



**HAL**  
open science

**CALCUL DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DES  
STRUCTURES MINCES PAR LA METHODE DES  
SINGULARITES. DEVELOPPEMENT DU PRINCIPE  
DE MINIMISATION ET APPLICATION A  
DIFFERENTES CONFIGURATIONS SUB- ET  
PARTIELLEMENT CAVITANTES.**

Christian Pellone

► **To cite this version:**

Christian Pellone. CALCUL DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DES STRUCTURES MINCES PAR LA METHODE DES SINGULARITES. DEVELOPPEMENT DU PRINCIPE DE MINIMISATION ET APPLICATION A DIFFERENTES CONFIGURATIONS SUB- ET PARTIELLEMENT CAVITANTES.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1985. tel-01023185

**HAL Id: tel-01023185**

**<https://theses.hal.science/tel-01023185v1>**

Submitted on 11 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

# THESE

présentée à

**L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE**

et

**L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE  
DE GRENOBLE**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR D'ETAT ES-SCIENCES PHYSIQUES**

par

**Christian PELLONE**

ingénieur ENSM

Docteur ingénieur USM et INPG

Attaché de recherche au CNRS

Sujet

**CALCUL DE L'ECOULEMENT AUTOUR DES STRUCTURES  
MINCES PAR LA METHODE DES SINGULARITES**

**Developpement du principe de minimisation  
et application à différentes configurations sub- et partiellement cavitantes**

---

Soutenue le 26 Avril 1985 devant la commission d'Examen

M. Moreau	Président
M. Euvrard	
M. Germain	
M. Luu	Examineurs
M. Rehbach	
M. Bovis	
M. Rowe	

A V A N T - P R O P O S

=====

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé à l'Institut de Mécanique de GRENOBLE grâce au concours de différentes personnes que je tiens à remercier ici. Il s'agit de :

Monsieur A. ROWE qui m'a dirigé tout au long de ce travail. Pour son aide efficace et agréable, je lui suis reconnaissant. Je remercie également les membres du CREMHYG pour leur sympathie.

Madame MEROT a mis tout son savoir-faire dans le travail de dactylographie. Je la remercie beaucoup.

Je remercie également :

Monsieur RIONDET et Mesdames JULIEN et CEPEDA pour la réalisation matérielle de ce mémoire.

Je suis honoré que Messieurs MOREAU, Professeur à l'Ecole Supérieure d'Hydraulique, EUVRARD, Professeur à l'Université de PARIS VI, GERMAIN, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de GRENOBLE, ROWE, Directeur du Centre de Recherche et Etudes des Machines Hydrauliques de GRENOBLE, REHBACH, Ingénieur de Recherche à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, LUU, Directeur de Recherche au Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, BOVIS, Ingénieur de l'Armement au Bassin d'Essais des CARENES de PARIS, aient accepté de s'intéresser à mon travail. Je les en remercie.

NOTA : les moyens de calcul concernant la seconde partie ont été attribués par le Conseil Scientifique du Centre de Calcul Vectoriel pour le Recherche (hormis les interfaces).



S O M M A I R E  
= = = = =

	Page
INTRODUCTION .....	1
 PREMIERE PARTIE : STRUCTURES CAVITANTES EN ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL .....	 6
Principales notations.....	7
Préliminaire.....	9
Chapitre I : Equations intégrales du problème.....	10
I.1 Equations de l'écoulement et conditions aux limites.....	10
I.2 Equations intégrales.....	13
I.3 Problème discrétisé.....	15
I.4 Première méthode : loi des doublets continus ; condition de JOUKOVSKY expli- cite.....	16
I.5 Deuxième méthode : loi des doublets dis- continus ; condition de JOUKOVSKY impli- cite.....	18
I.6 Résolution et calcul itératif de la cavi- té.....	20
I.7 Ecoulement en milieu confiné, grille d'au- be.....	21
 ChapitreII : Applications et resultats.....	 26
II.1 Résultats en régime subcavitant .....	26
II.1.1 Comparaison avec les résultats analy- tiques.....	28
II.I.2 Comparaison avec les résultats étalons..	38

.../...

II.1.3 Choix de la méthode .....	39
II.2. Ecoulements sub et partiellement cavi- tants en milieu confiné .....	40
II.2.1 Influence de la hauteur du tunnel en écou- lement subcavitant.....	41
II.2.2 Régime cavitant. Influence du point de détachement.....	48
II.2.3 Régime cavitant. Influence de la longueur de cavité.....	52
II.2.4 Régime cavitant. Influence de la hauteur du tunnel .....	56
II.3 Ecoulement autour d'une grille d'aube...	59

DEUXIEME PARTIE : AILE MINCE D'ENVERGURE FINIE.

APPLICATION AU PROBLEME DE L'HELICE SUBCAVITANTE.....	66
Principales notations.....	67
Préliminaire.....	70
Chapitre I : Ecoulement subcavitant autour d'une aile min- ce d'envergure finie.....	71
I.1 Equations intégrales du problème.....	71
I.1.1 Equations de l'écoulement et conditions aux limites .....	71
I.1.2 Equations intégrales.....	73
I.1.3. Condition de JOUKOVSKY. Condition sur le sillage.....	76
I.2 Problème discrétisé.....	79
I.2.1 Discrétisation des équations .....	79
I.2.2 Fermeture du système d'équations.....	84
I.3 Premier modèle : loi des tourbillons pré- déterminée, condition de JOUKOVSKY expli- cite.....	85
I.3.1 Détermination de la loi des tourbillons..	85

	Page
I.3.2 Expression matricielle des équations intégrales et mode de résolution .....	90
I.4 Deuxième modèle : loi des tourbillons calculée ; condition de JOUKOVSKY impli- cite.....	91
I.4.1 Considérations générales du modèle .....	91
I.4.2 Introduction des équations de minimisation.	93
I.5. Applications et résultats.....	97
I.5.1 Aspects numériques.....	97
I.5.2 Résultats.....	98
 Chapitre II : Calcul de l'hélice subcavitante.....	 115
II.1 Considérations générales .....	115
II.2 Formulation du problème .....	116
II.2.1 Définition de la géométrie d'une pale ....	116
II.2.2 Champ de vitesse induit par le sillage du bateau.....	113
II.2.3 Equations de l'écoulement et conditions aux limites.....	120
II.2.4 Equations intégrales en écoulement relatif permanent.....	121
II.2.5 Coefficient de pression et efforts globaux.	123
II.3 Discrétisation du problème.....	125
II.3.1 Maillage de la pale de référence et de son sillage.....	125
II.3.2 Equations matricielles et mode de résolu- tion.....	126
II.4 Résultats.....	129
 BILAN DE L'ETUDE .....	 147
 REFERENCES.....	 149
ANNEXES.....	154





## I N T R O D U C T I O N

=====

Jusqu'à une date récente, le problème du calcul des machines hydrauliques avec prise en compte de la cavitation a été assez peu développé, sauf pour des cas d'espèces souvent peu représentatifs de la réalité. Les efforts les plus significatifs ont été faits sans doute dans le domaine des hélices marines ; mais là aussi, le problème le plus souvent abordé est celui très schématique de la grille d'aube censée représenter une section de l'écoulement autour des pales. Aujourd'hui, compte-tenu de l'augmentation des performances des machines sans cesse accrue (turbines, pompes de haute chute à un ou deux étages, pompes à grande vitesse de rotation, hélices de navires rapides, etc.), la cavitation est de plus en plus présente dans les écoulements. Les problèmes sous-jacents sont : le blocage dans les pompes ou les hélices, les instabilités, les pulsations de pression, l'érosion, et d'une manière générale, l'influence du développement de la cavitation sur la chute des caractéristiques : poussée, rendement, débit spécifique, pression. En conséquence, il est maintenant souhaitable de développer des méthodes de calcul tenant compte, au sein des machines hydrauliques, de l'existence des poches de vapeur qui se forment dans les régions de basse pression et se referment à la paroi des pales ou des aubes. Ce type de cavitation, qu'on désigne sous le terme de cavitation partielle, est en tout état de cause celui qui réagit le plus fortement sur les performances.

Le présent travail représente un effort pour développer une méthode générale de calcul permettant la modélisation des écoulements partiellement cavitants dans les machines. Compte-tenu des performances des ordinateurs actuels, la modélisation numérique offre de grandes possibilités qu'il n'est plus possible d'ignorer. Le travail effectué a donc été réalisé dans ce cadre. D'autre part, un des objectifs prioritaires affichés dans cette étude est le calcul des hélices marines ; dans ce cas, il est particulièrement intéressant de développer une méthode non linéaire, car les conditions de la naissance de la cavitation au bord d'attaque peuvent alors faire l'objet d'une étude fine, la non linéarité permettant de formuler exactement les conditions aux limites à la frontière de l'écoulement. A cause de ce problème de l'hélice, la méthode choisie est une méthode intégrale, ce type de méthode étant bien adapté au problème de NEUMANN extérieur.

Cette méthode est développée dans le cadre des hypothèses du fluide parfait et de l'écoulement irrotationnel ([15] à [20]). On sait alors que le potentiel des vitesses en tout point de l'espace est généré par une répartition mixte de simple et de double couche. L'écriture des conditions aux limites (condition de glissement sur l'aile, condition de pression constante sur la cavité [10]) conduit à une équation intégrale aux frontières ; la résolution de celle-ci est rendue possible par la technique de discrétisation permettant de poser un système d'équations linéaires.

Deux préoccupations essentielles ont guidé cette étude :

- 1 - l'extension d'une telle méthode au cas des écoulements cavitants, et ultérieurement aux écoulements instationnaires doit être possible,
- 2 - dans le cas où le problème reste subcavitant, la qualité des résultats doit être assurée pour des structures de très faible épaisseur relative.

L'utilisation d'une méthode intégrale pose en fait un problème aigu concernant le deuxième point. En effet, les répartitions de singularités classiques, d'intensité constante par facettes (méthode du premier ordre), ne permettent pas de traiter des profils de faible épaisseur [11] ; dans ce cas, à cause de la forte interaction entre les singularités à l'extrados et à l'intrados, on peut obtenir, à la surface de l'aile, des coefficients de pression incorrects. La raison fondamentale de cette défaillance, tient au fait que le système d'équations intégrales qui régit le problème est traité par discrétisation. Il est important alors d'avoir une méthode permettant de traiter d'une façon correcte l'écoulement autour de structures minces ; cela est intéressant en particulier pour les hélices marines ou les pompes où l'épaisseur relative des pales ou des aubes atteint couramment 2 %, alors que l'erreur de discrétisation signalée plus haut devient significative pour des épaisseurs relatives inférieures à 7 %. Une technique couramment utilisée pour résoudre le problème précédent consiste à répartir les singularités sur le squelette de l'aile. L'inconvénient de cette technique est que le coefficient de pression présente une singularité au bord d'attaque. D'autre part, une telle méthode est difficilement utilisable dans le cas cavitant où la poche de vapeur introduit une épaisseur relative locale importante.

Pour toutes les raisons évoquées, il est donc nécessaire de développer une méthode utilisant des singularités réparties sur les surfaces mouillées.

Dans cette voie, une approche possible aurait été de développer des méthodes intégrales utilisant des répartitions de singularités d'ordre supérieur ;

on peut citer à ce propos les travaux de A. ROBERTS et P.E RUBBERT ([12], [13]) Ces méthodes garantissent la qualité des résultats mais l'inconvénient majeur est que les temps de calcul deviennent très importants, dans le cas des configurations tridimensionnelles. Pour cette raison, nous avons utilisé une méthode de singularités à répartition constante (méthode du premier ordre), mais couplée à une méthode de minimisation. Le principe, utilisé pour la première fois par HUNT & SEMPLE [14] consiste à satisfaire les conditions aux limites, d'une façon exacte aux points de contrôle, d'une façon optimale sur les surfaces entre les points de contrôle. Le fait de satisfaire les conditions aux limites uniquement en un nombre fini de points, n'implique pas en effet forcément que celles-ci soient réalisées sur la surface entre ces points. L'écart, ainsi obtenu sur les conditions aux limites, intégré sur la surface totale, donne une estimation globale de l'erreur introduite par la discrétisation. Ce défaut est caractérisé par la valeur du "débit de fuite". Le débit de fuite étant directement lié au gradient des singularités [11], [22], les résultats obtenus sont bons à condition que le gradient moyen relatif à deux densités consécutives soit aussi faible que possible.

En ce qui concerne le premier point, on a du développer un modèle de cavité assurant la fermeture de celle-ci sur le profil. Dans le cadre de l'écoulement à potentiel, la modélisation de la zone de fermeture de la cavité est impossible, l'écoulement dans cette zone étant rotationnel. De plus, l'observation en tunnel hydrodynamique met en évidence le caractère instationnaire et turbulent de l'écoulement à l'arrière de la poche. On a alors utilisé l'hypothèse simplificatrice de l'existence d'une ligne de courant raccordant d'une manière régulière la cavité à l'extrados du profil [22]; de fait, le modèle est rendu stationnaire par la fiction d'une surface de déplacement supposée représenter le sillage de la cavité.

La présente étude comporte deux parties :

- la première partie concerne l'écoulement bidimensionnel permanent autour de profils minces partiellement cavitants. Le problème est résolu à l'aide de deux méthodes de calcul utilisant une répartition mixte de simple et de double couche répartie sur les frontières de l'écoulement. L'arbitraire de la double couche est mis à profit pour construire celle qui minimisera au mieux les erreurs de discrétisation sur les conditions aux limites. Les distributions de simple et de double couche sont ainsi résultats du problème. Les équations supplémentaires de minimisation sont obtenues en assurant à la norme d'un certain vecteur (représentatif du gradient des singularités) d'être minimum. Le calcul de la forme exacte de la cavité nécessite une procédure itérative qui permet d'

obtenir celle-ci numériquement point par point. La différence des deux méthodes exposées porte sur deux points : la première utilise une condition de JOUKOVSKY explicite et une répartition de double couche continue, la seconde utilise une condition de JOUKOVSKY implicite et une répartition de double couche continue par morceaux. Dans le but de valider ces deux méthodes, une étude comparative est effectuée, en écoulement subcavitant, sur des profils de JOUKOVSKY dont la solution analytique est connue. Les résultats sont également confrontés à des résultats obtenus par ROBERTS & RUBBERT [12] , [13] . L'efficacité de ces méthodes a permis d'étendre le calcul au cas des écoulements confinés (profil cavitant dans un tunnel) et au cas de la grille d'aube.

- La deuxième partie concerne l'écoulement tridimensionnel permanent autour d'une aile mince d'envergure finie et autour d'une hélice fonctionnant en régime subcavitant.

En ce qui concerne le cas de l'aile d'envergure finie, deux modèles de calcul sont présentés. Le premier modèle est original par rapport à l'étude bidimensionnelle présentée précédemment ; il a l'avantage de permettre des temps de calcul réduits, mais son inconvénient est d'être assez mal adapté à la description des écoulements cavitants [26] . Ce premier modèle consiste à déterminer au préalable la forme de la répartition de double couche. A cet effet, un calcul bidimensionnel autour d'une section de l'aile détermine, sur le squelette de la section considérée, la répartition de tourbillons qui satisfait au sens des moindres carrés les conditions aux limites sur le profil. La loi ainsi obtenue, multipliée par un coefficient ne dépendant que de l'envergure de l'aile, et projetée sur le corps normalement à la ligne de cambrure, permet de définir la répartition de double couche partout sur la surface de l'aile. Le deuxième modèle est une extension directe de la deuxième méthode développée dans la première partie et considérée comme la plus performante. Pour ces deux modèles, le problème discrétisé a été traité en prenant sur chaque facette une répartition de simple couche constante et une répartition de double couche variant linéairement suivant deux directions indépendantes de la facette correspondante. Ces types de singularités permettent d'assurer au bord de fuite, l'existence d'une discontinuité de vitesse transverse, essentielle pour garantir l'aspect réaliste de la modélisation.

Le caractère non portant du sillage, ainsi que la continuité des pressions au travers de celui-ci, exige que les lignes tourbillons du sillage soient aussi des lignes de courant ; cette dernière condition ne peut être obtenue que par relaxation du sillage. On peut citer à ce propos, les méthodes mises au point par REHBACH [30] , BUTTER [31] , JEPPE [32] .

Pour des raisons de coût informatique, le modèle développé ici utilise un sillage rigidifié, la condition se traduisant alors sur celui-ci par une vorticité nulle suivant l'envergure

Les résultats obtenus par les deux modèles ont été comparés avec des résultats ayant valeur de référence, et présentés dans l'étude [34] .

En ce qui concerne le calcul de l'hélice, le deuxième modèle développé à propos de l'aile d'envergure finie est utilisé dans la représentation de chaque pale. Dans l'établissement du code de calcul, il a été tenu le plus grand compte des trois possibilités suivantes :

- extension du code aux écoulements partiellement cavitants sans qu'il soit nécessaire de reprendre la modélisation de l'hélice
- relaxation de la nappe du sillage
- structure de résolution matricielle adaptable au cas instationnaire

L'hélice traitée travaille dans un champ non uniforme radialement, représentant un sillage simplifié. Cette simplification consiste à supposer que les composantes de ce champ ne sont fonction que du rayon ; dans ce cas, l'écoulement relatif à une pale est de nature stationnaire. D'autre part, le sillage de l'hélice est supposé être constitué de lignes tourbillons hélicoïdales, s'échappant du bord de fuite de chaque pale et reposant sur la surface hélicoïdale générée par le bord de fuite de chaque pale dans le mouvement d'ensemble de l'hélice.

Les résultats obtenus sont présentés sur un tracé d'hélice fourni par le BASSIN D'ESSAIS DES CARENES    PARIS, et comparés à des résultats expérimentaux.

-----



P R E M I E R E   P A R T I E



STRUCTURES CAVITANTES EN ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL

---





## PRINCIPALES NOTATIONS

-----

$\vec{ox}$	axe horizontal
$\vec{oy}$	axe vertical ascendant
$\vec{i}$	vecteur unitaire suivant $\vec{ox}$
$\vec{j}$	vecteur unitaire suivant $\vec{oy}$
$\omega'XY$	repère de définition de l'aile
$\vec{V}_\infty$	vitesse du fluide à l'infini amont
$\Phi_M$	potentiel des vitesses au point M
$\vec{V}_M$	vitesse totale au point M
$\alpha$	incidence de l'aile
$z = x + iy$	affixe d'un point M dans le plan complexe (xoy)
$\bar{z}$	complexe conjugué de z
i	imaginaire pur $i^2 = -1$
<b>Im</b>	partie imaginaire d'un complexe
<b>Re</b>	partie réelle d'un complexe
$\vec{t}_M$	vecteur unitaire tangent en un point M du contour
$\vec{n}_M$	normale unitaire extérieure en un point M du contour
$\alpha_M$	angle orienté : $\vec{i}, \vec{t}_M$
<b>s</b>	abscisse curviligne
$\rho$	masse volumique du fluide
g	accélération de la pesanteur
<b>PM</b>	pression en un point M du fluide
<b>P<sub>c</sub></b>	pression régnant dans la cavité
<b>l<sub>cav</sub></b>	longueur de cavité
<b>P<sub>∞</sub></b>	pression de référence

$$C_{pM} = \frac{P_M - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho \vec{V}_\infty^2} \quad \text{coefficient de pression en M}$$

$$K = \frac{P_\infty - P_c}{\frac{1}{2} \rho \vec{V}_\infty^2} \quad \text{nombre de cavitation}$$

D longueur choisie dans la direction orthogonale au plan de l'écoulement

**L** longueur de référence dans le plan de l'écoulement (corde du profil)  
 **$\vec{F}$**  effort du fluide exercé sur l'aile (fil)

$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{i}}{\frac{1}{2} \rho D L V_{\infty}^2} = C_x \quad \text{coefficient de traînée}$$

$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{j}}{\frac{1}{2} \rho D L V_{\infty}^2} = C_z \quad \text{coefficient de portance}$$

$\sigma$  répartition de sources

$\gamma$  répartition de tourbillons

$\tilde{\gamma}$  vorticité équivalente

$h_0$  hauteur du tunnel

$h$  pas géométrique de la grille d'aube

$\beta$  angle de la grille d'aube

## PRELIMINAIRE

-----

L'objet de cette première partie est de mettre au point une méthode de calcul assez efficace pour pouvoir décrire l'écoulement bidimensionnel permanent autour de profils minces aussi bien en régime subcavitant qu'en régime de cavitation partielle. Les hypothèses faites sont celles du fluide parfait et de l'écoulement irrotationnel. La présente étude est faite en considérant la pression dans la cavité comme une inconnue du problème, la longueur de cavité étant alors imposée. Deux méthodes de calcul sont présentées. La première, développée par H. LEMONNIER dans l'étude [22] et décrite au paragraphe I.4 utilise une répartition de double couche continue.

Comme nous le verrons dans le chapitre II, ce modèle présente deux inconvénients :

- à forte incidence, des instabilités numériques apparaissent à l'arrière du profil,
- d'autre part, celle-ci nécessite un maillage du profil très régulier ; dans le cas où le maillage se relâche, de fortes oscillations apparaissent sur les courbes du coefficient de pression.

La deuxième méthode, développée au paragraphe I.5 permet alors de lever ces difficultés. Celle-ci consiste à utiliser une loi de double couche non constante, et discontinue par morceaux. Le fait de ne pas imposer la continuité des doublets normaux aux extrémités des facettes permet d'éviter les instabilités mentionnées précédemment, et par voie de conséquence d'obtenir une meilleure minimisation du débit de fuite. Les résultats comparatifs des deux méthodes sont présentés au chapitre II.

L'extension au cas des écoulements en tunnel et au cas de la grille d'aube, est présentée au paragraphe I.7. Dans ce cas, l'influence des parois est prise en compte et permet d'obtenir des résultats plus proches des conditions de l'expérience. Le problème de la cavitation en milieu confiné est un problème important encore mal maîtrisé à ce jour, car il met très fortement en cause la validité du schéma utilisé pour modéliser le sillage.

## CHAPITRE I

## EQUATIONS INTEGRALES DU PROBLEME

## I . 1 : Equations de l'écoulement et conditions aux limites

Le profil est défini dans le repère  $(\omega'XY)$  placé à une incidence  $\alpha$  par rapport à la vitesse  $\vec{V}_\infty$  du fluide à l'infini amont. Le repère  $(oxy)$  est tel que l'axe  $\vec{ox}$  soit parallèle à  $\vec{V}_\infty$ , l'axe  $\vec{oy}$  se déduisant de  $\vec{ox}$  par rotation de  $+\frac{\pi}{2}$  dans le sens trigonométrique (Fig. 1)

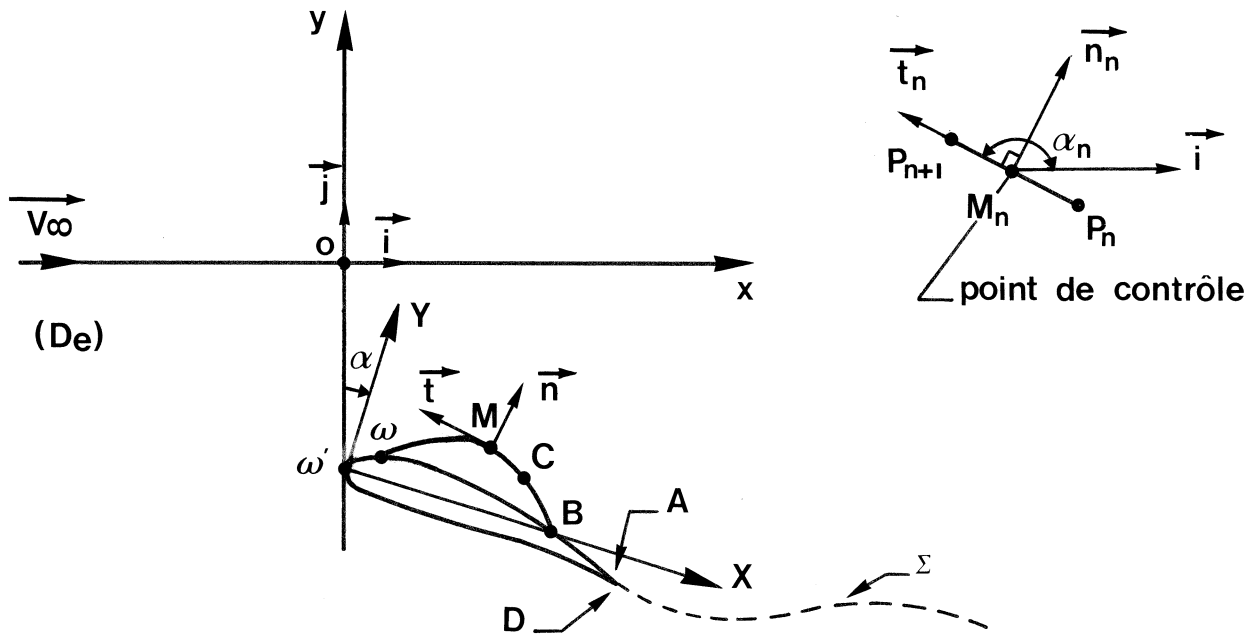


Figure 1 : Axes de référence

On suppose qu'une cavité se développe au voisinage du bord d'attaque  $\omega'$ , à partir d'un point  $\omega$  et se réattache sur l'extrados du profil au point B par l'intermédiaire d'une zone de raccord BC. Dans cette zone, l'écoulement est de nature essentiellement instationnaire ; on rend le modèle stationnaire, en représentant cette zone par une surface de déplacement supposée être le sillage de la cavité.

A la frontière de l'écoulement, trois zones sont ainsi définies :

- la zone correspondant à la partie mouillée du profil (AB)  $\cup$  ( $\omega$ D)
- la zone correspondant à la frontière de la cavité (C  $\omega$ ).
- la zone de raccord (BC)

Compte-tenu des hypothèses faites (cf. préliminaire), la vitesse dérive d'un potentiel régi par l'équation de LAPLACE :  $\Delta_{\mathbf{M}} \varphi_{\mathbf{M}} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\mathbf{M}} &= |\vec{V}_{\infty}| x + \varphi_{\mathbf{M}} \\ \vec{V}_{\mathbf{M}} &= \vec{V}_{\infty} + \vec{v}_{\mathbf{M}} \\ \vec{v}_{\mathbf{M}} &= \text{grad}_{\mathbf{M}} \varphi_{\mathbf{M}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Les conditions aux limites sont données par :

- sur le profil (AB)  $\cup$  ( $\omega$ D) une condition de glissement :

$$(\vec{v} \cdot \vec{n})_{\mathbf{M}} = -\vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n}_{\mathbf{M}} \quad (2)$$

- sur la cavité (C  $\omega$ ) une condition de pression constante et une condition de glissement :

$$(\vec{v} \cdot \vec{t})_{\mathbf{M}} = -|\vec{V}_{\infty}| \sqrt{1+K} - \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{t}_{\mathbf{M}} \quad (3)$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{n})_{\mathbf{M}} = -\vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n}_{\mathbf{M}} \quad (4)$$

où K désigne le nombre de cavitation ;  $K = \frac{P_{\infty} - P_c}{\frac{1}{2} \rho \vec{V}_{\infty}^2}$   
 $P_c$  pression dans la cavité.

- sur la surface de déplacement du sillage (BC), on se donne une loi de comportement de la vitesse :

$$(\vec{V} \cdot \vec{n})_{\mathbf{M}} = f(s) \quad (5)$$

où  $f$  représente une fonction de l'abscisse curviligne, dont la construction sera précisée plus loin

- à l'infini le fluide est non perturbé :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_\infty \quad (6)$$

A l'aide des hypothèses faites et en négligeant les effets de gravité, l'équation de BERNOULLI donne l'expression classique du coefficient de pression :

$$C_{pM} = 1 - \frac{\vec{V}_M^2}{\vec{V}_\infty^2} \quad (7)$$

En intégrant les efforts de pression sur le contour (ABC $\omega$ D) nous avons :

$$\frac{\vec{F}}{\frac{1}{2} \rho D L V_\infty^2} = C_X \vec{i} + C_Z \vec{j} = -\frac{1}{L} \int_{ABUCUC\omega U\omega D} C_{pM} \vec{n}_M ds_M \quad (8)$$

Le problème se réduit donc essentiellement à chercher le potentiel  $\varphi$  satisfaisant l'équation de LAPLACE partout dans le domaine fluide ( $D_e$ ), ainsi que les conditions aux limites examinées précédemment. Le problème ainsi posé correspond à un problème extérieur dont les conditions aux limites sont du type mixte de NEUMANN et DE FOURRIER [10], [18]. L'une des méthodes classiques bien adaptées à ce genre de problème est la méthode des singularités qui consiste à formuler le problème sous forme d'équations intégrales [15], [20]. Les frontières de l'écoulement sont représentées par des surfaces de discontinuités mathématiques cinématiquement équivalentes à celles-ci. L'idée sur laquelle elle est fondée est que puisque l'équation de LAPLACE est une équation linéaire, la fonction potentielle peut être considérée comme la somme de solutions élémentaires satisfaisant individuellement l'équation de LAPLACE ainsi que les conditions à l'infini. Ces potentiels élémentaires peuvent être engendrés par des singularités de simple et de double couche. Ce résultat est directement lié à la deuxième formule de GREEN qui permet d'exprimer le potentiel des vitesses en fonction des valeurs de celui-ci et de sa dérivée normale sur les frontières de l'écoulement (cf annexe A1).

## I . 2 : Equations intégrales

---

Le champ de vitesse complexe  $W(z)$  est généré par :

- une distribution de sources de densité  $\sigma_{M'}$  répartie partout sur la frontière (AD)
- une distribution de doublets normaux de densité  $\mu_{M'}$  continue par morceaux partout sur la frontière (AD).

L'évaluation du champ de vitesse en un point  $M$  n'appartenant pas aux frontières de l'écoulement, ne présente aucune difficulté, les noyaux des intégrales mises en jeu étant parfaitement définis [10], [18], [20]. Lorsque le point  $M$  vient sur le contour (AD), nous le considérons comme appartenant au domaine fluide ( $D_e$ ) et infiniment voisin de ce contour. Ce point est noté  $M+$ . En utilisant alors les discontinuités induites par les singularités employées, en tout point du contour les vitesses tangentielle et normale ainsi générées s'écrivent :

$$(\vec{v} \cdot \vec{t})_{M+} + i(\vec{v} \cdot \vec{n})_{M+} = -\frac{1}{2} \left( \frac{d\mu}{ds} \right)_M + i \frac{\sigma_M}{2} + F(z) + G(z) \quad (9)$$

$$G(z) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi} \oint_{C_j} \frac{-i\mu_{M'} e^{i\alpha_M}}{(z-z')^2} dz' + \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{-i\mu_{M'} e^{i\alpha_M}}{(z-z')^2} dz' \quad (10)$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{AD} \frac{\sigma_{M'} e^{i(\alpha_M - \alpha_{M'})}}{z-z'} dz'$$

Dans les expressions (9) et (10)  $M$  est le point de calcul,  $M'$  est le point courant du contour,  $z$  et  $z'$  les affixes respectives ;  $\alpha_M$  représente la direction du vecteur tangent en  $M$  au contour.  $\oint$  désigne la partie principale de l'intégrale au sens d'HADAMARD. Les  $N$  contours ( $C_j$ ) sont les contours de discontinuités de la répartition des doublets normaux. Le terme  $G(z)$  de l'expression (10) est en fait équivalent à une répartition de tourbillons de densité  $\gamma = -\frac{d\mu}{ds}$  plus  $N + 1$  tourbillons ponctuels  $\Gamma_j$  placés aux extrémités des contours ( $C_j$ ). La courbe  $\Sigma$  s'étendant à l'infini aval est une ligne fictive représentant le "sillage" du profil.

A l'aide de l'expression (9) les conditions aux limites (2), (3) et (5) s'écrivent :

$$\frac{\sigma_M}{2} + \Im m [F(z) + G(z)] = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_M \quad M \in (AB) \cup (\omega D) \quad (11)$$

$$\frac{\gamma_M}{2} + \Re e [F(z) + G(z)] = -|\vec{V}_\infty| \sqrt{1+K} - \vec{V}_\infty \cdot \vec{t}_M \quad M \in (C\omega) \quad (12)$$

$$\frac{\sigma_M}{2} + \Im m [F(z) + G(z)] = f(s) - \vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_M \quad M \in (BC) \quad (13)$$

Aux équations (11), (12), (13), nous devons adjoindre une condition de fermeture, plus la condition de JOUKOVSKY qui traduit le fait que le fluide ne contourne pas le bord de fuite du profil :

$$\text{- condition de fermeture :} \quad \int_{(AD)} \sigma ds = 0 \quad (14)$$

$$\text{- condition de JOUKOVSKY :} \quad \vec{V} \cdot \vec{n}_J = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_J \quad (15)$$

J étant un point appartenant au plan bissecteur du bord de fuite près du bord de fuite. Nous verrons plus loin que la relation (15) qui traduit explicitement la condition de JOUKOVSKY peut être remplacée par une condition implicite.

Par ailleurs, les relations (11), (12), (13) et (14) supposent les formes de la cavité et de son sillage connues. Pour initialiser le calcul, nous choisissons une forme de cavité et de sillage confondue avec le profil. La première étape du calcul consiste à satisfaire les équations (11), (12), (13) et (14) à l'aide de cette forme initiale ; à partir de la solution de ce problème, nous pouvons construire la frontière de la cavité et du sillage de façon à ce qu'elle soit une ligne de courant et continuer de la même façon jusqu'à ce que la condition (4) soit partout satisfaite sur celle-ci. La fermeture de la poche est assurée par la condition (14) de débit intérieur nul.

La fonction f définie en (5) doit alors nécessairement converger vers 0 au cours des itérations, pour assurer la condition de glissement sur la surface de déplacement. Sa construction répond à la nécessité de lisser la discontinuité des conditions aux limites au passage cavité, profil. On prend alors :

$$(16) \quad f(s) = VNo \cdot F(s) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F(s) = 1 & \text{à l'arrière de la cavité} \\ F(s) = 0 & \text{à l'arrière de la zone de raccord} \\ VNo & \text{vitesse normale à l'arrière de la cavité} \end{cases}$$

Pour la présente étude et dans un souci de simplification, la fonction F est une fonction linéaire de l'abscisse curviligne. L'utilisation de lois de raccord plus élaborées serait possible.



### I . 3 : Problème discrétisé

---

Le contour (AD) est discrétisé en N facettes d'extrémités  $[P_n P_{n+1}]$ . Pour chacune de ces facettes, nous avons les définitions suivantes :

- longueur :  $d_n = |\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{z}_n|$
- orientation  $E_n = e^{i\alpha_n}$  ;  $\alpha_n = (\vec{i}, \vec{t}_n)$
- centre : Mn d'affixe  $\zeta_n = \frac{\mathbf{z}_n + \mathbf{z}_{n+1}}{2}$

Sur chaque facette la densité de sources est prise constante égale à  $\sigma_n$ , la densité de doublets normaux linéaires ce qui est équivalent à une répartition de tourbillons de densité  $\gamma_n$  constante par facette. La courbe  $\Sigma$  devant être une ligne de courant non portante, il est facile de montrer que  $\mu$  doit être constant sur  $\Sigma$ . D'autre part, le non contournement du fluide au bord de fuite de l'aile implique la continuité de  $\mu$  aux points A et D à l'extrados et à l'intrados. Ainsi la discrétisation de la relation (9) conduit à :

$$(\vec{v} \cdot \vec{t})_m + i(\vec{v} \cdot \vec{n})_m = \sum_{j=1}^N (A_{mj} \sigma_j + B_{mj} \gamma_j) + \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{B}_{mj} \tilde{\gamma}_j \quad (17)$$

$\tilde{\gamma}_j$  est la vorticité équivalente au passage de la facette j à la facette j+1 et définie par :

$$\tilde{\gamma}_j = \frac{2(\mu_{0j+1} - \mu_{0j})}{d_j + d_{j+1}} \quad (18)$$

Dans la relation (18)  $\mu_{0j}$  est la valeur de  $\mu$  au centre de la facette j. Dans la relation (17)  $A_{mj}$  est l'influence classique des sources,  $B_{mj}$  l'influence classique modifiée des vorticités et  $\tilde{B}_{mj}$  l'influence des vortex d'extrémités.

La discrétisation des équations (11) à (15) donnent (N+2) équations. La relation (17) laisse apparaître 3N-1 inconnues ; d'autre part le problème étant résolu à longueur de cavité fixée, la quantité 1+K est une inconnue supplémentaire du problème, ce qui donne 3N inconnues au total.

A ce stade le système d'équations obtenu n'est pas fermé. Les méthodes de résolution classiques consistent à choisir arbitrairement la loi de distribution de tourbillons [18], [19], [21]; or ce choix n'est pas neutre vis à vis de la qualité du résultat à cause de la discrétisation des équations du problème.

Il faut remarquer que dans le problème discrétisé les conditions aux limites ne sont satisfaites rigoureusement qu'aux points de contrôle des facettes. Dans certains cas, par exemple, lorsque le profil devient mince ou dans les zones de forte cambrure, entre deux points de contrôle consécutifs les conditions aux limites peuvent être complètement erronées ; ces erreurs dues à la discrétisation engendrent un certain débit de fuite [11]. On montre que ce débit de fuite est directement lié au gradient des singularités utilisées [22]. En utilisant alors des singularités de densité constante par facette, il est en principe possible d'obtenir un résultat correct, à condition que le gradient moyen relatif à deux densités consécutives soit faible.

On minimise ainsi le débit de fuite, ce qui permet d'uniformiser au mieux les répartitions de singularités de façon à ce que localement le champ soit le plus lisse possible. La répartition de tourbillons doit alors être calculée de manière à minimiser ce débit de fuite.

Dans la suite, nous présentons deux méthodes utilisant ce principe de minimisation pour la résolution du problème de la cavitation partielle autour de structures minces.

#### I . 4 : Première méthode : loi des doublets continus ; condition de JOUKOVSKY explicite

---

La loi des doublets normaux est partout continue sur le profil ; dans ce cas, les vortex d'extrémité des facettes sont nuls et la répartition de double couche est strictement équivalente à une répartition de tourbillons d'intensité constante par facette. La relation (17) s'écrit alors :

$$(\vec{v} \cdot \vec{t})_m + i(\vec{v} \cdot \vec{n})_m = \sum_{j=1}^N W_{mj} (\sigma_j - i\gamma_j) \quad (19)$$

Dans la relation (19) nous avons :

$$\begin{cases} W_{mj} = -\frac{1}{2\pi} e^{i(\alpha_m - \alpha_j)} \text{Log} \frac{\zeta_m - z_{j+1}}{\zeta_m - z_j} & m \neq j \\ W_{mm} = \frac{i}{2} \end{cases} \quad (20)$$

Désignons par  $X$  la matrice unicolonne des inconnues principales et par  $Y$  celle des inconnues secondaires. Les matrices transposées correspondantes sont choisies comme suit :

$$\left. \begin{aligned} t_X &= [\sigma_1, \dots, \sigma_N, \gamma_1, \sqrt{1+K}] = [x_1, \dots, x_{N+2}] \\ t_Y &= [\gamma_2, \dots, \gamma_N] = [y_1, \dots, y_{N-1}] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

En utilisant (19) les équations (11) à (15) discrétisées donnent  $(N + 2)$  contraintes linéaires qu'on écrit sous la forme matricielle :

$$AX + CY = b \quad (22)$$

A et C sont les matrices influence relatives à X et Y, b est la matrice des seconds membres.

Les équations manquantes à (22) sont obtenues en écrivant que la norme d'un vecteur erreur E (représentatif de l'erreur due à la discrétisation) est minimum.

Le vecteur E est défini par la relation matricielle suivante :

$$E = FX + GY \quad (23)$$

La minimisation du débit de fuite se traduit alors par :  $d \|E\| = 0$

Cela conduit à la résolution du système matriciel :

$$\left\{ \begin{aligned} AX + CY &= b \\ PX - QY &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} P &= (A^{-1}C)^T (F^T F) - G^T F \\ Q &= G^T G - (A^{-1}C)^T F^T G \end{aligned} \right. \quad (24)$$

L'objectif est de construire la loi de tourbillons qui minimisera au mieux les erreurs de discrétisation sur les conditions aux limites. Ces erreurs étant directement liées au gradient des singularités, le vecteur erreur est choisi comme suit :

$$t_E = [\sigma_1 - \sigma_N, \sigma_2 - \sigma_1, \dots, \sigma_N - \sigma_{N-1}, \gamma_1 + \gamma_N, \gamma_2 - \gamma_1, \dots, \gamma_N - \gamma_{N-1}] \quad (25)$$

La composante  $\gamma_1 + \gamma_N$  qui traduit des vorticités opposées à l'extrados et à l'intrados du bord de fuite, permet de réaliser de manière implicite le non contournement du fluide au bord de fuite du profil.

I . 5 : Deuxième méthode : loi des doublets discontinus ; condition de JOUKOWSKY  
implicite

---

A ce stade faisons une remarque sur la condition de JOUKOWSKY ; désignons par  $\delta$  l'angle des deux facettes au bord de fuite du profil (Fig. 2)

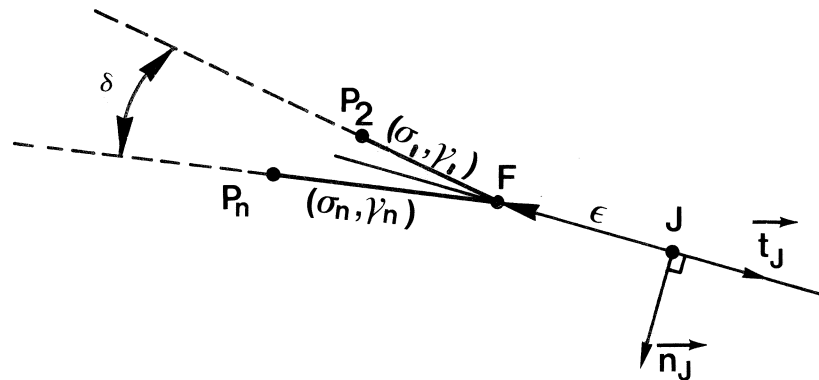


Figure 2 : Point de JOUKOWSKY

Soit J un point placé sur la bissectrice de cet angle à une distance  $\epsilon$  à l'aval du bord de fuite F. Il est facile de montrer que lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  la vitesse au point J est équivalente au terme  $\frac{C'}{2\pi} \log \epsilon$ , C' désignant le complexe :

$$C' = (\sigma_1 + i\gamma_1) e^{i\frac{\delta}{2}} + (\sigma_N + i\gamma_N) e^{-i\frac{\delta}{2}} \quad (26)$$

Dire que le fluide ne contourne pas le point F revient donc à écrire que la vitesse au point F reste parallèle à la bissectrice de l'angle au bord de fuite, ce qui se traduit, d'après la relation (26) par les relations :

$$\sigma_1 - \sigma_N = 0 \quad (27)$$

$$\gamma_1 + \gamma_N = 0 \quad (28)$$

La vitesse devant avoir une valeur finie au point F, la partie réelle de C' doit tendre vers 0 lorsque le point J tend vers le point F. L'expérience des résultats numériques a montré qu'une excellente approximation de la condition de JOUKOWSKY consiste à réaliser rigoureusement la condition (28) et à introduire dans le vecteur E les composantes  $\sigma_1 - \sigma_N$ ,  $\nu_1 - \nu_N$ . La présente méthode utilise ce procédé.

D'autre part, cette méthode utilise une loi de double couche non constante et discontinue par morceaux, les vortex d'extrémités des facettes n'étant plus nuls ; cela permet d'avoir une meilleure représentation discrète de la double couche.

La répartition de simple couche réagissant alors dans le même sens, le débit de fuite est mieux minimisé que dans le cas de la première méthode. Cette propriété est illustrée par les résultats obtenus au chapitre II.

L'équation (17) reste alors complète et le terme  $\tilde{B}_{mj}$  représente simplement l'influence d'un tourbillon ponctuel :

$$\tilde{B}_{mj} = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{d_j + d_{j+1}}{2} \right) \frac{e^{i\alpha_m}}{\zeta_m - z_{j+1}} \quad (29)$$

La condition de JOUKOVSKY n'étant plus explicite, le nombre d'inconnues principales des relations (21) passent de N+2 à N+1. D'autre part les N-1 vorticités équivalentes  $\tilde{\nu}_j$  données par (18) sont en relation avec les vorticités  $\nu_j$  par N-2 contraintes linéaires traduisant le fait que la vorticité est égale au gradient des doublets  $\mu$ . A l'aide de ces relations supplémentaires la relation (17) peut alors s'écrire :

$$(\vec{v} \cdot \vec{t})_m + i(\vec{v} \cdot \vec{n})_m = \sum_{j=1}^N A_{mj}^x x_j + \sum_{j=1}^N A_{mj}^y y_j \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}_X &= [x_1, \dots, x_{N+1}] = [\sigma_1, \dots, \sigma_N, \sqrt{1+K}] \\ \mathbf{t}_Y &= [y_1, \dots, y_N] = [\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_{N-1}, \nu_N] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$A^x$  et  $A^y$  représentent les influences respectives des inconnues x et y.

En utilisant (30) les contraintes linéaires (11)   (14) donnent une relation matricielle semblable à la relation (22). Le vecteur de minimisation est donné par :

$$\mathbf{t}_E = [\sigma_1 - \sigma_N, \sigma_2 - \sigma_1, \dots, \sigma_N - \sigma_{N-1}, \tilde{\nu}_1 - \nu_1, \tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1, \dots, \nu_N - \tilde{\nu}_{N-1}, \nu_N - \nu_1]$$

En écrivant que la norme de E est minimum on est conduit à la résolution d' un système matriciel du type (24). Il es aisé de montrer qu' avec un tel choix les équations (24) sont découplées ( $G^T F = F^T G = 0$ ) et que le calcul de la matrice  $Q^{-1}$  est entièrement analytique. Cette propriété permet de considérer la matrice  $Q^{-1}$  comme une donnée du problème, ce qui est intéressant pour les temps de calcul (son calcul ne nécessitant plus une procédure numérique).

### I . 6 : Résolution et calcul itératif de la cavité

Dans le cas des deux méthodes présentées, la résolution du système (24) conduit à la résolution équivalente suivante :

$$\left. \begin{aligned} (A + CQ^{-1}P)X &= b \\ Y &= (Q^{-1}P)X \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

La matrice de résolution  $(A + CQ^{-1}P)$  est par construction une matrice à diagonale dominante ; sa résolution numérique ne pose aucune difficulté. La résolution du système (32) conduit ainsi aux valeurs discrètes des distributions des singularités ainsi qu'au nombre de cavitation K. Connaissant alors ces répartitions, nous pouvons avoir en tout point les caractéristiques de l'écoulement.

Comme il a été indiqué précédemment (paragraphe I-2) la géométrie de la poche est calculée par une procédure itérative permettant d'obtenir celle-ci numériquement points par points. Supposons la géométrie connue à l'itération  $(j - 1)$ ; à l'itération  $(j)$  la facette  $i$  est mise parallèle à la vitesse au point  $i$  (fig.3)

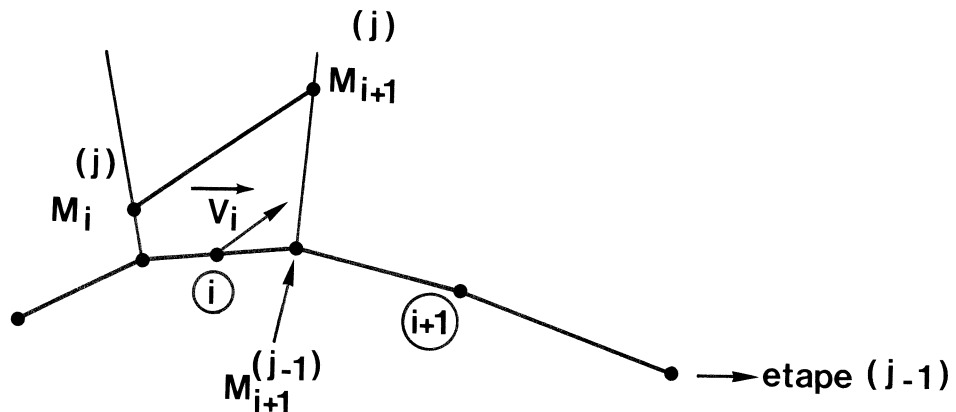


Figure 3

Le point  $M_{i+1}^j$  est alors obtenu par l'intersection de la droite passant par  $M_i^j$  parallèle à la vitesse  $\vec{V}_i$  au point de contrôle de la facette  $i$ , et de la droite  $\Delta_{i+1}^{j-1}$  seconde bissectrice des facettes  $(i)$  et  $(i+1)$ . La procédure étant initialisée au point de détachement de la cavité, le sillage ne se ferme pas obligatoirement sur le profil. A chaque itération, le jeu ainsi obtenu est rattrapé linéairement suivant l'abscisse curviligne, ce qui assure la fermeture géométrique de la poche de cavitation.

#### I . 7 : Ecoulement en milieu confiné, grille d'aube

La méthode des images permet d'étendre les calculs précédents au cas d'un profil placé dans un tunnel (milieu confiné) et au cas d'une grille d'aube. Un calcul préliminaire établit l'influence d'une série infinie de sources et tourbillons ponctuels, périodiquement espacés sur une verticale passant par le point d'affixe  $z_0$  (cf figure 4).

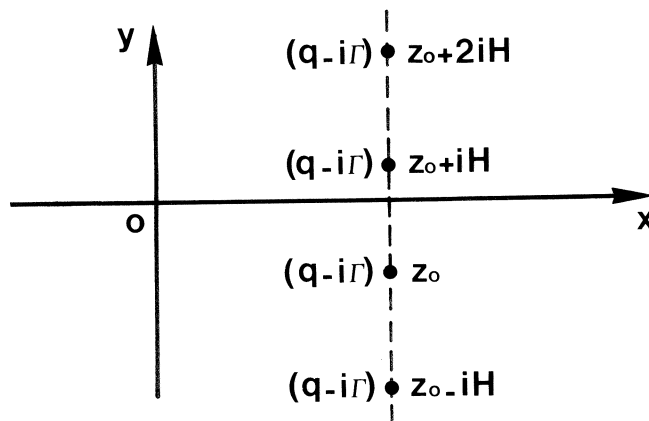


Figure 4

La densité ponctuelle de singularités étant  $(\Omega - i\Gamma)$ , la distance entre deux points consécutifs étant désignée par  $H$ , le potentiel complexe s'écrit :

$$f(z) = \left( \frac{\Omega - i\Gamma}{2\pi} \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Log} \left[ z - (z_0 + niH) \right] \quad (33)$$

La série (33) peut alors s' écrire :

$$f(z) = \text{cte} + \left( \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \right) \text{Log sh } \frac{\pi(z - z_0)}{H} \quad (34)$$

La dérivation par rapport à  $z$  de l'expression (34) donne le champ de vitesse :

$$W(z) = \frac{Q - i\Gamma}{2H} \coth \frac{\pi(z - z_0)}{H} \quad (35)$$

La partie imaginaire de  $z$  étant fixée, il est à remarquer que les limites à l'infini de l'expression (35) sont différentes suivant que la partie réelle tend vers plus ou moins l'infini. En effet on a :

$$\lim_{\Re(z) \rightarrow \pm\infty} W(z) = \pm 1 \quad (36)$$

Dans le cas de l'écoulement autour d'un profil, le champ de vitesse amont est nécessairement non perturbé. En utilisant les relations (35) et (36), le champ de vitesse est alors de la forme :

$$W(z) = \frac{Q - i\Gamma}{2H} \left[ 1 + \coth \frac{\pi(z - z_0)}{H} \right] \quad (37)$$

Dans le cas de l'écoulement en tunnel, la condition de glissement doit être satisfaite sur les parois du fond et du plafond. Cette condition est automatiquement satisfaite en prenant une double série de sources et tourbillons disposés comme l'indique la figure 5.

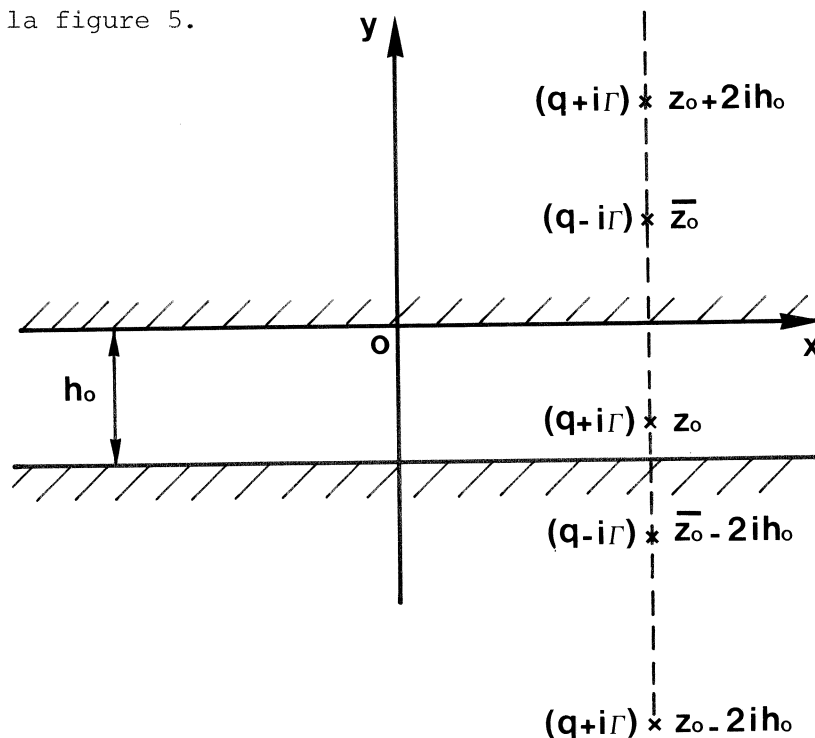


Figure 5



Le pas de chaque série étant égal à  $2 h_0$ , l'application de (37) donne la vitesse induite par cette double série :

$$W_C(z, z_0) = \frac{Q - i\Gamma}{4h_0} \left[ 1 + \coth \frac{\pi(z - z_0)}{2h_0} \right] + \frac{Q + i\Gamma}{4h_0} \left[ 1 + \coth \frac{\pi(z - \bar{z}_0)}{2h_0} \right] \quad (38)$$

Dans le cas de la grille d'aube, la cinématique de l'écoulement doit être la même en des points se déduisant les uns des autres par une translation de vecteur  $h \cdot \vec{p}$  (cf figure 6). Le pas géométrique de la grille d'aube est désigné par  $h$  et l'angle  $(\vec{p}, \vec{o}\vec{y})$  par  $\varpi$ . La périodicité géométrique de l'écoulement est alors assurée par une simple série de sources et tourbillons disposés comme l'indique la figure 6.

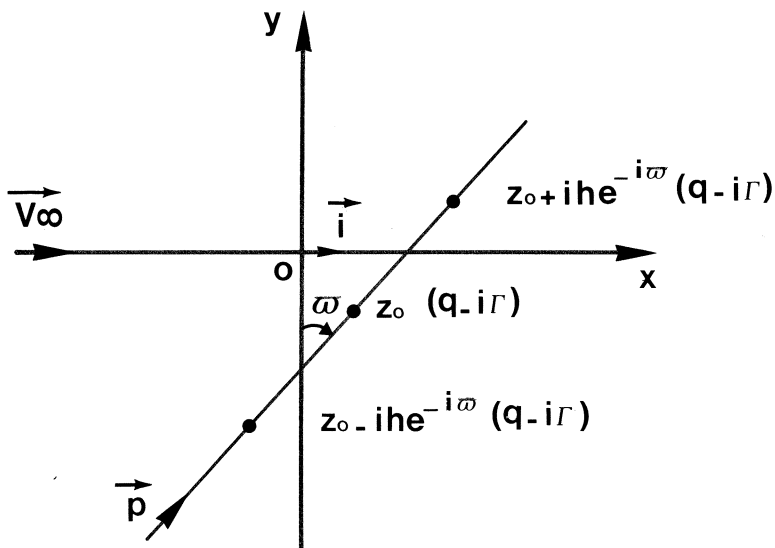


Figure 6

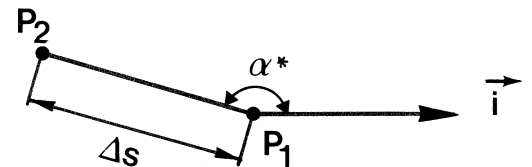


Figure 7

Un calcul analogue au précédent conduit alors à l'expression de la vitesse :

$$W_G(z, z_0) = \frac{Q - i\Gamma}{2h} e^{i\varpi} \left[ 1 + \coth \frac{\pi}{h} (z - z_0) e^{i\varpi} \right] \quad (39)$$

Des relations (38) et (39) nous pouvons déduire aisément la vitesse induite par un segment  $P_1P_2$ , support d'une répartition de simple couche de densité constante  $\sigma - i\gamma$  :

$$W_I^{[P_1P_2]}(z) = \int_{P_1}^{P_2} W_I dI_M \quad \left\{ \begin{array}{l} I = C \text{ pour l'écoulement en tunnel} \\ I = G \text{ pour l'écoulement en grille d'aube} \end{array} \right. \quad (40)$$

Après une simple intégration sur le segment  $P_1P_2$  nous obtenons :

- dans le cas du tunnel :

$$\left[ W_C(z) = -\frac{\sigma - i\gamma}{2\pi} e^{-i\alpha^*} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(z-z_2)}{2h_0}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(z-z_1)}{2h_0}} - \frac{\sigma + i\gamma}{2\pi} e^{i\alpha^*} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(z-\bar{z}_2)}{2h_0}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(z-\bar{z}_1)}{2h_0}} + \sigma \frac{\Delta s}{2h_0} \right. \\ \left. \text{si } M(z) \text{ est différent du centre de la facette} \right. \quad (41)$$

$$\left[ W_C(z) = \frac{\gamma + i\sigma}{2} e^{-i\alpha^*} - \left( \frac{\sigma + i\gamma}{2\pi} \right) e^{i\alpha^*} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(z-\bar{z}_2)}{2h_0}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(z-z_1)}{2h_0}} + \frac{\sigma \Delta s}{2h_0} \right. \\ \left. \text{si } M(z) \text{ est confondu avec le centre de la facette} \right.$$

- dans le cas de la grille d'aube

$$\left[ W_G(z) = (\sigma - i\gamma) \left[ -\frac{e^{-i\alpha^*}}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{h}(z-z_2) e^{i\varpi}}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{h}(z-z_1) e^{i\varpi}} + \frac{\Delta s}{2h} e^{i\varpi} \right] \right. \\ \left. \text{si } M(z) \text{ est différent du centre de la facette} \right. \quad (42)$$

$$\left[ W_G(z) = (\sigma - i\gamma) \left[ \frac{i}{2} e^{-i\alpha^*} + \frac{\Delta s}{2h} e^{i\varpi} \right] \right. \\ \left. \text{si } M(z) \text{ est confondu avec le centre de la facette} \right.$$

Dans les relations (41) et (42)  $\alpha^*$  représente la direction du segment  $P_1P_2$ ,  $z_1$  et  $z_2$  les affixes respectives des points  $P_1$  et  $P_2$ ,  $\Delta s$  la taille du segment  $P_1P_2$  (fig.7).

Lorsque le profil est discrétisé en  $N$  facettes, la vitesse induite par l'ensemble des facettes s'écrit d'après (40) :

$$w(\zeta_i) = \sum_{j=1}^N w_j^{[P_j P_{j+1}]}(\zeta_i) \quad (43)$$

$\zeta_i$  représente l'affixe du point de contrôle de la facette  $i$ .

La relation (41) montre alors qu'à l'infini aval la vitesse est proportionnelle au terme  $Q_1 = \sum_{j=1}^N \sigma_j \Delta s_j$ . La résolution du problème se faisant en imposant le débit intérieur nul,  $Q_1$  est nul. De fait dans le cas de l'écoulement en tunnel les champs de vitesse à l'infini amont et aval sont identiques.

Par contre dans le cas de la grille d'aube, la relation (42) montre qu'à l'infini aval le champ de vitesse s'écrit :

$$W_{\text{aval}} = V_{\infty x} - i V_{\infty y} = W_{\text{amont}} + i \frac{\Gamma_c}{h} e^{i\varpi} \quad (44)$$

$$W_{\text{amont}} = V_{\infty x} = |\vec{V}_{\infty}|$$

Dans la relation (44),  $\Gamma_c$  désigne la circulation totale autour du profil. Cette relation montre en outre que l'écoulement autour de la grille s'effectue en respectant la conservation des débits au travers de sections parallèles à la direction  $\vec{p}$ .

CHAPITRE II

APPLICATIONS ET RESULTATS  
=====

Les méthodes présentées au chapitre I ont été mises en oeuvre par des programmes de calcul établis sur le NORSK DATA 10 de l'I.M.G. Un programme préliminaire mis au point par l'équipe de M. ROWE nous permet d'avoir un maillage très fin du profil, ce qui assure notamment une bonne représentation géométrique du bord d'attaque du profil. D'autre part, la zone de raccord étant le siège de forts gradients de vitesse, un soin particulier a été apporté au maillage dans cette zone. La géométrie de la cavité initiale est simplement confondue avec la géométrie du profil.

Dans tous les cas traités, nous avons constaté que 5 itérations étaient suffisantes pour assurer la convergence des méthodes ; le critère de convergence de celles-ci a été choisi de façon à ce que partout sur la cavité, l'inégalité suivante soit respectée :

$$\mathcal{M}_{\max} = \max_{m \in (BCUC\omega)} \left| \frac{(\vec{v} \cdot \vec{n})_m}{(\vec{v} \cdot \vec{t})_m} \right| \leq 10^{-3} \quad (45)$$

Il est à remarquer que la deuxième méthode permettant de calculer explicitement la matrice  $\mathbf{G}^{-1}$  (cf chapitre I.5) est moins coûteuse sur le plan informatique que la première.

II . 1 : Résultats en régime subcavitant

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats obtenus dans le cas du régime subcavitant en milieu infini. Une comparaison entre les deux méthodes

décrites aux paragraphes (I.4) et (I.5) est présentée et permet de valider ces deux méthodes par rapport aux résultats analytiques d'une part et par rapport à des résultats étalons [11] d'autre part. Les profils étudiés sont deux profils de JOUKOVSKY d'épaisseurs relatives de 2 et 6 %, ainsi qu'un profil NACA de 2 % d'épaisseur relative (Figure 8).

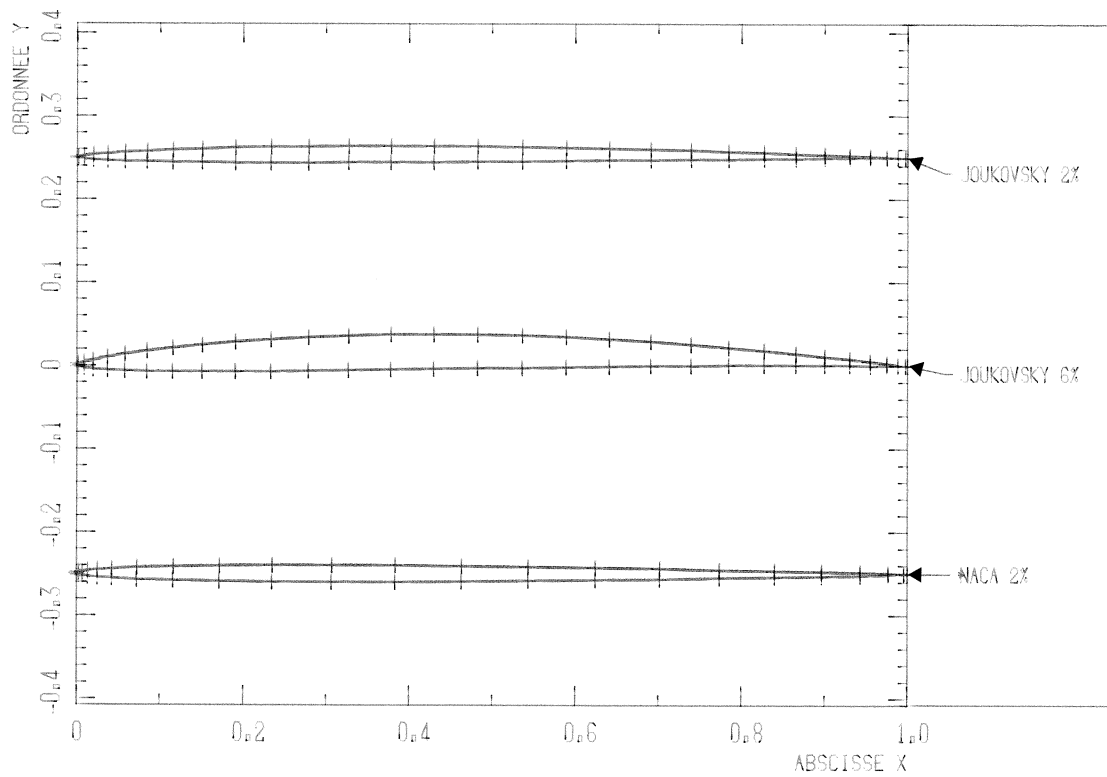


Figure 8 : Profils étudiés

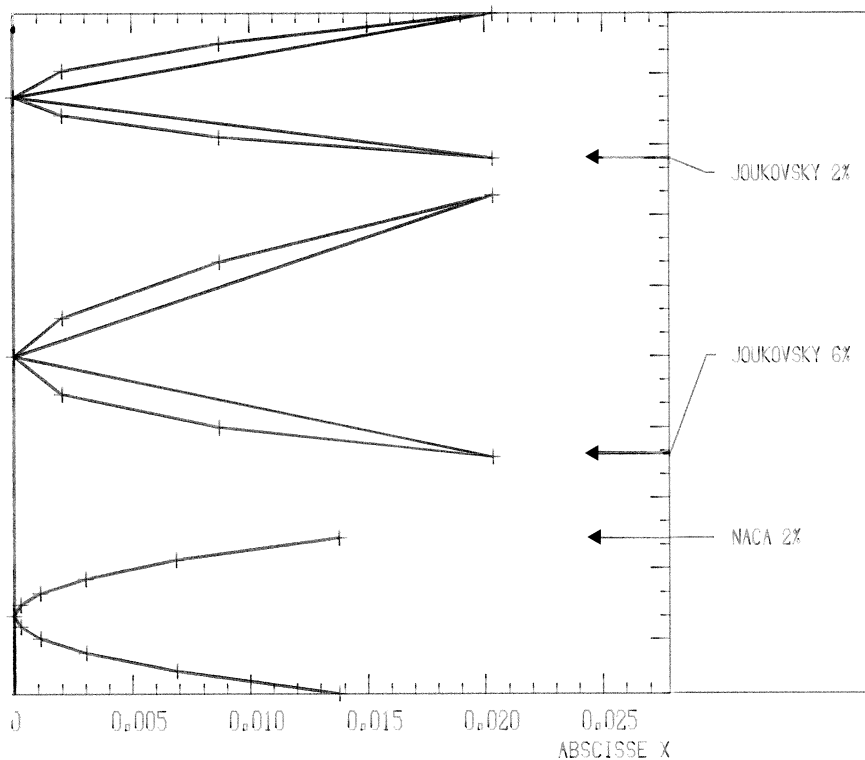


Figure 9 : Bords d'attaque des différents profils

Pour chaque profil de JOUKOVSKY deux maillages ont été utilisés : un maillage à 20 facettes et un maillage à 60 facettes. Le profil NACA a été testé sur un maillage comportant 48 facettes.

### II. 1. 1 : Comparaison avec les résultats analytiques

Le profil de JOUKOVSKY de 2 % d'épaisseur relative est placé à une incidence de 5 degrés. Les figures 10 et 11 montrent les répartitions du coefficient de pression obtenues par les deux méthodes en comparaison avec la répartition analytique dans le cas du maillage à 20 facettes. La figure 12

présente une vue agrandie de ces répartitions au bord d'attaque du profil. La courbe du coefficient de pression obtenue par la méthode 1 présente de fortes oscillations (figures 10 et 12), alors que la méthode 2 donne déjà une bonne allure de cette courbe sans avoir cependant une précision satisfaisante. Les densités de singularités correspondantes présentent les mêmes comportements. La figure 16 illustre ce résultat dans le cas de la distribution de simple couche. Il est clair que dans le cas du maillage à 20 facettes, la loi des sources obtenue par la méthode 1 est très mauvaise. Or, on sait que quelle que soit la distribution de double couche utilisée, la loi de simple couche s'ajuste de façon à satisfaire les conditions aux limites aux centres des facettes [18], [11]. La loi des sources n'étant pas lisse, ces conditions ne sont pas satisfaites en dehors des points de contrôle. Par voie de conséquence, la vitesse tangentielle aux points de contrôle et par suite le coefficient de pression en ces points sont incorrects.

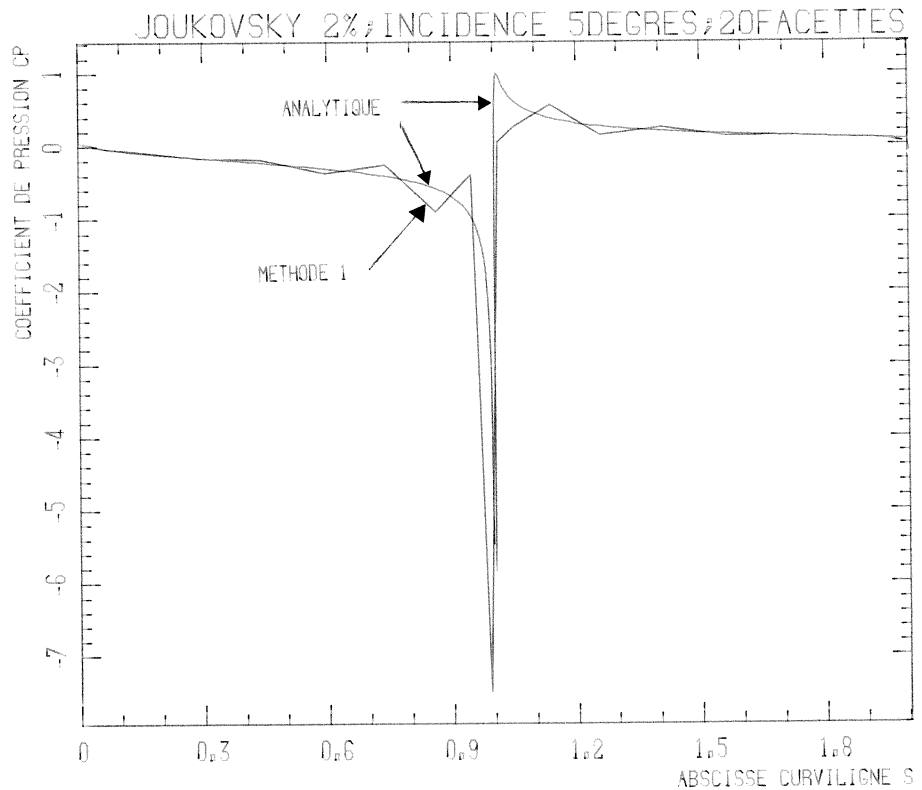


Figure 10 : Coefficients de pression obtenus par la méthode 1 et la méthode analytique

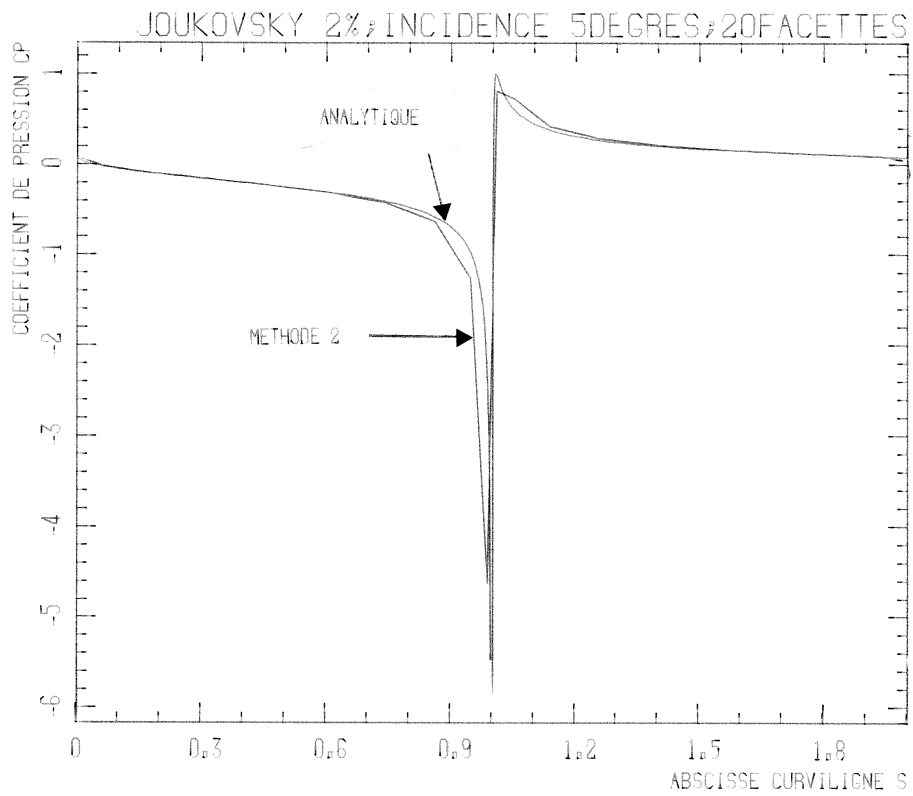


Figure 11 : Coefficients de pression obtenus par la méthode 2  
et la méthode analytique



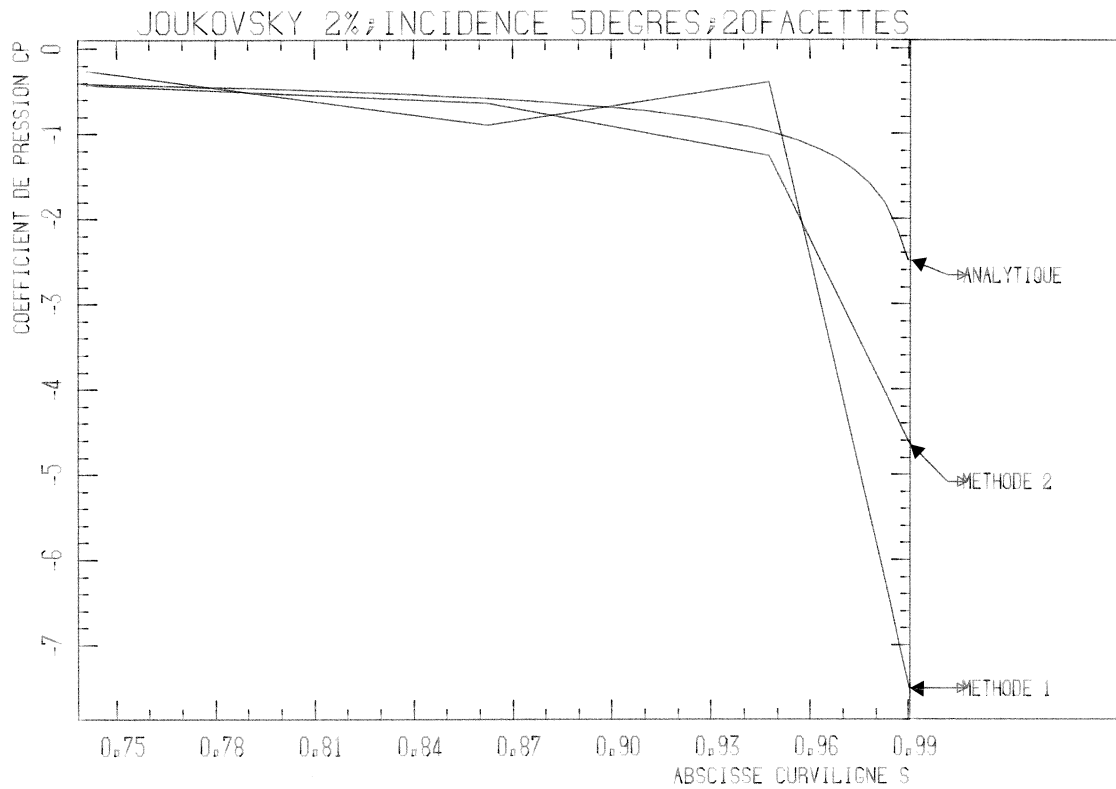


Figure 12 : Coefficients de pression obtenus par les trois méthodes au bord d'attaque extrados

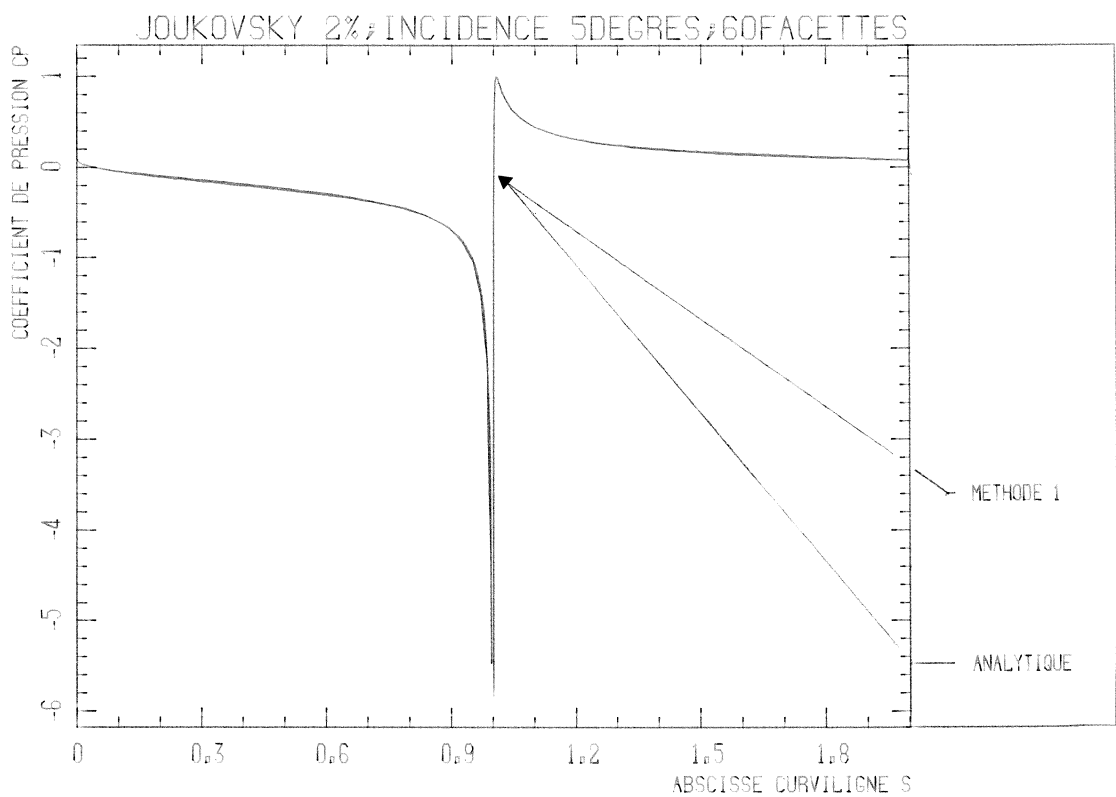


Figure 13 : Coefficients de pression obtenus par la méthode 1 et la méthode analytique

Par contre, la méthode 2 donne une loi de simple couche très régulière (figure 16) ; cela s'explique par le fait que dans cette méthode, les valeurs discrètes de la double couche aux points de contrôle sont reliés entre elles par des contraintes linéaires (cf paragraphe I.5). Ces contraintes supplémentaires procurent une répartition de tourbillons lisses partout sur le profil, ce qui donne même lorsque le maillage est grossier, une bonne minimisation du débit de fuite. Les conditions aux limites étant satisfaites aux points de contrôle, elles le sont aussi "assez bien" sur la surface entre ces points.

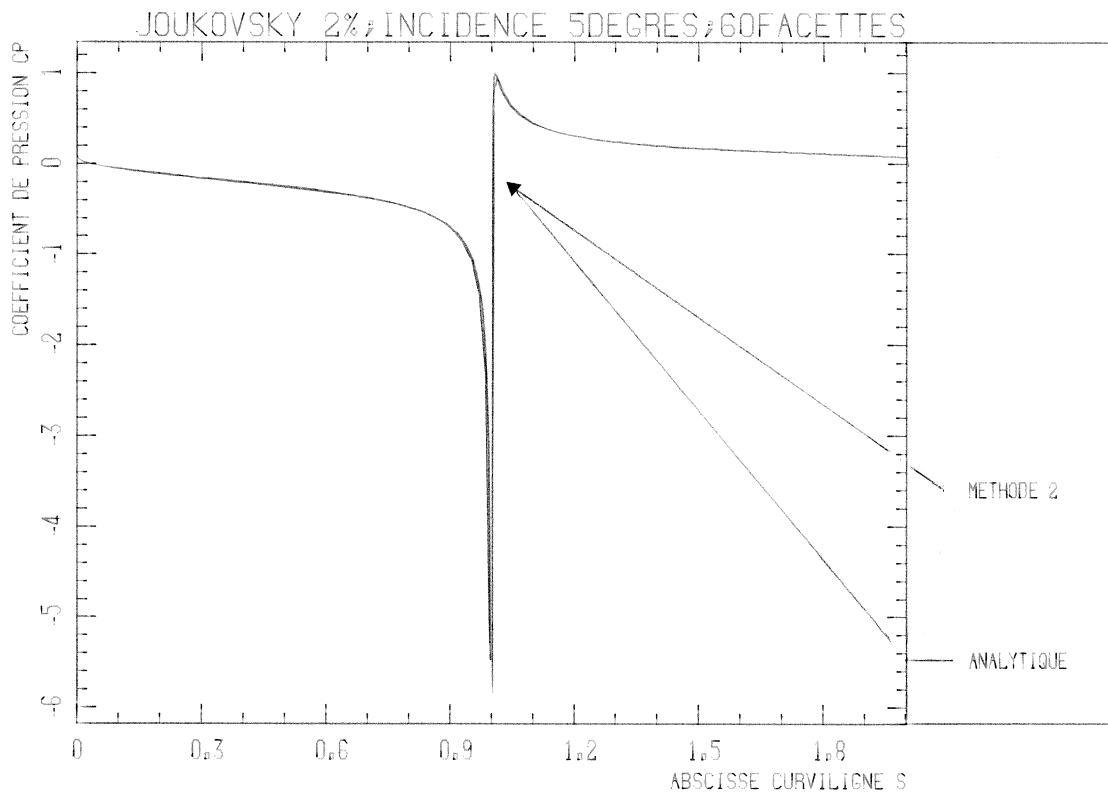


Figure 14 : Coefficients de pression obtenus par la méthode 2 et la méthode analytique

Dans le cas où le profil est discrétisé en 60 facettes, les répartitions de pression obtenues par les deux méthodes montrent une très bonne concordance avec la répartition analytique (figures 13 et 14). La seule différence significative est localisée au bord d'attaque du profil (Figure 15).

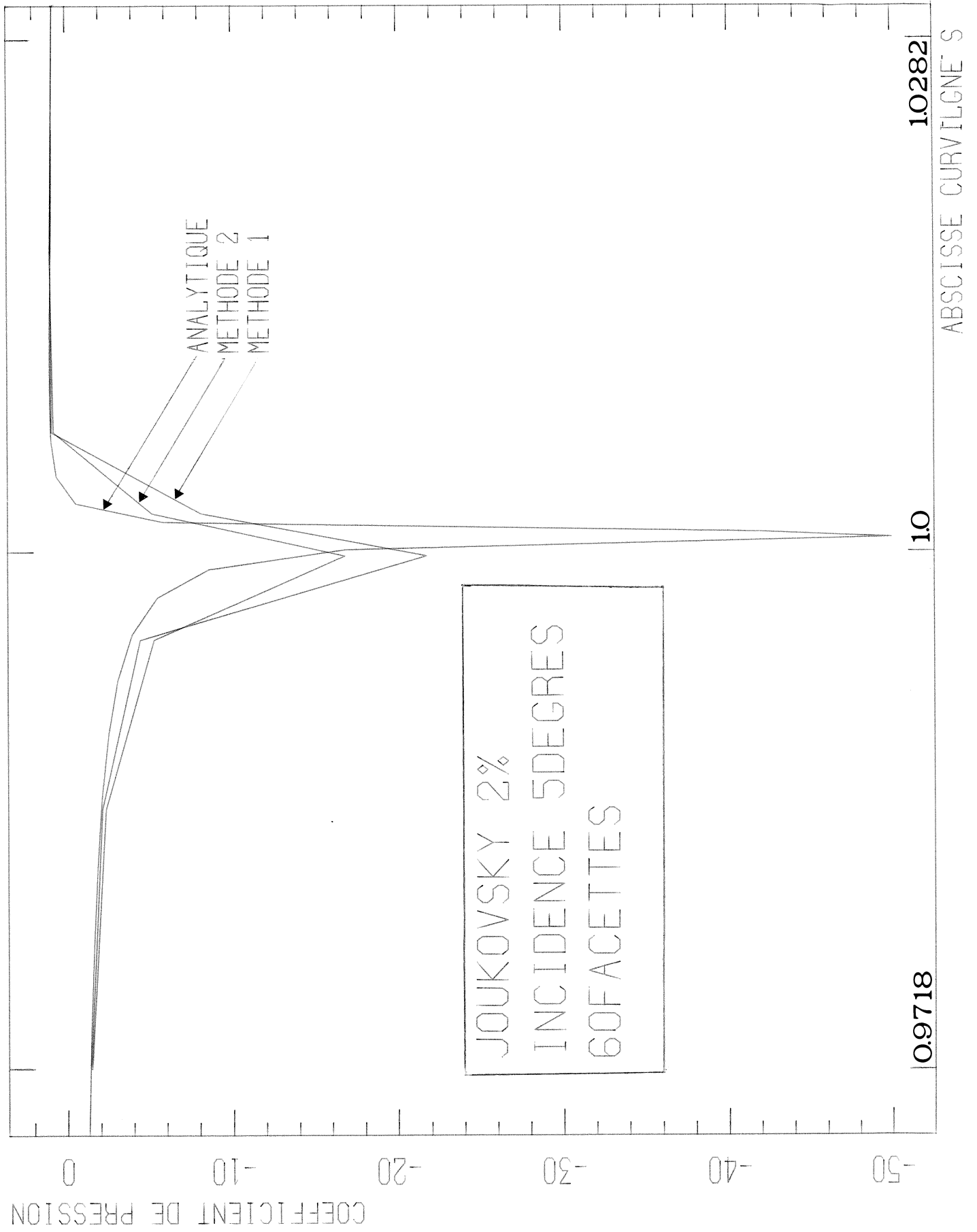


Figure 15 : Coefficients de pression obtenus par les 3 méthodes au bord d'attaque

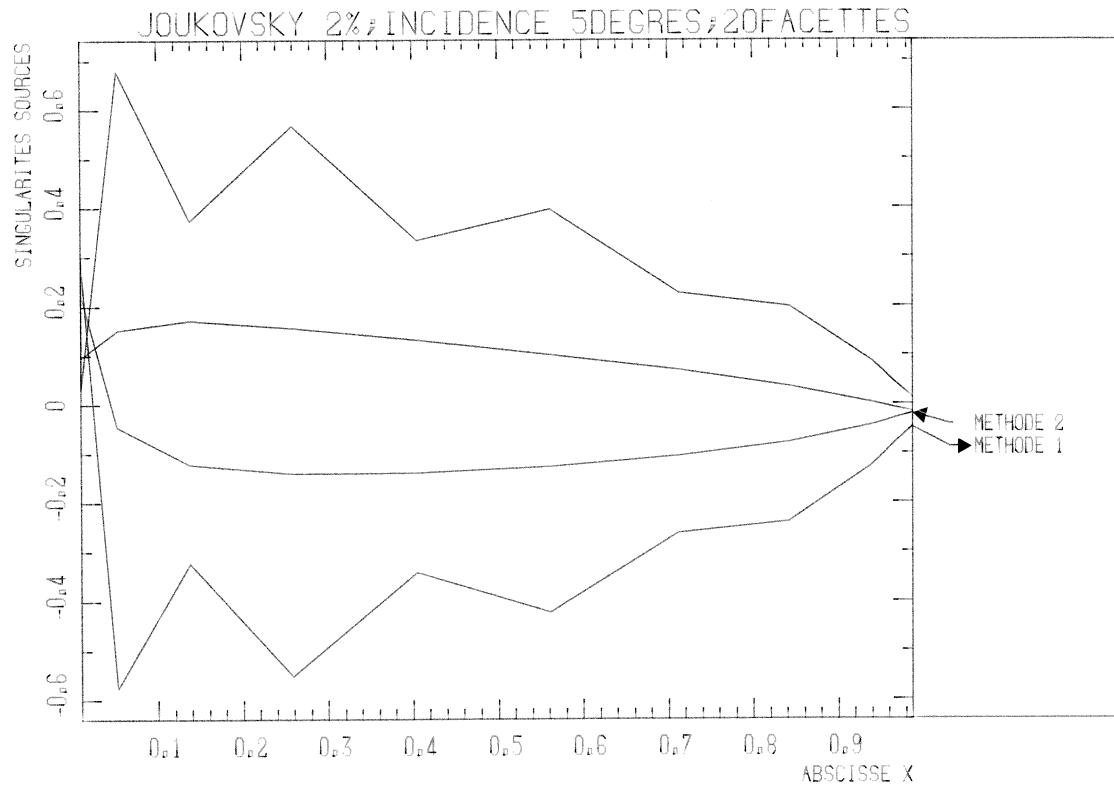


Figure 16 : Lois des sources obtenues par les méthodes 1 et 2

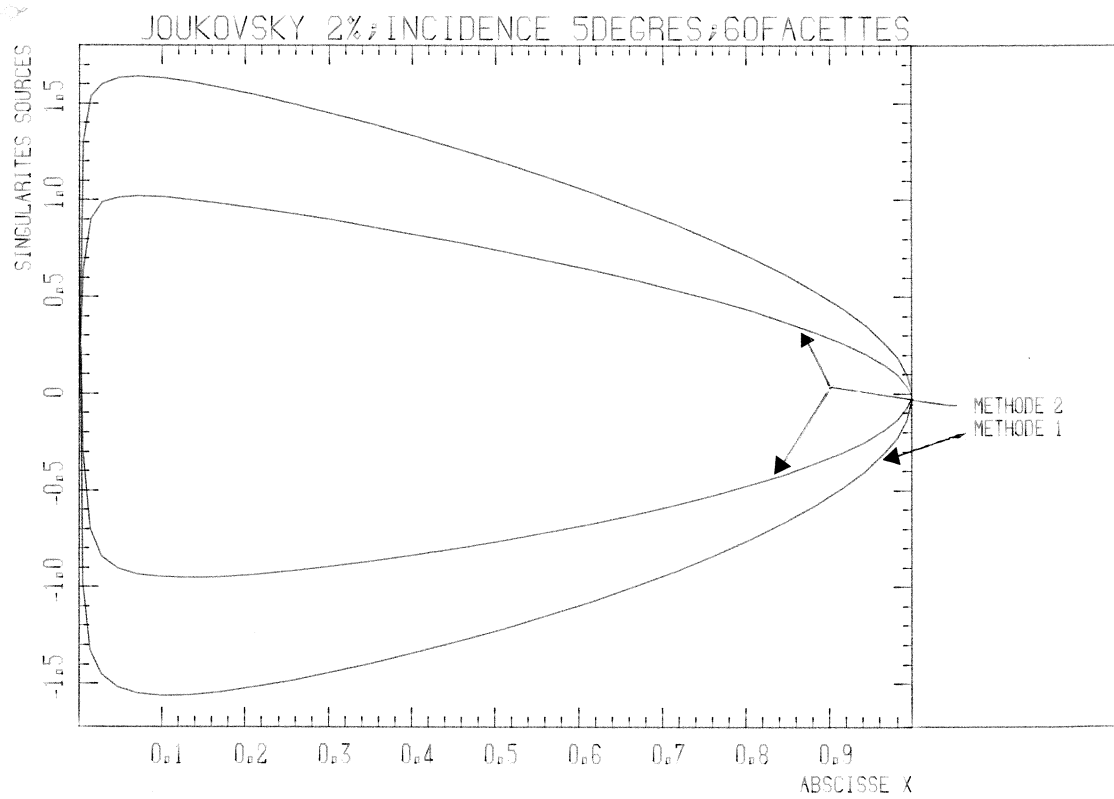


Figure 17 : Lois des sources obtenues par les méthodes 1 et 2

En comparaison avec la répartition analytique la figure 15 montre que dans la zone extrados (à gauche du pic de pression) la méthode 1 est plus précise alors que dans la zone intrados (à droite du pic de pression) c'est la méthode 2 qui est plus précise. Cela vient du fait que les écarts relatifs significatifs des vorticités sont aussi localisés au bord d'attaque du profil (Figure 18) ; les vorticités sont mieux minimisées dans le cas de la méthode 1 pour la zone extrados et dans le cas de la méthode 2 pour la zone intrados. Ailleurs partout sur le profil l'analyse des résultats montre que la loi des tourbillons est toujours meilleure (par rapport au critère de minimisation) dans le cas de la méthode 2.

Dans les deux méthodes, la minimisation porte sur les gradients des singularités ; de ce fait la vorticité en un point de contrôle contribue essentiellement à l'évaluation de la vitesse tangentielle en ce point ; ce qui explique l'identité de comportement entre les répartitions de tourbillons et de coefficient de pression (Figures 18 et 15).

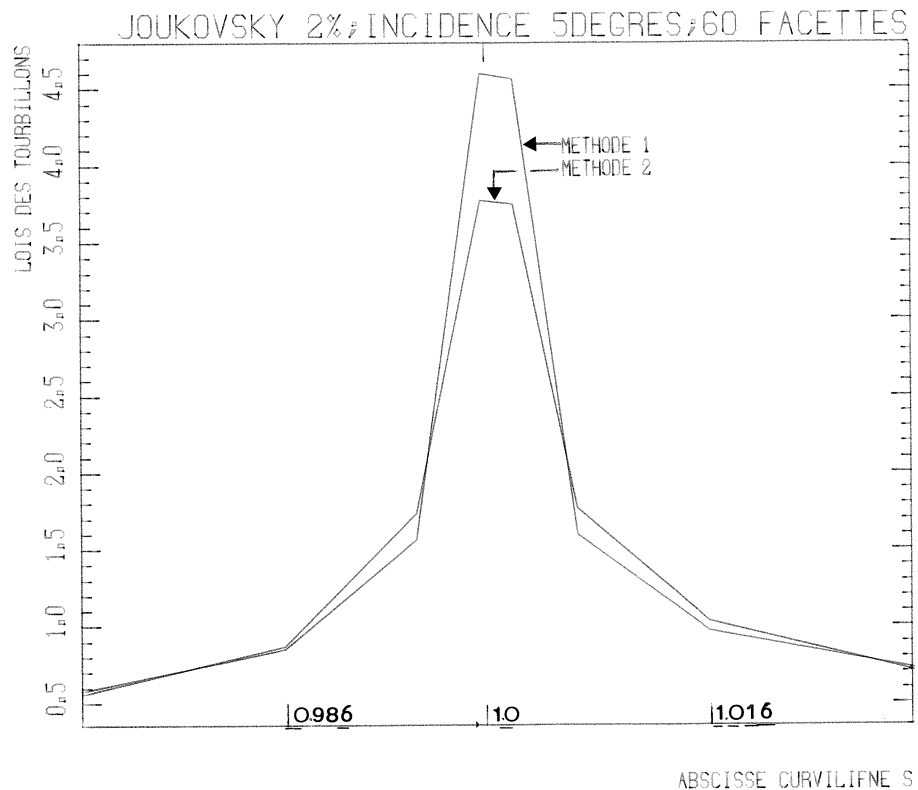


Figure 18 : Lois de vorticité obtenues par les méthodes 1 et 2 au bord d'attaque

La distribution de double couche étant près d'un "optimum", les sources associées (et de fait leur gradient) ont de faibles intensités (Figure 17) et produisent de faibles erreurs de discrétisation. La deuxième méthode procure une meilleure répartition de simple couche par rapport au critère de minimisation. D'autre part, le maillage à 60 facettes étant beaucoup plus fin que celui à 20, les oscillations dues à la méthode 1 disparaissent.

Une étude comparative des coefficients de portance obtenus par les deux méthodes avec les valeurs exactes analytiques est présentée dans le tableau 1.

Profil de JOUKOVSKY 2 %

Profil de JOUKOVSKY 6 %

$\alpha$	1 °		5 °			1 °		5 °	
	20	60	20	60		20	60	20	60
N	20	60	20	60		20	60	20	60
CZ <sub>1</sub>	0.1720	0.1662	0.6262	0.6010		0.3462	0.3386	0.7967	0.7776
e <sub>1</sub>	3.0%	0.47%	2.4%	1.7%		2.0%	0.28%	0.77%	1.6%
CZ <sub>2</sub>	0.1774	0.1686	0.6589	0.6150		0.3481	0.3410	0.8238	0.7887
e <sub>2</sub>	6.3%	0.96%	7.8%	0.61%		2.5%	0.44%	4.2%	0.24%
CZ <sub>a</sub>	0.1670		0.6113			0.3395		0.7906	

Tableau 1 : Comparaison du coefficient de portance sur les deux profils de JOUKOVSKY

Les deux profils de JOUKOVSKY ont été testés pour deux valeurs de l'incidence ( $\alpha = 1^\circ$ ,  $\alpha = 5^\circ$ ) à l'aide de deux maillages 20 et 60 facettes. Dans le tableau CZ<sub>1</sub>, CZ<sub>2</sub> et CZ<sub>a</sub> désignent respectivement les valeurs du coefficient de portance obtenues par les méthodes 1, 2 et la méthode analytique ; e<sub>1</sub> et e<sub>2</sub> sont les erreurs relatives respectives suivantes :

$$e_1 = \left| \frac{C_{z1} - C_{za}}{C_{za}} \right| ; \quad e_2 = \left| \frac{C_{z2} - C_{za}}{C_{za}} \right| \quad (46)$$

Dans tous les cas traités à l'aide du maillage à 20 facettes, l'erreur relative  $e_2$  induite par la deuxième méthode sur le coefficient de portance est supérieure à 2,5 % ; cela provient du fait que l'intégrale (8) est calculée par l'approximation discrète suivante :

$$C_X \vec{i} + C_Z \vec{j} = - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N C_{P_i} d_i \vec{n}_i \quad (47)$$

La figure (11) indique que le maillage à 20 facettes est trop grossier pour que la relation (47) soit une bonne approximation de (8). La méthode 1 semble donner de meilleurs résultats (erreur relative  $e_1 \leq 3$  %) ; ces résultats, obtenus à partir d'une répartition de coefficient de pression complètement fautive (figure 10) ne peuvent être acceptables.

Par contre, les résultats obtenus à l'aide du maillage à 60 facettes sont très bons pour les deux méthodes ( $e_1 \leq 1,7$  % ;  $e_2 \leq 0,96$  %). Comme le montrent les figures 13, 14 et 15 les courbes de pression sont pratiquement confondues avec la courbe analytique sauf au bord d'attaque du profil ; de fait la différence significative obtenue sur les valeurs du coefficient de portance provient uniquement des écarts de pression notés au bord d'attaque. Une amélioration sur les résultats peut être apportée en utilisant une discrétisation plus fine du bord d'attaque, les valeurs des survitesses dans cette zone étant alors plus proches de celles calculées analytiquement ; dans ce cas là une intégration numérique du type (47) au voisinage du bord d'attaque n'est pas assez précise. En fait, le niveau de précision obtenu par les deux méthodes étant de l'ordre de 1 %, nous nous sommes contentés de raffiner le maillage au bord d'attaque du profil en conservant l'intégration (47).

Dans le cas du maillage à 60 facettes (cf tableau 1), à forte incidence (5 degrés) la méthode 2 procure une meilleure précision que la méthode 1,

alors qu'à faible incidence (1 degré) c'est la méthode 1 qui l'emporte. Une explication de ce fait est que les deux méthodes n'utilisent pas la même condition de JOUKOWSKY. Dans le cas de la première méthode, celle-ci est réalisée de manière explicite en écrivant l'égalité des pressions sur les facettes extrados et intrados au bord du fuite du profil ; cette condition est bien confirmée par les résultats analytiques pour l'incidence de 1 degré. Par contre, lorsque l'incidence passe à 5 degrés, la dissymétrie des pressions aux points correspondants est plus forte ; dans ce cas, la méthode 2 permet une meilleure description de cette dissymétrie.

## II . 1.2 : Comparaison avec les résultats étalons

Le profil étudié dans ce paragraphe est un profil NACA de 2 % d'épaisseur relative (Figure 8). Le maillage comporte 48 facettes ; un soin particulier a été apporté à la discrétisation du bord d'attaque (Figure 9) : la méthode utilisée, développée au CREMHYG permet d'obtenir un maillage très progressif correspondant à :

- un nombre de facettes fixées
- une facette de bord d'attaque de taille fixée
- une facette de bord de fuite de taille fixée

Les deux méthodes présentées dans cette étude, ont été comparées à des résultats de base obtenus par des modèles numériques mis au point par HUNT et SEMPLE [11], [14]. Ces modèles consistent à utiliser une loi de double couche du second ordre répartie sur le squelette du profil. La forme adimensionnelle de cette loi est pré-déterminée par un calcul d'écoulement à 90 degrés d'incidence, les conditions aux limites, plus les conditions de JOUKOWSKY étant satisfaites au sens des moindres carrés. Plusieurs alternatives de cette méthode ont été testées et comparées à des résultats étalons établis par ROBERTS et RUBBERT [12], [13] ; la concordance des résultats est très bonne. Les répartitions de pression obtenues par les méthodes 1 et 2 sont quasiment confondues avec celles obtenues en [11].



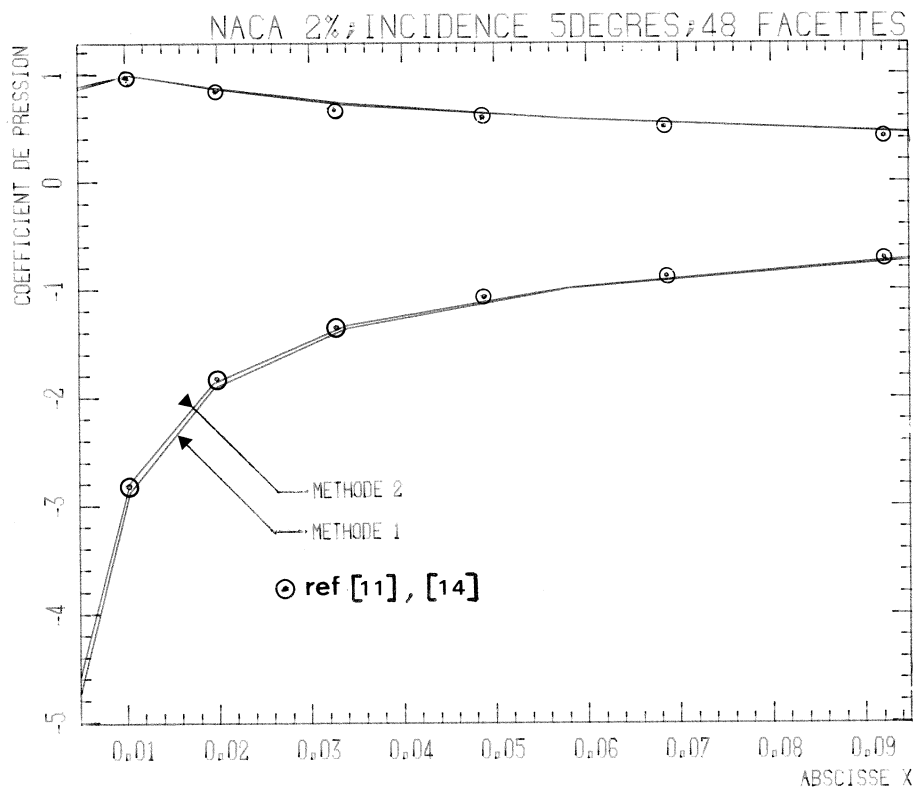


Figure 19 : Comparaison des coefficients de pression au bord d'attaque du profil

La figure 19 montre une vue agrandie de ces répartitions au bord d'attaque du profil pour une incidence de 5 degrés ; la concordance des résultats est très bonne. Une légère différence est à noter pour la méthode 1 au bord d'attaque extrados, la méthode 2 restant excellente.

### II . 1.3 : Choix de la méthode

Au vu de l'analyse des résultats comparatifs précédents, nous pouvons conclure que lorsque le maillage du profil est fin et l'incidence pas trop forte, les deux méthodes précédemment décrites donnent de très bons résultats. La suite de l'étude est faite à l'aide de la seule méthode 2. Les raisons de ce choix sont les suivantes :

- la méthode 2 nous permet d'assurer la qualité des résultats pour un maillage comportant peu de facettes,

- à forte incidence, la condition de JOUKOVSKY est mieux réalisée,

- les distributions de singularités sont toujours mieux minimisées que dans la méthode 1, ce qui assure un débit de fuite optimal,

- la condition de JOUKOVSKY implicite nous permet d'obtenir un système d'équations découplées (cf paragraphe I.5), ce qui réduit les temps de calcul ; cette propriété est conservée dans le cas cavitant et elle est intéressante pour le coût informatique en écoulement tridimensionnel.

## II. 2 : Ecoulements sub et partiellement cavitants en milieu confiné

---

Le profil traité est un profil NACA symétrique de 10 % d'épaisseur relative. Dans toute l'étude, la corde du profil est choisie comme longueur de référence et l'incidence du profil est fixée à 6,5 degrés.

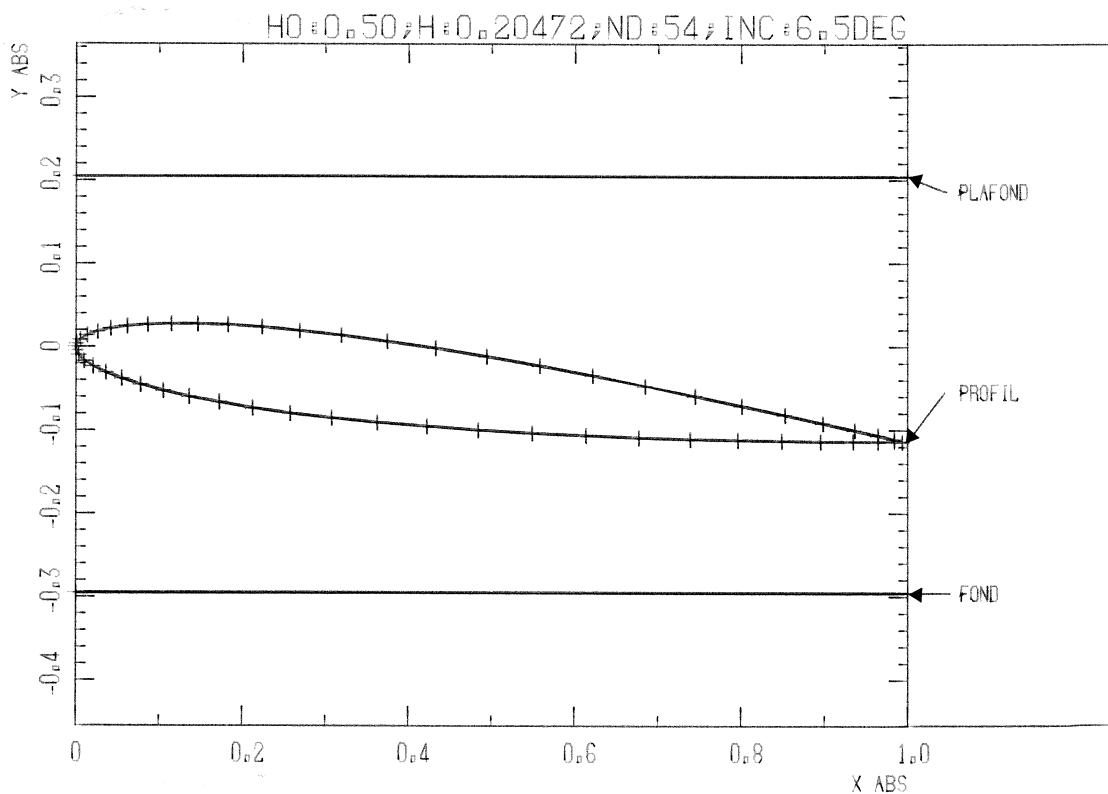


Figure 20 : Profil étudié

La figure 20 montre le profil placé dans un canal dont la hauteur  $H_0$  est égale à 0,5, à la profondeur d'immersion  $H = 0,205$  (distance du bord d'attaque du profil au plafond).

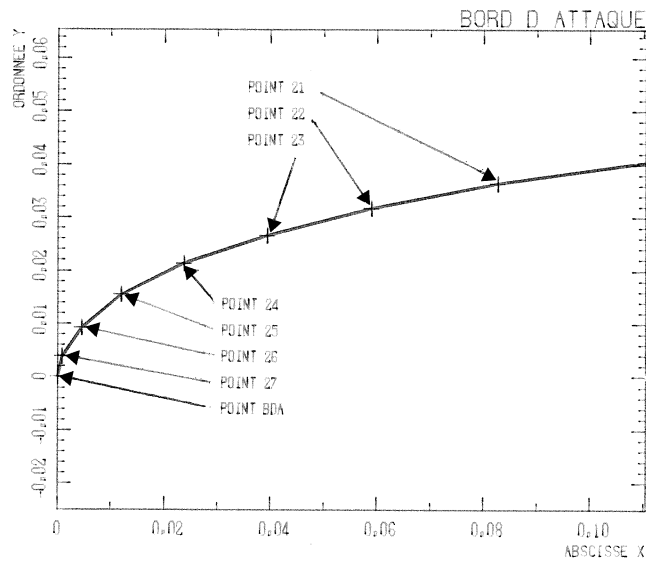


Figure 21 : Agrandissement du bord d'attaque

La figure 21 montre un agrandissement du bord d'attaque du profil et indique la numérotation des points du maillage dans la zone extrados. Le profil a été discrétisé à l'aide de 54 facettes par la méthode indiquée au paragraphe II.1.2; la taille des facettes au bord d'attaque est de l'ordre de  $4 \times 10^{-3}$ , celle des facettes au bord de fuite de l'ordre de  $10^{-2}$ .

## II . 2.1 : Influence de la hauteur du tunnel en écoulement subcavitant

---

Le profil est placé dans la position indiquée sur la figure 20. Le rapport  $H/H_0$  étant fixé à la valeur 0,41, cinq cas de hauteur de tunnel ont été traités ( $H_0 = 0,3 ; 0,5 ; 0,7 ; 5 ; \infty$ ).

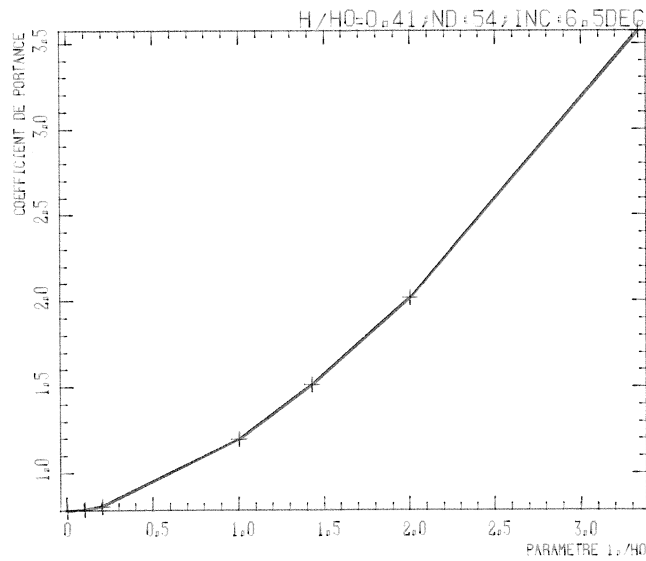


Figure 22 : Influence de la hauteur du tunnel sur le coefficient de portance. Cas subcavitant

La figure 22 montre la décroissance du coefficient de portance lorsque la hauteur du tunnel augmente, la valeur limite de la portance en milieu infini étant pratiquement atteinte pour  $H_0 = 5$

Pour chaque cas traité, la répartition du coefficient de pression sur le profil est représentée (figure 23), ainsi que les répartitions de pression sur le plafond et sur le fond (figures 24 et 25). Ces répartitions montrent que les caractéristiques de l'écoulement au bord de fuite du profil sont quasiment indépendantes de la hauteur du tunnel.

Par contre, partout ailleurs, nous pouvons constater que lorsque la hauteur du tunnel diminue, les vitesses à l'extrados du profil et sur le plafond augmentent, alors que les vitesses à l'intrados du profil et sur le fond diminuent.

Dans la zone de l'écoulement en aval du bord d'attaque du profil, les frontières de l'écoulement délimitent un divergent dans la partie supérieure et un convergent dans la partie inférieure. A l'extrados du profil le coefficient de pression augmente lorsqu'on évolue vers le bord de fuite, ce qui donne une diminution de la vitesse correspondante ; à l'intrados c'est le phénomène inverse qui se produit.

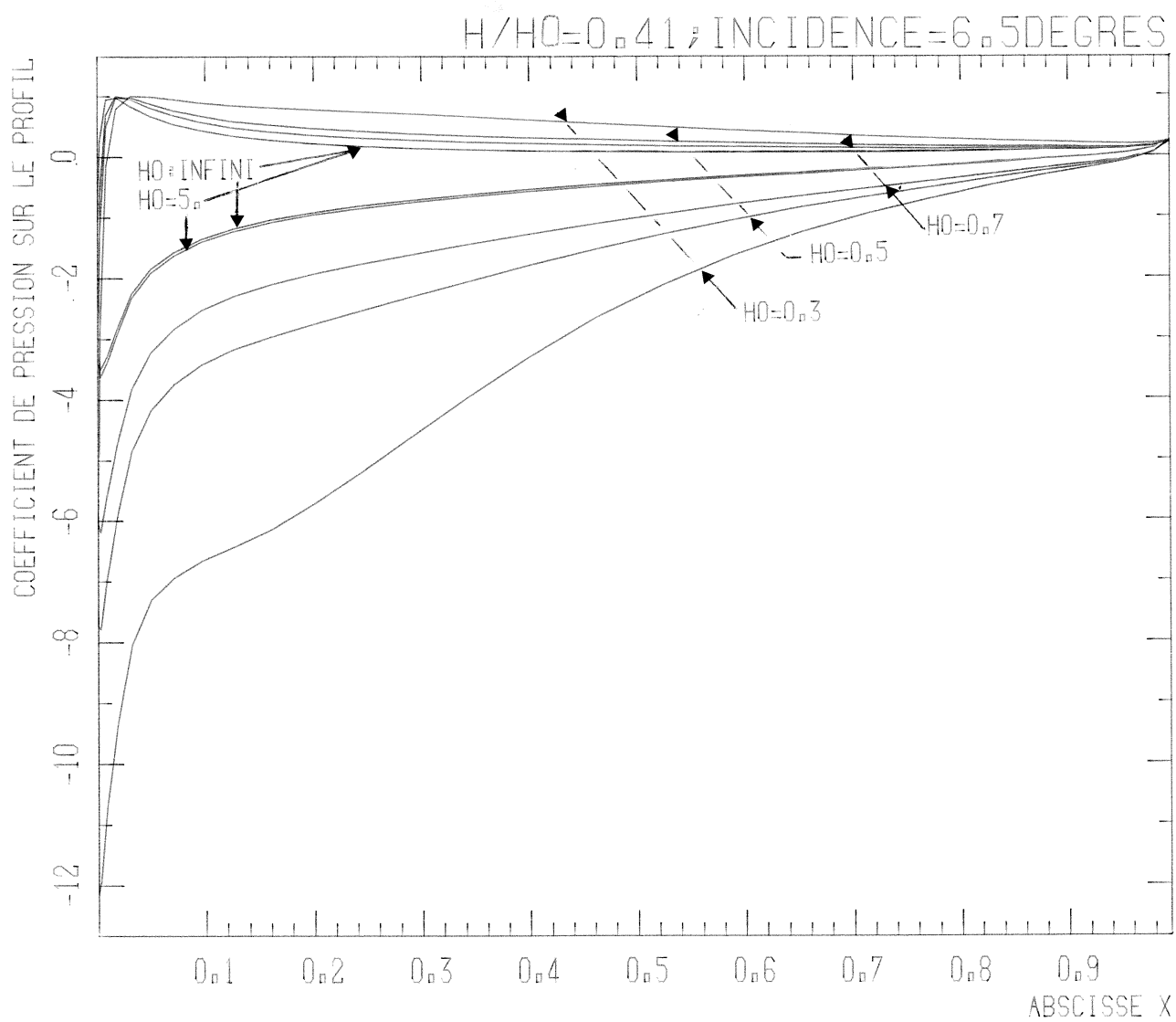


Figure 23 : Influence de la hauteur du tunnel sur le coefficient de pression sur le profil. Cas subcavitant.

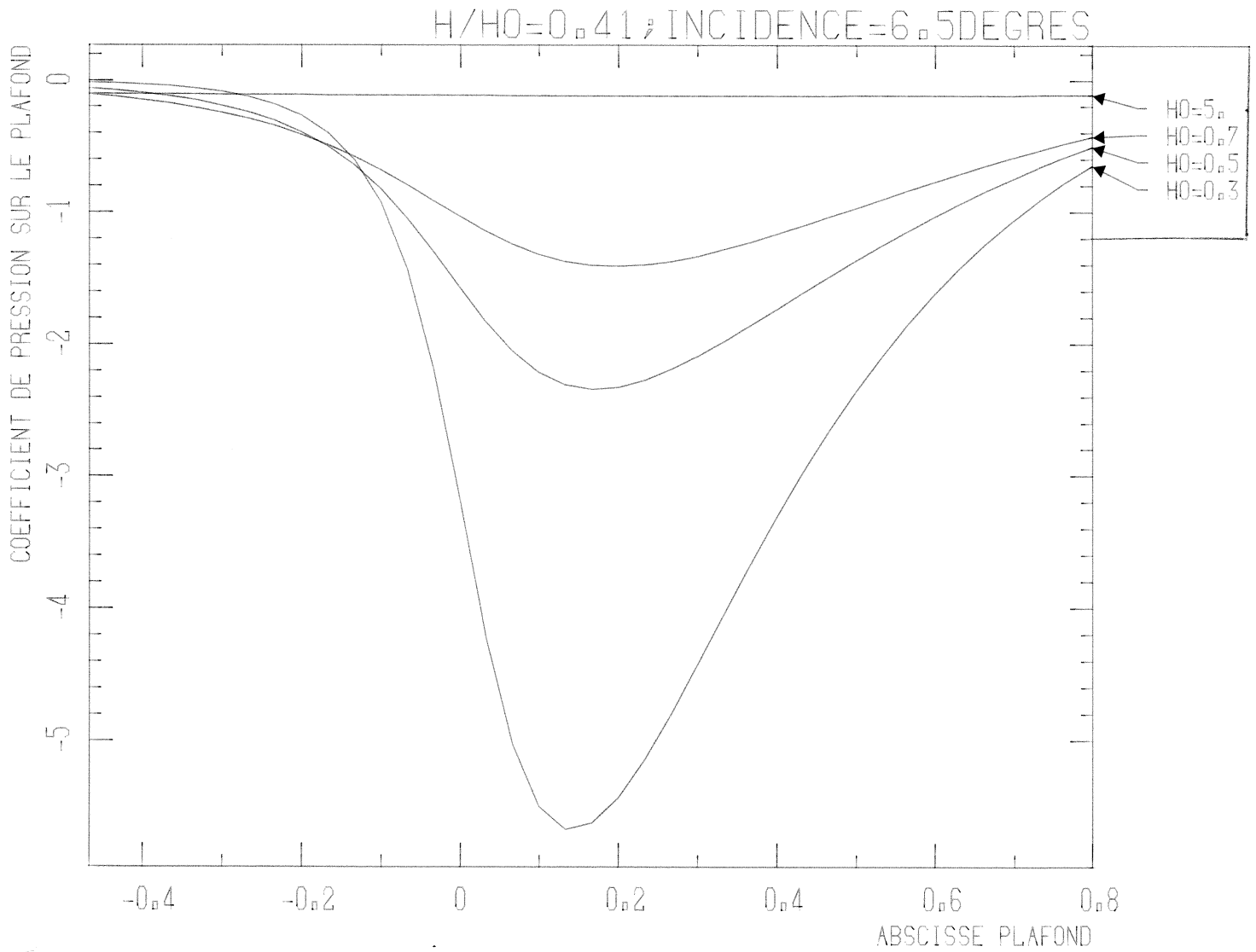


Figure 24 : Influence de la hauteur du tunnel sur le coefficient de pression sur le plafond. Cas subcavitant.

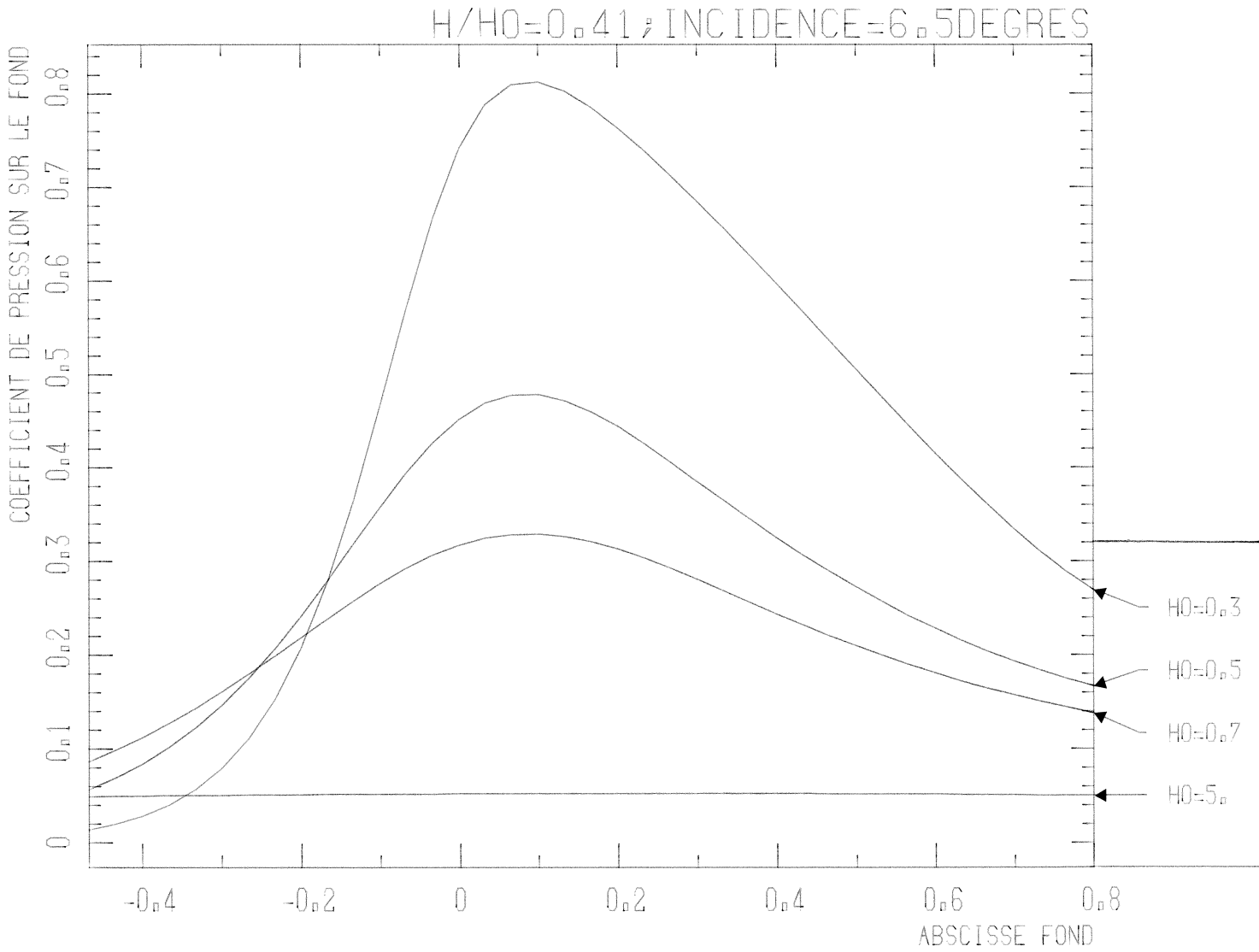


Figure 25 : Influence de la hauteur du tunnel sur le coefficient de pression sur le fond. Cas subcavitant.

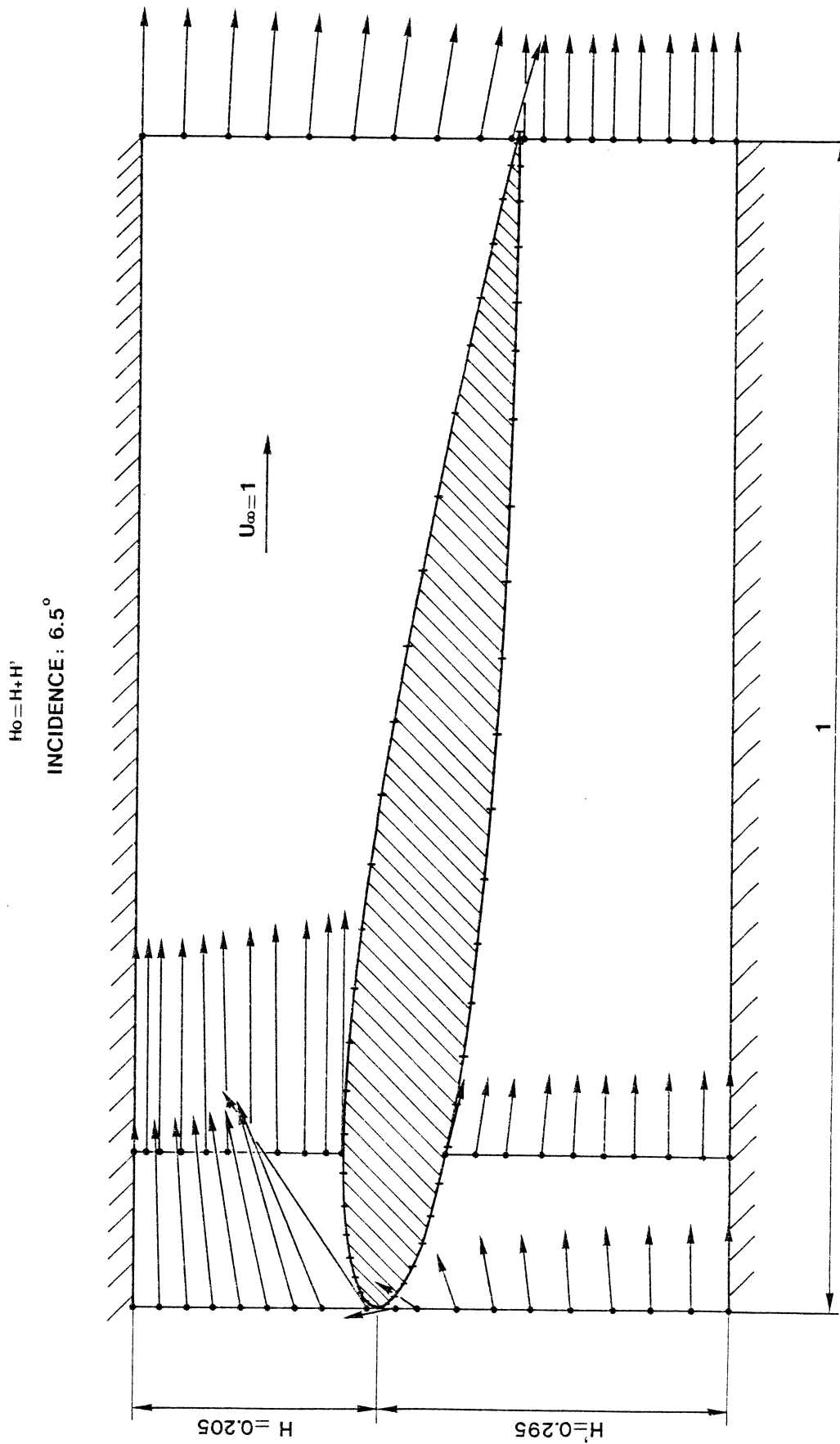


Figure 26 : Champ de vitesse. Cas subcavitant.



La figure 26 montre le champ de vitesse dans trois sections différentes correspondant au cas de la profondeur d'immersion  $H = 0,205$ . La section 1 est située au bord d'attaque, la section 2 à une abscisse égale à 0,12 et la section 3 au bord de fuite. Au voisinage du bord d'attaque, l'écoulement est fortement dévié, ce qui donne une accélération brutale du fluide autour du point d'arrêt. Cela entraîne des survitesses importantes dans la zone extradados du profil. D'autre part, dans la dernière section, à cause de la condition de JOUKOVSKY, le champ de vitesse est peu perturbé. De fait, dans la zone extradados du profil, les gradients de vitesses sont d'autant plus forts que la hauteur du tunnel est petite.

Il est remarquable de constater que c'est la condition de JOUKOVSKY qui détermine pratiquement la distribution des débits dans les zones supérieures et inférieures. Dans un souci de vérification, nous avons calculé les débits supérieurs et inférieurs dans les trois sections indiquées. Les conditions de glissement étant rigoureusement satisfaites sur le fond et le plafond, la confrontation des trois débits permet de donner une évaluation du débit de fuite et ainsi d'avoir une idée de l'erreur relative due à la discrétisation du problème.

	x section	$Q_s$	$Q_I$	$ e_s $	$ e_I $
Section 1	0	0.3378	0.1631	1,8 %	3 %
Section 2	0.123	0.3365	0.1651	1,5 %	2 %
Section 3	1	0.3315	0.1685		

Tableau 2 : Débits dans différentes sections

Le tableau 2 indique les valeurs des débits  $Q_S$  dans les sections supérieures, des débits  $Q_I$  dans les sections inférieures, ainsi que les erreurs relatives prises par rapport à la dernière section.

Au vu des résultats de ce tableau, la conservation du débit dans la partie supérieure est assurée à moins de 2 %, dans la partie inférieure à moins de 3 %. De fait le débit de fuite est relativement très petit, ce qui confirme la qualité des résultats obtenus par la méthode.

## II . 2.2 : Régime cavitant - Influence du point de détachement

Dans toute la suite de l'étude la hauteur du tunnel est fixée à  $H_0 = 0,5$ , la profondeur d'immersion à  $H = 0,205$ . La longueur de cavité (cf figure 1) est définie par la distance du point  $\omega$  au point projection de C sur l'axe  $\vec{\omega x}$ . Le point de détachement de la cavité étant fixé autour du bord d'attaque, le point C est alors parfaitement défini. La zone de raccord est déterminée par les deux facettes immédiatement en aval du point C ; pour assurer la régularité géométrique ainsi que la continuité des distributions des singularités, un surmaillage est nécessaire autour du point C. Celui-ci est obtenu en rajoutant deux facettes supplémentaires de part et d'autre du point C de façon à ce que leurs tailles se raccordent progressivement en amont et en aval du point C.

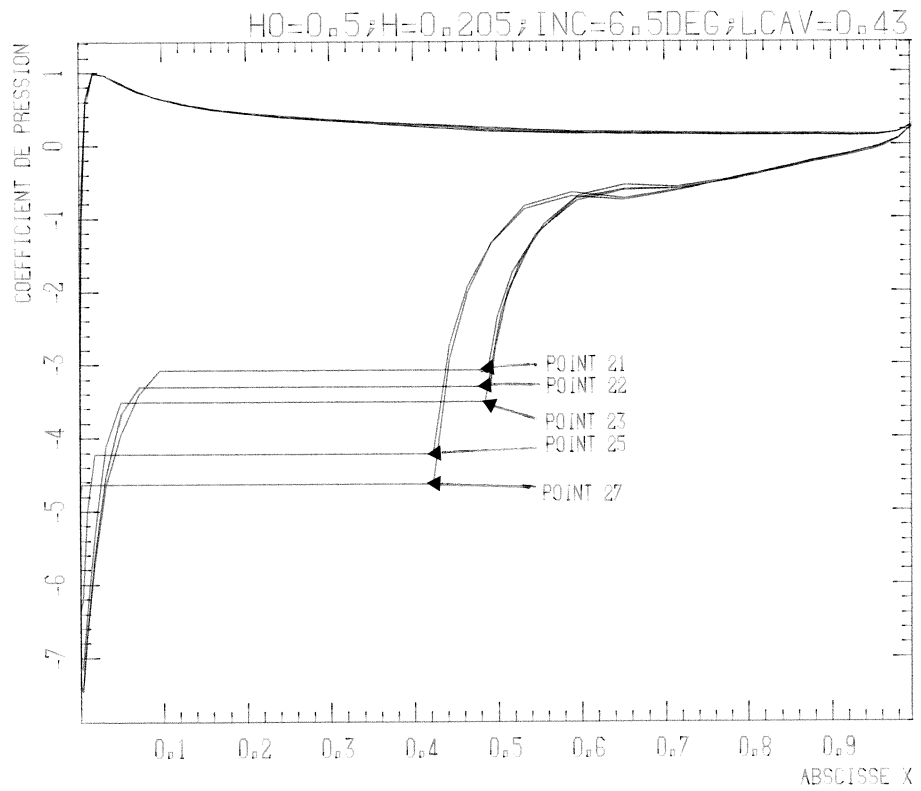


Figure 27 : Influence de la position du point de détachement de la cavité sur le coefficient de pression

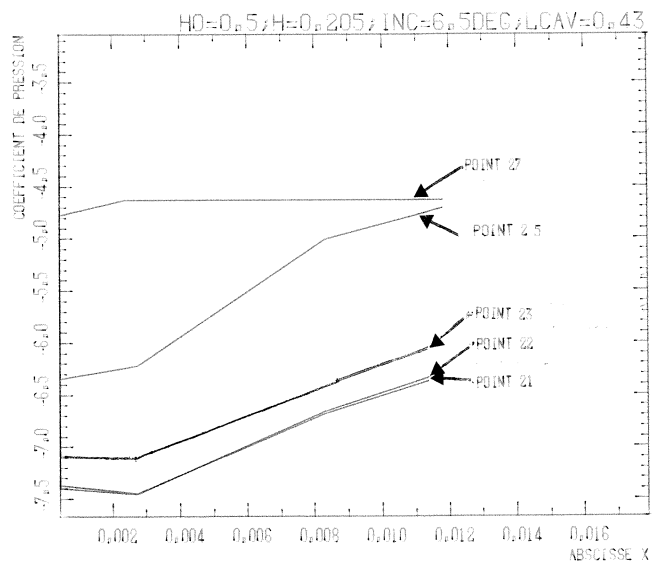


Figure 28 : Agrandissement des courbes de la fig. 27 au bord d'attaque

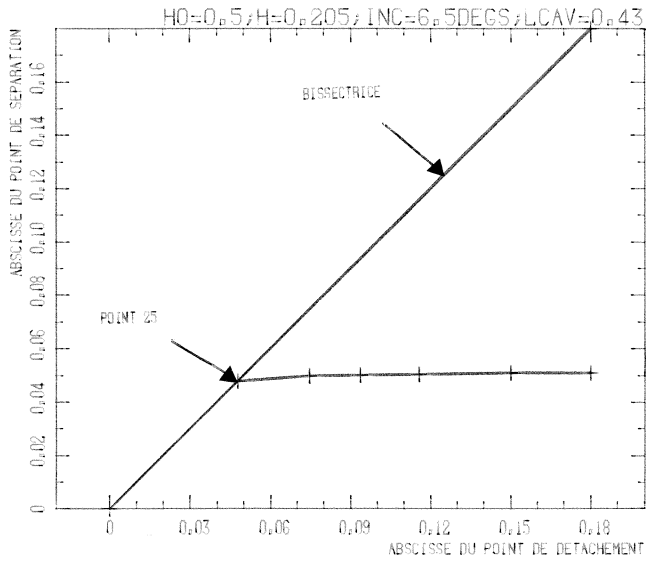


Figure 29 : Détermination du point de détachement

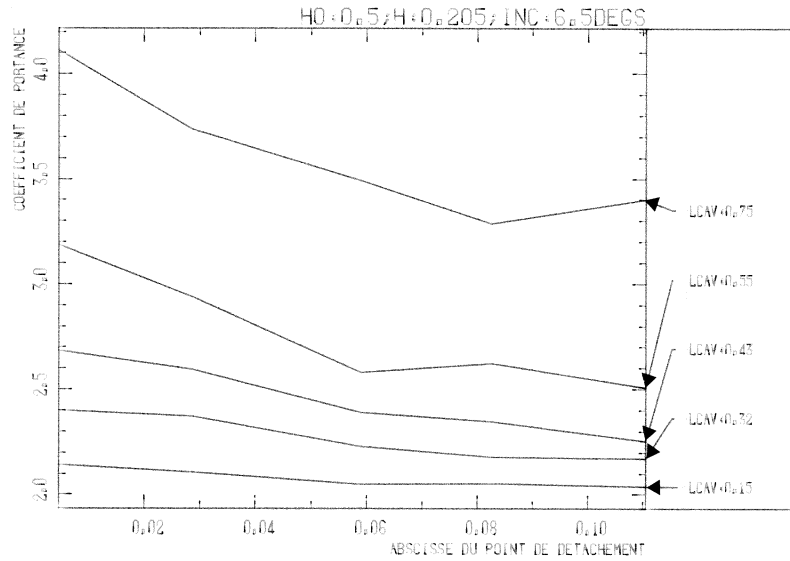


Figure 30 : Coefficient de portance fonction de la position du point de détachement

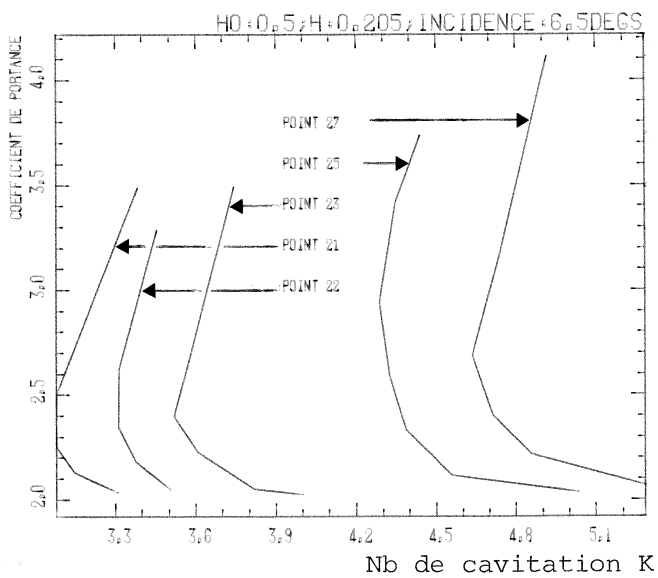


Figure 31 : Influence de la position du point de détachement sur les courbes  $C_z$  (K)

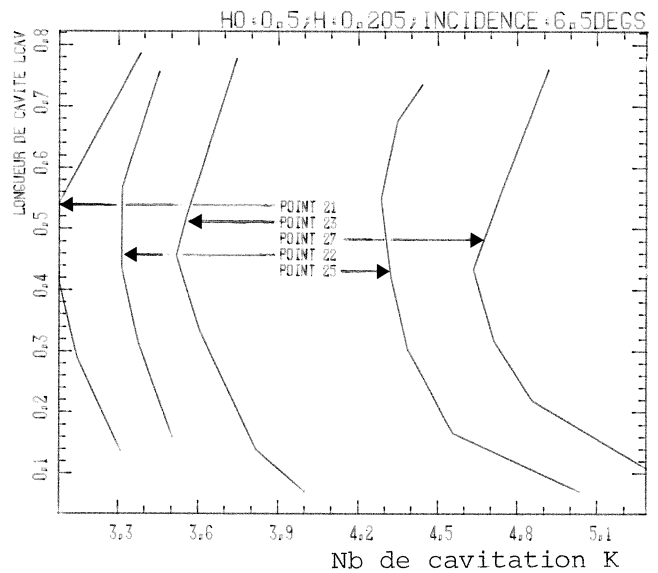


Figure 32 : Influence de la position du point de détachement sur les courbes  $l$  (K)

La longueur de cavité étant maintenue constante et égale à 0,43, la figure 27 montre les répartitions de pression obtenues pour différentes positions du point de détachement. La position numérotée de chaque point est indiquée sur la figure 21. La figure 27 met en évidence que lorsque le déplacement relatif du point de détachement n'est pas significatif (groupe des points 21, 22, 23 ou groupe des points 25, 27), les recompressions sur la zone de raccord ainsi que les distributions des pressions à l'intrados sont quasiment inchangées. Par contre, la pression relative dans la cavité (figure 27) ainsi que la survitesse au bord d'attaque extrados (figure 28) sont directement affectées. Or ces valeurs sont déterminantes pour obtenir les caractéristiques du profil. D'où la nécessité de connaître au mieux la position du point de détachement. Un calcul de couche limite développé par J.L.KUENY et SCHULTZ suivant la méthode de CEBECI [25] permet pour chaque position du point de détachement d'obtenir le point de séparation laminaire de la couche limite.

Ce calcul de couche limite, couplé avec le calcul de l'écoulement potentiel, suivant la technique validée antérieurement par de nombreux auteurs (KATO, S.BISET [23], J.P.FRANC et J.M.MICHEL [24]) permet d'obtenir la position du point de détachement. L'intersection avec la première bissectrice dans le plan (1 SEPARATION, 1 DETACHEMENT) montre que le point de détachement 25 est un point de séparation (figure 29).

La figure 30 représente l'évolution du coefficient de portance en fonction de la position du point de détachement pour plusieurs longueurs de cavité ; remarquons que l'influence de cette position est d'autant plus forte que la longueur de cavité est grande. Cela est en accord avec le fait que lorsque la longueur de cavité tend vers zéro, le coefficient de portance doit tendre vers sa valeur limite obtenue en régime subcavitant. La figure 30 montre que cela est bien réalisé, la limite subcavitante du  $C_z$  dans la présente configuration ( $H_0 = 0,5$  ;  $H = 0,205$ ) étant égale à 2 (figure 22).

Pour chaque point de détachement, un balayage de la longueur de cavité permet de tracer les courbes du coefficient de portance et de la longueur de cavité en fonction du nombre de cavitation (figures 31 et 32). Pour les grandes valeurs du nombre de cavitation (longueurs de cavités très courtes) la limite subcavitante de  $C_z$  est atteinte.

Ces courbes présentent une forte analogie à celles obtenues dans le cas du milieu infini [26] et notamment la présence d'un point à tangente verticale. De fait, la pression de cavité étant fixée, il existe deux configurations de cavité se reformant à l'extrados du profil (les configurations où  $lcav$  est inférieur à 0,5 et celles où  $lcav$  est supérieur à 0,5). En fait, une étude de stabilité montre que la zone des courbes  $lcav(K)$  où la pente est positive est complètement irréaliste ; nous allons voir dans le paragraphe suivant que dans cette zone, la fermeture de la poche est aussi irréaliste.

### II .2.3 : Régime cavitant - Influence de la longueur de cavité

Le point de détachement de la cavité est choisi selon le critère de séparation laminaire de la couche limite (cf paragraphe II.2.2.). Sept cas de longueur de cavité ont été traités.

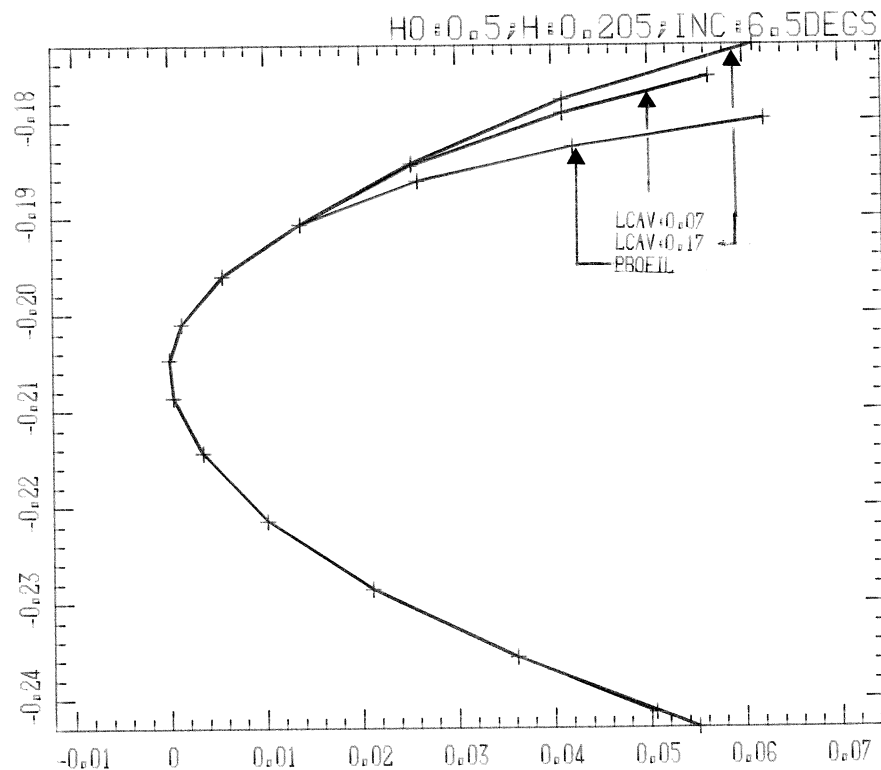


Figure 33 : Forme des cavités au voisinage du point de décollement

La figure 33 montre la forme de la cavité au voisinage du point de détachement au bord d'attaque pour les deux longueurs de cavité  $l_{cav} = 0,07$  et  $l_{cav} = 0,17$  ; nous pouvons constater la finesse du maillage utilisé dans cette zone. La condition de sortie tangentielle est remarquablement respectée implicitement par la condition de minimisation.

Pour tous les cas de cavité traités, les répartitions du coefficient de pression ainsi que la géométrie des lignes libres sont illustrées respectivement par les figures 34 et 35.

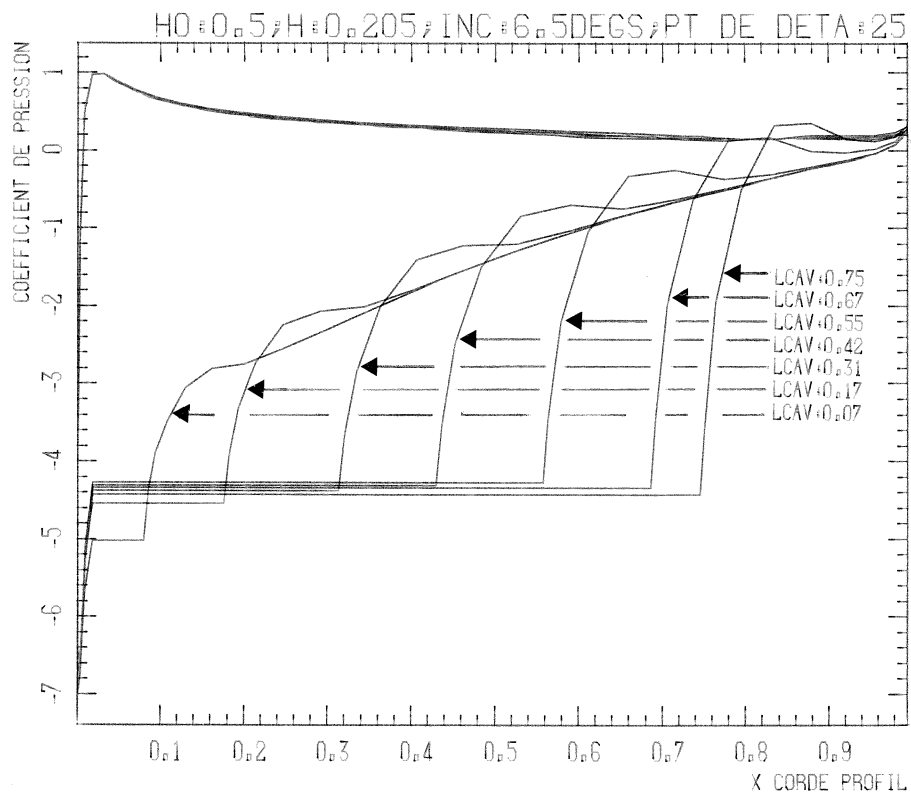


Figure 34 : Influence de la longueur de cavité sur le coefficient de pression

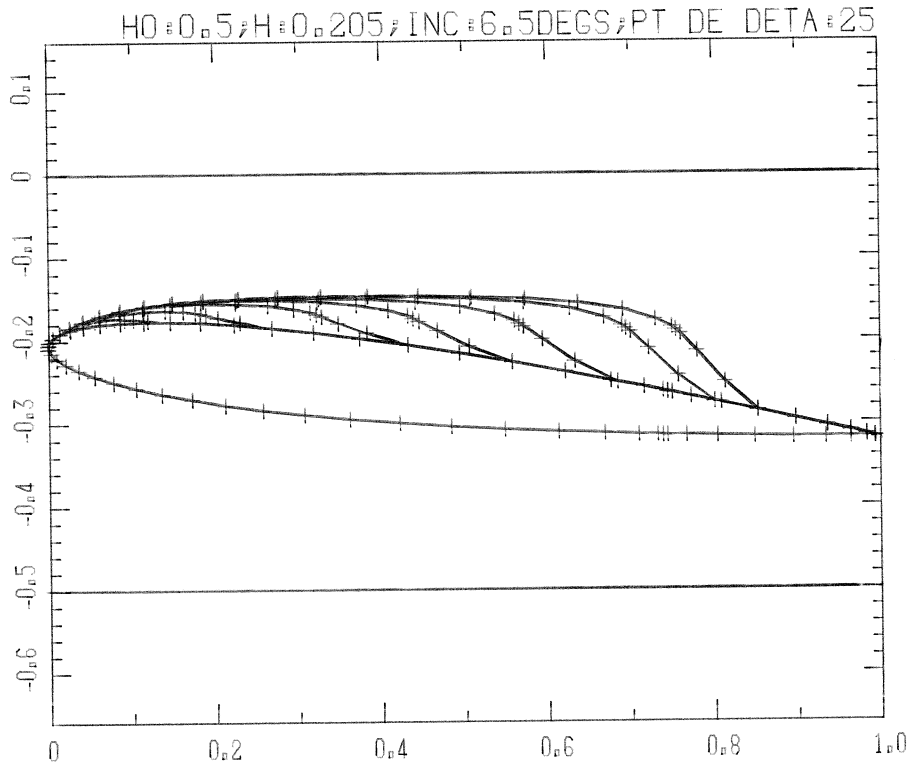


Figure 35 : Formes des poches de cavités

Dans le cas des grandes longueurs de cavité, la figure 34 met en évidence les fortes recompressions obtenues sur la zone de raccord. Cela vient du fait que dans ces cas la fermeture de la poche ne se fait plus de manière régulière, la zone de raccord devenant irréaliste (figure 35). Ces phénomènes se produisent effectivement pour des longueurs de cavité supérieures à 0,5, valeur correspondant au point à tangente verticale des courbes de la figure 32. Autour de ce point, une légère variation de pression entraîne de grandes variations de la longueur de cavité. Cela semble expliquer le fait, qu'au delà d'une certaine longueur, le caractère instationnaire de l'écoulement (pulsation des cavités) devient prédominant.



Dans la zone des grandes longueurs, la modélisation du sillage est sans doute insuffisante : à l'arrière des cavités de grande longueur un sillage se développe au-delà de l'arrière du profil. La présente méthode, introduisant une zone de raccord (sillage) à l'arrière de la cavité non nécessairement sur le profil, autorise un ajustement ultérieur. Un tel ajustement n'est possible que sur la base de résultats expérimentaux concernant l'organisation de l'écoulement derrière les cavités de grandes longueurs. De tels résultats sont actuellement pratiquement inexistantes.

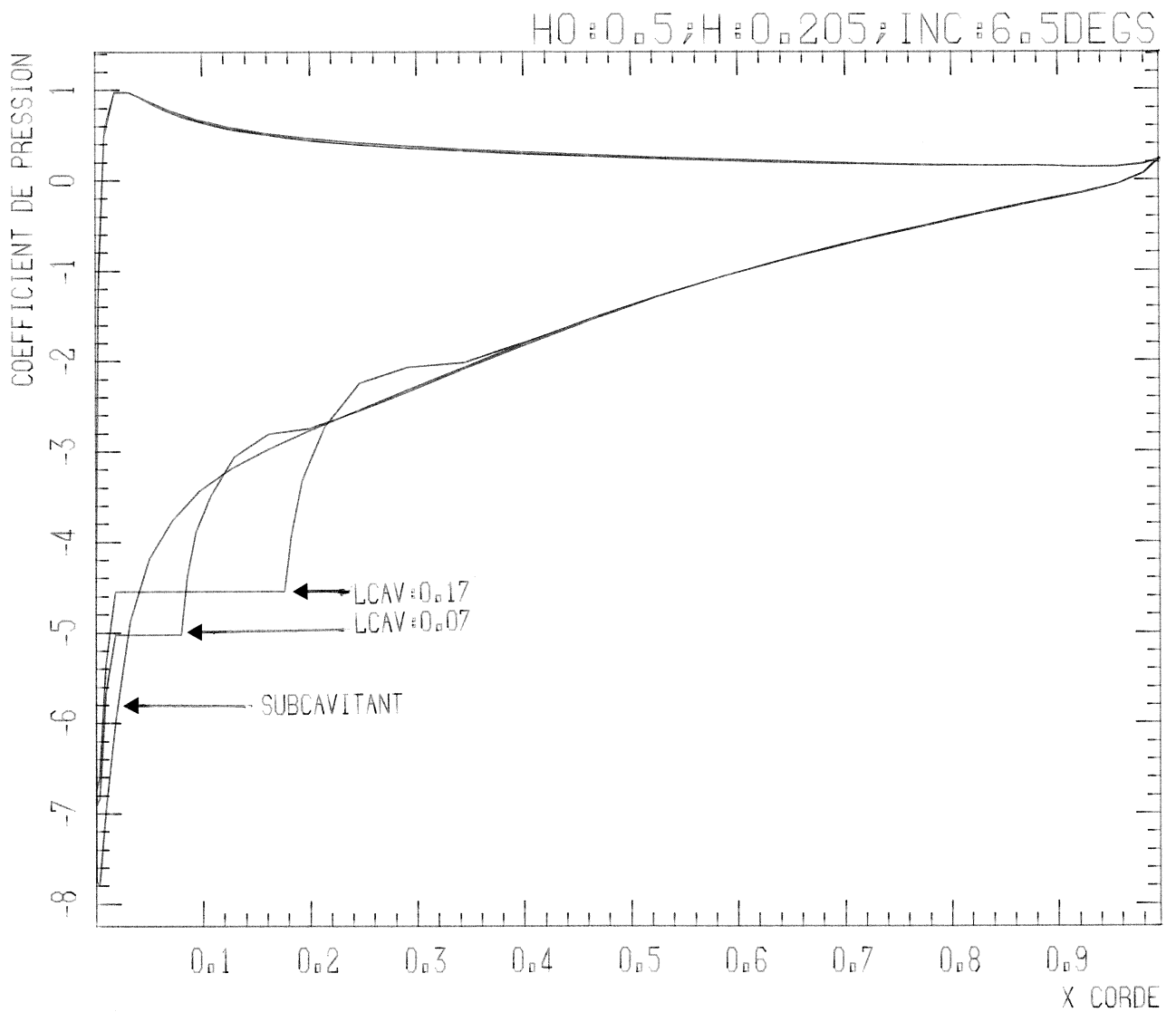


Figure 36 : Comparaison

Il est intéressant de situer les répartitions de pression par rapport à la répartition obtenue en régime subcavitant. La figure 36 montre ces répartitions pour les deux longueurs de cavité  $l_{cav} = 0,07$  et  $l_{cav} = 0,17$ . Il est remarquable de constater que la présence de la cavité et du sillage n'ont qu'une influence locale sur les répartitions du coefficient de pression. En dehors de leur voisinage, ces répartitions sont confondues avec celles du régime subcavitant et notamment les pressions à l'intrados du profil restent inchangées même pour des longueurs de cavité plus grandes (figure 34). De fait, le champ de vitesse dans le domaine fluide inférieur (zone comprise entre l'intrados du profil et le fond du tunnel) change peu ; l'écoulement autour des différentes configurations de poche se fait alors de façon à ce que les débits fluides passant dans la zone supérieure et dans la zone inférieure restent approximativement constants.

Lorsque la longueur de cavité augmente, le gonflement de la poche provoque un rétrécissement de la zone supérieure où elle se situe. Dans le cas des petites cavités ( $l_{cav} < 0,55$ ) la figure 34 montre que la vitesse sur la poche diminue quand la longueur augmente ; le débit devant rester à peu près constant dans une section plus petite, la vitesse sur le plafond augmente nécessairement, ce qui accroît le risque de cavitation sur le plafond.

Dans le cas des grandes cavités ( $l_{cav} > 0,55$ ) c'est le phénomène inverse qui se produit

#### II . 2.4 : Régime cavitant - Influence de la hauteur du tunnel

Dans ce paragraphe, la longueur de cavité est prise égale à 0,42, son point de détachement étant le point de numéro 25 (point de séparation obtenu au paragraphe II.2.2). Le rapport  $H/H_0$  étant fixé à la valeur 0,41, six cas de hauteur de tunnel ont été traités ( $H_0 = 0,3 ; 0,5 ; 0,7 ; 1 ; 5 ; \infty$ ).

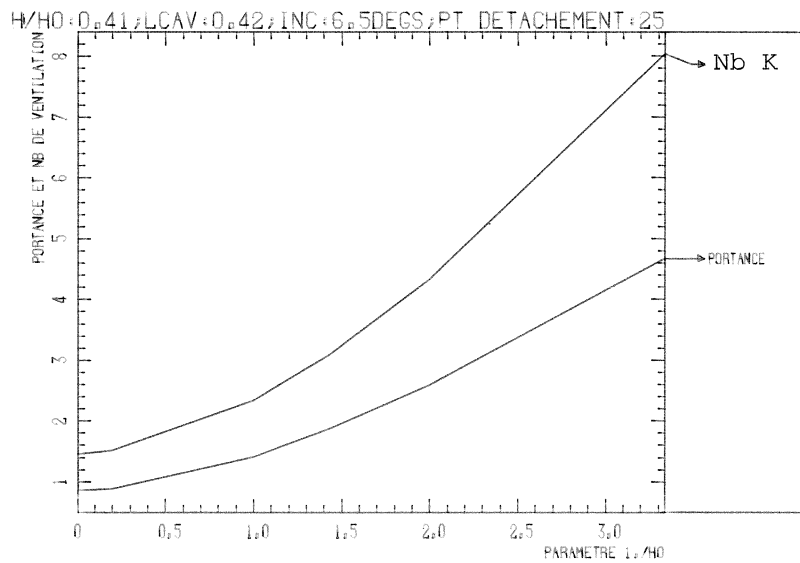


Figure 37 : Influence de la hauteur du tunnel sur le nombre de cavitation et le coefficient de portance

La figure 37 met en évidence les décroissances du coefficient de portance et du nombre de cavitation lorsque la hauteur du tunnel augmente, la valeur limite de chacun d'eux étant pratiquement atteinte pour  $H_0 = 5$ . La figure 38 montre l'évolution de la poche de cavitation avec la hauteur du tunnel. Nous remarquons l'aplatissement de la cavité provoqué par la proximité des parois ( $H_0 = 0,3$  et  $0,5$ ). Pour les autres valeurs, les cavités sont pratiquement confondues avec celle obtenue en milieu infini.

Les répartitions de pression sur le profil obtenues pour les différentes hauteurs du tunnel sont illustrées sur la figure 39. La forte influence des parois sur la valeur de la pression relative dans la cavité montre l'importance de celles-ci sur la qualité des résultats.

La figure 40 indique les lois de doublets normaux  $\mu$  obtenues pour différentes valeurs de  $H_0$ . La partie linéaire de ces courbes montre que sur la cavité la vorticité est constante : cela est en parfait accord avec le fait que sur celle-ci la vitesse reste constante. D'autre part, la différence des niveaux de  $\mu$  entre les abscisses finale et initiale, représente la circulation autour du profil ; cette circulation diminue lorsque  $H_0$  augmente, ce qui est conforme avec la décroissance correspondante du coefficient de portance.

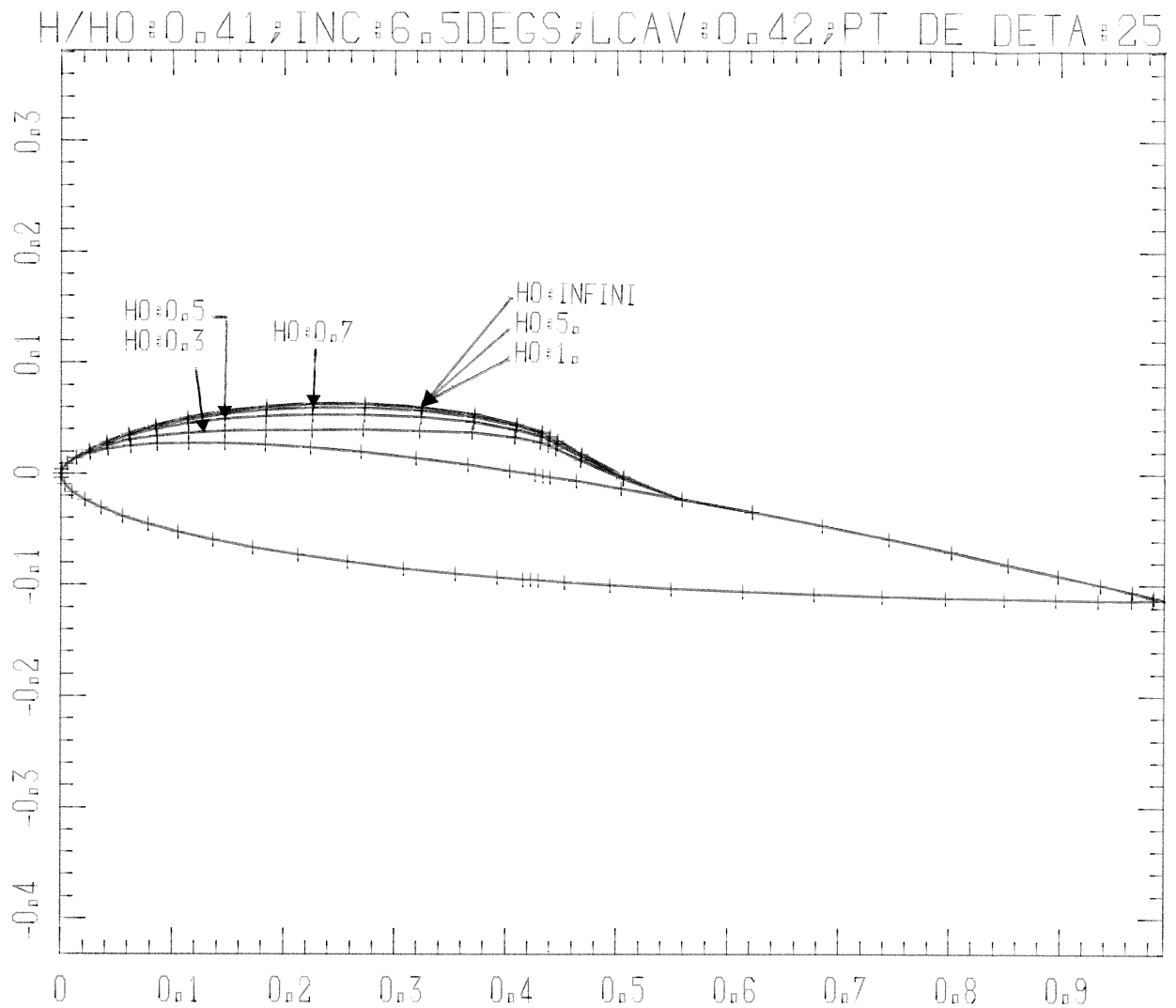


Figure 38 : Influence de la hauteur du tunnel sur la géométrie des cavités

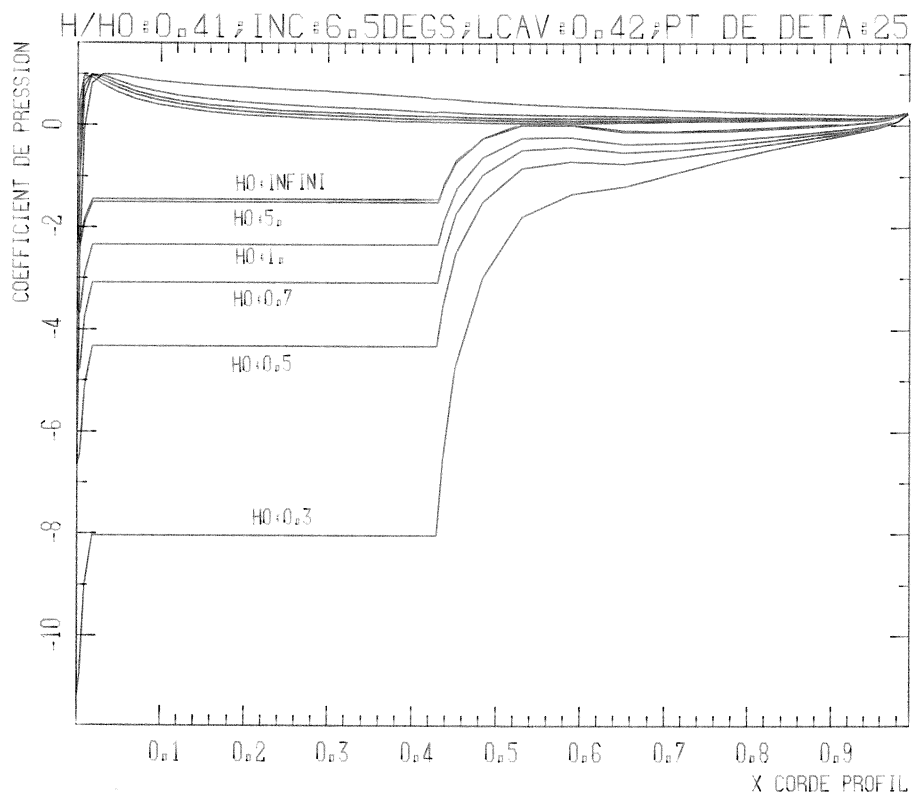


Figure 39 : Influence de la hauteur du tunnel sur les courbes du coefficient de pression

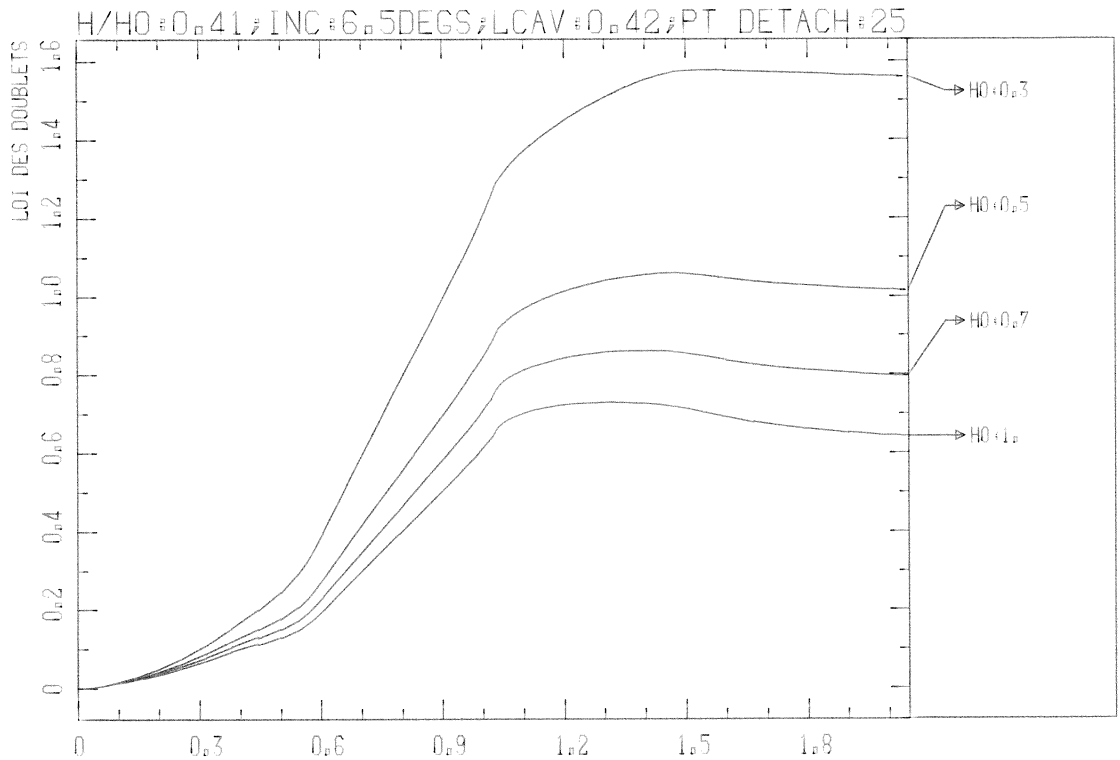


Figure 40 : Influence de la hauteur du tunnel sur la loi de double couche

### II. 3 : Ecoulement autour d'une grille d'aube

---

Le profil est placé à une incidence  $\alpha = 5$  degrés. La grille d'aube est composée d'une série infinie de profils déduits les uns des autres par une translation de vecteur  $\vec{H0} \cdot \vec{p}$  (figure 6). L'angle  $\beta$  de la grille est tel que  $\alpha + \beta = \varpi = (\vec{o\bar{y}}, \vec{p})$ . La figure 41 illustre trois profils consécutifs dans le cas où  $H0 = 0,5$  et  $\beta = 10$  degrés.

La figure 42 montre les répartitions du coefficient de pression obtenues en écoulement subcavitant pour diverses valeurs du paramètre  $H0$ . La sur-vitesse au bord d'attaque extradados augmente lorsque  $H0$  augmente. D'autre part, on vérifie que la diminution de  $H0$  provoque un écart de pression extradados intrados qui s'amenuise, ce qui est en accord avec le fait que dans ce cas la zone fluide entre les profils diminue.

La figure 43 montre l'influence de l'angle  $\beta$  sur les répartitions de pression. Il est à noter la faible influence de l'angle  $\beta$  sur la survitesse à l'extrados. Les variations du coefficient de portance en fonction de  $H_0$  sont illustrées par la figure 44. On peut constater que le  $C_z$  n'est que légèrement affecté dans la zone étudiée des angles  $\beta$ . Pour les grandes valeurs de  $H_0$ , la valeur du  $C_z$  devient indépendante de  $\beta$ , ce qui est conforme avec le fait que dans ce cas le milieu devient infini.

Une étude comparative est effectuée dans un cas subcavitant et dans un cas cavitant. Les méthodes comparées sont la méthode 2 exposée au chapitre I de la présente partie et une méthode utilisant le principe des éléments finis ; cette dernière a été développée au CREMHYG par KUENY ET SCHULTZ.

Dans le cas subcavitant traité ( $\alpha = 3^\circ$ ,  $\beta = -3^\circ$ ), la concordance des coefficients de pression obtenus (figure 45) est très bonne, les courbes présentant une légère différence au voisinage du bord d'attaque extrados. Cette différence s'explique par le fait que, dans la méthode des éléments finis, la vitesse aux points de contrôle est calculée par extrapolation des valeurs voisines.

Le cas cavitant traité correspond à une incidence  $\alpha = 7^\circ$ , et un angle de grille  $\beta = 0^\circ$  ; la longueur de cavité est prise égale à 0,36. La figure 46 montre les coefficients de pression obtenus par les deux méthodes ; la concordance des résultats est excellente. Les géométries de poche sont confondues (figure 47) ; au bord d'attaque les cavités sont bien tangentes au profil (figure 48).

Les coefficients de portance calculés à l'aide de la méthode 2 et de la méthode des éléments finis sont égaux respectivement à 0,239 et 0,246, ce qui donne une erreur relative de 3 %. La différence vient du fait que dans le cadre de la méthode 2, le coefficient de portance est obtenu par intégration des pressions sur le profil, alors que dans le cadre des éléments finis, celui-ci est obtenu par le théorème d'EULER.

A titre d'exemple, nous indiquons les distributions de sources et de tourbillons obtenues dans le cas de la méthode 2 (figures 49 et 50). La discontinuité qui apparaît pour la loi des sources correspond au changement de nature des conditions aux limites lorsqu'on passe de la cavité à son sillage. Par contre, la loi de tourbillons correspondante (figure 50) est régulière ; cela est important car c'est son influence qui est déterminante dans l'évaluation de la pression.

Il est remarquable de constater qu'à l'arrière de la cavité la loi de tourbillons présente un fort gradient ce qui est conforme à la réalité physique de l'écoulement dans cette zone.

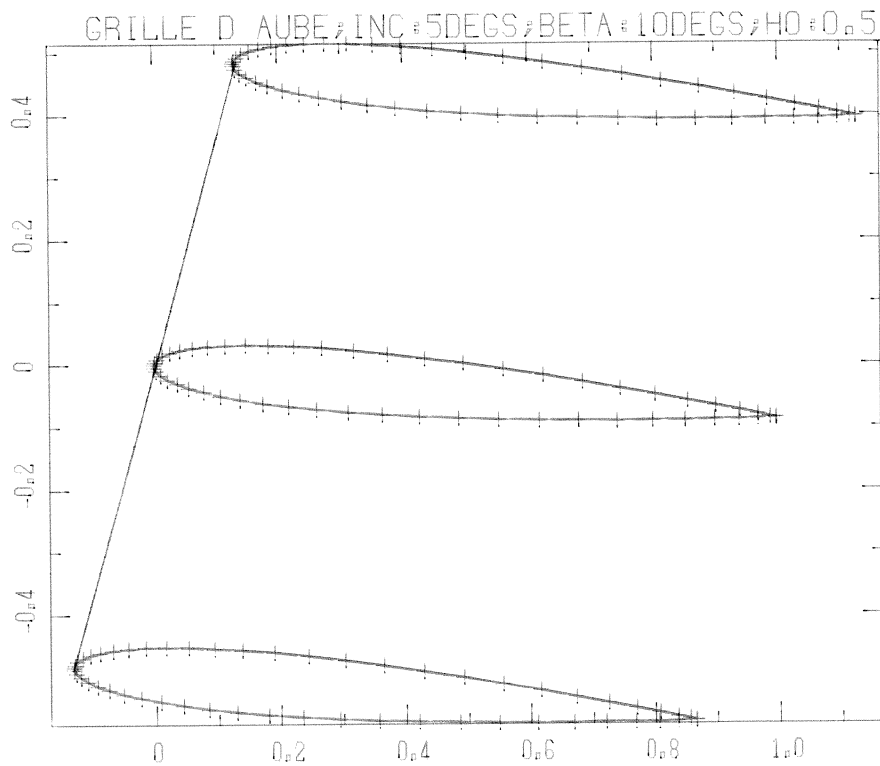


Figure 41 : Grille d'aube d'angle 10 degrés

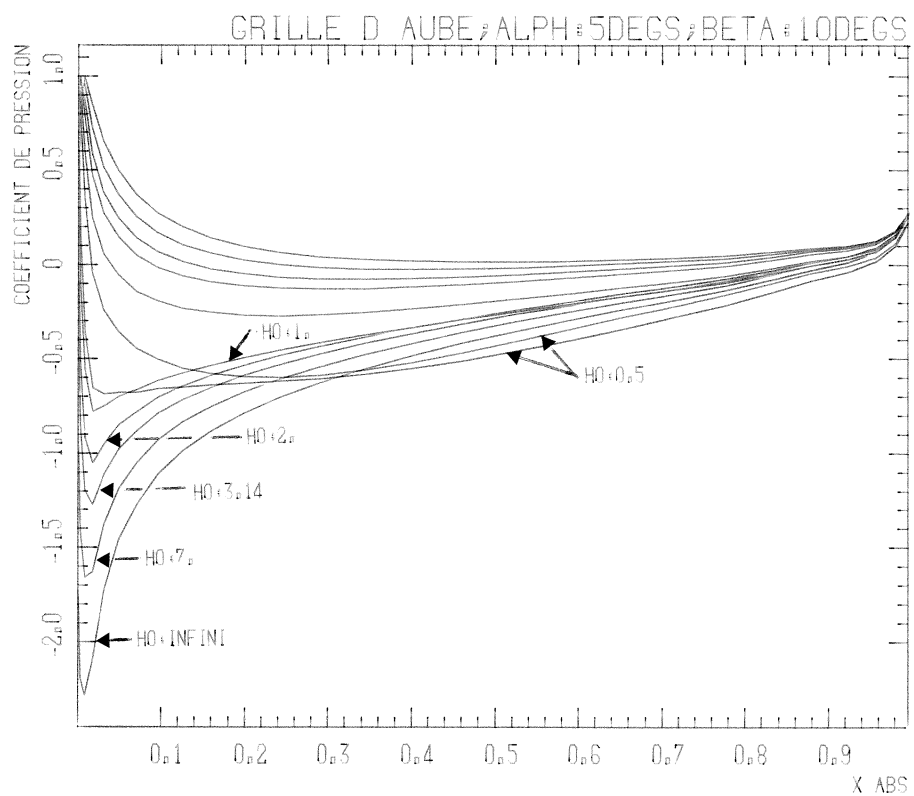


Figure 42 : Influence du pas de la grille d'aube sur les coefficients de pression



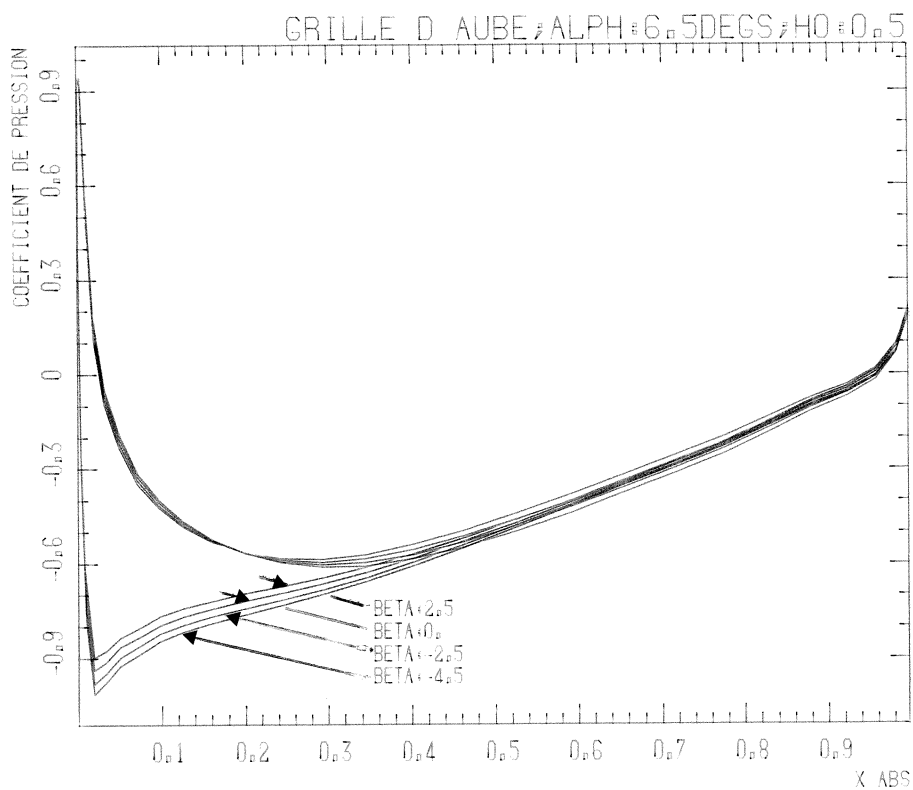


Figure 43 : Influence de l'angle de la grille d'aube sur les coefficients de pression

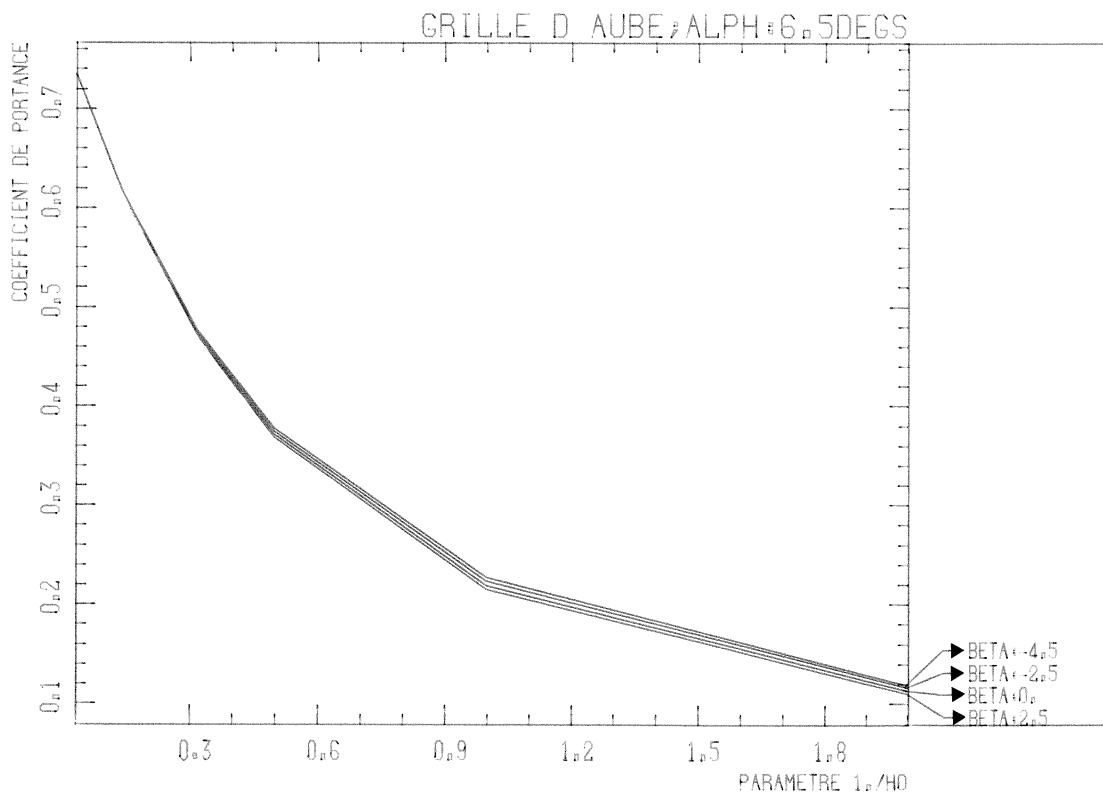


Figure 44 : Influence de l'angle de la grille d'aube sur les coefficients de portance

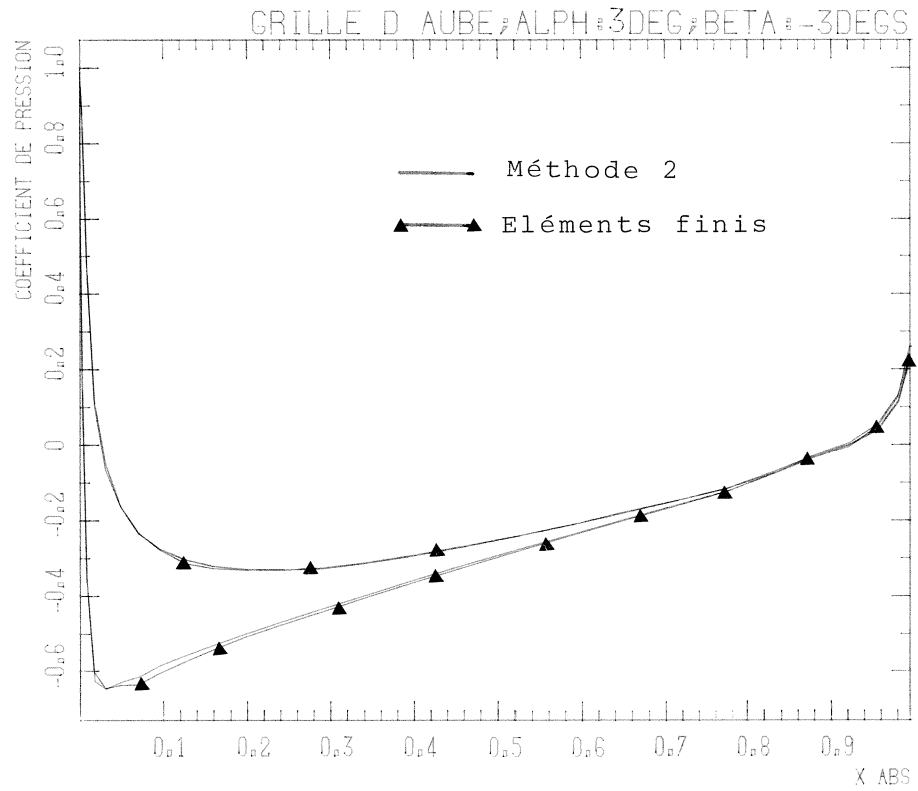


Figure 45 : Coefficients de pression obtenus par la méthode 2 et la méthode des éléments finis. Cas subcavitant.

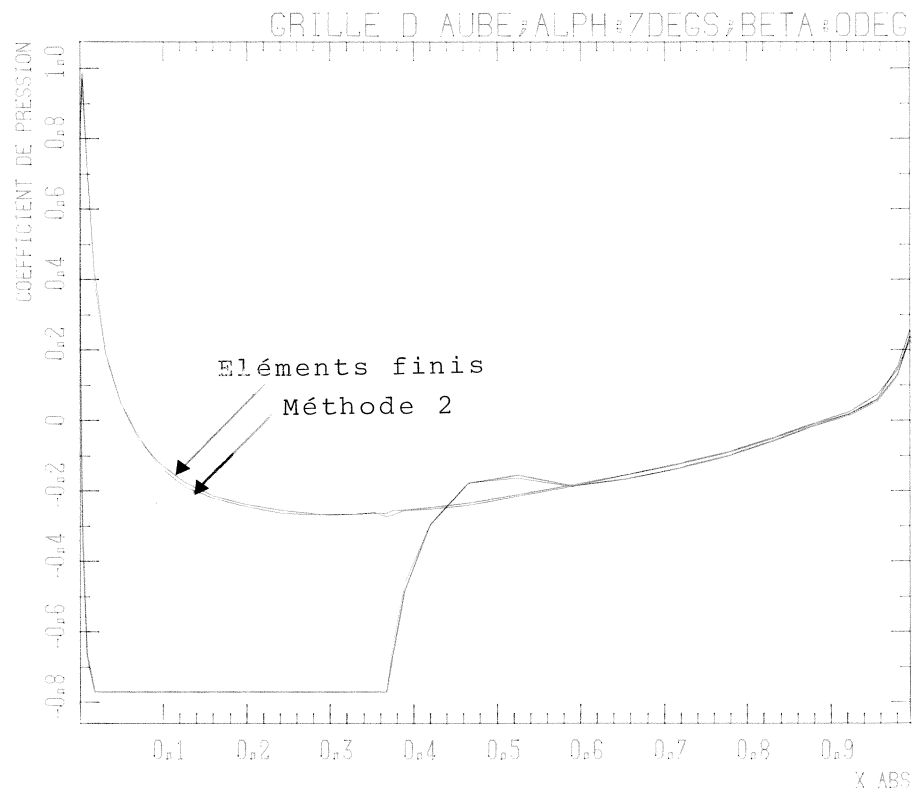


Figure 46 : Coefficients de pression obtenus par la méthode 2 et la méthode des éléments finis. Cas cavitant.

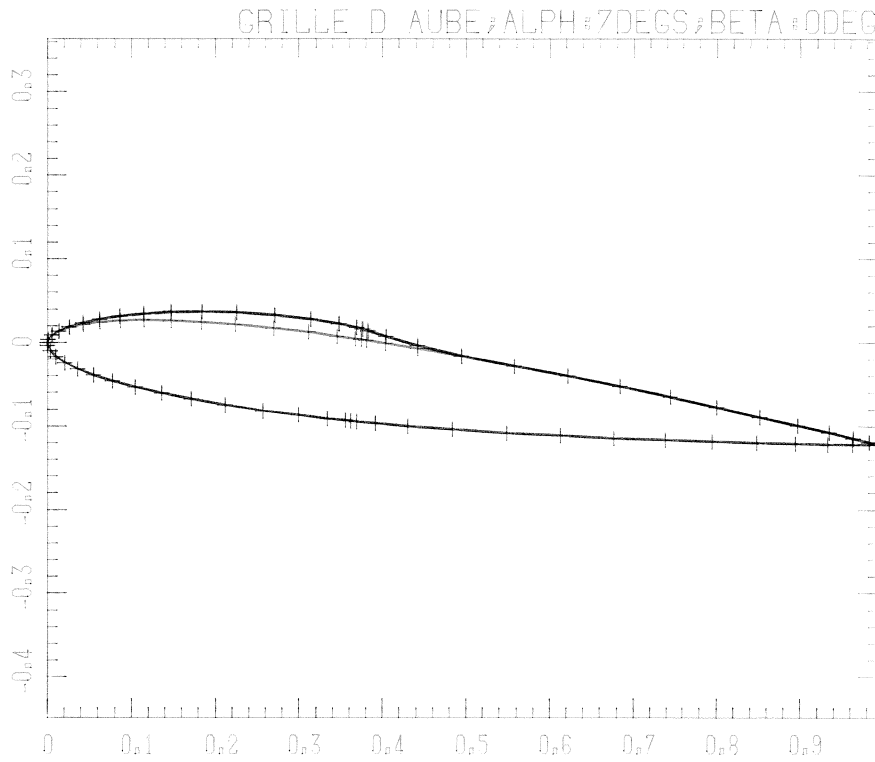


Fig. 47 : Comparaison des poches de cavitation

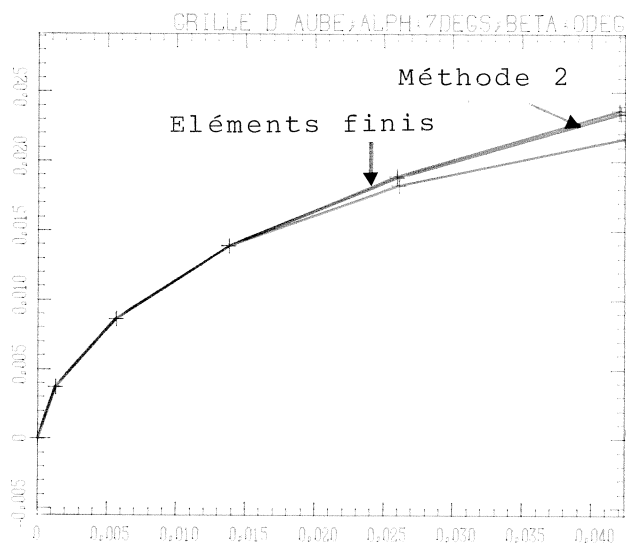


Fig. 48 : Agrandissement au bord d'attaque

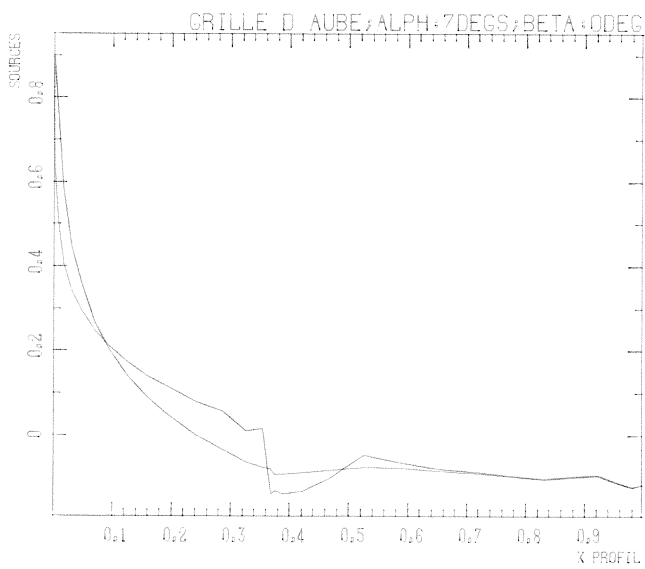


Fig. 49 : Loi des sources

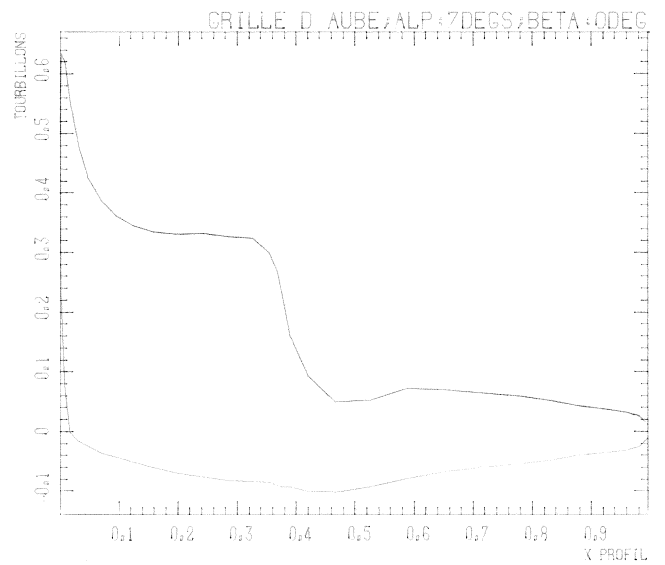


Fig. 50 : Loi des tourbillons



D E U X I E M E   P A R T I E



AILE MINCE D'ENVERGURE FINIE

APPLICATION AU PROBLEME DE L'HELICE SUBCAVITANTE

---



## PRINCIPALES NOTATIONS

---

(OXYZ)	repère lié à l'aile
(oxyz)	repère absolu
$\vec{oz}$	axe vertical ascendant
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	vecteurs unitaires du repère (oxy)
$\vec{n}_M$	normale extérieure
$(\vec{u}_{1M}, \vec{u}_{2M})$	vecteurs normés tangents aux surfaces
$i^*$	complexe imaginaire pur $i^{*2} = -1$
Im	partie imaginaire
$\alpha$	incidence de l'aile = $(\vec{OY}, \vec{oY})$
$\vec{V}_\infty$	vitesse à l'infini amont
$\vec{v}_M$	vitesse de perturbation au point M
$\vec{V}_M$	vitesse totale au point M
$\rho$	masse volumique du fluide
$p_M$	pression en un point M du fluide
$p_\infty$	pression de référence
$C_{PM} = (p_M - p_\infty) / 0,5\rho V_\infty^2$	coefficient de pression en un point M du fluide
Surf*	surface de la forme en plan de l'aile
$S^*$	surface de l'aile
$\Sigma^*$	surface du sillage
$\vec{F}$	effort exercé par le fluide sur l'aile
$C_Y = \vec{F} \cdot \vec{j} / 0,5\rho V_\infty^2 \text{Surf}^*$	coefficient de traînée
$C_Z = \vec{F} \cdot \vec{k} / 0,5\rho V_\infty^2 \text{Surf}^*$	coefficient de portance

$\sigma$	répartition de simple couche
$\mu$	répartition de double couche
$\vec{\omega}$	densité tourbillonnaire
$\vec{f}_\sigma$	influence de la simple couche
$\vec{f}_\mu$	influence de la double couche
$\vec{f}_1, \vec{f}_2$	influences des deux composantes de la densité $\vec{\omega}$
$(o, \xi, \eta, \zeta)$	repère lié à l' hélice
$(o, X_0, Y_0, Z_0)$	repère lié au bateau
$(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$	vecteurs directeurs du repère du bateau
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$	vecteurs directeurs du repère de l' hélice
$(r, \theta, \xi)$	coordonnées cylindriques dans le repère de l' hélice
$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\xi)$	vecteurs unitaires relatifs aux coordonnées cylindriques
$x_G, \theta_G$	équations polaires de la génératrice d' une pale
$c$	corde de la section d' une pale
$\varphi$	angle de calage de chaque section
$f$	loi de cambrure
$f_0$	cambrure maximum
$l$	loi d' épaisseur
$l_0$	épaisseur maximum
NP	nombre de pales
$\delta = 2\pi/NP$	écart angulaire entre deux pales
$h_g = 2\pi tg \varphi$	pas géométrique
$V_0$	module de la vitesse du bateau
R	rayon de l' hélice
D	diamètre de l' hélice



$n_t$	vitesse de rotation de l'hélice en tours/seconde
$\omega = 2\pi n_t$	vitesse de rotation de l'hélice en rds/seconde
$V_A$	vitesse moyenne dans le plan de l'hélice
$J_A = V_A / n_t D$	paramètre d'avance
$\vec{V}_B$	champ de vitesse du à la présence du bateau
$\vec{V}_a$	champ de vitesse d'attaque
$S^{(p)}$	surface d'une pale (p)
$\Sigma^{(p)}$	surface du sillage relatif à la pale (p)
$K_p$	coefficient de pression
$\vec{F}_p$	efforts de pression
$\vec{F}_v$	forces visqueuses
$\vec{M}_p$	moment des efforts de pression
$\vec{M}_v$	moment des forces visqueuses
$K_T = (\vec{F}_p + \vec{F}_v) \cdot \vec{u} / \rho n_t^2 D^4$	poussée de l'hélice
$K_Q = (\vec{M}_p + \vec{M}_v) \cdot \vec{u} / \rho n_t^2 D^5$	couple de l'hélice
$C_f$	coefficient de frottement
$\vec{W}^*$	vitesse relative par rapport à l'hélice
Re	nombre de REYNOLDS

## PRELIMINAIRE

=====

Cette seconde partie comporte deux chapitres:

- le premier chapitre est relatif au calcul de l'écoulement autour d'une aile mince d'envergure finie. Deux modèles de calcul sont développés. Le premier modèle utilise une loi de double couche pré-déterminée par une méthode de moindres carrés, et met en oeuvre une condition de JOUKOVSKY explicite (paragraphe I.3). Le deuxième modèle (paragraphe I.4) est une extension de la seconde méthode mise au point à propos de l'étude bidimensionnelle. Les résultats sont comparés à des résultats ayant valeurs de référence et présentés au paragraphe I.5.

- le deuxième chapitre concerne le calcul de l'écoulement autour d'une hélice fonctionnant en régime subcavitant. Le deuxième modèle développé au paragraphe I.4 est utilisé dans la représentation de chaque pale. Dans cette étude, le moyeu de l'hélice n'est pas pris en compte ; d'autre part le sillage des lignes tourbillons développées à l'arrière de l'hélice est rigidifié en une surface simplifiée. Les résultats obtenus sont présentés dans le cas d'une hélice épaisse et comparés à des résultats expérimentaux (paragraphe II.4).

CHAPITRE I

ÉCOULEMENT SUBCAVITANT AUTOUR D'UNE AILE

MINCE D'ENVERGURE FINIE

=====

I. 1 : Equations intégrales du problème

---

I. 1.1. : Equations de l'écoulement et conditions aux limites

---

Le problème est traité dans le cadre du milieu infini. L'aile est définie dans le repère (OXYZ), le plan (OYZ) étant un plan de symétrie pour celle-ci. Elle est donc uniquement définie par l'une de ces parties symétriques. Sa demi forme en plan (OABC) (Figure 1) est un trapèze dont les côtés parallèles sont OC et AB. Les sections de l'aile par des plans parallèles au plan YOZ donnent des profils semblables au profil de base du plan (OYZ). Au point m du segment A<sub>1</sub> B<sub>1</sub> correspond un point extradados M et un point intrados M'. Connaissant alors M<sub>O</sub> (0, Y<sub>O</sub>, Z<sub>O</sub>) point du profil dans la section médiane (OYZ), on en déduit le point M (X<sub>M</sub>, Y<sub>M</sub>, Z<sub>M</sub>) homologue de M<sub>O</sub> dans la section (ωYZ) d'abscisse X. Lorsque le point M<sub>O</sub> parcourt le profil de base, le point M<sub>E</sub> parcourt le profil semblable dans la dernière section (plan X = X<sub>E</sub>) ; la surface ainsi obtenue est une surface conique engendrée par les segments M<sub>O</sub> M<sub>E</sub>.

Nous considérons le repère (oxyz) tel que la vitesse à l'infini amont soit parallèle à  $\vec{o}\vec{y}$  (figure 2). L'axe  $\vec{O}\vec{X}$  du repère de l'aile est confondu avec l'axe  $\vec{o}\vec{x}$  de celui du repère absolu. L'aile est mise en incidence par rotation autour de l'axe  $\vec{o}\vec{x}$  d'angle  $\alpha = (\vec{o}\vec{Y}, \vec{o}\vec{y}) = (\vec{o}\vec{Z}, \vec{o}\vec{z})$ . L'aile et le sillage sont des surfaces symétriques par rapport au plan (oyz), l'écoulement présentant la même symétrie  $(\vec{V}_\infty = |\vec{V}_\infty| \vec{j})$ .

Nous désignons par S\* la surface totale de l'aile, par Σ\* la surface totale du sillage. Les parties situées du côté des x positifs de ces surfaces sont alors respectivement notées S et Σ. La normale unitaire extérieure aux surfaces est désignée par  $\vec{n}_M$ . La courbe L<sub>Fui</sub> est commune aux surfaces S et Σ. La surface Σ du sillage est générée par des segments de droite de même taille parallèles à  $\vec{o}\vec{y}$  et s'appuyant sur le bord du fuite L<sub>Fui</sub>. Le fluide est supposé parfait iso-volume, l'écoulement irrotationnel. Les forces de pesanteur ne sont pas prises en compte. (De) désignant le domaine fluide extérieur nous pouvons alors écrire les champs potentiel et vitesse :



$$\Phi_M = |\vec{V}_\infty| y + \varphi_M \quad (1)$$

$$\vec{V}_M = \vec{V}_\infty + \vec{v}_M \quad (2)$$

$$\vec{v}_M = \text{grad}_M \varphi_M \quad (3)$$

Le problème revient donc à chercher un potentiel harmonique partout dans (De) et satisfaisant la condition de glissement sur l'aile :

$$M \in S \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_M = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_M \quad (4)$$

Aux conditions aux limites précédentes, s'ajoutent les conditions à l'infini traduisant le fait que sur la sphère à l'infini la vitesse de perturbation de l'écoulement tend vers zéro.

$p_\infty$  désignant la pression à l'infini amont sur l'axe  $oy$ , le coefficient de pression est donné par :

$$C_{pM} = 1 - \frac{\vec{V}_M^2}{\vec{V}_\infty^2} \quad (5)$$

De même, les efforts que le fluide exerce sur l'aile s'écrivent :

$$\frac{\vec{F}}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \text{Surf}^*} = C_y \vec{j} + C_z \vec{k} = -\frac{1}{\text{Surf}^*} \iint_S C_{PM} (\vec{n}_M + \vec{n}_{SM}) dS_M \quad (6)$$

$\text{Surf}^*$  représente la surface totale de la forme en plan de l'aile,  $\vec{n}_{SM}$  le vecteur symétrique de  $\vec{n}_M$  par rapport au plan (oyz).

### I. 1.2. : Equations intégrales

Au regard des conditions aux limites (4), le problème à résoudre est un problème de Neumann extérieur [15], [20]. On peut montrer alors, à partir de la deuxième formule de Green que le potentiel en un point M du domaine extérieur s'écrit (annexe A 1) :

$$\varphi_M = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S,\Sigma} \sigma_P \frac{1}{|\vec{MP}|} dS_P - \frac{1}{4\pi} \iint_{S,\Sigma} \mu_P \frac{\partial}{\partial n_P} \left( \frac{1}{|\vec{MP}|} \right) dS_P \quad (7)$$

où P désigne le point courant des surfaces, M le point de calcul.

Dans l'expression (7)  $\sigma_P$  et  $\mu_P$  représentent respectivement les densités de sources et de doublets normaux :

$$\sigma_P = \left( \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right)_P; \mu_P = -(\varphi_e - \varphi_i)_P$$

$\varphi_e$  désigne le potentiel du champ de vitesse dans le domaine fluide limité par les surfaces  $S, \Sigma$  et la sphère à l'infini ;  $\varphi_i$  désigne le potentiel dans le domaine fluide intérieur à S.

Nous savons que l'aile tridimensionnelle portante génère un sillage transportant la vorticité cr  e sur celle-ci. De fait les potentiels de chaque côté du sillage ne sont pas les mêmes. Lorsque le nombre de REYNOLDS devient infini (c'est le cas dans notre étude), l'épaisseur du sillage devient nulle et le potentiel est discontinu à la traversée de celui-ci. Par contre la dérivée normale du potentiel est continue en vertu du fait qu'en écoulement stationnaire le sillage est une surface de courant. Ainsi la densité de sources sur le sillage est nulle, l'intégrale correspondante s'étendant uniquement sur  $S$ . A l'aide de cette remarque et en prenant le gradient de l'expression (7), le champ de vitesse en un point  $M$  n'appartenant pas à  $S, \Sigma$  s'écrit :

$$\vec{v}_M = \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma_P \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3} dS_P - \frac{1}{4\pi} \iint_{S, \Sigma} \mu_P \vec{grad}_M \left( n_P \cdot \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3} \right) dS_P \quad (8)$$

La relation (8) exprime alors que le champ de vitesse est engendré par :

- une répartition de sources de densité  $\sigma_P$  distribuée sur l'aile
- une répartition de doublets normaux de densité  $\mu_P$  distribuée sur l'aile et le sillage.

Le noyau de l'intégrale relative aux doublets (dans la relation (8)) génère des instabilités numériques lorsque le problème est discr  t  s   [20], [27]. Il est alors préférable d'exprimer la densité de double couche en terme de vorticité. On sait qu'une répartition de doublets normaux répartie sur une surface est équivalente à une répartition de tourbillons, plus un vortex placé sur le contour de cette surface (cf annexe A2). La relation (8) devient alors :

$$\vec{v}_M = \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma_P \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3} dS_P + \frac{1}{4\pi} \iint_{S, \Sigma} \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3} \wedge \vec{\omega}_P dS_P + \frac{1}{4\pi} \int_C \mu_P d\vec{l}_P \wedge \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3} \quad (9)$$

où  $\vec{\omega}_P = \vec{n}_P \wedge \vec{grad}_P \mu_P$  représente la densité de tourbillons équivalente et  $C$  le contour de la surface  $S, \Sigma$ . Il est à noter que lorsque la surface  $S, \Sigma$  est fermée l'intégrale sur le contour  $C$  disparaît.

En utilisant alors l'expression de la vitesse sous la forme (9), on peut évaluer par passage à la limite la valeur de celle-ci en un point  $M$  appartenant à la surface de l'aile ou à la surface du sillage.

Dans ce cas, la répartition de sources donne une discontinuité de vitesse normale, la répartition de doublets normaux une discontinuité de vitesse tangentielle. Nous entourons alors le point M d'un contour ( $C_0$ ) orienté délimitant une surface ( $S_0$ ) supposée assez petite pour être considérée comme plane (dans le plan tangent en M à S) et pour que la densité de sources sur celle-ci soit considérée comme constante (Fig 3). En un point M appartenant à  $(D_e)$  et infiniment voisin de  $S, \Sigma$  la vitesse s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \vec{v}_M = & \iint_S \sigma_P \vec{X}_\sigma(P, M) dS_P + \sigma_M \cdot \left[ \frac{\vec{n}_M}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{C_0} (\vec{n}_{C_0} + \vec{n}'_{C_0}) \frac{ds_0}{\epsilon_0} \right] \\ & + \iint_{S, \Sigma} \mu_{nP} \vec{X}_n(P, M) dS_P - \frac{1}{2} \text{grad}_M \mu_M + \frac{1}{4\pi} \int_{C_0} \mu_M \left[ \frac{\vec{t}_{P_0} \wedge \vec{P}_0 M}{|P_0 M|^3} + \frac{\vec{t}'_{P_0} \wedge \vec{P}'_0 M}{|P'_0 M|^3} \right] ds_0 \end{aligned} \quad (10)$$

Les noyaux des intégrales sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} \vec{X}_\sigma(P, M) &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\vec{P}M}{|PM|^3} + \frac{\vec{P}'M}{|P'M|^3} \right) \\ \vec{X}_n(P, M) &= \frac{1}{4\pi} \text{grad}_M \left[ \vec{n}_P \cdot \frac{\vec{P}M}{|PM|^3} + \vec{n}'_P \cdot \frac{\vec{P}'M}{|P'M|^3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Dans les expressions (10) et (11), P et  $P_0$  sont respectivement les points courants de la surface  $S, \Sigma$  et du contour  $C_0$ ,  $ds_0$  l'élément différentiel d'abscisse curviligne de  $C_0$ ,  $\vec{n}_{C_0}$  la normale extérieure à  $C_0$  dans le plan de la surface  $S_0$ ,  $\vec{t}_{P_0}$  le vecteur unitaire tangent à  $C_0$ ;  $\epsilon_0$  le rayon polaire d'un point  $P_0$  de  $C_0$ . Tous les points et vecteurs indicés en 'prime' représentent les symétriques par rapport au plan (oyz) des éléments correspondants.  $\iint$  désigne la partie principale de l'intégrale au sens d'HADAMARD [18], [20], [28].

En utilisant la relation (10) la réalisation des conditions de glissement (4) conduit à la relation :

$$\iint_S \sigma_P \vec{X}_\sigma \cdot \vec{n}_M dS_P + \frac{\sigma_M}{2} + H_{\sigma M}^0 + \iint_{S, \Sigma} \mu_{nP} \vec{X}_n \cdot \vec{n}_M dS_M - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_M + H_{\mu M}^0 = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_M \quad (12)$$

$H_{\sigma M}^0$  et  $H_{\mu M}^0$  se déduisant immédiatement de (10).

### I. 1.3. : Condition de JOUKOVSKY. Condition sur le sillage

---

Condition de JOUKOVSKY :

La condition de JOUKOVSKY traduit le non contournement du fluide au bord de fuite de l'aile. Cette condition peut être réalisée soit en écrivant l'égalité des pressions en deux points au bord de fuite appartenant respectivement à l'extrados et à l'intrados de l'aile, soit en assurant la condition de glissement en un point situé dans le plan bissecteur du bord de fuite et très près de celui-ci.

Cette dernière condition, qui est utilisée dans le premier modèle développé au paragraphe I. 2.2. s'écrit :

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_J = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_J \quad (13)$$

Le point J est un point appartenant au plan bissecteur du dièdre formé par les plans tangents au bord de fuite à l'extrados et à l'intrados de l'aile. La normale  $\vec{n}_J$  est orthogonale au plan bissecteur.

La relation (13) traduit de façon explicite la condition de JOUKOVSKY. Une autre manière d'exprimer la condition de JOUKOVSKY est de dire que la vitesse du fluide au bord de fuite de l'aile reste finie. La stricte analogie avec l'étude bidimensionnelle (cf Première partie, paragraphe I.5) donne les relations:

$$\sigma_J^{\text{ext}} - \sigma_J^{\text{int}} = 0 \quad (14)$$

$$(\partial u / \partial s_1)_J^{\text{ext}} - (\partial u / \partial s_1)_J^{\text{int}} = 0 \quad (15)$$

$\sigma_J^{\text{ext}}$  et  $\sigma_J^{\text{int}}$  désignent les valeurs des sources extrados et intrados au bord de fuite

$(\partial u / \partial s_1)_J^{\text{ext}}$  et  $(\partial u / \partial s_1)_J^{\text{int}}$  les dérivées de la double couche suivant la direction  $\vec{u}_1$  à l'extrados et à l'intrados au bord de fuite.

Dans le cas de l'aile droite, en faisant l'hypothèse que  $\sigma_J^{\text{ext}}$ ,  $\sigma_J^{\text{int}}$ ,  $(\partial u / \partial s_1)_J^{\text{ext}}$ ,  $(\partial u / \partial s_1)_J^{\text{int}}$  restent faibles et en utilisant le fait que sur le sillage, la vorticité est dans la direction de la corde  $\vec{u}_1$  (relation (19)), les relations (14) et (15) montrent que la vitesse induite par les densités de sources et de tourbillons reste finie au bord de fuite.



Dans la suite de l'étude, pour le cas général de l'aile en flèche, les relations (14) et (15) ainsi que les hypothèses précédentes sont admises ; dans ce cas nous verrons que des conditions supplémentaires sont nécessaires pour réaliser de façon implicite la condition de JOUKOVSKY (relations (21) et (22)).

Condition sur le sillage :

Le sillage est constitué de lignes tourbillons s'échappant de l'arrière de l'aile de façon à respecter la conservation de la circulation autour de chaque section.

L'ensemble de ces lignes génère une surface de géométrie à priori inconnue. Cette géométrie est déterminée par deux conditions :

- (a) - en écoulement stationnaire le sillage est une surface de courant
- (b) - d'autre part, puisque le sillage est une surface non portante la pression sur chacune de ses faces doit être la même.

Le sillage étant uniquement le siège d'une répartition de double couche (cf paragraphe I. 1.2.), les discontinuités de vitesse sont des discontinuités de vitesse tangentielle. En conséquence, les deux conditions (a) et (b) se traduisent par les deux relations :

$$(\vec{W} \cdot \vec{n})_M = 0 \quad (16)$$

$$(\vec{W} \cdot \vec{\text{grad}} \mu)_M = 0 \quad (17)$$

$\vec{W}$  désigne la vitesse moyenne en un point M de  $\Sigma$ .

Les relations (16) et (17) se résument par la relation vectorielle :

$$(\vec{n} \wedge \vec{\text{grad}} \mu)_M \wedge \vec{W}_M = (\vec{\omega} \wedge \vec{W})_M = 0 \quad (18)$$

L'expression (18) exprime alors que sur le sillage la vitesse  $W$  doit être parallèle à la densité tourbillonnaire  $\vec{\omega}$ . L'écriture de cette condition nécessite une procédure itérative permettant de relaxer la nappe tourbillonnaire [31]. Cette procédure consiste à partir d'une géométrie supposée connue de la nappe, à déformer les lignes vortex de façon à ce qu'elles soient des lignes de courant. La forme initiale du sillage est constituée par des lignes de tourbillons parallèles à  $\vec{V}_\infty$ .

Une autre voie d'approche possible est d'utiliser les méthodes développées à l'O.N.E.R.A. par C. REHBACH [30] pour le calcul irrotationnel des nappes tourbillonnaires : celles-ci, établies à l'aide de la formulation intégrale - différentielle lagrangienne permettent de suivre l'évolution dans le temps d'une répartition discrète de particules fluides chargées, chacune, d'un vecteur tourbillon.

Dans le cas du régime stationnaire, la forme géométrique du sillage n'a qu'une faible influence sur la cinématique de l'écoulement autour de l'aile et les procédures itératives précédentes peuvent être écartées au profit d'une modélisation plus sommaire.

La surface  $\Sigma$  du sillage est alors rigidifiée dans sa position initiale et est constituée de lignes parallèles à  $\vec{V}_\infty$  et s'appuyant sur le bord de fuite de l'aile (cf Figure 2). Cette simplification permet d'éviter les coûts de calcul informatique engendrés par les procédures itératives. Moyennant l'hypothèse que sur le sillage l'écoulement transverse peut être négligé [32], la condition (18) se réduit à la relation :

$$\frac{\partial \mu}{\partial s_1} = 0 \text{ pour } M \in \Sigma \quad (19)$$

D'autre part le vecteur de densité tourbillonnaire  $\vec{\omega}$  s'exprime dans le repère naturel de surface ( $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{n}$ ) par :

$$\vec{\omega}_M = (\vec{n} \wedge \text{grad} \mu)_M = \frac{1}{|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2|} \left[ \frac{\partial \mu}{\partial s_1} \vec{u}_2 - \frac{\partial \mu}{\partial s_2} \vec{u}_1 \right] \quad (20)$$

Dans les expressions (19) et (20)  $s_1$  et  $s_2$  désignent respectivement les abscisses curvilignes suivant les vecteurs normés de surface  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ .

La relation (19) montre que sur le sillage, le gradient de la double couche suivant la corde est inexistant, la relation (20) montrant alors que sur le sillage la vorticité suivant l'envergure de l'aile est nulle. Il est à remarquer que ce résultat est en accord avec la relation (15) au bord de fuite de l'aile.

D'autre part, dans le cas où l'angle au bord de fuite reste petit, pour que la vitesse reste finie au bord de fuite il est nécessaire que l'intensité totale de la double couche ainsi que son gradient restent continus à la traversée de celui-ci (c'est à dire qu'au bord de fuite, il n'y a pas de tourbillons concentrés).

Celà se traduit par les relations:

$$\mu_J^\Sigma = \mu_J^{\text{ext}} - \mu_J^{\text{int}} \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial s_2}\right)_J^\Sigma = \left(\frac{\partial \mu}{\partial s_2}\right)_J^{\text{ext}} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial s_2}\right)_J^{\text{int}} \quad (22)$$

L'indice  $\left(\frac{\Sigma}{J}\right)$  indique que les quantités au point J sont prises sur le sillage, l'indice  $\left(\frac{\text{ext}}{J}\right)$  que les quantités sont prises à l'extrados de l'aile, l'indice  $\left(\frac{\text{int}}{J}\right)$  que les quantités sont prises à l'intrados.

Ainsi avec les hypothèses mentionnées, les relations (14), (15), (21), (22), traduisent la condition de JOUKOVSKY implicite pour les ailes à bord de fuite éffilé.

## I. 2 : Problème discrétisé

### I. 2.1 : Discrétisation des équations

L'aile, suivie de son sillage est découpée en K bandes parallèles au plan (yoz). Sur chaque bande k, l'aile est représentée par N facettes  $S_{kj}$ , le sillage par la surface  $\Sigma'_k$  (figure 2). La surface  $\Sigma'_k$  est composée de deux facettes (fig. 4) :

- une facette  $J_k$  appartenant au plan bissecteur du bord de fuite et de taille relativement petite par rapport à la corde locale (en général 0,5 %) : elle est constituée par les points  $P_{k,N+2}$  ;  $P_{k,N+1}$  ;  $P_{k+1,N+1}$  ;  $P_{k+1,N+2}$
- une facette  $\Sigma_k$  dont les côtés latéraux sont parallèles à la vitesse  $\vec{V}_\infty$  et de taille très grande par rapport à la corde locale : elle est constituée par les points  $P_{k,N+2}$  ;  $P_k^\Sigma$  ;  $P_{k+1}^\Sigma$  ;  $P_{k+1,N+2}$ .

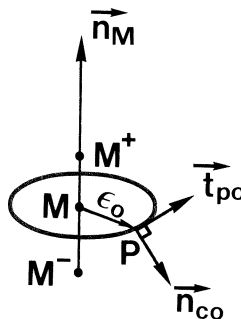


Figure 3

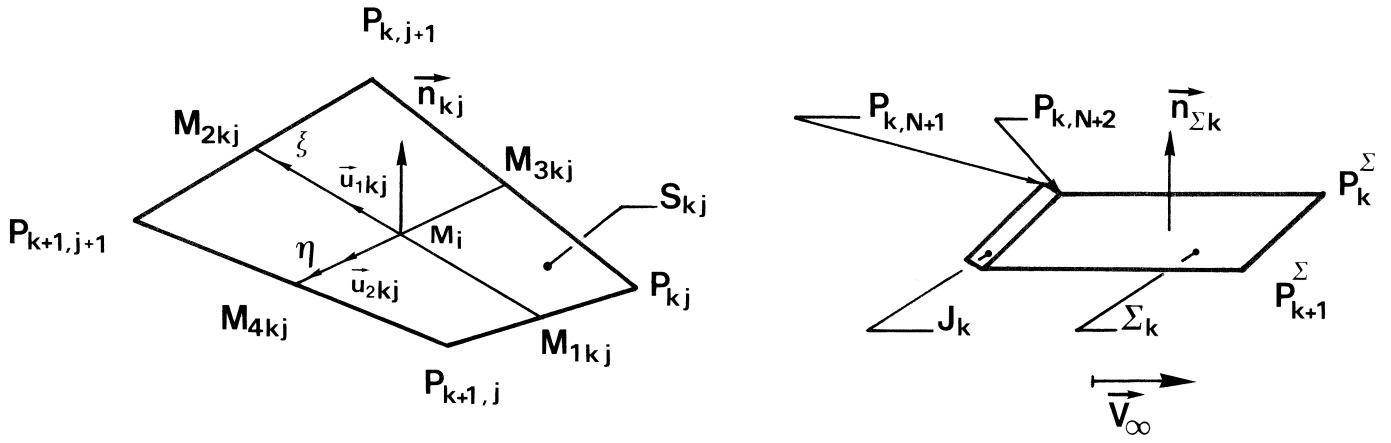


Figure 4

Chaque facette est délimitée par un contour géométrique dont l'orientation est donnée par le sens de la normale à la surface de la facette considérée. Nous désignons par  $\vec{C}_{kj}$ ,  $\vec{C}_{J_k}$ ,  $\vec{C}_{\Sigma_k}$ , les contours respectifs des facettes  $S_{kj}$ ,  $J_k$ ,  $\Sigma_k$ . Nous avons ainsi défini pour représenter la surface  $S, \Sigma$   $K$  bandes contenant chacune  $N + 2$  facettes de dimensions finies. Pour avoir la représentation de la surface totale, il suffit d'associer à chaque facette son symétrique par rapport au plan  $yo_z$ .

Les facettes utilisées sont des quadrilatères, la facette d'indice  $(i) = (k, j)$  étant constituée par les points  $P_{k,j}$ ;  $P_{k,j+1}$ ;  $P_{k+1,j}$ ;  $P_{k+1,j+1}$ . Sur chacune d'elles, on définit :

- un point de contrôle  $M_i$ , centre de gravité de la facette
- deux vecteurs normés  $\vec{u}_{1kj}$  et  $\vec{u}_{2kj}$  dont les directions sont données par les vecteurs obtenus en joignant les milieux de deux côtés opposés de la facette (Figure 4) ; ces deux vecteurs permettent de définir de façon discrète un repère naturel de surface
- la normale unitaire  $\vec{n}_{kj}$ .

En désignant par  $M_{1kj}$ ,  $M_{2kj}$ ,  $M_{3kj}$ ,  $M_{4kj}$  les milieux de chaque côté de la facette, on note  $d_{1kj}$  la distance du segment  $[M_{1kj}, M_{2kj}]$ , par  $d_{2kj}$  celle du segment  $[M_{3kj}, M_{4kj}]$ . Pour les facettes  $J_k$  et  $\Sigma_k$  ces distances sont désignées respectivement par  $d_{1k}^J$ ,  $d_{2k}^J$  et  $d_{1k}^\Sigma$ ,  $d_{2k}^\Sigma$ .

En général, les facettes ainsi construites ne sont pas forcément planes ;

lorsqu'il en est ainsi, en glissant un plan perpendiculaire à la normale à égale distance entre les deux diagonales, et en prenant la projection des quatre sommets du quadrilatère sur ce plan, nous obtenons un élément plan. Remarquons que cette opération n'est pas nécessaire pour le calcul de la vitesse induite par une facette support d'une répartition constante de doublets normaux.

Sur chaque facette, la répartition discrète des singularités est constituée par :

- une répartition de sources de densité constante  $\sigma_{kj}$  ; on désigne par  $\vec{F}_\sigma(S_m, M)$  la vitesse induite au point M par une surface plane polygonale  $S_m$  support d'une densité de sources égale à 1. Le calcul de  $\vec{F}_\sigma$  est donné explicitement en annexe A3.
- une répartition de doublets normaux de densité linéaire suivant les deux directions de vecteurs  $\vec{u}_{1kj}$  et  $\vec{u}_{2kj}$  ; sur la facette (k,j) cette densité s'écrit alors :

$$\mu_{(\xi, \eta)_*}^{(k,j)} = \mu_{kj} + \omega_{1kj} \xi_* + \omega_{2kj} \eta_* \quad (23)$$

$\xi_*$  et  $\eta_*$  représentent les coordonnées dans le plan de la facette, suivant les axes  $M_i \vec{\xi}$  et  $M_i \vec{\eta}$  (Fig. 4). Ces axes sont respectivement dans le sens de la corde locale et dans le sens de l'envergure. La densité de tourbillons correspondant à la répartition (23) est alors constante sur la facette et est donnée par :

$$\vec{\omega}_{kj} = \frac{1}{|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2|_{kj}} \left( \omega_1 \vec{u}_2 - \omega_2 \vec{u}_1 \right)_{kj} \quad (24)$$

En utilisant la relation (5) de l'annexe A2, chaque terme de la répartition de double couche (23) peut être interprété comme suit :

- le terme constant  $\mu_{kj}$  correspond à un filet tourbillonnaire (vortex) d'intensité constante disposé sur le contour de la facette.
- les termes  $\omega_{1kj} \xi_*$  et  $\omega_{2kj} \eta_*$  correspondent aux deux composantes

de la vorticité uniforme  $\vec{\omega}_{kj}$  sur la surface de la facette, plus un vortex placé sur le contour de la facette dont l'intensité varie linéairement.

On désigne par  $\vec{f}_\mu(S_m, M)$  la vitesse induite au point M par la surface plane polygonale  $S_m$  support d'une densité constante de doublets normaux, par  $\vec{f}_1(S_m, M)$  et  $\vec{f}_2(S_m, M)$  les contributions respectives des termes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Le calcul des influences  $\vec{f}_\mu$ ,  $\vec{f}_1$ ,  $\vec{f}_2$  est donné en annexe A4.

En utilisant les résultats des annexes A3 et A4, la relation (10) discr tisee s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Mi'} = & \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \left[ \sigma_{kj} \vec{f}_\sigma(S_{kj}, M_i) + \mu_{kj} \vec{f}_\mu(S_{kj}, M_i) + \omega_{1kj} \vec{f}_1(S_{kj}, M_i) + \omega_{2kj} \vec{f}_2(S_{kj}, M_i) \right] \\ & + \sum_{k=1}^K \left[ \left( \mu_k^{Jext} - \mu_k^{Jint} \right) \vec{f}_\mu(J_k, M_i) + \left( \mu_k^{ext} - \mu_k^{int} \right) \vec{f}_\mu(\Sigma_k, M_i) + \left( \omega_{1k}^{Jext} - \omega_{1k}^{Jint} \right) \vec{f}_1(J_k, M_i) \right. \\ & \left. + \left( \omega_{1k}^{ext} - \omega_{1k}^{int} \right) \vec{f}_1(\Sigma_k, M_i) + \left( \omega_{2k}^{Jext} - \omega_{2k}^{Jint} \right) \vec{f}_2(J_k, M_i) + \left( \omega_{2k}^{ext} - \omega_{2k}^{int} \right) \vec{f}_2(\Sigma_k, M_i) \right] \quad (25) \end{aligned}$$

Dans la relation (25) :

- $M_i$ , désigne un point de contrôle quelconque
- tout ce qui est indic  en  $J_{ext}$  est relatif à l'extrados de la facette  $J_k$ , tout ce qui est indic  en  $J_{int}$  à l'intrados de la facette  $J_k$ . Il en est de même pour la facette  $\Sigma_k$ .

En utilisant les relations (19), (21) et (22), l'expression (25) est susceptible de se simplifier. La condition (19), traduisant sur le sillage l'absence de vorticité suivant l'envergure, s'exprime par les relations :

$$\omega_{1k}^{Jext} = \omega_{1k}^{Jint} = \omega_{1k}^{ext} = \omega_{1k}^{int} = 0 \quad (26)$$

Les conditions (21) et (22) sont écrites dans chaque bande k de discrétisation. Ces conditions traduisent le fait que dans chaque bande k, les facettes

$J_k$  et  $\Sigma_k$  sont supports d'une répartition de doublets dont l'intensité est égale à celle du bord de fuite de la bande  $k$ . En utilisant les relations (26), en imposant aux facettes  $J_k$ ,  $S_{k1}$ ,  $S_{kN}$  d'être approximativement des parallélogrammes et à la facette  $\Sigma_k$  d'être un parallélogramme, il est aisé de montrer que ces conditions se traduisent par les relations :

$$\left. \begin{aligned} u_k^{\text{ext}} = \mu_k^{\text{Jext}} &= \mu_{k1} - \frac{d1_{k1}}{2} \omega1_{k1} \\ \mu_k^{\text{int}} = \mu_k^{\text{Jint}} &= \mu_{kN} + \frac{d1_{kN}}{2} \omega1_{kN} \\ \omega2_k^{\text{ext}} = \omega2_k^{\text{Jext}} &= \omega2_{k1} \\ \omega2_k^{\text{int}} = \omega2_k^{\text{Jint}} &= \omega2_{kN} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Utilisant l'expression (25) de la vitesse induite par l'ensemble des singularités, tenant compte des relations (26) et (27), la discrétisation des équations intégrales (12) aux points de contrôle  $M_i$ , conduit aux équations de la forme :

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N A_{i,kj}^{\sigma} \sigma_{kj} + A_{i,kj}^{\mu} \mu_{kj} + A_{i,kj}^{\omega1} \omega1_{kj} + A_{i,kj}^{\omega2} \omega2_{kj} = -\vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n}_i \quad i \in (1, N') \quad (28)$$

Chaque coefficient se déduit immédiatement de (25).

Dans le cas de l'utilisation de la condition de JOUKOWSKY explicite du type (13), nous avons  $N' = K(N+1)$ , dans le cas de la condition implicite nous avons  $N' = KN$ . De fait le système d'équation (28) possède plus d'équations que d'inconnues. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment la fermeture de ce système est rendue possible.

### I. 2.2 : Fermeture du système d'équations

---

La relation (23) montre que sur chaque facette la répartition de double couche introduit les 3 inconnues  $\mu_{kj}$ ,  $\omega_{1kj}$ ,  $\omega_{2kj}$ . En réalité, la densité de tourbillons  $\vec{\omega}$  est reliée à la densité de doublets normaux  $\mu$  par la relation (20) (nous verrons plus loin comment cette relation est traduite de façon discrète). En conséquence, chaque facette est le support de deux densités inconnues des singularités : une densité de sources et une densité relative à la double couche.

Une méthode classique pour résoudre le problème est d'utiliser une inconnue source par facette, et sur chaque bande  $k$  un ensemble de tourbillons de distribution pré-déterminée mais d'intensité totale inconnue (circulation autour de la bande  $k$ ). Cela nécessite une condition supplémentaire par bande pour fermer le système d'équations. Cette condition supplémentaire est obtenue en écrivant la condition de JOUKOWSKY explicite (relation (13)). Cette méthode est présentée au paragraphe I.3.

Il a été montré que les méthodes préfixant la forme de la loi de double couche donnaient des résultats incorrects, lorsque l'aile devient très mince

[ 26 ]. La raison fondamentale peut être résumée comme suit. L'influence d'une distribution de sources  $\sigma_{ext}(x)$  et  $\sigma_{int}(x)$  placées respectivement à l'extrados et à l'intrados d'une aile mince d'épaisseur  $t(x)$  est approximativement équivalente à une distribution de doublet  $\mu(x) \simeq (\sigma_{int} - \sigma_{ext})t$ . De fait, pour des ailes minces ( $t \rightarrow 0$ ), une légère variation de  $\mu$  donne des grandes valeurs de  $(\sigma_{ext} - \sigma_{int})$ ; les sources ont alors des intensités importantes et produisent des erreurs importantes de discrétisation. Pour corriger cet effet néfaste, il est possible d'optimiser la loi de doublet pré-établie pour diminuer le gradient des sources. Cette technique a été mise en oeuvre dans cette première méthode.

Une autre méthode (présentée au paragraphe I.4) consiste à minimiser au mieux les erreurs introduites par la discrétisation. Ce deuxième modèle est une extension directe de la deuxième méthode décrite dans la première partie au paragraphe I.5. La répartition de doublets génère alors une densité tourbillonnaire dont les composantes suivant la corde et l'envergure de l'aile sont



données par la relation (20). Dans chaque bande  $k$  de discrétisation le débit de fuite est optimisé à l'aide d'un vecteur erreur construit sur les densités de singularités relatives à cette bande. La condition de JOUKOWSKY étant réalisée de manière implicite (relations (14) et (15)), le système d'équations est fermé. Dans la suite, nous présentons le détail des deux modèles exposés ci-dessus.

### I. 3 : Premier modèle : loi des tourbillons pré-déterminée, condition de JOUKOWSKY explicite

---

#### I. 3.1 : Détermination de la loi des tourbillons

---

Le calcul est réalisé en deux étapes : la première permet de déterminer la loi de tourbillons répartie sur l'aile, la seconde achève le calcul complet de l'écoulement.

##### 1ère étape :

Le profil de base de l'aile (profil, dans une section orthogonale à l'axe  $\vec{ox}$ ) est étudié en écoulement bidimensionnel et est placé à 90 degrés d'incidence. Sur le squelette du profil on désigne par  $s$  l'abscisse curviligne définie à partir du bord d'attaque local  $A_1$  (figure 1) de façon à ce que la valeur de  $s$  au bord de fuite  $B_1$  soit égale à l'unité. Une répartition de double couche est disposée sur le squelette discrétisé en  $n = N/2$  facettes. Sur chaque facette  $j$  cette répartition est choisie linéaire (Figure 5) :

$$\mu = \gamma_j (s - s_{0j}) + \mu_{0j} \quad (29)$$

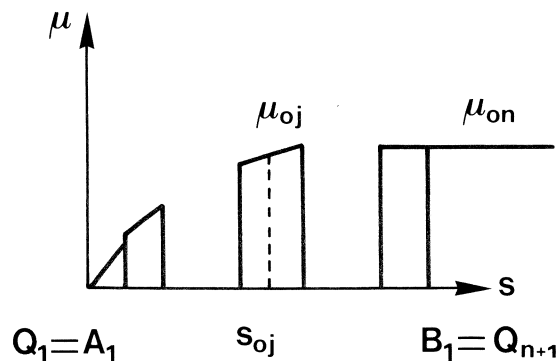


Figure 5

$\mu_{0j}$  désigne la valeur de  $\mu$  au centre de la facette,  $\gamma_j$  la vorticité,  $s_{0j}$  l'abscisse curviligne du centre de la facette. Sur la dernière facette au bord de fuite, la vorticité est prise égale à zéro ( $\gamma_n = 0$ ), la densité des doublets sur le sillage en amont du point  $B_1$  est prise égale à  $\mu_{0n}$ . Au bord d'attaque le niveau de la double couche est fixé à zéro.

Les vorticités  $\gamma_j$  sont liées aux valeurs  $\mu_{0j}$  en prenant pour  $\gamma_j$  la pente de la parabole passant par les trois points  $\mu_{0j-1}$ ,  $\mu_{0j}$ ,  $\mu_{0j+1}$ . En tenant compte des remarques précédentes, ces relations s'expriment par la relation matricielle suivante :

$$\gamma = H\tilde{\gamma} \quad (30)$$

où  $\gamma$  est donné par la matrice  ${}^t\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_n]$ ,  $\tilde{\gamma}$  par la matrice  ${}^t\tilde{\gamma} = [\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n] =$

$$-\left[ \mu_{01}/d_{01}, \dots, 2(\mu_{0j} - \mu_{0j,1})/(d_{0j} + d_{0j,1}), \dots \right]$$

La distance  $d_{0j}$  représente la taille de la facette  $j$ . La matrice  $H$  est une matrice bi-diagonale supérieure dont les éléments sont donnés par :

$H =$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j &= -\frac{d_{0j+1} + d_{0j}}{d_{0j-1} + 2d_{0j} + d_{0j+1}} \\ \beta_j &= -\frac{d_{0j} + d_{0j-1}}{d_{0j-1} + 2d_{0j} + d_{0j+1}} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

La vitesse induite en un point de contrôle du profil d'affixe  $\zeta_1$  par la répartition de doublets ainsi définie est donnée par :

$$(\vec{v} \cdot \vec{t})_1 + i(\vec{v} \cdot \vec{n})_1 = \sum_{p=1}^n \tilde{A}_{1p} \tilde{\gamma}_p + \sum_{p=1}^n A_{1p} \gamma_p \quad (32)$$

Les vecteurs  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$  sont respectivement des vecteurs tangent et normal au profil.

$\tilde{A}_{1p}$  et  $A_{1p}$  représentent les influences obtenues à partir des résultats classiques [10] :

$$\tilde{A}_{1p} = -\frac{i^*}{2\pi} \frac{(d_{op} + d_{op-1})}{2(\delta_l - z_{QP})} e^{i^* \alpha_l}, \quad A_{1p} = -\frac{i^*}{2\pi} \left\{ \frac{d_{op}}{2} e^{i^* \alpha_l} \left( \frac{1}{\delta_l - z_{QP}} + \frac{1}{\delta_l - z_{QP+1}} \right) + e^{i^*(\alpha_l - \alpha_{QP})} \text{Log} \frac{\delta_l - z_{QP+1}}{\delta_l - z_{QP}} \right\} \quad (32 \text{ bis})$$

où  $z_{QP}$  représente l'affixe d'un point  $Q^P$  du squelette,  $\alpha_{QP}$  l'orientation d'une facette de discrétisation du squelette,  $\alpha_l$  l'orientation d'une facette du profil.

En utilisant la relation (30) nous disposons de  $n$  inconnues pour satisfaire les  $2n$  conditions de glissement sur le profil, plus la condition de JOUKOVSKY. Les conditions aux limites sont alors satisfaites au sens des moindres carrés partout sur le profil, y compris au point de JOUKOVSKY. Cela se traduit par la relation :

$$\|V\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N+1} v_j^2} \text{ minimum} \quad (33)$$

où  $V$  est la matrice  $V = V_\infty + T \tilde{y}$ ,  ${}^t V_\infty = \left[ \left( \vec{v}_\infty \cdot \vec{n} \right)_1, \dots, \left( \vec{v}_\infty \cdot \vec{n} \right)_{N+1} \right]$  et  $T$  la matrice d'ordre  $(N+1, n)$  telle que :

$$T = \tilde{M} + MH \quad (34)$$

$\tilde{M}$  est la matrice dont le terme général est  $\left[ \text{Im} \left( \tilde{A}_{1p} \right) \right]$ ,  $M$  la matrice dont le terme général est  $\left[ \text{Im} \left( A_{1p} \right) \right]$ .

La relation (33) se traduit par  $d\|V\| = 0$  et conduit ainsi à la résolution du système matriciel :

$${}^t T T \tilde{y} = - {}^t T V_\infty \quad (35)$$

Les solutions de (35) conduisent à la connaissance de la loi des doublets normaux sur le squelette. La loi ainsi obtenue, lissée par des fonctions splines, est normalisée. Nous désignons par  $\mu_1^*, \dots, \mu_{\frac{N}{2}}^* = \mu_{\frac{N}{2}+1}^* = 1$  les valeurs de cette loi aux extrémités des segments constituant le squelette du profil.

2e étape :

À l'aide de la loi normalisée  $\mu^*$  déterminée précédemment, la répartition de double couche partout sur l'aile est construite comme suit. Dans chaque bande  $k$ , la répartition  $\mu^*$  est multipliée par la corde locale  $c_k$  et par un facteur inconnue  $\lambda_k$ .

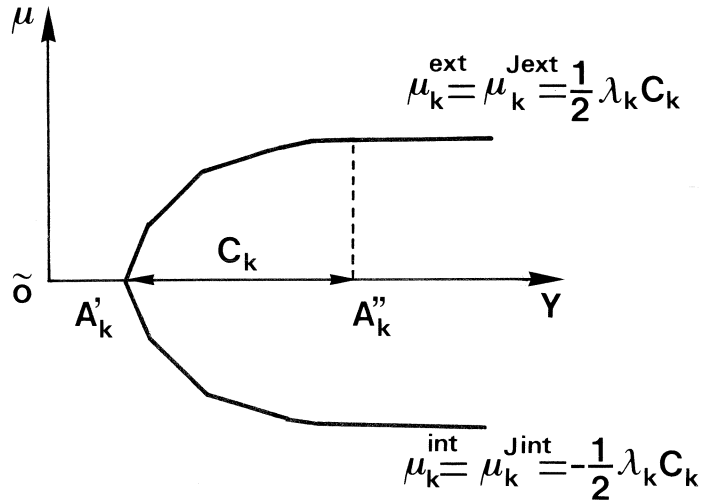


Figure 6

Par construction d'une bande, les points de contrôle relatifs aux facettes de l'aile appartiennent à un même plan dont la trace sur le plan OXY est représentée par l'axe  $\vec{O\tilde{Y}}$  (Figure 6) ; le segment  $A'_k A''_k$  représente la corde locale de la section.

La distribution  $\lambda_k C_k \mu^*$  est projetée sur l'aile normalement à la ligne de cambrure  $A'_k A''_k$  et distribuée de façon à ce que la répartition de doublets à l'extrados et à l'intrados soit symétrique par rapport à l'axe  $\vec{O\tilde{Y}}$ . Nous obtenons ainsi les relations :

$$j \in \left(1, \frac{N}{2}\right) \left\{ \begin{array}{l} \mu_{kj} = \frac{\lambda_k C_k}{4} (\mu_{\frac{N}{2}+2-j}^* + \mu_{\frac{N}{2}+1-j}^*) = \lambda_k \bar{\mu}_{kj} \\ \mu_{k, j+\frac{N}{2}} = -\frac{\lambda_k C_k}{4} (\mu_j^* + \mu_{j+1}^*) = \lambda_k \bar{\mu}_{k, j+\frac{N}{2}} \end{array} \right. \quad (36)$$

On en déduit la pente  $\omega_{1kj}$  :

$$j \in \left(1, \frac{N}{2}\right) \left\{ \begin{array}{l} \omega_{1kj} = \frac{\lambda_k C_k}{2d_{1kj}} \left( \mu_{\frac{N}{2}+1-j}^* + \mu_{\frac{N}{2}+2-j}^* \right) = \lambda_k \varpi_{1kj} \\ \omega_{1k, j+\frac{N}{2}} = \frac{\lambda_k C_k}{2d_{1k, j+\frac{N}{2}}} \left( \mu_j^* - \mu_{j+1}^* \right) = \lambda_k \varpi_{1k, j+\frac{N}{2}} \end{array} \right. \quad (37)$$

Remarquons que par construction de la loi  $\mu^*$  les relations (26) sont satisfaites et que de plus  $\omega_{1k1} = \omega_{1kN} = 0$ . Ainsi les deux premières relations de (27) sont réalisées. Sur une facette  $(k, j)$  les valeurs  $\omega_{2kj}$  relatives à la vorticité suivant la corde sont liées dans le cas général aux valeurs  $\mu_{kj}$  en prenant pour  $\omega_{2kj}$  la pente de la parabole (suivant l'envergure de l'aile) passant par les trois points  $(s_{k-1, j}^2; \mu_{k-1, j}^*)$ ,  $(s_{kj}^2; \mu_{kj}^*)$ ,  $(s_{k+1, j}^2; \mu_{k+1, j}^*)$ . L'abscisse curviligne  $s_{2kj}$  du point de contrôle de la facette  $(k, j)$  est définie suivant l'envergure de l'aile. D'après la construction géométrique de l'aile, les valeurs de  $\omega_2$  s'expriment en fonction de celles au bord de fuite de l'aile :

$$\frac{\omega_{2kj}}{\omega_{2k}^{\text{jext}} - \omega_{2k}^{\text{jint}}} = \frac{\mu_{kj}}{\mu_k^{\text{jext}} - \mu_k^{\text{jint}}} \frac{d_{2k, N+1}}{d_{2kj}} \quad (38)$$

La procédure précédente, utilisant les paraboles, n'est alors appliquée dans le cas général qu'aux vorticités  $\left( \omega_{2k}^{\text{jext}} - \omega_{2k}^{\text{jint}} \right)$ . Sur la bande centrale ( $k = 1$ ) nous avons pris  $\omega_{2k}^{\text{jext}} - \omega_{2k}^{\text{jint}} = 0$ . Sur la dernière bande  $k = K$  (extrémité de l'aile), le gradient de la double couche est pris égal, au point de contrôle de la facette de JOUKOVSKY  $J_K$ , à la pente de la parabole ayant pour sommet le point extrême du maillage et passant par la valeur de la double couche au point de JOUKOVSKY de la bande  $K$  (cf annexe A 5). La vorticité  $\left( \omega_{2K}^{\text{jext}} - \omega_{2K}^{\text{jint}} \right)$  en ce point est obtenue en multipliant ce gradient par un facteur  $h$ .

L'influence des tourbillons de la bande  $K$  est remplacée par l'influence d'une bande équivalente dont l'extrémité relative au saumon est décalée vers

l'intérieur de l'aile. Le défaut d'épaisseur de la nouvelle bande par rapport à l'ancienne est noté  $\epsilon_e$ . Cet artifice a pour effet d'introduire un vortex concentré en extrémité d'aile et permet ainsi de simuler approximativement les tourbillons marginaux. L'expérience numérique montre en général que pour  $\epsilon_e = 0,17$  les résultats obtenus sont corrects, la valeur de  $h$  associée étant égale à  $\sqrt{3}/2$  [33].

### I. 3.2 : Expression matricielle des équations intégrales et mode de résolution

---

En utilisant les relations (36), (37), (38), ainsi que les résultats de l'annexe A5, les équations (28) se simplifient. En adjoignant les  $K$  conditions de JOUKOVSKY explicites du type (13) nous obtenons un système de  $K(N + 1)$  équations :

$$\sum_{k=1}^K \left[ \sum_{j=1}^N \sigma_k \vec{f}_\sigma(\mathbf{S}_{kj}, \mathbf{M}_j) \cdot \vec{n}_j + \lambda_k \vec{F}_{\lambda k}(\mathbf{M}_j) \cdot \vec{n}_j \right] = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_j \quad (39)$$

$\vec{F}_{\lambda k}(\mathbf{M}_j)$  représente l'influence relative à l'inconnue  $\lambda_k$  ; son expression est donnée en annexe A6.

Sous forme matricielle, les relations (39) peuvent s'écrire :

$$\sum_{k=1}^K \mathbf{G}_{k'k} \mathbf{X}_k = \mathbf{B}_{k'} \quad (40)$$

$\mathbf{X}_k$  est la matrice relative aux inconnues de la bande  $k$  telle que  ${}^t \mathbf{X}_k = [\sigma_{k1} \dots \sigma_{kN}, \lambda_k]$ ,  $\mathbf{A}_{k'k}$  la matrice influence des éléments de la bande  $k$  aux points de contrôle de la bande  $k'$ ,  $\mathbf{B}_{k'}$  la matrice unicolonne d'ordre  $(N + 1)$  représentant les conditions aux limites sur la bande  $k'$ .

Les solutions du système (40) sont obtenues en utilisant une méthode de résolution par blocs. L'algorithme itératif utilisé sur les blocs est du type GAUSS-SEIDEL ; supposant alors connues les matrices  $X_k^{(n)}$  à l'itération (n), à l'itération (n + 1) les relations (40) peuvent s'écrire :

$$G_{kk} X_k^{(n+1)} = B_k - \sum_{l=1}^{k-1} G_{kl} X_l^{(n+1)} - \sum_{l=k+1}^K G_{kl} X_l^{(n)} \quad (n=0,1,\dots) \quad (41)$$

La relation (41) représente un système linéaire de matrice  $G_{kk}$  et de vecteur inconnu  $X_k^{(n+1)}$ . On applique à ce système une résolution du type HOUSEHOLDER.

Remarquons que la procédure ainsi utilisée est une procédure par bande ; le système de matrice  $G_{kk}$  correspond à l'écoulement autour de la bande k en tenant compte de l'influence des bandes 1, ..., k-1.

I. 4 : Deuxième modèle : loi des tourbillons calculée ;  
condition de JOUKOVSKY implicite

---

L'objectif est de tirer profit du choix arbitraire de la loi de tourbillons pour construire celle qui minimisera au mieux les erreurs de discrétisation sur les conditions aux limites. L'introduction des équations de minimisation permet de traiter le problème en utilisant directement une répartition mixte de simple et de double couche. Dans ce cas, le calcul préliminaire de la loi de vorticité n'est plus nécessaire, cette dernière étant obtenue comme résultat du problème.

I. 4.1 : Considérations générales du modèle

La condition de JOUKOVSKY est réalisée de manière implicite ; les facettes  $S_{k1}$  et  $S_{kN}$  sont par construction proches d'un parallélogramme. La relation (15) discrétisée donnent :

$$\omega_{k1} + \omega_{kN} = 0 \quad (42)$$

Comme nous le verrons au paragraphe I.4.2 la relation (14) est approximativement satisfaite par l'introduction dans le vecteur erreur de la composante

$$\sigma_{kN} - \sigma_{k1}.$$

Les composantes de la densité tourbillonnaire  $\vec{\omega}_{kj}$  sont obtenues par discrétisation de la relation (20). Pour cela, on utilise un procédé semblable au procédé des paraboles décrit au paragraphe I.3.1 et détaillé en annexe A5.

Pour la composante  $\omega_{2kj}$ , la formulation est exactement la même que celle développée dans l'annexe A 5, y compris pour le traitement des bandes extrêmes. De fait, les relations correspondantes sont :

$$j \in (1, N) \left\{ \begin{array}{l} \omega_{2kj} = \beta_{kj}^{-1} \mu_{k,1,j} + \beta_{kj}^0 \mu_{kj} + \beta_{kj}^1 \mu_{k+1,j} \quad k \neq 1; k \neq K \\ \omega_{2kj} = 0 \quad k = 1 \\ \omega_{2kj} = (-h/d_{2kj}) \mu_{kj} \quad k = K \end{array} \right. \quad (43)$$

avec

$$\beta_{kj}^{-1} = \frac{2}{D_{2kj} + D_{2k+1,j}} \frac{D_{2k+1,j}}{D_{2kj}}; \beta_{kj} = \frac{2}{D_{2kj} + D_{2k+1,j}} \frac{D_{2kj}}{D_{2k+1,j}}; \beta_{kj}^0 = -\beta_{kj}^{-1} - \beta_{kj}^1; D_{2kj} = d_{2kj} + d_{2k+1,j} \quad (44)$$

Pour la composante  $\omega_{1kj}$ , le procédé est appliqué pour toutes les facettes d'une bande k, sauf pour celles du bord de fuite, ce qui donne :

$$k \in (1, K) \quad \omega_{1kj} = \beta_{kj} \tilde{\omega}_{kj,1} + \alpha_{kj} \tilde{\omega}_{kj} \quad j \neq 1; j \neq N \quad (45)$$

$$\beta_{kj} = \frac{D_{1kj}}{D_{1kj,1} + D_{1kj}}; \alpha_{kj} = \frac{D_{1kj,1}}{D_{1kj,1} + D_{1kj}}; D_{1kj} = \frac{1}{2} (d_{1kj,1} + d_{1kj}) \quad (46)$$

Dans l'expression (45), le terme  $\tilde{\omega}_{kj}$  représente la vorticité équivalente suivant l'envergure de l'aile, construite à partir des valeurs  $\mu_{kj}$  de la double couche au centre des facettes :

$$j \in (1, N-1) \quad \tilde{\omega}_{kj} = \frac{\mu_{kj,1} - \mu_{kj}}{D_{1kj}} \quad (47)$$

Pour des raisons de stabilité numérique, il est préférable de traduire les inconnues relatives à la double couche en terme de vorticité. A cet effet, dans chaque bande k le niveau des  $\mu$  est imposé par la relation supplémentaire :



$$\mu_k^{\text{ext}} + \mu_k^{\text{int}} = 0 \quad (48)$$

En utilisant alors les deux premières relations de (27) et les relations (42), (47), (48), les valeurs de la double couche  $\mu_{kj}$  au centre de la facette  $(k,j)$  s'expriment linéairement en fonction de  $\tilde{\omega}_{k1}, \dots, \tilde{\omega}_{k,N-1}, \omega_{kN}$ . En introduisant alors les expressions (43) et (45), les équations (28) s'écrivent :

$$\sum_{k=1}^K \left\{ \sum_{j=1}^N \left( A_{i',kj}^x x_{kj} + A_{i',kj}^y y_{kj} \right) \right\} = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_i \quad (49)$$

avec 
$$x_{kj} = \sigma_{kj} ; y_{kj} = \tilde{\omega}_{kj} \quad j \neq N ; y_{kN} = \omega_{kN} \quad (50)$$

Le détail des influences  $A_{i',kj}^x$  et  $A_{i',kj}^y$  est donné en annexe A7.

#### I.4.2 : Introduction des équations de minimisation

Les erreurs introduites par la discrétisation du problème sont de deux natures :

- une erreur géométrique due à la discrétisation de la surface de l'aile
- une erreur sur l'évaluation de la vitesse due à la discrétisation des densités de singularités et de leurs gradients.

En choisissant un maillage optimum du type bidimensionnel [22], la première erreur est bien minimisée. Dans ce cas, la minimisation des erreurs de discrétisation se réduit à la minimisation des singularités et de leurs gradients. Dans chaque bande  $k$ , nous désignons par  $X_k$  le vecteur représentatif de la simple couche, par  $Y_k$  le vecteur représentatif de la double couche ; les contraintes linéaires (49) s'expriment par les relations matricielles :

$$\sum_{k=1}^K M_{k'k}^X X_k + M_{k'k}^Y Y_k = B_{k'} \quad k \in (1, K) \quad (51)$$

Supposons qu'une grandeur significative de l'erreur (sur la vitesse calculée) soit un certain vecteur  $E_k$  défini par bande :

$$E_k = F_k X_k + G_k Y_k \quad k \in (1, K) \quad (52)$$

$F_k$  et  $G_k$  sont des matrices définissant le vecteur  $E_k$ . Le vecteur  $E_k$  n'est pas exactement l'erreur commise sur les résultats numériques, mais simplement un vecteur dont la norme devient grande lorsque les résultats sont incorrects.

On résoud alors le système (51) en y adjoignant les équations de minimisation relatives à chaque bande et obtenues par la condition :

$$k \in (1, K) \quad \|E_k\| \quad \text{minimum} \quad (53)$$

Les solutions sont obtenues en utilisant un algorithme itératif par blocs du type GAUSS-SEIDEL ; à l'itération (j) nous aurons :

$$\begin{aligned} M_{k',k'}^X X_{k'}^{(j)} + M_{k',k'}^Y Y_{k'}^{(j)} &= B_{k'} \\ - \sum_{k=1}^{k'-1} (M_{k',k}^X X_k^{(j)} + M_{k',k}^Y Y_k^{(j)}) & \\ - \sum_{k=k'+1}^K (M_{k',k}^X X_k^{(j-1)} + M_{k',k}^Y Y_k^{(j-1)}) &= B_{k'}^{(j)} \end{aligned} \quad (54)$$

avec  $\|E_k\| = \|F_k X_k + G_k Y_k\| \quad \text{minimum}$

La matrice  $M_{k',k}^X$ , représente les influences en vitesse normale de la distribution de sources ; de fait  $(M_{k',k}^X)^{-1}$  existe et les solutions du système (54) sont données par :

$$\begin{aligned} (55) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_k^{(j)} = (Q_k^{-1} P_k) X_k^{(j)} \\ (M_{kk}^X + M_{kk}^Y Q_k^{-1} P_k) X_k^{(j)} = B_{k'}^{(j)} \end{array} \right. & \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} P_k = \mathbf{t} (M_{kk}^X^{-1} \ M_{kk}^Y) (\mathbf{t}_{F_k} F_k) - \mathbf{t}_{G_k} F_k \\ Q_k = \mathbf{t}_{G_k} G_k - \mathbf{t} (M_{kk}^X^{-1} \ M_{kk}^Y) (\mathbf{t}_{F_k} G_k) \end{array} \right. \end{aligned}$$

La résolution se fait par bandes d'une manière analogue à celle exposée au paragraphe I.3.2. Le second membre  $B_k^{(j)}$  étant alors connu, on déduit de la résolution de (56) le vecteur  $X_k^{(j)}$  à l'itération (j) ; le vecteur  $Y_k^{(j)}$  est alors connu de manière explicite par la relation (55). Ainsi chaque itération de la méthode par blocs consiste en la résolution de K systèmes d'équations du type (55) et (56).

La convergence de la procédure est en général assurée, pour une précision relative de  $10^{-4}$ , à l'aide d'une quinzaine d'itérations au maximum.

#### Choix du vecteur erreur :

Dans le traitement des ailes, les méthodes du premier ordre donnent des erreurs (sur la vitesse calculée) directement liées aux gradients des densités de singularités, plutôt qu'aux densités elles-mêmes. Cela nous conduit à choisir un vecteur erreur représentatif de ces gradients. Dans le présent modèle, les composantes de  $E_k$  représentent la différence des densités entre deux facettes consécutives, ce qui permet de minimiser cette différence et par voie de conséquence leurs gradients.

D'autre part, ne sont prises en compte que les minimisations des gradients, suivant la corde, des sources d'une part, des vorticités d'envergure d'autre part, et cela pour deux raisons :

- la composante de la vitesse suivant l'envergure est petite par rapport à celle suivant la corde
- les plus forts gradients de singularités sont des gradients dans la direction de la corde

De fait, sur chaque bande k le vecteur  $E_k$  est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 E_k &= (\sigma_{k1} - \sigma_{kN}, \sigma_{k2} - \sigma_{k1}, \dots, \sigma_{kN} - \sigma_{k,N-1}, \\
 &\quad \tilde{\omega}_{k1} - \omega_{k1}, \tilde{\omega}_{k2} - \tilde{\omega}_{k1}, \dots, \tilde{\omega}_{k,N-1} - \tilde{\omega}_{k,N-2}, \omega_{kN} - \tilde{\omega}_{k,N-1}, \omega_{kN} - \omega_{k1} ) \\
 &= (x_{k1} - x_{kN}, \dots, x_{kN} - x_{k,N-1}, y_{k1} + y_{kN}, y_{k2} - y_{k1}, \dots, y_{kN} - y_{k,N-1}, 2y_{kN}) \quad (57)
 \end{aligned}$$

Le choix ci-dessus du vecteur  $E_k$  donne :

$$\begin{aligned}
 {}^t F_k F_k &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & & 0 \\ 0 & & -1 \\ -1 & & -1 & 2 \end{bmatrix} &
 Q_k = {}^t G_k G_k &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & & 0 \\ 0 & & 2-1 \\ 1 & & -1 & 6 \end{bmatrix} &
 {}^t F_k G_k = {}^t G_k F_k &= [0] \quad (58)
 \end{aligned}$$

L'introduction de la composante  $\sigma_{k1} - \sigma_{kN}$  dans le vecteur  $E_k$  donne une très bonne approximation de la relation (14). De plus, les composantes  $\omega_{k1}$  et  $\omega_{kN}$  étant strictement opposées (relation 42), la minimisation de  $\omega_{kN} - \omega_{k1}$  donne au bord de fuite extrados et intrados des vorticités d'envergure qui tendent vers zéro. La vorticité de l'envergure sur le sillage étant imposée à zéro (relation (26)), la continuité de celle-ci au bord de fuite est ainsi assurée.

Les relations (58) montrent que les matrices  $P_k$  et  $Q_k$  sont découplées, la matrice  $Q_k^{-1}$  étant analytique. Cette propriété permet de diminuer les temps de calcul relatifs à la résolution matricielle.

Remarque : Une variante de la méthode exposée consiste à égaler les vorticités à l'extrados et à l'intrados, celles-ci s'annulant rigoureusement au bord de fuite. Dans ce cas, le nombre d'inconnues relatives à la double couche (dans une bande  $k$ ) passe de  $N$     $N/2$  et les temps de calcul sont diminués. Pour conserver la neutralité des matrices  $F_k$  et  $G_k$  vis à vis du maillage, il est préférable d'égaler les vorticités équivalentes à l'extrados et à l'intrados. Le modèle décrit dans ce paragraphe utilise cette simplification, ce qui donne les relations supplémentaires :

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_{k1} &= \omega_{kN} = 0 \\
 \tilde{\omega}_{k,j} &= \tilde{\omega}_{k,N-j} \quad j=2, N/2-1
 \end{aligned} \right\} (59)$$

## I. 5 : Applications et résultats

---

### I. 5.1 : Aspects numériques

---

La mise au point des programmes de calcul correspondant aux deux méthodes décrites précédemment, a été faite sur l'ordinateur CRAY-1 de l'Ecole Polytechnique. L'application des techniques de vectorisation a permis la diminution des temps de calcul et la possibilité d'effectuer un travail en temps réel. Tous les programmes établis ont été partiellement vectorisés, ce qui a permis des gains significatifs notamment lorsqu'on utilise un maillage fin de l'aile.

Remarquons que la phase la plus longue concerne le calcul des vitesses induites par toutes les facettes en chaque point de contrôle ; si NT désigne le nombre total de facettes, nous avons à calculer  $3 \times NT^2$  influences pour un type de singularité donné. Cette remarque justifie l'enregistrement sur fichier non permanent de l'ensemble de ces valeurs, ce qui permet (après résolution du système linéaire), par simple lecture de ce fichier d'obtenir les champs de vitesse et de pression en chaque point de contrôle. Dans le but d'amoindrir le coût informatique relatif au calcul des coefficients d'influence, l'approximation du champ lointain a été faite. Celle-ci se traduit par les simplifications suivantes : lorsque la distance du point de contrôle de la facette au point de calcul devient supérieure à quatre fois la plus grande diagonale de la facette, l'influence relative à la double couche est remplacée par l'influence d'une facette support d'une répartition constante de doublets normaux dont la densité est égale à sa valeur au centre ; les influences relatives aux densités de tourbillons et de sources sont simplement annulées. La détermination des solutions par la méthode itérative de GAUSS-SEIDEL par blocs autorise un enregistrement de la matrice ligne par ligne, ce qui permet la résolution de systèmes linéaires de très grandes tailles. Le critère de convergence de la procédure itérative est donné par :

$$\frac{\max_{i \in (1, NT)} \left| \bar{x}_i^{(j+1)} - \bar{x}_i^{(j)} \right|}{\max_{i \in (1, NT)} \left| \bar{x}_i^{(j)} \right|} < \bar{\epsilon} \quad (60)$$

$\bar{x}_i^{(j)}$  désigne les solutions à l'itération (j)

Le procédé itératif est surrelaxé. En prenant le facteur de relaxation égal à 1,3 et une précision relative  $\bar{\epsilon} = 10^{-4}$ , la convergence est assurée à l'aide de 10 itérations au maximum.

A titre d'exemple nous indiquons ci-après les coûts informatiques pour un maillage comportant environ 600 facettes. Le calcul des coefficients d'influence nécessite pour le premier modèle 144 secondes C.P.U (CRAY-1), pour le second modèle, 158 secondes C.P.U (CRAY-1). En ce qui concerne la résolution matricielle, le temps de calcul pour une itération est de 0,7 secondes pour le premier modèle, de 1,7 secondes pour le second modèle.

### I. 5.2 : Résultats

Le profil de base du plan (OYZ) de l'aile étudiée est le profil NACA 2 % illustré sur la figure 8 de la première partie. La demi-forme en plan de l'aile est donnée dans le repère (OXY) (figure 1) : la demi-envergure est donnée par  $XA = XB = 2$  ; les ordonnées des points A, B et C sont  $YA = 1,48$ ,  $YB = 1,82$  et  $YC = 1$ . La partie de l'aile correspondant à la demi-forme en plan OABC a été découpée en 12 bandes placées suivant l'envergure  $\vec{OX}$  : ce découpage donne des lignes de séparation dont les abscisses  $X_k$  sont données par le tableau ci-dessous.

Numéro de la ligne	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Abscisse de la ligne $X_k$	0,00	0,10	0,22	0,37	0,57	0,76	1,00	1,19	1,43	1,60	1,78	1,90	2,00

Dans chaque bande, la partie correspondante à l'aile comporte 48 facettes, la facette  $\Sigma_k$  du sillage a une longueur égale à 100 fois la corde locale. Dans toute l'étude, l'incidence de l'aile est prise égale à 5 degrés.

Les résultats obtenus par les deux modèles présentés dans ce chapitre sont comparés aux résultats obtenus par les modèles de HUNT et de RUBBERT exposés

dans l'étude [34]. Le modèle de HUNT utilise une distribution de sources constante par facette et répartie sur la surface mouillée de l'aile, plus une distribution de tourbillons répartie sur le squelette de l'aile et son sillage.

Le modèle de RUBBERT utilise des singularités d'ordre supérieur et permet d'avoir des résultats ayant valeur de référence.

Les valeurs du coefficient de pression ainsi que les composantes de la vitesse suivant la corde et l'envergure sont comparées pour deux sections de l'aile : une section au centre de la demi-aile à l'abscisse  $x = 1,098$  (bande  $k = 7$ ) et une section près de l'extrémité de l'aile à l'abscisse  $x = 1,85$  (bande  $k = 11$ ). Les figures 7 à 12 illustrent ces résultats. La concordance des quatre modèles est excellente sauf au bord d'attaque de l'aile. Il est à noter que pour la section  $k = 11$  les valeurs des composantes de la vitesse ne sont pas indiquées pour le modèle de RUBBERT, celles-ci étant absentes en référence [34].

L'analyse des courbes relatives au second modèle montre qu'au bord de fuite les coefficients de pression extrados et intrados sont égaux (figures 7 et 8) ; d'autre part, les vitesses correspondantes ont des composantes opposées suivant l'envergure (figures 9 et 10) et des composantes égales suivant la corde (figures 11 et 12). De fait la condition de JOUKOVSKY implicite du second modèle est remarquablement satisfaite.

La figure 13 représente un agrandissement de la répartition du coefficient de pression au bord d'attaque relatif à la bande  $k = 7$ . Cette figure montre que la différence significative des coefficients de pression est localisée au bord d'attaque. Cela peut s'expliquer comme suit. La figure 15 qui représente l'ensemble des lois de double couche, obtenue pour chaque section suivant l'abscisse curviligne, met en évidence que partout sur l'aile, les gradients de celle-ci sont bien minimisés sauf au voisinage du bord d'attaque. En conséquence, la répartition de sources présente la même propriété et les erreurs de discrétisation qui sont proportionnelles aux gradients de la simple couche, sont significatives dans cette région.

La figure 14 représente l'ensemble des lois de doublets obtenues par le deuxième modèle, dans des sections suivant l'envergure de l'aile. On peut constater la régularité de ces courbes ainsi que le comportement de la vorticité au voisinage de l'extrémité de l'aile. Au voisinage de la bande centrale ( $Y = 0$ ), le saut important de la loi de double couche provient du fait que dans ce modèle, la vorticité suivant la corde est imposée nulle partout sur la bande centrale.

Une étude comparative des coefficients de portance  $CZ_k$  calculés dans chaque bande  $k$  de discrétisation, est présentée dans le tableau 1 et illustrée par la figure 16. Les erreurs relatives  $e_1, e_2, e_3, e_4$  représentent respectivement les erreurs relatives du premier modèle, du second modèle, du modèle HUNT 48 facettes, du modèle HUNT 60 facettes par rapport aux valeurs obtenues à l'aide du modèle RUBBERT. Ces résultats montrent que les deux modèles de la présente étude ainsi que le modèle de HUNT donnent des résultats pratiquement identiques, mais surévalués par rapport aux valeurs de référence établies par RUBBERT. Comme nous l'avons indiqué plus haut, les courbes de pression obtenues par les quatre modèles ne présentent des différences significatives qu'au bord d'attaque de l'aile ; de fait, l'écart obtenu sur les coefficients de portance  $CZ_k$  provient uniquement des écarts de pression notés au bord d'attaque.

Le tableau 2 indique l'erreur relative faite sur le coefficient de portance global de l'aile. Les précisions obtenues sont bonnes, avec un léger désavantage pour le premier modèle.

Les figures 17 et 18 montrent respectivement les projections, sur le plan de l'aile, des champs de vitesse à l'extrados et à l'intrados. On constate que la survitesse au bord d'attaque de l'aile augmente lorsqu'on se rapproche de l'extrémité de l'aile, ce qui permet de localiser les zones où la cavitation est susceptible d'apparaître.

   l'intrados, l'écoulement est dévié vers l'extrémité de l'aile, à l'extrados vers la partie centrale. Ces déviations sont importantes au voisinage de l'extrémité de l'aile, là où l'influence des tourbillons libres marginaux est la plus forte. Au bord de fuite de l'aile, la discontinuité de vi-



tesse tangentielle entre l'extrados et l'intrados est mise en évidence. Les présents modèles, utilisant au bord de fuite une répartition de tourbillons suivant la corde, permettent de réaliser cette discontinuité, ce qui donne une représentation satisfaisante de la réalité de l'écoulement dans cette zone.

N° de la bande	CZ <sub>k</sub>	1er modèle	2e modèle	Réf 34	Réf 34	Réf 34	Erreurs relatives			
		48 facettes	48 facettes	HUNT 48 facettes	HUNT 60 facettes	RUBBERT	e <sub>1</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>	e <sub>4</sub>
							en %			
1		0,287	0,293	0,292	0,292	0,287	0,0	2,1	1,7	1,7
2		0,305	0,306	0,306	0,306	0,300	1,7	2,0	2,0	2,0
3		0,325	0,323	0,322	0,322	0,317	2,5	1,9	1,6	1,6
4		0,347	0,343	0,341	0,341	0,336	3,3	2,1	1,5	1,5
5		0,369	0,364	0,361	0,362	0,358	3,1	1,7	0,8	1,1
6		0,391	0,385	0,381	0,383	0,376	4,0	2,4	1,3	1,9
7		0,411	0,404	0,400	0,403	0,395	4,0	2,3	1,3	2,0
8		0,427	0,420	0,415	0,420	0,413	3,4	1,7	0,5	1,7
9		0,436	0,429	0,421	0,428	0,421	3,6	1,9	0,0	1,7
10		0,427	0,421	0,408	0,419	0,413	3,4	1,9	1,2	1,5
11		0,374	0,372	0,349	0,368	0,365	2,5	2,0	4,4	0,8
12		0,230	0,232	0,237	0,246	0,240	4,2	3,3	1,2	2,5

Tableau 1 - Comparaison des coefficients de portance par bande

	Cz	Erreur relative en %
Modèle 1	0,368	3,1
Modèle 2	0,364	2,0
HUNT (48 facettes)	0,360	0,8
HUNT (60 facettes)	0,363	1,7
RUBBERT	0,357	

Tableau 2 - Comparaison des coefficients de portance

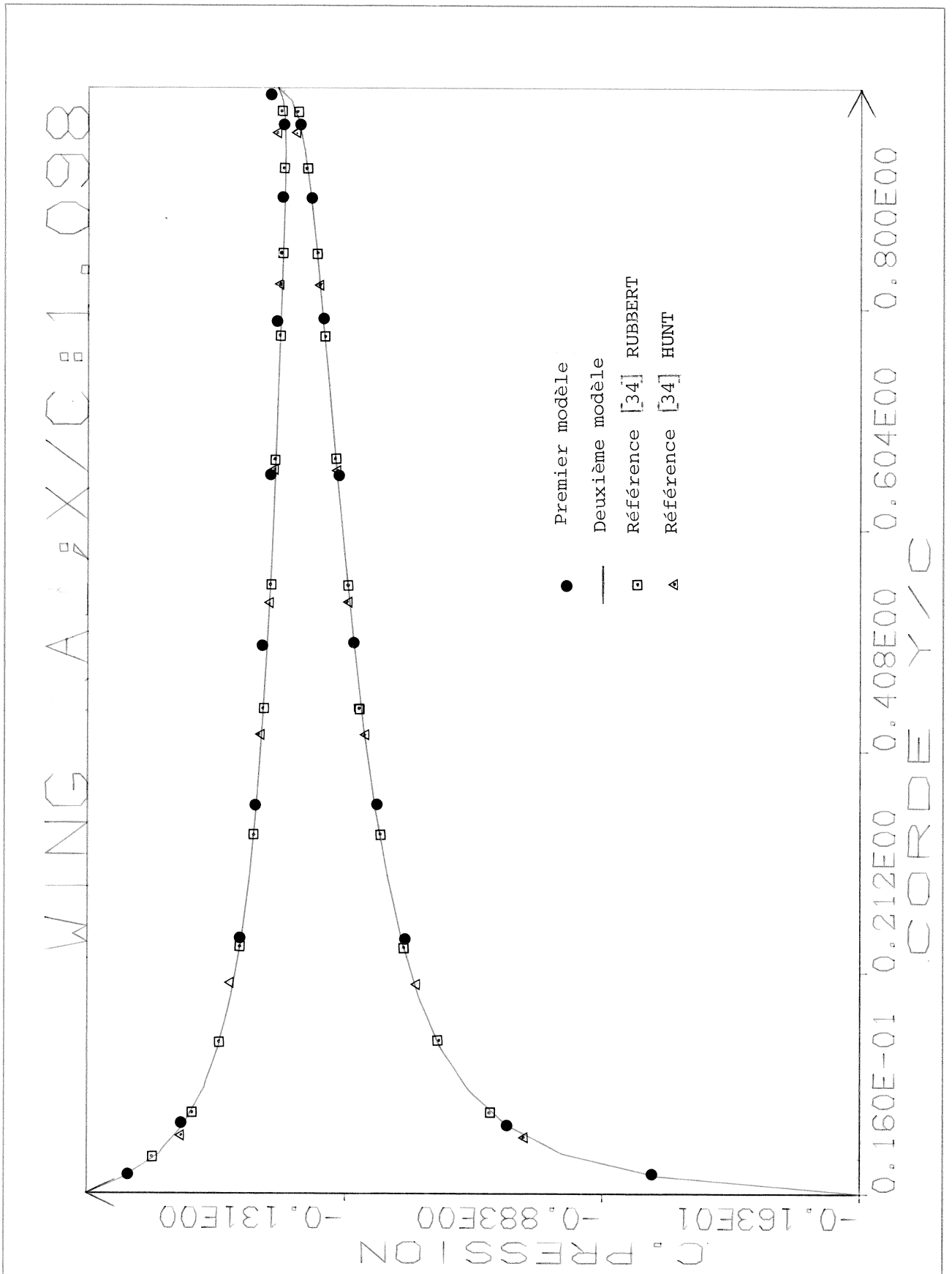
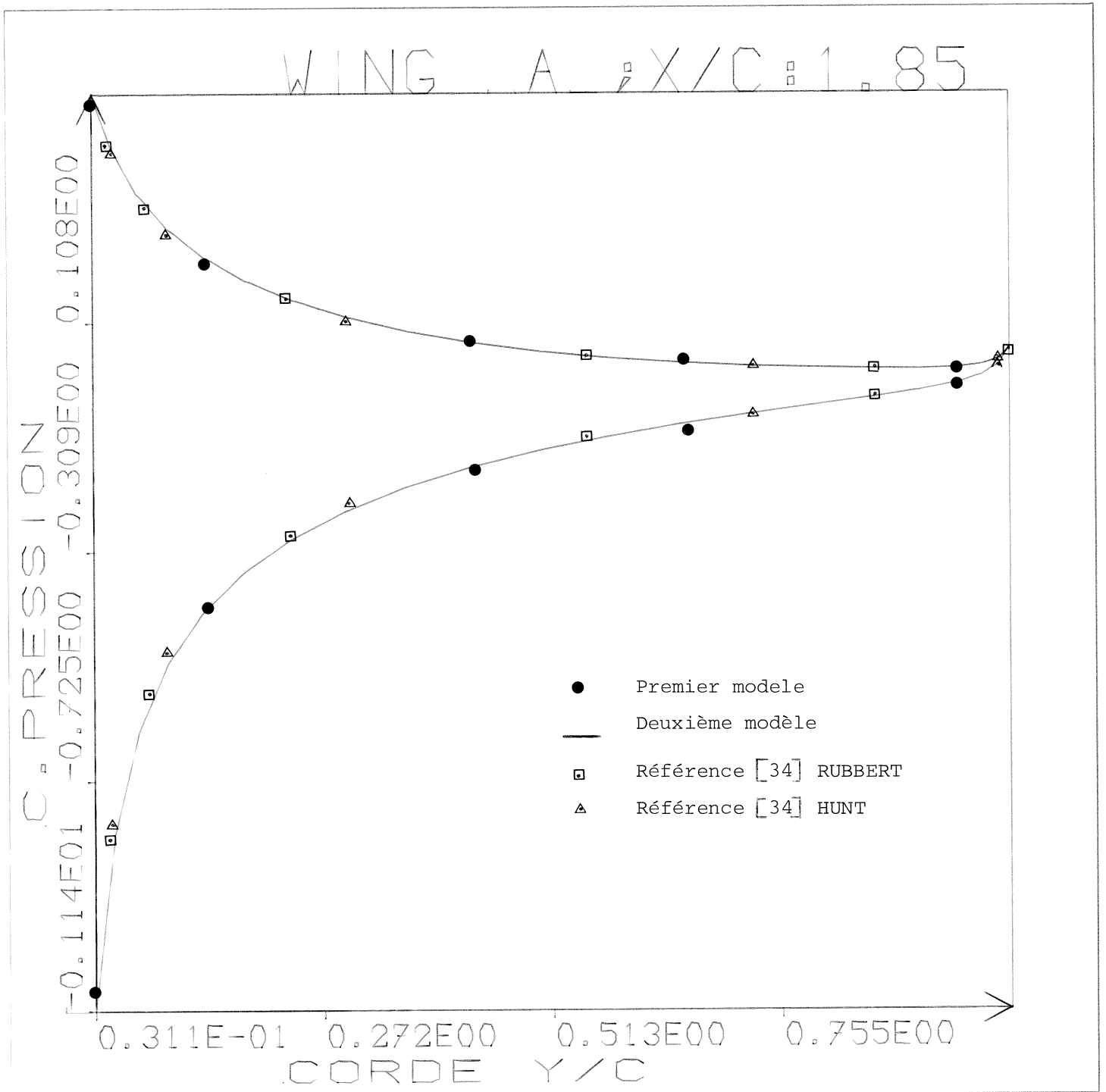


Figure 7 : Coefficient de pression dans la bande k = 7

Figure 8 : Coefficient de pression dans la bande  $k = 11$

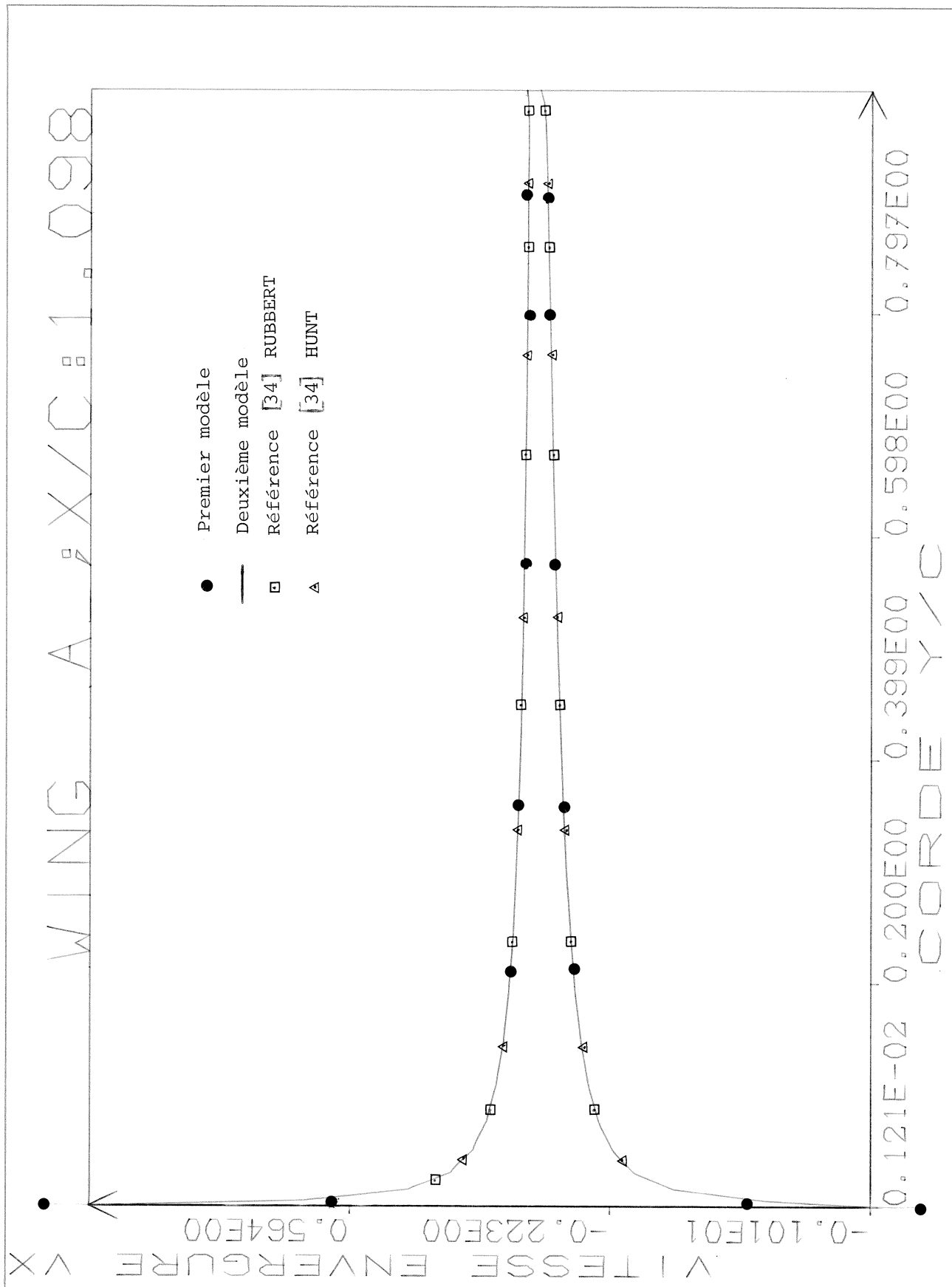


Figure 9 : Composante de la vitesse suivant l'envergure dans la bande  $k = 7$

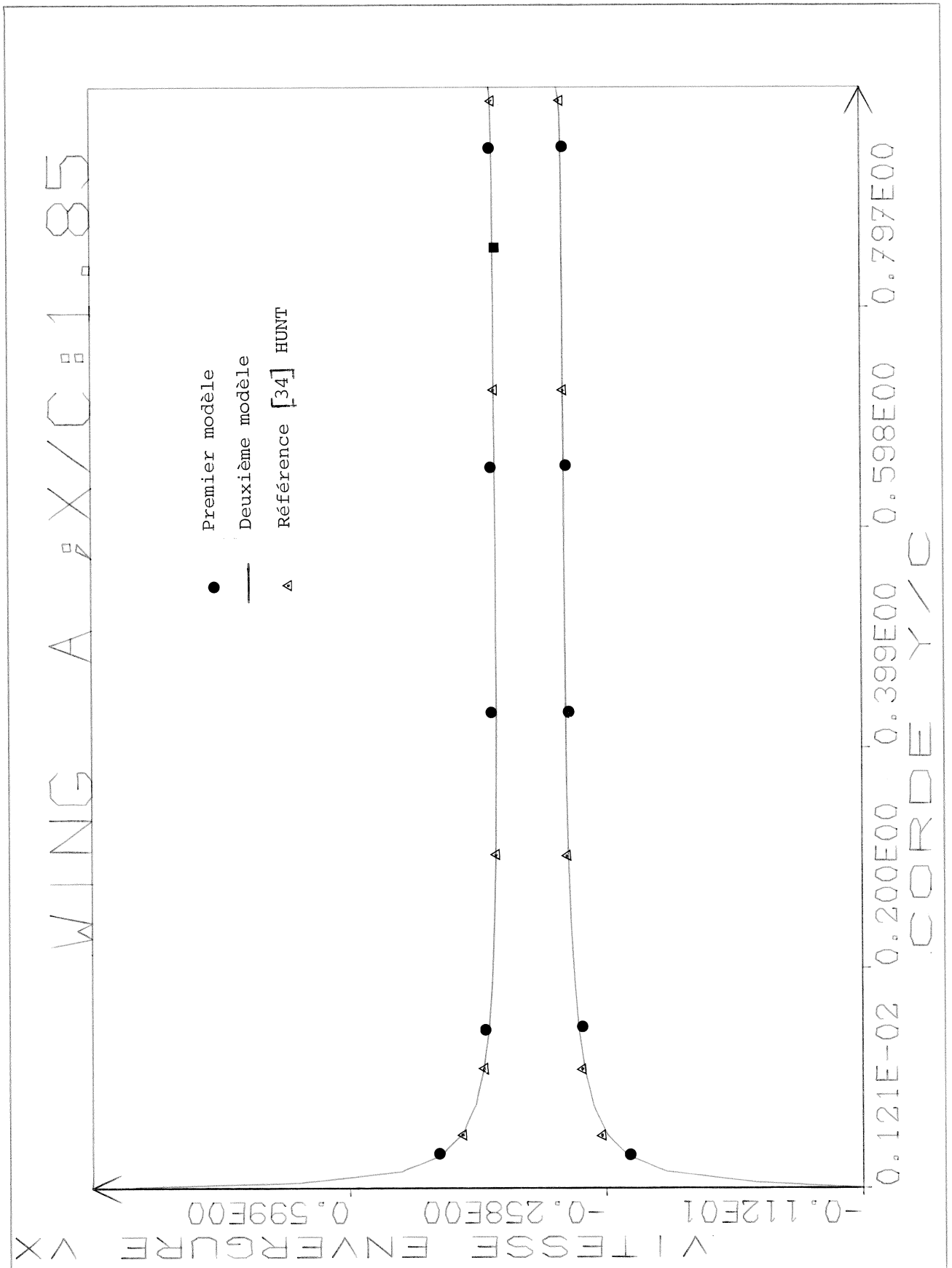


Figure 10 : Composante de la vitesse suivant l'envergure dans la bande  $k = 11$

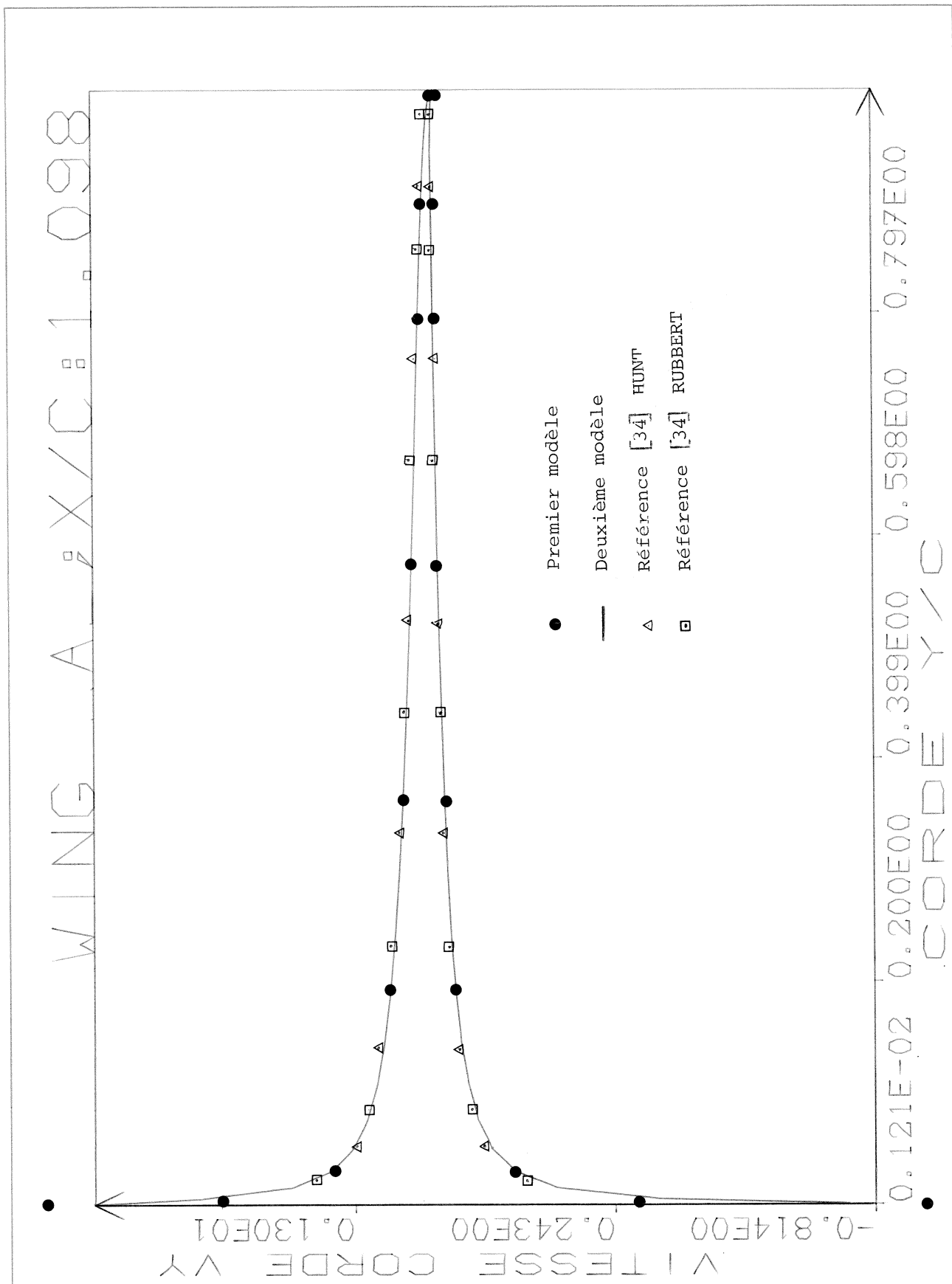


Figure 11 : Composante de la vitesse suivant la corde  
dans la bande  $k = 7$

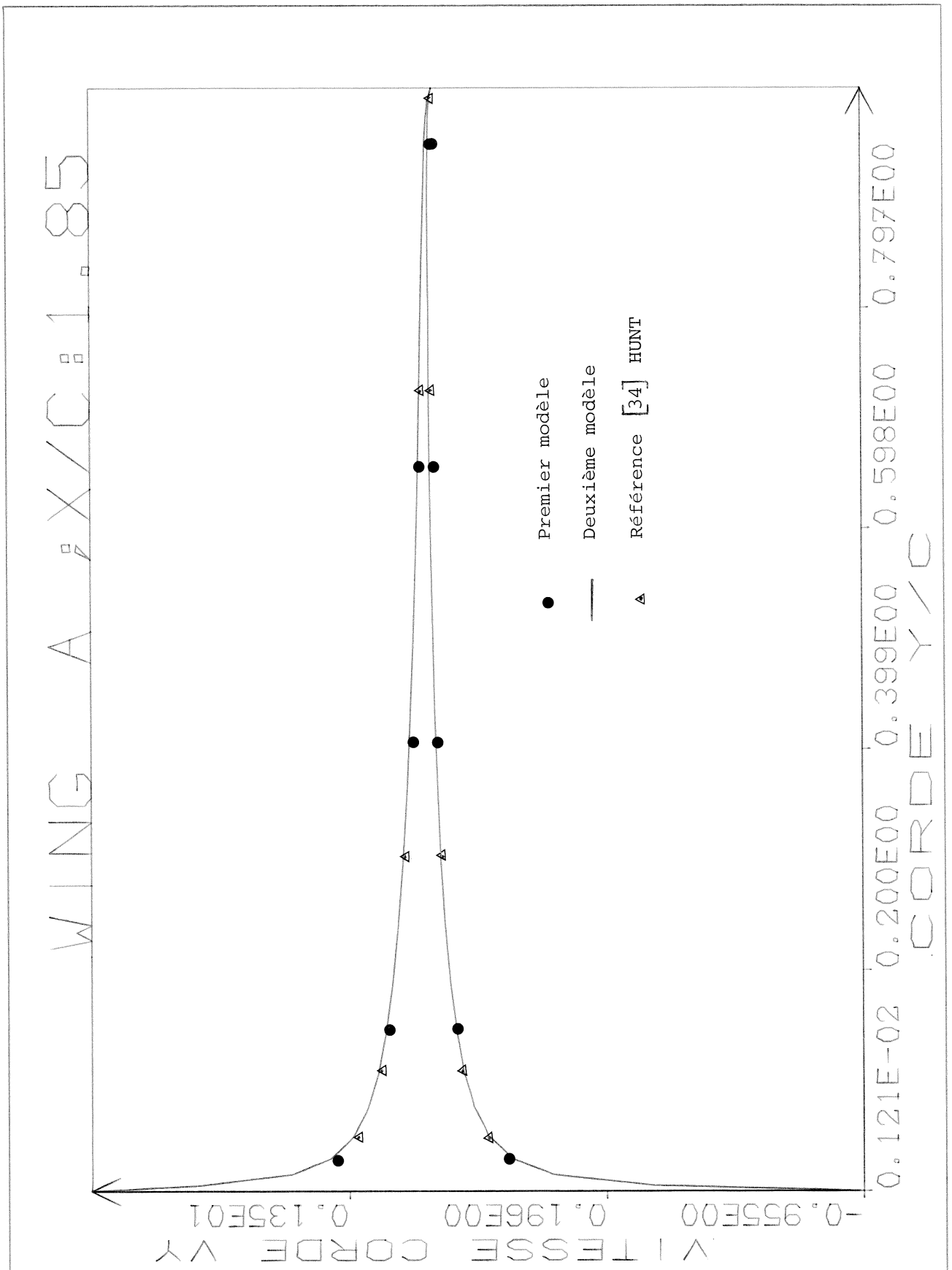


Figure 12 : Composante de la vitesse suivant la corde  
dans la bande  $k = 11$



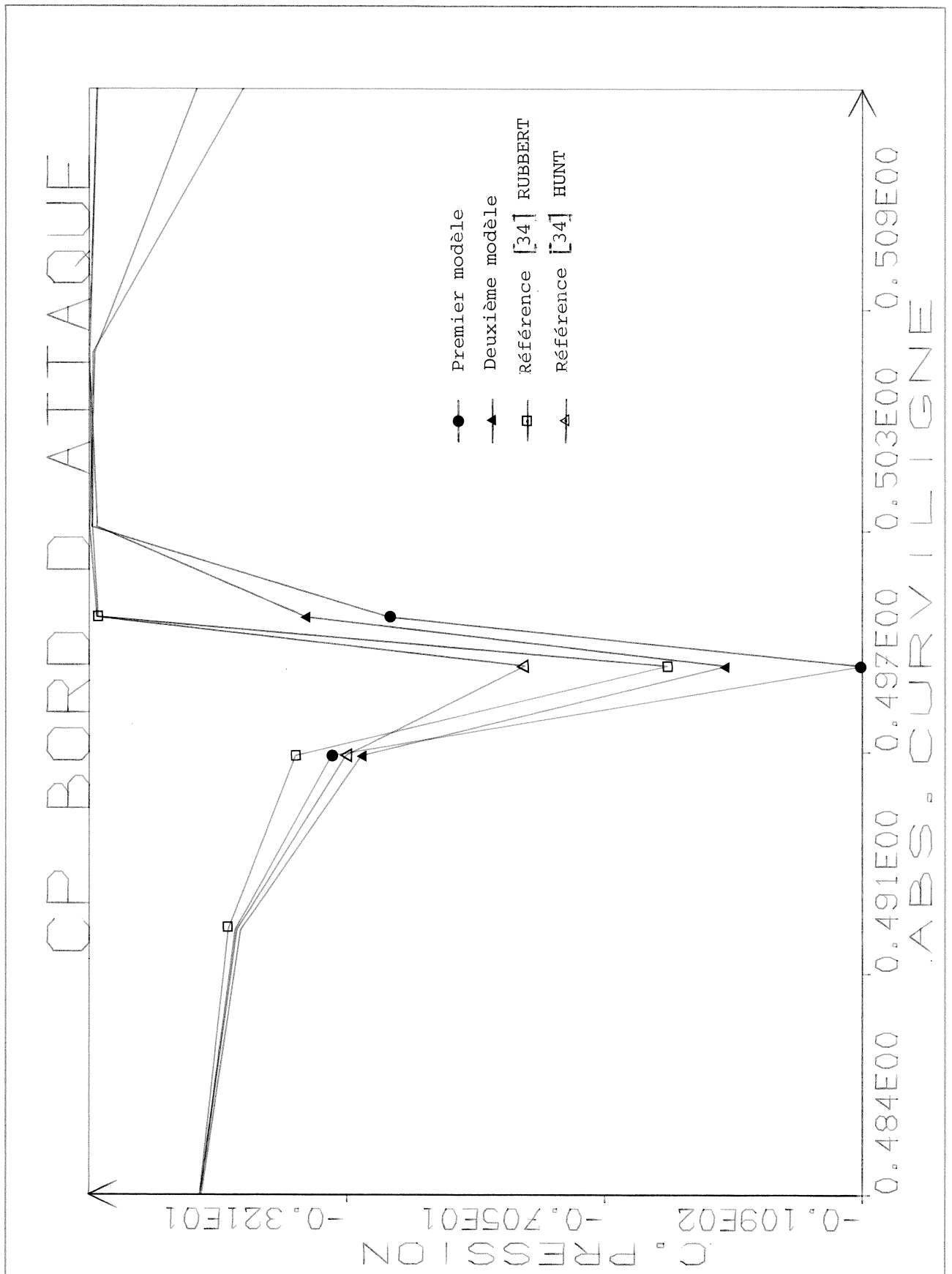


Figure 13 : Coefficient de pression au bord d'attaque  
relatif à la bande  $k = 7$

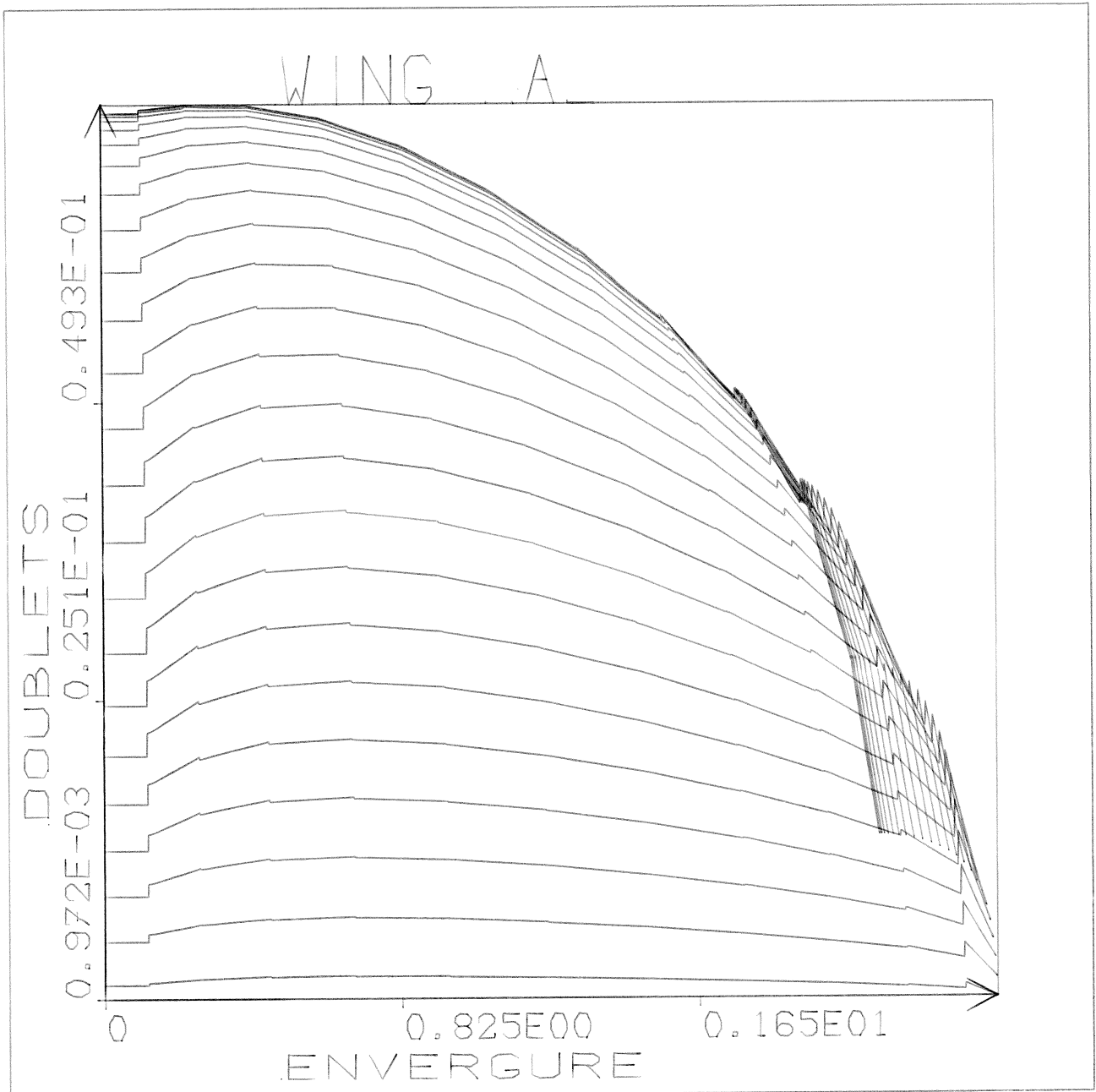


Figure 14 : Densité de doublet en fonction de l'envergure

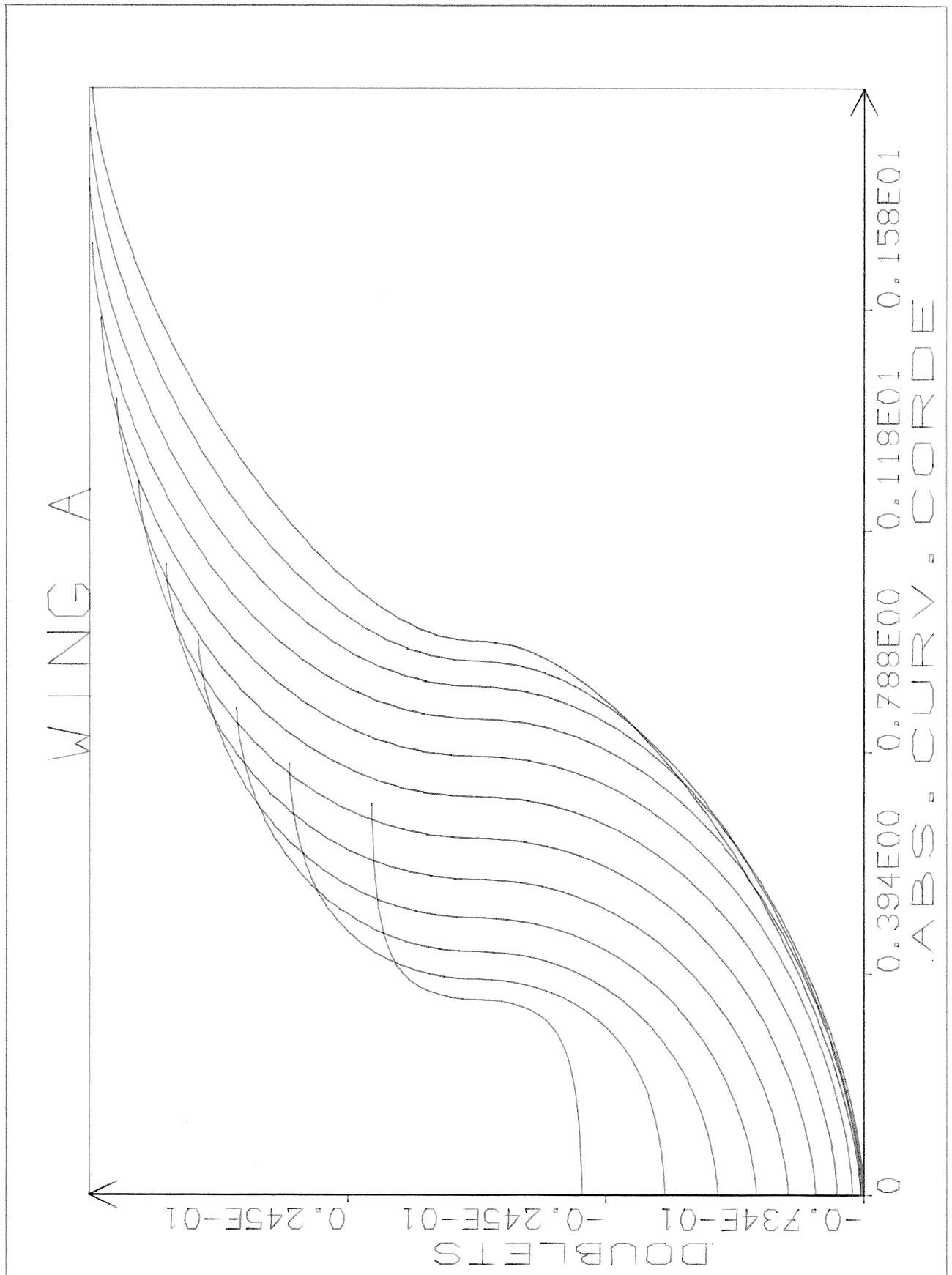


Figure 15 : Densité de doublet en fonction de l'abscisse curviligne suivant la corde

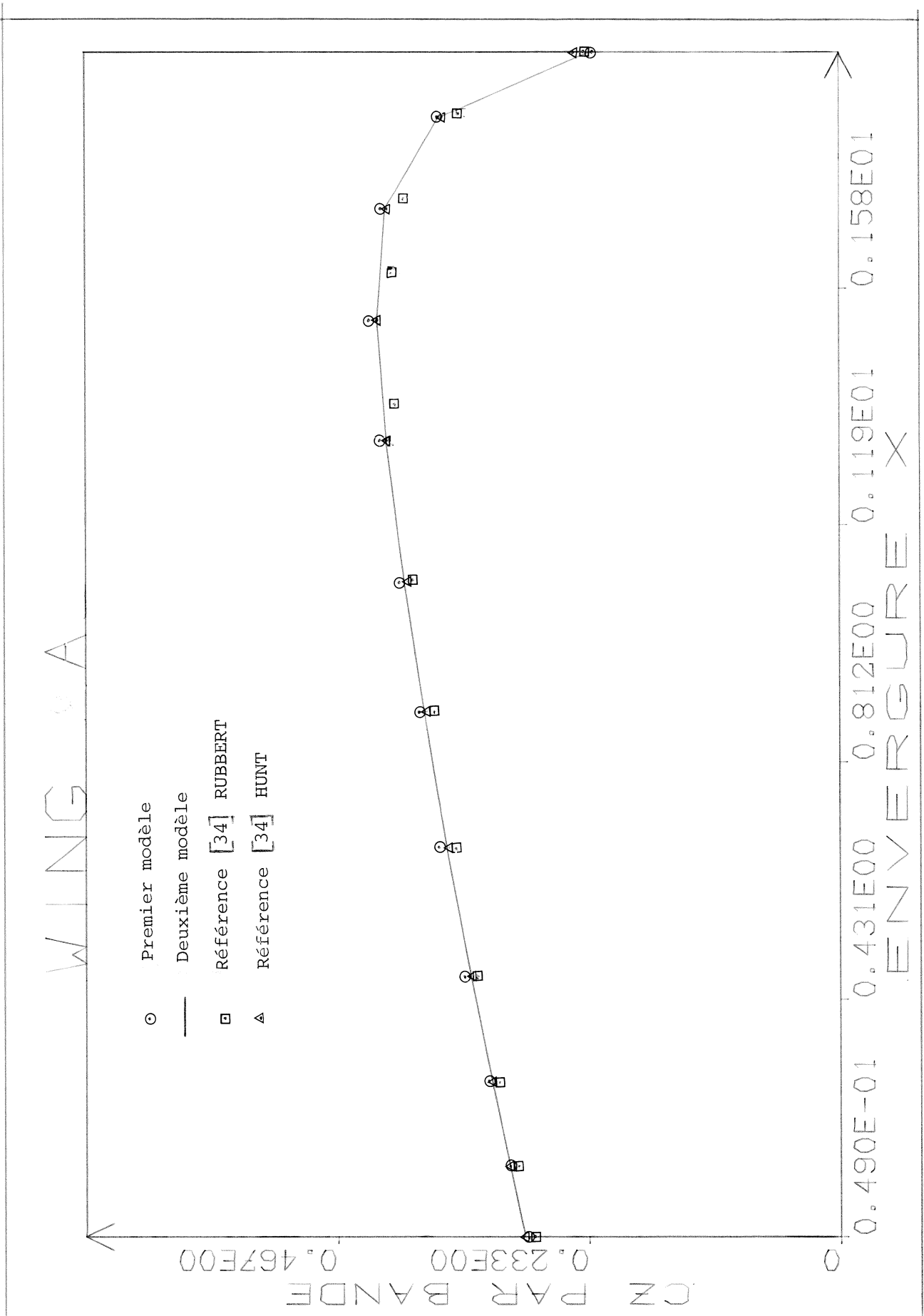


Figure 16 : Coefficient de portance relatif à chaque bande

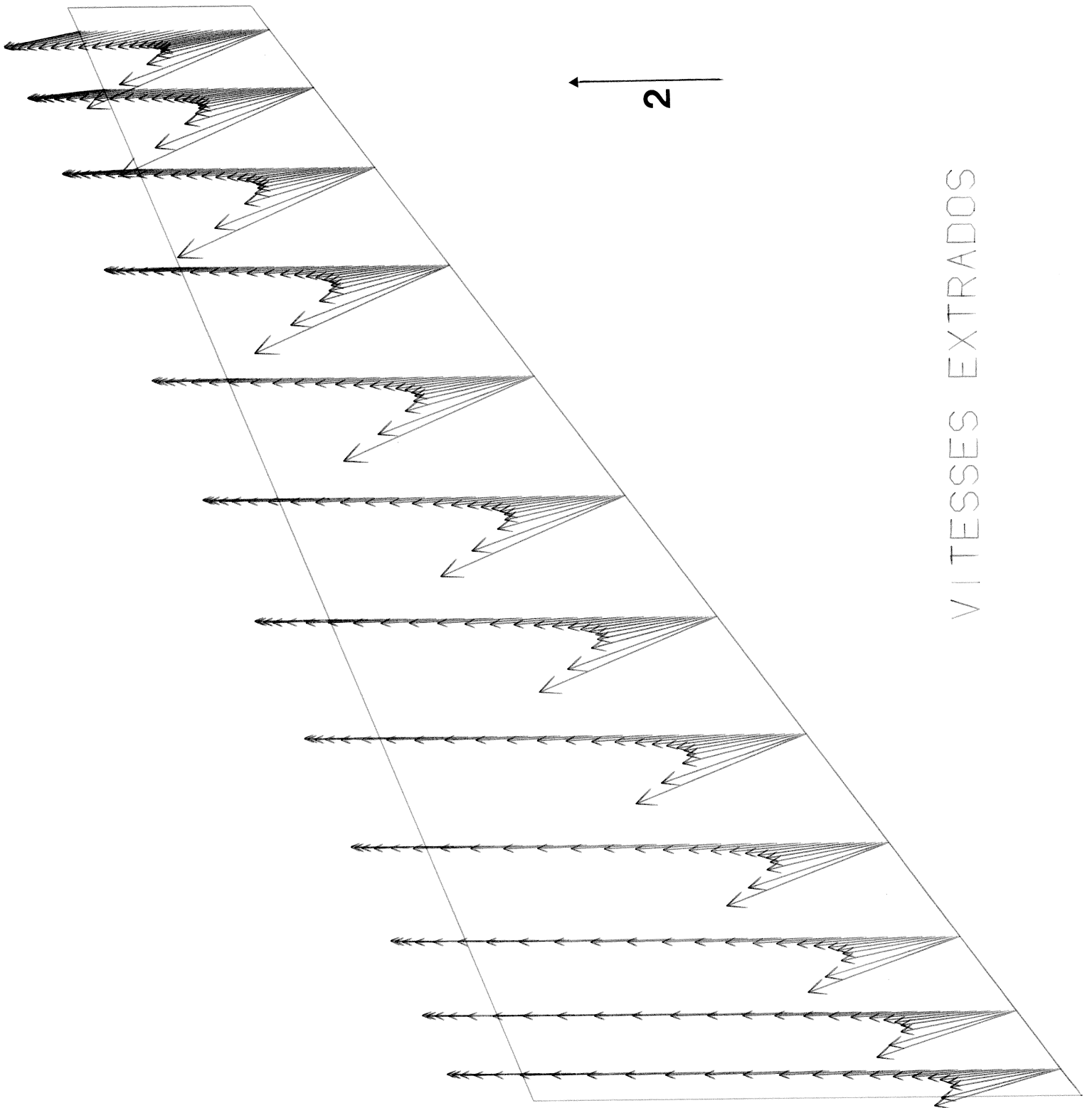


Figure 17 : Champ de vitesse extrados obtenu  
à l'aide du second modèle

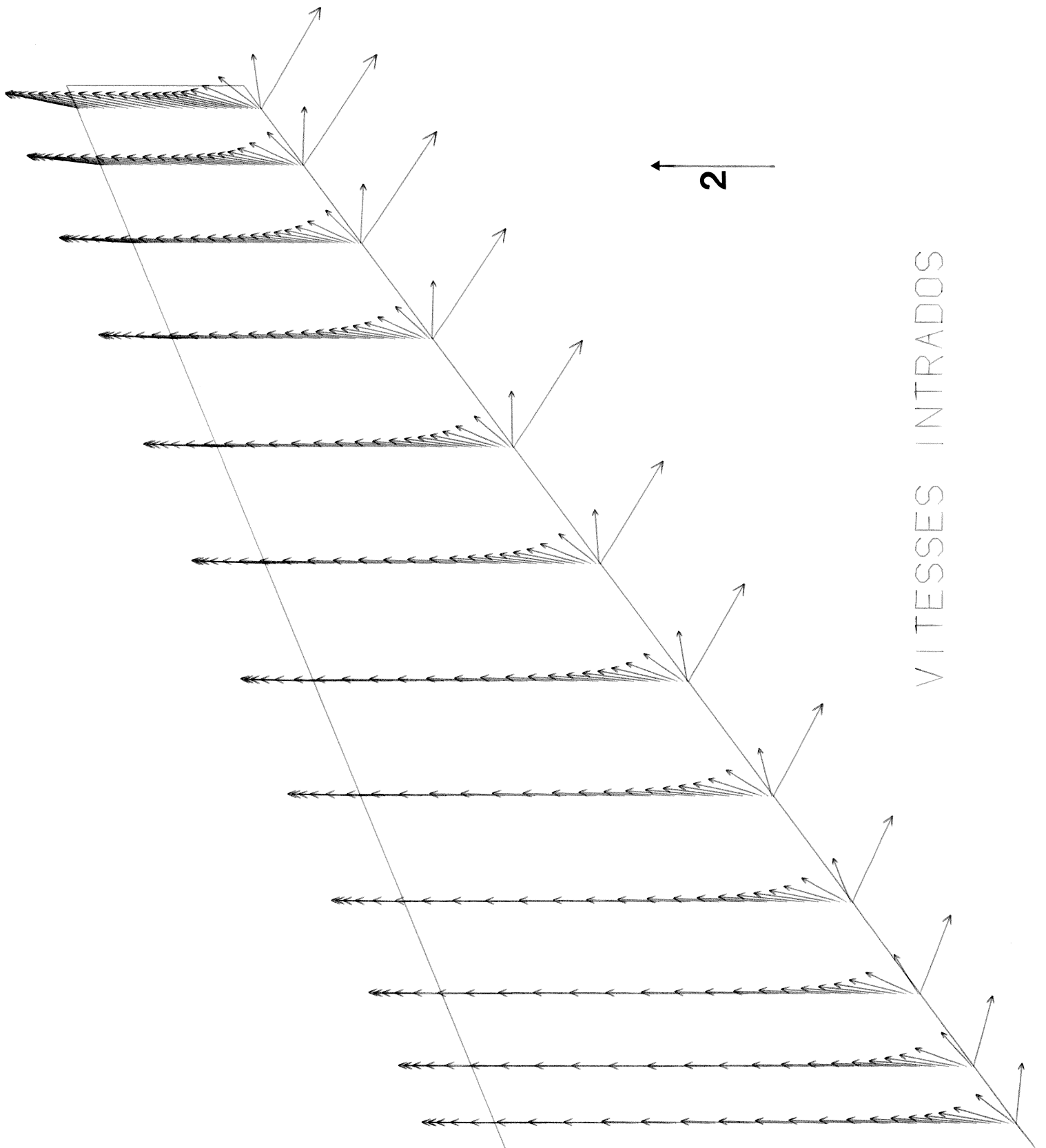


Figure 18 : Champ de vitesse intrados obtenu à l'aide  
du second modèle

CHAPITRE IICALCUL DE L'HELICE SUBCAVITANTE  
=====II. 1 : Considérations générales

Le calcul des hélices dans les circonstances réelles de fonctionnement est un problème difficile : le milieu est marqué à la fois par le gradient hydrostatique de la pression et par le sillage du bateau. Il s'ensuit un fonctionnement de l'hélice dans des conditions d'écoulement non permanentes, avec éventuellement une zone de cavitation limitée à une portion de l'extrados des pales.

Les premiers calculs permettant de déterminer les performances d'une hélice ont vu le jour grâce au développement des méthodes de perturbation [3] appliquées dans le cadre de la théorie de la ligne portante [1],[2].

Les méthodes basées sur la théorie de la surface portante [4],[5] sont devenues opérationnelles depuis le développement des ordinateurs (T.S.LUU); ces méthodes ont été développées au M.I.T d'une manière quasi-stationnaire pour le problème des hélices cavitantes ([6] à [9]) par KERWIN. Dans ce travail, la géométrie du sillage est figée et la cavité est modélisée suivant la théorie linéaire classique qui suppose les singularités réparties sur la ligne de cambrure. D'une manière générale, toutes les méthodes précédemment développées pour le calcul des hélices utilisent des singularités réparties sur le squelette des pales; une telle approche présente deux inconvénients:

- près du moyeu, l'épaisseur relative des pales étant grande, la zone de raccordement (là où des tourbillons et des décollements peuvent se produire) est mal décrite.
- près du bord d'attaque, le coefficient de pression présente une singularité, ce qui empêche une étude fine de la naissance de la cavitation.

Pour ces deux raisons, il est important d'utiliser des singularités réparties sur les surfaces mouillées des pales de l'hélice. Dans ce cas, les temps de calcul sont fortement augmentés ; c'est pourquoi, pour une première approche la présente étude envisage le cas simplifié où l'écoulement relatif à une pale est permanent.

Dans la suite nous présentons le problème d'une manière générale. Les hypothèses faites sont celles du fluide parfait incompressible et de l'écoulement irrotationnel en milieu infini. L'interaction de la carène sur l'hélice est représentée par un champ de vitesse ayant des composantes axiales, tangentielles et radiales, prises dans le plan moyen de l'hélice. Dans un repère lié au mouvement d'avance du bateau, ce champ de vitesse est indépendant du temps. L'hélice travaille alors dans un champ non uniforme et le mouvement du fluide par rapport à un repère mobile lié à l'hélice est de nature instationnaire. Nous faisons alors l'hypothèse simplificatrice qui consiste à prendre le champ de vitesse du au bateau comme une fonction vectorielle ne dépendant que du rayon ; dans ce cas le potentiel des vitesses devient une fonction indépendante du temps pour un observateur lié au repère mobile de l'hélice.

## II. 2 : Formulation du problème

---

### II. 2.1 : Définition de la géométrie d'une pale

---

Nous désignons par  $(\mathbf{o} \ \xi \ \eta \ \zeta)$  un repère lié à l'hélice ; les vecteurs directeurs de chaque axe sont désignés par  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  (cf. figure 19). L'axe  $\vec{o}\xi$  est dirigé vers l'aval de l'écoulement, les axes  $\vec{o}\eta$  et  $\vec{o}\zeta$  sont choisis



pour que le repère  $(\mathbf{o}, \xi, \eta, \zeta)$  soit orthonormé direct. On définit les coordonnées cylindriques d'un point M  $(r, \theta, \xi)$  ;  $\theta$  est l'angle  $(\vec{v}, \vec{om})$  compté positivement dans le sens des aiguilles d'une montre, m étant la projection du point M sur le plan  $(\mathbf{o}, \xi, \eta)$  (cf. figure 20). La coordonnée radiale est donnée par  $r = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$  ;  $\xi$  est la coordonnée suivant  $\vec{o\xi}$  du point M (cf. figure 21). Les vecteurs unitaires correspondant aux coordonnées cylindriques ainsi définis sont désignés par  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\xi$ .

La géométrie d'une pale est obtenue par un découpage de celle-ci en des sections cylindriques de rayon r autour de l'axe  $\vec{o\xi}$ . Dans chacune de ces sections, un point G est défini comme étant le point milieu de la courbe AF tracée sur le cylindre ; les points A et F sont respectivement les bords d'attaque et de fuite du profil de la section correspondante, la courbe AF étant une portion d'hélice d'angle  $\varphi(r)$ . Lorsque r varie, le point G décrit une courbe qui est le squelette de la pale et dont l'équation est donnée par :

$$\vec{OG} = x_G(r) \vec{u} + r \left[ \vec{v} \cos \theta_G(r) + \vec{w} \sin \theta_G(r) \right] \quad (61)$$

L'angle de calage  $\varphi$  de chaque section ainsi que les fonctions  $x_G$  et  $\theta_G$  sont des fonctions connues de r. La loi de corde  $c(r)$  (longueur de la courbe AF) étant aussi donnée, les bords d'attaque et de fuite de la pale sont parfaitement définis.

Pour chaque section, le profil est défini dans un système de coordonnées hélicoïdal  $(A, X', Y')$  (cf. figure 22). L'abscisse d'un point du profil est donnée par  $X' = c \cdot s$  ; s est l'abscisse dimensionnelle suivant la corde AF, qui prend la valeur 0 au point A et la valeur 1 au point F. La loi de cambrure  $f(s)$  et la loi d'épaisseur  $l(s)$  du profil, sont données, d'une manière analogue à celles d'un profil bidimensionnel, dans les axes  $(A, X', Y')$ . A l'aide de ces notations, un point M de la pale aura alors dans le repère  $(\mathbf{o}, \xi, \eta, \zeta)$  les coordonnées :

$$\left. \begin{aligned} \xi_M &= x_G + c \left( s - \frac{1}{2} \right) \sin \varphi + \left( -f(s) \pm \frac{1}{2} l(s) \right) \cos \varphi \\ \eta_M &= r \cos \theta_M \\ \zeta_M &= r \sin \theta_M \\ \theta_M &= \theta_G + \frac{c}{r} \left( s - \frac{1}{2} \right) \cos \varphi - \frac{1}{r} \left( -f(s) \pm \frac{1}{2} l(s) \right) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Les relations (62) définissent ainsi la géométrie d'une pale, appelée pale de référence ; si NP désigne le nombre de pales, les autres pales sont obtenues à partir de la pale de référence en effectuant des rotations successives d'angle  $\delta = 2\pi / \text{NP}$  autour de l'axe  $\vec{o}\xi$ .

En général, pour une même hélice, les lois  $f(s)$  et  $l(s)$  ont la même forme adimensionnelle pour chaque section. La géométrie de la pale de référence est alors parfaitement définie, dès que l'on connaît :

- .  $x_G, \theta_G$  les équations polaires de la génératrice
- .  $c$  la loi de corde
- .  $\varphi$  l'angle de calage ou le pas géométrique  $hg = 2\pi \tan \varphi$
- .  $f_0$  la cambrure maximale
- .  $l_0$  l'épaisseur maximale

## II. 2.2 : Champ de vitesse induit par le sillage du bateau

---

Nous désignons par  $(O X_0 Y_0 Z_0)$  un repère lié au bateau dont l'origine  $O$  est confondue avec l'origine du repère lié à l'hélice ; les vecteurs directeurs de chaque axe sont désignés par  $\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0$  (cf. figure 23). L'axe  $\vec{oX}_0$  est dirigé vers l'aval de l'écoulement, le bateau se déplaçant à la vitesse  $-V_0 \vec{I}_0$  ( $V_0 > 0$ ). L'axe  $\vec{oY}_0$  est vertical, le repère  $(OX_0 Y_0 Z_0)$  étant un repère direct.

La présence de la carène du bateau crée un sillage à l'arrière de celui-ci et induit au voisinage de l'hélice un champ de vitesse non uniforme  $\vec{v}_B$ . Ce champ est supposé être indépendant de  $X_0$  dans une zone proche du plan moyen de l'hélice, ce qui permet de le définir uniquement dans ce plan. D'autre part, dans le repère  $(OX_0 Y_0 Z_0)$  du bateau, la vitesse relative de ce champ est indépendante du temps ; son expression peut alors s'écrire :

$$\vec{V}_{B(M)} = V_0 \vec{I}_0 + \vec{v}_{B(M)} = V_X(\bar{r}, \theta_m) \vec{I}_0 + V_T(\bar{r}, \theta_m) \vec{e}_\theta + V_\epsilon(\bar{r}, \theta_m) \vec{e}_r \quad (63)$$

$\bar{r}$ ,  $\theta_m$  désignent les coordonnées polaires d'un point m dans le plan  $(OY_0Z_0)$  (cf. figure 24) ;  $\bar{r}$  désigne le rayon réduit  $r/R$ , R étant le rayon de l'hélice. Le champ relatif  $\vec{V}_B$  est ainsi donné dans chaque section comprise entre le moyeu de rayon réduit  $\bar{r}_H$  et l'extrémité d'une pale de rayon réduit égal à 1.

Dans la pratique, les composantes axiales, tangentielles et radiales du champ  $\vec{V}_B$  sont données dans la décomposition harmonique de FOURRIER utilisée par KERWIN [8] :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_i(\bar{r}, \theta_m) = V_0 \left\{ A_0^i(\bar{r}) + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^i(\bar{r}) \cos n \theta_m + B_n^i(\bar{r}) \sin n \theta_m \right\} \\ i=(X, \tau, \epsilon) \end{array} \right. \quad (64)$$

En général, les coefficients de FOURRIER  $A_n^i$  et  $B_n^i$  sont donnés jusqu'à un ordre fini NS choisi de façon à ce que les valeurs des composantes de  $\vec{V}_B$  soient suffisamment précises.

#### Définitions

On désigne par  $V_A$  le module de la vitesse moyenne du champ  $\vec{V}_B$  à travers la couronne circulaire comprise entre les rayons  $r_H$  et R ; en calculant le débit du fluide à travers cette couronne, on en déduit d'après les relations (63) et (64) :

$$V_A = \frac{2V_0}{1 - \bar{r}_H^2} \int_{\bar{r}_H}^1 A_0^X(\bar{r}) \bar{r} \, d\bar{r} \quad (65)$$

Le paramètre d'avance de l'hélice est alors donné par :

$$J_A = \frac{V_A}{n_t D} \quad (66)$$

$n_t$  est la vitesse de rotation de l'hélice exprimée en tours par seconde,  $D$  est le diamètre de l'hélice.

### II. 2.3 : Equations de l'écoulement et conditions aux limites

On suppose que l'hélice est en rotation uniforme  $-\omega \vec{u}$  ( $\omega > 0$ ) autour de l'axe  $\vec{o\xi}$ . Dans le repère  $(OX_OY_OZ_O)$  lié au bateau, le problème peut se poser de la manière équivalente suivante. Nous définissons dans ce repère, le champ de vitesse d'attaque  $\vec{V}_a(M)$  qui s'identifie à  $\vec{V}_B(M)$  dans un voisinage immédiat de l'hélice (surface des pales) et à  $V_O \vec{I}_O$  partout dans le domaine fluide extérieur à l'hélice. Il s'agit alors, de déterminer le mouvement du fluide autour de l'hélice en rotation et placée dans le champ  $\vec{V}_a$ . Avec les hypothèses mentionnées au paragraphe II.1, le champ de vitesse en un point  $M$  de l'espace lié au bateau dérive d'un potentiel harmonique  $\Phi(M, t)$ . Ce champ peut s'écrire :

$$\vec{V}(M, t) = \vec{V}_a(M) + \vec{v}(M, t) \quad (67)$$

$\vec{v}$  représente la vitesse de perturbation introduite par la présence de l'hélice. Le glissement du fluide à la surface des pales se traduit alors par la relation :

$$\forall t \quad (\vec{v} \cdot \vec{n})_M = -(\vec{V}_B + \omega \vec{u} \wedge \vec{OM}) \cdot \vec{n}_M \quad (68)$$

$\vec{n}_M$  désigne la normale unitaire extérieure à la surface d'une pale. Pour des raisons de commodité, tous les vecteurs sont exprimés dans le repère lié à l'hélice. Soit  $\theta_\eta$  l'angle  $(\vec{J}_O, \vec{v})$  à l'instant  $t$  :  $\theta_\eta = \text{cte} - \omega t$ . Un point  $M$  de la pale de référence est alors repéré par ces coordonnées cylindriques  $(r, \theta, \xi)$  dans le repère tournant  $(o, \xi, \eta, \zeta)$  (figure 24). A l'instant  $t$ , la position angulaire du point  $m$  est donnée par  $\theta_m = \theta_\eta + \theta$ . L'expression du champ  $\vec{V}_B$  en un point  $M$  de la pale de référence s'écrit alors :

$$\vec{V}_B(M,t) = V_X(\bar{r}, \theta_m) \vec{I}_O + V_T(\bar{r}, \theta_m) [-\vec{v} \sin \theta + \vec{w} \cos \theta] + V_C(\bar{r}, \theta_m) [\vec{v} \cos \theta + \vec{w} \sin \theta] \quad (69)$$

L'expression (69) montre alors que si les fonctions  $V_X$ ,  $V_T$  et  $V_C$  sont indépendantes de  $\theta_m$ , les composantes du champ  $\vec{V}_B$  exprimées dans le repère de la pale sont indépendantes du temps ; dans ce cas, l'écoulement relatif à une pale est de nature stationnaire. Dans toute la suite de cette étude, nous adoptons ces conditions.

#### II. 2.4 : Equations intégrales en écoulement relatif permanent

---

Le repère de travail est le repère  $(o \ \xi \ \eta \ \zeta)$  lié à la pale de référence. Dans ce cas, avec les hypothèses faites sur le champ  $\vec{V}_B$  (mentionnées au paragraphe précédent), toute l'étude faite au chapitre I de la présente partie est applicable. Chaque pale de l'hélice est alors considérée comme une aile tridimensionnelle en rotation autour de l'axe  $o\xi$ . La présence du moyeu de l'hélice n'est pas prise en compte dans cette étude. Le champ de vitesse  $\vec{v}$  est alors généré par :

- une répartition de sources de densité  $\sigma^{(p)}$  distribuée sur la surface  $S^{(p)}$  d'une pale
- une répartition de doublets normaux  $\mu^{(p)}$  distribuée sur la surface  $S^{(p)}$  d'une pale et sur son sillage  $\Sigma^{(p)}$

Les conditions aux limites (68) se traduisent alors par une relation analogue à la relation (12) du chapitre I :

$$\sum_{p=1}^{NP} \left\{ \iint_{S^{(p)}} \sigma_p \vec{X}_\sigma \cdot \vec{n}_M \, dS_p + \frac{\sigma_M}{2} + H_{\sigma_M}^o + \iint_{S^{(p)}, \Sigma^{(p)}} \mu_{np} \vec{X}_n \cdot \vec{n}_M \, dS_M - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_M + H_{\mu_M}^o \right\} =$$

$$- \left( \vec{V}_B + \omega \vec{u} \wedge \vec{OM} \right) \cdot \vec{n}_M \quad M \in S^{(p')} \quad (70)$$

Dans la relation (70) toutes les notations ont la même signification que celles de la relation (12) du chapitre I ; l'étendue des intégrales est relative à chaque pale (p), le point de calcul M étant relatif à la pale (p'). Le sillage  $\Sigma^{(p)}$  des lignes tourbillons développées à l'arrière de chaque pale a une importante influence sur la qualité des résultats. En toute rigueur, comme nous l'avons vu au paragraphe I.1.3, la géométrie exacte de celui-ci ne peut être obtenue que par relaxation de la nappe tourbillonnaire. Dans le cas où l'écoulement relatif à une pale est permanent, le sillage peut être rigidifié. Nous avons simplifié sa forme en une surface hélicoïdale générée par le bord de fuite d'une pale dans son mouvement d'ensemble. A cet effet, dans chaque section r (figure 19), on construit à partir du point F l'hélice passant par F, de pas  $V_A/\omega$  et ayant un nombre entier  $n_0$  de spires. Les coordonnées d'un point T du sillage sont alors données par :

$$\left. \begin{aligned} \xi_T &= \xi_F + \frac{V_A}{\omega} (\theta_T - \theta_F) \\ \eta_T &= r \cos \theta_T \\ \zeta_T &= r \sin \theta_T \end{aligned} \right\} \theta_T \in [\theta_F, \theta_F + 2n_0 \pi] \quad (71)$$

Si  $F_0$  est le point translaté de F après  $n_0$  spires,  $n_0$  est choisi de façon à ce que le rapport  $r_1 = \frac{|\xi_{F_0} - \xi_F|}{|\xi_F - \xi_A|}$  soit relativement grand.

Dans chaque section un contour (FAMFF<sub>0</sub>) est ainsi défini et représente le profil suivi de la ligne de son sillage dessinés sur le cylindre de rayon r. Deux vecteurs normés de surfaces ( $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ) sont construits tels que  $\vec{u}_1$  soit tangent au contour (FAMFF<sub>0</sub>) et  $\vec{u}_2$  représentatif de l'envergure d'une pale. Par construction même du sillage, le vecteur  $\vec{u}_2$  sur celui-ci est obtenu par une rotation à partir du vecteur tangent en F au bord de fuite. On désigne par  $s_1$  et  $s_2$  les abscisses curvilignes suivant  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ . Généralement, la vitesse  $\vec{V}_B$  est prise telle que sa composante  $V_\epsilon$  soit nulle [9] ; la vitesse d'attaque d'un profil de la section r reste alors tangente au cylindre

de rayon  $r$  ; de fait, partout sur le sillage, l'écoulement suivant  $\vec{u}_2$  peut être négligé, la condition sur celui-ci se traduisant alors par la relation (19). De plus, la condition de JOUKOVSKY, exprimant le non contournement du fluide au bord de fuite de chaque pale peut s'exprimer d'une façon implicite par les relations (14) et (15).

L'écriture de la continuité de la double couche au bord de fuite, conserve les relations (21) et (22). Ainsi, sur la nappe de tourbillons libres  $\Sigma^{(p)}$ , la double couche se conserve à partir du bord de fuite, le long des traces hélicoïdales des tourbillons libres : sur le sillage, la vorticité suivant l'envergure est nulle.

## II. 2.5 : Coefficient de pression et efforts globaux

---

La pression est évaluée à l'aide de la formule de LAGRANGE écrite dans le repère lié à l'hélice. L'écoulement relatif à ce repère étant permanent, il vient :

$$K_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_0^2} = 1 - \frac{\vec{V}^2}{V_0^2} - \frac{2\omega(\vec{u} \wedge \vec{OM}) \cdot \vec{V}}{V_0^2} \quad (72)$$

où  $\vec{V}$  est la vitesse en un point  $M$  du fluide, donnée par la relation (67) ;  $\vec{v}$  est alors la vitesse induite par l'ensemble des singularités utilisées.

### Efforts de pression

Dans le cadre des méthodes classiques où les singularités sont réparties sur le squelette des pales, l'application directe de l'intégration numérique de la répartition de pression sur les pales ne permet pas de prendre en compte l'effet de succion s'exerçant au bord d'attaque des pales. Afin de tenir compte de cet effet, les différents auteurs [9] [35] [36] transforment les efforts de pression en forces élémentaires exercées sur chaque

élément source et tourbillon du maillage ; ces efforts élémentaires sont obtenus par le théorème de Lagally pour les sources, par le théorème de Joukovsky pour les tourbillons.

Dans le présent modèle, les distributions de singularités étant réparties sur la surface mouillée des pales, le problème précédent disparaît, et l'intégration numérique directe des efforts de pression est applicable.

Les efforts de pression  $\vec{F}_p$  ainsi que leur moment  $\vec{M}_p$  par rapport au point 0, donnent en projection sur l'axe de l'hélice, leurs contributions respectives sur la poussée et le couple :

$$\vec{F}_p \cdot \vec{u} = -NP \cdot \frac{1}{2} \rho V_0^2 \iint_{S_r} K_p \vec{n}_M \cdot \vec{u} dS_M \quad (73)$$

$$\vec{M}_p \cdot \vec{u} = -NP \cdot \frac{1}{2} \rho V_0^2 \iint_{S_r} K_p \left( \vec{OM} \wedge \vec{n}_M \right) \cdot \vec{u} dS_M \quad (74)$$

où  $S_r$  désigne la surface de la pale de référence.

#### Perte par frottement

La traînée de frottement sur les pales a pour effet de réduire la poussée et d'augmenter le couple. Les contributions de cet effet sont obtenues à partir des forces visqueuses  $\vec{F}_v$  et de leur moment  $\vec{M}_v$  par rapport à 0 :

$$\vec{F}_v \cdot \vec{u} = NP \cdot \frac{1}{2} \rho \iint_{S_r} C_f |\vec{W}^*| \vec{W}^* \cdot \vec{u} dS_M \quad (75)$$

$$\vec{M}_v \cdot \vec{u} = NP \cdot \frac{1}{2} \rho \iint_{S_r} C_f |\vec{W}^*| \left( \vec{OM} \wedge \vec{W}^* \right) \cdot \vec{u} dS_M \quad (76)$$



$C_f$  désigne le coefficient de frottement au point M ;  $\vec{W}^* = \vec{V} + \omega \vec{u} \wedge \vec{OM}$  est la vitesse relative par rapport à l'hélice.

### Poussée et couple

Sous forme de coefficients, la poussée et le couple s'expriment de la manière suivante :

$$K_T = \frac{(\vec{F}_p + \vec{F}_v) \cdot \vec{u}}{\rho n_t^2 D^4} \quad (77)$$

$$K_Q = \frac{(\vec{M}_p + \vec{M}_v) \cdot \vec{u}}{\rho n_t^2 D^5} \quad (78)$$

## II. 3 : Discrétisation du problème

### II. 3.1 : Maillage de la pale de référence et de son sillage

La pale, suivie de son sillage, est découpée en K bandes construites à partir de sections cylindriques de rayons donnés. Pour des raisons de commodité dans le calcul matriciel, toutes les sections ainsi définies contiennent un nombre NF constant de facettes. Le maillage du profil de base bidimensionnel de chaque section développée est construit dans le plan (AX'Y'). La méthode utilisée est la méthode du critère arbitraire développée dans l'étude [22] ; la taille des facettes est déterminée par deux fonctions puissances de l'abscisse curviligne définies, l'une entre le bord d'attaque et le point d'épaisseur maximum, l'autre entre le point d'épaisseur maximum et le bord de fuite. Les tailles des facettes au bord d'attaque, au point d'épaisseur maximum et au bord de fuite étant fixées, la seule inconnue est l'exposant commun des deux fonctions puissances ; ce dernier est obtenu en im-

posant la densité de facettes voulue. La figure 26 montre un exemple de maillage obtenu par cette méthode et met en évidence le resserrement progressif du maillage au bord d'attaque de la pale vers son extrémité, là où l'épaisseur relative devient plus faible.

D'autre part, les valeurs de  $x_G, \theta_G, c, \varphi, f_0, l_0$  dans la section considérée sont interpolées à l'aide de fonctions splines à partir des valeurs discrètes données. L'utilisation des relations (62), pour chacune de ces sections, procure alors le maillage de la pale.

Le maillage du sillage relatif à la pale est obtenu par discrétisation des relations (71). La loi utilisée pour l'écart angulaire  $\theta_T - \theta_F$  est une loi puissance d'une fonction sinus. Le nombre de segments de discrétisation étant fixé constant dans chaque section, l'exposant de la fonction sinus est déterminé en imposant la taille du premier segment du sillage (en aval du bord de fuite F) de façon à ce que la taille des facettes varie d'une manière progressive lorsqu'on passe de la pale au sillage. La figure 25 illustre un exemple de sillage obtenu en projection sur le plan  $(\xi, \eta)$ .

### II. 3.2 : Equations matricielles et mode de résolution

---

La méthode utilisée est une extension directe du deuxième modèle développé au paragraphe I.4. La circulation suivant l'envergure d'une pale tendant vers zéro vers son extrémité et vers le moyeu, les bandes périphériques de la pale ( $k = 1$  pour le moyeu,  $k = K$  pour l'extrémité) sont traitées d'une façon identique à l'extrémité d'une aile (relation (43) dans le cas  $k = K$ ). En tenant compte de la présente remarque, toute l'étude du paragraphe I.4 est applicable. Les équations matricielles régissant le problème sont alors du type (51) et (53) étendues aux NP pales constituant l'hélice :

$$\sum_{p=1}^{NP} \left( \sum_{k=1}^K M_{K'K}^{p'p} X_K^p + N_{K'K}^{p'p} Y_K^p \right) = B_{K'}^{p'} \quad \begin{matrix} p' \in (1, NP) \\ K' \in (1, K) \end{matrix} \quad (79)$$

$$\text{avec } \|F_K X_K^{P'} + G_K Y_K^{P'}\| \text{ minimum}$$

Dans les relations (79) l'indice  $\frac{p',p}{k,k}$  relatif aux matrices M et N représente l'influence de la bande k de la pale p aux points de contrôle de la bande k' de la pale p'. Il est à remarquer que d'après les relations (58) les matrices  $F_k$  et  $G_k$  sont indépendantes de la bande k et de la pale p'.

#### Mode de résolution :

La résolution du système (79) est réalisée par la procédure itérative suivante. Une pale de référence étant choisie, on lui fait exécuter un certain nombre de tours par des rotations successives d'écart angulaire  $\delta = 2\pi/NP$ . La numérotation des pales étant fixée de 1 à NP, on désigne par  $S_p^{(t)}$  les solutions relatives à la pale p au tour numéro (t). La procédure est initialisée en plaçant, au tour numéro (1), la pale de référence confondue avec la pale de numéro 1 ; l'influence des autres pales étant annulée, les solutions  $S_1^{(1)}$  sont obtenues par la procédure de résolution matricielle développée au paragraphe I.4.2. D'une façon générale, au tour numéro (t), lorsque la pale de référence est confondue avec la pale p', les influences des autres pales sont prises en compte à l'aide des solutions  $S_p^{(t)}$  pour p variant de 1 à p' - 1, à l'aide des solutions  $S_p^{(t-1)}$  pour p variant de p' + 1 à NP. A chaque pas d'itération, le système d'équations à résoudre est du type (54) ; la technique de résolution de celui-ci est alors appliquée à chaque fois. La procédure est stoppée lorsque le nombre de tours est suffisant pour que les solutions  $S_p$  de chaque pale soient obtenues avec une certaine précision.

#### Remarque 1 :

Pour assurer une précision relative de  $10^{-3}$  sur l'ensemble des solutions, l'expérience numérique montre, qu'en général deux tours sont nécessaires ; chaque pas de résolution nécessitant environ 10 itérations (cf. paragraphe I.5.1), le nombre d'itérations pour la résolution complète est alors égal à  $20 \times NP$ . Dans le cas où l'écoulement relatif à une pale est permanent, les solutions  $S_p$  sont identiques sur chaque pale ; de fait, le sys-

tème matriciel (79) se réduit à la résolution d'un seul système du type (54) et le nombre d'itérations, devenant indépendant du nombre de pales NP, reste fixe et égal à 10. Cette propriété permet une diminution importante des temps de calcul nécessaires à la résolution du système matriciel.

Remarque 2 :

La symétrie de révolution des pales de l'hélice, permet une simplification importante dans le calcul des influences. Supposons une facette (Fa) dont l'influence au point M est caractérisée par le vecteur  $\vec{\text{Inf}}(Fa, M)$  ; nous désignons par  $\mathcal{R}_\theta$  la rotation d'axe  $\vec{o\xi}$  et d'angle  $\theta$  orienté comme l'indique la figure 24. L'influence  $\vec{\text{Inf}}(Fa, M)$  ne dépendant que des positions géométriques de la facette Fa et du point M, on a la propriété suivante :

$$\vec{\text{Inf}}(\mathcal{R}_\theta(Fa), \mathcal{R}_\theta(M)) = \mathcal{R}_\theta(\vec{\text{Inf}}(Fa, M)) \quad (80)$$

En désignant alors, de façon formelle, par  $\vec{\text{Inf}}^{p', p}$  l'influence d'une facette de la pale p en un point de la pale p', la propriété (80) permet d'écrire :

$$\vec{\text{Inf}}^{p', p} = \mathcal{R}_{-(p-1)\delta}(\vec{\text{Inf}}^{v, 1}) \begin{cases} v = p' \cdot p + 1 \text{ si } p \in (1, p') \\ v = NP + p' \cdot p + 1 \text{ si } p \in (p'+1, NP) \end{cases} \quad (81)$$

Les relations (81) montrent ainsi que toutes les influences  $\vec{\text{Inf}}^{p', p}$  peuvent s'obtenir par une simple rotation à partir des influences d'une pale sur les autres. Par un raisonnement analogue, si  $M^{p'p}$  désigne une matrice influence de la pale p sur la pale p' nous avons l'égalité :

$$M^{p'p} = M^{v, 1} \quad (82)$$

D'après la propriété (82) le nombre de coefficients d'influence à calculer est ainsi divisé par NP ce qui réduit le temps de calcul.

## II. 4 : Résultats

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont relatifs à une hélice fournie par le Bassin d'Essais des CARENES de PARIS. Les caractéristiques de cette hélice sont données par le tableau 3.

Sections données	$\bar{r} = r/R$	hg/D	c/D	lo/D	fo/c	tg $\theta_G$	$x_G/R$
	0.20	0.26	0.160	0.0460	0.0010	0	0
	0.25	0.345	0.169	0.0425	0.0082	0.0047	0.00436
	0.30	0.432	0.176	0.0400	0.0159	0.0096	0.00875
	0.40	0.550	0.192	0.0360	0.0285	0.0198	0.01750
	0.50	0.632	0.208	0.033	0.0360	0.0333	0.02625
	0.60	0.665	0.220	0.028	0.0362	0.0524	0.03500
	0.70	0.675	0.226	0.023	0.0323	0.0777	0.04375
	0.80	0.650	0.214	0.017	0.0258	0.1067	0.05250
	0.90	0.560	0.163	0.011	0.0168	0.1361	0.06125
	0.95	0.490	0.114	0.007	0.0117	0.1536	0.06559
	1,00	0,40	0.000	0.003	0.0055	0.1767	0.07000

Diamètre hélice :  $D = 2 R = 0,1867 \text{ m}$

Rayon réduit moyen :  $\bar{r}_H = 0,2$

Nombre de pales :  $NP = 5$

Tableau 3 : Caractéristiques de l'hélice

Pour toutes les sections, les profils aérodynamiques utilisés sont semblables ; les lois d'épaisseur et de cambrure sont données sous forme adimensionnelle en fonction de la corde adimensionnelle  $\bar{x}' = X'/c$ . Le tableau 4 donne les valeurs de  $l/lo$  et de  $f/fo$  pour un profil NACA 66 et une ligne parabolique NACA 65.

$\bar{x}'$	0	0.025	0.075	0.2	0.4	0.45	0.6	0.8	0.95	1
1/l <sub>0</sub>	0.0000	0.1530	0.2540	0.4002	0.4952	0.5000	0.4653	0.3110	0.1143	0.0333
f/f <sub>0</sub>	0.0000	0.0975	0.2780	0.6400	0.9600	0.9900	0.9600	0.6400	0.1900	0.0000

- rayon de courbure à l'entrée :  $0,64 l_0^2/c$

- rayon de courbure à la sortie :  $0,035 l_0^2/c$

Tableau 5 : Caractéristiques des profils

La pale de référence a été découpée en 13 sections dont les rayons varient suivant une loi cosinus ; cela permet d'avoir des bandes de discrétisation resserrées au moyeu et en extrémité de pale (figure 26). Le nombre de facettes utilisé dans chaque bande est de 34. La méthode décrite au paragraphe II.3.1 a été appliquée en prenant les tailles des facettes au bord de fuite et au point d'épaisseur maximum, respectivement égales à 2 et 10 % de la corde, et le rapport de la taille de la première facette du bord d'attaque au rayon de courbure égal à  $\pi/6$ . La figure 27 montre la progression du maillage des profils dans 3 sections ; lorsque l'épaisseur relative du profil diminue, le maillage devient de plus en plus fin au bord d'attaque. Le sillage a été construit avec un rapport  $r_1$  égal à 5, chaque section comprenant une spire de 20 facettes (cf. figure 25). Avec ce maillage, le calcul des coefficients d'influence, pour une hélice à 5 pales, nécessite environ 290 secondes CPU (CRAY-1).

Le coefficient de frottement  $C_f$  est donné en fonction du nombre Reynolds  $Re$  par les relations suivantes [37] :

$$\left. \begin{array}{ll}
 Re < 3 \cdot 10^5 & C_f = 1,328 / \sqrt{Re} \\
 3 \cdot 10^5 < Re < 10^7 & C_f = 0,074 / (Re)^{0,2} - 1050/Re \\
 Re > 10^7 & C_f = (1,89 + 1,62 \log c/k_0)^{-2,5}
 \end{array} \right\} (83)$$

Dans la relation (83)  $k_0$  désigne la rugosité ; dans le cas de l'hélice traitée sa valeur est de 30 microns. Le nombre de Reynolds est calculé en chaque point de contrôle des facettes du maillage par la relation  $Re = |\vec{W}^*| \bar{s} / \bar{\nu}$ . L'abscisse curviligne  $\bar{s}$  est comptée à partir du bord d'attaque,  $\bar{\nu}$  désignant la viscosité de l'eau,  $\vec{W}^*$  étant la vitesse relative du fluide par rapport à la pale au point de calcul.

#### Résultats :

Les résultats présentés sont relatifs au calcul de l'hélice placée dans un champ uniforme  $V_0 = 2$  m/s correspondant aux essais expérimentaux effectués en eau libre au Bassin d'Essais des CARENES de PARIS.

Trois cas de calcul ont été traités pour différentes valeurs du paramètre d'avance ( $J_A : 0,42 ; 0,52 ; 0,60$ ). La valeur nominale  $J_A = 0,52$  correspond au fonctionnement de l'hélice dans le cas du rendement maximum. Les répartitions du coefficient de pression  $K_p$ , pour les trois cas, sont représentées respectivement sur les figures 28, 29, 30. Chacune d'elles montre la répartition sur trois bandes : la bande 3 proche du moyeu, la bande 7 centrale, la bande 11 proche de l'extrémité.

Les figures 29 et 30 montrent que, pour les deux valeurs de  $J_A$  égales à 0,52 et 0,6, le minimum de pression est localisé au bord d'attaque intrados, et que la survitesse correspondante augmente lorsqu'on évolue des sections épaisses du moyeu vers les sections minces de l'extrémité. Dans le cas où  $J_A = 0,42$  (figure 28), le minimum de pression est localisé à la fois au bord d'attaque intrados et dans la zone centrale à l'extrados pour la section 3, dans la partie extrados pour les sections 7 et 11. Cela vient du fait que dans ce cas, les pales de l'hélice sont attaquées sous une incidence plus grande que celle à  $J_A = 0,52$ , la dépression à l'extrados devenant alors plus forte. De façon générale, la survitesse à l'extrados dans chaque section augmente lorsque le paramètre d'avance diminue, la survitesse au bord d'attaque intrados devenant plus faible.

L'angle d'incidence d'attaque de chaque section devenant plus grand, les profils dans chaque section deviennent de plus en plus portants lorsque  $J_A$  diminue, ce qui a pour effet d'augmenter la poussée et le couple.

Ces courbes de répartition du coefficient de pression montrent que le risque de cavitation est plus grand pour les points de fonctionnement différents du point nominal. Les figures 28 et 30 montrent alors, que le risque maximum d'apparition de la cavitation est en extrémité de pale, soit au bord d'attaque pour  $J_A = 0,42$ , soit dans la partie centrale extradados pour  $J_A = 0,6$ . Il est à remarquer que le présent calcul permet d'étudier ce risque de façon précise au bord d'attaque, ce qui n'aurait pas été possible dans le cadre d'une méthode linéaire.

A titre d'exemple on indique les lois de double couche obtenues dans différentes sections en fonction de l'abscisse curviligne comptée à partir du bord de fuite intrados (figure 31) ; la partie intrados est seule représentée, celle extradados supportant les valeurs opposées. On peut remarquer pour ces sections, le fort gradient au bord d'attaque, ainsi que la réalisation correcte du gradient nul au bord de fuite de la pale. La figure 32 donne une vue d'ensemble des lois de doublets en fonction de l'envergure. On peut constater la régularité de ces courbes ainsi que le comportement de la vorticité au voisinage du moyeu et de l'extrémité de la pale. Leurs valeurs au bord de fuite donnent la circulation autour de chaque bande en fonction de l'envergure (figure 33) ; la forme de cette courbe, résultat du présent calcul, est en bonne concordance avec celle obtenue par KERWIN dans l'étude [8]. La circulation tend à s'annuler vers le moyeu et l'extrémité de la pale, ce qui est conforme avec le fait que pour une pale d'hélice, la zone proche du moyeu est peu portante.

Les valeurs du coefficient de poussée et de couple par bande sont illustrées par les figures 34 et 35. Les figures 36 et 37 donnent une comparaison des résultats obtenus sur la poussée et le couple, avec les résultats expérimentaux. Les résultats du calcul donnent des valeurs surestimées par rapport



aux courbes expérimentales. Ces différences peuvent s'expliquer comme suit :

- d'une part, le moyeu de l'hélice n'a pas été pris en compte ; à la connaissance de l'auteur les modélisations utilisées pour tenir compte de la présence du bulbe sont assez sommaires voire inexistantes. En général dans le cadre des méthodes linéaires (pale de faible épaisseur relative) son influence est négligée. Dans la présente étude les singularités étant réparties sur la surface vraie et les sections de l'hélice traitée étant épaisses au voisinage du moyeu, il est difficile de conclure.

- d'autre part, le sillage simplifié utilisé n'est pas réaliste ; comme l'a montré KERWIN, son influence sur la qualité des résultats est importante [8]. A titre comparatif, nous avons testé deux sillages de même forme géométrique, ne différant entre eux que par le nombre de facettes de discrétisation. La différence obtenue est significative : les valeurs fléchées indiquent les résultats correspondant au sillage le plus grossier. L'utilisation de sillages plus élaborés du type contracté avec enroulement des lignes vortex est possible et permet une meilleure adéquation des résultats [8].

Il est donc vraisemblable qu'une géométrie plus réaliste de la forme du sillage développée à l'arrière de l'hélice pourrait apporter des améliorations sur la qualité des résultats comparativement aux résultats expérimentaux.

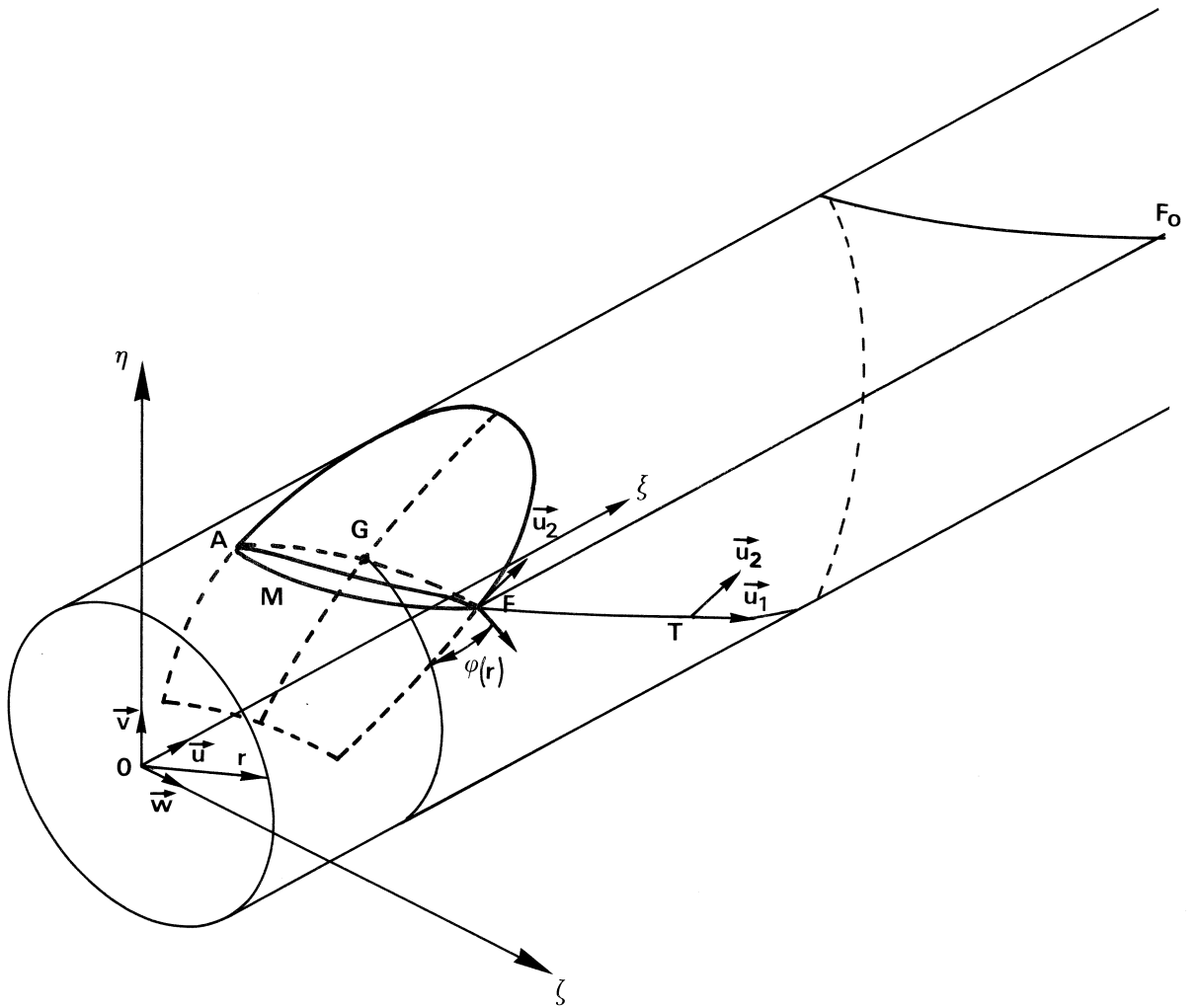


Figure 19

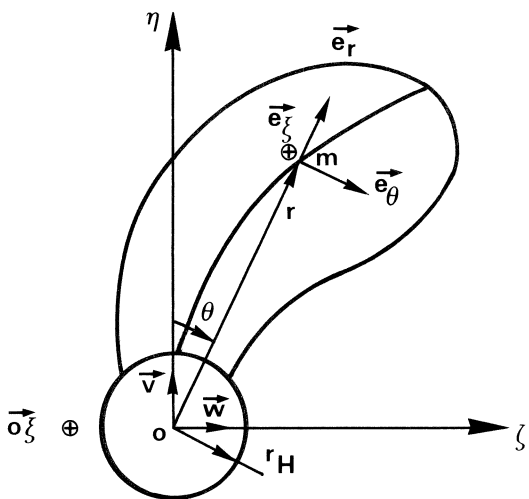


Figure 20

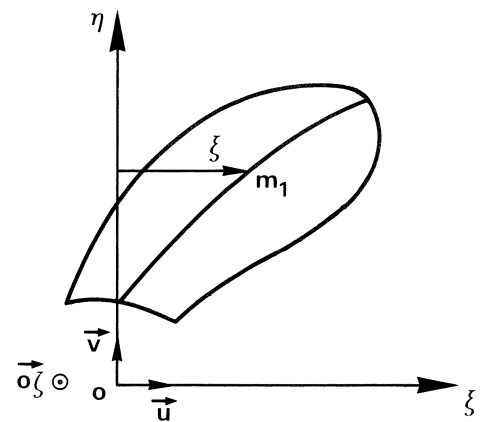


Figure 21

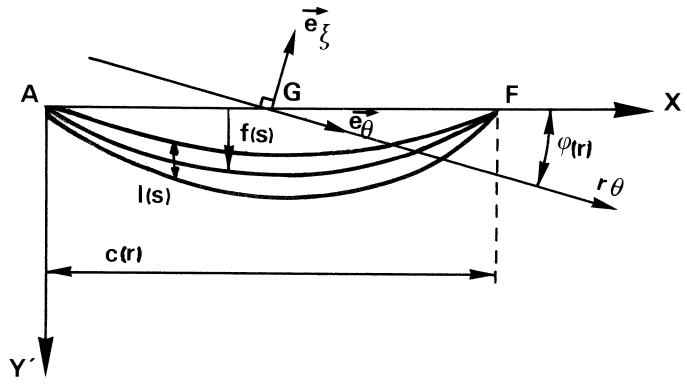


Figure 22

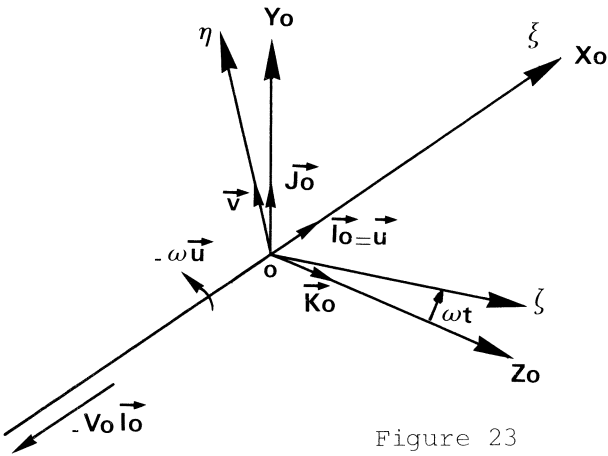


Figure 23

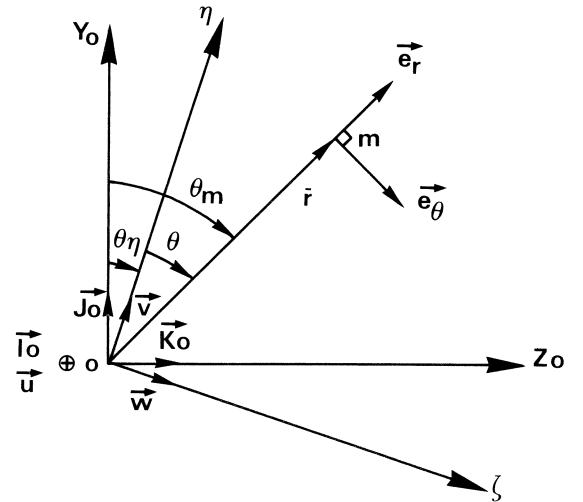


Figure 24

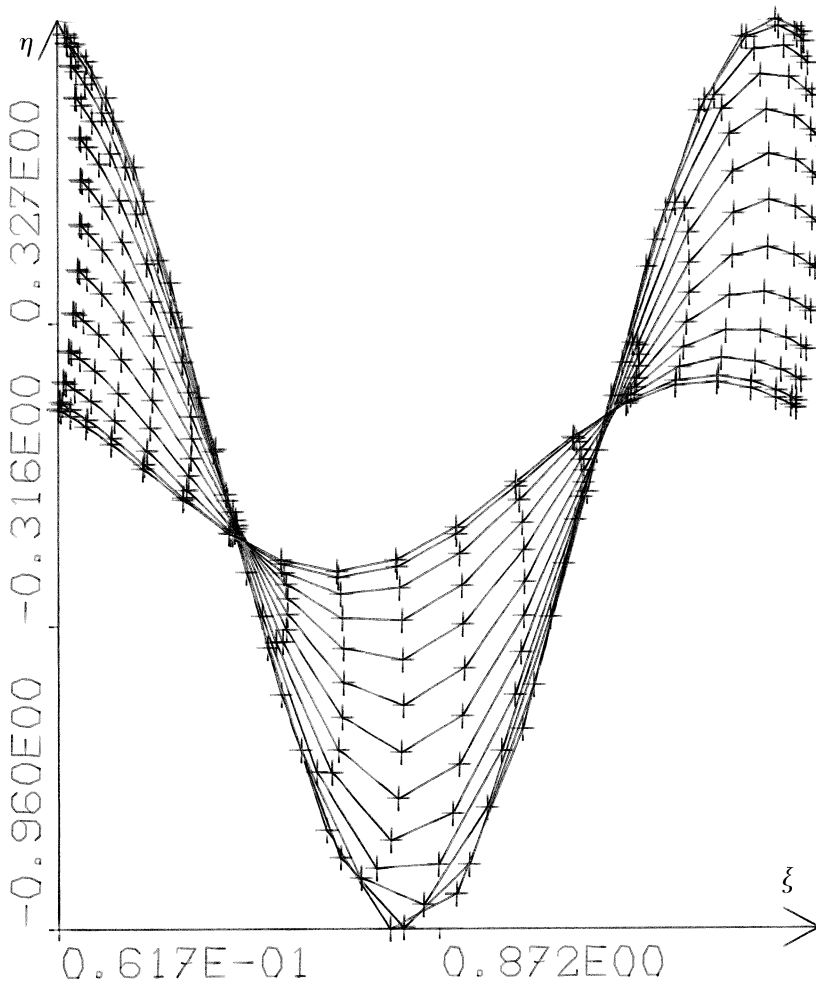


Figure 25. Vue du sillage en plan  $(\xi, \eta)$

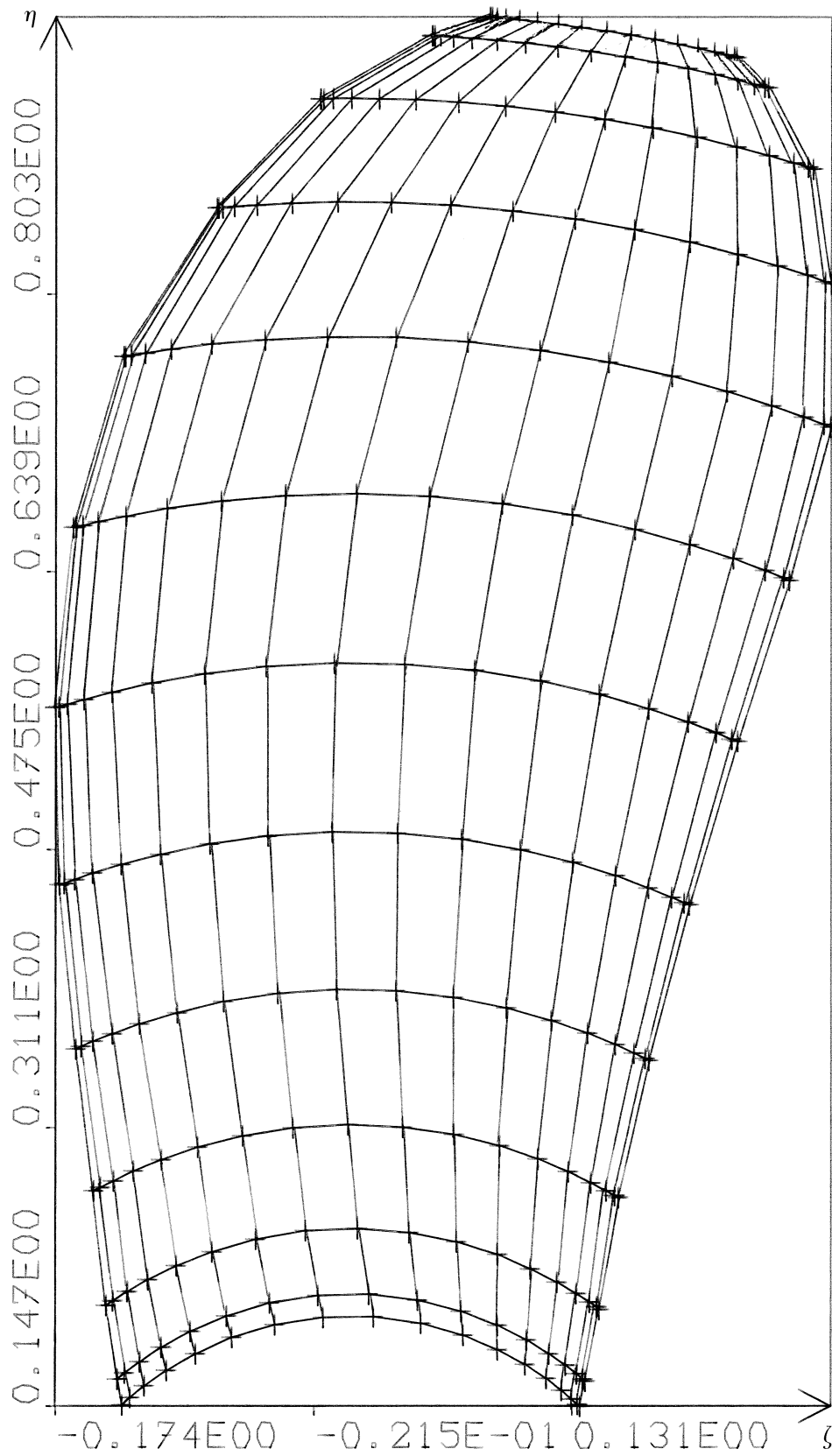
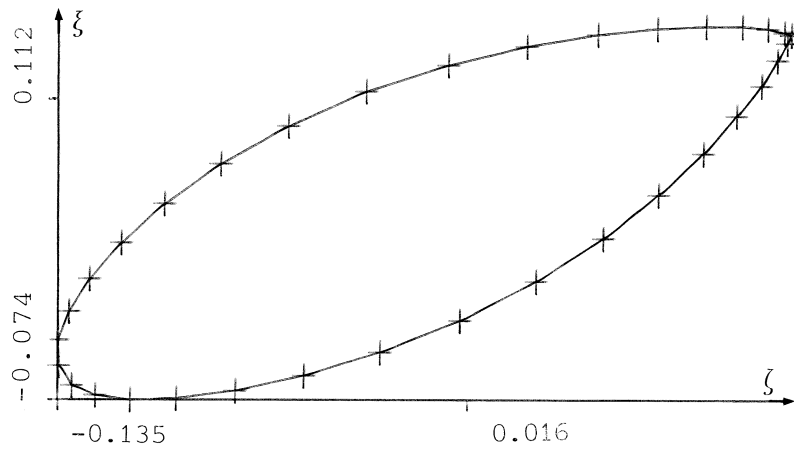
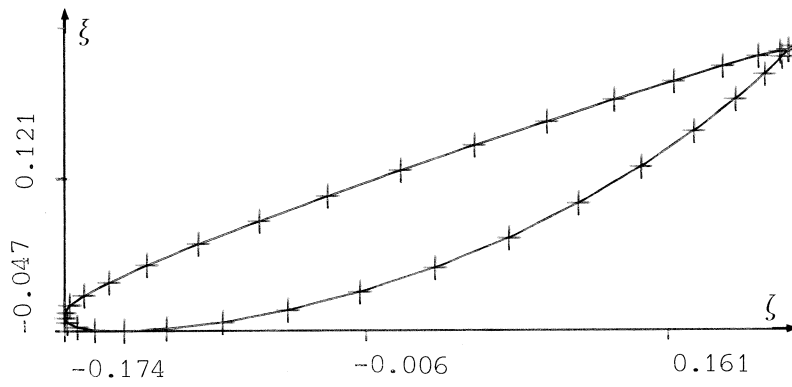


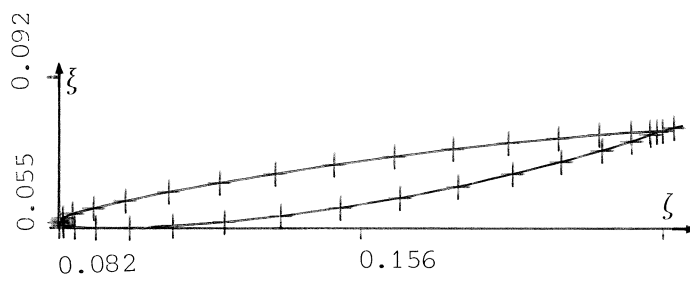
Figure 26. Vue du maillage en plan  $(\zeta, \eta)$



Section 1

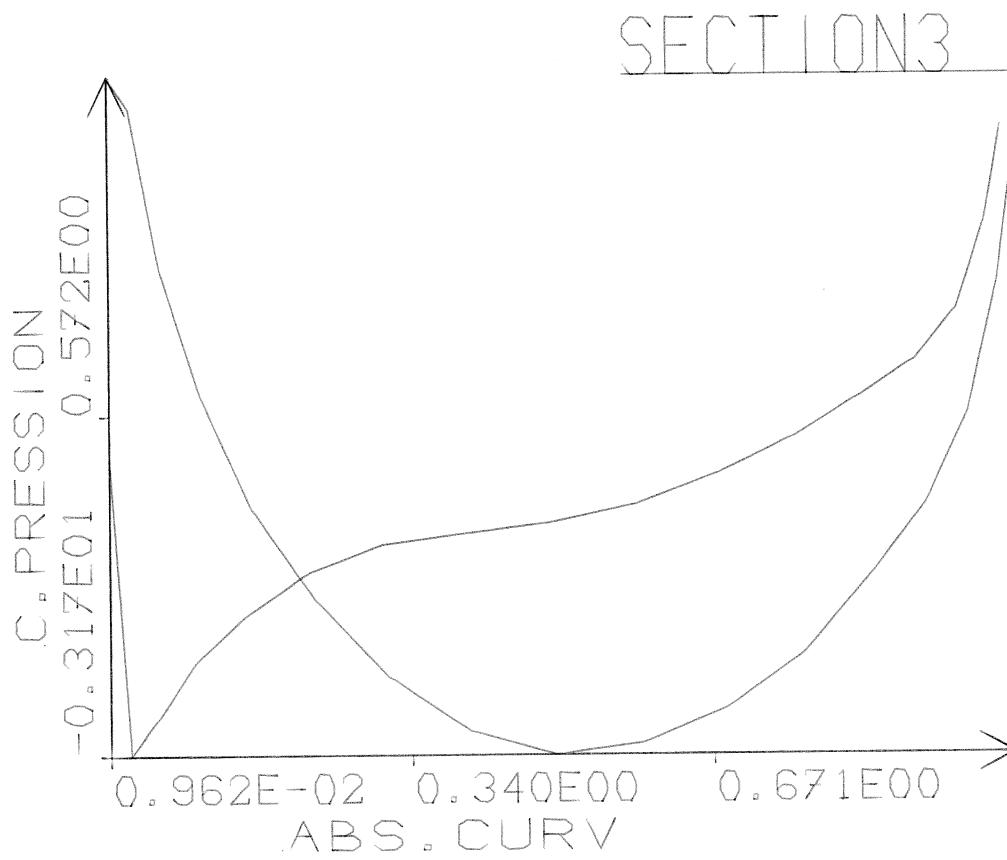
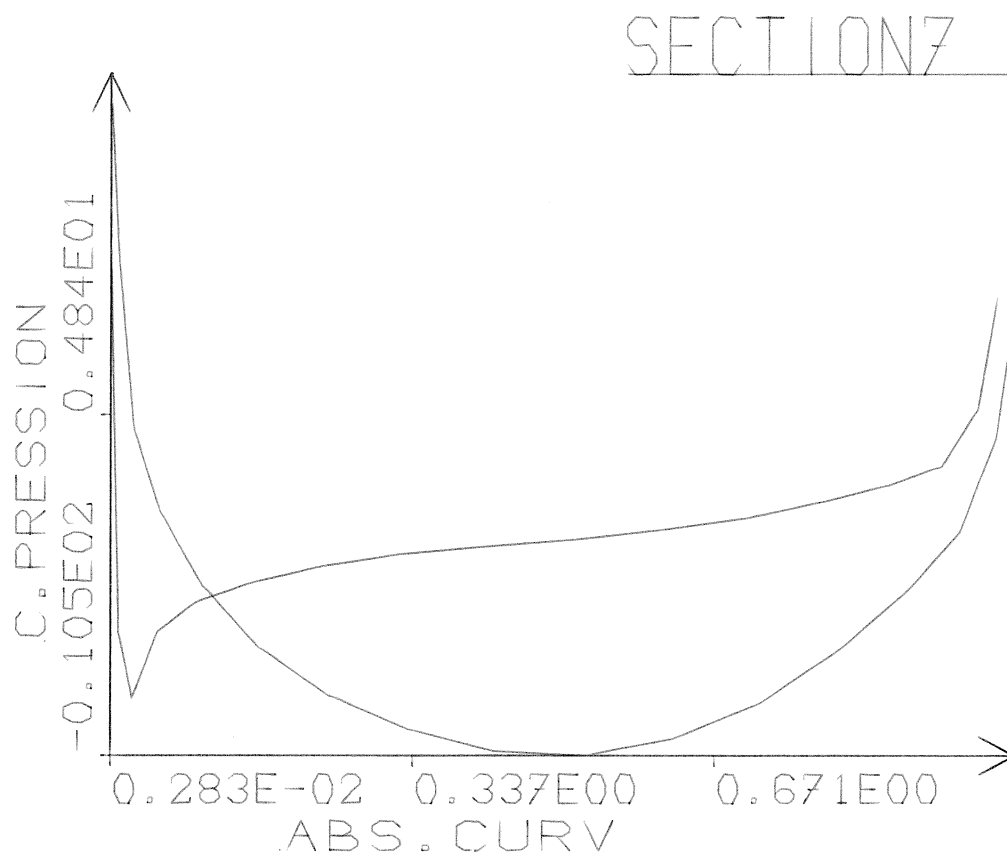


Section 7



Section 13

Figure 27. Différentes sections en plan  $(\zeta, \xi)$

Figure 28a.  $J_A=0,42$ Figure 28b.  $J_A=0,42$

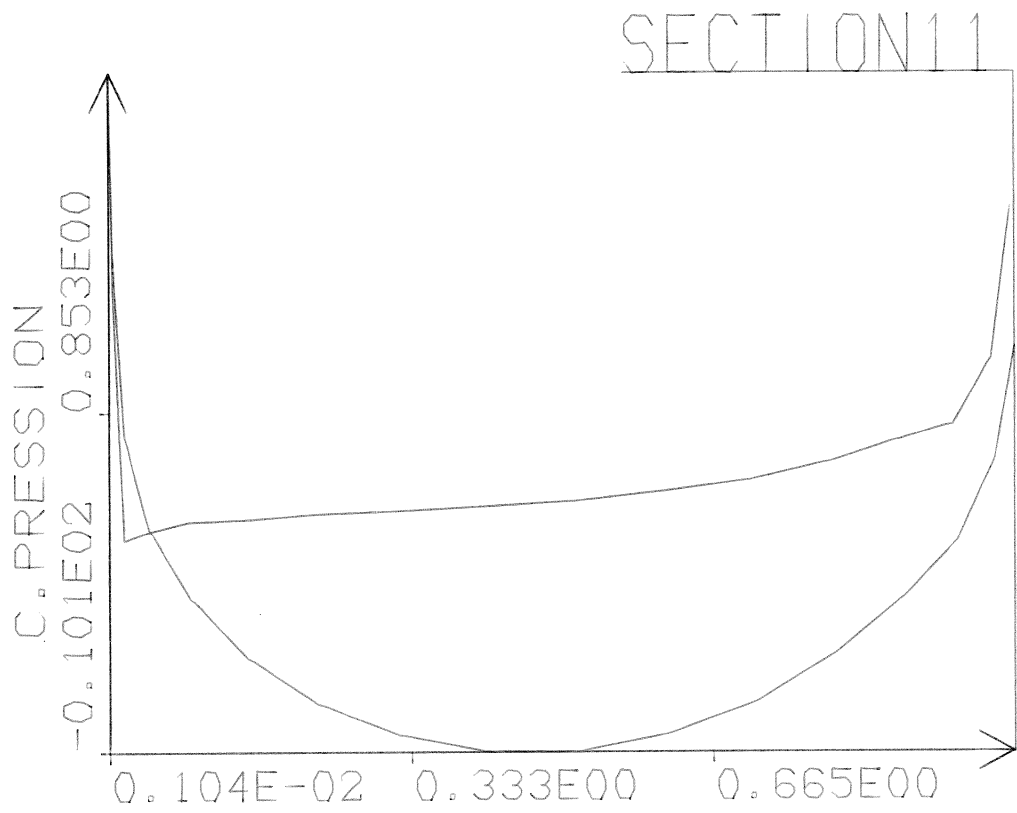


Figure 28c.  $J_A = 0.42$

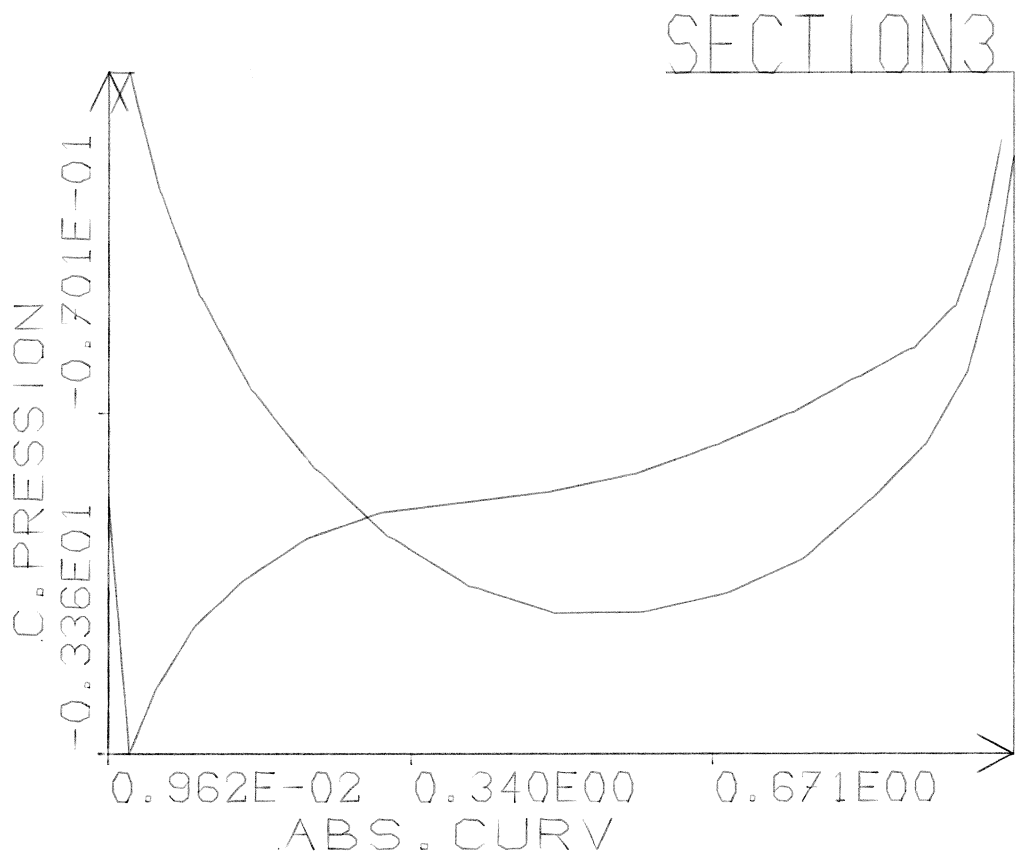


Figure 29a.  $J_A = 0.52$

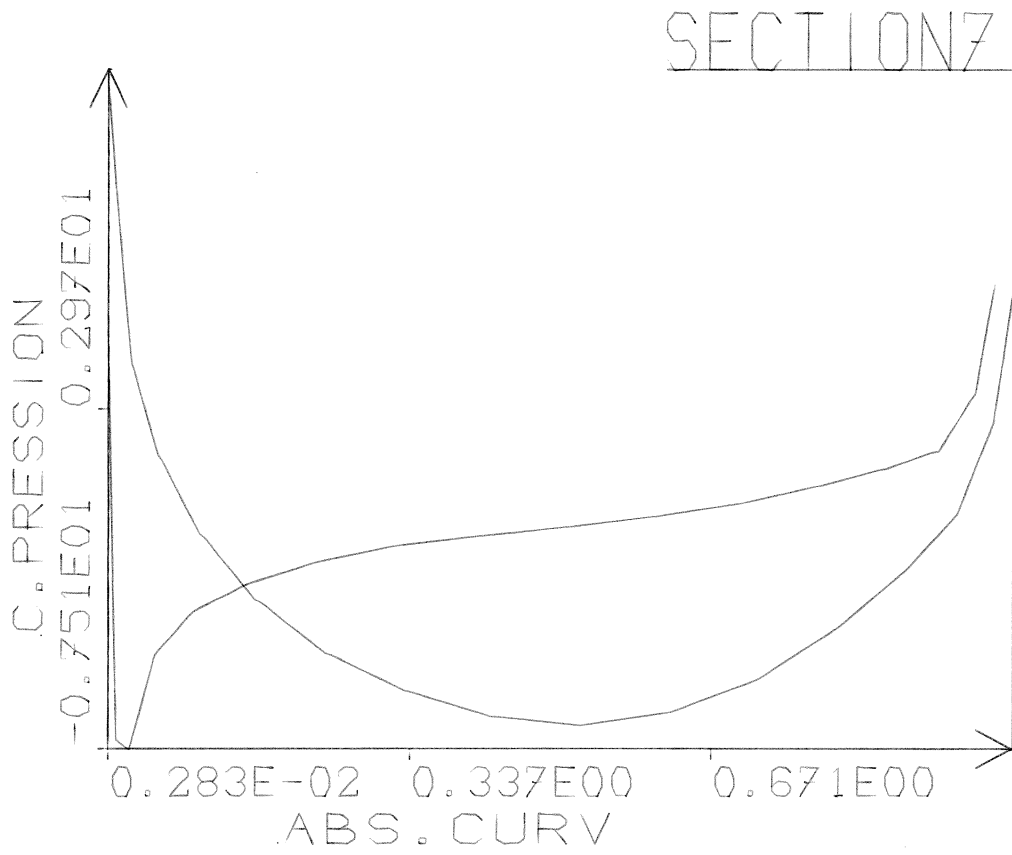


Figure 29b.  $J_A = 0.52$

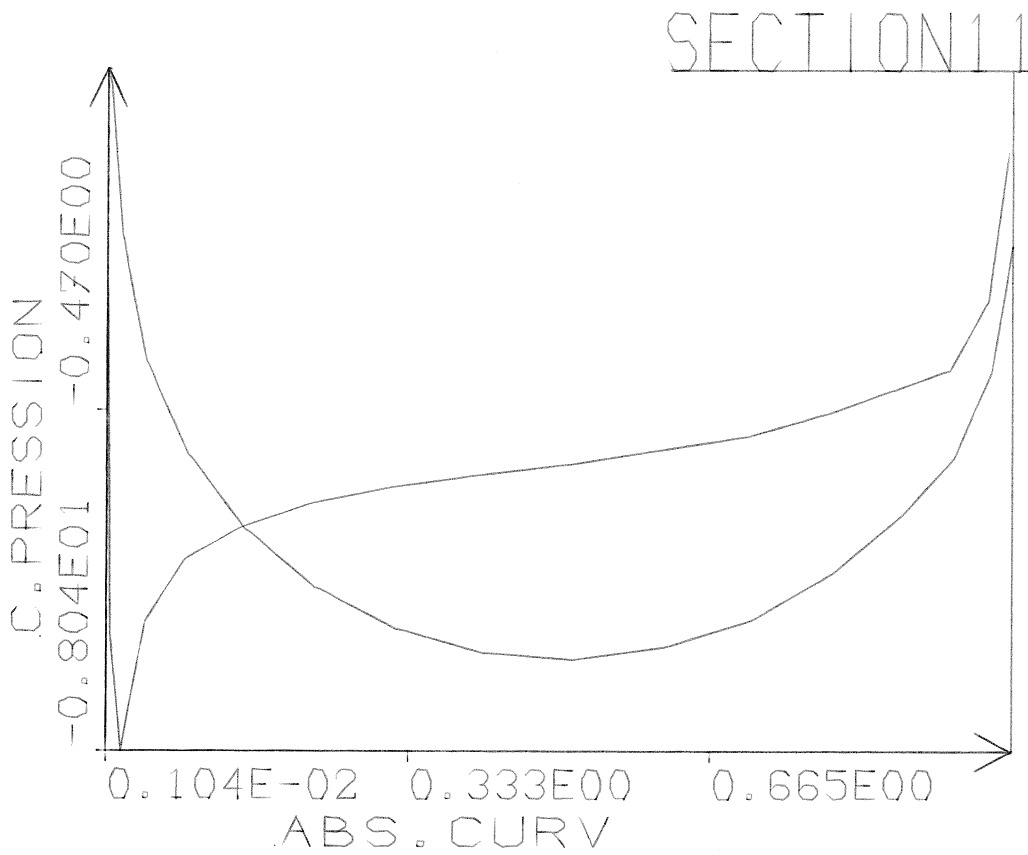
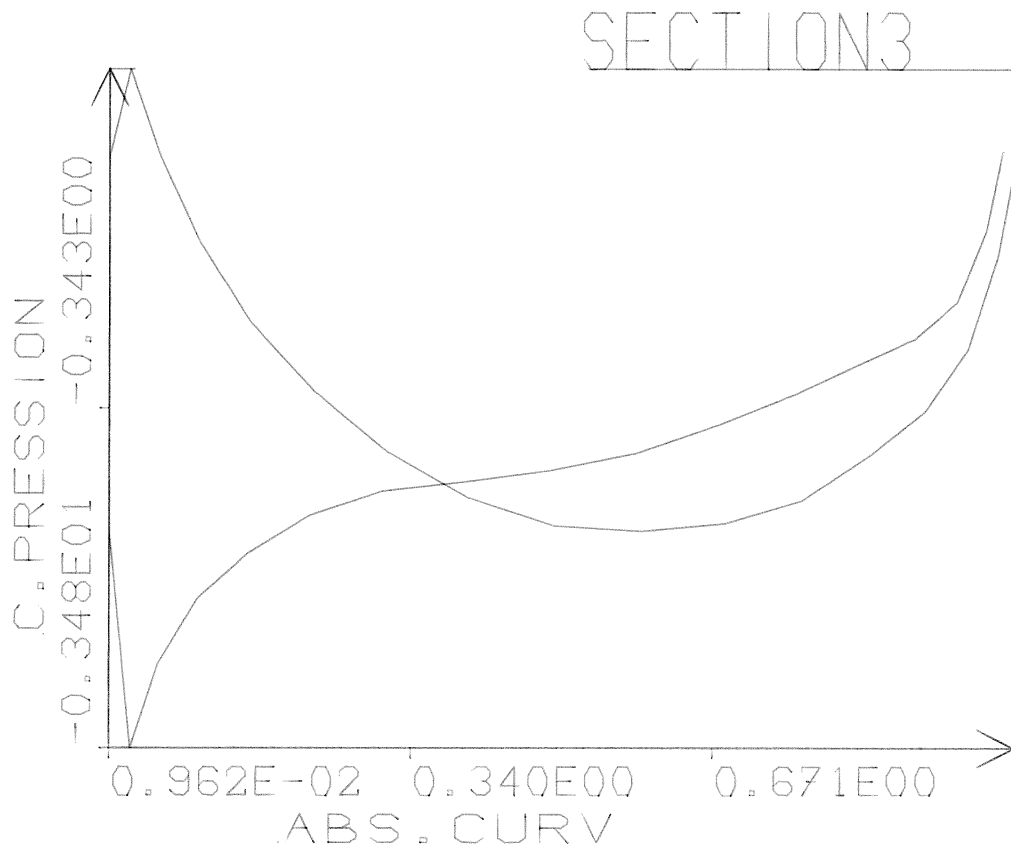
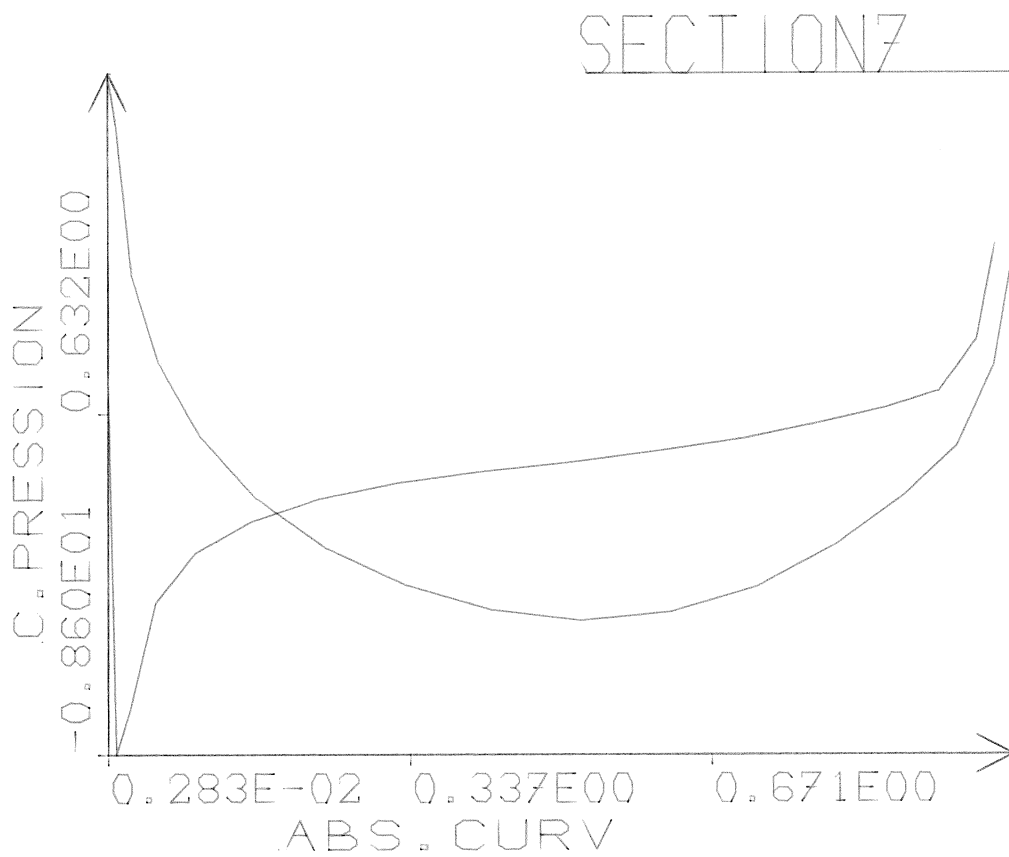


Figure 29c.  $J_A = 0.52$



Figure 30a.  $J_A = 0.6$ Figure 30b.  $J_A = 0.6$

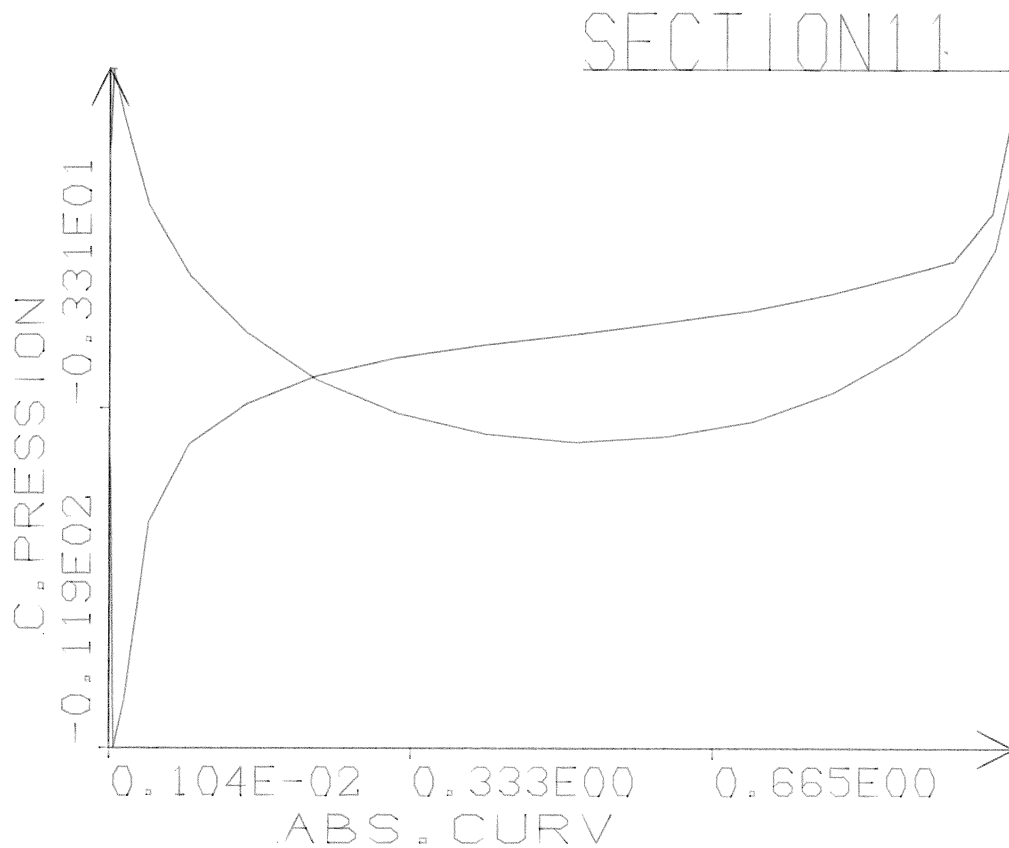


Figure 30c.  $J_A = 0.6$

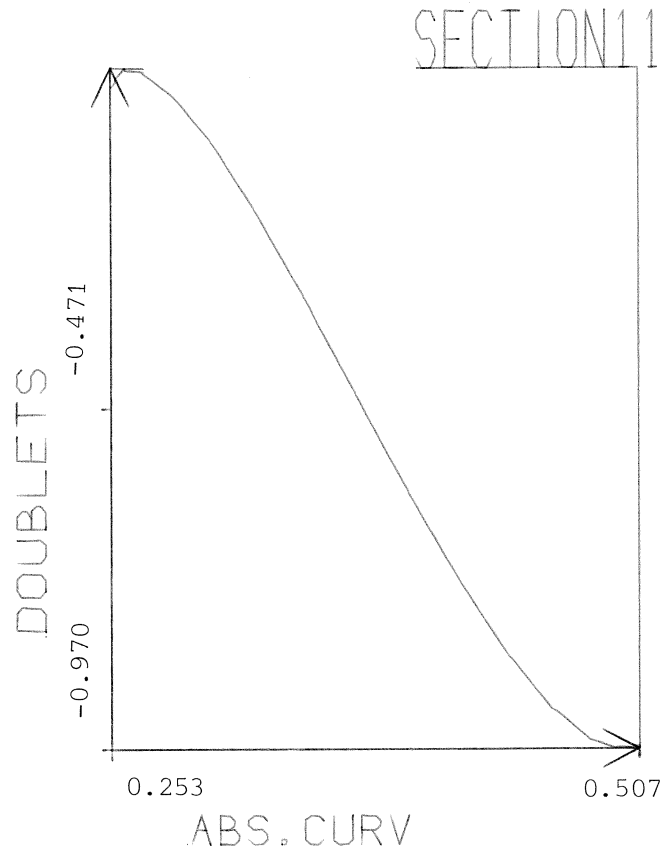
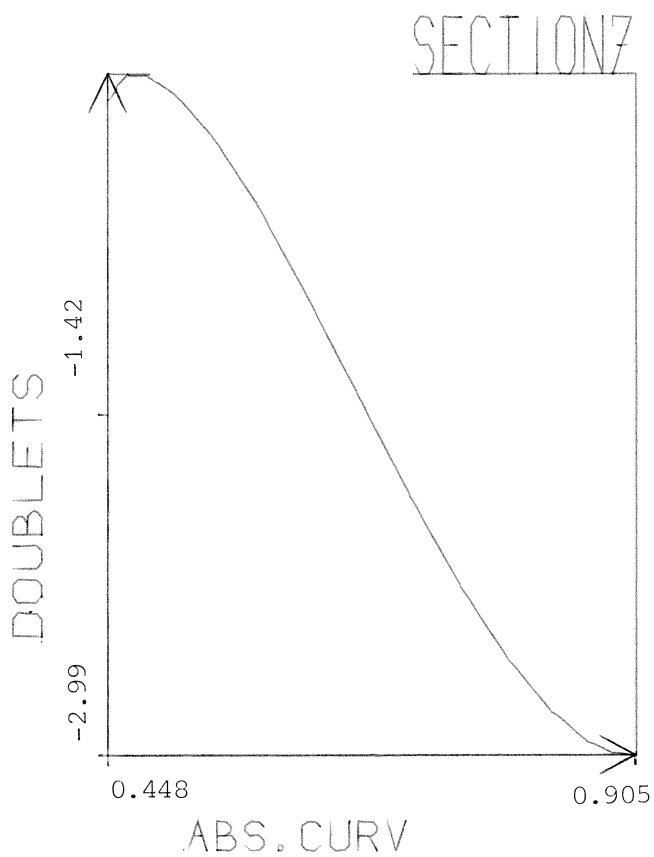


Figure 31a.  $J_A = 0.42$

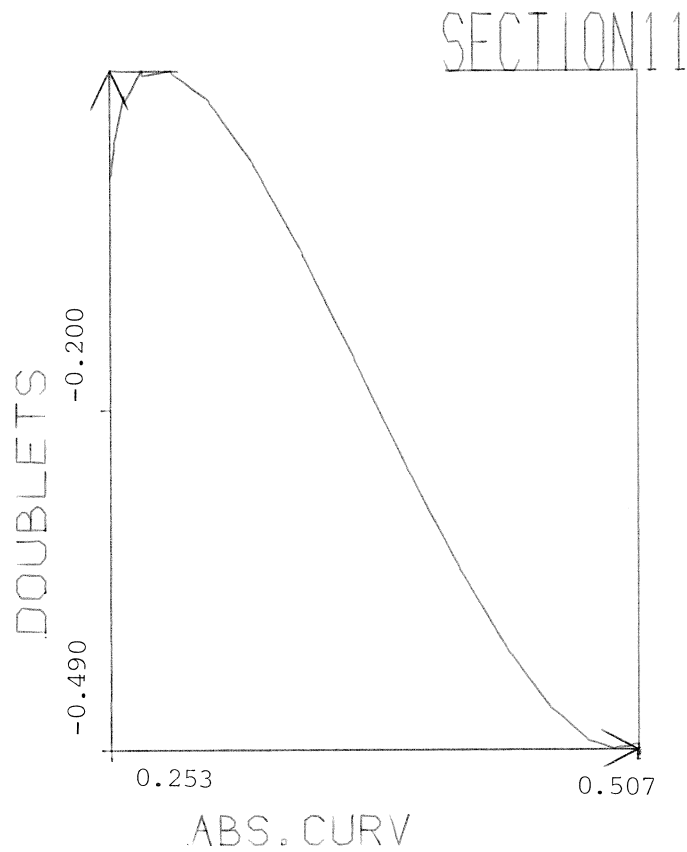
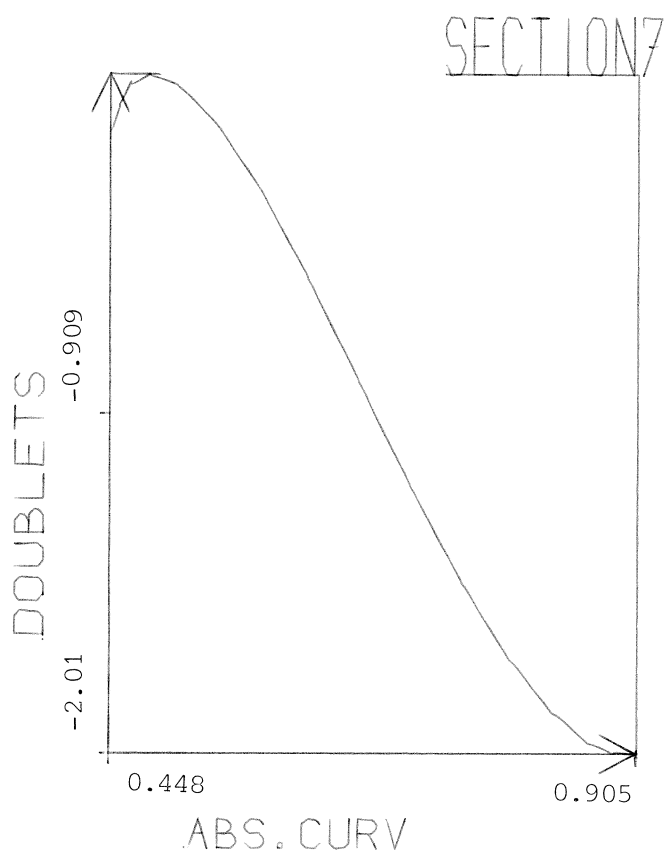


Figure 31b.  $J_A = 0.52$

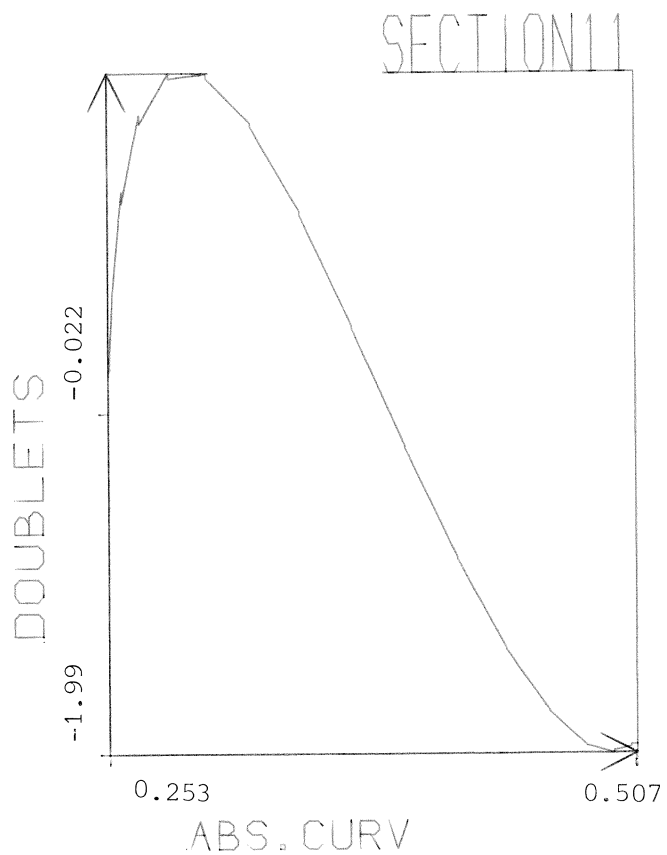
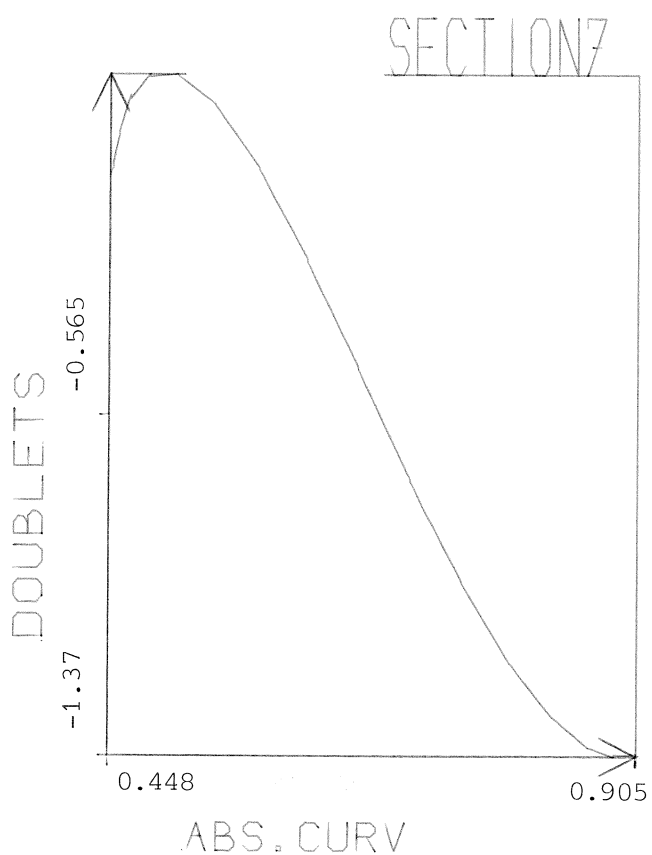


Figure 31c.  $J_A = 0.6$

Figure 31. Loi des doublets suivant la corde

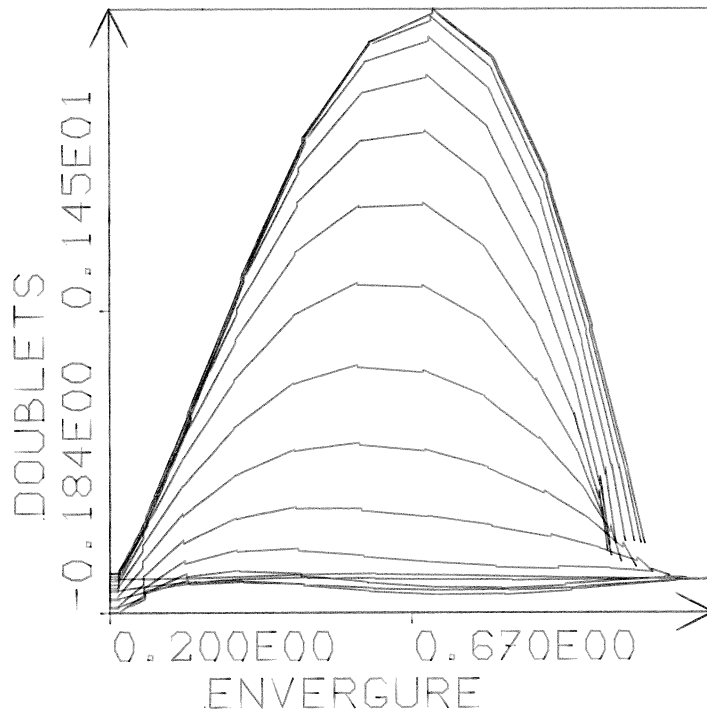


Figure 32. Loi des doublets suivant l'envergure d'une pale  
 $J_A = 0.42$

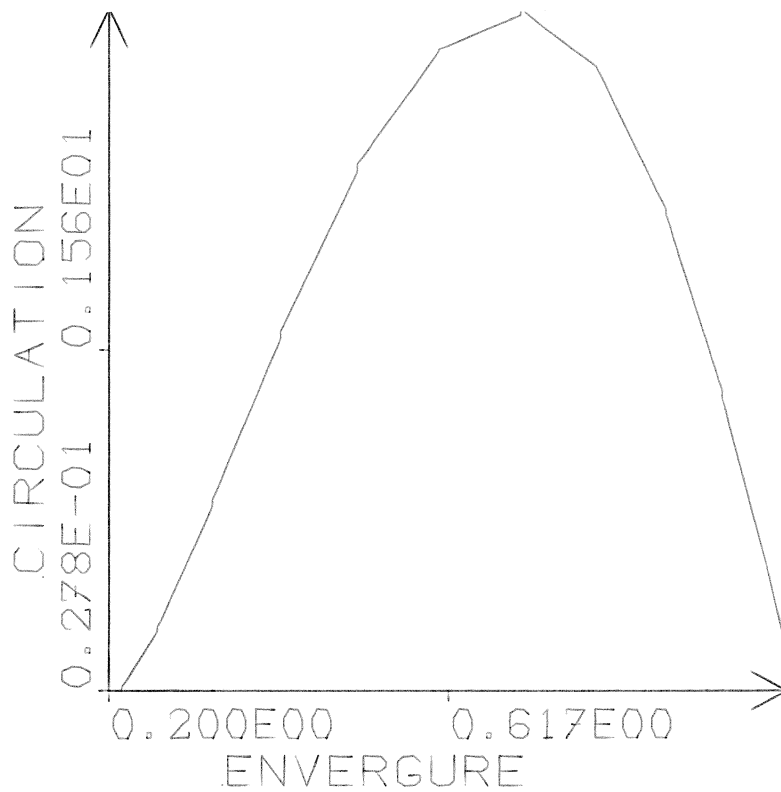


Figure 33. Circulation suivant l'envergure d'une pale  
 $J_A = 0.42$

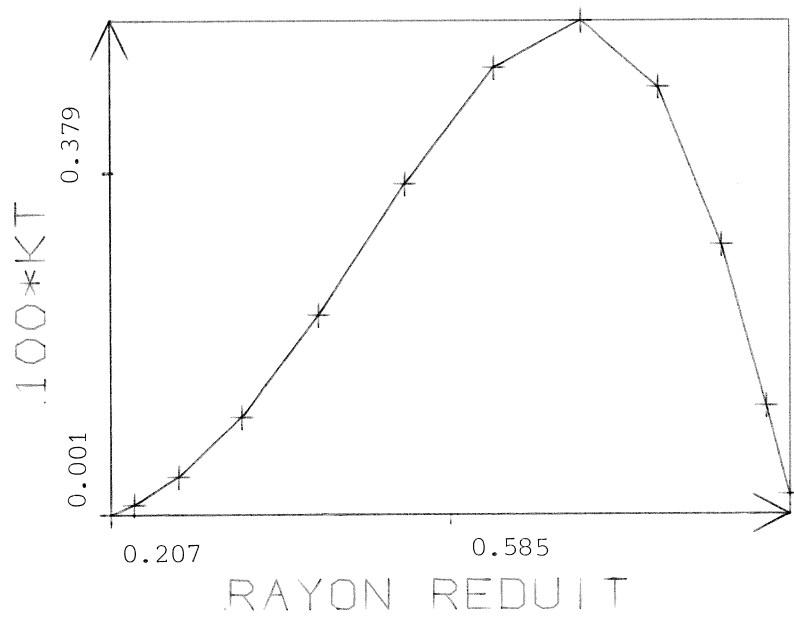


Figure 34. Coefficient de poussée par bande.  $J_A = 0.42$

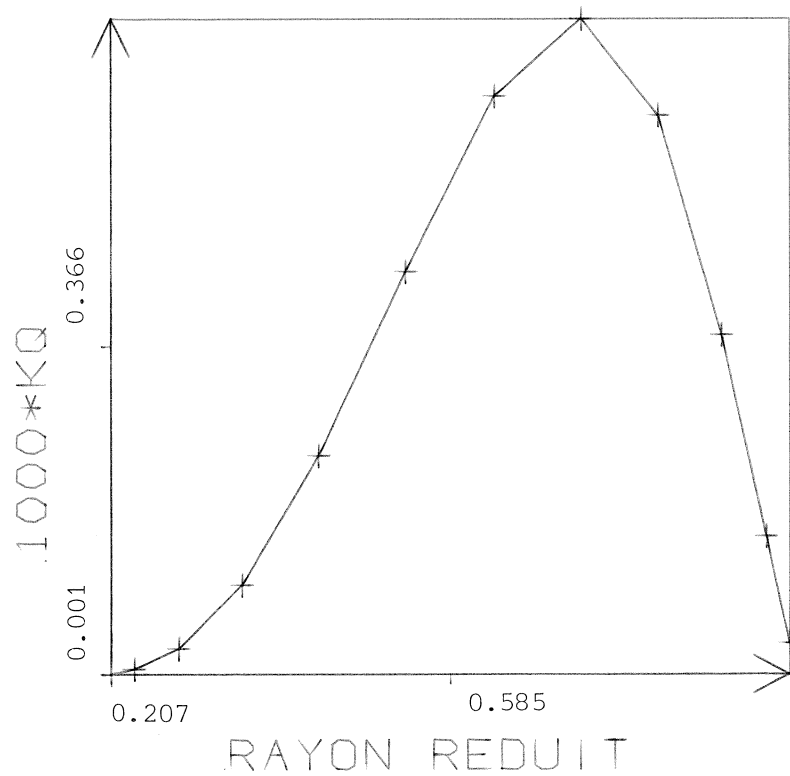


Figure 35. Coefficient de couple par bande.  $J_A = 0.42$

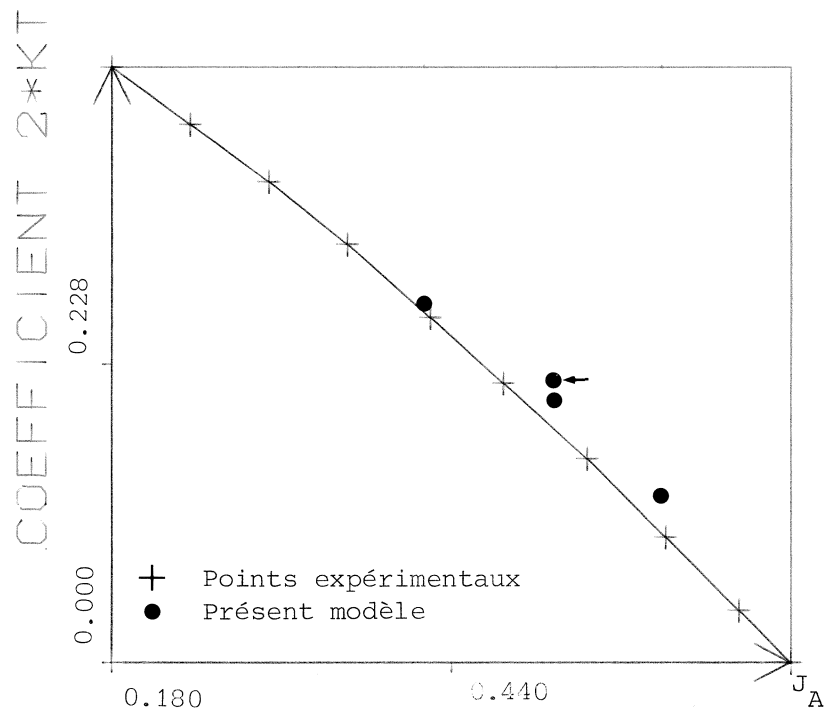


Figure 36 .Comparaison sur la poussée

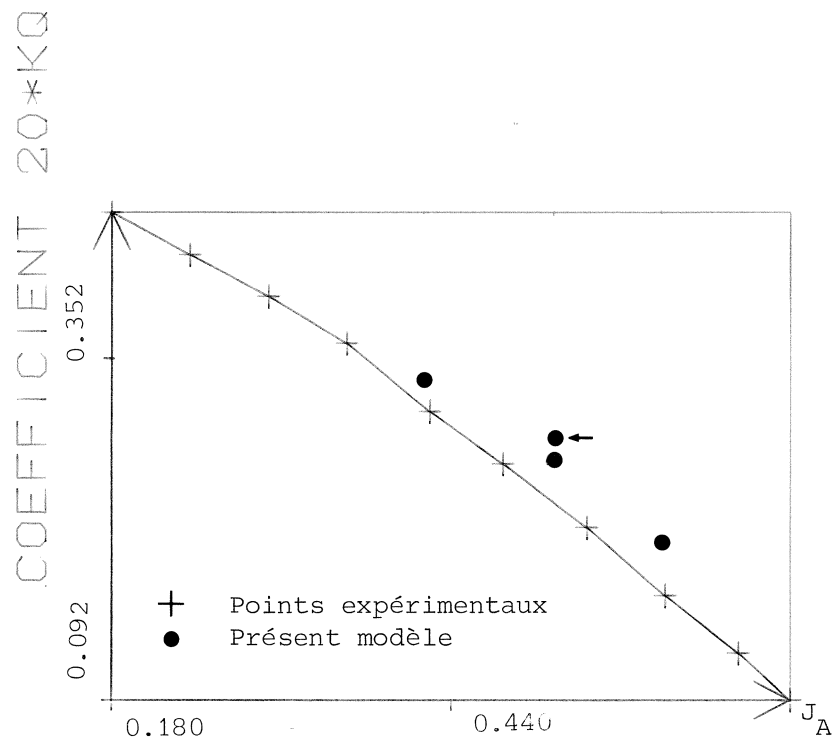


Figure 37 .Comparaison sur le couple

## BILAN DE L'ETUDE

=====

La présente étude a permis de mettre au point une méthode de calcul non linéaire permettant de traiter l'écoulement autour de structures minces. L'introduction du principe de minimisation des erreurs commises sur le débit de fuite a permis de conserver des méthodes intégrales du premier ordre, ce qui est intéressant pour les coûts informatiques. La méthode permet d'avoir accès aux vraies valeurs du coefficient de pression au bord d'attaque, ce qui est essentiel pour la prévision du risque d'apparition de la cavitation.

En écoulement bidimensionnel, le cas des profils minces partiellement cavitants a été traité. Le calcul non linéaire de la géométrie de la poche a été réalisé à l'aide d'une procédure itérative. L'efficacité de la méthode a permis d'étendre le calcul au cas des écoulements confinés (tunnel et grille d'aube). La méthode a été validée à l'aide de comparaisons effectuées en écoulement subcavitant avec des résultats analytiques et des résultats étalons. Dans le cas de la grille d'aube, les résultats ont été confrontés à des résultats obtenus par une méthode d'éléments finis. Dans tous les cas, la concordance des résultats est excellente.

En écoulement tridimensionnel, le cas de l'aile d'envergure finie a été réalisé à l'aide d'un sillage simplifié. La méthode a été parfaitement validée par les comparaisons effectuées avec les résultats étalons de l'étude [34]. La configuration de l'écoulement autour de l'aile, notamment dans la région du bord d'attaque est en parfait accord avec ce que l'on connaît des ailes subcavitantes. Dans le cas de l'écoulement autour de l'hélice, les différences observées par rapport aux résultats expérimentaux peuvent s'expliquer par les faits suivants :

- le moyeu de l'hélice n'a pas été pris en compte

-la forme du sillage utilisé est une forme très simplifiée

La deuxième raison est essentielle si on veut avoir une bonne adéquation des résultats par rapport aux résultats expérimentaux.

Il est envisageable dans un futur proche, d'introduire le moyeu de l'hélice par une distribution de simple couche, ainsi qu'un sillage d'hélice contracté du type KERWIN [8].

Au terme de cette étape, le traitement du problème instationnaire en configuration subcavitante pourra être traité; il restera alors à examiner le problème de la cavitation en régime stationnaire, puis instationnaire.



REFERENCES

- [ 1 ] MALAVARD, L.  
"Théorie de la ligne portante, théorie de la surface portante,  
analogie électrique"  
Cours à l'Université Libre de Bruxelles - Faculté des Sciences  
appliquées - Chaire Française , 1954-1955.
- [ 2 ] KERWIN, J.E.  
"Machine computation of marine propeller characteristics"  
International Shipbuilding Progress, Vol. 6, N° 60.                    1959.
- [ 3 ] VAN-DYKE, M.  
"Perturbation methods in fluid mechanics"  
Academic Presse, New-York, 1964.
- [ 4 ] LUU, T.S.  
"Calcul de l'hélice marine subcavitante par la méthode des sin-  
gularités"  
A.T.M.A. 1970.
- [ 5 ] CUMMINGS, D.E.  
"Numerical prediction of propeller characteristics"  
Journal of Ship Research, Vol. 17, N° 1, March 1973.
- [ 6 ] VAN OOSSANEN, P.  
"Theoretical prediction of cavitation of propellers"  
Marine Technology, Vol. 14, N° 4, 1977.
- [ 7 ] HUSE, E.  
"Effect of cavitation on propeller - induced vibratory forces"  
Report of Propeller Committee Fourteenth International Towing  
Tank Conference, 1975.

- [ 8 ] KERWIN, J.E., and CHANG-SUP-LEE  
"Prediction of steady and unsteady marine propeller performance  
by numerical lifting. Surface theory"  
SNAME Transactions, Vol. 86, 1978, pp 218-253.
- [ 9 ] CHANG-SUP-LEE  
"Prediction of the transient cavitation on marine propeller by  
numerical lifting Surface theory"  
Thirteenth Symposium on Naval Hydrodynamics, Tokyo, Oct. 1980.
- [ 10 ] C. PELLONE  
"Application de la méthode des singularités au calcul des struc-  
tures supercavitantes en théorie non linéaire"  
Thèse de Docteur Ingénieur, I.M.G. Juin 1981.
- [ 11 ] B. HUNT  
"The panel method for subsonic aerodynamics flows"  
Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1978-4
- [ 12 ] A. ROBERTS, K. RUNDLE  
  
"Computation of incompressible flow about bodies and thick wings  
using the spline mode systeme"  
BAC./ (CAD) REPORT AERO MA 19, 1972.
- [ 13 ] F.T. JOHNSON, P.E. RUBBERT  
"Advanced panel - Type influence coefficient methods applied to  
subsonic flows"  
A.I.A.A. Paper n° 75 - 30 JAN. 1975
- [ 14 ] B. HUNT and SEMPLE  
"Economic improvement to the mathematical model in a plane/ Constant  
strenght panel method"  
Euromech Colloquium 75 at Rhode 10.13 May 1976.

- [ 15 ] J.L. HESS and A.M.O. SMITH  
"Calculation of flows about arbitrary bodies"  
Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, Pergamon Press, 1967.
- [ 16 ] J.L. HESS, SMITH  
"Calculation of non lifting potential flow about arbitrary three dimensional bodies"  
Journal of Ship Research, 8, n° 2, 22 Sept. 1964.
- [ 17 ] J.L. HESS  
"The problem of three-dimensional lifting potential flow and its solution by means of surface singularity distribution"  
Theoretical Aerodynamics Section, Douglas Aircraft Company, 1970.
- [ 18 ] T.S. LUU, G. GOULMY  
"Méthode des singularités à répartition discrétisée dans le domaine de l'hydro et l'aérodynamique"  
LIMSI, 1975.
- [ 19 ] T.S. LUU, G. GOULMY, J. CORNIGLION  
"Calcul non linéaire de l'écoulement à potentiel autour d'une aile d'envergure finie, de forme arbitraire"  
A.T.M.A. 1971.
- [ 20 ] C. PELLONE  
"Equations intégrales aux frontières"  
Cours à l'Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de GRENOBLE, Janvier 1981.
- [ 21 ] C. PELLONE, A. ROWE  
"Etude des caractéristiques d'une aile à base ventilée en théorie non linéaire"  
A.A.A.F. Novembre 1980.

- [ 22 ] H. LEMONNIER  
"Optimisation du maillage et de la répartition de simple couche  
dans la méthode des singularités"  
Thèse de Docteur Ingénieur, I.M.G. 1983.
- [ 23 ] S. BISET  
"Cavitation développée sur une paroi à cambrure continue. Etude  
physique du détachement"  
Thèse de Docteur Ingénieur, I.M.G. 1982.
- [ 24 ] J.P. FRANC et J.M. MICHEL  
"Attached cavitation and the boundary layer ; experimental inves-  
tigation and numerical treatment"  
Journal of Fluid Mechanics - A paraître
- [ 25 ] T. CEBECI, P. BRADSHAW  
"Momentum transfer in boundary layers"  
MC GRAW-HILL BOOK COMPANY - 1977.
- [ 26 ] H. LEMONNIER, C. PELLONE  
"Calcul des structures minces en régime de cavitation développée"  
ATMA, Session 1984.
- [ 27 ] B. HUNT  
"Relationships between volume, surface and line distributions  
of vorticity, sources and doublets"  
BAC Report AC/384, Novembre 1977.
- [ 28 ] HADAMARD J.  
"Lectures on CAUCHY's problems in linear partial differential  
equations"  
NEW HOVEN, Yale University Press, 1923.

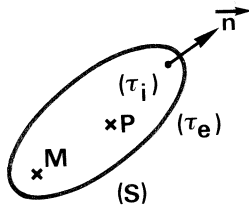
- [ 29] K.W. MANGLER, J.H.B. SMITH  
 "Behaviour of the vortex sheet at the trailing edge of a lifting wing"  
 RAE TR 69049 March 1969.
- [ 30] C. REHBACH  
 "Calcul numérique d'écoulement tridimensionnel instationnaire avec nappes tourbillonnaires"  
 Recherche Aérospatiale n° 1977-5, Septembre-Octobre.
- [ 31] D.J. BUTTER and G.T. HANCOCK  
 "A numerical method for calculating the trailing vortex system behind a swept wing at low speed"  
 AERONAUTICAL JOURNAL OF THE ROYAL AERONAUTICAL SOCIETY,  
 Août 1971 - Vol. 75.
- [ 32] S.A. JEPPE  
 "The computation of vortex flows by panel methods"  
 Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1978-4.
- [ 33] W.G. SEMPLE  
 "An economic and versatile panel method for aircraft and aircraft/store configurations"  
 Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1980-5.
- [ 34] H.S. SYTOMA, B.L. HEWITTAND, P.E. RUBBERT  
 "A comparison of panel methods for subsonic-flow computation"  
 AGARDOGRAH N° 241.
- [ 35] LUU T.S  
 "Calcul de l'hélice marine subcavitante par la méthode des singularités"  
 ATMA-1970
- [ 36] LUU T.S et GANGLER J.P  
 "Nouvelle méthode de calcul des hélices marines"  
 Nouveautés Techniques et Maritimes, 1974
- [ 37] H. SCHLICHTING  
 "Boundary Layer Theory"  
 MC GRAW-HILL BOOK COMPANY

A N N E X E S

---

A 1 . Deuxième formule de GREEN

---



Considérons un domaine  $(\tau_i)$  fermé de surface  $(S)$  et de normale extérieure  $\vec{n}$ . A partir de la formule d'OSTROGRADSKY on montre aisément la relation suivante :

$$\iint_S \left[ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS = \iiint_{\tau} [\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi] d\tau \quad (1)$$

Dans la relation (1)  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions scalaires de classe  $C_2$  définies dans les domaines intérieur et extérieur  $(\tau_i)$  et  $(\tau_e)$ . On applique la relation (1) dans le cas où  $\psi = \frac{1}{|\vec{PM}|}$  et  $\varphi$  harmonique dans  $(\tau_e)$  ; ce qui donne :

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_M \quad M \in (\tau_e) \\ \frac{1}{2} \varphi_M \quad M \in (S) \\ 0 \quad M \in (\tau_i) \end{array} \right\} = - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_P \frac{1}{|\vec{PM}|} dS_P + \frac{1}{4\pi} \iint_S \varphi_P \frac{\partial}{\partial n_P} \left( \frac{1}{|\vec{MP}|} \right) dS_P \quad (2)$$

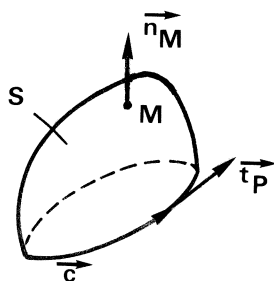
Supposons que l'on ait à résoudre un problème extérieur dans  $(\tau_e)$  ; d'après ce qui précède le champ harmonique  $\varphi_e = \varphi_{\text{extérieur}}$  peut être considéré comme la superposition des potentiels induits par une distribution superficielle-

le de sources  $\sigma_e = \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} \Big|_S$  et une distribution superficielle de doublets normaux :  $\mu_e = -\varphi_e \Big|_S$ . Considérons alors dans  $(\tau_i)$  un champ arbitraire harmonique  $\varphi_i = \varphi$  intérieur. La normale étant toujours extérieure à  $(\tau_i)$  il peut être considéré comme la superposition des potentiels induits par une distribution de sources  $\sigma_i = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \Big|_S$  et une distribution de doublets normaux  $\mu_i = \varphi_i \Big|_S$ . Par application de la relation (2) aux champs extérieur et intérieur et en sommant les relations obtenues, nous obtenons :

$$\varphi_M = \begin{cases} \varphi_e & M \in (\tau_e) \\ \frac{1}{2} (\varphi_i + \varphi_e) & M \in (S) \\ \varphi_i & M \in (\tau_i) \end{cases} = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right)_P \frac{1}{|\overrightarrow{PM}|} dS_P + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\varphi_e - \varphi_i)_P \frac{\partial}{\partial n_P} \left( \frac{1}{|\overrightarrow{MP}|} \right) dS_P \quad (3)$$

Remarque :  $\varphi_i$  étant arbitraire, il existe une infinité de solutions du type  $(\sigma, \mu)$  pour représenter  $\varphi_e$ .

## A 2 . Equivalence d'une répartition de doublets normaux et de tourbillons



$$\overrightarrow{dl_P} = \overrightarrow{t_P} dl_P$$

Soit une surface  $(S)$  s'appuyant sur un contour  $(\vec{C})$  orienté pour avoir la normale extérieure  $\vec{n}_M$  comme indiquée. La surface  $(S)$  est le siège d'une distribution surfacique de doublets normaux de densité  $\mu_{np}$ . En un point  $M$  n'appartenant pas à  $(S)$  le champ de vitesse s'écrit :

$$\vec{v}_M = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu_{np} \overrightarrow{\text{grad}}_M \text{div}_M \left( \frac{\vec{n}_P}{|\overrightarrow{PM}|} \right) dS_P \quad (4)$$

En remarquant que  $\Delta_M \left( \frac{1}{|\vec{MP}|} \right) = 0$  :

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &= \frac{1}{4\pi} \vec{\text{Rot}}_M \iint_S \mu_{np} \vec{\text{Rot}}_M \frac{\vec{n}_p}{|\vec{MP}|} dS_p \\ &= \frac{1}{4\pi} \vec{\text{Rot}}_M \iint_S \vec{n}_p \wedge \mu_{np} \vec{\text{grad}}_p \frac{1}{|\vec{MP}|} dS_p \\ &= \frac{1}{4\pi} \vec{\text{Rot}}_M \iint_S \vec{n}_p \wedge \vec{\text{grad}}_p \frac{\mu_{np}}{|\vec{MP}|} dS_p + \frac{1}{4\pi} \vec{\text{Rot}}_M \iint_S \frac{-\vec{n}_p \wedge \vec{\text{grad}}_p \mu_p}{|\vec{MP}|} dS_p \end{aligned}$$

En utilisant la formule du gradient, il vient :

$$\vec{v}_M = \frac{1}{4\pi} \vec{\text{Rot}}_M \int_C \frac{\mu_p}{|\vec{MP}|} d\vec{l}_p - \frac{1}{4\pi} \vec{\text{Rot}}_M \iint_S \frac{\vec{\omega}_p}{|\vec{MP}|} dS_p \quad (5)$$

L'identité des relations (4) et (5) montre ainsi que le champ de vitesse induit par une distribution de doublets normaux répartis sur (S) est équivalent au champ de vitesse induit par :

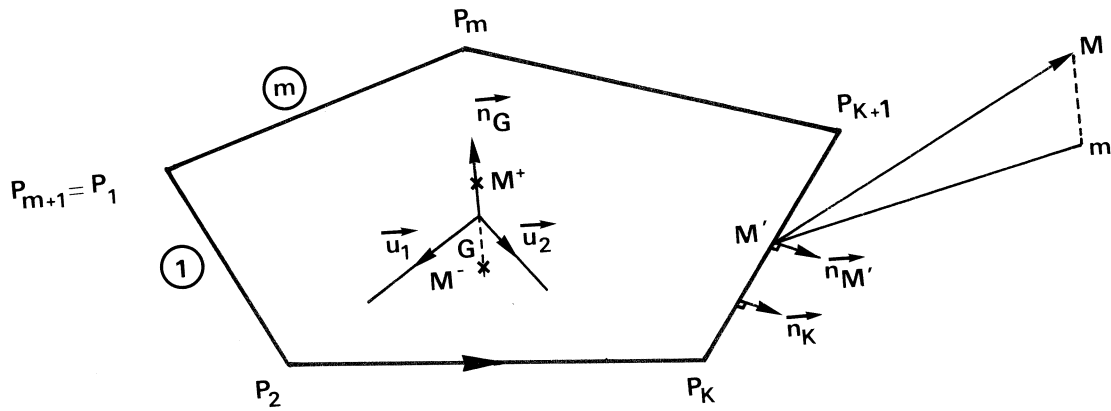
- un filet tourbillonnaire fermé disposé sur  $\vec{C}$  d'intensité  $\mu_p$
- une répartition surfacique de tourbillons d'intensité  $\vec{\omega}_p = \vec{n}_p \wedge \vec{\text{grad}}_p \mu_p$

A 3 . Facette polygonale plane supportant une distribution constante de sources

---

Nous désignons par  $(\vec{C}_m)$  le contour plan formé par les points  $P_1 \dots P_{m+1}$ , par  $S_m$  la surface ainsi délimitée, par G le centre de gravité de cette facette, par  $\vec{n}_G$  la normale à la facette, donnée par le sens de parcours du contour  $(\vec{C}_m)$  (cf figure ci-contre).





On peut montrer que pour tout point  $M$  de l'espace n'appartenant pas au contour  $(\vec{C}_m)$  le potentiel induit s'écrit :

$$\Phi_S(M) = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{K=1}^m \int_{P_K P_{K+1}} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_{M'}}{R+|z|} dM' \quad (6)$$

$\vec{n}_{M'}$ , étant la normale extérieure au contour  $(C_m)$  dans le plan de la facette,  $m$  étant la projection orthogonale de  $M$  sur le plan de la facette, nous avons :

$$\vec{r} = \vec{M'm}, \quad R = |\vec{M'M}|, \quad |z| = |\vec{mM}|$$

En prenant le gradient par rapport à  $M$  de l'expression (6) et en explicitant les intégrales, le champ de vitesse peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{V}_S(M) = \sigma \vec{f}_S(\vec{C}_m, M) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} M \notin S_m \quad \vec{f}_S(\vec{C}_m, M) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{K=1}^m \vec{n} \operatorname{Log} \frac{R_{K+1} + R_K + d_K}{R_{K+1} + R_K - d_K} + \frac{\epsilon}{2\pi} \vec{n}_G \sum_{K=1}^m \operatorname{Arctg} \frac{2a_K d_K}{(R_{K+1} + R_K)^2 - d_K^2 + 2|z|(R_{K+1} + R_K)} \\ M \equiv G \quad \vec{f}_S(\vec{C}_m, M^\pm) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{K=1}^m \vec{n} \operatorname{Log} \frac{R_{K+1} + R_K + d_K}{R_{K+1} + R_K - d_K} \pm \frac{1}{2} \vec{n}_G \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Les valeurs des différents paramètres sont donnés par :

$P_k$  point de coordonnées  $(x_k, y_k, z_k)$

$G$  point de coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$

$\vec{n}_G$  vecteur unitaire de cosinus directeurs  $(p, q, r)$

$M$  point de coordonnées  $(x, y, z)$

$$\vec{R}_k = \vec{P}_k M, R_k = |\vec{R}_k|, d_k = |\vec{P}_k P_{k+1}|, \vec{n}_k = \frac{\vec{P}_k P_{k+1} \wedge \vec{n}_G}{d_k}, a_k d_k = -d_k (\vec{R}_k \cdot \vec{n}_k)$$

$$Z = \vec{GM} \cdot \vec{n}_G = p(x - x_G) + q(y - y_G) + r(z - z_G)$$

$$\epsilon = +1 \text{ si } Z > 0, \quad \epsilon = -1 \text{ si } Z < 0$$

$M^+$  et  $M^-$  sont les points de la normale  $\vec{n}_G$ , infiniment voisins du point  $G$  respectivement au-dessus et au-dessous de la facette.

En utilisant l'expression (8), on en déduit l'influence de la surface  $S_m$  et de son symétrique par rapport au plan  $(yoz)$  :

$$\vec{f}_\sigma(\vec{S}_m, M) = \vec{f}_S(\vec{C}_m, M) + \vec{f}_S(\vec{C}'_m, M) \quad (9)$$

$\vec{C}'_m$  étant le contour symétrique de  $\vec{C}_m$  par rapport au plan  $(yoz)$ .

#### A 4 . Facette polygonale plane supportant une distribution de doublets normaux linéaire dans deux directions

---

Les notations sont les mêmes que dans l'annexe A 3 ; on désigne par  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  deux vecteurs unitaires non équipollents et appartenant à la facette ;  $\xi$  et  $\eta$  sont les abscisses curvilignes respectives dans ces deux directions. Dans le système d'axes  $(G, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ , la distribution  $\mu$  des doublets normaux est :

$$\mu = \mu_G + \omega_1 \xi + \omega_2 \eta \quad (10)$$

Pour le calcul de la vitesse induite par la répartition (10), on utilise l'équivalence entre une répartition de doublets normaux et de tourbillons (relation (5) de l'annexe A 2). La relation (10) permet d'obtenir les valeurs de  $\mu$  sur le contour  $\vec{C}_m$  et le vecteur tourbillon  $\vec{\omega}_p = (\vec{n} \wedge \vec{\text{grad}} \mu)_p$  partout constant sur la facette. La vitesse induite est alors donnée par :

$$\vec{V}_D(\mathbf{M}) = \mu_G \vec{f}_D(\vec{C}_m, \mathbf{M}) + \omega_1 \vec{f}_{T_1}(\vec{C}_m, \mathbf{M}) + \omega_2 \vec{f}_{T_2}(\vec{C}_m, \mathbf{M}) \quad (11)$$

Dans la relation (11), les différentes influences sont données par :

$$\vec{f}_D(\vec{C}_m, \mathbf{M}) = \sum_{K=1}^m \vec{\alpha}_K(\mathbf{M}) \quad (12)$$

$$i \in (1, 2) \vec{f}_{T_i}(\vec{C}_m, \mathbf{M}) = -g(\mathbf{M}) \vec{h}_i + \sum_{K=1}^m \left\{ (\vec{h}_i \cdot \vec{n}_K) \varphi_K(\mathbf{M}) \vec{n}_G + (\vec{h}_i \cdot \vec{G} \vec{P}_K) \vec{\alpha}_K(\mathbf{M}) + \left( \vec{h}_i \cdot \frac{\vec{P}_K \vec{P}_{K+1}}{d_K} \right) \vec{U}_K(\mathbf{M}) \right\} \quad (13)$$

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2}{1 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)^2} \quad ; \quad \vec{h}_2 = \frac{-(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_1 + \vec{u}_2}{1 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} \notin \mathbf{S}_m \quad g(\mathbf{M}) = \frac{\epsilon}{2\pi} \sum_{K=1}^m \text{Arctg} \frac{2a_K d_K}{(R_{K+1} + R_K)^2 - d_K^2 + 2|Z|(R_{K+1} + R_K)} \\ \mathbf{M} \in \mathbf{G} \quad g(\mathbf{M}^\pm) = \pm \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\varphi_K(\mathbf{M}) = \frac{1}{4\pi} \text{Log} \frac{R_{K+1} + R_K + d_K}{R_{K+1} + R_K - d_K} \quad ; \quad \vec{U}_K(\mathbf{M}) = \left( \vec{R}_K \cdot \frac{\vec{P}_K \vec{P}_{K+1}}{d_K} \right) \vec{\alpha}_K(\mathbf{M}) + \vec{\beta}_K(\mathbf{M})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\alpha}_K(\mathbf{M}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{R}_K \wedge \vec{R}_{K+1}}{(\vec{R}_K \wedge \vec{R}_{K+1})^2} \left[ \vec{P}_K \vec{P}_{K+1} \cdot \left( \frac{\vec{R}_K}{R_K} - \frac{\vec{R}_{K+1}}{R_{K+1}} \right) \right] \quad ; \quad \vec{\beta}_K(\mathbf{M}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{R}_K \wedge \vec{R}_{K+1}}{d_K} \left( \frac{1}{R_K} - \frac{1}{R_{K+1}} \right) \\ \vec{\alpha}_K(\mathbf{M}) = \vec{0} \quad \text{si } \vec{R}_K // \vec{R}_{K+1} \end{array} \right.$$

En utilisant (12) et (13) on en déduit l'influence de la surface  $S_m$  et de son symétrique par rapport au plan  $(yoz)$  :

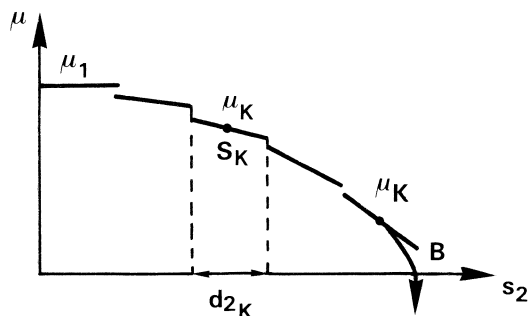
$$\vec{f}_\mu(S_m, M) = \vec{f}_D(\vec{C}_m, M) \pm \vec{f}_D(\vec{C}_m, M) \tag{14}$$

$$i = 1, 2 \quad \vec{f}_i(S_m, M) = \vec{f}_{Ti}(\vec{C}_m, M) \pm \vec{f}_{Ti}(\vec{C}_m, M) \tag{15}$$

Remarque : dans les expressions (9) (annexe A3), (14) et (15) le signe + ou - est à choisir de façon à ce que l'influence résultante soit un vecteur orthogonal à l'axe  $\vec{ox}$ .

A 5 . Vorticité  $\omega_2$  au bord de fuite

---



La figure ci-contre représente la courbe de  $\mu = \mu^{Jext} - \mu^{Jint}$  au bord de fuite de l'aile en fonction de  $s_2$  abscisse curviligne suivant l'envergure au bord de fuite. On désigne par  $\mu_k$  les valeurs discrètes de  $\mu$  pour chaque bande, par  $\omega_{2k} = \omega_{2k}^{Jext} - \omega_{2k}^{Jint}$  les vorticités. On pose  $d2_k = d2_{k,N+1}$ . Pour une bande générale  $\omega_{2k}$  est égal à la pente, au point  $S_k$ , de la parabole passant par les trois points  $S_{k-1}, S_k, S_{k+1}$ . Pour la bande  $k = 1, \omega_{2k} = 0$ . Pour la bande  $k = K$ , la pente au point  $S_k$ , de la parabole de sommet  $B$  et passant par  $S_k$  est égale à  $-\mu_K/d2_K$ . De fait la vorticité en ce point est :

$$\omega_{2K} = - \frac{h \cdot \mu_K}{d2_K} \quad (h \text{ coefficient multiplicatif})$$

D'une façon générale :

$$\omega_{2_K} = B_K^{-1} \lambda_{K-1} + B_K^0 \lambda_K + B_K^1 \lambda_{K+1} \quad (16)$$

	$B_K^{-1}$	$B_K^0$	$B_K^1$
$K=1$	0	0	0
$K \in (2, K-1)$	$-A_K^{(2)} C_{K-1}$	$(A_K^{(2)} - A_K^{(1)}) C$	$A_K^{(1)} C_{K+1}$
$K=K$	0	$\frac{-hC_K}{d2_K}$	0

(17)

h coefficient numérique

$$A_K^{(1)} = \frac{2}{D_K} \frac{d2_K + d2_{K-1}}{d2_K + d2_{K+1}} ; \quad A_K^{(2)} = \frac{2}{D_K} \frac{d2_K + d2_{K+1}}{d2_K + d2_{K-1}} ; \quad D_K = d2_{K-1} + 2d2_K + d2_{K+1}$$

(17 bis)

A 6 . Coefficient relatif à l'inconnue  $\lambda_k$

$$\vec{F}_{\lambda_K}(M_i') = \vec{F}_{oK}(M_i') + \sum_{j=1}^{N+1} \left[ \bar{\mu}_{kj} \vec{f}_{\mu}(S_{kj}, M_i') + \bar{\omega}_{1kj} \vec{f}_1(S_{kj}, M_i') \right] + C \vec{f}_{\mu}(\Sigma, M_i') \quad (18)$$

(19)

K	1	2	K
$\vec{F}_{oK}(M_i')$	$B_{K+1}^{-1} \vec{F}_{2_{K+1}}(M_i')$	$B_K^0 \vec{F}_{2_K}(M_i') + B_{K+1}^{-1} \vec{F}_{2_{K+1}}(M_i')$	$B_{K-1}^1 \vec{F}_{2_{K-1}}(M_i')$

$$\text{Pour } \kappa \in (3, K-1) \quad \vec{F}_{OK}(M_i) = B_{K-1}^1 \vec{F}_{2, K-1}(M_i) + B_K^0 \vec{F}_{2, K}(M_i) + B_{K+1}^{-1} \vec{F}_{2, K+1}(M_i) \quad (20)$$

$$\vec{F}_{2, K}(M_i) = \sum_{j=1}^{N+1} \left[ \frac{\bar{\mu}_{Kj}}{C_K} \frac{d2_K^j}{d2_{Kj}} \vec{f}_2(S_{Kj}, M_i) \right] + \frac{d2_K^j}{d2_{\Sigma_K}} \vec{f}_2(\Sigma_K, M_i) \quad (21)$$

Les coefficients  $\bar{\mu}_{kj}$ ,  $\bar{\omega}_{1kj}$  sont donnés par les relations (36) et (37) de la deuxième partie, les influences  $\vec{f}_u$ ,  $\vec{f}_1$ ,  $\vec{f}_2$  par les relations (14) et (15) de l'annexe A 4, les coefficients B par les relations (17) de l'annexe A 5.

A 7 . Influence  $A_{i, kj}^x$  et  $A_{i, kj}^y$

$$A_{i, \kappa j}^x = \vec{f}_{Kj}^x(M_i) \cdot \vec{n}_i \quad ; \quad A_{i, \kappa j}^y = \vec{f}_{Kj}^y(M_i) \cdot \vec{n}_i \quad (22)$$

$$\vec{f}_{Kj}^x(M_i) = \vec{f}_\sigma(S_{Kj}, M_i) \quad ; \quad \vec{f}_{Kj}^y(M_i) = \vec{F}_{1Kj}(M_i) + \vec{G}_{Kj}(M_i) \quad j \neq N \quad (23)$$

j	j=1	j ∈ (2, N-2)	j = N-1
	$\vec{G}_{Kj}(M_i) \quad \beta_{Kj+1} \vec{f}_1(S_{Kj+1}, M_i)$	$\alpha_{Kj} \vec{f}_1(S_{Kj}, M_i) + \beta_{Kj+1} \vec{f}_1(S_{Kj+1}, M_i)$	$\alpha_{Kj} \vec{f}_1(S_{Kj}, M_i)$

(24)

$$\vec{F}_{1Kj}(M_i) = D1_{Kj} \left\{ \sum_{l=1}^N \frac{\epsilon_l}{2} \left[ \vec{f}_u(S_{Kl}, M_i) + \vec{T}_{Kl}(M_i) \right] - \vec{f}_u(J_K, M_i) - \vec{f}_u(\Sigma_K, M_i) \right\} \quad (25)$$

$$\epsilon_l = \begin{cases} -1 & l \leq j \\ +1 & l > j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{f}_{KN}^y(M_i) = & \vec{f}_1(S_{KN}, M_i) - \vec{f}_1(S_{K1}, M_i) - \frac{1}{4}(d1_{KN} + d1_{K1}) \sum_{l=1}^N \left( \vec{f}_u(S_{Kl}, M_i) + T_{Kl}(M_i) \right) \\ & - \frac{1}{2}(d1_{KN} - d1_{K1}) \left[ \vec{f}_u(J_K, M_i) + \vec{f}_u(\Sigma_K, M_i) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

K	K=1	K=2	K ∈ (3, K-1)	K=K
$\vec{T}_{Kj}(M_i)$	$\beta_{K+1,j}^{-1} \vec{f}_{2K+1,j}^r(M_i)$	$\beta_{Kj}^0 \vec{f}_{2Kj}^r(M_i)$ $+ \beta_{K+1,j}^{-1} \vec{f}_{2K+1,j}^r(M_i)$	$\beta_{K-1,j}^1 \vec{f}_{2K-1,j}^r(M_i) +$ $\beta_{Kj}^0 \vec{f}_{2Kj}^r(M_i) + \beta_{K+1,j}^{-1} \vec{f}_{2K+1,j}^r(M_i)$	$\beta_{K-1,j}^1 \vec{f}_{2K-1,j}^r(M_i)$

(27)

$$\left. \begin{aligned} \vec{f}_{2Kj}^r(M_i) &= \vec{f}_2(S_{Kj}, M_i) & j \neq 1; j \neq N \\ \vec{f}_{2Kj}^r(M_i) &= \vec{f}_2(S_{Kj}, M_i) + \epsilon \left[ \vec{f}_2(J_K, M_i) + \vec{f}_2(\Sigma_K, M_i) \right] & j = 1 \text{ ou } N \\ \epsilon &= \begin{cases} +1 & j=1 \\ -1 & j=N \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Les coefficients  $\beta^{-1}$ ,  $\beta^1$ ,  $\beta^0$  sont donnés par les relations (44) de la première partie, les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  par les relations (46).