



**HAL**  
open science

## Contribution à la commande des robots parallèles à câbles à redondance d'actionnement

Johann Lamaury

► **To cite this version:**

Johann Lamaury. Contribution à la commande des robots parallèles à câbles à redondance d'actionnement. Automatique / Robotique. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2013. Français. NNT: 2013MON20110 . tel-01021423

**HAL Id: tel-01021423**

**<https://theses.hal.science/tel-01021423>**

Submitted on 9 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

**UNIVERSITÉ MONTPELLIER II**

Sciences et Techniques du Languedoc

# THÈSE

présentée au Laboratoire d'Informatique de Robotique  
et de Microélectronique de Montpellier pour  
obtenir le diplôme de doctorat

*Spécialité* : **Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal**  
*Formation Doctorale* : **Systèmes Automatiques et Microélectroniques**  
*École Doctorale* : **Information, Structures, Systèmes**

---

## **Contribution à la commande des robots parallèles à câbles à redondance d'actionnement**

---

par

**Johann LAMAURY**

Soutenue le 08 Octobre 2013, devant le jury composé de :

**Président du jury et rapporteur**

M. Jean-Pierre MERLET, Directeur de recherche.....INRIA Sophia Antipolis

**Rapporteur**

M. Edouard LAROCHE, Professeur des Universités..... Université de Strasbourg

**Examineurs**

M. Cédric BARADAT, Directeur Technique..... Tecnia France

M. Ahmed CHEMORI, Chargé de recherche..... LIRMM, CNRS

**Directeur de thèse**

M. François PIERROT, Directeur de recherche..... LIRMM, CNRS

**Co-Encadrant de thèse**

M. Marc GOUTTEFARDE, Chargé de recherche..... LIRMM, CNRS



## REMERCIEMENTS

Ces quelques lignes viennent conclure trois années de thèses intenses, pleines d'enseignements, de défis, de difficultés, de joies et de rencontres. J'ai eu la chance de pouvoir côtoyer des doctorants et des chercheurs brillants, provenant d'horizons tellement différents, que c'est avec un réel pincement au cœur que je quitte le laboratoire.

En premier lieu, je remercie Jean-Claude Kœnig, Directeur du Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier (LIRMM), pour m'avoir accueilli et nommé, dès ma première année, au Conseil de Laboratoire. J'ai pris beaucoup de plaisir à prendre part à la vie du LIRMM pendant ces trois ans.

Ma reconnaissance va ensuite à mon directeur de thèse, François Pierrot, qui m'a accueilli au sein de l'équipe DEXTER. Merci de m'avoir accordé ta confiance et d'avoir mis à ma disposition les moyens qui m'ont permis de mener à bien ma recherche.

Faire porter ses fruits à un travail de thèse, le mettre en forme et publier, requiert un encadrement régulier. Dans l'attente de résultats, des conseils, des idées et de longues discussions sont souvent nécessaires. Lorsque les résultats sont là, un retour critique et expérimenté est indispensable. Je remercie vivement mon encadrant, Marc Gouttefarde, qui a su m'apporter tout ça. Tes idées m'ont guidées dans mes périodes d'hésitation, et ta rigueur scientifique nous a permis de mener ces travaux aussi loin. Tu m'as toujours dis d'éviter les superlatifs pour qu'un papier soit accepté. Je suis du Sud, difficile de se retenir ! Je profite donc de la liberté qui m'est accordée ici pour te dire que j'ai eu un immense plaisir à travailler avec toi, et pour te souhaiter énormément de réussite dans tes recherches futures ! Un grand merci pour ces trois années très riches en enseignements !

Je remercie ensuite mes rapporteurs, Jean-Pierre Merlet et Edouard Laroche, qui ont pris le temps d'évaluer mon travail avec attention. Je remercie également mes examinateurs, Cédric Baradat et Ahmed Chemori, pour l'attention qu'ils ont porté à mes travaux. J'ai beaucoup apprécié nos nombreux échanges, et j'espère avoir la chance de pouvoir continuer à travailler avec vous dans un futur proche.

Je souhaite également exprimer tout ma gratitude à l'ensemble du personnel du

LIRMM et plus particulièrement aux membres de l'équipe DEXTER. Merci à Philippe Poinet, responsable du département, pour ses conseils et son écoute autour de la vie doctorale. Merci également d'avoir permis aux représentants des doctorants d'assister aux réunions de département. Cela contribue à améliorer la communication entre les permanents et les doctorants. Merci ensuite à Olivier Company, responsable de l'équipe DEXTER, et Sébastien Krut pour leurs multiples conseils sur les aspects pratiques de commande des robots parallèles. Vous m'avez aidé à débloquer bien des situations! Merci également à Etienne Dombre, Chao Liu et Nabil Zemiti pour leur accessibilités et leurs conseils. Je vous souhaite à tous beaucoup de réussite dans vos travaux.

J'adresse un vif remerciement à Olivier Tempier et Pierre-Elie Hervé, nos deux ingénieurs préférés! Ma thèse a bénéficié d'une dimension expérimentale importante, et c'est grâce à vous. Petite dédicace pour Mathias, sept semaines à la rédaction de ces lignes : ton père est un champion, tu en seras un aussi! Rien n'aurait été possible sans lui.

Merci également à mes collègues et amis de Tecnalía, Micaël Michelin, Jean-Baptiste Izard, Lotfi Chick et Hai Yang. J'espère que nous pourrons nous recroiser dans le futur!

Je ne risque pas d'oublier les guerriers des temps modernes, les doctorants et jeunes docteurs du département robotique! Vous êtes tous géniaux, et c'est en grande partie grâce à vous que cette thèse n'a été pour moi que du bonheur! Un grand merci à Nicolas Carlési, Divine Maalouf, David Galdeano, Arnaud Meline, Alonzo Sanchez Secades, Ghuilherme Sartori Natal, tous présents à mon arrivée (certains n'en sont pas encore sortis... courage!). Les moins anciens ensuite, dans le désordre, Florent Veye, Samah Shayya, Alejandro Gonzalez De Alba, Ederson Dorileo, Abdulrahman Albakri, Dinh Quan Nguyen, Guillaume Coppey... Et d'autres plus frais et optimistes, Andrea Collo, Fabien Despinoy, Mohamed Nassim Boushaki, Moussab Bennehar, Adrien Lasbouygues, Benoît Ropars, Jing Guo, Julien Prades... Je pense également aux membres actuels et passés du Conseil des Doctorants (votez Fabien Hervouet!). Merci à vous tous, et à tous ceux que j'aurais pu oublier, pour ces moments de bonne humeur (je retire Fabien Despinoy sur ce coup, arrête de râler le Parisien!), pour les indispensables (vitales) pauses café, les discussions scientifiques, les soirées... Tout ça va me manquer! Passer du temps avec autant de nationalités et de personnalités différentes était une véritable chance.

Merci également à tous mes amis rencontrés à Montpellier, David, Marie, Nicolas, Elsa, Julien, Julien, Julien (il y en a marre de ce prénom...), Maud, Stéphane, Émilie, Luc, Camille et tous les autres. Vous m'avez si souvent permis de m'évader des tracas de la thèse! Je suis vraiment heureux de pouvoir rester dans la région et ainsi continuer à passer du temps avec vous.

Je remercie infiniment ma famille, qui m'a toujours poussé à donner le meilleur de moi-même. C'est grâce à vous si j'en suis arrivé là. Merci à mes grands parents et à ma sœur pour leur présence et leur amour. J'adresse une pensée toute particulière à mon grand père, parti trop tôt ; j'espère que tu es fier de moi. Merci à mes parents pour leur soutien indéfectible et leurs encouragements. Vous êtes formidables, je vous adore.

Merci enfin à ma femme, Mme Andréa Lamaury, pour tout le bonheur que tu m'apportes. Tu as été un rayon de soleil et un soutien permanent. Je sais que je pourrais toujours compter sur toi et je m'estime l'homme le plus heureux du monde. Je n'ai jamais vécu cette thèse comme une épreuve, et c'est grâce à ta présence à mes côtés, jour après jour...

# TABLE DES MATIÈRES

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Remerciements</b>   | <b>I</b>    |
| <b>Table des matières</b>  | <b>IV</b>   |
| <b>Table des figures</b>   | <b>VIII</b> |
| <b>Liste des tableaux</b>  | <b>XIII</b> |
| <b>Notations</b>   | <b>XV</b>   |
| <b>1 Introduction</b>  | <b>1</b>    |
| 1.1 Les robots parallèles à câbles . . . . .                               | 1           |
| 1.1.1 Différentes configurations . . . . .                                 | 3           |
| 1.1.2 Avantages et inconvénients . . . . .                                 | 4           |
| 1.2 État de l’art et applications des robots parallèles à câbles . . . . . | 7           |
| 1.3 Objectifs et contributions de la thèse . . . . .                       | 13          |
| <b>2 Modélisation</b>  | <b>19</b>   |
| 2.1 Modélisation géométrique . . . . .                                     | 19          |
| 2.1.1 Représentation d’un robot parallèle à câbles . . . . .               | 20          |
| 2.1.2 Modèle géométrique inverse . . . . .                                 | 21          |
| 2.1.3 Modèle géométrique direct . . . . .                                  | 22          |
| 2.2 Cinématique . . . . .  | 22          |
| 2.2.1 Jacobienne . . . . .   | 22          |
| 2.2.2 Modèle cinématique inverse . . . . .                                 | 23          |
| 2.2.3 Modèle cinématique direct . . . . .                                  | 23          |
| 2.2.4 Vitesses et accélérations angulaires . . . . .                       | 24          |
| 2.2.5 Contrainte des torseurs admissibles . . . . .                        | 25          |
| 2.3 Intérêts de la redondance d’actionnement . . . . .                     | 25          |
| 2.4 Espace de travail . . . . .  | 26          |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.5      | Dynamique . . . . .   | 30        |
| 2.5.1    | Centre de gravité et centre géométrique coïncidents . . . . .                               | 30        |
| 2.5.2    | Centre de gravité et centre géométrique dissociés . . . . .                                 | 34        |
| 2.5.3    | Modélisation des efforts de frottements . . . . .   | 36        |
| 2.6      | Conclusion . . . . .  | 36        |
| <b>3</b> | <b>Stratégies de distribution des tensions dans les câbles</b>                              | <b>37</b> |
| 3.1      | Problème de la distribution des tensions . . . . .  | 38        |
| 3.1.1    | Formulation du problème . . . . .   | 38        |
| 3.1.2    | Les approches existantes . . . . .  | 39        |
| 3.1.3    | Polytope des solutions admissibles au problème de la distribution<br>des tensions . . . . . | 41        |
| 3.2      | Algorithme proposé : TurnAround . . . . .   | 46        |
| 3.2.1    | Recherche d'un premier sommet du polygone . . . . .   | 47        |
| 3.2.2    | Parcours des frontières du polygone . . . . .   | 48        |
| 3.2.3    | Cas particulier de plus de deux droites concourantes . . . . .                              | 53        |
| 3.3      | Choix de la distribution optimale des tensions . . . . .                                    | 55        |
| 3.3.1    | Solution minimisant la norme 1 . . . . .  | 55        |
| 3.3.2    | Solution minimisant la norme 2 . . . . .  | 57        |
| 3.3.3    | Centre analytique du polygone . . . . .   | 59        |
| 3.3.4    | Barycentre pondéré . . . . .  | 61        |
| 3.3.5    | Comparaison des solutions optimales . . . . .   | 62        |
| 3.4      | Simulations . . . . .   | 66        |
| 3.4.1    | Simulations d'un robot pleinement contraint, REELAX8-PC . . . . .                           | 67        |
| 3.4.2    | Simulations d'un robot suspendu, REELAX8-S . . . . .  | 70        |
| 3.4.3    | Comparaison des temps d'exécution . . . . .   | 72        |
| 3.5      | Conclusion . . . . .  | 74        |
| <b>4</b> | <b>Commande des mouvements des robots parallèles à câbles</b>                               | <b>77</b> |
| 4.1      | La commande des mouvements des RPC . . . . .  | 78        |
| 4.2      | Choix de l'espace de commande . . . . .   | 80        |
| 4.2.1    | Commande dans l'espace articulaire . . . . .  | 80        |
| 4.2.2    | Commande dans l'espace opérationnel . . . . .   | 82        |
| 4.2.3    | Génération de trajectoires . . . . .  | 83        |
| 4.3      | Intégration de la distribution des tensions dans la commande PID . . . . .                  | 84        |
| 4.4      | Commande par anticipation en espace double . . . . .  | 85        |
| 4.4.1    | Correcteur dans l'espace articulaire . . . . .  | 87        |
| 4.4.2    | Correcteur dans l'espace opérationnel . . . . .   | 88        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.4.3    | Algorithme de distribution des tensions dans la boucle d'anticipation   | 89         |
| 4.5      | Commande adaptative en espace double  | 91         |
| 4.5.1    | Vue d'ensemble de la commande adaptative  | 93         |
| 4.5.2    | Adaptation dans l'espace opérationnel   | 96         |
| 4.5.3    | Adaptation dans l'espace articulaire  | 99         |
| 4.5.4    | Synthèse de la commande   | 101        |
| 4.5.5    | Analyse de stabilité  | 102        |
| 4.6      | Simulations des lois de commande  | 106        |
| 4.7      | Conclusion  | 110        |
| <b>5</b> | <b>Résultats expérimentaux</b>  | <b>113</b> |
| 5.1      | Bancs d'essais  | 113        |
| 5.2      | Validation de l'algorithme de distribution des tensions   | 115        |
| 5.2.1    | Application de l'algorithme de distribution des tensions à CoGiRo   | 116        |
| 5.2.2    | Application de l'algorithme de distribution des tensions à CABLAR   | 119        |
| 5.3      | Études expérimentales des schémas de commande   | 124        |
| 5.3.1    | Étalonnage et principe de mesure  | 124        |
| 5.3.2    | Exactitudes de positionnement et d'orientation  | 127        |
| 5.3.3    | Répétabilité de positionnement et d'orientation   | 132        |
| 5.3.4    | Exactitudes de suivi de trajectoires  | 136        |
| 5.4      | Conclusion  | 144        |
| <b>6</b> | <b>Conclusion générale</b>  | <b>147</b> |
|          | <b>Publications</b>   | <b>151</b> |
|          | Journal   | 151        |
|          | Conférences   | 151        |
| <b>A</b> | <b>Données techniques des bancs d'essai</b>   | <b>153</b> |
| A.1      | REELAX8   | 153        |
| A.1.1    | Configuration suspendue   | 156        |
| A.1.2    | Configuration pleinement contrainte   | 157        |
| A.2      | CoGiRo  | 158        |
| A.3      | CABLAR  | 161        |
| <b>B</b> | <b>Compléments à la modélisation des robots parallèles à câbles</b>   | <b>163</b> |
| B.1      | Convention X-Y-Z des angles d'Euler   | 163        |
| B.2      | Vitesses et accélérations angulaires  | 164        |
| B.3      | Démonstration de la relation $\dot{\mathbf{K}}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K}\boldsymbol{\omega}$ | 166        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>C</b> | <b>Preuves de continuité</b>  | <b>167</b> |
| C.1      | Noyau d'une matrice de dimension $n \times n + 2$ . . . . .                     | 168        |
| C.2      | Continuité de $\Lambda$ . . . . .   | 169        |
| C.3      | Continuité et conservation des sommets de $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ . . . . . | 170        |
| C.4      | Continuité des solutions . . . . .  | 171        |
| C.4.1    | Continuité des solutions minimisant les normes 1 et 2 des tensions .            | 171        |
| C.4.2    | Continuités du barycentre et du barycentre pondéré . . . . .                    | 171        |
| <b>D</b> | <b>Mesures d'exactitude et de répétabilité</b>                                  | <b>175</b> |

## TABLE DES FIGURES

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Le Adept Quattro™ s650H, un robot parallèle à bras rigides. . . . .   | 2  |
| 1.2  | Représentation schématique d'un RPC pleinement contraint à six degrés de liberté actionné par huit câbles. . . . .                                    | 3  |
| 1.3  | Représentation schématique d'un RPC suspendu à six DDL actionnés par huit câbles. . . . .   | 4  |
| 1.4  | Espace de travail de ReelAx8 en configuration suspendue, un RPC redondant à huit câbles pour six DDL (échelle en Newtons). . . . .                    | 5  |
| 1.5  | Premiers concepts de robots parallèles à câbles. . . . .  | 8  |
| 1.6  | Deux prototypes de RPC. . . . .   | 9  |
| 1.7  | Les deux versions du prototype IPAnema, conçu à Fraunhofer IPA, Stuttgart. Photos : Copyright Fraunhofer IPA. . . . .                                 | 9  |
| 1.8  | Concept de joystick de téléopération équipé de neuf câbles, proposé dans [Lindermann 89]. . . . .   | 10 |
| 1.9  | Mise en situation du robot de secours MARIONET-CRANE, développé à l'INRIA Sophia-Antipolis par l'équipe projet COPRIN. . . . .                        | 12 |
| 1.10 | Premiers prototypes de robots parallèles à câbles développés au LIRMM en collaboration avec TECNALIA. . . . .   | 15 |
| 1.11 | Démonstrateur du projet ANR CoGiRo, développé au LIRMM par l'équipe DEXTER en collaboration avec TECNALIA. . . . .                                    | 16 |
| 1.12 | CABLAR, développé à l'Université de Duisburg-Essen. . . . .   | 17 |
| 2.1  | Architecture générale d'un RPC. . . . .   | 20 |
| 2.2  | ETC obtenus pour un arrangement de six et huit câbles dans une pièce de la dimension de REELAX8 (échelles en Newtons). . . . .                        | 28 |
| 2.3  | ETC obtenus pour un arrangement de six et huit câbles dans une pièce de la dimension du démonstrateur du projet CoGiRo (échelles en Newtons). . . . . | 29 |
| 2.4  | Différents montages d'enrouleurs possibles. . . . .   | 31 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.1  | Intersection $\Lambda$ entre l'hypercube $\Omega$ et l'ensemble des solutions $\Sigma$ d'un RPC suspendu à 2 DDR et 1 DDL. . . . .   | 42 |
| 3.2  | Intersection $\Lambda$ entre l'hypercube $\Omega$ et l'ensemble des solutions $\Sigma$ d'un RPC pleinement contraint à 2 DDR et 1 DDL. . . . .   | 43 |
| 3.3  | Pose $[1\ 3\ 2,5\ 15\ 35\ 25]^T$ (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ) du démonstrateur suspendu du projet COGIRO, avec une plate-forme pesant 90 kg, $\mathbf{t}_{\min} = 100\ N$ et $\mathbf{t}_{\max} = 5000\ N$ . . . . .  | 45 |
| 3.4  | Organigramme général de TurnAround. . . . .  | 46 |
| 3.5  | Organigramme de recherche du premier sommet. . . . .   | 49 |
| 3.6  | Organigramme de recherche des autres sommets du polygone . . . . .   | 52 |
| 3.7  | Illustration d'un cas où trois droites sont concourantes. . . . .  | 53 |
| 3.8  | Processus typique d'apparition d'un nouveau sommet. . . . .  | 54 |
| 3.9  | Une solution au problème d'optimisation linéaire de la distribution des tensions. . . . .  | 57 |
| 3.10 | Une solution au problème d'optimisation quadratique de la distribution des tensions. . . . .   | 58 |
| 3.11 | Vue schématique de la pose $[0,3\ -0,6\ 1,5\ 10\ 20\ 5]^T$ (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ) des RPC REELAX8-S, suspendu et REELAX8-PC, pleinement contraint. . . . .  | 63 |
| 3.12 | Polygone $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ correspondant à la pose $[0,3\ -0,6\ 1,5\ 10\ 20\ 5]^T$ (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ) du RPC suspendu REELAX8-S, avec une plate-forme de 20 kg, $\mathbf{t}_{\min} = 0\ N$ et $\mathbf{t}_{\max} = 500\ N$ . . . . .              | 64 |
| 3.13 | Polygone $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ correspondant à la pose $[0,3\ -0,6\ 1,5\ 10\ 20\ 5]^T$ (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ) du RPC pleinement contraint REELAX8-PC, avec une plate-forme de 20 kg, $\mathbf{t}_{\min} = 0\ N$ et $\mathbf{t}_{\max} = 500\ N$ . . . . . | 65 |
| 3.14 | Représentation schématique de $\text{traj}_1$ . . . . .  | 66 |
| 3.15 | Distribution des tensions $\mathbf{t}_p$ obtenue par le calcul de la pseudo-inverse, le long de $\text{traj}_1$ appliquée à REELAX8-PC. . . . .  | 67 |
| 3.16 | Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale du barycentre, le long de $\text{traj}_1$ appliquée à REELAX8-PC. . . . .  | 68 |
| 3.17 | Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale du barycentre pondéré, le long de $\text{traj}_1$ appliquée à REELAX8-PC. . . . .  | 69 |
| 3.18 | Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale minimisant la norme 1 de $\mathbf{t}$ , le long de $\text{traj}_1$ appliquée à REELAX8-PC. . . . .   | 69 |
| 3.19 | Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale minimisant la norme 2 de $\mathbf{t}$ , le long de $\text{traj}_1$ appliquée à REELAX8-PC. . . . .   | 69 |
| 3.20 | Distribution des tensions $\mathbf{t}_p$ obtenue par le calcul de la pseudo-inverse, le long de $\text{traj}_1$ appliquée à REELAX8-S. . . . .   | 70 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 3.21 | Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale du barycentre, le long de $\text{traj}_1$ appliquée à REELAX8-S. . . . .                          | 71  |
| 3.22 | Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale du barycentre pondéré, le long de $\text{traj}_1$ appliquée à REELAX8-S. . . . .                  | 71  |
| 3.23 | Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale minimisant la norme 1 de $\mathbf{t}$ , le long de $\text{traj}_1$ appliquée à REELAX8-S. . . . . | 72  |
| 3.24 | Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale minimisant la norme 2 de $\mathbf{t}$ , le long de $\text{traj}_1$ appliquée à REELAX8-S. . . . . | 72  |
| 4.1  | Schéma de commande PID décentralisée dans l'espace articulaire. . . . .   | 81  |
| 4.2  | Schéma de commande PID décentralisée dans l'espace opérationnel. . . . .  | 82  |
| 4.3  | Représentation schématique de $\text{traj}_2$ . . . . .   | 84  |
| 4.4  | Schéma de commande du contrôleur PID dans l'espace articulaire, intégrant un algorithme de distribution des tensions . . . . .  | 85  |
| 4.5  | Schéma de commande en espace double par anticipation et intégration de l'algorithme de distribution des tensions dans la boucle principale. . . . .                       | 87  |
| 4.6  | Schéma de commande en espace double par anticipation et correcteur dans l'espace opérationnel. . . . .  | 89  |
| 4.7  | Schéma de commande en espace double avec intégration de l'algorithme de distribution de tension dans une boucle d'anticipation. . . . .                                   | 90  |
| 4.8  | Un schéma de commande adaptative basé modèle. . . . .   | 94  |
| 4.9  | Schéma de commande adaptative en espace double. . . . .   | 95  |
| 4.10 | Représentation schématique de $\text{traj}_2$ . La charge de 110 kg est transportée entre les points B et C. . . . .  | 107 |
| 4.11 | Évolution de la masse de la plate-forme le long de $\text{traj}_2$ avec prise de palette entre $t_1 = 11$ s et $t_2 = 29$ s. . . . .                                      | 108 |
| 4.12 | Évolution de la position du centre de gravité de la plate-forme le long de $\text{traj}_2$ avec prise de palette entre $t_1 = 11$ s et $t_2 = 29$ s. . . . .              | 108 |
| 4.13 | Évolution des coefficients de la matrice d'inertie de la plate-forme le long de $\text{traj}_2$ avec prise de palette entre $t_1 = 11$ s et $t_2 = 29$ s. . . . .         | 109 |
| 4.14 | Erreurs de positionnement et d'orientation de la plate-forme obtenues avec la commande PD. . . . .  | 109 |
| 4.15 | Erreurs de positionnement et d'orientation de la plate-forme obtenues avec la commande par anticipation en espace double. . . . .   | 110 |
| 4.16 | Erreurs de positionnement et d'orientation de la plate-forme obtenues avec la commande adaptative en espace double. . . . .   | 110 |
| 5.1  | Architecture matérielle du prototype ReelAx8. . . . .   | 114 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 5.2  | Architecture matérielle du démonstrateur du projet ANR COGiRO. . . . .   | 115 |
| 5.3  | Distribution commandée des tensions, issue du calcul du barycentre. . . . .  | 117 |
| 5.4  | Distribution commandée des tensions, issue du calcul du barycentre pondéré. . . . .  | 117 |
| 5.5  | Distribution commandée des tensions, issue du calcul de la solution minimisant la norme 2 du vecteur des tensions. . . . .   | 118 |
| 5.6  | Schéma de commande en position de CABLAR intégrant l'algorithme de distribution des tensions du chapitre 3. . . . .  | 119 |
| 5.7  | Représentation schématique de traj <sub>3</sub> . . . . .  | 120 |
| 5.8  | Distribution des tensions issue de la pseudo-inverse, simulée le long de traj <sub>3</sub> . . . . .   | 121 |
| 5.9  | Distribution des tensions mesurées issue du calcul du barycentre. . . . .  | 122 |
| 5.10 | Distribution des tensions mesurées issue du calcul de la solution minimisant la norme 1 du vecteur des tensions. . . . .   | 122 |
| 5.11 | Distribution des tensions mesurées issue du calcul de la solution minimisant la norme 2 du vecteur des tensions. . . . .   | 123 |
| 5.12 | Distribution des tensions mesurées issue du calcul du barycentre pondéré. . . . .  | 123 |
| 5.13 | Illustration d'une mesure de pose effectuée avec le laser de poursuite API Tracker3 (T3-15). . . . .   | 125 |
| 5.14 | Une des bases au sol de la cible du laser de poursuite. . . . .  | 126 |
| 5.15 | Mesure de la position de la plate-forme au travers de la mesure de trois bases fixées sur celle-ci. . . . .  | 126 |
| 5.16 | Représentation schématique de traj <sub>4</sub> . . . . .  | 128 |
| 5.17 | Poses, vitesses et accélérations Cartésiennes générées pour le suivi de traj <sub>4</sub> (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ). . . . .   | 128 |
| 5.18 | Illustration de l'exactitude et de la répétabilité de positionnement et d'orientation [Priel 90]. . . . .  | 129 |
| 5.19 | Plate-forme du démonstrateur du projet COGiRO chargée avec une palette de 110 kg à la quatrième pose de traj <sub>4</sub> . . . . .  | 131 |
| 5.20 | Signaux d'entrée des moteurs (couples commandés). . . . .  | 137 |
| 5.21 | Erreurs de suivi en position et en orientation de la plate-forme le long de traj <sub>2</sub> , calculées en utilisant le schéma de commande PID sans compensation. . . . .                                  | 138 |
| 5.22 | Erreurs de suivi en position et en orientation de la plate-forme le long de traj <sub>2</sub> , calculées en utilisant la commande par anticipation. . . . .   | 139 |
| 5.23 | Erreurs de suivi en position et en orientation de la plate-forme le long de traj <sub>2</sub> , calculées en utilisant le schéma de commande adaptative. . . . .   | 140 |
| 5.24 | Erreurs de suivi en position et en orientation de la plate-forme le long de traj <sub>2</sub> , calculées en utilisant le schéma de commande adaptative avec un réglage optimisé pour l'application. . . . . | 141 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.25 | Estimation de la masse de la plate-forme et de sa charge le long de $\text{traj}_2$ , avec différents réglages de la commande adaptative. . . . .                   | 143 |
| 5.26 | Estimation de la position du centre de masse de la plate-forme et de sa charge le long de l'axe $x_p$ , avec différents réglages de la commande adaptative. . . . . | 143 |
| 5.27 | Estimation des coefficients des frottements secs le long de $\text{traj}_2$ . . . . .   | 144 |
| 5.28 | Estimation des coefficients des frottements visqueux le long de $\text{traj}_2$ . . . . .   | 144 |
| A.1  | Photographie de REELAX8 en configuration suspendue. . . . .   | 154 |
| A.2  | Photographie d'un œillet de REELAX8. . . . .  | 155 |
| A.3  | Photographie d'un enrouleur de REELAX8. . . . .   | 155 |
| A.4  | Vue schématique de REELAX8 en configuration suspendue. . . . .  | 156 |
| A.5  | Vue schématique de REELAX8 en configuration pleinement contrainte. . . . .  | 157 |
| A.6  | Photographie du démonstrateur du projet ANR COGIRO. . . . .   | 158 |
| A.7  | Plate-forme acier et chemin de câble du démonstrateur du projet COGIRO. . . . .   | 159 |
| A.8  | Deux enrouleurs au pied d'un poteau du démonstrateur du projet ANR COGIRO. . . . .  | 160 |
| A.9  | Vue schématique du démonstrateur du projet COGIRO. . . . .  | 160 |
| A.10 | Vue schématique de CABLAR. . . . .  | 161 |
| B.1  | Représentation des rotations successives de la convention d'Euler $X - Y - Z$ . . . . .   | 164 |
| D.1  | Commande PID sans anticipation, plate-forme à vide, le long de $\text{traj}_2$ . . . . .  | 176 |
| D.2  | Commande par anticipation en espace double, plate-forme à vide, le long de $\text{traj}_2$ . . . . .  | 177 |
| D.3  | Commande adaptative en espace double, plate-forme à vide, le long de $\text{traj}_2$ . . . . .  | 178 |
| D.4  | Commande PID sans anticipation, plate-forme chargée, le long de $\text{traj}_2$ . . . . .   | 179 |
| D.5  | Commande par anticipation en espace double, plate-forme chargée, le long de $\text{traj}_2$ . . . . .   | 180 |
| D.6  | Commande adaptative en espace double, plate-forme chargée, le long de $\text{traj}_2$ . . . . .   | 181 |

## LISTE DES TABLEAUX

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 3.1 | Solutions au problème de la distribution des tensions pour la pose $[0,3 - 0,7 \ 1,5 \ 10 \ 15 \ 5]^T$ (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ) des RPC pleinement contraint REELAX8-PC et suspendu REELAX8-S, avec une plateforme de 20kg, $t_{\min} = 0 \text{ N}$ et $t_{\max} = 500 \text{ N}$ . . . . . | 65  |
| 3.2 | Points de passage de la trajectoire $\text{traj}_1$ . . . . .   | 66  |
| 3.3 | Moyenne des normes 2 des tensions des câbles en fonction de la solution optimale retenue dans le cas du RPC REELAX8-PC le long de la trajectoire $\text{traj}_1$ . . . . .  | 70  |
| 3.4 | Norme du vecteur des tensions moyennes en fonction de la solution optimale au problème de la distribution des tensions utilisée le long de la trajectoire $\text{traj}_1$ appliquée au RPC REELAX8-S. . . . .   | 71  |
| 3.5 | Comparaison des TEM et TET, exprimés en millisecondes, entre les différentes méthodes de calcul de la distribution des tensions des câbles. . . . .   | 73  |
| 4.1 | Points de passage de la trajectoire $\text{traj}_2$ . . . . .   | 83  |
| 4.2 | Réglages du correcteur PD des schémas de commande simulés. . . . .  | 107 |
| 4.3 | Réglages des paramètres de la commande adaptative simulée. . . . .  | 111 |
| 5.1 | Moyennes quadratiques des distributions des tensions obtenues le long de $\text{traj}_2$ . . . . .  | 116 |
| 5.2 | Temps de calcul de l'algorithme de distribution des tensions correspondant aux différentes solutions optimales. . . . .   | 118 |
| 5.3 | Points de passage de la trajectoire $\text{traj}_3$ à orientation constante. . . . .  | 120 |
| 5.4 | Moyennes quadratiques des distributions des tensions obtenues le long de $\text{traj}_3$ . . . . .  | 121 |
| 5.5 | Réglages des correcteurs PD. . . . .  | 124 |
| 5.6 | Réglages des paramètres de la commande adaptative. . . . .  | 125 |
| 5.7 | Points de passage de la trajectoire $\text{traj}_4$ . . . . .   | 129 |
| 5.8 | Exactitudes mesurées de COGIRO aux différentes poses de $\text{traj}_4$ , plateforme à vide puis chargée avec une palette de 110kg. Les résultats sont exprimés en millimètres et en milliradians. . . . .  | 130 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.9  | Répétabilité mesurées de COGIRO aux différentes poses de $\text{traj}_4$ , plate-forme à vide puis chargée avec une palette de 110 kg. Les résultats sont exprimés en millimètres et milliradians. . . . .            | 135 |
| 5.10 | Points de passage de la trajectoire $\text{traj}_2$ avec prise de charge. . . . .   | 136 |
| 5.11 | Erreurs quadratiques moyennes et exactitudes de pose de la plate-forme le long de $\text{traj}_2$ avec un chargement de 110 kg entre $t_1 = 19$ s et $t_2 = 40$ s. . . . .  | 138 |
| 5.12 | Différents réglages des paramètres de la commande adaptative. . . . .   | 141 |
| 5.13 | Erreurs quadratiques moyennes et exactitudes de pose de la plate-forme le long de $\text{traj}_2$ avec un chargement de 110 kg entre $t_1 = 19$ s et $t_2 = 40$ s, avec les réglages I et II du tableau 5.12. . . . . | 142 |
| A.1  | Coordonnées des points de sortie et des points d'attache de REELAX8 en configuration suspendue. . . . .   | 156 |
| A.2  | Coordonnées des points de sortie et des points d'attache de REELAX8 en configuration pleinement contrainte. . . . .   | 157 |
| A.3  | Coordonnées des points de sortie et des points d'attache de COGIRO. . . . .   | 159 |
| A.4  | Coordonnées des points de sortie et des points d'attache de CABLAR. . . . .   | 161 |
| D.1  | Points de passage de la trajectoire $\text{traj}_2$ . . . . .   | 182 |

## NOTATIONS

Dans cette thèse, les vecteurs seront notés en caractères gras minuscules, les matrices en caractères gras majuscules et les autres grandeurs mathématiques en italique. Ainsi,  $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{b}$  signifie que le vecteur  $\mathbf{x}$  multiplié par la matrice  $\mathbf{A}$  est égal au vecteur  $\mathbf{b}$  multiplié par le scalaire  $\lambda$ .

|                            |   |
|----------------------------|---|
| RPC                        | Robot Parallèle à Câbles  |
| DDL                        | Degrés de Liberté   |
| DDR                        | Degrés de Redondance  |
| $n$                        | nombre de degrés de liberté   |
| $m$                        | nombre d'actionneurs  |
| .                          | produit scalaire  |
| $\wedge$                   | produit vectoriel   |
| $\mathbf{x}$               | vecteur des coordonnées opérationnelles de l'organe terminal du robot |
| $\mathbf{q}$               | vecteur des coordonnées articulaires du robot                         |
| $\mathbf{t}$               | vecteur des tensions des câbles                                       |
| $\mathbf{f}$               | vecteur des forces extérieures appliquées à l'organe terminal         |
| $\mathbf{l}$               | vecteur composé de 1  |
| $\mathbb{I}$               | matrice identité  |
| $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ | ensembles des réels et des réels positifs                             |
| $\mathbb{R}^p$             | ensemble des vecteurs réels à $p$ dimensions                          |
| $ \mathbf{e} $             | valeur absolue (module) de $\mathbf{e}$                               |
| $\ \mathbf{e}\ $           | norme 2 de $\mathbf{e}$   |
| $\ \mathbf{e}\ _p$         | norme $p$ de $\mathbf{e}$   |
| $\dot{\mathbf{e}}$         | dérivée première de $\mathbf{e}$ par rapport au temps                 |
| $\ddot{\mathbf{e}}$        | dérivée seconde de $\mathbf{e}$ par rapport au temps                  |

*suite du tableau à la page suivante*

*suite du tableau de la page précédente*

|                      |  |
|----------------------|--|
| $\bar{e}$            | moyenne des échantillons $e$                         |
| $\mathbf{e}^T$       | transposé de $\mathbf{e}$                            |
| $\hat{\mathbf{e}}$   | estimation de $\mathbf{e}$                           |
| $\tilde{\mathbf{e}}$ | erreur d'estimation de $\mathbf{e}$                  |
| $\mathbf{E}^+$       | inverse généralisée de Moore-Penrose de $\mathbf{E}$ |
| $\mathbf{J}$         | matrice Jacobienne du robot                          |
| $\mathbf{W}$         | matrice des torseurs                                 |
| $s_\theta$           | abréviation de $\sin(\theta)$                        |
| $c_\theta$           | abréviation de $\cos(\theta)$                        |
| MGD                  | Modèle Géométrique Direct                            |
| MGI                  | Modèle Géométrique Inverse                           |
| MCD                  | Modèle Cinématique Direct                            |
| MCI                  | Modèle Cinématique Inverse                           |
| MDD                  | Modèle Dynamique Direct                              |
| MDI                  | Modèle Dynamique Inverse                             |
| EP                   | Exactitude de Positionnement                         |
| EO                   | Exactitude d'Orientation                             |
| RP                   | Répétabilité de Positionnement                       |
| RO                   | Répétabilité d'Orientation                           |
| ETP                  | Exactitude de Trajectoire en Positionnement          |
| ETO                  | Exactitude de Trajectoire en Orientation             |
| EQMP                 | Erreur Quadratique Moyenne de Positionnement         |
| EQMO                 | Erreur Quadratique Moyenne d'Orientation             |

# INTRODUCTION

*Les robots parallèles à câbles, leurs intérêts ainsi que les difficultés de leur étude sont discutés à la section 1.1. La section 1.2 présente l'état de l'art ainsi que les applications possibles de ces robots. Les objectifs et contributions de la thèse sont mis en évidence à la section 1.3.*

## Sommaire

---

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Les robots parallèles à câbles . . . . .                               | 1  |
| 1.2 | État de l'art et applications des robots parallèles à câbles . . . . . | 7  |
| 1.3 | Objectifs et contributions de la thèse . . . . .                       | 13 |

---

## 1.1 Les robots parallèles à câbles

Les chaînes cinématiques très particulières des robots parallèles à câbles (RPC) en font une classe à part de la robotique parallèle traditionnelle, tel que le Adept Quattro™ s650H montré à la figure 1.1. En effet, les éléments mécaniques qui relient la plate-forme mobile<sup>1</sup> à la base fixe d'un RPC ne sont pas rigides, mais composés de câbles flexibles. Un câble est un élément de transmission unidirectionnelle qui ne peut agir sur la plate-forme qu'en traction - tension positive. Dès lors qu'un ou plusieurs câbles sont détendus (par exemple quand la commande demande à ces câbles de pousser - tensions négatives - sur la plate-forme), le robot perd un ou plusieurs degrés d'actionnement. Celle-ci ne peut donc pas atteindre avec précision la pose désirée. Cette particularité est au cœur des problématiques soulevées par la commande des RPC.

---

1. organe terminal



FIGURE 1.1 : Le Adept Quattro™ s650H, un robot parallèle à bras rigides.

En tant que mécanisme parallèle, un RPC est pourvu de  $m$  fermetures cinématiques,  $m$  étant le nombre de câbles. Chaque câble relie un *point de sortie* rattaché à la structure fixe du robot à un *point d'attache* situé sur la plate-forme. L'*arrangement des câbles* décrit la manière dont ces points sont connectés entre eux. Les enrouleurs, fixés sur la base fixe du robot, sont généralement composés de tambours couplés à des moteurs. L'accouplement peut être direct ou réalisé au moyen de jeux de poulies-courroie. D'autres méthodes d'entraînement ont été proposées, notamment l'utilisation d'actionneurs linéaires [Arai 02, Merlet 08]. En actionnant les enrouleurs de manière coordonnée, on peut ainsi modifier les longueurs déroulées des câbles et agir sur la position et/ou l'orientation de la plate-forme. Le routage des câbles des enrouleurs aux points de sortie est généralement assuré par des poulies. Les points d'attache des câbles sur la plate-forme sont considérés équivalents à des liaisons rotules et les points de sortie des câbles peuvent être fixes (œilletons) ou mobiles (évoluant autour de poulies, par exemple). Des travaux ont proposé des modèles incluant l'évolution dans le temps des coordonnées des points de sortie mobiles [Pott 12a].

Une représentation schématique d'un RPC entraîné par huit câbles est donnée à la figure 1.2. On peut y observer un arrangement particulier des câbles dont certains sont croisés. De tels arrangements peuvent résulter de l'optimisation de certaines performances du robot en fonction de la *géométrie*, c'est-à-dire des coordonnées spatiales des points de sortie et d'attache des câbles. Cette problématique de conception optimale des RPC n'est pas abordée dans cette thèse. Ce sujet est notamment discuté dans [Barrette 05, Riehl 11, Stump 06, Zhou 12].

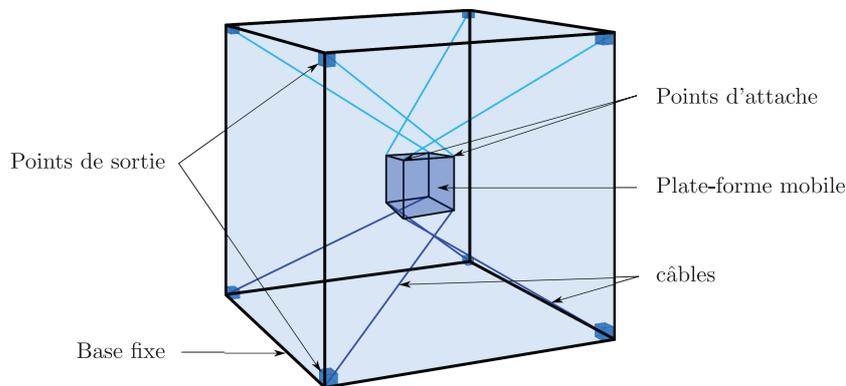


FIGURE 1.2 : Représentation schématique d'un RPC pleinement contraint à six degrés de liberté actionné par huit câbles.

### 1.1.1 Différentes configurations

Les diverses géométries possibles de points de sortie, de points d'attache et d'arrangements des câbles produisent différentes *configurations* de RPC. On peut généralement les séparer en deux classes, dont les spécificités sont détaillées ci-dessous.

- **Configuration pleinement contrainte.** Un RPC est dit pleinement contraint s'il existe au moins une pose dans l'espace d'évolution de la plate-forme telle que tout torseur d'efforts extérieurs peut-être engendré par les câbles en tirant sur la plate-forme. Cette configuration requiert nécessairement plus de câbles que la plate-forme n'a de Degrés De Liberté (DDL). Kawamura *et al.* ont démontré que pour contrôler pleinement  $n$  DDL, le nombre de câbles nécessaires est de  $m \geq n + 1$  [Kawamura 93]. Cette condition est nécessaire mais non suffisante. Une géométrie et un arrangement particuliers des câbles doivent également être considérés. Le schéma de la figure 1.2 est un exemple de RPC avec  $m > n$  en configuration pleinement contrainte. Les points de sortie des câbles sont situés au-dessus et au-dessous de l'espace d'évolution de la plate-forme. Avec cette configuration pleinement contrainte, il est facile d'augmenter les efforts internes du système en tirant sur la plate-forme avec tous les câbles pour améliorer la raideur du système.
- **Configuration partiellement contrainte.** Par opposition à la classe précédente, un RPC est dit partiellement contraint si, pour toute pose de l'espace d'évolution de la plate-forme, il existe un torseur d'efforts extérieurs que les câbles ne permettent pas d'équilibrer. Deux classes de robots partiellement contraints peuvent être distinguées :
  - le robot possède moins de câbles que la plate-forme n'a de DDL ( $m < n$ ). La pose et/ou l'orientation de la plate-forme ne sont que partiellement maîtrisées, quelles

que soient les conditions de fonctionnement du robot. On parle alors de RPC *sous-contraints*.

- le robot ne peut pas équilibrer de torseur d'efforts extérieurs quelconque, mais possède au moins autant de câbles que la plate-forme a de DDL ( $m \geq n$ ).

D'après cette définition, la classe des RPC partiellement contraints inclue les RPC suspendus. Une configuration suspendue, illustrée à la figure 1.3, décrit une géométrie où les points de sortie des câbles sont toujours situés au-dessus de la plate-forme, quelle que soit sa pose dans son espace d'évolution. La gravité joue ici un rôle crucial, elle seule permettant de maintenir les câbles en tension. Quel que soit l'arrangement des câbles, une telle configuration ne sera jamais pleinement contrainte. En effet, aucun ensemble de tensions des câbles ne permet, par exemple, de résister à une action extérieure verticale ascendante appliquée sur la plate-forme. Toutefois, sous certaines conditions, il est possible de contrôler l'ensemble des DDL de la plate-forme mobile. Il faut pour cela avoir au moins autant de câbles que de DDL de la plate-forme ( $m \geq n$ ).

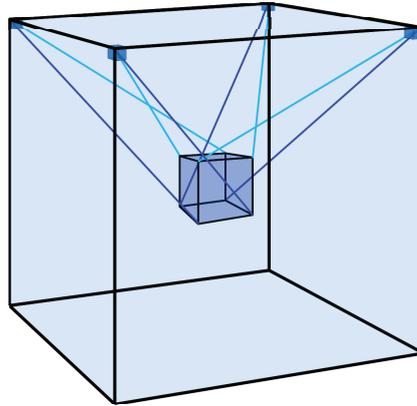


FIGURE 1.3 : Représentation schématique d'un RPC suspendu à six DDL actionnés par huit câbles.

### 1.1.2 Avantages et inconvénients

L'utilisation des câbles confère aux RPC un certain nombre d'avantages par rapport aux robots parallèles conventionnels. Tout d'abord, les câbles sont des éléments mécaniques flexibles, relativement faciles à stocker, qu'il est possible de dérouler tant que leur longueur le permet. Un RPC peut ainsi avoir un très grand espace de travail [Bouchard 06]. Les RPC peuvent être conçus pour répondre à des applications dont les échelles, allant du mètre à plusieurs centaines de mètres, sont très différentes. En utilisant un nombre de câbles et une géométrie appropriés, le rapport entre le volume de l'espace de travail du robot et

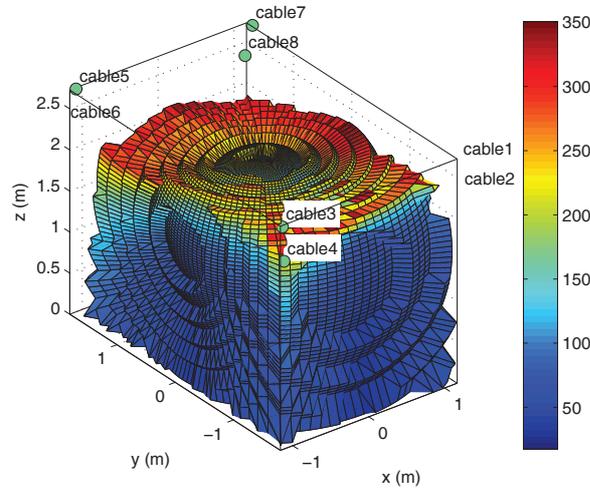


FIGURE 1.4 : Espace de travail de ReelAx8 en configuration suspendue, un RPC redondant à huit câbles pour six DDL (échelle en Newtons).

son volume total occupé peut être très favorable. À titre d'exemple, l'espace de travail<sup>2</sup> du prototype REELAX8-S, un RPC suspendu à huit câbles et six DDL décrit en annexe A, représente 78,2% du volume total occupé par le robot. Cet espace de travail est illustré par la figure 1.4, dont les couleurs représentent la tension du câble le plus tendu pour chaque pose testée (équilibre statique). Dans cette simulation, la plate-forme est considérée non-chargée dans son orientation de référence. Le parallélépipède rectangle représente le volume total occupé par le RPC. En comparaison, l'espace de travail du robot parallèle rigide PAR4<sup>3</sup> [Nabat 07] représente seulement 31% du volume total occupé par le robot.

En outre, comparées à celles d'un robot parallèle à structure rigide, les masses et les inerties des composants mobiles d'un RPC sont réduites. À l'exception des RPC de très grandes dimensions (plusieurs dizaines de mètres de câbles déroulés), la masse des câbles est souvent négligée devant celle de la plate-forme et/ou de son chargement. Cette réduction des masses mobiles a un impact direct sur la consommation énergétique du robot. De plus, cela permet aux RPC pleinement contraints, qui peuvent générer des accélérations dans toutes les directions, d'atteindre des performances dynamiques élevées [Bruckmann 13, Kawamura 95].

Les chaînes cinématiques très simples qui composent les RPC en font des structures aisément transportables [Merlet 10] et reconfigurables [Bostelman 00]. Les positions des points de sortie des câbles et de leurs points d'attache peuvent être rapidement modi-

2. dont une définition est donnée à la section 2.3

3. devenu Quattro

fiées, nécessitant cependant un nouvel étalonnage du système. Plusieurs travaux publiés proposent des méthodes efficaces d'étalonnage des RPC [Alexandre 12, Borgstrom 09a, Bosscher 05]. De plus, les câbles perturbent peu, visuellement, l'espace de travail du robot, une propriété intéressante pour certaines applications comme l'interfaçage avec une réalité virtuelle via un RPC à retour d'efforts [Hirata 92, Inca-6D]. Enfin, les câbles permettent de porter de lourdes charges. Les RPC peuvent généralement déplacer dans un grand volume des charges très élevées par rapport aux masses mobiles du robot. Les robots parallèles de type Delta possèdent une charge utile souvent faible (6 kg de charge maximale pour l'Adept Quattro™ s650H de la figure 1.1). La charge utile des robots parallèles de type plate-forme de Stewart est en revanche supérieure. Le Fanuc™ F-200iB est par exemple capable de supporter une charge maximale de 100 kg pour 190 kg de masse totale, mais dans un espace de travail très réduit. Le démonstrateur du projet ANR COGIRO, un RPC suspendu décrit à l'annexe A.2, peut quant à lui transporter jusqu'à 500 kg pour environ 2 t de masse totale<sup>4</sup> dans un large espace de travail.

En contrepartie, l'utilisation de câbles pose des questions spécifiques lors de la conception et de la commande des RPC. L'espace de travail d'un RPC dépend de nombreux paramètres dont certains sont fonction de la pose de la plate-forme. Par conséquent, il peut varier au cours d'une tâche et il est important de correctement le définir. Cette problématique a été abordée dans un grand nombre de travaux [Barrette 05, Bosscher 06, Gouttefarde 06, Pham 06, Riechel 04b, Stump 06, Verhoeven 00]. L'espace de travail est principalement limité par l'unilatéralité de l'actionnement, par les tensions minimales et maximales acceptables dans les câbles, par leur longueur ainsi que par les collisions des câbles entre eux, avec la plate-forme ou avec l'environnement. La détermination et la gestion des collisions des câbles ont notamment été traitées dans [Merlet 04, Otis 09, Verhoeven 04, Wischnitzer 08].

La masse des câbles est généralement négligeable [Fang 04, Ming 94, Wischnitzer 08]. Les câbles sont alors considérés comme des segments de droites reliant les points de sortie aux points d'attache. En revanche, certaines applications ne permettent pas ces simplifications qui entraînent des erreurs de positionnement de la plate-forme dues aux déformations des câbles. Un câble élastique est principalement sujet à une élévation. Mis en tension sous le poids de la plate-forme et/ou de l'action des autres câbles - dans le cas des configurations pleinement contraintes -, la déformation des câbles doit être déterminée pour définir la longueur de câble déroulée. De plus, si la masse du câble ne peut pas être négligée, il faut estimer sa déflexion. Sous l'action de son propre poids, le câble fléchit et prend une forme de chaînette élastique. Enfin, soumis à une tension, un câble génère un

---

4. 1 t si on retire la structure en aluminium qui supporte les points de sortie des câbles, ces derniers pouvant être dans les faits attachés, par exemple, aux murs d'un bâtiment.

couple appliqué à la plate-forme, autour de l'axe du câble dans la direction opposée à la torsion des torons. Quelques travaux [Collard 11, Kozak 06, Merlet 08, Riehl 11, Riehl 10] ont soulevé l'importance de la modélisation et du calcul d'un comportement plus réaliste des câbles. Cependant, à la condition que les câbles soient toujours tendus,  $t_i \geq 0$ ,  $i \in [1, \dots, m]$ , on négligera dans cette thèse la masse et la déformation des câbles.

Enfin, la commande des RPC n'est pas triviale. Si un ou plusieurs câbles sont détendus, c'est-à-dire sollicités pour pousser sur la plate-forme (tensions commandées strictement négatives), alors celle-ci ne devrait pas atteindre la pose commandée. Le robot perd autant de degrés d'actionnement et peut devenir sous-contraint. La pose finale obtenue est celle qui équilibre statiquement les efforts appliqués à la plate-forme. La commande doit toujours demander aux câbles de tirer sur la plate-forme. Le problème de *la distribution des tensions dans les câbles*, formulé et discuté au chapitre 3, est central dans la commande des RPC et plusieurs travaux antérieurs y ont été consacrés. Un état de l'art propre à la résolution du problème de la distribution des tensions est donné au chapitre 3. Parmi ces travaux, très peu proposent des solutions temps-réel, et donc viables dans la perspective d'une application industrielle. Par ailleurs, comme discuté dans la section suivante, la majorité des applications envisagées impliquent une forte interaction avec l'environnement, incluant le transport de biens, de matériels ou de personnes. Les variations de masse de l'ensemble mobile des RPC sont ainsi potentiellement très importantes. La commande doit donc être robuste aux variations de tels paramètres.

Malgré ces difficultés, de nombreuses applications mettent en évidence les avantages particuliers de ces robots.

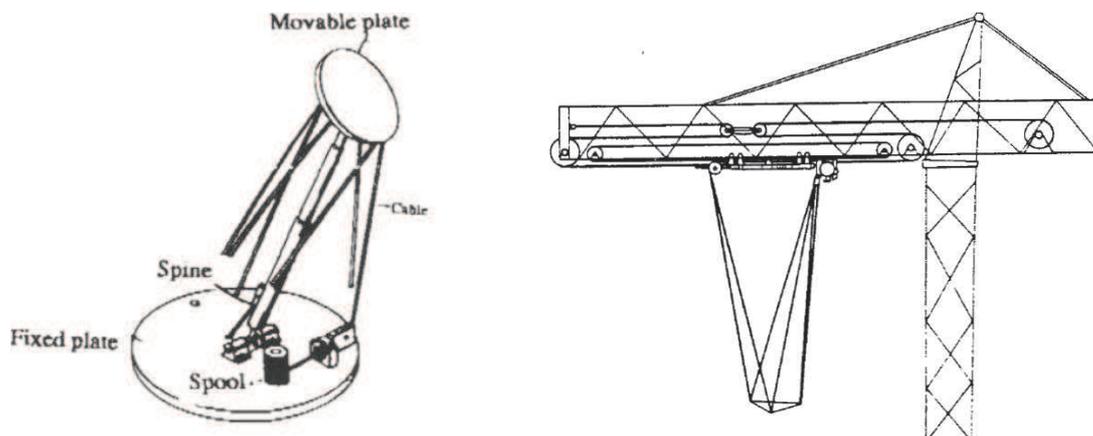
## 1.2 État de l'art et applications des robots parallèles à câbles

La première étude à proprement parler de RPC remonte vraisemblablement à 1984, lorsque Landsberger et Sheridan eurent l'idée de remplacer les jambes d'une plate-forme de Stewart par des câbles. Ces travaux furent rapportés dans [Landsberger 84] puis publiés par la suite [Landsberger 85, Landsberger 93]. Dans un tel mécanisme, dont le concept est illustré à la figure 1.5a, l'organe terminal est situé au-dessus de la base d'où sont issus les câbles. Un vérin télescopique est utilisé pour maintenir les câbles en tension. De nombreux autres travaux ont suivis, proposant d'utiliser les RPC pour répondre à des demandes d'applications variées. Une description non exhaustive de ces travaux est proposée ci-dessous.

## Manipulation

Les RPC ont été proposés pour des applications de type "grue", comme le montre la figure 1.5b. L'objectif est le déplacement de lourdes charges dans un grand espace de travail, entre autre pour la construction de bâtiments, tout en contrôlant les DDL de la charge. Publiés en 1989 par Dagalakakis *et al.* dans [Dagalakis 89], dont la figure 1.5b est issue, ces travaux ont donné naissance aux premiers prototypes de RPC suspendus. Le ROBOCRANE, précurseur de la robotique parallèle à câbles illustré à la figure 1.6a et présenté dans [Albus 93], est l'un de ces prototypes. Ce dernier est équipé de six câbles pour contrôler les six DDL de la plate-forme. Les caractéristiques uniques des RPC en font des systèmes particulièrement adaptés pour la manipulation d'objets dans de grands espaces de travail. D'autres projets ont donc vu le jour, comme le RPC suspendu redondant CABLE ARRAY ROBOT [Gorman 01] à quatre câbles pour trois DDL, ou les robots présentés dans [Bostelman 94] et [Riechel 04a], dédiés à la manipulation de charges en milieu dangereux.

Des RPC en configuration pleinement contrainte ont également été développés pour des opérations de manipulation d'objets à grande vitesse. Citons deux RPC redondants équipés de sept câbles pour six DDL, le FALCON [Kawamura 95] et le SEGESTA [Hiller 04], dont une photo est donnée à la figure 1.6b, ainsi que trois RPC équipés de huit câbles pour six DDL, le WARP [Maeda 99] et les deux versions de l'IPANEMA [Pott 12b], montrées à la figure 1.7.



(a) Plate-forme actionnée par câbles proposée dans [Landsberger 85].

(b) Robot-grue proposé dans [Dagalakis 89].

FIGURE 1.5 : Premiers concepts de robots parallèles à câbles.

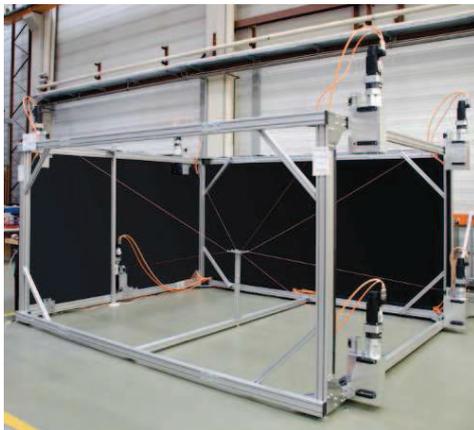


(a) Une version du NIST ROBOCRANE.



(b) Le SEGESTA, développé à l'Université de Duisburg-Essen.

FIGURE 1.6 : Deux prototypes de RPC.



(a) IPAnema.



(b) IPAnema 2.

FIGURE 1.7 : Les deux versions du prototype IPAnema, conçu à Fraunhofer IPA, Stuttgart. Photos : Copyright Fraunhofer IPA.

### Interfaçage à retour d'efforts

En parallèle des travaux de Dagalakis *et al.* sur les RPC manipulateurs, Lindermann et Tesar développèrent en 1989 le premier RPC pleinement contraint [Lindermann 89]. Cette configuration est utilisée pour réaliser une interface haptique, illustrée à la figure 1.8, équipée d'un joystick, l'organe terminal du robot. L'objectif visé était une application de téléopération d'un bras manipulateur dans l'espace. Les câbles permettant ici de calculer la

direction et l'amplitude des efforts appliqués par l'utilisateur sur la plate-forme en minimisant les perturbations visuelles.

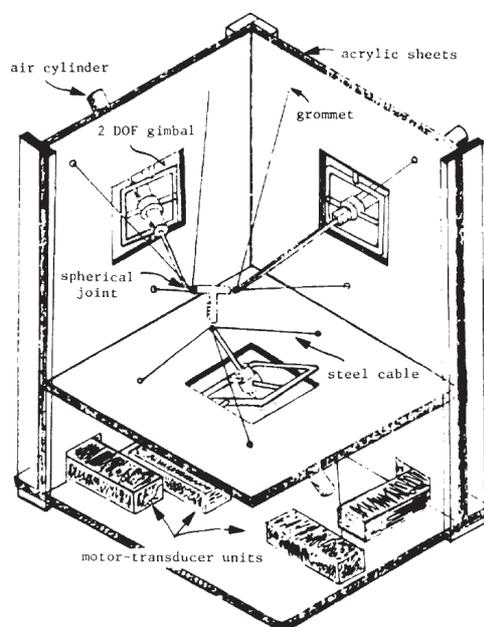


FIGURE 1.8 : Concept de joystick de téléopération équipé de neuf câbles, proposé dans [Lindermann 89].

Quelques années plus tard, ce concept a été repris par plusieurs équipes de recherche. En 1993, Kawamura et Ito consolidèrent l'étude des RPC pleinement contraints en concevant un robot à sept câbles pour six DDL également destiné à la téléopération. Comparés aux interfaces haptiques du commerce, certains avantages dont bénéficient les RPC sont particulièrement intéressants pour ce type d'application. Ils sont notamment plus légers et plus faciles à manipuler comme décrit par Williams II dans [Williams II 98]. Dans cet article, l'auteur détaille l'architecture du CSHI, un RPC pleinement contraint redondant à huit câbles pour six DDL dont l'organe terminal, équipé d'éléments tactiles, permet un retour d'efforts à l'utilisateur. Un prototype de robot plan redondant à quatre câbles pour trois DDL est présenté dans [Williams II 98] et [Williams II 99]. Citons également les différentes évolutions du SPIDAR, une interface haptique de réalité virtuelle constituée d'un ou deux RPC pleinement contraints. La première version [Hirata 92], équipée de quatre câbles pour trois DDL ne transmettait que la force exercée par un doigt.

SPIDAR-G, proposé dans [Kim 02], est pourvu d'un organe terminal en forme de croix qui transmet les forces exercées par la main de l'utilisateur. Il est équipé de huit câbles pour six DDL. Enfin, SPIDAR-G&G est une version à deux mains de SPIDAR-G [Murayama 04]. Les travaux menés sur le concept du SPIDAR ont inspiré la compagnie Haption SA qui commercialise l'interface haptique de taille humaine INCA™6D, équipée de huit câbles

pour six DDL [Inca-6D]. Des prototypes de RPC pleinement contraints servent également d'interface à des environnements sportifs virtuels [Morizono 97, Morizono 98, Zitzewitz 09] ou ont été proposés pour caractériser la marche humaine [Ottaviano 09, Perreault 08].

Enfin, mentionnons le projet Sacso, développé à l'ONERA et dont la conception est décrite par Lafourcade et al. dans [Lafourcade 02]. Ce robot parallèle à neuf câbles actionne les six DDL d'une maquette d'avion d'armes, en suspension dans une soufflerie verticale. Équipé de capteurs de force, ce RPC permet d'élaborer des modèles mathématiques de comportement et de simuler des vols libres en identifiant les relations entre les mouvements de l'avion et l'aérodynamique.

### **Acquisition**

De nombreux projets, comme le NIMS3D [Borgstrom 07], ont eu pour objectif d'utiliser la plate-forme mobile d'un RPC comme un capteur, en équipant la plate-forme d'une caméra, d'un récepteur ou d'un capteur quelconque. Certains projets, dont quelques-uns sont encore actifs, proposent d'utiliser un RPC pour guider le récepteur d'un radiotélescope géant. Citons Carlina [Le Coroller 04], le FAST [Duan 09] ou encore le LAR [Dewdney 02].

De plus, plusieurs caméras déplacées par des câbles, comme SKYCAM [SKYCAM], CABLECAM [CABLECAM] et SPIDERCAM [SPIDERCAM], sont commercialisées depuis quelques années. Profitant de leur espace de travail important, ces systèmes permettent de filmer des événements (notamment sportifs) tout en déplaçant la caméra dans un très grand volume. Ils ont naturellement pris place dans des stades et sur des tournages cinématographiques. Deschênes *et al.* ont utilisé dans [Deschenes 07] un RPC suspendu équipé d'un appareil photographique reflex numérique pour reconstruire des objets en 3D à partir de photos 2D prises dans des poses différentes.

### **Assistance et secours**

Des RPC suspendus "mobiles" ont également été imaginés pour des opérations de secours sur des zones étendues suite à des catastrophes naturelles. Ces systèmes bénéficient de la simplicité, de la légèreté et de la flexibilité des RPC afin d'être déployés autour de personnes à secourir. Bosscher *et al.* ont proposé ce concept en 2005 dans [Bosscher 05]. Dans cet article, les auteurs proposent de monter trois poteaux télescopiques, supports des points de sortie des câbles, sur des véhicules mobiles. Le robot possède six câbles ou plus, pour six DDL. Merlet et Danet [Merlet 10] proposent d'équiper le MARIONET-CRANE d'une caméra thermique capable de localiser un corps à plus de cinquante mètres. Afin de

faciliter l'installation sur place d'un tel système, il est envisageable d'utiliser des générateurs d'électricité portables et de communiquer avec les variateurs en Wi-Fi. Cette application est illustrée par la figure 1.9.



FIGURE 1.9 : Mise en situation du robot de secours MARIONET-CRANE, développé à l'INRIA Sophia-Antipolis par l'équipe projet COPRIN.

## Rééducation

La robotique parallèle à câbles peut aussi être appliquée à la rééducation. Ici, les RPC permettent de soulager, totalement ou partiellement, le patient du poids d'une ou plusieurs parties de son corps lors d'exercices. On trouve des exemples d'applications de RPC pour la rééducation de la marche [Surdilovic 04], du bras [Agrawal 09, Merlet 10, Rosati 07] ou encore de la jambe [Homma 04, Merlet 10, Ottaviano 09].

## Intégration sur un bâtiment

Plus récemment, deux projets de RPC pleinement contraints de très grandes dimensions visent une intégration sur des façades de bâtiments. MEDIA-TIC [Izard 12] est un projet architectural de réalisation d'un bâtiment "intelligent". Équipé de capteurs atmosphériques, la plate-forme d'un RPC intégré à la façade du bâtiment existant devrait interagir avec le public pour lui transmettre diverses informations. Voss *et al.* [Voss 12] ont étudié la capacité d'un RPC à générer des efforts sur des surfaces quelconques de bâti-

ments à des fins de nettoyage. Les deux concepts proposent un actionnement redondant, avec huit câbles pour six DDL.

### 1.3 Objectifs et contributions de la thèse

Tel qu'illustré par la section 1.2, il existe de nombreux prototypes de RPC. L'atout majeur de ces robots est leur capacité à posséder un ratio très favorable entre le volume de leur espace de travail utile et le volume occupé par leur structure de soutien. Ce ratio peut être optimisé en utilisant la redondance d'actionnement, comme illustré au chapitre 2.

Par ailleurs, la commande des RPC n'est pas triviale et peu de travaux y font référence. Tout d'abord, l'utilisation de câbles flexibles en lieu et place de membres rigides ajoute une contrainte forte. Les câbles doivent être commandés tendus - tensions positives - le long des trajectoires de la plate-forme incluse dans son espace de travail. Si la commande demande à un ou plusieurs câbles de pousser sur la plate-forme - tensions négatives -, ce qui est physiquement irréalisable, la plate-forme perd un ou plusieurs degrés d'actionnement et n'est plus nécessairement commandable. Les quelques travaux ayant proposé des lois de commande pour les RPC font toujours l'hypothèse de câbles tendus [Alp 02, Fang 04, Gosselin 08, Oh 05, Vafaei 10] en intégrant des méthodes de distribution des tensions des câbles. Ces méthodes ne sont exploitables qu'en présence de redondance d'actionnement. En effet, un RPC qui possède autant de câbles que de DDL n'admet qu'une seule et unique solution au problème de la distribution des tensions. Si une ou plusieurs composantes de cette solution sont négatives, alors le mécanisme est dans l'incapacité d'amener ou de maintenir la plate-forme à la pose commandée.

Afin de résoudre le problème de distribution des tensions des câbles, des algorithmes d'optimisation numérique sont traditionnellement utilisés [Alp 02, Fang 04, Hassan 11, Oh 05, Shiang 00, Vafaei 10, Verhoeven 02]. Cependant, ces méthodes requièrent des bibliothèques de calculs externes parfois très difficiles à implémenter dans des environnements logiciels industriels temps-réels. De plus, elles souffrent généralement de temps de calcul variable à chaque itération et de temps de calcul maximal non prévisible. L'objectif des travaux présentés ici est de proposer des stratégies de commande pour les RPC qui soient compatibles avec des systèmes de commande industriels temps-réels.

La première contribution de cette thèse est de **proposer une stratégie de distribution des tensions des câbles efficace, compatible avec un environnement de contrôle temps-réel et exempte de bibliothèques de calculs externes**. Cette stratégie est composée d'un premier algorithme, baptisé *TurnAround* et détaillé au chapitre 3, qui s'applique aux RPC dotés d'une redondance d'actionnement de deux, soit  $m = n + 2$  (où  $m$  est le nombre de

câbles actionnés et  $n$  est le nombre de DDL de la plate-forme). TurnAround détermine les sommets du polygone (dimension 2), défini au chapitre 3, des tensions admissibles, solutions au problème de la distribution des tensions. Le calcul des sommets est très rapide. Il utilise des propriétés géométriques simples et ne nécessite aucune librairie de calcul externe. La grande majorité des applications décrites dans la section 1.2 demandent de contrôler les six DDL de la plate-forme. La conception de RPC à huit câbles permet d'atteindre une redondance de deux et d'obtenir d'excellentes performances en terme d'espace de travail. De nombreux prototypes spatiaux sont d'ailleurs équipés de huit câbles pour six DDL. TurnAround devrait donc couvrir un large spectre d'applications.

Par la connaissance ordonnée (sens horaire ou anti-horaire) de ces sommets, la stratégie proposée consiste dans un second temps à calculer différentes distributions optimales des tensions des câbles pour s'adapter au mieux à une application donnée. Il est ainsi possible de retrouver les solutions minimisant les normes 1 et 2 des tensions des câbles sans avoir recours à des routines d'optimisation numérique. Deux solutions optimales basées sur le calcul du barycentre et du barycentre pondéré du polygone des tensions admissibles sont également formulées et efficacement déterminées grâce à la connaissance ordonnée des sommets du polygone. À l'exception de la solution minimisant la norme 1 des tensions, les solutions optimales considérées sont continues le long d'une trajectoire continue incluse dans l'espace de travail du RPC. Les preuves de continuité sont données en annexe C.

La seconde contribution de cette thèse est de **proposer des stratégies de commande pour les RPC**, présentées au chapitre 4. Tout comme la plupart des systèmes robotiques, ces mécanismes possèdent un comportement non-linéaire. Afin d'améliorer les performances de suivi de trajectoires des RPC, un schéma de commande par anticipation en espace double est introduit pour compenser les efforts liés à la dynamique, formulée au chapitre 2, de la plate-forme et des enrouleurs. Cette commande est bien adaptée aux RPC dont les paramètres du modèle dynamique sont correctement identifiés.

En revanche, les modèles dynamiques ne sont jamais parfaits et des incertitudes subsistent généralement. Certaines applications, telles que la manipulation d'objets lourds au travers de grands espaces de travail, impliquent également des variations de certains des paramètres du modèle dynamique. Afin de compenser ces incertitudes et variations paramétriques, un schéma de commande adaptative en espace double est proposé pour améliorer les performances des RPC. Une loi de commande adaptative généraliste est introduite mais le choix des paramètres ajustables peut être évalué en fonction de l'application. Les schémas de commande proposés intègrent l'algorithme de distribution des tensions du chapitre 3.

Tous les résultats présentés dans ces travaux ont été implémentés, testés et validés sur plusieurs prototypes de RPC de configurations différentes. Trois d'entre eux ont été construits ces cinq dernières années au Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier (LIRMM) en partenariat avec la fondation TECNALIA. REELAX6, montré à la figure 1.10a, est un RPC suspendu équipé de six câbles pour contrôler les six DDL de la plate-forme. La version actuelle, REELAX8, est un RPC à redondance d'actionnement doté de huit câbles pour six DDL. Ce prototype se décline en deux configurations : REELAX8-S suspendu, illustré à la figure 1.10b, et REELAX8-PC pleinement contraint.



FIGURE 1.10 : Premiers prototypes de robots parallèles à câbles développés au LIRMM en collaboration avec TECNALIA.

Un autre RPC suspendu a été récemment développé au LIRMM en partenariat avec TECNALIA dans le cadre du projet ANR COGIRO, afin de fournir une plate-forme de tests pour valider des méthodes de conception et de commande de RPC de grandes dimensions. Ce prototype, de dimensions  $15\text{ m} \times 11\text{ m} \times 6\text{ m}$  ( $L \times l \times h$ ), est montré à la figure 1.11. La plate-forme est équipée d'une fourche pour réaliser des opérations de transport de palettes. L'environnement logiciel et le matériel utilisés pour la commande et l'actionnement de COGIRO respectent des standards industriels et nous ont permis de valider les algorithmes de commande proposés dans cette thèse.

Enfin, grâce à une collaboration avec le Dr.-Ing. Tobias Bruckmann et M.Sc. Christopher Reichert de l'Université de Duisburg-Essen en Allemagne, les stratégies de distribution des tensions des câbles proposées dans cette thèse ont également pu être validées sur CABLAR. Ce RPC pleinement contraint, montré à la figure 1.12, est également équipé de huit câbles pour six DDL. La plate-forme de ce prototype - issu du projet Regalbedienger, financé par Le Ministère Fédéral Allemand de l'Éducation et la Recherche (Bundes-



FIGURE 1.11 : Démonstrateur du projet ANR COGiRO, développé au LIRMM par l'équipe DEXTER en collaboration avec TECNALIA.

ministerium für Bildung und Forschung) - est équipée d'un système mécanique capable de retirer et déposer des caisses dans des étagères de rangement. CABLAR a été réalisé afin d'être pleinement compatible avec un environnement industriel. De ce fait, il constitue une plate-forme expérimentale très intéressante pour appliquer les résultats de cette thèse.

Les caractéristiques géométriques et techniques de ces différents prototypes sont décrites en annexe A. Le chapitre 5 présente les résultats expérimentaux obtenus sur ces prototypes suite à l'implémentation des algorithmes de distribution des tensions et de commande développés dans les chapitres précédents. Enfin, le chapitre 6 conclut la thèse et donne quelques perspectives de recherche sur la commande des RPC.

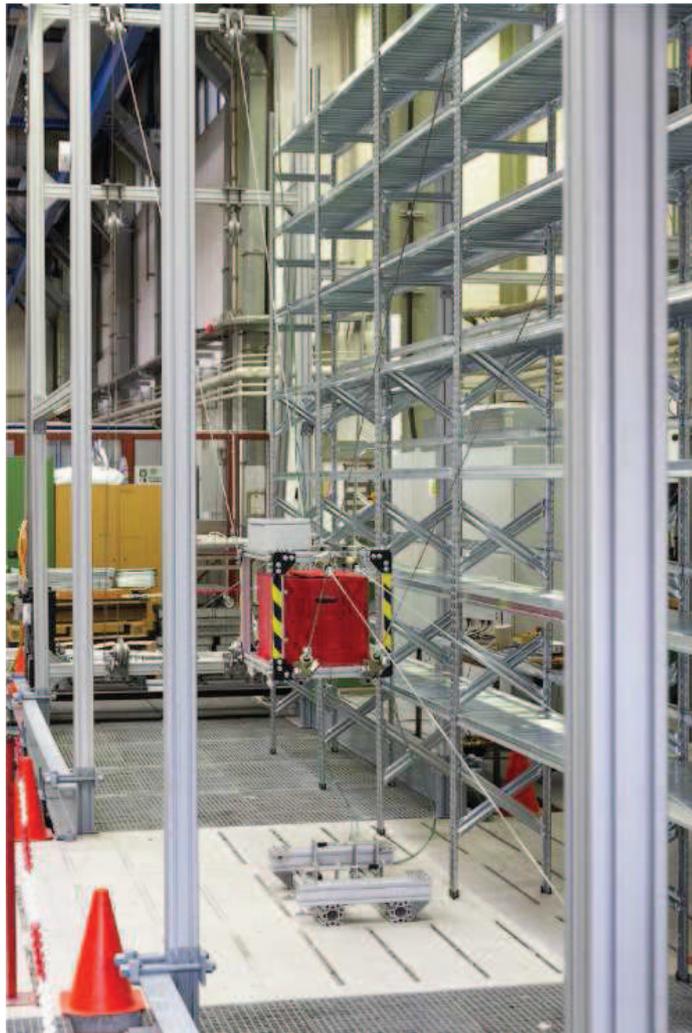


FIGURE 1.12 : CABLAR, développé à l'Université de Duisburg-Essen.



## MODÉLISATION

*Ce chapitre donne des éléments de modélisations géométrique, cinématique et dynamique d'un RPC. La section 2.1 présente la modélisation géométrique d'un RPC. Les modèles cinématiques inverse et direct sont détaillés à la section 2.2. Les intérêts de la redondance d'actionnement dans la conception et la commande des robots parallèles sont discutés à la section 2.3. La redondance a notamment un impact fort sur le volume de l'espace de travail des RPC, défini à la section 2.4. Le modèle dynamique d'un RPC est formulé à la section 2.5. Dans ce chapitre, les hypothèses suivantes sont posées :*

1. *Les câbles reliant la base fixe du robot à la plate-forme mobile seront supposés indéformables et de masse négligeable;*
2. *Les robots étudiés sont spatiaux. La plate-forme possède six degrés de liberté.*

### Sommaire

---

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Modélisation géométrique . . . . .                 | 19 |
| 2.2 | Cinématique . . . . .                              | 22 |
| 2.3 | Intérêts de la redondance d'actionnement . . . . . | 25 |
| 2.4 | Espace de travail . . . . .                        | 26 |
| 2.5 | Dynamique . . . . .                                | 30 |
| 2.6 | Conclusion . . . . .                               | 36 |

---

### 2.1 Modélisation géométrique

Un RPC est un système mécanique qui transforme les mouvements de ses actionneurs en mouvement de la plate-forme (organe terminal). Les coordonnées articulaires des actionneurs sont définies dans  $\mathbb{R}^m$  et notées  $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_m]$ ,  $m$  désignant le nombre d'ac-

tionneurs. Les coordonnées opérationnelles décrivant la pose de la plate-forme sont définies dans  $\mathbb{R}^n$  et notées  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]$ ,  $n$  étant le nombre de DDL de la plate-forme. De manière analogue, un RPC transforme des efforts articulaires, les tensions des câbles notées  $\mathbf{t} = [t_1 \dots t_m] \in \mathbb{R}^m$ , en efforts opérationnels  $\mathbf{f} = [f_1 \dots f_m] \in \mathbb{R}^n$ . Ces efforts représentent l'action des câbles sur la plate-forme.

### 2.1.1 Représentation d'un robot parallèle à câbles

Un robot parallèle à  $m$  câbles, dont la géométrie est illustrée à la figure 2.1, possède  $m$  points de sortie des câbles, notés  $A_i$  sur la base et  $m$  points d'attache des câbles sur la plate-forme, notés  $B_i$ ,  $i \in [1, \dots, m]$ . Les coordonnées de ces points sont regroupées respectivement dans les vecteurs  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$ .  $\mathbf{a}_i$  est exprimé dans le repère fixe  $\mathcal{R}_b$  du robot, tel que  $\mathcal{R}_b = \{0, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$  tandis que  $\mathbf{b}_i$  est exprimé dans le repère mobile  $\mathcal{R}_p$  attaché à la plate-forme, tel que  $\mathcal{R}_p = \{P, \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p\}$ . Le vecteur  $\mathbf{p}$  donne la position Cartésienne de la plate-forme de centre géométrique  $P$ , avec  $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T \in \mathcal{R}_b$ . L'orientation du repère mobile  $\mathcal{R}_p$  par rapport au repère fixe  $\mathcal{R}_b$  est donnée par la matrice orthogonale de rotation  $\mathbf{Q}$ . La longueur du câble  $i$  est notée  $l_i \in \mathbb{R}^+$ . En notant  $\mathbf{e}_i$  un vecteur unitaire, on peut écrire

$$\overrightarrow{A_i B_i} = l_i \mathbf{e}_i \quad (2.1)$$

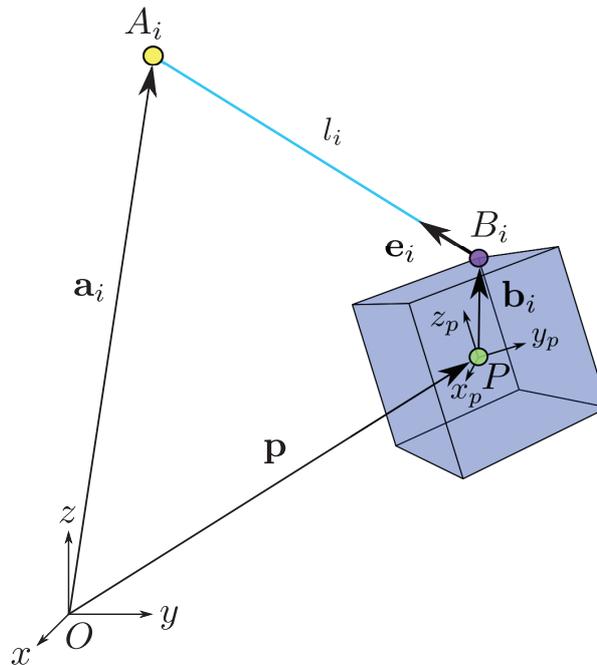


FIGURE 2.1 : Architecture générale d'un RPC.

Dans le cas d'un robot spatial à trois DDL en orientation, la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  est définie telle que

$$\mathbf{Q}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & -c_\theta s_\psi & s_\theta \\ c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi & c_\phi c_\psi - s_\phi s_\theta s_\psi & -s_\phi c_\theta \\ s_\phi s_\psi - c_\phi s_\theta c_\psi & s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

où  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  sont les trois angles d'Euler successifs issus de la convention X-Y-Z des angles d'Euler. Le détail de calcul de  $\mathbf{Q}$  est donné à la section B.1 de l'annexe B. La position  $\mathbf{p}$  du point  $P$  et l'orientation  $\mathbf{o}$  de la plate-forme, exprimée en angles d'Euler dans le repère  $\mathfrak{R}_b$ , décrivent la *pose de la plate-forme*  $\mathbf{x}_\theta = [\mathbf{p}^T \ \mathbf{o}^T]^T = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^6$ . Finalement, la matrice de transformation homogène qui transforme le repère  $\mathfrak{R}_b$  et  $\mathfrak{R}_p$  s'exprime telle que

$${}^b\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse (MGI) relie les coordonnées articulaires  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$  du robot aux coordonnées opérationnelles  $\mathbf{x}_\theta \in \mathbb{R}^n$  de la plate-forme. Autrement dit, le MGI permet de calculer  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$  connaissant la pose  $\mathbf{x}_\theta = [\mathbf{p}^T \ \mathbf{o}^T]^T$  de la plate-forme tel que

$$\mathbf{q} = f(\mathbf{x}_\theta) \quad (2.4)$$

La chaîne cinématique qui relie la base à la plate-forme est très simple. Seuls les  $m$  câbles relient la plate-forme à la base fixe du robot (s'agissant d'un robot parallèle, il y a  $m$  fermetures cinématiques). À partir de (2.1), on peut écrire directement [Albus 93]

$$l_i = \left\| \overrightarrow{A_i B_i} \right\| = \left\| (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) \right\|, \quad i \in [1, 2, \dots, m] \quad (2.5)$$

On pose l'hypothèse d'une relation linéaire entre la longueur du câble  $l_i$  et l'angle de rotation du moteur  $q_i$  exprimés respectivement en mètres et en radians

$$l_i = \pm r_i q_i, \quad i \in [1, 2, \dots, m] \quad (2.6)$$

où  $r_i$  désigne le rapport exprimé par

$$r_i = \kappa_i \sqrt{e_i^2 + \frac{\rho_i^2}{2\pi}}, \quad i \in [1, 2, \dots, m] \quad (2.7)$$

et composé du rapport de transmission  $\kappa_i$  du  $i^{\text{ème}}$  enrouleur avec le  $i^{\text{ème}}$  moteur ainsi que du rayon  $e_i$  et du pas  $\rho_i$  du  $i^{\text{ème}}$  enrouleur. Notons que  $\kappa_i$  et  $\rho_i$  sont des constantes. La

relation (2.6) est vraie dans le cas d'un câble inextensible et dont le système d'enroulement garantit que  $e_i$  reste constant dans le temps (le câble ne s'enroule pas sur lui-même). Le signe de la relation dépend du sens de rotation du  $i^{\text{ème}}$  moteur et du sens d'enroulement du câble. Le signe doit donc être établi en fonction de la mécanique particulière du RPC.

Finalement le MGI s'écrit

$$q_i = \frac{1}{r_i} \left\| (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) \right\|, \quad i \in [1, 2, \dots, m] \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Modèle géométrique direct

À l'inverse du MGI, le Modèle Géométrique Direct (MGD) détermine la pose  $\mathbf{x}_\theta$  de la plate-forme connaissant les coordonnées articulaires  $\mathbf{q}_i$ . La relation du MGD s'écrit

$$\mathbf{x}_\theta = f^{-1}(\mathbf{l}) \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{l} = [l_1, l_2, \dots, l_m]^T$  est le vecteur des longueurs des câbles.

En supposant tous les câbles tendus, le MGD est équivalent à celui d'un robot parallèle classique de type plate-forme de Gough-Stewart. Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre le MGD des robots parallèles. La possibilité de déterminer une forme explicite dépend des mécanismes pris au cas par cas. On utilise principalement des méthodes numériques, qui donnent une solution particulière locale. Citons les méthodes de Newton-Raphson, le modèle différentiel inverse et la descente de gradient. Le MGD d'un robot parallèle à redondance d'actionnement admet plusieurs solutions. L'analyse par intervalles [Merlet 06] permet de toutes les déterminer. Des travaux ont été publiés sur le sujet, appliqués aux RPC. Citons par exemple [Berti 12] et [Pott 10]. Trouver toutes les solutions et en sélectionner une admissible pour le système, avec une contrainte temps-réel, est un problème encore ouvert aujourd'hui qui ne sera pas traité dans cette thèse. Nous ferons en sorte de proposer des schémas de contrôle dont le fonctionnement ne requiert pas de MGD.

## 2.2 Cinématique

### 2.2.1 Jacobienne

On note  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  la matrice Jacobienne dont on rappelle la définition.

**Définition 2.1.** Soit une fonction vectorielle  $f$  d'une variable vectorielle  $\mathbf{x}$ . On appelle Jacobienne de  $f$  la matrice

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\delta f_i(\mathbf{x})}{\delta x_j} \right] \quad i \in [1 \dots m], \quad j \in [1 \dots n] \quad (2.10)$$

Les lignes de la matrice Jacobienne sont donc formées des gradients des composantes  $l_i$  de  $\mathbf{l}$ . En supposant les câbles tendus, d'après (2.4), et dans le cas d'un robot à six DDL,  $\mathbf{J}$  s'exprime

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1}(\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)^T & \frac{1}{l_1}(\mathbf{Q}\mathbf{b}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{a}_1))^T \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{l_m}(\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{b}_m - \mathbf{a}_m)^T & \frac{1}{l_m}(\mathbf{Q}\mathbf{b}_m \times (\mathbf{p} - \mathbf{a}_m))^T \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

### 2.2.2 Modèle cinématique inverse

La matrice Jacobienne  $\mathbf{J}$  d'un RPC relie les vitesses opérationnelles  $\dot{\mathbf{x}}$  de la plate-forme aux vitesses articulaires  $\dot{\mathbf{q}}$ . Le vecteur  $\dot{\mathbf{x}}$  est composé des vitesses  $\dot{\mathbf{p}}$  du point  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}_b$  et des vitesses angulaires  $\boldsymbol{\omega}$  de la plate-forme, tel que  $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\omega}^T]^T \in \mathbb{R}^n$ .

Notons  $\dot{\mathbf{l}} = [\dot{l}_1 \ \dot{l}_2 \ \dots \ \dot{l}_m]^T$  le vecteur des vitesses linéaires des câbles.  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\dot{\mathbf{l}}$  sont reliés par l'équation

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^m$  est une matrice diagonale définie par  $\text{diag}(\mathbf{R}) = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ . Or la relation entre  $\dot{\mathbf{l}}$  et  $\dot{\mathbf{x}}$  s'écrit

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{J}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \quad (2.13)$$

Par inversion de l'équation (2.12) et substitution de l'équation (2.13), la relation du Modèle Cinématique Inverse (MCI) s'écrit finalement [Barrette 05, Merlet 10].

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \quad (2.14)$$

où  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_m]^T \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des vitesses articulaires (vitesses de rotation des moteurs).

### 2.2.3 Modèle cinématique direct

Dans le cas d'un robot présentant une redondance d'actionnement, avec  $m > n$ ,  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  est une matrice rectangulaire de dimension  $m \times n$ . Le Modèle Cinématique Direct (MCD) requiert l'inversion de  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ . À cette fin, on utilise dans cette thèse l'inverse généralisée de Moore-Penrose - aussi appelée pseudo-inverse. La pseudo-inverse, proposée par Whitney [Whitney 69], cherche la solution unique  $\dot{\mathbf{x}}$  des vitesses opérationnelles qui minimise  $\|\dot{\mathbf{x}}\|_2 = (\dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}})^{1/2}$  parmi toutes les solutions de l'équation (2.13).

On peut alors écrire le MCD :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^+(\mathbf{x})\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{J}^+(\mathbf{x})\mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.15)$$

### 2.2.4 Vitesses et accélérations angulaires

Il est possible d'exprimer les vitesses et accélérations angulaires de la plate-forme à partir des angles d'Euler introduits dans la section 2.1 dont la convention est détaillée à l'annexe B. Notons  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  la vitesse angulaire de la plate-forme exprimée dans  $\mathbb{R}_b$  est telle que

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi c_\theta \\ 0 & s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{o}} \quad (2.16)$$

Le détail du calcul de  $\boldsymbol{\omega}$  est donné à la section B.2 de l'annexe B. Par dérivation, on obtient directement les accélérations angulaires

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{o}} + \mathbf{S}\ddot{\mathbf{o}} \quad (2.17)$$

avec

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta}c_\theta \\ 0 & -\dot{\phi}s_\phi & -\dot{\phi}c_\phi c_\theta + \dot{\theta}s_\phi s_\theta \\ 0 & \dot{\phi}c_\phi & -\dot{\phi}s_\phi c_\theta - \dot{\theta}c_\phi s_\theta \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

et  $\dot{\mathbf{o}} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ ,  $\ddot{\mathbf{o}} = [\ddot{\phi} \ \ddot{\theta} \ \ddot{\psi}]^T$ . Finalement, on peut aussi écrire

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} + \ddot{\psi}s_\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}c_\theta \\ \ddot{\theta}c_\phi - \ddot{\psi}s_\phi c_\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}s_\phi + \dot{\psi}(-\dot{\phi}c_\phi c_\theta + \dot{\theta}s_\phi s_\theta) \\ \ddot{\theta}s_\phi + \ddot{\psi}c_\phi c_\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}c_\phi - \dot{\psi}(\dot{\phi}s_\phi c_\theta + \dot{\theta}c_\phi s_\theta) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Le calcul de  $\mathbf{S}$  permet d'écrire la relation entre le vecteur  $\dot{\mathbf{x}}_\theta$  contenant les dérivées des angles d'Euler et  $\dot{\mathbf{x}}$  qui contient les vitesses angulaires de la plate-forme :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}'\dot{\mathbf{x}}_\theta \quad (2.20)$$

avec

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

### 2.2.5 Contrainte des torseurs admissibles

Il existe une dualité entre les vitesses et les efforts des systèmes robotiques. Si la Jacobienne permet de relier les vitesses articulaires et opérationnelles, sa transposée - la *matrice des torseurs* - permet de transformer le vecteur des tensions des câbles  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$  en vecteur des efforts (forces et moments) appliqués par les câbles sur la plate-forme  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ . On définit la matrice des torseurs d'après [Kawamura 95, Roberts 98, Williams II 98].

$$\mathbf{W} = -\mathbf{J}^T \quad (2.22)$$

qui permet d'écrire

$$\mathbf{f} = \mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{t} \quad (2.23)$$

Le vecteur des tensions  $\mathbf{t}$  est dit admissible si toutes ses composantes  $t_i$ ,  $i \in [1, \dots, m]$  sont contenues entre des valeurs minimales  $t_{i_{min}}$  et maximales  $t_{i_{max}}$  définies par l'utilisateur ou par le contexte. La borne supérieure d'admissibilité  $t_{i_{max}}$  est généralement déterminée par les limites mécaniques du système, telles que la limite de rupture des câbles, la résistance des capteurs de tension ou encore la résistance de l'axe des poulies de renvoi des câbles. Un câble ne peut que transmettre des efforts de traction ; transmettre un effort de compression reviendrait à "pousser" la plate-forme. Un câble étant un élément flexible, cette action est impossible. Par conséquent,  $t_{i_{min}} \geq 0$ .

## 2.3 Intérêts de la redondance d'actionnement

La redondance d'actionnement, c'est-à-dire l'utilisation de plus d'actionneurs que de DDL ( $m > n$ ), présente plusieurs intérêts majeurs dans le cas des RPC [Tadokoro 96]. Premièrement, à la différence des robots parallèles à membres rigides, un RPC ne peut que transmettre des efforts de traction sur la plate-forme mobile. Afin de pallier cette contrainte tout en contrôlant la totalité des DDL de la plate-forme, il est possible de concevoir des RPC à redondance d'actionnement [Kawamura 93, Ming 94, Shiang 99, Williams II 98]. Si  $m = n$ , l'inversion de (2.23) mène à une unique solution  $\mathbf{t}$ . Si cette solution inclut des tensions négatives, alors un ou plusieurs câbles devraient pousser la plate-forme. Cet actionnement étant impossible, l'erreur de positionnement de la plate-forme peut devenir importante. En revanche, pour  $m > n$  (plus de câbles que de DDL), l'équation (2.23) possède une infinité de solutions. La redondance peut donc permettre de sélectionner une solution, parmi cette infinité, qui satisfait certaines contraintes. Ici, la contrainte principale est  $t_{i_{min}} \geq 0$ . Le problème de *la distribution des tensions*, central dans la commande des RPC, fait référence à la résolution contraintes de l'équation (2.23). Une des contributions de cette thèse est d'apporter une stratégie de résolution du problème

de distribution des tensions compatible avec des contraintes liées au calcul temps-réel. Celle-ci est détaillée au chapitre 3.

Deuxièmement, la redondance d'actionnement permet d'éviter voire d'éliminer les singularités dans l'espace de travail du RPC dues à une chute du rang de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  [Barrette 05].

Troisièmement, la redondance permet d'augmenter considérablement le rapport entre le volume de l'espace de travail du RPC et le volume occupé par le robot [Ferraresi 07, Merlet 12, Tadokoro 96, Voss 12]. L'espace de travail des RPC pouvant admettre plusieurs définitions, celui-ci est discuté à la section suivante.

## 2.4 Espace de travail

**Définition 2.2.** *L'ensemble des poses (positions et orientations) de la plate-forme libre de collisions (câble-câble ou câble-plate-forme) pour lesquelles les câbles peuvent équilibrer tout torseur d'efforts d'un ensemble donné  $T$  de torseurs avec des tensions admissibles ( $0 \leq \mathbf{t}_{min} \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{t}_{max}$ ) est appelé Espace de Travail Commandable (ETC). Cette définition pratique de l'espace de travail d'un RPC dépend*

- des coordonnées des points de sortie des câbles de la base du robot dans le repère  $\mathbb{R}_b$  ;
- des coordonnées des points d'attache des câbles sur la plate-forme dans le repère  $\mathbb{R}_p$  ;
- de l'arrangement des câbles entre ces deux ensembles de points ;
- des tensions minimales  $\mathbf{t}_{min}$  et maximales  $\mathbf{t}_{max}$  des câbles ;
- de l'ensemble des torseurs  $T$ .

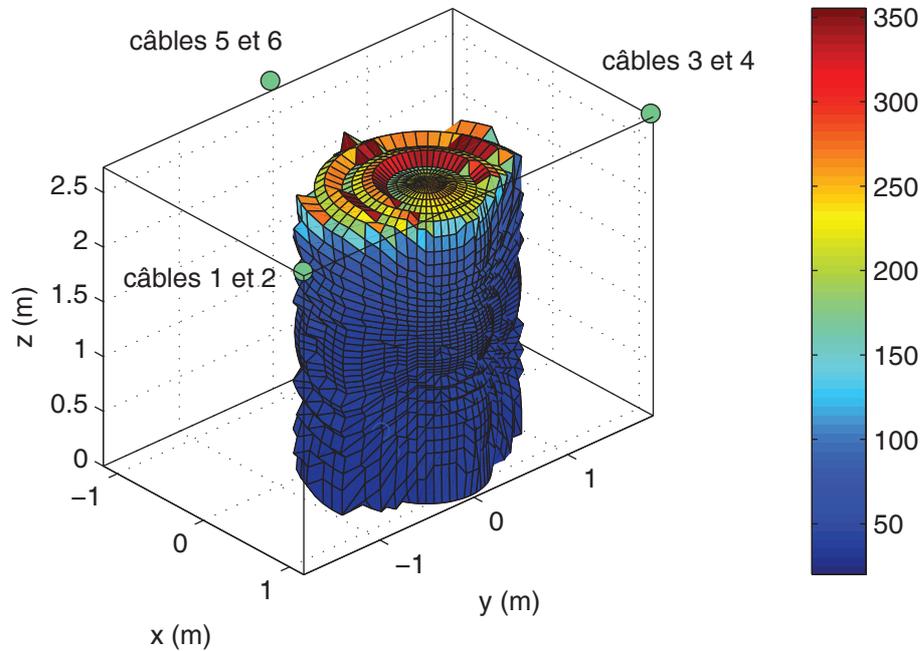
D'autres définitions de l'espace de travail d'un RPC ont été proposées, en ajoutant ou en retirant certains des paramètres considérés ici. Par exemple Barrette et Gosselin définissent dans [Barrette 05] un *espace de travail dynamique* qui ne tient compte que de l'ensemble des poses et des accélérations atteignables avec des tensions strictement positives. Gouttefarde propose dans [Gouttefarde 05] une définition de l'*espace des poses polyvalentes*. Cet espace n'impose ni d'ensemble de torseurs désirés, ni de bornes maximales aux tensions des câbles. L'espace des poses polyvalentes ne dépend que de la géométrie des mécanismes. Son étude est particulièrement intéressante pour la conception des RPC. Cette définition est également adoptée par Verhoeven [Verhoeven 00] sous le nom d'ETC.

Pour un RPC de géométrie connue, dont la plate-forme est en orientation de référence, en réduisant l'ensemble  $T$  des torseurs désirés uniquement au poids de la plate-forme et de sa charge, avec  $\mathbf{t}_{min}$  et  $\mathbf{t}_{max}$  connus, il est possible de comparer l'influence du nombre et de l'arrangement des câbles sur l'ETC.

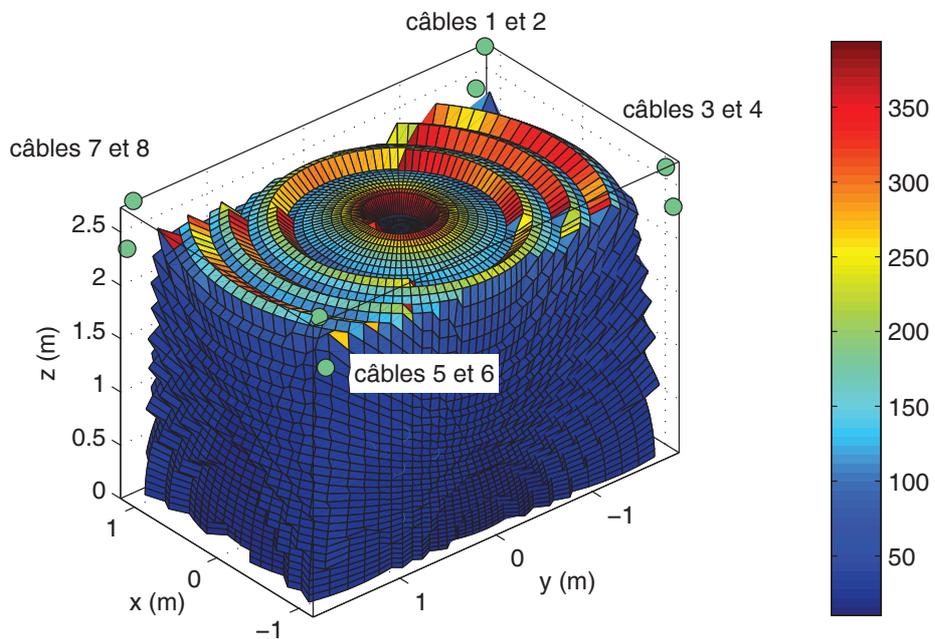
Les deux exemples suivants montrent l'accroissement du volume de l'ETC du robot, par rapport au volume d'une pièce de dimension donnée, apporté par une redondance  $r = 2$ . Considérons dans un premier temps une pièce de dimension  $3,7 \times 2,4 \times 2,8$  ( $L \times l \times h$ , en mètres). Ces dimensions sont celles du RPC REELAX8. Les longueurs des câbles sont supposées suffisantes pour atteindre l'ensemble de cette pièce. Pour cette étude, les bornes des tensions des câbles sont fixées à  $t_{\min} = 0$  N et  $t_{\max} = 350$  N. Le torseur appliqué à la plate-forme est constitué uniquement de l'action de la gravité. La masse de la plate-forme est fixée à 6,34 kg - la masse à vide de la plate-forme de REELAX8. Deux géométries de robots sont testées, celle du NIST-ROBOCRANE [Albus 93] à six câbles et celle du RPC suspendu REELAX8-S (voir annexe A.1.1) équipé de huit câbles. La figure 2.2 montre les ETC obtenus avec une orientation nulle de la plate-forme. La figure 2.2a correspond au cas de l'ETC de la configuration à six câbles du NIST-ROBOCRANE. L'ETC obtenu n'atteint que 23,2 % du volume total de la pièce, soit  $5,8 \text{ m}^3$ . À titre de comparaison, l'ETC obtenu avec la configuration à huit câbles, illustré à la figure 2.2b, atteint 79,9 % du volume total de la pièce, soit  $19,86 \text{ m}^3$  - un volume presque quatre fois plus important.

Considérons comme second exemple le démonstrateur du projet COGIRO (voir annexe A.2), un RPC suspendu équipé de huit câbles de dimensions globales  $15 \times 11 \times 6$  ( $L \times l \times h$ , en mètres). La masse de la plate-forme est ici fixée à 90 kg et les bornes sur les tensions des câbles à  $t_{\min} = 0$  N et  $t_{\max} = 5000$  N. La figure 2.3a illustre l'ETC atteint avec la configuration à six câbles du NIST-ROBOCRANE. Le volume d'ETC obtenu est de  $183,75 \text{ m}^3$ , soit 22,3 % du volume de la pièce. La figure 2.3b montre clairement que l'ETC de COGIRO est bien plus important que celui du NIST-ROBOCRANE. Son volume est de  $635,97 \text{ m}^3$ , soit 77,4 % du volume de la pièce - environ 3,5 fois plus qu'avec six câbles. Ces résultats illustrent bien l'augmentation du rapport entre le volume de l'ETC et le volume total du robot apportée par la redondance.

En pratique, l'ETC d'un RPC redondant à  $m = n + 2$  câbles peut être décomposé en  $C_m^n$  sous-ETC de robots à  $n$  câbles parmi les  $m$  disponibles,  $n$  câbles suffisant à équilibrer les  $n$  DDL de la plate-forme. Dans le cas d'un robot spatial à six DDL et huit câbles, le nombre de sous-ETC est théoriquement de  $C_8^6 = 28$ . Cependant ce nombre peut être ramené à 16, douze combinaisons de six câbles ayant un ETC vide. C'est la réunion de ces 16 sous-ETC qui permet d'obtenir un ratio élevé entre l'ETC total du robot et son volume total.

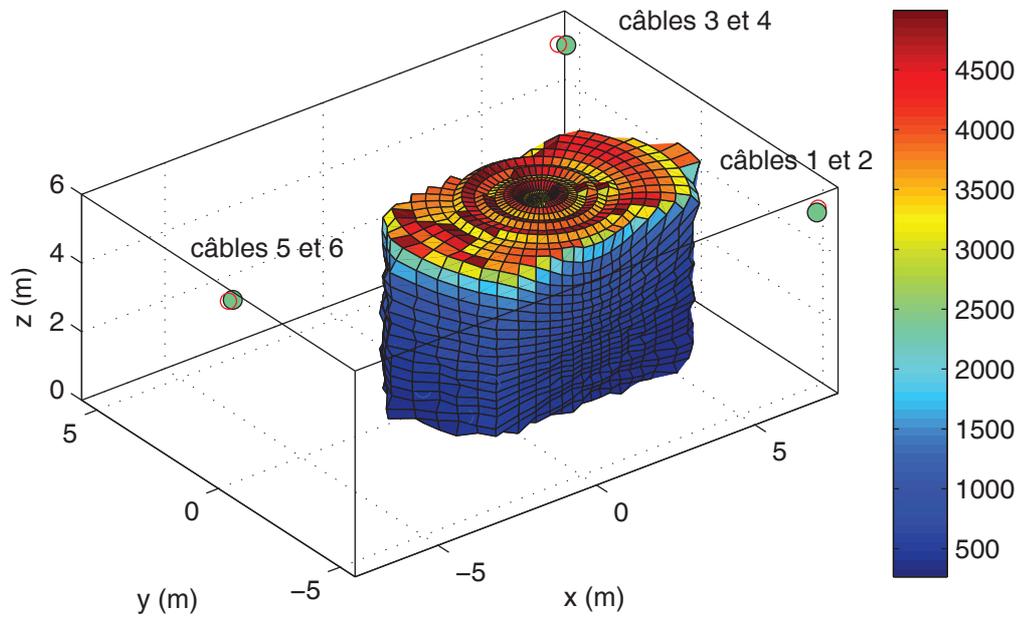


(a) Configuration à six câbles respectant l'arrangement proposé dans [Albus 93].

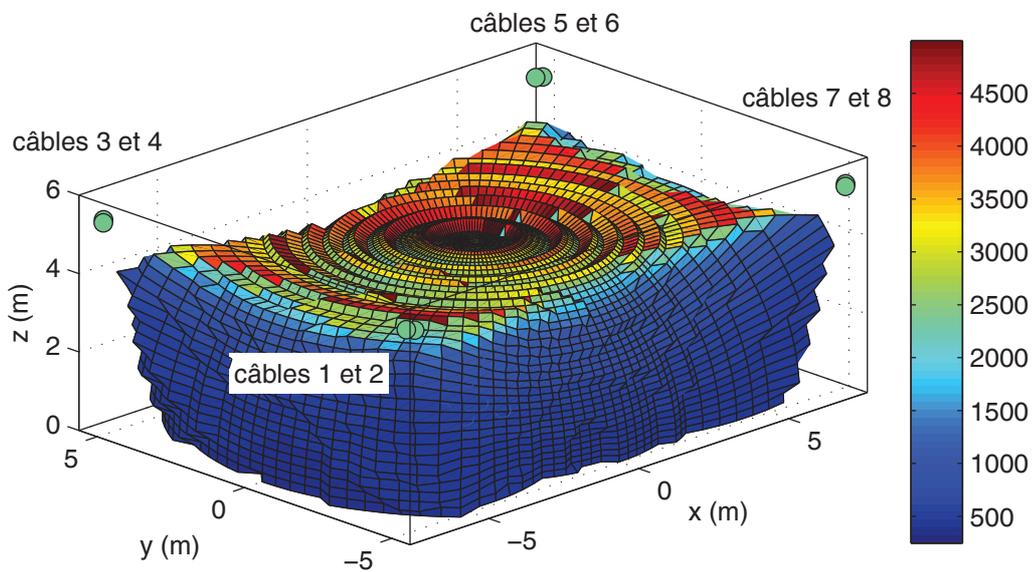


(b) Configuration à huit câbles d'après l'arrangement de REELAX8-S.

FIGURE 2.2 : ETC obtenus pour un arrangement de six et huit câbles dans une pièce de la dimension de REELAX8 (échelles en Newtons).



(a) Configuration à six câbles respectant l'arrangement de câbles proposé dans [Albus 93].



(b) Configuration à huit câbles d'après l'arrangement de câbles du démonstrateur du projet COGIRO.

FIGURE 2.3 : ETC obtenus pour un arrangement de six et huit câbles dans une pièce de la dimension du démonstrateur du projet COGIRO (échelles en Newtons).

## 2.5 Dynamique

Cette section présente les équations dynamiques qui décrivent le mouvement d'un RPC à partir des équations de Newton-Euler. Ces résultats sont directement utilisés pour la commande des RPC, telle que considérée dans cette thèse au chapitre 4. On néglige dans cette partie la dynamique des câbles, considérés comme infiniment raides et sans masse. Ces considérations simplifient le modèle dynamique d'un RPC et sont acceptables sous certaines conditions d'utilisation [Bouchard 08], supposées satisfaites ici.

On étudie dans un premier temps la dynamique du système de telle sorte que le centre de gravité - ou barycentre -  $G$  de la plate-forme coïncide avec son centre géométrique  $P$ , origine du repère  $\mathcal{R}_p$ . Les applications visées étant le déplacement de lourdes charges, il convient d'étudier l'influence de leurs masses sur le comportement du système.

Dans une telle situation, le centre de gravité  $G$  de l'ensemble constitué de la plate-forme et de la charge ne coïncide généralement plus avec le centre de référence de la plate-forme. Dans un second temps, un modèle plus complet est introduit prenant en compte un décalage du centre de gravité par rapport au centre de référence.

### 2.5.1 Centre de gravité et centre géométrique coïncidents

Supposons que  $G \equiv P$ . En pratique, cette hypothèse n'est jamais parfaitement réalisée étant donné que la position exacte du centre de masse est généralement incertaine. Ce modèle est néanmoins souvent utilisé et signifie que les moments engendrés par une connaissance imprécise de la position du centre de gravité ou par un éventuel déplacement de celui-ci - lors de la prise d'une charge par exemple - sont négligés.

#### Formalisme

Lorsque le centre de gravité coïncide avec l'origine du repère lié au corps considéré, généralement son centre géométrique  $P$ , les équations de Newton-Euler s'écrivent sous forme matricielle [Chung 08] telles que

$$\begin{pmatrix} \Sigma \mathbf{F} \\ \Sigma \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = \mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} \quad (2.24)$$

où

- $\Sigma \mathbf{F}$  est la somme des forces exercées au centre de gravité ;
- $\Sigma \boldsymbol{\tau}$  est la somme des moments exercés au centre de gravité ;
- $\dot{\mathbf{x}}$  désigne le vecteur vitesse de la plate-forme ;
- $\ddot{\mathbf{x}}$  désigne le vecteur accélération de la plate-forme ;

- $\mathbf{M}$  est la matrice  $n \times n$  symétrique définie positive d'inertie du corps considéré ;
- $\mathbf{C}$  est la matrice  $n \times n$  des efforts de Coriolis et des forces centrifuges appliqués sur le corps considéré.

Le modèle dynamique général d'un RPC peut se diviser en deux expressions, la dynamique de l'ensemble mobile constitué de la plate-forme et de la charge, et la dynamique des  $m$  enrouleurs, constitués des moteurs et des tambours. Ces deux expressions sont détaillées ci-dessous. Le modèle dynamique complet est obtenu en les couplant par l'intermédiaire du vecteur  $\mathbf{t}$  des tensions dans les câbles.

### Dynamique des enrouleurs

Le modèle dynamique des actionneurs relie le vecteur des couples moteurs  $\boldsymbol{\tau}_m \in \mathbb{R}^m$  aux accélérations articulaires  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^m$ . S'agissant uniquement des accélérations angulaires des moteurs, on ne considère ici que les équations d'Euler. On émet l'hypothèse que les moteurs, les enrouleurs et les éventuelles poulies sont des cylindres de matériau homogène. Chaque actionneur ainsi composé a ses éléments positionnés le long d'un axe unique (figure 2.4a) ou de deux axes de rotation (figure 2.4b). Sur ces figures, l'axe  $\mathbf{z}$  est arbitrairement dirigé le long de l'axe moteur.

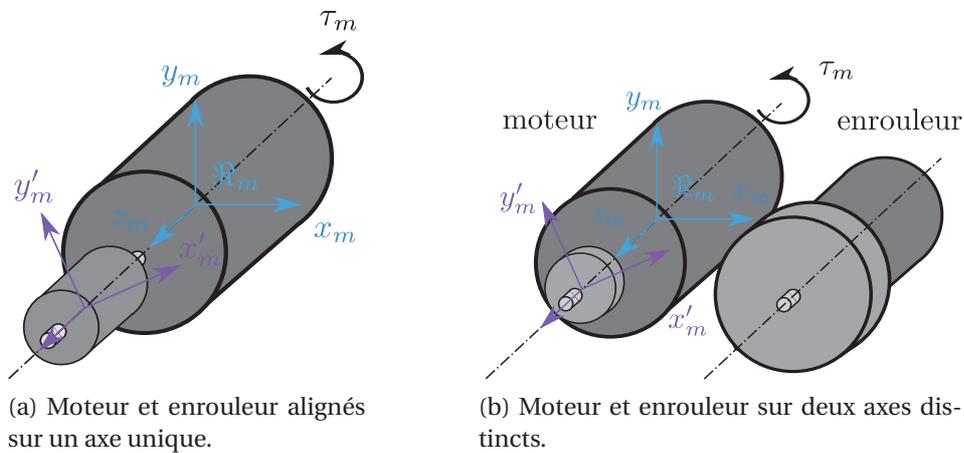


FIGURE 2.4 : Différents montages d'enrouleurs possibles.

Ainsi, nous supposons que les matrices d'inertie des différents composants, ramenées au centre du repère lié au moteur, sont diagonales et définies positives. La somme de ces matrices est de la forme

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

On note dans la suite  $B = I_{m_i}$ , le moment d'inertie du  $i^{\text{ème}}$  enrouleur autour de l'axe de rotation de son moteur. D'après (2.24), on obtient

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{I}_m \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.26)$$

où  $\mathbf{I}_m$  est une matrice diagonale  $m \times m$  qui contient les moments d'inertie  $I_{m_i}$ . La dynamique des actionneurs s'écrit finalement de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{I}_m \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{R}\mathbf{t} \quad (2.27)$$

où  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des couples dus aux frottements et  $\mathbf{R}\mathbf{t}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^m$  représentant les couples appliqués par les câbles sur l'actionneur. Rappelons que  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est une matrice diagonale contenant les coefficients  $r_i$ , définis par l'équation (2.7), telle que  $\mathbf{R} = \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ .

### Dynamique de la plate-forme

Appliquons maintenant les équations (2.24) à la plate-forme. En respectant le formalisme donné à la section 2.5.1,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{C}$ , respectivement les matrices  $n \times n$  d'inertie et des efforts centrifuges et de Coriolis, s'écrivent

$$\mathbf{M}(x) = \begin{bmatrix} m_{\text{tot}} \mathbb{1}_p & \mathbf{0}_{p \times q} \\ \mathbf{0}_{q \times p} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p \times p} & \mathbf{0}_{p \times q} \\ \mathbf{0}_{q \times p} & \dot{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

où

- $p$  est le nombre de DDL en translation ;
- $q$  est le nombre de DDL en orientation ;
- $m_{\text{tot}}$  est la masse de la plate-forme, éventuellement chargée ;
- $\mathbf{K} = \mathbf{Q}\mathbf{I}_p\mathbf{Q}^T$  désigne la matrice d'inertie de la plate-forme exprimée au centre de référence  $P$ , avec  $M = P$ , dans la base du repère  $\mathcal{R}_b$ , avec  $\mathbf{I}_p$  la matrice d'inertie de la plate-forme dans  $\mathcal{R}_p$ .

Notons qu'il est possible d'écrire le produit  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}$  directement sous la forme d'un vecteur  $\mathbf{c}$  [Siciliano 09], tel que

$$\mathbf{c} = \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Cette relation est démontrée à la section B.3 de l'annexe B. La dynamique de la plate-forme peut donc s'écrire

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{W}\mathbf{t} + \mathbf{f}_g(\mathbf{x}) \quad (2.30)$$

où  $\mathbf{Wt} = \mathbf{f}_c \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des forces appliquées par les câbles sur la plate-forme et  $\mathbf{f}_g(\mathbf{x})$  représente le poids de la plate-forme et de son éventuelle charge  $\mathbf{f}_g(\mathbf{x}) = [0 \ 0 \ -m_{\text{tot}}g \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , avec  $g$  la constante d'accélération gravitationnelle. On note que la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ , dès lors que  $m > n$ , n'est pas carrée. Dans le cas d'un RPC à redondance d'actionnement, une inverse généralisée, notée  $\mathbf{W}^+$ , dont l'expression n'est pas unique, est requise. Dans cette thèse, on utilise classiquement la pseudo-inverse de Moore-Penrose.

### Modèle dynamique complet

Les équations (2.27) et (2.30) peuvent facilement être combinées par substitution du terme  $\mathbf{t}$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_g = \mathbf{WR}^{-1} [\boldsymbol{\tau}_m - (\mathbf{I}_m \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}))] \quad (2.31)$$

Afin d'éviter l'inversion de la matrice rectangulaire des torseurs  $\mathbf{W}$ , on peut choisir d'établir le modèle dynamique dans l'espace Cartésien. À cette fin, par dérivation de l'équation (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{J}\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{x}}) = -\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{W}^T \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{W}}^T \dot{\mathbf{x}}) \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J}^+ \mathbf{R}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}^+ \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{W}^{+T} \mathbf{R}\ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{W}}^{+T} \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

En remplaçant les vecteurs articulaires dans (2.31) par leurs expressions des équations (2.14) et (2.32), nous obtenons

$$\mathbf{WR}^{-1} \boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{M}_{x_{eq}} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_{x_{eq}} \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_g + \mathbf{WR}^{-1} \mathbf{f}(-\mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}^T \dot{\mathbf{x}}) \quad (2.33)$$

avec  $\mathbf{M}_{x_{eq}}$  et  $\mathbf{C}_{x_{eq}}$  deux matrices  $n \times n$  d'expressions

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{x_{eq}} &= \mathbf{M} - \mathbf{WR}^{-1} \mathbf{I}_m \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}^T \\ \mathbf{C}_{x_{eq}} &= \mathbf{C} - \mathbf{WR}^{-1} \mathbf{I}_m \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{W}}^T \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dans l'espace articulaire, ce modèle dynamique s'écrit

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{M}_{q_{eq}} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{q_{eq}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{RW}^+ \mathbf{f}_g \quad (2.35)$$

$\mathbf{M}_{q_{eq}}$  et  $\mathbf{C}_{q_{eq}}$  étant deux matrices  $m \times m$  d'expressions

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{q_{eq}} &= \mathbf{I}_m - \mathbf{RW}^+ \mathbf{M} \mathbf{W}^{+T} \mathbf{R} \\ \mathbf{C}_{q_{eq}} &= -\mathbf{RW}^+ (\mathbf{C} \mathbf{W}^{+T} + \dot{\mathbf{M}} \mathbf{W}^{+T}) \mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.36)$$

### Modèle dynamique simplifié, cas pseudo-statique

Dans le cas de certaines applications de RPC, certaines hypothèses simplificatrices peuvent être établies. Au niveau des enrouleurs, l'inertie des tambours peut être négligée devant les efforts de frottements secs et les efforts générés par les câbles. La dynamique de la plate-forme (2.30) peut également être simplifiée. En effet, dans le cas des applications de transport de lourdes charges, par exemple, les effets de la gravité sont largement supérieurs aux efforts dus aux accélérations. Le système peut être assimilé à une machine quasi-statique. L'équation (2.30) devient alors :

$$\mathbf{W}\mathbf{t} = -\mathbf{f}_g(\mathbf{x}) \quad (2.37)$$

D'après l'équation (2.33), on obtient finalement dans l'espace Cartésien

$$\mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{W}^T\dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}_g(\mathbf{x}) \quad (2.38)$$

et d'après l'équation (2.35), on peut écrire dans l'espace articulaire

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{R}\mathbf{W}^+\mathbf{f}_g \quad (2.39)$$

### 2.5.2 Centre de gravité et centre géométrique dissociés

On considère dans cette section que  $G \neq P$ . Cette hypothèse n'a évidemment aucune incidence sur la dynamique des actionneurs, mais va modifier la formulation de la dynamique de l'ensemble constitué de la plate-forme et de la charge. Dans le cas du transport de lourdes charges, ce modèle, bien que plus complexe, est plus approprié. Les équations de Newton-Euler, lorsqu'elles sont exprimées en un point différent du centre de gravité, prennent la forme suivante [Chung 08]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Sigma \mathbf{F} \\ \Sigma \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_{\text{tot}} \mathbb{1}_p & -m_{\text{tot}}[\mathbf{d}] \\ m_{\text{tot}}[\mathbf{d}] & \mathbf{K} - m_{\text{tot}}[\mathbf{d}][\mathbf{d}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{\text{tot}}[\boldsymbol{\omega}][\boldsymbol{\omega}]\mathbf{d} \\ [\boldsymbol{\omega}](\mathbf{K} - m_{\text{tot}}[\mathbf{d}][\mathbf{d}])\boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{M}'(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

où

- $\ddot{\mathbf{p}}$  représente l'accélération du centre de gravité ;
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  représente l'accélération angulaire de la plate-forme ;
- $\mathbf{K}$  désigne la matrice d'inertie de la plate-forme exprimée au centre de masse  $M$  dans la base du repère  $\mathcal{R}_b$  ;

- $\mathbf{d} = \overrightarrow{PG} = [u \ v \ w]^T$  est le vecteur du décalage du centre de gravité également exprimé dans la base du repère  $\mathfrak{R}_b$ . Dans la base du repère de la plate-forme  $\mathfrak{R}_p$ , on notera ce vecteur  $\boldsymbol{\delta} = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T$  tel que  $\mathbf{d} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\delta}$ .  $[\mathbf{d}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  désigne la matrice antisymétrique de produit vectoriel définie par

$$[\mathbf{d}] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

et telle que  $[\mathbf{d}]\mathbf{a} = \mathbf{d} \wedge \mathbf{a}$ . De la même manière, on définit

$$[\boldsymbol{\omega}] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Remarquons que dans cette formulation ( $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ ), les accélérations  $\ddot{\mathbf{p}}$  du point de référence  $P$  de la plate-forme et ses accélérations angulaires  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  sont couplées et génèrent des forces et des moments. Le modèle dynamique de l'ensemble constitué de la plate-forme et de la charge s'écrit alors

$$\mathbf{M}'(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{W}\mathbf{t} + \mathbf{f}_g(\mathbf{x}) \quad (2.43)$$

avec  $\mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}'$ . Dans le cas présent où  $G \neq P$ , le moment en  $P$   $\mathbf{m}_C(\mathbf{g})$  généré par le poids de la plate-forme et de son éventuelle charge  $m_{tot}\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -m_{tot}g]^T$  n'est plus nul. Il s'exprime tel que

$$\mathbf{m}_C(\mathbf{g}) = \mathbf{d} \wedge [0 \ 0 \ -m_{tot}g]^T = m_{tot}g [-v \ u \ 0]^T \quad (2.44)$$

Par conséquent, dans le cas où  $G \neq P$ , on écrit  $\mathbf{f}_g(\mathbf{x}) = m_{tot}g [0 \ 0 \ -1 -v \ u \ 0]^T$ . Rappelons que  $\mathbf{W}\mathbf{t} = \mathbf{f}_c$  est le vecteur des forces et moments appliqués par les câbles sur la plate-forme au point  $P$ . En combinant les équations (2.27) et (2.43), on obtient la relation

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}'\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_g = \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1} [\boldsymbol{\tau}_m - (\mathbf{I}_m\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}))] \quad (2.45)$$

et en remplaçant les vecteurs articulaires par les vecteurs opérationnels obtenus des équations (2.14) et (2.32), nous obtenons dans l'espace Cartésien

$$\mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{M}'_{x_{eq}}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}'_{x_{eq}}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_g + \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{f}(-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W}^T\dot{\mathbf{x}}) \quad (2.46)$$

$\mathbf{M}'_{x_{eq}}$  et  $\mathbf{C}'_{x_{eq}}$  étant deux matrices  $n \times n$  d'expressions

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_{x_{eq}} &= \mathbf{M}' - \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{I}_m\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W}^T \\ \mathbf{C}'_{x_{eq}} &= \mathbf{C}' - \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{I}_m\mathbf{R}^{-1}\dot{\mathbf{W}}^T \end{aligned} \quad (2.47)$$

Dans l'espace articulaire, ce modèle dynamique s'écrit

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{M}'_{q_{eq}} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}'_{q_{eq}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{f}_g \quad (2.48)$$

$\mathbf{M}'_{q_{eq}}$  et  $\mathbf{C}'_{q_{eq}}$  étant deux matrices  $m \times m$  d'expressions

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_{q_{eq}} &= \mathbf{I}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{M}' \mathbf{W}^{+T} \mathbf{R} \\ \mathbf{C}'_{q_{eq}} &= -\mathbf{R}\mathbf{W}^+ \left( \mathbf{C}' \mathbf{W}^{+T} + \mathbf{M}' \dot{\mathbf{W}}^{+T} \right) \mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.49)$$

### 2.5.3 Modélisation des efforts de frottements

Afin de modéliser les frottements, le modèle de frottement statique est adopté

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}_s \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} \quad (2.50)$$

avec  $\mathbf{F}_s$  et  $\mathbf{F}_v$  deux matrices diagonales de  $\mathbb{R}^m$  dont les traces sont respectivement égales à  $\operatorname{tr}(\mathbf{F}_s) = \{f_{s_1}, f_{s_1}, \dots, f_{s_m}\}$  et  $\operatorname{tr}(\mathbf{F}_v) = \{f_{v_1}, f_{v_1}, \dots, f_{v_m}\}$ .  $f_{s_i}$  et  $f_{v_i}$  désignent respectivement les coefficients de frottements secs (ou de Coulomb) et visqueux du  $i^{\text{ème}}$  actionneur.

En pratique, l'utilisation de la fonction  $\operatorname{sgn}$  peut conduire à une instabilité du robot lors de l'implémentation des lois de commande. Afin d'éviter les discontinuités de cette fonction, celle-ci est approximée par la fonction  $\tanh$  telle que  $\operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) \approx \tanh(\mu \dot{\mathbf{q}})$ , où  $\mu$  correspond à la pente de la tangente hyperbolique. L'équation (2.27) de la dynamique des enrouleurs s'écrit alors

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{I}_m \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \tanh(\mu \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\mathbf{t} \quad (2.51)$$

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques des RPC, fondamentaux pour la commande, ont été donnés. Les modèles géométriques et cinématiques inverses seront utilisés pour projeter l'espace opérationnel à  $n$  dimensions des coordonnées spatiales de la plate-forme dans l'espace à  $m$  dimensions des coordonnées articulaires du robot. Les modèles dynamiques de la plate-forme et des enrouleurs permettront le développement de commandes avancées. Nous avons montré que la redondance d'actionnement permet d'augmenter le ratio entre l'ETC d'un RPC et le volume de sa structure. En outre, elle nécessite des algorithmes de gestion de la redondance qui permettent de sélectionner, pour une pose et un torseur d'efforts donnés, une solution admissible au problème de la distribution des tensions des câbles.

## STRATÉGIES DE DISTRIBUTION DES TENSIONS DANS LES CÂBLES

*La résolution du problème de la distribution des tensions dans les câbles, formulée à la section 3.1, est un élément central de la commande des RPC à redondance d'actionnement ( $m > n$ ). Ce chapitre propose une méthode de résolution du problème de distribution des tensions efficace et compatible avec la commande en temps réel. Après avoir passé en revue les approches existantes en section 3.1, la section 3.2 introduit un algorithme qui détermine, avec des calculs simples, les sommets du polygone des tensions admissibles solutions du problème de la distribution des tensions. Par la connaissance des sommets de ce polygone, la section 3.3 propose ensuite des méthodes efficaces de calcul d'une distribution des tensions dite optimale. Une telle distribution, satisfaisant un certain critère, permet de générer des tensions admissibles, c'est-à-dire comprises entre des valeurs minimales et maximales définies par l'utilisateur, pour atteindre la pose désirée de la plate-forme. La section 3.4 présente des résultats de simulations et la section 3.5 conclut ce chapitre.*

### Sommaire

---

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.1 | Problème de la distribution des tensions . . . . .       | 38 |
| 3.2 | Algorithme proposé : TurnAround . . . . .                | 46 |
| 3.3 | Choix de la distribution optimale des tensions . . . . . | 55 |
| 3.4 | Simulations . . . . .                                    | 66 |
| 3.5 | Conclusion . . . . .                                     | 74 |

---

## 3.1 Problème de la distribution des tensions

### 3.1.1 Formulation du problème

Commençons par rappeler la relation (2.23) entre le torseur d'efforts  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  appliqués par les câbles sur la plate-forme et le vecteur des tensions des câbles  $\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_m]^T \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{t} = \mathbf{f}$$

où  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  représente la matrice des torseurs, avec  $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}(\mathbf{x})^T$ ,  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  étant la matrice Jacobienne du robot et  $\mathbf{x}$  désigne la pose de la plate-forme. On suppose ici que la matrice  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  est de plein rang.

**Définition 3.1.** *Une tension  $t$  est dite solution du problème de la distribution des tensions si elle vérifie l'équation (2.23).*

Comparé aux robots parallèles à membres rigides, les câbles d'un RPC ne peuvent pas pousser sur la plate-forme. Par conséquent, les composantes du vecteur  $\mathbf{t}$  doivent rester strictement non-négatives. Si la commande demande à un câble de pousser alors que celui-ci n'en est pas capable, la plate-forme ne peut atteindre la pose désirée et le RPC n'est pas commandable. Une définition de la commandabilité à été donnée dans [Levine 96]

**Définition 3.2.** *Un système est dit commandable si, sur un intervalle  $[t_i, t_f]$  de temps fini avec  $t_f > t_i$ , et pour tout point  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_f$ , avec  $\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i$ , il est possible de trouver une commande finie appliquée sur  $[t_i, t_f]$ , telle que  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ .*

En l'absence d'algorithme de distribution des tensions, le vecteur  $\mathbf{t}$ , calculé à partir de l'équation (2.23), peut avoir des composantes négatives. Il est alors impossible, partant d'une pose initiale  $\mathbf{x}_i$ , d'atteindre la pose finale  $\mathbf{x}_f$  désirée. Afin d'éviter que la commande ne demande à un câble de pousser la plate-forme, il faut établir une stratégie de distribution admissible des tensions. Définissons la notion d'admissibilité.

**Définition 3.3.** *Une distribution des tensions  $\mathbf{t}$  est dite admissible si chacune de ses composantes vérifie les conditions d'admissibilité*

$$0 \leq t_{i_{min}} \leq t_i \leq t_{i_{max}}, \quad i = \{0, \dots, m\} \quad (3.1)$$

Lorsque ces inégalités deviennent des égalités, les composantes de  $\mathbf{t}$  sont dites limites.

**Définition 3.4.** *Une distribution des tensions  $\mathbf{t}$  est dite limite si au moins une de ses composantes  $t_i$ ,  $i \in [1 \dots m]$ , est strictement égale à  $t_{min}$  ou à  $t_{max}$ .*

$$\exists t_i, \quad i \in [1 \dots m] \quad | \quad t_i = t_{i_{min}} \quad \text{ou} \quad t_i = t_{i_{max}} \quad (3.2)$$

Dans le cas où  $m = n$  (le RPC possède autant de câbles que de DDL), alors la solution de l'équation (2.23) est unique et on ne peut pas garantir sa non-négativité. Dans le cas d'une redondance d'actionnement  $m > n$ , la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $n \times m$  est rectangulaire et l'équation (2.23) équivaut à

$$\mathbf{t} = \mathbf{W}^+ \mathbf{f} + \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{t}_p + \mathbf{t}_n \quad (3.3)$$

avec  $\mathbf{W}^+$  la pseudo-inverse de Moore-Penrose de  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{N} = \text{Ker}(\mathbf{W})$  le noyau de  $\mathbf{W}$  de dimension  $m \times r$  et  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \dots \lambda_r]^T$  un vecteur de dimension  $r$ . Les colonnes de  $\mathbf{N}$  forment une base du noyau de la matrice  $\mathbf{W}$ .  $\mathbf{t}_p$  est la solution particulière de norme minimale de l'équation (2.23) et  $\mathbf{t}_n$  est la solution homogène qui transforme  $\boldsymbol{\lambda}$  en un vecteur du noyau de la matrice  $\mathbf{W}$ . Le vecteur  $\mathbf{t}_n$  permet de modifier la tension  $\mathbf{t}$  sans modifier les efforts  $\mathbf{f}$  appliqués sur la plate-forme.

Dans ce chapitre, nous répondons à la question suivante : si un torseur d'efforts  $\mathbf{f}$  appliqués à la plate-forme doit être équilibré à l'aide des câbles, connaissant la matrice des torseurs de la pose courante, comment choisir une distribution admissible des tensions dans les câbles garantissant la commandabilité du système ? Pour y répondre, nous chercherons une solution admissible au problème de la *distribution des tensions des câbles*. Sa résolution doit pouvoir être intégrée aux schémas de commande des RPC et ainsi être compatible avec des systèmes temps-réels. De plus, elle devrait être simple à implémenter et ne devrait pas nécessiter de bibliothèques de calculs externes afin de maximiser les chances de compatibilité avec différents environnements logiciels.

### 3.1.2 Les approches existantes

Plusieurs stratégies ont été proposées afin de répondre au problème de la distribution des tensions des câbles. La grande majorité des travaux publiés utilise des algorithmes d'optimisation dans le but d'obtenir une distribution des tensions optimale  $\mathbf{t}^*$ . La fonction-objectif de l'optimisation peut être la norme 1 de  $\mathbf{t}$  - également appelée norme  $l_1$  -, égale à la somme des tensions des  $m$  câbles. Le problème de la distribution des tensions est alors formulé comme un problème de programmation linéaire tel que

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{t}} \left[ \|\mathbf{t}\|_1 = \sum_{i=1}^m t_i \right] \\ \text{t.q. } \mathbf{Wt} = \mathbf{f} \\ t_{i_{\min}} \leq t_i \leq t_{i_{\max}}, \quad i = \{0, \dots, m\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

L'utilisation de la programmation linéaire a été proposée dans [Fang 04, Oh 05, Shiang 00] afin de minimiser la fonction-objectif tout en conservant une distribution

admissible le long d'une trajectoire. L'utilisation de la norme 1 de  $\mathbf{t}$  présente l'intérêt majeur de minimiser les tensions des câbles et donc l'énergie absorbée par les moteurs, la tension calculée étant nécessairement limitée ( $t_i = t_{\min}$ ) pour  $r = m - n$  composantes,  $r$  étant le Degré De Redondance (DDR). En revanche, la norme 1 de  $\mathbf{t}$  peut engendrer des discontinuités [Verhoeven 04] dans la distribution des tensions pouvant déstabiliser, voire détériorer, le système. La méthode la plus avancée basée sur la norme 1 de  $\mathbf{t}$  est actuellement celle de Borgstrom *et al* [Borgstrom 09b] qui proposent de reformuler le problème (3.4) en incluant une variable "de détente" et en considérant le problème linéaire primal ainsi que le problème linéaire dual associé. La variable de détente permet de calculer des distributions des tensions non-limitées, éloignées des bornes de (3.1). Cependant, tel que remarqué dans [Borgstrom 09b], la méthode peut toujours présenter des discontinuités.

La norme  $\infty$  de  $\mathbf{t}$  peut également être considérée comme fonction-objectif du problème d'optimisation des tensions, mais cette dernière est aussi sujette à des discontinuités [Gosselin 08].

Afin de garantir la continuité des tensions des câbles le long d'une trajectoire continue ne passant pas par des singularités de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ , on utilise généralement la norme  $p$ ,  $1 < p < \infty$  [Verhoeven 02]. Plus précisément, la norme 2 de  $\mathbf{t}$  - également appelée norme  $l_2$  ou norme Euclidienne - est utilisée dans [Agahi 09, Bruckmann 06, Otis 09], et fait référence à la programmation quadratique :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{t}} \quad & \|\mathbf{t}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m t_i^2} \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{W}\mathbf{t} = \mathbf{f} \\ & t_{i_{\min}} \leq t_i \leq t_{i_{\max}}, \quad i = \{0, \dots, m\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

D'autres stratégies visent à utiliser les routines d'optimisation des équations (3.4) et (3.5) tout en évitant les poses pouvant amener à des discontinuités de la distribution des tensions. Oh et Agrawal ont proposé dans [Oh 03, Oh 05] d'utiliser la programmation linéaire et quadratique en ajoutant un critère afin de tester l'admissibilité des points d'une trajectoire et d'éviter les singularités de l'espace de travail. Pour le contrôle de leur prototype de RPC suspendu, la génération de trajectoires se fait donc hors-ligne. Ceci contraint l'utilisation du robot, dont les trajectoires ne peuvent évoluer au cours de l'application - le contrôle temps-réel par interface homme-machine est impossible. Dans [Hassan 11], la norme 2 est utilisée en association avec l'algorithme de projection de Dykstra, empêchant une utilisation en temps réel de la méthode proposée.

Les routines d'optimisation sont difficiles à implémenter dans des environnements logiciels industriels temps-réel. Les algorithmes requis peuvent avoir des temps de calcul va-

riables à chaque itération avec une estimation impossible du temps de calcul maximal. De plus, ils nécessitent des bibliothèques externes qu'il n'est pas toujours possible d'appeler dans les environnements logiciels temps-réel. Les environnements, présentés au chapitre 5, des différents prototypes utilisés dans cette thèse ne permettent pas d'utiliser des algorithmes d'optimisation, à moins de les reprogrammer ; une opération longue et fastidieuse.

Par conséquent, les algorithmes à temps de calcul borné ont un intérêt majeur dans le contrôle en temps réel des robots. Taghirad et Bedoustani ont récemment proposé une méthode reformulant le problème de minimisation de la norme 2 de la tension des câbles par l'utilisation des conditions de Karush-Kuhn-Tucker. Cette méthode permet d'obtenir un nombre borné d'itérations de la routine d'optimisation. En revanche, le nombre maximal d'itérations est toujours assez important : 256 itérations pour un RPC à six DDL et huit câbles. D'autres méthodes, plus efficaces en terme de temps de calcul, ont été développées en se basant sur de simples techniques de projection. L'idée est de projeter une tension admissible définie optimale pour l'application, telle que  $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_{\min} + \mathbf{t}_{\max})/2$  [Lafourcade 04, Pott 09] dans l'ensemble des solutions de l'équation (2.23). L'implémentation est directe, non-itérative, et ne nécessite pas de bibliothèque externe particulière. En revanche, ces méthodes de projection ne garantissent pas de trouver une solution au problème de la distribution des tensions même si une solution existe. En pratique, ces méthodes peuvent ainsi diminuer considérablement l'ETC du RPC, particulièrement en configuration suspendue. La projection orthogonale d'un point choisi de  $\Omega$  dans  $\Sigma$  peut en effet se situer hors du polytope  $\Lambda$  des solutions admissibles, alors que  $\Lambda \neq \emptyset$ . L'algorithme fournit donc une solution non-admissible alors que des solutions admissibles existent.

Enfin, Mikelsons *et al.* [Mikelsons 08] ont proposé une stratégie intéressante, basée sur la construction du polygone des solutions admissibles au problème de la distribution des tensions. Cette méthode ne nécessite pas d'optimisation numérique et fournit une distribution continue des tensions le long d'une trajectoire.

### 3.1.3 Polytope des solutions admissibles au problème de la distribution des tensions

Définissons  $\Sigma$  l'espace affine de dimension  $r$  des solutions de l'équation (2.23), dont les colonnes de  $\mathbf{N}$ , le noyau de  $\mathbf{W}$ , forment une base.

$$\Sigma = \{\mathbf{t} \mid \mathbf{W}\mathbf{t} = \mathbf{f}\} \quad (3.6)$$

Définissons également  $\Omega$  l'hyper-parallélépipède de dimension  $m$  des tensions admissibles. Dans le cas particulier où les bornes des tensions admissibles  $t_{i_{\min}}$  et  $t_{i_{\max}}$  ont les

mêmes valeurs  $t_{\min}$  et  $t_{\max}$  pour les  $m$  câbles,  $\Omega$  est un hypercube de dimension  $m$ .

$$\Omega = \{\mathbf{t} \mid t_i \in [t_{\min}, t_{\max}], 1 \leq i \leq m\} \quad (3.7)$$

L'intersection  $\Lambda = \Omega \cap \Sigma$  de l'hyper-parallélépipède  $\Omega$  et de l'espace affine  $\Sigma$  est un polytope convexe.  $\Lambda$  représente le polytope des solutions admissibles au problème de la distribution des tensions, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation (2.23) satisfaisant les conditions d'admissibilité  $t_{\min} \leq t_i \leq t_{\max}$ .

**Définition 3.5.** L'antécédent du polytope  $\Lambda$ , noté  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , par la transformation affine  $\mathcal{A} = (\mathbf{N}, \mathbf{t}_p)$  (équation (3.3)), est un polytope convexe appelé polytope des solutions admissibles au problème de la distribution des tensions, tel que

$$\mathcal{A}^{-1}(\Lambda) = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^r \mid \mathbf{t}_{\min} \leq \mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{t}_{\max}\} \quad (3.8)$$

où  $\boldsymbol{\lambda}$  est un vecteur de dimension  $r$ . Notons que  $\Lambda$  et  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  sont isomorphes (prouvé en annexe C).  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est donc défini par un ensemble de  $2m$  inéquations linéaires telles que

$$\mathbf{t}_{\min} - \mathbf{t}_p \leq \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{t}_{\max} - \mathbf{t}_p \quad (3.9)$$

Les figures 3.1 et 3.2 illustrent les ensembles  $\Omega$ ,  $\Sigma$  et  $\Lambda$  définis dans cette section. Deux robots plans à  $n = 1$  DDL, le DDL étant la translation le long de l'axe  $\mathbf{y}$  ( $x = 0$ ), équipés de  $m = 3$  câbles sont ici considérés de telle sorte que  $r = 2$ . Ces robots sont montrés aux figures 3.1.a et 3.2.a. Les masses des plates-formes ponctuelles mobiles sont fixées à 20 kg et

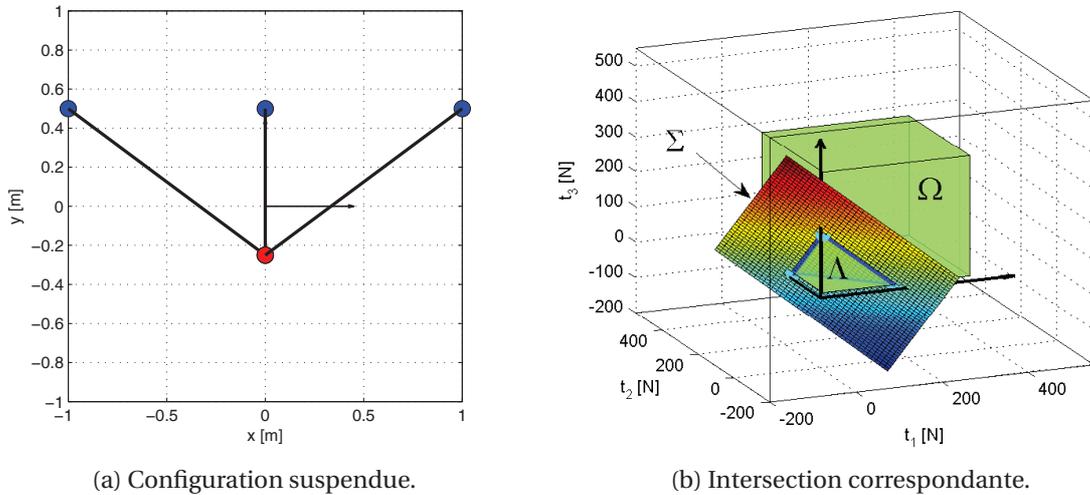
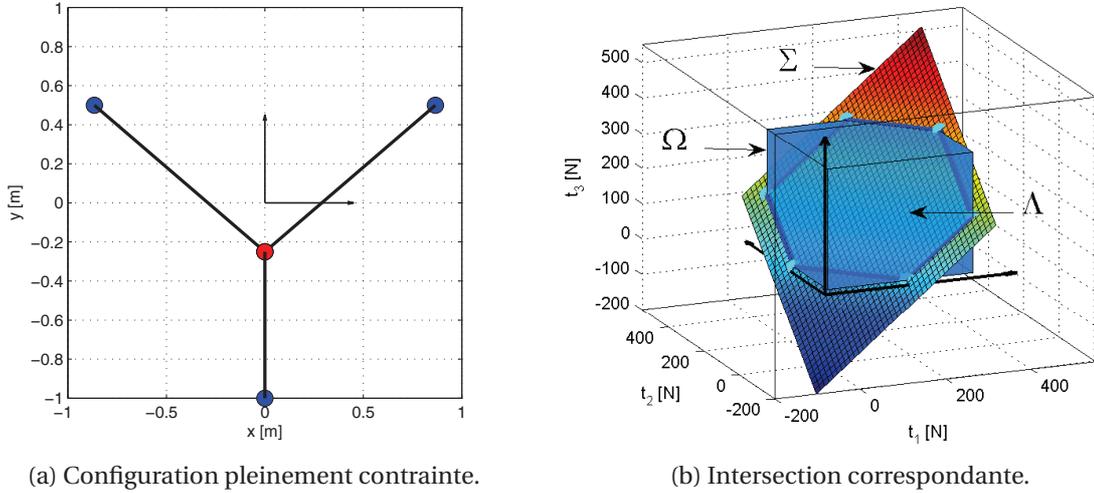


FIGURE 3.1 : Intersection  $\Lambda$  entre l'hypercube  $\Omega$  et l'ensemble des solutions  $\Sigma$  d'un RPC suspendu à 2 DDR et 1 DDL.



(a) Configuration pleinement contrainte.

(b) Intersection correspondante.

FIGURE 3.2 : Intersection  $\Lambda$  entre l'hypercube  $\Omega$  et l'ensemble des solutions  $\Sigma$  d'un RPC pleinement contraint à 2 DDR et 1 DDL.

les limites des tensions à  $t_{\min} = 10$  N et  $t_{\max} = 350$  N. Avec  $m = 3$ , il est facile de représenter l'hypercube  $\Omega$  des tensions admissibles, de dimension trois. Comme  $r = 2$ ,  $\Sigma$  est un plan. La figure 3.1 illustre l'intersection  $\Lambda$  obtenue pour un RPC en configuration suspendue à la position  $y = -0,25$  m. La figure 3.2 illustre quant à elle l'intersection  $\Lambda$  obtenue avec un RPC en configuration pleinement contrainte. Remarquons que l'aire de l'intersection  $\Lambda$  est bien plus grande dans le second cas. En effet, il est possible d'augmenter les tensions de tous les câbles d'un RPC pleinement contraint par le biais d'efforts antagonistes. En revanche, en configuration suspendue, seule l'action de la gravité permet de générer des efforts internes ; hors celle-ci est limitée. Les possibilités de distribution des tensions sont donc beaucoup moins importantes en configuration suspendue qu'en pleinement contrainte.

Au lieu de travailler directement dans l'espace à  $m$  dimensions des tensions des câbles, la recherche d'une solution optimale peut se faire dans l'espace à  $r$  dimensions des solutions au problème de la distribution des tensions [Mikelsons 08]. Comme expliqué aux chapitres 1 et 2, la plupart des prototypes de RPC sont contrôlés avec  $m = n + 2$  câbles, cette configuration offrant de nombreux bénéfices et pouvant couvrir un grand nombre d'applications. Citons par exemple les prototypes présentés dans [Bruckmann 13, Fang 04, Kawamura 93, Kawamura 95, Merlet 08, Oh 05, Pott 12b, Tadokoro 02]. Le polytope convexe des distributions admissibles des tensions  $\Lambda$  est alors de dimension 2. Son antécédent  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  par transformation affine  $(\mathbf{N}, \mathbf{t}_p)$  est donc un polygone convexe. Cette constatation rend possible un calcul efficace des caractéristiques géométriques de l'en-

semble (sommets, aire, barycentres etc.), par l'utilisation de considérations géométriques simples. Dans la suite de ce chapitre, seuls des RPC de DDR égal à deux sont considérés.

**Définition 3.6.** Dans le cas où  $r = 2$ , l'antécédent du polytope  $\Lambda$ , noté  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  par la transformation affine  $(\mathbf{N}, \mathbf{t}_p)$ , est un polygone convexe, appelé polygone des solutions admissibles au problème de la distribution des tensions, tel que

$$\mathcal{A}^{-1}(\Lambda) = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{t}_{min} \leq \mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{t}_{max}\} \quad (3.10)$$

Ce polygone est donc défini par les  $2m$  inéquations de (3.9), qui décrivent des demi-plans. Chacune des  $2m$  droites délimitant ces demi-plans correspond à des valeurs de  $\boldsymbol{\lambda}$  dont les images  $\mathbf{t}$  dans  $\mathbb{R}^m$  par  $\mathcal{A}$  sont limites (définition 3.4). Sauf cas particulier où deux droites seraient strictement confondues, les tensions dont les antécédents par  $\mathcal{A}$  sont les points de ces droites possèdent au moins une composante égale à  $t_{min}$  ou à  $t_{max}$ . Une intersection entre deux de ces droites est donc associée à une distribution des tensions limite dont deux composantes sont égales à  $t_{min}$  ou à  $t_{max}$ .

La figure 3.3b illustre le polygone convexe  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  pour une pose donnée du prototype du projet COGIRO, présenté en annexe A.2. Certaines des droites frontières des demi-plans décrits par (3.9) y sont représentées. Les droites magenta continues correspondent à une égalité à gauche de (3.9) et les droites rouges pointillées à une égalité à droite.

Mikelsons *et al.* [Mikelsons 08] ont proposé d'utiliser le barycentre du polytope  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  afin de sélectionner une distribution des tensions "sûre", c'est-à-dire située loin des frontières du polytope. Pour calculer la position du barycentre, la méthode introduite dans [Mikelsons 08] est basée sur la recherche des sommets de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  par résolution des  $2m$  inéquations linéaires du système (3.9). Dans un premier temps, les intersections de toutes les droites délimitant les inégalités du système (3.9), montrées par des croix bleues dans la figure 3.3b, sont calculées. La détermination de ces intersections nécessite de résoudre tous les systèmes non-singuliers de (3.9) parmi les  $C_{2m}^2$  possibles. Dans le cas où  $n = 6$  et  $m = 8$  ( $r = 2$ ), cela représente la résolution de  $C_{16}^2 = 120$  sous-systèmes. [Borgstrom 09b] précise que chaque ligne des équations (3.9) définit deux demi-plans bornés par deux droites parallèles. Ainsi le nombre de sous-systèmes non-singuliers peut se ramener à  $C_{16}^2 - 8 = 112$ . Après avoir été calculées, les images dans  $\mathbb{R}^8$  des solutions  $\boldsymbol{\lambda}$  de ces 112 sous-systèmes, transformées par l'application affine  $\mathcal{A}$ , sont comparées aux bornes  $t_{min}$  et  $t_{max}$ . Les solutions dont les images répondent aux conditions d'admissibilité (3.1) sont des sommets  $\mathbf{s}$  du polygone. Dans un second temps, une triangularisation permet de calculer la position du barycentre  $\boldsymbol{\lambda}_b$  de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ . Le barycentre  $\mathbf{t}_b$  de  $\Lambda$ , image du barycentre de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , est finalement trouvé par transformation affine tel que  $\mathbf{t}_b = \mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}_b$ . Cette méthode fournit une distribution des tensions continue avec un temps de calcul maximal prévisible. En re-

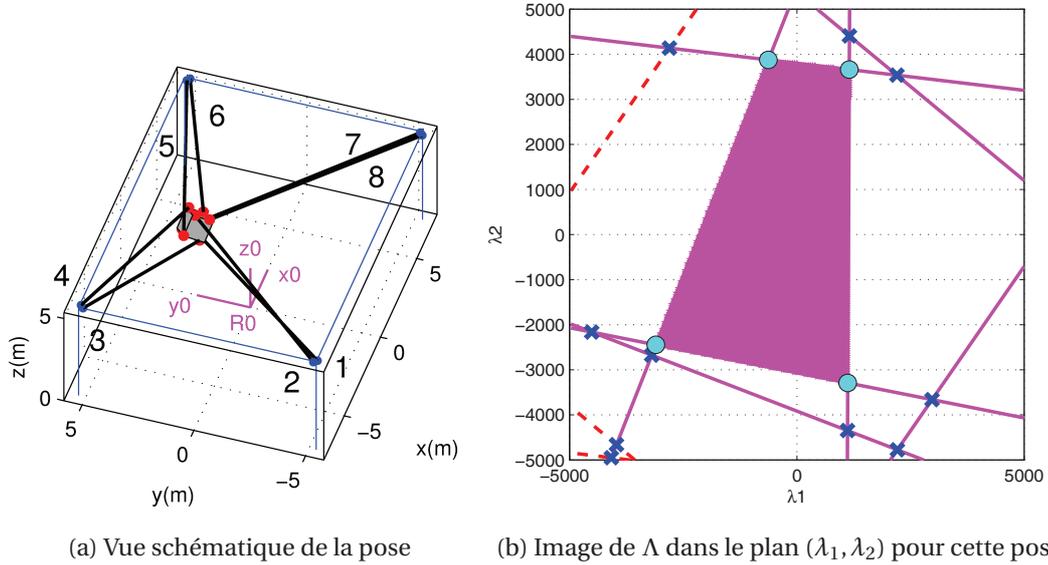


FIGURE 3.3 : Pose  $[1\ 3\ 2,5\ 15\ 35\ 25]^T$  (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ) du démonstrateur suspendu du projet COGIRO, avec une plate-forme pesant 90 kg,  $t_{min} = 100\text{ N}$  et  $t_{max} = 5000\text{ N}$ .

vanche, les nombreuses opérations nécessaires nécessitent un temps de calcul important, à la fois pour la détermination des sommets de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  et pour le calcul de la solution. Cette stratégie - dont l'application expérimentale n'est pas proposée dans [Mikelsons 08] - n'est donc pas satisfaisante pour une commande en temps réel. De plus, notons que les sommets sont déterminés dans un ordre aléatoire.

À l'instar des travaux de Mikelsons *et al.* [Mikelsons 08], un algorithme de distribution des tensions est proposé dans cette thèse avec pour objectif la détermination des sommets du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ . Cependant, à la différence de [Mikelsons 08], nous ne calculons pas l'ensemble des intersections des droites délimitant les inégalités du système (3.9). De plus, les sommets sont déterminés dans l'ordre, ce qui présente un intérêt supplémentaire dans le calcul d'une distribution optimale des tensions, comme discuté à la section 3.3. L'algorithme, développé pour distribuer les tensions des RPC dotés d'une redondance  $r = 2$  et décrit ci-après, fournit des performances compatibles avec une implémentation en environnement temps-réel. Ceci sera démontré par les expériences dont les résultats sont rapportés au chapitre 5.

### 3.2 Algorithme proposé : TurnAround

Une des contributions majeures de cette thèse est de fournir un algorithme efficace, non-itératif et compatible avec les systèmes temps-réels, qui détermine les sommets  $\mathbf{s}$  du polygone convexe  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , dans le cas où  $r = 2$ . Les sommets déterminent la géométrie du polygone et peuvent être utilisés pour trouver une solution optimale au problème de la distribution des tensions. Afin de réduire considérablement les temps de calcul de la méthode de Mikelsons *et al.*, l'algorithme proposé, appelé TurnAround, cherche un premier sommet  $\mathbf{s}_{\text{init}}$  du polygone. L'algorithme suit ensuite les arrêtes du polygone en calculant les coordonnées des sommets suivants, jusqu'à revenir au premier sommet. Il va ainsi *tourner autour* de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  le long de sa frontière. TurnAround présente l'intérêt supplémentaire de trouver les sommets dans l'ordre (horaire ou anti-horaire).

Le organigramme donné à la figure 3.4 présente le fonctionnement général de TurnAround. Les sous-systèmes de la figure 3.4 - encadrés par des doubles barres - sont développés dans la suite de cette section.

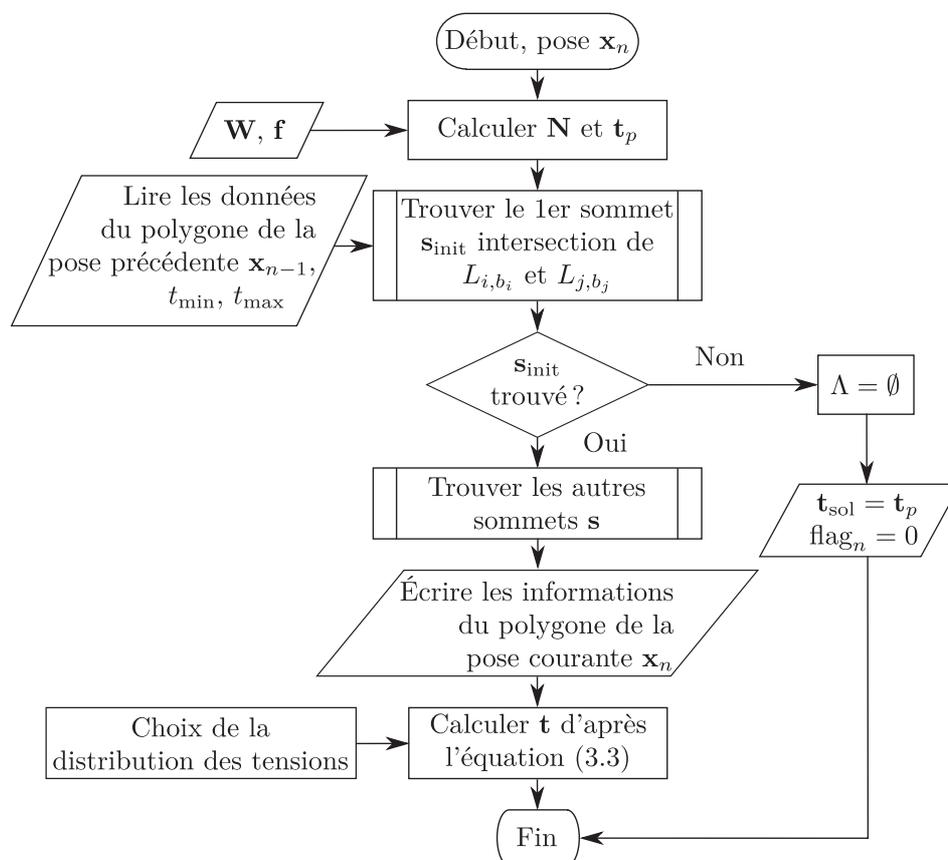


FIGURE 3.4 : Organigramme général de TurnAround.

### 3.2.1 Recherche d'un premier sommet du polygone

Considérons le point  $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}^2$  d'intersection entre les droites  $L_{i,b_i}$  et  $L_{j,b_j}$ ,  $\{i, j\} \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i \neq j$ .  $L_{i,b_i}$  et  $L_{j,b_j}$  sont obtenues à partir de deux inégalités  $i$  et  $j$  de (3.9) parmi les  $2m$  en remplaçant les inégalités par des égalités. Les indices  $b_i$  et  $b_j$  représentent les types de bornes décrits respectivement par les lignes  $L_i$  et  $L_j$ . Si la ligne  $L_i$  est construite à partir d'une égalité à gauche de la  $i^{\text{ème}}$  équation du système (3.9), alors  $b_i = t_{\min}$ . Si la ligne  $L_i$  est construite à partir d'une égalité à droite de la  $i^{\text{ème}}$  équation du système (3.9), alors  $b_i = t_{\max}$ . Les lignes  $L_{i,b_i}$  et  $L_{j,b_j}$  sont donc décrites par les équations

$$\begin{cases} b_i - t_{p_i} = \mathbf{n}_i \boldsymbol{\lambda} \\ b_j - t_{p_j} = \mathbf{n}_j \boldsymbol{\lambda} \end{cases} \quad (3.11)$$

où les vecteurs lignes de dimension 2  $\mathbf{n}_i$  et  $\mathbf{n}_j$  correspondent respectivement aux  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  lignes du noyau  $\mathbf{N}$ . Notons  $\lambda_{ij}$  l'intersection de deux lignes  $L_{i,b_i}$  et  $L_{j,b_j}$ .  $\lambda_{ij}$  est un sommet  $\mathbf{s}_{ij}$  de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  si

$$\mathbf{t}_{\min} - \mathbf{t}_p \leq \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda}_{ij} \leq \mathbf{t}_{\max} - \mathbf{t}_p \quad (3.12)$$

ce qui signifie que  $\lambda_{ij}$  appartient à l'ensemble  $\Omega$ .

La première étape de TurnAround consiste à trouver un premier sommet  $\mathbf{s}_{\text{init}}$  du polygone convexe  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ . On cherche donc un point d'intersection  $\lambda_{ij}$  satisfaisant le système d'équations et d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} b_i - t_{p_i} = \mathbf{n}_i \boldsymbol{\lambda}_{ij} \\ b_j - t_{p_j} = \mathbf{n}_j \boldsymbol{\lambda}_{ij} \\ \mathbf{t}_{\min} - \mathbf{t}_p \leq \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda}_{ij} \leq \mathbf{t}_{\max} - \mathbf{t}_p \end{cases} \quad (3.13)$$

En sélectionnant un couple de câbles  $i$  et  $j$  parmi les  $C_m^2$  couples disponibles, et en remplaçant  $b_i$  et  $b_j$  par les valeurs de  $t_{\min}$  ou  $t_{\max}$ , on résout les deux équations du système (3.13). Le vecteur solution  $\lambda_{ij}$  correspond au sommet  $\mathbf{s}_{\text{init}}$  si et seulement si les deux inégalités du système d'équations (3.13) sont vérifiées. Cette première étape peut nécessiter plusieurs itérations, plusieurs couples de câbles et combinaisons de bornes  $t_{\min}$  et  $t_{\max}$  pouvant être testés avant de trouver le premier sommet. En pratique, on l'accélère considérablement en retenant les sommets du polygone de la pose précédente.

Comme démontré en annexe C, le polytope  $\Lambda$  évolue de manière continue dans le temps le long d'une trajectoire continue de la plate-forme incluse dans l'ETC du RPC. Les droites qui définissent les frontières du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda_n)$  de la pose  $\mathbf{p}_n$  sont généralement les mêmes que celles du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda_{n-1})$  de la pose précédente (excepté lors de l'apparition et de la disparition d'un sommet). À condition que le polytope  $\Lambda_{n-1}$  existe

( $\Lambda_{n-1} \neq \emptyset$ ), le premier sommet de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda_n)$  peut donc être rapidement trouvé à partir des sommets de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda_{n-1})$ . Pour cela, comme illustré par le organigramme de la figure 3.5 qui décrit le fonctionnement de la recherche du premier sommet, si  $\Lambda_{n-1}$  existe, on affecte la valeur booléenne 1 à une variable “flag”. Les indices des lignes qui s’intersectent aux sommets de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda_{n-1})$  sont stockés dans une matrice **ind** et le nombre de sommets dans une variable nommée *ns*. À la pose  $\mathbf{p}_n$ , connaissant **ind** $_{n-1}$  et  $ns_{n-1}$ , un premier sommet de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda_n)$  est généralement déterminé immédiatement. Expérimentalement, on trouve que pour plus de 99,9 % des poses d’une trajectoire, le premier sommet de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est déterminé dès le premier test connaissant les sommets du polygone de la pose précédente. Il est donc possible de limiter la recherche du premier sommet à quelques opérations. De plus, le polygone de la pose initiale de la plate-forme peut être calculé hors-ligne au démarrage du robot et/ou être connu à l’avance.

### 3.2.2 Parcours des frontières du polygone

Une fois le premier sommet  $\mathbf{s}_{init}$  connu, la seconde étape consiste à suivre l’une des deux droites  $L_{i,b_i}$  ou  $L_{j,b_j}$  qui s’intersectent en  $\mathbf{s}_{init}$  jusqu’à rencontrer un nouveau sommet  $\mathbf{s}$  du polygone convexe. Choisissons ici arbitrairement la droite  $L_{i,b_i}$ . L’ensemble des points  $\mathbf{p}$  qui appartiennent à cette droite s’écrit

$$\mathbf{p} = \mathbf{s}_{init} + \alpha \mathbf{n}_{i\perp}^T \quad (3.14)$$

où  $\alpha$  est un scalaire et  $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i\perp}^T = 0$ , c’est-à-dire que  $\mathbf{n}_{i\perp}$  est orthogonal à  $\mathbf{n}_i$  et donne donc la direction de la droite  $L_{i,b_i}$ . Posons  $\mathbf{n}_i = [a \ b]$ . Il existe alors deux vecteurs  $\mathbf{n}_{i\perp}$  possibles, les vecteurs  $\mathbf{n}_{i\perp 1} = [b \ -a]$  et  $\mathbf{n}_{i\perp 2} = [-b \ a]$ . Le but de l’algorithme est ici de parcourir les frontières du polygone. Le choix du vecteur  $\mathbf{n}_{i\perp}$  indique quel sens suivre afin de rester sur les frontières du polygone. En posant  $\alpha \geq 0$  dans l’équation (3.14) on peut distinguer deux cas permettant de déterminer le vecteur  $\mathbf{n}_{i\perp}$  approprié :

- **Cas 1** :  $b_j = t_{min}$ . Dans ce cas, parcourir  $L_{i,b_i}$  à partir de son point d’intersection avec  $L_{j,t_{min}}$  en restant sur la frontière du polygone requiert

$$\begin{aligned} t_{min} - t_{p_j} \leq \mathbf{n}_j \mathbf{p} &\Leftrightarrow t_{min} - t_{p_j} \leq \mathbf{n}_j \mathbf{s}_{init} + \alpha \mathbf{n}_j \mathbf{n}_{i\perp}^T \\ &\Leftrightarrow \mathbf{n}_j \mathbf{n}_{i\perp}^T \geq 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

La dernière équivalence est vérifiée car  $\alpha \geq 0$  et,  $\mathbf{s}_{init}$  appartenant à la droite  $L_{j,t_{min}}$ , on a  $t_{min} - t_{p_j} = \mathbf{n}_j \mathbf{s}_{init}$ . Ainsi, afin de rester sur la frontière du polygone, parmi les deux vecteurs possibles  $\mathbf{n}_{i\perp}$ , le choix se porte sur celui qui vérifie  $\mathbf{n}_j \mathbf{n}_{i\perp}^T \geq 0$ .

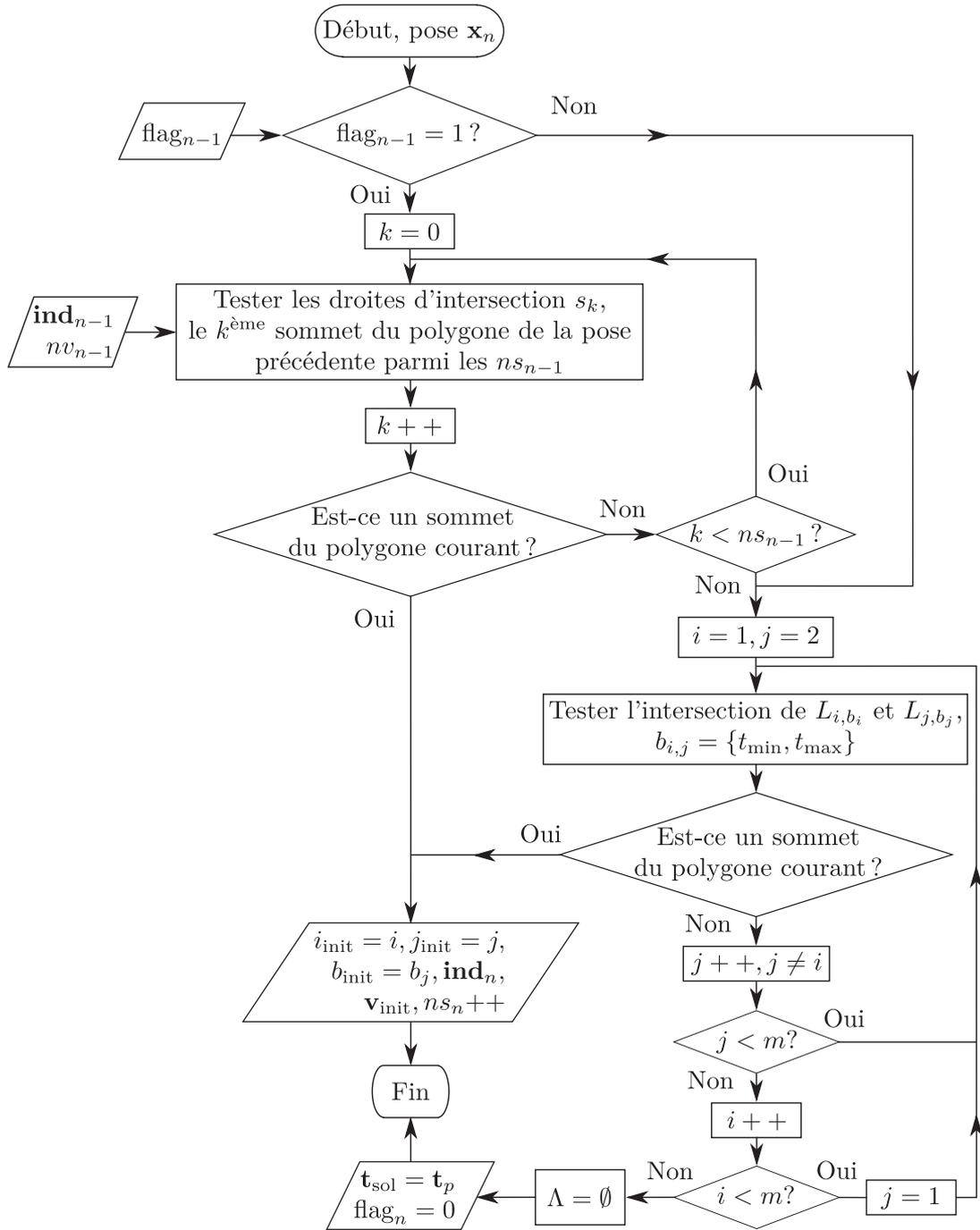


FIGURE 3.5 : Organigramme de recherche du premier sommet.

- **Cas 2** :  $b_j = t_{\max}$ . Cette fois-ci, parcourir  $L_{i,b_i}$  depuis son point d'intersection avec  $L_{j,t_{\max}}$  tout en restant sur la frontière du polygone requiert

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_j \mathbf{p} \leq t_{\max} - t_{p_j} &\Leftrightarrow \mathbf{n}_j \mathbf{s}_{init} + \alpha \mathbf{n}_j \mathbf{n}_{i\perp}^T \leq t_{\max} - t_{p_j} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{n}_j \mathbf{n}_{i\perp}^T \leq 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Comme dans le cas précédent, la dernière équivalence est vérifiée sachant que  $\alpha \geq 0$  et que  $\mathbf{s}_{init}$  appartient à la droite  $L_{j,t_{\max}}$  et donc  $\mathbf{n}_j \mathbf{s}_{init} = t_{\max} - t_{p_j}$ . Ici, le vecteur  $\mathbf{n}_{i\perp}$  qui permet de rester sur la frontière du polygone, parmi les deux vecteurs possibles, est celui qui vérifie  $\mathbf{n}_j \mathbf{n}_{i\perp}^T \leq 0$ .

Une fois la direction à suivre connue on peut, en partant du premier sommet  $\mathbf{s}_{init}$ , chercher le prochain sommet du polygone  $\mathbf{s}$  appartenant à la droite  $L_{i,b_i}$ . Ce dernier est le point  $\mathbf{p}$  de l'équation (3.14) qui correspond à la valeur maximale de  $\alpha \geq 0$  tel que toutes les inégalités du système (3.9) sont vérifiées. Cette valeur maximale correspond également à la plus petite valeur de  $\alpha \geq 0$  telle que l'une des inéquations de (3.9), autre que celle correspondant à  $L_{i,b_i}$ , devienne une égalité.

Considérons la ligne  $k$  de (3.9), telle que  $k \in \{1, \dots, m\} \setminus i$ , et substituons  $\lambda$  par l'expression du point  $\mathbf{p}$  de  $L_{i,b_i}$  donnée par l'équation (3.14)

$$\begin{cases} t_{\min} - t_{p_k} \leq \mathbf{n}_k \mathbf{p} \leq t_{\max} - t_{p_k} \\ \mathbf{p} = \mathbf{s}_{init} + \alpha \mathbf{n}_{i\perp}^T \end{cases} \quad (3.17)$$

ce qui équivaut à écrire

$$t_{\min} - t_{p_k} \leq \mathbf{n}_k \mathbf{s}_{init} + \alpha \mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i\perp}^T \leq t_{\max} - t_{p_k} \quad (3.18)$$

Nous supposons ici qu'aucune des deux lignes  $L_{k,b_k}$  ( $L_{k,t_{\min}}$  et  $L_{k,t_{\max}}$ ), qui délimitent les demi-espaces définis par les deux inégalités de la ligne  $k$  de (3.9), n'intersectent  $L_{i,b_i}$  au point  $\mathbf{s}_{init}$ . Ceci revient à considérer que les sommets  $\mathbf{s}_{init}$  et  $\mathbf{s}$  sont distincts, c'est-à-dire que  $L_{i,b_i}$ ,  $L_{j,b_j}$  et  $L_{k,b_k}$  ne sont pas concourantes. Le cas particulier de trois ou plus de lignes concourantes, récurrent le long de certaines trajectoires, sera traité dans la section 3.2.3. Afin d'exclure ce cas à ce stade de l'étude, on considère  $\alpha$  strictement positif ( $\alpha > 0$ ). On a alors

$$t_{\min} - t_{p_k} < \mathbf{n}_k \mathbf{s}_{init} < t_{\max} - t_{p_k} \quad (3.19)$$

Maintenant, étudions les équations (3.18) et (3.19) :

- Si  $\mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i\perp}^T = 0$ , alors  $\forall \alpha > 0$  les inégalités du système (3.18) ne peuvent pas devenir des égalités ( $L_{i,b_i}$  est parallèle aux deux droites  $L_{k,b_k}$ ).

– Si  $\mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T > 0$ , alors  $\forall \alpha > 0$  on a

$$\mathbf{n}_k \mathbf{s}_{\text{init}} + \alpha \mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T > \mathbf{n}_k \mathbf{s}_{\text{init}} > t_{\min} - t_{p_k} \quad (3.20)$$

Par conséquent, seul le membre de droite de (3.18) peut devenir une égalité. On a donc, pour  $\alpha > 0$ ,  $\mathbf{n}_k \mathbf{s}_{\text{init}} + \alpha \mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T = t_{\max} - t_{p_k}$  lorsque  $\alpha$  prend la valeur

$$\alpha_k = \frac{t_{\max} - t_{p_k} - \mathbf{n}_k \mathbf{s}_{\text{init}}}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T} \quad (3.21)$$

– Si au contraire  $\mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T < 0$ , alors  $\forall \alpha > 0$  on a

$$\mathbf{n}_k \mathbf{s}_{\text{init}} + \alpha \mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T < \mathbf{n}_k \mathbf{s}_{\text{init}} < t_{\max} - t_{p_k} \quad (3.22)$$

Par conséquent, seul le membre de gauche de (3.18) peut devenir une égalité. On obtient donc  $\mathbf{n}_k \mathbf{s}_{\text{init}} + \alpha \mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T = t_{\min} - t_{p_k}$  lorsque  $\alpha$  prend la valeur

$$\alpha_k = \frac{t_{\min} - t_{p_k} - \mathbf{n}_k \mathbf{s}_{\text{init}}}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T} \quad (3.23)$$

Ainsi, le signe  $s_k = \text{sgn}(\mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T)$  permet de savoir quel côté de l'inégalité (3.18) peut devenir une égalité avec  $\alpha > 0$ . Seules  $m$  égalités du système (3.9) parmi les  $2m$  inégalités sont donc calculées. La ligne  $i$ , correspondant à la droite actuellement parcourue, est également éliminée, ce qui ramène le problème au calcul de  $m - 1$   $\alpha_k$ , d'après les équations (3.21) et (3.23). Le scalaire  $\alpha_k$  de plus petite valeur, noté  $\alpha_s$  est donné par

$$\alpha_s = \min_{k, \mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T \neq 0} \left( \frac{b_k - t_{p_k} - \mathbf{n}_k \mathbf{s}_{\text{init}}}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T} \right) \quad (3.24)$$

où,  $b_k$  prend la valeur  $t_{\min}$  ou  $t_{\max}$  selon la valeur  $s_k$ . Les coordonnées du prochain sommet  $\mathbf{s}$  du polygone sont finalement données par

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_{\text{init}} + \alpha_s \mathbf{n}_{i_\perp}^T \quad (3.25)$$

La nouvelle droite  $L_{l,b_l}$  support du polygone, qui coupe la droite  $L_{i,b_i}$  en  $\mathbf{s}$ , est définie par l'ensemble des points  $\mathbf{p}$  tels que  $b_l - t_{p_l} = \mathbf{n}_l \mathbf{p}$ , où

$$l = \underset{k, \mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T \neq 0}{\text{argmin}} \left( \frac{b_k - t_{p_k} - \mathbf{n}_k \mathbf{s}_{\text{init}}}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_{i_\perp}^T} \right) \quad (3.26)$$

et avec  $b_l = t_{\max}$  si  $\mathbf{n}_l \mathbf{n}_{i_\perp}^T > 0$  ou  $b_l = t_{\min}$  si  $\mathbf{n}_l \mathbf{n}_{i_\perp}^T < 0$ .

En partant de ce nouveau sommet  $\mathbf{s}$ , intersection des droites  $L_{i,b_i}$  et  $L_{l,b_l}$ , TurnAround parcourt la droite  $L_{l,b_l}$  (dans la direction appropriée) afin de trouver le prochain sommet,

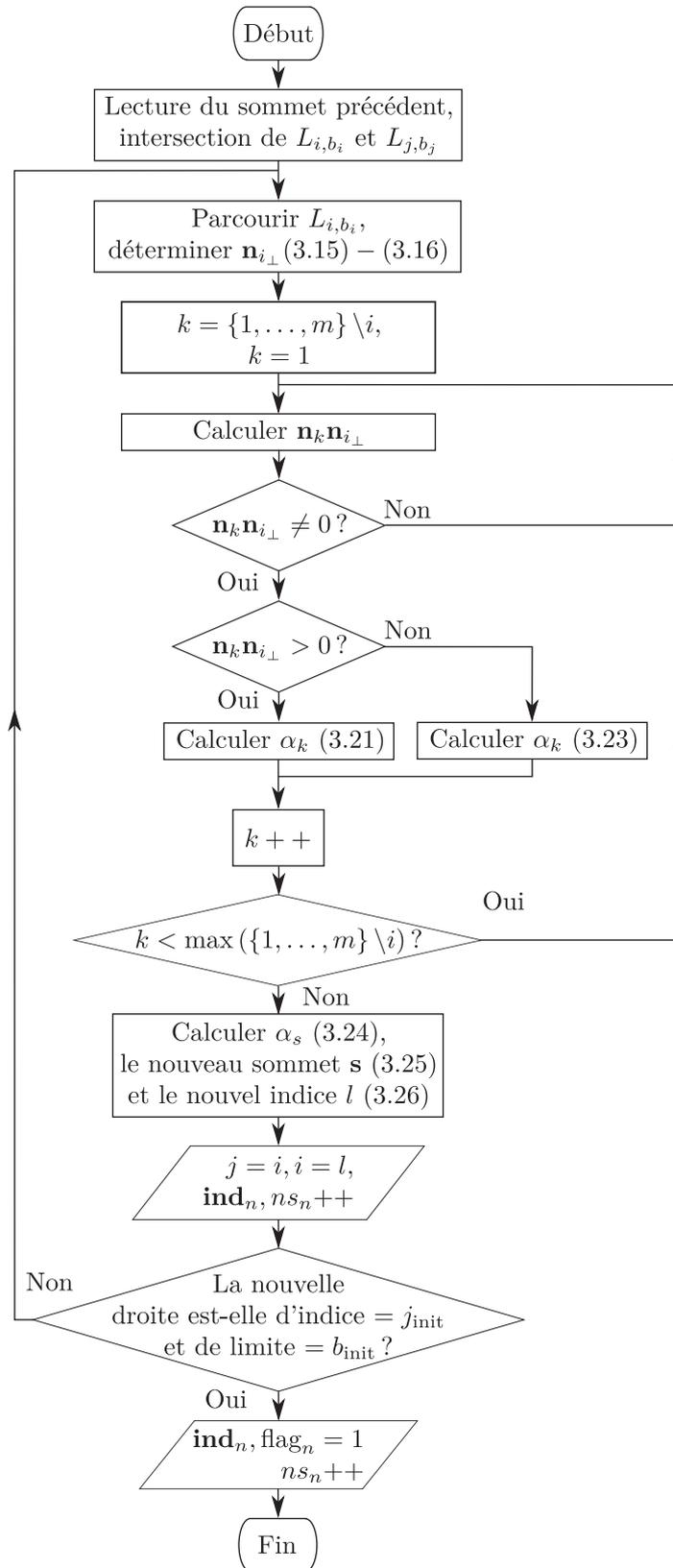


FIGURE 3.6 : Organigramme de recherche des autres sommets du polygone

de la même manière que  $\mathbf{s}$  a été calculé. Ce procédé est répété jusqu'à ce que le sommet déterminé appartienne à la seconde droite du point d'intersection  $\mathbf{s}_{\text{init}}$  ( $L_{j,b_j}$  dans notre exemple). L'algorithme est alors revenu au sommet de départ. À ce stade, les coordonnées de tous les sommets du polygone convexe  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  ont été déterminés. La figure 3.6 illustre par un organigramme la procédure de recherche des sommets du polygone, connaissant un premier sommet  $\mathbf{s}_{\text{init}}$ .

### 3.2.3 Cas particulier de plus de deux droites concourantes

Afin de déterminer la marche à suivre lorsqu'un sommet  $\mathbf{s}$  est à l'intersection de plus de deux droites  $L$  concourantes, nous supposons ici qu'il faut se déplacer d'un sommet  $\mathbf{s}_{ij}$ , intersection de deux droites  $L_{i,b_i}$  et  $L_{j,b_j}$ , vers le prochain sommet  $\mathbf{s}_{jk}$ , intersection de deux droites  $L_{j,b_j}$  et  $L_{k,b_k}$ , en parcourant la droite  $L_{j,b_j}$ . Afin de trouver les coordonnées de  $\mathbf{s}_{jk}$ , TurnAround calcule  $m - 1$  scalaires  $\alpha$  tels que définis par les équations (3.21) et (3.23). La valeur retenue est  $\alpha_s$ , définie par l'équation (3.24). Si deux indices  $k$  et  $l$  vérifient (3.26), deux droites  $L_{k,b_k}$  et  $L_{l,b_l}$  intersectent  $L_{j,b_j}$  au point unique  $\mathbf{s}_{jk} = \mathbf{s}_{jl} = \mathbf{s}_{kl}$ . Ce cas particulier est illustré par la figure 3.7.

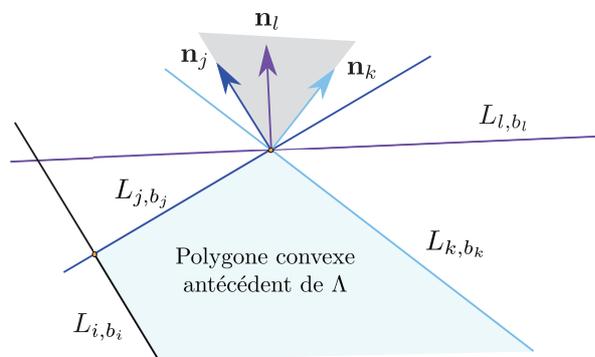


FIGURE 3.7 : Illustration d'un cas où trois droites sont concourantes.

Dans une telle situation, la détermination du sommet  $\mathbf{s}_{jk}$  ne présente pas de difficulté. En revanche le choix de la droite le long de laquelle le prochain sommet sera trouvé ( $L_{k,b_k}$  sur la figure 3.7) nécessite une procédure particulière. Comme illustré par la figure 3.7, seule une des deux droites  $L_{k,b_k}$  ou  $L_{l,b_l}$  supporte le polygone le long d'une de ses arêtes ( $L_{k,b_k}$  dans cet exemple). Il est donc nécessaire d'identifier la droite support du polygone, le long de laquelle continuer la recherche de sommets. Il est à noter que ce cas de figure est courant le long d'une trajectoire. En effet, le nombre de sommets évolue régulièrement, principalement lors de variations de l'orientation de la plate-forme. Les sommets additionnels apparaissent et disparaissent au niveau d'autres sommets, tel qu'illustré par la figure 3.8.

Afin de sélectionner la droite appropriée, on effectue une simple analyse géométrique. On choisit un vecteur  $\mathbf{n}_j$ , normal à la droite  $L_{j,b_j}$  et dirigé vers l'extérieur du polygone. Dès que deux coefficients  $\alpha$  (équations (3.21) et (3.23)) sont égaux et vérifient l'équation (3.24) (dans notre exemple  $\alpha_k = \alpha_l = \alpha_s$ ), on détermine les vecteurs  $\mathbf{n}_k$  et  $\mathbf{n}_l$  correspondants, tels qu'illustrés par la figure 3.7. Ces trois vecteurs ( $\mathbf{n}_j$ ,  $\mathbf{n}_k$  et  $\mathbf{n}_l$ ), pris deux à deux, forment des cônes.

**Définition 3.7.** Un cône  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  est un ensemble non-nul des vecteurs  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  qui pour tout ensemble fini de vecteurs contient leurs combinaisons linéaires avec des coefficients non-négatifs, tel que

$$\mathcal{C}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2, (\alpha_1, \alpha_2) \geq 0\} \tag{3.27}$$

La figure 3.7 donne un exemple de cône,  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_j, \mathbf{n}_k)$  montré en gris. Si  $\mathbf{n}_l$  est strictement contenu dans le cône  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_j, \mathbf{n}_k)$  généré par les vecteurs  $\mathbf{n}_j$  et  $\mathbf{n}_k$  (cas de l'exemple), alors la droite  $L_{l,b_l}$  n'est support du polygone qu'au point d'intersection (sommet)  $\mathbf{s}_{jl}$ . Si au contraire  $\mathbf{n}_l$  n'est pas contenu à l'intérieur du cône  $\mathcal{C}(\mathbf{n}_j, \mathbf{n}_k)$ , la droite  $L_{l,b_l}$  est bien support du polygone le long d'une de ses arêtes, et le prochain sommet sera cherché le long de cette droite. Notons que dans le cas très particulier où  $\mathbf{n}_j$  et  $\mathbf{n}_k$  seraient colinéaires, alors chacune des deux droites  $L_{k,b_k}$  et  $L_{l,b_l}$  conduirait au prochain sommet, ces deux droites étant confondues.

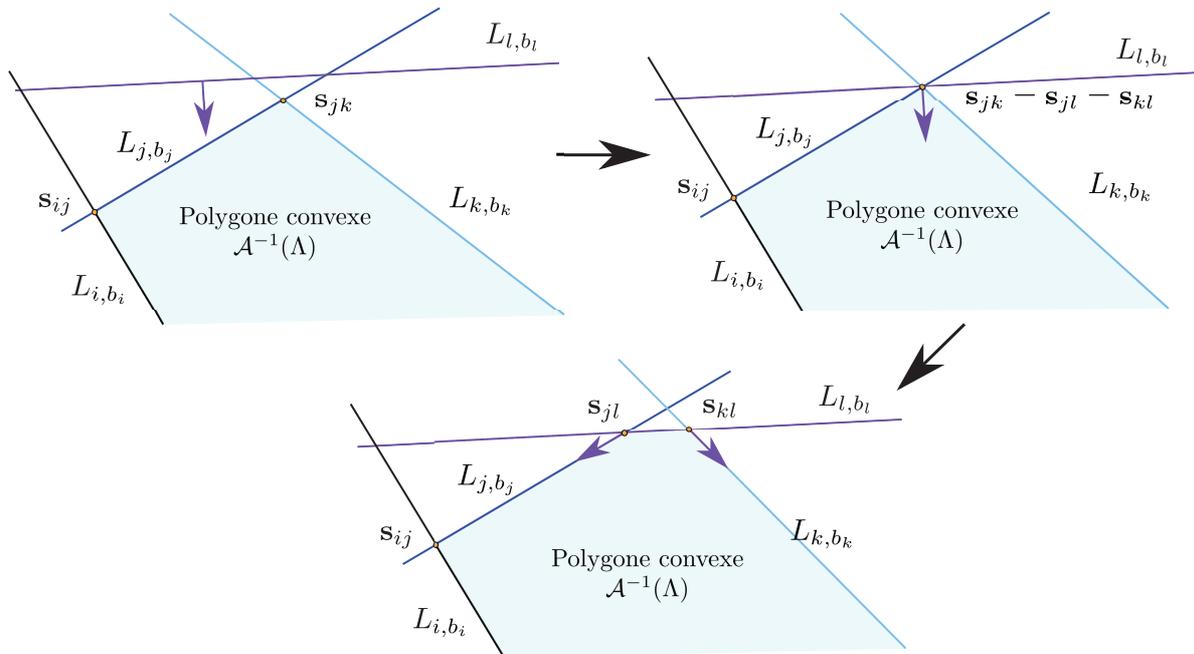


FIGURE 3.8 : Processus typique d'apparition d'un nouveau sommet.

Finalement, dans le cas où plus de trois droites s'intersectent au même sommet, la sélection de la prochaine droite à suivre s'effectue de manière séquentielle, en testant des triplets de vecteurs normaux et en éliminant systématiquement la droite dont le vecteur normal  $\mathbf{n}$  se situe dans le cône généré par les deux autres vecteurs normaux.

### 3.3 Choix de la distribution optimale des tensions

Une fois connue la géométrie du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  d'une pose  $\mathbf{p}$  donnée, une solution optimale au problème de la distribution des tensions, continue et admissible, est calculée. Le choix de la solution optimale dépend de certains critères. Ces derniers peuvent varier d'une application à l'autre, selon la configuration du RPC ou les préférences de l'utilisateur. La connaissance de la géométrie (c'est-à-dire des sommets) du polygone convexe des distributions des tensions admissibles,  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , permet de trouver efficacement différentes solutions optimales, sans passer par des algorithmes d'optimisation numérique. Il est par exemple possible de calculer la solution minimisant la norme 1 ou la norme 2 des tensions sans utiliser de programmation linéaire ou quadratique. La solution minimisant la norme 1 de  $\mathbf{t}$ , un sommet du polytope  $\Lambda$ , est nécessairement limite - deux de ses composantes sont égales à  $t_{\min}$  ou  $t_{\max}$ . De plus, comme détaillé à la section 3.3.2, si  $\mathbf{t}_p$  n'est pas inclus dans  $\Lambda$ , alors la solution minimisant la norme 2 de  $t$  est également limite.

Afin de donner une distribution des tensions éloignée des bornes minimales  $t_{\min}$  et maximales  $t_{\max}$ , il est possible de sélectionner le centre géométrique du polygone, aussi éloigné que possible de l'ensemble de ses sommets. Une autre solution, le barycentre pondéré du polygone, permet un compromis entre la minimisation des tensions et l'éloignement des bornes minimales et maximales.

La contribution de cette section est de donner des méthodes de calcul non-itératives, simples et efficaces, de ces solutions optimales à partir de la connaissance des sommets du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  apportée par l'algorithme TurnAround (section 3.2). Les solutions optimales calculées dans  $\Lambda \in \mathbb{R}^2$  seront notées  $\boldsymbol{\lambda}^*$  et transformées dans l'espace des tensions de  $\mathbb{R}^m$  par l'application affine  $\mathcal{A}$ , telles que

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{W}^+ \mathbf{f} + \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda}^* \quad (3.28)$$

#### 3.3.1 Solution minimisant la norme 1

Afin de distribuer les tensions d'un RPC à redondance d'actionnement, la programmation linéaire est majoritairement employée [Shiang 00, Oh 03, Fang 04, Borgstrom 09b, Vafaei 10]. Cette formulation a pour principal intérêt de minimiser la somme des tensions

des câbles le long d'une trajectoire. La solution de la programmation linéaire au problème de la distribution des tensions peut être efficacement retrouvée grâce à la connaissance des sommets de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ .

La solution d'un problème d'optimisation linéaire sur un polygone convexe est généralement un sommet. Pour certaines orientations du polygone, la valeur optimale est la même le long d'un segment [Nocedal 06]. Ce comportement peut entraîner des discontinuités, la solution passant d'un sommet à un autre. Le problème de la distribution des tensions écrit sous la forme d'un problème d'optimisation linéaire prend la forme

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{t}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{t} \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{W}\mathbf{t} = \mathbf{f} \\ & \mathbf{t}_{\min} \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{t}_{\max} \end{aligned} \quad (3.29)$$

où  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{t}$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^m$ . Généralement, la fonction coût  $\mathbf{c}^T \mathbf{t}$  à minimiser est la somme des tensions des câbles telle que  $\mathbf{c} \triangleq \mathbf{1}_{m \times 1}$ . L'équation (3.3) permet de réécrire le problème (3.29), tel que

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & \mathbf{1}^T (\mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\boldsymbol{\lambda}} \|\mathbf{t}_p\|_1 + \mathbf{1}^T \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} = \min_{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{1}^T \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{W}\mathbf{t} = \mathbf{f} \\ & \mathbf{t}_{\min} - \mathbf{t}_p \leq \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{t}_{\max} - \mathbf{t}_p \end{aligned} \quad (3.30)$$

TurnAround (section 3.2) peut être adapté au problème d'optimisation linéaire (3.30). Connaissant les coordonnées des sommets du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , la solution au problème (3.30) est directement déterminée en calculant le sommet  $\boldsymbol{\lambda}_{n_1}^*$  qui minimise la fonction objectif  $\mathbf{1}^T \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}$ . Afin d'y parvenir, on calcule dans un premier temps un sommet initial. On trouve ensuite un second sommet en se déplaçant le long de l'arrête du polygone qui fait décroître la fonction objectif  $\mathbf{1}^T \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}$ . L'algorithme continue ainsi jusqu'à atteindre un sommet qui fait croître la fonction objectif. Le sommet précédent correspond alors à la solution optimale  $\boldsymbol{\lambda}_{n_1}^*$ . Finalement, on ramène la solution  $\boldsymbol{\lambda}_{n_1}^*$  dans  $\mathbb{R}^m$  afin de calculer la distribution des tensions de norme 1 minimale  $\mathbf{t}_{n_1}^* = \mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}_{n_1}^*$ . La figure 3.9 illustre la recherche de la solution au problème d'optimisation linéaire, où les droites en pointillés représentent les contours de la fonction objectif. Cette procédure revient à résoudre le problème d'optimisation linéaire (3.30) avec la méthode du simplexe en dimension 2 [Nocedal 06].

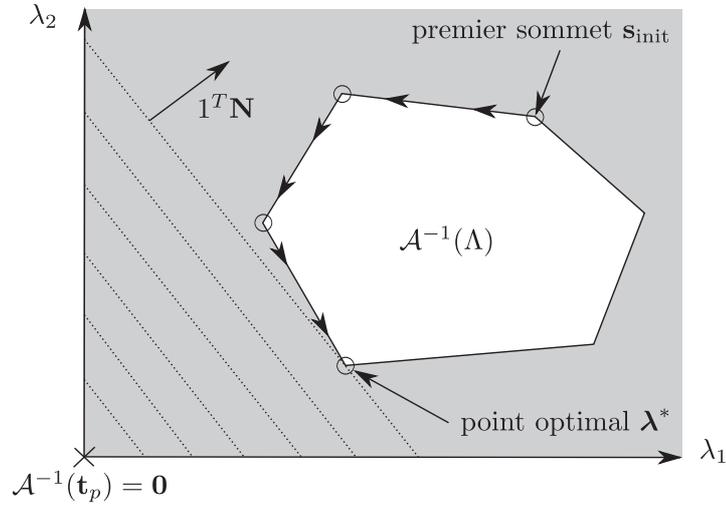


FIGURE 3.9 : Une solution au problème d'optimisation linéaire de la distribution des tensions.

### 3.3.2 Solution minimisant la norme 2

Par la connaissance des sommets du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , la distribution des tensions minimisant la norme 2 de  $\mathbf{t}$  peut être déterminée efficacement en un temps de calcul prévisible (borné). Le problème de la distribution des tensions, formulé en problème d'optimisation quadratique, devient

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{t}} \mathbf{t}^T \mathbf{t} \\ & \text{t.q. } \mathbf{W}\mathbf{t} = \mathbf{f} \\ & \mathbf{t}_{\min} \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{t}_{\max} \end{aligned} \quad (3.31)$$

D'après l'équation (3.3), la fonction objectif  $\mathbf{t}^T \mathbf{t}$  peut se réécrire

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^T \mathbf{t} &= (\mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda})^T (\mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}) \\ &= \mathbf{t}_p^T \mathbf{t}_p + 2\mathbf{t}_p^T \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \\ &= \|\mathbf{t}_p\|^2 + \|\boldsymbol{\lambda}\|^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

En effet, on rappelle que  $\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \mathbb{1}_m$  et que  $\mathbf{t}_p^T \mathbf{N} = \mathbf{0}$ . De plus, pour une pose donnée,  $\mathbf{t}_p$  est une constante. On peut alors reformuler le problème de la manière suivante

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\lambda}} \|\boldsymbol{\lambda}\|^2 \\ & \text{t.q. } \mathbf{W}\mathbf{t} = \mathbf{f} \\ & \mathbf{t}_{\min} - \mathbf{t}_p \leq \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{t}_{\max} - \mathbf{t}_p \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ainsi, la solution optimale  $\boldsymbol{\lambda}_{n_2}^*$  au problème (3.33) est le point où les contours de la fonction objectif  $\|\boldsymbol{\lambda}\|^2$  (ici des cercles) sont tangents à l'enveloppe du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ . Cette solution est illustrée à la figure 3.10.

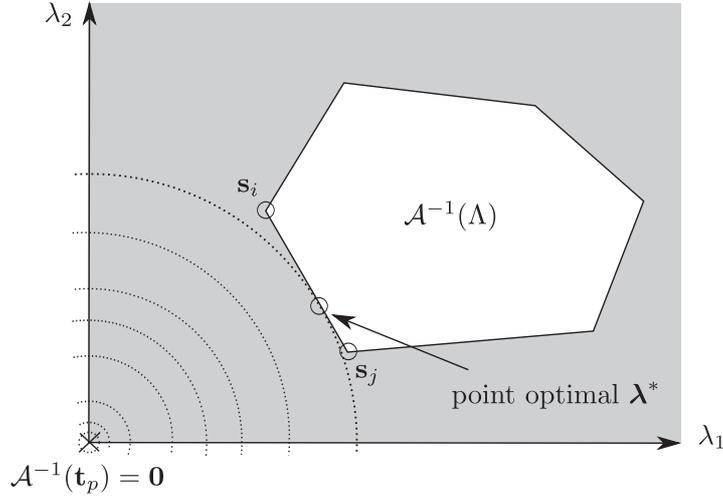


FIGURE 3.10 : Une solution au problème d'optimisation quadratique de la distribution des tensions.

D'après l'équation (3.32),  $\mathbf{t}_p$  étant le centre des cercles contours de la fonction objectif, si l'antécédent par  $\mathcal{A}$  de la solution particulière  $\mathbf{t}_p$  est inclus dans le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , alors la solution optimale de (3.33) est  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{t}_p$  est la solution optimale de (3.31). Si au contraire  $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{t}_p)$  n'est pas inclus dans  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , la solution optimale de (3.33) appartient à une arête de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ . Dans  $\mathbb{R}^2$ , on définit une arête du polygone reliant une paire de sommets voisins  $\{\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j\}$ ,  $\{i, j\} \in \{0, \dots, q\}$   $i \neq j$ ,  $q$  étant le nombre de sommets du polygone, par

$$[\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j] = \{\beta \mathbf{s}_j + (1 - \beta) \mathbf{s}_i \mid 0 \leq \beta \leq 1\} \quad (3.34)$$

La projection orthogonale de  $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{t}_p) = \mathbf{0}$  sur le segment de droite reliant  $\mathbf{s}_i$  et  $\mathbf{s}_j$  est défini par

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{ij} &= \mathbf{s}_i + \beta_{ij}(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i) \\ \beta_{ij} &= \frac{\|\mathbf{s}_i\|^2 - \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_j}{\|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i\|^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

On cherche la solution de norme 2 minimale pour le segment de droite  $[\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j]$ . On distingue donc trois cas de figure :

- Si  $\beta_{ij} < 0$ , la projection orthogonale de  $\mathbf{t}_p$  résulte en un point de la droite support du segment  $[\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j]$  situé en dehors du segment. Ce point, hors du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , n'est donc pas admissible. Dans ce cas, le point du segment  $[\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j]$  minimisant  $\|\boldsymbol{\lambda}\|_2$  est le point extrême  $\mathbf{s}_i$ .
- Si  $\beta_{ij} > 1$ , en suivant le même raisonnement que pour le cas précédent, la solution minimisant la norme 2 de  $\boldsymbol{\lambda}$  sur le segment  $[\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j]$  est le sommet  $\mathbf{s}_j$ .

- Si  $0 \leq \beta_{ij} \leq 1$ , alors le point du segment  $[\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j]$  dont la norme 2 est minimale correspond à la projection  $\mathbf{p}_{ij}$  de  $\mathbf{t}_p$  sur le segment calculée par l'équation (3.35).

Ainsi, l'équation (3.35) permet de trouver le point qui minimise la norme 2 de  $\boldsymbol{\lambda}$  le long de chaque segment (arrête) du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ . Parmi tous ces points, la solution optimale  $\boldsymbol{\lambda}_{n_2}^*$  de (3.33) est le point de norme 2 minimale. Finalement, on ramène la solution  $\boldsymbol{\lambda}_{n_2}^*$  dans  $\mathbb{R}^m$  afin de calculer la distribution des tensions de norme 2 minimale  $\mathbf{t}_{n_2}^* = \mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}_{n_2}^*$ . Ces calculs sont simples et leur nombre est déterminé, permettant ainsi de borner le temps de calcul nécessaire à la recherche de la solution optimale. Le temps de calcul, restreint et prévisible, rend cette solution optimale compatible avec une application en temps réel. Les preuves de continuité de la distribution des tensions minimisant la norme 2 de  $\mathbf{t}$  sont fournies en annexe C.

### 3.3.3 Centre analytique du polygone

Le centre géométrique d'un ensemble convexe tel que le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  peut avoir différentes définitions [Kaiser 94], incluant le barycentre, le minimax, le point de Steiner ou encore le centre de Chebyshev. Pour une utilisation pratique en temps réel, le centre choisi doit pouvoir être calculé rapidement et évoluer de façon continue lorsque les contraintes du problème (le polytope convexe  $\Lambda$ ) varient de façon continue. [Kaiser 94] définit pour cela le *centre analytique* :

**Définition 3.8.** *Un point  $\mathbf{p}$  de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  dans  $\mathbb{R}^2$  est un centre analytique de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  s'il vérifie les conditions suivantes :*

1.  $\mathbf{p}$  est un élément de l'ensemble convexe  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  et est "centré" dans  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  ;
2.  $\mathbf{p}$  dépend de manière continue des contraintes du problème définissant  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  ;
3.  $\mathbf{p}$  peut être calculé en un temps polynomial ;
4.  $\mathbf{p}$  est un invariant affine.

La détermination de la grande majorité des centres analytiques proposés dans [Kaiser 94] nécessite d'utiliser un algorithme d'optimisation numérique. Or, par souci de compatibilité avec les systèmes temps-réels, il est préférable de ne pas dépendre de bibliothèques d'optimisation numérique particulières. En outre, le barycentre d'un polygone convexe de  $\mathbb{R}^2$  est un centre analytique [Kaiser 94] puisqu'il vérifie toutes les propriétés de la définition 3.8. La recherche de ce point unique, aussi éloigné que possible des arêtes du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , peut s'exprimer sous la forme d'un problème d'optimisation [Barnes 99, Sonnevend 85]

$$\max_{\mathbf{p}} \log \prod d_i \quad (3.36)$$

où les  $d_i$  sont les distances Euclidiennes du point  $\mathbf{p}$  aux droites supportant le polygone, définies par (3.9). Le barycentre de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  - également appelé centroïde en géométrie -, est donc une solution optimale et continue au problème de la distribution des tensions. Les preuves de continuité sont fournies en annexe C.

La première étape du calcul des coordonnées du barycentre  $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2]^T$  d'un ensemble  $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^2$  consiste généralement en une décomposition géométrique en  $n$  éléments plus simples  $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{E}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dont les barycentres  $\mathbf{b}_i$  peuvent être facilement calculés. Pondéré par l'aire  $A_i$  de l'élément correspondant  $\mathcal{E}_i$  puis moyenné, les coordonnées du barycentre  $\mathbf{b}$  de  $\mathcal{E}$  sont calculées par

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n b_{1_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad b_2 = \frac{\sum_{i=1}^n b_{2_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (3.37)$$

Afin de réaliser la décomposition géométrique de l'ensemble  $\mathcal{E}$ , des éléments de type simplexe - des éléments géométriques clos de complexité minimale - sont généralement choisis. En dimension 2, un simplexe est un triangle, l'élément clos le plus simple [Ziegler 95]. Cette méthode est considérée par Mikelsons *et al.* dans [Mikelsons 08], où le polygone convexe  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est triangularisé. L'aire de chaque triangle est calculée afin de pondérer les barycentres correspondants. Cependant, ces opérations impliquent des temps de calcul importants.

Le calcul du barycentre peut être notablement accéléré. En effet, connaissant les coordonnées des  $q$  sommets  $\mathbf{s}_p = [s_{p_1} \ s_{p_2}]^T$ ,  $p \in \{1, \dots, q\}$  d'un polygone convexe, il est possible de déterminer son barycentre par application de la formule suivante [Lee 09]

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{6A} \sum_{p=0}^{q-1} (s_{p_1} + s_{(p+1)_1}) (s_{p_1} s_{(p+1)_2} - s_{(p+1)_1} s_{p_2}) \\ b_2 = \frac{1}{6A} \sum_{p=0}^{q-1} (s_{p_2} + s_{(p+1)_2}) (s_{p_1} s_{(p+1)_2} - s_{(p+1)_1} s_{p_2}) \end{cases} \quad (3.38)$$

où  $A$  correspond à l'aire du polygone, définie par

$$A = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{q-1} (s_{p_1} s_{(p+1)_2} - s_{(p+1)_1} s_{p_2}) \quad (3.39)$$

Cette formulation nécessite cependant que les sommets soient classés dans l'ordre, c'est-à-dire dans le sens horaire ou anti-horaire de parcours de l'enveloppe du polygone. Cette contrainte est vérifiée par TurnAround dont le principe même est de parcourir cette enveloppe tout en déterminant les coordonnées des sommets un à un dans l'ordre du sens

de parcours. Cette méthode permet de diviser en moyenne par 17 le temps de calcul nécessaire à la détermination du barycentre, connaissant les sommets de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , par rapport à la méthode décrite dans [Mikelsons 08]. Ces résultats sont rapportés dans le tableau 3.5 de la section 3.5.

Une fois le barycentre  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda}_b^*$  du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  déterminé dans l'espace affine de dimension 2, celui-ci est ramené dans l'espace de dimension  $m$  des tensions par application de la transformation affine  $\mathcal{A} = (\mathbf{N}, \mathbf{t}_p)$ . La distribution des tensions  $\mathbf{t}_b^*$  correspondante est ainsi  $\mathbf{t}_b^* = \mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}_b^*$ .

La sélection du barycentre du polytope  $\Lambda$  pour calculer la distribution des tensions des câbles présente deux intérêts majeurs. L'évolution du polytope, et donc de son barycentre, est continue dans le temps le long d'une trajectoire continue incluse dans l'ETC du RPC, comme démontré dans l'annexe C. La distribution des tensions résultante est donc également continue [Kaiser 94, Ziegler 95, Verhoeven 02], l'application affine  $\mathcal{A}$  conservant le barycentre. De plus, la solution est aussi éloignée que possible des arrêtes de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , dont les images par  $\mathcal{A}$  correspondent aux arrêtes de  $\Lambda$  (constituées de tensions limites).

### 3.3.4 Barycentre pondéré

On peut également souhaiter un point inclus dans le polygone, évoluant de manière continue dans le temps (le long d'une trajectoire), mais plus proche des bornes inférieures  $t_{\min}$  que le barycentre, afin de diminuer les valeurs des tensions des câbles. Cette dernière propriété est intéressante pour les RPC de type pleinement contraint. En effet, le polytope  $\Lambda$  étant généralement beaucoup plus grand que celui d'un RPC en configuration suspendue (voir section 3.1.3), la solution calculée à partir du barycentre de  $\Lambda$  peut inclure des tensions inutilement élevées. En effet, la consommation énergétique des moteurs d'un RPC est directement liée aux tensions commandées des câbles. Une stratégie possible est de calculer un barycentre pondéré  $\boldsymbol{\lambda}_{bp}^*$  du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  à partir de ses sommets, comme proposé dans [Bruckmann 10]. Le barycentre pondéré  $\boldsymbol{\lambda}_{bp}^*$  est défini par une fonction vectorielle de Leibniz associée au système  $\{(\mathbf{s}_p, w_p)_{p=1\dots q}\}$ ,  $q$  étant le nombre de sommets  $\mathbf{s}$  de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$

$$\boldsymbol{\lambda}_{bp}^* = \frac{\sum_{p=1}^q \mathbf{s}_p w_p}{\sum_{p=1}^q w_p} \quad (3.40)$$

où  $w_p$  est le poids associé au sommet  $\mathbf{s}_p$ . Comme il a été démontré à la section 3.3.2, plus la norme 2 de  $\boldsymbol{\lambda}$  est grande, plus  $\|\mathbf{t}\|_2$  est grande. Afin de diminuer les tensions des câbles obtenues par image du barycentre  $\boldsymbol{\lambda}_b^*$  de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , on peut associer à chacun de ses som-

met un poids inversement proportionnel à la norme 2 du sommet, tel que  $w_p = 1 / \|\mathbf{s}_p\|_2$ . Ainsi, plus la norme d'un sommet est importante, plus le poids associé à ce sommet est faible.

En revanche, cette formulation entraîne des discontinuités. Le long d'une trajectoire, le nombre de sommets  $\mathbf{s}$  de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  peut varier. Prenons l'exemple de la figure 3.8 de la section 3.2.3 et considérons le sommet  $\mathbf{s}_{jk}$  du polytope au temps  $t$ . À  $t + \Delta t$ , les nouveaux sommets  $\mathbf{s}_{jl}$  et  $\mathbf{s}_{kl}$  apparaissent en se substituant au sommet  $\mathbf{s}_{jk}$ , ce qui équivaut à compter deux fois le poids de  $\mathbf{s}_{jk}$  ( $\mathbf{s}_{jl}$  et  $\mathbf{s}_{kl}$  étant très proches).  $\lambda_{bp}^*$  va donc subitement se rapprocher des sommets  $\mathbf{s}_{jl}$  et  $\mathbf{s}_{kl}$ .

Afin d'y remédier, les  $q$  sommets  $\mathbf{s}_p$  sont pondérés par la norme 2 de leur distance avec les deux sommets voisins  $\mathbf{s}_{p_1}$  et  $\mathbf{s}_{p_2}$  [Bruckmann 10]

$$w_p = \frac{\sum_{r=1}^2 \|\mathbf{s}_p - \mathbf{s}_{p_r}\|_2}{\|\mathbf{s}_p\|_2} \quad (3.41)$$

Le numérateur de l'équation (3.41) diminue bien le poids d'un sommet  $p$  proportionnellement à sa proximité aux deux sommets voisins  $\mathbf{s}_{p_1}$  et  $\mathbf{s}_{p_2}$ . Le dénominateur permet de réduire le poids en fonction de la norme 2 du sommet  $\mathbf{s}_p$  considéré.

Finalement, on ramène la solution  $\lambda_{bp}^*$  dans  $\mathbb{R}^m$  afin de calculer la distribution des tensions issue du barycentre pondéré  $\mathbf{t}_{bp}^* = \mathbf{t}_p + \mathbf{N}\lambda_{bp}^*$ . La preuve de continuité de la solution issue du barycentre pondéré est fournie en annexe C.

### 3.3.5 Comparaison des solutions optimales

Afin de comparer les différentes distributions de tensions proposées en fonction de la configuration du RPC, considérons une pose particulière de la plate-forme de deux robots, REELAX8-S et REELAX8-PC (voir annexe A). Ces deux robots sont des RPC à redondance d'actionnement dotés de huit câbles pour six DDL. REELAX8-S est en configuration suspendue, tandis que REELAX8-PC est pleinement contraint. La figure 3.11 illustre la pose choisie pour chacun de ces deux robots.

Les figures 3.12 et 3.13 donnent les positions respectives des quatre différentes solutions optimales  $\lambda^*$  dans l'espace affine de dimension 2 des solutions  $\lambda$  de l'équation (3.3) en fonction de la configuration du robot. Sur ces figures issues de simulations, le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est montré en magenta. Les droites magenta et rouges représentent respectivement les droites  $L_{i,t_{\min}}$ ,  $i \in \{1 \dots m\}$ , et  $L_{i,t_{\max}}$ . Leurs intersections correspondent aux croix bleues. Les points cyans sont les sommets des polygones.

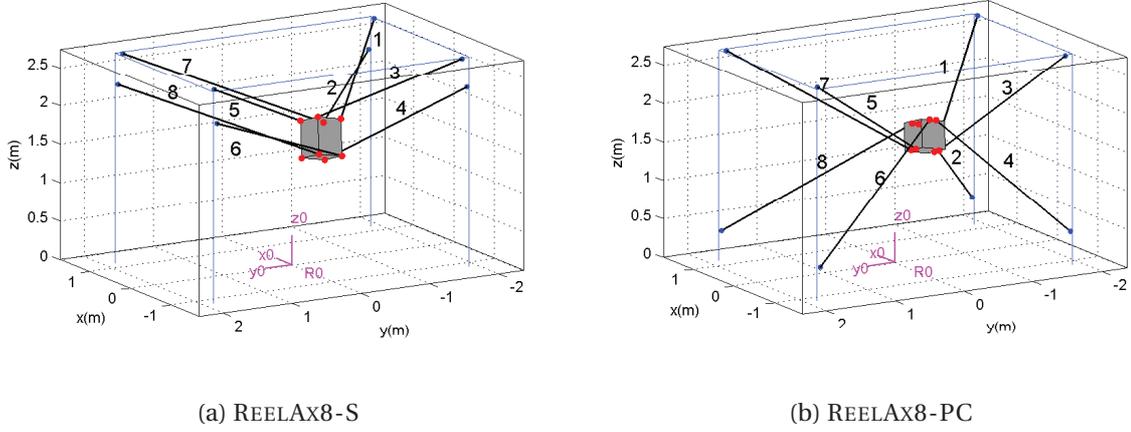


FIGURE 3.11 : Vue schématique de la pose  $[0,3 \ -0,6 \ 1,5 \ 10 \ 20 \ 5]^T$  (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ) des RPC REELAX8-S, suspendu et REELAX8-PC, pleinement contraint.

Les solutions  $\lambda^*$  sont repérées de la façon suivante

- rond rouge :  $\lambda_b^*$ , barycentre du polygone (section 3.3.3) ;
- losange vert :  $\lambda_{bp}^*$ , barycentre pondéré du polygone (section 3.3.4) ;
- triangle noir :  $\lambda_{n_1}^*$ , solution minimisant la norme 1 du problème (3.30) (section 3.3.1) ;
- carré orange :  $\lambda_{n_2}^*$ , solution minimisant la norme 2 du problème (3.33) (section 3.3.2).

On observe, comme discuté à la section 3.1, que pour une pose identique de la plateforme des deux robots, le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  a une aire bien plus importante en configuration pleinement contrainte qu'en configuration suspendue. Les possibilités de distribution des tensions sont donc bien moindres en configuration suspendue. D'après la figure 3.12, les solutions  $\lambda_b^*$ ,  $\lambda_{bp}^*$  et  $\lambda_{n_2}^*$  au problème de la distribution des tensions sont d'ailleurs pratiquement équivalentes. En effet, dans le cas d'un RPC en configuration suspendue, le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est généralement centré proche de  $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{t}_p) = \mathbf{0}$ , origine du plan des  $\lambda$  et solution du problème (3.31). En revanche, la solution qui minimise la norme 1,  $\lambda_{n_1}^*$ , est bien située sur un sommet du polygone et se trouve ainsi très éloignée de la solution minimisant la norme 2. Par conséquent, parmi les quatre solutions calculées ici, la solution minimisant la norme 1 a également la norme 2 la plus élevée. Cette solution est fortement déconseillée pour les RPC suspendus.

En effet, de petits mouvements du RPC peuvent entraîner un brusque déplacement de  $\lambda_{n_1}^*$  vers un autre sommet du polygone, ce qui se traduit par une forte discontinuité. Comme rapporté au tableau 3.1, qui présente les distributions des tensions obtenues avec les solutions optimales proposées, la norme 2 de  $\lambda_{n_1}^*$  est la plus élevée. Or, dans les deux

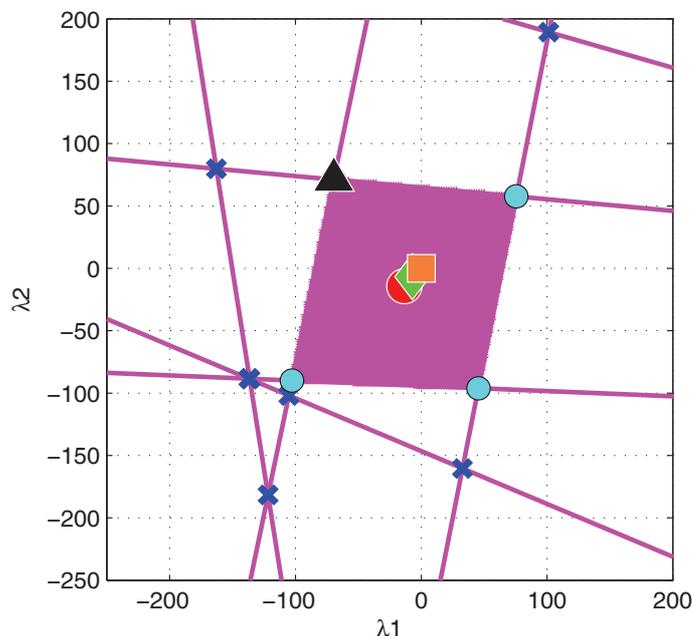


FIGURE 3.12 : Polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  correspondant à la pose  $[0,3 \ -0,6 \ 1,5 \ 10 \ 20 \ 5]^T$  (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ) du RPC suspendu REELAX8-S, avec une plateforme de 20 kg,  $t_{\min} = 0$  N et  $t_{\max} = 500$  N.

configurations, l'image d'un sommet correspond bien à une distribution limite des tensions, avec deux tensions nulles (car  $t_{\min} = 0$ ). Lors d'un changement de sommet, les variations importantes des tensions des câbles passant d'une tension nulle à une tension élevée, et inversement, engendre de fortes vibrations de la plate-forme.

On observe plus facilement les différentes solutions sur la figure 3.13, illustrant le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  du RPC pleinement contraint REELAX8-PC. Sur cette figure, le barycentre - le centre analytique de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  -, correspond bien au centre géométrique du polygone (rond rouge). Le barycentre pondéré (losange vert) est inclus dans le polygone mais de norme inférieure à celle du barycentre. Les solutions minimisant les normes 1 (triangle noir) et 2 (carré orange) des problèmes respectifs (3.30) et (3.33) sont égales et situées sur un sommet du polygone.

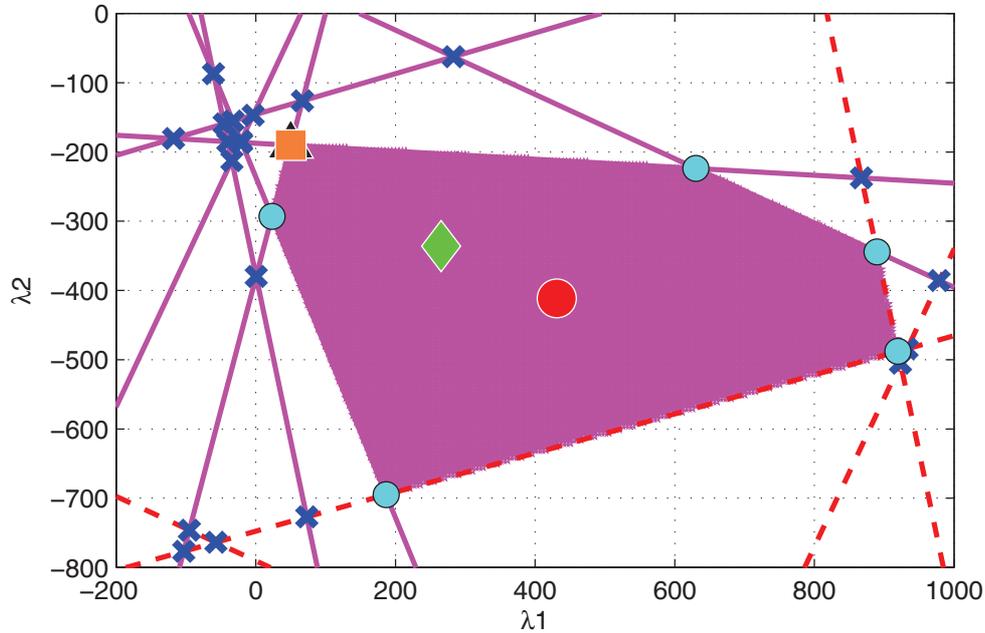


FIGURE 3.13 : Polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  correspondant à la pose  $[0,3 \ -0,6 \ 1,5 \ 10 \ 20 \ 5]^T$  (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ) du RPC pleinement contraint REELAX8-PC, avec une plate-forme de 20 kg,  $t_{min} = 0 \text{ N}$  et  $t_{max} = 500 \text{ N}$ .

|                                | REELAX8-PC    |                  |                   |                   | REELAX8-S     |                  |                   |                   |
|--------------------------------|---------------|------------------|-------------------|-------------------|---------------|------------------|-------------------|-------------------|
|                                | $\lambda_b^*$ | $\lambda_{bp}^*$ | $\lambda_{n_1}^*$ | $\lambda_{n_2}^*$ | $\lambda_b^*$ | $\lambda_{bp}^*$ | $\lambda_{n_1}^*$ | $\lambda_{n_2}^*$ |
| $\mathbf{t}^* \text{ [N]}$     | 371,42        | 298,13           | 174,43            | 174,43            | 79,08         | 77,11            | 94,26             | 74,92             |
|                                | 154,81        | 105,77           | 23,33             | 23,33             | 79,35         | 76,15            | 56,17             | 73,22             |
|                                | 149,18        | 93,21            | 28,45             | 28,45             | 46,14         | 48,73            | 31,59             | 51,53             |
|                                | 255,04        | 163,25           | 33,84             | 33,84             | 42,23         | 45,71            | 62,86             | 48,95             |
|                                | 163,09        | 163,91           | 137,39            | 137,39            | 47,14         | 44,11            | 93,01             | 40,46             |
|                                | 42,86         | 28,66            | 0                 | 0                 | 50,21         | 45,00            | 0                 | 40,42             |
|                                | 236,33        | 152,76           | 49,64             | 49,64             | 44,69         | 47,55            | 0                 | 51,03             |
|                                | 192,53        | 111,18           | 0                 | 0                 | 46,00         | 51,74            | 96,34             | 55,88             |
| $\ \mathbf{t}^*\  \text{ [N]}$ | 608,75        | 445,86           | 232,95            | 232,95            | 159,41        | 158,49           | 186,87            | 158,19            |

Tableau 3.1 : Solutions au problème de la distribution des tensions pour la pose  $[0,3 \ -0,7 \ 1,5 \ 10 \ 15 \ 5]^T$  (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ) des RPC pleinement contraint REELAX8-PC et suspendu REELAX8-S, avec une plate-forme de 20 kg,  $t_{min} = 0 \text{ N}$  et  $t_{max} = 500 \text{ N}$ .

### 3.4 Simulations

Les différentes solutions optimales au problème de la distribution des tensions, proposées dans la section 3.3 et calculées à partir des sommets du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , sont maintenant analysées et comparées le long d'une trajectoire. Les résultats sont issus de simulations en boucles ouvertes (c'est-à-dire sans régulation). La trajectoire est appliquée aux deux robots REELAX8-S et REELAX8-PC, respectivement suspendu et pleinement contraint. Les matrices des coordonnées des points de sortie et des points d'attache des câbles de ces deux RPC sont données en annexe A.

La trajectoire, nommée  $\text{traj}_1$ , est choisie de sorte que ses points de passage soient de position et d'orientation quelconques à l'intérieur des ETC respectifs des deux robots. La pose initiale de la plate-forme est  $[0\ 0\ 0,235\ 0\ 0\ 0]$ . Sa masse est fixée à 20kg et les bornes minimale et maximale des tensions sont  $t_{\min} = 0\text{N}$  et  $t_{\max} = 350\text{N}$ . Les points de passage de  $\text{traj}_1$  sont listés dans le tableau 3.2 (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ). La figure 3.14 illustre la trajectoire correspondante du point de référence  $P$  de la plate-forme.

| $n^o$ | position $\mathbf{p}^T$ | orientation $\mathbf{o}^T$ | $n^o$ | position $\mathbf{p}^T$ | orientation $\mathbf{o}^T$ |
|-------|-------------------------|----------------------------|-------|-------------------------|----------------------------|
| 1     | [0 0 1]                 | [0 0 0]                    | 4     | [0,4 -1,4 0,7]          | [15 10 5]                  |
| 2     | [-0,5 1,2 1,3]          | [0 0 40]                   | 5     | [0,6 1,1 0,5]           | [-10 30 -40]               |
| 3     | [0,4 -1,4 0,7]          | [30 20 0]                  | 6     | [0 0 0,235]             | [0 0 0]                    |

Tableau 3.2 : Points de passage de la trajectoire  $\text{traj}_1$

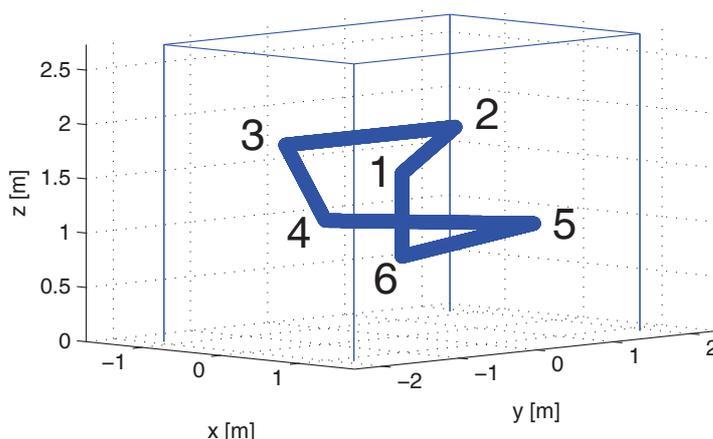


FIGURE 3.14 : Représentation schématique de  $\text{traj}_1$ .

### 3.4.1 Simulations d'un robot pleinement contraint, REELAX8-PC

Dans un premier temps, l'algorithme de distribution des tensions est appliqué au RPC pleinement contraint REELAX8-PC. Les solutions optimales décrites à la section 3.3, à savoir les solutions minimisant les normes 1 et 2 de  $\mathbf{t}$ , le barycentre et le barycentre pondéré, sont alternativement sélectionnées. Les figures 3.16, 3.17, 3.18 et 3.19 montrent la distribution des tensions obtenue pour chaque solution le long de la trajectoire  $\text{traj}_1$ . Les distributions des tensions correspondantes sont comparées à la solution particulière  $\mathbf{t}_p$  de l'équation (3.3) (où  $\mathbf{t}_n = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ ), illustrée à la figure 3.15. Le tableau 3.3 reporte la moyenne des normes du vecteur tension optimal  $\mathbf{t}^*$ , calculées à chaque pas d'échantillonnage de la simulation.

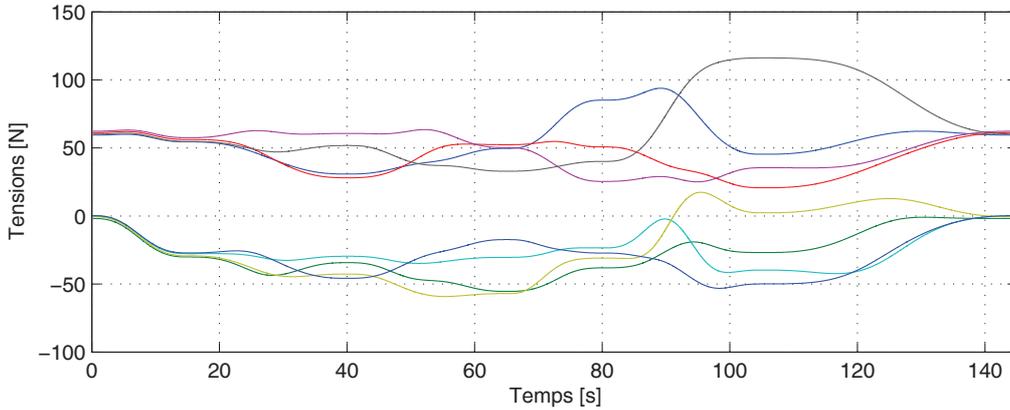


FIGURE 3.15 : Distribution des tensions  $\mathbf{t}_p$  obtenue par le calcul de la pseudo-inverse, le long de  $\text{traj}_1$  appliquée à REELAX8-PC.

Tel qu'illustré par la figure 3.15, la solution particulière  $\mathbf{t}_p$  possède quatre tensions inférieures à la borne minimale  $t_{\min} = 0\text{N}$  le long de la quasi-totalité de la trajectoire. Ce comportement est caractéristique des RPC pleinement contraints en général. Cependant, ce résultat dépend de la géométrie ainsi que de l'arrangement des câbles du RPC considéré et ne peut donc pas être généralisé à l'ensemble des RPC pleinement contraints. Le long de  $\text{traj}_1$ , la solution  $\mathbf{t}_p$  de l'équation (3.3), issue de la pseudo-inverse de Moore-Penrose, sollicite les câbles des points de sortie inférieurs de REELAX8-PC afin de pousser sur la plate-forme (tensions négatives). Une telle distribution des tensions n'est pas physiquement réalisable.

Les distributions des tensions obtenues par application des solutions optimales décrites à la section 3.3 sont tracées aux figures 3.16, 3.17, 3.18 et 3.19. D'après ces courbes, elles sont toutes contenues entre les bornes  $\mathbf{t}_{\min} = 0\text{N}$  et  $\mathbf{t}_{\max} = 350\text{N}$ . Les solutions minimisant les normes 1 et 2 du problème sont quasiment identiques. Cela signifie que les

solutions  $\lambda_{n_1}^*$  et  $\lambda_{n_2}^*$  sont équivalentes, la solution de norme 2 minimale est donc presque toujours située sur un sommet du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ . Leurs images dans  $\mathbb{R}^8$  forcent donc les tensions de deux câbles à la valeur  $t_{\min}$  et/ou  $t_{\max}$  ( $t_{\min}$  dans le cas présent, comme on peut l'observer sur la figure 3.18). Plus précisément, on observe que la solution issue de la norme 1 est continue. Il n'y a donc jamais de saut d'un sommet du polygone à un autre le long de cette trajectoire.

Néanmoins, la figure 3.18 montre que la paire de câbles  $i$  et  $j$  dont les tensions sont limitées ( $t_i = t_j = t_{\min} = 0$  N dans cet exemple) n'est pas la même le long de toute la trajectoire. Le sommet  $\lambda_{n_1}^*$  à donc changé, mais sans créer de discontinuité. En effet, comme décrit à la section 3.2.3, des sommets apparaissent et disparaissent au niveau de sommets existants. Le sommet solution peut donc changer sans impliquer de "saut" d'un sommet à un autre.

Les meilleures méthodes pour commander un RPC en configuration pleinement contrainte semblent être la solution optimale du barycentre pondéré, qui permet d'éviter que les tensions ne soit trop proches des bornes minimales et maximales, ainsi que la solution optimale minimisant la norme 2 de  $\mathbf{t}$ . En effet cette dernière permet, si l'utilisateur le souhaite, de minimiser la consommation électrique du moteur en commandant des couples moins importants.

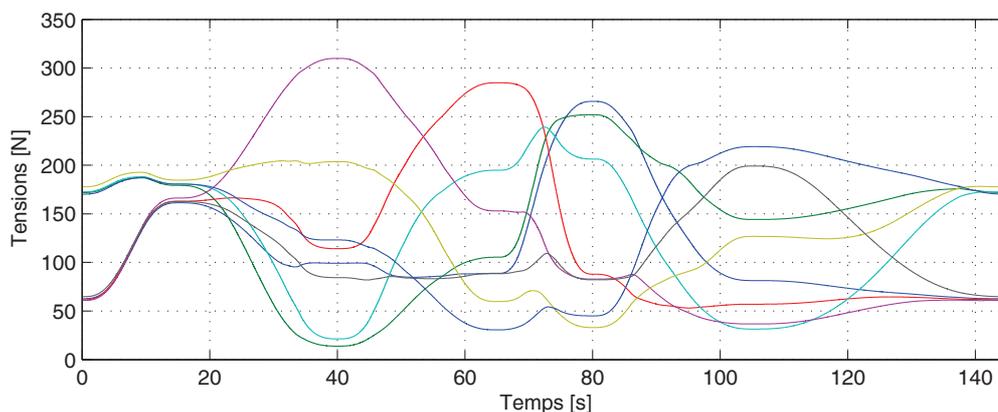


FIGURE 3.16 : Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale du barycentre, le long de  $\text{traj}_1$  appliquée à REELAX8-PC.

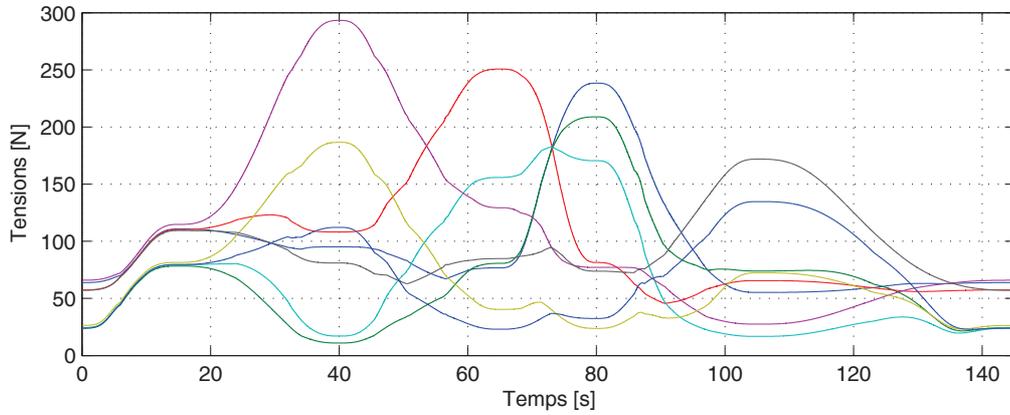


FIGURE 3.17 : Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale du barycentre pondéré, le long de  $\text{traj}_1$  appliquée à REELAX8-PC.

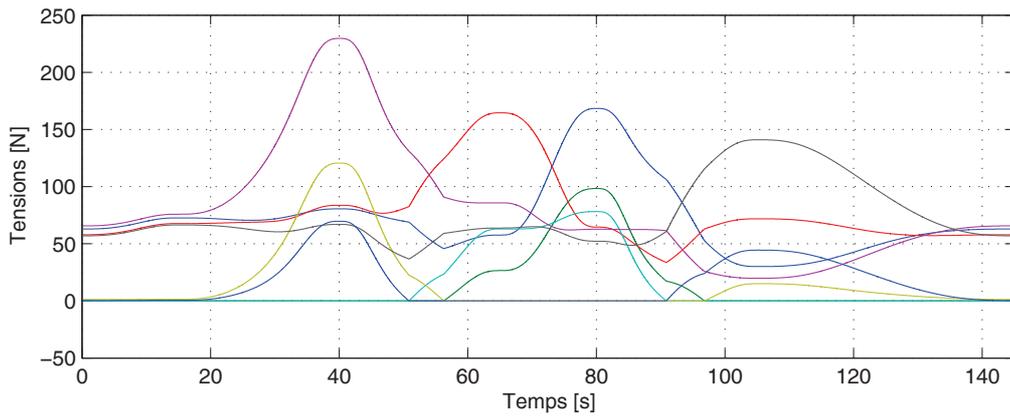


FIGURE 3.18 : Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale minimisant la norme 1 de  $\mathbf{t}$ , le long de  $\text{traj}_1$  appliquée à REELAX8-PC.

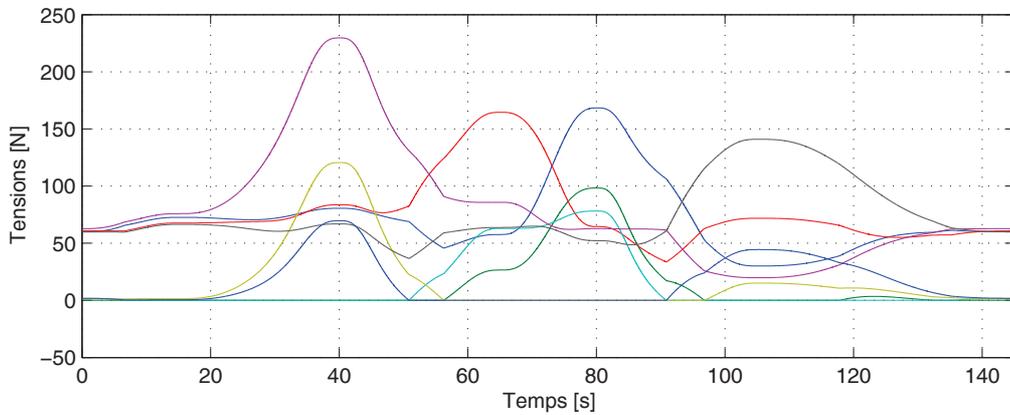


FIGURE 3.19 : Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale minimisant la norme 2 de  $\mathbf{t}$ , le long de  $\text{traj}_1$  appliquée à REELAX8-PC.

| solution optimale              | $\lambda_b^*$ | $\lambda_{bp}^*$ | $\lambda_{n_1}^*$ | $\lambda_{n_2}^*$ | $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{t}_p) = [0\ 0]^T$ |
|--------------------------------|---------------|------------------|-------------------|-------------------|---|
| moy ( $\ \mathbf{t}^*\ $ ) [N] | 405,95        | 277,05           | 174,88            | 176,27            | 130,07                                      |

Tableau 3.3 : Moyenne des normes 2 des tensions des câbles en fonction de la solution optimale retenue dans le cas du RPC REELAX8-PC le long de la trajectoire  $\text{traj}_1$

### 3.4.2 Simulations d'un robot suspendu, REELAX8-S

Dans un second temps l'algorithme de distribution des tensions est appliqué au RPC suspendu REELAX8-S. À nouveau, les distributions des tensions minimisant les normes 1 et 2 de  $\mathbf{t}$ , ainsi que les solutions du barycentre et du barycentre pondéré, obtenues le long de la trajectoire  $\text{traj}_1$ , sont successivement calculées. Cette fois-ci, la solution particulière  $\mathbf{t}_p$  de l'équation (3.3) (où  $\mathbf{t}_n = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire  $\lambda = \mathbf{0}$ ), illustrée à la figure 3.20, ne donne jamais de tensions négatives. En effet, dans le cas considéré ici, le polytope  $\Lambda$  contient toujours  $\mathbf{t}_p$ .

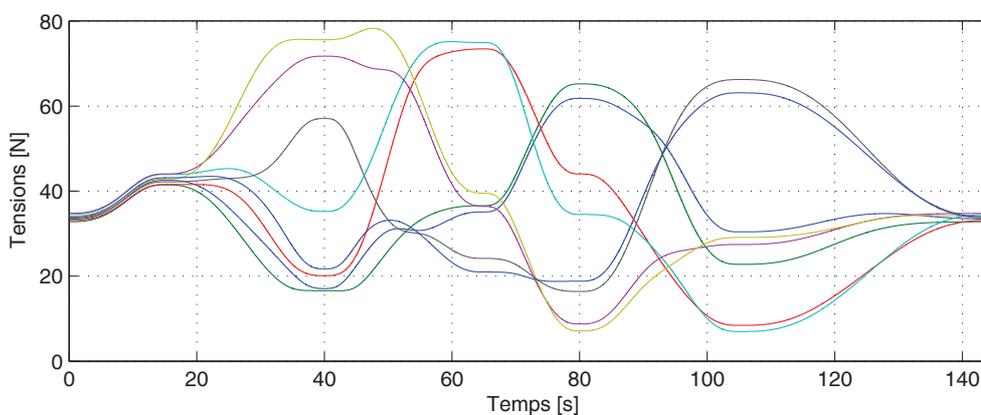


FIGURE 3.20 : Distribution des tensions  $\mathbf{t}_p$  obtenue par le calcul de la pseudo-inverse, le long de  $\text{traj}_1$  appliquée à REELAX8-S.

Par conséquent, l'intérêt de l'utilisation d'un algorithme de distribution des tensions est moindre dans le cas d'une configuration suspendue. Comme observé sur les figures 3.21, 3.22 et 3.24, le choix de la solution optimale impacte peu la distribution des tensions (à l'exception de la figure 3.23 qui implique des discontinuités). Le tableau 3.3, qui donne la moyenne des normes du vecteur tension  $\mathbf{t}^*$  calculées à chaque pas d'échantillonnage de la simulation, montre d'ailleurs des résultats très similaires d'une méthode à l'autre. Notre algorithme permet cependant de garantir une distribution admissible des tensions, tant que  $\Lambda$  existe.

La figure 3.23 montre que, dans le cas de REELAX8-S, la solution  $\lambda_{n_1}^*$  minimisant la

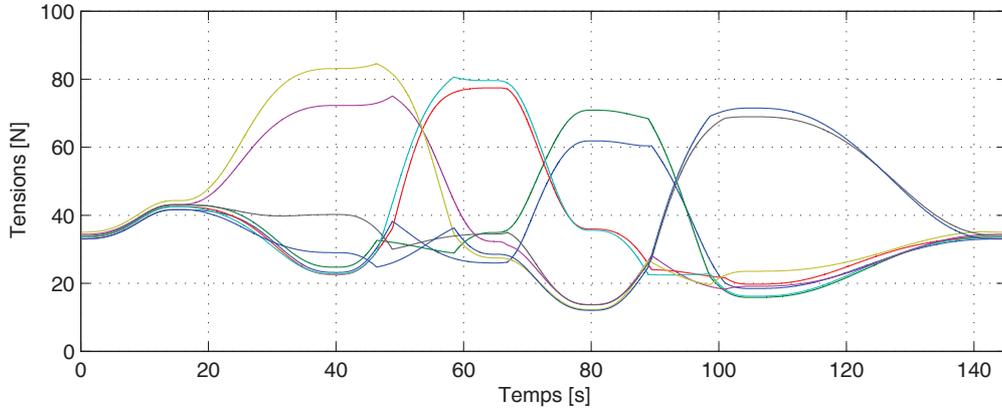


FIGURE 3.21 : Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale du barycentre, le long de  $\text{traj}_1$  appliquée à REELAX8-S.

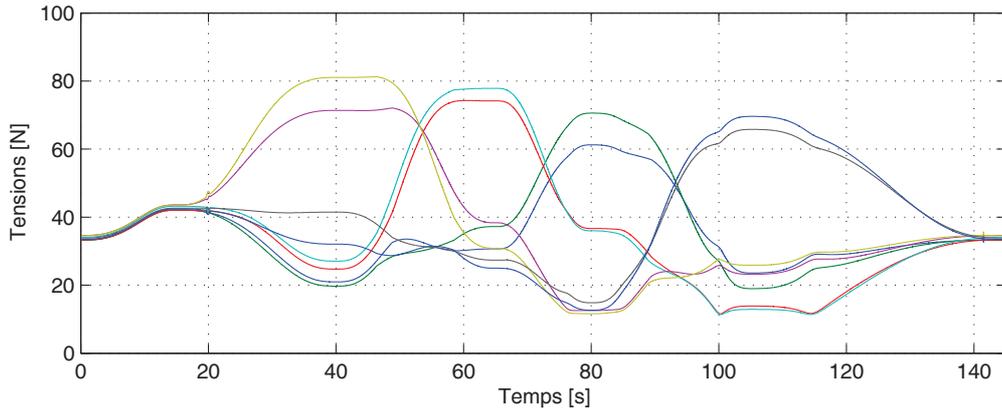


FIGURE 3.22 : Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale du barycentre pondéré, le long de  $\text{traj}_1$  appliquée à REELAX8-S.

| solution optimale             | $\lambda_b^*$ | $\lambda_{bp}^*$ | $\lambda_{n_1}^*$ | $\lambda_{n_2}^*$ | $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{t}_p) = [0 \ 0]^T$ |
|-------------------------------|---------------|------------------|-------------------|-------------------|--|
| moy( $\ \mathbf{t}^*\ $ ) [N] | 115,98        | 115,32           | 131,27            | 115,30            | 115,04                                       |

Tableau 3.4 : Norme du vecteur des tensions moyennes en fonction de la solution optimale au problème de la distribution des tensions utilisée le long de la trajectoire  $\text{traj}_1$  appliquée au RPC REELAX8-S.

norme 1 de  $\mathbf{t}$  est discontinue. En effet, comme illustré par la figure 3.12,  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est généralement centré sur  $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{t}_p) = \mathbf{0}$ , l'origine du plan des  $\lambda$ , lorsque le RPC est en configuration suspendue. De petites rotations du polygone autour de  $\mathbf{0}$  peuvent changer le point extrême  $\lambda_{n_1}^*$  minimisant la norme 1 de  $\lambda$ . Ainsi,  $\lambda_{n_1}^*$  passe régulièrement d'un sommet du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  à un autre. Par conséquent, cette solution, bien que proposée dans plusieurs travaux, n'est pas intéressante en pratique pour distribuer les tensions d'un RPC en configu-

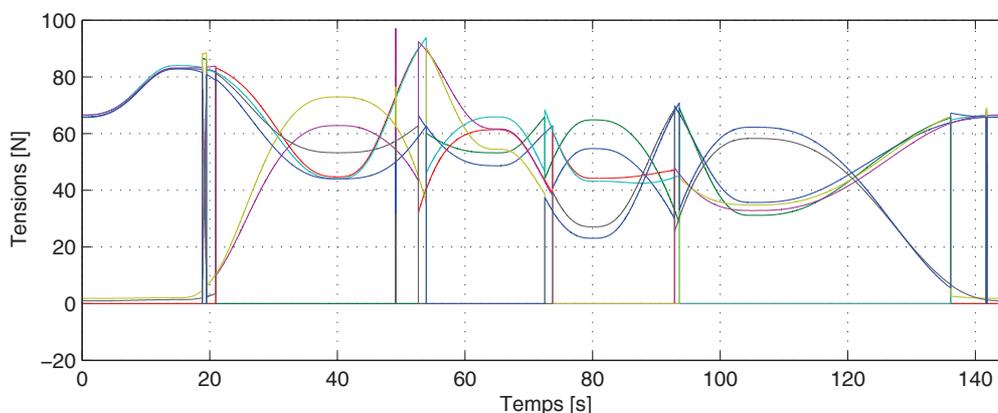


FIGURE 3.23 : Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale minimisant la norme 1 de  $\mathbf{t}$ , le long de  $\text{traj}_1$  appliquée à REELAX8-S.

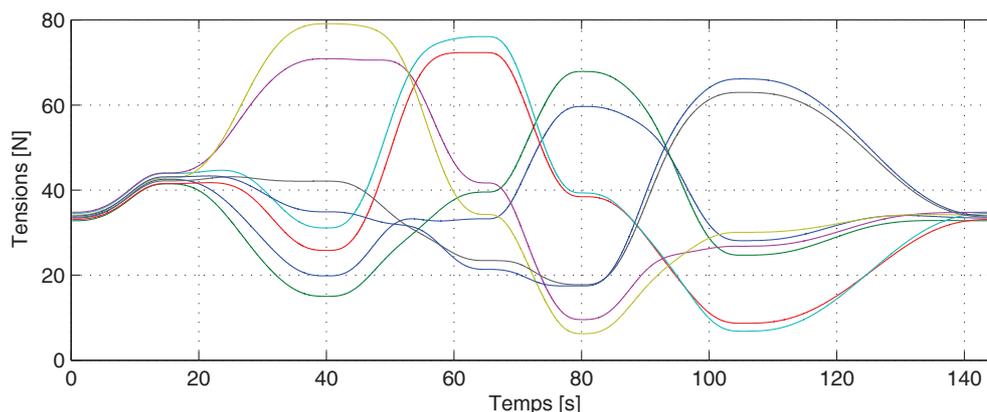


FIGURE 3.24 : Distribution des tensions obtenue par sélection de la solution optimale minimisant la norme 2 de  $\mathbf{t}$ , le long de  $\text{traj}_1$  appliquée à REELAX8-S.

ration suspendue. Nous lui préférons une des autres solutions optimales décrites dans la section 3.3. Rappelons néanmoins que Borgstrom *et al.* ont proposé dans [Borgstrom 09b] une stratégie de minimisation de la norme 1 incluant une variable de “détente” dont la solution est incluse dans le polytope  $\Lambda$ , afin de pallier les discontinuités. Sa programmation, qui passe par la résolution des problèmes linéaires primal et dual de (3.30) à chaque période d’échantillonnage, requiert d’utiliser des bibliothèques d’optimisation numérique. En outre, elle ne peut pas garantir l’absence de discontinuité.

### 3.4.3 Comparaison des temps d’exécution

Les Temps d’Exécution Moyens (TEM) des étapes du calcul des différentes solutions proposées pour résoudre le problème de la distribution des tensions, ainsi que les Temps

d'Exécution Totaux (TET) de chaque méthode, somme des TEM correspondants, sont comparés dans le tableau 3.5. Le moyennage a été effectué le long de  $\text{traj}_1$ . Les résultats sont également comparés à l'algorithme de [Mikelsons 08]. Les valeurs sont indiquées en ms et ont été obtenues sous MATLAB, avec un PC équipé d'un processeur Intel®Core™ i5 – 2400 3,10 GHz et 4 Go de RAM.

| Distribution tensions           | Proposée dans cette thèse |                    |         |         | [Mikelsons 08]     |
|---------------------------------|---------------------------|--------------------|---------|---------|--------------------|
| Solution Optimale               | Barycentre                | Barycentre pondéré | Norme 1 | Norme 2 | Barycentre pondéré |
| Calculs SVD + noyau             | 0,504                     | 0,504              | 0,504   | 0,504   | 0,504              |
| Recherche sommets (TurnAround)  | 0,334                     | 0,334              | 0,334   | 0,021   | 0,981              |
| Calculs de la solution optimale | 0,031                     | 0,045              | 0,027   | 0,015   | 0,516              |
| TET                             | 0,869                     | 0,883              | 0,865   | 0,540   | 2,011              |

Tableau 3.5 : Comparaison des TEM et TET, exprimés en millisecondes, entre les différentes méthodes de calcul de la distribution des tensions des câbles.

Sous MATLAB, le calcul complet de la distribution optimale des tensions  $\mathbf{t}^*$  est 2,3 fois plus rapide que l'algorithme de [Mikelsons 08]. Cependant, la décomposition en valeurs singulières de la Jacobienne est un élément commun aux deux algorithmes qui représente 60 % du TET de la méthode proposée. Il convient donc mieux de comparer uniquement la somme des TEM de la recherche des sommets (TurnAround) et du calcul de la distribution des tensions ; le calcul du noyau  $\mathbf{N}$  de  $\mathbf{W}$  et de la solution particulière  $\mathbf{t}_p$  étant supposé fait.

Si on somme le TEM de TurnAround (l'algorithme de recherche des sommets proposé dans cette thèse) et le TEM du calcul du barycentre, on obtient 0,364 ms. La somme des TEM de la recherche des sommets et du calcul du barycentre de [Mikelsons 08] est, quant à lui, égal à 1,497 ms. Selon ce critère de comparaison, l'algorithme proposé est donc 3,89 fois plus rapide. On remarque que le gain de TEM le plus important est celui du calcul de solution (plus de 17 fois plus rapide pour l'algorithme proposé). Ce gain de temps de calcul illustre l'intérêt de trouver les sommets du polygone dans l'ordre (horaire ou anti-horaire), ce qui autorise l'utilisation de formules géométriques simples à la place d'une triangularisation.

Cet écart est encore plus important en code C, implémenté dans le système temps-réel du démonstrateur du projet COGIRO (annexe A.2). En effet, le TEM du calcul de la décomposition en valeurs singulières est alors de 0,234 ms (identique pour les deux méthodes). En utilisant TurnAround, la recherche des sommets et le calcul de la solution ne nécessitent que 14  $\mu\text{s}$  quand le premier sommet a été déterminé à partir des sommets du

polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  de la pose précédente. Dans le cas contraire (généralement à la première pose, quand aucun polytope n'a encore été déterminé), la recherche du premier sommet implique un temps de calcul de 0,682 ms, soit plus de 50 fois plus. C'est en revanche la stratégie utilisée dans [Mikelsons 08] pour la détermination du polygone de chaque pose issue de la génération de trajectoire. TurnAround est donc plus de 50 fois plus rapide que l'algorithme de [Mikelsons 08] en code C.

Des résultats expérimentaux sont donnés à la section 5.2. On comparera notamment les distributions des tensions obtenues avec les différentes solutions proposées, appliquées aux prototypes COGIRO et CABLAR, ainsi que les temps de calcul correspondants. En outre, notons que les algorithmes présentés dans ce chapitre fonctionnent actuellement en temps réel sur REELAX8 et sur le prototype SEGESTA montré à la figure 1.6b.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un algorithme de distribution des tensions compatible avec des environnements temps-réel est proposé. La première contribution, l'algorithme TurnAround, détermine efficacement les sommets du polygone des tensions solutions admissibles dans un espace de dimension 2. Pour cela, la méthode se restreint au cas des RPC à 2 DDR. On considère alors l'intersection de l'espace affine de dimension 2 des solutions du problème de la distribution des tensions avec l'hyper-parallélépipède des tensions admissibles. L'intersection de ces deux ensembles est le polytope convexe des solutions admissibles au problème de la distribution des tensions. Son antécédent par transformation affine en dimension 2 est un polygone convexe. Ainsi, en utilisant des propriétés géométriques simples, TurnAround trouve dans un premier temps un sommet du polygone et suit ensuite son enveloppe pour tourner le long du polygone en déterminant dans l'ordre (horaire ou anti-horaire) l'ensemble de ses sommets.

La seconde contribution de ce chapitre est de proposer des méthodes de calcul simples et efficaces de solutions optimales au problème de la distribution des tensions, basées sur la connaissance ordonnée des sommets du polygone. Nous avons en particulier montré que les solutions minimisant les norme 1 et 2 des tensions des câbles peuvent être calculées sans avoir recours à des procédures d'optimisation numérique. Une formulation originale du barycentre du polygone, prenant avantage de la connaissance des sommets dans l'ordre, a été proposée. L'expression du barycentre pondéré proposé dans [Bruckmann 10] a également été implémenté. Les distributions des tensions obtenues avec ces différentes solutions optimales sont discutées puis comparées en fonction de la configuration du RPC. Les calculs sont effectués en un nombre d'opérations réduit, avec un TET faible et connu,

sans utilisation de bibliothèques d'optimisation numérique. L'algorithme proposé peut donc, *a priori*, être implémenté dans n'importe quel système temps-réel. La continuité dans le temps de ces solutions, le long d'une trajectoire continue incluse dans l'ETC du RPC, est prouvée en annexe C.

Enfin, ce chapitre a donné quelques résultats de simulations issus de l'application de TurnAround aux robots REELAX8-S et REELAX8-PC. Des résultats expérimentaux, obtenus sur les prototypes COGIRO et CABLAR, sont donnés dans la suite de cette thèse au chapitre 5.



# COMMANDE DES MOUVEMENTS DES ROBOTS PARALLÈLES À CÂBLES

*Peu de travaux font référence à la commande des RPC et encore moins aux RPC à redondance d'actionnement. En revanche, de nombreuses études ont été menées sur la commande des robots parallèles à membres rigides. Nous ne ferons pas de contribution en automatique dans ce chapitre, mais nous nous attacherons à proposer des schémas de commande adaptés au contrôle des RPC à redondance d'actionnement. L'état de l'art sur la commande des RPC ainsi qu'une brève introduction à la commande des mouvements sont donnés à la section 4.1. Le concept de commande par anticipation en espace double est ensuite introduit à la section 4.4. La section 4.5 propose un schéma de commande adaptatif en espace double, robuste aux variations et incertitudes de certains paramètres du système. Finalement, la section 4.6 présente quelques résultats de simulations.*

## Sommaire

---

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 4.1 | La commande des mouvements des RPC . . . . .                               | 78  |
| 4.2 | Choix de l'espace de commande . . . . .                                    | 80  |
| 4.3 | Intégration de la distribution des tensions dans la commande PID . . . . . | 84  |
| 4.4 | Commande par anticipation en espace double . . . . .                       | 85  |
| 4.5 | Commande adaptative en espace double . . . . .                             | 91  |
| 4.6 | Simulations des lois de commande . . . . .                                 | 106 |
| 4.7 | Conclusion . . . . .   | 110 |

---

## 4.1 La commande des mouvements des RPC

En comparaison du nombre important de travaux publiés sur la commande des robots parallèles conventionnels, peu de schémas de commande ont été proposés pour les RPC. Cependant, de nombreux schémas développés pour les robots parallèles peuvent être adaptés aux RPC, à condition d'intégrer une méthode de distribution des tensions des câbles garantissant que la commande ne demande pas aux câbles de pousser sur la plate-forme.

Ming et Higuchi ont vraisemblablement proposé le premier schéma dédié à la commande d'un RPC [Ming 94]. La loi de commande introduite dans cet article inclut un correcteur dans l'espace articulaire du robot. Un générateur de trajectoires produit les longueurs de câbles désirées  $\mathbf{l}_d$  qui sont comparées aux longueurs de câbles mesurées  $\mathbf{l}$ . Un découplage non-linéaire basé sur le modèle dynamique de la plate-forme est effectué par rétroaction - ou retour d'état - à partir des mesures de  $\mathbf{l}$  et  $\dot{\mathbf{l}}$ . Ce découplage nécessite la résolution numérique du MGD du robot, difficile à mettre en œuvre. Dans [Ming 94], un algorithme de programmation linéaire est utilisé pour distribuer les tensions dans les câbles. Kawamura *et al.* ont proposé un contrôleur Proportionnel-Dérivé (PD) à rétroaction dans l'espace articulaire pour la commande du RPC redondant pleinement contraint FALCON-7. Seul le poids connu de la plate-forme est compensé. La stabilité de la loi de commande est démontrée par une fonction de Lyapunov. Alp, Oh et Agrawal ont proposé dans [Alp 02] et [Oh 05] un schéma de commande similaire (correcteur PD dans l'espace articulaire avec linéarisation par rétroaction) mais avec une compensation de la dynamique de la plate-forme. Ici, la non-négativité des tensions commandées est garantie par une vérification préliminaire de l'admissibilité des tensions le long de tous les points d'une trajectoire à générer. La distribution des tensions est calculée hors-ligne en utilisant la programmation linéaire et quadratique. La commande a été validée sur un démonstrateur en configuration suspendue. Un schéma de contrôle très similaire a été proposé par Gholami *et al.* dans [Gholami 08], mais avec un correcteur dans l'espace opérationnel. La distribution des tensions y est calculée en ligne en utilisant la programmation linéaire. Des résultats de simulation avec la géométrie du RPC redondant pleinement contraint KNTU sont donnés.

En parallèle, des schémas de commande par anticipation ont été développés. Cette commande permet d'anticiper les erreurs de suivi de trajectoires par la connaissance d'un modèle dynamique précis du RPC. Fang *et al.* [Fang 04] ont appliqué un contrôleur PD doté d'une boucle d'anticipation dans l'espace articulaire pour compenser la dynamique de la plate-forme, incluant un algorithme de distribution des tensions. Ce schéma de commande a été validé expérimentalement sur le prototype pleinement contraint SEGESTA. Ce schéma est repris dans [Gholami 08] mais, comme indiqué dans cet article, intégrer l'al-

gorithme de distribution des tensions (programmation linéaire) dans la boucle d'anticipation ne garantit pas l'admissibilité des tensions commandées. En effet, le correcteur peut fournir un signal suffisamment important pour que le signal de commande envoyé aux moteurs ne soit pas admissible, et ce malgré l'action d'anticipation.

Pour y remédier, Gholami *et al.* ont proposé un contrôleur PD dans l'espace articulaire avec une anticipation dans l'espace opérationnel pour compenser la dynamique de la plate-forme. Le passage de l'espace articulaire à l'espace opérationnel se fait au travers de la transposée de la Jacobienne, comme nous le verrons à la section 4.4. La commande des moteurs étant exprimée dans l'espace articulaire, un algorithme de distribution des tensions, placé dans la boucle de commande principale, permet de revenir dans l'espace articulaire à partir de l'espace opérationnel. Une version améliorée de ce schéma a été introduite dans [Vafaei 10]. Le schéma de contrôle, dit *intégré*, propose de calculer les erreurs dans l'espace opérationnel et de compenser par anticipation la dynamique de la plate-forme dans ce même espace. Un algorithme de distribution des tensions utilisant la programmation linéaire permet de passer de l'espace des efforts opérationnels à l'espace des couples articulaires. Un second terme d'anticipation, qui corrige l'erreur articulaire au moyen d'un second correcteur PD, est ajouté au signal pour obtenir les couples moteurs. Ces derniers travaux n'ont été validés qu'en simulation. L'utilisation d'un correcteur après le calcul de la distribution des tensions ne permet pas, *a priori*, de garantir l'admissibilité des tensions commandées.

D'autres travaux ont proposé des méthodes plus sophistiquées pour la commande des RPC. Zi *et al.* ont introduit dans [Zi 08] un correcteur Proportionnel-Intégral (PI) à logique floue afin de compenser les effets perturbateurs du vent sur les câbles. Récemment, Laroche *et al.* [Laroche 12] ont donné des résultats préliminaires d'application de la commande robuste  $\mathcal{H}_\infty$  sur un RPC. La commande, simulée d'après la géométrie de l'INCA-3DOF, inclut un modèle d'élongation des câbles, un modèle dynamique de la plate-forme ponctuelle qui tient compte de sa masse et des frottements, ainsi que des contraintes sur les tensions. Enfin, Kino *et al.* ont développé une commande adaptative minimisant les erreurs dues aux incertitudes sur la position des actionneurs dans [Kino 07] où les paramètres dynamiques du RPC ne sont cependant pas pris en compte.

Une des contributions de ce chapitre est de proposer un schéma de commande par anticipation en espace double, défini à la section 4.4. Le schéma de commande possède deux termes d'anticipation distincts pour compenser la dynamique de la plate-forme et la dynamique des actionneurs, définies au chapitre 2. Ce schéma a été inspiré d'une étude récente menée sur la commande des robots parallèles conventionnels [Natal 12], mais estime d'avantage de paramètres du modèle dynamique que dans ces précédents travaux. Le

chapitre précédent a montré que les particularités de l'actionnement par câbles devaient être prises en considération dans la commande des RPC. En premier lieu, le modèle dynamique proposé au chapitre 2 n'est valide que si  $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$  [Khosravi 12]. Par conséquent, les schémas de commande proposés dans cette thèse intègrent une des stratégies de distribution des tensions du chapitre 3 pour éviter que la commande ne demande aux câbles de pousser la plate-forme.

L'implémentation pratique d'un schéma de commande avec anticipations, basé sur le MDI du RPC, requiert une bonne identification des paramètres du modèle dynamique du système. Certains de ces paramètres, comme les coefficients de frottement des enrouleurs, sont difficiles à identifier et d'autres sont susceptibles de varier au cours de l'application (masse et inerties de la plate-forme et de son éventuelle charge ainsi que la position de leur centre de gravité). De ce fait, les termes correctifs des anticipations peuvent fournir des signaux biaisés, dégradant les performances globales du RPC. Afin de prendre en compte ces incertitudes et variations de paramètres, la seconde contribution de ce chapitre est de proposer un schéma de commande adaptative en espace double pour les RPC.

Notons que les RPC auxquels sont appliqués les schémas de commande proposés sont naturellement en temps continu. Les analyses données ici sont donc également en temps continu. Les lois de commande implémentées sont en revanche échantillonnées en temps discret. Cependant, la fréquence d'échantillonnage sera suffisamment élevée (de 1 à 5 kHz) pour conserver la validité des modèles développés dans ce chapitre [Slotine 91].

## 4.2 Choix de l'espace de commande

Les différents travaux cités dans la section précédente mettent en avant deux principales stratégies de commande : la commande dans l'espace articulaire et la commande dans l'espace opérationnel - ou Cartésien. Le choix de l'espace de commande définit si les erreurs de suivi de trajectoires sont calculées à partir des angles et vitesses angulaires des moteurs ou de la pose et des vitesses de la plate-forme.

### 4.2.1 Commande dans l'espace articulaire

Cette première stratégie commande les coordonnées articulaires des actionneurs  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $m$  étant le nombre d'actionneurs, de manière à ce qu'elles suivent les coordonnées articulaires désirées  $\mathbf{q}_d(t) \in \mathbb{R}^m$ . La commande des actionneurs, en couple ou en vitesse, appartient naturellement à l'espace articulaire. Cette commande est donc la plus directe et la plus rapide à mettre en œuvre. En revanche, le manipulateur est piloté par un utilisateur ou un générateur de trajectoires dans l'espace opérationnel. Il faut donc trans-

former ces signaux de l'espace opérationnel vers l'espace articulaire en utilisant les modèles inverses définis au chapitre 2. Ce type de commande nécessite de définir les gains des contrôleurs des  $m$  actionneurs.

La grande majorité des contrôleurs des robots industriels, et plus généralement des procédés automatisés, sont programmés à l'aide de correcteurs de type Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID) à gains constants. Le système est alors considéré comme linéaire et ses actionneurs sont asservis de manière décentralisée. Chaque axe moteur est contrôlé comme un système à entrée unique, sortie unique. Simple et rapide à mettre en œuvre, la commande décentralisée classique peut être résumée par le schéma de la figure 4.1.

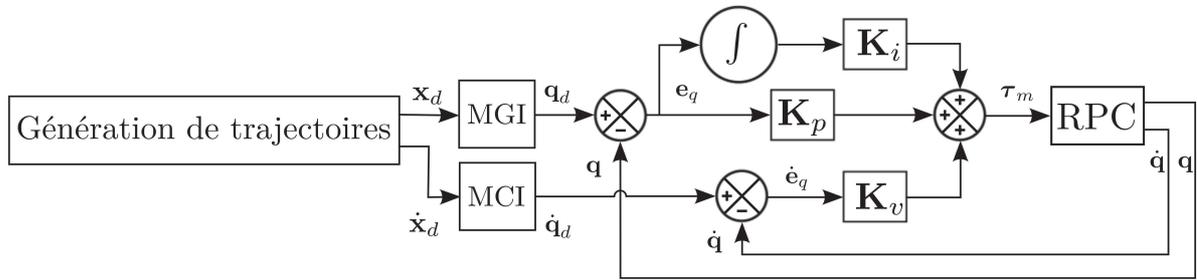


FIGURE 4.1 : Schéma de commande PID décentralisée dans l'espace articulaire.

La loi de commande produit un signal  $\tau_m$ , le vecteur des couples moteurs exprimés en  $[N.m]$ , envoyés aux actionneurs. Cette loi est la somme de trois termes calculés indépendamment et s'exprime de la manière suivante :

$$\tau_m = \mathbf{K}_p \mathbf{e}_q(t) + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q(t) + \mathbf{K}_i \int_{t_0}^t \mathbf{e}_q(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

où

- $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des coordonnées articulaires désirées ;
- $\dot{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des vitesses articulaires désirées ;
- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des coordonnées articulaires mesurées ;
- $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des vitesses articulaires mesurées ;
- $\mathbf{e}_q = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$  est le vecteur des erreurs de positionnement angulaire des actionneurs ;
- $\dot{\mathbf{e}}_q = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}$  est le vecteur des erreurs de vitesse angulaire des actionneurs ;
- $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_i, \mathbf{K}_d$  sont respectivement les matrices diagonales de dimension  $m \times m$  des gains proportionnels  $k_{p_j}$ , intégraux  $k_{i_j}$  et dérivés  $k_{v_j}$  de chaque axe motorisé  $j$ ,  $j \in [1, \dots, m]$ .

Le réglage des contrôleurs revient donc à trouver  $3m$  valeurs de gains dans le cas de PID et  $2m$  valeurs dans le cas d'un PD. En pratique, si le système le permet, on suppose que tous les actionneurs ont un comportement identique et les mêmes réglages de gains sont appliqués à chacun d'eux. Ainsi, seuls deux ou trois gains doivent être déterminés.

### 4.2.2 Commande dans l'espace opérationnel

Lorsqu'une grande précision de positionnement de l'organe terminal est requise ou lorsque celui-ci doit interagir avec un environnement complexe (par exemple en terme d'encombrement ou d'efforts), la commande dans l'espace opérationnel est généralement privilégiée [Khalil 04]. On cherche alors à minimiser l'erreur de suivi entre une trajectoire désirée  $\mathbf{x}_d(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $n$  étant le nombre de DDL de la plate-forme, et la pose mesurée - ou calculée -  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  de la plate-forme. Les erreurs en position et vitesse opérationnelles fournies au contrôleur sont définies telles que  $\mathbf{e}_x = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$  et  $\dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}$ . Les positions et vitesses désirées  $\mathbf{x}_d$  et  $\dot{\mathbf{x}}_d$  proviennent alors directement de la génération de trajectoires, tel qu'illustré par la figure 4.2.

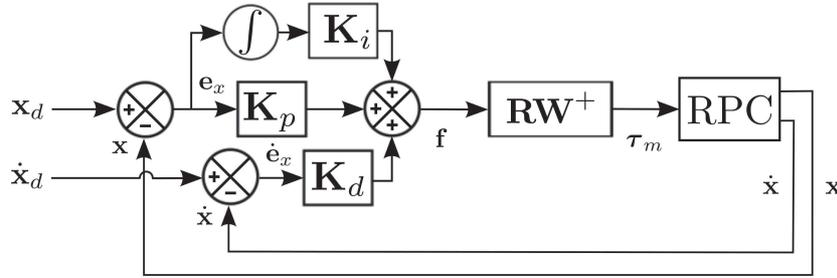


FIGURE 4.2 : Schéma de commande PID décentralisée dans l'espace opérationnel.

La loi de commande s'exprime de la manière suivante :

$$\tau_m = \mathbf{RW}^+ \left( \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x(t) + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_x(t) + \mathbf{K}_i \int_{t_0}^t \mathbf{e}_x(\tau) d\tau \right) \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{K}_i$ ,  $\mathbf{K}_d$  sont respectivement les matrices diagonales de dimension  $n \times n$  des gains proportionnels  $k_{p_l}$ , intégraux  $k_{i_l}$  et dérivés  $k_{v_l}$  de chaque DDL  $l$ ,  $l \in [1, \dots, n]$ .

On privilégie dans cette thèse un comparateur qui calcule les erreurs de suivi de trajectoires dans l'espace articulaire. Trois raisons nous ont poussés à éviter d'implémenter des correcteurs dans l'espace opérationnel :

1. mesurer la pose de la plate-forme le long d'une trajectoire est difficile et nécessite un système de mesure extéroceptif. On peut utiliser, par exemple, un système de caméras ou, les ETC des RPC étant potentiellement grands (plusieurs centaines de  $m^3$ ), un réseau de caméras. L'installation d'un tel système n'est généralement pas aisée et son utilisation dans un contexte industriel peut poser des problèmes de robustesse (éclairage, température, étalonnage, etc.) ;
2. calculer la pose de la plate-forme au travers du MGD dans la boucle de retour n'est pas souhaitable. La résolution numérique en temps réel de ce modèle pour un robot

à six DDL est complexe [Fang 04, Merlet 12] et il est préférable, dans la mesure du possible, de l'éviter ;

- notre expérience de réglage d'un PID dans l'espace opérationnel d'un robot à six DDL nous a convaincu de la difficulté de cette tâche. Les entrées du correcteur n'ayant pas les mêmes unités (translations [m] et orientations [rad]) ni les mêmes sensibilités (les dimensions du robot ne sont pas les mêmes dans toutes les directions et les possibilités d'orientation varient selon la pose), ce réglage demande beaucoup de temps. De plus, il est difficile, voire impossible, de trouver un réglage globalement stable dans tout l'ETC.

Pour toutes ces raisons, la commande dans l'espace opérationnel est difficile et nous lui avons préféré des stratégies de commande dans l'espace articulaire.

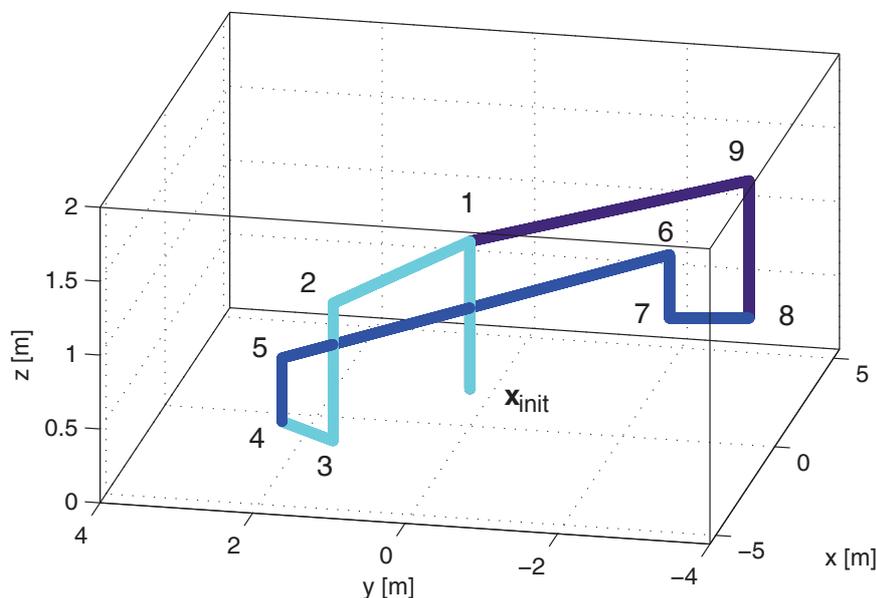
### 4.2.3 Génération de trajectoires

La génération de trajectoires utilisée dans cette thèse est classique. Les mouvements sont générés point à point avec une trajectoire rectiligne entre ces points dans l'espace opérationnel par interpolation polynomiale [Khalil 04]. Les RPC étant susceptibles de transporter des charges importantes, il est nécessaire d'assurer la continuité de l'accélération. On choisit pour cela un polynôme de degré cinq. Le mouvement est donc de classe  $C^2$ .

Définissons ainsi  $\text{traj}_2$ , une trajectoire appliquée au démonstrateur du projet COGiRO, qui sera utilisée dans la suite de ce chapitre ainsi qu'au chapitre 5. La pose initiale de la plate-forme est égale à  $\mathbf{x}_{\text{init}} = [0 \ 0 \ 1,296 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , le point de référence contrôlé  $P$  de la plate-forme étant situé à 1,296 m du sol (le lève-palette reposant au sol, comme montré à la figure A.7a de l'annexe A). Le long de cette trajectoire,  $t_{\text{min}}$  est réglée à 100 N et  $t_{\text{max}}$  à 5000 N. On considère ici la plate-forme en aluminium équipée du lève-palette pour une masse totale de 93 kg. Les points de passage de  $\text{traj}_2$  sont listés dans le tableau 4.1 et illustrés à la figure 4.3.

| $n^o$                      | position $\mathbf{p}^T$ | orientation $\mathbf{o}^T$ | $n^o$                      | position $\mathbf{p}^T$ | orientation $\mathbf{o}^T$ |
|----------------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|----------------------------|
| $\mathbf{x}_{\text{init}}$ | [0 0 1,296]             | [0 0 0]                    | 6                          | [4 -1 1,796]            | [0 0 11,46]                |
| 1                          | [0 0 2,296]             | [0 0 0]                    | 7                          | [4 -1 1,307]            | [0 0 11,46]                |
| 2                          | [-3,85 1,2 2,296]       | [0 0 -45,84]               | 8                          | [4,3 -2 1,307]          | [0 0 11,46]                |
| 3                          | [-3,85 1,2 1,307]       | [0 0 -45,84]               | 9                          | [4,3 -2 2,296]          | [0 0 11,46]                |
| 4                          | [-3 2 1,307]            | [0 0 -45,84]               | 10                         | [0 0 2,296]             | [0 0 0]                    |
| 5                          | [-3 2 1,796]            | [0 0 -45,84]               | $\mathbf{x}_{\text{init}}$ | [0 0 1,296]             | [0 0 0]                    |

Tableau 4.1 : Points de passage de la trajectoire  $\text{traj}_2$ .

FIGURE 4.3 : Représentation schématique de traj<sub>2</sub>.

### 4.3 Intégration de la distribution des tensions dans la commande PID

La commande articulaire décentralisée classique de la figure 4.1 n'est basée sur aucun modèle. Elle est efficace lorsque le système peut être assimilé à un double intégrateur [Chung 08]. En revanche, pour la commande de systèmes non-linéaires, le correcteur se charge de compenser les efforts internes et externes au manipulateur, considérés comme des perturbations. En pratique, le signal de commande issu du correcteur est sujet à de fortes variations d'amplitude et demande régulièrement à certains câbles de pousser la plate-forme. Enfin, la commande de la figure 4.1 ne permet pas de gérer la redondance d'actionnement.

Afin d'inclure l'algorithme de distribution des tensions dans le schéma de la figure 4.1, on propose d'utiliser la relation  $\mathbf{f} = \mathbf{WR}^{-1}\boldsymbol{\tau}$ , établie au chapitre 2, qui relie le torseur d'efforts  $\mathbf{f}$  appliqués par les câbles sur la plate-forme aux couples  $\boldsymbol{\tau}$  à produire par les actionneurs. Cette expression permet de passer de l'espace articulaire à l'espace opérationnel. Une fois  $\mathbf{f}$  calculé, il est utilisé comme entrée de l'algorithme de distribution des tensions des câbles. Ces tensions sont converties en couples moteurs  $\boldsymbol{\tau}_m$  d'après l'équation  $\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{R}\mathbf{t}$ . Le schéma de commande du contrôleur PID intégrant la distribution des tensions est illustré à la figure 4.4 et sert de base à cette étude.

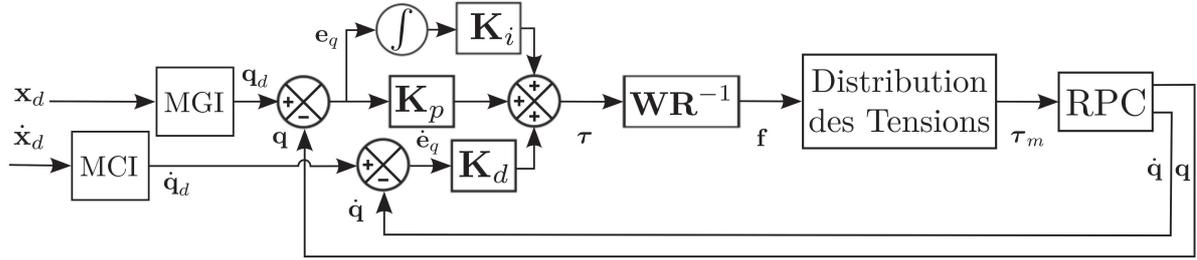


FIGURE 4.4 : Schéma de commande du contrôleur PID dans l'espace articulaire, intégrant un algorithme de distribution des tensions

La relation entre les couples moteurs  $\tau_m$  et le torseur d'efforts  $\mathbf{f}$ , d'après le chapitre 3, s'écrit

$$\tau_m = \mathbf{R}(\mathbf{W}^+ \mathbf{f} + \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda}) \quad (4.3)$$

$\mathbf{N}$  étant le noyau de dimension  $m \times 2$  de la matrice  $\mathbf{W}$  et  $\boldsymbol{\lambda}$  un vecteur de dimension 2. Finalement, la loi de commande du schéma de la figure 4.4 s'écrit

$$\tau_m = \mathbf{R} \mathbf{W}^+ \mathbf{W} \mathbf{R}^{-1} \left( \mathbf{K}_p \mathbf{e}_q(t) + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q(t) + \mathbf{K}_i \int_{t_0}^t \mathbf{e}_q(\tau) d\tau \right) + \mathbf{R} \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda} \quad (4.4)$$

Dans le cas particulier où les rayons des enrouleurs sont supposés égaux, cette équation peut être allégée en notant  $\mathbf{R} \mathbf{W}^+ \mathbf{W} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{W}^+ \mathbf{W}$ .

Les résultats expérimentaux, donnés au chapitre 5, montrent que les performances de cette commande, qui n'est basée sur aucun modèle, sont faibles et peuvent être améliorées. De plus, lorsque les erreurs de suivi sont importantes, le torseur d'effort  $\mathbf{f}$  peut avoir des composantes impossibles à produire avec les câbles. Dans une telle situation, aucune solution satisfaisant les conditions d'admissibilité des tensions n'existe ( $\Lambda \neq \emptyset$ ). L'algorithme de distribution des tensions est mis en échec et certains câbles sont sollicités pour pousser sur la plate-forme. Par conséquent, la commandabilité d'un RPC ne peut pas être assurée avec un tel schéma de commande.

## 4.4 Commande par anticipation en espace double

Pour améliorer les performances du RPC, le contrôleur doit tenir compte du modèle dynamique du robot afin de compenser une partie ou la totalité des efforts associés. La commande par découplage non-linéaire - également appelée commande dynamique ou commande par couples calculés [Khalil 04] - est aujourd'hui largement utilisée pour la commande des robots. Elle permet d'inclure la dynamique d'un robot pour en compenser ses effets. Les algorithmes correspondants, dits de *contrôle dynamique*, linéarisent le

système par rétroaction. Les termes correcteurs sont donc basés sur les mesures de l'état du système.

Afin d'anticiper des perturbations connues et pour les compenser avant qu'elles n'affectent le système, Slotine et Lee [Slotine 91] ont souligné l'importance de l'action d'anticipation dans la commande des systèmes non-linéaires. L'anticipation permet de commander ces systèmes de manière stable et d'améliorer les performances de suivi de trajectoires [Slotine 91]. Cette section propose donc d'utiliser le modèle dynamique d'un RPC proposé à la section 2.5 pour ajouter à la commande de la figure 4.4 une *compensation par boucles d'anticipation*.

Cette méthode, similaire à celle des *couples calculés*, n'utilise pas les signaux mesurés pour calculer les efforts issus du modèle dynamique, mais les signaux de référence qui proviennent de la génération de trajectoires. Elle requiert une identification précise des paramètres dynamiques du robot. En pratique, ces paramètres ne sont jamais parfaitement connus et une boucle de rétroaction (correction) est toujours nécessaire afin de compenser et stabiliser les erreurs de suivi [Slotine 91]. Un contrôleur de type PD est généralement retenu, asymptotiquement stable et plus rapide à régler qu'un PID.

En se basant sur de récents travaux sur les robots parallèles à membres rigides [Natal 12], deux boucles d'anticipation sont ajoutées au schéma de commande de la figure 4.4. Dans l'hypothèse d'un centre de masse et d'un centre de référence dissociés ( $G \neq P$ ), la première boucle applique un terme correctif  $\mathbf{f}_{ff} \in \mathbb{R}^n$  qui compense les efforts engendrés par la dynamique de la plate-forme et de son éventuelle charge.  $\mathbf{f}_{ff}$  est calculé en ligne d'après l'équation (2.43)

$$\mathbf{f}_{ff} = \mathbf{M}'(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_g(\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

avec  $\mathbf{M}'$  une matrice  $n \times n$  d'expression

$$\mathbf{M}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} m_{\text{tot}} \mathbb{1}_p & -m_{\text{tot}}[\mathbf{d}] \\ m_{\text{tot}}[\mathbf{d}] & \mathbf{K} - m_{\text{tot}}[\mathbf{d}][\mathbf{d}] \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

et  $\mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  un vecteur de dimension  $n$  et d'expression

$$\mathbf{c}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} m_{\text{tot}}[\boldsymbol{\omega}][\boldsymbol{\omega}]\mathbf{d} \\ [\boldsymbol{\omega}](\mathbf{K} - m_{\text{tot}}[\mathbf{d}][\mathbf{d}])\boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Un deuxième terme d'anticipation  $\boldsymbol{\tau}_{ff} \in \mathbb{R}^m$  vient compenser les coefficients de frottement et les inerties des enrouleurs, tel que

$$\boldsymbol{\tau}_{ff} = \mathbf{I}_m \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \tanh(\mu \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.8)$$

avec, dans la figure 4.5,  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \tanh(\mu \dot{\mathbf{q}})$ . Le contrôleur peut être placé dans l'espace articulaire (voir la figure 4.5) ou dans l'espace opérationnel (voir la figure 4.6). Les termes d'anticipation fournissent l'entrée nécessaire pour suivre la trajectoire désirée en annulant au mieux les effets des perturbations connues. La boucle de rétroaction stabilise ensuite l'erreur de suivi.

#### 4.4.1 Correcteur dans l'espace articulaire

Les deux termes d'anticipation sont ajoutés à un contrôleur PD articulaire. La commande obtenue, illustrée par la figure 4.5, est appelée *commande par anticipation en espace double*, les termes d'anticipation étant ajoutés dans l'espace opérationnel et dans l'espace articulaire. Le premier terme d'anticipation,  $\mathbf{f}_{ff} \in \mathbb{R}^n$ , compense la dynamique de la plate-forme dans l'espace opérationnel et correspond à l'action que les câbles doivent exercer sur la plate-forme pour que celle-ci suive la trajectoire désirée. Ce terme est donc ajouté dans l'espace opérationnel au signal de correction  $\mathbf{f}_{PD}$ , calculé après conversion des couples  $\boldsymbol{\tau}_{PD}$  issus du correcteur PD. Le torseur d'efforts  $\mathbf{f}_{tot}$  (forces et moments) à générer avec les câbles sur la plate-forme s'exprime tel que

$$\mathbf{f}_{tot} = \mathbf{f}_{ff} + \mathbf{WR}^{-1} (\mathbf{K}_p \mathbf{e}_q(t) + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q(t)) \quad (4.9)$$

$\mathbf{f}_{ff}$  vérifiant l'équation 4.5. L'algorithme de distribution des tensions calcule ensuite une solution admissible  $\boldsymbol{\tau}_{TD}$  permettant d'équilibrer les efforts  $\mathbf{f}_{tot}$ . Le couple d'anticipation  $\boldsymbol{\tau}_{ff} \in \mathbb{R}^m$  compense les efforts dynamiques des enrouleurs en tenant compte, notamment, des frottements secs et visqueux. Les frottements non compensés peuvent en effet provoquer des retards, des erreurs statiques et des cycles limites [Canudas de Wit 90] qui dégradent les performances du robot. Les couples moteurs sont donc calculés d'après le mo-

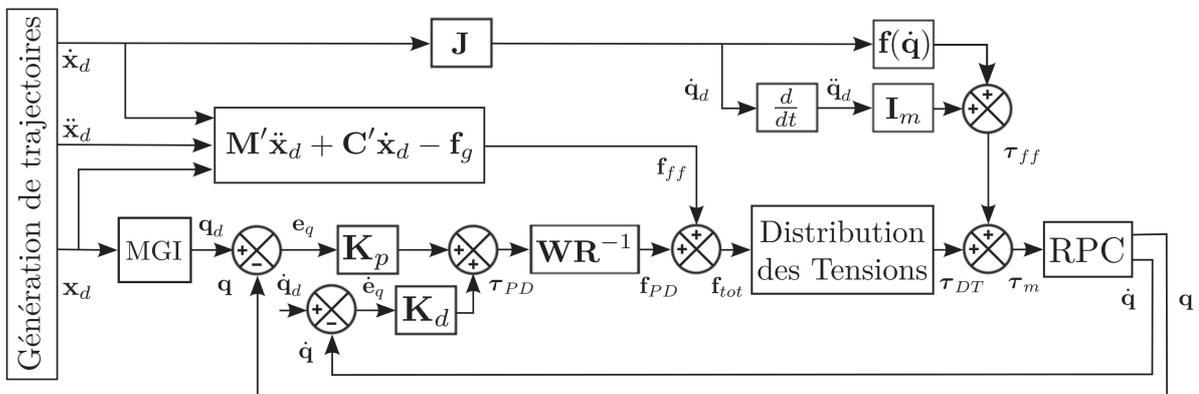


FIGURE 4.5 : Schéma de commande en espace double par anticipation et intégration de l'algorithme de distribution des tensions dans la boucle principale.

dèle dynamique des enrouleurs (2.27), tels que

$$\boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{\tau}_{ff} + \boldsymbol{\tau}_{DT} \quad (4.10)$$

dont le couple  $\boldsymbol{\tau}_{DT}$ , issu de l'algorithme de distribution des tensions, s'écrit

$$\boldsymbol{\tau}_{DT} = \mathbf{R}\mathbf{t}_{DT} = \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{f}_{tot} + \mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \quad (4.11)$$

Finalement, la loi de commande du schéma de la figure 4.5 s'écrit

$$\boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{\tau}_{ff} + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{f}_{ff} + \mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{K}_p \mathbf{e}_q(t) + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q(t)) \quad (4.12)$$

#### 4.4.2 Correcteur dans l'espace opérationnel

Les calculs des erreurs opérationnelles en position  $\mathbf{e}_x$  et vitesse  $\dot{\mathbf{e}}_x$  nécessitent la mesure ou l'estimation de la position  $\mathbf{x}$  et de la vitesse  $\dot{\mathbf{x}}$  de la plate-forme. L'espace de travail d'un RPC étant potentiellement très important, des moyens de mesure extéroceptifs seraient relativement coûteux et complexes à mettre en œuvre. Par conséquent, on choisit de les estimer à partir de l'erreur en position articulaire de la plate-forme [Natal 12]. Dans l'hypothèse d'un correcteur bien réglé, l'erreur de suivi articulaire  $\mathbf{e}_q = \Delta \mathbf{q}$  est supposée faible. De plus,  $\Delta t$  est petit, la fréquence d'échantillonnage des différents prototypes considérés dans cette thèse étant comprise entre 1 kHz et 5 kHz. On peut donc faire l'approximation  $\Delta \mathbf{q} / \Delta t \approx d\mathbf{q} / dt$ . En utilisant la pseudo-inverse de la Jacobienne, on peut ainsi obtenir  $\Delta \mathbf{x} / \Delta t \approx d\mathbf{x} / dt = \mathbf{J}^+ (d\mathbf{q} / dt) \approx \Delta \mathbf{x} / \Delta t$ . Finalement, on écrit

$$\Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{J}^+ \Delta \mathbf{q} \quad (4.13)$$

Afin d'obtenir l'erreur de vitesse opérationnelle,  $\Delta \dot{\mathbf{x}}$  est dérivé numériquement. La loi de commande est la suivante

$$\boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{\tau}_{ff} + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{f}_{ff} + \mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \left( \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_d \frac{d\Delta \mathbf{x}(t)}{dt} \right) \quad (4.14)$$

Les signaux d'anticipation  $\mathbf{f}_{ff}$  et  $\boldsymbol{\tau}_{ff}$  sont inchangés par rapport à la section 4.4.  $\mathbf{K}_p$  et  $\mathbf{K}_d$  sont des matrices diagonales de dimension  $n \times n$ . Les gains du correcteur placé dans l'espace opérationnel sont cependant plus difficiles à régler que dans l'espace articulaire (voir la section 4.1) et ne fournissent qu'une stabilité locale. Par conséquent, le schéma de la figure 4.5 est privilégié. Néanmoins, les deux schémas permettent de réduire efficacement les erreurs de suivi et d'améliorer les exactitudes de positionnement et d'orientation de la plate-forme. Des résultats expérimentaux sont donnés à la section 5.3 pour quantifier les

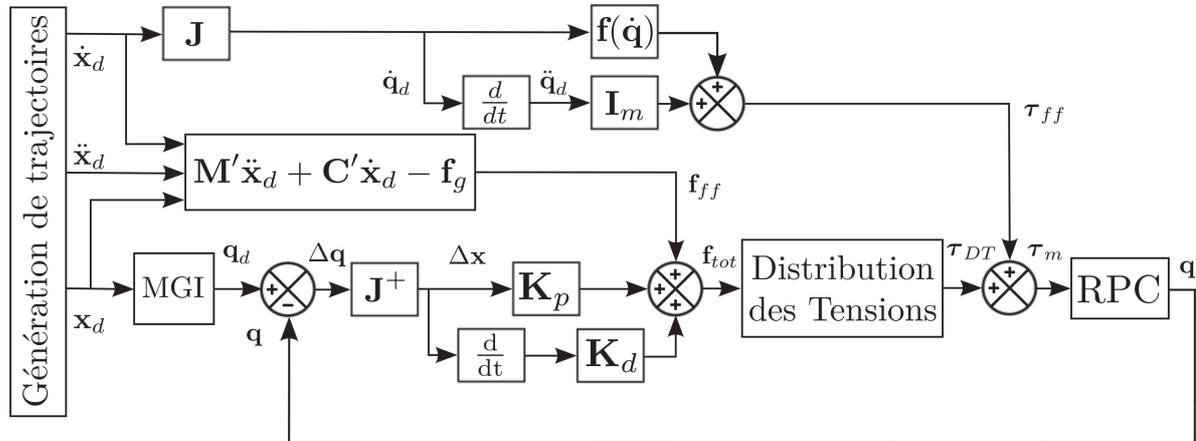


FIGURE 4.6 : Schéma de commande en espace double par anticipation et correcteur dans l'espace opérationnel.

avantages de l'implémentation de la commande par anticipation en espace double (avec correcteur dans l'espace articulaire) sur la commande PID classique.

Notons que l'intégration de la distribution des tensions dans la boucle principale permet de prendre en compte la totalité des efforts à générer sur la plate-forme à l'aide des câbles. L'entrée de l'algorithme de distribution des tensions,  $\mathbf{f}_{tot}$ , est en effet composée des efforts  $\mathbf{f}_{ff}$  issus du modèle dynamique de la plate-forme à équilibrer ainsi que des efforts  $\mathbf{f}_{pD}$  nécessaires pour stabiliser le suivi de trajectoires. La somme de ces deux termes est donc considérée dans le calcul de la distribution des tensions. Si une solution au problème de la distribution des tensions existe ( $\Lambda \neq 0$ ), alors le signal de commande  $\boldsymbol{\tau}_{DT}$  est toujours admissible.

#### 4.4.3 Algorithme de distribution des tensions dans la boucle d'anticipation

Il est parfois impossible d'implémenter l'algorithme de distribution des tensions dans la boucle de commande principale, tel qu'aux figures 4.5 et 4.6. En effet, certains contrôleurs industriels ne permettent pas d'agir sur le signal issu du correcteur qui est directement envoyé aux actionneurs. Les signaux de compensation et de distribution des tensions doivent donc être intégrés au signal d'entrée du contrôleur [Bruckmann 13], en amont du correcteur. De plus, si les paramètres dynamiques du RPC sont mal identifiés, les termes d'anticipation peuvent dégrader les performances de suivi de trajectoires de la plate-forme et agir comme des signaux perturbateurs. Dans une telle situation, le correcteur peut travailler en excès pour compenser ces perturbations et donc générer des forces  $\mathbf{f}_{pD}$  irréalisables. La distribution des tensions n'admet alors aucune solution admissible à l'équation

$\mathbf{t} = \mathbf{W}^+ \mathbf{f}$  ( $\Lambda = \emptyset$ ). Cette situation peut également apparaître si les signaux mesurés sont très bruités, des pics d'amplitude du signal de correction  $\mathbf{f}_{PD}$  pouvant conduire à un échec de la distribution des tensions.

Une solution est d'implémenter la distribution des tensions dans la boucle d'anticipation de l'espace opérationnel, comme illustré à la figure 4.7. Le terme d'anticipation  $\mathbf{f}_{ff}$ , calculé à partir des signaux issus de la génération de trajectoires est exempt de bruit de mesures. Or  $\mathbf{f}_{ff}$  est le signal d'entrée de l'algorithme de distribution des tensions. En admettant que les trajectoires générées sont strictement incluses dans l'ETC, que les vitesses et accélérations sont bornées et que les paramètres du modèle dynamique de la plate-forme et de son éventuelle charge sont constants, quelle que soit la pose de la plate-forme, on a  $\Lambda \neq \emptyset$ . L'algorithme de distribution des tensions trouvera toujours une solution admissible à l'équation  $\mathbf{t} = \mathbf{W}^+ \mathbf{f}$ .

Le signal  $\boldsymbol{\tau}_{DT}$  issu de la distribution des tensions est ensuite ajouté aux couples d'anticipation  $\boldsymbol{\tau}_{ff}$  qui compensent la dynamique des enrouleurs puis aux couples de correction  $\boldsymbol{\tau}_{PD}$ . Tel qu'illustré par la figure 4.7, les couples moteurs se décomposent en une somme de trois couples,

$$\boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{\tau}_{PD} + \boldsymbol{\tau}_{DT} + \boldsymbol{\tau}_{ff} \quad (4.15)$$

La loi de commande de la commande par anticipation avec intégration de la distribution des tensions dans la boucle d'anticipation s'écrit

$$\boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{\tau}_{ff} + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{f}_{ff} + \mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_q(t) + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q(t) \quad (4.16)$$

Les couples d'anticipation  $\boldsymbol{\tau}_{ff}$  conservent ici leur expression donnée par l'équation (4.8)

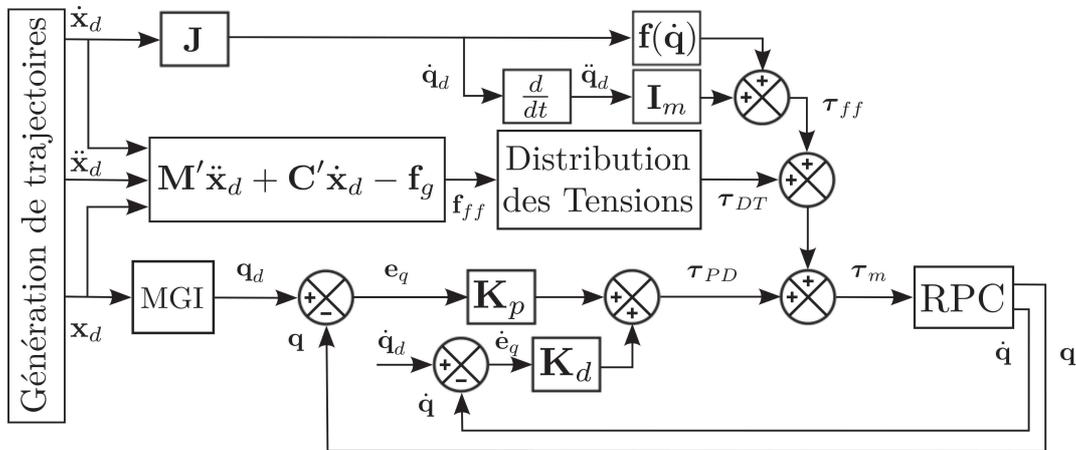


FIGURE 4.7 : Schéma de commande en espace double avec intégration de l'algorithme de distribution de tension dans une boucle d'anticipation.

et le torseur d'efforts  $\mathbf{f}_{ff}$  vérifie l'équation (4.5). Un schéma de commande similaire est proposé dans [Bruckmann 13], mais où l'anticipation conditionne le vecteur de positionnement angulaire désiré  $\mathbf{q}_d$ . Dans le cadre de cette thèse, et avec l'aimable collaboration du Dr.-Ing. Tobias Bruckmann et de Christopher Reichert de l'Université de Duisburg-Essen en Allemagne, la méthode de distribution des tensions proposée au chapitre 3 a été intégrée au schéma de [Bruckmann 13] pour commander le RPC pleinement contraint CABLAR. Des résultats expérimentaux sont présentés au chapitre 5.

Comme pour la loi de commande sans anticipation illustrée à la figure 4.4, lorsque les erreurs de suivi  $\mathbf{e}_q$  et  $\dot{\mathbf{e}}_q$  deviennent trop importantes, nos expérimentations du schéma de la figure 4.7, appliqué au prototype COGIRO, ont montré que les couples  $\boldsymbol{\tau}_{PD}$  générés par le correcteur PD peuvent être bien plus importants que ceux issus des boucles d'anticipation  $\boldsymbol{\tau}_{DT}$  et  $\boldsymbol{\tau}_{ff}$ . Par conséquent, cette stratégie ne permet pas de garantir l'admissibilité des tensions commandées, même si la distribution des tensions a trouvé une solution admissible pour la pose courante désirée. L'objectif premier de cette thèse étant de permettre la commandabilité d'un RPC en maintenant admissibles les tensions commandées le long d'une trajectoire contenue dans l'ETC, ce comportement n'est pas satisfaisant. On privilégie donc la commande par anticipation en espace double proposée à la section 4.5 qui intègre l'algorithme de distribution des tensions dans la boucle de commande principale.

En revanche, on observe expérimentalement des discontinuités occasionnelles dans la distribution des tensions lorsque le schéma de commande de la figure 4.5 est appliqué à un RPC (distribution des tensions dans la boucle de commande principale). Ces discontinuités correspondent à des échecs de l'algorithme de distribution des tensions ( $\Lambda = \emptyset$ ). Ces échecs sont directement liés aux incertitudes ou aux variations des paramètres des modèles dynamiques de la plate-forme et des enrouleurs. Afin de minimiser au maximum ces incertitudes et d'adapter les termes d'anticipation aux variations de ces paramètres, il convient de les estimer en ligne. La section suivante propose à cette fin d'appliquer aux RPC une commande adaptative en espace double.

## 4.5 Commande adaptative en espace double

Les commandes dites *basées modèle* sont toujours soumises au problème des incertitudes. Le modèle utilisé n'est jamais exact et son écart avec la physique réelle du système peut déstabiliser ou diminuer les performances de la commande. Certains paramètres sont naturellement difficiles à identifier. Par exemple, l'identification et la compensation des frottements sont des sujets discutés dans un grand nombre de travaux. Armstrong *et al.* [Armstrong-H. 94] ont proposé un modèle de frottements, basé sur la statique et la

dynamique de systèmes mécaniques, qui dépend de sept paramètres. L'identification de l'ensemble de ces paramètres nécessite d'importants moyens et beaucoup de temps. Par conséquent, les modèles implémentés sont souvent imprécis et la compensation des frottements dans une commande par anticipation est problématique. Canudas de Wit et Seront [Canudas de Wit 90], et plus récemment Le-tien et Albu-Schäffer [Le-Tien 12], ont utilisé la commande adaptative pour compenser efficacement les frottements d'un système mécanique complexe. Différentes méthodes de commande ont été proposées pour pallier les incertitudes du modèle. Les commandes robustes, telles que la commande par modes glissants [Oh 04] et la commande  $\mathcal{H}_\infty$  [Laroche 12], permettent de tenir compte de ces incertitudes dès la phase de conception de ces commandes.

Dans la plupart des applications possibles des RPC, le robot est souvent sollicité pour interagir avec un environnement donné (transport de charges par exemple). Ces interactions peuvent considérablement modifier certains paramètres du modèle dynamique du système, comme la masse et la position du centre de gravité de la plate-forme. Les paramètres du contrôleur devraient évoluer avec ces changements de caractéristiques. Par exemple, la masse de la plate-forme en aluminium (respectivement en acier) du démonstrateur du projet COGIRO équipée du lève-palette (voir annexe A), peut varier de 93 kilogrammes (respectivement 142 kilogrammes) sans charge, à 300 kilogrammes (respectivement 500 kilogrammes) chargée au maximum. La variation de masse correspondante vaut  $\Delta m = 322\%$  (respectivement  $\Delta m = 350\%$ ). Si la commande ne s'adapte pas en conséquence, la précision du système risque de diminuer. Un réglage manuel systématique de l'opérateur n'étant pas souhaitable, une estimation en ligne est donc requise.

L'implémentation d'une commande adaptative, qui vise à estimer en temps réel certains paramètres du modèle [Craig 86, Slotine 87], est donc pertinente pour la commande d'un RPC. La commande proposée dans cette section est synthétisée en se basant sur les modèles dynamiques (cas  $G \neq P$ ) développés au chapitre 2. Deux lois d'adaptation, correspondant au modèle dynamique de la plate-forme d'une part et au modèle dynamique des actionneurs d'autre part, sont implémentées dans des boucles d'anticipation. La formulation de ces lois est issue des travaux de Lee et Khalil [Lee 97]. Dans cet article, une loi d'adaptation dotée d'une projection des paramètres à estimer est proposée pour améliorer les performances de suivi de trajectoires d'un robot manipulateur. Des résultats de simulations d'un robot série plan à deux articulations sont donnés, avec une estimation en ligne des masses, des longueurs et des inerties des deux membres qui composent le manipulateur. Récemment, cette loi d'adaptation a été appliquée avec succès à un robot parallèle à membres rigides [Natal 12]. Dans ces derniers travaux, seule la masse de l'organe terminal et l'inertie des moteurs et des bras sont estimées en temps réel, l'objectif étant d'atteindre d'importantes accélérations. Par souci de compatibilité avec différentes

configurations et applications des RPC, nous estimerons dans cette thèse l'ensemble des paramètres du modèle dynamique d'un RPC, tel que décrit au chapitre 2. L'objectif de la commande adaptative introduite dans la suite de cette section est de diminuer les erreurs de positionnement et d'orientation de la plate-forme liées aux incertitudes ainsi qu'aux variations des paramètres du modèle.

### 4.5.1 Vue d'ensemble de la commande adaptative

Les travaux sur la commande adaptative ont débuté dans les années cinquante, avec pour objectif de développer des pilotes automatiques pour des avions subissant d'importantes variations de paramètres. Les bases concrètes de la commande adaptative ainsi que l'essor de ses applications sont en revanche plus tardives et datent des années quatre-vingt. Certains travaux ont proposé d'appliquer la commande adaptative à des robots manipulateurs (par exemple [Berghuis 93, Codourey 97, Le-Tien 12, Lee 97, Natal 12, Shang 09, Slotine 87]). Des livres de référence sur le sujet ont été publiés tels que [Craig 88] et [Slotine 91].

Il existe deux approches distinctes permettant d'adapter la commande de systèmes dont les paramètres dynamiques sont inconnus ou mésestimés : l'approche directe et l'approche indirecte. La première consiste à faire directement agir le processus d'adaptation sur les paramètres du contrôleur, de manière à optimiser ses performances sur la sortie du système. La méthode indirecte agit quant à elle sur les paramètres du modèle interne pour le faire converger vers le système réel. Ces paramètres sont estimés en ligne et permettent ainsi d'adapter les paramètres du contrôleur.

La commande adaptative est généralement implémentée suivant la méthode de la *commande adaptative à modèle de référence* ou de la méthode d'*autoréglage*. Seule la première approche, qui permet d'appliquer l'approche indirecte, sera utilisée dans cette thèse. Son fonctionnement peut généralement être schématisé tel que montré à la figure 4.8 [Slotine 91]

Le robot possède un certain nombre de paramètres inconnus ou incertains. D'après une entrée de référence  $\mathbf{r}$ , le modèle de référence fournit la commande idéale souhaitée  $\mathbf{y}_m$ . Cette commande est comparée à l'état mesuré  $\mathbf{y}$  du robot et l'erreur calculée permet de mettre à jour à chaque période d'échantillonnage, grâce à un processus d'adaptation, les paramètres ajustables  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  du modèle. La loi de commande  $\mathbf{u}$  est dite adaptative, et permet de réduire au mieux les erreurs entre le modèle de référence du robot et le robot lui-même.

Dans notre cas, deux lois d'adaptation sont implémentées : une dans l'espace opérationnel et l'autre dans l'espace articulaire. En effet, certains paramètres inconnus, la masse

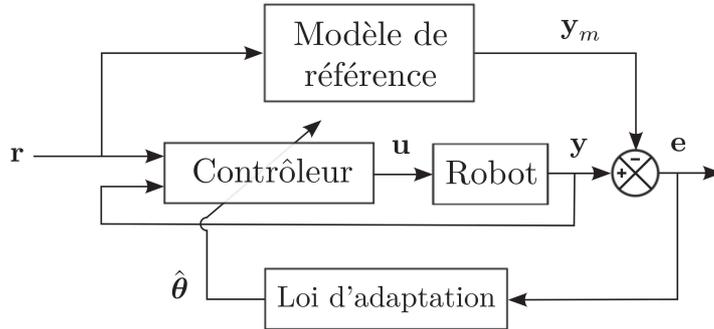


FIGURE 4.8 : Un schéma de commande adaptative basé modèle.

de la plate-forme et de sa charge, leurs produits et moments d'inertie et la position de leur centre de masse respectif, sont directement identifiables à partir des équations de la dynamique de la plate-forme. D'autres paramètres, dont les coefficients de frottement secs et visqueux des enrouleurs, sont directement issus de la dynamique des enrouleurs. Les changements d'espace seront effectués de la même manière que pour le schéma de commande PD de la figure 4.4 et pour le schéma de commande par anticipation en espace double de la figure 4.5.

### Schéma de la commande adaptative et notations

Le schéma de la commande adaptative proposée dans cette thèse est donné à la figure 4.9. Ce schéma, proche de celui de la commande par anticipation en espace double de la figure 4.5, intègre deux lois d'adaptation dans les boucles d'anticipation. Les paramètres ajustables de la commande sont en effet contenus dans les modèles dynamiques utilisés par la commande par anticipation.

Dans ce chapitre, les paramètres ajustables sont notés  $\hat{\theta}$ . L'erreur d'estimation du paramètre  $\theta$  est définie par  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ . Les composantes  $\hat{\theta}_i$  du vecteur des paramètres ajustable  $\hat{\theta}$  sont bornées et leurs bornes inférieure  $a$  et supérieure  $b$  sont supposées connues, telles que

$$\hat{\theta}_i \in [a_i, b_i] \quad (4.17)$$

Ainsi, l'amplitude de l'erreur sur l'estimation du paramètre  $\theta_i$  est bornée par

$$|\tilde{\theta}_i| = a_i - b_i \quad (4.18)$$

où  $\theta_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de  $\hat{\theta}$ .

Deux lois d'adaptation étant implémentées, on définit

- $\hat{\theta}_x$  le vecteur des paramètres ajustables du modèle dynamique de la plate-forme et de son éventuelle charge, exprimé dans l'espace opérationnel;

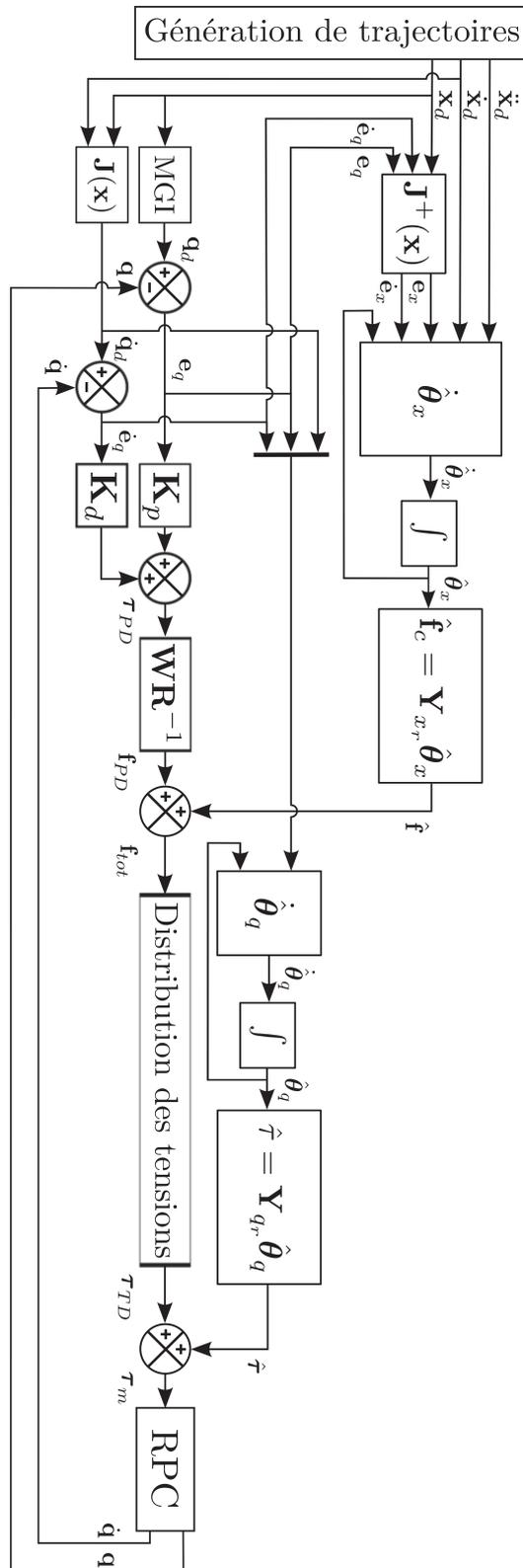


FIGURE 4.9 : Schéma de commande adaptative en espace double.

- $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$  le vecteur des paramètres ajustables du modèle dynamique des enrouleurs, exprimé dans l'espace articulaire ;

Afin de pouvoir estimer le déplacement du centre de masse de la plate-forme par rapport à son centre géométrique, nous partons du modèle dynamique développé dans la section 2.5.2

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{I}_m \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ (\mathbf{M}'(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_g) + \mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \quad (4.19)$$

avec  $\mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}$  le couple additif de distribution des tensions ajouté par intégration de l'algorithme du chapitre 3 au schéma de commande.

En appliquant le formalisme de cette section à la loi de commande par anticipation en espace double avec correcteur dans l'espace articulaire (équation 4.12), on obtient la loi de commande adaptative

$$\boldsymbol{\tau}_m = \hat{\boldsymbol{\tau}}(\dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_d, \ddot{\mathbf{x}}_d) + \mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{K}_p \mathbf{e}_q(t) + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q(t)) \quad (4.20)$$

en notant

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_d, \ddot{\mathbf{x}}_d) = \hat{\mathbf{M}}'(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}_d + \hat{\mathbf{C}}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}_d - \hat{\mathbf{f}}_g \quad (4.21)$$

et

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}(\dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) = \hat{\mathbf{I}}_m \ddot{\mathbf{q}}_d + \hat{\mathbf{f}}(\dot{\mathbf{q}}_d) \quad (4.22)$$

Dans ces expressions, les vecteurs et matrices pourvus d'un "chapeau" sont calculés à partir des paramètres estimés. Les expressions de  $\hat{\mathbf{f}}$  et  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  seront respectivement données dans l'espace opérationnel et dans l'espace articulaire dans la suite de ce chapitre.

#### 4.5.2 Adaptation dans l'espace opérationnel

On rappelle ici l'expression des équations de Newton-Euler appliquées à la plate-forme :

$$\begin{pmatrix} \Sigma \mathbf{F} \\ \Sigma \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{tot} \mathbb{1}_p & -m_{tot}[\mathbf{d}] \\ m_{tot}[\mathbf{d}] & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{tot}[\boldsymbol{\omega}][\boldsymbol{\omega}]\mathbf{d} \\ [\boldsymbol{\omega}]\mathbf{H}\boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{M}'(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

où

- $\mathbf{H} = \mathbf{K} - m_{tot}[\mathbf{d}][\mathbf{d}]$  est une matrice  $3 \times 3$  symétrique définie positive ;
- $\mathbf{d} = [u \ v \ w]^T$  est le vecteur  $\overrightarrow{PG}$  de décalage du centre de gravité par rapport au point de référence de la plate-forme exprimé dans la base du repère du robot  $\mathcal{R}_b$  ;
- $\mathbf{c}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}$ .

De plus, le bilan des forces appliquées à la plate-forme fait intervenir le torseur d'efforts appliqués par les câbles sur la plate-forme  $\mathbf{f}_c = \mathbf{Wt}$  ainsi que l'action de la gravité  $\mathbf{f}_g = m_{tot}g [0 \ 0 \ -1 \ -v \ u \ 0]^T$ .

$$\begin{pmatrix} \Sigma \mathbf{F} \\ \Sigma \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = \mathbf{Wt} + \mathbf{f}_g \quad (4.23)$$

Ce modèle peut être linéarisé et mis sous la forme

$$\mathbf{f} = \mathbf{Wt} = \mathbf{M}'(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_g = \mathbf{Y}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\theta}_x \quad (4.24)$$

où  $\mathbf{f}$  est le torseur d'efforts appliqués par les câbles sur la plate-forme,  $\boldsymbol{\theta}_x \in \mathbb{R}^s$  est le vecteur des paramètres de la plate-forme à estimer,  $s$  étant le nombre de paramètres, et  $\mathbf{Y}_x$  la matrice de régression des fonctions connues. Toujours dans le cas d'un RPC spatial, les paramètres à estimer sont :

- la masse totale de la plate-forme et de sa charge  $m_{tot}$  ;
- les produits de la masse et des positions  $u$ ,  $v$  et  $w$  du centre de gravité ;
- les coefficients de la matrice  $\mathbf{H}$  ;

soit  $s = 10$ , en écrivant

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{xx} & -h_{xy} & -h_{xz} \\ -h_{xy} & h_{yy} & -h_{yz} \\ -h_{xz} & -h_{yz} & h_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

L'expression du vecteur  $\boldsymbol{\theta}_x$  est donc la suivante

La matrice de régression  $\mathbf{Y}_x$  basée sur ce modèle est exprimée en écrivant le modèle dynamique du robot en fonction de  $\boldsymbol{\theta}_x$ . Le détail de sa construction est donné ci-après. Pour la clarté du développement,  $\mathbf{Y}_x$  est décomposé en somme de trois sous-matrices  $\mathbf{Y}_{x_1}$ ,  $\mathbf{Y}_{x_2}$  et  $\mathbf{Y}_{x_3}$  représentant respectivement les fonctions connues (constantes connues ou variables issues de la génération de trajectoires) des efforts dûs aux accélérations, aux forces centrifuges et de Coriolis ainsi qu'à la gravité, tel que

$$\mathbf{Y}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{Y}_{x_1}(\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Y}_{x_2}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Y}_{x_3} \quad (4.26)$$

Leurs expressions sont détaillées ci-après.

### Efforts dûs aux accélérations

Réécrivons le produit  $\mathbf{M}'(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}$  comme le produit d'une matrice de fonctions connues et du vecteur  $\boldsymbol{\theta}_x$  :

$$\mathbf{M}'(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{Y}_{x_1}(\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\theta}_x = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} & [\dot{\boldsymbol{\omega}}] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & -[\ddot{\mathbf{p}}] & \text{diag}(\dot{\boldsymbol{\omega}}) & \mathbf{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x \quad (4.27)$$

avec

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\dot{\omega}_y & -\dot{\omega}_z & 0 \\ -\dot{\omega}_x & 0 & -\dot{\omega}_z \\ 0 & -\dot{\omega}_x & -\dot{\omega}_y \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

### Efforts dûs aux forces centrifuges et de Coriolis

Réécrivons maintenant le vecteur  $\mathbf{c}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  comme le produit d'une matrice de fonctions connues et du vecteur  $\boldsymbol{\theta}_x$  :

$$\mathbf{c}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{Y}_{x_2}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\theta}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{C}'_1(\boldsymbol{\omega}) & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{C}'_2(\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x \quad (4.29)$$

avec  $\mathbf{C}'_1(\boldsymbol{\omega})$  une matrice  $3 \times 3$  définie par

$$\mathbf{C}'_1(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} -(\omega_y^2 + \omega_z^2) & \omega_x^2 \omega_y^2 & \omega_x^2 \omega_z^2 \\ \omega_x^2 \omega_y^2 & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & \omega_y^2 \omega_z^2 \\ \omega_x^2 \omega_z^2 & \omega_y^2 \omega_z^2 & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

et avec  $\mathbf{C}'_2(\boldsymbol{\omega})$  une matrice  $3 \times 6$  telle que

$$\mathbf{C}'_2(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_y \omega_z & \omega_y \omega_z & \omega_x \omega_z & -\omega_x \omega_y & (\omega_z^2 - \omega_y^2) \\ \omega_x \omega_z & 0 & -\omega_x \omega_z & -\omega_y \omega_z & (\omega_x^2 - \omega_z^2) & \omega_x \omega_y \\ -\omega_x \omega_y & \omega_x \omega_y & 0 & (\omega_y^2 - \omega_x^2) & \omega_y \omega_z & -\omega_x \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

### Efforts dûs à la gravité

Enfin, le terme  $\mathbf{f}_g$  du modèle dynamique (2.43) peut s'écrire

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{Y}_{x_3} \boldsymbol{\theta}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 7} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0}_{3 \times 7} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 7} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x \quad (4.32)$$

où  $\mathbf{G}$  est une matrice  $3 \times 3$  définie par

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g \\ 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Finalement, l'expression du terme d'anticipation dans l'espace opérationnel s'écrit

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{M}}'(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}}_d + \hat{\mathbf{C}}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}_d - \hat{\mathbf{f}}_g = \mathbf{Y}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_d, \ddot{\mathbf{x}}_d) \hat{\boldsymbol{\theta}}_x \quad (4.34)$$

où  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_x$  est le vecteur estimé de  $\boldsymbol{\theta}_x$ , dont les composantes sont ajustées par la loi d'adaptation donnée ci-après.

### Loi d'adaptation dans l'espace opérationnel

La loi d'adaptation choisie utilise la projection de Khalil [Khalil 96, Lee 97] qui sature l'estimation des paramètres aux bornes inférieures  $a_{x_j}$  et supérieures  $b_{x_j}$ , définies par l'utilisateur

$$\dot{\hat{\theta}}_{x_j} = \begin{cases} \gamma_{x_j} \phi_{x_j} & \text{si } a_{x_j} < \hat{\theta}_{x_j} < b_{x_j} \text{ ou} \\ & \hat{\theta}_{x_j} \geq b_{x_j} \ \& \ \phi_{x_j} \leq 0 \text{ ou} \\ & \hat{\theta}_{x_j} \leq a_{x_j} \ \& \ \phi_{x_j} \geq 0 \\ \gamma_{x_j} \left(1 + \frac{b_{x_j} - \hat{\theta}_{x_j}}{\delta_x}\right) \phi_{x_j} & \text{si } \hat{\theta}_{x_j} \geq b_{x_j} \ \& \ \phi_{x_j} \geq 0 \\ \gamma_{x_j} \left(1 + \frac{\hat{\theta}_{x_j} - a_{x_j}}{\delta_x}\right) \phi_{x_j} & \text{si } \hat{\theta}_{x_j} \leq a_{x_j} \ \& \ \phi_{x_j} \leq 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

avec  $j = \{1, \dots, 10\}$  et  $\delta_x \geq 0$ .  $\Gamma_x$  est la matrice diagonale des gains d'adaptation dans l'espace opérationnel, définie par  $\Gamma_x = \text{diag}\{\gamma_{x_1}, \dots, \gamma_{x_{10}}\}$ ,  $\gamma_{x_j} \geq 0$ .  $a_{x_j}$  et  $b_{x_j}$  sont respectivement les bornes inférieures et supérieures du  $j^{\text{ème}}$  paramètre à estimer.  $\phi_x$  est défini par  $\phi_x = \mathbf{Y}_x^T \mathbf{s}_x$ , où  $\mathbf{s}_x$  est l'erreur opérationnelle combinée définie par  $\mathbf{s}_x = \dot{\mathbf{e}}_x + \lambda \mathbf{e}_x$ , avec  $\lambda = \lambda_0 / (1 + \|\mathbf{e}_x\|)$ ,  $\{\lambda, \lambda_0\} > 0$ . De plus,  $\phi_{x_j}$  est la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $\phi_x$ . Cette loi d'adaptation permet de garantir que  $\forall t \geq 0$ , et avec  $a_{x_i} \leq \hat{\theta}_{x_i}(0) \leq b_{x_i}$ , tous les paramètres à estimer sont bornés tels que  $a_{x_i} \leq \hat{\theta}_{x_i} \leq b_{x_i}$ .

La valeur de  $\delta_x$ , des gains d'adaptation  $\gamma_{x_j}$  ainsi que de  $\lambda_0$  sont des constantes à régler par l'utilisateur.

### 4.5.3 Adaptation dans l'espace articulaire

Considérons maintenant l'équation (2.51) du modèle simplifié de la dynamique des actionneurs présentée à la section 2.5

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{I}_m \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \tanh(\mu \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Rt}$$

Le vecteur de couples  $\mathbf{Rt}$  correspond au signal de sortie de l'algorithme de distribution des tensions, noté  $\boldsymbol{\tau}_{DT}$  sur la figure 4.9. On suppose que les coefficients de frottement contenus dans les diagonales des matrices  $\mathbf{F}_s$  et  $\mathbf{F}_v$ , ainsi que les moments d'inertie principaux des moteurs sont bornés. De plus, ils sont linéairement dépendants d'un vecteur  $\boldsymbol{\theta}_q$  composé des paramètres inconnus de l'équation dynamique des actionneurs. Ce modèle peut donc être linéarisé et mis sous la forme

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{Y}_q(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\theta}_q + \mathbf{Rt}_{DT} \quad (4.36)$$

où  $\boldsymbol{\theta}_q \in \mathbb{R}^s$  est le vecteur des paramètres du modèle dynamique des enrouleurs,  $s$  étant le nombre de paramètres, et  $\mathbf{Y}_q$  est la matrice de régression des fonctions connues. Les paramètres sont

- les  $m$  coefficients de frottement secs  $f_s$  ;
- les  $m$  coefficients de frottement visqueux  $f_v$  ;
- les  $m$  moments d'inertie principaux  $I_m$  des moteurs.

Le vecteur  $\boldsymbol{\theta}_q$  s'écrit donc

$$\boldsymbol{\theta}_q = [f_{s1} \quad f_{s2} \quad \cdots \quad f_{sm} \quad f_{v1} \quad f_{v2} \quad \cdots \quad f_{vm} \quad I_{m1} \quad I_{m2} \quad \cdots \quad I_{mm}]^T \quad (4.37)$$

La matrice de régression  $\mathbf{Y}_q$  correspondante résulte de la concaténation de trois matrices diagonales  $\mathbf{Y}_{q_1}(\dot{\mathbf{q}})$ ,  $\mathbf{Y}_{q_2}(\dot{\mathbf{q}})$  et  $\mathbf{Y}_{q_3}(\ddot{\mathbf{q}})$  telles que

$$\mathbf{Y}_q(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = [\mathbf{Y}_{q_1}(\dot{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{Y}_{q_2}(\dot{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{Y}_{q_3}(\ddot{\mathbf{q}})] \quad (4.38)$$

avec

$$\mathbf{Y}_{q_1}(\dot{\mathbf{q}}) = \text{diag}(\tanh(\mu\dot{q}_1), \tanh(\mu\dot{q}_2), \dots, \tanh(\mu\dot{q}_m)) \quad (4.39)$$

$$\mathbf{Y}_{q_2}(\dot{\mathbf{q}}) = \text{diag}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m) \quad (4.40)$$

$$\mathbf{Y}_{q_3}(\ddot{\mathbf{q}}) = \text{diag}(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_m) \quad (4.41)$$

Finalement, en substituant  $\mathbf{I}_m$ ,  $\mathbf{F}_s$  et  $\mathbf{F}_v$  par leurs estimés respectifs  $\hat{\mathbf{I}}_m$ ,  $\hat{\mathbf{F}}_s$  et  $\hat{\mathbf{F}}_v$ , nous obtenons l'expression du terme d'anticipation dans l'espace articulaire

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mathbf{I}}_m \ddot{\mathbf{q}}_d + \hat{\mathbf{F}}_s \tanh(\mu\dot{\mathbf{q}}_d) + \hat{\mathbf{F}}_v \dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{Y}_q(\dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \hat{\boldsymbol{\theta}}_q \quad (4.42)$$

où  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$  est le vecteur estimé de  $\boldsymbol{\theta}_q$ , dont les composantes sont ajustées par la loi d'adaptation donnée ci-après.

### Loi d'adaptation dans l'espace articulaire

Tout comme la loi d'adaptation dans l'espace opérationnel, la loi d'adaptation dans l'espace articulaire utilise la projection de Khalil définie par

$$\dot{\hat{\theta}}_{q_i} = \begin{cases} \gamma_{q_i} \phi_{q_i} & \text{si } a_{q_i} < \hat{\theta}_{q_i} < b_{q_i} \text{ ou} \\ & \hat{\theta}_{q_i} \geq b_{q_i} \ \& \ \phi_{q_i} \leq 0 \text{ ou} \\ & \hat{\theta}_{q_i} \leq a_{q_i} \ \& \ \phi_{q_i} \geq 0 \\ \gamma_{q_i} \left(1 + \frac{b_{q_i} - \hat{\theta}_{q_i}}{\delta_q}\right) \phi_{q_i} & \text{si } \hat{\theta}_{q_i} \geq b_{q_i} \ \& \ \phi_{q_i} \geq 0 \\ \gamma_{q_i} \left(1 + \frac{\hat{\theta}_{q_i} - a_{q_i}}{\delta_q}\right) \phi_{q_i} & \text{si } \hat{\theta}_{q_i} \leq a_{q_i} \ \& \ \phi_{q_i} \leq 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

avec  $i = \{1, \dots, s\}$  et  $\delta_q \geq 0$ .  $\Gamma_q$  est la matrice diagonale des gains d'adaptation dans l'espace articulaire, définie telle que  $\Gamma_q = \text{diag}\{\gamma_{q_1}, \dots, \gamma_{q_s}\}$ ,  $\gamma_{q_i} \geq 0$ .  $a_{q_i}$  et  $b_{q_i}$  sont respectivement les bornes inférieures et supérieures du  $i^{\text{ème}}$  paramètre à estimer. D'après [Lee 97],  $\phi_q$  est défini par  $\phi_q = -\mathbf{Y}_q^T \mathbf{s}_q$ , où  $\mathbf{s}_q$  est l'erreur articulaire combinée définie par  $\mathbf{s}_q = \dot{\mathbf{e}}_q + \lambda \mathbf{e}_q$ , avec  $\lambda = \lambda_0 / (1 + \|\mathbf{e}_q\|)$ ,  $\{\lambda, \lambda_0\} > 0$ . De plus,  $\phi_{q_i}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\phi_q$ . La projection de Khalil permet de garantir que  $\forall t \geq 0$ , et avec  $a_{q_i} \leq \hat{\theta}_{q_i}(0) \leq b_{q_i}$ , tous les paramètres à estimer sont bornés tels que  $a_{q_i} \leq \hat{\theta}_{q_i} \leq b_{q_i}$ .

La valeur de  $\delta_q$ , des gains d'adaptation  $\gamma_q$  ainsi que de  $\lambda_0$  sont des constantes à régler par l'utilisateur.

#### 4.5.4 Synthèse de la commande

En substituant les termes d'anticipation de l'équation (4.19) par leurs expressions (4.24) et (4.36), on obtient

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{Y}_q(\dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \hat{\boldsymbol{\theta}}_q + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{Y}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}_d) \hat{\boldsymbol{\theta}}_x + \mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \quad (4.44)$$

Les erreurs de suivi en positions et en vitesses articulaires (respectivement opérationnelles)  $\mathbf{e}_q$  et  $\dot{\mathbf{e}}_q$  (respectivement  $\mathbf{e}_x$  et  $\dot{\mathbf{e}}_x$ ) sont calculées de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_q &= \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{e}}_q &= \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{e}_x &= \Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{J}^+ \mathbf{R} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{J}^+ \mathbf{R} \mathbf{e}_q \\ \dot{\mathbf{e}}_x &= \mathbf{J}^+ \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}}_q \end{aligned} \quad (4.45)$$

D'après [Berghuis 93], les erreurs combinées articulaires  $\mathbf{s}_q$  et opérationnelles  $\mathbf{s}_x$  sont définies telles que

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_q &= \dot{\mathbf{e}}_q + \lambda \mathbf{e}_q = \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{s}_x &= \dot{\mathbf{e}}_x + \lambda \mathbf{e}_x = \mathbf{J}^+ \mathbf{R} \mathbf{s}_q = \dot{\mathbf{x}}_r - \dot{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

avec  $\lambda = \lambda_0 / (1 + \|\mathbf{e}_q\|)$ ,  $\{\lambda, \lambda_0\} > 0$  (les critères de sélection de  $\lambda_0$  sont donnés dans [Berghuis 93]). Les vitesses de référence  $\dot{\mathbf{q}}_r$  et  $\dot{\mathbf{x}}_r$  sont définies par

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_r &= \dot{\mathbf{q}}_d + \lambda \mathbf{e}_q \\ \dot{\mathbf{x}}_r &= \dot{\mathbf{x}}_d + \lambda \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (4.47)$$

et de la même manière les accélérations de référence  $\ddot{\mathbf{x}}_r$  et  $\ddot{\mathbf{q}}_r$ ,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_r &= \ddot{\mathbf{x}}_d + \lambda \dot{\mathbf{e}}_x \\ \ddot{\mathbf{q}}_r &= \ddot{\mathbf{q}}_d + \lambda \dot{\mathbf{e}}_q \end{aligned} \quad (4.48)$$

L'utilisation de ces variables, proposées par Slotine et Li dans [Slotine 87], implique une simple manipulation des notations et permet d'éliminer les erreurs statiques de positionnement. La définition de  $\mathbf{s}_q$  (respectivement  $\mathbf{s}_x$ ) est une équation stable du premier ordre. Ainsi, sous réserve de conditions initiales bornées, montrer que  $\mathbf{s}_q$  (respectivement  $\mathbf{s}_x$ ) est bornée permet d'établir que  $\mathbf{e}_q$  et  $\dot{\mathbf{e}}_q$  (respectivement  $\mathbf{e}_x$  et  $\dot{\mathbf{e}}_x$ ) sont bornées et donc que  $\mathbf{q}$  et  $\dot{\mathbf{q}}$  (respectivement  $\mathbf{x}$  et  $\dot{\mathbf{x}}$ ) le sont également. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{s} \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_q \rightarrow 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{e}}_q \rightarrow 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

Ce changement de notation est appliqué à la loi de commande proposée à l'équation (4.20),

$$\boldsymbol{\tau}_m = \hat{\boldsymbol{\tau}}(\dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}_r, \ddot{\mathbf{x}}_r) + \mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{K}_p \mathbf{e}_q(t) + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q(t)) \quad (4.50)$$

Finalement, la loi de commande adaptative en espace double peut se réécrire, à l'aide des équations (4.34) et (4.42), telle que

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{Y}_{q_r}(\dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \hat{\boldsymbol{\theta}}_q + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{Y}_{x_r}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}_r, \ddot{\mathbf{x}}_r) \hat{\boldsymbol{\theta}}_x + \mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{K}_p \mathbf{e}_q(t) + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q(t)) \quad (4.51)$$

$\mathbf{Y}_{q_r}(\dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)$  ayant la même structure que  $\mathbf{Y}_q(\dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)$  et  $\mathbf{Y}_{x_r}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}_r, \ddot{\mathbf{x}}_r)$  ayant la même structure que  $\mathbf{Y}_x(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}_d, \ddot{\mathbf{x}}_d)$ .

### 4.5.5 Analyse de stabilité

#### Préliminaires

Pour le déroulement théorique de cette analyse de stabilité, l'approximation de la fonction sgn par la fonction tanh n'est plus retenue. Les efforts de frottements s'écrivent donc  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}})$ . En revanche, pour des raisons de sécurité, c'est la fonction tanh qui sera implémentée dans le RPC.

De plus, les hypothèses suivantes sont posées :

- les signaux  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  et  $\ddot{\mathbf{x}}$  issus de la génération de trajectoire ainsi que  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{q}}$  sont bornés ;
- $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_q(0)\| \leq \Theta_q$ , avec  $\Theta_q = \{\boldsymbol{\theta}_q \mid a_{q_i} \leq \hat{\theta}_{q_i} \leq b_{q_i}, 1 \leq i \leq s\}$  où  $a_{q_i}$  et  $b_{q_i}$  désignent respectivement les bornes inférieures et supérieures du  $i^{\text{ème}}$  paramètre parmi les  $s$  estimés. De même,  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_x(0)\| \leq \Theta_x$ , avec  $\Theta_x = \{\boldsymbol{\theta}_x \mid a_{x_j} \leq \hat{\theta}_{x_j} \leq b_{x_j}, 1 \leq j \leq 10\}$  ;
- $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q(t) \leq \Theta_{q\delta}$ , avec  $\Theta_{q\delta} = \{\boldsymbol{\theta}_q \mid a_{q_i} - \delta \leq \hat{\theta}_{q_i} \leq b_{q_i} + \delta, 1 \leq i \leq s\}$  où  $a_{q_i}$  et  $b_{q_i}$  désignent respectivement les bornes inférieures et supérieures du  $i^{\text{ème}}$  paramètre parmi les  $s$  estimés. De même,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_x(t) \leq \Theta_{x\delta}$ , avec  $\Theta_{x\delta} = \{\boldsymbol{\theta}_x \mid a_{x_j} - \delta \leq \hat{\theta}_{x_j} \leq b_{x_j} + \delta, 1 \leq j \leq 10\}$  ;

- les matrices des coefficients de frottements secs  $\mathbf{F}_s$  et des coefficients de frottements visqueux  $\mathbf{F}_v$  sont symétriques définies positives, de même que la matrice  $\mathbf{R}$ ;
- la matrice d'inertie  $\mathbf{M}'(\mathbf{x})$  du RPC est symétrique définie positive. De plus, la matrice  $\mathbf{M}'(\mathbf{x}) - 2\mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  est antisymétrique. Ainsi,  $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{z}^T (\mathbf{M}'(\mathbf{x}) - 2\mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})) \mathbf{z} = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n; \quad (4.52)$$

Enfin, on considère ici le correcteur PD proposé dans [Slotine 91]. Ce correcteur possède une unique matrice de gains  $\mathbf{K}_s$  à régler tel que le terme correctif soit égal à  $\mathbf{K}_s \mathbf{s}_q$ ,  $\mathbf{s}_q$  étant l'erreur articulaire combinée ( $\mathbf{s}_q = \dot{\mathbf{e}}_q + \lambda \mathbf{e}_q$ ). Ce correcteur peut donc se ramener directement au PD classique avec  $\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_s$  et  $\mathbf{K}_p = \lambda \mathbf{K}_s$ .

### Modèle dynamique de l'erreur en boucle fermée

En substituant la loi de commande (4.51) dans l'équation de la dynamique du RPC (4.19) on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}_{q_r}(\dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \hat{\boldsymbol{\theta}}_q + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{Y}_{x_r}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_r, \ddot{\mathbf{x}}_r) \hat{\boldsymbol{\theta}}_x + \mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_s \mathbf{s}_q \\ & = \mathbf{I}_m \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ (\mathbf{M}'(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_g) + \mathbf{R}\mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Le vecteur d'erreur d'estimation des paramètres s'écrit  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}$  et, par conséquent,  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}$ . En utilisant les équations (4.34) et (4.42) et en substituant les vecteurs  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$  et  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_x$ , l'équation (4.53) devient

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I}_m - \tilde{\mathbf{I}}_m) \ddot{\mathbf{q}}_r + (\mathbf{F}_s - \tilde{\mathbf{F}}_s) \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r) + (\mathbf{F}_v - \tilde{\mathbf{F}}_v) \dot{\mathbf{q}}_r + \\ & \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \left( (\mathbf{M}'(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{M}}'(\mathbf{x})) \ddot{\mathbf{x}}_r + (\mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \tilde{\mathbf{C}}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})) \dot{\mathbf{x}}_r + \tilde{\mathbf{f}}_g \right) + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_s \mathbf{s}_q \\ & = \mathbf{I}_m \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ (\mathbf{M}'(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (4.54)$$

ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} & \mathbf{I}_m \dot{\mathbf{s}}_q + \mathbf{F}_v \mathbf{s}_q + \mathbf{F}_s (\operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r) - \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}})) + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ (\mathbf{M}'(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{s}}_x + \mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \mathbf{s}_x) + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_s \mathbf{s}_q \\ & = \tilde{\mathbf{I}}_m \ddot{\mathbf{q}}_r + \tilde{\mathbf{F}}_v \dot{\mathbf{q}}_r + \tilde{\mathbf{F}}_s \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ (\tilde{\mathbf{M}}'(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}}_r + \tilde{\mathbf{C}}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}_r - \tilde{\mathbf{f}}_g) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Notons que le membre de droite de l'équation (4.55) peut se réécrire

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{I}}_m \ddot{\mathbf{q}}_r + \tilde{\mathbf{F}}_v \dot{\mathbf{q}}_r + \tilde{\mathbf{F}}_s \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ (\tilde{\mathbf{M}}'(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}}_r + \tilde{\mathbf{C}}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}_r - \tilde{\mathbf{f}}_g) \\ & = \mathbf{Y}_{q_r}(\dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_q + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{Y}_{x_r}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_r, \ddot{\mathbf{x}}_r) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_x \end{aligned} \quad (4.56)$$

De plus, on rappelle que  $\mathbf{s}_x = \mathbf{J}^+ \mathbf{R} \mathbf{s}_q = -\mathbf{W}^{+T} \mathbf{R} \mathbf{s}_q$ . La dérivation par rapport au temps de cette expression implique  $\dot{\mathbf{s}}_x = -\dot{\mathbf{W}}^{+T} \mathbf{R} \mathbf{s}_q - \mathbf{W}^{+T} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{s}_q$ . Par substitution des erreurs opérationnelles combinées dans l'équation (4.56), le modèle dynamique de l'erreur en boucle

fermée s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_{q_{eq}}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{s}}_q + \mathbf{C}'_{q_{eq}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\mathbf{s}_q + \mathbf{F}_v\mathbf{s}_q + \mathbf{F}_s(\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r) - \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})) + \mathbf{R}\mathbf{W}^+\mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}_s\mathbf{s}_q \\ = \mathbf{Y}_{q_r}(\dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\tilde{\boldsymbol{\theta}}_q + \mathbf{R}\mathbf{W}^+\mathbf{Y}_{x_r}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}_r)\tilde{\boldsymbol{\theta}}_x \end{aligned} \quad (4.57)$$

où nous retrouvons les matrices  $\mathbf{M}'_{q_{eq}}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{C}'_{q_{eq}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  définies à l'équation (2.49) dont les expressions sont rappelées ici

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_{q_{eq}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{I}_m - \mathbf{R}\mathbf{W}^+\mathbf{M}'(\mathbf{x})\mathbf{W}^{+T}\mathbf{R} \\ \mathbf{C}'_{q_{eq}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= -\mathbf{R}\mathbf{W}^+ \left( \mathbf{C}'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\mathbf{W}^{+T} + \mathbf{M}'(\mathbf{x})\dot{\mathbf{W}}^{+T} \right) \mathbf{R} \end{aligned}$$

Afin d'alléger les notations, ces matrices seront notées  $\mathbf{M}'_{q_{eq}}$  et  $\mathbf{C}'_{q_{eq}}$  dans la suite de cette section. De même, les matrices de régression seront notées  $\mathbf{Y}_{q_r}$  et  $\mathbf{Y}_{x_r}$ .

### Analyse de stabilité de la loi de commande adaptative

Considérons maintenant la fonction candidate de Lyapunov suivante

$$V(t) = \frac{1}{2}\mathbf{s}_q^T\mathbf{M}'_{q_{eq}}\mathbf{s}_q + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_q^T\boldsymbol{\Gamma}_q^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_q + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_x^T\boldsymbol{\Gamma}_x^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_x \quad (4.58)$$

où  $\boldsymbol{\Gamma}_q$  et  $\boldsymbol{\Gamma}_x$  sont des matrices symétriques définies positives. La dérivation temporelle de cette fonction implique

$$\dot{V}(t) = \mathbf{s}_q^T\dot{\mathbf{M}}'_{q_{eq}}\mathbf{s}_q + \frac{1}{2}\mathbf{s}_q^T\dot{\mathbf{M}}'_{q_{eq}}\mathbf{s}_q + \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_q^T\boldsymbol{\Gamma}_q^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_q + \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_x^T\boldsymbol{\Gamma}_x^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_x \quad (4.59)$$

En substituant à  $\mathbf{M}'_{q_{eq}}\dot{\mathbf{s}}_q$  son expression issue de (4.57), (4.59) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = \mathbf{s}_q^T \left( \mathbf{Y}_{q_r}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_q + \mathbf{R}\mathbf{W}^+\mathbf{Y}_{x_r}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_x - \mathbf{C}'_{q_{eq}}\mathbf{s}_q - \mathbf{F}_v\mathbf{s}_q - \mathbf{F}_s(\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r) - \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})) - \mathbf{R}\mathbf{W}^+\mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}_s\mathbf{s}_q \right) \\ + \frac{1}{2}\mathbf{s}_q^T\dot{\mathbf{M}}'_{q_{eq}}\mathbf{s}_q + \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_q^T\boldsymbol{\Gamma}_q^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_q + \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_x^T\boldsymbol{\Gamma}_x^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_x \end{aligned} \quad (4.60)$$

Les estimations des paramètres sont mises à jour d'après les lois d'adaptation données à la section précédente, soit

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_q &= -\boldsymbol{\Gamma}_q\mathbf{Y}_{q_r}\mathbf{s}_q \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_x &= \boldsymbol{\Gamma}_x\mathbf{Y}_{x_r}\mathbf{s}_x = -\boldsymbol{\Gamma}_x\mathbf{Y}_{x_r}\mathbf{W}^{+T}\mathbf{R}\mathbf{s}_q \end{aligned}$$

De plus,  $\mathbf{s}_q^T \left( \dot{\mathbf{M}}'_{q_{eq}} - 2\mathbf{C}'_{q_{eq}} \right) \mathbf{s}_q = 0$ .

*Démonstration.* Dérivons l'expression de  $\mathbf{M}'_{q_{eq}}$  par rapport au temps

$$\dot{\mathbf{M}}'_{q_{eq}} = -\mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}^+\mathbf{M}'\mathbf{W}^{+T}\mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{W}^+\dot{\mathbf{M}}'\mathbf{W}^{+T}\mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{W}^+\dot{\mathbf{M}}'\mathbf{W}^{+T}\mathbf{R} \quad (4.61)$$

Notons que  $\mathbf{I}_m$ , la matrice symétrique des inerties réelles des enrouleurs est constante. Sa dérivée est donc nulle. Il est donc possible d'écrire

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}}'_{q_{eq}} - 2\mathbf{C}'_{q_{eq}} &= -\mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}^+ \mathbf{M}'\mathbf{W}^{+T} \mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{M}'\dot{\mathbf{W}}^{+T} \mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \dot{\mathbf{M}}'\mathbf{W}^{+T} \mathbf{R} \\ &\quad + 2\mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{M}'\dot{\mathbf{W}}^{+T} \mathbf{R} + 2\mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{C}'\mathbf{W}^{+T} \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{M}'\dot{\mathbf{W}}^{+T} \mathbf{R} - \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}^+ \mathbf{M}'\mathbf{W}^{+T} \mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{W}^+ (\dot{\mathbf{M}}' - 2\mathbf{C}')\mathbf{W}^{+T} \mathbf{R}\end{aligned}\quad (4.62)$$

On montre facilement que  $\mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{M}'\dot{\mathbf{W}}^{+T} \mathbf{R} - \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}^+ \mathbf{M}'\mathbf{W}^{+T} \mathbf{R}$  est antisymétrique. En effet,

$$\mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{M}'\dot{\mathbf{W}}^{+T} \mathbf{R} - \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}^+ \mathbf{M}'\mathbf{W}^{+T} \mathbf{R} + \left( \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{M}'\dot{\mathbf{W}}^{+T} \mathbf{R} - \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}}^+ \mathbf{M}'\mathbf{W}^{+T} \mathbf{R} \right)^T = 0 \quad (4.63)$$

$\dot{\mathbf{M}}' - 2\mathbf{C}'$  étant également antisymétrique, alors la matrice  $\dot{\mathbf{M}}'_{q_{eq}} - 2\mathbf{C}'_{q_{eq}}$  l'est aussi, ce qui conduit à  $\mathbf{s}_q^T (\dot{\mathbf{M}}'_{q_{eq}} - 2\mathbf{C}'_{q_{eq}}) \mathbf{s}_q = 0$ .  $\square$

L'équation (4.60) peut donc se réécrire

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \mathbf{s}_q^T \mathbf{Y}_{q_r} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_q + \mathbf{s}_q^T \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{Y}_{x_r} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_x - \mathbf{s}_q^T (\mathbf{F}_v + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_s) \mathbf{s}_q - \mathbf{s}_q^T \mathbf{F}_s (\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r) - \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})) \\ &\quad - \mathbf{s}_q^T \mathbf{Y}_{q_r} \boldsymbol{\Gamma}_q^T \boldsymbol{\Gamma}_q^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_q - \mathbf{s}_q^T \mathbf{R}^T \mathbf{W}^+ \mathbf{Y}_{x_r} \boldsymbol{\Gamma}_x^T \boldsymbol{\Gamma}_x^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_x\end{aligned}\quad (4.64)$$

Les matrices des gains d'adaptation  $\boldsymbol{\Gamma}$  étant diagonales,  $\boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \mathbb{I}$ . Finalement,

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -\mathbf{s}_q^T (\mathbf{F}_v + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_s) \mathbf{s}_q - \mathbf{s}_q^T \mathbf{F}_s (\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r) - \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})) \\ &= -\dot{V}_1(t) - \dot{V}_2(t)\end{aligned}\quad (4.65)$$

avec

$$\dot{V}_1(t) = \mathbf{s}_q^T (\mathbf{F}_v + \mathbf{R}\mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}_s) \mathbf{s}_q \quad (4.66)$$

$$\dot{V}_2(t) = \mathbf{s}_q^T \mathbf{F}_s (\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r) - \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})) \quad (4.67)$$

Étudions le signe de  $\dot{V}_1(t)$ .  $\mathbf{F}_v$  et  $\mathbf{R}$  sont symétriques positives. De plus,  $\mathbf{W}^+ \mathbf{W}$  est une matrice hermitienne définie positive.

*Démonstration.* Posons  $\mathbf{y} = \mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , et  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $m > n$ . Respectivement,  $\mathbf{x} = \mathbf{W}^+(\mathbf{y})\mathbf{y}$ .  $\mathbf{W}^+ \mathbf{W}$  est définie positive si  $\mathbf{x}^T \mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+$ . Or,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{W}^+ \mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{W}^+ \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+ \quad (4.68)$$

$\square$

Par conséquent,  $\dot{V}_1(t) \geq 0$ . Étudions maintenant le signe de  $\dot{V}_2(t)$ .

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(t) &= (\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{F}_s (\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r) - \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})) \\
 &= \sum_{i=1}^m f_{s_i} (\dot{\mathbf{q}}_r \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r) - \dot{\mathbf{q}}_r \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \dot{\mathbf{q}} \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}} \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r)) \\
 &= \sum_{i=1}^m f_{s_i} (|\dot{\mathbf{q}}_r| - \dot{\mathbf{q}}_r \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + |\dot{\mathbf{q}}| - \dot{\mathbf{q}} \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}_r)) \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

$\dot{V}_1(t) \geq 0$  et  $\dot{V}_2(t) \geq 0$  impliquent  $\dot{V}(t) = -\dot{V}_1(t) - \dot{V}_2(t) \leq 0$ . Ainsi, l'erreur de sortie converge vers la surface  $\mathbf{s}_q = 0$  ce qui implique en retour que  $\mathbf{e}_q$  et  $\dot{\mathbf{e}}_q$  tendent vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini, de même que  $\mathbf{e}_x$  et  $\dot{\mathbf{e}}_x$ . La stabilité globale du système et la convergence de l'erreur de suivi de trajectoire sont donc garanties par la commande adaptative proposée dans ce chapitre.

## 4.6 Simulations des lois de commande

Afin de simuler les schémas de commande proposés dans ce chapitre, un scénario de pick-and-place est défini le long de la trajectoire  $\text{traj}_2$ , incluant le déplacement d'une charge de 110 kg. Les points de passage de cette trajectoire sont définis au tableau 4.1. Dans ces simulations, on considère la plate-forme du démonstrateur du projet COGIRO dans sa version en aluminium équipée du lève-palette (voir annexe 5.1). La masse de l'ensemble est de 93 kg. La variation de masse lors de la prise de la charge est donc d'environ  $\Delta m = 120\%$ . Dans ce scénario, la plate-forme se rend tout d'abord au point A, face à la charge. Le lève-palette prend la charge au point B au temps  $t_1 = 11$  s et la déplace jusqu'au point C où elle est déposée au temps  $t_2 = 29$  s. La plate-forme effectue un mouvement de retrait jusqu'en D et revient à sa pose initiale. Ces points de passage sont illustrés à la figure 4.10. Le long de cette trajectoire, les erreurs de position et d'orientation de la plate-forme dans l'espace opérationnel sont enregistrées.

Les schémas de commande PD de la section 4.3, de commande par anticipation en espace double de la section 4.4 et de commande adaptative en espace double de la section 4.5 sont simulés à l'aide de MATLAB/SIMULINK®. Tous intègrent l'algorithme de distribution des tensions décrit au chapitre 3, la solution minimisant la norme 2 des tensions étant sélectionnée. Le réglage des gains du correcteur PD est identique dans les trois schémas, et indiqué au tableau 4.2. Les commandes sont appliquées à un Modèle Dynamique Direct (MDD) qui simule le comportement du RPC d'après les équations de la dynamique faisant l'hypothèse d'un centre de masse dissocié du centre de référence de la plate-forme (voir section 2.5.2). La continuité des variations aux temps  $t_1$  et  $t_2$  de la masse, des inerties et de la position du centre de gravité de la plate-forme est assurée par des polynômes de degré trois. La figure 4.11 illustre l'évolution de la masse de long de la trajectoire simulée. La

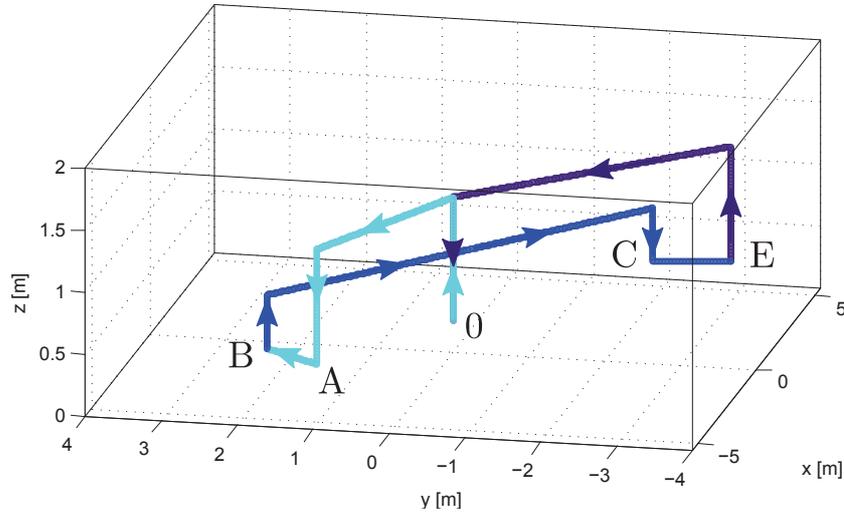


FIGURE 4.10 : Représentation schématique de  $\text{traj}_2$ . La charge de 110 kg est transportée entre les points B et C.

figure 4.12 montre l'évolution du déplacement  $\delta = [\alpha \beta \gamma]^T$  du centre de masse exprimé dans la base du repère de la plate-forme  $\mathcal{R}_p$  et son équivalent  $\mathbf{d} = [u \ v \ w]^T$  exprimé dans la base du repère du robot  $\mathcal{R}_b$ . Enfin l'évolution des produits et moments d'inertie de la plate-forme ainsi que des coefficients de la matrice  $\mathbf{H} = \mathbf{K} - m_{tot} [\mathbf{d}] [\mathbf{d}]$  sont indiqués à la figure 4.13.

|                      |  |
|----------------------|--|
| Gains proportionnels | $\text{diag}(\mathbf{K}_p) = \{10000, 10000, \dots, 10000\}$ |
| Gains dérivés        | $\text{diag}(\mathbf{K}_v) = \{100, 100, \dots, 100\}$       |

Tableau 4.2 : Réglages du correcteur PD des schémas de commande simulés.

Les erreurs de positionnement et d'orientation de la plate-forme calculées dans l'espace opérationnel avec les différents schémas de commande sont données aux figures 4.14, 4.15 et 4.16. Comme on peut le voir à la figure 4.14, l'absence de compensation du poids de la plate-forme entraîne une erreur statique le long de l'axe  $\mathbf{z}$ . Cette erreur augmente significativement entre  $t_1$  et  $t_2$ , lors de l'augmentation de la masse de la plate-forme.

L'ajout des termes d'anticipation permet de recentrer l'erreur de positionnement le long de l'axe  $\mathbf{z}$  autour de 0 lorsque  $t < t_1$  et  $t > t_2$ . Cette commande, dont les paramètres sont réglés pour être fidèles au modèle dynamique du RPC lorsque la plate-forme n'est pas chargée, obtient d'excellentes performances de suivi de trajectoires dans ce cas de figure. En revanche, lors de la prise de charge entre  $t_1$  et  $t_2$ , l'ensemble des erreurs augmente, notamment l'erreur de positionnement le long de l'axe  $\mathbf{z}$ . La figure 4.15 met ainsi en lumière la limitation de la commande par anticipation.

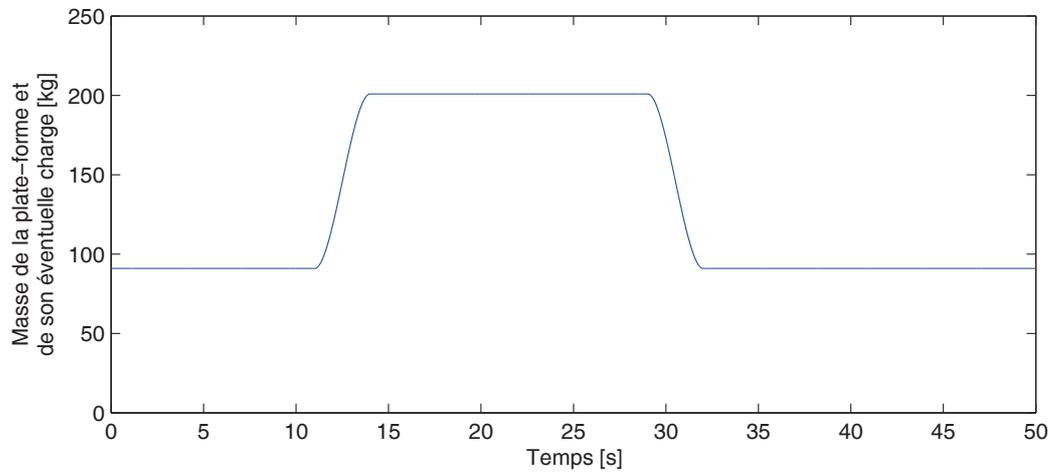


FIGURE 4.11 : Évolution de la masse de la plate-forme le long de  $\text{traj}_2$  avec prise de palette entre  $t_1 = 11$  s et  $t_2 = 29$  s.

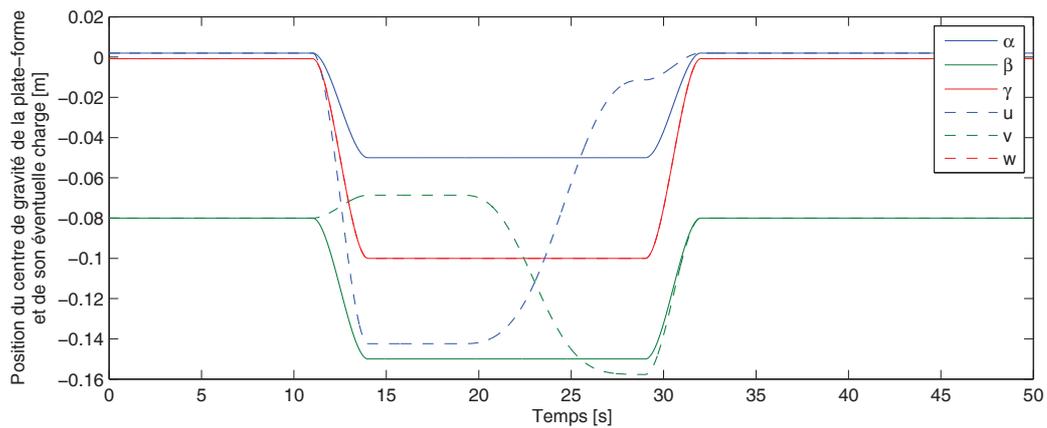


FIGURE 4.12 : Évolution de la position du centre de gravité de la plate-forme le long de  $\text{traj}_2$  avec prise de palette entre  $t_1 = 11$  s et  $t_2 = 29$  s.

En comparaison, la commande adaptative est efficace le long de toute la trajectoire  $\text{traj}_2$ . Lorsque la plate-forme n'est pas chargée, nous pouvons remarquer que les erreurs mesurées de la commande adaptative sont sensiblement plus élevées que celles de la commande par anticipation, cette dernière ayant alors un réglage optimal. En revanche, entre  $t_1$  et  $t_2$ , la commande adaptative permet de réduire considérablement l'intervalle des erreurs maximales.

Les réglages de la commande adaptative ayant abouti à ces résultats sont donnés dans le tableau 4.3. La commande adaptative, une fois correctement réglée est robuste aux changements des paramètres dans les vecteurs des paramètres ajustables  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . En re-

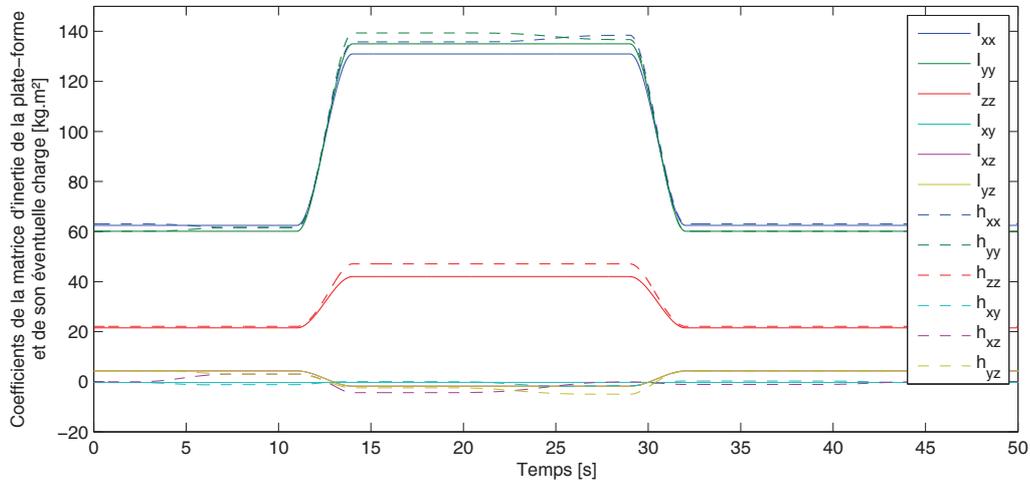


FIGURE 4.13 : Évolution des coefficients de la matrice d'inertie de la plate-forme le long de  $\text{traj}_2$  avec prise de palette entre  $t_1 = 11$  s et  $t_2 = 29$  s.

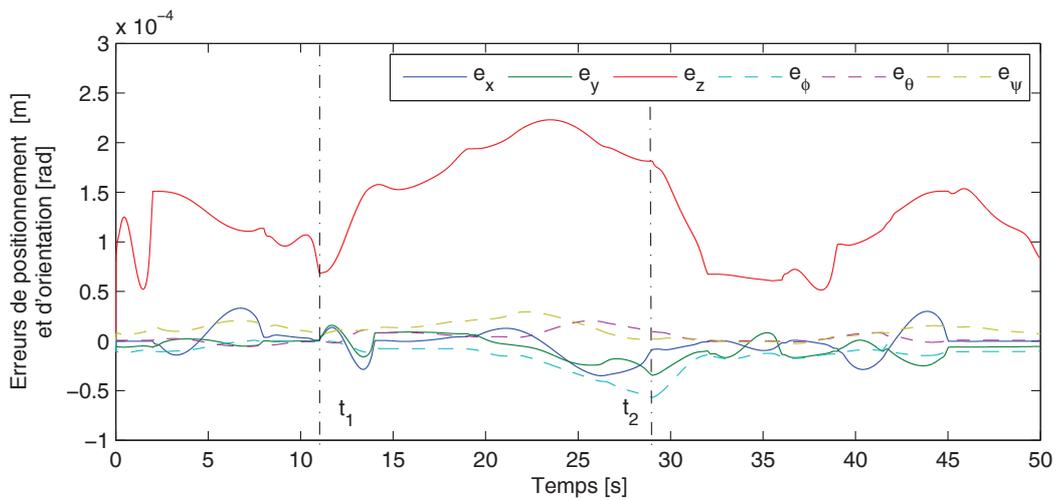


FIGURE 4.14 : Erreurs de positionnement et d'orientation de la plate-forme obtenues avec la commande PD.

vanche son réglage initial est plus long et plus complexe que celui d'une commande PID classique dont seuls les gains du correcteur sont à régler. Certains des paramètres à régler ont une forte influence sur la qualité de la commande.

En particulier, les gains  $\delta_x$  et  $\delta_q$  des lois d'adaptation permettent de régler le comportement de la saturation d'un paramètre qui atteint sa borne supérieure ou inférieure. Une valeur trop grande engendre un dépassement de la borne. La saturation n'est pas respectée. Une valeur trop petite crée un phénomène de "rebond" contre la borne, pouvant entraîner une instabilité du système. Les gains d'adaptation  $\Gamma_x$  et  $\Gamma_q$  déterminent la vitesse

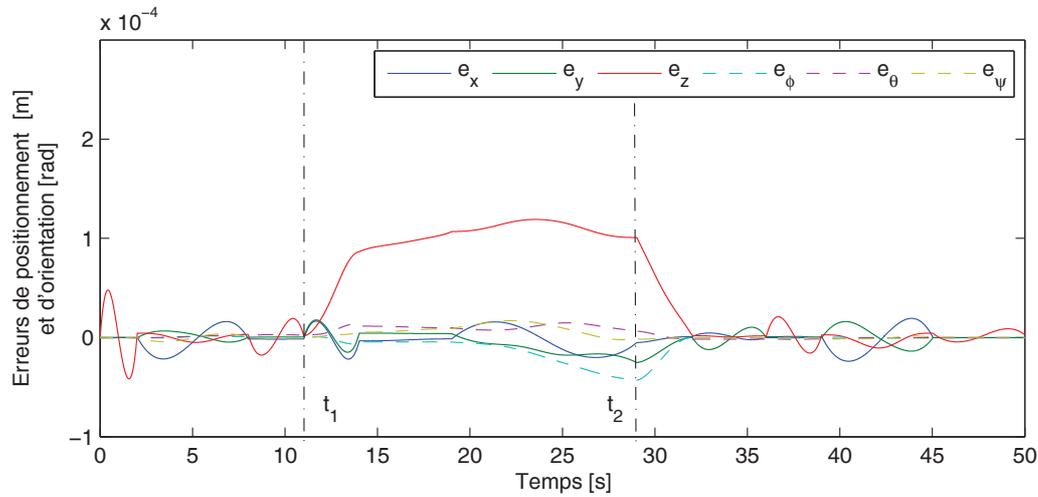


FIGURE 4.15 : Erreurs de positionnement et d'orientation de la plate-forme obtenues avec la commande par anticipation en espace double.

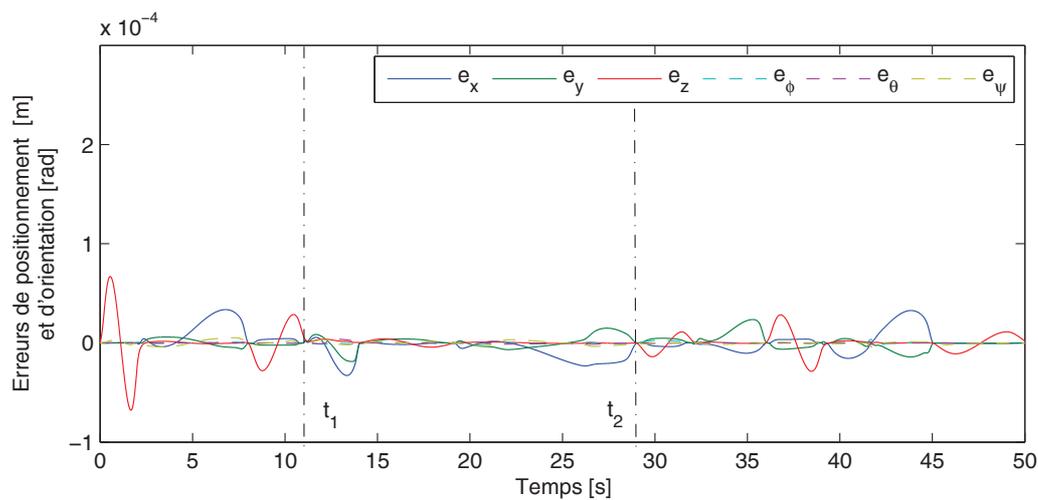


FIGURE 4.16 : Erreurs de positionnement et d'orientation de la plate-forme obtenues avec la commande adaptative en espace double.

d'adaptation de chaque paramètre. Si, en simulation, ces gains peuvent être réglés avec des valeurs élevées, il est important de les régler raisonnablement en pratique. Ces gains sont en effet très déstabilisants pour le robot, car sensibles aux bruits de mesures.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs stratégies de commande des RPC ont été introduites. Tous les schémas de commande proposés intègrent un algorithme de distribution des tensions présenté au chapitre 3. En partant du contrôleur PID classique, une commande par anti-

|                               |  |
|-------------------------------|--|
| Gains d'adaptation $\Gamma_q$ | $\text{diag}(\Gamma_q) = \{0,5, \dots, 0,5, 1e^{-3}, \dots, 1e^{-3}\}$ |
| Gains d'adaptation $\Gamma_x$ | $\text{diag}(\Gamma_x) = 10000 \{1, 5, 5, 5, 10, \dots, 10\}$          |
| $\mathbf{a}_q$                | [0 0 ... 0]  |
| $\mathbf{b}_q$                | [3 ... 3 0,03 ... 0,03]  |
| $\mathbf{a}_x$                | [0 -0,150 -150 -250 0 0 0 -50 -50 -50]                                 |
| $\mathbf{b}_x$                | [500 150 150 0 150 150 150 50 50 50]                                   |
| $\lambda_0$                   | 10   |
| $\delta_q$                    | 0,0001   |
| $\delta_x$                    | 0,01   |

Tableau 4.3 : Réglages des paramètres de la commande adaptative simulée.

icipation en espace double a été proposée. Cette méthode anticipe les erreurs de suivi de trajectoires en prenant en compte le modèle dynamique de la plate-forme et de sa charge ainsi que celui des enrouleurs. Ces modèles permettent de calculer des termes d'anticipation qui compensent les efforts dynamiques, à la fois dans l'espace opérationnel et dans l'espace articulaire.

En revanche, les paramètres des modèles dynamiques implémentés dans la commande par anticipation en espace double sont constants et nécessitent une identification précise. Cette commande permet donc d'atteindre de bonnes performances dans un régime d'utilisation nominal, défini lors de son réglage (plate-forme à vide, par exemple, ou avec une charge nominale). Lorsqu'une application implique d'importantes variations des paramètres des modèles dynamiques du système ou que certains de ces paramètres sont difficiles à identifier, il est préférable de les estimer en temps réels.

À cette fin, un schéma de commande adaptative en espace double intégrant l'algorithme de distribution des tensions du chapitre 3 a été introduit. Les paramètres des modèles dynamiques inverses calculés dans les boucles d'anticipation sont estimés en ligne. Plus particulièrement, dans l'espace opérationnel du RPC, la masse de la plate-forme et de sa charge, la position du centre de masse de cet ensemble ainsi que ses moments et produits d'inertie sont estimés. Dans l'espace articulaire, ce sont les coefficients de frottement secs et visqueux des enrouleurs ainsi que leurs inerties qui sont estimés. La commande adaptative en espace double donne de meilleures performances de suivi de trajectoires que la commande par anticipation, elle-même plus performante que la commande PID classique.

Le chapitre suivant confirme ces résultats par des expérimentations menées sur des RPC suspendus et pleinement contraints.



## RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

*Le chapitre 3 a introduit un algorithme de distribution des tensions compatible temps-réel. Dans le chapitre 4, plusieurs schémas de commande des RPC intégrant cet algorithme ont été proposés. Ce chapitre a pour objectif de valider expérimentalement ces schémas de commande sur différents prototypes, brièvement introduits à la section 5.1. La validation expérimentale de l'algorithme TurnAround est présentée à la section 5.2 et les distributions des tensions optimales considérées au chapitre 3 sont comparées. La section 5.3 évalue les performances des schémas de commande proposés au chapitre 4 en terme d'exactitude et de répétabilité de pose de la plate-forme ainsi que d'exactitude de suivi de trajectoires.*

### Sommaire

---

|   |            |
|---|------------|
| 5.1 Bancs d'essais . . . . .  | <b>113</b> |
| 5.2 Validation de l'algorithme de distribution des tensions . . . . . | <b>115</b> |
| 5.3 Études expérimentales des schémas de commande . . . . .           | <b>124</b> |
| 5.4 Conclusion . . . . .  | <b>144</b> |

---

### 5.1 Bancs d'essais

Les différents schémas de commande ainsi que l'algorithme de distribution des tensions ont été implémentés dans trois prototypes de RPC : le démonstrateur du projet COGIRO, CABLAR et REELAX8. Les trois robots possèdent huit actionneurs pour six DDL, soit un DDR égal à deux. Les câbles sont issus de points de sortie placés sur quatre poteaux, avec deux points de sortie par poteau. Les géométries de ces robots sont données en annexe A. Les trois prototypes sont équipés d'environnements logiciel et matériel différents,

ce qui permet de valider la compatibilité des algorithmes proposés avec différents environnements. Ces environnements sont brièvement décrits ci-dessous.

- REELAX8 est actionné par des moteurs ETEL™ sans réducteur. Les tambours sont montés sur les axes moteurs (montage de la figure 2.4a) et guidés par une vis à bille. Le chariotage des tambours obtenu grâce aux vis à bille permet aux câbles de ne pas s’enrouler sur eux-même. Chaque paire de moteurs associée à un poteau est reliée à un variateur ETEL™, lui-même connecté à un PC *cible* équipé d’un noyau temps-réel xPC Target™. La commande est compilée en code C sur le PC cible à partir d’un projet MATLAB/SIMULINK® codé sur un PC *hôte* connecté en TCP/IP. L’architecture matérielle est illustrée à la figure 5.1.

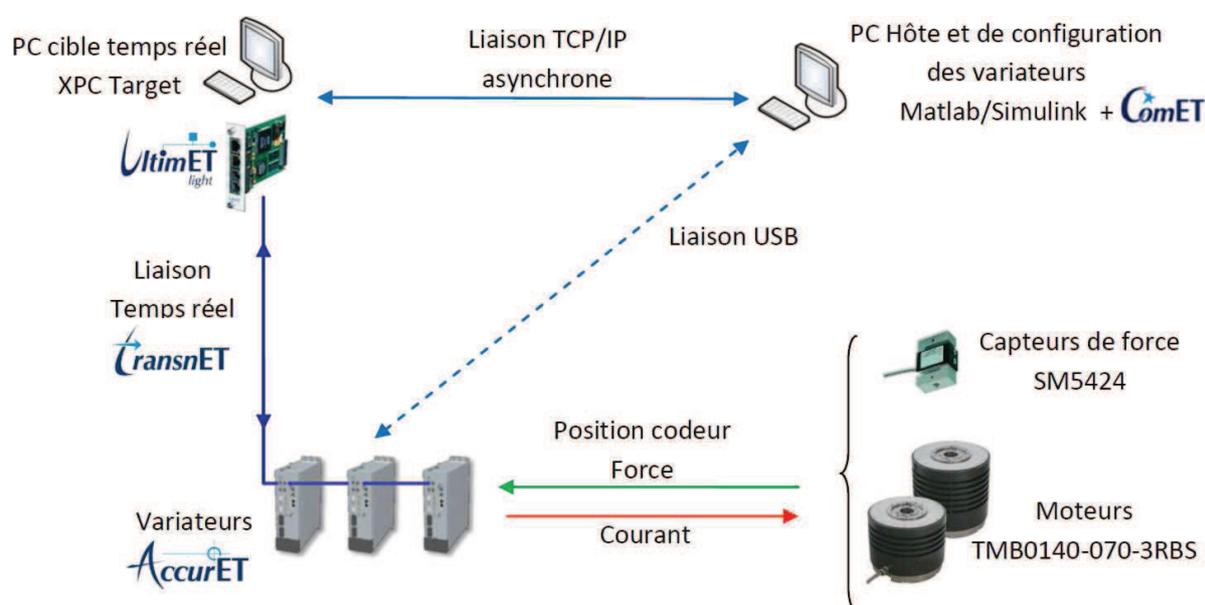


FIGURE 5.1 : Architecture matérielle du prototype ReelAx8.

- Le démonstrateur du projet ANR COGIRO, un RPC suspendu, est actionné par des moteurs asynchrones B&R® 8LS. Ces moteurs entraînent les tambours en rotation au travers d’une transmission de type poulies-courroie (montage de la figure 2.4b). Les moteurs sont pilotés par des variateurs B&R® ACOPOSmulti, connectés à un PC industriel temps-réel. La commande du démonstrateur est implémentée sur un PC hôte équipé de B&R Automation Studio® fournissant une interface logicielle en langage C. Les algorithmes développés sous B&R Automation Studio® sont compilés sur le PC industriel via une connexion TCP/IP. L’architecture matérielle du démonstrateur est illustrée à la figure 5.2.
- Les spécifications techniques de CABLAR, un RPC pleinement contraint, sont disponibles dans [Bruckmann 13]. Le système de communication du robot passe par un

bus de terrain EtherCAT<sup>®</sup> connecté à un PC industriel équipé de l'environnement de contrôle temps-réel Beckhoff TwinCAT3<sup>®</sup>. Cet environnement permet notamment de programmer en MATLAB/SIMULINK<sup>®</sup> ou en langages C/C++.

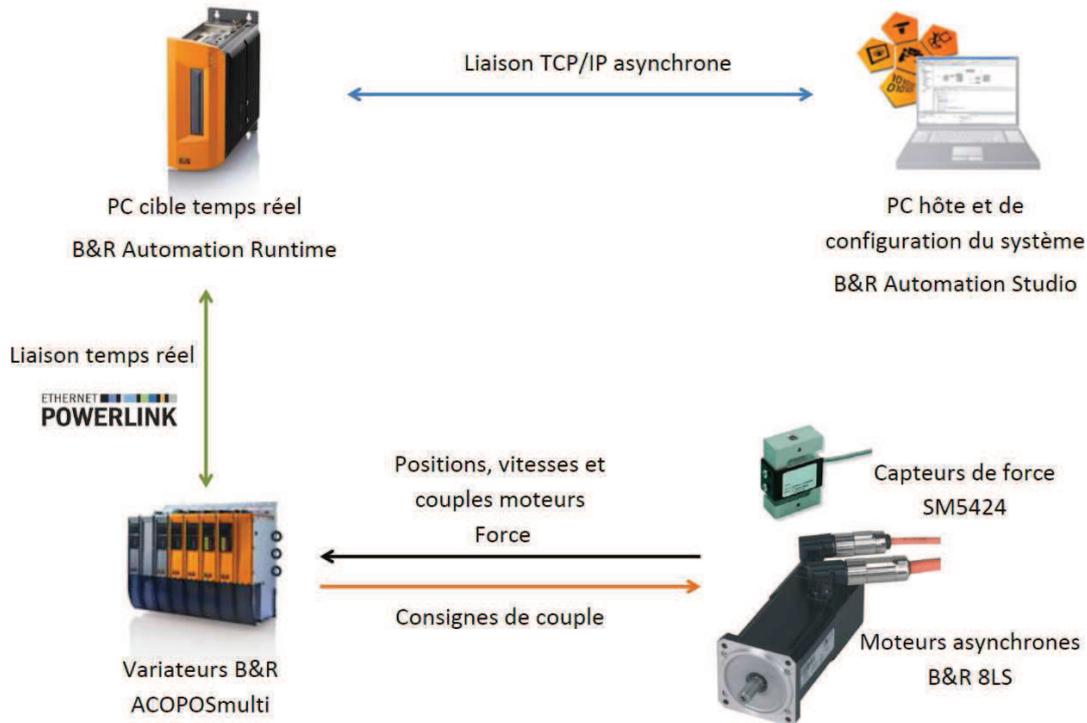


FIGURE 5.2 : Architecture matérielle du démonstrateur du projet ANR COGiRO.

## 5.2 Validation de l'algorithme de distribution des tensions

L'algorithme TurnAround ainsi que les différents calculs de solutions au problème de la distribution des tensions, décrits à la section 3.3 ont été implémentés et testés sur deux prototypes : le démonstrateur du projet COGiRO (RPC suspendu) et CABLAR (RPC pleinement contraint). Ces deux configurations impliquent des comportements radicalement différents. Étant toutes deux à redondance de degré  $r = 2$ , il est possible d'appliquer la méthode de distribution des tensions proposée dans cette thèse.

Dans cette section, les quatre solutions au problème de la distribution des tensions, à savoir le barycentre (ou centroïde), le barycentre pondéré, ainsi que les solutions minimisant la norme 1 et la norme 2 du vecteur des tensions sont successivement appliquées aux deux prototypes le long de trajectoires prédéfinies. On analysera ensuite les tensions commandées ou mesurées.

### 5.2.1 Application de l'algorithme de distribution des tensions à COGIRO

On choisit d'appliquer l'algorithme de distribution des tensions au démonstrateur du projet COGIRO le long de la trajectoire  $\text{traj}_2$ , définie à la section 4.2.3, en réglant  $t_{\min}$  à 100 N et  $t_{\max}$  à 5000 N. Les expérimentations proposées dans cette section ont été menées avec une plate-forme en aluminium équipée d'un lève-palette, pour une masse totale de 93 kg. Le manque de fiabilité des capteurs de tension équipant le prototype nous contraint à observer les signaux commandés et envoyés aux moteurs plutôt que les signaux de mesure. Le schéma de commande par anticipation en espace double, décrit à la section 4.4, est implémenté et les couples moteurs commandés  $\tau_m$  sont enregistrés. À l'aide de la relation

$$\mathbf{t}_m = \mathbf{R}^{-1} \tau_m, \quad (5.1)$$

on en déduit les tensions commandées  $\mathbf{t}_m$ . Les figures 5.3, 5.4 et 5.5 montrent respectivement les distributions des tensions obtenues par application du calcul du barycentre, du barycentre pondéré et de la minimisation de la norme 2 des tensions. Les figures montrent que les distributions des tensions obtenues sont très similaires et telles que chaque tension est strictement contenue entre  $t_{\min}$  et  $t_{\max}$ . Les moyennes quadratiques des distributions des tensions sont données au tableau 5.1.

| COGIRO                    | barycentre | barycentre pondéré | norme 1     | norme 2 |
|---------------------------|------------|--------------------|-------------|---------|
| moy( $\ \mathbf{t}\ _2$ ) | 479,7 N    | 477,2 N            | $\emptyset$ | 477,0 N |

Tableau 5.1 : Moyennes quadratiques des distributions des tensions obtenues le long de  $\text{traj}_2$ .

Le long de la trajectoire  $\text{traj}_2$ , avec l'arrangement des câbles et la configuration géométrique particulière du démonstrateur du projet COGIRO décrite à l'annexe A.2, la solution  $\mathbf{t}_p$  obtenue par simple application de la pseudo-inverse suffit à donner des tensions admissibles. L'antécédent de  $\mathbf{t}_p$  par l'application affine  $\mathcal{A}$  - l'origine de l'espace à deux dimensions des paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  - est ici toujours inclus dans le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ . Par conséquent, la solution optimale  $\lambda_{l_2}^*$  de (3.33) est toujours égale à  $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{t}_p)$ , le point de norme 2 minimale. De plus, le centre analytique  $\lambda_c^*$  du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est toujours proche de l'origine. Les distributions des tensions issues du barycentre et du barycentre pondéré sont ainsi très proches de  $\mathbf{t}_p$ .

Comme illustré par la figure 3.23 de la section 3.4.2, les changements de sommet  $\lambda_{n_1}^*$  minimisant la norme 1 des tensions, génèrent de fortes discontinuités. Pour cette raison, l'application de cette solution au problème de la distribution des tensions le long de toute la trajectoire  $\text{traj}_2$  est impossible sur le démonstrateur du projet COGIRO. En configura-

tion suspendue, le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est généralement centré sur l'origine de l'espace à deux dimensions des paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ( $\lambda_c^* \approx 0$ ). Comme expliqué à la section 3.3.5, les changements de sommet sont donc fréquents, et engendrent d'importantes vibrations de la plate-forme. Par conséquent, la solution minimisant la norme 1 de  $\mathbf{t}$  ne semble pas adaptée aux RPC suspendus.

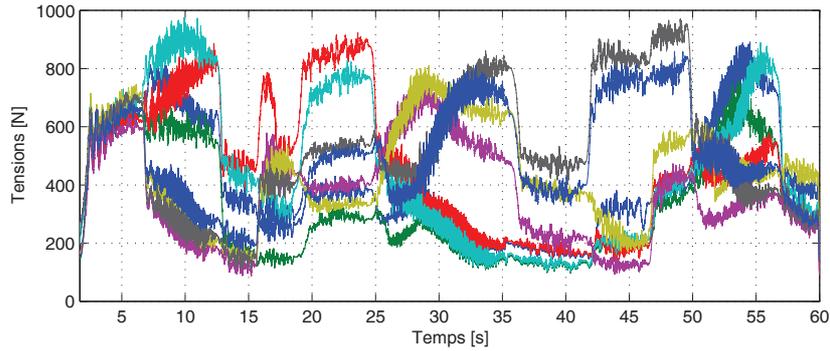


FIGURE 5.3 : Distribution commandée des tensions, issue du calcul du barycentre.

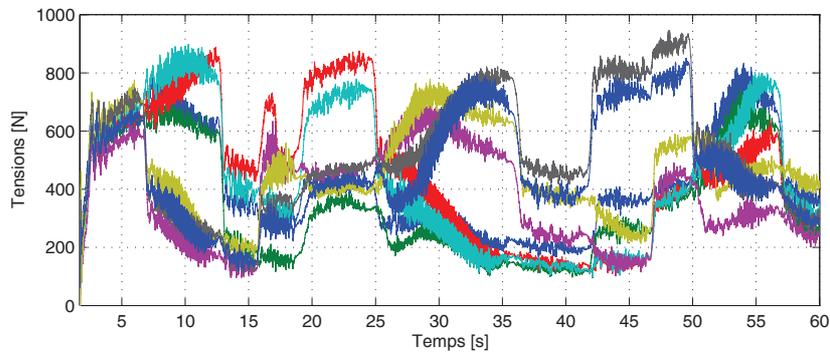


FIGURE 5.4 : Distribution commandée des tensions, issue du calcul du barycentre pondéré.

Les temps de calcul correspondants à chacune des quatre solutions du problème de la distribution des tensions considérées ici sont donnés au tableau 5.2. Ce tableau donne les temps de calcul moyennés sur l'ensemble de la trajectoire  $\text{traj}_2$  ainsi que les temps de calcul maximaux et minimaux enregistrés. Ces temps de calcul tiennent compte de la détermination des sommets du polygone (TurnAround) ainsi que du calcul de la solution pour chaque pose discrétisée le long de  $\text{traj}_2$ .

On peut observer que le calcul de la solution minimisant la norme 2 de  $\mathbf{t}$  est le plus rapide. En effet, comme expliqué à la section 3.3.5, lorsque l'origine  $\mathbf{0}$  est incluse dans le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  - et donc  $\lambda_{n_2}^* = \mathbf{0}$  -, l'algorithme ne calcule pas les sommets du polygone

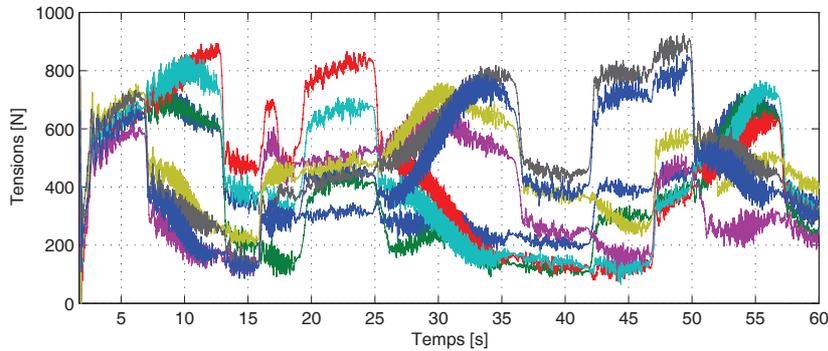


FIGURE 5.5 : Distribution commandée des tensions, issue du calcul de la solution minimisant la norme 2 du vecteur des tensions.

| temps de calcul    | moyen        | minimal      | maximal      |
|--------------------|--------------|--------------|--------------|
| barycentre         | 16,5 $\mu$ s | 13,8 $\mu$ s | 19,7 $\mu$ s |
| barycentre pondéré | 27,3 $\mu$ s | 24,5 $\mu$ s | 29,6 $\mu$ s |
| norme 1            | 15,6 $\mu$ s | 15,4 $\mu$ s | 15,8 $\mu$ s |
| norme 2            | 2,5 $\mu$ s  | 2,4 $\mu$ s  | 2,6 $\mu$ s  |

Tableau 5.2 : Temps de calcul de l'algorithme de distribution des tensions correspondant aux différentes solutions optimales.

étant donné que  $\mathbf{t}_{n_2}^* = \mathbf{t}_p$ . À l'inverse, la détermination du barycentre requiert un calcul systématique des sommets du polygone. Le tableau 5.2 indique que le temps de calcul moyen du barycentre est six fois plus grand que celui de la norme 2 mais presque deux fois plus petit que le calcul du barycentre pondéré. Quelle que soit la solution sélectionnée, notons enfin que l'algorithme est compatible avec l'environnement temps-réel, avec des temps de calcul bien inférieurs à la période d'échantillonnage de 1 ms. Ces résultats démontrent l'efficacité des calculs nécessaires à l'algorithme TurnAround ainsi que des méthodes de calcul des solutions optimales basées sur la détermination des sommets du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ .

Pour la commande du démonstrateur du projet COGIRO, le long de la trajectoire  $\text{traj}_2$ , la solution minimisant la norme 2 des tensions semble donc intéressante pour minimiser les temps de calcul. En outre, le calcul du barycentre permet d'augmenter significativement les tensions des câbles lorsque la plate-forme est au bord de son ETC ou lors de rotations combinées de grandes amplitudes (poses pour lesquelles le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  n'est plus centré sur  $\mathbf{0}$ , ou ne le contient plus).

### 5.2.2 Application de l'algorithme de distribution des tensions à CABLAR

Grâce à une collaboration avec Dr.-Ing. Tobias Bruckmann et M.Sc. Christopher Reichert de l'Université de Duisburg-Essen, l'algorithme de distribution des tensions proposé dans cette thèse est également appliqué au prototype de RPC pleinement contraint CABLAR. Du fait de la configuration et de l'arrangement des câbles de CABLAR, la solution de la pseudo-inverse  $\mathbf{t}_p$  n'est pratiquement jamais admissible - la relation  $0 \leq \mathbf{t}_{\min} \leq \mathbf{t}_p \leq \mathbf{t}_{\max}$  n'est pas vérifiée. Plus précisément, la plate-forme étant dans son orientation de référence, les tensions  $\mathbf{t}_p$  des quatre câbles issus du bas de l'espace de travail (voir annexe A.3) sont négatives, quelle que soit la position de la plate-forme dans son ETC. Sans algorithme de distribution des tensions et avec la plate-forme dans son orientation de référence, l'ETC de CABLAR ne peut pas être exploité.

Appliquons maintenant l'algorithme de distribution des tensions, intégré dans le schéma de commande de [Bruckmann 13] tel qu'illustré à la figure 5.6, au prototype CABLAR. Dans ce schéma, la distribution des tensions  $\mathbf{t}_{DT}$  est calculée à partir du torseur des efforts  $\mathbf{f}_{ff}$  à appliquer par les câbles sur la plate-forme pour atteindre la pose désirée. Ce torseur est issu du modèle dynamique inverse de la plate-forme. La distribution des tensions est ensuite utilisée pour calculer la variation de longueur de câbles  $\Delta l$  à appliquer pour distribuer les tensions en tenant compte du modèle d'élasticité des câbles. Finalement,  $\Delta l$  est convertit en variation articulaire  $\Delta \mathbf{q}$  qui corrige la position articulaire  $\mathbf{q}_{MGI}$

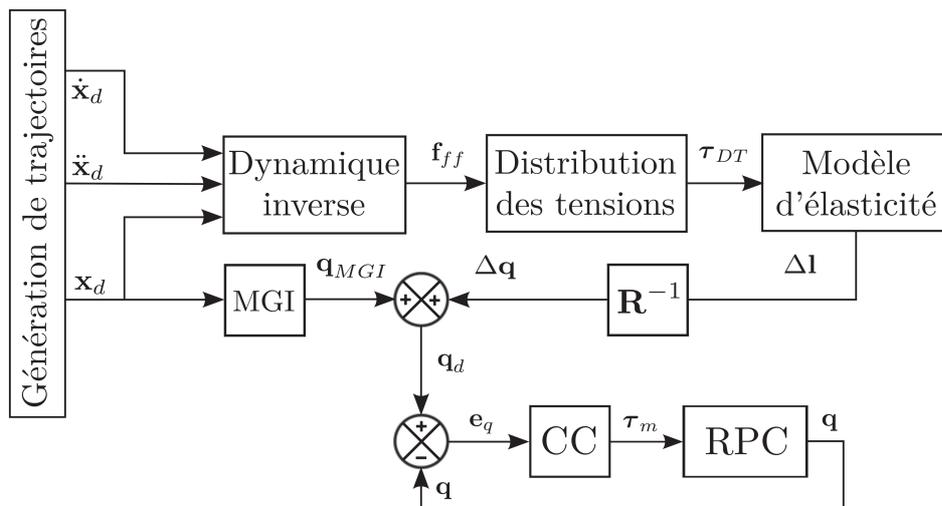


FIGURE 5.6 : Schéma de commande en position de CABLAR intégrant l'algorithme de distribution des tensions du chapitre 3.

issue du MGI pour former le vecteur des positions articulaires désirées  $\mathbf{q}_d$ . Le suivi de la position désirée est assuré par un contrôle en cascade (bloc CC sur la figure 5.6).

Pour ces expérimentations, les bornes des tensions sont réglées à  $t_{\min} = 100$  N et  $t_{\max} = 600$  N. On définit une nouvelle trajectoire,  $\text{traj}_3$ , dont les points de passage sont donnés au tableau 5.3 et montrés à la figure 5.7. Cette trajectoire représente une utilisation standard de ce robot, conçu pour stocker et récupérer des caisses sur des étagères. La trajectoire est contenue dans le plan ( $y, z$ ) du robot, la plate-forme restant dans son orientation de référence.

| $n^o$                      | position $\mathbf{p}^T$ | $n^o$                      | position $\mathbf{p}^T$ |
|----------------------------|-------------------------|----------------------------|-------------------------|
| $\mathbf{x}_{\text{init}}$ | [0,0075 -0,0225 0,47]   | 5                          | [0 3 1]                 |
| 1                          | [0,0075 -0,0225 0,97]   | 6                          | [0 3 3]                 |
| 2                          | [0 0 2]                 | 7 (2)                      | [0 0 2]                 |
| 3                          | [0 -3 1]                | 8 (1)                      | [0,0075 -0,0225 0,97]   |
| 4                          | [0 -3 3]                | $\mathbf{x}_{\text{init}}$ | [0,0075 -0,0225 0,47]   |

Tableau 5.3 : Points de passage de la trajectoire  $\text{traj}_3$  à orientation constante.

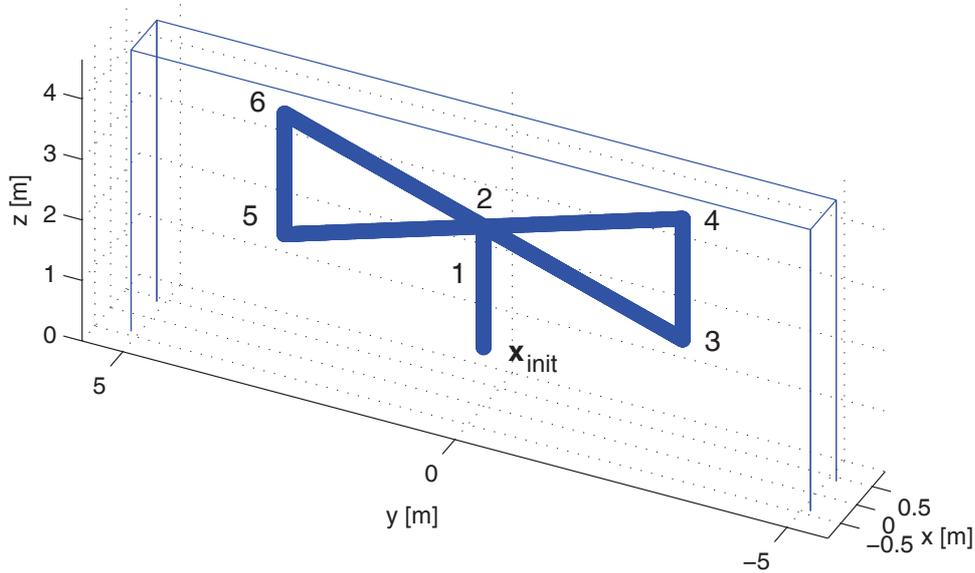


FIGURE 5.7 : Représentation schématique de  $\text{traj}_3$ .

La figure 5.8 donne la distribution des tensions  $\mathbf{t}_p$  obtenue en simulation le long de  $\text{traj}_3$  en utilisant la pseudo-inverse de la matrice des torseurs, telle que  $\mathbf{t}_p = \mathbf{W}^+ \mathbf{f}_{ff}$ . La figure illustre bien la non-admissibilité de cette distribution le long de toute la trajectoire, quatre

câbles parmi les huit ayant toujours une tension négative. Cette méthode demande donc à ces câbles de pousser la plate-forme, ce dont ils sont incapables.

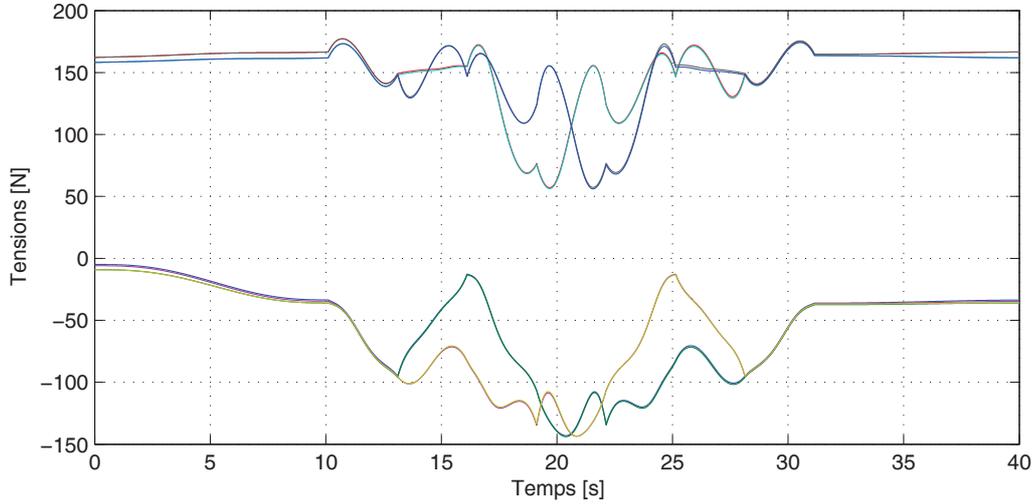


FIGURE 5.8 : Distribution des tensions issue de la pseudo-inverse, simulée le long de  $\text{traj}_3$ .

Les quatre stratégies de distribution des tensions détaillées dans la section 3.3 sont maintenant appliquées expérimentalement le long de  $\text{traj}_3$ . Les tensions des câbles sont mesurées à l'aide de capteurs de force montés au niveau des points d'attache des câbles sur la plate-forme. Les moyennes quadratiques des distributions des tensions issues de chaque méthode sont calculées le long de  $\text{traj}_3$  et données au tableau 5.4. La figure 5.9 illustre la distribution obtenue par le calcul du barycentre. D'après les résultats du tableau 5.4, cette distribution possède la moyenne quadratique la plus élevée (434,2 N), confirmant les résultats de simulation de la section 3.4.

Le barycentre est le centre analytique du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , dont l'aire est généralement importante pour un RPC en configuration pleinement contrainte, tel que CABLAR. De plus, l'origine  $\mathbf{O}$  de l'espace à deux dimensions des paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  est l'antécédent de la solution  $\mathbf{t}_p$  obtenue par calcul de la pseudo-inverse ( $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{t}_p) = \mathbf{O}$ ). Or  $\mathbf{O}$ , point de norme 2 minimale dans le plan des paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , n'est jamais contenu dans  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  le long de la trajectoire considérée. Par conséquent, le centre analytique  $\lambda_c^*$  de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est toujours éloigné de  $\mathbf{O}$ , et la moyenne quadratique de la distribution des tensions  $\mathbf{t}_c^*$  est relativement élevée.

| CABLAR                         | barycentre | barycentre pondéré | norme 1 | norme 2 |
|--------------------------------|------------|--------------------|---------|---------|
| $\text{moy}(\ \mathbf{t}\ _2)$ | 434,2 N    | 356,6 N            | 305,1 N | 299,9 N |

Tableau 5.4 : Moyennes quadratiques des distributions des tensions obtenues le long de  $\text{traj}_3$ .

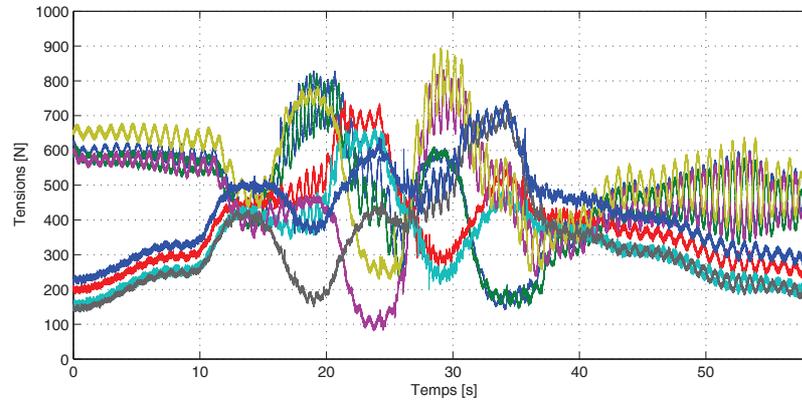


FIGURE 5.9 : *Distribution des tensions mesurées issue du calcul du barycentre.*

La distribution issue de la solution minimisant la norme 2 de  $\mathbf{t}$  possède logiquement la moyenne quadratique la plus faible (299,9 N) le long de  $\text{traj}_3$ , cette solution correspondant au projeté orthogonal de l'origine  $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{t}_p)$  sur le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  (voir section 3.3.2). La solution minimisant la norme 1 de  $\mathbf{t}$ , toujours placée sur un sommet (voir section 3.3.1), donne des tensions dont la moyenne quadratique est un peu plus élevée (305,1 N), tout en étant proche de la précédente. En effet, en considérant la plate-forme dans son orientation de référence le long de la trajectoire  $\text{traj}_3$ , le point le plus proche de l'origine  $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{t}_p)$  est très souvent un sommet de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , le point du polygone minimisant la norme 1 de  $\mathbf{t}$ . Notons que la distribution des tensions issue de  $\lambda_{n_1}^*$  est continue le long de toute la trajectoire à la différence du cas de la section 5.2.1. Les solutions minimisant les normes 1 et 2 de  $\mathbf{t}$ , continues et admissibles, permettent donc de minimiser les tensions des câbles et, par conséquent, la consommation énergétique du robot.

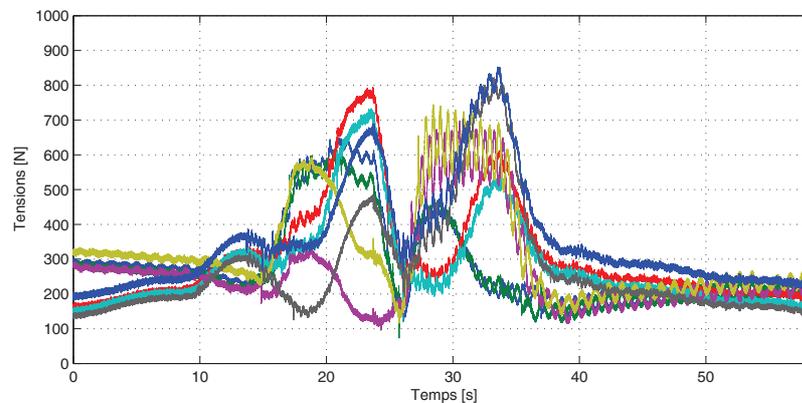


FIGURE 5.10 : *Distribution des tensions mesurées issue du calcul de la solution minimisant la norme 1 du vecteur des tensions.*

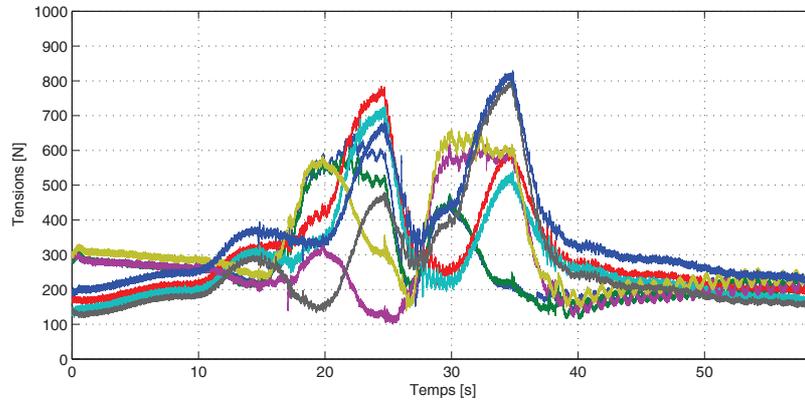


FIGURE 5.11 : *Distribution des tensions mesurées issue du calcul de la solution minimisant la norme 2 du vecteur des tensions.*

La figure 5.12 illustre la distribution des tensions du barycentre pondéré le long de  $\text{traj}_3$ . Comme discuté à la section 3.3, cette solution fournit une alternative intéressante pour les RPC pleinement contraints. Elle combine en effet la notion de barycentre (centre analytique du polygone) avec une stratégie de minimisation des tensions des câbles (voir section 3.3.4). La moyenne quadratique des tensions issues du barycentre pondéré le long de  $\text{traj}_3$  (356,6 N) est bien contenue entre celle du barycentre et celle minimisant la norme 2 de  $\mathbf{t}$ . Cette méthode garantit que la solution  $\mathbf{t}_{bp}^*$  est incluse dans le polytope  $\Lambda$  en limitant néanmoins la consommation électrique du robot.

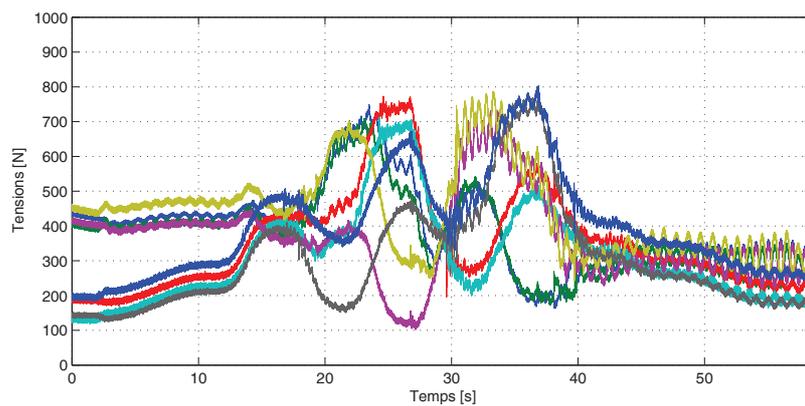


FIGURE 5.12 : *Distribution des tensions mesurées issue du calcul du barycentre pondéré.*

Ces résultats montrent que l'implémentation de l'algorithme de distribution des tensions dans le schéma de commande de CABLAR distribue positivement et de manière continue les tensions des huit câbles le long de la trajectoire considérée, typique de l'application visée par ce RPC. Remarquons cependant que les bornes d'admissibilité réglées

dans l'algorithme valent  $t_{\min} = 100$  N et  $t_{\max} = 600$  N. Or les mesures des capteurs de tensions sont comprises entre 100 N et 900 N (voir figures 5.9 à 5.12). Ce dépassement est dû à la stratégie de commande appliquée à CABLAR. L'algorithme de distribution des tensions n'est pas implémenté dans la boucle de commande principale mais dans une boucle d'anticipation (voir schéma de commande de la figure 5.6). Le terme de correction correspondant  $\Delta \mathbf{q}$  permet de tendre l'ensemble des câbles mais ne garantit pas l'admissibilité des tensions commandées, comme discuté à la section 4.4.3. Le correcteur régulant le système après application de ce terme correctif, il est susceptible de modifier les tensions désirées calculées dans la boucle d'anticipation.

### 5.3 Études expérimentales des schémas de commande

Les différents schémas de commande proposés au chapitre 4 ont été implémentés dans l'environnement temps-réel du démonstrateur du projet COGiRO. Tous intègrent TurnAround ainsi que le calcul de la solution  $\mathbf{t}_{n_2}^*$  minimisant la norme 2 du problème (3.33). Rappelons que si  $\mathbf{t}_{n_2}^*$  est incluse dans  $\Lambda$ , ce qui est souvent le cas pour les poses de l'ETC du démonstrateur du projet COGiRO, le calcul des sommets n'a pas lieu et  $\mathbf{t}_{n_2}^* = \mathbf{t}_p$ . Dans cette section, les performances des différents schémas de commande sont évaluées en s'appuyant sur les méthodes de [Priel 90] et la norme ISO 9283 (Août 1998) relative aux critères de performances et aux méthodes d'essai correspondantes des robots manipulateurs industriels. Dans cette section, des résultats d'exactitude et de répétabilité de poses mesurées ainsi que d'exactitude de trajectoires calculées sont fournis. Les réglages des contrôleurs des différents schémas de commande sont donnés dans les tableaux 5.5 et 5.6.

|                      |                                  |
|----------------------|----------------------------------|
| Gains proportionnels | $\mathbf{K}_p = \text{diag}(30)$ |
| Gains dérivés        | $\mathbf{K}_v = \text{diag}(1)$  |

Tableau 5.5 : Réglages des correcteurs PD.

#### 5.3.1 Étalonnage et principe de mesure

Pour ces études, le prototype est supposé étalonné. Cette opération a été réalisée à l'aide d'un laser de poursuite API Tracker3 (T3-15), illustré à la figure 5.13a. Cet appareil peut mesurer la position relative d'un point jusqu'à 30 mètres de distance, avec une précision supérieure à  $\pm 15 \mu\text{m}$ . Le laser est supposé correctement étalonné par le fabricant et les mesures effectuées dans les conditions d'utilisation préconisées.

La position du repère  $\mathbb{R}_l$  du laser de poursuite dans le système de coordonnées de la base fixe du robot  $\mathbb{R}_b$  est préalablement calculée. À cette fin, on place la cible sphé-

|                               |  |
|-------------------------------|--|
| Gains d'adaptation $\Gamma_q$ | $\text{diag}(\Gamma_q) = \{0,5, \dots, 0,5, 1e^{-4}, \dots, 1e^{-4}\}$ |
| Gains d'adaptation $\Gamma_x$ | $\text{diag}(\Gamma_x) = \{120, 100, 100, 100, 1e^3, \dots, 1e^3\}$    |
| $\mathbf{a}_q$                | [0 0 ... 0]  |
| $\mathbf{b}_q$                | [5 ... 5 0,03 ... 0,03]  |
| $\mathbf{a}_x$                | [0 -150 -150 -250 70 70 20 -50 -50 -50]                                |
| $\mathbf{b}_x$                | [500 150 150 0 160 160 100 50 50 50]                                   |
| $\lambda_{0q}$                | 10   |
| $\lambda_{0x}$                | 3  |
| $\delta_q$                    | 0,001  |
| $\delta_x$                    | 0,1  |

Tableau 5.6 : Réglages des paramètres de la commande adaptative.

rique du laser dans trois bases stables fixées au sol, comme illustré à la figure 5.14. La connaissance de ces trois points permet de former le repère du robot et de calculer la position relative du repère du laser. On rappelle que le centre du repère  $\mathbb{R}_b$  du démonstrateur du projet COGIRO est situé au centre géométrique de la surface correspondante à l'empreinte au sol du robot. Les axes du repère sont indiqués en annexe A.2. Pour ces expériences, la position  $\mathbf{l}$  calculée de l'origine de  $\mathbb{R}_l$ , le centre de mesure, dans le repère  $\mathbb{R}_b$  vaut  $\mathbf{l} = [-7,07435 \ -1,54127 \ 1,45713]^T$ , exprimée en mètres.



(a) Laser de poursuite API Tracker3 (T3-15).



(b) Prise de mesures avec la cible.

FIGURE 5.13 : Illustration d'une mesure de pose effectuée avec le laser de poursuite API Tracker3 (T3-15).

Afin de mesurer les poses  $\mathbf{x} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]$  de la plate-forme, celle-ci est égale-



FIGURE 5.14 : Une des bases au sol de la cible du laser de poursuite.

ment équipée de trois bases permettant d'accueillir la cible du laser de poursuite (voir figure 5.15). Une fois la cible placée dans une de ces bases, la position de la cible sphérique par rapport à l'origine du repère  $\mathbb{R}_p$  de la plate-forme est connue avec précision. La mesure de trois points, comme illustré à la figure 5.13b, permet la reconstruction tridimensionnelle du repère  $\mathbb{R}_p$  de la plate-forme par rapport au repère du laser de poursuite  $\mathbb{R}_l$  puis de celui du robot  $\mathbb{R}_b$ . Plus précisément, ces mesures nous permettent de déterminer la matrice de transformation homogène  ${}^b\mathbf{T}_p$  définie à l'équation (2.3). La mesure de la position  $\mathbf{p}$  du centre de  $\mathbb{R}_p$  par rapport à  $\mathbb{R}_b$  est directe. De plus, la connaissance de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$ , exprimée à l'équation (2.2), permet de déterminer les valeurs des angles d'Euler. On trouve d'abord  $\theta$  tel que

$$\sin\theta = q_{13} \quad \cos\theta = \pm\sqrt{1 - q_{13}^2} \quad (5.2)$$

où  $q_{ij}$  correspond à l'élément de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de  $\mathbf{Q}$ .



(a) Une base de la cible du laser de poursuite située sur la plate-forme



(b) La cible placée dans cette base.

FIGURE 5.15 : Mesure de la position de la plate-forme au travers de la mesure de trois bases fixées sur celle-ci.

Comme remarqué dans [Khalil 96], le signe de  $\theta$  doit être choisi. Cela signifie que deux jeux différents d'angles d'Euler peuvent être issus de la même matrice  $\mathbf{Q}$ . Nous utiliserons donc la fonction  $\text{atan2}$  à deux arguments qui, en fonction de leurs signes, détermine le cadran de l'angle. La bonne solution s'obtient avec le signe positif, ce qui conduit à

$$\theta = \text{atan2}\left(q_{13}, \sqrt{1 - q_{13}^2}\right) \quad (5.3)$$

Une fois  $\theta$  connu, les deux autres angles sont déduits en écrivant

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{q_{33}}{\cos \theta} & \sin \phi &= \frac{-q_{23}}{\cos \theta} \\ \cos \psi &= \frac{q_{11}}{\cos \theta} & \sin \psi &= \frac{-q_{12}}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (5.4)$$

ce qui donne

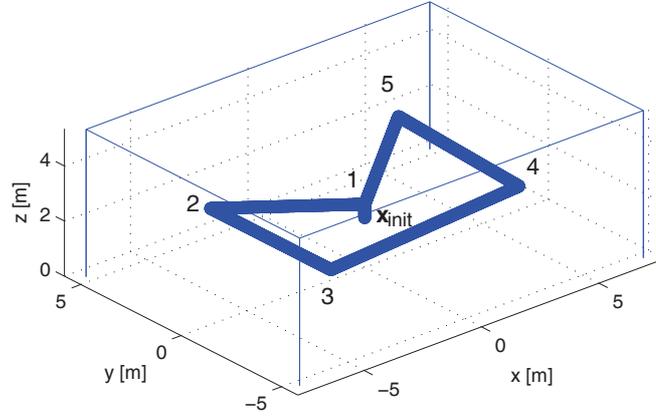
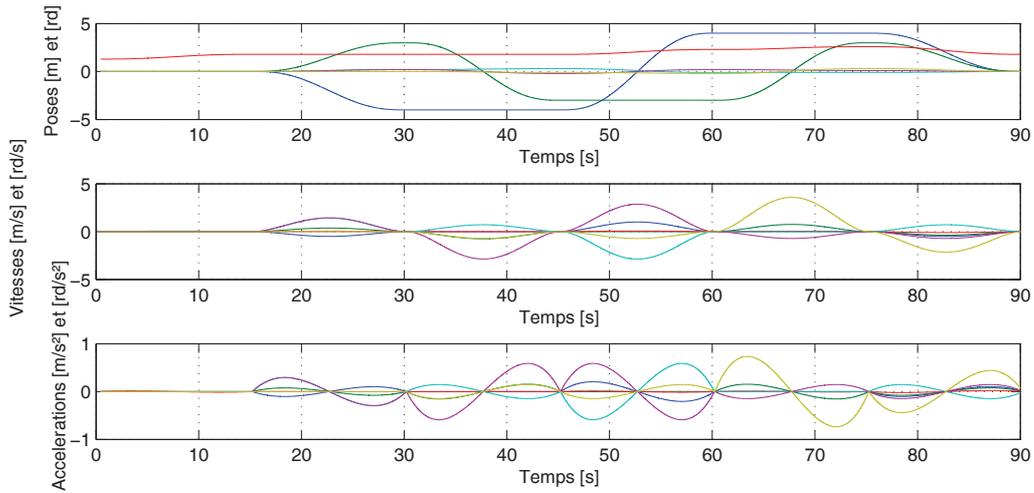
$$\begin{aligned} \phi &= \text{atan2}\left(\frac{q_{33}}{\cos \theta}, \frac{-q_{23}}{\cos \theta}\right) \\ \psi &= \text{atan2}\left(\frac{q_{11}}{\cos \theta}, \frac{-q_{12}}{\cos \theta}\right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

La stabilité des différentes bases de la cible du laser de poursuite permet une précision de mesure de  $\pm 0,1$  mm. En effet, on observe dans le pire des cas une variation de  $\pm 0,1$  mm sur l'écran d'interface du laser de poursuite lorsque la cible est bien positionnée dans les bases de la plate-forme.

### 5.3.2 Exactitudes de positionnement et d'orientation

L'exactitude exprime "l'écart entre une pose commandée et la moyenne des poses atteintes lorsque la pose commandée est atteinte suivant la même direction" [AFN 98]. Pour mesurer les Exactitudes de Positionnement ( $EP$ ) et d'Orientation ( $EO$ ) de la plate-forme, une trajectoire  $\text{traj}_4$  appliquée au démonstrateur du projet COGIRO est définie. La pose initiale de la plate-forme est égale à  $\mathbf{x}_{\text{init}} = [0 \ 0 \ 1,296 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , le point de référence contrôlé  $P$  de la plate-forme reposant à 1,296 m au-dessus du sol. La trajectoire  $\text{traj}_4$  est choisie avec des poses de passage d'orientation quelconque à l'intérieur de l'ETC du prototype. Les poses de  $\text{traj}_4$  sont données dans le tableau 5.7 et montrées par la figure 5.16. Cette trajectoire exploite bien l'ETC du prototype. La figure 5.17 donne les poses, vitesses et accélérations désirées générées pour suivre la trajectoire  $\text{traj}_4$ .

Pour mesurer les  $EP$  et les  $EO$  de la plate-forme, on place cette dernière successivement aux cinq points de passage de  $\text{traj}_4$  dont les coordonnées sont données dans le tableau 5.7. Pour ces expériences, la plate-forme en acier équipée d'un lève-palette est utilisée. Dans un premier temps, la plate-forme n'est pas chargée et sa masse totale est de 142 kg. À chaque pose atteinte, la position et l'orientation de la plate-forme sont mesurées à l'aide du laser de poursuite. Ce cycle est répété cinq fois, afin d'avoir cinq mesures pour chaque pose

FIGURE 5.16 : Représentation schématique de traj<sub>4</sub>.FIGURE 5.17 : Poses, vitesses et accélérations Cartésiennes générées pour le suivi de traj<sub>4</sub> (unités : mètres et degrés, convention d'Euler XYZ).

de traj<sub>4</sub>, toujours atteintes dans le même ordre et dans les mêmes conditions. On calcule ensuite les  $EP$  et  $EO$  par rapport aux poses commandées dans l'espace Cartésien. Les  $EP$  et  $EO$  sont calculées telles que

$$EP_i = \sqrt{(\bar{x}_i - x_{i_d})^2 + (\bar{y}_i - y_{i_d})^2 + (\bar{z}_i - z_{i_d})^2} \quad (5.6)$$

$$EO_i = \sqrt{(\bar{\phi}_i - \phi_{i_d})^2 + (\bar{\theta}_i - \theta_{i_d})^2 + (\bar{\psi}_i - \psi_{i_d})^2} \quad (5.7)$$

| $n^o$                      | position $\mathbf{p}^T$ | orientation $\mathbf{o}^T$ | $n^o$                      | position $\mathbf{p}^T$ | orientation $\mathbf{o}^T$ |
|----------------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|----------------------------|
| $\mathbf{x}_{\text{init}}$ | [0 0 1,296]             | [0 0 0]                    | 4                          | [4 -3 2,296]            | [-5,73 11,46 -11,46]       |
| 1                          | [0 0 1,796]             | [0 0 40]                   | 5                          | [4 3 2,596]             | [-5,73 5,73 17,19]         |
| 2                          | [-4 3 1,796]            | [11,46 11,46 0]            | 1                          | [0 0 1,796]             | [0 0 0]                    |
| 3                          | [-4 -3 1,796]           | [17,19 -11,46 -5,73]       | $\mathbf{x}_{\text{init}}$ | [0 0 1,296]             | [0 0 0]                    |

Tableau 5.7 : Points de passage de la trajectoire  $\text{traj}_4$ .

où  $i \in 1 \dots p$  est l'indice de la pose considérée de la trajectoire  $\text{traj}_4$ . Cette dernière comporte cinq poses à mesurer, soit  $p = 5$ . Les coordonnées de la  $i^{\text{ème}}$  pose désirée sont notées  $\mathbf{x}_{i_d} = [x_{i_d} \ y_{i_d} \ z_{i_d} \ \phi_{i_d} \ \theta_{i_d} \ \psi_{i_d}]^T$ . On note

$$\bar{x}_i = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q x_{ij} \quad \bar{y}_i = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q y_{ij} \quad \bar{z}_i = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q z_{ij} \quad (5.8)$$

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \phi_{ij} \quad \bar{\theta}_i = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \theta_{ij} \quad \bar{\psi}_i = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \psi_{ij} \quad (5.9)$$

les moyennes des composantes des  $q$  mesures de la  $i^{\text{ème}}$  pose commandée, avec ici  $q = 5$ .  $\mathbf{x}_{ij} = [x_{ij} \ y_{ij} \ z_{ij} \ \phi_{ij} \ \theta_{ij} \ \psi_{ij}]^T$  désigne la  $j^{\text{ème}}$  pose mesurée autour de la  $i^{\text{ème}}$  pose commandée. Enfin, on donnera  $\overline{EP}$  et  $\overline{EO}$ , respectivement les erreurs de positionnement et d'orientation moyennes, telles que

$$\overline{EP} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p EP_i \quad \overline{EO} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p EO_i \quad (5.10)$$

Les figures 5.18a et 5.18b illustrent respectivement le principe des exactitudes et répétabilités de positionnement et d'orientation pour une pose donnée.

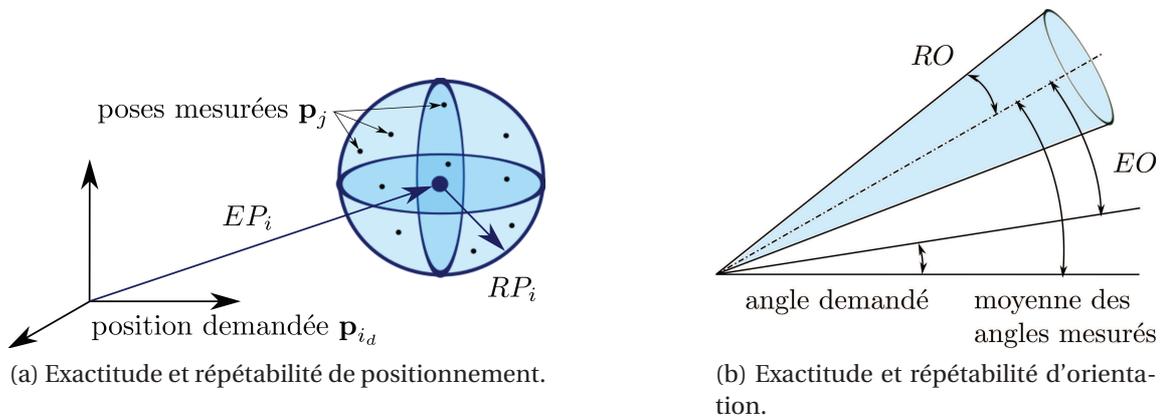


FIGURE 5.18 : Illustration de l'exactitude et de la répétabilité de positionnement et d'orientation [Priel 90].

| Plate-forme à vide                             |        |        |        |        |                                |        |        |        |        |                        |        |        |        |        |        |  |
|--|--------|--------|--------|--------|--------------------------------|--------|--------|--------|--------|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--|
| commande PID sans anticipation                 |        |        |        |        | commande PD avec anticipations |        |        |        |        | commande PD adaptative |        |        |        |        |        |  |
| cycle  | pose 1 | pose 2 | pose 3 | pose 4 | pose 5                         | pose 1 | pose 2 | pose 3 | pose 4 | pose 5                 | pose 1 | pose 2 | pose 3 | pose 4 | pose 5 |  |
| <i>EP</i>                                      | 31,24  | 23,48  | 31,37  | 47,39  | 26,73                          | 7,59   | 19,83  | 17,73  | 24,34  | 21,02                  | 5,94   | 20,04  | 17,60  | 25,08  | 19,48  |  |
| <i>EP</i>                                      | 32,04  |        |        |        |                                | 18,10  |        |        |        |                        |        |        |        |        |        |  |
| <i>EO</i>                                      | 4,20   | 11,69  | 27,48  | 17,07  | 2,42                           | 1,40   | 11,61  | 23,30  | 9,60   | 6,14                   | 1,36   | 10,35  | 22,38  | 12,21  | 4,08   |  |
| <i>EO</i>                                      | 12,57  |        |        |        |                                | 10,41  |        |        |        |                        |        |        |        |        |        |  |
| Plate-forme chargée avec une palette de 110 kg |        |        |        |        |                                |        |        |        |        |                        |        |        |        |        |        |  |
| commande PID sans anticipation                 |        |        |        |        | commande PD avec anticipations |        |        |        |        | commande PD adaptative |        |        |        |        |        |  |
| cycle  | pose 1 | pose 2 | pose 3 | pose 4 | pose 5                         | pose 1 | pose 2 | pose 3 | pose 4 | pose 5                 | pose 1 | pose 2 | pose 3 | pose 4 | pose 5 |  |
| <i>EP</i>                                      | 98,84  | 72,40  | 78,85  | 101,15 | 99,83                          | 74,86  | 55,29  | 60,54  | 77,92  | 69,55                  | 50,68  | 41,44  | 43,16  | 59,23  | 49,74  |  |
| <i>EP</i>                                      | 90,21  |        |        |        |                                | 67,63  |        |        |        |                        |        |        |        |        |        |  |
| <i>EO</i>                                      | 10,52  | 26,67  | 64,46  | 26,66  | 19,99                          | 9,70   | 25,78  | 58,57  | 21,94  | 13,43                  | 7,01   | 20,79  | 50,30  | 17,42  | 9,24   |  |
| <i>EO</i>                                      | 29,66  |        |        |        |                                | 25,89  |        |        |        |                        |        |        |        |        |        |  |

Tableau 5.8 : Exactitudes mesurées de COG1RO aux différentes poses de trajé, plate-forme à vide puis chargée avec une palette de 110 kg. Les résultats sont exprimés en millimètres et en milliradians.

Dans un second temps, ces mêmes mesures sont effectuées lorsque la plate-forme est chargée avec une palette de 110 kg ( $\Delta m = 77,5\%$ ). Les résultats de mesures sont donnés dans le tableau 5.8. La photographie 5.19 illustre la plate-forme chargée du démonstrateur du projet COGiRO à la quatrième pose de traj<sub>4</sub>.

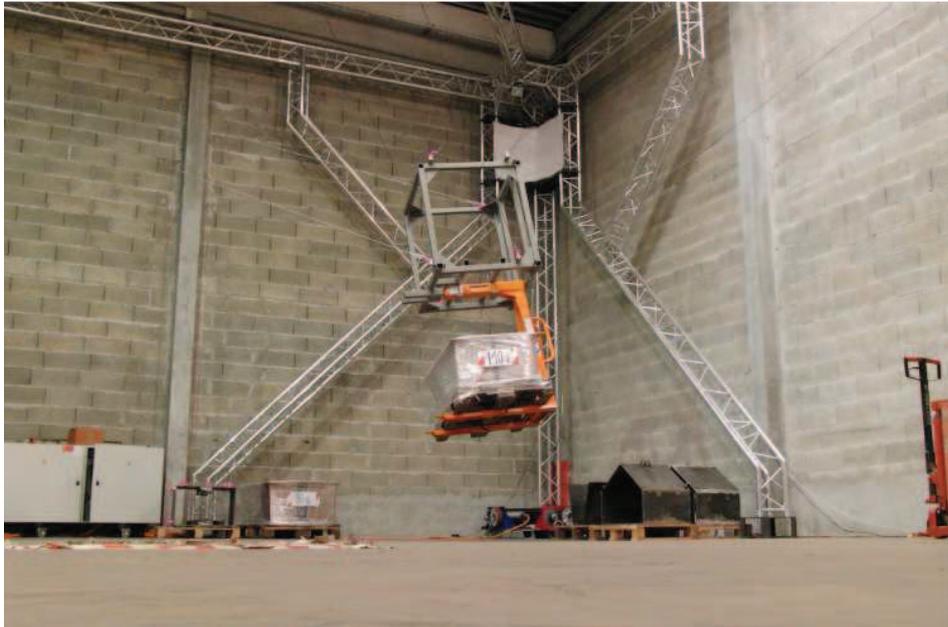


FIGURE 5.19 : Plate-forme du démonstrateur du projet COGiRO chargée avec une palette de 110 kg à la quatrième pose de traj<sub>4</sub>.

Le tableau 5.8 montre que lorsque la plate-forme n'est pas chargée, l'*EP* moyenne sans anticipation est de 32,04 mm. L'activation des boucles d'anticipation divise presque par deux l'erreur de positionnement. On mesure une *EP* moyenne de 18,10 mm. En revanche la commande adaptative n'apporte qu'une faible correction, son *EP* moyenne étant de 17,63 mm. En effet, la commande par anticipation en espace double est réglée pour fournir les meilleures performances possibles lorsque la plate-forme n'est pas chargée. La commande adaptative présente donc peu d'intérêts ici. Les *EO* moyennes sont en revanche très proches pour les trois schémas de commande. Sans anticipation, on mesure  $\overline{EO} = 12,57 \text{ mrad} = 0,7^\circ$  contre  $0,58^\circ$  avec la commande adaptative.

Une fois la plate-forme chargée, la correction apportée par la commande adaptative est plus marquée. Sans anticipation, l'*EP* moyenne vaut 90,21 mm, soit un peu plus de 9 cm. La commande par anticipation ramène cette valeur à 67,63 mm et améliore donc la précision de 25 %. La commande adaptative diminue encore l'erreur de positionnement avec une *EP* moyenne de 48,84 mm, soit une amélioration de 46 %. Les exactitudes d'orientation sont également dégradées une fois la plate-forme chargée. Sans compensation, on

mesure  $\overline{EO} = 29,66 \text{ mrad} = 1,7^\circ$ . La commande par anticipation améliore de 13 % ce résultat, et la commande adaptative de 30 %, atteignant  $\overline{EO} = 1,2^\circ$ .

Les exactitudes de positionnement et d'orientation mettent en lumière certains défauts, notamment

- **un manque de fidélité du modèle géométrique.** On constate que la commande adaptative ne permet pas de diminuer l' $EP$  en deçà du centimètre. Comme l'indiquent les mesures effectuées (voir l'annexe D), cette erreur de positionnement est, sans surprise, principalement concentrée le long de l'axe vertical. Elle augmente considérablement avec la masse de la charge. Par conséquent, il semble que le modèle du câble non-élastique choisi ici soit trop imprécis. L' $EP$  doit pouvoir être améliorée en incluant dans la commande un modèle de câble élastique.
- **une incertitude sur la position des points de sortie des câbles.** La structure du démonstrateur n'est pas fixée au sol du bâtiment. Les points de sortie des câbles peuvent s'être déplacés depuis le dernier étalonnage du robot. Il arrive en effet que la structure subisse de brusques variations d'efforts, notamment lors d'un arrêt d'urgence. De plus, la structure est composée de poutres d'aluminium triangulaires. L'alliage utilisé (EN-AW 6060 T5) possède un module d'élasticité assez faible ( $\approx 70 \text{ GPa}$ ), de même que sa limite d'élasticité comprise entre 100 et 120 MPa. Les mesures d' $EP$  et d' $EO$  sont ainsi susceptibles d'être affectées par ces incertitudes d'étalonnage du robot.
- **des erreurs sur la longueur de câble déroulée.** Lorsqu'on déroule une grande quantité de câble, la longueur *morte* de câble - comprise entre le point de sortie de l'enrouleur et le point de sortie du câble - peut varier de manière plus ou moins importante, les points de sortie des enrouleurs se déplaçant le long des tambours. Les relations entre les angles des actionneurs (variables articulaires) et les longueurs de câble ne sont donc pas constantes et ces variations devraient être prises en compte pour améliorer l' $EP$  de la plate-forme.

### 5.3.3 Répétabilité de positionnement et d'orientation

La répétabilité d'un robot manipulateur, toujours au sens de la norme ISO 9283 (Août 1998), exprime "l'étroitesse de l'accord entre les poses atteintes pour la même pose  $i$  commandée et répétée  $q$  fois suivant la même direction". Elle caractérise la dispersion des poses atteintes par le robot autour du barycentre des mesures. À chaque pose  $i$ , on donne

- la Répétabilité de Positionnement ( $RP$ ) : le rayon de la sphère dont le centre est le barycentre du nuage de points des  $q$  mesures ;

- les Répétabilités d’Orientation (RO) - ou “étendues des variations angulaires” :  $RO_\phi$ ,  $RO_\theta$ ,  $RO_\psi$  autour des valeurs moyennes  $\bar{\phi}$ ,  $\bar{\theta}$  et  $\bar{\psi}$ .

Les figures 5.18a et 5.18b illustrent respectivement les  $RP$  et  $RO$  pour une pose donnée.  $RP_i$ , la  $RP$  de la  $i^{\text{ème}}$  pose,  $i \in 1 \dots p$ , s’écrit

$$RP_i = \bar{l}_i + 3S_i \quad (5.11)$$

avec

$$\bar{l}_i = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q l_{ij} \quad \text{et} \quad l_{ij} = \sqrt{(x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + (z_{ij} - \bar{z}_i)^2} \quad (5.12)$$

$q$  étant le nombre de mesures prises à la  $i^{\text{ème}}$  pose, ici  $q = 5$ . Les coordonnées de la  $j^{\text{ème}}$  mesure prise à la pose  $i$  sont notées  $\mathbf{x}_{ij} = [x_{ij} \ y_{ij} \ z_{ij} \ \phi_{ij} \ \theta_{ij} \ \psi_{ij}]^T$ . Les moyennes des composantes  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{y}_i$  et  $\bar{z}_i$  des  $q$  poses mesurées autour de la  $i^{\text{ème}}$  pose désirée admettent les mêmes expressions que celles de l’équation (5.8). L’écart type  $S_i$  de la  $i^{\text{ème}}$  pose d’expression

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^q (l_{ij} - \bar{l}_i)^2}{q-1}} \quad (5.13)$$

La  $RP$  moyenne  $\overline{RP}$  des 5 poses de  $\text{traj}_4$  est finalement calculée

$$\overline{RP} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p RP_i \quad (5.14)$$

Les RO, quant à elles, se calculent séparément en fonction de l’angle d’Euler considéré. On donne ici les expressions des  $RO_\phi$ ,  $RO_\theta$  et  $RO_\psi$  :

$$RO_{\phi_i} = \pm S_{\phi_i} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^q (\phi_{ij} - \bar{\phi}_i)^2}{q-1}} \quad (5.15)$$

$$RO_{\theta_i} = \pm S_{\theta_i} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^q (\theta_{ij} - \bar{\theta}_i)^2}{q-1}} \quad (5.16)$$

$$RO_{\psi_i} = \pm S_{\psi_i} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^q (\psi_{ij} - \bar{\psi}_i)^2}{q-1}} \quad (5.17)$$

où moyennes des composantes  $\bar{\phi}_i$ ,  $\bar{\theta}_i$  et  $\bar{\psi}_i$  des  $q$  poses mesurées autour de la  $i^{\text{ème}}$  pose désirée admettent les mêmes expressions que celles de l'équation (5.9). Les valeurs moyennes obtenues pour les  $p$  poses s'écrivent finalement

$$\overline{RO}_\phi = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p RO_{\phi_i}, \quad \overline{RO}_\theta = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p RO_{\theta_i} \quad \text{et} \quad \overline{RO}_\psi = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p RO_{\psi_i} \quad (5.18)$$

Afin de calculer les répétabilités, on exploite les jeux de mesures obtenus lors de l'analyse des exactitudes. Les répétabilités sont donc données dans un premier temps avec la plate-forme non chargée, puis, dans un second temps, chargée avec une palette de 110 kg. Les résultats sont présentés au tableau 5.9.

D'après ces mesures, on constate que le choix du schéma de commande influe significativement sur la  $RP$ . La plate-forme étant à vide, la  $RP$  mesurée avec la commande basique PID est de 30,24 mm. En comparaison, la  $RP$  obtenue en ajoutant les compensations des boucles d'anticipation est 14 fois inférieure, avec  $\overline{RP} = 4,39$  mm. Enfin, la  $RP$  de la commande adaptative est 39 fois inférieure à celle de la commande PID, soit  $\overline{RP} = 0,77$  mm. La répétabilité est un bon indicateur de la performance de la commande adaptative. De plus, obtenir une  $RP$  submillimétrique avec un RPC possédant un ETC de plus de 630 m<sup>3</sup> est très encourageant pour le développement futur de ces robots.

Les  $RO$  indiquent séparément pour chaque angle d'Euler la répétition des erreurs angulaires mesurées. Le tableau 5.9 donne  $\overline{RO}_\phi$ ,  $\overline{RO}_\theta$  et  $\overline{RO}_\psi$ , les moyennes de ces erreurs sur l'ensemble des poses mesurées. Afin de comparer les performances des commandes, considérons la moyenne  $\overline{RO}$  de ces trois moyennes, telle que  $\overline{RO} = \frac{1}{3} \sqrt{\overline{RO}_\phi + \overline{RO}_\theta + \overline{RO}_\psi}$ . Avec la commande PID classique, la  $RO$  moyenne obtenue est de 2,16 mrad. La commande par anticipation en espace double conduit à  $\overline{RO} = 3,13$  mrad, tandis que la commande adaptative dans l'espace double atteint  $\overline{RO} = 0,49$  mrad. Une nouvelle fois, la commande adaptative se montre plus performante.

Les mesures de répétabilité effectuées avec la plate-forme chargée sont en revanche surprenantes. La commande PD donne en effet de meilleurs résultats que la commande par anticipation ou la commande adaptative. Si ces deux dernières stratégies de commande améliorent significativement l' $EP$  et l' $EO$  lorsque la plate-forme est chargée, la  $RP$  et la  $RO$  sont moins bonnes.

| Plate-forme à vide                            |            |            |            |            |                              |            |            |            |            |                        |            |            |            |            |            |  |  |
|---|------------|------------|------------|------------|------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|--|--|
| commande PID sans anticipation                |            |            |            |            | commande PD par anticipation |            |            |            |            | commande PD adaptative |            |            |            |            |            |  |  |
| cycle   | pose 1     | pose 2     | pose 3     | pose 4     | pose 5                       | pose 1     | pose 2     | pose 3     | pose 4     | pose 5                 | pose 1     | pose 2     | pose 3     | pose 4     | pose 5     |  |  |
| $RP$  | 2,75       | 23,69      | 16,43      | 53,03      | 55,29                        | 4,35       | 2,49       | 5,10       | 4,44       | 5,55                   | 0,80       | 1,35       | 0,44       | 0,53       | 0,79       |  |  |
| $\overline{RP}$                               | 30,24      |            |            |            |                              | 4,39       |            |            |            |                        | 0,77       |            |            |            |            |  |  |
| $RO_\phi$                                     | $\pm 0,85$ | $\pm 0,91$ | $\pm 1,12$ | $\pm 0,80$ | $\pm 0,14$                   | $\pm 0,74$ | $\pm 3,84$ | $\pm 6,23$ | $\pm 6,35$ | $\pm 7,72$             | $\pm 0,80$ | $\pm 0,69$ | $\pm 0,38$ | $\pm 0,74$ | $\pm 0,61$ |  |  |
| $RO_\phi$                                     | $\pm 0,76$ |            |            |            |                              | $\pm 4,98$ |            |            |            |                        | $\pm 0,64$ |            |            |            |            |  |  |
| $RO_\theta$                                   | $\pm 0,30$ | $\pm 1,94$ | $\pm 2,37$ | $\pm 0,32$ | $\pm 0,50$                   | $\pm 0,15$ | $\pm 2,48$ | $\pm 1,90$ | $\pm 2,36$ | $\pm 2,78$             | $\pm 0,34$ | $\pm 0,70$ | $\pm 0,40$ | $\pm 0,43$ | $\pm 0,55$ |  |  |
| $\overline{RO}_\theta$                        | $\pm 1,07$ |            |            |            |                              | $\pm 1,93$ |            |            |            |                        | $\pm 0,48$ |            |            |            |            |  |  |
| $RO_\psi$                                     | $\pm 0,37$ | $\pm 5,55$ | $\pm 5,46$ | $\pm 6,03$ | $\pm 5,92$                   | $\pm 1,24$ | $\pm 2,86$ | $\pm 4,72$ | $\pm 2,09$ | $\pm 1,49$             | $\pm 0,19$ | $\pm 0,23$ | $\pm 0,48$ | $\pm 0,22$ | $\pm 0,72$ |  |  |
| $\overline{RO}_\psi$                          | $\pm 4,66$ |            |            |            |                              | $\pm 2,48$ |            |            |            |                        | $\pm 0,37$ |            |            |            |            |  |  |
| Plate-forme chargée avec une palette de 110kg |            |            |            |            |                              |            |            |            |            |                        |            |            |            |            |            |  |  |
| commande PID sans anticipation                |            |            |            |            | commande PD par anticipation |            |            |            |            | commande PD adaptative |            |            |            |            |            |  |  |
| cycle   | pose 1     | pose 2     | pose 3     | pose 4     | pose 5                       | pose 1     | pose 2     | pose 3     | pose 4     | pose 5                 | pose 1     | pose 2     | pose 3     | pose 4     | pose 5     |  |  |
| $RP$  | 0,77       | 0,62       | 0,63       | 2,04       | 0,80                         | 3,71       | 2,19       | 1,56       | 1,15       | 2,21                   | 1,45       | 4,37       | 3,71       | 1,27       | 1,29       |  |  |
| $\overline{RP}$                               | 0,97       |            |            |            |                              | 2,16       |            |            |            |                        | 2,42       |            |            |            |            |  |  |
| $RO_\phi$                                     | $\pm 0,61$ | $\pm 0,69$ | $\pm 0,25$ | $\pm 1,72$ | $\pm 1,02$                   | $\pm 0,97$ | $\pm 1,16$ | $\pm 0,89$ | $\pm 0,86$ | $\pm 0,84$             | $\pm 0,80$ | $\pm 3,46$ | $\pm 2,19$ | $\pm 0,15$ | $\pm 1,76$ |  |  |
| $RO_\phi$                                     | $\pm 0,86$ |            |            |            |                              | $\pm 0,95$ |            |            |            |                        | $\pm 1,95$ |            |            |            |            |  |  |
| $RO_\theta$                                   | $\pm 0,09$ | $\pm 0,38$ | $\pm 0,48$ | $\pm 1,07$ | $\pm 0,28$                   | $\pm 0,65$ | $\pm 2,85$ | $\pm 0,35$ | $\pm 0,49$ | $\pm 1,43$             | $\pm 0,19$ | $\pm 2,99$ | $\pm 3,97$ | $\pm 1,54$ | $\pm 0,66$ |  |  |
| $RO_\theta$                                   | $\pm 0,46$ |            |            |            |                              | $\pm 1,15$ |            |            |            |                        | $\pm 1,87$ |            |            |            |            |  |  |
| $RO_\psi$                                     | $\pm 0,28$ | $\pm 0,33$ | $\pm 0,21$ | $\pm 2,43$ | $\pm 0,51$                   | $\pm 0,93$ | $\pm 1,83$ | $\pm 0,45$ | $\pm 0,92$ | $\pm 1,85$             | $\pm 0,65$ | $\pm 1,03$ | $\pm 4,47$ | $\pm 0,39$ | $\pm 1,32$ |  |  |
| $\overline{RO}_\psi$                          | $\pm 0,75$ |            |            |            |                              | $\pm 1,19$ |            |            |            |                        | $\pm 1,57$ |            |            |            |            |  |  |

Tableau 5.9 : Répétabilité mesurées de CoGiRO aux différentes poses de  $traj_4$ , plate-forme à vide puis chargée avec une palette de 110 kg. Les résultats sont exprimés en millimètres et milliradians.

Il semble que cette dégradation de la répétabilité par l'utilisation de la commande adaptative est notamment due à de mauvaises estimations de certains des paramètres du modèle dynamique du RPC. En effet, la trajectoire  $\text{traj}_2$  implique des rotations uniquement autour de l'axe vertical  $\mathbf{z}$ , avec de faibles accélérations angulaires. Par conséquent, les ajustements de la position du centre de gravité le long de l'axe  $\mathbf{z}$  ainsi que des produits et moments d'inertie de la plate-forme et de son éventuelle charge ne sont jamais, ou très peu, excités. On observe en pratique une mauvaise estimation de ces paramètres qui n'ont pas le temps de converger avant les changements impliqués par la prise ou le dépôt de la charge ou les changements de poses. D'un cycle à l'autre, des estimations différentes de ces paramètres sont observés à des poses identiques, dégradant ainsi les performances en terme de répétabilité. Un modèle plus adapté à ce RPC et à cette application, qui considèrerait ces paramètres comme invariants, devrait fournir de meilleures performances.

### 5.3.4 Exactitudes de suivi de trajectoires

Les exactitudes de positionnement et d'orientation de la plate-forme sont maintenant calculées le long de la trajectoire  $\text{traj}_2$ , à partir du scénario de pick-and-place défini à la section 4.6. Ce scénario inclut une prise de charge de 110 kg. Les points de passage de  $\text{traj}_2$  sont rappelés au tableau 5.10. Pour ces expériences, la plate-forme du démonstrateur du projet COGIRO est choisie dans sa version en aluminium équipée du lève-palette. La masse de l'ensemble est de 93 kg. La variation de masse lors de la prise de la palette est donc d'environ  $\Delta m = 120\%$ . Dans ce scénario, la plate-forme se rend tout d'abord au point A, face à la palette. Le lève-palette prend la charge au point B au temps  $t_1 = 19$  s et la déplace jusqu'au point C où cette dernière est déposée au temps  $t_2 = 40$  s. La plate-forme effectue un mouvement de retrait jusqu'en D et revient à sa pose initiale de référence. Ces points de passage sont illustrés à la figure 4.10. Les signaux de commande en entrée des moteurs sont illustrés à la figure 5.20. Les moteurs du démonstrateur possèdent un couple maximum de 280 Nm et un couple nominal de 72 Nm. Comme le montre la figure 5.20, les signaux de commande sont très loin des limites des moteurs le long de toute la trajectoire  $\text{traj}_2$ .

| $n^\circ$                  | position $\mathbf{p}^T$ | orientation $\mathbf{o}^T$ | $n^\circ$                  | position $\mathbf{p}^T$ | orientation $\mathbf{o}^T$ |
|----------------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|----------------------------|
| $\mathbf{x}_{\text{init}}$ | [0 0 1,296]             | [0 0 0]                    |                            | [4 -1 1,796]            | [0 0 11,46]                |
|                            | [0 0 2,296]             | [0 0 0]                    | C                          | [4 -1 1,307]            | [0 0 11,46]                |
|                            | [-3,85 1,2 2,296]       | [0 0 -45,84]               | D                          | [4,3 -2 1,307]          | [0 0 11,46]                |
| A                          | [-3,85 1,2 1,307]       | [0 0 -45,84]               |                            | [4,3 -2 2,296]          | [0 0 11,46]                |
| B                          | [-3 2 1,307]            | [0 0 -45,84]               |                            | [0 0 1,296]             | [0 0 0]                    |
|                            | [-3 2 1,796]            | [0 0 -45,84]               | $\mathbf{x}_{\text{init}}$ | [0 0 1,296]             | [0 0 0]                    |

Tableau 5.10 : Points de passage de la trajectoire  $\text{traj}_2$  avec prise de charge.

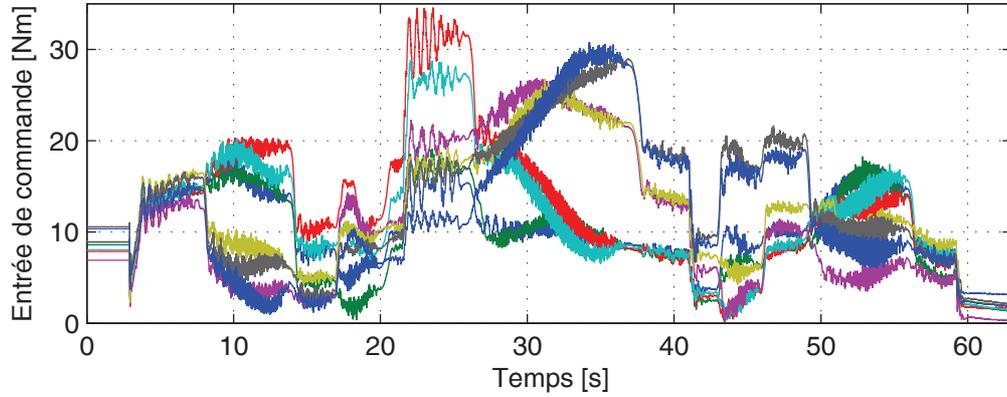


FIGURE 5.20 : Signaux d'entrée des moteurs (couples commandés).

Le long de la trajectoire  $\text{traj}_2$ , l'Exactitude de Trajectoire en Positionnement (*ETP*) est définie comme l'erreur quadratique maximale mesurée entre la  $i^{\text{ème}}$  position calculée  $\mathbf{p}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$  par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  position désirée  $\mathbf{p}_{i_d} = [x_{i_d} \ y_{i_d} \ z_{i_d}]^T$ . Les Exactitudes de Trajectoire en Orientation  $ETO_\phi$ ,  $ETO_\theta$  et  $ETO_\psi$  correspondent aux valeurs maximales des erreurs quadratiques moyennes entre l'orientation mesurée à la  $i^{\text{ème}}$  pose  $\mathbf{o}_i = [\phi_i \ \theta_i \ \psi_i]^T$  et l' $i^{\text{ème}}$  orientation désirée  $\mathbf{o}_d = [\phi_d \ \theta_d \ \psi_d]^T$  le long de  $\text{traj}_2$ .

$$ETP = \max \sqrt{(x_i - x_{i_d})^2 + (y_i - y_{i_d})^2 + (z_i - z_{i_d})^2} \quad (5.19)$$

$$ETO_\phi = \max |\phi_i - \phi_{i_d}| \quad (5.20)$$

$$ETO_\theta = \max |\theta_i - \theta_{i_d}| \quad (5.21)$$

$$ETO_\psi = \max |\psi_i - \psi_{i_d}| \quad (5.22)$$

où  $i \in 1 \dots p$  est l'indice de la pose considérée de la trajectoire  $\text{traj}_2$ . Le problème ici est de réaliser les mesures extéroceptives des poses de la plate-forme le long de la trajectoire choisie. Le Laser Tracker nécessite une tête 3D pour faire du suivi tridimensionnel de trajectoires. Or ce matériel n'était pas disponible au moment de faire ces mesures. Dans cette section, les erreurs  $\dot{\mathbf{e}}_x$  de positionnement et d'orientation de la plate-forme dans l'espace opérationnel sont directement calculées à partir des erreurs articulaires  $\mathbf{e}_q$  mesurées. Rappelons la relation  $\dot{\mathbf{e}}_x = \mathbf{J}^+ \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}}_q$  établie à la section 4.5.1. La période d'échantillonnage étant faible ( $\Delta t = 0,5$  ms), il est possible d'écrire  $\mathbf{e}_x = \Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{J}^+ \mathbf{R} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{J}^+ \mathbf{R} \mathbf{e}_q$ .

Dans un premier temps, l'étude est menée sur le démonstrateur du projet COGIRO piloté avec la commande *PD* de la section 4.3. Le schéma de commande n'utilise aucune

|                               | pas de compensation | commande par anticipation | commande adaptative |
|-------------------------------|---------------------|---------------------------|---------------------|
| <i>EQMP</i>                   | 20,24 mm            | 7,02 mm                   | 0,66 mm             |
| <i>EQMO</i>                   | $2,1e^{-3}$ rad     | $1,2e^{-3}$ rad           | $1,5e^{-4}$ rad     |
| <i>ETP</i>                    | 37,5 mm             | 23,7 mm                   | 19,3 mm             |
| <i>ETO<math>\phi</math></i>   | $7,8e^{-3}$ rad     | $3,6e^{-3}$ rad           | $4,9e^{-3}$ rad     |
| <i>ETO<math>\theta</math></i> | $4,5e^{-3}$ rad     | $4,0e^{-3}$ rad           | $3,1e^{-3}$ rad     |
| <i>ETO<math>\psi</math></i>   | $4,0e^{-3}$ rad     | $3,0e^{-3}$ rad           | $2,5e^{-5}$ rad     |

Tableau 5.11 : Erreurs quadratiques moyennes et exactitudes de pose de la plate-forme le long de traj<sub>2</sub> avec un chargement de 110 kg entre  $t_1 = 19$  s et  $t_2 = 40$  s.

compensation par anticipation ( $\mathbf{f}_{ff} = \mathbf{0}$  et  $\boldsymbol{\tau}_{ff} = \mathbf{0}$ ). La figure 5.21 illustre les erreurs en positionnement et en orientation de suivi de traj<sub>2</sub>. Les Erreurs Quadratiques Moyennes de Positionnement (*EQMP*) et d'Orientation (*EQMO*) mesurées le long de traj<sub>2</sub> ainsi que les *ETP* et *ETO* sont données au tableau 5.11. Dans un second temps, le scénario est répété avec le schéma de commande par anticipation en espace double. Les erreurs de positionnement et d'orientation sont illustrées à la figure 5.22. Enfin, la figure 5.23 indique les erreurs mesurées en utilisant la commande adaptative en espace double, dont le réglage a été donné au tableau 5.6.

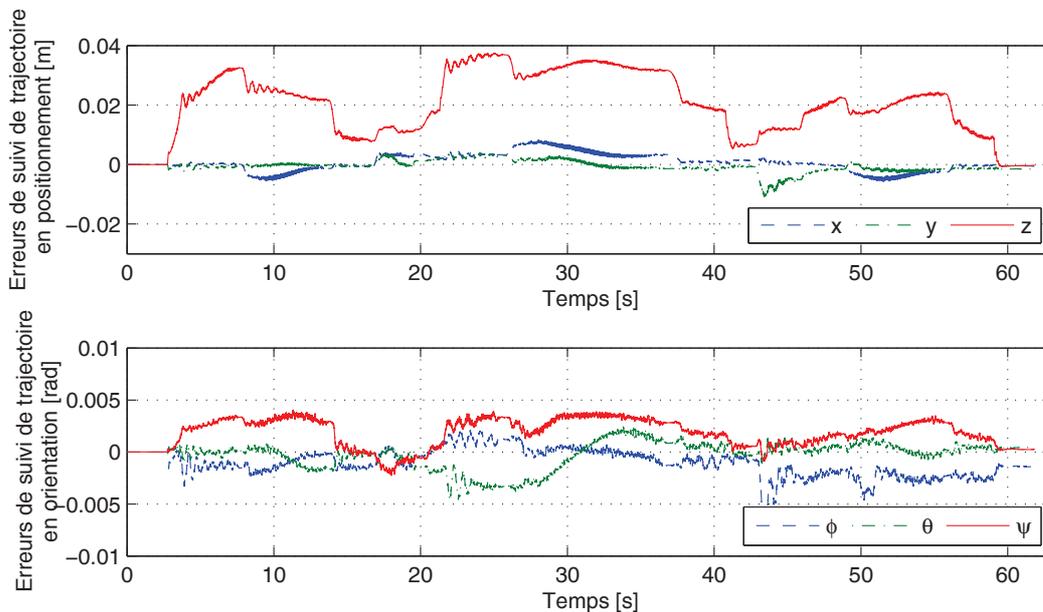


FIGURE 5.21 : Erreurs de suivi en position et en orientation de la plate-forme le long de traj<sub>2</sub>, calculées en utilisant le schéma de commande PID sans compensation.

Les résultats du tableau 5.11 montrent le gain de performance apporté par la com-

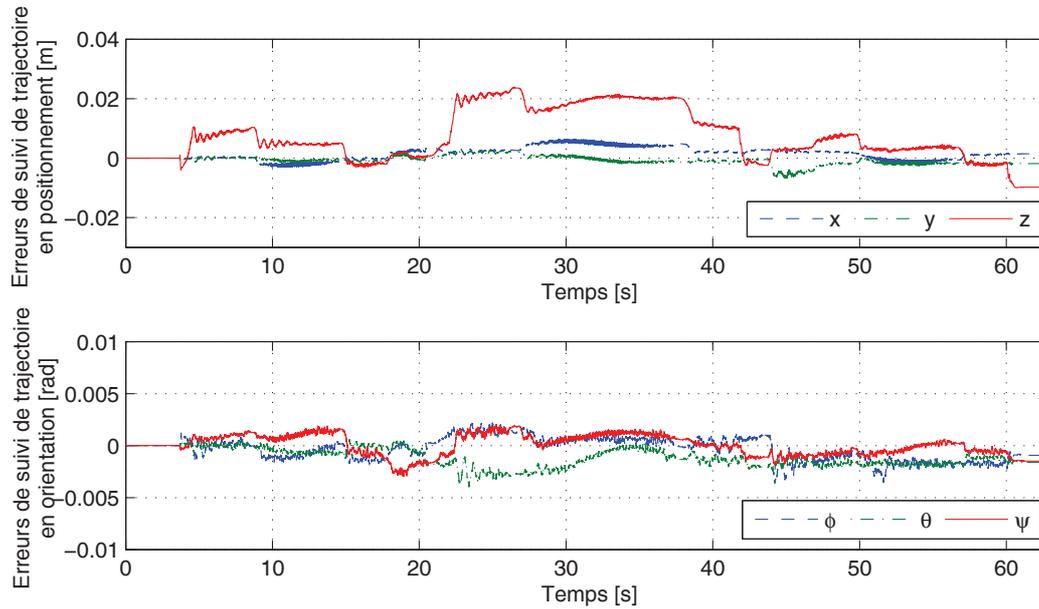


FIGURE 5.22 : Erreurs de suivi en position et en orientation de la plate-forme le long de  $\text{traj}_2$ , calculées en utilisant la commande par anticipation.

compensation des efforts dynamiques appliqués à la plate-forme et aux actionneurs par anticipation. La commande sans compensation possède une *EQMP* de 20,24 mm. L'ajout des termes d'anticipation dans la commande divise par trois cette erreur. L'*ETP* passe de 37,5 mm à 23,7 mm. Comme le montre la figure 5.21, le correcteur ne parvient pas à annuler l'erreur le long de l'axe vertical  $z$  sans compensation. Comme le montre la figure 5.22, de  $t_0 = 0$  s à  $t_1 = 19$  s et de  $t_2 = 40$  s à  $t_f = 65$  s, la commande par anticipation parvient à diminuer considérablement l'erreur statique le long de l'axe  $z$ . En revanche, la commande par anticipation étant réglée pour être performante lorsque la plate-forme n'est pas chargée, la prise de la palette engendre une augmentation de l'erreur de  $t_1$  à  $t_2$ . Le tableau 5.11 indique également que l'ajout des boucles d'anticipation réduit l'*EQMO* de moitié et diminue sensiblement les *ETO*.

La figure 5.23 montre clairement l'effet de l'adaptation des paramètres du modèle dynamique de la plate-forme. Comme pour les précédents schémas de commande, lors de la prise de charge à  $t_1 = 19$  s, l'erreur de positionnement le long de l'axe  $z$  augmente brusquement. L'*ETP* vaut 19,3 mm, un résultat légèrement inférieur à celui de la commande par anticipation, et les *ETO* sont très proches. En revanche, après environ sept secondes d'adaptation, à  $t = 26$  s, la masse est totalement compensée et l'erreur statique est de l'ordre du millimètre. Le même comportement est observable après le dépôt de la charge à  $t_2 = 40$  s. Par conséquent, les erreurs quadratiques moyennes mesurées le long de  $\text{traj}_2$  sont

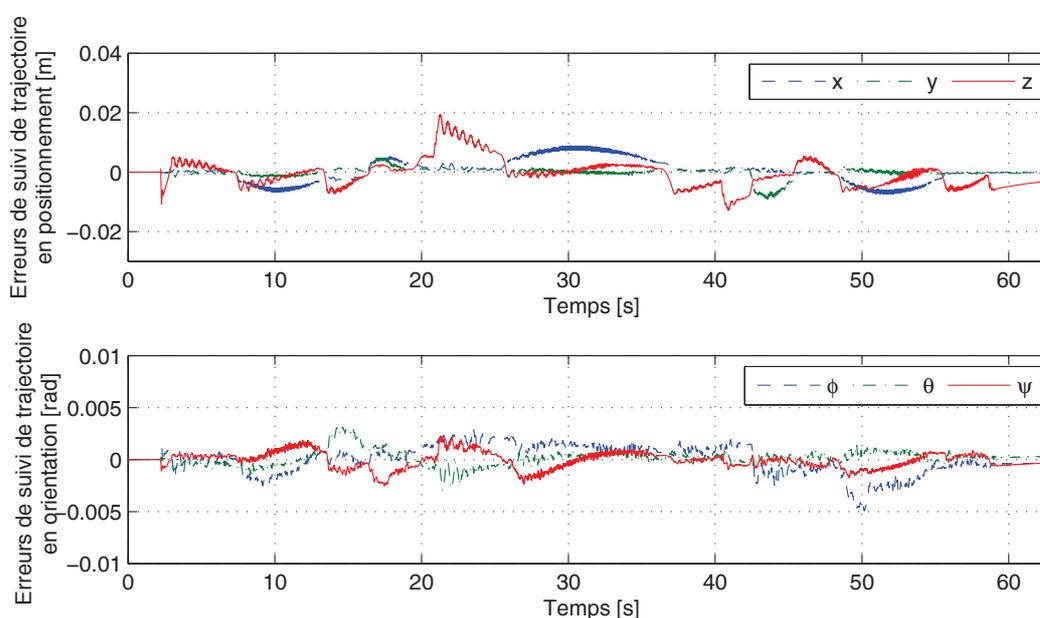


FIGURE 5.23 : Erreurs de suivi en position et en orientation de la plate-forme le long de  $\text{traj}_2$ , calculées en utilisant le schéma de commande adaptative.

fortement diminuées. L'EQMP est divisée par trente, passant de 20,24 mm à 0,66 mm, et l'EQMO est divisée par quatorze, passant de  $2,1e^{-3}$  rad à  $1,5e^{-4}$  rad.

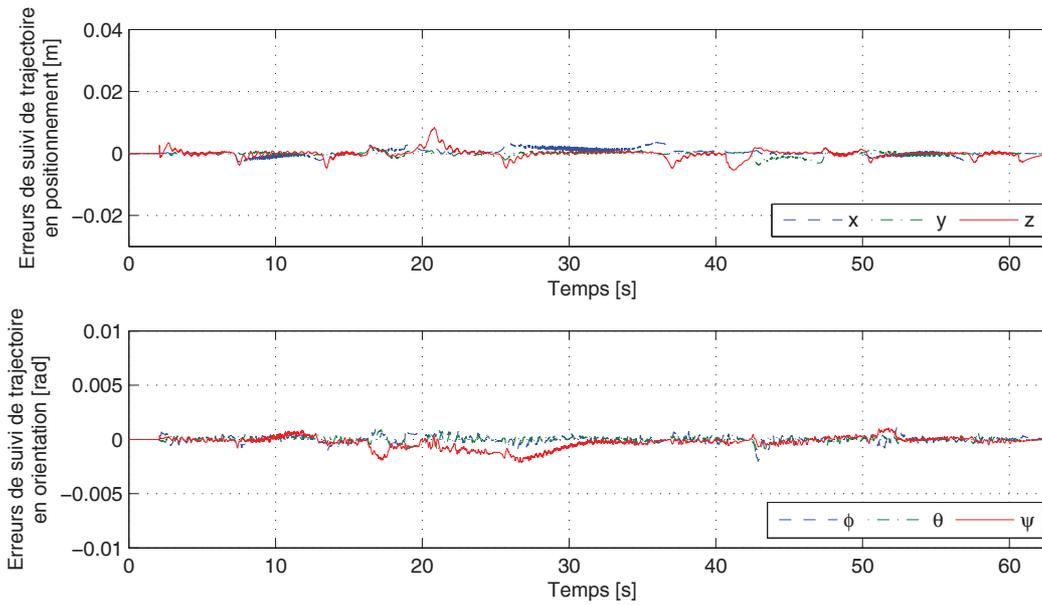
Les temps d'adaptation des paramètres du modèle dynamique sont satisfaisants pour cette application de pick-and-place. L'utilisateur peut cependant vouloir un temps d'adaptation plus court. Ce réglage dépend essentiellement des valeurs des gains d'adaptation et de la valeur de la constante  $\lambda_0$ . Les gains choisis dans ce premier réglage permettent d'avoir un comportement stable de la plate-forme dans tout son ETC. Il est en revanche possible de régler les gains d'adaptations de manière à obtenir de meilleures performances pour une application spécifique.

Un second réglage est donc proposé le long de  $\text{traj}_2$  avec déplacement d'une palette de 110 kg. Le tableau 5.12 récapitule les différences de réglage de la commande adaptative I, stable dans tout l'ETC, et la commande adaptative II, dont les gains sont optimisés pour cette application de pick-and-place. La figure 5.24 montre les erreurs en positions et en vitesses, calculées dans l'espace opérationnel à partir des erreurs articulaires. On observe très clairement une diminution importante de ces erreurs, grâce à une estimation plus réactive des paramètres du modèle dynamique.

Les EQM et ET en position et orientation, obtenues le long de  $\text{traj}_2$  avec les deux réglages du tableau 5.12, sont comparées au tableau 5.13. La variation de la masse engendrée par

|                         | Commande adaptative I                     | Commande adaptative II                    |
|-------------------------|---|---|
| $\text{diag}(\Gamma_q)$ | $\{0,5,\dots,0,5,1e^{-4},\dots,1e^{-4}\}$ | $\{0,5,\dots,0,5,1e^{-4},\dots,1e^{-4}\}$ |
| $\text{diag}(\Gamma_x)$ | $\{120,100,100,100,1e^3,\dots,1e^3\}$     | $\{300,250,250,250,1e^3,\dots,1e^3\}$     |
| $\lambda_{0_q}$         | 10  | 10  |
| $\lambda_{0_x}$         | 3   | 5   |

Tableau 5.12 : Différents réglages des paramètres de la commande adaptative.

FIGURE 5.24 : Erreurs de suivi en position et en orientation de la plate-forme le long de  $\text{traj}_2$ , calculées en utilisant le schéma de commande adaptative avec un réglage optimisé pour l'application.

la prise de la palette de 110 kg est calculée en 6,8 s avec le réglage I. Le réglage II réduit ce temps à 1,8 s. Cette augmentation de la vitesse d'adaptation permet de diviser l' $EQMP$  par 1,8 et l' $ETP$  par 2,3. De même, l'estimation de la position du centre de masse passe d'environ 8 s à 1 s. Il est ainsi possible de diviser l' $EQMO$  par 5,7 et les  $ETO$  en moyenne par 2.

Le second réglage, plus performant le long de  $\text{traj}_2$ , n'est cependant pas stable en haut de l'ETC. Il engendre des vibrations des câbles et de la plate-forme rendant la commande proche de l'instabilité, voire instable. En effet, en élevant la plate-forme dans son ETC, les

|                               | commande adaptative I | commande adaptative II |
|-------------------------------|-----------------------|------------------------|
| <i>EQMP</i>                   | 0,66 mm               | 0,37 mm                |
| <i>EQMO</i>                   | $1,5e^{-4}$ rad       | $0,26e^{-4}$ rad       |
| <i>ETP</i>                    | 19,3 mm               | 8,4 mm                 |
| <i>ETO<math>\phi</math></i>   | $4,9e^{-3}$ rad       | $2,0e^{-3}$ rad        |
| <i>ETO<math>\theta</math></i> | $3,1e^{-3}$ rad       | $1,2e^{-3}$ rad        |
| <i>ETO<math>\psi</math></i>   | $2,5e^{-5}$ rad       | $2,1e^{-5}$ rad        |

Tableau 5.13 : Erreurs quadratiques moyennes et exactitudes de pose de la plate-forme le long de  $\text{traj}_2$  avec un chargement de 110 kg entre  $t_1 = 19$  s et  $t_2 = 40$  s, avec les réglages I et II du tableau 5.12.

tensions des câbles augmentent rapidement. Or la fréquence propre  $f_n = 2\pi\omega_n$  de vibration d'un RPC peut se calculer en résolvant le problème aux valeurs propres

$$\det(\omega_n^2 \mathbb{1}_{6 \times 6} - \mathbf{M}'_{x_e q} \mathbf{K}) = 0 \quad (5.23)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur du RPC. En admettant un modèle d'élasticité des câbles, cette matrice s'exprime en fonction de la pose de la plate-forme, de la géométrie du RPC, et des tensions des câbles. En présence de fortes variations des tensions,  $f_n$  peut considérablement varier et la commande peut exciter cette fréquence. Une étude approfondie des vibrations d'un RPC est donc nécessaire afin de fournir une commande adaptative optimisée, stable dans tout l'ETC.

Afin d'illustrer l'influence des réglages des gains d'adaptation et de  $\lambda_0$  sur la vitesse d'estimation des paramètres du modèle dynamique, différents réglages ont été appliqués le long de  $\text{traj}_2$ . La figure 5.25 montre les résultats expérimentaux obtenus sur l'estimation de la masse,  $\hat{m}$ . La figure 5.26 fait de même avec l'estimation de la position du centre de gravité  $\hat{\alpha}$  le long de l'axe  $\mathbf{x}_p$  lié au repère de la plate-forme. Comme on peut le constater sur ces figures, l'augmentation des gains  $\gamma$  et de la constante  $\lambda_0$  accélère l'estimation des paramètres. En revanche, on observe l'apparition d'oscillations d'amplitudes de plus en plus importantes. La fréquence de ces oscillations est étroitement liée aux tensions des câbles, donc de la pose de la plate-forme et de sa masse.

Les figures 5.27 et 5.28 illustrent respectivement l'évolution des coefficients de frottement secs  $\hat{f}_{s_i}$  et visqueux  $\hat{f}_{v_i}$  calculés en ligne le long de  $\text{traj}_2$ .

Pour finir, comme discuté précédemment et dans ce scénario de type pick-and-place, l'estimation de certains paramètres est difficile à exciter. En configuration suspendue, il est difficile d'équilibrer des efforts dynamiques importants. Les accélérations maximales, tant en translation qu'en rotation, sont donc limitées. Plus particulièrement, les accélérations

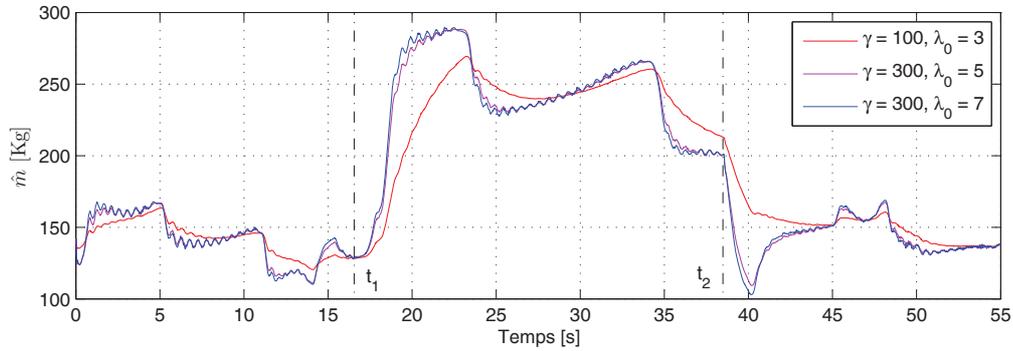


FIGURE 5.25 : Estimation de la masse de la plate-forme et de sa charge le long de  $\text{traj}_2$ , avec différents réglages de la commande adaptative.

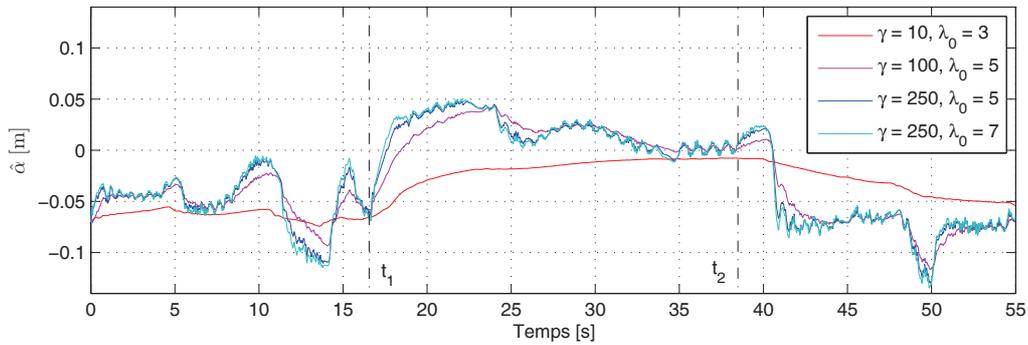
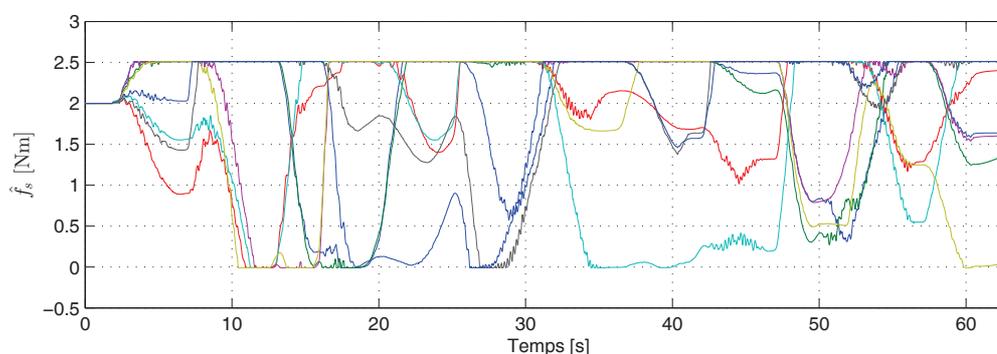
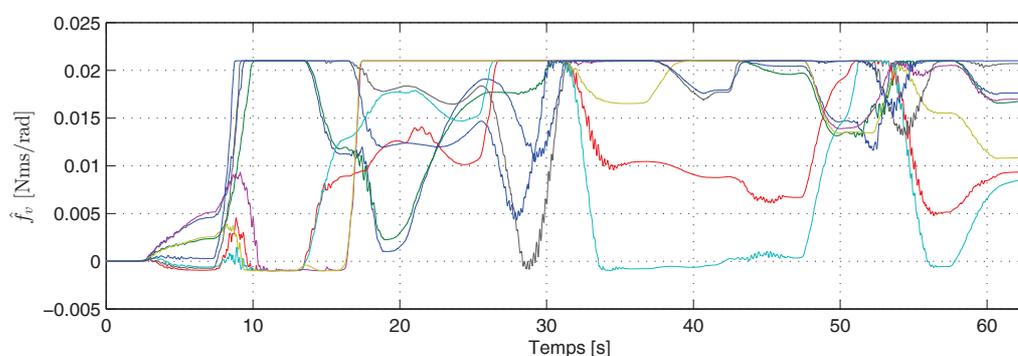


FIGURE 5.26 : Estimation de la position du centre de masse de la plate-forme et de sa charge le long de l'axe  $x_p$ , avec différents réglages de la commande adaptative.

tions en rotation sont très faibles. Il est donc difficile d'estimer les paramètres d'inertie, qui n'évoluent pratiquement pas et n'ont pas le temps de converger. De plus, le calcul de la position du centre de gravité le long de l'axe vertical  $z$  ne dépend que des moments générés par le poids de la plate-forme lors de rotations autour de l'axe  $x$ , de l'axe  $y$  ou d'une rotation combinée autour de ces deux axes. Or dans le scénario de pick-and-place considéré, aucune de ces rotations n'est commandée. La fourche du lève-palette est gardée à l'horizontal pour éviter de perdre la palette au cours de l'application. Il est donc impossible d'estimer correctement la position du centre de gravité le long de l'axe  $z$ . Par conséquent, la pertinence de l'estimation des différents paramètres de la dynamique proposée à la section 2.5 doit être étudiée au cas par cas, en fonction de la configuration du RPC et de son application.

FIGURE 5.27 : Estimation des coefficients des frottements secs le long de traj<sub>2</sub>.FIGURE 5.28 : Estimation des coefficients des frottements visqueux le long de traj<sub>2</sub>.

## 5.4 Conclusion

Ce chapitre a montré expérimentalement que les performances de la commande PID classique sont limitées et que son utilisation n'est pas adaptée aux RPC. Sans compensation des efforts impliqués dans la dynamique de la plate-forme, de son éventuelle charge et des enrouleurs, les exactitudes de positionnement et de suivi de trajectoires sont faibles (de l'ordre de quelques centimètres). La commande PID classique semble en revanche profiter de l'augmentation de la charge pour obtenir de bonnes performances de répétabilité.

Les résultats présentés dans ce chapitre illustrent les gains de performances apportés par la commande par anticipation en espace double. En particulier, les exactitudes de positionnement et de suivi de trajectoires sont améliorées. Cette commande perd de son intérêt en présence d'incertitudes sur l'identification des paramètres de la dynamique et aussi et surtout lors de variations de ces paramètres au cours de la tâche. Les mesures ont montré que, lorsque la plate-forme prend une charge importante, les termes d'anticipation ne permettent pas de suivre avec précision la trajectoire désirée.

Enfin, l'implémentation expérimentale des lois d'adaptation, proposées pour estimer

les paramètres ajustables du modèle dynamique d'un RPC, a démontré l'intérêt de la commande adaptative. Les erreurs de suivi de trajectoires sont fortement diminuées et les exactitudes de positionnement et d'orientation améliorées. Les résultats de ce chapitre ont également montré que la répétabilité de la plate-forme à vide, commandée avec les lois d'adaptation, atteint des valeurs submillimétriques dans le cas du démonstrateur du projet COGiRO. Ce résultat est encourageant pour les travaux futurs sur les RPC. Seule la répétabilité de la plate-forme chargée est dégradée par l'utilisation de la commande adaptative. Certains paramètres sont difficiles à ajuster le long de la trajectoire choisie ici. Afin d'être plus performant dans cette application, ces paramètres devraient être supposés invariants pour éviter de mauvaises estimations.



## CONCLUSION GÉNÉRALE

La redondance d'actionnement présente plusieurs intérêts dans le cas des robots parallèles à câbles. Tout d'abord, elle permet de maximiser le ratio entre le volume de l'espace de travail commandable du robot et le volume total occupé par le robot et sa structure de soutien. Principal atout de la robotique parallèle à câbles, la taille de l'espace de travail commandable du robot est optimisé dans de nombreux projets en utilisant deux câbles de plus que de degrés de liberté de la plate-forme. En outre, la redondance d'actionnement permet d'éviter ou d'éliminer les singularités dues à une chute du rang de la matrice des torseurs. Enfin, elle permet de choisir une solution optimale parmi les solutions du problème de la distribution des tensions dans les câbles.

L'utilisation de câbles, éléments flexibles en lieu et place de membres rigides, rend cependant la gestion de la redondance plus délicate que pour les robots parallèles classiques. Si la commande demande à un câble de pousser sur la plate-forme, ce qui est physiquement impossible, le système ne peut normalement pas amener la plate-forme à la pose commandée. Afin d'éviter que la commande ne demande aux câbles de pousser la plate-forme, et ainsi améliorer les performances de suivi de trajectoires d'un robot parallèle à câbles, un algorithme de distribution des tensions des câbles a été proposé.

La première contribution de cette thèse est d'introduire un algorithme, TurnAround, qui détermine dans l'ordre les sommets du polygone des tensions admissibles, solutions du problème de la distribution des tensions. Pour un robot parallèle à câbles donné, la géométrie de ce polygone dépend de la pose de la plate-forme, du torseur d'efforts à appliquer avec les câbles sur celle-ci pour atteindre cette pose, ainsi que des bornes  $t_{\min}$  et

$t_{\max}$ . TurnAround utilise des propriétés géométriques et des calculs simples pour trouver les sommets du polygone de manière efficace, en un temps de calcul faible et prévisible.

La seconde contribution de cette thèse est de proposer des méthodes de calcul compatibles avec un environnement logiciel et matériel temps-réel permettant de trouver une distribution des tensions optimale le long d'une trajectoire contenue dans l'espace de travail commandable d'un robot parallèle à câbles. La connaissance ordonnée des sommets du polygone des tensions admissibles permet notamment de retrouver efficacement les solutions minimisant les normes 1 et 2 des tensions, sans utiliser d'algorithme d'optimisation numérique. Une méthode de calcul du barycentre utilisant uniquement les coordonnées des sommets du polygone a été proposée pour déterminer très rapidement une solution optimale aussi éloignée que possible des arrêtes du polygone. Enfin, une méthode de calcul du barycentre pondéré est décrite.

TurnAround, ainsi que les différentes solutions optimales de distribution des tensions décrites dans cette thèse, ont été implémentés dans trois environnements temps-réels différents. L'algorithme ne nécessitant aucune librairie de calcul particulière, il est pleinement compatible avec l'ensemble de ces environnements. En outre, des résultats expérimentaux obtenus sur deux prototypes, le démonstrateur du projet COGIRO et CABLAR, ont montré que les temps de calcul moyens mesurés sont très inférieurs à la période d'échantillonnage des prototypes. L'algorithme distribue les tensions de manière continue le long d'une trajectoire continue située dans l'espace de travail commandable du robot parallèle à câbles. Les preuves de continuité ont par ailleurs été données.

L'implémentation de l'algorithme de distribution des tensions proposée dans un schéma de commande n'est pas triviale. Un schéma de commande PID classique a été considéré dans un premier temps. Expérimentalement, certaines composantes du torseur d'efforts que les câbles doivent appliquer sur la plate-forme, calculées après correction de l'erreur de suivi de trajectoires, peuvent prendre des valeurs irréalisables lorsque ces erreurs sont trop grandes. Aucune solution au problème de distribution des tensions n'est alors admissible. La troisième contribution de cette thèse est de proposer des schémas de commande plus sophistiqués, basés modèles, adaptés aux robots parallèles à câbles. Afin de réduire l'amplitude des erreurs de suivi de trajectoires, une commande par anticipation en espace double a été proposée pour compenser d'une part les efforts associés à la dynamique de la plate-forme et de son éventuelle charge, et d'autre part les efforts associés à la dynamique des enrouleurs. Ces modèles ont été formulés de manière générale, en considérant que le centre de masse de la plate-forme était dissocié de son centre de référence, pour compenser les moments associés à son poids. Des résultats expérimentaux obtenus

avec le démonstrateur du projet COGiRO, impliquant le déplacement d'une charge, ont montré que cette commande était plus performante que la commande PID classique.

Finalement, afin de compenser les incertitudes et les variations des paramètres des modèles dynamiques utilisés, une commande adaptative en espace double a finalement été proposée dans cette thèse. La loi de commande utilisée permet d'estimer la masse de la plate-forme et de sa charge, la position de son centre de gravité par rapport à son centre de référence, ses produits et moments d'inertie, les coefficients de frottement secs et visqueux ainsi que l'inertie des enrouleurs. L'ajustement en ligne de ces paramètres permet de diminuer considérablement les erreurs de suivi de trajectoires. Cette commande, intégrant l'algorithme de distribution des tensions des câbles, a également été implémentée dans le démonstrateur du projet COGiRO. Des résultats expérimentaux ont montré son efficacité, sa compatibilité avec une utilisation temps-réel ainsi que sa stabilité le long de la trajectoire désirée.

## Perspectives

Les résultats de cette thèse contribuant à la commande des robots parallèles à câbles à redondance d'actionnement suggèrent plusieurs pistes pour les travaux futurs. Certaines de ces pistes sont d'ailleurs en cours d'investigation et d'autres résultats viendront certainement compléter la version finale de cette thèse.

L'algorithme de distribution des tensions proposé est conçu pour améliorer la commandabilité des robots à deux degrés de redondance. Il serait intéressant d'adapter TurnAround aux polyèdres (dimension trois) des solutions au problème de la distribution des tensions des robots parallèles à câbles à trois degrés de redondance pour étudier sa compatibilité avec des calculs en temps réels.

Tel que montré par les résultats de mesures d'exactitude de positionnement, une erreur récurrente le long de l'axe vertical diminue les performances du robot parallèle à câbles du démonstrateur du projet COGiRO. Cette erreur est principalement due à l'élasticité des câbles, qui n'est pas compensée dans les lois de commande présentées dans cette thèse. Un modèle fin et compatible temps-réel d'élongation et de déformation du câble, de masse non négligeable, est actuellement développé au LIRMM et semble prometteur. L'intégration de ce modèle dans la commande adaptative devrait permettre d'améliorer encore les performances globales du robot parallèle à câbles. Il serait également intéressant d'utiliser le réseau de caméras dont le démonstrateur du projet COGiRO est équipé pour effectuer des mesures extéroceptives de suivi de trajectoires de la plate-forme.

En plus de l'élongation du câble, il conviendrait de mieux modéliser les relations entre

les longueurs déroulées de câble par les tambours et les coordonnées angulaires des actionneurs. Plusieurs paramètres doivent être pris en compte, comme les positions des points de sortie des câbles sur les tambours et sur les poulies de renvoi, ou encore les tensions des câbles enroulés pour estimer les élongations contenues dans les enrouleurs.

Afin d'améliorer les performances de la commande, une analyse des modes vibratoires du démonstrateur du projet COGIRO devrait être menée. Une estimation en ligne de ses fréquences propres, fonction de la géométrie du RPC, de la pose de la plate-forme et des tensions des câbles, nous permettrait d'éviter ces fréquences lors de la génération de trajectoires et d'améliorer les temps de stabilisation de pose. En outre, il serait possible d'appliquer un réglage plus réactif de la commande adaptative, stable dans tout l'ETC, en adaptant les gains de la commande en conséquence.

Enfin, il serait intéressant d'appliquer des méthodes de commande plus robustes et potentiellement plus performantes, telles que la commande prédictive ou la commande adaptative  $\mathcal{L}_1$ . Le formalisme de la commande adaptative  $\mathcal{L}_1$  découple le mécanisme d'adaptation et la robustesse, ce qui autorise l'utilisation de gains d'adaptation très élevés. L'implémentation d'une telle commande réduirait considérablement les temps d'adaptation des paramètres ajustables du système, sans déstabiliser le système.

# PUBLICATIONS

## Journal

Johann Lamaury, Marc Gouttefarde, Christopher Reichert, Tobias Bruckmann. *Efficient Implementations of Tension Distributions for Cable-Driven Parallel Robots*. IEEE Transactions on Robotics. Soumis en Mai 2013.

## Conférences

1. Johann Lamaury, Marc Gouttefarde, Ahmed Chemori, Pierre-Élie Hervé. *Dual-Space Adaptive Control of Redundantly Actuated Cable-Driven Parallel Robots*. In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Tokyo, Japan, 2013. En cours de publication.
2. Johann Lamaury, Marc Gouttefarde. *Control of a Large Redundantly Actuated Cable-Suspended Parallel Robot*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 4644-4649, Karlsruhe, Allemagne, 2013.
3. Johann Lamaury, Marc Gouttefarde. *A Tension Distribution Method with Improved Computational Efficiency*. First International Conference on Cable-Driven Parallel Robots, T. Bruckmann et A. Pott, éditeurs, pages 71-85, Stuttgart, Allemagne, 2012.
4. Johann Lamaury, Marc Gouttefarde, Micaël Michelin, Olivier Tempier, "Design and Control Strategies of a Redundant Suspended Cable-Driven Parallel Robot". Advances on Robot Kinematics, J. Lenarčič et M. Husty, éditeurs, pages 237-244, Innsbruck, Autriche, 2012.
5. Jean-François Collard, Johann Lamaury, Marc Gouttefarde. *Dynamics Modelling of Large Suspended Parallel Cable-Driven Robots*. In European Congress on Computational methods in Applied Sciences and Engineering Thematic conference, Bruxelles, Belgique, 2011.





## DONNÉES TECHNIQUES DES BANCS D'ESSAI

Trois prototypes ont pu être utilisés afin de valider les stratégies et algorithmes de commande proposés dans cette thèse :

- REELAX8, développé au LIRMM en collaboration avec TECNALIA, décliné en deux configurations :
  - REELAX8-S en configuration suspendue ;
  - REELAX8-PC en configuration pleinement contrainte ;
- Le démonstrateur suspendu du projet ANR COGiRO développé au LIRMM en collaboration avec TECNALIA et avec le support financier de l'ANR (grant 2009 SEGI 018 01) ;
- le prototype pleinement contraint CABLAR, grâce à une collaboration avec Dr.-Ing. Tobias Bruckmann et M.Sc. Christopher Reichert de l'Université de Duisburg-Essen en Allemagne.

Cette annexe répertorie quelques informations techniques sur ces robots, nécessaires à la mise en œuvre des travaux présentés dans cette thèse. Les données géométriques sont données en mètres.

### A.1 REELAX8

REELAX8 est un RPC équipé de huit câbles pour six DDL. Les dimensions de sa structure sont  $4\text{ m} \times 3\text{ m} \times 3\text{ m}$  ( $L \times l \times h$ ). Le robot est constitué de quatre poteaux, comme montrés à la figure A.1, comportant chacun deux points de sortie de câbles. Les points de sortie des câbles, de coordonnées invariantes, sont des œillets fixes, dont une photographie est donnée à la figure A.2. Ces derniers sont montés serrés sur les poteaux et leur position est déterminée à l'aide du laser de poursuite. Le montage est modulable et permet de changer la configuration du robot. La configuration suspendue est montrée à la figure A.1 et schématisée à la figure A.4. La configuration pleinement contrainte est schématisée à la figure A.5. Les câbles issus des œillets sont attachés au moyen de liaisons sphériques à la

plate-forme, un cube de 40 cm de côté composé de barres d'aluminium. La masse de la plate-forme à vide est de 6,34 kg.



FIGURE A.1 : Photographie de REELAX8 en configuration suspendue.

Les enrouleurs, dont un exemplaire est montré à la figure A.3, sont fixés au sol. Ils sont composés de moteurs électriques sans réducteur ETEL™ TMB0140-070-3RBS qui entraînent les tambours en rotation et en translation au moyen de vis à billes. Chaque chemin de câble reliant un enrouleur au point de sortie du câble correspondant est constitué de deux poulies de renvoi, une située au sol, et une au niveau de l'œillet.

Chaque paire de moteurs est reliée à un variateur ETEL™ Accuret™, lui-même connecté à un PC cible équipé d'un noyau temps-réel xPC Target™. Rappelons que l'architecture matérielle est illustrée à la figure 5.1.

Les données géométriques des configurations suspendue et pleinement contrainte de REELAX8 sont données aux tableaux A.1 et A.2.

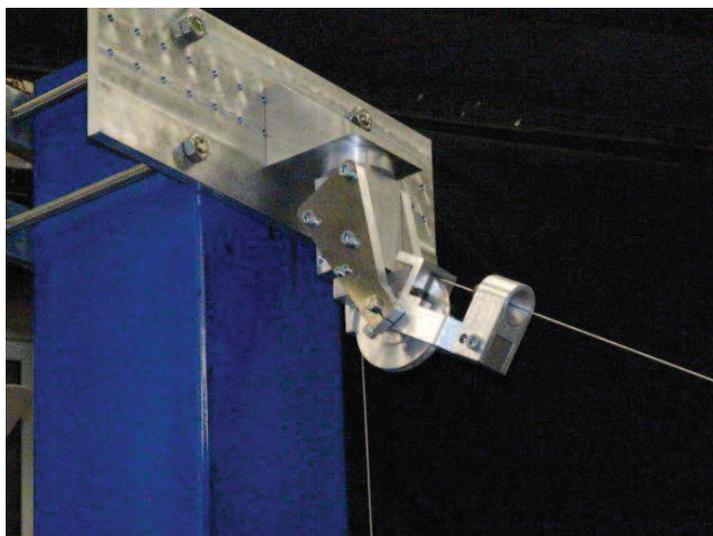


FIGURE A.2 : Photographie d'un œillet de REELAX8.



FIGURE A.3 : Photographie d'un enrouleur de REELAX8.

### A.1.1 Configuration suspendue

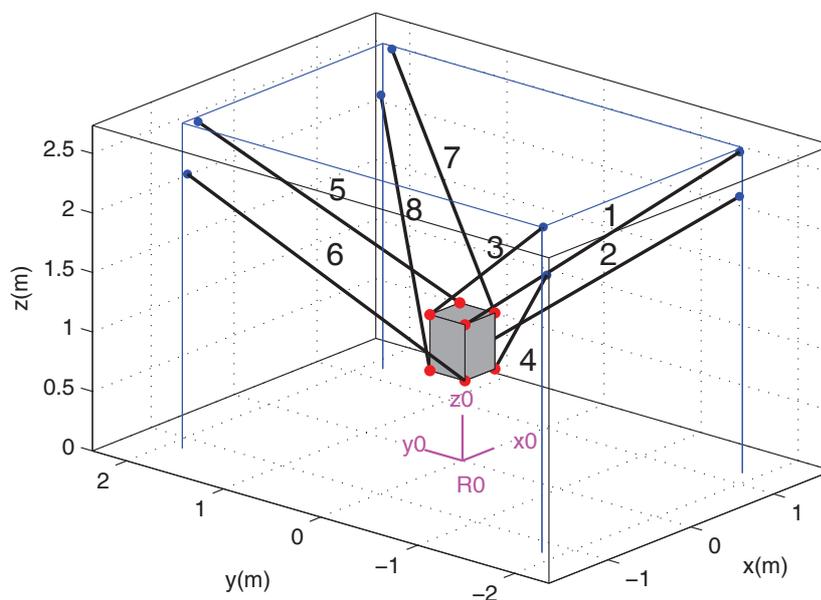


FIGURE A.4 : Vue schématique de REELAX8 en configuration suspendue.

| REELAX8-S                            |   |         |         |         |         |         |         |        |        |
|--------------------------------------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|
|                                      |   | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7      | 8      |
| Points de sortie de la base du robot |   |         |         |         |         |         |         |        |        |
| <b>A</b>                             | x | 1,1556  | 1,2087  | -1,1293 | -1,1522 | -1,1044 | -1,2095 | 1,1939 | 1,1657 |
|                                      | y | -1,8698 | -1,8233 | -1,7970 | -1,8548 | 1,7803  | 1,7991  | 1,7459 | 1,8339 |
|                                      | z | 2,7185  | 2,3185  | 2,7019  | 2,3185  | 2,7353  | 2,3185  | 2,7178 | 2,3185 |
| Points d'attache de la plateforme    |   |         |         |         |         |         |         |        |        |
| <b>B</b>                             | x | -0,180  | 0,180   | -0,180  | 0,180   | 0,180   | -0,180  | 0,180  | -0,180 |
|                                      | y | -0,180  | 0,180   | 0,180   | -0,180  | 0,180   | -0,180  | -0,180 | 0,180  |
|                                      | z | 0,235   | -0,235  | 0,235   | -0,235  | 0,235   | -0,235  | 0,235  | -0,235 |

Tableau A.1 : Coordonnées des points de sortie et des points d'attache de REELAX8 en configuration suspendue.

### A.1.2 Configuration pleinement contrainte

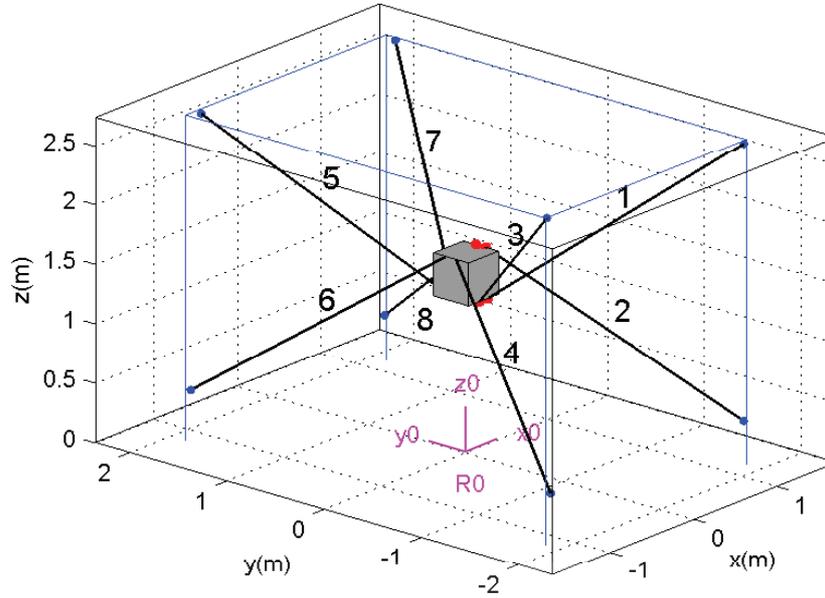


FIGURE A.5 : Vue schématique de REELAX8 en configuration pleinement contrainte.

| REELAX8-PC                           |   |         |         |         |         |         |         |        |        |
|--------------------------------------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|
|                                      |   | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7      | 8      |
| Points de sortie de la base du robot |   |         |         |         |         |         |         |        |        |
| <b>A</b>                             | x | 1,1556  | 1,2087  | -1,1293 | -1,1522 | -1,1044 | -1,2095 | 1,1939 | 1,1657 |
|                                      | y | -1,8698 | -1,8233 | -1,7970 | -1,8548 | 1,7803  | 1,7991  | 1,7459 | 1,8339 |
|                                      | z | 2,7185  | 0,3575  | 2,7019  | 0,4159  | 2,7353  | 0,4290  | 2,7178 | 0,3933 |
| Points d'attache de la plateforme    |   |         |         |         |         |         |         |        |        |
| <b>B</b>                             | x | -0,180  | 0,180   | -0,180  | 0,180   | 0,180   | -0,180  | 0,180  | -0,180 |
|                                      | y | -0,180  | 0,180   | 0,180   | -0,180  | 0,180   | -0,180  | -0,180 | 0,180  |
|                                      | z | 0,235   | -0,235  | 0,235   | -0,235  | 0,235   | -0,235  | 0,235  | -0,235 |

Tableau A.2 : Coordonnées des points de sortie et des points d'attache de REELAX8 en configuration pleinement contrainte.

## A.2 CoGiRo

Le démonstrateur du projet ANR CoGiRo est un RPC suspendu équipé de huit câbles pour six DDL. Les dimensions de sa structure sont  $15\text{ m} \times 11\text{ m} \times 6\text{ m}$  ( $L \times l \times h$ ). Le robot est composé de quatre poteaux, constituant une structure en poutres d'aluminium triangulaires, comme montré par la figure A.6. La photographie montre la plate-forme en aluminium de 43 kg. La figure A.7a montre la version acier de la plate-forme, pesant 92 kg, alors équipée d'un lève-palette de 50 kg pour une masse totale de 142 kg.

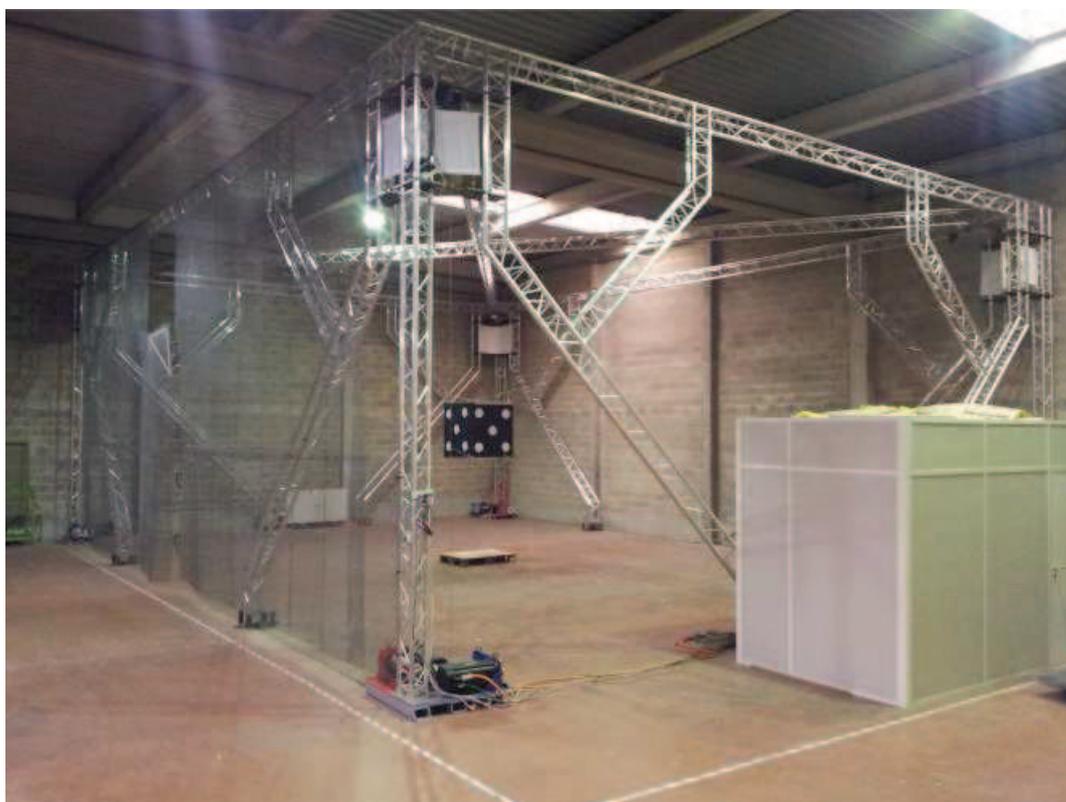
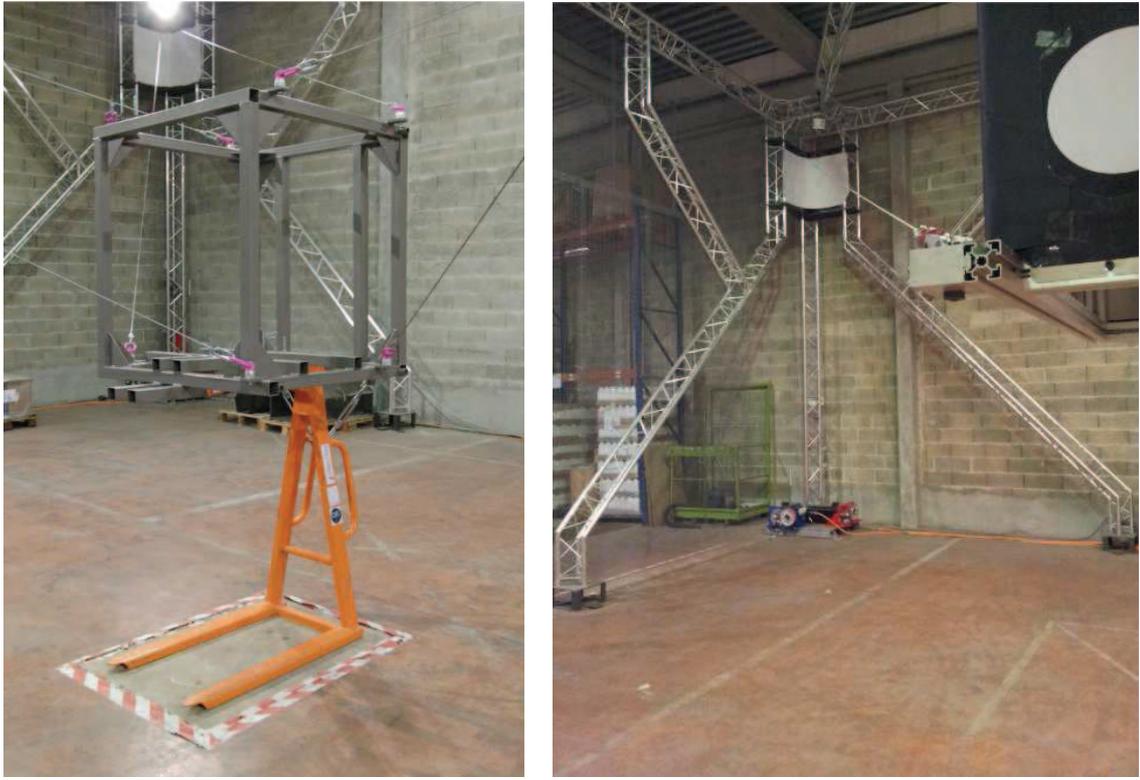


FIGURE A.6 : Photographie du démonstrateur du projet ANR CoGiRo.

Comme pour REELAX8, les enrouleurs sont fixés au sol. Les tambours sont actionnés par des moteurs asynchrones B&R® 8LS au travers d'une transmission de type poulies-courroie, comme montré à la figure A.8. Les moteurs sont pilotés par des variateurs B&R® ACOPOSmulti, connectés à un PC industriel temps-réel. Rappelons que l'architecture matérielle du démonstrateur est illustrée à la figure 5.2.

Chaque chemin de câble reliant un enrouleur au point de sortie du câble correspondant est constitué d'une poulie de renvoi située au niveau de l'œillet. Les câbles issus des œillets sont ensuite attachés à la plate-forme à l'aide de liaisons supposées sphériques. Un chemin de câble, de l'enrouleur au point d'attache, est montré par la figure A.7b. En-



(a) Photographie de la plate-forme en acier équipée du lève-palette.

(b) Chemin d'un câble de l'enrouleur à la plate-forme.

FIGURE A.7 : Plate-forme acier et chemin de câble du démonstrateur du projet COGIRO.

fin, l'arrangement des câbles est illustré par la figure A.9, pour lequel les coordonnées des points de sortie et d'attache des câbles sont donnés au tableau A.3.

| COGIRO                               |   |         |         |         |         |         |         |        |         |
|--------------------------------------|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
|                                      |   | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7      | 8       |
| Points de sortie de la base du robot |   |         |         |         |         |         |         |        |         |
| <b>A</b>                             | x | -7,1826 | -7,3203 | -7,2885 | -7,1492 | 7,1690  | 7,3047  | 7,2692 | 7,1310  |
|                                      | y | -5,3265 | -5,1881 | 5,1266  | 5,2623  | 5,175   | 5,0751  | -5,24  | -5,3749 |
|                                      | z | 5,2893  | 5,2994  | 5,3383  | 5,3489  | 5,3451  | 5,3536  | 5,3102 | 5,3177  |
| Points d'attache de la plateforme    |   |         |         |         |         |         |         |        |         |
| <b>B</b>                             | x | 0,5073  | -0,4847 | -0,4927 | 0,5073  | -0,4927 | 0,4993  | 0,5073 | -0,4927 |
|                                      | y | -0,4949 | 0,3803  | -0,2610 | 0,3653  | 0,5049  | -0,3316 | 0,2709 | -0,3166 |
|                                      | z | 0,0346  | 1,0179  | 0,0301  | 1,0182  | 0,0153  | 1,0316  | 0,0198 | 1,0313  |

Tableau A.3 : Coordonnées des points de sortie et des points d'attache de COGIRO.



FIGURE A.8 : Deux enrouleurs au pied d'un poteau du démonstrateur du projet ANR CO-GIRO.

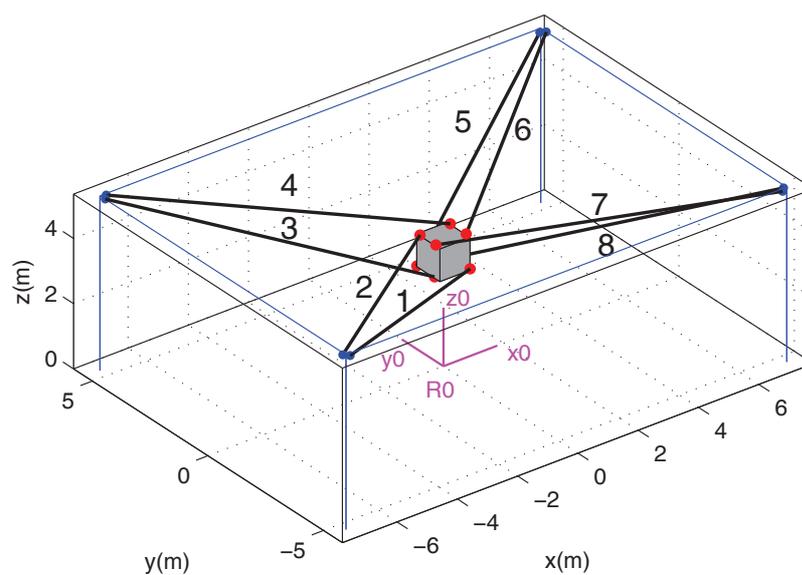


FIGURE A.9 : Vue schématique du démonstrateur du projet COGIRO.

### A.3 CABLAR

CABLAR est un RPC pleinement contraint équipé de huit câbles pour six DDL. Ses spécifications techniques sont disponibles dans [Bruckmann 13]. Le système de communication du robot passe par un bus de terrain EtherCAT<sup>®</sup> connecté à un PC industriel équipé de l'environnement de contrôle temps-réel Beckhoff TwinCAT3<sup>®</sup>. L'arrangement des câbles du prototype est illustré à la figure A.10 et les coordonnées des points de sortie et d'attache du robot sont données au tableau A.4.

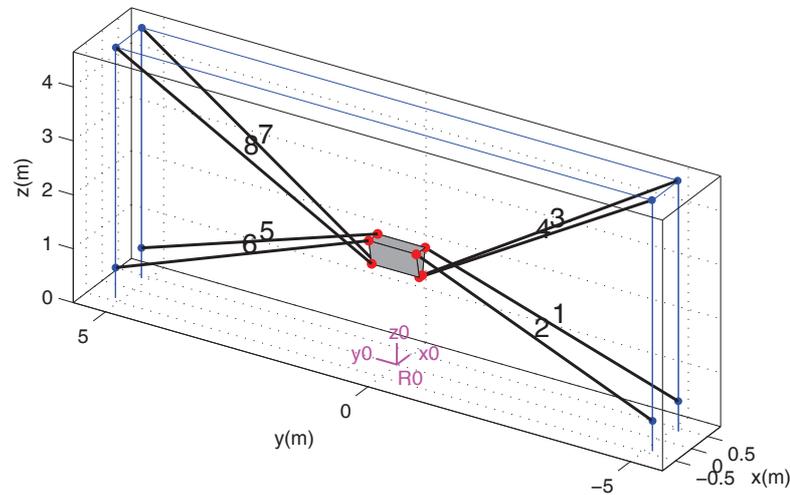


FIGURE A.10 : Vue schématique de CABLAR.

| CABLAR                               |   |         |         |         |         |        |         |         |         |
|--------------------------------------|---|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|
|                                      |   | 1       | 2       | 3       | 4       | 5      | 6       | 7       | 8       |
| Points de sortie de la base du robot |   |         |         |         |         |        |         |         |         |
| <b>A</b>                             | x | 0,4     | -0,4    | 0,4     | -0,4    | 0,4    | -0,4    | 0,4     | -0,4    |
|                                      | y | -5,1155 | -5,1155 | -5,1038 | -5,1038 | 5,1155 | 5,1155  | 5,1038  | 5,1038  |
|                                      | z | 0,5595  | 0,5595  | 4,6492  | 4,6492  | 0,5595 | 0,5595  | 4,6492  | 4,6492  |
| Points d'attache de la plateforme    |   |         |         |         |         |        |         |         |         |
| <b>B</b>                             | x | 0,1370  | -0,1370 | 0,0450  | -0,0450 | 0,1370 | -0,1370 | 0,050   | -0,0450 |
|                                      | y | -0,4530 | -0,4530 | -0,4530 | -0,4530 | 0,4530 | 0,4530  | 0,4530  | 0,4530  |
|                                      | z | 0,2350  | 0,2350  | -0,2350 | -0,2350 | 0,2350 | 0,2350  | -0,2350 | -0,2350 |

Tableau A.4 : Coordonnées des points de sortie et des points d'attache de CABLAR.



# COMPLÉMENTS À LA MODÉLISATION DES ROBOTS PARALLÈLES À CÂBLES

*Cette annexe complète le chapitre 2. La section B.1 précise la convention des angles d'Euler choisie pour modéliser l'orientation de la base du repère de la plate-forme par rapport à la base du repère  $\mathcal{R}_b$  du robot et donne les détails du calcul de la matrice de rotation correspondante. La section B.2 exprime les vitesses et accélérations angulaires de la plate-forme à partir de la convention des angles d'Euler proposée. Enfin la section B.3 démontre la relation  $\dot{\mathbf{K}}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K}\boldsymbol{\omega}$ .*

## B.1 Convention X-Y-Z des angles d'Euler

Définissons la matrice de rotation orthogonale  $\mathbf{Q}$ , telle que  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbb{I}$  et  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ ,  $\mathbb{I}$  étant la matrice identité. Afin de représenter l'orientation du repère  $\mathcal{R}_p$  attaché à la plate-forme par rapport au repère fixe  $\mathcal{R}_b$ , on choisit la convention X – Y – Z des angles d'Euler. Cette convention permet de générer une orientation intuitive, les trois angles représentant les rotations autour des trois axes de référence de la plate-forme.

La convention des angles d'Euler choisie dans l'ensemble de ces travaux est entièrement décrite ici. La description retenue des angles d'Euler consiste en trois rotations élémentaires successives d'angles respectifs  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  (voir figure B.1) dans l'ordre suivant :

- une première rotation autour de l'axe  $\mathbf{x}$  d'un angle  $\phi$ , fait passer du repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  au repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$

- une seconde rotation autour de l'axe  $\mathbf{u}$  d'un angle  $\theta$ , fait passer du repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  au repère  $(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{z}')$
- une troisième rotation autour de l'axe  $\mathbf{z}'$  d'un angle  $\psi$ , amène finalement le repère  $(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{z}')$  sur le repère  $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$

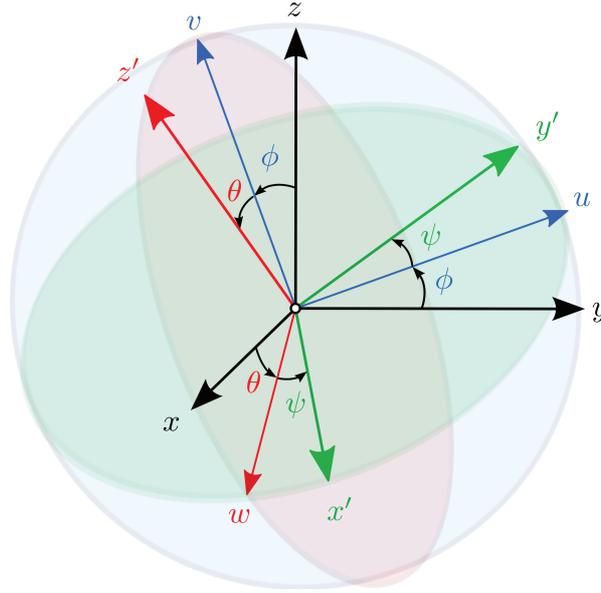


FIGURE B.1 : Représentation des rotations successives de la convention d'Euler X – Y – Z.

On peut finalement calculer  $\mathbf{Q}$  telle que, sous forme matricielle,  $\mathbf{Q}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{Q}_x(\phi)\mathbf{Q}_y(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi)$ , soit

$$\mathbf{Q}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_y(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{Q}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & -c_\theta s_\psi & s_\theta \\ c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi & c_\phi c_\psi - s_\phi s_\theta s_\psi & -s_\phi c_\theta \\ s_\phi s_\psi - c_\phi s_\theta c_\psi & s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

## B.2 Vitesses et accélérations angulaires

Il est possible d'exprimer les vitesses et accélérations angulaires de la plate-forme à partir des angles d'Euler introduits dans la section 2.1. Notons  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  la vitesse angulaire de la plate-forme exprimée dans  $\mathbb{R}_b$ . D'après la convention des angles d'Euler choisie, trois vitesses angulaires se succèdent :

- $d\phi/dt$  autour de l'axe  $\mathbf{x}$ ;
- $d\theta/dt$  autour de l'axe  $\mathbf{u}$ , avec  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & c_\phi & s_\phi \end{bmatrix}^T$  exprimé dans  $\mathfrak{R}_b$
- $d\psi/dt$  autour de l'axe  $\mathbf{z}'$ , avec  $\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} s_\theta & -s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}^T$  exprimé dans  $\mathfrak{R}_b$

On peut donc écrire

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ c_\phi \\ s_\phi \end{bmatrix} + \dot{\psi} \begin{bmatrix} s_\theta \\ -s_\phi c_\theta \\ c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} + \dot{\psi} s_\theta \\ \dot{\theta} c_\phi - \dot{\psi} s_\phi c_\theta \\ \dot{\theta} s_\phi + \dot{\psi} c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Cette expression peut être mise sous forme matricielle telle que

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi c_\theta \\ 0 & s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{o}} \quad (\text{B.5})$$

Par dérivation, on obtient directement les accélérations angulaires

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{o}} + \mathbf{S}\ddot{\mathbf{o}} \quad (\text{B.6})$$

avec

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} c_\theta \\ 0 & -\dot{\phi} s_\phi & -\dot{\phi} c_\phi c_\theta + \dot{\theta} s_\phi s_\theta \\ 0 & \dot{\phi} c_\phi & -\dot{\phi} s_\phi c_\theta - \dot{\theta} c_\phi s_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Soit

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} c_\theta \\ 0 & -\dot{\phi} s_\phi & -\dot{\phi} c_\phi c_\theta + \dot{\theta} s_\phi s_\theta \\ 0 & \dot{\phi} c_\phi & -\dot{\phi} s_\phi c_\theta - \dot{\theta} c_\phi s_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi c_\theta \\ 0 & s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

et finalement

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} + \ddot{\psi} s_\theta - \dot{\theta} \dot{\psi} c_\theta \\ \ddot{\theta} c_\phi - \ddot{\psi} s_\phi c_\theta - \dot{\phi} \dot{\theta} s_\phi + \dot{\psi} (-\dot{\phi} c_\phi c_\theta + \dot{\theta} s_\phi s_\theta) \\ \ddot{\theta} s_\phi + \ddot{\psi} c_\phi c_\theta + \dot{\phi} \dot{\theta} c_\phi - \dot{\psi} (\dot{\phi} s_\phi c_\theta + \dot{\theta} c_\phi s_\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Le calcul de  $\mathbf{S}$  permet d'écrire la relation entre le vecteur  $\dot{\mathbf{x}}_\theta$  contenant les dérivées des angles d'Euler et  $\dot{\mathbf{x}}$  qui contient les vitesses angulaires de la plate-forme, tel que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}' \dot{\mathbf{x}}_\theta \quad (\text{B.10})$$

avec  $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}, \ \omega_x, \ \omega_y, \ \omega_z]^T$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_\theta = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}, \ \dot{\phi}, \ \dot{\theta}, \ \dot{\psi}]^T$  et

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

### B.3 Démonstration de la relation $\dot{\mathbf{K}}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K}\boldsymbol{\omega}$

Démontrons ici la relation  $\dot{\mathbf{K}}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K}\boldsymbol{\omega}$ .

*Démonstration.* Rappelons que la matrice d'inertie  $\mathbf{K}$  de la plate-forme exprimée dans la base du repère  $\mathcal{R}_b$  au centre de masse  $M$  s'exprime  $\mathbf{K} = \mathbf{Q}\mathbf{I}_p\mathbf{Q}^T$ ,  $\mathbf{I}_p$  étant la matrice d'inertie de la plate-forme exprimée dans  $\mathcal{R}_p$  et  $\mathbf{Q}$  étant la matrice de rotation de la base du repère  $\mathcal{R}_p$  par rapport à la base du repère  $\mathcal{R}_b$ .

Dérivons  $\mathbf{K}$

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{d\mathbf{Q}\mathbf{I}_p\mathbf{Q}^T}{dt} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{I}_p\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{I}_p\dot{\mathbf{Q}}^T \quad (\text{B.12})$$

Posons ensuite  $[\boldsymbol{\omega}]$  la matrice antisymétrique de produit vectoriel associée à  $\boldsymbol{\omega}$ , telle que  $\dot{\mathbf{Q}} = [\boldsymbol{\omega}]\mathbf{Q}$ . On en déduit  $\dot{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{Q}^T[\boldsymbol{\omega}]^T = -\mathbf{Q}^T[\boldsymbol{\omega}]$ . En substituant  $\dot{\mathbf{Q}}$  et  $\dot{\mathbf{Q}}^T$  dans (B.12), nous obtenons

$$\dot{\mathbf{K}} = [\boldsymbol{\omega}]\mathbf{Q}\mathbf{I}_p\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\mathbf{I}_p\mathbf{Q}^T[\boldsymbol{\omega}] \quad (\text{B.13})$$

$$\dot{\mathbf{K}} = [\boldsymbol{\omega}]\mathbf{K} - \mathbf{K}[\boldsymbol{\omega}] \quad (\text{B.14})$$

En multipliant tous les membres par  $\boldsymbol{\omega}$ , (B.14) devient

$$\dot{\mathbf{K}}\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega}]\mathbf{K}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{K}[\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega} \quad (\text{B.15})$$

et finalement

$$\dot{\mathbf{K}}\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega}]\mathbf{K}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K}\boldsymbol{\omega} \quad (\text{B.16})$$

car  $[\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ . □

## PREUVES DE CONTINUITÉ

*Cette annexe donne les preuves de continuité de la méthode de distribution des tensions proposée au chapitre 3. Au travers d'une formulation, donnée à la section C.1, du noyau d'une matrice  $n \times n + 2$  basée sur des déterminants, la continuité de l'évolution dans le temps du polytope  $\Lambda$  est démontrée à la section C.2. La continuité des sommets du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est démontrée à la section C.3 et la section C.4 donne finalement les preuves de continuité de l'évolution dans le temps des solutions au problème de la distribution des tensions.*

Commençons par rappeler l'expression de la matrice Jacobienne d'un RPC, définie au chapitre 2. La Jacobienne de dimension  $m \times n$  d'un RPC, où  $m$  désigne le nombre de câbles et  $n$  le nombre de DDL de la plate-forme, relie les vitesses articulaires  $\dot{\mathbf{l}}$  et opérationnelles  $\dot{\mathbf{x}}$ , exprimées en mètres par seconde et en radians par seconde, telles que  $\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{J}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}$ .

Les lignes de la matrice Jacobienne sont formées des gradients des composantes  $l_i$  de  $\mathbf{l}$ , telles que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial l_i}{\partial x_j} \right] \quad i \in [1 \dots m], \quad j \in [1 \dots n] \quad (\text{C.1})$$

On admet que les générations de trajectoires des robots considérés sont strictement contenues dans l'ETC du RPC et ne passent pas par des singularités du système. Le long de ces trajectoires, les longueurs  $l_i$  des  $m$  câbles du robot sont générées à l'aide d'un polynôme de degré cinq et de classe  $\mathcal{C}^2$  [Khalil 04]. Par conséquent, les dérivées partielles de  $\mathbf{l}$  sont continues (somme, produit et quotient de fonctions continues, d'après l'équation 2.11), sauf pour  $l_i = 0$ . Ce cas est traité comme une singularité et ne fait pas partie de l'ETC du robot.  $\mathbf{J}$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$ , continue et dérivable le long de ces trajectoires.

## C.1 Noyau d'une matrice de dimension $n \times n + 2$

Soit  $\mathbf{W}$  une matrice de dimension  $n \times m$  de plein rang  $n$ , avec  $m = n + 2$ . On note  $\mathbf{w}_i$ ,  $i \in \{1 \dots m\}$  les vecteurs colonnes de  $\mathbf{W}$  de dimension  $n$ .  $\mathbf{W}$  a les dimensions de la matrice des torseurs d'un RPC doté d'une redondance d'actionnement  $m - n = r = 2$ . Le noyau  $\mathbf{N} = \text{Ker}(\mathbf{W})$  de la matrice  $\mathbf{W}$  est engendré par 2 vecteurs colonnes de dimension  $n$ , tels que  $\mathbf{N} = [\mathbf{n}_1 \ \mathbf{n}_2]$ , d'après le théorème du rang. Comme démontré dans [Gouttefarde 05] et repris ici, une base du noyau de  $\mathbf{W}$  est formée des vecteurs

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} \det([\mathbf{w}_{n+1} \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \\ \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_{n+1} \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \\ \vdots \\ \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{n+1}]) \\ -\det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} \det([\mathbf{w}_{n+2} \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \\ \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_{n+2} \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \\ \vdots \\ \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{n+2}]) \\ 0 \\ -\det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

*Démonstration.* Si  $\mathbf{W}$  est de plein rang, alors  $\mathbf{N}$  est un sous-espace vectoriel non-nul de  $\mathbb{R}^m$  de dimension  $r = m - n$ . On se place dans le cas où  $m = n + 2$ , donc  $\mathbf{N}$  est de dimension  $r = 2$ . Montrons que  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  appartiennent à  $\mathbf{N}$ .

Appelons les déterminants extraits de  $\mathbf{W}$  les déterminants issus des matrices carrées obtenues en supprimant deux colonnes de  $\mathbf{W}$ . Supposons que le déterminant extrait des  $n$  premières colonnes de  $\mathbf{W}$ ,  $\det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n])$ , soit non nul, c'est-à-dire que les  $n$  premières colonnes de  $\mathbf{W}$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$ . On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \exists(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \mathbf{w}_{n+1} &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j \\ \exists(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \mathbf{w}_{n+2} &= \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{w}_j \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

On écrit ensuite les produits  $\mathbf{W}\mathbf{n}_k$ ,  $k = 1, 2$ , tels que

$$\mathbf{W}\mathbf{n}_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \det([\mathbf{w}_1 \ \dots \ \mathbf{w}_{i-1} \ \mathbf{w}_{n+k} \ \mathbf{w}_{i+1} \ \dots \ \mathbf{w}_n]) - \mathbf{w}_{n+k} \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \quad (\text{C.4})$$

En remplaçant dans (C.4) les expressions de (C.3), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{W}\mathbf{n}_1 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \dots & \mathbf{w}_{i-1} & \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j & \mathbf{w}_{i+1} & \dots & \mathbf{w}_n \end{bmatrix} \right) - \mathbf{w}_{n+1} \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \\ \mathbf{W}\mathbf{n}_2 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \dots & \mathbf{w}_{i-1} & \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{w}_j & \mathbf{w}_{i+1} & \dots & \mathbf{w}_n \end{bmatrix} \right) - \mathbf{w}_{n+2} \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

La propriété de multilinéarité du déterminant d'une matrice nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{Wn}_1 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{w}_i \det([\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{i-1} \mathbf{w}_i \mathbf{w}_{i+1} \dots \mathbf{w}_n]) - \mathbf{w}_{n+k} \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_n]) \\ \mathbf{Wn}_2 &= \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{w}_i \det([\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{i-1} \mathbf{w}_i \mathbf{w}_{i+1} \dots \mathbf{w}_n]) - \mathbf{w}_{n+k} \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_n]) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

et enfin par factorisation

$$\begin{aligned} \mathbf{Wn}_1 &= \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_n]) \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{n+1} \right) \\ \mathbf{Wn}_2 &= \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_n]) \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{n+2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Or, d'après (C.3),  $\forall i \in \{1 \dots n\}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{n+1} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{n+2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

et on en déduit finalement pour  $k \in \{1, 2\}$ ,

$$\mathbf{Wn}_k = 0 \quad (\text{C.9})$$

Ceci conclut la démonstration. □

## C.2 Continuité de $\Lambda$

Une base du noyau  $\mathbf{N}$  de  $\mathbf{W}$  peut donc être obtenue à partir des déterminants des matrices carrées extraites de  $\mathbf{W}$ , comme formulé à l'équation (C.2). Or ces déterminants sont des fonctions polynômes dont les variables sont les coefficients de la matrice  $\mathbf{W}$ . Ici, la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  est d'évolution continue dans le temps le long d'une trajectoire continue incluse dans l'ETC du RPC. Les déterminants des matrices extraites de  $\mathbf{W}$  sont donc d'évolution continue dans le temps, de même que les vecteurs colonnes  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  composant le noyau  $\mathbf{N}$ , formés de ces déterminants. Enfin, le sous-espace vectoriel  $\Sigma$  engendré par ces deux vecteurs évolue également de façon continue dans le temps.

On rappelle que  $\Lambda = \Omega \cap \Sigma$  est l'intersection de l'hyper-parallélépipède  $\Omega$  et de l'espace affine  $\Sigma$ , tels que

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\mathbf{t} \mid \mathbf{Wt} = \mathbf{f}\} \in \mathbb{R}^2 \\ \Omega &= \{\mathbf{t} \mid t_i \in [t_{\min}, t_{\max}], 1 \leq i \leq m\} \in \mathbb{R}^8 \end{aligned}$$

L'hyper-parallélépipède  $\Omega$  est constant durant toute l'application car généré dans  $\mathbb{R}^8$  par les constantes  $t_{\min}$  et  $t_{\max}$ . Si l'intersection d'ensembles continus  $\Lambda = \Omega \cap \Sigma$  existe -

$\Omega \cap \Sigma \neq \emptyset$  - le long d'une trajectoire continue incluse dans l'ETC du RPC, alors  $\Lambda$  est d'évolution continue dans le temps.

### C.3 Continuité et conservation des sommets de $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$

Définissons un espace vectoriel affine - ou plan vectoriel -  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ . L'application  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$  définissant le polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , antécédent de  $\Lambda$ , est une application affine définie par

$$\mathcal{A} : \begin{array}{l} \mathcal{E} \longrightarrow \Sigma \\ \boldsymbol{\lambda} \longmapsto \mathbf{t} = \mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \end{array} \quad (\text{C.10})$$

De la même manière on définit

$$\mathcal{A}^{-1} : \begin{array}{l} \Sigma \longrightarrow \mathcal{E} \\ \mathbf{t} \longmapsto \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}^+(\mathbf{t} - \mathbf{t}_p) \end{array} \quad (\text{C.11})$$

avec  $\boldsymbol{\lambda}$  un vecteur de dimension deux, tel que  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{E}$ , et  $\mathbf{t}$  est de dimension  $m$  tel que  $\mathbf{t} \in \Sigma$ .

**Proposition C.3.1.** *L'application  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\Sigma$  est un homéomorphisme.*

*Démonstration.* Un homéomorphisme est une application bijective continue de deux espaces topologiques, ici  $\mathcal{E}$  et  $\Sigma$  (ensembles de réels munis de leur topologie usuelle).  $\mathcal{A}$  est donc un homéomorphisme si  $\mathcal{A}$  est bijective et continue. La section C.1 a montré la continuité de  $\mathbf{N}$  le long d'une trajectoire continue incluse dans l'ETC du RPC. On suppose l'évolution du vecteur  $\boldsymbol{\lambda}$  continue (prouvé à la section C.4). De plus, hors singularité de la matrice des torseurs, la solution issue de la pseudo-inverse est également continue d'après [Wampler 86]. L'application affine  $\mathcal{A}$ , somme et produit de fonctions continues est donc continue le long d'une trajectoire continue contenue dans l'ETC du RPC. De plus,  $\mathcal{A}$  est bijective si et seulement si tout élément de  $\Sigma$  a exactement un antécédent par  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{E}$ . Or pour tout vecteur arbitraire donné  $\mathbf{t}$ , on trouve exactement une solution réelle à l'équation  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}$  d'inconnue  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{E}$ , à savoir  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}^+(\mathbf{t} - \mathbf{t}_p)$ ,  $\mathbf{t}_p$  et  $\mathbf{N}^+$  étant unique à chaque pose de la plate-forme. De même, pour tout vecteur arbitraire donné  $\boldsymbol{\lambda}$ , on trouve exactement une solution réelle à l'équation  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}^+(\mathbf{t} - \mathbf{t}_p)$  d'inconnue  $\mathbf{t} \in \Sigma$ , à savoir  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda}$ . Par conséquent,  $\mathcal{A}$  est bien un homéomorphisme.  $\square$

Le polytope  $\Lambda$  évoluant de façon continue dans le temps, son polygone antécédent  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  évolue également de façon continue par l'homéomorphisme  $\mathcal{A}^{-1}$ . De plus, il y a conservation des distances. Les sommets de  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  évoluent de façon continue, leur image par  $\mathcal{A}$  (les sommets de  $\Lambda$ ) évoluent donc également de façon continue.

## C.4 Continuité des solutions

Enfin, étudions la continuité dans  $\mathcal{E}$  des différentes solutions  $\lambda^*$  proposées au chapitre 3 pour résoudre le problème de la distribution des tensions, le long d'une trajectoire continue incluse dans l'ETC du RPC ( $\Lambda \neq \emptyset$ ). Ces solutions sont transportées dans  $\Sigma$  par l'application affine homéomorphe  $\mathcal{A}$  qui conserve les distances. Si ces solutions sont continues dans  $\mathcal{E}$ , elles le sont également dans  $\Sigma$ .

### C.4.1 Continuité des solutions minimisant les normes 1 et 2 des tensions

La solution minimisant la norme 1 de  $\mathbf{t} \in \Lambda$ , et donc de  $\lambda \in \mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  (voir section 3.3.1) est toujours située sur un sommet (un point extrême) du polygone convexe  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  [Giaquinta 12]. De petites variations de pose de la plate-forme peuvent engendrer un changement du sommet minimisant la norme 1 de  $\lambda$ . Cette solution implique donc de possibles discontinuités dans  $\mathcal{E}$ , lorsque la solution passe d'un sommet à un autre;  $\lambda_{n_1}^*$  n'est pas continue.

La solution minimisant la norme 2 de  $\mathbf{t} \in \Lambda$ , et donc de  $\lambda \in \mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  (voir section 3.3.2) peut être située sur un sommet ou une arête du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , ou à l'intérieur du polygone (si et seulement si  $\mathbf{t}_p \in \mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , auquel cas  $\lambda_{n_2}^* = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{t}_p)$ ). Rappelons la définition d'une norme

**Définition C.1.** Une application  $\mathcal{N} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  est une norme si

1.  $\forall \lambda \in \mathcal{E}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathcal{N}(\alpha \lambda) = |\alpha| \mathcal{N}(\lambda)$  (homogénéité);
2.  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{E}^2, \mathcal{N}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mathcal{N}(\lambda_1) + \mathcal{N}(\lambda_2)$  (inégalité triangulaire);
3.  $\forall \lambda \in \mathcal{E}, \mathcal{N}(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$  (définie).

La norme est une application Lipschitzienne et, par conséquent, est continue.

Verhoeven a démontré dans [Verhoeven 04] que la solution minimisant la norme  $\|\lambda\|_p$ , tel que  $p \in ]1, \infty[$ , est unique et d'évolution continue dans le temps. Par conséquent, la solution minimisant la norme 2 de  $\lambda$ , et donc de  $\mathbf{t}$  par l'homéomorphisme  $\mathcal{A}$ , est continue dans le temps.

### C.4.2 Continuités du barycentre et du barycentre pondéré

La continuité du barycentre du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est immédiate. D'après l'équation (3.38), les coordonnées du barycentre  $\lambda_b^*$  sont linéairement dépendantes des coordonnées des sommets du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ . Or l'évolution de ces sommets est continue

dans le temps, comme indiqué à la section C.3. Par conséquent, l'évolution du barycentre est continue le long d'une trajectoire continue incluse dans l'ETC du RPC ( $\Lambda \neq \emptyset$ ).

Le barycentre est dit pondéré lorsqu'un poids  $w_p > 0$  est appliqué à chaque sommet  $\mathbf{s}_p$  du polygone  $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ , avec  $p \in \{1, \dots, q\}$ ,  $q$  étant le nombre de sommets. L'expression du barycentre pondéré  $\boldsymbol{\lambda}_{bp}^* \in \mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$  est donnée à la section 3.3.4 et est rappelée ici

$$\boldsymbol{\lambda}_{bp}^* = \frac{\sum_{p=1}^q \mathbf{s}_p w_p}{\sum_{p=1}^q w_p}$$

La solution issue du calcul du barycentre pondéré est continue si, pour une petite variation du polygone au cours d'un temps  $\Delta t > 0$ ,

$$\Delta t < \nu, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \left| \boldsymbol{\lambda}_{bp}^*(t) - \boldsymbol{\lambda}_{bp}^*(t + \Delta t) \right| < \epsilon \quad (\text{C.12})$$

Ceci est directement vérifié lorsque le nombre  $q$  de sommets est invariant [Giroto 04]. En effet,  $\forall p, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{s}_p(t + \Delta t) = \mathbf{s}_p(t)$ . Nous avons déjà démontré que l'évolution des sommets est continue dans le temps, le long d'une trajectoire continue incluse dans l'ETC du RPC. De plus, rappelons ci-dessous l'expression des poids  $w_p$

$$w_p = \frac{\sum_{r=1}^2 \|\mathbf{s}_p - \mathbf{s}_{p_r}\|_2}{\|\mathbf{s}_p\|_2}$$

où  $\mathbf{s}_{p_1}$  et  $\mathbf{s}_{p_2}$  sont les deux sommets voisins de  $\mathbf{s}_p$ .

La norme Euclidienne est continue car Lipschitzienne. Ainsi,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} w_p(t + \Delta t) = w_p(t)$  est vérifiée  $\forall p$ . La solution issue du calcul du barycentre pondéré est donc continue si le nombre de sommets  $q$  est invariant. Démontrons que cette solution est également continue lorsque le nombre de sommets  $q$  varie.

*Démonstration.* Considérons un polygone à trois sommets  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  et  $\mathbf{s}_3$  au temps  $t$ . Au temps  $t + \Delta t$ , un quatrième sommet apparaît par séparation du sommet  $\mathbf{s}_1$  en deux sommets  $\mathbf{s}_{1_A}$  et  $\mathbf{s}_{1_B}$  (le mécanisme d'apparition et de disparition d'un sommet, décrit à la section 3.2.3, est continu). Ainsi,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{s}_{1_A} = \mathbf{s}_1$  et  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{s}_{1_B} = \mathbf{s}_1$ . De même,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|\mathbf{s}_{1_A}\|_2 = \|\mathbf{s}_1\|_2$  et  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|\mathbf{s}_{1_B}\|_2 = \|\mathbf{s}_1\|_2$ . De plus,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|\mathbf{s}_{1_A} - \mathbf{s}_1\|_2 = 0$  et  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|\mathbf{s}_{1_B} - \mathbf{s}_1\|_2 = 0$ .

Par conséquent, lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$w_{1_A} = \frac{\|\mathbf{s}_{1_A} - \mathbf{s}_3\|_2 + \|\mathbf{s}_{1_A} - \mathbf{s}_1\|_2}{\|\mathbf{s}_{1_A}\|_2} \rightarrow \frac{\|\mathbf{s}_{1_A} - \mathbf{s}_3\|_2}{\|\mathbf{s}_1\|_2} \quad (\text{C.13})$$

$$w_{1_B} = \frac{\|\mathbf{s}_{1_B} - \mathbf{s}_1\|_2 + \|\mathbf{s}_{1_B} - \mathbf{s}_2\|_2}{\|\mathbf{s}_{1_B}\|_2} \rightarrow \frac{\|\mathbf{s}_{1_B} - \mathbf{s}_2\|_2}{\|\mathbf{s}_1\|_2} \quad (\text{C.14})$$

et on en déduit que  $(w_{1_A} + w_{1_B}) \rightarrow w_1$  et que  $\mathbf{s}_{1_A} w_{1_A} + \mathbf{s}_{1_B} w_{1_B} \rightarrow \mathbf{s}_1 (w_{1_A} + w_{1_B}) \rightarrow \mathbf{s}_1 w_1$ .  
Finalement, lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$\boldsymbol{\lambda}_{bp}^*(t + \Delta t) = \frac{\mathbf{s}_{1_A} w_{1_A} + \mathbf{s}_{1_B} w_{1_B} + \mathbf{s}_2 w_2 + \mathbf{s}_3 w_3}{w_{1_A} + w_{1_B} + w_2 + w_3} \rightarrow \frac{\mathbf{s}_1 w_1 + \mathbf{s}_2 w_2 + \mathbf{s}_3 w_3}{w_1 + w_2 + w_3} = \boldsymbol{\lambda}_{bp}^*(t) \quad (\text{C.15})$$

Le même raisonnement prouve la continuité de la solution issue du calcul du barycentre pondéré lors de la fusion de deux sommets.  $\square$



## MESURES D'EXACTITUDE ET DE RÉPÉTABILITÉ

Les tableaux de cette annexe donnent les résultats de mesures exploités à la section 5.3 pour les études d'exactitude et de répétabilité. Dans ces tableaux, on peut lire les poses mesurées aux cinq poses désirées de  $\text{traj}_2$ , rappelées ci-dessous à la table D.1. Ce cycle est répété cinq fois, pour un total de vingt-cinq poses mesurées. Six scénarios sont considérés ici :

- commande PID sans boucle d'anticipation, plate-forme à vide ;
- commande par anticipation en espace double, plate-forme à vide ;
- commande adaptative dans l'espace double, plate-forme à vide ;
- commande PID sans boucle d'anticipation, plate-forme chargée avec une palette de 110 kg ;
- commande par anticipation en espace double, plate-forme chargée avec une palette de 110 kg ;
- commande adaptative dans l'espace double, plate-forme chargée avec une palette de 110 kg.

Les formules permettant les calculs des exactitudes de positionnement (*EP*), des exactitudes d'orientation (*EO*), des répétabilités de positionnement (*RP*) et des répétabilités d'orientation (*RO*) sont données à la section 5.3. Les résultats expérimentaux rapportés dans ces tableaux sont exprimés en mètres pour les positions et en radians pour les orientations.

FIGURE D.1 : Commande PID sans anticipation, plate-forme à vide, le long de traj2.

| Cycle 1        | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| x              | -0,000159 | -3,986124 | -3,997038 | 3,988013  | 3,996457  |
| y              | 0,001266  | 2,982336  | -2,983533 | -2,981696 | 2,981550  |
| z              | 0,468277  | 0,485888  | 0,475728  | 0,964004  | 1,276975  |
| phi            | 0,002366  | 0,192328  | 0,286813  | -0,085939 | -0,101819 |
| theta          | 0,000456  | 0,190901  | -0,182846 | 0,190566  | 0,098473  |
| psi            | -0,003556 | -0,001997 | -0,117875 | -0,203552 | 0,299065  |
| Cycle 2        | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x              | -0,000116 | -3,985999 | -3,996826 | 3,988066  | 3,996467  |
| y              | 0,001169  | 2,982305  | -2,983388 | -2,981603 | 2,981528  |
| z              | 0,468191  | 0,485795  | 0,475550  | 0,964110  | 1,277140  |
| phi            | 0,002786  | 0,192564  | 0,286806  | -0,085675 | -0,101911 |
| theta          | 0,000726  | 0,190934  | -0,182954 | 0,190467  | 0,098415  |
| psi            | -0,003426 | -0,002065 | -0,117764 | -0,203532 | 0,299081  |
| Cycle 3        | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x              | -0,000231 | -4,003282 | -3,988738 | 3,996467  | 3,979767  |
| y              | 0,001273  | 2,994268  | -2,971425 | -2,935766 | 3,027464  |
| z              | 0,470739  | 0,484252  | 0,473830  | 0,957306  | 1,270846  |
| phi            | 0,002225  | 0,191805  | 0,287695  | -0,086342 | -0,101936 |
| theta          | 0,000631  | 0,192406  | -0,181286 | 0,190590  | 0,098776  |
| psi            | -0,003236 | 0,002128  | -0,113673 | -0,199035 | 0,303487  |
| Cycle 4        | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x              | -0,000147 | -3,986127 | -3,996861 | 3,987954  | 3,996441  |
| y              | 0,001393  | 2,982134  | -2,983314 | -2,981616 | 2,981693  |
| z              | 0,468412  | 0,486235  | 0,476250  | 0,964425  | 1,277122  |
| phi            | 0,002016  | 0,192369  | 0,286934  | -0,086163 | -0,101930 |
| theta          | 0,000560  | 0,191132  | -0,183077 | 0,190721  | 0,098484  |
| psi            | -0,003506 | -0,001922 | -0,117728 | -0,203486 | 0,299128  |
| Cycle 5        | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x              | -0,000155 | -3,985999 | -3,996865 | 3,988027  | 3,996476  |
| y              | 0,001399  | 2,982310  | -2,983219 | -2,981565 | 2,981881  |
| z              | 0,468324  | 0,486037  | 0,476185  | 0,964328  | 1,277172  |
| phi            | 0,002385  | 0,192523  | 0,286958  | -0,085827 | -0,101914 |
| theta          | 0,000566  | 0,190940  | -0,183109 | 0,190706  | 0,098339  |
| psi            | -0,003442 | -0,002037 | -0,117579 | -0,203536 | 0,299032  |
| xmoy           | -0,000162 | -3,989506 | -3,995266 | 3,989705  | 3,993121  |
| ymoy           | 0,001300  | 2,984671  | -2,980976 | -2,972449 | 2,990823  |
| zmoy           | 0,468789  | 0,485642  | 0,475509  | 0,962835  | 1,275851  |
| phimoy         | 0,002356  | 0,192318  | 0,287041  | -0,085989 | -0,101902 |
| thetamoy       | 0,000588  | 0,191263  | -0,182655 | 0,1906100 | 0,098497  |
| psimoy         | -0,003433 | -0,001179 | -0,116924 | -0,202628 | 0,299958  |
| EP             | 0,031239  | 0,023479  | 0,031371  | 0,047395  | 0,026734  |
| EO             | 0,004205  | 0,011694  | 0,027481  | 0,017070  | 0,002424  |
| EP moyenne     |           |           | 0,032044  |           |           |
| EO moyenne     |           |           | 0,012575  |           |           |
| I1             | 0,000512  | 0,004118  | 0,003119  | 0,009473  | 0,009918  |
| I2             | 0,000614  | 0,004233  | 0,002873  | 0,009386  | 0,009963  |
| I3             | 0,001952  | 0,016847  | 0,011690  | 0,037708  | 0,039318  |
| I4             | 0,000388  | 0,004266  | 0,002927  | 0,009468  | 0,009798  |
| I5             | 0,000475  | 0,004246  | 0,002837  | 0,009388  | 0,009642  |
| I moy          | 0,000788  | 0,006742  | 0,004689  | 0,015085  | 0,015728  |
| S              | 0,000655  | 0,005649  | 0,003915  | 0,012647  | 0,013188  |
| RP             | 0,002754  | 0,023689  | 0,016434  | 0,053026  | 0,055292  |
| RP moyenne     |           |           | 0,030239  |           |           |
| RPhi           | 0,000846  | 0,000911  | 0,001116  | 0,000797  | 0,000143  |
| RPhi moyenne   |           |           | 0,000763  |           |           |
| Rtheta         | 0,000298  | 0,001937  | 0,002316  | 0,000315  | 0,000498  |
| Rtheta moyenne |           |           | 0,001073  |           |           |
| Rpsi           | 0,000366  | 0,005548  | 0,005460  | 0,006026  | 0,005918  |
| Rpsi moyenne   |           |           | 0,004664  |           |           |

FIGURE D.2 : Commande par anticipation en espace double, plate-forme à vide, le long de  $traj_2$ .

| Cycle 1         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| x               | -0,000242 | -3,987748 | -3,996770 | 3,987596  | 3,993721  |
| y               | 0,000017  | 2,984860  | -2,982435 | -2,984973 | 2,984475  |
| z               | 0,495398  | 0,504518  | 0,492742  | 0,983049  | 1,297646  |
| phi             | 0,000388  | 0,191335  | 0,289839  | -0,091170 | -0,102925 |
| theta           | 0,000491  | 0,191641  | -0,187297 | 0,193397  | 0,101322  |
| psi             | -0,000362 | 0,000217  | -0,113743 | -0,202353 | 0,300994  |
| Cycle 2         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000081  | -3,985839 | -3,994577 | 3,985720  | 3,993714  |
| y               | 0,000429  | 2,985646  | -2,983754 | -2,985385 | 2,981527  |
| z               | 0,491648  | 0,502726  | 0,491107  | 0,984980  | 1,299587  |
| phi             | 0,000661  | 0,193143  | 0,290433  | -0,091612 | -0,104966 |
| theta           | 0,000498  | 0,190420  | -0,187786 | 0,194558  | 0,100409  |
| psi             | -0,001256 | -0,002183 | -0,115688 | -0,203531 | 0,300309  |
| Cycle 3         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000053  | -3,986199 | -3,994591 | 3,985050  | 3,992236  |
| y               | 0,000444  | 2,985454  | -2,987922 | -2,989351 | 2,978542  |
| z               | 0,491921  | 0,503352  | 0,491730  | 0,985481  | 1,296066  |
| phi             | 0,000665  | 0,194418  | 0,289895  | -0,090748 | -0,104259 |
| theta           | 0,000572  | 0,190289  | -0,186061 | 0,195600  | 0,102981  |
| psi             | -0,001231 | -0,002013 | -0,114217 | -0,201911 | 0,300848  |
| Cycle 4         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000091  | -3,987449 | -3,995236 | 3,985744  | 3,992617  |
| y               | 0,000301  | 2,985350  | -2,987069 | -2,989234 | 2,978427  |
| z               | 0,491201  | 0,501659  | 0,489177  | 0,984317  | 1,298054  |
| phi             | 0,000817  | 0,191653  | 0,286138  | -0,095030 | -0,108609 |
| theta           | 0,000486  | 0,191874  | -0,186878 | 0,194430  | 0,101695  |
| psi             | -0,001361 | -0,001177 | -0,117215 | -0,203203 | 0,301518  |
| Cycle 5         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000060  | -3,987559 | -3,995193 | 3,985964  | 3,992765  |
| y               | 0,000445  | 2,985294  | -2,986901 | -2,989004 | 2,978468  |
| z               | 0,491905  | 0,501540  | 0,489155  | 0,984271  | 1,298220  |
| phi             | 0,001064  | 0,191871  | 0,286444  | -0,094965 | -0,108501 |
| theta           | 0,000436  | 0,192004  | -0,186940 | 0,194248  | 0,101410  |
| psi             | -0,001268 | -0,001131 | -0,116993 | -0,203302 | 0,301470  |
| xmoy            | 0,000009  | -3,986959 | -3,995273 | 3,986015  | 3,993011  |
| ymoy            | 0,000327  | 2,985321  | -2,985616 | -2,987589 | 2,980288  |
| zmoy            | 0,492415  | 0,502759  | 0,490782  | 0,984420  | 1,297915  |
| phimoy          | 0,000719  | 0,192484  | 0,288550  | -0,092705 | -0,105852 |
| thetamoy        | 0,000497  | 0,191246  | -0,186993 | 0,194446  | 0,101564  |
| psimoy          | -0,001096 | -0,001257 | -0,115571 | -0,202860 | 0,301028  |
| EP              | 0,007593  | 0,019828  | 0,017726  | 0,024338  | 0,021018  |
| EO              | 0,001401  | 0,011607  | 0,023297  | 0,009604  | 0,006144  |
| EP moyenne      |           |           | 0,018101  |           |           |
| EO moyenne      |           |           | 0,010411  |           |           |
| I1              | 0,003010  | 0,001982  | 0,004025  | 0,003350  | 0,004256  |
| I2              | 0,000777  | 0,001167  | 0,002015  | 0,002294  | 0,002197  |
| I3              | 0,000509  | 0,000973  | 0,002585  | 0,002272  | 0,002658  |
| I4              | 0,001216  | 0,001204  | 0,002165  | 0,001670  | 0,001907  |
| I5              | 0,000526  | 0,001359  | 0,002075  | 0,001423  | 0,001862  |
| Imoy            | 0,001208  | 0,001337  | 0,002573  | 0,002202  | 0,002576  |
| S               | 0,001047  | 0,000386  | 0,000842  | 0,000745  | 0,000991  |
| RP              | 0,004350  | 0,002495  | 0,005098  | 0,004438  | 0,005549  |
| RP moyenne      |           |           | 0,004386  |           |           |
| ROphi           | 0,000741  | 0,003843  | 0,006234  | 0,006346  | 0,007723  |
| ROphi moyenne   |           |           | 0,004977  |           |           |
| ROtheta         | 0,000145  | 0,002474  | 0,001901  | 0,002365  | 0,002783  |
| ROtheta moyenne |           |           | 0,001934  |           |           |
| ROpsi           | 0,001239  | 0,002856  | 0,004723  | 0,002078  | 0,001489  |
| ROpsi moyenne   |           |           | 0,002477  |           |           |

FIGURE D.3 : Commande adaptative en espace double, plate-forme à vide, le long de traj<sub>2</sub>.

| Cycle 1         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| x               | -0,000073 | -3,986327 | -3,995449 | 3,985863  | 3,993840  |
| y               | 0,000799  | 2,985896  | -2,983924 | -2,984663 | 2,981108  |
| z               | 0,494388  | 0,501667  | 0,494230  | 0,986298  | 1,300801  |
| phi             | 0,001113  | 0,194332  | 0,290587  | -0,089079 | -0,104062 |
| theta           | 0,000367  | 0,191240  | -0,185155 | 0,194231  | 0,099739  |
| psi             | -0,001065 | -0,000950 | -0,114207 | -0,200497 | 0,301613  |
| Cycle 2         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | -0,000232 | -3,986614 | -3,995353 | 3,985625  | 3,993795  |
| y               | 0,000146  | 2,984993  | -2,984196 | -2,984843 | 2,982045  |
| z               | 0,493749  | 0,501060  | 0,493779  | 0,986239  | 1,300727  |
| phi             | 0,000446  | 0,193889  | 0,290278  | -0,089023 | -0,103991 |
| theta           | 0,000598  | 0,191829  | -0,185284 | 0,194467  | 0,099265  |
| psi             | -0,000963 | -0,000968 | -0,114088 | -0,200513 | 0,301967  |
| Cycle 3         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | -0,000237 | -3,986582 | -3,995324 | 3,985515  | 3,993824  |
| y               | 0,000178  | 2,984926  | -2,983978 | -2,984661 | 2,981332  |
| z               | 0,494248  | 0,500830  | 0,494025  | 0,986275  | 1,300738  |
| phi             | 0,000605  | 0,194079  | 0,290475  | -0,088908 | -0,104082 |
| theta           | 0,000639  | 0,191598  | -0,185452 | 0,194271  | 0,099467  |
| psi             | -0,000901 | -0,001112 | -0,113822 | -0,200404 | 0,301588  |
| Cycle 4         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | -0,000272 | -3,986678 | -3,995369 | 3,985435  | 3,993734  |
| y               | 0,000343  | 2,985032  | -2,984133 | -2,984914 | 2,981256  |
| z               | 0,493769  | 0,500965  | 0,494147  | 0,986435  | 1,301062  |
| phi             | 0,000939  | 0,193964  | 0,290506  | -0,089515 | -0,104261 |
| theta           | 0,000641  | 0,191753  | -0,185487 | 0,194578  | 0,099615  |
| psi             | -0,000917 | -0,000961 | -0,113882 | -0,200560 | 0,301540  |
| Cycle 5         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | -0,000176 | -3,986640 | -3,995405 | 3,985564  | 3,993566  |
| y               | 0,000390  | 2,985000  | -2,984214 | -2,984671 | 2,982083  |
| z               | 0,494201  | 0,501068  | 0,494081  | 0,985974  | 1,300828  |
| phi             | 0,000821  | 0,193720  | 0,290581  | -0,089312 | -0,103701 |
| theta           | 0,000560  | 0,191730  | -0,185359 | 0,194365  | 0,099629  |
| psi             | -0,000943 | -0,000908 | -0,113909 | -0,200391 | 0,302053  |
| xmoy            | -0,000198 | -3,986568 | -3,995380 | 3,985600  | 3,993752  |
| ymoy            | 0,000371  | 2,985169  | -2,984089 | -2,984751 | 2,981565  |
| zmoy            | 0,494071  | 0,501118  | 0,494052  | 0,986244  | 1,300831  |
| phimoy          | 0,000785  | 0,193997  | 0,290485  | -0,089167 | -0,104019 |
| thetamoy        | 0,000561  | 0,191630  | -0,185347 | 0,194382  | 0,099543  |
| psimoy          | -0,000958 | -0,000980 | -0,113981 | -0,200473 | 0,301752  |
| EP              | 0,005944  | 0,020040  | 0,017603  | 0,025082  | 0,019483  |
| EO              | 0,001359  | 0,010347  | 0,022376  | 0,012212  | 0,004408  |
| EP moyenne      |           |           | 0,017631  |           |           |
| EO moyenne      |           |           | 0,010141  |           |           |
| I1              | 0,000547  | 0,000942  | 0,000252  | 0,000282  | 0,000466  |
| I2              | 0,000395  | 0,000191  | 0,000295  | 0,000096  | 0,000494  |
| I3              | 0,000265  | 0,000378  | 0,000128  | 0,000127  | 0,000261  |
| I4              | 0,000312  | 0,000232  | 0,000105  | 0,000301  | 0,000386  |
| I5              | 0,000133  | 0,000191  | 0,000131  | 0,000284  | 0,000551  |
| Imoy            | 0,000330  | 0,000387  | 0,000182  | 0,000218  | 0,000432  |
| S               | 0,000154  | 0,000320  | 0,000085  | 0,000098  | 0,000112  |
| RP              | 0,000791  | 0,001346  | 0,000438  | 0,000512  | 0,000768  |
| RP moyenne      |           |           | 0,000771  |           |           |
| ROphi           | 0,000793  | 0,000685  | 0,000377  | 0,000731  | 0,000612  |
| ROphi moyenne   |           |           | 0,000640  |           |           |
| ROtheta         | 0,000340  | 0,000700  | 0,000401  | 0,000428  | 0,000549  |
| ROtheta moyenne |           |           | 0,000483  |           |           |
| ROpsi           | 0,000193  | 0,000233  | 0,000481  | 0,000219  | 0,000716  |
| ROpsi moyenne   |           |           | 0,000369  |           |           |

FIGURE D.4 : Commande PID sans anticipation, plate-forme chargée, le long de traj<sub>2</sub>.

| Cycle 1         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| x               | 0,000640  | -3,987224 | -4,009415 | 3,998965  | 4,008673  |
| y               | -0,001262 | 2,974581  | -2,997074 | -2,982216 | 2,985646  |
| z               | 0,401537  | 0,433570  | 0,422110  | 0,900829  | 1,201956  |
| phi             | -0,003480 | 0,176225  | 0,261249  | -0,087120 | -0,095682 |
| theta           | 0,001318  | 0,188471  | -0,164455 | 0,180831  | 0,087407  |
| psi             | -0,009684 | -0,003137 | -0,137384 | -0,213795 | 0,285262  |
| Cycle 2         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000655  | -3,987141 | -4,009185 | 3,999339  | 4,008993  |
| y               | -0,001451 | 2,974675  | -2,997413 | -2,983945 | 2,985831  |
| z               | 0,401461  | 0,433421  | 0,421959  | 0,899657  | 1,201208  |
| phi             | -0,003491 | 0,175835  | 0,261341  | -0,088546 | -0,095785 |
| theta           | 0,001283  | 0,188396  | -0,164768 | 0,181684  | 0,087355  |
| psi             | -0,009691 | -0,003151 | -0,137246 | -0,215716 | 0,284919  |
| Cycle 3         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000790  | -3,986917 | -4,009186 | 3,998900  | 4,008689  |
| y               | -0,001521 | 2,974720  | -2,997384 | -2,983101 | 2,985900  |
| z               | 0,401218  | 0,433535  | 0,421702  | 0,900183  | 1,201636  |
| phi             | -0,003637 | 0,176283  | 0,261120  | -0,088170 | -0,095178 |
| theta           | 0,001362  | 0,188172  | -0,164636 | 0,181289  | 0,087452  |
| psi             | -0,009830 | -0,003233 | -0,137379 | -0,214340 | 0,285351  |
| Cycle 4         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000798  | -3,987097 | -4,009536 | 3,998842  | 4,008677  |
| y               | -0,001445 | 2,974681  | -2,996887 | -2,982283 | 2,985840  |
| z               | 0,400815  | 0,433415  | 0,421683  | 0,900559  | 1,201685  |
| phi             | -0,003980 | 0,176229  | 0,261205  | -0,087420 | -0,095405 |
| theta           | 0,001320  | 0,188417  | -0,164404 | 0,180925  | 0,087217  |
| psi             | -0,009773 | -0,003204 | -0,137272 | -0,213825 | 0,285194  |
| Cycle 5         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000808  | -3,987380 | -4,009370 | 3,998913  | 4,008739  |
| y               | -0,001746 | 2,974560  | -2,997385 | -2,982775 | 2,986153  |
| z               | 0,400834  | 0,433126  | 0,421325  | 0,900359  | 1,201339  |
| phi             | -0,003641 | 0,176460  | 0,261173  | -0,087705 | -0,094969 |
| theta           | 0,001306  | 0,188479  | -0,164419 | 0,180912  | 0,087425  |
| psi             | -0,009908 | -0,003408 | -0,137394 | -0,213932 | 0,285301  |
| xmoy            | 0,000738  | -3,987152 | -4,009338 | 3,998992  | 4,008754  |
| ymoy            | -0,001485 | 2,974643  | -2,997229 | -2,982864 | 2,985874  |
| zmoy            | 0,401173  | 0,433413  | 0,421756  | 0,900317  | 1,201565  |
| phimoy          | -0,003646 | 0,176207  | 0,261218  | -0,087792 | -0,095404 |
| thetamoy        | 0,001318  | 0,188387  | -0,164536 | 0,181128  | 0,087371  |
| psimoy          | -0,009777 | -0,003226 | -0,137335 | -0,214322 | 0,285206  |
| EP              | 0,098841  | 0,072400  | 0,078848  | 0,101150  | 0,099828  |
| EO              | 0,010518  | 0,026672  | 0,064464  | 0,026651  | 0,019987  |
| EP moyenne      |           |           | 0,090213  |           |           |
| EO moyenne      |           |           | 0,029658  |           |           |
| I1              | 0,000438  | 0,000183  | 0,000394  | 0,000826  | 0,000460  |
| I2              | 0,000302  | 0,000034  | 0,000314  | 0,001313  | 0,000432  |
| I3              | 0,000077  | 0,000275  | 0,000224  | 0,000288  | 0,000100  |
| I4              | 0,000365  | 0,000066  | 0,000402  | 0,000647  | 0,000147  |
| I5              | 0,000434  | 0,000376  | 0,000460  | 0,000126  | 0,000359  |
| I moy           | 0,000323  | 0,000187  | 0,000359  | 0,000640  | 0,000300  |
| S               | 0,000148  | 0,000143  | 0,000091  | 0,000468  | 0,000166  |
| RP              | 0,000768  | 0,000615  | 0,000633  | 0,002045  | 0,000797  |
| RP moyenne      |           |           | 0,000972  |           |           |
| ROphi           | 0,000606  | 0,000685  | 0,000251  | 0,001717  | 0,001020  |
| ROphi moyenne   |           |           | 0,000856  |           |           |
| ROtheta         | 0,000086  | 0,000375  | 0,000478  | 0,001072  | 0,000280  |
| ROtheta moyenne |           |           | 0,000458  |           |           |
| ROpsi           | 0,000284  | 0,000325  | 0,000211  | 0,002427  | 0,000510  |
| ROpsi moyenne   |           |           | 0,000752  |           |           |

FIGURE D.5 : Commande par anticipation en espace double, plate-forme chargée, le long de  $traj_2$ .

| Cycle 1         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| x               | 0,000541  | -3,986485 | -4,006673 | 3,996145  | 4,005928  |
| y               | -0,002993 | 2,975942  | -2,997459 | -2,985668 | 2,983569  |
| z               | 0,427750  | 0,453116  | 0,440922  | 0,923982  | 1,232602  |
| phi             | -0,006186 | 0,177364  | 0,264569  | -0,090923 | -0,103329 |
| theta           | 0,001572  | 0,188816  | -0,167869 | 0,184009  | 0,090924  |
| psi             | -0,007120 | -0,001506 | -0,133672 | -0,211429 | 0,291985  |
| Cycle 2         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000679  | -3,986469 | -4,006521 | 3,996323  | 4,006251  |
| y               | -0,002430 | 2,976504  | -2,997507 | -2,985710 | 2,984096  |
| z               | 0,424690  | 0,451634  | 0,439822  | 0,923690  | 1,232257  |
| phi             | -0,005778 | 0,177430  | 0,264700  | -0,090846 | -0,103236 |
| theta           | 0,001452  | 0,188581  | -0,167953 | 0,183880  | 0,089802  |
| psi             | -0,007722 | -0,001937 | -0,133850 | -0,211535 | 0,291518  |
| Cycle 3         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000631  | -3,985969 | -4,006511 | 3,996925  | 4,005799  |
| y               | -0,002549 | 2,976765  | -2,997152 | -2,984882 | 2,985521  |
| z               | 0,424428  | 0,452540  | 0,439596  | 0,923324  | 1,233404  |
| phi             | -0,005815 | 0,176526  | 0,264241  | -0,090730 | -0,103733 |
| theta           | 0,001415  | 0,186667  | -0,167830 | 0,183605  | 0,090458  |
| psi             | -0,007867 | -0,000648 | -0,133936 | -0,211732 | 0,291831  |
| Cycle 4         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000763  | -3,986790 | -4,006533 | 3,996470  | 4,006742  |
| y               | -0,002222 | 2,976608  | -2,997656 | -2,985565 | 2,984316  |
| z               | 0,424599  | 0,450897  | 0,439426  | 0,923226  | 1,232068  |
| phi             | -0,005967 | 0,176790  | 0,264473  | -0,091260 | -0,103333 |
| theta           | 0,001039  | 0,188835  | -0,167639 | 0,183975  | 0,089836  |
| psi             | -0,007860 | -0,002037 | -0,133957 | -0,211855 | 0,290407  |
| Cycle 5         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000699  | -3,986782 | -4,006621 | 3,996600  | 4,006123  |
| y               | -0,002028 | 2,976548  | -2,997645 | -2,985593 | 2,984015  |
| z               | 0,424462  | 0,450943  | 0,439596  | 0,923410  | 1,232321  |
| phi             | -0,005309 | 0,177168  | 0,265047  | -0,090477 | -0,102953 |
| theta           | 0,001189  | 0,188882  | -0,167863 | 0,183942  | 0,090029  |
| psi             | -0,007721 | -0,002133 | -0,133633 | -0,212210 | 0,291415  |
| xmoy            | 0,000663  | -3,986499 | -4,006572 | 3,996492  | 4,006169  |
| ymoy            | -0,002444 | 2,976474  | -2,997484 | -2,985484 | 2,984303  |
| zmoy            | 0,425186  | 0,451826  | 0,439872  | 0,923526  | 1,232530  |
| phimoy          | -0,005811 | 0,177056  | 0,264606  | -0,090847 | -0,103317 |
| thetamoy        | 0,001333  | 0,188356  | -0,167831 | 0,183882  | 0,090210  |
| psimoy          | -0,007658 | -0,001652 | -0,133810 | -0,211752 | 0,291431  |
| EP              | 0,074857  | 0,055286  | 0,060538  | 0,077918  | 0,069546  |
| EO              | 0,009705  | 0,025783  | 0,058572  | 0,021947  | 0,013427  |
| EP moyenne      |           |           | 0,067629  |           |           |
| EO moyenne      |           |           | 0,025887  |           |           |
| I1              | 0,002625  | 0,001396  | 0,001055  | 0,000602  | 0,000776  |
| I2              | 0,000496  | 0,000197  | 0,000075  | 0,000327  | 0,000353  |
| I3              | 0,000765  | 0,000936  | 0,000436  | 0,000768  | 0,001543  |
| I4              | 0,000636  | 0,000983  | 0,000480  | 0,000312  | 0,000737  |
| I5              | 0,000836  | 0,000930  | 0,000324  | 0,000192  | 0,000359  |
| Imoy            | 0,001072  | 0,000888  | 0,000474  | 0,000440  | 0,000754  |
| S               | 0,000878  | 0,000432  | 0,000361  | 0,000237  | 0,000485  |
| RP              | 0,003706  | 0,002186  | 0,001556  | 0,001151  | 0,002208  |
| RP moyenne      |           |           | 0,002161  |           |           |
| ROphi           | 0,000970  | 0,001161  | 0,000894  | 0,000857  | 0,000839  |
| ROphi moyenne   |           |           | 0,000944  |           |           |
| ROtheta         | 0,000645  | 0,002855  | 0,000349  | 0,000486  | 0,001431  |
| ROtheta moyenne |           |           | 0,001153  |           |           |
| ROpsi           | 0,000927  | 0,001832  | 0,000449  | 0,000915  | 0,001851  |
| ROpsi moyenne   |           |           | 0,001195  |           |           |

FIGURE D.6 : Commande adaptative en espace double, plate-forme chargée, le long de traj<sub>2</sub>.

| Cycle 1         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| x               | 0,000254  | -3,987494 | -4,004539 | 3,994206  | 4,002519  |
| y               | -0,002438 | 2,980596  | -2,995302 | -2,986977 | 2,984964  |
| z               | 0,450432  | 0,465866  | 0,457912  | 0,943354  | 1,253596  |
| phi             | -0,004695 | 0,182370  | 0,273127  | -0,091903 | -0,102222 |
| theta           | 0,001626  | 0,189834  | -0,171083 | 0,187863  | 0,093058  |
| psi             | -0,004983 | -0,002140 | -0,128238 | -0,208134 | 0,294518  |
| Cycle 2         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000324  | +3,989215 | -4,007081 | 3,994416  | 4,002779  |
| y               | -0,002467 | 2,979040  | -2,996322 | -2,986553 | 2,985312  |
| z               | 0,449912  | 0,468095  | 0,459413  | 0,942588  | 1,253044  |
| phi             | -0,004443 | 0,180026  | 0,271216  | -0,090871 | -0,102717 |
| theta           | 0,001456  | 0,191612  | -0,167733 | 0,187053  | 0,092979  |
| psi             | -0,005227 | -0,002270 | -0,132056 | -0,208303 | 0,294574  |
| Cycle 3         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000318  | -3,987295 | -4,005133 | 3,994990  | 4,002371  |
| y               | -0,002672 | 2,980457  | -2,995687 | -2,987465 | 2,984077  |
| z               | 0,449106  | 0,465159  | 0,456847  | 0,942274  | 1,252445  |
| phi             | -0,004320 | 0,183130  | 0,272422  | -0,091411 | -0,103614 |
| theta           | 0,001573  | 0,189186  | -0,170258 | 0,186976  | 0,093107  |
| psi             | -0,005382 | -0,001548 | -0,129208 | -0,208338 | 0,294825  |
| Cycle 4         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000217  | -3,987251 | -4,005049 | 3,994738  | 4,002915  |
| y               | -0,002547 | 2,980295  | -2,995457 | -2,986354 | 2,983716  |
| z               | 0,448720  | 0,464481  | 0,456723  | 0,942046  | 1,252475  |
| phi             | -0,004262 | 0,182133  | 0,272844  | -0,090674 | -0,103079 |
| theta           | 0,001533  | 0,189267  | -0,170701 | 0,187120  | 0,093526  |
| psi             | -0,005255 | -0,002110 | -0,128728 | -0,208490 | 0,293660  |
| Cycle 5         | Pose 1    | Pose 2    | Pose 3    | Pose 4    | Pose 5    |
| x               | 0,000349  | -3,987499 | -4,005148 | 3,994608  | 4,002516  |
| y               | -0,002120 | 2,980791  | -2,995471 | -2,987368 | 2,984935  |
| z               | 0,448714  | 0,464900  | 0,456328  | 0,942178  | 1,252357  |
| phi             | -0,003968 | 0,182116  | 0,272313  | -0,091606 | -0,102254 |
| theta           | 0,001533  | 0,189555  | -0,170357 | 0,188075  | 0,093301  |
| psi             | -0,005571 | -0,002468 | -0,129200 | -0,208380 | 0,294417  |
| xmoy            | 0,000293  | -3,987751 | -4,005390 | 3,994592  | 4,002620  |
| ymoy            | -0,002449 | 2,980236  | -2,995648 | -2,986943 | 2,984601  |
| zmoy            | 0,449377  | 0,465700  | 0,457445  | 0,942488  | 1,252783  |
| phimoy          | -0,004338 | 0,181955  | 0,272384  | -0,091293 | -0,102777 |
| thetamoy        | 0,001544  | 0,189891  | -0,170026 | 0,187417  | 0,093194  |
| psimoy          | -0,005284 | -0,002107 | -0,129486 | -0,208329 | 0,294399  |
| EP              | 0,050683  | 0,041438  | 0,043116  | 0,059223  | 0,049733  |
| EO              | 0,007008  | 0,020791  | 0,050304  | 0,017421  | 0,009241  |
| EP moyenne      |           |           | 0,048839  |           |           |
| EO moyenne      |           |           | 0,020953  |           |           |
| I1              | 0,001056  | 0,000473  | 0,001031  | 0,000949  | 0,000896  |
| I2              | 0,000537  | 0,003051  | 0,002681  | 0,000439  | 0,000774  |
| I3              | 0,000352  | 0,000741  | 0,000652  | 0,000690  | 0,000671  |
| I4              | 0,000668  | 0,001319  | 0,000821  | 0,000751  | 0,000982  |
| I5              | 0,000742  | 0,001006  | 0,001156  | 0,000526  | 0,000551  |
| Imoy            | 0,000671  | 0,001318  | 0,001268  | 0,000671  | 0,000775  |
| S               | 0,000261  | 0,001018  | 0,000813  | 0,000199  | 0,000172  |
| RP              | 0,001454  | 0,004373  | 0,003708  | 0,001268  | 0,001291  |
| RP moyenne      |           |           | 0,002419  |           |           |
| ROphi           | 0,000796  | 0,003463  | 0,002191  | 0,001534  | 0,001761  |
| ROphi moyenne   |           |           | 0,001949  |           |           |
| ROtheta         | 0,000187  | 0,002987  | 0,003967  | 0,001535  | 0,000661  |
| ROtheta moyenne |           |           | 0,001867  |           |           |
| ROpsi           | 0,000648  | 0,001029  | 0,004473  | 0,000389  | 0,001318  |
| ROpsi moyenne   |           |           | 0,001572  |           |           |

| $n^o$               | position $\mathbf{p}^T$ | orientation $\mathbf{o}^T$ | $n^o$               | position $\mathbf{p}^T$ | orientation $\mathbf{o}^T$ |
|---------------------|-------------------------|----------------------------|---------------------|-------------------------|----------------------------|
| $\mathbf{x}_{init}$ | [0 0 1,296]             | [0 0 0]                    | 4                   | [4 -3 2,296]            | [-5,73 11,46 -11,46]       |
| 1                   | [0 0 1,796]             | [0 0 40]                   | 5                   | [4 3 2,596]             | [-5,73 5,73 17,19]         |
| 2                   | [-4 3 1,796]            | [11,46 11,46 0]            | 1                   | [0 0 1,796]             | [0 0 0]                    |
| 3                   | [-4 -3 1,796]           | [17,19 -11,46 -5,73]       | $\mathbf{x}_{init}$ | [0 0 1,296]             | [0 0 0]                    |

Tableau D.1 : Points de passage de la trajectoire  $\text{traj}_2$

## BIBLIOGRAPHIE

- [AFN 98] *Robots manipulateurs industriels - Critères de performance et méthodes d'essai correspondantes*. In NF EN ISO 9283, page 74. AFNOR, 1998. Cité page 127.
- [Agahi 09] Maryam Agahi & Leila Notash. *Redundancy Resolution of Wire-Actuated Parallel Manipulators*. Special edition of the Transactions Canadian Society for Mechanical Engineering, vol. 33, no. 4, pages 561–573, 2009. Cité page 40.
- [Agrawal 09] Sunil K. Agrawal, Venketesh N. Dubey, John J. Gangloff Jr., Elizabeth Brackbill & Vivek Sangwan. *Optimization and Design of a Cable-Driven Upper Arm Exoskeleton*. In ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, pages 1–8, San Diego, California, USA, 2009. Cité page 12.
- [Albus 93] James Albus, Roger Bostelman & Nicholas Dagalakis. *The NIST Robo-crane*. Journal of Robotic Systems, vol. 10, no. 2, pages 709–724, 1993. Cité pages 8, 21, 27, 28 et 29.
- [Alexandre 12] Julien Alexandre, David Daney & Marc Gouttefarde. *Calibration of a Fully-Constrained Parallel Cable-Driven Robot*. In CISM-IFTToMM RoManSy Symposium, pages 1–8, Paris, France, 2012. Cité page 6.
- [Alp 02] Abdullah B. Alp & Sunil K. Agrawal. *Cable Suspended Robots : Design, Planning and Control*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 4275–4280, Washington, DC, USA, 2002. Cité pages 13 et 78.
- [Arai 02] Tatsuo Arai, Kei Yuasa, Yahushi Mae, Kenji Inoue, Kunio Miyawaki & Noriho Koyachi. *A Hybrid Drive Parallel Arm For Heavy Material*

- Handling*. IEEE Robotics and Automation Magazine, pages 45–54, 2002. Cité page 2.
- [Armstrong-H. 94] Brian Armstrong-H., Pierre Dupont & Carlos Canudas de Wit. *A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines and Friction*. Automatica, vol. 30, no. 7, pages 1093–1138, 1994. Cité page 91.
- [Barnes 99] Earl R. Barnes & Antonio Carlos Moretti. *A New Characterization of the Center of a Polytope*. Computational and Applied Mathematics, vol. 16, no. 1, pages 185–204, 1999. Cité page 59.
- [Barrette 05] Guillaume Barrette & Clément M. Gosselin. *Determination of the Dynamic Workspace of Cable-Driven Planar Parallel Mechanisms*. Journal of Mechanical Design, vol. 127, no. 2, pages 242–248, 2005. Cité pages 2, 6, 23 et 26.
- [Berghuis 93] Harry Berghuis, Romeo Ortega & Henk Nijmeijer. *A Robust Adaptive Robot Controller*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 9, no. 6, pages 825–830, 1993. Cité pages 93 et 101.
- [Berti 12] Alessandro Berti, Jean-Pierre Merlet & Marco Carricato. *Solving the Direct Geometrico-Static Problem of the 3-3 Cable-Driven Parallel Robots by Interval Analysis : Preliminary Results*. In Tobias Bruckmann & Andreas Pott, éditeurs, First International Conference on Cable-Driven Parallel Robots, pages 251–268, Stuttgart, Germany, 2012. Springer. Cité page 22.
- [Borgstrom 07] Per Henrik Borgstrom, Nils Peter Borgstrom, Michael J Stealey, Brett Jordan, Gaurav Sukhatme, Maxim A Batalin & William J Kaiser. *Discrete Trajectory Control Algorithms for NIMS3D, an Autonomous Underconstrained Three-Dimensional Cabled Robot*. In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pages 253–260, San Diego, CA, USA, 2007. Cité page 11.
- [Borgstrom 09a] Per Henrik Borgstrom, Brett Jordan, Bengt J. Borgstrom, Michael Stealey, Gaurav S. Sukhatme, Maxim Batalin & William Kaiser. *A Cable-Driven Robot With Self-Calibration Capabilities*. IEEE Transactions on Robotics, vol. 25, no. 5, pages 1005–1015, 2009. Cité page 6.

- [Borgstrom 09b] Per Henrik Borgstrom, Brett L. Jordan, Gaurav S. Sukhatme, Maxim A. Batalin & William J. Kaiser. *Rapid Computation of Optimally Safe Tension Distributions for Parallel Cable-Driven Robots*. IEEE Transactions on Robotics, vol. 25, no. 6, pages 1271–1281, 2009. Cité pages 40, 44, 55 et 72.
- [Bosscher 05] Paul Bosscher, Robert L. Williams II & Melissa Tummino. *A Concept for Rapidly-Deployable Cable Robot Search and Rescue Systems*. In ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, pages 1–10, Long Beach, California, USA, 2005. Cité pages 6 et 11.
- [Bosscher 06] Paul Bosscher, Andrew T. Riechel & Imme Ebert-Uphoff. *Wrench-Feasible Workspace Generation for Cable-Driven Robots*. IEEE Transactions on Robotics, vol. 22, no. 5, pages 890–902, 2006. Cité page 6.
- [Bostelman 94] Roger Bostelman, James Albus, Nicholas Dagalakis, Adam Jacoff & John Gross. *Applications of The NIST Robocrane*. In 5th International Symposium on Robotics and Manufacturing, pages 1–9, Maui, HI, USA, 1994. Cité page 8.
- [Bostelman 00] Roger Bostelman, Adam Jacoff, Fred Proctor, Tom Kramer & Albert Wavering. *Cable-Based Reconfigurable Machines for Large Scale Manufacturing*. In International Conference on New Technological Innovation for the 21st Century, pages 1–6, Ann Harbor, Michigan, USA, 2000. Cité page 5.
- [Bouchard 06] Samuel Bouchard & Clément M. Gosselin. *Kinematic Sensitivity of a Very Large Cable-Driven Parallel Mechanism*. In ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, pages 1–8, Philadelphia, Pennsylvania, USA, 2006. Cité page 4.
- [Bouchard 08] Samuel Bouchard. *Géométrie des Robots Parallèles Entraînés par des Câbles*. PhD thesis, Université de Laval, Québec, 2008. Cité page 30.
- [Bruckmann 06] Tobias Bruckmann, Andreas Pott, Manfred Hiller & Daniel Franitza. *A Modular Controller for Redundantly Actuated Tendon-Based Stewart Platforms*. In EuCoMes, The First Conference on Mechanism Science, pages 1–12, Obergurgl, Austria, 2006. Cité page 40.

- [Bruckmann 10] Tobias Bruckmann. *Auslegung und Betrieb redundanter paralleler Seilroboter*. PhD thesis, Universität Duisburg-Essen, 2010. Cité pages 61, 62 et 74.
- [Bruckmann 13] Tobias Bruckmann, Wildan Lalo, Christian Sturm, Dieter Schramm & Manfred Hiller. *Design and Realization of a High Rack Storage and Retrieval Machine based on Wire Robot Technology*. In M. A. Savi, éditeur, XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, volume 1, pages 1–9, Buzios, RJ, Brazil, 2013. Cité pages 5, 43, 89, 91, 114, 119 et 161.
- [CABLECAM ] CABLECAM. <http://www.cablecam.com/>. Cité page 11.
- [Canudas de Wit 90] C. Canudas de Wit & V. Seront. *Robust Adaptive Friction Compensation*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1383–1389, Cincinnati, OH, USA, 1990. Cité pages 87 et 92.
- [Chung 08] Wankyun Chung, Li-Chen Fu & Su-Hau Hsu. *Motion control*. In Bruno Siciliano & Oussama Khatib, éditeurs, Handbook of Robotics, pages 133–159. Springer, 2008. Cité pages 30, 34 et 84.
- [Codourey 97] Alain Codourey, Marcel Honegger & Etienne Burdet. *A Body-Oriented Method for Dynamic Modeling and Adaptative Control of Fully Parallel Robots*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1612–1618, Albuquerque, NM, USA, 1997. Cité page 93.
- [Collard 11] Jean-François Collard, Johann Lamaury & Marc Gouttefarde. *Dynamics Modelling of Large Suspended Parallel Cable-Driven Robots Multibody Model*. In J.C. Samin & P. Fisette, éditeurs, Multibody Dynamics, ECCOMAS Thematic Conference, pages 3–5, 2011. Cité page 7.
- [Craig 86] John J. Craig, Ping Hsu & Shankar S. Sastry. *Adaptative Control of Mechanical Manipulators*. The International Journal of Robotics Research, vol. 6, no. 2, pages 190–195, 1986. Cité page 92.
- [Craig 88] John J. Craig. *Adaptative Control of Mechanical Manipulators*. Addison-Wesley, 1988. Cité page 93.
- [Dagalakis 89] N. G. Dagalakis, J. S. Albus, B.-L. Wang, J. Unger & J. D. Lee. *Stiffness Study of a Parallel Link Robot Crane for Shipbuilding Applications*.

- Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, vol. 111, no. 1, pages 183–193, 1989. Cité page 8.
- [Deschenes 07] Jean-Daniel Deschenes, Philippe Lambert, Simon Perreault, Nicolas Martel-Brisson, Nathaniel Zoso, André Zaccarin, Patrick Hebert, Samuel Bouchard & Clément M. Gosselin. *A Cable-driven Parallel Mechanism for Capturing Object Appearance from Multiple Viewpoints*. In IEEE 6th International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling, pages 367–374, 2007. Cité page 11.
- [Dewdney 02] Peter Dewdney, Meyer A Nahon & Bruce Veidt. *The Large Adaptive Reflector : A Giant Radio Telescope with an Aero Twist*. Canadian Aeronautics and Space Journal, vol. 48, no. 4, pages 239–250, 2002. Cité page 11.
- [Duan 09] Baoyan Duan, Yuan Ying Qiu, F. S. Zhang & Bin Zi. *On Design and Experiment of the Feed Cable-Suspended Structure for Super Antenna*. Mechatronics, vol. 19, no. 4, pages 503–509, 2009. Cité page 11.
- [Fang 04] Shiqing Fang, Daniel Franitza, Marc Torlo, Frank Bekes & Manfred Hiller. *Motion Control of a Tendon-Based Parallel Manipulator Using Optimal Tension Distribution*. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, vol. 9, no. 3, pages 561–568, 2004. Cité pages 6, 13, 39, 43, 55, 78 et 83.
- [Ferraresi 07] Carlo Ferraresi, Marco Paolini & Francesco Pescarmona. *A New Methodology for the Determination of the Workspace of Six-DOF Redundant Parallel Structures Actuated by Nine Wires*. Robotica, vol. 25, no. 1, pages 113–120, 2007. Cité page 26.
- [Gholami 08] Pooneh Gholami, Mohammed M. Aref & Hamid D. Taghirad. *On The Control of the KNTU CDRPM : A Cable Driven Redundant Parallel Manipulator*. In IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, pages 2404–2409, 2008. Cité page 78.
- [Giaquinta 12] Mariano Giaquinta & Giuseppe Modica. *Convexe Sets and Convex Functions*. In Mathematical Analysis, pages 66–148. Birkhäuser, 2012. Cité page 171.
- [Giroto 04] Bruno Giroto & Silvano Holzer. *A Characterization of the Barycenter*. Mathematika, vol. 51, no. 1/2, pages 149–153, 2004. Cité page 172.

- [Gorman 01] Jason J. Gorman, Kathryn W. Jablolkow & David J. Cannon. *The Cable Array Robot : Theory and Experiment*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 2805–2810, Seoul, Korea, 2001. Cité page 8.
- [Gosselin 08] Clément Gosselin. *On the Determination of the Force Distribution in Overconstrained Cable-Driven Parallel Mechanisms*. In Nicolas Andreff, Olivier Company, Marc Gouttefarde, Olivier Krut & François Pierrot, éditeurs, Second International Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, pages 9–17, 2008. Cité pages 13 et 40.
- [Gouttefarde 05] Marc Gouttefarde. *Analyse de l'espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles entraînés par câbles*. PhD thesis, Faculté des Sciences et de Génie - Université Laval, Québec, 2005. Cité pages 26 et 168.
- [Gouttefarde 06] Marc Gouttefarde & Clément M. Gosselin. *Analysis of the Wrench-Closure Workspace of Planar Parallel Cable-Driven Mechanisms*. IEEE Transactions on Robotics, vol. 22, no. 3, pages 434–445, 2006. Cité page 6.
- [Hassan 11] Mahir Hassan & Amir Khajepour. *Analysis of Bounded Cable Tensions in Cable-Actuated Parallel Manipulators*. IEEE Transactions on Robotics, vol. 27, no. 5, pages 891–900, 2011. Cité pages 13 et 40.
- [Hiller 04] Manfred Hiller, Shiqing Fang, Sonja Mielczarek, Richard Verhoeven & Daniel Franitza. *Design, Analysis and Realization of Tendon-Based Parallel Manipulators*. Mechanism and Machine Theory, vol. 40, no. 4, pages 429–445, 2004. Cité page 8.
- [Hirata 92] Yukihiro Hirata & Makoto Sato. *3-Dimensional Interface Device for Virtual Work Space*. In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pages 889–896, Raleigh, North Carolina, USA, 1992. Cité pages 6 et 10.
- [Homma 04] Keiko Homma, Osamu Fukuda, Yoshihiko Nagata & Mariko Usuba. *Study of Wire-Driven Leg Rehabilitation System*. In IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, pages 1668–1673, Sendai, Japan, 2004. Cité page 12.

- [Inca-6D ] Inca-6D. <http://www.haption.com/site/index.php/fr/products-menu-fr/hardware-menu-fr/inca6d-menu-fr>. Cité pages 6 et 11.
- [Izard 12] Jean-baptiste Izard, Marc Gouttefarde, Cédric Baradat, David Culla & Damien Sallé. *Integration of a Parallel Cable-Driven Robot on an Existing Building Façade*. In Tobias Bruckmann & Andreas Pott, éditeurs, First International Conference on Cable-Driven Parallel Robots, pages 149–164, Stuttgart, Germany, 2012. Springer. Cité page 12.
- [Kaiser 94] M. J. Kaiser & T. L. Morin. *Characterizing Centers of Convex Bodies via Optimization*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 184, no. 3, pages 553–559, 1994. Cité pages 59 et 61.
- [Kawamura 93] Sadao Kawamura & Ken Ito. *A New Type of Master Robot for Teleoperation Using a Radial Wire Drive System*. In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pages 55–60, Yokohama, Japan, 1993. Cité pages 3, 25 et 43.
- [Kawamura 95] Sadao Kawamura, Won Choe, S. Tanaka & S. R. Pandian. *Development of an ultrahigh speed robot FALCON using wire-driven system*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 215–220, Nagoya, Japan, 1995. Cité pages 5, 8, 25 et 43.
- [Khalil 96] Hassan K. Khalil. *Adaptive Output Feedback Control of Nonlinear Systems Represented by Input-Output Models*. *IEEE Transactions on Robotics and Automatic Control*, vol. 41, no. 2, pages 177–188, 1996. Cité pages 99 et 127.
- [Khalil 04] Wisama Khalil & Etienne Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Hermes Science, 2004. Cité pages 82, 83, 85 et 167.
- [Khosravi 12] Mohammad A. Khosravi & Hamid D. Taghirad. *Experimental Performance of RPID Controller on a PCR*. In Tobias Bruckmann & Andreas Pott, éditeurs, First International Conference on Cable-Driven Parallel Robots, pages 337–352, Stuttgart, Germany, 2012. Springer. Cité page 80.
- [Kim 02] Seahak Kim, Yasuharu Koike & Makoto Sato. *Tension Based 7-DOF Force Feedback Device : SPIDAR-G*. *Transactions on Control, Automation, and Systems Engineering*, vol. 4, no. 1, pages 9–16, 2002. Cité page 10.

- [Kino 07] Hithoshi Kino, Toshiaki Yahiro, Takemura Fumiaki & Tetsuya Morizono. *Robust PD Control Using Adaptative Compensation for Completely Restrained Parallel-Wire Driven Robots*. IEEE Transactions on Robotics, vol. 23, no. 4, pages 803–812, 2007. Cité page 79.
- [Kozak 06] Kris Kozak, Qian Zhou & Jinsong Wang. *Static Analysis of Cable-Driven Manipulators with Non-Negligible Cable Mass*. IEEE Transactions on Robotics, vol. 22, no. 3, pages 425–433, 2006. Cité page 7.
- [Lafourcade 02] Pascal Lafourcade, Michel Llibre & Claude Reboulet. *Design of a Parallel Wire-Driven Manipulator for Wind Tunnels*. In Clément M. Gosselin & Imme Ebert-Uphoff, éditeurs, *Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, Quebec City, Quebec, Canada, 2002. Cité page 11.
- [Lafourcade 04] Pascal Lafourcade. *Etude des manipulateurs parallèles à câbles, conception d'une suspension active pour soufflerie*. PhD thesis, Thèse de Docteur Ingénieur de l'ENSAE, 2004. Cité page 41.
- [Landsberger 84] Samuel Ernest Landsberger. *Design and construction of a cable-controlled parallel link manipulator*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1984. Cité page 7.
- [Landsberger 85] Samuel E. Landsberger & Thomas B. Sheridan. *A New Design for Parallel Link Manipulator*. In *Systems, Man and Cybernetics Conference*, Tucson, 1985. Cité pages 7 et 8.
- [Landsberger 93] Samuel E. Landsberger & Thomas B. Sherindan. *A Minimal, Minimal Linkage : The Tension Compression Parallel Link Manipulator*. In *International Symposium on Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems*, pages 81–88, 1993. Cité page 7.
- [Laroche 12] Edouard Laroche, Ryad Chellal, Loïc Cuvillon & Jacques Gangloff. *A preliminary Study for  $H_\infty$  Control of Parallel Cable-Driven Manipulators*. In Tobias Bruckmann & Andreas Pott, éditeurs, *First International Conference on Cable-Driven Parallel Robots*, pages 353–371, Stuttgart, Germany, 2012. Springer. Cité pages 79 et 92.
- [Le Coroller 04] H. Le Coroller, J. Dejonghe, C. Arpesella, D. Vernet & A. Labeyrie. *Tests with a Carlina-Type Hypertelescope Prototype*. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 426, no. 1, pages 721–728, 2004. Cité page 11.

- [Le-Tien 12] Luc Le-Tien & Alin Albu-Schäffer. *Adaptive Friction Compensation in Trajectory Tracking Control of DLR Medical Robots with Elastic Joints*. In IEEE/RSJ 2012 International Conference on Intelligent Robots and Systems, pages 1149–1154, Vilamoura, Algarve, Portugal Adaptive, 2012. Cité pages 92 et 93.
- [Lee 97] Kang Woong Lee & Hassan K. Khalil. *Adaptive Output Feedback Control of Robot Manipulators Using High-Gain Observer*. International Journal Control, vol. 67, no. 6, pages 869–886, 1997. Cité pages 92, 93, 99 et 101.
- [Lee 09] Heon-Jong Lee, Yong-hwan Kim, Youn-Hee Han & Chan Yeol Park. *Centroid-Based Movement Assisted Sensor Deployment Schemes in Wireless Sensor Networks*. In IEEE 70th Vehicular Technology Conference Fall, pages 1–5, Anchorage, Alaska, USA, 2009. Cité page 60.
- [Levine 96] W. S. Levine. The Control Handbook. CRC Handbook, 1996. Cité page 38.
- [Lindermann 89] Randel Lindermann & Delbert Tesar. *Construction and Demonstration of a 9-String 6 DOF Force Reflecting Joystick for Telerobotics*. In NASA Conference on Space Telerobotics, pages 55–63, 1989. Cité pages VIII, 9 et 10.
- [Maeda 99] Kiyoshi Maeda, Satoshi Tadokoro, Toshi Takamori, Manfred Hiller & Richard Verhoeven. *On Design of a Redundant Wire-Driven Parallel Robot WARP Manipulator*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 895–900, Detroit, MI, USA, 1999. Cité page 8.
- [Merlet 04] Jean-Pierre Merlet. *Analysis of the Influence of Wires Interference on the Workspace of Wire Robots*. Advances in Robot Kinematics, vol. June 2004, pages 211–218, 2004. Cité page 6.
- [Merlet 06] Jean-Pierre Merlet. Parallel Robots, 2nd Edition. Springer, heidelberg edition, 2006. Cité page 22.
- [Merlet 08] Jean-Pierre Merlet. *Kinematics of the Wire-Driven Parallel Robot MARIONET Using Linear Actuators*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 3857–3862, Pasadena, CA, USA, 2008. Cité pages 2, 7 et 43.

- [Merlet 10] Jean-pierre Merlet & David Daney. *A Portable, Modular Parallel Wire Crane for Rescue Operations*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 2834–2839, Anchorage, Alaska, USA, 2010. Cité pages 5, 11, 12 et 23.
- [Merlet 12] Jean-Pierre Merlet. *The Kinematics of the Redundant N-1 Wire Driven Parallel Robot*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 2313–2318, Saint Paul, Minnesota, USA, 2012. Cité pages 26 et 83.
- [Mikelsons 08] Lars Mikelsons, Tobias Bruckmann, Manfred Hiller & Dieter Schramm. *A Real-Time Capable Force Calculation Algorithm for Redundant Tendon-Based Parallel Manipulators*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 3869 – 3874, Pasadena, CA, USA, 2008. Cité pages 41, 43, 44, 45, 60, 61, 73 et 74.
- [Ming 94] Aiguo Ming & Toshiro Higuchi. *Study of Multiple Degree-Of-Freedom Positioning Mechanism using Wires (Part1) - Concept, Design and Control*. International Journal of the Japan Society for Precision Engineering, vol. 28, no. 2, pages 131–138, 1994. Cité pages 6, 25 et 78.
- [Morizono 97] Tetsuya Morizono, Kazuhiro Kurahashi & Sadao Kawamura. *Realization of a Virtual Sports Training System with Parallel Wire Mechanism*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, volume pages, pages 3025–3030, Albuquerque, New Mexico, USA, 1997. Cité page 11.
- [Morizono 98] Tetsuya Morizono, Kazuhiro Kurahashi & Sadao Kawamura. *Analysis and Control of a Force Display System Driven by Parallel Wire Mechanism*. Robotica, vol. 16, no. 1, pages 551–563, 1998. Cité page 11.
- [Murayama 04] Jun Murayama, Laroussi Bougrila, Yanlin Luo, Katsuhito Akahane, Shoichi Hasegawa, Béat Hirsbrunner & Makoto Sato. *SPIDAR G & G : A Two-Handed Haptic Interface for Bimanual VR Interaction*. In Eurohaptics, pages 138–146, Munich, Germany, 2004. Cité page 10.
- [Nabat 07] Vincent Nabat. *Robots parallèles à nacelle articulée, du concept à la solution industrielle pour le pick-and-place*. PhD thesis, Université de Montpellier II, 2007. Cité page 5.

- [Natal 12] Guilherme S. Natal, Ahmed Chemori & François Pierrot. *Dual-Space Adaptive Control of Redundantly Actuated Parallel Manipulators for Extremely Fast Operations With Load Changes*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 253–258, St. Paul, MN, USA, 2012. Cité pages 79, 86, 88, 92 et 93.
- [Nocedal 06] Jorge Nocedal & Stephen Wright. *Numerical Optimization* 2nd Edition. Springer, 2006. Cité page 56.
- [Oh 03] So-Ryeok Oh & Sunil K. Agrawal. *Cable-Suspended Planar Parallel Robots with Redundant Cables : Controllers with Positive Cable Tensions*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 3023–3028, 2003. Cité pages 40 et 55.
- [Oh 04] So-Ryeok Oh & Sunil Kumar Agrawal. *Nonlinear Sliding Mode Control and Feasible Workspace Analysis for a Cable Suspended Robot with Input Constraints and Disturbances*. In American Control Conference, pages 4631–4636 vol. 5, Boston, MA, USA, 2004. Cité page 92.
- [Oh 05] So-Ryeok Oh & Sunil K. Agrawal. *Cable Suspended Planar Robots With Redundant Cables : Controllers with Positive Tensions*. IEEE Transactions on Robotics, vol. 21, no. 3, pages 457–465, 2005. Cité pages 13, 39, 40, 43 et 78.
- [Otis 09] Martin J.-D. Otis, Simon Perreault, Thien-Ly Nguyen-Dang, Patrice Lambert, Marc Gouttefarde, Denis Laurendeau & Clément M. Gosselin. *Determination and Management of Cable Interferences Between Two 6-DOF Foot Platforms in a Cable-Driven Locomotion Interface*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A : Systems and Humans, vol. 39, no. 3, pages 528–544, May 2009. Cité pages 6 et 40.
- [Ottaviano 09] Erika Ottaviano, Marco Ceccarelli & Francesco Palmucci. *An Application of CaTraSys, a Cable-Based Parallel Measuring System for an Experimental Characterization of Human Walking*. Robotica, vol. 28, no. 1, pages 119–133, 2009. Cité pages 11 et 12.
- [Perreault 08] Simon Perreault & Clément M. Gosselin. *Cable-Driven Parallel Mechanisms : Application to a Locomotion Interface*. Journal of Mechanical Design, vol. 130, no. 10, pages 1–8, 2008. Cité page 11.

- [Pham 06] Cong Bang Pham, Song Huat Yeo, Guilin Yang, Mustafa Shabbir Kurbanhusen & I-Ming Chen. *Force-Closure Workspace Analysis of Cable-Driven Parallel Mechanisms*. Mechanism and Machine Theory, vol. 41, no. 1, pages 53–69, January 2006. Cité page 6.
- [Pott 09] Andreas Pott, Tobias Bruckmann & Lars Mikelsons. *Closed-form Force Distribution for Parallel Wire Robots*. In Computational Kinematics, pages 1–10, 2009. Cité page 41.
- [Pott 10] Andreas Pott. *An Algorithm for Real-Time Forward Kinematics of Cable-Driven Parallel Robots*. In Springer, editeur, Advances in Robot Kinematics, pages 529–538, Piran-Portoroz, Slovenia, 2010. Cité page 22.
- [Pott 12a] Andreas Pott. *Influence of Pulley Kinematics on Cable-Driven Parallel Robots*. In Jadran Lenarčič & Manfred Husty, éditeurs, Latest Advances in Robot Kinematics, pages 197–204, Innsbruck, Austria, 2012. Springer. Cité page 2.
- [Pott 12b] Andreas Pott, Hendrick Mütterich, Werner Kraus, Valentine Schmidt, Philipp Miermeister & Alexander Verl. *IPAnema : a Family of Cable-Driven Parallel Robots for Industrial Applications*. In Tobias Bruckmann & Andreas Pott, éditeurs, First International Conference on Cable-Driven Parallel Robots, pages 119–134, Stuttgart, Germany, 2012. Springer. Cité pages 8 et 43.
- [Priel 90] Marc Priel. *Les Robots Industriels : Caractéristiques, Performances et Choix*. AFNOR, 1990. Cité pages XI, 124 et 129.
- [Riechel 04a] Andrew T. Riechel, Paul Bosscher, Harvey Lipkin & Imme Ebert-Uphoff. *Concept Paper : Cable-Driven Robots for Use in Hazardous Environments*. In Tenth International Topical Meeting on Robotics and Remote Systems for Hazardous Environments, pages 1–7, 2004. Cité page 8.
- [Riechel 04b] Andrew T. Riechel & Imme Ebert-Uphoff. *Force-Feasible Workspace Analysis for Underconstrained, Point-Mass Cable Robots*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 4956–4962, 2004. Cité page 6.

- [Riehl 10] Nicolas Riehl, Marc Gouttefarde, Cédric Baradat & François Pierrot. *On the Determination of Cable Characteristics for Large Dimension Cable-Driven Parallel Mechanisms*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 4709–4714, Anchorage, Alaska, USA, 2010. Cité page 7.
- [Riehl 11] Nicolas Riehl. *Modélisation et conception de robots parallèles à câbles de grande dimension*. PhD thesis, Université de Montpellier II, France, 2011. Cité pages 2 et 7.
- [Roberts 98] Rodney G. Roberts, Todd Graham & Thomas Lippitt. *On the Inverse Kinematics, Statics, and Fault Tolerance of Cable-Suspended Robots*. Journal of Robotic Systems, vol. 15, no. 10, pages 581–597, 1998. Cité page 25.
- [Rosati 07] G Rosati, P Gallina & S Masiero. *Design, Implementation and Clinical Tests of a Wire-Based Robot for Neurorehabilitation*. IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, vol. 15, no. 1, pages 560–569, 2007. Cité page 12.
- [Shang 09] Weiwei Shang & Shuang Cong. *Nonlinear computed torque control for a high-speed planar parallel manipulator*. Mechatronics, vol. 19, no. 6, pages 987–992, September 2009. Cité page 93.
- [Shiang 99] Wei-Jung Shiang, David J. Cannon & Jason J. Gorman. *Dynamic Analysis of Cable Array Robotic Crane*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 2495 – 2500 vol.4, Detroit, Michigan, USA, 1999. Cité page 25.
- [Shiang 00] Wei-Jung Shiang, David J. Cannon & Jason Gorman. *Optimal Force Distribution Applied to a Robotic Crane with Flexible Cables*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1948–1954, San Francisco, CA, USA, 2000. Cité pages 13, 39 et 55.
- [Siciliano 09] Bruno Siciliano. *Robotics : Modelling, Planning and Control*. Springer, 2009. Cité page 32.
- [SKYCAM ] SKYCAM. <http://www.skycam.tv/>. Cité page 11.
- [Slotine 87] Jean-Jacques E. Slotine & Weiping Li. *On the Adaptive Control of Robot Manipulators*. The International Journal of Robotics Research, vol. 6, no. 3, pages 49–59, September 1987. Cité pages 92, 93 et 102.

- [Slotine 91] Jean-Jacques E. Slotine & Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991. Cité pages 80, 86, 93 et 103.
- [Sonnevend 85] Gy Sonnevend. *An "Analytical Centre" for Polyhedrons and New Classes of Global Algorithms for Linear (Smooth, Convex) Programming*. In A. Prékopa, J. Szelezsáan & B. Strazicky, editeurs, *System Modelling and Optimization. Proceedings of 12th IFIP Conference*, pages 866–875, Budapest, Hungary, 1985. Springer. Cité page 59.
- [SPIDERCAM ] SPIDERCAM. <http://www.spidercam.org/en>. Cité page 11.
- [Stump 06] Ethan Stump & Vijay Kumar. *Workspaces of Cable-Actuated Parallel Manipulators*. *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, no. 1, page 159, 2006. Cité pages 2 et 6.
- [Surdilovic 04] Dragoljub Surdilovic & Rolf Bemhardt. *STRING-MAN : A New Wire Robot for Gait Rehabilitation*. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2031–2036, New Orleans, Louisiana, USA, 2004. Cité page 12.
- [Tadokoro 96] Satoshi Tadokoro, Shinsuke Nishioka, Tetsuya Kimura, Motofumi Hattori, Toshi Takamori & Kiyoshi Maeda. *On Fundamental Design of Wire Configurations of Wire-Driven Parallel Manipulators with Redundancy*. *ASME Japan/USA Symposium on Flexible Automotion*, vol. 1, pages 151–158, 1996. Cité pages 25 et 26.
- [Tadokoro 02] Satoshi Tadokoro, Yoshio Murao, Manfred Hiller, Rie Murata, Hideaki Kohkawa & Toshiyuki Matsushima. *A Motion Base With 6-DOF by Parallel Cable Drive Architecture*. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 7, no. 2, pages 115–123, 2002. Cité page 43.
- [Vafaei 10] Alaleh Vafaei, Mohammad M. Aref & Hamid D. Taghirad. *Integrated Controller for an Over Constrained Cable Driven Parallel Manipulator : KNTU CDRPM*. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 650 – 655, Anchorage, Alaska, USA, 2010. Cité pages 13, 55 et 79.
- [Verhoeven 00] Richard Verhoeven & Manfred Hiller. *Estimating the Controllable Workspace of Tendon-Based Stewart Platforms*. In Jadran Lenarčič & Michael Stanišić, editeurs, *Advanced in Robot Kinematics*, pages 277–284. Springer Netherlands, 2000. Cité pages 6 et 26.

- [Verhoeven 02] Richard Verhoeven & Manfred Hiller. *Tension Distribution in Tendon-Based Stewart Platform*. In Jadran Lenarčič & Frederico Thomas, éditeurs, *Advanced in Robot Kinematics*, pages 1–8, Ljubljana, Slovenia, 2002. Springer. Cité pages 13, 40 et 61.
- [Verhoeven 04] Richard Verhoeven. *Analysis of the workspace of tendon-based stewart-platforms*. PhD thesis, Universität Duisburg-Essen, 2004. Cité pages 6, 40 et 171.
- [Voss 12] K. H. J. Voss, Volkert van der Wijk & Just L. Herder. *Investigation of a Cable-Driven Parallel Mechanism for Interaction with a Variety of Surfaces, Applied to the Cleaning of Free-Form Buildings*. In Jadran Lenarčič & Manfred Husty, éditeurs, *Latest Advances in Robot Kinematics*, pages 261–268, Innsbruck, Austria, 2012. Cité pages 12 et 26.
- [Wampler 86] Charles Wampler. *Manipulator Inverse Kinematic Solutions Based on Vector Formulations and Damped Least-Squares Methods*. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 16, no. 1, pages 93–101, January 1986. Cité page 170.
- [Whitney 69] D.E. Whitney. *Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses*. *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*, vol. 10, no. 2, pages 47–53, 1969. Cité page 23.
- [Williams II 98] Robert L. Williams II. *Cable Suspended Haptic Interface*. *International Journal of Virtual Reality*, vol. 3, no. 3, pages 13–21, 1998. Cité pages 10 et 25.
- [Williams II 99] Robert L. Williams II. *Planar Cable-Suspended Haptic Interface : Design for Wrench Exertion*. In *ASME design Technical Conferences*, pages 1–7, Las Vegas, Nevada, USA, 1999. Cité page 10.
- [Wischnitzer 08] Y. Wischnitzer, N. Shvalb & M. Shoham. *Wire-driven Parallel Robot : Permitting Collisions Between Wires*. *The International Journal of Robotics Research*, vol. 27, no. 9, pages 1007–1026, September 2008. Cité page 6.
- [Zhou 12] Xiaobo Zhou, Chin Pei Tang & Venkat Krovi. *Analysis Framework for Cooperating Mobile Cable Robots*. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3128–3133, Saint Paul, Minnesota, USA, May 2012. Cité page 2.

- [Zi 08] Bin Zi, Baoyan Duan, Jingli Du & Hong Bao. *Dynamic Modeling and Active Control of a Cable-Suspended Parallel Robot*. *Mechatronics*, vol. 18, no. 1, pages 1–12, February 2008. Cité page 79.
- [Ziegler 95] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. In Volume 152 de Graduate Texts in Mathematics Series, page 370. Springer, 1995. Cité pages 60 et 61.
- [Zitzewitz 09] Joachim Zitzewitz, Georg Rauter, Reto Steiner, Andreas Brunschweiler & Robert Riener. *A Versatile Wire Robot Concept as a Haptic Interface for Sport Simulation*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 313–318, Kobe, Japan, 2009. Cité page 11.

## Résumé

Les Robots Parallèles à Câbles (RPC) sont particulièrement adaptés pour des applications telles que le transport de charges lourdes au travers de grands espaces de travail. Afin de contrôler l'ensemble des degrés de liberté de la plate-forme tout en optimisant la taille de l'espace de travail du robot par rapport au volume de sa structure, la redondance d'actionnement est nécessaire. Dans cette thèse, un algorithme de distribution des tensions des câbles compatible temps-réel est introduit. Il permet de calculer efficacement différentes solutions optimales au problème de la distribution des tensions des RPC à deux degrés de redondance. Des schémas de commande adaptés aux RPC, intégrant l'algorithme de distribution des tensions, sont ensuite proposés. Un schéma de commande en espace double est introduit pour compenser la dynamique de la plate-forme et des enrouleurs. Afin de pallier les incertitudes et les variations des paramètres des modèles, une commande adaptative en espace double est finalement proposée. Des résultats expérimentaux prouvent la compatibilité temps-réel des algorithmes et des lois de commande développés dans cette thèse, ainsi que leur stabilité le long de la trajectoire suivie.

**Mots clefs :** *Robots parallèles à câbles, redondance d'actionnement, commande des mouvements*

---

## Abstract

Cable-driven parallel robots (CDPR) are particularly well adapted for some applications such as handling of heavy payloads over large workspaces. However, in order to fully control all the degrees of freedom of the mobile platform and to obtain large workspace to footprint ratios, redundant actuation may be required, which implies the determination of feasible cable tension distributions. In this thesis, in the case of CDPR with two degrees of actuation redundancy, real-time compatible algorithms capable of efficiently calculating various continuous tension distribution are introduced. Furthermore, efficient control schemes are proposed in order to increase the CDPR tracking performances. First, an dual-space feedforward control scheme is introduced to compensate for the plate-forme and winches dynamics. In order to deal with parametric variations and uncertainties in the models, an adaptive dual-space motion control scheme for CDPR is finally presented. Experimental results validate the reel-time efficiency of the proposed tension distribution algorithm and control schemes as well as their stability along the tracked trajectory.

**Keywords:** *Cable-driven parallel robots, actuation redundancy, motion control*