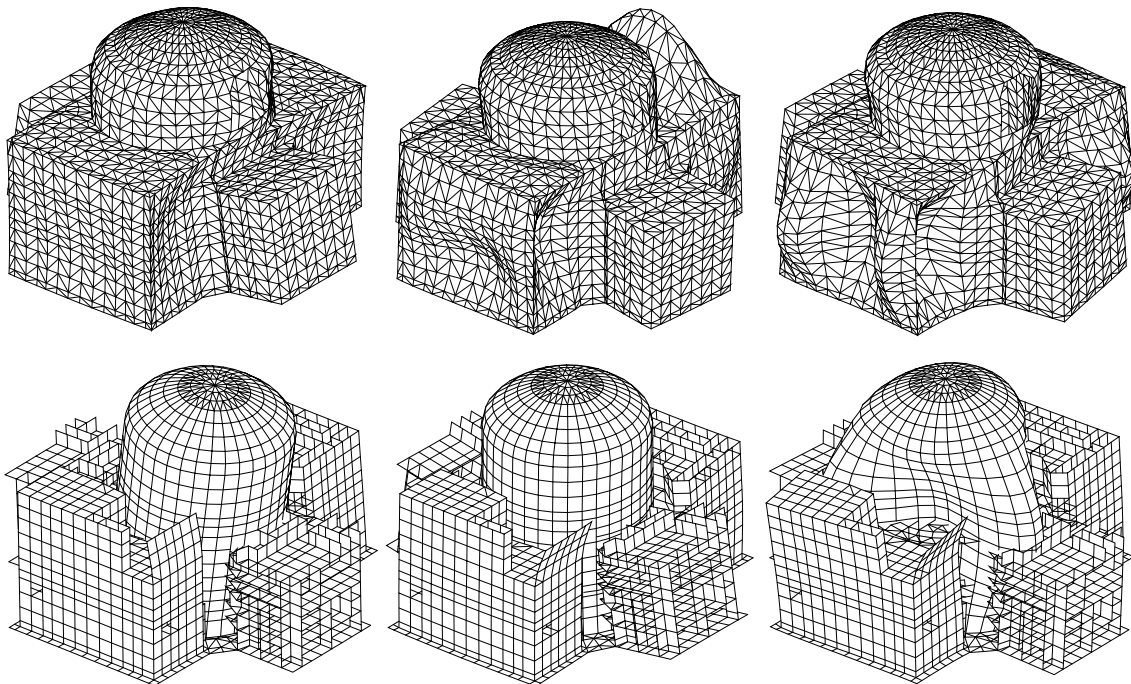
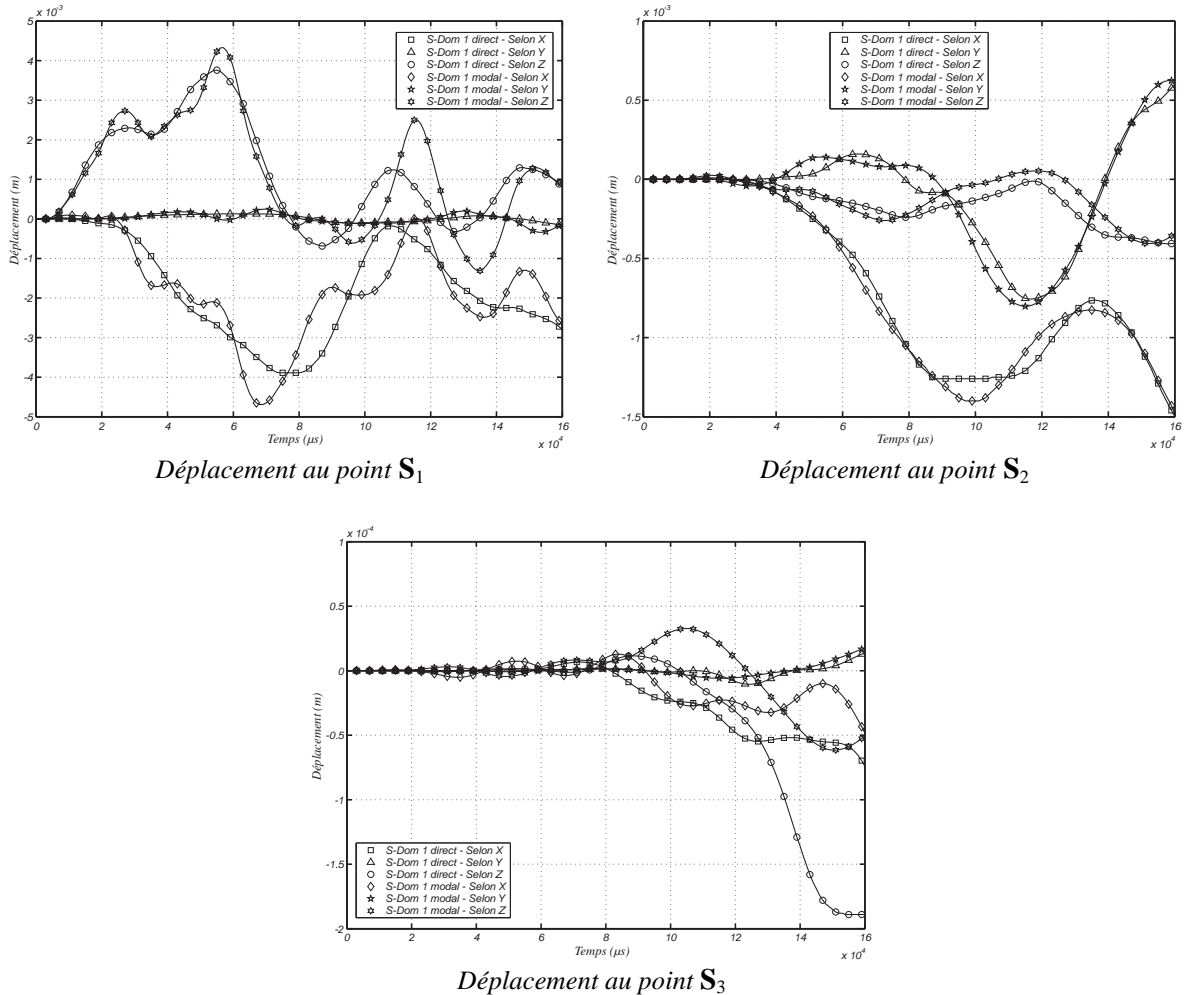


FIGURE [2.3.4.5] : Modes de vibration encastrés (internes et externes)

	Sans réduction locale	Avec réduction locale sur le sous-domaine 3
Sous-domaine 1	$2,60 \cdot 10^{-5}$ s	$1,32 \cdot 10^{-4}$ s
Sous-domaine 2	$4,70 \cdot 10^{-6}$ s	$4,70 \cdot 10^{-6}$ s
Sous-domaine 3	$2,42 \cdot 10^{-6}$ s	$2,42 \cdot 10^{-6}$ s

TABLEAU [2.3.4.1] : Pas de temps sur les sous-domaines

On s'intéresse au déplacement dans les trois directions d'espace au niveau des points  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  indiqués sur la FIGURE [2.3.4.2].


 FIGURE [2.3.4.6] : Déplacements aux points  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ 

L'accord entre les réponses obtenues avec et sans projection sur le sous-domaine 1 est satisfaisant, tant en amplitude qu'en phase, pour les points  $S_1$  et  $S_2$ . Ce n'est pas le cas pour le point  $S_3$ , en particulier pour la composante verticale. Ceci peut avoir deux origines. Tout d'abord, le mode de pompage vertical de l'enceinte interne peut être absent de la base de projection. La solution est alors d'enrichir la base avec ce mode et plus généralement, avec les modes locaux, souvent à plus haute fréquence que les modes d'ensemble, qui concernent les points de mesure du déplacement. Un tel enrichissement se fait à moindre coût au niveau de la résolution explicite, le nombre de modes de réduction n'étant pas un paramètre déterminant pour le temps de calcul. La seconde origine possible de la différence observée dans le déplacement vertical est une prise en compte différente de la condition aux limites au niveau du sol souple dans les deux calculs. Dans le cas avec projection, cette condition est prise en compte directement dans la base modale, alors qu'elle est imposée par des éléments particuliers dans

le cas standard. Cette source d'erreur est la plus probable, puisqu'une erreur a été détectée (et corrigée) depuis dans EUROPLEXUS : la condition aux limites n'était tout simplement pas appliquée dans le cas multi-domaines classique. Il apparaît donc logique d'obtenir un déplacement vertical excessif au niveau de l'enceinte interne, qui n'est couplée à l'enceinte externe que par le radier : la centrale « s'enfonce » dans le sol sans résistance.

En ce qui concerne les gains en terme de temps CPU, la projection modale permet de diviser par 4 le temps initialement nécessaire au calcul multi-domaines. Grâce à l'algorithme à plusieurs pas de temps, ce dernier réduisait déjà le temps d'exécution d'un facteur 7 par rapport à un calcul explicite classique. Ceci conduit à un rapport global de 30, ce qui prouve largement l'intérêt de telles méthodes.

Référence mono-domaine	Multi-domaines classique	Multi-domaines - Réduction sur le sous-domaine 1
22722 s	3766 s	853 s

TABLEAU [2.3.4.2] : Temps de calcul pour  $1,6 \cdot 10^{-1}$  s de simulation en séquentiel sur SGI Origin 2000

## **2.4. Conclusion intermédiaire**

Nous disposons à présent d'un formalisme multi-domaines à plusieurs échelles de temps couplé à une méthode de réduction modale sur les sous-domaines sur lesquels le problème est totalement linéaire (petites perturbations et comportement local linéaire). Contrairement aux approches de sous-structuration primale classiques, le choix des associations de modes est complètement libre. Les maillages incompatibles sont autorisés et intégrés avec l'approche réduite de manière transparente.

Les spécificités du problème d'interface en présence de réduction a fait l'objet d'une étude approfondie, aussi bien pour les risques de singularité que pour les questions de performances pour sa résolution. Des solutions aux problèmes éventuels sont proposées et testées.

Plusieurs exemples viennent valider notre méthode, aussi bien sur ces cas académiques que sur des calculs de taille industrielle. Ces derniers mettent en évidence la qualité globale de la solution obtenue avec projection modale locale et les gains considérables en temps de calcul autorisés par notre approche.

Remarquons enfin à nouveau qu'il est laissé à la discrétion de l'analyste de déterminer la combinaison de modes qui produira les meilleurs résultats dans son cas d'étude particulier. Ce travail doctoral ne traite pas de cette étape de modélisation. Les modes étendus sont une modification d'un jeu de modes déjà choisi et ne se substituent pas à la réflexion préalable sur le problème vibratoire local. La littérature propose de nombreuses procédures de choix, dont peut d'ailleurs se rapprocher la décomposition en valeurs singulières présentée au paragraphe 2.1.2.



## **Chapitre 3**

### *Réduction modale en présence de rotations rigides non-linéaires*

---

Notre motivation initiale pour l'utilisation d'une projection modale sur les sous-domaines en petits déplacements au comportement linéaire était la surabondance d'inconnues de nature *géométrique* pour décrire un comportement vibratoire en basse fréquence. Cette surabondance reste pénalisante pour un sous-domaine subissant de grandes rotations d'ensemble, mais dont le comportement local reste linéaire. Cependant, on ne peut pas appliquer directement les méthodes de réduction classiques devant l'impossibilité d'assembler un opérateur linéaire constant donnant les forces internes sur le sous-domaine. Il apparaît alors nécessaire de recourir à une partition du déplacement, pour isoler le comportement local traité sur base modale et calculer par ailleurs le mouvement rigide global en prenant en compte les couplages entre les deux échelles.

Après une brève présentation des spécificités de l'algèbre des rotations, nous proposons dans ce chapitre une vue d'ensemble des approches de la littérature dédiées aux rotations finies. Nous nous attachons en particulier aux méthodes de réduction existantes, en mettant en évidence leurs limites ou leur inadéquation avec notre approche explicite dans la résolution de l'équilibre dynamique.

Par la suite, nous présentons une partition particulière du champ de déplacement qui permet un traitement efficace et explicite de notre système couplé entre vibration locale et rotation d'ensemble de grande amplitude. La nouvelle complexité du problème aux interfaces fait finalement l'objet de l'introduction d'une nouvelle méthode spécifique d'inversion de l'opérateur de condensation.

---

### 3.1. Rotations finies en mécanique

Un impact localisé est à l'origine de la propagation de nombreuses ondes élastiques dans une structure. En fonction des conditions aux limites appliquées sur les différentes parties de la structure, ces ondes peuvent provoquer la mise en rotation de certaines pièces. Cette rotation ne s'accompagne fréquemment d'aucune grande déformation ou d'aucun phénomène non-linéaire au niveau du matériau, du moins tant que la pièce ne rencontre pas un obstacle. On peut illustrer très simplement cet effet de la propagation des ondes en considérant l'exemple introductif suivant :

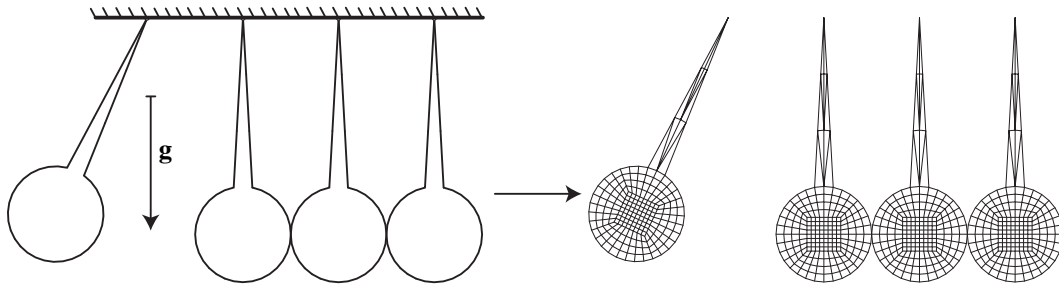


FIGURE [3.1.1] : *Balancier - Géométrie et maillage*

La première bille de gauche est mise en mouvement par son poids propre. L'onde de compression issue de son impact sur la seconde se propage de gauche à droite, se réfléchit sur le bord droit de la dernière bille, devient une onde de traction, puis revient de la droite vers la gauche. Lorsqu'elle rencontre la première interface de contact, elle provoque le décollement de la dernière bille.

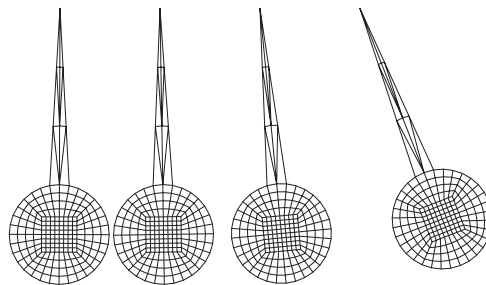


FIGURE [3.1.2] : *Déformée à l'instant 0,58 s*

La bille de droite, initialement en équilibre avec son seul poids propre et éloignée du point d'impact, se voit finalement animée d'un mouvement de rotation de grande amplitude, tout en restant localement en vibration.

#### 3.1.1. Algèbre des rotations

La rotation finie d'un vecteur dans l'espace à trois dimensions peut être décrite à l'aide d'un tenseur orthogonal, noté provisoirement  $\mathbf{R}$ , tel que :

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3 \quad [3.1.1.1]$$

La propriété d'orthogonalité réduit à 3 le nombre de paramètres nécessaires à l'identification des 9 composantes du tenseur  $\mathbf{R}$  en projection dans une base donnée de l'espace.



La difficulté majeure introduite par les rotations finies est que l'ensemble des tenseurs de rotation n'est pas un espace vectoriel, mais un groupe, couramment noté  $\mathbf{SO}(3)$  (*groupe spécial orthogonal*) [Argyris 1982][Ibrahimbegovic 1997]. La loi associée au groupe  $\mathbf{SO}(3)$  est la composition des rotations, telle que la rotation totale issue de deux rotations successives de tenseur respectif  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$ , est donnée par le tenseur :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \quad [3.1.1.2]$$

La rotation infinitésimale autour d'un vecteur  $\mathbf{w}$  est donnée par un tenseur antisymétrique  $\tilde{\mathbf{w}}$ , tel que :

$$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{b} \quad [3.1.1.3]$$

Le vecteur résultat de la rotation infinitésimale appliquée à un vecteur  $\mathbf{b}$  est alors obtenu par :

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \quad [3.1.1.4]$$

---

**Remarque 1 :**  $\|\mathbf{b}'\| \neq \|\mathbf{b}\|$

---

L'angle de la rotation linéarisée autour du vecteur  $\mathbf{w}$  est donné par :

$$\theta = \|\mathbf{w}\| \quad [3.1.1.5]$$

L'ensemble des tenseur anti-symétriques formé à partir de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  grâce à la formule [3.1.1.3] forme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , noté  $\mathfrak{so}(3)$ .

On peut également exprimer le représentant  $\mathbf{R}_w$  de  $\mathbf{SO}(3)$  correspondant à une rotation autour de l'axe  $\mathbf{w}$  (voir FIGURE [3.1.1.1]) par la formule de Rodrigues [Cheng et Gupta 1989] :

$$\mathbf{R}_w = \exp(\tilde{\mathbf{w}}) = \cos(\theta)\mathbf{I}_3 + \frac{\sin(\theta)}{\theta}\tilde{\mathbf{w}} + \frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2}\tilde{\mathbf{w}}^2 \quad [3.1.1.6]$$

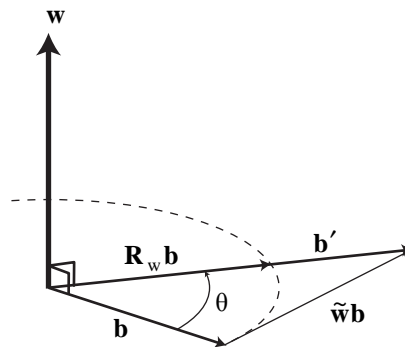


FIGURE [3.1.1.1] : *Elément de  $\mathfrak{so}(3)$  et élément de  $\mathbf{SO}(3)$  pour une même rotation de vecteur  $\mathbf{w}$*

On cherche à présent à déterminer la dérivée temporelle d'une matrice de rotation. Considérons le tenseur  $\mathbf{R}_t$  à l'instant  $t$ . La rotation à l'instant  $t+dt$  est donnée par la composition de  $\mathbf{R}_t$  et d'une rotation infinitésimale d'amplitude proportionnelle à  $dt$ , c'est-à-dire autour d'un vecteur de la forme  $\mathbf{S}dt$ . On peut ainsi écrire, pour tout vecteur  $\mathbf{b}$  de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathbf{R}_{t+dt}\mathbf{b} = \mathbf{R}_t(\mathbf{b} + dt\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{b}) \quad [3.1.1.8]$$

On obtient ainsi :

$$\left( \frac{\mathbf{R}_{t+dt} - \mathbf{R}_t}{dt} \right) \mathbf{b} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{b} \quad [3.1.1.9]$$

Le vecteur  $\mathbf{S}$  est appelé *vecteur vitesse instantanée de rotation*, ou *spin*, et la dérivée d'un tenseur  $\mathbf{R}$  de  $\mathbf{SO}(3)$  est finalement donnée par :

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{S}} \quad [3.1.1.10]$$

On fait une distinction entre les vecteurs vitesse instantanée de rotation *spatial* ou *matériel* suivant que l'on compose la rotation infinitésimale à gauche (*spatial*) ou à droite (*matériel*) de la rotation courante  $\mathbf{R}_t$  [Ibrahimbegovic 1997]. Dans notre cas, et pour la suite du document, on travaille avec le vecteur matériel.

Pour tout élément  $\mathbf{R}$  de  $\mathbf{SO}_3$  et tout élément  $\tilde{\mathbf{w}}$  de  $\mathfrak{so}(3)$ , l'ensemble des rotations incrémentales linéarisées de la forme  $\mathbf{R} \tilde{\mathbf{w}}$  constitue l'espace tangent à  $\mathbf{SO}(3)$  au point  $\mathbf{R}$ , noté  $\mathbf{T}_R \mathbf{SO}(3)$ .

---

**Remarque 2 :** Avec l'hypothèse des petites perturbations, les rotations de corps rigide d'une structure sont uniquement représentées à l'aide d'éléments de  $\mathbf{T}_I \mathbf{SO}(3)$ , avec  $\mathbf{I}$  l'élément neutre de  $\mathbf{SO}(3)$ . Les champs de déplacement correspondant sont de la forme :

$$\mathbf{u}_{\text{rot}} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \tilde{\mathbf{e}}_i \mathbf{X} \quad [3.1.1.11]$$

où  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est une base de l'espace,  
 $\mathbf{X}$  est le champ des coordonnées sur la structure.

L'écriture linéaire [3.1.1.11] permet de ranger ces modes dans une base de réduction en tant que modes à fréquence nulle. Ce sont les éléments du noyau de la matrice de raideur, au même titre que les modes de translation rigide.

---

### 3.1.2. Paramétrages classiques des rotations

On trouve dans la littérature de nombreuses approches pour paramétrer les rotations. Une description unifiée des méthodes existantes est proposée dans [Géradin et al. 1988] et [Betsch et al. 1998]. Parmi elles, citons la représentation des rotations à l'aide de *quaternions* [Maillot 1990]. Elle simplifie la composition des rotations en remplaçant les multiplications matricielles par des opérations algébriques sur des éléments de  $\mathbb{R}^4$  (ou plus précisément sur des éléments de la sphère unité  $S^3$  de  $\mathbb{R}^4$ ).

#### *Vecteur rotation*

De nombreux auteurs convergent vers ce paramétrage pour le traitement des grandes rotations en mécanique [Cardona et Géradin 1992][Ibrahimbegovic 1997], ce qui justifie sa présentation dans ce paragraphe.

Ce paramétrage repose sur l'existence pour chaque d'un vecteur invariant pour chaque rotation finie  $\mathbf{R}$  de  $\mathbf{SO}(3)$  :

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{R} \boldsymbol{\psi} \quad [3.1.2.1]$$

On confond dans l'équation [3.1.2.1] les expressions matérielle et spatiale du vecteur invariant [Ibrahimbegovic 1997] par souci de simplicité et en l'absence de risque de confusion. On peut obtenir une représentation du tenseur de rotation à partir de  $\boldsymbol{\psi}$ , conformément à la FIGURE [3.1.2.1] :

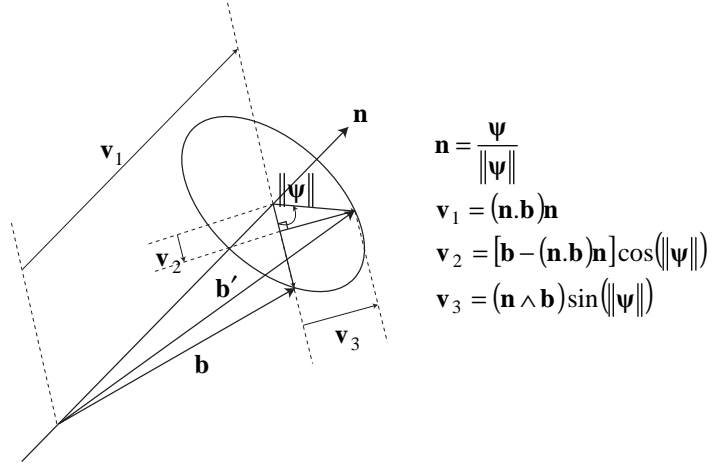


FIGURE [3.1.2.1] : Vecteur rotation

Pour tout vecteur  $\mathbf{b}$  de  $\mathbb{R}^3$ , on écrit :

$$\mathbf{R}\mathbf{b} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = [\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \cos(\|\boldsymbol{\psi}\|)(\mathbf{I}_3 - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \sin(\|\boldsymbol{\psi}\|)\tilde{\mathbf{n}}]\mathbf{b} \quad [3.1.2.2]$$

On retrouve ainsi la formule de Rodrigues :

$$\mathbf{R} = \cos(\|\boldsymbol{\psi}\|)\mathbf{I}_3 + \frac{\sin(\|\boldsymbol{\psi}\|)}{\|\boldsymbol{\psi}\|}\tilde{\boldsymbol{\psi}} + \frac{1 - \cos(\|\boldsymbol{\psi}\|)}{\|\boldsymbol{\psi}\|^2}\boldsymbol{\psi} \otimes \boldsymbol{\psi} \quad [3.1.2.3]$$

On exprime également le vecteur vitesse instantanée de rotation en fonction du vecteur rotation et de ses dérivées temporelles [Cardona et G eradin 1992] :

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\psi})\dot{\boldsymbol{\psi}} \quad [3.1.2.4]$$

où  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\psi}) = \frac{\sin(\|\boldsymbol{\psi}\|)}{\|\boldsymbol{\psi}\|}\mathbf{I}_3 + \frac{1 - \cos(\|\boldsymbol{\psi}\|)}{\|\boldsymbol{\psi}\|^2}\tilde{\boldsymbol{\psi}} + \frac{\|\boldsymbol{\psi}\| - \sin(\|\boldsymbol{\psi}\|)}{\|\boldsymbol{\psi}\|^3}\boldsymbol{\psi} \otimes \boldsymbol{\psi}$

On en déduit par dérivation le vecteur des accélérations angulaires :

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\psi})\ddot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\psi})\dot{\boldsymbol{\psi}} \quad [3.1.2.5]$$

On trouve une expression de  $\dot{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\psi})$  dans [G eradin et al. 1988].

Ce paramétrage des rotations n'est pas exempt de singularités, survenant pour les angles de rotation multiples de  $2\pi$ . Il est remplacé par un vecteur rotation incrémental dans [Ibrahimbegovic 1997] pour lever cet inconvénient.

#### Angles d'Euler

Les angles d'Euler représentent une approche intuitive et très explicite pour le paramétrage des rotations. On obtient la rotation finale par trois rotations élémentaires successives. On obtient différentes formulations en fonction de l'axe et de l'ordre des rotations. On donne ici la formulation RTL (*roulis-tang ge-lacet*), correspondant à :

1. Une rotation  $\mathbf{R}_1$  d'angle  $\varphi$ , ou angle de *roulis*, autour de l'axe  $\mathbf{e}_1$  de la base fixe de l'espace  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ,
2. Une rotation  $\mathbf{R}_2$  d'angle  $\theta$ , ou angle de *tangage*, autour de l'axe  $\mathbf{e}'_2$  de la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ , obtenue par la rotation de  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  par  $\mathbf{R}_1$ .
3. Une rotation  $\mathbf{R}_3$  d'angle  $\psi$ , ou angle de *lacet* ou encore angle de *rotation propre*, autour de l'axe  $\mathbf{e}''_3$  de la base  $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$ , obtenue par la rotation de  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  par  $\mathbf{R}_2$ .

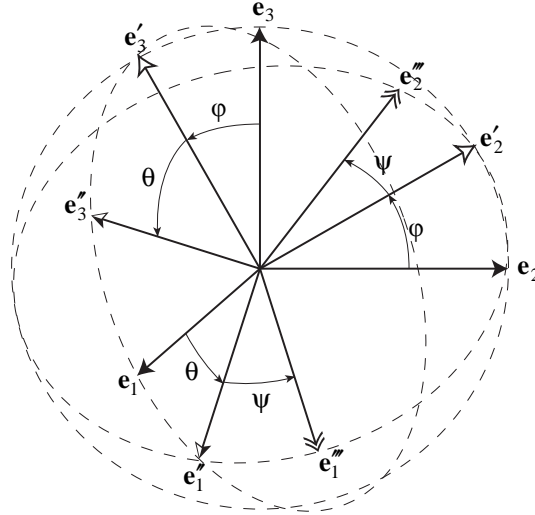


FIGURE [3.1.2.2] : Angles d'Euler RTL

On obtient explicitement le tenseur de rotation  $\mathbf{R}$  permettant le passage de la base initiale  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  à la base finale  $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$  grâce aux matrices de rotations élémentaires autour des axes  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$ . En effet :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 = \exp(\psi \mathbf{e}''_3) \exp(\theta \mathbf{e}'_2) \exp(\varphi \mathbf{e}_1) \quad [3.1.2.6]$$

L'expression des matrices de rotation élémentaires est connue (on conserve l'expression tensorielle pour nommer ces matrices, par abus de notation) :

$$\begin{aligned} \exp(\varphi \mathbf{e}_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \text{ dans la base } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ \exp(\theta \mathbf{e}'_2) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ dans la base } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \\ \exp(\psi \mathbf{e}''_3) &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dans la base } (\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3) \end{aligned} \quad [3.1.2.7]$$

On en déduit l'expression de la projection du tenseur  $\mathbf{R}$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \\ \sin \psi \cos \theta & -\sin \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi & -\sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \\ \sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad [3.1.2.8]$$

Par dérivations successives de la matrice  $\mathbf{R}$ , on peut exprimer les vitesses et les accélérations angulaires  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{A}$ .

Ce formalisme présente des singularités gênantes. Si  $\cos(\varphi)$  est nul, alors  $\theta$  et  $\psi$  sont indéterminés, seule leur somme étant significative. Il nous est toutefois utile par la suite pour sa simplicité de représentation de la rotation propre d'une structure.

### 3.1.3. Systèmes flexibles en rotation finie

Pour prendre en compte spécifiquement les rotations d'ensemble d'amplitude finie dans les simulations dynamiques, on peut distinguer trois directions de recherche :

1. Les méthodes issues de la robotique,
2. L'enrichissement des méthodes d'analyse des mécanismes entre systèmes rigides, connues sous le nom courant de *multibody analysis*,
3. L'introduction de modélisations spécifiques au sein de méthode d'analyses par éléments finis.

#### *Modèles de robots souples*

Les applications spécifiquement dédiées à la robotique se rapprochent des problèmes de contrôle. On fait alors l'hypothèse d'un mouvement rigide nominal connu [Singh et Schy 1986][Gebler 1987][Lee et Wang 1988a&b]. On parle ainsi de modèle *kinéstatique*. Les équations à résoudre décrivent l'équilibre de la structure sous l'action des forces internes dues aux déformations d'une part, et les forces externes auxquelles s'ajoutent les forces d'inertie dues au mouvement nominal d'autre part. Lorsqu'il devient nécessaire, par exemple pour les arbres tournants avec balourd, de tenir compte des effets inertiels associés aux déformations élastiques, on a recours au modèle dynamique découplé. Connaissant toujours le mouvement nominal, on ajoute alors l'inertie de déformation dans les équations. On prend également en compte dans les modèles si nécessaire la variation de raideur induite par les accélérations en rotation du solide, et l'amortissement dû aux effets gyroscopiques.

Ces dernières approches sont déficientes si le comportement rigide du robot n'a pas une influence prédominante, comparée à celle de sa réponse flexible. On recense alors de nombreux modèles dynamiques couplés. La majorité de ces modèles s'appuient sur une méthode de sous-structuration. Une présentation des procédures classiques de sous-structuration est donnée au paragraphe 1.2.1. Le traitement des structures robotiques arborescentes fait cependant l'objet de techniques d'assemblage originales, dites récursives. Ces techniques sont dédiées au calcul de structures dont l'assemblage est susceptible de se modifier au cours du temps. L'ajout de corps en bout de chaîne ne modifie en effet pas les équations écrites pour les corps qui précèdent. Citons ainsi [Book 1984][Nicosia et al. 1986].

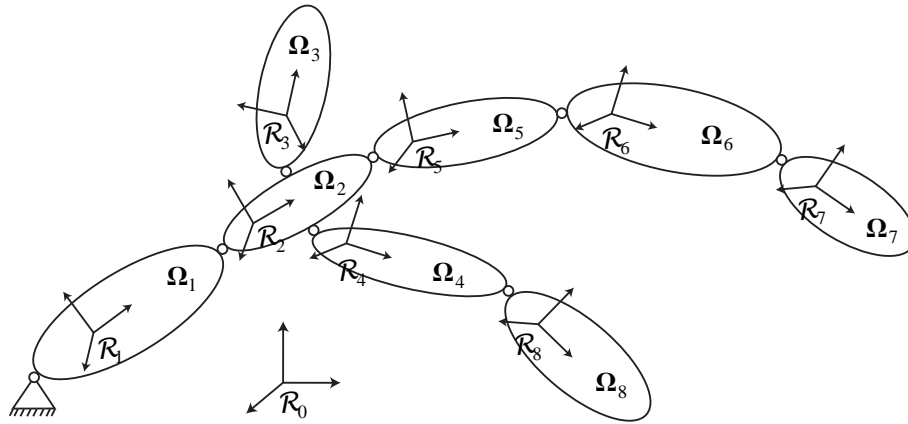


FIGURE [3.1.3.1] : Structure arborescente

*Flexible multibody analysis*

La problématique des systèmes multi-corps est avant tout la connexion de systèmes rigides par l'intermédiaire de joints ou d'éléments particuliers, tels que des ressorts, des amortisseurs ou des activateurs. Néanmoins, est apparu avec l'émergence des structures spatiales élancées le besoin de prendre en compte les déformations pour une analyse dynamique satisfaisante. Il en résulte de nombreux concepts ayant servi à enrichir les codes de simulation de mécanismes, tels que DADS (*LMS International*) ou ADAMS (*MSC Software*). Une étude bibliographique de ces développements est donnée dans [Shabana 1997] et il est conseillé de s'y référer pour une liste exhaustive de références. Parmi ces notions, une est particulièrement à la base des développements récents les plus pertinents, à savoir la notion de *floating frame of reference* [Likins 1967][Shabana et Wehage 1983][Shabana 1989]. Elle repose sur une écriture particulière du champ de déplacement, avec l'introduction de degrés de liberté dédiés à la représentation du mouvement rigide :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + (\mathbf{R} - \mathbf{R}^i)\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{w}_L \tag{3.1.3.1}$$

Les notations correspondant à la formule [3.1.3.1] sont données par la FIGURE [3.1.3.2].

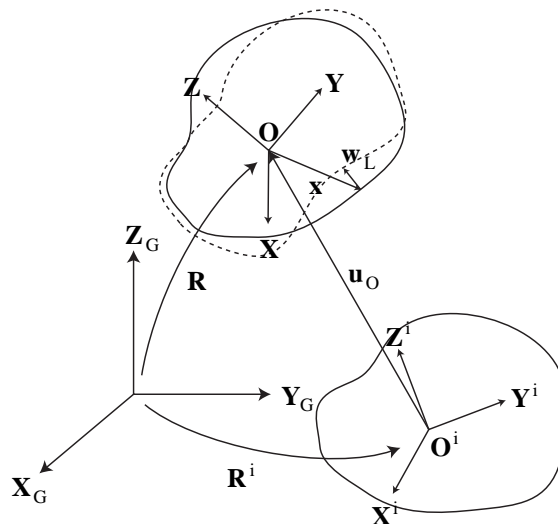


FIGURE [3.1.3.2] : Floating frame of reference

$\mathbf{w}_L$  est un champ de déplacement local, exprimé dans les axes locaux  $(\mathbf{O}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ . Le champ correspondant exprimé dans les axes globaux  $(\mathbf{O}, \mathbf{X}_G, \mathbf{Y}_G, \mathbf{Z}_G)$  est  $\mathbf{R}\mathbf{w}_L$ , utilisé dans la formule [3.1.3.1] pour écrire le déplacement total dans les axes globaux.

Le paramétrage de la rotation  $\mathbf{R}$  est naturellement un point clé de la méthode, pour lequel on dispose des approches présentées au paragraphe précédent.

La notion de *floating frame of reference* permet de représenter exactement les mouvements de rotations rigides, même avec des éléments non-isoparamétriques, comme les poutres ou les coques classiques formulées en petits déplacements. Dans notre logique de réduction de modèle, elle lève également le problème de la non-linéarité géométrique due à la rotation. En effet, on peut désormais, pour de petites déformations, effectuer une projection modale sur le champ de déplacement local  $\mathbf{w}_L$  [Likins 1973][Friberg 1991]. Les forces internes sont alors calculées linéairement dans le repère local avec la matrice de raideur classique obtenue sous l'hypothèse des petites perturbations. Les difficultés se trouvent finalement transportées sur l'opérateur d'inertie de la structure.

Pour illustrer cela, calculons les dérivées temporelles du déplacement et sa variation à partir de l'expression [3.1.3.1][Cardona et Géradin 1991] :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{u}}_O + \mathbf{R}\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x} + \mathbf{w}_L) + \mathbf{R}\dot{\mathbf{w}}_L \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \ddot{\mathbf{u}}_O + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{S}}^2 + \tilde{\mathbf{A}})(\mathbf{x} + \mathbf{w}_L) + 2\mathbf{R}\tilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{w}}_L + \mathbf{R}\ddot{\mathbf{w}}_L \\ \delta\mathbf{u} &= \delta\mathbf{u}_O + \mathbf{R}\delta\tilde{\Theta}(\mathbf{x} + \mathbf{w}_L) + \mathbf{R}\delta\mathbf{w}_L \\ \text{où } \delta\tilde{\Theta} &\text{ est un élément de } \mathbf{T}_R\mathbf{SO}(3).\end{aligned}\quad [3.1.3.2]$$

Le travail virtuel des forces d'inertie est alors donné par :

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{W}_{\text{iner}} &= \delta\mathbf{u}_O^T \int_{\Omega} \rho \left[ \ddot{\mathbf{u}}_O + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{S}}^2 + \tilde{\mathbf{A}})(\mathbf{x} + \mathbf{w}_L) + 2\mathbf{R}\tilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{w}}_L + \mathbf{R}\ddot{\mathbf{w}}_L \right] d\Omega \\ &\quad + \delta\tilde{\Theta}^T \int_{\Omega} \rho (\mathbf{x} + \mathbf{w}_L) \wedge \left[ \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{u}}_O + (\tilde{\mathbf{S}}^2 + \tilde{\mathbf{A}})(\mathbf{x} + \mathbf{w}_L) + 2\tilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{w}}_L + \ddot{\mathbf{w}}_L \right] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho (\delta\mathbf{u}_O^T \left[ \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{u}}_O + (\tilde{\mathbf{S}}^2 + \tilde{\mathbf{A}})(\mathbf{x} + \mathbf{w}_L) + 2\tilde{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{w}}_L + \ddot{\mathbf{w}}_L \right]) d\Omega\end{aligned}\quad [3.1.3.3]$$

Apparaissent ainsi dans l'opérateur d'inertie des termes non-linéaires dus aux deux dérivées temporelles successives de la matrice de rotation (termes *d'entraînement*) et au couplage entre les vitesses locales et les vitesses de rotation (termes de *Coriolis*). Ces termes non-linéaires impliquent des vitesses, donc l'introduction dans l'écriture [3.1.3.3] du schéma d'intégration en temps des différences centrées, explicite uniquement pour les déplacements, ne suffit pas à rendre l'opérateur linéaire pour la résolution incrémentale de l'équilibre sur un pas de temps.

Les outils directement dédiés à la dynamique des systèmes articulés rigides ne peuvent généralement pas accueillir un solveur permettant de résoudre l'équation [3.1.3.3]. On a alors majoritairement recours à une hypothèse simplificatrice, connue sous le nom de *linear theory of elastodynamics* [Erdman et Sandor 1972][Turcic et Midha 1984]. Le problème purement rigide est alors résolu avec les méthodes classiques. On en déduit les effets d'inertie à appliquer au niveau du repère local pour le problème de vibration élastique linéaire. Ceci n'est valable que si les déformations élastiques sont sans effet significatif sur le mouvement de corps rigide. Cette supposition est délicate à vérifier, en particulier pour les structures légères ou les vitesses de rotation importante. De nombreuses études portent également sur les moyens de choisir le système de coordonnées local, pour simplifier le système d'équations à résoudre. On parvient dans certain cas à réduire les couplages entre le mouvement d'ensemble et les déformations, au détriment de la simplicité de mise en œuvre de la méthode.

Le code SAMCEF-MECANO (*Samtech*) propose une résolution complète de l'équilibre issue des éléments finis, avec les termes d'inertie complets [Cardona et Géradin 1991][Cardona et Géradin 1992]. Un couplage primal est utilisé entre les sous-structures, modélisées par des superéléments de

Craig & Bampton étendus. La résolution en temps est implicite. La définition du repère local a fait l'objet de développements récents [Jetteur 2000], pour la rendre plus simple.

On trouve dans [Ambrosio 1996] un formalisme entièrement couplé associé à un algorithme d'intégration en temps explicite et destiné à l'analyse de structures complexes sous impact. La position et l'orientation du repère local sont toutefois contraignantes pour permettre une simplification des équations du mouvement (l'origine du repère doit coïncider avec le centre de masse et les directions locales doivent être alignées avec les axes principaux d'inertie). Ceci demande le développement d'un préprocesseur spécifique. De plus, la résolution explicite est rendue possible par un traitement explicite pur des vitesses de rotations rigides. Plus précisément, le vecteur vitesse instantanée de rotation est pris comme paramètre du mouvement rigide. Son actualisation est explicite, alors que le schéma des différences centrées propose naturellement une mise à jour implicite pour les quantités de cette nature. Dès lors, la stabilité de l'intégration temporelle est difficile à assurer [Simo et al. 1992][Hughes 1983].

Citons pour terminer une approche existante dans EUROPLEXUS destinée à la synthèse modale des robots souples [Charvet Quemain 1990]. La résolution explicite du problème non-linéaire est permise par une linéarisation des incréments de rotation sur chaque pas de calcul. Les conditions à respecter sur la taille du pas de temps pour vérifier cette dernière hypothèse sont néanmoins délicates à formuler. Nous ne souhaitons pas par ailleurs pénaliser l'efficacité de la résolution à cause d'un pas maintenu petit par de grandes vitesses de rotations.

#### *Formulations corotationnelles*

Les approches corotationnelles sont une évolution des approches incrémentales par éléments finis classiques dans le cas des rotations finies accompagnées de déformations de petite amplitude. Elles répondent à deux besoins :

1. Le calcul des forces internes en présence de grandes rotations de la structure requiert *a priori* un formalisme complexe en grandes transformations alors que la déformation peut toujours être localement modélisée à l'aide des outils simples issus des petites perturbations.
2. Les éléments de poutre, de plaques et de coques (éléments *non-isoparamétriques*), possèdent classiquement des rotations infinitésimales parmi leurs degrés de liberté dans une formulation en petites perturbations. Ils ne peuvent reproduire exactement un mouvement de corps rigide, dans la mesure où ils ne conduisent pas alors à des déformations nulles. Il faut alors recourir à des formulations spécifiques pour prendre en compte les rotations finies.

On cherche donc à doter les éléments finis classiques d'un système de coordonnées entraîné avec l'élément dans les rotations finies de la structure [Belytschko et Hsieh 1973]. On procède ainsi au calcul des forces internes dans le repère local, à partir d'un déplacement dont la composante de rotation rigide a été supprimée [Rankin et Brogan 1986]. L'hypothèse des petites déformations locales peut alors être mise à profit pour utiliser les opérateurs classiques, ainsi que les éléments non-isoparamétriques formulés en petites perturbations. Les méthodes de la littérature diffèrent par la manière d'extraire les composantes rigides du champ de déplacement global de la structure (gradient du déplacement [Hughes et Winget 1980], décomposition polaire [Flanagan et Taylor 1987]).

#### **3.1.4. Orientation des développements**

Notre objectif est de disposer d'un formalisme autorisant la réduction du nombre des inconnues par projection modale, tout en conservant une résolution explicite pour un traitement rapide des problèmes de structures sous impact, dans le cadre de la méthode multi-domaines à plusieurs échelles de temps proposée en partie 1. Nous souhaitons également conserver la flexibilité dans le choix des modes de réduction présentée dans la partie 2. Enfin, il nous semble primordial de conserver un contrôle le plus précis possible sur la stabilité de l'intégration temporelle explicite.



Tout ceci nous interdit de reprendre directement les formulations de SAMCEF-MECANO (implicite et fondée sur des superéléments de Craig & Bampton) ou de J. Ambrosio (à cause des spécificités du calcul des grandeurs locales et du traitement explicite des vitesses de rotation rigide), pourtant les plus avancées dans le domaine du traitement industriel de structures flexibles en grandes rotations avec un couplage complet. Les paramétrages classiques des rotations conduisant inévitablement à des termes quadratiques sur les vitesses, et donc à des termes implicites qu'il semble hasardeux d'explicitier pour des raisons de stabilité, nous sommes donc amenés à rechercher un nouveau formalisme, fondé sur modélisation différente des rotations finies.

## 3.2. Méthode modale multi-échelles explicite

La décomposition du champ de déplacement pour définir un système vibratoire local qui fera l'objet d'une projection modale est le point majeur de toute approche réduite en présence de rotations de grande amplitude. Ces méthodes sont donc par essence multi-échelles, puisqu'elles doivent faire intervenir deux jeux de paramètres, le premier pour décrire le mouvement rigide global de grande amplitude et le second pour définir la déformation à une échelle locale.

Un paramétrage classique des rotations et une discrétisation en temps par le schéma des différences centrées conduisent inévitablement à des quantités implicites dans l'équilibre dynamique à résoudre à chaque pas. Modifier l'actualisation des vitesses de rotations d'ensemble dans le schéma d'intégration, en les rendant purement explicites, permet de lever la difficulté, au prix d'une étude de la stabilité de l'intégration très délicate. Nous avons donc souhaité limiter le recours à des hypothèses de cette nature (voir paragraphe 3.2.5). Comme nous l'avons présenté précédemment, les termes implicites dans l'équilibre proviennent des termes d'inertie supplémentaires dans l'expression de l'accélération, dus à l'étude de la vibration dans un repère local. Nous choisissons de privilégier les termes d'inertie d'entraînement dans notre recherche d'une résolution explicite stable et performante. Les termes de Coriolis conduisent toujours à des quantités implicites et des hypothèses de traitement sont proposées par la suite. Ce choix est fondé sur la prépondérance des forces d'entraînement sur les forces gyroscopiques dans de très nombreuses situations industrielles. Il est également discuté plus loin dans ce document.

---

**Remarque :** Nous présentons dans les paragraphes une formulation modale en présence de grandes rotations en 3D. Une formulation en 2D est disponible et un exemple de validation est proposé.

---

### 3.2.1. Paramétrage des mouvements d'ensemble

Une méthode de traitement explicite des systèmes rigides en grandes rotations est déjà disponible dans EUROPLEXUS [Barraco et al. 1989]. Elle est fondée sur la méthode dite des "4 masses" [Lim et Taylor 2001]. Nous choisissons naturellement de nous en inspirer pour paramétrer le mouvement de corps rigide des sous-domaines réduits en grande rotation.

4 points (O, A, B, C) sont choisis arbitrairement dans l'espace pour décrire la position d'un repère local attaché au sous-domaine réduit. On impose qu'ils forment un repère orthonormé, pour simplifier l'écriture du problème de vibration locale.

---

**Remarque :** Les 4 points définissant le repère local ne coïncident pas généralement avec des nœuds du maillage.

---

Le déplacement de chacun de ces points dans le repère global donne les inconnues décrivant le mouvement d'ensemble du sous-domaine. Ce sont des paramètres classiques de type déplacement et non des grandeurs spécifiques propres aux rotations. Les distances respectives entre les points (O, A, B, C) sont maintenues constantes au cours de la simulation dynamique à l'aide de liaisons additionnelles.

La matrice de passage du repère local orthonormé (O, A, B, C) au repère global, notée **P**, a pour expression :

$$\mathbf{P} = [\mathbf{OA}; \mathbf{OB}; \mathbf{OC}] \quad [3.2.1.1]$$

Compte tenu de la nature orthonormée du repère local, on a une équivalence directe entre cette matrice  $\mathbf{P}$  et la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  utilisée dans la formule [3.1.3.1].

On peut alors écrire l'expression du champ de déplacement total avec notre nouveau paramétrage de la rotation d'ensemble :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + (\mathbf{P} - \mathbf{P}^i) \mathbf{x} + \mathbf{P} \mathbf{w}_L \quad [3.2.1.2]$$

où  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$  sont les coordonnées dans le repère  $[O, A, B, C]$ .

Il vient de l'expression de la matrice de passage  $\mathbf{P}$  :

$$(\mathbf{P} - \mathbf{P}^i) \mathbf{x} = X(\mathbf{O}\mathbf{A} - \mathbf{O}^i \mathbf{A}^i) + Y(\mathbf{O}\mathbf{B} - \mathbf{O}^i \mathbf{B}^i) + Z(\mathbf{O}\mathbf{C} - \mathbf{O}^i \mathbf{C}^i) \quad [3.2.1.3]$$

où  $(\mathbf{O}^i, \mathbf{A}^i, \mathbf{B}^i, \mathbf{C}^i)$  désignent les positions initiales des points  $(O, A, B, C)$ .

On en déduit :

$$(\mathbf{P} - \mathbf{P}^i) \mathbf{x} = X(\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_O) + Y(\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_O) + Z(\mathbf{u}_C - \mathbf{u}_O) \quad [3.2.1.4]$$

où  $(\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B, \mathbf{u}_C)$  sont les déplacements des points A, B et C respectivement.

On obtient l'expression finale du déplacement total avec notre paramétrage :

$$\mathbf{u} = X\mathbf{u}_A + Y\mathbf{u}_B + Z\mathbf{u}_C + (1 - X - Y - Z)\mathbf{u}_O + \mathbf{P}\mathbf{w}_L = \mathbf{u}_E + \mathbf{P}\mathbf{w}_L \quad [3.2.1.5]$$

Pour écrire l'équilibre dynamique, l'équation [3.2.1.5] doit être dérivée par rapport au temps pour obtenir les champs de vitesse et d'accélération.

$$\dot{\mathbf{u}} = X\dot{\mathbf{u}}_A + Y\dot{\mathbf{u}}_B + Z\dot{\mathbf{u}}_C + (1 - X - Y - Z)\dot{\mathbf{u}}_O + \dot{\mathbf{P}}\mathbf{w}_L + \mathbf{P}\dot{\mathbf{w}}_L \quad [3.2.1.6]$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = X\ddot{\mathbf{u}}_A + Y\ddot{\mathbf{u}}_B + Z\ddot{\mathbf{u}}_C + (1 - X - Y - Z)\ddot{\mathbf{u}}_O + \ddot{\mathbf{P}}\mathbf{w}_L + \mathbf{P}\ddot{\mathbf{w}}_L + 2\dot{\mathbf{P}}\dot{\mathbf{w}}_L$$

Les dérivées temporelles de la matrice de rotation sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= [\dot{\mathbf{u}}_A - \dot{\mathbf{u}}_O; \dot{\mathbf{u}}_B - \dot{\mathbf{u}}_O; \dot{\mathbf{u}}_C - \dot{\mathbf{u}}_O] \\ \ddot{\mathbf{P}} &= [\ddot{\mathbf{u}}_A - \ddot{\mathbf{u}}_O; \ddot{\mathbf{u}}_B - \ddot{\mathbf{u}}_O; \ddot{\mathbf{u}}_C - \ddot{\mathbf{u}}_O] \end{aligned} \quad [3.2.1.7]$$

Les champs dans l'équation [3.2.1.2] ont ainsi l'expression suivante :

$$\dot{\mathbf{u}} = (X + \mathbf{w}_L^X) \dot{\mathbf{u}}_A + (Y + \mathbf{w}_L^Y) \dot{\mathbf{u}}_B + (Z + \mathbf{w}_L^Z) \dot{\mathbf{u}}_C + [1 - (X + \mathbf{w}_L^X) - (Y + \mathbf{w}_L^Y) - (Z + \mathbf{w}_L^Z)] \dot{\mathbf{u}}_O + \dot{\mathbf{P}}\mathbf{w}_L \quad [3.2.1.8]$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = (X + \mathbf{w}_L^X) \ddot{\mathbf{u}}_A + (Y + \mathbf{w}_L^Y) \ddot{\mathbf{u}}_B + (Z + \mathbf{w}_L^Z) \ddot{\mathbf{u}}_C + [1 - (X + \mathbf{w}_L^X) - (Y + \mathbf{w}_L^Y) - (Z + \mathbf{w}_L^Z)] \ddot{\mathbf{u}}_O + \ddot{\mathbf{P}}\mathbf{w}_L + 2\dot{\mathbf{P}}\dot{\mathbf{w}}_L$$

où  $\mathbf{w}_L^X, \mathbf{w}_L^Y, \mathbf{w}_L^Z$  sont les composantes du déplacement local dans le repère local.

L'hypothèse des petites perturbations dans la repère local permet de considérer que les configurations rigides et déformées sont confondues. Cela signifie qu'on peut négliger  $\mathbf{w}_L^X, \mathbf{w}_L^Y, \mathbf{w}_L^Z$  devant les coordonnées locales  $X, Y, Z$  et conduit à une expression simplifiée des champs de vitesse et d'accélération :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= X\dot{\mathbf{u}}_A + Y\dot{\mathbf{u}}_B + Z\dot{\mathbf{u}}_C + (1-X-Y-Z)\dot{\mathbf{u}}_O + \dot{\mathbf{P}}\mathbf{w}_L \\ \ddot{\mathbf{u}} &= X\ddot{\mathbf{u}}_A + Y\ddot{\mathbf{u}}_B + Z\ddot{\mathbf{u}}_C + (1-X-Y-Z)\ddot{\mathbf{u}}_O + \dot{\mathbf{P}}\dot{\mathbf{w}}_L + 2\ddot{\mathbf{P}}\mathbf{w}_L\end{aligned}\quad [3.2.1.9]$$

Pour écrire la forme faible de l'équilibre dynamique, il nous faut également exprimer la variation  $\delta\mathbf{u}$  du champ de déplacement :

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u} &= X\delta\mathbf{u}_A + Y\delta\mathbf{u}_B + Z\delta\mathbf{u}_C + (1-X-Y-Z)\delta\mathbf{u}_O + \delta\mathbf{P}\mathbf{w}_L + \mathbf{P}\delta\mathbf{w}_L \\ \text{où } \delta\mathbf{P} &= [\delta\mathbf{u}_A - \delta\mathbf{u}_O; \delta\mathbf{u}_B - \delta\mathbf{u}_O; \delta\mathbf{u}_C - \delta\mathbf{u}_O]\end{aligned}\quad [3.2.1.10]$$

Les mêmes hypothèses que précédemment nous permettent de simplifier cette dernière expression :

$$\delta\mathbf{u} = X\delta\mathbf{u}_A + Y\delta\mathbf{u}_B + Z\delta\mathbf{u}_C + (1-X-Y-Z)\delta\mathbf{u}_O + \mathbf{P}\delta\mathbf{w}_L \quad [3.2.1.11]$$

### 3.2.2. Système dynamique local réduit

L'équilibre dynamique local du sous-domaine est donné par :

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = 0 \quad [3.2.2.1]$$

Le principe des travaux virtuels conduit à une forme faible de cet équilibre, prenant en compte naturellement les conditions aux limites de Dirichlet :

$$\int_{\Omega} \rho \delta\mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \text{ cinématiquement admissible} \quad [3.2.2.2]$$

où  $\Omega$  est le volume du sous-domaine.

Pour introduire le paramétrage [3.2.1.1] dans cette forme faible de l'équilibre, nous devons exprimer à partir des nouvelles inconnues les travaux virtuels des forces internes et externes et le travail dû aux liaisons additionnelles assurant la rigidité du repère local.

#### Forces internes et externes

En utilisant la décomposition [3.2.1.1] et en prenant en compte les liaisons rigides, c'est-à-dire que le déplacement  $\mathbf{u}_E$  ne crée aucune contrainte, les forces internes peuvent être calculés à partir de la contribution locale du déplacement :

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{P}\mathbf{f}_{\text{int}_L}(\mathbf{w}_L) = \mathbf{P}\text{div}_L[\boldsymbol{\sigma}_L(\mathbf{w}_L)] \quad [3.2.2.3]$$

où l'indice L signifie que les coordonnées et les dérivées spatiales sont prises dans le repère local.

On obtient ainsi le travail virtuel des forces internes :

$$\delta\mathbf{W}_{\text{int}} = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{P}\text{div}_L[\boldsymbol{\sigma}_L(\mathbf{w}_L)] d\Omega \quad [3.2.2.4]$$

Une intégration par parties dans le repère local fait apparaître les forces externes surfaciques  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  :

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{W}_{\text{int}} &= - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_L(\mathbf{w}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}_L(\mathbf{P}^T \delta\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_L(\mathbf{w}_L) \cdot \mathbf{n}_L d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_L(\mathbf{w}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}_L(\mathbf{P}^T \delta\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} dS\end{aligned}\quad [3.2.2.5]$$

où  $\Gamma$  est la frontière de  $\Omega$ ,

$\mathbf{n}_L$  est la normal sur  $\Gamma$  projetée dans le repère local.

*Forces associées aux liaisons rigides*

On introduit tout d'abord de nouveaux multiplicateurs de Lagrange pour écrire l'énergie de liaison :

$$\mathbf{W}_{\text{links}} = \sum_{\substack{(I,J) \in (\text{O,A,B,C})^2 \\ J > I}} \Lambda_{IJ} \mathbf{D}_{IJ}(\mathbf{u}_I, \mathbf{u}_J) \quad [3.2.2.6]$$

$$\text{où } \mathbf{D}_{IJ} = \left\| \left( \mathbf{x}_I^0 + \mathbf{u}_I \right) - \left( \mathbf{x}_J^0 + \mathbf{u}_J \right) \right\| - \left\| \mathbf{x}_I^0 - \mathbf{x}_J^0 \right\|,$$

$\mathbf{x}_I^0$  sont les coordonnées initiales du point I,

la liaison rigide entre les points I et J est donnée par :  $\mathbf{D}_{IJ}(\mathbf{u}_I, \mathbf{u}_J) = 0$

On différencie ensuite cette énergie pour obtenir le travail virtuel à introduire dans la forme faible de l'équilibre :

$$\delta \mathbf{W}_{\text{links}} = - \sum_{\substack{(I,J) \in (\text{O,A,B,C})^2 \\ J > I}} \delta \Lambda_{IJ} \mathbf{D}_{IJ}(\mathbf{u}_I, \mathbf{u}_J) - \sum_{I \in (\text{O,A,B,C})} \delta \mathbf{u}_I \sum_{\substack{J \in (\text{O,A,B,C}) \\ J \neq I}} \Lambda_{IJ} \frac{\partial \mathbf{D}_{IJ}(\mathbf{u}_I, \mathbf{u}_J)}{\partial \mathbf{u}_I} \quad [3.2.2.7]$$

$$\forall \delta \mathbf{u}_I \quad I \in (\text{O, A, B, C}), \quad \forall \delta \Lambda_{IJ} \quad (I, J) \in (\text{O, A, B, C})^2, J > I$$

---

**Remarque 1 :** La quantité  $\sum_{\substack{J \in (\text{O,A,B,C}) \\ J \neq I}} \Lambda_{IJ} \frac{\partial \mathbf{D}_{IJ}(\mathbf{u}_I, \mathbf{u}_J)}{\partial \mathbf{u}_I} = \mathbf{F}_{\text{links } IJ}$  peut être considérée comme la force de

rappel agissant sur le point I pour maintenir constante les distances de ce point aux autres points du repère local.

---

*Forme faible de l'équilibre*

Exprimons à présent le champ de déplacement à l'aide de la décomposition [3.2.1.1] et en projetant le champ local sur une base de Ritz :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^3 u_A^i \boldsymbol{\varphi}_X^i + u_B^i \boldsymbol{\varphi}_Y^i + u_C^i \boldsymbol{\varphi}_Z^i + u_O^i \boldsymbol{\varphi}_{1-X-Y-Z}^i + y^i \mathbf{P} \boldsymbol{\varphi}_L^i \\ &= \boldsymbol{\Phi}_P \hat{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad [3.2.2.8]$$

où  $\boldsymbol{\varphi}_X^i = X \mathbf{e}_i$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_Y^i = Y \mathbf{e}_i$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_Z^i = Z \mathbf{e}_i$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_{1-X-Y-Z}^i = (1-X-Y-Z) \mathbf{e}_i$ ,  
 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est une base du repère global,

$\{\boldsymbol{\varphi}_L^i\}$  est une base locale de vecteurs de Ritz, issus par exemple d'une discrétisation éléments finis ou d'une analyse modale,

$\hat{\mathbf{U}}$  est le vecteur des inconnues discrètes :

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A^i \\ \mathbf{u}_B^i \\ \mathbf{u}_C^i \\ \mathbf{u}_O^i \\ \mathbf{y}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_E \\ \hat{\mathbf{U}}_L \end{bmatrix}, \text{ avec } \hat{\mathbf{U}}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A^i \\ \mathbf{u}_B^i \\ \mathbf{u}_C^i \\ \mathbf{u}_O^i \end{bmatrix} \text{ et } \hat{\mathbf{U}}_L = \mathbf{y}^i,$$

$\boldsymbol{\Phi}_P$  est la base de projection :  $\boldsymbol{\Phi}_P = \left[ \{\boldsymbol{\varphi}_X^i\}, \{\boldsymbol{\varphi}_Y^i\}, \{\boldsymbol{\varphi}_Z^i\}, \{\boldsymbol{\varphi}_{1-X-Y-Z}^i\}, \{\mathbf{P} \boldsymbol{\varphi}_L^i\} \right] = [\boldsymbol{\Phi}_E, \mathbf{P} \boldsymbol{\Phi}_L]$ .

Les équations [3.2.1.9] et [3.2.1.11] conduisent à :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{\Phi}_p \dot{\hat{\mathbf{U}}} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{\Phi}_p \ddot{\hat{\mathbf{U}}} + \mathbf{G}(\dot{\hat{\mathbf{U}}})\end{aligned}\quad [3.2.2.9]$$

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{\Phi}_p \delta \hat{\mathbf{U}}$$

où  $\mathbf{G}(\dot{\hat{\mathbf{U}}})$  est la contribution gyroscopique de l'accélération, donnée par :

$$\mathbf{G}(\dot{\hat{\mathbf{U}}}) = 2\dot{\mathbf{P}}([\dot{\mathbf{u}}_A^i], [\dot{\mathbf{u}}_B^i], [\dot{\mathbf{u}}_C^i], [\dot{\mathbf{u}}_O^i]) \mathbf{\Phi}_L \dot{\hat{\mathbf{U}}}_L$$

On obtient finalement l'expression finale de la forme faible complète de l'équilibre dynamique :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \delta \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{\Phi}_p^T) \mathbf{\Phi}_p \ddot{\hat{\mathbf{U}}} \rho d\Omega + \int_{\Omega} \delta \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{\Phi}_p^T) \mathbf{G}(\dot{\hat{\mathbf{U}}}) \rho d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_L (\mathbf{\Phi}_L \hat{\mathbf{U}}_L) : \boldsymbol{\varepsilon}_L (\boldsymbol{\Psi}_p \delta \hat{\mathbf{U}}) d\Omega \\ - \delta \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{D}(\hat{\mathbf{U}}_E) - \delta \hat{\mathbf{U}}_E^T \mathbf{F}_{\text{links}}(\boldsymbol{\Lambda}, \hat{\mathbf{U}}_E) = \int_{\Gamma} \delta \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{\Phi}_p^T) \mathbf{f}_{\text{ext}} dS\end{aligned}\quad [3.2.2.10]$$

$$\text{où } \mathbf{\Phi}_L = \{\boldsymbol{\phi}_L^i\},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_p = \left\{ \left\{ \mathbf{P}^T \boldsymbol{\phi}_X^i \right\}, \left\{ \mathbf{P}^T \boldsymbol{\phi}_Y^i \right\}, \left\{ \mathbf{P}^T \boldsymbol{\phi}_Z^i \right\}, \left\{ \mathbf{P}^T \boldsymbol{\phi}_{i-X-Y-Z}^i \right\}, \left\{ \boldsymbol{\phi}_L^i \right\} \right\}, \\ = \left[ \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Phi}_E, \boldsymbol{\Phi}_L \right]\end{aligned}$$

$\mathbf{D}$  est le vecteur formé par les 6 relations maintenant les distances respectives entre les points (O, A, B, C),

$\boldsymbol{\Lambda}$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, un pour chacune des liaisons rigides,

$\mathbf{F}_{\text{links}}$  est le vecteur des forces de liaisons, données par l'équation [3.2.2.7].

L'équation [3.2.2.10] peut être écrite à nouveau en utilisant les opérateurs matriciels et vectoriels classiques obtenus à l'aide d'une discrétisation éléments finis :

$$\delta \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}_p \ddot{\hat{\mathbf{U}}} + \delta \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}_{\text{gyr}}(\dot{\hat{\mathbf{U}}}) + \delta \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_L \hat{\mathbf{U}}_L - \delta \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{D}(\hat{\mathbf{U}}_E) - \delta \hat{\mathbf{U}}_E^T \mathbf{F}_{\text{links}}(\boldsymbol{\Lambda}, \hat{\mathbf{U}}_E) = \delta \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}_{\text{ext}P} \quad [3.2.2.11]$$

où  $\mathbf{M}_p = \overline{\boldsymbol{\Phi}}_p^T \mathbf{M} \overline{\boldsymbol{\Phi}}_p$  avec  $\mathbf{M}$  la matrice de masse classique sur le sous-domaine et  $\overline{\boldsymbol{\Phi}}_p$  la matrice de projection obtenue à partir des vecteurs de  $\boldsymbol{\Phi}_p$  discrétisés sur les nœuds du maillage,

$$\mathbf{F}_{\text{gyr}}(\dot{\hat{\mathbf{U}}}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\Phi}_p^T) \mathbf{G}(\dot{\hat{\mathbf{U}}}) \rho d\Omega,$$

$\mathbf{K}_L = \overline{\boldsymbol{\Psi}}_p^T \mathbf{K} \overline{\boldsymbol{\Phi}}_L$  avec  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur classique sur le sous-domaine et  $\overline{\boldsymbol{\Psi}}_p$  et  $\overline{\boldsymbol{\Phi}}_L$  déduites de  $\boldsymbol{\Psi}_p$ ,  $\boldsymbol{\Phi}_L$  et du maillage comme pour  $\overline{\boldsymbol{\Phi}}_p$ ,

$\mathbf{F}_{\text{ext}P} = \overline{\boldsymbol{\Phi}}_p^T \mathbf{F}_{\text{ext}}$  avec  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  le vecteur des forces externes classique assemblés sur le sous-domaine.

Nous sommes à présent en mesure de réduire drastiquement le nombre des inconnues en choisissant comme vecteurs de Ritz une famille appropriée de vecteurs de réduction locaux, au lieu des fonctions de formes éléments finis classiques. Le problème vibratoire modal est purement local et les résultats disponibles dans la littérature pour le choix adéquat de la base de projection sont toujours valables dans notre cas.

**Remarque 2 :** Aucune hypothèse n'est faite à ce niveau relativement à la nature des éléments finis utilisés pour le calcul des modes de vibrations locaux. Il peut d'agir d'éléments massifs ou d'éléments de type poutre, plaque ou coque, suivant la nature de la structure et les hypothèses faites dans l'approximation du champ de déplacement local  $\mathbf{w}_L$ . Ces derniers éléments sont

formulés en petites perturbations en ce qui concerne les degrés de liberté de rotation. Nous revenons au paragraphe 3.3.2 sur les spécificités du couplage multi-domaines lorsque de tels éléments sont impliqués.

Résolution à chaque pas de temps

On introduit le schéma d'intégration en temps au niveau des inconnues discrètes  $\hat{\mathbf{U}}$  :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{U}}^{n+1} &= \hat{\mathbf{U}}^n + \Delta t \dot{\hat{\mathbf{U}}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\hat{\mathbf{U}}}^n \\ \dot{\hat{\mathbf{U}}}^{n+1} &= \dot{\hat{\mathbf{U}}}^n + \frac{\Delta t}{2} \left( \ddot{\hat{\mathbf{U}}}^n + \ddot{\hat{\mathbf{U}}}^{n+1} \right) \\ \Delta t &= t^{n+1} - t^n\end{aligned}\tag{3.2.2.12}$$

Les accélérations sont classiquement les inconnues à déterminer au temps  $t^{n+1}$ . La matrice de rotation et les forces internes sont des quantités connues au temps  $t^{n+1}$ .

Deux difficultés subsistent pour l'utilisation d'un solveur entièrement explicite. Tout d'abord, les liaisons rigides ne peuvent pas concerner les déplacements au temps  $t^{n+1}$ , car ce sont des quantités explicites. Elles concernent donc les déplacements au temps  $t^{n+2}$ , ce qui affectent les accélérations au temps  $t^{n+1}$ . L'équation [3.2.2.11] introduit la nécessité d'un solveur non-linéaire implicite pour identifier les forces de liaisons. On évite cet inconvénient en effectuant une linéarisation des relations de liaisons rigides, proposée dans le paragraphe suivant.

De plus, pour calculer le vecteur des accélérations  $\ddot{\hat{\mathbf{U}}}^{n+1}$  au temps  $t^{n+1}$ , il nous faut inverser l'opérateur d'inertie. Ceci donne classiquement lieu à l'inversion d'un système linéaire, mais la dépendance non-linéaire du vecteur des forces gyroscopiques en fonction des vitesses dans notre cas rend cet opérateur non-linéaire. Ce point est discuté au paragraphe 3.2.5.

### 3.2.3. Linéarisation des liaisons rigides et problème matriciel à résoudre

Une méthode de linéarisation d'une liaison permettant la conservation d'une distance entre deux points est disponible dans EUROPLEXUS [Robbe et al. 1994]. Considérons alors deux points, I et J, parmi les points (O, A, B, C) définissant le repère local.  $\mathbf{IJ}$  est le vecteur représenté par ces deux points,  $\mathbf{IJ}^{n+1}$  sa valeur au temps  $t^{n+1}$  et  $d\mathbf{IJ}^{n+2}$  l'incrément entre les temps  $t^{n+1}$  et  $t^{n+2}$ .

On veut que la distance entre I et J soit constante et égale à 1 et comme  $\mathbf{IJ}^{n+1}$  est explicite au temps  $t^{n+1}$ , la relation de liaison peut être exprimée par :

$$\left(\mathbf{IJ}^{n+2}\right)^2 = 1\tag{3.2.3.1}$$

On peut écrire :

$$\left(\mathbf{IJ}^{n+2}\right)^2 = \left(\mathbf{IJ}^{n+1} + d\mathbf{IJ}^{n+2}\right)^2 = \left(\mathbf{IJ}^{n+1}\right)^2 + 2 \mathbf{IJ}^{n+1} \cdot d\mathbf{IJ}^{n+2} + \left(d\mathbf{IJ}^{n+2}\right)^2\tag{3.2.3.2}$$

La différence entre les distances aux temps  $t^{n+1}$  et  $t^{n+2}$  est alors donnée par :

$$\left(\mathbf{IJ}^{n+2}\right)^2 - \left(\mathbf{IJ}^{n+1}\right)^2 = \left(2 \mathbf{IJ}^{n+1} + d\mathbf{IJ}^{n+2}\right) \cdot d\mathbf{IJ}^{n+2}\tag{3.2.3.3}$$

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x}^{n+1} &= \mathbf{x}_J^{n+1} - \mathbf{x}_I^{n+1} = \mathbf{IJ}^{n+1} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2} &= \dot{\mathbf{x}}_J^{n+1/2} - \dot{\mathbf{x}}_I^{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_J^{n+1/2} - \dot{\mathbf{u}}_I^{n+1/2} \\ \Delta \ddot{\mathbf{x}}^{n+1} &= \ddot{\mathbf{x}}_J^{n+1} - \ddot{\mathbf{x}}_I^{n+1} = \ddot{\mathbf{u}}_J^{n+1} - \ddot{\mathbf{u}}_I^{n+1}\end{aligned}\quad [3.2.3.4]$$

où  $\mathbf{x}_I^{n+1}$  représente les coordonnées du point I au temps  $t^{n+1}$  dans le repère global,

$$\dot{\mathbf{u}}_I^{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_I^n + \frac{\Delta t^{n+1}}{2} \ddot{\mathbf{u}}_I^n.$$

Le schéma des différences centrées conduit à :

$$d\mathbf{IJ}^{n+2} = \Delta t^{n+2} \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+3/2} = \Delta t^{n+2} \left( \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2} + \frac{\Delta t^{n+1} + \Delta t^{n+2}}{2} \Delta \ddot{\mathbf{x}}^{n+1} \right) \quad [3.2.3.5]$$

L'équation [3.2.3.3] a désormais l'expression suivante :

$$\begin{aligned}(\mathbf{IJ}^{n+2})^2 - (\mathbf{IJ}^{n+1})^2 &= \left( 2\Delta \mathbf{x}^{n+1} + \Delta t^{n+2} \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2} + \Delta t^{n+2} \frac{\Delta t^{n+1} + \Delta t^{n+2}}{2} \Delta \ddot{\mathbf{x}}^{n+1} \right) \\ &\quad \left( \Delta t^{n+2} \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2} + \Delta t^{n+2} \frac{\Delta t^{n+1} + \Delta t^{n+2}}{2} \Delta \ddot{\mathbf{x}}^{n+1} \right)\end{aligned}\quad [3.2.3.6]$$

De manière équivalente, on a :

$$\begin{aligned}(\mathbf{IJ}^{n+2})^2 - (\mathbf{IJ}^{n+1})^2 &= \Delta t^{n+2} \left( 2\Delta \mathbf{x}^{n+1} + \Delta t^{n+2} \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2} \right) \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2} \\ &\quad + \Delta t^{n+2} \left( \Delta t^{n+1} + \Delta t^{n+2} \right) \left( \Delta \mathbf{x}^{n+1} + \Delta t^{n+2} \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2} \right) \Delta \ddot{\mathbf{x}}^{n+1} \\ &\quad + \left( \Delta t^{n+2} \frac{\Delta t^{n+1} + \Delta t^{n+2}}{2} \right)^2 (\Delta \ddot{\mathbf{x}}^{n+1})^2\end{aligned}\quad [3.2.3.7]$$

On néglige le terme quadratique  $(\Delta \ddot{\mathbf{x}}^{n+1})^2$ . On fait ainsi une approximation sur la distance entre les points I et J. Elle corrigée en forçant l'équation [3.2.3.1]. Ceci conduit à, puisque  $(\mathbf{IJ}^{n+1})^2 = (\Delta \mathbf{x}^{n+1})^2$  :

$$\left( \Delta \mathbf{x}^{n+1} + \Delta t^{n+2} \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2} \right) \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2} = \frac{1 - (\Delta \mathbf{x}^{n+1})^2}{\Delta t^{n+2} (\Delta t^{n+1} + \Delta t^{n+2})} - \frac{\left( 2\Delta \mathbf{x}^{n+1} + \Delta t^{n+2} \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2} \right) \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2}}{\Delta t^{n+1} + \Delta t^{n+2}} \quad [3.2.3.8]$$

On peut mettre cette dernière équation sous une forme classique pour son traitement à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange :

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{IJ}^{n+1} &= - \left( \mathbf{x}_I^{n+1} + \Delta t^{n+2} \dot{\mathbf{u}}_I^{n+1/2} \right) \\ \mathbf{C}_{IJ}^{n+1} &= \mathbf{x}_J^{n+1} + \Delta t^{n+2} \dot{\mathbf{u}}_J^{n+1/2} \\ \mathbf{S}_{IJ}^{n+1} &= \frac{1 - (\Delta \mathbf{x}^{n+1})^2}{\Delta t^{n+2} (\Delta t^{n+1} + \Delta t^{n+2})} - \frac{\left( 2\Delta \mathbf{x}^{n+1} + \Delta t^{n+2} \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2} \right) \Delta \dot{\mathbf{x}}^{n+1/2}}{\Delta t^{n+1} + \Delta t^{n+2}}\end{aligned}\quad [3.2.3.9]$$

où  $i \in \{1, 2, 3\}$



On écrit finalement, pour tous les couples de points pris parmi (O, A, B, C) :

$$\mathbf{D}_{IJ}(\mathbf{u}_I^{n+2}, \mathbf{u}_J^{n+2}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{C}_{IJ}^{n+1} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_I^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{u}}_J^{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{IJ}^{n+1} \quad [3.2.3.10]$$

où  $\mathbf{C}_{IJ}^{n+1}$  et  $\mathbf{S}_{IJ}^{n+1}$  sont respectivement une ligne et une colonne connue au temps  $t^{n+1}$ .

Le traitement des 6 liaisons rigides peut être rassemblé dans un seul système :

$$\mathbf{C}_{links}^{n+1} \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_E^{n+1} = \mathbf{S}^{n+1} \quad [3.2.3.11]$$

$$\text{où } \mathbf{C}_{links}^{n+1} \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_E^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{AB}^{n+1} & \mathbf{C}_{AB}^{n+1} & (0) & (0) \\ \mathbf{C}_{AC}^{n+1} & (0) & \mathbf{C}_{AC}^{n+1} & (0) \\ (0) & \mathbf{C}_{BC}^{n+1} & \mathbf{C}_{BC}^{n+1} & (0) \\ \mathbf{C}_{AO}^{n+1} & (0) & (0) & \mathbf{C}_{AO}^{n+1} \\ (0) & \mathbf{C}_{BO}^{n+1} & (0) & \mathbf{C}_{BO}^{n+1} \\ (0) & (0) & \mathbf{C}_{CO}^{n+1} & \mathbf{C}_{CO}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_A^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{u}}_B^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{u}}_C^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{u}}_O^{n+1} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{S}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AB}^{n+1} \\ \mathbf{S}_{AC}^{n+1} \\ \mathbf{S}_{BC}^{n+1} \\ \mathbf{S}_{AO}^{n+1} \\ \mathbf{S}_{BO}^{n+1} \\ \mathbf{S}_{CO}^{n+1} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{C}_{IJ}^{n+1}{}_{1 \rightarrow 3}$  est une matrice ligne composée des trois premiers éléments de  $\mathbf{C}_{IJ}^{n+1}$ ,

$\mathbf{C}_{IJ}^{n+1}{}_{4 \rightarrow 6}$  est une matrice ligne composée des trois derniers éléments de  $\mathbf{C}_{IJ}^{n+1}$ ,

(0) est une matrice ligne composée de trois zéros,

$\ddot{\mathbf{u}}_I^{n+1}$  représente les trois composantes du déplacement du point I dans le repère global.

On obtient la nouvelle expression du travail virtuel associé aux liaisons rigides :

$$\delta \mathbf{W}_{links} = -\delta \mathbf{\Lambda}^T \left( \mathbf{C}_{links}^{n+1} \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_E^{n+1} - \mathbf{S}^{n+1} \right) - \delta \hat{\mathbf{U}}_E^T \mathbf{C}_{links}^{n+1} \mathbf{\Lambda}^{n+1 T} \quad [3.2.3.12]$$

Nous sommes à présent en mesure d'écrire le système matriciel à résoudre à chaque pas de temps sur le sous-domaine réduit sujet à de grandes rotations d'ensemble. On différencie pour cela l'équation [3.2.2.11] par rapport au champ de déplacement virtuel et aux multiplicateurs de Lagrange associés aux liaisons rigides :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_P & -\mathbf{C}_{links}^{n+1 T} \\ -\mathbf{C}_{links}^{n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_E^{n+1} \\ \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{gyr}(\dot{\hat{\mathbf{U}}}_E^{n+1}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext P} - \mathbf{K}_L \hat{\mathbf{U}}_L \\ \mathbf{S}^{n+1} \end{bmatrix} \quad [3.2.3.13]$$

### 3.2.4. Etude de la stabilité

Commençons par exclure de l'analyse de stabilité les liaisons rigides, dans la mesure où elles sont traitées de manière implicite à l'aide des multiplicateurs de Lagrange et ne propagent aucune erreur de troncature.

Remarquons ensuite que l'actualisation des vitesses proposée par le schéma des différences centrées, également implicite comme nous l'avons déjà noté, implique que la présence dans l'équilibre d'un terme anti-symétrique concernant des vitesses est sans influence sur la stabilité globale de l'intégration temporelle. Cette assertion est démontrée dans [Hughes 1983] à l'aide d'une analyse énergétique de la stabilité. Ceci conduit à la démonstration suivante :

**PROPOSITION :** Les forces gyroscopiques sont antisymétriques, c'est-à-dire que la puissance associée à ces forces est nulle.

PREUVE : Calculons la puissance instantanée des forces gyroscopiques. Elle est donnée par :

$$\Pi = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{u}}_L d\Omega \quad [3.2.4.1]$$

Sans nuire à la généralité du raisonnement, le champ de vitesse peut être séparé en trois contributions :

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_{\text{trans}} + \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{u}}_L \quad [3.2.4.2]$$

où  $\dot{\mathbf{u}}_{\text{trans}}$  est un champ de vitesse de translation,

$\mathbf{x}$  représentent les coordonnées courantes globales et  $\dot{\mathbf{P}} \mathbf{x}$  est ainsi un champ de vitesse de rotation,

$\mathbf{P} \dot{\mathbf{u}}_L$  est le champ des vitesses locales exprimées dans le repère global.

La puissance gyroscopique a à présent l'expression suivante :

$$\Pi = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_{\text{trans}}^T \dot{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{u}}_L d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{u}}_L d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{P} \dot{\mathbf{u}}_L^T \dot{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{u}}_L d\Omega = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \quad [3.2.4.3]$$

Traitement de  $\Pi_1 = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_{\text{trans}}^T \dot{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{u}}_L d\Omega :$

On introduit le *spin*  $\mathbf{S}$  (cf. paragraphe 3.1.1), tel que :

$$\dot{\mathbf{P}} \mathbf{v} = \mathbf{P} (\mathbf{S} \wedge \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \quad [3.2.4.4]$$

Ceci conduit à :

$$\Pi_1 = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{P}^T \dot{\mathbf{u}}_{\text{trans}})^T (\mathbf{S} \wedge \dot{\mathbf{u}}_L) d\Omega \quad [3.2.4.5]$$

Le champ  $\mathbf{P}^T \dot{\mathbf{u}}_{\text{trans}}$  est également un champ de vitesse de translation, comme  $\dot{\mathbf{u}}_{\text{trans}}$  et le champ  $\mathbf{S} \wedge \dot{\mathbf{u}}_L$  est un champ de vitesses locales sans composante de corps rigide. Le produit scalaire de ces deux champs au sens de la masse, représenté par  $\Pi_1$ , est donc nul.

Traitement de  $\Pi_2 = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{u}}_L d\Omega :$

On peut écrire :

$$\Pi_2 = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{S} \wedge \mathbf{x})^T (\mathbf{S} \wedge \dot{\mathbf{u}}_L) d\Omega \quad [3.2.4.6]$$

Le champ  $\mathbf{S} \wedge \mathbf{x}$  peut être vu comme un champ de vitesse de rotation rigide linéarisé. Le champ  $\mathbf{S} \wedge \dot{\mathbf{u}}_L$  est à nouveau un champ de vitesses locales sans composante de corps rigide. Leur produit scalaire au sens de la masse, représenté cette fois par  $\Pi_2$ , est à nouveau nul.

Traitement de  $\Pi_3 = \int_{\Omega} \rho \mathbf{P} \dot{\mathbf{u}}_L^T \dot{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{u}}_L d\Omega :$

$\Pi_3$  peut être exprimée par :

$$\Pi_3 = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_L^T (\mathbf{S} \wedge \dot{\mathbf{u}}_L) d\Omega \quad [3.2.4.7]$$

L'expression  $\dot{\mathbf{u}}_L^T (\mathbf{S} \wedge \dot{\mathbf{u}}_L)$  est un produit mixte dans lequel le vecteur  $\dot{\mathbf{u}}_L$  est répété.  $\Pi_3$  et la puissance gyroscopique totale  $\Pi$  sont donc nulles.

Nous venons de démontrer la nature anti-symétrique des forces gyroscopiques. Elles peuvent ainsi également être exclues de notre étude de stabilité.

A présent, pour déterminer la condition de stabilité pour un pas de temps de notre problème de dynamique explicite non-linéaire, nous considérons classiquement un système linéaire tangent autour de la configuration au temps  $t^n$ , supposée fixe dans le temps. Nous menons l'analyse de stabilité dans le repère local, ce qui signifie que nous nous donnons un incrément de déplacement de la forme :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{P}^n{}^T (X \Delta \mathbf{u}_A + Y \Delta \mathbf{u}_B + Z \Delta \mathbf{u}_C + (1 - X - Y - Z) \Delta \mathbf{u}_O) + \Delta \mathbf{u}_L = \mathbf{P}^n{}^T \Delta \mathbf{u}_E + \Delta \mathbf{u}_L \quad [3.2.4.8]$$

avec l'hypothèse que cet incrément reste de faible amplitude.

La matrice  $\mathbf{P}^n$  est constante dans le temps pour cette analyse tangente.

Les dérivées temporelles et la variation de cet incrément de déplacement linéarisé sont alors données par :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{P}^n{}^T \Delta \dot{\mathbf{u}}_E + \Delta \dot{\mathbf{u}}_L \\ \Delta \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{P}^n{}^T \Delta \ddot{\mathbf{u}}_E + \Delta \ddot{\mathbf{u}}_L \\ \delta \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{P}^n{}^T \delta \Delta \mathbf{u}_E + \delta \Delta \mathbf{u}_L \end{aligned} \quad [3.2.4.9]$$

Le système linéaire tangent homogène obtenu après une discrétisation éléments finis est aisément obtenu :

$$\mathbf{M}_T \Delta \ddot{\hat{\mathbf{U}}} + \mathbf{K}_T \Delta \hat{\mathbf{U}} = 0 \quad [3.2.4.10]$$

où  $\Delta \mathbf{u} = \Psi_P \Delta \hat{\mathbf{U}}$ ,

$$\Psi_P = \left[ \left\{ \mathbf{P}^n{}^T \boldsymbol{\phi}_X^i \right\}, \left\{ \mathbf{P}^n{}^T \boldsymbol{\phi}_Y^i \right\}, \left\{ \mathbf{P}^n{}^T \boldsymbol{\phi}_Z^i \right\}, \left\{ \mathbf{P}^n{}^T \boldsymbol{\phi}_{1-X-Y-Z}^i \right\}, \left\{ \boldsymbol{\phi}_L^i \right\} \right],$$

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \left[ \Delta \mathbf{u}_A^i \right] \\ \left[ \Delta \mathbf{u}_B^i \right] \\ \left[ \Delta \mathbf{u}_C^i \right] \\ \left[ \Delta \mathbf{u}_O^i \right] \\ \left[ \Delta \mathbf{y}^i \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{U}}_E \\ \Delta \hat{\mathbf{U}}_L \end{bmatrix},$$

$\mathbf{M}_T = \bar{\Psi}_P^T \mathbf{M} \bar{\Psi}_P$ , où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse locale,

$\mathbf{K}_T = \bar{\Psi}_P^T \mathbf{K} \bar{\Psi}_P$  où  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité locale.

La contribution de corps rigide de l'incrément de déplacement  $\mathbf{P}^n{}^T \Delta \mathbf{u}_E$  est engendrée par les modes de corps rigide linéarisés et la contribution déformante  $\Delta \mathbf{u}_L$  est engendrée par les modes de vibration locaux retenus dans la base de réduction. On peut ainsi conclure que la condition de stabilité à utiliser est la même que celle donnée par le système vibratoire local. Le pas de temps critique est constant

durant la simulation et doit être estimé à partir de la plus haute fréquence propre de la matrice de rigidité locale réduite par rapport à la matrice de masse locale réduite.

On calcule donc la fréquence propre maximale  $f_{\max}$  correspondant au système :

$$\Phi_L^T \mathbf{K} \Phi_L \mathbf{V} = \omega^2 \Phi_L^T \mathbf{M} \Phi_L \mathbf{V} \quad [3.2.4.11]$$

$$\text{où } \Phi_L = \{\phi_L^i\},$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Une fois  $f_{\max}$  connue, la pas de temps maximal à utiliser sur le sous-domaine réduit pour préserver la stabilité (cf. paragraphe 1.1.3) :

$$\Delta t_{\max} = \frac{1}{\pi f_{\max}} \quad [3.2.4.12]$$

### 3.2.5. Perspectives pour le traitement des forces gyroscopiques

Nous avons jusque ici proposé un formalisme de réduction modale en présence de rotations rigides de grande amplitude dans un cadre parfaitement stable du point de vue de l'intégration temporelle. Le problème à résoudre est à présent presque entièrement explicite, la non-linéarité sur les vitesses de rotation dans les termes d'inertie d'entraînement ayant été levée grâce à notre paramétrage. Le vecteur des forces gyroscopiques  $\mathbf{F}_{\text{gyr}}$  reste néanmoins non-linéaire en fonction des vitesses. Il implique normalement un processus de résolution itératif à chaque pas de temps, comme une méthode de Newton par exemple. L'expression analytique de ce vecteur rend simple l'obtention de la matrice d'itération, mais un tel traitement se trouve en contradiction avec les avantages d'utiliser le schéma des différences centrées, conditionnellement stable et intéressant s'il est explicite. Son autre inconvénient majeur est de plus qu'il rend beaucoup plus compliqué le couplage multi-domaines avec plusieurs échelles de temps [Gravouil et Combescure 2001].

On peut alors suivre deux directions :

1. On peut voir les forces gyroscopiques  $\mathbf{F}_{\text{gyr}}$  comme des *velocity dependant loads* et les traiter d'une manière classique [Argyris et Mlejnek 1991]. Elles sont alors calculées à partir d'un représentant explicite pur du vecteur des vitesses discrètes, donné par :

$$\hat{\mathbf{U}}_{\text{expl}}^{n+1} = \hat{\mathbf{U}}^n + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^n \quad [3.2.5.1]$$

On place ensuite les forces correspondantes au second membre de l'équilibre dynamique et le processus de résolution n'est pas affecté. Ce traitement est toutefois en contradiction avec notre analyse de stabilité et requiert une réduction arbitraire du pas de temps pour éviter les divergences par accumulation d'erreur de troncature.

2. Pour des structures massives ou pour de faibles de rotation, on peut également supposer que les forces gyroscopiques sont négligeables devant les forces d'entraînement. Cela signifie que  $\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{U}}$  est prépondérant devant  $\mathbf{F}_{\text{gyr}}$ . Une telle hypothèse doit être associée à une estimation *a posteriori* de l'amplitude des forces gyroscopiques négligées. Elle est validée sur deux exemples réalistes réalisés avec cette approximation et proposés dans les paragraphes 3.4.2 et 3.4.3.

### 3.3. Système multi-domaines couplé

#### 3.3.1. Éléments massifs à degrés de liberté de translations

On dispose désormais d'un formalisme réduit sur un sous-domaine sujet de rotations d'ensemble finies. Il nous faut à présent écrire le couplage entre un tel sous-domaine et le reste des sous-domaines définis sur la structure. Dans le cas d'éléments massifs, les degrés de liberté nodaux sont identiques que l'élément soit formulé en petites perturbations ou en grandes transformations.

Comme auparavant, on écrit le couplage dans le cas de deux sous-domaines avec une unique échelle de temps, avec une réduction multi-échelles appliquée au sous-domaine 1. La généralisation à  $n$  sous-domaines est immédiate. On affecte l'indice R à tous les objets intervenant dans le traitement des liaisons rigides sur le sous-domaine 1, aussi bien les matrices de couplage que les multiplicateurs de Lagrange. On les distingue ainsi des objets relatifs aux relations de continuité sur les interfaces.

Conformément au paragraphe 3.2.5, les forces gyroscopiques sur le sous-domaine 1 sont soit négligées, soit placées au second membre de l'équilibre dynamique. Le système couplé peut alors s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_{P1} & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_{R1}^T & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_{P1}^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_{R1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_2 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_{P1} & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_1^{n+1} \\ \Lambda_{R1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_1^{n+1} \\ \frac{\Delta t}{2} \mathbf{S}_1^{n+1} \\ \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_2^{n+1} \\ \mathbf{C}_{P1}^P \dot{\mathbf{U}}_1^{n+1} + \mathbf{C}_2^P \dot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \end{bmatrix} \quad [3.3.1]$$

où  $\mathbf{C}_{P1} = \mathbf{C}_1 \Phi_{P1}$ .

La séparation en deux problèmes *free* et *link* est toujours applicable, conduisant à :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{P1} & -\mathbf{C}_{R1}^T & 0 & 0 \\ -\mathbf{C}_{R1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_{1 \text{ free}}^{n+1} \\ \Lambda_{R1 \text{ free}} \\ \ddot{\mathbf{U}}_{2 \text{ free}}^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{n+1} \\ \mathbf{S}_1^{n+1} \\ \mathbf{F}_2^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{problème } free) \quad [3.3.2]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_{P1} & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_{R1}^T & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_{P1}^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_{R1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_2 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_{P1} & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_{1 \text{ link}}^{n+1} \\ \Lambda_{R1 \text{ link}} \\ \ddot{\mathbf{U}}_{2 \text{ link}}^{n+1} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_{P1} \dot{\mathbf{U}}_{1 \text{ free}}^{n+1} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{U}}_{2 \text{ free}}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{problème } link) \quad [3.3.3]$$

Le problème condensé sur les interfaces est finalement donné par :

$$\mathbf{H} = \frac{\Delta t}{2} \bar{\mathbf{C}}_{P_1} \bar{\mathbf{M}}_{P_1}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{P_1}^T + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{C}_2^T \quad [3.3.4]$$

où  $\bar{\mathbf{M}}_{P_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{P_1} & -\mathbf{C}_{R_1}^T \\ -\mathbf{C}_{R_1} & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$\bar{\mathbf{C}}_{P_1} = [\mathbf{C}_{P_1} \quad 0].$$

Ce problème d'interface présente des spécificités :  $\bar{\mathbf{M}}_{P_1}$  et  $\bar{\mathbf{C}}_{P_1}$  sont variables dans le temps avec la matrice de rotation  $\mathbf{P}$  et  $\bar{\mathbf{M}}_{P_1}$  n'est plus une matrice diagonale. Il devient nécessaire pour conserver les avantages de la réduction de définir un solveur dédié à ce nouveau système. Il est présenté dans le paragraphe 3.4.

On peut comme précédemment utiliser sans difficulté l'algorithme à plusieurs échelles de temps proposé dans la première partie, dans la mesure où le problème couplé conserve une structure identique au cas usuel.

### 3.3.2. Éléments comprenant des degrés de liberté de rotation

Pour les éléments de poutre, de plaque ou de coque, la signification des degrés de liberté de rotation diffère suivant qu'on se trouve sous l'hypothèse des petites perturbations ou non (cf. paragraphes 3.1.2 et 3.1.3). Dans le premier cas, ils décrivent une rotation infinitésimale, soit un élément de l'espace linéaire  $\mathfrak{so}(3)$ . Ils représentent alors chacun une rotation infinitésimale autour de chacun des axes du repère de référence. Au contraire, dans le second cas, ils paramètrent une rotation finie, soit un élément du groupe  $\mathbf{SO}_3$ .

Dans le cas du collage d'un sous-domaine classique avec une formulation en grande transformation et d'un sous-domaine avec réduction multi-échelles, où les éléments sont formulés avec l'hypothèse des petites perturbations locales, on se retrouve donc avec deux natures différentes pour les degrés de liberté de rotation de part et d'autre de l'interface.

Il est alors souhaitable d'exprimer la continuité cinématique comme la continuité du vecteur vitesse instantanée de rotation  $\mathbf{S}$  à travers l'interface.

Pour chaque nœud du sous-domaine 2 modélisé aux éléments finis classiques (on reprend les conventions du paragraphe précédent), il nous faut donc exprimer le vecteur  $\mathbf{S}$  à partir des dérivées temporelles des paramètres de rotation. D'une manière générale, cela prend la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{R}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T \dot{\mathbf{R}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3) \quad [3.3.2.1]$$

où  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  sont les 3 degrés de liberté de rotation, dont la nature dépend du paramétrage choisi (cf. paragraphe 3.1.2),  
 $\mathbf{R}$  est la rotation locale paramétrée par  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ .

On peut écrire :

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3 \quad [3.3.2.2]$$

On en déduit l'expression du *spin*  $\mathbf{S}$  :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{R}^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \mathbf{R}^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \mathbf{R}^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3 \quad [3.3.2.3]$$

Il en résulte, les grandeurs  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  étant explicites au moment de la résolution sur un pas de temps, une relation linéaire entre le *spin* et les dérivées temporelles des degrés de liberté nodaux :

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad [3.3.2.4]$$

On donne par exemple au paragraphe 3.1.2 l'expression du tenseur  $\mathbf{T}$  dans le cas du paramétrage de la rotation par le *vecteur rotation*.

Du côté du sous-domaine 1 avec réduction multi-échelles, on écrit pour les nœuds de l'interface :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_E + \mathbf{P}\mathbf{S}_L = \mathbf{S}_E + \mathbf{P} \left( \sum_{\substack{i \in \text{modes} \\ \text{locaux}}} \dot{y}_i \boldsymbol{\varphi}_{L\theta}^i \right) \quad [3.3.2.5]$$

où  $\mathbf{S}_E$  est le *spin* dû à la rotation d'ensemble,

$\mathbf{S}_L$  est le *spin* dû à la vibration locale, donné immédiatement par la dérivée temporelle des degrés de liberté de rotation en petites perturbations,

$\boldsymbol{\varphi}_{L\theta}^i$  représente les 3 composantes de rotation du mode local  $\boldsymbol{\varphi}_L^i$ .

Il reste à exprimer la relation entre  $\mathbf{S}_E$  et la dérivée temporelle des paramètres du mouvement d'ensemble. On écrit alors :

$$\dot{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_A^1 - \dot{u}_O^1 & \dot{u}_B^1 - \dot{u}_O^1 & \dot{u}_C^1 - \dot{u}_O^1 \\ \dot{u}_A^2 - \dot{u}_O^2 & \dot{u}_B^2 - \dot{u}_O^2 & \dot{u}_C^2 - \dot{u}_O^2 \\ \dot{u}_A^3 - \dot{u}_O^3 & \dot{u}_B^3 - \dot{u}_O^3 & \dot{u}_C^3 - \dot{u}_O^3 \end{bmatrix} \quad [3.3.2.6]$$

On en déduit :

$$\tilde{\mathbf{S}}_E = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}(\dot{u}_B^1 - \dot{u}_O^1) + \mathbf{P}_{21}(\dot{u}_B^2 - \dot{u}_O^2) \\ + \mathbf{P}_{31}(\dot{u}_B^3 - \dot{u}_O^3) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}(\dot{u}_C^1 - \dot{u}_O^1) + \mathbf{P}_{21}(\dot{u}_C^2 - \dot{u}_O^2) \\ + \mathbf{P}_{31}(\dot{u}_C^3 - \dot{u}_O^3) \end{bmatrix} \\ -\tilde{\mathbf{S}}_{E12} & 0 & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{12}(\dot{u}_C^1 - \dot{u}_O^1) + \mathbf{P}_{22}(\dot{u}_C^2 - \dot{u}_O^2) \\ + \mathbf{P}_{32}(\dot{u}_C^3 - \dot{u}_O^3) \end{bmatrix} \\ -\tilde{\mathbf{S}}_{E13} & -\tilde{\mathbf{S}}_{E23} & 0 \end{bmatrix} \quad [3.3.2.7]$$

On obtient finalement :

$$\mathbf{S}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}(\dot{u}_B^1 - \dot{u}_O^1) + \mathbf{P}_{21}(\dot{u}_B^2 - \dot{u}_O^2) + \mathbf{P}_{31}(\dot{u}_B^3 - \dot{u}_O^3) \\ \mathbf{P}_{11}(\dot{u}_C^1 - \dot{u}_O^1) + \mathbf{P}_{21}(\dot{u}_C^2 - \dot{u}_O^2) + \mathbf{P}_{31}(\dot{u}_C^3 - \dot{u}_O^3) \\ \mathbf{P}_{12}(\dot{u}_C^1 - \dot{u}_O^1) + \mathbf{P}_{22}(\dot{u}_C^2 - \dot{u}_O^2) + \mathbf{P}_{32}(\dot{u}_C^3 - \dot{u}_O^3) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_E \dot{\mathbf{U}}_E \quad [3.3.2.8]$$

où le tenseur  $\mathbf{T}_E$  est explicite au moment de la résolution.

Nous sommes à présent en mesure d'écrire la relation de continuité pour les degrés de liberté de rotation entre les sous-domaines 1 et 2 :

$$\mathbf{C}_{1\theta} \mathbf{T}_{P1} \dot{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{C}_{2\theta} \mathbf{T}_2 \dot{\mathbf{U}}_2 \quad [3.3.2.9]$$

où  $\mathbf{C}_{1\theta}$  et  $\mathbf{C}_{2\theta}$  représentent les colonnes des matrices de couplage  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  respectivement correspondant aux degrés de liberté de rotation,

$\mathbf{T}_{P1}$  réalise le passage linéaire entre les degrés de liberté modaux sur sous-domaine 1 et le *spin* pour tous les nœuds de l'interface,

$\mathbf{T}_2$  réalise le passage linéaire entre les dérivées temporelles des paramètres de rotation nodaux et le *spin* pour tous les nœuds du sous-domaine 2 appartenant à l'interface.

L'écriture [3.3.2.9] est une écriture linéaire qui peut être introduite sans difficulté dans le formalisme de résolution proposé au paragraphe précédent. Elle demande néanmoins des développements spécifiques relatifs à la formulation des éléments sur le sous-domaine 2 pour pouvoir identifier la matrice  $\mathbf{T}_2$ . Nous nous limitons dans la suite au cas des interfaces entre éléments massifs, ce qui n'interdit pas les éléments de poutre, plaque ou coque dans le volume des sous-domaines avec réduction multi-échelles.



### 3.4. Traitement spécifique du problème condensé sur les interfaces

Comme nous l'avons signalé au paragraphe 2.2.4, la projection a pour premier effet de généralement remplir les matrices de couplages par l'introduction de dépendances entre les relations de continuité cinématique. La réduction modale en présence de rotations finies rend de plus ces matrices variables dans le temps pour les sous-domaines réduits. La matrice de masse devient également variable et perd son caractère diagonal. La liste des tâches à effectuer pour résoudre le problème d'interface, proposée au paragraphe 2.2.4, suggère alors que cette résolution est très fortement pénalisée par notre nouvelle méthode de projection modale.

#### 3.4.1. Décompte des opérations élémentaires

Pour vérifier cette dernière assertion et justifier la recherche de nouvelles méthodes d'inversion, nous réalisons un décompte des opérations élémentaires (à savoir additions, multiplications et divisions) nécessaires à l'achèvement de toutes les tâches listées au paragraphe 2.2.4. On se place dans le cas de deux sous-domaines. Le cas de référence est le cas avec maillages coïncidents et aucune réduction modale. C'est le cas le plus économique. On compare le nombre d'opérations obtenu à ceux obtenus tout d'abord avec une réduction linéaire utilisée sur le sous-domaine 1, puis avec une réduction multi-échelles utilisée sur le même sous-domaine, comme le rappelle le TABLEAU [3.4.1.1].

Cas	Description
①	Aucune réduction modale - Matrices de couplages $C_k$ booléennes - Matrices de masse $M_k$ diagonales
②	Réduction linéaire sur le sous-domaine 1 - Matrice de couplage $\hat{C}_1$ pleine, matrice de couplage $C_2$ booléenne - Matrices de masse $\hat{M}_1$ et $M_2$ diagonales
③	Réduction multi-échelles sur le sous-domaine 1 - Matrice de couplage $\bar{C}_{p_1}$ pleine, matrice de couplage $C_2$ booléenne - Matrice de masse $\bar{M}_{p_1}$ pleine, matrice de masse $M_2$ diagonale

TABLEAU [3.4.1.1] : Configurations pour l'étude du coût du problème d'interface

On introduit le paramètre  $N_H$ . Il correspond au nombre moyen de pas de temps calculés avec le même opérateur d'interface. On compte alors les opérations élémentaires pour  $N_H$  pas de temps, avec un seul assemblage de l'opérateur et une seule factorisation de Cholesky.

**Remarque :** Sans réduction ou avec une réduction linéaire,  $H$  varie uniquement à cause des pas de temps sur les sous-domaines soumis à la condition de Courant. Ceci justifie que cet opérateur puisse rester constant sur un grand nombre de pas de temps.

Dans le cas de la réduction multi-échelles, puisque les matrices de couplage  $\bar{C}_{p_1}$  et de masse  $\bar{M}_{p_1}$  varient à chaque pas de temps local sur le sous-domaine réduit avec la matrice de rotation, le paramètre  $N_H$  prendrait la valeur 1 avec une unique échelle de temps. La réduction est néanmoins susceptible d'autoriser un pas de temps plus grand sur le sous-domaine 1 que sur le sous-domaine 2. Le paramètre  $N_H$  correspond alors au nombre de pas effectués sur le sous-domaine 2 pendant un pas de temps sur le sous-domaine 1. C'est donc le rapport moyen des pas de temps entre les deux sous-domaines.

On réalise le décompte des opérations avec l'aide de [Ciarlet 1990]. Il est détaillé dans le TABLEAU [3.4.1.2].

Tâches \ Cas	①	②	③
Assemblage de <b>H</b>	2N multiplications N additions	N(N+1) multiplications $\frac{N(N+1)}{2}$ additions	$2NN_M^2 + N$ multiplications $2NN_M(N_M - 1) + N$ additions
Evaluation du second membre	$2NN_H$ multiplications $NN_H$ additions	$N(N_M + 1)N_H$ multiplications $NN_M N_H$ additions	$N(N_M + 1)N_H$ multiplications $NN_M N_H$ additions
Factorisation	Pas de factorisation (l'opérateur est diagonal)	$\frac{N(N-1)}{2}$ divisions $\frac{N(N^2 - 1)}{6}$ multiplications $\frac{N(N^2 - 1)}{6}$ additions	$\frac{N(N-1)}{2}$ divisions $\frac{N(N^2 - 1)}{6}$ multiplications $\frac{N(N^2 - 1)}{6}$ additions
Résolution des systèmes triangulaires	$NN_H$ divisions	$2NN_H$ divisions $N(N-1)N_H$ multiplications $N(N-1)N_H$ additions	$2NN_H$ divisions $N(N-1)N_H$ multiplications $N(N-1)N_H$ additions
Calcul des accélérations <i>link</i>	$2NN_H$ divisions	$2NN_H$ divisions $NN_M N_H$ multiplications $N_M(N-1)N_H$ additions	$NN_H$ divisions $N_M N_H(N + N_M)$ multiplications $N_M N_H(N + N_M - 2)$ additions
TOTAL	$3N + 6NN_H$ opérations	$\frac{N^3}{3} + 2N^2 + \frac{2}{3}N$ $+ N_H(4NN_M + 2N^2 + 2N)$ opérations	$\frac{N^3}{3} + 4NN_M^2 + \frac{N^2}{2}$ $- 2NN_M + \frac{7}{6}N$ $+ N_H(4NN_M + 2N_M^2$ $+ 2N^2 + N - 2N_M)$ opérations

TABLEAU [3.4.1.2] : Nombres d'opérations pour une inversion directe par la méthode de Cholesky

N est le nombre de relations de continuité cinématique (ou le nombre de multiplicateurs de Lagrange.).

$N_M$  est le nombre d'inconnues modales sur le sous-domaine 2 dans les deux cas de projection. Il contient les paramètres du mouvement rigide dans le cas de la réduction multi-échelles.

Dans les deux premiers cas, la contribution constante de chaque sous-domaine à l'opérateur global a été calculée et stockée une fois pour toute. Calculer **H** revient alors à faire la somme de ces contributions, multipliées par  $\frac{\Delta t_k}{2}$ . Dans le troisième cas, le nombre d'opérations requis pour obtenir

**H** tient compte de toutes les multiplications matricielles à effectuer. Dans ce cas, l'inverse de matrice de masse pleine est supposé connu, puisqu'il peut être évalué au niveau du problème *free* sur le sous-domaine réduit.

Dans tous les cas, les tâches correspondant au calcul du second membre, des accélérations *link*, ainsi que la résolution des deux systèmes triangulaires, pénalisent fortement la résolution lorsque la réduction est utilisée. Le coût additionnel dû au calcul de  $\mathbf{H}$  et à sa factorisation est d'autant plus petit que  $N_H$  est plus grand. Les multiplications matricielles pour le calcul de  $\mathbf{H}$ , associées à des factorisations potentiellement fréquentes, conduisent rapidement à de sévères ralentissements dans le processus de résolution dans le troisième cas. Ceci est illustré sur la FIGURE [3.4.1.1]. On trace le nombre d'opérations en fonction de dimension  $N$  du problème dans les trois cas, pour une valeur représentative de  $N_H$  fixée à 10. Dans les deux cas modaux, on considère trois situations, le nombre de modes de réduction  $N_M$  valant 50 dans la première, 100 dans la deuxième et 200 dans la troisième.

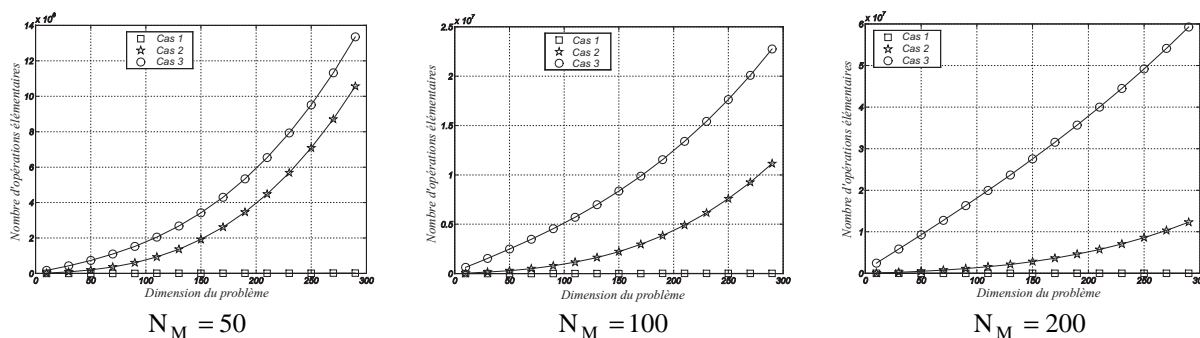


FIGURE [3.4.1.1] : Comparaison des nombres d'opérations pour différentes valeurs de  $N_M$

Comme attendu, le coût d'inversion du problème d'interface dans le cas classique sans réduction est négligeable. Quand le nombre de modes est petit, les cas avec réduction linéaire et réduction multi-échelles conduisent approximativement à la même évolution du nombre d'opérations en fonction de la dimension du problème. Au fur et à mesure que le nombre de modes augmente, le nombre d'opérations dans le cas avec réduction multi-échelles tend à devenir beaucoup plus important que dans le cas avec réduction linéaire. Il devient également presque linéaire en fonction de  $N$ . Ceci traduit que l'assemblage de  $\mathbf{H}$  devient l'étape prédominante. C'est un point très important qui est discuté dans le paragraphe suivant, au moment de choisir le meilleur algorithme de résolution pour le problème d'interface dans chacun des cas.

### 3.4.2. Recherche d'une méthode améliorée pour les cas modaux

Les observations du paragraphe précédent introduisent la nécessité d'améliorer le solveur en présence de sous-domaines avec réduction multi-échelles. Nous poursuivons toutefois notre étude avec les deux configurations modales, une nouvelle méthode pouvant également être profitable en présence de sous-domaines avec réduction linéaire, même si le besoin est moins fort dans ce cas.

En ce qui concerne les méthodes d'inversion directes, la factorisation de Cholesky est connue pour être la plus efficace pour les matrices semi-définies positives [Ciarlet 1990]. De plus, elle permet de gérer sans difficulté les relations redondantes, ce qui est indispensable pour les *cross-points* et les cas particuliers modaux présentés au paragraphe 2.2.3. Une nouvelle stratégie pour réduire le temps d'inversion du problème condensé doit donc reposer sur une procédure itérative. Cela permet principalement d'éviter les factorisations coûteuses et répétées de l'opérateur  $\mathbf{H}$ .

#### Etape d'initialisation

Une procédure itérative est d'autant plus compétitive qu'elle est initialisée par un vecteur plus proche de la solution finale. Considérons alors le problème *link* à résoudre pour deux sous-domaines, une méthode de réduction étant utilisée sur le sous-domaine 1 :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{M}}_1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \Phi_1^T \mathbf{C}_1^T \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_2 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1 \Phi_1 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{a}}_1^{n+1} \\ \dot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_1 \Phi_1^P \dot{\mathbf{a}}_1^{n+1} + \mathbf{C}_2^P \dot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \end{bmatrix} \quad [3.4.2.1]$$

où  $\Phi_1$  représente la base de projection linéaire ou la base multi-échelles,

$\hat{\mathbf{M}}_1$  est la matrice de masse réduite :

$\hat{\mathbf{M}}_1 = \Phi_1^T \mathbf{M}_1 \Phi_1$  dans le cas de la réduction linéaire,

$\hat{\mathbf{M}}_1 = \begin{bmatrix} \Phi_1^T \mathbf{M}_1 \Phi_1 & -\mathbf{C}_{R1}^T \\ -\mathbf{C}_{R1}^T & 0 \end{bmatrix}$  dans le cas de la réduction multi-échelles,

$\ddot{\mathbf{a}}_1$  est le vecteur des accélérations généralisées, auxquelles sont associés les multiplicateurs de Lagrange dédiés aux liaisons rigides dans le cas de la réduction multi-échelles.

On introduit le système suivant pour produire un estimateur  $\tilde{\Lambda}$  du vecteur des multiplicateurs de Lagrange cherché :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1^T \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_2 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1^{n+1} \\ \tilde{\mathbf{U}}_2^{n+1} \\ \tilde{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_1 \Phi_1^P \dot{\mathbf{a}}_1^{n+1} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \end{bmatrix} \quad [3.4.2.2]$$

Démontrons à présent que la qualité de l'estimateur  $\tilde{\Lambda}$  augmente avec la qualité de la base de projection  $\Phi_1$ .

Résoudre le système [3.4.2.2] produit les vecteurs  $\tilde{\mathbf{U}}_1^{n+1}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_2^{n+1}$  et  $\tilde{\Lambda}$ . Déduire de  $\tilde{\mathbf{U}}_1^{n+1}$  les accélérations généralisées à partir de  $\tilde{\mathbf{U}}_1^{n+1} = \Phi_1 \ddot{\mathbf{a}}_1^{n+1}$  est inapproprié, puisque la projection sur les modes de  $\Phi_1$  ne réalise pas une bijection de l'espace des champs d'accélération sur le sous-domaine vers l'espace des variables modales.

Notons  $\mathcal{P}$  la fonction de projection associée à  $\Phi_1$  donnant  $\ddot{\mathbf{a}}_1$  à partir de  $\tilde{\mathbf{U}}_1$  : cette application est clairement surjective. C'est l'opération de synthèse modale. Elle n'est par contre pas injective. Un vecteur non-identiquement nul obtenu comme combinaison linéaire de modes négligés dans la base de réduction a une projection nulle. Une base modale satisfaisante tend à rapprocher  $\mathcal{P}$  de l'injectivité : les champs d'accélération significatifs sur le sous-domaine, contribuant majoritairement à la solution finale, doivent se décomposer principalement sur les vecteurs de réduction. Le système [3.4.2.2] tend alors à devenir équivalent au système [3.4.2.1] lorsque la base modale s'enrichit et  $\tilde{\Lambda}$  tend alors vers  $\Lambda$ .

La résolution du système [3.4.2.2] par condensation sur les multiplicateurs de Lagrange fait appel à l'opérateur d'interface en l'absence de réduction. Son coût d'inversion est négligeable. Ceci achève de justifier notre intérêt pour cette méthode d'initialisation.

**Remarque :** Enrichir la base de projection ne signifie que nous voulons l'injectivité totale pour la fonction de projection  $\mathcal{P}$ , pour tout l'espace des champs d'accélération éléments finis sur le sous-domaine 1. Ceci conduirait à autant de modes qu'il y a initialement de degrés de liberté éléments finis et serait sans intérêt. L'espace des champs d'accélération solution du système [3.4.2.2] est l'espace des réponses instantanées à un chargement d'interface, représenté par les

*multiplicateurs de Lagrange. Il correspond à un petit sous-espace de l'espace de tous les champs éléments finis. C'est la restriction de  $\mathcal{P}$  à ce sous-espace dont nous voulons l'injectivité. C'est par exemple ce qui a été réalisé avec le jeu de modes particuliers introduit au paragraphe 2.2.4.*

#### Comparaison entre différentes procédures itératives

On s'intéresse à deux stratégies itératives distinctes : la première est fondée sur une méthode de relaxation et la seconde sur une méthode de gradient [Ciarlet 1990][Lascaux et Théodor 1986]. On se restreint aux méthodes dédiées aux problèmes symétriques définis, ou semi-définis, positifs.

#### Méthode de Jacobi

C'est la méthode de type 'relaxation' dont l'itération est la moins chère. Elle repose sur la décomposition suivante de la matrice à inverser :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \ddots & & & -\mathbf{F} \\ & \mathbf{D} & & \\ & & \ddots & \\ -\mathbf{E} & & & \ddots \end{bmatrix} \quad [3.4.2.3]$$

où  $\mathbf{D}$  est la diagonale de la matrice  $\mathbf{H}$ .

Une itération de la méthode de Jacobi pour résoudre  $\mathbf{H}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{\Lambda}^{k+1} &= (\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{\Lambda}^k + \mathbf{S} \\ \Leftrightarrow \mathbf{\Lambda}^{k+1} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{\Lambda}^k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S} \end{aligned} \quad [3.4.2.4]$$

Les méthodes de Gauss-Seidel ou de relaxation proposent le même genre d'itérations et peuvent offrir une convergence plus rapide au prix d'un coût par itération plus élevé. La convergence de telles approches est prouvée lorsque la matrice est définie positive. Ceci peut conduire à des difficultés lorsque la matrice est singulière, en présence de *cross-points* par exemple.

Décomptons à présent les opérations élémentaires nécessaires pour résoudre notre problème d'interface. On conserve les paramètres  $N$ ,  $N_H$  et  $N_M$  et on ajoute le paramètre  $N_I$ , comme le nombre moyen d'itérations requis pour la convergence. On ne considère parmi les cas présentés avant que les cas 2 et 3 où un sous-domaine avec projection modale est concerné. Il n'y a rien à gagner dans le premier cas.

Cas	②	③
Tâches		
Assemblage de $\mathbf{H}$	$N(N+1)$ multiplications $\frac{N(N+1)}{2}$ additions	$2NN_M^2 + N$ multiplications $2NN_M(N_M - 1) + N$ additions
Evaluation du second membre	$N(N_M + 1)N_H$ multiplications $NN_MN_H$ additions	$N(N_M + 1)N_H$ multiplications $NN_MN_H$ additions
Résolution itérative	$NN_HN_I$ divisions $N(N-1)N_HN_I$ multiplications $N(N-1)N_HN_I$ additions	$NN_HN_I$ divisions $N(N-1)N_HN_I$ multiplications $N(N-1)N_HN_I$ additions
Calcul des accélérations <i>link</i>	$2NN_H$ divisions $NN_MN_H$ multiplications $N_M(N-1)N_H$ additions	$NN_H$ divisions $N_MN_H(N + N_M)$ multiplications $N_MN_H(N + N_M - 2)$ additions

TOTAL	$\frac{3}{2}N^2 + \frac{3}{2}N$ $+ N_H (2N^2N_I + 4NN_M - NN_I + 3N - N_M)$ opérations	$4NN_M^2 - 2NN_M + 2N$ $+ N_H (2N^2N_I + 4NN_M + 2N_M^2$ $- NN_I + 2N - 2N_M)$ opérations
-------	--	---

TABLEAU [3.4.2.1] : Nombres d'opération pour l'inversion itérative par la méthode de Jacobi

Puisqu'on ne réalise aucune factorisation de l'opérateur, le terme en  $\frac{N^3}{3}$  disparaît du nombre total d'opérations. C'est l'intérêt principal d'une méthode itérative. Il est toutefois remplacé par le terme  $2N^2N_IN_H$ , qui peut devenir très pénalisant si  $N_I$  est grand.

#### Méthode du gradient conjugué

C'est une méthode issue de l'optimisation. Résoudre le système  $\mathbf{H}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}$  est remplacé par rendre minimale la fonctionnelle quadratique suivante :

$$J(\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{H} \mathbf{\Lambda} - 2\mathbf{S}^T \mathbf{\Lambda} \quad [3.4.2.5]$$

A partir d'une direction de recherche  $\mathbf{p}^k$ , l'itération  $k+1$  est donnée par :

$$\mathbf{\Lambda}^{k+1} = \mathbf{\Lambda}^k + \alpha^k \mathbf{p}^k \quad [3.4.2.6]$$

$\alpha^k$  est tel qu'il maximise la décroissance de l'erreur dans la direction  $\mathbf{p}^k$ . Dans l'algorithme du gradient conjugué, la direction  $\mathbf{p}^k$  est construite à partir de la direction  $\mathbf{p}^{k-1}$  et du résidu  $\mathbf{r}^k$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^k &= \mathbf{S} - \mathbf{H}\mathbf{\Lambda}^k \\ \mathbf{p}^k &= \mathbf{r}^k + \beta^k \mathbf{p}^{k-1} \end{aligned} \quad [3.4.2.7]$$

Le paramètre  $\beta^k$  est à nouveau choisi pour une décroissance maximale de l'erreur. Ceci conduit à des conditions d'orthogonalités remarquables et assure la convergence de l'algorithme en moins de  $N$  itérations,  $N$  étant la dimension de la matrice  $\mathbf{H}$ . Cette propriété, qui fait finalement du gradient conjugué une méthode directe, est sans intérêt dans notre cas. Le nombre maximal d'itérations est en effet bien trop élevé pour que la méthode reste attractive.

Au cours des itérations, les paramètres  $\alpha^k$  et  $\beta^k$  sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha^k &= \frac{\mathbf{r}^{kT} \mathbf{r}^k}{\mathbf{p}^{kT} \mathbf{H} \mathbf{p}^k} \\ \beta^k &= \frac{\mathbf{r}^{kT} \mathbf{r}^k}{\mathbf{r}^{k-1T} \mathbf{r}^{k-1}} \end{aligned} \quad [3.4.2.8]$$

Les quantités suivantes sont alors calculés à chaque itération :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}^{k+1} &= \mathbf{\Lambda}^k + \alpha^k \mathbf{p}^k \\ \mathbf{r}^{k+1} &= \mathbf{r}^k - \alpha^k \mathbf{H} \mathbf{p}^k \\ \mathbf{p}^{k+1} &= \mathbf{r}^{k+1} + \beta^{k+1} \mathbf{p}^k \end{aligned} \quad [3.4.2.9]$$

Le coût de calcul d'une itération provient majoritairement du produit  $\mathbf{H}\mathbf{p}^k$ . L'algorithme est donc particulièrement judicieux pour des matrices très creuses. Ce n'est pas notre cas, mais si le nombre d'itérations reste faible, cette méthode peut s'avérer très compétitive. Elle évite notamment l'assemblage complet de la matrice  $\mathbf{H}$ , puisque seule l'estimation du résidu est requise. Ceci remplace de lourdes multiplications matrices-matrices par plusieurs multiplications matrices-vecteurs plus légères.

Le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est proportionnel au conditionnement de la matrice  $\mathbf{H}$ . L'algorithme peut être accéléré en préconditionnant l'opérateur de condensation à l'aide d'une matrice dont l'inversion est aisée et qui conduit à une solution proche de celle obtenue après inversion de la matrice  $\mathbf{H}$  [Lascaux et Théodor 1986]. On obtient ainsi l'algorithme du gradient conjugué préconditionné, dont l'itération est exprimée par, avec  $\mathbf{Q}$  la matrice additionnelle, appelée préconditionneur :

$$\begin{aligned}
 \alpha^k &= \frac{\mathbf{r}^{kT} \mathbf{z}^k}{\mathbf{p}^{kT} \mathbf{H} \mathbf{p}^k} \\
 \Lambda^{k+1} &= \Lambda^k + \alpha^k \mathbf{p}^k \\
 \mathbf{r}^{k+1} &= \mathbf{r}^k - \alpha^k \mathbf{H} \mathbf{p}^k \\
 \mathbf{Q} \mathbf{z}^{k+1} &= \mathbf{r}^{k+1} \\
 \beta^{k+1} &= \frac{\mathbf{r}^{k+1T} \mathbf{z}^{k+1}}{\mathbf{r}^{kT} \mathbf{z}^k} \\
 \mathbf{p}^{k+1} &= \mathbf{z}^{k+1} + \beta^{k+1} \mathbf{p}^k
 \end{aligned} \tag{3.4.2.10}$$

Cette itération requiert l'inversion supplémentaire d'un système linéaire impliquant le préconditionneur  $\mathbf{Q}$ . La littérature propose de nombreux préconditionneurs. Dans notre cas, il semble opportun d'utiliser l'opérateur de condensation sans projection, conformément aux propriétés présentées au moment des questions d'initialisation. Il est en particulier diagonal et gratuit à inverser dans le cas des maillages compatibles.

---

**Remarque :** L'utilisation d'un algorithme de gradient conjugué pour résoudre le problème condensé sur les multiplicateurs de Lagrange rappelle la méthode FETI, introduite au paragraphe 1.2.2. Pour une résolution parallèle efficace du problème d'interface, cette méthode propose un préconditionneur de Dirichlet [Farhat et al. 2000]. On peut l'adapter à notre cas si le parallélisme devient un objectif fort.

---

Effectuons à présent le décompte des opérations élémentaires, en négligeant le coût de l'étape de préconditionnement dans l'algorithme. Les paramètres sont les mêmes que pour la méthode de Jacobi.

On commence par détailler une itération de l'algorithme :

Tâches \ Cas	②	③
Calcul de $\mathbf{H}\mathbf{p}^k$	N divisions N(2N <sub>M</sub> +1) multiplications N <sub>M</sub> (2N-1) additions	N <sub>M</sub> <sup>2</sup> + 2NN <sub>M</sub> + 3N multiplications N <sub>M</sub> <sup>2</sup> + 2NN <sub>M</sub> - 2N <sub>M</sub> additions
Produit scalaire $\mathbf{p}^{kT}\mathbf{H}\mathbf{p}^k$	N multiplications N-1 additions	N multiplications N-1 additions
Calcul de $\alpha^k$	1 division	1 division
Calcul de $\mathbf{r}^k$	N multiplications N additions	N multiplications N additions
Calcul de $\mathbf{r}^{kT}\mathbf{r}^k$	N multiplications N-1 additions	N multiplications N-1 additions
Calcul de $\beta^{k+1}$	1 division	1 division
Calcul de $\mathbf{p}^{k+1}$	N multiplications N additions	N multiplications N additions
TOTAL	4NN <sub>M</sub> + 10N - N <sub>M</sub> opérations	2N <sub>M</sub> <sup>2</sup> + 4NN <sub>M</sub> + 11N - 2N <sub>M</sub> opérations

TABLEAU [3.4.2.2] : Nombres d'opérations pour une itération de l'algorithme du gradient conjugué

Nous sommes à présent en mesure de décompter le nombre global d'opérations :

Cases \ Tasks	②	③
Evaluation du second membre	N(N <sub>M</sub> +1)N <sub>H</sub> multiplications NN <sub>M</sub> N <sub>H</sub> additions	N(N <sub>M</sub> +1)N <sub>H</sub> multiplications NN <sub>M</sub> N <sub>H</sub> additions
Résolution itérative	(4NN <sub>M</sub> +10N-N <sub>M</sub> )N <sub>I</sub> N <sub>H</sub> opérations	(2N <sub>M</sub> <sup>2</sup> +4NN <sub>M</sub> +11N-2N <sub>M</sub> )N <sub>I</sub> N <sub>H</sub> opérations
Calcul des accélérations <i>link</i>	2NN <sub>H</sub> divisions NN <sub>M</sub> N <sub>H</sub> multiplications N <sub>M</sub> (N-1)N <sub>H</sub> additions	NN <sub>H</sub> divisions N <sub>M</sub> N <sub>H</sub> (N+N <sub>M</sub> ) multiplications N <sub>M</sub> N <sub>H</sub> (N+N <sub>M</sub> -2) additions
TOTAL	N <sub>H</sub> (4NN <sub>M</sub> N <sub>I</sub> +4NN <sub>M</sub> +10NN <sub>I</sub> -N <sub>M</sub> N <sub>I</sub> +3N-N <sub>M</sub> ) opérations	N <sub>H</sub> (2N <sub>M</sub> <sup>2</sup> N <sub>I</sub> +4NN <sub>M</sub> N <sub>I</sub> +4NN <sub>M</sub> +11NN <sub>I</sub> +2N <sub>M</sub> <sup>2</sup> -2N <sub>M</sub> N <sub>I</sub> +2N-2N <sub>M</sub> ) opérations

TABLEAU [3.4.2.3] : Nombres d'opérations pour l'inversion par la méthode du gradient conjugué

### 3.4.3. Choix d'une méthode

Pour être en mesure de choisir une méthode parmi celle présentées précédemment pour la résolution du problème d'interface impliquant des sous-domaines avec réduction modale, on compare les nombres d'opérations requis par chacune d'entre elles dans des cas particuliers couvrant des plages réalistes de tous les paramètres. On suppose tout d'abord N<sub>M</sub> égal à N. Ils sont généralement du même ordre et N<sub>M</sub> n'est clairement pas le paramètre le plus influent. On propose ensuite de tracer l'évolution du nombre total d'opérations pour N<sub>H</sub> résolutions du problème d'interface en fonction de la dimension N du problème. On donne plusieurs graphes correspondant à des valeurs différentes du couple (N<sub>H</sub>, N<sub>I</sub>). On traite séparément les cas de la réduction linéaire et de la réduction multi-échelles.



Projection modale linéaire

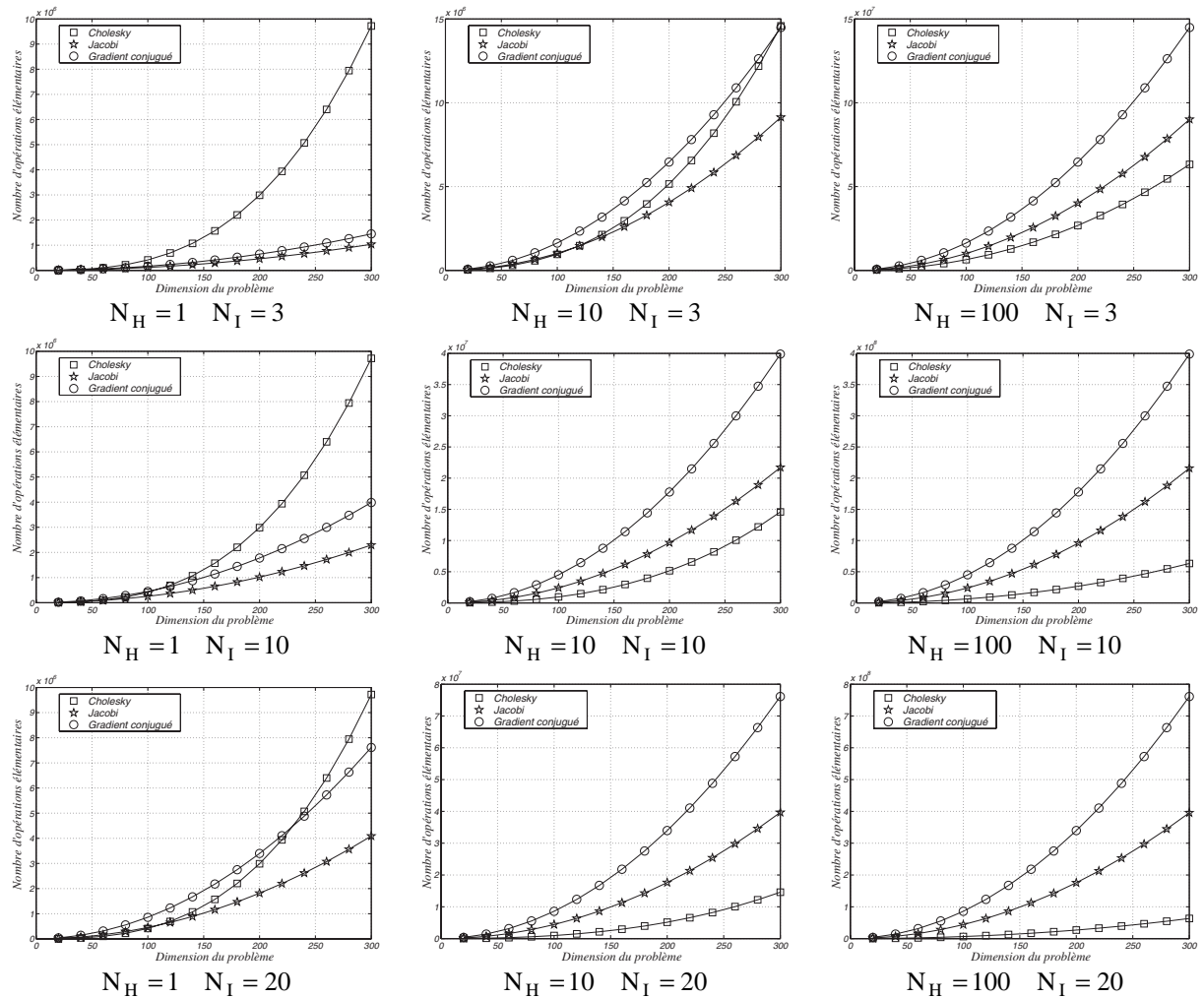
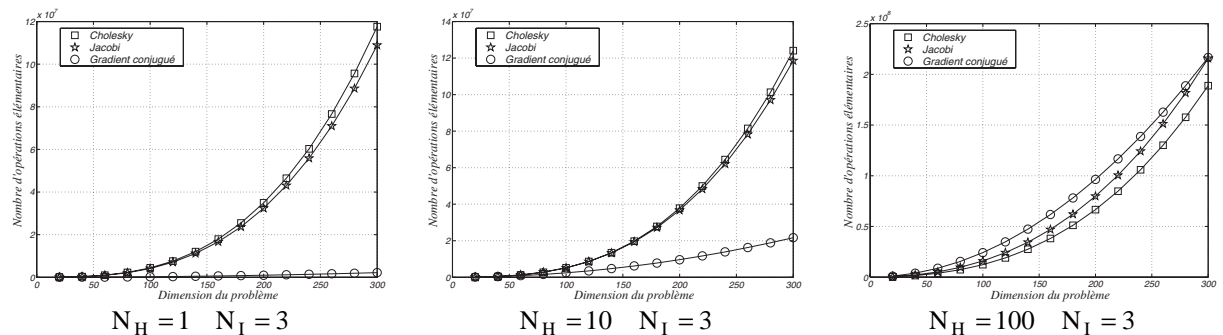


FIGURE [3.4.3.1] : Abaques pour la réduction modale linéaire

Une procédure itérative n'est intéressante dans ce cas que si l'opérateur d'interface doit être factorisé souvent et si le nombre d'itérations pour converger est petit. Comme l'assemblage de l'opérateur lui-même est peu pénalisant car il peut être obtenu à partir de contributions constantes, une par sous-domaine, la méthode directe de Cholesky reste la plus intéressante dans la plupart des cas de valeurs des paramètres  $(N_H, N_I)$ . C'est cette dernière méthode qui est choisie pour les interfaces concernant des sous-domaines avec réduction linéaire dans EUROPLEXUS.

Projection modale multi-échelles



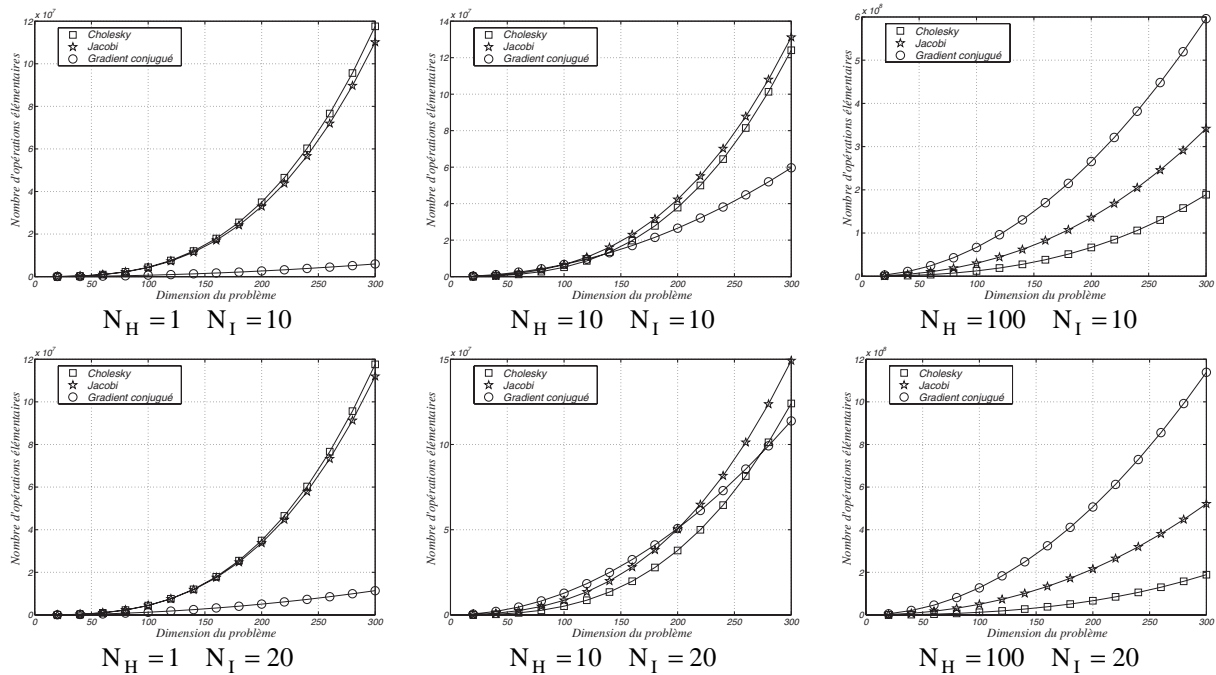


FIGURE [3.4.3.2] : Abaqués pour la réduction modale multi-échelles

Les multiplications matricielles nécessaires au calcul de l'opérateur  $\mathbf{H}$  représentent désormais une étape très coûteuse. Associées au coût de la factorisation, l'inversion directe est fortement pénalisée. A l'exception des cas où le calcul de  $\mathbf{H}$  est rare, ce qui est peu probable compte tenu que  $N_H$  est le rapport des pas de temps entre les sous-domaines et qu'il reste la plupart du temps inférieur à 10, la méthode du gradient conjugué devient très compétitive. C'est particulièrement le cas lorsque la convergence est rapide. Les initialisation et préconditionnement proposés plus haut doivent assurer ce dernier point. La méthode du gradient conjugué est donc choisie pour le traitement du problème d'interface dans EUROPLEXUS lorsque un sous-domaine avec réduction multi-échelles est concerné.

**Remarque :** En ce qui concerne les singularités de l'opérateur de condensation, la méthode du gradient conjugué est capable de gérer de telles difficultés, à condition que l'opérateur final et le préconditionneur présentent les mêmes singularités. Les redondances sont alors identifiées à l'étape de préconditionnement et les itérations ne sont effectuées que sur les multiplicateurs de Lagrange indépendants restants.

### 3.4.4. Jeu de modes particuliers dans le cas de la réduction multi-échelles

Il s'agit de démontrer à présent que le jeu de modes proposés au paragraphe 2.3.2 conserve ses propriétés remarquables lorsqu'il est utilisé avec une réduction multi-échelles, à savoir qu'il conduit à un opérateur de condensation identique à celui obtenu en l'absence de réduction sur les sous-domaines. Les notations et configurations géométriques de références sont celles du paragraphe 2.3.2 pour toute la suite de ce paragraphe.

Désormais, c'est naturellement la base modale locale qui doit être construite selon la méthode présentée au paragraphe 2.3.2.

On s'appuie à nouveau sur la décomposition  $\mathbf{B}$  de la structure modèle, en appliquant une réduction multi-échelles sur le sous-domaine  $2\mathbf{B}$ . Des paramètres de représentation du mouvement de corps rigide et les liaisons associées sont donc ajoutés à la base modale locale. Analysons la réponse d'un tel modèle sur un pas de temps à un chargement d'interface au niveau des degrés de liberté 'éléments finis' (cf. FIGURE [3.4.4.1]). Aucune autre force n'est appliquée. En particulier, on n'a pas de force

interne, comme dans le problème *link* concernant les interfaces à chaque pas de temps de la simulation.

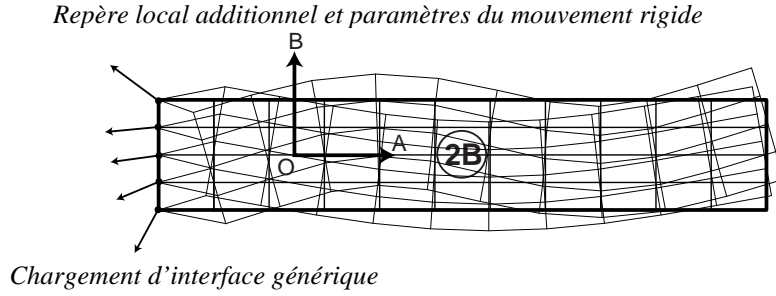


FIGURE [3.4.4.1] : *Chargement d'interface sur le sous-domaine 2B avec réduction multi-échelles*

Les modes de réduction locaux ont des composantes nulles sur les degrés de liberté de l'interface et sont orthogonaux aux modes d'interface locaux "éléments finis" au sens de la masse. Ils ne contribuent donc pas à la réponse de la structure. Par conséquent, les seules inconnues concernées sont les degrés de liberté d'interface locaux et *a priori* les paramètres du mouvement d'ensemble.

En l'absence de réduction, le champ d'accélération en équilibre avec un tel chargement est très simple :

$$\ddot{\mathbf{U}}_i = 0 \quad [3.4.4.1]$$

pour tout nœud  $i$  du sous-domaine 2B à l'exception des nœuds d'interface.

$$\ddot{\mathbf{U}}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \quad [3.4.4.2]$$

pour tout nœud  $i$  de l'interface, avec  $\mathbf{F}_i$  la force nodale correspondante et  $m_i$  la masse nodale correspondante.

Le champ d'accélération projeté peut s'écrire (cf. paragraphe 3.2.1) :

$$\ddot{\mathbf{U}} = \sum_{I \in (O,A,B)} \Phi^I \ddot{\mathbf{U}}^I + \sum_{\substack{i \in \text{modes locaux} \\ \text{étendus}}} \mathbf{P} \Phi^i \ddot{\mathbf{a}}^i + \sum_{\substack{i \in \text{modes d'interface} \\ \text{éléments finis}}} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{U}}_L^i \quad [3.4.4.3]$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice de rotation entre les repères local et global.

Les modes locaux étendus ne contribuent pas, puisqu'ils ont des composantes nulles sur les nœuds d'interface par construction, d'où :

$$\ddot{\mathbf{U}} = \sum_{I \in (O,A,B)} \Phi^I \ddot{\mathbf{U}}^I + \sum_{\substack{i \in \text{modes d'interface} \\ \text{éléments finis}}} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{U}}_L^i \quad [3.4.4.4]$$

Compte tenu des liaisons rigides pour décrire un réel mouvement de corps rigide avec les paramètres  $\{\ddot{\mathbf{U}}^I\}$ , la décomposition [3.4.4.4] est bijective. De plus, si on considère un champ d'accélération

local défini sur les nœuds d'interface par  $\ddot{\mathbf{U}}_L^i = \mathbf{P}^T \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}$ , on recombine exactement le champ

d'accélération éléments finis initial sur tout le sous-domaine. Les accélérations associées au mouvement d'ensemble sont alors nulles. Ceci signifie qu'un chargement d'interface ne crée immédiatement aucun mouvement rigide, juste une déformation locale.

Ecrivons à présent le problème *link* à résoudre entre les sous-domaines 1B et 2B à chaque pas de temps sans la projection sur le sous-domaine 2B :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1^T \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_2 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_1^{n+1} \text{ link} \\ \ddot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \text{ link} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_1^P \dot{\mathbf{U}}_1^{n+1} \text{ free} + \mathbf{C}_2^P \dot{\mathbf{U}}_2^{n+1} \text{ free} \end{bmatrix} \quad [3.4.4.5]$$

Remplacer  $\ddot{\mathbf{U}}_2^{n+1}$  par sa projection sur la base de réduction conduit à :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1^T \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}_2 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_1^{n+1} \text{ link} \\ \Phi_P \hat{\ddot{\mathbf{U}}}_2^{n+1} \text{ link} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_1^P \dot{\mathbf{U}}_1^{n+1} \text{ free} + \mathbf{C}_{P2}^P \hat{\dot{\mathbf{U}}}_2^{n+1} \text{ free} \end{bmatrix} \quad [3.4.4.6]$$

Conformément à l'analyse précédente, seuls les modes d'interfaces locaux sont concernés et la décomposition est bijective, donc  $\Phi_P \hat{\ddot{\mathbf{U}}}_2^{n+1} \text{ link}$  peut être remplacé de manière équivalente par :

$$\bar{\mathbf{P}} \ddot{\mathbf{U}}_{L\ 2\text{link}}^{n+1} = [\mathbf{P} \ddot{\mathbf{U}}_{L\ 2\text{link}_i}^{n+1}] \quad [3.4.4.7]$$

pour les degrés de liberté  $i$  attachés aux nœuds d'interface du sous-domaine 2B.

On obtient un problème équivalent au problème [3.4.4.5] :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & -\mathbf{C}_1^T \\ 0 & \mathbf{M}_2 & -\mathbf{C}_2^T \\ -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_1 & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_1^{n+1} \text{ link} \\ \bar{\mathbf{P}} \ddot{\mathbf{U}}_{L\ 2\text{link}}^{n+1} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{C}_1^P \dot{\mathbf{U}}_1^{n+1} \text{ free} + \mathbf{C}_{P2}^P \hat{\dot{\mathbf{U}}}_2^{n+1} \text{ free} \end{bmatrix} \quad [3.4.4.8]$$

---

**Remarque 1 :** Le problème [3.4.4.8] est strictement équivalent au problème [3.4.4.5] grâce à la nature particulière de la base de projection locale. C'est évidemment faux dans le cas général, comme montré dans le paragraphe 3.4.2 avec les systèmes [3.4.2.1] et [3.4.2.2].

---

La condensation du problème [3.4.4.8] sur les multiplicateurs de Lagrange produit, comme dans le cas de la réduction linéaire, l'opérateur sans projection, dont l'inversion est gratuite.

---

**Remarque 2 :** Identifier en cours de simulation l'utilisation du jeu de modes particuliers présenté dans ce paragraphe, pour passer alors à une résolution du problème d'interface à partir de l'opérateur sans projection, est délicat et inutile. En utilisant ce dernier opérateur pour l'initialisation, la solution finale est obtenue immédiatement, entraînant l'arrêt de l'algorithme à la première itération, sans surcoût.

---

### 3.5. Développement des nouvelles fonctionnalités dans EUROPLEXUS

Contrairement à la projection modale linéaire, qui conduit à un système réduit dont la méthode de résolution est très proche de la méthode initiale, puisque la matrice de masse est diagonale et constante et les matrices de liaisons sont constantes, la réduction multi-échelles demande l'implantation d'outils très spécifiques. Sans entrer dans les détails de la programmation, leur développement soulève des questions algorithmiques très influentes sur le temps d'exécution final de la résolution.

#### 3.5.1. Résolution du problème *free* multi-échelles

Nous avons à résoudre un problème de la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_P & -\bar{\mathbf{C}}_R^{n+1T} \\ -\bar{\mathbf{C}}_R^{n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{\mathbf{U}}}^{n+1} \\ \Lambda_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext } P} - \mathbf{K}_L \hat{\mathbf{U}}_L \\ \mathbf{S}^{n+1} \end{bmatrix} \left( - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{gyr}} \left( \dot{\hat{\mathbf{U}}}_{\text{explicite}}^{n+1} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad [3.5.1.1]$$

où  $\dot{\hat{\mathbf{U}}}_{\text{explicite}}^{n+1}$  est le représentant explicite pur de la vitesse évoqué au paragraphe 3.2.5,

$$\bar{\mathbf{C}}_R^{n+1} \ddot{\hat{\mathbf{U}}}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_R^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_E^{n+1} \\ \ddot{\hat{\mathbf{U}}}_V^{n+1} \end{bmatrix}, \text{ car les liaisons rigides ne portent que sur les degrés de liberté}$$

décrivant le mouvement d'ensemble.

Les parenthèses autour du terme des forces gyroscopiques dans l'équation [3.5.1.1] signifient que ce terme peut éventuellement être négligé.

On omet dans la suite de ce paragraphe les exposants  $n+1$  pour ne pas alourdir les écritures.

#### *Actualisation des termes dépendant de la rotation d'ensemble*

Les matrices  $\mathbf{M}_P$  et  $\mathbf{K}_L$  dépendent linéairement de la matrice de rotation  $\mathbf{P}$  entre les repères local et global sur le sous-domaine réduit. Plus précisément, la matrice  $\mathbf{M}_P$  a la structure suivante :

$$\mathbf{M}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_E & \mathbf{M}_C^T \\ \mathbf{M}_C & \mathbf{M}_V \end{bmatrix} \quad [3.5.1.2]$$

où  $\mathbf{M}_E = \Phi_E^T \mathbf{M} \Phi_E$  est la matrice de masse associée au mouvement de corps rigide,

$\mathbf{M}_V = \Phi_L^T \mathbf{M} \Phi_L$  est la matrice de masse associée à la vibration locale,

$\mathbf{M}_C = (\mathbf{P} \Phi_L)^T \mathbf{M} \Phi_E$  est la matrice de couplage en masse entre les mouvements d'ensemble et de vibration,

$\mathbf{M}$  est la matrice de masse éléments finis sur le sous-domaine,

$\Phi_E$  est la famille des modes d'ensemble,

$\Phi_L$  est la famille des modes locaux,

$\mathbf{P} \Phi_L$  est la famille des modes locaux exprimés dans les coordonnées globales grâce à la matrice  $\mathbf{P}$ .

Seule la matrice  $\mathbf{M}_C$  est dépendante de la matrice de rotation. Pour éviter de réaliser une projection coûteuse de la matrice de masse  $\mathbf{M}$  à chaque pas de temps, on sépare  $\mathbf{M}_C$  en 9 contributions (en 3D, 4 en 2D), une contribution par terme de la matrice de rotation. On écrit donc :

$$\mathbf{M}_C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{P}_{ij} \mathbf{M}_{Cij} \quad [3.5.1.3]$$

$$\text{où } \mathbf{M}_{Cij} = (\mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\Phi}_L)^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_E,$$

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \delta_{1j} & \delta_{1i} \delta_{2j} & \delta_{1i} \delta_{3j} \\ \delta_{2i} \delta_{1j} & \delta_{2i} \delta_{2j} & \delta_{2i} \delta_{3j} \\ \delta_{3i} \delta_{1j} & \delta_{3i} \delta_{2j} & \delta_{3i} \delta_{3j} \end{bmatrix}.$$

Les contributions  $\mathbf{M}_{Cij}$  sont calculées en prétraitement et stockées. La mise à jour de la matrice  $\mathbf{M}_P$  est alors extrêmement rapide.

On procède de même pour l'actualisation de la matrice  $\mathbf{K}_L$ , dont la forme est la suivante :

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_C \\ \mathbf{K}_V \end{bmatrix} \quad [3.5.1.4]$$

où  $\mathbf{K}_C = (\mathbf{P}^T \boldsymbol{\Phi}_E)^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_L$  est la matrice de couplage en raideur entre les modes d'ensemble et les modes de vibration,

$\mathbf{K}_V = \boldsymbol{\Phi}_L^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_L$  est la matrice de raideur associée à la vibration locale,

$\mathbf{K}$  est la matrice de raideur dans le repère local,

$\mathbf{P}^T \boldsymbol{\Phi}_E$  est la famille des modes d'ensemble exprimés dans les coordonnées locales grâce à la matrice  $\mathbf{P}^T$ .

Seule la matrice  $\mathbf{K}_C$  est à mettre à jour et on l'écrit pour cela :

$$\mathbf{K}_C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{P}_{ij} \mathbf{K}_{Cij} \quad [3.5.1.5]$$

$$\text{où } \mathbf{K}_{Cij} = (\mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\Phi}_E)^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_L.$$

On calcule à nouveau en prétraitement les matrices  $\mathbf{K}_{Cij}$ .

Le vecteur des forces gyroscopiques  $\mathbf{F}_{\text{gyr}}$  doit également être assemblé à chaque pas de temps. Son expression est :

$$\mathbf{F}_{\text{gyr}} = 2 \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\Phi}_P)^T \boldsymbol{\Xi} \dot{\hat{\mathbf{U}}}_L d\Omega \quad [3.5.1.6]$$

$$\text{où } \boldsymbol{\Xi} = \left\{ \left[ \dot{\mathbf{P}} \boldsymbol{\Phi}_L^i \right] \right\}.$$

La dérivée de la matrice de rotation  $\dot{\mathbf{P}}$  et les vitesses généralisées  $\dot{\hat{\mathbf{U}}}_L$  sont explicites pour le calcul de  $\mathbf{F}_{\text{gyr}}$  conformément aux hypothèses du paragraphe 3.2.5.

On souhaite ne recourir à aucune opération élémentaire sur un sous-domaine réduit, pour conserver pleinement les avantages de la réduction. Par conséquent, on écrit  $\mathbf{F}_{\text{gyr}}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{gyr}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \dot{\mathbf{P}}_{ij} \mathbf{G}_{ij} \dot{\hat{\mathbf{U}}}_L \quad [3.5.1.7]$$

$$\text{où } \mathbf{G}_{ij} = \Phi_P^T \mathbf{M} (\Gamma_{ij} \Phi_L).$$

Une fois encore, les matrices  $\mathbf{G}_{ij}$  sont calculées en prétraitement et aucun recours aux éléments n'est nécessaire pour obtenir  $\mathbf{F}_{\text{gyr}}$ .

#### Calcul des accélérations libres généralisées

Le calcul des accélérations libres se fait conjointement avec celui des multiplicateurs de Lagrange associés aux liaisons rigides. Le système à inverser est alors de la structure suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_E & \mathbf{M}_C^T & -\mathbf{C}_R^T \\ \mathbf{M}_C & \mathbf{M}_V & 0 \\ -\mathbf{C}_R & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_E \\ \ddot{\mathbf{U}}_L \\ \Lambda_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_E \\ \mathbf{F}_V \\ \mathbf{S}_R \end{bmatrix} \quad [3.1.5.8]$$

Cette matrice est pleine et son inversion directe à chaque pas peut s'avérer pénalisante. Cependant, la sous-matrice  $\mathbf{M}_V$  est de dimension beaucoup plus grande que les autres et elle est diagonale. Il apparaît alors judicieux de condenser le système sur les accélérations d'ensemble et les multiplicateurs des liaisons rigides. On obtient le système à inverser :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_E - \mathbf{M}_C^T \mathbf{M}_V^{-1} \mathbf{M}_C & -\mathbf{C}_R^T \\ -\mathbf{C}_R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_E \\ \Lambda_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_E - \mathbf{M}_C^T \mathbf{M}_V^{-1} \mathbf{F}_C \\ \mathbf{S}_R \end{bmatrix} \quad [3.1.5.9]$$

Ce système est de dimension très réduite (18 en 3D, 9 en 2D). Son coût de résolution est négligeable. Le produit  $\mathbf{M}_C^T \mathbf{M}_V^{-1} \mathbf{M}_C$  est relativement léger puisque la matrice  $\mathbf{M}_C$  a très peu de lignes (autant que de modes d'ensemble, soit 12 en 3D et 6 en 2D). Il reste ensuite à calculer les accélérations locales par :

$$\ddot{\mathbf{U}}_L = \mathbf{M}_V^{-1} (\mathbf{F}_V - \mathbf{M}_C \ddot{\mathbf{U}}_E) \quad [3.1.5.10]$$

Il s'agit à nouveau d'une étape sans coût de calcul important compte tenu du faible nombre de lignes de  $\mathbf{M}_C$ .

### 3.5.2. Traitement du problème d'interface

Pour deux sous-domaines, dont le premier avec réduction multi-échelles, le problème à résoudre est de la forme suivante (cf. paragraphe 3.3) :

$$\left( \frac{\Delta t_1}{2} [\mathbf{C}_{P1} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{P1} & -\overline{\mathbf{C}}_{R1}^T \\ \overline{\mathbf{C}}_{R1} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{P1}^T \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\Delta t_2}{2} \mathbf{C}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{C}_2^T \right) \Lambda = \mathbf{C}_{P1} \dot{\mathbf{U}}_{1_{\text{free}}}^{n+1} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{U}}_{2_{\text{free}}}^{n+1} \quad [3.5.2.1]$$

Ce problème est résolu par une méthode de gradient conjugué (cf. paragraphe 3.4.3). On ne s'intéresse donc pas au calcul de l'inverse de cet opérateur, mais à l'estimation du résidu, c'est-à-dire au calcul de

l'expression  $\left( \frac{\Delta t_1}{2} [\mathbf{C}_{P1} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{P1} & -\overline{\mathbf{C}}_{R1}^T \\ \overline{\mathbf{C}}_{R1} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{P1}^T \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\Delta t_2}{2} \mathbf{C}_2 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{C}_2^T \right) \Lambda_k$ , où  $\Lambda_k$  est le  $k^{\text{ième}}$  itéré dans

l'algorithme de résolution.

Actualisation de la matrice  $\mathbf{C}_{P1}$  :

La matrice  $\mathbf{C}_{P_1}$  est obtenue comme le produit de la matrice de liaisons de continuité cinématique initiale  $\mathbf{C}_1$  par la base modale généralisée  $\Phi_{P_1}$ . Elle est donc linéairement dépendante de la matrice de rotation sur le sous-domaine 1. On la décompose alors comme précédemment en contributions constantes pour accélérer le processus de mise à jour. Ceci revient à écrire :

$$\mathbf{C}_{P_1} = \mathbf{C}_{E_1} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{P}_{ij} \mathbf{C}_{ij_1} \quad [3.5.2.2]$$

où  $\mathbf{C}_{E_1} = \mathbf{C}_1 \Phi_E$ ,

$$\mathbf{C}_{ij_1} = \mathbf{C}_1 (\mathbf{T}_{ij} \Phi_L)$$

Les notations de l'équation [3.5.2.2] sont identiques à celles du paragraphe 3.5.1.

On ne met pas à jour directement la matrice  $\mathbf{C}_{P_1}$ . On se sert plutôt de la formule [3.5.2.2] lors du calcul du produit de cette matrice par un vecteur. Ainsi, pour un vecteur de déplacement généralisé  $\tilde{\mathbf{U}}$  (pouvant également représenter une vitesse ou une accélération généralisée), on écrit :

$$\mathbf{C}_{P_1} \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{C}_{E_1} \tilde{\mathbf{U}} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{P}_{ij} \mathbf{C}_{ij_1} \tilde{\mathbf{U}} \quad [3.5.2.3]$$

De même, pour un vecteur de forces d'interface  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ , on écrit :

$$\mathbf{C}_{P_1}^T \tilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{C}_{E_1}^T \tilde{\mathbf{\Lambda}} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{P}_{ij} \mathbf{C}_{ij_1}^T \tilde{\mathbf{\Lambda}} \quad [3.5.2.4]$$

#### Evaluation du résidu

Le terme associé au sous-domaine 2 sans projection appliquée ne pose pas de problème. Pour la contribution du sous-domaine 1 avec réduction multi-échelles, on commence par calculer  $\tilde{\mathbf{F}}_k = \mathbf{C}_{P_1}^T \mathbf{\Lambda}_k$  en prenant en compte les considérations de la première partie de ce paragraphe. Il nous faut ensuite calculer :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_k \\ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{Rk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{P_1} & -\overline{\mathbf{C}}_{R_1}^T \\ \overline{\mathbf{C}}_{R_1} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad [3.5.2.5]$$

On peut détailler l'expression [3.5.2.5] pour retrouver la structure du paragraphe précédent :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_{E_k} \\ \tilde{\mathbf{U}}_{L_k} \\ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{R_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_E & \mathbf{M}_C^T & -\mathbf{C}_R^T \\ \mathbf{M}_C & \mathbf{M}_V & 0 \\ -\mathbf{C}_R & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{E_k} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{V_k} \\ 0 \end{bmatrix} \quad [3.5.2.6]$$

On applique la même condensation que pour le calcul des accélérations libres. L'opérateur condensé est stocké lors du problème *free*, ce qui réduit largement le coût de calcul de l'opération [3.5.2.6].

Il reste alors à calculer la contribution au résidu par  $\tilde{\mathbf{R}}_k = \mathbf{C}_{P_1} \tilde{\mathbf{U}}_k$ , où on s'appuie à nouveau sur la décomposition en fonction des termes de la matrice de rotation présentée auparavant dans ce paragraphe.



### 3.5.3. Structure du fichier d'échange avec le code vibratoire

Il faut enrichir le fichier d'échange présenté au paragraphe 2.3.1 pour transmettre les nouvelles données spécifiques à la réduction multi-échelles :

1. On ajoute aux champs de déplacement correspondant aux modes de vibrations locaux *les 12 champs correspondant aux modes d'ensemble* (6 en 2D).
2. On passe à présent *la matrice de masse associée au mouvement rigide*  $\mathbf{M}_E$  en plus des matrices locales.
3. On ajoute *les 9 matrices de couplage en masse*  $\mathbf{M}_{C_{ij}}$  et *les 9 matrices de couplage en raideur*  $\mathbf{K}_{C_{ij}}$  (4 dans les deux cas en 2D).
4. On prévoit de pouvoir transmettre les matrices  $\mathbf{G}_{ij}$  si on souhaite prendre en compte les forces de couplage gyroscopique.
5. On transmet également *la matrice de rotation initiale*, donnant l'orientation initiale du repère local par rapport au repère global.
6. Pour le calcul du pas de stabilité, on donne toujours *la fréquence maximale du système vibratoire local*.

Pour la réduction multi-échelles, seul le chaînage avec CAST3M est actuellement possible. De nouvelles procédures en GIBIANE permettent le calcul de tous les éléments à donner en entrée à EUROPLEXUS. De nouvelles routines FORTRAN produisent le fichier d'échange à partir des sorties de CAST3M.

### 3.6. Exemples

On donne dans cette partie plusieurs exemples illustrant les nouvelles fonctionnalités d'EUROPLEXUS et justifiant leur intérêt sur des cas de taille industrielle. On s'attache aussi dans chaque situation à vérifier les avantages apportés par notre nouveau solveur pour le problème d'interface.

#### 3.6.1. Massif en rotation en 3D

Considérons un barreau élastique discrétisé à l'aide d'hexaèdres massifs 3D. Le barreau est libre d'attache et soumis à un chargement décrit par la FIGURE [3.6.1.1]. Le mouvement correspondant est composé de translations et de rotations de grande amplitude, associés à des vibrations locales.

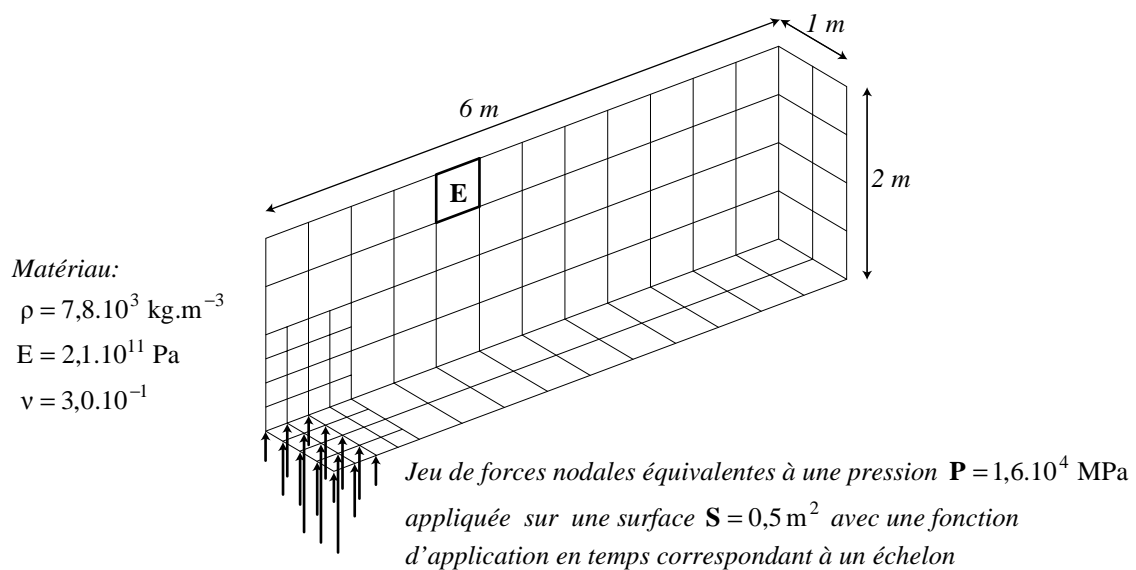


FIGURE [3.6.1.1] : Massif en rotation 3D - Maillage et chargement

La structure est divisée en trois sous-domaines. Le sous-domaine 3 est représenté par un modèle réduit multi-échelle.

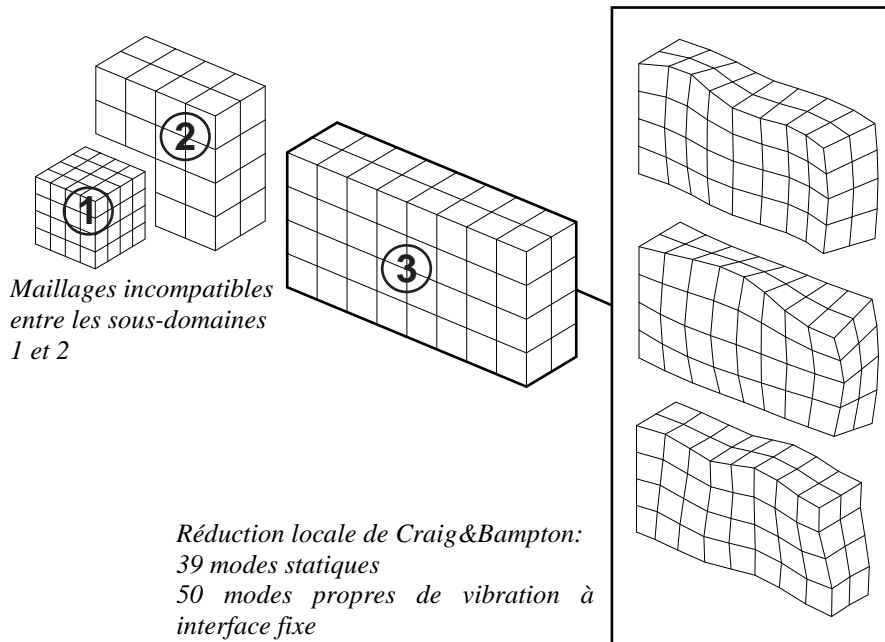


FIGURE [3.6.1.2] : Décomposition en sous-domaines

Le sous-domaine 3 comprend initialement 64 éléments et 135 nœuds, pour un total de 405 degrés de liberté. Après réduction, on conserve 12 inconnues pour le mouvement d'ensemble, 6 multiplicateurs pour les liaisons rigides et 89 coordonnées modales locales, soit 107 degrés de liberté.

	Sous-domaines 3 classique	Sous-domaines 3 réduit
Sous-domaine 1	$3,85 \cdot 10^{-5}$ s	$3,85 \cdot 10^{-5}$ s
Sous-domaine 2	$7,71 \cdot 10^{-5}$ s	$7,71 \cdot 10^{-5}$ s
Sous-domaine 3	$7,71 \cdot 10^{-5}$ s	$8,77 \cdot 10^{-5}$ s

TABLEAU [3.6.1.1] : Pas de temps sur les sous-domaines

Grâce à la troncature des modes hautes fréquences après réduction, on peut augmenter le pas de calcul sur le sous-domaine 3.

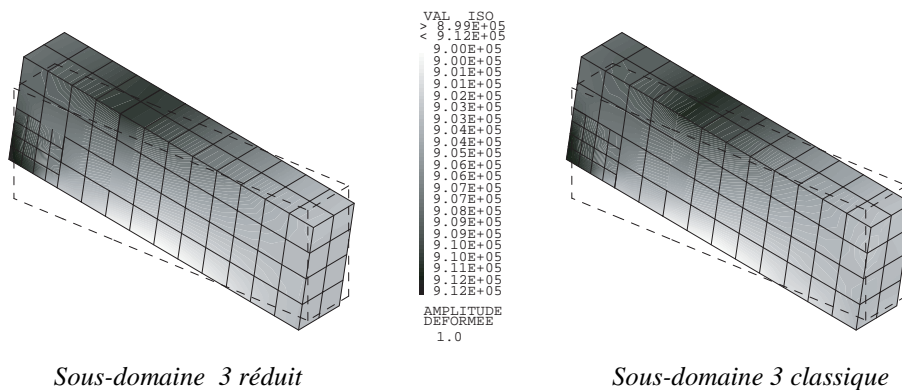


FIGURE [3.6.1.3] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps  $6,0 \cdot 10^{-2}$  s

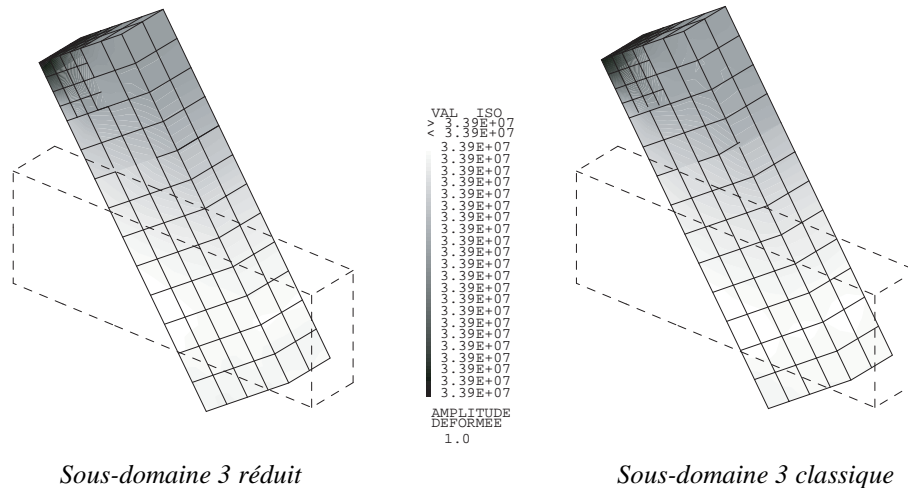


FIGURE [3.6.1.4] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps  $1,5 \cdot 10^{-1}$  s

Les déformées présentées sur les FIGURES [3.6.1.3] et [3.6.1.4] montrent le mouvement d'ensemble géométriquement non-linéaire du barreau. Les résultats obtenus avec et sans réduction sont très similaires. L'égalité des champs de contrainte de Von Mises dans les deux cas indique que les déplacements locaux sont identiques. On confirme cette conclusion en traçant la pression moyenne et la contrainte de Von Mises moyenne en fonction du temps sur l'élément du sous-domaine 3 désigné par **E** sur la FIGURE [3.6.1.1].

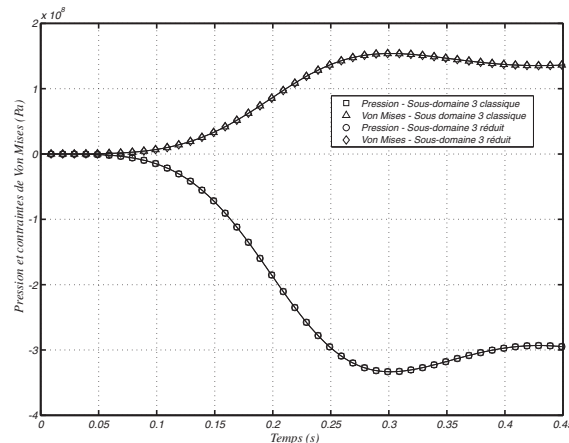


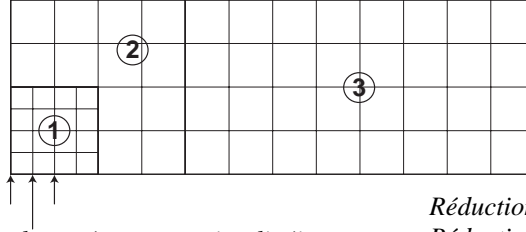
FIGURE [3.6.1.5] : Pression et contrainte de Von Mises dans l'élément **E**

Les courbes avec et sans réduction coïncident parfaitement.

### 3.6.2. Massif en rotation en 2D déformations planes

Cet exemple est très voisin du précédent. On reprend une géométrie similaire, modélisée cette fois-ci en 2D, avec l'hypothèse des déformations planes.

Maillages incompatibles entre les sous-domaines 1 et 2



Jeu de forces nodales équivalentes à une pression linéique  
 $P = 4,0 \cdot 10^4$  MPa appliquée sur une longueur  $L = 0,5$  m  
 avec une fonction d'application en temps correspondant à un échelon

Réduction modale à deux échelles  
 Réduction locale Craig & Bampton :  
 7 modes statiques  
 18 modes propres à interface fixe

FIGURE [3.6.2.1] : Massif en rotation 2D - Maillage, chargement et sous-domaines

On observe comme auparavant une augmentation du pas de temps critique sur le sous-domaine 3 après réduction.

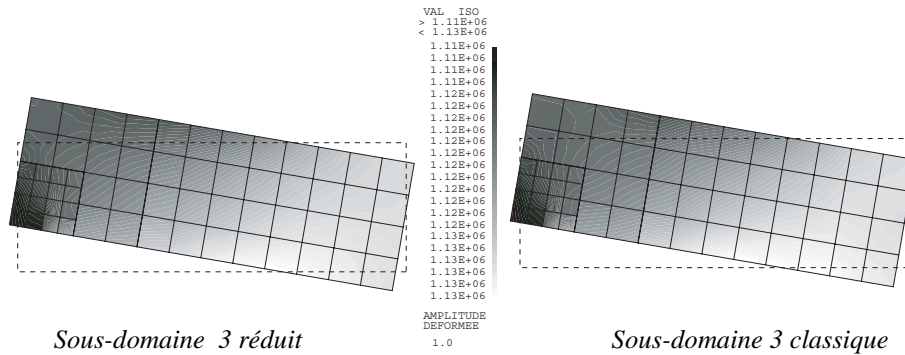


FIGURE [3.6.2.2] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps  $4,0 \cdot 10^{-2}$  s

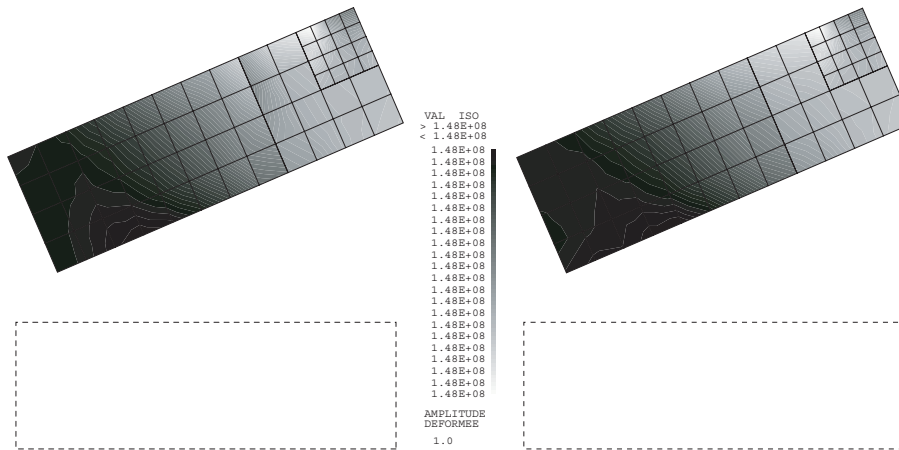


FIGURE [3.6.2.3] : Déformées et contraintes de Von Mises au temps  $1,7 \cdot 10^{-1}$  s

Les FIGURES [3.6.2.2] et [3.6.2.3] conduisent dans le cas bidimensionnel aux mêmes conclusions que dans le cas tridimensionnel. Le mouvement d'ensemble et les déformations locales sont bien retrouvés après projection modale multi-échelles sur le sous-domaine 3.

### 3.6.3. Impact sur un moteur d'avion

La structure est librement inspirée d'un moteur d'avion attaché à une aile. Les conditions aux limites sont proposées sur la FIGURE [3.6.3.1].

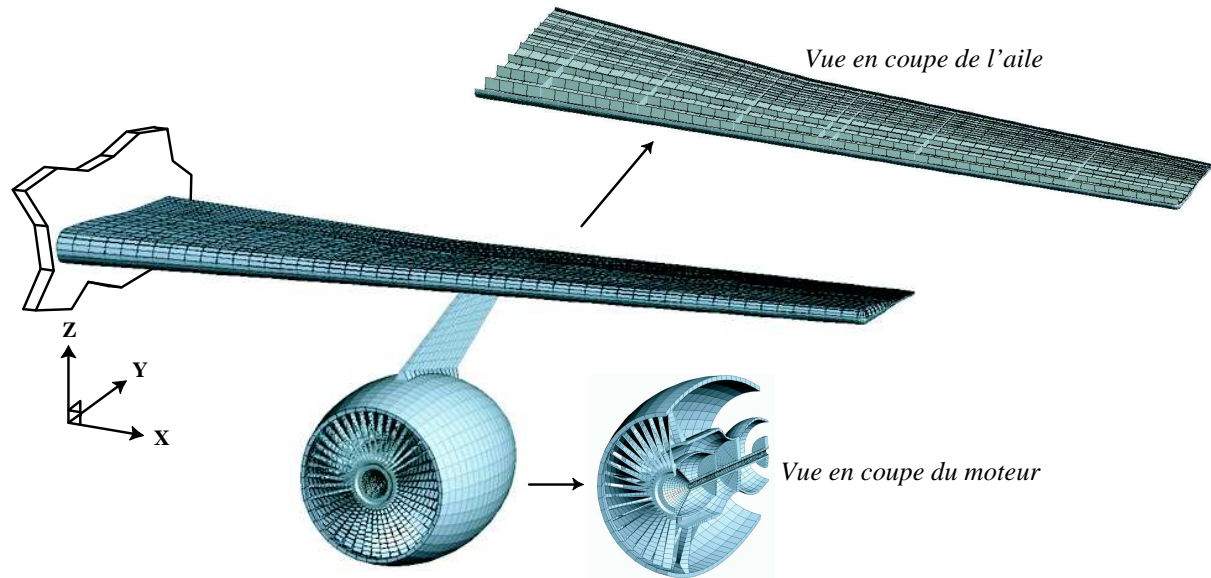


FIGURE [3.6.3.1] : Impact sur un moteur d'avion - Maillage et conditions aux limites

La structure est majoritairement discrétisée à l'aide d'éléments hexaédriques 3D. L'aile a un profil creux et on ajoute à l'intérieur des raidisseurs sous forme de plaques. Le maillage comprend 10727 hexaèdres massifs et 1024 éléments coques quadrangulaires. Ceci conduit à 21570 nœuds à 3 degrés de liberté et 1413 nœuds à 6 degrés de liberté. Le chargement consiste en un impact latéral, illustré sur la FIGURE [3.6.3.2]. Le moteur et l'aile sont constitués d'acier. La jonction entre l'aile et le moteur est rendue volontairement très flexible et est affectée d'un matériau élastique parfaitement plastique.

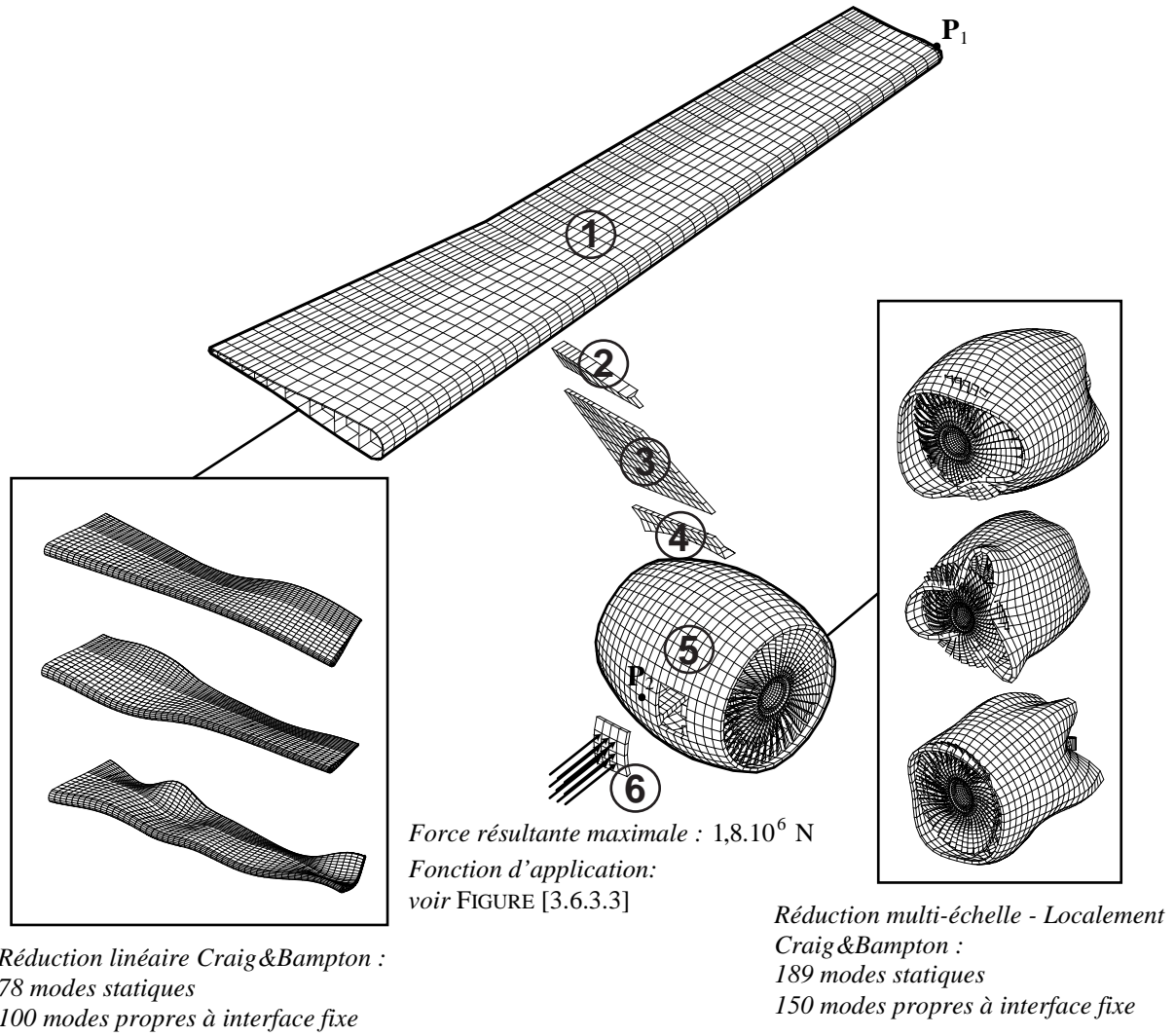


FIGURE [3.6.3.2] : Chargement, sous-domaines et modèles réduits

Sous-domaines 1, 5 et 6	Matériau linéaire élastique $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ $\nu = 3,0 \cdot 10^{-1}$
Sous-domaines 2,3 et 4	Matériau élastique parfaitement plastique - Critère de Von Mises $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ Propriétés élastiques : $E = 4,0 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ $\nu = 3,0 \cdot 10^{-1}$ Limite d'élasticité : $\sigma_{\text{elas}} = 4,0 \cdot 10^8 \text{ Pa}$

TABEAU [3.6.3.1] : Matériaux

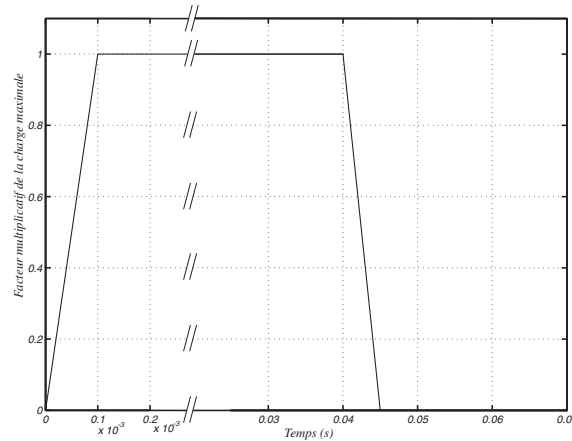


FIGURE [3.6.3.3] : Fonction d'application temporelle du chargement

	Sous-domaines 1 et 5 classiques	Sous-domaines 1 et 5 réduits
Sous-domaine 1	$3,54.10^{-7}$ s	$3,54.10^{-7}$ s
Sous-domaine 2	$5,78.10^{-6}$ s	$5,78.10^{-6}$ s
Sous-domaine 3	$1,32.10^{-5}$ s	$1,32.10^{-5}$ s
Sous-domaine 4	$1,17.10^{-5}$ s	$1,17.10^{-5}$ s
Sous-domaine 5	$4,93.10^{-7}$ s	$7,40.10^{-6}$ s
Sous-domaine 6	$4,81.10^{-6}$ s	$4,81.10^{-6}$ s

TABLEAU [3.6.3.2] : Pas de temps sur les sous-domaines

La simulation de référence réalisée avec l'algorithme multi-domaines sans réduction donne exactement la même réponse dynamique que la simulation mono-domaine. Le gain de temps apporté dans ce cas par la gestion de plusieurs échelles de temps est faible (environ 10%). Ceci s'explique par le fait que le voisinage de l'impact n'a pas été raffiné dans un premier temps, pour ne pas mêler les difficultés. Dès lors, le calcul sur la structure entière n'est pas pénalisé par le pas dû aux petits éléments dans la zone fortement non-linéaire, et le principal gain de l'algorithme multi-échelles en temps en explicite disparaît logiquement.

Pour la comparaison entre les calculs multi-domaines avec et sans réduction, on choisit un temps de simulation final de  $1,0.10^{-1}$  s.

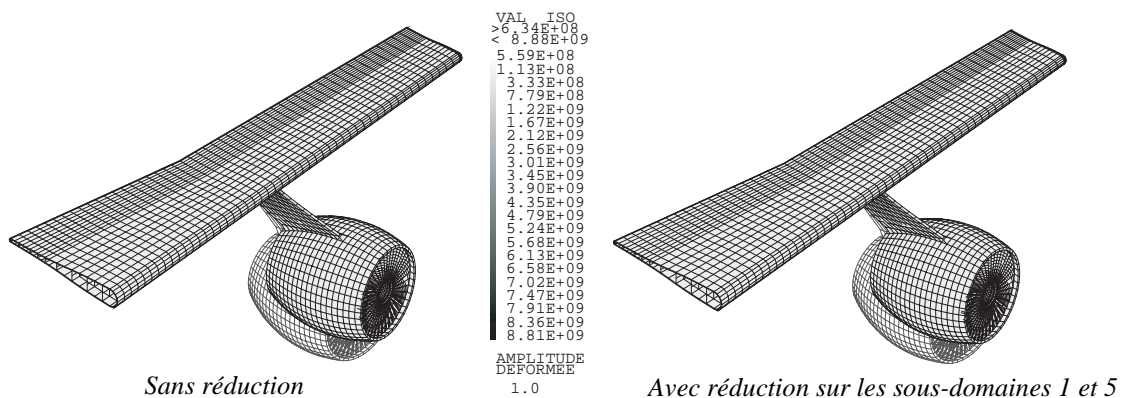


FIGURE [3.6.3.4] : Comparaison des déformées et des contraintes de Von Mises au temps final



Les déformées obtenues dans les deux cas au temps final sont très voisines. Pour comparer des quantités locales au niveau des sous-domaines avec réduction, on considère les éléments  $E_1$  et  $E_2$  du sous-domaine 5, indiqués sur la FIGURE [3.6.3.5]. On s'intéresse également au déplacement des points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  présentés sur les FIGURES [3.6.3.2] et [3.6.3.5]. Au sujet des points  $P_2$  et  $P_3$ , on retient leur déplacement relatif dans la direction  $x$ , en tant qu'indicateur de l'ovalisation du carter du moteur.

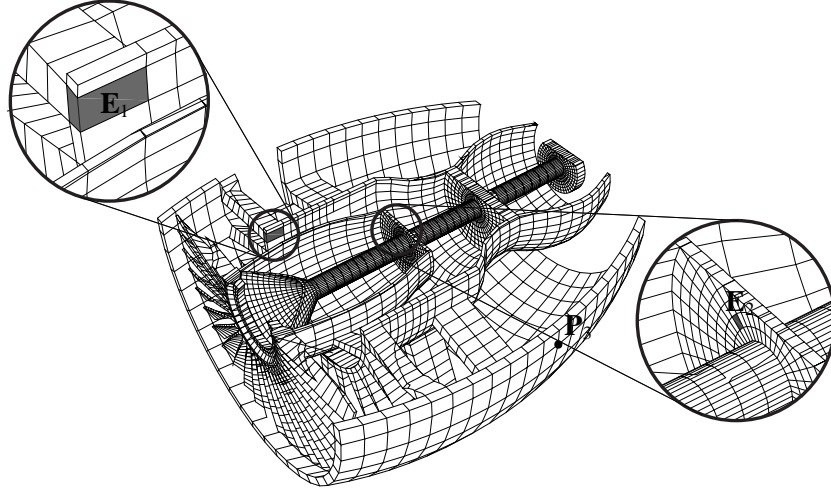


FIGURE [3.6.3.5] : Coupe horizontale du moteur

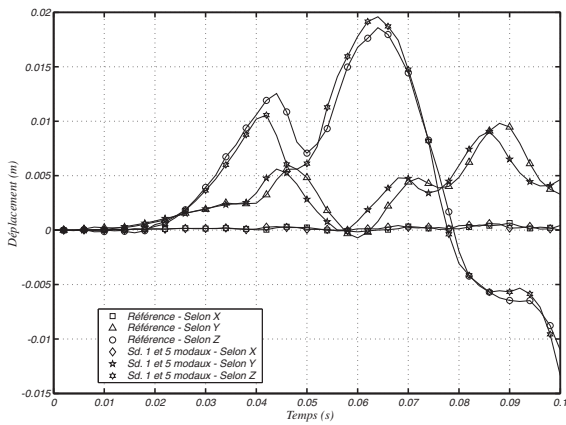


FIGURE [3.6.3.6] : Déplacement au point  $P_1$

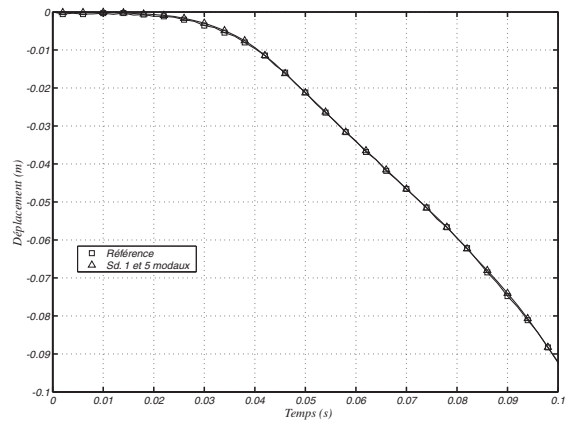


FIGURE [3.6.3.7] : Déplacement relatif selon  $x$  entre les points  $P_2$  et  $P_3$

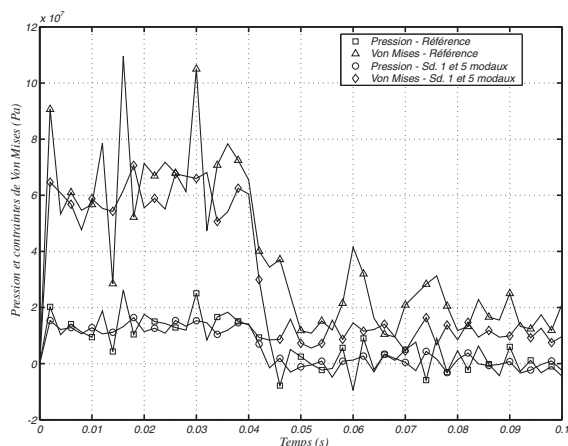


FIGURE [3.6.3.8] : Pression et contraintes de Von Mises pour l'élément  $E_1$

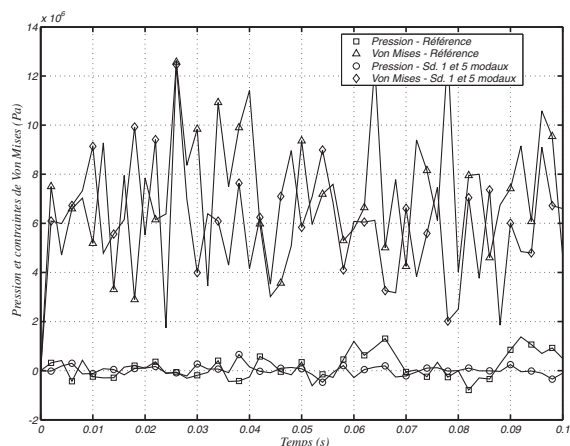


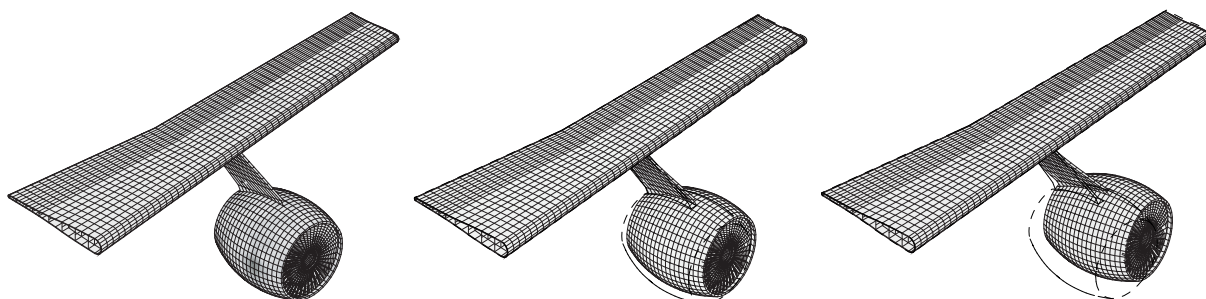
FIGURE [3.6.3.9] : Pression et contraintes de Von Mises pour l'élément  $E_2$

Les déplacements sont bien reproduits avec la réduction locale sur les deux sous-domaines concernés, aussi bien pour la flexion de l'aile que la déformation du carter du moteur. Les FIGURES [3.6.3.8] et [3.6.3.9] montrent que les niveaux de contrainte à l'intérieur du moteur sont également calculés correctement avec la projection multi-échelles. Les oscillations parasites à haute fréquence sont mêmes filtrées grâce à la troncature de la base modale locale.

	Simulation mono-domaine	Simulation multi-domaines	Simulation multi-domaines + réduction locale
Temps CPU	234118 s	214193 s	29896 s
Rapport	100 %	91,5 %	12,8 %

TABLEAU [3.6.3.3] : Temps de calcul pour  $1.10^{-1}$  s de simulation en séquentiel sur SGI Origin 2000

L'utilisation de la réduction modale locale, classique ou multi-échelles, donne ainsi de bons résultats et comme le coût CPU est bien moindre après projection (cf. TABLEAU [3.6.3.3]), on peut prolonger la simulation pour représenter le premier mode d'ébranlement de l'aile, intervenant pour un temps de simulation de  $4.0.10^{-1}$  s. Avec les méthodes classiques, un tel calcul demanderait environ 10 jours sur SGI Origin 2000 en séquentiel, alors que notre approche permet d'obtenir le résultat en 32 heures environ.



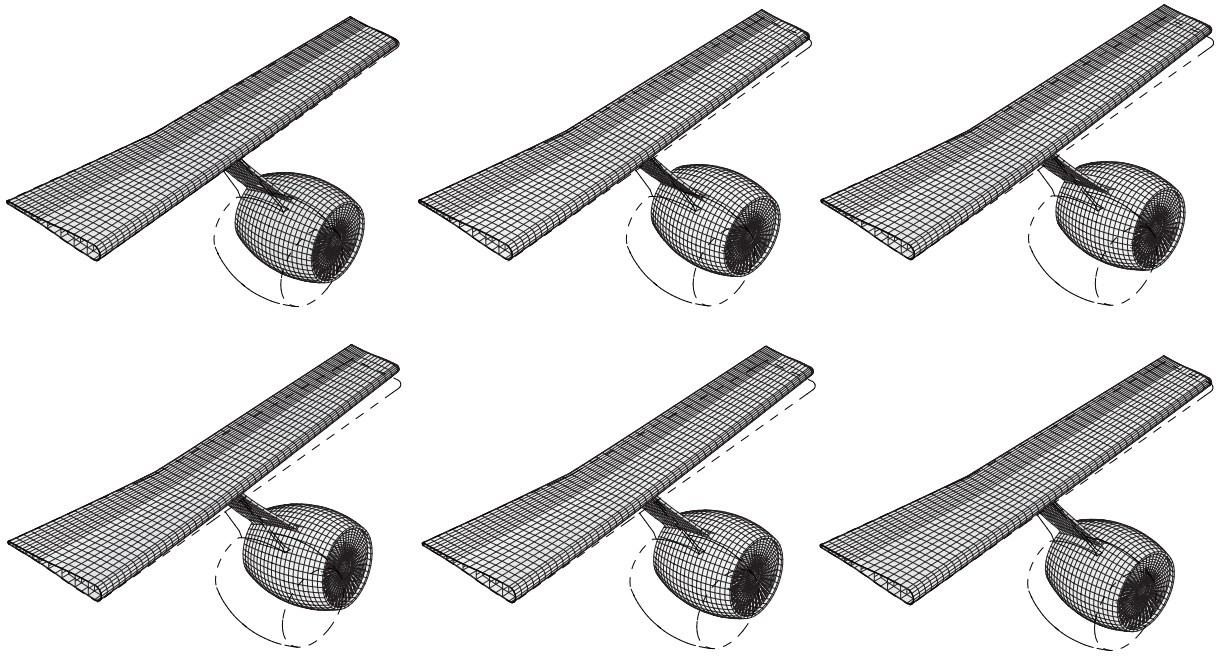


FIGURE [3.6.3.10] : Simulation prolongée et premier mode d'ébranlement de l'aile

### 3.7. Vers un traitement avec réduction des structures flexibles en rotation d'ensemble à grande vitesse

Parmi la généralité des structures flexibles en grande rotation, les pièces d'arbre font l'objet d'études particulières [Rao 1983][Lalanne et Ferraris 1998]. Les sollicitations inertielles dues à la rotation sont fortement susceptibles d'exciter les modes de vibration locaux, ce qui conduit à de difficiles problèmes d'équilibrage. Dans le cadre de la dynamique des structures sous impact, les déformations engendrées par un projectile vont nuire à l'équilibrage initial, introduisant un balourd par le déplacement du centre de masse de la structure. Sans entrer dans le détail de la dynamique des rotors, l'objectif de ce paragraphe est de proposer les grandes lignes de l'application de notre méthode modale multi-échelles au cas des structures ayant un axe propre privilégié de rotation, autour duquel elles tournent à grande vitesse.

#### 3.7.1. Exemple académique : précession d'une toupie symétrique

Il s'agit ici de valider l'application de notre représentation des mouvements rigides au cas difficile des rotations à grande vitesse, par comparaison avec une solution analytique obtenue pour la précession d'une toupie symétrique dans un champ de pesanteur.

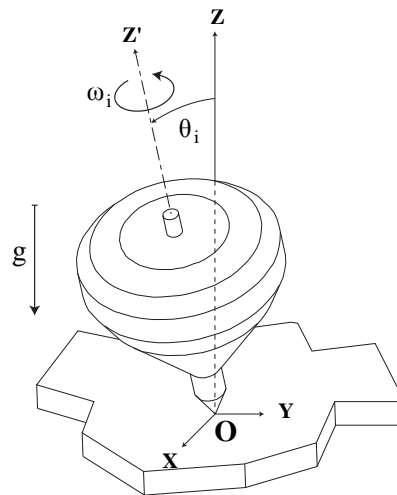


FIGURE [3.7.1.1] : Toupie dans un champ de pesanteur

La toupie est rigide, composée d'acier. Sa hauteur mesure 1,7 m, sa masse  $m$  vaut 6838,5 kg. Le centre de gravité de la toupie se trouve sur son axe à une distance  $z_G$  valant 1,1411 m de l'origine  $O$ . Le module d'inertie  $J$  de la toupie par rapport à l'axe  $Z$  vaut 1108,7 kg.m<sup>2</sup> et celui,  $I$ , par rapport aux axes  $X$  et  $Y$  vaut 9919,9 kg.m<sup>2</sup>. L'accélération  $g$  de la pesanteur vaut 9,81 m.s<sup>-2</sup>. L'axe de la toupie est initialement incliné d'un angle  $\theta_i$  égal à 15° par rapport à la verticale. La vitesse de rotation propre initiale  $\omega_i$  de la toupie est de 100 rad.s<sup>-1</sup>. Sa vitesse de précession initiale est nulle.

On dispose d'une solution analytique donnant le mouvement de la toupie en fonction des conditions initiales [Gié 1978]. Pour cela, on adopte les notations suivantes :  $\theta$  est l'angle d'inclinaison entre l'axe de la toupie et la verticale,  $\psi$  est l'angle de précession entre le plan  $(OZZ')$  et le plan  $(Oxz)$ ,  $\phi$  est l'angle de rotation propre autour de  $OZ'$ . On a  $\phi_i = \omega_i$  et  $\psi_i = 0$ .

On obtient alors trois constantes du mouvement, déterminées par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} C_1 &= J(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \\ C_2 &= (I \sin^2 \theta + J \cos^2 \theta) \dot{\psi} + J \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned} \quad [3.7.1.1]$$

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(C_2 - C_1 \cos \theta)^2}{I \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{J} + mgz_G \cos \theta$$

où E est l'énergie mécanique de la toupie.

Dans notre cas, les constantes  $C_1$  et  $C_2$  valent respectivement  $1,1087 \cdot 10^5$  SI et  $1,0709 \cdot 10^5$  SI. L'énergie E a pour valeur  $5,6174 \cdot 10^6$  J. Le domaine admissible pour l'inclinaison de la toupie est donné par :

$$E - \frac{1}{2} \frac{(C_2 - C_1 \cos \theta)^2}{I \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{J} + mgz_G \cos \theta = E - F(\theta) = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 > 0 \quad [3.7.1.2]$$

La fonction  $F(\theta)$  admet un minimum sur  $[0, \pi]$  et est infinie au bord de l'intervalle [Gié 1978]. On résout alors graphiquement l'inéquation [3.7.1.2] :

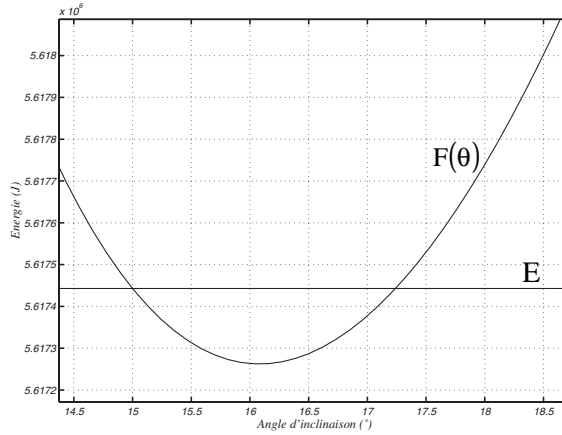


FIGURE [3.7.1.2] : Résolution graphique

On en déduit alors que l'inclinaison de la toupie est comprise entre deux valeurs,  $15^\circ$  et environ  $17,3^\circ$  respectivement. On retrouve logiquement la valeur initiale comme borne inférieure. L'énergie est alors maximale.

On peut sortir des équations [3.7.1.1] la vitesse de précession  $\dot{\psi}$  :

$$\dot{\psi} = \frac{C_2 - C_1 \cos \theta}{I \sin^2 \theta} \quad [3.7.1.3]$$

Or, on a :

$$C_2 = J \omega_i \cos \theta_i = C_1 \cos \theta_i \quad [3.7.1.4]$$

On en déduit que la vitesse de précession est nulle pour  $\theta = \theta_i$  tout au long de la simulation. Ceci se traduit par des rebroussements sur la trajectoire du sommet de la toupie à chaque fois que l'inclinaison atteint sa limite inférieure.

On mène alors un calcul à partir d'un modèle discrétisé par éléments finis de la toupie. On utilise la projection modale introduite au paragraphe 3.2, en se limitant aux modes décrivant le mouvement d'ensemble. Les seules inconnues sont donc le déplacements des 4 points du repère local. On représente la trajectoire du sommet de la toupie en fonction du temps sur la FIGURE [3.7.1.3].

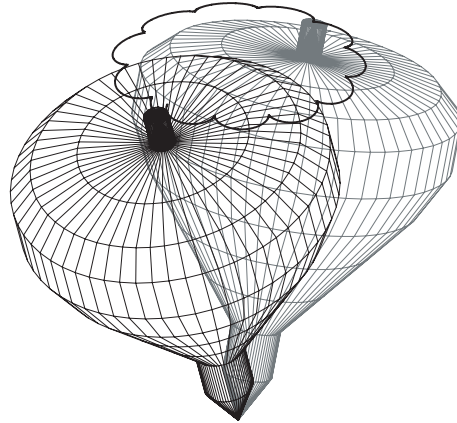


FIGURE [3.7.1.3] : Trajectoire du sommet de la toupie obtenue par le calcul

Les résultats de calcul appellent plusieurs remarques :

1. On vérifie l'absence d'influence des liaisons rigides sur la stabilité de l'intégration temporelle affirmée au paragraphe 3.2.4. Quel que soit le pas de temps utilisé, aucune divergence numérique n'est rencontrée.
2. On est capable de reproduire la trajectoire théorique du sommet de la toupie. On observe les rebroussements attendus et l'inclinaison varie bien entre  $15^\circ$  et  $17,3^\circ$ .
3. Cette trajectoire n'est obtenue de manière satisfaisante que pour un pas de temps réduit, de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-6}$  s. Pour des pas plus grands, on retrouve la trajectoire avec les rebroussements mais les bornes de l'inclinaison augmentent progressivement, d'autant plus vite que le pas est plus grand. Il s'agit ici d'une conséquence de la prise en compte approchée des liaisons rigides pour permettre une résolution explicite (cf. paragraphe 3.2.3). L'approximation entraîne une dissipation d'énergie qui augmente avec l'erreur commise, donc avec la taille du pas de temps. Le mouvement de la toupie s'amortit et elle s'incline logiquement. Ce phénomène est négligeable pour les premiers tours de précession de la toupie avec un pas suffisamment petit, ce qui correspond à des temps de simulation bien supérieurs à ceux habituellement rencontrés en dynamique explicite (il faut 2 s environ pour un tour autour de l'axe  $Oz$  dans notre exemple).

Pour terminer ce paragraphe, nous pouvons dire que le traitement de systèmes rigides en rotation à grande vitesse est possible avec notre approche. L'ordre de grandeur des pas de temps à utiliser pour pouvoir négliger la dissipation numérique due aux liaisons rigides est compatible avec les pas de stabilité rencontrés dans tous nos exemples en présence de flexibilité. On est alors à même de représenter des phénomènes gyroscopiques complexes, tels que la précession.

---

**Remarque :** *La mise en évidence de la dissipation issue des liaisons rigides sur l'exemple de la toupie est à attribuer à la grande taille des pas qu'il est possible d'utiliser et également aux effets de la rotation propre à grande vitesse. Cette vitesse met rapidement en défaut l'approximation réalisée sur les distances entre les points du repère local, ce qu'il est très difficile d'observer à des vitesses réduites, comme c'était le cas dans les exemples précédents.*

---

### 3.7.2. Rotation propre forcée à grande vitesse

Pour identifier clairement la rotation propre d'une structure, on reprend le paramétrage de son orientation dans l'espace par les angles d'Euler RTL, présenté au paragraphe 3.1.2. Elle est alors donnée par l'angle de Lacet.

Nous n'avons pas fait d'hypothèse relative à la vitesse de rotation pour écrire le formalisme de réduction en présence de rotations d'ensemble d'amplitude finie. Il est donc transposable au cas des

pièces d'arbre. Cependant, l'hypothèse d'une rotation propre de vitesse imposée par un moteur très supérieure à celle des autres rotations rigides conduit à une simplification intéressante de la formulation. En effet, l'inconvénient majeur subsistant dans notre approche est la nature toujours implicite des forces gyroscopiques.

Les forces gyroscopiques sont issues du couplage entre la vitesse de rotation d'ensemble et la vitesse vibratoire apparaissant dans l'accélération après la décomposition du déplacement en une composante d'ensemble et une composante locale (cf. paragraphe 3.1.3). Ce terme d'accélération couplé s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{u}}_{\text{gyr}} = 2\mathbf{P}\tilde{\mathbf{S}}_E\dot{\mathbf{u}}_L \quad [3.7.2.1]$$

où on a introduit le *spin*  $\mathbf{S}_E$  associé à la rotation rigide.

On peut aisément écrire l'expression du *spin*  $\mathbf{S}_E$  avec les angles d'Euler. Il vient (se reporter à la FIGURE [3.1.2.2] pour les notations) :

$$\mathbf{S}_E = \begin{bmatrix} \dot{\phi} + \sin \theta \dot{\psi} \\ -\cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \cos \theta \dot{\psi} \\ \sin \phi \dot{\theta} + \cos \phi \cos \theta \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad [3.7.2.2]$$

L'hypothèse d'une rotation propre prépondérante et connue se traduit alors par :

$$\begin{cases} \dot{\psi} \gg \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \gg \dot{\theta} \\ \dot{\psi} = \omega_d \end{cases} \quad [3.7.2.3]$$

où  $\omega_d$  est la vitesse du moteur.

On en déduit une expression simplifiée de  $\mathbf{S}_E$  :

$$\mathbf{S}_E \approx \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} = \dot{\psi} \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \omega_d \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [3.7.2.4]$$

Ceci revient à considérer que le vecteur instantané de rotation reste porté par la verticale du repère local et que sa norme est la vitesse de rotation imposée.

Avec le schéma des différences centrées rendant explicite la rotation  $\mathbf{P}$ , les accélérations gyroscopiques dépendent alors linéairement des vitesses de vibration locale au moment de la résolution de l'équilibre dynamique au niveau d'un pas de temps. On introduit alors la matrice de couplage gyroscopique  $\mathbf{C}_{\text{gyr}}$  pour exprimer les forces gyroscopiques  $\mathbf{F}_{\text{gyr}}$  en fonction des inconnues des vitesses modales locales :

$$\mathbf{F}_{\text{gyr}} = \mathbf{C}_{\text{gyr}} \dot{\mathbf{U}}_L \quad [3.7.2.5]$$

$$\text{où } \mathbf{C}_{\text{gyr}_{ij}} = \int_{\Omega} 2\rho \phi_L^i \mathbf{P} \tilde{\mathbf{S}}_E \phi_L^j d\Omega$$

La résolution de l'équilibre [3.2.3.13] devient alors totalement explicite, sans hypothèse supplémentaire sur les forces gyroscopiques.

**Remarque :** La matrice  $\mathbf{C}_{\text{gyr}}$  est antisymétrique. La résolution explicite de l'équilibre [3.2.3.13] doit donc s'accompagner d'un solveur capable de gérer cette difficulté. Elle se retrouve également au niveau du problème d'interface puisque l'opérateur de condensation est également non-symétrique.

Prise en compte de la condition aux limites de rotation propre imposée

Le paramétrage des rotations rigides par les angles d'Euler offre une mise en évidence aisée de la rotation propre. Il s'agit à présent de faire le lien avec le paramétrage des "4 masses". Pour cela, on exprime le *spin*  $\mathbf{S}_E$  avec les deux paramétrages, ce qui conduit à :

$$\mathbf{S}_E = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_{12}(\dot{u}_C^1 - \dot{u}_O^1) - \mathbf{P}_{22}(\dot{u}_C^2 - \dot{u}_O^2) - \mathbf{P}_{32}(\dot{u}_C^3 - \dot{u}_O^3) \\ \mathbf{P}_{11}(\dot{u}_C^1 - \dot{u}_O^1) + \mathbf{P}_{21}(\dot{u}_C^2 - \dot{u}_O^2) + \mathbf{P}_{31}(\dot{u}_C^3 - \dot{u}_O^3) \\ -\mathbf{P}_{11}(\dot{u}_B^1 - \dot{u}_O^1) - \mathbf{P}_{21}(\dot{u}_B^2 - \dot{u}_O^2) - \mathbf{P}_{31}(\dot{u}_B^3 - \dot{u}_O^3) \end{bmatrix} \quad [3.7.2.6]$$

On peut alors extraire la vitesse de rotation propre  $\dot{\psi}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = & -\frac{\cos \phi}{\cos \theta} \left[ \mathbf{P}_{11}(\dot{u}_B^1 - \dot{u}_O^1) + \mathbf{P}_{21}(\dot{u}_B^2 - \dot{u}_O^2) + \mathbf{P}_{31}(\dot{u}_B^3 - \dot{u}_O^3) \right] \\ & -\frac{\sin \phi}{\cos \theta} \left[ \mathbf{P}_{11}(\dot{u}_C^1 - \dot{u}_O^1) + \mathbf{P}_{21}(\dot{u}_C^2 - \dot{u}_O^2) + \mathbf{P}_{31}(\dot{u}_C^3 - \dot{u}_O^3) \right] \end{aligned} \quad [3.7.2.7]$$

On obtient la relation de liaison portant sur les vitesses des points du repère local :

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \left[ \mathbf{P}_{11}(\dot{u}_B^1 - \dot{u}_O^1) + \mathbf{P}_{12}(\dot{u}_B^2 - \dot{u}_O^2) + \mathbf{P}_{13}(\dot{u}_B^3 - \dot{u}_O^3) \right] \\ & + \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \left[ \mathbf{P}_{11}(\dot{u}_C^1 - \dot{u}_O^1) + \mathbf{P}_{12}(\dot{u}_C^2 - \dot{u}_O^2) + \mathbf{P}_{13}(\dot{u}_C^3 - \dot{u}_O^3) \right] = -\omega_d \end{aligned} \quad [3.7.2.8.]$$

On obtient les expressions de  $\cos \phi$ ,  $\sin \phi$  et  $\cos \theta$  en comparant les expressions de la matrice de rotation obtenue avec les deux paramétrages :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sqrt{1 - \mathbf{OA}_3^2} \\ \cos \phi &= \frac{\mathbf{OB}_3}{\sqrt{1 - \mathbf{OA}_3^2}} \\ \sin \phi &= -\frac{\mathbf{OC}_3}{\sqrt{1 - \mathbf{OA}_3^2}} \end{aligned} \quad [3.7.2.9]$$

où  $\mathbf{OA}_3$  est la troisième composante du vecteur  $\mathbf{OA}$  dans le repère global,  
 $\mathbf{OB}_3$  est la troisième composante du vecteur  $\mathbf{OB}$ ,  
 $\mathbf{OC}_3$  est la troisième composante du vecteur  $\mathbf{OC}$ .

On fait l'hypothèse classique avec les angles d'Euler que  $\theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ , donc son cosinus est positif.

On traite la relation [3.7.2.8], linéaire en fonction des vitesses des paramètres du mouvement d'ensemble, par multiplicateur de Lagrange en même temps que les liaisons rigides. Elle s'intègre donc sans problème au formalisme proposé précédemment.



### 3.7.3. Précontrainte

Pour toutes les parties de la structure en rotation rapide, destinées ou non à un traitement sur base réduite, le calcul transitoire est précédé d'une étape de précontrainte. On applique statiquement à la structure sans rotation la charge volumique correspond aux forces d'inertie axifuges dues à la rotation, pour obtenir les états de déformation et de contrainte initiaux avant la perturbation par un chargement transitoire. Pour des structures élancées, on peut obtenir de grands déplacements au moment de la précontrainte, d'où la nécessité d'utiliser un solveur non-linéaire. La calcul de précontrainte peut être mené dans EUROPLEXUS en suivant la méthode de la relaxation dynamique [Underwood 1983] : on introduit après l'application du chargement un amortissement basse fréquence pour dissiper les phénomènes dynamiques et parvenir à un équilibre statique.

Sur les sous-domaines en rotation avec projection modale, les forces internes prennent alors la forme suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{int p}} = \overline{\Phi}_p^T \mathbf{F}_{\text{prec}} + \overline{\Psi}_p^T \mathbf{K} \overline{\Phi}_L \hat{\mathbf{U}}_L \quad [3.7.3.1]$$

où on reprend les notations du paragraphe 3.2.2,

$\mathbf{F}_{\text{prec}}$  est le vecteur des forces internes correspondant à l'état de précontrainte.

Dans le cas de grands déplacements sous l'action des forces centrifuges, la matrice de raideur locale  $\mathbf{K}$  est assemblée sur le maillage déformé. Les modes locaux sont calculés également sur ce maillage déformé. On ajoute à la raideur locale une matrice de rigidité géométrique pour la résolution du problème aux valeurs propres, encasté ou libre sur les interfaces, l'état de référence pour ce problème n'étant pas le repos mais l'état précontraint [Géradin et Rixen 1993].

### 3.7.4. Exemple

On considère une structure modèle dérivée d'un alternateur. Elle est composée d'un rotor couplé à un ventilateur, monté à l'intérieur d'un stator, prenant la forme de deux flasques avec raidisseurs que l'on suppose parfaitement liés (cf. FIGURE 3.7.4.1).

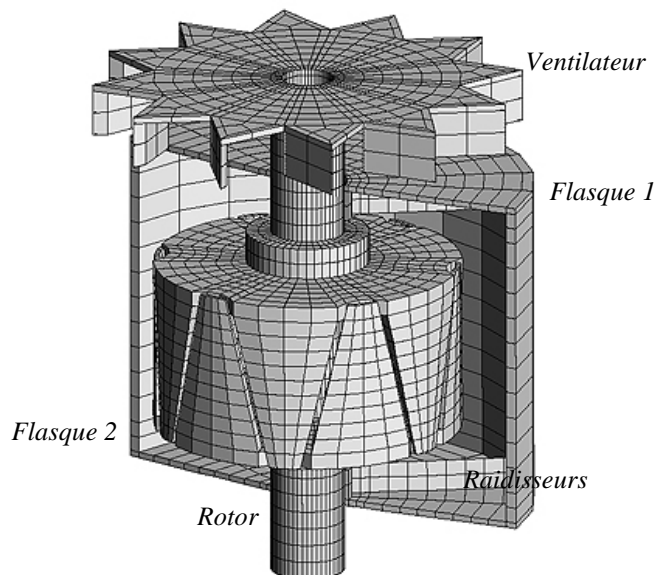


FIGURE [3.7.4.1] : Alternateur

On introduit un jeu et des surfaces de contact au niveau des paliers entre le rotor et le stator. On impose au rotor une vitesse de rotation de  $100 \text{ m.s}^{-1}$  autour de son axe propre. On propose la décomposition de domaine suivante :

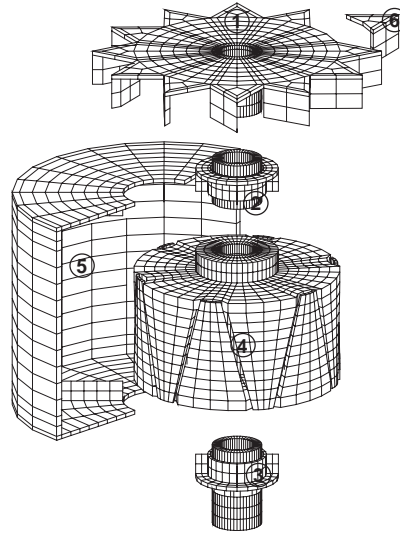


FIGURE [3.7.4.2] : Décomposition en sous-domaines

Les sous-domaines 2 et 3 contiennent les surfaces de contact. Le sous-domaine 4 est destiné à l'application de notre méthode de réduction multi-échelles. Le sous-domaine 5 fait l'objet d'une projection classique. On sépare le ventilateur en deux parties : le sous-domaine 1 et le sous-domaine 6. On souhaite en effet introduire un balourd sur le rotor au cours du calcul, ce qui est fait en coupant les liaisons cinématiques entre les sous-domaines 1 et 6. Le maillage est composé en majorité d'hexaèdres massifs, et de coques quadrangulaires pour les raidisseurs. Il comprend 9192 nœuds à 3 degrés de liberté et 264 nœuds à 6 degrés de liberté. Les sous-domaines 1, 4, 5 et 6 sont modélisés avec un acier élastique. On affecte aux sous-domaines 2 et 3 un acier élastique parfaitement plastique, puisqu'ils sont le lieu des plus fortes contraintes à cause du contact dans les paliers.

---

**Remarque :** La version actuelle d'EUROPLEXUS n'autorise pas les contacts entre deux sous-domaines différents (cf. conclusion) pour des raisons propres à l'algorithme à plusieurs échelles de temps. Pour contourner le problème, deux surfaces en contact doivent être entièrement incluse dans un seul sous-domaine, comme c'est le cas pour les sous-domaines 2 et 3.

---

Comme dans les exemples précédents, les fonctionnalités pour le traitement des forces gyroscopiques n'ayant pas encore été implantées dans EUROPLEXUS, on mène le calcul en les négligeant sur le sous-domaine 4.

On procède à une première étape avec la version multi-domaines classique du programme pour appliquer au rotor la précontrainte due à la rotation. La seconde étape commence avec la rupture des liaisons entre les sous-domaines 1 et 6. On récupère les champs de forces internes de l'étape précédente, on introduit la vitesse de rotation axiale initiale pour le rotor et on applique la condition aux limites de rotation propre imposée sur le sous-domaine 4.

On utilise alors sur les sous-domaines réduits les jeux de modes locaux particuliers introduits au paragraphe 2.2.4. Comme le nombre de nœuds d'interface est grand entre le sous-domaine 5 et les sous-domaines 2 et 3 (112), ainsi qu'entre le sous-domaine 4 et les sous-domaines 2 et 3 (192), cela conduit à un grand nombre de modes additionnels dans les bases locales. La base de réduction locale compte alors 676 modes sur le sous-domaine 4, dont 100 modes propres de vibration étendus. Sur le sous-domaine 5, la base de projection contient 468 modes, dont à nouveau 100 modes de vibration étendus. On remplace sur le sous-domaine 4 un problème à 13392 inconnues par un problème à 694

inconnues, et sur le sous-domaine 5 un problème à 5712 inconnues par un problème à 468 inconnues. On mène la simulation sur  $6.10^{-2}$  s, ce qui correspond environ à un tour du rotor sur son axe.

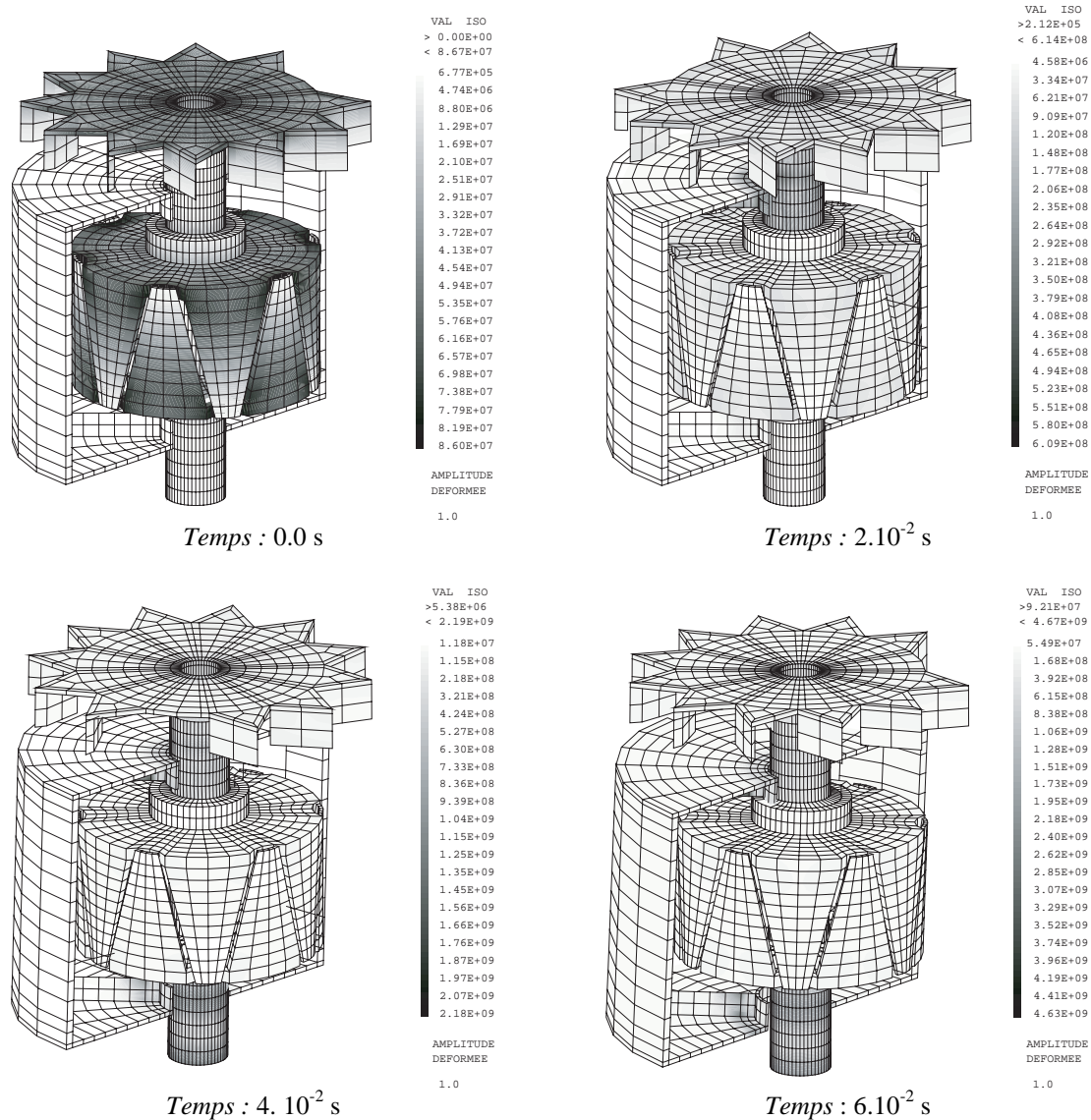


FIGURE [3.7.4.3] : Réponse dynamique de la structure pour un tour du rotor

L'état de contrainte initial correspond aux forces internes équilibrant les forces axifuges. On observe ensuite un désaxement progressif du rotor consécutif au balourd et une localisation des contraintes au voisinage des paliers, à des niveaux qui entraînent la plastification des éléments aussi bien sur le rotor que sur le stator.

Il est inopportun de tirer d'autre conclusion de ce calcul compte tenu du niveau d'imprécision de la modélisation :

1. Aucun blocage n'est appliqué au stator, qui se trouve vers la fin de la simulation animé d'un mouvement rigide peu réaliste.
2. Les conditions de contact sont traitées avec un algorithme simplifié, le seul disponible en multi-domaines dans EUROPLEXUS au moment du calcul. Il en résulte une interpénétration forte entre le rotor et le stator qui s'accroît sur la fin de la simulation.

3. Négliger les efforts gyroscopiques est inadéquat à une telle vitesse de rotation et il s'ensuit un "décollement" progressif des sous-domaines 2 et 3 du sous-domaine 4. Nous revenons sur ce point au paragraphe suivant.

Cet exemple n'est pas représentatif non plus en terme de gain de temps CPU. Le sous-domaine 5 comporte initialement trop peu d'inconnues pour justifier une projection modale. De même, le rapport entre le nombre de degrés de liberté initiaux et le nombre de variables modales sur le sous-domaine 4 est très supérieur à ceux proposés dans les exemples précédents. Les problèmes d'interface sont peu coûteux compte tenu des modes locaux utilisés, mais l'augmentation du nombre de vecteurs de projection augmente le coût du calcul des forces internes modales. Il devient alors nécessaire d'optimiser la multiplication  $\mathbf{K}_L \hat{\mathbf{U}}_L$ , ce qui n'était pas le cas auparavant. Sous sa forme actuelle, le calcul n'est pas accéléré par la projection modale.

Ce cas représente cependant le premier pas vers une application de nos méthodes dans le domaine difficile de la dynamique des rotors. Il illustre la faisabilité de cette démarche, tout en mettant en lumière la nécessité d'améliorations spécifiques.

### 3.7.5. Difficultés spécifiques issues des rotations à grande vitesse

Comme le montre l'exemple précédent, l'application de notre méthode de réduction de modèle aux structures en rotation à grande vitesse reste un domaine de recherche. L'objectif de ce paragraphe est de faire état des difficultés rencontrées au moment de passer de tels calculs sur des cas simples de validation.

#### *Effets gyroscopiques*

La contribution gyroscopique de l'accélération  $\ddot{\mathbf{u}}_{\text{gyr}} = 2\mathbf{P}\tilde{\mathbf{S}}_E\dot{\mathbf{u}}_L$  sur un sous-domaine avec réduction multi-échelles ne peut plus être considérée comme négligeable lorsque l'amplitude du *spin*  $\mathbf{S}_E$  devient grande. On observe un effet dommageable de l'omission du terme des forces gyroscopiques dans l'équilibre au niveau des interfaces avec les autres sous-domaines. On impose que les vitesses soient égales, et on peut sans difficulté vérifier que notre algorithme respecte cette condition. Seulement, l'accélération recombinaisonnée sur les nœuds de l'interface pour le sous-domaine réduit est incomplète. Comme le déplacement est extrapolé sur un pas à partir des vitesses d'une part et des accélérations d'autre part, calculées au pas précédent, il en résulte une dérive dans la continuité sur l'interface. Le déplacement de part et d'autre devient différent et les sous-domaines "décollent" progressivement.

Il est donc impératif dans ce cas d'insérer les forces gyroscopiques dans l'équilibre. Ceci signifie les expliciter et les placer au second membre comme suggéré au paragraphe 3.2.5, ou bien se doter d'un solveur pour les problèmes non-symétriques et profiter de l'approximation relative aux rotations à grande vitesse présentée au paragraphe 3.7.2.

#### *Equilibrage*

Un point crucial pour les structures rotoïdes est leur équilibrage dynamique, qui suppose que le centre de masse se trouve sur l'axe de rotation propre. Les efforts d'inertie axifuges sont alors exactement compensés par les contraintes internes.

Considérons à présent à titre d'exemple illustratif un rotor soumis à un impact, comme le montre la FIGURE [3.7.5.1] :

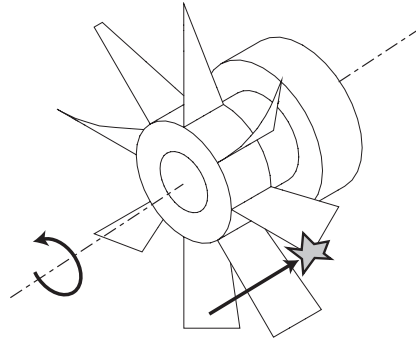


FIGURE [3.7.5.1] : Rotor impacté sur une aube

On admet que les déformations non-linéaires sont localisées au niveau de l'aube impactée. La décomposition en sous-domaines la plus naturelle est alors la suivante :

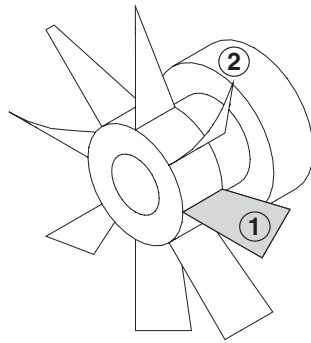


FIGURE [3.7.5.2] : Première décomposition en sous-domaines

La structure est globalement équilibrée autour de son axe de rotation, mais ce n'est pas le cas des sous-domaines individuellement. Même en absence d'impact, le problème *free* sur chacun des sous-domaines n'est pas un problème de rotation pure. Sans projection modale, les effets du déséquilibre des sous-domaines sont localisés au niveau des nœuds d'interface et sont compensés par les accélérations *link*. Les multiplicateurs de Lagrange représentent alors les forces internes disparues au moment de la coupure en deux sous-domaines.

Avec projection modale sur le sous-domaine 2, dans le cas général, on ne peut pas représenter exactement un champ d'accélération localisé sur les nœuds d'interface. Les efforts d'interface calculés à partir des multiplicateurs de Lagrange ne correspondent donc plus exactement aux forces internes avant la décomposition. Il en résulte que sur aucun des sous-domaines les accélérations *link* ne permettent de retrouver un problème de rotation pure. La structure se désaxe progressivement et la solution après impact perd tout sens.

---

**Remarque :** Dans le cas courant de pas de temps différents sur les sous-domaines 1 et 2, les interpolations linéaires effectuées au niveau des vitesses à l'interface nuisent à la symétrie du champ d'accélération obtenu sur la structure entière, même en l'absence de projection modale. On observe alors à nouveau un désaxement du rotor, qui, s'il est moins brutal que dans le cas avec projection, conduit tout de même à une solution erronée.

---

Il est alors conseillé d'avoir un sous-domaine modal auto-équilibré. La FIGURE [3.7.5.3] propose une telle décomposition :

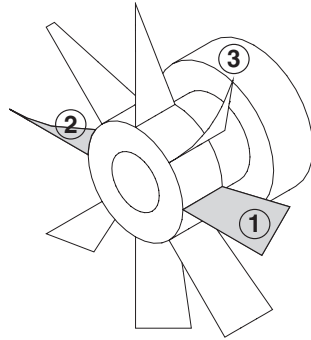


FIGURE [3.7.5.3] : Deuxième décomposition en sous-domaines

Dans ce cas, le problème *free* sur le sous-domaine 3 n'est toujours pas exactement un problème de rotation pure, dans la mesure où la distribution des efforts intérieurs dus à la rotation est différente sur la structure initiale et sur le sous-domaine 1 seul. On obtient bien une rotation d'ensemble équilibrée autour de l'axe privilégiée, mais elle s'accompagne de vibrations locales parasites. On peut à nouveau attribuer ceci à l'impossibilité de reproduire exactement sur les interfaces le champ des forces internes initiales à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Ce cas est plus favorable que le précédent car on n'a pas de désaxement et les vibrations parasites sont d'amplitudes modérées par rapport à celles consécutives à un impact.

Une troisième décomposition en sous-domaines peut tout de même sembler souhaitable, proposée par la FIGURE [3.7.5.4] :

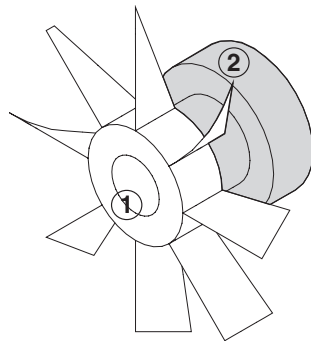


FIGURE [3.7.5.4] : Troisième décomposition en sous-domaines

Les deux sous-domaines sont équilibrés en rotation et les contraintes résultant de leur rotation individuelle se superposent à celles obtenues pour la rotation de la structure entière. Avant l'impact, le problème *free* donne la solution de rotation pure autour de l'axe privilégiée, avec ou sans projection modale. Les multiplicateurs de Lagrange et les accélérations *link* sont nuls. Cette décomposition est tout de même plus coûteuse que la précédente puisque le sous-domaine non-linéaire 1 est plus étendu. Dès lors, plus la partie vibratoire représentée par le sous-domaine 2 devient géométriquement complexe, plus cette dernière décomposition devient intéressante.

Dans le cas où elle s'avérerait trop pénalisante, on peut recourir à la deuxième décomposition, en prenant alors soin de se doter d'un jeu de modes capable de représenter exactement un champ d'accélération localisé au niveau des interfaces. Un tel jeu a été proposé dans les paragraphes 2.2.4 et 3.4.4.

#### *Performances de la méthode multi-domaines avec réduction modale*

Comme on peut le constater sur l'exemple du paragraphe précédent, une finesse de discrétisation satisfaisante d'un rotor implique fréquemment un grand nombre d'éléments de petites tailles au niveau de l'axe. Si on effectue la connexion entre les sous-domaines sur l'axe, comme suggéré par les

questions d'équilibrage, le nombre de relations de liaisons devient rapidement important au niveau des interfaces. Le coût d'inversion du problème condensé devient alors problématique et la projection modale ne conserve son intérêt que dans le cas de structures très complexes. On peut recourir à nouveau aux jeux de modes des paragraphes 2.2.4 et 3.3.4, mais le nombre de modes de réduction augmente alors fortement et le calcul des forces internes modales représente alors un point à optimiser fortement.





## Conclusion

Le formalisme de décomposition de domaines avec plusieurs échelles de temps proposé dans [Gravouil et Combescure 2001] et [Herry et al. 2002] a été étendu dans ce travail doctoral pour permettre le traitement économique des sous-domaines en vibration en projection sur une base de réduction modale. Une approche à deux échelles d'espace permet de prendre en compte de grandes rotations d'ensemble de tels sous-domaines. La structure du nouveau système couplé conserve les propriétés de l'ancien, en terme de pas de temps différents et de connexion de maillages non-coïncidents sur les interfaces. Les nouvelles conditions de stabilité de l'intégration explicite ont fait l'objet d'une étude détaillée.

La validité du formalisme de projection modale locale est démontrée sur de nombreux exemples élémentaires, avec ou sans rotations d'ensemble. Il en est de même pour son efficacité en matière de temps d'exécution des simulations par l'intermédiaire de calculs complexes de taille significative. Un traitement spécifique du problème d'interface en présence de sous-domaines à deux échelles s'est avéré nécessaire et fait l'objet de la définition d'un nouveau solveur fondé sur une méthode de gradient conjugué. L'emploi de la réduction autorise dans des cas réalistes des facteurs d'accélération allant de 5 à 10 par rapport au problème initial à plusieurs domaines et plusieurs pas de temps. Les gains cumulés par rapport aux calculs classiques en dynamique explicite des structures peuvent alors atteindre des facteurs de 30 à 50, voire plus.

Le travail doctoral s'accompagne d'une évolution de la version de développement du code EUROPLEXUS. Les nouvelles entrées pour l'utilisateur et le protocole d'échange avec un code d'analyse vibratoire, chargé de l'élaboration de la base modale, sont clairement mis en évidence.

De nombreux travaux restent toutefois à mener pour parvenir à un outil industriel pleinement utilisable. Sur le plan théorique, il reste à statuer sur la méthode adéquat de traitement de la contribution gyroscopique de l'accélération pour les sous-domaines réduits à deux échelles. Elle ne peut être simplement négligée lorsque la vitesse de rotation est élevée. Expliciter les forces correspondantes demande une expérimentation numérique pour identifier, au moins qualitativement, les influences sur la stabilité de l'intégration. On peut aussi considérer ce point particulier comme une entrée vers un traitement de sous-domaines implicites dans EUROPLEXUS. En effet, seule cette approche garantirait une stabilité parfaitement assurée, sauf à recourir à l'hypothèse de rotation propre prépondérante imposée par un moteur. Elle permettrait également de gérer de manière économique des sous-domaines loin des zones impactées, mais subissant tout de même des non-linéarités, par exemple matérielles, à cause de singularités géométriques ou de surfaces de contact. Ceci n'était pas une direction envisageable à l'origine de ce travail doctoral, aucun opérateur de résolution implicite n'étant disponible dans EUROPLEXUS. Toutefois, l'introduction d'un solveur itératif à base de gradient conjugué rend en théorie accessible la résolution d'un système non-linéaire implicite sans recourir aux opérateurs tangents exigés par la méthode de Newton, la plus couramment rencontrée pour des problèmes de cette nature. Il s'agit alors de s'appuyer sur les techniques de gradient conjugué non-linéaire [Papadrakakis et Ghionis 1986], évoquées dans [Gravouil 2000]. Dans un tel contexte, une gestion efficace de la cohabitation de sous-domaines explicites avec une échelle de temps fine et de sous-domaines implicites avec une échelle de temps plus grossière, mais demandant un processus de résolution itératif, reste à définir, en s'inspirant des travaux proposés à nouveau dans [Gravouil 2000].

Au niveau pratique, la version multi-domaines actuelle d'EUROPLEXUS ne peut répondre à des besoins industriels réels. Au strict niveau des fonctionnalités relatives à la réduction modale, la constitution d'un jeu de données d'entrée reste trop complexe, en particulier la génération du fichier d'échange. Il est probable que doit être ajouté un préprocesseur à l'intérieur même d'EUROPLEXUS pour aider l'utilisateur dans cette démarche, à l'aide d'un nombre réduit de mots-clés et des sorties standard d'un code vibratoire, par exemple juste les modes et les matrices de masse et de raideur, assemblées ou non. Les procédures d'orthogonalisation et de création des objets relatifs à la projection multi-échelles seraient alors menées directement dans EUROPLEXUS. Le recours à un fichier d'échange utilisé lors du calcul dynamique semble à conserver, pour découpler les étapes de traitement des données et de calcul proprement dit. De plus, certains codes vibratoires, dont le *Code\_Aster* et *Samcef*, ont été dotés d'opérateurs permettant de simplifier la génération du fichier. Les utilisateurs de ces programmes doivent pouvoir conserver la méthode de chaînage qui a été spécifiquement développée à leur attention.

Permettre le recours à une projection modale locale pour accélérer les simulations complique également les choix de l'ingénieur. Même en optimisant le chaînage informatique entre EUROPLEXUS et le code vibratoire destiné au calcul des éléments de réduction, il semble souhaitable de disposer d'un indicateur des gains à attendre en matière de temps de calcul, indépendamment de la qualité de la solution. Le maillage et la décomposition en sous-domaines connus, un tel indicateur peut être calculé. On suppose également connu le nombre de modes de réduction, le nombre de modes statiques étant liés aux nombres de degrés de liberté d'interface et le nombre de modes propres au nombre d'inconnues total sur le sous-domaine. L'indicateur doit alors prendre en compte le facteur de réduction du nombre d'inconnues pour le problème *free* sur les sous-domaines réduits, le nombre de liaisons d'interface, la méthode de résolution, multi-échelles ou non. Une solution possible serait d'estimer le rapport des nombres d'opérations avec et sans réduction pour un nombre représentatif de pas de temps. A ce titre, on peut donner un rapport relatif aux sous-domaines réduits seuls et un rapport relatif à la structure entière, incluant le coût de résolution des sous-domaines sans réduction. On renseigne ainsi l'utilisateur sur la pertinence de la réduction locale et sur l'intérêt d'une telle démarche à l'échelle du calcul global. Une réduction efficace sur un sous-domaine intervenant pour moins de 20% dans le coût de résolution total paraît par exemple discutable. Un calcul automatique dans EUROPLEXUS de l'indicateur à partir de la donnée des sous-domaines est une perspective à considérer pour améliorer la convivialité de notre approche.

Il manque enfin dans EUROPLEXUS au moment d'effectuer un calcul avec décomposition de domaine de précieuses fonctionnalités présentes uniquement lors d'une simulation mono-domaine. Il s'agit en particulier de la prise en compte de l'interaction fluide-structure et du contact au niveau des interfaces entre les sous-domaines. Rendre les traitements existants dans EUROPLEXUS [Casadei et al. 2001][Joly 1993][Casadei 2002] compatibles avec l'algorithme à plusieurs échelles de temps pose des problèmes spécifiques. Ils concernent les termes de transport dans le formalisme ALE (*Arbitrary Euler Lagrange* [Soria et Casadei 1997]) et l'identification de la normale structurale pour l'interaction fluide-structure, ainsi que la détection des contacts entre deux sous-domaines ayant des temps locaux différents. On peut également envisager d'intégrer dans le nouveau formalisme la méthode particulière *SPH* [Luzeau et Strub 1998], très appréciée des industriels.

## Bibliographie

[Ambrosio 1996]

**J. A. C. Ambrosio**, *Dynamics of structures undergoing gross motion and nonlinear deformations: a multibody approach*, Computers&Structures, vol. 59(6):1001-1012, 1996.

[Argyris 1982]

**J. Argyris**, *An excursion into large rotations*, Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg., vol. 32:85-155, 1982.

[Argyris et Mlejnek 1991]

**J. Argyris, H.-P. Mlejnek**, *Dynamics of structures*, Texts on Computational Mechanics, Volume V, North Holland, 1991.

[Babuska et Rheinboldt 1979]

**I. Babuska, W. C. Rheinboldt**, *Adaptive approaches and reliability estimators in finite element analysis*, Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg., vol. 17/18:519-540, 1979.

[Balmès 1997]

**E. Balmès**, *Modèle expérimentaux complets et modèles analytiques réduits en dynamique des structures*, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris VI, 1997.

[Barraco et al. 1989]

**A. Barraco, B. Cuny, Ph. Jamet, A. Combescure, M. Lepareux, H. Bung**, *PLEXUS - Software for the numerical analysis of the dynamical behaviour of rigid and flexible mechanisms*, Rapport CEA 89.307, 1989.

[Bathe 1982]

**K.-J. Bathe**, *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series, 1982.

[Belytschko et al. 1979]

**T. Belytschko, H. J. Yen, R. Mullen**, *Mixed methods for time integration*, Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg., vol 17/18:259-275, 1979.

[Belytschko et Hughes 1986]

**T. Belytschko, T. J. R. Hughes**, *Computational methods for transient analysis*, North Holland, 1986.

[Belytschko et Hsieh 1973]

**T. Belytschko, B. J. Hsieh**, *Non linear transient finite element analysis with convected coordinates*, Int. J. for Num. Meth. in Engrg., vol. 7:255-271, 1973.

[Ben Belgacem et al. 1999]

**F. Ben Belgacem, A. Buffa, Y. Maday**, *The mortar element method for the Maxwell's equations in 3D*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, Série II, 1999.

[Ben Dhia 1998]

**H. Ben Dhia**, *Multiscale Mechanical problems: the Arlequin method*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, Série Iib 326:899-904, 1998.

[Bernardi et al. 1990]

**C. Bernardi, Y. Maday, A. T. Patera**, *A new non-conforming approach to domain decomposition - The mortar element method*, Non linear partial differential equations and their applications, Collège de France, Pitman, 1990.

[Betsch et al. 1998]

**P. Betsch, A. Menzel, E. Stein**, *On the parametrization of finite rotations in computational mechanics - A classification of concepts with application to smooth shells*, Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg., vol. 155:273-305, 1998.

[Bousquet et al. 2000]

**N. Bousquet, H. Bung, A. Combescure, M. Lepareux**, *EUROPLEXUS - Une méthode de décomposition de domaines en dynamique explicite*, Rapport interne n°243, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, France, 2000.

[Book 1984]

**W. J. Book**, *Recursive lagrangian dynamics of flexible manipulators arms*, Int. J. of Rob. Res., vol. 3(3):87-101, 1984.

[Brezzi et Fortin 1991]

**F. Brezzi, M. Fortin**, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, 1991.

[Cardona et Gérardin 1991]

**A. Cardona, M. Gérardin**, *Modelling of superelements in mechanism analysis*, Int. J. for Num. Meth. in Engrg., vol. 32:1565:1593, 1991.

[Cardona et Gérardin 1992]

**A. Cardona, M. Gérardin**, *A superelement formulation for mechanism analysis*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg., vol. 100:1-29, 1992.

[Casadei 2002]

**F. Casadei**, *A hierarchic pinball method for contact-impact in fast transient dynamics*, VI Congresso Nazionale della Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale (SIMAI 2002), Chia (Cagliari), Italy, 27-31 mai 2002.

[Casadei et Gabellini 1997]

**F. Casadei, E. Gabellini**, *Implementation of a 3D Coupled Spectral-Element/Finite-Element Solver for Wave Propagation and Soil-Structure Interaction Simulations. Part I - Models*, EUR 17730 EN, 1997.

[Casadei et Gabellini 1998]

**F. Casadei, E. Gabellini**, *Implementation of a 3D Coupled Spectral-Element/Finite-Element Solver for Wave Propagation and Soil-Structure Interaction Simulations. Part II - Numerical examples*, EUR 18051 EN, 1998.

[Casadei et al. 1998]

**F. Casadei, E. Gabellini, F. Maggio, A. Quarteroni**, *Wave propagation in complex media by the mortar approximation*, Fourth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, in "Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation", J. DeSanto Ed., SIAM:314-318, Colorado School of Mines, Golden, Colorado, USA, June 1-5, 1998

[Casadei et al. 2001]

**F. Casadei, J. P. Halleux, A. Sala, F. Chillè**, *Transient fluid-structure interaction algorithm for large industrial applications*, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, vol. 190:3081-3110, 2001.

[Champaney 1996]

**L. Champaney**, *Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles*, Thèse de doctorat, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, France, 1996.

[Champaney et al. 1999]

**L. Champaney, J. Y. Cognard, P. Ladevèze**, *Modular analysis of assemblages of three dimensional structures with unilateral contact conditions*, *Computer & Structures*, vol. 19:249-262, 1999.

[Champaney et Dureisseix 2000]

**L. Champaney, D. Dureisseix**, *Calcul de structures et parallélisme : un bilan et quelques développements récents*, *Mécanique et Industries*, vol. 1:43-60, 2000.

[Charvet Quemin 1990]

**F. Charvet Quemin**, *Analyse modale des robots souples*, Thèse de doctorat, CEA-Université Paris VI, 1990.

[Cheng et Gupta 1989]

**H. Cheng, K. C. Gupta**, *A historical note on finite rotations*, *ASME J. Appl. Mech.*, vol. 56 :139-145, 1989.

[Ciarlet 1990]

**P. G. Ciarlet**, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1990.

[Craig et Bampton 1961]

**R. Craig, M. Bampton**, *Coupling of substructures for dynamic analysis*, *AIAA Journal*, vol. 4: 265-271,332-345,1961-1962.

[Dodds et Lopez 1980]

**J. R. H. Dodds, L. A. Lopez**, *Substructuring in linear and nonlinear analysis*, *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, vol. 15:583-597, 1980.

[Erdman et Sandor 1972]

**A. G. Erdman, G. N. Sandor**, *Kineto-elastodynamics - A review of the state of the art and trends*, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 6:19-33, 1972.

[Fahrat et al. 2000]

**C. Farhat, K. Pierson, M. Lesoinne**, *The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems*, *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 184:333-374, 2000.

[Fahrat et Gérardin 1992]

**C. Fahrat, M. Gérardin**, *A hybrid formulation of a component mode synthesis method*, 33<sup>rd</sup> SDM Conference, AIAA Paper 92-2383-CP, 1992.

[Fahrat et Roux 1994]

**C. Fahrat, F. X. Roux**, *Implicit parallel processing in structural mechanics*, *Computational Mechanics Advances*, vol. 2(1):1-124, North-Holland, 1994.

[Farvaque et al. 1984]

**M. Farvaque, F. Gantenbien, R. J. Gibert, D. Guilbaud**, *Formalisme du programme d'analyse dynamique par sous-structuration OSCAR développé dans le cadre du système CASTEM 2000*, Rapport technique, CEA 1984.

[Flanagan et Belytschko 1981]

**D. P. Flanagan, T. Belytschko**, *A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control*, Int. J. for Num. Meth. in Engrg., vol. 17:679-706, 1981.

[Flanagan et Taylor 1987]

**D. P. Flanagan, L. M. Taylor**, *An accurate numerical algorithm for stress integration with finite rotations*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg., vol. 62:305-320, 1987.

[Fortune 1992]

**S. Fortune**, *Voronoi diagrams and delaunay triangulations*, Computing in Euclidian Geometry, eds Ding-Zhu Du and Frank Hwang, Lecture Note Series on Computing, vol. 1:193-233, World Scientific, Singapore, 1992.

[Friberg 1991]

**O. Friberg**, *A method for selecting deformation modes in flexible multibody dynamics*, Int. J. for Num. Meth. In Engrg., vol. 32(8):1637-1656, 1991.

[Gebler 1987]

**B. Gebler**, *Feed-forward control strategy for an industrial robot with elastic links and joints*, IEEE Trans., vol. 3:923-928, 1987.

[Géradin et al. 1988]

**M. Géradin, K. C. Park, A. Cardona**, *On the representation of finite rotations in spatial kinematics*, LTAS report, Université de Liège, Belgique, 1988.

[Géradin et Rixen 1993]

**M. Géradin et D. Rixen**, *Théorie des vibrations - Application à la dynamique des structures*, Masson, 1993.

[Germain 1973]

**P. Germain**, *Cours de mécanique des milieux continus*, tome I, Masson, 1973.

[Gibert 1988]

**R. J. Gibert**, *Vibrations des structures - Interaction avec les fluides, sources d'excitation aléatoires*, Editions Eyrolles, Paris, 1988.

[Gié 1978]

**H. Gié**, *Dynamique*, Collection de Sciences Physiques, Editions J.-B. Baillière, Paris, 1978.

[Glowinski et Le Tallec 1989]

**R. Glowinski, P. Le Tallec**, *Augmented lagrangian and operator splitting methods in non-linear mechanics - Studies in applied mechanics*, Society for Industrial and Applied Mechanics, 1989.

[Gravouil 2000]

**A. Gravouil**, *Méthode multi-échelles en temps et en espace avec décomposition de domaines pour la dynamique non-linéaire des structures*, Thèse de doctorat, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, France, 2000.

[Gravouil et Combescure 2001]

**A. Gravouil, A. Combescure**, *Multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics*, Int. J. for Num. Meth. in Engrg., vol. 50:199-225, 2001.

[Guyan 1965]

**R. J. Guyan**, *Reduction of stiffness and mass matrices*, AIAA Journal, vol. 3(2):380, 1965.

[Herry 1999]

**B. Herry**, *Zoom structurel et collage de maillage non-conformes en mécanique des structures*, Rapport de DEA, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, France, 1999.

[Herry 2000]

**B. Herry**, *Développement d'une approche multi-échelles parallèle pour la simulation de crash automobile*, Rapport d'avancement de thèse n°1, PSA Peugeot Citroën / Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, France, 2000.

[Herry et al. 2002]

**B. Herry, L. Di Valentin, A. Combescure**, *An approach to the connection between subdomains with non-matching meshes for transient mechanical analysis*, Int. J. for Num. Meth. in Engrg., vol. 55:973-1003, 2002.

[Hintz 1975]

**R. M. Hintz**, *Analytical methods in component mode synthesis*, AIAA Journal, vol. 13, 1975.

[Hughes 1983]

**T. J. R. Hughes**, *Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behaviour*, Computational Methods for Transient Analysis, eds T. Belytschko and T. J. R. Hughes, 67-155, North Holland, 1983

[Hughes et Winget 1980]

**T. J. R. Hughes, J. Winget**, *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis*, Int. J. for Num. Meth. in Engrg., vol. 15(12):1862-1867, 1980.

[Hurty 1965]

**W. C. Hurty**, *Dynamic analysis of structural systems using component modes*, AIAA Journal, vol. 3, 1965.

[Ibrahimbegovic 1997]

**A. Ibrahimbegovic**, *On the choice of finite rotation parameters*, Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg., vol. 149:49-71, 1997.

[Irons 1965]

**B. M. Irons**, *Structural eigenvalues problems - Elimination of unwanted variables*, AIAA Journal, vol. 3(5):961-962, 1965.

[Jetteur 2000]

**P. Jetteur**, *Large rotation of superelements for multibody analysis*, ECCOMAS 2000, Barcelone, 11-14 septembre 2000.

[Joly 1993]

**P. Joly**, *Modélisation et simulation de systèmes à topologie variable due à des liaisons de contact*, Thèse de doctorat, Université Paris VI, Spécialité Mécanique des solides et des structures, 1993.

[Kelly et al. 1983]

**D. Kelly, J. Gago, O. C. Zienkiewicz, I. Babuska**, *A posteriori error analysis and adaptive processes in finite element method, part 1 : Error analysis*, Int. J. for Num. Meth. in Engrg., vol. 19:1953-1619, 1983.

[Key 1980]

**S. W. Key**, *Transient response by time integration : review of implicit and explicit operators*, Advanced Structural Dynamics, Ed. Applied Science, Londres, 1980.

[Ladevèze 1985]

**P. Ladevèze**, *Algorithmes adaptés aux calculs vectoriels et parallèles pour des méthodes de décomposition de domaines*, Actes du troisième colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures, Pluralis:893-907, 1985.

[Ladevèze 1996]

**P. Ladevèze**, *Mécanique non-linéaire des structures - Nouvelle approche et méthodes de calcul non-incrémentales*, Paris, Hermès, 1996.

[Ladevèze et Leguillon 1983]

**P. Ladevèze, D. Leguillon**, *Error estimate procedure in the finite element method and application*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 20(3):485-509, 1983.

[Lalanne et Ferraris 1998]

**M. Lalanne, G. Ferraris**, *Rotordynamics prediction in engineering*, 2<sup>ème</sup> édition, John Wiley & Sons, New York, 1998.

[Lascaux et Théodor 1986]

**P. Lascaux, R. Théodor**, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, tomes 1&2, Masson, 1986.

[Lee et Wang 1988a]

**J. D. Lee, B. L. Wang**, *Optimal control of a flexible robot arm*, Computers&Structures, vol. 29(3):459-467, 1988.

[Lee et Wang 1988b]

**J. D. Lee, B. L. Wang**, *Dynamic equations for a two-link flexible robot arm*, Computers&Structures, vol. 29(3):469-477, 1988.

[Lepareux et al. 1994]

**M. Lepareux, J. M. Michelin, D. Thiault**, *Plexus-R : une extension de Plexus à la robotique*, rapport CEA 94.138, 1994.

[Likins 1967]

**P. W. Likins**, *Modal method for analysis of free rotations of spacecraft*, AIAA Journal, vol. 5(7):1304-1308, 1967.

[Likins 1973]

**P. W. Likins**, *Hybrid-coordinate spacecarft dynamics using large deformation modal coordinate*, Astronautical Acta, vol. 18(5):331-348, 1973.

[Lim et Taylor 2001]

**H. Lim, R. L. Taylor**, *An explicit-implicit method for flexible-rigid multibody systems*, Finite Elements in Analysis and Design, vol. 37(11):881-900, 2001.

[Liu et Belytschko 1982]

**W. K. Liu, T. Belytschko**, *Mixed-time implicit-explicit finite elements for transient analysis*, Computers & Structures, vol. 15:445-450, 1982.

[Luzeau et Strub 1998]

**F. Luzeau, C. Strub**, *Etude du comportement du couvercle d'une cuve REP impactée par du corium - Analyse de l'essai BERDA 7 avec la méthode particulière SPH de PLEXUS*, rapport CEA 98.034, 1998.



[Mac Neal 1971]

**R. H. Mac Neal**, *A hybrid method of component mode synthesis*, Computers & Structures, vol. 1, 1971.

[Maillot 1990]

**P.-G. Maillot**, *Using quaternions for coding 3D transformations*, GRAPHIC GEMS, 498-515, 1990.

[Mottershead et Friswell 1993]

**J. E. Mottershead, M. I. Friswell**, *Model updating in structural dynamics : a survey*, Journal of Sound and Vibration, vol. 167(2):347-375, 1993.

[Newmark 1959]

**M. N. Newmark**, *A method of computation for structural dynamics*, Proc. ASCE 85, EM3, 1959.

[Nicosia et al. 1986]

**S. Nicosia, P. Tomei, A. Tornambe**, *Dynamic modelling of flexilbe robot manipulators*, IEEE Trans. , vol. 2:365-372, 1986.

[Nowakowski 1984]

**C. Nowakowski**, *Méthodes de calcul numérique. Tome 2*, Editions du P. S. I., 1984.

[Oden et Reddy 1982]

**J. T. Oden, J. N. Reddy**, *Variational methods in theoretical mechanics*, Springer-Verlag, 1982.

[Ohayon et Soize 1998]

**R. Ohayon, C. Soize**, *Structural acoustics and vibrations - Mechanical models, variational formulations and discretization*, Academic Press, 1998.

[Papadrakakis et Ghionis 1986]

**M. Papadrakakis, P. Ghionis**, *Conjugate gradient algorithm in non-linear structural analysis problems*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg., vol. 59:11-27, 1986.

[Park et Felippa 2000]

**K. C. Park, C. A. Felippa**, *A variational principle for the formulation of partitioned structural systems*, Int. J. for Num. Meth. in Engrg., vol. 47:395-418, 2000.

[Pawsey et Clough 1971]

**S. F. Pawsey, R. W. Clough**, *Improved numerical integration of thick shell finite elements*, Int. J. for Num. Meth. in Engrg., vol. 3:575-586, 1971.

[Quiroz 1993]

**L. Quiroz**, *Connexion des maillages hétérogènes dans la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat, Université de Liège, 1993.

[Rankin et Brogan 1986]

**C. C. Rankin, F. A. Brogan**, *An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations*, ASME J. of Pressure Vessel Tech., vol. 108:165-174, 1986.

[Rao 1983]

**J. S. Rao**, *Rotor dynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[Rayleigh 1945]

**Lord J. W. S. Rayleigh**, *Theory of sound*, Dover Publications, New-York, 1945 (1877).

[Roux 1990]

**F. X. Roux**, *Méthodes de résolution par sous-domaines en statique*, La Recherche Aéronautique, vol. 1:37-48, 1990.

[Robbe et al. 1994]

**M. F. Robbe, M. Lepareux, H. Bung**, *Programme PLEXUS : notice théorique*, rapport CEA 94.490, 1994.

[Rubin 1975]

**S. Rubin**, *Improved component code representation for structural dynamic analysis*, AIAA Journal, vol. 13, 1975.

[Ruppert 1995]

**J. Ruppert**, *A delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation*, Journal of Algorithms, vol. 18(3):548-585, 1995.

[Sassi 1993]

**T. Sassi**, *Méthode de décomposition de domaines pour la résolution de problème d'élasticité non-linéaire avec maillages incompatibles*, Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine, 1993.

[Shabana 1989]

**A. Shabana**, *Dynamics of Multibody Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[Shabana 1997]

**A. A. Shabana**, *Flexible multibody dynamics : review of past and recent developments*, Multibody System Dynamics, vol. 1:189-222, 1997.

[Shabana et Wehage 1983]

**A. Shabana, R. A. Wehage**, *Coordinate reduction technique for transient analysis of spatial substructures with large angular rotations*, Journal of Structural Mechanics, vol. 11(3):401-431, 1983.

[Simo et Hughes 1986]

**J. C. Simo, T. J. R. Hughes**, *On the variational foundations of assumed strain methods*, J. Appl. Mech. ASME, vol. 53:51-54, 1986.

[Simo et al. 1992]

**J. C. Simo, N. Tarnow, K. K. Wong**, *Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for non-linear dynamics*, Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg., vol. 100:63-116, 1992.

[Singh et Schy 1986]

**S. N. Singh, A. A. Schy**, *Control for elastic robotic systems by nonlinear inversion and modal damping*, ASME Trans. J. of Dyn. Syst., Meas. and Cont., vol. 108:180-189, 1986.

[Soria et Casadei 1997]

**A. Soria, F. Casadei**, *Arbitrary Euler-Lagrange multicomponent compressible flow with fluid-structure interaction*, Int. J. for Num. Meth in Fluids, vol. 25:1263-1284, 1997.

[Tran 1992]

**D. M. Tran**, *Méthodes de synthèses modales mixtes*, Revue Européenne des Eléments Finis, vol. 1(2), 1992.

[Turcic et Midha 1984]

**D. A. Turcic, A. Midha**, *Dynamic analysis of elastic mechanism systems. Part I & II*, ASME J. of Dyn. Syst., Meas. and Cont., vol. 106:249-260, 1984.

[Underwood 1983]

**P. G. Underwood**, *Dynamic relaxation - A review*, Computational Methods for Transient Analysis, eds T. Belytschko and T. J. R. Hughes, North Holland, 1983

[Zienkiewicz et al. 1971]

**O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. M. Too**, *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*, Int. J. for Num. Meth. in Engrg., vol. 3:275-290, 1971.

[Zienkiewicz 1973]

**O. C. Zienkiewicz**, *La méthode des éléments finis*, Ediscience, 1973 (1967).