

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

École Doctorale de Mathématiques de la Région Paris-Sud (ED 142)

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité : Mathématiques

soutenue le 6 Juin 2014

par

Tristan BOZEC

Variétés de représentations de carquois à boucles

JURY :

M. Olivier SCHIFFMANN (Directeur de thèse)
M. Tamás HAUSEL (Examineur)
M. Pierre-Guy PLAMONDON (Examineur)
M. Ben WEBSTER (Examineur)
M. Éric VASSEROT (Rapporteur)

Rapporteur absent lors de la soutenance :

M. Hiraku NAKAJIMA



Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Contexte

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la théorie géométrique des représentations, qui consiste à donner des interprétations géométriques à des objets de théorie de représentations définis *a priori* algébriquement, et ainsi en donner des propriétés non triviales, notamment via l'étude d'espaces de modules de représentations.

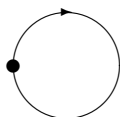
Ici nous allons nous intéresser aux représentations de carquois, *i.e.* de graphes orientés $Q = (I, \Omega)$ donnés par un ensemble de sommets I et un ensemble de flèches $\Omega = \{h : s(h) \rightarrow t(h)\}$ entre sommets. Une représentation d'un carquois Q sur un corps k consiste alors en la donnée d'une famille de k -espaces vectoriels $V = (V_i)_{i \in I}$ indexée par I , et une famille d'applications linéaires :

$$(x_h)_{h \in \Omega} \in E_V = \bigoplus_{h \in \Omega} \text{Hom}(V_{s(h)}, V_{t(h)})$$

indexée par Ω . Les représentations d'un carquois sur un corps forment une catégorie abélienne k -linéaire. Ces représentations ont gagné une grande importance dans les années 70, notamment via le théorème de Gabriel :

Théorème -1.1 (Gabriel, 1972). *Les carquois possédant un nombre fini d'isoclasses de représentations indécomposables sont ceux dont le graphe sous-jacent est un diagramme de Dynkin simplement lacé, *i.e.* de type A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8 . Les isoclasses de représentations indécomposables sont alors en correspondance bijective avec les racines positives du système de racines du diagramme de Dynkin concerné.*

Ce théorème fait ainsi le lien avec la classification des algèbres de Lie semi-simples complexes de dimension finie. Parallèlement, le cas du carquois de Jordan \tilde{A}_0 :



est aussi bien connu : la classification de ses isoclasses de représentations est (tautologiquement) équivalente à celle des classes de conjugaison des matrices à coefficients dans k . En particulier, si k est algébriquement clos, on dispose de la réduction de Jordan et on a une correspondance bijective entre les isoclasses de représentations nilpotentes en dimension n et les partitions de n .

Dans la suite on va voir comment le théorème de Gabriel peut être d'une part amélioré, en utilisant plus en détails la géométrie de variétés de représentations de carquois pour en tirer des propriétés algébriques en théorie de Lie, et d'autre part étendu, mettant en rapport une plus large classe d'algèbres de Lie avec des carquois plus généraux.

Bases canoniques et semi-canoniques de Lusztig

Lusztig définit dans une série d'articles deux types de bases de la partie positive de l'algèbre enveloppante $U^+(\mathfrak{g})$, issues de la géométrie des variétés de représentations de carquois, et pour des carquois de plus en plus généraux.

La première, dite *base canonique*, fait intervenir la théorie des faisceaux pervers développée dans [BBD82]. Pour la définir, il réalise la partie positive $U_v^+(\mathfrak{g})$ du groupe quantique comme le groupe de Grothendieck associé à une certaine classe de faisceaux pervers. Elle est définie dans [Lus90] pour les carquois de type fini, puis dans [Lus91] (et dans [Kas91], *c.f.*) pour les carquois sans boucles de type "infini".

La seconde, dite *semi-canonique*, fait elle intervenir des fonctions constructibles sur le champ cotangent au champ de modules de représentations du carquois Q , obtenue cette fois seulement pour le paramètre quantique $v = 1$. Elle est d'abord définie dans [Lus92] dans le cas des carquois de type affine (ou fini), puis généralisée au carquois sans boucles dans [Lus00], mais à l'aide d'un résultat obtenu dans [KS97] grâce à la théorie des cristaux (*c.f.*).

En particulier dans toute cette section, les carquois considérés sont sans boucles.

Base canonique

Définissons la classe de faisceaux pervers qui nous intéresse. Pour tout vecteur dimension $\alpha = \sum_{i \in I} \alpha_i i \in \mathbb{N}I$, on commence par fixer un espace vectoriel I -gradués V_α de dimension α , et on note $E_\alpha = E_{V_\alpha}$. Soient alors $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$ et $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ deux suites finies d'éléments de I et $\mathbb{N}_{>0}$ respectivement, telles que $\sum_{1 \leq k \leq m} a_k i_k = \alpha$. On pose :

$$\mathcal{F}_{\mathbf{i}, \mathbf{a}} = \left\{ W = (\{0\} = W_0 \subset \dots \subset W_m = V_\alpha) \mid \forall k, \dim \frac{W_k}{W_{k-1}} = a_k i_k \right\}$$

$$\tilde{E}_{\mathbf{i}, \mathbf{a}} = \{(x, W) \mid x_h(W) \subseteq W\} \subseteq E_\alpha \times \mathcal{F}_{\mathbf{i}, \mathbf{a}}.$$

La première projection fournit un morphisme propre $\pi_{\mathbf{i}, \mathbf{a}} : \tilde{E}_{\mathbf{i}, \mathbf{a}} \rightarrow E_\alpha$. D'après le théorème de décomposition de Beilinson, Bernstein et Deligne, le complexe $\pi_{\mathbf{i}, \mathbf{a}!} \mathbf{1}$ est semi-simple (1 désigne le faisceau constant sur $\tilde{E}_{\mathbf{i}, \mathbf{a}}$). On note alors :

- ▷ G_α le groupe $\prod_{i \in I} GL((V_\alpha)_i)$, qui agit naturellement sur E_α ;
- ▷ $\mathcal{M}_{G_\alpha}(E_\alpha)$ la catégorie des faisceaux pervers G_α -équivalents sur E_α ;
- ▷ \mathcal{P}_α la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}_{G_\alpha}(E_\alpha)$ consistant en les sommes de faisceaux pervers simples G_α -équivalents apparaissant, éventuellement décalés, comme facteurs directs de $\pi_{\mathbf{i}, \mathbf{a}!} \mathbf{1}$ pour une certaine paire (\mathbf{i}, \mathbf{a}) telle que $\sum a_k i_k = \alpha$;
- ▷ \mathcal{Q}_α la catégorie des complexes isomorphes à des sommes de décalages d'objets de \mathcal{P}_α ;
- ▷ \mathcal{K}_α le groupe de Grothendieck de \mathcal{Q}_α , vu comme un $\mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$ -module en posant $v^{\pm 1}[\mathbf{P}] = [\mathbf{P}[\pm 1]]$, où l'on note $[\mathbf{P}]$ l'isoclasse d'un faisceau pervers \mathbf{P} ;
- ▷ \mathcal{B}_α l'ensemble fini des isoclasses des faisceaux simples de \mathcal{P}_α et $\mathcal{B} = \sqcup_\alpha \mathcal{B}$.

Définissons maintenant des foncteurs de *restriction* et d'*induction* qui permettront de munir $\mathcal{K} = \bigoplus_\alpha \mathcal{K}_\alpha$ d'une structure d'algèbre de Hopf.

Pour tout sous-espace I -gradués $W \subseteq V_\alpha$ de dimension β et codimension γ , muni de deux isomorphismes I -gradués $p : W \xrightarrow{\sim} V_\beta$ and $q : V_\alpha/W \xrightarrow{\sim} V_\gamma$, on obtient le diagramme suivant :

$$E_\beta \times E_\gamma \xleftarrow{\kappa} E_\alpha(W) \xrightarrow{\iota} E_\alpha$$

où $E_\alpha(W) = \{x \in E_\alpha \mid x(W) \subseteq W\}$, κ désigne le fibré vectoriel $x \mapsto (p_*(x_W), q_*(x_{V_\alpha/W}))$ et ι l'inclusion.

On considère aussi :

$$E_\beta \times E_\gamma \xleftarrow{p_1} E_{\beta,\gamma}^\dagger \xrightarrow{p_2} E_{\beta,\gamma} \xrightarrow{p_3} E_\alpha$$

où :

$$E_{\beta,\gamma}^\dagger = \left\{ (x, W, r, \bar{r}) \left| \begin{array}{l} x \in E_\alpha \\ W \subseteq V_\alpha \text{ est } I\text{-gradué et } x\text{-stable} \\ r : W \xrightarrow{\sim} V_\beta \\ \bar{r} : V_\alpha/W \xrightarrow{\sim} V_\gamma \end{array} \right. \right\}$$

$$E_{\beta,\gamma} = \left\{ (x, W) \left| \begin{array}{l} x \in E_\alpha \\ W \subseteq V_\alpha \text{ est } I\text{-gradué et } x\text{-stable} \end{array} \right. \right\}.$$

Ces diagrammes induisent (cf. [Lus10, §9.2]) :

$$\widetilde{\text{Res}}_{\beta,\gamma} = \kappa_! l^* : \mathcal{Q}_\alpha \rightarrow \mathcal{Q}_\gamma \boxtimes \mathcal{Q}_\beta$$

$$\widetilde{\text{Ind}}_{\beta,\gamma} = p_{3!} p_{2!} p_1^* : \mathcal{Q}_\gamma \boxtimes \mathcal{Q}_\beta \rightarrow \mathcal{Q}_\alpha$$

et :

$$\text{Res}_{\beta,\gamma} = \widetilde{\text{Res}}_{\beta,\gamma}^\alpha [(\gamma, \beta) - \langle \beta, \gamma \rangle]$$

$$\text{Ind}_{\beta,\gamma} = \widetilde{\text{Ind}}_{\beta,\gamma}^\alpha [(\gamma, \beta) + \langle \beta, \gamma \rangle]$$

où $\langle \beta, \gamma \rangle = \sum_{i \in I} \beta_i \gamma_i$ et $(\gamma, \beta) = \sum_{h \in \Omega} \gamma_{s(h)} \beta_{t(h)}$.

Rappelons aussi brièvement la définition des groupes quantiques, tout du moins celle de leur partie positive. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Kac-Moody, on fixe une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, et on note $\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ la sous-algèbre de Borel positive associée. L'algèbre $\mathbf{U}_v(\mathfrak{b}^+)$ est engendrée par des éléments $K_i^{\pm 1}, E_i$ ($i \in I$) sujets aux relations suivantes :

$$K_i K_j = K_j K_i$$

$$K_i E_j = v^{a_{i,j}} E_j K_i$$

$$\sum_{t+t'=-a_{i,j}+1} (-1)^t E_j^{(t)} E_i E_j^{(t')} = 0$$

où $a_{i,j}$ désigne l'opposé du nombre d'arêtes de Ω reliant i et j , et $E_i^{(t)} = E_i^t / [t]!$, où :

$$[t] = \frac{v^t - v^{-t}}{v - v^{-1}}.$$

On peut munir $\mathbf{U}_v(\mathfrak{b}^+)$ d'une structure d'algèbre de Hopf, le coproduit étant donné par :

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i$$

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i.$$

On notera $\mathbf{U}_v^+(\mathfrak{g})$ la sous-algèbre engendrée par les E_i , et $\mathbf{U}_{v,\mathbb{Z}}^+(\mathfrak{g})$ sa forme intégrale, i.e. la $\mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$ -algèbre engendrée par les E_i construite de manière analogue.

Ces algèbres sont munies de formes de Hopf, dites *géométrique* pour \mathcal{K} , *de Drinfeld* pour $\mathbf{U}_v^+(\mathfrak{g})$.

On obtient alors :

Théorème -1.2 (Lusztig, 90, 91). *On a un isomorphisme d'algèbres de Hopf :*

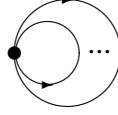
$$\begin{aligned} \Psi : \mathbf{U}_{v,\mathbb{Z}}^+(\mathfrak{g}) &\rightarrow \mathcal{K} \\ E_i^{(a)} &\mapsto [\pi_{i,a!}\mathbf{1}]. \end{aligned}$$

Dans cet énoncé, les $\pi_{i,a!}\mathbf{1}$ correspondent aux plus 'simples' des faisceaux de Lusztig, obtenus quand i et a sont des suites à un élément. La base canonique est alors définie par :

$$\mathbf{B} = \{\Psi^{-1}(b) \mid b \in \mathcal{B}\}.$$

Une conjecture

Dans l'article [Lus93], Lusztig se demande dans quelle généralité les classes des faisceaux "monômes" $[\pi_{i,a!}\mathbf{1}]$ suffisent à engendrer le groupe de Grothendieck \mathcal{K} . C'est une conséquence du théorème -1.2 dans le cas des carquois sans boucles, et c'est un résultat classique dans le cas du carquois de Jordan (voir par exemple [Sch09] et les références qui s'y trouvent). Il donne dans cet article une condition pour que cette propriété soit vraie, qui s'applique notamment aux carquois à un sommet et $g \geq 2$ boucles :



Sa conjecture est la suivante :

Conjecture -1.3. *Les classes de faisceaux pervers $[\pi_{i,a!}\mathbf{1}]$ ($i \in I, a > 0$) suffisent à engendrer \mathcal{K} quelque soit le carquois considéré Q .*

Base semi-canonique

On commence par dédoubler le carquois Q (toujours supposé sans boucles pour l'instant), c'est-à-dire remplacer chaque flèche h de Ω par une paire de flèche de sens opposés (h, \bar{h}) . On obtient un carquois $\bar{Q} = (I, H = \Omega \sqcup \bar{\Omega})$ qui ne dépend pas de l'orientation de Q et dont l'ensemble de flèches est stable sous l'action de l'involution $h \mapsto (\bar{h} : t(h) \rightarrow s(h))$.

On note cette fois :

$$\bar{E}_V = \bigoplus_{h \in \Omega} \text{Hom}(V_{s(h)}, V_{t(h)}),$$

puis $\bar{E}_\alpha = \bar{E}_{V_\alpha}$ l'espace des représentations de \bar{Q} en dimension α . Celui s'identifie au fibré cotangent de E_α , et est ainsi équipé d'une forme symplectique :

$$\omega_\alpha(x, x') = \sum_{h \in H} \text{Tr}(\epsilon(h)x_h x'_h)$$

préservée par l'action naturelle de G_α sur \bar{E}_α . L'application moment associée $\mu_\alpha : \bar{E}_\alpha \rightarrow \mathfrak{g}_\alpha = \bigoplus_{i \in I} \text{End}(V_\alpha)_i$ est donnée par :

$$\mu_\alpha(x) = \sum_{h \in H} \epsilon(h)x_{\bar{h}}x_h,$$

où l'on a identifié \mathfrak{g}_α^* et \mathfrak{g}_α via la fonction trace. Le champ cotangent au champ de modules de représentations $[E_\alpha/G_\alpha]$ s'identifie à $[\mu_\alpha^{-1}(0)/G_\alpha]$.

Définition -1.4. Un élément $x \in \bar{E}_\alpha$ est dit *nilpotent* s'il existe un drapeau I -gradué $W = (W_0 = \{0\} \subset \dots \subset W_r = V_\alpha)$ de V_α tel que $x_h(W_\bullet) \subseteq W_{\bullet-1}$ pour tout $h \in H$. On note :

$$\Lambda(\alpha) = \{x \in \mu_\alpha^{-1}(0) \mid x \text{ nilpotent}\}.$$

Remarque -1.5. Pour l'instant les carquois sont sans boucles, donc il est équivalent de demander $x_h(W_\bullet) \subseteq W_\bullet$ dans la définition ci-dessus. Celle-ci équivaut à demander l'existence d'un rang N tel que pour tout chemin (h_1, \dots, h_r) de H de longueur $r \geq N$, on ait $x_{h_1} \circ \dots \circ x_{h_r} = 0$.

Proposition -1.6. *La sous-variété $\Lambda(\alpha) \subseteq \bar{E}_\alpha$ est Lagrangienne.*

On note $\mathcal{M}(\alpha)$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel des fonctions constructibles $\Lambda(\alpha) \rightarrow \mathbb{Q}$, constantes sur les G_α -orbites. On pose $\mathcal{M} = \bigoplus_{\alpha \geq 0} \mathcal{M}(\alpha)$, qui peut-être munie d'une structure d'algèbre graduée. On note 1_i la fonction qui envoie sur 1 le seul élément de $\Lambda(i)$, et \mathcal{M}_\circ la sous-algèbre de \mathcal{M} engendrée par ces fonctions. On a le résultat suivant :

Théorème -1.7 (Lusztig, 91). *On a un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^+(\mathfrak{g}) &\rightarrow \mathcal{M}_\circ \\ E_i &\mapsto 1_i. \end{aligned}$$

Si de plus Z est une composante irréductible de $\Lambda(\alpha)$ et $f \in \mathcal{M}(\alpha)$, on note $\rho_Z(f) = c$ si $Z \cap f^{-1}(c)$ est un ouvert dense (*i.e.* non vide) de Z . On dispose de la proposition suivante :

Proposition -1.8. *Pour tout composante irréductible Z de $\Lambda(\alpha)$, il existe une unique fonction $f \in \mathcal{M}_\circ(\alpha)$ telle que $\rho_Z(f) = 1$ et $\rho_{Z'}(f) = 0$ si $Z' \neq Z$.*

Dans [Lus92], Lusztig prouve qu'en fait la famille libre $(f_Z)_{Z \in \text{Irr } \Lambda}$, où $\text{Irr } \Lambda$ désigne l'ensemble des composantes irréductibles de $\sqcup_\alpha \Lambda(\alpha)$, est une base de \mathcal{M}_\circ . La base semi-canonique est définie comme l'image inverse de la famille (f_Z) par l'isomorphisme $\mathbf{U}^+(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{M}_\circ$.

On a finalement :

$$\mathcal{B} \underset{\text{base}}{\subset} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K} \xleftarrow{\sim} \mathbf{U}_v^+(\mathfrak{g}) \xrightarrow{v \rightarrow 1} \mathbf{U}^+(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_\circ \underset{\text{base}}{\supset} (f_Z)_{Z \in \text{Irr } \Lambda}$$

On verra comment ce résultat se généralise à tous les carquois sans boucles dans la section .

Cristaux de Kashiwara

Les cristaux sont des objets combinatoires associés aux algèbres de Lie, et qui ont des applications dans l'étude des variétés carquois, comme suggérés plus haut. Donnons-en la définition avant de comprendre en quoi ils sont utiles dans la définition des bases canonique et semi-canonique. Les résultats exposés dans cette section sont prouvés pour les carquois sans boucles.

Quelques définitions et propriétés

Définition -1.9. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Kac-Moody symétrisable, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ une décomposition de Cartan. On note P le réseau de poids associé. On fixe deux bases duales $(\alpha_i)_{i \in I}$ (racines simples) et $(h_i)_{i \in I}$ (coracines simples) de P et P^* respectivement telles que les $\langle h_i, \alpha_j \rangle$ soient les coefficients de la matrice de Cartan associée à \mathfrak{g} . On appelle cristal un ensemble \mathcal{B} muni d'applications :

$$\begin{aligned} \text{wt} : \mathcal{B} &\rightarrow P \\ \epsilon_i : \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\} \\ \phi_i : \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\} \\ \tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{B} \sqcup \{0\} \end{aligned}$$

telles que pour tous $b, b' \in \mathcal{B}$, les axiomes suivants soient vérifiés :

(A1) $\phi_i(b) = \epsilon_i(b) + \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle$;

(A2) si $\tilde{e}_i b \neq 0$:

$$\begin{aligned} \text{wt}(\tilde{e}_i b) &= \text{wt}(b) + \alpha_i \\ \epsilon_i(\tilde{e}_i b) &= \epsilon_i(b) - 1 \\ \phi_i(\tilde{e}_i b) &= \phi_i(b) + 1 ; \end{aligned}$$

(A3) si $\tilde{f}_i b \neq 0$:

$$\begin{aligned} \text{wt}(\tilde{f}_i b) &= \text{wt}(b) - \alpha_i \\ \epsilon_i(\tilde{f}_i b) &= \epsilon_i(b) + 1 \\ \phi_i(\tilde{f}_i b) &= \phi_i(b) - 1 ; \end{aligned}$$

(A4) $\tilde{f}_i b = b' \Leftrightarrow b = \tilde{e}_i b'$;

(A5) $\phi_i(b) = -\infty \Rightarrow \tilde{e}_i(b) = \tilde{f}_i(b) = 0$.

Exemple -1.10. On peut définir un cristal \mathcal{B}_i pour tout $i \in I$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i &= \{b_i(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ \text{wt}(b_i(n)) &= n\alpha_i \\ \phi_i(b_i(n)) &= n, \quad \epsilon_i(b_i(n)) = -n \\ \phi_j(b_i(n)) &= \epsilon_j(b_i(n)) = -\infty \text{ si } j \neq i \\ \tilde{e}_i(b_i(n)) &= b_i(n+1), \quad \tilde{f}_i(b_i(n)) = b_i(n-1) \\ \tilde{e}_j(b_i(n)) &= \tilde{f}_j(b_i(n)) = 0 \text{ si } j \neq i. \end{aligned}$$

On notera simplement b_i au lieu de $b_i(0)$.

Il existe une notion de morphisme de cristaux :

Définition -1.11. Un morphisme de cristaux $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ entre deux cristaux \mathcal{B} et \mathcal{B}' est une application $\mathcal{B} \sqcup \{0\} \rightarrow \mathcal{B}' \sqcup \{0\}$ vérifiant pour tous $b \in \mathcal{B}, i \in I$:

▷ $\psi(0) = 0$;

▷ si $\psi(b) \in \mathcal{B}'$:

$$\text{wt}(\psi(b)) = \text{wt}(b) , \epsilon_i(\psi(b)) = \epsilon_i(b) , \phi_i(\psi(b)) = \phi_i(b) ;$$

▷ si $b' = \tilde{f}_i(b)$ et $\psi(b), \psi(b') \in \mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(\psi(b)) &= \psi(\tilde{f}_i(b)) \\ \tilde{e}_i(\psi(b')) &= \psi(\tilde{e}_i(b')). \end{aligned}$$

Un morphisme est par ailleurs dit *strict* s'il commute à l'action de tous les \tilde{e}_i et \tilde{f}_i , sans restriction. Une morphisme est appelé *plongement* si l'application induite $\mathcal{B} \sqcup \{0\} \rightarrow \mathcal{B}' \sqcup \{0\}$ est injective, *isomorphisme* si elle est bijective.

Il est possible d'associer naturellement un cristal $\mathcal{B}(\infty)$ au groupe quantique $\mathbf{U}_v(\mathfrak{g})$. Ce dernier est obtenu à partir de $\mathbf{U}_v^+(\mathfrak{g})$ en rajoutant un jeu de générateurs $(F_i)_{i \in I}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} K_i F_j &= v^{-a_{i,j}} F_j K_i \\ \sum_{t+t'=-a_{i,j}+1} (-1)^t F_j^{(t)} F_i F_j^{(t')} &= 0 \end{aligned}$$

et des relations de Drinfeld, non données ici, reliant les E_i et les F_i .

Pour définir $\mathcal{B}(\infty)$, on commence par définir les *opérateurs de Kashiwara*. On peut montrer qu'il existe des opérateurs e'_i et e''_i de $\mathbf{U}_v(\mathfrak{n}^-)$ vérifiant, pour tout $z \in \mathbf{U}_v(\mathfrak{n}^-)$:

$$[E_i, z] = \frac{K_i e'_i(z) - K_i^{-1} e''_i(z)}{v - v^{-1}}.$$

Il existe une décomposition :

$$\mathbf{U}_v(\mathfrak{n}^-) = \bigoplus_{n \geq 0} F_i^{(n)} \ker e'_i.$$

Pour $z = z_0 + F_i z_1 + \dots + F_i^{(n)} z_n \in \mathbf{U}_v(\mathfrak{n}^-)$, on définit les opérateurs de Kashiwara ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i(z) &= \sum_{1 \leq k \leq n} F_i^{(k-1)} z_k \\ \tilde{f}_i(z) &= \sum_{0 \leq k \leq n} F_i^{(k+1)} z_k. \end{aligned}$$

Le cristal $\mathcal{B}(\infty)$ est finalement donné par :

$$\mathcal{B}(\infty) = \{\tilde{f}_{i_1} \dots \tilde{f}_{i_r} 1 \mid i_1, \dots, i_r \in I\}.$$

On peut de manière analogue associer un cristal $\mathcal{B}(\lambda)$ à tout $\mathbf{U}_v(\mathfrak{g})$ -module simple de plus haut poids $V(\lambda)$.

Une notion cruciale est celle de produit tensoriel de cristaux :

Définition -1.12. Le produit tensoriel $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}' = \{b \otimes b' \mid b \in \mathcal{B}, b' \in \mathcal{B}'\}$ de deux cristaux \mathcal{B} et \mathcal{B}' est défini par :

$$\begin{aligned} \text{wt}(b \otimes b') &= \text{wt}(b) + \text{wt}(b') \\ \epsilon_i(b \otimes b') &= \max\{\epsilon_i(b), \epsilon_i(b') - \langle e_i, \text{wt}(b) \rangle\} \\ \phi_i(b \otimes b') &= \max\{\phi_i(b) + \langle e_i, \text{wt}(b') \rangle, \phi_i(b')\} \\ \tilde{e}_i(b \otimes b') &= \begin{cases} \tilde{e}_i(b) \otimes b' & \text{si } \phi_i(b) \geq \epsilon_i(b') \\ b \otimes \tilde{e}_i(b') & \text{si } \phi_i(b) < \epsilon_i(b'); \end{cases} \\ \tilde{f}_i(b \otimes b') &= \begin{cases} \tilde{f}_i(b) \otimes b' & \text{si } \phi_i(b) > \epsilon_i(b') \\ b \otimes \tilde{f}_i(b') & \text{si } \phi_i(b) \leq \epsilon_i(b'); \end{cases} \end{aligned}$$

Kashiwara et Saito obtiennent dans [KS97] la caractérisation suivante du cristal $\mathcal{B}(\infty)$:

Proposition -1.13. Soit \mathcal{B} un cristal et b_0 un élément de \mathcal{B} de poids nul. Supposons :

1. $\text{wt}(\mathcal{B}) \subset -\sum_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i$;
2. b_0 est le seul élément de \mathcal{B} de poids nul ;
3. $\epsilon_i(b_0) = 0$ pour tout $i \in I$;
4. $\epsilon_i(b) \in \mathbb{Z}$ pour tous $b \in \mathcal{B}$, $i \in I$;
5. pour tout $i \in I$ il existe un plongement strict $\Psi_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_i$;
6. $\Psi_i(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} \times \{\tilde{f}_i^n(b_i) \mid n \geq 0\}$;
7. Pour tout $b \in \mathcal{B} \setminus \{b_0\}$, il existe $i \in I$, $n > 0$ et $b' \in \mathcal{B}$ tels que $\Psi_i(b) = b' \otimes \tilde{f}_i^n(b_i)$;

Alors \mathcal{B} est isomorphe à $\mathcal{B}(\infty)$.

Application aux variétés carquois

Pour comprendre comment la théorie des cristaux peut être reliée à la base semi-canonique, il faut revenir à [Lus91], et à la preuve du caractère Lagrangien des variétés $\Lambda(\nu)$ ou cette fois le vecteur dimension $\nu = \sum_{i \in I} \nu_i \alpha_i$ est vu comme un élément de P . On notera $\text{Irr } \Lambda(\nu)$ l'ensemble (fini) de leurs composantes irréductibles. Lusztig définit des stratifications de ces variétés ($i \in I$) :

$$\Lambda(\nu) = \bigsqcup_{l \geq 0} \Lambda(\nu)_{i,l}$$

où :

$$\Lambda(\nu)_{i,l} = \left\{ x \in \Lambda(\nu) \mid \text{codim} \sum_{\substack{h \in H \\ t(h)=i}} \text{Im } x_h = l \right\},$$

qui induisent des bijections ($i \in I, l > 0$) :

$$\tilde{e}_{i,l} : \text{Irr } \Lambda(\nu)_{i,l} \xrightarrow{\sim} \text{Irr } \Lambda(\nu - l\alpha_i)_{i,0} : \tilde{f}_{i,l} : \cdot$$

Kashiwara et Saito se servent de ce jeu de bijections pour définir une structure de cristal sur $\text{Irr } \Lambda$ en posant pour toute composante $Z \in \text{Irr } \Lambda(\nu)_{i,l}$:

$$\begin{aligned} \text{wt}(Z) &= -\nu \\ \epsilon_i(Z) &= l \\ \tilde{e}_i(Z) &= \begin{cases} 0 & \text{si } l = 0 \\ \tilde{e}_{i,l} \tilde{f}_{i,l-1}(Z) & \text{sinon} \end{cases} \\ \tilde{f}_i(Z) &= \tilde{e}_{i,l} \tilde{f}_{i,l+1}(Z). \end{aligned}$$

Ils montrent alors que ce cristal vérifie les hypothèses de la proposition -1.13. En particulier, par définition de $\mathcal{B}(\infty)$, on obtient l'égalité suivante :

$$\dim \mathbf{U}_v^+(\mathfrak{g})[\nu] = |\text{Irr } \Lambda(\nu)|$$

qui permet à Lusztig de généraliser sa définition de la base semi-canonique à tous les carquois dans [Lus00].

Liens avec les variétés carquois de Nakajima

Les variétés carquois de Nakajima, définies au début des années 90, ont eu de nombreuses applications en théorie géométrique des représentations. Elles permettent en particulier de réaliser géométriquement de nombreux objets algébriquement, via des techniques cohomologiques ou de K -théorie. On va voir dans la suite comment elles ont notamment permis des interprétations géométriques des cristaux associés aux modules de plus haut poids, et des produits tensoriels de ces cristaux.

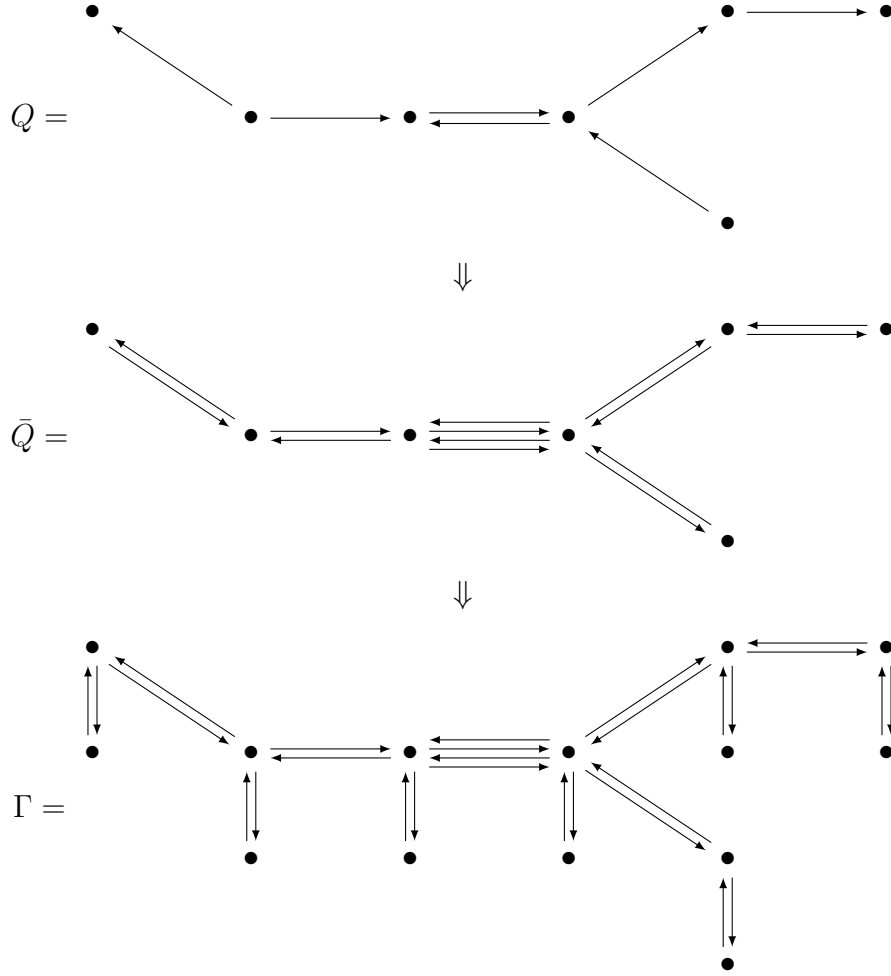
Dans la suite les résultats sont donnés dans le cadre des algèbres de Kac-Moody symétriques.

Réalisation géométrique de $\mathcal{B}(\lambda)$

On commence par rappeler quelques définitions. Soient $(\Lambda_i)_{i \in I}$ les poids dominants, *i.e.* vérifiant $\langle h_i, \Lambda_j \rangle = \delta_{i,j}$. On commence par fixer $\mathbf{w} = \sum_{i \in I} w_i \Lambda_i$ et un espace I -gradué W de dimension $(w_i)_{i \in I}$. On notera $(x, f, g) = ((x_h)_{h \in H}, (f_i)_{i \in I}, (g_i)_{i \in I})$ les éléments de l'espace suivant :

$$E(V, \mathbf{w}) = \bar{E}(V, V) \oplus \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(V_i, W_i) \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(W_i, V_i)$$

défini pour tout espace I -gradué V . Pour tout $\mathbf{v} = \sum_{i \in I} v_i \alpha_i$, on pose $E_{\mathbf{v}, \mathbf{w}} = E(V_{\mathbf{v}}, \mathbf{w})$. C'est l'espace de représentation en dimension (\mathbf{v}, \mathbf{w}) du carquois Γ obtenu à partir de \bar{Q} en dédoublant les sommets et en rajoutant une paire de flèches de sens opposés entre chaque sommet de I et son double. Par exemple :



L'espace $E_{v,w}$ est muni d'une forme symplectique :

$$\omega_{v,w}((x, f, g), (x', f', g')) = \sum_{h \in H} \text{Tr}(\epsilon(h)x_h x'_h) + \sum_{i \in I} \text{Tr}(g_i f'_i - g'_i f_i)$$

préservée par l'action naturelle de G_v . Cette fois, l'application moment associée $\mu_{v,w} : E_{v,w} \rightarrow \mathfrak{g}_v = \bigoplus_{i \in I} \text{End}(V_v)_i$ est donnée par :

$$\mu_{v,w}(x, f, g) = \left(g_i f_i + \sum_{h \in H: s(h)=i} \epsilon(h)x_{\bar{h}} x_h \right)_{i \in I}.$$

Définition -1.14. Soit $\chi : G_v \rightarrow \mathbb{C}^*$, $(g_i)_{i \in I} \mapsto \prod_{i \in I} \det^{-1} g_i$. On note :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_o(v, w) &= \mu_{v,w}^{-1}(0) // G_v \\ \mathfrak{M}(v, w) &= \mu_{v,w}^{-1}(0) /_{\chi} G_v \end{aligned}$$

les quotients géométrique et symplectique de $\mu_{v,w}^{-1}(0)$ par G_v (par rapport à χ). On note $\mathfrak{L}(v, w)$ la fibre au-dessus de 0 du morphisme projectif $\mathfrak{M}(v, w) \rightarrow \mathfrak{M}_o(v, w)$.

Dans [Nak98], Nakajima définit des stratifications analogues à celles de Lusztig ($i \in I$) :

$$\mathfrak{L}(v, w) = \bigsqcup_{l \geq 0} \mathfrak{L}(v, w)_{i,l}$$

qui induisent à nouveau des bijections :

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{i,l} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{L}(\mathbf{v} - l\alpha_k, \mathbf{w})_{i,0},$$

sous la condition $l + \langle h_i, \mathbf{w} - \mathbf{v} \rangle \geq 0$, qui permettent notamment de montrer le caractère Lagrangien de $\mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Elles permettent aussi à Saito dans l'article [Sai02] de prouver, avec des techniques analogues à celles de [KS97], le résultat suivant :

Théorème -1.15. *Il existe une structure de cristal isomorphe à $\mathcal{B}(\mathbf{w})$ sur les composantes irréductibles de $\mathfrak{L}(\mathbf{w}) = \sqcup_{\mathbf{v}} \mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.*

Réalisation géométrique du produit tensoriel de cristaux

Dans [Nak01], Nakajima construit une variété Lagrangienne $\tilde{\mathfrak{Z}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \subset \mathfrak{M}(\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}')$ telle que :

▷ il existe une bijection :

$$\text{Irr } \tilde{\mathfrak{Z}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \xrightarrow{\sim} \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \times \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}', \mathbf{w}'); \quad (-1.16)$$

▷ si l'on note $\tilde{\mathfrak{Z}}(\mathbf{v}) = \sqcup_{\mathbf{v}+\mathbf{v}'=\mathbf{v}} \tilde{\mathfrak{Z}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$, il existe encore une stratification ($i \in I$) :

$$\tilde{\mathfrak{Z}}(\mathbf{v}) = \bigsqcup_{l \geq 0} \tilde{\mathfrak{Z}}(\mathbf{v})_{i,l}$$

qui induit les bijections suivantes ($i \in I, l > 0$) :

$$\text{Irr } \tilde{\mathfrak{Z}}(\mathbf{v})_{i,l} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathfrak{Z}}(\mathbf{v} - l\alpha_i)_{i,0}.$$

À nouveau, ces bijections permettent de donner une structure de cristal à $\text{Irr } \tilde{\mathfrak{Z}}$.

Le résultat suivant donne alors une interprétation géométrique au produit tensoriel de cristaux :

Théorème -1.17. *Via -1.16, le cristal $\text{Irr } \tilde{\mathfrak{Z}}$ est isomorphe au produit tensoriel de cristaux $\text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{w}) \otimes \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{w}')$.*

Ce théorème, associé à un résultat de Joseph (c.f. [Jos95]), permet en fait de retrouver le résultat de Saito -1.15. Avant de le donner, voyons quelques nouvelles définitions relatives aux cristaux.

Définition -1.18. Un cristal \mathcal{B} est dit *normal* si pour tout $b \in \mathcal{B}$ on a :

$$\begin{aligned} \epsilon_i(b) &= \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k(b) \neq 0\} \\ \phi_i(b) &= \max\{k \geq 0 \mid \tilde{f}_i^k(b) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Définition -1.19. Un cristal \mathcal{B} est dit *de plus haut poids* $\lambda \in P^+ = \sum_{i \in I} \mathbb{N}\Lambda_i$ si :

1. il existe $b_\lambda \in \mathcal{B}$ tel que $\text{wt}(b_\lambda) = \lambda$ et $\tilde{e}_i(b_\lambda) = 0$ pour tout $i \in I$;
2. \mathcal{B} est engendré par b_λ , i.e. tout $b \in \mathcal{B}$ est obtenu par applications successives des \tilde{f}_i .

Par exemple, les cristaux $\mathcal{B}(\lambda)$ sont des cristaux normaux de plus haut poids. Enfin :

Définition -1.20. Soit une famille $\{\mathcal{D}(\lambda) \mid \lambda \in P^+\}$ de cristaux normaux $\mathcal{D}(\lambda)$ de plus haut poids λ , contenant un élément b_λ vérifiant les conditions de la précédente définition. Cette famille est dite *fermée* si pour tous λ, μ le sous-cristal de $\mathcal{D}(\lambda) \otimes \mathcal{D}(\mu)$ engendré par $b_\lambda \otimes b_\mu$ est isomorphe à $\mathcal{D}(\lambda + \mu)$.

On peut alors donner la caractérisation suivante :

Théorème -1.21 (Joseph). *Si $\{\mathcal{D}(\lambda) \mid \lambda \in P^+\}$ est une famille close de cristaux normaux de plus haut poids, alors, pour tout $\lambda \in P^+$, $\mathcal{D}(\lambda)$ est isomorphe à $\mathcal{B}(\lambda)$ en tant que cristal.*

On retrouve donc bien -1.15. En effet, d'après -1.17, la famille $\{\text{Irr } \mathfrak{L}(w) \mid w \in P^+\}$ est fermée. Il n'est par ailleurs pas compliqué de prouver que les $\text{Irr } \mathfrak{L}(w)$ sont normaux de plus haut poids (où b_w est le seul élément de $\text{Irr } \mathfrak{L}(0, w)$), d'où le résultat.

Dans cette thèse

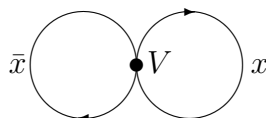
Le travail exposé dans ce manuscrit consiste à étudier la géométrie des variétés de représentations des carquois arbitraires, comportant d'éventuelles boucles, et d'en déduire une généralisation des groupes quantiques et cristaux de Kashiwara. Dans cette généralité, la matrice de Cartan est remplacée par une matrice dite de *Borcherds-Cartan*, dont les coefficients diagonaux sont égaux à :

$$c_{i,i} = 2 - 2(\text{nombre de boucles de } \Omega \text{ en } i) \in \{2, 0, -2, -4, \dots\}.$$

Du point de vue de Lusztig, deux approches sont possibles : celle utilisant les faisceaux pervers, et celle utilisant les fonctions constructibles sur certaines sous-variétés Lagrangienne.

Des sous-variétés Lagrangiennes pour généraliser les cristaux

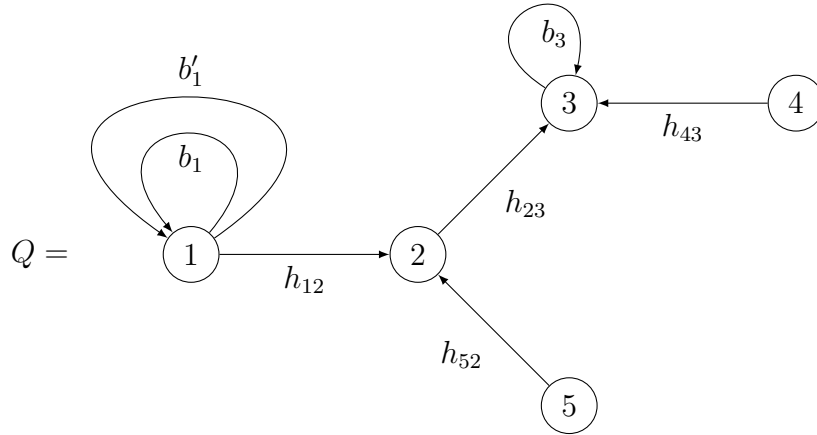
Cette thèse commence par aborder le point de vue des sous-variétés Lagrangiennes. Dans le cas général, le cas du carquois de Jordan suffit à montrer qu'il ne suffit pas de considérer des sous-variétés de $\mu^{-1}(0)$ de représentations nilpotentes, celles-ci étant trop petites. En fait, on sait dans ce cas qu'il faut considérer des représentations *semi-nilpotentes* du carquois double de \tilde{A}_0 :



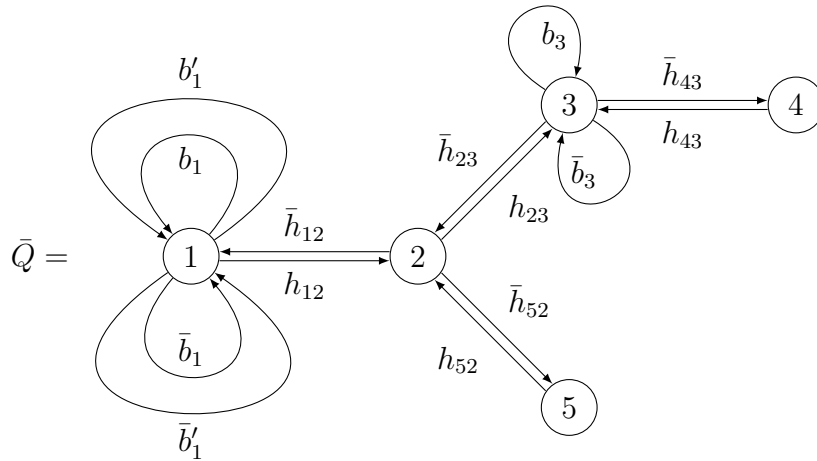
i.e. telles qu'il existe un drapeau de V stable par x et \bar{x} , x seulement agissant de manière nilpotente. Cette définition se généralise ainsi :

Définition -1.22. Une représentation x est dite *semi-nilpotente* s'il existe un drapeau I -gradué W_\bullet stable par x tel que $x_h(W_\bullet) \subseteq W_{\bullet-1}$ pour h boucle de Ω . On note $\Lambda(\alpha)$ la sous-variété des éléments semi-nilpotents de $\mu_\alpha^{-1}(0)$.

Si on considère par exemple :



alors :



Ici, les représentations $x = (x_h)_{h \in H}$ sont semi-nilpotentes s'il existe un drapeau W_\bullet tel que :

- ▷ $x_h(W_\bullet) \subseteq W_\bullet$ si h est du type h_{ij} ou \bar{h}_{ij} , ce qui équivaut, puisqu'alors h n'est pas une boucle (voir -1.5), à $x_h(W_\bullet) \subseteq W_{\bullet-1}$;
- ▷ $x_h(W_\bullet) \subseteq W_{\bullet-1}$ si h est du type b_i ou b'_i ;
- ▷ $x_h(W_\bullet) \subseteq W_\bullet$ si h est du type \bar{b}_i ou \bar{b}'_i .

Le premier résultat obtenu est le suivant :

Théorème A. *Dans le cas du carquois à un sommet et plus de deux boucles, $\Lambda(\alpha) \subseteq \bar{E}_\alpha$ est Lagrangienne, et ses composantes irréductibles sont paramétrées par les compositions de α .*

On sait que dans le cas du carquois de Jordan, les composantes sont paramétrées par les partitions. On peut ensuite utiliser les résultats connus des carquois à un sommet pour obtenir le théorème suivant concernant les carquois généraux :

Théorème B. *Pour tous $i \in I$ et $\alpha \in \mathbb{N}I$, il existe une stratification :*

$$\Lambda(\alpha) = \sqcup_{l \geq 0} \Lambda(\alpha)_{i,l}$$

induisant un jeu de bijections :

$$\text{Irr } \Lambda(\alpha)_{i,l} \xrightarrow{\sim} \text{Irr } \Lambda(\alpha - li)_{i,0} \times \text{Irr } \Lambda(li).$$

De plus, la sous-variété $\Lambda(\alpha) \subseteq \bar{E}_\alpha$ est Lagrangienne.

On peut alors obtenir un théorème strictement analogue à -1.8. Les bijections obtenues dans le théorème B montrent déjà que les opérateurs de Kashiwara usuels ne sont pas suffisants pour décrire la combinatoire des carquois à boucles puisque $\text{Irr } \Lambda(li)$ peut-être non trivial. L'étude des variétés carquois de Nakajima peut alors donner une intuition plus précise de la définition des cristaux généralisés. On commence par définir des sous-variétés d'éléments semi-nilpotents $\mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, et on obtient :

Théorème C. Pour tous $i \in I$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{N}I$, il existe une stratification :

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sqcup_{l \geq 0} \mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{i,l}$$

induisant un jeu de bijections :

$$\text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{i,l} \xrightarrow{\sim} \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v} - li, \mathbf{w})_{i,0} \times \text{Irr } \Lambda(li)$$

sous les conditions usuelles s'il n'y a pas de boucle en i , sinon sous la condition :

$$\mathbf{w}_i + \sum_{(h:i \rightarrow j \neq i) \in H} \mathbf{v}_j > 0.$$

De plus, la sous-variété $\mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est Lagrangienne.

On peut aussi définir un produit tensoriel géométrique de composantes irréductibles. On définit une sous-variété $\tilde{\mathfrak{L}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \subset \mathfrak{M}(\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}')$ telle que :

Théorème D. Il existe une bijection :

$$\begin{aligned} \otimes : \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \times \text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{v}', \mathbf{w}') &\xrightarrow{\sim} \text{Irr } \tilde{\mathfrak{L}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \\ (X, X') &\mapsto X \otimes X', \end{aligned}$$

et si l'on note $\tilde{\mathfrak{L}}(\mathbf{v}) = \sqcup_{\mathbf{v}+\mathbf{v}'=\mathbf{v}} \tilde{\mathfrak{L}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$, il existe une stratification ($i \in I$) :

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\mathbf{v}) = \bigsqcup_{l \geq 0} \tilde{\mathfrak{L}}(\mathbf{v})_{i,l}$$

qui induit les bijections suivantes ($i \in I, l > 0$) :

$$\text{Irr } \tilde{\mathfrak{L}}(\mathbf{v})_{i,l} \xrightarrow{\sim} \text{Irr } \tilde{\mathfrak{L}}(\mathbf{v} - l\alpha_i)_{i,0} \times \text{Irr } \Lambda(li)$$

sous les mêmes conditions qu'au théorème C.

On peut doré et déjà définir ϵ_i via le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Irr } \tilde{\mathfrak{L}}(\mathbf{v})_{i,l} & \xrightarrow{\quad} & \text{Irr } \tilde{\mathfrak{L}}(\mathbf{v} - l\alpha_i)_{i,0} \times \text{Irr } \Lambda(li) \\ & \searrow \epsilon_i & \swarrow \text{pr}_2 \\ & \text{Irr } \Lambda(li) & \end{array}$$

où $\text{Irr } \Lambda(li)$ est un singleton, l'ensemble des partitions de l ou l'ensemble des compositions de l suivant que i est sans boucles, avec une boucle ou avec plus de deux boucles. Si l'on définit de manière analogue ϵ_i sur $\text{Irr } \mathfrak{L}(\mathbf{w})$ grâce au théorème C, on obtient le théorème suivant :

Théorème E. Soit i un sommet présentant une ou plusieurs boucles, et $(X, X') \in \text{Irr } \mathcal{L}(v, w) \times \text{Irr } \mathcal{L}(v', w')$. On a :

$$\epsilon_i(X \otimes X') = \begin{cases} \epsilon_i(X') & \text{si } w'_i + \sum_{(h:i \rightarrow j \neq i) \in H} v'_{t(h)} > 0 \\ \epsilon_i(X) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tous ces résultats donnent assez de rigidité pour définir une version généralisée des cristaux de Kashiwara en fin de première partie, ainsi qu'un produit tensoriel.

Des faisceaux pervers et la conjecture de Lusztig

Dans une seconde partie, on commence par démontrer la conjecture -1.3 de Lusztig évoquée plus haut, en étendant les résultats connus dans le cas des carquois sans boucle et des carquois à un sommet et plusieurs boucles. On utilise, comme dans le cas classique, une récurrence sur α . Ici l'initialisation peut cependant être non triviale dans le cas $\alpha = li$ s'il y a une ou plusieurs boucles en i . Cependant ces cas sont connus, comme expliqué plus haut. La difficulté se situe en fait dans l'étude des foncteurs de restriction du type $\text{Res}_{\alpha-li, li}$, quand i présente une ou plusieurs boucles. On introduit une notion d'invariance adaptée à cette fin, et une notion de régularité permettant une étude précise des supports des faisceaux considérés. On prouve ainsi le théorème suivant, analogue au théorème B :

Théorème F. Pour tous $i \in I$ et $\alpha \in \mathbb{N}I$, il existe une stratification :

$$\mathcal{P}_\alpha = \sqcup_{l \geq 0} \mathcal{P}_{\alpha, i, l}$$

induisant un jeu de bijections :

$$\mathcal{B}_{\alpha, i, l} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\alpha-li, i, 0} \times \mathcal{B}_{li}.$$

La conjecture de Lusztig est un corollaire de ce théorème.

Toutes les études géométriques faites permettent alors de définir une algèbre de Hopf généralisant les groupes quantiques usuellement associés aux carquois sans boucles.

On définit U_v^+ par un générateur E_i à chaque sommet réel i (i.e. sans boucles), et une famille $(E_{i,l})_{l > 0}$ à chaque sommet imaginaire i (i.e. avec boucle(s)), et on pose $\deg(E_{i,l}) = li$. En plus des relations de Serre usuelles, on impose des relations de Serre de plus haut ordre :

$$\sum_{t+t'=-la_{i,j}+1} (-1)^t E_j^{(t)} E_{i,l} E_j^{(t')} = 0$$

pour tout sommet réel j et tout sommet imaginaire i . D'après le cas du carquois de Jordan, on impose aussi :

$$[E_{i,l}, E_{i,k}] = 0$$

s'il n'y a qu'une boucle en i .

On peut alors prouver plusieurs propriétés intéressantes de cette algèbre, notamment un analogue du théorème de Gabber-Kac à propos de la non-dégénérescence des formes de Hopf sur U_v^+ (via la définition notamment d'une quasi- \mathcal{R} -matrice et d'un opérateur de Casimir). On peut alors obtenir :

Théorème G. *On a un isomorphisme d'algèbres de Hopf :*

$$\mathbf{U}_v^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}.$$

En particulier, on remarque que \mathcal{B}_{l_i} est l'ensemble des compositions de l si i présente plusieurs boucles. Ce résultat permet de généraliser la base canonique. À ce stade, il n'est par contre pas possible de généraliser la base semi-canonique, faute de résultats analogues à ceux obtenus dans [KS97], s'appuyant sur une étude fine de la théorie des cristaux, pas réalisée dans cette thèse. On a cependant une surjection :

$$\mathbf{U}^+(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathcal{M}_o \underset{\text{libre}}{\supset} (f_Z)_{Z \in \text{Irr } \Lambda}$$

et l'existence d'une famille libre $(f_Z)_{Z \in \text{Irr } \Lambda}$ vérifiant les mêmes hypothèses que dans -1.8. On verra en conclusion comment résoudre ce problème, et de manière plus générale, comment étudier les nouveaux cristaux définis en fin de première partie, en s'appuyant notamment sur le groupe quantique généralisé défini dans la seconde.

Références

- [BBD82] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [Jos95] Anthony Joseph. *Quantum groups and their primitive ideals*, volume 29 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [Kas91] M. Kashiwara. On crystal bases of the Q -analogue of universal enveloping algebras. *Duke Math. J.*, 63(2) :465–516, 1991.
- [KS97] Masaki Kashiwara and Yoshihisa Saito. Geometric construction of crystal bases. *Duke Math. J.*, 89(1) :9–36, 1997.
- [Lus90] G. Lusztig. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(2) :447–498, 1990.
- [Lus91] G. Lusztig. Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(2) :365–421, 1991.
- [Lus92] G. Lusztig. Affine quivers and canonical bases. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (76) :111–163, 1992.
- [Lus93] G. Lusztig. Tight monomials in quantized enveloping algebras. In *Quantum deformations of algebras and their representations (Ramat-Gan, 1991/1992 ; Rehovot, 1991/1992)*, volume 7 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 117–132. Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.
- [Lus00] G. Lusztig. Semicanonical bases arising from enveloping algebras. *Adv. Math.*, 151(2) :129–139, 2000.
- [Lus10] George Lusztig. *Introduction to quantum groups*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2010. Reprint of the 1994 edition.
- [Nak98] Hiraku Nakajima. Quiver varieties and Kac-Moody algebras. *Duke Math. J.*, 91(3) :515–560, 1998.
- [Nak01] Hiraku Nakajima. Quiver varieties and tensor products. *Invent. Math.*, 146(2) :399–449, 2001.
- [Sai02] Yoshihisa Saito. Crystal bases and quiver varieties. *Math. Ann.*, 324(4) :675–688, 2002.
- [Sch09] Olivier Schiffmann. Lectures on canonical and crystal bases of Hall algebras. arXiv :0910.4460, 2009.