



HAL
open science

Sur les applications du cercle avec un intervalle plat et flots de Cherry

Liviana Palmisano

► **To cite this version:**

Liviana Palmisano. Sur les applications du cercle avec un intervalle plat et flots de Cherry. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2013. Français. NNT : 2013PA112328 . tel-01037876

HAL Id: tel-01037876

<https://theses.hal.science/tel-01037876>

Submitted on 23 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

Délivré par :
Université Paris-Sud

Discipline ou spécialité :
Mathématiques

Présentée et soutenue par

Liviana PALMISANO

le : 12 décembre 2013

Titre :

Sur les applications du cercle avec un intervalle plat et flots de Cherry

École doctorale :
Mathématiques de la région Paris-Sud

Unité de recherche :
UMR 8628

Directeurs de thèse :
Jacek GRACZYK, Université Paris-Sud

Rapporteurs :
Grzegorz ŚWIĄTEK, Politechnika Warszawska
Oleg KOZLOVSKI, University of Warwick

Examineurs :
Nessim SIBONY, Université Paris-Sud
Sylvain CROVISIER, Université Paris-Sud
Frédéric LE ROUX, Université Paris 6

Département de
 mathématiques
d'Orsay

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud
91 405 Orsay CEDEX

A mio nonno,
che in questo momento
avrebbe detto :
"Bräv pccènn"

Remerciements

Mes premiers remerciements vont bien sûr à Jacek Graczyk qui a accepté de diriger cette thèse et m'a fait découvrir le merveilleux monde des systèmes dynamiques en petites dimensions. Le fait d'avoir pu profiter de son intuition et de sa vaste culture mathématique a été pour moi un grand privilège. Je le remercie aussi pour sa patience, pour ses conseils innombrables et précieux et pour son très grand soutien.

Je remercie également Grzegorz Świątek et Oleg Kozlovski pour avoir accepté de lire ma thèse et pour m'avoir donné des conseils importants et remarquables. En particulier, une conversation avec Grzegorz Świątek m'a beaucoup aidée pour compléter quelques preuves du chapitre 2.

Il est un plaisir pour moi que Nessim Sibony soit présent dans mon jury aujourd'hui, pas seulement pour ses très vastes compétences mathématiques, mais aussi pour sa sympathie. Merci aussi à Sylvain Crovisier et à Frédéric Le Roux. Leur présence aujourd'hui est pour moi un grand honneur. Je tiens à remercier particulièrement Sylvain Crovisier pour sa gentillesse et sa disponibilité à répondre à toutes mes questions.

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, de l'École Doctorale de Mathématiques de la Région Paris-Sud et en bénéficiant de l'ambiance apaisante de la bibliothèque Jacques Hadamard. Je remercie David Harari, directeur de l'École Doctorale, pour son attention et sa disponibilité envers chaque problématique concernant les étudiants. Je suis reconnaissante également à Valérie Lavigne, secrétaire de l'École Doctorale. Sa compétence et son efficacité sont absolument excellentes.

Je tiens aussi à remercier Feliks Przytycki et tous les membres de l'institut de mathématique IMPAN de Varsovie qui m'ont accueillie pendant les trois premiers mois de mon doctorat.

Quelques-unes des images contenues dans cette thèse ont été réalisées par Ilies Zidane.

Un grazie di cuore a tutti quelli che hanno colorato e allietato i giorni e le notti di questi quattro anni di vita da studentessa in terra francese. In particolare...

A Miriam. Mille volte in questi anni ci siamo allontanate, in silenzio e tante altre mille volte ci siamo ritrovate, sempre in silenzio, senza rancore. L'affetto è sempre stato più forte di ogni nostra debolezza.

A Franci. Per la sua bontà, generosità ed allegria. Non permettere a niente e nessuno di cambiarti, mai.

A Maculan. Che mi ha fatto scoprire la bellezza di essere diversi. La cafétéria sarà per sempre impregnata dei nostri racconti, insulti e risate!

A Vinc. Per la sua amicizia sincera, incondizionata e genuina. Nonostante le nostre vite intense e lontane, puntualmente ci siamo mancati, cercati e trovati come se neppure

un momento fosse passato dalla volta precedente. E poi i tuoi abbracci...ogni volta, ho sentito il mare!

A Giovi. Per la stima e l'affetto che ho sempre letto nei suoi occhi. Senza altre parole.

A Giulia. Ai nostri innumerevoli tentativi di cercare la verità, tu con la tua freddezza ed austerità, io con la mia romanticheria. E dopo litri di birra, qualcuna l'abbiamo anche trovata!

A Fede. La coinquilina più bella, sognatrice ed innamorata che potesse capitarmi. A te, che mi hai insegnato a credere che qualcosa di straordinario puo' sempre accadere.

A mio padre, che con orgoglio e amore mi ha guardata crescere da lontano, senza mai giudicarmi.

A mia madre, che da buona donna del sud ha sempre provveduto ai miei bisogni primari. La sua praticità colma le mie lacune da matematica distratta e sempre con la testa tra le nuvole. Se il buffet non è di vostro gradimento è con lei che dovete lamentarvi!

A Biagio. Per aver sempre cercato, dietro la barba da uomo distante e maturo, di fare incontrare le nostre vite, nonostante fossero diverse e distanti.

A Vanni. Per l'entusiasmo e la speranza che riesce sempre e semplicemente a comunicare.

A mio zio (Pepe). Per l'orgoglio e la stima che mi ha sempre mostrato. In esse ho ritrovato la fiducia in me, ogni volta che l'avevo persa.

Ad Alba. Non c'è stato giorno in cui non abbia sentito la sua presenza : profonda, sincera, indispensabile.

A Ilies. Per avermi tenuta per mano durante questi ultimi mesi. Tutto quello che potevo vedere, l'ho visto con te : l'amore, l'odio, il perdono, la gelosia, la felicità, la disperazione, la fiducia,...l'India! Nel tempo che ci è stato concesso, tra i sorrisi e le lacrime, mi sono sempre sentita...viva.

Questo traguardo appartiene un po' a tutti voi. Grazie.

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	9
1 Endomorphismes du cercle avec un intervalle plat	15
1.1 Relèvement et degré d'une fonction	15
1.2 Fonctions presque lisse avec un intervalle plat	16
1.3 Outils techniques	17
1.3.1 Notations	17
1.3.2 Distance entre des points de l'orbite	17
1.4 Nombre de Rotation	18
1.4.1 Propriétés du nombre de rotation	19
1.5 Fractions continues	21
1.5.1 L'ordre des points sur le cercle	25
1.6 Partitions du cercle par les fonctions de \mathcal{L}	27
1.7 Distorsion et dérivée Schwarzienne	29
1.7.1 Le Birapport	30
1.7.2 Le Principe de Koebe	31
1.8 Échelle près d'un point critique et l'ensemble non errant	32
2 Rotation number of bounded type	35
2.1 Sequence of scalings	35
2.1.1 Proof of theorem 2.1.1	35
2.2 Non-wandering set	39
2.2.1 Some technical lemmas	40
2.2.2 Proof of Theorem 2.2.2	40
2.2.3 Proof of Theorem 2.2.3	41
3 Nombre de rotation de type non borné	49
3.1 Suite d'échelle	49
3.1.1 Preuve de la première partie du Théorème 3.1.1	49
3.1.2 Preuve de la seconde partie du Théorème 3.1.1	51
3.1.3 Quelques lemmes techniques	52
3.1.4 Cœur de la preuve	55
3.2 Ensemble non errant	64
3.2.1 Fonctions de \mathcal{L} avec exposant critique $\ell \in (1, 2)$	65
3.2.2 Fonctions de \mathcal{L} avec exposant critique $\ell = 2$	66

4	Flots de Cherry	69
4.1	Sur la dimension de l'ensemble quasi minimal	70
4.1.1	Définitions	70
4.1.2	Section de Poincaré	71
4.1.3	La fonction de premier retour	74
4.1.4	Propriétés de la fonction de premier retour	74
4.1.5	Ensemble quasi minimal	75
4.2	Sur les mesures physiques pour les flots de Cherry	76
4.2.1	Définitions et exemples	76
4.2.2	Énoncé des résultats	82
4.2.3	Preuves des théorèmes principaux	84
5	Un contre-exemple de Denjoy	93
5.1	Rappels et Définitions	93
5.1.1	Nombre de rotation.	94
5.1.2	Point demi-critiques plats	94
5.2	Quelques lemmes techniques	95
5.3	Construction d'un contre-exemple de Denjoy	98
5.3.1	Démonstration	99
	Bibliographie	103

Introduction

Ce travail de recherche se concentre sur les systèmes dynamiques de petites dimensions. Le centre d'intérêt est une classe d'endomorphismes du cercle avec un intervalle plat, ainsi que les nombreuses applications qui dérivent de cette étude. L'une des plus intéressante d'entre elles a été l'étude d'un flot sur le tore bidimensionnel : le flot de Cherry. Nous avons exploré ce dernier d'un point de vu topologique, métrique et ergodique.

Dans la suite, nous expliquerons plus en détail les résultats obtenus en rappelant leur contexte historique. Nous les repartirons en trois grands thèmes, en autorisant toutefois quelques intrusions d'un thème dans l'autre, la distinction étant purement formelle.

Sur les endomorphismes du cercle avec un intervalle plat

L'étude des fonctions du cercle a une très long histoire. Les Babyloniens et plus tard les Grecs ont étudié la rotation du cercle et ont donné une estimation précise de l'angle ρ de rotation basé sur un morceaux de son orbite. Pour atteindre cet objectif ils ont considéré la droite $(t, t\rho)$ dans le plan et ont développé un algorithme de fraction continue pour estimer la pente de ρ .

Dans les années 1880, Poincaré commença à s'intéresser à la dynamique des fonctions du cercle plus générales en introduisant le concept de nombre de rotation qui a joué un rôle fondamental dans le cadre de la dynamique unidimensionnelle. En suite, de nombreux mathématiciens se sont intéressés à l'étude de la dynamique des fonctions du cercle avec différentes propriétés de différentiabilité.

Dans cette thèse nous essayons de donner une description complète de la dynamique d'une classe \mathcal{L} de fonctions de degré un du cercle, supposées de classe \mathcal{C}^2 à l'exception de deux points où seule la continuité est exigée, et telles qu'elles soient constantes sur un des intervalles délimité par ces derniers. De plus sur des demi voisinages ouverts de ces points elles s'écrivent sous la forme x^ℓ , où ℓ est un nombre réel positif appelé l'exposant critique de la fonction. Il est ainsi facile de remarquer que cet espace possède deux composantes connexes, chaque fonction de la première composante étant conjuguée à une unique fonction de la seconde. Ainsi, sans aucune perte de généralités, on se restreint aux fonctions de cette classe préservant l'orientation, on les note par abus, encore \mathcal{L} .

Puisque les fonctions continues considérées préservent l'ordre, il est possible de définir leur *nombre de rotation* qui est la quantité qui mesure le taux avec lequel une orbite s'enroule autour du cercle. Plus précisément, soit $f \in \mathcal{L}$ et F un relèvement de f , alors le nombre de rotation de f est défini par la limite pour n tendant vers l'infini du rapport entre l'itérée $n^{\text{ème}}$ de F calculé en un point x quelconque et n . Bien entendu, le cas le plus intéressant est celui où le nombre de rotation est irrationnel.

Développons ce dernier en fraction continue : $\rho(f) = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$. Soit (q_n) la

suite des dénominateurs des réduites (qui est également la suite des temps de “premiers retours”) associée à $\rho(f)$, $f \in \mathcal{L}$. Pour bien comprendre la “géométrie” à proximité de l’intervalle plat U (l’intervalle où f est constante) et ses propriétés asymptotiques, il est utile de définir la suite “d’échelles” : $\tau_n = \frac{|(U, f^{q_n}(U))|}{|(U, f^{q_n-2}(U))|}$. Lorsque la suite τ_n tend vers l’infini on dit que la géométrie est *dégénérée* et quand τ_n est bornée loin de zéro, alors on se trouve, justement, dans le cas de la *géométrie bornée*.

Ce travail trouve ses sources dans l’article [GJS⁺95], dans lequel les auteurs ont montré, pour la sous-classe de \mathcal{L} des fonctions dont le nombre de rotation est de type borné¹, l’existence d’une transition dans la géométrie du système lorsque l’exposant critique traverse 2. En effet, ils ont montré que la géométrie est dégénérée si $\ell \leq 2$ et devient bornée pour $\ell > 2$. Dans le chapitre 2, nous remarquons que cette transition devient particulièrement visible et intéressante dans la structure géométrique de l’ensemble non errant². Nous avons ainsi démontré (voir [Pal13]) les théorèmes suivants :

Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{L}$ avec nombre de rotation irrationnel de type borné et dont l’exposant critique ℓ vérifie $1 < \ell \leq 2$. Alors l’ensemble non errant a dimension de Hausdorff nulle.*

Théorème 2. *Soit $f \in \mathcal{L}$ avec le nombre de rotation irrationnel de type borné et dont l’exposant critique ℓ vérifie $\ell > 2$. Alors l’ensemble non errant a dimension de Hausdorff strictement positive.*

Ces résultats montrent concrètement une transition géométrique du système et fournissent une description complète de la dynamique pour les endomorphismes du cercle avec un intervalle plat dont le nombre de rotation de type borné³. Dans la prochaine section, on expliquera l’application la plus directe et intéressante des précédents théorèmes dans le cas des flots de Cherry.

À ce stade, il se pose naturellement le problème de comprendre la dynamique des fonctions de \mathcal{L} avec le nombre de rotation de type non borné. Il devient en effet plus délicat d’émettre des conjectures ; on rencontre parfois des surprises dues à la présence de phénomènes paraboliques. Deux questions se posent naturellement à ce niveau :

Question 1. *À t-on dans le cas du régime non borné une transition dans la dynamique du système quand l’exposante critique passe à travers deux ?*

Question 2. *Que peut-on établir sur la structure géométrique de l’ensemble non errant pour les fonctions de la classe \mathcal{L} avec un nombre de rotation quelconque ?*

En ce qui concerne la première question, pour l’instant nous avons obtenu une réponse partielle (chapitre 3). Nous avons en effet montré que la dynamique du système est dégénérée pour $\ell \leq 2$ et devient bornée lorsque $\ell \geq 3$. Ce qui se passe quand $2 < \ell < 3$ est encore à l’étude. La conjecture est que la transition de phase se produit en $\ell = 2$, comme dans la situation précédente. Ce résultat serait ainsi le premier à être valable sans

1. Cela signifie que le $\sup_{i \in \mathbb{N}} a_i$ est fini, où les a_i sont les entrées en fractions continues du nombre de rotation.

2. L’ensemble des points x tels que pour chaque voisinage ouvert V de x , il existe un nombre entier n tel que l’intersection de V et $f^n(V)$ est non vide.

3. Pour $l \leq 1$ on sait que la dimension de Hausdorff de l’ensemble non errant est toujours nulle, voir [MR92] et [Vee89]

aucune condition supplémentaire sur le nombre de rotation⁴ pour les applications avec l'intervalle plat.

En ce qui concerne la structure géométrique de l'ensemble non errant (Question 2) la situation semble être plus compliquée que celle donnée par les théorèmes 1 et 2. En effet, nous avons montré :

Théorème 3. *Soit $f \in \mathcal{L}$ avec exposant critique $1 < \ell < 2$ et nombre de rotation ρ de type Diophantien⁵ d'exposant $\alpha < \sqrt{\frac{2}{\ell}} + 1$. Alors l'ensemble non errant a dimension de Hausdorff nulle.*

Théorème 4. *Pour presque tout nombre de rotation ρ et pour tout $f \in \mathcal{L}$ avec exposant critique $\ell = 2$ et nombre de rotation ρ , l'ensemble non errant a dimension de Hausdorff nulle.*

Dans la prochaine section nous présenterons une application des travaux expliqués jusqu'ici. Il s'agit de flots sur le tore bidimensionnel, connu et étudié par de nombreux physiciens : les flots de Cherry.

Sur les flots de Cherry

Dimension de l'ensemble quasi minimal

Poincaré a commencé vers le 1886 à s'intéresser à l'étude des trajectoires récurrentes non triviales sur le 2-tore, en distinguant deux scénarios topologiques possibles : soit les trajectoires sont partout denses, soit il n'existe aucun ouvert non vide où la trace d'une trajectoire est dense dans cet ouvert. Il a construit un flot continu sur le tore \mathbb{T}^2 qui a un ensemble minimal⁶ non trivial et il a conjecturé que cet flot peut être construit analytique. Denjoy a démontré la non véracité de cette conjecture.

En 1937, Cherry a démontré que la conjecture de Poincaré est vraie si l'on remplace "ensemble minimal" par "ensemble quasi minimal"⁷. Il a construit des exemples de flots analytiques sur le 2-tore avec un point selle et un point attractif.

Les flots de Cherry ont un nombre de rotation $\rho \in [0, 1)$ qui est bien défini et qui est égal au nombre de rotation de la fonction de premier retour associée à une quelconque section de Poincaré (il est facile de constater que ρ ne dépend pas de la section de Poincaré choisie). En outre, chaque flot de Cherry a un seul ensemble quasi minimal et il est localement homéomorphe au produit cartésien de l'ensemble non errant de la fonction de premier retour et d'un intervalle. À partir de ce constat, nous en avons déduit une application directe du théorème 2 :

Théorème 5. *Soit φ un flot de Cherry, f sa fonction de premier retour et $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ les valeurs propres du point selle. Si $\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1} > 2$ et f a nombre de rotation de type borné alors l'ensemble quasi minimal a dimension de Hausdorff strictement plus grande que 1.*

4. Bien entendu, ce dernier est toujours supposé irrationnel.

5. Soit $\alpha \geq 2$ un nombre réel. Un nombre irrationnel ρ est Diophantien d'exposant α s'il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que $\left| \rho - \frac{p}{q} \right| > \frac{\epsilon}{q^\alpha}$ pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ (sous forme irréductible).

6. Un ensemble minimal d'un flot est un ensemble non-vide, fermé, invariant qui n'a pas de sous-ensemble propre avec la même propriété.

7. La fermeture de chaque trajectoire récurrente est appelée un ensemble quasi minimal.

Ainsi nous avons trouvé un exemple d'un flot C^∞ sur le tore avec ensemble quasi minimal métriquement non trivial.

Mesures physiques

La théorie des systèmes dynamiques a deux objectifs principaux :

1. décrire le comportement des trajectoires, de façon particulière quand le temps tend vers l'infini,
2. comprendre comment ce comportement change lorsque la loi qui gouverne le système est légèrement modifiée.

Même dans le cas d'une simple loi d'évolution, les orbites peuvent avoir un comportement plutôt compliqué qui rend difficile toute description, surtout quand le système est sensible aux conditions initiales (un petit changement des conditions à l'état initial produit des grandes variations du comportement des trajectoires à long terme).

Le point de vu probabiliste est certainement une bonne stratégie pour étudier ce type de systèmes : s'il est difficile de prédire la configuration future du système, alors nous pouvons essayer de calculer la probabilité de certaines configurations. Dans ce cadre, il devient particulièrement intéressant d'étudier des mesures physiques⁸ qui décrivent les propriétés statistiques d'un grand ensemble de trajectoires.

Il est souvent compliqué d'avoir des résultats d'existence de mesures physiques ; elle sont en effet connue seulement pour certaines classes de systèmes. Nous nous sommes intéressé à l'étude des mesures physiques pour les flots de Cherry, (voir la section 4.2).

On considère des flots C^∞ sur le tore, sans orbites fermées et avec deux singularités, un point selle p_s et un point fixe répulsif p_r , les deux hyperboliques. Cet flot ϕ est appelé encore flot de Cherry. Soit $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ les valeurs propres du point selle. Vargas et Sagin (voir [SV13]) ont montré que si $\lambda_1 \leq -\lambda_2$ alors les delta de Dirac en p_s et p_r sont les seules mesures de probabilité ergodiques, invariantes par ϕ et δ_{p_s} est physique. Il ont également montré que si $\lambda_1 > -\lambda_2$ alors il existe une troisième mesure de probabilité invariante ν qui est supportée sur l'ensemble quasi minimal. De plus si $\lambda_1 > -2\lambda_2$ et le nombre de rotation de la fonction de premier retour de ϕ est de type borné, alors ν est physique et ils ont conjecturé que c'est vrai déjà dans le cas $\lambda_1 > -\lambda_2$. En utilisant le théorème 1, nous avons résolu cette conjecture et nous avons continué dans la direction ouverte par Vargas et Saguin.

Théorème 6. *Soit ϕ un flot de Cherry vérifiant les hypothèses précédentes et soit g la fonction de premier retour. Si g a nombre de rotation de type borné et si $\lambda_1 > -\lambda_2$ alors ν est une mesure de probabilité invariante et physique.*

Théorème 7. *Soit ϕ un flot de Cherry vérifiant les hypothèses précédentes. Si $\lambda_1 \geq -3\lambda_2$ alors ν est une mesure de probabilité physique, invariante par le flot.*

Finalement on a une description complète des mesures physiques pour les flots de Cherry.

8. Ce sont celles qui donnent une mesure strictement positive au bassin d'attraction.

Sur les contre-exemples de Denjoy

L'un des buts de l'étude des systèmes dynamiques est leur classification en considérant deux systèmes équivalents s'ils ont le "même comportement".

Si f et g sont deux applications continues définies sur le cercle alors on dit que f et g sont équivalentes si elles sont égales à un changement de coordonnées (à la source et au but) près.

En d'autres termes, s'il existe une surjection continue $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que $h \circ f = g \circ h$, on dit alors que f est semi-conjugue à g ⁹. Si de plus, h est injective, et donc un homéomorphisme¹⁰, on parle alors de conjugaison¹¹.

Nous parlons de (semi-)conjugaison *topologique* si la (semi-)conjugaison est supposée seulement continue.

Poincaré a montré que chaque homéomorphisme du cercle avec nombre de rotation irrationnel est topologiquement semi-conjugue à une rotation. La question qui suit est donc : quand est-ce que cette semi-conjugaison est une conjugaison ?

Un important résultat dans cette direction est dû à A. Denjoy. Il a montré que chaque difféomorphisme C^1 du cercle avec nombre de rotation irrationnel et dont la dérivée est de variation bornée est topologiquement équivalent à une rotation. De plus l'hypothèse sur la dérivée est essentielle.

En effet, il a construit des exemples de difféomorphismes C^1 avec nombre de rotation irrationnel qui ne sont pas topologiquement équivalents à une rotation.¹²

Nombreux sont ceux qui ont travaillé sur cette question, c'est-à-dire dans la construction des difféomorphismes du cercle qui ne sont pas conjugués à une rotation (appelés des contre-exemples de Denjoy). Katok (voir [Her]) a donné des exemples d'homéomorphismes du cercle qui sont C^∞ partout sauf en un point et qui sont des contre-exemples de Denjoy. Hall a amélioré ce résultat en construisant des contre-exemples de Denjoy C^∞ avec dérivée nulle en deux points tout au plus. Finalement le travail de J-C. Yoccoz (voir [Yoc84]) nous assure qu'il n'existe pas de contre-exemples de Denjoy analytiques.

En se fondant sur des idées de Hall (voir [Hal81]), nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 8. *Soit p un point du cercle. Pour tout nombre irrationnel $\rho \in [0, 1)$ il existe un homéomorphisme du cercle $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont le nombre de rotation est ρ vérifiant les propriétés suivantes :*

- f est C^∞ par morceaux.
- f est C^∞ difféomorphisme sur $\mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$.
- p est demi-critique plat¹³ pour f .
- f a un intervalle errant.

Il est intéressant de remarquer que cet exemple est le cas dégénéré des applications dites "upper circle maps", et dont tout reste à explorer (voir [Gra10]). Remarquons que pour la classe de fonction que l'on étudie (la classe \mathcal{L}), la question de l'existence ou non d'un contre-exemple de Denjoy est toujours ouverte.

9. Attention : cette relation n'est pas symétrique !

10. Car le cercle est compact.

11. C'est une relation d'équivalence

12. Avec la condition sur la dérivée, violée.

13. Voir 5.1.2 pour une définition, page 94.

Chapitre 1

Endomorphismes du cercle avec un intervalle plat

Dans ce chapitre nous présentons une certaine classe d'endomorphismes du cercle avec un intervalle plat et nous donnons quelques propriétés fondamentales. Nous nous intéressons en particulier au nombre de rotation et à l'ensemble non errant des fonctions considérées.

Nous commençons par introduire quelques concepts et quelques définitions de base.

1.1 Relèvement et degré d'une fonction

Nous notons par \mathbb{R} la droite réelle et nous désignons par \sim une relation d'équivalence sur \mathbb{R} définie par :

$$x \sim y \text{ si } x - y \in \mathbb{Z}.$$

Nous notons la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$ par $[x] := \{y \in \mathbb{R} \mid y \sim x\}$. La classe d'équivalence de 0 est alors juste \mathbb{Z} et chaque classe d'équivalence est un translaté de \mathbb{Z} par un nombre de la classe, c'est-à-dire $[x] = x + \mathbb{Z}$.

Nous définissons alors le cercle \mathbb{S}^1 comme l'ensemble de toutes les classes d'équivalence

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} := \{x + \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Nous pouvons alors considérer la projection naturelle¹ π de \mathbb{R} sur \mathbb{S}^1 comme

$$x \longrightarrow x + \mathbb{Z}$$

qui nous permet de "relever" chaque fonction continue du cercle en une fonction sur \mathbb{R} . Plus précisément :

Proposition 1.1.1. *Si $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ est continue, alors il existe une fonction continue $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$f \circ \pi = \pi \circ F.$$

F est appelée un relevé de f à \mathbb{R} et il est unique à une constante entière additive près.

1. La projection est alors un différentiable, le cercle étant alors muni de structure de variété quotient.

Nous observons que si f est une endomorphisme de \mathbb{S}^1 , alors son relèvement $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a les mêmes propriétés de continuité et de différentiabilité que f . Nous notons la $n^{\text{ème}}$ itérée d'une application $f : X \rightarrow X$ par :

$$f^n = f \circ f^{n-1} \text{ et } f^0 = id_X$$

Proposition 1.1.2. *Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une fonction continue et soit F un relèvement de f . Alors la quantité*

$$\deg(f) := F(x+1) - F(x)$$

est un entier indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et du relèvement F qui est appelée le degré de f .

Démonstration. Nous observons que $F(x+1) - F(x)$ est un entier, en effet $F(x+1) + \mathbb{Z} = f(x+1 + \mathbb{Z}) = f(x + \mathbb{Z}) = F(x) + \mathbb{Z}$. Comme \mathbb{N} est discret, on a par continuité que : $\deg(f) = F(x+1) - F(x)$ doit alors être constant. \square

Définition 1.1.3. *Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une fonction continue et soit F un relèvement de f . On dit que f préserve l'orientation si F est une fonction croissante.*

1.2 Fonctions presque lisse avec un intervalle plat

Nous considérons la classe \mathcal{L} des endomorphismes continus du cercle f de degré 1 pour lesquels il existe un arc ouvert U qui satisfait les propriétés suivantes :

1. L'image de U est un point.
2. La restriction de f à $\mathbb{S}^1 \setminus \overline{U}$ est un difféomorphisme \mathcal{C}^2 sur son image.
3. Soit (a, b) la preimage de U sous la projection naturelle de la droite réelle sur \mathbb{S}^1 . Sur quelque voisinage à droite de b , f s'écrit comme

$$h_r((x - b)^{\ell_r}),$$

ou h_r est un difféomorphisme \mathcal{C}^2 sur un voisinage ouvert de b . De façon similaire, il existe un difféomorphisme \mathcal{C}^2 sur un voisinage à gauche de a tel que f est de la forme

$$h_l((a - x)^{\ell_l}).$$

La couple ordonné (ℓ_l, ℓ_r) est appelé *l'exposant critique* de la fonction. Nous observons que, puisque h_r et h_l sont deux difféomorphismes, alors la couple (ℓ_l, ℓ_r) est ainsi bien défini, et est unique. Si $\ell_l = \ell_r$ on dit que la fonction est *symétrique*.

Dans la suite nous considérerons exclusivement des fonctions symétriques et nous supposons que $h_r(x) = h_l(x) = x$. Pour pouvoir le faire, il suffit d'effectuer un changement de coordonnées \mathcal{C}^2 au voisinage de a et de b , ce qui nous permet de remplacer soit h_r soit h_l par la fonction identité.

Il est ainsi facile de voir que cet espace de fonctions possède deux composantes connexes, chaque fonction de la première composante étant conjuguée à une unique fonction de la seconde. Ainsi, sans aucune perte de généralités, on se restreint aux fonctions de cette classe préservant orientation, on les note par abus, encore \mathcal{L} .

Exemple 1.2.1. Soit $(\ell_g, \ell_d) \in \mathbb{R}^2$ $\ell_g, \ell_d > 0$, $0 < a < b < 1$ et $0 < c < 1$ des nombres réels, alors pour tout x de \mathbb{S}^1 on peut définir la fonction suivante :

$$f_\ell(x) = \begin{cases} c - \frac{c}{a^{\ell_g}}(a-x)^{\ell_g} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ c & \text{si } a < x < b \\ c + \frac{1-c}{(1-b)^{\ell_d}}(x-b)^{\ell_d} & \text{si } b \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Où l'on note pour alléger les équations, $\ell = (\ell_g, \ell_d)$. Nous prolongeons cette fonction à \mathbb{R} par l'équation :

$$f_\ell(x) = f_\ell(x - [x]) + [x]$$

Ainsi, $f_\ell(x+1) = f_\ell(x) + 1$, f_ℓ se projette en une application du cercle, fournissant ainsi un exemple d'endomorphisme du cercle qui appartient à la classe \mathcal{L} , avec exposant critique $\ell = (\ell_g, \ell_d)$.

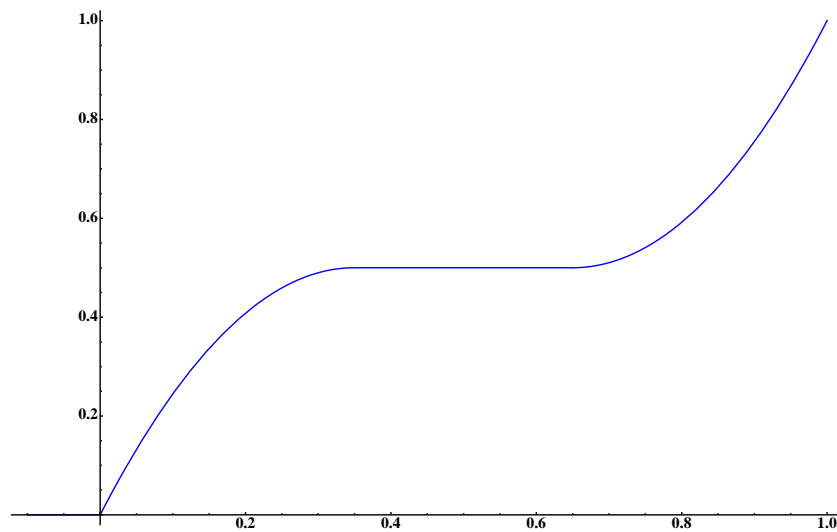


FIGURE 1.1 – Exemple de fonction en \mathcal{L} avec exposant critique $\ell_g = \ell_d = 2$.

1.3 Outils techniques

1.3.1 Notations

Nous introduirons une notation simplifiée pour les images réciproques et directes de l'intervalle plat U . Au lieu de $f^i(U)$ nous écrirons simplement \underline{i} ; par exemple : $\underline{0} = U$. Ainsi, les entiers positifs soulignés représentent des points et les entiers négatifs soulignés représentent des intervalles.

1.3.2 Distance entre des points de l'orbite

Nous notons par $(a, b) = (b, a)$ le plus court intervalle ouvert entre a et b , sans ordre particulier sur ces deux points. La largeur de cette intervalle dans la métrique naturelle du cercle sera notée par $|a - b|$. Nous adopterons cette convention de notation :

- $|\underline{-i}|$ représente la longueur de l'intervalle $\underline{-i}$.

- Considérons un point x et un intervalle $\underline{-i}$ qui ne contient pas x . Alors la distance entre x et le point du bord de $\underline{-i}$ le plus proche de x sera dénotée par $|(x, \underline{-i})|$, et la distance entre x et le point du bord plus loin par $|(x, \underline{-i}]|$.
- Nous définissons par analogie la distance entre les points du bord de deux intervalles $\underline{-i}$ et $\underline{-j}$. Par exemple, $|(\underline{-i}, \underline{-j})|$ est la distance entre les deux intervalles, alors que, $|[\underline{-i}, \underline{-j})|$ est $|\underline{-i}| + |(\underline{-i}, \underline{-j})|$.

1.4 Nombre de Rotation

Poincaré en 1885 a introduit le concept de nombre de rotation pour les homéomorphismes du cercle, un invariant fondamental. Considérons un point particulier de \mathbb{S}^1 , le nombre de rotation d'une transformation du cercle nous donne une indication asymptotique de la rotation moyenne de ce point sur \mathbb{S}^1 sous l'action de la transformation. En réalité, cette quantité ne dépend pas du point choisi et est une caractéristique de la transformation même.

Dans cette section nous introduirons le concept de nombre de rotation et nous donnerons quelques-unes de ces propriétés fondamentales.

Dans toute cette section, f désignera une fonction continue du cercle, qui préserve l'orientation et de degré 1. Nous noterons, F un relevé de f à \mathbb{R} .

Remarque 1.4.1. Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ comme ci-dessus, alors par définition nous pouvons supposer que chacun de ses relevés $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continu et a les propriétés suivantes :

1. pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $F(x+1) = F(x) + 1$,
2. F est une fonction croissante de \mathbb{R} , c'est-à-dire, $F(x_1) \leq F(x_2)$ si $x_1 \leq x_2$.
Par conséquence :
3. pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction F^k est croissante,
4. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$, $F^k(x+r) = F^k(x) + r$.

Les définitions et les propriétés ci-dessous se généralisent facilement aux applications continues du cercles.

Remarquons d'abord que, par le point 4. de la remarque 1.4.1

Lemme 1.4.2. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$F(y) - y \leq F(x) - x + 1$$

Proposition 1.4.3. La quantité,

$$\tau(F) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (F^n(x) - x) \tag{1.4.4}$$

existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et est indépendante de x . Elle dépend uniquement du choix du relevé de la façon suivante : si \tilde{F} est un autre relevé de f , alors $\tau(F) - \tau(\tilde{F}) = F - \tilde{F} \in \mathbb{Z}$. On appelle $\tau(F)$ le nombre de translation de F .

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.4.5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui satisfait à la relation $a_{m+n} \leq a_m + a_{m+k} + L$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, avec k un entier fixé et $L \in \mathbb{R}$ fixé. Alors la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

existe.

Démonstration. Nous observons que $a_{m+k} \leq a_m + a_{2k} + L$, donc $a_{m+n} \leq a_m + a_n + a_{2k} + L = a_m + a_n + L'$. Nous pouvons alors prendre $k = 0$ et avoir $a := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Soit maintenant $a < b < c$ et $n > \frac{2L}{(c-b)}$ tel que $\frac{a_n}{n} < b$, alors pour chaque $l \geq n$ qui vérifie la relation $l(c-b) > 2 \max_{r < n} a_r$ nous pouvons écrire $l = nk + r$ avec $r < n$. Ceci implique que $\frac{a_l}{l} \leq \frac{(ka_n + a_r + KL)}{l} \leq \frac{a_n}{n} + \frac{a_r}{l} + \frac{L}{n} < c$, donc $\overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{a_l}{l} \leq c$.

Puisque c a été choisi arbitrairement $c > a$, la preuve du lemme est complète. \square

Démonstration. Preuve de la Proposition 1.4.3.

Indépendance par rapport à x . D'après les points 3. et 4. de la remarque 1.4.1, si $|x - y| < 1$, alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ $|F^n(y) - F^n(x)| < 1$. Donc

$$\left| \frac{1}{n} |F^n(x) - x| - \frac{1}{n} |F^n(y) - y| \right| \leq \frac{1}{n} (|F^n(x) - F^n(y)| + |x - y|) \leq \frac{2}{n}.$$

Donc le nombre de rotation, s'il existe, ne dépend pas du choix de x .

Existence. Prenons $x \in \mathbb{R}$ et $a_n := F^n(x) - x$. Alors, par le point 4. de la remarque 1.4.1, nous avons que :

$$a_{m+n} = F^{m+n}(x) - x = F^m(F^n(x)) - F^n(x) + a_n \leq a_m + 1 + a_n.$$

Le Lemme 1.4.5 montre que la suite $\frac{a_n}{n}$ converge. Il nous reste à vérifier que la limite est un nombre réel $\tau(F)$. En effet, par le point 4. de la remarque 1.4.1

$$\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (F^{i+1}(x) - F^i(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_i) - x_i) = F(x) - x \geq \min F(y) - y.$$

La preuve de l'existence du nombre de rotation est alors complète.

De plus, nous avons, $\tau(F+m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (F^n(x) + nm - x) = \tau(F) + m$ pour $m \in \mathbb{Z}$; donc $\tau(F)$ est bien défini modulo un entier. \square

La proposition 1.4.3 justifie la terminologie suivante :

Définition 1.4.6. Le nombre de rotation $\rho(f)$ de f est défini comme étant $\tau(F)$ modulo 1.

1.4.1 Propriétés du nombre de rotation

Proposition 1.4.7. Si $\rho(f) = 0$, alors f a un point fixe.

Démonstration. Soit F un relevé de f tel que $F(0) \in [0, 1)$. Nous supposons que f n'a pas un point fixe, alors pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $F(x) - x \notin \mathbb{Z}$ (si $x \in \mathbb{R}$ $F(x) - x \in \mathbb{Z}$, alors $[x]$ est un point fixe pour f) et $0 < F(x) - x < 1$.

Par le point (4) de la remarque 1.4.1 $F - Id$ est une fonction continue et périodique, donc elle atteint son minimum et son maximum, c'est-à-dire, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 < \delta \leq F(x) - x \leq 1 - \delta < 1.$$

En particulier nous pouvons prendre $x = F^i(0)$ et utiliser le fait que $F^n(0) = F^n(0) - 0 = \sum_{i=0}^{n-1} F^{i+1}(0) - F^i(0)$ pour avoir que :

$$\begin{aligned} n\delta &\leq F^n(0) \leq (1 - \delta)n \\ \delta &\leq \frac{F^n(0)}{n} \leq 1 - \delta \end{aligned}$$

En conclusion, si $n \rightarrow \infty$, $\rho(F) \neq 0$, fournit une contradiction. \square

Proposition 1.4.8. $\rho(f)$ est rationnel si et seulement si f a un point périodique.

Démonstration. Supposons que f a un point périodique $[x] \in \mathbb{S}^1$ de période $q \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $f^q([x]) = [x]$, ou autrement, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que pour l'un des relevés F , $F^q(x) = x + p$. Alors, par le point (4) de la remarque 1.4.1, si $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{F^{mq}(x) - x}{mq} = \frac{1}{mq} \sum_{i=0}^{m-1} F^q(F^{iq}(x)) - F^{iq}(x) = \frac{m(F^q(x) - x)}{mq} = \frac{mp}{mq} = \frac{p}{q}$$

et donc $\rho(f) = \frac{p}{q}$.

Pour montrer l'autre implication, nous observons que, par définition du nombre de translation

$$\tau(F^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} ((F^m)^n(x) - x) = m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} (F^{mn}(x) - x) = m\tau(F). \quad (1.4.9)$$

Puisque le nombre de rotation de f est défini comme la classe modulo 1 de $\tau(F)$, (1.4.9) nous dit que si $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors $\rho(f^q) = 0$ et par la Proposition 1.4.7, f a un point périodique. \square

Nous porterons une attention particulière aux applications dont le nombre de rotation est irrationnel. La dynamique étant plus intéressante. Ces applications n'auront alors pas d'orbites périodiques.

Nous allons maintenant examiner la dépendance du nombre de rotation la fonction.

Proposition 1.4.10. $\rho(\cdot)$ est continue pour la topologie uniforme.

Démonstration. Supposons $\rho(f) = \rho$ et soit $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$ tels que $\frac{p'}{q'} < \rho < \frac{p}{q}$.

Nous considérons un relèvement F de f vérifiant $-1 < F^q(x) - x - p \leq 0$. Ceci implique que, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $F^q(x) < x + p$ et puisque la fonction $F^q - Id$ est continue et monotone, alors il existe $\delta > 0$ tel que $F^q(x) < x + p - \delta$.

Alors, chaque petite perturbation \tilde{F} de F dans la topologie uniforme, a la propriété que $\tilde{F}^q(x) < x + p - \delta$ et par conséquence $\tau(\tilde{F}) < \frac{p}{q}$.

La preuve peut être facilement complétée avec un argument similaire utilisé pour $\frac{p'}{q'}$. \square

La définition donnée dans 1.4.4 nous suggère que le nombre de translation est une fonction monotone. En effet, si $F_1 > F_2$ alors $\rho(F_1) \geq \rho(F_2)$. Cela nous amène à considérer le concept suivant d'ordre sur le cercle :

Définition 1.4.11. Nous définissons “ $<$ ” pour deux points x et y sur le cercle comme $[x] < [y] \Leftrightarrow y - x \in (0, \frac{1}{2}) \pmod{1}$, et un ordre partiel “ \prec ” sur la collections des endomorphismes du cercle considérés comme $f_0 \prec f_1 \Leftrightarrow f_0(x) < f_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^1$.

La définition du nombre de rotation implique immédiatement la proposition suivante :

Proposition 1.4.12. $\rho(\cdot)$ est monotone : si $f_1 \prec f_2$, alors $\rho(f_1) \leq \rho(f_2)$.

Remarque 1.4.13. En particulier, si $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une famille de fonctions telle que, pour chaque x , $f_t(x)$ est croissante en t , alors $\rho(f_t)$ est croissante en t .

De plus, aux valeurs irrationnels le nombre de rotation est strictement croissant :

Proposition 1.4.14. Si $f_0 \prec f_1$ et si $\rho(f_0)$ est irrationnel, alors $\rho(f_0) < \rho(f_1)$.

Démonstration. Soient F_0 et F_1 deux relèvements respectivement de f_0 et f_1 avec la propriété que $0 < F_1(x) - F_0(x) < \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, par continuité et périodicité, il existe $\delta > 0$ tel que, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x) - F_0(x) > \delta$.

Nous prenons $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $\frac{p}{q} - \frac{\delta}{q} < \rho(F_0) < \frac{p}{q}$. Alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $F_0^q(x_0) - x_0 > p - \delta$. De plus le fait que

$$F_1^q(x_0) = F_1(F_1^{q-1}(x_0)) > F_0(F_1^{q-1}(x_0)) + \delta > F_0(F_0^{q-1}(x_0)) + \delta = F_0^q(x_0) + \delta > x_0 + p,$$

implique que $F_1^q(x) > x + p$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou $F_1^q(x_1) > x_1 + p$ pour un certain $x_1 \in \mathbb{R}$. Dans les deux cas nous avons que $\rho(F_0) < \frac{p}{q} \leq \rho(F_1)$. \square

Souvent, il sera utile d’identifier une fonction f avec l’un de ses relevé F , et les sous-ensembles de \mathbb{S}^1 avec les sous-ensembles de \mathbb{R} se projetant dessus.

1.5 Fractions continues

Chaque nombre $\alpha \in (0, 1)$ peut être représenté uniquement² comme une fraction continue, c’est-à-dire, par une expression de la forme

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots] := \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}} \quad (1.5.1)$$

où les (a_i) sont des entiers positifs non nuls. La suite (a_i) est finie si et seulement si α est rationnel.

Précisément, les entiers a_i peuvent être obtenus en itérant la transformation de Gauß, $G : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, qui est définie par

$$G(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \forall x \in (0, 1),$$

où $[z]$ dénote la partie entière de z . Si les itérées $G(\alpha), \dots, G^{n-1}(\alpha)$ ne sont pas nuls, alors :

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor, a_2 = \left\lfloor \frac{1}{G(\alpha)} \right\rfloor, \dots, a_n = \left\lfloor \frac{1}{G^{n-1}(\alpha)} \right\rfloor.$$

2. Il y a unicité si α est irrationnel, s’il est rationnel, alors les deux expressions : $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ et $[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$ désigne le même nombre. Ainsi, l’expression est unique si on impose $a_n \neq 1$.

Nous supposons maintenant, $\alpha \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$, ainsi le développement en fraction continue est infini.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous tronquons la fraction continue au niveau n , nous obtenons les fractions $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ qui sont appelées les convergentes de la fraction continue. Les numérateurs p_n et les dénominateurs q_n satisfaisaient les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} p_0 = 0, q_0 = 1, p_1 = 1, q_1 = a_1, \\ p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} & n \geq 1 \\ q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} & n \geq 1 \end{cases} \quad (1.5.2)$$

En utilisant les relations en (1.5.2) nous pouvons facilement montrer par récurrence les propositions suivantes :

Proposition 1.5.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$q_n \geq 2^{\frac{n-1}{2}}$$

Proposition 1.5.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$q_n p_{n-1} - q_{n-1} p_n = (-1)^n$$

Démonstration. Soit $n = 1$, alors par (1.5.2) nous avons que $q_1 p_0 - q_0 p_1 = -1$.

Supposons maintenant que l'assertion soit vraie pour n et nous la montrons pour $n+1$. Alors, par (1.5.2) et par l'hypothèse de récurrence, nous obtenons que :

$$q_n p_{n-1} - q_{n-1} p_n = a_n q_{n-1} p_{n-1} + q_{n-2} p_{n-1} - a_n q_{n-1} p_{n-1} - q_{n-1} p_{n-2} = -(-1)^{n-1}.$$

□

Corollaire 1.5.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}. \quad (1.5.6)$$

Proposition 1.5.7. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$q_n p_{n-2} - q_{n-2} p_n = (-1)^{n-1} a_n.$$

Démonstration. Le preuve est très similaire à celle de la proposition 1.5.4. □

Corollaire 1.5.8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}} \quad (1.5.9)$$

De plus, les convergentes de la fraction continue sont les meilleures approximations rationnelles de α , en effet :

Proposition 1.5.10.

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} \leq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

Démonstration. Nous commençons par montrer par récurrence que si $n \geq 1$ et $t \geq 0$, alors :

$$[a_1, a_2, \dots, a_n + t] = \frac{p_n + tp_{n-1}}{q_n + tq_{n-1}}$$

– Pour $n = 1$ nous avons que

$$[a_1 + t] = \frac{1}{a_1 + t} = \frac{p_1 + tp_0}{q_1 + tq_0}$$

– Nous supposons maintenant que l'hypothèse soit vraie pour n et nous la montrons pour $n + 1$. En utilisant l'hypothèse de récurrence et les formules en (1.5.2) nous avons que :

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} + t] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1} + t}}}}} = \frac{p_n + (\frac{1}{a_{n+1} + t})p_{n-1}}{q_n + (\frac{1}{a_{n+1} + t})q_{n-1}} = \frac{p_{n+1} + tp_n}{q_{n+1} + tq_n}$$

Nous pouvons alors affirmer que

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n + G^{n+1}(\alpha)] = \frac{p_n + G^{n+1}(\alpha)p_{n-1}}{q_n + G^{n+1}(\alpha)q_{n-1}}$$

et après quelques calculs et la proposition 1.5.4

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(G^{n+1}(\alpha)q_n + q_{n-1})}$$

Pour conclure la preuve, il suffit d'observer que :

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{G^{n+1}(\alpha)} \leq a_{n+1} + 1$$

□

Chaque convergente est une meilleure approximation que la précédente :

Proposition 1.5.11.

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| > \left| \alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right|.$$

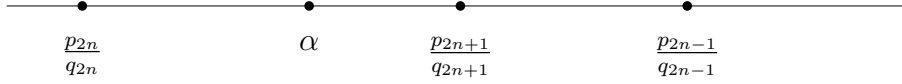
Démonstration. Par la Proposition 1.5.11 et par les relations de récurrence (1.5.2) nous avons que :

$$\left| \alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \leq \frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}} < \frac{1}{q_nq_{n+2}} \leq \frac{1}{q_{n+1}(q_{n+1} + q_n)} \leq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

□

Les résultats obtenus nous permettent de déduire d'importantes propriétés des convergentes d'une fraction continue. L'équation (1.5.9) montre que les convergentes d'ordre pair forment une suite croissante et que les convergentes d'ordre impair forment une suite décroissante et ces deux suites tendent l'une vers l'autre : elles sont adjacentes.

La situation peut être visualisée sur la figure 1.2.

FIGURE 1.2 – Position des convergentes par rapport à α .

Remarquons également que les convergentes d'une fraction continue sont les meilleures approximations du deuxième type pour α , c'est-à-dire, si $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ et $0 \leq q < q_n$, alors :

$$|q_n \alpha - p_n| < |q \alpha - p| \quad (1.5.12)$$

De plus nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.5.13. *Chaque meilleure approximation du deuxième type pour α est l'une des ses convergentes.*

Démonstration. Nous supposons que la fraction $\frac{a}{b}$ soit une meilleure approximation du deuxième type pour α .

1° case : Si $\frac{a}{b} < a_0$, alors

$$|1\alpha - a_0| < \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \leq |b\alpha - a| \quad (b \geq 1)$$

Dans ce cas $\frac{a}{b}$ ne peut alors pas être une meilleure approximation du deuxième type.

2° case : Supposons que $\frac{a}{b} \geq a_0$. Si $\frac{a}{b}$ ne coïncide pas avec l'une des convergentes, alors soit il doit être entre deux convergentes, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, soit $\frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}$.

Dans le premier cas nous pouvons remarquer que :

1. $\frac{1}{bq_{n-1}} \leq \left| \frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \leq \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$, donc $b > q_n$,
2. $\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \geq \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{1}{bq_{n+1}}$, donc $|b\alpha - a| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n \alpha - p_n|$.

Ceci montre que $\frac{a}{b}$ ne peut pas être la meilleure approximation du premier type.

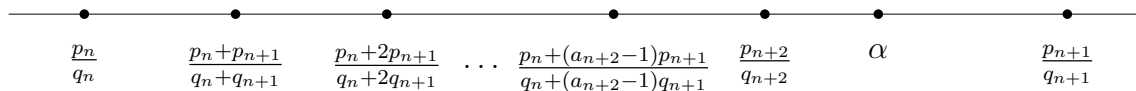
Il nous reste alors à étudier le cas $\frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}$. Nous avons :

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \geq \left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{1}{bq_1}$$

donc

$$|b\alpha - a| \geq \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1} \geq |1\alpha - a_0|$$

Dans ce cas aussi, la fraction $\frac{a}{b}$ ne peut pas être la meilleure approximation du deuxième type. □

FIGURE 1.3 – Position des quotients intermédiaires pour n pair.

Nous pouvons alors affirmer que (1.5.12) est vraie pour toute les fractions de la forme $\frac{p}{q}$ avec $0 \leq q < q_{n+1}$, $q \neq q_n$ et q_{n+1} est le plus petit des entiers positifs $q \in \mathbb{N}$ tel que $|q_n \alpha - p_n| > |q \alpha - p|$, avec $p \in \mathbb{Z}$. En d' autres termes

$$q_{n+1} = \min\{q \in \mathbb{N} : |q_n \alpha - p_n| > |q \alpha - p|\} \quad (1.5.14)$$

Les fractions $\frac{p_n + i p_{n+1}}{q_n + i q_{n+1}}$, pour $0 < i < a_{n+2}$ sont appelées les quotients intermédiaires. Elle sont situées entre $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ et elles forment une suite croissante pour n pair (Figure 1.3) et une suite décroissante pour n impair.

1.5.1 L'ordre des points sur le cercle

Le développement en fraction continue du nombre de rotation d'une application du cercle, donne des informations importantes sur la dynamique de cette dernière.

Soit $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ la rotation du cercle d'angle irrationnel $\alpha \in (0, 1)$ et soit $\frac{p_n}{q_n}$ les convergentes de α . Nous rappelons que R_α est définie, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, par

$$R_\alpha(x + \mathbb{Z}) = (x + \alpha) + \mathbb{Z}$$

Soit $x + \mathbb{Z}$ un point arbitraire du cercle. Afin d'alléger les notations, on notera x au lieu de $x + \mathbb{Z}$. Nous voulons étudier la position sur le cercle des itérées de x sous l'action de R_α . Cette position est fortement liée à la théorie des fractions continues.

Lemme 1.5.15. *Soit $I_n = (x, R_\alpha^{q_n}(x))$ l'arc entre x et $R_\alpha^{q_n}(x)$ qui contient le point $R_\alpha^{q_{n+2}}(x)$. Alors :*

- sur I_n il y a pas des points $R_\alpha^i(x)$ avec $q_{n+1} \leq i < q_{n+1} + q_n$,
- le premier point $R_\alpha^i(x)$ avec i minimal $i \geq q_{n+1}$ qui tombe dans I_n est $R_\alpha^{q_{n+1}+q_n}(x)$,
- il y a pas de points $R_\alpha^i(x)$ pour $0 \leq i < q_{n+1} + q_n$ dans l'arc

$$(R_\alpha^{q_{n+1}+q_n}(x), R_\alpha^{q_n}(x)) \subset I_n$$

Démonstration. Supposons qu'il existe un $0 \leq i < q_{n+1} + q_n$ tel que :

$$R_\alpha^{q_n}(x) \in (R_\alpha^{q_{n+1}+q_n}(x), R_\alpha^{q_n}(x))$$

alors, par (1.5.12) $i > q_n$ et $0 < i - q_n < q_{n+1}$. Cela nous dit que le point $R_\alpha^{i-q_n}(x) \in (R_\alpha^{q_{n+1}}(x), x)$ et c'est en contradiction avec la définition de q_{n+1} voir (1.5.14).

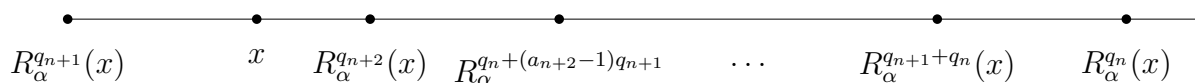


FIGURE 1.4 – Points dans I_n pour n pair et $a_{n+2} > 1$

Supposons maintenant qu'il existe un $q_{n+1} \leq i < q_{n+1} + q_n$ tel que :

$$R_\alpha^i(x) \in I_n \setminus (R_\alpha^{q_{n+1}+q_n}(x), R_\alpha^{q_n}(x)) = (x, R_\alpha^{q_{n+1}+q_n}(x))$$

Dans ce cas $0 \leq i - q_{n+1} < q_n$ et $R_\alpha^{i-q_{n+1}}(x) \in (x_0, R_\alpha^{q_n}(x))$ qui est en contradiction avec la définition de q_n . \square

Puisque R_α est une isométrie, les points $R_\alpha^{iq_{n+1}+q_n}(x)$, pour $i \in \{1, a_{n+2}\}$ sont dans l'arc I_n dans l'ordre indiqué sur la figure 1.4.

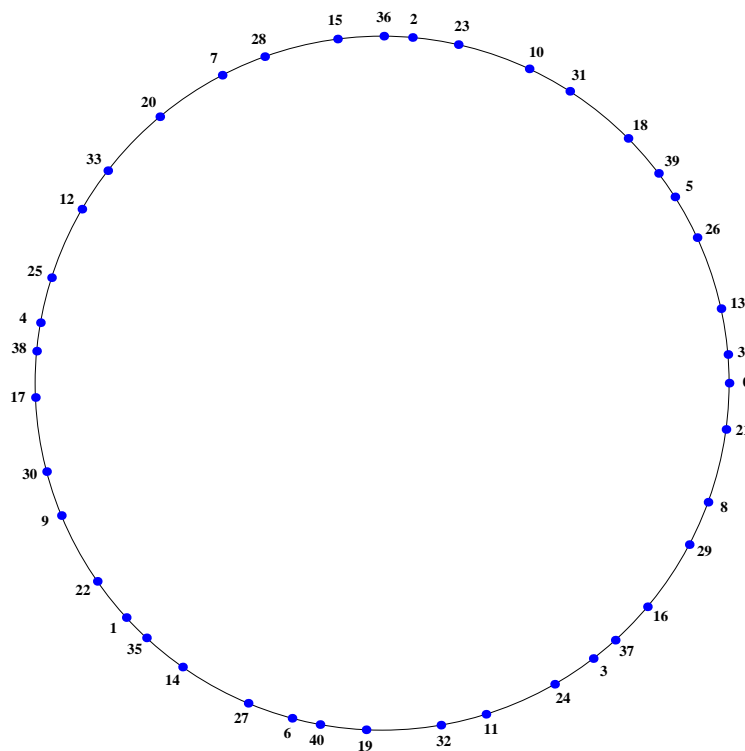


FIGURE 1.5 – Les 40 premiers points de l'orbite de 0 sous la rotation d'angle $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Lemme 1.5.16. Soit $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une rotation de angle α irrationnel et soient $\frac{p_n}{q_n}$ les convergentes de développement en fraction continues de α . Soient x un point fixé pour R_α , $J_n = (R_\alpha^{-q_n}(x), R_\alpha^{q_n}(x))$ et $I_{-n} = (R_\alpha^{-q_n}(x), x)$. Alors les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour $0 \leq i < q_{n+1}$, les arcs $R_\alpha^i(I_{-n})$ sont disjoints,

2. chaque point du cercle appartient au maximum à deux arcs de la famille $R_\alpha^i(J_n)$, $0 \leq i < q_{n+1}$,
3. les points $R_\alpha^{-q_n}(x)$, $R_\alpha^{-q_n-q_{n+1}}(x)$, $R_\alpha^{-q_{n+1}}(x)$ et $R_\alpha^{q_n}(x)$ se trouvent en ordre cyclique sur le cercle.

Démonstration. Nous montrerons séparément les trois points.

1. Supposons que la thèse ne soit pas vrai, c'est-à-dire qu'il existe $j, k < q_{n+1}$ tels que $R_\alpha^j(I_{-n}) \cap R_\alpha^k(I_{-n}) \neq \emptyset$ et nous assumons que $j < k$. Nous avons alors que $R_\alpha^{k-j}(I_n) \cap I_n \neq \emptyset$ avec $0 < k-j < q_{n+1}$ et ça est en contradiction avec la définition de q_{n+1} in (1.5.14).
2. Pour montrer ce point, il est suffisant d'observer que $J_n \subset I_{-n} \cup R_\alpha^j(I_{-n}) \cup \{x\}$ et d'appliquer alors le point 1.
3. Vient de l'arrangement des points $R_\alpha^{q_n}(x)$, $R_\alpha^{q_{n+1}+q_n}(x)$, x , $R_\alpha^{q_{n+1}}(x)$ et $R_\alpha^{-q_n}(x)$ sur le cercle et le fait que R_α est une isométrie.

□

1.6 Partitions du cercle par les fonctions de \mathcal{L}

Dans cette partie, nous supposons que $f \in \mathcal{L}$, et nous nous intéressons comme dans la section 1.2 à la position de l'orbite (passée et future) de l'intervalle plat.

Étant donné que f préserve l'ordre et n'a pas de points périodiques, il existe alors une fonction continue qui préserve l'ordre $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que $h \circ f = R_\alpha \circ h$, où α est le nombre de rotation de f et R_α est la rotation d'angle α (un théorème de Poincaré).

En particulier, l'ordre des points d'une orbite de f est le même que l'ordre des points d'une orbite de R_α . Donc, les résultats pour R_α dans la section précédente peuvent être transportés pour f , via la semi-conjugaison h .

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous construisons une partition \mathcal{P}_n du cercle \mathbb{S}^1 , appelée la *partition dynamique*, qui sera utile pour l'étude des propriétés géométriques de f , (voir [Gra10]).

Au niveau n , \mathcal{P}_n est engendrée par les premières $q_n + q_{n+1}$ préimages de U et consiste en

$$\mathcal{I}_n := \{\underline{-i} : 0 \leq i \leq q_{n+1} + q_n - 1\},$$

et de tous les trous entre ces intervalles.

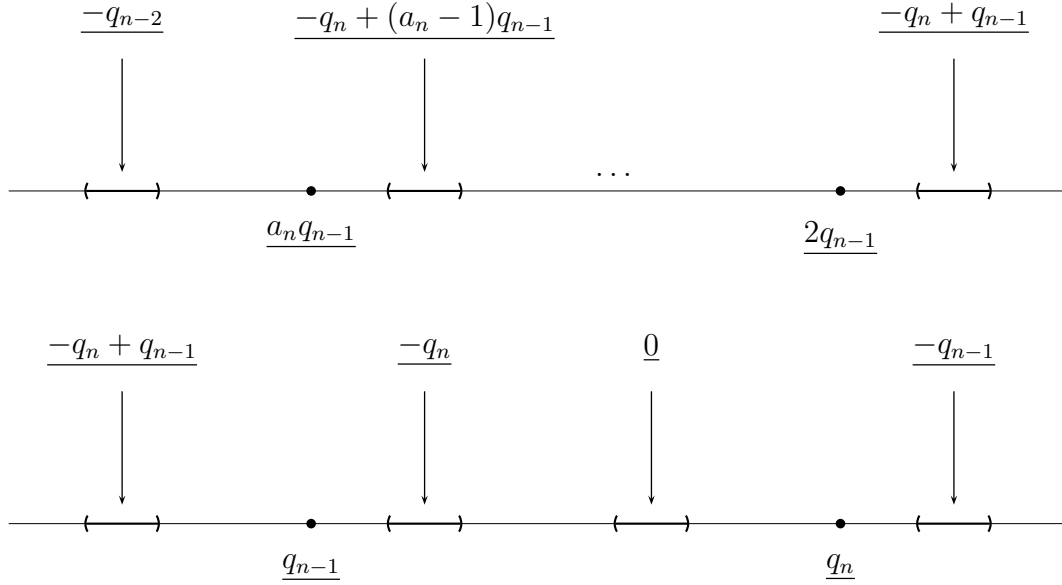
Il y a deux types des trous :

- Les trous “longs” sont les intervalles I_0^n : pour n pair, c'est l'intervalle entre $\underline{-q_n}$ et $\underline{0}$, et pour n impair, il s'agit de l'intervalle entre $\underline{0}$ et $\underline{-q_n}$, ainsi que ses primages,

$$I_i^n := f^{-i}(I_0^n), i = 0, 1, \dots, q_{n+1} - 1$$

- Les trous “courts” sont l'intervalle I_0^{n+1} : qui est l'intervalle entre $\underline{0}$ et $\underline{-q_{n+1}}$ pour n pair, ou l'intervalle entre $\underline{-q_{n+1}}$ et $\underline{0}$ pour n impair, ainsi que ses primages,

$$I_i^{n+1} := f^{-i}(I_0^{n+1}), i = 0, 1, \dots, q_n - 1$$


 FIGURE 1.6 – Structure de la partition \mathcal{P}_{n-1} pour n pair et $a_n > 1$.

Nous expliquons la structure de ces partitions qui provient des considérations faites pour la rotation dans la sous-section 1.5.1.

Prenons deux partitions dynamiques consécutives d'ordre n et d'ordre $n + 1$. La deuxième est clairement un raffinement de la première. Tous les trous "courts" de \mathcal{P}_n deviennent les trous "longs" de \mathcal{P}_{n+1} , alors que tous les trous "longs" de \mathcal{P}_n se divisent en a_{n+2} préimages de U , a_{n+2} trous "longs" et un trou "court" de la partition suivante \mathcal{P}_{n+1} :

$$I_i^n = \bigcup_{j=1}^{a_{n+2}} f^{-i-q_n-jq_{n+1}}(U) \cup \bigcup_{j=0}^{a_{n+2}-1} I_{i+q_n+jq_{n+1}}^{n+1} \cup I_i^{n+2} \quad (1.6.1)$$

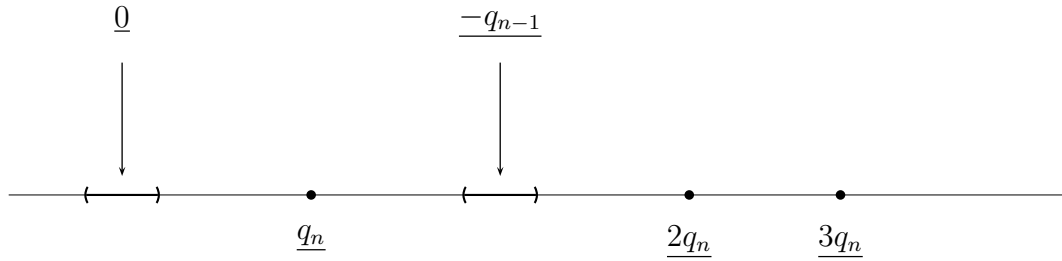
La plupart des preuves de cette thèse dépendent de la position des points et des intervalles de \mathcal{P}_n . Il est alors nécessaire de rappeler les figures suivantes qui montrent la position de ces objets autour de l'intervalle plat $\underline{0}$.

Sur la figure 1.7, nous indiquons les points $\underline{q_n}$, $\underline{2q_n}$ et $\underline{3q_n}$ pour n pair et $a_n = 1$.

Nous aurons besoin de l'assertion suivante,

Assertion 1.6.2. *Soit $f \in \mathcal{L}$, et x, y, z trois points du cercle qui ne sont pas dans l'intervalle plat, avec y entre x et z et tels que, des trois points, x est le plus proche à l'intervalle plat. Alors il existe une constante uniforme $K > 0$ telle que :*

$$\frac{|f(z) - f(y)|}{|f(z) - f(x)|} \leq K \frac{|z - y|}{|z - x|}$$

FIGURE 1.7 – Zoom à droite de l'intervalle plat pour n pair et $a_n = 1$.

On dit que f est *quasisymétrique*³ sur $\mathbb{S}^1 \setminus U$.

Démonstration. Puisque f est un C^1 difféomorphisme sur $\mathbb{S}^1 \setminus U$, qui est compact, le module de la dérivée atteint un minimum m et un maximum M .

En utilisant le théorème des accroissements finis deux fois, nous obtenons :

$$\frac{|f(z) - f(y)|}{|f(z) - f(x)|} \leq \frac{M}{m} \frac{|z - y|}{|z - x|}$$

On peut ainsi poser $K = \frac{M}{m}$. □

1.7 Distorsion et dérivée Schwarzienne

Nous introduisons ici l'un des outils techniques principaux utilisés dans beaucoup de preuves. En effet, souvent nous aurons à contrôler la distorsion des itérées d'une fonction sur certains intervalles.

Définition 1.7.1. Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une fonction de classe C^1 du cercle et soit $T \subset \mathbb{S}^1$ un intervalle non vide tel que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in T$. Alors la distorsion de f sur T est définie comme étant :

$$\sup_{(x,y) \in T} \log \frac{|f'(x)|}{|f'(y)|}$$

Cette quantité mesure la non linéarité de f . On peut remarquer par exemple que la distorsion d'une application linéaire est nulle.

Un autre outil particulièrement utilisé dans la théorie des systèmes dynamiques en une variable, est la dérivée Schwarzienne. Le lecteur peut consulter par exemple [GSS01] pour une fine utilisation de cet outil.

Définition 1.7.2. Soit f une fonction de classe C^3 du cercle telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}^1$. La dérivée Schwarzienne de f est l'opérateur différentiel défini par :

$$Sf = (\log f')'' - \frac{1}{2}((\log f')')^2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \quad (1.7.3)$$

Observons les deux faits suivants :

3. La notion de quasisymétrie est bien plus vaste, nous utiliserons seulement ce fait.

1. Par l'équation 1.7.3 nous avons facilement que :

$$\begin{aligned} S(g \circ f) &= (Sg \circ f) \times (f')^2 + Sf \text{ et} & (1.7.4) \\ Sf^n(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} Sf(f^i(x)) \times (f^i(x))' \end{aligned}$$

2. Un outil important dans l'étude de la distorsion d'une fonction est l'opérateur de non linéarité $Nf = (\log f)'$. En effet

$$Nf = (\log f)'' = \frac{f''}{f'}$$

et donc si f est un difféomorphisme sur (x, y) alors

$$\log \frac{f'(y)}{f'(x)} = \int_x^y \frac{f''(t)}{f'(t)} dt = \int_x^y Nf(t) dt.$$

Cet opérateur est lié avec la dérivée Schwarzienne dans la façon suivante :

$$Sf = (Nf)' - \frac{1}{2}(Nf)^2$$

Ainsi, il est aisé de voir que l'étude de la distorsion d'une application est strictement liée à l'estimation de la dérivée Schwarzienne.

Cet outil est profondément ancré dans la dynamique réelle. Une autre importante référence dans le sujet est [Koz00]. En effet, l'auteur montre comment outrepasser la condition sur la négativité de la dérivée Schwarzienne. Ces techniques ont permis de démontrer une conjecture d'Anosov : la densité des applications unimodales hyperboliques pour la topologie \mathcal{C}^s , $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, voir [Koz03].

1.7.1 Le Birapport

Un autre façon de mesurer une distorsion est de considérer un couple d'intervalles adjacents $(a, b), (b, c)$ qui ont un point du bord en commun et de mesurer la distorsion à travers la fonction $R((a, b), (b, c)) = \frac{|b-a|}{|c-b|}$, c'est-à-dire d'évaluer le nombre

$$R(f, (a, b), (b, c)) = \frac{R((f(a), f(b)), (f(b), f(c)))}{R((a, b), (b, c))}.$$

On remarque que la distorsion d'une fonction différentiable f dans un intervalle T est bornée si et seulement s'il existe une borne pour $R(f, (a, b), (b, c))$ pour chaque couple d'intervalles adjacents $(a, b), (b, c) \subset T$.

Si une fonction f a des points critiques on ne peut pas espérer avoir une borne pour la non linéarité. Au lieu de considérer trois points consécutifs, nous en considérons quatre et estimons des birapports. En particulier nous définissons deux différents birapports :

Définition 1.7.5. Soient $a < b < c < d$ quatre points sur le cercle, alors nous pouvons définir les birapports **Cr** et **Poin** de ces quatre points comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{Cr}(a, b, c, d) &:= \frac{|b-a||d-c|}{|c-a||d-b|}, \\ \mathbf{Poin}(a, b, c, d) &:= \frac{|d-a||b-c|}{|c-a||d-b|}. \end{aligned}$$

Ceci étant défini, nous essayons maintenant de comprendre comment une fonction distorde le birapport d'une configuration de quatre points.

Commençons par considérer le cas du birapport **Poin**.

Le difféomorphisme avec dérivée Schwarzienne négative augmente le cross ratio **Poin** :

$$\mathbf{Poin}(f(a), f(b), f(c), f(d)) > \mathbf{Poin}(a, b, c, d).$$

Dans le cas général, sans l'hypothèse sur la dérivée Schwarzienne (négative), nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.7.6. *Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 avec des points critiques non plats. Alors il existe une fonction bornée et croissante $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\sigma(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ qui satisfait la propriété suivante : Soit $[b, c] \subset [a, d]$ deux intervalles tels que $f^n|_{[a, d]}$ est un difféomorphisme. Alors*

$$\mathbf{Poin}(f^n(a), f^n(b), f^n(c), f^n(d)) \geq \exp\left(-\sigma(\tau) \sum_{i=0}^{n-1} |f^i([a, b])|\right) \mathbf{Poin}(a, b, c, d),$$

où $\tau = \max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} |f^i((c, d])|$.

Les démonstrations peuvent être trouvées par exemple dans [vS90].

Nous formulons maintenant le résultat qui nous permet de contrôler la distorsion du birapport de **Cr** sous itération. Ce résultat est énoncé pour les fonctions de la classe \mathcal{L} , mais est bien plus général, et reste vrai pour une classe bien plus large.

Le lecteur peut se référer à [Świ88] pour le cas général, et [Gra10] pour notre situation.

Nous considérons une chaîne de quadruplets

$$\bigcup_{i=0}^n \{(a_i, b_i, c_i, d_i)\}$$

telle que chaque élément est envoyé sur le suivant par f . Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- Il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que chaque point du cercle appartient au plus à k intervalles (a_i, d_i) .
- Les intervalles (b_i, c_i) n'intersectent pas \emptyset .

Alors, il existe une constante $K > 0$, indépendante de l'ensemble des quadruplets, telle que :

$$\log \frac{\mathbf{Cr}(a_n, b_n, c_n, d_n)}{\mathbf{Cr}(a_0, b_0, c_0, d_0)} \leq K$$

1.7.2 Le Principe de Koebe

Un autre outil très utile dans ces études est appelé *le principe de Koebe*. Ce principe affirme qu'une fonction, dont le birapport a distorsion bornée, a une non linéarité bornée en dehors des points critiques.

De nombreux mathématiciens ont étudiés cette question.

Nous présentons une version qui a été prouvée par J.Graczyk, D.Sands et G.Swiątek dans [GSS04].

Théorème 1.7.7. *Soit T un intervalle compact et soit $f : I \rightarrow I$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 avec points critiques non plats. Alors il existe une fonction jauge σ qui satisfait à la propriété suivante : si $J \subset T$ sont deux intervalles ouverts et si $n \in \mathbb{N}$ est tel que f^n est un difféomorphisme sur T alors, pour tout $x, y \in J$, nous avons :*

$$\frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \geq \frac{\exp(-\sigma(\max_{i=0}^{n-1} |f^i(T)|) \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(J)|)}{(1 + \text{dist}(f^n(J), \partial f^n(T)))^2}. \quad (1.7.8)$$

Dans le reste de la thèse nous utiliserons une version simplifiée du théorème 1.7.7 :

Proposition 1.7.9. *Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 avec points critiques non plats et soit $J \subset T$ deux intervalles du cercle. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :*

1. f^n est un difféomorphisme sur T ,
2. $\sum_{i=0}^{n-1} |f^i(J)|$ est bornée,
3. $|f^n(J)| \leq K \text{dist}(f^n(J), \partial f^n(T))$ avec K une constante positive.

Alors il existe une constante positive C telle que, pour chaque paire de sous-intervalles A et B de J

$$\frac{|f^n(A)|}{|f^n(B)|} \geq C \frac{|A|}{|B|}.$$

Démonstration. Nous observons que d'après les hypothèses 1, 2 et 3, la deuxième partie de l'inégalité (1.7.8) est bornée inférieurement par une constante positive. Il suffit alors de choisir $x \in A$ et $y \in B$ et d'intégrer la formule 1.7.8 afin de conclure. \square

1.8 Échelle près d'un point critique et l'ensemble non errant

Dans la première partie des deux prochains chapitres nous étudierons la "géométrie" de fonctions de la classe \mathcal{L} à proximité de l'intervalle plat. Cette quantité est mesurée par la suite :

$$\tau_n := \frac{|(\underline{0}, \underline{q}_n)|}{|(\underline{0}, \underline{q}_{n-2})|}$$

Quand $\tau_n \rightarrow 0$ on dit que la géométrie de la fonction est "dégénérée".

Quand τ_n est bornée loin de zéro, on dit que la géométrie est "bornée".

Souvent, il sera plus simple d'estimer la quantité suivante :

$$\alpha_n := \frac{|(-\underline{q}_n, \underline{0})|}{|(-\underline{q}_n, \underline{0})|}$$

Observons que $\alpha_n > \tau_n$.

Dans la seconde partie des deux prochains chapitres, on s'intéressera à l'étude de la dimension de Hausdorff de l'ensemble non errant d'une fonction f de la classe \mathcal{L} .

Définition 1.8.1. *Un point x appartient à l'ensemble non errants Ω si et seulement si pour tout voisinage ouvert $V \ni x$ il existe un entier $n > 0$ tel que :*

$$V \cap f^n(V) \neq \emptyset$$

1.8. ÉCHELLE PRÈS D'UN POINT CRITIQUE ET L'ENSEMBLE NON ERRANT 33

Dans [MvSdMM90], les auteurs ont donné une description plus précise de cet ensemble :

Théorème 1.8.2 ([MvSdMM90]). *Soit $f \in \mathcal{L}$, telle que l'exposant critique $\ell > 1$, U son intervalle plat, et Ω son ensemble non errant. Alors :*

$$\Omega = \mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(U)$$

Chapitre 2

Functions in \mathcal{L} with rotation number of bounded type

In this chapter we present the results obtained for functions in \mathcal{L} with rotation number of bounded type. The chapter is divided into two sections : the first one deals with the sequence of scalings and the second one concern the study of the Hausdorff dimension of the non-wandering set. All the results of this chapter are contained in the paper [Pal13]. We start with a basic definition :

Définition 2.0.1. *Let $\rho(f)$ be the rotation number of a function $f \in \mathcal{L}$ and let $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ be the representation in infinite continued fraction of $\rho(f)$. We say that $\rho(f)$ is of bounded type if and only if there exist a positive real number M such that, for any i $a_i < M$.*

2.1 Sequence of scalings for function in \mathcal{L} with rotation number of bounded type

Théorème 2.1.1. *Suppose that $f \in \mathcal{L}$ has an irrational rotation number of bounded type.*

1. *If the critical exponent $\ell \leq 2$, then the scalings τ_n tend to zero at least exponentially fast.*
2. *If the critical exponent $\ell > 2$, then the sequence τ_n is bounded away from zero.*

The second claim is completely proved in [GJS⁺95], while the first claim is proved under the additional assumption that the Schwarzian derivative is strictly smaller than zero. In the following we explain as remove the hypotheses on Schwarzian derivative.

2.1.1 Proof of theorem 2.1.1

The negative Schwarzian is used only to prove the expansion property of the cross-ratio **Poin** which is defined on ordered quadruples $a < b < c < d$ by

$$\mathbf{Poin}(a, b, c, d) := \frac{|d - a||b - c|}{|c - a||d - b|}.$$

Diffeomorphisms with negative Schwarzian derivative increase the cross-ratio **Poin** :

$$\mathbf{Poin}(f(a), f(b), f(c), f(d)) > \mathbf{Poin}(a, b, c, d).$$

In general, without the assumption of negative Schwarzian, the following holds.

Théorème 2.1.2. *Let f be a C^2 map with no flat critical points. There exists a bounded increasing function $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ with $\sigma(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0$ with the following property. Let $[b, c] \subset [a, d]$ be intervals such that $f^n|_{[a,d]}$ is a diffeomorphism. Then*

$$\mathbf{Poin}(f^n(a), f^n(b), f^n(c), f^n(d)) \geq \exp\{-\sigma(\tau) \sum_{i=0}^{n-1} |f^i([a, b])|\} \mathbf{Poin}(a, b, c, d),$$

where $\tau = \max_{i=0, \dots, n-1} |f^i((c, d])|$.

We recall the notation used in [GJS⁺95], let

$$\alpha_n = \frac{|(-q_n, \underline{0})|}{|[-q_n, \underline{0})|},$$

$$\sigma_n = \frac{|(\underline{0}, q_n)|}{|(\underline{0}, q_{n-1})|}$$

and

$$s_n = \frac{|[-q_{n-2}, \underline{0})|}{|\underline{0}|}.$$

Théorème 2.1.3. *For n sufficiently large the following inequality holds :*

$$(\alpha_n)^\ell \leq K_{0,n} K_{1,n}, \dots, K_{a_n-1,n} C_n \tilde{M}_n(\ell) \alpha_{n-2}^2, \quad (2.1.4)$$

where for every $i \in \{0, \dots, a_n - 1\}$ if we denote by

$$\tau_{i,n} = \max_{j=0, \dots, q_{n-1}-2} \left| f^j((iq_{n-1} + 1, \underline{-q_{n-1} + 1})) \right|$$

and by

$$\rho_n = \max_{j=0, \dots, q_{n-2}-2} \left| f^j((a_n q_{n-1} + 1, \underline{1})) \right|$$

then

$$\begin{aligned} K_{i,n} &= e^{\sigma(\tau_{i,n}) \sum_{j=0}^{q_{n-1}-2} |f^j(\underline{-q_n + iq_{n-1} + 1})|}, \\ C_n &= e^{\sigma(\rho_n) \sum_{j=0}^{q_{n-2}-2} |f^j(\underline{-q_{n-2} + 1})|} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

and

$$\tilde{M}_n(\ell) = s_{n-1}^2 \cdot \frac{2}{\ell} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{2(\ell-1)}{\ell} C_n s_{n-1} \alpha_{n-1}}} \right) \cdot \frac{1}{1 - \alpha_{n-2}} \cdot \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-2}}.$$

Démonstration. For large n ,

$$\alpha_n^\ell = \frac{|(-q_n + \underline{1}, \underline{1})|}{|[-q_n + \underline{1}, \underline{1})|},$$

which is certainly less than

$$\mathbf{Poin}(\underline{-q_n + 1}, (\underline{1}, \underline{-q_{n-1} + 1})).$$

By Theorem 2.1.2 there exists a constant

$$K_{0,n} = e^{\sigma(\max_{j=0, \dots, q_{n-1}-2} |f^j((\underline{1}, \underline{-q_{n-1} + 1}))|) \sum_{j=0}^{q_{n-1}-2} |f^j(\underline{-q_n + 1})|}$$

such that

$$\alpha_n^\ell \leq K_{0,n} \delta_n(1) \cdot s_n(1), \quad (2.1.6)$$

with

$$\delta_n(k) = \frac{|(-q_n + kq_{n-1}, kq_{n-1})|}{|[-q_n + kq_{n-1}, kq_{n-1}]|}$$

and

$$s_n(k) = \frac{|[-q_n + kq_{n-1}, \underline{0}]|}{|(-q_n + kq_{n-1}, \underline{0})|}.$$

By the Mean Value Theorem, f transforms the intervals defining $\delta_n(k)$ into a pair whose ratio is

$$\left(\frac{u_k}{v_k}\right) \delta_n(k)$$

where u_k is the derivative of x^ℓ at a point in the interval U_k between $\underline{-q_n + kq_{n-1}}$ and $\underline{kq_{n-1}}$, while v_k is the derivative at a point in

$$V_k = U_k \cup \underline{-q_n + kq_{n-1}}.$$

Observe that for n sufficiently large,

$$u_1 < v_1 < u_2 < v_2 < \cdots < u_{a_n} < v_{a_n}.$$

Moreover

$$f(\delta_n(k)) \leq \mathbf{Poin}(\underline{-q_n + kq_{n-1} + 1}, (\underline{kq_{n-1} + 1}, \underline{-q_{n-1} + 1}))$$

which by Theorem 2.1.2 is less than

$$K_{k,n} \mathbf{Poin}(\underline{-q_n + (k+1)q_{n-1}}, ((k+1)q_{n-1}, \underline{0})).$$

So, the sequence of inequalities above can be rewritten in the form

$$\frac{u_k}{v_k} \delta_n(k) \leq K_{k,n} \cdot s_n(k+1) \cdot \delta_n(k+1). \quad (2.1.7)$$

Now, starting from inequality (2.1.6) and applying $a_n - 1$ times (2.1.7) we obtain

$$(\alpha_n)^\ell \leq K_{0,n} \cdots K_{a_n-1,n} \delta_n(a_n) \cdot \frac{v_{a_n-1}}{u_1} \cdot s_n(1) \cdots s_n(a_n).$$

Note that $s_n(1) \cdots s_n(a_n) \leq s_n$ and that

$$\frac{v_{a_n-1}}{u_1} \leq \left(\frac{|(-q_{n-2}, \underline{0})|}{|(\underline{q_{n-1}}, \underline{0})|} \right)^{\ell-1} \leq \frac{|(-q_{n-2}, \underline{0})|}{|(\underline{q_{n-1}}, \underline{0})|}$$

hence

$$(\alpha_n)^\ell \leq K_{0,n} \cdots K_{a_n-1,n} \delta_n(a_n) \cdot \frac{|(-q_{n-2}, \underline{0})|}{|(\underline{q_{n-1}}, \underline{0})|} \cdot s_n$$

which can be rewritten in the form

$$(\alpha_n)^\ell \leq K_{0,n} \cdots K_{a_n-1,n} s_n \nu_{n-2} \mu_{n-2} \alpha_{n-2}, \quad (2.1.8)$$

where

$$\nu_{n-2} = \frac{|[-q_{n-2}, \underline{0}]|}{|(\underline{q}_{n-1}, \underline{0})|} \cdot \frac{|[-q_{n-2}, \underline{0}]|}{|[-q_{n-2}, a_n q_{n-1}]|},$$

and

$$\mu_{n-2} = \frac{|(-q_{n-2}, a_n q_{n-1})|}{|(-q_{n-2}, \underline{0})|}.$$

To conclude the proof we have to estimate ν_{n-2} and μ_{n-2} .

For ν_{n-2} , observe that

$$|[-q_{n-2}, \underline{0}]| \leq |(q_{n-3}, \underline{0})|,$$

so that

$$\nu_{n-2} \leq \frac{1}{\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}} \cdot \frac{1}{1 - \alpha_{n-2}}. \quad (2.1.9)$$

To estimate μ_{n-2} , we use an elementary lemma (Lemma 3.1 in [GJS⁺95]).

Lemme 2.1.10. *For any pair of numbers $x > y$ the inequality*

$$\frac{x^\ell - y^\ell}{x^\ell} \geq \left(\frac{x-y}{x}\right) \left(\ell - \frac{\ell(\ell-1)}{2} \left(\frac{x-y}{x}\right)\right)$$

holds.

Now, apply f to the intervals defining the ratio μ_{n-2} . By the previous lemma, the resulting ratio is larger than

$$\mu_{n-2} \left(\ell - \frac{\ell(\ell-1)}{2} \mu_{n-2}\right).$$

The cross-ratio

$$\mathbf{Poin}(\underline{-q_{n-2} + 1}, (\underline{a_n q_{n-1} + 1}, \underline{1}))$$

is larger again; so, by Theorem 2.1.2, there exists a constant C_n such that

$$\mu_{n-2} \left(\ell - \frac{\ell(\ell-1)}{2} \mu_{n-2}\right) \leq C_n \cdot s_{n-1} \cdot \sigma_n \sigma_{n-1}. \quad (2.1.11)$$

Solving this quadratic inequality we have that

$$\mu_{n-2} \leq \frac{2}{\ell} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{2(\ell-1)}{\ell} C_n s_{n-1} \sigma_n \sigma_{n-1}}} \right) \cdot C_n \cdot s_{n-1} \cdot \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-2}}. \quad (2.1.12)$$

Combining (2.1.8), (2.1.9), (2.1.11) and (2.1.12) we conclude the proof. \square

Convergence of the Sequence α_n The convergence of $\prod_{j=0}^n K_{i,j}$ and $\prod_{j=0}^n C_j$ is assured by the following lemma :

Lemme 2.1.13. *There exists $0 < \lambda < 1$ such that for every $i \in \{0, \dots, a_n - 1\}$ and for every n large enough, $K_{i,n} \leq e^{\sigma(\lambda^{n-3})\lambda^{n-2}}$ and $C_n \leq e^{\sigma(\lambda^{n-3})\lambda^{n-2}}$.*

Démonstration. Observe that, for every $j \in \{0, \dots, q_{n-1} - 2\}$

1. the intervals $f^j(\underline{-q_n + i q_{n-1} + 1})$ are disjoint and $\sum_{j=0}^{q_{n-1}-2} |f^j(\underline{-q_n + i q_{n-1} + 1})|$ is contained in a gap of the partition \mathcal{P}_{n-3} ,

2. every interval $f^j(\underline{(iq_{n-1} + 1, -q_{n-1} + 1]})$ is contained in a gap of the partition \mathcal{P}_{n-2} . So, by Corollary 2.2.5, for large n

$$\sum_{j=0}^{q_{n-1}-2} |f^j(\underline{-q_n + iq_{n-1} + 1})| < \lambda^{n-2}$$

and

$$\sigma \left(\max_{j=0, \dots, q_{n-1}-2} |f^j(\underline{(iq_{n-1} + 1, -q_{n-1} + 1]})| \right) < \sigma(\lambda^{n-3}).$$

A similar argument shows that also $C_n \leq e^{\sigma(\lambda^{n-3})\lambda^{n-2}}$ for large n . \square

To establish the convergence of the sequence α_n we have to prove that $\prod_{i=0}^n \tilde{M}_i$ tends to zero.

Observe that $\tilde{M}_n(\ell) = M_n(\ell)T_n(\ell)$ with

$$M_n(\ell) = s_{n-1}^2 \cdot \frac{2}{\ell} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{2(\ell-1)}{\ell} s_{n-1} \alpha_{n-1}}} \right) \cdot \frac{1}{1 - \alpha_{n-2}} \cdot \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-2}}$$

and

$$T_n(\ell) = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2(\ell-1)}{\ell} s_{n-1} \alpha_{n-1}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2(\ell-1)}{\ell} C_n s_{n-1} \alpha_{n-1}}}.$$

The proof that $\prod_{j=0}^n M_j$ tends to zero is exactly the same as in [GJS⁺95]. It remains to determine the size of $T_n(\ell)$.

Noting that

$$T_n(\ell) \leq \max \left(1, \frac{\sqrt{1 - \frac{2(\ell-1)}{\ell} s_{n-1} \alpha_{n-1}}}{\sqrt{1 - \frac{2(\ell-1)}{\ell} C_n s_{n-1} \alpha_{n-1}}} \right)$$

it all comes down to the study of the function

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 - C_n x}$$

for $C_n > 1$ tending to one and $x = \frac{2(\ell-1)}{\ell} s_{n-1} \alpha_{n-1}$.

Observe that $f'(x) > 0$ on $(0, c_n^{-1})$ and that by the a priori estimates of [GJS⁺95], $x \leq 0.55$. Therefore,

$$T_n(\ell) \leq 1 + 1.3(C_n - 1).$$

So, by Lemma 3.1.5, $\prod_{i=0}^n T_i$ is bounded.

Finally, for $\ell \leq 2$ the recursive inequality 3.1.3 implies that the sequence α_n goes to zero at least exponentially fast. Since $\alpha_n > \tau_n$ the same holds also for the scalings τ_n .

2.2 On the non-wandering set for functions in \mathcal{L} with rotation number of bounded type

Our goal is to describe the geometric structure of the set Ω of non-wandering points.

Définition 2.2.1. *A point x belongs to the set of non-wandering points Ω if and only if for any open neighborhood $V \ni x$ there exists an integer $n > 0$ such that the intersection of V and $f^n(V)$ is non-empty, where f^n stands for the n -th composition of f .*

In [MR92] it is proved that, for functions in \mathcal{L} with critical exponent $\ell < 1$, the non-wandering set Ω has zero Hausdorff dimension. For $\ell = 1$, $\dim_{\text{H}}(\Omega) = 0$, [Vee89]. The case $\ell > 1$ is studied in [MvSdMM90] and [Men91]. In particular in [Men91], it is proved that Ω has zero Lebesgue measure. In this case, under the assumption that the rotation number is of bounded type (i.e. $\sup_i a_i < \infty$) $\dim_{\text{H}}(\Omega) < 1$, [GJS⁺95].

We study symmetric and smooth maps with a flat interval and with critical exponent (ℓ, ℓ) , $\ell > 1$ which are not necessarily of negative Schwarzian.

Théorème 2.2.2. *If f is a map from the class \mathcal{L} with the critical exponent $\ell \in (1, 2]$ and irrational rotation number of bounded type then the Hausdorff dimension of the non-wandering set is equal to 0.*

Théorème 2.2.3. *If f is a map from the class \mathcal{L} with the critical exponent $\ell > 2$ and irrational rotation number of bounded type then the Hausdorff dimension of the non-wandering set is strictly greater than 0.*

These results show a global phase transition in the dissipative case when the critical exponent passes through $\ell = 2$.

2.2.1 Some technical lemmas

Now we present a few results from [GJS⁺95] which are used throughout the chapter :

Proposition 2.2.4. *Let $A \in \mathcal{I}_n$ be a preimage of U and B any of two gaps adjacent to A . Then there exists a constant C such that, for every $n \in \mathbb{N}$, $\frac{|A|}{|B|} \geq C$.*

Corollaire 2.2.5. *The lengths of the gaps of the dynamical partition \mathcal{P}_n tend to zero at least exponentially fast with n .*

Lemme 2.2.6. *The ratio*

$$\frac{|-q_n + iq_{n-1}|}{|[-q_n + iq_{n-1}, 0]|}$$

is bounded away from zero by a uniform constant for all $i = 0, \dots, a_n$.

For the proof of Proposition 2.2.4, Corollary 2.2.5 and Lemma 2.2.6 see [GJS⁺95].

2.2.2 Proof of Theorem 2.2.2

By the claim 1. of Theorem 2.1.1, if the critical exponent of the map f is less than or equal to 2, then there exists $0 < \lambda < 1$ such that, for every n large enough

$$\alpha_n = \frac{|(-q_n, 0)|}{|[-q_n, 0]|} \leq \lambda^n. \quad (2.2.7)$$

Lemme 2.2.8. *Let $f \in \mathcal{L}$ with critical exponent $\ell \in (1, 2]$. There is a positive constant C such that each gap I^{n-2} of \mathcal{P}_{n-2} is split into at least two gaps I_i^n of \mathcal{P}_n whose lengths satisfy $|I_i^n| < C\lambda^{n-1}|I^{n-2}|$.*

Démonstration. Because of the symmetry, it is enough to suppose that n is even, that is $\frac{-q_n}{2}$ is to the left of $\underline{0}$.

Let I^{n-2} be a long gap of \mathcal{P}_{n-2} ;

$$I^{n-2} = (\underline{-q_{n-2}}, \underline{0}).$$

As explained by the formula (1.6.1), I^{n-2} is subdivided into a_n long gaps and one short gap of the dynamical partition \mathcal{P}_{n-1} . In our case these gaps are

$$I_i^n = (\underline{-q_n + (i+1)q_{n-1}}, \underline{-q_n + iq_{n-1}})$$

for $i \in \{0, \dots, a_n - 1\}$.

By the distortion of Croos-ratio **Poin** after $q_n - (i+1)q_{n-1}$ iterate and the inequality (2.2.7), there exists a constant C such that, for every $i \in \{0, \dots, a_n - 1\}$

$$\frac{|I_i^n|}{|I^{n-2}|} < \frac{|(-q_n + (i+1)q_{n-1}, -q_n + iq_{n-1})|}{|\underline{-q_n + iq_{n-1}}|} \leq C\alpha_{n-1} \leq C\lambda^{n-1}.$$

Since the shorts gaps of \mathcal{P}_{n-2} become the longs gaps of the partition \mathcal{P}_{n-1} , we can use the estimates for long gaps of the partition \mathcal{P}_{n-1} to conclude the proof. \square

Proof of Theorem 2.2.2. Observe that $\Omega_{n-2} = \bigcup_{I^{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2}} I^{n-2}$ and $\Omega_n = \bigcup_{I^n \in \mathcal{P}_n} I^n$ are two covers of Ω . We analyze the relations between them.

By Lemma 2.2.8 and the formula (1.6.1), we can deduce that :

1. Each interval I^{n-2} of Ω_{n-2} is split into at least two intervals I_i^n of Ω_n whose lengths satisfy $|I_i^n| < C\lambda^{n-1}|I^{n-2}|$.
2. Each interval I^{n-2} is split into at most $a_n(a_{n+1} + 1) + 1$ sub-intervals.

Consequently,

$$\sum_{I^n \in \mathcal{P}_n} |I^n|^s \leq C^s (a_n(a_{n+1} + 1) + 1) \lambda^{(n-1)s} \sum_{I^{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2}} |I^{n-2}|^s.$$

Since the maximum diameter of the covering $\{I^n\}$ goes to zero as n increases, the Hausdorff s -measure of Ω must be zero for every $s > 0$. This implies the theorem.

2.2.3 Proof of Theorem 2.2.3

In this section we will assume that the critical exponent (ℓ, ℓ) of f is strictly greater than 2.

Lemme 2.2.9. For every $i \in \{0, \dots, a_n - 1\}$ the ratio

$$\omega_i = \frac{|(-q_n + (i+1)q_{n-1}, -q_n + iq_{n-1})|}{|\underline{-q_n + iq_{n-1}}|}$$

is uniformly comparable to α_{n-1} .

Démonstration. For every $i \in \{1, \dots, a_n - 1\}$, we apply Proposition 1.7.9 to

- $T = [-q_n + (i+1)q_{n-1}, -q_n + (i-1)q_{n-1}]$,
- $J = (\underline{-q_n + (i+1)q_{n-1}}, \underline{-q_n + (i-1)q_{n-1}})$,

- $f^{q_n - (i+1)q_{n-1}}$.

Observe that the hypotheses are satisfied :

- T doesn't contain any preimage of the flat interval of the type f^{-j} with $j < q_n - (i+1)q_{n-1}$, so $f^{q_n - (i+1)q_{n-1}}$ is a diffeomorphism on T ;
- the set $\bigcup_{j=0}^{q_n - (i+1)q_{n-1} - 1} f^j(J)$ covers each point of \mathbb{S}^1 at most twice;
- if n is large enough, by Lemma 2.2.6 there exists a constant K such that $|f^{q_n - (i+1)q_{n-1}}(J)| = |(\underline{0}, \underline{-2q_{n-1}})| \leq K|\underline{-2q_{n-1}}|$.

So, by Proposition 1.7.9 and Proposition 2.2.4, ω_i is comparable to α_{n-1} .

For $i = 0$ we apply Proposition 1.7.9 to

- $T = \underline{[-q_n + q_{n-1} + 1, -q_n + 1]}$,
- $J = \underline{(-q_n + q_{n-1} + 1, -q_n + 1)}$,
- $f^{q_n - q_{n-1} - 1}$.

As before, the hypotheses are satisfied (for $j \in \{1, \dots, q_n - q_{n-1} - 2\}$ the intervals $f^j(J)$ are disjoint). So, for n large

$$\omega_0^\ell = \frac{|(-q_n + q_{n-1} + 1, -q_n + 1)|}{|\underline{-q_n + 1}|}$$

is uniformly comparable to α_{n-1} . This concludes the proof. \square

Lemme 2.2.10. *Two adjacent gaps of the dynamical partition \mathcal{P}_n which are contained in the same gap of \mathcal{P}_{n-1} are comparable.*

Démonstration. Because of the symmetry, without loss of generality, we may assume that n is even; so $\underline{-q_n}$ is to the left of the flat interval.

For every $i \in \{0, \dots, a_{n+1} - 1\}$ let

$$A_i = \underline{-q_{n+1} + iq_n}$$

and let

$$B_i = \underline{(-q_{n+1} + iq_n, -q_{n+1} + (i+1)q_n)}.$$

By Lemma 2.2.9, there exists a constant C such that, for every $i \in \{0, \dots, a_{n+1} - 1\}$

$$\frac{|B_i|}{|A_i|} \geq C\alpha_n > C\tau_n \quad (2.2.11)$$

is bounded away from zero by Theorem 2.1.1. So, by the formula (2.2.11) and Proposition 2.2.4, there exists a constant $K > 0$ such that

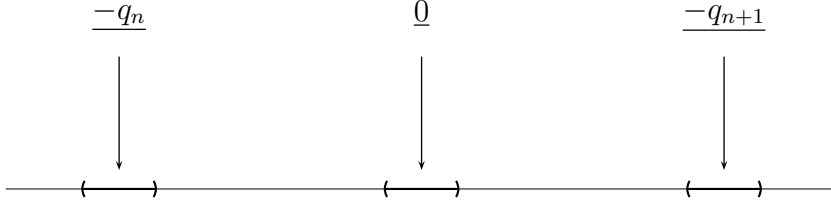
$$\frac{|B_{i-1}|}{|B_i|} \leq K.$$

In order to compare B_{i-1} and A_i , we observe that, for every $i \in \{1, \dots, a_{n+1} - 1\}$

$$\frac{|A_i|}{|\underline{-q_{n+1}}|} \leq K_1 \frac{|A_i|}{|(\underline{0}, \underline{-q_{n+1}})|} \leq K_1 \frac{|(\underline{0}, A_i]|}{|(\underline{0}, \underline{-q_{n+1}})|} \leq K_1 \frac{|(\underline{0}, \underline{-q_{n-1}})|}{|(\underline{0}, \underline{-q_{n+1}})|} \leq K_2 \quad (2.2.12)$$

where the first inequality follows from the Proposition 2.2.4 and the last one from Theorem 2.1.1. Therefore, using the inequality (2.2.11), Proposition 2.2.4 and the inequality (2.2.12), we have that

$$\frac{|B_{i-1}|}{|A_i|} \geq C \frac{|A_{i-1}|}{|A_i|} \geq C_1 \frac{|B_{i-2}|}{|A_i|} \geq \dots \geq C_i \frac{|\underline{-q_{n+1}}|}{|A_i|} \geq \frac{C_i}{K_2}. \quad (2.2.13)$$

FIGURE 2.1 – Position of the intervals A and B as in the Lemma 2.2.15

Moreover, $|(0, \underline{-q_n})|$ is bigger than a uniform constant multiple of $|\underline{-q_n}|$ as the sequence τ_n is bounded away from zero for $\ell > 2$.

Finally, by the formula (2.2.13) and Proposition 2.2.4, there exists a constant K_1 such that

$$\frac{|B_{i-1}|}{|B_i|} \geq K_1.$$

So, B_{i-1} and B_i are comparable. □

Lemme 2.2.14. *There exists a positive constant C such that*

$$|(q_n, \underline{-q_{n+1} + q_n})| \geq C |(\underline{-q_{n+1}}, \underline{-q_{n+1} + q_n})|$$

Démonstration. Apply Proposition 1.7.9 to

- $T = [\underline{-q_{n+1}}, \underline{-q_{n+1} + q_n}]$,
- $J = (\underline{-q_{n+1}}, \underline{-q_{n+1} + q_n})$,
- $f^{q_{n+1}-q_n}$.

Also in this case the hypotheses are satisfied :

- $f^{q_{n+1}-q_n}$ is a diffeomorphism on T ;
- the intervals $f^i(J)$ for $i \in \{1, \dots, q_{n+1} - q_n - 1\}$ are disjoint ;
- for n large enough, by Proposition 2.2.4 there exists a constant K such that

$$|f^{q_{n+1}-q_n}(J)| = |(\underline{-q_n}, \underline{0})| \leq K |\underline{-q_n}| = K \text{dist}(f^{q_{n+1}-q_n}(J), \partial f^{q_{n+1}-q_n}(T)).$$

So, there exists a constant C such that

$$\frac{|(q_n, \underline{-q_{n+1} + q_n})|}{|(\underline{-q_{n+1}}, \underline{-q_{n+1} + q_n})|} \geq C \frac{|(q_{n+1}, \underline{0})|}{|(\underline{-q_n}, \underline{0})|} > C \frac{|(\underline{-q_{n+2}}, \underline{0})|}{|(\underline{-q_n}, \underline{0})|}$$

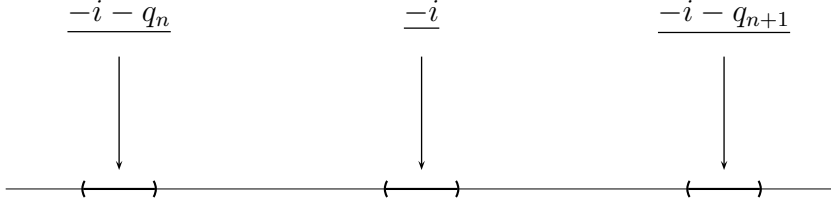
which is bounded away from zero by Theorem 2.1.1. □

Lemme 2.2.15. *Two gaps of the same dynamical partition which are adjacent to the flat interval are comparable.*

Démonstration. Because of the symmetry, it is enough to suppose that n is even.

Let $A = (\underline{-q_n}, \underline{0})$ and let $B = (\underline{0}, \underline{-q_{n+1}})$; the initial situation is explained in Figure 2.1.

The idea is to apply Proposition 1.7.9 to

FIGURE 2.2 – Positions of the intervals A and B as in the first case of Proposition 2.2.18

- $T = [-q_n + 1, -q_{n+1} + 1]$,
- $J = (\underline{-q_n + 1}, \underline{-q_{n+1} + 1})$,
- $f^{q_n - 1}$.

So, there exists a constant C such that

$$\frac{|f(B)|}{|f(A)|} \geq C \frac{|(q_n, \underline{-q_{n+1} + q_n})|}{|(\underline{0}, \underline{q_n})|} \geq C \frac{|(q_n, \underline{-q_{n+1} + q_n})|}{|(\underline{0}, \underline{-q_{n-1}})|}. \quad (2.2.16)$$

By Theorem 2.1.1 and by Lemma 2.2.14 there exist two constants K and K_1 such that

$$\frac{|(q_n, \underline{-q_{n+1} + q_n})|}{|(\underline{0}, \underline{-q_{n-1}})|} \geq K \frac{|(q_n, \underline{-q_{n+1} + q_n})|}{|(\underline{0}, \underline{-q_{n+1}})|} \geq K_1 K \frac{|(\underline{-q_{n+1}}, \underline{-q_{n+1} + q_n})|}{|(\underline{0}, \underline{-q_{n+1}})|}.$$

Observe that the last intervals are contained in the same gap of the partition n ; so by Lemma 2.2.10 they are comparable.

Similarly, there exists $C > 0$

$$\frac{|f(A)|}{|f(B)|} \geq C \frac{|(\underline{0}, \underline{q_n})|}{|(\underline{q_n}, \underline{-q_{n+1} + q_n})|} \geq C \frac{|(\underline{0}, \underline{q_n})|}{|(\underline{0}, \underline{q_{n-2}})|} \geq C\tau_n. \quad (2.2.17)$$

which is bounded away from zero by Theorem 2.1.1. So, $f(A)$ and $f(B)$ are comparable.

Moreover, we recall that near to the flat interval $f(x) = x^\ell$ hence also A and B are comparable. \square

Proposition 2.2.18. *Two adjacent gaps of the dynamical partition \mathcal{P}_n are comparable.*

Démonstration. By the symmetry, without loss of generality, we can suppose that n is even.

Case 1. For $0 \leq i < q_n$ we have the situation as in Figure 2.2

Let $A = (\underline{-i - q_n}, \underline{-i})$ and let $B = (\underline{-i}, \underline{-i - q_{n+1}})$.

For $i = 0$ we find the two gaps adjacent to the flat interval which are uniformly comparable, see Lemma 2.2.15.

For $i \neq 0$ apply Proposition 1.7.9 to

- $T = [-i - q_n, -i - q_{n+1}]$,
- $J = (\underline{-i - q_n}, \underline{-i - q_{n+1}})$,
- f^i .

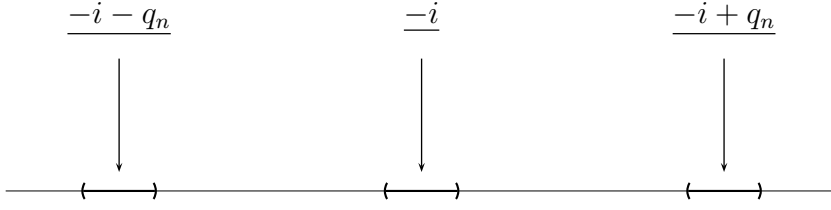


FIGURE 2.3 – Positions of the intervals A and B as in the second case of Proposition 2.2.18

Hence, by Proposition 1.7.9 and the inequality (2.2.16) there exist two constants C and C_1 such that

$$\frac{|A|}{|B|} \leq C \frac{|(-q_n + 1, \underline{1})|}{|(\underline{1}, -q_{n+1} + 1)|} \leq CC_1.$$

Similarly, Proposition 1.7.9 and the inequality (2.2.17) imply that

$$\frac{|B|}{|A|} \leq C \frac{|(\underline{1}, -q_{n+1} + 1)|}{|(-q_n + 1, \underline{1})|} \leq CC_2.$$

where C and C_2 are uniform constants.

Case 2. For $q_n \leq i < q_{n+1}$ we have the situation as in Figure 2.3

Let $A = (\underline{-i - q_n}, \underline{-i})$ and let $B = (\underline{-i}, \underline{-i + q_n})$.

We apply Proposition 1.7.9 to

- $T = [\underline{-i - q_n}, \underline{-i + q_n}]$,
- $J = (\underline{-i - q_n}, \underline{-i + q_n})$,
- $f^{i - q_n}$.

There exists a constant C such that

$$\frac{|A|}{|B|} \leq C \frac{|(-2q_n, -q_n)|}{|(-q_n, 0)|} \leq C \frac{|(-q_{n-2}, 0)|}{|(-q_n, 0)|} \leq CC_1.$$

C_1 is a constant that comes from Theorem 2.1.1.

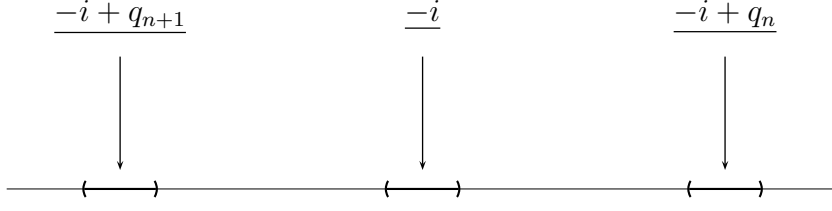
Moreover by Lemma 2.2.10 and Lemma 2.2.6 there exist two constants K_1 and K_2 such that

$$\frac{|B|}{|A|} \leq C \frac{|(-q_n, 0)|}{|(-2q_n, -q_n)|} \leq CK_1 \frac{|(-q_n, 0)|}{|-2q_n|} \leq CK_1 \frac{|[-2q_n, 0]|}{|-2q_n|} \leq CK_1 K_2.$$

Case 3. The situation for $q_{n+1} \leq i < q_n + q_{n+1}$ is explained in Figure 2.4

Let $A = (\underline{-i + q_{n+1}}, \underline{-i})$ and let $B = (\underline{-i}, \underline{-i + q_n})$.

We apply Proposition 1.7.9 to

FIGURE 2.4 – Positions of the intervals A and B as in the third case of Proposition 2.2.18

- $T = [-i + q_{n+1}, -i + q_n]$,
- $J = (-i + q_{n+1}, -i + q_n)$,
- $f^{i-q_{n+1}}$.

There exists a constant C such that

$$\frac{|A|}{|B|} \leq C \frac{|(\underline{0}, -q_{n+1})|}{|(-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n)|}.$$

Since $(\underline{0}, -q_{n+1})$ and $(-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n)$ are contained in the same gap of the partition $n - 1$, we can use Lemma 2.2.10 to obtain a uniform upper bound.

Similarly, by Proposition 1.7.9 and Lemma 2.2.10, there exist two constants C and C_1 such that

$$\frac{|B|}{|A|} \leq C \frac{|(-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n)|}{|(\underline{0}, -q_{n+1})|} \leq CC_1.$$

All the possibilities have been analyzed, so the proof is complete. \square

Proof of Theorem 2.2.3. Let \mathcal{A}_n be the algebra generated by the set of all gaps belonging to the partition \mathcal{P}_n . We define a probability measure μ on \mathcal{A}_n .

For every gap $I \in \mathcal{P}_1$ set $\mu(I) = \frac{1}{\#\mathcal{P}_1}$. Suppose μ is already constructed on \mathcal{A}_n and we fix μ on \mathcal{A}_{n+1} . If I_i^n is a long gap of \mathcal{P}_n then

$$I_i^n = \bigcup_{j=1}^{a_{n+2}} f^{-i-q_n-jq_{n+1}}(U) \cup \bigcup_{j=0}^{a_{n+2}-1} I_{i+q_n+jq_{n+1}}^{n+1} \cup I_i^{n+2}$$

and we set, for every $j \in \{0, \dots, a_{n+2} - 1\}$,

$$\mu \left(I_{i+q_n+jq_{n+1}}^{n+1} \right) = \frac{\mu(I_i^n)}{2a_{n+2}} \quad (2.2.19)$$

and

$$\mu(I_i^{n+2}) = \frac{\mu(I_i^n)}{2}. \quad (2.2.20)$$

If I_i^{n+1} is a short gap of \mathcal{P}_n then $\mu(I_i^{n+1})$ is already defined.

By Carathéodory's extension theorem, there exists a measure (that we will call again μ) which extends μ on $\sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots)$. By the definition, $\mu(I_i^n) \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$.

Proposition 2.2.18 and Corollary 2.2.5 imply that there exist $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ such that all gaps satisfy $\lambda_1^n \leq |I_i^n| \leq \lambda_2^n$. Therefore,

$$\mu(I_i^n) \leq |I_i^n|^\alpha$$

with $\alpha = \log_{\lambda_1} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Let I be an arbitrary interval and let I_i^{n+1} be a gap contained in I with n as small as possible. Then I is covered by at most two gaps of the n^{th} partition I_j^n and $I_{j'}^n$ and by preimages of U (which are of μ -measure zero). The successive distribution of μ given by (2.2.19) and (2.2.20) was chosen so that the following is true :

$$\mu(I) \leq \mu(I_j^n) + \mu(I_{j'}^n) \leq C\mu(I_j^n) \leq C'\mu(I_i^{n+1}) \leq C'|I_i^{n+1}|^\alpha \leq C'|I|^\alpha. \quad (2.2.21)$$

Finally, let \mathcal{K} be an ϵ -cover of the non-wandering set Ω and let $0 < \alpha < 1$. By the inequality (2.2.21),

$$\sum_{I \in \mathcal{K}} |I|^\alpha \geq \frac{1}{C'} \sum_{I \in \mathcal{K}} \mu(I) \geq \frac{1}{C'} \mu(\Omega) = \frac{1}{C'}.$$

This establishes the theorem.

Chapitre 3

Fonctions dans \mathcal{L} de nombre de rotation de type non borné

Dans ce chapitre nous présentons les résultats obtenus pour fonctions dans \mathcal{L} dont le nombre de rotation est quelconque. Comme dans le précédent chapitre, celui-ci sera divisé en deux sections : la première concernera l'étude de la suite des échelles $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la seconde sera consacrée au calcul de la dimension de Hausdorff de l'ensemble non errant.

3.1 Échelle de fonctions dans \mathcal{L} avec nombre de rotation non borné

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit f une fonction de la classe \mathcal{L} dont l'exposant critique $\ell > 1$:*

1. *Si $\ell \leq 2$, alors la suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro avec vitesse au moins exponentielle.*
2. *Si $\ell \geq 3$, il existe une constante $K > 0$ telle que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n > K$.*

Sans aucune hypothèse sur le nombre de rotation, nous montrons que la géométrie à côté des points du bord de l'intervalle plat est dégénérée quand l'exposant critique est inférieur ou égal à deux et devient bornée lorsque l'exposant critique dépasse trois. Ce qui se passe entre 2 et 3 reste encore inconnu. Nous espérons pouvoir améliorer la preuve pour obtenir la géométrie bornée pour $\ell > 2$ et la transition de phase qui en découle.

3.1.1 Preuve de la première partie du Théorème 3.1.1

Comme dans le chapitre précédent, soit

$$\alpha_n = \frac{|(-q_n, \underline{0})|}{|[\underline{-q_n}, \underline{0})|}.$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n > \tau_n$, nous démontrerons la première partie du théorème 3.1.1 pour la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit :

$$\sigma_n = \frac{|(\underline{0}, q_n)|}{|(\underline{0}, \underline{q_{n-1}})|}$$

et

$$s_n = \frac{|[-q_{n-2}, 0]|}{|0]}.$$

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 3.1.2. *Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$, tel que pour $n > N$ on a l'inégalité suivante :*

$$(\alpha_n)^l \leq \prod_{i=0}^{a_n-1} K_{i,n} C_n \tilde{M}_n(l) \alpha_{n-2}^2 \quad (3.1.3)$$

où pour tout $i \in \{0, \dots, a_n - 1\}$, si nous notons :

$$\tau_{i,n} = \max_{j \in \{0, \dots, q_{n-1}-2\}} \left| f^j((iq_{n-1} + 1, -q_{n-1} + 1]) \right|$$

et

$$\rho_n = \max_{j \in \{0, \dots, q_{n-2}-2\}} \left| f^j((a_n q_{n-1} + 1, \underline{1}) \right|,$$

alors

$$\begin{aligned} K_{i,n} &= e^{\sigma(\tau_{i,n}) \sum_{j=0}^{q_{n-1}-2} |f^j(\underline{-q_n + iq_{n-1} + 1})|} \\ C_n &= e^{\sigma(\rho_n) \sum_{j=0}^{q_{n-2}-2} |f^j(\underline{-q_{n-2} + 1})|} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

et

$$\tilde{M}_n(l) = s_{n-1}^2 \cdot \frac{2}{l} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{2(l-1)}{l} C_n s_{n-1} \alpha_{n-1}}} \right) \cdot \frac{1}{1 - \alpha_{n-2}} \cdot \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-2}}.$$

Démonstration. La preuve est exactement la même que celle du théorème 2.1.3, puisque cette dernière n'utilise aucune hypothèse sur le nombre de rotation. \square

Montrons maintenant la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dans le chapitre précédent (voir lemme 3.1.5 et ce qui suit), sans aucune hypothèse sur le nombre de rotation, on a montré que $\prod_{m=0}^n C_m$ converge et que $\prod_{m=0}^n \tilde{M}_m$ tend vers zéro. Il reste à étudier la convergence du produit

$$\prod_{m=0}^n \prod_{i=0}^{a_m-1} K_{i,m}$$

qui est assurée par le lemme suivant :

Lemme 3.1.5. *Il existe $0 < \lambda < 1$ tel que, pour tout $i \in \{0, \dots, a_n - 1\}$ et pour m assez grand,*

$$\prod_{i=0}^{a_m-1} K_{i,m} \leq e^{\sigma(\lambda^{m-3}) \lambda^{m-2}}$$

Démonstration. À partir de l'ordre des préimages de l'intervalle plat sur le cercle (voir la section 1.6) et la définition de $K_{i,m}$ (voir 3.1.4) nous observons que :

1. chaque intervalle $f^j((iq_{m-1} + 1, -q_{m-1} + 1])$ est contenu dans un trou de la partition \mathcal{P}_{m-3} ,

2. pour tous i , $\sum_{j=0}^{q_m-1-2} \left| f^j(\underline{-q_m + iq_{m-1} + 1}) \right|$ est contenue dans un trou de \mathcal{P}_{m-1} et chaque deux sommes $\sum_{j=0}^{q_m-1-2} \left| f^j(\underline{-q_m + iq_{m-1} + 1}) \right|$ et $\sum_{j=0}^{q_m-1-2} \left| f^j(\underline{-q_m + i'q_{m-1} + 1}) \right|$ sont disjointes. De plus la somme totale $\sum_{i=0}^{a_m-1} \sum_{j=0}^{q_m-1-2} \left| f^j(\underline{-q_m + iq_{m-1} + 1}) \right|$ est contenue dans un trou de la partition \mathcal{P}_{m-2} .

Puisque les longueurs des trous de la partition \mathcal{P}_m tendent vers zéro avec vitesse au moins exponentielle (proposition 2.2.5), alors il existe $0 < \lambda < 1$ tel que, pour m assez grand,

$$\sigma \left(\max_{j \in \{0, \dots, q_{m-1}-2\}} |f^j(\underline{(iq_{m-1} + 1, -q_{m-1} + 1)})| \right) < \sigma(\lambda^{m-3}).$$

et

$$\sum_{i=0}^{a_m-1} \sum_{j=0}^{q_m-1-2} \left| f^j(\underline{-q_m + iq_{m-1} + 1}) \right| < \lambda^{m-2}$$

donc $\prod_{i=0}^{a_m-1} K_{i,m}$ est égale à

$$\exp \left(\sum_{i=0}^{a_m-1} \sigma \left(\max_{j \in \{0, \dots, q_{m-1}-2\}} |f^j(\underline{(iq_{m-1} + 1, -q_{m-1} + 1)})| \right) \sum_{j=0}^{q_m-1-2} \left| f^j(\underline{-q_m + iq_{m-1} + 1}) \right| \right)$$

qui est strictement plus petit que

$$\exp(\sigma(\lambda^{m-3})\lambda^{m-2})$$

□

Finalement, pour $l \leq 2$ l'inégalité (3.1.3) itérée implique que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro avec vitesse au moins exponentielle. Puisque $\alpha_n > \tau_n$, le résultat est aussi vrai pour la suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.1.2 Preuve de la seconde partie du Théorème 3.1.1

Nous utiliserons les résultats sur les partitions dynamiques du cercles, engendrées par les préimages de l'intervalle plat. Ces derniers sont présentés en détail dans le chapitre 1.

Nous rappelons une proposition qui sera utilisée de nombreuses fois par la suite :

Proposition 3.1.6. *Il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, si $J = f^{-m}(U)$, une préimage de l'intervalle plat U qui appartient à la partition dynamique \mathcal{P}_n et I un des deux trous adjacentes à J . Alors :*

$$\frac{|J|}{|I|} \geq C$$

Corollaire 3.1.7. *Les longueurs des trous de la partition dynamique \mathcal{P}_n tendent au moins exponentiellement vers zéro quand $n \rightarrow \infty$.*

Les détails, ainsi que la preuve se trouvent dans [GJS⁺95].

3.1.3 Quelques lemmes techniques

Nous démontrons maintenant quelques lemmes techniques, nécessaires pour la preuve finale. Tous ces lemmes seront présentés et démontrés pour $n \in \mathbb{N}$ pair. Par symétrie, le cas $n \in \mathbb{N}$ impair se traite de façon analogue.

Lemme 3.1.8. *Il existe une constante $\delta > 0$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rapport :*

$$\frac{|(2q_{n-1}, q_{n-1})|}{|(2q_{n-1}, \underline{0})|} > \delta > 0$$

est borné loin de zéro par une constante uniforme.

Démonstration. Il s'agit du lemme 1.2 dans [GJS⁺95] □

Lemme 3.1.9. *Pour n grande, le rapport*

$$\frac{|-q_n - q_{n+1}|}{|[-q_n - q_{n+1}, \underline{0})|}$$

est borné loin de zéro par une constante uniforme.

Démonstration. Le lecteur peut se reporter à la figure 3.1.

Par l'assertion 1.6.2 il existe une constante positive $K_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \frac{|-q_n - q_{n+1}|}{|[-q_n - q_{n+1}, \underline{0})|} &\geq K_1 \frac{|-q_n - q_{n+1} + 1|}{|[-q_n - q_{n+1} + 1, \underline{1})|} \geq \\ &\geq K_1 \frac{|-q_n - q_{n+1} + 1|}{|[-q_n - q_{n+1} + 1, -q_{n+1} + 1]|} \frac{|-q_{n+1} + 1|}{|(-q_n - q_{n+1} + 1, -q_{n+1} + 1]|} \end{aligned}$$

En raison des propriétés d'expansion du birapport \mathbf{Cr} sur $(q_{n+1} - 1)^{\text{ième}}$ itérées, il existe une constante positive K_2 telle que :

$$\frac{|-q_n - q_{n+1}|}{|[-q_n - q_{n+1}, \underline{0})|} \geq K_1 K_2 \frac{|-q_n|}{|[-q_n, \underline{0})|} \frac{|\underline{0}|}{|(-q_n, \underline{0})|} \geq K_1 K_2 \frac{|-q_n|}{|[-q_n, \underline{0})|}. \quad (3.1.10)$$

Pour conclure la preuve, il suffit d'appliquer la proposition 3.1.6. □

Lemme 3.1.11. *Il existe une constante $K > 0$ telle que, pour n assez grand,*

$$\frac{|-q_{n-1} - q_n + 1|}{|(-q_n + 1, \underline{1})|} \geq K.$$

Démonstration. Le lecteur peut se reporter à la figure 3.2.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{|-q_{n-1} - q_n + 1|}{|(-q_n + 1, \underline{1})|} &\geq \frac{|-q_{n-1} - q_n + 1|}{|(-q_n + 1, -q_{n-1} - q_n + 1]|} \\ &\geq \frac{|-q_n + 1|}{|[-q_n + 1, -q_{n-1} - q_n + 1]|} \frac{|-q_{n-1} - q_n + 1|}{|(-q_n + 1, -q_{n-1} - q_n + 1]|} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

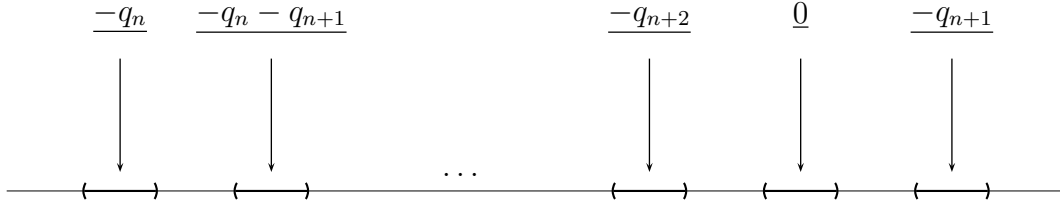


FIGURE 3.1 –

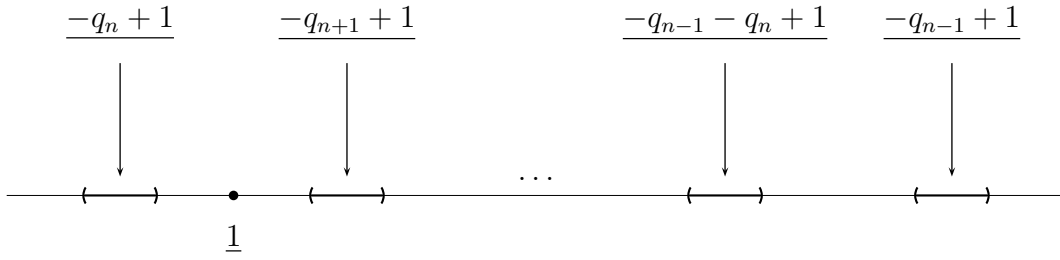


FIGURE 3.2 –

Par les propriétés de distorsion du birapport \mathbf{Cr} sur les $(q_n - 1)^{\text{ème}}$ itérées, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que :

$$\frac{|-q_{n-1} - q_n + 1|}{|(-q_n + 1, \underline{1})|} \geq K_1 \frac{|0|}{|[\underline{0}, -q_{n-1}]|} \frac{|-q_{n-1}|}{|(\underline{0}, -q_{n-1})|}$$

qui, pour n assez grand, est minoré par une constante positive (proposition 3.1.6). \square

Pour tout n et pour tout $i \in \{0, \dots, a_{n+2} - 1\}$ nous définissons (voir la figure 3.3) :

$$\beta_n(i) = \frac{|(-q_n - (a_{n+2} - i)q_{n+1}, \underline{0})|}{|[-q_n - (a_{n+2} - i)q_{n+1}, \underline{0}]|}$$

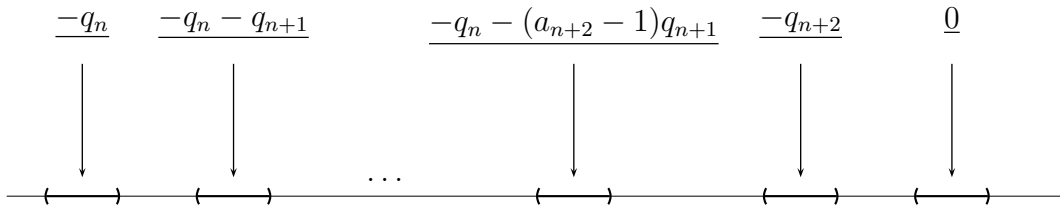


FIGURE 3.3 –

et

$$\gamma_n(i) = \frac{|[-q_n - (a_{n+2} - i)q_{n+1}, \underline{0}]|}{|[-q_n - (a_{n+2} - (i + 1))q_{n+1}, \underline{0}]|}$$

et nous démontrons les lemmes suivants :

Lemme 3.1.13. *Il existe une constante $K > 0$, telle que pour tout $i \in \{1, \dots, a_{n+2} - 2\}$, on a :*

$$(\beta_n(i))^\ell \geq K\beta_n(i + 1)$$

Nous observons que ce lemme a du sens sous l'hypothèse $a_{n+2} \notin \{1, 2\}$.

Démonstration. D'abord nous appliquons f aux intervalles définissant $\beta_n(i)$, on obtient :

$$\beta_n(i)^\ell = \frac{|(-q_n - (a_{n+2} - i)q_{n+1} + 1, \underline{1})|}{|[-q_n - (a_{n+2} - i)q_{n+1} + 1, \underline{1}]|}.$$

Pour chaque $i \in \{1, \dots, a_{n+2} - 2\}$ nous appliquons la proposition 1.7.9 à

- $T = [-q_n - q_{n+1} + 1, -q_{n+1} + 1]$,
- $J = (-q_n - q_{n+1} + 1, -q_{n+1} + 1)$,
- $f^{q_{n+1}-1}$.

Nous observons que les hypothèses sont satisfaites :

- $f^{q_{n+1}-1}$ est un difféomorphisme sur T ;
- les intervalles $f^i(J)$ pour $i \in \{1, \dots, q_{n+1} - 2\}$ sont disjoints;
- par la proposition 3.1.6, pour n suffisamment grand, il existe une constante K_1 telle que

$$|f^{q_{n+1}-1}(J)| = |(-q_n, \underline{0})| \leq K_1 | -q_n | = K_1 \text{dist}(f^{q_{n+1}-1}(J), \partial f^{q_{n+1}-1}(T)).$$

Alors nous trouvons une constante uniforme K_2 telle que :

$$\beta_n(i)^\ell = \frac{|(-q_n - (a_{n+2} - i)q_{n+1} + 1, \underline{1})|}{|[-q_n - (a_{n+2} - i)q_{n+1} + 1, \underline{1}]|} \geq K_2 \frac{|(-q_n - (a_{n+2} - (i + 1))q_{n+1}, \underline{q_{n+1}})|}{|[-q_n - (a_{n+2} - (i + 1))q_{n+1}, \underline{q_{n+1}}]|}. \quad (3.1.14)$$

Puisque le numérateur de (3.1.14) contient l'intervalle $(2q_{n+1}, q_{n+1})$, par le lemme 3.1.8 nous pouvons conclure que $(\beta_n(i + 1))^\ell$ est plus grande qu'une constante uniforme multipliée par $\beta_n(i + 1)$. \square

En utilisant la Proposition 1.7.9 dans la même façon que dans le lemme 3.1.13 nous pouvons aussi montrer que :

Lemme 3.1.15. *Il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, a_{n+2} - 2\}$, on a :*

$$(\beta_n(i))^\ell \leq K\beta_n(i + 1)$$

Lemme 3.1.16. *Il existe deux constantes $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ telles que :*

1. pour tout $0 \leq i \leq a_{n+2} - 2$, $(\gamma_n(i))^\ell \geq K_1\gamma_n(i + 1)$,
2. $\gamma_n(a_{n+2} - 1) \geq K_2$.

Démonstration. Pour démontrer le point 2. il suffit d'observer que :

$$\gamma_n(a_{n+2} - 1) = \frac{|[-q_n - q_{n+1}, \underline{0}]|}{|(-q_n, \underline{0})|}$$

qui par la proposition 3.1.6 est plus grand qu'une constante uniforme positive.

Pour démontrer le point 1. nous appliquons d'abord f aux intervalles définissant $\gamma_n(i)$ et ensuite la proposition 1.7.9 à

- $T = [-q_n - q_{n+1} + 1, -q_{n+1} + 1]$,
- $J = (-q_n - q_{n+1} + 1, -q_{n+1} + 1)$,
- $f^{q_{n+1}-1}$.

Comme dans le lemme 3.1.13, les hypothèses sont satisfaites, donc il existe une constante $K_1 > 0$ telle que, pour tout i , $(\gamma_n(i))^\ell \geq K_1 \gamma_n(i+1)$ \square

Dans la suite, pour simplifier les notations, nous notons $\beta_n = \beta_n(a_{n+2} - 1)$ et $\gamma_n = \gamma_n(a_{n+2} - 1)$.

3.1.4 Cœur de la preuve

Nous rappelons que

$$\tau_n = \frac{|(\underline{0}, \underline{q_n})|}{|(\underline{0}, \underline{q_{n-2}})|},$$

$$\alpha_n = \frac{|(-q_n, \underline{0})|}{|[-q_n, \underline{0}]|}$$

et nous introduisons un nouveau paramètre qui mesure la taille de α_n et τ_n ,

$$k_n = \frac{|(\underline{0}, \underline{q_n})|}{|(\underline{0}, \underline{-q_{n-1}})|}.$$

Remarque 3.1.17. *Nous rappelons que le point $\underline{q_{n-2}}$ se trouve dans le trou entre $\underline{-q_{n-1}}$ et $\underline{-q_{n-1} + q_{n-2}}$ de la partition dynamique \mathcal{P}_{n-2} .*

Alors, par la proposition 3.1.6, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$k_n \geq \frac{\tau_n}{\alpha_{n-1}} \geq K k_n.$$

En conclusion, $\frac{\tau_n}{\alpha_{n-1}}$ et k_n sont comparables.

Pour compléter la preuve de la deuxième partie du Théorème 3.1.1 il est alors nécessaire de trouver une borne inférieure pour les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour cette raison nous montrons les propositions suivantes.

Proposition 3.1.18. *Il existe une constante positive K telle que, pour n assez grand*

$$k_n \geq K \beta_{n-1}^{\left(\frac{1-\ell^{-a_{n+1}-1}}{1-\ell^{-1}}\right)}.$$

Démonstration. Par la proposition 3.1.6 il existe une constante uniforme $K_1 > 0$ telle que

$$k_n \geq K_1 \frac{|(\underline{0}, -q_{n-1} - (a_{n+1} - 1)q_n)|}{|(\underline{0}, \underline{-q_{n-1}})|}. \quad (3.1.19)$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, a_{n+1} - 1\}$ et pour tout $j \in \{2, \dots, a_{n+1} - 2\}$, nous multiplions et divisons en alternant par $|(0, \underline{-q_{n-1} - (a_{n+1} - i)q_n})|$ et par $|(0, \underline{-q_{n-1} - (a_{n+1} - j)q_n})|$ pour obtenir que :

$$k_n \geq K_1 \beta_{n-1}(1) \gamma_{n-1}(2) \beta_{n-1}(2) \dots \gamma_{n-1}(a_{n+1} - 2) \beta_{n-1}(a_{n+1} - 1) \frac{|(0, \underline{-q_{n-1} - q_n})|}{|(0, \underline{-q_{n-1}})|}.$$

Par la proposition 3.1.6, il existe une constante positive K_2 telle que $\frac{|(0, \underline{-q_{n-1} - q_n})|}{|(0, \underline{-q_{n-1}})|} > K_2$. Nous appliquons alors lemme 3.1.13, lemme 3.1.16 et nous avons :

$$k_n \geq K_3 \beta_{n-1} \beta_{n-1}^{\frac{1}{\ell}} \dots \beta_{n-1}^{\left(\frac{1}{\ell^{a_{n+1}-2}}\right)} = K_3 \beta_{n-1}^{\left(\frac{1-\ell^{-a_{n+1}+1}}{1-\ell^{-1}}\right)}. \quad (3.1.20)$$

où K_3 est une constante positive.

Il nous reste à étudier les cas $a_{n+1} = 1$ et $a_{n+1} = 2$ pour les quels nous ne pouvons pas appliquer le lemme 3.1.13.

Nous supposons que $a_{n+1} = 1$. Dans ce cas le trou à droite de $\underline{-q_{n+1}}$ est $(\underline{-q_{n+1}}, \underline{-q_{n-1}})$ et donc par la proposition 3.1.6 il existe $K_4 > 0$ telle que $k_n \geq K_4$.

Nous trouvons alors la même inégalité de (3.1.20) dans le cas spécifique $a_{n+1} = 1$.

Si $a_{n+1} = 2$ nous procédons comme dans le cas général jusqu'à obtenir (comme dans (3.1.19)) que :

$$k_n \geq K_1 \frac{|(0, \underline{-q_{n-1} - q_n})|}{|(0, \underline{-q_{n-1}})|}$$

par la proposition 3.1.6 est plus grande qu'une constante uniforme multiplié par β_{n-1} .

La preuve du lemme est ainsi complète. □

Proposition 3.1.21. *Il existe une constante $K > 0$ telle que, pour n assez grand*

$$\alpha_n \geq K \beta_{n-1}^{\ell \left(\frac{1-\ell^{-a_{n+1}}}{\ell^{-1}} \right)} \beta_{n-2}^{\ell^{-a_{n+1}}}$$

Démonstration. Si n est assez grand, $(\alpha_n)^\ell$ est égale à la fraction

$$\frac{|(\underline{-q_n + 1}, \underline{1})|}{|[\underline{-q_n + 1}, \underline{1}]|}$$

qui est plus grand que le produit des trois fractions suivantes :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{|(\underline{-q_n + 1}, \underline{1})|}{|(\underline{-q_n + 1}, \underline{-q_{n-1} - q_n + 1})|} \\ \xi_2 &= \frac{|(\underline{-q_n + 1}, \underline{-q_{n-1} - q_n + 1})|}{|(\underline{-q_n + 1}, \underline{-q_{n-1} + 1})|} \\ \xi_3 &= \frac{|(\underline{-q_n + 1}, \underline{-q_{n-1} + 1})|}{|[\underline{-q_n + 1}, \underline{-q_{n-1} + 1}]|} \end{aligned}$$

Nous regardons, chaque membre séparément.

1^{ère} étape. Montrons que $\xi_1 \geq K_1 \beta_{n-1}^{\left(\frac{1-\ell^{-a_{n+1}-1}}{1-\ell^{-1}}\right)}$

Nous appliquons la proposition 1.7.9 à

- $T = [-q_n + 1, -q_n - q_{n-1} + 1]$;
- $J = (\underline{-q_n + 1}, \underline{-q_n - q_{n-1} + 1})$;
- f^{q_n-1} .

Comme dans les lemmes précédents les hypothèses sont satisfaites, alors il existe une constante uniforme $C_1 > 0$ telle que :

$$\xi_1 \geq C_1 \frac{|(\underline{0}, \underline{q_n})|}{|(\underline{0}, \underline{-q_{n-1}})|}. \quad (3.1.22)$$

Nous appliquons alors la proposition 3.1.18 et nous trouvons l'estimation cherchée.

2^{ème} étape. Nous montrons que $\xi_2 \geq K_2 \beta_{n-1}^\ell$

Par la proposition 3.1.6 et par le lemme 3.1.11 nous avons deux constantes positives $C_2 > 0$ et $C_3 > 0$ telles que

$$\xi_2 \geq C_2 \frac{|(\underline{1}, \underline{-q_{n-1} - q_n + 1})|}{|(\underline{-q_n + 1}, \underline{-q_{n-1} - q_n + 1})|} \geq C_2 C_3 \frac{|(\underline{1}, \underline{-q_{n-1} - q_n + 1})|}{|(\underline{1}, \underline{-q_{n-1} - q_n + 1})|} \quad (3.1.23)$$

et cette dernière fraction est exactement β_{n-1}^ℓ .

3^{ème} étape. Nous montrons que $\xi_3 \geq K_3 \beta_{n-2}^{\ell^{-a_n+2}}$.

Appliquons le lemme 3.1.13 et la proposition 1.7.9 à

- $T = [-q_{n-2} - q_{n-1} + 1, -q_{n-1} + 1]$;
- $J = (\underline{-q_{n-2} - q_{n-1} + 1}, \underline{-q_{n-1} + 1})$;
- $f^{q_{n-1}-1}$.

et nous trouvons, sous l'hypothèse que $a_n \notin \{1, 2\}$, deux constantes positives $C_4 > 0$ et $C_5 > 0$ telles que :

$$\xi_3 \geq C_4 \frac{|(\underline{-q_n + q_{n-1}}, \underline{0})|}{|(\underline{-q_n + q_{n-1}}, \underline{0})|} \geq C_4 \beta_{n-2}(1) \geq C_4 C_5 \beta_{n-2}^{\ell^{-a_n+2}} \quad (3.1.24)$$

Si $a_n = 1$, nous obtenons exactement la même estimation, en effet, dans ce cas $\underline{-q_n + 1} = \underline{-q_{n-2} - q_{n-1} + 1}$ et par le lemme 3.1.11 il existe une constante $C_6 > 0$ telle que

$$\xi_3 \geq C_6 \beta_{n-2}^\ell$$

Si $a_n = 2$, nous procédons comme dans le cas général jusqu'à la première inégalité (3.1.24). Il est alors suffisant d'observer que, dans ce cas que

$$\frac{|(\underline{-q_n + q_{n-1}}, \underline{0})|}{|(\underline{-q_n + q_{n-1}}, \underline{0})|} = \beta_{n-2}$$

Finalement, en regroupant les estimations obtenues pour ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 nous avons

$$\alpha_n^\ell \geq K \beta_{n-1}^{\left(\frac{1-\ell^{-a_{n+1}+1}}{1-\ell^{-1}}\right)} \beta_{n-1}^\ell \beta_{n-2}^{\ell-a_{n+2}}$$

et donc

$$\alpha_n \geq K^{\frac{1}{\ell}} \beta_{n-1}^{\ell \left(\frac{1-\ell^{-a_{n+1}}}{\ell-1}\right)} \beta_{n-2}^{\ell-a_{n+1}}$$

□

D'après la remarque 3.1.17, la proposition 3.1.18 et la proposition 3.1.21, pour trouver une borne inférieure pour τ_n il est nécessaire d'étudier la suite β_n . D'où les propositions suivantes :

Proposition 3.1.25. *Il existe une constante positive $K > 0$ telle que, pour n assez grand*

$$\beta_n \geq K \beta_{n-1}^{\frac{1}{\ell}} \alpha_n^{\frac{1}{\ell}}$$

Démonstration. Nous commençons par appliquer la proposition 1.7.9 à

- $T = [-q_n + 1, -q_{n-1} - q_n + 1]$;
- $J = \left(\frac{-q_n + 1, -q_{n-1} - q_n + 1}{-q_n + 1, -q_{n-1} - q_n + 1}\right)$;
- $f^{q_{n-1}}$.

Alors, pour n assez grand, il existe une constante uniforme $C_1 > 0$ telle que

$$\beta_n^\ell = \frac{|(-q_n - q_{n+1} + 1, \underline{1})|}{|[-q_n - q_{n+1} + 1, \underline{1}]|} \geq C_1 \frac{|(-q_{n+1}, \underline{q}_n)|}{|[-q_{n+1}, \underline{q}_n]|}$$

En multipliant et en divisant par $|(-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n)|$, nous trouvons que β_n^ℓ est plus grand (à une constante uniforme près) que le produit des deux quantités suivantes :

$$\eta_1 = \frac{|(-q_{n+1}, \underline{q}_n)|}{|(-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n)|}, \eta_2 = \frac{|(-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n)|}{|[-q_{n+1}, \underline{q}_n]|}$$

Nous nous intéressons à ces deux quantités.

1^{ère} étape. Nous montrons que $\eta_1 \geq K_1$.

Nous appliquons la proposition 1.7.9 à

- $T = [-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n]$;
- $J = \left(\frac{-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n}{-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n}\right)$;
- $f^{q_{n+1}-q_n}$

et nous trouvons une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\eta_1 \geq C_2 \frac{|(-q_n, \underline{q}_{n+1})|}{|(-q_n, \underline{0})|} \geq C_2 \frac{|(-q_n, -q_n - q_{n+1})|}{|(-q_n, \underline{0})|} \geq C_2 C_3 \frac{|-q_n - q_{n+1}|}{|[-q_n - q_{n+1}, \underline{0}]|} \geq C_2 C_3 C_4$$

Nous observons que C_3 s'obtient par la proposition 3.1.6 et C_4 par le lemme 3.1.9.

2^{ème} étape. Nous montrons que $\eta_2 \geq K_2 \beta_{n-1} \alpha_n$.

D'après le lemme 3.1.8 il existe une constante $C_5 > 0$ telle que :

$$\eta_2 \geq C_5 \frac{|(-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n)|}{|(-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n)]|} \geq C_5 \frac{|(-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n)|}{|(-q_{n+1}, -q_{n+1} + q_n)]|} \frac{|(-q_{n+1} + q_n, -q_{n+1} + 2q_n)]|}{|(-q_{n+1} + q_n, -q_{n+1} + 2q_n)]|}$$

Nous appliquons maintenant le birapport **Cr**. Après $(a_{n+1} - 2)q_n$ itérés, nous avons que :

$$\begin{aligned} \eta_2 &\geq C_6 \beta_{n-1} \frac{|(-q_{n-1} - 2q_n, -q_{n-1} - q_n)|}{|(0, -q_{n-1} - q_n)|} \\ &\geq C_6 \beta_{n-1} \frac{|-q_n|}{|[-q_n, -q_{n-1} - 2q_n)]|} \frac{|(-q_{n-1} - 2q_n, -q_{n-1} - q_n)|}{|(-q_n, -q_{n-1} - q_n)|} \end{aligned}$$

En appliquant le birapport **Cr** aux q_n ième premières itérées, et par le lemme 3.1.9 et la proposition 3.1.6 nous trouvons que pour n assez grand :

$$\eta_2 \geq C_7 \beta_{n-1} \frac{|(-q_{n-1} - q_n, -q_{n-1})|}{|[-q_{n-1} - q_n]|} \geq C_7 \beta_{n-1} \frac{|(-q_{n-1} - q_n, -q_{n-1})|}{|[-q_{n-1} - q_n, -q_{n-1})|}$$

Il nous reste à trouver une borne pour $\frac{|(-q_{n-1} - q_n, -q_{n-1})|}{|[-q_{n-1} - q_n, -q_{n-1})|}$. Nous appliquons d'abord l'assertion 1.6.2 et ensuite la proposition 1.7.9 à

- $T = [-q_{n-1} - q_{n-2} + 1, -q_{n-1} + 1]$;
- $J = (-q_{n-1} - q_{n-2} + 1, -q_{n-1} + 1)$;
- $f^{q_{n-1}-1}$.

pour avoir deux constantes positives $C_8 > 0$ et $C_9 > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} \frac{|(-q_{n-1} - q_n, -q_{n-1})|}{|[-q_{n-1} - q_n, -q_{n-1})|} &\geq K_8 \frac{|(-q_{n-1} - q_n + 1, -q_{n-1} + 1)|}{|[-q_{n-1} - q_n + 1, -q_{n-1} + 1)]|} \\ &\geq C_9 \frac{|(-q_n, 0)|}{|[-q_n, 0)]|} \geq C_9 \alpha_n \end{aligned}$$

Pour conclure la preuve, il suffit de réunir les bornes trouvées pour η_1 et η_2 . □

Les propositions 3.1.21 et 3.1.25 nous donnent l'importante inégalité suivante :

Théorème 3.1.26. *Il existe une constante positive $K > 0$ telle que, pour n assez grand*

$$\beta_n \geq K \beta_{n-1}^{\left(\frac{1}{\ell} + \frac{1-\ell^{-a_{n+1}}}{\ell-1}\right)} \beta_{n-2}^{\ell-a_n}$$

Pour terminer la preuve de la seconde partie du théorème 3.1.1, d'après la remarque 3.1.17 et les propositions 3.1.18 et 3.1.21 il suffit de montrer que la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée loin de zéro pour $\ell \geq 3$. Il nous reste alors à analyser la récurrence de la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Analyse de la récurrence. Nous définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité

$$\nu_n = -\ln \beta_n$$

Le théorème 3.1.26 implique qu'il existe une constante $K_1 > 0$ telle que :

$$\nu_n - \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1 - \ell^{-a_{n+1}}}{\ell - 1} \right) \nu_{n-1} - \ell^{-a_n} \nu_{n-2} \leq K_1 \quad (3.1.27)$$

Nous montrons que la suite $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Pour cela faire, nous commençons par considérer la suite des vecteurs $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$v_n = \begin{pmatrix} \nu_n \\ \nu_{n-1} \end{pmatrix},$$

la suite des matrices $(A_\ell(n))_{n \in \mathbb{N}}$:

$$A_\ell(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\ell} + \frac{1 - \ell^{-a_{n+1}}}{\ell - 1} & \ell^{-a_n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et le vecteur

$$k = \begin{pmatrix} K_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant nous pouvons réécrire (3.1.27) sous la forme

$$v_n \leq A_\ell(n) A_\ell(n-1) \dots A_\ell(2) v_1 + \left(\sum_{i=2}^{n-1} A_\ell(n-1) A_\ell(n-2) \dots A_\ell(i) \right) k \quad (3.1.28)$$

où l'inégalité doit être interprétée composante par composante.

Pour montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et prouver donc le théorème 3.1.1, il est nécessaire d'étudier pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $2 \leq i < n$ chaque produit,

$$\prod_{j=i}^n A_\ell(j)$$

En particulier nous allons estimer $\| \prod_{j=i}^n A_\ell(j) \|_\infty$.

Remarque 3.1.29. Rappelons que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice, alors

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} |a_{i,j}|$$

est une norme subordonnée. Nous observons en effet que

$$\|A\|_\infty = \max_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty}$$

où $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$ si $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Entre autre si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et que pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{ij} \leq b_{ij}$, nous abrègerons ceci en notant¹ $A \leq B$. Dans ce cas on a alors $\|A\|_\infty \leq \|B\|_\infty$.

1. Ce n'est bien entendu pas une relation d'ordre.

Fixons alors n et i tels que $i \leq n$, et pour chaque $i \leq j \leq n$ nous posons $b_j = \ell^{-a_{j+1}}$, ainsi

$$A_\ell(j) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\ell} + \frac{1-b_j}{\ell-1} & b_{j-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

remarquons que la suite de nombres réels positifs $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée par $1/\ell$.

Nous fixons un entier $M > 1$. Alors pour tout $j \in \{i, n-1\}$ deux cas peuvent se présenter :

1. $a_{j+1} < M$ et $a_j < M$, ou bien,
2. $a_{j+1} \geq M$, ou $a_j \geq M$.

Dans le premier cas nous posons $B := A_\ell(j)$ et dans le deuxième $U := A_\ell(j)$.

Observons que, par le point 1 on ne peut pas trouver des produits du type BUB , puisque les deux matrices B affectent la matrice centrale U .

Nous fixons maintenant $\ell \geq 3$, $j \in \{i, n-1\}$ et considérons les différentes combinaisons de matrices B et U que nous pouvons avoir.

- Commençons par considérer un produit de matrices du type $BBB \cdots BB$.
Observons que si $a_{j+1} < M$ et $a_j < M$ alors par les estimées de [GJS⁺95]

$$B = A_\ell(j) = \begin{pmatrix} \frac{1-b_j}{\ell-1} & b_{j-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\ell \geq 3$, $b_{j-1} \leq \frac{1}{3}$ et $b_j < 1$, alors :

$$B \leq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En calculant le rayon spectral² de $W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve qu'il est $\rho(W) < 1$, alors il existe $0 < \lambda_1 < 1$, et $C > 0$ tels que

$$\|W^n\|_\infty < C\lambda_1^n$$

En particulier, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|W^n\|_\infty = 0$.

En conclusion, si nous considérons un produit de longueur s du type $BBB \dots BBB$, alors il existe $0 < \lambda_1 < 1$ et $C_1 > 0$ tel que

$$\|B^s\|_\infty \leq C_1\lambda_1^s. \quad (3.1.30)$$

- Nous voulons maintenant étudier le produit de matrices du type $U \dots U$.
Observons que si $a_j \geq M$. Alors il existe $\epsilon > 0$ telle que

$$U = A_\ell(j) \leq \begin{pmatrix} \frac{1}{\ell} + \frac{1-b_j}{\ell-1} & \epsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1-b_j}{2} & \epsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.31)$$

Nous continuons à travailler dans le cas limite en supposant que $\epsilon = 0$ et en étudiant toutes les différentes possibilités de longueur deux (rappelons toujours que $\ell \geq 3$ et $0 < b_j \leq \frac{1}{3}$).

2. Rappelons que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice et $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ sont ses valeurs propres, alors le rayon spectrale $\rho(A)$ de A est défini comme $\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq m} |\lambda_j|$.

– Si $a_j \geq M$ et $a_{j+2} \geq M$, alors

$$\begin{aligned} A_\ell(j+1)U &\leq \begin{pmatrix} \frac{1}{\ell} + \frac{1-b_{j+1}}{\ell-1} & b_j \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U \leq \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & b_j \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1-b_j}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{25}{36} + \frac{7}{12}b_j & 0 \\ \frac{5}{6} - \frac{b_j}{2} & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \frac{32}{36} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix} \\ &\leq \frac{8}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En particulier

$$\|A_\ell(j+1)U\|_\infty \leq \frac{8}{9} \quad (3.1.32)$$

– Si $a_j \geq M$ et $a_{j+1} \geq M$ alors :

$$UU \leq \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{36} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{6}U$$

$$\|UU\|_\infty \leq \frac{5}{6} \quad (3.1.33)$$

Considérons maintenant le produit de s matrices de la forme $UU \cdots U$ avec le dernier U à droite $U \leq \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors par (3.1.32) et (3.1.33) il existe $0 < \lambda_2 < 1$ telle que, si s est pair

$$\|U^s\|_\infty \leq (\lambda_2)^{\frac{s}{2}} \quad (3.1.34)$$

et si s est impair

$$\|U^s\|_\infty \leq (\lambda_2)^{\frac{s-1}{2}} \quad (3.1.35)$$

– Nous considérons maintenant le cas d'un produit des n_1 matrices

$A_\ell(j_{n_1})A_\ell(j_{n_1-1}) \cdots A_\ell(j_1)$ tels que $a_{j_1}, a_{j_{n_1+1}} \geq M$ et $a_{j_2}, a_{j_3}, \dots, a_{j_{n_1}} < M$ (nous sommes en train de considérer des produits du type $UBB \cdots BBU$). Sous ces hypothèses, dans le cas limite nous avons que

$$U = A_\ell(j_1) \leq \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = A_\ell(j_{n_1}) \leq \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et pour tout $k \in \{2, n_1 - 1\}$

$$B = A_\ell(j_k) \leq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons que n_1 est pair, et $n_1 > 2$. Nous avons que :

$$\begin{aligned}
UB \dots BU &\leq \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n_1-4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\leq \frac{5}{6} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n_1-4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\leq \frac{5}{6} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n_1-4} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{n_1-2}{2}} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{n_1-2}{2}} \begin{pmatrix} \frac{37}{36} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\leq \frac{37}{36} \frac{5}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{n_1-4}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\leq \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{n_1-2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que n_1 est impair, $n_1 \geq 3$, alors :

$$\begin{aligned}
UB \dots BU &\leq \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n_1-3} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{n_1-3}{2}} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{n_1-1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\leq \frac{7}{6} \frac{5}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{n_1-3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\leq \left(\frac{35}{36}\right)^{\frac{n_1-1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors conclure que pour chaque suite de n_1 matrices $UB \dots BU$, il existe $0 < \lambda_3 < 1$ telle que

$$\|UBB \dots BBU\|_\infty \leq \lambda_3^{\frac{n_1-1}{2}} \quad (3.1.36)$$

Après ces premières observations, nous fixons $n \in \mathbb{N}$, et $2 \leq i \leq n-1$ et nous estimons la quantité suivante :

$$\left\| \prod_{j=i}^n A_\ell(j) \right\|_\infty$$

Lemme 3.1.37. Soient $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq i \leq n-1$ et $A := \prod_{j=i}^n A_\ell(j)$.

Alors il existe une constante $s > 0$ telle que pour chaque sous-bloc $A_\ell(k) \circ \dots \circ A_\ell(k-s)$ de A de longueur s ,

$$\|A_\ell(k) \dots A_\ell(k-s)\|_\infty \leq \omega$$

avec $\omega \in (0, 1)$.

Démonstration. Nous prenons un sous-bloc $A_\ell(k_r) \circ \dots \circ A_\ell(k_1)$ de A .

- Si pour chaque $k_1 < j < k_r$ $A_\ell(j) = B$, alors par (3.1.30) il existe deux constantes $C > 0$ et $\lambda_1 \in (0, 1)$ tels que :

$$\|A_\ell(k_r) \dots A_\ell(k_1)\|_\infty \leq C\lambda_1^r$$

Observons que nous avons la même estimation pour une suite du type $U \underbrace{B \dots B}_r U$.

- Si $A_\ell(k_r) \circ \dots \circ A_\ell(k_1)$ est composé par une première suite du type $B \dots BU$ par des suites du type $UB \dots BU$ ou $U \dots U$ et par une dernière du type $UB \dots B$, alors par (3.1.30), (3.1.34), (3.1.35) et (3.1.36) il existe $C > 0$ et $\lambda_2 \in (0, 1)$ tels que $\|\underbrace{BB \dots BB}_n U \underbrace{\dots}_{n_2} \dots \underbrace{\dots}_{n_k} U \underbrace{BB \dots BB}_{n_{k+1}}\|_\infty$ est plus petit ou égale à

$$C\lambda_2^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \lambda_2^{n_k} C\lambda_2^{n_{k+1}} = C^2 \lambda_2^{n_1+n_2+\dots+n_k+n_{k+1}} = C^2 \lambda_2^{\tilde{r}}$$

Nous posons alors $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ et $s > 0$ tel que $\max\{C\lambda^s, C^2\lambda^s\} < \omega < 1$ □

En conclusion, par le lemme 3.1.37 il existe $s > 0$ et $\omega \in (0, 1)$ tels que, si $\prod_{j=i}^n A_\ell(j)$ contient k sous-blocs de longueur s , alors :

$$\left\| \prod_{j=i}^n A_\ell(j) \right\|_\infty \leq C\omega^k \quad (3.1.38)$$

avec la constante $C > 0$ qui est la borne supérieure pour le dernier sous-bloc de longueur $n - i - ks + 1$.

Nous observons que les bornes trouvées sont valides dans le cas limite, nous avons en effet utilisé l'hypothèse que $\epsilon = 0$ (voir (3.1.31)). Dans le cas général, nous pouvons utiliser la continuité de la norme $\|\cdot\|_\infty$ comme fonction de ϵ pour avoir le même type d'estimées que dans (3.1.38).

En conclusion, par l'inégalité (3.1.28), la suite $\nu_n = -\log \beta_n$ est bornée et d'après la remarque 3.1.17 et les propositions 3.1.18 et 3.1.21, la preuve de la seconde partie du théorème 3.1.1 est ainsi complète.

3.2 Sur l'ensemble non errant des fonctions de la classe \mathcal{L} de nombre de rotation de type non borné

Dans le cas général des fonctions de \mathcal{L} avec nombre de rotation quelconque, il devient plus délicat d'estimer la dimension de Hausdorff de l'ensemble non errant Ω ; on rencontre parfois des surprises dues à la présence de phénomènes paraboliques.

Dans la suite nous présentons des résultats obtenus dans cette direction, en essayant de donner une image complète de la situation quand l'exposant critique $\ell \in (1, 2]$.

3.2.1 Fonctions de \mathcal{L} avec exposant critique $\ell \in (1, 2)$

Nous commençons par observer que, si f est une fonction de \mathcal{L} avec exposant critique $\ell \in (1, 2)$, alors, par l'inégalité (3.1.3) nous pouvons déduire qu'il existe $0 < \lambda < 1$ telle que, pour tout n assez grand

$$\alpha_n = \frac{|(-q_n, 0)|}{|[-q_n, 0]|} \leq \lambda \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (3.2.1)$$

Lemme 3.2.2. *Si f est une fonction de \mathcal{L} avec exposant critique $\ell \in (1, 2)$, alors il existe $0 < \lambda < 1$ telle que, pour n assez grand et pour tout trou I_i^n de la partition dynamique \mathcal{P}_n nous avons :*

$$|I_i^n| < C \lambda \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

où C est une constante strictement positive.

Démonstration. Par symétrie, sans perdre de généralité nous pouvons supposer que n est pair.

- Soit I_i^n un trou long de la $n^{\text{ème}}$ partition dynamique, alors I_i^n est du type $f^{-i}(\underline{-q_n}, \underline{0}) = (\underline{-q_n - i}, \underline{-i})$ pour $i \in \{1, \dots, q_{n+1} - 1\}$.

Alors

$$|I_i^n| \leq \frac{|(-q_n - i, -i)|}{|[-q_n - i, -i]|} \leq \frac{|[-q_n - i, -i]| |(-q_n - i, -i)|}{|(-q_n - i, -i)| |[-q_n - i, -i]|}$$

Par la distorsion du birapport **Point** sur i itérées, nous trouvons une constante $C > 0$ telle que, pour n assez grand :

$$|I_i^n| \leq C \frac{|[-q_n, 0]| |(-q_n, 0)|}{|(-q_n, 0)| |[-q_n, 0]|} \leq C \alpha_n$$

En conclusion par (3.2.1), il existe $\lambda \in (0, 1)$ telle que :

$$|I_i^n| \leq C \lambda \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{n}{2}}$$

- Soit maintenant I_i^n un trou court de la $n^{\text{ème}}$ partition dynamique, alors I_i^n est de la forme $f^{-i}(\underline{0}, \underline{-q_{n+1}}) = (\underline{-i}, \underline{-q_{n+1} - i})$, avec $i \in \{1, \dots, q_n - 1\}$.

Avec une procédure identique à la précédente nous trouvons que :

$$|I_i^n| \leq C \alpha_{n+1} \leq C \lambda \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

La preuve est alors complète. □

Nous allons maintenant étudier le cas des nombres de rotation de type Diophantien. Rappelons :

Définition 3.2.3. *Soit $\alpha \geq 2$ un nombre réel. Un nombre irrationnel ρ est Diophantien d'exposant α s'il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que*

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| > \frac{\epsilon}{q^\alpha}$$

pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ (sous forme irréductible).

Nous pouvons exprimer cette condition en termes de taux de croissance des entiers q_n associés :

Lemme 3.2.4. *Le nombre irrationnel $\rho \in (0, 1)$ est Diophantien d'exposant α si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que $q_{n+1} \leq Cq_n^{\alpha-1}$ pour tout entier n .*

Démonstration. Supposons que $q_n < q < q_{n+1}$, alors nous avons :

$$|q\rho - p| \geq d_n = |q_n\rho - p_n|$$

pour chaque entier p . Nous multiplions cette inégalité par $q^{\alpha-1} > q_n^{\alpha-1}$ et nous obtenons que :

$$|q\rho - p|q^{\alpha-1} > |q_n\rho - p_n|q_n^{\alpha-1}$$

Pour conclure la preuve, il suffit d'observer que l'erreur $d_n = |q_n\rho - p_n|$ est de l'ordre de $\frac{1}{q_{n+1}}$, et donc la condition $\frac{q_n^{\alpha-1}}{q_{n+1}} > K > 0$ est équivalente à la définition donnée ci-dessus. \square

D'après le lemme 3.2.4 nous avons par récurrence que :

Lemme 3.2.5. *Soit $\rho \in (0, 1)$ un nombre Diophantien d'exposant α , alors il existe une constante positive C_2 telle que :*

$$q_{n+1} \leq C_2^{(\alpha-1)^n}$$

Le théorème suivant en découle :

Théorème 3.2.6. *Soit $f \in \mathcal{L}$ avec exposant critique $1 < \ell < 2$ et nombre de rotation ρ de type Diophantien d'exposant $\alpha < \sqrt{\frac{2}{\ell}} + 1$. Alors l'ensemble non errant a dimension de Hausdorff nulle.*

Démonstration. Observons que $\Omega_n = \bigcup_{I_i^n \in \mathcal{P}_n} I_i^n$ est un recouvrement de l'ensemble non errant composé par les trous de la partition dynamique \mathcal{P}_n .

De plus le diamètre maximal du recouvrement $\{I_i^n\}$ tend vers zéro pour $n \rightarrow +\infty$ (voir le corollaire 3.1.7). Nous fixons alors $\delta > 0$ et n tels que le recouvrement $\{I_i^n\}$ a diamètre plus petit que δ .

Pour ce recouvrement nous avons (voir le lemme 3.2.2 et le lemme 3.2.5) :

$$\sum_{I_i^n \in \mathcal{P}_n} |I_i^n|^s \leq 2Cq_{n+1}\lambda^{s(\frac{2}{\ell})^{\frac{n+1}{2}}} \leq 2C_1C_2^{(\alpha-1)^n}\lambda^{s(\frac{2}{\ell})^{\frac{n}{2}}}$$

Puisque $\alpha < \sqrt{\frac{2}{\ell}} + 1$, alors pour chaque $\delta > 0$ la s -mesure de Hausdorff de l'ensemble non errant est finie pour tout $s > 0$. Ceci implique le théorème. \square

3.2.2 Fonctions de \mathcal{L} avec exposant critique $\ell = 2$

Nous essayons maintenant de comprendre ce que l'on peut affirmer pour les fonctions dans \mathcal{L} avec exposant critique $\ell = 2$. D'après la première partie du théorème 3.1.1, sous ces hypothèses, il existe $0 < \lambda < 1$ telle que, pour tout n suffisamment grand,

$$\alpha_n = \frac{|(-q_n, 0)|}{|[-q_n, 0]|} \leq \lambda^n \tag{3.2.7}$$

Lemme 3.2.8. *Il existe une constante positive $C > 0$ telle que, chaque trou I_j^{n-2} de \mathcal{P}_{n-2} est divisé au moins en deux trous $I_{j_{1,2}}^n$ de \mathcal{P}_n avec des longueurs qui satisfont la relation suivante :*

$$|I_{jk}^n| < C\lambda^{n-1}|I_j^{n-2}|, \quad k \in \{1, 2\}$$

Démonstration. Nous procédons exactement comme dans la preuve du lemme 2.2.8 en utilisant l'inégalité (3.2.7). \square

Nous considérons le cas des fonctions avec nombre de rotation ρ du type suivant.

Soit $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ le développement en fraction continue du nombre de rotation. Nous supposons que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît de façon subexponentielle, c'est-à-dire, pour chaque $\epsilon > 0$ il existe n_0 tel que, pour chaque $n \geq n_0$,

$$a_n \leq (1 + \epsilon)^n \quad (3.2.9)$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.2.10. *Pour presque tout nombre de rotation ρ et pour tout $f \in \mathcal{L}$ avec exposant critique $\ell = 2$ et nombre de rotation ρ , l'ensemble non errant a dimension de Hausdorff nulle.*

Démonstration. Nous considérons les fonctions dont le nombre de rotation vérifie (3.2.9).

Ces nombres de rotation forment un ensemble de mesure de Lebesgue pleine, (voir [HW08]).

Nous considérons maintenant deux recouvrements de l'ensemble non errant. Le premier $\Omega_{n-2} = \bigcup_{I_j^{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2}} I_j^{n-2}$ sera composé par les trous de la partition dynamique \mathcal{P}_{n-2} et le second $\Omega_n = \bigcup_{I_i^n \in \mathcal{P}_n} I_i^n$ sera composé par les trous de \mathcal{P}_n . Nous analysons les relations entre eux.

Par le lemme 3.2.8, l'équation (3.2.7) et la formule (1.6.1), nous pouvons déduire :

1. chaque intervalle I_j^{n-2} de Ω_{n-2} est divisé en au moins deux intervalles $I_{j_{1,2}}^n$ de Ω_n avec des longueurs qui satisfont la relation $|I_{jk}^n| < C\alpha_{n-1}|I_j^{n-2}| < C\lambda^{n-1}|I_j^{n-2}|$, $k \in \{1, 2\}$.
2. chaque intervalle I_j^{n-2} est divisé en au maximum $a_n(a_{n+1} + 1) + 1$ sous-intervalles.

Nous observons maintenant que le diamètre maximal du recouvrement $\{I_i^n\}$ tend vers zéro pour $n \rightarrow +\infty$. Nous fixons alors $\delta > 0$ et n tels que le recouvrement $\{I_i^n\}$ a diamètre plus petit que δ .

Soit maintenant $s > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que

$$(1 + \epsilon)^2 \lambda^s < 1 \quad (3.2.11)$$

où λ provient du lemme 3.2.8.

Alors par (3.2.9) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour chaque $n \geq n_0$,

$$a_n \leq (1 + \epsilon)^n \quad (3.2.12)$$

Par les points 1. et 2. et par (3.2.12) nous avons que :

$$\begin{aligned} \sum_{I^n \in \mathcal{P}_n} |I^n|^s &\leq C^s (a_n(a_{n+1} + 1) + 1) \lambda^{(n-1)s} \sum_{I^{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2}} |I^{n-2}|^s \\ &\leq C^s C_2 ((1 + \epsilon)^2 \lambda^s)^n \sum_{I^{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2}} |I^{n-2}|^s \end{aligned}$$

Par la condition (3.2.11), il existe $0 < \omega < 1$ telle que

$$C^s C_2 ((1 + \epsilon)^2 \lambda^s)^n < C^s \omega^n < 1$$

Donc il existe $C_3 > 0$ telle que :

$$\sum_{I^n \in \mathcal{P}_n} |I^n|^s \leq C_3$$

En conclusion, pour tout $s > 0$ la s -mesure de Hausdorff de Ω est finie. Et le résultat en découle. \square

Chapitre 4

Flots de Cherry

En 1937, Cherry a construit des flots analytiques sur le 2-tore sans orbites fermées et avec un point selle et un point attractif, les deux hyperboliques. Ces flots sont appelés flots de Cherry.



FIGURE 4.1 – Flot de Cherry

Ce chapitre sera divisé en deux parties.

- La première traitera de l'étude de la dimension de Hausdorff de l'ensemble quasi minimal. Nous donnerons en effet un exemple de un flot de Cherry avec d'un ensemble quasi minimal métriquement non triviale.
- Dans la deuxième partie nous étudierons les mesures de probabilité invariantes par les flots de Cherry et, plus précisément, les mesures physiques.

4.1 Sur la dimension de l'ensemble quasi minimal

4.1.1 Définitions

Soit X un champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ sur le tore \mathbb{T}^2 et soit $\phi_X^t(\cdot)$ le flot associé, c'est-à-dire l'application¹ vérifiant :

$$\left. \frac{d}{dt} \phi_X^t(x) \right|_{t=0} = X(x)$$

notons la trajectoire du flot passant par un point x par $t \mapsto \phi_X^t(x)$.

La *semi-trajectoire* positive est l'ensemble

$$\gamma^+(x) = \{\phi_X^t(x) : t \geq 0\}$$

et la semi-trajectoire négative est

$$\gamma^-(x) = \{\phi_X^t(x) : t \leq 0\}.$$

L'ensemble $\gamma(x) = \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$ est appelé la *trajectoire* (ou l'orbite) à travers le point x . Si $\gamma(x) = x$ alors x est dit *point fixe* ou une *singularité*. Nous dénotons par $\text{Sing}(X)$ l'ensemble des singularités de X ².

Si un point $x \in \mathbb{T}^2$ n'est pas un point fixe alors il est dit *régulier* et $\gamma(x)$ sera appelé une trajectoire *unidimensionnelle*. Si $\gamma(x)$ est homéomorphe au cercle \mathbb{S}^1 , alors $\gamma(x)$ est une trajectoire *fermée* ou *périodique*. La trajectoire $\gamma(x)$ est appelé une trajectoire *non-fermée* si $\gamma(x)$ n'est pas un point fixe ni une trajectoire périodique.

L'ensemble ω -*limite* de la semi-trajectoire positive $\gamma^+(x)$ est l'ensemble

$$\omega[\gamma^+(x)] = \{y \in \mathbb{T}^2 : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n \rightarrow +\infty \text{ avec } X_{t_n}(x) \rightarrow y\},$$

et l'ensemble α -*limite* de la semi-trajectoire négative $\gamma^-(x)$ est

$$\alpha[\gamma^-(x)] = \{y \in \mathbb{T}^2 : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n \rightarrow -\infty \text{ avec } X_{t_n}(x) \rightarrow y\}.$$

L'ensemble ω -*limite* (respectivement α -*limite*) de chaque semi-trajectoire positive (respectivement négative) de la trajectoire γ est appelé l'ensemble ω -*limite* $\omega(\gamma)$ de γ (respectivement l'ensemble α -*limite* $\alpha(\gamma)$ de γ).

1. Cette application (unique) est bien définie en tout point du tore et pour tout $t \in \mathbb{R}$, ceci découle du théorème de Cauchy-Lipschitz de la compacité du tore. Le flot est ainsi un groupe à un paramètre, ou encore, l'action à droite de \mathbb{R} sur le groupe des difféomorphismes du tore. Il y a ainsi une correspondance biunivoque entre champ de vecteurs lisse sur le tore et groupes à un paramètre de difféomorphismes du tore (flot).

2. Ce sont exactement les points x du tore pour lesquels $X(x) = 0$

L'union des ensembles ω -limite de toutes les trajectoires du flot ϕ_X est appelé l'ensemble ω -limite et noté $\omega(X)$ de X . De façon analogue, on définit l'ensemble α -limite, $\alpha(X)$ de X . L'union

$$\lim(X) = \omega(X) \cup \alpha(X)$$

est appelée *l'ensemble limite* de X .

La trajectoire est ω -récurrente (respectivement α -récurrente), si elle est contenue dans son ensemble ω -limite (respectivement α -limite). La trajectoire est *récurrente* si elle est soit ω -récurrente soit α -récurrente. Une trajectoire récurrente est *non triviale* si elle n'est pas un point fixe ni une trajectoire périodique.

Soit S une sous-ensemble de \mathbb{T}^2 . Nous dénotons par $W^s(S)$ l'ensemble des points de \mathbb{T}^2 qui ont S comme ω -limite (appelé la *variété stable* de S) et par $W^u(S)$ l'ensemble des points qui ont S comme α -limite (appelé la *variété instable* de S).

Définition 4.1.1. *Un champ de vecteurs de Cherry est un champ de vecteurs C^∞ sur le tore \mathbb{T}^2 sans trajectoires fermées qui a exactement deux singularités, un point fixe attractif et un point selle, les deux hyperboliques.*

Le premier exemple d'un champ de vecteurs de ce type a été donné par Cherry en 1938 (voir [Che38]).

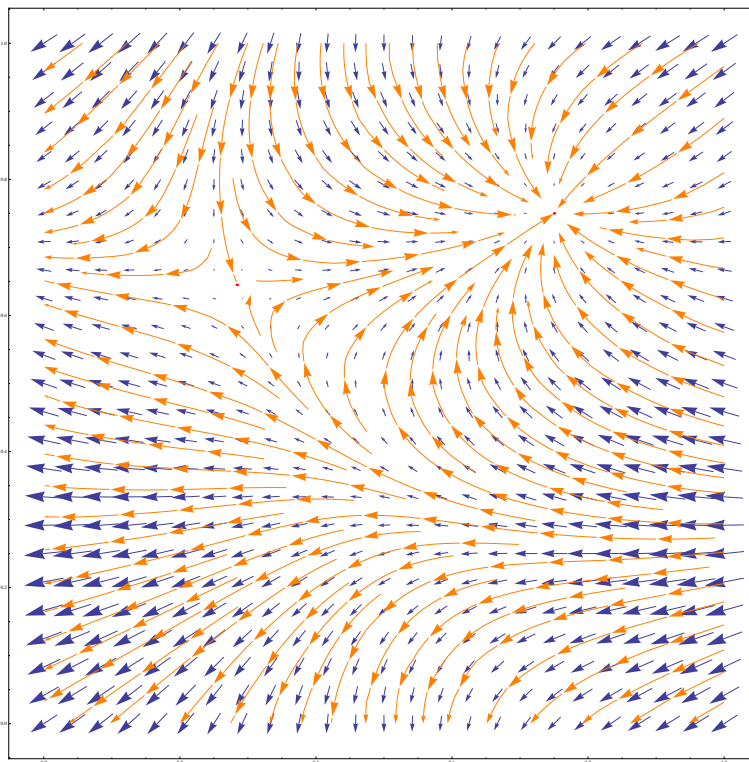


FIGURE 4.2 – Flot de Cherry avec un point attractif et un point selle

4.1.2 Section de Poincaré

Nous commençons par rappeler le *théorème de rectification*.

Théorème 4.1.2. Soit φ un flot de classe C^r sur le tore \mathbb{T}^2 et soit $p \in \mathbb{T}^2$ un point régulier. Alors il existe un voisinage U de p et un C^r -difféomorphisme $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que, pour chaque trajectoire γ vérifiant $\gamma \cap U \neq \emptyset$, la composante connexe de $\gamma \cap U$ est envoyée par ψ sur la droite $y = \text{const}$. (Figure 4.3).

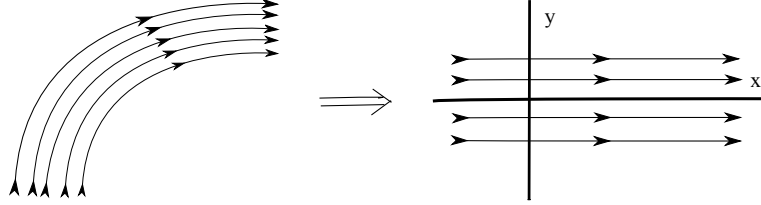


FIGURE 4.3 – Difféomorphisme rectifiant

Le difféomorphisme ψ du théorème précédent est appelé un C^r -difféomorphisme rectifiant. De plus le théorème de rectification nous dit que la structure topologique du flot dans un voisinage du point régulier est très simple.

Définition 4.1.3. Un arc $\Sigma \in \mathbb{T}^2$ est dit un segment transversal si pour chaque point $p \in \Sigma$ il existe un C^r -difféomorphisme rectifiant $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p \in U$, $\psi(p) = (0, 0)$, tel que $\psi(U \cap \Sigma)$ est la droite $x = \text{const}$.

Le Théorème de rectification implique, pour chaque point régulière $p \in \mathbb{T}^2$, l'existence d'un segment transversal Σ qui contient p .

Définition 4.1.4. On dit qu'une sous-variété $F \subset \mathbb{T}^2$ est un C^r -flot box s'il existe un C^r -difféomorphisme $\theta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ tel que :

1. pour chaque $t \in [0, 1]$, $\theta([0, 1] \times \{t\})$ est un arc d'une trajectoire ;
2. $\theta(\{0\} \times [0, 1])$ et $\theta(\{1\} \times [0, 1])$ sont des segments transversaux ;
3. $\theta([0, 1]^2) = F$.

Si un arc d de la trajectoire n'est pas homéomorphe au cercle S^1 , alors il existe un voisinage fermé F de d tel que F est un flot box.

Définition 4.1.5. Une courbe simple fermée C est dite une courbe fermée transversale si chaque sous-arc de C est un segment transversale.

Proposition 4.1.6. Soit X un champ de vecteurs de Cherry. Il existe une courbe fermée simple C^∞ , C sur $\mathbb{T}^2 \setminus \text{Sing}(X)$ et avec les propriétés suivantes :

- C est une courbe transversale ;
- C n'est pas rétractable en un point.

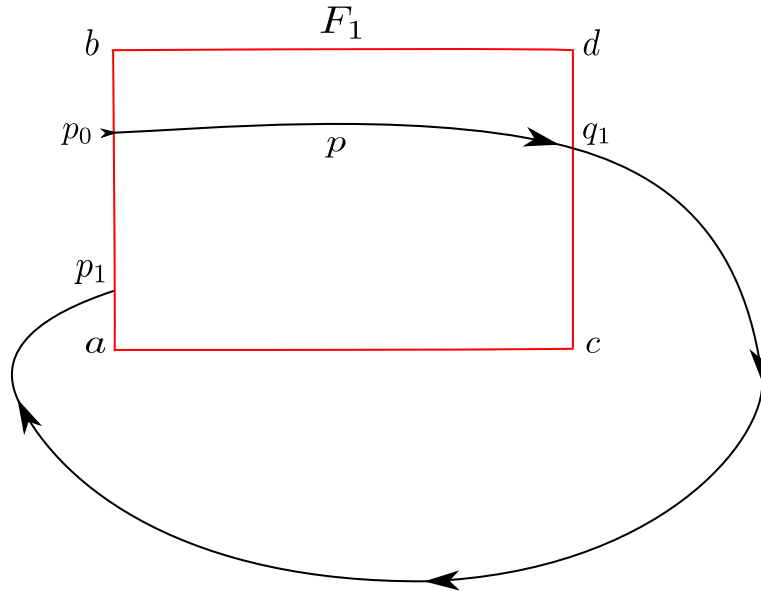
Démonstration. Nous commençons par montrer que X admet une trajectoire qui est α -récurrente.

Soit p_s le point selle de X et soit γ une composante de la variété stable $W^s(p_s) \setminus \{p_s\}$ du point selle (γ est appelée une séparatrice stable).

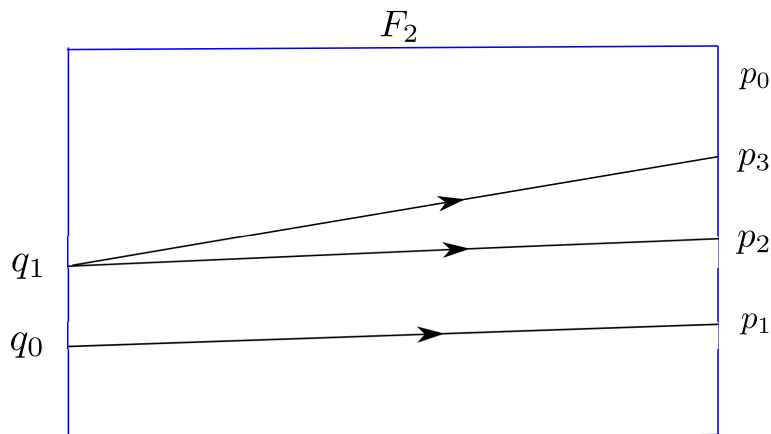
Comme la seule autre singularité de X est le point attractif, alors par le théorème de Denjoy-Schwartz l'ensemble α -limite de γ doit contenir le point selle p_s . Par conséquent $\gamma \subset \alpha(\gamma)$ et donc γ est la trajectoire α -récurrente cherchée.

Nous montrons maintenant que par chaque point $p \in \gamma$ passe une courbe C avec les propriétés énoncées dans la proposition.

Soit alors $p \in \gamma$ et soit F_1 un flot box qui contient p . Soit \overline{ab} et \overline{cd} les cotés de F_1 . Comme $p \in \alpha(\gamma)$, alors $\overline{\gamma}$ intersecte F_1 une infinité de fois. Soit p_1 le premier point d'intersection de $\overline{\gamma}$ avec \overline{ab} . Nous pouvons supposer que p_1 est en dessous de p_0 (dans le cas contraire la construction est similaire) (voir figure 4.4 avec F_1 en rouge).

FIGURE 4.4 – F_1

Nous construisons maintenant un flot box F_2 qui contient l'arc de la trajectoire q_0p_1 . Comme \mathbb{T}^2 est orientable nous pouvons trouver dans F_2 un arc d'une trajectoire de X qui part d'un point q_1 de \overline{cd} au-dessus de q_0 et intersecte \overline{ab} en un point p_2 au-dessus de p_1 . De plus dans F_2 nous pouvons prendre un arc q_1p_3 , avec p_3 au dessus de p_2 mais en dessous de p_0 qui est transversal et qui a pente strictement positive à la fin (voir figure 4.5 avec F_2 en bleu).

FIGURE 4.5 – F_2

Nous complétons cet arc avec un autre arc dans F_1 qui connecte p_3 et q_1 , qui contient p et qui est transversal. De plus cet arc a la même pente que celui construit précédemment dans F_2 . L'union des deux arcs forme la courbe cherchée (voir figure 4.6). \square

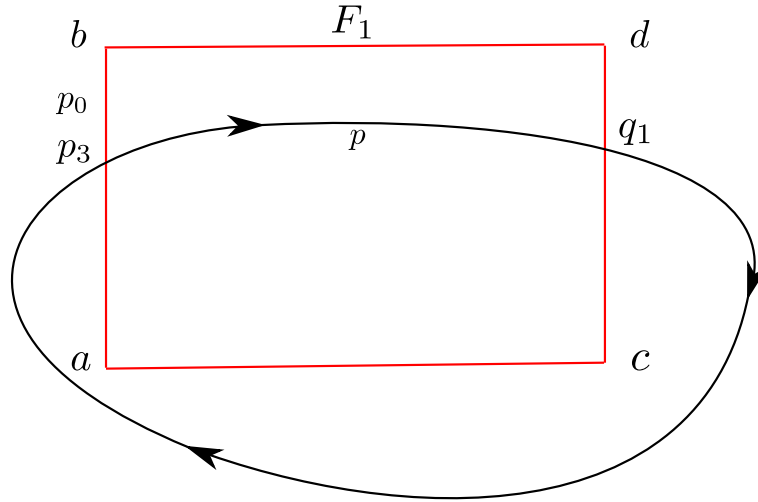


FIGURE 4.6 –

Définition 4.1.7. La courbe fermée C construite dans la proposition 4.1.6 est appelée une section de Poincaré.

4.1.3 La fonction de premier retour

Soit X un champ des vecteurs de Cherry, et C une section de Poincaré de X . Notons que $\mathbb{T}^2 \setminus C$ est \mathcal{C}^∞ -équivalent à un anneau $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$ et nous pouvons écrire $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times [0, 1] / \sim$, où $(s, 0) \sim (s, 1)$. Considérons X comme un flot sur $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ où nous identifions $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ et $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$. Après ce changement de coordonnées, le champ des vecteurs obtenu est encore un champ de vecteurs de Cherry.

Nous notons par Σ l'ensemble des points $x \in \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ tels que $\phi_X^t(x) \in \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ pour un certain $t > 0$. Pour $x \in \Sigma$, soit $t(x)$ le plus petit $t > 0$ tel que $\phi_X^{t(x)}(x) \in \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ et nous définissons la fonction $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^1$ par $f(x) = \phi_X^{t(x)}(x)$. Cette fonction est appelée la *fonction de premier retour* à \mathbb{S}^1 .

Nous définissons maintenant f sur $U = (\mathbb{S}^1 \setminus \Sigma)$ par $f(U) = v$ où $v = W^u(p_s) \cap \mathbb{S}^1 \times \{1\}$. Pour chaque point $x \in (\mathbb{S}^1 \setminus U) \times \{0\}$ à côté de ∂U , il existe $t > 0$ tel que $\phi_X^t(x)$ intersecte $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ à côté de v (pour plus de détails voir la section 2 du chapitre 7 de [ABZ96]). En particulier $\lim_{x \rightarrow \partial U, x \notin U} f(x)$ est un singleton.

Finalement, nous avons obtenu une fonction f du cercle, qui est continue partout sauf aux points du bord de $\mathbb{S}^1 \setminus U$.

4.1.4 Propriétés de la fonction de premier retour

Soit X un champ des vecteurs de Cherry avec un point selle qui a comme valeurs propres $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Soit \mathbb{S}^1 une section de Poincaré et soit f la fonction de premier retour à \mathbb{S}^1 . Alors :

1. comme les trajectoires de X ne peuvent pas s'intersecter alors f préserve l'ordre.
2. f est constante sur un intervalle U .

3. La restriction de f à $\mathbb{S}^1 \setminus \overline{U}$ est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ sur son image.
4. Soit $\pi(a, b) = U$. Sur un voisinage à droite de b , f peut être exprimée comme

$$h_r \left((x - b)^l \right),$$

où $l = \frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}$ et h_r est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ sur un voisinage de b . De façon similaire sur un voisinage à gauche de a , f s'exprime comme

$$h_l \left((a - x)^l \right).$$

5. Comme X n'a pas des trajectoires périodiques le nombre de rotation de f , $\rho(f)$, est irrationnel.

Ces sont des propriétés de la fonction de premier retour bien connues, pour plus de détails le lecteur peut consulter par exemple [ABZ96] ou [NZ99].

En conclusion nous pouvons affirmer que la fonction de premier retour f appartient à la classe \mathcal{L} présenté dans le chapitre 1.

Lemme 4.1.8. *Il existe un champ des vecteurs de Cherry avec fonction de premier retour qui a nombre de rotation de type borné.*

Démonstration. Soit X un champ des vecteurs de Cherry avec section de Poincaré \mathbb{S}^1 . Pour chaque $\epsilon > 0$, nous définissons Y_ϵ comme un champ de vecteurs horizontal avec tous les vecteurs de même longueur ϵ . Soit $X_\epsilon = X + Y_\epsilon$ et dénotons par f_ϵ la fonction de premier retour X_ϵ à \mathbb{S}^1 .

La famille (f_ϵ) est croissante et donc $\rho_\epsilon = \rho(f_\epsilon)$ est une fonction croissante et continue (voir la proposition 1.4.10 et la remarque 1.4.13).

Comme ρ_0 est irrationnel, ρ_ϵ est strictement croissant (voir la proposition 1.4.14) et donc il existe ϵ_0 tel que ρ_{ϵ_0} est un nombre irrationnel de type borné. \square

4.1.5 Ensemble quasi minimal

Définition 4.1.9. *Soit γ une trajectoire récurrente non triviale. La fermeture $\overline{\gamma}$ de γ est appelée un ensemble quasi minimal.*

Nous énonçons deux propositions qui nous permettent de comprendre la structure des ensembles minimaux pour les champs des vecteurs de Cherry. Les preuves détaillées peuvent être trouvées par exemple dans [NZ99].

Proposition 4.1.10. *Soit X un champ des vecteurs de Cherry sur le tore \mathbb{T}^2 . Alors il existe un seul ensemble quasi minimal pour X .*

Démonstration. Dans la proposition 4.1.6 nous avons montré que si γ est une séparatrice stable du flot, alors γ est α -récurrente. Naturellement γ est aussi ω -récurrente et sa fermeture sera alors un ensemble quasi minimal N .

Nous pouvons construire une courbe fermée transversale qui intersecte N (voir la preuve de la proposition 4.1.6), et celle-ci est unique à homotopie près. Observons que sur le tore \mathbb{T}^2 le nombre maximum de courbes fermées, simples, non homotopes à un point et disjointes, est 1, conformément à son genre. On en déduit ainsi que le nombre de ces transversales est 1, qui sera ainsi égal au nombre d'ensembles (disjoints) quasi minimaux pour X . \square

Nous avons l'assertion suivante, démontrée dans [NZ99].

Assertion 4.1.11. *Chaque champ des vecteurs de Cherry a exactement un ensemble quasi minimal qui est localement homéomorphe au produit cartésien d'un ensemble de Cantor et d'un segment.*

Théorème 4.1.12. *Soit X un champ des vecteurs de Cherry de valeurs propres $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ pour son point selle. Si $|\lambda_2| > 2\lambda_1$ et la fonction de premier retour de X a nombre de rotation de type borné alors l'ensemble quasi minimal de X a dimension de Hausdorff strictement plus grande que 1.*

Démonstration. Nous dénotons par $\dim_{\mathbb{H}}(Q)$ la dimension d' Hausdorff de l'ensemble Q et par N l'ensemble quasi minimal de X . Par l'assertion 4.1.11, dans un petit voisinage de la section de Poincaré, Q est équivalent, par un \mathcal{C}^2 -difféomorphisme, à $I \times \Omega$ où Ω est l'ensemble non errant de la fonction de premier retour. Finalement, par le théorème 2.1.1 et par la formule produit, théorème 8.10 de [Mat95],

$$\dim_{\mathbb{H}}(N) \geq \dim_{\mathbb{H}}(I \times \Omega) \geq \dim_{\mathbb{H}}(I) + \dim_{\mathbb{H}}(\Omega) > 1.$$

□

4.2 Sur les mesures physiques pour les flots de Cherry

4.2.1 Définitions et exemples

Définition 4.2.1. *Soit (M, \mathcal{A}, μ) un espace de probabilité et soit $f : M \rightarrow M$ telle que $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ pour chaque $A \in \mathcal{A}$. Nous disons que μ est invariante sous f (ou que f préserve μ) si pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{A}$ nous avons : $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$.*

Une conséquence directe de cette définition est que $\{x \in M : x \in A\}$ et $\{x \in M : f^n(x) \in A\}$ ont la même mesure μ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Cela signifie que la probabilité de trouver un point dans un ensemble mesurable ne dépend pas du moment considéré.

Un des premiers résultats sur les théories probabilistes des systèmes dynamiques fut obtenu par Poincaré et il peut être énoncé dans notre contexte de la façon suivante :

Théorème 4.2.2. *(Théorème de récurrence de Poincaré). Supposons que f préserve une mesure de probabilité μ . Si A est un ensemble mesurable, alors pour presque tous $x \in A$, il y a infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $f^n(x) \in A$.*

Le théorème précédent ne nous dit rien par rapport à la fréquence avec laquelle les orbites rentrent dans A . C'est-à-dire, le théorème de récurrence de Poincaré ne nous fournit pas d'informations sur

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j < n : f^j(x) \in A\}}{n}. \quad (4.2.3)$$

Est-ce que cette limite existe ? Pour quelles valeurs de x ? Le théorème ergodique de Birkhoff donne les réponses à ces questions. Avant de l'énoncer nous introduisons quelques concepts importants :

Définition 4.2.4. *Nous supposons que f préserve une mesure μ . Nous disons que f (ou μ) est ergodique si $\mu(A) = 0$ ou $\mu(M \setminus A) = 0$ pour chaque ensemble mesurable $A \subset M$ avec $f^{-1}(A) = A$.*

Nous observons que $f^{-1}(A) = A$ implique que $f(A) \subset A$ et $f(M \setminus A) \subset M \setminus A$. Cela signifie que l'espace ne peut pas être décomposé dans deux parties non vides qui n'interagissent pas.

Théorème 4.2.5. *(Théorème ergodique de Birkhoff). Supposons que f préserve une mesure de probabilité μ . Si φ est intégrable, alors il existe une fonction intégrable φ^* telle que pour μ presque tout $x \in M$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(z)) = \varphi^*(x).$$

De plus, si μ est ergodique $\varphi^*(x) = \int \varphi d\mu$ pour μ presque tout $x \in M$.

Si nous prenons φ la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable A , nous pouvons facilement déduire que la limite (4.2.3) existe pour μ presque tout $x \in M$.

En outre, si μ est ergodique alors la limite est précisément $\mu(A)$. Cela signifie que la fréquence de visite dans A coïncide avec la portion que A occupe dans l'espace des phases.

Les résultats que nous avons présentés concernent la dynamique sur des espaces de probabilité sans structures supplémentaires sur l'espace des phases M . Souvent M a une structure de variété de Riemannienne et une forme volume qui induit la mesure de Lebesgue m sur les ensembles boréliens de M . Plus précisément, pour tout $p \in M$ soit ω_p une forme volume sur un voisinage V_p de p , alors

$$m(B) = \int_B d\omega_p$$

pour chaque ensemble mesurable $B \subset V_p$. Clairement cette mesure n'est pas uniquement définie.

Le théorème ergodique de Birkhoff nous dit que pour μ -presque tout point, où μ est une mesure invariante, les moyennes temporelles asymptotiques existent et qu'elle coïncident avec la moyenne spatiale si μ est ergodique.

Pourtant une mesure invariante peut manquer de signification physique, dans le sens que les ensembles de mesure pleine pour μ peuvent avoir mesure de Lebesgue nulle. Ce problème peut être résolu par la notion que nous présentons, introduite par Sinai, Ruelle et Bowen dans le cadre des systèmes dynamiques hyperboliques.

Définition 4.2.6. *Soit μ une mesure invariante par f . Le bassin d'attraction de μ , dénoté par $B(\mu)$, est l'ensemble des points $x \in M$ tels que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\delta_x + \delta_{f(x)} + \delta_{f^2(x)} + \cdots + \delta_{f^{n-1}(x)}) = \mu,$$

où δ_y est la mesure de Dirac au point $y \in M$ et la limite est au sens de la topologie faible- \star .

En d'autres termes, $z \in B(\mu)$ si et seulement si le temps moyen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(z))$$

existe et coïncide avec la taille d'espace $\int \varphi d\mu$, pour chaque fonction continue $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 4.2.7. *Nous disons que la mesure μ est physique si $B(\mu)$ a mesure de Lebesgue positive sur M .*

Exemple 4.2.8. *Nous supposons que la fonction $f : M \rightarrow M$ admet une mesure de probabilité invariante μ qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et ergodique. Alors, comme conséquence du théorème ergodique de Birkhoff, μ est une mesure physique pour f . En effet si μ est ergodique, alors par le théorème 4.2.5 son bassin d'attraction a μ mesure pleine et alors par l'absolue continuité, $B(\mu)$ ne peut pas avoir mesure de Lebesgue nulle.*

Exemple 4.2.9. *Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction \mathcal{C}^2 par morceaux avec un point fixe neutre à l'origine. C'est-à-dire, nous supposons que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, mais la dérivée seconde $f''(0)$ est différente de zéro. De plus, $|f'(x)| > 1$ pour chaque $x \neq 0$, compris $x = c^\pm$ (voir figure 4.7).*

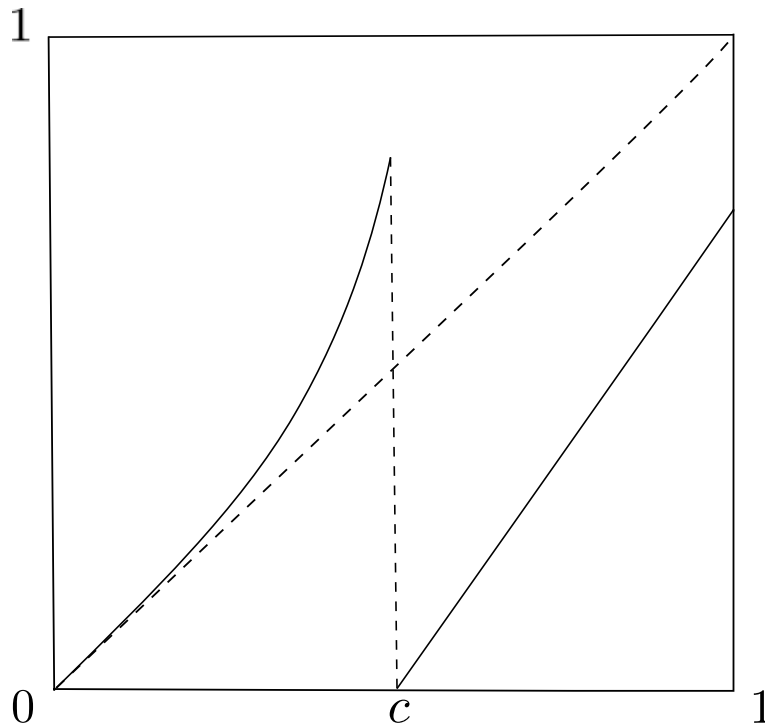


FIGURE 4.7 –

Nous pouvons démontrer que l'orbite de x , pour Lebesgue presque tous points $x \in [0, 1]$ passe la plupart du temps dans un voisinage de l'origine arbitrairement petit : plus précisément, pour chaque $\delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq j < n : |f^j(x)| < \delta\}}{n} = 1.$$

Par conséquent, pour chaque fonction continue $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et pour chaque $\epsilon > 0$, nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi(f^j(z)) - \varphi(0)| < \epsilon.$$

Donc, pour toute fonction continue φ et pour Lebesgue presque tout point x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(z)) = \varphi(0) = \int \varphi d\delta_0.$$

Donc la mesure de Dirac en zéro est la seule mesure physique pour f .

Cependant les mesures physiques n'existent pas pour tous les systèmes. Nous donnons dans la suite un contre-exemple dû à Mañé.

Exemple 4.2.10. Nous considérons un champ de vecteurs sur le plan avec deux points selles A et B qui sont connectés par deux trajectoires comme sur la figure 4.8. Ces deux trajectoires bordent une région U qui contient un point fixe répulsif r .

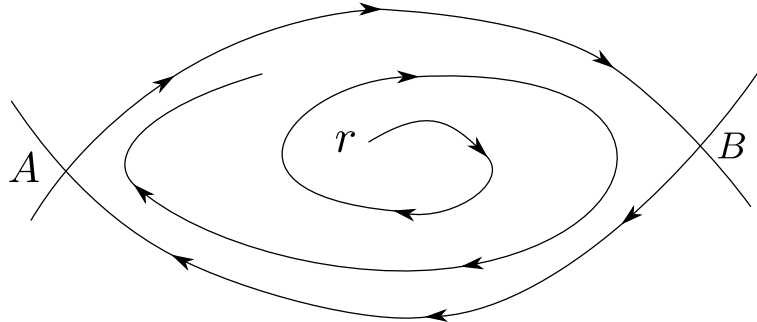


FIGURE 4.8 – Exemple de Mañé

Nous supposons que toutes les orbites de $U \setminus \{r\}$ partent vers l'extérieur pour s'accumuler sur le bord de U . Nous choisissons alors deux voisinages N_A et N_B des points selles tels que chaque orbite passe alternativement dans N_A et N_B . Soit $T_A(i)$ et $T_B(i)$ le temps passé par l'orbite dans N_A et N_B respectivement au i -ème passage.

Le temps pour passer entre N_A et N_B est clairement borné pour $i \rightarrow +\infty$. Les orbites passent alors la plupart du temps dans $N_A \cup N_B$.

En conclusion si une mesure physique existe alors elle doit assigner mesure pleine à $N_A \cup N_B$ et comme ces voisinages peuvent être arbitrairement petits, alors elle doit assigner mesure pleine à l'ensemble $\{A\} \cup \{B\}$.

Nous expliquons la situation plus en détail.

Soit $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ et $\lambda'_1 > 0 > \lambda'_2$ les valeurs propres des points selles A et B respectivement. Nous voulons montrer que :

1. L'hypothèse que les orbites s'écartent vers le bord de U implique que $|\lambda_2||\lambda'_2| \geq \lambda_1\lambda'_1$.
2. Si $|\lambda_2||\lambda'_2| > \lambda_1\lambda'_1$ alors les suites $(T_A(i))_{i \in \mathbb{N}}$ et $(T_B(i))_{i \in \mathbb{N}}$ grandit avec vitesse exponentielle pour $i \rightarrow +\infty$ et ceci implique qu'il n'y a pas des mesures physiques.

Nous commençons par démontrer le point 1. Soit (x, y) un système de coordonnées locales au voisinage de A tel que l'équation différentielle associée soit de la forme

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_2 x, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda_1 y$$

avec courbes de solution

$$x = x_0 e^{\lambda_2 t}, \quad y = y_0 e^{\lambda_1 t}.$$

Observons que la quantité

$$T = -\log \left(x^{\frac{1}{|\lambda_2|}} x^{\frac{1}{\lambda_1}} \right) = -\frac{\log(x)}{|\lambda_2|} - \frac{\log(y)}{\lambda_1}$$

reste constante tout au long de chaque solution

Nous considérons maintenant le flot box F défini par $0 \leq x, y \leq 1$ (voir figure 4.9).

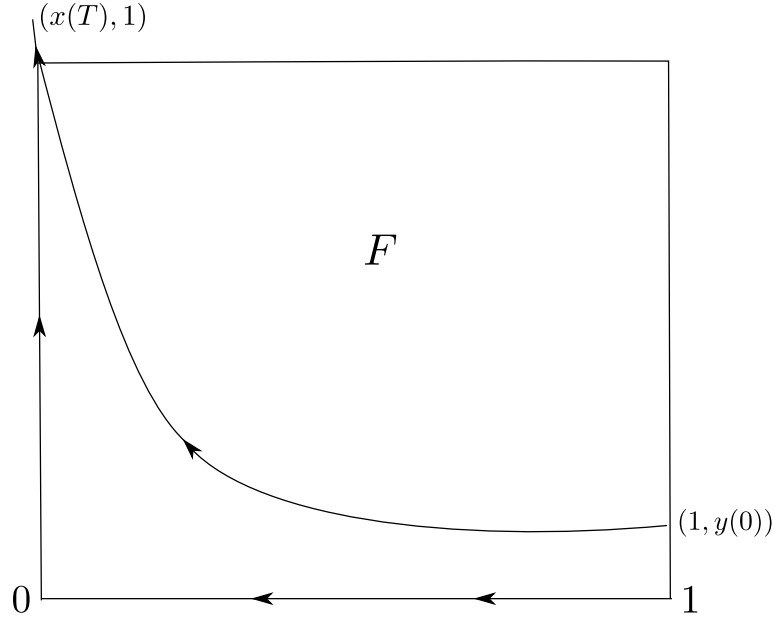


FIGURE 4.9 –

Tout calcul fait, nous pouvons affirmer que T est le temps nécessaire à la trajectoire pour traverser F . Plus précisément une trajectoire qui rentre dans F à travers le bord droit $x = 1$ au temps $t = 0$ et hauteur $y(0) = e^{-\lambda_1 T}$ sortira à travers le bord supérieur $y = 1$ au temps T avec coordonnées $x(T) = e^{\lambda_2 T}$. Alors les coordonnées d'entrée et de sortie sont liées par les équations

$$y(0) \longrightarrow x(T) = y(0)^{\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}}.$$

Nous pouvons trouver une équation similaire qui lie les coordonnées d'entrée et sortie pour un flot box autour du point selle B .

Alors si nous faisons un tour complet à côté du bord nous avons les transitions

$$y \longrightarrow x = y^{\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}} \longrightarrow y' = \phi(x) \longrightarrow x' = (y')^{\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}} \longrightarrow y = \psi(x')$$

où $\phi(x) = bx + (\text{termes de plus haut degré})$ et $\psi(x') = b'x' + (\text{termes de plus haut degré})$ sont des fonctions lisses avec coefficients dominants $b, b' > 0$ obtenus en suivant des trajectoires d'un système de coordonnées vers l'autre. Il s'ensuit que la hauteur y quand la trajectoire rentre dans F est substituée après un tour par une nouvelle hauteur qui est donnée par la formule

$$y \longrightarrow f(y) = cy^\gamma + (\text{termes plus hauts})$$

où $\gamma = \frac{|\lambda_2||\lambda'_2|}{\lambda_1\lambda'_1}$, $c = b \frac{|\lambda'_2|}{\lambda'_1}$, $b' > 0$.

Comme les orbites s'écartent vers le bord de U , la nouvelle hauteur $f(y)$ doit être strictement plus petite de la précédente y . Donc $\gamma \geq 1$.

Le point 1. est alors montré. Pour la 2., nous supposons que $\gamma > 1$, que $c = 1$ (c'est possible après un changement d'échelle) et que les "termes de plus haut degré" sont nuls. Avec ces hypothèses $f(y) = y^\gamma$ avec $\gamma > 1$.

Rappelons que $y = e^{-\lambda_1 T}$, où T est le temps nécessaire pour traverser F . Alors, comme $f(y) = e^{-\gamma\lambda_1 T}$, le temps nécessaire pour traverser F au pas suivant sera γT . Nous pouvons alors affirmer que ces temps croissent exponentiellement avec le même facteur $\gamma > 1$. De la même façon, nous pouvons montrer que le temps nécessaire pour traverser F' croît exponentiellement avec le même facteur de $\gamma > 1$.

Comme nous traversons alternativement de F et F' les temps de passage sont $T, T', \gamma T, \gamma T', \gamma^2 T, \gamma^2 T' \dots$. Après n passages le temps total en F' est

$$(1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^{n-1})T' \sim \frac{\gamma^n T'}{\gamma - 1}.$$

Comme le temps total entre F et F' croît linéairement avec n alors le temps total est asymptotiquement équivalent à $\frac{\gamma^n(T+T')}{\gamma-1}$. Par conséquent, la portion de temps passée dans F' , calculée juste après avoir quitté F' , tend vers $\frac{T'}{T+T'}$. Si nous calculons cette portion juste après avoir quitté F , alors la portion de temps passée dans F' va tendre vers $\frac{T'}{\gamma T+T'}$ avec

$$\frac{T'}{\gamma T + T'} < \frac{T'}{T + T'}.$$

Ceci nous montre que les moyennes temporelles ne convergent pas vers une limite, donc il ne peut exister aucune mesure physique.

Il est souvent compliqué d'avoir des résultats d'existence de mesures physiques ; elles sont en effet connues seulement pour certaines classes de systèmes. Nous nous sommes intéressés à l'étude des mesures physiques pour les flots de Cherry.

Pour l'utilisation qui en sera faite, nous énoncerons les définitions principales pour le cas particulier des flots sur des variétés compactes.

Si ϕ est un flot continu sur une variété compacte M , alors une mesure de probabilité ν est *invariante* si $\nu(\phi_t(A)) = \nu(A)$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et pour chaque ensemble mesurable $A \subset M$.

Définition 4.2.11. Soit $t > 0$, on définit la famille suivante de mesures de probabilité $m_t(x)$ par :

$$\int_M \alpha dm_t(x) = \frac{1}{t} \int_0^t \alpha(\phi_s(x)) ds,$$

pour chaque fonction continue $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Étant donnée une mesure μ , son bassin d'attraction $B(\mu) = B^\phi(\mu)$ est l'ensemble des $x \in M$ tels que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_t(x) = \mu \quad (\text{pour la topologie faible-}\star)$$

La mesure μ est dite *physique* si son bassin d'attraction a mesure de Lebesgue strictement positive.

Pour les mêmes motivations données dans l'exemple 4.2.8, les mesures invariantes d'un flot qui sont ergodiques et absolument continues sont des mesures physiques pour le flot.

4.2.2 Énoncé des résultats

Nous commençons par considérer le cas des flots de Cherry comme présentés dans la définition 4.1.1, c'est-à-dire des flots C^∞ sur le 2-tore sans orbites fermées et avec deux singularités : un point fixe attractif et un point selle, les deux hyperboliques. Pour chaque flot, nous pouvons alors construire la fonction de premier retour f (sous-section 4.1.3) dont nous avons montré qu'elle appartient à la classe \mathcal{L} (Sous-section 4.1.4). Puisque l'ensemble non errant de f a mesure de Lebesgue nulle (voir [GJS⁺95]), le bassin d'attraction de la delta de Dirac au point attractif (qui coïncide avec le complémentaire de l'ensemble non errant) de chaque flot de Cherry a mesure de Lebesgue pleine et elle est la seule mesure physique pour le flot.

La situation devient plus intéressante si nous considérons des flots C^∞ sur le tore \mathbb{T}^2 , sans orbites fermées et avec deux singularités, un point selle p_s et un point fixe répulsif p_r , les deux hyperboliques. Ces flots ϕ sont encore appelés flot de Cherry.

Exemple 4.2.12. *Considérons le revêtement universel*

$$\tilde{\pi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \tilde{\pi}(x, y) = (e^{ix}, e^{iy}).$$

Le système dynamique (A_α)

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + \cos x + \sin y \\ \dot{y} = \alpha(1 + \sin x) + \cos y \end{cases}$$

définie un flot ϕ_α sur le tore. Il est en effet suffisant d'étudier le système (A_α) sur le carré $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Pour chaque $\alpha \in [0, 1]$ le système (A_α) a deux points fixes hyperboliques : $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ qui est un point répulsif et

$$\{(x, y) : y = 2\pi - \arcsin(1 + \cos x) + \sin y\} \cap \{(x, y) : y = \pi + \arccos[\alpha(1 + \sin x)]\}$$

qui est un point selle (voir figure 4.10).

Comme dans la sous-section 4.1.3 nous pouvons construire la fonction de premier retour g du flot ϕ sur la section de Poincaré. Puisque g est une fonction monotone du cercle, alors elle a un nombre de rotation qui est bien défini.

Dans [SV13] les auteurs donnent une description des mesures physiques pour les flots de Cherry en les liant au changement de divergence du flot au point selle.

Avant de continuer nous rappelons la définition de divergence d'un flot en un point.

Définition 4.2.13. *Soit X un champ de vecteurs sur le tore \mathbb{T}^2 défini par*

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions 2π -périodiques dans les deux variables. Alors la divergence de X au point (x, y) du tore est :

$$\operatorname{div}_X(x, y) = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y}.$$

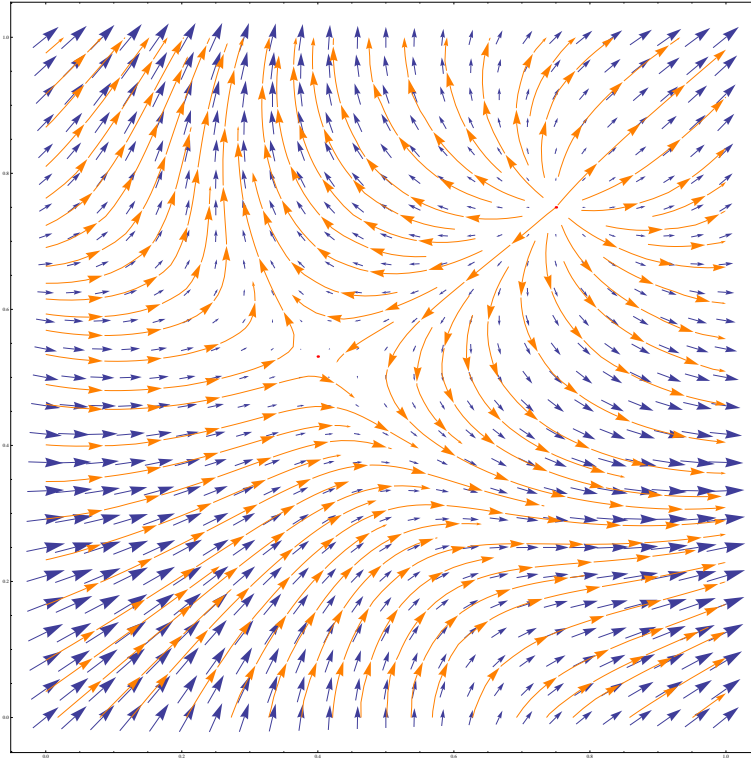


FIGURE 4.10 – Flot de Cherry avec un point selle et un point répulsif.

Nous rappelons maintenant que si ϕ est un flot sur le tore \mathbb{T}^2 , alors ϕ engendre un champ de vecteurs défini par :

$$X(x, y) = \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x, y)$$

où (x, y) est un point quelconque du tore.

Nous étendons alors la notion de divergence aux flots ϕ sur le tore comme étant la divergence du champ de vecteurs engendré par ϕ .

Exemple 4.2.14. Nous pouvons facilement calculer la divergence du flot défini dans l'exemple 4.2.12, qui sera $\text{div}_X(x, y) = -(\sin x + \cos y)$, avec (x, y) un point quelconque du tore.

Observons maintenant que la divergence d'un flot de Cherry ϕ au point selle p_s coïncide avec la somme des valeurs propres de ϕ en p_s .

Nous avons alors les résultats suivants :

Si la divergence de ϕ au point de selle est non positive (cas dissipatif ou conservatif) :

Théorème 4.2.15. Soit ϕ un flot de Cherry avec valeurs propres au point selle $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Si $\lambda_1 \leq -\lambda_2$, alors les delta de Dirac δ_s et δ_r sont les seules mesures de probabilité invariantes et ergodiques pour ϕ . Par conséquent δ_s est la mesure physique pour ϕ , avec bassin d'attraction égale à $\mathbb{T}^2 \setminus \{p_r\}$.

Si la divergence de ϕ au point de selle est positive (cas non dissipatif) :

Théorème 4.2.16. Soit ϕ un flot de Cherry avec valeurs propres au point selle $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Si $\lambda_1 > -\lambda_2$, alors il existe trois mesures de probabilités invariantes et ergodiques pour ϕ : δ_s , δ_r et une troisième mesure ν supportée sur l'ensemble quasi minimal.

Si la divergence de ϕ au point de selle est strictement plus grande que 2, avec l'hypothèse que le nombre de rotation de g est de type borné :

Théorème 4.2.17. *Soit ϕ un flot de Cherry avec valeurs propres au point selle $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Si $\lambda_1 > -2\lambda_2$ et le nombre de rotation de g est de type borné, alors la mesure de probabilité invariante et ergodique ν supporté sur l'ensemble quasi minimal est la mesure physique pour ϕ avec bassin d'attraction qui a mesure de Lebesgue pleine.*

De plus dans [SV13] les auteurs conjecturent que la mesure de probabilité ν supportée sur l'ensemble quasi minimal est la mesure physique pour ϕ aussi quand la divergence du flot au point de selle est positive ($\lambda_1 > -\lambda_2$).

Nous avons résolu cette conjecture et nous avons montré que, si la divergence de ϕ au point de selle est positive (cas non dissipatif) et g a nombre de rotation de type borné :

Théorème 4.2.18. *Soit ϕ un flot de Cherry avec valeurs propres au point selle $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Si $\lambda_1 > -\lambda_2$ et le nombre de rotation de g est de type borné, alors la mesure de probabilité invariante et ergodique ν supporté sur l'ensemble quasi minimal est la mesure physique pour ϕ dont bassin d'attraction qui a mesure de Lebesgue pleine.*

Si la divergence de ϕ au point de selle est ≥ 3 (sans hypothèses sur le nombre de rotation) :

Théorème 4.2.19. *Soit ϕ un flot de Cherry avec valeurs propres au point selle $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Si $\lambda_1 \geq -3\lambda_2$, alors la mesure de probabilité invariante et ergodique ν supportée sur l'ensemble quasi minimal est la mesure physique pour ϕ dont le bassin d'attraction qui a mesure de Lebesgue pleine.*

En conclusion, les théorèmes énoncés ci-dessus nous permettent de décrire les mesures physiques sur les flots de Cherry.

Si la divergence du flot au point selle est non positive, alors les delta de Dirac dans les singularités sont les seules mesures de probabilité invariantes et ergodiques pour le flot et la delta de Dirac au point selle est la mesure physique pour le flot.

Si la divergence du flot dans le selle devient positive et la fonction de premier retour a nombre de rotation de type borné, alors il y a une troisième mesure de probabilité invariante et ergodique supportée sur l'ensemble quasi minimal qui est aussi la mesure physique pour le flot.

Si en plus la divergence devient strictement positive, alors le même énoncé peut être démontré sans aucune hypothèse sur le nombre de rotation. Nous conjecturons que le même résultat général peut être obtenu aussi sans l'hypothèse sur la positivité stricte de la divergence du flot au point de selle.

4.2.3 Preuves des théorèmes principaux

Observations On désignera par ϕ toujours un flot \mathcal{C}^∞ sur le tore \mathbb{T}^2 , sans orbites fermées et avec deux singularités, un point selle p_s et un point répulsif p_r , les deux hyperboliques.

Comme dans la sous-section 4.1.3 nous pouvons construire la fonction de premier retour g du flot ϕ définie sur la section de Poincaré. Dans ce cas g est \mathcal{C}^∞ partout sauf dans un point qui appartient à la variété stable du point selle et que nous supposons par simplicité être le point zéro (nous identifions \mathbb{S}^1 avec $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]_{-\frac{1}{2} \sim \frac{1}{2}}$). Nous appelons a et b les limites respectivement à gauche et à droite du point de discontinuité et par $U = (a, b)$

Définition 4.2.20. Soit x un point de la section globale de Poincaré. Le temps de premier retour $\tau(x)$ pour ϕ à \mathbb{S}^1 est le nombre des itérations de g nécessaires parce que x retourne dans \mathbb{S}^1 pour la première fois.

Lemme 4.2.21. Le temps de premier retour $\tau(z)$ pour ϕ à \mathbb{S}^1 a une singularité logarithmique en 0. Cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout z dans l'intervalle $(-\epsilon, \epsilon)$, on a $\frac{1}{C} \leq \frac{\tau(z)}{-\log|z|} \leq C$. En d'autres termes, $\tau(z)$ est de l'ordre de $-\log|z|$.

Démonstration. Nous rappelons que 0 est un point de discontinuité pour la fonction de premier retour g . Cherchons alors l'ordre de croissance de $\tau(z)$ quand z tend vers 0.

Si $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ sont les valeurs propres du point selle, puisque $z \rightarrow 0$, il suffit de linéariser pour déterminer l'équivalent de $\tau(z)$ quand z tend vers zéro. Dans une carte autour du point selle, l'équation différentielle s'écrit (voir la figure 4.11) :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Posons $x_0 = z$, $y_0 = 1$ et $x(t) = 1$ (voir la figure 4.11), alors :

$$e^{\lambda_1 t} = \frac{1}{z}$$

et donc

$$t = -\frac{1}{\lambda_1} \log z.$$

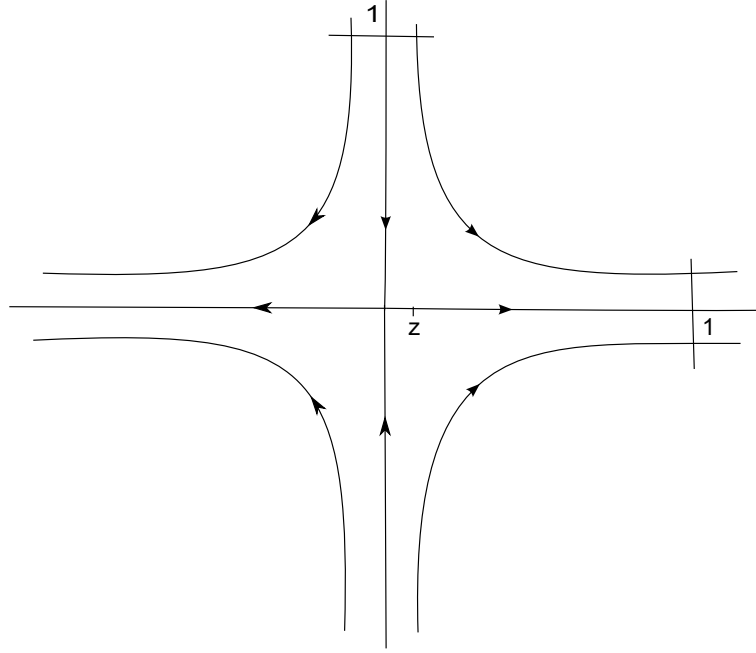
□

Nous considérons maintenant le flot φ obtenu en inversant la direction de ϕ . Le point répulsif de ϕ devient un point attractif pour φ qui est alors un flot de Cherry conforme à la définition 4.1.1. Comme nous avons montré dans la sous-section 4.1.4, la fonction de premier retour f de φ à la section de Poincaré appartient à classe \mathcal{L} avec intervalle plat $U = (a, b)$. De plus si $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ sont les valeurs propres du point selle p_s de ϕ , alors l'exposant critique de f sera $\ell = \frac{\lambda_1}{-\lambda_2}$.

Puisque le flot considéré n'a pas des orbites fermées, alors f a nombre de rotation ρ irrationnel (voir la proposition 1.4.8). De plus f préserve l'ordre et n'a pas des points périodiques, alors par le théorème de Poincaré, il existe une fonction continue qui préserve l'ordre $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que $h \circ f = R_\rho \circ h$, où R_ρ est la rotation par ρ .

La fonction de premier retour f a alors une seule mesure de probabilité invariante μ supportée sur l'unique ensemble minimal (qui est une mesure invariante aussi pour g), donnée par $\mu = h^*(\text{Leb})$.

Proposition 4.2.22. (proposition 2 dans [SSV10]) Nous avons la dichotomie suivante :

FIGURE 4.11 – Linéarisation du flot φ au voisinage du point selle.

- si $\int_{\mathbb{S}^1} \tau d\mu = \infty$ alors les seules mesures de probabilité invariantes et ergodiques pour ϕ (ou φ) sont la mesure de Dirac en p_s et p_r .
- si $\int_{\mathbb{S}^1} \tau d\mu < \infty$ alors il existe exactement une autre mesure de probabilité invariante et ergodique ν qui est supportée par l'ensemble quasi minimal.

En conclusion les mesures finies, invariantes et ergodiques pour ϕ ou φ sont les mesures de Dirac au points p_s et p_r (δ_s et δ_r) et parfois, une troisième mesure invariante ν supportée sur l'ensemble quasi minimal, qui dépend du fait : $\int_{\mathbb{S}^1} \tau d\mu$ est convergente ou pas.

Soit 0 le point de discontinuité de g . Conformément aux notations des précédents chapitres, nous notons :

- $\dot{z} = f^i(0)$,
- $\dot{z}_R = R_\rho^i(0)$.

De plus si (q_n) est la suite qui réalise les temps de retour les plus proches (voir la sous-section 1.5), alors $\mu(\underline{0}, \underline{q_n}) = |(\underline{0}, \underline{q_{nR}})|$ est de l'ordre de $\frac{1}{q_{n+1}}$.

Pour comprendre si l'intégrale $\int_{\mathbb{S}^1} \tau d\mu$ converge, il est alors nécessaire d'estimer la taille des intervalles $(\underline{0}, \underline{q_n})$.

Preuve du théorème 4.2.18 Nous rappelons que :

$$\alpha_n = \frac{|(-q_n, \underline{0})|}{|[\underline{-q_n}, \underline{0})|}.$$

et nous montrons la proposition suivante :

Proposition 4.2.23. *Soit f la fonction de premier retour à φ^3 . Si f a nombre de rotation de type fini avec exposant critique $\ell \in (1, 2]$, alors il existe deux constantes $K > 0$ et $C < 1$ telles que pour n grand, $\frac{-\log \alpha_n}{q_{n+1}} \leq KC^n$. Cette constante C dépend de l'exposant critique ℓ de f .*

Démonstration. Avant de commencer la preuve, il est nécessaire de rappeler :

1. par la formule récursive (1.5.2) $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ et $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$,
2. par la proposition 6 dans [GJS⁺95], pour n suffisamment grand $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}^{\frac{1-\ell^{-a_{n+1}}}{\ell-1}} \alpha_{n-2}^{\ell^{-a_n}}$.

Pour faciliter la notation nous introduisons une nouvelle suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour chaque n , par $\theta_n := -\log \alpha_n$.

Nous commençons à fixer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, le point 2 est vérifié

Nous montrerons la proposition par récurrence en prenant $C = \sup_i \left(\frac{1-\ell^{-a_i}}{(\ell-1)a_i} \right)^{\frac{1}{n_0}}$ et $K \geq \max\{\theta_{n_0-2}, \theta_{n_0-1}\}$. Nous observons que, pour tout $1 < \ell \leq 2$, $C < 1$, en effet si nous regardons $C := C(\ell)$ comme fonction de ℓ , alors, dans l'intervalle $(1, 2]$, $C(\ell)$ est continue, décroissante et en plus $\lim_{\ell \rightarrow 1} C(\ell) = 1$ et $C(2) < 1$.

Nous pouvons alors observer que, pour chaque nombre entier naturel $i \geq 1$

$$\frac{1 - \ell^{-a_i}}{(\ell - 1)a_i} \leq C \quad (4.2.24)$$

et

$$\ell^{-a_i} \leq \frac{1 - \ell^{-a_i}}{(\ell - 1)a_i} \leq C^{n_0}. \quad (4.2.25)$$

Nous procédons alors par récurrence.

– Soit n_0 comme ci-dessus. Par le point 2 et par (4.2.25), nous avons que :

$$\begin{aligned} \theta_{n_0} &\leq \left(\frac{1 - \ell^{-a_{n_0+1}}}{\ell - 1} \right) \theta_{n_0-1} + \ell^{-a_{n_0}} \theta_{n_0-2} \leq C^{n_0} K a_{n_0+1} + C^{n_0} K \\ &\leq KC^{n_0} (a_{n_0+1} + 1). \end{aligned}$$

Et par le point 1 :

$$\theta_{n_0} \leq KC^{m_0} q_{n_0+1}. \quad (4.2.26)$$

– Nous montrons maintenant l'assertion pour $n_0 + 1$. Par le point 2 et par (4.2.26) et (4.2.25) :

$$\begin{aligned} \theta_{n_0+1} &\leq \left(\frac{1 - \ell^{-a_{n_0+2}}}{\ell - 1} \right) \theta_{n_0} + \ell^{-a_{n_0+1}} \theta_{n_0-1} \\ &\leq KC^{m_0} \left(\frac{1 - \ell^{-a_{n_0+2}}}{(\ell - 1)a_{n_0+2}} \right) a_{n_0+2} q_{n_0+1} + KC^{m_0}. \end{aligned}$$

Et par le point 1 et (4.2.24) :

$$\theta_{n_0+1} \leq KC^{m_0+1} \left(a_{n_0+2} q_{n_0+1} + \frac{C^{m_0}}{C} \right) \leq KC^{m_0+1} q_{n_0+2}.$$

3. Rappelons que $f \in \mathcal{L}$

- Nous supposons maintenant que l’assertion est vraie pour $n - 2$ et pour $n - 1$ et nous la montrons pour n .

Par le point 2 et par l’hypothèse de récurrence nous avons que :

$$\theta_n \leq \frac{1 - \ell^{-a_{n+1}}}{\ell - 1} \theta_{n-1} + \ell^{-a_n} \theta_{n-2} \leq K \left(\frac{(1 - \ell^{-a_{n+1}})}{(\ell - 1)a_{n+1}} \mathcal{C}^{n-1} a_{n+1} q_n + \mathcal{C}^{n-2} \ell^{-a_n} q_{n-1} \right).$$

Finalement, par (4.2.24), (4.2.25) et le point 1

$$\theta_n \leq K \mathcal{C}^n \left(a_{n+1} q_n + \frac{\ell^{-a_n}}{\mathcal{C}^2} q_{n-1} \right) \leq K \mathcal{C}^n q_{n+1}.$$

L’assertion du lemme est alors vraie pour chaque $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. \square

Nous rappelons le théorème suivant démontré dans [GJS⁺95] :

Théorème 4.2.27. *Soit f la fonction de premier retour pour φ avec exposant critique $\ell > 1$ ($\lambda_1 > -\lambda_2$), alors $\cup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(U)$ (qui est le bassin d’attraction de la delta de Dirac au point fixe attractif de φ) a mesure de Lebesgue pleine sur \mathbb{S}^1 .*

La preuve du théorème 4.2.18 utilise les idées principales de la preuve du théorème 4.2.17, (voir [SV13]).

Démonstration du Théorème 4.2.18. Par le théorème 4.2.16 nous savons que le flot ϕ a une mesure de probabilité invariante et ergodique ν qui correspond au prolongement de la mesure invariante μ par f (définie par $\mu = h^*(\text{Leb})$) et qui est supportée sur l’ensemble quasi minimal. Il reste à montrer que ν est une⁴ mesure physique pour ϕ et son bassin d’attraction a mesure de Lebesgue pleine.

D’après le théorème 4.2.27, il suffit de montrer que les points de l’ensemble errant de φ sont dans le bassin d’attraction de ν et puisque tous les points de l’ensemble errant passent à travers l’intervalle plat de f , nous pouvons nous limiter à démontrer que chaque point de U est dans le bassin d’attraction de ν .

Soit alors $z \in U$, $\underline{n}_g = g^{n-1}(z)$ et $t_n = \tau(\underline{n}_g)$. Pour chaque $t > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $t = t_1 + t_2 + \dots + t_N + \tilde{t}$ ou $0 < \tilde{t} \leq t_{N+1}$ et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $q_n \leq N < q_{n+1}$. Puisque τ est uniformément minorée, nous avons que

$$t \geq CN \tag{4.2.28}$$

avec C une constante positive.

Soit m_t la mesure de probabilité sur l’orbite du flot de longueur $t > 0$ qui commence en z (voir la définition 4.2.11).

Puisque les seules mesures de probabilité invariantes et ergodiques sont δ_s , δ_r et ν et puisque b est répulsif, alors les limites possibles de m_t sont de la forme

$$r\delta_s + (1 - r)\nu, \tag{4.2.29}$$

pour un certain $r \in [0, 1]$. Pour démontrer que z est dans le bassin d’attraction de ν , c’est-à-dire que $\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = \nu$, il est alors nécessaire de montrer que $r = 0$.

Nous fixons $0 < n_0 < n$ et nous montrerons que la trajectoire de z sous ϕ passe la plus part du temps en dehors de

$$A_{n_0} = \{\phi_s(w) : w \in (\underline{q}_{n_0}, \underline{q}_{n_0} + 1), 0 \leq s \leq \tau(w)\}.$$

4. Par le théorème 4.2.16 si une mesure physique existe, alors c’est la mesure ν et donc est unique.

Nous montrons que, en choisissant correctement n_0 , le temps $t_{A_{n_0}}$ durant lequel la trajectoire $\phi_s(z)$, $0 \leq s \leq t$ passe dans A_{n_0} peut être fait arbitrairement petit par rapport à t , pour chaque t suffisamment grand.

Pour tel objectif nous divisons encore A_{n_0} et nous commençons par estimer le temps t_{B_l} passé par la trajectoire $\phi_s(z)$, $0 \leq s \leq t$ dans

$$B_l = \{\phi_s(w) : w \in (\underline{q}_l, \underline{q}_{l+2}), 0 \leq s \leq \tau(w)\}.$$

Nous observons que, puisque f est la fonction de premier retour du flot obtenue en inversant la direction de ϕ , si h est la semi conjugaison entre f et la rotation R_ρ , alors $h(\underline{n}_g) = h(g^{n-1}(z)) = h(f^{-n+1}(z)) = h(f^{-n}(0)) = \underline{-n}_R$. Donc pour chaque $l \in \mathbb{N}$ $\underline{q}_l \in (\underline{q}_{l-1}, \underline{q}_{l+1})$ et $\underline{q}_l \in (\underline{q}_{l-1_g}, \underline{q}_{l+1_g})$. Nous pouvons alors affirmer que le nombre de points \underline{i}_q , $1 \leq i \leq N$ dans $(\underline{q}_l, \underline{q}_{l+2})$ est égal au nombre de points $\underline{-i}_R$, $1 \leq i \leq N$ dans $(\underline{q}_{l_R}, \underline{q}_{l+2_R})$.

Nous estimons alors le nombre N_l des points $\underline{-i}_R$, $1 \leq i \leq N$ qui sont dans $(\underline{q}_{l_R}, \underline{0})$. Puisque $|(\underline{q}_{l_R}, \underline{0})|$ est de l'ordre de $\frac{1}{q_{l+1}}$ et puisque la rotation est une bijection qui préserve la distance, alors nous pouvons diviser le cercle en exactement q_{l+1} images disjointes de $(\underline{q}_{l_R}, \underline{0})$ et chaque image contient N_l points $\underline{-i}_R$, $1 \leq i \leq N$.

En conclusion

$$q_{l+1}N_l \leq N$$

et le nombre de points $\underline{-i}_R$, $1 \leq i \leq N$ qui sont dans $(\underline{q}_{l_R}, \underline{q}_{l+2_R})$ est plus petit ou égal à $\frac{N}{q_{l+1}}$

Finalement nous rappelons tous les résultats obtenus, et nécessaires pour conclure la preuve :

- par le lemme 4.2.21 $t_{B_l} \leq -C_3 N \frac{\log |(\underline{q}_{l+2}, \underline{0})|}{q_{l+1}}$,
- par (4.2.28) $t \geq CN$,
- puisque le nombre de rotation de f est de type borné, il existe une constante, qui dépend de $\rho(f)$, telle que $q_{l+1} \geq C_4 q_{l+3}$
- d'après la proposition 4.2.23⁵ il existe deux constantes, $C_5 > 0$ et $0 < C_6 < 1$ telles que $-\log |(\underline{q}_{l+2}, \underline{0})| \leq C_5 (C_6)^{l+2} q_{l+3}$.

En utilisant toutes les observations précédentes nous avons que :

$$\begin{aligned} \frac{t_{A_{n_0}}}{t} &= \frac{1}{t} \sum_{l=n_0}^{n-1} t_{B_l} \leq \frac{C_3 N}{t} \sum_{l=n_0}^{n-1} \frac{-\log |(\underline{q}_{l+2}, \underline{0})|}{q_{l+1}} \\ &\leq \frac{C_3}{C} \sum_{l=n_0}^{n-1} \frac{-\log |(\underline{q}_{l+2}, \underline{0})|}{q_{l+1}} \\ &\leq \frac{C_3}{CC_4} \sum_{l=n_0}^{n-1} \frac{-\log |(\underline{q}_{l+2}, \underline{0})|}{q_{l+3}} \\ &\leq \frac{C_3 C_5}{CC_4} \sum_{l=n_0}^{n-1} (C_6)^{l+2}. \end{aligned}$$

5. Nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire sur les valeurs propres $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ du point selle. Nous supposons en effet que $\lambda_1 \leq -2\lambda_2$. Le cas $\lambda_1 > -2\lambda_2$ a été complètement traité dans [SV13] (voir théorème 4.2.17)

Finalement étant donné que $\sum_{l=n_0}^{\infty} (C_7)^l$ est convergente, en prenant n_0 suffisamment grand, nous pouvons rendre $\frac{t_{A_{n_0}}}{t}$ aussi petit que l'on veut pour tout n_0 arbitrairement grand.

Observons que nous avons le même résultat si à la place de A_{n_0} nous considérons A_{n_0-c} avec $c > 0$ et $A_{n_0} \Subset A_{n_0-c}$.

Il nous reste alors à montrer que si $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{t_{A_{n_0}}}{t} = 0$ alors $r = 0$.

Supposons par absurde que $r > 0$ et rappelons que il existe une suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $t_n \rightarrow +\infty$, quand $n \rightarrow +\infty$ de réels positifs, telle que : $\lim_{t_n \rightarrow \infty} m_{t_n}(z) = r\delta_s + (1-r)\nu$ (voir (4.2.29)).

Il existe alors $T > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $t_n > T$ et pour tout $\alpha : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} \alpha dm_{t_n}(z) - \int_{\mathbb{T}^2} \alpha d(r\delta_s + (1-r)\nu) \right| < \epsilon \quad (4.2.30)$$

Soit maintenant $c > 0$ tel que $A_{n_0} \Subset A_{n_0-c}$ et soit α une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact telle que, pour tout $x \in A_{n_0}$ $\alpha(x) = 1$ et pour tout $x \in (A_{n_0-c})^c$, $\alpha(x) = 0$. Observons alors que

$$\frac{t_{A_{n_0}}}{t_n} \leq \int_{\mathbb{T}^2} \alpha dm_{t_n}(z) \leq \frac{t_{A_{n_0-c}}}{t_n}$$

et rappelons que, par hypothèse, $\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{t_{A_{n_0}}}{t_n} = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{t_{A_{n_0-c}}}{t_n} = 0$.

Donc, pour n assez grand, nous déduisons de (4.2.30),

$$r - \epsilon < r + (1-r)\nu(A_{n_0}) - \epsilon < \epsilon \quad (4.2.31)$$

qui est en contradiction avec l'hypothèse que $r > 0$.

En conclusion $r = 0$, donc (pour la topologie faible- \star) $\lim_{t \rightarrow \infty} m_t(z) = \nu$ et par la définition 4.2.11, z est dans le bassin d'attraction de ϕ . \square

Preuve du théorème 4.2.19 L'idée de la preuve de ce théorème est dans les grandes lignes la même que celle du théorème 4.2.18. L'outil principal est l'existence de la géométrie bornée pour la fonction de premier retour f quand l'exposant critique $\ell \geq 3$, sans aucune autre hypothèse sur le nombre de rotation.

Précisément, nous faisons référence à la seconde partie du théorème 3.1.1 qui est :

Théorème 4.2.32. *Soit f une fonction de \mathcal{L} avec exposant critique $\ell \geq 3$ alors*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\underline{0}, \underline{q}_n)|}{|(\underline{0}, \underline{q}_{n-2})|} > 0.$$

Démonstration du théorème 4.2.19. La condition $\lambda_1 \geq -3\lambda_2$ est équivalente au fait que l'exposant critique de la fonction de premier retour f est plus grand ou égal à 3. Nous sommes alors dans les hypothèse du théorème 4.2.32 et nous pouvons supposer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et une constante $\alpha \in (0, 1)$ tels que $\frac{|(\underline{0}, \underline{q}_n)|}{|(\underline{0}, \underline{q}_{n-2})|} > \alpha^2$ pour $n \geq n_0 > 0$. Et donc par récurrence

$$|(\underline{0}, \underline{q}_n)| > C\alpha^n \quad (4.2.33)$$

pour un certain $C > 0$.

Par le théorème 4.2.16, il existe une mesure de probabilité ν , invariante et ergodique, supportée par l'ensemble quasi minimal. Nous démontrons que le bassin d'attraction de ν , a mesure de Lebesgue pleine ; ν est alors une mesure physique pour ϕ .

Comme dans la preuve du théorème 4.2.18 nous pouvons nous limiter à montrer que chaque point de U est dans le bassin d'attraction de ν .

Soit alors $z \in U$, $\underline{n}_g = g^{n-1}(z)$ et $t_n = \tau(\underline{n}_g)$. Pour tout $t > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $t = t_1 + t_2 + \dots + t_N + \tilde{t}$ ou $0 < \tilde{t} \leq t_{N+1}$ et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $q_n \leq N < q_{n+1}$. Puisque τ est uniformément minoré, nous avons que

$$t \geq C_1 N \quad (4.2.34)$$

avec $C_1 > 0$ une constante positive.

Soit m_t la mesure de probabilité sur l'orbite de ϕ de longueur $t > 0$ qui démarre en z (voir définition 4.2.11). Les possibles limites de m_t doivent être de la forme $r\delta_s + (1-r)\nu$, pour un certain $r \in [0, 1]$. Nous devons alors montrer que r est zéro (pour les détails voir la preuve du théorème 4.2.18).

Nous fixons alors $0 < n_0 < n$ et nous montrons que l'orbite de z sous ϕ passe la plupart de son temps en dehors de

$$A_{n_0} = \{\phi_s(w) : w \in (\underline{q}_{n_0}, \underline{q}_{n_0+1}), 0 \leq s \leq \tau(w)\}.$$

Le temps $t_{A_{n_0}}$ passé dans A_{n_0} sera calculé comme la somme des temps t_{B_l} passés dans les petites portions de A_{n_0} de la forme

$$B_l = \{\phi_s(w) : w \in (\underline{q}_l, \underline{q}_{l+2}), 0 \leq s \leq \tau(w)\}.$$

Pour ces raisons, il est nécessaire d'estimer le nombre de points \underline{i}_g , $1 \leq i \leq N$ dans $(\underline{q}_l, \underline{q}_{l+2})$ qui, comme dans le théorème 4.2.18, coïncide avec le nombre de points $\underline{-i}_R$, $1 \leq i \leq N$ dans $(\underline{q}_{lR}, \underline{q}_{l+2R})$ ⁶ qui est plus petit ou égal à $\frac{N}{q_{l+1}}$.

Nous énumérons maintenant toutes les observations nécessaires pour conclure la preuve :

- par (4.2.33), $|(\underline{q}_{l+2}, \underline{0})| > C\alpha^l$,
- par (4.2.34), $t > C_1 N$,
- par le lemme 4.2.21, $t_{B_l} \leq -C_5 N \frac{\log |(\underline{q}_{l+2}, \underline{0})|}{q_{l+1}}$,
- $q_l \geq \frac{\beta^l}{C_6}$ pour $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nous avons alors que :

$$\begin{aligned} \frac{t_{A_{n_0}}}{t} &= \frac{1}{t} \sum_{l=n_0}^{n-1} t_{B_l} \leq \frac{C_5 N}{t} \sum_{l=n_0}^{n-1} \frac{-\log |(\underline{q}_{l+2}, \underline{0})|}{q_{l+1}} \\ &\leq \frac{C_5}{C_1} \sum_{l=n_0}^{n-1} \frac{-\log |(\underline{q}_{l+2}, \underline{0})|}{q_{l+1}} \\ &\leq \frac{C_5 C \alpha}{C_1} \sum_{l=n_0}^{n-1} \frac{l}{q_{l+1}} \\ &\leq \frac{C_5 C \alpha C_6}{C_1} \sum_{l=n_0}^{n-1} \frac{l}{\beta^{l+1}} \end{aligned}$$

En conclusion, en prenant n_0 suffisamment grand nous pouvons rendre $\frac{t_{A_n}}{t}$ aussi petit que l'on veut pour tout $n > n_0$ arbitrairement grand : donc, comme dans la preuve du théorème 4.2.18, $r = 0$ et z est dans le bassin d'attraction de ν . \square

6. f est la fonction de premier retour de φ obtenue en reversant la direction de ϕ

Chapitre 5

Un contre-exemple de Denjoy

Dans ce chapitre nous donnons un exemple d'homéomorphisme du cercle qui est un contre-exemple de Denjoy (c'est-à-dire qui n'est pas conjugué à une rotation) et qui est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ partout sauf en un point, qui est demi critique.

5.1 Rappels et Définitions

Nous rappelons maintenant quelques définitions et quelques résultats déjà présentés dans le premier chapitre et qui seront utilisés dans la suite.

Rotations. Notons \mathbb{S}^1 le cercle unité, et, pour chaque $\rho \in \mathbb{R}$ soit $R_\rho : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la fonction définie par

$$R_\rho(\theta) = (\theta + \rho) \pmod{\mathbb{Z}}$$

qui sera appelée rotation d'angle ρ .

Relèvement. Soit $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la projection de la droite réelle sur le cercle. Alors chaque fonction continue $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ admet un unique relevé $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $F(0) \in [0, 1)$ et

$$\pi \circ F = f \circ \pi.$$

Soit $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ et $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un relevé de f , alors f et F ont les mêmes propriétés de continuité et de différentiabilité.

Définition 5.1.1. Soit $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ continue et $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un relevé de f . Nous dirons que f est de degré 1 si pour tous $x \in \mathbb{R}$, $F(x + 1) = F(x) + 1$.

Définition 5.1.2. Une fonction $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ est dite croissante¹ si, un de ses relevés est croissant.

1. ou préserve l'orientation.

5.1.1 Nombre de rotation.

Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une fonction continue, croissante et de degré un et soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un relevé de f . Alors la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (F^n(x) - x)$$

existe pour tous $x \in \mathbb{R}$ et est indépendante de x . Nous la noterons $\tilde{\rho}(F)$.

Remarquons que cette quantité ne dépend pas du choix du relevé : si \tilde{F} est un autre relevé de f , alors $\tilde{\rho}(F) - \tilde{\rho}(\tilde{F}) = F - \tilde{F} \in \mathbb{Z}$. Cette remarque justifie la terminologie suivante :

Définition 5.1.3. Soit F un relevé de f . Le nombre de rotation $\rho(f)$ de f est défini comme la classe de $\tilde{\rho}(F)$ modulo \mathbb{Z} .

Proposition 5.1.4. $\rho(\cdot)$ est monotone : si $f_1 \prec f_2$, alors $\rho(f_1) \leq \rho(f_2)$.

Remarque 5.1.5. En particulier, si $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une famille de fonctions continues, croissantes et de degré un, telle que pour chaque x , $f_t(x)$ est croissante (comme fonction de t), alors $\rho(f_t)$ est croissante (comme fonction de t).

De plus, aux valeurs irrationnels le nombre de rotation est strictement croissant :

Proposition 5.1.6. Si $f_0 \prec f_1$ et si $\rho(f_0)$ est irrationnel, alors $\rho(f_0) < \rho(f_1)$.

Le lecteur trouvera plus de détails, ainsi que les preuves, dans le premier chapitre.

5.1.2 Point demi-critiques plats

Nous adopterons dans toute la suite la notation suivante pour la dérivée à droite et à gauche d'une fonction f en un point p du cercle.

$$f'_-(p) = \lim_{x \rightarrow p, x < p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

$$f'_+(p) = \lim_{x \rightarrow p, x > p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Définition 5.1.7. Soit p un point du cercle et $n \in \mathbb{N}$, et f une fonction du cercle \mathcal{C}^∞ par morceaux. On dit que p est demi-critique d'ordre n (pour f) si la dérivée à gauche de f en p est non nulle et que toutes les dérivées à droite jusqu'à l'ordre n sont nulles, mais pas celle d'ordre $n + 1$. On dira simplement demi-critique s'il est demi-critique d'ordre 1. Le point p sera dit demi-critique plat s'il est demi-critique et que toutes les dérivées à droite sont nulles.

Dans ce cas, si f est une application du cercle avec un point demi-critique p d'ordre $k \in \mathbb{N}$, de classe \mathcal{C}^n par morceaux, \mathcal{C}^n sur $\mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$, alors nous abuserons de la notation $\|f\|_{\mathcal{C}^n}$ qui sera définie comme :

$$\|F\|_{\mathcal{C}^n} = \sup_{\substack{x \in [0,1] \\ 1 \leq i \leq n}} \left| \frac{d^i F}{dx^i}(x) \right| + \sup_{x \in [0,1]} |F(x)|.$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est le relevé (grâce à la projection de \mathbb{R} sur le cercle envoyant \mathbb{Z} sur p) et vérifiant ($F(0) \in (0, 1)$), et où les dérivées en 0 (respectivement, en 1) doivent être considérées comme les dérivées à gauche (respectivement, à droite).

Remarque 5.1.8. Notons que si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est j fois différentiable et que $j \geq i$, alors :

$$\|F\|_{C^j} \geq \|F\|_{C^i}$$

Autrement dit, $\|\cdot\|_{C^j}$ est croissante en j . Nous utiliserons cette remarque plus loin, dans la preuve du théorème principal de ce chapitre.

Dans la suite les fonctions de \mathbb{S}^1 seront notées par des lettres minuscules et leurs relevés par la même lettre, en majuscule.

De plus, nous abuserons souvent des notations en identifiant un sous-ensemble de \mathbb{S}^1 avec une de ses préimages par la projection $\pi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$.

5.2 Quelques lemmes techniques

Lemme 5.2.1. Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une fonction continue, croissante et de degré un avec nombre de rotation $\rho \in [0, 1)$ irrationnel. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est un contre-exemple de Denjoy,
2. f n'a pas d'orbites denses,
3. f a un intervalle errant, i.e. il existe un intervalle non-vide $I \subset \mathbb{S}^1$ tel que, pour chaque $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, $f^n(I) \cap f^m(I) = \emptyset$,
4. il existe un intervalle $I \subset \mathbb{S}^1$ tel que $|I| > 0$ et $|f^n(I)| \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. 1. \Rightarrow 3. Le nombre de rotation ρ de f est irrationnel, alors, par le théorème de Poincaré il existe une semi-conjugaison h entre f et la rotation R_ρ . Par hypothèse, h n'est pas une conjugaison, alors il existe un point x du cercle tel que $h^{-1}(x)$ est un intervalle I^2 . De plus $h \circ f = R_\rho \circ h$, alors $h(f^n(I)) = R_\rho^n(x)$ et donc les intervalles $I, f(I), f^2(I), \dots$ sont deux-à-deux disjoints.

3. \Rightarrow 2. Soit $x \in I$, clairement l'orbite de x n'est pas dense. Observons que s'il y a une orbite qui n'est pas dense, alors toutes les autres ne sont pas denses. En effet si f a une orbite dense, alors f est conjuguée à une rotation et donc toutes ses orbites sont denses.

2. \Rightarrow 1. Supposons que f soit conjuguée à la rotation R_ρ , alors f a une orbite dense, ce qui fournit une contradiction avec l'hypothèse.

3. \Rightarrow 4. Soit I un intervalle, vérifiant les conditions du point 3. Alors, pour chaque $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, $f^n(I) \cap f^m(I) = \emptyset$, les intervalles sont disjoints et comme chaque image est contenue dans le cercle, la somme totale $\sum |f^n(I)| \leq 1$. Cela nous dit que $|f^n(I)| \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow +\infty$.

4. \Rightarrow 3. Soit I l'intervalle vérifiant la condition 4. Il est alors évident qu'il soit errant. En effet, s'il ne l'est pas, alors la suite des itérées de l'intervalle I est prépériodique, de même que leurs longueurs.

□

Lemme 5.2.2. Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, une application C^∞ par morceaux, où $\frac{1}{2}$ est demi-critique plat³ et dont les relevés sont croissants et de degré 1.

Supposons qu'il existe un intervalle I de la forme $I = (\frac{1}{2}, c)$, tel que : $F'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in I$

2. h est une surjection croissante de $[0, 1)$ dans lui-même, donc pour tout $x \in [0, 1)$, $h^{-1}(x)$ est soit un point, soit un intervalle.

3. Voir la définition 5.1.2.

et tel que la dérivée à gauche $F'_-(\frac{1}{2}) > 0$.

Alors, $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall \delta \in (0, 1))$, et pour chaque paire d'intervalles $I_1 = (\frac{1}{2}, a)$ et $I_2 = (b, c)$ tels que $I_1 \cup I_2 \subset I$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, il existe une application \mathcal{C}^∞ par morceaux, où $\frac{1}{2}$ est demi-critique plat, $\tilde{f} = \tilde{f}_{n,\sigma,\delta} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ préservant l'orientation et de degré 1, qui satisfait aux conditions suivantes :

1. $\|\tilde{F} - F\|_{\mathcal{C}^n} < \delta$
2. $\rho(\tilde{f}) = \rho(f)$
3. $|\tilde{F}'(x) - F'(x)| < \delta F'(x), \forall x \in (0, 1) \setminus \bar{I}$,
4. $\tilde{F}'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I_1 \cup I_2$
5. $\tilde{F}'_-(\frac{1}{2}) > 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \delta < 1$.

Remarquons que $I = (\frac{1}{2}, c)$, $I_1 = (\frac{1}{2}, a)$ et $I_2 = (b, c)$, avec $\frac{1}{2} < a < b < c < 1$ (puisque $I_1 \cap I_2 = \emptyset$). Nous avons la configuration décrite par la figure ci-dessous.

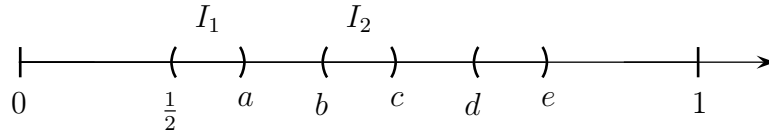


FIGURE 5.1 – Positions des points du lemme 5.2.2

Soit $0 < \epsilon < \max(\frac{1}{2}, 1 - c)$, alors le voisinage de l'intervalle plat $(\frac{1}{2} - \epsilon, c + \epsilon)$, a deux composantes connexes sur $(0, 1)$ sur lesquelles $F'(x) > \xi(\epsilon) > 0$, par les propriétés de F . Choisissons alors $(d, e) \subset (c + \epsilon, 1)$.

Posons pour $x \in [0, 1]$,

$$\tilde{F}(x) = F(x) + \frac{\delta}{3\kappa c_n} \int_0^x (\phi_{a,b}(t) - \phi_{d,e}(t)) dt$$

Où $\phi_{a,b}$ est une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact $[a, b]^4$, $\phi_{a,b} > 0$ sur (a, b) . La constante $C_{d,e} > 0$ est d'abord choisie de telle sorte que $\phi_{d,e} < \xi\delta$, et ensuite, la constante $C_{a,b} > 0$ est choisie telle que :

$$\int_0^1 (\phi_{a,b}(t) - \phi_{d,e}(t)) dt = 0$$

Enfin, $\kappa = \max((b - a)C_{a,b}, (e - d)C_{d,e})$ et $c_n = 2 \max(\|\phi_{a,b}\|_{\mathcal{C}^n}, \|\phi_{d,e}\|_{\mathcal{C}^n}) \geq 1$.

Observons que $\tilde{F}(0) = F(0)$ et que

$$\tilde{F}(1) = F(1) + \frac{\delta}{3\kappa c_n} \int_0^1 (\phi_{a,b}(t) - \phi_{d,e}(t)) dt = F(1) + \frac{\delta}{3\kappa c_n} \times 0 = F(1) = 1$$

Ainsi, \tilde{F} peut s'étendre sur \mathbb{R} (car $\tilde{F}(0) = F(0)$ et $\tilde{F}(1) = F(1)$), par :

$$\tilde{F}(x) = \tilde{F}(x - [x]) + [x]$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x , ainsi \tilde{F} se projette à une application $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ bien définie et de degré 1. Il est ainsi facile de voir que \tilde{f} est toujours les \mathcal{C}^∞ par morceaux, et que $\frac{1}{2}$ est demi-critique plat.

Montrons que \tilde{F} vérifie les propriétés (1) à (5) ci-dessus :

4. De même pour l'intervalle $[d, e]$.

1. Pour $n = 0$:

$$\left| F(x) - \tilde{F}(x) \right| = \frac{\delta}{3\kappa c_n} \left| \int_0^x \phi_{a,b}(t) - \phi_{d,e}(t) dt \right| \leq \frac{\delta}{3\kappa c_n} \kappa < \delta$$

L'intégrale étant majorée par κ puisque les deux fonctions $\phi_{a,b}$, $\phi_{d,e}$ ont des supports disjoints. Pour tout $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^k F}{dx^k}(x) - \frac{d^k \tilde{F}}{dx^k}(x) \right| &= \left| \frac{\delta}{3\kappa c_n} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx} \int_0^x \phi_{a,b}(t) - \phi_{d,e}(t) dt \right| \\ &\leq \frac{\delta}{3\kappa c_n} \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (\phi_{a,b}(x) - \phi_{d,e}(x)) \right| \\ &\leq \frac{\delta}{3\kappa c_n} 2c_n < \delta \end{aligned}$$

2. Nous pouvons majorer \tilde{F} par des petites translations et trouver une translation intermédiaire qui pour simplicité est dénotée encore par \tilde{F} et qui a nombre de rotation $\rho(\tilde{f}) = \rho(f)$ (voir la remarque 5.1.5). Tout ça en gardant $\|F - \tilde{F}\|_{C^0} < \delta$ (la translation ne changeant pas du tout la norme d'ordre supérieur), et les autres propriétés restent inchangées,

3. $\tilde{F}'(x) = F'(x) + \frac{\delta}{3\kappa c_n} (\phi_{a,b}(x) - \phi_{d,e}(x))$. Observons que $\phi_{a,b} > 0$ sur (a, b) tandis que $\phi_{d,e}$ est nulle, ainsi \tilde{F} est croissante sur (a, b) . La fonction $\phi_{a,b}$ s'annule en dehors de (d, e) , alors que $\phi_{d,e} > 0$ sur ce même intervalle. Cependant, nous avons $\phi_{d,e} < \delta \xi$ et $F' > \xi^5$, ainsi $F' - \phi_{d,e} > 0$, impliquant la croissance de \tilde{F} sur (d, e) . Sur les autres intervalles, nous avons $\tilde{F}' = F'$. Ceci montre à la fois la condition (3) et le fait que les relevés soient croissants. Ceci montre (3) et (4).

4. $\tilde{F}'_-(x) = F'_-(x)$ sur $(0, a) \ni \frac{1}{2}$, et $F'_-(\frac{1}{2}) > 0$.

□

Lemme 5.2.3. Soit $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, une application C^∞ par morceaux, où $\frac{1}{2}$ est demi-critique plat, et dont les relevés sont croissants, de degré 1.

On suppose que \tilde{f} vérifie les hypothèses suivantes :

- Il existe deux intervalles I et J , $I = (\frac{1}{2}, a)$, $J = (a', b)$, $a' > a$, $b < 1$, tels que :

$$x \in I \cup J \Leftrightarrow \frac{d\tilde{F}}{dx}(x) = 0$$

et la dérivée à gauche de \tilde{F} en $\frac{1}{2}$ est $\tilde{F}'_-(\frac{1}{2}) > 0$.

Alors, $(\forall n \in \mathbb{N}), \forall \sigma \in (0, 1), \exists g = g_{n,\sigma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, une fonction C^∞ par morceaux où $\frac{1}{2}$ demi-critique plat, dont les relevés sont croissants, de degré 1, vérifiant :

1. $\|G - \tilde{F}\|_{C^n} < \sigma$,
2. $|G'(x) - \tilde{F}'(x)| < \sigma \tilde{F}'(x)$, $\forall x \in (0, 1) \setminus (\frac{1}{2}, b)$,
3. $\rho(g) = \rho(\tilde{f})$,
4. $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in I$,

5. Ceci provient du fait que $(d, e) \subset (c, 1)$.

5. $G'_-(\frac{1}{2}) > 0$.

Démonstration. Cette démonstration suit de près celle du lemme 5.2.2.

Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier et $0 < \sigma < 1$ un réel fixé, et $(c, d) \subset (b, 1)$. Nous avons alors la configuration ci-dessous. Nous utilisons la fonction $\phi_{\cdot, \cdot}$, \mathcal{C}^∞ à support compact, et ses

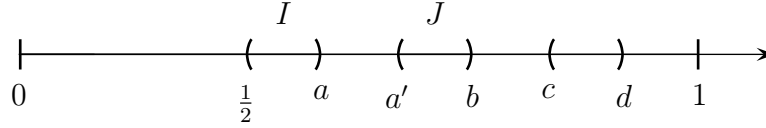


FIGURE 5.2 – Positions des points du lemme 5.2.2

propriétés.

Dans ce lemme, (c, d) joue le rôle de (d, e) dans le lemme 5.2.2, les constantes κ et c_n dépendant ainsi de (a, b) et (c, d) .

Ainsi, sur (c, d) , nous avons $\tilde{F}' > \xi$ et nous choisissons, $C_{c,d}$ de telle sorte que :

$$\phi_{c,d} < \sigma\xi$$

Cette condition assurera la croissance de la fonction construite (voir la preuve du lemme 5.2.2).

Comme précédemment, nous ajustons ensuite $C_{a,b}$ de telle sorte que :

$$\int_0^1 (\phi_{a,b}(t) - \phi_{c,d}(t)) dt = 0$$

Posons :

$$G(x) = \tilde{F}(x) + \frac{\sigma}{3\kappa c_n} \int_0^x (\phi_{a,b}(t) - \phi_{c,d}(t)) dt$$

Nous pouvons observer d'abord que G peut s'étendre sur \mathbb{R} (car $G(0) = \tilde{F}(0)$ et $G(1) = \tilde{F}(1)$), par :

$$G(x) = G(x - [x]) + [x]$$

ainsi elle se projette en une application $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ bien définie, de degré 1, et qui est \mathcal{C}^∞ par morceaux, avec $\frac{1}{2}$ comme point demi-critique plat.

La preuve que G vérifie les propriétés (1) à (4) est exactement identique à celle de la fonction \tilde{F} du lemme 5.2.2. □

5.3 Construction d'un contre-exemple de Denjoy

En nous fondant sur des idées de Hall (voir [Hal81]), nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 5.3.1. *Soit p un point du cercle. Pour tout nombre irrationnel $\rho \in [0, 1)$ il existe un homéomorphisme du cercle $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont le nombre de rotation est ρ vérifiant les propriétés suivantes :*

- f est \mathcal{C}^∞ par morceaux.
- f est \mathcal{C}^∞ difféomorphisme sur $\mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$.
- p est demi-critique plat pour f .
- f a un intervalle errant.

Il est alors clair que f est un contre-exemple de Denjoy par le lemme 5.2.1.

5.3.1 Démonstration

Soit $\rho \in [0, 1)$ un nombre irrationnel fixé. Nous choisissons $p = \frac{1}{2}$, qui sera le point demi-critique plat dans notre construction, sans aucune perte de généralité, cette dernière restant valide pour tout $p \in \mathbb{S}^1$.

Le contre-exemple de Denjoy que nous construisons sera défini comme la limite d'une suite des fonctions :

$$(f_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1)_{n \in \mathbb{N}},$$

pour lesquelles il existe :

- un intervalle J_0 et une suite d'intervalles :

$$(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

tels que

$$\bigcap_{i \geq 0} \bar{I}_i = \left\{ \frac{1}{2} \right\},$$

- une suite d'entiers

$$1 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n$$

telle que, pour tous $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ les conditions suivantes soient vérifiées :

1. f_i est \mathcal{C}^∞ par morceaux, elle a des relevés croissants et de degré 1,
2. $\rho(f_i) = \rho$,
3. $F'_i(x) = 0$ si et seulement si $x \in I_i$,
4. La dérivée à gauche de f_i , $(F_i)'_-(\frac{1}{2}) > 0$,
5. $|I_i| < \frac{1}{2}|I_{i-1}|$,
6. $\|F_i - F_{i-1}\|_{\mathcal{C}^{i-1}} < \frac{1}{2^i}$,
7. $0 < |f_i^j(J_0)| < \frac{1}{2^{k-1}}$, si $r_{k-1} \leq j < r_k$ pour $k \in \{1, 2, \dots, i\}$,
8. $f_i^j(J_0) \cap I_i = \emptyset$, si $0 \leq j < r_i$ et $f_i^{r_i}(J_0) \Subset I_i$.
9. $|F'_i(x) - F'_{i+1}(x)| < \frac{1}{2^{i+1}}$, pour tout $x \in (0, 1) \setminus \bar{I}_i$

Nous démontrerons par récurrence l'existence d'une telle suite.

Initialisation

Construction de f_0 .

Comme nous avons beaucoup de souplesse sur le choix de f_0 , nous utilisons la famille donnée dans l'exemple 1.2.1 (page 17). Nous prenons ainsi une fonction de cette famille, avec $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} < c < 1$, $\ell_g = 1$ et $\ell_d > 1$. Appelons cette fonction ainsi obtenue \tilde{f} . Posons $f_0 = \tilde{f} + t(\alpha)$, où t est un nombre réel dépendant de α de telle sorte que le nombre de rotation de f_0 soit α , voir la remarque 5.1.5.

Nous poserons $I_0 = (a, b)$. Puisque f_0 sur $[0, 1] \setminus I_0$ est un difféomorphisme sur son image, nous choisirons J_0 comme étant n'importe quel sous intervalle de $f_0^{-1}(I_0)$.

Ainsi f_0 est \mathcal{C}^∞ par morceaux, a des relevés croissants et de degré 1. Son nombre de rotation a été ajusté à partir de celui de \tilde{f} et vaut ρ .

Les conditions (1) à (9) sont évidemment satisfaites par f_0 .

Hérédité

Supposons maintenant f_n construit. Nous construisons f_{n+1} en perturbant f_n de telle façon à ce que les conditions (1) à (9) restent toujours satisfaites.

Nous divisons l'intervalle I_n en deux sous intervalles I_{n+1} et J_{n+1} tels que :

- I_{n+1} est de la forme $I_{n+1} = (\frac{1}{2}, \cdot)$,
- $I_{n+1} \cup J_{n+1} \subset I_n$,
- $I_{n+1} \cap J_{n+1} = \emptyset$,
- $f_n^{r_n}(J_0) \subset J_{n+1}$.

Première étape

Nous appliquons le lemme 5.2.2 et engendrons une fonction $\tilde{f}_{n,\delta}$, \mathcal{C}^∞ par morceaux, croissante, de degré 1 qui satisfait aux conditions suivantes :

- $\|\tilde{F}_{n,\delta} - F_n\|_{\mathcal{C}^n} < \frac{\delta}{2^{n+2}}$,
- $|\tilde{F}'_{n,\delta} - F'_n| < F'_n(x) \frac{\delta}{2^{n+1}}$, $\forall x \in (0, 1) \setminus \overline{I_n}$,
- $\rho(\tilde{f}_{n,\delta}) = \rho(f_n)$,
- $\tilde{F}_{n,\delta'}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in I_{n+1} \cup J_{n+1}$,
- La dérivée à gauche $\tilde{F}'_{n,\delta'}(\frac{1}{2}) > 0$.

Puisque, par construction, $\tilde{F}_{n,\delta}^i \rightarrow F_n^i$ pour $\delta \rightarrow 0$ uniformément pour $i \in \{1, 2, \dots, r_n\}$, alors nous pouvons fixer $\delta' < \delta < 1$, tel que :

$$\left| \tilde{f}_{n,\delta'}^j(J_0) \right| < \frac{1}{2^{k-1}} \text{ pour tout } r_{k-1} \leq j < r_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\tilde{f}_{n,\delta'}^j(J_0) \cap I_n = \emptyset \text{ pour tout } 0 \leq j < r_n \quad (5.3.2)$$

et

$$\tilde{f}_{n,\delta'}^{r_n}(J_0) \subset J_{n+1} \quad (5.3.3)$$

Intéressons-nous maintenant à l'orbite de J_{n+1} sous $\tilde{f}_{n,\delta'}$.

Deux cas peuvent se présenter :

- * il existe $m > 0$ tel que $\tilde{f}_{n,\delta'}^m(J_{n+1}) \in I_n$,
- * pour tous $m > 0$, $\tilde{f}_{n,\delta'}^m(J_{n+1}) \notin I_n$.

Commençons à observer que la deuxième situation ne peut jamais arriver. En effet si cela arrive, nous pouvons approximer $\tilde{f}_{n,\delta'}$ par une fonction \mathcal{C}^∞ , croissante de degré 1 qui coïncide avec $\tilde{f}_{n,\delta'}$ partout sauf sur $I_n \setminus J_{n+1}$. Nous avons construit une fonction du cercle avec un intervalle plat et sans orbites denses. Alors par le lemme 5.2.1 elle a un intervalle errant et ça fournit une contradiction avec le corollaire au théorème 1 de [GJS⁺95].

Plaçons-nous maintenant dans le premier cas : il existe $m > 0$ tel que $\tilde{f}_{n,\delta'}^m(J_{n+1}) \in I_n$.

Puisque $\tilde{f}_{n,\delta'}$ ne peut pas avoir d'orbites fermées ($\tilde{f}_{n,\delta'}$ a nombre de rotation irrationnel, voir la proposition 1.4.8), nous avons que :

$$\tilde{f}_{n,\delta'}^m(J_{n+1}) \in I_n \setminus J_{n+1}$$

De plus $\tilde{f}_{n,\delta'}^m(J_{n+1})$ dépend continument de δ , donc $\tilde{f}_{n,\delta'}^m(J_{n+1})$ décrit une trajectoire qui connecte $\tilde{f}_{n,\delta'}^m(J_{n+1})$ et $f_n^m(J_{n+1})$. Puisque $f_n^m(J_{n+1}) \notin I_n$ (f_n a nombre de rotation irrationnel), alors cette trajectoire recouvre une partie de I_{n+1} à droite de $\frac{1}{2}$. En conclusion $\tilde{f}_{n,\delta'}^m(J_{n+1})$ se trouve dans l'intérieur de I_{n+1} .

Deuxième étape.

Par le lemme 5.2.3 pour tout $\sigma > 0$, il existe $f_{n+1,\sigma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, \mathcal{C}^∞ par morceaux, de relevés croissants de degré 1 tels que :

- $\|F_{n+1,\sigma} - \tilde{F}_n\|_{\mathcal{C}^n} < \frac{\sigma}{2^{n+2}}$,
- $|\tilde{F}'_{n+1,\sigma} - F'_n| < F'_n(x) \frac{\sigma}{2^{n+1}}$, $\forall x \in (0, 1) \setminus \overline{I_{n+1}}$,
- $\rho(f_{n+1,\sigma}) = \rho$,
- $F'_{n+1,\sigma}(x) = 0$ si et seulement si $x \in I_{n+1}$,
- $(F_{n+1,\sigma})'_-(\frac{1}{2}) > 0$,

Commençons par observer que, puisque $f_{n+1,\sigma}^m \rightarrow \tilde{f}_n^m$ pour $\sigma \rightarrow 0$

$$f_{n+1,\sigma}^m(J_{n+1}) \Subset I_{n+1} \quad (5.3.4)$$

Finalement nous posons $r_{n+1} = r_n + m$. Puisque $f_{n+1,\sigma}^i \rightarrow \tilde{f}_n^i$ uniformément pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r_n + m\}$ et puisque $\tilde{f}_n^i(J_0)$ est un singleton pour $i > r_n$, alors nous pouvons affirmer que (posons $f_{n+1} = f_{n+1,\sigma}$) :

$$|f_{n+1}^j(J_0)| < \frac{1}{2^{k-1}}$$

pour tout $r_{k-1} \leq j < r_k$, avec $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$|f_{n+1}^j(J_0)| < \frac{1}{2^n}$$

si $r_n \leq j < r_{n+1}$.

Par (5.3.4), (5.3.2), (5.3.3) et comme $f_{n+1,\sigma}^i \rightarrow \tilde{f}_n^i$ uniformément pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r_{n+1}\}$, alors

$$f_{n+1}^i(J_0) \cap I_{n+1} = \emptyset \text{ pour tout } 0 \leq i < r_{n+1}$$

et

$$f_{n+1}^{r_{n+1}}(J_0) \Subset I_{n+1}.$$

Nous avons alors construit une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui satisfait aux conditions (1) à (9) pour tout $n \geq 1$.

Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$, la suite (f_k) converge au sens de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^n}$ (voir la remarque 5.1.2). La suite (f_k) est de Cauchy. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Par le point (6), pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\|F_i - F_{i-1}\|_{\mathcal{C}^{i-1}} < \frac{1}{2^i}$$

Donc par la remarque 5.1.8,

$$\|F_i - F_{i-1}\|_{\mathcal{C}^n} \leq \|F_i - F_{i-1}\|_{\mathcal{C}^{i-1}} < \frac{1}{2^i}, \text{ pour tout } i > n$$

d'où, pour $i > n$, fixé, et pour tout $p > q > n$ on a :

$$\|F_p - F_q\|_{\mathcal{C}^n} < \sum_{k=q-1}^{p-1} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=q-1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{q-2}}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (f_k) converge au sens de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^n}$ vers une application du cercle de classe \mathcal{C}^n par morceaux, dont les relevés sont croissants et de

degré 1, et de nombre de rotation ρ (voir les conditions (1) et (2)).

Il est clair que la dérivée à gauche en $\frac{1}{2}$ est non nulle, puisque la fonction limite coïncide avec toutes les fonctions f_k à gauche de $\frac{1}{2}$ (point (4)).

La suite de fonction (f_k) converge uniformément, les dérivées à droite de tout ordre de f_k sont nulles, il en va de même pour la limite.

Ainsi, $\frac{1}{2}$ est demi-critique plat pour f .

Les conditions (3) et (9) nous assurent que f n'a aucun point critique sur $\mathbb{S}^1 \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

En conclusion, par les conditions (7) et (8),

$$|f_n^i(J_0)| \rightarrow 0 \text{ pour } i \rightarrow +\infty$$

uniformément en n , et donc

$$|f^i(J_0)| \rightarrow 0 \text{ si } i \rightarrow +\infty$$

et par le lemme 5.2.1 f n'est pas conjuguée à une rotation.

Bibliographie

- [ABZ96] S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, and E. V. Zhuzhoma. *Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on surfaces*, volume 153 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Translated from the Russian manuscript by H. H. McFaden.
- [Che38] T. M. Cherry. Analytic Quasi-Periodic Curves of Discontinuous Type on a Torus. *Proc. London Math. Soc.*, S2-44(3) :175, 1938.
- [dMvS93] Welington de Melo and Sebastian van Strien. *One-dimensional dynamics*, volume 25 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [GJS⁺95] J. Graczyk, L. B. Jonker, G. Świątek, F. M. Tangerman, and J. J. P. Veerman. Differentiable circle maps with a flat interval. *Comm. Math. Phys.*, 173(3) :599–622, 1995.
- [Gra10] Jacek Graczyk. Dynamics of circle maps with flat spots. *Fund. Math.*, 209(3) :267–290, 2010.
- [GSS⁺01] Jacek Graczyk, Duncan Sands, and Grzegorz Świątek. La dérivée schwarzienne en dynamique unimodale. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332(4) :329–332, 2001.
- [GSS⁺04] Jacek Graczyk, Duncan Sands, and Grzegorz Świątek. Metric attractors for smooth unimodal maps. *Ann. of Math. (2)*, 159(2) :725–740, 2004.
- [Hal81] Glen Richard Hall. A C^∞ Denjoy counterexample. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1(3) :261–272 (1982), 1981.
- [Her] Michael Herman. Notes on an example of a. b. katok. *Handwritten notes*.
- [HW08] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles.
- [Koz00] O. S. Kozlovski. Getting rid of the negative Schwarzian derivative condition. *Ann. of Math. (2)*, 152(3) :743–762, 2000.
- [Koz03] O. S. Kozlovski. Axiom A maps are dense in the space of unimodal maps in the C^k topology. *Ann. of Math. (2)*, 157(1) :1–43, 2003.
- [Mat95] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.
- [Men91] Pedro Mendes. A metric property of Cherry vector fields on the torus. *J. Differential Equations*, 89(2) :305–316, 1991.

- [MR92] P. C. Moreira and A. A. Gaspar Ruas. Metric properties of Cherry flows. *J. Differential Equations*, 97(1) :16–26, 1992.
- [MvSdMMM90] Marco Martens, Sebastian van Strien, Welington de Melo, and Pedro Mendes. On Cherry flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(3) :531–554, 1990.
- [NZ99] Igor Nikolaev and Evgeny Zhuzhoma. *Flows on 2-dimensional manifolds*, volume 1705 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. An overview.
- [Pal13] Liviana Palmisano. A phase transition for circle maps and cherry flows. *Comm. Math. Phys.*, 321(1) :135–155, 2013.
- [SSV10] Radu Saghin, Wenxiang Sun, and Edson Vargas. On Dirac physical measures for transitive flows. *Comm. Math. Phys.*, 298(3) :741–756, 2010.
- [SV13] Radu Saghin and Edson Vargas. Invariant measures for Cherry flows. *Comm. Math. Phys.*, 317(1) :55–67, 2013.
- [Świ88] Grzegorz Świątek. Rational rotation numbers for maps of the circle. *Comm. Math. Phys.*, 119(1) :109–128, 1988.
- [Świ89] Grzegorz Świątek. Endpoints of rotation intervals for maps of the circle. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(1) :173–190, 1989.
- [Vee89] J. J. P. Veerman. Irrational rotation numbers. *Nonlinearity*, 2(3) :419–428, 1989.
- [vS90] Sebastian van Strien. Hyperbolicity and invariant measures for general C^2 interval maps satisfying the Misiurewicz condition. *Comm. Math. Phys.*, 128(3) :437–495, 1990.
- [Yoc84] Jean-Christophe Yoccoz. Il n’y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 298(7) :141–144, 1984.