



HAL
open science

Laplacien hypoelliptique, torsion analytique et théorème de Cheeger-Müller

Shu Shen

► **To cite this version:**

Shu Shen. Laplacien hypoelliptique, torsion analytique et théorème de Cheeger-Müller. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2014. Français. NNT : 2014PA112078 . tel-01020836

HAL Id: tel-01020836

<https://theses.hal.science/tel-01020836>

Submitted on 8 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Comprendre le monde,
construire l'avenir®

N° d'ordre :



UNIVERSITÉ PARIS-SUD
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI
Spécialité : Mathématiques

par

Shu SHEN

Laplacien hypoelliptique, torsion analytique, et théorème de Cheeger-Müller

Directeur de thèse : M. Jean-Michel BISMUT

Rapporteurs : M. Gilles LEBEAU
M. Weiping ZHANG

Soutenue le 13 Mai 2014 devant le jury composé de :

M. Jean-Michel	BISMUT	: Directeur de thèse
M. Bernard	HELFFER	: Examineur
M. Gilles	LEBEAU	: Rapporteur
M. Werner	MÜLLER	: Examineur
M. Francis	NIER	: Examineur
M. Weiping	ZHANG	: Rapporteur



Thèse préparée au

Département de Mathématiques d'Orsay

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay (UMR 8628), Bât. 425

Université Paris-Sud

91405 Orsay Cedex

France

Résumé

L'objet de cette thèse est de démontrer une formule reliant les métriques de Ray-Singer hypoelliptique et de Milnor sur le déterminant de la cohomologie d'une variété riemannienne compacte par une déformation à la Witten du laplacien hypoelliptique en théorie de de Rham.

Mots clés : torsion analytique, laplacien hypoelliptique, théorie de Hodge, théorie de l'indice, déformation de Witten.

~~~~~

## The hypoelliptic Laplacian, analytic torsion and Cheeger-Müller Theorem

~~~~~

Abstract

The purpose of this thesis is to prove a formula relating the hypoelliptic Ray-Singer metric and the Milnor metric on the determinant of the cohomology of a compact Riemannian manifold by a Witten-like deformation of the hypoelliptic Laplacian in de Rham theory.

Keywords: analytic torsion, hypoelliptic Laplacian, Hodge theory, index theory, Witten deformation.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, le professeur Jean-Michel Bismut. Avec sa gentillesse et sa grande expérience, il m'a bien guidé et apporté son soutien tout au long de la préparation de la thèse. Je le remercie vivement pour tout le temps qu'il m'a consacré, pour ses encouragements et ses conseils avisés, et aussi pour m'avoir appris le métier de chercheur.

Je remercie vivement les professeurs Gilles Lebeau et Weiping Zhang d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse, et de faire partie du jury.

Je remercie le professeur Werner Müller pour m'avoir invité à donner un exposé à Bonn et pour avoir accepté de faire partie du jury. Je remercie également les professeurs Bernard Helffer et Francis Nier d'avoir accepté d'être membres du jury.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance au professeur Xinan Ma, qui m'a suggéré de venir à Paris. Mes vifs remerciements vont également au professeur Xiaonan Ma pour le soutien et les encouragements constants qu'il m'a prodigués.

Je voudrais adresser mes chaleureux remerciements à tous les membres du laboratoire de Mathématique de l'Université de Paris-Sud et du Centre de Mathématiques Laurent Schwartz de l'École Polytechnique, parmi lesquels je citerai les professeurs Nicole Berline, David Harari, Jean Lannes, Christophe Margerin, Pierre Pansu. Je remercie également mesdames Fabienne Jacquemin, Valérie Lavigne et Marie-Christine Myoupo pour l'aide qu'elles m'ont apportée.

Merci à Junyan Cao, Bo Liu, Ursula Ludwig, Nikhil Savale, Jianqin Yu pour des discussions toujours fructueuses. Merci à Yinshang Chang, Li Chen, Xinxin Chen, Wen Deng, Xiong Jin, Xiangyu Liang, Shen Lin, Xin Nie, Yanqi Qiu, Yanhui Qu, Minmin Wang, Hao Wu pour avoir partagé leurs connaissances et pour leur participation active au séminaire étudiant, dont j'ai beaucoup tiré partie.

Merci également à tous les amis que je me suis faits en France. Leur soutien constant a été d'une valeur inestimable : sans eux, je ne serais ce que je suis aujourd'hui.

Enfin, je tiens à remercier vivement Monsieur et Madame Lajeune pour l'aide qu'ils m'ont accordée quand je suis arrivé en France.

Table des matières

Introduction	9
1. Préliminaires d'algèbre linéaire	19
1.1. La droite réelle \mathbf{R}	19
1.2. Déterminants	19
1.3. Théorie de Hodge exotique	20
1.4. La projection h -autoadjointe	20
2. Laplacien de Witten elliptique et métrique de Ray-Singer elliptique	21
2.1. Laplacien de Witten elliptique	21
2.2. Métrique de Ray-Singer elliptique	22
3. Laplacien hypoelliptique	23
3.1. Une forme bilinéaire nondégénérée	23
3.2. L'opérateur $L_{b,T}$	25
3.3. Théorie de Hodge pour $2A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$	25
3.4. Métrique de Ray-Singer hypoelliptique	26
4. Le complexe de Thom-Smale et métrique de Milnor	27
5. L'intégrale de Berezin et le formalisme de Mathai-Quillen	28
5.1. L'intégrale de Berezin	28
5.2. Le formalisme de Mathai-Quillen	28
6. L'énoncé du théorème principal	30
7. Les opérateurs modèles	30
7.1. Cohomologies sur \mathbf{R}	31
7.2. Les oscillateurs harmoniques de Witten sur \mathbf{R}	31
7.3. Opérateur de la chaleur pour $\tilde{\square}_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}}/2$	33
7.4. La métrique de Ray-Singer sur \mathbf{R}	35
7.5. Les opérateurs modèles sur \mathbf{R}^2	36
7.6. Transformation de Bargmann	37
7.7. L'opérateur B_γ^+	40
7.8. L'opérateur B_γ^-	41
7.9. L'opérateur C_γ^\pm	44
7.10. Le spectre de H_γ^\pm et $L_{b,T}^\pm$	44
7.11. Formes harmoniques et théorie de Hodge pour $A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$	46
7.12. Opérateur de la chaleur pour $L_{b,T}^\pm$	50
7.13. Théorie de l'indice local	53
7.14. Métrique de Ray-Singer hypoelliptique sur \mathbf{R}	56
7.15. Évaluation du noyau de $\exp(-tB_\gamma^\pm)$	58
7.16. Problème variationnel associé aux noyaux de la chaleur de \mathfrak{B}_γ	63
7.17. L'opérateur $H_{\epsilon,\gamma}$	66

7.18.	L'opérateur modèle sur \mathbf{R}^{2n}	72
8.	Estimation de spectre de $L_{b,T}$	74
8.1.	Hypothèses générales	75
8.2.	L'opérateur $L_{\epsilon,b,T}$	75
8.3.	Étude de $L_{\epsilon,b,T}$ hors des points critiques	80
8.4.	Étude de $L_{\epsilon,b,T}$ au voisinage des points critiques	81
8.5.	L'opérateur $L_{\epsilon,b,T}$ comme matrice $(2, 2)$	83
8.6.	Estimation de la résolvante de $L_{\epsilon,b,T}$	85
8.7.	Le complexe de Witten hypoelliptique	89
8.8.	L'application de de Rham	89
8.9.	L'application $e_{\epsilon,b,T}$	90
9.	Une intégrale de contour	91
9.1.	Une 1-forme fermée fondamentale	91
9.2.	L'intégrale de contour	94
10.	Démonstration du théorème principal	94
10.1.	Quelques formules préliminaires	95
10.2.	Hypothèses simplificatrices sur les métriques	96
10.3.	Quelques résultats intermédiaires	96
10.4.	Asymptotique de I_k^0	97
10.5.	Comparaison des divergences	103
11.	Démonstration du théorème 10.2	104
12.	Démonstration des théorèmes 10.3 et 10.4	105
13.	Étude des fonctionnelles $\int_0^t \dot{x}_s ^2 ds$ et $\int_0^t (\dot{x}_s ^2 + df _{x_s}^2) ds$	108
14.	Démonstration du théorème 10.5	108
14.1.	Une estimation uniforme sur le noyau de la chaleur pour $L_{\epsilon,b,T}$	109
14.2.	Quelques estimations sur un opérateur scalaire	110
14.3.	Démonstration du théorème 14.1	119
15.	Démonstration du théorème 10.6	119
15.1.	Une estimation uniforme sur $\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} \exp \left(-tL_{\epsilon,bt^{1/4},t^{-1/2}T}/2 \right) \right]$	120
15.2.	Localisation du problème	121
15.3.	Changement d'échelle et transformation de Getzler	124
15.4.	Développement de Taylor de l'opérateur $\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$	125
15.5.	Évaluation des traces associée à $\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}, \mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,\epsilon}$	126
15.6.	Des estimations uniformes sur $\exp \left(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon} \right) (0, p, 0, p)$ pour $x \notin U_2$	128
15.7.	Estimation au voisinage d'un point critique	134
16.	Démonstration du théorème 10.7	138
17.	Démonstration du théorème 10.8	139
	Bibliographie	141
	Index	143

Introduction

L'objet de cet article est de démontrer une formule reliant les métriques de Ray-Singer hypoelliptique et de Milnor sur le déterminant de la cohomologie d'une variété riemannienne compacte par une déformation à la Witten du laplacien hypoelliptique en théorie de de Rham.

Plus précisément, soit X une variété compacte, et soit F un fibré complexe plat sur X . Soit $\lambda = \det H^*(X, F)$ le déterminant de la cohomologie de X à coefficients dans F . Alors λ est une droite complexe.

Supposons que g^F est une métrique plate sur F . Étant donnée une triangulation de X , on peut construire une métrique sur λ à l'aide du complexe combinatoire correspondant. Cette métrique ne dépend pas de la triangulation. On l'appelle métrique de Reidemeister sur λ .

Soit g^{TX} une métrique riemannienne sur X . On peut construire une autre métrique sur λ associée aux métriques g^{TX} , g^F , à l'aide de la torsion analytique, qui est un invariant spectral du laplacien de Hodge correspondant. Cette métrique est la métrique de Ray-Singer. Si X est de dimension impaire, la métrique de Ray-Singer ne dépend pas des métriques g^{TX} , g^F .

Dans [RS71], Ray et Singer ont conjecturé que les métriques de Reidemeister et de Ray-Singer coïncident. Ce résultat a été démontré par Cheeger [C79] et Müller [M78]. Il est connu sous le nom de théorème de Cheeger-Müller.

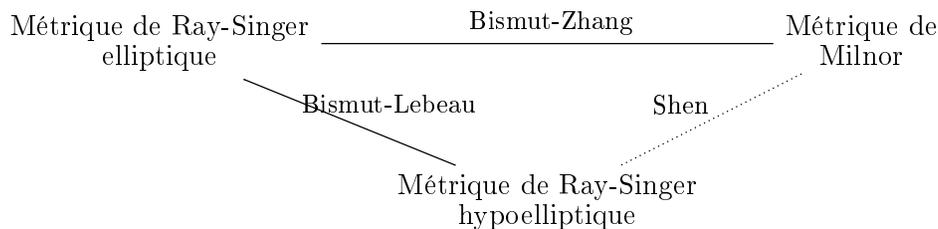
Dans [BZ92], Bismut et Zhang ont étendu le théorème de Cheeger-Müller à des fibrés plats arbitraires. Dans ce cas, la métrique de Reidemeister n'est plus un invariant combinatoire. Étant donné un champ de gradient de Morse-Smale sur X pour une fonction de Morse f sur X , on peut associer une métrique sur λ , dite métrique de Milnor. Bismut et Zhang ont alors donné une formule locale explicite reliant la métrique de Ray-Singer et la métrique de Milnor. Quand g^F est plate, on retrouve le théorème de Cheeger-Müller.

Pour démontrer leur résultat, Bismut et Zhang ont utilisé la déformation de Witten du complexe de de Rham associée à la fonction de Morse f .

Par ailleurs, dans [B05], [BL08], Bismut et Lebeau ont construit une déformation hypoelliptique de la théorie de Hodge classique. Le laplacien hypoelliptique L_b , qui dépend d'un paramètre $b > 0$, est un opérateur agissant sur l'espace total du fibré cotangent de X . Bismut et Lebeau ont montré en quel sens quand $b \rightarrow 0$, L_b déforme le laplacien de Hodge de X . Ils ont également construit une métrique de Ray-Singer hypoelliptique sur λ ne dépendant pas de $b > 0$. En utilisant le fait que le laplacien hypoelliptique déforme le laplacien elliptique, ils ont montré que les métriques de Ray-Singer hypoelliptique et elliptique coïncident.

Dans cet article, nous allons montrer directement une formule qui relie la métrique de Ray-Singer hypoelliptique et la métrique de Milnor. En utilisant le théorème de Bismut-Zhang, on retrouve ainsi le résultat de Bismut-Lebeau. Bien plus, on n'utilise à aucun moment le fait que le laplacien hypoelliptique déforme le laplacien elliptique. Ceci nous

permet de compléter le diagramme suivant :



Dans les pages qui suivent, nous allons préciser le contexte dans lequel nous travaillons, et nous allons décrire en détail les résultats que nous avons obtenu. Nous expliquerons également certaines techniques utilisées.

0.1. La métrique de Ray-Singer elliptique. Rappelons quelques éléments sur la torsion analytique et la métrique de Ray-Singer elliptique [RS71]. Soit X une variété compacte de dimension n . Soit (F, ∇^F) un fibré vectoriel complexe plat sur X . On désigne par $H^\cdot(X, F)$ la cohomologie de X à coefficients dans F . Soit $(\Omega^\cdot(X, F), d^X)$ le complexe de de Rham.

Pour E un espace vectoriel de dimension m , on pose $\det E = \Lambda^m(E)$. Soit λ le déterminant de la cohomologie $H^\cdot(X, F)$, i.e.,

$$(0.1.1) \quad \lambda = \det H^\cdot(X, F) = \bigotimes_{i=0}^n (\det H^i(X, F))^{(-1)^i}.$$

Soit g^{TX} une métrique riemannienne sur X , et soit g^F une métrique hermitienne sur F . Soit $d^{X,*}$ l'adjoint formel de l'opérateur de de Rham d^X sur X par rapport à la métrique L^2 naturelle sur $\Omega^\cdot(X, F)$ induite par g^{TX} et g^F . Alors le laplacien de Hodge associé est donné par

$$(0.1.2) \quad \square^X = (d^X + d^{X,*})^2 = [d^X, d^{X,*}].$$

Si Δ^X est le laplacien de Laplace-Beltrami sur X , la restriction de \square^X à $C^\infty(X)$ coïncide avec $-\Delta^X$.

Soit P^X le projecteur spectral pour \square^X relatif à la valeur propre 0. Soit $N^{\Lambda^\cdot(T^*X)}$ l'opérateur de nombre sur $\Lambda^\cdot(T^*X)$. Pour $\text{Re}(s) > n/2$, on définit une fonction zêta associée à \square^X par la formule

$$(0.1.3) \quad \theta(s) = -\text{Tr}_s \left[N^{\Lambda^\cdot(T^*X)} (\square^X)^{-s} (1 - P^X) \right].$$

Dans (0.1.3), Tr_s désigne la super trace de l'opérateur considéré. Il est bien connu que $\theta(s)$ a une extension méromorphe sur \mathbf{C} , qui est holomorphe en $s = 0$. On appelle torsion analytique le réel $\theta'(0)$.

Par le théorème de Hodge, on peut identifier $H^\cdot(X, F)$ avec le noyau de \square^X , c'est à dire avec les formes harmoniques. La métrique L^2 sur $\Omega^\cdot(X, F)$ induit une métrique $|\cdot|_\lambda^{RS,2}$ sur λ . Suivant [Q85], on définit la métrique de Ray-Singer elliptique par

$$(0.1.4) \quad \|\cdot\|_\lambda^{RS,2} = e^{\theta'(0)} |\cdot|_\lambda^{RS,2}.$$

En particulier, si $H^\cdot(X, F) = 0$, λ est la droite complexe triviale \mathbf{C} . Dans ce cas, si on note par $\mathbf{1} \in \mathbf{C}$ la section canonique de \mathbf{C} , on a l'identité

$$(0.1.5) \quad \log \|\mathbf{1}\|_\lambda^{RS,2} = \theta'(0).$$

Dans [RS71, Theorem 2.1], Ray et Singer ont montré que si $H(X, F) = 0$, et si la dimension de X est impaire, la torsion analytique $\theta'(0)$ ne dépend pas de g^{TX} et g^F . Plus généralement, quand X est de dimension impaire, la métrique de Ray-Singer ne dépend pas de g^{TX} et g^F . Quand X est de dimension paire, dans [BZ92, Theorem 4.7], Bismut et Zhang ont montré une formule d'anomalie pour $\|\cdot\|_\lambda^{RS,2}$, qui exprime la variation de $\|\cdot\|_\lambda^{RS,2}$ en fonction de g^{TX} et g^F par une expression calculable localement.

0.2. Les métriques de Reidemeister et de Milnor. Soit K une triangulation de X . On désigne par $(C(K, F), \partial)$ le complexe des cochaînes associées à K à valeurs dans F . Par l'isomorphisme de de Rham, on a

$$(0.2.1) \quad H(C(K, F), \partial) \simeq H(X, F).$$

Par [KM76], on a l'isomorphisme canonique

$$(0.2.2) \quad \lambda \simeq \det(C(K, F)).$$

Soit B l'ensemble des barycentres des simplexes de K . On utilise l'identification

$$(0.2.3) \quad C(K, F) = \bigoplus_{x \in B} F_x.$$

Alors par (0.2.2), (0.2.3), les métriques $(g_x^F)_{x \in B}$ induisent une métrique $\|\cdot\|_\lambda^{R,K,2}$ sur λ .

Quand $H(X, F) = 0$, comme précédemment, on obtient la torsion de Reidemeister par

$$(0.2.4) \quad \tau_K = \log \|\mathbf{1}\|_\lambda^{R,K,2}.$$

La torsion de Reidemeister τ_K a été étudiée par Franz [F35], Reidemeister [Re35], et de Rham [dR50]. Ces auteurs ont montré que si g^F est plate, alors τ_K ne dépend ni de K ni de B . Quand $H(X, F) \neq 0$, on peut montrer que si g^F est plate, la métrique $\|\cdot\|_\lambda^{R,K,2}$ est encore indépendante de K et B . Plus généralement, dans [M93], Müller a montré que si g^F est unimodulaire, i.e., si g^F induit une métrique plate sur $\det F$, la métrique $\|\cdot\|_\lambda^{R,K,2}$ ne dépend pas de K et B . Dans ce cas, la métrique $\|\cdot\|_\lambda^{R,K,2}$ est un invariant topologique, qu'on note $\|\cdot\|_\lambda^{R,2}$, et qu'on appelle métrique de Reidemeister.

Soit f une fonction de Morse sur X , et soit B l'ensemble de points critiques de f . Soit $g^{TX'}$ une autre métrique sur TX . On suppose que le champ de gradient $\nabla' f$ pour $g^{TX'}$ vérifie la condition de transversalité de Smale [Sm61], [Sm67]. Alors, le flot

$$(0.2.5) \quad \dot{x} = -\nabla' f$$

induit une décomposition cellulaire de X . Soit $(C(W^u, F), \partial)$ le complexe des cochaînes cellulaires à valeurs dans F , qu'on appelle complexe de Thom-Smale. Alors

$$(0.2.6) \quad H(C(W^u, F), \partial) \simeq H(X, F).$$

Comme précédemment, les métriques $(g_x^F)_{x \in B}$ induisent une métrique $\|\cdot\|_{\lambda, \nabla' f}^{M,2}$ sur λ , la métrique de Milnor. Dans [Mi66, Theorem 9.3] et [BZ92, Remark 1.10], on montre que si g^F est unimodulaire, la métrique de Milnor $\|\cdot\|_{\lambda, \nabla' f}^{M,2}$ ne dépend pas de $\nabla' f$ et coïncide avec la métrique de Reidemeister $\|\cdot\|_\lambda^{R,2}$.

0.3. Le théorème de Cheeger-Müller et son extension par Bismut-Zhang. Dans [RS71], Ray et Singer ont conjecturé que si g^F est plate, alors

$$(0.3.1) \quad \|\cdot\|_{\lambda}^{R,2} = \|\cdot\|_{\lambda}^{RS,2}.$$

Cette conjecture a été démontrée par Cheeger [C79] et Müller [M78]. Dans le cas où g^F est unimodulaire, Müller [M93] a montré que (0.3.1) est encore vrai. Dans [BZ92], pour g^F arbitraire, Bismut et Zhang ont montré une formule de comparaison pour les métriques de Milnor et de Ray-Singer elliptique. Soit ∇^{TX} la connexion de Levi-Civita sur (TX, g^{TX}) . Soit $\psi(TX, \nabla^{TX})$ le courant de Mathai-Quillen [MaQ86] sur l'espace totale du fibré tangent de X . Posons

$$(0.3.2) \quad \theta(\nabla^F, g^F) = \text{Tr} \left[(g^F)^{-1} \nabla^F g^F \right] \in \Omega^1(X).$$

Par [BZ92, Theorem 7.1], on a

$$(0.3.3) \quad \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda}^{RS,2}}{\|\cdot\|_{\lambda, \nabla^F}^{M,2}} \right) = - \int_X \theta(\nabla^F, g^F) (\nabla^F f)^* \psi(TX, \nabla^{TX}).$$

Il est clair que (0.3.3) implique la conjecture de Ray-Singer et le résultat de Müller [M93].

0.4. La déformation de Witten elliptique. La déformation de Witten elliptique [Wi82] est l'ingrédient essentiel de la preuve de (0.3.3) donnée par Bismut et Zhang. Soit en effet $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse. On pose

$$(0.4.1) \quad d_f^X = e^{-f} d^X e^f, \quad d_f^{X,*} = e^f d^{X,*} e^{-f}.$$

L'application $\alpha \in \Omega(X, F) \rightarrow e^f \alpha \in \Omega(X, F)$ est un isomorphisme des complexes $(\Omega(X, F), d_f^X)$ et $(\Omega(X, F), d^X)$.

Soit \square_f^X le laplacien de Hodge associé aux métriques g^{TX} et $e^{-2f} g^F$. Par (0.1.2), on a

$$(0.4.2) \quad \square_f^X = \left(d^X + d_{2f}^{X,*} \right)^2 = \left[d^X, d_{2f}^{X,*} \right].$$

On pose

$$(0.4.3) \quad \tilde{\square}_f^X = e^{-f} \square_f^X e^f = \left[d_f^X, d_f^{X,*} \right].$$

L'opérateur $\tilde{\square}_f^X$ est autoadjoint pour la métrique L^2 standard sur $\Omega(X, F)$. Les opérateurs \square_f^X ou $\tilde{\square}_f^X$ sont appelés laplaciens de Witten.

Si $X = \mathbf{R}$ est muni de sa métrique canonique, et si $F = \mathbf{C}$ est muni de la métrique triviale, et si $f^{\pm} = \pm|x|^2/2$, le laplacien de Witten $\tilde{\square}_{f^{\pm}}^{\mathbf{R}}$ est un oscillateur harmonique. Plus précisément, on a

$$(0.4.4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\square}_{f^+}^{\mathbf{R}} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + |y|^2 - 1 \right) + N^{\Lambda \cdot \mathbf{R}^*}, \\ \frac{1}{2} \tilde{\square}_{f^-}^{\mathbf{R}} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + |y|^2 - 1 \right) + (1 - N^{\Lambda \cdot \mathbf{R}^*}). \end{aligned}$$

Dans [Wi82], Witten a étudié l'opérateur $\tilde{\square}_{Tf}^X$ quand $T \rightarrow \infty$. Par [Wi82, (13)], [BZ92, (5.13)], pour $T \geq 0$, on a

$$(0.4.5) \quad \tilde{\square}_{Tf}^X = \square^X + T^2|df|^2 + TR_f,$$

où R_f est un terme d'ordre 0. Dans [Wi82], Witten a montré que quand $T \rightarrow \infty$, le spectre de l'opérateur $\tilde{\square}_{Tf}^X$ se décompose en deux parties, l'une qui converge vers 0 et l'autre qui converge vers $+\infty$. Soit $\tilde{\Omega}_{Tf}^{[0,1]}(X, F)$ la somme directe des espaces propres associés aux valeurs propres de $\tilde{\square}_{Tf}^X$ dans $[0, 1]$. Alors, $(\tilde{\Omega}_{Tf}^{[0,1]}(X, F), d_{Tf}^X)$ est un sous-complexe de $(\Omega(X, F), d_{Tf}^X)$. Grâce au terme $T^2|df|^2$ dans (0.4.5), Witten a montré que l'espace vectoriel $\tilde{\Omega}_{Tf}^{[0,1]}(X, F)$ se localise au voisinage des points critiques. De plus, pour $1 \leq i \leq n$, $T > 0$ assez grand, Witten a montré que

$$(0.4.6) \quad \dim \tilde{\Omega}_{Tf}^{i,[0,1]}(X, F) = M_i \operatorname{rg}[F],$$

où M^i est le nombre de points critiques d'indice i . De (0.4.6), Witten en a déduit une preuve analytique des inégalités de Morse. Il a conjecturé que, pour $T > 0$ assez grand, le complexe $(\tilde{\Omega}_{Tf}^{[0,1]}(X, F), d_{Tf}^X)$ s'identifie au complexe de Thom-Smale.

Plus généralement, dans [HeSj85, Theorem 1.4, Lemma 1.6] et [BZ92, Theorem 8.5], ces auteurs ont montré que si g^{TX}, g^F sont plates au voisinage des points critiques de f , alors il existe $c > 0, C > 0, T_0 > 0$ tels que pour $T \geq T_0$, on a

$$(0.4.7) \quad \operatorname{Sp} \tilde{\square}_{Tf}^X \subset [0, Ce^{-cT}] \cup [CT, \infty[.$$

De plus, soit $\Omega_{Tf}^{[0,1]}(X, F)$ la somme directe des espaces propres associés aux valeurs propres de \square_{Tf}^X dans $[0, 1]$. Si le champ de gradient ∇f pour g^{TX} vérifie la condition de transversalité de Smale, dans [HeSj85] et [BZ94, Theorem 6.11], ces auteurs ont montré que le complexe $(\Omega_{Tf}^{[0,1]}(X, F), d^X)$ s'identifie au complexe de Thom-Smale.

0.5. Le laplacien hypoelliptique en théorie de de Rham. Rappelons brièvement la construction du laplacien hypoelliptique en théorie de de Rham [B05], [BL08]. On désigne par $\pi : \mathcal{X}^* \rightarrow X$ l'espace total du fibré cotangent de X . Soit $\mathcal{H} : \mathcal{X}^* \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^∞ telle que $\mathcal{H}(x, p) = \mathcal{H}(x, -p)$. Dans [B05, Section 2], à $(g^{TX}, g^F, \mathcal{H})$, Bismut associe une forme hermitienne $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^*F)}$ non dégénérée de signature (∞, ∞) sur $\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$. Soit $\bar{d}_{\phi, 2\mathcal{H}}^{\mathcal{X}^*}$ l'adjoint formel de $d^{\mathcal{X}^*}$ par rapport à $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^*F)}$. On pose

$$(0.5.1) \quad A_{\phi, \mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left(d^{\mathcal{X}^*} + \bar{d}_{\phi, 2\mathcal{H}}^{\mathcal{X}^*} \right), \quad \mathfrak{A}_{\phi, \mathcal{H}} = e^{-\mathcal{H}} A_{\phi, \mathcal{H}} e^{\mathcal{H}}.$$

Alors $A_{\phi, \mathcal{H}}$ est $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^*F)}$ -autoadjoint.

On pose

$$(0.5.2) \quad \mathcal{H}(x, p) = \frac{|p|^2}{2}.$$

Pour $b > 0$, par [B05, Sections 3.2, 3.3], on sait que l'opérateur $2A_{\phi, \mathcal{H}/b^2}^2$ n'est ni elliptique ni autoadjoint ni positif, mais qu'il est hypoelliptique.

Les propriétés analytiques de $2\mathfrak{A}_{\phi, \mathcal{H}/b^2}^2$ sont établies dans [BL08]. Dans [BL08, Theorem 15.5.1], Bismut et Lebeau ont montré que l'opérateur $2\mathfrak{A}_{\phi, \mathcal{H}/b^2}^2$ est à résolvante compacte, et que le spectre de $2\mathfrak{A}_{\phi, \mathcal{H}/b^2}^2$ est formé de valeurs propres. Par [BL08, Proposition 3.2.1], l'ensemble des valeurs propres est invariant par conjugaison. Par [BL08, Theorem 3.5.1], pour $b > 0$ suffisamment petit, à distance finie, les valeurs propres restent réelles et positives. Par [L], dans les exemples explicites, pour $b > 0$ assez grand, les valeurs propres peuvent cesser d'être réelles.

Dans [BL08, Theorem 3.3.2], Bismut et Lebeau ont établi une théorie de Hodge exotique associée à l'opérateur $2A_{\phi, \mathcal{H}/b^2}^2$. Soit $\mathcal{H}_{\phi, \mathcal{H}/b^2}$ l'espace caractéristique de $2A_{\phi, \mathcal{H}/b^2}^2$ associé à la valeur propre 0. Ces auteurs ont montré que le complexe $(\mathcal{H}_{\phi, \mathcal{H}/b^2}, d^{\mathcal{X}^*})$ est de dimension finie, et que sa cohomologie coïncide avec $H(\mathcal{X}^*, \pi^*F) = H(X, F)$. De plus, il existe $b_0 > 0$ et un ensemble discret $K \subset \mathbf{R}_+^*$ tels que, pour $b \in]0, b_0] \cup (\mathbf{R}_+^* \setminus K)$, on a

$$(0.5.3) \quad \mathcal{H}_{\phi, \mathcal{H}/b^2} = \ker d^{\mathcal{X}^*} \cap \ker \bar{d}_{\phi, 2\mathcal{H}/b^2}^{\mathcal{X}^*} \simeq H(\mathcal{X}^*, \pi^*F).$$

0.6. Le laplacien hypoelliptique comme déformation du laplacien elliptique. Dans [B05, Section 3.7, 3.8], Bismut montre que le laplacien hypoelliptique interpole en un sens adéquat entre le laplacien de Hodge $\square^X/2$ pour $b \rightarrow 0$ et l'opérateur de dérivée de Lie associé au générateur du flot géodésique pour $b \rightarrow \infty$.

Plus précisément, dans [B05], on conjugue $\mathfrak{A}_{\phi, \mathcal{H}/b^2}$ en un nouvel opérateur $\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}}$. Soit Y le générateur du flot géodésique, et soit Δ^V le laplacien de la fibre. Si $F = \mathbf{C}$ est muni de la métrique triviale, la restriction de $2\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}}{}^2$ à $C^\infty(\mathcal{X}^*)$ est donnée par

$$(0.6.1) \quad \frac{1}{2b^2} (-\Delta^V + |p|^2 - n) - \frac{1}{b} \nabla_Y.$$

Le premier opérateur dans (0.6.1) est l'oscillateur harmonique de la fibre, et le second est le générateur du flot géodésique.

Dans [BL08, Chapter 17], Bismut et Lebeau ont montré que, quand $b \rightarrow 0$, en un sens adéquat, la résolvante de $2\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}}{}^2$ converge vers celle de $\square^X/2$.

0.7. La métrique de Ray-Singer hypoelliptique. En utilisant les mêmes considérations que dans le cas elliptique, la métrique de Ray-Singer hypoelliptique sur λ est construite dans [BL08, Chapter 6]. On montre en effet dans [BL08, Chapter 6], que bien que le spectre de $A_{\phi, \mathcal{H}/b^2}^2$ ne soit pas nécessairement positif réel, on peut encore définir une "métrique" de Ray-Singer hypoelliptique $\|\cdot\|_{\lambda, b}^{RS, 2}$. À priori cette métrique n'est pas nécessairement positive. Dans [BL08, Theorem 9.0.1], les auteurs ont montré que

$$(0.7.1) \quad \|\cdot\|_{\lambda, b}^{RS, 2} = \|\cdot\|_{\lambda}^{RS, 2}.$$

En particulier, $\|\cdot\|_{\lambda, b}^{RS, 2}$ reste bien positive.

0.8. Le résultat principal de l'article. On suppose ici que f est une fonction de Morse telle que le champ de gradient $\nabla' f$ pour une autre métrique $g^{TX'}$ vérifie la condition de transversalité de Smale.

Dans cet article, on va démontrer le théorème suivant :

THÉOREME 0.1. *Pour $b > 0$, on a*

$$(0.8.1) \quad \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda,b}^{RS,2}}{\|\cdot\|_{\lambda,\nabla'f}^{M,2}} \right) = - \int_X \theta(\nabla^F, g^F) (\nabla'f)^* \psi(TX, \nabla^{TX}).$$

En utilisant le théorème de Bismut-Zhang (0.3.3) et notre théorème 0.1, on retrouve ainsi le résultat de Bismut-Lebeau (0.7.1) sans utiliser le fait que la théorie de Hodge hypoelliptique est une déformation de la théorie de Hodge elliptique.

0.9. Laplacien hypoelliptique à deux paramètres et localisation. Pour $b > 0, T \geq 0$, on pose

$$(0.9.1) \quad \mathcal{H}_{b,T}(x, p) = \frac{|p|^2}{2b^2} + Tf(x).$$

Pour simplifier, on note $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_{1,T}$. Remarquons que, par [B05, Remark 2.37], $A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}$ coïncide avec l'opérateur $A_{\phi, \mathcal{H}/b^2}$ quand g^F est remplacé par $e^{-2Tf}g^F$. La démonstration du théorème 0.1 résulte de l'étude de l'opérateur $2\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T}$ quand $b \rightarrow 0, T \rightarrow +\infty$ avec b^2T dans un intervalle compact de \mathbf{R}_+^* .

On note ∇^V un opérateur de dérivation le long des fibres. Si $F = \mathbf{C}$ est muni de sa métrique canonique, la restriction de $2\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T}$ à $C^\infty(\mathcal{X}^*)$ est donnée par

$$(0.9.2) \quad L_{b,T} = \frac{1}{2b^2} (-\Delta^V + |p|^2 - n) - \frac{1}{b} (\nabla_Y - T\nabla_{\nabla'f}^V).$$

Notons que $\nabla_Y - T\nabla_{\nabla'f}^V$ est le champ de vecteurs d'hamiltonien \mathcal{H}_T sur la variété symplectique \mathcal{X}^* .

On suppose maintenant que g^{TX}, g^F sont plates au voisinage des points critiques de f . Dans la section 8, on montre qu'avec notre choix de paramètres, quand $T \rightarrow \infty$ (et $b \rightarrow 0$), le spectre de $2\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T}$ se décompose en deux parties, l'une qui converge vers 0 et l'autre qui converge vers ∞ . Plus précisément, Pour $c > 0, \lambda_1 \in \mathbf{R}$, on pose

$$(0.9.3) \quad \mathcal{W}_{c, \lambda_1} = \left\{ \lambda_1 + \sigma + i\tau \in \mathbf{C}, \sigma \geq c|\tau|^{1/8} \right\}.$$

THÉOREME 0.2. *Étant donnés $\kappa > 0, M > 0$ tels que $M > \kappa$, il existe $c_0 > 0, c_1 > 0, c_2 > 0, \lambda_1 > c_0, b_0 > 0, T_0 > 0$, tels que pour $0 < b \leq b_0, T \geq T_0, \kappa \leq b^2T \leq M$, on a*

$$(0.9.4) \quad \text{Sp}(2b^2\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T}) \subset [0, c_0e^{-c_1T}] \cup \mathcal{W}_{c_2, \lambda_1}.$$

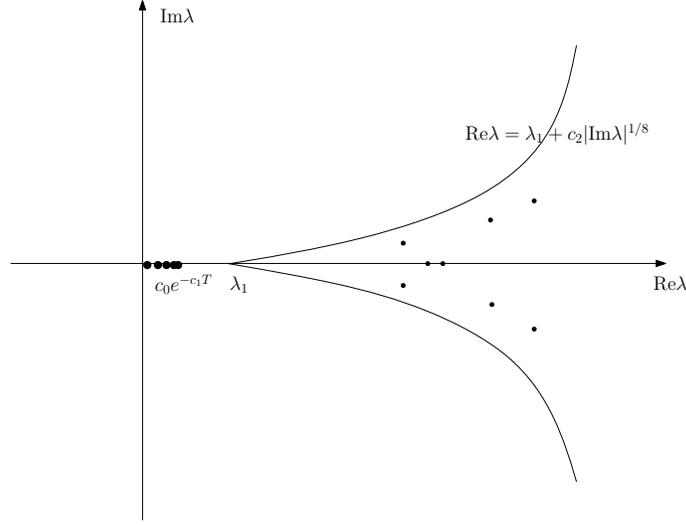
De plus, soit $\tilde{\Omega}_{b,T}^{i, [0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$ la somme directe des espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de $2\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T}$ dans $[0, 1]$. Alors pour $1 \leq i \leq n, \kappa \leq b^2T \leq M, T > 0$ assez grand, on a

$$(0.9.5) \quad \dim \tilde{\Omega}_{b,T}^{i, [0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^*F) = M_i \text{rg}[F].$$

Dans la section 8, on montre que l'espace vectoriel $\tilde{\Omega}_{b,T}^{i, [0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$ se localise au dessus d'un voisinage arbitraire des points critiques de f . Contrairement à ce qui se passe dans le cas du laplacien de Witten, grâce à (0.4.5), ce phénomène de localisation ne résulte pas immédiatement de l'équation (0.9.2) pour le laplacien hypoelliptique.

Indiquons brièvement l'origine de cette localisation. Pour $\epsilon > 0$, on pose

$$(0.9.6) \quad L_{\epsilon, b, T} = e^{-\epsilon b T \nabla_{pf}} L_{b, T} e^{\epsilon b T \nabla_{pf}}.$$

FIGURE 0.1. Le spectre de $2b^2\mathfrak{A}_{\phi_b, \mathcal{H}_T}^{(1,2)}$

De (0.9.2), (0.9.6), on tire que

$$(0.9.7) \quad L_{\epsilon, b, T} = \frac{1}{2b^2} \left(-\Delta^V + \langle p | 1 - 2\epsilon b^2 T \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle - n \right) + \epsilon T^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) |df|^2 - \frac{1}{b} (\nabla_Y - T(1 - \epsilon) \nabla_{\nabla f}^V).$$

Pour $\epsilon > 0$ assez petit, nous préservons la positivité du terme $\langle p | 1 - 2\epsilon b^2 T \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle$. Par ailleurs, quand $T \rightarrow \infty$, le terme $\epsilon T^2 (1 - \frac{\epsilon}{2}) |df|^2$ devient très grand en dehors des points critiques de f . Bien que l'oscillateur harmonique dans les fibres $\frac{1}{2}(-\Delta^V + \langle p | 1 - 2\epsilon b^2 T \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle - n)$ possède maintenant des valeurs propres négatives, ce phénomène est plus que compensé par le terme $\epsilon T^2 (1 - \frac{\epsilon}{2}) |df|^2$.

Les difficultés se localisent donc au dessus d'un voisinage des points critiques. Parce que les métriques considérées sont plates au voisinage de ces points critiques, le laplacien hypoelliptique a une forme canonique au dessus de ce voisinage. L'étude de cette forme canonique joue un rôle essentiel dans tout l'article.

Soit $\Omega_{b, T}^{[0, 1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$ la somme directe des espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de $2A_{\phi_b, \mathcal{H}_{b, T}}^2$ dans $[0, 1]$. Si le champs de gradient ∇f pour g^{TX} vérifie la condition de transversalité de Smale, dans la sous-section 8.9, on montre que :

THÉORÈME 0.3. *Étant donnés $\kappa > 0$, $M > 0$ tels que $M > \kappa$, il existe $b_0 > 0$, $T_0 > 0$ tels que pour $0 < b \leq b_0$, $T \geq T_0$, $\kappa \leq b^2 T \leq M$, on a un isomorphisme canonique*

$$(0.9.8) \quad \left(\Omega_{b, T}^{[0, 1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F), d^{\mathcal{X}^*} \right) \simeq (C(W^u, F), \partial).$$

Notons que dans notre régime de paramètres, on peut complètement ignorer le fait que le laplacien hypoelliptique déforme le laplacien elliptique.

0.10. Interprétation dynamique des estimations. Nous allons donner brièvement la contrepartie probabiliste des phénomènes de localisation décrits précédemment.

Par (0.9.2), on a

$$(0.10.1) \quad \exp(\mathcal{H}_T)L_{b,T}\exp(-\mathcal{H}_T) = \frac{1}{2b^2}(-\Delta^V + 2\nabla_p^V) - \frac{1}{b}(\nabla_Y - T\nabla_{\nabla f}^V).$$

On fixe $x \in X$. Soit w . un mouvement brownien dans T_xX . Si $t \in \mathbf{R} \rightarrow x_t \in X$ est une courbe C^1 telle que $x_0 = x$, on identifie la distribution \dot{w} à son transport parallèle le long de x . pour la connexion de Levi-Civita. La formule (0.10.1) nous suggère de considérer l'équation différentielle stochastique

$$(0.10.2) \quad b^2\ddot{x}_s + \dot{x}_s + T\nabla f_{x_s} = \dot{w}_s.$$

Quand $T = 0$, on réobtient la dynamique considérée dans [B05, (0.11)], [BL08, (0.4)] par Bismut et Bismut-Lebeau. Dans ce cas, pour $b = 0$, l'équation (0.10.2) devient $\dot{x} = \dot{w}$, qui est l'équation du mouvement brownien. Au moins formellement, cet argument explique la raison pour laquelle $L_{b,0}$ est une déformation du laplacien elliptique $-\Delta^X/2$.

Dans notre article nous faisons à la fois $b \rightarrow 0$ et $T \rightarrow +\infty$, avec b^2T dans un compact de \mathbf{R}_+^* . Au moins formellement, on est ramené à l'étude de l'équation $\dot{x} + T\nabla f = \dot{w}$ pour T grand. Par les arguments de Bismut-Zhang [BZ92] (qui eux-mêmes reflètent certains aspects de la théorie des grandes déviations de Ventcell-Freidlin [VFr70]), en temps fini, on a une localisation des trajectoires près des points critiques de f . La possibilité de démontrer le théorème 0.1 sans passer par les arguments de Bismut-Lebeau repose en partie sur ces considérations.

Expliquons maintenant la raison pour laquelle on impose la condition b^2T dans un compact de \mathbf{R}_+^* . Introduisons les fonctionnelles sur les courbes C^2 dans X paramétrées par $[0, t]$,

$$(0.10.3) \quad \begin{aligned} I_{b,T}(x.) &= \frac{1}{2} \int_0^t |\dot{x}_s|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |b^2\ddot{x}_s + T\nabla f_{x_s}|^2 ds, \\ J_{b,T}(x.) &= \frac{1}{2} \int_0^t |b^2\ddot{x}_s + \dot{x}_s + T\nabla f_{x_s}|^2 ds. \end{aligned}$$

Notons que sur l'espace des lacets L_2X paramétrés par $\mathbf{R}/[0, t]$ qui sont de classe C^2 , on a $I_{b,T}(x.) = J_{b,T}(x.)$.

L'équation (0.10.2) suggère que le calcul de la trace de $\exp(-tL_{b,T})$ s'obtient par intégration sur L_2X de la mesure dQ_b donnée par

$$(0.10.4) \quad dQ_b(x.) = \exp(-I_{b,T}(x.))\mathcal{D}x..$$

En fait la véritable mesure correspondant à cette intuition est portée par l'espace des lacets L_1X qui sont de classe C^1 . Notons que pour $\epsilon > 0$, si $x \in L_2X$, on a

$$(0.10.5) \quad \begin{aligned} I_{b,T}(x.) = J_{b,T}(x.) &= \frac{1}{2} \int_0^t \langle \dot{x}_s | 1 - 2\epsilon b^2 T \nabla^{TX} \nabla f | \dot{x}_s \rangle_{x_s} ds + \epsilon T^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^t |\nabla f|_{x_s}^2 ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t |b^2\ddot{x}_s + (1 - \epsilon)T\nabla f_{x_s}|^2 ds. \end{aligned}$$

Notons ici la similarité formelle de certains termes dans (0.9.7) et (0.10.5). Quand b^2T reste borné, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, le premier terme dans le membre de droite de (0.10.5) reste positif. Aussi la fonctionnelle $I_{b,T}(x.)$ devient-elle très grande quand x évite les points critiques de f .

Ces considérations sont la contrepartie probabiliste des arguments de théorie spectrale développés après l'équation (0.9.7). Bien plus, ils expliquent l'efficacité des considérations probabilistes dans notre contexte.

0.11. Une 1-forme fondamentale. La démonstration du théorème 0.1 s'inspire de [BZ92], [BZ94] et [BG01]. On fixe $\gamma > 0$. Soit β la 1-forme sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ donnée par

$$(0.11.1) \quad \beta = -\mathrm{Tr}_s \left[\mathcal{H}_{Tr} r \left(t \mathfrak{A}'_{\phi_{\sqrt{\gamma/T}, \mathcal{H}_T}} \right) \right] \frac{dT}{T} + \mathrm{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} r \left(t \mathfrak{A}'_{\phi_{\sqrt{\gamma/T}, \mathcal{H}_T}} \right) \right] \frac{dt}{t}.$$

Dans la sous-section 9.1, on montre que β est une 1-forme fermée.

On choisit $T_0 > 0$ assez grand. Soit Γ un rectangle dans $\mathbf{R}_+^* \times [T_0, \infty[$. On a l'identité

$$(0.11.2) \quad \int_{\Gamma} \beta = 0.$$

On déforme Γ vers le bord de $\mathbf{R}_+^* \times [T_0, \infty[$. Les contributions des quatre côtés de Γ divergent. Quand on soustrait les divergences, on obtient le théorème 0.1.

0.12. Indice local et intégrale de Berezin. Comme dans [BZ92], [BZ94], [BG01], les techniques d'indice local jouent un rôle essentiel. On utilise en particulier le formalisme de l'intégrale de Berezin, et une nouvelle version de la transformation de Getzler. Ainsi, le membre de droite de (0.8.1) apparaît par des techniques d'indice local.

0.13. Structure de l'article. Cet article est structuré de la façon suivante. Dans la section 1, on rappelle quelques résultats d'algèbre linéaire.

Dans la section 2, on décrit la déformation de Witten elliptique, ainsi la métrique de Ray-Singer elliptique sur le déterminant de la cohomologie λ .

Dans la section 3, on rappelle la construction du laplacien hypoelliptique, et on construit le laplacien hypoelliptique à deux paramètres (b, T) . Ainsi, on construit la métrique de Ray-Singer hypoelliptique sur λ .

Dans la section 4, on décrit la métrique de Milnor sur λ .

Dans la section 5, on construit l'intégrale de Berezin, et on rappelle le formalisme de Mathai-Quillen.

Dans la section 6, on énonce le théorème 0.1.

Dans la section 7, dans le cas où $X = \mathbf{R}$ est muni de la métrique triviale, et où $F = \mathbf{R}$ est également muni de la métrique triviale, on étudie en détail le laplacien de Witten elliptique et le laplacien hypoelliptique à deux paramètres. On calcule en particulier le spectre de ces opérateurs et leur noyau de la chaleur. On montre également une version du théorème 0.1 pour ces opérateurs.

Dans la section 8, on montre le théorème 0.2.

Dans la section 9, on construit la 1-forme fermée β sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

Dans la section 10, en admettant des résultats intermédiaires, on démontre le théorème 0.1.

Dans les sections 11-17, on démontre ces résultats intermédiaires.

Dans tout l'article, si \mathcal{A} est une algèbre \mathbf{Z}_2 -graduée, si $a, a' \in \mathcal{A}$, on note $[a, a']$ le supercommutateur de a et a' . Si \mathcal{B} est une autre algèbre \mathbf{Z}_2 -graduée, on note $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ le produit tensoriel \mathbf{Z}_2 -gradué de \mathcal{A} et \mathcal{B} . On désigne par Tr_s la supertrace. On note C, C' des constantes strictement positives. Ces constantes peuvent varier d'une ligne à l'autre.

Si w est un mouvement brownien, on désigne par dw la différentielle de Stratonovich, et par δw la différentielle de Itô.

Les résultats contenus dans cet article ont été annoncés dans [Sh14].

0.14. Remerciements. Cet article est ma thèse de doctorat de l'Université Paris-Sud 11. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, le professeur J.-M. Bismut. Il m'a soutenu tout au long de ce travail, du français aux mathématiques. L'auteur a bénéficié du soutien du Conseil Européen de la Recherche (C.E.R) par l'intermédiaire du 7ème Programme Cadre de l'Union Européenne (FP7/2007-2013)/ ERC grant agreement No. 291060.

1. Préliminaires d'algèbre linéaire

Dans cette section, on rappelle quelques constructions d'algèbre linéaire. Dans la sous-section 1.1, on rappelle la définition de la métrique canonique sur \mathbf{R} .

Dans la sous-section 1.2, étant donné un complexe (E, ∂) d'espaces vectoriels complexes, on construit son déterminant.

Dans la sous-section 1.3, si h est une forme hermitienne non dégénérée sur (E, ∂) , on rappelle la condition sur h telle qu'une version de la théorie de Hodge reste vraie.

Dans la sous-section 1.4, pour certains sous-espaces vectoriels de E , on définit la projection h -autoadjointe sur ces sous-espaces.

1.1. La droite réelle \mathbf{R} . On désigne par $\mathbf{1}$ l'unité de \mathbf{R} vue comme section canonique de \mathbf{R}^* . On munit \mathbf{R} de la métrique canonique $\|\cdot\|_{\mathbf{R}}$ telle que

$$(1.1.1) \quad \|\mathbf{1}\|_{\mathbf{R}} = 1.$$

1.2. Déterminants. Si λ est une droite complexe, soit λ^* la droite duale. Dans la suite, on utilise la notation

$$(1.2.1) \quad \lambda^{-1} = \lambda^*.$$

Si V est un espace vectoriel complexe de dimension n , on pose

$$(1.2.2) \quad \det V = \Lambda^n V.$$

On utilise la convention

$$(1.2.3) \quad \det 0 = \mathbf{C}.$$

Soit $m \in \mathbf{N}$. Soit

$$(1.2.4) \quad (E, \partial) : 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} E^m \longrightarrow 0,$$

un complexe d'espaces vectoriels complexes de dimension finie, et soit $H^\cdot(E, \partial)$ la cohomologie de (E, ∂) .

Posons

$$(1.2.5) \quad \det E = \bigotimes_{i=0}^m (\det E^i)^{(-1)^i}, \quad \det H^\cdot(E, \partial) = \bigotimes_{i=0}^m (\det H^i(E, \partial))^{(-1)^i}.$$

Par [KM76] et [BGiSo88, Section a.2], on a l'isomorphisme canonique

$$(1.2.6) \quad \det E \simeq \det H^\cdot(E, \partial).$$

1.3. Théorie de Hodge exotique. Dans cette sous-section, nous suivons [B05, Sections 1.2,1.3]. Soit h une forme hermitienne non dégénérée sur E , telle que les E^i sont mutuellement orthogonaux. Alors h définit un isomorphisme entre E et \overline{E}^* . Si $A \in \text{End}(E)$, soit A_h^* l'adjoint relatif à h .

Posons

$$(1.3.1) \quad D = \partial + \partial_h^*.$$

Alors D est h -autoadjoint, et on a

$$(1.3.2) \quad D^2 = [\partial, \partial_h^*].$$

Soit

$$(1.3.3) \quad E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(D^2)} E_\lambda$$

la décomposition de E en espaces caractéristiques de D^2 . Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(D^2)$,

$$(1.3.4) \quad \ker(\lambda - D^2)^N = E_\lambda.$$

Par (1.3.3), (E_0, ∂) est une sous-complexe de (E, ∂) . De plus, on a

$$(1.3.5) \quad H(E, \partial) = H(E_0, \partial).$$

DÉFINITION 1.1. On dit que h est de type Hodge si

$$(1.3.6) \quad E_0 = \ker \partial \cap \ker \partial_h^*.$$

Si h est de type Hodge, par (1.3.5) et (1.3.6), on a un isomorphisme canonique

$$(1.3.7) \quad H(E, \partial) \simeq \ker \partial \cap \ker \partial_h^*.$$

1.4. La projection h -autoadjointe. Supposons maintenant que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert. Soit $A : E \rightarrow E$ un opérateur borné hermitien et inversible. On pose

$$(1.4.1) \quad h(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, A \cdot \rangle.$$

Alors h est une forme hermitienne non dégénérée sur E .

Soit V un sous-espace vectoriel fermé de E . On pose

$$(1.4.2) \quad \begin{aligned} V^\perp &= \{e \in E : \text{pour tout } v \in V, \langle e, v \rangle = 0\}, \\ V^{\perp h} &= \{e \in E : \text{pour tout } v \in V, h(e, v) = 0\}. \end{aligned}$$

Alors V^\perp, V_h^\perp sont fermés. De plus, on a

$$(1.4.3) \quad V^{\perp h} = A^{-1}V^\perp, \quad V^\perp = (A^{-1}V)^{\perp h}.$$

PROPOSITION 1.2. *Si V est de dimension finie, et si h est non dégénérée sur V , alors on a*

$$(1.4.4) \quad E = V \oplus V^{\perp h}.$$

DÉMONSTRATION. Comme h est non dégénérée sur V , on a

$$(1.4.5) \quad V \cap V^{\perp h} = 0.$$

On pose

$$(1.4.6) \quad F = V \oplus V^{\perp h}.$$

Comme V est de dimension finie et $V^{\perp h}$ est fermé, F est un sous-espace vectoriel fermé de E . Comme h est non dégénérée sur E , il reste à montrer que

$$(1.4.7) \quad F^{\perp h} = 0.$$

Par (1.4.3), on a

$$(1.4.8) \quad (V^{\perp h})^{\perp h} = (A^{-1}V^{\perp})^{\perp h} = (V^{\perp})^{\perp} = V.$$

De (1.4.5), (1.4.6) et (1.4.8), on tire que

$$(1.4.9) \quad F^{\perp h} = V^{\perp h} \cap (V^{\perp h})^{\perp h} = V^{\perp h} \cap V = 0,$$

ce qui nous donne (1.4.7) et termine la démonstration. \square

Soit P_V la projection sur V relative au scindage (1.4.6). Alors P_V est une projection h -autoadjointe.

2. Laplacien de Witten elliptique et métrique de Ray-Singer elliptique

Soit X une variété compacte. Soit (F, ∇^F) un fibré vectoriel complexe plat sur X . Dans cette section, on construit le laplacien de Witten canoniquement associé à une métrique sur X , à une métrique hermitienne sur F et à une fonction C^∞ sur X . On construit aussi la métrique de Ray-Singer sur le déterminant de la cohomologie de X à coefficients dans F .

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la sous-section 2.1, on construit le laplacien de Witten.

Dans la sous-section 2.2, on construit la métrique de Ray-Singer elliptique.

2.1. Laplacien de Witten elliptique. Soit X une variété différentielle compacte de dimension n . Soit (F, ∇^F) un fibré vectoriel complexe plat de rang $\text{rg}[F]$ sur X . On désigne par $H^i(X, F)$ la cohomologie de X à coefficients dans F . On pose

$$(2.1.1) \quad \lambda = \det H^*(X, F) = \bigotimes_{i=0}^n (\det H^i(X, F))^{(-1)^i}.$$

Soit $\Omega(X, F)$ l'espace des sections C^∞ de $\Lambda^*(T^*X) \otimes_{\mathbf{R}} F$ sur X . Soit d^X l'opérateur de de Rham sur $\Omega(X, F)$. On a l'isomorphisme canonique

$$(2.1.2) \quad H^*(\Omega(X, F), d^X) = H^*(X, F).$$

Soit g^{TX} une métrique sur le fibré tangent TX de X . On identifie TX et T^*X par la métrique g^{TX} . Soit ∇^{TX} la connexion de Levi-Civita sur (TX, g^{TX}) , et soit R^{TX} sa courbure.

Soit g^F une métrique hermitienne sur F . On pose

$$(2.1.3) \quad \omega(\nabla^F, g^F) = (g^F)^{-1} \nabla^F g^F.$$

Alors $\omega(\nabla^F, g^F) \in \Omega^1(X, \text{End}^{\text{auto}}(F))$ est une 1-forme à valeurs dans les endomorphismes autoadjoints de F . Posons

$$(2.1.4) \quad \nabla^{F,u} = \nabla^F + \frac{1}{2}\omega(\nabla^F, g^F).$$

Alors $\nabla^{F,u}$ est une connexion unitaire sur F .

Soit f une fonction C^∞ sur X . Soit g_f^F la métrique sur F donnée par

$$(2.1.5) \quad g_f^F = e^{-2f}g^F.$$

Alors g^{TX} et g_f^F induisent une métrique hermitienne $\langle, \rangle_{\Lambda(T^*X) \otimes_{\mathbf{R}} F, f}$ sur $\Lambda(T^*X) \otimes_{\mathbf{R}} F$. Soit dv_X le volume riemannien sur X . On définit une métrique sur $\Omega(X, F)$ par

$$(2.1.6) \quad \langle, \rangle_{\Omega(X, F), f} = \int_X \langle, \rangle_{\Lambda(T^*X) \otimes_{\mathbf{R}} F, f} dv_X.$$

Pour $f = 0$, on utilise la notation $\langle, \rangle_{\Omega(X, F)}$ au lieu de $\langle, \rangle_{\Omega(X, F), 0}$.

Soit $d_{2f}^{X,*}$ l'adjoint formel de d^X pour la métrique hermitienne $\langle, \rangle_{\Omega(X, F), f}$. On pose

$$(2.1.7) \quad \begin{aligned} D_f^X &= d^X + d_{2f}^{X,*}, & \tilde{D}_f^X &= e^{-f} D_f^X e^f, \\ \square_f^X &= D_f^{X,2} = [d^X, d_{2f}^{X,*}], & \tilde{\square}_f^X &= e^{-f} \square_f^X e^f. \end{aligned}$$

Les opérateurs \square_f^X ou $\tilde{\square}_f^X$ sont appelés laplaciens de Witten elliptique. Pour $f = 0$, on pose $\square^X = \square_0^X$.

2.2. Métrique de Ray-Singer elliptique. Dans cette sous-section, on rappelle la définition de la métrique de Ray-Singer elliptique sur λ [RS71]. Ici, nous suivons [BZ92, Section II].

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$ une algèbre \mathbb{Z}_2 -graduée, et soit $\tau = \pm 1$ sur \mathcal{A}_\pm . Pour $A \in \mathcal{A}$, on définit la supertrace par

$$(2.2.1) \quad \text{Tr}_s[A] = \text{Tr}[\tau A].$$

Soit $N^{\Lambda(T^*X)}$ l'opérateur de nombre sur $\Lambda(T^*X)$. Alors $\tau = (-1)^{N^{\Lambda(T^*X)}}$ induit une \mathbb{Z}_2 -gradation sur $\Omega(X, \text{End}(F))$. Soit P^X le projecteur spectral pour \square^X relatif à la valeur propre 0. Pour $\text{Re}(s) > n/2$, on pose

$$(2.2.2) \quad \theta(s) = -\text{Tr}_s \left[N^{\Lambda(T^*X)} (\square^X)^{-s} (1 - P^X) \right].$$

Par [BGeV04, Proposition 9.35], $\theta(s)$ a une extension méromorphe sur \mathbf{C} qui est holomorphe en $s = 0$.

Par le théorème de Hodge, on a

$$(2.2.3) \quad \ker \square^X \simeq H(X, F).$$

La restriction de $\langle, \rangle_{\Omega(X, F)}$ à $\ker \square^X$ induit donc une métrique L^2 sur $H(X, F)$. Cette restriction induit également une métrique $|\cdot|_{\lambda, g^F}^{RS,2}$ sur λ .

DÉFINITION 2.1. On définit la métrique de Ray-Singer elliptique sur λ par

$$(2.2.4) \quad \|\cdot\|_{\lambda, g^F}^{RS,2} = e^{\theta'(0)} |\cdot|_{\lambda, g^F}^{RS,2}.$$

Dans la suite, pour $T \geq 0$, on note

$$(2.2.5) \quad \|\cdot\|_{\lambda}^{RS,2} = \|\cdot\|_{\lambda, g^F}^{RS,2}, \quad \|\cdot\|_{\lambda, T}^{RS,2} = \|\cdot\|_{\lambda, g_T^F}^{RS,2}.$$

3. Laplacien hypoelliptique

Soit (X, g^{TX}) une variété riemannienne compacte, et soit $\pi : \mathcal{X}^* \rightarrow X$ l'espace total du fibré cotangent T^*X . Dans cette section, on rappelle la construction du laplacien hypoelliptique en théorie de de Rham, qui opère sur \mathcal{X}^* , et on construit un laplacien hypoelliptique à deux paramètres.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la sous-section 3.1, à certaine fonction \mathcal{H} sur \mathcal{X}^* , on associe une forme hermitienne non dégénérée sur $\Omega_c(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$, l'espace des formes à support compact. On construit le laplacien associé à cette forme hermitienne.

Dans la sous-section 3.2, si $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction C^∞ sur X , pour $b > 0, T \geq 0$, soit $2A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$ et $L_{b,T}$ les laplaciens associés à $\mathcal{H}_{b,T}(x, p) = |p|^2/2b^2 + Tf(x)$. On rappelle la formule donnée dans [B05, Theorem 3.8] pour $L_{b,T}$, d'où on tire l'hypoellipticité de $L_{b,T}$.

Dans la sous-section 3.3, on décrit une théorie de Hodge pour $2A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$.

Dans la sous-section 3.4, on rappelle la construction de la métrique de Ray-Singer hypoelliptique sur λ .

3.1. Une forme bilinéaire nondégénérée. Ici nous suivons [BL08, Section 2.1]. On fait les mêmes hypothèses que dans la section 2, et on utilise les notations correspondantes.

Soit $\pi : \mathcal{X}^* \rightarrow X$ l'espace total du fibré cotangent T^*X . On désigne par p la section tautologique de $\pi^*(T^*X)$ sur \mathcal{X}^* . La connexion ∇^{TX} induit un sous-fibré horizontal $T^H\mathcal{X}^*$ de $T\mathcal{X}^*$. Alors on a

$$(3.1.1) \quad T\mathcal{X}^* = T^H\mathcal{X}^* \oplus \pi^*(T^*X).$$

Si on identifie $T^H\mathcal{X}^*$ et $\pi^*(TX)$, on trouve que

$$(3.1.2) \quad T\mathcal{X}^* = \pi^*(TX \oplus T^*X), \quad T^*\mathcal{X}^* = \pi^*(T^*X \oplus TX).$$

Soit $g^{T\mathcal{X}^*} = g^{TX} \oplus g^{T^*X}$ la métrique naturelle sur $T\mathcal{X}^* = \pi^*(TX \oplus T^*X)$.

On pose

$$(3.1.3) \quad \mathfrak{f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathfrak{f} est symétrique de signature $(1, 1)$. Par la décomposition (3.1.2), \mathfrak{f} induit un isomorphisme de $T\mathcal{X}^*$ dans $T^*\mathcal{X}^*$ donné par

$$(3.1.4) \quad \mathfrak{f}^{T\mathcal{X}^*} = \begin{pmatrix} g^{TX} & 1|_{T^*X} \\ 1|_{TX} & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathfrak{f}^{T\mathcal{X}^*}$ induit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $T\mathcal{X}^*$. Elle induit également une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda(T^*\mathcal{X}^*), \mathfrak{f}}$ sur $\Lambda(T^*\mathcal{X}^*)$. Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda(T^*\mathcal{X}^*), \mathfrak{f}}$ et g^F induisent une forme hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda(T^*\mathcal{X}^*) \otimes_{\mathbf{R}} \pi^*F, \mathfrak{f}}$ sur $\Lambda(T^*\mathcal{X}^*) \otimes_{\mathbf{R}} \pi^*F$.

Pour $a \in \mathbf{R}$, soit r_a la dilatation

$$(3.1.5) \quad r_a : (x, p) \in \mathcal{X}^* \rightarrow (x, ap) \in \mathcal{X}^*,$$

et soit K_a l'application linéaire

$$(3.1.6) \quad K_a : s(x, p) \in \Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F) \rightarrow s(x, ap) \in \Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F).$$

Pour $a = -1$, on utilise les notations r, K au lieu de r_{-1}, K_{-1} . La différence entre r_a^* et K_a est que K_a n'agit pas sur l'algèbre extérieure.

Notons $dv_{\mathcal{X}^*}$ le volume symplectique sur \mathcal{X}^* . Soit \mathcal{H} une fonction C^∞ sur \mathcal{X}^* . La définition suivante est équivalente à [BL08, Définition 2.1.1].

DÉFINITION 3.1. On pose

$$(3.1.7) \quad \mathfrak{h}_{\mathcal{H}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}(\cdot, \cdot) = \int_{\mathcal{X}^*} \langle K e^{-2\mathcal{H}} \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda(T^* \mathcal{X}) \otimes_{\mathbf{R}} \pi^* F} dv_{\mathcal{X}^*}.$$

Dans la suite, on suppose que $\mathcal{H}(x, p) = \mathcal{H}(x, -p)$. Par [BL08, Section 2.1], $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}$ est une forme hermitienne non dégénérée de signature (∞, ∞) sur $\Omega_c(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$.

On note $\bar{d}_{\phi, 2\mathcal{H}}^{\mathcal{X}^*}$ l'adjoint formel de $d^{\mathcal{X}^*}$ pour $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}$. Posons

$$(3.1.8) \quad A_{\phi, \mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left(d^{\mathcal{X}^*} + \bar{d}_{\phi, 2\mathcal{H}}^{\mathcal{X}^*} \right).$$

Alors $A_{\phi, \mathcal{H}}$ est formellement $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}$ -autoadjoint.

Soit e_1, e_2, \dots, e_n une base orthonormale de TX , et soit e^1, e^2, \dots, e^n la base duale de T^*X . On identifie la fibre de \mathcal{X}^* à une autre copie $\widehat{T^*X}$ de T^*X . Si $y \in T^*X$, on désigne par \widehat{y} l'élément correspondant dans $\widehat{T^*X}$. On pose

$$(3.1.9) \quad \mu_0 = \widehat{e}_i \wedge i_{e_i}.$$

DÉFINITION 3.2. On pose

$$(3.1.10) \quad \mathfrak{A}'_{\phi, \mathcal{H}} = e^{-\mu_0 - \mathcal{H}} A_{\phi, \mathcal{H}} e^{\mu_0 + \mathcal{H}}.$$

On rappelle que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}$ est la métrique hermitienne sur $\Omega_c(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$ définie dans (2.1.6). Posons

$$(3.1.11) \quad h(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, r^* \cdot \rangle_{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}.$$

Alors h est une forme hermitienne non dégénérée de signature (∞, ∞) . Par [BL08, Equation (2.1.25)], on a

$$(3.1.12) \quad \mathfrak{h}_{\mathcal{H}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}(\cdot, \cdot) = h(e^{-\mathcal{H} - \mu_0} \cdot, e^{-\mathcal{H} - \mu_0} \cdot).$$

L'opérateur $\mathfrak{A}'_{\phi, \mathcal{H}}$ est donc formellement h -autoadjoint.

Pour $b > 0$, on pose

$$(3.1.13) \quad \mathfrak{f}_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\bar{d}_{\phi_b, 2\mathcal{H}}^{\mathcal{X}^*}, A_{\phi_b, \mathcal{H}}, \mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}}$ les opérateurs correspondants en remplaçant \mathfrak{f} par \mathfrak{f}_b . Par [B05, Proposition 2.32], on a

$$(3.1.14) \quad A_{\phi_b, \mathcal{H}} = r_b^* A_{\phi, r_{1/b}^*} \mathcal{H} r_b^{*-1}, \quad \mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}} = K_b \mathfrak{A}'_{\phi, r_{1/b}^*} \mathcal{H} K_b^{-1}.$$

Alors $\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}}$ est aussi formellement h -autoadjoint.

3.2. L'opérateur $L_{b,T}$. Rappelons que f est une fonction C^∞ sur X . Pour $b > 0$, $T \geq 0$, on pose

$$(3.2.1) \quad \mathcal{H}_{b,T}(x, p) = \frac{|p|^2}{2b^2} + Tf(x).$$

Pour $b = 1$, on utilise la notation \mathcal{H}_T au lieu de $\mathcal{H}_{1,T}$.

On pose

$$(3.2.2) \quad L_{b,T} = 2\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T, 2}.$$

On désigne par $\nabla^{T\mathcal{X}^*}$ la connexion tautologique sur $T\mathcal{X}^*$ induite par (3.1.2) et la connexion de Levi-Civita ∇^{TX} . Elle induit également une connexion $\nabla^{\Lambda \cdot (T^*\mathcal{X}^*)}$ sur $\Lambda \cdot (T^*\mathcal{X}^*)$. Soit $\nabla^{\Lambda \cdot (T^*\mathcal{X}^*) \otimes \pi^*F}$ (resp. $\nabla^{\Lambda \cdot (T^*\mathcal{X}^*) \otimes \pi^*F, u}$) la connexion sur $\Lambda \cdot (T^*\mathcal{X}^*) \otimes_{\mathbf{R}} \pi^*F$ induite par $\nabla^{\Lambda \cdot (T^*\mathcal{X}^*)}$ et ∇^F (resp. $\nabla^{F, u}$). Si $e \in \widehat{T^*X}$, soit ∇_e^V l'opérateur de dérivation correspondant. Soit $\Delta^V = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}^V)^2$ le laplacien le long des fibres $\widehat{T^*X}$. Soit N^V l'opérateur de nombre sur $\Lambda \cdot (\widehat{T^*X})$. On pose

$$(3.2.3) \quad R^{TX} p \wedge = \frac{1}{2} i_{\widehat{e}_i} i_{\widehat{e}_j} R^{TX} (e_i, e_j) p \wedge.$$

THÉORÈME 3.3. *Pour $b > 0, T \geq 0$, on a*

(3.2.4)

$$\begin{aligned} \bar{d}_{\phi, 2\mathcal{H}_{b,T}}^{\mathcal{X}^*} &= -i_{\widehat{e}_i} \left(\nabla_{e_i}^{\Lambda \cdot (T^*\mathcal{X}^*) \otimes \pi^*F} + \omega(\nabla^F, g^F)(e_i) - 2T\nabla_{e_i} f \right) + R^{TX} p \wedge \\ &\quad + i_{e_i - \widehat{e}_i} \left(\nabla_{\widehat{e}_i}^V - \frac{2}{b^2} \langle p, e_i \rangle \right), \\ L_{b,T} &= \frac{1}{2b^2} \left(-\Delta^V + |p|^2 - n + 2N^V \right) \\ &\quad - \frac{1}{b} \left(\nabla_p^{\Lambda \cdot (T^*\mathcal{X}^*) \otimes \pi^*F, u} - T\nabla_{\widehat{\nabla} f}^V + \frac{1}{2} \omega(\nabla^F, g^F)(e_i) \nabla_{\widehat{e}_i}^V \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle (e^i - \widehat{e}_i)(e^j - \widehat{e}_j) i_{e_k + \widehat{e}^k} i_{e_l + \widehat{e}^l} \\ &\quad - \left(\langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j \rangle - T\nabla_{e_i}^{TX} \nabla_{e_j} f + \frac{1}{2} \nabla_{e_i}^F \omega(\nabla^F, g^F)(e_j) \right) (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}_j}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Par [B05, (2.87)], on a la première équation de (3.2.4). Par [B05, Remark 2.37], on sait que l'opérateur $\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T}$ est égale à l'opérateur $\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_0}$ en remplaçant g^F par g_T^F . Par la troisième équation de [B05, Theorem 3.8], on trouve la seconde équation de (3.2.4). \square

Par le théorème de Hörmander [H67], dans [B05, Theorem 3.6], Bismut a montré que pour $b > 0, T \geq 0, u \in \mathbf{R}$, l'opérateur $\frac{\partial}{\partial u} + L_{b,T}$ est hypoelliptique. On dit dans la suite que $L_{b,T}$ est un laplacien hypoelliptique.

3.3. Théorie de Hodge pour $2A_{\phi_b, \mathcal{H}_{b,T}}^2$. On note $\mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$ l'espace des sections C^∞ de $\Lambda \cdot (T^*\mathcal{X}^*) \otimes_{\mathbf{R}} \pi^*F$ sur \mathcal{X}^* qui sont à décroissance rapide le long des fibres $\widehat{T^*X}$ ainsi que leur dérivées de tous ordres. Si $m, m', m'' \in \mathbf{N}$, soit $U_1, \dots, U_{m'}, V_1, \dots, V_{m''}$ les

champs de vecteur sur X qui sont bornés dans tous les $C^k(X)$. Pour $u \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$, on définit la semi-norme

$$(3.3.1) \quad |u| = \sup_{(x,p) \in \mathcal{X}^*} |p|^m \left| \nabla_{U_1^H}^{F,u} \cdots \nabla_{U_{m'}^H}^{F,u} \nabla_{V_1}^V \cdots \nabla_{V_{m''}}^V u \right|_{\Lambda(T^*\mathcal{X}^*) \otimes_{\mathbf{R}} \pi^*F}.$$

On muni $\mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$ de la topologie induite par les semi-normes (3.3.1).

L'opérateur $L_{b,T}$ agit sur $\mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$. Par [BL08, Theorem 15.5.1], pour $b > 0, T \geq 0$, l'opérateur $(L_{b,T}, \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*F))$ est fermable, et sa fermeture est maximale, et est à résolvante compacte. En particulier, le spectre de la fermeture de $L_{b,T}$ est formé de valeurs propres. Dans la suite, on note encore $L_{b,T}$ cette fermeture.

On considère maintenant autre opérateur $2A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$ sur $e^{\mathcal{H}_{b,T}} \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$. Tautologiquement, $2A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$ a les mêmes propriétés que $L_{b,T}$. Soit $P_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}$ le projecteur spectral pour $2A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$ relatif à la valeur propre 0, et soit $\mathcal{H}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}$ l'espace caractéristique associée à cette valeur propre.

Le complexe $(\mathcal{H}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}, d^{\mathcal{X}^*})$ est de dimension finie. Par [BL08, Theorem 3.2.2], on a

$$(3.3.2) \quad H(\mathcal{H}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}, d^{\mathcal{X}^*}) = H(\mathcal{X}^*, \pi^*F) = H(X, F).$$

On rappelle que $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^*F)}$ est de type de Hodge au sens de la définition 1.1, si

$$(3.3.3) \quad \mathcal{H}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}} = \ker d^{\mathcal{X}^*} \cap \ker \bar{d}_{\phi, 2\mathcal{H}_{b,T}}^{\mathcal{X}^*}.$$

Par [BL08, Theorem 3.5.1, Theorem 3.6.2], on sait que pour $T > 0$ fixé et pour $b > 0$ assez petit ou dans un ensemble discret de \mathbf{R}_+^* , $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^*F)}$ est de type de Hodge.

3.4. Métrique de Ray-Singer hypoelliptique. Comme dans (2.2.2), pour $\operatorname{Re}(s) \gg 1$, on pose

$$(3.4.1) \quad \theta_{b,T}(s) = -\operatorname{Tr}_s \left[N^{\Lambda(T^*\mathcal{X}^*)} (4A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2)^{-s} (1 - P_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}) \right].$$

On remarque que si $A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$ admet des valeurs propres négatives, (3.4.1) n'est à priori pas bien défini. Mais par [BL08, Section 6.3], $e^{\theta_{b,T}^{(0)}}$ est non nul, défini sans ambiguïté. De plus, par [BL08, Proposition 3.2.1], l'ensemble des valeurs propres de $A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$ est invariant par conjugaison. On a donc $e^{\theta_{b,T}^{(0)}} \in \mathbf{R}^*$.

Par [B05, Theorem 1.2], la restriction de $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^*F)}$ à $\mathcal{H}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}$ est non dégénérée. Par (1.2.6) et (3.3.2), cette restriction induit une forme hermitienne non dégénérée $|\cdot|_{\lambda, b, T}^{RS,2}$ sur λ . Au signe près, il s'agit donc d'une métrique hermitienne. De telles formes hermitiennes sont appelées métriques généralisées.

DÉFINITION 3.4. On définit la métrique de Ray-Singer hypoelliptique sur λ par

$$(3.4.2) \quad \|\cdot\|_{\lambda, b, T}^{RS,2} = e^{\theta_{b,T}^{(0)}} |\cdot|_{\lambda, b, T}^{RS,2}.$$

Notons qu'à priori $\|\cdot\|_{\lambda, b, T}^{RS,2}$ peut être négative, mais dans [BL08, Theorem 9.0.1], on montre que $\|\cdot\|_{\lambda, b, T}^{RS,2}$ est bien positive. On va redémontrer ce résultat dans la suite de cet article.

On remarque que par [B05, Remark 2.37], quand g^F est remplacé par g_{Tf}^F , la métrique $\|\cdot\|_{\lambda, b, 0}^{RS,2}$ coïncide à $\|\cdot\|_{\lambda, b, T}^{RS,2}$. Dans la suite, on pose

$$(3.4.3) \quad \|\cdot\|_{\lambda, b}^{RS,2} = \|\cdot\|_{\lambda, b, 0}^{RS,2}.$$

4. Le complexe de Thom-Smale et métrique de Milnor

Dans cette section, on rappelle la construction du complexe de Thom-Smale [T49], [Sm67] et de la métrique de Milnor [Mi66] sur λ . Ici, nous suivons [BZ92, Sections I.c, I.d]. On fait les mêmes hypothèses que dans la section 2, et on utilise les notations correspondantes.

On suppose que f est une fonction de Morse sur X de points critiques $B = \{x_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq l}$. Pour $1 \leq \alpha \leq l$, soit n_α l'indice de Morse au point x_α . Soit ∇f le champs de gradient pour la métrique g^{TX} . Considérons l'équation différentielle

$$(4.1) \quad \dot{x} = -\nabla f.$$

Soit $(\Phi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ le flot défini par (4.1).

Soit W_α^u la cellule instable au point critique x_α , et soit W_α^s la cellule stable au point critique x_α , c'est à dire,

$$(4.2) \quad W_\alpha^u = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x) = x_\alpha\}, \quad W_\alpha^s = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = x_\alpha\}.$$

On suppose de plus que ∇f vérifie les conditions de transversalité de Smale [Sm61], [Sm67], c'est à dire, que pour $\alpha \neq \beta$, W_α^u et W_β^s sont transverses. On fixe des orientations pour les cellules W_α^u . Soit $[W_\alpha^u]$ la droite réelle engendrée par W_α^u , et soit $[W_\alpha^u]^*$ la droite duale. Soit $W_\alpha^{u,*} \in [W_\alpha^u]^*$ tel que $\langle W_\alpha^{u,*}, W_\alpha^u \rangle = 1$. Pour $0 \leq i \leq n$, on pose

$$(4.3) \quad C^i(W^u, F) = \bigoplus_{\alpha: n_\alpha=i} [W_\alpha^u]^* \otimes_{\mathbf{R}} F_{x_\alpha}.$$

Dans [BZ92, Section I.b], on construit un opérateur $\partial : C^\cdot(W^u, F) \rightarrow C^{\cdot+1}(W^u, F)$ tel que $\partial^2 = 0$. Par [T49], [Sm67], on a l'isomorphisme canonique

$$(4.4) \quad H^\cdot(C^\cdot(W^u, F), \partial) = H^\cdot(X, F).$$

Par (1.2.6), (4.4), on a l'isomorphisme canonique

$$(4.5) \quad \det C^\cdot(W^u, F) \simeq \lambda.$$

On introduit une métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C^\cdot(W^u, F)}$ sur $C^\cdot(W^u, F)$ telle que pour $f_\alpha \in F_{x_\alpha}$, $f'_\beta \in F_{x_\beta}$, on a

$$(4.6) \quad \langle W_\alpha^{u,*} \otimes f_\alpha, W_\beta^{u,*} \otimes f'_\beta \rangle_{C^\cdot(W^u, F)} = \begin{cases} g_{x_\alpha}^F(f_\alpha, f'_\beta), & \text{si } \alpha = \beta; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

DÉFINITION 4.1. Soit $\|\cdot\|_{\lambda, \nabla f, g^F}^M$ la métrique sur λ induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C^\cdot(W^u, F)}$ via l'isomorphisme canonique (4.5). On appelle $\|\cdot\|_{\lambda, \nabla f, g^F}^M$ la métrique de Milnor.

Dans la suite, on note pour simplifier

$$(4.7) \quad \|\cdot\|_{\lambda, \nabla f}^M = \|\cdot\|_{\lambda, \nabla f, g^F}^M, \quad \|\cdot\|_{\lambda, \nabla f, T}^M = \|\cdot\|_{\lambda, \nabla f, g_{Tf}^F}^M.$$

5. L'intégrale de Berezin et le formalisme de Mathai-Quillen

Le but de cette section est de construire le membre de droite de notre théorème principal, qui est aussi le membre de droite du théorème de Bismut-Zhang [BZ92, Theorem 7.1].

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la sous-section 5.1, on construit l'intégrale de Berezin.

Dans la sous-section 5.2, on rappelle le formalisme de Mathai-Quillen.

5.1. L'intégrale de Berezin. Dans cette sous-section, on rappelle l'intégrale de Berezin. Ici, nous suivons [BZ92, Section III.a]. Soit E et V des espaces vectoriels réels de dimension n et m . Soit g^E une métrique euclidienne sur E .

On suppose d'abord que E est orienté. Soit e_1, e_2, \dots, e_n une base orthonormale orientée de E , et soit e^1, e^2, \dots, e^n la base duale correspondante. Soit \int^B l'application linéaire de $\Lambda(V^*) \widehat{\otimes} \Lambda(E^*)$ dans $\Lambda(V^*)$ telle que, pour $a \in \Lambda(V^*)$ et $\alpha \in \Lambda(E^*)$,

$$(5.1.1) \quad \int^B a\alpha = 0, \text{ si } \deg \alpha < n, \quad \int^B ae^1 \wedge \dots \wedge e^n = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\pi^{n/2}} a.$$

Plus généralement, soit $o(E)$ le fibré d'orientation de E , alors \int^B définit une application linéaire de $\Lambda(V^*) \widehat{\otimes} \Lambda(E^*)$ dans $\Lambda(V^*) \otimes o(E)$, qu'on appelle intégrale de Berezin.

Soit A un endomorphisme antisymétrique de E . On identifie A à l'élément dans $\Lambda^2(E^*)$ donné par

$$(5.1.2) \quad A = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq m} \langle e_i, Ae_j \rangle e^i \wedge e^j.$$

Par définition, le Pfaffien $\text{Pf} \left[\frac{A}{2\pi} \right]$ est donné par

$$(5.1.3) \quad \text{Pf} \left[\frac{A}{2\pi} \right] = \int^B \exp \left(-\frac{A}{2} \right) \in o(E).$$

5.2. Le formalisme de Mathai-Quillen. Dans cette sous-section, on rappelle le formalisme de Mathai-Quillen [MaQ86]. Ici, nous suivons [BZ92, Section III]. Soit M une variété de dimension m , et soit (E, g^E) un fibré euclidien de dimension n sur M . On note \mathcal{M}^E l'espace total du fibré E . Soit $\pi : \mathcal{M}^E \rightarrow M$ la projection canonique. Soit ∇^E une connexion euclidienne sur E , et soit R^E sa courbure. Soit ∇^{π^*E} la connexion sur π^*E induite par ∇^E . On note encore par ∇^{π^*E} l'opérateur différentiel agissant sur $\Omega(\mathcal{M}^E, \pi^*\Lambda E^*)$.

La connexion ∇^E induit un sous-fibré horizontal $T^H \mathcal{M}^E$ de $T\mathcal{M}^E$ tel que

$$(5.2.1) \quad T\mathcal{M}^E = T^H \mathcal{M}^E \oplus \pi^*E, \quad T^H \mathcal{M}^E \simeq \pi^*(TM).$$

Pour $U \in TM$, on note $U^H \in T^H \mathcal{M}^E$ l'élément correspondant.

Soit $\widehat{E}, \underline{E}$ deux copies de E . Pour $U \in E$, on note $\widehat{U} \in \widehat{E}$, $\underline{U} \in \underline{E}$ l'élément correspondant. On identifie la fibre de \mathcal{M}^E à \widehat{E} .

Soit e_1, e_2, \dots, e_n une base orthonormale de E et soit e^1, e^2, \dots, e^n la base duale de E^* . Soit f_1, f_2, \dots, f_m une base de TM et soit f^1, f^2, \dots, f^m la base duale de T^*M .

Soit P^E la projection de $T\mathcal{M}^E$ sur π^*E relative au scindage (5.2.1). En utilisant la métrique g^E , on identifie P^E à une section sur \mathcal{M}^E de $T^*\mathcal{M}^E \widehat{\otimes} \pi^*\underline{E}^*$. Alors,

$$(5.2.2) \quad P^E = \sum_{i=1}^n \widehat{e}^i \underline{e}^i.$$

On identifie R^E à \dot{R}^E la section de $\Lambda^2(T^*M) \widehat{\otimes} \Lambda^2(\underline{E}^*)$ sur M par (5.1.2). Alors,

$$(5.2.3) \quad \dot{R}^E = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle e_i, R^E e_j \rangle \underline{e}^i \wedge \underline{e}^j = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq m, 1 \leq i, j \leq n} \langle e_i, R^E(f_\alpha, f_\beta) e_j \rangle f^\alpha \wedge f^\beta \wedge \underline{e}^i \wedge \underline{e}^j.$$

Soit y la section tautologique de $\pi^*(E)$ sur \mathcal{M}^E .

DÉFINITION 5.1. Pour $T \geq 0$, soit A_T la section de $\Lambda(T^*\mathcal{M}^E) \widehat{\otimes} \pi^*\Lambda(\underline{E}^*)$ sur \mathcal{M}^E définie par la formule

$$(5.2.4) \quad A_T = \frac{\pi^*\dot{R}^E}{2} + \sqrt{T}P^E + T|y|^2.$$

Par [BZ92, Theorem 3.2], on a

$$(5.2.5) \quad \left[\nabla^{\pi^*E} + 2\sqrt{T}i_{\underline{y}}, A_T \right] = 0, \quad \frac{\partial A_T}{\partial T} = \left[\nabla^{\pi^*E} + 2\sqrt{T}i_{\underline{y}}, \frac{y}{2\sqrt{T}} \right].$$

On utilise l'intégrale de Berezin de la sous-section 5.1 avec $V = T\mathcal{M}^E$. Si w est une section de $\Lambda(T^*\mathcal{M}^E) \widehat{\otimes} \pi^*\Lambda(\underline{E}^*)$, $\int^B w$ est une section de $\Lambda(T^*\mathcal{M}^E) \otimes \pi^*o(E)$.

DÉFINITION 5.2. Pour $T > 0$, soit a_T, b_T les sections de $\Lambda(T^*\mathcal{M}^E) \otimes \pi^*o(E)$ sur \mathcal{M}^E définies par les formules

$$(5.2.6) \quad a_T = \int^B \exp(-A_T), \quad b_T = \int^B \frac{y}{2\sqrt{T}} \exp(-A_T).$$

Par [BZ92, Theorem 3.4], pour $T > 0$, on a

$$(5.2.7) \quad b_T = -\frac{i_{\underline{y}} a_T}{2T}, \quad \frac{\partial a_T}{\partial T} = -db_T.$$

On pose

$$(5.2.8) \quad \psi(E, \nabla^E) = \int_0^\infty b_T dT.$$

Par [BZ92, Theorem 3.5], $\psi(E, \nabla^E)$ est un courant de degré $n - 1$ sur \mathcal{M}^E à valeurs dans $\pi^*o(E)$.

Dans la suite, on va considérer $(E, g^E, \nabla^E) = (TX, g^{TX}, \nabla^{TX})$. Posons

$$(5.2.9) \quad \alpha_T = (\nabla f)^* a_T, \quad \beta_T = (\nabla f)^* b_T.$$

Par [BZ92, Remark 3.8], si f est une fonction de Morse, $(\nabla f)^* \psi(TX, \nabla^{TX})$ est un courant bien défini sur M à valeurs dans $o(TM)$.

6. L'énoncé du théorème principal

Dans cette section, on énonce le théorème principal de cet article.

Soit g^{TX}, g^F des métriques arbitraires sur TX, F . Soit f une fonction de Morse sur X . Soit $\nabla' f$ le champs de gradient de f relatif à une autre métrique $g^{TX'}$ (qui peut être distincte de g^{TX}) tel que $\nabla' f$ vérifie la condition de transversalité de Smale.

Par (2.1.3), on pose

$$(6.1) \quad \theta(\nabla^F, g^F) = \text{Tr} [\omega(\nabla^F, g^F)] \in \Omega^1(X).$$

Le résultat principal de cet article est le suivant :

THÉORÈME 6.1. *Pour $b > 0$, on a*

$$(6.2) \quad \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda, b}^{RS,2}}{\|\cdot\|_{\lambda, \nabla' f}^{M,2}} \right) = - \int_X \theta(\nabla^F, g^F) (\nabla' f)^* \psi(TX, \nabla^{TX}).$$

On rappelle le théorème principal de [BZ92, Theorem 7.1] :

THÉORÈME 6.2. *On a*

$$(6.3) \quad \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda}^{RS,2}}{\|\cdot\|_{\lambda, \nabla' f}^{M,2}} \right) = - \int_X \theta(\nabla^F, g^F) (\nabla' f)^* \psi(TX, \nabla^{TX}).$$

Par (6.2), (6.3), on retrouve le théorème de Bismut-Lebeau [BL08, Theorem 9.0.1], qui dit que, pour $b > 0$, on a

$$(6.4) \quad \|\cdot\|_{\lambda, b}^{RS,2} = \|\cdot\|_{\lambda}^{RS,2}.$$

Notons que la démonstration donnée par Bismut-Lebeau repose sur le fait que le laplacien hypoelliptique déforme le laplacien elliptique. Dans notre démonstration, on peut complètement ignorer ce fait.

7. Les opérateurs modèles

Dans cette section, on suppose que $X = \mathbf{R}$ est muni de sa métrique canonique et de son orientation canonique, que $F = \mathbf{R}$ est muni de sa métrique canonique, et que $f^\pm(x) = \pm x^2/2$. On va alors construire explicitement les opérateurs considérés dans les sections 2 et 3. Bien que X soit non compact, les conséquences des théorèmes dans les sections 2 et 3 soient vrais. Bien plus, sous les conditions sur lesquelles on va démontrer le théorème 6.1, au voisinage des points critiques de f , les opérateurs $L_{b,T}$ dans la section 3 coïncident avec les opérateurs dans la présent section. Pour cette raison, les opérateurs seront dits opérateurs modèles.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la sous-section 7.1, on rappelle la définition de la cohomologie de \mathbf{R} et la cohomologie à support compact de \mathbf{R} .

Les sous-sections 7.2-7.4 sont consacrées à l'étude du laplacien de Witten elliptique sur \mathbf{R} . Le laplacien est un oscillateur harmonique.

Dans la sous-section 7.2, on calcule explicitement le spectre et les formes harmoniques du laplacien de Witten elliptique.

Dans la sous-section 7.3, on établit une formule analogue à la formule de McKean-Singer pour la caractéristique d'Euler (ordinaire et à support compact) de \mathbf{R} .

Dans la sous-section 7.4, on calcule la métrique de Ray-Singer elliptique sur λ^\pm , le déterminant de la cohomologie (ordinaire et à support compact) de \mathbf{R} , qui est canoniquement isomorphe à \mathbf{R} . On montre que cette métrique coïncide à la métrique canonique sur \mathbf{R} .

Les sous-sections 7.5-7.18 sont consacrées à l'étude du laplacien hypoelliptique $L_{b,T}^\pm$, qui opère sur $\mathcal{X}^* = \mathbf{R}^2$.

Dans la sous-section 7.5, on donne une formule pour $L_{b,T}^\pm$. Pour $\gamma > 0$, on construit des opérateurs $B_\gamma^\pm, C_\gamma^\pm$ tels que B_γ^\pm agit sur l'espace des fonctions sur \mathbf{R}^2 , et C_γ^\pm est une matrice agissant sur $\Lambda(\mathbf{R}^{2,*})$. À conjugaison près, $L_{b,T}^\pm$ est une combinaison linéaire de $B_{b^2T}^\pm$ et $C_{b^2T}^\pm$.

Le but des sous-sections 7.6-7.10 est de calculer explicitement le spectre de $L_{b,T}^\pm$.

Dans la sous-section 7.6, on rappelle quelques propriétés de l'isomorphisme de Bargmann.

Dans la sous-section 7.7-7.9, on calcule les spectres de B_γ^\pm et C_γ^\pm .

Dans la sous-section 7.10, on obtient le spectre de $L_{b,T}^\pm$.

Dans la sous-section 7.11, on étudie la théorie de Hodge pour les opérateurs modèles.

Dans la sous-section 7.12, on montre une version hypoelliptique de la formule de McKean-Singer.

Dans la sous-section 7.13, en utilisant des techniques d'indice local, on donne une autre preuve de la formule de McKean-Singer hypoelliptique.

Dans la sous-section 7.14, on montre que la métrique de Ray-Singer hypoelliptique sur $\lambda^\pm \simeq \mathbf{R}$ est encore égale à la métrique canonique sur \mathbf{R} . En particulier, on obtient le théorème 6.1 dans le cas modèle.

Dans la sous-section 7.15, on calcule explicitement le noyau de la chaleur de B_γ^\pm .

Dans la sous-section 7.16, en utilisant le calcul variationnel, on réinterprète les résultats de la sous-section 7.15.

Dans la sous-section 7.17, on construit un opérateur modèle conjugué, et on montre quelques estimations sur sa résolvante.

Enfin, dans la sous-section 7.18, on étudie l'opérateur modèle sur \mathbf{R}^{2n} .

7.1. Cohomologies sur \mathbf{R} . Soit $H^{\cdot,+}(\mathbf{R})$ la cohomologie de \mathbf{R} , et soit $H^{\cdot,-}(\mathbf{R})$ la cohomologie à support compact de \mathbf{R} .

Par le lemme de Poincaré, on a

$$(7.1.1) \quad H^{0,+}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}, \quad H^{1,+}(\mathbf{R}) = 0.$$

et $\mathbf{1} \in \mathbf{R}$ est représenté par la fonction constante 1. Si on fixe une orientation de \mathbf{R} , on a

$$(7.1.2) \quad H^{0,-}(\mathbf{R}) = 0, \quad H^{1,-}(\mathbf{R}) = \mathbf{R},$$

et $\mathbf{1} \in \mathbf{R}$ est représenté par une 1-forme $\rho(y)dy$, où ρ est une fonction à support compact et d'intégrale 1. Dans la suite, on fixe toujours une orientation de \mathbf{R} .

Par (1.1.1), (7.1.1), (7.1.2), $H^{\cdot,\pm}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ munit une métrique canonique. Alors $\lambda^\pm = \det H^{\cdot,\pm}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ munit également une métrique canonique.

7.2. Les oscillateurs harmoniques de Witten sur \mathbf{R} . On suppose maintenant que $X = \mathbf{R}$ est muni de sa métrique canonique et de son orientation canonique, que $F = \mathbf{R}$ est également muni de la métrique triviale, et que $f^\pm(y) = \pm y^2/2$.

Par [BZ92, Proposition 8.2], pour $T \geq 0$, on a

$$(7.2.1) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\square}_{Tf^+}^{\mathbf{R}} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + T^2 |y|^2 - T \right) + TN^{\Lambda(\mathbf{R}^*)}, \\ \frac{1}{2} \tilde{\square}_{Tf^-}^{\mathbf{R}} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + T^2 |y|^2 - T \right) + T(1 - N^{\Lambda(\mathbf{R}^*)}). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{S}(\mathbf{R}, \Lambda(\mathbf{R}^*))$) l'espace de Schwartz qui est formé de fonctions (resp. formes) C^∞ à décroissance rapide, ainsi que leurs dérivées de tous ordres. Par [GIJ87, Section 1.5], on trouve :

PROPOSITION 7.1. *Pour $T > 0$, l'opérateur $\left(\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + T^2 |y|^2 - T\right), \mathcal{S}(\mathbf{R})\right)$ est essentiellement autoadjoint, et est à résolvante compacte. On a*

$$(7.2.2) \quad \text{Sp} \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + T^2 |y|^2 - T \right) = T\mathbf{N}.$$

De plus, toute la valeur propre est simple, et pour $n \in \mathbf{N}$, une fonction propre associée à la valeur propre nT est un produit d'un polynôme d'Hermite de degré n par $\exp(-y^2/2)$.

Par (7.2.1), et par la proposition 7.1, on sait que

$$(7.2.3) \quad \text{Sp} \frac{1}{2} \tilde{\square}_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}} = T\mathbf{N},$$

et que le noyau de $\tilde{\square}_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}}$ est de dimension 1, et est engendré, dans le cas $+$, par $\exp(-Ty^2/2)$, et dans le cas $-$, par $\exp(-Ty^2/2) dy$.

On pose

$$(7.2.4) \quad \Omega_{Tf^\pm}(\mathbf{R}) = e^{Tf^\pm} \mathcal{S}(\mathbf{R}, \Lambda(\mathbf{R}^*)).$$

Alors, $(\Omega_{Tf^\pm}(\mathbf{R}), d^{\mathbf{R}})$ est un complexe. De plus, les injections

$$(7.2.5) \quad (\Omega_{Tf^+}(\mathbf{R}), d^{\mathbf{R}}) \rightarrow (\Omega(\mathbf{R}), d^{\mathbf{R}}), \quad (\Omega_c(\mathbf{R}), d^{\mathbf{R}}) \rightarrow (\Omega_{Tf^-}(\mathbf{R}), d^{\mathbf{R}})$$

sont des morphismes du complexe.

Posons

$$(7.2.6) \quad u_{Tf^+} = 1, \quad u_{Tf^-} = \sqrt{\frac{T}{\pi}} \exp(-Ty^2) dy.$$

Pour $T > 0$, on a $u_{Tf^\pm} \in \Omega_{Tf^\pm}(\mathbf{R})$. De plus,

$$(7.2.7) \quad \int_{\mathbf{R}} u_{Tf^-} = 1.$$

PROPOSITION 7.2. *Pour $T > 0$, on a*

$$(7.2.8) \quad d^{\mathbf{R}} u_{Tf^\pm} = 0, \quad d_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}^*} u_{Tf^\pm} = 0, \quad |u_{Tf^\pm}|_{\Omega(\mathbf{R}), Tf^\pm}^2 = \left(\sqrt{\frac{\pi}{T}} \right)^{\pm 1}.$$

La cohomologie du complexe $(\Omega_{Tf^\pm}(\mathbf{R}), d^{\mathbf{R}})$ est engendré par u_{Tf^\pm} . Les morphismes (7.2.5) sont des quasiisomorphismes tels que

$$(7.2.9) \quad [u_{Tf^\pm}] \in H^*(\Omega_{Tf^\pm}(\mathbf{R}), d^{\mathbf{R}}) \rightarrow \mathbf{1} \in \mathbf{R} = H^{\cdot, \pm}(\mathbf{R}).$$

DÉMONSTRATION. Par (2.1.6), (7.2.6), on trouve (7.2.8). Par le même argument d'après [BL08, (3.2.18)], on trouve que la cohomologie du complexe $(\Omega_{Tf^\pm}(\mathbf{R}), d^{\mathbf{R}})$ est engendré par u_{Tf^\pm} . De (7.2.6), (7.2.7), on tire que (7.2.9), ceci implique que (7.2.5) sont des quasiisomorphismes. On termine la démonstration. \square

7.3. Opérateur de la chaleur pour $\tilde{\square}_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}}/2$. Pour $t > 0$, soit $\exp\left(-t\tilde{\square}_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}}/2\right)$ l'opérateur de la chaleur pour $\tilde{\square}_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}}/2$.

PROPOSITION 7.3. *Pour $t > 0, T > 0$, l'opérateur $\exp\left(-t\tilde{\square}_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}}/2\right)$ est à trace. De plus,*

$$(7.3.1) \quad \mathrm{Tr}_s \left[\exp\left(-t\tilde{\square}_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}}/2\right) \right] = \pm 1.$$

DÉMONSTRATION. Par (7.2.1), et par la proposition 7.1, on sait que $\exp\left(-t\tilde{\square}_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}}/2\right)$ est à trace. De plus,

$$(7.3.2) \quad \mathrm{Tr}_s \left[\exp\left(-t\tilde{\square}_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}}/2\right) \right] = \pm (1 - e^{-t}) \sum_{n \in \mathbf{N}} e^{-nt} = \pm 1,$$

ce qui termine la démonstration. \square

REMARQUE 7.4. Il est expliqué, dans [B12, Section 1.7], que l'équation (7.3.1) n'est pas une surprise. En effet, soit $\chi(H^{\cdot^\pm}(\mathbf{R}))$ la caractéristique d'Euler sur la cohomologie $H^{\cdot^\pm}(\mathbf{R})$. Par (7.1.1), (7.1.2), (7.3.1), on a

$$(7.3.3) \quad \chi(H^{\cdot^\pm}(\mathbf{R})) = \mathrm{Tr}_s \left[\exp\left(-t\tilde{\square}_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}}/2\right) \right] = \pm 1,$$

ce qui est une version de la formule de McKean-Singer [McS67].

Maintenant, on donne l'autre démonstration pour (7.3.1) qui ne repose pas sur le calcul du spectre, mais sur les techniques d'indice local.

L'AUTRE DÉMONSTRATION. On suppose, dans cette démonstration, que $T \in \mathbf{R}^*$. Par (7.2.1), pour $T < 0$, on a

$$(7.3.4) \quad \tilde{\square}_{Tf^+}^{\mathbf{R}} = \tilde{\square}_{-Tf^-}^{\mathbf{R}}.$$

Par l'argument standard de la démonstration de la formule de McKean-Singer, sauf ici $X = \mathbf{R}$ est non compact, on sait que la quantité

$$(7.3.5) \quad \mathrm{Tr}_s \left[\exp\left(-t\tilde{\square}_{Tf^+}^{\mathbf{R}}/2\right) \right]$$

ne dépend pas de $t > 0$, et ne dépend que de la signe de T .

Pour $a > 0$, soit k_a l'application linéaire telle que

$$(7.3.6) \quad k_a : s(y) \in \Omega(\mathbf{R}) \rightarrow s(ay) \in \Omega(\mathbf{R}).$$

On pose

$$(7.3.7) \quad I_{t,T} = \frac{t}{2} k_{\sqrt{t}}^{-1} \tilde{\square}_{Tf^+}^{\mathbf{R}} k_{\sqrt{t}}.$$

Par (7.2.1), (7.3.7), on a

$$(7.3.8) \quad I_{t,T} = -\frac{t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{T^2}{2} y^2 - \frac{tT}{2} + tT dy i_{\frac{\partial}{\partial y}}.$$

Soit $P_{t,T}(y, y')$ le noyau de $\exp(-I_{t,T})$ relatif au volume dy . Par (7.3.7), on a

$$(7.3.9) \quad \text{Tr}_s \left[\exp \left(-t \tilde{\square}_{Tf^+}^{\mathbf{R}} / 2 \right) \right] = \int_{y \in \mathbf{R}} \text{Tr}_s [P_{t,T}(y, y)] dy.$$

Pour montrer (7.3.1), il suffit de montrer que

$$(7.3.10) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{y \in \mathbf{R}} \text{Tr}_s [P_{t,T}(y, y)] dy = \text{sign} T.$$

On fixe $y_0 \in \mathbf{R}$. Soit $R_t^{y_0}$ l'application linéaire donnée par

$$(7.3.11) \quad R_t^{y_0} : s(y) \in \Omega(\mathbf{R}) \rightarrow s(y_0 + ty) \in \Omega(\mathbf{R}).$$

Posons

$$(7.3.12) \quad I_{t,T}^{y_0} = R_t^{y_0} I_{t,T} R_t^{y_0, -1}.$$

On introduit une nouvelle variable grassmannienne impaire \mathbf{z} qui anti-commute avec $dy, i_{\frac{\partial}{\partial y}}$. On pose

$$(7.3.13) \quad \mathcal{A} = \text{End}(\Lambda(\mathbf{R}^*)) \widehat{\otimes} \mathbf{R}\mathbf{z}.$$

Alors \mathcal{A} est une \mathbf{R} -algèbre engendrée par $dy, i_{\frac{\partial}{\partial y}}, \mathbf{z}$. On écrit les éléments de \mathcal{A} comme une combinaison linéaire de monômes en les $dy, i_{\frac{\partial}{\partial y}}, \mathbf{z}$ tels que $i_{\frac{\partial}{\partial y}}$ apparaissent à droite des dy, \mathbf{z} . Soit $\widehat{\text{Tr}}_s$ l'application linéaire de \mathcal{A} dans \mathbf{R} qui s'annule sur tous les monômes, sauf sur le monôme $dy\mathbf{z}$, à permutation près, et qui est telle que

$$(7.3.14) \quad \widehat{\text{Tr}}_s[dy\mathbf{z}] = 1.$$

Pour $A \in \text{End}(\Lambda(\mathbf{R}^*))$, on a

$$(7.3.15) \quad \widehat{\text{Tr}}_s \left[\exp \left(\frac{dy\mathbf{z}}{t} \right) A \exp \left(-\frac{dy\mathbf{z}}{t} \right) \right] = \frac{1}{t} \text{Tr}_s [A].$$

Soit $J_{t,T}^{y_0}$ l'opérateur différentiel à coefficients dans \mathcal{A} donné par

$$(7.3.16) \quad J_{t,T}^{y_0} = \exp \left(\frac{dy\mathbf{z}}{t} \right) I_{t,T}^{y_0} \exp \left(-\frac{dy\mathbf{z}}{t} \right).$$

Par (7.3.8), (7.3.11), (7.3.12) et (7.3.16), on a

$$(7.3.17) \quad J_{t,T}^{y_0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{T^2}{2} (y_0 + ty)^2 - \frac{tT}{2} + tT dy \left(i_{\frac{\partial}{\partial y}} - \frac{\mathbf{z}}{t} \right).$$

On pose

$$(7.3.18) \quad J_{0,T}^{y_0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{T^2}{2} y_0^2 - T dy\mathbf{z}.$$

Par (7.3.17) et (7.3.18), quand $t \rightarrow 0$, on a

$$(7.3.19) \quad J_{t,T}^{y_0} \rightarrow J_{0,T}^{y_0}.$$

Pour $y_0 \in \mathbf{R}, t \geq 0, T \in \mathbf{R}^*$, soit $Q_{t,T}^{y_0}(y, y')$ le noyau de $\exp(-J_{t,T}^{y_0})$ relatif au volume dy . De (7.3.11), (7.3.12), (7.3.15), on tire que

$$(7.3.20) \quad \text{Tr}_s [P_{t,T}(y_0, y_0)] = \widehat{\text{Tr}}_s [Q_{t,T}^{y_0}(0, 0)].$$

De (7.3.17)-(7.3.20), il est facile de déduire que

$$(7.3.21) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{y \in \mathbf{R}} \text{Tr}_s [P_{t,T}(y, y)] dy = \int_{y_0 \in \mathbf{R}} \widehat{\text{Tr}}_s [Q_{0,T}^{y_0}(0, 0)] dy_0 \\ = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0 \in \mathbf{R}} e^{-T^2 y_0^2 / 2} dy_0 = \text{sign} T,$$

ce qui nous donne (7.3.10) et termine la démonstration. \square

7.4. La métrique de Ray-Singer sur \mathbf{R} . Soit $\zeta(s)$ la fonction zêta de Riemann. On rappelle que pour $\text{Re } s > 1$,

$$(7.4.1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

et que $\zeta(s)$ est méromorphe sur \mathbf{C} avec un pôle simple en $s = 1$. De plus, par [W76, (VII.21),(VII.23)], on a

$$(7.4.2) \quad \zeta(0) = -1/2, \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi.$$

Considérons $\square_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}}$ comme un opérateur agissant sur $\Omega_{Tf^\pm}(\mathbf{R})$. Soit P_{Tf^\pm} la projection spectrale relativement à la valeur propre 0. Par (2.1.7), et par la proposition 7.2.1, pour $\text{Re } s > 1$, l'opérateur $(\square_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}})^{-s}(1 - P_{Tf^\pm})$ est à trace. Comme dans (2.2.2), pour $\text{Re } s > 1$, on pose

$$(7.4.3) \quad \theta_{Tf^\pm}(s) = -\text{Tr}_s \left[N^{\Lambda(\mathbf{R}^*)} (\square_{Tf^\pm}^{\mathbf{R}})^{-s} (1 - P_{Tf^\pm}) \right].$$

PROPOSITION 7.5. *Pour $\text{Re } s > 1$, on a*

$$(7.4.4) \quad \theta_{Tf^\pm}(s) = (2T)^{-s} \zeta(s).$$

En particulier, θ_{Tf^\pm} a une extension méromorphe sur \mathbf{C} qui est holomorphe en 0. La dérivée en $s = 0$ est donnée par

$$(7.4.5) \quad \theta'_{Tf^\pm}(0) = \log \sqrt{\frac{T}{\pi}}.$$

DÉMONSTRATION. Par la proposition 7.2.1 et par (7.4.1), (7.4.3), on a (7.4.4). Par (7.4.2), (7.4.3), on a

$$(7.4.6) \quad \theta'_{Tf^\pm}(0) = -\log(2T)\zeta(0) + \zeta'(0) = \log \sqrt{\frac{T}{\pi}},$$

ce qui nous donne (7.4.5) et termine la preuve. \square

Par la proposition 7.2, la métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega(\mathbf{R}), Tf^\pm}$ induit une métrique $|\cdot|_{\mathbf{R}, Tf^\pm}^{RS,2}$ sur $\lambda^\pm = \mathbf{R}$. Par la définition 2.1, la métrique de Ray-Singer $\|\cdot\|_{\mathbf{R}, Tf^\pm}^{RS,2}$ sur \mathbf{R} est donnée par

$$(7.4.7) \quad \|\cdot\|_{\mathbf{R}, Tf^\pm}^{RS,2} = e^{\theta'_{Tf^\pm}(0)} |\cdot|_{\mathbf{R}, Tf^\pm}^{RS,2}.$$

THÉORÈME 7.6. *Pour $T > 0$, on a*

$$(7.4.8) \quad \|\cdot\|_{\mathbf{R}, T f^\pm}^{RS,2} = \|\cdot\|_{\mathbf{R}}^2.$$

DÉMONSTRATION. Par (1.1.1), il suffit de montrer que

$$(7.4.9) \quad \|\mathbf{1}\|_{\mathbf{R}, T f^\pm}^{RS,2} = 1.$$

De (7.2.8) et (7.2.9), on tire que

$$(7.4.10) \quad |\mathbf{1}|_{\mathbf{R}, T f^\pm}^{RS,2} = \sqrt{\frac{\pi}{T}}.$$

Par (7.4.5), (7.4.7) et (7.4.10), on trouve le résultat. \square

REMARQUE 7.7. Dans la preuve donnée par Bismut et Zhang [BZ92] de l'égalité de la métrique de Ray-Singer et de Reidemeister, de manière implicite, l'équation (7.4.8) joue un rôle essentielle.

7.5. Les opérateurs modèles sur \mathbf{R}^2 . Dans cette sous-section, on va appliquer les constructions de la sous-section 3.2 au cas modèle. Alors $\mathcal{X}^* = \mathbf{R}^2$ et on a

$$(7.5.1) \quad \mathcal{H}_{b,T}^\pm(y, p) = \frac{p^2}{2b^2} \pm \frac{T y^2}{2}.$$

On note $\mathcal{H}_T^\pm = \mathcal{H}_{1,T}^\pm$ pour simplifier.

Soit $L_{b,T}^\pm$ le laplacien hypoelliptique $L_{b,T}$ au cas modèle. Par (3.2.4), on a

$$(7.5.2) \quad \begin{aligned} \bar{d}_{\phi, 2\mathcal{H}_{b,T}^\pm}^{\mathbf{R}^2} &= -i \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial}{\partial y} \mp 2Ty \right) + i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{2}{b^2} p \right), \\ L_{b,T}^\pm &= \frac{1}{2b^2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial p^2} + p^2 - 1 + 2dpi \frac{\partial}{\partial p} \right) - \frac{1}{b} \left(p \frac{\partial}{\partial y} \mp Ty \frac{\partial}{\partial p} \right) \pm T(dy - dp) i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned}$$

Pour $a > 0$, on pose

$$(7.5.3) \quad k_a : g(y, p) \in \Omega(\mathbf{R}^2) \rightarrow g(ay, p) \in \Omega(\mathbf{R}^2).$$

Pour $T > 0$, soit $L'_{b,T}^\pm$ l'opérateur défini par

$$(7.5.4) \quad L'_{b,T}^\pm = k_{\sqrt{T}}^{-1} L_{b,T}^\pm k_{\sqrt{T}}.$$

Par (7.5.2)-(7.5.4), on a

$$(7.5.5) \quad L'_{b,T}^\pm = \frac{1}{2b^2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial p^2} + p^2 - 1 + 2dpi \frac{\partial}{\partial p} \right) - \frac{\sqrt{T}}{b} \left(p \frac{\partial}{\partial y} \mp y \frac{\partial}{\partial p} \right) \pm T(dy - dp) i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p}.$$

Pour $\gamma > 0$, on pose

$$(7.5.6) \quad \begin{aligned} B_\gamma^\pm &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial p^2} + |p|^2 - 1 \right) - \sqrt{\gamma} \left(p \frac{\partial}{\partial y} \mp y \frac{\partial}{\partial p} \right), \\ C_\gamma^\pm &= dpi \frac{\partial}{\partial p} \pm \gamma(dy - dp) i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p}, \\ H_\gamma^\pm &= B_\gamma^\pm + C_\gamma^\pm. \end{aligned}$$

Par (7.5.5), (7.5.6), on a

$$(7.5.7) \quad L'_{b,T}{}^{\pm} = \frac{1}{b^2} H_{b^2 T}{}^{\pm} = \frac{1}{b^2} (B_{b^2 T}{}^{\pm} + C_{b^2 T}{}^{\pm}).$$

De plus, par (7.5.6), $B_{\gamma}{}^{\pm}, C_{\gamma}{}^{\pm}$ sont h -autoadjoints.

Par [HeN05, Proposition 5.5], pour $\gamma > 0$, $(B_{\gamma}{}^{\pm}, \mathcal{S}(\mathbf{R}^2))$ est fermable, de plus, la fermeture $\overline{B_{\gamma}{}^{\pm}}$ est maximale accrétive. De plus $C_{\gamma}{}^{\pm}$ est une matrice. Donc, $H_{\gamma}{}^{\pm}$ est fermable, et $\overline{H_{\gamma}{}^{\pm}}$ est maximale. Dans la suite, on note encore $H_{\gamma}{}^{\pm}$ cette fermeture.

Par [HeN05, Corollary 5.10], pour $\gamma > 0$, l'opérateur $H_{\gamma}{}^{\pm}$ est à résolvante compacte. Le but des sous-sections 7.6-7.10 est de calculer le spectre de l'opérateur $H_{\gamma}{}^{\pm}$.

Les définitions suivants seront utiles dans la suite.

DÉFINITION 7.8. Soit D un opérateur non borné fermé sur un espace de Hilbert H . Pour $\lambda \in \mathbf{C}$, on pose

$$(7.5.8) \quad V_{\lambda} = \ker(\lambda - D), \quad W_{\lambda} = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \ker(\lambda - D)^k.$$

Si $V_{\lambda} \neq 0$ (ce qui est équivalent à dire que $W_{\lambda} \neq 0$), on dit que λ est une valeur propre de D , que V_{λ} est l'espace propre associé, et que W_{λ} est l'espace caractéristique.

DÉFINITION 7.9. Soit D un opérateur non borné fermé sur l'espace de Hilbert H . On dit que D est diagonalisable, si :

- (1) Le spectre de D est formé de valeurs propres.
- (2) Les espaces caractéristiques coïncident avec les espaces propres.
- (3) L'espace vectoriel engendré par les fonctions propres est dense dans H .

7.6. Transformation de Bargmann. C'est une sous-section technique qui introduit la transformation de Bargmann [Ba61]. Ici nous suivons [B12, Section 1.4].

Soit $\mathbf{R}[y, p]$ l'algèbre des polynômes réels sur \mathbf{R}^2 . Pour $i \in \mathbf{N}$, soit $F^i \mathbf{R}[y, p]$ sous-espace de $\mathbf{R}[y, p]$ formé par les polynômes de degré au plus i . Alors,

$$(7.6.1) \quad F^0 \mathbf{R}[y, p] \subset F^1 \mathbf{R}[y, p] \subset F^2 \mathbf{R}[y, p] \subset \dots$$

définit une filtration sur $\mathbf{R}[y, p]$. Soit

$$(7.6.2) \quad \text{Gr} = F \mathbf{R}[y, p] / F^{-1} \mathbf{R}[y, p]$$

la graduation associée à la filtration (7.6.1). Alors on a l'isomorphisme canonique d'espaces linéaires

$$(7.6.3) \quad \mathbf{R}[y, p] \simeq \text{Gr}.$$

Soit $S(\mathbf{R}^{2,*})$ l'algèbre symétrique de $\mathbf{R}^{2,*}$. On a l'isomorphisme canonique d'algèbres \mathbf{Z} -graduées,

$$(7.6.4) \quad \mathbf{R}[y, p] \simeq S(\mathbf{R}^{2,*}).$$

Le produit scalaire canonique sur $S(\mathbf{R}^{2,*})$ induit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[y, p]$, de telle sorte que

$$(7.6.5) \quad \left\| \sum_{i,j} a_{i,j} y^i p^j \right\|_{\mathbf{R}[y,p]}^2 = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 i! j!.$$

On note $(\overline{\mathbf{R}[y, p]}, \|\cdot\|_{\overline{\mathbf{R}[y, p]}})$ la complétion hilbertienne de $\mathbf{R}[y, p]$.

Pour $a \in \mathbf{R}$, on pose

$$(7.6.6) \quad \exp(a\Delta^{\mathbf{R}^2}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \left(\Delta^{\mathbf{R}^2}\right)^i : \mathbf{R}[y, p] \rightarrow \mathbf{R}[y, p].$$

Soit dm la mesure gaussienne sur \mathbf{R}^2 , c'est à dire,

$$(7.6.7) \quad dm(y, p) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y^2 + p^2}{2}\right) dydp.$$

Soit $L^2(\mathbf{R}^2, dm)$ l'espace L^2 relatif à la mesure gaussienne dm , et soit $L^2(\mathbf{R}^2)$ l'espace L^2 relatif à la mesure de Lebeague. On pose \mathcal{T} l'isométrie

$$(7.6.8) \quad \mathcal{T} : g(y, p) \in L^2(\mathbf{R}^2, dm) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2 + p^2}{2}\right) g(\sqrt{2}y, \sqrt{2}p) \in L^2(\mathbf{R}^2).$$

Soit $\mathcal{B} : \mathbf{R}[y, p] \rightarrow L^2(\mathbf{R}^2)$ l'opérateur défini par

$$(7.6.9) \quad \mathcal{B} = \mathcal{T} \exp(-\Delta^{\mathbf{R}^2}/2).$$

Par [B12, section 1.4], on a :

THÉORÈME 7.10. *L'opérateur \mathcal{B} s'étend en un isomorphisme d'espaces de Hilbert,*

$$(7.6.10) \quad \mathcal{B} : \overline{\mathbf{R}[y, p]} \simeq L^2(\mathbf{R}^2).$$

L'opérateur \mathcal{B} est aussi appelé isomorphisme de Bargmann. Le groupe $\text{SO}(2)$ agit sur $\mathbf{R}[y, p] \simeq \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{2,*})$ et sur $L^2(\mathbf{R}^2)$. Alors, \mathcal{B} commute avec $\text{SO}(2)$. De plus, par [B12, (1.43)], on a les identités suivantes :

$$(7.6.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{B} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{B}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y} + y \right), & \mathcal{B} y \mathcal{B}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial y} + y \right), \\ \mathcal{B} \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{B}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial p} + p \right), & \mathcal{B} p \mathcal{B}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial p} + p \right). \end{aligned}$$

Pour $a \in \mathbf{R}$, on désigne par $\exp(ayp)$ la somme formelle

$$(7.6.12) \quad \exp(ayp) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} y^i p^i.$$

Pour $a \neq 1$, soit Q_a la forme quadratique donnée par

$$(7.6.13) \quad Q_a(y, p) = \frac{1 + a^2}{2(1 - a^2)}(y^2 + p^2) - \frac{2a}{1 - a^2}yp.$$

Alors, pour $|a| < 1$, Q_a est définie positive.

Les propositions suivantes seront utiles dans la suite.

PROPOSITION 7.11. *Pour $a \in \mathbf{R}$, $\exp(ayp) \in \overline{\mathbf{R}[y, p]}$ si et seulement si $|a| < 1$. Si $|a| < 1$, on a*

$$(7.6.14) \quad \|\exp(ayp)\|_{\overline{\mathbf{R}[y, p]}}^2 = \frac{1}{1 - a^2}, \quad \mathcal{B} \exp(ayp) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1 - a^2)}} \exp(-Q_a(y, p)).$$

DÉMONSTRATION. Par (7.6.5), (7.6.12), $\exp(ayp) \in \overline{\mathbf{R}[y, p]}$ si et seulement si

$$(7.6.15) \quad \sum_{i=0}^{\infty} a^{2i} < \infty.$$

ce qui est équivalent à $|a| < 1$. Pour $|a| < 1$, par (7.6.5), on a la première équation de (7.6.14).

De plus, par [B12, (1.33)], on a

$$(7.6.16) \quad \begin{aligned} & \exp(-\Delta^{\mathbf{R}^2}/2) \exp(ayp) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(\xi, q) \in \mathbf{R}^2} \exp\left(\frac{y^2 + p^2}{2} - \frac{\xi^2 + q^2}{2} + iy\xi + ipq\right) \exp(-a\xi q) d\xi dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2(1-a^2)}(y^2 + p^2) + \frac{a}{1-a^2}yp\right). \end{aligned}$$

De (7.6.8), on tire que

$$(7.6.17) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2(1-a^2)}(y^2 + p^2) + \frac{a}{1-a^2}yp\right)\right) \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-a^2)}} \exp\left(-\frac{1+a^2}{2(1-a^2)}(y^2 + p^2) + \frac{2a}{1-a^2}yp\right). \end{aligned}$$

Par (7.6.9), (7.6.13), (7.6.16) et (7.6.17), on a la deuxième équation de (7.6.14). \square

PROPOSITION 7.12. Si $|a| < 1$, pour tout polynôme $P(y, p) \in \mathbf{R}[y, p]$, on a

$$(7.6.18) \quad P(y, p) \exp(ayp) \in \overline{\mathbf{R}[y, p]}.$$

De plus, il existe un isomorphisme d'espace vectoriel $W_a : \mathbf{R}[y, p] \rightarrow \mathbf{R}[y, p]$ qui préserve la filtration (7.6.1) tel que

$$(7.6.19) \quad \mathcal{B}(P(y, p) \exp(ayp)) = \frac{W_a P(y, p)}{\sqrt{\pi(1-a^2)}} \exp(-Q_a(y, p)).$$

DÉMONSTRATION. Pour (7.6.18), il suffit de remarquer que si $|a| < 1$, pour $i, j \in \mathbf{N}$, on a

$$(7.6.20) \quad \|y^i p^j \exp(ayp)\|_{\overline{\mathbf{R}[y, p]}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \frac{(n+i)!(n+j)!}{(n!)^2} < \infty.$$

Dans la suite, on considère y, p comme des opérateurs agissant par multiplication sur $\mathbf{R}[y, p]$. Par (7.6.14), (7.6.13), on a

$$(7.6.21) \quad \begin{aligned} \mathcal{B}(P(y, p) \exp(ayp)) &= P(\mathcal{B}y\mathcal{B}^{-1}, \mathcal{B}p\mathcal{B}^{-1})\mathcal{B} \exp(ayp) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-a^2)}} P(\mathcal{B}y\mathcal{B}^{-1}, \mathcal{B}p\mathcal{B}^{-1}) \exp(-Q_a(y, p)). \end{aligned}$$

Par (7.6.11), on a

$$(7.6.22) \quad P(\mathcal{B}y\mathcal{B}^{-1}, \mathcal{B}p\mathcal{B}^{-1}) = P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial y} + y\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial p} + p\right)\right).$$

De (7.6.13), (7.6.22), on tire que

$$(7.6.23) \quad \exp(Q_a(y, p))P(\mathcal{B}y\mathcal{B}^{-1}, \mathcal{B}p\mathcal{B}^{-1})\exp(-Q_a(y, p)) \\ = P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial y} + y + \frac{\partial Q_a}{\partial y}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial p} + p + \frac{\partial Q_a}{\partial p}\right)\right).$$

On pose

$$(7.6.24) \quad W_a P(y, p) = P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial y} + y + \frac{\partial Q_a}{\partial y}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial p} + p + \frac{\partial Q_a}{\partial p}\right)\right) \cdot 1 \in \mathbf{R}[y, p].$$

De (7.6.21)-(7.6.24), on tire (7.6.19).

Par (7.6.24), W_a préserve la filtration, et induit une action sur Gr donnée par

$$(7.6.25) \quad P \in \mathbf{R}[y, p] \rightarrow P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + \frac{\partial Q_a}{\partial y}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p + \frac{\partial Q_a}{\partial p}\right)\right) \in \mathbf{R}[y, p].$$

Pour montrer que W_a est un isomorphisme, il reste à montrer que (7.6.25) est un isomorphisme.

Pour $|a| < 1$, soit A la matrice donnée par

$$(7.6.26) \quad A = \frac{2}{1-a^2} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, A est inversible.

De (7.6.13), (7.6.26), on tire que

$$(7.6.27) \quad A \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + \frac{\partial}{\partial y} Q_a(y, p) \\ p + \frac{\partial}{\partial p} Q_a(y, p) \end{pmatrix}.$$

Comme A est inversible, par (7.6.27), (7.6.25) est un isomorphisme, ce qui termine la preuve. \square

7.7. L'opérateur B_γ^+ . Pour $\gamma > 0$, posons

$$(7.7.1) \quad \mathbf{B}_\gamma^+ = \mathcal{B}^{-1} B_\gamma^+ \mathcal{B}.$$

Par (7.5.6), (7.6.11), on a

$$(7.7.2) \quad \mathbf{B}_\gamma^+ = p \frac{\partial}{\partial p} - \sqrt{\gamma} \left(p \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial p} \right).$$

Alors, \mathbf{B}_γ^+ préserve le degré dans $\mathbf{R}[x, p]$.

On désigne par M_γ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^1[y, p]$ qui dans la base y, p est donné par

$$(7.7.3) \quad M_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{\gamma} & 1 \end{pmatrix}.$$

On étend M_γ en une dérivation \widetilde{M}_γ sur $\mathbf{R}[y, p]$. Par (7.7.2), on a

$$(7.7.4) \quad \widetilde{M}_\gamma = \mathbf{B}_\gamma^+.$$

Comme

$$(7.7.5) \quad \text{Sp } M = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\gamma}}{2} \right\},$$

on a

$$(7.7.6) \quad \text{Sp } \widetilde{M}_\gamma = \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - 4\gamma}}{2} n_+ + \frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma}}{2} n_- : n_+, n_- \in \mathbf{N} \right\}.$$

L'espace caractéristique associé à la valeur propre 0 est de dimension 1, et est engendré par $1 \in \mathbf{R}[y, p]$.

Par le théorème 7.10, et par (7.7.1), (7.7.4) et (7.7.6), on trouve :

THÉORÈME 7.13. *On a*

$$(7.7.7) \quad \text{Sp } B_\gamma^+ = \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - 4\gamma}}{2} n_+ + \frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma}}{2} n_- : n_+, n_- \in \mathbf{N} \right\}.$$

L'espace caractéristique associé à la valeur propre 0 est de dimension 1, et est engendré par $\exp(-(y^2 + p^2)/2)$.

REMARQUE 7.14. Pour $\gamma \neq 1/4$, B_γ^+ est diagonalisable. Toute la fonction propre est sous la forme d'un produit d'un polynôme par $\exp(-(y^2 + p^2)/2)$. Dans le cas $0 < \gamma < 1/4$, le spectre de B_γ^+ reste réel. Mais dans le cas $\gamma > 1/4$, le spectre de B_γ^+ devient complexe, et est invariant par conjugaison. Dans le cas $\gamma = 1/4$, B_γ^+ est non diagonalisable.

REMARQUE 7.15. Pour $\gamma \neq 1/4$, le spectre est aussi calculé dans [HeN05, Section 5.5.1].

7.8. L'opérateur B_γ^- . Posons

$$(7.8.1) \quad \mathbf{B}_\gamma^- = \mathcal{B}^{-1} B_\gamma^- \mathcal{B}.$$

Par (7.5.6), (7.6.11), on a

$$(7.8.2) \quad \mathbf{B}_\gamma^- = p \frac{\partial}{\partial p} - \sqrt{\gamma} \left(\frac{\partial^2}{\partial p \partial y} - yp \right).$$

L'opérateur \mathbf{B}_γ^- préserve la différence des degrés en y et en p . Pour une différence fixée, l'espace des polynômes correspondants est de dimension infinie.

Pour calculer le spectre de B_γ^- , on construit d'abord une famille de valeurs propres et de fonctions propres. Ensuite, on montre que l'espace tout entier est engendré par ces fonctions propres, et que le spectre coïncide avec les valeurs propres qu'on a trouvées dans la première étape.

Pour $|a| < 1$, par (7.8.2), on a

$$(7.8.3) \quad \mathbf{B}_\gamma^- \exp(ayp) = ((-\sqrt{\gamma}a^2 + a + \sqrt{\gamma})yp - a\sqrt{\gamma}) \exp(ayp).$$

On choisit a de telle sorte que $-\sqrt{\gamma}a^2 + a + \sqrt{\gamma} = 0$ et $|a| < 1$. Alors,

$$(7.8.4) \quad a = -\frac{\sqrt{1 + 4\gamma} - 1}{2\sqrt{\gamma}}.$$

Par la proposition 7.11, et par (7.8.3), on a

$$(7.8.5) \quad \exp\left(-\frac{\sqrt{1 + 4\gamma} - 1}{2\sqrt{\gamma}}yp\right) \in \overline{\mathbf{R}[y, p]},$$

$$\mathbf{B}_\gamma^- \exp\left(-\frac{\sqrt{1 + 4\gamma} - 1}{2\sqrt{\gamma}}yp\right) = \frac{\sqrt{1 + 4\gamma} - 1}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{1 + 4\gamma} - 1}{2\sqrt{\gamma}}yp\right).$$

On pose

$$(7.8.6) \quad \mathcal{B}_\gamma^- = \exp\left(\frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{2\sqrt{\gamma}}yp\right)\mathcal{B}_\gamma^- \exp\left(-\frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{2\sqrt{\gamma}}yp\right).$$

Par (7.8.2), (7.8.6), on a

$$(7.8.7) \quad \mathcal{B}_\gamma^- = \frac{1+\sqrt{1+4\gamma}}{2}p\frac{\partial}{\partial p} + \frac{-1+\sqrt{1+4\gamma}}{2}y\frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{\gamma}\frac{\partial^2}{\partial p\partial y} + \frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{2}.$$

Pour $l \in \mathbf{R}$, on définit $\exp(l\frac{\partial^2}{\partial y\partial p}) : \mathbf{R}[y, p] \rightarrow \mathbf{R}[y, p]$ comme dans (7.6.6). On pose

$$(7.8.8) \quad \mathcal{B}_\gamma^{-,l} = \exp\left(l\frac{\partial^2}{\partial y\partial p}\right)\mathcal{B}_\gamma^- \exp\left(-l\frac{\partial^2}{\partial y\partial p}\right).$$

Par (7.8.7), (7.8.8), on trouve

$$(7.8.9) \quad \mathcal{B}_\gamma^{-,l} = \frac{1+\sqrt{1+4\gamma}}{2}p\frac{\partial}{\partial p} + \frac{-1+\sqrt{1+4\gamma}}{2}y\frac{\partial}{\partial y} + \left(l\sqrt{1+4\gamma}-\sqrt{\gamma}\right)\frac{\partial^2}{\partial p\partial y} + \frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{2}.$$

On prend $l = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{1+4\gamma}}$. Alors,

$$(7.8.10) \quad \mathcal{B}_\gamma^{-,l} = \frac{1+\sqrt{1+4\gamma}}{2}p\frac{\partial}{\partial p} + \frac{-1+\sqrt{1+4\gamma}}{2}y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{2}.$$

Donc, pour $n_+, n_- \in \mathbf{N}$, $p^{n_+}y^{n_-}$ forme un système complet des fonctions propres pour $\mathcal{B}_\gamma^{-,l}$ avec des valeurs propres

$$(7.8.11) \quad \lambda_{n_+, n_-} = \frac{1+\sqrt{1+4\gamma}}{2}n_+ + \frac{-1+\sqrt{1+4\gamma}}{2}(n_- + 1).$$

On pose

$$(7.8.12) \quad P_{n_+, n_-}(y, p) = W_a \exp\left(-l\frac{\partial^2}{\partial y\partial p}\right)p^{n_+}y^{n_-} \in \mathbf{R}[y, p],$$

$$u_{n_+, n_-}(y, p) = \frac{P_{n_+, n_-}(y, p)}{\sqrt{\pi(1-a^2)}} \exp(-Q_a(y, p)) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2).$$

Par (7.6.19), (7.8.1), (7.8.8), (7.8.12), u_{n_+, n_-} est une fonction propre pour B_γ^- associée à la valeur propre λ_{n_+, n_-} .

Si V un espace vectoriel, et si $U \subset V$, on note $\text{Vect } U$ le sous-espace vectoriel de V engendré par U . Comme W_a et $\exp(-l\frac{\partial^2}{\partial y\partial p})$ sont isomorphismes des espaces vectoriels, on a :

$$(7.8.13) \quad \text{Vect}\{P_{n_+, n_-} : n_+, n_- \in \mathbf{N}\} = \mathbf{R}[y, p],$$

$$\overline{\text{Vect}\{u_{n_+, n_-} : n_+, n_- \in \mathbf{N}\}} = L^2(\mathbf{R}^2).$$

PROPOSITION 7.16. *Étant donnés $n_\pm, n'_\pm \in \mathbf{N}$ tels que $(n_+, n_-) \neq (n'_+, n'_-)$, on a*

$$(7.8.14) \quad h(u_{n_+, n_-}, u_{n'_+, n'_-}) = 0, \quad h(u_{n_+, n_-}, u_{n_+, n_-}) \neq 0.$$

DÉMONSTRATION. On pose

$$(7.8.15) \quad \Gamma = \{\gamma > 0 : \sqrt{1+4\gamma} \notin \mathbf{Q}\}.$$

Par (7.8.11), pour $\gamma \in \Gamma$ et $(n_+, n_-) \neq (n'_+, n'_-)$, on a $\lambda_{n_+, n_-} \neq \lambda_{n'_+, n'_-}$. Or tous les λ_{n_+, n_-} sont réels. Par [B05, Theorem 1.11], pour $\gamma \in \Gamma$, on a

$$(7.8.16) \quad h(u_{n_+, n_-}, u_{n'_+, n'_-}) = 0.$$

Par (7.8.12), on sait que l'application

$$(7.8.17) \quad \gamma \in \mathbf{R}_+^* \rightarrow h(u_{n_+, n_-}, u_{n'_+, n'_-}) \in \mathbf{R}$$

est continue. Comme Γ est dense dans \mathbf{R}_+^* , alors pour tout $\gamma > 0$, on a

$$(7.8.18) \quad h(u_{n_+, n_-}, u_{n'_+, n'_-}) = 0.$$

S'il existe $n_+, n_- \in \mathbf{N}$ tels que

$$(7.8.19) \quad h(u_{n_+, n_-}, u_{n_+, n_-}) = 0.$$

Alors, par la première équation de (7.8.14), pour tout $n'_+, n'_- \in \mathbf{N}$, on a

$$(7.8.20) \quad h(u_{n_+, n_-}, u_{n'_+, n'_-}) = 0.$$

Comme $u_{n'_+, n'_-}$ engendrent $L^2(\mathbf{R}^2)$, de (7.8.20), on tire que u_{n_+, n_-} est dans le noyau de h , ce qui contredit la non dégénérescence de h . \square

THÉORÈME 7.17. *Pour $\gamma > 0$, on a*

$$(7.8.21) \quad \text{Sp } B_\gamma^- = \left\{ \frac{1 + \sqrt{1+4\gamma}}{2} n_+ + \frac{-1 + \sqrt{1+4\gamma}}{2} (n_- + 1) : n_+, n_- \in \mathbf{N} \right\}.$$

De plus B_γ^- est diagonalisable. En particulier, l'espace propre associé à la plus petite valeur propre $\lambda_{0,0}$ est de dimension 1, et est engendré par $u_{0,0}$.

DÉMONSTRATION. Pour $\lambda \in \text{Sp } B_\gamma^-$, soit W_λ l'espace caractéristique associé. Soit

$$(7.8.22) \quad \lambda \in \text{Sp } B_\gamma^- \setminus \left\{ \frac{1 + \sqrt{1+4\gamma}}{2} n_+ + \frac{-1 + \sqrt{1+4\gamma}}{2} (n_- + 1) : n_+, n_- \in \mathbf{N} \right\}.$$

Comme λ_{n_+, n_-} est réel, par [B05, Theorem 1.11], W_λ est h -orthogonal à $W_{\lambda_{n_+, n_-}}$. On sait que les $u_{n_+, n_-} \in W_{\lambda_{n_+, n_-}}$ engendrent $L^2(\mathbf{R}^2)$. Alors, W_λ est dans le noyau de h . La non dégénérescence de h implique

$$(7.8.23) \quad W_\lambda = 0.$$

Alors, on a (7.8.21).

Pour montrer que B_γ^- est diagonalisable, il reste à montrer que tout espace caractéristique coïncide avec l'espace propre correspondant. Pour $\lambda \in \text{Sp } B_\gamma^-$, on pose

$$(7.8.24) \quad V_\lambda = \text{Vect}\{u_{n_+, n_-} : \lambda_{n_+, n_-} = \lambda\}.$$

Alors, $V_\lambda \subset W_\lambda$. Comme le spectre est réel, par [B05, Theorem 1.11], h est non dégénéré sur W_λ , et les différents W_λ sont h -orthogonaux. On pose

$$(7.8.25) \quad V'_\lambda = \{s \in W_\lambda : h(s, v) = 0, \text{ pour tout } v \in V_\lambda\}.$$

Alors, l'élément de V'_λ est h -orthogonal à tous les u_{n_+, n_-} , ce qui implique

$$(7.8.26) \quad V'_\lambda = 0.$$

Par la non dégénérescence de h sur W_λ , on a $V_\lambda = W_\lambda$. Donc, B_γ^- est diagonalisable, ceci termine la preuve. \square

7.9. L'opérateur C_γ^\pm . Par (7.5.6), on a

$$(7.9.1) \quad C_\gamma^\pm|_{\Lambda^0(\mathbf{R}^2)} = 0, \quad C_\gamma^\pm|_{\Lambda^2(\mathbf{R}^2)} = 1.$$

De plus, dans la base dy, dp de $\Lambda^1\mathbf{R}^2$, $C_\gamma^\pm|_{\Lambda^1\mathbf{R}^2}$ est donné par

$$(7.9.2) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pm \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par (7.9.2), pour $\lambda \in \mathbf{C}$, on a

$$(7.9.3) \quad \det(\lambda - C_\gamma^\pm|_{\Lambda^1\mathbf{R}^2}) = \det \begin{pmatrix} \lambda \mp \gamma & \mp \gamma \\ \pm \gamma & \lambda - 1 \pm \gamma \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda \pm \gamma.$$

Alors on trouve que

$$(7.9.4) \quad \text{Sp } C_\gamma^\pm|_{\Lambda^1\mathbf{R}^2} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 \mp 4\gamma}}{2}, \frac{1 - \sqrt{1 \mp 4\gamma}}{2} \right\}.$$

De (7.9.1), (7.9.4), on tire

$$(7.9.5) \quad \text{Sp } C_\gamma^\pm = \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 \mp 4\gamma}}{2} n_+ + \frac{1 - \sqrt{1 \mp 4\gamma}}{2} n_- : n_+, n_- \in \{0, 1\} \right\}.$$

Dans le cas $+$, l'espace caractéristique associé à 0 est de dimension 1, et est engendré par 1. Dans le cas $-$, les 4 valeurs propres sont distinctes. Les espaces propres correspondants sont de dimension 1. La plus petite valeur propre est $\frac{1 - \sqrt{1+4\gamma}}{2}$. Comme

$$(7.9.6) \quad \begin{pmatrix} -\gamma & -\gamma \\ \gamma & \gamma + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{\sqrt{1+4\gamma}+1} \end{pmatrix} = \frac{1 - \sqrt{1+4\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{\sqrt{1+4\gamma}+1} \end{pmatrix},$$

l'espace propre associé à la valeur propre $\frac{1 - \sqrt{1+4\gamma}}{2}$ est engendré par la 1-forme

$$(7.9.7) \quad \rho_\gamma^- = dy - \frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{\sqrt{1+4\gamma}+1} dp.$$

7.10. Le spectre de H_γ^\pm et $L_{b,T}^\pm$. On pose

$$(7.10.1) \quad \tau_{\gamma,\pm}^+ = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\gamma}}{2}, \quad \tau_{\gamma,\pm}^- = \frac{\pm 1 + \sqrt{1+4\gamma}}{2}.$$

Par (7.5.6), (7.7.7), (7.8.21) et (7.9.5), on a

$$(7.10.2) \quad \text{Sp } H_\gamma^\pm = \left\{ \tau_{\gamma,+}^\pm n_+ + \tau_{\gamma,-}^\pm n_- : n_+, n_- \in \mathbf{N} \right\}.$$

De plus, l'espace caractéristique associé à 0 de H_γ^\pm est de dimension 1, et est engendré, dans le cas $+$, par

$$(7.10.3) \quad u_\gamma^+ = \exp\left(-\frac{p^2 + y^2}{2}\right),$$

et dans le cas $-$, par

$$(7.10.4) \quad u_\gamma^- = \exp\left(-\frac{\sqrt{1+4\gamma}}{2}(p^2 + y^2) - 2\sqrt{\gamma}yp\right) \left(dy - \frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{\sqrt{1+4\gamma}+1} dp\right).$$

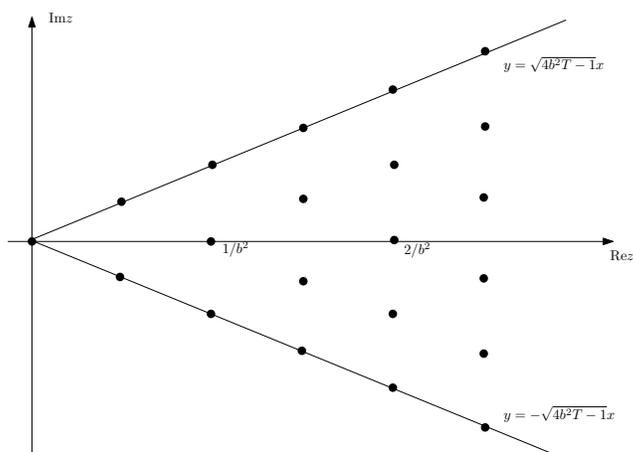


FIGURE 7.1. Le spectre de $L_{b,T}^+$: le cas où $b^2 T > 1/4$

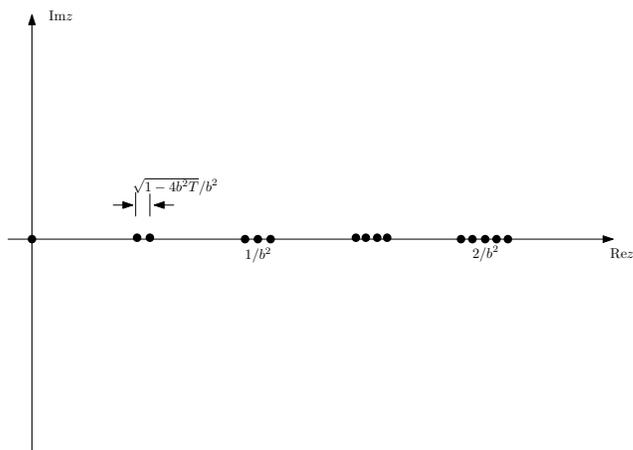


FIGURE 7.2. Le spectre de $L_{b,T}^+$: le cas où $b^2 T \leq 1/4$

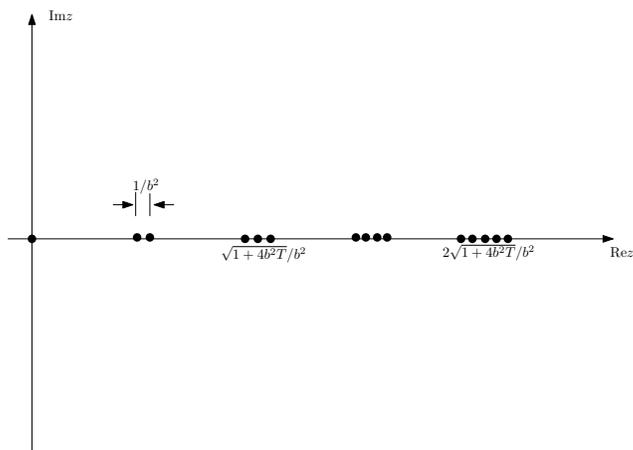


FIGURE 7.3. Le spectre de $L_{b,T}^-$

Par (7.5.4), (7.5.7), on a

$$(7.10.5) \quad \mathrm{Sp} L_{b,T}^{\pm} = \frac{\mathrm{Sp} H_{b^2 T}^{\pm}}{b^2},$$

et l'espace caractéristique associé à 0 de $L_{b,T}^{\pm}$ est de dimension 1, et est engendré, dans le cas +, par

$$(7.10.6) \quad \exp\left(-\frac{p^2 + Ty^2}{2}\right),$$

et dans le cas -, par

$$(7.10.7) \quad \exp\left(-\frac{\sqrt{1+4b^2T}}{2}(p^2 + Ty^2) - 2bT yp\right) \left(dy - \frac{\sqrt{1+4b^2T} - 1}{\sqrt{1+4b^2T} + 1} dp\right).$$

7.11. Formes harmoniques et théorie de Hodge pour $A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}^{\pm}}^2$. On pose

$$(7.11.1) \quad u_{b,T}^+ = \exp\left(-\frac{p^2 + Ty^2}{2}\right),$$

$$u_{b,T}^- = \sqrt{T \left(\frac{1 + \sqrt{1+4b^2T}}{2\pi}\right)} \exp\left(-\frac{\sqrt{1+4b^2T}}{2}(p^2 + Ty^2) - 2bT yp\right)$$

$$\times \left(dy - \frac{\sqrt{1+4b^2T} - 1}{\sqrt{1+4b^2T} + 1} dp\right).$$

Par (3.1.9), (7.5.1), posons

$$(7.11.2) \quad \mathbf{u}_{b,T}^{\pm} = \exp(\mathcal{H}_{b,T}^{\pm} + \mu_0) K_b^{-1} u_{b,T}^{\pm}.$$

Par (7.11.1), (7.11.2), on a

$$(7.11.3)$$

$$\mathbf{u}_{b,T}^+ = 1,$$

$$\mathbf{u}_{b,T}^- = \sqrt{T \left(\frac{1 + \sqrt{1+4b^2T}}{2\pi}\right)} \exp\left\{-\frac{T(1 + \sqrt{1+4b^2T})}{2} \left(y + \frac{2}{1 + \sqrt{1+4b^2T}} p\right)^2\right\}$$

$$\times \left(dy + \frac{2}{1 + \sqrt{1+4b^2T}} dp\right).$$

On pose

$$(7.11.4) \quad \pi_{b,T} : (y, p) \in \mathbf{R}^2 \rightarrow \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1+4b^2T}}{2}} y + \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1+4b^2T}}} p \in \mathbf{R}.$$

Par (7.2.6), (7.11.3), (7.11.4), on a

$$(7.11.5) \quad \mathbf{u}_{b,T}^- = \pi_{b,T}^* u_{Tf^-}.$$

De plus, pour tout $p \in \mathbf{R}$, on a

$$(7.11.6) \quad \int_{y \in \mathbf{R}} \mathbf{u}_{b,T}^- = 1.$$

Comme en (7.2.4), on pose

$$(7.11.7) \quad \Omega_{b,T}^{\cdot,\pm}(\mathbf{R}^2) = \exp(\mathcal{H}_{b,T}^{\pm})\mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \Lambda(\mathbf{R}^{2,*})).$$

Alors $(\Omega_{b,T}^{\cdot,\pm}(\mathbf{R}^2), d^{\mathbf{R}^2})$ est un complexe.

Soit $i : y \in \mathbf{R} \rightarrow (y, 0) \in \mathbf{R}^2$. On a un morphisme du complexe

$$(7.11.8) \quad i^* : (\Omega_{b,T}^{\cdot,\pm}(\mathbf{R}^2), d^{\mathbf{R}^2}) \rightarrow (\Omega_{Tf^{\pm}}(\mathbf{R}), d^{\mathbf{R}}).$$

En appliquant la proposition 7.2 pour le complexe $(\Omega_{b,T}^{\cdot,\pm}(\mathbf{R}^2), d^{\mathbf{R}^2})$, on trouve que i^* dans (7.11.8) est un quasiisomorphisme, c'est à dire, on a l'isomorphisme

$$(7.11.9) \quad H^{\cdot}(\Omega_{b,T}^{\cdot,\pm}(\mathbf{R}^2), d^{\mathbf{R}^2}) \simeq H^{\cdot,\pm}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}.$$

De plus, par (7.2.6), (7.11.3), (7.11.8), on a

$$(7.11.10) \quad i^* \mathbf{u}_{b,T}^+ = u_{Tf^+}, \quad i^* \mathbf{u}_{b,T}^- = u_{\sqrt{T(1+\sqrt{1+4b^2T})/2}f^-}.$$

Le résultat suivant est une version de résultats obtenus dans [BL08, Theorem 3.2.2] sur la théorie de Hodge hypoelliptique.

THÉORÈME 7.18. *Pour $b > 0$ et $T > 0$, on a $\mathbf{u}_{b,T}^{\pm} \in \Omega_{b,T}^{\cdot,\pm}(\mathbf{R}^2)$, et*

$$(7.11.11) \quad d^{\mathbf{R}^2} \mathbf{u}_{b,T}^{\pm} = 0, \quad \bar{d}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}^{\pm}}^{\mathbf{R}^2} \mathbf{u}_{b,T}^{\pm} = 0.$$

De plus, sous l'isomorphisme (7.11.9), on a

$$(7.11.12) \quad [\mathbf{u}_{b,T}^{\pm}] \in H^{\cdot}(\Omega_{b,T}^{\cdot,\pm}(\mathbf{R}^2), d^{\mathbf{R}^2}) \rightarrow \mathbf{1} \in \mathbf{R}.$$

DÉMONSTRATION. Il est évident que $\mathbf{u}_{b,T}^+ \in \Omega_{b,T}^{\cdot,+}(\mathbf{R}^2)$, et qu'on a (7.11.11) pour $\mathbf{u}_{b,T}^+$. Pour montrer $\mathbf{u}_{b,T}^- \in \Omega_{b,T}^{\cdot,-}(\mathbf{R}^2)$, il suffit de montrer que la forme quadratique

$$(7.11.13) \quad \frac{p^2}{2b^2} - \frac{Ty^2}{2} + \frac{T(1 + \sqrt{1 + 4b^2T})}{2} \left(y + \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}} p \right)^2$$

est définie positive. On a

$$(7.11.14) \quad \begin{aligned} \frac{p^2}{2b^2} - \frac{Ty^2}{2} + \frac{T(1 + \sqrt{1 + 4b^2T})}{2} \left(y + \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}} p \right)^2 \\ = \frac{T\sqrt{1 + 4b^2T}}{2} y^2 + 2Typ + \frac{\sqrt{1 + 4b^2T}}{2b^2} p^2. \end{aligned}$$

Comme le déterminant de la matrice

$$(7.11.15) \quad \begin{pmatrix} \frac{T\sqrt{1+4b^2T}}{2} & T \\ T & \frac{\sqrt{1+4b^2T}}{2b^2} \end{pmatrix}$$

est $T/4b^2$, et comme les éléments diagonaux sont positifs, on trouve le résultat souhaité.

Par (7.11.5), on a $d^{\mathbf{R}^2} \mathbf{u}_{b,T}^- = 0$. Par (7.5.2), (7.11.3), on a

$$(7.11.16) \quad \bar{d}_{\phi, 2\mathcal{H}_{b,T}}^{\mathbf{R}^2} \mathbf{u}_{b,T}^- = \sqrt{T \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}}{2\pi} \right)} \\ \times \left(\left(-\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + 2Ty \right) + \frac{\sqrt{1 + 4b^2T} - 1}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{2p}{b^2} \right) \right) \\ \exp \left\{ -\frac{T(1 + \sqrt{1 + 4b^2T})}{2} \left(y + \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}} p \right)^2 \right\} = 0.$$

Par (7.2.9), (7.11.10), on trouve que (7.11.12), ce qui termine la démonstration. \square

PROPOSITION 7.19. *Pour $b > 0, T > 0$, on a*

$$(7.11.17) \quad \mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}^+}^{\Omega(\mathbf{R}^2)}(\mathbf{u}_{b,T}^+, \mathbf{u}_{b,T}^+) = \pi \frac{b}{\sqrt{T}}, \quad \mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}^-}^{\Omega(\mathbf{R}^2)}(\mathbf{u}_{b,T}^-, \mathbf{u}_{b,T}^-) = \frac{2b\sqrt{T}}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}}.$$

DÉMONSTRATION. Par la définition 3.1, et par (7.11.3), on a

$$(7.11.18) \quad \mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}^+}^{\Omega(\mathbf{R}^2)}(\mathbf{u}_{b,T}^+, \mathbf{u}_{b,T}^+) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-\frac{p^2}{b^2} - Ty^2} dy dp = \pi \frac{b}{\sqrt{T}},$$

ce qui nous donne la première équation de (7.11.17).

Par la définition 3.1, on a

$$(7.11.19) \quad \mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}^-}^{\Omega(\mathbf{R}^2)}(\mathbf{u}_{b,T}^-, \mathbf{u}_{b,T}^-) = \int_{\mathbf{R}^2} \langle \mathbf{u}_{b,T}^-(y, -p), \mathbf{u}_{b,T}^-(y, p) \rangle_{\Lambda(\mathbf{R}^2, *)} \mathfrak{f} e^{-\frac{p^2}{b^2} + Ty^2} dy dp.$$

Par (3.1.4), dans la base dy, dp , l'action de \mathfrak{f} sur les formes de degré 1 est donnée par

$$(7.11.20) \quad {}^t\mathfrak{f}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors, on a

$$(7.11.21) \quad \left\langle dy + \frac{2dp}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}}, dy + \frac{2dp}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}} \right\rangle_{\Lambda(\mathbf{R}^2, *)} \mathfrak{f} \\ = \left\langle \left(\frac{1}{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}}} \right), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}}} \right) \right\rangle = \frac{4\sqrt{1 + 4b^2T}}{(1 + \sqrt{1 + 4b^2T})^2}.$$

Par (7.11.3), (7.11.21), on a

$$(7.11.22) \quad \langle \mathbf{u}_{b,T}^-(y, -p), \mathbf{u}_{b,T}^-(y, p) \rangle_{\Lambda(\mathbf{R}^2, *)} \mathfrak{f} = \frac{2T\sqrt{1 + 4b^2T}}{\pi(1 + \sqrt{1 + 4b^2T})} \\ \times \exp \left\{ -\frac{T(1 + \sqrt{1 + 4b^2T})}{2} \left(\left(y + \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}} p \right)^2 + \left(y - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}} p \right)^2 \right) \right\} \\ = \frac{2T\sqrt{1 + 4b^2T}}{\pi(1 + \sqrt{1 + 4b^2T})} \exp \left(-T(1 + \sqrt{1 + 4b^2T})y^2 - \frac{4Tp^2}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}} \right).$$

De (7.11.19), (7.11.22), on tire la seconde équation de (7.11.17). \square

REMARQUE 7.20. Par (7.11.17), on a

$$(7.11.23) \quad \mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}^\pm}^{\Omega(\mathbf{R}^2)}(\mathbf{u}_{b,T}^\pm, \mathbf{u}_{b,T}^\pm) > 0,$$

ce qui est utilisé pour définir la métrique de Ray-Signer hypoelliptique dans la sous-section 7.14.

Notons que $\mathbf{u}_{b,T}^+$ est indépendant de b et T . Dans la suite de cette sous-section, on va étudier le comportement de $\mathbf{u}_{b,T}^-$ quand $b \rightarrow 0$ et $b \rightarrow \infty$. Plus précisément, on va calculer la limite pour $r_b^* \mathbf{u}_{b,T}^-$ quand $b \rightarrow 0$ et $b \rightarrow \infty$.

Si $s \in \Omega(\mathbf{R}^2)$, on définit le courant associé à s par la formule, pour $\phi \in \Omega_c^{2-}(\mathbf{R}^2)$,

$$(7.11.24) \quad \langle s, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}^2} s \wedge \phi.$$

On définit le 1-courant $\delta_{\sqrt{T}y+p=0}$ de telle sorte que, si $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$,

$$(7.11.25) \quad \langle \delta_{\sqrt{T}y+p=0}, \phi_1 dy + \phi_2 dp \rangle = \int_{\mathbf{R}} \left(\sqrt{T} \phi_2(y, -\sqrt{T}y) - \phi_1(y, -\sqrt{T}y) \right) dy.$$

PROPOSITION 7.21. *Pour $T > 0$, on a les convergences au sens des courants,*

$$(7.11.26) \quad \begin{aligned} r_b^* \mathbf{u}_{b,T}^- &\rightarrow u_{Tf^-} = \sqrt{\frac{T}{\pi}} \exp\left(-Ty^2\right) dy, & \text{quand } b \rightarrow 0, \\ r_b^* \mathbf{u}_{b,T}^- &\rightarrow \delta_{\sqrt{T}y+p=0}, & \text{quand } b \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Quand $b \rightarrow 0$, par (7.11.3), la convergence est évidente. Quand $b \rightarrow \infty$, si $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$, par (7.11.3), on a

$$(7.11.27) \quad \begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^2} r_b^* \mathbf{u}_{b,T}^- \wedge (\phi_1 dy + \phi_2 dp) \\ &= \sqrt{T \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}}{2\pi} \right)} \int_{\mathbf{R}^2} \exp \left\{ -\frac{T(1 + \sqrt{1 + 4b^2 T})}{2} \left(y + \frac{2b}{1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}} p \right)^2 \right\} \\ &\quad \left(\phi_2(y, p) - \frac{2b}{1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}} \phi_1(y, p) \right) dy dp \\ &= \sqrt{T \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}}{2\pi} \right)} \int_{\mathbf{R}^2} \exp \left(-\frac{T(1 + \sqrt{1 + 4b^2 T})}{2} p^2 \right) \\ &\quad \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}}{2b} \phi_2 \left(y, \frac{1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}}{2b} (p - y) \right) - \phi_1 \left(y, \frac{1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}}{2b} (p - y) \right) \right\} dy dp. \end{aligned}$$

Quand $b \rightarrow \infty$, de (7.11.27), on tire que

$$(7.11.28) \quad \int_{\mathbf{R}^2} r_b^* \mathbf{u}_{b,T}^- \wedge (\phi_1 dy + \phi_2 dp) \rightarrow \int_{\mathbf{R}} \left(\sqrt{T} \phi_2(y, -\sqrt{T}y) - \phi_1(y, -\sqrt{T}y) \right) dy.$$

Par (7.11.25), (7.11.28), on a la seconde équation de (7.11.26). \square

REMARQUE 7.22. Considérons le flot hamiltonien

$$(7.11.29) \quad \dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}_T^-}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}_T^-}{\partial y} = Ty,$$

de telle sorte que, si $A, B \in \mathbf{R}$,

$$(7.11.30) \quad y = Ae^{\sqrt{T}t} + Be^{-\sqrt{T}t}, \quad p = A\sqrt{T}e^{\sqrt{T}t} - B\sqrt{T}e^{-\sqrt{T}t}.$$

Alors $0 \in \mathbf{R}^2$ est le seul point critique pour ce flot. La variété stable (resp. instable) associée est donnée par,

$$(7.11.31) \quad \sqrt{T}y + p = 0 \text{ (resp. } \sqrt{T}y - p = 0 \text{)}.$$

Par (7.11.26), quand $b \rightarrow \infty$, $r_b^* \mathbf{u}_{b,T}^-$ se localise sur la variété stable du flot hamiltonien \mathcal{H}_T^- .

REMARQUE 7.23. Par le même argument que dans la preuve du théorème 7.18, on peut montrer que la classe de cohomologie $[r_b^* \mathbf{u}_{b,T}^-]$ ne dépend pas de b et T . Par la proposition 7.21, le courant $\delta_{\sqrt{T}y+p=0}$ est cohomologue à u_{Tf^-} .

7.12. Opérateur de la chaleur pour $L_{b,T}^\pm$. Pour $\gamma > 0$, on sait que B_γ^\pm est maximale accrétime. De plus, par les théorèmes 7.13 et 7.17, on a $-1 \notin \text{Sp } B_\gamma^\pm$. Alors,

$$(7.12.1) \quad \text{Im}(1 + B_\gamma^\pm) = L^2(\mathbf{R}^2).$$

Par le théorème de Hille-Yosida [Yo95, IX.8, Theorem, P.250], on sait que $-B_\gamma^\pm$ est un générateur d'un semigroupe de contractions sur $L^2(\mathbf{R}^2)$.

DÉFINITION 7.24. Soit D un opérateur borné sur l'espace de Hilbert H , et soit D^* est l'opérateur dual relatif à la produit scalaire de H . Pour $p \geq 1$, on pose

$$(7.12.2) \quad \|D\|_p = \left\{ \text{Tr} \left[\left(\sqrt{D^*D} \right)^p \right] \right\}^{1/p}.$$

On définit $\|D\|$ par la norme des opérateurs.

Pour $s \in \mathbf{R}$, soit $H^s(\mathbf{R}^2)$ l'espace de Sobolev défini par

$$(7.12.3) \quad H^s(\mathbf{R}^2) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2) : \left(-\frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + p^2 + y^2 \right)^{s/2} u \in L^2(\mathbf{R}^2) \right\},$$

et pour $u \in H^s(\mathbf{R}^2)$, la norme de u est définie par

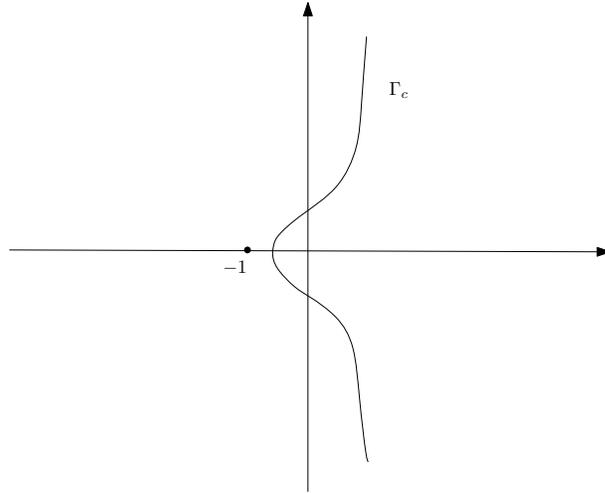
$$(7.12.4) \quad \|u\|_{H^s} = \left\| \left(-\frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + p^2 + y^2 \right)^{s/2} u \right\|_{L^2}.$$

Pour $c > 0$, soit Γ_c une courbe dans \mathbf{C} donnée par

$$(7.12.5) \quad \Gamma_c = \left\{ \lambda \in \mathbf{C} : \text{Re } \lambda > -1, |\lambda + 1|^{1/8} = c(\text{Re } \lambda + 1) \right\}.$$

Par l'estimation de la première ligne de [HeN05, P69], il existe $c > 0, C > 0$, tels que, pour tout $\lambda \in \Gamma_c$, on a

$$(7.12.6) \quad \|(\lambda - B_\gamma^\pm)^{-1}\| \leq C|\lambda + 1|^{-1/8}.$$

FIGURE 7.4. La courbe Γ_c

Par le même argument que dans la démonstration de [BL08, Proposition 3.3.1], on a

$$(7.12.7) \quad \exp(-tB_\gamma^\pm) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_c} e^{-t\lambda} (\lambda - B_\gamma^\pm)^{-1} d\lambda.$$

Par l'intégration par parties, pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$(7.12.8) \quad \exp(-tB_\gamma^\pm) = \frac{(-1)^N N!}{2i\pi t^N} \int_{\Gamma_c} e^{-t\lambda} (\lambda - B_\gamma^\pm)^{-(N+1)} d\lambda.$$

PROPOSITION 7.25. *Pour $b > 0$, $t > 0$ et $T > 0$, l'opérateur de la chaleur $\exp(-tL_{b,T}^\pm)$ est à trace. De plus,*

$$(7.12.9) \quad \text{Tr}_s [\exp(-tL_{b,T}^\pm)] = \pm 1.$$

DÉMONSTRATION. On va montrer d'abord que, pour $N \gg 1$, l'intégrale dans (7.12.8) est convergente pour la norme $\|\cdot\|_1$, ceci implique que $\exp(-tL_{b,T}^\pm)$ est à trace.

Par [HeN05, Theorem 5.8], pour $u \in L^2(\mathbf{R}^2)$, il existe $C > 0$ tel que

$$(7.12.10) \quad \|(1 + B_\gamma^\pm)^{-1} u\|_{H^{1/4}} \leq C \|u\|_{L^2}.$$

Par la même méthode, on trouve que pour $s > 0$, il existe $C_s > 0$ tel que

$$(7.12.11) \quad \|(1 + B_\gamma^\pm)^{-1} u\|_{H^{s+1/4}} \leq C_s \|u\|_{H^s}.$$

De (7.12.11), on tire que pour $s > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$, $C_s > 0$ tels que

$$(7.12.12) \quad \|(1 + B_\gamma^\pm)^{-N} u\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{L^2}.$$

Par l'identité de la résolvante, on a

$$(7.12.13) \quad (\lambda - B_\gamma^\pm)^{-1} = (1 + B_\gamma^\pm)^{-1} (-1 + (1 + \lambda)(\lambda - B_\gamma^\pm)^{-1}).$$

De (7.12.6), (7.12.12), (7.12.13), on tire que pour $\lambda \in \Gamma_c$,

$$(7.12.14) \quad \|(\lambda - B_\gamma^\pm)^{-N} u\|_{H^s} \leq C_s (1 + |\lambda|^N) \|u\|_{L^2}.$$

De plus, par des propriétés de l'oscillateur harmonique, pour $s \gg 1$, l'injection $H^s(\mathbf{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^2)$ est à trace. Par (7.12.14), on a

$$(7.12.15) \quad \|(\lambda - B_\gamma^\pm)^{-N}\|_1 \leq C(1 + |\lambda|^N),$$

ce qui implique que l'intégrale dans (7.12.8) est convergente pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Comme B_γ^\pm et C_γ^\pm commutent, par (7.5.4), (7.5.7), on trouve que

$$(7.12.16) \quad \begin{aligned} \mathrm{Tr}_s [\exp(-tL_{b,T}^\pm)] &= \mathrm{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{t}{b^2} (B_{b^2T}^\pm + C_{b^2T}^\pm) \right) \right] \\ &= \mathrm{Tr} \left[\exp \left(-\frac{t}{b^2} B_{b^2T}^\pm \right) \right] \mathrm{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{t}{b^2} C_{b^2T}^\pm \right) \right]. \end{aligned}$$

Par le théorème de Lidskii [ReSi78, Corollary, P.318], on a

$$(7.12.17) \quad \mathrm{Tr} [\exp(-tB_\gamma^\pm)] = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} B_\gamma^\pm} \exp(-t\lambda).$$

Par (7.7.7), (7.10.1) et (7.12.17), on a

$$(7.12.18) \quad \begin{aligned} \mathrm{Tr} \left[\exp \left(-\frac{t}{b^2} B_{b^2T}^+ \right) \right] &= \sum_{n_+ \geq 0, n_- \geq 0} \exp \left(-\frac{t}{b^2} \tau_{b^2T,+}^+ n_+ - \frac{t}{b^2} \tau_{b^2T,\pm}^+ n_- \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 - \exp \left(-\frac{t}{b^2} \tau_{b^2T,+}^+ \right) \right) \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{b^2} \tau_{b^2T,-}^+ \right) \right)}. \end{aligned}$$

Par (7.8.21), (7.10.1) et (7.12.17), on a

$$(7.12.19) \quad \begin{aligned} \mathrm{Tr} \left[\exp \left(-\frac{t}{b^2} B_{b^2T}^- \right) \right] &= \sum_{n_+ \geq 0, n_- \geq 1} \exp \left(-\frac{t}{b^2} \tau_{b^2T,+}^- n_+ - \frac{t}{b^2} \tau_{b^2T,-}^- n_- \right) \\ &= -\frac{1}{\left(1 - \exp \left(-\frac{t}{b^2} \tau_{b^2T,+}^- \right) \right) \left(1 - \exp \left(\frac{t}{b^2} \tau_{b^2T,-}^- \right) \right)}. \end{aligned}$$

Par (7.9.1), (7.9.4), on a

$$(7.12.20) \quad \mathrm{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{t}{b^2} C_{b^2T}^\pm \right) \right] = \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{b^2} \tau_{b^2T,+}^\pm \right) \right) \left(1 - \exp \left(\mp \frac{t}{b^2} \tau_{b^2T,-}^\pm \right) \right).$$

Par (7.12.16) et (7.12.18)-(7.12.20), on a (7.12.9), ce qui termine la preuve. \square

REMARQUE 7.26. Par la proposition 7.25, pour tout $t > 0$, $b > 0$ et $T > 0$, on a

$$(7.12.21) \quad \mathrm{Tr}_s [\exp(-tL_{b,T}^\pm)] = \chi(H^{\cdot,\pm}(\mathbf{R})) = \pm 1.$$

Ce résultat est un analogue dans une situation non compacte de résultat de [BL08, Theorem 4.2.1].

7.13. Théorie de l'indice local. Dans cette section, on donne une autre démonstration de l'équation (7.12.9) qui ne repose pas sur le calcul explicite du spectre, mais sur les techniques d'indice local.

Dans cette section, on suppose que $T \in \mathbf{R}^*$. Alors, pour $T < 0$, on a

$$(7.13.1) \quad L_{b,-T}^- = L_{b,T}^+.$$

PROPOSITION 7.27. *Pour $b > 0$, $t > 0$ et $T \in \mathbf{R}^*$, la quantité*

$$(7.13.2) \quad \text{Tr}_s [\exp(-tL_{b,T}^+)]$$

ne dépend pas des paramètres $b > 0$, $t > 0$, et ne dépend que de la signe de $T \in \mathbf{R}^$.*

DÉMONSTRATION. On affirme d'abord que le noyau de $\exp(-tB_\gamma^\pm)$ relatif au volume $dydp$ est dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$, ce qui implique que le noyau de $\exp(-tL_{b,T}^+)$ relatif au volume $dydp$ est dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^4) \otimes \text{End}(\Lambda(\mathbf{R}^{*,2}))$.

En effet, de (7.12.8)-(7.12.15), on tire que pour tous $s > 0$, $\exp(-tB_\gamma^\pm)$ est un opérateur borné de $L^2(\mathbf{R}^2)$ dans $H^s(\mathbf{R}^2)$. De plus, l'opérateur dual de B_γ^\pm par rapport au produit scalaire L^2 a la même structure que B_γ^\pm . Donc, par dualité, $\exp(-tB_\gamma^\pm)$ est un opérateur borné de $H^{-s}(\mathbf{R}^2)$ dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Par la propriété de semigroupe, pour $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$, $\exp(-tB_\gamma^\pm)$ est alors un opérateur borné de $H^{s_1}(\mathbf{R}^2)$ dans $H^{s_2}(\mathbf{R}^2)$. Alors, son noyau est dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$.

On fixe $t > 0$, $T \in \mathbf{R}^*$. On va montrer la quantité (7.13.2) ne dépend pas de $b > 0$.

Par le même calcul que dans [HeN05, Chapitre 5], on peut montrer que les estimations du type (7.12.10)-(7.12.15) sont encore vrais pour la dérivation en b , alors on a

$$(7.13.3) \quad \frac{\partial}{\partial b} \text{Tr}_s [\exp(-tL_{b,T}^+)] = \text{Tr}_s \left[\frac{\partial}{\partial b} \exp(-tL_{b,T}^+) \right].$$

Par la formule de Duhamel, on a

$$(7.13.4) \quad \frac{\partial}{\partial b} \exp(-tL_{b,T}^+) = -t \int_0^1 \exp(-t(1-s)L_{b,T}^+) \frac{\partial L_{b,T}^+}{\partial b} \exp(-tsL_{b,T}^+) ds.$$

Comme $\exp(-tL_{b,T}^+)$ est une semi-groupe de contractions, pour $t \in \mathbf{R}_+^*$, on a

$$(7.13.5) \quad \|\exp(-tL_{b,T}^+)\| \leq 1.$$

De (7.12.8)-(7.12.15), (7.13.5), on tire que l'application

$$(7.13.6) \quad s \mapsto \exp(-t(1-s)L_{b,T}^+) \frac{\partial L_{b,T}^+}{\partial b} \exp(-tsL_{b,T}^+)$$

est continue de $[0, 1]$ dans l'espace d'opérateurs à trace. Donc, on a

$$(7.13.7) \quad \frac{\partial}{\partial b} \text{Tr}_s [\exp(-tL_{b,T}^+)] = -t \int_0^1 \text{Tr}_s \left[\exp(-t(1-s)L_{b,T}^+) \frac{\partial L_{b,T}^+}{\partial b} \exp(-tsL_{b,T}^+) \right] ds.$$

Grâce à l'existence du noyau dans l'espace de Schwartz et à Tr_s s'annule sur les supers commutateurs, on a

$$(7.13.8) \quad \frac{\partial}{\partial b} \text{Tr}_s [\exp(-tL_{b,T}^+)] = -t \text{Tr}_s \left[\frac{\partial L_{b,T}^+}{\partial b} \exp(-tL_{b,T}^+) \right].$$

Par (3.2.2), on a

$$(7.13.9) \quad \frac{\partial L_{b,T}^+}{\partial b} = 2 \left[\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T^+}, \frac{\partial \mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T^+}}{\partial b} \right].$$

Comme $\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T^+}$ et $\exp(-tL_{b,T}^+)$ commutent, de (7.13.9), on tire que

$$(7.13.10) \quad \frac{\partial L_{b,T}^+}{\partial b} \exp(-tL_{b,T}^{\pm}) = 2 \left[\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T^+}, \frac{\partial \mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}_T^+}}{\partial b} \exp(-tL_{b,T}^{\pm}) \right].$$

Par (7.13.8), (7.13.10), et par l'existence du noyau dans l'espace de Schwartz et par Tr_s s'annule sur les supers commutateurs, on trouve que

$$(7.13.11) \quad \frac{\partial}{\partial b} \text{Tr}_s [\exp(-tL_{b,T}^{\pm})] = 0.$$

La même méthode s'applique aux paramètres t et T . Donc, on a

$$(7.13.12) \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{Tr}_s [\exp(-tL_{b,T}^{\pm})] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial T} \text{Tr}_s [\exp(-tL_{b,T}^{\pm})] = 0,$$

ce qui termine la démonstration. \square

Par (3.1.6), (3.1.9), (7.5.1), (7.5.3), On pose

$$(7.13.13) \quad I_{b,t,T} = (b\sqrt{t})^{NV} K_{\sqrt{t}/b} k_{1/\sqrt{t}} \exp(\mathcal{H}_T^+ + \mu_0) t L_{b,T}^+ \exp(-\mathcal{H}_T^+ - \mu_0) k_{\sqrt{t}} K_{b/\sqrt{t}} (b\sqrt{t})^{-NV}.$$

Par (7.5.2), (7.13.13), on a

$$(7.13.14) \quad I_{b,t,T} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{t}{b^2} p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{t^2}{b^2} p \frac{\partial}{\partial y} + T y \frac{\partial}{\partial p} + \frac{t}{b^2} \text{dpi}_{\frac{\partial}{\partial p}} - \frac{t^{3/2}}{b} \text{dpi}_{\frac{\partial}{\partial y}} + \frac{t^{1/2} T}{b} \text{dyi}_{\frac{\partial}{\partial p}}.$$

Soit $P_{b,t,T}(y, p, y', p')$ le noyau de $\exp(-I_{b,t,T})$ par rapport au volume $dydp$. On va montrer que

$$(7.13.15) \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^2} P_{b,t,T}(y, p, y, p) dydp = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^2} P_{b,t,T}(y, p, y, p) dydp = \text{sign} T.$$

On fixe $y_0 \in \mathbf{R}$. Soit

$$(7.13.16) \quad R_{b,t}^{y_0} : s(y, p) \rightarrow s\left(y_0 + \frac{t^2}{b^2} y, p\right).$$

Posons

$$(7.13.17) \quad I_{b,t,T}^{y_0} = \exp(-Tpy_0) R_{b,t}^{y_0} I_{b,t,T} R_{b,t}^{y_0, -1} \exp(Tpy_0).$$

Par (7.13.14), (7.13.17), on a

$$(7.13.18) \quad I_{b,t,T}^{y_0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{T^2}{2} y_0^2 + \frac{t}{b^2} p \left(\frac{\partial}{\partial p} + T y_0 \right) - p \frac{\partial}{\partial y} + \frac{t^2 T y}{b^2} \left(\frac{\partial}{\partial p} + T y_0 \right) \\ + \frac{t}{b^2} \text{dpi}_{\frac{\partial}{\partial p}} - \frac{t^{3/2}}{b} \text{dpi}_{\frac{\partial}{\partial y}} + \frac{t^{1/2} T}{b} \text{dyi}_{\frac{\partial}{\partial p}}.$$

On introduit $\underline{\mathbf{R}}^2$ une autre copie de \mathbf{R}^2 , et soit e_1, e_2 la base canonique de $\underline{\mathbf{R}}^2$. Posons

$$(7.13.19) \quad \mathcal{A} = \text{End}(\Lambda(\mathbf{R}^{2,*})) \hat{\otimes} \Lambda(\underline{\mathbf{R}}^2).$$

Alors \mathcal{A} est une \mathbf{R} -algèbre engendrée par $dy, i_{\frac{\partial}{\partial y}}, dp, i_{\frac{\partial}{\partial p}}, e_1, e_2$. On écrit les éléments de \mathcal{A} comme une combinaison linéaire de monômes de $dy, i_{\frac{\partial}{\partial y}}, dp, i_{\frac{\partial}{\partial p}}, e_1, e_2$ tels que les $i_{\frac{\partial}{\partial y}}, i_{\frac{\partial}{\partial p}}$ apparaissent à droite des dy, dp, e_1, e_2 . Soit $\widehat{\text{Tr}}_s$ la forme linéaire sur \mathcal{A} à valeurs dans \mathbf{R} qui s'annule sur tous les monômes de \mathcal{A} , sauf sur le monôme dye_1dpe_2 à permutation près, et qui est telle que

$$(7.13.20) \quad \widehat{\text{Tr}}_s[dye_1dpe_2] = 1.$$

Alors, pour $A \in \text{End}(\Lambda(\mathbf{R}^{2,*}))$, on a

$$(7.13.21) \quad \widehat{\text{Tr}}_s \left[\exp \left(-\frac{b}{t^{3/2}}dye_1 - \frac{b}{t^{1/2}}dpe_2 \right) A \exp \left(\frac{b}{t^{3/2}}dye_1 + \frac{b}{t^{1/2}}dpe_2 \right) \right] = \frac{b^2}{t^2} \text{Tr}_s[A].$$

Soit $J_{b,t,T}^{y_0}$ l'opérateur différentiel à coefficients dans \mathcal{A} donné par

$$(7.13.22) \quad J_{b,t,T}^{y_0} = \exp \left(-\frac{b}{t^{3/2}}dye_1 - \frac{b}{t^{1/2}}dpe_2 \right) I_{b,t,T}^{y_0} \exp \left(\frac{b}{t^{3/2}}dye_1 + \frac{b}{t^{1/2}}dpe_2 \right).$$

Soit $Q_{b,t,T}^{y_0}(y, p, y', p')$ le noyau de $\exp(-J_{b,t,T}^{y_0})$ par rapport au volume $dydp$.

PROPOSITION 7.28. *Pour $b > 0, t > 0$ et $T \neq 0$, on a*

$$(7.13.23) \quad \text{Tr}_s [P_{b,t,T}(y_0, p, y_0, p)] = \widehat{\text{Tr}}_s [Q_{b,t,T}^{y_0}(0, p, 0, p)].$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de (7.13.17), (7.13.21), (7.13.22). \square

On pose

$$(7.13.24) \quad J_{\infty,0,T}^{y_0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} - p \frac{\partial}{\partial y} + \frac{T^2}{2} y_0^2 - dpe_1 + Tdye_2.$$

Alors, quand $b \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow 0$, on a

$$(7.13.25) \quad J_{b,t,T}^{y_0} \rightarrow J_{\infty,0,T}^{y_0}.$$

On désigne par $Q_{\infty,0,T}^{y_0}(y, p, y', p')$ le noyau de $\exp(-J_{\infty,0,T}^{y_0})$ par rapport au volume $dydp$.

On admet la proposition suivante qui est une conséquence de la convergence de processus gaussiens.

PROPOSITION 7.29. *Pour $b > 0, T \neq 0$ fixés, quand $t \rightarrow 0$ ou pour $t > 0, T \neq 0$ fixés, quand $b \rightarrow \infty$, on a*

$$(7.13.26) \quad \int_{\mathbf{R}^2} \widehat{\text{Tr}}_s [Q_{b,t,T}^{y_0}(0, p, 0, p)] dy_0 dp \rightarrow \int_{\mathbf{R}^2} \widehat{\text{Tr}}_s [Q_{\infty,0,T}^{y_0}(0, p, 0, p)] dy_0 dp.$$

PROPOSITION 7.30. *Pour $T > 0$, on a*

$$(7.13.27) \quad \widehat{\text{Tr}}_s [Q_{\infty,0,T}^{y_0}(0, p, 0, p)] = \frac{2\sqrt{3}T}{\pi} \exp \left(-24p^2 - \frac{T^2}{2} y_0^2 \right).$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$(7.13.28) \quad L = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} - p \frac{\partial}{\partial y}.$$

Soit $\exp(-L)(y, p, y', p')$ le noyau de $\exp(-L)$ par rapport au volume $dydp$. Par [Ko34] ou [BL08, Section 4.11], on a

$$(7.13.29) \quad \exp(-L)(y, p, y', p') = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \exp\left(-\frac{(p' - p)^2}{2} - 24\left(y' - y - \frac{p' + p}{2}\right)^2\right).$$

De plus, de (7.13.20), on tire que

$$(7.13.30) \quad \widehat{\text{Tr}}_s[\exp(dpe_1 - Tdye_2)] = T.$$

De (7.13.29), (7.13.30), on tire (7.13.27), ce qui termine la preuve. \square

REMARQUE 7.31. De (7.13.23), (7.13.26), (7.13.27), on tire (7.12.9).

7.14. Métrique de Ray-Singer hypoelliptique sur \mathbf{R} . Considérons $2A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}^2$ agissant sur $\Omega_{b,T}^\pm(\mathbf{R}^2)$. Soit $P_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}$ la projection spectrale de $2A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}^2$ relativement à la valeur propre 0.

Par (7.10.2), la partie réelle du spectre de $2A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}^2$ est positive. L'opérateur

$$(7.14.1) \quad \left(4A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}^2\right)^{-s} \left(1 - P_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}\right)$$

est donc bien défini. Par le même argument que (7.12.10)-(7.12.15), pour $\text{Re } s \gg 1$, cet opérateur est à trace. On pose pour $\text{Re } s \gg 1$,

$$(7.14.2) \quad \theta_{b,T}^\pm(s) = -\text{Tr}_s \left[N^{\Lambda(\mathbf{R}^{2,*})} \left(4A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}^2\right)^{-s} \left(1 - P_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}\right) \right].$$

PROPOSITION 7.32. *Pour $\text{Re } s \gg 1$, on a*

$$(7.14.3) \quad \theta_{b,T}^\pm(s) = (\pm\tau_{b^2T,+}^{\pm,-s} + \tau_{b^2T,-}^{\pm,-s}) \left(\frac{b^2}{2}\right)^s \zeta(s).$$

En particulier, $\theta_{b,T}^\pm$ a une extension méromorphe sur \mathbf{C} qui est holomorphe en 0. La dérivée en $s = 0$ est donnée par

$$(7.14.4) \quad \theta_{b,T}^{+,\prime}(0) = \log\left(\frac{\sqrt{T}}{\pi b}\right), \quad \theta_{b,T}^{-,\prime}(0) = \log\left(\frac{2b\sqrt{T}}{1 + \sqrt{1 + 4b^2T}}\right).$$

DÉMONSTRATION. On note $P_{b,T}^\pm$ la projection spectrale de $L_{b,T}^\pm$ relativement à la valeur propre 0. Par (3.1.10), (3.1.14), (3.2.2), (7.14.2), on a

$$(7.14.5) \quad \theta_{b,T}^\pm(s) = -2^{-s} \text{Tr}_s \left[N^{\Lambda(\mathbf{R}^{2,*})} (L_{b,T}^\pm)^{-s} (1 - P_{b,T}^\pm) \right].$$

Le cas $+$. Par (7.5.4), (7.5.7), (7.7.7), (7.9.1), (7.9.4), (7.14.5), pour $\text{Re } s \gg 1$, on a

$$(7.14.6) \quad \begin{aligned} 2^s \theta_{b,T}^+(s) &= \sum_{n_+ \geq 1, n_- \geq 0} + \sum_{n_+ \geq 0, n_- \geq 1} -2 \sum_{n_+ \geq 1, n_- \geq 1} \frac{b^{2s}}{(n_+ \tau_{b^2T,+}^+ + n_- \tau_{b^2T,-}^+)^s} \\ &= b^{2s} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{(n \tau_{b^2T,+}^+)^s} + \frac{1}{(n \tau_{b^2T,-}^+)^s} \right) = b^{2s} \left((\tau_{b^2T,+}^+)^{-s} + (\tau_{b^2T,-}^+)^{-s} \right) \zeta(s), \end{aligned}$$

ce qui nous donne (7.14.3) dans le cas $+$. Par (7.4.2), (7.10.1), (7.14.6), on a

$$(7.14.7) \quad \theta_{b,T}^{+, \prime}(0) = \left(4 \log(b) - \log(\tau_{b^2 T, +}^+ \tau_{b^2 T, -}^+) - 2 \log 2\right) \zeta(0) + 2\zeta'(0) = \log \left(\frac{\sqrt{T}}{\pi b} \right).$$

Le cas $-$. Par (7.5.4), (7.5.7), (7.8.21), (7.9.1), (7.9.4), (7.14.5), on a

$$(7.14.8) \quad \begin{aligned} 2^s \theta_{b,T}^-(s) &= \sum_{n_+ \geq 1, n_- \geq 1} + \sum_{(n_+, n_-) \neq (0,0)} -2 \sum_{n_+ \geq 1, n_- \geq 0} \frac{b^{2s}}{(n_+ \tau_{b^2 T, +}^- + n_- \tau_{b^2 T, -}^-)^s} \\ &= b^{2s} \sum_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{(n \tau_{b^2 T, +}^-)^s} + \frac{1}{(n \tau_{b^2 T, -}^-)^s} \right) = b^{2s} \left(-(\tau_{b^2 T, +}^-)^{-s} + (\tau_{b^2 T, -}^-)^{-s} \right) \zeta(s), \end{aligned}$$

ce qui nous donne (7.14.3) dans le cas $-$. Par (7.4.2), (7.10.1), (7.14.8), on a

$$(7.14.9) \quad \theta_{b,T}^{-, \prime}(0) = \log \left(\frac{\tau_{b^2 T, +}^-}{\tau_{b^2 T, -}^-} \right) \zeta(0) = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}}{-1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}} \right) = \log \left(\frac{2b\sqrt{T}}{1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}} \right),$$

ce qui termine la preuve. \square

On rappelle que $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}^\pm}^{\Omega(\mathbf{R}^2)}(\mathbf{u}_{b,T}^\pm, \mathbf{u}_{b,T}^\pm) > 0$. Par (7.11.9), (7.11.12), la forme hermitienne $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}^\pm}^{\Omega(\mathbf{R}^2)}$ induit une métrique $|\cdot|_{\mathbf{R}, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}^{RS}$ sur $\lambda^\pm = \mathbf{R}$. Par la définition 3.4, la métrique de Ray-Singer hypoelliptique sur λ^\pm est donnée

$$(7.14.10) \quad \|\cdot\|_{\mathbf{R}, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}^{RS,2} = e^{\theta_{b,T}^{\pm, \prime}(0)} |\cdot|_{\mathbf{R}, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}^{RS,2}.$$

THÉORÈME 7.33. *Pour $b > 0$ et $T > 0$, on a*

$$(7.14.11) \quad \|\cdot\|_{\mathbf{R}, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}^{RS,2} = \|\cdot\|_{\mathbf{R}}^2.$$

DÉMONSTRATION. Comme dans le théorème 7.6, il faut montrer que

$$(7.14.12) \quad \|\mathbf{1}\|_{\mathbf{R}, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}^{RS,2} = 1.$$

De (7.11.17), on tire que

$$(7.14.13) \quad |\mathbf{1}|_{\mathbf{R}, \mathcal{H}_{b,T}^+}^{RS,2} = \pi \frac{b}{\sqrt{T}}, \quad |\mathbf{1}|_{\mathbf{R}, \mathcal{H}_{b,T}^-}^{RS,2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}}{2b\sqrt{T}}.$$

Par (7.14.4), (7.14.13), on obtient (7.14.12), ce qui termine la démonstration. \square

REMARQUE 7.34. Par (7.4.8), (7.14.11), on a

$$(7.14.14) \quad \|\cdot\|_{\mathbf{R}, \mathcal{H}_{b,T}^\pm}^{RS,2} = \|\cdot\|_{\mathbf{R}, Tf^\pm}^{RS,2} = \|\cdot\|_{\mathbf{R}}^2.$$

Il est remarquable que, dans ce cas "trivial", on peut directement démontrer l'invariance de la métrique de Ray-Singer elliptique par déformation hypoelliptique. Cette invariance joue, de manière implicite, un rôle très important dans la suite.

Ce résultat est un analogue dans une situation non compacte de résultat de [BL08, Theorem 9.0.1].

7.15. Évaluation du noyau de $\exp(-tB_\gamma^\pm)$. On pose

$$(7.15.1) \quad \mathfrak{B}_\gamma^\pm = \exp\left(\frac{1}{2}(p^2 \pm y^2)\right) B_\gamma^\pm \exp\left(-\frac{1}{2}(p^2 \pm y^2)\right).$$

Par (7.5.6), (7.15.1), on a

$$(7.15.2) \quad \mathfrak{B}_\gamma^\pm = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + p \frac{\partial}{\partial p} - \sqrt{\gamma} \left(p \frac{\partial}{\partial y} \mp y \frac{\partial}{\partial p} \right).$$

L'opérateur différentiel \mathfrak{B}_γ^\pm est de poids total 2 relativement aux variables $y, p, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p}$. Son noyau de la chaleur est donc donné par un noyau gaussien. Des techniques probabilistes vont nous permettre de calculer explicitement ce noyau.

Posons

$$(7.15.3) \quad R_\gamma^\pm = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ \mp \sqrt{\gamma} & -1 \end{pmatrix}, \quad z_t^\pm = \begin{pmatrix} y_t^\pm \\ p_t^\pm \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}.$$

Soit w le mouvement brownien sur \mathbf{R} issu de 0. Soit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ la base canonique de \mathbf{R}^2 . Considérons l'équation différentielle stochastique

$$(7.15.4) \quad \dot{z}_t^\pm = R_\gamma^\pm z_t^\pm + \mathbf{e}_2 \dot{w}_t, \quad z_0^\pm = z.$$

Par (7.15.4), on a

$$(7.15.5) \quad z_t^\pm = \exp(tR_\gamma^\pm) z + \int_0^t \exp((t-s)R_\gamma^\pm) \mathbf{e}_2 dw_s.$$

Alors z_t^\pm est une variable aléatoire gaussienne à valeurs dans \mathbf{R}^2 , de moyenne $\exp(tR_\gamma^\pm) z$, de matrice de covariance $K_{t,\gamma}^\pm$ telle que, pour $f \in \mathbf{R}^2$,

$$(7.15.6) \quad \langle K_{t,\gamma}^\pm f, f \rangle = \int_0^t \langle \exp(sR_\gamma^\pm) \mathbf{e}_2, f \rangle^2 ds.$$

PROPOSITION 7.35. *Pour $t > 0, \gamma > 0$, la matrice $K_{t,\gamma}^\pm$ est inversible.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathbf{R}^2$ tel que $K_{t,\gamma}^\pm f = 0$. Par (7.15.6), pour $s \in [0, t]$, on a

$$(7.15.7) \quad \langle \exp(sR_\gamma^\pm) \mathbf{e}_2, f \rangle = 0.$$

En particulier, on a

$$(7.15.8) \quad \langle \mathbf{e}_2, f \rangle = 0.$$

Par (7.15.7), on a aussi

$$(7.15.9) \quad \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \langle \exp(sR_\gamma^\pm) \mathbf{e}_2, f \rangle = \langle R_\gamma^\pm \mathbf{e}_2, f \rangle = 0.$$

De (7.15.3), (7.15.8), (7.15.9), on tire $f = 0$ ce qui termine la démonstration. \square

On va maintenant calculer $K_{t,\gamma}^\pm$ explicitement. Posons

$$(7.15.10) \quad \lambda_\pm^+ = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\gamma}}{2}, \quad \lambda_\pm^- = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\gamma}}{2}.$$

Alors, λ_\pm^+ sont les valeurs propres de R_γ^+ , et λ_\pm^- sont les valeurs propres de R_γ^- .

PROPOSITION 7.36. *Pour $t > 0, \gamma > 0$, on a*

(7.15.11)

$$K_{t,\gamma}^{\pm} = \frac{\gamma}{1 \mp 4\gamma} \times \begin{pmatrix} \frac{e^{t\lambda_{+}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{+}^{\pm})}{\lambda_{+}^{\pm}} + \frac{e^{t\lambda_{-}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{-}^{\pm})}{\lambda_{-}^{\pm}} - 4e^{-\frac{t}{2}} \sinh(\frac{t}{2}) & \frac{e^{t\lambda_{+}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{+}^{\pm}) + e^{t\lambda_{-}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{-}^{\pm}) + 2e^{-\frac{t}{2}} \sinh(\frac{t}{2})}{\sqrt{\gamma}} \\ \frac{e^{t\lambda_{+}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{+}^{\pm}) + e^{t\lambda_{-}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{-}^{\pm}) + 2e^{-t/2} \sinh(t/2)}{\sqrt{\gamma}} & \frac{\lambda_{+}^{\pm} e^{t\lambda_{+}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{+}^{\pm}) + \lambda_{-}^{\pm} e^{t\lambda_{-}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{-}^{\pm}) \mp 4\gamma e^{-\frac{t}{2}} \sinh(\frac{t}{2})}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$(7.15.12) \quad \det K_{t,\gamma}^{\pm} = \frac{\gamma}{1 \mp 4\gamma} e^{-t} \left(\frac{\sinh(t\lambda_{+}^{\pm}) \sinh(t\lambda_{-}^{\pm})}{\lambda_{+}^{\pm} \lambda_{-}^{\pm}} - 4 \sinh^2(t/2) \right).$$

On remarque que même dans le cas +, quand $\gamma = 1/4$, la formule (7.15.11) est bien définie.

DÉMONSTRATION. Par continuité, dans le cas +, il suffit de montrer (7.15.11) quand $\gamma \neq 1/4$. Les deux valeurs propres de R_{γ}^{\pm} sont alors distinctes. Par (7.15.3), les vecteurs propres de R_{γ}^{\pm} sont donnés par

$$(7.15.13) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{+}^{\pm}/\sqrt{\gamma} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{-}^{\pm}/\sqrt{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Soit P_{γ}^{\pm} la matrice de passage

$$(7.15.14) \quad P_{\gamma}^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_{+}^{\pm}/\sqrt{\gamma} & \lambda_{-}^{\pm}/\sqrt{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$(7.15.15) \quad \det P_{\gamma}^{\pm} = -\frac{\sqrt{1 \mp 4\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, \quad P_{\gamma}^{\pm,-1} = -\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{1 \mp 4\gamma}} \begin{pmatrix} \lambda_{-}^{\pm}/\sqrt{\gamma} & -1 \\ -\lambda_{+}^{\pm}/\sqrt{\gamma} & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$(7.15.16) \quad R_{\gamma}^{\pm} = P_{\gamma}^{\pm} \begin{pmatrix} \lambda_{+}^{\pm} & 0 \\ 0 & \lambda_{-}^{\pm} \end{pmatrix} P_{\gamma}^{\pm,-1}.$$

Par (7.15.6), (7.15.16), on a

$$(7.15.17) \quad K_{t,\gamma}^{\pm} = \int_0^t e^{sR_{\gamma}^{\pm}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t(e^{sR_{\gamma}^{\pm}}) ds \\ = \int_0^t P_{\gamma}^{\pm} \begin{pmatrix} e^{s\lambda_{+}^{\pm}} & 0 \\ 0 & e^{s\lambda_{-}^{\pm}} \end{pmatrix} P_{\gamma}^{\pm,-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP_{\gamma}^{\pm,-1} \begin{pmatrix} e^{s\lambda_{+}^{\pm}} & 0 \\ 0 & e^{s\lambda_{-}^{\pm}} \end{pmatrix} {}^tP_{\gamma}^{\pm} ds.$$

De (7.15.14), (7.15.15), on tire que

$$(7.15.18) \quad P_{\gamma}^{\pm,-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP_{\gamma}^{\pm,-1} = \frac{\gamma}{1 \mp 4\gamma} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De (7.15.10), (7.15.17), (7.15.18), on obtient

$$(7.15.19) \quad K_{t,\gamma}^{\pm} = \frac{\gamma}{1 \mp 4\gamma} \int_0^t P_{\gamma}^{\pm} \begin{pmatrix} e^{2s\lambda_{\pm}^{\pm}} & -e^{-s} \\ -e^{-s} & e^{2s\lambda_{\pm}^{\pm}} \end{pmatrix} {}^tP_{\gamma}^{\pm} ds \\ = \frac{\gamma}{1 \mp 4\gamma} P_{\gamma}^{\pm} \begin{pmatrix} e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{\pm}^{\pm})/\lambda_{\pm}^{\pm} & -2e^{-t/2} \sinh(t/2) \\ -2e^{-t/2} \sinh(t/2) & e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{\pm}^{\pm})/\lambda_{\pm}^{\pm} \end{pmatrix} {}^tP_{\gamma}^{\pm},$$

ce qui nous donne (7.15.11) et (7.15.12), et on termine la preuve. \square

Pour $z, z' \in \mathbf{R}^2$, on pose

$$(7.15.20) \quad \mathcal{K}_{t,\gamma}^{\pm}(z, z') = \frac{1}{2} \left\langle K_{t,\gamma}^{\pm,-1} \left(z' - e^{tR_{\gamma}^{\pm}} z \right), \left(z' - e^{tR_{\gamma}^{\pm}} z \right) \right\rangle.$$

Par (7.15.2), (7.15.5), (7.15.20), on a

$$(7.15.21) \quad \exp(-t\mathfrak{B}_{\gamma}^{\pm})(z, z') = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det(K_{t,\gamma}^{\pm})}} \exp(-\mathcal{K}_{t,\gamma}^{\pm}(z, z')).$$

PROPOSITION 7.37. *Pour $t > 0, \gamma > 0, z = (y, p), z' = (y', p') \in \mathbf{R}^2$, on a*

$$(7.15.22) \quad \mathcal{K}_{t,\gamma}^{\pm}(z, z') = \\ \frac{e^t}{2 \left(\frac{\sinh(t\lambda_{\pm}^{\pm}) \sinh(t\lambda_{\mp}^{\pm})}{\lambda_{\pm}^{\pm} \lambda_{\mp}^{\pm}} - 4 \sinh^2\left(\frac{t}{2}\right) \right)} \left\{ \frac{e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{\pm}^{\pm})}{\lambda_{\pm}^{\pm}} \left[\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y' - p' - e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \left(\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y - p \right) \right]^2 \right. \\ + 4e^{-t/2} \sinh\left(\frac{t}{2}\right) \left[\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y' - p' - e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \left(\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y - p \right) \right] \left[-\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y' + p' - e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \left(-\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y + p \right) \right] \\ \left. + \frac{e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{\pm}^{\pm})}{\lambda_{\pm}^{\pm}} \left[-\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y' + p' - e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \left(-\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y + p \right) \right]^2 \right\}.$$

DÉMONSTRATION. Pour simplifier, on pose pour $t > 0, \gamma > 0, z = (y, p), z' = (y', p') \in \mathbf{R}^2$,

$$(7.15.23) \quad Z^{\pm} = \begin{pmatrix} X^{\pm} \\ Y^{\pm} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{1 \mp 4\gamma}}{\sqrt{\gamma}} P_{\gamma}^{\pm,-1} (z' - e^{tR_{\gamma}^{\pm}} z).$$

Par (7.15.16), (7.15.23), on a

$$(7.15.24) \quad X^{\pm} = \left(\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y' - p' \right) - e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \left(\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y - p \right), \\ Y^{\pm} = \left(-\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y' + p' \right) - e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \left(-\frac{\lambda_{\pm}^{\pm}}{\sqrt{\gamma}} y + p \right).$$

Par (7.15.19), on a

$$(7.15.25) \quad K_{t,\gamma}^{\pm,-1} = \frac{1 \mp 4\gamma}{\gamma} e^t \left(\frac{\sinh(t\lambda_{\pm}^{\pm}) \sinh(t\lambda_{\mp}^{\pm})}{\lambda_{\pm}^{\pm} \lambda_{\mp}^{\pm}} - 4 \sinh^2(t/2) \right)^{-1} \\ {}^tP_{\gamma}^{\pm,-1} \begin{pmatrix} e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{\pm}^{\pm})/\lambda_{\pm}^{\pm} & 2e^{-t/2} \sinh(t/2) \\ 2e^{-t/2} \sinh(t/2) & e^{t\lambda_{\pm}^{\pm}} \sinh(t\lambda_{\pm}^{\pm})/\lambda_{\pm}^{\pm} \end{pmatrix} P_{\gamma}^{\pm,-1}.$$

De (7.15.20), (7.15.23), (7.15.25), on tire (7.15.22), ce qui termine la preuve. \square

On pose

$$(7.15.26) \quad \begin{aligned} a_{t,\gamma}^\pm &= \frac{\pm 1}{4 \sinh(t\lambda_\mp^\pm/2) \sinh(t\lambda_\pm^\pm/2)} \left(\sinh(t/2) + \frac{\sinh(t\sqrt{1 \mp 4\gamma}/2)}{\sqrt{1 \mp 4\gamma}} \right), \\ d_{t,\gamma}^\pm &= \frac{1}{4 \sinh(t\lambda_\mp^\pm/2) \sinh(t\lambda_\pm^\pm/2)} \left(\sinh(t/2) - \frac{\sinh(t\sqrt{1 \mp 4\gamma}/2)}{\sqrt{1 \mp 4\gamma}} \right), \end{aligned}$$

Remarquons que dans le cas $+$, $\gamma = 1/4$, $a_{t,\gamma}^+$, $d_{t,\gamma}^+$ sont aussi bien définis. De plus, il est facile de vérifier que

$$(7.15.27) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} a_{t,\gamma}^\pm &= 1/2, & \lim_{t \rightarrow 0} ta_{t,\gamma}^\pm &= 1/\gamma, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} d_{t,\gamma}^\pm &= 1/2. & \lim_{t \rightarrow 0} td_{t,\gamma}^\pm &= 0. \end{aligned}$$

PROPOSITION 7.38. *Pour $t > 0, \gamma > 0, z = (y, p) \in \mathbf{R}^2$, on a*

$$(7.15.28) \quad \mathcal{K}_{t,\gamma}^\pm(z, z) = \frac{y^2}{2a_{t,\gamma}^\pm} + \frac{p^2}{2d_{t,\gamma}^\pm}.$$

DÉMONSTRATION. Quand $z = z'$, par (7.15.23), on a

$$(7.15.29) \quad Z^\pm = -\frac{\sqrt{1 \mp 4\gamma}}{\sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} 1 - e^{t\lambda_\mp^\pm} & 0 \\ 0 & 1 - e^{t\lambda_\pm^\pm} \end{pmatrix} P_\gamma^{\pm,-1} z.$$

De (7.15.20), (7.15.25), (7.15.29), on tire (7.15.28), ce qui termine la preuve. \square

REMARQUE 7.39. Le fait que la forme quadratique $\mathcal{K}_{t,\gamma}^\pm(z, z)$ soit diagonale n'est pas une surprise. En effet, par (7.15.2), \mathfrak{B}_γ^\pm est h -autoadjoint. Donc, on a

$$(7.15.30) \quad \exp(-t\mathfrak{B}_\gamma^\pm)(y, p, y', p') = \exp(-t\mathfrak{B}_\gamma^\pm)(y', -p', y, -p).$$

En particulier, on a

$$(7.15.31) \quad \exp(-t\mathfrak{B}_\gamma^\pm)(y, p, y, p) = \exp(-t\mathfrak{B}_\gamma^\pm)(y, -p, y, -p).$$

De (7.15.21), (7.15.31), on tire que $\mathcal{K}_{t,\gamma}^\pm(z, z)$ est diagonale.

COROLLAIRE 7.40. *Pour $b > 0, t > 0, T > 0$, on a*

$$(7.15.32) \quad \text{Tr}_s[\exp(-tL_{b,T}^\pm)(y, p, y, p)] = \frac{\pm\sqrt{T}}{2\pi\sqrt{a_{t/b^2, b^2T}^\pm d_{t/b^2, b^2T}^\pm}} \exp\left(-\frac{Ty^2}{2a_{t/b^2, b^2T}^\pm} - \frac{p^2}{2d_{t/b^2, b^2T}^\pm}\right).$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence du (7.5.4), (7.5.7), (7.12.20), (7.15.12) et (7.15.28). \square

REMARQUE 7.41. Par le corollaire 7.40, on a

$$(7.15.33) \quad \text{Tr}_s[\exp(-tL_{b,T}^\pm)] = \int_{\mathbf{R}^2} \text{Tr}_s[\exp(-tL_{b,T}^\pm)(y, p, y, p)] dydp = \pm 1.$$

On retrouve (7.12.9).

Dans la suite, on fait $T = b^2$. On va étudier le comportement asymptotique pour $\exp(-t\mathfrak{B}_{b^4}^\pm/b^2)(z, z')$ quand $b \rightarrow \infty$. On pose

$$(7.15.34) \quad R^\pm = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$(7.15.35) \quad e^{tR^+} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{tR^-} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Le flot d'hamiltonien $\mathcal{H}^\pm(y, p) = p^2/2 \pm y^2/2$ est donné par $\underline{z}_t^\pm = e^{tR^\pm} z$.

PROPOSITION 7.42. *Pour $t > 0, z \in \mathbf{R}^2, z' \in \mathbf{R}^2$, quand $b \rightarrow \infty$, on a*

$$(7.15.36) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_{t/b^2, b^4}^+(z, z') &= \frac{b^2}{t^2 - \sin^2(t)} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin(2t) + t & -\sin^2(t) \\ -\sin^2(t) & -\frac{1}{2} \sin(2t) + t \end{pmatrix} (z' - \underline{z}_t^+), (z' - \underline{z}_t^+) \right\rangle \\ &\quad + \mathcal{O}(1), \\ \mathcal{K}_{t/b^2, b^4}^-(z, z') &= \frac{b^2}{-t^2 + \sinh^2(t)} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sinh(2t) + t & -\sinh^2(t) \\ -\sinh^2(t) & \frac{1}{2} \sinh(2t) - t \end{pmatrix} (z' - \underline{z}_t^-), (z' - \underline{z}_t^-) \right\rangle \\ &\quad + \mathcal{O}(1), \\ \det \left(K_{t/b^2, b^4}^+ \right) &= \frac{1}{4b^4} (t^2 - \sin^2(t)) + \mathcal{O}(1/b^2), \\ \det \left(K_{t/b^2, b^4}^- \right) &= \frac{1}{4b^4} (-t^2 + \sinh^2(t)) + \mathcal{O}(1/b^2). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On calcule d'abord le développement asymptotique pour chaque terme de la formule (7.15.25).

Quand $\gamma = b^4 \rightarrow \infty$, on a

$$(7.15.37) \quad \frac{\sinh(t\lambda_+^\pm/b^2) \sinh(t\lambda_-^\pm/b^2)}{\lambda_+^\pm \lambda_-^\pm} - 4 \sinh^2(t/2b^2) = \frac{1}{b^4} (\mp \sinh^2(\sqrt{\mp 1}t) - t^2) + \mathcal{O}(1/b^2).$$

De (7.15.12), (7.15.37), on tire les deux dernières équations de (7.15.36).

Quand $\gamma = b^4 \rightarrow \infty$, dans le cas +, on a

$$(7.15.38) \quad \begin{aligned} &\begin{pmatrix} e^{t\lambda_-^\pm/b^2} \sinh(t\lambda_-^\pm/b^2)/\lambda_-^\pm & 2e^{-t/2b^2} \sinh(t/2b^2) \\ 2e^{-t/2b^2} \sinh(t/2b^2) & e^{t\lambda_+^\pm/b^2} \sinh(t\lambda_+^\pm/b^2)/\lambda_+^\pm \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{b^2} \begin{pmatrix} \sin(t)e^{-ti} & t \\ t & \sin(t)e^{ti} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

et dans le cas -, on a

$$(7.15.39) \quad \begin{aligned} &\begin{pmatrix} e^{t\lambda_-^\pm/b^2} \sinh(t\lambda_-^\pm/b^2)/\lambda_-^\pm & 2e^{-t/2b^2} \sinh(t/2b^2) \\ 2e^{-t/2b^2} \sinh(t/2b^2) & e^{t\lambda_+^\pm/b^2} \sinh(t\lambda_+^\pm/b^2)/\lambda_+^\pm \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{b^2} \begin{pmatrix} \sinh(t)e^{-t} & t \\ t & \sinh(t)e^t \end{pmatrix} + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Par (7.15.15), quand $\gamma = b^4 \rightarrow \infty$, on a

$$(7.15.40) \quad \frac{\lambda_{\pm}^{\pm} - \lambda_{\pm}^{\mp}}{\sqrt{\gamma}} P_{\gamma}^{\pm, -1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\mp 1} & -1 \\ -\sqrt{\mp 1} & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(1/b^2).$$

Par (7.15.25), (7.15.37)-(7.15.40), on a

$$(7.15.41) \quad K_{t/b^2, b^4}^{+, -1} = \frac{2b^2}{t^2 - \sin^2 t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin(2t) + t & -\sin^2(t) \\ -\sin^2(t) & -\frac{1}{2} \sin(2t) + t \end{pmatrix} + \mathcal{O}(1),$$

$$K_{t/b^2, b^4}^{-, -1} = \frac{2b^2}{-t^2 + \sinh^2 t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sinh(2t) + t & -\sinh^2(t) \\ -\sinh^2(t) & \frac{1}{2} \sinh(2t) - t \end{pmatrix} + \mathcal{O}(1).$$

D'autre part, quand $\gamma = b^4 \rightarrow \infty$, on a

$$(7.15.42) \quad z' - e^{tR_{\gamma}^{\pm}/b^2} z = z' - e^{tR^{\pm}} z + \mathcal{O}(1/b^2).$$

De (7.15.20), (7.15.41), (7.15.42), on tire les deux premières équations de (7.15.36). \square

Par (7.15.21), (7.15.36), pour $t > 0, z \in \mathbf{R}^2$ fixé, quand $b \rightarrow \infty$, on a la convergence des mesures de probabilité

$$(7.15.43) \quad \exp(-t\mathfrak{B}_{b^4}^{\pm}/b^2)(z, z') dz' \rightarrow \delta_{z_{\pm}}(z').$$

De plus, si $t \notin 2\pi\mathbf{Z}$ ou dans le cas $-$, quand $b \rightarrow \infty$, on a la convergence étroite des mesures

$$(7.15.44) \quad \exp(-t\mathfrak{B}_{b^4}^{+}/b^2)(z, z) dz \rightarrow \frac{\delta_0(z)}{(1 - e^{it})(1 - e^{-it})},$$

$$\exp(-t\mathfrak{B}_{b^4}^{-}/b^2)(z, z) dz \rightarrow -\frac{\delta_0(z)}{(1 - e^t)(1 - e^{-t})}.$$

REMARQUE 7.43. Par (7.15.44), quand $b \rightarrow \infty$, on a

$$(7.15.45) \quad \text{Tr}_s [\exp(-t\mathfrak{B}_{b^4}^{+}/b^2)] \rightarrow \frac{1}{(1 - e^{it})(1 - e^{-it})},$$

$$\text{Tr}_s [\exp(-t\mathfrak{B}_{b^4}^{-}/b^2)] \rightarrow -\frac{1}{(1 - e^t)(1 - e^{-t})}.$$

Ces convergences sont compatibles avec le fait que, par (7.7.7), (7.8.21), quand $b \rightarrow \infty$, pour tout K compact dans \mathbf{C} , on a la convergence pour la distance de Hausdorff,

$$(7.15.46) \quad \text{Sp}(\mathfrak{B}_{b^4}^{+}/b^2) \cap K \rightarrow \{in_+ - in_- : n_+, n_- \in \mathbf{N}\} \cap K,$$

$$\text{Sp}(\mathfrak{B}_{b^4}^{-}/b^2) \cap K \rightarrow \{1 + n_+ + n_- : n_+, n_- \in \mathbf{N}\} \cap K.$$

7.16. Problème variationnel associé aux noyaux de la chaleur de \mathfrak{B}_{γ} . Soit J l'opérateur différentiel agissant sur l'espace des courbes C^{∞} sur \mathbf{R} , $s \in [0, t] \rightarrow y_s \in \mathbf{R}$, donné par

$$(7.16.1) \quad Jy = \frac{d^2}{dt^2} y + \frac{d}{dt} y \pm \gamma y,$$

et soit $\mathcal{K}_{t, \gamma}^{\pm}$ la fonctionnelle définie sur le même espace donnée par

$$(7.16.2) \quad \mathcal{K}_{t, \gamma}^{\pm}(y) = \frac{1}{2\gamma} \int_0^t |Jy_s|^2 ds.$$

PROPOSITION 7.44. *Pour $t > 0$, $\gamma > 0$ et $z, z' \in \mathbf{R}^2$, une courbe $s \in [0, t] \rightarrow y_s \in \mathbf{R}$ est un minimum pour $\mathcal{K}_{t,\gamma}^\pm$ quand on impose les conditions $(y_0, \dot{y}_0/\sqrt{\gamma}) = z$, $(y_t, \dot{y}_t/\sqrt{\gamma}) = z'$ si et seulement si y . vérifie l'équation d'Euler-Lagrange :*

$$(7.16.3) \quad J^* Jy. = \ddot{y}. + (\pm 2\gamma - 1)\ddot{y}. + \gamma^2 y. = 0.$$

La courbe minimale y . existe, et est unique. De plus,

$$(7.16.4) \quad \mathcal{K}_{t,\gamma}^\pm(z, z') = \mathcal{K}_{t,\gamma}^\pm(y.).$$

DÉMONSTRATION. Soit $u \in \mathbf{R} \rightarrow y^u$ une famille de courbe C^∞ vérifiant les conditions de la proposition, de telle sorte que $y^0 = y$. est un minimum. Alors on a

$$(7.16.5) \quad \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{K}_{t,\gamma}^\pm(y^u)|_{u=0} = \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (Jy_s) \left(J \frac{\partial}{\partial u} y_s^u \right) \Big|_{u=0} ds = \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (J^* Jy_s) \left(\frac{\partial}{\partial u} y_s^u \right) \Big|_{u=0} ds,$$

ce qui nous donne (7.16.3).

Maintenant, on va résoudre explicitement (7.16.3). Soit u . une courbe telle que

$$(7.16.6) \quad J^* u. = \left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} \pm \gamma \right) u. = 0.$$

Posons

$$(7.16.7) \quad R_\gamma^{\pm'} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ \mp\sqrt{\gamma} & 1 \end{pmatrix}.$$

Par (7.16.6), (7.16.7), il existe un vecteur $v \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$(7.16.8) \quad \begin{pmatrix} u_s \\ \dot{u}_s/\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} = e^{sR_\gamma^{\pm'}} v.$$

Soit y . une courbe telle que

$$(7.16.9) \quad Jy. = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} \pm \gamma \right) y. = u..$$

Par (7.16.6), (7.16.9), y . vérifie l'équation (7.16.3).

De (7.16.8), (7.16.9), et de $(y_0^\pm, \dot{y}_0^\pm/\sqrt{\gamma}) = z$, on tire que

$$(7.16.10) \quad \begin{pmatrix} y_s \\ \dot{y}_s/\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} = e^{sR_\gamma^\pm} z + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_0^s e^{(s-s')R_\gamma^\pm} \begin{pmatrix} 0 \\ u_{s'} \end{pmatrix} ds' \\ = e^{sR_\gamma^\pm} z + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_0^s e^{(s-s')R_\gamma^\pm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{s'R_\gamma^{\pm'}} v ds'.$$

Par (7.15.3), (7.16.7), on a

$$(7.16.11) \quad R_\gamma^{\pm'} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{\gamma} & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{\gamma} & 1 \end{pmatrix} {}^t R_\gamma^\pm.$$

De (7.16.10), (7.16.11), on tire que

$$(7.16.12) \quad \begin{pmatrix} y_s \\ \dot{y}_s/\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} = e^{sR_\gamma^\pm} z + \int_0^s e^{(s-s')R_\gamma^\pm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-s'R_\gamma^{\pm'}} ds' \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{\gamma} & 1 \end{pmatrix}^{-1} v.$$

Par $(y_t, \dot{y}_t/\sqrt{\gamma}) = z'$ et (7.16.12), (7.15.17), on trouve que

$$(7.16.13) \quad z' = e^{tR_\gamma^\pm} z + \int_0^t e^{(t-s')R_\gamma^\pm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-s'R_\gamma^\pm} ds' \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{\gamma} & 1 \end{pmatrix}^{-1} v \\ = e^{tR_\gamma^\pm} z + K_{t,\gamma}^\pm e^{-tR_\gamma^\pm} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{\gamma} & 1 \end{pmatrix}^{-1} v.$$

Comme $K_{t,\gamma}^\pm$ est inversible, de (7.16.13), on tire que

$$(7.16.14) \quad v = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{\gamma} & 1 \end{pmatrix} e^{tR_\gamma^\pm} (K_{t,\gamma}^\pm)^{-1} (z' - e^{tR_\gamma^\pm} z).$$

Donc, y existe, et est unique.

Par (7.16.8), (7.16.9), (7.16.11) et (7.16.14), on a

$$(7.16.15) \quad \begin{pmatrix} u_t^\pm \\ \dot{u}_t^\pm/\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ -\sqrt{\gamma} & 1 \end{pmatrix} (K_{t,\gamma}^\pm)^{-1} (z' - e^{tR_\gamma^\pm} z).$$

De (7.16.2), (7.16.3), (7.16.15), on tire que

$$(7.16.16) \quad \mathcal{K}_{t,\gamma}^\pm(y) = \frac{1}{2\gamma} \int_0^t u_s(\ddot{y}_s + \dot{y}_s \pm y_s) ds = \frac{1}{2\gamma} (u_s y_s + u_s \dot{y}_s - \dot{u}_s y_s) \Big|_{s=0}^{s=t} \\ = \frac{1}{2\gamma} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\gamma} \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ \dot{u}_s/\sqrt{\gamma} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_s \\ \dot{y}_s/\sqrt{\gamma} \end{pmatrix} \right\rangle \Big|_{s=0}^{s=t} = \mathcal{K}_{t,\gamma}^\pm(z, z').$$

ce qui termine la preuve. \square

REMARQUE 7.45. L'équation (7.16.4) n'est pas une surprise. C'est une conséquence du fait général sur le processus gaussien.

REMARQUE 7.46. Par (7.16.12), (7.16.14), on peut montrer que, quand $b \rightarrow \infty$, la courbe minimale de $\mathcal{K}_{t/b^2, b^4}^\pm$ converge vers la solution d'équation différentielle

$$(7.16.17) \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} \pm 1 \right) y^\pm = 0, \quad (y_0^\pm, \dot{y}_0^\pm) = z, (y_t^\pm, \dot{y}_t^\pm) = z'.$$

De plus, on a

$$(7.16.18) \quad \mathcal{K}_{t/b^2, b^4}^\pm(y_{\cdot/b^2}^\pm) = \frac{1}{2b^2} \int_0^t |\dot{y}_s^\pm + b^2 (y_s^\pm \pm y_s^\pm)|^2 ds \\ = \frac{1}{2b^2} \int_0^t (|\dot{y}_s^\pm|^2 + b^4 |\ddot{y}_s^\pm \pm y_s^\pm|^2) ds + \frac{1}{2} (|z'|^2 - |z|^2) \\ \rightarrow \frac{b^2}{2} \int_0^t |\ddot{y}_s^\pm \pm y_s^\pm|^2 ds + \mathcal{O}(1).$$

Par (7.16.4), (7.16.17), (7.16.18) et par des calculs élémentaires, on retrouve (7.15.36). Notons que la fonctionnelle dans la second ligne de (7.16.18),

$$(7.16.19) \quad H_{t,b}^\pm(y') = \frac{1}{2} \int_0^t (|\dot{y}'_s|^2 + b^4 |\ddot{y}'_s \pm y'_s|^2) ds$$

apparaît naturellement dans [B05, (0.8)-(0.10)] et [B11, Section 10.1].

7.17. L'opérateur $H_{\epsilon,\gamma}$. Cette sous-section et la sous-section suivante seront utilisées dans la section 8. Pour $\epsilon > 0, \gamma > 0, b^2T = \gamma$, l'opérateur $H_{\epsilon,\gamma}^\pm$ introduit dans (7.17.1) est l'opérateur modèle pour $L_{\epsilon,b,T}$, qui va être défini dans (8.2.20). On va montrer quelques estimations sur la résolvante de $H_{\epsilon,\gamma}^\pm$, qui sont des analogues à [BL08, Theorems 17.5.1 and 17.6.1]. On remarque grâce à l'existence du global changement d'échelle $k_{\sqrt{T}}$, contrairement à [BL08, Chapitre 17], on n'a pas besoin des utiles sur analyse semi-classique.

Pour $\epsilon > 0, \gamma > 0$, on pose

$$(7.17.1) \quad H_{\epsilon,\gamma}^\pm = e^{\mp\epsilon\sqrt{\gamma}yp} H_\gamma^\pm e^{\pm\epsilon\sqrt{\gamma}yp}.$$

Par (7.5.6), (7.17.1), on a

$$(7.17.2) \quad H_{\epsilon,\gamma}^\pm = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial p^2} + (1 \mp 2\epsilon\gamma)p^2 - 1 + 2dp i \frac{\partial}{\partial p} \right) + \epsilon\gamma \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) y^2 \\ - \sqrt{\gamma} \left(p \frac{\partial}{\partial y} \mp (1 - \epsilon)y \frac{\partial}{\partial p} \right) \pm \gamma(dy - dp) i \frac{\partial}{\partial y + \frac{\partial}{\partial p}}.$$

Alors $H_{\epsilon,\gamma}^\pm$ est h -autoadjoint.

On pose

$$(7.17.3) \quad I = \{(\epsilon, \gamma) \in \mathbf{R}^2 : \epsilon \in]0, 1[, \gamma > 0, \epsilon\gamma < 1/2\}.$$

Notons que pour $(\epsilon, \gamma) \in I$, on a

$$(7.17.4) \quad 1 \mp 2\epsilon\gamma > 0, \quad 1 - \epsilon \neq 0.$$

Pour $(\epsilon, \gamma) \in I$, on considère $H_{\epsilon,\gamma}^\pm$ comme un opérateur agissant sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \Lambda(\mathbf{R}^{2,*}))$. Comme H_γ^\pm , l'opérateur $H_{\epsilon,\gamma}^\pm$ est fermable, et sa fermeture est maximale. On note encore $H_{\epsilon,\gamma}^\pm$ sa fermeture.

THÉORÈME 7.47. *Si K est un sous-ensemble compact de I , il existe $C > 0, \lambda_0 > 0$, tels que, pour $(\epsilon, \gamma) \in K$, si $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \Lambda(\mathbf{R}^{2,*}))$, on a*

$$(7.17.5) \quad \|(\lambda_0 + H_{\epsilon,\gamma}^\pm)u\|_{L^2} \geq C\|u\|_{H^{1/4}}.$$

De plus, si $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda_0$, on a

$$(7.17.6) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon,\gamma}^\pm)u\|_{L^2} \geq C(1 + |\lambda|^{1/8})\|u\|_{L^2}.$$

En particulier, pour $(\epsilon, \gamma) \in I$, $H_{\epsilon,\gamma}^\pm$ est à résolvante compacte.

DÉMONSTRATION. On pose

$$(7.17.7) \quad M_{\epsilon,\gamma}^\pm = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial p^2} + (1 \mp 2\epsilon\gamma)p^2 - 1 + 2dp i \frac{\partial}{\partial p} \right) - \sqrt{\gamma} \left(p \frac{\partial}{\partial y} \mp (1 - \epsilon)y \frac{\partial}{\partial p} \right) \\ \pm \gamma(dy - dp) i \frac{\partial}{\partial y + \frac{\partial}{\partial p}}.$$

Par (7.17.2), (7.17.7), on a

$$(7.17.8) \quad H_{\epsilon,\gamma}^\pm = M_{\epsilon,\gamma}^\pm + \epsilon\gamma \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) y^2.$$

Par (7.17.4), pour $(\epsilon, \gamma) \in I$, l'opérateur $M_{\epsilon, \gamma}^{\pm}$ est considéré dans [HeN05, Chapitre 5]. Par [HeN05, Theorem 5.8], pour $(\epsilon, \gamma) \in K$, il existe $c > 0$, tel que si $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \Lambda(\mathbf{R}^{2,*}))$, on a

$$(7.17.9) \quad \|M_{\epsilon, \gamma}^{\pm} u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \geq c \|u\|_{H^{1/4}}.$$

Par (7.17.8), (7.17.9), pour $\lambda_0 > 0$, $(\epsilon, \gamma) \in K$, il existe $c > 0$ tel que

$$(7.17.10) \quad \|(\lambda_0 + H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} + \|y^2 u\|_{L^2} + (\lambda_0 + 1)\|u\|_{L^2} \geq c \|u\|_{H^{1/4}}.$$

Par (7.17.2), pour $\lambda_0 > 0$ assez grand et pour $(\epsilon, \gamma) \in K$, on a

$$(7.17.11) \quad \operatorname{Re} \langle (H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} + \lambda_0)u, u \rangle \geq c \|u\|_{L^2}^2.$$

De (7.17.11), on tire que

$$(7.17.12) \quad \|(H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} + \lambda_0)u\|_{L^2} \geq c \|u\|_{L^2}.$$

Par (7.17.10), (7.17.12), il existe $\lambda_0 > 0$, $c > 0$ tels que

$$(7.17.13) \quad \|(\lambda_0 + H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} + \|y^2 u\|_{L^2} \geq c \|u\|_{H^{1/4}}.$$

Alors, pour montrer (7.17.5), il suffit de montrer que

$$(7.17.14) \quad \|(\lambda_0 + H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq c \|y^2 u\|_{L^2}.$$

On sait que

$$(7.17.15) \quad \langle (\lambda_0 + H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u, y^2 u \rangle = \langle y(\lambda_0 + H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u, yu \rangle = \langle [y, H_{\epsilon, \gamma}^{\pm}]u, yu \rangle + \langle (\lambda_0 + H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})yu, yu \rangle.$$

Par (7.17.2), pour $\lambda_0 > 0$ assez grand et pour $(\epsilon, \gamma) \in K$, on a

$$(7.17.16) \quad \operatorname{Re} \langle (H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} + \lambda_0)yu, yu \rangle \geq c' (\|y^2 u\|_{L^2}^2 + \|pyu\|_{L^2}^2).$$

Or

$$(7.17.17) \quad [y, H_{\epsilon, \gamma}^{\pm}] = \sqrt{\gamma}p.$$

Par (7.17.15)-(7.17.17), on a

$$(7.17.18) \quad \operatorname{Re} \langle (\lambda_0 + H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u, y^2 u \rangle \geq \sqrt{\gamma} \operatorname{Re} \langle ypu, u \rangle + c' (\|y^2 u\|_{L^2}^2 + \|ypu\|_{L^2}^2).$$

De plus, on a

$$(7.17.19) \quad |\operatorname{Re} \langle ypu, u \rangle| \leq \frac{c'}{2\sqrt{\gamma}} \|ypu\|_{L^2}^2 + \frac{\sqrt{\gamma}}{2c'} \|u\|_{L^2}^2,$$

$$\operatorname{Re} \langle (\lambda_0 + H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u, y^2 u \rangle \leq \frac{1}{2c'} \|(\lambda_0 + H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2}^2 + \frac{c'}{2} \|y^2 u\|_{L^2}^2.$$

Donc, par (7.17.18), (7.17.19), pour $(\epsilon, \gamma) \in K$, il existe $\lambda_0 > 0$, $c'' > 0$ tels que

$$(7.17.20) \quad \|(\lambda_0 + H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \geq c'' \|y^2 u\|_{L^2}^2.$$

Par (7.17.12) et (7.17.20), on a (7.17.14), ce qui achève (7.17.5).

Par [HeN05, Section 6.1], pour $\operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda_0$, on a

$$(7.17.21) \quad \|(\lambda - M_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq C(1 + |\lambda|^{1/8}) \|u\|_{L^2}.$$

De (7.17.8), (7.17.21), on tire que

$$(7.17.22) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} + C' \|y^2 u\|_{L^2} \geq C(1 + |\lambda|^{1/8}) \|u\|_{L^2}.$$

On vérifie que dans (7.17.14), si $\lambda \in \mathbf{C}$ est tel que $\operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda_0$, on a encore

$$(7.17.23) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq c\|y^2u\|_{L^2}.$$

En effet, il suffit de reprendre les estimations dans (7.17.15)-(7.17.20).

De (7.17.22), (7.17.23), on tire (7.17.6). \square

COROLLAIRE 7.48. *Si K est un sous-ensemble compact de I , il existe $C > 0, C' > 0, \lambda_0 > 0$ tels que, pour $\lambda = -\lambda_0 + \sigma + i\tau$ tel que, $\sigma \leq C'|\tau|^{1/8}$, si $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \Lambda(\mathbf{R}^{2,*}))$, alors on a*

$$(7.17.24) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq C(1 + |\lambda|^{1/8})\|u\|_{L^2}.$$

DÉMONSTRATION. On choisit $\lambda_0 > 0$ tel que (7.17.6) soit vrais. Alors, il suffit de montrer (7.17.24) dans le cas $\sigma > 0$. De (7.17.6), on tire que

$$(7.17.25) \quad \|(-\lambda_0 + i\tau - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq C(1 + |\tau|^{1/8})\|u\|_{L^2}.$$

Si $\lambda = -\lambda_0 + \sigma + i\tau$, on a

$$(7.17.26) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq C(1 + |\tau|^{1/8})\|u\|_{L^2} - \sigma\|u\|_{L^2},$$

ce qui termine la preuve. \square

On pose

$$(7.17.27) \quad u_{\epsilon, \gamma}^{\pm}(y, p) = e^{\mp \epsilon \sqrt{\gamma} y p} u_{\gamma}^{\pm}(y, p).$$

Par (7.10.3), (7.10.4), (7.17.27), on a

$$(7.17.28) \quad \begin{aligned} u_{\epsilon, \gamma}^+ &= \exp\left(-\frac{p^2 + y^2 + 2\epsilon\sqrt{\gamma}yp}{2}\right), \\ u_{\epsilon, \gamma}^- &= \exp\left(-\frac{\sqrt{1+4\gamma}}{2}(p^2 + y^2) - (2-\epsilon)\sqrt{\gamma}yp\right) \left(dy - \frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{\sqrt{1+4\gamma}+1}dp\right). \end{aligned}$$

Pour $(\epsilon, \gamma) \in I$, on a dans le cas +,

$$(7.17.29) \quad \det \begin{pmatrix} 1 & \epsilon\sqrt{\gamma} \\ \epsilon\sqrt{\gamma} & 1 \end{pmatrix} = 1 - \epsilon^2\gamma > 0,$$

et dans le cas -,

$$(7.17.30) \quad \det \begin{pmatrix} \sqrt{1+4\gamma} & (2-\epsilon)\sqrt{\gamma} \\ (2-\epsilon)\sqrt{\gamma} & \sqrt{1+4\gamma} \end{pmatrix} = 1 + 4\epsilon(1-\epsilon)\gamma > 0.$$

Les formes quadratiques qui apparaissent à droit de (7.17.28) sont donc définies positives, de telle sorte que $u_{\epsilon, \gamma}^{\pm}$ sont des formes gaussiennes.

PROPOSITION 7.49. *Pour $(\epsilon, \gamma) \in I^{\pm}$, on a*

$$(7.17.31) \quad \operatorname{Sp} H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} = \operatorname{Sp} H_{\gamma}^{\pm}.$$

De plus, le noyau de $H_{\epsilon, \gamma}^{\pm}$ est de dimension 1, et est engendré par $u_{\epsilon, \gamma}^{\pm}$.

DÉMONSTRATION. Par le théorème 7.47, l'opérateur $H_{\epsilon, \gamma}^{\pm}$ sont à résolvante compacte. Le spectre de $H_{\epsilon, \gamma}^{\pm}$ est donc formé de valeurs propres. Or $u_{\epsilon, \gamma}^{\pm}$ est une gaussienne. Alors le même argument que dans la démonstration du théorème 7.17 nous donne le résultat. \square

Par (7.11.17), (7.17.27), pour $(\epsilon, \gamma) \in I$, on a

$$(7.17.32) \quad h(u_{\epsilon, \gamma}^+, u_{\epsilon, \gamma}^+) = \pi, \quad h(u_{\epsilon, \gamma}^-, u_{\epsilon, \gamma}^-) = \frac{4\pi}{(1 + \sqrt{1 + 4\gamma})^2}.$$

Soit $P_{\epsilon, \gamma}^\pm$ le projecteur spectral pour $H_{\epsilon, \gamma}^\pm$ relatif à la valeur propre 0.

PROPOSITION 7.50. *Pour $(\epsilon, \gamma) \in I$, on a*

$$(7.17.33) \quad P_{\epsilon, \gamma}^\pm = \frac{h(\cdot, u_{\epsilon, \gamma}^\pm)}{h(u_{\epsilon, \gamma}^\pm, u_{\epsilon, \gamma}^\pm)} u_{\epsilon, \gamma}^\pm.$$

DÉMONSTRATION. Si $u \in L^2(\mathbf{R}^2, \Lambda(\mathbf{R}^{2,*}))$, il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que

$$(7.17.34) \quad P_{\epsilon, \gamma}^\pm u = a u_{\epsilon, \gamma}^\pm.$$

De (7.17.34), on tire que

$$(7.17.35) \quad h(P_{\epsilon, \gamma}^\pm u, u_{\epsilon, \gamma}^\pm) = a h(u_{\epsilon, \gamma}^\pm, u_{\epsilon, \gamma}^\pm).$$

Comme $H_{\epsilon, \gamma}^\pm$ est h -autoadjoint, l'opérateur $P_{\epsilon, \gamma}^\pm$ est aussi h -autoadjoint. Alors, on a

$$(7.17.36) \quad h(P_{\epsilon, \gamma}^\pm u, u_{\epsilon, \gamma}^\pm) = h(u, P_{\epsilon, \gamma}^\pm u_{\epsilon, \gamma}^\pm) = h(u, u_{\epsilon, \gamma}^\pm).$$

De (7.17.35) et (7.17.36), on tire que

$$(7.17.37) \quad a = \frac{h(u, u_{\epsilon, \gamma}^\pm)}{h(u_{\epsilon, \gamma}^\pm, u_{\epsilon, \gamma}^\pm)},$$

ce qui termine la preuve. □

THÉORÈME 7.51. *Si K est un sous-ensemble compact de I , si K' est un sous-ensemble compact de \mathbf{C} , il existe $c > 0, \lambda_1 \in]0, 1[$ tels que, pour $(\epsilon, \gamma) \in K, \lambda \in K'$ et $\operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_1$, si $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \Lambda(\mathbf{R}^{2,*}))$, on a*

$$(7.17.38) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^\pm - P_{\epsilon, \gamma}^\pm)u\|_{L^2} \geq c \|u\|_{L^2}.$$

DÉMONSTRATION. On choisit λ_0 comme dans le théorème 7.47. Par (7.17.5), pour $(\epsilon, \gamma) \in K$, on a

$$(7.17.39) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^\pm - P_{\epsilon, \gamma}^\pm)u\|_{L^2} + \|(-\lambda_0 - \lambda + P_{\epsilon, \gamma}^\pm)u\|_{L^2} \geq c \|u\|_{H^{1/4}}.$$

Par (7.17.32) et (7.17.33), il existe $C > 0$, pour $(\epsilon, \gamma) \in K$, tel que

$$(7.17.40) \quad \|P_{\epsilon, \gamma}^\pm\| \leq C.$$

De (7.17.40), pour $\lambda \in K'$, on tire que

$$(7.17.41) \quad \|(-\lambda_0 - \lambda + P_{\epsilon, \gamma}^\pm)u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2}.$$

De (7.17.39), (7.17.41), on tire que

$$(7.17.42) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^\pm - P_{\epsilon, \gamma}^\pm)u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \geq c \|u\|_{H^{1/4}}.$$

Par (7.10.2), (7.17.31), on peut choisir $\lambda_1 \in]0, 1[$ tel que pour $\operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_1$, on a

$$(7.17.43) \quad \lambda \notin \operatorname{Sp} H_{\epsilon, \gamma}^\pm \setminus \{0\}.$$

On va montrer (7.17.38) par contradiction. Si (7.17.38) n'est pas vrai, il existe $(\epsilon_n, \gamma_n) \in K, \lambda_n \in K', \operatorname{Re} \lambda_n \leq \lambda_1$ et $u_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \Lambda(\mathbf{R}^{2,*}))$ tels que,

$$(7.17.44) \quad \|(\lambda_n - H_{\epsilon_n, \gamma_n}^\pm - P_{\epsilon_n, \gamma_n}^\pm)u_n\|_{L^2} \leq 1/n,$$

et

$$(7.17.45) \quad \|u_n\|_{L^2} = 1.$$

Par (7.17.42), (7.17.44), (7.17.45), on sait que u_n est borné dans $H^{1/4}$. Par les propriétés de l'oscillateur harmonique l'injection $H^{1/4} \rightarrow L^2$ est compacte. Comme K, K' sont compacts, il existe alors des sous-suites qu'on note encore $\epsilon_n, \gamma_n, \lambda_n, u_n$ telles que

$$(7.17.46) \quad \begin{aligned} (\epsilon_n, \gamma_n) &\rightarrow (\epsilon_0, \gamma_0) \in K, \\ \lambda_n &\rightarrow \lambda'_0 \in K' \cap \{\lambda \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_1\}, \\ u_n &\rightarrow u_0 \text{ dans } L^2. \end{aligned}$$

Alors, de (7.17.43), (7.17.45), (7.17.46), on tire que

$$(7.17.47) \quad \lambda'_0 \notin \operatorname{Sp} H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} \setminus \{0\}, \quad u_0 \neq 0.$$

Par (7.17.33), (7.17.46), aux sens des distributions, on a

$$(7.17.48) \quad (\lambda_n - H_{\epsilon_n, \gamma_n}^{\pm} - P_{\epsilon_n, \gamma_n}^{\pm})u_n \rightarrow (\lambda'_0 - H_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm} - P_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm})u_0.$$

De (7.17.44), (7.17.48), on tire que

$$(7.17.49) \quad (\lambda'_0 - H_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm} - P_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm})u_0 = 0.$$

Par (7.17.49), on a

$$(7.17.50) \quad 0 = P_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm} (\lambda'_0 - H_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm} - P_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm})u_0 = (\lambda'_0 - 1)P_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm} u_0.$$

Comme $\operatorname{Re} \lambda'_0 \leq \lambda_1 < 1$, par (7.17.50), on a

$$(7.17.51) \quad P_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm} u_0 = 0.$$

Par (7.17.49), (7.17.51), on a

$$(7.17.52) \quad (\lambda'_0 - H_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm})u_0 = 0.$$

Comme $H_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm}$ est maximale, u_0 est dans le domaine de $H_{\epsilon_0, \gamma_0}^{\pm}$. Alors, (7.17.52) contredit (7.17.47), ce qui termine la démonstration. \square

COROLLAIRE 7.52. *Si K est un sous-ensemble compact de I , il existe $C > 0, C' > 0, \lambda_1 \in]0, 1[$ tels que, pour $(\epsilon, \gamma) \in I$, $\lambda = \lambda_1 + \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \leq C'|\tau|^{1/8}$, on a*

$$(7.17.53) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} - P_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq C(1 + |\lambda|^{1/8})\|u\|_{L^2}.$$

DÉMONSTRATION. On choisit $\lambda_0 > 0, C' > 0$ comme dans le corollaire 7.48. Alors, pour $\lambda = -\lambda_0 + \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \leq C'|\tau|^{1/8}$, on a

$$(7.17.54) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} - P_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} + \|P_{\epsilon, \gamma}^{\pm}u\|_{L^2} \geq C(1 + |\lambda|^{1/8})\|u\|_{L^2}.$$

De (7.17.40), (7.17.54), on tire qu'il existe $r > 0$ assez grand tel que pour $\lambda = -\lambda_0 + \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \leq C'|\tau|^{1/8}$ et $|\lambda| \geq r$, on a

$$(7.17.55) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} - P_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq C(1 + |\lambda|)^{1/8}\|u\|_{L^2}.$$

Pour $K' = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq r\}$, par le théorème 7.51, il existe $\lambda_1 \in]0, 1[$ tel que pour $\lambda \in K', \operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_1$, on a

$$(7.17.56) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} - P_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq c\|u\|_{L^2}.$$

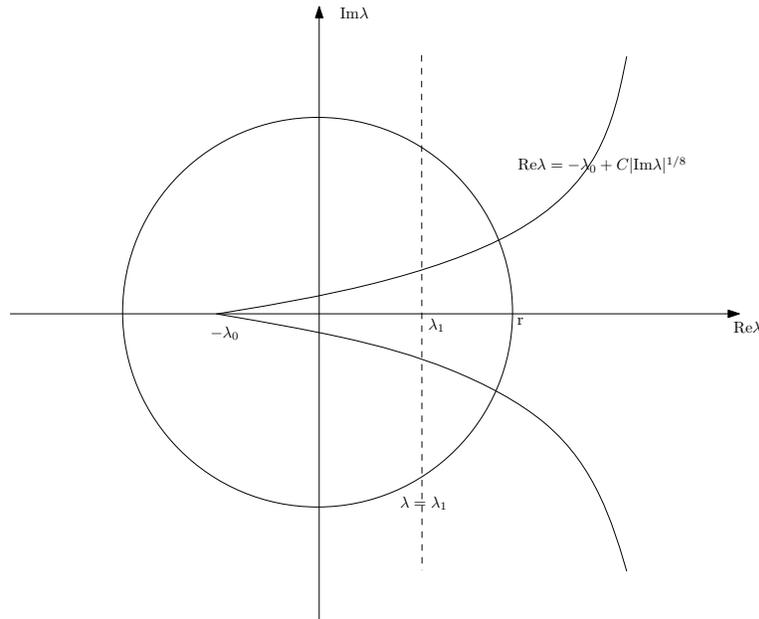


FIGURE 7.5.

De (7.17.55), (7.17.56), on tire que pour $\text{Re } \lambda \leq \lambda_1$, on a

$$(7.17.57) \quad \|(\lambda - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} - P_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq C(1 + |\lambda|^{1/8})\|u\|_{L^2}.$$

En particulier, on a

$$(7.17.58) \quad \|(\lambda_1 + i\tau - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} - P_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq C(1 + |\tau|^{1/8})\|u\|_{L^2}.$$

Par (7.17.58), pour $\sigma \geq 0$, on a

$$(7.17.59) \quad \|(\lambda_1 + \sigma + i\tau - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} - P_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} \geq \|(\lambda_1 + i\tau - H_{\epsilon, \gamma}^{\pm} - P_{\epsilon, \gamma}^{\pm})u\|_{L^2} - \sigma\|u\|_{L^2} \\ \geq C(1 + |\tau|^{1/8})\|u\|_{L^2} - \sigma\|u\|_{L^2}.$$

De (7.17.57), (7.17.59), on tire le résultat. \square

Dans la suite, on pose

$$(7.17.60) \quad L_{\epsilon, b, T}^{\pm} = e^{\mp \epsilon b T y p} L_{b, T}^{\pm} e^{\pm \epsilon b T y p}.$$

Par (7.5.4), (7.5.7), (7.17.1), (7.17.60), on a

$$(7.17.61) \quad L_{\epsilon, b, T}^{\pm} = \frac{1}{b^2} k_{\sqrt{T}} H_{\epsilon, b^2 T}^{\pm} k_{\sqrt{T}}^{-1}.$$

Par (7.5.3), (7.17.28), posons

$$(7.17.62) \quad u_{\epsilon, b, T}^{\pm} = k_{\sqrt{T}} u_{\epsilon, b^2 T}^{\pm}.$$

Par (7.17.31), (7.17.61), on a

$$(7.17.63) \quad \text{Sp } L_{\epsilon, b, T}^{\pm} = \frac{1}{b^2} \text{Sp } H_{\epsilon, b^2 T}^{\pm} = \frac{1}{b^2} \text{Sp } H_{b^2 T}^{\pm}.$$

Le noyau de $L_{\epsilon, b, T}^{\pm}$ est engendré par $u_{\epsilon, b, T}^{\pm}$.

7.18. L'opérateur modèle sur \mathbf{R}^{2n} . Soit $n_\alpha \in \mathbf{N}$ tel que $n_\alpha \in [0, n]$. On écrit $y, p \in \mathbf{R}^n$ sous la forme

$$(7.18.1) \quad y = (y', y''), p = (p', p'') \in \mathbf{R}^{n_\alpha} \oplus \mathbf{R}^{n-n_\alpha}.$$

On pose

$$(7.18.2) \quad \underline{H}_{\epsilon, \gamma}^\alpha = H_{\epsilon, \gamma}^{-, \oplus n_\alpha} \oplus H_{\epsilon, \gamma}^{+, \oplus (n-n_\alpha)}, \quad \underline{L}_{\epsilon, b, T}^\alpha = L_{\epsilon, b, T}^{-, \oplus n_\alpha} \oplus L_{\epsilon, b, T}^{+, \oplus (n-n_\alpha)}.$$

Les opérateurs $\underline{H}_{\epsilon, \gamma}^\alpha, \underline{L}_{\epsilon, b, T}^\alpha$ agissent sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n}, \Lambda(\mathbf{R}^{2n, *}))$.

On pose

$$(7.18.3) \quad \underline{u}_{\epsilon, \gamma}^\alpha(y, p) = \prod_{i=1}^{n_\alpha} u_{\epsilon, \gamma}^-(y_i, p_i) \prod_{i=n_\alpha+1}^n u_{\epsilon, \gamma}^+(y_i, p_i).$$

Par la proposition 7.49, pour $(\epsilon, \gamma) \in I$, le noyau de $\underline{H}_{\epsilon, \gamma}^\alpha$ est de dimension 1, et est engendré par $\underline{u}_{\epsilon, \gamma}^\alpha$. On pose

$$(7.18.4) \quad \rho_\gamma^\alpha = \left(dy_1 - \frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{\sqrt{1+4\gamma}+1} dp_1 \right) \wedge \cdots \wedge \left(dy_{n_\alpha} - \frac{\sqrt{1+4\gamma}-1}{\sqrt{1+4\gamma}+1} dp_{n_\alpha} \right),$$

$$\underline{v}_{\epsilon, \gamma}^\alpha = \exp\left(-\frac{\sqrt{1+4\gamma}}{2} (|y'|^2 + |p'|^2) - \frac{1}{2} (|y''|^2 + |p''|^2) - (2-\epsilon)\sqrt{\gamma}\langle y', p' \rangle - \epsilon\sqrt{\gamma}\langle y'', p'' \rangle\right).$$

Alors,

$$(7.18.5) \quad \underline{u}_{\epsilon, \gamma}^\alpha = \underline{v}_{\epsilon, \gamma}^\alpha \rho_\gamma^\alpha.$$

Par (7.17.29), (7.17.30), pour $(\epsilon, \gamma) \in I$, $\underline{v}_{\epsilon, \gamma}^\alpha$ est gaussienne.

On pose

$$(7.18.6) \quad \underline{u}_{\epsilon, b, T}^\alpha = k_{\sqrt{T}} \underline{u}_{\epsilon, \gamma}^\alpha.$$

Alors, $\underline{u}_{\epsilon, b, T}^\alpha$ engendre le noyau de $\underline{L}_{\epsilon, b, T}^\alpha$.

Soit $\sigma_0 > 0$. Soit φ une fonction paire dans $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que

$$(7.18.7) \quad \varphi(y) = \begin{cases} 1, & |y| < \sigma_0; \\ 0, & |y| > 2\sigma_0. \end{cases}$$

On pose

$$(7.18.8) \quad u_{\epsilon, b, T}^\alpha(y, p) = \varphi(y) \underline{u}_{\epsilon, b, T}^\alpha(y, p).$$

PROPOSITION 7.53. *Si $K \subset I$ est compact, il existe $c > 0, C > 0$, tels que, pour $(\epsilon, b^2 T) \in K$ et $T \geq 1$, on a*

$$(7.18.9) \quad \|u_{\epsilon, b, T}^\alpha - \underline{u}_{\epsilon, b, T}^\alpha\|_{L^2} \leq C e^{-cT}, \quad \|\underline{L}_{\epsilon, b, T}^\alpha u_{\epsilon, b, T}^\alpha\|_{L^2} \leq C e^{-cT}.$$

DÉMONSTRATION. Par (7.18.4)-(7.18.8), on a

$$(7.18.10) \quad \|u_{\epsilon, b, T}^\alpha - \underline{u}_{\epsilon, b, T}^\alpha\|_{L^2} = \|(1-\varphi)k_{\sqrt{T}}\underline{u}_{\epsilon, \gamma}^\alpha\|_{L^2} = \|k_{\sqrt{T}}(1-\varphi(y/\sqrt{T}))\underline{u}_{\epsilon, \gamma}^\alpha\|_{L^2}$$

$$= \frac{1}{T^{n/4}} \|(1-\varphi(y/\sqrt{T}))\underline{u}_{\epsilon, \gamma}^\alpha\|_{L^2} = \frac{1}{T^{n/4}} \|(1-\varphi(y/\sqrt{T}))\underline{u}_{\epsilon, \gamma}^\alpha\|_{L^2} \|\rho_\gamma^\alpha\|_{\Lambda(\mathbf{R}^{2n, *})}.$$

Par (7.17.29), (7.17.30), pour $(\epsilon, \gamma) \in K$, on a

$$(7.18.11) \quad \frac{1}{2}\sqrt{1+4\gamma}(|y'|^2 + |p'|^2) + \frac{1}{2}(|y''|^2 + |p''|^2) + (2-\epsilon)\sqrt{\gamma}\langle y', p' \rangle \\ + \epsilon\sqrt{\gamma}\langle y'', p'' \rangle \geq c(|y|^2 + |p|^2).$$

Comme $1 - \varphi(y/\sqrt{T})$ s'annule sur $|y| \leq \sigma_0\sqrt{T}$, de (7.18.11), on tire que

$$(7.18.12) \quad \|(1 - \varphi(y/\sqrt{T}))\underline{v}_\gamma^\alpha\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbf{R}^{2n}} (1 - \varphi(y/\sqrt{T}))^2 e^{-2c(|y|^2 + |p|^2)} dy dp \\ \leq \int_{|y| > \sigma_0\sqrt{T}, p \in \mathbf{R}^n} e^{-2c(|y|^2 + |p|^2)} dy dp \leq C e^{-cT}.$$

Par (7.18.4), pour $(\epsilon, \gamma) \in K$, $\|\rho_\gamma^\alpha\|_{\Lambda(\mathbf{R}^{2n,*})}$ est uniformément borné. De (7.18.10) et (7.18.12), on tire la première estimation de (7.18.9).

De plus, on a

$$(7.18.13) \quad \underline{L}_{\epsilon,b,T}^\alpha u_{\epsilon,b,T}^\alpha = \underline{L}_{\epsilon,b,T}^\alpha \varphi u_{\epsilon,b,T}^\alpha = [\underline{L}_{\epsilon,b,T}^\alpha, \varphi] u_{\epsilon,b,T}^\alpha = -\frac{1}{b}(\nabla_p \varphi) u_{\epsilon,b,T}^\alpha.$$

Comme $\nabla_p \varphi$ s'annule sur le domaine où $\varphi = 1$, par les mêmes estimations que (7.18.10)-(7.18.12), on obtient la seconde estimation de (7.18.9). \square

COROLLAIRE 7.54. *Si $K \subset I$ est compact, pour $b > 0, T > 0, (\epsilon, \gamma) \in K, b^2 T = \gamma$, quand $T \rightarrow \infty$, il existe $C_{\epsilon,\gamma} > 0$ tel que*

$$(7.18.14) \quad \|u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2}^2 = \frac{C_{\epsilon,\gamma}}{T^{n/2}} + O(e^{-cT}).$$

DÉMONSTRATION. Par (7.18.6), (7.18.14) est une conséquence de proposition 7.53. \square

PROPOSITION 7.55. *Pour $\epsilon > 0, b > 0, T > 0$, on a*

$$(7.18.15) \quad h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha) > 0.$$

De plus, si $b^2 T$ est dans un compact de \mathbf{R}_+^ , quand $T \rightarrow \infty$, on a*

$$(7.18.16) \quad h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha) = \frac{\pi^n}{T^{n/2} \left(\frac{1+\sqrt{1+4b^2 T}}{2} \right)^{2n_\alpha}} + \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

DÉMONSTRATION. Par (7.18.4)-(7.18.8), on a

$$(7.18.17) \quad h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha) = \langle \rho_{b^2 T}^\alpha, r^* \rho_{b^2 T}^\alpha \rangle \\ \times \int_{\mathbf{R}^{2n}} \varphi^2(y) \exp\left(-\sqrt{1+4b^2 T} (T|y'|^2 + |p'|^2) - (T|y''|^2 + |p''|^2)\right) dy dp.$$

Comme $\langle \rho_\gamma^\alpha, r^* \rho_\gamma^\alpha \rangle > 0$, on a (7.18.15).

De (7.17.32), (7.18.17), on tire (7.18.16), ce qui termine la preuve. \square

Par (7.18.15), h est définie positive sur la droite complexe engendré par $u_{\epsilon,b,T}^\alpha$. Soit $P_{\epsilon,b,T}^\alpha$ le projecteur h -autoadjoint sur cette droite. Comme dans la proposition 7.50, on a

$$(7.18.18) \quad P_{\epsilon,b,T}^\alpha = \frac{h(\cdot, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)}{h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)} u_{\epsilon,b,T}^\alpha.$$

PROPOSITION 7.56. *Pour $\epsilon > 0, b > 0, T > 0$, on a*

$$(7.18.19) \quad h(L_{\epsilon,b,T}^\alpha u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha) = 0.$$

DÉMONSTRATION. De (7.18.13), on tire que

$$(7.18.20) \quad h(L_{\epsilon,b,T}^\alpha u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha) = -\frac{1}{b} \langle \rho_{b^2 T}^\alpha, r^* \rho_{b^2 T}^\alpha \rangle \\ \times \int_{\mathbf{R}^{2n}} \varphi(y) (\nabla_p \varphi)(y) \exp \left(-\sqrt{1 + 4b^2 T} (T|y'|^2 + |p'|^2) - (T|y''|^2 + |p''|^2) \right) dy dp.$$

Comme l'intégrant dans le membre de droite de (7.18.20) est impaire en p , l'intégrale s'annule, ce qui termine la preuve. \square

8. Estimation de spectre de $L_{b,T}$

Rappelons que si X est compact, et si f est une fonction de Morse, si f, g^{TX} et g^F ont une forme canonique au voisinage des points critiques, par [BZ92, Theorem 8.5], il existe $c > 0, C > 0, T_0 > 0$, tels que pour $T \geq T_0$, on a

$$(8.0.1) \quad \text{Sp } \tilde{\square}_{Tf}^X \subset [0, Ce^{-cT}] \cup [CT, \infty[.$$

De plus, si ∇f vérifie la condition de transversalité de Smale, par [BZ94, Theorem 6.11], pour $T > 0$ assez grand, le complexe de Witten, qui est formé par la somme directe des espaces propres pour \square_{Tf}^X associés aux valeurs propres dans $[0, 1]$ est canoniquement isomorphe au complexe de Thom-Smale. Dans cette section, on va montrer des résultats du même type pour $L_{b,T}$.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la sous-section 8.1, on explicite nos hypothèses sur f, g^{TX} et g^F .

Dans la sous-section 8.2, pour $\epsilon > 0$, on construit un nouvel opérateur $L_{\epsilon,b,T}$ conjugué à $L_{b,T}$. On montre que pour $\epsilon > 0$ assez petit, les spectres de $L_{\epsilon,b,T}$ et $L_{b,T}$ coïncident.

Les sous-sections 8.3-8.6 sont consacrées à l'étude de l'opérateur $L_{\epsilon,b,T}$.

Dans la sous-section 8.3, on étudie l'opérateur $L_{\epsilon,b,T}$ hors des points critiques de f .

Dans la sous-section 8.4, on étudie l'opérateur $L_{\epsilon,b,T}$ au voisinage d'un point critique de f .

Dans la sous-section 8.5, on écrit $L_{\epsilon,b,T}$ sous la forme d'une matrice $(2, 2)$. On établit des estimations sur chaque bloc.

Dans la sous-section 8.6, on établit des estimations sur la résolvante de $L_{\epsilon,b,T}$, et on obtient les résultats souhaités sur le spectre de $L_{b,T}$.

Dans la sous-section 8.7, on construit un sous-complexe $(\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F), d^{\mathcal{X}^*})$ de $(\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F), d^{\mathcal{X}^*})$, qui est formé par la somme directe des espaces caractéristiques de l'opérateur $2A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$ pour les valeurs propres dans $[0, 1]$.

Dans la sous-section 8.8, on construit l'application de de Rham P_{dR} , et on construit un morphisme de complexes $P_{dR,b,T} : (\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F), d^{\mathcal{X}^*}) \rightarrow (C(W^u, F), \partial)$.

Dans la sous-section 8.9, pour b, T dans une région convenable, on montre que $P_{dR,b,T}$ est un isomorphisme.

8.1. Hypothèses générales. On fait les mêmes hypothèses que dans la sous-section 2.1. On suppose de plus que f est une fonction de Morse sur X de points critiques $B = \{x_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq l}$. Pour $1 \leq \alpha \leq l$, soit n_α l'indice de Morse au point x_α .

Soit $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ des coordonnées locales sur un voisinage de x_α telles que x_α est représenté par $y = 0$. Pour $\sigma_0 > 0$ assez petit, et $r \in]0, 4]$, on pose

$$(8.1.1) \quad U_{\alpha,r} = \{y : |y| < r\sigma_0\}$$

le voisinage de x_α . On choisit $\sigma_0 > 0$ assez petit tel que tous les $U_{\alpha,4}$ sont disjoints. Posons

$$(8.1.2) \quad U_r = \bigcup_{\alpha=1}^l U_{\alpha,r},$$

le voisinage de B .

On suppose que :

– Sur le voisinage $U_{\alpha,4}$, la fonction f s'écrit sous la forme

$$(8.1.3) \quad f|_{U_{\alpha,4}}(y) = f(x_\alpha) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_\alpha} |y_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=n_\alpha+1}^n |y_i|^2.$$

– Sur le voisinage $U_{\alpha,4}$, la métrique g^{TX} s'écrit sous la forme

$$(8.1.4) \quad g^{TX}|_{U_{\alpha,4}}(y) = \sum_{i=1}^n dy_i^2.$$

– Sur le voisinage $U_{\alpha,4}$, la métrique g^F est plate, c'est à dire,

$$(8.1.5) \quad \omega(\nabla^F, g^F)|_{U_{\alpha,4}} = 0.$$

REMARQUE 8.1. Ces hypothèses sur f, g^{TX} et g^F apparaissent aussi dans [BZ92, (7.12)].

Pour $1 \leq \alpha \leq l$, soit f^α la fonction C^∞ sur \mathbf{R}^n donnée par

$$(8.1.6) \quad f^\alpha(y) = f(x_\alpha) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_\alpha} |y_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=n_\alpha+1}^n |y_i|^2.$$

Pour $T \geq 0$, on pose

$$(8.1.7) \quad \mathcal{H}_T^\alpha(y, p) = \frac{|p|^2}{2} + T f^\alpha(y).$$

8.2. L'opérateur $L_{\epsilon,b,T}$. Par [BL08, Theorem 15.5.1], on sait que les formes caractéristiques de $L_{b,T}$ sont dans $\mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$. On va montrer qu'elles sont à décroissance gaussiennes sur chaque fibre.

THÉORÈME 8.2. *Pour $b > 0$ et $T \geq 0$, si u est une forme caractéristique de $L_{b,T}$, il existe $c > 0, C > 0$ tels que, pour $(x, p) \in \mathcal{X}^*$, on a*

$$(8.2.1) \quad |u(x, p)|_{\Lambda^*(T^*\mathcal{X}^*) \otimes_{\mathbf{R}} \pi^*F} \leq C e^{-c|p|^2}.$$

DÉMONSTRATION. Soit N'' l'opérateur défini dans [BL08, (15.1.7)]. Par la conjugaison indiqué dans [BL08, (15.1.8)], pour $a > 0$, de (3.2.4), on tire que

(8.2.2)

$$\begin{aligned} a^{N''} L_{b,T} a^{-N''} &= \frac{1}{2b^2} \left(-\Delta^V + |p|^2 - n + 2a^{N''} N^V a^{-N''} \right) \\ &\quad - \frac{1}{b} \left(\nabla_p^\Lambda (T^* \mathcal{X}^*) \otimes F, u - T \nabla_{\widehat{\nabla} f}^V + \frac{1}{2} \omega(\nabla^F, g^F)(e_i) \nabla_{\widehat{e}^i}^V \right) \\ &\quad - \frac{a^2}{4} \langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle (e^i - \widehat{e}_i)(e^j - \widehat{e}_j) i_{e_k + \widehat{e}^k} i_{e_l + \widehat{e}^l} \\ &\quad - a \left(\langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j \rangle - T \nabla_{e_i}^{TX} \nabla_{e_j} f + \frac{1}{2} \nabla_{e_i} \omega(\nabla^F, g^F)(e_j) \right) (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}^j}. \end{aligned}$$

Alors, on choisit $a > 0$ assez petite tel que,

(8.2.3)
$$a |\langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j \rangle (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}^j}| \leq \frac{|p|^2}{4b^2}.$$

Pour simplifier, on ne note pas cette conjugaison. On suppose directement que

(8.2.4)
$$|\langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j \rangle (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}^j}| \leq \frac{|p|^2}{4b^2}.$$

Soit w . un mouvement brownien dans $\widehat{T_x^* X}$ issu de 0. On désigne par dw la différentielle Stratonovich, et par δw la différentielle de Itô. Soit x . une courbe C^1 , on note τ_s^t le transport parallèle le long x . de x_t en x_s pour les connexions ∇^{TX} et $\nabla^{F,u}$. On trivialisé T^*X le long de x . par transport parallèle le long x . pour la connexion de Levi-Civita. On fixe $(x, p) \in \mathcal{X}^*$. Considérons l'équation différentielle stochastique

(8.2.5)
$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= \frac{p_s}{b}, & \dot{p}_s &= \frac{\tau_s^0 \dot{w}_s}{b}, \\ x_0 &= x, & p_0 &= p. \end{aligned}$$

Pour $t > 0$, soit $W_{1,t} \in \text{End} \left(\Lambda(T_x^* X) \otimes \Lambda(\widehat{T_x X}) \right) \otimes_{\mathbf{R}} \text{End}(F_x)$, $W_{2,t} \in T_x^* X \otimes_{\mathbf{R}} \text{End}(F_x)$ les processus donnés par

(8.2.6)
$$\begin{aligned} W_{1,t} &= -\tau_0^t \left(\frac{|p|^2 - 2n + 4N^V}{4b^2} - \frac{1}{4} \langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle (e^i - \widehat{e}_i)(e^j - \widehat{e}_j) i_{e_k + \widehat{e}^k} i_{e_l + \widehat{e}^l} \right. \\ &\quad \left. - \left(\langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j \rangle - T \nabla^{TX} \nabla f(e_i, e_j) + \frac{1}{2} \nabla_{e_i} \omega(\nabla^F, g^F)(e_j) \right) \right. \\ &\quad \left. (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}^j} \right) \tau_t^0, \\ W_{2,t} &= -\tau_0^t \left(T \nabla f - \frac{1}{2} \omega(\nabla^F, g^F) \right) \tau_t^0. \end{aligned}$$

Soit $U_t \in \text{End} \left(\Lambda(T_x^* X) \otimes \Lambda(\widehat{T_x X}) \right) \otimes_{\mathbf{R}} \text{End}(F_x)$ la solution d'équation différentielle stochastique

(8.2.7)
$$\dot{U}_t = U_t \left\{ W_1 + W_2 \left(\frac{\delta w}{dt} \right) \right\}, \quad U_0 = 1.$$

Par la formule de Feynman-Kac [BL08, (4.7.10)], pour $u \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$, on a

$$(8.2.8) \quad \exp(-tL_{b,T})u(x, p) = \mathbf{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{4b^2} \int_0^t |p_s|^2 ds \right) U_t \tau_0^* u(x_t, p_t) \right].$$

Comme τ_0^* est unitaire, par (8.2.8) et par l'inégalité de Hölder, on a

$$(8.2.9) \quad |\exp(-tL_{b,T})u(x, p)| \leq \|u\|_{L^\infty} \left\{ \mathbf{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2b^2} \int_0^t |p_s|^2 ds \right) \right] \right\}^{1/2} \left\{ \mathbf{E} [|U_t|^2] \right\}^{1/2}.$$

Par la formule de Itô [ReY99, Theorem IV.3.3], on a

$$(8.2.10) \quad U_t U_t^* = 1 + \int_0^t U_s (W_{1,s} ds + W_{1,s}^* ds + W_{2,s}(\delta w_s) + W_{2,s}^*(\delta w_s)) U_s^* \\ + \sum_{i=1}^n \int_0^t U_s W_{2,s}(e_i) W_{2,s}^*(e_i) U_s^* ds.$$

Pour $g \in (\Lambda(T_x^* X) \otimes \Lambda(\widehat{T_x X})) \otimes_{\mathbf{R}} F_x$, de (8.2.10), on tire que

$$(8.2.11) \quad \mathbf{E} [|U_t^* g|^2] = |g|^2 + \int_0^t \mathbf{E} [\langle (W_{1,s} + W_{1,s}^*) U_s^* g, U_s^* g \rangle] ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbf{E} [|W_{2,s}^*(e_i) U_s^* g|^2] ds.$$

Par (8.2.4) et (8.2.6), il existe $C > 0$ tel que

$$(8.2.12) \quad \langle (W_1 + W_1^*) U_t^* g, U_t^* g \rangle \leq C(1 + T + \frac{1}{b^2}) \|U_t^* g\|^2, \quad |W_2^*| \leq C(1 + T).$$

Comme $|U_t^*| = |U_t|$, de (8.2.11) et (8.2.12), on tire que

$$(8.2.13) \quad \mathbf{E} [|U_t|^2] \leq 1 + C(1 + T + \frac{1}{b^2}) \int_0^t \mathbf{E} [|U_s|^2] ds.$$

Par (8.2.13) et par l'inégalité de Gronwall, on a

$$(8.2.14) \quad \mathbf{E} [|U_t|^2] \leq \exp(Ct(1 + T + 1/b^2)).$$

Soit $q_t(p, p')$ le noyau de $\exp(\frac{t}{2}(\Delta^V - |p|^2))$ relatif au volume dp' . Par la formule de Mehler [B12, (10.4.2)], on a

$$(8.2.15) \quad q_t(p, p') = \frac{1}{(2\pi \sinh(t))^{n/2}} \exp \left(-\frac{\cosh(t)(|p|^2 + |p'|^2) - 2\langle p, p' \rangle}{2 \sinh(t)} \right).$$

De (8.2.5), (8.2.15), on tire que

$$(8.2.16) \quad \mathbf{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2b^2} \int_0^t |p_s|^2 ds \right) \right] = \int_{p' \in \mathbf{R}^n} q_{t/b^2}(p, p') dp' \\ = \frac{1}{(\cosh(t/b^2))^{n/2}} \exp \left(-\tanh \left(\frac{t}{b^2} \right) \frac{|p|^2}{2} \right).$$

De (8.2.9), (8.2.14) et (8.2.16), on tire que

$$(8.2.17) \quad |\exp(-tL_{b,T})u(x, p)| \leq C_{b,t,T} \exp(-c_{b,t}|p|^2) \|u\|_{L^\infty}.$$

Si u est une forme caractéristique de valeur propre λ , la somme

$$(8.2.18) \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L_{b,T} - \lambda)^n}{n!} u$$

est de terme fini. Comme $u \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$, on a $v \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$.

Comme l'espace caractéristique associé à la valeur propre λ est de dimension finie, comme $L_{b,T}$ préserve cette espace, par (8.2.18), on trouve que

$$(8.2.19) \quad u(x, p) = e^\lambda \exp(-L_{b,T})v(x, p).$$

De (8.2.17) et (8.2.19), on tire le résultat. \square

Soit $\epsilon > 0$. Posons

$$(8.2.20) \quad L_{\epsilon,b,T} = \exp(-\epsilon b T \nabla_p f) L_{b,T} \exp(\epsilon b T \nabla_p f).$$

Par (3.2.4), on a

$$(8.2.21) \quad \begin{aligned} L_{\epsilon,b,T} &= \frac{1}{2b^2} \left(-\Delta^V + \langle p | 1 - 2\epsilon b^2 T \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle - n + 2N^V \right) + \epsilon T^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) |df|^2 \\ &\quad - \frac{1}{b} \left(\nabla_p^{\Lambda \cdot (T^* \mathcal{X}^*) \otimes F, u} - T(1 - \epsilon) \nabla_{\widehat{\nabla} f}^V + \frac{1}{2} \omega(\nabla^F, g^F)(e_i) \nabla_{\widehat{e}^i}^V + \frac{\epsilon b T}{2} \omega(\nabla^F, g^F)(\nabla f) \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle (e^i - \widehat{e}_i)(e^j - \widehat{e}_j) i_{e_k + \widehat{e}^k} i_{e_l + \widehat{e}^l} \\ &\quad - \left(\langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j \rangle - T \nabla^{TX} \nabla f(e_i, e_j) + \frac{1}{2} \nabla_{e_i} \omega(\nabla^F, g^F)(e_j) \right) (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}^j}. \end{aligned}$$

On considère $L_{\epsilon,b,T}$ agissant sur $\mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$. Pour $\epsilon b^2 T \ll 1$, $L_{\epsilon,b,T}$ a la même structure que $L_{b,T}$. Donc, pour $M > 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, $b > 0$, $T \geq 0$, $b^2 T \leq M$, le théorème 8.2 reste encore vrai pour $L_{\epsilon,b,T}$.

PROPOSITION 8.3. *Pour $M > 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, $b > 0$, $T \geq 0$, $b^2 T \leq M$, on a*

$$(8.2.22) \quad \text{Sp } L_{\epsilon,b,T} = \text{Sp } L_{b,T}.$$

DÉMONSTRATION. Par [BL08, Theorem 15.7.1], pour $\epsilon > 0$ assez petit, les spectres des $L_{\epsilon,b,T}$ et $L_{b,T}$ sont formés de valeurs propres. Si $\lambda \in \text{Sp } L_{b,T}$ et soit u une forme caractéristique associée. Par le théorème 8.2, $\exp(-\epsilon b T \nabla_p f)u$ est dans le domaine de $L_{\epsilon,b,T}$, de telle sorte qu'il existe $N > 0$, on a

$$(8.2.23) \quad (L_{\epsilon,b,T} - \lambda)^N \exp(-\epsilon b T \nabla_p f)u = 0.$$

Donc, on a

$$(8.2.24) \quad \text{Sp } L_{\epsilon,b,T} \supset \text{Sp } L_{b,T}.$$

De la même manière, on peut montrer que

$$(8.2.25) \quad \text{Sp } L_{\epsilon,b,T} \subset \text{Sp } L_{b,T},$$

ce qui termine la démonstration. \square

PROPOSITION 8.4. *Pour $\epsilon > 0$, $b > 0$ et $T \geq 0$, $L_{\epsilon,b,T}$ est h -autoadjoint.*

DÉMONSTRATION. On sait que le h -adjoint de $e^{bT\nabla_p f}$ est $e^{-bT\nabla_{p'} f}$. Comme $L_{b,T}$ est h -autoadjoint, $L_{\epsilon,b,T}$ est h -autoadjoint. \square

On désigne par $P_{b,T}^t(x, p, x', p')$ le noyau C^∞ de $\exp(-tL_{b,T}/2)$ par rapport au volume $dv_{\mathcal{X}^*}$, et par $P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p')$ le noyau C^∞ de $\exp(-tL_{\epsilon,b,T}/2)$ par rapport au même volume.

PROPOSITION 8.5. *Pour $M > 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, $b > 0$, $T \geq 0$, $b^2 T \leq M$, $t > 0$, on a*

$$(8.2.26) \quad P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p') = \exp\left(\epsilon b T (-\nabla_p f(x) + \nabla_{p'} f(x'))\right) P_{b,T}^t(x, p, x', p').$$

DÉMONSTRATION. Par la même méthode que dans la preuve de [BL08, Proposition 4.7.1], pour $0 < t_0 < t_1$, $b > 0$, $T > 0$, il existe $c > 0$, $C > 0$ tels que pour $t \in [t_0, t_1]$, on a

$$(8.2.27) \quad |P_{b,T}^t(x, p, x', p')| \leq C \exp\left(-c(|p|^2 + |p'|^2)\right),$$

et les dérivées covariantes de tous ordres en les variables (x, p, x', p', t) vérifient des estimations du même type. Pour $\epsilon b^2 T > 0$ assez petit, $L_{\epsilon,b,T}$ a la même structure que $L_{b,T}$. Donc $P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p')$ et ses dérivées covariantes de tous ordres vérifient aussi des estimations du même type.

On fixe $\epsilon > 0$, $b > 0$, $t > 0$, $T > 0$ tels que $\epsilon b^2 T$ est assez petit. Posons

$$(8.2.28) \quad R_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p') = \exp\left(\epsilon b T (-\nabla_p f(x) + \nabla_{p'} f(x'))\right) P_{b,T}^t(x, p, x', p').$$

Par le théorème de convergence dominée, par les estimations gaussiennes sur les noyaux de la chaleur et par (8.2.28), pour $s \in]0, t[$ et $(x, p), (x'', p'') \in \mathcal{X}^*$, l'intégrale

$$(8.2.29) \quad A_s(x, p, x'', p'') = \int_{(x', p') \in \mathcal{X}^*} P_{\epsilon,b,T}^{t-s}(x, p, x', p') R_{\epsilon,b,T}^s(x', p', x'', p'') dx' dp'$$

est bien définie, et la fonction $A_s(x, p, x'', p'')$ est C^∞ en $(s, x, p, x'', p'') \in]0, t[\times \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*$.

Par les propriétés du semi-groupe, par les estimations gaussiennes sur les noyaux de la chaleur, et par (8.2.28) et (8.2.29), on a

$$(8.2.30) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} A_s(x, p, x'', p'') \\ &= \frac{1}{2} \int_{(x', p') \in \mathcal{X}^*} P_{\epsilon,b,T}^{t-s}(x, p, x', p') (L_{\epsilon,b,T} - e^{-\epsilon b T \nabla_{p'} f} L_{b,T} e^{\epsilon b T \nabla_{p'} f}) R_{b,T}^s(x', p', x'', p'') dx' dp'. \end{aligned}$$

De (8.2.20) et (8.2.30), on tire que

$$(8.2.31) \quad \frac{\partial}{\partial s} A_s(x, p, x'', p'') = 0.$$

Quand $s \rightarrow t$, on a la convergence ponctuelle

$$(8.2.32) \quad R_{b,T}^s(x', p', x'', p'') \rightarrow R_{b,T}^t(x', p', x'', p'').$$

Par les estimations dans (8.2.27), on en déduit que pour (x'', p'') fixés, la convergence dans (8.2.32) peut être prise au sens L^2 des fonctions de (x', p') . On a donc la convergence au sens L^2 des fonctions de (x, p) ,

$$(8.2.33) \quad A_s(x, p, x'', p'') \rightarrow R_{b,T}^t(x, p, x'', p'').$$

Comme $A_s(x, p, x'', p'')$ est une fonction C^∞ de (x, p, x'', p'') , par (8.2.31) et (8.2.33), on a donc l'égalité de fonctions C^∞ de (x, p, x'', p'') ,

$$(8.2.34) \quad A_s(x, p, x'', p'') = R_{b,T}^t(x, p, x'', p'').$$

En faisant tendre s vers 0, on trouve de la même manière qu'on a l'égalité

$$(8.2.35) \quad A_s(x, p, x'', p'') = P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x'', p'').$$

Par (8.2.28), (8.2.34) et (8.2.35), on obtient (8.2.26). Ceci termine la preuve. \square

8.3. Étude de $L_{\epsilon,b,T}$ hors des points critiques. Soit ϕ_0 une fonction C^∞ sur X à valeurs dans $[0, 1]$ telle que

$$(8.3.1) \quad \phi_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in U_1, \\ 0, & x \notin U_2. \end{cases}$$

THÉORÈME 8.6. *Étant donnés $M > 0, \kappa > 0, \epsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$ tels que $M > \kappa, \epsilon_0 > \delta_0$, pour ϵ_0 assez petit, il existe $C > 0, b_0 > 0, T_0 > 0$ tels que, pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, 0 < b \leq b_0, T \geq T_0, \kappa \leq b^2 T \leq M$, si $u \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$, alors on a*

$$(8.3.2) \quad \operatorname{Re} \langle (L_{\epsilon,b,T} + T^2 \phi_0)u, u \rangle \geq CT (\|\nabla^V u\|_{L^2}^2 + \|pu\|_{L^2}^2 + T\|u\|_{L^2}^2).$$

En particulier, si $\pi(\operatorname{Supp} u) \subset X \setminus U_2$, on a

$$(8.3.3) \quad \operatorname{Re} \langle L_{\epsilon,b,T} u, u \rangle \geq CT (\|\nabla^V u\|_{L^2}^2 + \|pu\|_{L^2}^2 + T\|u\|_{L^2}^2).$$

DÉMONSTRATION. Par (8.2.21), on sait que, pour $M > \kappa > 0, \epsilon_0 > \delta_0 > 0$ tels que ϵ_0 assez petit, il existe $b_0 > 0$, tels que pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, 0 < b \leq b_0, T \geq 0, \kappa \leq b^2 T \leq M$, si $u \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$, on a

$$(8.3.4) \quad \operatorname{Re} \langle (L_{\epsilon,b,T} + T^2 \phi_0)u, u \rangle \geq CT \|\nabla^V u\|_{L^2}^2 + CT \|pu\|_{L^2}^2 + CT^2 \langle (|df|^2 + \phi_0)u, u \rangle - C'(T+1)\|u\|_{L^2}^2.$$

Comme $|df|^2 + \phi_0 > c > 0$, de (8.3.4), on tire (8.3.2), ce qui termine la preuve. \square

THÉORÈME 8.7. *Étant donnés $M > 0, \kappa > 0, \epsilon_0 > 0, \delta_0 > 0, \lambda_1 > 0$, tels que $M > \kappa, \epsilon_0 > \delta_0$, pour ϵ_0 assez petit, il existe $C > 0, C' > 0, b_0 > 0, T_0 > 0$ tels que, pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, 0 < b \leq b_0, T \geq T_0, \kappa \leq b^2 T \leq M, \lambda = \lambda_1 + \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \leq C'|\tau|^{1/6}$, si $u \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$ est tel que $\pi(\operatorname{Supp} u) \subset X \setminus U_2$, alors on a*

$$(8.3.5) \quad \|(b^2 L_{\epsilon,b,T} - \lambda)u\|_{L^2} \geq C (1 + |\lambda|^{1/6}) \|u\|_{L^2}.$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$(8.3.6) \quad \begin{aligned} M_{\epsilon,b,T} = & \frac{1}{2b^2} (-\Delta^V + \langle p|1 - 2\epsilon b^2 T \nabla^{TX} \nabla f|p \rangle - n + 2N^V) + \epsilon T^2 (1 - \frac{\epsilon}{2}) |df|^2 + T^2 \phi_0 \\ & - \frac{1}{b} \left(\nabla_p^\Lambda (T^* \mathcal{X}^*) \otimes_{F,u} + \frac{1}{2} \omega(\nabla^F, g^F)(e_i) \nabla_{\widehat{e}^i}^V \right) \\ & - \frac{1}{4} \langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle (e^i - \widehat{e}_i)(e^j - \widehat{e}_j) i_{e_k + \widehat{e}^k} i_{e_l + \widehat{e}^l} \\ & - \left(\langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j \rangle + \frac{1}{2} \nabla_{e_i} \omega(\nabla^F, g^F)(e_j) \right) (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}^j}. \end{aligned}$$

Par (8.2.21), (8.3.6), on a

$$(8.3.7) \quad L_{\epsilon,b,T} + T^2\phi_0 = M_{\epsilon,b,T} + \frac{T}{b}(1 - \epsilon)\nabla_{\nabla f}^V - \frac{\epsilon T}{2}\omega(\nabla^F, g^F)(\nabla f) \\ + T\nabla^{TX}\nabla f(e_i, e_j)(e^i - \widehat{e}_i)i_{e_j + \widehat{e}^j}.$$

On affirme que, sous les hypothèses de notre théorème, pour $T > 0$ assez grand, pour $\text{Re } \lambda \leq \lambda_1$, on a

$$(8.3.8) \quad \|(b^2M_{\epsilon,b,T} - \lambda)u\|_{L^2} \geq C(1 + |\lambda|^{1/6})\|u\|_{L^2}.$$

En effet, comme $|df|^2 + \phi_0 > c > 0$, on obtient (8.3.8) comme une conséquence de [BL08, Theorem 17.5.2].

De (8.3.7), (8.3.8), pour $b^2T \in [\kappa, M]$, $\pi(\text{Supp } u) \subset X \setminus U_2$, on tire que

$$(8.3.9) \quad \|(b^2L_{\epsilon,b,T} - \lambda)u\|_{L^2} + c\sqrt{T}\|\nabla^V u\|_{L^2} + c\|u\|_{L^2} \geq C(1 + |\lambda|^{1/6})\|u\|_{L^2}.$$

D'autre part, par (8.3.3), pour T assez grand et pour $b^2T \in [\kappa, M]$, $\text{Re } \lambda \leq \lambda_1$ et $\pi(\text{Supp } u) \subset X \setminus U_2$, on a

$$(8.3.10) \quad \text{Re} \langle (b^2L_{\epsilon,b,T} - \lambda)u, u \rangle \geq C\|\nabla^V u\|_{L^2}^2 + CT\|u\|_{L^2}^2.$$

De plus, on a

$$(8.3.11) \quad \text{Re} \langle (b^2L_{\epsilon,b,T} - \lambda)u, u \rangle \leq \frac{1}{2CT}\|(b^2L_{\epsilon,b,T} - \lambda)u\|_{L^2}^2 + \frac{CT}{2}\|u\|_{L^2}^2.$$

De (8.3.10), (8.3.11), on tire que

$$(8.3.12) \quad \|(b^2L_{\epsilon,b,T} - \lambda)u\|_{L^2} \geq C\left(\sqrt{T}\|\nabla^V u\|_{L^2} + T\|u\|_{L^2}\right).$$

De (8.3.9), (8.3.12), pour $\text{Re } \lambda \leq \lambda_1$, on tire (8.3.5). De la même méthode que dans la démonstration du corollaire 7.48, on obtient (8.3.5), ce qui termine la preuve. \square

8.4. Étude de $L_{\epsilon,b,T}$ au voisinage des points critiques. On rappelle que $u_{\epsilon,b,T}^\alpha$ est défini dans (7.18.8), qui est une forme définie sur \mathbf{R}^{2n} à support dans $\{y : |y| \leq 2\sigma_0\}$. On identifie maintenant $u_{\epsilon,b,T}^\alpha$ à une section C^∞ sur \mathcal{X}^* de $\Lambda(T^*\mathcal{X}^*)$ qui est nulle sur $\pi^{-1}(X \setminus U_{\alpha,2})$. Comme F est plat, si $f \in F_{x_\alpha}$, on peut identifier $u_{\epsilon,b,T}^\alpha f$ à une section C^∞ sur \mathcal{X}^* de $\Lambda(T^*\mathcal{X}^*) \otimes_{\mathbf{R}} \pi^*F$ qui est nulle sur $\pi^{-1}(X \setminus U_{\alpha,2})$.

Par (7.18.15), on sait que $h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha) > 0$. Soit $J_{\epsilon,b,T} : C(W^u, F) \rightarrow \Omega(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$ l'application linéaire telle que pour $f_\alpha \in F_{x_\alpha}$,

$$(8.4.1) \quad J_{\epsilon,b,T} : W_\alpha^{u,*} \otimes f_\alpha \in C(W^u, F) \rightarrow \frac{u_{\epsilon,b,T}^\alpha}{\sqrt{h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)}} f_\alpha \in \Omega(\mathcal{X}^*, \pi^*F).$$

DÉFINITION 8.8. Pour $\epsilon > 0, b > 0, T > 0$, soit $E_{\epsilon,b,T}$ l'image de $J_{\epsilon,b,T}$.

Comme les supports de $u_{\epsilon,b,T}^\alpha$ sont disjoints, h est alors définie positive sur $E_{\epsilon,b,T}$. L'application linéaire $J_{\epsilon,b,T} : (C(W^u, F), \langle \cdot, \cdot \rangle_{C(W^u, F)}) \rightarrow (E_{\epsilon,b,T}, h)$ est donc une isométrie.

On pose $P_{E_{\epsilon,b,T}}$ la projection h -autoadjointe sur $E_{\epsilon,b,T}$. On rappelle que $P_{\epsilon,b,T}^\alpha$ est défini dans (7.18.18). On identifie $P_{\epsilon,b,T}^\alpha$ à un projecteur h -autoadjoint de $L^2(\mathcal{X}^*, \Lambda(T^*\mathcal{X}^*))$ sur

la droite engendrée par $u_{\epsilon,b,T}^\alpha$. Alors, on a

$$(8.4.2) \quad P_{E_{\epsilon,b,T}} = \sum_{1 \leq \alpha \leq l} P_{\epsilon,b,T}^\alpha \otimes \text{Id}_{F_{x\alpha}}.$$

On pose

$$(8.4.3) \quad P_{E_{\epsilon,b,T}}^{\perp h} = 1 - P_{E_{\epsilon,b,T}}, \quad E_{\epsilon,b,T}^{\perp h} = \text{Im } P_{E_{\epsilon,b,T}}^{\perp h}.$$

PROPOSITION 8.9. *Si $K \subset I$ est compact, il existe $C > 0, c > 0$, tels que, pour $(\epsilon, b^2T) \in K$ et $T \geq 1$, on a*

$$(8.4.4) \quad \|P_{E_{\epsilon,b,T}}\|_1 \leq C, \quad \|L_{\epsilon,b,T} P_{E_{\epsilon,b,T}}\|_1 \leq C e^{-cT}.$$

DÉMONSTRATION. On montre la seconde estimation de (8.4.4), la première peut être montrée par la même méthode. Par (8.4.2), il suffit de montrer (8.4.4) pour $P_{\epsilon,b,T}^\alpha$. Par (7.18.18), on a

$$(8.4.5) \quad \|L_{\epsilon,b,T} P_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_1 = \frac{\|h(\cdot, u_{\epsilon,b,T}^\alpha) L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_1}{h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)}.$$

Par la définition de $\|\cdot\|_1$, pour $v_1, v_2 \in L^2(\mathcal{X}^*, \Lambda(T^* \mathcal{X}^*))$, on a

$$(8.4.6) \quad \|\langle \cdot, v_1 \rangle_{L^2} v_2\|_1 = \|v_1\|_{L^2} \|v_2\|_{L^2}.$$

Par (3.1.11), (8.4.6), on trouve que

$$(8.4.7) \quad \|h(\cdot, u_{\epsilon,b,T}^\alpha) L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_1 = \|r^* u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2} \|L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2}.$$

Comme r^* est une isométrie, par (8.4.7), on a

$$(8.4.8) \quad \|h(\cdot, u_{\epsilon,b,T}^\alpha) L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_1 = \|u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2} \|L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2}.$$

De (7.18.9), (7.18.14), (7.18.16), (8.4.5), (8.4.8), on tire le résultat. \square

PROPOSITION 8.10. *Si $K \subset I$ est compact, il existe $c > 0, C' > 0, \lambda_1 > 0, T_0 > 0$, tels que pour $(\epsilon, b^2T) \in K$, $T \geq T_0$, $\lambda = \lambda_1 + \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \leq C' |\tau|^{1/8}$, si $u \in E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}$ avec $\pi(\text{Supp } u) \subset U_4$, on a*

$$(8.4.9) \quad \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T}) u\|_{L^2} \geq c (1 + |\lambda|^{1/8}) \|u\|_{L^2}.$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer qu'il existe $\alpha \in [1, l]$ tel que $\pi(\text{Supp } u) \in U_{\alpha,4}$. On identifie u comme une forme sur \mathbf{R}^{2n} . De plus, on peut supposer $F = \mathbf{C}$.

On pose

$$(8.4.10) \quad \underline{P}_{\epsilon,\gamma}^\alpha = \frac{h(\cdot, \underline{u}_{\epsilon,\gamma}^\alpha)}{h(\underline{u}_{\epsilon,\gamma}^\alpha, \underline{u}_{\epsilon,\gamma}^\alpha)} \underline{u}_{\epsilon,\gamma}^\alpha, \quad \underline{P}_{\epsilon,b,T}^\alpha = \frac{h(\cdot, \underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha)}{h(\underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha, \underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha)} \underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha.$$

Par (7.18.6), on a

$$(8.4.11) \quad k_{\sqrt{T}} \underline{P}_{\epsilon,\gamma}^\alpha k_{\sqrt{T}}^{-1} = \underline{P}_{\epsilon,b,T}^\alpha.$$

On choisit C', λ_1 tels que le corollaire 7.52 soit vrai.

Par (7.17.61), on a

$$(8.4.12) \quad \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T}) u\|_{L^2} = \frac{1}{T^{n/4}} \|(\lambda - \underline{H}_{\epsilon,\gamma}^\alpha) k_{\sqrt{T}}^{-1} u\|_{L^2}.$$

De (7.17.53), on tire que

$$(8.4.13) \quad \|(\lambda - \underline{H}_{\epsilon,\gamma}^\alpha)k_{\sqrt{T}}^{-1}u\|_{L^2} \geq \|(\lambda - \underline{H}_{\epsilon,\gamma}^\alpha - \underline{P}_{\epsilon,\gamma}^\alpha)k_{\sqrt{T}}^{-1}u\|_{L^2} - \|\underline{P}_{\epsilon,\gamma}^\alpha k_{\sqrt{T}}^{-1}u\|_{L^2} \\ \geq C(1 + |\lambda|^{1/8})T^{n/4}\|u\|_{L^2} - T^{n/4}\|\underline{P}_{\epsilon,b,T}^\alpha u\|_{L^2}.$$

Par (8.4.12), (8.4.13), il suffit de montrer que

$$(8.4.14) \quad \|\underline{P}_{\epsilon,b,T}^\alpha u\|_{L^2} \leq Ce^{-cT}\|u\|_{L^2}.$$

On sait que $u \in E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}$ implique,

$$(8.4.15) \quad h(u, \varphi \underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha) = 0.$$

De (8.4.10) et (8.4.15), on tire que

$$(8.4.16) \quad \|\underline{P}_{\epsilon,b,T}^\alpha u\|_{L^2} = \left\| \frac{h(u, \underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha)}{h(\underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha, \underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha)} \underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha \right\|_{L^2} = \left\| \frac{h(u, (1-\varphi)\underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha)}{h(\underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha, \underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha)} \underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha \right\|_{L^2} \\ \leq \frac{\|(1-\varphi)\underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2} \|\underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2}}{h(\underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha, \underline{u}_{\epsilon,b,T}^\alpha)} \|u\|_{L^2}$$

De (7.18.9), (7.18.14), (7.18.16), (8.4.16), on tire (8.4.14), ce qui termine la preuve. \square

8.5. L'opérateur $L_{\epsilon,b,T}$ comme matrice (2,2). On s'écrit $L_{\epsilon,b,T}$ sous la forme matrice (2,2),

$$(8.5.1) \quad L_{\epsilon,b,T} = \begin{pmatrix} P_{E_{\epsilon,b,T}} L_{\epsilon,b,T} P_{E_{\epsilon,b,T}} & P_{E_{\epsilon,b,T}} L_{\epsilon,b,T} P_{E_{\epsilon,b,T}}^{\perp h} \\ P_{E_{\epsilon,b,T}}^{\perp h} L_{\epsilon,b,T} P_{E_{\epsilon,b,T}} & P_{E_{\epsilon,b,T}}^{\perp h} L_{\epsilon,b,T} P_{E_{\epsilon,b,T}}^{\perp h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 8.11. *Étant donnés $M > 0, \kappa > 0, \epsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$ tels que $M > \kappa, \epsilon_0 > \delta_0$, pour ϵ_0 assez petit, il existe $c > 0, C > 0, C' > 0, \lambda_1 > 0, b_0 > 0, T_0 > 0$ tels que, pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, 0 < b \leq b_0, T \geq T_0, \kappa \leq b^2 T \leq M$, on a*

$$(8.5.2) \quad L_1 = 0, \quad \|L_2\|_1 \leq Ce^{-cT}, \quad \|L_3\|_1 \leq Ce^{-cT}.$$

Si $\lambda = \lambda_1 + \sigma + i\tau$ est tel que $\sigma \leq C'|\tau|^{1/8}$, si $u \in E_{\epsilon,b,T}^{\perp h} \cap \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*(F))$, on a

$$(8.5.3) \quad \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})u\|_{L^2} \geq c(1 + |\lambda|^{1/8})\|u\|_{L^2}.$$

DÉMONSTRATION. Comme les supports de $u_{\epsilon,b,T}^\alpha$ sont disjoints, de (7.18.19), on tire que pour $u, v \in E_{\epsilon,b,T}$, on a

$$(8.5.4) \quad h(L_1 u, v) = 0.$$

Par la non dégénérescence de h sur $E_{\epsilon,b,T}$, on a la première équation de (8.5.2).

On choisit λ_1, b_0, T_0 tels que les résultats des sections 8.3 et 8.4 soient vrais. Par la première équation de (8.5.2), on a

$$(8.5.5) \quad L_2 = L_{\epsilon,b,T} P_{E_{\epsilon,b,T}}.$$

De la proposition 8.9, on tire la deuxième inégalité de (8.5.2).

On sait que $L_{\epsilon,b,T}$ et $P_{\epsilon,b,T}$ sont h -autoadjoints. Alors, pour $u, v \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$, on a

$$(8.5.6) \quad \langle P_{E_{\epsilon,b,T}} L_{\epsilon,b,T} u, v \rangle = h(P_{E_{\epsilon,b,T}} L_{\epsilon,b,T} u, r^* v) \\ = h(u, L_{\epsilon,b,T} P_{E_{\epsilon,b,T}} r^* v) = \langle u, r^* L_{\epsilon,b,T} P_{E_{\epsilon,b,T}} r^* v \rangle.$$

De (8.5.6), on tire que

$$(8.5.7) \quad (P_{E_{\epsilon,b,T}} L_{\epsilon,b,T})^* = r^* L_{\epsilon,b,T} P_{E_{\epsilon,b,T}} r^*,$$

où $*$ désigne l'adjoint par rapport à la produit scalaire L^2 . De plus, la norme $\|\cdot\|_1$ est invariante par $*$, et r^* est une isométrie telle que $r^{*,2} = 1$. Alors on a

$$(8.5.8) \quad \|P_{E_{\epsilon,b,T}} L_{\epsilon,b,T}\|_1 = \|(P_{E_{\epsilon,b,T}} L_{\epsilon,b,T})^*\|_1 = \|r^* L_{\epsilon,b,T} P_{E_{\epsilon,b,T}} r^*\|_1 = \|L_{\epsilon,b,T} P_{E_{\epsilon,b,T}}\|_1.$$

Par la seconde inégalité de (8.5.2) et (8.5.8), on a la troisième inégalité de (8.5.2).

Soit ψ une fonction dans $C^\infty(X, [0, 1])$ telle que

$$(8.5.9) \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in U_2; \\ 0, & x \notin U_4. \end{cases}$$

Pour $u \in E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}$, on a

$$(8.5.10) \quad \begin{aligned} \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})u\|_{L^2} &\geq \frac{1}{2} \left(\|\psi(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})u\|_{L^2} + \|(1 - \psi)(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})u\|_{L^2} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})\psi u\|_{L^2} + \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})(1 - \psi)u\|_{L^2} \right) - b^2 \|[L_{\epsilon,b,T}, \psi]u\|_{L^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})\psi u\|_{L^2} + \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})(1 - \psi)u\|_{L^2} \right) - b\|(\nabla_p \psi)u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Supposons $\operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_1$. Comme $\pi(\operatorname{Supp} (1 - \psi)u) \subset X \setminus U_2$, du théorème 8.6, on tire que

$$(8.5.11) \quad \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})(1 - \psi)u\|_{L^2} \geq C(1 + |\lambda|^{1/6}) \|(1 - \psi)u\|_{L^2}.$$

Comme $\psi = 1$ sur le support de $u_{\epsilon,b,T}^\alpha$, on a $\psi u \in E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}$. De plus, $\pi(\operatorname{Supp} \psi u) \subset U_4$. Par la proposition 8.10, on a

$$(8.5.12) \quad \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})\psi u\|_{L^2} \geq c(1 + |\lambda|^{1/8}) \|\psi u\|_{L^2}.$$

Par (8.2.21), pour ϵ, b, T vérifiant les hypothèses du théorème, on a

$$(8.5.13) \quad \begin{aligned} \|(\nabla_p \psi)u\|_{L^2}^2 &\leq c\|pu\|_{L^2}^2 \leq C_1 \operatorname{Re} \langle (b^2 L_{\epsilon,b,T} - \lambda)u, u \rangle + C_2 \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq C' (\|(b^2 L_{\epsilon,b,T} - \lambda)u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

De (8.5.10)-(8.5.13), pour b_0 assez petit, si $0 < b \leq b_0$, $\operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_1$, $u \in E_{\epsilon,b,T}^{\perp h} \cap \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$, on tire que

$$(8.5.14) \quad \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})u\|_{L^2} \geq c(1 + |\lambda|^{1/8}) \|u\|_{L^2}.$$

En procédant comme dans la démonstration du corollaire 7.48, on obtient (8.5.3), ce qui termine la preuve. \square

On pose $\operatorname{Dom}(L_4) = \operatorname{Dom}(L_{\epsilon,b,T}) \cap E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}$. Si H_1, H_2 sont des espaces de Hilbert, et si $D : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur borné, on pose $\|D\|_{H_1, H_2}$ la norme de D .

COROLLAIRE 8.12. *Étant donnés $M > 0, \kappa > 0, \epsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$ tels que $M > \kappa, \epsilon_0 > \delta_0$, pour ϵ_0 assez petit, il existe $C > 0, C' > 0, \lambda_1 > 0, b_0 > 0, T_0 > 0$ tels que, pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, 0 < b \leq b_0, T \geq T_0, \kappa \leq b^2 T \leq M$, si $u \in \operatorname{Dom}(L_4)$, alors il existe une suite $u_n \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*(F)) \cap E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}$ telle que*

$$(8.5.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\|u - u_n\|_{L^2} + \|L_4 u - L_4 u_n\|_{L^2}) = 0.$$

Si $\lambda = \lambda_1 + \sigma + i\tau$ est tel que $\sigma \leq C'|\tau|^{1/8}$, la résolvante $(\lambda - b^2 L_4)^{-1}$ existe de telle sorte que

$$(8.5.16) \quad \|(\lambda - b^2 L_4)^{-1}\|_{E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}, E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}} \leq \frac{C}{1 + |\lambda|^{1/8}}.$$

DÉMONSTRATION. Par [BL08, Theorem 15.5.1], pour ϵ, b, T vérifiant les hypothèses du corollaire, si $u \in \text{Dom}(L_4)$, il existe une suite $v_n \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*(F))$ telle que

$$(8.5.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\|u - v_n\|_{L^2} + \|L_{\epsilon,b,T} u - L_{\epsilon,b,T} v_n\|_{L^2}) = 0.$$

On pose

$$(8.5.18) \quad u_n = P_{E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}} v_n.$$

Alors, $u_n \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*(F)) \cap E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}$.

Comme $u \in E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}$, on a

$$(8.5.19) \quad u - u_n = P_{E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}}(u - v_n), \quad L_4(u - u_n) = P_{E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}} L_{\epsilon,b,T}(u - v_n).$$

De (7.17.40), (8.5.17), (8.5.19), on tire (8.5.15).

Pour $u \in E_{\epsilon,b,T}^{\perp h} \cap \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^*(F))$, on a

$$(8.5.20) \quad (\lambda - b^2 L_4)u = (\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})u + b^2 P_{E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}} L_{\epsilon,b,T} u.$$

Par le théorème 8.11 et par (8.5.20), pour $T > 0$ assez grand et $b < 0$ assez petit, on a

$$(8.5.21) \quad \begin{aligned} \|(\lambda - b^2 L_4)u\|_{L^2} &\geq \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})u\|_{L^2} - b^2 \|P_{E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}} L_{\epsilon,b,T} u\|_{L^2} \\ &\geq c(1 + |\lambda|^{1/8}) \|u\|_{L^2} - b^2 e^{-cT} \|u\|_{L^2} \geq c'(1 + |\lambda|^{1/8}) \|u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

De (8.5.15), (8.5.21), pour $u \in \text{Dom}(L_4)$, on tire que

$$(8.5.22) \quad \|(\lambda - b^2 L_4)u\|_{L^2} \geq c'(1 + |\lambda|^{1/8}) \|u\|_{L^2}.$$

En particulier, $\lambda - b^2 L_4$ est injective, et $\text{Im}(\lambda - b^2 L_4)$ est fermé dans $E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}$.

On sait que

$$(8.5.23) \quad \overline{\text{Im}(\lambda - b^2 L_4)} = (\ker(\bar{\lambda} - b^2 L_4^*))^\perp.$$

De plus, L_4^* a la même structure que L_4 , alors $\bar{\lambda} - b^2 L_4^*$ est injective. Donc, $\lambda - b^2 L_4$ est inversible de $\text{Dom}(L_4)$ dans $E_{\epsilon,b,T}^{\perp h}$. De (8.5.22), on tire (8.5.16). \square

8.6. Estimation de la résolvante de $L_{\epsilon,b,T}$. Pour $\underline{c} = (c_0, c_1, c_2) \in (\mathbf{R}_+^*)^3$, $\lambda_1 > c_0$, $T \geq 0$, on pose

$$(8.6.1) \quad W_{\lambda_1, \underline{c}} = \left\{ \lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq c_0 e^{-c_1 T} \right\} \cup \left\{ \lambda_1 + \sigma + i\tau \in \mathbf{C} : \sigma \geq c_2 |\tau|^{1/8} \right\}.$$

COROLLAIRE 8.13. *Étant donnés $M > 0, \kappa > 0, \epsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$ tels que $M > \kappa, \epsilon_0 > \delta_0$, pour ϵ_0 assez petit, il existe $C > 0, \underline{c} = (c_0, c_1, c_2) \in (\mathbf{R}_+^*)^3, \lambda_1 > c_0, b_0 > 0, T_0 > 0$ tels que, pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, 0 < b \leq b_0, T \geq T_0, \kappa \leq b^2 T \leq M$, on a*

$$(8.6.2) \quad \text{Sp}(b^2 L_{\epsilon,b,T}) \subset W_{\lambda_1, \underline{c}}.$$

Si $\lambda \notin W_{\lambda_1, \underline{c}}$, on a

$$(8.6.3) \quad \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon, b, T})^{-1}\| \leq C \max \left\{ \frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{1 + |\lambda|^{1/8}} \right\}.$$

DÉMONSTRATION. Si $\lambda - b^2 L_4$ est inversible, et si

$$(8.6.4) \quad H_\lambda = \lambda - b^4 L_2 (\lambda - b^2 L_4)^{-1} L_3$$

est inversible, on a

$$(8.6.5) \quad \begin{pmatrix} \lambda & -b^2 L_2 \\ -b^2 L_3 & \lambda - b^2 L_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} H_\lambda^{-1} & b^2 H_\lambda^{-1} L_2 (\lambda - b^2 L_4)^{-1} \\ b^2 (\lambda - b^2 L_4)^{-1} L_3 H_\lambda^{-1} & (\lambda - b^2 L_4)^{-1} + b^4 (\lambda - b^2 L_4)^{-1} L_3 H_\lambda^{-1} L_2 (\lambda - L_4)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Par le corollaire 8.12, on sait qu'il existe $c_2 > 0, \lambda_1 > 0$ tels que pour $\lambda = \lambda_1 + \sigma + i\tau$ est tel que $\sigma \leq C'|\tau|^{1/8}$, $\lambda - b^2 L_4$ est inversible. Alors, pour montrer (8.6.2), il suffit de montrer que, pour $\lambda \notin W_{\lambda_1, \underline{c}}$, H_λ est inversible.

De (8.5.2), (8.5.16), pour $\lambda = \lambda_1 + \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \leq c_2|\tau|^{1/8}$, on tire que

$$(8.6.6) \quad \|b^4 L_2 (\lambda - b^2 L_4)^{-1} L_3\|_{E_{\epsilon, b, T}, E_{\epsilon, b, T}} \leq C b^4 e^{-cT}.$$

Par (8.6.4), (8.6.6), il existe $0 < c_0 < \lambda_1$ tel que pour $|\lambda| \geq c_0 e^{-cT}$, H_λ est inversible de telle sorte que

$$(8.6.7) \quad \|H_\lambda^{-1}\|_{E_{\epsilon, b, T}, E_{\epsilon, b, T}} \leq \frac{C}{|\lambda|},$$

ce qui nous donne (8.6.2).

De (8.5.2), (8.5.16), (8.6.5), (8.6.7), on tire (8.6.3). \square

On sait que $L_{\epsilon, b, T}$ préserve le degré des formes. Soit $F_{\epsilon, b, T}^i$ la somme directe des espaces caractéristiques $L_{\epsilon, b, T}$ de degré i associés aux valeurs propres λ telles que $|\lambda| \leq c_0 e^{-c_1 T}$. On choisit $\eta_0 \in]c_0, \lambda_1[$. Le projecteur spectral sur $F_{\epsilon, b, T}^i$ est donné par

$$(8.6.8) \quad P_{F_{\epsilon, b, T}^i} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=\eta_0} (\lambda - b^2 L_{\epsilon, b, T})^{-1} d\lambda.$$

Soit M_i le nombre des points critiques à l'indice i .

COROLLAIRE 8.14. *Étant donnés $M > 0, \kappa > 0, \epsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$ tels que $M > \kappa, \epsilon_0 > \delta_0$, pour ϵ_0 assez petit, il existe $c > 0, C > 0, C' > 0, \underline{c} = (c_0, c_1, c_2) \in (\mathbf{R}_+^*)^3, \lambda_1 > c_0, b_0 > 0, T_0 > 0$, tels que, pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, 0 < b \leq b_0, T \geq T_0, \kappa \leq b^2 T \leq M, \lambda \notin W_{\underline{c}, \lambda_1}$, on a*

$$(8.6.9) \quad \left\| (\lambda - b^2 L_{\epsilon, b, T})^{-1} - \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda - b^2 L_4)^{-1} \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \frac{C}{|\lambda|} e^{-cT}.$$

En particulier, on a

$$(8.6.10) \quad \|P_{F_{\epsilon, b, T}^i} - P_{E_{\epsilon, b, T}^i}\|_1 \leq C e^{-cT}.$$

Pour $0 \leq i \leq n$, pour T assez grand, on a

$$(8.6.11) \quad \dim F_{\epsilon, b, T}^i = M_i \operatorname{rg}[F].$$

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \notin W_{\epsilon, \lambda_1}$. Par (8.6.5), on a

$$(8.6.12) \quad (\lambda - b^2 L_{\epsilon, b, T})^{-1} - \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda - b^2 L_4)^{-1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} H_\lambda^{-1} - \lambda^{-1} & H_\lambda^{-1} b^2 L_2 (\lambda - b^2 L_4)^{-1} \\ (\lambda - b^2 L_4)^{-1} b^2 L_3 H_\lambda^{-1} & (\lambda - b^2 L_4)^{-1} b^4 L_3 H_\lambda^{-1} L_2 (\lambda - b^2 L_4)^{-1} \end{pmatrix}.$$

De (7.17.40), (8.5.2), (8.5.16), (8.6.7), on tire que, pour $\lambda \notin W_{\epsilon, \lambda_1}$

$$(8.6.13) \quad \|H_\lambda^{-1} b^2 L_2 (\lambda - b^2 L_4)^{-1}\|_1, \|(\lambda - b^2 L_4)^{-1} b^2 L_3 H_\lambda^{-1}\|_1, \\ \|(\lambda - b^2 L_4)^{-1} b^4 L_3 H_\lambda^{-1} L_2 (\lambda - b^2 L_4)^{-1}\|_1 \leq \frac{C}{|\lambda|} e^{-cT}.$$

De plus, par l'identité résolvante, on a

$$(8.6.14) \quad H_\lambda^{-1} - \lambda^{-1} = \lambda^{-1} b^4 L_2 (\lambda - b^2 L_4)^{-1} L_3 H_\lambda^{-1}.$$

Comme

$$(8.6.15) \quad \|H_\lambda^{-1} - \lambda^{-1}\|_1 = \|P_{E_{\epsilon, b, T}}(H_\lambda^{-1} - \lambda^{-1})\|_1 \leq \|P_{E_{\epsilon, b, T}}\|_1 \|H_\lambda^{-1} - \lambda^{-1}\|,$$

de (8.4.4), (8.6.14), par le même calcul que (8.6.13), on tire que

$$(8.6.16) \quad \|H_\lambda^{-1} - \lambda^{-1}\|_1 \leq \frac{C}{|\lambda|} e^{-cT}.$$

Par (8.6.13), (8.6.16), on a (8.6.9).

Du corollaire 8.12, on tire que

$$(8.6.17) \quad \int_{|\lambda|=\eta_0} (\lambda - b^2 L_4)^{-1} d\lambda = 0.$$

De (8.6.8), (8.6.9), (8.6.17), on a (8.6.10).

De plus, la trace d'un projecteur est un entier. Alors pour T assez grand, on a

$$(8.6.18) \quad \text{Tr} [P_{F_{\epsilon, b, T}}] = \text{Tr} [P_{E_{\epsilon, b, T}}],$$

ce qui nous donne (8.6.11) et on termine la preuve. \square

COROLLAIRE 8.15. *Étant donnés $M > 0, \kappa > 0, \epsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$ tels que $M > \kappa, \epsilon_0 > \delta_0$, pour ϵ_0 assez petit, il existe $b_0 > 0, T_0 > 0$ tels que, pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, 0 < b \leq b_0, T \geq T_0, \kappa \leq b^2 T \leq M$, la restriction de h à $F_{\epsilon, b, T}$ est définie positive. En particulier, $L_{\epsilon, b, T}$ est de type de Hodge.*

DÉMONSTRATION. Soit $u \in F_{\epsilon, b, T}$ tel que $\|u\|_{L^2} = 1$. Par (8.6.10), on a

$$(8.6.19) \quad \|P_{E_{\epsilon, b, T}} u - u\|_{L^2} = \|(P_{E_{\epsilon, b, T}} - P_{F_{\epsilon, b, T}}) u\|_{L^2} \leq C e^{-cT}.$$

On sait que

$$(8.6.20) \quad h(u, u) = h(P_{E_{\epsilon, b, T}} u, P_{E_{\epsilon, b, T}} u) + h(u - P_{E_{\epsilon, b, T}} u, u) + h(P_{E_{\epsilon, b, T}} u, u - P_{E_{\epsilon, b, T}} u).$$

Par (7.18.16) et (8.6.19), on a

$$(8.6.21) \quad h(P_{E_{\epsilon, b, T}} u, P_{E_{\epsilon, b, T}} u) \geq c \|P_{E_{\epsilon, b, T}} u\| \geq c - C' e^{-cT}, \\ |h(u - P_{E_{\epsilon, b, T}} u, u)| \leq e^{-cT}, \\ |h(P_{E_{\epsilon, b, T}} u, u - P_{E_{\epsilon, b, T}} u)| \leq e^{-cT}.$$

De (8.6.20), (8.6.21), on tire le résultat. \square

COROLLAIRE 8.16. *Étant donnés $M > 0, \kappa > 0, \epsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$ tels que $M > \kappa, \epsilon_0 > \delta_0$, pour ϵ_0 assez petit, il existe $b_0 > 0, T_0 > 0$ tels que, pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, 0 < b \leq b_0, T \geq T_0, \kappa \leq b^2 T \leq M$, on a*

$$(8.6.22) \quad \text{Sp}(L_{\epsilon,b,T}|_{F_{\epsilon,b,T}}) \subset \mathbf{R}_+.$$

DÉMONSTRATION. La restriction de $L_{\epsilon,b,T}$ au sous-espace $F_{\epsilon,b,T}$ est un carré d'opérateurs h -autoadjoint. Par le corollaire 8.15, h est définie positive sur $F_{\epsilon,b,T}$. Alors on a le résultat. \square

REMARQUE 8.17. De la proposition 8.3, des corollaires 8.13, 8.14 et 8.16, on tire le théorème 0.2.

THÉORÈME 8.18. *Étant donnés $M > 0, \kappa > 0, \epsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$ tels que $M > \kappa, \epsilon_0 > \delta_0$, pour ϵ_0 assez petit, il existe $c > 0, b_0 > 0, T_0 > 0$ tels que pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, 0 < b \leq b_0, T \geq T_0, \kappa \leq b^2 T \leq M$, pour $u \in E_{\epsilon,b,T}$, quand $T \rightarrow \infty$, on a*

$$(8.6.23) \quad P_{F_{\epsilon,b,T}} u = u + \mathcal{O}(e^{-cT}) \|u\|_{L^2},$$

pour tous les semi-normes sur $\mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $F = \mathbf{C}$. Il suffit de montrer que

$$(8.6.24) \quad P_{F_{\epsilon,b,T}} u_{\epsilon,b,T}^\alpha = u_{\epsilon,b,T}^\alpha + \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

pour tous les semi-normes sur $\mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \mathbf{C})$.

Par (8.6.8), on a

$$(8.6.25) \quad P_{F_{\epsilon,b,T}} u_{\epsilon,b,T}^\alpha - u_{\epsilon,b,T}^\alpha = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=\eta_0} \left((\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-1} - \lambda^{-1} \right) u_{\epsilon,b,T}^\alpha d\lambda \\ = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=\eta_0} \lambda^{-1} (\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-1} b^2 L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha d\lambda.$$

Soit $\|\cdot\|_{sc,s}$ la norme semi-classique, qui dépend de b , introduite dans [BL08, Section 17.4]. On affirme que pour $b^2 T$ borné et ϵ assez petit tels que

$$(8.6.26) \quad \langle p | 1 - 2\epsilon b^2 T \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle \geq \frac{|p|^2}{2},$$

et pour $s > 0$, il existe $C_s > 0, N > 0$ tels que

$$(8.6.27) \quad \|u\|_{sc,s+1/4} \leq C_s T^N (\|b^2 L_{\epsilon,b,T} u\|_{sc,s} + \|u\|_{L^2}).$$

En effet, si T est borné, l'opérateur $b^2 L_{\epsilon,b,T}$ a le même type que l'opérateur considéré dans [BL08, Theorem 17.5.2]. Quand T est arbitraire, les estimations du type [BL08, (17.5.20), (17.5.21)] restent vraies avec des constantes C_s remplacés par $C_s T^N$. En procédant comme dans [BL08, Theorem 15.5.1], on obtient (8.6.27).

Par (8.6.27), pour $|\lambda| = \eta_0$, on a

$$(8.6.28) \quad \|u\|_{sc,s+1/4} \leq C_s T^N (\|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T}) u\|_{sc,s} + \|u\|_{L^2}).$$

De (8.6.2), (8.6.28), on tire que

$$(8.6.29) \quad \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-1} L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{sc,s+1/4} \\ \leq C_s T^N (\|L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{sc,s} + \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-1} L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2}).$$

De plus, par (8.4.4), (8.6.3), pour $|\lambda| = \eta_0$, on a

$$(8.6.30) \quad \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-1} L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2} \leq C e^{-cT} \|u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2}.$$

Par la même méthode qu'à la proposition 7.53, on a

$$(8.6.31) \quad \|L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{sc,s} \leq C_s e^{-cT} \|u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2}.$$

De (8.6.29)-(8.6.31), on tire que

$$(8.6.32) \quad \|(\lambda - b^2 L_{b,T})^{-1} L_{\epsilon,b,T} u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{sc,s+1/4} \leq C_s e^{-cT} \|u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{L^2}.$$

Par (7.18.16), (8.6.25), (8.6.32), on a

$$(8.6.33) \quad \|P_{F_{\epsilon,b,T}} u_{b,T}^\alpha - u_{\epsilon,b,T}^\alpha\|_{sc,s} \leq C_s e^{-cT}.$$

Comme les normes semi-classiques diffèrent de normes de Sobolev par des polynômes en b , et $b^2 \in [\kappa/T, M/T]$, alors pour toute la semi-norme $|\cdot|$ de $\mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \mathbf{C})$, on obtient

$$(8.6.34) \quad |P_{F_{\epsilon,b,T}} u_{\epsilon,b,T}^\alpha - u_{\epsilon,b,T}^\alpha| \leq C e^{-cT},$$

ce qui nous donne le résultat. \square

8.7. Le complexe de Witten hypoelliptique. Soit W l'application linéaire donnée par

$$(8.7.1) \quad W : u \in \mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^* F) \rightarrow e^{\mathcal{H}_{b,T} + \epsilon T \nabla_p f + \mu_0} K_b^{-1} u \in \Omega_{b,T}(\mathcal{X}^*, \pi^* F).$$

On pose $\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$ la somme directe d'espaces caractéristiques de l'opérateur $2A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$ pour les valeurs propres dans $[0, 1]$. Par (3.1.12), (3.1.14), (8.2.20), et par les corollaires 8.13 et 8.15, pour $b > 0$ assez petit, $T > 0$ assez grand et $b^2 T \in [\kappa, M]$, $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}$ est une métrique sur $\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$. De plus, W est une isométrie entre

$$(8.7.2) \quad (F_{\epsilon,b,T}, b^n h) \rightarrow \left(\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F), \mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)} \right).$$

On appelle $\left(\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F), d^{\mathcal{X}^*} \right)$ le complexe de Witten hypoelliptique.

8.8. L'application de de Rham. Dans cette sous-section, on va rappeler la construction et les propriétés de l'application de de Rham. Ici, nous suivons [BZ92, Section II.c].

Dans la suite de cette section, on suppose de plus que ∇f vérifie la condition de transversalité de Smale. Par [BZ92, Proposition 1, Appendix], la cellule instable W_α^u définit un courant de dimension n_α . Soit P_{dR} l'application linéaire définie par

$$(8.8.1) \quad P_{dR} : u \in \Omega(X, F) \mapsto \sum_\alpha W_\alpha^{u,*} \int_{W_\alpha^u} u \in C(W^u, F).$$

Par [BZ92, Propositions 2,3, Appendix], $P_{dR} : (\Omega(X, F), d^X) \rightarrow (C(W^u, F), \partial)$ est un quasiisomorphisme.

On rappelle que l'injection $i : X \rightarrow \mathcal{X}^*$ est défini par la section nulle. Alors, on obtient un morphisme du complexe

$$(8.8.2) \quad P_{dR,b,T} : u \in \Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F) \rightarrow P_{dR} i^* u \in C(W^u, F).$$

Par [BL08, Theorem 3.2.2], $P_{dR,b,T}$ est un quasiisomorphisme. On va montrer dans la sous-section 8.9 qu'il est un isomorphisme du complexe.

8.9. L'application $e_{\epsilon,b,T}$. Par (8.4.1), posons

$$(8.9.1) \quad \tilde{e}_{\epsilon,b,T} = P_{F_{\epsilon,b,T}} J_{\epsilon,b,T}, \quad e_{\epsilon,b,T} = W \tilde{e}_{\epsilon,b,T}.$$

Alors $e_{\epsilon,b,T}$ est une application linéaire de $C(W^u, F)$ dans $\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$. Soit $e_{\epsilon,b,T}^*$ l'adjoint de $e_{\epsilon,b,T}$ relative aux $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C(W^u, F)}$ et $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}$.

PROPOSITION 8.19. *Étant donnée $M > 0$, $\kappa > 0$, $\epsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, tels que $M > \kappa$, $\epsilon > \delta_0$, pour $\epsilon_0 > 0$ assez petit, il existe $C > 0$, $c > 0$, $b_0 > 0$, $T_0 > 0$ tels que, pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, $0 < b \leq b_0$, $T \geq T_0$, $\kappa \leq b^2 T \leq M$, on a*

$$(8.9.2) \quad \|e_{\epsilon,b,T}^* e_{\epsilon,b,T} - b^n\| \leq C e^{-cT}.$$

DÉMONSTRATION. Par (8.7.2), pour $s_1, s_2 \in C(W^u, F)$, on a

$$(8.9.3) \quad \langle e_{\epsilon,b,T}^* e_{\epsilon,b,T} s_1, s_2 \rangle_{C(W^u, F)} = \mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}(e_{\epsilon,b,T} s_1, e_{\epsilon,b,T} s_2) = b^n h(\tilde{e}_{\epsilon,b,T} s_1, \tilde{e}_{\epsilon,b,T} s_2).$$

Du théorème 8.18, on tire que

$$(8.9.4) \quad \langle e_{\epsilon,b,T}^* e_{\epsilon,b,T} s_1, s_2 \rangle_{C(W^u, F)} = b^n h(J_{\epsilon,b,T} s_1, J_{\epsilon,b,T} s_2) + \mathcal{O}(e^{-cT}) \|s_1\|_{C(W^u, F)} \|s_2\|_{C(W^u, F)}.$$

Comme $J_{\epsilon,b,T}$ est une isométrie, on tire le résultat. \square

Soit \mathcal{F} et \mathcal{N} des applications

$$(8.9.5) \quad \mathcal{F} : x_\alpha \in B \rightarrow f(x_\alpha) \in \mathbf{R}, \quad \mathcal{N} : x_\alpha \in B \rightarrow n_\alpha \in \mathbf{N}.$$

THÉORÈME 8.20. *Étant donnée $M > 0$, $\kappa > 0$, $\epsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, tels que $M > \kappa$, $\epsilon > \delta_0$, pour $\epsilon_0 > 0$ assez petit, il existe $c > 0$, $b_0 > 0$, $T_0 > 0$ tels que, pour $\delta_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, $0 < b \leq b_0$, $T \geq T_0$, $\kappa \leq b^2 T \leq M$, on a, quand $T \rightarrow \infty$,*

$$(8.9.6) \quad P_{dR,b,T} e_{\epsilon,b,T} = e^{TF} \frac{\pi^{\frac{\mathcal{N}-n}{2}}}{T^{\mathcal{N}/2-n/4}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4b^2 T}}{2} \right)^{\mathcal{N}/2} (1 + \mathcal{O}(e^{-cT})).$$

En particulier, pour T assez grand, $P_{dR,b,T}$ dans (8.8.2) est un isomorphisme du complexe de $(\Omega_{b,T}^{[0,1]}(X, F), d^{\mathcal{X}^*})$ à $(C(W^u, F), \partial)$.

DÉMONSTRATION. Par (8.7.1), (8.8.1), (8.9.1), pour $f_\alpha \in F_{x_\alpha}$, on a

$$(8.9.7) \quad P_{dR,b,T} e_{\epsilon,b,T} (W_\alpha^{u,*} \otimes f_\alpha) = \sum_{\beta: n_\beta = n_\alpha} W_\beta^{u,*} \otimes f_\alpha \int_{W_\beta^u} i^* W P_{F_{\epsilon,b,T}} \frac{u_{\epsilon,b,T}^\alpha}{\sqrt{h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)}}.$$

Par (3.1.9), on a

$$(8.9.8) \quad i^* W = i^* e^{\mathcal{H}_{b,T} + \epsilon T \nabla_p f + \mu_0} K_b^{-1} = e^{Tf} i^*.$$

De (8.9.7), (8.9.8), on tire que

$$\begin{aligned} P_{dR,b,T} e_{\epsilon,b,T} (W_\alpha^{u,*} \otimes f_\alpha) &= \sum_{\beta: n_\beta = n_\alpha} W_\beta^{u,*} \otimes f_\alpha \int_{W_\beta^u} e^{Tf} i^* P_{F_{\epsilon,b,T}} \frac{u_{\epsilon,b,T}^\alpha}{\sqrt{h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)}} \\ &= \sum_{\beta: n_\beta = n_\alpha} W_\beta^{u,*} \otimes f_\alpha e^{Tf(x_\beta)} \int_{W_\beta^u} e^{T(f-f(x_\beta))} i^* P_{F_{\epsilon,b,T}} \frac{u_{\epsilon,b,T}^\alpha}{\sqrt{h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)}}. \end{aligned}$$

Comme sur W_β^u , on a $f(x) \leq f(x_\beta)$, par (7.18.16) et par le théorème 8.18, on a

$$(8.9.9) \quad \int_{W_\beta^u} e^{T(f-f(x_\beta))} i^* P_{F_{\epsilon,b,T}} \frac{u_{\epsilon,b,T}^\alpha}{\sqrt{h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)}} = \int_{W_\beta^u} e^{T(f-f(x_\beta))} i^* \frac{u_{\epsilon,b,T}^\alpha}{\sqrt{h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)}} + \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

Pour $\beta = \alpha$, par (7.18.4), (7.18.5) et (7.18.8), on a

$$(8.9.10) \quad \int_{W_\alpha^u} e^{T(f-f(x_\alpha))} i^* \frac{u_{b,T}^\alpha}{\sqrt{h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)}} = \int_{W_\alpha^u \cap U_{\alpha,2}} \varphi(y', 0) e^{-\frac{T|y'|^2}{2}} \frac{e^{-\frac{T\sqrt{1+4b^2T}|y'|^2}{2}}}{\sqrt{h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)}} dy' \\ = \frac{\pi^{\frac{n_\alpha-n}{2}}}{T^{n_\alpha/2-n/4}} \left(\frac{1 + \sqrt{1+4b^2T}}{2} \right)^{n_\alpha/2} + \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

Pour $\alpha \neq \beta$, $n_\alpha = n_\beta$, par [BZ92, Appendix, Proposition 2], $x_\alpha \notin \overline{W_\beta^u}$. Alors,

$$(8.9.11) \quad \int_{W_\beta^u} e^{T(f-f(p_\beta))} i^* \frac{u_{\epsilon,b,T}^\alpha}{\sqrt{h(u_{\epsilon,b,T}^\alpha, u_{\epsilon,b,T}^\alpha)}} = \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

De (8.9.9)-(8.9.11), on tire (8.9.6). Pour T assez grand, $P_{dR,b,T}$ est surjective. Par (8.6.11), $C(W^u, F)$ a la même dimension que $\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$. Alors $P_{dR,b,T}$ est un isomorphisme. \square

9. Une intégrale de contour

Dans cette section, en s'inspirant de [BG01, Chapter 8], on construit une 1-forme fermée β sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$. Cette forme joue un rôle fondamental dans la suite. Dans cette section, on fixe $\gamma > 0$. On suppose que $b > 0$, $T > 0$ tels que $b^2T = \gamma$.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la sous-section 9.1, on construit cette 1-forme fermée β sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

Dans la sous-section 9.2, en intégrant β sur un contour, on obtient une identité.

9.1. Une 1-forme fermée fondamentale. Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$(9.1.1) \quad r(x) = (1 - 2x)e^{-x}.$$

Alors

$$(9.1.2) \quad \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial a} \right) \Big|_{a=1} e^{-ax} = r(x).$$

Pour $t > 0$, $T > 0$, on pose

$$(9.1.3) \quad v_{t,T} = -\mathrm{Tr}_s \left[\mathcal{H}_T r \left(\frac{t}{2} L_{b,T} \right) \right], \quad w_{t,T} = \mathrm{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot (T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} r \left(\frac{t}{2} L_{b,T} \right) \right].$$

Notons qu'ici $b = \sqrt{\gamma/T}$ est une fonction de T .

PROPOSITION 9.1. *Pour $\epsilon > 0$, $b > 0$, $t > 0$, $T > 0$ si $\epsilon b^2 T > 0$ est assez petit, on a*

$$(9.1.4) \quad v_{t,T} = -\mathrm{Tr}_s \left[\mathcal{H}_T r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon,b,T} \right) \right], \quad w_{t,T} = \mathrm{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot (T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon,b,T} \right) \right].$$

DÉMONSTRATION. On va démontrer la première équation de (9.1.4). La preuve pour la deuxième équation est identique.

Par (9.1.1), les noyaux C^∞ des opérateurs $\mathcal{H}_{Tr} \left(\frac{t}{2} L_{b,T} \right)$ et $\mathcal{H}_{Tr} \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon,b,T} \right)$ sont donnés par

$$(9.1.5) \quad \mathcal{H}_T(x, p)(1 - tL_{b,T})P_{b,T}^t(x, p, x', p'), \quad \mathcal{H}_T(x, p)(1 - tL_{\epsilon,b,T})P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p').$$

Par (8.2.20) et (8.2.26), on a

$$(9.1.6) \quad \begin{aligned} & \mathcal{H}_T(x, p)(1 - tL_{\epsilon,b,T})P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p') \\ &= \exp \left(\epsilon b T (-\nabla_p f(x) + \nabla_{p'} f(x')) \right) \mathcal{H}_T(x, p)(1 - tL_{b,T})P_{b,T}^t(x, p, x', p'). \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$(9.1.7) \quad \begin{aligned} & \left\{ \mathcal{H}_T(x, p)(1 - tL_{\epsilon,b,T})P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p') \right\} \Big|_{(x', p')=(x, p)} \\ &= \left\{ \mathcal{H}_T(x, p)(1 - tL_{b,T})P_{b,T}^t(x, p, x', p') \right\} \Big|_{(x', p')=(x, p)}. \end{aligned}$$

Les opérateurs $\mathcal{H}_{Tr} \left(\frac{t}{2} L_{b,T} \right)$ et $\mathcal{H}_{Tr} \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon,b,T} \right)$ sont à trace. Par les estimations gaussiennes sur les noyaux de la chaleur et par (9.1.7), on a

$$(9.1.8) \quad \begin{aligned} & \text{Tr}_s \left[\mathcal{H}_{Tr} \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon,b,T} \right) \right] \\ &= \int_{(x,p) \in \mathcal{X}^*} \mathcal{H}_T(x, p) \text{Tr}_s[(1 - tL_{\epsilon,b,T})P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p')|_{(x', p')=(x, p)}] dx dp \\ &= \int_{(x,p) \in \mathcal{X}^*} \mathcal{H}_T(x, p) \text{Tr}_s[(1 - tL_{b,T})P_{b,T}^t(x, p, x', p')|_{(x', p')=(x, p)}] dx dp \\ &= \text{Tr}_s \left[\mathcal{H}_{Tr} \left(\frac{t}{2} L_{b,T} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. \square

DÉFINITION 9.2. Soit β la 1-forme sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ donnée par

$$(9.1.9) \quad \beta = v_{t,T} \frac{dT}{T} + w_{t,T} \frac{dt}{t}.$$

PROPOSITION 9.3. La 1-forme β est fermée.

DÉMONSTRATION. On pose

$$(9.1.10) \quad \beta' = -\text{Tr}_s \left[\mathcal{H}_T \exp \left(-\frac{t}{2} L_{b,T} \right) \right] \frac{dT}{T} + \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} \exp \left(-\frac{t}{2} L_{b,T} \right) \right] \frac{dt}{t}.$$

Pour $a > 0$, soit s_a la dilatation sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ définie par

$$(9.1.11) \quad (t, T) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \rightarrow (at, T) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*.$$

Par (9.1.2), on a

$$(9.1.12) \quad \beta = \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial a} \right) \Big|_{a=1} s_a^* \beta'.$$

Alors il suffit de montrer que la 1-forme β' est fermée. On procède comme dans [BZ92, Theorem 5.2].

Par (3.1.10), (3.1.14), (3.2.2) et (9.1.10), on a

$$(9.1.13) \quad \beta' = -\text{Tr}_s \left[\mathcal{H}_{b,T} \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 \right) \right] \frac{dT}{T} + \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 \right) \right] \frac{dt}{t}.$$

Par définition, on a

$$(9.1.14) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2t} \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial l} \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 - l \left[A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}, \frac{\partial A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}}{\partial T} \right] \right) \right] \Big|_{l=0}. \end{aligned}$$

Comme Tr_s s'annule sur les supercommutateurs, de (9.1.14), on tire que

$$(9.1.15) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2t} \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial l} \text{Tr}_s \left[\left[A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}, N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} \right] \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 - l \frac{\partial A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}}{\partial T} \right) \right] \Big|_{l=0}. \end{aligned}$$

Par (3.1.8), (3.2.4), on a

$$(9.1.16) \quad \left[A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}, N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} \right] = \frac{-d^{\mathcal{X}^*} + \bar{d}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^{\mathcal{X}^*}}{2}, \quad \frac{\partial A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}}{\partial T} = -\frac{1}{T} \left[\bar{d}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^{\mathcal{X}^*}, \mathcal{H}_{b,T} \right].$$

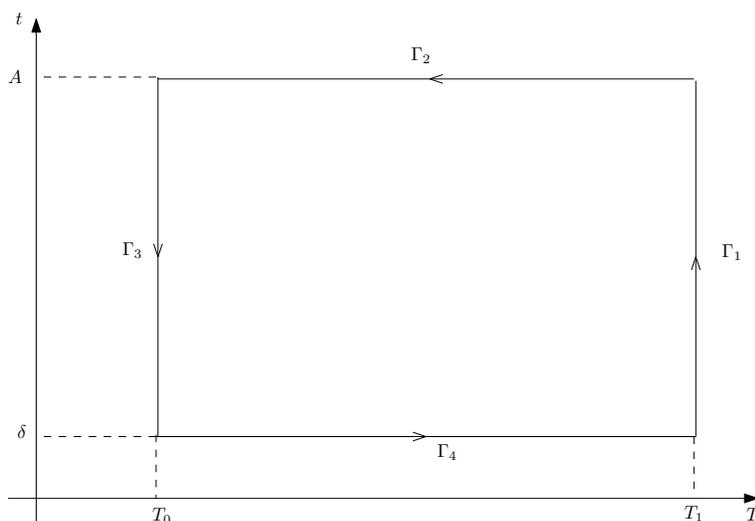
De (9.1.15), (9.1.16), on tire que

$$(9.1.17) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2t} \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{4T} \frac{\partial}{\partial l} \text{Tr}_s \left[\left(d^{\mathcal{X}^*} - \bar{d}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^{\mathcal{X}^*} \right) \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 + l \left[\bar{d}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^{\mathcal{X}^*}, \mathcal{H}_{b,T} \right] \right) \right] \Big|_{l=0}. \end{aligned}$$

Utilisant encore le fait que Tr_s s'annule sur les supercommutateurs, par (9.1.17) et $\left[\bar{d}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^{\mathcal{X}^*}, A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 \right] = 0$, on a

$$(9.1.18) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2t} \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{4T} \frac{\partial}{\partial l} \text{Tr}_s \left[\left[\bar{d}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^{\mathcal{X}^*}, d^{\mathcal{X}^*} - \bar{d}_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^{\mathcal{X}^*} \right] \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 + l \mathcal{H}_{b,T} \right) \right] \Big|_{l=0} \\ &= \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial l} \text{Tr}_s \left[A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 + l \mathcal{H}_{b,T} \right) \right] \Big|_{l=0} \\ &= -\frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \text{Tr}_s \left[\mathcal{H}_{b,T} \exp \left(-tA_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

De (9.1.13), (9.1.18), on tire que la 1-forme β' est fermée, et on termine la preuve. \square

FIGURE 9.1. Le contour Γ .

9.2. L'intégrale de contour. Soit $\delta > 0$, $A > 0$, $T_0 > 0$ et $T_1 > 0$ tels que $\delta < A$ et $T_0 < T_1$. Soit Γ la rectange orientée dans $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ indiquée par la figure 9.1. Le contour Γ est composé par les 4 segments orientés Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 et Γ_4 . Comme β est fermée, on a

$$(9.2.1) \quad \int_{\Gamma} \beta = 0.$$

Pour $k = 1, 2, 3, 4$, on pose

$$(9.2.2) \quad I_k^0 = \int_{\Gamma_k} \beta.$$

Alors,

$$(9.2.3) \quad \sum_{k=1}^4 I_k^0 = 0.$$

Dans la suite, on va étudier les comportements de I_k^0 quand $A \rightarrow \infty$, $T_1 \rightarrow \infty$ et $\delta \rightarrow 0$ dans cet ordre.

10. Démonstration du théorème principal

Le but de cette section est de démontrer le théorème 6.1, qui est le résultat principal de cet article. Dans cette section, on fixe $\gamma > 0$. On suppose que $b > 0$, $T > 0$ sont tels que $b^2 T = \gamma$.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la sous-section 10.1, on montre quelques formules préliminaires.

Dans la sous-section 10.2, on explicite des hypothèses simplificatrices sur des métriques g^{TX} , g^F et la fonction de Morse f .

Dans la sous-section 10.3, on énonce quelques résultats intermédiaires. Les démonstrations vont être données dans les sections suivantes.

Dans la sous-section 10.4, on étudie en détail les comportements asymptotiques de I_k^0 quand $A \rightarrow \infty$, $T_1 \rightarrow \infty$ et $\delta \rightarrow 0$ dans cet ordre.

Dans la sous-section 10.5, on soustrait les divergences de I_k^0 , on obtient le théorème 6.1.

10.1. Quelques formules préliminaires. On rappelle quelques notations et résultats de [BG01, Section 9.2]. On pose

$$(10.1.1) \quad \begin{aligned} \chi(F) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H^i(X, F), & \tilde{\chi}(F) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i i \dim H^i(X, F), \\ \tilde{\chi}'(F) &= \operatorname{rg}[F] \sum_{1 \leq \alpha \leq l} (-1)^{n_\alpha} n_\alpha, & \operatorname{Tr}_s[f] &= \sum_{1 \leq \alpha \leq l} (-1)^{n_\alpha} f(x_\alpha). \end{aligned}$$

Comme dans [BG01, Definition 9.2], pour $T \geq 0$, par (5.2.9), on pose

$$(10.1.2) \quad \begin{aligned} m_T &= \operatorname{rg}[F] \frac{\partial}{\partial T} \left[T \int_X f \alpha_{T^2/4} \right], \\ n_T &= -\frac{1}{4} \int_X \theta(\nabla^F, g^F) T \beta_{T^2/4} - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial T} \left[\int_X \theta(\nabla^F, g^F) T^2 \beta_{T^2/4} \right]. \end{aligned}$$

Par [BG01, Propositions 9.3, 9.4], quand $T \rightarrow \infty$, on a

$$(10.1.3) \quad \begin{aligned} T^2 (m_T - \operatorname{rg}[F] \operatorname{Tr}_s[f]) &\rightarrow 2\tilde{\chi}'(F) - n\chi(F), & T n_T &\rightarrow 0, \\ T \operatorname{rg}[F] \int_X f(\alpha_T - \alpha_\infty) &\rightarrow \frac{n\chi(F) - 2\tilde{\chi}'(F)}{4}, & \int_X \theta(\nabla^F, g^F) T^2 \beta_{T^2/4} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

De (5.2.8), (10.1.2), (10.1.3), on tire que

$$(10.1.4) \quad \int_0^\infty n_T dT = -\frac{1}{2} \int_X \theta(\nabla^F, g^F) (\nabla f)^* \psi(TX, \nabla^{TX}).$$

Comme dans (9.1.3), posons

$$(10.1.5) \quad w_t^\pm = -\operatorname{Tr}_s \left[\frac{p^2 \pm y^2}{2} \exp\left(-\frac{t}{2} H_\gamma^\pm\right) \right], \quad v_t^\pm = -\operatorname{Tr}_s \left[\frac{p^2 \pm y^2}{2} r \left(\frac{t}{2} H_\gamma^\pm\right) \right].$$

Par (9.1.2), (10.1.5), on a

$$(10.1.6) \quad v_t^\pm = \left(1 + 2t \frac{\partial}{\partial t}\right) w_t^\pm.$$

PROPOSITION 10.1. *Pour $\gamma > 0$, on a*

$$(10.1.7) \quad v_t^+ = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(e^{-ct}), \quad v_t^- = \mathcal{O}(e^{-ct}),$$

et quand $t \rightarrow 0$, on a

$$(10.1.8) \quad v_t^+ = \frac{1}{\gamma t} + \mathcal{O}(t), \quad v_t^- = \frac{1}{\gamma t} + \mathcal{O}(t).$$

De plus, on a

$$(10.1.9) \quad \begin{aligned} \int_0^1 \left(v_{T/\gamma}^+ - \frac{1}{T} \right) \frac{dT}{T} + \int_1^\infty \left(v_{T/\gamma}^+ + \frac{1}{2} \right) \frac{dT}{T} &= \frac{\log(4\pi\sqrt{\gamma})}{2} + \frac{\Gamma'(1)}{2}, \\ \int_0^1 \left(v_{T/\gamma}^- - \frac{1}{T} \right) \frac{dT}{T} + \int_1^\infty v_{T/\gamma}^- \frac{dT}{T} &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}}{2\sqrt{\gamma}} \right) + 1. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Par (7.15.26), et par le corollaire 7.40, on a

$$(10.1.10) \quad w_t^\pm = -\frac{1}{2} \left(a_{t/2,\gamma}^\pm \pm d_{t/2,\gamma}^\pm \right) = \frac{\mp \sinh(t/4)}{4 \sinh(t\lambda_\pm^\pm/4) \sinh(t\lambda_\pm^\pm/4)} \\ = \pm \frac{1}{4} \left(\frac{\cosh(t\lambda_+^\pm/4)}{\sinh(t\lambda_+^\pm/4)} + \frac{\cosh(t\lambda_-^\pm/4)}{\sinh(t\lambda_-^\pm/4)} \right).$$

Par (7.15.10), (10.1.10), quand $t \rightarrow \infty$, on a

$$(10.1.11) \quad w_t^+ = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(e^{-ct}), \quad w_t^- = \mathcal{O}(e^{-ct}),$$

et quand $t \rightarrow 0$, on a

$$(10.1.12) \quad w_t^+ = -\frac{1}{\gamma t} + \mathcal{O}(t), \quad w_t^- = -\frac{1}{\gamma t} + \mathcal{O}(t).$$

De (10.1.10)-(10.1.12), on tire (10.1.7) et (10.1.8).

Par [BZ92, (7.93)], on sait que

$$(10.1.13) \quad \int_0^1 \left(\frac{\cosh(T)}{\sinh(T)} - \frac{1}{T} \right) \frac{dT}{T} + \int_1^\infty \left(\frac{\cosh(T)}{\sinh(T)} - 1 \right) \frac{dT}{T} = 1 - \log(\pi) - \Gamma'(1).$$

De (10.1.10), (10.1.13), on tire que

$$(10.1.14) \quad \int_0^1 \left(w_{T/\gamma}^+ + \frac{1}{T} \right) \frac{dT}{T} + \int_1^\infty \left(w_{T/\gamma}^+ + \frac{1}{2} \right) \frac{dT}{T} = \frac{\log(4\pi\sqrt{\gamma})}{2} + \frac{\Gamma'(1)}{2} - 1, \\ \int_0^1 \left(w_{T/\gamma}^- + \frac{1}{T} \right) \frac{dT}{T} + \int_1^\infty w_{T/\gamma}^- \frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}}{2\sqrt{\gamma}} \right) - 1.$$

Par (10.1.6), (10.1.14), on obtient (10.1.9). \square

10.2. Hypothèses simplificatrices sur les métriques. Par [BL08, Theorem 6.7.1], on sait que $\log \left(\|\cdot\|_{\lambda,b}^{RS,2} \right)$ ne dépend pas de $b > 0$. De plus, par [BL08, (6.7.1)], on connaît explicitement la variation de $\log \left(\|\cdot\|_{\lambda,b}^{RS,2} \right)$ en fonction de g^{TX} et g^F . En procédant exactement comme dans [BZ92, Section VII.b], il suffit de montrer le théorème 6.1 pour des particules métriques g^{TX} et g^F , et une particule fonction de Morse f .

Dans la suite, on suppose que (g^{TX}, g^F, f) vérifie les hypothèses de la sous-section 8.1, et le champ de gradient ∇f pour la métrique g^{TX} vérifie les conditions de transversalité de Smale. On va montrer le théorème 6.1 pour $(g^{TX}, g_{T_0}^F, \nabla f, b_0)$ tels que $b_0 > 0$ est suffisamment petit et $T_0 > 0$ est suffisamment grand tels que $b_0^2 T_0 = \gamma$.

10.3. Quelques résultats intermédiaires. Dans cette sous-section, on va énoncer sept résultats intermédiaires. Les démonstrations vont être données dans les sections suivantes. Rappelons que $P_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}$ est la projection spectrale pour $A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$ relatif à la valeur propre 0. Soit $P_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^{[0,1]}$ la projection spectrale pour $A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2$ relatif aux valeurs propres dans $]0, 1]$ et soit $P_{b,T}, P_{b,T}^{[0,1]}$ les projections spectrales pour $L_{b,T}$ relatifs à la valeur propre 0 et aux valeurs propres dans $[0, 1]$.

THÉORÈME 10.2. *Il existe $c > 0$ tel que, pour $b^2T = \gamma$, quand $T \rightarrow \infty$, on a*

$$(10.3.1) \quad \log \left(\frac{|\cdot|_{\lambda,b,T}^{RS,2}}{\|\cdot\|_{\lambda,\nabla f}^{M,2}} \right) = -\text{Tr}_s \left[N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} \log(4A_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^2 P_{\phi, \mathcal{H}_{b,T}}^{[0,1]}) \right] - 2T \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] \\ + \log \left(\frac{T}{\pi} \right) \left(\tilde{\chi}'(F) - n\chi(F) \right) - \tilde{\chi}'(F) \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}}{2} \right) + \frac{n}{2} \chi(F) \log(\gamma) + \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

THÉORÈME 10.3. *Il existe $c > 0, C > 0, T_0 > 0$, tels que, pour $T \geq T_0$, $b^2T = \gamma$, $t \geq 1$, on a*

$$(10.3.2) \quad \left| \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} r \left(\frac{t}{2} L_{b,T} \right) \left(1 - P_{b,T}^{[0,1]} \right) \right] \right| \leq e^{-ct}.$$

De plus, pour $T \geq T_0$ fixé, quand $t \rightarrow \infty$, on a

$$(10.3.3) \quad w_{t,T} = \frac{\chi'(F) - n\chi(F)}{2} + \mathcal{O}(e^{-ct}).$$

Quand $T \rightarrow \infty$, pour $t > 0$ dans un intervalle compact de \mathbf{R}_+ , on a

$$(10.3.4) \quad w_{t,T} = \frac{\tilde{\chi}'(F) - n\chi(F)}{2} + \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

THÉORÈME 10.4. *Il existe $T_0 > 0, C > 0$ tels que pour T dans un intervalle compact de $[T_0, \infty[$, $b^2T = \gamma$, $t \geq 1$, on a la convergence uniforme*

$$(10.3.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v_{t,T} = -\text{Tr}_s [\mathcal{H}_T P_{b,T}].$$

THÉORÈME 10.5. *Il existe $t_0 > 0, T_0 > 0, c > 0, C > 0$, tels que pour $t \in [1/T, t_0]$, $T \geq T_0$, $b^2T = \gamma$, on a*

$$(10.3.6) \quad \left| \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{b,T} \right) \right] - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] - \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2T} \right| \leq C e^{-cT}.$$

THÉORÈME 10.6. *Il existe $T_0 > 0, C > 0$ tels que pour $t \in]0, 1]$, $T \in [\sqrt{t}T_0, 1/\sqrt{t}]$, $bT^2 = \gamma$, on a*

$$(10.3.7) \quad \left| \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{bt^{1/4}, t^{-1/2}T} \right) \right] - \frac{m_T}{\sqrt{t}} - n_T \right| \leq C\sqrt{t}.$$

THÉORÈME 10.7. *Pour $b > 0, T > 0, b^2T = \gamma$, on a*

$$(10.3.8) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{bt^{1/2}, t^{-1}T} \right) \right] - \frac{\text{rg}[F] \text{Tr}_s[f]}{t} \right) \\ = - \left(n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F) \right) \frac{v_T^+}{T} + \tilde{\chi}'(F) \frac{v_T^-}{T}.$$

THÉORÈME 10.8. *Il existe $t_0 > 0, c > 0, C > 0$, tels que pour $t \in]0, t_0]$, $T \geq 1$, $b^2T = \gamma$, on a*

$$(10.3.9) \quad \left| \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{bt^{1/2}, t^{-1}T} \right) \right] - \frac{\text{rg}[F] \text{Tr}_s[f]}{t} - \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2T} \right| \leq C \exp(-cT).$$

10.4. Asymptotique de I_k^0 .

10.4.1. *Le terme I_1^0 .* On sait que

$$(10.4.1) \quad I_1^0 = \int_{\delta}^A w_{t,T_1} \frac{dt}{t}.$$

i) $A \rightarrow \infty$. Par (10.4.1), on a

$$(10.4.2) \quad I_1^0 = \int_{\delta}^1 w_{t,T_1} \frac{dt}{t} + \int_1^A \left(w_{t,T_1} - \frac{\chi'(F) - n\chi(F)}{2} \right) \frac{dt}{t} + \frac{\chi'(F) - n\chi(F)}{2} \log A.$$

Par (10.3.3), (10.4.2), quand $A \rightarrow \infty$, on a

$$(10.4.3) \quad I_1^0 - \frac{\chi'(F) - n\chi(F)}{2} \log(A) \rightarrow I_1^1 = \int_{\delta}^1 w_{t,T_1} \frac{dt}{t} + \int_1^{\infty} \left(w_{t,T_1} - \frac{\chi'(F) - n\chi(F)}{2} \right) \frac{dt}{t}.$$

ii) $T_1 \rightarrow \infty$. Par (10.3.4), quand $T_1 \rightarrow \infty$, on a

$$(10.4.4) \quad \int_{\delta}^1 w_{t,T_1} \frac{dt}{t} \rightarrow -\frac{\tilde{\chi}'(F) - n\chi(F)}{2} \log(\delta).$$

De (9.1.3), (10.3.2), on tire que

$$(10.4.5) \quad \int_1^{\infty} \left(w_{t,T_1} - \frac{\chi'(F) - n\chi(F)}{2} \right) \frac{dt}{t} = \int_1^{\infty} \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot T^* \mathcal{X}^*} - n}{2} r \left(\frac{t}{2} L_{b,T_1} \right) (1 - P_{b,T_1}) \right] \frac{dt}{t} \\ = \int_1^{\infty} \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot T^* \mathcal{X}^*} - n}{2} r \left(\frac{t}{2} L_{b,T_1} \right) P_{b,T_1}^{[0,1]} \right] \frac{dt}{t} + \mathcal{O}(e^{-cT_1}).$$

On affirme que quand $a \rightarrow 0$, on a

$$(10.4.6) \quad \int_1^{\infty} r(at) \frac{dt}{t} + \log(a) \rightarrow \Gamma'(1) - 2.$$

En effet, par (9.1.1), pour $a > 0$, on a

$$(10.4.7) \quad \int_1^{\infty} r(at) \frac{dt}{t} = \int_1^{\infty} e^{-at} \frac{dt}{t} - 2a \int_1^{\infty} e^{-at} dt = \int_1^{\infty} e^{-at} \frac{dt}{t} - 2e^{-a}.$$

De plus, on a

$$(10.4.8) \quad \int_1^{\infty} e^{-at} \frac{dt}{t} = \int_a^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} = \int_1^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} + \int_a^1 (e^{-t} - 1) \frac{dt}{t} - \log(a).$$

On sait que

$$(10.4.9) \quad \Gamma'(1) = \int_1^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} + \int_0^1 (e^{-t} - 1) \frac{dt}{t}.$$

Par (10.4.7)-(10.4.9), quand $a \rightarrow 0$, on obtient (10.4.6).

Par (10.4.6), quand $T_1 \rightarrow \infty$, on a

$$(10.4.10) \quad \int_1^{\infty} \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot (T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} r \left(\frac{t}{2} L_{b,T_1} \right) P_{b,T_1}^{[0,1]} \right] \frac{dt}{t} + \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot (T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} \log \left(\frac{L_{b,T_1}}{2} \right) P_{b,T_1}^{[0,1]} \right] \\ \rightarrow \frac{\Gamma'(1) - 2}{2} (\tilde{\chi}'(F) - \chi'(F)).$$

De (10.4.3), (10.4.4), (10.4.10), on tire que

$$(10.4.11) \quad I_1^1 + \text{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} \log \left(\frac{L_{b, T_1}}{2} \right) P_{b, T_1}^{[0, 1]} \right] \\ \rightarrow I_1^2 = - \frac{\tilde{\chi}'(F) - n\chi(F)}{2} \log(\delta) + \frac{\Gamma'(1) - 2}{2} (\tilde{\chi}'(F) - \chi'(F)).$$

iii) $\delta \rightarrow 0$. On a

$$(10.4.12) \quad I_1^2 + \frac{(\tilde{\chi}'(F) - n\chi(F))}{2} \log(\delta) \rightarrow I_1^3 = \frac{\Gamma'(1) - 2}{2} (\tilde{\chi}'(F) - \chi'(F)).$$

10.4.2. *Le terme I_2^0 .* On a

$$(10.4.13) \quad I_2^0 = - \int_{T_0}^{T_1} v_{A, T} \frac{dT}{T}.$$

i) $A \rightarrow \infty$. Par le théorème 10.4 et par (10.4.13), quand $A \rightarrow \infty$, on a

$$(10.4.14) \quad I_2^0 \rightarrow I_2^1 = \int_{T_0}^{T_1} \text{Tr}_s [\mathcal{H}_T P_{b, T}] \frac{dT}{T}.$$

De (10.4.14), du même argument de [BZ92, Proposition 7.16], on tire que

$$(10.4.15) \quad I_2^1 = - \frac{1}{2} \log \left(\frac{|\cdot|_{\lambda, b_1, T_1}^{RS, 2}}{|\cdot|_{\lambda, b_0, T_0}^{RS, 2}} \right).$$

ii) $T_1 \rightarrow \infty$. Par (10.4.15), on a

$$(10.4.16) \quad I_2^2 = I_2^1 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{|\cdot|_{\lambda, b_1, T_1}^{RS, 2}}{|\cdot|_{\lambda, b_0, T_0}^{RS, 2}} \right) = 0.$$

iii) $\delta \rightarrow 0$. Comme I_2^2 reste constante quand $\delta \rightarrow 0$, on a

$$(10.4.17) \quad I_2^3 = I_2^2 = 0.$$

10.4.3. *Le terme I_3^0 .* On a

$$(10.4.18) \quad I_3^0 = - \int_{\delta}^A w_{t, T_0} \frac{dt}{t}.$$

i) $A \rightarrow \infty$. En procédant comme (10.4.3), on a

$$(10.4.19) \quad I_3^0 + \frac{\chi'(F) - n\chi(F)}{2} \log(A) \\ \rightarrow I_3^1 = - \int_{\delta}^1 w_{t, T_0} \frac{dt}{t} - \int_1^{\infty} \left(w_{t, T_0} - \frac{\chi'(F) - n\chi(F)}{2} \right) \frac{dt}{t}.$$

ii) $T_1 \rightarrow \infty$. Comme I_3^1 reste constante quand $T_1 \rightarrow \infty$, on a

$$(10.4.20) \quad I_3^2 = I_3^1.$$

iii) $\delta \rightarrow 0$. Par [BL08, Theorem 4.4.1], et par (10.4.19), (10.4.20), quand $\delta \rightarrow 0$, on a

$$(10.4.21) \quad I_3^2 \rightarrow I_3^3 = - \int_0^1 w_{t, T_0} \frac{dt}{t} - \int_1^{\infty} \left(w_{t, T_0} - \frac{\chi'(F) - n\chi(F)}{2} \right) \frac{dt}{t}.$$

iv) Évaluation de I_3^3 . Par [BL08, Proposition 8.5.2], on a

$$(10.4.22) \quad I_3^3 = \frac{1}{2} \theta'_{b_0, T_0}(0) + \left(\frac{\Gamma'(1)}{2} + \log(2) - 1 \right) \left(\chi'(F) - n\chi(F) \right).$$

10.4.4. *Le terme I_4^0* . On a

$$(10.4.23) \quad I_4^0 = \int_{T_0}^{T_1} v_{\delta, T} \frac{dT}{T}.$$

i) $A \rightarrow \infty$. Comme I_4^0 reste constante quand $A \rightarrow \infty$, on a

$$(10.4.24) \quad I_4^1 = I_4^0.$$

ii) $T_1 \rightarrow \infty$. Par (9.1.3), (10.4.23), (10.4.24), on a

$$(10.4.25) \quad I_4^1 = - \int_{T_0}^{T_1} \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T}{T} r \left(\frac{\delta}{2} L_{b, T} \right) \right] - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] - \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2T} \right) dT \\ - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f](T_1 - T_0) - \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2} \log \left(\frac{T_1}{T_0} \right).$$

Du théorème 10.5, et de (10.4.25), on tire que quand $T_1 \rightarrow \infty$,

$$(10.4.26) \quad I_4^1 + \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] T_1 + \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2} \log(T_1) \\ \rightarrow I_4^2 = - \int_{T_0}^{\infty} \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T}{T} r \left(\frac{\delta}{2} L_{b, T} \right) \right] - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] - \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2T} \right) dT \\ + \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] T_0 + \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2} \log(T_0).$$

iii) $\delta \rightarrow 0$. On pose

$$(10.4.27) \quad J_1^0 = - \int_{T_0}^{1/\sqrt{\delta}} \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T}{T} r \left(\frac{\delta}{2} L_{b, T} \right) \right] - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] \right) dT, \\ J_2^0 = - \int_{1/\sqrt{\delta}}^{1/\delta} \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T}{T} r \left(\frac{\delta}{2} L_{b, T} \right) \right] - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] \right) dT, \\ J_3^0 = - \int_{1/\delta}^{\infty} \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T}{T} r \left(\frac{\delta}{2} L_{b, T} \right) \right] - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] - \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2T} \right) dT.$$

De (10.4.26), (10.4.27), on tire que

$$(10.4.28) \quad I_4^2 = J_1^0 + J_2^0 + J_3^0 + \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] T_0 + \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2} \log \left(\frac{1}{\delta} \right).$$

On va étudier séparément des comportements asymptotiques pour J_1^0, J_2^0, J_3^0 quand $\delta \rightarrow 0$.

Pour J_1^0 , par (10.4.27), on a

$$\begin{aligned}
(10.4.29) \quad J_1^0 &= - \int_{T_0\sqrt{\delta}}^1 \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{\delta^{-1/2}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{b\delta^{1/4}, \delta^{-1/2}T} \right) \right] - \frac{\text{rg}[F] \text{Tr}_s[f]}{\sqrt{\delta}} \right) dT \\
&= - \int_{T_0\sqrt{\delta}}^1 \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{\delta^{-1/2}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{b\delta^{1/4}, \delta^{-1/2}T} \right) \right] - \frac{m_T}{\sqrt{\delta}} \right) dT \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{T_0\sqrt{\delta}}^1 (m_T - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f]) dT.
\end{aligned}$$

Par le théorème 10.6, quand $\delta \rightarrow 0$, on a

$$(10.4.30) \quad - \int_{T_0\sqrt{\delta}}^1 \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{\delta^{-1/2}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{b\delta^{1/4}, \delta^{-1/2}T} \right) \right] - \frac{m_T}{\sqrt{\delta}} \right) dT \rightarrow - \int_0^1 n_T dT.$$

De (10.1.2), on tire que

$$\begin{aligned}
(10.4.31) \quad - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{T_0\sqrt{\delta}}^1 (m_T - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f]) dT &= - \frac{\text{rg}[F]}{\sqrt{\delta}} \int_X f(\alpha_{1/4} - \alpha_\infty) \\
&\quad + T_0 \text{rg}[F] \int_X f(\alpha_{\delta T_0^2/4} - \alpha_\infty).
\end{aligned}$$

Par (10.4.29)-(10.4.31), quand $\delta \rightarrow 0$, on a

$$(10.4.32) \quad J_1^0 + \frac{\text{rg}[F]}{\sqrt{\delta}} \int_X f(\alpha_{1/4} - \alpha_\infty) \rightarrow J_1^1 = - \int_0^1 n_T dT + T_0 \text{rg}[F] \int_X f(\alpha_0 - \alpha_\infty).$$

Pour J_2^0 , par (10.4.27), on a

$$\begin{aligned}
(10.4.33) \quad J_2^0 &= - \int_1^{1/\sqrt{\delta}} \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{\delta^{-1/2}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{b\delta^{1/4}, \delta^{-1/2}T} \right) \right] - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] \right) dT \\
&= - \int_1^{1/\sqrt{\delta}} \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{\delta^{-1/2}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{b\delta^{1/4}, \delta^{-1/2}T} \right) \right] - \frac{m_T}{\sqrt{\delta}} - n_T \right) dT \\
&\quad - \int_1^{1/\sqrt{\delta}} \left(\frac{m_T - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f]}{\sqrt{\delta}} + n_T \right) dT.
\end{aligned}$$

Par (10.1.2), le second terme de le membre de droite de (10.4.33) est

$$\begin{aligned}
(10.4.34) \quad - \int_1^{1/\sqrt{\delta}} \left(\frac{m_T - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f]}{\sqrt{\delta}} + n_T \right) dT \\
= - \frac{\text{rg}[F]}{\delta} \int_X f(\alpha_{1/4\delta} - \alpha_\infty) + \frac{\text{rg}[F]}{\sqrt{\delta}} \int_X f(\alpha_{1/4} - \alpha_\infty) - \int_1^{1/\sqrt{\delta}} n_T dT.
\end{aligned}$$

D'autre part, le premier terme de la membre de droite de (10.4.33) est

$$\begin{aligned}
(10.4.35) \quad - \int_1^{1/\sqrt{\delta}} \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{\delta^{-1/2}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{b\delta^{1/4}, \delta^{-1/2}T} \right) \right] - \frac{m_T}{\sqrt{\delta}} - n_T \right) dT \\
= - \int_{\sqrt{\delta}}^1 \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{\delta^{-1}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{b\delta^{1/2}, \delta^{-1}T} \right) \right] - \frac{m_T/\sqrt{\delta}}{\delta} - \frac{n_T/\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}} \right) dT.
\end{aligned}$$

De (10.1.3), (10.4.35), des théorèmes 10.6 et 10.7, et du théorème de convergence dominée, on tire que, quand $\delta \rightarrow 0$,

$$(10.4.36) \quad - \int_1^{1/\sqrt{\delta}} \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{\delta^{-1/2}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{b\delta^{1/4}, \delta^{-1/2}T} \right) \right] - \frac{m_T}{\sqrt{\delta}} - n_T \right) dT \\ \rightarrow \left(n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F) \right) \int_0^1 \left(v_{T/\gamma}^+ - \frac{1}{T} \right) \frac{dT}{T} - \tilde{\chi}'(F) \int_0^1 \left(v_{T/\gamma}^- - \frac{1}{T} \right) \frac{dT}{T}.$$

De (10.4.33)-(10.4.36), on tire que

$$(10.4.37) \quad J_2^0 - \frac{\text{rg}[F]}{\sqrt{\delta}} \int_X f(\alpha_{1/4} - \alpha_\infty) \rightarrow J_2^1 = -n\chi(F) + 2\tilde{\chi}'(F) - \int_1^\infty n_T dT \\ + \left(n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F) \right) \int_0^1 \left(v_{T/\gamma}^+ - \frac{1}{T} \right) \frac{dT}{T} - \tilde{\chi}'(F) \int_0^1 \left(v_{T/\gamma}^- - \frac{1}{T} \right) \frac{dT}{T}.$$

Pour J_3^0 , de (10.4.27), on tire que

$$(10.4.38) \quad J_3^0 = - \int_1^\infty \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{\delta^{-1}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{b\delta^{1/2}, \delta^{-1}T} \right) \right] - \frac{\text{rg}[F] \text{Tr}_s[f]}{\delta} - \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2T} \right) dT.$$

Par (10.4.38), et par le théorème de convergence dominée et les théorèmes 10.7 et 10.8, quand $\delta \rightarrow 0$, on a

$$(10.4.39) \quad J_3^0 \rightarrow J_3^1 = \left(n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F) \right) \int_1^\infty \left(v_{T/\gamma}^+ + \frac{1}{2} \right) \frac{dT}{T} - \tilde{\chi}'(F) \int_1^\infty v_{T/\gamma}^- \frac{dT}{T}.$$

De (10.4.28), (10.4.32), (10.4.37), (10.4.39), on tire que

$$(10.4.40) \quad I_4^2 - \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2} \log \left(\frac{1}{\delta} \right) = \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] T_0 + J_1^0 + J_2^0 + J_3^0 \\ \rightarrow I_4^3 = \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] T_0 + J_1^1 + J_2^1 + J_3^1 \\ = \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] T_0 - \int_0^\infty n_T dT + T_0 \text{rg}[F] \int_X f(\alpha_0 - \alpha_\infty) \\ + \left(n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F) \right) \left(\int_0^1 \left(v_{T/\gamma}^+ - \frac{1}{T} \right) \frac{dT}{T} + \int_1^\infty \left(v_{T/\gamma}^+ + \frac{1}{2} \right) \frac{dT}{T} - 1 \right) \\ - \tilde{\chi}'(F) \left(\int_0^1 \left(v_{T/\gamma}^- - \frac{1}{T} \right) \frac{dT}{T} + \int_1^\infty v_{T/\gamma}^- \frac{dT}{T} - 1 \right).$$

iv) Évaluation de I_4^3 . Par (10.1.4), (10.1.9), (10.4.40), on a

$$(10.4.41) \quad I_4^3 = \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] T_0 + \frac{1}{2} \int_X \theta(\nabla^F, g^F) (\nabla f)^* \psi(TX, \nabla^{TX}) + T_0 \text{rg}[F] \int_X f(\alpha_0 - \alpha_\infty) \\ + \left(n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F) \right) \left(\frac{\log(4\pi\sqrt{\gamma}) + \Gamma'(1) - 2}{2} \right) - \frac{\tilde{\chi}'(F)}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}}{2\sqrt{\gamma}} \right).$$

De plus, on sait que

$$(10.4.42) \quad \frac{1}{2} \int_X \theta(\nabla^F, g^F)(\nabla f)^* \psi(TX, \nabla^{TX}) + T_0 \operatorname{rg}[F] \int_X f(\alpha_0 - \alpha_\infty) \\ = \frac{1}{2} \int_X \theta(\nabla^F, g_{T_0}^F)(\nabla f)^* \psi(TX, \nabla^{TX}).$$

De (10.4.41), (10.4.42), on tire que

$$(10.4.43) \quad I_4^3 = \operatorname{rg}[F] \operatorname{Tr}_s[f] T_0 + \frac{1}{2} \int_X \theta(\nabla^F, g_{T_0}^F)(\nabla f)^* \psi(TX, \nabla^{TX}) \\ + (n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)) \left(\frac{\log(4\pi\sqrt{\gamma}) + \Gamma'(1) - 2}{2} \right) - \frac{\tilde{\chi}'(F)}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}}{2\sqrt{\gamma}} \right).$$

10.5. Comparaison des divergences. De (10.4.3), (10.4.15), (10.4.19), (10.4.24), on tire que

$$(10.5.1) \quad \sum_{j=1}^4 I_j^1 = 0.$$

Du théorème 10.2, et de (10.4.11), (10.4.16), (10.4.20), (10.4.26), on tire que

$$(10.5.2) \quad \sum_{j=1}^4 I_j^2 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda, \nabla f}^{M,2}}{|\cdot|_{\lambda, b_0, T_0}^{RS,2}} \right) - \log(2) (\tilde{\chi}'(F) - \chi(F)) - \frac{\log(\pi)}{2} (\tilde{\chi}'(F) - n\chi(F)) \\ + \frac{n\chi(F)}{4} \log(\gamma) - \frac{\tilde{\chi}'(F)}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}}{2} \right).$$

De (10.4.12), (10.4.17), (10.4.21), (10.4.40), on tire que

$$(10.5.3) \quad \sum_{j=1}^4 I_j^3 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda, \nabla f}^{M,2}}{|\cdot|_{\lambda, b_0, T_0}^{RS,2}} \right) - \log(2) (\tilde{\chi}'(F) - \chi'(F)) - \frac{\log(\pi)}{2} (\tilde{\chi}'(F) - n\chi(F)) \\ + \frac{n\chi(F)}{4} \log(\gamma) - \frac{\tilde{\chi}'(F)}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}}{2} \right).$$

Par (10.4.12), (10.4.17), (10.4.22), (10.4.43), on a

(10.5.4)

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma'(1) - 2}{2} (\tilde{\chi}'(F) - \chi'(F)) + \frac{1}{2} \theta'_{b_0, T_0}(0) + \left(\frac{\Gamma'(1)}{2} + \log(2) - 1 \right) (\chi'(F) - n\chi(F)) \\
& + \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] T_0 + \frac{1}{2} \int_X \theta(\nabla^F, g_{T_0}^F)(\nabla f)^* \psi(TX, \nabla^{TX}) \\
& + (n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)) \left(\frac{\log(4\pi\sqrt{\gamma}) + \Gamma'(1) - 2}{2} \right) - \frac{\tilde{\chi}'(F)}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}}{2\sqrt{\gamma}} \right) \\
& = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda, \nabla f}^{M,2}}{\|\cdot\|_{\lambda, b_0, T_0}^{RS,2}} \right) - \log(2) (\tilde{\chi}'(F) - \chi'(F)) - \frac{\log(\pi)}{2} (\tilde{\chi}'(F) - n\chi(F)) \\
& + \frac{n\chi(F)}{4} \log(\gamma) - \frac{\tilde{\chi}'(F)}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}}{2} \right).
\end{aligned}$$

On sait que

$$(10.5.5) \quad \frac{1}{2} \theta'_{b_0, T_0}(0) + \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] T_0 - \frac{1}{2} \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda, \nabla f}^{M,2}}{\|\cdot\|_{\lambda, b_0, T_0}^{RS,2}} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda, b_0, T_0}^{RS,2}}{\|\cdot\|_{\lambda, \nabla f, g_{T_0}^F}^{M,2}} \right).$$

De (10.5.4), (10.5.5), on tire que

$$(10.5.6) \quad \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda, b_0, T_0}^{RS,2}}{\|\cdot\|_{\lambda, \nabla f, g_{T_0}^F}^{M,2}} \right) = - \int_X \theta(\nabla^F, g_{T_0}^F)(\nabla f)^* \psi(TX, \nabla^{TX}).$$

On termine la preuve du théorème 6.1.

11. Démonstration du théorème 10.2

Dans cette section, on va démontrer le théorème 10.2.

On suppose que (g^{TX}, g^F, f) vérifient les hypothèses de la section 8.1, et ∇f vérifie les conditions de transversalité de Smale. On fixe $\gamma > 0, \epsilon \in]0, 1[$ tels que

$$(11.1) \quad \langle p | 1 - 2\epsilon\gamma \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle \geq \frac{3}{4} |p|^2.$$

On suppose que $b > 0$ assez petit et $T > 0$ assez grand sont tels que $b^2 T = \gamma$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 10.2. Par [BL08, Theorem 3.2.2], on sait que la cohomologie du complexe $(\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F), d^{\mathcal{X}^*})$ se concentre sur le sous-complexe de dimension finie $(\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F), d^{\mathcal{X}^*})$. Par (1.2.6), on a

$$(11.2) \quad \lambda \simeq \det \left(\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F) \right).$$

On rappelle que, par le corollaire (8.15), $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}_{b,T}}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}$ est une métrique hermitienne sur $\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$. Soit $\|\cdot\|_{\lambda, b, T}^{RS}$ la métrique de Ray-Singer associée au complexe de Witten

hypoelliptique $\left(\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^* F), d^{\mathcal{X}^*}\right)$ et à la métrique $\mathfrak{H}_{\mathcal{H}_b,T}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}$. Alors, on a

$$(11.3) \quad \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda,b,T}^{RS,2}}{\|\cdot\|_{\lambda,b,T}^{M,2}} \right) = \text{Tr}_s \left[N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} \log(4A_{\phi, \mathcal{H}_b, T}^2) P_{\phi, \mathcal{H}_b, T}^{[0,1]} \right].$$

Soit $P_{dR,b,T}^*$ l'adjoint de $P_{dR,b,T}$ relatif aux $\langle, \rangle_{C^0(W^u, F)}$ et $\mathfrak{H}_{\mathcal{H}_b,T}^{\Omega(\mathcal{X}^*, \pi^* F)}$, on a

$$(11.4) \quad \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda,b,T}^{RS,2}}{\|\cdot\|_{\lambda, \nabla f}^{M,2}} \right) = -\text{Tr}_s \left[\log(P_{dR,b,T}^* P_{dR,b,T}) \right].$$

Par (11.3), (11.4), on a

$$(11.5) \quad \log \left(\frac{\|\cdot\|_{\lambda,b,T}^{RS,2}}{\|\cdot\|_{\lambda, \nabla f}^{M,2}} \right) = -\text{Tr}_s \left[N^{\Lambda(T^* \mathcal{X}^*)} \log(4A_{\phi, \mathcal{H}_b, T}^2) P_{\phi, \mathcal{H}_b, T}^{[0,1]} \right] \\ - \text{Tr}_s \left[\log(P_{dR,b,T}^* P_{dR,b,T}) \right].$$

On sait que

$$(11.6) \quad \text{Tr}_s \left[\log(P_{dR,b,T}^* P_{dR,b,T}) \right] = \text{Tr}_s \left[\log \left((P_{dR,b,T} e_{\epsilon,b,T})^* P_{dR,b,T} e_{\epsilon,b,T} \right) \right] \\ - \text{Tr}_s \left[\log(e_{\epsilon,b,T}^* e_{\epsilon,b,T}) \right].$$

Par (8.9.2), on a

$$(11.7) \quad \text{Tr}_s \left[\log(e_{\epsilon,b,T}^* e_{\epsilon,b,T}) \right] = n \log(b) \chi(F) + \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

Par (8.9.6), on a

$$(11.8) \quad \text{Tr}_s \left[\log \left((P_{dR,b,T} e_{\epsilon,b,T})^* P_{dR,b,T} e_{\epsilon,b,T} \right) \right] \\ = \text{Tr}_s \left[\log \left(e^{2T\mathcal{F}} \frac{\pi^{\mathcal{N}-n}}{T^{\mathcal{N}-n/2}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}}{2} \right)^{\mathcal{N}} \right) \right] + \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

De (10.1.1), (11.5)-(11.8), on tire (10.3.1). \square

12. Démonstration des théorèmes 10.3 et 10.4

Le but de cette section est de démontrer les théorèmes 10.3 et 10.4.

On suppose que (g^{TX}, g^F, f) vérifient les hypothèses de la section 8.1, et que le champ de gradient ∇f vérifié la condition de transversalité de Smale. On fixe $\gamma > 0, \epsilon \in]0, 1[$ tels que

$$(12.1) \quad \langle p | 1 - 2\epsilon\gamma \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle \geq \frac{3}{4} |p|^2.$$

On suppose que $b > 0$ assez petit et $T > 0$ assez grand sont tels que $b^2 T = \gamma$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 10.3. On montre d'abord que (10.3.3) et (10.3.4) résultent de (10.3.2). En fait, par (9.1.4), on a

$$(12.2) \quad w_{t,T} = \mathrm{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot (T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon,b,T} \right) P_{\epsilon,b,T}^{[0,1]} \right] \\ + \mathrm{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot (T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon,b,T} \right) \left(1 - P_{\epsilon,b,T}^{[0,1]} \right) \right].$$

Pour $x > 0$, on sait que

$$(12.3) \quad |r(x)| \leq C e^{-x/2}, \quad |r(x) - 1| \leq Cx.$$

Par (8.6.11), $F_{\epsilon,b,T}$ est de dimension finie et sa dimension ne dépend pas de ϵ, b, t, T . Alors, de (8.6.2), (12.3), on tire que

$$(12.4) \quad \left| \mathrm{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot (T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon,b,T} \right) P_{\epsilon,b,T}^{[0,1]} \right] - \frac{\chi'(F) - n\chi(F)}{2} \right| = \\ \left| \mathrm{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot (T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon,b,T} \right) P_{\epsilon,b,T}^{[0,1]} \right] \right| \leq C e^{-cT},$$

et

$$(12.5) \quad \left| \mathrm{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot (T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon,b,T} \right) P_{\epsilon,b,T}^{[0,1]} \right] - \frac{\tilde{\chi}'(F) - n\chi(F)}{2} \right| = \\ \left| \mathrm{Tr}_s \left[\frac{N^{\Lambda \cdot (T^* \mathcal{X}^*)} - n}{2} \left(r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon,b,T} \right) - 1 \right) P_{\epsilon,b,T}^{[0,1]} \right] \right| \leq C t e^{-cT}.$$

De (10.3.2), (12.2), (12.4), (12.5), on tire (10.3.3) et (10.3.4).

On choisit $\lambda_1 > \eta_0 > 0$, $\underline{c} = (c_0, c_1, c_2) \in (\mathbf{R}_+^*)^3$ comme dans les corollaires 8.13, 8.14 et dans l'équation (8.6.8). Par (8.6.3), (8.6.28), pour $u \in \mathrm{Dom}(L_{\epsilon,b,T})$, $s > 0$, il existe $C_s > 0$, $N \in \mathbf{N}$ tels que

$$(12.6) \quad \|u\|_{sc,s+1/4} \leq C_s T^N \|(\eta_0 - b^2 L_{\epsilon,b,T})u\|_{sc,s}.$$

Alors,

$$(12.7) \quad \|(\eta_0 - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-1}u\|_{sc,s+1/4} \leq C_s T^N \|u\|_{sc,s}.$$

Par récurrence, il existe $N, k \in \mathbf{N}$, $C_s > 0$ tels que

$$(12.8) \quad \|(\eta_0 - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-k}u\|_{sc,s} \leq C_s T^N \|u\|_{L^2}.$$

Par [BL08, Definition 17.4.1], pour $s > 0$ assez grand, l'injection d'espace Sobolev semi-classique d'ordre s dans l'espace L^2 est à trace. Alors il existe $k, N \in \mathbf{N}$ tels que

$$(12.9) \quad \|(\eta_0 - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-k}\|_1 \leq C T^N.$$

Par l'identité de résolvante, pour $\lambda \notin \mathrm{Sp} L_{\epsilon,b,T}$, on a

$$(12.10) \quad (\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-1} = (\eta_0 - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-1} + (\eta_0 - \lambda)(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-1}(\eta_0 - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-1}.$$

Alors,

$$(12.11) \quad (\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-k} = (\eta_0 - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-k} \left(1 + (\eta_0 - \lambda)(\lambda - b^2 L_{\epsilon,b,T})^{-1} \right)^k.$$

Posons

$$(12.12) \quad \Gamma_{c_2, \lambda_1} = \{ \lambda_1 + \sigma + i\tau \in \mathbf{C} : \sigma, \tau \in \mathbf{R}, \sigma = c_2 |\tau|^{1/8} \}.$$

De (8.6.3), (12.9), (12.11), pour $\lambda \in \Gamma_{c_2, \lambda_1}$, k assez grand, on tire que

$$(12.13) \quad \|(\lambda - b^2 L_{\epsilon, b, T})^{-k}\|_1 \leq CT^N (1 + |\lambda|^k).$$

On a

$$(12.14) \quad r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon, b, T} \right) = \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial a} \right) \Big|_{a=1} \exp(-at L_{\epsilon, b, T}/2),$$

$$\exp(-at L_{\epsilon, b, T}/2) \left(P_{\epsilon, b, T}^{[0,1]} - 1 \right) = \frac{(-1)^k k! 2^k b^{2k}}{2i\pi (at)^k} \int_{\Gamma_{c_2, \lambda_1}} e^{-at\lambda/2b^2} (\lambda - b^2 L_{\epsilon, b, T})^{-k-1} d\lambda.$$

De (12.14), on tire que

$$(12.15) \quad r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon, b, T} \right) \left(P_{\epsilon, b, T}^{[0,1]} - 1 \right)$$

$$= \frac{(-1)^k k! 2^k b^{2k}}{2i\pi t^k} \int_{\Gamma_{c_2, \lambda_1}} \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial a} \right) \Big|_{a=1} a^{-k} e^{-at\lambda/2b^2} (\lambda - b^2 L_{\epsilon, b, T})^{-k-1} d\lambda.$$

De (12.13), (12.15), pour $t \geq 1$, on obtient

$$(12.16) \quad \left\| r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon, b, T} \right) \left(1 - P_{\epsilon, b, T}^{[0,1]} \right) \right\|_1 \leq C e^{-ctT},$$

ce qui nous donne (10.3.2) et on termine la démonstration du théoème 10.3. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 10.4. Par (9.1.4), on a

$$(12.17) \quad v_{t, T} = -\text{Tr}_s [\mathcal{H}_T P_{\epsilon, b, T}] - \text{Tr}_s \left[\mathcal{H}_T r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon, b, T} \right) P_{\epsilon, b, T}^{[0,1]} \right] - \text{Tr}_s \left[\mathcal{H}_T r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon, b, T} \right) \left(1 - P_{\epsilon, b, T}^{[0,1]} \right) \right].$$

Par [BL08, (15.7.6)], il existe $k > 0, C_T > 0$ tel que

$$(12.18) \quad \|\mathcal{H}_T (1 + L_{\epsilon, b, T})^{-k}\| \leq C_T.$$

En utilisant encore le fait que $F_{\epsilon, b, T}$ est de dimension finie qui ne depend pas de ϵ, b, t, T , par (12.18), on a

$$(12.19) \quad \left\| \mathcal{H}_T r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon, b, T} \right) P_{\epsilon, b, T}^{[0,1]} \right\|_1 \leq C_T e^{-c_T t}$$

Par (12.15), (12.18), on a

$$(12.20) \quad \left\| \mathcal{H}_T r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon, b, T} \right) \left(1 - P_{\epsilon, b, T}^{[0,1]} \right) \right\|_1 \leq C_T e^{-c_T t}.$$

De (12.17), (12.19), (12.20), on tire le résultat. \square

13. Étude des fonctionnelles $\int_0^t |\dot{x}_s|^2 ds$ et $\int_0^t (|\dot{x}_s|^2 + |df|_{x_s}^2) ds$

Pour x , une C^1 -courbe sur X , et pour $t > 0$, on pose

$$(13.1) \quad I(x) = \int_0^t |\dot{x}_s|^2 ds, \quad I_f(x) = \int_0^t (|\dot{x}_s|^2 + |df|_{x_s}^2) ds.$$

Le but de cette section est de montrer quelques résultats sur les valeurs minimales des fonctionnelles I et I_f , qui seront utiles dans la suite. On note d_X la distance riemannienne sur (X, g^{TX}) .

PROPOSITION 13.1. *Pour $t > 0$, si $s_1, s_2 \in [0, t]$, on a*

$$(13.2) \quad I(x) \geq \frac{d_X^2(x_{s_1}, x_{s_2})}{t}.$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t$. Alors on a

$$(13.3) \quad tI(x) \geq (s_2 - s_1) \int_{s_1}^{s_2} |\dot{x}_s|^2 ds \geq d_X^2(x_{s_1}, x_{s_2}),$$

ce qui termine la démonstration. \square

PROPOSITION 13.2. *Il existe $c > 0$, tel que pour $t > 0$, s'il existe $s_1, s_2 \in [0, t]$ tels que $x_{s_1} \in U_{\alpha,1}, x_{s_2} \notin U_{\alpha,2}$, on a*

$$(13.4) \quad I_f(x) \geq c.$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $s_1 < s_2$. On pose

$$(13.5) \quad \tau_1 = \sup\{t \geq s_1, x_t \in U_{\alpha,1}\}, \quad \tau_2 = \inf\{t \geq \tau_1, x_t \notin U_{\alpha,2}\}.$$

Alors, pour $s \in [\tau_1, \tau_2]$, $x_s \in U_{\alpha,2} \setminus U_{\alpha,1}$. On a

$$(13.6) \quad I_f(x) \geq \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\dot{x}_s|^2 + |df|_{x_s}^2) ds \geq \frac{d_X^2(x_{\tau_1}, x_{\tau_2})}{\tau_2 - \tau_1} + c(\tau_2 - \tau_1) \geq c',$$

ce qui termine la démonstration. \square

COROLLAIRE 13.3. *Il existe $c > 0$, tel que pour $t \geq 1$, si $x_0 \notin U_2$, on a*

$$(13.7) \quad I_f(x) \geq c.$$

DÉMONSTRATION. Si pour tout $s \in [0, t]$, $x_s \notin U_1$, comme $|df|_{x_s} \geq c > 0, t \geq 1$, on a (13.7). S'il existe $s \in [0, t]$, $x_s \in U_1$, par la proposition 13.2, on a (13.7), ce qui termine la preuve. \square

14. Démonstration du théorème 10.5

Le but de cette section est de démontrer le théorème 10.5.

On suppose que (g^{TX}, g^F, f) vérifient les hypothèses de la sous-section 8.1. On fixe $\gamma > 0, \epsilon \in]0, 1[$ tels que

$$(14.0.1) \quad \langle p | 1 - 2\epsilon\gamma \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle \geq \frac{3}{4} |p|^2.$$

On suppose que $b > 0$ et $T > 0$ sont tels que $b^2 T = \gamma$.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la sous-section 14.1, on énonce le résultat principal de cette section, d'où on tire le théorème 10.5.

Dans la sous-section 14.2, on montre une estimation sur le noyau de la chaleur pour un opérateur scalaire.

Dans la sous-section 14.3, on montre notre résultat principal de la section.

14.1. Une estimation uniforme sur le noyau de la chaleur pour $L_{\epsilon,b,T}$. Pour $\epsilon > 0, b > 0, t > 0, T > 0$, on désigne par $P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p')$ le noyau C^∞ de $\exp\left(-\frac{t}{2}L_{\epsilon,b,T}\right)$ par rapport au volume symplectique $dv_{\mathcal{X}^*}$, et on désigne par $P_{\epsilon,b,T}^{\alpha,t}(x, p, x', p')$ le noyau C^∞ de $\exp\left(-\frac{t}{2}L_{\epsilon,b,T}^\alpha\right)$ (cf. (7.18.2)) par rapport au volume $dxdp$ sur \mathbf{R}^{2n} .

THÉORÈME 14.1. *Il existe $t_0 > 0, T_0 > 0, c > 0, C > 0$, tels que pour $T \geq T_0, b^2T = \gamma, t \in [1/T, t_0]$, si $x \notin U_2$ ou $x' \notin U_2$, on a*

$$(14.1.1) \quad |P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p')| \leq C \exp(-c(|p|^2 + |p'|^2 + T)),$$

et si $x, x' \in U_{\alpha,2}$, on a

$$(14.1.2) \quad |P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p') - P_{\epsilon,b,T}^{\alpha,t}(x, p, x', p')| \leq C \exp(-c(|p|^2 + |p'|^2 + T)).$$

De plus, leur dérivés covariantes de tous ordres vérifient des estimations du même type.

DÉMONSTRATION. La preuve de ces résultats sera donnée dans les sous-sections 14.2 et 14.3. \square

THÉORÈME 14.2. *Il existe $t_0 > 0, T_0 > 0, c > 0, C > 0$, tels que pour $T \geq T_0, b^2T = \gamma, t \in [1/T, t_0]$, on a*

$$(14.1.3) \quad \left| \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T}{T} \exp\left(-\frac{t}{2}L_{\epsilon,b,T}\right) \right] - \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] - \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2T} \right| \leq Ce^{-cT}.$$

DÉMONSTRATION. Par le théorème 14.1, on a

$$(14.1.4) \quad \int_{\pi^{-1}(X \setminus U_2)} \frac{\mathcal{H}_T}{T} \text{Tr}_s [P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x, p)] dv_{\mathcal{X}^*} = \mathcal{O}(e^{-cT}),$$

et

$$(14.1.5) \quad \int_{\pi^{-1}(U_2)} \frac{\mathcal{H}_T}{T} \text{Tr}_s [P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x, p)] dv_{\mathcal{X}^*} \\ = \sum_{\alpha=1}^l \int_{|x| \leq 2\sigma_0, p \in \mathbf{R}^n} \frac{\mathcal{H}_T^\alpha}{T} \text{Tr}_s [P_{\epsilon,b,T}^{\alpha,t}(x, p, x, p)] dxdp + \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

Sous notre hypothèses sur b, t, T , par (7.15.27), on sait que $a_{t/2b^2, \gamma}^\pm, d_{t/2b^2, \gamma}^\pm$ sont bornés. Du corollaire 7.40, on tire que

$$(14.1.6) \quad \left| \int_{|x| \geq 2\sigma_0, p \in \mathbf{R}^n} \frac{\mathcal{H}_T^\alpha}{T} \text{Tr}_s [P_{\epsilon,b,T}^{\alpha,t}(x, p, x, p)] dxdp \right| \\ \leq \frac{C}{T} \int_{|x| \geq 2\sqrt{T}\sigma_0, p \in \mathbf{R}^n} (1 + |x|^2 + |p|^2) \exp(-c(|x|^2 + |p|^2)) dxdp \leq Ce^{-cT}.$$

En rassemblant (14.1.4)-(14.1.6), on trouve que

$$(14.1.7) \quad \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T}{T} \exp\left(-\frac{t}{2}L_{\epsilon,b,T}\right) \right] = \sum_{\alpha=1}^l \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T^\alpha}{T} \exp\left(-\frac{t}{2}L_{\epsilon,b,T}^\alpha\right) \right] + \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

Du corollaire 7.40, de (10.1.5), (10.1.11) et de $b^2T = \gamma$, on tire que

$$\begin{aligned}
(14.1.8) \quad & \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T^\alpha}{T} \exp \left(-\frac{t}{2} \underline{L}_{\epsilon,b,T}^\alpha \right) \right] \\
&= f(x_\alpha) \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{t}{2} \underline{L}_{\epsilon,b,T}^\alpha \right) \right] + \text{Tr}_s \left[\frac{|p|^2 - T|x'|^2 + T|x''|^2}{2T} \exp \left(-\frac{t}{2} \underline{L}_{\epsilon,b,T}^\alpha \right) \right] \\
&= (-1)^{n_\alpha} f(x_\alpha) \text{rg}[F] + (-1)^{n_\alpha} \frac{n_\alpha w_{t/b^2}^- - (n - n_\alpha) w_{t/b^2}^+}{T} \text{rg}[F] \\
&= (-1)^{n_\alpha} f(x_\alpha) \text{rg}[F] + (-1)^{n_\alpha} \frac{(n - n_\alpha)}{2T} \text{rg}[F] + \mathcal{O}(e^{-ctT}).
\end{aligned}$$

Par (14.1.7), (14.1.8), on obtient le résultat. \square

REMARQUE 14.3. On va montrer que le théorème 10.5 résulte du théorème 14.2. En effet, par (9.1.2) et (9.1.4), on a

$$(14.1.9) \quad \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{b,T} \right) \right] = \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial a} \right) \Big|_{a=1} \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_T}{T} \exp \left(-\frac{at}{2} L_{\epsilon,b,T} \right) \right].$$

De (14.1.3) et (14.1.9), on tire le théorème 10.5. On note qu'on peut différentier en $a = 1$. En effet, si on différencie le noyau de la chaleur en t , les mêmes estimations du type (14.1.1), (14.1.2) sont vraies.

14.2. Quelques estimations sur un opérateur scalaire. On pose

$$(14.2.1) \quad S_{\epsilon,b,T} = \frac{1}{2} \left(-\Delta^V + \frac{1}{4}|p|^2 \right) - b \left(\nabla_{p^H} - (1 - \epsilon) T \nabla_{\nabla_f^V} \right) + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|^2.$$

On désigne par $q_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p')$ le noyau C^∞ de $\exp(-tS_{\epsilon,b,T}/2b^2)$ par rapport au volume symplectique $dv_{\mathcal{X}^*}$. On désigne par $S_{\epsilon,b,T}^\alpha$ et par $q_{\epsilon,b,T}^{\alpha,t}(x, p, x', p')$ les objets correspondants sur \mathbf{R}^{2n} . Dans cette sous-section, on va montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 14.4. *Il existe $c > 0, C > 0$, tels que pour $t \in [1/T, 1], T \geq T_0, b^2T = \gamma$, si $x, x' \notin U_2$, on a*

$$(14.2.2) \quad |q_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p')| \leq C \exp(-c(|p|^2 + |p'|^2 + T)),$$

et si $x, x' \in U_{\alpha,2}$, on a

$$(14.2.3) \quad |q_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p') - q_{\epsilon,b,T}^{\alpha,t}(x, p, x', p')| \leq C \exp(-c(|p|^2 + |p'|^2 + T)).$$

De plus, leur dérivés de tous ordres vérifient des estimations du même type.

DÉMONSTRATION. On remarque d'abord qu'il suffit de montrer que les termes à gauche de (14.2.2), (14.2.3) sont majorées par $C \exp(-c(|p|^2 + T))$. En effet, en considérant l'opérateur dual de $S_{\epsilon,b,T}$, on trouve la majoration par $C \exp(-c(|p'|^2 + T))$.

On procède comme dans [BL08, Theorem 4.7.1]. La démonstration s'organise comme suit.

- i) Dans la proposition 14.6, on établit une formule d'intégration par parties.
- ii) Dans la propositions 14.7, on contrôle uniformément les différents termes dans la formule d'intégration par parties.

iii) On considère les deux différents cas $|p| \geq \sqrt{T}$ et $|p| < \sqrt{T}$. En utilisant la transformation de Fourier et les estimations obtenues dans les étapes i), ii), on démontre le théorème 14.4.

Soit $(x, p) \in \mathcal{X}^*$. Soit w un mouvement brownien issu de 0 dans $\widehat{T_x^* X}$. On considère l'équation différentielle stochastique

$$(14.2.4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_t &= bp_t, & x_0 &= x, \\ \dot{p}_t &= \tau_t^0 \dot{w}_t - (1 - \epsilon) b T \nabla f_{x_s}, & p_0 &= p, \end{aligned}$$

où τ_t^0 est le transport parallèle de x_0 en x_t pour la connexion de Levi-Civita ∇^{TX} le long de la courbe $x.$, qui est C^1 . Par la formule de Feymann-Kac, pour $g \in C_c^\infty(\mathcal{X}^*)$, on a

$$(14.2.5) \quad \begin{aligned} & \exp\left(-\frac{t}{2b^2} S_{\epsilon, b, T}\right) g(x, p) \\ &= \mathbf{E} \left[\exp\left(-\int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8}|p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma T |df|_{x_s}^2\right) ds\right) g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right]. \end{aligned}$$

On va établir une formule d'intégration par parties, qui est un analogue à [BL08, (14.2.7)]. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration engendrée par $(w_s)_{s \leq t}$.

THÉORÈME 14.5. *Soit $h.$ un processus continu \mathcal{F}_t -adapté borné à valeurs dans $T_x X$, et soit $J.$ le champ de vecteur le long $x.$ tel que*

$$(14.2.6) \quad \begin{aligned} \ddot{J}_t + R^{TX}(J_t, \dot{x}_t) \dot{x}_t + (1 - \epsilon) \gamma \nabla_{J_t}^{TX} \nabla f &= b \tau_t^0 h_t. \\ J_0 = \dot{J}_0 &= 0. \end{aligned}$$

Alors on a

$$(14.2.7) \quad \begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\exp\left(-\int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8}|p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma T |df|_{x_s}^2\right) ds\right) \nabla_{(J_{t/2b^2}, b^{-1} \dot{J}_{t/2b^2})} g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\exp\left(-\int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8}|p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma T |df|_{x_s}^2\right) ds\right) g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right. \\ & \quad \left. \left(\int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{4b} \langle p_s, \dot{J}_s \rangle + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma T \nabla_{J_s} |df|_{x_s}^2\right) ds + \int_0^{t/2b^2} \langle h_s, \delta w_s \rangle \right) \right]. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On va procéder comme dans [BL08, Section 14.2]. Soit A_s un processus continu adapté borné à valeurs dans les matrices antisymétriques de $\text{End}(T_x X)$. Pour $l \in \mathbf{R}$, on pose

$$(14.2.8) \quad w_t^l = \int_0^t e^{lA_s} (\delta w_s + lh_s ds), \quad Z_t^l = \exp\left(-l \int_0^t \langle h_s, \delta w_s \rangle - \frac{l^2}{2} \int_0^t h_s^2 ds\right).$$

En remplaçant $w.$ par w^l dans (14.2.4), on désigne par $(x^l, p^l, \tau_t^{0,l})$ les objets correspondantes. Par la propriété de la transformation de Girsanov [ReY99, Theorem VIII.1.4],

on a

$$(14.2.9) \quad \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s^l|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s^l}^2 \right) ds \right) g(x_{t/2b^2}^l, p_{t/2b^2}^l) Z_{t/2b^2}^l \right] \\ = \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right].$$

Comme la seconde ligne de l'équation (14.2.9) ne dépend pas de l , on a

$$(14.2.10) \quad \left. \frac{\partial}{\partial l} \right|_{l=0} \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s^l|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s^l}^2 \right) ds \right) g(x_{t/2b^2}^l, p_{t/2b^2}^l) Z_{t/2b^2}^l \right] = 0.$$

Par [B81, Theorem 2.1], on peut dériver sous l'espérance. Alors,

$$(14.2.11) \quad \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) \left. \frac{\partial}{\partial l} \right|_{l=0} g(x_{t/2b^2}^l, p_{t/2b^2}^l) \right] \\ = \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right. \\ \left. \left(\int_0^{t/2b^2} \left. \frac{\partial}{\partial l} \right|_{l=0} \left(\frac{1}{8} |p_s^l|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s^l}^2 \right) ds + \int_0^{t/2b^2} \langle h_s, \delta w_s \rangle \right) \right].$$

Dans la suite, pour simplifier, on n'écrit pas explicitement $|_{l=0}$, et on désigne par $\frac{D}{Dt}$ son dérivé covariance induit par ∇^{TX} . Posons

$$(14.2.12) \quad J_t = \frac{\partial}{\partial l} x_t^l, \quad \varpi_t = \tau_0^t \frac{D}{Dt} \tau_t^{0,l}.$$

On note $\dot{J}, \ddot{J}, \dot{\varpi}$ pour $\frac{D}{Dt} J, \frac{D^2}{Dt^2} J, \frac{D}{Dt} \varpi$.

On affirme que J_t, ϖ_t vérifient l'équation différentielle stochastique

$$(14.2.13) \quad \ddot{J}_t + R^{TX}(J_t, \dot{x}_t) \dot{x}_t + (1 - \epsilon) \gamma \nabla_{J_t}^{TX} \nabla f = b \tau_t^0 h_t + b \tau_t^0 (\varpi_t + A_t) \frac{\delta w}{dt}, \\ \dot{\varpi}_t = \tau_0^t R^{TX}(\dot{x}_t, J_t) \tau_t^0, \\ J_0 = \dot{J}_0 = 0, \varpi_0 = 0.$$

En effet, par (14.2.12), on a $J_0 = 0, \varpi_0 = 0$. Par (14.2.12), on obtient la seconde équation de (14.2.13). Comme ∇^{TX} est sans torsion, De (14.2.4), (14.2.12), on tire que

$$(14.2.14) \quad \dot{J}_t = \frac{D}{Dt} \dot{x}_t^l = b \frac{D}{Dt} p_t^l,$$

ce qui nous donne $\dot{J}_0 = 0$. De (14.2.4), (14.2.8), (14.2.14), on tire que

$$(14.2.15) \quad \ddot{J}_t = \frac{D}{Dt} \dot{J}_t = b \frac{D}{Dt} \frac{D}{Dt} p_t^l = b \left(\frac{D}{Dt} \dot{p}_t^l + R^{TX}(\dot{x}_t, J_t) p_t \right) \\ = b \tau_t^0 \left(\varpi_t \dot{w}_t + A_t \frac{\delta w}{dt} + h_t \right) - (1 - \epsilon) \gamma \nabla_{J_t}^{TX} \nabla f + R^{TX}(\dot{x}_t, J_t) \dot{x}_t.$$

Comme x est C^1 , on a

$$(14.2.16) \quad \varpi_t \dot{w}_t + A_t \frac{\delta w}{dt} = (\varpi_t + A_t) \frac{\delta w}{dt}.$$

Par (14.2.15), (14.2.16), on a la première équation de (14.2.14).

En prenant $A_t = -\varpi_t$, de (14.2.14), on tire que

$$(14.2.17) \quad \ddot{J}_t + R^{TX}(J_t, \dot{x}_t) \dot{x}_t + (1 - \epsilon) \gamma \nabla_{J_t}^{TX} \nabla f = b \tau_t^0 h_t.$$

De plus, par (14.2.14), on a

$$(14.2.18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} \Big|_{l=0} \left(\frac{1}{8} |p_s^l|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) &= \frac{1}{4} \left\langle p_s, \frac{D}{Dl} p_s^l \right\rangle + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T \nabla_{J_s} |df|_{x_s}^2 \\ &= \frac{1}{4b} \langle p_s, \dot{J}_s \rangle + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T \nabla_{J_s} |df|_{x_s}^2. \end{aligned}$$

De (14.2.11), (14.2.17), (14.2.18), on tire le résultat. \square

Comme dans [BL08, (14.3.3), (14.3.4)], pour $s \in [0, 1]$, on pose

$$(14.2.19) \quad \varphi_s = s^2(3 - 2s), \quad \bar{\varphi}_s = s^2(-1 + s).$$

Alors,

$$(14.2.20) \quad \begin{array}{lll} \varphi_0 = \varphi'_0 = 0, & \varphi_1 = 1, & \varphi'_1 = 0, \\ \bar{\varphi}_0 = \bar{\varphi}'_0 = 0, & \bar{\varphi}_1 = 0, & \bar{\varphi}'_1 = 1. \end{array}$$

Soit $t > 0$. L'application $h \mapsto (J_{t/2b^2}, b^{-1} \dot{J}_{t/2b^2})$ est surjective. En effet, pour $(A, B) \in T_x X \oplus \widehat{T_x X} \simeq T_{x,p} \mathcal{X}^*$, $s \in [0, t]$, il suffit de poser

$$(14.2.21) \quad J_s^{A,B} = \tau_s^0 \left(\varphi_{2b^2 s/t} A + \frac{t}{2b} \bar{\varphi}_{2b^2 s/t} B \right).$$

On désigne par $h^{A,B}$, $\varpi^{A,B}$ les objets correspondant. Posons

$$(14.2.22) \quad M(A, B) = \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{4b} \langle p_s, \dot{J}_s^{A,B} \rangle + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T \nabla_{J_s^{A,B}} |df|_{x_s}^2 \right) ds + \int_0^{t/2b^2} h_s^{A,B} \delta w_s.$$

De (14.2.7), on tire que

$$(14.2.23) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) \nabla_{\tau_{t/2b^2}^0(A,B)} g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right] \\ = \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) M(A, B) g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right]. \end{aligned}$$

Soit e_1, \dots, e_n une base orthonormale de $T_x X$, et soit $\hat{e}^1, \dots, \hat{e}^n$ une base orthonormale de $\widehat{T_x X}$. Par (14.2.22), on pose

$$(14.2.24) \quad \begin{array}{lll} J^i = J^{(e_i, 0)}, & M^i = M(e_i, 0), & \varpi^i = \varpi^{e_i, 0}, \\ \hat{J}^i = J^{(0, \hat{e}^i)}, & \widehat{M}^i = M(0, \hat{e}^i), & \widehat{\varpi}^i = \varpi^{0, \hat{e}^i}. \end{array}$$

Soit U, V deux champs de vecteurs sur X . En identifiant (U, V) au champ de vecteur sur \mathcal{X}^* par la connexion de Levi-Civita ∇^{TX} .

PROPOSITION 14.6. *Pour $g \in C_c^\infty(\mathcal{X}^*)$, on a*

$$\begin{aligned}
(14.2.25) \quad & \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) \nabla_{(U,V)} g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right. \\
&\quad \sum_{i=1}^n \left(\left\langle U_{x_{t/2b^2}}, \tau_{t/2b^2}^0 e_i \right\rangle M^i - \left\langle \nabla_{\hat{J}_{t/2b^2}^{TX}} U_{x_{t/2b^2}}, \tau_{t/2b^2}^0 e_i \right\rangle - \left\langle U_{x_{t/2b^2}}, \tau_{t/2b^2}^0 \varpi_{t/2b^2}^i e_i \right\rangle \right. \\
&\quad \left. \left. + \left\langle V_{x_{t/2b^2}}, \tau_{t/2b^2}^0 \hat{e}^i \right\rangle \widehat{M}^i - \left\langle \nabla_{\hat{J}_{t/2b^2}^{TX}} V_{x_{t/2b^2}}, \tau_{t/2b^2}^0 \hat{e}^i \right\rangle - \left\langle V_{x_{t/2b^2}}, \tau_{t/2b^2}^0 \widehat{\varpi}_{t/2b^2}^i \hat{e}^i \right\rangle \right) \right].
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On a

$$(14.2.26) \quad U_x = \sum_{i=1}^n \langle U_x, \tau^0 e_i \rangle \tau^0 e_i, \quad V_x = \sum_{i=1}^n \langle V_x, \tau^0 \hat{e}^i \rangle \tau^0 \hat{e}^i.$$

En procédant comme dans la démonstration du théorème 14.5, pour $J = J^i$ et pour la fonction de test $\langle U_x, \tau^0 e_i \rangle g(x, p)$, on a

$$\begin{aligned}
(14.2.27) \quad & \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial l} \Big|_{l=0} \left(\left\langle U_{x_{t/2b^2}^l}, \tau_{t/2b^2}^{0,l} e_i \right\rangle g(x_{t/2b^2}^l, p_{t/2b^2}^l) \right) \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) \langle U_{x_{t/2b^2}}, \tau_{t/2b^2}^0 e_i \rangle g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) M^i \right].
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
(14.2.28) \quad & \frac{\partial}{\partial l} \Big|_{l=0} g(x_{t/2b^2}^l, p_{t/2b^2}^l) = \nabla_{\tau_{t/2b^2}^0 e_i} g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}), \\
& \frac{\partial}{\partial l} \Big|_{l=0} \langle U_{x_{t/2b^2}^l}, \tau_{t/2b^2}^{0,l} e_i \rangle = \left\langle \nabla_{\hat{J}_{t/2b^2}^{TX}} U_{x_{t/2b^2}}, \tau_{t/2b^2}^0 e_i \right\rangle + \left\langle U_{x_{t/2b^2}}, \tau_{t/2b^2}^0 \varpi_{t/2b^2}^i e_i \right\rangle.
\end{aligned}$$

De (14.2.26)-(14.2.28), en procédant de la même manière pour $\langle V_x, \tau^0 \hat{e}^i \rangle g(x, p)$, on tire le résultat. \square

PROPOSITION 14.7. *Pour $q \in]1, \infty[$, il existe $C_q > 0$ tel que pour $T \geq 1, b > 0, b^2 T = \gamma, t \in [1/T, 1]$, on a*

$$(14.2.29) \quad \begin{aligned} \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} |p_s| &= \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} b^{-1} |\dot{x}_s| \leq |p| + \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} |w_s| + CT^{3/2}, \\ \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} \left\{ |J_s^{A,B}|, \frac{t}{2b^2} |j_s^{A,B}|, \frac{t^2}{4b^2} |\ddot{j}_s^{A,B}| \right\} &\leq |A| + \frac{t}{2b} |B|, \\ \|M(A, B)\|_{L^q} &\leq C_q T^3 (1 + |p|^2) (|A| + |B|), \\ \left\| \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} |\varpi_s^{A,B}| \right\|_{L^q} &\leq C_q T^{5/2} (1 + |p|) (|A| + |B|). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Les premières deux inégalités de (14.2.29) sont des conséquences directes de (14.2.4), (14.2.21).

De (14.2.22), on tire que

$$(14.2.30) \quad |M(A, B)| \leq C \left(\frac{t}{b^3} \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} |p_s| |j_s^{A,B}| + \frac{tT}{b^2} \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} |J_s^{A,B}| + \left| \int_0^{t/2b^2} h_s^{A,B} \delta w_s \right| \right).$$

Par les premières deux inégalités de (14.2.29), et par l'inégalité de Doob [ReY99, Theorem II.1.7]

$$(14.2.31) \quad \left\| \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} |w_s| \right\|_{L^q} \leq C_q \sqrt{t/b},$$

sous notre hypothèse sur b, t, T , pour $q > 1$, on a

$$(14.2.32) \quad \left\| \frac{t}{b^3} \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} |p_s| |j_s^{A,B}| \right\|_{L^q} \leq \frac{1}{b} \left(|p| + C_q \frac{\sqrt{t}}{b} + CT^{3/2} \right) \left(|A| + \frac{t}{2b} |B| \right) \\ \leq C_q T^{5/2} (1 + |p|) (|A| + |B|).$$

De même, on a

$$(14.2.33) \quad \left\| \frac{tT}{b^2} \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} |J_s^{A,B}| \right\|_{L^q} \leq \frac{tT}{b^2} \left(|A| + \frac{t}{2b} |B| \right) \leq CT^{5/2} (|A| + |B|).$$

Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy [ReY99, Theorem IV.4.1], on a

$$(14.2.34) \quad \left\| \int_0^{t/2b^2} h_s^{A,B} \delta w_s \right\|_{L^q} \leq C_q \left\| \left(\int_0^{t/2b^2} |h_s^{A,B}|^2 ds \right)^{1/2} \right\|_{L^q} \leq C_q \frac{t^{1/2}}{b} \left\| \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} |h_s^{A,B}| \right\|_{L^q}.$$

Par (14.2.6), on a

$$(14.2.35) \quad |h_t^{A,B}| \leq Cb^{-1} \left(|\ddot{j}_t^{A,B}| + |J_t^{A,B}| |\dot{x}_t|^2 + |J_t^{A,B}| \right).$$

Des deux premières inégalités de (14.2.29) et de (14.2.34), (14.2.35), on tire que

$$(14.2.36) \quad \left\| \int_0^{t/2b^2} h_s^{A,B} \delta w_s \right\|_{L^q} \leq C_q T^3 (1 + |p|^2) (|A| + |B|).$$

Par (14.2.30), (14.2.32), (14.2.33), (14.2.36), on obtient la troisième inégalité de (14.2.29).

Par (14.2.13) et les deux premières inégalités de (14.2.29), on a

$$(14.2.37) \quad \left\| \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} |\varpi_s^{A,B}| \right\|_{L^q} \leq C \frac{t}{b^2} \left\| \max_{0 \leq s \leq t/2b^2} |\dot{x}_s| |J_s^{A,B}| \right\|_{L^q} \\ \leq C \frac{t}{b} \left(|p| + C_q \frac{\sqrt{t}}{b} + CT^{3/2} \right) \left(|A| + \frac{t}{2b} |B| \right) \leq C_q T^{5/2} (1 + |p|) (|A| + |B|),$$

ce qui nous donne la dernière inégalité de (14.2.29) et termine la démonstration. \square

COROLLAIRE 14.8. *Si $(U_i, V_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont des champs de vecteurs C^∞ sur X , il existe une variable aléatoire M intégrable telle que*

$$(14.2.38) \quad \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) \nabla_{(U_1, V_1)} \cdots \nabla_{(U_k, V_k)} g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right] \\ = \mathbf{E} \left[M \exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right].$$

De plus, il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que pour $q \in]1, \infty[$, il existe $C_q > 0$ tel que

$$(14.2.39) \quad \|M\|_{L^q} \leq C_q T^r (1 + |p|^2)^r.$$

DÉMONSTRATION. En itérant (14.2.25), et par la proposition 14.7, on tire le résultat. \square

La preuve du théorème 14.4 dans le cas $|p| \geq \sqrt{T}$.

PROPOSITION 14.9. *Pour $q \in]1, \infty[$, il existe $c_q > 0$ tel que pour $t \in [1/T, 1]$, $T \geq T_0$, $b^2 T = \gamma$, $|p| \geq \sqrt{T}$, on a*

$$(14.2.40) \quad \left\| \exp \left(- \frac{1}{8} \int_0^{t/2b^2} |p_s|^2 ds \right) \right\|_{L^q} \leq 2 \exp(-c_q |p|^2).$$

DÉMONSTRATION. Sous notre hypothèses sur b, t, T , pour $t_1 \in]0, 1/(2\gamma)]$, on a $t_1 \leq t/2b^2$. Alors,

$$(14.2.41) \quad \int_0^{t/2b^2} |p_s|^2 ds \geq \int_0^{t_1} |p_s|^2 ds \geq t_1 \min_{0 \leq s \leq t_1} |p_s|^2.$$

De (14.2.4), on tire que

$$(14.2.42) \quad \min_{0 \leq s \leq t_1} |p_s| \geq |p| - \max_{0 \leq s \leq t_1} |w_s| - Ct_1 T^{1/2}.$$

On choisit $t_1 = \min\{1/(2\gamma), 1/(4C)\}$. Comme $|p| \geq \sqrt{T}$, par (14.2.42), sur l'ensemble $\{\max_{0 \leq s \leq t_1} |w_s| \leq |p|/4\}$, on a

$$(14.2.43) \quad \min_{0 \leq s \leq t_1} |p_s| \geq |p|/2.$$

Par (14.2.41), (14.2.43), on a

$$(14.2.44) \quad \int_0^{t/2b^2} |p_s|^2 ds \geq t_1 |p|^2 / 4.$$

D'autre part, on sait que

$$(14.2.45) \quad \mathbf{P} \left[\max_{0 \leq s \leq t_1} |w_s| \geq |p|/4 \right] \leq \exp(-c|p|^2).$$

De (14.2.44), (14.2.45), on tire que pour $q \in]1, \infty[$,

$$(14.2.46) \quad \left\| \exp \left(-\frac{1}{8} \int_0^{t/2b^2} |p_s|^2 ds \right) \right\|_{L^q} \leq 2 \exp(-c_q|p|^2),$$

ce qui termine la preuve. \square

Par le corollaire 14.8 et la proposition 14.9, pour $(U_i, V_i)_{1 \leq i \leq k}$ les champs de vecteurs sur X , si $|p| \geq \sqrt{T}$, on a

$$(14.2.47) \quad \left| \int_{\mathcal{X}^*} q_{\epsilon, b, T}^t(x, p, x', p') \nabla_{(U_1, V_1)} \cdots \nabla_{(U_k, V_k)} g(x', p') dv_{\mathcal{X}^*} \right| \leq C \exp(-c|p|^2) \|g\|_{C^0}.$$

En procédant comme dans [B11, Theorem 12.7.4], c'est à dire en utilisant la propriété de la transformation de Fourier, il est facile de déduire

$$(14.2.48) \quad q_{\epsilon, b, T}^t(x, p, x', p') \leq C \exp(-c|p|^2) \leq C \exp(-c'(|p|^2 + T)).$$

De plus, les dérivées de tous ordres en x', p' vérifient des estimations du même type. Par l'argument dans [BL08, Section 14.4], c'est à dire, par variation des points départs, on peut montrer que les dérivées de tous ordres en x, p vérifient des estimations du même type, ce qui nous donne (14.2.2). D'autre part, $q_{\epsilon, b, T}^{\alpha, t}(x, p, x', p')$ et ses dérivées de tous d'ordres vérifient des estimations similaires, ce qui nous donne (14.2.3) et termine la démonstration du théorème dans le cas $|p| \geq \sqrt{T}$.

La preuve de (14.2.2) dans le cas $|p| < \sqrt{T}$. Par le corollaire 13.3, par (14.2.4) et par $t/2b^2 \geq 1/(2\gamma)$, quitte à changer les constantes, si $x \notin U_2$, on a

$$(14.2.49) \quad \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \geq cT \int_0^{t/2b^2} (|\dot{x}_s|^2 + |df|_{x_s}^2) ds \geq c'T.$$

En procédant comme (14.2.48), par le corollaire 14.8, et par (14.2.49), on trouve que si $x \notin U_2$ et si $|p| < T$, il existe $c > 0, C > 0$, tels que

$$(14.2.50) \quad q_{\epsilon, b, T}^t(x, p, x', p') \leq C \exp(-cT) \leq C \exp(-c'(T + |p|^2)).$$

De plus, les dérivées de tous d'ordres vérifient des estimations similaires.

La preuve de (14.2.3) dans le cas $|p| < \sqrt{T}$. On suppose maintenant que $x, x' \in U_{\alpha, 2}$. Posons

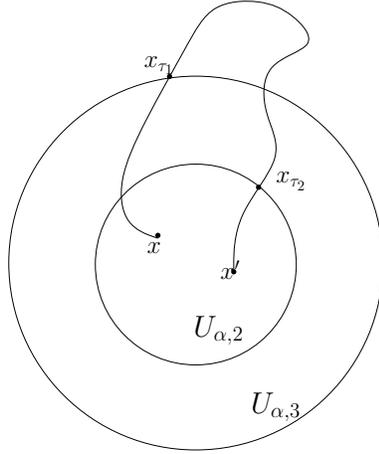
$$(14.2.51) \quad \tau_1 = \inf\{t \geq 0; x_t \notin U_{\alpha, 3}\}, \quad \tau_2 = \inf\{t \geq \tau_1; x_t \in U_{\alpha, 2}\}.$$

Sur l'ensemble $\{\tau_2 \leq t/2b^2\}$, on a

$$(14.2.52) \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 \leq t/2b^2, \quad x_{\tau_1} \notin U_{\alpha, 3}, \quad x_{\tau_2} \in \overline{U_{\alpha, 2}}.$$

Par la proposition 13.2, on a

$$(14.2.53) \quad \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \geq cT.$$

FIGURE 14.1. Les temps d'arrêt τ_1, τ_2 .

Soit $g \in C_c^\infty(\mathcal{X}^*)$ tel que $\pi(\text{Supp } g) \subset U_{\alpha,2}$. Alors sur l'ensemble $\{\tau_1 \leq t/2b^2 < \tau_2\}$, on a

$$(14.2.54) \quad g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) = 0.$$

Du corollaire 14.8 et (14.2.54), on tire que

$$(14.2.55) \quad \exp\left(-\frac{t}{2b^2} S_{\epsilon,b,T}\right) \nabla_{(U_1, V_1)} \cdots \nabla_{(U_k, V_k)} g(x, p) \\ = \mathbf{E} \left[M \exp\left(-\int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8}|p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma T |df|_{x_s}^2\right) ds\right) \mathbf{1}_{\tau_1 > t/2b^2} g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right] \\ + \mathbf{E} \left[M \exp\left(-\int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8}|p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma T |df|_{x_s}^2\right) ds\right) \mathbf{1}_{\tau_2 \leq t/2b^2} g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right].$$

Soit (x^α, p^α) les objets correspondants à (x, p) , quand on remplace \mathcal{X}^* par \mathbf{R}^{2n} . Les processus $(x_s, p_s)_{0 \leq s \leq \tau_1}$ et $(x_s^\alpha, p_s^\alpha)_{0 \leq s \leq \tau_1^\alpha}$ sont de même loi. En identifiant g à une fonction sur \mathbf{R}^{2n} , on trouve que

$$(14.2.56) \quad \int_{(x', p') \in \pi^{-1}(U_{\alpha,2})} (q_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p') - q_{\epsilon,b,T}^{\alpha,t}(x, p, x', p')) \nabla_{(U_1, V_1)} \cdots \nabla_{(U_k, V_k)} g(x', p') dx' dp' \\ = \mathbf{E} \left[M \exp\left(-\int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{2}|p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma T |df|_{x_s}^2\right) ds\right) \mathbf{1}_{\tau_2 \leq t/2b^2} g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right] \\ - \mathbf{E} \left[M^\alpha \exp\left(-\int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{2}|p_s^\alpha|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma T |df|_{x_s^\alpha}^2\right) ds\right) \mathbf{1}_{\tau_2^\alpha \leq t/2b^2} g(x_{t/2b^2}^\alpha, p_{t/2b^2}^\alpha) \right].$$

De (14.2.39), (14.2.53), (14.2.56), si $x, x' \in U_{\alpha,2}$ et si $|p| < \sqrt{T}$, on tire que

$$(14.2.57) \quad |q_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p') - q_{\epsilon,b,T}^{\alpha,t}(x, p, x', p')| \leq C \exp(-cT) \leq C \exp(-c'(T + |p|^2)).$$

De plus, les dérivées de tous d'ordres vérifient des estimations similaires, ceci termine la preuve du théorème 14.4. \square

14.3. Démonstration du théorème 14.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 14.1. On désigne encore par τ_0^t le transport parallèle de x_t en x_0 pour $\nabla^{F,u}$ le long de la courbe x . qui est C^1 . Considérons l'équation différentielle stochastique à valeurs dans $\text{End} \left(\Lambda(T_x^* X) \otimes \Lambda(\widehat{T_x X}) \right) \otimes_{\mathbf{R}} \text{End}(F_x)$,

(14.3.1)

$$\begin{aligned} \dot{U}_t = & -U_t \tau_0^t \left(\frac{1}{2} \left\langle p \left| \frac{3}{4} - 2\epsilon\gamma \nabla^{TX} \nabla f \right| p \right\rangle + \frac{-n + 2N^V}{2} - \frac{b}{2} \omega(\nabla^F, g^F) \left(\frac{\delta w}{dt} \right) \right. \\ & - \frac{\epsilon\gamma}{2} \omega(\nabla^F, g^F)(\nabla f) - \frac{b^2}{4} \langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle (e^i - \widehat{e}_i)(e^j - \widehat{e}_j) i_{e_k + \widehat{e}^k} i_{e_l + \widehat{e}^l} \\ & - b^2 \left(\langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j \rangle - T \nabla^{TX} \nabla f(e_i, e_j) + \frac{1}{2} \nabla_{e_i} \omega(\nabla^F, g^F)(e_j) \right) \\ & \left. (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}^j} \right) \tau_t^0, \end{aligned}$$

$$U_0 = 1.$$

Par la formule de Feymann-Kac, pour $g \in C_c^\infty(\mathcal{X}^*, \pi^*(\Lambda(T^* X) \otimes \Lambda(\widehat{TX}) \otimes F))$, on a

$$\begin{aligned} (14.3.2) \quad & \exp \left(-\frac{t}{2} L_{\epsilon, b, T} \right) g(x, p) \\ & = \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^{t/2b^2} \left(\frac{1}{8} |p_s|^2 + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \gamma T |df|_{x_s}^2 \right) ds \right) U_{t/2b^2} \tau_0^{t/2b^2} g(x_{t/2b^2}, p_{t/2b^2}) \right]. \end{aligned}$$

Comme (14.0.1), on a

$$(14.3.3) \quad \left\langle p \left| \frac{1}{4} - 2\epsilon\gamma \nabla^{TX} \nabla f \right| p \right\rangle \geq 0.$$

On choisit $T_0 > 0$ assez grand tel que

$$(14.3.4) \quad b^2 \left| \langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j \rangle (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}^j} \right| \leq C b^2 |p|^2 \leq C \gamma |p|^2 / T_0 \leq |p|^2 / 4.$$

Par le même calcul de (8.2.7)-(8.2.14), pour $q \geq 2$, on trouve que

$$(14.3.5) \quad \|U_{t/2b^2}\|_{L^q} \leq \exp(c_q t / 2b^2) \leq \exp(c'_q t_0 T).$$

En procédant comme dans la section 14.2, on trouve que les expressions à gauche de (14.1.1), (14.1.2) sont majorées par

$$(14.3.6) \quad C \exp(-c(|p|^2 + |p'|^2 + T) + c'_q t_0 T).$$

En choisant $t_0 > 0$ assez petit, on obtient (14.1.1), (14.1.2), ceci termine la preuve du théorème 14.1. \square

15. Démonstration du théorème 10.6

Le but de cette section est de démontrer le théorème 10.6.

On suppose que (g^{TX}, g^F, f) vérifient les hypothèses de la section 8.1. On fixe $\gamma > 0, \epsilon \in]0, 1[$ tels que

$$(15.0.1) \quad \langle p | 1 - 2\epsilon\gamma \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle \geq \frac{3}{4} |p|^2.$$

On suppose que $b > 0$ et $T > 0$ sont tels que $b^2 T = \gamma$.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la sous-section 15.1, on énonce le résultat principal de cette section, d'où on tire le théorème 10.6.

Dans la sous-section 15.2, on montre que notre résultat est local sur X .

Dans la sous-section 15.3, on introduit un changement d'échelle sur les variables de Clifford qui est un analogue de la transformation de Getzler [Ge86]. On obtient aussi un nouvel opérateur $\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$.

Dans la sous-section 15.4, on calcule le développement de Taylor de $\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$ quand $t \rightarrow 0$.

Dans la sous-section 15.5, on évalue des traces associées aux opérateurs qui apparaissent dans le développement précédent.

Dans la sous-section 15.6, on montre notre résultat principal hors de points critiques.

Dans la sous-section 15.7, on montre notre résultat principal au voisinage des points critiques.

15.1. Une estimation uniforme sur $\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} \exp(-tL_{\epsilon, bt^{1/4}, t^{-1/2}T}/2) \right]$. On pose $\mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon = tL_{\epsilon, bt^{1/4}, t^{-1/2}T}$. Par (8.2.21), on a

$$(15.1.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon &= \frac{\sqrt{t}}{2b^2} \left(-\Delta^V + \langle p | 1 - 2\epsilon\gamma \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle - n + 2N^V \right) + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) T^2 |df|^2 \\ &\quad - \frac{t^{3/4}}{b} \left(\nabla_p^{F,u} - (1-\epsilon)t^{-1/2}T \nabla_{\nabla f}^V + \frac{1}{2} \omega(\nabla^F, g^F)(e_i) \nabla_{\widehat{e}^i}^V + \frac{\epsilon b T}{2t^{1/4}} \omega(\nabla^F, g^F)(\nabla f) \right) \\ &\quad - \frac{t}{4} \langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle (e^i - \widehat{e}_i)(e^j - \widehat{e}_j) i_{e_k + \widehat{e}^k} i_{e_l + \widehat{e}^l} \\ &\quad - \left(t \langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j \rangle - t^{1/2} T \nabla_{e_i}^{TX} \nabla_{e_j} f + \frac{t}{2} \nabla_{e_i}^F \omega(\nabla^F, g^F)(e_j) \right) (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}^j}. \end{aligned}$$

On énonce le résultat principal de cette section.

THÉORÈME 15.1. *Il existe $T_0 > 0, C > 0$ tels que pour $t \in]0, 1], T \in [\sqrt{t}T_0, 1/\sqrt{t}]$, $bT^2 = \gamma$, on a*

$$(15.1.2) \quad \left| \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon \right) \right] - \frac{1}{\sqrt{t}} \int_X f \alpha_{T^2/4} + \frac{1}{4} \int_X \theta(g^F, \nabla^F) T \beta_{T^2/4} \right| \leq C \sqrt{t}.$$

DÉMONSTRATION. La preuve de ce résultat sera donnée dans les sous-sections 15.2-15.7. \square

REMARQUE 15.2. On va montrer que le théorème 10.6 résulte du théorème 15.1. En effet, par (9.1.2), on a

$$(15.1.3) \quad \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} r \left(\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon \right) \right] = \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial a} \right) \Big|_{a=1} \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} \exp \left(-\frac{a}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon \right) \right].$$

Par (15.1.1), on a

$$(15.1.4) \quad a\mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon = \mathcal{M}_{a^{-1/4}b,at,a^{1/2}T}^\epsilon.$$

Alors,

$$(15.1.5) \quad \begin{aligned} \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} \exp \left(-\frac{a}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon \right) \right] \\ = a^{1/2} \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{(at)^{-1/2}a^{1/2}T}}{a^{1/2}T} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{a^{-1/4}b,at,a^{1/2}T}^\epsilon \right) \right]. \end{aligned}$$

Quitte à changer les constantes, par le théorème 15.1, pour $a \in [1/2, 3/2]$, on a

$$(15.1.6) \quad \left| a^{1/2} \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{(at)^{-1/2}a^{1/2}T}}{a^{1/2}T} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{a^{-1/4}b,at,a^{1/2}T}^\epsilon \right) \right] - \frac{1}{\sqrt{t}} \int_X f \alpha_{aT^2/4} \right. \\ \left. + \frac{a}{4} \int_X \theta(F, g^F) T \beta_{aT^2/4} \right| \leq C \sqrt{t}.$$

De (10.1.2) ou [BG01, (13.7),(13.9)], on tire que

$$(15.1.7) \quad \begin{aligned} \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial a} \right) \Big|_{a=1} \int_X f \alpha_{aT^2/4} &= m_T, \\ \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial a} \right) \Big|_{a=1} \frac{a}{4} \int_X \theta(F, g^F) T \beta_{aT^2/4} &= -n_T. \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du théorème 10.5, de (9.1.4), (15.1.3), (15.1.5)-(15.1.7), on tire le théorème 10.6.

15.2. Localisation du problème. On fixe $x \in X$. Soit $a_X > 0$ le rayon d'injectivité de X . On choisit $\sigma_1 > 0$ tel que $\sigma_1 < a_X/4$ et $\sigma_1 < \sigma_0$. Soit $B^X(x, 4\sigma_1)$ la boule géodésique de centre x et de rayon $4\sigma_1$ dans X , et $B^{T_x X}(0, 4\sigma_1)$ la boule euclidienne de centre 0 et de rayon $4\sigma_1$ dans $T_x X$. Pour $y \in B^{T_x X}(0, 4\sigma_1)$, $u \in]-1, 1[$, soit $\exp_x^X(uy)$ la géodésique issue de x , de vitesse initiale y . Alors, $B^{T_x X}(0, 4\sigma_1)$ s'identifie à $B^X(x, 4\sigma_1)$ via l'application \exp_x^X .

On désigne par dv_X le volume riemannien de X associé à g^{TX} , et soit dy le volume riemannien de $T_x X$ associé à g_x^{TX} . Soit $k_x(y) \in C^\infty(B^{T_x X}(0, 4\sigma_1), \mathbf{R}_+^*)$ tel que

$$(15.2.1) \quad dv_X|_{\exp_x^X(y)} = k_x(y) dy.$$

Alors, $k_x(0) = 1$.

On trivialisé le fibré $\Lambda(T^*X) \otimes \Lambda(\widehat{T^*X})$ sur $B^X(x, 4\sigma_1)$ par transport parallèle le long de la géodésique radiale $u \in [0, 1] \rightarrow uy$ pour ∇^{TX} . L'espace total de T^*X sur $B^X(x, 4\sigma_1)$ s'identifie à $B^{T_x X}(0, 4\sigma_1) \times \widehat{T_x^* X}$. On trivialisé F sur $B^X(x, 4\sigma_1)$ par la connexion plate ∇^F .

Soit ρ une fonction C^∞ sur $T_x X$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que

$$(15.2.2) \quad \rho(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } |y| \leq 2\sigma_1; \\ 0, & \text{si } |y| \geq 3\sigma_1. \end{cases}$$

Posons

$$(15.2.3) \quad (g_\rho^{T_x X})_y = \rho(y)g^{T_y X} + (1 - \rho(y))g^{T_x X}, \quad (g_\rho^{F_x})_y = \rho(y)g^{F_y} + (1 - \rho(y))g^{F_x}.$$

Si $x \notin U_2$, on pose

$$(15.2.4) \quad \nabla^{T_x X} \nabla f_\rho = \rho \nabla^{T_x X} \nabla f, \quad |df|_\rho^2 = \rho |df|^2 + (1 - \rho), \quad \nabla f_\rho = \rho \nabla f.$$

Si $x \in U_{\alpha,2}$, on pose

$$(15.2.5) \quad \nabla^{T_x X} \nabla f_{\rho,y} = \nabla^{T_x X} \nabla f_{x+y}^\alpha, \quad |df|_{\rho,y}^2 = |df^\alpha|_{x+y}^2, \quad \nabla f_{\rho,y} = \nabla f_{x+y}^\alpha.$$

Alors, $(T_x X, g_\rho^{T_x X})$ est une variété riemannienne, et F_x est un fibré trivial sur $T_x X$ muni de la métrique $g_\rho^{F_x}$. On peut appliquer la construction de la section 3.2. Soit $\mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$ l'opérateur du type $\mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon$ associé à $(T_x X, g_\rho^{T_x X}, F_x, g_\rho^{F_x})$, où la partie contenant f est remplacée par le terme correspondant d'indice ρ . Pour simplifier, on n'écrit pas explicitement l'indice ρ sauf pour les termes contenant f . De (15.1.1), on a

$$(15.2.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon} &= \frac{\sqrt{t}}{2b^2} \left(-\Delta^V + \langle p | 1 - 2\epsilon\gamma \nabla^{T_x X} \nabla f_\rho | p \rangle - n + 2N^V \right) + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) T^2 |df|_\rho^2 \\ &\quad - \frac{t^{3/4}}{b} \left(\nabla_p^{F,u} - (1 - \epsilon)t^{-1/2} T \nabla_{\widehat{\nabla} f_\rho}^V + \frac{1}{2} \omega(\nabla^F, g^F)(e_i) \nabla_{\widehat{e}_i}^V + \frac{\epsilon b T}{2t^{1/4}} \omega(\nabla^F, g^F)(\nabla f_\rho) \right) \\ &\quad - \frac{t}{4} \langle R^{T_x X}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle (e^i - \widehat{e}_i)(e^j - \widehat{e}_j) i_{e_k + \widehat{e}_k} i_{e_l + \widehat{e}_l} \\ &\quad - \left(t \langle R^{T_x X}(p, e_i) p, e_j \rangle - t^{1/2} T \nabla_{e_i}^{T_x X} \nabla_{e_j} f_\rho + \frac{t}{2} \nabla_{e_i}^F \omega(\nabla^F, g^F)(e_j) \right) (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}_j}. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$ coïncide avec $\mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon$ sur $B^{T_x X}(0, 2\sigma_1) \times \widehat{T_x^* X}$. De plus, $\mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$ coïncide avec l'opérateur modèle correspondant.

On pose

$$(15.2.7) \quad \mathcal{M}_{b,t,T}^{\epsilon,t'} = K_{b/t^{1/4}} \mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon K_{t^{1/4}/b}, \quad \mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon,t'} = K_{b/t^{1/4}} \mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon} K_{t^{1/4}/b}.$$

On désigne par $P_{b,t,T}^{\epsilon,t'}(x, p, x', p')$ le noyau C^∞ de $\exp(-\mathcal{M}_{b,t,T}^{\epsilon,t'}/2)$ par rapport à $dv_{\mathcal{X}^*}$, et on désigne par $P_{b,t,T}^{x,\epsilon,t'}(y, p, y', p')$ le noyau C^∞ de $\exp(-\mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon,t'}/2)$ par rapport à $dy dp$.

THÉORÈME 15.3. *Il existe $T_0 > 0, c > 0, C > 0$, tels que pour $t \in]0, 1]$, $T \in [\sqrt{t}T_0, 1/\sqrt{t}]$, $b^2 T = \gamma$, si $(x, p), (x', p') \in \mathcal{X}^*, y' \in B^{T_x X}(0, \sigma_1)$, tels que $x' = \exp_x^X(y')$, on a*

$$(15.2.8) \quad \left| P_{b,t,T}^{\epsilon,t'}(x, p, x', p') - P_{b,t,T}^{x,\epsilon,t'}(0, p, y', p') k_x(y') \right| \leq C \exp(-c|p|^2 - c/t).$$

De plus, leur dérivées de tous ordres vérifient des estimations similaires.

DÉMONSTRATION. La preuve est semblable à la preuve du théorème 14.4. Considérons l'équation différentielle stochastique

$$(15.2.9) \quad \begin{aligned} \dot{x}_s &= \sqrt{t} p_s, & x_0 &= x, \\ \dot{p}_s &= \frac{\sqrt{t}}{b^2} \tau_s^0 \dot{w}_s - (1 - \epsilon) \frac{\sqrt{t} T}{b^2} \nabla f_{x_s}, & p_0 &= p, \end{aligned}$$

et

(15.2.10)

$$\begin{aligned} \dot{V}_s = & -V_s \tau_0^s \left(\langle p | 1/4 - \epsilon \gamma \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle + \frac{\sqrt{t}}{2b^2} (-n + 2N^V) - \frac{t^{3/4}}{2b} \omega(\nabla^F, g^F) \left(\frac{\delta w}{dt} \right) \right. \\ & - \frac{\epsilon \sqrt{t} T}{2} \omega(\nabla^F, g^F)(\nabla f) - \frac{t}{4} \langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle (e^i - \widehat{e}_i)(e^j - \widehat{e}_j) i_{e_k + \widehat{e}^k} i_{e_l + \widehat{e}^l} \\ & - \sqrt{t} \left(b^2 \langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j \rangle - T \nabla^{TX} \nabla f(e_i, e_j) + \frac{\sqrt{t}}{2} \nabla_{e_i}^F \omega(\nabla^F, g^F)(e_j) \right) \\ & \left. (e^i - \widehat{e}_i) i_{e_j + \widehat{e}^j} \right) \tau_{s, p_s}^0, \end{aligned}$$

$$V_0 = 1.$$

Par la formule de Feymann-Kac, pour $g \in C_c^\infty(\mathcal{X}^*, \pi^*(\Lambda(T^*X) \otimes \Lambda(\widehat{T^*X}) \otimes F))$, on a

$$\begin{aligned} (15.2.11) \quad & \exp\left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^{\epsilon, \epsilon'}\right) g(x, p) \\ & = \mathbf{E} \left[\exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^{1/2} |p_s|^2 ds - \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) T^2 \int_0^{1/2} |df|_{x_s}^2 ds\right) V_{1/2} \tau_0^{1/2} g(x_{1/2}, p_{1/2}) \right]. \end{aligned}$$

Comme $t \in]0, 1]$, $T \in [\sqrt{t}T_0, 1/\sqrt{t}]$, $b^2T = \gamma$, tous les coefficients dans (15.2.10) sont bornés sauf le terme contenant $\sqrt{t}b^2 \langle R^{TX}(e_i, p) p, e_j \rangle$. Comme $\sqrt{t}b^2 = \gamma \sqrt{t}/T \leq \gamma/T_0$, en choisissant T_0 assez grand, ce terme est dominé par $|p|^2/4$. Alors, par la même démonstration que dans (8.2.7)-(8.2.14), pour $q \geq 2$, on trouve que

$$(15.2.12) \quad \|V_{1/2}\|_{L^q} \leq C_q.$$

On suppose d'abord que $|p| \geq 1/\sqrt{t}$. Or $T \leq 1/\sqrt{t}$. Comme dans la démonstration de la proposition 14.9, en comparant $\sup_{0 \leq s \leq 1/2} |w_s|$ et $|p|$, on trouve que

$$(15.2.13) \quad \left\| \exp\left(-\frac{1}{4} \int_0^{1/2} |p_s|^2 ds\right) \right\|_{L^q} \leq 2 \exp(-c_q |p|^2) \leq 2 \exp\left(-c'_q \left(|p|^2 + \frac{1}{t}\right)\right).$$

On suppose maintenant que $|p| < 1/\sqrt{t}$. On pose

$$(15.2.14) \quad \tau_3 = \inf\{t \geq 0; x_t \notin B_{x, 2\sigma_1}^X\}, \quad \tau_4 = \inf\{t \geq \tau_3; x_t \in B_{x, \sigma_1}^X\}.$$

Comme sur l'ensemble $\{\tau_4 \leq 1/2\}$, $d^X(x_{\tau_3}, x_{\tau_4}) \geq \sigma_1 > 0$, par la proposition 13.1 et par (15.2.9), on a

$$(15.2.15) \quad \int_0^{1/2} |p_s|^2 ds \geq \frac{1}{t} \int_0^{1/2} |\dot{x}_s|^2 ds \geq \frac{c}{t} \geq c' \left(\frac{1}{t} + |p|^2\right),$$

ce qui nous donne (15.2.13) dans le cas $|p| < 1/\sqrt{t}$ et $\{\tau_4 \leq 1/2\}$.

De (15.2.12), (15.2.13), (15.2.15), comme $\mathcal{M}_{b,t,T}^{\epsilon, \epsilon'}$ et $\mathcal{M}_{b,t,T}^{x, \epsilon, \epsilon'}$ sont de même type et coïncident sur $B^{T_x X}(0, 2\sigma_1) \times \widehat{T_x^* X}$, en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 14.4, on obtient le résultat. \square

15.3. Changement d'échelle et transformation de Getzler. Posons

$$(15.3.1) \quad I_a : u(y, p) \in \Omega(T_x X \times \widehat{T_x X}, F_x) \rightarrow u(ay, p) \in \Omega(T_x X \times \widehat{T_x X}, F_x).$$

Notons que I_a n'agit pas sur la partie forme.

On pose

$$(15.3.2) \quad \widehat{\mathcal{M}}_{b,t,T}^{x,\epsilon} = K_{b^{-1}t^{1/4}} \mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon} K_{bt^{-1/4}}, \quad \underline{\widehat{\mathcal{M}}}_{b,t,T}^{x,\epsilon} = I_{t/b^2} \widehat{\mathcal{M}}_{b,t,T}^{x,\epsilon} I_{b^2/t}.$$

Alors, on a

$$(15.3.3) \quad \exp\left(-\frac{1}{2} \widehat{\mathcal{M}}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p) = \frac{b^{2n}}{t^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \underline{\widehat{\mathcal{M}}}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p).$$

Soit e^1, \dots, e^n (resp. $\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_n$) une base orthonormale $T_x X$ (resp. $\widehat{T_x X}$). On introduit $\underline{T_x X}, \underline{\widehat{T_x X}}$ deux autres copies de $T_x X$. Soit $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$ (resp. $\widehat{\mathbf{e}}^1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}^n$) une base orthonormale de $\underline{T_x X}$ (resp. $\underline{\widehat{T_x X}}$).

Soit $\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$ l'opérateur obtenu, à partir de $\underline{\widehat{\mathcal{M}}}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$, par les substitutions :

- e^i est remplacé par $e^i + \widehat{e}_i$;
- \widehat{e}_i inchangé ;
- i_{e_i} est remplacé par $i_{e_i} + \mathbf{e}^i/\sqrt{t} - b^2 \widehat{\mathbf{e}}^i/\sqrt{t}$
- $i_{\widehat{e}_i}$ est remplacé par $i_{\widehat{e}_i} - i_{e_i} + b^2 \widehat{\mathbf{e}}^i/\sqrt{t}$

On note ϑ l'opérateur substitution. On remarque que les relations de commutation évidents sont inchangées par ϑ . Soit \mathcal{A} la \mathbf{R} -algèbre engendrée par $e^i, \widehat{e}_j, \mathbf{e}^i, \widehat{\mathbf{e}}^j, i_{e_i}, i_{\widehat{e}_j}$. On écrit les éléments de \mathcal{A} comme une combinaison linéaire de monômes en les $e^i, \widehat{e}_j, \mathbf{e}^i, \widehat{\mathbf{e}}^j, i_{e_i}, i_{\widehat{e}_j}$ tels que les $i_{e_i}, i_{\widehat{e}_j}$ apparaissent à droite des $e^i, \widehat{e}_j, \mathbf{e}^i, \widehat{\mathbf{e}}^j$. Soit $\widehat{\text{Tr}}_s$ la forme linéaire sur \mathcal{A} à valeurs dans \mathbf{R} qui s'annule sur tous les monômes sauf sur le monôme $\prod_{1 \leq i \leq n} e^i \widehat{e}_i \mathbf{e}^i \widehat{\mathbf{e}}^i$ à permutation près, et qui est telle que

$$(15.3.4) \quad \widehat{\text{Tr}}_s \left[\prod_{1 \leq i \leq n} e^i \widehat{e}_i \mathbf{e}^i \widehat{\mathbf{e}}^i \right] = 1.$$

On prolonge $\widehat{\text{Tr}}_s$ en une forme linéaire sur $\mathcal{A} \otimes_{\mathbf{R}} \text{End}(F_x)$ à valeurs dans \mathbf{C} de la manière habituelle.

PROPOSITION 15.4. *On a*

$$(15.3.5) \quad \text{Tr}_s \left[\exp\left(-\widehat{\mathcal{M}}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p) \right] = \left(-\frac{t}{b^2}\right)^n \widehat{\text{Tr}}_s \left[\exp\left(-\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p) \right].$$

DÉMONSTRATION. Par la construction de $\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$, on a

$$(15.3.6) \quad \exp\left(-\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p) = \vartheta \exp\left(-\underline{\widehat{\mathcal{M}}}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p).$$

De plus, on a

$$(15.3.7) \quad \widehat{\text{Tr}}_s \left[\vartheta \prod_{i=1}^n (e^i i_{e_i} \widehat{e}_i i_{\widehat{e}_i}) \right] = \left(-\frac{b^2}{t}\right)^n \text{Tr}_s \left[\prod_{i=1}^n e^i i_{e_i} \widehat{e}_i i_{\widehat{e}_i} \right],$$

De (15.3.6), (15.3.7), on obtient le résultat. \square

15.4. Développement de Taylor de l'opérateur $\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$. Soit $\Gamma^{TX,\rho}, \Gamma^{F,u,\rho}$ les formes de connexions associées aux connexions correspondes $\nabla^{TX,\rho}, \nabla^{F,u,\rho}$ dans les trivialisations précédentes. Pour $U \in T_x X$, on note $\tau_y U$ le transport parallèle le long $u \in [0, 1] \rightarrow uy$.

Si $e \in T_x X$, ∇_e^H désigne l'opérateur de dérivation correspondant. De (15.2.6), on tire que

(15.4.1)

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon} = & -\frac{1}{2}\Delta^V + \frac{t}{2b^4} \langle p | 1 - 2\epsilon\gamma \nabla^{TX} \nabla f_{\rho,ty/b^2} | p \rangle - \frac{\sqrt{t}}{2b^2} n + \widehat{e}_i \left(\frac{\sqrt{t}}{b^2} i_{\widehat{e}^i - e_i} + \widehat{e}^i \right) \\ & + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) T^2 |df|_{\rho,ty/b^2}^2 - \nabla_{\tau_{ty/b^2} p}^H + \frac{t}{b^2} \nabla_{\Gamma_{ty/b^2}^{TX}(\tau_{ty/b^2} p)}^V - \frac{t}{b^2} \Gamma_{ty/b^2}^{F,u}(\tau_{ty/b^2} p) \\ & - \frac{t}{b^2} \left\langle e_i, \Gamma_{ty/b^2}^{TX}(\tau_{ty/b^2} p) e_j \right\rangle (e^i + \widehat{e}^i) \left(i_{e_j} + \frac{\mathbf{e}^j - b^2 \widehat{\mathbf{e}}^j}{\sqrt{t}} \right) + (1 - \epsilon) T \nabla_{\nabla f_{\rho,ty/b^2}}^V \\ & - \frac{\sqrt{t}}{2} \omega(\nabla^F, g^F)_{ty/b^2}(\tau_{ty/b^2} e_i) \nabla_{\widehat{e}^i}^V - \frac{\epsilon \sqrt{t} T}{2} \omega(\nabla^F, g^F)_{ty/b^2}(\tau_{ty/b^2} \nabla f_{\rho,ty/b^2}) \\ & - \frac{t}{4} \left\langle R_{ty/b^2}^{TX}(\tau_{ty/b^2} e_i, \tau_{ty/b^2} e_j) e_k, e_l \right\rangle e^i e^j \left(i_{\widehat{e}^k} + \frac{\mathbf{e}^k}{\sqrt{t}} \right) \left(i_{\widehat{e}^l} + \frac{\mathbf{e}^l}{\sqrt{t}} \right) \\ & - \left(\frac{t^{3/2}}{b^2} \left\langle R_{ty/b^2}^{TX}(\tau_{ty/b^2} p, \tau_{ty/b^2} e_i) p, e_j \right\rangle - \sqrt{t} T \nabla^{TX} \nabla f_{\rho,ty/b^2}(\tau_{ty/b^2} e_i, \tau_{ty/b^2} e_j) \right. \\ & \left. + \frac{t}{2} \nabla_{e_i}^F \omega_{ty/b^2}(\nabla^F, g^F)(\tau_{ty/b^2} e_j) \right) e^i \left(i_{\widehat{e}^j} + \frac{\mathbf{e}^j}{\sqrt{t}} \right). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} (15.4.2) \quad \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon} = & -\frac{1}{2}\Delta^V - \nabla_p^H + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) T^2 |df|_x^2 + (1 - \epsilon) T \nabla_{\nabla f_x}^V + \widehat{e}_i \widehat{e}^i \\ & - \frac{1}{4} \langle R_x^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle e^i e^j \mathbf{e}^k \mathbf{e}^l + T \nabla^{TX} \nabla f_x(e_i, e_j) e^i e^j, \\ \mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,\epsilon} = & -\frac{n}{2b^2} - \frac{1}{2} \omega(\nabla^F, g^F)_x(e_i) \nabla_{\widehat{e}^i}^V - \frac{\epsilon T}{2} \omega(\nabla^F, g^F)_x(\nabla f_x) \\ & + \frac{1}{b^2} \widehat{e}_i i_{\widehat{e}^i - e_i} - \frac{1}{4} \langle R_x^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle e^i e^j (i_{\widehat{e}^k} \mathbf{e}^l + \mathbf{e}^k i_{\widehat{e}^l}) \\ & + T \nabla^{TX} \nabla f_x(e_i, e_j) e^i i_{\widehat{e}^j} - \frac{1}{2} \nabla_{e_i}^{TX} \omega(\nabla^F, g^F)_x(e_j) e^i e^j. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} (15.4.3) \quad \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1} = & \exp(-(1 - \epsilon) T \nabla_p f_x) \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon} \exp((1 - \epsilon) T \nabla_p f_x), \\ \mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,1} = & \exp(-(1 - \epsilon) T \nabla_p f_x) \mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,\epsilon} \exp((1 - \epsilon) T \nabla_p f_x). \end{aligned}$$

On pose

$$(15.4.4) \quad R_{b,t,T}^\epsilon = \mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon} - \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon} - \sqrt{t} \mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,\epsilon}.$$

PROPOSITION 15.5. *Quand $t \rightarrow 0$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que*

$$(15.4.5) \quad R_{b,t,T}^\epsilon = \mathcal{O}(t) (1 + |y|^2 + |p|^2 + T + \nabla^H + \nabla^V)^k.$$

DÉMONSTRATION. Par [BZ92, (13.18)], on a

$$(15.4.6) \quad \tau_y e = e + \mathcal{O}(|y|^2).$$

De plus, on a

$$(15.4.7) \quad \Gamma_y^{TX} = \mathcal{O}(1), \quad \Gamma_y^{F,u} = \mathcal{O}(1).$$

De la formule de Taylor et de (15.4.1), (15.4.6) et (15.4.7), on tire le résultat. \square

15.5. Évaluation des traces associée à $\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}, \mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,\epsilon}$. Pour $\alpha \in \Lambda(T_x^*X) \otimes o(T_x X)$, on désigne par $\alpha^{\max} \in o(T_x X)$ tel que $\alpha^{\max} \prod_{i=1}^n e^i$ soit le terme maximal de α . Pour $\beta \in \Lambda(T_x^*X)$, on désigne par $\underline{\beta}$ l'élément correspondant dans $\Lambda(\underline{T_x^*X})$, et on désigne par \int^B pour l'intégrale de Berezin dans les variables grassmanniennes de $\Lambda(\underline{T_x^*X})$. On note par \cdots des monômes tels que $\widehat{\text{Tr}}_s$ s'annulent sur eux.

PROPOSITION 15.6. *On a*

$$(15.5.1) \quad \int_{p \in \mathbf{R}^n} \widehat{\text{Tr}}_s \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1} \right) (0, p, 0, p) \right] dp = (-1)^n [\alpha_{T^2/4}]^{\max}.$$

DÉMONSTRATION. De (15.4.2), on tire que

$$(15.5.2) \quad \exp \left(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1} \right) = \exp \left(\frac{1}{4} \Delta^V + \frac{1}{2} \nabla_p^H \right) \exp \left(-\frac{\widehat{e}_i \widehat{\mathbf{e}}^i}{2} \right) \\ \exp \left(-\frac{T^2}{4} |df|^2 + \frac{1}{8} \langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle e^i e^j \mathbf{e}^k \mathbf{e}^l - \frac{T}{2} \nabla^{TX} \nabla f(e_i, e_j) e^i \mathbf{e}^j \right).$$

Par [BL08, Proposition 4.11.2], on a

$$(15.5.3) \quad \int_{p \in \mathbf{R}^n} \exp \left(\frac{1}{4} \Delta^V + \frac{1}{2} \nabla_p^H \right) (0, p, 0, p) dp = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^n.$$

On a

$$(15.5.4) \quad \exp \left(-\sum_{i=1}^n \frac{\widehat{e}_i \widehat{\mathbf{e}}^i}{2} \right) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\widehat{e}_i \widehat{\mathbf{e}}^i}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right)^n \prod_{i=1}^n \widehat{e}_i \widehat{\mathbf{e}}^i + \cdots.$$

Par (5.1.1), (15.3.4), pour $\alpha \in \Lambda(T_x^*X) \otimes \Lambda(\underline{T_x^*X})$, on a

$$(15.5.5) \quad \widehat{\text{Tr}}_s \left[\alpha \prod_{i=1}^n \widehat{e}_i \widehat{\mathbf{e}}^i \right] = \pi^{n/2} \left[\int^B \alpha \right]^{\max}.$$

De (5.2.9), (15.5.2)-(15.5.5), on tire le résultat. \square

PROPOSITION 15.7. *On a*

$$(15.5.6) \quad \int_{p \in T_x^*X} \widehat{\text{Tr}}_s \left[\int_0^1 \exp \left(-\frac{(1-a)}{2} \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1} \right) \mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,1} \exp \left(-\frac{a}{2} \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1} \right) da \right] (0, p, 0, p) dp \\ = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left[d^X \left(\int^B \underline{\theta}(\nabla^F, g^F)(\nabla f)^* \exp(-A_{T^2/4}) \right) \right]^{\max}.$$

DÉMONSTRATION. On pose

$$(15.5.7) \quad \begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{b^2} \widehat{e}_i i_{e_i} - \frac{1}{4} \langle R_x^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle e^i e^j (i_{\widehat{e}^k} \mathbf{e}^l + \mathbf{e}^k i_{\widehat{e}^l}) + T \nabla^{TX} \nabla f_x(e_i, e_j) e^i i_{\widehat{e}^j}, \\ N_2 &= -\frac{n}{2b^2} + \frac{1}{b^2} \widehat{e}_i i_{\widehat{e}^i}, \\ N_3 &= -\frac{1}{2} \omega(\nabla^F, g^F)_x \nabla_{\widehat{e}^i}^V, \\ N_4 &= -\frac{T}{2} \omega(\nabla^F, g^F)_x (\nabla f_x) - \frac{1}{2} \nabla_{e_i}^{TX} \omega(\nabla^F, g^F)_x (e_j) e^i \mathbf{e}^j. \end{aligned}$$

Alors,

$$(15.5.8) \quad \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1} = N_1 + N_2 + N_3 + N_4.$$

On va d'abord montrer que N_1, N_2, N_3 ne contribuent pas à (15.5.6).

Par (15.5.2), on sait que

$$(15.5.9) \quad \exp\left(-\frac{a}{2} \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1}\right) \in \bigoplus_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \Lambda^i(T_x^* X) \otimes \Lambda^j(\widehat{T_x X}) \otimes \Lambda^i(\underline{T_x^* X}) \otimes \Lambda^j(\underline{\widehat{T_x X}}).$$

Or N_1 envoie $\Lambda^i(T_x^* X) \otimes \Lambda^j(\widehat{T_x X}) \otimes \Lambda^i(\underline{T_x^* X}) \otimes \Lambda^j(\underline{\widehat{T_x X}})$ à $\bigoplus_{i \neq i' \text{ ou } j \neq j'} \Lambda^i(T_x^* X) \otimes \Lambda^j(\widehat{T_x X}) \otimes \Lambda^{i'}(\underline{T_x^* X}) \otimes \Lambda^{j'}(\underline{\widehat{T_x X}})$, on trouve que

$$(15.5.10) \quad \widehat{\text{Tr}}_s \left[\exp\left(-\frac{(1-a)}{2} \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1}\right) N_1 \exp\left(-\frac{a}{2} \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1}\right) \right] = 0.$$

On a

$$(15.5.11) \quad \begin{aligned} & \exp\left(-\frac{(1-a)}{2} \sum_{i=1}^n \widehat{e}_i \widehat{\mathbf{e}}^i\right) \widehat{e}_j i_{\widehat{e}^j} \exp\left(-\frac{a}{2} \sum_{i=1}^n \widehat{e}_i \widehat{\mathbf{e}}^i\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{i \neq j} \frac{\widehat{e}_i \widehat{\mathbf{e}}^i}{2}\right) \left(1 - (1-a) \frac{\widehat{e}_j \widehat{\mathbf{e}}^j}{2}\right) \widehat{e}_j i_{\widehat{e}^j} \left(1 - a \frac{\widehat{e}_j \widehat{\mathbf{e}}^j}{2}\right) \\ &= a \exp\left(-\sum_{i \neq j} \frac{\widehat{e}_i \widehat{\mathbf{e}}^i}{2}\right) \left(-\frac{\widehat{e}_j \widehat{\mathbf{e}}^j}{2}\right) + \dots \\ &= a \exp\left(-\sum_{i \neq j} \frac{\widehat{e}_i \widehat{\mathbf{e}}^i}{2}\right) \left(1 - \frac{\widehat{e}_j \widehat{\mathbf{e}}^j}{2}\right) + \dots \\ &= a \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{\widehat{e}_i \widehat{\mathbf{e}}^i}{2}\right) + \dots \end{aligned}$$

Alors

$$(15.5.12) \quad \widehat{\text{Tr}}_s \left[\int_0^1 \exp\left(-\frac{(1-a)}{2} \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1}\right) \left(-\frac{n}{2b^2} + \frac{1}{b^2} \widehat{e}_i i_{\widehat{e}^i}\right) \exp\left(-\frac{a}{2} \mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1}\right) da \right] = 0.$$

Comme l'opérateur de Kolomogorov $\frac{1}{2}\Delta^V + \nabla_p^H$ est invariant par $x \rightarrow -x, p \rightarrow -p$, alors

$$(15.5.13) \quad \exp\left(\frac{(1-a)}{2}\left(\frac{1}{2}\Delta^V + \nabla_p^H\right)\right) \nabla_{\hat{e}^i}^V \exp\left(\frac{a}{2}\left(\frac{1}{2}\Delta^V + \nabla_p^H\right)\right) (0, p, 0, p)$$

est une fonction impaire en p . La contribution de N_3 est donc nulle.

En fin, on a

$$(15.5.14) \quad \begin{aligned} & \widehat{\text{Tr}}_s \left[\int_0^1 \exp\left(-\frac{(1-a)}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1}\right) N_4 \exp\left(-\frac{a}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1}\right) da(0, p, 0, p) \right] \\ &= \widehat{\text{Tr}}_s \left[N_4 \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1}\right) (0, p, 0, p) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \widehat{\text{Tr}}_s \left[\left(T\theta(\nabla^F, g^F)(\nabla f) + \nabla_{e_i}^{TX} \theta(\nabla^F, g^F)(e_j) e^i \epsilon^j \right) \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1}\right) (0, p, 0, p) \right]. \end{aligned}$$

En procédant comme dans la démonstration de la proposition 15.6, on trouve que

$$(15.5.15) \quad \begin{aligned} & \int_{p \in T_x^* X} \widehat{\text{Tr}}_s \left[\left(T\theta(\nabla^F, g^F)(\nabla f) + \nabla_{e_i}^{TX} \theta(\nabla^F, g^F)(e_j) e^i \epsilon^j \right) \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,1}\right) (0, p, 0, p) \right] dp \\ &= (-1)^n \left[\int^B \left(T\theta(\nabla^F, g^F)(\nabla f) + \nabla_{e_i}^{TX} \theta(\nabla^F, g^F)(e_j) e^i \epsilon^j \right) (\nabla f)^* \exp(-A_{T^2/4}) \right]^{\max}. \end{aligned}$$

Soit ∇^{TX} la connexion correspondante sur $\Lambda(T^*X)$ associée à ∇^{TX} . Par (5.2.5) ou par [BZ92, Theorem 3.2, Equation (13.34)], on a

$$(15.5.16) \quad \begin{aligned} & \int^B \left(T\theta(\nabla^F, g^F)(\nabla f) + \nabla_{e_i}^{TX} \theta(\nabla^F, g^F)(e_j) e^i \epsilon^j \right) (\nabla f)^* \exp(-A_{T^2/4}) \\ &= \int^B \left(\nabla^{TX} + i_{T\underline{\nabla}f} \right) \left(\underline{\theta}(\nabla^F, g^F)(\nabla f)^* \exp(-A_{T^2/4}) \right) \\ &= d^X \left(\int^B \underline{\theta}(\nabla^F, g^F)(\nabla f)^* \exp(-A_{T^2/4}) \right). \end{aligned}$$

Par (15.5.14)-(15.5.16), on a le résultat. \square

15.6. Des estimations uniformes sur $\exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p)$ pour $x \notin U_2$.

THÉORÈME 15.8. *Il existe $C > 0, c > 0$, tels que pour $t \in]0, 1]$, $T \in [T_0\sqrt{t}, 1/\sqrt{t}]$, $b^2T = \gamma$, si $x \notin U_2$, $p \in \widehat{T_x^* X}$, on a*

$$(15.6.1) \quad \left| \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p) \right| \leq C \exp(-c|p|^{2/3} - cT^2).$$

DÉMONSTRATION. On va montrer notre théorème par la même méthode que dans la démonstration de [BL08, Theorem 4.10.1].

Posons

$$(15.6.2) \quad \mathfrak{S}_{b,t,T}^{x,\epsilon} = -\frac{1}{2}\Delta^V + \frac{t}{4b^4}|p|^2 - \nabla_{\tau_{ty/b^2}p}^H + \frac{t}{b^2}\nabla_{\Gamma_{ty/b^2}^{TX}}^V(\tau_{ty/b^2}p) \\ + \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) T^2 |df|_{\rho,ty/b^2}^2 + (1 - \epsilon) T \nabla_{\nabla_{f,\rho,ty/b^2}}^V.$$

On va montrer d'abord qu'il existe $c > 0$, $C > 0$, tels que

$$(15.6.3) \quad \left| \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{S}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p) \right| \leq C \exp(-c|p|^{2/3} - cT^2).$$

Pour $(T_x X, I_{t/b^2} g_x^{T_x X})$, on considère l'équation différentielle stochastique associée

$$(15.6.4) \quad \begin{aligned} \dot{y}_s &= p_s, & y_0 &= 0, \\ \dot{p}_s &= \tau_s^0 \dot{w}_s - (1 - \epsilon) T \tau_s^0 \nabla_{f,\rho,ty/b^2}, & p_0 &= p. \end{aligned}$$

On remarque que τ_s^0 dépend de t/b^2 . Pour $g \in C_c^\infty(T_x X \times \widehat{T_x^* X})$, on a

$$(15.6.5) \quad \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{S}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)g(0, p) = \\ \mathbf{E} \left[\exp\left(-\frac{t}{4b^4} \int_0^{1/2} |p_s|^2 ds - \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) T^2 \int_0^{1/2} |df|_{\rho,ty_s/b^2}^2 ds\right) g(y_{1/2}, p_{1/2}) \right].$$

Comme $x \notin U_2$, on a $|df|_\rho \geq c > 0$. Alors,

$$(15.6.6) \quad \left| \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{S}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)g(0, p) \right| \leq e^{-cT^2} \mathbf{E} \left[\exp\left(-\frac{t}{4b^4} \int_0^{1/2} |p_s|^2 ds\right) |g(y_{1/2}, p_{1/2})| \right].$$

Soit $C_1 > 0$. Si $|p| \leq C_1 T$, de (15.6.6), on a

$$(15.6.7) \quad \left| \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{S}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)g(0, p) \right| \leq \exp(-cT^2) \|g\|_{C^0} \leq \exp(-c'T^2 - c'|p|^2) \|g\|_{C^0}.$$

Par la même méthode que dans la démonstration du théorème 14.4, on trouve (15.6.3).

Soit $C_2 > 0$. Pour $|p| \geq C_2 b^2/t$ et pour b, t, T comme dans le théorème, on a $t/b^4 \leq C$ et $|p| \geq cT$. En comparant $|p|$ et $\sup_{0 \leq s \leq 1/2} |w_s|$, on trouve que

$$(15.6.8) \quad \left\| \exp\left(-\frac{t}{4b^4} \int_0^{1/2} |p_s|^2 ds\right) \right\|_{L^q} \leq C \exp\left(-c_q \frac{t}{b^4} |p|^2\right).$$

De plus,

$$(15.6.9) \quad \frac{t}{b^4} |p|^2 \geq C \frac{t}{b^4} \left(\frac{b^2}{t}\right)^{4/3} |p|^{2/3} \geq C' \left(\frac{T}{\sqrt{t}}\right)^{2/3} |p|^{2/3} \geq C' (T_0)^{2/3} |p|^{2/3},$$

ce qui nous donne (15.6.3) dans le cas $|p| \geq C_2 b^2/t$.

On remarque que dans les deux cas précédents, C_1 et C_2 peuvent être choisis arbitrairement. Dans la suite, on va montrer (15.6.3) pour $C_1 T < |p| < C_2 b^2/t$ avec C_1, C_2 bien choisis.

Par (15.6.4), on a

$$(15.6.10) \quad \begin{aligned} y_{1/2} &= \int_0^{1/2} \dot{y}_s ds = \int_0^{1/2} p_s ds, \\ p_t &= \tau_t^0 \left(p + w_t - (1 - \epsilon)T \int_0^t \nabla f_{\rho, ty_s/b^2} ds \right). \end{aligned}$$

Or $g_x^{T_x X}$ diffère g_x^{TX} sur un compact, et or τ_s^0 est orthogonale pour $g_{x, ty_s/b^2}^{T_x X}$, on a

$$(15.6.11) \quad |\tau_s^0| \leq C.$$

De (15.6.10), (15.6.11), on tire

$$(15.6.12) \quad |y_{1/2}| + cT + c \sup_{0 \leq s \leq 1/2} |w_s| \geq \frac{1}{2} \inf_{0 \leq s \leq 1/2} |\tau_s^0 p|.$$

D'autre parte, par la trivialisaton qu'on a choisi, on a

$$(15.6.13) \quad \dot{\tau}_s^0 + \frac{t}{b^2} \Gamma_{ty_s/b^2}^{TX}(\dot{y}_s) \tau_s^0 = 0.$$

Alors,

$$(15.6.14) \quad \tau_s^0 p = p - \frac{t}{b^2} \int_0^s \Gamma_{ty_s/b^2}^{TX}(\dot{y}_s) \tau_s^0 p ds,$$

De (15.6.4), (15.6.11), on tire

$$(15.6.15) \quad \inf_{0 \leq s \leq 1/2} |\tau_s^0 p| \geq |p| - C \frac{t}{b^2} \sup_{0 \leq s \leq 1/2} |\dot{y}_s| |\tau_s^0 p| \geq |p| \left(1 - C' \frac{t}{b^2} \sup_{0 \leq s \leq 1/2} |p_s| \right).$$

Par (15.6.12), (15.6.15), on a

$$(15.6.16) \quad |y_{1/2}| + cT + c \sup_{0 \leq s \leq 1/2} |w_s| \geq \frac{1}{2} |p| \left(1 - C' \frac{t}{b^2} \sup_{0 \leq s \leq 1/2} |p_s| \right).$$

De plus, par (15.6.10), (15.6.11), on a

$$(15.6.17) \quad \sup_{0 \leq s \leq 1/2} |p_s| \leq |p| + C \sup_{0 \leq s \leq 1/2} |w_s| + CT.$$

De (15.6.16), (15.6.17), on tire

$$(15.6.18) \quad |y_{1/2}| + C \left(1 + \frac{t}{b^2} |p| \right) (T + \sup_{0 \leq s \leq 1} |w_s|) \geq \left(1 - C' \frac{t}{b^2} |p| \right) |p|.$$

Si $C_1 > 0$ assez grand, $C_2 > 0$ assez petit, pour $C_1 T < |p| < C_2 b^2/t$, il existe $C'' > 0$, tel que

$$(15.6.19) \quad |y_{1/2}| + \sup_{0 \leq s \leq 1/2} |w_s| \geq C'' |p|.$$

Si $\text{Supp } g \subset B^{T_x X}(0, C'' |p|/2) \times \widehat{T_x^* X}$, on a

$$(15.6.20) \quad \|g(y_{1/2}, p_{1/2})\|_{L_q} \leq \mathbf{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq 1/2} |w_s| \geq C'' |p|/2 \right]^{1/q} \|g\|_{C^0} \leq C e^{-c_q |p|^2} \|g\|_{C^0}.$$

De (15.6.6), (15.6.20), par la même démonstration que dans la démonstration du théorème 14.4, on trouve (15.6.3) dans le cas $C_1 T < |p| < C_2 b^2/t$, et on termine la démonstration de (15.6.3).

On retourne à la démonstration de (15.6.1). D'abord, sous notre hypothèse sur b, t, T , les termes qui ne contiennent pas de la variable p sont bornés. De plus, grâce aux estimations

$$(15.6.21) \quad \left| \frac{t}{b^2} \Gamma_{ty/b^2}^{F,u}(\tau_{ty/b^2} p) \right| \leq c \frac{t}{b^2} |p| \leq \frac{1}{4C} \frac{t}{b^4} |p|^2 + C' t,$$

$$\left| \frac{\sqrt{t}}{b^2} \Gamma_{ty/b^2}^{TX}(\tau_{ty/b^2} p) \right| \leq c \frac{\sqrt{t}}{b^2} |p| \leq \frac{1}{4C} \frac{t}{b^4} |p|^2 + C',$$

à l'exception des termes

$$(15.6.22) \quad \sqrt{t} \left\langle e_i, \Gamma_{ty/b^2}^{TX}(\tau_{ty/b^2} p) e_j \right\rangle (e^j + \widehat{e}_j) \widehat{\mathbf{e}}^i, \quad \frac{t}{b^2} \left\langle R_{ty/b^2}^{TX}(\tau_{ty/b^2} p, e_i) \tau_{ty/b^2} p, e_j \right\rangle e^i \mathbf{e}^j,$$

la norme des termes contenant p est majorée par $C + t|p|^2/4b^4C$. Leur contribution dans le noyau de la chaleur sont absorbée dans $\exp(-t \int_0^{1/2} |p_s|^2 ds/4b^4)$.

Il nous reste à traiter les termes dans (15.6.22). Soit $\kappa \geq 1$. D'après changement d'échelle sur les variables grassmanniennes

$$(15.6.23) \quad \mathbf{e}^i \rightarrow \kappa^{-1} \mathbf{e}^i, \quad \widehat{\mathbf{e}}^i \rightarrow \kappa^{-1} \widehat{\mathbf{e}}^i,$$

la contribution de (15.6.22) dans le noyau de la chaleur est majorée par

$$(15.6.24) \quad \exp \left(\frac{c\sqrt{t}}{\kappa} \int_0^{1/2} |p_s| ds + \frac{ct}{\kappa b^2} \int_0^{1/2} |p_s|^2 ds \right) \leq C \exp \left(\frac{ct}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{b^2} \right) \int_0^{1/2} |p_s|^2 ds \right).$$

On prend $\kappa > 0$ tel que

$$(15.6.25) \quad \frac{c}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{1}{8b^4}.$$

Le membre de droite de (15.6.24) est donc majoré par

$$(15.6.26) \quad C \exp \left(\frac{t}{8b^4} \int_0^{1/2} |p_s|^2 ds \right),$$

qui est absorbé dans $\exp(-t \int_0^{1/2} |p_s|^2 ds/4b^4)$.

De plus, la contribution de (15.6.23) est absorbée dans $\exp(-c|p|^{2/3} - cT^2)$. Ceci termine la démonstration. \square

THÉOREME 15.9. *Il existe $C > 0, c > 0$ tels que pour $x \notin U_2, bT^2 = \gamma, t \in]0, 1], T \in [\sqrt{t}T_0, 1/\sqrt{t}]$, on a*

$$(15.6.27) \quad \left| \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p) - \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p) \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{t}}{2} \int_0^1 \exp\left(-\frac{(1-a)}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) \mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,\epsilon} \exp\left(-\frac{a}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) da(0, p, 0, p) \right| \\ \leq Ct \exp(-c|p|^{2/3} - cT^2).$$

DÉMONSTRATION. Utilisant la formule de Duhamel deux fois et par (15.4.4), on a

$$(15.6.28) \quad \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) \\ - \frac{1}{2} \int_0^1 \exp\left(-\frac{(1-a)}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) \left(\sqrt{t}\mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,\epsilon} + R_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right) \exp\left(-\frac{a}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) da \\ + \frac{1}{4} \int_{0 \leq a_0 \leq a_1 \leq 1} \exp\left(-\frac{a_0}{2}\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right) \left(\sqrt{t}\mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,\epsilon} + R_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right) \exp\left(-\frac{a_1 - a_0}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) \\ \left(\sqrt{t}\mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,\epsilon} + R_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right) \exp\left(-\frac{1 - a_1}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) da_0 da_1.$$

On va d'abord montrer que

$$(15.6.29) \quad \left| \int_0^1 \exp\left(-\frac{(1-a)}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) R_{b,t,T}^{x,\epsilon} \exp\left(-\frac{a}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) da(0, p, 0, p) \right| \\ \leq Ct \exp(-c|p|^{2/3} - cT^2).$$

Soit (y, p) la solution de l'équation différentielle stochastique (15.6.4) avec $t = 0$. Si $a \in [1/2, 1]$, par la proposition 15.5 et par la même méthode que dans la démonstration du corollaire 14.8, en utilisant le calcul des variations stochastique comme en (14.2.21) sur $[(1-a)/2, 1/2]$, il existe une variable aléatoire intégrable M telle que

$$(15.6.30) \quad \exp\left(-\frac{(1-a)}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) R_{b,t,T}^{x,\epsilon} \exp\left(-\frac{a}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) g(0, p) = t\mathbf{E}[Mg(y_{1/2}, p_{1/2})].$$

De plus, pour $q \in]2, \infty[$, il existe $C_q > 0, k \in \mathbf{N}$ tels que

$$(15.6.31) \quad \|M\|_{L^q} \leq C_q (1 + |p| + T)^k.$$

Alors, par la même méthode que dans la démonstration du théorème 15.8, pour $a \in [1/2, 1]$, on a

$$(15.6.32) \quad \left| \exp\left(-\frac{(1-a)}{2}\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right) R_{b,t,T}^{x,\epsilon} \exp\left(-\frac{a}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right)(0, p, 0, p) \right| \\ \leq Ct \exp(-c|p|^{2/3} - cT^2).$$

De même, si $a \in [0, 1/2]$, en utilisant le calcul des variations stochastique sur $[0, (1-a)/2]$, on trouve que (15.6.32) reste vrais. Alors, on a (15.6.29).

Il reste à montrer que

$$(15.6.33) \quad \left| \exp\left(-\frac{a_0}{2}\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right) \left(\sqrt{t}\mathfrak{M}_{b,T}^{x,\epsilon} + R_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right) \exp\left(-\frac{a_1 - a_0}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) \right. \\ \left. \left(\sqrt{t}\mathfrak{M}_{b,T}^{x,\epsilon} + R_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right) \exp\left(-\frac{1 - a_1}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) (0, p, 0, p) \right| \leq Ct \exp(-c|p|^{2/3} - cT^2).$$

On définit le processus $(y_s, p_s)_{0 \leq s \leq 1/2}$ tel que sur $s \in [0, a_0/2]$, il est solution de (15.6.4) issue de $(0, p)$ et sur $s \in [a_0/2, 1/2]$, il est solution de (15.6.4) avec $t = 0$ issue de $(y_{a_0/2}, p_{a_0/2})$.

On a soit $a_0 \leq 1/3$, ou bien $a_1 - a_0 \leq 1/3$, et enfin $1 - a_1 \leq 1/3$.

Premièrement, si $a_1 - a_0 \geq 1/3$, en utilisant le calcul des variations sur $[a_0, a_1]$, par le même argument, on trouve (15.6.33).

Deuxièmement, si $a_0 \geq 1/3$. On a

$$(15.6.34) \quad \left[\frac{\Delta^V}{2} + \nabla_p^H, \nabla^V \right] = -\nabla^H, \quad \left[\frac{\Delta^V}{2} + \nabla_p^H, \nabla^H \right] = 0.$$

De la formule de Campbell-Hausdorff, on tire que

$$(15.6.35) \quad \exp\left(-\frac{a_1 - a_0}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) \nabla^V = \left(\nabla^V - \frac{a_1 - a_0}{2}\nabla^H\right) \exp\left(-\frac{a_1 - a_0}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) \\ \exp\left(-\frac{a_1 - a_0}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) \nabla^H = \nabla^H \exp\left(-\frac{a_1 - a_0}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right).$$

Par la proposition 15.5 et par (15.6.35), il existe un opérateur différentiel A et une section B tels que le membre de gauche de (15.6.33) est donné par

$$(15.6.36) \quad \exp\left(-\frac{a_0}{2}\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}\right) A \exp\left(-\frac{a_1 - a_0}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) B \exp\left(-\frac{1 - a_1}{2}\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}\right) (0, p, 0, p).$$

De plus, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que A est sous la forme $\mathcal{O}(t)(1 + |y|^2 + |p|^2 + T + \nabla^H + \nabla^V)^k$, et

$$(15.6.37) \quad |B| \leq C(1 + |y|^2 + |p|^2 + T)^k.$$

En utilisant le calcul des variations sur l'intervalle $[0, a_0]$, on obtient (15.6.33).

De même, on peut traiter le cas $1 - a_1 \geq 1/3$. Ceci termine la démonstration. \square

COROLLAIRE 15.10. *Il existe $T_0 > 0, C > 0$ tels que pour $t \in]0, 1], T \in [\sqrt{t}T_0, 1/\sqrt{t}], bT^2 = \gamma$, on a*

$$(15.6.38) \quad \left| \int_{x \notin U_2, p \in T_x^* X} \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon\right)(x, p, x, p) \right] dv_{\mathcal{X}^*} \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{U_2^c} f \alpha_{T^2/4} + \frac{1}{4} \int_X \theta(g^F, \nabla^F) \beta_{T^2/4} \right| \leq Ct.$$

DÉMONSTRATION. Par les théorèmes 15.3 et 15.8, et par la proposition 15.4, pour $x \notin U_2$, on a

$$\begin{aligned}
(15.6.39) \quad & \int_{p \in T_x^* X} \text{Tr}_s \left[\frac{|p|^2}{T} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon \right) (x, p, x, p) \right] dp \\
&= \int_{p \in T_x^* X} \text{Tr}_s \left[\frac{|p|^2}{T} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon} \right) (0, p, 0, p) \right] dp + \mathcal{O}(e^{-c/t}) \\
&= \frac{\sqrt{t}}{b^2} \int_{p \in T_x^* X} \text{Tr}_s \left[\frac{|p|^2}{T} \exp \left(-\frac{1}{2} \widehat{\mathcal{M}}_{b,t,T}^{x,\epsilon} \right) (0, p, 0, p) \right] dp + \mathcal{O}(e^{-c/t}) \\
&= \frac{\sqrt{t}(-1)^n}{\gamma} \int_{p \in T_x^* X} \widehat{\text{Tr}}_s \left[|p|^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon} \right) (0, p, 0, p) \right] dp + \mathcal{O}(e^{-c/t}) \\
&= \mathcal{O}(\sqrt{t}).
\end{aligned}$$

De même, par les propositions 15.6 et 15.7, et par le théorème 15.9, on a

$$\begin{aligned}
(15.6.40) \quad & \int_{p \in T_x^* X} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon \right) (x, p, x, p) \right] dp \\
&= (-1)^n \int_{p \in T_x^* X} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon} \right) (0, p, 0, p) \right] dp + \mathcal{O}(e^{-c/t}) \\
&= [\alpha_{T^2/4}]^{\max} - \frac{\sqrt{t}}{4} \left[d^X \left(\int^B \underline{\theta}(\nabla^F, g^F) (\nabla f)^* \exp(-A_{T^2/4}) \right) \right]^{\max} + \mathcal{O}(\sqrt{t}).
\end{aligned}$$

De plus, comme $\theta(F, g^F)$ s'annule sur U_3 , par la formule de Stokes, par [BZ92, Theorem 3.13] et par (5.2.9), on a

$$\begin{aligned}
(15.6.41) \quad & \int_{U_2^c} f d^X \int^B \underline{\theta}(g^F, \nabla^F) (\nabla f)^* \exp(-A_{T^2/4}) \\
&= \int_X f d^X \int^B \underline{\theta}(g^F, \nabla^F) (\nabla f)^* \exp(-A_{T^2/4}) \\
&= - \int_X d^X f \int^B \underline{\theta}(g^F, \nabla^F) (\nabla f)^* \exp(-A_{T^2/4}) \\
&= \int_X \theta(g^F, \nabla^F) \int^B \underline{d^X f} (\nabla f)^* \exp(-A_{T^2/4}) \\
&= \int_X \theta(g^F, \nabla^F) T \beta_{T^2/4}.
\end{aligned}$$

Par (15.6.39)-(15.6.41), on a (15.6.38). \square

15.7. Estimation au voisinage d'un point critique. On pose

$$(15.7.1) \quad \sigma = \sigma_0/\sqrt{n}, \quad \widetilde{U}_{\alpha,2} = \{x \in \mathbf{R}^n; |x_i| \leq 2\sigma\}.$$

Alors,

$$(15.7.2) \quad U_{\alpha,2/\sqrt{n}} \subset \tilde{U}_{\alpha,2} \subset U_{\alpha,2}.$$

Comme le corollaire 15.9 reste vrai en remplaçant $U_{\alpha,2}$ par $U_{\alpha,2/\sqrt{n}}$, pour établir le théorème 15.1, il suffit de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 15.11. *Il existe $T_0 > 0, C > 0$ tels que pour $t \in]0, 1]$, $T \in [\sqrt{t}T_0, 1/\sqrt{t}]$, $bT^2 = \gamma$, on a*

$$(15.7.3) \quad \left| \int_{x \in \tilde{U}_{\alpha,2}, p \in T_x^* X} \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon \right) \right] (x, p, x, p) dx dp - \frac{\text{rg}[F]}{\sqrt{t}} \int_{\tilde{U}_{\alpha,2}} f \alpha_{T^2/4} \right| \leq C \sqrt{t}.$$

DÉMONSTRATION. Par le théorème 15.3, on a

$$(15.7.4) \quad \left| \int_{x \in \tilde{U}_{\alpha,2}, p \in T_x^* X} \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^\epsilon \right) \right] (x, p, x, p) dx dp - \int_{x \in \tilde{U}_{\alpha,2}, p \in T_x^* X} \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon} \right) \right] (0, p, 0, p) dx dp \right| \leq C \exp(-c/t).$$

Si $x \in \tilde{U}_{\alpha,2}$, par la définition de $\mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$, on a

$$(15.7.5) \quad \exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon} \right) (0, p, 0, p) = \exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^{x_\alpha,\epsilon} \right) (x, p, x, p).$$

De (7.5.4), (7.5.7), on tire que

$$(15.7.6) \quad \begin{aligned} & \int_{|y_i| \leq 2\sigma, p \in \mathbf{R}^n} \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1/2}T}}{T} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathcal{M}_{b,t,T}^{x_\alpha,\epsilon} \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \\ &= \frac{f(x_\alpha) \text{rg}[F]}{\sqrt{t}} \int_{|y_i| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}^n} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\alpha \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \\ &+ \text{rg}[F] \int_{|y_i| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}^n} \frac{-|y'|^2 + |y''|^2}{2T} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\alpha \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \\ &+ \text{rg}[F] \int_{|y_i| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}^n} \frac{|p|^2}{2T} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\alpha \right) \right] (y, p, y, p) dy dp. \end{aligned}$$

D'autre part, de (5.2.9), on tire que

$$(15.7.7) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\tilde{U}_{\alpha,2}} f \alpha_{T^2/4} &= (-1)^{n_\alpha} \frac{f(x_\alpha)}{\sqrt{t}} \int_{|y_i| \leq \sigma T} \exp(-|y|^2) \frac{dy}{\pi^{n/2}} \\ &+ (-1)^{n_\alpha} \frac{2}{\sqrt{t} T^2} \int_{|y_i| \leq \sigma T} (-|y'|^2 + |y''|^2) \exp(-|y|^2) \frac{dy}{\pi^{n/2}}. \end{aligned}$$

Par (15.7.4)-(15.7.7), il reste à montrer

$$\begin{aligned}
(15.7.8) \quad & \left| \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{|y_i| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}^n} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\alpha \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \right. \\
& \quad \left. - \frac{(-1)^{n_\alpha}}{\sqrt{t}} \int_{|y_i| \leq \sigma T} \exp(-|y|^2) \frac{dy}{\pi^{n/2}} \right| \leq C\sqrt{t}, \\
& \left| \int_{|y_i| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}^n} \frac{-|y'|^2 + |y''|^2}{2T} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\alpha \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \right. \\
& \quad \left. - (-1)^{n_\alpha} \frac{2}{\sqrt{t} T^2} \int_{|y_i| \leq \sigma T} (-|y'|^2 + |y''|^2) \exp(-|y|^2) \frac{dy}{\pi^{n/2}} \right| \leq C\sqrt{t}, \\
& \left| \int_{|y_i| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}^n} \frac{|p|^2}{2T} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\alpha \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \right| \leq C\sqrt{t}.
\end{aligned}$$

Pour montrer (15.7.8), on peut se ramener au cas où $n = 1$, ce qui implique $H_\gamma^\alpha = H_\alpha^\pm$. Alors, il suffit de montrer

$$\begin{aligned}
(15.7.9) \quad & \left| \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{|y| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\pm \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \right. \\
& \quad \left. - \frac{\pm 1}{\sqrt{t}} \int_{|y| \leq \sigma T} \exp(-y^2) \frac{dy}{\sqrt{\pi}} \right| \leq C\sqrt{t}, \\
& \left| \int_{|y| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}} \frac{y^2}{2T} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\pm \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \right. \\
& \quad \left. - \frac{\pm 2}{\sqrt{t} T^2} \int_{|y| \leq \sigma T} y^2 \exp(-y^2) \frac{dy}{\sqrt{\pi}} \right| \leq C\sqrt{t}, \\
& \left| \int_{|y| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}} \frac{p^2}{2T} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\pm \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \right| \leq C\sqrt{t}.
\end{aligned}$$

Par le corollaire 7.40, on a

$$\begin{aligned}
(15.7.10) \quad & \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{|y| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\pm \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \\
& = \frac{\pm 1}{\sqrt{t}} \int_{|y| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}} \exp \left(-\frac{y^2}{2a_\pm^{\pm} \sqrt{t}/2b^2, \gamma} \right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi a_\pm^{\pm} \sqrt{t}/2b^2, \gamma}} \\
& = \frac{\pm 1}{\sqrt{t}} \int_{|y| \leq \sigma T / \sqrt{\frac{\sqrt{t}}{2b^2} \gamma a_\pm^{\pm} \sqrt{t}/2b^2, \gamma}} \exp(-y^2) \frac{dy}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{t}/2b^2 \leq C$, par (7.15.26), on a

$$(15.7.11) \quad c \leq \frac{\sqrt{t}}{2b^2} \gamma a_\pm^{\pm} \sqrt{t}/2b^2, \gamma \leq C, \quad \left| \frac{\sqrt{t}}{2b^2} \gamma a_\pm^{\pm} \sqrt{t}/2b^2, \gamma - 1 \right| \leq C \left(\frac{\sqrt{t}}{b^2} \right)^2 \leq C'' T^2 t.$$

De plus, pour $b > a > 0$, on a

$$(15.7.12) \quad \int_a^b \exp(-y^2) dy \leq \exp(-a^2) (b - a).$$

De (15.7.11) et (15.7.12), on tire que

$$(15.7.13) \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \left| \int_{|y| \leq \sigma T / \sqrt{\frac{\sqrt{t}}{2b^2} \gamma a^{\pm}_{\sqrt{t}/2b^2, \gamma}}} \exp(-y^2) dy - \int_{|y| \leq \sigma T} \exp(-y^2) dy \right| \leq C \sqrt{t} T^2 e^{-cT} \leq C' \sqrt{t}.$$

Par (15.7.10) et (15.7.13), on a la première inégalité de (15.7.9).

Par la même démonstration que dans (15.7.10), on a

$$(15.7.14) \quad \int_{|y| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}} \frac{y^2}{2T} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\pm \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \\ = \pm \frac{a^{\pm}_{\sqrt{t}/2b^2, \gamma}}{T} \int_{|y| \leq \sigma T / \sqrt{\frac{\sqrt{t}}{2b^2} \gamma a^{\pm}_{\sqrt{t}/2b^2, \gamma}}} y^2 \exp(-y^2) \frac{dy}{\sqrt{\pi}}.$$

Alors,

$$(15.7.15) \quad \left| \int_{|y| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}} \frac{y^2}{2T} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\pm \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \right. \\ \left. - \frac{\pm 2}{\sqrt{t} T^2} \int_{|y| \leq \sigma T} y^2 \exp(-y^2) \frac{dy}{\sqrt{\pi}} \right| \\ \leq \frac{2}{\sqrt{t} T^2} \left| \frac{\sqrt{t}}{2b^2} \gamma a^{\pm}_{\sqrt{t}/2b^2, \gamma} \int_{|y| \leq \sigma T / \sqrt{\frac{\sqrt{t}}{2b^2} \gamma a^{\pm}_{\sqrt{t}/2b^2, \gamma}}} y^2 \exp(-y^2) dy - \int_{|y| \leq \sigma T} y^2 \exp(-y^2) dy \right|.$$

Comme pour $a, b > 0$, on a

$$(15.7.16) \quad \left| a^{-2} \int_0^a y^2 \exp(-y^2) dy - b^{-2} \int_0^b y^2 \exp(-y^2) dy \right| \leq C |b - a|,$$

par (15.7.11), (15.7.15), on a la deuxième inégalité de (15.7.9).

Par le corollaire 7.40, on a

$$(15.7.17) \quad \left| \int_{|y| \leq 2\sigma t^{-1/4} \sqrt{T}, p \in \mathbf{R}} \frac{p^2}{2T} \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\pm \right) \right] (y, p, y, p) dy dp \right| \\ \leq \int_{(y,p) \in \mathbf{R}^2} \frac{p^2}{2T} \left| \text{Tr}_s \left[\exp \left(-\frac{\sqrt{t}}{2b^2} H_\gamma^\pm \right) \right] (y, p, y, p) \right| dy dp \\ = \int_{p \in \mathbf{R}} \frac{p^2}{2T} \exp \left(-\frac{p^2}{2d_{\sqrt{t}/2b^2, \gamma}^\pm} \right) \frac{dp}{\sqrt{2\pi d_{\sqrt{t}/2b^2, \gamma}^\pm}} \\ = C \frac{d_{\sqrt{t}/2b^2, \gamma}^\pm}{T}.$$

Pour $\sqrt{t}/2b^2 \leq C$, de (7.15.26), on a

$$(15.7.18) \quad \frac{d_{\sqrt{t}/2b^2, \gamma}^{\pm}}{T} \leq C \frac{\sqrt{t}}{b^2 T} = \frac{C}{\gamma} \sqrt{t}.$$

Par (15.7.17), (15.7.18), on a la troisième inégalité et termine la démonstration. \square

16. Démonstration du théorème 10.7

Le but de cette section est de montrer le théorème 10.7.

On suppose que (g^{TX}, g^F, f) vérifient les hypothèses de la section 8.1. On fixe $\gamma > 0$, $\epsilon \in]0, 1[$ tels que

$$(16.1) \quad \langle p | 1 - 2\epsilon\gamma \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle \geq \frac{3}{4} |p|^2.$$

On suppose que $b > 0, T > 0$ sont tels que $b^2 T = \gamma$.

THÉORÈME 16.1. *Pour $b > 0, T > 0$, il existe $c > 0, C > 0$, tels que pour $t \in]0, 1]$, si $x, x' \notin U_2$, on a*

$$(16.2) \quad \left| P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^t(x, p, x', p') \right| \leq C \exp\left(-c \left(|p|^2 + \frac{1}{t}\right)\right),$$

et si $x, x' \in U_{\alpha, 2}$, on a

$$(16.3) \quad \left| P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^t(x, p, x', p') - P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^{\alpha, t}(x, p, x', p') \right| \leq C \exp\left(-c \left(|p|^2 + \frac{1}{t}\right)\right).$$

De plus, leur dérivées de tous ordres vérifient des estimations similaires.

DÉMONSTRATION. La preuve est semblable à la preuve du théorème 14.1. \square

THÉORÈME 16.2. *Pour $b > 0, T > 0$, on a*

$$(16.4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(\text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}}{T} \exp\left(-\frac{t}{2} L_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}\right) \right] - \frac{1}{t} \text{rg}[F] \text{Tr}_s[f] \right) \\ = - \left(n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F) \right) \frac{w_T^+}{T} + \tilde{\chi}'(F) \frac{w_T^-}{T}.$$

DÉMONSTRATION. Par le théorème 16.1, on a

$$(16.5) \quad \text{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}}{T} \exp\left(-\frac{t}{2} L_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}\right) \right] \\ = \sum_{\alpha=1}^l \int_{|y| \leq 2\sigma_0, p \in \mathbf{R}^n} \frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}^{\alpha}}{T} \text{Tr}_s \left[P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^{\alpha, t}(y, p, y, p) \right] dy dp + \mathcal{O}(e^{-c/t}).$$

Par le corollaire 7.40, on a

$$(16.6) \quad \text{Tr}_s \left[P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^{\alpha, t}(y, p, y, p) \right] = \frac{(-1)^{n_{\alpha}} T^{n/2} \text{rg}[F]}{(2\pi\sqrt{t})^n \left(a_{1/2b^2, \gamma}^+ d_{1/2b^2, \gamma}^+ \right)^{(n-n_{\alpha})/2} \left(a_{1/2b^2, \gamma}^- d_{1/2b^2, \gamma}^- \right)^{n_{\alpha}/2}} \\ \exp\left(-\frac{T|y'|^2}{2ta_{1/2b^2, \gamma}^-} - \frac{|p'|^2}{2d_{1/2b^2, \gamma}^-} - \frac{T|y''|^2}{2ta_{1/2b^2, \gamma}^+} - \frac{|p''|^2}{2d_{1/2b^2, \gamma}^+} \right).$$

Par (10.1.5)

$$\begin{aligned}
(16.7) \quad & \int_{|y| \leq 2\sigma_0, p \in \mathbf{R}^n} \frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}^\alpha}{T} \operatorname{Tr}_s \left[P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^{\alpha, t}(y, p, y, p) \right] dy dp \\
&= \int_{\mathbf{R}^{2n}} \frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}^\alpha}{T} \operatorname{Tr}_s \left[P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^{\alpha, t}(y, p, y, p) \right] dy dp + \mathcal{O}(e^{-c/t}). \\
&= \frac{(-1)^{n\alpha}}{t} f(x_\alpha) \operatorname{rg}[F] + \frac{1}{T} \left(n_\alpha (-1)^{n\alpha} w_{T/\gamma}^- - (n - n_\alpha) (-1)^{n\alpha} w_{T/\gamma}^+ \right) + \mathcal{O}(e^{-c/t}).
\end{aligned}$$

De (16.5), (16.7), on tire (16.4). \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 10.7. On a

$$(16.8) \quad \operatorname{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}}{T} r \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T} \right) \right] = \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial a} \right) \Big|_{a=1} \operatorname{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}}{T} \exp \left(-\frac{at}{2} L_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T} \right) \right].$$

Du théorème 16.2, on tire que pour $a \in [1/2, 3/2]$,

$$\begin{aligned}
(16.9) \quad & \lim_{t \rightarrow 0} \left(\operatorname{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}}{T} \exp \left(-\frac{at}{2} L_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T} \right) \right] - \frac{1}{t} \operatorname{rg}[F] \operatorname{Tr}_s[f] \right) \\
&= - \left(n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F) \right) \frac{w_{aT/\gamma}^+}{T} + \tilde{\chi}'(F) \frac{w_{aT/\gamma}^-}{T}.
\end{aligned}$$

De (9.1.4), (10.1.6), (16.8), (16.9), on tire le théorème 10.7. \square

17. Démonstration du théorème 10.8

Le but de cette section est de démontrer le théorème 10.8.

On suppose que (g^{TX}, g^F, f) vérifient les hypothèses de la section 8.1. On fixe $\gamma > 0$, $\epsilon \in]0, 1[$, tels que

$$(17.1) \quad \langle p | 1 - 2\epsilon\gamma \nabla^{TX} \nabla f | p \rangle \geq \frac{3}{4} |p|^2.$$

On suppose que $b > 0, T > 0$ sont tels que $b^2 T = \gamma$.

THÉORÈME 17.1. *Il existe $t_0 > 0, c > 0, C > 0$, tels que pour $t \in]0, t_0]$, $T \geq 1$, $b^2 T = \gamma$, si $x, x' \notin U_2$, on a*

$$(17.2) \quad \left| P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^t(x, p, x', p') \right| \leq C \exp \left(-c \left(|p|^2 + \frac{T}{t} \right) \right),$$

et si $x, x' \in U_{\alpha, 2}$, on a

$$(17.3) \quad \left| P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^t(x, p, x', p') - P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^{\alpha, t}(x, p, x', p') \right| \leq C \exp \left(-c \left(|p|^2 + \frac{T}{t} \right) \right).$$

De plus, les dérivées de tous ordres des objets précédents vérifient des estimations similaires.

DÉMONSTRATION. La preuve est identique à la preuve du théorème 14.1. \square

THÉORÈME 17.2. Il existe $t_0 > 0, c > 0, C > 0$, tels que pour $t \in]0, t_0]$, $T \geq 1$, $b^2 T = \gamma$, on a

$$(17.4) \quad \left| \operatorname{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}}{T} \exp \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T} \right) \right] - \frac{\operatorname{rg}[F] \operatorname{Tr}_s[f]}{t} - \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2T} \right| \leq C \exp(-cT).$$

DÉMONSTRATION. Par le théorème 17.1, on a

$$(17.5) \quad \operatorname{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}}{T} \exp \left(\frac{t}{2} L_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T} \right) \right] = \sum_{\alpha=1}^l \int_{|y| \leq 2\sigma_0, p \in \mathbf{R}^n} \operatorname{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}^\alpha}{T} P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^{\alpha, t}(y, p, y, p) \right] dy dp + \mathcal{O}(e^{-cT/t}).$$

Par (7.15.26), pour $b^2 \leq \gamma$, on a

$$(17.6) \quad c \leq a_{1/2b^2, \gamma}^\pm \leq C.$$

Par (16.6) et (17.6), on a

$$(17.7) \quad \int_{|y| \geq 2\sigma_0, p \in \mathbf{R}^n} \frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}^\alpha}{T} \operatorname{Tr}_s \left[P_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T}^{\alpha, t}(y, p, y, p) \right] dx dp = \mathcal{O}(e^{-cT/t}).$$

De (16.7), (17.5), (17.7), on tire que

$$(17.8) \quad \operatorname{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}}{T} \exp \left(\frac{t}{2} L_{bt^{1/2}, t^{-1}T} \right) \right] = \frac{1}{t} \operatorname{Tr}_s[f] \operatorname{rg}[F] + \frac{1}{T} \left(- \left(n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F) \right) w_{T/\gamma}^+ + \tilde{\chi}'(F) w_{T/\gamma}^- \right) + \mathcal{O}(e^{-cT/t}).$$

De (10.1.11), (17.8), on tire le résultat. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 10.8. Du théorème 17.2, on tire que pour $a \in [1/2, 3/2]$,

$$(17.9) \quad \operatorname{Tr}_s \left[\frac{\mathcal{H}_{t^{-1}T}}{T} \exp \left(-\frac{at}{2} L_{\epsilon, bt^{1/2}, t^{-1}T} \right) \right] = \frac{\operatorname{rg}[F] \operatorname{Tr}_s[f]}{t} + \frac{n\chi(F) - \tilde{\chi}'(F)}{2T} + \mathcal{O}(e^{-cT}).$$

De (9.1.4), (16.8), (17.9), on tire le théorème 10.8. \square

Bibliographie

- [Ba61] V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 187–214. MR 0157250 (28 #486)
- [BGeV04] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren Text Editions, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Corrected reprint of the 1992 original. MR 2273508 (2007m :58033)
- [B81] J.-M. Bismut, *Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **56** (1981), no. 4, 469–505. MR 621660 (82k :60134)
- [B05] ———, *The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 2, 379–476 (electronic). MR 2137981 (2006f :35036)
- [B11] ———, *Hypoelliptic Laplacian and orbital integrals*, Annals of Mathematics Studies, vol. 177, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011. MR 2828080
- [B12] J.-M. Bismut, *Index theory and the hypoelliptic Laplacian.*, Metric and differential geometry. The Jeff Cheeger anniversary volume. Selected papers based on the presentations at the international conference on metric and differential geometry, Tianjin and Beijing, China, May 11–15, 2009, Berlin : Springer, 2012, pp. 181–232 (English).
- [BG01] J.-M. Bismut and S. Goette, *Families torsion and Morse functions*, Astérisque (2001), no. 275, x+293. MR 1867006 (2002h :58059)
- [BGiSo88] J.-M. Bismut, H. Gillet, and C. Soulé, *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott-Chern forms and analytic torsion*, Comm. Math. Phys. **115** (1988), no. 1, 49–78. MR 929146 (89g :58192a)
- [BL08] J.-M. Bismut and G. Lebeau, *The hypoelliptic Laplacian and Ray-Singer metrics*, Annals of Mathematics Studies, vol. 167, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008. MR 2441523 (2010b :58042)
- [BZ92] J.-M. Bismut and W. Zhang, *An extension of a theorem by Cheeger and Müller*, Astérisque (1992), no. 205, 235, With an appendix by François Laudenbach. MR 1185803 (93j :58138)
- [BZ94] ———, *Milnor and Ray-Singer metrics on the equivariant determinant of a flat vector bundle*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), no. 2, 136–212. MR 1262703 (96f :58179)
- [C79] J. Cheeger, *Analytic torsion and the heat equation*, Ann. of Math. (2) **109** (1979), no. 2, 259–322. MR 528965 (80j :58065a)
- [dR50] G. de Rham, *Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiable*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **2** (1950), 51–67 (1951). MR 0043468 (13,268c)
- [F35] W. Franz, *Über die Torsion einer Überdeckung.*, J. Reine Angew. Math. **173** (1935), 245–254 (German).
- [Ge86] E. Getzler, *A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem*, Topology **25** (1986), no. 1, 111–117. MR 836727 (87h :58207)
- [GJ87] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum physics*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1987, A functional integral point of view. MR 887102 (89k :81001)
- [HeN05] B. Helffer and F. Nier, *Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1862, Springer-Verlag, Berlin, 2005. MR 2130405 (2006a :58039)

- [HeSj85] B. Helffer and J. Sjöstrand, *Puits multiples en mécanique semi-classique. IV. Étude du complexe de Witten*, Comm. Partial Differential Equations **10** (1985), no. 3, 245–340. MR 780068 (87i :35162)
- [H67] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171. MR 0222474 (36 #5526)
- [KM76] F.F. Knudsen and D. Mumford, *The projectivity of the moduli space of stable curves. I. Preliminaries on “det” and “Div”*, Math. Scand. **39** (1976), no. 1, 19–55. MR 0437541 (55 #10465)
- [Ko34] A. Kolmogoroff, *Zufällige Bewegungen (zur Theorie der Brownschen Bewegung)*, Ann. of Math. (2) **35** (1934), no. 1, 116–117. MR 1503147
- [L] G. Lebeau, à paraître.
- [MaQ86] V. Mathai and D. Quillen, *Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms*, Topology **25** (1986), no. 1, 85–110. MR 836726 (87k :58006)
- [McS67] H. P. McKean and I. M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geometry **1** (1967), no. 1, 43–69. MR 0217739 (36 #828)
- [Mi66] J. Milnor, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 358–426. MR 0196736 (33 #4922)
- [M78] W. Müller, *Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds*, Adv. in Math. **28** (1978), no. 3, 233–305. MR 498252 (80j :58065b)
- [M93] ———, *Analytic torsion and R-torsion for unimodular representations*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 3, 721–753. MR 1189689 (93m :58119)
- [Q85] D. Quillen, *Determinants of Cauchy-Riemann operators on Riemann surfaces*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **19** (1985), no. 1, 37–41, 96. MR 783704 (86g :32035)
- [Re35] K. Reidemeister, *Homotopieringe und Linsenräume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1935), no. 1, 102–109. MR 3069647
- [RS71] D. B. Ray and I. M. Singer, *R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds*, Advances in Math. **7** (1971), 145–210. MR 0295381 (45 #4447)
- [ReSi78] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978. MR 0493421 (58 #12429c)
- [ReY99] D. Revuz and M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, third ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 1725357 (2000h :60050)
- [Sh14] S. Shen, *The hypoelliptic Laplacian, analytic torsion and Cheeger-Müller theorem*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **352** (2014), no. 2, 153–156. MR 3151885
- [Sm61] S. Smale, *On gradient dynamical systems*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), 199–206. MR 0133139 (24 #A2973)
- [Sm67] ———, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747–817. MR 0228014 (37 #3598)
- [T49] R. Thom, *Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété*, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), 973–975. MR 0029160 (10,558b)
- [VFr70] A. D. Ventcel’ and M. I. Freĭdlin, *Small random perturbations of dynamical systems*, Uspehi Mat. Nauk **25** (1970), no. 1 (151), 3–55. MR 0267221 (42 #2123)
- [W76] A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, Berlin, 1976, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 88. MR 0562289 (58 #27769a)
- [Wi82] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 4, 661–692 (1983). MR 683171 (84b :58111)
- [Yo95] K. Yosida, *Functional analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the sixth (1980) edition. MR 1336382 (96a :46001)

Index

- $\|D\|_p, \|D\|$, 50
 $\|\cdot\|_{\lambda,b,T}^{RS,2}$, 26
 $\|\cdot\|_{\lambda,g^F}^{RS,2}$, 22
 $\|\cdot\|_{\lambda,\nabla f,T}^M$, 27
 $\|\cdot\|_{\lambda,\nabla f}^M$, 27
 $\|u\|_{H^s}$, 50
 $\|u\|_{sc,s}$, 88
 $\|\cdot\|_{\lambda,T}^{RS,2}$, 23
 $\|\cdot\|_{\lambda,b}^{RS,2}$, 27
 $\|\cdot\|_{\lambda}^{RS,2}$, 23
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda(T^*X) \otimes_{\mathbf{R}} F, f}$, 22
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda(T^*\mathcal{X}^*) \otimes_{\mathbf{R}} \pi^* F, f}$, 23
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega(X,F), f}$, 22
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega(X,F)}$, 22
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C(W^u, F)}$, 27
 $|\cdot|_{\lambda,b,T}^{RS,2}$, 26
 $|\cdot|_{\lambda,g^F}^{RS}$, 22
1, 19

 A_T , 29
 $A_{\phi, \mathcal{H}}$, 24
 $A_{\phi_b, \mathcal{H}}$, 24
 α_T , 29
 \mathcal{A} , 34
 \mathcal{A} , 54
 $\mathfrak{A}'_{\phi, \mathcal{H}}$, 24
 $\mathfrak{A}'_{\phi_b, \mathcal{H}}$, 24
 a_T , 29
 $a_{t, \gamma}^{\pm}$, 61

 B , 27, 75
 B_{γ}^{\pm} , 36
 \mathcal{B} , 38
 \square_f^X , 22
 β , 92
 β_T , 29
 \mathbf{B}_{γ}^+ , 40
 \mathbf{B}_{γ}^- , 41
 \mathcal{B}_{γ}^- , 42
 $\mathcal{B}_{\gamma}^{-,l}$, 42
 $\mathfrak{B}_{\gamma}^{\pm}$, 58

 $\tilde{\square}_f^X$, 22
 b_T , 29

 $C(W^u, F)$, 27
 C_{γ}^{\pm} , 36
 $\chi(F), \tilde{\chi}(F), \tilde{\chi}'(F)$, 95

 D_f^X , 22
 Δ^V , 25
 Δ^X , 10
 $\bar{d}_{\phi, 2\mathcal{H}}^{\mathcal{X}^*}$, 24
 $\bar{d}_{\phi_b, 2\mathcal{H}}^{\mathcal{X}^*}$, 24
 $\det(E)$, 19
 $\det(V)$, 19
 \tilde{D}_f^X , 22
 d^X , 21
 d_X , 108
 $d_{2f}^{\mathcal{X}^*}$, 22
 $d_{t, \gamma}^{\pm}$, 61
 dv_X , 22
 $dv_{\mathcal{X}^*}$, 24

 $E_{\epsilon, b, T}^{\perp h}$, 82
 $E_{\epsilon, b, T}$, 81
 η_0 , 86

 F , 21
 $F_{\epsilon, b, T}$, 86
 \mathcal{F} , 90
 \mathfrak{f} , 23
 $\mathfrak{f}^{T\mathcal{X}^*}$, 23
 \mathfrak{f}_b , 24
 f , 22
 f^{α} , 75
 f^{\pm} , 31

 g_f^F , 22
 g^{TX} , 21
 $g^{T^*\mathcal{X}^*}$, 23
 g^F , 21

 $H(X, F)$, 21
 $H^{\cdot,+}(\mathbf{R})$, 31

- $H^{\cdot,-}(\mathbf{R})$, 31
 H_{γ}^{\pm} , 36
 $H^s(\mathbf{R}^2)$, 50
 H_{λ} , 86
 $H_{\epsilon,\gamma}^{\pm}$, 66
 \mathcal{H} , 24
 \mathcal{H}_T^{α} , 75
 $\mathcal{H}_{b,T}^{\pm}, \mathcal{H}_T^{\pm}, \mathcal{H}^{\pm}$, 36
 $\mathcal{H}_{b,T}, \mathcal{H}_T$, 25
 $\mathfrak{h}_{\mathcal{H}}^{\Omega}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$, 24
 $\mathcal{H}_{\phi_b, \mathcal{H}_T}$, 26
 h , 24
 $h(x)$, 91
 h_{\cdot} , 111

 $I_{b,t,T}$, 54
 I , 66
 $I(x), I_f(x)$, 108
 $I_{t,T}$, 33
 $I_{t,T}^{y_0}$, 34
 $I_{t,b,T}^{y_0}$, 54

 J , 63
 $J_{\infty,0,T}^{y_0}$, 55
 $J_{b,t,T}^{y_0}$, 55
 $J_{0,T}^{y_0}$, 34
 $J_{\epsilon,b,T}$, 81
 $J_{t,T}^{y_0}$, 34

 K , 24
 K_a , 24
 $K_{t,\gamma}^{\pm}$, 58
 $\mathcal{K}_{t,\gamma}^{\pm}(y)$, 63
 $\mathcal{K}_{t,\gamma}^{\pm}(z, z')$, 60
 k_a , 33, 36

 $L_{\epsilon,b,T}^{\pm}$, 71
 $L_{b,T}^{\pm}$, 36
 L_1, L_2, L_3, L_4 , 83
 $L_{\epsilon,b,T}$, 78
 $L_{b,T}$, 25
 $L'_{b,T}{}^{\pm}$, 36
 λ , 21
 λ_{\pm}^{\pm} , 58
 l , 27, 75

 $M(A, B)$, 113
 M_i , 86
 $M_{\epsilon,\gamma}^{\pm}$, 66
 $M_{\epsilon,b,T}$, 80
 $\mathcal{M}_{b,t,T}^{\epsilon}$, 120
 $\mathcal{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$, 122
 $\mathfrak{M}_{b,0,T}^{x,\epsilon}$, 125
 $\mathfrak{M}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$, 124

 μ_0 , 24
 $\widehat{\mathcal{M}}_{b,t,T}^{x,\epsilon}, \widehat{\mathcal{M}}_{b,t,T}^{x,\epsilon}$, 124
 m_T , 95

 N^V , 25
 $N^{\Lambda}(T^*X)$, 22
 \mathcal{N} , 90
 $\mathfrak{N}_{b,0,T}^{x,\epsilon}$, 125
 $\nabla^{F,u}$, 22
 ∇f , 27
 $\nabla' f$, 30
 ∇_e^V , 25
 ∇^F , 21
 ∇^{TX} , 21
 $\nabla^{\Lambda}(T^*\mathcal{X}^*) \otimes \pi^*F, u$, 25
 $\nabla^{\Lambda}(T^*\mathcal{X}^*) \otimes \pi^*F$, 25
 n_T , 95
 n_{α} , 27

 $\Omega_{b,T}^{\pm}(\mathbf{R}^2)$, 47
 $\Omega(X, F)$, 21
 $\Omega_{Tf^{\pm}}(\mathbf{R})$, 32
 $\Omega_{b,T}^{[0,1]}(\mathcal{X}^*, \pi^*F)$, 89
 $\omega(\nabla^F, g^F)$, 21

 P^X , 22
 $P_{b,T}^t(x, p, x', p')$, 79
 P_{γ}^{\pm} , 59
 $P_{E_{\epsilon,b,T}}$, 82
 $P_{E_{\epsilon,b,T}}^{\perp h}$, 82
 $P_{F_{\epsilon,b,T}}$, 86
 $P_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p')$, 79, 109
 $P_{\epsilon,b,T}^{\alpha,t}(x, p, x', p')$, 109
 $P_{\epsilon,b,T}^{\alpha}$, 73
 $P_{b,t,T}(y, p, y', p')$, 54
 $P_{dR,b,T}$, 89
 P_{dR} , 89
 $P_{t,T}(y, y')$, 34
 $\phi_0(x)$, 80
 π , 23
 $\psi(E, \nabla^E)$, 29
 $\underline{P}_{\epsilon,\gamma}^{\alpha}, \underline{P}_{\epsilon,b,T}^{\alpha}$, 82
 $\varphi(y)$, 72
 p , 23

 $Q_{b,t,T}^{y_0}(y, p, y', p')$, 55
 $Q_{t,T}^{y_0}(y, y')$, 35
 Q_a , 38
 $q_{\epsilon,b,T}^t(x, p, x', p')$, 110

 R^{\pm} , 62
 R^{TX} , 21
 $R^{TX}p\wedge$, 25
 $R_{\gamma}^{\pm'}$, 64

- R_γ^\pm , 58
 $R_{b,t,T}^\varepsilon$, 125
 \mathbf{R} , 19
 $\mathbf{R}[y, p]$, 37
 $\text{rg}[F]$, 21
 ρ_γ^α , 72
 $\rho(y)$, 121
 r , 24
 $r(x)$, 91
 r_α , 24

 $S(\mathbf{R}^{2,*})$, 37
 $S_{\varepsilon,b,T}^\alpha$, 110
 $S_{\varepsilon,b,T}$, 110
 $\mathcal{S}(\mathbf{R}), \mathcal{S}(\mathbf{R}, \Lambda \mathbf{R}^*)$, 32
 $\mathcal{S}(\mathcal{X}^*, \pi^* F)$, 25
 σ_0 , 72, 75

 $T^H \mathcal{X}^*$, 23
 Tr_s , 22
 $\text{Tr}_s[f]$, 95
 \mathcal{T} , 38
 $\tau_{\gamma,\pm}^\pm$, 44
 $\theta(s)$, 22
 $\theta(\nabla^F, g^F)$, 30
 $\theta_{Tf^\pm}(s)$, 35
 $\theta_{b,T}(s)$, 26
 $\theta_{b,T}^\pm(s)$, 56
 $\widehat{T^* X}$, 24
 $\widehat{\text{Tr}}_s$, 34

 $U_{\alpha,r}$, 75
 U_r , 75
 $u_{b,T}^\pm$, 46
 $\underline{u}_{\varepsilon,b,T}^\alpha$, 72
 $\widetilde{U}_{\alpha,2}$, 135
 u_γ^+ , 44
 u_γ^- , 44
 u_{Tf^\pm} , 32
 $u_{\varepsilon,\gamma}^\pm$, 68
 $u_{\varepsilon,b,T}^\pm$, 71
 $u_{\varepsilon,b,T}^\alpha$, 72
 $u_{b,T}^\pm$, 46
 $u.$, 64

 V^\perp , 20
 $V^{\perp h}$, 20
 v_t^\pm , 95
 $v_{t,T}$, 91

 W , 89
 W_α^u, W_α^s , 27
 w_t^\pm , 95
 $w.$, 58
 $w_{t,T}$, 91

 X , 21
 X^\pm , 60
 \mathcal{X}^* , 23
 x_α , 27

 Y^\pm , 60

 Z^\pm , 60
 z_t^\pm , 58
 \underline{z}_t^\pm , 62
 $\zeta(s)$, 35